



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Espaço de Módulos de Triplas de Geodésicas Complexas no Espaço
Hiperbólico Complexo de Dimensão 4

Tauan Lucas Amaral Brandão

Belo Horizonte - MG

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Tauan Lucas Amaral Brandão

Orientador: Prof. Dr. Nikolai Alexandrovitch Goussevskii

Espaço de Módulos de Triplas de Geodésicas Complexas no Espaço
Hiperbólico Complexo de Dimensão 4

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Belo Horizonte - MG

2019

© 2019, Tauan Lucas Amaral Brandão.
Todos os direitos reservados

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do ICEx - UFMG

Brandão, Tauan Lucas Amaral.

B817e Espaço de Módulos de Triplas de Geodésicas Complexas no Espaço Hiperbólico Complexo de Dimensão 4 / Tauan Lucas Amaral Brandão — Belo Horizonte, 2019.
252 f. il.; 29 cm.

Tese(doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Matemática.

Orientador: Nikolai Alexandrovitch Goussevskii

1. Matemática – Teses. 2. Geometria hiperbólica – Teses. 3. Espaços hiperbólicos - Teses. 4. Espaço de módulos – Teses. I. Orientador. II. Título.

CDU 51(043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Espaço de Módulos de Triplas de Geodésicas Complexas
no Espaço Hiperbólico Complexo de Dimensão 4*

TAUAN LUCAS AMARAL BRANDÃO

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Nikolai Alexandrovitch Goussevskii
UFMG

Prof. Cláudio Gorodski
USP

Prof. Heleno da Silva Cunha
UFMG

Prof. Jaime Leonardo Orjuela Chamorro
UFBA

Prof. Maurício Barros Corrêa Júnior
UFMG

Belo Horizonte, 23 de setembro de 2019.

Agradecimentos

Coloco aqui meus sinceros agradecimentos, que ficaram um pouco extensos, assim como este trabalho. Seguem os agradecimentos:

- (i) Agradeço primeiramente a Deus;
- (ii) Agradeço à minha família pelo apoio nas horas certas e principalmente pelo apoio nas horas incertas;
- (iii) Agradeço ao meu orientador Nikolai pela orientação e pela grande contribuição para meu desenvolvimento acadêmico;
- (iv) Agradeço aos membros da banca examinadora, constituída por Cláudio Gorodski, Jaime Leonardo, Maurício Corrêa e Heleno Cunha, por avaliarem este trabalho;
- (v) Agradeço ao departamento de matemática da UFMG e aos funcionários do departamento, em especial à Eliane Andréa e à Eliane Kelli;
- (vi) Agradeço ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro;
- (vii) Agradeço aos meus primeiros professores de matemática, Theda e Zé Carlos (Katatau), que foram um impulso inicial para minha trajetória na matemática;
- (viii) Agradeço aos professores que fizeram parte da minha graduação em matemática na UESC, em especial ao Germán, ao Nestor Castañeda, ao Sergio Alvarez, ao Sérgio Mota, ao Eduardo Palmeira, ao Ricardo Bentin, entre outros que me ajudaram a evoluir na minha formação acadêmica;

- (ix) Agradeço aos professores da UFMG, em especial ao Heleno Cunha, que me orientou no mestrado e acompanhou de perto todo o desenvolvimento deste trabalho de tese;
- (x) Agradeço aos amigos que estiveram comigo durante os anos de graduação na UESC, principalmente Luíz Mateus, Robson Cajueiro, Antonio Sardinha, Paula (Paulinha), Emanuella, Victor Mielly, Leila e Cristiano Benjamin. Os três últimos me acompanharam até o doutorado;
- (xi) Agradeço aos amigos que me acompanharam durante o mestrado e o doutorado, sendo como uma segunda família para mim, em especial Aislan (“Segue a gente, narigudo!”), Antônio Marcos (Vagabundo), Joyce, Jéssica Guedes, Ricardo (Homer), Douglas Danton (Xerife), Vinicius Lara, Moacir (Moacirzinho), Ayane, Alan, Roney, Rosângela, Vangellis, Sarah, Júlio César, Edson, Pablo Almeida, Mariana, Rafael Almeida, Laís, Willer, Lucas (SSJ 3), Igor Almeida, Leandro da Luz, Daniel (Fields), Felipe (Felipão), Diogo, Claudiano Henrique, Carolina (Carol), Bruno (Grothendieck), Patrícia, Flávio (“Não deixa a peteca cair!”), Myrlla, Elena, Farley (Projeto Monstro), Maxwell, Alexandre, Nelcy, Júnio, Leonardo Abath (Escritor), Leonardo Saud, Ricardo Lopes, Gilberto, Sobral, David, Gilson e Edno;
- (xii) Agradezco a la comunicad peruana que también fue una segunda familia para mi durante la maestría y el doctorado, en particular a mis hermanos José (Cabezón), Jhon (Uai Fai), Joel (Pernilongo), Calos Salazar, Carlos Cjanahuri, Antonio (Só isso?!), Guido (Emperor), Javier, Juan, Renato, Aída, Roy, Eder, Simeona, Eduardo (Manito), Eduardo (Gordito), Eduardo (Chiquito), Miguel (Robinho), Arnulfo Miguel, Julio Leo, Julio Matute (Papi), Katherine, Margoth, Mario, Wilson (Rosca), Jhon Huarachi, Emerson, Santos, Segundo Manuel, Alexander Paul (Alex), Yuri Balcona, Alfonso (Matute 2) y a otros tantos que formaron parte de muchas risas durante estos años;
- (xiii) Agradeço aos meus amigos de longas datas Jonathas Fróes, Ludivan, Wagner (Cebola), Bruno, Manuela (Manú) e Fabiane;
- (xiv) Agradeço à minha noiva Lívia, mais uma vez, por sua paciência com a minha ausência.

“A simplicidade é o último grau de sofisticação.”

Leonardo da Vinci

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é descrever o espaço de módulos de triplas ordenadas de geodésicas complexas do espaço hiperbólico complexo de dimensão 4, em relação à ação do grupo de isometrias holomorfas $PU(4, 1)$. Além disso, nós descrevemos o espaço de módulos de triplas ordenadas de geodésicas (não orientadas) no espaço hiperbólico real de dimensão 3 e 4. As principais inovações deste trabalho são o uso de conjuntos polares de geodésicas (reais e complexas) e a noção de ângulos de transição para a tripla de geodésicas em questão.

Palavras-chave: Isometrias, Espaço Hiperbólico, Espaço de Módulos, Conjuntos Polares, Ângulos de Transição.

Abstract

The principal purpose of this work is to describe the moduli space of ordered triples of complex geodesics in complex hyperbolic space of dimension 4 relative to the action of the group of holomorphic isometries $PU(4, 1)$. Also, we describe the moduli space of ordered triples of geodesics (non-oriented) in real hyperbolic space of dimension 3 and 4. The main innovations of this work are the use of the polar sets of geodesics (real and complex) and the notion of the transition angles of the triples of geodesics in question.

Keywords: Isometries, Hyperbolic Space, Moduli Space, Polar Sets, Transition Angles.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	15
1.1 Formas Hermitianas	15
1.2 O Espaço Hiperbólico	17
1.2.1 O modelo projetivo do espaço hiperbólico	17
1.2.2 O espaço hiperbólico real	19
1.2.3 O espaço hiperbólico complexo	26
1.3 Matriz de Gram e Teorema de Witt	36
1.3.1 Matrizes de Gram associadas a m -uplas de pontos positivos	36
1.3.2 Teorema de Witt	39
2 O Problema de Congruência para Duplas de Geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$	41
2.1 Duplas de Geodésicas Riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$	41
2.1.1 Ângulo e distância entre hiperplanos reais	42
2.1.2 Construção do conjunto bi-ortogonal	45
2.1.3 Ângulo e distância entre geodésicas riemannianas	49
2.1.4 Espaço de módulos de duplas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$	51
2.2 Duplas de Geodésicas Riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$	58
2.2.1 Ângulo e distância entre hiperplanos reais	59
2.2.2 Construção do conjunto bi-ortogonal	61
2.2.3 Ângulo e distância entre geodésicas riemannianas	67
2.2.4 Espaço de módulos de duplas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$	69

2.3	Duplas de Geodésicas Complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$	77
2.3.1	Ângulo e distância entre hiperplanos complexos	77
2.3.2	Construção do conjunto bi-ortogonal	80
2.3.3	Ângulo e distância entre geodésicas complexas	90
2.3.4	Espaço de módulos de duplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$	91
3	O Problema de Congruência para Triplas de Geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$	100
3.1	Dimensão do Espaço de Módulos	101
3.2	Espaço de Módulos de Triplas Genéricas	102
3.2.1	Matriz de Gram canônica para triplas genéricas	103
3.2.2	Construção do espaço de módulos para triplas genéricas	107
3.3	Espaço de Módulos de Triplas Especiais	109
3.3.1	Triplas quase genéricas	109
3.3.2	Triplas quase coplanares	110
3.3.3	Triplas duas a duas coplanares	112
3.3.4	Triplas coplanares	118
3.4	Tabela de Parâmetros	128
4	O Problema de Congruência para Triplas de Geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$	132
4.1	Dimensão do Espaço de Módulos	133
4.2	Espaço de Módulos de Triplas Genéricas	134
4.2.1	Matriz de Gram canônica para triplas genéricas	135
4.2.2	Matriz de Gram canônica para triplas genéricas contidas em um $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$	143
4.2.3	Construção do espaço de módulos para triplas genéricas	148
4.3	Espaço de Módulos de Triplas Especiais	150
4.3.1	Triplas quase genéricas tipo 1	151
4.3.2	Triplas quase genéricas tipo 2	152
4.3.3	Triplas quase coplanares	154
4.3.4	Triplas duas a duas coplanares	156
4.3.5	Triplas coplanares	162
4.4	Tabela de Parâmetros	172

5	O Problema de Congruência para Triplas de Geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$	177
5.1	Dimensão do Espaço de Módulos	178
5.2	Espaço de Módulos de Triplas Genéricas	179
5.2.1	Matriz de Gram canônica para triplas genéricas	180
5.2.2	Matriz de Gram canônica para triplas genéricas contidas em um $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.	185
5.2.3	Construção do espaço de módulos para triplas genéricas	190
5.2.4	Construção do espaço de módulos para triplas reais	193
5.3	Espaço de Módulos de Triplas Especiais	195
5.3.1	Triplas quase genéricas tipo 1	196
5.3.2	Triplas quase genéricas tipo 2	197
5.3.3	Triplas quase coplanares	198
5.3.4	Triplas duas a duas coplanares	200
5.3.5	Triplas coplanares	206
5.4	Tabela de Parâmetros	216
A	Entradas da Matriz de Gram para Triplas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ e Relações	222
B	Entradas da Matriz de Gram para Triplas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ e Relações	227
C	Entradas da Matriz de Gram para Triplas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ e Relações	238
	Referências Bibliográficas	250

Introdução

Neste trabalho temos como problema principal encontrar invariantes que descrevem de maneira única as classes de congruência, módulo ação diagonal do grupo $PU(4, 1)$, de triplas ordenadas de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. A congruência a qual nos referimos é dada no seguinte sentido: duas triplas ordenadas (c_1, c_2, c_3) e (c'_1, c'_2, c'_3) de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ são congruentes quando existe uma isometria holomorfa $f \in PU(4, 1)$ tal que $f(c_i) = c'_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Na literatura temos alguns trabalhos feitos nessa direção. Para o espaço hiperbólico real de dimensão 3, em [5] são consideradas triplas de geodésicas riemannianas orientadas as quais vamos denotar por σ_1, σ_3 e σ_5 , onde duas das geodésicas podem coincidir nos pontos finais, e são consideradas as perpendiculares comuns (ou o ponto ideal em que elas coincidem, para o caso assintótico) denotadas por σ_2, σ_4 e σ_6 , tais que não coincidem entre si, formando assim um hexágono reto o qual vamos denotar por $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$. Nesse trabalho o problema é resolvido identificando a fronteira do espaço hiperbólico real com a esfera de Riemann e considerando algumas razões cruzadas sobre quádruplas ordenadas formadas por pontos finais de algumas das geodésicas que constituem o hexágono reto, localizados na fronteira. Além disso, ainda em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, no artigo [14] são considerados hexágonos retos de geodésicas riemannianas orientadas, formados por três geodésicas riemannianas com suas respectivas perpendiculares comuns. Nesse caso as geodésicas riemannianas orientadas σ_1, σ_3 e σ_5 não possuem (duas a duas) pontos finais em comum. Tais hexágonos são utilizados no estudo de certos subgrupos de $PSL(2, \mathbb{C})$, subgrupos que são usados na demonstração de que é possível definir coordenadas locais para o espaço de estruturas quase-fuchsianas sobre uma superfície fechada, através de funções chamadas distâncias complexas.

Para o espaço hiperbólico real de dimensão 4, o problema de congruência de triplas de

geodésicas riemannianas foi estudado em [16]. Nesse artigo são considerados hexágonos retos orientados de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, que vamos denotar por $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$, e são considerados para cada lado σ_n , invariantes denominados comprimento complexo. Entretanto, os seis comprimentos complexos definidos não determinam classes de congruência de hexágonos retos orientados, via isometrias de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Então, no intuito de corrigir esse problema, são considerados hexágonos retos orientados aumentados construídos como segue. É considerado a priori o hexágono reto orientado $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, são escolhidos três lados alternados, como por exemplo σ_2, σ_4 e σ_6 , e são considerados pares $F_n = (\sigma_n, \Pi_n)$, para $n = 2, 4, 6$, onde F_n consiste da geodésica riemanniana σ_n junto com um plano hiperbólico orientado Π_n em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, tal que σ_n está contido em Π_n e os lados σ_{n-1} e σ_{n+1} são ambos perpendiculares a Π_n . Dessa forma, é obtido um hexágono reto orientado aumentado dado por $(\sigma_1, F_2, \sigma_3, F_4, \sigma_5, F_6)$. Com esse novo hexágono, são definidos novos invariantes chamados comprimento quaterniônico. Assim, são associados a cada hexágono $(\sigma_1, F_2, \sigma_3, F_4, \sigma_5, F_6)$ três comprimentos quaterniônicos e três comprimentos complexos (definidos em pontos da fronteira), e como resultado principal do artigo, foi apresentada uma generalização das fórmulas de Delambre-Gauss para hexágonos retos orientados aumentados em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Entretanto, o problema de congruência não foi resolvido.

Para o espaço hiperbólico real de dimensão 5, o problema de congruência de triplas de geodésicas riemannianas foi estudado em [6]. Esse trabalho tem como principal resultado a descrição de classes de congruência, via isometrias que preservam orientação, de hexágonos retos orientados não degenerados de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^5$, usando três invariantes definidos na fronteira do espaço hiperbólico, denominados distâncias quaterniônicas entre geodésicas.

Para o espaço hiperbólico complexo, esse problema foi tratado em [3] para k -uplas ordenadas de geodésicas complexas no plano hiperbólico complexo de dimensão 2. Nesse artigo é apresentada uma solução completa para tal problema. Além disso, em [12], o problema foi resolvido para triplas ordenadas de geodésicas complexas no espaço hiperbólico complexo de dimensão 3, utilizando matrizes de Gram, conjuntos polares e Teorema de Witt.

Agora vamos fazer uma breve descrição do que fizemos neste trabalho. Para começar, no Capítulo 1 apresentamos alguns conceitos básicos preliminares, visando um entendimento prévio necessário para a leitura deste trabalho. Descrevemos esses conceitos no intuito de

apresentar um trabalho mais autocontido.

No que segue, fazemos um estudo do problema de congruência para duplas de geodésicas riemannianas e complexas no espaço hiperbólico com dimensão n . A ideia para solucionar esse problema se baseia em associar a cada geodésica pertencente à dupla em questão, $n - 1$ hiperplanos do espaço hiperbólico, tais que se intersectam ao longo da geodésica, obtidos de maneira única (a menos de isometrias). Para o caso em que $n = 2$, temos que hiperplanos do espaço hiperbólico são geodésicas. Assim, para cada dupla de geodésicas associamos dois hiperplanos do espaço hiperbólico. Para o caso em que $n = 3$, temos que os hiperplanos são planos hiperbólicos. Assim, associamos a cada dupla, um total de quatro planos hiperbólicos. Para $n \geq 4$, temos que alguns dos $n - 1$ hiperplanos associados à dupla de geodésicas em questão coincidem. A construção de hiperplanos com tais propriedades é a primeira dificuldade no processo de generalização do problema de congruência, via isometrias, de duplas e triplas de geodésicas no espaço hiperbólico. Assim, no Capítulo 2 fazemos a construção desses hiperplanos e obtemos um teorema que generaliza o problema de congruência para duplas. Ainda nesse capítulo, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mostramos que uma dupla de geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ está contida em algum $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^3$ mergulhado, sempre que $n \geq 3$, e que uma tripla de geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ está sempre contida em algum $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^5$ mergulhado, sempre que $n \geq 5$. Isso nos diz que para generalizar o problema de congruência para triplas de geodésicas, é suficiente encontrar parâmetros que descrevem congruência até a dimensão 5 do espaço hiperbólico.

A solução para o problema de congruência para duplas é um primeiro passo para a solução do problema de congruência para triplas de geodésicas, pois a ideia utilizada para solucionar o problema para triplas se resume em associar a cada tripla de geodésicas (c_1, c_2, c_3) as subduplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) . Uma vez que, cada uma dessas subduplas está associada a um conjunto de hiperplanos do espaço hiperbólico, temos associado a cada tripla um conjunto de hiperplanos obtidos de tais subduplas.

No Capítulo 3, apresentamos uma solução para o problema de congruência de triplas ordenadas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, descrevendo o espaço de módulos em questão usando parâmetros intrínsecos à geometria hiperbólica, sem passar para a fronteira ideal. Além disso, não exigimos orientação de tais triplas como foi exigido em [6], [5] e [16].

No Capítulo 4, apresentamos uma solução para o problema de congruência de triplas

ordenadas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Novamente descrevemos o espaço de módulos usando parâmetros intrínsecos à geometria hiperbólica sem passar para a fronteira ideal. Para o caso genérico, caso em que as geodésicas não se intersectam em $\mathbb{R}P^4$, usamos três distâncias entre geodésicas, três ângulos entre geodésicas e nove ângulos que chamamos de ângulos de transição, sujeitos a algumas relações.

Por fim, no Capítulo 5, apresentamos o espaço de módulos para triplas ordenadas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Fazemos também um breve estudo sobre triplas de geodésicas riemannianas contidas em algum $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ ou $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, mergulhado em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, denominadas triplas reais.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo tratamos de alguns conceitos preliminares para o entendimento deste trabalho. Na primeira seção trazemos uma breve revisão de álgebra linear, sobre formas bilineares simétricas e formas hermitianas. Na segunda seção apresentamos o espaço hiperbólico real e complexo. Abordamos os principais modelos para o espaço hiperbólico, expressamos o grupo de isometrias e definimos alguns elementos da geometria hiperbólica. Por fim, na terceira seção enunciaremos alguns resultados importantes para nossos fins, como o Teorema de Witt, o Teorema de Höfer e algumas caracterizações para matrizes de Gram associadas a m -uplas de pontos positivos.

1.1 Formas Hermitianas

Considere $V_{\mathbb{K}}^n$ um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo \mathbb{K} , com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma forma bilinear e simétrica para o caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e uma forma hermitiana para o caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Seja $\mathcal{B} = \{P_1, \dots, P_n\}$ uma base de $V_{\mathbb{K}}^n$. Dizemos que \mathcal{B} é uma *base ortonormal* de $V_{\mathbb{K}}^n$ se $\langle P_j, P_j \rangle = -1, 0$ ou 1 para $j = 1, \dots, n$, e $\langle P_j, P_k \rangle = 0$ para todo $j, k = 1, \dots, n$, com $j \neq k$. Assim, a expressão $\langle P_j, P_j \rangle$ pode resultar em três valores: -1 , 0 ou 1 . Dessa forma, denote por $n_1 = \#\{P_j \in \mathcal{B}; \langle P_j, P_j \rangle = 1\}$, $n_2 = \#\{P_j \in \mathcal{B}; \langle P_j, P_j \rangle = -1\}$ e $n_3 = \#\{P_j \in \mathcal{B}; \langle P_j, P_j \rangle = 0\}$. Isto é, n_1 , n_2 e n_3 indicam a cardinalidade do conjunto de vetores da base \mathcal{B} tais que, quando avaliados na forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$, resultam respectivamente nos valores 1 , -1 e 0 . Com isso obtemos uma tripla denotada por (n_1, n_2, n_3) . O próximo

teorema nos mostra que essa tripla independe da base ortonormal que considerarmos para o espaço vetorial.

Teorema 1.1 (Sylvester.) *Seja $V_{\mathbb{C}}^n$ munido de uma forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Considere $\mathcal{B} = \{P_1, \dots, P_n\}$ uma base ortonormal para $V_{\mathbb{C}}^n$. Então a tripla (n_1, n_2, n_3) é a mesma para qualquer base ortonormal que considerarmos no espaço. O resultado também é verdadeiro se considerarmos $V_{\mathbb{R}}^n$ munido de uma forma bilinear e simétrica.*

Prova. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [13], páginas 104 e 105. ■

O Teorema de Sylvester nos diz que a tripla $V_{\mathbb{K}}^n$ é intrínseca à forma, no sentido de não depender da base ortonormal que tomamos. Assim, chamamos a tripla (n_1, n_2, n_3) de *assinatura da forma*. Em geral vamos trabalhar com $n_1 = n$, com $n \geq 1$ um número natural, $n_2 = 0$ ou 1 , e $n_3 = 0$ na assinatura da forma. Já que teremos sempre $n_3 = 0$, então para simplificar a notação denotamos a tripla (n_1, n_2, n_3) apenas pelo par (n_1, n_2) . Além disso, daqui para frente vamos denotar por $V_{\mathbb{K}}^{n,1}$ o par $(V_{\mathbb{K}}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tal que a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tem assinatura $(n, 1)$.

Veja que para todo $P \in V_{\mathbb{K}}^{n,1}$ temos $\langle P, P \rangle \in \mathbb{R}$. Isso segue do fato que $\langle P, P \rangle = \overline{\langle P, P \rangle}$. Assim, dizemos que uma forma hermitiana é *definida positiva* se $\langle P, P \rangle > 0$ para todo $P \in V_{\mathbb{K}}^{n,1}$ não nulo, e *indefinida* se a forma admite valores positivos, negativos e eventualmente nulos. Além disso, se o único vetor, $P \in V_{\mathbb{K}}^{n,1}$, que satisfaz $\langle P, Q \rangle = 0$ para todo $Q \in V_{\mathbb{K}}^{n,1}$ é o vetor $P = \vec{0}$, dizemos que a forma é *não degenerada*, caso contrário dizemos que a forma é *degenerada*.

Definição 1.2 *Dizemos que um subespaço vetorial W de $V_{\mathbb{K}}^{n,1}$ é elíptico, parabólico ou hiperbólico, se a forma restrita a W é definida positiva, degenerada, ou não degenerada e indefinida, respectivamente.*

Seja W um subespaço vetorial de $V_{\mathbb{K}}^{n,1}$ com dimensão $k+1$. Veja que a forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ restrita a W tem assinatura $(k+1, 0)$ com $1 \leq k \leq n-1$, $(k, 0)$ com $1 \leq k \leq n-1$ ou $(k, 1)$ com $1 \leq k \leq n$. Assim, temos as seguintes situações possíveis:

- (i) W é elíptico de assinatura $(k+1, 0)$, com $1 \leq k \leq n-1$;

- (ii) W é parabólico de assinatura $(k,0)$, com $1 \leq k \leq n - 1$;
- (iii) W é hiperbólico de assinatura $(k,1)$, com $1 \leq k \leq n$.

Considere W^\perp o complemento ortogonal de W em $V_{\mathbb{K}}^{n,1}$. O próximo resultado nos dá uma relação entre o comportamento da forma restrita a W e o comportamento da forma restrita ao complemento ortogonal de W .

Proposição 1.3 *Dado um subespaço próprio W de $V_{\mathbb{K}}^{n,1}$, temos que:*

- (i) W é hiperbólico (indefinido) $\Leftrightarrow W^\perp$ é elíptico (positivo);
- (ii) W é elíptico (positivo) $\Leftrightarrow W^\perp$ é hiperbólico (indefinido);
- (iii) W é parabólico (degenerado) $\Leftrightarrow W^\perp$ é parabólico (degenerado).

Prova. Ver [2] página 52, Proposição 2.1.4. ■

1.2 O Espaço Hiperbólico

Nesta seção trazemos alguns modelos para o estudo do espaço hiperbólico real e complexo, começando pelo modelo mais usado neste trabalho que é o modelo projetivo. Na Subseção 1.2.2 fazemos um breve estudo sobre o espaço hiperbólico real e seu grupo de isometrias, e na Subseção 1.2.3 estudamos o espaço hiperbólico complexo e seu grupo de isometrias.

1.2.1 O modelo projetivo do espaço hiperbólico

Para começar esta subseção, definimos os seguintes subconjuntos de $V_{\mathbb{K}}^{n,1}$:

$$\begin{aligned} V_- &= \{P \in V_{\mathbb{K}}^{n,1}; \langle P, P \rangle < 0\} \\ V_+ &= \{P \in V_{\mathbb{K}}^{n,1}; \langle P, P \rangle > 0\} \\ V_0 &= \{P \in V_{\mathbb{K}}^{n,1}; \langle P, P \rangle = 0\} \end{aligned}$$

onde os vetores em V_- , V_+ e V_0 são chamados de vetores *negativos*, *positivos* e *nulos* ou *isotrópicos*, respectivamente.

Considere em $V_{\mathbb{K}}^{n,1} - \{0\}$ a seguinte relação de equivalência: dados $P, Q \in V_{\mathbb{K}}^{n,1}$, temos que $P \sim Q$ se, e somente se, $P = tQ$ para algum $t \in \mathbb{K}$ não nulo. Seja $(V_{\mathbb{K}}^{n,1} - \{0\})/\sim$ o conjunto das classes de equivalência dadas pela relação “ \sim ”. Seja também a projeção natural π dada por:

$$\begin{aligned} \pi : V_{\mathbb{K}}^{n,1} - \{0\} &\rightarrow (V_{\mathbb{K}}^{n,1} - \{0\})/\sim \\ P &\mapsto \pi(P) = [P] = p \end{aligned}$$

ou seja, associa cada vetor em $V_{\mathbb{K}}^{n,1} - \{0\}$ à sua respectiva classe de equivalência. Assim, denotamos o *espaço projetivo* de dimensão n por $\mathbb{K}P^n = \pi(V_{\mathbb{K}}^{n,1} - \{0\})$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ chamamos tal espaço de *espaço projetivo real* e denotamos por $\mathbb{R}P^n$. Por outro lado, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, chamamos o espaço projetivo de *espaço projetivo complexo*, e denotamos por $\mathbb{C}P^n$.

Definição 1.4 *Seja π a projeção natural definida acima. Dizemos que $p = \pi(P) \in \mathbb{K}P^n$ é um ponto negativo, positivo ou isotrópico, se P for um vetor negativo, positivo ou isotrópico, respectivamente.*

Veja que a definição acima independe do elemento que tomamos em $V_{\mathbb{K}}^{n,1} - \{0\}$, tal que a projeção é o ponto p . De fato, tomando um outro ponto $P' \in V_{\mathbb{K}}^{n,1} - \{0\}$ tal que $\pi(P') = p$, temos que $P' = tP$ para algum $t \in \mathbb{K}$ não nulo, e segue que $\langle P', P' \rangle = t^2 \langle P, P \rangle$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e $\langle P', P' \rangle = |t|^2 \langle P, P \rangle$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definimos o *espaço hiperbólico* por $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n = \pi(V_-)$, isto é, a projetivização do conjunto dos vetores negativos de $V_{\mathbb{K}}^{n,1}$. Esse é o chamado *modelo projetivo* para o espaço hiperbólico. Além disso, temos que a projetivização do conjunto de vetores isotrópicos em $V_{\mathbb{K}}^{n,1}$ nos dá a *fronteira* do espaço hiperbólico, denotada por $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n = \pi(V_0)$, e a parte externa ao espaço hiperbólico e à sua fronteira, é dada pela projetivização do conjunto dos vetores positivos, o qual denotamos por $\ell\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n = \pi(V_+)$.

Notação 1.5 $\overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{K}}^n = \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$.

No modelo projetivo do espaço hiperbólico, a distância entre dois pontos $p, q \in \mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$ é dada por uma função distância ρ , definida pela fórmula:

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(p, q)}{2} \right) = \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle},$$

onde P e Q são vetores negativos em $V_{\mathbb{K}}^{n,1}$ tais que $\pi(P) = p$ e $\pi(Q) = q$. A função distância ρ é chamada de *métrica de Bergman*.

Considerando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, temos que $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ denota o *espaço hiperbólico real*, e tomando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, temos que $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ denota o *espaço hiperbólico complexo*. Nas próximas duas subseções tratamos desses espaços com mais detalhes.

1.2.2 O espaço hiperbólico real

Vamos começar esta subseção descrevendo o modelo do semiespaço superior para o espaço hiperbólico real. Em seguida trazemos conceitos básicos da geometria hiperbólica real, como por exemplo o conceito de geodésicas riemannianas, hiperplanos reais, conjunto polar, entre outros. Por fim falamos do grupo de isometrias do espaço hiperbólico real. Para mais detalhes, ver [11], [15] e [18].

1.2.2.1 O modelo do semiespaço superior

Considere o espaço vetorial real $V_{\mathbb{R}}^n$, e considere também o conjunto denotado por $U_n = \{p = (X_1, \dots, X_n) \in V_{\mathbb{R}}^n; X_n > 0\}$. Dados dois pontos $p, q \in U^n$, com $p = (X_1, \dots, X_n)$ e $q = (Y_1, \dots, Y_n)$, a função $\tilde{\rho}$ definida pela fórmula:

$$\cosh(\tilde{\rho}(p, q)) = 1 + \frac{\|p - q\|^2}{2X_n Y_n},$$

é uma métrica em U^n . Essa métrica é chamada de *métrica de Poincaré*. O conjunto U^n munido dessa métrica é chamado de *modelo do semiespaço superior* para o espaço hiperbólico real. Nesse modelo, a fronteira do espaço hiperbólico é dada por

$$\partial U^n = \{p = (X_1, \dots, X_n) \in V_{\mathbb{R}}^n; X_n = 0\} \cup \{\infty\},$$

onde ∞ é um ponto ideal. Em particular, veja que se $n = 3$, podemos representar U^3 como o produto cartesiano $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$. Assim, temos que a fronteira ∂U^3 fica identificada com o plano complexo estendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$.

Notação 1.6 $\overline{U^n} = U^n \cup \partial U^n$.

Podemos identificar o modelo do semiespaço superior com o modelo projetivo do espaço hiperbólico real. Para isso, considere a base canônica de $V_{\mathbb{R}}^{n,1}$ munido da forma bilinear simétrica de assinatura $(n, 1)$ cuja expressão é dada nessa base por

$$\langle Q, R \rangle = Y_1 Z_1 + \dots + Y_n Z_n - Y_{n+1} Z_{n+1},$$

com $Q = (Y_1, \dots, Y_{n+1})$ e $R = (Z_1, \dots, Z_{n+1})$.

Agora considere a aplicação entre o modelo do semiespaço superior e o modelo projetivo definida por:

$$\begin{aligned} \Phi : U^n &\rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n \\ p &\mapsto \Phi(p) = [(2X_1, \dots, 2X_{n-1}, \|p\|^2 - 1, \|p\|^2 + 1)] \end{aligned}$$

com $p = (X_1, \dots, X_n)$. A aplicação inversa é dada por:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n &\rightarrow U^n \\ p &\mapsto \Phi^{-1}(p) = \left(\frac{X_1}{X_{n+1} - X_n}, \dots, \frac{X_{n-1}}{X_{n+1} - X_n}, \sqrt{\frac{-(X_1^2 + \dots + X_n^2 - X_{n+1}^2)}{(X_{n+1} - X_n)^2}} \right) \end{aligned}$$

com $p = [(X_1, \dots, X_{n+1})]$. Veja que a aplicação Φ é uma isometria, ou seja, é uma aplicação linear e bijetiva tal que $\tilde{\rho}(p, q) = \rho(\Phi(p), \Phi(q))$, para todo $p, q \in U^n$.

Observação 1.7 *Observe que Φ pode ser estendida até a fronteira dos respectivos modelos, bastando associar cada ponto $p = (X_1, \dots, X_{n-1}, 0) \in \partial U^n$ à classe*

$$[(2X_1, \dots, 2X_{n-1}, \|p\|^2 - 1, \|p\|^2 + 1)] \in \partial \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$$

e associar o ponto ideal ∞ à classe $[(0, \dots, 0, 1, 1)] \in \partial \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$. Para a inversa, basta associar cada classe $[(X_1, \dots, X_{n+1})] \in \partial \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ ao ponto

$$\left(\frac{X_1}{X_{n+1} - X_n}, \dots, \frac{X_{n-1}}{X_{n+1} - X_n}, \sqrt{\frac{-(X_1^2 + \dots + X_n^2 - X_{n+1}^2)}{(X_{n+1} - X_n)^2}} \right) \in \partial U^n$$

sempre que $X_{n+1} \neq X_n$, e associar a classe $[(0, \dots, 0, 1, 1)] \in \partial \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ ao ponto ideal ∞ .

1.2.2.2 Elementos de geometria hiperbólica real

No espaço hiperbólico real de dimensão n , denotado por $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$, temos que para todo $m \leq n$, a subvariedade $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^m$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$. Isso nos dá uma lista

completa das subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$. Tal lista é dada pela Proposição 2.4.2 em [2]. Nesta subsecção falaremos sobre essas subvariedades usando o modelo projetivo.

Considere W um subespaço de $V_{\mathbb{R}}^{n,1}$ de dimensão $m + 1$, com $m \leq n$. Se $W \cap V_- \neq \emptyset$, então a projetivização de $W - \{0\}$ intersectada com $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ nos dá uma cópia de um espaço hiperbólico real mergulhado, nesse caso um $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^m$, em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$. Dessa forma, obtemos as subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$. Em particular, temos a definição que segue.

Definição 1.8 *Seja W um subespaço de dimensão 2 de $V_{\mathbb{R}}^{n,1}$, tal que $W \cap V_- \neq \emptyset$. Chamamos à subvariedade $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^1 \simeq \pi(W - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ de geodésica riemanniana do espaço hiperbólico real.*

Veja que, dados dois pontos distintos $p, q \in \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n} = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$, temos que existe uma única geodésica riemanniana que contém p e q (ver Proposição 2.4.3 em [2]). Para isso, basta tomar pontos $P, Q \in V_{\mathbb{R}}^{n,1}$ tais que $\pi(P) = p$ e $\pi(Q) = q$, e considerar o subespaço $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{P, Q\}$. Assim, temos que $W \cap V_- \neq \emptyset$, e $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^1 \simeq \pi(W - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ é a geodésica riemanniana procurada. Note que a construção de W é independente do levantamento que consideramos para p e q .

Para notação, denotamos as geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ por $\sigma = \pi(\Sigma - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$, onde Σ é um subespaço com dimensão 2, tal que $\Sigma \cap V_- \neq \emptyset$ (Σ é hiperbólico). Além disso, chamamos à projetivização $\pi(\Sigma - \{0\}) \simeq \mathbb{R}P^1$ de *linha projetiva real*, e denotamos por $\hat{\sigma}$. Se Σ é um subespaço elíptico, chamamos $\hat{\sigma}$ de *linha projetiva real positiva*. Da mesma forma, se Σ é um subespaço parabólico (hiperbólico), chamamos $\hat{\sigma}$ de *linha projetiva real degenerada (indefinida)*.

Seja W um subespaço de $V_{\mathbb{R}}^{n,1}$ de dimensão 3, chamamos à projetivização $\pi(W - \{0\}) \simeq \mathbb{R}P^2$ de *plano projetivo real*, o qual será dito *positivo, degenerado* ou *indefinido*, conforme W seja elíptico, parabólico ou hiperbólico, respectivamente. Chamamos à intersecção de um plano projetivo real indefinido com $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ de *plano hiperbólico real*, ou seja, $\pi(W - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$.

Considere duas linhas projetivas reais $\hat{\sigma}_1$ e $\hat{\sigma}_2$. Dizemos que $\hat{\sigma}_1$ e $\hat{\sigma}_2$ são *coplanares* se existir um plano projetivo real que contenha ambas. O resultado abaixo nos dá uma condição necessária e suficiente para que duas linhas projetivas reais sejam coplanares.

Proposição 1.9 *Duas linhas projetivas reais distintas são coplanares se, e somente se, elas se intersectam em algum ponto de $\mathbb{R}P^n$.*

Prova. Ver a Proposição 1.18. ■

Veja que, dada uma geodésica riemanniana σ , temos associado a ela uma linha projetiva real indefinida $\hat{\sigma}$, pois $\sigma = \pi(\Sigma - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n = \hat{\sigma} \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^1$. Assim temos a definição que segue.

Definição 1.10 *Duas geodésicas riemannianas σ_1 e σ_2 são ditas coplanares se as respectivas linhas projetivas reais indefinidas, $\hat{\sigma}_1$ e $\hat{\sigma}_2$, são coplanares. Dizemos que σ_1 e σ_2 são reversas se elas não são coplanares.*

Observe que, como duas linhas projetivas reais são coplanares se existe um plano projetivo real que contém ambas, obtemos que para duas geodésicas riemannianas coplanares, existe um plano hiperbólico real que contém ambas. Além disso, dadas duas geodésicas riemannianas coplanares σ_1 e σ_2 , note que pela Proposição 1.9, as respectivas linhas projetivas reais indefinidas $\hat{\sigma}_1$ e $\hat{\sigma}_2$, se intersectam em algum ponto de $\mathbb{R}P^n$. Dessa forma, dizemos que σ_1 e σ_2 são *ultraparalelas*, *assintóticas* ou *concorrentes*, se suas respectivas linhas projetivas reais indefinidas $\hat{\sigma}_1$ e $\hat{\sigma}_2$ se intersectam em um ponto positivo, isotrópico ou negativo, respectivamente.

Além das subvariedades totalmente geodésicas que apresentamos até agora, como as geodésicas riemannianas e os planos hiperbólicos reais, um outro tipo de subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ importante para este trabalho são os hiperplanos reais. Segue a definição.

Definição 1.11 *Dado H um subespaço de dimensão n de $V_{\mathbb{R}}^{n,1}$, tal que $H \cap V_- \neq \emptyset$, chamamos à subvariedade $h = \pi(H - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ de hiperplano real do espaço hiperbólico real.*

Seja W um subespaço de $V_{\mathbb{R}}^{n,1}$ de dimensão $m + 1$, com $m + 1 \leq n$, tal que $W \cap V_- \neq \emptyset$. Vimos que $w = \pi(W - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^m$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$. Assim, vamos chamar à projetivização $w^\perp = \pi(W^\perp - \{0\}) \simeq \mathbb{R}P^{n-m-1}$ de *conjunto polar* de

w , onde W^\perp denota o complemento ortogonal de W . Além disso, pela Proposição 1.3, temos que nesse caso W^\perp sempre é elíptico. Veja que em particular, quando w tem dimensão $n - 1$, temos que w^\perp é um ponto de $\mathbb{R}P^n - \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^n$. Chamamos esse ponto de *ponto polar*. Podemos observar que geodésicas riemannianas e planos hiperbólicos reais estão associados a conjuntos polares, e hiperplanos reais estão associado a pontos polares pertencentes a $\mathbb{R}P^n - \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^n$. O próximo resultado comprova essas afirmações.

Proposição 1.12 *Considere $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ com $n \geq 4$. Temos que:*

- (i) *O conjunto das geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ corresponde bijectivamente ao conjunto de conjuntos polares de dimensão $n - 2$;*
- (ii) *O conjunto de planos hiperbólicos reais em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ corresponde bijectivamente ao conjunto de conjuntos polares de dimensão $n - 3$;*
- (iii) *O conjunto de hiperplanos reais em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ corresponde bijectivamente ao conjunto de pontos polares pertencentes a $\mathbb{R}P^n - \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^n$.*

Para o caso em que $n = 3$, temos que os hiperplanos reais de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ são planos hiperbólicos reais, e conseqüentemente temos que o conjunto de planos hiperbólicos reais em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ corresponde bijectivamente ao conjunto de pontos polares pertencentes a $\mathbb{R}P^3 - \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^3$, ou seja, corresponde ao conjunto de pontos positivos de $\pi(V_+)$. Além disso, o conjunto polar de uma geodésica riemanniana de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ é uma linha projetiva real positiva, e temos que o conjunto das geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ corresponde bijectivamente ao conjunto das linhas projetivas reais positivas (ver Proposição 1.3).

1.2.2.3 Grupo de isometrias do espaço hiperbólico Real

Para começar, vamos definir aplicação linear ortogonal. Esse será nosso ponto de partida para o estudo do grupo de isometrias do espaço hiperbólico real. Segue a definição.

Definição 1.13 *Considere $V_{\mathbb{R}}^{n+1}$ munido de uma forma bilinear e simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Uma aplicação linear $F : V_{\mathbb{R}}^{n+1} \rightarrow V_{\mathbb{R}}^{n+1}$ é dita ortogonal se F preserva a forma bilinear simétrica de $V_{\mathbb{R}}^{n+1}$, isto é, se para todo $P, Q \in V_{\mathbb{R}}^{n+1}$ temos que $\langle F(P), F(Q) \rangle = \langle P, Q \rangle$.*

O conjunto de tais aplicações lineares ortogonais munido da operação composição de funções, tem uma estrutura de grupo. Denotamos esse grupo por $O(V_{\mathbb{R}}^{n+1})$. Se a forma bilinear e simétrica tem assinatura $(n, 1)$, o grupo de aplicações ortogonais $F : V_{\mathbb{R}}^{n,1} \rightarrow V_{\mathbb{R}}^{n,1}$ é denotado por $O(V_{\mathbb{R}}^{n,1})$.

Por outro lado, seja $GL(n+1, \mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $(n+1) \times (n+1)$ invertíveis, com entradas em \mathbb{R} . Esse conjunto tem uma estrutura de grupo quando munido da operação de multiplicação de matrizes. Assim, temos que $A \in GL(n+1, \mathbb{R})$ é dita ser uma *matriz ortogonal* com respeito à forma bilinear e simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se a aplicação linear $F : V_{\mathbb{R}}^{n+1} \rightarrow V_{\mathbb{R}}^{n+1}$ definida por $F(P) = AP$ for ortogonal, onde P é a matriz coluna que contém as coordenadas de P em uma base de $V_{\mathbb{R}}^{n+1}$. Consequentemente, temos que a matriz A preserva a forma bilinear e simétrica, já que $\langle AP, AQ \rangle = \langle F(P), F(Q) \rangle = \langle P, Q \rangle$ para todo $P, Q \in V_{\mathbb{R}}^{n+1}$.

Tendo isso, dado $V_{\mathbb{R}}^{n+1}$ munido de uma forma bilinear e simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, denotamos o conjunto das matrizes ortogonais de ordem $(n+1) \times (n+1)$ por:

$$O(n+1) = \{A \in GL(n+1, \mathbb{R}); \langle AP, AQ \rangle = \langle P, Q \rangle, \forall P, Q \in V_{\mathbb{R}}^{n+1}\}.$$

Munindo esse conjunto com a operação de produto de matrizes, temos que $O(n+1)$ tem uma estrutura de grupo, e é chamado de *grupo ortogonal*. Um subgrupo importante de $O(n+1)$ é o *grupo ortogonal especial*, dado por:

$$SO(n+1) = \{A \in O(n+1); \det(A) = 1\},$$

onde $\det : O(n+1) \rightarrow O(1)$ é a aplicação determinante.

Considerando $V_{\mathbb{R}}^{n,1}$ munido de uma forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilinear e simétrica de assinatura $(n, 1)$, o grupo ortogonal e o grupo ortogonal especial são dados respectivamente por:

$$O(n, 1) = \{A \in GL(n+1, \mathbb{R}); \langle AP, AQ \rangle = \langle P, Q \rangle, \forall P, Q \in V_{\mathbb{R}}^{n,1}\}$$

e

$$SO(n, 1) = \{A \in O(n, 1); \det(A) = 1\}.$$

Veja que uma aplicação ortogonal F deixa invariante os conjuntos V_- , V_0 e V_+ . Como $O(n, 1)$ é naturalmente isomorfo a $O(V_{\mathbb{R}}^{n,1})$, temos que a matriz ortogonal de $O(n, 1)$ associada a tal aplicação F deixa invariante os elementos dos conjuntos V_- , V_0 e V_+ , dados em forma

de uma matriz coluna que contém as coordenadas de tais elementos em uma base de $V_{\mathbb{R}}^{n,1}$. Além disso, se $A \in O(n, 1)$, temos que $\det(A) = \pm 1$.

Seja a projeção natural $\Pi : O(V_{\mathbb{R}}^{n,1}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}P^n)$, onde $\text{Aut}(\mathbb{R}P^n)$ é o grupo de automorfismos de $\mathbb{R}P^n$. Denote a imagem de Π por $\Pi(O(V_{\mathbb{R}}^{n,1})) = PO(V_{\mathbb{R}}^{n,1})$. Como o núcleo de Π é dado pelo centro $Z(O(V_{\mathbb{R}}^{n,1}))$ de $O(V_{\mathbb{R}}^{n,1})$, temos pelo Primeiro Teorema de Isomorfismo para grupos que

$$\frac{O(V_{\mathbb{R}}^{n,1})}{Z(O(V_{\mathbb{R}}^{n,1}))} \simeq PO(V_{\mathbb{R}}^{n,1}).$$

Logo temos o seguinte isomorfismo de grupos:

$$\frac{O(n, 1)}{Z(O(n, 1))} \simeq PO(n, 1).$$

Assim definido, temos que $PO(n, 1)$ é a projetivização do $O(n, 1)$ e é chamado *grupo ortogonal projetivo*. Analogamente, denotando $\Pi(SO(n, 1)) = PSO(n, 1)$, temos que

$$\frac{SO(n, 1)}{Z(SO(n, 1))} \simeq PSO(n, 1).$$

Além disso, $PSO(n, 1)$ é um subgrupo de $PO(n, 1)$ e é chamado *grupo ortogonal especial projetivo*. Em particular, $SO(n, 1) \simeq PSO(n, 1) = PO(n, 1)$ se $n + 1$ é um número ímpar, e $PSO(n, 1)$ é um subgrupo de índice 2 de $PO(n, 1)$ se $n + 1$ é um número par.

Agora, considere o modelo do semiespaço superior para o espaço hiperbólico real dado por $U_n = \{p = (X_1, \dots, X_n) \in V_{\mathbb{R}}^n; X_n > 0\}$. Podemos representar esse modelo como o produto cartesiano $V_{\mathbb{R}}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$. Dados $p_0 \in V_{\mathbb{R}}^{n-1}$, $t_0 > 0$ e $t_0 \neq 1$, $A \in O(V_{\mathbb{R}}^{n-1})$, sejam as seguintes aplicações:

(i) Translação:

$$\begin{aligned} F_1 : V_{\mathbb{R}}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow V_{\mathbb{R}}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ ; \\ (p, t) &\mapsto (p + p_0, t) \end{aligned}$$

(ii) Dilatação:

$$\begin{aligned} F_2 : V_{\mathbb{R}}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow V_{\mathbb{R}}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ ; \\ (p, t) &\mapsto t_0(p, t) \end{aligned}$$

(iii) Rotação:

$$\begin{aligned} F_3 : V_{\mathbb{R}}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow V_{\mathbb{R}}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ ; \\ (p, t) &\mapsto (Ap, t) \end{aligned}$$

(iv) Inversão:

$$\begin{aligned} F_4 : V_{\mathbb{R}}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow V_{\mathbb{R}}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ . \\ (p, t) &\mapsto \frac{(p, t)}{\|(p, t)\|^2} \end{aligned}$$

Denote o *grupo de isometrias* do espaço hiperbólico real de dimensão n por $Isom(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$. Segundo o Teorema B.7 da página 61 de [15], temos que as aplicações listadas acima geram todo o grupo $Isom(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$. Veja que para cada uma dessas aplicações podemos construir uma aplicação induzida dada por $f_j = \Phi \circ F_j \circ \Phi^{-1}$, onde $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ e Φ é a aplicação que relaciona o modelo do semiespaço superior com o modelo projetivo (ver Subseção 1.2.2.1). Isso nos garante que $PO(n, 1) \supset Isom(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$. Como é fato que $PO(n, 1) \subset Isom(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$, segue que $PO(n, 1) = Isom(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n)$.

A definição abaixo nos diz quais os tipos de isometrias que existem em $PO(n, 1)$. Para ver a prova de que tal definição cobre todas as possibilidades possíveis para os pontos fixos de uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$, ver Lema 3.1.1 na página 62 de [2].

Definição 1.14 *Uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$ em $PO(n, 1)$, diferente da identidade, é dita ser:*

- (i) *Elíptica se fixa pelo menos um ponto de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$;*
- (ii) *Parabólica se fixa um único ponto, e esse ponto está em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$;*
- (iii) *Hiperbólica (ou Loxodrômica) se fixa exatamente dois pontos, e esses pontos estão em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n$.*

1.2.3 O espaço hiperbólico complexo

Vamos começar esta subseção descrevendo o modelo do parabolóide para o espaço hiperbólico complexo. Em seguida trazemos conceitos básicos da geometria hiperbólica com-

plexa, como por exemplo o conceito de geodésicas complexas, hiperplanos complexos, conjuntos polares, entre outros. Por fim falamos do grupo de isometrias do espaço hiperbólico complexo. Para mais detalhes ver [7].

1.2.3.1 O modelo do parabolóide

O modelo do parabolóide, ou domínio de Siegel, é uma outra forma de exibir o espaço hiperbólico complexo. Para começar, considere em $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ uma base $\mathcal{B} = \{P_1, \dots, P_{n+1}\}$ tal que $\langle P_1, P_1 \rangle = \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle = 0$, $\langle P_j, P_j \rangle = 1$ se $j = 2, \dots, n$, $\langle P_1, P_{n+1} \rangle = 1$, $\langle P_j, P_l \rangle = 0$ se $j \neq l$ com $j, l \in \{2, \dots, n\}$ e $\langle P_1, P_j \rangle = \langle P_j, P_{n+1} \rangle = 0$, para $j \in \{2, \dots, n\}$.

Veja que uma base com tais propriedades existe. Para provar esse fato, considere dois vetores isotrópicos linearmente independentes $Q_1, Q_2 \in V_0$. Como $Q_1, Q_2 \in V_0$, temos que $\langle Q_1, Q_2 \rangle \neq 0$. Escreva $P_1 = \frac{Q_1}{\langle Q_1, Q_2 \rangle}$ e $P_{n+1} = Q_2$. Considere o espaço gerado por P_1 e P_{n+1} com escalares complexos, denotado por $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{P_1, P_{n+1}\}$. Temos que W é hiperbólico e consequentemente W^\perp é elíptico (ver Proposição 1.3). Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal do subespaço elíptico W^\perp . Denote a base obtida pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt por $\{P_2, \dots, P_n\}$. Assim obtemos a base desejada. Com isso, temos que a forma hermitiana nessa nova base é dada pela expressão

$$\langle P, Q \rangle = X_1 \overline{Y_{n+1}} + X_2 \overline{Y_2} + \dots + X_n \overline{Y_n} + X_{n+1} \overline{Y_1}$$

onde $P, Q \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}$, e têm coordenadas na base \mathcal{B} dadas por $P = (X_1, \dots, X_{n+1})$ e $Q = (Y_1, \dots, Y_{n+1})$.

Note que $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ pode ser coberto por $n + 1$ conjuntos V_1, \dots, V_{n+1} definidos como $V_j = \{(X_1, \dots, X_{n+1}) \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}; X_j = 0\}$. Dessa forma, temos que $V_- \subset V_{n+1}$. Então, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \pi_{n+1} : V_{n+1} &\rightarrow V_{\mathbb{C}}^n \\ P = (X_1, \dots, X_{n+1}) &\mapsto p = (x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{X_1}{X_{n+1}}, \dots, \frac{X_n}{X_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

que está bem definida já que em V_{n+1} temos $X_{n+1} \neq 0$.

Veja que para cada ponto $p \in V_{\mathbb{C}}^n = \pi_{n+1}(V_{n+1})$ temos levantamentos em $V_{n+1} \subset V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ tais que a projeção através de π_{n+1} é o ponto p . Entre esses levantamentos existe um levantamento

especial dado pela forma $P = (X_1, \dots, X_n, 1)$ o qual chamamos de *levantamento padrão*. Em particular, o ponto $o = (0, \dots, 0) \in \pi_{n+1}(V_{n+1})$ tem levantamento padrão denotado por $O = (0, \dots, 0, 1) \in V_{n+1}$.

Agora, se $P = (X_1, \dots, X_{n+1}) \in V_- \subset V_{n+1}$, temos que

$$\begin{aligned} \langle P, P \rangle < 0 &\Leftrightarrow X_1 \overline{X_{n+1}} + X_2 \overline{X_2} + \dots + X_n \overline{X_n} + X_{n+1} \overline{X_1} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{X_1 \overline{X_{n+1}}}{X_{n+1} \overline{X_{n+1}}} + \frac{X_2 \overline{X_2}}{X_{n+1} \overline{X_{n+1}}} + \dots + \frac{X_n \overline{X_n}}{X_{n+1} \overline{X_{n+1}}} + \frac{X_{n+1} \overline{X_1}}{X_{n+1} \overline{X_{n+1}}} < 0 \\ &\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(x_1) + \sum_{j=2}^n |x_j|^2 < 0 \end{aligned}$$

onde $x_j = \frac{X_j}{X_{n+1}}$, com $j = 1, \dots, n$, e $\operatorname{Re}(x_1)$ denota a parte real de x_1 . Então, se P é um levantamento padrão de $p = (x_1, \dots, x_n) \in V_{\mathbb{C}}^n$, podemos escrever

$$\mathfrak{h}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in V_{\mathbb{C}}^n; \langle P, P \rangle < 0\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in V_{\mathbb{C}}^n; 2\operatorname{Re}(x_1) + \sum_{j=2}^n |x_j|^2 < 0\}.$$

Chamamos o conjunto \mathfrak{h}^n de *modelo do parabolóide* para o espaço hiperbólico complexo. A métrica utilizada nesse modelo é a métrica de Bergman. Por outro lado, temos que a fronteira do espaço hiperbólico nesse modelo é dada por:

$$\partial\mathfrak{h}^n = \pi_{n+1}(V_0) = \{(x_1, \dots, x_n) \in V_{\mathbb{C}}^n; 2\operatorname{Re}(x_1) + \sum_{j=2}^n |x_j|^2 = 0\} \cup \{\infty\},$$

onde ∞ é um ponto ideal. Definimos como levantamento padrão de ∞ em $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ o ponto $(1, 0, \dots, 0)$. Dizemos que o ponto $o = (0, \dots, 0) \in \partial\mathfrak{h}^n$ é a *origem* do domínio de Siegel. Além disso, note que $V_0 - \{(1, 0, \dots, 0)\} \subset V_{n+1}$ e $V_0 - \{O\} \subset V_1$.

Agora considere o conjunto $V_{\mathbb{C}}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Dados dois elementos $(P, t_1), (Q, t_2) \in V_{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{R}$, considere a operação

$$(P, t_1) * (Q, t_2) = (P + Q, t_1 + t_2 + 2\operatorname{Im}(\langle\langle P, Q \rangle\rangle)),$$

onde $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ denota a forma hermitiana canônica de $V_{\mathbb{C}}^{n-1}$ e $\operatorname{Im}(\langle\langle P, Q \rangle\rangle)$ denota a parte imaginária de $\langle\langle P, Q \rangle\rangle$. O conjunto $V_{\mathbb{C}}^{n-1} \times \mathbb{R}$ munido da operação “*” tem estrutura de grupo, e chamamos de *grupo de Heisenberg*. Denotamos tal grupo por $\mathcal{H} = (V_{\mathbb{C}}^{n-1} \times \mathbb{R}, *)$.

Tendo isso, podemos identificar a fronteira $\partial\mathfrak{h}^n$ com a compatificação a um ponto do grupo de Heisenberg. De fato, tome um ponto $p \in \partial\mathfrak{h}^n - \{\infty\}$ e considere seu respectivo levantamento padrão $P = (X_1, \dots, X_n, 1)$. Temos que $2\operatorname{Re}(X_1) + \sum_{j=2}^n |X_j|^2 = 0$. Considere $Y_j = \frac{X_{j+1}}{\sqrt{2}}$, com $j = 1, \dots, n-1$, e seja $Q = (Y_1, \dots, Y_{n-1}) \in V_{\mathbb{C}}^{n-1}$. Logo $2\operatorname{Re}(X_1) = -2 \sum_{j=2}^n |Y_j|^2 = -2\|Q\|^2$, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana em $V_{\mathbb{C}}^{n-1}$. Segue que $\operatorname{Re}(X_1) = -\|Q\|^2$, e como X_1 tem a forma $X_1 = s + ti$, com $s, t \in \mathbb{R}$ e i a unidade imaginária, então podemos escrever $X_1 = -\|Q\|^2 + ti$. Dessa forma obtemos $P = (-\|Q\|^2 + ti, \sqrt{2}Y_1, \dots, \sqrt{2}Y_{n-1}, 1) = (-\|Q\|^2 + ti, \sqrt{2}Q, 1)$. Assim, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_1 : V_{\mathbb{C}}^{n-1} \times \mathbb{R} &\rightarrow V_{n+1} \quad . \\ (Q, t) &\mapsto (-\|Q\|^2 + ti, \sqrt{2}Q, 1) \end{aligned}$$

Considere a composição $\Psi_1 = \pi_{n+1} \circ \psi_1$. A aplicação Ψ nos dá a identificação desejada, ou seja, obtemos uma identificação de $(V_{\mathbb{C}}^{n-1} \times \mathbb{R}) \cup \{\infty\}$ com $\partial\mathfrak{h}^n$. Além disso, podemos identificar também $\mathcal{H} \times \mathbb{R}_+$ com o domínio de Siegel \mathfrak{h}^n . De fato, tome um ponto $p \in \mathfrak{h}^n - \{\infty\}$ e considere seu respectivo levantamento padrão $P = (X_1, \dots, X_n, 1)$. Temos que $2\operatorname{Re}(X_1) + \sum_{j=2}^n |X_j|^2 < 0$. Podemos considerar $2\operatorname{Re}(X_1) + \sum_{j=2}^n |X_j|^2 = -2t_0$ para $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Tome $Y_j = \frac{X_{j+1}}{\sqrt{2}}$, com $j = 1, \dots, n-1$, e seja $Q = (Y_1, \dots, Y_{n-1}) \in V_{\mathbb{C}}^{n-1}$. Então $\operatorname{Re}(X_1) = -\|Q\|^2 - t_0$ e conseqüentemente $X_1 = -\|Q\|^2 - t_0 + ti$, com $t \in \mathbb{R}$. Segue que $P = (-\|Q\|^2 - t_0 + ti, \sqrt{2}Y_1, \dots, \sqrt{2}Y_{n-1}, 1) = (-\|Q\|^2 - t_0 + ti, \sqrt{2}Q, 1)$. Assim, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_2 : \mathcal{H} \times \mathbb{R}_+ = V_{\mathbb{C}}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow V_{n+1} \quad . \\ (Q, t, t_0) &\mapsto (-\|Q\|^2 - t_0 + ti, \sqrt{2}Q, 1) \end{aligned}$$

A composição $\Psi_2 = \pi_{n+1} \circ \psi_2$ nos dá a identificação procurada, ou seja, nos dá uma identificação entre $\mathcal{H} \times \mathbb{R}_+$ e \mathfrak{h}^n . Além disso, chamamos ao conjunto

$$\mathcal{H}_{t_0} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{h}^n; 2\operatorname{Re}(x_1) + \sum_{j=2}^n |x_j|^2 = -2t_0\} ,$$

de *horoesfera* de altura t_0 .

1.2.3.2 Elementos de geometria hiperbólica complexa

No espaço hiperbólico complexo temos dois tipos de subvariedades totalmente geodésicas, ou seja, as subvariedades totalmente geodésicas totalmente reais e as subvariedades totalmente geodésicas holomorfas. Nesta subseção vamos descrever essas subvariedades, trabalhando com o modelo projetivo (para mais detalhes ver [2]).

Seja $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$, e considere apenas multiplicações por escalares em $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Isso nos dá um espaço vetorial real $V_{\mathbb{R}}^{n,1} \subset V_{\mathbb{C}}^{n,1}$, cujos elementos são combinações lineares de elementos de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$, com escalares reais. Seja W um subespaço vetorial real de $V_{\mathbb{R}}^{n,1}$ de dimensão real $m + 1$, com $m \leq n$. Dizemos que W é um subespaço *totalmente real* se, e somente se, $\langle P, Q \rangle \in \mathbb{R}$, para todo $P, Q \in W$. Assim, considerando W um subespaço totalmente real tal que $W \cap V_- \neq \emptyset$, temos que a projetivização de $W - \{0\}$ intersectada com $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ nos dá uma cópia do espaço hiperbólico real mergulhado, nesse caso um $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^m$, em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, o qual é uma subvariedade totalmente geodésica. Chamamos essa subvariedade de *subvariedade totalmente geodésica totalmente real*. Em particular, temos a definição que segue.

Definição 1.15 *Dado W um subespaço totalmente real com dimensão real 2, tal que $W \cap V_- \neq \emptyset$, chamamos à subvariedade $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^1 \simeq \pi(W - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ de geodésica riemanniana do espaço hiperbólico complexo.*

Agora considere W um subespaço complexo de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ de dimensão complexa $m + 1$, com $m \leq n$. Se $W \cap V_- \neq \emptyset$, então a projetivização de $W - \{0\}$ intersectada com $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ nos dá uma cópia de um espaço hiperbólico complexo mergulhado, nesse caso um $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^m$, em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Chamamos essa subvariedade de *subvariedade totalmente geodésica holomorfa*. Em particular, temos a definição que segue.

Definição 1.16 *Dado W um subespaço complexo de dimensão complexa 2, tal que $W \cap V_- \neq \emptyset$, chamamos à subvariedade $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 \simeq \pi(W - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ de geodésica complexa do espaço hiperbólico complexo.*

Veja que, dados dois pontos distintos $p, q \in \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n} = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, temos que existe uma única geodésica complexa que contém p e q (ver Teorema 3.1.11 em [7] para mais detalhes). O mesmo vale para geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.

Para notação, denotamos as geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ por $\sigma = \pi(\Sigma - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, onde Σ é um subespaço totalmente real com dimensão real 2, tal que $\Sigma \cap V_- \neq \emptyset$ (Σ é hiperbólico). Denotamos as geodésicas complexas por $c = \pi(C - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, onde C é um subespaço complexo de dimensão complexa 2, tal que $C \cap V_- \neq \emptyset$ (C é hiperbólico). Além disso, chamamos à projetivização $\pi(C - \{0\}) \simeq \mathbb{C}P^1$ de *linha projetiva complexa*, e denotamos por \hat{c} . Se C é um subespaço complexo elíptico, chamamos \hat{c} de *linha projetiva complexa positiva*. Da mesma forma, se C é um subespaço complexo parabólico (hiperbólico), chamamos \hat{c} de *linha projetiva complexa degenerada (indefinida)*.

Seja W um subespaço complexo de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ de dimensão complexa 3, chamamos à projetivização $\pi(W - \{0\}) \simeq \mathbb{C}P^2$ de *plano projetivo complexo*, o qual será dito *positivo*, *degenerado* ou *indefinido*, conforme W seja elíptico, parabólico ou hiperbólico, respectivamente. Chamamos à intersecção de um plano projetivo complexo indefinido com $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ de *plano hiperbólico complexo*, ou seja, $\pi(W - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

Definição 1.17 *Considere duas linhas projetivas complexas \hat{c}_1 e \hat{c}_2 . Dizemos que \hat{c}_1 e \hat{c}_2 são coplanares se existir um plano projetivo complexo que contenha ambas.*

O resultado abaixo nos dá uma condição necessária e suficiente para que duas linhas projetivas complexas sejam coplanares. Segue o resultado.

Proposição 1.18 *Duas linhas projetivas complexas distintas são coplanares se, e somente se, elas se intersectam em algum ponto de $\mathbb{C}P^n$.*

Prova. Considere \hat{c}_1 e \hat{c}_2 duas linhas projetivas complexas distintas coplanares. Por definição temos que existe um plano projetivo complexo w tal que $\hat{c}_1 \subset w$ e $\hat{c}_2 \subset w$. Segue que $\hat{c}_1 \cap \hat{c}_2 \neq \emptyset$ e a dimensão complexa de $\hat{c}_1 \cap \hat{c}_2 \neq \emptyset$ é maior ou igual a $1 + 1 - 2 = 0$. Como \hat{c}_1 e \hat{c}_2 são distintas, temos que a dimensão é 0 e conseqüentemente $\hat{c}_1 \cap \hat{c}_2$ é um ponto de $\mathbb{C}P^n$. Reciprocamente, considere C_1 e C_2 subespaços complexos tais que $\pi(C_1 - \{0\}) = \hat{c}_1$ e $\pi(C_2 - \{0\}) = \hat{c}_2$. Como $\hat{c}_1 \cap \hat{c}_2$ é um ponto de $\mathbb{C}P^n$, temos que $C_1 \cap C_2$ tem dimensão complexa 1 e contém a origem, isto é, $C_1 \cap C_2$ é uma reta em $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ passando pela origem. Assim, considere o subespaço complexo $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{P_1, P_2, P_3\}$, tal que $P_1 \in T_0(C_1 \cap C_2)$, $P_2 \in [T_0(C_1 \cap C_2)]^{\perp} \cap T_0C_1$ e $P_3 \in [T_0(C_1 \cap C_2)]^{\perp} \cap T_0C_2$, onde $T_0(C_1 \cap C_2)$ denota o espaço

tangente de $C_1 \cap C_2$ na origem e T_0C_j denota o espaço tangente de C_j na origem, para $j = 1, 2$. Segue que $\dim_{\mathbb{C}}W = 3$ e $w = \pi(W - \{0\})$ é o plano projetivo complexo desejado.

