UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

$*$-variedades minimais e supervariedades minimais de crescimento polinomial

Tatiana Aparecida Gouveia

Belo Horizonte

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

Tatiana Aparecida Gouveia

Tese apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientadora: Ana Cristina Vieira

Coorientador: Rafael Bezerra dos Santos

Belo Horizonte

16 de abril de 2019

Aos meus amados, pais, irmãos,
esposo e ao meu sobrinho Levi.

"Sim, grandes coisas fez o Senhor por nós,
e por isso estamos alegres."
(Salmo 126,3)

"Cada pessoa deve trabalhar
para o seu aperfeiçoamento e
ao mesmo tempo, participar da
responsabilidade coletiva
por toda humanidade."
(Marie Curie)

Sumário

Agradecimentos

A Deus, Pai de misericórdia e amor, à Maria Santíssima, mãe desatadora de nós, por serem meu porto seguro, refúgio, pelo amparo e cuidado todos os dias. A minha vida é mais suave na presença de vocês e de pessoas especiais que colocam no meu caminho. Minha gratidão pelas proteções, bençãos e por mais essa conquista.

À minha orientadora, Profa. Ana Cristina Vieira, por aceitar me orientar, mesmo depois de 5 anos trabalhando, após concluir o mestrado, o seu sim foi o principal motivo para retomar os estudos. Obrigada também ao meu coorientador, Prof. Rafael Bezerra dos Santos. Agradeço a vocês, pela disponibilidade, paciência, apoio, incentivo, dedicação, aprendizado e por suas importantes contribuições para o meu crescimento profissional e pessoal.

Aos professores membros da banca, Antonio Giambruno, Lucas Henrique Calixto, Thiago Castilho de Mello e Viviane Ribeiro Tomaz da Silva, obrigada pela disponibilidade, atenção, por todas sugestões e comentários.

À professora Marinês Guerreiro, por me introduzir na PI-teoria e a todos os professores que fizeram parte da minha formação, em especial, ao Didite, que fez com que o meu amor e interesse pela Matemática crescesse.

Aos meus amados pais, Quinzinho e Graça, por toda atenção, cuidado, amor, apoio incondicional, preocupação, orações e por sempre nos incentivar a seguir nos estudos.

Aos meus irmãos, Regi e Josi, presentes de Deus, pela amizade, companheirismo, amor, por sempre acreditarem em mim. Ao Levi, por tornar os meus dias mais felizes.

Ao Anderson, meu esposo, pela compreensão, paciência, ajuda, amor, incentivo e pelo presente de alegrias. Você está ao meu lado, desde o final da graduação, sabe da minha dedicação e esforço para concluir mais essa etapa.

À vó Isaulina, à tia Aída e todos da família que sempre se preocuparam comigo, pelas orações e pelos bons domingos que passamos juntos.

Às amigas, presentes de BH, Adriana, Alana, Divane, Lilian e Thais, vocês tornaram os meus dias mais leves, me ampararam e cuidaram de mim quando precisei. Gratidão pela força, companheirismo, pelos momentos de descanso e alegrias.

Aos amigos do doutorado, pelos momentos de estudo, pelas conversas durante o café, obrigada por me ouvirem.

À Andréa e a Kelli, por toda ajuda e atenção.

À UFJF e ao Departamento de Matemática, pelo afastamento para a minha qualificação, o que permitiu a minha dedicação integral para fazer o doutorado. À UFJF também pela bolsa PROQUALI.

Aos amigos do DM que sempre se preocuparam comigo e mantiveram contato nesses quatro anos, em especial, Sofia, Regis, Roberta, Ana, Bia, Fred, Ju e Laura Souza.

Aos amigos de Ervália e JF, em especial Vi, Rachel, Dani, Pri e Dri, pelo carinho e pelos ótimos encontros.

Aos amigos Rodrigo e Adriana Bitencourt, pela torcida, carinho e preocupação.

A todos o meu muito obrigada!

Abstract

By a φ-variety $\mathcal{V}$ we mean a supervariety or a $*$-variety generated by an associative algebra over a field F of characteristic zero. In this case, we can consider its sequence of φ-codimensions $c_n^{\varphi}(\mathcal{V})$. We say that $\mathcal{V}$ is minimal of polynomial growth n^k if $c_n^{\varphi}(\mathcal{V})$ grows like $n^k, k > 0$, but $c_n^{\varphi}(\mathcal{U})$ grows like n^t with $t < k$, for any proper φ-subvariety $\mathcal{U}$ of $\mathcal{V}$. In this thesis, we deal with minimal φ-varieties generated by unitary algebras and prove that for $k \leq 2$ there are only a finite number of them. We also explicit a list of finite dimensional algebras generating such minimal φ-varieties. For $k \geq 3$, we show that the number of minimal φ-varieties can be infinity and we classify all minimal φ-varieties of polynomial growth n^k by providing a method for the construction of their φ-ideals.

Keywords: polynomial identity, codimension growth, algebra with involution, superalgebra, minimal variety.

Resumo

Por uma φ-variedade $\mathcal{V}$ compreendemos uma supervariedade ou uma $*$-variedade gerada por uma álgebra associativa sobre um corpo F de característica zero. Neste caso, consideramos a sua sequência de φ-codimensões $c_n^{\varphi}(\mathcal{V})$. Dizemos que $\mathcal{V}$ é minimal de crescimento polinomial n^k se $c_n^{\varphi}(\mathcal{V})$ cresce assintoticamente como $n^k, k > 0$, mas $c_n^{\varphi}(\mathcal{U})$ cresce assintoticamente como n^t com $t < k$, para qualquer φ-subvariedade própria $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}$. Nesta tese, trabalhamos com φ-variedades minimais geradas por álgebras unitárias e provamos que para $k \leq 2$ existe apenas um número finito delas. Também explicitamos uma lista de álgebras de dimensão finita gerando tais φ-variedades minimais. Para $k \geq 3$, mostramos que o número de φ-variedades minimais pode ser infinito e classificamos todas φ-variedades minimais de crescimento polinomial n^k fornecendo um método para a construção de seus φ-ideais.

Palavras chave: identidade polinomial, crescimento das codimensões, álgebra com involução, superálgebra, variedade minimal.

Introdução

O objetivo geral deste trabalho é a extensão de resultados de classificação de variedades minimais de crescimento polinomial, já obtidos para variedades de PI-álgebras, para variedades específicas geradas por álgebras associativas munidas de uma estrutura adicional, as quais chamaremos **φ-álgebras**.

Durante todo o trabalho, consideraremos F um corpo de característica zero e A uma F-álgebra associativa. Denotamos por $F\langle X\rangle$ a álgebra livre associativa gerada por $X = \{x_1, x_2, ...\}$, um conjunto enumerável de indeterminadas não comutativas. Recordemos que uma **identidade polinomial** para A é um polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in F\langle X\rangle$ que se anula quando avaliado em todos os elementos de A, ou seja, $f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$, para todos $a_1, a_2, ..., a_n \in A$. Quando existe uma identidade não trivial para A, dizemos que A é uma **PI-álgebra**.

É conhecido que o conjunto $\mathrm{Id}(A) = \{f \in F\langle X\rangle : f \equiv 0 \text{ em } A\}$ é um **T-ideal** da álgebra $F\langle X\rangle$, isto é, é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$. A fim de descrever todas as identidades polinomiais satisfeitas por A, é suficiente obtermos os geradores de $\mathrm{Id}(A)$ como um T-ideal.

Em 1950, Specht conjecturou que o T-ideal de uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero é finitamente gerado como T-ideal. Embora provada para casos particulares nos anos seguintes, esta conjectura só teve uma prova completa em 1987, dada por Kemer [19]. Mesmo assim, a descrição do T-ideal de uma álgebra é em geral um problema difícil, pois o trabalho de Kemer não estabelece como se determina tal base finita. Como exemplo, para a álgebra de matrizes $M_k(F)$, o T-ideal foi descrito somente para $k = 2$ até o presente momento.

Para minimizar as dificuldades em determinar o T-ideal de PI-álgebras em geral, em [31], Regev introduziu um modo eficiente para medir o crescimento das identidades de uma dada álgebra associativa A sobre um corpo F de característica zero: o comportamento assintótico da sua sequência de codimensões $c_n(A), n \geq 1$. É bem compreendido (ver [17], [18]) que se A é uma PI-álgebra, então a sequência $c_n(A)$ ou cresce exponencialmente ou é limitada polinomialmente, isto é, existem constantes α, t tais que $c_n(A) \leq \alpha n^t$, para todo $n \geq 1$.

De modo geral, um dos objetivos do estudo da PI-teoria é obter o comportamento assintótico das sequências das codimensões de específicas PI-álgebras. Também procura-se estabelecer novos resultados sobre classificação de PI-álgebras cuja sequência de codimensões tenha um comportamento assintótico pré-estabelecido. Dessa forma, é conveniente fazer estes estudos usando a noção de variedades de álgebras. A **variedade de álgebras gerada pela álgebra** A, denotada por $\text{var}(A)$, é a classe de todas as álgebras que satisfazem as identidades da álgebra A. Quando duas álgebras A e B satisfazem as mesmas identidades, temos $\text{var}(A) = \text{var}(B)$ e dizemos que A e B são T-**equivalentes**. Usaremos a notação $A \sim_T B$ para denotar que A e B são T-equivalentes.

Para $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras tal que $\mathcal{V} = \text{var}(A)$, definimos $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$. Em [3] foi provado que se $\mathcal{V}$ é uma variedade de álgebras e $c_n(\mathcal{V})$ é limitada polinomialmente, então assintoticamente $c_n(\mathcal{V}) \approx qn^k$, para algum inteiro $k \geq 0$ e $q \in \mathbb{Q}$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial.

O problema de caracterizar variedades de crescimento polinomial foi primeiramente considerado por Kemer em [18], onde ele mostrou que $\text{var}(A)$ tem crescimento polinomial se, e somente se, $\mathcal{G}, UT_2 \notin \text{var}(A)$, onde $\mathcal{G}$ é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e UT_2 é a álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2. Como consequência $\text{var}(\mathcal{G})$ e $\text{var}(UT_2)$ são as únicas variedades de crescimento quase polinomial, isto é, as sequências de codimensões de $\mathcal{G}$ e de UT_2 crescem exponencialmente, mas qualquer subvariedade própria $\mathcal{U}$ de $\text{var}(\mathcal{G})$ ou de $\text{var}(UT_2)$ tem crescimento polinomial.

Em [22] e [23], La Mattina classificou todas subvariedades das variedades $\text{var}(\mathcal{G})$

e $\text{var}(UT_2)$ e entre elas destacou as minimais. Lembramos que $\mathcal{V}$ é uma variedade minimal de crescimento polinomial n^k, se assintoticamente $c_n(\mathcal{V}) \approx an^k$, para algum $a \neq 0, k > 0$, e $c_n(\mathcal{U}) \approx bn^t$, com $t < k$, para qualquer subvariedade própria $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}$. Inspirados por estes resultados, Giambruno, La Mattina e Zaicev (ver [8]) classificaram as variedades minimais geradas por álgebras unitárias em geral.

Os conceitos de codimensões, crescimento polinomial e variedades minimais têm sido estendidos para classes de álgebras munidas com estruturas adicionais, tais como superálgebras e álgebras com involução. Em geral, dada uma álgebra A, é bem compreendido que um automorfismo φ de ordem no máximo 2 definido sobre A induz uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em A e neste caso dizemos que A é uma superálgebra. Dizemos que A tem graduação trivial quando φ é o automorfismo identidade.

Por outro lado, uma involução $*$ sobre A é um antiautomorfismo de ordem no máximo 2 definido sobre A. Neste caso, dizemos que A é uma $*$-álgebra. Quando este antiautomorfismo tem ordem 1, a involução é trivial e esta situação é possível apenas para álgebras comutativas.

Para estabelecer uma nomenclatura comum para superálgebras e $*$-álgebras, usamos o termo φ-álgebras. Qualquer álgebra A munida de um automorfismo ou um antiautomorfismo φ de ordem no máximo 2, ou seja, qualquer superálgebra ou qualquer álgebra com involução, será chamada de **φ-álgebra**. Neste caso dizemos que A gera uma **φ-variedade** $\mathcal{V}$ e escrevemos $\mathcal{V} = \text{var}^{\varphi}(A)$.

Quando A é uma φ-álgebra sobre um corpo de característica zero F consideramos $c_n^{\varphi}(A), n = 1, 2, \ldots$, a sua sequência de φ-codimensões. Por [12], se A satisfaz uma identidade não trivial então $c_n^{\varphi}(A)$ é limitada exponencialmente. O crescimento da variedade $\mathcal{V} = \text{var}^{\varphi}(A)$ é o crescimento da sequência de φ-codimensões de A.

Neste trabalho, estamos interessados em φ-variedades de crescimento polinomial, isto é, variedades de φ-álgebras tais que $c_n^{\varphi}(\mathcal{V}) = c_n^{\varphi}(A)$ é limitada polinomialmente. Mais particularmente, temos interesse em **φ-variedades minimais de crescimento polinomial**. Dizemos que $\mathcal{V}$ é uma φ-variedade minimal de crescimento polinomial n^k se assintoticamente $c_n^{\varphi}(\mathcal{V}) \approx an^k$, para algum $a \neq 0, k > 0$, e

$c_n^{\varphi}(\mathcal{U}) \approx bn^t$, com $t < k$, para qualquer subvariedade própria $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}$. Recentemente φ-variedades minimais têm sido estudadas.

No caso com involução, La Mattina e Martino (ver [26]) classificaram completamente, a menos de T^*-equivalência, todas as subvariedades minimais das $*$-variedades $\mathrm{var}^*(M)$ e $\mathrm{var}^*(D_*)$, onde M é a subálgebra da álgebra UT_4 das matrizes triangulares superiores 4×4 com base $\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}, e_{12}, e_{34}\}$ sobre F munida da involução reflexão, ou seja, a involução obtida refletindo a matriz ao longo da sua diagonal secundária, e D_* é a álgebra comutativa $D = F \oplus F$ munida da involução troca $(a, b)^* = (b, a)$. Lembremos que Giambruno e Mishchenko provaram em [9] que uma $*$-variedade $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial se, e somente se, $M, D_* \notin \mathcal{V}$. Isto implica que M e D_* geram as únicas $*$-variedades com crescimento quase polinomial.

No caso graduado, Giambruno, Mishchenko e Zaicev (ver [11]) consideraram $\mathcal{G}$ e UT_2 a álgebra de Grassmann de dimensão infinita com graduação trivial e a álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2 com graduação trivial, respectivamente. Os autores também consideraram $\mathcal{G}^{gr}$ e UT_2^{gr} a álgebra de Grassmann e a álgebra UT_2, respectivamente, ambas com graduação canônica e D^{gr} a álgebra $D = F \oplus F$ munida com a graduação $(F(1,1), F(1,-1))$. Eles provaram que uma supervariedade $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial se, e somente se, $\mathcal{V}$ não contém $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^{gr}$, UT_2, UT_2^{gr} e D^{gr}. Isto implica que $\mathrm{var}^{gr}(\mathcal{G})$, $\mathrm{var}^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$, $\mathrm{var}^{gr}(UT_2)$, $\mathrm{var}^{gr}(UT_2^{gr})$ e $\mathrm{var}^{gr}(D^{gr})$ são as únicas supervariedades com crescimento quase polinomial. Em [24], La Mattina classificou todas subvariedades minimais destas supervariedades.

Este trabalho foi desenvolvido para classificar as φ-variedades minimais de crescimento polinomial gerada por álgebras unitárias, assim generalizando os resultados em [8]. Para $k \leq 2$, provamos que existe apenas um número finito de φ-variedades minimais geradas por álgebras unitárias e também explicitamos uma lista de álgebras de dimensão finita gerando cada uma dessas φ-variedades minimais. Para $k = 3$, mostramos que o número de φ-variedades minimais geradas por álgebras unitárias pode ser infinito e classificamos todas φ-variedades minimais de crescimento cúbico e seus T^{φ}-ideais. Estendemos os resultados para $k \geq 4$ dando uma receita para a construção dos T^{φ}-ideais das φ-variedades minimais de crescimento polinomial n^k.

Esta tese é composta de três capítulos apresentados do seguinte modo.

No Capítulo 1, apresentamos a definição de variedades minimais com crescimento polinomial, a classificação das variedades minimais dentro de var(UT_2) e de var$(\mathcal{G})$ e introduzimos o conceito de φ-variedades minimais de crescimento polinomial. Além disso, apresentamos a classificação das $*$-variedades minimais dentro de var$^*(M)$ e de var$^*(D_*)$ e a classificação das supervariedades minimais dentro de var$^{gr}(UT_2^{gr})$, de var$^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$ e de var$^{gr}(D^{gr})$.

No Capítulo 2, considerando P_n^φ o espaço dos φ-polinômios multilineares de grau n, H_n o grupo hiperoctaedral de grau n, o espaço $P_n^\varphi(A) := \dfrac{P_n^\varphi}{P_n^\varphi \cap Id^\varphi(A)}$, o grupo linear geral GL_m, $F_m^n\langle X,\varphi\rangle$ o espaço dos φ-polinômios homogêneos de grau $n \geq m$ nas variáveis $y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_m$, apresentamos uma relação entre a estrutura de H_n-módulo de $P_n^\varphi(A)$ e a estrutura de $GL_m \times GL_m$-módulo de $F_m^n(A) := \dfrac{F_m^n\langle X,\varphi\rangle}{F_m^n\langle X,\varphi\rangle \cap Id^\varphi(A)}$. Também apresentamos Γ_n^φ, o espaço dos φ-polinômios Y-próprios multilineares de grau n, e a caracterização das φ-variedades minimais com crescimento polinomial, principal resultado desse capítulo, o qual será de fundamental importância para obter os resultados do capítulo seguinte. Além disso, fornecemos a decomposição do H_n-caracter Γ_n^φ, para $n = 2, 3$ e apresentamos novos exemplos de $*$-variedades minimais de crescimento polinomial que não estão contidas nas variedades de crescimento quase polinomial.

No Capítulo 3, classificamos as φ-variedades minimais de crescimento linear e quadrático. Provamos que existem apenas um número finito dessas φ-variedades minimais geradas por álgebras unitárias e também explicitamos uma lista de álgebras de dimensão finita gerando cada uma dessas tais φ-variedades minimais. Classificamos também as φ-variedades minimais de crescimento cúbico analisando dois casos, de acordo com as multiplicidades dos caracteres irredutíveis aparecendo na decomposição do H_n-caracter de Γ_3^φ. Ainda, mostramos que o número dessas φ-variedades minimais geradas por álgebras unitárias pode ser infinito. Por fim, estendemos os resultados para $k \geq 4$ fornecendo um método para construir os T^φ-ideais das φ-variedades minimais de crescimento polinomial n^k.

Ressaltamos que os resultados dessa tese foram submetidos no artigo [14].

Capítulo 1

Variedades e φ-variedades minimais

Neste capítulo, apresentaremos as definições e resultados estudados no caso ordinário que instigaram os autores a classificar as variedades minimais geradas por álgebras unitárias de crescimento polinomial em [8]. Também serão apresentadas generalizações desses resultados para $*$-álgebras e superálgebras, com as quais trabalharemos no decorrer da tese.

1.1 Variedades minimais de crescimento polinomial

Sejam F um corpo de característica zero e A uma F-álgebra associativa. Sabe-se que $\mathrm{Id}(A)$, o ideal das identidades polinomiais de A, é completamente determinado por seus **polinômios multilineares** [13, Corolário 1.3.9].

Para cada $n \geq 1$, definimos $P_n := \mathrm{span}_F\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)} : \sigma \in S_n\}$ o **espaço dos polinômios multilineares de grau** n.

Como na maioria da vezes não é uma tarefa fácil determinar o T-ideal de uma dada álgebra A, alguns invariantes numéricos são introduzidos, a fim de se conhecer informações quantitativas sobre o T-ideal. A seguir, definimos um desses invariantes, a n**-ésima codimensão de** A, que mede a taxa de crescimento de $\mathrm{Id}(A)$.

Considere $P_n(A) := \dfrac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}$. A n**-ésima codimensão de** A é definida por $c_n(A) := \dim_F P_n(A)$, para $n \geq 1$. Regev [31] provou que se A é uma PI-álgebra, então a sequência de codimensões de A é limitada exponencialmente, isto é, existem constantes $a, \alpha > 0$ tais que $c_n(A) \leq a\alpha^n$ para todo n.

A classe de todas as álgebras que satisfazem as identidades de A é chamada **variedade de álgebras gerada por** A e será denotada por $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$. É conhecido que todo T-ideal é um ideal das identidades polinomiais satisfeitas por uma dada variedade de álgebras [13, Teorema 1.2.5]. Com isso, um problema sobre T-ideais pode ser traduzido para a linguagem de variedade de álgebras. Definimos a n-ésima codimensão de $\mathcal{V}$ por $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$.

Dizemos que uma álgebra A tem **crescimento polinomial das codimensões** se existem constantes a e $t > 0$ tais que $c_n(A) \leq an^t$, para todo $n \geq 1$.

Sejam $\mathcal{G}$ a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e UT_2 a álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2 sobre F.

O resultado a seguir caracteriza as variedades de crescimento polinomial via a exclusão de álgebras da variedade.

Teorema 1.1. *(Kemer,* [18]*) Uma variedade $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial das codimensões se, e somente se, UT_2 e $\mathcal{G} \notin \mathcal{V}$.*

Consequentemente UT_2 e $\mathcal{G}$ geram as únicas variedades de crescimento quase polinomial, isto é, as sequências de codimensões de $\mathrm{var}(UT_2)$ e de $\mathrm{var}(\mathcal{G})$ crescem exponencialmente, mas qualquer subvariedade própria de cada uma dessas variedades tem crescimento polinomial das codimensões.

Kemer também mostrou que, dada uma PI-álgebra A, não existe crescimento intermediário para a sequência de codimensões $c_n(A), n \geq 1$, isto é, a sequência de codimensões de A ou cresce exponencialmente ou é limitada polinomialmente.

Dizemos que duas funções $f(x)$ e $g(x)$ têm o mesmo comportamento assintótico se $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e escrevemos $f \approx g$.

Definição 1.2. *Dizemos que $\mathcal{V}$ é uma* ***variedade minimal de crescimento polinomial*** *n^k se $c_n(\mathcal{V}) \approx qn^k$, para algum $q \in \mathbb{Q}^*, k > 0$ e $c_n(\mathcal{U}) \approx bn^t$, com $t < k$, para qualquer subvariedade própria $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}$ e algum $b \in \mathbb{Q}$.*

Se a, b são elementos de uma álgebra A, então o **comutador de Lie** de peso 2 é definido por $[a, b] = ab - ba$ e o **comutador de peso** n normado à esquerda é definido indutivamente por $[a_1, ..., a_{n-1}, a_n] = [[a_1, ..., a_{n-1}], a_n]$, para todo $n \geq 3$ e todo $a_i \in A$.

Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$ é dito **próprio** se é combinação linear de produtos de comutadores normados à esquerda. É conhecido que se A é uma álgebra unitária, $\mathrm{Id}(A)$ é completamente determinado por seus **polinômios próprios multilineares** [4, Proposição 4.3.3]. Seja Γ_n o **espaço dos polinômios próprios multilineares de grau** n. Consideramos $\Gamma_0 = \mathrm{span}_F\{1\}$. Por definição $\Gamma_1 = \{0\}$.

Para cada $n = 0, 1, 2, ...$, temos $\dim_F \Gamma_n = n! \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \right)$ ([3, Corolário 1.2]).