■

Veja que, dada uma geodésica complexa c , temos associado a ela uma linha projetiva complexa indefinida \hat{c} , pois $c = \pi(C - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = \hat{c} \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$. Assim temos a definição que segue.

Definição 1.19 *Duas geodésicas complexas c_1 e c_2 são ditas coplanares se as respectivas linhas projetivas complexas indefinidas, \hat{c}_1 e \hat{c}_2 , são coplanares. Dizemos que c_1 e c_2 são reversas se elas não são coplanares.*

Observe que, como duas linhas projetivas complexas são coplanares se existe um plano projetivo complexo que contém ambas, obtemos que para duas geodésicas complexas coplanares, existe um plano hiperbólico complexo que contém ambas. Além disso, dadas duas geodésicas complexas coplanares c_1 e c_2 , note que pela Proposição 1.18, as respectivas linhas projetivas complexas \hat{c}_1 e \hat{c}_2 se intersectam em algum ponto de $\mathbb{C}P^n$. Dessa forma, dizemos que c_1 e c_2 são *ultraparalelas*, *assintóticas* ou *concorrentes*, se suas respectivas linhas projetivas complexas \hat{c}_1 e \hat{c}_2 se intersectam em um ponto positivo, isotrópico ou negativo, respectivamente.

Além das geodésicas complexas e dos planos hiperbólicos complexos, um outro tipo de subvariedade totalmente geodésica holomorfa importante para este trabalho são os hiperplanos complexos. Segue a definição.

Definição 1.20 *Dado H um subespaço complexo de dimensão complexa n , tal que $H \cap V_- \neq \emptyset$, chamamos à subvariedade $h = \pi(H - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ de hiperplano complexo do espaço hiperbólico complexo.*

Seja W um subespaço complexo de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ de dimensão complexa $m + 1$, com $m + 1 \leq n$, tal que $W \cap V_- \neq \emptyset$. Vimos que $w = \pi(W - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^m$ é uma subvariedade totalmente geodésica holomorfa de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Assim, vamos chamar à projetivização $w^\perp = \pi(W^\perp - \{0\}) \simeq \mathbb{C}P^{n-m-1}$ de *conjunto polar* de w , onde W^\perp denota o complemento ortogonal de W . Além disso, pela Proposição 1.3, temos que nesse caso W^\perp sempre é elíptico.

Veja que em particular, quando w tem dimensão complexa $n-1$, temos que w^\perp é um ponto de $\mathbb{C}P^n - \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}^n$. Chamamos esse ponto de *ponto polar*. Podemos observar que geodésicas complexas e planos hiperbólicos complexos estão associados a conjuntos polares, e hiperplanos complexos estão associado a pontos polares pertencentes a $\mathbb{C}P^n - \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}^n$. O próximo resultado comprova essas afirmações.

Proposição 1.21 *Considere $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ com $n \geq 4$. Temos que:*

- (i) *O conjunto das geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ corresponde bijectivamente ao conjunto de conjuntos polares de dimensão $n - 2$;*
- (ii) *O conjunto de planos hiperbólicos complexos em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ corresponde bijectivamente ao conjunto de conjuntos polares de dimensão $n - 3$;*
- (iii) *O conjunto de hiperplanos complexos de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ corresponde bijectivamente ao conjunto de pontos polares pertencentes a $\mathbb{C}P^n - \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}^n$.*

1.2.3.3 Grupo de isometrias do espaço hiperbólico complexo

Para começar, vamos definir aplicação linear unitária. Esse será nosso ponto de partida para o estudo do grupo de isometrias do espaço hiperbólico complexo. Segue a definição.

Definição 1.22 *Considere $V_{\mathbb{C}}^{n+1}$ munido de uma forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Uma aplicação linear $F : V_{\mathbb{C}}^{n+1} \rightarrow V_{\mathbb{C}}^{n+1}$ é dita unitária se F preserva a forma hermitiana de $V_{\mathbb{C}}^{n+1}$, isto é, se para todo $P, Q \in V_{\mathbb{C}}^{n+1}$ temos que $\langle F(P), F(Q) \rangle = \langle P, Q \rangle$.*

O conjunto de tais aplicações lineares unitárias munido da operação composição de funções, tem uma estrutura de grupo. Denotamos esse grupo por $U(V_{\mathbb{C}}^{n+1})$. Se a forma hermitiana tem assinatura $(n, 1)$, o grupo de aplicações unitárias $F : V_{\mathbb{C}}^{n,1} \rightarrow V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ é denotado por $U(V_{\mathbb{C}}^{n,1})$.

Por outro lado, seja $GL(n+1, \mathbb{C})$ o conjunto das matrizes $(n+1) \times (n+1)$ invertíveis, com entradas em \mathbb{C} . Esse conjunto tem uma estrutura de grupo quando munido da operação de multiplicação de matrizes. Assim, temos que $A \in GL(n+1, \mathbb{C})$ é dita ser uma *matriz*

unitária com respeito à forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se a aplicação linear $F : V_{\mathbb{C}}^{n+1} \rightarrow V_{\mathbb{C}}^{n+1}$ definida por $F(P) = AP$ for unitária, onde P é a matriz coluna que contém as coordenadas de P em uma base de $V_{\mathbb{C}}^{n+1}$. Consequentemente, temos que a matriz A preserva a forma hermitiana, já que $\langle AP, AQ \rangle = \langle F(P), F(Q) \rangle = \langle P, Q \rangle$, para todo $P, Q \in V_{\mathbb{C}}^{n+1}$.

Tendo isso, dado $V_{\mathbb{C}}^{n+1}$ munido de uma forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$, denotamos o conjunto das matrizes unitárias de ordem $(n+1) \times (n+1)$ por:

$$U(n+1) = \{A \in GL(n+1, \mathbb{C}); \langle AP, AQ \rangle = \langle P, Q \rangle, \forall P, Q \in V_{\mathbb{C}}^{n+1}\} .$$

Munindo esse conjunto com a operação de produto de matrizes, temos que $U(n+1)$ tem uma estrutura de grupo, e é chamado de *grupo unitário*. Um subgrupo importante de $U(n+1)$ é o *grupo unitário especial*, dado por:

$$SU(n+1) = \{A \in U(n+1); \det(A) = 1\} ,$$

onde $\det : U(n+1) \rightarrow U(1)$ é a aplicação determinante.

Considerando $V_{\mathbb{C}}^{n+1}$ munido de uma forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitiana de assinatura $(n, 1)$, o grupo unitário e o grupo unitário especial são dados respectivamente por:

$$U(n, 1) = \{A \in GL(n+1, \mathbb{C}); \langle AP, AQ \rangle = \langle P, Q \rangle, \forall P, Q \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}\}$$

e

$$SU(n, 1) = \{A \in U(n, 1); \det(A) = 1\} .$$

Assim como no caso de aplicações ortogonais, descrito na subseção 1.2.2.3, uma aplicação unitária F também deixa invariante os conjuntos V_- , V_0 e V_+ . Como $U(n, 1)$ é naturalmente isomorfo a $U(V_{\mathbb{R}}^{n,1})$, temos que a matriz unitária de $U(n, 1)$ associada a tal aplicação F deixa invariante os elementos dos conjuntos V_- , V_0 e V_+ , dados em forma de uma matriz coluna que contém as coordenadas de tais elementos em uma base de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$. Além disso, se $A \in U(n, 1)$, temos que $|\det(A)| = 1$.

Agora considere a projeção natural $\Pi : U(V_{\mathbb{C}}^{n,1}) \rightarrow Aut(\mathbb{C}P^n)$, onde $Aut(\mathbb{C}P^n)$ é o grupo de automorfismos de $\mathbb{C}P^n$. Denote a imagem de Π por $\Pi(U(V_{\mathbb{C}}^{n,1})) = PU(V_{\mathbb{C}}^{n,1})$. Como o núcleo de Π é dado pelo centro $Z(U(V_{\mathbb{R}}^{n,1}))$ de $U(V_{\mathbb{R}}^{n,1})$, temos pelo Primeiro Teorema de Isomorfismo para grupos que

$$\frac{U(V_{\mathbb{C}}^{n,1})}{Z(U(V_{\mathbb{C}}^{n,1}))} \simeq PU(V_{\mathbb{C}}^{n,1}) .$$

Logo temos o seguinte isomorfismo de grupos:

$$\frac{U(n, 1)}{Z(U(n, 1))} \simeq PU(n, 1) .$$

Assim definido, temos que $PU(n, 1)$ é a projetivização do $U(n, 1)$, e é chamado *grupo unitário projetivo*. Analogamente, denotando $\Pi(SU(n, 1)) = PSU(n, 1)$, obtemos o *grupo unitário especial projetivo*, dado por

$$\frac{SU(n, 1)}{Z(SU(n, 1))} \simeq PSU(n, 1) .$$

Em contraste com o caso ortogonal visto na Subseção 1.2.2.3, temos que $PSU(n, 1) = PU(n, 1)$, independente se $n + 1$ é um número par ou ímpar. Essa igualdade segue imediatamente do Segundo Teorema de Isomorfismo.

Definição 1.23 *Uma isometria de um espaço vetorial hermitiano é uma aplicação linear injetora que preserva a forma hermitiana.*

Denote o grupo de isometrias de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ por $Isom(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n)$. O próximo teorema nos diz que cada elemento de $Isom(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n)$, ou é uma isometria holomorfa, ou seja, é dada por um elemento de $PU(n, 1)$, ou é uma isometria anti-holomorfa, dada pela composição da aplicação conjugação complexa com um elemento de $PU(n, 1)$. Veja que a aplicação conjugação complexa dada por:

$$\begin{aligned} \bar{f} : \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n &\rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \\ p &\mapsto \bar{f}(p) = \bar{p} \end{aligned}$$

é uma isometria. De fato, usando a métrica de Bergman, temos que:

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(\bar{p}, \bar{q})}{2} \right) = \frac{\langle \bar{P}, \bar{Q} \rangle \langle \bar{Q}, \bar{P} \rangle}{\langle \bar{P}, \bar{P} \rangle \langle \bar{Q}, \bar{Q} \rangle} = \frac{\langle Q, P \rangle \langle P, Q \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle} = \cosh^2 \left(\frac{\rho(p, q)}{2} \right) ,$$

onde P e Q são levantamentos dos pontos p e q de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, respectivamente. Assim, temos que a conjugação complexa está em $Isom(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n)$, mas não está em $PU(n, 1)$ porque não é holomorfa.

Teorema 1.24 *Cada isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ ou é holomorfa ou é anti-holomorfa, ou seja, ou está em $PU(n, 1)$ ou é a composição da aplicação conjugação complexa com um elemento de $PU(n, 1)$.*

A demonstração do Teorema 1.24 pode ser encontrada em [17] página 14, para o caso $n = 2$. Para o nosso caso, a demonstração é similar. Esse teorema nos permite dizer que o $PU(n, 1)$ é o *grupo de isometrias holomorfas* do espaço hiperbólico complexo. Além disso, a próxima definição nos diz quais os tipos de isometrias holomorfas que existem em $PU(n, 1)$. Para ver a prova de que tal definição cobre todas as possibilidades possíveis para os pontos fixos de uma isometria holomorfa, ver Lema 3.1.1 na página 62 de [2].

Definição 1.25 *Uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ em $PU(n, 1)$, diferente da identidade, é dita ser:*

- (i) *Elíptica se fixa pelo menos um ponto de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$;*
- (ii) *Parabólica se fixa um único ponto, e esse ponto está em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$;*
- (iii) *Hiperbólica (ou Loxodrômica) se fixa exatamente dois pontos, e esses pontos estão em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.*

1.3 Matriz de Gram e Teorema de Witt

Nesta seção vamos fazer um breve estudo sobre matriz de Gram e enunciar alguns resultados importantes para os fins deste trabalho. Dividimos esta seção em duas subseções, as quais descrevemos como segue. Na primeira subseção trabalhamos com m -uplas ordenadas de pontos positivos, definimos o que vem a ser uma matriz de Gram associada a uma m -upla ordenada de pontos positivos, enunciamos condições de assinatura e condições de determinante (caracterização para matrizes de Gram associadas a m -uplas ordenadas de pontos positivos distintos), fatos essenciais para os próximos capítulos da tese. Na segunda subseção trazemos o Teorema de Witt, que nos permite estender isometrias, e algumas consequências de tal teorema.

1.3.1 Matrizes de Gram associadas a m -uplas de pontos positivos

Considere $p = (p_1, \dots, p_m)$ uma m -upla ordenada de pontos positivos distintos em $\mathbb{C}P^n$, para $n \geq 2$. Seja $P = (P_1, \dots, P_m)$, onde $P_j \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ é um levantamento de p_j , ou seja, $\pi(P_j) = p_j$, para $j = 1, \dots, m$. Nesse caso dizemos que P é um levantamento de p . Considere uma

matriz hermitiana $m \times m$ dada por $G = G(p, P) = (g_{jk}) = (\langle P_j, P_k \rangle)$, com $j, k \in \{1, \dots, m\}$. Chamamos essa matriz de *matriz de Gram* associada à m -upla p e definida por P . Veja que a matriz de Gram depende do levantamento que tomamos para p_j . De fato, tomando um outro levantamento $P'_j = \lambda_j P_j$ para p_j , com $\lambda_j \in \mathbb{C}$ e $\lambda_j \neq 0$, obtemos uma matriz de Gram $G' = \overline{D}GD$, onde D é uma matriz diagonal e \overline{D} é a matriz conjugada de D . Por outro lado, o sinal do determinante da matriz de Gram não depende do levantamento que tomamos. De fato, $\det(G') = \det(\overline{D}GD) = |\det(D)|^2 \det(G)$.

Definição 1.26 *Duas matrizes hermitianas G e G' de ordem $m \times m$, são ditas equivalentes, se existe uma matriz diagonal D não singular ($\det(D) \neq 0$), tal que $G' = \overline{D}GD$.*

Dada a definição acima, podemos observar que cada m -upla ordenada de pontos positivos distintos em $\mathbb{C}P^n$ está associada a uma classe de equivalência de matrizes hermitianas de ordem $m \times m$. O próximo resultado nos diz que cada uma dessas classes possui uma matriz hermitiana tal que as entradas têm a forma $g_{jj} = 1$ e $g_{1k} = r_{1k} \in \mathbb{R}_+$, para $j = 1, \dots, m$ e $k = 2, \dots, m$.

Proposição 1.27 *Seja $p = (p_1, \dots, p_m)$ uma m -upla ordenada de pontos positivos distintos em $\mathbb{C}P^n$. Então a classe de equivalência de matrizes de Gram associadas a p contém uma matriz $G = (g_{jk})$ tal que $g_{jj} = 1$ e $g_{1k} = r_{1k} \in \mathbb{R}_+$, com $j = 1, \dots, m$ e $k = 2, \dots, m$.*

Prova. Seja $P_j \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ um levantamento de p_j e $\langle P_j, P_k \rangle = r_{jk} e^{\theta_{jk} i}$, com $j, k = 1, \dots, m$ e $r_{jk}, \theta_{jk} \in \mathbb{R}$. Se $P'_j = \lambda_j P_j$ é um outro levantamento de p_j , para $j = 1, \dots, m$, considerando $\lambda_1 = \langle P_1, P_1 \rangle^{-\frac{1}{2}}$ e $\lambda_j = \pm \langle P_j, P_j \rangle^{-\frac{1}{2}} e^{\theta_{1j} i}$ para $j = 2, \dots, m$, onde o sinal de λ_j vai depender do sinal de r_{1j} , obtemos o resultado desejado. ■

Seja G uma matriz hermitiana, denotamos a assinatura de G por $s(G) = (n_+, n_-, n_0)$, onde n_+ é o número de autovalores positivos de G , n_- é o número de autovalores negativos de G e n_0 é o número de autovalores nulos de G . Agora considere $G = G(p, P)$, com $p = (p_1, \dots, p_m)$ uma m -upla ordenada de pontos positivos distintos em $\mathbb{C}P^n$ e $P = (P_1, \dots, P_m)$ um levantamento de p . Considere também o subespaço gerado $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{P_1, \dots, P_m\}$ de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$, com $\dim_{\mathbb{C}} W = k + 1$. Nessas condições, temos que $G(p, P)$ é uma matriz hermitiana $m \times m$ tal que:

- (i) No caso em que W é hiperbólico, $s(G(p, P)) = (n_+, n_-, n_0)$, com $n_+ = k$, $k \leq n$, $n_- = 1$ e $n_+ + n_0 + 1 = m$;
- (ii) No caso em que W é parabólico, $s(G(p, P)) = (n_+, n_-, n_0)$, com $n_+ = k \leq n - 1$, $n_- = 0$ e $n_+ + n_0 = m$;
- (iii) No caso em que W é elíptico, $s(G(p, P)) = (n_+, n_-, n_0)$, com $n_+ = k + 1$, $k \leq n - 1$, $n_- = 0$ e $n_+ + n_0 = m$.

Dessa forma, temos que para uma dada matriz de Gram $G(p, P)$ associada a p e definida por P , o posto é menor ou igual a $n + 1$ e a assinatura $s(G(p, P))$ satisfaz uma das três condições dadas acima. Chamamos essas condições de *condições de assinatura*.

Proposição 1.28 *Seja $G = (g_{jk})$ uma matriz hermitiana $m \times m$ tal que $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, m$. Então G é uma matriz de Gram associada a uma m -upla ordenada $p = (p_1, \dots, p_m)$ de pontos positivos distintos em $\mathbb{C}P^n$ se, e somente se, o posto de G é menor ou igual a $n + 1$ e G é indefinida, ou definida positiva, ou semi-definida positiva, tal que $s(G)$ satisfaz às condições de assinatura. Nos dois últimos casos o posto de G é menor ou igual a n .*

Prova. Ver Proposição 3.2 em [3]. ■

Como consequência da proposição anterior, temos o resultado abaixo. Além disso, vamos chamar as condições dadas na próxima proposição de *condições de determinante*.

Proposição 1.29 *Seja $G = (g_{jk})$ uma matriz hermitiana $m \times m$ tal que $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, m$. Então G é uma matriz de Gram associada a uma m -upla ordenada $p = (p_1, \dots, p_m)$ de pontos positivos distintos em $\mathbb{C}P^n$ se, e somente se, todos os menores principais de G , de ordem maior ou igual a $n + 2$, se anulam, e todos os menores principais de G de ordem $n + 1$ são não positivos.*

Prova. Como quaisquer r elementos de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ sempre são linearmente dependentes quando $r \geq n + 2$, temos que os menores principais de G de ordem maior ou igual a $n + 2$ se anulam. O resto da demonstração segue da Proposição 1.28 e do critério de Sylvester. ■

Sejam $p = (p_1, \dots, p_m)$ uma m -upla ordenada de pontos positivos distintos em $\mathbb{C}P^n$ e $P = (P_1, \dots, P_m)$ um levantamento de p . Considere também o subespaço gerado $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{P_1, \dots, P_m\}$ de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$. Dizemos que p é *hiperbólico*, *parabólico* ou *elíptico*, se o subespaço gerado W é hiperbólico, parabólico ou elíptico, respectivamente. Assim, temos também que se p é hiperbólico ou elíptico, então W é não degenerado, e se p é parabólico, então W é degenerado.

1.3.2 Teorema de Witt

Para começar enunciamos o Teorema de Witt que nos permite estender isometrias de um subespaço W , a todo o espaço $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$. Segue o teorema.

Teorema 1.30 (Teorema de Witt.) *Sejam $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$, W um subespaço de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ e $\tilde{F} : W \rightarrow V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ uma isometria. Então existe uma isometria $F : V_{\mathbb{C}}^{n,1} \rightarrow V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ tal que $F|_W = \tilde{F}$.*

Prova. Ver Teorema 9.1 na página 265 em [19]. ■

Agora enunciamos algumas conseqüências do Teorema de Witt, dentre elas o Teorema de Höfer, que vamos usar em diversas situações nos próximos capítulos, como por exemplo, nas demonstrações dos teoremas que determinam classes de congruência para duplas ordenadas de geodésicas, dados no Capítulo 2. Seguem as aplicações.

Teorema 1.31 (Teorema de Höfer.) *Sejam $P = (P_1, \dots, P_m)$ e $P' = (P'_1, \dots, P'_m)$ duas m -uplas ordenadas de vetores distintos em $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$. Então existe uma isometria $F : V_{\mathbb{C}}^{n,1} \rightarrow V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ tal que $F(P_j) = P'_j$, para $j = 1, \dots, m$, se, e somente se, as matrizes de Gram associadas a P e P' são iguais ($\langle P_j, P_k \rangle = \langle P'_j, P'_k \rangle$ para todo $j, k = 1, \dots, m$) e a equivalência*

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j P_j = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^m \lambda_j P'_j = \vec{0}$$

para todo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ é satisfeita.

Prova. Ver Teorema 1 em [9]. ■

Proposição 1.32 *Sejam $P = (P_1, \dots, P_m)$ e $P' = (P'_1, \dots, P'_m)$ duas m -uplas ordenadas de vetores distintos em $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$, tais que $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{P_1, \dots, P_m\}$ e $W' = \text{span}_{\mathbb{C}}\{P'_1, \dots, P'_m\}$ são subespaços não degenerados de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ e as matrizes de Gram associadas a P e P' são iguais, ou seja, $\langle P_j, P_k \rangle = \langle P'_j, P'_k \rangle$ para todo $j, k = 1, \dots, m$. Então existe uma isometria $F : V_{\mathbb{C}}^{n,1} \rightarrow V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ tal que $F(P_j) = P'_j$, para $j = 1, \dots, m$.*

Proposição 1.33 *Sejam $p = (p_1, \dots, p_m)$ e $q = (q_1, \dots, q_m)$ duas m -uplas ordenadas de pontos positivos distintos em $\mathbb{C}P^n$. Assumimos que tanto os pontos em p quanto os pontos em q geram subespaços hiperbólicos ou elípticos. Então p e q são congruentes em $PU(n, 1)$ se, e somente se, suas respectivas matrizes de Gram associadas são equivalentes.*

Capítulo 2

O Problema de Congruência para Duplas de Geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$

Nas próximas seções vamos falar do problema de congruência para duplas de geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^n$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Trabalhamos com o caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $n = 3$ na Seção 2.1, com o caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $n = 4$ na Seção 2.2, e por fim, tratamos na Seção 2.3 do caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $n \geq 4$. Em ambas as seções descrevemos o que significa ângulo e distância entre hiperplanos e geodésicas, fazemos a construção de um conjunto de pontos positivos que associamos a uma dupla de geodésicas, chamado conjunto bi-ortogonal, e descrevemos o espaço de módulos da dupla fazendo uso desse conjunto.

2.1 Duplas de Geodésicas Riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$

Considere o espaço hiperbólico real de dimensão 3 denotado por $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Vimos no final da Seção 1.2.2.2 que os hiperplanos reais de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ são planos hiperbólicos reais, e conseqüentemente temos que o conjunto de planos hiperbólicos reais em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ corresponde bijetivamente ao conjunto de pontos polares pertencentes a $\mathbb{R}P^3 - \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^3$, ou seja, corresponde ao conjunto de pontos positivos de $\pi(V_+)$. Vimos também que o conjunto polar de uma geodésica riemanniana de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ é uma linha projetiva real positiva, e temos que o conjunto das geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ corresponde bijetivamente ao conjunto das linhas projetivas reais positivas. Para provar tais afirmações, basta usar a Proposição 1.3.

Para fixar a notação, se p é um ponto polar, denotamos o hiperplano real, que nessa dimensão é um plano hiperbólico real, associado a p por p^\perp . Se σ é uma geodésica riemanniana, denotamos por σ^\perp seu respectivo conjunto polar. Já fazendo uso dessa notação, temos a proposição que segue.

Proposição 2.1 *Seja σ uma geodésica riemanniana em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ e σ^\perp seu conjunto polar. Então p pertence a σ^\perp se, e somente se, o hiperplano real associado a p contém σ .*

2.1.1 Ângulo e distância entre hiperplanos reais

Agora vamos nos concentrar em descrever ângulo e distância entre planos hiperbólicos reais. Para tanto, precisamos de um invariante projetivo o qual descrevemos na próxima definição.

Definição 2.2 *Chamamos de d -invariante à aplicação dada por:*

$$d : \pi(V_+) \times \pi(V_+) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, q) \mapsto d(p, q) = \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle}$$

onde P e Q são tais que $\pi(P) = p$ e $\pi(Q) = q$, onde π é a projeção natural definida na Subseção 1.2.1.

Veja que a expressão dada para $d(p, q)$ acima, independe da escolha do levantamento. Isso mostra que a aplicação d está bem definida. Além disso, veja que para todo $p, q \in \pi(V_+)$, temos que $d(p, q) \geq 0$. O próximo resultado nos dá condições necessárias, mas não suficientes, em termos do d -invariante, caso planos hiperbólicos reais se intersectem ou não em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.

Proposição 2.3 *Dados dois planos hiperbólicos reais p^\perp e q^\perp associados a pontos polares p e q , respectivamente, temos que:*

- (i) *Se p^\perp e q^\perp se intersectam em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, então $0 \leq d(p, q) \leq 1$;*
- (ii) *Se p^\perp e q^\perp não se intersectam em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, então $d(p, q) \geq 1$.*

Prova. (i): Suponha que p^\perp e q^\perp se intersectem em $\mathbb{H}_\mathbb{R}^3$. Então temos que p^\perp e q^\perp se intersectam ao longo de uma geodésica riemanniana σ ou p^\perp e q^\perp coincidem. Suponha primeiro que p^\perp e q^\perp se intersectam ao longo de uma geodésica riemanniana σ . Pela Proposição 2.1 temos que os pontos polares $p, q \in \sigma^\perp = \pi(\Sigma^\perp - \{0\})$, onde Σ^\perp é um subespaço de dimensão 2 de $V_\mathbb{R}^{3,1}$. Além disso, Σ^\perp é o complemento ortogonal do subespaço hiperbólico Σ tal que $\pi(\Sigma - \{0\}) \cap \mathbb{H}_\mathbb{R}^3 = \sigma$. Pela Proposição 1.3 temos que Σ^\perp é elíptico. Sejam $P, Q \in \Sigma^\perp$ levantamentos de p e q , respectivamente. Veja que $\Sigma^\perp = \text{span}_\mathbb{R}\{P, Q\}$, onde $\text{span}_\mathbb{R}\{P, Q\}$ denota o subespaço gerado por P e Q . Como Σ^\perp é um subespaço elíptico, temos que o sinal do determinante da matriz de Gram associada a p e q , e definida por P e Q , é positivo. Lembre-se que o sinal do determinante da matriz de Gram independe do levantamento que tomamos (ver subseção 1.3.1). Denote tal matriz de Gram por $G = (\langle P, Q \rangle)$. Então

$$\det(G) > 0 \Leftrightarrow \langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle - \langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle > 0 \Leftrightarrow d(p, q) = \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle} < 1 .$$

Segue que $0 \leq d(p, q) < 1$. Por outro lado, se p^\perp e q^\perp coincidem, temos que $p = q$ e $\det(G) = 0$. Então

$$\det(G) = 0 \Leftrightarrow \langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle - \langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle = 0 \Leftrightarrow d(p, q) = \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle} = 1 .$$

Isso prova (i).

(ii): Agora suponha que p^\perp e q^\perp não se intersectam em $\mathbb{H}_\mathbb{R}^3$. Considere a projeção $w = \pi(W - \{0\})$, onde $W = \text{span}_\mathbb{R}\{P, Q\}$ é o subespaço gerado por P e Q . Temos que nesse caso W ou é parabólico (p^\perp e q^\perp não se intersectam em $\mathbb{H}_\mathbb{R}^3$ mas nesse caso a intersecção dos fechos $\overline{p^\perp} \cap \overline{q^\perp}$ é um ponto ideal de $\partial\mathbb{H}_\mathbb{R}^3$) ou é hiperbólico ($\overline{p^\perp}$ e $\overline{q^\perp}$ não se intersectam em $\overline{\mathbb{H}_\mathbb{R}^3}$). Considere novamente a matriz de Gram $G = (\langle P, Q \rangle)$. Assim, se W é parabólico, temos que $\det(G) = 0$ e consequentemente obtemos $d(p, q) = 1$. Por outro lado, se W é hiperbólico, temos $\det(G) < 0$ e consequentemente

$$\det(G) < 0 \Leftrightarrow \langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle - \langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle < 0 \Leftrightarrow d(p, q) = \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle} > 1 .$$

Segue que $d(p, q) \geq 1$ e isso prova (ii). ■

Agora podemos definir ângulo e distância. Para tanto, considere primeiro dois planos hiperbólicos reais, p^\perp e q^\perp , tais que se intersectam em $\mathbb{H}_\mathbb{R}^3$. Sejam p e q seus respectivos

pontos polares. Então podemos definir o ângulo θ entre esses planos por:

$$\cos^2(\theta) = d(p, q), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Por outro lado, considere planos hiperbólicos reais, p^\perp e q^\perp , tais que não se intersectam em $\overline{\mathbb{H}_\mathbb{R}^3}$. Assim, podemos definir a distância ρ entre esses planos por:

$$\cosh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) = d(p, q), \quad \rho \in [0, +\infty).$$

A Proposição 2.3 garante que tais conceitos estejam bem definidos, e note que esses conceitos de ângulo e distância são coerentes com as definições de ângulo e distância na geometria riemanniana. Veja que p^\perp e q^\perp se intersectam ortogonalmente em $\mathbb{H}_\mathbb{R}^3$ se $\theta = \frac{\pi}{2}$, e isso é equivalente a dizer que $d(p, q) = 0$. Além disso, se p^\perp e q^\perp têm intersecção não vazia em $\mathbb{H}_\mathbb{R}^3$ ou são assintóticos, temos que a distância entre os planos é 0. Caso $p^\perp = q^\perp$, temos que a distância e o ângulo entre esses planos coincidentes é 0.

O próximo resultado é um fato conhecido de geometria riemanniana, e a demonstração será omitida. Para mais detalhes, ver Teorema 4.1 em [1].

Proposição 2.4 *Dadas duas geodésicas riemannianas σ_1 e σ_2 em $\mathbb{H}_\mathbb{R}^3$, não assintóticas, então existe uma única geodésica riemanniana perpendicular comum a σ_1 e σ_2 .*

Definição 2.5 *Dados dois pontos $p, q \in \mathbb{R}P^3$, dizemos que p e q são ortogonais se para respectivos levantamentos P e Q pertencentes a $V_\mathbb{R}^{3,1}$, temos $\langle P, Q \rangle = 0$. Dizemos que dois hiperplanos reais são ortogonais, se seus respectivos pontos polares são ortogonais.*

Veja que a definição acima independe dos levantamentos que consideramos. Além disso, a ortogonalidade de hiperplanos reais é equivalente à definição de ortogonalidade dada em função do d -invariante, ou seja, se p^\perp e q^\perp são hiperplanos reais com pontos polares respectivos p e q , e p^\perp é ortogonal a q^\perp , isso é equivalente à condição de que $d(p, q) = 0$. Vamos denotar a ortogonalidade entre objetos do espaço hiperbólico através do símbolo “ \perp ”. Por exemplo, se p é ortogonal a q , então vamos escrever $p \perp q$.

Proposição 2.6 *Seja σ uma geodésica riemanniana de $\mathbb{H}_\mathbb{R}^3$. Considere p^\perp um plano hiperbólico real tal que contém σ . Então existe um único plano hiperbólico real q^\perp tal que contém σ e intersecta p^\perp ortogonalmente.*

Prova. Considere a geodésica riemanniana $\sigma = \pi(\Sigma - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, com Σ um subespaço hiperbólico de dimensão 2 de $V_{\mathbb{R}}^{3,1}$. Seja $\sigma^\perp = \pi(\Sigma^\perp - \{0\})$, com Σ^\perp um subespaço elíptico de dimensão 2 de $V_{\mathbb{R}}^{3,1}$, o conjunto polar de σ . Por hipótese $\sigma \subset p^\perp$. Então pela Proposição 2.1 temos que $p \in \sigma^\perp$. Considere P um levantamento de p . Temos que $P \in \Sigma^\perp$ e existe um único $Q \in \Sigma^\perp$ tal que $\text{span}_{\mathbb{R}}\{P, Q\} = \Sigma^\perp$ e $P \perp Q$ (a menos de um múltiplo escalar de Q). Tome $q = \pi(Q)$, e veja que o plano hiperbólico real dado por q^\perp é o plano procurado. ■

2.1.2 Construção do conjunto bi-ortogonal

O que fazemos nesta subseção é transformar o problema de congruência de duplas de geodésicas riemannianas em um problema de congruência de uplas ordenadas de pontos distintos positivos. Para tanto, fazemos a construção de um conjunto chamado de “conjunto bi-ortogonal”, o qual descrevemos no seguimento desta subseção.

Veja que para duas geodésicas distintas σ_1 e σ_2 de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, temos duas possibilidades para os conjuntos polares σ_1^\perp e σ_2^\perp , isto é, ou eles se intersectam em um ponto, ou eles não se intersectam. Essa afirmação pode ser verificada analisando a dimensão de σ_1^\perp e σ_2^\perp em $\mathbb{R}P^3$. A intersecção ou não de tais conjuntos polares, vai depender se as geodésicas, σ_1 e σ_2 , se intersectam ou não em $\mathbb{R}P^3$. Isso é o que mostra a próxima proposição.

Proposição 2.7 *Sejam duas geodésicas riemannianas σ_1 e σ_2 distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Temos que:*

(i) σ_1 e σ_2 são coplanares $\Leftrightarrow \sigma_1^\perp$ e σ_2^\perp se intersectam em um ponto de $\mathbb{R}P^3$;

(ii) σ_1 e σ_2 são reversas $\Leftrightarrow \sigma_1^\perp$ e σ_2^\perp não se intersectam em $\mathbb{R}P^3$.

Prova. (i): Suponha que σ_1 e σ_2 são coplanares. Seja $w = \pi(W - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ o plano hiperbólico que contém σ_1 e σ_2 , para algum subespaço indefinido W de $V_{\mathbb{R}}^{3,1}$ de dimensão 3, com $\sigma_i = \pi(\Sigma_i - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, para algum subespaço indefinido Σ_i de $V_{\mathbb{R}}^{3,1}$ de dimensão 2, com $i = 1, 2$. Assim, temos que W contém Σ_1 e Σ_2 se, e somente se $W \supset \Sigma_i$, com $i = 1, 2$. Mas esse fato ocorre se, e somente se, $W^\perp \subset \Sigma_i^\perp$, com $i = 1, 2$, ou seja, $W^\perp \subset \Sigma_1^\perp \cap \Sigma_2^\perp$ e $w^\perp \subset \sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp$. Como $\dim_{\mathbb{R}}(W^\perp) = 1$, segue que $\dim_{\mathbb{R}}(\Sigma_1^\perp \cap \Sigma_2^\perp) = 1$ e conseqüentemente $\sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp$ é um ponto de $\mathbb{R}P^3$. Reciprocamente, suponha que $\sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp$ seja um ponto de $\mathbb{R}P^3$. Considere o subespaço $W = \Sigma_1^\perp \cap \Sigma_2^\perp$. Assim, temos que $W \subset \Sigma_i^\perp$ com $i = 1, 2$.

Pela observação feita abaixo da Proposição 1.12 temos que $(\Sigma_i^\perp)^\perp = \Sigma_i$ com $i = 1, 2$. Então $W^\perp \supset (\Sigma_i^\perp)^\perp = \Sigma_i$ com $i = 1, 2$. Como $\dim_{\mathbb{R}}(W^\perp) = 3$, temos que $w^\perp = \pi(W^\perp - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ é o plano hiperbólico desejado. Logo σ_1 e σ_2 são coplanares.

(ii): Suponha que σ_1 e σ_2 são reversas. Sabemos que $0 \leq \dim_{\mathbb{R}}(\Sigma_1^\perp \cap \Sigma_2^\perp) \leq 2$ (ver em [8] Proposição 7.1 e Teorema 7.2). Entretanto, σ_1 e σ_2 são reversas e conseqüentemente não são coplanares. Assim, pelo item (i) temos que $\dim_{\mathbb{R}}(\Sigma_1^\perp \cap \Sigma_2^\perp) \neq 1$. Como as geodésicas que estamos considerando são distintas, temos que $\dim_{\mathbb{R}}(\Sigma_1^\perp \cap \Sigma_2^\perp) \neq 2$. Logo $\dim_{\mathbb{R}}(\Sigma_1^\perp \cap \Sigma_2^\perp) = 0$. Dessa forma temos que σ_1^\perp e σ_2^\perp não se intersectam em $\mathbb{R}P^3$. Reciprocamente, suponha que $\Sigma_1^\perp \cap \Sigma_2^\perp$ não se intersectam em $\mathbb{R}P^3$. Pelo item (i) temos que σ_1 e σ_2 não são coplanares. Logo σ_1 e σ_2 são reversas. ■

2.1.2.1 Conjunto bi-ortogonal para geodésicas reversas

Nosso trabalho agora consiste em associar a cada dupla de geodésicas, uma upla ordenada de pontos distintos positivos. Essa correspondência é feita associando a cada geodésica, dois hiperplanos (nessa dimensão os hiperplanos são planos hiperbólicos) cuja interseção é a própria geodésica. Esses hiperplanos, por sua vez, possuem uma relação biunívoca com seus respectivos pontos polares (ver a observação feita abaixo da Proposição 1.12). Vamos ver que esses pontos polares vão constituir o conjunto bi-ortogonal.

Construção: Para começar, considere σ_1 e σ_2 geodésicas reversas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Pela Proposição 2.4, temos que existe uma geodésica perpendicular comum a σ_1 e σ_2 a qual vamos denotar por σ_{12} . Por construção temos que σ_1 e σ_{12} se intersectam, e pela Proposição 2.7, são geodésicas coplanares. Analogamente temos também que σ_2 e σ_{12} são coplanares. Dessa forma, denote por q_1^\perp o plano que contém σ_1 e σ_{12} , que está associado ao ponto polar denotado por q_1 . Analogamente, denote por q_2^\perp o plano que contém σ_2 e σ_{12} , que está associado ao ponto polar denotado por q_2 . Agora considere o plano p_1^\perp que contém σ_1 e intersecta ortogonalmente σ_{12} . Denote por p_1 o ponto polar associado a tal plano. Por outro lado, considere o plano p_2^\perp que contém σ_2 e intersecta ortogonalmente σ_{12} . Denote por p_2 o ponto polar associado a tal plano. Com isso temos associado à dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas (σ_1, σ_2) , o conjunto de planos $\{p_1^\perp, p_2^\perp, q_1^\perp, q_2^\perp\}$, que está associado ao conjunto de pontos

polares $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$.

Definição 2.8 Chamamos ao conjunto $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ de conjunto bi-ortogonal da dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas (σ_1, σ_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.

A próxima proposição justifica o nome bi-ortogonal, e a demonstração segue imediatamente da construção. Segue o resultado.

Proposição 2.9 Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Considere seu respectivo conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{R}P^3$. Então temos que $p_1 \perp q_1$, $p_2 \perp q_2$, $p_1 \perp q_2$ e $p_2 \perp q_1$.

2.1.2.2 Conjunto bi-ortogonal para geodésicas coplanares

Similar ao que fizemos acima para geodésicas reversas, vamos estudar aqui o caso em que as geodésicas são coplanares. Sabemos que geodésicas coplanares podem ser ultraparalelas, assintóticas ou concorrentes, conforme suas respectivas linhas projetivas se intersectam fora, na fronteira ou dentro do espaço hiperbólico, respectivamente. Vamos fazer a construção do conjunto bi-ortogonal para cada um dos casos.

Construção (caso concorrente): Sejam σ_1 e σ_2 geodésicas coplanares concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Denote por p^\perp o plano que contem as geodésicas σ_1 e σ_2 , com ponto polar denotado por p . Pela Proposição 2.6 existe um único plano q_1^\perp tal que contém σ_1 e intersecta ortogonalmente o plano p^\perp . Denote por q_1 o ponto polar associado a tal plano. Por outro lado, também pela Proposição 2.6, existe um único plano q_2^\perp tal que contém σ_2 e intersecta ortogonalmente o plano p^\perp . Denote por q_2 o ponto polar associado a tal plano. Com isso temos associado à dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares concorrentes (σ_1, σ_2) , o conjunto de planos $\{p^\perp, q_1^\perp, q_2^\perp\}$, que está associado ao conjunto de pontos polares $\{p, q_1, q_2\}$.

Definição 2.10 Chamamos ao conjunto $\{p, q_1, q_2\}$ de conjunto bi-ortogonal da dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares concorrentes (σ_1, σ_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.

Proposição 2.11 *Seja a dupla ordenada (σ_1, σ_2) de geodésicas riemannianas coplanares concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Considere seu respectivo conjunto bi-ortogonal $\{p, q_1, q_2\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{R}P^3$. Então temos que $p \perp q_1$ e $p \perp q_2$.*

Construção (caso assintótico): Sejam σ_1 e σ_2 geodésicas coplanares assintóticas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Denote por p^\perp o plano que contem as geodésicas σ_1 e σ_2 , com ponto polar denotado por p . Pela Proposição 2.6 existe um único plano q_1^\perp tal que contém σ_1 e intersecta ortogonalmente o plano p^\perp . Denote por q_1 o ponto polar associado a tal plano. Por outro lado, também pela Proposição 2.6, existe um único plano q_2^\perp tal que contém σ_2 e intersecta ortogonalmente o plano p^\perp . Denote por q_2 o ponto polar associado a tal plano. Com isso temos associado à dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares assintóticas (σ_1, σ_2) , o conjunto de planos $\{p^\perp, q_1^\perp, q_2^\perp\}$, que está associado ao conjunto de pontos polares $\{p, q_1, q_2\}$.

Definição 2.12 *Chamamos ao conjunto $\{p, q_1, q_2\}$ de conjunto bi-ortogonal da dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares assintóticas (σ_1, σ_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.*

Proposição 2.13 *Seja a dupla ordenada (σ_1, σ_2) de geodésicas riemannianas coplanares assintóticas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Considere seu respectivo conjunto bi-ortogonal $\{p, q_1, q_2\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{R}P^3$. Então temos que $p \perp q_1$ e $p \perp q_2$.*

Construção (caso ultraparalelo): Sejam σ_1 e σ_2 geodésicas coplanares ultraparalelas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Denote por q^\perp o plano que contem as geodésicas σ_1 e σ_2 , com ponto polar denotado por q . Pela Proposição 2.6 existe um único plano p_1^\perp tal que contém σ_1 e intersecta ortogonalmente o plano q^\perp . Denote por p_1 o ponto polar associado a tal plano. Por outro lado, também pela Proposição 2.6, existe um único plano p_2^\perp tal que contém σ_2 e intersecta ortogonalmente o plano q^\perp . Denote por p_2 o ponto polar associado a tal plano. Com isso temos associado à dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares ultraparalelas (σ_1, σ_2) , o conjunto de planos $\{p_1^\perp, p_2^\perp, q^\perp\}$, que está associado ao conjunto de pontos polares $\{p_1, p_2, q\}$.

Definição 2.14 *Chamamos ao conjunto $\{p_1, p_2, q\}$ de conjunto bi-ortogonal da dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares ultraparalelas (σ_1, σ_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.*

Proposição 2.15 *Seja a dupla ordenada (σ_1, σ_2) de geodésicas riemannianas coplanares ultraparalelas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Considere seu respectivo conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{R}P^3$. Então temos que $q \perp p_1$ e $q \perp p_2$.*

2.1.3 Ângulo e distância entre geodésicas riemannianas

Vimos que cada dupla ordenada de geodésicas riemannianas (σ_1, σ_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ pode ser associada ao seu conjunto bi-ortogonal de pontos polares $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$, onde $p_1 = p_2 = p$ se σ_1 e σ_2 são coplanares assintóticas ou concorrentes, e $q_1 = q_2 = q$ se σ_1 e σ_2 são coplanares ultraparalelas. Por construção, para cada dupla (σ_1, σ_2) , tal conjunto de pontos é único.

Definição 2.16 *Chamamos o conjunto $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ dos levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$, de base bi-ortogonal da dupla ordenada (σ_1, σ_2) de geodésicas riemannianas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.*

A base bi-ortogonal satisfaz as propriedades de ortogonalidade dadas na Proposição 2.9. Além disso, se Σ_j^\perp é o levantamento do conjunto polar σ_j^\perp da geodésica σ_j , então o conjunto $\{P_j, Q_j\}$ forma uma base ortogonal para Σ_j^\perp , com $j = 1, 2$. Tal base pode ser tomada de forma a ser ortonormal.

Agora vamos definir distância e ângulo entre geodésicas riemannianas. Para tanto vamos utilizar o conceito de d -invariante (ver Definição 2.2).

Definição 2.17 *Dada uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas (σ_1, σ_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, com conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$, definimos a pré-distância entre σ_1 e σ_2 por $d(p_1, p_2)$, e o pré-ângulo entre σ_1 e σ_2 por $d(q_1, q_2)$.*

Vamos definir distância e ângulo entre geodésicas a partir dos conceitos de pré-distância e pré-ângulo dados acima. Para tanto, considere uma dupla ordenada (σ_1, σ_2) com conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$. Definimos o ângulo θ entre geodésicas riemannianas por:

$$\cos^2(\theta) = d(q_1, q_2), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Por outro lado, definimos a distância ρ entre geodésicas riemannianas por:

$$\cosh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) = d(p_1, p_2), \quad \rho \in [0, +\infty).$$

Observação 2.18 *Veja que, para a distância $\rho \in [0, +\infty)$ e para o ângulo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, temos que as funções \cos e \cosh são injetivas, e portanto não há diferença entre trabalhar com distância ou trabalhar com pré-distância (o mesmo para ângulo e pré-ângulo).*

Dada uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas (σ_1, σ_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, temos associado a tal dupla o conjunto bi-ortogonal de pontos polares $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$. Através de tais pontos polares, temos os conceitos de pré-distância e pré-ângulo. A próxima proposição nos diz que podemos obter informações sobre a dupla de geodésicas através dos valores que a pré-distância e o pré-ângulo assumem.

Proposição 2.19 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ com conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$, então:*

- (i) *A dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas riemannianas reversas se, e somente se, $d(p_1, p_2) > 1$ e $d(q_1, q_2) < 1$;*
- (ii) *A dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas riemannianas concorrentes se, e somente se, $d(p_1, p_2) = 1$ e $d(q_1, q_2) < 1$;*
- (iii) *A dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas riemannianas ultraparalelas se, e somente se, $d(p_1, p_2) > 1$ e $d(q_1, q_2) = 1$;*
- (iv) *A dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas riemannianas assintóticas se, e somente se, $d(p_1, p_2) = 1$ e $d(q_1, q_2) = 1$.*

Proposição 2.20 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ com conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$, e considere $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$, onde $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ é uma base bi-ortogonal da dupla (σ_1, σ_2) . Então:*

- (i) *W é hiperbólico e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 4$ se, e somente se, a dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas reversas;*
- (ii) *W é hiperbólico e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 3$ se, e somente se, a dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas ultraparalelas;*

(iii) W é elíptico e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 3$ se, e somente se, a dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas concorrentes;

(iv) W é parabólico e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 3$ se, e somente se, a dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas assintóticas.

2.1.4 Espaço de módulos de duplas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$

Nesta subseção vamos encontrar invariantes que descrevem unicamente as classes de congruência, por $PO(3,1) = Isom(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3)$, de duplas ordenadas de geodésicas riemannianas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Para mais detalhes sobre o grupo de isometrias do espaço hiperbólico real, ver Subseção 1.2.2.3. Segue o conceito de congruência.

Definição 2.21 Dizemos que duas duplas ordenadas (σ_1, σ_2) e (σ'_1, σ'_2) de geodésicas riemannianas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ são congruentes, quando existe uma isometria $f \in PO(3,1)$ tal que $f(\sigma_i) = \sigma'_i$ para $i = 1, 2$.

Note que a congruência definida acima é uma relação de equivalência. O espaço das classes de equivalência, munido da topologia quociente, é denominado *espaço de configurações* de duplas ordenadas de geodésicas riemannianas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, e denotamos por $\mathcal{M}(2,3)$.

2.1.4.1 Caso em que as geodésicas riemannianas são reversas

Considere (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Tal dupla está associada ao conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$. Denote a pré-distância por $d = d(p_1, p_2)$ e o pré-ângulo por $a = d(q_1, q_2)$.

Proposição 2.22 Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Então existem levantamentos $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$, dos elementos do conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) , tais que a matriz de Gram associada a tais levantamentos é dada por:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{d} & 0 & 0 \\ \sqrt{d} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a} \\ 0 & 0 & \sqrt{a} & 1 \end{bmatrix}$$

onde d e a são números reais tais que $d > 1$ e $0 \leq a < 1$, e $\det(G) < 0$.

Prova. Considere $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ o conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) . Por um argumento semelhante ao que foi feito na demonstração da Proposição 1.27 e pelas propriedades de ortogonalidade dadas na Proposição 2.9, temos que existem levantamentos para os elementos do conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) , denotados por $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$, tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & g_{12} & 0 & 0 \\ g_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g_{34} \\ 0 & 0 & g_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

onde $g_{12}, g_{34} \in \mathbb{R}_+$. Logo, usando as definições de d e a , temos que $d = d(p_1, p_2) = \langle P_1, P_2 \rangle \langle P_2, P_1 \rangle = g_{12}^2$, e consequentemente $g_{12} = \sqrt{d}$. Analogamente obtemos que $g_{34} = \sqrt{a}$. Isso nos dá uma matriz de Gram com entradas recuperadas em termos de invariantes projetivos. Além disso, calculando o determinante da matriz acima, obtemos $\det(G) = (1 - g_{12}^2)(1 - g_{34}^2) = (1 - d)(1 - a)$, e como a pré-distância $d > 1$ e o pré-ângulo $0 \leq a < 1$ (ver Proposição 2.19), segue que $\det(G) < 0$. ■

Definição 2.23 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Chamamos a matriz G dada na Proposição 2.22 de matriz de Gram canônica para uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.*

Proposição 2.24 *Sejam (σ_1, σ_2) e (σ'_1, σ'_2) duas duplas ordenadas de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Se as duplas (σ_1, σ_2) e (σ'_1, σ'_2) possuem as mesmas distâncias e os mesmos ângulos, então existe uma isometria $f \in PO(n, 1)$ tal que $f(\sigma_j) = \sigma'_j$ para $j = 1, 2$.*

Prova. Sejam $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ e $\{p'_1, p'_2, q'_1, q'_2\}$ conjuntos bi-ortogonais de (σ_1, σ_2) e (σ'_1, σ'_2) , respectivamente. Considere $G = (g_{ij})$ e $G' = (g'_{ij})$ matrizes de Gram canônicas de (σ_1, σ_2) e

(σ'_1, σ'_2) , respectivamente, denotadas por

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{d} & 0 & 0 \\ \sqrt{d} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a} \\ 0 & 0 & \sqrt{a} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G' = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{d'} & 0 & 0 \\ \sqrt{d'} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a'} \\ 0 & 0 & \sqrt{a'} & 1 \end{bmatrix}.$$

Como (σ_1, σ_2) e (σ'_1, σ'_2) têm os mesmos ângulos e distâncias, pela Observação 2.18 temos que (σ_1, σ_2) e (σ'_1, σ'_2) têm os mesmos pré-ângulos e pré-distâncias. Logo $G = G'$. Como os espaços gerados pelos levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ e pelos levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{p'_1, p'_2, q'_1, q'_2\}$ são espaços não degenerados, o resultado segue da Proposição 1.32 (considerando a proposição sobre o corpo dos reais). ■

Teorema 2.25 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, com conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$. Então os d -invariantes $d = d(p_1, p_2)$ e $a = d(q_1, q_2)$ definem unicamente a classe de congruência por $PO(3, 1)$ das duplas ordenadas de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.*

Prova. A prova segue da aplicação da Proposição 2.22 junto com a aplicação da Proposição 2.24. ■

Agora estamos em condições de construir o espaço de módulos para duplas ordenadas de geodésicas riemannianas reversas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Para começar, considere (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ e G a matriz de Gram canônica associada a tal dupla. Vimos que podemos recuperar as entradas de G em termos dos invariantes $d(p_1, p_2)$ e $d(q_1, q_2)$ (ver Proposição 2.22).

Denote por $\mathcal{M}^g(2, 3)$ o espaço de configurações de duplas ordenadas de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Os elementos de $\mathcal{M}^g(2, 3)$ são classes denotadas por $[(\sigma_1, \sigma_2)]$. Defina a aplicação

$$\tau : \mathcal{M}^g(2, 3) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

que associa cada classe $[(\sigma_1, \sigma_2)]$ aos invariantes $d(p_1, p_2)$ e $d(q_1, q_2)$. Por fim, defina o conjunto $\mathbb{M}^g(2, 3) = \{(d, a) \in \mathbb{R}^2; d > 1 \text{ e } 0 \leq a < 1\}$. Veja que $\mathbb{M}^g(2, 3)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^2 é um espaço topológico.

Teorema 2.26 *O espaço de configurações $\mathcal{M}^g(2, 3)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}^g(2, 3)$.*

Prova. Pelas condições de determinante dadas na Proposição 1.29 (considerando a proposição sobre o corpo dos reais e com $n = 3$) e pela Proposição 2.22, temos que a aplicação $\tau : \mathcal{M}^g(2, 3) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada acima define uma aplicação $\tau : \mathcal{M}^g(2, 3) \rightarrow \mathbb{M}^g(2, 3)$. Pelo Teorema 2.25 temos que $\tau : \mathcal{M}^g(2, 3) \rightarrow \mathbb{M}^g(2, 3)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(d, a) \in \mathbb{M}^g(2, 3)$, considere G tal que $g_{12} = g_{21} = \sqrt{d}$, $g_{34} = g_{43} = \sqrt{a}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, 2, 3, 4$, e as demais entradas são nulas. Segue da Proposição 1.29 (sobre o corpo dos reais e com $n = 3$) que G assim construída é a matriz de Gram canônica de alguma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Logo $\tau : \mathcal{M}^g(2, 3) \rightarrow \mathbb{M}^g(2, 3)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}^g(2, 3)$ da topologia induzida de \mathbb{R}^2 , temos que $\tau : \mathcal{M}^g(2, 3) \rightarrow \mathbb{M}^g(2, 3)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 2.27 *Chamamos $\mathbb{M}^g(2, 3)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}^g(2, 3)$.*

2.1.4.2 Caso em que as geodésicas riemannianas são coplanares

Vamos trabalhar nesta subseção com duplas ordenadas de geodésicas riemannianas coplanares (assintóticas, concorrentes ou ultraparalelas) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Seja (σ_1, σ_2) uma tal dupla. Vimos que essa dupla está associada ao conjunto bi-ortogonal $\{p, q_1, q_2\}$, com $p = p_1 = p_2$, se (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas concorrentes ou assintóticas, e está associada ao conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q\}$, com $q = q_1 = q_2$, se (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas ultraparalelas. Denote a pré-distância por $d = d(p_1, p_2)$ e o pré-ângulo por $a = d(q_1, q_2)$.

Proposição 2.28 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares, concorrentes ou assintóticas, de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Então existem levantamentos $\{P, Q_1, Q_2\}$, dos elementos do conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) , tais que a matriz de Gram associada a tais levantamentos é dada por:*

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{a} \\ 0 & \sqrt{a} & 1 \end{bmatrix}$$

onde a é um número real tal que $0 \leq a \leq 1$. Além disso, $\det(G) > 0$ se σ_1 e σ_2 são concorrentes, $\det(G) = 0$ se σ_1 e σ_2 são assintóticas.

Prova. Considere $\{p, q_1, q_2\}$ o conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) . Por um argumento semelhante ao que foi feito na demonstração da Proposição 1.27, junto com a Proposição 2.11, caso as geodésicas sejam concorrentes, e com a Proposição 2.13, caso as geodésicas sejam assintóticas, temos que existem levantamentos para os elementos do conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) , denotados por $\{P, Q_1, Q_2\}$, tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g_{23} \\ 0 & g_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

onde $g_{23} \in \mathbb{R}_+$. Logo, usando a definição do pré-ângulo a , temos que $a = d(q_1, q_2) = \langle Q_1, Q_2 \rangle \langle Q_2, Q_1 \rangle = g_{23}^2$, e conseqüentemente $g_{23} = \sqrt{a}$. Além disso, calculando o determinante da matriz acima, obtemos $\det(G) = (1 - g_{23}^2) = (1 - a)$. Como as geodésicas são concorrentes ou assintóticas, segue da Proposição 2.19 que $0 \leq a < 1$ ou $a = 1$, respectivamente. Dessa forma, se $0 \leq a < 1$ então $\det(G) > 0$, e se $a = 1$ então $\det(G) = 0$.

■

Definição 2.29 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares concorrentes (assintóticas) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Chamamos a matriz G obtida na Proposição 2.28 de matriz de Gram canônica para uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares concorrentes (assintóticas) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.*

Proposição 2.30 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Então existem levantamentos $\{P_1, P_2, Q\}$, dos elementos do conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) , tais que a matriz de Gram associada a tais levantamentos é dada por:*

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{d} & 0 \\ \sqrt{d} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $d \in \mathbb{R}$ e $d > 1$. Além disso, $\det(G) < 0$.

Prova. Considere $\{p_1, p_2, q\}$ o conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) . Por um argumento semelhante ao que foi feito na demonstração da Proposição 1.27, junto com a Proposição 2.15, temos que existem levantamentos para os elementos do conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) , denotados por $\{P_1, P_2, Q\}$, tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & g_{12} & 0 \\ g_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $g_{12} = g_{21} \in \mathbb{R}_+$. Logo, usando a definição da pré-distância d , temos que $d = d(p_1, p_2) = \langle P_1, P_2 \rangle \langle P_2, P_1 \rangle = g_{12}^2$, e conseqüentemente $g_{12} = \sqrt{d}$. Além disso, calculando o determinante da matriz acima, obtemos $\det(G) = (1 - g_{12}^2) = (1 - d)$. Como as geodésicas são ultraparalelas, segue da Proposição 2.19 que $d > 1$. Dessa forma, se $d > 1$ então $\det(G) < 0$. ■

Definição 2.31 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Chamamos a matriz G obtida na Proposição 2.30 de matriz de Gram canônica para uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.*

Teorema 2.32 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares, concorrentes ou assintóticas, de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, com conjunto bi-ortogonal $\{p, q_1, q_2\}$. Então o d -invariante $a = d(q_1, q_2)$ define unicamente a classe de congruência por $PO(n, 1)$ das duplas ordenadas de geodésicas riemannianas coplanares, concorrentes ou assintóticas, de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.*

Prova. Considere (σ_1, σ_2) e (σ'_1, σ'_2) duplas ordenadas de geodésicas riemannianas coplanares, concorrentes ou assintóticas, associadas respectivamente aos conjuntos bi-ortogonais $\{p, q_1, q_2\}$ e $\{p', q'_1, q'_2\}$, tais que possuem mesmo d -invariante $a = d(q_1, q_2) = d(q'_1, q'_2) = a'$. Então pela Proposição 2.28 temos que as duplas possuem a mesma matriz de Gram canônica. Por outro lado, veja que o conjunto de levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{p, q_1, q_2\}$ é linearmente independente, pois caso contrário teríamos $\sigma_1 = \sigma_2$. O mesmo vale para o conjunto de levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{p', q'_1, q'_2\}$. Com isso temos que o conjunto dos levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{p, q_1, q_2\}$ possui o mesmo tipo de dependência linear que o conjunto dos levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{p', q'_1, q'_2\}$. O resultado segue do Teorema de Höfer (considerando o corpo dos reais ao invés do corpo dos complexos). ■

Teorema 2.33 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, com conjunto bi-ortogonal $\{p_1, p_2, q\}$. Então o d -invariante $d = d(p_1, p_2)$ define unicamente a classe de congruência por $PO(n, 1)$ das duplas ordenadas de geodésicas riemannianas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.*

Prova. A prova segue por um argumento análogo ao que foi feito no Teorema 2.32. Basta aplicar a Proposição 2.30 para garantir que as duplas possuem a mesma matriz de Gram canônica, observar que os conjuntos de levantamentos dos conjuntos bi-ortogonais possuem o mesmo tipo de dependência linear, e usar o Teorema de Höfer (considerando o corpo dos reais ao invés do corpo dos complexos). ■

Agora estamos em condições de construir o espaço de módulos para duplas ordenadas de geodésicas riemannianas coplanares em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Para começar, considere (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ e G a matriz de Gram canônica associada a tal dupla. Vimos que podemos recuperar as entradas de G em termos do invariante $a = d(q_1, q_2)$ no caso em que (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas concorrentes ou assintóticas, e podemos recuperar as entradas de G em termos do invariante $d = d(p_1, p_2)$ no caso em que (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas ultraparalelas.

Denote por $\mathcal{M}^s(2, 3)$ o espaço de configurações de duplas ordenadas de geodésicas riemannianas coplanares de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Os elementos de $\mathcal{M}^s(2, 3)$ são classes denotadas por $[(\sigma_1, \sigma_2)]$. Defina a aplicação

$$\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, 3) \rightarrow \mathbb{R}$$

que associa cada classe $[(\sigma_1, \sigma_2)]$ ao respectivo d -invariante que define tal classe. Por fim, defina o conjunto $\mathbb{M}^s(2, 3) = \{t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}$. Veja que $\mathbb{M}^s(2, 3)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R} é um espaço topológico.

Teorema 2.34 *O espaço de configurações $\mathcal{M}^s(2, 3)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}^s(2, 3)$.*

Prova. Pelas condições de determinante (Proposição 1.29 sobre o corpo dos reais com $n = 3$), pela Proposição 2.28 e pela Proposição 2.30, temos que a aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ dada acima define uma aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, 3) \rightarrow \mathbb{M}^s(2, 3)$. Pelo Teorema 2.32 e pelo Teorema 2.33 temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, 3) \rightarrow \mathbb{M}^s(2, 3)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, tome $t \in \mathbb{M}^s(2, 3)$.

Se $0 \leq t \leq 1$ temos $t = a$, onde a é o pré-ângulo. Dessa forma, considere G tal que $g_{23} = g_{32} = \sqrt{a}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, 2, 3$, e as demais entradas são nulas. Por outro lado, se $t > 1$ temos $t = d$, onde d é a pré-distância. Então considere G tal que $g_{12} = g_{21} = \sqrt{d}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, 2, 3$, e as demais entradas são nulas. Segue novamente das condições de determinante, que G construída nos dois casos acima, é a matriz de Gram canônica de alguma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Logo $\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, 3) \rightarrow \mathbb{M}^s(2, 3)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}^s(2, 3)$ da topologia induzida de \mathbb{R} , temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, 3) \rightarrow \mathbb{M}^s(2, 3)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 2.35 Chamamos $\mathbb{M}^s(2, 3)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}^s(2, 3)$.

Note que, usando a Proposição 2.19 junto com o Teorema 2.34, podemos identificar o conjunto das classes $[(\sigma_1, \sigma_2)]$, tais que a dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas concorrentes, com o conjunto $\{(1, a) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq a < 1\}$. Da mesma forma podemos identificar o conjunto das classes $[(\sigma_1, \sigma_2)]$, tais que a dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas ultraparalelas, com o conjunto $\{(d, 1) \in \mathbb{R}^2; d > 1\}$, e podemos identificar o conjunto das classes $[(\sigma_1, \sigma_2)]$, tais que a dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas assintóticas, com o conjunto $\{(d, a) \in \mathbb{R}^2; d = a = 1\}$. Conseqüentemente, podemos identificar o espaço $\mathbb{M}^s(2, 3)$ com a união de tais conjuntos. Por outro lado, vimos que $\mathbb{M}^g(2, 3) = \{(d, a) \in \mathbb{R}^2; d > 1 \text{ e } 0 \leq a < 1\} = (1, \infty) \times [0, 1)$ (ver Teorema 2.26). Então, se $\mathbb{M}(2, 3)$ denota o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}(2, 3)$, desde que $\mathbb{M}(2, 3) = \mathbb{M}^g(2, 3) \cup \mathbb{M}^s(2, 3)$, temos que $\mathbb{M}(2, 3) = [1, +\infty) \times [0, 1]$. Isso prova o próximo resultado.

Corolário 2.36 Se $\mathbb{M}(2, 3)$ é o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}(2, 3)$, então $\mathbb{M}(2, 3) = [1, +\infty) \times [0, 1]$.

2.2 Duplas de Geodésicas Riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$

Considere o espaço hiperbólico real de dimensão 4 denotado por $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Vimos na Proposição 1.12 que os hiperplanos reais de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ correspondem bijetivamente ao conjunto de pontos polares pertencentes a $\mathbb{R}P^4 - \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4}$, ou seja, correspondem ao conjunto de pontos positivos de

$\pi(V_+)$. Além disso, nessa dimensão, hiperplano é uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Vimos também que conjuntos polares de geodésicas riemannianas são $\mathbb{R}P^2$ e conjuntos polares de planos hiperbólicos são $\mathbb{R}P^1$. Para provar tais afirmações basta usar a Proposição 1.3.

Para fixar a notação, se p é um ponto polar, denotamos o hiperplano real associado a p , por p^\perp . Se σ é uma geodésica riemanniana, denotamos por σ^\perp seu respectivo conjunto polar. Já fazendo uso dessa notação, temos a proposição que segue.

Proposição 2.37 *Seja σ uma geodésica riemanniana em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ e σ^\perp seu conjunto polar. Então p pertence a σ^\perp se, e somente se, o hiperplano real associado a p contém σ .*

2.2.1 Ângulo e distância entre hiperplanos reais

Agora vamos descrever ângulo e distância entre hiperplanos reais de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Para tanto, assim como fizemos na subseção anterior, precisamos de um invariante projetivo o qual descrevemos na próxima definição.

Definição 2.38 *Chamamos de d -invariante à aplicação dada por:*

$$\begin{aligned} d : \pi(V_+) \times \pi(V_+) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\mapsto d(p, q) = \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle} \end{aligned}$$

onde P e Q são tais que $\pi(P) = p$ e $\pi(Q) = q$, onde π é a projeção natural definida na Subseção 1.2.1.

Veja que a aplicação d está bem definida. Além disso, veja que para todo $p, q \in \pi(V_+)$, temos que $d(p, q) \geq 0$. O próximo resultado nos dá condições necessárias, mas não suficientes, em termos do d -invariante, caso hiperplanos reais se intersectem ou não em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.

Proposição 2.39 *Dados dois hiperplanos reais p^\perp e q^\perp associados a pontos polares p e q , respectivamente, temos que:*

- (i) *Se p^\perp e q^\perp se intersectam em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, então $0 \leq d(p, q) \leq 1$;*
- (ii) *Se p^\perp e q^\perp não se intersectam em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, então $d(p, q) \geq 1$.*

Prova. Basta considerar o espaço hiperbólico real com dimensão $n = 4$ na demonstração da Proposição 2.84. ■

Agora podemos definir ângulo e distância. Para tanto, considere primeiro dois hiperplanos reais, p^\perp e q^\perp , tais que se intersectam em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Sejam p e q seus respectivos pontos polares. Então podemos definir o ângulo θ entre esses hiperplanos por:

$$\cos^2(\theta) = d(p, q), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Por outro lado, considere hiperplanos reais, p^\perp e q^\perp , tais que não se intersectam em $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4}$. Assim, podemos definir a distância ρ entre esses hiperplanos por:

$$\cosh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) = d(p, q), \quad \rho \in [0, +\infty).$$

A Proposição 2.39 garante que tais conceitos estejam bem definidos, e note que esses conceitos de ângulo e distância são coerentes com as definições de ângulo e distância da geometria riemanniana. Veja que p^\perp e q^\perp se intersectam ortogonalmente em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ se $\theta = \frac{\pi}{2}$, e isso é equivalente a dizer que $d(p, q) = 0$. Além disso, se p^\perp e q^\perp têm intersecção não vazia em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ ou são assintóticos, temos que a distância entre os hiperplanos é 0. Caso $p^\perp = q^\perp$, temos que a distância e o ângulo entre esses hiperplanos coincidentes é 0.

O próximo resultado é um fato conhecido de geometria riemanniana, e a demonstração será omitida. Para mais detalhes, ver Teorema 4.1 em [1].

Proposição 2.40 *Dadas duas geodésicas riemannianas σ_1 e σ_2 em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, não assintóticas, então existe uma única geodésica riemanniana perpendicular comum a σ_1 e σ_2 .*

Definição 2.41 *Dados dois pontos $p, q \in \mathbb{R}P^4$, dizemos que p e q são ortogonais se para respectivos levantamentos P e Q pertencentes a $V_{\mathbb{R}}^{4,1}$, temos $\langle P, Q \rangle = 0$. Dizemos que dois hiperplanos reais são ortogonais, se seus respectivos pontos polares são ortogonais.*

Assim como em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, a ortogonalidade de hiperplanos reais é equivalente à definição de ortogonalidade dada em função do d -invariante, ou seja, se p^\perp e q^\perp são hiperplanos reais com pontos polares respectivos p e q , e p^\perp é ortogonal a q^\perp , isso é equivalente à condição de que $d(p, q) = 0$.

2.2.2 Construção do conjunto bi-ortogonal

Nesta subsecção nos concentramos em transformar o problema de congruência de duplas de geodésicas riemannianas em um problema de congruência de uplas ordenadas de pontos distintos positivos. Para tanto, fazemos a construção de um conjunto chamado de “conjunto bi-ortogonal”, o qual descrevemos no seguimento desta subsecção.

Veja que para duas geodésicas distintas σ_1 e σ_2 de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, temos duas possibilidades para os conjuntos polares σ_1^\perp e σ_2^\perp , isto é, ou eles se intersectam em um ponto, ou eles se intersectam em um $\mathbb{R}P^1$. Essa afirmação pode ser verificada analisando a dimensão de σ_1^\perp e σ_2^\perp em $\mathbb{R}P^4$. A intersecção ou não de tais conjuntos polares vai depender se as geodésicas, σ_1 e σ_2 , se intersectam ou não em $\mathbb{R}P^4$ (ver Lema 2.43).

Proposição 2.42 *Um plano hiperbólico real w em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, é o plano hiperbólico real que contém duas geodésicas riemannianas coplanares σ_1 e σ_2 se, e somente se, $w^\perp \subset \sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp$.*

Lema 2.43 *Sejam duas geodésicas riemannianas σ_1 e σ_2 distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Temos que:*

(i) σ_1 e σ_2 são coplanares $\Leftrightarrow \sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp \simeq \mathbb{R}P^1$;

(ii) σ_1 e σ_2 são reversas $\Leftrightarrow \sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp$ é um ponto do espaço projetivo.

Prova. Basta considerar o espaço hiperbólico real com dimensão $n = 4$ na demonstração do Lema 2.88. ■

Dada uma subvariedade totalmente geodésica W , denotando seu espaço tangente no ponto $x \in W$ por $T_x W$, temos a definição abaixo para ortogonalidade. Para mais detalhes, ver [7] página 80.

Definição 2.44 *Dizemos que duas subvariedades totalmente geodésicas V e W se intersectam ortogonalmente em $x \in V \cap W$ se, e somente se, cada vetor em $[T_x(V \cap W)]^\perp \cap T_x V$ é ortogonal a cada vetor em $[T_x(V \cap W)]^\perp \cap T_x W$.*

Agora vamos enunciar dois resultados puramente técnicos, que implicam diretamente na construção do conjunto bi-ortogonal. Para demonstrar basta considerar o espaço hiperbólico real com dimensão $n = 4$ na demonstração do Lema 2.91 e do Lema 2.92 na Seção 2.3.2.

Lema 2.45 *Sejam duas geodésicas riemannianas σ_1 e σ_2 em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, tais que se intersectam ortogonalmente. Então existe um único hiperplano real em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ tal que contém σ_1 e intersecta σ_2 ortogonalmente.*

Lema 2.46 *Sejam duas geodésicas riemannianas σ_1 e σ_2 em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, tais que se intersectam ortogonalmente. Considere h o hiperplano real em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ tal que contém σ_1 e intersecta σ_2 ortogonalmente, obtido no lema anterior. Então qualquer hiperplano real em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ que contenha σ_2 , intersecta h ortogonalmente.*

2.2.2.1 Conjunto bi-ortogonal para geodésicas reversas

Sejam σ_1 e σ_2 duas geodésicas riemannianas reversas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, e considere σ_{12} a geodésica riemanniana perpendicular comum a σ_1 e σ_2 garantida pela Proposição 2.40. Temos que σ_1 , σ_2 e σ_{12} têm conjuntos polares σ_1^\perp , σ_2^\perp e σ_{12}^\perp , respectivamente. Além disso, temos $\sigma_j^\perp \simeq \mathbb{R}P^2$, para $j = 1, 2$, e $\sigma_{12}^\perp \simeq \mathbb{R}P^2$. Pelo Lema 2.43 temos que $\sigma_j^\perp \cap \sigma_{12}^\perp \simeq \mathbb{R}P^1$, para $j = 1, 2$, e $\sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp$ é um ponto do espaço projetivo. Assim, temos que $(\sigma_1^\perp \cap \sigma_{12}^\perp) \cap (\sigma_2^\perp \cap \sigma_{12}^\perp) = \sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp$ é um ponto do espaço projetivo.

Vimos que em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, ao considerar duas geodésicas riemannianas reversas σ_1 e σ_2 , com geodésica perpendicular comum σ_{12} , obtemos dois hiperplanos únicos, sendo que um deles contém σ_1 e σ_{12} , e o outro contém σ_2 e σ_{12} . Entretanto, em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ existem infinitos hiperplanos com tais propriedades. Assim, uma forma de resolver esse problema de unicidade, é considerar no lugar da perpendicular comum, uma subvariedade totalmente geodésica de codimensão 2. No que segue, descrevemos a construção dessa subvariedade.

Pelo Lema 2.45 existe um único hiperplano real em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ que contém σ_{12} e intersecta σ_1 ortogonalmente. Também pelo Lema 2.45 existe um único hiperplano real em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ que contém σ_{12} e intersecta σ_2 ortogonalmente. Intersectando tais hiperplanos obtemos uma cópia de um $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ mergulhado em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, que contém a perpendicular comum σ_{12} e intersecta perpendicularmente σ_1 e σ_2 (único com tal propriedade). Com isso temos a definição que segue.

Definição 2.47 *Sejam σ_1 e σ_2 duas geodésicas riemannianas reversas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, e σ_{12} a geodésica riemanniana perpendicular comum a σ_1 e σ_2 . Chamamos de plano perpendicu-*

lar comum real, relativo a σ_1 e σ_2 , à subvariedade totalmente geodésica $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ que contém a perpendicular comum σ_{12} e intersecta perpendicularmente σ_1 e σ_2 .

Observação 2.48 *A respeito do plano perpendicular comum real podemos dizer que:*

(i) *Podemos construir o plano perpendicular comum de uma outra forma. Para tanto, tome pontos $p'_1 = (\sigma_1^\perp \cap \sigma_{12}^\perp)^\perp \cap \sigma_{12}^\perp$ e $p'_2 = (\sigma_2^\perp \cap \sigma_{12}^\perp)^\perp \cap \sigma_{12}^\perp$. Considere o espaço gerado $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{P'_1, P'_2\}$ positivo, onde P'_1 e P'_2 são levantamentos de p'_1 e p'_2 respectivamente. Tome a projeção $w = \pi(W - \{0\})$. Temos que $w^\perp \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ é o plano perpendicular comum real que procuramos;*

(ii) *Veja que w construído no item (i) intersecta $\sigma_1^\perp \cap \sigma_{12}^\perp$ em um ponto, o qual podemos denotar por q_1 , e também intersecta $\sigma_2^\perp \cap \sigma_{12}^\perp$ em um ponto, o qual podemos denotar por q_2 . Como $q_j \in w$, temos que $q_j^\perp \supset w^\perp$, para $j = 1, 2$. Segue que q_j^\perp é o único hiperplano real de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ que contém w^\perp e c_j , para $j = 1, 2$.*

Proposição 2.49 *Sejam σ_1 e σ_2 duas geodésicas riemannianas reversas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, e σ_{12} a geodésica riemanniana perpendicular comum a σ_1 e σ_2 . Então $q_j \in [(\sigma_1^\perp \cap \sigma_{12}^\perp) \cap (\sigma_2^\perp \cap \sigma_{12}^\perp)]^\perp$, onde $q_j = w \cap (\sigma_j^\perp \cap \sigma_{12}^\perp)$, para $j = 1, 2$, e w é o complemento ortogonal do plano perpendicular comum real relativo a σ_1 e σ_2 .*

Prova. Ver Proposição 2.95. ■

A proposição acima nos mostra que o ponto da intersecção $\sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp$ é ortogonal aos pontos q_1 e q_2 obtidos acima. Isso nos dá ortogonalidades importantes para a construção do conjunto bi-ortogonal.

Corolário 2.50 *Seja w o complemento ortogonal do plano perpendicular comum real dado na Observação 2.48. Os hiperplanos reais q_1^\perp e q_2^\perp associados aos pontos polares q_1 e q_2 , respectivamente, se intersectam ortogonalmente se, e somente se, $p'_1 = q_2$ e $p'_2 = q_1$.*

Prova. Ver Corolário 2.96. ■

Agora vamos fazer duas construções do conjunto bi-ortogonal para duplas de geodésicas riemannianas reversas. A primeira construção utiliza o conceito de plano perpendicular

comum real dado na Definição 2.47, e a segunda utiliza apenas os complementos ortogonais das geodésicas riemannianas para obter os hiperplanos.

Construção 1: Sejam (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ e σ_{12} a geodésica riemanniana perpendicular comum a σ_1 e σ_2 . Considere $p_j \in \sigma_j^\perp$ o ponto polar associado ao hiperplano p_j^\perp que contém σ_j e intersecta ortogonalmente σ_{12} , garantido pelo Lema 2.45, onde $j = 1, 2$. Considere também o plano perpendicular comum real relativo a σ_1 e σ_2 . Tome $q_j \in \sigma_j^\perp$ o ponto polar associado ao hiperplano que contém o plano perpendicular comum real e a geodésica riemanniana σ_j , para $j = 1, 2$. Por fim, considere $r = \sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp = (\sigma_1^\perp \cap \sigma_{12}^\perp) \cap (\sigma_2^\perp \cap \sigma_{12}^\perp)$. Então obtemos um conjunto de cinco pontos positivos denotado por $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\}$. As propriedades de ortogonalidade entre os hiperplanos são garantidas pela Proposição 2.49 e pelo Lema 2.46.

Construção 2: Sejam (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ e σ_{12} a geodésica riemanniana perpendicular comum a σ_1 e σ_2 . Considere $p_j \in \sigma_j^\perp$ o ponto polar associado ao hiperplano p_j^\perp que contém σ_j e intersecta ortogonalmente σ_{12} , garantido pelo Lema 2.45, onde $j = 1, 2$. Veja que $p_j \notin \sigma_{12}^\perp$. Além disso, pelo Lema 2.46, e pelo fato do complemento ortogonal de p_j , dentro de σ_j^\perp , ter dimensão 1, segue que o complemento ortogonal de p_j , dentro de σ_j^\perp , é exatamente $\sigma_j^\perp \cap \sigma_{12}^\perp$, com $j = 1, 2$. Agora, considere $q_j = \{[(\sigma_1^\perp \cap \sigma_{12}^\perp) \cap (\sigma_2^\perp \cap \sigma_{12}^\perp)]^\perp \cap (\sigma_j^\perp \cap \sigma_{12}^\perp)\}$, e seja q_j^\perp o hiperplano associado ao ponto polar q_j , com $j = 1, 2$. Veja que $q_j^\perp \supset \sigma_{12}$ e $q_j^\perp \supset \sigma_j$. Por fim, considere $r = \sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp = (\sigma_1^\perp \cap \sigma_{12}^\perp) \cap (\sigma_2^\perp \cap \sigma_{12}^\perp)$. Então obtemos um conjunto de cinco pontos positivos denotado por $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\}$. As propriedades de ortogonalidade entre os hiperplanos são garantidas pela construção de q_j , para $j = 1, 2$, e pelo Lema 2.46.

Definição 2.51 Chamamos ao conjunto $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\}$ de conjunto bi-ortogonal da dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas (σ_1, σ_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.

Proposição 2.52 Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Considere seu respectivo conjunto bi-ortogonal $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{R}P^4$. Então temos que $r \perp p_k$ e $r \perp q_k$ para $k = 1, 2$, e $p_j \perp q_k$ para $j, k = 1, 2$.

A próxima proposição nos mostra que as duas construções acima nos dão os mesmos hiperplanos. Segue o resultado.

Proposição 2.53 *Sejam σ_1 e σ_2 duas geodésicas riemannianas reversas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ e σ_{12} a geodésica riemanniana perpendicular comum a σ_1 e σ_2 . Considere w o complemento ortogonal do plano perpendicular comum real relativo a σ_1 e σ_2 . Então, para $j = 1, 2$, temos*

$$[(\sigma_1^\perp \cap \sigma_{12}^\perp) \cap (\sigma_2^\perp \cap \sigma_{12}^\perp)]^\perp \cap (\sigma_j^\perp \cap \sigma_{12}^\perp) = (\sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp)^\perp \cap (\sigma_j^\perp \cap \sigma_{12}^\perp) = w \cap (\sigma_j^\perp \cap \sigma_{12}^\perp).$$

Prova. Ver Proposição 2.99. ■

2.2.2.2 Conjunto bi-ortogonal para geodésicas coplanares

Similar ao que fizemos acima para geodésicas riemannianas reversas, vamos trabalhar aqui no caso em que as geodésicas riemannianas são coplanares. Sabemos que geodésicas riemannianas coplanares podem ser ultraparalelas, assintóticas ou concorrentes, conforme suas respectivas linhas projetivas se intersectam fora, na fronteira ou dentro do espaço hiperbólico, respectivamente. Assim como fizemos em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, vamos fazer a construção do conjunto bi-ortogonal para cada um desses casos.

Proposição 2.54 *Sejam σ_1 e σ_2 duas geodésicas riemannianas coplanares distintas, e w o plano hiperbólico real que contém σ_1 e σ_2 . Então existe um único hiperplano real q_j^\perp , associado ao ponto polar q_j , que contém σ_j e intersecta w ortogonalmente, para $j = 1, 2$.*

Prova. Considere $q_j = [\sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp]^\perp \cap \sigma_j^\perp$, com $j = 1, 2$. Temos que q_j^\perp é o hiperplano desejado.

■

Construção (caso concorrente): Considere uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas (σ_1, σ_2) coplanares concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, e seja w o plano hiperbólico real que contém σ_1 e σ_2 , com levantamento W . Primeiramente tome o hiperplano real q_j^\perp que contém σ_j e intersecta w ortogonalmente, para $j = 1, 2$, dado pela Proposição 2.54. Por fim, note que $\mathbb{R}P^1 \simeq (\sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp) = \pi(W^\perp - \{0\})$, onde W^\perp é o complemento ortogonal do levantamento W , e tem dimensão 2. Assim, tome uma base ortonormal de W^\perp denotada por $\mathcal{B} = \{R_1, R_2\}$.

Considere os pontos projetivos $r_j = \pi(R_j)$, com $j = 1, 2$. Então obtemos um conjunto de quatro pontos positivos denotado por $\{r_1, r_2, q_1, q_2\}$.

Definição 2.55 Chamamos ao conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2\}$, de conjunto bi-ortogonal da dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares concorrentes (σ_1, σ_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.

Proposição 2.56 Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares concorrentes de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Considere seu conjunto bi-ortogonal $\{r_1, r_2, q_1, q_2\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{R}P^4$. Então temos que $r_1 \perp r_2$, $r_j \perp q_k$ para $j = 1, 2$ e $k = 1, 2$.

Construção (caso assintótico): Considere uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas (σ_1, σ_2) coplanares assintóticas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, e seja w o plano hiperbólico real que contém σ_1 e σ_2 , com levantamento W . Primeiramente tome o hiperplano real q_j^\perp que contém σ_j e intersecta w ortogonalmente, para $j = 1, 2$, dado pela Proposição 2.54. Por fim, note que $\mathbb{R}P^1 \simeq (\sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp) = \pi(W^\perp - \{0\})$, onde W^\perp é o complemento ortogonal do levantamento W , e tem dimensão 2. Assim, tome uma base ortonormal de W^\perp denotada por $\mathcal{B} = \{R_1, R_2\}$. Considere os pontos projetivos $r_j = \pi(R_j)$, com $j = 1, 2$. Então obtemos um conjunto de quatro pontos positivos denotado por $\{r_1, r_2, q_1, q_2\}$.

Definição 2.57 Chamamos ao conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2\}$, de conjunto bi-ortogonal da dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares assintóticas (σ_1, σ_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.

Proposição 2.58 Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares assintóticas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Considere seu conjunto bi-ortogonal $\{r_1, r_2, q_1, q_2\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{R}P^4$. Então temos que $r_1 \perp r_2$, $r_j \perp q_k$ para $j = 1, 2$ e $k = 1, 2$.

Construção (caso ultraparalelo): Considere uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas (σ_1, σ_2) coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, e seja w o plano hiperbólico real que contém σ_1 e σ_2 , com levantamento W . Primeiramente tome o hiperplano real p_j^\perp que contém σ_j e intersecta w ortogonalmente, para $j = 1, 2$, dado pela Proposição 2.54. Por fim, note que $\mathbb{R}P^1 \simeq (\sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp) = \pi(W^\perp - \{0\})$, onde W^\perp é o complemento ortogonal do levantamento W ,

e tem dimensão 2. Assim, tome uma base ortonormal de W^\perp denotada por $\mathcal{B} = \{R_1, R_2\}$. Considere os pontos projetivos $r_j = \pi(R_j)$, com $j = 1, 2$. Então obtemos um conjunto de quatro pontos positivos denotado por $\{r_1, p_1, p_2, r_2\}$.

Definição 2.59 Chamamos ao conjunto $\{r_1, p_1, p_2, r_2\}$, de conjunto bi-ortogonal da dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares ultraparalelas (σ_1, σ_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.

Proposição 2.60 Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Considere seu conjunto bi-ortogonal $\{r_1, p_1, p_2, r_2\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{R}P^4$. Então temos que $r_1 \perp r_2$, $r_j \perp p_k$ para $j = 1, 2$ e $k = 1, 2$.

2.2.3 Ângulo e distância entre geodésicas riemannianas

Vimos que cada dupla ordenada de geodésicas riemannianas (σ_1, σ_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, pode ser associada ao seu conjunto bi-ortogonal constituído de cinco pontos projetivos positivos denotados por $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\}$, onde $p_1 = p_2 = r_2$ se as geodésicas são coplanares assintóticas ou concorrentes, e $q_1 = q_2 = r_2$ se as geodésicas são coplanares ultraparalelas. Por construção, para cada dupla (σ_1, σ_2) , tal conjunto de pontos é único a menos de isometria.

Definição 2.61 Chamamos o conjunto $\{R, P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ dos levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\}$, de base bi-ortogonal da dupla ordenada (σ_1, σ_2) de geodésicas riemannianas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.

A base bi-ortogonal satisfaz as propriedades de ortogonalidade dadas na Proposição 2.52. Além disso, se Σ_j^\perp é o levantamento do conjunto polar σ_j^\perp da geodésica σ_j , então o conjunto $\{R, P_j, Q_j\}$ forma uma base ortogonal para Σ_j^\perp , com $j = 1, 2$. Tal base pode ser tomada de forma a ser ortonormal.

Agora vamos definir distância e ângulo entre geodésicas riemannianas. Para tanto, vamos utilizar o conceito de d -invariante (ver Definição 2.38).

Definição 2.62 Dada uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas (σ_1, σ_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, com conjunto bi-ortogonal $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\}$, definimos a pré-distância entre σ_1 e σ_2 por $d(p_1, p_2)$, e o pré-ângulo entre σ_1 e σ_2 por $d(q_1, q_2)$.

Vamos definir distância e ângulo entre geodésicas riemannianas a partir dos conceitos de pré-distância e pré-ângulo dados acima. Para tanto, considere uma dupla ordenada (σ_1, σ_2) com conjunto bi-ortogonal $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\}$. Definimos o ângulo θ entre geodésicas riemannianas por:

$$\cos^2(\theta) = d(q_1, q_2), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Por outro lado, definimos a distância ρ entre geodésicas riemannianas por:

$$\cosh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) = d(p_1, p_2), \quad \rho \in [0, +\infty).$$

Observação 2.63 *Veja que, para a distância $\rho \in [0, +\infty)$ e para o ângulo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, temos que as funções \cos e \cosh são injetivas, e portanto não tem diferença se trabalhamos com distância ou com pré-distância (o mesmo para ângulo e pré-ângulo).*

Proposição 2.64 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ com conjunto bi-ortogonal $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\}$, então:*

- (i) *A dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas riemannianas reversas se, e somente se, $d(p_1, p_2) > 1$ e $d(q_1, q_2) < 1$;*
- (ii) *A dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas riemannianas concorrentes se, e somente se, $d(p_1, p_2) = 1$ e $d(q_1, q_2) < 1$;*
- (iii) *A dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas riemannianas ultraparalelas se, e somente se, $d(p_1, p_2) > 1$ e $d(q_1, q_2) = 1$;*
- (iv) *A dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas riemannianas assintóticas se, e somente se, $d(p_1, p_2) = 1$ e $d(q_1, q_2) = 1$.*

Proposição 2.65 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ com conjunto bi-ortogonal $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\}$, e considere $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{R, P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$, onde $\{R, P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ é uma base bi-ortogonal da dupla (σ_1, σ_2) . Então:*

- (i) *W é hiperbólico e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 5$ se, e somente se, as geodésicas (σ_1, σ_2) são reversas;*

- (ii) W é hiperbólico e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 4$ se, e somente se, as geodésicas (σ_1, σ_2) são ultraparalelas;
- (iii) W é elíptico e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 4$ se, e somente se, as geodésicas (σ_1, σ_2) são concorrentes;
- (iv) W é parabólico e $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 4$ se, e somente se, as geodésicas (σ_1, σ_2) são assintóticas.

2.2.4 Espaço de módulos de duplas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$

Nesta subseção encontramos invariantes tais que descrevem unicamente as classes de congruência, por $Isom(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4) = PO(4, 1) = PSO(4, 1)$, de duplas ordenadas de geodésicas riemannianas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Para mais detalhes sobre o grupo de isometrias do espaço hiperbólico real, ver Subseção 1.2.2.3. Segue o conceito de congruência.

Definição 2.66 Dizemos que duas duplas ordenadas (σ_1, σ_2) e (σ'_1, σ'_2) de geodésicas riemannianas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ são congruentes quando existe uma isometria $f \in PO(4, 1)$ tal que $f(\sigma_j) = \sigma'_j$ para $j = 1, 2$.

Note que a congruência definida acima é uma relação de equivalência. O espaço das classes de equivalência munido da topologia quociente é denominado *espaço de configurações* de duplas ordenadas de geodésicas riemannianas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, e denotamos por $\mathcal{M}(2, 4)$.

2.2.4.1 Caso em que as geodésicas riemannianas são reversas

Considere (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Tal dupla está associada ao conjunto bi-ortogonal $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\}$. Denote a pré-distância por $d = d(p_1, p_2)$ e o pré-ângulo por $a = d(q_1, q_2)$.

Proposição 2.67 Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Então existem levantamentos $\{R, P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$, dos elementos do conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) , tais que a matriz de Gram associada a tais levantamentos é dada por:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{a} & 1 \end{bmatrix}$$

onde $\det(G) < 0$, d e a são números reais tais que $d > 1$ e $0 \leq a < 1$.

Prova. Considere $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\}$ o conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) . Segue por um argumento análogo ao feito na demonstração da Proposição 1.27 e pela Proposição 2.52 que existem levantamentos para os elementos do conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) , denotados por $\{R, P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$, tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g_{23} & 0 & 0 \\ 0 & g_{32} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & g_{45} \\ 0 & 0 & 0 & g_{54} & 1 \end{bmatrix}$$

onde $g_{23}, g_{45} \in \mathbb{R}_+$. Logo, usando as definições de d e a , temos que $d = d(p_1, p_2) = \langle P_1, P_2 \rangle \langle P_2, P_1 \rangle = g_{23}^2$, e conseqüentemente $g_{23} = \sqrt{d}$. Analogamente obtemos que $g_{45} = \sqrt{a}$. Além disso, calculando o determinante da matriz acima, obtemos $\det(G) = (1 - g_{23}^2)(1 - g_{45}^2) = (1 - d)(1 - a)$, e como a pré-distância $d > 1$ e o pré-ângulo $0 \leq a < 1$, segue que $\det(G) < 0$.

■

Definição 2.68 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Chamamos a matriz G dada na Proposição 2.67 de matriz de Gram canônica para uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.*

Proposição 2.69 *Sejam (σ_1, σ_2) e (σ'_1, σ'_2) duas duplas ordenadas de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Se as duplas (σ_1, σ_2) e (σ'_1, σ'_2) possuem as mesmas distâncias e os mesmos ângulos, então existe uma isometria $f \in PO(4, 1)$ tal que $f(\sigma_j) = \sigma'_j$ para $j = 1, 2$.*

Prova. Sejam $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\}$ e $\{r', p'_1, p'_2, q'_1, q'_2\}$ conjuntos bi-ortogonais de (σ_1, σ_2) e (σ'_1, σ'_2) , respectivamente. Considere $G = (g_{ij})$ e $G' = (g'_{ij})$ matrizes de Gram canônicas de $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\}$ e $\{r', p'_1, p'_2, q'_1, q'_2\}$, respectivamente, denotadas por

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{a} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d'} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d'} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a'} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{a'} & 1 \end{bmatrix} .$$

Como (σ_1, σ_2) e (σ'_1, σ'_2) têm os mesmos ângulos e distâncias, pela Observação 2.63 temos que (σ_1, σ_2) e (σ'_1, σ'_2) têm os mesmos pré-ângulos e pré-distâncias. Consequentemente $G = G'$. Como os espaços gerados pelos levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\}$ e pelos levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{r', p'_1, p'_2, q'_1, q'_2\}$ são espaços não degenerados, o resultado segue da Proposição 1.32 (considerando o corpo dos reais e $n = 4$ na proposição). ■

Teorema 2.70 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, com conjunto bi-ortogonal $\{r, p_1, p_2, q_1, q_2\}$. Então os d -invariantes $d = d(p_1, p_2)$ e $a = d(q_1, q_2)$ definem unicamente a classe de congruência por $PO(4, 1)$ das duplas ordenadas de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.*

Prova. A prova segue da aplicação da Proposição 2.67 junto com a aplicação da Proposição 2.69. ■

Agora estamos em condições de construir o espaço de módulos para duplas ordenadas de geodésicas riemannianas reversas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Para começar, considere (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ e G a matriz de Gram canônica associada a tal dupla. Vimos que podemos recuperar as entradas de G em termos dos invariantes $d(p_1, p_2)$ e $d(q_1, q_2)$.

Denote por $\mathcal{M}^g(2, 4)$ o espaço de configurações de duplas ordenadas de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Os elementos de $\mathcal{M}^g(2, 4)$ são classes denotadas por $[(\sigma_1, \sigma_2)]$. Defina a aplicação

$$\tau : \mathcal{M}^g(2, 4) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

que associa a cada classe $[(\sigma_1, \sigma_2)]$ os invariantes $d(p_1, p_2)$ e $d(q_1, q_2)$. Por fim, defina o conjunto $\mathbb{M}^g(2, 4) = \{(d, a) \in \mathbb{R}^2; d > 1 \text{ e } 0 \leq a < 1\}$. Veja que $\mathbb{M}^g(2, 4)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^2 é um espaço topológico.

Teorema 2.71 *O espaço de configurações $\mathcal{M}^g(2, 4)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}^g(2, 4)$.*

Prova. Pelas condições de determinante dadas na Proposição 1.29 (considerando a proposição sobre o corpo dos reais e com $n = 4$) e pela Proposição 2.67, temos que a aplicação $\tau : \mathcal{M}^g(2, 4) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada acima define uma aplicação $\tau : \mathcal{M}^g(2, 4) \rightarrow \mathbb{M}^g(2, 4)$. Usando o Teorema 2.70 obtemos que $\tau : \mathcal{M}^g(2, 4) \rightarrow \mathbb{M}^g(2, 4)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(d, a) \in \mathbb{M}^g(2, 4)$, considere G tal que $g_{23} = g_{32} = \sqrt{d}$, $g_{45} = g_{54} = \sqrt{a}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 5$, e as demais entradas são nulas. Segue da Proposição 1.29 (sobre o corpo dos reais e com $n = 4$) que G assim construída é a matriz de Gram canônica de alguma dupla ordenada de geodésicas riemannianas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Logo $\tau : \mathcal{M}^g(2, 4) \rightarrow \mathbb{M}^g(2, 4)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}^g(2, 4)$ da topologia induzida de \mathbb{R}^2 , temos que $\tau : \mathcal{M}^g(2, 4) \rightarrow \mathbb{M}^g(2, 4)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 2.72 *Chamamos $\mathbb{M}^g(2, 4)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}^g(2, 4)$.*

2.2.4.2 Caso em que as geodésicas riemannianas são coplanares

Vamos trabalhar nesta subseção com duplas ordenadas de geodésicas riemannianas coplanares (assintóticas, concorrentes ou ultraparalelas) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Seja (σ_1, σ_2) uma tal dupla. Vi-mos que essa dupla está associada ao conjunto bi-ortogonal $\{r_1, r_2, q_1, q_2\}$, com $r_2 = p_1 = p_2$, se (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas concorrentes ou assintóticas, e está associada ao conjunto bi-ortogonal $\{r_1, p_1, p_2, r_2\}$, com $r_2 = q_1 = q_2$, se (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas ultraparalelas. Denote a pré-distância por $d = d(p_1, p_2)$ e o pré-ângulo por $a = d(q_1, q_2)$.

Proposição 2.73 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares, assintóticas ou concorrentes, de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Então existem levantamentos $\{R_1, R_2, Q_1, Q_2\}$, dos elementos do conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) , tais que a matriz de Gram associada a tais levantamentos é dada por:*

$$G = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{a} \\ 0 & \sqrt{a} & 1 \end{bmatrix}$$

onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2 e a é um número real tal que $0 \leq a \leq 1$. Além disso, $\det(G) > 0$ se σ_1 e σ_2 são concorrentes, e $\det(G) = 0$ se σ_1 e σ_2 são assintóticas.

Prova. Considere $\{r_1, r_2, q_1, q_2\}$ o conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) . Por um argumento semelhante ao que foi feito na demonstração da Proposição 1.27, junto com a Proposição 2.56, caso as geodésicas sejam concorrentes, e com a Proposição 2.58, caso as geodésicas sejam assintóticas, que existem levantamentos para os elementos do conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) , denotados por $\{R_1, R_2, Q_1, Q_2\}$, tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g_{34} \\ 0 & g_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

onde $g_{34} = g_{43} \in \mathbb{R}_+$. Logo, usando a definição do pré-ângulo a , temos que $a = d(q_1, q_2) = \langle Q_1, Q_2 \rangle \langle Q_2, Q_1 \rangle = g_{34}^2$, e conseqüentemente $g_{34} = \sqrt{a}$. Além disso, calculando o determinante da matriz acima, obtemos $\det(G) = (1 - g_{34}^2) = (1 - a)$. Como as geodésicas são concorrentes ou assintóticas, segue da Proposição 2.64 que $0 \leq a < 1$ ou $a = 1$, respectivamente. Dessa forma, se $0 \leq a < 1$ então $\det(G) > 0$, e se $a = 1$ então $\det(G) = 0$.

■

Definição 2.74 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares concorrentes (assintóticas) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Chamamos a matriz G dada na Proposição 2.73 de matriz de Gram canônica para uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares concorrentes (assintóticas) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.*

Proposição 2.75 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Então existem levantamentos $\{R_1, P_1, P_2, R_2\}$, dos elementos do conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) , tais que a matriz de Gram associada a tais levantamentos é dada por:*

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d} & 0 \\ 0 & \sqrt{d} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde d é um número real tal que $d > 1$. Além disso, $\det(G) < 0$.

Prova. Considere $\{r_1, p_1, p_2, r_2\}$ o conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) . Por um argumento análogo ao feito na demonstração da Proposição 1.27 e pela Proposição 2.60, temos que existem levantamentos para os elementos do conjunto bi-ortogonal de (σ_1, σ_2) , denotados por $\{R_1, P_1, P_2, R_2\}$, tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $g_{23} = g_{32} \in \mathbb{R}_+$. Logo, usando a definição de pré-distância d , temos que $d = d(p_1, p_2) = \langle P_1, P_2 \rangle \langle P_2, P_1 \rangle = g_{23}^2$, e conseqüentemente $g_{23} = \sqrt{d}$. Além disso, calculando o determinante da matriz acima, obtemos $\det(G) = (1 - g_{23}^2) = (1 - d)$. Como as geodésicas são ultraparalelas, segue da Proposição 2.64 que $d > 1$. Dessa forma, se $d > 1$ então $\det(G) < 0$. ■

Definição 2.76 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Chamamos a matriz G dada na Proposição 2.75 de matriz de Gram canônica para uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.*

Teorema 2.77 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares concorrentes (assintóticas) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, com conjunto bi-ortogonal $\{r_1, r_2, q_1, q_2\}$. Então o d -invariante $a = d(q_1, q_2)$ define unicamente a classe de congruência por $PO(4, 1)$ das duplas ordenadas de geodésicas riemannianas coplanares concorrentes (assintóticas) de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.*

Prova. Considere (σ_1, σ_2) e (σ'_1, σ'_2) duplas ordenadas de geodésicas riemannianas coplanares, concorrentes ou assintóticas, associadas respectivamente aos conjuntos bi-ortogonais

$\{r_1, r_2, q_1, q_2\}$ e $\{r'_1, r'_2, q'_1, q'_2\}$, tais que possuem mesmo d -invariante $a = d(q_1, q_2) = d(q'_1, q'_2) = a'$. Então pela Proposição 2.73 temos que as duplas possuem a mesma matriz de Gram canônica. Por outro lado, veja que o conjunto de levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{r_1, r_2, q_1, q_2\}$ é linearmente independente, pois caso contrário teríamos $\sigma_1 = \sigma_2$. O mesmo vale para o conjunto de levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{r'_1, r'_2, q'_1, q'_2\}$. Com isso temos que o conjunto dos levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{r_1, r_2, q_1, q_2\}$ possui o mesmo tipo de dependência linear que o conjunto dos levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{r'_1, r'_2, q'_1, q'_2\}$. O resultado segue do Teorema de Höfer (considerando o corpo dos reais ao invés do corpo dos complexos). ■

Teorema 2.78 *Seja (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, com conjunto bi-ortogonal $\{r_1, p_1, p_2, r_2\}$. Então o d -invariante $d = d(p_1, p_2)$ define unicamente a classe de congruência por $PO(4, 1)$ das duplas ordenadas de geodésicas riemannianas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.*

Prova. A prova segue por um argumento análogo ao feito no Teorema 2.77. Basta aplicar a Proposição 2.75 para garantir que as duplas possuem a mesma matriz de Gram canônica, observar que os conjuntos de levantamentos dos conjuntos bi-ortogonais possuem o mesmo tipo de dependência linear, e usar o Teorema de Höfer (considerando o corpo dos reais ao invés do corpo dos complexos). ■

Agora estamos em condições de construir o espaço de módulos para duplas ordenadas de geodésicas riemannianas coplanares em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Para começar, considere (σ_1, σ_2) uma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ e G a matriz de Gram canônica associada a tal dupla. Vimos que podemos recuperar as entradas de G em termos do invariante $a = d(q_1, q_2)$ no caso em que (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas concorrentes ou assintóticas, e podemos recuperar as entradas de G em termos do invariante $d = d(p_1, p_2)$ no caso em que (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas ultraparalelas.

Denote por $\mathcal{M}^s(2, 4)$ o espaço de configurações de duplas ordenadas de geodésicas riemannianas coplanares de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Os elementos de $\mathcal{M}^s(2, 4)$ são classes denotadas por $[(\sigma_1, \sigma_2)]$. Defina a aplicação

$$\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, 4) \rightarrow \mathbb{R}$$

que associa cada classe $[(\sigma_1, \sigma_2)]$ ao respectivo d -invariante que define tal classe. Por fim, defina o conjunto $\mathbb{M}^s(2, 4) = \{t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}$. Veja que $\mathbb{M}^s(2, 4)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R} é um espaço topológico.

Teorema 2.79 *O espaço de configurações $\mathcal{M}^s(2, 4)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}^s(2, 4)$.*

Prova. Pelas condições de determinante (Proposição 1.29 sobre o corpo dos reais com $n = 4$), pela Proposição 2.73 e pela Proposição 2.75 temos que a aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ dada acima define uma aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, 4) \rightarrow \mathbb{M}^s(2, 4)$. Pelo Teorema 2.77 e pelo Teorema 2.78 temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, 4) \rightarrow \mathbb{M}^s(2, 4)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, tome $t \in \mathbb{M}^s(2, 4)$. Se $0 \leq t \leq 1$ temos $t = a$, onde a é o pré-ângulo. Dessa forma, considere G tal que $g_{34} = g_{43} = \sqrt{a}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, 2, 3, 4$, e as demais entradas são nulas. Por outro lado, se $t > 1$ temos $t = d$, onde d é a pré-distância. Então considere G tal que $g_{23} = g_{32} = \sqrt{d}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, 2, 3, 4$, e as demais entradas são nulas. Segue novamente das condições de determinante, que G construída nos dois casos acima, é a matriz de Gram canônica de alguma dupla ordenada de geodésicas riemannianas coplanares de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Logo $\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, 4) \rightarrow \mathbb{M}^s(2, 4)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}^s(2, 4)$ da topologia induzida de \mathbb{R} , temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, 4) \rightarrow \mathbb{M}^s(2, 4)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 2.80 *Chamamos $\mathbb{M}^s(2, 4)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}^s(2, 4)$.*

Note que, usando a Proposição 2.64 junto com o Teorema 2.79, podemos identificar o conjunto das classes $[(\sigma_1, \sigma_2)]$, tais que a dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas riemannianas concorrentes, com o conjunto $\{(1, a) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq a < 1\}$. Da mesma forma podemos identificar o conjunto das classes $[(\sigma_1, \sigma_2)]$, tais que a dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas riemannianas ultraparalelas, com o conjunto $\{(d, 1) \in \mathbb{R}^2; d > 1\}$, e podemos identificar o conjunto das classes $[(\sigma_1, \sigma_2)]$, tais que a dupla (σ_1, σ_2) é formada por geodésicas riemannianas assintóticas, com o conjunto $\{(d, a) \in \mathbb{R}^2; d = a = 1\}$. Conseqüentemente, podemos identificar o espaço $\mathbb{M}^s(2, 4)$ com a união de tais conjuntos. Por outro lado, vimos que $\mathbb{M}^g(2, 4) = \{(d, a) \in \mathbb{R}^2; d > 1 \text{ e } 0 \leq a < 1\} = (1, \infty) \times [0, 1)$ (ver Teorema 2.71). Então,

se $\mathbb{M}(2, 4)$ denota o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}(2, 4)$, desde que $\mathbb{M}(2, 4) = \mathbb{M}^g(2, 4) \cup \mathbb{M}^s(2, 4)$, temos que $\mathbb{M}(2, 4) = [1, +\infty) \times [0, 1]$. Isso prova o próximo resultado.

Corolário 2.81 *Se $\mathbb{M}(2, 4)$ é o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}(2, 4)$, então $\mathbb{M}(2, 4) = [1, +\infty) \times [0, 1]$.*

2.3 Duplas de Geodésicas Complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$

Nesta seção fazemos para duplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ algo similar ao que foi feito anteriormente para duplas ordenadas de geodésicas riemannianas no espaço hiperbólico real. Aqui vamos trabalhar com duplas ordenadas de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ com $n \geq 4$, uma vez que, o caso $n = 2$ foi feito em [3], e o caso $n = 3$ foi feito em [12].

Para começar, considere o espaço hiperbólico complexo de dimensão n denotado por $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, para $n \geq 4$. Lembre da Proposição 1.21, que temos uma relação bijetiva entre geodésicas complexas e conjuntos polares de dimensão $n - 2$, entre planos hiperbólicos e conjuntos polares de dimensão $n - 3$, e por fim, temos também uma relação bijetiva entre hiperplanos complexos e pontos polares. Em particular, se $n = 4$ temos que conjuntos polares de geodésicas complexas são $\mathbb{C}P^2$, conjuntos polares de planos hiperbólicos são $\mathbb{C}P^1$, e hiperplanos complexos são cópias de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$.

Para fixar a notação, se p é um ponto polar, denotamos o hiperplano complexo associado ao ponto polar p por p^{\perp} . Se c é uma geodésica complexa, denotamos por c^{\perp} seu respectivo conjunto polar. Já fazendo uso dessa notação, temos a proposição que segue.

Proposição 2.82 *Seja c uma geodésica complexa em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ e c^{\perp} seu conjunto polar. Então p pertence a c^{\perp} se, e somente se, o hiperplano complexo associado a p contém c .*

2.3.1 Ângulo e distância entre hiperplanos complexos

Assim como definimos ângulo e distância para hiperplanos reais, fazemos algo análogo para hiperplanos complexos. Da mesma forma que para o caso real, necessitamos do invariante projetivo descrito na definição que segue.

Definição 2.83 Chamamos de d -invariante à aplicação dada por:

$$d: \pi(V_+) \times \pi(V_+) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, q) \mapsto d(p, q) = \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle}$$

onde P e Q são tais que $\pi(P) = p$ e $\pi(Q) = q$, onde π é a projeção natural definida na Subseção 1.2.1.

Temos que d está bem definida e $d(p, q) \geq 0$ para todo $p, q \in \pi(V_+)$. O próximo resultado nos dá condições necessárias, mas não suficientes, em termos do d -invariante, caso hiperplanos complexos se intersectem ou não em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.

Proposição 2.84 Dados dois hiperplanos complexos p^\perp e q^\perp associados a pontos polares p e q , respectivamente, temos que:

- (i) Se p^\perp e q^\perp se intersectam em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, então $0 \leq d(p, q) \leq 1$;
- (ii) Se p^\perp e q^\perp não se intersectam em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, então $d(p, q) \geq 1$.

Prova. Dados os hiperplanos complexos p^\perp e q^\perp associados a pontos polares p e q , considere o subespaço gerado $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{P, Q\}$, onde $P, Q \in V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ são levantamentos de p e q respectivamente. Suponha que p^\perp e q^\perp se intersectem em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ e não sejam coincidentes. Então existe um ponto projetivo negativo em $p^\perp \cap q^\perp$. Mas isso ocorre se, e somente se, o complemento ortogonal de W , denotado por W^\perp , é hiperbólico. Pela Proposição 1.3 temos que isso é equivalente a dizer que W é elíptico. Isso nos dá que p^\perp e q^\perp se intersectam em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ se, e somente se, W é elíptico. De maneira similar obtemos que p^\perp e q^\perp não se intersectam em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ se, e somente se, W é parabólico (p^\perp e q^\perp são disjuntos em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ mas $\overline{p^\perp} \cap \overline{q^\perp}$ é não vazio) ou W é hiperbólico ($\overline{p^\perp}, \overline{q^\perp}$ são disjuntos em $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n} = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$). Considere G a matriz de Gram associada a (p, q) e definida por (P, Q) . Pela Proposição 1.28 temos que G é indefinida, ou definida positiva, ou semi-definida positiva, e isso nos dá que $\det(G) < 0$, $\det(G) > 0$ ou $\det(G) = 0$, respectivamente. Lembre-se que o sinal do determinante da matriz de Gram independe do levantamento que tomamos. Por fim, veja que W elíptico implica que $\det(G) > 0$, W hiperbólico implica que $\det(G) < 0$, e W parabólico implica que

$\det(G) = 0$. Além disso, se p^\perp e q^\perp coincidem, temos nesse caso que $p = q$ e $\det(G) = 0$. Então, se $\det(G) > 0$ temos que

$$\det(G) > 0 \Leftrightarrow \langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle - \langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle > 0 \Leftrightarrow d(p, q) = \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle} < 1.$$

Segue que $0 \leq d(p, q) < 1$. Por outro lado, se $\det(G) = 0$ temos que

$$\det(G) = 0 \Leftrightarrow \langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle - \langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle = 0 \Leftrightarrow d(p, q) = \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle} = 1.$$

Se $\det(G) < 0$ obtemos que

$$\det(G) < 0 \Leftrightarrow \langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle - \langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle < 0 \Leftrightarrow d(p, q) = \frac{\langle P, Q \rangle \langle Q, P \rangle}{\langle P, P \rangle \langle Q, Q \rangle} > 1.$$

Portanto $d(p, q) \geq 1$. Com isso obtemos o que queríamos. ■

Enfim podemos definir ângulo e distância entre hiperplanos complexos. Para tanto, considere primeiro dois hiperplanos complexos, p^\perp e q^\perp , tais que se intersectam em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Sejam p e q seus respectivos pontos polares. Então podemos definir o ângulo θ entre esses hiperplanos por:

$$\cos^2(\theta) = d(p, q), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Por outro lado, considere hiperplanos complexos, p^\perp e q^\perp , tais que não se intersectam em $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n}$. Assim, podemos definir a distância ρ entre esses hiperplanos por:

$$\cosh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) = d(p, q), \quad \rho \in [0, +\infty).$$

A Proposição 2.84 garante que tais conceitos estejam bem definidos, e note que esses conceitos de ângulo e distância são coerentes com as definições de ângulo e distância da geometria riemanniana. Veja que p^\perp e q^\perp se intersectam ortogonalmente em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ se $\theta = \frac{\pi}{2}$, e isso é equivalente a dizer que $d(p, q) = 0$. Além disso, se p^\perp e q^\perp têm intersecção não vazia em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ ou são assintóticos, temos que a distância entre os hiperplanos é 0. Caso $p^\perp = q^\perp$, temos que a distância e o ângulo entre esses hiperplanos coincidentes é 0.

Proposição 2.85 *Sejam c_1 e c_2 duas geodésicas complexas não assintóticas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Então existe uma única geodésica complexa c_{12} , tal que $c_{12} \perp c_1$ e $c_{12} \perp c_2$.*

Prova. Ver página 29, Proposição 3.5 de [12]. ■

Definição 2.86 *Dados dois pontos $p, q \in \mathbb{C}P^n$, dizemos que p e q são ortogonais se para respectivos levantamentos P e Q pertencentes a $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$, temos $\langle P, Q \rangle = 0$. Dizemos que dois hiperplanos complexos são ortogonais, se seus respectivos pontos polares são ortogonais.*

Assim como a ortogonalidade entre hiperplanos reais, a ortogonalidade de hiperplanos complexos é equivalente à definição de ortogonalidade dada em função do d -invariante, ou seja, se p^\perp e q^\perp são hiperplanos complexos com pontos polares respectivos p e q , e p^\perp é ortogonal a q^\perp , isso é equivalente à condição de que $d(p, q) = 0$.

2.3.2 Construção do conjunto bi-ortogonal

Da mesma forma que foi feito no caso real, aqui vamos transformar o problema de congruência de duplas de geodésicas complexas em um problema de congruência de uplas ordenadas de pontos distintos positivos. Para tanto, fazemos a construção de um conjunto chamado de “conjunto bi-ortogonal”, o qual descrevemos no seguimento desta subseção.

Veja que para duas geodésicas distintas c_1 e c_2 de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, temos duas possibilidades para os conjuntos polares c_1^\perp e c_2^\perp , isto é, ou eles se intersectam em um $\mathbb{C}P^{n-3}$, ou eles se intersectam em um $\mathbb{C}P^{n-4}$. Essa afirmação pode ser verificada analisando a dimensão de c_1^\perp e c_2^\perp em $\mathbb{C}P^n$. Em particular se $n = 4$, temos que c_i^\perp é um $\mathbb{C}P^2$, para $i = 1, 2$, e a intersecção de c_1^\perp e c_2^\perp ou é um ponto projetivo, ou é um $\mathbb{C}P^1$.

Proposição 2.87 *Um plano hiperbólico complexo w em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, é o plano hiperbólico complexo que contém duas geodésicas complexas coplanares c_1 e c_2 se, e somente se, $w^\perp \subset c_1^\perp \cap c_2^\perp$.*

Prova. Sabemos que $w = \pi(W - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, para algum subespaço indefinido W de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ de dimensão complexa 3, e $c_i = \pi(C_i - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, para algum subespaço indefinido C_i de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ de dimensão complexa 2, com $i = 1, 2$. Assim, temos que w contém c_1 e c_2 se, e somente se $W \supset C_i$, com $i = 1, 2$. Mas esse fato ocorre se, e somente se, $W^\perp \subset C_i^\perp$, com $i = 1, 2$, ou seja, $W^\perp \subset C_1^\perp \cap C_2^\perp$ e $w^\perp \subset c_1^\perp \cap c_2^\perp$. ■

O próximo resultado nos mostra como se comportam os conjuntos polares de duplas de geodésicas complexas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, para $n \geq 4$. Segue abaixo o resultado.

Lema 2.88 *Sejam duas geodésicas complexas c_1 e c_2 distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Temos que:*

(i) c_1 e c_2 são coplanares $\Leftrightarrow c_1^\perp \cap c_2^\perp \simeq \mathbb{C}P^{n-3}$, quando $n \geq 4$;

(ii) c_1 e c_2 são reversas $\Leftrightarrow c_1^\perp \cap c_2^\perp \simeq \mathbb{C}P^{n-4}$ quando $n > 4$, e $c_1^\perp \cap c_2^\perp$ é um ponto do espaço projetivo quando $n = 4$.

Prova. (i): Suponha que c_1 e c_2 são coplanares. Seja $w = \pi(W - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ o plano hiperbólico que contém c_1 e c_2 , para algum subespaço indefinido W de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ de dimensão complexa 3, com $c_i = \pi(C_i - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, para algum subespaço indefinido C_i de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$ de dimensão complexa 2, com $i = 1, 2$. Pela Proposição 2.87, temos que $W^\perp \subset C_1^\perp \cap C_2^\perp$. Assim, segue que $\dim_{\mathbb{C}}(C_1^\perp \cap C_2^\perp) = n - 2$ e $c_1^\perp \cap c_2^\perp \simeq \mathbb{C}P^{n-3}$, para $n \geq 4$. Reciprocamente, suponha que $c_1^\perp \cap c_2^\perp \simeq \mathbb{C}P^{n-3}$ para $n \geq 4$. Considere o subespaço $W = C_1^\perp \cap C_2^\perp$. Assim, temos que $W \subset C_i^\perp$ com $i = 1, 2$. Pela Proposição 1.21 temos que $(C_i^\perp)^\perp = C_i$ com $i = 1, 2$. Então $W^\perp \supset (C_i^\perp)^\perp = C_i$ com $i = 1, 2$. Como $\dim_{\mathbb{C}}(W^\perp) = 3$, temos que $w^\perp = \pi(W^\perp - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ é o plano hiperbólico desejado. Logo c_1 e c_2 são coplanares.

(ii): Suponha que c_1 e c_2 são reversas. Sabemos que $n - 1 \geq \dim_{\mathbb{C}}(C_1^\perp \cap C_2^\perp) \geq n - 3$ (ver em [8] a Proposição 7.1 e o Teorema 7.2). Entretanto, c_1 e c_2 são reversas e conseqüentemente não são coplanares. Assim, pelo item (i) temos que $\dim_{\mathbb{C}}(C_1^\perp \cap C_2^\perp) \neq n - 2$. Como as geodésicas complexas que estamos considerando são distintas, temos que $\dim_{\mathbb{C}}(C_1^\perp \cap C_2^\perp) \neq n - 1$. Logo $\dim_{\mathbb{C}}(C_1^\perp \cap C_2^\perp) = n - 3$. Dessa forma, se $n > 4$ temos $c_1^\perp \cap c_2^\perp \simeq \mathbb{C}P^{n-4}$. Caso $n = 4$, temos $\dim_{\mathbb{C}}(C_1^\perp \cap C_2^\perp) = 1$ e conseqüentemente $c_1^\perp \cap c_2^\perp$ é um ponto do espaço projetivo. Reciprocamente, suponha que $\dim_{\mathbb{C}}(C_1^\perp \cap C_2^\perp) = n - 3$. Pelo item (i) temos que c_1 e c_2 não são coplanares. Logo c_1 e c_2 são reversas. ■

O resultado anterior nos traz conseqüências como, por exemplo, o fato de que se considerarmos duplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, para $n \geq 4$, então tal dupla estará contida em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Se considerarmos triplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, para $n \geq 6$, então existirá uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ a qual conterá a tripla em questão. De maneira mais geral, o resultado acima nos dá o seguinte corolário.

Corolário 2.89 *Dada uma k -upla ordenada de geodésicas complexas distintas contidas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, com $n \geq 2k$ e $k \geq 2$, então existe uma cópia de um $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{2k-1}$ mergulhado em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, que contém tal k -upla.*

Dada uma subvariedade totalmente geodésica W , denotando seu espaço tangente no ponto $x \in W$ por $T_x W$, temos a seguinte definição para ortogonalidade. Para mais detalhes, ver [7] página 80.

Definição 2.90 *Dizemos que duas subvariedades totalmente geodésicas V e W se intersectam ortogonalmente em $x \in V \cap W$ se, e somente se, cada vetor em $[T_x(V \cap W)]^\perp \cap T_x V$ é ortogonal a cada vetor em $[T_x(V \cap W)]^\perp \cap T_x W$.*

Agora vamos fazer dois resultados puramente técnicos, que implicam diretamente na construção do conjunto bi-ortogonal. Para a demonstração, vamos usar o conceito de ortogonalidade dado em termos de espaços tangentes na Definição 2.90.

Lema 2.91 *Sejam duas geodésicas complexas c_1 e c_2 em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, que se intersectam ortogonalmente. Então existe um único hiperplano complexo em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ que contém c_1 e intersecta c_2 ortogonalmente.*

Prova. Considere C_1 e C_2 subespaços indefinidos de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$, de dimensão complexa 2, tais que $\pi(C_1 - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = c_1$ e $\pi(C_2 - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = c_2$. Temos da hipótese, que C_1 e C_2 se intersectam ortogonalmente.

Existência: Tome $P \in [T_x(C_1 \cap C_2)]^\perp \cap T_x C_2$ para algum $x \in C_1 \cap C_2$, e considere $H = P^\perp$. Veja que H contém C_1 . De fato, $P \in [T_x(C_1 \cap C_2)]^\perp \cap T_x C_2$, e como C_1 e C_2 se intersectam ortogonalmente, temos que P é ortogonal a qualquer elemento de $[T_x(C_1 \cap C_2)]^\perp \cap T_x C_1$. Tome $P_1 \in T_x(C_1 \cap C_2)$ e $P_2 \in [T_x(C_1 \cap C_2)]^\perp \cap T_x C_1$. Assim, temos que $C_1 = T_x C_1 = \text{span}_{\mathbb{C}}\{P_1, P_2\}$ em $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$. Como P é ortogonal a qualquer elemento de $T_x(C_1 \cap C_2)$ e P é ortogonal a qualquer elemento de $[T_x(C_1 \cap C_2)]^\perp \cap T_x C_1$, segue que $C_1 \subset P^\perp = H$. Por outro lado, veja que H intersecta C_2 ortogonalmente. De fato, como vimos que $C_1 \subset H$, segue que $C_2 \cap H = C_2 \cap C_1$ e $T_x(C_2 \cap H) = T_x(C_2 \cap C_1)$. Então $[T_x(C_2 \cap H)]^\perp = [T_x(C_2 \cap C_1)]^\perp$, e conseqüentemente $[T_x(C_2 \cap H)]^\perp \cap T_x C_2 = [T_x(C_2 \cap C_1)]^\perp \cap T_x C_2$. Como $P \in [T_x(C_1 \cap C_2)]^\perp \cap T_x C_2$ e $H = P^\perp$, temos que H intersecta C_2 ortogonalmente. Considerando $h = \pi(H - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, obtemos um hiperplano complexo que contém c_1 e intersecta c_2 ortogonalmente.

Unicidade: Suponha que exista \tilde{H} tal que $\tilde{h} = \pi(\tilde{H} - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ é também um hiperplano complexo contendo c_1 e intersectando c_2 ortogonalmente. Então cada vetor pertencente a

$[T_x(\tilde{H} \cap C_2)]^\perp \cap T_x \tilde{H}$ é ortogonal a cada vetor de $[T_x(\tilde{H} \cap C_2)]^\perp \cap T_x C_2$, com $x \in \tilde{H} \cap C_2$. Como $C_1 \subset H$ e $C_1 \subset \tilde{H}$, temos que $\tilde{H} \cap C_2 = H \cap C_2 = C_1 \cap C_2$. Assim, $T_x(\tilde{H} \cap C_2) = T_x(H \cap C_2) = T_x(C_1 \cap C_2)$ e $[T_x(\tilde{H} \cap C_2)]^\perp = [T_x(H \cap C_2)]^\perp = [T_x(C_1 \cap C_2)]^\perp$. Dessa forma, temos que $P \in [T_x(C_1 \cap C_2)]^\perp \cap T_x C_2 = [T_x(\tilde{H} \cap C_2)]^\perp \cap T_x C_2 = [T_x(H \cap C_2)]^\perp \cap T_x C_2$, e como \tilde{H} intersecta C_2 ortogonalmente, segue que todos os vetores de $[T_x(\tilde{H} \cap C_2)]^\perp \cap T_x \tilde{H}$ são ortogonais a P . Com isso, e com o fato de $H = P^\perp$, temos que $[T_x(\tilde{H} \cap C_2)]^\perp \cap T_x \tilde{H} \subset H = T_x H$. Assim, $[T_x(\tilde{H} \cap C_2)]^\perp \cap T_x \tilde{H} \subseteq [T_x(H \cap C_2)]^\perp \cap T_x H$, e como têm mesma dimensão complexa, temos a igualdade $[T_x(\tilde{H} \cap C_2)]^\perp \cap T_x \tilde{H} = [T_x(H \cap C_2)]^\perp \cap T_x H$. Segue que $\tilde{H} = H$ e $\tilde{h} = h$. ■

Lema 2.92 *Sejam duas geodésicas complexas c_1 e c_2 em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, que se intersectam ortogonalmente. Considere h o hiperplano complexo em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ que contém c_1 e intersecta c_2 ortogonalmente, obtido no lema anterior. Então qualquer hiperplano complexo em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, que contenha c_2 , intersecta h ortogonalmente.*

Prova. Considere C_1 e C_2 subespaços indefinidos de $V_{\mathbb{C}}^{n,1}$, de dimensão complexa 2, tais que $\pi(C_1 - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = c_1$ e $\pi(C_2 - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n = c_2$. Seja H tal que $h = \pi(H - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, h contém c_1 e h intersecta c_2 ortogonalmente. Segue da hipótese, que cada vetor de $[T_x(H \cap C_2)]^\perp \cap T_x C_2$ é ortogonal a cada vetor de $[T_x(H \cap C_2)]^\perp \cap T_x H$, com $x \in H \cap C_2 = C_1 \cap C_2$. Suponha que $\tilde{h} = \pi(\tilde{H} - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ é um hiperplano complexo tal que contém c_2 . Precisamos mostrar que \tilde{H} intersecta H ortogonalmente, isto é, cada vetor de $[T_y(H \cap \tilde{H})]^\perp \cap T_y H$ é ortogonal a cada vetor de $[T_y(H \cap \tilde{H})]^\perp \cap T_y \tilde{H}$, para $y \in H \cap \tilde{H}$. Veja que basta provar a ortogonalidade para algum $y \in H \cap C_2 = C_1 \cap C_2$, pois nesse caso, para qualquer $x \in H \cap \tilde{H}$, temos que $T_x(H \cap \tilde{H}) = T_y(H \cap \tilde{H})$, e conseqüentemente $[T_x(H \cap \tilde{H})]^\perp = [T_y(H \cap \tilde{H})]^\perp$. Dessa forma, considere então $y \in H \cap C_2$. Como $T_y(H \cap C_2) \subset T_y(H \cap \tilde{H})$, temos $[T_y(H \cap C_2)]^\perp \supset [T_y(H \cap \tilde{H})]^\perp$. Segue que $\{[T_y(H \cap C_2)]^\perp \cap T_y H\} \supset \{[T_y(H \cap \tilde{H})]^\perp \cap T_y H\}$. Por outro lado, observe que $[T_y(H \cap \tilde{H})]^\perp \cap T_y C_2 \neq \emptyset$, pois como vimos na construção de h no Lema 2.91, temos que $H = P^\perp$ com $P \in [T_y(C_1 \cap C_2)]^\perp \cap T_y C_2$, assim $T_y H \supset T_y(H \cap \tilde{H})$ implicando que $[T_y H]^\perp \subset [T_y(H \cap \tilde{H})]^\perp$. Logo $P \in [T_y(H \cap \tilde{H})]^\perp$, e conseqüentemente $P \in [T_y(H \cap \tilde{H})]^\perp \cap T_y C_2$. Assim, temos $\dim_{\mathbb{C}}([T_y(H \cap \tilde{H})]^\perp \cap T_y C_2) = 1$. Além disso, $\dim_{\mathbb{C}}([T_y(H \cap \tilde{H})]^\perp \cap T_y \tilde{H}) = 1$, e como $T_y \tilde{H} \supset T_y C_2$, temos $\{[T_y(H \cap \tilde{H})]^\perp \cap T_y \tilde{H}\} \supset \{[T_y(H \cap \tilde{H})]^\perp \cap T_y C_2\}$. Logo $\{[T_y(H \cap \tilde{H})]^\perp \cap T_y \tilde{H}\} = \{[T_y(H \cap \tilde{H})]^\perp \cap T_y C_2\} \subset \{[T_x(H \cap C_2)]^\perp \cap T_x C_2\}$. O resultado

segue do fato de que cada vetor em $[T_y(H \cap C_2)]^\perp \cap T_y C_2$ é ortogonal a cada vetor em $[T_y(H \cap C_2)]^\perp \cap T_y H$, com $y \in H \cap C_2$. ■

2.3.2.1 Conjunto bi-ortogonal para geodésicas reversas

Sejam c_1 e c_2 duas geodésicas complexas reversas em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$, com $n \geq 4$, e considere c_{12} a geodésica complexa perpendicular comum a c_1 e c_2 garantida pela Proposição 2.85. Temos que c_1 , c_2 e c_{12} têm conjuntos polares c_1^\perp , c_2^\perp e c_{12}^\perp , respectivamente. Além disso, temos $c_i^\perp \simeq \mathbb{C}P^{n-2}$, para $i = 1, 2$, e $c_{12}^\perp \simeq \mathbb{C}P^{n-2}$. Pelo Lema 2.88 temos que $c_i^\perp \cap c_{12}^\perp \simeq \mathbb{C}P^{n-3}$, para $i = 1, 2$, e $c_1^\perp \cap c_2^\perp \simeq \mathbb{C}P^{n-4}$. Assim, temos que $(c_1^\perp \cap c_{12}^\perp) \cap (c_2^\perp \cap c_{12}^\perp) = c_1^\perp \cap c_2^\perp \simeq \mathbb{C}P^{n-4}$.