A **sequência de codimensões próprias de** A é definida por

$$c_n^p(A) := \dim_F \frac{\Gamma_n}{\Gamma_n \cap \mathrm{Id}(A)},$$

para $n \geq 0$. Existe uma relação entre essa sequência e a sequência de codimensões ordinária de A, a qual é dada por

$$c_n(A) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_i^p(A) = 1 + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} c_i^p(A) \ \text{ (ver [7])}.$$

Agora, daremos algumas informações importantes sobre as subvariedades minimais das variedades de crescimento quase polinomial de $\mathcal{G}$ e de UT_2.

La Mattina em [22, 23] classificou completamente, a menos de T-equivalência, todas as subvariedades minimais de $\mathrm{var}(\mathcal{G})$ e de $\mathrm{var}(UT_2)$. Ela verificou que existe apenas um número finito delas e, para cada tal variedade, exibiu uma álgebra de dimensão finita geradora de tais subvariedades.

A relevância de tais classificações é devido ao fato que estas variedades minimais são blocos construtores, o que permitiu à autora dar uma classificação completa das subvariedades de $\mathrm{var}(\mathcal{G})$ e de $\mathrm{var}(UT_2)$.
Para $k \geq 2$ fixo, considere as seguintes subálgebras de UT_k :

$$\begin{aligned} N_k &= \mathrm{span}_F\{I, E, ..., E^{k-2}; e_{12}, e_{13}, ..., e_{1k}\}, \\ A_k &= \mathrm{span}_F\{e_{11}, E, ..., E^{k-2}; e_{12}, e_{13}, ..., e_{1k}\}, \\ B_k &= \mathrm{span}_F\{e_{kk}, E, ..., E^{k-2}; e_{1k}, e_{2k}, ..., e_{k-1,k}\}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde I denota a matriz identidade $k \times k$ e $E = \sum_{i=2}^{k-1} e_{i,i+1} \in UT_k$. Note que B_k é a álgebra A_k refletida em torno da diagonal secundária.

Como exemplo, tomando $k = 5$, temos

$$N_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & f & g & h \\ 0 & 0 & a & f & g \\ 0 & 0 & 0 & a & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d, e, f, g, h \in F \right\} \quad \text{e}$$

$$A_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 0 & f & g & h \\ 0 & 0 & 0 & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c, d, e, f, g, h \in F \right\}.$$

O resultado a seguir classifica as subvariedades minimais de $\mathrm{var}(UT_2)$.

Teorema 1.3. *[22, Corolário 5.4] Seja A uma álgebra tal que* $\mathrm{var}(A) \subsetneq \mathrm{var}(UT_2)$. *Então A gera uma variedade minimal se, e somente se, ou $A \sim_T N_u$ ou $A \sim_T A_k$ ou $A \sim_T B_k$, para algum $k \geq 2, u > 2$.*

Estaremos particularmente interessados em $\mathrm{var}(N_k)$, pois é a única subvariedade minimal de UT_2 gerada por uma álgebra unitária.

Lema 1.4. *[7, Teorema 3.4] Seja $k \geq 3$, então:*

i) $\mathrm{Id}(N_k) = \langle [x_1, \ldots, x_k], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$;

ii) $c_n(N_k) = 1 + \sum_{j=2}^{k-1} \binom{n}{j}(j-1) \approx \frac{k-2}{(k-1)!} n^{k-1}$, $n \to \infty$.

Para $m \geq 1$, considere G_m a álgebra de Grassmann unitária sobre um espaço vetorial m-dimensional sobre F, ou seja,

$$G_m = \langle 1, e_1, \ldots, e_m \, : \, e_i e_j = -e_j e_i, \, 1 \leq i, j \leq m \rangle \, .$$

O próximo resultado classifica as subvariedades minimais de $\mathrm{var}(\mathcal{G})$.

Teorema 1.5. *[22, Corolário 5.3] Seja A uma álgebra tal que* $\mathrm{var}(A) \subsetneq \mathrm{var}(\mathcal{G})$. *Então A gera uma variedade minimal se, e somente se, $A \sim_T G_{2k}$, para algum $k \geq 1$.*

O resultado a seguir também será importante.

Lema 1.6. *[7, Teorema 3.5] Seja $k \geq 1$, então:*

i) $\mathrm{Id}(G_{2k}) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2] \cdots [x_{2k+1}, x_{2k+2}] \rangle_T$;

ii) $c_n(G_{2k}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{2j} \approx \frac{1}{(2k)!} n^{2k}$, $n \to \infty$.

Instigados por esses resultados, em [8], Giambruno, La Mattina e Zaicev classificaram as variedades minimais geradas por álgebras unitárias de crescimento polinomial. Foram classificadas explicitamente todas as variedades minimais de crescimento polinomial n^k para $k \leq 5$ e foi dada uma receita para classificar todas variedades minimais de crescimento polinomial n^k, $k > 5$.

Verificou-se que para $k \leq 4$, existe apenas um número finito de variedades minimais de crescimento polinomial n^k, mas para $k \geq 5$ o número de variedades minimais é infinito.

1.2 φ-variedades minimais

Motivados pelo artigo [8], focamos nossas atenções em álgebras unitárias com involução e superálgebras unitárias sobre um corpo F de característica zero, na tentativa de estender os resultados para variedades geradas por álgebras munidas destas estruturas adicionais.

Faremos uma breve descrição dessas estruturas e enunciaremos resultados conhecidos sobre elas. A partir de agora F denotará um corpo de característica zero e A uma álgebra associativa sobre F.

Definição 1.7. *Seja A uma álgebra. Uma aplicação linear $* : A \to A$ é dita uma **involução** se $(a^*)^* = a$ e $(ab)^* = b^*a^*$, para todo $a, b \in A$. Note que, neste caso, $*$ é um antiautomorfismo de A de ordem no máximo 2.*

Se A é uma álgebra munida de uma involução $*$, dizemos que A é uma **$*$-álgebra**. Neste caso, $A = A^+ \oplus A^-$, onde $A^+ = \{a \in A : a^* = a\}$ é o espaço dos elementos simétricos de A e $A^- = \{a \in A : a^* = -a\}$ é o espaço dos elementos antissimétricos de A.

Se A é uma álgebra comutativa, a aplicação identidade é uma involução em A, chamada **involução trivial**. Reciprocamente, se a identidade é uma involução em A, então A é comutativa.

Definição 1.8. *Uma álgebra A é dita uma **superálgebra** se existem dois subespaços vetoriais $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ tais que:*

i) $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$;

ii) $A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subseteq A^{(0)}$ *e* $A^{(0)}A^{(1)} + A^{(1)}A^{(0)} \subseteq A^{(1)}$.

Neste caso, A é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada com graduação $(A^{(0)}, A^{(1)})$.

Observe que toda álgebra A é uma superálgebra com graduação $(A, \{0\})$. Neste caso, dizemos que a graduação em A é trivial.

Note que se A é uma superálgebra, então a aplicação σ dada por $\sigma(a) = \sigma(a_0 + a_1) = a_0 - a_1$, com $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$, é um automorfismo de A de ordem no máximo 2. Quando a graduação é trivial, σ é a identidade. Reciprocamente, se existe $\sigma \in Aut(A)$ de ordem no máximo 2, A é uma superálgebra com graduação $(A^{(0)}, A^{(1)})$, onde $A^{(0)} = \{a \in A : \sigma(a) = a\}$ e $A^{(1)} = \{a \in A : \sigma(a) = -a\}$.

Exemplo 1.9. *1) Temos que $\mathcal{G}$ é uma superálgebra com graduação $(\mathcal{G}^{(0)}, \mathcal{G}^{(1)})$, onde*

$\mathcal{G}^{(0)} = span_F\{e_{i_1}...e_{i_{2k}} : 0 \leq i_1 < ... < i_{2k}, k \geq 0\}$ *e*

$\mathcal{G}^{(1)} = span_F\{e_{i_1}...e_{i_{2k+1}} : 0 \leq i_1 < ... < i_{2k+1}, k \geq 0\}$. *Essa superálgebra será denotada por $\mathcal{G}^{gr}$.*

2) A álgebra UT_2 é uma superálgebra com graduação $(Fe_{11} + Fe_{22}, Fe_{12})$, onde e_{ij} denotam as matrizes elementares usuais. Tal superálgebra será denotada por UT_2^{gr}.

3) Consideraremos como D^{gr} a álgebra comutativa $D = F \oplus F$ munida da graduação $(F(1,1), F(1,-1))$.

4) Consideraremos D_* a álgebra $D = F \oplus F$ munida da involução troca $(a,b)^* = (b,a)$.

5) Seja UT_n a F-álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$. Nesta álgebra definimos ρ como sendo a involução dada pela reflexão de uma matriz $(a_{ij}) \in UT_n$ ao longo da diagonal secundária, ou seja, $(a_{ij})^\rho = (a_{n+1-j,n+1-i})$.

6) Considere a seguinte subálgebra de UT_4

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in F \right\}.$$

Nos resultados dessa tese, vamos considerar M munida da involução reflexão ρ :

$$\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{\rho} = \begin{pmatrix} a & d & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

A fim de estabelecer uma nomenclatura comum para superálgebras e $*$-álgebras, usamos o termo φ-álgebras. Qualquer álgebra A munida de um automorfismo ou um antiautomorfismo φ de ordem no máximo 2, ou seja, qualquer superálgebra ou qualquer álgebra com involução, será chamada uma **φ-álgebra**. Denotamos por $\mathrm{var}^{\varphi}(A)$ a variedade de φ-álgebras gerada por A, chamada de **φ-variedade**.

Se A é uma φ-álgebra, escrevemos $A = A_{\varphi}^{+} \oplus A_{\varphi}^{-}$, onde $A_{\varphi}^{+} = \{a \in A : a^{\varphi} = a\}$ e $A_{\varphi}^{-} = \{a \in A : a^{\varphi} = -a\}$.

No caso em que φ é um antiautomorfismo de ordem no máximo 2, $A_{\varphi}^{+} = A^{+}$ e $A_{\varphi}^{-} = A^{-}$. Observe que, se φ é a identidade, então $A^{-} = \{0\}$ e A é comutativa.

No caso em que φ é um automorfismo de ordem no máximo 2, $A_{\varphi}^{+} = A^{(0)}$ e $A_{\varphi}^{-} = A^{(1)}$ denotam os subespaços de elementos homogêneos de grau 0 e homogêneos de grau 1 de A, respectivamente.

Seja $F\langle X, \varphi\rangle = F\langle x_1, x_1^{\varphi}, x_2, x_2^{\varphi}, \ldots\rangle$ a φ-álgebra livre associativa sobre X e considere $y_i = x_i + x_i^{\varphi}$ e $z_i = x_i - x_i^{\varphi}$. Assim $F\langle X, \varphi\rangle = F\langle Y \cup Z\rangle = F\langle y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots\rangle$ e os elementos de $F\langle Y \cup Z\rangle$ são chamados de **φ-polinômios**.

Definição 1.10. *Seja A uma φ-álgebra. Uma **φ-identidade polinomial** para A é um φ-polinômio $f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) \in F\langle Y \cup Z\rangle$ tal que*

$$f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = 0, \text{ para todo } a_1, \ldots, a_n \in A_{\varphi}^{+} \text{ e } b_1, \ldots, b_m \in A_{\varphi}^{-}.$$

O conjunto $\mathrm{Id}^{\varphi}(A)$ de todas as φ-identidades de A é um ideal de $F\langle Y \cup Z\rangle$, invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle Y \cup Z\rangle$ que comutam com φ, chamado de **T^{φ}-ideal de A**.

Se φ é um automorfismo, escreveremos $\mathrm{Id}^{\varphi}(A) = \mathrm{Id}^{gr}(A)$, o **$T_2$-ideal de** A. Se φ é um antiautomorfismo, escreveremos $\mathrm{Id}^{\varphi}(A) = \mathrm{Id}^{*}(A)$, o **$T^*$-ideal de** A.

Usaremos simplesmente $\mathcal{G}$ e UT_2 para denotar, respectivamente, a superálgebra de Grassmann e a superálgebra das matrizes triangulares superiores 2×2 com graduação trivial.

No próximo resultado, vamos explicitar os T^{φ}-ideais de importantes φ-álgebras. Lembramos que para uma álgebra A, definimos $a_1 \circ a_2 = a_1a_2 + a_2a_1$, $a_1, a_2 \in A$.

Lema 1.11. *1)* $\mathrm{Id}^{gr}(UT_2) = \langle [y_1, y_2][y_3, y_4], z \rangle_{T_2}$ *(ver* [21]*)*

2) $\mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{G}) = \langle [y_1, y_2, y_3], z \rangle_{T_2}$ *(ver* [20]*)*

3) $\mathrm{Id}^{gr}(D^{gr}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], [z_1, z_2] \rangle_{T_2}$ *(ver* [10]*)*

4) $\mathrm{Id}^{gr}(UT_2^{gr}) = \langle [y_1, y_2], z_1z_2 \rangle_{T_2}$ *(ver* [32]*)*

5) $\mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{G}^{gr}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], z_1 \circ z_2 \rangle_{T_2}$ *(ver* [11]*)*

6) $\mathrm{Id}^{*}(D_*) = \langle [y_1, y_2], [y, z], [z_1, z_2] \rangle_{T^*}$ *(ver* [10]*)*

7) $\mathrm{Id}^{*}(M) = \langle z_1z_2 \rangle_{T^*}$ *(ver* [29]*)*

Como a característica do corpo F é zero, $\mathrm{Id}^{\varphi}(A)$ é completamente determinado por seus **φ-polinômios multilineares** e por isso é importante considerar para cada $n \geq 1$,

$$P_n^{\varphi} = \mathrm{span}_F\{w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} : \sigma \in S_n,\ w_i = y_i \,\text{ou}\, w_i = z_i, i = 1, ..., n\}$$

o **espaço dos φ-polinômios multilineares em** $y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n$. Observe que, se $f \in P_n^{\varphi}$, então as variáveis y_i e z_i não podem aparecer simultaneamente em um mesmo monômio de f.

Definição 1.12. *Para* $n \geq 1$, *o número* $c_n^{\varphi}(A) := \dim_F \dfrac{P_n^{\varphi}}{P_n^{\varphi} \cap \mathrm{Id}^{\varphi}(A)}$ *é chamado de* ***n-ésima φ-codimensão de*** A.

Se φ é um automorfismo, escreveremos $c_n^{\varphi}(A) = c_n^{gr}(A)$, a **$n$-ésima codimensão graduada de** A. Se φ é um antiautomorfismo, escreveremos $c_n^{\varphi}(A) = c_n^{*}(A)$, a **$n$-ésima $*$-codimensão de** A.

É conhecido (ver [12]) que a relação entre a codimensão ordinária de A e a φ-codimensão de A é dada por $c_n(A) \leq c_n^{\varphi}(A)$, para $n \geq 1$. Além disso, se A é uma PI-álgebra temos $c_n(A) \leq c_n^{\varphi}(A) \leq 2^n c_n(A)$. Logo, nesse caso, $c_n^{\varphi}(A)$ é limitada exponencialmente.

Dizemos que uma φ-álgebra A tem **crescimento polinomial das φ-codimensões** se existem constantes a e $t > 0$ tais que $c_n^{\varphi}(A) \leq an^t$, para todo $n \geq 1$.

Também sabemos que não existem φ-álgebras associativas com crescimento intermediário das φ-codimensões, ou seja, ou $c_n^{\varphi}(A)$ cresce exponencialmente ou é limitada polinomialmente (ver [9, 11]).

Vamos considerar $\mathrm{var}^{\varphi}(A)$, a classe de todas as φ-álgebras que satisfazem as φ-identidades satisfeitas por A. Neste caso, dizemos que $\mathcal{V} = \mathrm{var}^{\varphi}(A)$ é a φ-variedade gerada por A e definimos $c_n^{\varphi}(\mathcal{V}) = c_n^{\varphi}(A)$.

Definição 1.13. *Dizemos que $\mathcal{V}$ é uma **φ-variedade minimal de crescimento polinomial** n^k se $c_n^{\varphi}(\mathcal{V}) \approx qn^k$, para algum $q \in \mathbb{Q}^*, k > 0$ e $c_n^{\varphi}(\mathcal{U}) \approx bn^t$, com $t < k$ para qualquer subvariedade própria $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}$ e algum $b \in \mathbb{Q}$.*

Sejam A e B φ-álgebras. Dizemos que A e B são **T^{φ}-equivalentes** se $\mathrm{Id}^{\varphi}(A) = \mathrm{Id}^{\varphi}(B)$. Logo A é T^{φ}-equivalente a B se, e somente se, $\mathrm{var}^{\varphi}(A) = \mathrm{var}^{\varphi}(B)$. Neste caso, usamos a notação $A \sim_{T^{\varphi}} B$.

No caso graduado, escreveremos $\mathrm{var}^{\varphi}(A) = \mathrm{var}^{gr}(A)$, para a **supervariedade gerada por** A. No caso com involução, escreveremos $\mathrm{var}^{\varphi}(A) = \mathrm{var}^{*}(A)$, para a **$*$-variedade gerada por** A.

A seguir, vamos exibir as variedades de superálgebras e $*$-álgebras de crescimento quase polinomial e citar alguns resultados importantes sobre suas subvariedades.

1.2.1 Algumas $*$-variedades minimais

Em [9], Giambruno e Mishchenko caracterizaram todas as $*$-variedades de crescimento polinomial. Tal caracterização segue abaixo.

Teorema 1.14. *Seja $\mathcal{V}$ uma $*$-variedade, $c_n^*(\mathcal{V})$ é limitada polinomialmente se, e somente se, $D_*, M \notin \mathcal{V}$.*

Com isso, $\mathrm{var}^*(M)$ e $\mathrm{var}^*(D_*)$ são as únicas $*$-variedades de crescimento quase polinomial.

Em [26], La Mattina e Martino classificaram completamente todas as subvariedades das $*$-variedades de crescimento quase polinomial, dando uma lista completa de $*$-álgebras de dimensão finita gerando tais subvariedades. Também, foram determinadas todas as subvariedades minimais dentro de cada uma destas $*$-variedades de crescimento polinomial.

Agora vamos considerar $*$-álgebras que geram variedades minimais de crescimento polinomial dentro de $\mathrm{var}^*(M)$. Para $k \geq 2$ considere as seguintes subálgebras de UT_{2k} munidas da involução reflexão ρ:
$P_{k,\rho} = \mathrm{span}_F\{I_{2k}, E, ..., E^{k-2}; e_{12} - e_{2k-1,2k}, e_{13}, ..., e_{1k}, e_{k+1,2k}, e_{k+2,2k}, ..., e_{2k-2,2k}\}$,
$Q_{k,\rho} = \mathrm{span}_F\{I_{2k}, E, ..., E^{k-2}; e_{12} + e_{2k-1,2k}, e_{13}, ..., e_{1k}, e_{k+1,2k}, e_{k+2,2k}, ..., e_{2k-2,2k}\}$,
$R_{k,\rho} = \mathrm{span}_F\{e_{11} + e_{2k,2k}, E, ..., E^{k-2}; e_{12}, e_{13}, ..., e_{1k}, e_{k+1,2k}, e_{k+2,2k}, ..., e_{2k-1,2k}\}$,
onde I_{2k} denota a matriz identidade $2k \times 2k$ e $E = \sum_{i=2}^{k-1} e_{i,i+1} + e_{2k-i,2k-i+1}$.

Note que as $*$-álgebras $P_{k,\rho}$ e $Q_{k,\rho}$ são unitárias, enquanto $R_{k,\rho}$ não é.

Como exemplo, considerando $k = 4$, temos

$$P_{4,\rho} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & e & f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & e & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a,b,c,d,e,f,g,h \in F \right\},$$

$$Q_{4,\rho} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & e & f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & e & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a,b,c,d,e,f,g,h \in F \right\} \text{ e}$$

$$R_{4,\rho} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a,b,c,d,e,f,g,h,i \in F \right\}.$$

A seguir apresentamos o teorema que classifica as $*$-subvariedades minimais de crescimento polinomial de $\mathrm{var}^*(M)$.

Teorema 1.15. *[26, Corolário 1] Seja A uma $*$-álgebra tal que $\mathrm{var}^*(A) \subsetneq \mathrm{var}^*(M)$. Então A gera uma $*$-variedade minimal se, e somente se, ou $A \sim_{T^*} Q_{r,\rho}$ ou $A \sim_{T^*} P_{k,\rho}$ ou $A \sim_{T^*} R_{k,\rho}$, para algum $k \geq 2, r > 2$.*

Dada a importância das $*$-álgebras unitárias $P_{k,\rho}$ e $Q_{k,\rho}$, apresentamos os resultados a seguir.

Lema 1.16. *[26, Lema 2] Se $k \geq 2$, então*

i) $\mathrm{Id}^*(P_{2,\rho}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], z_1 z_2 \rangle_{T^*}$ *e* $\mathrm{Id}^*(P_{k,\rho}) = \langle [y_1, ..., y_{k-1}], z_1 z_2 \rangle_{T^*}$ *se* $k \geq 3$;

ii) $c_n^*(P_{k,\rho}) = 1 + \sum_{j=1}^{k-2} \binom{n}{j}(2j-1) + \binom{n}{k-1}(k-1) \approx qn^{k-1}$, *para algum* $q > 0$.

Lema 1.17. *[26, Lema 3] Se $k \geq 3$, então*

i) $\mathrm{Id}^*(Q_{k,\rho}) = \langle [z, y_1, ..., y_{k-2}], z_1 z_2 \rangle_{T^*}$;

ii) $c_n^*(Q_{k,\rho}) = 1 + \sum_{j=1}^{k-2} \binom{n}{j}(2j-1) + \binom{n}{k-1}(k-2) \approx qn^{k-1}$, *para algum $q > 0$.*

Para $k \geq 2$, considere a seguinte subálgebra comutativa da álgebra UT_k :

$$C_k = \left\{ \alpha I_k + \sum_{1 \leq i < k} \alpha_i E_1^i \ : \ \alpha, \alpha_i \in F \right\},$$

onde I_k denota a matriz identidade $k \times k$ e $E_1 = \sum_{i=1}^{k-1} e_{i,i+1}$. Vamos considerar $C_{k,*}$, a álgebra C_k munida da involução

$$(\alpha I_k + \sum_{1 \leq i < k} \alpha_i E_1^i)^* = \alpha I_k + \sum_{1 \leq i < k} (-1)^i \alpha_i E_1^i.$$

Exemplo 1.18. $C_{5,*} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d, e \in F \right\},$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & -b & c & -d & e \\ 0 & a & -b & c & -d \\ 0 & 0 & a & -b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Agora, apresentamos o teorema que classifica as $*$-subvariedades minimais de crescimento polinomial de $\mathrm{var}^*(D_*)$.

Teorema 1.19. *[26, Corolário 3] Seja A uma $*$-álgebra tal que* $\mathrm{var}^*(A) \subsetneq \mathrm{var}^*(D_*)$. *Então A gera uma $*$-variedade minimal de crescimento polinomial se, e somente se, $A \sim_{T^*} C_{k,*}$, para algum $k \geq 2$.*

Também temos as seguintes informações sobre $C_{k,*}$.

Lema 1.20. *[26, Lema 9] Seja $k \geq 2$, então*

i) $\mathrm{Id}^*(C_{k,*}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], [z_1, z_2], z_1 \cdots z_k \rangle_{T^*}$;

ii) $c_n^*(C_{k,*}) = 1 + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \approx \frac{1}{(k-1)!} n^{k-1}, n \to \infty.$

1.2.2 Algumas supervariedades minimais

Em [11], Giambruno, Mishchenko e Zaicev caracterizaram variedades de superálgebras $\mathcal{V}$ com crescimento polinomial. A seguir apresentamos tal caracterização.

Teorema 1.21. *Seja $\mathcal{V}$ uma supervariedade, $c_n^{gr}(\mathcal{V})$ é limitada polinomialmente se, e somente se, $\mathcal{G}, UT_2, \mathcal{G}^{gr}, UT_2^{gr}, D^{gr} \notin \mathcal{V}$.*

Dessa forma, $\mathcal{G}, UT_2, \mathcal{G}^{gr}, UT_2^{gr}, D^{gr}$ são as únicas superálgebras que geram supervariedades de crescimento quase polinomial.

Em 2011, La Mattina em [24] classificou completamente todas as subvariedades das variedades geradas pelas superálgebras $\mathcal{G}, UT_2, \mathcal{G}^{gr}, UT_2^{gr}, D^{gr}$, dando uma lista completa de superálgebras de dimensão finita geradoras de tais variedades. Em particular, foram determinadas todas as subvariedades minimais dentro de cada uma destas supervariedades de crescimento quase polinomial.

Como toda álgebra é uma superálgebra com graduação trivial, a classificação das supervariedades minimais de crescimento polinomial dentro de $\mathrm{var}^{gr}(\mathcal{G})$ e de $\mathrm{var}^{gr}(UT_2)$ são as mesmas dadas nos Teoremas 1.3 e 1.5.

Para construir superálgebras na variedade gerada por UT_2^{gr}, La Mattina considerou, para $k \geq 2$, as subálgebras N_k, A_k e B_k de UT_k apresentadas na Seção 1.1, munidas de uma graduação induzida de uma $\mathbb{Z}_2$-graduação elementar sobre UT_k.

Lembre que se $\mathbf{g} = (g_1, ..., g_k) \in \mathbb{Z}_2^k$ é uma k-upla de elementos de $\mathbb{Z}_2$, então $\mathbf{g}$ define uma $\mathbb{Z}_2$-graduação sobre UT_k chamada **graduação elementar induzida**

por g, considerando

$$UT_k^{(0)} = \text{span}_F\{e_{ij} : g_i + g_j = 0\} \ \text{ e } \ UT_k^{(1)} = \text{span}_F\{e_{ij} : g_i + g_j = 1\}.$$

Para $k \geq 2$, definimos as superálgebras N_k^{gr}, A_k^{gr} e B_k^{gr}, como sendo, respectivamente, as álgebras N_k, A_k e B_k definidas em (1.1) com $\mathbb{Z}_2$-graduação elementar induzida por $\mathbf{g} = (0, 1, ..., 1) \in \mathbb{Z}_2^k$.

Como exemplo, considerando $k = 5$, temos

$$N_5^{gr} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & f & g & h \\ 0 & 0 & a & f & g \\ 0 & 0 & 0 & a & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d, e, f, g, h \in F \right\},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & f & g & h \\ 0 & 0 & a & f & g \\ 0 & 0 & 0 & a & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & f & g & h \\ 0 & 0 & a & f & g \\ 0 & 0 & 0 & a & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b & c & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

A classificação das subvariedades minimais de $\text{var}^{gr}(UT_2^{gr})$ é dada a seguir.

Teorema 1.22. *[24, Corolário 6.1] Seja A uma superálgebra tal que* $\text{var}^{gr}(A) \subsetneq \text{var}^{gr}(UT_2^{gr})$*. Então A gera uma variedade minimal se, e somente se, ou $A \sim_{T_2} N_k^{gr}$ ou $A \sim_{T_2} A_k^{gr}$ ou $A \sim_{T_2} B_k^{gr}$, para algum $k \geq 2$.*

Dado que N_k^{gr} é superálgebra unitária que gera uma variedade minimal, apresentamos o seguinte resultado.

Lema 1.23. *[24, Teorema 4.1] Seja $k \geq 2$, então*

i) $\text{Id}^{gr}(N_k^{gr}) = \langle [y_1, y_2], [z, y_1, ..., y_{k-1}], z_1 z_2 \rangle_{T_2}$;

ii) $c_n^{gr}(N_k^{gr}) = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \binom{n}{j} j \approx \frac{1}{(k-2)!} n^{k-1}, n \to \infty.$

Considere G_k^{gr} a álgebra de Grassmann de dimensão finita G_k munida da graduação induzida de $\mathcal{G}^{gr}$.

O resultado a seguir classifica as supervariedades minimais dentro de $\mathrm{var}^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$.

Teorema 1.24. *[24, Corolário 7.2] Seja A uma superálgebra tal que $\mathrm{var}^{gr}(A) \subsetneq \mathrm{var}^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$. Então A gera uma variedade minimal se, e somente se, $A \sim_{T_2} G_k^{gr}$, para algum $k \geq 1$.*

Também é importante destacar o próximo lema.

Lema 1.25. *[24, Teorema 7.1] Para $k \geq 1$,*

i) $\mathrm{Id}^{gr}(G_k^{gr}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], z_1 \circ z_2, z_1 \cdots z_{k+1} \rangle_{T_2}$;

ii) $c_n^{gr}(G_k^{gr}) = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \approx \frac{1}{k!} n^k, n \to \infty.$

Para $k \geq 2$, denote por C_k^{gr}, a subálgebra comutativa C_k da álgebra UT_k, definida anteriormente, com $\mathbb{Z}_2$-graduação elementar induzida por $\mathbf{g} = (0,1,0,1,...) \in \mathbb{Z}_2^k$.

Por exemplo, para $k = 5$, temos

$$C_5^{gr} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d, e \in F \right\},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 & e \\ 0 & a & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Agora, apresentamos a classificação das supervariedades minimais de $\mathrm{var}^{gr}(D^{gr})$.

Teorema 1.26. *[24, Corolário 8.2] Seja A uma superálgebra tal que* $\mathrm{var}^{gr}(A) \subsetneq \mathrm{var}^{gr}(D^{gr})$. *Então A gera uma variedade minimal se, e somente se, $A \sim_{T_2} C_k^{gr}$, para algum $k \geq 2$.*

Temos também as seguintes informações sobre C_k^{gr}.

Lema 1.27. *[24, Teorema 8.1] Seja $k \geq 2$, então*

i) $\mathrm{Id}^{gr}(C_k^{gr}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], [z_1, z_2], z_1 \cdots z_k \rangle_{T_2}$;

ii) $c_n^{gr}(C_k^{gr}) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \approx \frac{1}{(k-1)!} n^{k-1}, n \to \infty.$

Capítulo 2

Caracterização das φ-variedades minimais

Neste capítulo, provaremos um dos principais resultados desta tese, o teorema de caracterização das φ-variedades minimais geradas por álgebras unitárias de crescimento polinomial, o qual será de grande importância para obtermos os resultados do Capítulo 3.

2.1 H_n-módulos e $GL_m \times GL_m$-módulos

Nesta seção, apresentaremos resultados da teoria de representações de grupos importantes na PI-teoria que serão relevantes para relacionar as multiplicidades de dois caracteres associados a dois espaços. Para mais informações sobre estas representações indicamos [1],[4] e [6].

Seja $H_n = \mathbb{Z}_2 \wr S_n$ o grupo hiperoctaedral de grau n, isto é, $H_n = \{(a_1, \ldots, a_n; \sigma) : a_i \in \mathbb{Z}_2, \sigma \in S_n\}$ com multiplicação dada por

$$(a_1, \ldots, a_n; \sigma)(b_1, \ldots, b_n; \tau) = (a_1 b_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a_n b_{\sigma^{-1}(n)}; \sigma\tau).$$

O espaço P_n^{φ} tem uma estrutura natural de H_n-módulo à esquerda sob a ação dada por $g \cdot y_i = y_{\sigma(i)}$ e $g \cdot z_i = z_{\sigma(i)}$ ou $g \cdot z_i = -z_{\sigma(i)}$, de acordo com $a_{\sigma(i)} = 1$ ou -1, respectivamente, onde $g = (a_1, ..., a_n; \sigma) \in H_n$.

Note que $P_n^\varphi \cap \mathrm{Id}^\varphi(A)$ é invariante sob essa H_n-ação. Portanto o espaço $P_n^\varphi(A) := \dfrac{P_n^\varphi}{P_n^\varphi \cap \mathrm{Id}^\varphi(A)}$ tem estrutura de H_n-módulo à esquerda. Assim, podemos associar ao espaço $P_n^\varphi(A)$ um H_n-caracter, chamado **n-ésimo φ-cocaracter de** A, denotado por $\chi_n^\varphi(A)$. É conhecido [12] que cada H_n-caracter irredutível está associado a um par de partições (λ, μ), com $\lambda \vdash r$, $\mu \vdash (n-r)$. Para simplificar a notação, usaremos $(\lambda, \mu) \vdash n$ para indicar o par de partições $\lambda \vdash r$, $\mu \vdash (n-r)$, $r = 0, 1, \ldots, n$. Assim, o n-ésimo φ-cocaracter de A tem a seguinte decomposição

$$\chi_n^\varphi(A) = \sum_{(\lambda,\mu)\vdash n} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu}, \tag{2.1}$$

onde $m_{\lambda,\mu} \geq 0$ é a correspondente multiplicidade do H_n-caracter irredutível $\chi_{\lambda,\mu}$ associado ao par de partições (λ, μ).

Seja $F_{m,\varphi} = F\langle X, \varphi\rangle = F\langle y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m\rangle$ a φ-álgebra livre associativa gerada pelas variáveis $y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m$. Tal álgebra pode ser naturalmente decomposta como:

$$F_{m,\varphi} = F_m^{(0)}\langle Y, Z\rangle \oplus F_m^{(1)}\langle Y, Z\rangle \oplus \cdots , \tag{2.2}$$

onde, para cada $n \geq 0$, $F_m^{(n)}\langle Y, Z\rangle$ é o subespaço gerado por todos os monômios de grau total n. Como $F_m^{(i)}\langle Y, Z\rangle \cdot F_m^{(j)}\langle Y, Z\rangle \subseteq F_m^{(i+j)}\langle Y, Z\rangle$, para todo $i, j \geq 0$, temos que $F_{m,\varphi}$ tem uma estrutura de álgebra graduada. Os espaços $F_m^{(i)}\langle Y, Z\rangle$ são chamados de **componentes homogêneas** de $F_{m,\varphi}$. A decomposição (2.2) ainda pode ser refinada como segue: para cada $n \geq 1$, escreva

$$F_m^{(n)}\langle Y, Z\rangle = \bigoplus_{i_1+\ldots+i_m+j_1+\ldots+j_m=n} F_m^{(i_1,\ldots,i_m,j_1,\ldots,j_m)}\langle Y, Z\rangle,$$

onde $F_m^{(i_1,\ldots,i_m,j_1,\ldots,j_m)}$ é o subespaço gerado por todos os monômios de grau i_1 em $y_1, ..., i_m$ em y_m, j_1 em $z_1, ..., j_m$ em z_m. Além disso,

$$F_m^{(i_1,\ldots,i_m,j_1,\ldots,j_m)}\langle Y, Z\rangle \cdot F_m^{(k_1,\ldots,k_m,l_1,\ldots,l_m)}\langle Y, Z\rangle \subseteq F_m^{(i_1+k_1,\ldots,i_m+k_m,j_1+l_1,\ldots,j_m+l_m)}\langle Y, Z\rangle$$

e dizemos que $F_{m,\varphi}$ é **multigraduada**.

Definição 2.1. *Um φ-polinômio $f \in F_m^{(n)}\langle Y, Z\rangle$, $n \geq 1$, será chamado **homogêneo de grau** n. Se f pertence a algum $F_m^{(i_1,...,i_m,j_1,...,j_m)}$, f será dito **homogêneo de multigrau** $(i_1, ..., i_m, j_1, ..., j_m)$. Dizemos que f é **homogêneo na variável** $u_i \in Y \cup Z$, se u_i aparece com o mesmo grau em todos os monômios de f.*

Se F é um corpo infinito, então todo T^φ-ideal é homogêneo em relação à multigraduação acima. Se $f \in F_{m,\varphi}$, podemos sempre escrever

$$f = \sum_{i_1,...,i_m,j_1,...,j_m \geq 0} f^{(i_1,...,i_m,j_1,...,j_m)},$$

onde $f^{(i_1,...,i_m,j_1,...,j_m)}$ é a soma de todos os monômios em f, onde y_1 aparece com grau $i_1, ..., y_m$ aparece com grau i_m, z_1 aparece com grau $j_1, ..., z_m$ aparece com grau j_m. Os φ-polinômios $f^{(i_1,...,i_m,j_1,...,j_m)}$ não-nulos são chamados **componentes multihomogêneas** de f.

Teorema 2.2. *[5, Lema 2.1][2, Teorema 1.40] Seja F um corpo infinito. Se $f \equiv 0$ é uma φ-identidade polinomial para a álgebra A, então toda componente multihomogênea de f é também uma φ-identidade polinomial para A.*

A demonstração do resultado anterior segue de modo análogo ao caso ordinário [4, Proposição 4.2.3], usando o argumento clássico de Vandermonde.

Agora, vamos apresentar as ferramentas necessárias para o cálculo das multiplicidades $m_{\lambda,\mu}$ que aparecem na decomposição (2.1).

Considere $U = \text{span}_F\{y_1, \ldots, y_m\}$ e $V = \text{span}_F\{z_1, \ldots, z_m\}$. Observe que existe uma ação natural à esquerda do grupo $GL(U) \times GL(V) \cong GL_m \times GL_m$ sobre o espaço $U \oplus V$ e podemos estender essa ação diagonalmente para conseguirmos uma ação sobre $F_{m,\varphi}$. Note que, para qualquer φ-álgebra A, o espaço $F_{m,\varphi} \cap \text{Id}^\varphi(A)$ é invariante sob essa ação.

Assim, considerando $F^n_{m,\varphi} = F^n_m\langle X, \varphi\rangle$ o espaço dos φ-polinômios homogêneos de grau $n \geq m$ nas variáveis $y_1, ..., y_m, z_1, ..., z_m$, temos que

$$F^n_{m,\varphi}(A) := \frac{F^n_{m,\varphi}}{F^n_{m,\varphi} \cap \text{Id}^\varphi(A)}$$

é um $GL_m \times GL_m$-módulo à esquerda e, então, podemos considerar o seu $GL_m \times GL_m$-caracter, que denotamos por $\psi_n^{\varphi}(A)$.

Sabe-se [6] que existe uma correspondência biunívoca entre os $GL_m \times GL_m$-submódulos irredutíveis de $F_{m,\varphi}^n(A)$ e pares de partições (λ, μ) com $\lambda \vdash r$ e $\mu \vdash (n-r)$, $r = 0, 1, ..., n$, onde λ e μ têm no máximo m partes. Se $\psi_{\lambda,\mu}$ denota o $GL_m \times GL_m$-caracter irredutível associado ao par de partições (λ, μ), podemos escrever

$$\psi_n^{\varphi}(A) = \sum_{\substack{(\lambda,\mu)\vdash n \\ h(\lambda),h(\mu)\leq m}} \overline{m}_{\lambda,\mu}\psi_{\lambda,\mu}, \tag{2.3}$$

onde $\overline{m}_{\lambda,\mu}$ é a correspondente multiplicidade de $\psi_{\lambda,\mu}$ e $h(\lambda)$ (respectivamente $h(\mu)$) denota a altura do diagrama de Young correspondente a λ (respectivamente μ).

A seguir, definiremos o vetor de peso máximo associado ao par (λ, μ) que será uma importante ferramenta para se obter as multiplicidades $m_{\lambda,\mu}$.

Teorema 2.3. *(ver [5]) Qualquer $GL_m \times GL_m$-submódulo irredutível de $F_{m,\varphi}^n(A)$ correspondente ao par $(\lambda, \mu) \vdash n$, denotado por $W_{m,\lambda,\mu}$, é cíclico e gerado por um polinômio não nulo $f_{\lambda,\mu}$, dito* ***vetor de peso máximo associado a** (λ, μ)**,*** *e dado por*

$$f_{\lambda,\mu} = \prod_{i=1}^{\lambda_1} St_{h_i(\lambda)}(y_1, ..., y_{h_i(\lambda)}) \prod_{i=1}^{\mu_1} St_{h_i(\mu)}(z_1, ..., z_{h_i(\mu)}) \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma \sigma, \tag{2.4}$$

onde $\alpha_\sigma \in F$ e a ação à direita de S_n sobre $F_{m,\varphi}^n$ é definida pela permutação de lugares, para todo $\sigma \in S_n$. Aqui $h_i(\lambda)$ (resp. $h_i(\mu)$) é a altura da i-ésima coluna do diagrama de Young correspondente a λ (resp. μ) e $St_{h_i(\lambda)}(x_1, ..., x_{h_i(\lambda)}) = \sum_{\sigma\in S_{h_i(\lambda)}} (sgn\,\sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(h_i(\lambda))}$ é o polinômio standard de grau $h_i(\lambda)$.

Sejam T_λ e T_μ tabelas de Young associadas às partições λ e μ, respectivamente. Denote por f_{T_λ,T_μ} o **vetor de peso máximo** obtido de (2.4) considerando a única permutação $\sigma \in S_n$ tal que os inteiros $\sigma(1), ..., \sigma(h_1(\lambda))$, nesta ordem, preenchem a primeira coluna de T_λ de cima para baixo, $\sigma(h_1(\lambda) + 1), ..., \sigma(h_1(\lambda) + h_2(\lambda))$ preenchem a segunda coluna de T_λ de cima para baixo, ..., $\sigma(h_1(\lambda) + \cdots + h_{\lambda_1-1}(\lambda) + 1), ..., \sigma(r)$ preenchem a última coluna de T_λ de cima para baixo, e $\sigma(r + 1), ..., \sigma(r + h_1(\mu))$, nesta ordem, preenchem a primeira coluna de T_μ de cima para baixo, $\sigma(r+h_1(\mu)+1),...,\sigma(r+h_1(\mu)+h_2(\mu))$ preenchem a segunda coluna de T_μ de cima para baixo,..., $\sigma(r+h_1(\mu)+\cdots+h_{\mu_1-1}(\mu)+1),...,\sigma(n)$ preenchem a última coluna de T_μ de cima para baixo.

Observação 2.4. *(ver [5]) Cada polinômio $f_{\lambda,\mu}$ pode ser expresso de forma única como uma combinação linear dos polinômios f_{T_λ,T_μ}.*

Teorema 2.5. *(ver [6]) Para todo par de partições $(\lambda,\mu)\vdash n$, a multiplicidade $\overline{m}_{\lambda,\mu}$ dada na decomposição (2.3) de $\psi_n^\varphi(A)$ é igual à multiplicidade $m_{\lambda,\mu}$ correspondente ao caracter $\chi_{\lambda,\mu}$ na decomposição (2.1) de $\chi_n^\varphi(A)$, para todo $\lambda\vdash r$ e $\mu\vdash(n-r)$, com $h(\lambda),h(\mu)\leq m$.*

Assim, pelo teorema acima, obtemos uma relação entre a estrutura de H_n-módulo de $P_n^\varphi(A)$ e a estrutura de $GL_m\times GL_m$-módulo de $F_{m,\varphi}^n(A)$. Além disso, temos o seguinte resultado.

Observação 2.6. *(ver [5]) Na decomposição (2.3) temos $\overline{m}_{\lambda,\mu}\neq 0$, se, e somente se, existe um par de tabelas de Young (T_λ,T_μ) tal que o vetor de peso máximo correspondente f_{T_λ,T_μ} não é uma φ-identidade de A. Ainda, $\overline{m}_{\lambda,\mu}$ é o número máximo de vetores de peso máximo f_{T_λ,T_μ} linearmente independentes em $F_{m,\varphi}^n(A)$.*

2.2 O espaço Γ_n^φ e o teorema de caracterização

De agora em diante, denotaremos por A uma álgebra unitária sobre um corpo F de característica zero e as φ-variedades consideradas serão geradas por álgebras unitárias. Também nos referimos a φ-variedades minimais de crescimento polinomial apenas por φ-variedades minimais e dizemos que A é uma φ-álgebra minimal se $\mathrm{var}^\varphi(A)$ é uma φ-variedade minimal. Nosso propósito é provar um dos principais resultados desta tese que caracteriza as φ-variedades minimais. Iniciamos estabelecendo algumas terminologias sobre φ-polinômios Y-próprios, φ-codimensões próprias e φ-cocaracteres próprios, objetos essenciais na caracterização a ser dada.

Seja $B(Y)$ a subálgebra de $F\langle Y\cup Z\rangle$ gerada por Z e por comutadores nas variáveis $u_{i_j} \in Y \cup Z$. Os elementos de $B(Y)$ são chamados **φ-polinômios Y-próprios**. Esses elementos são combinações lineares de polinômios do tipo

$$z_{i_1} \cdots z_{i_k}[u_{j_1}, \ldots, u_{j_t}] \cdots [u_{l_1}, \ldots, u_{l_m}],$$

$u_{i_j} \in Y \cup Z$, pois

$$[u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}, z_j] = [u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}]z_j - z_j[u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}].$$

Considere $\Gamma_n^\varphi := B(Y) \cap P_n^\varphi$ o **espaço dos φ-polinômios Y-próprios multilineares nas variáveis** $y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n$. Consideramos $\Gamma_0^\varphi = \mathrm{span}_F\{1\}$, e por [27, Lema 2.1]

$$\dim_F \Gamma_n^\varphi = n! \sum_{i=0}^{n} 2^{n-i}\frac{(-1)^i}{i!},\ n \geq 0.$$

Assim, podemos notar que a dimensão de Γ_n^φ cresce mais rapidamente que a dimensão de Γ_n, apresentada na Seção 1.1.

Os espaços Γ_n^φ se relacionam da seguinte maneira.

Lema 2.7. *[27, Lemma 2.2] Seja $i \geq 1$. Se k é ímpar e φ é um automorfismo, então $\Gamma_{k+i}^\varphi \subset \langle \Gamma_k^\varphi, [y_1, y_2] \cdots [y_k, y_{k+1}]\rangle_{T^\varphi}$. Caso contrário, $\Gamma_{k+i}^\varphi \subset \langle \Gamma_k^\varphi \rangle_{T^\varphi}$.*

Em característica zero, se A é uma álgebra unitária, $\mathrm{Id}^\varphi(A)$ é completamente determinado por seus φ-polinômios Y-próprios multilineares (ver [5]).

Para cada $n \geq 0$, consideramos o espaço $\Gamma_n^\varphi(A) := \dfrac{\Gamma_n^\varphi}{\Gamma_n^\varphi \cap \mathrm{Id}^\varphi(A)}$ e definimos $\gamma_n^\varphi(A) := \dim_F \Gamma_n^\varphi(A)$, chamada **$n$-ésima φ-codimensão própria de** A. A relação entre essa sequência e a sequência de φ-codimensões é dada por

$$c_n^\varphi(A) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \gamma_i^\varphi(A), n \geq 0 \quad [5, \text{Teorema } 1.3].$$

Como mencionamos anteriormente, o espaço $P_n^\varphi(A)$ tem uma estrutura de H_n-módulo à esquerda e notamos que $\Gamma_n^\varphi(A)$ é invariante sob a H_n-ação induzida. Assim, o espaço $\Gamma_n^\varphi(A)$ é um H_n-módulo à esquerda e seu H_n-caracter, denotado por $\pi_n^\varphi(A)$, é chamado **n-ésimo φ-cocaracter próprio de** A. Este caracter pode ser decomposto em H_n-caracteres irredutíveis e escrevemos

$$\pi_n^\varphi(A) = \sum_{(\lambda,\mu)\vdash n} \widetilde{m}_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu},$$

onde $\widetilde{m}_{\lambda,\mu} \geq 0$ é a correspondente multiplicidade do H_n-caracter irredutível $\chi_{\lambda,\mu}$ associado ao par de partições (λ, μ).