Em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^3$, ao considerar duas geodésicas complexas reversas c_1 e c_2 , com geodésica perpendicular comum c_{12} , obtemos dois hiperplanos únicos, sendo que um deles contém c_1 e c_{12} , e o outro contém c_2 e c_{12} (Ver [12]). Entretanto, em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$ para $n \geq 4$, existem infinitos hiperplanos com tais propriedades. Assim, uma forma de resolver esse problema de unicidade, é considerar no lugar da perpendicular comum, uma subvariedade totalmente geodésica holomorfa de codimensão 2. No que segue, descrevemos a construção dessa subvariedade.

Veja que pelo Lema 2.91 existe um único hiperplano complexo em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$ que contém c_{12} e intersecta c_1 ortogonalmente. Também pelo Lema 2.91 existe um único hiperplano complexo em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$ que contém c_{12} e intersecta c_2 ortogonalmente. Intersectando tais hiperplanos obtemos uma cópia de um $\mathbb{H}_\mathbb{C}^{n-2}$ mergulhado em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$, que contém a perpendicular comum c_{12} e intersecta perpendicularmente c_1 e c_2 (único com tal propriedade). Em particular, para $n = 4$, temos que tal intersecção nos dá um plano hiperbólico complexo. Com isso temos a definição que segue.

Definição 2.93 *Sejam c_1 e c_2 duas geodésicas complexas reversas em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$, com $n \geq 4$, e c_{12} a geodésica complexa perpendicular comum a c_1 e c_2 . Chamamos de $(n - 2)$ - plano perpendicular comum complexo, relativo a c_1 e c_2 , à subvariedade totalmente geodésica holomorfa $\mathbb{H}_\mathbb{C}^{n-2}$ que contém a perpendicular comum c_{12} e intersecta perpendicularmente c_1 e c_2 . Caso $n = 4$, chamamos apenas de plano perpendicular comum complexo.*

Observação 2.94 *A respeito do $(n - 2)$ - plano perpendicular comum complexo podemos dizer que:*

(i) Podemos construir o $(n - 2)$ - plano perpendicular comum complexo de uma outra forma. Para tanto, tome pontos $p'_1 = (c_1^\perp \cap c_{12}^\perp)^\perp \cap c_{12}^\perp$ e $p'_2 = (c_2^\perp \cap c_{12}^\perp)^\perp \cap c_{12}^\perp$. Considere o espaço gerado $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{P'_1, P'_2\}$ positivo, onde P'_1 e P'_2 são levantamentos de p'_1 e p'_2 respectivamente. Tome a projeção $w = \pi(W - \{0\})$. Temos que $w^\perp \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n-2}$ é o $(n - 2)$ - plano perpendicular comum complexo que procuramos;

(ii) Veja que w construído no item (i) intersecta $c_1^\perp \cap c_{12}^\perp$ em um ponto, o qual podemos denotar por q_1 , e também intersecta $c_2^\perp \cap c_{12}^\perp$ em um ponto, o qual podemos denotar por q_2 . Como $q_j \in w$, temos que $q_j^\perp \supset w^\perp$, para $j = 1, 2$. Segue que q_j^\perp é o único hiperplano complexo de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ que contém w^\perp e c_j , para $j = 1, 2$.

Proposição 2.95 *Sejam c_1 e c_2 duas geodésicas complexas reversas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, com $n \geq 4$, e c_{12} a geodésica complexa perpendicular comum a c_1 e c_2 . Então $q_j \in [(c_1^\perp \cap c_{12}^\perp) \cap (c_2^\perp \cap c_{12}^\perp)]^\perp$, onde $q_j = w \cap (c_j^\perp \cap c_{12}^\perp)$, para $j = 1, 2$, e w é o complemento ortogonal do $(n - 2)$ - plano perpendicular comum complexo relativo a c_1 e c_2 .*

Prova. Dado $p'_j = (c_j^\perp \cap c_{12}^\perp)^\perp \cap c_{12}^\perp$, para $j = 1, 2$, vimos que $w = \pi(W - \{0\})$, onde $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{P'_1, P'_2\}$ para P'_1 e P'_2 levantamentos de p'_1 e p'_2 respectivamente, onde $p'_j = (c_j^\perp \cap c_{12}^\perp)^\perp \cap c_{12}^\perp$, para $j = 1, 2$. Então, como $q_j \in w$, temos que o levantamento de q_j denotado por Q_j tem a forma $Q_j = t_{1j}P'_1 + t_{2j}P'_2$, para escalares complexos t_{1j} e t_{2j} . Assim, se $p_0 \in [(c_1^\perp \cap c_{12}^\perp) \cap (c_2^\perp \cap c_{12}^\perp)]$, temos que $\langle P_0, Q_j \rangle = \langle P_0, t_{1j}P'_1 + t_{2j}P'_2 \rangle = t_{1j}\langle P_0, P'_1 \rangle + t_{2j}\langle P_0, P'_2 \rangle = 0$, onde P_0 é um levantamento de p_0 e $j = 1, 2$. Logo $q_j \in [(c_1^\perp \cap c_{12}^\perp) \cap (c_2^\perp \cap c_{12}^\perp)]^\perp$, para $j = 1, 2$.

■

A proposição acima nos mostra que todo ponto da intersecção $c_1^\perp \cap c_2^\perp$ é ortogonal aos pontos q_1 e q_2 obtidos acima. Isso nos dá ortogonalidades importantes para a construção do conjunto bi-ortogonal.

Corolário 2.96 *Seja w o complemento ortogonal do $(n - 2)$ - plano perpendicular comum complexo, dado na Observação 2.94. Os hiperplanos complexos q_1^\perp e q_2^\perp associados aos pontos polares q_1 e q_2 , respectivamente, se intersectam ortogonalmente se, e somente se, $p'_1 = q_2$ e $p'_2 = q_1$.*

Prova. De fato, se $q_1^\perp \perp q_2^\perp$ temos que $q_1 \perp q_2$. Pela Proposição 2.95 temos que $q_j \in [(c_1^\perp \cap c_{12}^\perp) \cap (c_2^\perp \cap c_{12}^\perp)]^\perp$, para $j = 1, 2$. Como $q_1 \perp q_2$ e $q_j \in [(c_1^\perp \cap c_{12}^\perp) \cap (c_2^\perp \cap c_{12}^\perp)]^\perp$, segue que $q_j \in (c_i^\perp \cap c_{12}^\perp)^\perp$ e conseqüentemente $q_j = (c_i^\perp \cap c_{12}^\perp)^\perp \cap c_{12}^\perp = p'_i$, para $i, j \in \{1, 2\}$ com $i \neq j$. Reciprocamente, se $p'_1 = q_2$ e $p'_2 = q_1$, temos que $q_1 \in c_1^\perp \cap c_{12}^\perp$ e $q_2 \in (c_1^\perp \cap c_{12}^\perp)^\perp$. Segue que $q_1 \perp q_2$ e conseqüentemente $q_1^\perp \perp q_2^\perp$. ■

Agora vamos fazer duas construções do conjunto bi-ortogonal para duplas de geodésicas complexas reversas. A primeira construção utiliza o conceito de $(n-2)$ -plano perpendicular comum complexo e a segunda utiliza apenas os complementos ortogonais das geodésicas complexas, para obter os hiperplanos.

Construção 1: Sejam (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas reversas em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$ e c_{12} a geodésica complexa perpendicular comum a c_1 e c_2 . Considere $p_j \in c_j^\perp$ o ponto polar associado ao hiperplano p_j^\perp que contém c_j e intersecta ortogonalmente c_{12} , garantido pelo Lema 2.91, onde $j = 1, 2$. Considere também o $(n-2)$ -plano perpendicular comum complexo relativo a c_1 e c_2 . Tome $q_j \in c_j^\perp$ o ponto polar associado ao hiperplano que contém o $(n-2)$ -plano perpendicular comum complexo e a geodésica complexa c_j , para $j = 1, 2$. Por fim, observe que $\mathbb{C}P^{n-4} \simeq (c_1^\perp \cap c_{12}^\perp) \cap (c_2^\perp \cap c_{12}^\perp) = \pi(W - \{0\})$, para algum subespaço elíptico W com dimensão complexa $n-3$. Assim, tome uma base ortonormal de W denotada por $\mathcal{B} = \{R_1, \dots, R_{n-3}\}$ e considere os pontos projetivos $r_j = \pi(R_j)$, com $j = 1, \dots, n-3$. Então obtemos um conjunto de $n+1$ pontos positivos denotado por $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\}$. As propriedades de ortogonalidade entre os hiperplanos são garantidas pelo fato de \mathcal{B} ser uma base ortonormal, pela Proposição 2.95 e pelo Lema 2.92.

Construção 2: Sejam (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas reversas em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$ e c_{12} a geodésica complexa perpendicular comum a c_1 e c_2 . Considere $p_j \in c_j^\perp$ o ponto polar associado ao hiperplano p_j^\perp que contém c_j e intersecta ortogonalmente c_{12} , garantido pelo Lema 2.91, onde $j = 1, 2$. Veja que $p_j \notin c_{12}^\perp$. Além disso, pelo Lema 2.92, e pelo fato do complemento ortogonal de p_j , dentro de c_j^\perp , ter dimensão complexa $n-3$, segue que o complemento ortogonal de p_j , dentro de c_j^\perp , é exatamente $c_j^\perp \cap c_{12}^\perp$, com $j = 1, 2$. Agora, considere $q_j = \{[(c_1^\perp \cap c_{12}^\perp) \cap (c_2^\perp \cap c_{12}^\perp)]^\perp \cap (c_j^\perp \cap c_{12}^\perp)\}$, e seja q_j^\perp o hiperplano associado

ao ponto polar q_j , com $j = 1, 2$. Veja que $q_j^\perp \supset c_{12}$ e $q_j^\perp \supset c_j$. Por fim, observe que $\mathbb{C}P^{n-4} \simeq (c_1^\perp \cap c_{12}^\perp) \cap (c_2^\perp \cap c_{12}^\perp) = \pi(W - \{0\})$, para algum subespaço elíptico W com dimensão complexa $n - 3$. Assim, tome uma base ortonormal de W denotada por $\mathcal{B} = \{R_1, \dots, R_{n-3}\}$ e considere os pontos projetivos $r_j = \pi(R_j)$, com $j = 1, \dots, n - 3$. Então obtemos um conjunto de $n + 1$ pontos positivos denotado por $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\}$. As propriedades de ortogonalidade entre os hiperplanos são garantidas pelo fato de \mathcal{B} ser uma base ortonormal, pela construção de q_j , para $j = 1, 2$, e pelo Lema 2.92.

Definição 2.97 Chamamos ao conjunto $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\}$ de conjunto bi-ortogonal da dupla ordenada de geodésicas complexas reversas (c_1, c_2) de $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$.

Proposição 2.98 Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas reversas de $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$. Considere seu respectivo conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{C}P^n$. Então temos que $r_j \perp r_k$ para $j \neq k$ e $j, k \in \{1, \dots, n - 3\}$, $r_j \perp p_k$ para $j \in \{1, \dots, n - 3\}$ e $k = 1, 2$, $r_j \perp q_k$ para $j \in \{1, \dots, n - 3\}$ e $k = 1, 2$, $p_j \perp q_k$ para $j, k = 1, 2$.

A próxima proposição nos mostra que as duas construções acima nos dão os mesmos hiperplanos. Segue o resultado.

Proposição 2.99 Sejam c_1 e c_2 duas geodésicas complexas reversas em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$, com $n \geq 4$, e c_{12} a geodésica complexa perpendicular comum a c_1 e c_2 . Considere w o complemento ortogonal do $(n - 2)$ - plano perpendicular comum complexo relativo a c_1 e c_2 . Então, para $j = 1, 2$, temos que

$$[(c_1^\perp \cap c_{12}^\perp) \cap (c_2^\perp \cap c_{12}^\perp)]^\perp \cap (c_j^\perp \cap c_{12}^\perp) = (c_1^\perp \cap c_2^\perp)^\perp \cap (c_j^\perp \cap c_{12}^\perp) = w \cap (c_j^\perp \cap c_{12}^\perp).$$

Prova. No início desta subseção vimos que $(c_1^\perp \cap c_{12}^\perp) \cap (c_2^\perp \cap c_{12}^\perp) = c_1^\perp \cap c_2^\perp$. Daí temos a primeira igualdade. A segunda igualdade segue do fato que $w \subset (c_1^\perp \cap c_2^\perp)^\perp$ (ver Proposição 2.95), e do fato que $w \cap (c_j^\perp \cap c_{12}^\perp)$ e $(c_1^\perp \cap c_2^\perp)^\perp \cap (c_j^\perp \cap c_{12}^\perp)$ possuem mesma dimensão (ponto do espaço projetivo), para $j = 1, 2$. ■

2.3.2.2 Conjunto bi-ortogonal para geodésicas coplanares

Similar ao que fizemos acima para geodésicas complexas reversas, vamos trabalhar aqui no caso em que as geodésicas complexas são coplanares. Sabemos que geodésicas complexas coplanares podem ser ultraparalelas, assintóticas ou concorrentes, conforme suas respectivas linhas projetivas se intersectam fora, na fronteira ou dentro do espaço hiperbólico, respectivamente. Então vamos fazer a construção do conjunto bi-ortogonal para cada um desses casos.

Proposição 2.100 *Sejam c_1 e c_2 duas geodésicas complexas coplanares distintas, e w o plano hiperbólico complexo que contém c_1 e c_2 . Então existe um único hiperplano complexo q_j^\perp , associado ao ponto polar q_j , tal que contém c_j e intersecta w ortogonalmente, para $j = 1, 2$.*

Prova. Considere $q_j = [c_1^\perp \cap c_2^\perp]^\perp \cap c_j^\perp$, com $j = 1, 2$. Temos que q_j^\perp é o hiperplano desejado.

■

Construção (caso concorrente): Considere uma dupla ordenada de geodésicas complexas (c_1, c_2) coplanares concorrentes em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$, e seja w o plano hiperbólico complexo que contém c_1 e c_2 , com levantamento W . Primeiramente tome o hiperplano complexo q_j^\perp que contém c_j e intersecta w ortogonalmente, para $j = 1, 2$, dado pela Proposição 2.100. Por fim, note que $\mathbb{C}P^{n-3} \simeq (c_1^\perp \cap c_2^\perp) = \pi(W^\perp - \{0\})$, onde W^\perp é o complemento ortogonal do levantamento W , e tem dimensão complexa $n - 2$. Assim, tome uma base ortonormal de W^\perp denotada por $\mathcal{B} = \{R_1, \dots, R_{n-2}\}$. Considere os pontos projetivos $r_j = \pi(R_j)$, com $j = 1, \dots, n - 2$. Então obtemos um conjunto de n pontos positivos denotado por $\{r_1, \dots, r_{n-2}, q_1, q_2\}$.

Definição 2.101 *Chamamos ao conjunto $\{r_1, \dots, r_{n-2}, q_1, q_2\}$, de conjunto bi-ortogonal da dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares concorrentes (c_1, c_2) de $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$.*

Proposição 2.102 *Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares concorrentes de $\mathbb{H}_\mathbb{C}^n$. Considere seu conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-2}, q_1, q_2\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{C}P^n$. Então temos que $r_j \perp r_k$ para $j \neq k$ e $j, k \in \{1, \dots, n-2\}$, $r_j \perp q_k$ para $j \in \{1, \dots, n-2\}$ e $k = 1, 2$.*

Construção (caso assintótico): Considere uma dupla ordenada de geodésicas complexas (c_1, c_2) coplanares assintóticas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, e seja w o plano hiperbólico complexo que contém c_1 e c_2 , com levantamento W . Primeiramente tome o hiperplano complexo q_j^\perp que contém c_j e intersecta w ortogonalmente, para $j = 1, 2$, dado pela Proposição 2.100. Por fim, note que $\mathbb{C}P^{n-3} \simeq (c_1^\perp \cap c_2^\perp) = \pi(W^\perp - \{0\})$, onde W^\perp é o complemento ortogonal do levantamento W , e tem dimensão complexa $n - 2$. Assim, tome uma base ortonormal de W^\perp denotada por $\mathcal{B} = \{R_1, \dots, R_{n-2}\}$. Considere os pontos projetivos $r_j = \pi(R_j)$, com $j = 1, \dots, n - 2$. Então obtemos um conjunto de n pontos positivos denotado por $\{r_1, \dots, r_{n-2}, q_1, q_2\}$.

Definição 2.103 Chamamos ao conjunto $\{r_1, \dots, r_{n-2}, q_1, q_2\}$, de conjunto bi-ortogonal da dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares assintóticas (c_1, c_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.

Proposição 2.104 Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares assintóticas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Considere seu conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-2}, q_1, q_2\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{C}P^n$. Então temos que $r_j \perp r_k$ para $j \neq k$ e $j, k \in \{1, \dots, n - 2\}$, $r_j \perp q_k$ para $j \in \{1, \dots, n - 2\}$ e $k = 1, 2$.

Construção (caso ultraparalelo): Considere uma dupla ordenada de geodésicas complexas (c_1, c_2) coplanares ultraparalelas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, e seja w o plano hiperbólico complexo que contém c_1 e c_2 , com levantamento W . Primeiramente tome o hiperplano complexo p_j^\perp que contém c_j e intersecta w ortogonalmente, para $j = 1, 2$, dado pela Proposição 2.100. Por fim, note que $\mathbb{C}P^{n-3} \simeq (c_1^\perp \cap c_2^\perp) = \pi(W^\perp - \{0\})$, onde W^\perp é o complemento ortogonal do levantamento W , e tem dimensão complexa $n - 2$. Assim, tome uma base ortonormal de W^\perp denotada por $\mathcal{B} = \{R_1, \dots, R_{n-2}\}$. Considere os pontos projetivos $r_j = \pi(R_j)$, com $j = 1, \dots, n - 2$. Então obtemos um conjunto de n pontos positivos denotado por $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, r_{n-2}\}$.

Definição 2.105 Chamamos o conjunto $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, r_{n-2}\}$ de conjunto bi-ortogonal da dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares ultraparalelas (c_1, c_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.

Proposição 2.106 Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Considere seu conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, r_{n-2}\} \subset \pi(V_+) \subset \mathbb{C}P^n$.

$\mathbb{C}P^n$. Então temos que $r_j \perp r_k$ para $j \neq k$ e $j, k \in \{1, \dots, n-2\}$, $r_j \perp p_k$ para $j \in \{1, \dots, n-2\}$ e $k = 1, 2$.

2.3.3 Ângulo e distância entre geodésicas complexas

Vimos que cada dupla ordenada de geodésicas complexas (c_1, c_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, pode ser associada ao seu conjunto bi-ortogonal constituído de $n + 1$ pontos projetivos positivos denotados por $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\}$, onde $p_1 = p_2 = r_{n-2}$ se as geodésicas são coplanares assintóticas ou concorrentes, e $q_1 = q_2 = r_{n-2}$ se as geodésicas são coplanares ultraparalelas. Por construção, para cada dupla (c_1, c_2) , tal conjunto de pontos é único a menos de isometria.

Definição 2.107 Chamamos o conjunto $\{R_1, \dots, R_{n-3}, P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ dos levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\}$, de base bi-ortogonal da dupla ordenada (c_1, c_2) de geodésicas complexas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.

A base bi-ortogonal satisfaz as propriedades de ortogonalidade dadas na Proposição 2.98. Além disso, se C_j^\perp é o levantamento do conjunto polar c_j^\perp da geodésica c_j , então o conjunto $\{R_1, \dots, R_{n-3}, P_j, Q_j\}$ forma uma base ortogonal para C_j^\perp , com $j = 1, 2$. Tal base pode ser tomada de forma a ser ortonormal.

Agora vamos definir distância e ângulo entre geodésicas complexas. Para tanto, vamos utilizar o conceito de d -invariante (ver Definição 2.83).

Definição 2.108 Dada uma dupla ordenada de geodésicas complexas (c_1, c_2) de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, com conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\}$, definimos a pré-distância entre c_1 e c_2 por $d(p_1, p_2)$, e o pré-ângulo entre c_1 e c_2 por $d(q_1, q_2)$.

Vamos definir distância e ângulo entre geodésicas complexas a partir dos conceitos de pré-distância e pré-ângulo dados acima. Para tanto, considere uma dupla ordenada (c_1, c_2) com conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\}$. Definimos o ângulo θ entre geodésicas complexas por:

$$\cos^2(\theta) = d(q_1, q_2), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Por outro lado, definimos a distância ρ entre geodésicas complexas por:

$$\cosh^2\left(\frac{\rho}{2}\right) = d(p_1, p_2), \quad \rho \in [0, +\infty).$$

Observação 2.109 *Veja que, para distância $\rho \in [0, +\infty)$ e para o ângulo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, temos que as funções \cos e \cosh são injetivas, e portanto não há diferença entre trabalhar com distância ou trabalhar com pré-distância (o mesmo para ângulo e pré-ângulo).*

Proposição 2.110 *Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ com conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\}$, então:*

- (i) *A dupla (c_1, c_2) é de geodésicas complexas reversas se, e somente se, $d(p_1, p_2) > 1$ e $d(q_1, q_2) < 1$;*
- (ii) *A dupla (c_1, c_2) é de geodésicas complexas concorrentes se, e somente se, $d(p_1, p_2) = 1$ e $d(q_1, q_2) < 1$;*
- (iii) *A dupla (c_1, c_2) é de geodésicas complexas ultraparalelas se, e somente se, $d(p_1, p_2) > 1$ e $d(q_1, q_2) = 1$;*
- (iv) *A dupla (c_1, c_2) é de geodésicas complexas assintóticas se, e somente se, $d(p_1, p_2) = 1$ e $d(q_1, q_2) = 1$.*

Proposição 2.111 *Sejam (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ com conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\}$, e $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{R_1, \dots, R_{n-3}, P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$, onde $\{R_1, \dots, R_{n-3}, P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ é uma base bi-ortogonal da dupla (c_1, c_2) . Então:*

- (i) *W é hiperbólico e $\dim_{\mathbb{C}}(W) = n+1$ se, e somente se, as geodésicas (c_1, c_2) são reversas;*
- (ii) *W é hiperbólico e $\dim_{\mathbb{C}}(W) = n$ se, e somente se, as geodésicas (c_1, c_2) são ultraparalelas;*
- (iii) *W é elíptico e $\dim_{\mathbb{C}}(W) = n$ se, e somente se, as geodésicas (c_1, c_2) são concorrentes;*
- (iv) *W é parabólico e $\dim_{\mathbb{C}}(W) = n$ se, e somente se, as geodésicas (c_1, c_2) são assintóticas.*

2.3.4 Espaço de módulos de duplas de geodésicas complexas em

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$$

Nesta subseção encontramos invariantes tais que descrevem unicamente as classes de congruência, por $PU(n, 1)$, de duplas ordenadas de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.

Para mais detalhes sobre grupo de isometrias do espaço hiperbólico complexo, ver Subseção 1.2.3.3. Segue o conceito de congruência.

Definição 2.112 Dizemos que duas duplas ordenadas (c_1, c_2) e (c'_1, c'_2) de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ são congruentes, quando existe uma isometria holomorfa $f \in PU(n, 1)$ tal que $f(c_i) = c'_i$ para $i = 1, 2$.

Note que a congruência definida acima é uma relação de equivalência. O espaço das classes de equivalência, munido da topologia quociente, é denominado *espaço de configurações* de duplas ordenadas de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, e denotamos por $\mathcal{M}(2, n)$.

2.3.4.1 Caso em que as geodésicas complexas são reversas

Considere (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Tal dupla está associada ao conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\}$. Denote a pré-distância por $d = d(p_1, p_2)$ e o pré-ângulo por $a = d(q_1, q_2)$.

Proposição 2.113 Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Então existem levantamentos $\{R_1, \dots, R_{n-3}, P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$, dos elementos do conjunto bi-ortogonal de (c_1, c_2) , tais que a matriz de Gram associada a tais levantamentos é dada por:

$$G = \begin{bmatrix} I_{n-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{a} & 1 \end{bmatrix}$$

onde $\det(G) < 0$, d e a são números reais tais que $d > 1$ e $0 \leq a < 1$, e I_{n-3} é a matriz identidade de ordem $(n - 3)$.

Prova. Considere $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\}$ o conjunto bi-ortogonal de (c_1, c_2) . Segue da Proposição 1.27 e da Proposição 2.98 que existem levantamentos para os elementos do conjunto bi-ortogonal de (c_1, c_2) , denotados por $\{R_1, \dots, R_{n-3}, P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$, tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} I_{n-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g_{(n-2)(n-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{g}_{(n-2)(n-1)} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & g_{n(n+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{g}_{n(n+1)} & 1 \end{bmatrix}$$

onde $g_{(n-2)(n-1)}, g_{n(n+1)} \in \mathbb{R}_+$. Logo, usando as definições de d e a , temos que $d = d(p_1, p_2) = \langle P_1, P_2 \rangle \langle P_2, P_1 \rangle = g_{(n-2)(n-1)}^2$, e conseqüentemente $g_{(n-2)(n-1)} = \sqrt{d}$. Analogamente obtemos que $g_{n(n+1)} = \sqrt{a}$. Além disso, calculando o determinante da matriz acima, obtemos $\det(G) = (1 - g_{(n-2)(n-1)}^2)(1 - g_{n(n+1)}^2) = (1 - d)(1 - a)$, e como a pré-distância $d > 1$ e o pré-ângulo $0 \leq a < 1$, segue que $\det(G) < 0$. ■

Definição 2.114 *Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Chamamos a matriz G dada na Proposição 2.113 de matriz de Gram canônica para uma dupla ordenada de geodésicas complexas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.*

Proposição 2.115 *Sejam (c_1, c_2) e (c'_1, c'_2) duas duplas ordenadas de geodésicas complexas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Se as duplas (c_1, c_2) e (c'_1, c'_2) possuem as mesmas distâncias e os mesmos ângulos, então existe uma isometria holomorfa $f \in PU(n, 1)$ tal que $f(c_j) = c'_j$ para $j = 1, 2$.*

Prova. Sejam $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\}$ e $\{r'_1, \dots, r'_{n-3}, p'_1, p'_2, q'_1, q'_2\}$ conjuntos bi-ortogonais de (c_1, c_2) e (c'_1, c'_2) , respectivamente. Considere $G = (g_{ij})$ e $G' = (g'_{ij})$ matrizes de Gram canônicas de $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\}$ e $\{r'_1, \dots, r'_{n-3}, p'_1, p'_2, q'_1, q'_2\}$, respectivamente, denotadas por

$$G = \begin{bmatrix} I_{n-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{a} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G' = \begin{bmatrix} I_{n-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d'} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d'} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a'} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{a'} & 1 \end{bmatrix} .$$

Como (c_1, c_2) e (c'_1, c'_2) têm os mesmos ângulos e distâncias, pela Observação 2.109 temos que (c_1, c_2) e (c'_1, c'_2) têm os mesmos pré-ângulos e pré-distâncias. Conseqüente-

mente $G = G'$. Como os espaços gerados pelos levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\}$ e pelos levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{r'_1, \dots, r'_{n-3}, p'_1, p'_2, q'_1, q'_2\}$ são espaços não degenerados, o resultado segue da aplicação da Proposição 1.32. ■

Teorema 2.116 *Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, com conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, q_1, q_2\}$. Então os d -invariantes $d = d(p_1, p_2)$ e $a = d(q_1, q_2)$ definem a unicamente a classe de congruência por $PU(n, 1)$ das duplas ordenadas de geodésicas complexas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.*

Prova. A prova segue da aplicação da Proposição 2.113 junto com a aplicação da Proposição 2.115. ■

Agora estamos em condições de construir o espaço de módulos para duplas ordenadas de geodésicas complexas reversas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Para começar, considere (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ e G a matriz de Gram canônica associada a tal dupla. Vimos que podemos recuperar as entradas de G em termos dos invariantes $d(p_1, p_2)$ e $d(q_1, q_2)$.

Denote por $\mathcal{M}^g(2, n)$ o espaço de configurações de duplas ordenadas de geodésicas complexas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Os elementos de $\mathcal{M}^g(2, n)$ são classes denotadas por $[(c_1, c_2)]$. Defina a aplicação

$$\tau : \mathcal{M}^g(2, n) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

que associa a cada classe $[(c_1, c_2)]$ os invariantes $d(p_1, p_2)$ e $d(q_1, q_2)$. Por fim, defina o conjunto $\mathbb{M}^g(2, n) = \{(d, a) \in \mathbb{R}^2; d > 1 \text{ e } 0 \leq a < 1\}$. Veja que $\mathbb{M}^g(2, n)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^2 é um espaço topológico.

Teorema 2.117 *O espaço de configurações $\mathcal{M}^g(2, n)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}^g(2, n)$.*

Prova. Pelas condições de determinante dadas na Proposição 1.29 e pela Proposição 2.113, temos que a aplicação $\tau : \mathcal{M}^g(2, n) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada acima define uma aplicação $\tau : \mathcal{M}^g(2, n) \rightarrow \mathbb{M}^g(2, n)$. Pelo Teorema 2.116 temos que $\tau : \mathcal{M}^g(2, n) \rightarrow \mathbb{M}^g(2, n)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(d, a) \in \mathbb{M}^g(2, n)$, considere G tal que $g_{(n-2)(n-1)} = g_{(n-1)(n-2)} = \sqrt{d}$,

$g_{n(n+1)} = g_{(n+1)n} = \sqrt{a}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, n+1$, e as demais entradas são nulas. Segue da Proposição 1.29, que G assim construída, é a matriz de Gram canônica de alguma dupla ordenada de geodésicas complexas reversas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Logo $\tau : \mathcal{M}^g(2, n) \rightarrow \mathbb{M}^g(2, n)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}^g(2, n)$ da topologia induzida de \mathbb{R}^2 , temos que $\tau : \mathcal{M}^g(2, n) \rightarrow \mathbb{M}^g(2, n)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 2.118 Chamamos $\mathbb{M}^g(2, n)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}^g(2, n)$.

2.3.4.2 Caso em que as geodésicas complexas são coplanares

Vamos trabalhar nesta subseção com duplas ordenadas de geodésicas complexas coplanares (assintóticas, concorrentes ou ultraparalelas) de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Seja (c_1, c_2) uma tal dupla. Vamos que essa dupla está associada ao conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-3}, r_{n-2}, q_1, q_2\}$, com $r_{n-2} = p_1 = p_2$, se (c_1, c_2) é formada por geodésicas concorrentes ou assintóticas, e está associada ao conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, r_{n-2}\}$, com $r_{n-2} = q_1 = q_2$, se (c_1, c_2) é formada por geodésicas ultraparalelas. Denote a pré-distância por $d = d(p_1, p_2)$ e o pré-ângulo por $a = d(q_1, q_2)$.

Proposição 2.119 Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares, assintóticas ou concorrentes, de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Então existem levantamentos $\{R_1, \dots, R_{n-2}, Q_1, Q_2\}$, dos elementos do conjunto bi-ortogonal de (c_1, c_2) , tais que a matriz de Gram associada a tais levantamentos é dada por:

$$G = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{a} \\ 0 & \sqrt{a} & 1 \end{bmatrix}$$

onde I_{n-2} é a matriz identidade de ordem $(n-2)$ e a é um número real tal que $0 \leq a \leq 1$. Além disso, $\det(G) > 0$ se c_1 e c_2 são concorrentes, e $\det(G) = 0$ se c_1 e c_2 são assintóticas.

Prova. Considere $\{r_1, \dots, r_{n-2}, q_1, q_2\}$ o conjunto bi-ortogonal de (c_1, c_2) . Segue da aplicação da Proposição 1.27, junto com a Proposição 2.102, caso as geodésicas sejam concorrentes, e com a Proposição 2.104, caso as geodésicas sejam assintóticas, que existem levantamentos

para os elementos do conjunto bi-ortogonal de (c_1, c_2) , denotados por $\{R_1, \dots, R_{n-2}, Q_1, Q_2\}$, tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g_{(n-1)n} \\ 0 & \bar{g}_{(n-1)n} & 1 \end{bmatrix}$$

onde $g_{(n-1)n} \in \mathbb{R}_+$. Logo, usando a definição do pré-ângulo a , temos que $a = d(q_1, q_2) = \langle Q_1, Q_2 \rangle \langle Q_2, Q_1 \rangle = g_{(n-1)n}^2$, e conseqüentemente $g_{(n-1)n} = \sqrt{a}$. Além disso, calculando o determinante da matriz acima, obtemos $\det(G) = (1 - g_{(n-1)n}^2) = (1 - a)$. Como as geodésicas são concorrentes ou assintóticas, segue da Proposição 2.110 que $0 \leq a < 1$ ou $a = 1$, respectivamente. Dessa forma, se $0 \leq a < 1$ então $\det(G) > 0$, e se $a = 1$ então $\det(G) = 0$. ■

Definição 2.120 *Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares concorrentes (assintóticas) de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Chamamos a matriz G dada na Proposição 2.119 de matriz de Gram canônica para uma dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares concorrentes (assintóticas) de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.*

Proposição 2.121 *Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Então existem levantamentos $\{R_1, \dots, R_{n-3}, P_1, P_2, R_{n-2}\}$, dos elementos do conjunto bi-ortogonal de (c_1, c_2) , tais que a matriz de Gram associada a tais levantamentos é dada por:*

$$G = \begin{bmatrix} I_{n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d} & 0 \\ 0 & \sqrt{d} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde I_{n-3} é a matriz identidade de ordem $(n-3)$ e d é um número real tal que $d > 1$. Além disso, $\det(G) < 0$.

Prova. Considere $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, r_{n-2}\}$ o conjunto bi-ortogonal de (c_1, c_2) . Segue da Proposição 1.27 e da Proposição 2.106 que existem levantamentos para os elementos do

conjunto bi-ortogonal de (c_1, c_2) , denotados por $\{R_1, \dots, R_{n-3}, P_1, P_2, R_{n-2}\}$, tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} I_{n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g_{(n-2)(n-1)} & 0 \\ 0 & \bar{g}_{(n-2)(n-1)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $g_{(n-2)(n-1)} \in \mathbb{R}_+$. Logo, usando a definição de pré-distância d , temos que $d = d(p_1, p_2) = \langle P_1, P_2 \rangle \langle P_2, P_1 \rangle = g_{(n-2)(n-1)}^2$, e conseqüentemente $g_{(n-2)(n-1)} = \sqrt{d}$. Além disso, calculando o determinante da matriz acima, obtemos $\det(G) = (1 - g_{(n-2)(n-1)}^2) = (1 - d)$. Como as geodésicas são ultraparalelas, segue da Proposição 2.110 que $d > 1$. Dessa forma, se $d > 1$ então $\det(G) < 0$. ■

Definição 2.122 *Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Chamamos a matriz G dada na Proposição 2.121 de matriz de Gram canônica para uma dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.*

Teorema 2.123 *Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares concorrentes (assintóticas) de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, com conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-2}, q_1, q_2\}$. Então o d -invariante $a = d(q_1, q_2)$ define unicamente a classe de congruência por $PU(n, 1)$ das duplas ordenadas de geodésicas complexas coplanares concorrentes (assintóticas) de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.*

Prova. Considere (c_1, c_2) e (c'_1, c'_2) duplas ordenadas de geodésicas complexas coplanares, concorrentes ou assintóticas, associadas respectivamente aos conjuntos bi-ortogonais $\{r_1, \dots, r_{n-2}, q_1, q_2\}$ e $\{r'_1, \dots, r'_{n-2}, q'_1, q'_2\}$, tais que possuem mesmo d -invariante $a = d(q_1, q_2) = d(q'_1, q'_2) = a'$. Então pela Proposição 2.119 temos que as duplas possuem a mesma matriz de Gram canônica. Por outro lado, veja que o conjunto de levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-2}, q_1, q_2\}$ é linearmente independente, pois caso contrário teríamos $c_1 = c_2$. O mesmo vale para o conjunto de levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{r'_1, \dots, r'_{n-2}, q'_1, q'_2\}$. Com isso temos que o conjunto dos levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-2}, q_1, q_2\}$ possui o mesmo tipo de dependência linear que o conjunto dos levantamentos dos elementos do conjunto bi-ortogonal $\{r'_1, \dots, r'_{n-2}, q'_1, q'_2\}$. O resultado segue do Teorema de Höfer. ■

Teorema 2.124 *Seja (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, com conjunto bi-ortogonal $\{r_1, \dots, r_{n-3}, p_1, p_2, r_{n-2}\}$. Então o d -invariante $d = d(p_1, p_2)$ define unicamente a classe de congruência por $PU(n, 1)$ das duplas ordenadas de geodésicas complexas coplanares ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$.*

Prova. A prova segue por um argumento análogo ao feito no Teorema 2.123. Basta aplicar a Proposição 2.121 para garantir que as duplas possuem a mesma matriz de Gram canônica, observar que os conjuntos de levantamentos dos conjuntos bi-ortogonais possuem o mesmo tipo de dependência linear, e usar o Teorema de Höfer. ■

Agora estamos em condições de construir o espaço de módulos para duplas ordenadas de geodésicas complexas coplanares em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Para começar, considere (c_1, c_2) uma dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ e G a matriz de Gram canônica associada a tal dupla. Vimos que podemos recuperar as entradas de G em termos do invariante $a = d(q_1, q_2)$, no caso em que (c_1, c_2) é formada por geodésicas concorrentes ou assintóticas, e podemos recuperar as entradas de G em termos do invariante $d = d(p_1, p_2)$, no caso em que (c_1, c_2) é formada por geodésicas ultraparalelas.

Denote por $\mathcal{M}^s(2, n)$ o espaço de configurações de duplas ordenadas de geodésicas complexas coplanares de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Os elementos de $\mathcal{M}^s(2, n)$ são classes denotadas por $[(c_1, c_2)]$. Defina a aplicação

$$\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, n) \rightarrow \mathbb{R}$$

que associa cada classe $[(c_1, c_2)]$ ao respectivo d -invariante que define tal classe. Por fim, defina o conjunto $\mathbb{M}^s(2, n) = \{t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}$. Veja que $\mathbb{M}^s(2, n)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R} é um espaço topológico.

Teorema 2.125 *O espaço de configurações $\mathcal{M}^s(2, n)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}^s(2, n)$.*

Prova. Usando a Proposição 2.119, a Proposição 2.121 e as condições de determinante (ver Proposição 1.29), temos que a aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, n) \rightarrow \mathbb{R}$ dada acima define uma aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, n) \rightarrow \mathbb{M}^s(2, n)$. Pelo Teorema 2.123 e pelo Teorema 2.124 temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, n) \rightarrow \mathbb{M}^s(2, n)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, tome $t \in \mathbb{M}^s(2, n)$. Se $0 \leq t \leq 1$ temos $t = a$, onde a é o pré-ângulo. Dessa forma, considere G tal que $g_{(n-1)n} = g_{n(n-1)} = \sqrt{a}$,

$g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, n$, e as demais entradas são nulas. Por outro lado, se $t > 1$ temos $t = d$, onde d é a pré-distância. Então considere G tal que $g_{(n-2)(n-1)} = g_{(n-1)(n-2)} = \sqrt{d}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, n$, e as demais entradas são nulas. Segue da Proposição 1.29, que G construída nos dois casos acima, é a matriz de Gram canônica de alguma dupla ordenada de geodésicas complexas coplanares de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$. Logo $\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, n) \rightarrow \mathbb{M}^s(2, n)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}^s(2, n)$ da topologia induzida de \mathbb{R} , temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}^s(2, n) \rightarrow \mathbb{M}^s(2, n)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 2.126 Chamamos $\mathbb{M}^s(2, n)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}^s(2, n)$.

Note que, usando a Proposição 2.110 junto com o Teorema 2.125, podemos identificar o conjunto das classes $[(c_1, c_2)]$, tais que a dupla (c_1, c_2) é formada por geodésicas complexas concorrentes, com o conjunto $\{(1, a) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq a < 1\}$. Da mesma forma podemos identificar o conjunto das classes $[(c_1, c_2)]$, tais que a dupla (c_1, c_2) é formada por geodésicas complexas ultraparalelas, com o conjunto $\{(d, 1) \in \mathbb{R}^2; d > 1\}$, e podemos identificar o conjunto das classes $[(c_1, c_2)]$, tais que a dupla (c_1, c_2) é formada por geodésicas complexas assintóticas, com o conjunto $\{(d, a) \in \mathbb{R}^2; d = a = 1\}$. Conseqüentemente, podemos identificar o espaço $\mathbb{M}^s(2, n)$ com a união de tais conjuntos. Por outro lado, vimos que $\mathbb{M}^g(2, n) = \{(d, a) \in \mathbb{R}^2; d > 1 \text{ e } 0 \leq a < 1\} = (1, \infty) \times [0, 1)$ (ver Teorema 2.117). Então, se $\mathbb{M}(2, n)$ denota o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}(2, n)$, desde que $\mathbb{M}(2, n) = \mathbb{M}^g(2, n) \cup \mathbb{M}^s(2, n)$, temos que $\mathbb{M}(2, n) = [1, +\infty) \times [0, 1]$. Isso prova o próximo resultado.

Corolário 2.127 Se $\mathbb{M}(2, n)$ é o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}(2, n)$, então $\mathbb{M}(2, n) = [1, +\infty) \times [0, 1]$.

Capítulo 3

O Problema de Congruência para Triplas de Geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$

Neste capítulo vamos encontrar invariantes que descrevem unicamente as classes de congruência, por $PO(3,1)$, de triplas ordenadas de geodésicas riemannianas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Para mais detalhes sobre grupo de isometrias do espaço hiperbólico real, ver Subseção 1.2.2.3. Segue o conceito de congruência.

Definição 3.1 *Dizemos que duas triplas ordenadas $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ de geodésicas riemannianas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ são congruentes, quando existe uma isometria $f \in PO(3,1)$ tal que $f(\sigma_j) = \sigma'_j$ para $j = 1, 2, 3$.*

Note que a congruência definida acima é uma relação de equivalência. O espaço das classes de equivalência munido da topologia quociente é denominado *espaço de configurações* de triplas ordenadas de geodésicas riemannianas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, e denotamos por $\mathcal{M}(3,3)$.

Nas seções que seguem vamos começar verificando, na Seção 3.1, a dimensão do espaço de módulos para triplas de geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Em seguida, na Seção 3.2, nos dedicamos à construção do espaço de módulos para o caso de triplas genéricas (ver Definição 3.2). Por fim, na Seção 3.3 tratamos do caso em que a tripla é especial.

3.1 Dimensão do Espaço de Módulos

No Capítulo 2 fizemos um estudo sobre o problema de congruência para duplas ordenadas de geodésicas no espaço hiperbólico. Vimos que foram necessários dois invariantes (ângulo e distância) para descrever unicamente as classes de congruência, por $PO(3, 1)$, de duplas ordenadas de geodésicas riemannianas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Para o problema de congruência de triplas ordenadas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, vamos necessitar de mais invariantes. Nossa estratégia para resolver tal problema será associar cada tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de geodésicas riemannianas, às subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) , onde cada subdupla, por sua vez, está associada ao seu respectivo conjunto bi-ortogonal. Assim, temos associado a cada tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ um conjunto de doze pontos positivos (quatro pontos de cada conjunto bi-ortogonal). Se σ_j^\perp denota o conjunto polar da geodésica riemannianas σ_j , temos que σ_j^\perp contém quatro pontos dos doze, para cada $j \in \{1, 2, 3\}$.

Definição 3.2 *Uma tripla ordenada $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de geodésicas riemannianas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ é dita ser uma tripla genérica se as subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) são reversas. Caso contrário, $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é dita ser uma tripla especial.*

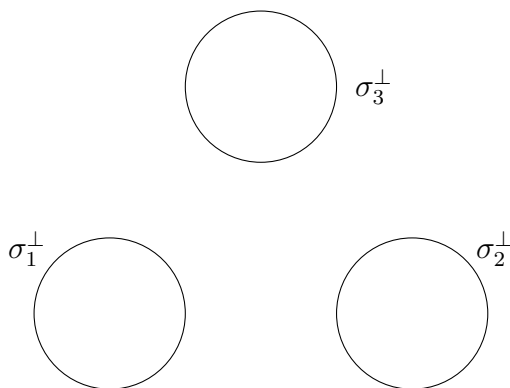
Agora vamos verificar a quantidade de parâmetros necessários para descrever unicamente as classes de congruência, por $PO(3, 1)$, de triplas genéricas de geodésicas riemannianas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Para começar, considere uma tripla genérica $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Usando o modelo do semiespaço superior (ver Subseção 1.2.2.1), identificamos $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ com o produto $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$ e a fronteira $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ com $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Sabemos que cada geodésica riemanniana é determinada de maneira única por seus pontos extremos. Denotemos por p_1 e p_2 os pontos extremos de σ_1 , p_3 e p_4 os pontos extremos de σ_2 e por p_5 e p_6 os pontos extremos de σ_3 . Note que $p_j \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, para $j = 1, \dots, 6$. Como o grupo de isometrias age transitivamente em triplas de pontos na fronteira do espaço hiperbólico real, então podemos supor sem perda de generalidade que $p_1 = o$, $p_2 = \infty$ e $p_3 = 1$. Assim, temos que os pontos $p_4, p_5, p_6 \in \mathbb{C}$ podem ser quaisquer números complexos. Dessa forma temos um total de seis parâmetros reais, e como o estabilizador dos pontos p_1, p_2, p_3 é trivial, então não podemos normalizar os pontos remanescentes. Isso mostra que

o espaço de módulos para triplas genéricas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ tem dimensão real 6.

3.2 Espaço de Módulos de Tripas Genéricas

Considere uma tripla genérica $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Temos que as subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) são reversas. Vamos denotar por $\{p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}\}$, $\{p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ os conjuntos bi-ortogonais associados às subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) , respectivamente. Com isso, associamos cada tripla genérica $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ao conjunto $\{p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ de pontos positivos. Veja que $p_{ij}, q_{ij} \in \sigma_i^\perp$ e $p_{ji}, q_{ji} \in \sigma_j^\perp$, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. Além disso, vamos denotar por $P_{12}, P_{21}, Q_{12}, Q_{21}, P_{23}, P_{32}, Q_{23}, Q_{32}, P_{13}, P_{31}, Q_{13}$ e Q_{31} os levantamentos para $p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}$ e q_{31} , respectivamente. O desenho abaixo ilustra o posicionamento dos conjuntos polares das geodésicas de uma tripla genérica em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.



Veja que se (σ_i, σ_j) é uma subdupla da tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, temos que a pré-distância e o pré-ângulo são dados por $d(p_{ij}, p_{ji})$ e $d(q_{ij}, q_{ji})$, respectivamente, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. Vamos denotar tais invariantes por $d_{ij} = d(p_{ij}, p_{ji})$ e $a_{ij} = d(q_{ij}, q_{ji})$ para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. Com isso, temos a definição que segue.

Definição 3.3 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Considere as subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) . Chamamos aos d -invariantes $d_{12}, d_{13}, d_{23}, a_{12}, a_{13}$ e a_{23} de parâmetros básicos da tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.*

3.2.1 Matriz de Gram canônica para triplas genéricas

Agora vamos nos concentrar em associar cada tripla genérica de geodésicas riemannianas a uma matriz de Gram em uma forma conveniente para nossos fins. Isto é, vamos nos concentrar em recuperar as entradas da matriz de Gram associada a tal tripla, em termos de invariantes, assim como fizemos para o caso de duplas de geodésicas no Capítulo 2. Considere uma tripla genérica $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Seja Σ_j^\perp o levantamento do conjunto polar σ_j^\perp de σ_j , para $j = 1, 2, 3$. Sabemos que Σ_j^\perp é um subespaço real positivo com dimensão 2, para $j = 1, 2, 3$. Além disso, veja que o conjunto formado pelos levantamentos P_{12} e Q_{12} dos pontos polares p_{12} e q_{12} , respectivamente, é uma base ortonormal para Σ_1^\perp . Por outro lado, o conjunto formado pelos levantamentos P_{13} e Q_{13} dos pontos polares p_{13} e q_{13} , respectivamente, também formam uma base ortonormal para Σ_1^\perp . Analogamente temos que os conjuntos $\{P_{21}, Q_{21}\}$ e $\{P_{23}, Q_{23}\}$ são bases ortonormais de Σ_2^\perp , e os conjuntos $\{P_{31}, Q_{31}\}$ e $\{P_{32}, Q_{32}\}$ são bases ortonormais para Σ_3^\perp . Como $SO(2, \Sigma_j^\perp)$ age transitivamente em pares de bases ortonormais (com mesma orientação) de Σ_j^\perp , podemos tomar elementos $T_j \in SO(2, \Sigma_j^\perp)$ tais que

$$\begin{aligned} T_1 &: \{P_{12}, Q_{12}\} \rightarrow \{P_{13}, Q_{13}\} \\ T_2 &: \{P_{21}, Q_{21}\} \rightarrow \{P_{23}, Q_{23}\} \\ T_3 &: \{P_{32}, Q_{32}\} \rightarrow \{P_{31}, Q_{31}\} \end{aligned}$$

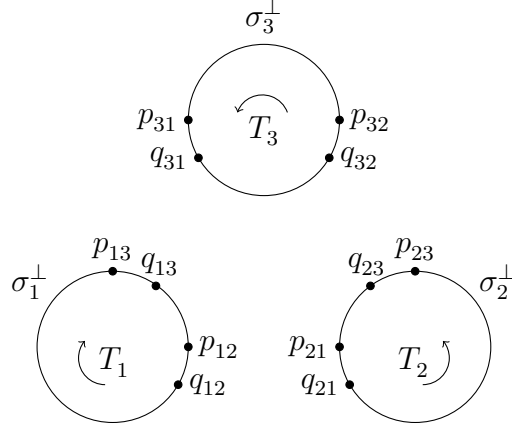
onde cada T_j pode ser escrita na forma

$$T_j = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) & -\text{sen}(\theta_j) \\ \text{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{bmatrix}$$

com $j = 1, 2, 3$.

Definição 3.4 Chamamos os parâmetros θ_1, θ_2 e θ_3 de ângulos de transição.

Observação 3.5 O Teorema de Witt nos permite estender a aplicação $T_j \in SO(2, \Sigma_j^\perp)$ para uma aplicação de $SO(3, 1)$, para $j = 1, 2, 3$.



A ideia agora é recuperar as entradas da matriz de Gram dos pontos $p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}$, em termos desses nove parâmetros que temos, ou seja, em termos dos seis parâmetros básicos dados na Definição 3.3 e dos três ângulos de transição dados na Definição 3.4. Para tanto, note que uma parte da matriz de Gram foi recuperada em termos dos parâmetros básicos no Capítulo 2, ou seja, recuperamos as entradas dos blocos formados pelos levantamentos dos elementos dos conjuntos $\{p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}\}, \{p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, onde tais blocos são dados respectivamente por:

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{d_{12}} & 0 & 0 \\ \sqrt{d_{12}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{12}} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_{12}} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{d_{23}} & 0 & 0 \\ \sqrt{d_{23}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{23}} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_{23}} & 1 \end{bmatrix} \quad e$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{d_{13}} & 0 & 0 \\ \sqrt{d_{13}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_{13}} & 1 \end{bmatrix}$$

onde $d_{12}, d_{13}, d_{23} > 1$ e $0 \leq a_{12}, a_{13}, a_{23} < 1$.

Por outro lado, podemos recuperar as entradas remanescentes usando as aplicações T_j , com $j = 1, 2, 3$. Por exemplo, para recuperar a entrada $\langle Q_{23}, P_{13} \rangle$, temos dos produtos

$$[P_{13} \quad Q_{13}] = [P_{12} \quad Q_{12}] T_1 \quad e \quad [P_{23} \quad Q_{23}] = [P_{21} \quad Q_{21}] T_2$$

que Q_{23} e P_{13} possuem expressões

$$Q_{23} = -P_{21} \text{sen}(\theta_2) + Q_{21} \text{cos}(\theta_2) \quad e \quad P_{13} = P_{12} \text{cos}(\theta_1) + Q_{12} \text{sen}(\theta_1),$$

e conseqüentemente

$$\langle Q_{23}, P_{13} \rangle = -\sqrt{d_{12}} \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_1) + \sqrt{a_{12}} \cos(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_1),$$

obtendo dessa forma, uma expressão para $\langle Q_{23}, P_{13} \rangle$ que depende apenas de parâmetros básicos e de ângulos de transição. As demais entradas da matriz de Gram podem ser recuperadas da mesma forma (ver Apêndice A). Com isso temos o próximo resultado.

Teorema 3.6 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, e considere $\{p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ o conjunto de pontos positivos, associado à tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Então existem levantamentos para os elementos de tal conjunto, de forma que a matriz de Gram G associada a esses levantamentos é dada por:*

$$G = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & \sqrt{d_{12}} & 0 & 0 & & \\ \sqrt{d_{12}} & 1 & 0 & 0 & E_1 & E_2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{12}} & & \\ 0 & 0 & \sqrt{a_{12}} & 1 & & \\ \hline & & & & 1 & \sqrt{d_{23}} & 0 & 0 & & \\ & E_1 & & & \sqrt{d_{23}} & 1 & 0 & 0 & & E_3 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{23}} & & \\ & & & & 0 & 0 & \sqrt{a_{23}} & 1 & & \\ \hline & & & & & & & & 1 & \sqrt{d_{13}} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \sqrt{d_{13}} & 1 & 0 & 0 \\ & E_2 & & & & E_3 & & & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{13}} \\ & & & & & & & & 0 & 0 & \sqrt{a_{13}} & 1 \end{array} \right]$$

onde $1 < d_{12}, d_{13}, d_{23}$ e $0 \leq a_{12}, a_{13}, a_{23} < 1$, e os blocos E_1, E_2 e E_3 possuem entradas recuperadas em termos dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição.

Definição 3.7 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, associada ao conjunto $\{p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ de pontos positivos. Chamamos a matriz G obtida no Teorema 3.6 de matriz de Gram canônica para uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.*

Teorema 3.8 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Então os seis parâmetros básicos junto com os três ângulos de transição definem unicamente a classe de congruência por $PO(3, 1)$ das triplas genéricas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.*

Prova. Sejam $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ e G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Pela construção de G temos que as entradas são recuperadas de maneira única em termos de respectivos parâmetros básicos e ângulos de transição. Sejam $\{p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ o conjunto de pontos positivos associado à tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e W o espaço gerado por levantamentos dos elementos de tal conjunto. Veja que W é não degenerado. De fato, se P_{12}, P_{21}, Q_{12} e Q_{21} são levantamentos para os pontos $p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}$, respectivamente, temos que o subconjunto $\{P_{12}, P_{21}, Q_{12}, Q_{21}\} \subset W$ é uma base para W e conseqüentemente $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{P_{12}, P_{21}, Q_{12}, Q_{21}\} = V_{\mathbb{R}}^{3,1}$ (ver Proposição 2.20). Segue que W é não degenerado. Além disso, se $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ é uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ com G' sendo a matriz de Gram canônica associada a tal tripla, e se G' é recuperada com os mesmos parâmetros básicos e mesmos ângulos de transição dados nas entradas de G , temos que $G = G'$. Analogamente, para dado $\{p'_{12}, p'_{21}, q'_{12}, q'_{21}, p'_{23}, p'_{32}, q'_{23}, q'_{32}, p'_{13}, p'_{31}, q'_{13}, q'_{31}\}$, o conjunto de pontos positivos associado à tripla $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$, com W' sendo o espaço gerado por levantamentos dos elementos de tal conjunto, temos que W' é não degenerado. O resultado segue da Proposição 1.32. ■

Vimos que a dimensão do espaço de módulos para triplas genéricas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ é 6. Entretanto, segundo o Teorema 3.8, nove parâmetros definem unicamente a classe de congruência por $PO(3, 1)$ das triplas genéricas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Dessa forma, apresentamos três equações independentes que relacionam os nove parâmetros dados no Teorema 3.8. Para tanto, calculamos o determinante de três menores principais de ordem 5 da matriz G dada no Teorema 3.6. Então, o determinante dos menores principais de ordem 5 associados aos conjuntos de pontos $\{p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{31}\}$, $\{p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}\}$ e $\{p_{21}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ são respectivamente:

$$\begin{aligned}
D_1 = & 1 - \cos(\theta_3)^2 \cos(\theta_2)^2 d_{12} d_{23} + \cos(\theta_3)^2 \cos(\theta_2)^2 a_{12} a_{23} - \cos(\theta_3)^2 \cos(\theta_2)^2 a_{23} d_{12} - \cos(\theta_3)^2 \\
& d_{23} + \cos(\theta_3)^2 a_{23} - \cos(\theta_1)^2 d_{12} d_{13} - \cos(\theta_3)^2 a_{12} a_{23} + d_{12} \cos(\theta_3)^2 d_{23} - \cos(\theta_2)^2 a_{12} a_{23} + d_{12} \cos(\theta_2)^2 \\
& a_{23} + d_{12} d_{13} + d_{13} \cos(\theta_1)^2 a_{12} + d_{12} a_{12} - a_{12} + a_{23} a_{12} + \cos(\theta_3)^2 \cos(\theta_2)^2 d_{23} a_{12} - a_{23} - 2\sqrt{d_{13}} \operatorname{sen}(\theta_1) \\
& d_{12} \sqrt{a_{12}} \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_3) \sqrt{d_{23}} - 2\sqrt{d_{13}} \operatorname{sen}(\theta_1) d_{12} \sqrt{a_{12}} \sqrt{a_{23}} \cos(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_3) + 2d_{12} \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_3) \\
& \sqrt{a_{23}} \cos(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_3) \sqrt{d_{23}} + 2\sqrt{d_{13}} \cos(\theta_1) \sqrt{d_{12}} \operatorname{sen}(\theta_2) \sqrt{a_{23}} \operatorname{sen}(\theta_3) a_{12} - 2\sqrt{d_{13}} \cos(\theta_1) \sqrt{d_{12}} \\
& \cos(\theta_3) \cos(\theta_2) \sqrt{d_{23}} a_{12} - 2\operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_3) \sqrt{a_{23}} \cos(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_3) \sqrt{d_{23}} a_{12} - 2\sqrt{d_{13}} \cos(\theta_1) \sqrt{d_{12}} \\
& \operatorname{sen}(\theta_2) \sqrt{a_{23}} \operatorname{sen}(\theta_3) + 2\sqrt{d_{13}} \cos(\theta_1) \sqrt{d_{12}} \cos(\theta_3) \cos(\theta_2) \sqrt{d_{23}} + 2\sqrt{d_{13}} \operatorname{sen}(\theta_1) \sqrt{a_{12}} \operatorname{sen}(\theta_2) \\
& \cos(\theta_3) \sqrt{d_{23}} + 2\sqrt{d_{13}} \operatorname{sen}(\theta_1) \sqrt{a_{12}} \sqrt{a_{23}} \cos(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_3) - d_{13} - d_{12} = 0 ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 = & 1 - \cos(\theta_2)^2 a_{12} a_{23} + d_{23} d_{13} + \cos(\theta_3) d_{13} a_{23} - a_{12} + d_{12} \cos(\theta_1)^2 \cos(\theta_2)^2 a_{23} + a_{23} a_{12} + \\
& \cos(\theta_1)^2 a_{12} - d_{12} \cos(\theta_1)^2 + \cos(\theta_1)^2 \cos(\theta_2)^2 a_{12} a_{23} - \cos(\theta_1)^2 \cos(\theta_2)^2 a_{12} d_{23} - \cos(\theta_1)^2 \cos(\theta_2)^2 d_{12} \\
& d_{23} + d_{23} a_{23} - a_{23} - 2\operatorname{sen}(\theta_1) d_{23} \sqrt{a_{23}} \cos(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_3) \sqrt{a_{12}} \sqrt{d_{13}} + 2\sqrt{d_{12}} \cos(\theta_1) d_{23} \operatorname{sen}(\theta_2) \sqrt{a_{23}} \\
& \operatorname{sen}(\theta_3) \sqrt{d_{13}} + 2\operatorname{sen}(\theta_1) \sqrt{d_{12}} \cos(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) \sqrt{a_{12}} a_{23} - 2\operatorname{sen}(\theta_1) \sqrt{d_{23}} \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_3) \\
& \sqrt{a_{12}} \sqrt{d_{13}} a_{23} - 2\sqrt{d_{12}} \cos(\theta_1) \sqrt{d_{23}} \cos(\theta_3) \cos(\theta_2) \sqrt{d_{13}} a_{23} - d_{23} - 2\sqrt{d_{13}} \cos(\theta_1) \sqrt{d_{12}} \operatorname{sen}(\theta_2) \\
& \sqrt{a_{23}} \operatorname{sen}(\theta_3) + 2\sqrt{d_{13}} \cos(\theta_1) \sqrt{d_{12}} \cos(\theta_3) \cos(\theta_2) \sqrt{d_{23}} + 2\sqrt{d_{13}} \operatorname{sen}(\theta_1) \sqrt{a_{12}} \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_3) \\
& \sqrt{d_{23}} + 2\sqrt{d_{13}} \operatorname{sen}(\theta_1) \sqrt{a_{12}} \sqrt{a_{23}} \cos(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_3) - d_{13} + \cos(\theta_1)^2 d_{23} d_{12} - \cos(\theta_3)^2 d_{13} d_{23} + d_{23} \\
& \cos(\theta_2)^2 a_{12} - \cos(\theta_1)^2 a_{12} a_{23} = 0 ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 = & 1 + a_{23} a_{13} + d_{13} a_{13} + \cos(\theta_2)^2 \cos(\theta_3)^2 d_{23} a_{13} - \cos(\theta_2)^2 a_{13} a_{23} + \cos(\theta_2)^2 d_{23} d_{13} - \\
& \cos(\theta_3)^2 a_{13} a_{23} - \cos(\theta_1)^2 d_{12} d_{13} + d_{12} d_{13} + \cos(\theta_2)^2 \cos(\theta_3)^2 a_{13} a_{23} - \cos(\theta_2)^2 \cos(\theta_3)^2 a_{23} d_{13} - \\
& \cos(\theta_2)^2 \cos(\theta_3)^2 d_{13} d_{23} - a_{13} + 2\operatorname{sen}(\theta_1) \sqrt{a_{13}} \cos(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_3) \sqrt{d_{12}} \sqrt{d_{23}} + 2\operatorname{sen}(\theta_1) \sqrt{a_{13}} \operatorname{sen}(\theta_2) \\
& \cos(\theta_3) \sqrt{d_{12}} \sqrt{a_{23}} + \cos(\theta_3)^2 d_{13} a_{23} - 2\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sqrt{d_{12}} \sqrt{d_{23}} \sqrt{d_{13}} a_{13} + 2\cos(\theta_1) \\
& \operatorname{sen}(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_3) \sqrt{d_{12}} \sqrt{a_{23}} \sqrt{d_{13}} a_{13} - 2\operatorname{sen}(\theta_1) \sqrt{a_{13}} \cos(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_3) \sqrt{d_{12}} \sqrt{d_{23}} d_{13} - 2\operatorname{sen}(\theta_1) \sqrt{a_{13}} \\
& \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_3) \sqrt{d_{12}} \sqrt{a_{23}} d_{13} - 2\cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \operatorname{sen}(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_3) \sqrt{d_{23}} \sqrt{a_{23}} a_{13} + 2\cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \\
& \operatorname{sen}(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_3) \sqrt{d_{23}} \sqrt{a_{23}} d_{13} - a_{23} - 2\sqrt{d_{13}} \cos(\theta_1) \sqrt{d_{12}} \operatorname{sen}(\theta_2) \sqrt{a_{23}} \operatorname{sen}(\theta_3) + 2\sqrt{d_{13}} \cos(\theta_1) \\
& \sqrt{d_{12}} \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \sqrt{d_{23}} - d_{13} + \cos(\theta_2)^2 a_{23} - \cos(\theta_2)^2 d_{23} - d_{12} + d_{12} a_{13} \cos(\theta_1)^2 = 0 .
\end{aligned}$$

3.2.2 Construção do espaço de módulos para triplas genéricas

Nesta subseção construímos o espaço de módulos para triplas genéricas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Para começar, sejam $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ e G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla (obtida anterior-

mente no Teorema 3.6). Denote por $\mathcal{M}^g(3, 3)$ o espaço de configurações de triplas genéricas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Os elementos de $\mathcal{M}^g(3, 3)$ são classes denotadas por $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$. Defina a aplicação

$$\tau : \mathcal{M}^g(3, 3) \rightarrow \mathbb{R}^9$$

que associa cada classe $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$ aos respectivos parâmetros básicos e ângulos de transição, ou seja, ao ponto $(d_{12}, d_{13}, d_{23}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^9$.