Observação 2.8. *Seja $\mathcal{V}$ uma φ-variedade de álgebras de crescimento polinomial n^k. Então $\gamma_k^\varphi(\mathcal{V}) \neq 0$ e $\gamma_i^\varphi(\mathcal{V}) = 0$, para todo $i \geq k+1$. Isso implica que $\Gamma_i^\varphi(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$, para todo $i \geq k+1$. Além disso, no k-ésimo φ-cocaracter próprio de $\mathcal{V}$*

$$\pi_k^\varphi(\mathcal{V}) = \sum_{(\lambda,\mu)\vdash k} \widetilde{m}_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu},$$

existe $(\lambda, \mu) \vdash k$ tal que $\widetilde{m}_{\lambda,\mu} \neq 0$.

A demonstração da observação anterior segue da relação $c_n^\varphi(\mathcal{V}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \gamma_i^\varphi(\mathcal{V})$, da definição de $\gamma_i^\varphi(\mathcal{V})$ e do fato de $\pi_k^\varphi(\mathcal{V})(1) = \gamma_k^\varphi(\mathcal{V})$. Tal observação será de grande importância, para obter o teorema de caracterização das φ-variedades minimais de crescimento polinomial n^k, gerada por uma álgebra unitária, a partir da decomposição do seu n-ésimo φ-cocaracter próprio.

No que segue usaremos a notação $f \rightsquigarrow g$, para dizer que o φ-polinômio g é uma **consequência** do φ-polinômio f, ou seja, $g \in \langle f \rangle_{T^\varphi}$.

Além disso, se Q é um T^φ-ideal e $f, g \notin Q$, dizemos que g é uma **consequência** de $f \pmod{Q}$, se $g \in \langle Q, f \rangle_{T^\varphi}$. Neste caso, denotaremos por $f \rightsquigarrow g \pmod{Q}$.

Considerando M e N H_n-módulos e

$$\chi_n^\varphi(M) = \sum_{(\lambda,\mu)\vdash n} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu} \qquad \text{e} \qquad \chi_n^\varphi(N) = \sum_{(\lambda,\mu)\vdash n} \widetilde{m}_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu},$$

seus respectivos n-ésimos φ-cocaracteres, escreveremos $\chi_n^\varphi(M) \leq \chi_n^\varphi(N)$ se $m_{\lambda,\mu} \leq \widetilde{m}_{\lambda,\mu}$, para todo par de partições $(\lambda, \mu) \vdash n$.

De modo análogo, usamos a notação $\pi_n^\varphi(M) \leq \pi_n^\varphi(N)$. Observe ainda que, sendo A uma φ-álgebra unitária, temos $\pi_n^\varphi(A) \leq \chi(\Gamma_n^\varphi)$, para todo n.

Agora, estamos prontos para provar o principal resultado dessa seção.

Teorema 2.9. *Sejam $\mathcal{V}$ uma φ-variedade de álgebras de crescimento polinomial n^k gerada por uma álgebra unitária e*

$$\pi_n^\varphi(\mathcal{V}) = \sum_{(\gamma,\sigma)\vdash n} \widetilde{m}_{\gamma,\sigma}\chi_{\gamma,\sigma}$$

o seu n-ésimo φ-cocaracter próprio. Então $\mathcal{V}$ é minimal se, e somente se, valem as seguintes condições:

i) existe um par de partições $(\lambda,\mu)\vdash k$ tal que $\widetilde{m}_{\lambda,\mu}=1$ e para todo $(\nu,\theta)\vdash k$, $(\nu,\theta)\neq(\lambda,\mu)$ temos $\widetilde{m}_{\nu,\theta}=0$;

ii) se $(\lambda,\mu)\vdash k$ é um par de partições e $f_{\lambda,\mu}$ é um vetor de peso máximo Y-próprio tal que $f_{\lambda,\mu}\notin \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$, então para cada $h<k$ e para cada $(\nu,\theta)\vdash h$ se $f_{\nu,\theta}$ é um vetor de peso máximo Y-próprio tal que $f_{\nu,\theta}\notin \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$, devemos ter $f_{\nu,\theta}\rightsquigarrow f_{\lambda,\mu} \pmod{\mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})}$.

Demonstração. Primeiramente assumimos que $\mathcal{V}$ é uma φ-variedade minimal gerada por uma álgebra unitária tal que $c_n^\varphi(\mathcal{V})\approx qn^k$. Pela Observação 2.8, no k-ésimo φ-cocaracter próprio $\pi_k^\varphi(\mathcal{V})=\sum_{(\lambda,\mu)\vdash k}\widetilde{m}_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu}$ de $\mathcal{V}$, existe um par de partições $(\lambda,\mu)\vdash k$ tal que $\widetilde{m}_{\lambda,\mu}\neq 0$.

Suponha que $\widetilde{m}_{\lambda,\mu}>1$, então existem pelo menos dois vetores de peso máximo, $f_{\lambda,\mu}$ e $f'_{\lambda,\mu}$, linearmente independentes módulo $\mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$, tais que $f_{\lambda,\mu}, f'_{\lambda,\mu}\notin \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$. Seja $Q=\langle f_{\lambda,\mu},\mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})\rangle_{T^\varphi}\supsetneq \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$. Temos que $f'_{\lambda,\mu}\notin Q$. De fato, se $f'_{\lambda,\mu}\in Q$, então $f'_{\lambda,\mu}=\widetilde{f}_{\lambda,\mu}+g$, com $f_{\lambda,\mu}\rightsquigarrow \widetilde{f}_{\lambda,\mu}$ e $g\in \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$. Os polinômios $f_{\lambda,\mu}, f'_{\lambda,\mu}$ são multihomogêneos de grau k e de mesmo multigrau, pois são vetores de peso máximo associados ao mesmo par de partições $(\lambda,\mu)\vdash k$. Devemos ter $f'_{\lambda,\mu},\widetilde{f}_{\lambda,\mu}$ multihomogêneos de grau k, coletando as componentes homogêneas de mesmo multigrau e usando o Teorema 2.2 obtemos que $f'_{\lambda,\mu}-\alpha f_{\lambda,\mu}\equiv 0$ módulo $\mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$, $\alpha\in F^*$, ou seja, $f_{\lambda,\mu}, f'_{\lambda,\mu}$ são linearmente dependentes módulo $\mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$, uma contradição.

Portanto, a variedade $\mathcal{U}$ determinada por Q é uma subvariedade própria de $\mathcal{V}$ e tem crescimento polinomial n^k, uma vez que a multiplicidade de $\widetilde{m}_{\lambda,\mu}$ é não nula em $\pi_k^\varphi(\mathcal{U})$. Esta contradição mostra que $\widetilde{m}_{\lambda,\mu}=1$.

Agora, suponha que, para algum $(\nu,\theta)\vdash k$ e $(\nu,\theta)\neq(\lambda,\mu)$, temos $\widetilde{m}_{\nu,\theta}\neq 0$. Então existe um vetor de peso máximo $f_{\nu,\theta}$ tal que $f_{\nu,\theta}\notin \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$. Considere $I=\langle f_{\nu,\theta},\mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})\rangle_{T^\varphi}$. Note que se $f_{\lambda,\mu}\in I$, então $f_{\lambda,\mu}=\widetilde{f}_{\nu,\theta}+h$, com $f_{\nu,\theta}\rightsquigarrow \widetilde{f}_{\nu,\theta}$ e

$h \in \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$. Os polinômios $f_{\lambda,\mu}, f_{\nu,\theta}$ são multihomogêneos de grau k e têm multigraus diferentes, pois são vetores de peso máximo associados a pares de partições diferentes. Ainda, podemos supor $\widetilde{f}_{\nu,\theta}$ é multihomogêneo de grau k. Logo $0 \equiv h = f_{\lambda,\mu} - \widetilde{f}_{\nu,\theta} \pmod{\mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})}$. Se $f_{\lambda,\mu}, \widetilde{f}_{\nu,\theta}$ pertencem a componentes homogêneas distintas, segue que $f_{\lambda,\mu}, \widetilde{f}_{\nu,\theta} \in \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$, uma contradição. Portanto, $f_{\lambda,\mu} \notin I$ e a variedade determinada por I é uma subvariedade própria de $\mathcal{V}$ e tem crescimento polinomial n^k, uma contradição. Logo, $\widetilde{m}_{\nu,\theta} = 0$, para toda $(\nu,\theta) \vdash k$, com $(\nu,\theta) \neq (\lambda,\mu)$. Isto prova i).

Para provar ii), considere $h < k$, $(\nu,\theta) \vdash h$ e seja $f_{\nu,\theta}$ um vetor de peso máximo tal que $f_{\nu,\theta} \notin \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$, isto é, $\widetilde{m}_{\nu,\theta} \neq 0$. Suponha que $f_{\nu,\theta} \not\rightsquigarrow f_{\lambda,\mu} \pmod{\mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})}$. Assim, $f_{\lambda,\mu} \notin T = \langle f_{\nu,\theta}, \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})\rangle_{T^\varphi}$. Novamente, a variedade correspondente a T é uma subvariedade própria de $\mathcal{V}$ e tem crescimento polinomial n^k. Isto contradiz a minimalidade de $\mathcal{V}$, portanto $f_{\nu,\theta} \rightsquigarrow f_{\lambda,\mu} \pmod{\mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})}$.

Reciprocamente, seja $\mathcal{V}$ uma φ-variedade de álgebras de crescimento polinomial n^k, gerada por uma álgebra unitária, satisfazendo i) e ii) e seja $\mathcal{W}$ uma subvariedade própria de $\mathcal{V}$. Então

$$\pi_n^\varphi(\mathcal{W}) = \sum_{(\gamma,\sigma)\vdash n} m_{\gamma,\sigma}\chi_{\gamma,\sigma} < \sum_{(\gamma,\sigma)\vdash n} \widetilde{m}_{\gamma,\sigma}\chi_{\gamma,\sigma} = \pi_n^\varphi(\mathcal{V}).$$

Por i) existe $(\alpha,\beta) \vdash k$ tal que $m_{\alpha,\beta} \leq \tilde{m}_{\alpha,\beta} = 1$ e $m_{\nu,\theta} = \widetilde{m}_{\nu,\theta} = 0$, para todo $(\nu,\theta) \vdash k$, com $(\nu,\theta) \neq (\alpha,\beta)$. Deste modo, $m_{\alpha,\beta} = 0$ ou $m_{\alpha,\beta} = 1$.

Se $m_{\alpha,\beta} = 0$, como $m_{\nu,\theta} = 0$, para todo $(\nu,\theta) \neq (\alpha,\beta)$ segue que $c_n^\varphi(\mathcal{W}) \approx n^t, t < k$, isto é, $\mathcal{V}$ é minimal. Agora, se $m_{\alpha,\beta} = 1$, como $\mathcal{W}$ é uma subvariedade própria de $\mathcal{V}$, existe um par de partições $(\nu,\theta) \vdash h < k$, tal que $\widetilde{m}_{\nu,\theta} \neq 0$ e $m_{\nu,\theta} < \widetilde{m}_{\nu,\theta}$. Assim, existe um vetor de peso máximo $f_{\nu,\theta}$ tal que $f_{\nu,\theta} \notin \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$ e $f_{\nu,\theta} \in \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{W})$.

Como $\tilde{m}_{\alpha,\beta} = 1$, existe $f_{\alpha,\beta}$ vetor de peso máximo tal que $f_{\alpha,\beta} \notin \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$. Além disso, como $m_{\alpha,\beta} = 1$, temos que $f_{\alpha,\beta} \notin \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{W})$. Então por ii), segue que $f_{\nu,\theta} \rightsquigarrow f_{\alpha,\beta} \pmod{\mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})}$, isto é,

$$f_{\alpha,\beta} \in \langle f_{\nu,\theta}, \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})\rangle_{T^\varphi} \subseteq \langle f_{\nu,\theta}, \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{W})\rangle_{T^\varphi} = \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{W}).$$

Logo $f_{\alpha,\beta} \in \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{W})$, uma contradição. Com isso, $m_{\alpha,\beta} = 0$ e portanto $\mathcal{W}$ tem crescimento n^t, com $t < k$. $\square$

2.3 O H_n-caracter de Γ_n^{φ}, $n = 2, 3$

Primeiramente, lembramos que Γ_n^{φ} é um H_n-módulo e escreveremos $\chi(\Gamma_n^{\varphi})$ para denotar o seu H_n-caracter. Note que para qualquer φ-álgebra unitária A, temos $\pi_n^{\varphi}(A) \leq \chi(\Gamma_n^{\varphi})$. Assim, para estudar a decomposição do φ-cocaracter próprio de uma álgebra unitária A, é importante conhecer as multiplicidades dos caracteres irredutíveis na decomposição de $\chi(\Gamma_n^{\varphi})$. A seguir, estabeleceremos tal decomposição para $n = 2$ e $n = 3$.

Considere $B_{m,\varphi} = B(Y) \cap F_{m,\varphi}$ o espaço dos φ-polinômios Y-próprios nas variáveis $y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m$ e o subespaço $B_{m,\varphi}^n = B(Y) \cap F_{m,\varphi}^n$ dos φ-polinômios Y-próprios homogêneos de grau n. Temos que Γ_n^{φ} é um H_n-submódulo de P_n^{φ} e $B_{m,\varphi}^n$ é um $GL_m \times GL_m$-submódulo de $F_{m,\varphi}^n$ com a mesma estrutura de módulo (ver [5]), isto é,

$$\Gamma_n^{\varphi} = \sum_{(\lambda,\mu)\vdash n} \overline{m}_{\lambda,\mu} M_{\lambda,\mu} \qquad \text{e} \qquad B_{m,\varphi}^n = \sum_{(\lambda,\mu)\vdash n} \overline{m}_{\lambda,\mu} W_{m,\lambda,\mu}, \tag{2.5}$$

onde $M_{\lambda,\mu}$ e $W_{m,\lambda,\mu}$ denotam, respectivamente, o H_n-módulo irredutível e o $GL_m \times GL_m$-módulo irredutível correspondentes ao par de partições $(\lambda, \mu) \vdash n$, e $\overline{m}_{\lambda,\mu}$ é a multiplicidade correspondente (se $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$ e $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_t)$ são tais que $h > m$ e $t > m$, então podemos assumir $W_{m,\lambda,\mu} = 0$).

Usando a teoria de representações do grupo hiperoctaedral H_n e do grupo $GL_m \times GL_m$, nosso principal objetivo é, utilizando um método combinatório, estudar o comportamento das multiplicidades $\overline{m}_{\lambda,\mu}$ que aparecem nas decomposições (2.5). A teoria de representações de grupos finitos é um assunto conhecido e pode ser encontrado em muitos livros de álgebra (ver por exemplo [1] e [4]). Para obter as multiplicidades $\overline{m}_{\lambda,\mu}$ em $\chi(\Gamma_n^{\varphi})$, para um par de partições $(\lambda, \mu) \vdash n$, é suficiente determinar a decomposição do $GL_m \times GL_m$-caracter de $B_{m,\varphi}^n$ e procedermos do seguinte modo. Considere um monômio $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$, $x_{i_j} \in \{y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_m\}$ na componente homogênea $F_{m,\varphi}^n$ de grau n de $F_{m,\varphi}$ e construa um φ-polinômio Y-próprio nas mesmas variáveis $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in Y \cup Z$.

Para uma forma fixa do φ-polinômio Y-próprio construída acima, definimos o homomorfismo de espaços vetoriais

$$\theta : F^n_{m,\varphi} \to B^n_{m,\varphi}$$

tal que, para cada monômio $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$, a imagem $\theta(x_{i_1} \cdots x_{i_n})$ é um φ-polinômio Y-próprio nas mesmas variáveis tendo a forma fixa, ou seja,

$$\theta(x_{i_1} \cdots x_{i_n}) = z_{i_1} \cdots z_{i_k}[u_{j_1}, ..., u_{j_t}] \cdots [u_{l_1}, ..., u_{l_m}], \tag{2.6}$$

com $x_{i_j}, u_{i_j} \in Y \cup Z,\ k + t + \cdots + m = n.$

Daremos alguns exemplos. Para o monômio $y_1z_1z_2$ temos quatro possíveis homomorfismos:

$$\theta_1 : y_1z_{i_1}z_{i_2} \mapsto z_{i_1}[y_1, z_{i_2}], \qquad \theta_2 : y_1z_{i_1}z_{i_2} \mapsto z_{i_2}[y_1, z_{i_1}],$$

$$\theta_3 : y_1z_{i_1}z_{i_2} \mapsto [y_1, z_{i_1}, z_{i_2}], \quad \theta_4 : y_1z_{i_1}z_{i_2} \mapsto [z_{i_1}, z_{i_2}, y_1].$$

Por outro lado, em algumas situações pode ser impossível construir um φ-polinômio Y-próprio a partir de um monômio $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$. Por exemplo, é impossível construir um φ-polinômio Y-próprio a partir do polinômio $h = y_1^n$, usando somente a variável y_1. Neste caso, temos o homomorfismo nulo. Agora, como outro exemplo, consideramos $f = y_1[z_1, z_2] = y_1z_1z_2 - y_1z_2z_1$ um vetor de peso máximo associado ao par de partições $((1), (1^2)) \vdash 3$ e construímos os possíveis φ-polinômios Y-próprios obtidos de f usando os homomorfismos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ e θ_4 definidos acima. Esses φ-polinômios são os seguintes:
$\theta_1(f) = z_1[y_1, z_2] - z_2[y_1, z_1]$,
$\theta_2(f) = z_2[y_1, z_1] - z_1[y_1, z_2] = -\theta_1(f)$,
$\theta_3(f) = [y_1, z_1, z_2] - [y_1, z_2, z_1] = [y_1, z_1, z_2] + [z_2, z_1, y_1] + [z_1, y_1, z_2] = -[z_1, z_2, y_1]$,
$\theta_4(f) = [z_1, z_2, y_1] - [z_2, z_1, y_1] = 2[z_1, z_2, y_1] = -2\theta_3(f)$.

Note que os polinômios $\theta_1(f)$ e $\theta_3(f)$ são linearmente independentes.

A seguir aplicaremos o seguinte procedimento geral para determinar as multiplicidades $\overline{m}_{\lambda,\mu}$ em (2.5). Para um par de partições fixo (λ, μ) e um vetor de peso máximo fixo $f_{\lambda,\mu} = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in F^n_{m,\varphi}$, consideramos um homomorfismo θ construído tal como nos exemplos dados acima. Então $\theta(f_{\lambda,\mu})$, se diferente de zero, é um vetor de peso máximo em $B^n_{m,\varphi}$.

Como cada vetor de peso máximo em $F^n_{m,\varphi}$ é uma combinação linear de específicos vetores f_{T_λ,T_μ}, então qualquer vetor de peso máximo em $\theta(F^n_{m,\varphi}) \subset B^n_{m,\varphi}$ é da forma $\theta(f_{\lambda,\mu})$, para algum $f_{\lambda,\mu} \in F^n_{m,\varphi}$ e é combinação linear de $\theta(f_{T_\lambda,T_\mu})$.

Desse modo, podemos escolher um sistema maximal linearmente independente em $\cup_\theta\{\theta(f_{T_\lambda,T_\mu})\}$, onde a união é sobre todos possíveis homomorfismos não nulos $\theta : F^n_{m,\varphi} \to B^n_{m,\varphi}$ definidos em (2.6).

O número máximo de φ-polinômios Y-próprios linearmente independentes obtidos é a multiplicidade $\overline{m}_{\lambda,\mu}$ do correspondente $GL_m \times GL_m$-módulo irredutível em $B^n_{m,\varphi}$. Finalmente, enfatizamos que consideramos a linearização de cada φ-polinômio Y-próprio obtido desse processo.

Usando esse método, observamos no exemplo dado que, $\theta_1(f)$ e $\theta_3(f)$ são linearmente independentes, e assim a multiplicidade de $\chi_{(1),(1^2)}$ em $\chi(\Gamma_3^{\varphi})$ é $\overline{m}_{(1),(1^2)} = 2$. Lembremos que o grau $d_{\lambda,\mu}$ do H_n-caracter irredutível $\chi_{\lambda,\mu}$ é dado por

$$d_{\lambda,\mu} = \binom{n}{r} d_\lambda d_\mu,$$

com $\lambda \vdash r$ e $\mu \vdash (n-r)$, onde d_λ e d_μ são os graus dos caracteres irredutíveis χ_λ e χ_μ, respectivamente. Tais graus são dados pela fórmula do gancho [16].

Agora estamos prontos para calcular a decomposição de $\chi(\Gamma_n^{\varphi})$, para $n = 2$ e $n = 3$. Dispomos os resultados nas tabelas a seguir.

(λ, μ)	$d_{\lambda,\mu}$	vetores de peso máximo	imagens pelos homomorfismos	polinômios Y-próprios multilineares via o homomorfismo	$\overline{m}_{\lambda,\mu}$
$(2), \varnothing$	1	y_1^2			0
$(1), (1)$	2	$y_1 z_1$	$\theta_1(y_1 z_1) = [y_1, z_1]$	$g_1 = [y, z]$	1
$(1^2), \varnothing$	1	$[y_1, y_2]$	$\theta_2(y_{i_1} y_{i_2}) = [y_{i_1}, y_{i_2}]$	$g_2 = [y_1, y_2]$	1
$\varnothing, (1^2)$	1	$[z_1, z_2]$	$\theta_3(z_{i_1} z_{i_2}) = z_{i_1} z_{i_2}$ $\theta_4(z_{i_1} z_{i_2}) = [z_{i_1}, z_{i_2}]$	$g_3 = [z_1, z_2]$	1
$\varnothing, (2)$	1	z_1^2	$\theta_5(z_1^2) = z_1^2$	$g_4 = z_1 \circ z_2$	1

Tabela 1: $\chi(\Gamma_2^{\varphi}) = \chi_{(1),(1)} + \chi_{(1^2),\varnothing} + \chi_{\varnothing,(1^2)} + \chi_{\varnothing,(2)}$

(λ,μ)	$d_{\lambda,\mu}$	vetores de peso máximo	imagens pelos homomorfismos	polinômios Y-próprios multilineares via o homomorfismo	$\overline{m}_{\lambda,\mu}$
$(3), \varnothing$	1	y_1^3			0
$(2,1), \varnothing$	2	$[y_1, y_2]y_1$	$\theta_1(y_1y_2y_1) = [y_1, y_2, y_1]$	$f_1 = [y_1, y_2, y_3] + [y_3, y_2, y_1]$	1
$(1^3), \varnothing$	1	$St_3(y_1, y_2, y_3)$			0
$(2), (1)$	3	$y_1^2 z_1$	$\theta_2(y_1^2 z_1) = [y_1, z_1, y_1]$	$f_2 = [y_1, z, y_2] + [y_2, z, y_1]$	1
$(1^2), (1)$	3	$[y_1, y_2]z_1$	$\theta_3(y_{i_1}y_{i_2}z_1) = [y_{i_1}, y_{i_2}, z_1]$ $\theta_4(y_{i_1}y_{i_2}z_1) = z_1[y_{i_1}, y_{i_2}]$	$f_3 = [y_1, y_2, z]$ $f_3' = z[y_1, y_2]$	2
$(1), (1^2)$	3	$y_1[z_1, z_2]$	$\theta_5(y_1z_{i_1}z_{i_2}) = z_{i_1}[y_1, z_{i_2}]$ $\theta_6(y_1z_{i_1}z_{i_2}) = [z_{i_1}, z_{i_2}, y_1]$	$f_4 = z_1[y, z_2]$ $f_4' = [z_1, z_2, y]$	2
$(1), (2)$	3	$y_1 z_1^2$	$\theta_7(y_1z_1^2) = [y_1, z_1, z_1]$ $\theta_8(y_1z_1^2) = z_1[y_1, z_1]$	$f_5 = [y, z_1, z_2] + [y, z_2, z_1]$ $f_5' = z_1[y, z_2] + z_2[y, z_1]$	2
$\varnothing, (1^3)$	1	$St_3(z_1, z_2, z_3)$	$\theta_9(z_{i_1}z_{i_2}z_{i_3}) = z_{i_1}z_{i_2}z_{i_3}$	$f_6 = St_3(z_1, z_2, z_3)$	1
$\varnothing, (2,1)$	2	$[z_1, z_2]z_1$	$\theta_{10}(z_1z_2z_1) = [z_1, z_2, z_1]$ $\theta_{11}(z_1z_2z_1) = z_1[z_1, z_2]$	$f_7 = [z_1, z_2, z_3] + [z_3, z_2, z_1]$ $f_7' = z_1[z_3, z_2] + z_3[z_1, z_2]$	2
$\varnothing, (3)$	1	z_1^3	$\theta_{12}(z_1^3) = z_1^3$	$f_8 = \sum\limits_{\sigma \in S_3} z_{\sigma(1)}z_{\sigma(2)}z_{\sigma(3)}$	1

Tabela 2:

$\chi(\Gamma_3^{\varphi}) = \chi_{(2,1),\varnothing} + \chi_{(2),(1)} + 2\chi_{(1^2),(1)} + 2\chi_{(1),(1^2)} + 2\chi_{(1),(2)} + \chi_{\varnothing,(1^3)} + 2\chi_{\varnothing,(2,1)} + \chi_{\varnothing,(3)}.$

Para obter os resultados das Tabelas 1 e 2, levamos em consideração a decomposição do caracter $\chi(\Gamma_n^{\varphi})$, $n = 2, 3$ em caracteres irredutíveis, o fato que $\chi(\Gamma_n^{\varphi})(1) = \dim_F \Gamma_n^{\varphi}$ e que as multiplicidades $\overline{m}_{\lambda,\mu}$ são iguais ao número máximo de φ-polinômios Y-próprios linearmente independentes associados ao par de partições $(\lambda, \mu) \vdash n$.

A seguir, vamos usar o Teorema 2.9 para dar exemplos de $*$-variedades minimais que não estão em $\mathrm{var}^*(M)$ e nem em $\mathrm{var}^*(D_*)$.

Observação 2.10. *Lembre que $B(Y)$ é a subálgebra de $F\langle Y \cup Z\rangle$ dos polinômios Y-próprios. Note que, se I é um T^{φ}-ideal gerado por polinômios Y-próprios, então I é ideal de $F\langle Y \cup Z\rangle$, $\mathrm{Id}^{\varphi}\left(\dfrac{F\langle Y \cup Z\rangle}{I}\right) = I$ e $A = \dfrac{F\langle Y \cup Z\rangle}{I}$ é uma φ-álgebra unitária.*

De acordo com a observação acima, para cada $k \geq 2$, existe uma $*$-variedade gerada por uma álgebra unitária determinada pelo T^*-ideal

$$\langle [y_1, y_2], [y, z], z_1 \circ z_2, z_1 z_2 \ldots z_{k+1} \rangle_{T^*}.$$

A partir de agora, vamos denotar por $\mathcal{T}_{k,*}$ tal variedade.

Teorema 2.11. *Para $k \geq 2$, temos* $c_n^*(\mathcal{T}_{k,*}) = 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{k}$.

Demonstração. Como os geradores de Γ_{k+1}^* são consequências dos polinômios $[y_1, y_2]$, $[y, z]$, $z_1 \circ z_2$ e $z_1 z_2 \dots z_{k+1}$, temos que

$$\Gamma_{k+1}^* \subseteq \mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{k,*}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], z_1 \circ z_2, z_1 z_2 \dots z_{k+1} \rangle_{T^*}.$$

Logo, pelo Lema 2.7, segue que $c_n^*(\mathcal{T}_{k,*}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \gamma_j^*(\mathcal{T}_{k,*})$ e, portanto, resta mostrar que $\gamma_j^*(\mathcal{T}_{k,*}) = 1$, para $j = 0, 1, \dots, k$.

Claramente, $\gamma_j^*(\mathcal{T}_{k,*}) = 1$, para $j = 0, 1$, pois $\Gamma_0^* = span_F\{1\}$ e $\Gamma_1^* = span_F\{z\}$. Para $2 \leq j \leq k$, observemos que $z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_j} \equiv \pm z_1 z_2 \dots z_j \pmod{\mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{k,*})}$ pois $z_1 \circ z_2 \in \mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{k,*})$. Assim, como os elementos de Γ_j^* são consequências dos polinômios $[y_1, y_2], [y, z] \in \mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{k,*})$ e de $z_1 z_2 \dots z_j$, segue que $\frac{\Gamma_j^*}{\Gamma_j^* \cap \mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{k,*})} = span_F\{z_1 z_2 \dots z_j\}$, e consequentemente $\gamma_j^*(\mathcal{T}_{k,*}) = 1$, para $2 \leq j \leq k$. □

Teorema 2.12. *A $*$-variedade $\mathcal{T}_{k,*}$ é minimal de crescimento n^k.*

Demonstração. Já provamos no teorema anterior que $\mathcal{T}_{k,*}$ tem crescimento n^k. Agora, vamos provar a minimalidade de $\mathcal{T}_{k,*}$ através do Teorema 2.9. Começamos considerando a decomposição de seu k-ésimo $*$-cocaracter próprio

$$\pi_k^*(\mathcal{T}_{k,*}) = \sum_{(\lambda,\mu) \vdash k} \widetilde{m}_{\lambda,\mu} \chi_{\lambda,\mu}.$$

Pelo teorema anterior, temos $\pi_k^*(\mathcal{T}_{k,*})(1) = \gamma_k^*(\mathcal{T}_{k,*}) = 1$. Assim, existe um par de partições $(\lambda, \mu) \vdash k$ tal que $\widetilde{m}_{\lambda,\mu} = \chi_{\lambda,\mu}(1) = 1$, enquanto que $\widetilde{m}_{\theta,\tau} = 0$ para todo par de partições $(\theta, \tau) \vdash k$, $(\theta, \tau) \neq (\lambda, \mu)$.

Note que, os vetores de peso máximo Y-próprios associados a pares de partições $(\lambda, \mu) \vdash k$, com $\lambda \neq \varnothing$, são consequências dos polinômios $[y_1, y_2], [y, z] \in \mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{k,*})$. Logo, os possíveis vetores de peso máximo Y-próprios que não são $*$-identidades da variedade $\mathcal{T}_{k,*}$ são aqueles associados a pares de partições $(\varnothing, \mu)$, com $\mu \vdash k$.

Primeiramente, observemos que o vetor de peso máximo Y-próprio multilinear associado a $(\varnothing, (k))$ é $f_{\varnothing,(k)} = \sum_{\sigma \in S_k} z_{\sigma(1)} \cdots z_{\sigma(k)} \in \mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{k,*})$, pois $z_1 \circ z_2 \rightsquigarrow f_{\varnothing,(k)}$. Por outro lado, desde que $z_1 \circ z_2 \in \mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{k,*})$, temos

$$St_k(z_1, \ldots, z_k) \equiv k! z_1 \cdots z_k \pmod{\mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{k,*})}.$$

Logo, o único vetor de peso máximo Y-próprio que não é $*$-identidade de $\mathcal{T}_{k,*}$ é $f_{\varnothing,(1^k)} = St_k(z_1, \ldots, z_k)$ e portanto, $\pi_k^*(\mathcal{T}_{k,*}) = \chi_{\varnothing,(1^k)}$.

Agora vamos verificar que, para cada $h < k$ e para cada $(\nu, \theta) \vdash h$ com $f_{\nu,\theta} \notin \mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{k,*})$, temos $f_{\nu,\theta} \rightsquigarrow f_{\varnothing,(1^k)} \pmod{\mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{k,*})}$. Para $h = 1$ temos que $z \notin \mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{k,*})$ e $z \rightsquigarrow f_{\varnothing,(1^k)}$. Além disso, para $2 \leq h < k$, temos $\gamma_h^*(\mathcal{T}_{k,*}) = 1$ e, usando o mesmo raciocínio anterior, podemos concluir que os possíveis vetores de peso máximo Y-próprios que não são $*$-identidades da variedade $\mathcal{T}_{k,*}$ são aqueles associados a pares de partições $(\varnothing, \mu) \vdash h$. Desde que $St_h(z_1, \ldots, z_h) \equiv h! z_1 \cdots z_h \pmod{\mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{k,*})}$, concluímos que os vetores de peso máximo $f_{\varnothing,(1^h)} \notin \mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{k,*})$ e temos $f_{\varnothing,(1^h)} \rightsquigarrow f_{\varnothing,(1^k)}$. Com isso, temos que a $*$-variedade $\mathcal{T}_{k,*}$ é minimal. □

Consideremos $G_{k,*}$ a álgebra de Grassmann de dimensão finita G_k munida da involução $*$ tal que $e_i^* = -e_i, 1 \leq i \leq k$. La Mattina e Misso em [28, Lema 16] provaram que $\mathrm{Id}^*(G_{2,*}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], z_1 \circ z_2, z_1 z_2 z_3 \rangle_{T^*}$ e $c_n^*(G_{2,*}) = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$.

Observemos que $\mathcal{T}_{2,*} = \mathrm{var}^*(G_{2,*})$, ou seja, $G_{2,*}$ é uma $*$-álgebra minimal de crescimento quadrático. Por outro lado, para $k = 3$, temos $\mathcal{T}_{3,*} \neq \mathrm{var}^*(G_{3,*})$ e também não é verdade que $G_{3,*}$ seja minimal. De fato, temos que

$$(G_{3,*})^+ = span_F\{1, e_1 e_2 e_3\} \text{ e } (G_{3,*})^- = span_F\{e_1, e_2, e_3, e_1 e_2, e_1 e_3, e_2 e_3\},$$

com isso, obtemos o seguinte

i) $\mathrm{Id}^*(G_{3,*}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], [z_1, z_2 z_3], z_1 z_2 z_3 + z_3 z_2 z_1, z_1 z_2 z_3 z_4 \rangle_{T^*}$;

ii) $\mathcal{T}_{3,*} \subsetneq \mathrm{var}^*(G_{3,*})$;

iii) $G_{3,*}$ tem crescimento n^3 e não é minimal.

O item i) pode ser facilmente demonstrado. Para ver o item ii), primeiramente observamos que $[z_1, z_2z_3] = (z_1 \circ z_2)z_3 - z_2(z_1 \circ z_3)$ e além disso, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 = (z_1 \circ z_2)z_3 + (z_2 \circ z_3)z_1 - z_2(z_1 \circ z_3)$. Segue que $z_1 \circ z_2 \rightsquigarrow [z_1, z_2z_3], z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ e portanto $\mathcal{T}_{3,*} \subset \mathrm{var}^*(G_{3,*})$. Para ver que a inclusão é própria, basta observar que $z_1 \circ z_2 \notin \mathrm{Id}^*(G_{3,*})$. Finalmente, é fácil ver que $\Gamma_4^* \subset \mathrm{Id}^*(G_{3,*})$ e desde que $z_1z_2z_3 \notin \mathrm{Id}^*(G_{3,*})$, pelo Lema 2.7, temos que $G_{3,*}$ tem crescimento cúbico e não é minimal, pois $\mathrm{var}^*(G_{3,*})$ contém propriamente $\mathcal{T}_{3,*}$.

2.4 Classificação das φ-variedades minimais de crescimento no máximo quadrático

Na Seção 1.2 vimos alguns exemplos de φ-variedades minimais geradas por álgebras unitárias. Agora, vamos classificar tais φ-variedades com crescimento no máximo quadrático. Primeiramente, trabalharemos com o caso com involução.

2.4.1 $*$-variedades minimais de crescimento no máximo quadrático

Iniciamos com o resultado a seguir, o qual classifica as $*$-variedades com crescimento linear.

Teorema 2.13. *Seja A uma $*$-álgebra unitária tal que $c_n^*(A) \approx \alpha n$, para alguma constante $\alpha \neq 0$. Então A gera uma $*$-variedade minimal se, e somente se, $A \sim_{T^*} C_{2,*}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.19, $C_{2,*}$ gera uma $*$-variedade minimal de crescimento linear. Reciprocamente, suponha que A gera uma $*$-variedade minimal tal que $c_n^*(A) \approx \alpha n$, então pela Observação 2.8, $\Gamma_2^* \subseteq \mathrm{Id}^*(A)$. Portanto, $[x_1, x_2] \in \mathrm{Id}^*(A), x_1, x_2 \in Y \cup Z$, assim $\mathrm{var}^*(A) \subsetneq \mathrm{var}^*(D_*)$. Logo, pelo Teorema 1.19 e Lema 1.20, $A \sim_{T^*} C_{2,*}$. □

Note que, pelos Lemas 1.16 e 1.20, $C_{2,*} \sim_{T^*} P_{2,\rho}$.

Temos o seguinte resultado que classifica as $*$-variedades minimais geradas por álgebras unitárias de crescimento quadrático.

Teorema 2.14. *Seja A uma $*$-álgebra unitária tal que $c_n^*(A) \approx \alpha n^2$, para alguma constante $\alpha \neq 0$. Então A gera uma $*$-variedade minimal se, e somente se, $A \sim_{T^*} P_{3,\rho}$ ou $A \sim_{T^*} Q_{3,\rho}$ ou $A \sim_{T^*} G_{2,*}$ ou $A \sim_{T^*} C_{3,*}$.*

Demonstração. Pelos Teoremas 1.15, 1.19 e 2.12, as álgebras $P_{3,\rho}, Q_{3,\rho}, G_{2,*}$ e $C_{3,*}$ geram $*$-variedades minimais de crescimento quadrático. Reciprocamente, se A gera uma $*$-variedade minimal de crescimento quadrático, então, pela Observação 2.8, $\Gamma_3^* \subseteq \mathrm{Id}^*(A)$. Pelo Teorema 2.9, temos $\pi_2^*(A) = \chi_{\lambda,\mu}$, com $(\lambda, \mu) \in \{((1),(1)),((1^2),\varnothing),(\varnothing,(1^2)),(\varnothing,(2))\}$.

Por outro lado, pela Tabela 1, temos os vetores de peso máximo Y-próprios multilineares $g_1 = [y,z], g_2 = [y_1,y_2], g_3 = [z_1,z_2], g_4 = z_1 \circ z_2$ associados aos pares de partições $((1),(1)),((1^2),\varnothing),(\varnothing,(1^2)),(\varnothing,(2))$, respectivamente. Assim temos quatro casos a considerar:

1) Se $\pi_2^*(A) = \chi_{(1),(1)}$, então $g_1 \notin \mathrm{Id}^*(A)$ e $\langle g_2, g_3, g_4\rangle_{T^*} \subseteq \mathrm{Id}^*(A)$. Logo $\langle g_2, z_1z_2\rangle_{T^*} \subseteq \mathrm{Id}^*(A)$ e usando o Lema 1.16, temos $\mathrm{Id}^*(P_{3,\rho}) \subseteq \mathrm{Id}^*(A)$. Como $P_{3,\rho}$ é minimal de crescimento quadrático, segue que $A \sim_{T^*} P_{3,\rho}$.

2) Se $\pi_2^*(A) = \chi_{(1^2),\varnothing}$, temos que $g_2 \notin \mathrm{Id}^*(A)$ e $\langle g_1, g_3, g_4\rangle_{T^*} \subseteq \mathrm{Id}^*(A)$. Logo $\langle g_1, z_1z_2\rangle_{T^*} \subseteq \mathrm{Id}^*(A)$. Portanto, pelo Lema 1.17, $\mathrm{Id}^*(Q_{3,\rho}) \subseteq \mathrm{Id}^*(A)$. Como $Q_{3,\rho}$ é minimal de crescimento quadrático, $A \sim_{T^*} Q_{3,\rho}$.

3) Se $\pi_2^*(A) = \chi_{\varnothing,(1^2)}$, então $g_3 \notin \mathrm{Id}^*(A)$, $\langle g_1, g_2, g_4\rangle_{T^*} \subseteq \mathrm{Id}^*(A)$. Assim, $\mathrm{Id}^*(G_{2,*}) = \langle [y_1,y_2],[y,z], z_1 \circ z_2, z_1z_2z_3\rangle_{T^*} \subseteq \mathrm{Id}^*(A)$. Como $G_{2,*}$ é minimal de crescimento quadrático, temos $A \sim_{T^*} G_{2,*}$.

4) Se $\pi_2^*(A) = \chi_{\varnothing,(2)}$, temos que $g_4 \notin \mathrm{Id}^*(A)$ e $\langle g_1, g_2, g_3\rangle_{T^*} \subseteq \mathrm{Id}^*(A)$. Assim, $\mathrm{Id}^*(D_*) \subseteq \mathrm{Id}^*(A)$, pelo Teorema 1.19 e Lema 1.20, segue que $A \sim_{T^*} C_{3,*}$.

□

2.4.2 Supervariedades minimais de crescimento no máximo quadrático

Agora, classificaremos as supervariedades de crescimento no máximo quadrático.

Teorema 2.15. *Seja A uma superálgebra unitária tal que $c_n^{gr}(A) \approx \alpha n$, para alguma constante $\alpha \neq 0$. Então A gera uma supervariedade minimal se, e somente se, $A \sim_{T_2} C_2^{gr}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.26, C_2^{gr} gera uma supervariedade minimal de crescimento linear. Reciprocamente, se A é uma superálgebra unitária tal que $c_n^{gr}(A) \approx \alpha n$, então pela Observação 2.8, $\Gamma_2^{gr} \subseteq \mathrm{Id}^{gr}(A)$. Assim, $[x_1, x_2] \in \mathrm{Id}^{gr}(A)$, com $x_1, x_2 \in Y \cup Z$. Logo $\mathrm{Id}^{gr}(D^{gr}) \subseteq \mathrm{Id}^{gr}(A)$. Portanto, pelo Teorema 1.26 e Lema 1.23, $A \sim_{T_2} C_2^{gr} = N_2^{gr}$. □

O próximo resultado mostra que não existe superálgebra unitária minimal de crescimento quadrático com graduação não trivial, cuja componente par seja não comutativa.

Proposição 2.16. *Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra unitária minimal de crescimento quadrático. Se $z \notin \mathrm{Id}^{gr}(A)$, então $[y_1, y_2] \in \mathrm{Id}^{gr}(A)$.*

Demonstração. Por hipótese, a graduação de A é não trivial e temos que $A^{(0)}$ é uma subálgebra graduada de A. Assim $\mathrm{var}^{gr}(A^{(0)}) \subsetneq \mathrm{var}^{gr}(A)$.

Como A é minimal de crescimento quadrático, temos $c_n^{gr}(A^{(0)}) \leq \alpha n$, para algum $\alpha > 0$. Como $1 \in A^{(0)}$, segue que $\Gamma_i^{gr} \subseteq \mathrm{Id}^{gr}(A^{(0)})$, para todo $i \geq 2$. Logo, $[y_1, y_2] \in \mathrm{Id}^{gr}(A)$. □

Teorema 2.17. *Seja A uma superálgebra unitária tal que $c_n^{gr}(A) \approx \alpha n^2$, para alguma constante $\alpha \neq 0$. Então A gera uma supervariedade minimal se, e somente se, $A \sim_{T_2} N_3^{gr}$ ou $A \sim_{T_2} G_2$ ou $A \sim_{T_2} G_2^{gr}$ ou $A \sim_{T_2} C_3^{gr}$.*

Demonstração. Pelos Teoremas $1.5, 1.22, 1.24$ e 1.26, as superálgebras N_3^{gr}, G_2, G_2^{gr}, C_3^{gr} geram variedades minimais de crescimento quadrático. Reciprocamente, se A

gera uma supervariedade minimal de crescimento quadrático, então, pela Observação 2.8, $\Gamma_3^{gr} \subseteq \mathrm{Id}^{gr}(A)$. Além disso, pelo Teorema 2.9, $\pi_2^{gr}(A) = \chi_{\lambda,\mu}$, com $(\lambda,\mu) \in \{((1),(1)),((1^2),\varnothing),(\varnothing,(1^2)),(\varnothing,(2))\}$.

Pela Tabela 1, consideramos os vetores de peso máximo Y-próprios multilineares $g_1 = [y,z], g_2 = [y_1,y_2], g_3 = [z_1,z_2], g_4 = z_1 \circ z_2$ associados aos pares de partições $((1),(1)),((1^2),\varnothing),(\varnothing,(1^2)),(\varnothing,(2))$, respectivamente. Assim temos os seguintes casos para analisar:

1) Se $\pi_2^{gr}(A) = \chi_{(1),(1)}$, temos que $g_1 \notin \mathrm{Id}^{gr}(A)$, $\langle g_2, g_3, g_4\rangle_{T_2} \subseteq \mathrm{Id}^{gr}(A)$, logo $\langle g_2, z_1z_2\rangle_{T_2} \subseteq \mathrm{Id}^{gr}(A)$. Assim, $\mathrm{var}^{gr}(A) \subsetneq \mathrm{var}^{gr}(UT_2^{gr})$. Pelo Teorema 1.22, segue que $A \sim_{T_2} N_3^{gr}$.

2) Se $\pi_2^{gr}(A) = \chi_{(1^2),\varnothing}$, então $g_2 \notin \mathrm{Id}^{gr}(A)$. Logo, pela Proposição 2.16, A deve ter graduação trivial. Portanto, como $\Gamma_3^{gr} \subseteq \mathrm{Id}^{gr}(A)$, $\mathrm{var}^{gr}(A) \subsetneq \mathrm{var}^{gr}(\mathcal{G})$. Pelo Teorema 1.5, temos $A \sim_{T_2} G_2$.

3) Se $\pi_2^{gr}(A) = \chi_{\varnothing,(1^2)}$, temos que $g_3 \notin \mathrm{Id}^{gr}(A)$ e $\langle g_1, g_2, g_4\rangle_{T_2} \subseteq \mathrm{Id}^{gr}(A)$. Portanto, $\mathrm{var}^{gr}(A) \subsetneq \mathrm{var}^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$. Pelo Teorema 1.24, segue que $A \sim_{T_2} G_2^{gr}$.

4) Se $\pi_2^{gr}(A) = \chi_{\varnothing,(2)}$, então $g_4 \notin \mathrm{Id}^{gr}(A)$ e $\langle g_1, g_2, g_3\rangle_{T_2} \subseteq \mathrm{Id}^{gr}(A)$. Logo, $\mathrm{var}^{gr}(A) \subsetneq \mathrm{var}^{gr}(D^{gr})$. Pelo Teorema 1.26, $A \sim_{T_2} C_3^{gr}$.

□

Assim, finalizamos a classificação de todas φ-variedades minimais geradas por álgebras unitárias com crescimento no máximo quadrático.

Capítulo 3

φ-variedades minimais de crescimento $n^k, k \geq 3$

Nas próximas duas seções, classificaremos as φ-variedades minimais geradas por álgebras unitárias de crescimento cúbico e, na última seção, vamos generalizar as ideias, classificando todas as φ-variedades minimais geradas por álgebras unitárias de crescimento $n^k, k \geq 4$.

Como vimos na Seção 2.3, a decomposição do H_n-caracter de Γ_3^φ é dada por:

$$\chi(\Gamma_3^\varphi) = \chi_{(2,1),\varnothing} + \chi_{(2),(1)} + 2\chi_{(1^2),(1)} + 2\chi_{(1),(1^2)} + 2\chi_{(1),(2)} + \chi_{\varnothing,(1^3)} + 2\chi_{\varnothing,(2,1)} + \chi_{\varnothing,(3)}. \tag{3.1}$$

Note que na decomposição acima, temos quatro pares de partições (λ, μ) de 3 com multiplicidade $m_{\lambda,\mu} = 1$ e também quatro pares de partições (η, θ) de 3 com multiplicidade $m_{\eta,\theta} = 2$. Considerando $\mathcal{V}$ uma φ-variedade minimal de crescimento cúbico, primeiramente, trabalhamos com o caso em que $\pi_3^\varphi(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$, onde $m_{\lambda,\mu} = 1$ e depois com o caso em que $\pi_3^\varphi(\mathcal{V}) = \chi_{\eta,\theta}$, onde $m_{\eta,\theta} = 2$ na decomposição (3.1). Classificamos as φ-variedades minimais geradas por álgebras unitárias de crescimento cúbico estudando esses dois casos possíveis. Primeiro provaremos que existe um número finito de φ-variedades minimais $\mathcal{V}$ tais que $\pi_3^\varphi(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$, onde $m_{\lambda,\mu} = 1$, o qual chamaremos de Caso 1. Depois consideraremos $\pi_3^\varphi(\mathcal{V}) = \chi_{\eta,\theta}$, onde $m_{\eta,\theta} = 2$ que chamaremos de Caso 2. Neste caso, provamos que o número de φ-variedades minimais geradas por álgebras unitárias pode ser infinito e determinamos os T^{φ}-ideais das correspondentes φ-variedades.