Notação 3.9 *Vamos denotar as uplas de invariantes por:*

$$(d, a, \theta) = (d_{12}, d_{13}, d_{23}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, \theta_1, \theta_2, \theta_3) .$$

Por fim, defina o conjunto

$$\mathbb{M}^g(3, 3) = \{(d, a, \theta) \in \mathbb{R}^9; 1 < d, 0 \leq a < 1, 0 < \theta < \pi, D_k = 0, k = 1, 2, 3\}$$

onde cada D_k foi expressado no final da Subseção 3.2.1, com $k = 1, 2, 3$. Veja que $\mathbb{M}^g(3, 3)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^9 é um espaço topológico. Com isso temos o próximo resultado.

Teorema 3.10 *O espaço de configurações $\mathcal{M}^g(3, 3)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}^g(3, 3)$.*

Prova. Pelas condições de determinante dadas na Proposição 1.29 (considerando a proposição sobre o corpo dos reais e com $n = 3$) e pelo Teorema 3.6, temos que a aplicação $\tau : \mathcal{M}^g(3, 3) \rightarrow \mathbb{R}^9$ dada acima define uma aplicação $\tau : \mathcal{M}^g(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}^g(3, 3)$. Usando o Teorema 3.8, temos que $\tau : \mathcal{M}^g(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}^g(3, 3)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(d, a, \theta) \in \mathbb{M}^g(3, 3)$, usando as fórmulas que obtemos para as entradas da matriz de Gram dada no Teorema 3.6, podemos considerar G em termos dos seis parâmetros básicos e dos três ângulos de transição, com $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 9$. Segue da Proposição 1.29 (sobre o corpo dos reais e com $n = 3$) que G assim construída, é a matriz de Gram canônica de alguma tripla genérica de geodésicas riemannianas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Logo $\tau : \mathcal{M}^g(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}^g(3, 3)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}^g(3, 3)$ da topologia induzida de \mathbb{R}^9 , temos que $\tau : \mathcal{M}^g(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}^g(3, 3)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 3.11 *Chamamos $\mathbb{M}^g(3, 3)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}^g(3, 3)$.*

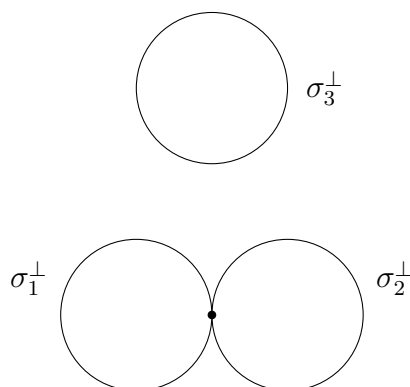
3.3 Espaço de Módulos de Triplas Especiais

Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla especial de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Vimos que para uma tripla ser chamada de especial, é preciso que pelo menos uma das subduplas, (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) ou (σ_1, σ_3) , associada a tal tripla seja formada por geodésicas riemannianas coplanares (ver Definição 3.2). Dessa forma, vamos dedicar esta seção ao estudo dos seguintes casos:

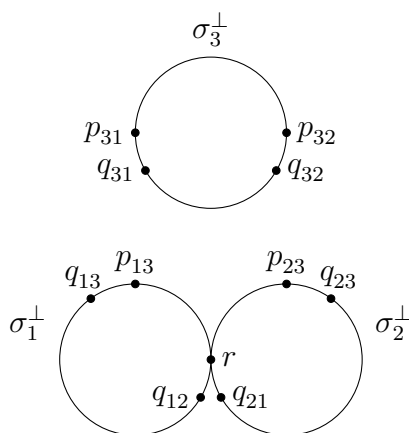
- (i) Caso em que uma subdupla é coplanar, as outras duas são reversas, chamado de *caso quase genérico*;
- (ii) Caso em que duas subduplas são coplanares e uma das subduplas é reversa, chamado de *caso quase coplanar*;
- (iii) Caso em que as três subduplas são coplanares, mas não existe $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ que contenha a tripla, chamado de *caso duas a duas coplanar*;
- (iv) Caso em que as três subduplas são coplanares, e existe $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ que contém a tripla, chamado de *caso coplanar*.

3.3.1 Triplas quase genéricas

Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla especial de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Suponha que a tripla seja quase genérica. Vamos supor também nesta subseção, sem perda de generalidade, que (σ_1, σ_2) é a subdupla coplanar, e que (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) são as subduplas reversas. Segue abaixo um desenho que ilustra o posicionamento dos conjuntos polares no caso em questão.



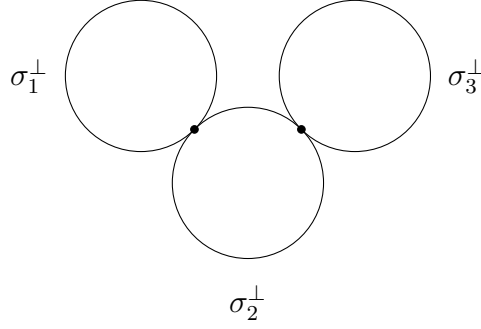
Como estamos supondo que a subdupla (σ_1, σ_2) é coplanar, temos associado a ela um conjunto bi-ortogonal denotado por $\{p_{12}, p_{21}, r\}$ se for ultraparalela, e por $\{r, q_{12}, q_{21}\}$ se for concorrente ou assintótica. Por outro lado, como as subduplas (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) são reversas, associamos a elas os conjuntos bi-ortogonais $\{p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, respectivamente. Com isso, associamos cada tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ao conjunto $\{p_{12}, p_{21}, r, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ se a dupla (σ_1, σ_2) for ultraparalela, e ao conjunto $\{r, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ se a dupla (σ_1, σ_2) for concorrente ou assintótica (representado na figura abaixo).



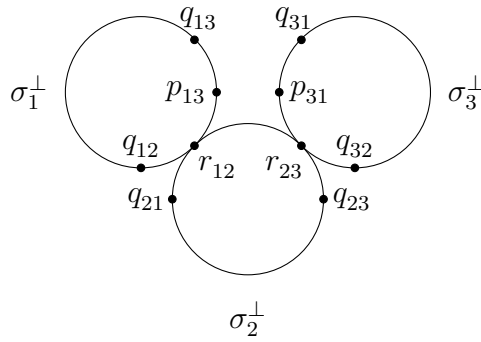
Veja que a construção do espaço de módulos para este caso é feita de maneira similar ao caso genérico apresentado acima. A diferença é que neste caso vamos ter pelo menos um dos parâmetros básicos com valor 1 (ver Proposição 2.19). Em outras palavras, o ângulo ou a distância (ou ambos) entre as geodésicas riemannianas de uma subdupla é 0.

3.3.2 Triplas quase coplanares

Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla especial de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Além disso, suponha que a tripla seja quase coplanar, ou seja, caso em que duas subduplas são coplanares e uma subdupla é reversa. Considerando que as subduplas (σ_1, σ_2) e (σ_2, σ_3) são coplanares e que a subdupla (σ_1, σ_3) é reversa, temos abaixo um desenho que ilustra o posicionamento dos conjuntos polares no caso em questão.



Da mesma forma que fizemos para o caso quase genérico, aqui também associamos a cada tripla, um conjunto de pontos positivos. Vimos que para uma subdupla coplanar (σ_j, σ_k) , podemos associar a ela o conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{jk}, q_{jk}, q_{kj}\}$, se a subdupla em questão for concorrente ou assintótica, e associar a ela o conjunto bi-ortogonal denotado por $\{p_{jk}, p_{kj}, r_{jk}\}$, se a subdupla em questão for ultraparalela. Por outro lado, se a subdupla (σ_j, σ_k) é reversa, podemos associar a ela um conjunto bi-ortogonal denotado por $\{p_{jk}, p_{kj}, q_{jk}, q_{kj}\}$. Assim, supondo por exemplo que as subduplas (σ_1, σ_2) e (σ_2, σ_3) são concorrentes ou assintóticas, e (σ_1, σ_3) é reversa, podemos associar à tripla especial $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ o conjunto de pontos positivos $\{r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ (representado na figura abaixo). O mesmo pode ser feito para os demais tipos de triplas especiais quase coplanares.



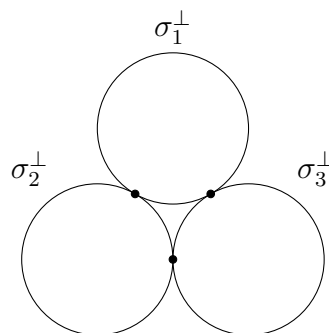
Assim como no caso quase genérico, a construção do espaço de módulos para este caso também é feita de maneira similar ao caso genérico. A diferença é que neste caso vamos ter pelo menos dois dos parâmetros básicos com valor 1 (ver Proposição 2.19). Em outras palavras, o ângulo ou a distância (ou ambos) entre as geodésicas riemannianas de duas das subduplas associadas a tal tripla é 0.

Observação 3.12 *Para o caso particular em que (σ_1, σ_2) e (σ_2, σ_3) são concorrentes, (σ_1, σ_3) é reversa, e σ_2 é a geodésica riemanniana perpendicular comum a σ_1 e σ_3 , temos que o*

problema de congruência da tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ se resume ao problema de congruência da dupla reversa (σ_1, σ_3) . De fato, dada a tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, associamos o conjunto de pontos positivos $\{r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$. Como σ_2 é a geodésica riemanniana perpendicular comum, temos que $r_{12} = q_{13}$, $r_{23} = q_{31}$, $p_{13} = q_{12}$ e $p_{31} = q_{32}$. Além disso, sabemos que dois pontos no espaço projetivo definem unicamente uma linha projetiva real, então dos quatro pontos contidos em σ_2^\perp , precisamos apenas de dois deles. Dessa forma, consideramos os pontos r_{12} e r_{23} . Assim, para cada tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ associamos o conjunto de pontos positivos $\{p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$.

3.3.3 Triplas duas a duas coplanares

Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla especial de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Além disso, suponha que a tripla seja duas a duas coplanar, ou seja, cada subdupla (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) está contida em um $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ diferente. Segue abaixo um desenho que ilustra o posicionamento dos conjuntos polares no caso em questão.



Observação 3.13 Se a tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é duas a duas coplanar, temos que as linhas projetivas reais indefinidas associadas a tais geodésicas se intersectam em um mesmo ponto, caso contrário a tripla seria coplanar, uma vez que três pontos em $\mathbb{R}P^3$ determinam um plano projetivo (indefinido nesse caso). O ponto de intersecção das linhas projetivas reais pode ser positivo, negativo ou isotrópico, fazendo com que as subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) sejam ultraparalelas, concorrentes ou assintóticas, respectivamente. Além disso, se as subduplas são ultraparalelas com ponto de intersecção p positivo, temos que ambas intersectam ortogonalmente o plano hiperbólico real dado por p^\perp .

Da mesma forma que fizemos para os demais casos, aqui também associamos a cada tripla, um conjunto de pontos positivos. Vimos que para uma subdupla coplanar (σ_j, σ_k) , podemos associar a ela o conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{jk}, q_{jk}, q_{kj}\}$, se a subdupla em questão for concorrente ou assintótica, e associar a ela o conjunto bi-ortogonal denotado por $\{p_{jk}, p_{kj}, r_{jk}\}$, se a subdupla em questão for ultraparalela. Vamos supor, por exemplo, que cada subdupla seja ultraparalela. Assim, temos associado às subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) , os conjuntos bi-ortogonais denotados por $\{p_{12}, p_{21}, r_{12}\}$, $\{p_{23}, p_{32}, r_{23}\}$ e $\{p_{13}, p_{31}, r_{13}\}$, respectivamente. Então, associamos a cada tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ o conjunto de pontos positivos denotado por $\{p_{12}, p_{21}, r_{12}, p_{23}, p_{32}, r_{23}, p_{13}, p_{31}, r_{13}\}$. O mesmo pode ser feito para o caso em que cada subdupla é concorrente e para o caso em que cada subdupla é assintótica, obtendo assim o conjunto $\{r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, q_{13}, q_{31}\}$.

Vamos supor nesta subseção que cada subdupla associada à tripla em questão seja ultraparalela, pois para os casos em que tais subduplas são concorrentes ou assintóticas, o procedimento é análogo. Vimos que no caso ultraparalelo, podemos associar à tripla em questão, um conjunto de pontos positivos dado por $\{p_{12}, p_{21}, r_{12}, p_{23}, p_{32}, r_{23}, p_{13}, p_{31}, r_{13}\}$. Denote a matriz de Gram de tal conjunto por G . Sabemos do Capítulo 2, que existem levantamentos $P_{12}, P_{21}, R_{12}, P_{23}, P_{32}, R_{23}, P_{13}, P_{31}, R_{13}$ para os elementos desse conjunto de pontos positivos, tais que podemos recuperar em termos de parâmetros básicos as entradas dos blocos formados pelos conjuntos $\{p_{12}, p_{21}, r_{12}\}$, $\{p_{23}, p_{32}, r_{23}\}$ e $\{p_{13}, p_{31}, r_{13}\}$, onde tais blocos são dados respectivamente por:

$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{d_{12}} & 0 \\ \sqrt{d_{12}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{d_{23}} & 0 \\ \sqrt{d_{23}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{d_{13}} & 0 \\ \sqrt{d_{13}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com $1 < d_{12}, d_{23}, d_{13}$.

A ideia agora é recuperar as demais entradas da matriz de Gram G , em termos dos três parâmetros básicos que temos e dos ângulos de transição. Para tanto, vamos fazer um procedimento análogo ao feito na Seção 3.2 para o caso genérico. Então, considere elementos $T_j \in SO(2, \Sigma_j^\perp)$ tais que

$$T_1 : \{R_{12}, P_{12}\} \rightarrow \{R_{13}, P_{13}\}$$

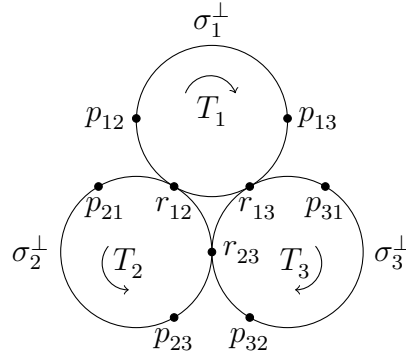
$$T_2 : \{R_{12}, P_{21}\} \rightarrow \{R_{23}, P_{23}\}$$

$$T_3 : \{R_{13}, P_{31}\} \rightarrow \{R_{23}, P_{32}\}$$

onde cada T_j pode ser escrita na forma

$$T_j = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) & -\text{sen}(\theta_j) \\ \text{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T_j^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) & \text{sen}(\theta_j) \\ -\text{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{bmatrix}$$

com $j = 1, 2, 3$.



Observação 3.14 O Teorema de Witt nos permite estender a aplicação $T_j \in SO(2, \Sigma_j^\perp)$ para uma aplicação de $SO(3, 1)$, para $j = 1, 2, 3$.

Agora, para recuperar, por exemplo, a entrada $\langle P_{12}, P_{23} \rangle$, temos do produto

$$[R_{23} \quad P_{23}] = [R_{12} \quad P_{21}] T_2^{-1}$$

que P_{23} possui uma expressão

$$P_{23} = R_{12} \text{sen}(\theta_2) + P_{21} \cos(\theta_2),$$

e conseqüentemente

$$\langle P_{12}, P_{23} \rangle = \sqrt{d_{12}} \cos(\theta_2),$$

obtendo assim, uma expressão para $\langle P_{12}, P_{23} \rangle$ que depende apenas dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição. As demais entradas da matriz de Gram podem ser recuperadas da mesma forma, e estão explicitadas no Apêndice A. Assim, obtemos o próximo teorema.

Teorema 3.15 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas ultraparalelas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, e considere $\{p_{12}, p_{21}, r_{12}, p_{23}, p_{32}, r_{23}, p_{13}, p_{31}, r_{13}\}$ o conjunto de pontos positivos, associado à tripla em questão. Então existem levantamentos para os elementos de tal conjunto, de forma que a matriz de Gram G associada a esses levantamentos é dada por:*

$$G = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & \sqrt{d_{12}} & 0 & & \\ \sqrt{d_{12}} & 1 & 0 & E_1 & E_2 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & E_1 & & 1 & \sqrt{d_{23}} & 0 \\ & & & \sqrt{d_{23}} & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ \hline & E_2 & & & E_3 & \\ & & & & & 1 & \sqrt{d_{13}} & 0 \\ & & & & & \sqrt{d_{12}} & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

onde $1 < d_{12}, d_{13}, d_{23}$, e os blocos E_1 , E_2 e E_3 possuem entradas recuperadas em termos dos parâmetros básicos d_{12} , d_{23} , d_{13} , e dos ângulos de transição θ_1 , θ_2 e θ_3 .

Definição 3.16 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Chamamos a matriz de Gram G associada a tal tripla, obtida como no Teorema 3.15, de matriz de Gram canônica para uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.*

Veja que para o caso em que a tripla duas a duas coplanar possui subduplas de geodésicas riemannianas concorrentes, a matriz de Gram canônica para a tripla em questão, tem entradas recuperadas em termos dos parâmetros básicos a_{12} , a_{23} , a_{13} , e dos ângulos de transição θ_1 , θ_2 e θ_3 , com $0 \leq a_{12}, a_{13}, a_{23} < 1$. O mesmo vale para o caso assintótico, entretanto, temos que $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 1$.

Teorema 3.17 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas ultraparalelas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Considere o conjunto de pontos positivos $\{p_{12}, p_{21}, r_{12}, p_{23}, p_{32}, r_{23}, p_{13}, p_{31}, r_{13}\}$ associado a tal tripla. Então os parâmetros básicos d_{12} , d_{23} , d_{13} , e os ângulos de transição θ_1 , θ_2 , θ_3 , determinam unicamente a classe de congruência por $PO(3, 1)$ das triplas duas a duas coplanares de geodésicas riemannianas ultraparalelas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.*

Prova. Sejam $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas ultraparalelas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ e G a matriz Gram canônica associada a tal tripla. Pela construção de G , temos que as entradas são recuperadas de maneira única em termos de respectivos parâmetros básicos e ângulos de transição. Sejam $\{p_{12}, p_{21}, r_{12}, p_{23}, p_{32}, r_{23}, p_{13}, p_{31}, r_{13}\}$ o conjunto de pontos positivos associado à tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e W o espaço gerado por levantamentos dos elementos de tal conjunto. Veja que W é não degenerado. Além disso, se $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ é uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas ultraparalelas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, com G' sendo a matriz de Gram canônica associada a tal tripla, e se G' é recuperada com os mesmos parâmetros básicos e mesmos ângulos de transição dados nas entradas de G , temos que $G = G'$. Por outro lado, para dado $\{p'_{12}, p'_{21}, r'_{12}, p'_{23}, p'_{32}, r'_{23}, p'_{13}, p'_{31}, r'_{13}\}$, o conjunto de pontos positivos associado à tripla $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$, com W' sendo o espaço gerado por levantamentos dos elementos de tal conjunto, temos que W' é não degenerado. O resultado segue da Proposição 1.32. ■

Agora considere $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas ultraparalelas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Seja G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Vimos que podemos recuperar as entradas de G em termos dos invariantes $d_{12}, d_{13}, d_{23}, \theta_1, \theta_2$ e θ_3 . Denote por $\mathcal{M}_0^{2-2}(3, 3)$ o espaço de configurações de triplas duas a duas coplanares de geodésicas ultraparalelas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Os elementos de $\mathcal{M}_0^{2-2}(3, 3)$ são classes denotadas por $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$. Defina a aplicação

$$\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{2-2}(3, 3) \rightarrow \mathbb{R}^6$$

que associa a cada classe $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$ os invariantes $d_{12}, d_{13}, d_{23}, \theta_1, \theta_2$ e θ_3 . Por fim, defina o conjunto

$$\mathbb{M}_0^{2-2}(3, 3) = \{(d_{12}, d_{13}, d_{23}, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^6; 1 < d_{12}, d_{13}, d_{23}, 0 < \theta_j < \pi, D_{k \times l} = 0\},$$

onde $j = 1, 2, 3$ e $D_{k \times l}$ são relações independentes construídas no Apêndice A, com $k, l \in \{3, 6, 9\}$ e $k < l$, dadas por:

$$D_{3 \times 6} = \cos(\theta_1)\cos(\theta_3) - \sqrt{d_{13}}\text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_3) - \cos(\theta_2) = 0$$

$$D_{3 \times 9} = \cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - \sqrt{d_{23}}\text{sen}(\theta_2)\text{sen}(\theta_3) - \cos(\theta_1) = 0$$

$$D_{6 \times 9} = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sqrt{d_{12}}\text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) - \cos(\theta_3) = 0 \quad .$$

Usando a métrica de Bergman, temos que:

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(p_{jk}, p_{kj})}{2} \right) = \langle P_{jk}, P_{kj} \rangle \langle P_{kj}, P_{jk} \rangle = d_{jk} ,$$

e conseqüentemente

$$\sqrt{d_{jk}} = \cosh \left(\frac{\rho(p_{jk}, p_{kj})}{2} \right) .$$

Dessa forma, podemos reescrever as expressões de $D_{3 \times 6}$, $D_{3 \times 9}$ e $D_{6 \times 9}$, respectivamente, como Lei de Cossenos:

$$\begin{aligned} D_{3 \times 6} &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_3) - \cosh \left(\frac{\rho(p_{13}, p_{31})}{2} \right) \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_3) - \cos(\theta_2) = 0 \\ D_{3 \times 9} &= \cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - \cosh \left(\frac{\rho(p_{23}, p_{32})}{2} \right) \operatorname{sen}(\theta_2)\operatorname{sen}(\theta_3) - \cos(\theta_1) = 0 \\ D_{6 \times 9} &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \cosh \left(\frac{\rho(p_{12}, p_{21})}{2} \right) \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2) - \cos(\theta_3) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Veja que $\mathbb{M}_0^{2-2}(3, 3)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^6 é um espaço topológico. Assim, temos o próximo resultado.

Teorema 3.18 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_0^{2-2}(3, 3)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}_0^{2-2}(3, 3)$.*

Prova. Pelas condições de determinante (Proposição 1.29 sobre o corpo dos reais com $n = 3$) e pelo Teorema 3.17, temos que a aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{2-2}(3, 3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada acima define uma aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{2-2}(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}_0^{2-2}(3, 3)$. Pelo Teorema 3.17 temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{2-2}(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}_0^{2-2}(3, 3)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(d_{12}, d_{13}, d_{23}, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{M}_0^{2-2}(3, 3)$, usando as fórmulas que obtemos para as entradas da matriz de Gram dada no Teorema 3.15, podemos considerar G em termos dos três parâmetros básicos e dos três ângulos de transição, com $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 9$. Segue da Proposição 1.29 (sobre o corpo dos reais e com $n = 3$) que G assim construída é a matriz de Gram canônica de alguma tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas ultraparalelas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Logo $\tau : \mathcal{M}_0^{2-2}(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}_0^{2-2}(3, 3)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. ■

Definição 3.19 *Chamamos $\mathbb{M}_0^{2-2}(3, 3)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_0^{2-2}(3, 3)$.*

Se o conjunto $\mathcal{M}_1^{2-2}(3, 3)$ denota o espaço de configurações de triplas duas a duas coplanares de geodésicas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, procedendo como fizemos acima, obtemos que o

conjunto

$$\mathbb{M}_1^{2-2}(3, 3) = \{(a_{12}, a_{13}, a_{23}, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^6; 0 \leq a_{12}, a_{23}, a_{13} < 1, 0 < \theta_j < \pi, D_{k \times l} = 0\},$$

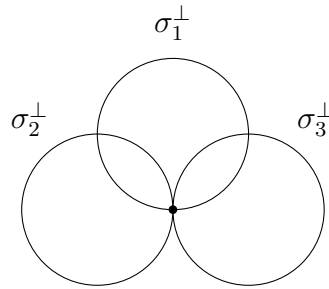
onde $j = 1, 2, 3$ e $D_{k \times l}$ são relações independentes construídas assim como no caso ultraparalelo, com $k, l \in \{1, 4, 7\}$ e $k < l$, é o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_1^{2-2}(3, 3)$. De maneira similar, se o conjunto $\mathcal{M}_2^{2-2}(3, 3)$ denota o espaço de configurações de triplas duas a duas coplanares de geodésicas assintóticas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, procedendo como fizemos acima, obtemos que o conjunto

$$\mathbb{M}_2^{2-2}(3, 3) = \{(a_{12}, a_{13}, a_{23}, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^6; a_{12} = a_{13} = a_{23} = 1, 0 < \theta_j < \pi, D_{k \times l} = 0\},$$

onde $j = 1, 2, 3$ e $D_{k \times l}$ são relações independentes construídas assim como no caso ultraparalelo, com $k, l \in \{1, 4, 7\}$ e $k < l$, é o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_2^{2-2}(3, 3)$.

3.3.4 Triplas coplanares

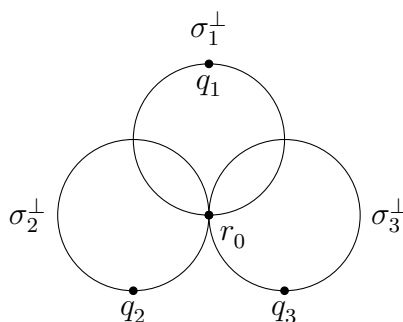
Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla especial de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Além disso, suponha que a tripla seja coplanar, ou seja, as subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) são coplanares, todas contidas em um mesmo $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. Segue abaixo um desenho que ilustra o posicionamento dos conjuntos polares no caso em questão.



Da mesma forma que fizemos para os demais casos, aqui também associamos a cada tripla, um conjunto de pontos positivos. Vamos supor, por exemplo, que cada subdupla seja concorrente ou assintótica. Assim, temos associado às subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) , os conjuntos bi-ortogonais denotados por $\{r_{12}, q_{12}, q_{21}\}$, $\{r_{23}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, q_{13}, q_{31}\}$, respectivamente. Note que para o caso em questão temos que $r_{12} = r_{23} = r_{13}$ e conseqüentemente

$q_{12} = q_{13}$, $q_{21} = q_{23}$ e $q_{31} = q_{32}$. Vamos denotar tais pontos por r_0 , q_1 , q_2 e q_3 , respectivamente. Com isso associamos cada tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ao conjunto $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$. Os demais casos podem ser feitos de maneira similar (ver Observação 3.20 feita abaixo).

Observação 3.20 *Se a tripla coplanar $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ possui a subdupla (σ_1, σ_2) ultraparalela e as demais são concorrentes ou assintóticas, temos associado às subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) , conjuntos bi-ortogonais denotados por $\{p_{12}, p_{21}, r_{12}\}$, $\{r_{23}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, q_{13}, q_{31}\}$, respectivamente. Análogo ao que foi feito antes, temos que $r_{12} = r_{23} = r_{13}$, $p_{12} = q_{13}$, $p_{21} = q_{23}$, $q_{31} = q_{32}$, e podemos denotar tais pontos por r_0 , q_1 , q_2 e q_3 , respectivamente. Com isso associamos cada tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ao conjunto $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$. O mesmo podemos fazer para o caso em que duas das subduplas são ultraparalelas e para o caso em que as três subduplas são ultraparalelas.*



Definição 3.21 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar associada ao conjunto de pontos positivos $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$. Dizemos que essa tripla é não ortogonal se as geodésicas riemannianas pertencentes à tripla não são ortogonais, ou seja, $\langle Q_j, Q_k \rangle \neq 0$, onde Q_j é um levantamento para q_j , com $j \neq k$ e $j, k = 1, 2, 3$.*

3.3.4.1 Triplas coplanares não ortogonais

Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar não ortogonal de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Vimos que para cada tripla coplanar podemos associar um conjunto de pontos positivos dado por $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$. Usando um argumento análogo ao feito na demonstração da Proposição 1.27, temos que existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g_{23} & g_{24} \\ 0 & g_{23} & 1 & g_{34} \\ 0 & g_{24} & g_{34} & 1 \end{bmatrix}$$

com $g_{23}, g_{24} > 0$. Usando o conceito de d -invariante, e a notação $d_{jk} = d(q_j, q_k)$, para $j, k = 1, 2, 3$, com $j < k$, temos que $d_{12} = d(q_1, q_2) = \langle Q_1, Q_2 \rangle \langle Q_2, Q_1 \rangle = g_{23}^2$, e conseqüentemente $g_{23} = \sqrt{d_{12}}$. Analogamente obtemos que $g_{24} = \sqrt{d_{13}}$ e $g_{34} = \pm\sqrt{d_{23}}$. Assim, existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d_{12}} & \sqrt{d_{13}} \\ 0 & \sqrt{d_{12}} & 1 & \pm\sqrt{d_{23}} \\ 0 & \sqrt{d_{13}} & \pm\sqrt{d_{23}} & 1 \end{bmatrix}$$

a qual chamamos de *matriz de Gram canônica* de uma tripla coplanar não ortogonal de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.

Observação 3.22 *Veja que, calculando o determinante da matriz de Gram canônica acima, obtemos a expressão $\det(G) = 1 - d_{12} - d_{13} - d_{23} + 2\sqrt{d_{12}}\sqrt{d_{13}}(\pm\sqrt{d_{23}})$. Além disso, note que $1 - d_{12} - d_{13} - d_{23} + 2\sqrt{d_{12}}\sqrt{d_{13}}(\pm\sqrt{d_{23}}) \leq 0$.*

Teorema 3.23 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar não ortogonal de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Considere o conjunto de pontos positivos $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$ associado a tal tripla. Então os d -invariantes $d(q_1, q_2)$, $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$ determinam unicamente a classe de congruência por $PO(3, 1)$ das triplas coplanares não ortogonais tais que o espaço gerado pelos levantamentos, denotado por $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{R_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$, é não degenerado.*

Prova. Basta notar que se duas triplas possuem mesmos d -invariantes, então possuem a mesma matriz de Gram canônica. Como as triplas estão associadas a conjuntos de pontos positivos tais que os conjuntos gerados pelos levantamentos são não degenerados, temos que o resultado segue da Proposição 1.32 (considerando o corpo dos reais e $n = 3$). ■

Agora considere $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar não ortogonal de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, associada ao conjunto de pontos positivos $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$ cujos levantamentos são

denotados por $\{R_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$. Seja G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Vimos que podemos recuperar as entradas de G em termos dos invariantes $d(q_1, q_2)$, $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$. Denote por $\mathcal{M}_0^{sc}(3, 3)$ o espaço de configurações de triplas coplanares não ortogonais de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ tais que o espaço gerado $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{R_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ seja não degenerado. Os elementos de $\mathcal{M}_0^{sc}(3, 3)$ são classes denotadas por $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$. Defina a aplicação

$$\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

que associa a cada classe $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$ os invariantes $d(q_1, q_2)$, $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$. Por fim, defina o conjunto

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_0^{sc}(3, 3) = & \{(d_{12}, d_{13}, d_{23}) \in \mathbb{R}^3; d_{12}, d_{13}, d_{23} > 0, \\ & 1 - d_{12} - d_{13} - d_{23} + 2\sqrt{d_{12}}\sqrt{d_{13}}(\pm\sqrt{d_{23}}) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Veja que $\mathbb{M}_0^{sc}(3, 3)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^3 é um espaço topológico.

Teorema 3.24 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_0^{sc}(3, 3)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}_0^{sc}(3, 3)$.*

Prova. Pelas condições de determinante (Proposição 1.29 sobre o corpo dos reais com $n = 3$) e pelo Teorema 3.23, temos que a aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada acima define uma aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}_0^{sc}(3, 3)$. Pelo Teorema 3.23 temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}_0^{sc}(3, 3)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(d_{12}, d_{13}, d_{23}) \in \mathbb{M}_0^{sc}(3, 3)$, considere G tal que $g_{23} = g_{32} = \sqrt{d_{12}}$, $g_{24} = g_{42} = \sqrt{d_{13}}$, $g_{34} = g_{43} = \pm\sqrt{d_{23}}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 4$, e as demais entradas são nulas. Segue das condições de determinante que G assim construída é a matriz de Gram canônica de alguma tripla coplanar não ortogonal de geodésicas riemannianas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Logo $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}_0^{sc}(3, 3)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}_0^{sc}(3, 3)$ da topologia induzida de \mathbb{R}^3 , temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}_0^{sc}(3, 3)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 3.25 *Chamamos $\mathbb{M}_0^{sc}(3, 3)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_0^{sc}(3, 3)$.*

Observação 3.26 *Observe que a igualdade na expressão*

$$1 - d_{12} - d_{13} - d_{23} + 2\sqrt{d_{12}}\sqrt{d_{13}}(\pm\sqrt{d_{23}}) \leq 0$$

acontece se, e somente se, as geodésicas riemannianas da tripla coplanar não ortogonal $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, se intersectam em um ponto negativo, ou se σ_1, σ_2 e σ_3 possuem uma geodésica riemanniana perpendicular comum (ver Corolário 4.4 em [3] e Observação 4.3 em [12]).

3.3.4.2 Triplas coplanares ortogonais

Se $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é uma tripla coplanar ortogonal de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, temos duas possibilidades, ou seja, uma das subduplas é ortogonal ou uma das geodésicas é ortogonal às demais. Se uma das subduplas for ortogonal, vamos chamar de *tripla coplanar ortogonal tipo 1*, e se uma das geodésicas for ortogonal às demais, vamos chamar de *tripla coplanar ortogonal tipo 2*.

Triplas coplanares ortogonais tipo 1

Vamos estudar aqui, o caso em que a tripla é coplanar ortogonal tipo 1. Vimos que para cada tripla coplanar podemos associar um conjunto de pontos positivos dado por $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$. Vamos supor que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal (os demais casos são análogos). Usando um argumento análogo ao feito na demonstração da Proposição 1.27, temos que existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$, tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & g_{24} \\ 0 & 0 & 1 & g_{34} \\ 0 & g_{24} & g_{34} & 1 \end{bmatrix}$$

com $g_{24}, g_{34} > 0$ e $g_{23} = 0$. Usando o conceito de d -invariante, e a notação $d_{jk} = d(q_j, q_k)$, para $j, k = 1, 2, 3$, com $j < k$, temos que $d_{13} = d(q_1, q_3) = \langle Q_1, Q_3 \rangle \langle Q_3, Q_1 \rangle = g_{24}^2$, e consequentemente $g_{24} = \sqrt{d_{13}}$. Analogamente obtemos que $g_{34} = \sqrt{d_{23}}$. Note que nesse caso temos $d_{12} = 0$ devido à ortogonalidade da subdupla (σ_1, σ_2) . Assim, existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{d_{13}} \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{d_{23}} \\ 0 & \sqrt{d_{13}} & \sqrt{d_{23}} & 1 \end{bmatrix}$$

a qual chamamos de *matriz de Gram canônica* para uma tripla coplanar ortogonal tipo 1 tal que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal, e temos da Observação 3.22 que $1 - d_{13} - d_{23} \leq 0$. Por outro lado, supondo que (σ_1, σ_3) seja a subdupla ortogonal ou que (σ_2, σ_3) seja a subdupla ortogonal, obtemos respectivamente as matrizes de Gram

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d_{12}} & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{12}} & 1 & \sqrt{d_{23}} \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{23}} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d_{12}} & \sqrt{d_{13}} \\ 0 & \sqrt{d_{12}} & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{13}} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

determinadas de maneira análoga a anterior.

Observação 3.27 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar ortogonal tipo 1, tal que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal, associada ao conjunto de pontos positivos $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$. Considere o conjunto formado por levantamentos dos elementos de tal conjunto de pontos positivos, denotado por $\{R_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$. Veja que o conjunto gerado $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{R_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ é não degenerado. De fato, se W for degenerado, então o levantamento Σ_j^\perp , do conjunto polar σ_j^\perp , está contido em um subespaço parabólico de dimensão 3, para $j = 1, 2, 3$. Isso nos diz que as geodésicas riemannianas σ_1, σ_2 e σ_3 se intersectam em um ponto isotrópico. Mas isso contradiz o fato de que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal.*

Teorema 3.28 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar ortogonal tipo 1 de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Considere o conjunto de pontos positivos $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$ associado a tal tripla. Então os d -invariantes $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$ determinam unicamente a classe de congruência por $PO(3, 1)$ das triplas coplanares não ortogonais tipo 1, tais que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal.*

Prova. Basta notar que se duas triplas possuem mesmos d -invariantes, então possuem a mesma matriz de Gram canônica. Como as triplas estão associadas a conjuntos de pontos

positivos tais que os conjuntos gerados pelos levantamentos são não degenerados (ver Observação 3.27), temos que o resultado segue da Proposição 1.32 (considerando o corpo dos reais e $n = 3$). ■

Veja que a Observação 3.27 também é verdadeira para o caso em que a subdupla ortogonal em questão é (σ_1, σ_3) ou (σ_2, σ_3) . Da mesma forma, versões análogas do Teorema 3.28 podem ser feitas para tais casos.

Agora considere $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar ortogonal tipo 1, tal que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal. Seja G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Vimos que nesse caso podemos recuperar as entradas de G em termos dos invariantes $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$. Denote por $\mathcal{M}_1^{sc}(3, 3)$ o espaço de configurações de triplas coplanares ortogonais tipo 1, tais que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal. Os elementos de $\mathcal{M}_1^{sc}(3, 3)$ são classes denotadas por $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$. Defina a aplicação

$$\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

que associa a cada classe $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$ os invariantes $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$. Por fim, defina o conjunto $\mathbb{M}_1^{sc}(3, 3) = \{(d_{13}, d_{23}) \in \mathbb{R}^2; d_{13}, d_{23} > 0, 1 - d_{13} - d_{23} \leq 0\}$. Veja que $\mathbb{M}_1^{sc}(3, 3)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^2 é um espaço topológico.

Teorema 3.29 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_1^{sc}(3, 3)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}_1^{sc}(3, 3)$.*

Prova. Pelas condições de determinante (Proposição 1.29 sobre o corpo dos reais com $n = 3$) e pelo Teorema 3.28, temos que a aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada acima define uma aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}_1^{sc}(3, 3)$. Pelo Teorema 3.28 temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}_1^{sc}(3, 3)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(d_{13}, d_{23}) \in \mathbb{M}_1^{sc}(3, 3)$, considere G tal que $g_{24} = g_{42} = \sqrt{d_{13}}$, $g_{34} = g_{43} = \sqrt{d_{23}}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 4$, e as demais entradas são nulas. Segue das condições de determinante, que G assim construída, é a matriz de Gram canônica de alguma tripla coplanar ortogonal tipo 1, tal que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal. Logo $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}_1^{sc}(3, 3)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}_1^{sc}(3, 3)$ da topologia induzida de \mathbb{R}^2 , temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}_1^{sc}(3, 3)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 3.30 Chamamos $\mathbb{M}_1^{sc}(3, 3)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_1^{sc}(3, 3)$.

Observação 3.31 Observe que a igualdade na expressão $1 - d_{13} - d_{23} \leq 0$ acontece se, e somente se, as geodésicas riemannianas da tripla coplanar ortogonal tipo 1 se intersectam em um ponto negativo.

Da mesma maneira que fizemos acima, podemos construir o espaço de módulos para o caso em que a subdupla (σ_1, σ_3) é ortogonal e para o caso em que a subdupla (σ_2, σ_3) é ortogonal. A construção é totalmente análoga.

Triplas coplanares ortogonais tipo 2

Agora vamos abordar o caso em que a tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é coplanar ortogonal tipo 2. Veja que temos três possibilidades, ou seja, $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$, ou $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$, ou $\sigma_1 \perp \sigma_3$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$. Vamos estudar o caso em que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$ (os demais são análogos).

Vimos que para cada tripla coplanar podemos associar um conjunto de pontos positivos dado por $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$. Supondo $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$, e usando um argumento análogo ao feito na demonstração da Proposição 1.27, temos que existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g_{34} \\ 0 & 0 & g_{34} & 1 \end{bmatrix}$$

com $g_{34} > 0$. Usando o conceito de d -invariante, e a notação $d_{23} = d(q_2, q_3)$, temos que $d_{23} = d(q_2, q_3) = \langle Q_2, Q_3 \rangle \langle Q_3, Q_2 \rangle = g_{34}^2$, e conseqüentemente $g_{34} = \sqrt{d_{23}}$. Note que nesse caso temos $d(q_1, q_2) = d(q_1, q_3) = 0$ devido às ortogonalidades entre as geodésicas riemannianas em questão. Assim, existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{d_{23}} \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{23}} & 1 \end{bmatrix}$$

a qual chamamos de *matriz de Gram canônica* para uma tripla coplanar ortogonal tipo 2 tal que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$. Supondo que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$, ou supondo que $\sigma_1 \perp \sigma_3$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$, obtemos respectivamente as matrizes de Gram

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{d_{13}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{13}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d_{12}} & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{12}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

determinadas de maneira análoga a anterior.

Observação 3.32 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar ortogonal tipo 2, tal que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$, associada ao conjunto de pontos positivos $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$. Considere o conjunto formado por levantamentos dos elementos de tal conjunto, denotado por $\{R_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$. Veja que o conjunto gerado $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{R_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$ é não degenerado. De fato, se W for degenerado, então o levantamento Σ_j^\perp , do conjunto polar σ_j^\perp , está contido em um subespaço parabólico de dimensão 3, para $j = 1, 2, 3$. Isso nos diz que as geodésicas riemannianas σ_1, σ_2 e σ_3 se intersectam em um ponto isotrópico. Mas isso contradiz o fato de que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$.*

Teorema 3.33 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar ortogonal tipo 2 de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Considere o conjunto de pontos positivos $\{r_0, q_1, q_2, q_3\}$ associado a tal tripla. Então o d -invariante $d(q_2, q_3)$ determina unicamente a classe de congruência por $PO(3, 1)$ das triplas coplanares não ortogonais tipo 2, tais que satisfazem $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$.*

Prova. Basta notar que se duas triplas possuem o mesmo d -invariante, então possuem a mesma matriz de Gram canônica. Como as triplas estão associadas a conjuntos de pontos

positivos tais que os conjuntos gerados pelos levantamentos são não degenerados (ver Observação 3.32), temos que o resultado segue da Proposição 1.32 (considerando o corpo dos reais e $n = 3$). ■

Veja que a Observação 3.32 é verdadeira tanto para o caso em que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$, quanto para o caso em que $\sigma_1 \perp \sigma_3$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$. Da mesma forma, versões análogas do Teorema 3.33 podem ser obtidas para tais casos.

Agora considere $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar ortogonal tipo 2, tal que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$. Seja G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Vimos que nesse caso podemos recuperar as entradas de G em termos do invariante $d(q_2, q_3)$. Denote por $\mathcal{M}_2^{sc}(3, 3)$ o espaço de configurações de triplas coplanares ortogonais tipo 2, tais que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$. Os elementos de $\mathcal{M}_2^{sc}(3, 3)$ são classes denotadas por $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$. Defina a aplicação

$$\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{R}$$

que associa a cada classe $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$ o invariante $d(q_2, q_3)$. Por fim, defina o conjunto $\mathbb{M}_2^{sc}(3, 3) = \{d_{23} \in \mathbb{R}; d_{23} > 1\}$. Veja que $\mathbb{M}_2^{sc}(3, 3)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R} é um espaço topológico.

Teorema 3.34 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_2^{sc}(3, 3)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}_2^{sc}(3, 3)$.*

Prova. Pelas condições de determinante (Proposição 1.29 sobre o corpo dos reais com $n = 3$) e pelo Teorema 3.33, temos que a aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ dada acima define uma aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}_2^{sc}(3, 3)$. Pelo Teorema 3.33 temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}_2^{sc}(3, 3)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $d_{23} \in \mathbb{M}_2^{sc}(3, 3)$, considere G tal que $g_{34} = g_{43} = \sqrt{d_{23}}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 4$, e as demais entradas são nulas. Segue das condições de determinante, que G assim construída, é a matriz de Gram canônica de alguma tripla coplanar ortogonal tipo 2, tal que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$. Logo $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}_2^{sc}(3, 3)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}_2^{sc}(3, 3)$ da topologia induzida de \mathbb{R} , temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 3) \rightarrow \mathbb{M}_2^{sc}(3, 3)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 3.35 *Chamamos $\mathbb{M}_2^{sc}(3, 3)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_2^{sc}(3, 3)$.*

Da mesma maneira que fizemos acima, podemos construir o espaço de módulos para o caso em que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$, e para o caso em que $\sigma_1 \perp \sigma_3$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$. A construção é totalmente análoga.

3.4 Tabela de Parâmetros

Nesta seção apresentamos uma tabela que explicita os parâmetros necessários para a construção do espaço de módulos para cada um dos casos que trabalhamos neste capítulo. Segue a tabela.

Tipo de Tripla	Parâmetros		Total de Parâmetros
	Básicos	Âng. de Transição	
Genérica	$d_{12}, d_{23}, d_{13},$ a_{12}, a_{23} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	9
Quase Genérica com (σ_1, σ_2) concorrente	$d_{23}, d_{13}, a_{12},$ a_{23} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	8
Quase Genérica com (σ_1, σ_2) ultraparalela	$d_{12}, d_{23}, d_{13},$ a_{23} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	8
Quase Genérica com (σ_1, σ_2) assintótica	d_{23}, d_{13}, a_{23} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	7
Quase Coplanar com (σ_1, σ_2) e (σ_2, σ_3) concorrentes	d_{13}, a_{12}, a_{23} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	7
Quase Coplanar com (σ_1, σ_2) e (σ_2, σ_3) ultraparalelas	$d_{12}, d_{23}, d_{13},$ e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	7
Quase Coplanar com (σ_1, σ_2) concorrente e (σ_2, σ_3) ultraparalela	$d_{23}, d_{13}, a_{12},$ e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	7
Quase Coplanar com (σ_1, σ_2) concorrente e (σ_2, σ_3) assintótica	d_{13}, a_{12} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	6
Quase Coplanar com (σ_1, σ_2) ultraparalela e (σ_2, σ_3) assintótica	d_{12}, d_{13} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	6

Tipo de Tripla	Parâmetros		Total de Parâmetros
	Básicos	Âng. de Transição	
Quase Coplanar com (σ_1, σ_2) e (σ_2, σ_3) assintóticas	d_{13} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	5
Duas a Duas Coplanares concorrentes	a_{12}, a_{23} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	6
Duas a Duas Coplanares ultraparalelas	d_{12}, d_{23} e d_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	6
Duas a Duas Coplanares assintóticas	—	θ_1, θ_2 e θ_3	3
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, com subduplas concorrentes	a_{12}, a_{23} e a_{13}	—	3
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, com subduplas ultraparalelas	d_{12}, d_{23} e d_{13}	—	3
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, com subduplas assintóticas	—	—	—
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 1	d_{23}, d_{13} e a_{12}	—	3
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 2	a_{12}	—	1
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 3	d_{12}, a_{23} e a_{13}	—	3
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 4	d_{12}	—	1
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 5	a_{23} e a_{13}	—	2

Tipo de Tripla	Parâmetros		Total de Parâmetros
	Básicos	Âng. de Transição	
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 6	d_{23} e d_{13}	—	2
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 7	d_{23} e a_{12}	—	2
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 8	a_{23} e a_{13}	—	2
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 9	d_{23} e d_{13}	—	2
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 10	—	—	—
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 11	d_{13} e a_{23}	—	2
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 12	a_{23}	—	1
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 13	d_{23}	—	1
Coplanares Ortogonais Tipo 2 com (σ_1, σ_2) concorrente	a_{12}	—	1
Coplanares Ortogonais Tipo 2 com (σ_1, σ_2) ultraparalela	d_{12}	—	1
Coplanares Ortogonais Tipo 2 com (σ_1, σ_2) assintótica	—	—	—

Fazemos abaixo uma legenda para a tabela acima:

- (i) Formação 1: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é concorrente, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) ultraparalelas;
- (ii) Formação 2: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é concorrente, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3)

- assintóticas;
- (iii) Formação 3: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ultraparalela, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) concorrentes;
 - (iv) Formação 4: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ultraparalela, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) assintóticas;
 - (v) Formação 5: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é assintótica, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) concorrentes;
 - (vi) Formação 6: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é assintótica, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) ultraparalelas;
 - (vii) Formação 7: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é concorrente, (σ_2, σ_3) é ultraparalela e (σ_1, σ_3) é assintóticas;
 - (viii) Formação 8: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ortogonal, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) concorrentes;
 - (ix) Formação 9: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ortogonal, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) ultraparalelas;
 - (x) Formação 10: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ortogonal, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) assintóticas;
 - (xi) Formação 11: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ortogonal, com (σ_2, σ_3) concorrente e (σ_1, σ_3) ultraparalela;
 - (xii) Formação 12: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ortogonal, com (σ_2, σ_3) concorrente e (σ_1, σ_3) assintótica;
 - (xiii) Formação 13: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ortogonal, com (σ_2, σ_3) ultraparalela e (σ_1, σ_3) assintótica;

Capítulo 4

O Problema de Congruência para Triplas de Geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$

Neste capítulo vamos encontrar invariantes que descrevem unicamente as classes de congruência, por $PO(4,1)$, de triplas ordenadas de geodésicas riemannianas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Para mais detalhes sobre grupo de isometrias do espaço hiperbólico real, ver Subseção 1.2.2.3. Segue o conceito de congruência.

Definição 4.1 *Dizemos que duas triplas ordenadas $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ de geodésicas riemannianas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ são congruentes, quando existe uma isometria $f \in PO(4,1)$ tal que $f(\sigma_j) = \sigma'_j$ para $j = 1, 2, 3$.*

Note que a congruência definida acima é uma relação de equivalência. O espaço das classes de equivalência munido da topologia quociente é denominado *espaço de configurações* de triplas ordenadas de geodésicas riemannianas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, e denotamos por $\mathcal{M}(3,4)$.

Nas seções que seguem, vamos começar verificando na Seção 4.1 a dimensão do espaço de módulos para triplas de geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Em seguida, na Seção 4.2, nos dedicamos à construção do espaço de módulos para o caso em que a tripla é genérica (ver Definição 4.2). Por fim, na Seção 4.3 tratamos do caso em que a tripla é especial.

4.1 Dimensão do Espaço de Módulos

Na Seção 2.2 fizemos um estudo sobre o problema de congruência para duplas ordenadas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Vimos que foram necessários dois invariantes (ângulo e distância) para descrever unicamente as classes de congruência, por $PO(4, 1)$, de duplas ordenadas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Para o problema de congruência de triplas ordenadas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, vamos necessitar de mais invariantes. Nossa estratégia para resolver tal problema será associar cada tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de geodésicas riemannianas, às subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) , onde cada subdupla, por sua vez, está associada ao seu respectivo conjunto bi-ortogonal. Assim, temos associado a cada tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ um conjunto de quinze pontos positivos (cinco pontos de cada conjunto bi-ortogonal). Se σ_j^\perp denota o conjunto polar da geodésica riemannianas σ_j , temos que σ_j^\perp contém seis pontos dos quinze, para cada $j \in \{1, 2, 3\}$.

Definição 4.2 *Uma tripla ordenada $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de geodésicas riemannianas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ é dita ser uma tripla genérica se as subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) são reversas. Caso contrário, $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é dita ser uma tripla especial.*

Agora vamos verificar a quantidade de parâmetros necessários para descrever unicamente as classes de congruência, por $PO(4, 1)$, de triplas genéricas de geodésicas riemannianas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Para começar, considere uma tripla genérica $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Usando o modelo do semiespaço superior (ver Subseção 1.2.2.1), identificamos $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ com o produto $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ e a fronteira $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ com $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$.

Sabemos que cada geodésica riemanniana é determinada de maneira única por seus pontos extremos. Denotemos por p_1 e p_2 os pontos extremos de σ_1 , p_3 e p_4 os pontos extremos de σ_2 e por p_5 e p_6 os pontos extremos de σ_3 . Note que $p_j \in \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, para $j = 1, \dots, 6$. Como o grupo de isometrias age transitivamente em triplas de pontos na fronteira do espaço hiperbólico real, então podemos supor, a menos de isometrias, que $p_1 = o$, $p_2 = \infty$ e $p_3 = (1, 0, 0)$. Assim, temos a priori que os pontos $p_4, p_5, p_6 \in \mathbb{R}^3$ podem ser quaisquer vetores de \mathbb{R}^3 . Dessa forma, temos um total de nove parâmetros reais. O próximo resultado nos diz que o estabilizador dos pontos p_1, p_2 e p_3 é não trivial, então vamos poder normalizar um dos pontos remanescentes.

Proposição 4.3 *O estabilizador de três pontos distintos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, no grupo $PO(4,1)$, é um grupo a 1 parâmetro.*

Prova. Considere o modelo projetivo do espaço hiperbólico real. Tome pontos $p_1, p_2, p_3 \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Podemos supor sem perda de generalidade que $p_1 = [(0, 0, 0, 1, 1)]$, $p_2 = [(0, 0, 0, -1, 1)]$ e $p_3 = [(0, 0, 1, 0, 1)]$, com levantamentos P_1, P_2 e P_3 , respectivamente. Seja $A = (g_{jk})$ uma matriz de $O(4,1)$. Se A estabiliza P_1, P_2 e P_3 , temos que A tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} .$$

onde I_3 denota a matriz identidade de ordem 3. Como A é uma matriz de $O(4,1)$, temos que o primeiro bloco de A é uma matriz de $O(2)$. Assim, podemos considerar A escrita na forma

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

onde θ representa o ângulo de rotação em torno do subespaço invariante de dimensão 3, gerado pelos pontos P_1, P_2 e P_3 . Com isso segue o resultado. ■

A proposição acima mostra que existe um elemento do grupo $Isom(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4)$ que normaliza p_4 , ou seja, que nos permite expressar o ponto p_4 nas coordenadas $(x_1, x_2, 0)$, $(x_1, 0, x_2)$ ou $(0, x_1, x_2)$ em \mathbb{R}^3 . Isso mostra que o espaço de módulos para triplas genéricas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ tem dimensão real 8.

4.2 Espaço de Módulos de Triplas Genéricas

Considere uma tripla genérica $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Temos que as subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) são reversas. Vamos denotar por $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}\}$, $\{r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ os conjuntos bi-ortogonais associados às subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) , respectivamente. Com isso, associamos cada tripla genérica $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ao conjunto $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$

de pontos positivos. Veja que $r_{ij}, p_{ij}, q_{ij} \in \sigma_i^\perp$ e $r_{ij}, p_{ji}, q_{ji} \in \sigma_j^\perp$, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. Além disso, vamos denotar por $R_{12}, P_{12}, P_{21}, Q_{12}, Q_{21}, R_{23}, P_{23}, P_{32}, Q_{23}, Q_{32}, R_{13}, P_{13}, P_{31}, Q_{13}$ e Q_{31} os levantamentos para $r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}$ e q_{31} , respectivamente. As ilustrações abaixo exprimem os posicionamentos possíveis dos conjuntos polares das geodésicas de uma tripla genérica em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. A Figura 4.1 expressa a situação em que não existe uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ que contenha a tripla genérica, e a Figura 4.2 expressa a situação em que existe $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ que contém a tripla genérica.

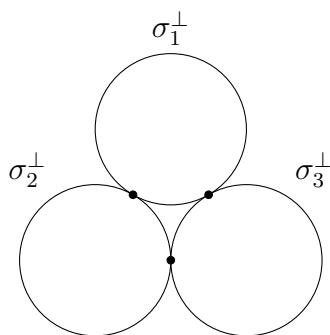


Figura 4.1: Tripla não contida em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$

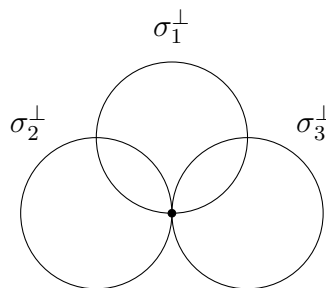


Figura 4.2: Tripla contida em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$

Veja que se (σ_i, σ_j) é uma subdupla da tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, temos que a pré-distância e o pré-ângulo são dados por $d(p_{ij}, p_{ji})$ e $d(q_{ij}, q_{ji})$, respectivamente, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. Vamos denotar tais invariantes por $d_{ij} = d(p_{ij}, p_{ji})$ e $a_{ij} = d(q_{ij}, q_{ji})$ para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. Com isso, temos a definição que segue.

Definição 4.4 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Considere as subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) . Chamamos aos d -invariantes $d_{12}, d_{13}, d_{23}, a_{12}, a_{13}$ e a_{23} de parâmetros básicos da tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.*

4.2.1 Matriz de Gram canônica para triplas genéricas

Agora vamos nos concentrar em associar cada tripla genérica de geodésicas riemannianas a uma matriz de Gram em uma forma conveniente para nossos fins. Isto é, vamos nos concentrar em recuperar as entradas da matriz de Gram associada a tal tripla, em termos de invariantes, assim como fizemos para o caso de duplas de geodésicas no Capítulo 2.

Considere uma tripla genérica $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Seja Σ_j^\perp o levantamento do conjunto polar σ_j^\perp de σ_j , para $j = 1, 2, 3$. Sabemos que Σ_j^\perp é um subespaço real positivo com dimensão 3, para $j = 1, 2, 3$. Além disso, veja que o conjunto formado pelos levantamentos R_{12}, P_{12}, Q_{12} dos pontos polares r_{12}, p_{12}, q_{12} , respectivamente, é uma base ortonormal para Σ_1^\perp . Por outro lado, o conjunto formado pelos levantamentos R_{13}, P_{13}, Q_{13} dos pontos polares r_{13}, p_{13}, q_{13} , respectivamente, também formam uma base ortonormal para Σ_1^\perp . Analogamente temos que os conjuntos $\{R_{12}, P_{21}, Q_{21}\}$ e $\{R_{23}, P_{23}, Q_{23}\}$ são bases ortonormais de Σ_2^\perp , e os conjuntos $\{R_{13}, P_{31}, Q_{31}\}$ e $\{R_{23}, P_{32}, Q_{32}\}$ são bases ortonormais para Σ_3^\perp . Como $SO(3, \Sigma_j^\perp)$ age transitivamente em pares de bases ortonormais (com mesma orientação) de Σ_j^\perp , podemos tomar elementos $T_j \in SO(3, \Sigma_j^\perp)$, com $j = 1, 2, 3$, tais que

$$T_1 : \{R_{12}, P_{12}, Q_{12}\} \rightarrow \{R_{13}, P_{13}, Q_{13}\}$$

$$T_2 : \{R_{12}, P_{21}, Q_{21}\} \rightarrow \{R_{23}, P_{23}, Q_{23}\}$$

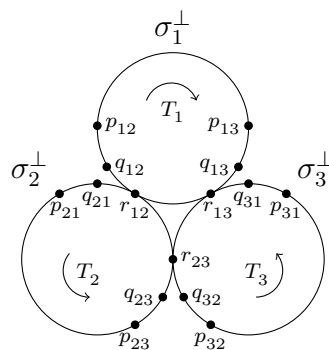
$$T_3 : \{R_{23}, P_{32}, Q_{32}\} \rightarrow \{R_{13}, P_{31}, Q_{31}\}$$

onde cada T_j pode ser escrita na forma

$$T_j = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) + \alpha_{1j}^2(1 - \cos(\theta_j)) & \alpha_{1j}\alpha_{2j}(1 - \cos(\theta_j)) - \alpha_{3j}\text{sen}(\theta_j) & \alpha_{1j}\alpha_{3j}(1 - \cos(\theta_j)) + \alpha_{2j}\text{sen}(\theta_j) \\ \alpha_{1j}\alpha_{2j}(1 - \cos(\theta_j)) + \alpha_{3j}\text{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) + \alpha_{2j}^2(1 - \cos(\theta_j)) & \alpha_{2j}\alpha_{3j}(1 - \cos(\theta_j)) - \alpha_{1j}\text{sen}(\theta_j) \\ \alpha_{1j}\alpha_{3j}(1 - \cos(\theta_j)) - \alpha_{2j}\text{sen}(\theta_j) & \alpha_{2j}\alpha_{3j}(1 - \cos(\theta_j)) + \alpha_{1j}\text{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) + \alpha_{3j}^2(1 - \cos(\theta_j)) \end{bmatrix}$$

a qual é chamada *fórmula de Rodrigues*, e conhecida como *parametrização ângulo-eixo* para matriz de rotação de ordem 3. Essa forma representa uma rotação em torno de um eixo que está na direção de um vetor unitário $\alpha_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \alpha_{3j})$, com $\alpha_{1j}^2 + \alpha_{2j}^2 + \alpha_{3j}^2 = 1$, e com ângulo de rotação θ_j , para $j = 1, 2, 3$.

Definição 4.5 Chamamos os parâmetros $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \alpha_{3j}$ e θ_j , para $j = 1, 2, 3$, de *ângulos de transição*.



Observação 4.6 *O Teorema de Witt nos permite estender a aplicação $T_j \in SO(3, \Sigma_j^\perp)$ para uma aplicação de $SO(4, 1)$, para $j = 1, 2, 3$.*

A ideia agora é recuperar as entradas da matriz de Gram dos pontos $r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}$, em termos desses dezoito parâmetros que temos, ou seja, em termos dos seis parâmetros básicos dados na Definição 4.4 e dos doze ângulos de transição dados na Definição 4.5. Para tanto, note que uma parte da matriz de Gram foi recuperada em termos dos parâmetros básicos no Capítulo 2, ou seja, recuperamos as entradas dos blocos formados pelos levantamentos dos elementos dos conjuntos $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}\}$, $\{r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, onde tais blocos são dados respectivamente por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{12}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{12}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{a_{12}} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{23}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{23}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{a_{23}} & 1 \end{bmatrix} \quad e$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{13}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{13}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{a_{13}} & 1 \end{bmatrix}$$

onde $d_{12}, d_{13}, d_{23} > 1$ e $0 \leq a_{12}, a_{13}, a_{23} < 1$.

Por outro lado, podemos recuperar as entradas remanescentes usando as aplicações T_j , com $j = 1, 2, 3$. Por exemplo, para recuperar a entrada $\langle Q_{23}, P_{13} \rangle$, temos dos produtos

$$[R_{13} \quad P_{13} \quad Q_{13}] = [R_{12} \quad P_{12} \quad Q_{12}] T_1 \quad e \quad [R_{23} \quad P_{23} \quad Q_{23}] = [R_{12} \quad P_{21} \quad Q_{21}] T_2$$

que Q_{23} e P_{13} possuem expressões:

$$\begin{aligned} Q_{23} &= R_{12}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2)) + P_{21}(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2)) \\ &+ Q_{21}(\cos(\theta_2) + \alpha_{32}^2(1 - \cos(\theta_2))) ; \end{aligned}$$

$$P_{13} = R_{12}(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1)) + P_{12}(\cos(\theta_1) + \alpha_{21}^2(1 - \cos(\theta_1))) \\ + Q_{12}(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1)) .$$

Consequentemente

$$\langle Q_{23}, P_{13} \rangle = [(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1))] \\ + \sqrt{d_{12}} [(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_1) + \alpha_{21}^2(1 - \cos(\theta_1)))] \\ + \sqrt{a_{12}} [(\cos(\theta_2) + \alpha_{32}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1))]$$

obtendo dessa forma uma expressão para $\langle Q_{23}, P_{13} \rangle$ que depende apenas dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição. As demais entradas da matriz de Gram podem ser recuperadas da mesma forma (ver Apêndice B). Com isso temos o próximo resultado.

Teorema 4.7 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, e considere $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ o conjunto de pontos positivos, associado à tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Então existem levantamentos para os elementos de tal conjunto, de forma que a matriz de Gram G associada a esses levantamentos é dada por:*

$$G = \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & \sqrt{d_{12}} & 0 & 0 & & \\ 0 & \sqrt{d_{12}} & 1 & 0 & 0 & E_1 & E_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{12}} & & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{a_{12}} & 1 & & \\ \hline & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & \sqrt{d_{23}} & 0 & 0 \\ & E_1 & & & & 0 & \sqrt{d_{23}} & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{23}} \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & \sqrt{a_{23}} & 1 \\ \hline & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 1 & \sqrt{d_{13}} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & \sqrt{d_{13}} & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{13}} \\ & E_2 & & & & E_3 & & & & 0 & 0 & 0 & \sqrt{a_{13}} & 1 \end{array} \right]$$

onde $1 < d_{12}, d_{13}, d_{23}$ e $0 \leq a_{12}, a_{13}, a_{23} < 1$, e os blocos E_1 , E_2 e E_3 possuem entradas recuperadas em termos dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição.

Definição 4.8 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, associada ao conjunto $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ de pontos positivos. Chamamos a matriz G , obtida no Teorema 4.7, de matriz de Gram canônica para uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.*

Uma outra forma de recuperar as entradas da matriz de Gram G , em termos de invariantes, é usando a decomposição dada por Euler em que cada elemento de $SO(3)$ pode ser escrito como produto de três rotações, sendo a primeira sobre o eixo z , a segunda sobre o eixo y e a terceira sobre o eixo z , nesta ordem (ver Seção 5.1 em [4]), com y e z denotando dois dos eixos coordenados. Ou seja, podemos escrever a aplicação dada acima $T_j \in SO(3, \Sigma_j^\perp)$, com $j = 1, 2, 3$, como o produto $T_j = A_{1j}A_{2j}A_{3j}$, para $j = 1, 2, 3$, onde

$$A_{1j} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{1j}) & -\text{sen}(\theta_{1j}) & 0 \\ \text{sen}(\theta_{1j}) & \cos(\theta_{1j}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{2j} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{2j}) & 0 & \text{sen}(\theta_{2j}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_{2j}) & 0 & \cos(\theta_{2j}) \end{bmatrix}$$

$$\text{e } A_{3j} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{3j}) & -\text{sen}(\theta_{3j}) & 0 \\ \text{sen}(\theta_{3j}) & \cos(\theta_{3j}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos um total de nove ângulos de transição denotados por θ_{1j} , θ_{2j} e θ_{3j} , para $j = 1, 2, 3$. Com isso, podemos escrever as entradas de G em termos dos seis parâmetros básicos dados na Definição 4.4 e dos nove ângulos de transição obtidos da decomposição de Euler, totalizando quinze parâmetros. Por exemplo, para recuperar a entrada $\langle Q_{23}, P_{13} \rangle$, temos dos produtos

$$[R_{13} \quad P_{13} \quad Q_{13}] = [R_{12} \quad P_{12} \quad Q_{12}] T_1 \quad \text{e} \quad [R_{23} \quad P_{23} \quad Q_{23}] = [R_{12} \quad P_{21} \quad Q_{21}] T_2$$

que Q_{23} e P_{13} possuem expressões

$$Q_{23} = R_{12}(\cos(\theta_{12})\text{sen}(\theta_{22})) + P_{21}(\text{sen}(\theta_{12})\text{sen}(\theta_{22})) + Q_{21}(\cos(\theta_{22}))$$

e

$$P_{13} = R_{12}(-\cos(\theta_{11})\cos(\theta_{21})\text{sen}(\theta_{31}) - \cos(\theta_{31})\text{sen}(\theta_{11})) + P_{12}(-\cos(\theta_{21})\text{sen}(\theta_{11})\text{sen}(\theta_{31}) \\ + \cos(\theta_{11})\cos(\theta_{31})) + Q_{12}(\text{sen}(\theta_{21})\text{sen}(\theta_{31})) \quad ,$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned}\langle Q_{23}, P_{13} \rangle &= [(\cos(\theta_{12})\text{sen}(\theta_{22}))(-\cos(\theta_{11})\cos(\theta_{21})\text{sen}(\theta_{31}) - \cos(\theta_{31})\text{sen}(\theta_{11}))] \\ &+ \sqrt{d_{12}} [(\text{sen}(\theta_{12})\text{sen}(\theta_{22}))(-\cos(\theta_{21})\text{sen}(\theta_{11})\text{sen}(\theta_{31}) + \cos(\theta_{11})\cos(\theta_{31}))] \\ &+ \sqrt{a_{12}} [(\cos(\theta_{22}))(\text{sen}(\theta_{21})\text{sen}(\theta_{31}))]\end{aligned}$$

obtendo dessa forma uma expressão para $\langle Q_{23}, P_{13} \rangle$ que depende apenas dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição obtidos da decomposição de Euler. As demais entradas da matriz de Gram podem ser recuperadas da mesma forma. Veja que isso nos dá um resultado similar ao Teorema 4.7.

Observação 4.9 *Embora pela decomposição de Euler obtemos nove ângulos de transição, essa quantidade de parâmetros é equivalente à quantidade de parâmetros obtidos pela fórmula de Rodrigues. Note que, apesar de obtermos pela fórmula de Rodrigues doze ângulos de transição, temos três relações imediatas entre tais parâmetros, ou seja, $\alpha_{1j}^2 + \alpha_{2j}^2 + \alpha_{3j}^2 = 1$ para $j = 1, 2, 3$.*

Veja que, usando a decomposição de Euler, obtemos as igualdades:

$$\begin{aligned}\langle Q_{12}, Q_{13} \rangle &= \cos(\theta_{21}) \\ \langle Q_{21}, Q_{23} \rangle &= \cos(\theta_{22}) \\ \langle Q_{32}, Q_{31} \rangle &= \cos(\theta_{23})\end{aligned}$$

e conseqüentemente, $d(q_{12}, q_{13}) = \cos^2(\theta_{21})$, $d(q_{21}, q_{23}) = \cos^2(\theta_{22})$ e $d(q_{32}, q_{31}) = \cos^2(\theta_{23})$. Por outro lado, temos que $q_{12}, q_{13} \in \sigma_1^\perp$, $q_{21}, q_{23} \in \sigma_2^\perp$ e $q_{32}, q_{31} \in \sigma_3^\perp$. Segue da Proposição 2.37 que os hiperplanos, q_{12}^\perp e q_{13}^\perp , contêm a geodésica riemanniana σ_1 , e portanto o d -invariante $d(q_{12}, q_{13})$ define ângulo entre os hiperplanos q_{12}^\perp e q_{13}^\perp . O mesmo acontece para $q_{21}, q_{23} \in \sigma_2^\perp$ e $q_{32}, q_{31} \in \sigma_3^\perp$. Assim, temos que $d(q_{12}, q_{13})$, $d(q_{21}, q_{23})$ e $d(q_{32}, q_{31})$ definem os ângulos de transição θ_{21} , θ_{22} e θ_{23} , dados pela decomposição de Euler.

Teorema 4.10 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Então os seis parâmetros básicos junto com os doze ângulos de transição obtidos da fórmula de Rodrigues definem unicamente a classe de congruência por $PO(4, 1)$ das triplas genéricas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.*

Prova. Sejam $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ e G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Pela construção de G temos que as entradas são recuperadas de maneira única em termos dos respectivos parâmetros básicos e ângulos de transição. Sejam $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, o conjunto de pontos positivos associado à tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, e W o espaço gerado por levantamentos dos elementos de tal conjunto. Veja que W é não degenerado. De fato, se $R_{12}, P_{12}, P_{21}, Q_{12}$ e Q_{21} são levantamentos para os pontos $r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}$, respectivamente, temos que o subconjunto $\{R_{12}, P_{12}, P_{21}, Q_{12}, Q_{21}\} \subset W$ é uma base para W e conseqüentemente $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{R_{12}, P_{12}, P_{21}, Q_{12}, Q_{21}\} = V_{\mathbb{R}}^{4,1}$ (ver Proposição 2.65). Segue que W é não degenerado. Além disso, se $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ é uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ com G' sendo a matriz de Gram canônica associada a tal tripla, e se G' é recuperada com os mesmos parâmetros básicos e mesmos ângulos de transição dados nas entradas de G , temos que $G = G'$. Analogamente, para dado $\{r'_{12}, p'_{12}, p'_{21}, q'_{12}, q'_{21}, r'_{23}, p'_{23}, p'_{32}, q'_{23}, q'_{32}, r'_{13}, p'_{13}, p'_{31}, q'_{13}, q'_{31}\}$, o conjunto de pontos positivos associado à tripla $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$, com W' sendo o espaço gerado por levantamentos dos elementos de tal conjunto, temos que W' é não degenerado. O resultado segue da Proposição 1.32. ■

Observação 4.11 *Um resultado análogo ao Teorema 4.10 pode ser obtido para ângulos de transição dados pela decomposição de Euler.*

Vimos que a dimensão do espaço de módulos para triplas genéricas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ é 8. Entretanto, segundo o Teorema 4.10, dezoito parâmetros definem unicamente a classe de congruência, por $PO(4, 1)$, das triplas genéricas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Dessa forma, apresentamos dez equações independentes que relacionam os dezoito parâmetros dados no Teorema 4.10. Pela Observação 4.9 temos três equações denotadas por $\alpha_{1j}^2 + \alpha_{2j}^2 + \alpha_{3j}^2 = 1$ para $j = 1, 2, 3$. As outras sete equações foram construídas no Apêndice B, e são denotadas por:

$$\begin{aligned}
D_{1 \times 6} &= [\cos(\theta_2) + \alpha_{12}^2(1 - \cos(\theta_2))] \\
&- [(\cos(\theta_1) + \alpha_{11}^2(1 - \cos(\theta_1)))(\cos(\theta_3) + \alpha_{13}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
&+ \sqrt{d_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{a_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{1 \times 11} &= [\cos(\theta_1) + \alpha_{11}^2(1 - \cos(\theta_1))] \\
&- [(\cos(\theta_2) + \alpha_{12}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\cos(\theta_3) + \alpha_{13}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
&+ \sqrt{d_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{a_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{6 \times 11} &= [\cos(\theta_3) + \alpha_{13}^2(1 - \cos(\theta_3))] \\
&- [(\cos(\theta_2) + \alpha_{12}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\cos(\theta_1) + \alpha_{11}^2(1 - \cos(\theta_1))) \\
&+ \sqrt{d_{12}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1)) \\
&+ \sqrt{a_{12}}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{1 \times 8} &= [\sqrt{d_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))] \\
&- [(\cos(\theta_1) + \alpha_{11}^2(1 - \cos(\theta_1)))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{d_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1))(\cos(\theta_3) + \alpha_{23}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
&+ \sqrt{a_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{1 \times 10} &= [\sqrt{a_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))] \\
&- [(\cos(\theta_1) + \alpha_{11}^2(1 - \cos(\theta_1)))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3))] \\
&+ \sqrt{d_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{a_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))(\cos(\theta_3) + \alpha_{33}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{1 \times 13} &= [\sqrt{d_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1))] \\
&- [(\cos(\theta_2) + \alpha_{12}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3))] \\
&+ \sqrt{d_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_3) + \alpha_{23}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
&+ \sqrt{a_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{1 \times 15} &= [\sqrt{a_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))] \\
&- [(\cos(\theta_2) + \alpha_{12}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3))] \\
&+ \sqrt{d_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{a_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_3) + \alpha_{33}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde a notação $D_{k \times l}$ denota a relação obtida da subtração das duas expressões decorrentes da aplicação da forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no ponto da linha k com o ponto da coluna l da matriz de Gram em questão (ver Apêndice B para mais detalhes).

4.2.2 Matriz de Gram canônica para triplas genéricas contidas em um $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$

Considere uma tripla genérica $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Temos que as subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) são reversas. Vimos no Lema 2.43 que as intersecções $\sigma_1^\perp \cap \sigma_2^\perp$, $\sigma_2^\perp \cap \sigma_3^\perp$ e $\sigma_1^\perp \cap \sigma_3^\perp$ são pontos do espaço projetivo. Denote tais pontos por $r_{ij} = \sigma_i^\perp \cap \sigma_j^\perp$, para $i, j = 1, 2, 3$ e $i \neq j$. Veja que temos duas possibilidades, ou $r_{12} \neq r_{23}$, $r_{23} \neq r_{13}$ e $r_{12} \neq r_{13}$, ou $r_{12} = r_{23} = r_{13}$. No primeiro caso, temos que a tripla genérica

$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ não está contida em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Entretanto, no segundo caso, temos que a tripla genérica $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ está contida em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, e tal $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ é dado pelo complemento ortogonal do ponto $r_{12} = r_{23} = r_{13}$. Nesta subseção vamos trabalhar com o caso em que a tripla genérica está contida em um $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.

Observação 4.12 *Observe que denotamos por $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}\}$, $\{r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ os conjuntos bi-ortogonais associados às subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) , respectivamente. Assim, associamos cada tripla genérica $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, contida em um $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, ao conjunto de pontos positivos $\{r, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, com $r = r_{12} = r_{23} = r_{13}$, e denotamos por $R, P_{12}, P_{21}, Q_{12}, Q_{21}, P_{23}, P_{32}, Q_{23}, Q_{32}, P_{13}, P_{31}, Q_{13}$ e Q_{31} os levantamentos de $r, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}$ e q_{31} , respectivamente.*

Veja que $r, p_{ij}, q_{ij} \in \sigma_i^\perp$, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. Além disso, o conjunto dos levantamentos R, P_{12}, Q_{12} dos pontos polares r, p_{12}, q_{12} , respectivamente, é uma base ortonormal para Σ_1^\perp . Por outro lado, o conjunto formado pelos levantamentos R, P_{13}, Q_{13} dos pontos polares r, p_{13}, q_{13} , respectivamente, também é uma base ortonormal para Σ_1^\perp . Analogamente temos que os conjuntos $\{R, P_{21}, Q_{21}\}$ e $\{R, P_{23}, Q_{23}\}$ são bases ortonormais de Σ_2^\perp , e os conjuntos $\{R, P_{31}, Q_{31}\}$ e $\{R, P_{32}, Q_{32}\}$ são bases ortonormais para Σ_3^\perp . Usando a fórmula de Rodrigues, temos que a matriz T_j tem a expressão

$$T_j = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) + \alpha_{1j}^2(1 - \cos(\theta_j)) & \alpha_{1j}\alpha_{2j}(1 - \cos(\theta_j)) - \alpha_{3j}\text{sen}(\theta_j) & \alpha_{1j}\alpha_{3j}(1 - \cos(\theta_j)) + \alpha_{2j}\text{sen}(\theta_j) \\ \alpha_{1j}\alpha_{2j}(1 - \cos(\theta_j)) + \alpha_{3j}\text{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) + \alpha_{2j}^2(1 - \cos(\theta_j)) & \alpha_{2j}\alpha_{3j}(1 - \cos(\theta_j)) - \alpha_{1j}\text{sen}(\theta_j) \\ \alpha_{1j}\alpha_{3j}(1 - \cos(\theta_j)) - \alpha_{2j}\text{sen}(\theta_j) & \alpha_{2j}\alpha_{3j}(1 - \cos(\theta_j)) + \alpha_{1j}\text{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) + \alpha_{3j}^2(1 - \cos(\theta_j)) \end{bmatrix}$$

para $j = 1, 2, 3$. Entretanto, nesse caso T_j deixa o levantamento do ponto r fixado, para $j = 1, 2, 3$. Isso nos permite eliminar alguns parâmetros.

Proposição 4.13 *Uma tripla genérica $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, está contida em uma cópia de um $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ se, e somente se, os ângulos de transição obtidos da fórmula de Rodrigues satisfazem $\alpha_{1j} = \pm 1$, $\alpha_{2j} = 0$ e $\alpha_{3j} = 0$, para $j = 1, 2, 3$.*

Prova. Considere a tripla genérica $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, contida em uma cópia de um $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, associada ao conjunto de pontos positivos $\{r, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$.

Seja T_j obtida através da fórmula de Rodrigues, para $j = 1, 2, 3$. Temos que T_j deixa o levantamento do ponto projetivo r fixado se, e somente se, as seguintes entradas satisfazem às condições:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_j) + \alpha_{1j}^2(1 - \cos(\theta_j)) &= 1 \\ \alpha_{1j}\alpha_{2j}(1 - \cos(\theta_j)) + \alpha_{3j}\text{sen}(\theta_j) &= 0 \\ \alpha_{1j}\alpha_{3j}(1 - \cos(\theta_j)) - \alpha_{2j}\text{sen}(\theta_j) &= 0 \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, 3$. Por outro lado, se T_j deixa o levantamento de r fixado, então a inversa T_j^{-1} também o deixa. Consequentemente, as seguintes entradas satisfazem às condições:

$$\begin{aligned} \alpha_{1j}\alpha_{2j}(1 - \cos(\theta_j)) - \alpha_{3j}\text{sen}(\theta_j) &= 0 \\ \alpha_{1j}\alpha_{3j}(1 - \cos(\theta_j)) + \alpha_{2j}\text{sen}(\theta_j) &= 0 \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, 3$. Além disso, note que $\theta_j \neq 0$, pois as bases em questão são distintas, e lembre que a condição $\alpha_{1j}^2 + \alpha_{2j}^2 + \alpha_{3j}^2 = 1$ é satisfeita para $j = 1, 2, 3$. Assim, temos que as condições dadas são satisfeitas se, e somente se, $\alpha_{1j} = \pm 1$, $\alpha_{2j} = 0$ e $\alpha_{3j} = 0$, para $j = 1, 2, 3$.

■

Pela Proposição 4.13, temos que a aplicação $T_j \in SO(3, \Sigma_j^\perp)$, tal que

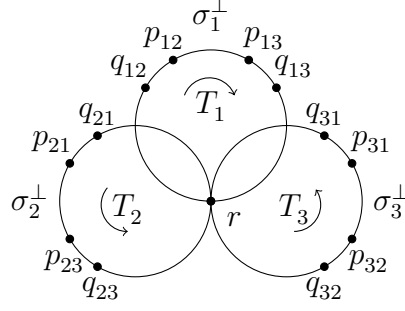
$$\begin{aligned} T_1 &: \{R, P_{12}, Q_{12}\} \rightarrow \{R, P_{13}, Q_{13}\} \\ T_2 &: \{R, P_{21}, Q_{21}\} \rightarrow \{R, P_{23}, Q_{23}\} \\ T_3 &: \{R, P_{32}, Q_{32}\} \rightarrow \{R, P_{31}, Q_{31}\} \end{aligned}$$

pode ser escrita na forma

$$T_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_j) & -\text{sen}(\theta_j) \\ 0 & \text{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{bmatrix}$$

considerando $\alpha_{1j} = 1$, $\alpha_{2j} = 0$ e $\alpha_{3j} = 0$, para $j = 1, 2, 3$. Se $\alpha_{1j} = -1$ temos que

$$T_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_j) & \text{sen}(\theta_j) \\ 0 & -\text{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{bmatrix} .$$



Podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha_{1j} = 1$. Assim, podemos expressar em termos de parâmetros básicos, e do ângulo de transição θ_j , as entradas da matriz de Gram dos levantamentos dos elementos do conjunto $\{r, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ que está associado à tripla genérica $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Por exemplo, para recuperar a entrada $\langle Q_{23}, P_{13} \rangle$, temos dos produtos

$$[R \ P_{23} \ Q_{23}] = [R \ P_{21} \ Q_{21}] T_2 \quad e \quad [R \ P_{13} \ Q_{13}] = [R \ P_{12} \ Q_{12}] T_1$$

que Q_{23} e P_{13} possuem expressões

$$Q_{23} = R - P_{21} \text{sen}(\theta_2) + Q_{21} \text{cos}(\theta_2) \quad e \quad P_{13} = R + P_{12} \text{cos}(\theta_1) + Q_{12} \text{sen}(\theta_1),$$

e conseqüentemente

$$\langle Q_{23}, P_{13} \rangle = 1 - \sqrt{d_{12}} \text{sen}(\theta_2) \text{cos}(\theta_1) + \sqrt{a_{12}} \text{cos}(\theta_2) \text{sen}(\theta_1).$$

As demais entradas da matriz de Gram podem ser recuperadas da mesma forma. Com isso, temos o próximo resultado.

Teorema 4.14 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ contida em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, e considere $\{r, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ o conjunto de pontos positivos, associado à tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Então existem levantamentos para os elementos de tal conjunto, de forma que a matriz de Gram G associada a esses levantamentos é dada por:*

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{G} \end{bmatrix}$$

definem unicamente a classe de congruência por $PO(4, 1)$, das triplas genéricas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ contidas em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Dessa forma, precisamos de três equações independentes que relacionam os nove parâmetros dados no Teorema 4.16. Essas equações podem ser obtidas através do cálculo de determinantes dos menores principais da matriz de Gram dada no Teorema 4.14, fazendo um procedimento similar ao que foi feito no fim da Subseção 3.2.1 para triplas genéricas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$.

4.2.3 Construção do espaço de módulos para triplas genéricas

Dividimos esta subseção em duas partes. Na primeira construímos o espaço de módulos para triplas genéricas de geodésicas riemannianas que não estão contidas em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Na segunda parte estudamos sobre o caso em que as triplas genéricas estão contidas em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.

4.2.3.1 Construção para triplas genéricas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$

Sejam $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ e G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla (ver Teorema 4.7). Denote por $\mathcal{M}^g(3, 4)$ o espaço de configurações de triplas genéricas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Os elementos de $\mathcal{M}^g(3, 4)$ são classes denotadas por $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$. Defina a aplicação

$$\tau : \mathcal{M}^g(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^{18}$$

que associa cada classe $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$ aos respectivos parâmetros básicos e ângulos de transição, ou seja, ao ponto $(d_{12}, d_{13}, d_{23}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}, \alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}) \in \mathbb{R}^{18}$.

Notação 4.18 *Vamos denotar as uplas de invariantes por:*

$$(d, a, \theta, \alpha) = (d_{12}, d_{13}, d_{23}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}, \alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}) .$$

Por fim, defina o conjunto

$$\mathbb{M}^g(3, 4) = \{(d, a, \theta, \alpha) \in \mathbb{R}^{18}; 1 < d, 0 \leq a < 1, 0 < \theta < \pi, \alpha_{1j}^2 + \alpha_{2j}^2 + \alpha_{3j}^2 = 1, D_{k \times l} = 0\}$$

onde $j = 1, 2, 3$ e $D_{k \times l}$ denota as relações explicitadas no final da Subseção 4.2.1. Veja que $\mathbb{M}^g(3, 4)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^{18} é um espaço topológico. Com isso, temos o próximo resultado.

Teorema 4.19 *O espaço de configurações $\mathcal{M}^g(3, 4)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}^g(3, 4)$.*

Prova. Pelas condições de determinante dadas na Proposição 1.29 (considerando a proposição sobre o corpo dos reais e com $n = 4$) e pelo Teorema 4.7, temos que a aplicação $\tau : \mathcal{M}^g(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^{18}$ dada acima define uma aplicação $\tau : \mathcal{M}^g(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}^g(3, 4)$. Usando o Teorema 4.10, temos que $\tau : \mathcal{M}^g(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}^g(3, 4)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(d, a, \theta, \alpha) \in \mathbb{M}^g(3, 4)$, usando as fórmulas que obtemos para as entradas da matriz de Gram obtida no Teorema 4.7, podemos considerar G em termos dos seis parâmetros básicos e dos doze ângulos de transição, com $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 15$. Segue da Proposição 1.29 (sobre o corpo dos reais e com $n = 4$) que G assim construída, é a matriz de Gram canônica de alguma tripla genérica de geodésicas riemannianas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Logo $\tau : \mathcal{M}^g(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}^g(3, 4)$ é sobrejetiva, e consequentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}^g(3, 4)$ da topologia induzida de \mathbb{R}^{18} , temos que $\tau : \mathcal{M}^g(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}^g(3, 4)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 4.20 *Chamamos $\mathbb{M}^g(3, 4)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}^g(3, 4)$.*

4.2.3.2 Construção para triplas genéricas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ contidas em um $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$

Sejam $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ contida em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, e G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla (ver Teorema 4.14). Denote por $\mathcal{M}_0^g(3, 4)$ o espaço de configurações de triplas genéricas de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ contidas em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Os elementos de $\mathcal{M}_0^g(3, 4)$ são classes denotadas por $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$. Defina a aplicação

$$\tau : \mathcal{M}_0^g(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^9$$

que associa cada classe $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$ aos respectivos parâmetros básicos e ângulos de transição, ou seja, ao ponto $(d_{12}, d_{13}, d_{23}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^9$.

Notação 4.21 *Vamos denotar as uplas de invariantes por:*

$$(d, a, \theta) = (d_{12}, d_{13}, d_{23}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, \theta_1, \theta_2, \theta_3) .$$

Por fim, defina o conjunto

$$\mathbb{M}_0^g(3, 4) = \{(d, a, \theta) \in \mathbb{R}^9; 1 < d, 0 \leq a < 1, 0 < \theta < \pi, D_k = 0, k = 1, 2, 3\}$$

onde D_k é uma relação obtida de maneira análoga ao que foi feito na Seção 3.2 (ver Subseção 3.2.1 e Subseção 3.2.2), com $k = 1, 2, 3$. Veja que $\mathbb{M}_0^g(3, 4)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^9 é um espaço topológico. Com isso, temos o próximo resultado.

Teorema 4.22 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_0^g(3, 4)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}_0^g(3, 4)$.*

Prova. A prova é similar à demonstração do Teorema 4.19 (ver Teorema 3.10). ■

Definição 4.23 *Chamamos $\mathbb{M}_0^g(3, 4)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_0^g(3, 4)$.*

Observação 4.24 *Uma vez que temos a tripla genérica de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ contida em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, as relações $D_{k \times l}$ dadas no final da Subseção 4.2.1 não podem ser usadas. De fato, como a tripla está contida em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, temos pela Proposição 4.13 que tais relações se tornam triviais, do tipo $0 = 0$. Uma outra forma de notar esse fato é através da construção do conjunto de pontos positivos, associado à tripla em questão, e da maneira que são construídas tais relações.*

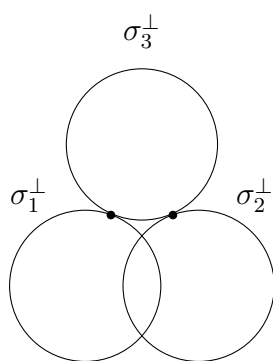
4.3 Espaço de Módulos de Triplas Especiais

Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla especial de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Vimos que para uma tripla ser chamada de especial, é preciso que pelo menos uma das subduplas, (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) ou (σ_1, σ_3) , associada a tal tripla seja formada por geodésicas riemannianas coplanares (ver Definição 4.2). Dessa forma, vamos dedicar esta seção ao estudo dos seguintes casos:

- (i) Caso em que uma subdupla é coplanar, as outras duas são reversas e não existe $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ que contenha a tripla, chamado de *caso quase genérico tipo 1*;
- (ii) Caso em que uma subdupla é coplanar, as outras duas são reversas e existe $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ que contém a tripla, chamado de *caso quase genérico tipo 2*;
- (iii) Caso em que duas subduplas são coplanares e uma das subduplas é reversa, chamado de *caso quase coplanar*;
- (iv) Caso em que as três subduplas são coplanares, mas não existe $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ que contenha a tripla, chamado de *caso duas a duas coplanar*;
- (v) Caso em que as três subduplas são coplanares, e existe $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ que contém a tripla, chamado de *caso coplanar*.

4.3.1 Triplas quase genéricas tipo 1

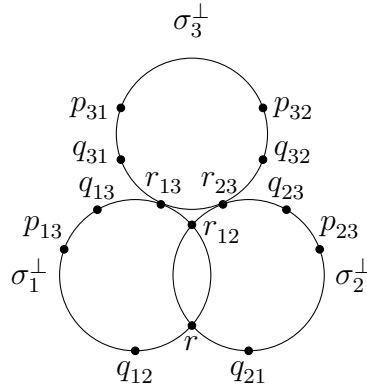
Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla especial de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Suponha que a tripla seja quase genérica tipo 1. Vamos supor também nesta subseção, sem perda de generalidade, que (σ_1, σ_2) é a subdupla coplanar, e que (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) são as subduplas reversas. Segue abaixo um desenho que ilustra o posicionamento dos conjuntos polares no caso em questão.



Exemplo 4.25 *Sejam os subespaços de $V_{\mathbb{R}}^{4,1}$ denotados por $\Sigma_1 = \{(X_1, 0, 0, X_2, 2X_1); X_1, X_2 \in \mathbb{R}\}$, $\Sigma_2 = \{(Y_1, Y_2, 0, 0, 2Y_1); Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}\}$, $\Sigma_3 = \{(0, 0, Z_1, 0, Z_2); Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}\}$. Considere a tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, onde $\sigma_j = \pi(\Sigma_j - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, para $j = 1, 2, 3$. Temos que a tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$*

é uma tripla quase genérica tipo 1 em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Note que nesse caso a tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ não está contida em nenhuma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.

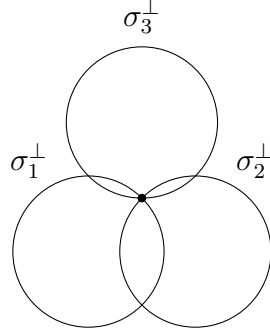
Agora, como estamos supondo que a subdupla (σ_1, σ_2) é coplanar, temos associado a ela um conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, r\}$, se for ultraparalela, e por $\{r_{12}, r, q_{12}, q_{21}\}$, se for concorrente ou assintótica. Por outro lado, como as subduplas (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) são reversas, associamos a elas os conjuntos bi-ortogonais $\{r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, respectivamente. Com isso, associamos cada tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ao conjunto $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, r, r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, se a dupla (σ_1, σ_2) for ultraparalela, e ao conjunto $\{r_{12}, r, q_{12}, q_{21}, r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, se a dupla (σ_1, σ_2) for concorrente ou assintótica (caso ilustrado abaixo em termos de conjuntos polares).



Veja que a construção do espaço de módulos para este caso é feita de maneira similar ao caso genérico apresentado acima. A diferença é que neste caso vamos ter pelo menos um dos parâmetros básicos com valor 1 (ver Proposição 2.64). Em outras palavras, o ângulo ou a distância (ou ambos) entre as geodésicas riemannianas de uma subdupla é 0.

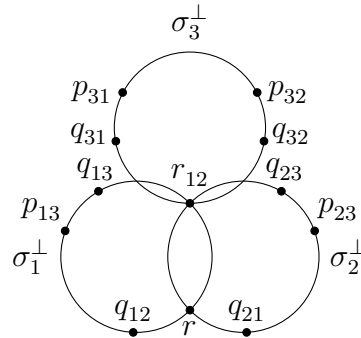
4.3.2 Tripas quase genéricas tipo 2

Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla especial de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Além disso, suponha que a tripla seja quase genérica tipo 2. Vamos supor também nesta subseção, sem perda de generalidade, que (σ_1, σ_2) é a subdupla coplanar, e que (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) são as subduplas reversas. Segue abaixo um desenho que ilustra o posicionamento dos conjuntos polares no caso em questão.



Exemplo 4.26 *Sejam os subespaços de $V_{\mathbb{R}}^{4,1}$ denotados por $\Sigma_1 = \{(X_1, 0, 0, X_2, 2X_1); X_1, X_2 \in \mathbb{R}\}$, $\Sigma_2 = \{(Y_1, Y_2, 0, 0, 2Y_1); Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}\}$ e $\Sigma_3 = \{(0, Z_1, 0, Z_2, 2(Z_1 + Z_2)); Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}\}$. Considere a tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, onde $\sigma_j = \pi(\Sigma_j - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, para $j = 1, 2, 3$. Temos que a tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é uma tripla quase genérica tipo 2 em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Note que a tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ está contida em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Tal cópia é dada pela projeção $\pi(W \cap V_-)$, onde $W = \{(X_1, X_2, 0, X_3, X_4); X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathbb{R}\}$.*

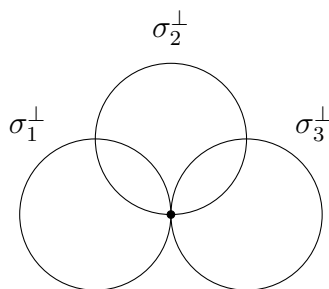
Da mesma forma que fizemos para o caso quase genérico tipo 1, aqui também associamos a cada tripla, um conjunto de pontos positivos. Note que para o caso em questão, temos $r_{12} = r_{13} = r_{23} = \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3$. Como a subdupla (σ_1, σ_2) é coplanar, temos associado a ela um conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, r\}$, se for ultraparalela, e por $\{r_{12}, r, q_{12}, q_{21}\}$, se for concorrente ou assintótica. Por outro lado, como as subduplas (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) são reversas, associamos a elas os conjuntos bi-ortogonais $\{r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, respectivamente. Usando o fato de que $r_{12} = r_{13} = r_{23}$, associamos cada tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ao conjunto $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, r, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, se a dupla (σ_1, σ_2) for ultraparalela, e ao conjunto $\{r_{12}, r, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, se a dupla (σ_1, σ_2) for concorrente ou assintótica (caso ilustrado abaixo em termos de conjuntos polares).



A construção do espaço de módulos para este caso é feita de maneira similar ao caso genérico apresentado acima. Assim como no caso quase genérico tipo 1, neste caso vamos ter pelo menos um dos parâmetros básicos com valor 1 (ver Proposição 2.64). Em outras palavras, o ângulo ou a distância (ou ambos) entre as geodésicas riemannianas de uma subdupla é 0. Veja que este caso se resume ao caso quase genérico comentado na Subseção 3.3.1.

4.3.3 Triplas quase coplanares

Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla especial de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Além disso, suponha que a tripla seja quase coplanar, ou seja, caso em que duas subduplas são coplanares e uma subdupla é reversa. Considerando que as subduplas (σ_1, σ_2) e (σ_2, σ_3) são coplanares e que a subdupla (σ_1, σ_3) é reversa, temos abaixo um desenho que ilustra o posicionamento dos conjuntos polares no caso em questão.

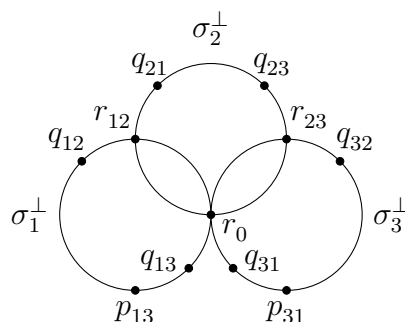


Exemplo 4.27 *Sejam os subconjuntos $\Sigma_1 = \{(X_1, X_2, 0, 0, X_1\sqrt{2}); X_1, X_2 \in \mathbb{R}\}$ e $\Sigma_2 = \{(0, 0, Y_1, Y_2, Y_2\sqrt{2}); Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}\}$ de $V_{\mathbb{R}}^{4,1}$. Considere a geodésica riemanniana perpendicular comum a $\sigma_1 = \pi(\Sigma_1) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ e $\sigma_2 = \pi(\Sigma_2) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ dada por $\sigma_{12} = \pi(\Sigma_{12}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, onde $\Sigma_{12} = \{(Z_1, 0, 0, Z_2, (Z_1+Z_2)\sqrt{2}); Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}\}$. Veja que esse é um exemplo de tripla quase coplanar tal que a subdupla (σ_1, σ_2) é reversa e as demais são coplanares.*

Da mesma forma que fizemos para os demais casos, aqui também associamos a cada tripla, um conjunto de pontos positivos. Vimos que para uma subdupla coplanar (σ_j, σ_k) , podemos associar a ela o conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{jk}, r, q_{jk}, q_{kj}\}$, se a subdupla em questão for concorrente ou assintótica, e associar a ela o conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{jk}, p_{jk}, p_{kj}, r\}$, se a subdupla em questão for ultraparalela. Por outro lado, se a

subdupla (σ_j, σ_k) é reversa, podemos associar a ela um conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{jk}, p_{jk}, p_{kj}, q_{jk}, q_{kj}\}$.

Assim, supondo por exemplo que as subduplas (σ_1, σ_2) e (σ_2, σ_3) são concorrentes ou assintóticas, e (σ_1, σ_3) é reversa, podemos associar à tripla especial $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ o conjunto de pontos positivos $\{r_{12}, r, q_{12}, q_{21}, r_{23}, r', q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$. Note que para o caso em questão podemos considerar $r = r' = r_{13}$ e denotar tal ponto por r_0 . Dessa forma, vamos denotar o conjunto de pontos positivos associado à tripla especial $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, tal que (σ_1, σ_2) e (σ_2, σ_3) são concorrentes ou assintóticas, e (σ_1, σ_3) é reversa, por $\{r_0, r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ (caso ilustrado abaixo em termos de conjuntos polares). Analogamente podemos obter tal conjunto de pontos positivos para os demais casos.



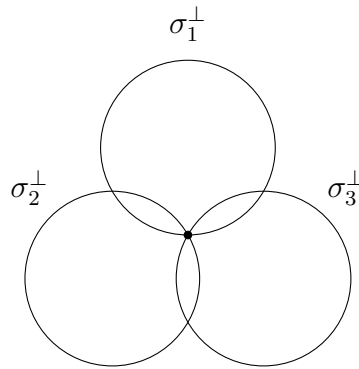
Observação 4.28 *Veja que para o caso particular em que (σ_1, σ_2) e (σ_2, σ_3) são concorrentes, (σ_1, σ_3) é reversa, e σ_2 é a geodésica riemanniana perpendicular comum a σ_1 e σ_3 , temos que o problema de congruência da tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ se resume ao problema de congruência da dupla reversa (σ_1, σ_3) . De fato, dada a tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, associamos o conjunto de pontos positivos $\{r_0, r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$. Como σ_2 é a geodésica riemanniana perpendicular comum, temos que $r_{12} = q_{13}$, $r_{23} = q_{31}$, $p_{13} = q_{12}$ e $p_{31} = q_{32}$. Além disso, sabemos que três pontos no espaço projetivo definem unicamente um plano projetivo, então dos cinco pontos contidos em σ_2^\perp , precisamos apenas de três deles. Então consideramos os pontos r_0, r_{12} e r_{23} . Assim, para cada tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ associamos o conjunto de pontos positivos $\{r_0, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$.*

A construção do espaço de módulos para este caso também é feita de maneira similar ao caso genérico. A diferença é que neste caso vamos ter pelo menos dois dos parâmetros

básicos com valor 1 (ver Proposição 2.64). Em outras palavras, o ângulo ou a distância (ou ambos) entre as geodésicas riemannianas de duas das subduplas associadas a tal tripla é 0.

4.3.4 Triplas duas a duas coplanares

Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla especial de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Além disso, suponha que a tripla seja duas a duas coplanar, ou seja, cada subdupla (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) está contida em um $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ diferente. Segue abaixo um desenho que ilustra o posicionamento dos conjuntos polares no caso em questão.



Observação 4.29 *Se a tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ for duas a duas coplanar, temos que as linhas projetivas reais indefinidas associadas a tais geodésicas se intersectam em um mesmo ponto, caso contrário a tripla seria coplanar, uma vez que três pontos em $\mathbb{R}P^4$ determinam um plano projetivo (indefinido nesse caso). O ponto de intersecção das linhas projetivas reais pode ser positivo, negativo ou isotrópico, fazendo com que as subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) sejam ultraparalelas, concorrentes ou assintóticas, respectivamente. Além disso, se as subduplas são ultraparalelas com ponto de intersecção p positivo, temos que ambas intersectam ortogonalmente o hiperplano real dado por p^\perp .*

Da mesma forma que fizemos para os demais casos, aqui também associamos a cada tripla, um conjunto de pontos positivos. Vimos que para uma subdupla coplanar (σ_j, σ_k) , podemos associar a ela o conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{jk}, r, q_{jk}, q_{kj}\}$ se a subdupla em questão for concorrente ou assintótica, e associar a ela o conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{jk}, p_{jk}, p_{kj}, r\}$ se a subdupla em questão for ultraparalela. Vamos supor, por exemplo,

que cada subdupla seja concorrente (ou assintótica). Assim, temos associado às subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) , os conjuntos bi-ortogonais denotados por $\{r_{12}, r, q_{12}, q_{21}\}$, $\{r_{23}, r', q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, r'', q_{13}, q_{31}\}$, respectivamente. Note que para o caso em questão podemos considerar $r = r' = r''$ e denotar tal ponto por r_0 . Com isso associamos cada tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ao conjunto $\{r_0, r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, q_{13}, q_{31}\}$. O mesmo pode ser feito para o caso em que cada subdupla é ultraparalela, obtendo assim o conjunto $\{r_0, r_{12}, p_{12}, p_{21}, r_{23}, p_{23}, p_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}\}$.

Vamos supor a partir daqui que cada subdupla associada à tripla em questão seja concorrente, pois para os casos em que tais subduplas são ultraparalelas ou assintóticas, o procedimento é análogo. Vimos que no caso concorrente, podemos associar à tripla em questão, um conjunto de pontos positivos dado por $\{r_0, r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, q_{13}, q_{31}\}$. Denote a matriz de Gram de tal conjunto por G . Sabemos do Capítulo 2, que existem levantamentos $R_0, R_{12}, Q_{12}, Q_{21}, R_{23}, Q_{23}, Q_{32}, R_{13}, Q_{13}, Q_{31}$ para os elementos desse conjunto de pontos positivos, tais que podemos recuperar em termos de parâmetros básicos as entradas dos blocos formados pelos conjuntos $\{r_0, r_{12}, q_{12}, q_{21}\}$, $\{r_0, r_{23}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_0, r_{13}, q_{13}, q_{31}\}$, onde tais blocos são dados respectivamente por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{12}} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_{12}} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{23}} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_{23}} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_{13}} & 1 \end{bmatrix}$$

com $0 \leq a_{12}, a_{23}, a_{13} < 1$.

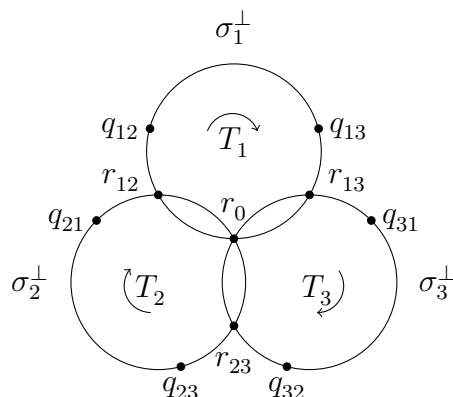
A ideia agora é recuperar as demais entradas da matriz de Gram G , em termos dos três parâmetros básicos que temos e dos ângulos de transição. Para tanto, vamos fazer um procedimento análogo ao feito na Seção 4.2 para o caso genérico. Então, considere elementos $T_j \in SO(3, \Sigma_j^\perp)$ tais que

$$\begin{aligned} T_1 &: \{R_0, R_{12}, Q_{12}\} \rightarrow \{R_0, R_{13}, Q_{13}\} \\ T_2 &: \{R_0, R_{23}, Q_{23}\} \rightarrow \{R_0, R_{12}, Q_{21}\} \\ T_3 &: \{R_0, R_{13}, Q_{31}\} \rightarrow \{R_0, R_{23}, Q_{32}\} \end{aligned}$$

onde cada T_j pode ser escrita na forma

$$T_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_j) & -\text{sen}(\theta_j) \\ 0 & \text{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T_j^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_j) & \text{sen}(\theta_j) \\ 0 & -\text{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{bmatrix}$$

com $j = 1, 2, 3$.



Observação 4.30 O Teorema de Witt nos permite estender a aplicação $T_j \in SO(3, \Sigma_j^\perp)$ para uma aplicação de $SO(4, 1)$, para $j = 1, 2, 3$.

Agora, para recuperar, por exemplo, a entrada $\langle Q_{21}, R_{23} \rangle$, temos do produto

$$[R_0 \quad R_{12} \quad Q_{21}] = [R_0 \quad R_{23} \quad Q_{23}] T_2$$

que Q_{21} possui uma expressão

$$Q_{21} = -R_{23} \text{sen}(\theta_2) + Q_{23} \cos(\theta_2) ,$$

e conseqüentemente

$$\langle Q_{21}, R_{23} \rangle = -\text{sen}(\theta_2) ,$$

obtendo assim, uma expressão para $\langle Q_{21}, R_{23} \rangle$ que depende apenas dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição. As demais entradas da matriz de Gram podem ser recuperadas da mesma forma, e estão explicitadas no Apêndice B. Assim, obtemos o próximo teorema.

Teorema 4.31 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, e considere $\{r_0, r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, q_{13}, q_{31}\}$ o conjunto de pontos positivos, associado à tripla em questão. Então existem levantamentos para os elementos de tal conjunto, de forma que a matriz de Gram G associada a esses levantamentos é dada por:*

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{G} \end{bmatrix}$$

tal que a matriz \tilde{G} tem a forma

$$\tilde{G} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & \sqrt{a_{12}} & E_1 & E_2 \\ 0 & \sqrt{a_{12}} & 1 & & \\ \hline & E_1 & & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{a_{23}} \\ 0 & \sqrt{a_{23}} & 1 \end{array} & E_3 \\ \hline & E_2 & & E_3 & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{a_{13}} \\ 0 & \sqrt{a_{13}} & 1 \end{array} \end{array} \right]$$

onde $0 \leq a_{12}, a_{13}, a_{23} < 1$, e os blocos E_1, E_2 e E_3 possuem entradas recuperadas em termos dos parâmetros básicos a_{12}, a_{23}, a_{13} e dos ângulos de transição θ_1, θ_2 e θ_3 .

Definição 4.32 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Chamamos a matriz de Gram G associada a tal tripla, obtida como no Teorema 4.31, de matriz de Gram canônica para uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.*

Veja que para o caso em que a tripla duas a duas coplanar possui subduplas de geodésicas riemannianas ultraparalelas, a matriz de Gram canônica para a tripla em questão tem entradas recuperadas em termos dos parâmetros básicos d_{12}, d_{23}, d_{13} , e dos ângulos de transição θ_1, θ_2 e θ_3 , com $1 < d_{12}, d_{23}, d_{13}$. O mesmo vale para o caso assintótico, entretanto, temos que $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 1$.

Teorema 4.33 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Considere o conjunto de pontos positivos $\{r_0, r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, q_{13}, q_{31}\}$, associado a tal tripla. Então os parâmetros básicos a_{12}, a_{23}, a_{13} , e os ângulos de transição θ_1, θ_2 e θ_3 , determinam unicamente a classe de congruência por $PO(4, 1)$ das triplas duas a duas coplanares de geodésicas riemannianas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.*

Prova. Sejam $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ e G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Pela construção de G , temos que as entradas são recuperadas de maneira única em termos dos respectivos parâmetros básicos e ângulos de transição. Sejam $\{r_0, r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, q_{13}, q_{31}\}$, o conjunto de pontos positivos associado à tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, e W o espaço gerado por levantamentos dos elementos de tal conjunto. Veja que W é não degenerado. Além disso, se $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ é uma outra tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, com G' sendo a matriz de Gram canônica associada a tal tripla, e se G' é recuperada com os mesmos parâmetros básicos e mesmos ângulos de transição dados nas entradas de G , temos que $G = G'$. Por outro lado, para dado $\{r'_0, r'_{12}, q'_{12}, q'_{21}, r'_{23}, q'_{23}, q'_{32}, r'_{13}, q'_{13}, q'_{31}\}$, o conjunto de pontos positivos associado à tripla $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$, com W' sendo o espaço gerado por levantamentos dos elementos de tal conjunto, temos que W' é não degenerado. O resultado segue da Proposição 1.32. ■

Agora, considere $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Seja G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Vimos que podemos recuperar as entradas de G em termos dos invariantes $a_{12}, a_{13}, a_{23}, \theta_1, \theta_2$ e θ_3 . Denote por $\mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4)$ o espaço de configurações de triplas duas a duas coplanares de geodésicas riemannianas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Os elementos de $\mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4)$ são classes denotadas por $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$. Defina a aplicação

$$\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^6$$

que associa a cada classe $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$ os invariantes $a_{12}, a_{13}, a_{23}, \theta_1, \theta_2$ e θ_3 .

Por fim, defina o conjunto

$$\mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4) = \{(a_{12}, a_{13}, a_{23}, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^6; 0 \leq a_{12}, a_{13}, a_{23} < 1, 0 < \theta_j < \pi, D_{k \times l} = 0\},$$

onde $j = 1, 2, 3$ e $D_{k \times l}$ são relações independentes construídas no Apêndice B, com $k, l \in \{2, 5, 8\}$ e $k < l$, dadas por:

$$\begin{aligned} D_{2 \times 5} &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_3) - \sqrt{a_{13}}\text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_3) - \cos(\theta_2) = 0 \\ D_{2 \times 8} &= \cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - \sqrt{a_{23}}\text{sen}(\theta_2)\text{sen}(\theta_3) - \cos(\theta_1) = 0 \\ D_{5 \times 8} &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sqrt{a_{12}}\text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) - \cos(\theta_3) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Usando a métrica de Bergman, temos que:

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(q_{jk}, q_{kj})}{2} \right) = \langle Q_{jk}, Q_{kj} \rangle \langle Q_{kj}, Q_{jk} \rangle = a_{jk} ,$$

e conseqüentemente

$$\sqrt{a_{jk}} = \cosh \left(\frac{\rho(q_{jk}, q_{kj})}{2} \right) .$$

Dessa forma, podemos reescrever as expressões de $D_{2 \times 5}$, $D_{2 \times 8}$ e $D_{5 \times 8}$, respectivamente, e obter a Lei de Cossenos:

$$\begin{aligned} D_{2 \times 5} &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_3) - \cosh \left(\frac{\rho(q_{13}, q_{31})}{2} \right) \text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_3) - \cos(\theta_2) = 0 \\ D_{3 \times 9} &= \cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - \cosh \left(\frac{\rho(q_{23}, q_{32})}{2} \right) \text{sen}(\theta_2)\text{sen}(\theta_3) - \cos(\theta_1) = 0 \\ D_{6 \times 9} &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \cosh \left(\frac{\rho(q_{12}, q_{21})}{2} \right) \text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) - \cos(\theta_3) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Veja que $\mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^6 é um espaço topológico. Assim, temos o próximo resultado.

Teorema 4.34 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4)$.*

Prova. Pelas condições de determinante (Proposição 1.29 sobre o corpo dos reais e com $n = 4$) e pelo Teorema 4.33, temos que a aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^6$ dada acima define uma aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4)$. Pelo Teorema 4.33 temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(a_{12}, a_{13}, a_{23}, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4)$, usando as fórmulas que obtemos para as entradas da matriz de Gram dada no Teorema 4.31, podemos considerar G em termos dos três parâmetros básicos e dos três ângulos de transição, com $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 10$. Segue da Proposição 1.29 (sobre o corpo dos reais e com $n = 4$) que G assim construída, é a matriz de Gram canônica de alguma tripla duas a duas coplanar de geodésicas riemannianas concorrentes de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Logo $\tau : \mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. ■

Definição 4.35 Chamamos $\mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4)$.

Se o conjunto $\mathcal{M}_0^{2-2}(3, 4)$ denota o espaço de configurações de triplas duas a duas coplanares de geodésicas riemannianas ultraparalelas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, procedendo como fizemos acima, obtemos que o conjunto

$$\mathbb{M}_0^{2-2}(3, 4) = \{(d_{12}, d_{13}, d_{23}, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^6; 1 < d_{12}, d_{13}, d_{23}, 0 < \theta_j < \pi, D_{k \times l} = 0\},$$

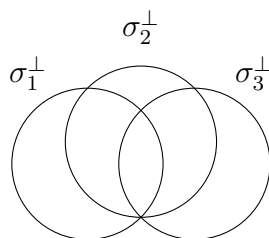
onde $j = 1, 2, 3$ e $D_{k \times l}$ são relações independentes construídas assim como no caso concorrente, com $k, l \in \{2, 5, 8\}$ e $k < l$, é o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_0^{2-2}(3, 4)$. De maneira similar, se o conjunto $\mathcal{M}_2^{2-2}(3, 4)$ denota o espaço de configurações de triplas duas a duas coplanares de geodésicas assintóticas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, procedendo como fizemos acima, obtemos que o conjunto

$$\mathbb{M}_2^{2-2}(3, 4) = \{(a_{12}, a_{13}, a_{23}, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^6; a_{12} = a_{13} = a_{23} = 1, 0 < \theta_j < \pi, D_{k \times l} = 0\},$$

onde $j = 1, 2, 3$ e $D_{k \times l}$ são relações independentes construídas assim como no caso concorrente, com $k, l \in \{2, 5, 8\}$ e $k < l$, é o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_2^{2-2}(3, 4)$.

4.3.5 Triplas coplanares

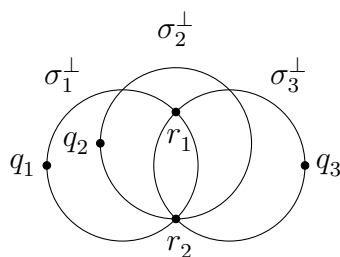
Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla especial de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Além disso, suponha que a tripla seja coplanar, ou seja, as subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) são coplanares, todas contidas em um mesmo $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. Segue abaixo um desenho que ilustra o posicionamento dos conjuntos polares no caso em questão.



Da mesma forma que fizemos para os demais casos, aqui também associamos a cada tripla, um conjunto de pontos positivos. Vamos supor, por exemplo, que cada subdupla seja

concorrente ou assintótica. Assim, temos associado às subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) , os conjuntos bi-ortogonais denotados por $\{r_{12}, r, q_{12}, q_{21}\}$, $\{r_{23}, r', q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, r'', q_{13}, q_{31}\}$, respectivamente. Note que, para o caso em questão, temos que $q_{12} = q_{13}$, $q_{21} = q_{23}$, $q_{31} = q_{32}$, e podemos denotar tais pontos por q_1 , q_2 e q_3 , respectivamente. Além disso, podemos considerar $\{r_{12}, r\} = \{r_{23}, r'\} = \{r_{13}, r''\}$ e denotar tal conjunto por $\{r_1, r_2\}$. Com isso associamos cada tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ao conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. Os demais casos podem ser feitos de maneira similar (ver Observação 4.36 feita abaixo).

Observação 4.36 *Se a tripla coplanar $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ possui a subdupla (σ_1, σ_2) ultraparalela e as demais são concorrentes ou assintóticas, temos associado às subduplas (σ_1, σ_2) , (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) , conjuntos bi-ortogonais denotados por $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, r\}$, $\{r_{23}, r', q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, r'', q_{13}, q_{31}\}$, respectivamente. Análogo ao que foi feito antes, temos que $p_{12} = q_{13}$, $p_{21} = q_{23}$, $q_{31} = q_{32}$, e podemos denotar tais pontos por q_1 , q_2 e q_3 , respectivamente. Além disso podemos considerar $\{r_{12}, r\} = \{r_{23}, r'\} = \{r_{13}, r''\}$ e denotar tal conjunto por $\{r_1, r_2\}$. Com isso associamos cada tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ao conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. O mesmo podemos fazer para o caso em que duas das subduplas são ultraparalelas e para o caso em que as três subduplas são ultraparalelas.*



Definição 4.37 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar associada ao conjunto de pontos positivos $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. Dizemos que essa tripla é não ortogonal se as geodésicas riemannianas pertencentes à tripla não são ortogonais, ou seja, $\langle Q_j, Q_k \rangle \neq 0$, onde Q_j é um levantamento para q_j , com $j \neq k$ e $j, k = 1, 2, 3$.*

4.3.5.1 Triplas coplanares não ortogonais

Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar não ortogonal de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Vimos que para cada tripla coplanar podemos associar um conjunto de pontos positivos dado

por $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. Usando um argumento análogo ao feito na demonstração da Proposição 1.27, temos que existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$, tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g_{34} & g_{35} \\ 0 & 0 & g_{34} & 1 & g_{45} \\ 0 & 0 & g_{35} & g_{45} & 1 \end{bmatrix}$$

com $g_{34}, g_{35} > 0$. Usando o conceito de d -invariante, e a notação $d_{jk} = d(q_j, q_k)$, para $j, k = 1, 2, 3$, com $j < k$, temos que $d_{12} = d(q_1, q_2) = \langle Q_1, Q_2 \rangle \langle Q_2, Q_1 \rangle = g_{34}^2$, e conseqüentemente $g_{34} = \sqrt{d_{12}}$. Analogamente obtemos que $g_{35} = \sqrt{d_{13}}$ e $g_{45} = \pm\sqrt{d_{23}}$. Assim, existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{d_{12}} & \sqrt{d_{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{12}} & 1 & \pm\sqrt{d_{23}} \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{13}} & \pm\sqrt{d_{23}} & 1 \end{bmatrix}$$

a qual chamamos de *matriz de Gram canônica* de uma tripla coplanar não ortogonal de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.

Observação 4.38 *Veja que, calculando o determinante da matriz de Gram canônica acima, obtemos a expressão $\det(G) = 1 - d_{12} - d_{13} - d_{23} + 2\sqrt{d_{12}}\sqrt{d_{13}}(\pm\sqrt{d_{23}})$. Além disso, temos que $1 - d_{12} - d_{13} - d_{23} + 2\sqrt{d_{12}}\sqrt{d_{13}}(\pm\sqrt{d_{23}}) \leq 0$.*

Teorema 4.39 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar não ortogonal de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Considere o conjunto de pontos positivos $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ associado a tal tripla. Então os d -invariantes $d(q_1, q_2)$, $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$ determinam unicamente a classe de congruência por $PO(4, 1)$, das triplas coplanares não ortogonais tais que o espaço gerado pelos levantamentos, denotado por $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{R_1, R_2, Q_1, Q_2, Q_3\}$, é não degenerado.*

Prova. Basta notar que se duas triplas possuem mesmos d -invariantes, então possuem a mesma matriz de Gram canônica. Como as triplas estão associadas a conjuntos de pontos

positivos tais que os conjuntos gerados pelos levantamentos são não degenerados, temos que o resultado segue da Proposição 1.32 (considerando o corpo dos reais e $n = 4$). ■

Agora, considere $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar não ortogonal de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, associada ao conjunto de pontos positivos $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ cujos levantamentos são denotados por $\{R_1, R_2, Q_1, Q_2, Q_3\}$. Seja G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Vimos que podemos recuperar as entradas de G em termos dos invariantes $d(q_1, q_2)$, $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$. Denote por $\mathcal{M}_0^{sc}(3, 4)$ o espaço de configurações de triplas coplanares não ortogonais de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ tais que o espaço gerado $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{R_1, R_2, Q_1, Q_2, Q_3\}$ é não degenerado. Os elementos de $\mathcal{M}_0^{sc}(3, 4)$ são classes denotadas por $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$. Defina a aplicação

$$\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

que associa a cada classe $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$ os invariantes $d(q_1, q_2)$, $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$. Por fim, defina o conjunto

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_0^{sc}(3, 4) = & \{(d_{12}, d_{13}, d_{23}) \in \mathbb{R}^3; d_{12}, d_{13}, d_{23} > 0, \\ & 1 - d_{12} - d_{13} - d_{23} + 2\sqrt{d_{12}}\sqrt{d_{13}}(\pm\sqrt{d_{23}}) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Veja que $\mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^3 é um espaço topológico.

Teorema 4.40 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_0^{sc}(3, 4)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$.*

Prova. Pelas condições de determinante (Proposição 1.29 sobre o corpo dos reais com $n = 4$) e pelo Teorema 4.39, temos que a aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada acima define uma aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$. Pelo Teorema 4.39 temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(d_{12}, d_{13}, d_{23}) \in \mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$, considere G tal que $g_{34} = g_{43} = \sqrt{d_{12}}$, $g_{35} = g_{53} = \sqrt{d_{13}}$, $g_{45} = g_{54} = \pm\sqrt{d_{23}}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 5$, e as demais entradas são nulas. Segue das condições de determinante, que G assim construída, é a matriz de Gram canônica de alguma tripla coplanar não ortogonal de geodésicas riemannianas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Logo $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$ da topologia induzida de \mathbb{R}^3 , temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 4.41 Chamamos $\mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_0^{sc}(3, 4)$.

Observação 4.42 Observe que a igualdade na expressão

$$1 - d_{12} - d_{13} - d_{23} + 2\sqrt{d_{12}}\sqrt{d_{13}}(\pm\sqrt{d_{23}}) \leq 0$$

acontece se, e somente se, as geodésicas riemannianas da tripla coplanar não ortogonal $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ se intersectam em um ponto negativo, ou se σ_1 , σ_2 e σ_3 possuem uma geodésica riemanniana perpendicular comum (ver Corolário 4.4 em [3] e Observação 4.3 em [12]).

4.3.5.2 Triplos coplanares ortogonais

Se $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é uma tripla coplanar ortogonal de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, temos duas possibilidades, ou seja, uma das subduplas é ortogonal ou uma das geodésicas é ortogonal às demais. Se uma das subduplas for ortogonal, vamos chamar de *tripla coplanar ortogonal tipo 1*, e se uma das geodésicas for ortogonal às demais, vamos chamar de *tripla coplanar ortogonal tipo 2*.

Triplas coplanares ortogonais tipo 1

Vamos estudar aqui o caso em que a tripla é coplanar ortogonal tipo 1. Vimos que para cada tripla coplanar podemos associar um conjunto de pontos positivos dado por $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. Vamos supor que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal (os demais casos são análogos). Usando um argumento análogo ao feito na demonstração da Proposição 1.27, temos que existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & g_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & g_{45} \\ 0 & 0 & g_{35} & g_{45} & 1 \end{bmatrix}$$

com $g_{35}, g_{45} > 0$ e $g_{34} = 0$. Usando o conceito de d -invariante, e a notação $d_{jk} = d(q_j, q_k)$, para $j, k = 1, 2, 3$, com $j < k$, temos que $d_{13} = d(q_1, q_3) = \langle Q_1, Q_3 \rangle \langle Q_3, Q_1 \rangle = g_{35}^2$, e consequentemente $g_{35} = \sqrt{d_{13}}$. Analogamente obtemos que $g_{45} = \sqrt{d_{23}}$. Note que nesse caso temos $d_{12} = 0$ devido à ortogonalidade da subdupla (σ_1, σ_2) . Assim, existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{d_{13}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{d_{23}} \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{13}} & \sqrt{d_{23}} & 1 \end{bmatrix}$$

a qual chamamos de *matriz de Gram canônica* de uma tripla coplanar ortogonal tipo 1 tal que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal. Temos da Observação 4.38 que $1 - d_{13} - d_{23} \leq 0$. Por outro lado, supondo que (σ_1, σ_3) seja a subdupla ortogonal ou que (σ_2, σ_3) seja a subdupla ortogonal, obtemos respectivamente as matrizes de Gram

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{d_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{12}} & 1 & \sqrt{d_{23}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{d_{23}} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{d_{12}} & \sqrt{d_{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{12}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{13}} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

determinadas de maneira análoga a anterior.

Observação 4.43 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar ortogonal tipo 1, tal que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal, associada ao conjunto de pontos positivos $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. Considere o conjunto formado por levantamentos dos elementos de tal conjunto de pontos positivos, denotado por $\{R_1, R_2, Q_1, Q_2, Q_3\}$. Veja que o conjunto gerado $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{R_1, R_2, Q_1, Q_2, Q_3\}$ é não degenerado. De fato, se W for degenerado, então o levantamento Σ_j^\perp , do conjunto polar σ_j^\perp , está contido em um subespaço parabólico de dimensão 4, para $j = 1, 2, 3$. Isso nos diz que as geodésicas riemannianas σ_1, σ_2 e σ_3 se intersectam em um ponto isotrópico. Mas isso contradiz o fato de que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal.*

Teorema 4.44 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar ortogonal tipo 1 de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Considere o conjunto de pontos positivos $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ associado a tal tripla. Então os d -invariantes $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$ determinam unicamente a classe de congruência por $PO(4, 1)$ das triplas coplanares não ortogonais tipo 1, tais que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal.*

Prova. Basta notar que se duas triplas possuem mesmos d -invariantes, então possuem a mesma matriz de Gram canônica. Como as triplas estão associadas a conjuntos de pontos positivos tais que os conjuntos gerados pelos levantamentos são não degenerados (ver Observação 4.43), temos que o resultado segue da Proposição 1.32 (considerando o corpo dos reais e $n = 4$). ■

Veja que a Observação 4.43 também é verdadeira para o caso em que a subdupla ortogonal em questão é (σ_1, σ_3) ou (σ_2, σ_3) . Da mesma forma, versões análogas do Teorema 4.44 podem ser feitas para tais casos.

Agora considere $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar ortogonal tipo 1, tal que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal. Seja G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Vimos que nesse caso podemos recuperar as entradas de G em termos dos invariantes $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$. Denote por $\mathcal{M}_1^{sc}(3, 4)$ o espaço de configurações de triplas coplanares ortogonais tipo 1, tais que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal. Os elementos de $\mathcal{M}_1^{sc}(3, 4)$ são classes denotadas por $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$. Defina a aplicação

$$\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

que associa a cada classe $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$ os invariantes $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$. Por fim, defina o conjunto $\mathbb{M}_1^{sc}(3, 4) = \{(d_{13}, d_{23}) \in \mathbb{R}^2; d_{13}, d_{23} > 0, 1 - d_{13} - d_{23} \leq 0\}$. Veja que $\mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^2 é um espaço topológico.

Teorema 4.45 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_1^{sc}(3, 4)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$.*

Prova. Pelas condições de determinante (Proposição 1.29 sobre o corpo dos reais com $n = 4$) e pelo Teorema 4.44, temos que a aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada acima define uma aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$. Pelo Teorema 4.44 temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 4) \rightarrow$

$\mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(d_{13}, d_{23}) \in \mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$, considere G tal que $g_{35} = g_{53} = \sqrt{d_{13}}$, $g_{45} = g_{54} = \sqrt{d_{23}}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 5$, e as demais entradas são nulas. Segue das condições de determinante, que G assim construída, é a matriz de Gram canônica de alguma tripla coplanar ortogonal tipo 1, tal que a subdupla (σ_1, σ_2) é ortogonal. Logo $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$ da topologia induzida de \mathbb{R}^2 , temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 4.46 Chamamos $\mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_1^{sc}(3, 4)$.

Observação 4.47 Observe que a igualdade na expressão $1 - d_{13} - d_{23} \leq 0$ acontece se, e somente se, as geodésicas riemannianas da tripla coplanar ortogonal tipo 1 se intersectam em um ponto negativo.

Da mesma maneira que fizemos acima, podemos construir o espaço de módulos para o caso em que a subdupla (σ_1, σ_3) é ortogonal e para o caso em que a subdupla (σ_2, σ_3) é ortogonal. A construção é totalmente análoga.

Triplas coplanares ortogonais tipo 2

Agora vamos abordar o caso em que a tripla $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é coplanar ortogonal tipo 2. Veja que temos três possibilidades, ou seja, $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$, ou $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$, ou $\sigma_1 \perp \sigma_3$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$. Vamos estudar o caso em que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$ (os demais são análogos).