3.1 φ-variedades minimais de crescimento cúbico: Caso 1

A seguir lembramos os vetores de peso máximo Y-próprios multilineares de grau 3 apresentados na Tabela 2.

$$f_1 = f_{(2,1),\varnothing} = [y_1, y_2, y_3] + [y_3, y_2, y_1]$$

$$f_2 = f_{(2),(1)} = [y_1, z, y_2] + [y_2, z, y_1]$$

$$f_3 = f_{(1^2),(1)} = [y_1, y_2, z], \;\; f_3' = f'_{(1^2),(1)} = z[y_1, y_2]$$

$$f_4 = f_{(1),(1^2)} = z_1[y, z_2], \;\; f_4' = f'_{(1),(1^2)} = [z_1, z_2, y]$$

$$f_5 = f_{(1),(2)} = [y, z_1, z_2] + [y, z_2, z_1], \;\; f_5' = f'_{(1),(2)} = z_1[y, z_2] + z_2[y, z_1]$$

$$f_6 = f_{\varnothing,(1^3)} = St_3(z_1, z_2, z_3)$$

$$f_7 = f_{\varnothing,(2,1)} = [z_1, z_2, z_3] + [z_3, z_2, z_1], \;\; f_7' = f'_{\varnothing,(2,1)} = z_1[z_3, z_2] + z_3[z_1, z_2]$$

$$f_8 = f_{\varnothing,(3)} = \sum_{\sigma \in S_3} z_{\sigma(1)} z_{\sigma(2)} z_{\sigma(3)}.$$

De acordo com o Teorema 2.9, os polinômios listados acima terão papel fundamental na classificação das φ-variedades minimais de crescimento cúbico.

Primeiramente consideramos o caso com involução.

3.1.1 $*$-variedades minimais de crescimento cúbico

Recordemos que as $*$-álgebras $Q_{4,\rho}$ e $P_{4,\rho}$ são unitárias e geram $*$-variedades minimais de crescimento cúbico. Antes de iniciar nossa classificação, nos próximos dois lemas, apresentamos as decomposições de $\chi_3^*(Q_{4,\rho})$ e $\chi_3^*(P_{4,\rho})$ que serão importantes para determinarmos $\pi_3^*(Q_{4,\rho})$ e $\pi_3^*(P_{4,\rho})$, respectivamente.

Lema 3.1. $\chi_3^*(Q_{4,\rho}) = \chi_{(3),\varnothing} + 2\chi_{(2,1),\varnothing} + \chi_{(1^3),\varnothing} + 2\chi_{(2),(1)} + \chi_{(1^2),(1)}$.

Demonstração. Temos que $c_n^*(Q_{k,\rho}) = 1 + \sum_{j=1}^{k-2} \binom{n}{j}(2j-1) + \binom{n}{k-1}(k-2)$ (Lema 1.17). Logo $c_3^*(Q_{4,\rho}) = 15$. Como $d_{(3),\varnothing} + 2d_{(2,1),\varnothing} + d_{(1^3),\varnothing} + 2d_{(2),(1)} + d_{(1^2),(1)} = \binom{3}{0} + 2\binom{3}{0}2 + \binom{3}{0} + 2\binom{3}{1} + \binom{3}{1} = 15$, devemos mostrar que as multiplicidades não nulas dos caracteres irredutíveis na decomposição de $\chi_3^*(Q_{4,\rho})$ são $m_{(3),\varnothing} = m_{(1^3),\varnothing} = m_{(1^2),(1)} = 1$ e $m_{(2,1),\varnothing} = m_{(2),(1)} = 2$.

Observemos que
$(Q_{4,\rho})^+ = span_F\{I, e_{12}+e_{78}, e_{13}+e_{68}, e_{14}+e_{58}, e_{23}+e_{67}+e_{34}+e_{56}, e_{24}+e_{57}\}$, onde I denota a matriz identidade 8×8 e $(Q_{4,\rho})^- = span_F\{e_{13}-e_{68}, e_{14}-e_{58}\}$.

Considere os seguintes vetores de peso máximo $\widetilde{f}_{(3),\varnothing} = y_1^3$, $\widetilde{f}_{(1^3),\varnothing} = St_3(y_1,y_2,y_3)$ e $\widetilde{f}_{(1^2),(1)} = y_1z_1y_2 - y_2z_1y_1$ associados aos pares de partições $((3),\varnothing)$, $((1^3),\varnothing)$, $((1^2),(1))$. Como $\widetilde{f}_{(3),\varnothing}(I) = I \neq 0$, $\widetilde{f}_{(1^3),\varnothing}(I, e_{12}+e_{78}, e_{24}+e_{57}) = e_{14}-e_{58} \neq 0$ e $\widetilde{f}_{(1^2),(1)}(I, e_{23}+e_{67}+e_{34}+e_{56}, e_{13}-e_{68}) = e_{14}+e_{58} \neq 0$, segue que $\widetilde{f}_{(3),\varnothing}, \widetilde{f}_{(1^3),\varnothing}, \widetilde{f}_{(1^2),(1)} \notin \mathrm{Id}^*(Q_{4,\rho})$ e $m_{(3),\varnothing}, m_{(1^3),\varnothing}, m_{(1^2),(1)} \geq 1$. Com isso, é suficiente determinar dois vetores de peso máximo associados a cada par de partições $((2,1),\varnothing)$ e $((2),(1))$ que sejam linearmente independentes e não sejam $*$-identidades de $Q_{4,\rho}$ para concluirmos que $\chi_3^*(Q_{4,\rho})$ tem a decomposição dada acima.

Considere $\widetilde{f}_{(2,1),\varnothing} = [y_1,y_2]y_1$ e $\widetilde{f}'_{(2,1),\varnothing} = y_1[y_1,y_2]$ vetores de peso máximo associados ao par de partições $((2,1),\varnothing)$ e correspondentes aos pares de tabelas

$$\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\ ,\ \varnothing\right),\ \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\ ,\ \varnothing\right),$$

respectivamente.

Avaliando $\widetilde{f}_{(2,1),\varnothing}$ e $\widetilde{f}'_{(2,1),\varnothing}$ em $a = (e_{23}+e_{67}+e_{34}+e_{56}, e_{12}+e_{78})$, obtemos $\widetilde{f}_{(2,1),\varnothing}(a) = -e_{14} \neq 0$ e $\widetilde{f}'_{(2,1),\varnothing}(a) = e_{58} \neq 0$, logo $\widetilde{f}_{(2,1),\varnothing}$ e $\widetilde{f}'_{(2,1),\varnothing}$ não são $*$-identidades de $Q_{4,\rho}$. Ainda $\widetilde{f}_{(2,1),\varnothing}$ e $\widetilde{f}'_{(2,1),\varnothing}$ são linearmente independentes, portanto $m_{(2,1),\varnothing} \geq 2$.

Agora, considere os vetores de peso máximo $\widetilde{f}_{(2),(1)} = y_1^2 z_1$ e $\widetilde{f}'_{(2),(1)} = z_1 y_1^2$ associados ao par de partições $((2),(1))$ e correspondentes aos pares de tabelas $\left(\boxed{1 \mid 2}\ ,\ \boxed{3} \right)$, $\left(\boxed{2 \mid 3}\ ,\ \boxed{1} \right)$, respectivamente.

Para $b = (I + e_{23} + e_{67} + e_{34} + e_{56}, e_{13} - e_{68})$ temos $\widetilde{f}_{(2),(1)}(b) = e_{13} - e_{68} - 2e_{58} \neq 0$ e $\widetilde{f}'_{(2),(1)}(b) = e_{13} - e_{68} + 2e_{14} \neq 0$. Assim $\widetilde{f}_{(2),(1)}$ e $\widetilde{f}'_{(2),(1)}$ não são $*$-identidades de $Q_{4,\rho}$. Ainda $\widetilde{f}_{(2),(1)}$ e $\widetilde{f}'_{(2),(1)}$ são linearmente independentes, logo $m_{(2),(1)} \geq 2$.

Portanto, concluímos que

$$\chi_3^*(Q_{4,\rho}) = \chi_{(3),\varnothing} + 2\chi_{(2,1),\varnothing} + \chi_{(1^3),\varnothing} + 2\chi_{(2),(1)} + \chi_{(1^2),(1)}.$$

□

Lema 3.2. $\chi_3^*(P_{4,\rho}) = \chi_{(3),\varnothing} + \chi_{(2,1),\varnothing} + \chi_{(1^3),\varnothing} + 3\chi_{(2),(1)} + \chi_{(1^2),(1)}$.

Demonstração. Temos que $c_n^*(P_{k,\rho}) = 1 + \sum_{j=1}^{k-2} \binom{n}{j}(2j-1) + \binom{n}{k-1}(k-1)$ (Lema 1.16). Logo $c_3^*(P_{4,\rho}) = 16$. Como $d_{(3),\varnothing} + d_{(2,1),\varnothing} + d_{(1^3),\varnothing} + 3d_{(2),(1)} + d_{(1^2),(1)} = \binom{3}{0} + \binom{3}{0}2 + \binom{3}{0} + 3\binom{3}{1} + \binom{3}{1} = 16$, devemos mostrar que as multiplicidades não nulas dos caracteres irredutíveis na decomposição de $\chi_3^*(P_{4,\rho})$ são $m_{(3),\varnothing} = m_{(2,1),\varnothing} = m_{(1^3),\varnothing} = m_{(1^2),(1)} = 1$ e $m_{(2),(1)} = 3$.

Observemos que
$(P_{4,\rho})^+ = span_F\{I, e_{13} + e_{68}, e_{14} + e_{58}, e_{23} + e_{67} + e_{34} + e_{56}, e_{24} + e_{57}\}$, onde I denota a matriz identidade 8×8 e $(P_{4,\rho})^- = span_F\{e_{12} - e_{78}, e_{13} - e_{68}, e_{14} - e_{58}\}$.

Considere os seguintes vetores de peso máximo $\widetilde{f}_{(3),\varnothing} = y_1^3$, $\widetilde{f}_{(2,1),\varnothing} = [y_1, y_2]y_1$, $\widetilde{f}_{(1^3),\varnothing} = St_3(y_1, y_2, y_3)$, $\widetilde{f}_{(1^2),(1)} = y_1 z_1 y_2 - y_2 z_1 y_1$ e $\widetilde{f}_{(1),(2)} = z_1 y_1 z_1$. Como $\widetilde{f}_{(3),\varnothing}(I) = I \neq 0$, $\widetilde{f}_{(2,1),\varnothing}(I + e_{13} + e_{68}, e_{23} + e_{67} + e_{34} + e_{56}) = e_{14} - e_{58} \neq 0$, $\widetilde{f}_{(1^3),\varnothing}(I, e_{13} + e_{68}, e_{23} + e_{67} + e_{34} + e_{56}) = e_{14} - e_{58} \neq 0$ e $\widetilde{f}_{(1^2),(1)}(I, e_{23} + e_{67} + e_{34} + e_{56}, e_{13} - e_{68}) = e_{14} + e_{58} \neq 0$, segue que $m_{(3),\varnothing}, m_{(2,1),\varnothing}, m_{(1^3),\varnothing}, m_{(1^2),(1)} \geq 1$. Com isso, é suficiente determinar três vetores de peso máximo associados ao par de partições $((2),(1))$ que sejam linearmente independentes e não sejam $*$-identidades de $P_{4,\rho}$ para concluirmos que $\chi_3^*(P_{4,\rho})$ tem a decomposição dada acima.

Considere os vetores de peso máximo $\widetilde{f}_{(2),(1)} = y_1^2 z_1$, $\widetilde{f}'_{(2),(1)} = z_1 y_1^2$ e $\widetilde{f}''_{(2),(1)} =$

$y_1z_1y_1$ associados ao par de partições $((2),(1))$ e correspondentes aos pares de tabelas $\left(\boxed{1\,|\,2}\,,\,\boxed{3}\right)$, $\left(\boxed{2\,|\,3}\,,\,\boxed{1}\right)$, $\left(\boxed{1\,|\,3}\,,\,\boxed{2}\right)$, respectivamente.

Para $a = (I + e_{23} + e_{67} + e_{34} + e_{56} + e_{24} + e_{57}, e_{12} - e_{78} + e_{13} - e_{68})$ temos $\widetilde{f}_{(2),(1)}(a) = e_{12} - e_{78} + e_{13} - 3e_{68} - 5e_{58} \neq 0$, $\widetilde{f}'_{(2),(1)}(a) = e_{12} - e_{78} + 3e_{13} - e_{68} + 5e_{14} \neq 0$, $\widetilde{f}''_{(2),(1)}(a) = e_{12} - e_{78} + 2e_{13} - 2e_{68} - 2e_{58} + 2e_{14} \neq 0$, portanto $\widetilde{f}_{(2),(1)}, \widetilde{f}'_{(2),(1)}$ e $\widetilde{f}''_{(2),(1)}$ não são $*$-identidades de $P_{4,\rho}$. Ainda $\widetilde{f}_{(2),(1)}, \widetilde{f}'_{(2),(1)}$ e $\widetilde{f}''_{(2),(1)}$ são linearmente independentes, logo $m_{(2),(1)} \geq 3$.

Assim, $\chi_3^*(P_{4,\rho}) = \chi_{(3),\varnothing} + \chi_{(2,1),\varnothing} + \chi_{(1^3),\varnothing} + 3\chi_{(2),(1)} + \chi_{(1^2),(1)}$. □

Agora, temos o resultado sobre o terceiro $*$-cocaracter próprio de $Q_{4,\rho}$ e $P_{4,\rho}$.

Lema 3.3. $\pi_3^*(P_{4,\rho}) = \chi_{(2),(1)}$ *e* $\pi_3^*(Q_{4,\rho}) = \chi_{(2,1),\varnothing}$.

Demonstração. Temos $\pi_3^*(P_{4,\rho}), \pi_3^*(Q_{4,\rho}) \leq \chi(\Gamma_3^*)$, também $\pi_3^*(P_{4,\rho}) \leq \chi_3^*(P_{4,\rho})$ e $\pi_3^*(Q_{4,\rho}) \leq \chi_3^*(Q_{4,\rho})$.

Das decomposições de $\chi_3^*(P_{4,\rho})$ e $\chi(\Gamma_3^*)$, os únicos pares de partições possíveis na decomposição de $\pi_3^*(P_{4,\rho})$ são $((2,1),\varnothing), ((2),(1))$ e $((1^2),(1))$. Pelo Lema 1.16, $f_2 \notin \mathrm{Id}^*(P_{4,\rho})$ e $\langle f_1, f_3, f_3' \rangle_{T^*} \subseteq \mathrm{Id}^*(P_{4,\rho})$, logo $\pi_3^*(P_{4,\rho}) = \chi_{(2),(1)}$.

Das decomposições de $\chi_3^*(Q_{4,\rho})$ e $\chi(\Gamma_3^*)$, os únicos pares de partições possíveis na decomposição de $\pi_3^*(Q_{4,\rho})$ são $((2,1),\varnothing), ((2),(1))$ e $((1^2),(1))$. Pelo Lema 1.17, $f_1 \notin \mathrm{Id}^*(Q_{4,\rho})$ e $\langle f_2, f_3, f_3' \rangle_{T^*} \subseteq \mathrm{Id}^*(Q_{4,\rho})$, assim $\pi_3^*(Q_{4,\rho}) = \chi_{(2,1),\varnothing}$. □

Para os próximos resultados, recordemos que $g_1 = [y, z], g_2 = [y_1, y_2], g_3 = [z_1, z_2]$ e $g_4 = z_1 \circ z_2$ são os vetores de peso máximo Y-próprios dados na Tabela 1.

Lema 3.4. *Seja $\mathcal{V}$ uma $*$-variedade minimal de crescimento cúbico.*

i) Se $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{(2,1),\varnothing}$ ou $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{(2),(1)}$, então $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{var}^*(M)$;

ii) Se $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{\varnothing,(3)}$, então $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{var}^*(D_*)$.

Demonstração. Primeiro suponha que $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{(2,1),\varnothing}$. Logo, $f_1 \notin \mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$. Além disso, como $\mathcal{V}$ é minimal de crescimento cúbico, pelo Teorema 2.9, $g_3, g_4 \in \mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$, pois $g_3, g_4 \not\rightsquigarrow f_1 \pmod{\mathrm{Id}^*(\mathcal{V})}$. Logo $z_1z_2 \in \mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$, consequentemente $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{var}^*(M)$.

De modo análogo, se $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{(2),(1)}$, então como $\mathcal{V}$ é minimal de crescimento cúbico, pelo Teorema 2.9, $g_3, g_4 \in \mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$. Portanto $z_1z_2 \in \mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$. Assim, $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{var}^*(M)$.

Finalmente, se $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{\varnothing,(3)}$, temos que $f_8 \notin \mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$ e como $\mathcal{V}$ é minimal de crescimento cúbico, pelo Teorema 2.9, $g_1, g_2, g_3 \in \mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$, pois $g_1, g_2, g_3 \not\rightsquigarrow f_8 \pmod{\mathrm{Id}^*(\mathcal{V})}$. Logo $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{var}^*(D_*)$. $\square$

Nos dois resultados a seguir, consideramos L_* uma $*$-álgebra unitária geradora da $*$-variedade $\mathcal{T}_{3,*}$ definida na Seção 2.3.

Teorema 3.5. *Se $\mathcal{V}$ é uma variedade minimal de crescimento cúbico gerada por uma $*$-álgebra unitária A, temos que*

i) se $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{(2,1),\varnothing}$, então $A \sim_{T^*} Q_{4,\rho}$;

ii) se $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{(2),(1)}$, então $A \sim_{T^*} P_{4,\rho}$;

iii) se $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{\varnothing,(3)}$, então $A \sim_{T^*} C_{4,*}$;

iv) se $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{\varnothing,(1^3)}$, então $A \sim_{T^*} L_*$.

Demonstração. Sabemos pelos Teoremas 1.15 e 1.19 que as $*$-álgebras $Q_{4,\rho}, P_{4,\rho}, C_{4,*}$ são minimais de crescimento cúbico.

Se $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{(2,1),\varnothing}$, pelo Lema 3.4, $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{var}^*(M)$. Logo pelo Teorema 1.15 e pelo Lema 3.3, temos $A \sim_{T^*} Q_{4,\rho}$.

De modo análogo ao item anterior, provamos que $A \sim_{T^*} P_{4,\rho}$, quando $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{(2),(1)}$.

Pelo Lema 3.4, quando $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{\varnothing,(3)}$, temos $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{var}^*(D_*)$. Logo, pelo Teorema 1.19, $A \sim_{T^*} C_{4,*}$.

Agora, se $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{\varnothing,(1^3)}$, temos $f_6 \notin \mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$ e ainda como $\mathcal{V}$ é minimal de crescimento cúbico, $g_1, g_2, g_4 \in \mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$, pelo Teorema 2.9, pois $g_1, g_2, g_4 \not\rightsquigarrow f_6 \pmod{\mathrm{Id}^*(\mathcal{V})}$. Além disso, $\Gamma_4^* \subseteq \mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$. Como $\mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{k,*}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], z_1 \circ z_2, z_1 z_2 \ldots z_{k+1} \rangle_{T^*}$, segue que $\mathrm{Id}^*(\mathcal{T}_{3,*}) \subseteq \mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$. Pelo Teorema 2.12, $\mathcal{T}_{3,*}$ é $*$-variedade minimal de crescimento cúbico, logo $A \sim_{T^*} L_*$. □

Temos a seguinte consequência imediata.

Corolário 3.6. *Seja $\mathcal{V}$ uma $*$-variedade gerada por uma álgebra unitária A tal que $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$, com $m_{\lambda,\mu} = 1$ na decomposição* (3.1). *Então $\mathcal{V}$ é minimal de crescimento cúbico se, e somente se, ou $A \sim_{T^*} P_{4,\rho}$ ou $A \sim_{T^*} Q_{4,\rho}$ ou $A \sim_{T^*} C_{4,*}$ ou $A \sim_{T^*} L_*$.*

3.1.2 Supervariedades minimais de crescimento cúbico

Agora trabalharemos o caso graduado, iniciando com um lema fundamental para a classificação requerida, onde usaremos os vetores de peso máximo Y-próprios g_1, g_2, g_3, g_4 já conhecidos.

Lema 3.7. *Seja $\mathcal{V}$ uma supervariedade minimal de crescimento cúbico gerada por uma álgebra unitária.*

i) Se $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{(2,1),\varnothing}$, então $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{var}^{gr}(UT_2)$;

ii) Se $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{(2),(1)}$, então $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{var}^{gr}(UT_2^{gr})$;

iii) Se $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{\varnothing,(3)}$, então $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{var}^{gr}(D^{gr})$.

iv) Se $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{\varnothing,(1^3)}$, então $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{var}^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$;

Demonstração. Primeiramente suponha $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{(2,1),\varnothing}$, como $\mathcal{V}$ tem crescimento cúbico, temos $\Gamma_4^{gr} \subseteq \mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$. Portanto $[y_1, y_2][y_3, y_4] \in \mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$. Por outro lado, $f_1 \notin \mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$ e $z \not\rightsquigarrow f_1 \pmod{\mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})}$. Logo, pelo Teorema 2.9, $z \in \mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$. Assim, $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{var}^{gr}(UT_2)$.

Se $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{(2),(1)}$, $f_2 \notin \mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$. Por outro lado, como $\mathcal{V}$ é minimal de crescimento cúbico, pelo Teorema 2.9, $g_2, g_3, g_4 \in \mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$, pois $g_2, g_3, g_4 \not\rightsquigarrow f_2 \pmod{\mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})}$. Assim, $g_2, z_1z_2 \in \mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$, logo $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{var}^{gr}(UT_2^{gr})$.

Agora, se $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{\varnothing,(3)}$, temos que $f_8 \notin \mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$. Além disso, $g_1, g_2, g_3 \in \mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$, pelo Teorema 2.9, pois $g_1, g_2, g_3 \not\rightsquigarrow f_8 \pmod{\mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})}$. Portanto, $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{var}^{gr}(D^{gr})$.

Por fim, se $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{\varnothing,(1^3)}$, temos que $f_6 \notin \mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$. Pelo Teorema 2.9, $g_1, g_2, g_4 \in \mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$, pois $g_1, g_2, g_4 \not\rightsquigarrow f_6 \pmod{\mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})}$. Logo, $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{var}^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$. □

Usando o lema anterior e os Teoremas 1.3, 1.22, 1.24 e 1.26, temos o seguinte.

Corolário 3.8. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade minimal de crescimento cúbico gerada por uma superálgebra unitária A, temos que*

i) se $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{(2,1),\varnothing}$, então $A \sim_{T_2} N_4$;

ii) se $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{(2),(1)}$, então $A \sim_{T_2} N_4^{gr}$;

iii) se $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{\varnothing,(3)}$, então $A \sim_{T_2} C_4^{gr}$;

iv) se $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{\varnothing,(1^3)}$, então $A \sim_{T_2} G_3^{gr}$.

Assim, finalizamos essa seção com o seguinte resultado.

Corolário 3.9. *Seja $\mathcal{V}$ uma supervariedade gerada por uma álgebra unitária A tal que $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$, com $m_{\lambda,\mu} = 1$ na decomposição* (3.1). *Então $\mathcal{V}$ é minimal de crescimento cúbico se, e somente se, ou $A \sim_{T_2} N_4$ ou $A \sim_{T_2} N_4^{gr}$ ou $A \sim_{T_2} C_4^{gr}$ ou $A \sim_{T_2} G_3^{gr}$.*

3.2 φ-variedades minimais de crescimento cúbico: Caso 2

Vamos finalizar a nossa classificação das φ-variedades minimais de crescimento cúbico geradas por álgebras unitárias considerando o Caso 2, ou seja, quando $\pi^{\varphi}(\mathcal{V}) =$

$\chi_{\lambda,\mu}$, com $(\lambda,\mu) \in \{((1^2),(1)),((1),(1^2)),((1),(2)),(\varnothing,(2,1))\}$. Nos resultados a seguir, dado um par de partições $(\alpha,\beta) \vdash 3$ tal que o caracter irredutível $\chi_{\alpha,\beta}$ aparece com multiplicidade não nula na decomposição de $\chi(\Gamma_3^\varphi)$, denotamos por $f_{\alpha,\beta}$ um vetor de peso máximo Y-próprio associado a (α,β). Primeiramente, a partir da próxima observação, veremos que no caso com involução ocorre uma anomalia que não aconteceu no caso ordinário.

Lema 3.10. *Seja $(\lambda,\mu) \vdash 3$ tal que o caracter irredutível $\chi_{\lambda,\mu}$ aparece com multiplicidade 2 na decomposição de $\chi(\Gamma_3^\varphi)$ e considere $f_{\lambda,\mu}, f'_{\lambda,\mu}$ vetores de peso máximo Y-próprios linearmente independentes associados a (λ,μ). Se existe $(\eta,\epsilon) \vdash 3$, $(\eta,\epsilon) \neq (\lambda,\mu)$ tal que $f_{\eta,\epsilon} \rightsquigarrow f_{\lambda,\mu}$ e $f_{\eta,\epsilon} \rightsquigarrow f'_{\lambda,\mu}$, então não existe φ-variedade $\mathcal{V}$ de crescimento cúbico tal que $\pi_3^\varphi(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$.*

Demonstração. Suponha que exista uma φ-variedade $\mathcal{V}$ de crescimento cúbico tal que $\pi_3^\varphi(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$. Logo, $f_{\eta,\epsilon} \in \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$. Como $f_{\eta,\epsilon} \rightsquigarrow f_{\lambda,\mu}$, segue que $f_{\lambda,\mu} \in \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$. Além disso, como $f_{\eta,\epsilon} \rightsquigarrow f'_{\lambda,\mu}$, também temos que $f'_{\lambda,\mu} \in \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$, o que é uma contradição. Portanto, não existe uma φ-variedade $\mathcal{V}$ de crescimento cúbico tal que $\pi_3^\varphi(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$. □

Para exemplificar um caso na situação acima, considere o par de partições $((1),(2))$ e $f_5 = [y,z_1,z_2] + [y,z_2,z_1]$, $f'_5 = z_1[y,z_2] + z_2[y,z_1]$ os vetores de peso máximo Y-próprios multilineares associados à $((1),(2))$ dados na Tabela 2. Temos $f'_5 \rightsquigarrow f_5$, pois $f_5 = -f'_5 - (f'_5)^*$. Por outro lado, para o par de partições $((1),(1^2))$ temos que $f_4 = z_1[y,z_2]$ é tal que $f'_5 = f_4 + z_2[y,z_1]$ e $f_4 \rightsquigarrow z_2[y,z_1]$. Logo, $f_4 \rightsquigarrow f'_5$. Portanto, obtemos o seguinte resultado.

Observação 3.11. *Não existe $*$-variedade de crescimento cúbico $\mathcal{V}$ gerada por uma álgebra unitária tal que $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{(1),(2)}$.*

No que segue, vamos considerar $\mathcal{V}$ uma φ-variedade de crescimento cúbico gerada por uma álgebra unitária tal que $\pi_3^\varphi(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$, onde $\chi_{\lambda,\mu}$ é um dos quatro caracteres irredutíveis aparecendo com multiplicidade 2 na decomposição de $\chi(\Gamma_3^\varphi)$. Descreveremos a construção do T^φ-ideal de $\mathcal{V}$ no caso em que esta é uma φ-variedade minimal.

Sejam h e $\widetilde{h}$ vetores de peso máximo Y-próprios linearmente independentes associados ao par de partições $(\lambda, \mu) \vdash 3$. Como $\pi_3^\varphi(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$, segue que h e $\widetilde{h}$ são linearmente dependentes módulo $\mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$. Logo existem $\alpha, \beta \in F$, não ambos nulos, tais que $\alpha\widetilde{h} + \beta h \in \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$. Observamos que h e $\widetilde{h}$ não podem ser simultaneamente φ-identidades de $\mathcal{V}$. Assim, sem perda de generalidade vamos supor que $h \notin \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$. Nestas condições, temos $\alpha \neq 0$, logo $\widetilde{h} + \gamma h \in \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$, para algum $\gamma \in F$. Note que, para qualquer outro par de partições $(\sigma, \tau) \vdash 3$, $(\sigma, \tau) \neq (\lambda, \mu)$ temos $f_{\sigma,\tau} \not\rightsquigarrow h$ e também $f_{\sigma,\tau} \not\rightsquigarrow \widetilde{h}$, se $\gamma \neq 0$.

Para o par de partições $(\lambda, \mu) \vdash 3$ fixado como acima, considere o conjunto

$$Q^{\lambda,\mu} = \{f_{\sigma,\tau} \, : \, (\sigma, \tau) \vdash 3, (\sigma, \tau) \neq (\lambda, \mu)\}$$

e defina os seguintes T^φ-ideais

$$I_3 = \left\langle \Gamma_4^\varphi, Q^{\lambda,\mu}, \widetilde{h} + \gamma h \right\rangle_{T^\varphi};$$

$$I_2 = \langle I_3, f_{\delta,\xi} \ : \ (\delta, \xi) \vdash 2 \ \text{ tal que } \ f_{\delta,\xi} \not\rightsquigarrow h \pmod{I_3}\rangle_{T^\varphi}.$$

Com a notação estabelecida acima, temos os seguintes resultados.

Proposição 3.12. *A φ-variedade $\mathcal{U}$ determinada por I_2 é minimal de crescimento cúbico.*

Demonstração. De fato, como $\Gamma_4^\varphi \subseteq I_2 = \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{U})$ e $h \notin I_2$, pelo Lema 2.7, $\mathcal{U}$ tem crescimento cúbico. Logo a multiplicidade $\overline{m}_{\lambda,\mu}$ correspondente ao caracter irredutível $\chi_{\lambda,\mu}$ em $\pi_3^\varphi(\mathcal{U})$ é não nula. Além disso, se $(\psi, \kappa) \vdash 3, (\psi, \kappa) \neq (\lambda, \mu)$, temos $f_{\psi,\kappa} \in I_2$. Portanto, usando que $\widetilde{h} + \gamma h \in \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{U})$, concluímos que $\pi_3^\varphi(\mathcal{U}) = \chi_{\lambda,\mu}$.

Agora, seja $(\delta, \xi) \vdash 2$ e suponha que $f_{\delta,\xi}$ é um vetor de peso máximo associado a (δ, ξ) tal que $f_{\delta,\xi} \notin I_2$. Assim, $f_{\delta,\xi} \notin I_3$ e $f_{\delta,\xi} \rightsquigarrow h (\mathrm{mod}\, I_3)$, ou seja, $h \in \langle f_{\delta,\xi}, I_3\rangle_{T^\varphi} \subseteq \langle f_{\delta,\xi}, I_2\rangle_{T^\varphi}$, o que implica que $f_{\delta,\xi} \rightsquigarrow h (\mathrm{mod}\, I_2)$. Portanto, pelo Teorema 2.9, a φ-variedade $\mathcal{U}$ é minimal. □

Proposição 3.13. *Se a φ-variedade $\mathcal{V}$ é minimal de crescimento cúbico, então $\mathcal{V}$ é a φ-variedade determinada por I_2.*

Demonstração. Como a φ-variedade $\mathcal{U}$ determinada por I_2 é minimal de crescimento cúbico, é suficiente provar que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Como $\mathcal{V}$ tem crescimento cúbico e $\pi_3^\varphi(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$, temos $I_3 \subseteq \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$. Seja $(\delta,\xi) \vdash 2$ tal que $f_{\delta,\xi} \in I_2$ e suponha que $f_{\delta,\xi} \notin \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$. Como $\mathcal{V}$ é minimal, pelo Teorema 2.9, temos $f_{\delta,\xi} \rightsquigarrow h(\mathrm{mod}\,\mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V}))$, assim $h = \widetilde{f}_{\delta,\xi} + g$, com $g \in \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$ e $f_{\delta,\xi} \rightsquigarrow \widetilde{f}_{\delta,\xi}$. Como h é multihomogêneo de grau 3, os polinômios $\widetilde{f}_{\delta,\xi}$ e g são multihomogêneos de grau 3. Como $\mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$ é completamente determinado por seus φ-polinômios Y-próprios multilineares, segue que g é combinação linear de consequências de vetores de peso máximo associados aos pares de partições $(\alpha,\beta) \vdash 3$. Assim, $g \in I_3$, e então $f_{\delta,\xi} \rightsquigarrow h(\mathrm{mod}\, I_3)$, o que é uma contradição. Isto prova que, $I_2 \subseteq \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$ e assim, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, como queríamos. □

As proposições provadas acima mostram que se $\mathcal{V}$ é uma φ-variedade minimal de crescimento cúbico tal que $\pi_3^\varphi(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$, com $(\lambda,\mu) \in \{((1^2),(1)),((1),(1^2)),((1),(2)), (\varnothing,(2,1))\}$, então $\mathcal{V}$ é unicamente determinada, a menos de um escalar $\gamma \in F$, por uma combinação linear $\widetilde{h} + \gamma h$ de dois vetores de peso máximo linearmente independentes tais que $h \notin \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$ e $\widetilde{h} + \gamma h \in \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$. Vamos denotar o T^φ-ideal I_2 por $I_{\widetilde{h}+\gamma h}$ e concluímos o seguinte.

Teorema 3.14. *Seja $(\lambda,\mu) \in \mathcal{P}$, onde $\mathcal{P} = \{((1^2),(1)),((1),(1^2)),(\emptyset,(2,1))\}$ no caso com involução e $\mathcal{P} = \{((1^2),(1)),((1),(1^2)),((1),(2)),(\emptyset,(2,1))\}$ no caso graduado. Seja $\mathcal{V}$ uma φ-variedade de crescimento cúbico gerada por uma álgebra unitária tal que $\pi_3^\varphi(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$. Então $\mathcal{V}$ é minimal se, e somente se, $\mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V}) = I_{\widetilde{h}+\gamma h}$, para algum $\gamma \in F$.*

Nos resultados das próximas seções, para f, g, h, t φ-polinômios, usaremos a notação $f, g \rightsquigarrow h, t$, para dizer que tanto h como t são consequências de f e também de g. A notação $f, g \not\rightsquigarrow h, t$ será usada, caso contrário. Tais notações também serão usadas para um número menor ou maior de φ-polinômios à direita ou à esquerda das setas $\rightsquigarrow$ e $\not\rightsquigarrow$.

Usaremos a notação $\widetilde{I}_{\widetilde{h}+\gamma h}$ para o T^{φ}-ideal I_3. Recordemos ainda que $g_1 = [y,z], g_2 = [y_1,y_2], g_3 = [z_1,z_2]$ e $g_4 = z_1 \circ z_2$ são os vetores de peso máximo Y-próprios multilineares apresentados na Tabela 1.

3.2.1 $*$-variedades minimais de crescimento cúbico

A seguir apresentaremos os resultados para $*$-variedades minimais $\mathcal{V}$ de crescimento cúbico tais que $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$, onde $\chi_{\lambda,\mu}$ aparece com multiplicidade $m_{\lambda,\mu} = 2$ na decomposição de $\chi(\Gamma_3^*)$. Iniciamos observando que não existe $*$-variedade minimal $\mathcal{V}$ de crescimento cúbico gerada por uma álgebra unitária A com involução trivial tal que $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$, com $(\lambda,\mu) \in \{((1^2),(1)),((1),(1^2)),((1),(2)),(\varnothing,(2,1))\}$. De fato, como a involução é trivial, A é comutativa, logo todos os vetores de peso máximo $f_3, f_3', f_4, f_4', f_5, f_5', f_7, f_7'$ são $*$-identidades de A. Além disso, não existe $*$-variedade de crescimento cúbico $\mathcal{V}$ gerada por uma álgebra unitária tal que $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{(1),(2)}$.

Nos próximos teoremas, a variedade $\mathcal{V}$ considerada é gerada por uma $*$-álgebra unitária.

Teorema 3.15. *Seja $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{(1),(1^2)}$. Temos que $\mathcal{V}$ é uma $*$-variedade minimal de crescimento n^3 se, e somente se, $\mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$ coincide com um dos seguintes T^*-ideais $I_{f_4'+\gamma f_4} = \left\langle \Gamma_4^*, g_2, g_4, Q^{(1),(1^2)}, f_4' + \gamma f_4 \right\rangle_{T^*}$, onde γ é um escalar em F.*

Demonstração. Temos $f_4 = z_1[y,z_2]$ e $f_4' = [z_1,z_2,y]$. Logo, $f_4' = [y,z_2,z_1] - [y,z_1,z_2] = [y,z_2]z_1 - z_1[y,z_2] - [y,z_1]z_2 + z_2[y,z_1]$. Desta forma, $f_4' = -f_4 - f_4^* + p + p^*$, onde $p = z_2[y,z_1]$ e $f_4 \rightsquigarrow p$, ou seja, $f_4 \rightsquigarrow f_4'$. Portanto, $f_4 \notin \mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$. Além disso, temos $g_1 \rightsquigarrow f_4, f_4'$, também $g_2, g_4 \not\rightsquigarrow f_4, f_4'$ e $g_3 \rightsquigarrow f_4'$.

Como $4f_4 = 2[z_1 \circ y, z_2] - 2y \circ [z_1,z_2] - f_4' - f_5$, os polinômios $2[z_1 \circ y, z_2]$, $2y \circ [z_1,z_2]$ são consequências de g_3 e $f_5 \in \mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$, segue que $g_3 \rightsquigarrow f_4 \,(\mathrm{mod}\, \widetilde{I}_{f_4'})$. Assim, o resultado segue do Teorema 3.14. □

Teorema 3.16. *Seja $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{\varnothing,(2,1)}$. Temos que $\mathcal{V}$ é uma $*$-variedade minimal de crescimento n^3 se, e somente se, $\mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$ coincide com um dos seguintes T^*-ideais:*
i) $I_{f_7+2f_7'} = \langle \Gamma_4^*, g_1, g_2, g_4, Q^{\varnothing,(2,1)}, f_7 + 2f_7' \rangle_{T^*} = \langle \Gamma_4^*, g_1, g_2, g_4, Q^{\varnothing,(2,1)} \rangle_{T^*}$;
ii) $I_{f_7+\gamma f_7'} = \langle \Gamma_4^*, g_2, Q^{\varnothing,(2,1)}, f_7 + \gamma f_7' \rangle_{T^*}$*, onde γ é um escalar em F, $\gamma \neq 2$.*

Demonstração. Como $f_7 = [z_1, z_2, z_3] + [z_3, z_2, z_1]$ e $f_7' = z_1[z_3, z_2] + z_3[z_1, z_2]$, temos $f_7 = [z_1, z_2]z_3 - z_3[z_1, z_2] + [z_3, z_2]z_1 - z_1[z_3, z_2] = (f_7')^* - f_7'$, assim $f_7' \rightsquigarrow f_7$. Logo, $f_7' \notin \mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$. Ainda, $g_1, g_2, g_4 \not\rightsquigarrow f_7, f_7'$ e $g_3 \rightsquigarrow f_7, f_7'$.

Por outro lado, $f_7 + 2f_7' = [z_1 \circ z_3, z_2]$, então $g_1, g_4 \rightsquigarrow f_7 + 2f_7'$. Para $\gamma \neq 2$, $f_7 + 2f_7' \rightsquigarrow f_7' \pmod{\widetilde{I}_{f_7+\gamma f_7'}}$, consequentemente $g_1, g_4 \rightsquigarrow f_7' \pmod{\widetilde{I}_{f_7+\gamma f_7'}}$. Usando o Teorema 3.14 finalizamos a demonstração. □

Teorema 3.17. *Seja $\pi_3^*(\mathcal{V}) = \chi_{(1^2),(1)}$. Temos que $\mathcal{V}$ é uma $*$-variedade minimal de crescimento n^3 se, e somente se, $\mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$ coincide com um dos seguintes T^*-ideais:*
i) $I_{f_3} = \left\langle \Gamma_4^*, g_3, Q^{(1^2),(1)}, f_3 \right\rangle_{T^*}$;
ii) $I_{f_3+2f_3'} = \left\langle \Gamma_4^*, g_4, Q^{(1^2),(1)}, f_3 + 2f_3' \right\rangle_{T^*} = \left\langle \Gamma_4^*, g_4, Q^{(1^2),(1)} \right\rangle_{T^*}$;
iii) $I_{f_3+\gamma f_3'} = \left\langle \Gamma_4^*, Q^{(1^2),(1)}, f_3 + \gamma f_3' \right\rangle_{T^*}$*, onde γ é um escalar em F tal que $\gamma \neq 0$ e $\gamma \neq 2$.*

Demonstração. Temos $f_3 = [y_1, y_2, z] = -[y_2, z, y_1] - [z, y_1, y_2]$ e $f_3' = z[y_1, y_2]$. Como $f_3 = [y_1, y_2]z - z[y_1, y_2] = (f_3')^* - f_3'$, segue que $f_3' \rightsquigarrow f_3$, logo $f_3' \notin \mathrm{Id}^*(\mathcal{V})$. Além disso, $g_1, g_3 \rightsquigarrow f_3$, também $g_2 \rightsquigarrow f_3, f_3'$ e $g_3 \not\rightsquigarrow f_3'$.

Por outro lado, $f_3 + 2f_3' = [y_1, z \circ y_2] - y_2 \circ [y_1, z]$ e os polinômios $[y_1, z \circ y_2], y_2 \circ [y_1, z]$ e f_3 são consequências de g_1. Assim, $g_1 \rightsquigarrow f_3'$.

Ainda, $f_3 + 2f_3' = [y_1, y_2] \circ z$, logo, $g_4 \rightsquigarrow f_3 + 2f_3'$. Para $\gamma \neq 2$, $f_3 + 2f_3' \rightsquigarrow f_3' \pmod{\widetilde{I}_{f_3+\gamma f_3'}}$, consequentemente $g_4 \rightsquigarrow f_3' \pmod{\widetilde{I}_{f_3+\gamma f_3'}}$. Portanto, do Teorema 3.14, segue o resultado. □

3.2.2 Supervariedades minimais de crescimento cúbico

Agora apresentaremos os resultados para supervariedades minimais $\mathcal{V}$ de crescimento cúbico tais que $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$, onde $\chi_{\lambda,\mu}$ aparece com multiplicidade $m_{\lambda,\mu} = 2$ na decomposição de $\chi(\Gamma_3^{gr})$. Inicialmente, observamos que não existe supervariedade minimal $\mathcal{V}$ de crescimento cúbico gerada por uma álgebra unitária A com graduação trivial tal que $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$, com $(\lambda,\mu) \in \{((1^2),(1)),((1),(1^2)),((1),(2)),(\varnothing,(2,1))\}$, pois os vetores de peso máximo $f_3, f_3', f_4, f_4', f_5, f_5', f_7, f_7'$ são identidades graduadas de A, uma vez que z é identidade graduada de A.

Usamos a igualdade $[x,yz] = [x,y]z + y[x,z]$, com x,y,z variáveis quaisquer para obter algumas consequências nessa seção.

Nos resultados a seguir, a variedade $\mathcal{V}$ considerada é gerada por uma superálgebra unitária.

Teorema 3.18. *Seja $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{(1),(2)}$. Temos que $\mathcal{V}$ é uma supervariedade minimal de crescimento n^3 se, e somente se, $\mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$ coincide com o seguinte T_2-ideal: $I_{f_5'} = \left\langle \Gamma_4^{gr}, Q^{(1),(2)}, f_5' \right\rangle_{T_2}$.*

Demonstração. Lembre que $f_5 = [y,z_1,z_2] + [y,z_2,z_1]$ e $f_5' = z_1[y,z_2] + z_2[y,z_1]$. Como $f_5' = f_4 + z_2[y,z_1]$ e $f_4 \rightsquigarrow z_2[y,z_1]$, temos $f_4 \rightsquigarrow f_5'$. Logo $f_5' \in \mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$, consequentemente $f_5 \notin \mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$. Além disso, $g_1, g_3 \rightsquigarrow f_5$.

Temos ainda que $f_5 + 2f_5' = [y, z_1 \circ z_2]$ Assim $g_2, g_4 \rightsquigarrow f_5 + 2f_5'$. Disso, segue que $g_2, g_4 \rightsquigarrow f_5 \,(\mathrm{mod}\, \widetilde{I}_{f_5'})$. Portanto, pelo Teorema 3.14, segue o resultado. □

Teorema 3.19. *Seja $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{(1^2),(1)}$. Temos que $\mathcal{V}$ é uma supervariedade minimal de crescimento n^3 se, e somente se, $\mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$ coincide com um dos seguintes T_2-ideais:*
i) $I_{f_3'} = \left\langle \Gamma_4^{gr}, g_3, g_4, Q^{(1^2),(1)}, f_3' \right\rangle_{T_2}$;
ii) $I_{f_3+\gamma f_3'} = \left\langle \Gamma_4^{gr}, g_3, g_4, Q^{(1^2),(1)}, f_3 + \gamma f_3' \right\rangle_{T_2}$, onde γ é um escalar em F.

Demonstração. Temos $f_3 = [y_1,y_2,z]$ e $f_3' = z[y_1,y_2]$. Como $f_3' = [zy_1,y_2] + [y_2,z]y_1$, segue que $g_1 \rightsquigarrow f_3'$. Ainda, temos $g_1 \rightsquigarrow f_3$, $g_2 \rightsquigarrow f_3, f_3'$ e $g_3, g_4 \not\rightsquigarrow f_3, f_3'$. Pelo Teorema 3.14, obtemos o resultado. □

Teorema 3.20. *Seja $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{(1),(1^2)}$. Temos que $\mathcal{V}$ é uma supervariedade minimal de crescimento n^3 se, e somente se,* $\mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$ *coincide com um dos seguintes T_2-ideais:*
i)$I_{f_4'} = \left\langle \Gamma_4^{gr}, g_2, Q^{(1),(1^2)}, f_4' \right\rangle_{T_2}$;
ii)$I_{f_4+f_4'} = \left\langle \Gamma_4^{gr}, g_4, Q^{(1),(1^2)}, f_4 + f_4' \right\rangle_{T_2}$;
iii)$I_{f_4+\gamma f_4'} = \left\langle \Gamma_4^{gr}, Q^{(1),(1^2)}, f_4 + \gamma f_4' \right\rangle_{T_2}$, *onde γ é um escalar em F, $\gamma \neq 1$.*

Demonstração. Temos $f_4 = z_1[y, z_2]$ e $f_4' = [z_1, z_2, y]$. Note que $g_1 \rightsquigarrow f_4, f_4'$, $g_2, g_3 \rightsquigarrow f_4'$ e $g_2 \not\rightsquigarrow f_4$. Além disso, $g_3 \rightsquigarrow f_4$, pois $f_4 = [z_1y, z_2] - [z_1, z_2]y$.