Vimos que para cada tripla coplanar podemos associar um conjunto de pontos positivos dado por $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. Supondo $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$, e usando um argumento análogo ao feito na demonstração da Proposição 1.27, temos que existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & g_{45} \\ 0 & 0 & 0 & g_{45} & 1 \end{bmatrix}$$

com $g_{45} > 0$. Usando o conceito de d -invariante, e a notação $d_{23} = d(q_2, q_3)$, temos que $d_{23} = d(q_2, q_3) = \langle Q_2, Q_3 \rangle \langle Q_3, Q_2 \rangle = g_{45}^2$, e conseqüentemente $g_{45} = \sqrt{d_{23}}$. Note que nesse caso temos $d(q_1, q_2) = d(q_1, q_3) = 0$ devido às ortogonalidades entre as geodésicas riemannianas em questão. Assim, existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{d_{23}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{d_{23}} & 1 \end{bmatrix}$$

a qual chamamos de *matriz de Gram canônica* de uma tripla coplanar ortogonal tipo 2 tal que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$. Supondo que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$, ou que $\sigma_1 \perp \sigma_3$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$, obtemos respectivamente as matrizes de Gram

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{d_{13}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{13}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{d_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{12}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

determinadas de maneira análoga a anterior.

Observação 4.48 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar ortogonal tipo 2, tal que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$, associada ao conjunto de pontos positivos $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. Considere o conjunto formado por levantamentos dos elementos de tal conjunto, denotado por $\{R_1, R_2, Q_1, Q_2, Q_3\}$. Veja que o conjunto gerado $W = \text{span}_{\mathbb{R}}\{R_1, R_2, Q_1, Q_2, Q_3\}$ é não degenerado. De fato, se W for degenerado, então o levantamento Σ_j^\perp , do conjunto polar σ_j^\perp , está contido em um subespaço parabólico de dimensão 4, para $j = 1, 2, 3$. Isso nos diz que as geodésicas riemannianas σ_1, σ_2 e σ_3 se intersectam em um ponto isotrópico. Mas isso contradiz o fato de que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$.*

Teorema 4.49 *Seja $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar ortogonal tipo 2 de geodésicas riemannianas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Considere o conjunto de pontos positivos $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ associado a tal tripla. Então o d -invariante $d(q_2, q_3)$ determina unicamente a classe de congruência por $PO(4, 1)$ das triplas coplanares não ortogonais tipo 2, tais que satisfazem $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$.*

Prova. Basta notar que se duas triplas possuem o mesmo d -invariante, então possuem a mesma matriz de Gram canônica. Como as triplas estão associadas a conjuntos de pontos positivos tais que os conjuntos gerados pelos levantamentos são não degenerados (ver Observação 4.48), temos que o resultado segue da Proposição 1.32 (considerando o corpo dos reais e $n = 4$). ■

Veja que a Observação 4.48 é verdadeira tanto para o caso em que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$, quanto para o caso em que $\sigma_1 \perp \sigma_3$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$. Da mesma forma, versões análogas do Teorema 4.49 podem ser feitas para tais casos.

Agora considere $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla coplanar ortogonal tipo 2, tal que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$. Seja G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Vimos que nesse caso podemos recuperar as entradas de G em termos do invariante $d(q_2, q_3)$. Denote por $\mathcal{M}_2^{sc}(3, 4)$ o espaço de configurações de triplas coplanares ortogonais tipo 2, tais que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$. Os elementos de $\mathcal{M}_2^{sc}(3, 4)$ são classes denotadas por $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$. Defina a aplicação

$$\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}$$

que associa a cada classe $[(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$ o invariante $d(q_2, q_3)$. Por fim, defina o conjunto $\mathbb{M}_2^{sc}(3, 4) = \{d_{23} \in \mathbb{R}; d_{23} > 1\}$. Veja que $\mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R} é um espaço topológico.

Teorema 4.50 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_2^{sc}(3, 4)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$.*

Prova. Pelas condições de determinante (Proposição 1.29 sobre o corpo dos reais com $n = 4$) e pelo Teorema 4.49, temos que a aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ dada acima define uma aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$. Pelo Teorema 4.49 temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $d_{23} \in \mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$, considere G tal que $g_{45} = g_{54} = \sqrt{d_{23}}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 5$, e as demais entradas são nulas. Segue das

condições de determinante, que G assim construída, é a matriz de Gram canônica de alguma tripla coplanar ortogonal tipo 2, tal que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_1 \perp \sigma_3$. Logo $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$ da topologia induzida de \mathbb{R} , temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 4.51 Chamamos $\mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_2^{sc}(3, 4)$.

Da mesma maneira que fizemos acima, podemos construir o espaço de módulos para o caso em que $\sigma_1 \perp \sigma_2$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$, e para o caso em que $\sigma_1 \perp \sigma_3$ e $\sigma_2 \perp \sigma_3$. A construção é totalmente análoga.

4.4 Tabela de Parâmetros

Nesta seção apresentamos uma tabela que explicita os parâmetros necessários para a construção do espaço de módulos para cada um dos casos que trabalhamos neste capítulo. Segue a tabela.

Tipo de Tripla	Parâmetros		Total de Parâmetros
	Básicos	Âng. de Transição	
Genérica	$d_{12}, d_{23}, d_{13},$ a_{12}, a_{23} e a_{13}	$\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \alpha_{3j}$ e θ_j com $j = 1, 2, 3$	18
Quase Genérica Tipo 1 com (σ_1, σ_2) concorrente	$d_{23}, d_{13}, a_{12},$ a_{23} e a_{13}	$\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \alpha_{3j}$ e θ_j com $j = 1, 2, 3$	17
Quase Genérica Tipo 1 com (σ_1, σ_2) ultraparalela	$d_{12}, d_{23}, d_{13},$ a_{23} e a_{13}	$\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \alpha_{3j}$ e θ_j com $j = 1, 2, 3$	17
Quase Genérica Tipo 1 com (σ_1, σ_2) assintótica	d_{23}, d_{13}, a_{23} e a_{13}	$\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \alpha_{3j}$ e θ_j com $j = 1, 2, 3$	16
Genérica Contida em um $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$	$d_{12}, d_{23}, d_{13},$ a_{12}, a_{23} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	9
Quase Genérica Tipo 2 com (σ_1, σ_2) concorrente	$d_{23}, d_{13}, a_{12},$ a_{23} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	8

Tipo de Tripla	Parâmetros		Total de Parâmetros
	Básicos	Âng. de Transição	
Quase Genérica Tipo 2 com (σ_1, σ_2) ultraparalela	$d_{12}, d_{23}, d_{13},$ a_{23} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	8
Quase Genérica Tipo 2 com (σ_1, σ_2) assintótica	d_{23}, d_{13}, a_{23} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	7
Quase Coplanar com (σ_1, σ_2) e (σ_2, σ_3) concorrentes	d_{13}, a_{12}, a_{23} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	7
Quase Coplanar com (σ_1, σ_2) e (σ_2, σ_3) ultraparalelas	$d_{12}, d_{23}, d_{13},$ e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	7
Quase Coplanar com (σ_1, σ_2) concorrente e (σ_2, σ_3) ultraparalela	$d_{23}, d_{13}, a_{12},$ e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	7
Quase Coplanar com (σ_1, σ_2) concorrente e (σ_2, σ_3) assintótica	d_{13}, a_{12} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	6
Quase Coplanar com (σ_1, σ_2) ultraparalela e (σ_2, σ_3) assintótica	d_{12}, d_{13} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	6
Quase Coplanar com (σ_1, σ_2) e (σ_2, σ_3) assintóticas	d_{13} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	5
Duas a Duas Coplanares concorrentes	a_{12}, a_{23} e a_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	6
Duas a Duas Coplanares ultraparalelas	d_{12}, d_{23} e d_{13}	θ_1, θ_2 e θ_3	6
Duas a Duas Coplanares assintóticas	—	θ_1, θ_2 e θ_3	3
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, com subduplas concorrentes	a_{12}, a_{23} e a_{13}	—	3
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, com subduplas ultraparalelas	d_{12}, d_{23} e d_{13}	—	3

Tipo de Tripla	Parâmetros		Total de Parâmetros
	Básicos	Âng. de Transição	
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, com subduplas assintóticas	—	—	—
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 1	d_{23}, d_{13} e a_{12}	—	3
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 2	a_{12}	—	1
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 3	d_{12}, a_{23} e a_{13}	—	3
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 4	d_{12}	—	1
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 5	a_{23} e a_{13}	—	2
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 6	d_{23} e d_{13}	—	2
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 7	d_{23} e a_{12}	—	2
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 8	a_{23} e a_{13}	—	2
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 9	d_{23} e d_{13}	—	2
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 10	—	—	—
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 11	d_{13} e a_{23}	—	2
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 12	a_{23}	—	1

Tipo de Tripla	Parâmetros		Total de Parâmetros
	Básicos	Âng. de Transição	
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 13	d_{23}	—	1
Coplanares Ortogonais Tipo 2 com (σ_1, σ_2) concorrente	a_{12}	—	1
Coplanares Ortogonais Tipo 2 com (σ_1, σ_2) ultraparalela	d_{12}	—	1
Coplanares Ortogonais Tipo 2 com (σ_1, σ_2) assintótica	—	—	—

Fazemos abaixo uma legenda para a tabela acima:

- (i) Formação 1: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é concorrente, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) ultraparalelas;
- (ii) Formação 2: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é concorrente, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) assintóticas;
- (iii) Formação 3: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ultraparalela, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) concorrentes;
- (iv) Formação 4: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ultraparalela, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) assintóticas;
- (v) Formação 5: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é assintótica, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) concorrentes;
- (vi) Formação 6: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é assintótica, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) ultraparalelas;
- (vii) Formação 7: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é concorrente, (σ_2, σ_3) é ultraparalela e (σ_1, σ_3) é assintóticas;

- (viii) Formação 8: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ortogonal, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) concorrentes;
- (ix) Formação 9: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ortogonal, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) ultraparalelas;
- (x) Formação 10: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ortogonal, com (σ_2, σ_3) e (σ_1, σ_3) assintóticas;
- (xi) Formação 11: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ortogonal, com (σ_2, σ_3) concorrente e (σ_1, σ_3) ultraparalela;
- (xii) Formação 12: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ortogonal, com (σ_2, σ_3) concorrente e (σ_1, σ_3) assintótica;
- (xiii) Formação 13: Estamos considerando que (σ_1, σ_2) é ortogonal, com (σ_2, σ_3) ultraparalela e (σ_1, σ_3) assintótica;

Capítulo 5

O Problema de Congruência para Triplas de Geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$

Neste capítulo vamos encontrar invariantes que descrevem unicamente as classes de congruência, módulo ação de $PU(4, 1)$, de triplas ordenadas de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Para mais detalhes sobre o grupo de isometrias do espaço hiperbólico complexo, ver Subseção 1.2.3.3. Segue o conceito de congruência.

Definição 5.1 *Dizemos que duas triplas ordenadas (c_1, c_2, c_3) e (c'_1, c'_2, c'_3) de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ são congruentes quando existe uma isometria holomorfa $f \in PU(4, 1)$ tal que $f(c_i) = c'_i$ para $i = 1, 2, 3$.*

Note que a congruência definida acima é uma relação de equivalência. O espaço das classes de equivalência munido da topologia quociente é denominado *espaço de configurações* de triplas ordenadas de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, e denotamos por $\mathcal{M}(3, 4)$.

Começamos este capítulo verificando na Seção 5.1 a dimensão do espaço de módulos para triplas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Em seguida, na Seção 5.2, nos dedicamos à construção do espaço de módulos para o caso em que a tripla é genérica (ver Definição 5.2) e introduzimos os conceitos de tripla real e 3-tripla real (ver Definição 5.24), juntamente com a construção de seus respectivos espaços de módulos. Por fim, na Seção 5.3 tratamos do caso em que a tripla é especial.

5.1 Dimensão do Espaço de Módulos

No Capítulo 2 fizemos um estudo sobre o problema de congruência para duplas ordenadas de geodésicas no espaço hiperbólico. Vimos que foram necessários dois invariantes (ângulo e distância) para descrever unicamente as classes de congruência, por $PU(4, 1)$, de duplas ordenadas de geodésicas complexas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Para o problema de congruência de triplas ordenadas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, vamos necessitar de mais invariantes. Nossa estratégia para resolver tal problema será associar cada tripla de geodésicas complexas (c_1, c_2, c_3) às subduplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) , onde cada subdupla, por sua vez, está associada ao seu respectivo conjunto bi-ortogonal. Assim, temos associado a cada tripla (c_1, c_2, c_3) um conjunto de quinze pontos positivos (cinco pontos de cada conjunto bi-ortogonal). Se c_j^\perp denota o conjunto polar da geodésica complexa c_j , temos que c_j^\perp contém seis pontos dos quinze, para cada $j \in \{1, 2, 3\}$.

Definição 5.2 *Uma tripla ordenada (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ é dita ser uma tripla genérica se as subduplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) são reversas. Caso contrário, (c_1, c_2, c_3) é dita ser uma tripla especial.*

Agora vamos verificar a quantidade de parâmetros necessários para descrever unicamente as classes de congruência, por $PU(4, 1)$, de triplas genéricas de geodésicas complexas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Para começar, considere uma tripla genérica (c_1, c_2, c_3) em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Usando o modelo do parabolóide (ver Subseção 1.2.3.1), identificamos $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ com o produto $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ e a fronteira $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ com $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definição 5.3 *Chamamos a fronteira ideal de uma geodésica complexa de cadeia.*

Usando a identificação da fronteira $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ com $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, chamamos as cadeias que contêm o ponto ideal de *cadeias infinitas*. Cadeias que não contêm o ponto ideal são denominadas *cadeias finitas*. As cadeias infinitas são retas euclidianas em $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$ ortogonais a \mathbb{C}^3 . As cadeias finitas são elipses cujas projeções em \mathbb{C}^3 são circunferências euclidianas; chamamos o raio de tais circunferências de *raio da cadeia*. Assim, qualquer cadeia finita possui um centro $(z_1, z_2, z_3, x) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$ e um raio $t \in \mathbb{R}$ (ver Seção 4.3 e Seção 4.4 em [7]).

Considerando o conjunto de todas as cadeias com mesmo raio e mesmo centro, temos que as projeções verticais dessas cadeias geram uma esfera de dimensão 5 em \mathbb{C}^3 .

Fixando as cadeias ∂c_1 e ∂c_2 , das geodésicas complexas c_1 e c_2 da triplas genérica (c_1, c_2, c_3) em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, temos que para determinar unicamente as geodésicas complexas c_1 e c_2 , precisamos de dois parâmetros, distância e ângulo, que vamos denotar por d e a , respectivamente. Note que, a priori, a terceira cadeia denotada por ∂c_3 pode estar em qualquer lugar. Assim, temos associado a ∂c_3 os parâmetros do centro $(z_1, z_2, z_3, x) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{R}$ e raio $t \in \mathbb{R}$, nos dando um total de oito parâmetros reais. Por outro lado, muitas cadeias possuem mesmo centro e raio, mas possuem projeções distintas em \mathbb{C}^3 . As projeções de tais cadeias são grandes círculos da esfera de dimensão 5. Esses grandes círculos são obtidos da intersecção de uma reta complexa com a esfera de dimensão 5 em \mathbb{C}^3 . Como o espaço de retas complexas que passam pela origem em \mathbb{C}^3 é dado por $\mathbb{C}P^2$, temos daí quatro parâmetros reais que determinam tal reta complexa. Dessa forma, temos um máximo de quatorze parâmetros reais, para determinar uma tripla genérica (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$.

Por fim, como o estabilizador das geodésicas complexas c_1 e c_2 , no grupo $PU(4, 1)$, é trivial, então não podemos normalizar a cadeia remanescente. Isso mostra que o espaço de módulos para triplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ tem dimensão real 14.

5.2 Espaço de Módulos de Triplas Genéricas

Considere uma tripla genérica (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Temos que as subduplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) são reversas. Vamos denotar por $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}\}$, $\{r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ os conjuntos bi-ortogonais associados às subduplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) , respectivamente. Assim, associamos cada tripla genérica (c_1, c_2, c_3) ao conjunto $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, de pontos positivos. Veja que $r_{ij}, p_{ij}, q_{ij} \in c_i^\perp$ e $r_{ij}, p_{ji}, q_{ji} \in c_j^\perp$, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. Além disso, vamos denotar por $R_{12}, P_{12}, P_{21}, Q_{12}, Q_{21}, R_{23}, P_{23}, P_{32}, Q_{23}, Q_{32}, R_{13}, P_{13}, P_{31}, Q_{13}$ e Q_{31} os levantamentos para $r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}$ e q_{31} , respectivamente. As ilustrações abaixo exprimem os posicionamentos possíveis dos conjuntos polares das geodésicas de uma tripla genérica em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. A Figura 5.1 expressa a

situação em que não existe uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ que contenha a tripla genérica, e a Figura 5.2 expressa a situação em que existe $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ que contém a tripla genérica.

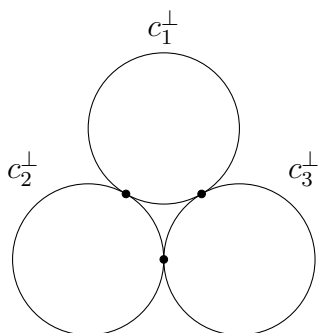


Figura 5.1: Tripla não contida em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$

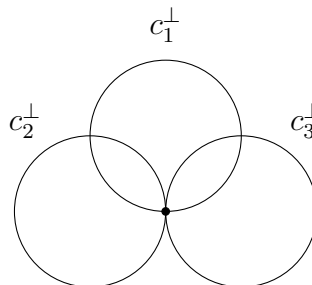


Figura 5.2: Tripla contida em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$

Exemplo 5.4 *Sejam os subespaços denotados por $C_1 = \{(X_1, X_2, 0, 0, X_1\sqrt{2}); X_1, X_2 \in \mathbb{C}\}$, $C_2 = \{(0, 0, Y_1, Y_2, Y_2\sqrt{2}); Y_1, Y_2 \in \mathbb{C}\}$, $C_3 = \{(0, Z_1, Z_1, Z_2, Z_1\sqrt{8}); Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}\}$. Considere a tripla (c_1, c_2, c_3) , onde $c_j = \pi(C_j - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, para $j = 1, 2, 3$. Temos que (c_1, c_2, c_3) é uma tripla genérica em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Além disso, note que nesse caso a tripla (c_1, c_2, c_3) não está contida em nenhuma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$.*

Se (c_i, c_j) é uma subdupla da tripla (c_1, c_2, c_3) , temos que a pré-distância e o pré-ângulo são dados por $d(p_{ij}, p_{ji})$ e $d(q_{ij}, q_{ji})$, respectivamente, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. Vamos denotar tais invariantes por $d_{ij} = d(p_{ij}, p_{ji})$ e $a_{ij} = d(q_{ij}, q_{ji})$ para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. Com isso, temos a definição que segue.

Definição 5.5 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Considere as subduplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) . Chamamos aos d -invariantes $d_{12}, d_{13}, d_{23}, a_{12}, a_{13}$ e a_{23} de parâmetros básicos da tripla (c_1, c_2, c_3) .*

5.2.1 Matriz de Gram canônica para triplas genéricas

Agora vamos nos concentrar em associar cada tripla genérica de geodésicas complexas a uma matriz de Gram em uma forma conveniente para nossos fins. Isto é, vamos nos concentrar em recuperar as entradas da matriz de Gram associada a tal tripla, em termos de invariantes, assim como fizemos para o caso de duplas de geodésicas no Capítulo 2.

Considere uma tripla genérica (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Seja C_j^\perp o levantamento do conjunto polar c_j^\perp de c_j , para $j = 1, 2, 3$. Sabemos que C_j^\perp é um subespaço complexo positivo, com dimensão complexa 3, para $j = 1, 2, 3$. Além disso, veja que o conjunto formado pelos levantamentos R_{12}, P_{12}, Q_{12} dos pontos polares r_{12}, p_{12}, q_{12} , respectivamente, é uma base ortonormal para C_1^\perp . Por outro lado, o conjunto formado pelos levantamentos R_{13}, P_{13}, Q_{13} dos pontos polares r_{13}, p_{13}, q_{13} , respectivamente, também formam uma base ortonormal para C_1^\perp . Analogamente, temos que os conjuntos $\{R_{12}, P_{21}, Q_{21}\}$ e $\{R_{23}, P_{23}, Q_{23}\}$ são bases ortonormais de C_2^\perp , e os conjuntos $\{R_{13}, P_{31}, Q_{31}\}$ e $\{R_{23}, P_{32}, Q_{32}\}$ são bases ortonormais para C_3^\perp . Como $SU(3, C_j^\perp)$ age transitivamente em pares de bases ortonormais de C_j^\perp , podemos tomar elementos $T_j \in SU(3, C_j^\perp)$, com $j = 1, 2, 3$, tais que

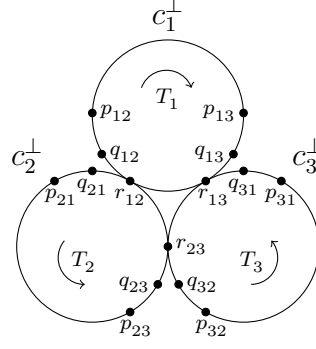
$$\begin{aligned} T_1 &: \{R_{12}, P_{12}, Q_{12}\} \rightarrow \{R_{13}, P_{13}, Q_{13}\} \\ T_2 &: \{R_{12}, P_{21}, Q_{21}\} \rightarrow \{R_{23}, P_{23}, Q_{23}\} \\ T_3 &: \{R_{23}, P_{32}, Q_{32}\} \rightarrow \{R_{13}, P_{31}, Q_{31}\} \end{aligned}$$

onde cada T_j pode ser escrita na forma $T_j = A_{1j}A_{2j}A_{3j}A_{4j}$, para $j = 1, 2, 3$, com

$$\begin{aligned} A_{1j} &= \begin{bmatrix} e^{i\alpha_{1j}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_{2j}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha_{1j}-i\alpha_{2j}} \end{bmatrix}, & A_{2j} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_{1j}) & -\text{sen}(\theta_{1j})e^{-i\beta_{1j}} & 0 \\ \text{sen}(\theta_{1j})e^{i\beta_{1j}} & \cos(\theta_{1j}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ A_{3j} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_{2j}) & 0 & -\text{sen}(\theta_{2j})e^{-i\beta_{2j}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta_{2j})e^{i\beta_{2j}} & 0 & \cos(\theta_{2j}) \end{bmatrix} & e & A_{4j} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_{3j}) & -\text{sen}(\theta_{3j})e^{-i\beta_{3j}} \\ 0 & \text{sen}(\theta_{3j})e^{i\beta_{3j}} & \cos(\theta_{3j}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Essa decomposição para T_j é conhecida como *decomposição em rotações planares*. Para mais detalhes, ver Teorema 5.2.1 de [4], onde tal decomposição é demonstrada para qualquer elemento de $SU(n)$. Veja que essa decomposição, para elementos de $SU(3)$, nos dá um total de oito parâmetros para cada T_j , onde $j = 1, 2, 3$. A próxima definição descreve esses parâmetros.

Definição 5.6 Chamamos os parâmetros $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}, \beta_{3j}, \theta_{1j}, \theta_{2j}$ e θ_{3j} , para $j = 1, 2, 3$, de ângulos de transição.



Observação 5.7 O Teorema de Witt nos permite estender a aplicação $T_j \in SU(3, C_j^\perp)$ para uma aplicação de $SU(4, 1)$, para $j = 1, 2, 3$.

A ideia agora é recuperar as entradas da matriz de Gram dos pontos $r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}$, em termos desses trinta parâmetros que temos, ou seja, em termos dos seis parâmetros básicos dados na Definição 5.5 e dos vinte e quatro ângulos de transição dados na Definição 5.6. Para tanto, note que uma parte da matriz de Gram foi recuperada em termos dos parâmetros básicos no Capítulo 2, ou seja, recuperamos as entradas dos blocos formados pelos levantamentos dos elementos dos conjuntos $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}\}$, $\{r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, que são dados respectivamente por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{12}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{12}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{a_{12}} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{23}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{23}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{a_{23}} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{d_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{13}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{13}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{a_{13}} & 1 \end{bmatrix}$$

onde $d_{12}, d_{13}, d_{23} > 1$ e $0 \leq a_{12}, a_{13}, a_{23} < 1$.

Por outro lado, podemos recuperar as entradas remanescentes usando as aplicações T_j , com $j = 1, 2, 3$. Por exemplo, para recuperar a entrada $\langle Q_{23}, P_{13} \rangle$, temos dos produtos

$$[R_{13} \ P_{13} \ Q_{13}] = [R_{12} \ P_{12} \ Q_{12}] T_1 \quad e \quad [R_{23} \ P_{23} \ Q_{23}] = [R_{12} \ P_{21} \ Q_{21}] T_2$$

que Q_{23} e P_{13} possuem expressões

$$\begin{aligned} Q_{23} &= R_{12}(e^{i\alpha_{12}-i\beta_{12}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{32}) - e^{i\alpha_{12}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32})) \\ &+ P_{21}(-e^{i\alpha_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12}) - e^{i\alpha_{22}+i\beta_{12}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})) \\ &+ Q_{21}(e^{-i\alpha_{12}-i\alpha_{22}} \cos(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_{13} &= R_{12}(-e^{i\alpha_{11}-i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{i\alpha_{11}-i\beta_{21}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11})) \\ &+ P_{12}(e^{i\alpha_{21}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{i\alpha_{21}+i\beta_{11}-i\beta_{21}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31})) \\ &+ Q_{12}(e^{-i\alpha_{11}-i\alpha_{21}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{21})) \end{aligned}$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \langle Q_{23}, P_{13} \rangle &= [(e^{i\alpha_{12}-i\beta_{12}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{32}) - e^{i\alpha_{12}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32})) \\ &\quad (-e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11}))] \\ &+ \sqrt{d_{12}} [(-e^{i\alpha_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12}) - e^{i\alpha_{22}+i\beta_{12}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})) \\ &\quad (e^{-i\alpha_{21}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31}))] \\ &+ \sqrt{a_{12}} [(e^{-i\alpha_{12}-i\alpha_{22}} \cos(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})) (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{21}))] \end{aligned}$$

obtendo dessa forma uma expressão para $\langle Q_{23}, P_{13} \rangle$ que depende apenas dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição. As demais entradas da matriz de Gram podem ser recuperadas da mesma forma (ver Apêndice C). Com isso temos o próximo resultado.

Teorema 5.8 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, e considere $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ o conjunto de pontos positivos associado à tripla (c_1, c_2, c_3) . Então existem levantamentos para os elementos de tal conjunto, de forma que a matriz de Gram G , associada a esses levantamentos, é dada por:*

d -invariante $d(q_{12}, r_{13})$ define ângulo entre os hiperplanos q_{12}^\perp e r_{13}^\perp . O mesmo acontece para $q_{21}, r_{23} \in c_2^\perp$ e $q_{32}, r_{13} \in c_3^\perp$. Assim, temos que $d(q_{12}, r_{13})$, $d(q_{21}, r_{23})$ e $d(q_{32}, r_{13})$ definem os ângulos de transição θ_{21} , θ_{22} e θ_{23} , descritos na Definição 5.6.

Teorema 5.10 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^4$. Então os seis parâmetros básicos junto com os vinte e quatro ângulos de transição definem unicamente a classe de congruência por $PU(4, 1)$ das triplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^4$.*

Prova. Sejam (c_1, c_2, c_3) uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^4$ e G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Pela construção de G , temos que as entradas são recuperadas de maneira única em termos dos respectivos parâmetros básicos e ângulos de transição. Sejam $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ o conjunto de pontos positivos associado à tripla (c_1, c_2, c_3) e W o espaço gerado por levantamentos dos elementos de tal conjunto. Veja que W é não degenerado. De fato, se $R_{12}, P_{12}, P_{21}, Q_{12}$ e Q_{21} são levantamentos para os pontos $r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}$, respectivamente, temos que o subconjunto $\{R_{12}, P_{12}, P_{21}, Q_{12}, Q_{21}\} \subset W$ é uma base para W e conseqüentemente $W = \text{span}_\mathbb{C}\{R_{12}, P_{12}, P_{21}, Q_{12}, Q_{21}\} = V_\mathbb{C}^{4,1}$ (ver Proposição 2.111). Segue que W é não degenerado. Além disso, se (c'_1, c'_2, c'_3) é uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^4$ com matriz de Gram canônica denotada por G' , e se G' é recuperada com os mesmos parâmetros básicos e mesmos ângulos de transição dados nas entradas de G , temos que $G = G'$. Analogamente para dado $\{r'_{12}, p'_{12}, p'_{21}, q'_{12}, q'_{21}, r'_{23}, p'_{23}, p'_{32}, q'_{23}, q'_{32}, r'_{13}, p'_{13}, p'_{31}, q'_{13}, q'_{31}\}$, o conjunto de pontos positivos associado à tripla (c'_1, c'_2, c'_3) , com W' sendo o espaço gerado por levantamentos dos elementos de tal conjunto, temos que W' é não degenerado. O resultado segue da Proposição 1.33. ■

5.2.2 Matriz de Gram canônica para triplas genéricas contidas em um $\mathbb{H}_\mathbb{C}^3$

Considere uma tripla genérica (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^4$. Temos que as subduplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) são reversas. Vimos no Lema 2.88 que, para $n = 4$, as intersecções $c_1^\perp \cap c_2^\perp$, $c_2^\perp \cap c_3^\perp$ e $c_1^\perp \cap c_3^\perp$ são pontos do espaço projetivo. Denote tais pontos

por $r_{ij} = c_i^\perp \cap c_j^\perp$, para $i, j = 1, 2, 3$ e $i \neq j$. Veja que temos duas possibilidades, ou $r_{12} \neq r_{23}$, $r_{23} \neq r_{13}$ e $r_{12} \neq r_{13}$, ou $r_{12} = r_{23} = r_{13}$. No primeiro caso, temos que a tripla genérica (c_1, c_2, c_3) não está contida em uma cópia de $\mathbb{H}_\mathbb{C}^3$ em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^4$ (ver Exemplo 5.4). Entretanto, no segundo caso, temos que a tripla genérica (c_1, c_2, c_3) está contida em uma cópia de $\mathbb{H}_\mathbb{C}^3$ em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^4$, e tal $\mathbb{H}_\mathbb{C}^3$ é dado pelo complemento ortogonal do ponto $r_{12} = r_{23} = r_{13}$. Aqui vamos trabalhar com o caso em que a tripla genérica está contida em um $\mathbb{H}_\mathbb{C}^3$.

Exemplo 5.11 *Sejam $C_1 = \{(0, 0, X_1, X_2, X_1\sqrt{2}); X_1, X_2 \in \mathbb{C}\}$, $C_2 = \{(0, Y_1, 0, 0, Y_2\sqrt{2}); Y_1, Y_2 \in \mathbb{C}\}$ e $C_3 = \{(0, Z_1, Z_2, Z_1, Z_1\sqrt{8}); Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}\}$. Considere a tripla (c_1, c_2, c_3) , onde $c_j = \pi(C_j - \{0\}) \cap \mathbb{H}_\mathbb{C}^4$, para $j = 1, 2, 3$. Veja que $C_1^\perp \cap C_2^\perp = C_1^\perp \cap C_3^\perp = C_2^\perp \cap C_3^\perp = P$, onde $P = \{(X, 0, 0, 0, 0); X \in \mathbb{C}\}$. Logo essa tripla de geodésicas complexas é genérica, e as geodésicas estão contidas em um $\mathbb{H}_\mathbb{C}^3$ dado por $p^\perp = \pi(P^\perp - \{0\}) \cap \mathbb{H}_\mathbb{C}^4$.*

Observação 5.12 *Denotamos por $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}\}$, $\{r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ os conjuntos bi-ortogonais associados às subduplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) , respectivamente. Assim, associamos cada tripla genérica (c_1, c_2, c_3) ao conjunto de pontos positivos $\{r, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, onde $r = r_{12} = r_{23} = r_{13}$. Denotamos por $R, P_{12}, P_{21}, Q_{12}, Q_{21}, P_{23}, P_{32}, Q_{23}, Q_{32}, P_{13}, P_{31}, Q_{13}$ e Q_{31} os levantamentos para $r, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}$ e q_{31} , respectivamente.*

Veja que $r, p_{ij}, q_{ij} \in c_i^\perp$, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. Além disso, o conjunto dos levantamentos R, P_{12}, Q_{12} dos pontos polares r, p_{12}, q_{12} , respectivamente, é uma base ortonormal para C_1^\perp . Por outro lado, o conjunto formado pelos levantamentos R, P_{13}, Q_{13} dos pontos polares r, p_{13}, q_{13} , respectivamente, também é uma base ortonormal para C_1^\perp . Analogamente temos que os conjuntos $\{R, P_{21}, Q_{21}\}$ e $\{R, P_{23}, Q_{23}\}$ são bases ortonormais de C_2^\perp , e os conjuntos $\{R, P_{31}, Q_{31}\}$ e $\{R, P_{32}, Q_{32}\}$ são bases ortonormais para C_3^\perp . Como $SU(3, C_j^\perp)$ age transitivamente em pares de bases ortonormais de C_j^\perp , podemos tomar elementos $T_j \in SU(3, C_j^\perp)$, com $j = 1, 2, 3$, tais que

$$T_1 : \{R, P_{12}, Q_{12}\} \rightarrow \{R, P_{13}, Q_{13}\}$$

$$T_2 : \{R, P_{21}, Q_{21}\} \rightarrow \{R, P_{23}, Q_{23}\}$$

$$T_3 : \{R, P_{32}, Q_{32}\} \rightarrow \{R, P_{31}, Q_{31}\}$$

onde cada T_j é escrita, usando a decomposição em rotações planares, na forma $T_j = A_{1j}A_{2j}A_{3j}A_{4j}$, para $j = 1, 2, 3$, com

$$A_{1j} = \begin{bmatrix} e^{i\alpha_{1j}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_{2j}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha_{1j}-i\alpha_{2j}} \end{bmatrix}, \quad A_{2j} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{1j}) & -\text{sen}(\theta_{1j})e^{-i\beta_{1j}} & 0 \\ \text{sen}(\theta_{1j})e^{i\beta_{1j}} & \cos(\theta_{1j}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{3j} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{2j}) & 0 & -\text{sen}(\theta_{2j})e^{-i\beta_{2j}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta_{2j})e^{i\beta_{2j}} & 0 & \cos(\theta_{2j}) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_{4j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_{3j}) & -\text{sen}(\theta_{3j})e^{-i\beta_{3j}} \\ 0 & \text{sen}(\theta_{3j})e^{i\beta_{3j}} & \cos(\theta_{3j}) \end{bmatrix},$$

ou seja, fazendo a multiplicação das matrizes acima, temos que

$$T_j = \begin{bmatrix} e^{i\alpha_{1j}}c(\theta_{1j})c(\theta_{2j}) & -e^{i\alpha_{1j}-i\beta_{1j}}s(\theta_{1j})c(\theta_{3j}) - e^{i\alpha_{1j}-i\beta_{2j}+i\beta_{3j}}s(\theta_{2j})s(\theta_{3j})c(\theta_{1j}) & e^{i\alpha_{1j}-i\beta_{1j}-i\beta_{3j}}s(\theta_{1j})s(\theta_{3j}) - e^{i\alpha_{1j}-i\beta_{2j}}s(\theta_{2j})c(\theta_{1j})c(\theta_{3j}) \\ e^{i\alpha_{2j}+i\beta_{1j}}s(\theta_{1j})c(\theta_{2j}) & e^{i\alpha_{2j}}c(\theta_{1j})c(\theta_{3j}) - e^{i\alpha_{2j}+i\beta_{1j}-i\beta_{2j}+i\beta_{3j}}s(\theta_{1j})s(\theta_{2j})s(\theta_{3j}) & -e^{i\alpha_{2j}-i\beta_{3j}}s(\theta_{3j})c(\theta_{1j}) - e^{i\alpha_{2j}+i\beta_{1j}-i\beta_{2j}}s(\theta_{1j})s(\theta_{2j})c(\theta_{3j}) \\ e^{-i\alpha_{1j}-i\alpha_{2j}+i\beta_{2j}}s(\theta_{2j}) & e^{-i\alpha_{1j}-i\alpha_{2j}+i\beta_{3j}}s(\theta_{3j})c(\theta_{2j}) & e^{-i\alpha_{1j}-i\alpha_{2j}}c(\theta_{2j})c(\theta_{3j}) \end{bmatrix}$$

onde $s(\theta_{kj}) = \text{sen}(\theta_{kj})$ e $c(\theta_{kj}) = \cos(\theta_{kj})$ para $k, j = 1, 2, 3$. Entretanto, nesse caso T_j deixa o levantamento do ponto r fixado, para $j = 1, 2, 3$. Isso nos permite eliminar alguns parâmetros, como mostra a próxima proposição.

Proposição 5.13 *Uma tripla genérica (c_1, c_2, c_3) de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, está contida em uma cópia de um $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ se, e somente se, os ângulos de transição satisfazem $\alpha_{1j} = 0$, $\theta_{1j} = 0$ e $\theta_{2j} = 0$, para $j = 1, 2, 3$.*

Prova. Considere a tripla genérica (c_1, c_2, c_3) , contida em uma cópia de um $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, associada ao conjunto de pontos positivos $\{r, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$. Seja $T_j = A_{1j}A_{2j}A_{3j}A_{4j}$, para $j = 1, 2, 3$. Temos que T_j deixa o levantamento do ponto projetivo r fixado se, e somente se, as seguintes entradas satisfazem às condições:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha_{1j}}\cos(\theta_{1j})\cos(\theta_{2j}) &= 1 \\ e^{i\alpha_{2j}+i\beta_{1j}}\text{sen}(\theta_{1j})\cos(\theta_{2j}) &= 0 \\ e^{-i\alpha_{1j}-i\alpha_{2j}+i\beta_{2j}}\text{sen}(\theta_{2j}) &= 0 \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, 3$. Por outro lado, se T_j deixa o levantamento de r fixado, então a inversa T_j^{-1} também o deixa. Consequentemente as seguintes entradas satisfazem às condições:

$$\begin{aligned} -e^{-i\alpha_{1j}+i\beta_{1j}}\text{sen}(\theta_{1j})\cos(\theta_{3j}) - e^{-i\alpha_{1j}+i\beta_{2j}-i\beta_{3j}}\text{sen}(\theta_{2j})\text{sen}(\theta_{3j})\cos(\theta_{1j}) &= 0 \\ e^{-i\alpha_{1j}+i\beta_{1j}+i\beta_{3j}}\text{sen}(\theta_{1j})\text{sen}(\theta_{3j}) - e^{-i\alpha_{1j}+i\beta_{2j}}\text{sen}(\theta_{2j})\cos(\theta_{1j})\cos(\theta_{3j}) &= 0 \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, 3$. Assim, temos que as condições dadas são satisfeitas se, e somente se, $\alpha_{1j} = 0$, $\theta_{1j} = 0$ e $\theta_{2j} = 0$, para $j = 1, 2, 3$. ■

Pela Proposição 5.13, temos que a aplicação $T_j \in SU(3, C_j^\perp)$, tal que

$$T_1 : \{R, P_{12}, Q_{12}\} \rightarrow \{R, P_{13}, Q_{13}\}$$

$$T_2 : \{R, P_{21}, Q_{21}\} \rightarrow \{R, P_{23}, Q_{23}\}$$

$$T_3 : \{R, P_{32}, Q_{32}\} \rightarrow \{R, P_{31}, Q_{31}\}$$

pode ser escrita na forma

$$T_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_{2j} \cos(\theta_{3j})} & -e^{i\alpha_{2j} - i\beta_{3j} \operatorname{sen}(\theta_{3j})} \\ 0 & e^{-i\alpha_{2j} + i\beta_{3j} \operatorname{sen}(\theta_{3j})} & e^{-i\alpha_{2j} \cos(\theta_{3j})} \end{bmatrix}$$

considerando $\alpha_{1j} = 0$, $\theta_{1j} = 0$ e $\theta_{2j} = 0$, para $j = 1, 2, 3$. Assim, podemos expressar em termos de parâmetros básicos, e dos ângulos de transição α_{2j} , β_{3j} e θ_{3j} , para $j = 1, 2, 3$, todas as entradas da matriz de Gram dos levantamentos dos elementos do conjunto $\{r, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ que está associado à tripla genérica (c_1, c_2, c_3) , usando o mesmo método apresentado na Subseção 5.2.1.

Veja que a matriz

$$\begin{bmatrix} e^{i\alpha_{2j} \cos(\theta_{3j})} & -e^{i\alpha_{2j} - i\beta_{3j} \operatorname{sen}(\theta_{3j})} \\ e^{-i\alpha_{2j} + i\beta_{3j} \operatorname{sen}(\theta_{3j})} & e^{-i\alpha_{2j} \cos(\theta_{3j})} \end{bmatrix}$$

é uma matriz de $SU(2)$. Além disso, tomando $\alpha_{2j} = \gamma_j + \delta_j$ e $\beta_{3j} = 2\delta_j$ na matriz acima, obtemos

$$\begin{bmatrix} e^{i\gamma_j + i\delta_j \cos(\theta_{3j})} & -e^{i\gamma_j - i\delta_j \operatorname{sen}(\theta_{3j})} \\ e^{-i\gamma_j + i\delta_j \operatorname{sen}(\theta_{3j})} & e^{-i\gamma_j - i\delta_j \cos(\theta_{3j})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\gamma_j} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_{3j}) & -\operatorname{sen}(\theta_{3j}) \\ \operatorname{sen}(\theta_{3j}) & \cos(\theta_{3j}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\delta_j} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta_j} \end{bmatrix}$$

para $j = 1, 2, 3$ (ver Subseção 5.1.3 em [4]). Como a última matriz não altera a projeção dos vetores da base, podemos considerar $\delta_j = 0$ para $j = 1, 2, 3$ e conseqüentemente temos que $\alpha_{2j} = \gamma_j$ e $\beta_{3j} = 0$. Assim, a matriz acima assume a forma

$$\begin{bmatrix} e^{i\alpha_{2j} \cos(\theta_{3j})} & -e^{i\alpha_{2j} \operatorname{sen}(\theta_{3j})} \\ e^{-i\alpha_{2j} \operatorname{sen}(\theta_{3j})} & e^{-i\alpha_{2j} \cos(\theta_{3j})} \end{bmatrix}$$

e então temos que a matriz T_j pode ser expressada na forma

$$T_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_{2j}} \cos(\theta_{3j}) & -e^{i\alpha_{2j}} \sen(\theta_{3j}) \\ 0 & e^{-i\alpha_{2j}} \sen(\theta_{3j}) & e^{-i\alpha_{2j}} \cos(\theta_{3j}) \end{bmatrix}$$

que está coerente com o que foi apresentado na Seção 4.2 em [12].

Com a expressão de T_j obtida acima, podemos recuperar as entradas da matriz de Gram em termos dos parâmetros básico, e dos ângulos de transição θ_{3j} e α_{2j} , usando o mesmo método apresentado na Subseção 5.2.1, com $j = 1, 2, 3$. Com isso temos o próximo resultado.

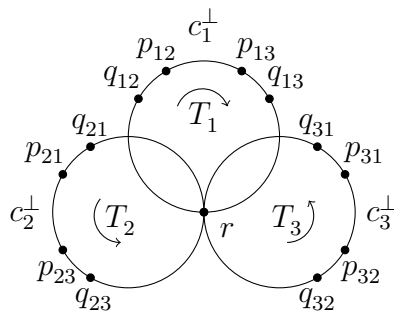
Teorema 5.14 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ contida em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, e considere $\{r, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ o conjunto de pontos positivos, associado à tripla (c_1, c_2, c_3) . Então existem levantamentos para os elementos de tal conjunto, de forma que a matriz de Gram G associada a esses levantamentos é dada por:*

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{G} \end{bmatrix}$$

tal que a matriz \tilde{G} tem a forma

$$\tilde{G} = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{cccc} 1 & \sqrt{d_{12}} & 0 & 0 \\ \sqrt{d_{12}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{12}} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_{12}} & 1 \end{array} & \begin{array}{c} E_1 \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} E_2 \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \overline{E_1} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{cccc} 1 & \sqrt{d_{23}} & 0 & 0 \\ \sqrt{d_{23}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{23}} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_{23}} & 1 \end{array} & \begin{array}{c} E_3 \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \overline{E_2} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} \overline{E_3} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{cccc} 1 & \sqrt{d_{13}} & 0 & 0 \\ \sqrt{d_{13}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_{13}} & 1 \end{array} \end{array} \right]$$

onde $1 < d_{12}, d_{13}, d_{23}$ e $0 \leq a_{12}, a_{13}, a_{23} < 1$, e os blocos E_1 , E_2 e E_3 possuem entradas recuperadas em termos dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição θ_{3j} e α_{2j} , para $j = 1, 2, 3$.



Definição 5.15 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ contida em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, associada ao conjunto $\{r, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$ de pontos positivos. Chamamos a matriz G obtida no Teorema 5.14 de matriz de Gram canônica para uma tripla genérica de geodésicas complexas contida em um $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$.*

Teorema 5.16 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ contida em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Então os seis parâmetros básicos junto com os ângulos de transição θ_{3j} e α_{2j} , para $j = 1, 2, 3$, definem unicamente a classe de congruência por $PU(4, 1)$ das triplas genéricas de geodésicas complexas contidas em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$.*

Prova. A prova segue de maneira análoga à demonstração feita para o Teorema 5.10. ■

Sabemos que a dimensão real do espaço de módulos para triplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ é 9 (ver Seção 4.1 em [12]). Entretanto, segundo o Teorema 5.16, doze parâmetros definem unicamente a classe de congruência por $PU(4, 1)$ das triplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ contidas em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$. Dessa forma, precisamos de três equações independentes que relacionam os doze parâmetros dados no Teorema 5.16. Essas equações podem ser obtidas através do cálculo de determinantes dos menores principais da matriz de Gram dada no Teorema 5.14, fazendo um procedimento similar ao que foi feito na Seção 4.2 em [12] para triplas genéricas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

5.2.3 Construção do espaço de módulos para triplas genéricas

Dividimos esta subseção em duas partes. Na primeira construímos o espaço de módulos

para triplas genéricas de geodésicas complexas que não estão contidas em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Na segunda parte estudamos sobre o caso em que as triplas genéricas estão contidas em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$.

5.2.3.1 Construção para triplas genéricas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$

Sejam (c_1, c_2, c_3) uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ e G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla (ver Teorema 5.8). Denote por $\mathcal{M}^g(3, 4)$ o espaço de configurações de triplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Os elementos de $\mathcal{M}^g(3, 4)$ são classes denotadas por $[(c_1, c_2, c_3)]$. Defina a aplicação

$$\tau : \mathcal{M}^g(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^{30}$$

que associa cada classe $[(c_1, c_2, c_3)]$ aos respectivos parâmetros básicos e ângulos de transição, ou seja, ao ponto $(d_{12}, d_{13}, d_{23}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, \alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}, \beta_{3j}, \theta_{1j}, \theta_{2j}, \theta_{3j}) \in \mathbb{R}^{30}$, para $j = 1, 2, 3$.

Notação 5.17 *Vamos denotar as uplas de invariantes por:*

$$(d, a, \alpha, \beta, \theta) = (d_{12}, d_{13}, d_{23}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, \alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}, \beta_{3j}, \theta_{1j}, \theta_{2j}, \theta_{3j}).$$

Por fim, defina o conjunto

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^g(3, 4) = \{ & (d, a, \alpha, \beta, \theta) \in \mathbb{R}^{30}; 1 < d, 0 \leq a < 1, 0 \leq \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}, \\ & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, D_{k \times l} = 0, D = 0 \} \end{aligned}$$

onde $D_{k \times l}$ são as relações apresentadas no Apêndice C, e D representa o determinante do menor principal associado ao conjunto de pontos $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, q_{12}, q_{21}, r_{23}\}$. Veja que $\mathbb{M}^g(3, 4)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^{30} é um espaço topológico. Com isso temos o próximo resultado.

Teorema 5.18 *O espaço de configurações $\mathcal{M}^g(3, 4)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}^g(3, 4)$.*

Prova. Pelas condições de determinante dadas na Proposição 1.29 e pelo Teorema 5.8, temos que a aplicação $\tau : \mathcal{M}^g(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^{30}$ dada acima define uma aplicação $\tau : \mathcal{M}^g(3, 4) \rightarrow$

$\mathbb{M}^g(3, 4)$. Pelo Teorema 5.10, temos que $\tau : \mathcal{M}^g(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}^g(3, 4)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(d, a, \alpha, \beta, \theta) \in \mathbb{M}^g(3, 4)$, usando as fórmulas que obtemos para as entradas da matriz de Gram dada no Teorema 5.8, podemos considerar G em termos dos seis parâmetros básicos e dos vinte e quatro ângulos de transição, com $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 15$. Segue da Proposição 1.29, que G assim construída, é a matriz de Gram canônica de alguma tripla genérica de geodésicas complexas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Logo $\tau : \mathcal{M}^g(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}^g(3, 4)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}^g(3, 4)$ da topologia induzida de \mathbb{R}^{30} , temos que $\tau : \mathcal{M}^g(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}^g(3, 4)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 5.19 Chamamos $\mathbb{M}^g(3, 4)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}^g(3, 4)$.

5.2.3.2 Construção para triplas genéricas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ contidas em um $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$

Sejam (c_1, c_2, c_3) uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ contida em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, e G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla (ver Teorema 5.14). Denote por $\mathcal{M}_0^g(3, 4)$ o espaço de configurações de triplas genéricas de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ contidas em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Os elementos de $\mathcal{M}_0^g(3, 4)$ são classes denotadas por $[(c_1, c_2, c_3)]$. Defina a aplicação

$$\tau : \mathcal{M}_0^g(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^{12}$$

que associa cada classe $[(c_1, c_2, c_3)]$ aos respectivos parâmetros básicos e ângulos de transição, ou seja, ao ponto $(d_{12}, d_{13}, d_{23}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33}) \in \mathbb{R}^{12}$.

Notação 5.20 Vamos denotar as uplas de invariantes por:

$$(d, a, \alpha, \theta) = (d_{12}, d_{13}, d_{23}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33}).$$

Por fim, defina o conjunto

$$\mathbb{M}_0^g(3, 4) = \{(d, a, \alpha, \theta) \in \mathbb{R}^{12}; 1 < d, 0 \leq a < 1, 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, D_k = 0\}$$

onde D_k é uma relação obtida de maneira análoga ao que foi feito na Seção 4.2 em [12], com $k = 1, 2, 3$. Veja que $\mathbb{M}_0^g(3, 4)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^{12} é um espaço topológico. Com isso, temos o próximo resultado.

Teorema 5.21 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_0^g(3, 4)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}_0^g(3, 4)$.*

Prova. A prova é similar à demonstração do Teorema 5.18 (ver Teorema 4.3 em [12]). ■

Definição 5.22 *Chamamos $\mathbb{M}_0^g(3, 4)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_0^g(3, 4)$.*

Observação 5.23 *Uma vez que temos uma tripla genérica de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ contida em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, as relações $D_{k \times l}$ dadas no Apêndice C não podem ser usadas para o caso em questão. De fato, como a tripla está contida em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$, temos pela Proposição 5.13 que tais relações se tornam triviais do tipo $0 = 0$. Uma outra forma de notar esse fato é através da construção do conjunto de pontos positivos associado à tripla em questão e da maneira que são construídas tais relações.*

5.2.4 Construção do espaço de módulos para triplas reais

Nesta subseção vamos fazer um breve estudo sobre triplas reais em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Começamos com a definição de tais triplas, e na sequência nos dedicamos à construção do espaço de módulos. Vamos ver que tal espaço está coerente com o que apresentamos no Capítulo 4 deste trabalho.

Definição 5.24 *Considere (c_1, c_2, c_3) uma tripla ordenada de geodésicas complexas distintas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Dizemos que (c_1, c_2, c_3) é uma tripla real, se existe uma subvariedade totalmente geodésica totalmente real de dimensão real 4, $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, que intersecta c_1, c_2 e c_3 . Dizemos que (c_1, c_2, c_3) é uma 3-tripla real, se existe uma subvariedade totalmente geodésica totalmente real de dimensão real 3, $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$, que intersecta c_1, c_2 e c_3 .*

Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla real em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Temos por definição, que existe $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ tal que $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 \cap c_j \neq \emptyset$, para $j = 1, 2, 3$. Veja que $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 \cap c_j = \sigma_j$, onde σ_j é uma geodésica riemanniana em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, para cada $j = 1, 2, 3$. Dessa forma, cada tripla real (c_1, c_2, c_3) está associada a uma tripla de geodésicas riemannianas $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. O mesmo pode ser feito para uma 3-tripla real.

Exemplo 5.25 Considere os subespaços de $V_{\mathbb{C}}^{4,1}$ denotados por $C_1 = \{(X_1, X_2, 0, 0, \sqrt{2}X_1); X_1, X_2 \in \mathbb{C}\}$, $C_2 = \{(0, 0, Y_1, Y_2, \sqrt{2}Y_2); Y_1, Y_2 \in \mathbb{C}\}$ e $C_3 = \{(0, Z_1, Z_1, Z_2, 4Z_1); Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}\}$. Considere a tripla (c_1, c_2, c_3) , onde $c_j = \pi(C_j - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, para $j = 1, 2, 3$. Afirmamos que essa tripla é real. De fato, basta tomar $V_{\mathbb{R}}^{4,1} \subset V_{\mathbb{C}}^{4,1}$ consistindo de combinações lineares de elementos da base canônica de $V_{\mathbb{C}}^{4,1}$ com escalares reais, e considerar $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 \simeq \pi(V_{\mathbb{R}}^{4,1} \cap V_-)$. Assim obtemos o desejado.

Proposição 5.26 Uma tripla (c_1, c_2, c_3) de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ é uma tripla real se, e somente se, os ângulos de transição $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}, \beta_{3j}$ são nulos, para $j = 1, 2, 3$.

Abaixo fazemos uma versão análoga da proposição anterior para 3-triplas reais. Esse fato segue do Teorema 5.16, uma vez que uma 3-tripla real, em particular, está em um $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$.

Proposição 5.27 Uma tripla (c_1, c_2, c_3) de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ é uma 3-tripla real se, e somente se, os ângulos de transição $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}, \beta_{3j}, \theta_{1j}$ e θ_{2j} são nulos, para $j = 1, 2, 3$.

Temos da Proposição 5.26 que triplas reais possuem os parâmetros $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}, \beta_{3j}$ nulos, para $j = 1, 2, 3$. Assim, segue desse fato, junto com o Teorema 5.18, o nosso próximo resultado.

Teorema 5.28 Seja $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla ordenada de geodésicas riemannianas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Então a classe de congruência de σ em relação ao grupo de isometrias de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ é determinada unicamente por seis parâmetros básicos (distâncias e ângulos) e os nove ângulos de transição dados por θ_{1j}, θ_{2j} e θ_{3j} , sujeito às relações $D_{k \times l} = 0$ e $D = 0$, onde $\alpha_{1j} = 0, \alpha_{2j} = 0, \beta_{1j} = 0, \beta_{2j} = 0$ e $\beta_{3j} = 0$, com $j = 1, 2, 3$.

Por outro lado, segue da Proposição 5.27 que 3-triplas reais possuem os parâmetros $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}, \beta_{3j}, \theta_{1j}$ e θ_{2j} nulos, para $j = 1, 2, 3$. Assim, o próximo resultado segue desse fato, junto com o Teorema 5.21.

Teorema 5.29 Seja $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla ordenada de geodésicas riemannianas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$. Então a classe de congruência de σ em relação ao grupo de isometrias de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ é determinada unicamente por seis parâmetros básicos (distâncias e ângulos) e três ângulos de transição dados por θ_{31}, θ_{32} e θ_{33} , sujeito às relações $D_k = 0$, onde $\alpha_{1j} = 0, \alpha_{2j} = 0, \beta_{1j} = 0, \beta_{2j} = 0, \beta_{3j} = 0, \theta_{1j} = 0$ e $\theta_{2j} = 0$, com $j, k = 1, 2, 3$.

5.3 Espaço de Módulos de Triplas Especiais

Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla especial de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Vimos que para uma tripla ser chamada de especial, é preciso que pelo menos uma das subduplas, (c_1, c_2) , (c_2, c_3) ou (c_1, c_3) , associada a tal tripla seja formada por geodésicas complexas coplanares (ver Definição 5.2). Dessa forma, vamos dedicar esta seção ao estudo dos seguintes casos:

- (i) Caso em que uma subdupla é coplanar, as outras duas são reversas e não existe $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ que contenha a tripla, chamado de *caso quase genérico tipo 1*;
- (ii) Caso em que uma subdupla é coplanar, as outras duas são reversas e existe $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ que contém a tripla, chamado de *caso quase genérico tipo 2*;
- (iii) Caso em que duas subduplas são coplanares e uma das subduplas é reversa, chamado de *caso quase coplanar*;
- (iv) Caso em que as três subduplas são coplanares, mas não existe $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ que contenha a tripla, chamado de *caso duas a duas coplanar*;
- (v) Caso em que as três subduplas são coplanares, e existe $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ que contém a tripla, chamado de *caso coplanar*.

Nesta seção vamos precisar de mais um invariante projetivo, além do d -invariante definido no Capítulo 2. Segue a definição de tal invariante.

Definição 5.30 *Sejam p_1, p_2 e p_3 três pontos positivos distintos, não ortogonais dois a dois, e P_1, P_2 e P_3 seus respectivos levantamentos. Então \mathbb{A} definido por*

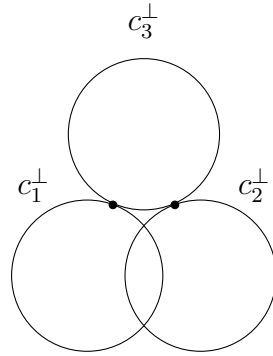
$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(p_1, p_2, p_3) = \arg(\langle P_1, P_2 \rangle \langle P_2, P_3 \rangle \langle P_3, P_1 \rangle)$$

é chamado de invariante angular para tripla ordenada de pontos positivos (p_1, p_2, p_3) .

Veja que a expressão dada para \mathbb{A} está bem definida, ou seja, independe da escolha dos levantamentos para os pontos pertencentes à tripla (p_1, p_2, p_3) . Além disso, vamos considerar $\mathbb{A} \in (-\pi, \pi]$.

5.3.1 Triplas quase genéricas tipo 1

Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla especial de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Suponha que a tripla seja quase genérica tipo 1. Vamos supor também nesta subseção, sem perda de generalidade, que (c_1, c_2) é a subdupla coplanar, e que (c_2, c_3) e (c_1, c_3) são as subduplas reversas. Segue abaixo um desenho que ilustra o posicionamento dos conjuntos polares no caso em questão.

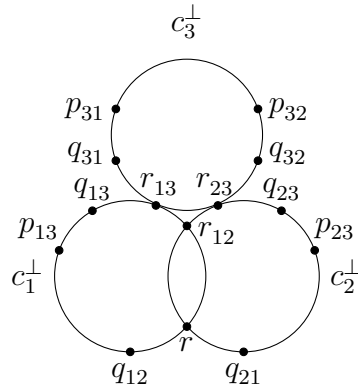


Exemplo 5.31 *Sejam os subespaços de $V_{\mathbb{C}}^{4,1}$ denotados por $C_1 = \{(X_1, 0, 0, X_2, 2X_1); X_1, X_2 \in \mathbb{C}\}$, $C_2 = \{(Y_1, Y_2, 0, 0, 2Y_1); Y_1, Y_2 \in \mathbb{C}\}$ e $C_3 = \{(0, 0, Z_1, 0, Z_2); Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}\}$. Considere a tripla (c_1, c_2, c_3) , onde $c_j = \pi(C_j - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, para $j = 1, 2, 3$. Temos que a tripla (c_1, c_2, c_3) é uma tripla quase genérica tipo 1 em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Além disso, note que nesse caso a tripla (c_1, c_2, c_3) não está contida em nenhuma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$.*

Como estamos supondo que a subdupla (c_1, c_2) é coplanar, temos associado a ela um conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, r\}$, se for ultraparalela, e por $\{r_{12}, r, q_{12}, q_{21}\}$, se for concorrente ou assintótica. Por outro lado, como as subduplas (c_2, c_3) e (c_1, c_3) são reversas, associamos a elas os conjuntos bi-ortogonais $\{r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, respectivamente. Com isso, associamos cada tripla (c_1, c_2, c_3) ao conjunto $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, r, r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, se a dupla (c_1, c_2) for ultraparalela, e ao conjunto $\{r_{12}, r, q_{12}, q_{21}, r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, se a dupla (c_1, c_2) for concorrente ou assintótica.

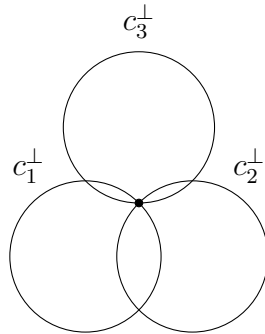
Veja que a construção do espaço de módulos para este caso é feita de maneira similar ao caso genérico apresentado acima. A diferença é que neste caso vamos ter pelo menos um dos

parâmetros básicos com valor 1 (ver Proposição 2.110). Em outras palavras, o ângulo ou a distância (ou ambos) entre as geodésicas complexas de uma subdupla é 0.



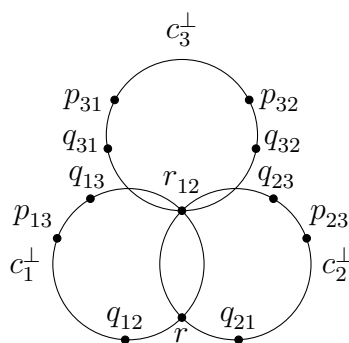
5.3.2 Triplas quase genéricas tipo 2

Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla especial de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Além disso, suponha que a tripla seja quase genérica tipo 2. Vamos supor também nesta subseção, sem perda de generalidade, que (c_1, c_2) é a subdupla coplanar, e que (c_2, c_3) e (c_1, c_3) são as subduplas reversas. Segue abaixo um desenho que ilustra o posicionamento dos conjuntos polares no caso em questão.



Exemplo 5.32 *Sejam os subespaços de $V_{\mathbb{C}}^{4,1}$ denotados por $C_1 = \{(X_1, 0, 0, X_2, 2X_1); X_1, X_2 \in \mathbb{C}\}$, $C_2 = \{(Y_1, Y_2, 0, 0, 2Y_1); Y_1, Y_2 \in \mathbb{C}\}$ e $C_3 = \{(0, Z_1, 0, Z_2, 2(Z_1 + Z_2)); Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}\}$. Considere a tripla (c_1, c_2, c_3) , onde $c_j = \pi(C_j - \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, para $j = 1, 2, 3$. Temos que a tripla (c_1, c_2, c_3) é uma tripla quase genérica tipo 2 em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Note que a tripla (c_1, c_2, c_3) está contida em uma cópia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Tal cópia é dada pela projeção $\pi(W \cap V_-)$, onde $W = \{(X_1, X_2, 0, X_3, X_4); X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathbb{C}\}$.*

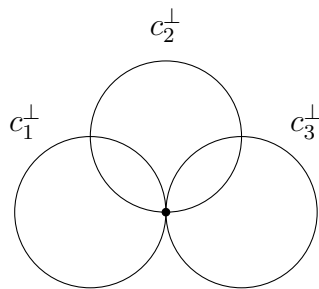
Da mesma forma que fizemos para o caso quase genérico tipo 1, aqui também associamos a cada tripla, um conjunto de pontos positivos. Note que, para o caso em questão temos $r_{12} = r_{13} = r_{23} = c_1 \cap c_2 \cap c_3$. Como a subdupla (c_1, c_2) é coplanar, temos associado a ela um conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, r\}$, se for ultraparalela, e por $\{r_{12}, r, q_{12}, q_{21}\}$, se for concorrente ou assintótica. Por outro lado, como as subduplas (c_2, c_3) e (c_1, c_3) são reversas, associamos a elas os conjuntos bi-ortogonais $\{r_{23}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, respectivamente. Usando o fato de que $r_{12} = r_{13} = r_{23}$, associamos cada tripla (c_1, c_2, c_3) ao conjunto $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, r, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, se a dupla (c_1, c_2) for ultraparalela, e ao conjunto $\{r_{12}, r, q_{12}, q_{21}, p_{23}, p_{32}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$, se a dupla (c_1, c_2) for concorrente ou assintótica (caso ilustrado abaixo em termos de conjuntos polares).



A construção do espaço de módulos para este caso é feita de maneira similar ao caso genérico apresentado acima. Assim como no caso quase genérico tipo 1, neste caso vamos ter pelo menos um dos parâmetros básicos com valor 1 (ver Proposição 2.110). Em outras palavras, o ângulo ou a distância (ou ambos) entre as geodésicas complexas de uma subdupla é 0. Veja que este caso se resume ao caso quase genérico comentado em [12].

5.3.3 Tripas quase coplanares

Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla especial de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Além disso, suponha que a tripla seja quase coplanar, ou seja, caso em que duas subduplas são coplanares e uma subdupla é reversa. Considerando que as subduplas (c_1, c_2) e (c_2, c_3) são coplanares e que a subdupla (c_1, c_3) é reversa, temos abaixo um desenho que ilustra o posicionamento dos conjuntos polares no caso em questão.