Por outro lado, $f_4 + f_4' = z_1 \circ (y \circ z_2) - (z_1 \circ z_2)y - z_2 \circ (yz_1)$, assim $g_4 \rightsquigarrow f_4 + f_4'$, consequentemente $g_4 \rightsquigarrow f_4' \,(\mathrm{mod}\, \widetilde{I}_{f_4})$ e $g_4 \rightsquigarrow f_4 \,(\mathrm{mod}\, \widetilde{I}_{f_4'})$. Também temos, para $\gamma \neq 1$, $f_4 + f_4' \rightsquigarrow f_4' \,(\mathrm{mod}\, \widetilde{I}_{f_4+\gamma f_4'})$, portanto $g_4 \rightsquigarrow f_4' \,(\mathrm{mod}\, \widetilde{I}_{f_4+\gamma f_4'})$. □

Assim, do Teorema 3.14, segue o resultado.

Teorema 3.21. *Seja $\pi_3^{gr}(\mathcal{V}) = \chi_{\varnothing,(2,1)}$. Temos que $\mathcal{V}$ é uma supervariedade minimal de crescimento n^3 se, e somente se,* $\mathrm{Id}^{gr}(\mathcal{V})$ *coincide com um dos seguintes T_2-ideais:*
i) $I_{f_7'} = \langle \Gamma_4^{gr}, g_2, Q^{\varnothing,(2,1)}, f_7' \rangle_{T_2}$;
ii) $I_{f_7+2f_7'} = \langle \Gamma_4^{gr}, g_2, g_4, Q^{\varnothing,(2,1)}, f_7 + 2f_7' \rangle_{T_2} = \langle \Gamma_4^{gr}, g_2, g_4, Q^{\varnothing,(2,1)} \rangle_{T_2}$;
iii) $I_{f_7+\gamma f_7'} = \langle \Gamma_4^{gr}, g_2, Q^{\varnothing,(2,1)}, f_7 + \gamma f_7' \rangle_{T_2}$, *onde γ é um escalar em F, $\gamma \neq 2$.*

Demonstração. Temos $f_7 = [z_1, z_2, z_3] + [z_3, z_2, z_1]$ e $f_7' = z_1[z_3, z_2] + z_3[z_1, z_2]$. Como $f_7' = [z_2, z_3, z_1] - [z_2, z_3z_1]$, segue que $g_1 \rightsquigarrow f_7'$.

Além disso, $g_1 \rightsquigarrow f_7$, também $g_3 \rightsquigarrow f_7, f_7'$ e $g_2, g_4 \not\rightsquigarrow f_7, f_7'$. Temos $f_7 + 2f_7' = [z_1 \circ z_3, z_2]$, logo $g_1, g_4 \rightsquigarrow f_7 + 2f_7'$. Consequentemente $g_1, g_4 \rightsquigarrow f_7 \,(\mathrm{mod}\, \widetilde{I}_{f_7'})$ e $g_1, g_4 \rightsquigarrow f_7' \,(\mathrm{mod}\, \widetilde{I}_{f_7})$.

Para $\gamma \neq 2$, $f_7 + 2f_7' \rightsquigarrow f_7' \,(\mathrm{mod}\, \widetilde{I}_{f_7+\gamma f_7'})$, então $g_1, g_4 \rightsquigarrow f_7' \,(\mathrm{mod}\, \widetilde{I}_{f_7+\gamma f_7'})$. Usando o Teorema 3.14, finalizamos a demonstração. □

Logo, finalizamos a classificação de todas φ-variedades minimais geradas por álgebras unitárias com crescimento cúbico.

3.3 φ-variedades minimais de crescimento n^k, $k \geq 4$

Nesta seção vamos generalizar o procedimento da seção anterior para classificar as φ-variedades minimais geradas por álgebras unitárias de crescimento $n^k, k \geq 4$.

Considere a decomposição do H_k-caracter de Γ_k^φ

$$\chi(\Gamma_k^\varphi) = \sum_{(\lambda,\mu)\vdash k} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu},$$

onde $m_{\lambda,\mu}$ é a multiplicidade do caracter irredutível $\chi_{\lambda,\mu}$.

Para cada par de partições $(\lambda, \mu) \vdash k$, existem $m_{\lambda,\mu} = m$ vetores de peso máximo Y-próprios $f^1_{\lambda,\mu}, f^2_{\lambda,\mu}, \cdots, f^m_{\lambda,\mu}$ linearmente independentes. Dado um par de partições $(\lambda, \mu) \vdash k$, denotamos por $V^{\lambda,\mu} = \mathrm{span}_F\{f^1_{\lambda,\mu}, f^2_{\lambda,\mu}, \ldots, f^m_{\lambda,\mu}\}$.

Com a notação estabelecida acima, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.22. *Seja $\mathcal{V}$ uma φ-variedade gerada por uma álgebra unitária e considere*

$$\pi_k^\varphi(\mathcal{V}) = \sum_{(\lambda,\mu)\vdash k} \widetilde{m}_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu}$$

a decomposição do seu k-ésimo φ-cocaracter próprio. Então $\widetilde{m}_{\lambda,\mu} = 1$, para algum par de partições $(\lambda, \mu) \vdash k$ se, e somente se, $\dim_F\, (V^{\lambda,\mu} \cap \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})) = m - 1$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{V}$ é uma φ-variedade tal que exista um par de partições $(\lambda, \mu) \vdash k$ com $\widetilde{m}_{\lambda,\mu} = 1$. Provaremos que $\dim_F \dfrac{V^{\lambda,\mu}}{V^{\lambda,\mu} \cap \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})} = 1$. Sejam $\overline{f}^i_{\lambda,\mu}, \overline{f}^j_{\lambda,\mu} \in \dfrac{V^{\lambda,\mu}}{V^{\lambda,\mu} \cap \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})}$, com $\overline{f}^i_{\lambda,\mu}, \overline{f}^j_{\lambda,\mu} \neq 0$. Temos que $\overline{f}^i_{\lambda,\mu}, \overline{f}^j_{\lambda,\mu}$ são linearmente dependentes. De fato, se $\alpha\overline{f}^i_{\lambda,\mu} + \beta\overline{f}^j_{\lambda,\mu} = \overline{0}$, com $\alpha, \beta \in F$, então $\alpha f^i_{\lambda,\mu} + \beta f^j_{\lambda,\mu} \in \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$. Como $f^i_{\lambda,\mu}, f^j_{\lambda,\mu} \notin \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})$ e $\widetilde{m}_{\lambda,\mu} = 1$, o número máximo de vetores de peso máximo Y-próprios associados ao par de partições $(\lambda, \mu) \vdash k$ não identidades de $\mathcal{V}$ linearmente independentes é 1. Então devemos ter $\alpha\beta \neq 0$. Portanto, $\dim_F\, (V^{\lambda,\mu} \cap \mathrm{Id}^\varphi(\mathcal{V})) = m - 1$.

Reciprocamente, suponha $\dim_F (V^{\lambda,\mu} \cap \mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V})) = m-1$. Como $\dim_F V^{\lambda,\mu} = m$, temos que $\dim_F \dfrac{V^{\lambda,\mu}}{V^{\lambda,\mu} \cap \mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V})} = 1$. Logo, não existem 2 vetores de peso máximo Y-próprios linearmente independentes na base de $\dfrac{V^{\lambda,\mu}}{V^{\lambda,\mu} \cap \mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V})}\cdot$ Assim, $\widetilde{m}_{\lambda,\mu} = 1$.

$\square$

Seja $f_{\sigma,\tau}$ um vetor de peso máximo Y-próprio associado ao par de partições $(\sigma,\tau) \vdash k$ tal que o caracter irredutível $\chi_{\sigma,\tau}$ aparece na decomposição de $\chi(\Gamma_k^{\varphi})$ com multiplicidade $m_{\sigma,\tau}$ não nula. Para um par de partições fixo $(\lambda,\mu) \vdash k$, definimos

$$Q^{\lambda,\mu} = \{f_{\sigma,\tau} \, : \, (\sigma,\tau) \vdash k, (\sigma,\tau) \neq (\lambda,\mu)\}.$$

Como na classificação das φ-variedades minimais de crescimento cúbico, temos a seguinte observação.

Observação 3.23. *Seja $(\lambda,\mu) \vdash k$. Se para cada $f^i_{\lambda,\mu}$, existe um par de partições $(\sigma,\tau) \vdash k$, $(\sigma,\tau) \neq (\lambda,\mu)$ e um vetor de peso máximo Y-próprio $f_{\sigma,\tau}$ tal que $f_{\sigma,\tau} \rightsquigarrow f^i_{\lambda,\mu}$, para $i = 1,\ldots,m$, então não existe uma φ-variedade $\mathcal{V}$ tal que $\pi_k^{\varphi}(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}\cdot$*

Agora podemos classificar as φ-variedades minimais de crescimento $n^k, k \geq 4$, exibindo os seus T^{φ}-ideais. Com a notação estabelecida acima, considere $W^{\lambda,\mu}$ um subespaço de $V^{\lambda,\mu}$ com $\dim_F W^{\lambda,\mu} = m-1$, $B^{\lambda,\mu}$ uma base de $W^{\lambda,\mu}$ e $h \in V^{\lambda,\mu}$ tal que $h \notin W^{\lambda,\mu}$.

Defina os seguintes T^{φ}-ideais:

$$I_k = \begin{cases} \left\langle \Gamma^{\varphi}_{k+1}, Q^{\lambda,\mu}, B^{\lambda,\mu}, [y_1,y_2]\cdots[y_{k+1},y_{k+2}] \right\rangle_{T^{\varphi}}, & \text{se } k \text{ é par e } \varphi \text{ é um automorfismo} \\ \left\langle \Gamma^{\varphi}_{k+1}, Q^{\lambda,\mu}, B^{\lambda,\mu} \right\rangle_{T^{\varphi}}, & \text{caso contrário} \end{cases};$$

$I_{k-j} = \langle I_{k-j+1}, f_{\delta,\xi} \, : \, (\delta,\xi) \vdash (k-j) \text{ tal que } f_{\delta,\xi} \not\rightsquigarrow h \pmod{I_{k-j+1}} \rangle_{T^{\varphi}}$, para $1 \leq j \leq k-2\cdot$

Temos

$$I_k \subseteq I_{k-1} \subseteq \; \cdots \; \subseteq I_2\cdot$$

Note que o T^{φ}-ideal I_2 depende da escolha do subespaço $W^{\lambda,\mu}$ e do vetor de peso máximo Y-próprio h.

Proposição 3.24. *A φ-variedade $\mathcal{U}$ determinada por I_2 é minimal de crescimento $n^k, k \geq 4$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.7 e pelo fato de $h \notin I_2$, a φ-variedade $\mathcal{U}$ tem crescimento $n^k, k \geq 4$. Como $h \notin I_2$, a multiplicidade $\widetilde{m}_{\lambda,\mu}$ correspondente ao caracter irredutível $\chi_{\lambda,\mu}$ em $\pi_k^{\varphi}(\mathcal{U})$ é não nula. Como $\pi_k^{\varphi}(\mathcal{U}) \leq \chi(\Gamma_k^{\varphi})$ e $Q^{\lambda,\mu} \subseteq I_2$, segue que $\pi_k^{\varphi}(\mathcal{U}) = \widetilde{m}_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu}$. Além disso, como $B^{\lambda,\mu} \subseteq I_2$ e $h \notin I_2$, temos que, pela Proposição 3.22, $\dim_F\ (I_2 \cap V^{\lambda,\mu}) = m - 1$, e consequentemente $\pi_k^{\varphi}(\mathcal{U}) = \chi_{\lambda,\mu}$.

Agora vamos verificar que a condição *ii*) do Teorema 2.9 é satisfeita.

Seja $f_{\delta,\xi}$ um vetor de peso máximo, com $(\delta,\xi) \vdash r \leq k-1$, tal que $f_{\delta,\xi} \notin I_2$. Como $I_r \subseteq I_2$, segue que $f_{\delta,\xi} \notin I_r$. Logo, pela definição de I_r, $f_{\delta,\xi} \rightsquigarrow h \,(\mathrm{mod}\, I_{r+1})$, ou seja, $h \in \langle f_{\delta,\xi}, I_{r+1}\rangle_{T^{\varphi}} \subseteq \langle f_{\delta,\xi}, I_2\rangle_{T^{\varphi}}$, isto é, $f_{\delta,\xi} \rightsquigarrow h \,(\mathrm{mod}\ I_2)$. Portanto pelo Teorema 2.9, a variedade $\mathcal{U}$ é minimal de crescimento n^k. □

Proposição 3.25. *Seja $\mathcal{V}$ uma φ-variedade minimal de crescimento $n^k, k \geq 4$ gerada por uma álgebra unitária. Se $\pi_k^{\varphi}(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$, então $\mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V}) = I_2$, para algum espaço vetorial $W^{\lambda,\mu}$ de dimensão $m-1$ e para algum vetor de peso máximo Y-próprio h associado ao par de partições $(\lambda,\mu) \vdash k$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ uma φ-variedade minimal de crescimento $n^k, k \geq 4$ gerada por uma álgebra unitária tal que $\pi_k^{\varphi}(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$. Pela Proposição 3.22, $\dim_F\ (V^{\lambda,\mu} \cap \mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V})) = m-1$. Considere $B^{\lambda,\mu} = \{f_1, \ldots, f_{m-1}\}$ uma base do espaço $V^{\lambda,\mu} \cap \mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V})$. Como $\pi_k^{\varphi}(\mathcal{V}) = \chi_{\lambda,\mu}$, existe $h \in V^{\lambda,\mu}$ tal que $h \notin \mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V})$. Seja I_2 o T^{φ}-ideal construído sobre essas condições.

Pela proposição anterior, é suficiente provar que $I_2 \subseteq \mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V})$. Temos $I_k \subseteq \mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V})$. Provaremos que para qualquer $j \in \{1, \ldots, k-2\}$, $I_{k-j} \subseteq \mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V})$. Com isso, provamos a proposição. Seja $f_{\delta,\xi}$ um vetor de peso máximo associado ao par de partições $(\delta,\xi) \vdash k-j$, para algum $j \in \{1, \ldots, k-2\}$. Suponha que $f_{\delta,\xi} \in I_{k-j}$ e $f_{\delta,\xi} \notin \mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V})$. Então pelo Teorema 2.9, $f_{\delta,\xi} \rightsquigarrow h \,(\mathrm{mod}\,\mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V}))$. Assim $h = \widetilde{f}_{\delta,\xi} + p$, com $f_{\delta,\xi} \rightsquigarrow \widetilde{f}_{\delta,\xi}$ e $p \in \mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V})$. Como h é multihomogêneo de grau k, podemos supor que os polinômios $\widetilde{f}_{\delta,\xi}$ e p são multihomogêneos de grau k. Como a característica de F é zero e $\mathcal{V}$

é gerada por uma álgebra unitária, $\mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V})$ é completamente determinado por seus φ-polinômios Y-próprios multilineares e temos que $p \in \langle \Gamma_k^{\varphi} \rangle$. Logo p é combinação linear de consequências de vetores de peso máximo associados aos pares de partições $(\lambda, \mu) \vdash k$. Assim, $p \in I_k \subseteq I_{k-j+1}$, e então $f_{\delta,\xi} \rightsquigarrow h \pmod{I_{k-j+1}}$, uma contradição. Portanto, $f_{\delta,\xi} \in \mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V})$, o que completa a demonstração. $\square$

Introduzindo a notação $I_2 = I_h^{\lambda,\mu}$ provamos o seguinte teorema.

Teorema 3.26. *Seja $\mathcal{V}$ uma φ-variedade de crescimento $n^k, k \geq 4$, gerada por uma álgebra unitária, então $\mathcal{V}$ é minimal se, e somente se, $\mathrm{Id}^{\varphi}(\mathcal{V}) = I_h^{\lambda,\mu}$, para algum par de partições $(\lambda, \mu) \vdash k$ e para algum vetor de peso máximo h.*

Considerações Finais

Nesta tese, estendemos a classificação das variedades minimais geradas por álgebras unitárias de crescimento polinomial, feita por Giambruno, La Mattina e Zaicev em [8], para as classes de superálgebras e álgebras com involução, chamadas de φ-álgebras. Aqui trabalhamos com φ-álgebras unitárias.

Seja G um grupo finito e A uma F-álgebra associativa. Dizemos que A é uma álgebra G-graduada se $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$, ou seja, A é uma soma direta de subespaços e $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$, para todo $g, h \in G$.

La Mattina [25] em 2015, classificou as variedades minimais de álgebras G-graduadas dentro das variedades de crescimento quase polinomial determinadas por Valenti [33] em 2011. Agora, pode-se pensar em determinar a decomposição do cocaracter dessas álgebras G-graduadas que geram variedades minimais e, depois, na classificação das variedades minimais geradas por álgebras G-graduadas unitárias.

Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra munida de uma involução $*$. Dizemos que $*$ é uma involução graduada se $(A^{(0)})^* = A^{(0)}$ e $(A^{(1)})^* = A^{(1)}$. Neste caso, chamamos A de **$*$-superálgebra**.

Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra munida de uma involução graduada ou de uma superinvolução, isto é, uma aplicação linear graduada $* : A \longrightarrow A$ tal que $(a^*)^* = a$, para todo $a \in A$ e $(ab)^* = (-1)^{(\deg\ a)(\deg\ b)} b^* a^*$, para quaisquer elementos homogêneos $a, b \in A$. Aqui, $\deg\ c$ denota o grau do elemento homogêneo $c \in A^{(0)} \cup A^{(1)}$.

Observe que, se A é uma superálgebra tal que $(A^{(1)})^2 = 0$ ($z_1 z_2 \equiv 0$ em A), então a superinvolução sobre A coincide com a involução graduada sobre A e, particularmente se $A^{(1)} = 0$, coincide com a involução sobre A.

La Mattina e Ioppolo em [15] classificaram todas as subvariedades das variedades de crescimento quase polinomial geradas por álgebras com involução graduada ou com superinvolução. Além disso, classificaram todas subvariedades minimais dessas variedades, dando uma lista completa de álgebras de dimensão finita gerando cada uma dessas variedades minimais. Em [30], Nascimento e Vieira apresentaram a decomposição dos $\langle n \rangle$-cocaracteres das $*$-superálgebras que geram as variedades minimais determinadas em [15].

Com isso, é possível pensar, em trabalhos futuros, na generalização dos resultados provados nesta tese, para a classe de $*$-superálgebras unitárias e para álgebras unitárias com superinvolução, depois de determinar a decomposição dos cocaracteres dessas álgebras com superinvolução que geram variedades minimais.

Referências Bibliográficas

[1] C. W. Curtis and I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* New York: Interscience Publishers, 1962.

[2] V. R. T. da Silva. *Codimensões,Cocaracteres, Identidades e Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-Graduados da Álgebra de Grassmann.* Tese de Doutorado, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.

[3] V. Drensky and A. Regev. *Exact asymptotic behaviour of the codimensions of some P.I.algebras.* Israel J. Math. **96** (1996) 231-242.

[4] V. Drensky. *Free Algebras and PI-algebras.* Springer-Verlag, Singapore, 2000.

[5] V. Drensky and A. Giambruno. *Cocharacters, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for* 2×2 *matrices with involution.* Canad. J. Math. **46** (1994) 718-733.

[6] A. Giambruno. $GL_m \times GL_m$*-representations and* $*$*-polynomial identities.* Commun. Algebra **14** (1986) 787-796.

[7] A. Giambruno, D. La Mattina and V. M. Petrogradsky. *Matrix algebras of polynomial codimension growth.* Israel J. Math, **158** (2007) 367-378.

[8] A. Giambruno, D. La Mattina and M. Zaicev. *Classifying the Minimal Varieties of Polynomial Growth.* Canad. J. Math. Vol 6 (2014) 625-640.

[9] A. Giambruno and S. Mishchenko. *On Star-Varieties with Almost Polynomial Growth.* Algebra Colloquium (2001), 33-42.

[10] A. Giambruno and S. Mishchenko. *Polynomial Growth of the $*$-codimensions and Young Diagrams*, Comm. Algebra (2001), 29(1), 277-284.

[11] A. Giambruno, S. Mishchenko and M. Zaicev. *Polynomial identities on superalgebras and almost polynomial growth.* Special issue dedicated to Alexei Ivanovich Kostrikin, Comm. Algebra **29** (2001), no. 9, 3787-3800.

[12] A. Giambruno and A. Regev. *Wreath products and P.I. algebras.* J. Pure Appl. Algebra **35** (1985) 133-149.

[13] A. Giambruno; M. Zaicev. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods.* Mathematical Surveys e Monographs, American Mathematical Society, **122**, Providence R.I., 2005.

[14] T. Gouveia, R. B. dos Santos and A. Vieira. *Minimal $*$-varieties and minimal supervarieties of polynomial growth.* Preprint.

[15] A. Ioppolo and D. La Mattina. *Polynomial codimension growth of algebras with involutions and superinvolutions.* Journal of Algebra **472**(2017) 519-545.

[16] G. James and A. Kerber. *The Representation Theory of the Symmetric Group.* Addison-Wesley Publishing Company, London, 1981.

[17] A. R. Kemer. *The spechtian nature of T-ideals whose codimensions have power growth.* Sibirsk. **19** (1978) no. 1, 54-69 (in Russian).

[18] A. R. Kemer. *Varieties of finite rank.* Proc. 15th All the Union Algebraic Conf., Krasnoyarsh **2** (1979) (in Russian).

[19] A. R. Kemer. *Finite basis property of identities of associative algebras.* Trans. Algebra i Logika, (1987) Vol. 26, no. 5, 597-641.

[20] D. Krakowski and A. Regev. *The polynomial identities of the Grassmann algebra.* Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973) 429-438.

[21] Yu. N. Malcev. *A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices* (Russian). Algebra i Logika **10** (1971) 393-400; English translation: Algebra and Logic **10** (1971).

[22] D. La Mattina. *Varieties of almost polynomial growth: classifying their subvarieties.* Manuscripta Math., **123** (2007) 185-203.

[23] D. La Mattina. *Varieties of algebras of polynomial growth.* Boll. Unione Mat. Ital. (9)**1**, no.3, (2008) 525-538.

[24] D. La Mattina. *Varieties of superalgebras of almost polynomial growth.* J. Algebra, **336** (2011) 209-226.

[25] D. La Mattina. *Almost polynomial growth: classifying varieties of graded algebras.* Israel J. Math., **207** (2015) 53-75.

[26] D. La Mattina and F. Martino. *Polynomial growth and star-varieties.* J. Pure Appl. Algebra, **220** (2016) 246-262.

[27] D. La Mattina, S. Mauceri and P. Misso. *Polynomial growth and identities of superalgebras and star-algebras.* J. Pure Appl. Algebra, **213** (11) (2009) 2087-2094.

[28] D. La Mattina and P. Misso. *Algebras with involution with linear codimensions growth.* J. Algebra, **305** (2006) 270-291.

[29] S. Mishchenko and A. Valenti. *A star-variety with almost polynomial growth.* J. Algebra, **223** (2000) 66-84.

[30] T.S do Nascimento and A.C. Vieira. *Superalgebras with graded involution and star-graded colength bounded by 3.* Linear and Multilinear Algebra, (2018). http://doi.org/10.1080/03081087.2018.1478947

[31] A. Regev. *Existence of identities in* $A \otimes B$. Israel J. Math. **11** (1972) 131-152.

[32] A. Valenti. *The graded identities of upper triangular matrices of size two.* J. Pure Appl. Algebra, **172** (2002) 325-335.

[33] A. Valenti. *Group graded algebras and almost polynomial growth.* J. Algebra, **334** (2011) 247-254.