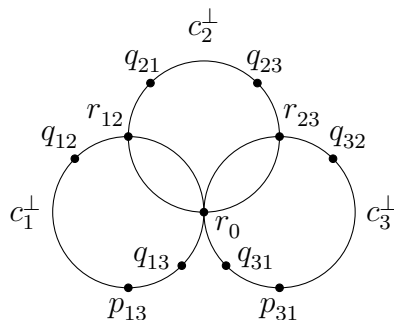


Exemplo 5.33 *Sejam os subconjuntos $C_1 = \{(X_1, X_2, 0, 0, X_1\sqrt{2}); X_1, X_2 \in \mathbb{C}\}$ e $C_2 = \{(0, 0, Y_1, Y_2, Y_2\sqrt{2}); Y_1, Y_2 \in \mathbb{C}\}$ de $V_{\mathbb{C}}^{4,1}$. Considere a geodésica complexa perpendicular comum a $c_1 = \pi(C_1) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ e $c_2 = \pi(C_2) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ dada por $c_{12} = \pi(C_{12}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, onde $C_{12} = \{(Z_1, 0, 0, Z_2, (Z_1 + Z_2)\sqrt{2}); Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}\}$. Veja que este é um exemplo de tripla quase coplanar, onde a subdupla (c_1, c_2) é reversa e as demais são coplanares.*

Da mesma forma que fizemos para os demais casos, aqui também associamos a cada tripla um conjunto de pontos positivos. Vimos que para uma subdupla coplanar (c_j, c_k) , podemos associar a ela o conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{jk}, r, q_{jk}, q_{kj}\}$, se a subdupla em questão for concorrente ou assintótica, e associar a ela o conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{jk}, p_{jk}, p_{kj}, r\}$, se a subdupla em questão for ultraparalela. Por outro lado, se a subdupla (c_j, c_k) é reversa, podemos associar a ela um conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{jk}, p_{jk}, p_{kj}, q_{jk}, q_{kj}\}$.

Assim, supondo por exemplo que as subduplas (c_1, c_2) e (c_2, c_3) são concorrentes ou assintóticas, e que (c_1, c_3) é reversa, podemos associar à tripla especial (c_1, c_2, c_3) o conjunto de pontos positivos $\{r_{12}, r, q_{12}, q_{21}, r_{23}, r', q_{23}, q_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$. Note que, para o caso em questão, podemos considerar $r = r' = r_{13}$ e denotar tal ponto por r_0 . Dessa forma, vamos denotar o conjunto de pontos positivos associado à tripla especial (c_1, c_2, c_3) , tal que (c_1, c_2) e (c_2, c_3) são concorrentes ou assintóticas, e (c_1, c_3) é reversa, por $\{r_0, r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, p_{13}, p_{31}, q_{13}, q_{31}\}$. Analogamente podemos obter tal conjunto de pontos positivos para os demais casos.

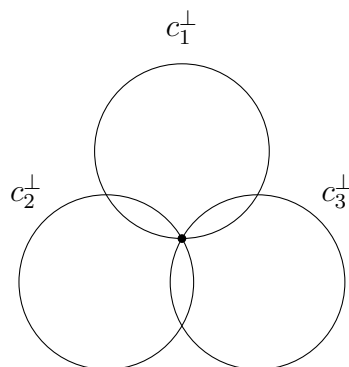
Observação 5.34 *Para o caso particular em que (c_1, c_2) e (c_2, c_3) são concorrentes, (c_1, c_3) é reversa, e c_2 é a geodésica complexa perpendicular comum a c_1 e c_3 , temos que o problema de congruência da tripla (c_1, c_2, c_3) se resume ao problema de congruência da dupla reversa (c_1, c_3) (ver Observação 4.28).*



A construção do espaço de módulos para este caso também é feita de maneira similar ao caso genérico. A diferença é que neste caso vamos ter pelo menos dois dos parâmetros básicos com valor 1 (ver Proposição 2.110). Em outras palavras, o ângulo ou a distância (ou ambos) entre as geodésicas complexas de duas das subduplas associadas a tal tripla é 0.

5.3.4 Triplas duas a duas coplanares

Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla especial de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Além disso, suponha que a tripla seja duas a duas coplanar, ou seja, cada subdupla (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) está contida em um $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ diferente. Segue abaixo um desenho que ilustra o posicionamento dos conjuntos polares no caso em questão.



Observação 5.35 *Se a tripla (c_1, c_2, c_3) for duas a duas coplanar, temos que as linhas projetivas complexas indefinidas associadas a tais geodésicas se intersectam em um mesmo ponto, caso contrário a tripla seria coplanar, uma vez que três pontos em $\mathbb{C}P^4$ determinam um plano projetivo (indefinido nesse caso). O ponto de intersecção das linhas projetivas complexas pode ser positivo, negativo ou isotrópico, fazendo com que as subduplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) sejam ultraparalelas, concorrentes ou assintóticas, respectivamente. Além*

disso, se as subduplas são ultraparalelas com ponto de intersecção p positivo, temos que ambas intersectam ortogonalmente o hiperplano complexo dado por p^\perp .

Da mesma forma que fizemos para os demais casos, aqui também associamos a cada tripla, um conjunto de pontos positivos. Vimos que para uma subdupla coplanar (c_j, c_k) , podemos associar a ela o conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{jk}, r, q_{jk}, q_{kj}\}$, se a subdupla em questão for concorrente ou assintótica, e associar a ela o conjunto bi-ortogonal denotado por $\{r_{jk}, p_{jk}, p_{kj}, r\}$, se a subdupla em questão for ultraparalela. Vamos supor, por exemplo, que cada subdupla seja concorrente (ou assintótica). Assim, temos associado às subduplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) , os conjuntos bi-ortogonais denotados por $\{r_{12}, r, q_{12}, q_{21}\}$, $\{r_{23}, r', q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, r'', q_{13}, q_{31}\}$, respectivamente. Note que, para o caso em questão, podemos considerar $r = r' = r''$ e denotar tal ponto por r_0 . Com isso, associamos cada tripla (c_1, c_2, c_3) ao conjunto $\{r_0, r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, q_{13}, q_{31}\}$. O mesmo pode ser feito para o caso em que cada subdupla é ultraparalela, obtendo o conjunto $\{r_0, r_{12}, p_{12}, p_{21}, r_{23}, p_{23}, p_{32}, r_{13}, p_{13}, p_{31}\}$.

Vamos supor a partir daqui que cada subdupla associada à tripla em questão seja concorrente, pois para os casos em que tais subduplas são ultraparalelas ou assintóticas, o procedimento é análogo. Vimos que no caso concorrente, podemos associar à tripla em questão, um conjunto de pontos positivos dado por $\{r_0, r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, q_{13}, q_{31}\}$. Denote a matriz de Gram de tal conjunto por G . Sabemos do Capítulo 2, que existem levantamentos $R_0, R_{12}, Q_{12}, Q_{21}, R_{23}, Q_{23}, Q_{32}, R_{13}, Q_{13}, Q_{31}$ para os elementos desse conjunto de pontos positivos, tais que podemos recuperar em termos de parâmetros básicos as entradas dos blocos formados pelos conjuntos $\{r_0, r_{12}, q_{12}, q_{21}\}$, $\{r_0, r_{23}, q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_0, r_{13}, q_{13}, q_{31}\}$, onde tais blocos são dados respectivamente por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{12}} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_{12}} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{23}} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_{23}} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{a_{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{a_{13}} & 1 \end{bmatrix}$$

com $0 \leq a_{12}, a_{23}, a_{13} < 1$.

A ideia agora é recuperar as demais entradas da matriz de Gram G , em termos dos três parâmetros básicos que temos e dos ângulos de transição. Para tanto, vamos fazer um

procedimento análogo ao feito na Seção 5.2 para o caso genérico. Então, considere elementos $T_j \in SU(3, C_j^\perp)$ tais que

$$T_1 : \{R_0, R_{13}, Q_{13}\} \rightarrow \{R_0, R_{12}, Q_{12}\}$$

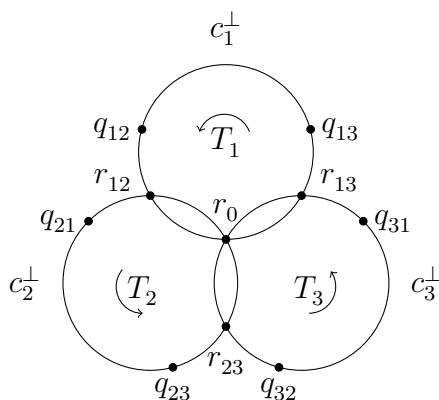
$$T_2 : \{R_0, R_{12}, Q_{21}\} \rightarrow \{R_0, R_{23}, Q_{23}\}$$

$$T_3 : \{R_0, R_{23}, Q_{32}\} \rightarrow \{R_0, R_{13}, Q_{31}\}$$

onde cada T_j pode ser escrita na forma

$$T_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_{2j} \cos(\theta_{3j})} & -e^{i\alpha_{2j} \sin(\theta_{3j})} \\ 0 & e^{-i\alpha_{2j} \sin(\theta_{3j})} & e^{-i\alpha_{2j} \cos(\theta_{3j})} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T_j^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_{2j} \cos(\theta_{3j})} & e^{i\alpha_{2j} \sin(\theta_{3j})} \\ 0 & -e^{-i\alpha_{2j} \sin(\theta_{3j})} & e^{i\alpha_{2j} \cos(\theta_{3j})} \end{bmatrix}$$

com $j = 1, 2, 3$.



Observação 5.36 O Teorema de Witt nos permite estender a aplicação $T_j \in SU(3, C_j^\perp)$ para uma aplicação de $SU(4, 1)$, para $j = 1, 2, 3$.

Agora, para recuperar, por exemplo, a entrada $\langle Q_{21}, R_{23} \rangle$, temos do produto

$$[R_0 \ R_{23} \ Q_{23}] = [R_0 \ R_{12} \ Q_{21}] T_2$$

que R_{23} possui uma expressão

$$R_{23} = R_{12} e^{i\alpha_{22} \cos(\theta_{32})} + Q_{21} e^{-i\alpha_{22} \sin(\theta_{32})},$$

e conseqüentemente

$$\langle Q_{21}, R_{23} \rangle = e^{i\alpha_{22} \sin(\theta_{32})},$$

obtendo assim, uma expressão para $\langle Q_{21}, R_{23} \rangle$ que depende apenas dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição. As demais entradas da matriz de Gram podem ser recuperadas da mesma forma, e estão explicitadas no Apêndice C. Assim, obtemos o próximo teorema.

Teorema 5.37 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas complexas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, e considere $\{r_0, r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, q_{13}, q_{31}\}$ o conjunto de pontos positivos, associado à tripla em questão. Então existem levantamentos para os elementos de tal conjunto, de forma que a matriz de Gram G associada a esses levantamentos é dada por:*

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{G} \end{bmatrix}$$

tal que a matriz \tilde{G} tem a forma

$$\tilde{G} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & \sqrt{a_{12}} & E_1 & E_2 \\ 0 & \sqrt{a_{12}} & 1 & & \\ \hline & \overline{E_1} & & 1 & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \sqrt{a_{23}} & E_3 \\ & & & 0 & \sqrt{a_{23}} & 1 & \\ \hline & \overline{E_2} & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & \overline{E_3} & & 0 & 1 & \sqrt{a_{13}} \\ & & & & & & 0 & \sqrt{a_{13}} & 1 \end{array} \right]$$

onde $0 \leq a_{12}, a_{13}, a_{23} < 1$, e os blocos E_1, E_2 e E_3 possuem entradas recuperadas em termos dos parâmetros básicos a_{12}, a_{23}, a_{13} e dos ângulos de transição θ_{3j} e α_{2j} , para $j = 1, 2, 3$.

Definição 5.38 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Chamamos a matriz de Gram G associada a tal tripla, obtida como no Teorema 5.37), de matriz de Gram canônica para uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$.*

Para o caso em que a tripla duas a duas coplanar possui subduplas de geodésicas complexas ultraparalelas, a matriz de Gram canônica para a tripla em questão tem entradas recuperadas em termos dos parâmetros básicos d_{12}, d_{23}, d_{13} , e dos ângulos de transição θ_{3j} e α_{2j} , para $j = 1, 2, 3$, com $1 < d_{12}, d_{23}, d_{13}$. O mesmo vale para o caso assintótico, entretanto, temos que $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 1$.

Teorema 5.39 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas complexas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Considere o conjunto de pontos positivos $\{r_0, r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, q_{13}, q_{31}\}$ associado a tal tripla. Então os parâmetros básicos a_{12}, a_{23}, a_{13} , e os ângulos de transição θ_{3j} e α_{2j} , para $j = 1, 2, 3$, determinam unicamente a classe de congruência por $PU(4, 1)$ das triplas duas a duas coplanares de geodésicas complexas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$.*

Prova. Sejam (c_1, c_2, c_3) uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas complexas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ e G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Pela construção de G , temos que as entradas são recuperadas de maneira única em termos de respectivos parâmetros básicos e ângulos de transição. Sejam $\{r_0, r_{12}, q_{12}, q_{21}, r_{23}, q_{23}, q_{32}, r_{13}, q_{13}, q_{31}\}$, o conjunto de pontos positivos associado à tripla (c_1, c_2, c_3) , e W o espaço gerado por levantamentos dos elementos de tal conjunto. Veja que W é não degenerado. Além disso, se (c'_1, c'_2, c'_3) é uma outra tripla duas a duas coplanar de geodésicas complexas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ com G' sendo a matriz de Gram canônica associada a tal tripla, e se G' é recuperada com os mesmos parâmetros básicos e mesmos ângulos de transição dados nas entradas de G , temos que $G = G'$. Analogamente, para dado $\{r'_0, r'_{12}, q'_{12}, q'_{21}, r'_{23}, q'_{23}, q'_{32}, r'_{13}, q'_{13}, q'_{31}\}$, o conjunto de pontos positivos associado à tripla (c'_1, c'_2, c'_3) , com W' sendo o espaço gerado por levantamentos dos elementos de tal conjunto, temos que W' é não degenerado. O resultado segue da Proposição 1.32. ■

Agora considere uma tripla duas a duas coplanar de geodésicas complexas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, denotada por (c_1, c_2, c_3) . Seja G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Vimos que podemos recuperar as entradas de G em termos dos invariantes $a_{12}, a_{13}, a_{23}, \theta_{3j}$ e α_{2j} , para $j = 1, 2, 3$. Denote por $\mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4)$ o espaço de configurações de triplas duas a duas coplanares de geodésicas complexas concorrentes em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Os elementos de $\mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4)$ são classes denotadas por $[(c_1, c_2, c_3)]$. Defina a aplicação

$$\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^9$$

que associa a cada classe $[(c_1, c_2, c_3)]$ os invariantes $a_{12}, a_{13}, a_{23}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \theta_{31}, \theta_{32}$ e θ_{33} .

Notação 5.40 *Vamos denotar as uplas de invariantes por:*

$$(a, \alpha, \theta) = (a_{12}, a_{13}, a_{23}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33}).$$

Por fim, defina o conjunto

$$\mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4) = \{(a, \alpha, \theta) \in \mathbb{R}^9; 0 \leq a < 1, 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \theta < \pi, D_{k \times l} = 0\},$$

onde $D_{k \times l}$ são relações independentes construídas no Apêndice C. Essas relações são dadas por:

$$\begin{aligned} D_{2 \times 5} &= e^{-i\alpha_{22}} \cos(\theta_{32}) - [e^{i\alpha_{21} + i\alpha_{23}} \cos(\theta_{31}) \cos(\theta_{33}) - \sqrt{a_{13}} e^{-i\alpha_{21} + i\alpha_{23}} \operatorname{sen}(\theta_{31}) \operatorname{sen}(\theta_{33})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{2 \times 8} &= e^{i\alpha_{21}} \cos(\theta_{31}) - [e^{-i\alpha_{22} - i\alpha_{23}} \cos(\theta_{32}) \cos(\theta_{33}) - \sqrt{a_{23}} e^{-i\alpha_{22} + i\alpha_{23}} \operatorname{sen}(\theta_{32}) \operatorname{sen}(\theta_{33})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{5 \times 8} &= e^{-i\alpha_{23}} \cos(\theta_{33}) - [e^{i\alpha_{22} + i\alpha_{21}} \cos(\theta_{31}) \cos(\theta_{32}) - \sqrt{a_{12}} e^{-i\alpha_{22} + i\alpha_{21}} \operatorname{sen}(\theta_{31}) \operatorname{sen}(\theta_{32})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{3 \times 5} &= \sqrt{a_{12}} e^{i\alpha_{22}} \operatorname{sen}(\theta_{22}) + [e^{i\alpha_{21} + i\alpha_{23}} \operatorname{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{33}) + \sqrt{a_{13}} e^{-i\alpha_{21} + i\alpha_{23}} \cos(\theta_{31}) \operatorname{sen}(\theta_{33})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{4 \times 8} &= -\sqrt{a_{12}} e^{i\alpha_{21}} \operatorname{sen}(\theta_{31}) - [e^{i\alpha_{22} - i\alpha_{23}} \operatorname{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{33}) + \sqrt{a_{23}} e^{i\alpha_{22} + i\alpha_{23}} \cos(\theta_{32}) \operatorname{sen}(\theta_{33})] \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Veja que $\mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^9 é um espaço topológico. Assim, temos o próximo resultado.

Teorema 5.41 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4)$.*

Prova. Pelas condições de determinante (Proposição 1.29 com $n = 4$) e pelo Teorema 5.39, temos que a aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^9$ dada acima define uma aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4)$. Pelo Teorema 5.39 temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(a_{12}, a_{13}, a_{23}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33}) \in \mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4)$, usando as fórmulas que obtemos para as entradas da matriz de Gram dada no Teorema 5.37, podemos considerar G em termos dos três parâmetros básicos e dos seis ângulos de transição, com $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 10$. Segue da Proposição 1.29 (para $n = 4$), que G assim construída, é a matriz de Gram canônica de alguma tripla duas a duas coplanar de geodésicas complexas concorrentes de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Logo $\tau : \mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. ■

Definição 5.42 Chamamos $\mathbb{M}_1^{2-2}(3, 4)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_1^{2-2}(3, 4)$.

Se o conjunto $\mathcal{M}_0^{2-2}(3, 4)$ denota o espaço de configurações de triplas duas a duas coplanares de geodésicas complexas ultraparalelas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, procedendo como fizemos acima, obtemos que o conjunto

$$\mathbb{M}_0^{2-2}(3, 4) = \{(d, \alpha, \theta) \in \mathbb{R}^9; d > 1, 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \theta < \pi, D_{k \times l} = 0\},$$

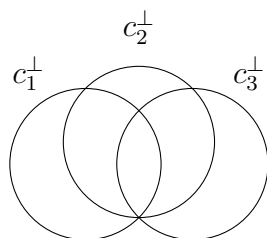
onde os $D_{k \times l}$ representam as cinco relações independentes construídas assim como no caso concorrente, é o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_0^{2-2}(3, 4)$. De maneira similar, se o conjunto $\mathcal{M}_2^{2-2}(3, 4)$ denota o espaço de configurações de triplas duas a duas coplanares de geodésicas complexas assintóticas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, procedendo como fizemos acima, obtemos que o conjunto

$$\mathbb{M}_2^{2-2}(3, 4) = \{(a, \alpha, \theta) \in \mathbb{R}^9; a = 1, 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \theta < \pi, D_{k \times l} = 0\},$$

onde os $D_{k \times l}$ representam as cinco relações independentes construídas assim como no caso concorrente, é o espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_2^{2-2}(3, 4)$.

5.3.5 Triplas coplanares

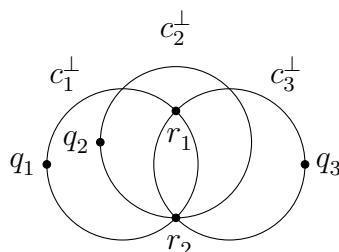
Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla especial de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Além disso, suponha que a tripla seja coplanar, ou seja, as subduplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) são coplanares, todas contidas em um mesmo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Segue abaixo um desenho que ilustra o posicionamento dos conjuntos polares no caso em questão.



Da mesma forma que fizemos para os demais casos, aqui também associamos a cada tripla, um conjunto de pontos positivos. Vamos supor, por exemplo, que cada subdupla seja

concorrente ou assintótica. Assim, temos associado às subduplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) , os conjuntos bi-ortogonais denotados por $\{r_{12}, r, q_{12}, q_{21}\}$, $\{r_{23}, r', q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, r'', q_{13}, q_{31}\}$, respectivamente. Note que, para o caso em questão, temos que $q_{12} = q_{13}$, $q_{21} = q_{23}$, $q_{31} = q_{32}$, e podemos denotar tais pontos por q_1 , q_2 e q_3 , respectivamente. Além disso, podemos considerar $\{r_{12}, r\} = \{r_{23}, r'\} = \{r_{13}, r''\}$ e denotar tal conjunto por $\{r_1, r_2\}$. Com isso, associamos cada tripla (c_1, c_2, c_3) ao conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. Os demais casos podem ser feitos de maneira similar (ver Observação 5.43 feita abaixo).

Observação 5.43 *Se a tripla coplanar (c_1, c_2, c_3) possui a subdupla (c_1, c_2) ultraparalela e as demais são concorrentes ou assintóticas, temos associado às subduplas (c_1, c_2) , (c_2, c_3) e (c_1, c_3) , os conjuntos bi-ortogonais denotados por $\{r_{12}, p_{12}, p_{21}, r\}$, $\{r_{23}, r', q_{23}, q_{32}\}$ e $\{r_{13}, r'', q_{13}, q_{31}\}$, respectivamente. Análogo ao que foi feito antes, temos que $p_{12} = q_{13}$, $p_{21} = q_{23}$, $q_{31} = q_{32}$, e podemos denotar tais pontos por q_1 , q_2 e q_3 , respectivamente. Além disso, podemos considerar $\{r_{12}, r\} = \{r_{23}, r'\} = \{r_{13}, r''\}$ e denotar tal conjunto por $\{r_1, r_2\}$. Com isso associamos cada tripla (c_1, c_2, c_3) ao conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. O mesmo podemos fazer para o caso em que duas das subduplas são ultraparalelas e para o caso em que as três subduplas são ultraparalelas.*



Definição 5.44 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar associada ao conjunto de pontos positivos $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. Dizemos que essa tripla é não ortogonal se as geodésicas complexas pertencentes à tripla não são ortogonais, ou seja, $\langle Q_j, Q_k \rangle \neq 0$, onde Q_j é um levantamento para q_j , com $j \neq k$ e $j, k = 1, 2, 3$.*

5.3.5.1 Triplas coplanares não ortogonais

Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar não ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_\mathbb{C}^4$. Vimos que para cada tripla coplanar podemos associar um conjunto de pontos positivos dado por

$\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. Usando um argumento análogo ao feito na demonstração da Proposição 1.27, temos que existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g_{34} & g_{35} \\ 0 & 0 & g_{34} & 1 & g_{45} \\ 0 & 0 & g_{35} & g_{45} & 1 \end{bmatrix}$$

com $g_{34}, g_{35} \in \mathbb{R}$, $g_{34}, g_{35} > 0$, $g_{45} = \tilde{g}_{45}e^{i\alpha}$ e $g_{54} = \tilde{g}_{45}e^{-i\alpha}$ com $\tilde{g}_{45} \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in (-\pi, \pi]$. Usando o conceito de d -invariante, e a notação $d_{jk} = d(q_j, q_k)$, para $j, k = 1, 2, 3$, com $j < k$, temos que $d_{12} = d(q_1, q_2) = \langle Q_1, Q_2 \rangle \langle Q_2, Q_1 \rangle = g_{34}^2$, e conseqüentemente $g_{34} = \sqrt{d_{12}}$. Analogamente obtemos que $g_{35} = \sqrt{d_{13}}$. Como $g_{45} = |g_{45}|e^{i\alpha} = \tilde{g}_{45}e^{i\alpha}$ e $d_{23} = d(q_2, q_3) = g_{45}g_{54} = |g_{45}|^2$, temos que $\tilde{g}_{45} = \sqrt{d_{23}}$. Além disso, usando o conceito de invariante angular, temos que $\mathbb{A}(q_1, q_2, q_3) = \arg(g_{34}g_{45}g_{35}) = \arg(g_{34}\tilde{g}_{45}e^{i\alpha}g_{35})$ e conseqüentemente temos que $\mathbb{A} = \mathbb{A}(q_1, q_2, q_3) = \alpha$. Assim, existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{d_{12}} & \sqrt{d_{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{12}} & 1 & \sqrt{d_{23}}e^{i\mathbb{A}} \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{13}} & \sqrt{d_{23}}e^{-i\mathbb{A}} & 1 \end{bmatrix}$$

a qual chamamos de *matriz de Gram canônica* de uma tripla coplanar não ortogonal em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$.

Observação 5.45 *Veja que, calculando o determinante da matriz de Gram canônica acima, lembrando que $e^{i\mathbb{A}} = \cos(\mathbb{A}) + i\text{sen}(\mathbb{A})$, obtemos a expressão*

$$\det(G) = 1 - d_{12} - d_{13} - d_{23} + 2\sqrt{d_{12}}\sqrt{d_{13}}\sqrt{d_{23}}\cos(\mathbb{A}).$$

Além disso, temos que $1 - d_{12} - d_{13} - d_{23} + 2\sqrt{d_{12}}\sqrt{d_{13}}\sqrt{d_{23}}\cos(\mathbb{A}) \leq 0$.

Teorema 5.46 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar não ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Considere o conjunto de pontos positivos $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ associado a tal tripla. Então os d -invariantes $d(q_1, q_2)$, $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$ junto com o invariante angular $\mathbb{A}(q_1, q_2, q_3)$ determinam unicamente a classe de congruência por $PU(4, 1)$ das triplas coplanares não ortogonais tais que o espaço gerado pelos levantamentos, denotado por $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{R_1, R_2, Q_1, Q_2, Q_3\}$, é não degenerado.*

Prova. Basta notar que se duas triplas possuem mesmos d -invariantes e mesmo invariante angular, então possuem a mesma matriz de Gram canônica. Como as triplas estão associadas a conjuntos de pontos positivos tais que os conjuntos gerados pelos levantamentos são não degenerados, temos que o resultado segue da Proposição 1.32. ■

Agora considere uma tripla coplanar não ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, denotada por (c_1, c_2, c_3) , associada ao conjunto de pontos positivos $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$, cujos levantamentos são denotados por $\{R_1, R_2, Q_1, Q_2, Q_3\}$. Seja G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Vimos que podemos recuperar as entradas de G em termos dos invariantes $d(q_1, q_2)$, $d(q_1, q_3)$, $d(q_2, q_3)$ e $\mathbb{A}(q_1, q_2, q_3)$. Denote por $\mathcal{M}_0^{sc}(3, 4)$ o espaço de configurações de triplas coplanares não ortogonais em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, tais que o espaço gerado $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{R_1, R_2, Q_1, Q_2, Q_3\}$ é não degenerado. Os elementos de $\mathcal{M}_0^{sc}(3, 4)$ são classes denotadas por $[(c_1, c_2, c_3)]$. Defina a aplicação

$$\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^4$$

que associa a cada classe $[(c_1, c_2, c_3)]$ os invariantes $d(q_1, q_2)$, $d(q_1, q_3)$, $d(q_2, q_3)$ e $\mathbb{A}(q_1, q_2, q_3)$. Por fim, defina o conjunto

$$\mathbb{M}_0^{sc}(3, 4) = \{(d_{12}, d_{13}, d_{23}, \mathbb{A}) \in \mathbb{R}^4; d_{12}, d_{13}, d_{23} > 0, \mathbb{A} \in (-\pi, \pi], \\ 1 - d_{12} - d_{13} - d_{23} + 2\sqrt{d_{12}}\sqrt{d_{13}}\sqrt{d_{23}}\cos(\mathbb{A}) \leq 0\}.$$

Veja que $\mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^4 é um espaço topológico.

Teorema 5.47 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_0^{sc}(3, 4)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$.*

Prova. Pelas condições de determinante (Proposição 1.29) e pelo Teorema 5.46, temos que a aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada acima define uma aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$.

Pelo Teorema 5.46 temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(d_{12}, d_{13}, d_{23}, \mathbb{A}) \in \mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$, considere G tal que $g_{34} = g_{43} = \sqrt{d_{12}}$, $g_{35} = g_{53} = \sqrt{d_{13}}$, $g_{45} = \sqrt{d_{23}}e^{i\mathbb{A}}$, $g_{54} = \sqrt{d_{23}}e^{-i\mathbb{A}}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 5$, e as demais entradas são nulas. Segue das condições de determinante, que G assim construída, é a matriz de Gram canônica de alguma tripla coplanar não ortogonal de geodésicas complexas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Logo $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$ da topologia induzida de \mathbb{R}^4 , temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_0^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 5.48 Chamamos $\mathbb{M}_0^{sc}(3, 4)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_0^{sc}(3, 4)$.

Observação 5.49 Veja que a igualdade em $1 - d_{12} - d_{13} - d_{23} + 2\sqrt{d_{12}}\sqrt{d_{13}}\sqrt{d_{23}}\cos(\mathbb{A}) \leq 0$ ocorre se, e somente se, as geodésicas complexas da tripla (c_1, c_2, c_3) coplanar não ortogonal se intersectam em um ponto de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, ou se c_1, c_2 e c_3 possuem uma perpendicular comum (ver Corolário 4.4 em [3] e Observação 4.3 em [12]).

5.3.5.2 Triplas coplanares ortogonais

Se (c_1, c_2, c_3) é uma tripla coplanar ortogonal de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$, temos duas possibilidades, ou seja, uma das subduplas é ortogonal ou uma das geodésicas é ortogonal às demais. Se uma das subduplas for ortogonal, vamos chamar de *tripla coplanar ortogonal tipo 1*, e se uma das geodésicas for ortogonal às demais, vamos chamar de *tripla coplanar ortogonal tipo 2*.

Triplas coplanares ortogonais tipo 1

Vamos estudar primeiro o caso em que a tripla é coplanar ortogonal tipo 1. Vimos que para cada tripla coplanar podemos associar um conjunto de pontos positivos dado por $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. Vamos supor que a subdupla (c_1, c_2) é ortogonal (os demais casos são análogos). Usando um argumento análogo ao feito na demonstração da Proposição 1.27, temos que existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a

matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & g_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & g_{45} \\ 0 & 0 & g_{35} & g_{45} & 1 \end{bmatrix}$$

com $g_{35}, g_{45} > 0$ e $g_{34} = 0$. Usando o conceito de d -invariante, e a notação $d_{jk} = d(q_j, q_k)$, para $j, k = 1, 2, 3$, com $j < k$, temos que $d_{13} = d(q_1, q_3) = \langle Q_1, Q_3 \rangle \langle Q_3, Q_1 \rangle = g_{35}^2$, e conseqüentemente $g_{35} = \sqrt{d_{13}}$. Analogamente obtemos que $g_{45} = \sqrt{d_{23}}$. Note que nesse caso temos $d_{12} = 0$ devido à ortogonalidade da subdupla (c_1, c_2) . Assim, existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{d_{13}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{d_{23}} \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{13}} & \sqrt{d_{23}} & 1 \end{bmatrix}$$

a qual chamamos de *matriz de Gram canônica* de uma tripla coplanar ortogonal tipo 1 tal que a subdupla (c_1, c_2) é ortogonal. Supondo que (c_1, c_3) é a subdupla ortogonal ou que (c_2, c_3) é a subdupla ortogonal, obtemos respectivamente as matrizes de Gram

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{d_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{12}} & 1 & \sqrt{d_{23}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{d_{23}} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{d_{12}} & \sqrt{d_{13}} \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{12}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{13}} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

determinadas de maneira análoga a anterior.

Observação 5.50 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar ortogonal tipo 1, tal que a subdupla (c_1, c_2) é ortogonal, associada ao conjunto de pontos positivos $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. Considere o*

conjunto formado por levantamentos dos elementos de tal conjunto de pontos positivos, denotado por $\{R_1, R_2, Q_1, Q_2, Q_3\}$. Veja que o conjunto gerado $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{R_1, R_2, Q_1, Q_2, Q_3\}$ é não degenerado. De fato, se W for degenerado, então o levantamento C_j^\perp , do conjunto polar c_j^\perp , está contido em um subespaço parabólico de dimensão complexa 4, para $j = 1, 2, 3$. Isso nos diz que as geodésicas complexas c_1, c_2 e c_3 se intersectam em um ponto isotrópico. Mas isso contradiz o fato de que a subdupla (c_1, c_2) é ortogonal.

Teorema 5.51 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar ortogonal tipo 1 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Considere o conjunto de pontos positivos $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ associado a tal tripla. Então os d -invariantes $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$ determinam unicamente a classe de congruência por $PU(4, 1)$ das triplas coplanares não ortogonais tipo 1, tais que a subdupla (c_1, c_2) é ortogonal.*

Prova. Basta notar que se duas triplas possuem mesmos d -invariantes, então possuem a mesma matriz de Gram canônica. Como as triplas estão associadas a conjuntos de pontos positivos tais que os conjuntos gerados pelos levantamentos são não degenerados (ver Observação 5.50), temos que o resultado segue da Proposição 1.32. ■

Veja que a Observação 5.50 também é verdadeira para o caso em que a subdupla ortogonal em questão é (c_1, c_3) ou (c_2, c_3) . Da mesma forma, versões análogas do Teorema 5.51 podem ser construídas para tais casos.

Agora, considere (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar ortogonal tipo 1, tal que a subdupla (c_1, c_2) é ortogonal. Seja G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Vimos que nesse caso podemos recuperar as entradas de G em termos dos invariantes $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$. Denote por $\mathcal{M}_1^{sc}(3, 4)$ o espaço de configurações de triplas coplanares ortogonais tipo 1, tais que a subdupla (c_1, c_2) é ortogonal. Os elementos de $\mathcal{M}_1^{sc}(3, 4)$ são classes denotadas por $[(c_1, c_2, c_3)]$. Defina a aplicação

$$\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

que associa a cada classe $[(c_1, c_2, c_3)]$ os invariantes $d(q_1, q_3)$ e $d(q_2, q_3)$. Por fim, defina o conjunto $\mathbb{M}_1^{sc}(3, 4) = \{(d_{13}, d_{23}) \in \mathbb{R}^2; d_{13}, d_{23} > 0, 1 - d_{13} - d_{23} \leq 0\}$. Veja que $\mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R}^2 é um espaço topológico.

Teorema 5.52 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_1^{sc}(3, 4)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$.*

Prova. Pelas condições de determinante (Proposição 1.29) e pelo Teorema 5.51, temos que a aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada acima define uma aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$. Pelo Teorema 5.51 temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $(d_{13}, d_{23}) \in \mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$, considere G tal que $g_{35} = g_{53} = \sqrt{d_{13}}$, $g_{45} = g_{54} = \sqrt{d_{23}}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 5$, e as demais entradas são nulas. Segue das condições de determinante, que G assim construída, é a matriz de Gram canônica de alguma tripla coplanar ortogonal tipo 1, tal que a subdupla (c_1, c_2) é ortogonal. Logo $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$ da topologia induzida de \mathbb{R}^2 , temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_1^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 5.53 *Chamamos $\mathbb{M}_1^{sc}(3, 4)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_1^{sc}(3, 4)$.*

Observação 5.54 *Veja que a igualdade em $1 - d_{13} - d_{23} \leq 0$ ocorre se, e somente se, as geodésicas complexas da tripla (c_1, c_2, c_3) coplanar ortogonal tipo 1 se intersectam em um ponto de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^A$ (ver Observação 5.45 e Observação 5.49).*

Da mesma maneira que fizemos acima, podemos construir o espaço de módulos para o caso em que a subdupla (c_1, c_3) é ortogonal e para o caso em que a subdupla (c_2, c_3) é ortogonal. A construção é totalmente análoga.

Triplas coplanares ortogonais tipo 2

Agora vamos abordar o caso em que a tripla (c_1, c_2, c_3) é coplanar ortogonal tipo 2. Veja que temos três possibilidades, ou seja, $c_1 \perp c_2$ e $c_1 \perp c_3$, ou $c_1 \perp c_2$ e $c_2 \perp c_3$, ou $c_1 \perp c_3$ e $c_2 \perp c_3$. Vamos estudar o caso em que $c_1 \perp c_2$ e $c_1 \perp c_3$ (os demais casos são análogos).

Vimos que para cada tripla coplanar podemos associar um conjunto de pontos positivos dado por $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. Supondo $c_1 \perp c_2$ e $c_1 \perp c_3$, e usando um argumento análogo ao feito na demonstração da Proposição 1.27, temos que existem levantamentos para os

elementos do conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & g_{45} \\ 0 & 0 & 0 & g_{45} & 1 \end{bmatrix}$$

com $g_{45} > 0$. Usando o conceito de d -invariante, e a notação $d_{23} = d(q_2, q_3)$, temos que $d_{23} = d(q_2, q_3) = \langle Q_2, Q_3 \rangle \langle Q_3, Q_2 \rangle = g_{45}^2$, e conseqüentemente $g_{45} = \sqrt{d_{23}}$. Note que nesse caso temos $d(q_1, q_2) = d(q_1, q_3) = 0$ devido às ortogonalidades entre as geodésicas complexas em questão. Assim, existem levantamentos para os elementos do conjunto $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ tais que a matriz de Gram tem a forma

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{d_{23}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{d_{23}} & 1 \end{bmatrix}$$

a qual chamamos de *matriz de Gram canônica* de uma tripla coplanar ortogonal tipo 2 tal que $c_1 \perp c_2$ e $c_1 \perp c_3$. Supondo que $c_1 \perp c_2$ e $c_2 \perp c_3$, ou que $c_1 \perp c_3$ e $c_2 \perp c_3$, obtemos respectivamente as matrizes de Gram

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{d_{13}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{13}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{d_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{12}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

determinadas de maneira análoga a anterior.

Observação 5.55 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar ortogonal tipo 2, tal que $c_1 \perp c_2$ e $c_1 \perp c_3$, associada ao conjunto de pontos positivos $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$. Considere o conjunto*

formado por levantamentos dos elementos de tal conjunto, denotado por $\{R_1, R_2, Q_1, Q_2, Q_3\}$. Veja que o conjunto gerado $W = \text{span}_{\mathbb{C}}\{R_1, R_2, Q_1, Q_2, Q_3\}$ é não degenerado. De fato, se W for degenerado, então o levantamento C_j^\perp , do conjunto polar c_j^\perp , está contido em um subespaço parabólico de dimensão complexa 4, para $j = 1, 2, 3$. Isso nos diz que as geodésicas complexas c_1, c_2 e c_3 se intersectam em um ponto isotrópico. Mas isso contradiz o fato de que $c_1 \perp c_2$ e $c_1 \perp c_3$.

Teorema 5.56 *Seja (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar ortogonal tipo 2 de geodésicas complexas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$. Considere o conjunto de pontos positivos $\{r_1, r_2, q_1, q_2, q_3\}$ associado a tal tripla. Então o d -invariante $d(q_2, q_3)$ determina unicamente a classe de congruência por $PU(4, 1)$ das triplas coplanares não ortogonais tipo 2, tais que satisfazem $c_1 \perp c_2$ e $c_1 \perp c_3$.*

Prova. Basta notar que se duas triplas possuem o mesmo d -invariante, então possuem a mesma matriz de Gram canônica. Como as triplas estão associadas a conjuntos de pontos positivos tais que os conjuntos gerados pelos levantamentos são não degenerados (ver Observação 5.55), temos que o resultado segue da Proposição 1.32. ■

Veja que a Observação 5.55 é verdadeira tanto para o caso em que $c_1 \perp c_2$ e $c_2 \perp c_3$ quanto para o caso em que $c_1 \perp c_3$ e $c_2 \perp c_3$. Da mesma forma, versões análogas do Teorema 5.56 podem ser construídas para tais casos.

Agora, considere (c_1, c_2, c_3) uma tripla coplanar ortogonal tipo 2, tal que $c_1 \perp c_2$ e $c_1 \perp c_3$. Seja G a matriz de Gram canônica associada a tal tripla. Vimos que nesse caso podemos recuperar as entradas de G em termos do invariante $d(q_2, q_3)$. Denote por $\mathcal{M}_2^{sc}(3, 4)$ o espaço de configurações de triplas coplanares ortogonais tipo 2, tais que $c_1 \perp c_2$ e $c_1 \perp c_3$. Os elementos de $\mathcal{M}_2^{sc}(3, 4)$ são classes denotadas por $[(c_1, c_2, c_3)]$. Defina a aplicação

$$\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}$$

que associa a cada classe $[(c_1, c_2, c_3)]$ o invariante $d(q_2, q_3)$. Por fim, defina o conjunto $\mathbb{M}_2^{sc}(3, 4) = \{d_{23} \in \mathbb{R}; d_{23} > 1\}$. Veja que $\mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$ munido da topologia induzida de \mathbb{R} é um espaço topológico.

Teorema 5.57 *O espaço de configurações $\mathcal{M}_2^{sc}(3, 4)$ é homeomorfo ao espaço $\mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$.*

Prova. Pelas condições de determinante (Proposição 1.29) e pelo Teorema 5.56, temos que a aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ dada acima define uma aplicação $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$. Pelo Teorema 5.56 temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$ é injetiva. Para a sobrejetividade, dado $d_{23} \in \mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$, considere G tal que $g_{45} = g_{54} = \sqrt{d_{23}}$, $g_{jj} = 1$, para $j = 1, \dots, 5$, e as demais entradas são nulas. Segue das condições de determinante, que G assim construída, é a matriz de Gram canônica de alguma tripla coplanar ortogonal tipo 2, tal que $c_1 \perp c_2$ e $c_1 \perp c_3$. Logo $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$ é sobrejetiva, e conseqüentemente bijetiva. Uma vez que munimos $\mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$ da topologia induzida de \mathbb{R} , temos que $\tilde{\tau} : \mathcal{M}_2^{sc}(3, 4) \rightarrow \mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$ é um homeomorfismo. ■

Definição 5.58 Chamamos $\mathbb{M}_2^{sc}(3, 4)$ de espaço de módulos para o espaço de configurações $\mathcal{M}_2^{sc}(3, 4)$.

Da mesma maneira que fizemos acima, podemos construir o espaço de módulos para o caso em que $c_1 \perp c_2$ e $c_2 \perp c_3$, e para o caso em que $c_1 \perp c_3$ e $c_2 \perp c_3$. A construção é totalmente análoga.

5.4 Tabela de Parâmetros

Nesta seção apresentamos uma tabela que explicita os parâmetros necessários para a construção do espaço de módulos para cada um dos casos que trabalhamos neste capítulo. Segue a tabela.

Tipo de Tripla	Parâmetros		Total de Parâmetros
	Básicos	Âng. de Transição	
Genérica	$d_{12}, d_{23}, d_{13},$ a_{12}, a_{23} e a_{13}	$\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}, \beta_{3j}, \theta_{1j},$ θ_{2j} e θ_{3j} com $j = 1, 2, 3$	30
Quase Genérica Tipo 1 com (c_1, c_2) concorrente	$d_{23}, d_{13}, a_{12},$ a_{23} e a_{13}	$\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}, \beta_{3j}, \theta_{1j},$ θ_{2j} e θ_{3j} com $j = 1, 2, 3$	29
Quase Genérica Tipo 1 com (c_1, c_2) ultraparalela	$d_{12}, d_{23}, d_{13},$ a_{23} e a_{13}	$\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \beta_{1j}, \beta_{2j}, \beta_{3j}, \theta_{1j},$ θ_{2j} e θ_{3j} com $j = 1, 2, 3$	29

Tipo de Tripla	Parâmetros		Total de Parâmetros
	Básicos	Âng. de Transição	
Quase Genérica Tipo 1 com (c_1, c_2) assintótica	d_{23}, d_{13}, a_{23} e a_{13}	$\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \beta_{1j}, \beta_{2j},$ $\beta_{3j}, \theta_{1j}, \theta_{2j}$ e θ_{3j} com $j = 1, 2, 3$	28
Tripla Real	$d_{12}, d_{23}, d_{13},$ a_{12}, a_{23} e a_{13}	θ_{1j}, θ_{2j} e θ_{3j} com $j = 1, 2, 3$	15
3-Tripla Real	$d_{12}, d_{23}, d_{13},$ a_{12}, a_{23} e a_{13}	θ_{31}, θ_{32} e θ_{33}	9
Genérica Contida em um $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^3$	$d_{12}, d_{23}, d_{13},$ a_{12}, a_{23} e a_{13}	$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23},$ θ_{31}, θ_{32} e θ_{33}	12
Quase Genérica Tipo 2 com (c_1, c_2) concorrente	$d_{23}, d_{13}, a_{12},$ a_{23} e a_{13}	$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23},$ θ_{31}, θ_{32} e θ_{33}	11
Quase Genérica Tipo 2 com (c_1, c_2) ultraparalela	$d_{12}, d_{23}, d_{13},$ a_{23} e a_{13}	$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23},$ θ_{31}, θ_{32} e θ_{33}	11
Quase Genérica Tipo 2 com (c_1, c_2) assintótica	d_{23}, d_{13}, a_{23} e a_{13}	$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23},$ θ_{31}, θ_{32} e θ_{33}	10
Quase Coplanar com (c_1, c_2) e (c_2, c_3) concorrentes	d_{13}, a_{12}, a_{23} e a_{13}	$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23},$ θ_{31}, θ_{32} e θ_{33}	10
Quase Coplanar com (c_1, c_2) e (c_2, c_3) ultraparalelas	$d_{12}, d_{23}, d_{13},$ e a_{13}	$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23},$ θ_{31}, θ_{32} e θ_{33}	10
Quase Coplanar com (c_1, c_2) concorrente e (c_2, c_3) ultraparalela	$d_{23}, d_{13}, a_{12},$ e a_{13}	$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23},$ θ_{31}, θ_{32} e θ_{33}	10
Quase Coplanar com (c_1, c_2) concorrente e (c_2, c_3) assintótica	d_{13}, a_{12} e a_{13}	$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23},$ θ_{31}, θ_{32} e θ_{33}	9
Quase Coplanar com (c_1, c_2) ultraparalela e (c_2, c_3) assintótica	d_{12}, d_{13} e a_{13}	$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23},$ θ_{31}, θ_{32} e θ_{33}	9
Quase Coplanar com (c_1, c_2) e (c_2, c_3) assintóticas	d_{13} e a_{13}	$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23},$ θ_{31}, θ_{32} e θ_{33}	8

Tipo de Tripla	Parâmetros		Total de Parâmetros
	Básicos	Âng. de Transição	
Duas a Duas Coplanares concorrentes	a_{12}, a_{23} e a_{13}	$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23},$ θ_{31}, θ_{32} e θ_{33}	9
Duas a Duas Coplanares ultraparalelas	d_{12}, d_{23} e d_{13}	$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23},$ θ_{31}, θ_{32} e θ_{33}	9
Duas a Duas Coplanares assintóticas	—	$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23},$ θ_{31}, θ_{32} e θ_{33}	6
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, com subduplas concorrentes	a_{12}, a_{23}, a_{13} e \mathbb{A} (parâmetro extra)	—	4
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, com subduplas ultraparalelas	d_{12}, d_{23}, d_{13} e \mathbb{A} (parâmetro extra)	—	4
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, com subduplas assintóticas	\mathbb{A} (parâmetro extra)	—	1
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 1	d_{23}, d_{13}, a_{12} e \mathbb{A} (parâmetro extra)	—	4
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 2	a_{12} e \mathbb{A} (parâmetro extra)	—	2
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 3	d_{12}, a_{23}, a_{13} e \mathbb{A} (parâmetro extra)	—	4
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 4	d_{12} e \mathbb{A} (parâmetro extra)	—	2

Tipo de Tripla	Parâmetros		Total de Parâmetros
	Básicos	Âng. de Transição	
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 5	a_{23}, a_{13} e \mathbb{A} (parâmetro extra)	—	3
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 6	d_{23}, d_{13} e \mathbb{A} (parâmetro extra)	—	3
Coplanares sem degeneração e sem ortogonalidade, formação 7	d_{23}, a_{12} e \mathbb{A} (parâmetro extra)	—	3
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 8	a_{23} e a_{13}	—	2
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 9	d_{23} e d_{13}	—	2
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 10	—	—	—
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 11	d_{13} e a_{23}	—	2
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 12	a_{23}	—	1
Coplanares Ortogonais Tipo 1 com formação 13	d_{23}	—	1
Coplanares Ortogonais Tipo 2 com (c_1, c_2) concorrente	a_{12}	—	1
Coplanares Ortogonais Tipo 2 com (c_1, c_2) ultraparalela	d_{12}	—	1

Tipo de Tripla	Parâmetros		Total de Parâmetros
	Básicos	Âng. de Transição	
Coplanares Ortogonais Tipo 2 com (c_1, c_2) assintótica	—	—	—

Fazemos abaixo uma legenda para a tabela acima:

- (i) Formação 1: Estamos considerando que (c_1, c_2) é concorrente, com (c_2, c_3) e (c_1, c_3) ultraparalelas;
- (ii) Formação 2: Estamos considerando que (c_1, c_2) é concorrente, com (c_2, c_3) e (c_1, c_3) assintóticas;
- (iii) Formação 3: Estamos considerando que (c_1, c_2) é ultraparalela, com (c_2, c_3) e (c_1, c_3) concorrentes;
- (iv) Formação 4: Estamos considerando que (c_1, c_2) é ultraparalela, com (c_2, c_3) e (c_1, c_3) assintóticas;
- (v) Formação 5: Estamos considerando que (c_1, c_2) é assintótica, com (c_2, c_3) e (c_1, c_3) concorrentes;
- (vi) Formação 6: Estamos considerando que (c_1, c_2) é assintótica, com (c_2, c_3) e (c_1, c_3) ultraparalelas;
- (vii) Formação 7: Estamos considerando que (c_1, c_2) é concorrente, (c_2, c_3) é ultraparalela e (c_1, c_3) é assintóticas;
- (viii) Formação 8: Estamos considerando que (c_1, c_2) é ortogonal, com (c_2, c_3) e (c_1, c_3) concorrentes;
- (ix) Formação 9: Estamos considerando que (c_1, c_2) é ortogonal, com (c_2, c_3) e (c_1, c_3) ultraparalelas;
- (x) Formação 10: Estamos considerando que (c_1, c_2) é ortogonal, com (c_2, c_3) e (c_1, c_3) assintóticas;

- (xi) Formação 11: Estamos considerando que (c_1, c_2) é ortogonal, com (c_2, c_3) concorrente e (c_1, c_3) ultraparalela;
- (xii) Formação 12: Estamos considerando que (c_1, c_2) é ortogonal, com (c_2, c_3) concorrente e (c_1, c_3) assintótica;
- (xiii) Formação 13: Estamos considerando que (c_1, c_2) é ortogonal, com (c_2, c_3) ultraparalela e (c_1, c_3) assintótica;

Apêndice A

Entradas da Matriz de Gram para Triplas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ e Relações

Aqui vamos listar as entradas da matriz de Gram dada no Teorema 3.6, recuperadas em termos dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição (ver Subseção 3.2.1). Vamos explicitar as entradas dos blocos E_1 , E_2 e E_3 , respectivamente.

(i) Entradas do bloco E_1 :

$$\langle P_{12}, P_{23} \rangle = \sqrt{d_{12}} \cos(\theta_2)$$

$$\langle P_{12}, P_{32} \rangle = \sqrt{d_{13}} \cos(\theta_1) \cos(\theta_3) + \sqrt{a_{13}} \operatorname{sen}(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_3)$$

$$\langle P_{12}, Q_{23} \rangle = -\sqrt{d_{12}} \operatorname{sen}(\theta_2)$$

$$\langle P_{12}, Q_{32} \rangle = \sqrt{d_{13}} \cos(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_3) - \sqrt{a_{13}} \operatorname{sen}(\theta_1) \cos(\theta_3)$$

$$\langle P_{21}, P_{23} \rangle = \cos(\theta_2)$$

$$\langle P_{21}, P_{32} \rangle = \sqrt{d_{23}} \cos(\theta_2)$$

$$\langle P_{21}, Q_{23} \rangle = -\operatorname{sen}(\theta_2)$$

$$\langle P_{21}, Q_{32} \rangle = -\sqrt{a_{23}} \operatorname{sen}(\theta_2)$$

$$\langle Q_{12}, P_{23} \rangle = \sqrt{a_{12}} \operatorname{sen}(\theta_2)$$

$$\langle Q_{12}, P_{32} \rangle = \sqrt{d_{13}} \operatorname{sen}(\theta_1) \cos(\theta_3) - \sqrt{a_{13}} \cos(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_3)$$

$$\langle Q_{12}, Q_{23} \rangle = \sqrt{a_{12}} \cos(\theta_2)$$

$$\langle Q_{12}, Q_{32} \rangle = \sqrt{d_{13}} \text{sen}(\theta_1) \text{sen}(\theta_3) + \sqrt{a_{13}} \text{cos}(\theta_1) \text{cos}(\theta_3)$$

$$\langle Q_{21}, P_{23} \rangle = \text{sen}(\theta_2)$$

$$\langle Q_{21}, P_{32} \rangle = \sqrt{d_{23}} \text{sen}(\theta_2)$$

$$\langle Q_{21}, Q_{23} \rangle = \text{cos}(\theta_2)$$

$$\langle Q_{21}, Q_{32} \rangle = \sqrt{a_{23}} \text{cos}(\theta_2)$$

(ii) Entradas do bloco E_2 :

$$\langle P_{12}, P_{13} \rangle = \text{cos}(\theta_1)$$

$$\langle P_{12}, P_{31} \rangle = \sqrt{d_{13}} \text{cos}(\theta_1)$$

$$\langle P_{12}, Q_{13} \rangle = -\text{sen}(\theta_1)$$

$$\langle P_{12}, Q_{31} \rangle = -\sqrt{a_{13}} \text{sen}(\theta_1)$$

$$\langle P_{21}, P_{13} \rangle = \sqrt{d_{12}} \text{cos}(\theta_1)$$

$$\langle P_{21}, P_{31} \rangle = \sqrt{d_{23}} \text{cos}(\theta_2) \text{cos}(\theta_3) - \sqrt{a_{23}} \text{sen}(\theta_2) \text{sen}(\theta_3)$$

$$\langle P_{21}, Q_{13} \rangle = -\sqrt{d_{12}} \text{sen}(\theta_1)$$

$$\langle P_{21}, Q_{31} \rangle = -\sqrt{d_{23}} \text{cos}(\theta_2) \text{sen}(\theta_3) - \sqrt{a_{23}} \text{sen}(\theta_2) \text{cos}(\theta_3)$$

$$\langle Q_{12}, P_{13} \rangle = \text{sen}(\theta_1)$$

$$\langle Q_{12}, P_{31} \rangle = \sqrt{d_{13}} \text{sen}(\theta_1)$$

$$\langle Q_{12}, Q_{13} \rangle = \text{cos}(\theta_1)$$

$$\langle Q_{12}, Q_{31} \rangle = \sqrt{a_{13}} \text{cos}(\theta_1)$$

$$\langle Q_{21}, P_{13} \rangle = \sqrt{a_{12}} \text{sen}(\theta_1)$$

$$\langle Q_{21}, P_{31} \rangle = \sqrt{d_{23}} \text{sen}(\theta_2) \text{cos}(\theta_3) + \sqrt{a_{23}} \text{cos}(\theta_2) \text{sen}(\theta_3)$$

$$\langle Q_{21}, Q_{13} \rangle = \sqrt{a_{12}} \text{cos}(\theta_1)$$

$$\langle Q_{21}, Q_{31} \rangle = -\sqrt{d_{23}} \text{sen}(\theta_2) \text{sen}(\theta_3) + \sqrt{a_{23}} \text{cos}(\theta_2) \text{cos}(\theta_3)$$

(iii) Entradas do bloco E_3 :

$$\langle P_{23}, P_{13} \rangle = \sqrt{d_{12}} \text{cos}(\theta_2) \text{cos}(\theta_1) + \sqrt{a_{12}} \text{sen}(\theta_2) \text{sen}(\theta_1)$$

$$\begin{aligned}
\langle P_{23}, P_{31} \rangle &= \sqrt{d_{23}} \cos(\theta_3) \\
\langle P_{23}, Q_{13} \rangle &= -\sqrt{d_{12}} \cos(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_1) + \sqrt{a_{12}} \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_1) \\
\langle P_{23}, Q_{31} \rangle &= -\sqrt{d_{23}} \operatorname{sen}(\theta_3) \\
\langle P_{32}, P_{13} \rangle &= \sqrt{d_{13}} \cos(\theta_3) \\
\langle P_{32}, P_{31} \rangle &= \cos(\theta_3) \\
\langle P_{32}, Q_{13} \rangle &= -\sqrt{a_{13}} \operatorname{sen}(\theta_3) \\
\langle P_{32}, Q_{31} \rangle &= -\operatorname{sen}(\theta_3) \\
\langle Q_{23}, P_{13} \rangle &= -\sqrt{d_{12}} \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_1) + \sqrt{a_{12}} \cos(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_1) \\
\langle Q_{23}, P_{31} \rangle &= \sqrt{a_{23}} \operatorname{sen}(\theta_3) \\
\langle Q_{23}, Q_{13} \rangle &= \sqrt{d_{12}} \operatorname{sen}(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_1) + \sqrt{a_{12}} \cos(\theta_2) \cos(\theta_1) \\
\langle Q_{23}, Q_{31} \rangle &= \sqrt{a_{23}} \cos(\theta_3) \\
\langle Q_{32}, P_{13} \rangle &= \sqrt{d_{13}} \operatorname{sen}(\theta_3) \\
\langle Q_{32}, P_{31} \rangle &= \operatorname{sen}(\theta_3) \\
\langle Q_{32}, Q_{13} \rangle &= \sqrt{a_{13}} \cos(\theta_3) \\
\langle Q_{32}, Q_{31} \rangle &= \cos(\theta_3) \quad .
\end{aligned}$$

Agora vamos listar as entradas da matriz de Gram dada no Teorema 3.15, recuperadas em termos dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição. Vamos explicitar, para esse caso, as entradas dos blocos E_1 , E_2 e E_3 , respectivamente.

(i) Entradas do bloco E_1 :

$$\begin{aligned}
\langle P_{12}, P_{23} \rangle &= \sqrt{d_{12}} \cos(\theta_2) \\
\langle P_{21}, P_{23} \rangle &= \cos(\theta_2) \\
\langle R_{12}, P_{23} \rangle &= \operatorname{sen}(\theta_2) \\
\langle P_{12}, P_{32} \rangle &= -\operatorname{sen}(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_3) + \sqrt{d_{13}} \cos(\theta_1) \cos(\theta_3) \\
\langle P_{21}, P_{32} \rangle &= \sqrt{d_{23}} \cos(\theta_2) \\
\langle R_{12}, P_{32} \rangle &= \sqrt{d_{23}} \operatorname{sen}(\theta_2)
\end{aligned}$$

$$\langle P_{12}, R_{23} \rangle = -\sqrt{d_{12}} \text{sen}(\theta_2)$$

$$\langle P_{21}, R_{23} \rangle = -\text{sen}(\theta_2)$$

$$\langle R_{12}, R_{23} \rangle = \text{cos}(\theta_2)$$

(ii) Entradas do bloco E_2 :

$$\langle P_{12}, P_{13} \rangle = \text{cos}(\theta_1)$$

$$\langle P_{21}, P_{13} \rangle = \sqrt{d_{12}} \text{cos}(\theta_1)$$

$$\langle R_{12}, P_{13} \rangle = -\text{sen}(\theta_1)$$

$$\langle P_{12}, P_{31} \rangle = \sqrt{d_{13}} \text{cos}(\theta_1)$$

$$\langle P_{21}, P_{31} \rangle = -\text{sen}(\theta_2) \text{sen}(\theta_3) + \sqrt{d_{23}} \text{cos}(\theta_2) \text{cos}(\theta_3)$$

$$\langle R_{12}, P_{31} \rangle = -\sqrt{d_{13}} \text{sen}(\theta_1)$$

$$\langle P_{12}, R_{13} \rangle = \text{sen}(\theta_1)$$

$$\langle P_{21}, R_{13} \rangle = \sqrt{d_{12}} \text{sen}(\theta_1)$$

$$\langle R_{12}, R_{13} \rangle = \text{cos}(\theta_1)$$

(iii) Entradas do bloco E_3 :

$$\langle P_{23}, P_{13} \rangle = -\text{sen}(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) + \sqrt{d_{12}} \text{cos}(\theta_1) \text{cos}(\theta_2)$$

$$\langle P_{32}, P_{13} \rangle = \sqrt{d_{13}} \text{cos}(\theta_3)$$

$$\langle R_{23}, P_{13} \rangle = \sqrt{d_{13}} \text{sen}(\theta_3)$$

$$\langle P_{23}, P_{31} \rangle = \sqrt{d_{23}} \text{cos}(\theta_3)$$

$$\langle P_{32}, P_{31} \rangle = \text{cos}(\theta_3)$$

$$\langle R_{23}, P_{31} \rangle = \text{sen}(\theta_3)$$

$$\langle P_{23}, R_{13} \rangle = -\sqrt{d_{23}} \text{sen}(\theta_3)$$

$$\langle P_{32}, R_{13} \rangle = -\text{sen}(\theta_3)$$

$$\langle R_{23}, R_{13} \rangle = \text{cos}(\theta_3) \quad .$$

Note que, para o caso de triplas duas a duas coplanar, algumas das entradas acima podem ser expressadas de duas formas. Por exemplo, para recuperar a entrada $\langle R_{12}, R_{23} \rangle$ em termos dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição, podemos fazer de duas maneiras. A primeira seria usando o produto

$$[R_{23} \ P_{23}] = [R_{12} \ P_{21}] T_2^{-1} ,$$

obtendo assim a expressão

$$\langle R_{12}, R_{23} \rangle = \cos(\theta_2) ,$$

dada mais acima.

A segunda maneira seria usando os produtos

$$[R_{12} \ P_{12}] = [R_{13} \ P_{13}] T_1^{-1} \quad e \quad [R_{23} \ P_{32}] = [R_{13} \ P_{31}] T_3 ,$$

obtendo assim a expressão

$$\langle R_{12}, R_{23} \rangle = \cos(\theta_1)\cos(\theta_3) - \sqrt{d_{13}}\text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_3)$$

e conseqüentemente, subtraindo as expressões obtidas acima, temos a seguinte relação entre os parâmetros

$$D_{3 \times 6} = \cos(\theta_1)\cos(\theta_3) - \sqrt{d_{13}}\text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_3) - \cos(\theta_2) = 0$$

onde $D_{3 \times 6}$ denota a relação obtida da subtração das duas expressões decorrentes da aplicação da forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no ponto da linha 3 com o ponto da coluna 6 da matriz de Gram em questão. Da mesma maneira obtemos outras relações entre os parâmetros, as quais explicitamos abaixo:

$$D_{3 \times 9} = \cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - \sqrt{d_{23}}\text{sen}(\theta_2)\text{sen}(\theta_3) - \cos(\theta_1) = 0$$

$$D_{6 \times 9} = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sqrt{d_{12}}\text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) - \cos(\theta_3) = 0$$

$$D_{3 \times 5} = \cos(\theta_1)\text{sen}(\theta_3) - \sqrt{d_{13}}\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_3) - \sqrt{d_{23}}\text{sen}(\theta_2) = 0$$

$$D_{1 \times 6} = \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_3) + \sqrt{d_{13}}\cos(\theta_1)\text{sen}(\theta_3) + \sqrt{d_{12}}\text{sen}(\theta_2) = 0$$

$$D_{3 \times 8} = \cos(\theta_2)\text{sen}(\theta_3) + \sqrt{d_{23}}\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_3) + \sqrt{d_{13}}\text{sen}(\theta_1) = 0$$

$$D_{2 \times 9} = -\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_3) - \sqrt{d_{23}}\cos(\theta_2)\text{sen}(\theta_3) - \sqrt{d_{12}}\text{sen}(\theta_1) = 0$$

$$D_{6 \times 7} = -\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sqrt{d_{12}}\cos(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) - \sqrt{d_{13}}\text{sen}(\theta_3) = 0$$

$$D_{4 \times 9} = \cos(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) + \sqrt{d_{12}}\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sqrt{d_{23}}\text{sen}(\theta_3) = 0 \quad .$$

Apêndice B

Entradas da Matriz de Gram para Triplas em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ e Relações

Aqui vamos listar as entradas da matriz de Gram dada no Teorema 4.7, recuperadas em termos dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição obtidos da fórmula de Rodrigues. Vamos explicitar as entradas dos blocos E_1 , E_2 e E_3 , respectivamente.

(i) Entradas do bloco E_1 :

$$\langle R_{12}, R_{23} \rangle = \cos(\theta_2) + \alpha_{12}^2(1 - \cos(\theta_2))$$

$$\langle R_{12}, P_{23} \rangle = \alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2)$$

$$\langle R_{12}, P_{32} \rangle = \sqrt{d_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))$$

$$\langle R_{12}, Q_{23} \rangle = \alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2)$$

$$\langle R_{12}, Q_{32} \rangle = \sqrt{a_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))$$

$$\langle P_{12}, R_{23} \rangle = \sqrt{d_{12}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))$$

$$\langle P_{12}, P_{23} \rangle = \sqrt{d_{12}}(\cos(\theta_2) + \alpha_{22}^2(1 - \cos(\theta_2)))$$

$$\begin{aligned} \langle P_{12}, P_{32} \rangle &= (\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) + \\ &\sqrt{d_{13}}(\cos(\theta_1) + \alpha_{21}^2(1 - \cos(\theta_1)))(\cos(\theta_3) + \alpha_{23}^2(1 - \cos(\theta_3))) + \sqrt{a_{13}}(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \\ &\alpha_{11}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3)) \end{aligned}$$

$$\langle P_{12}, Q_{23} \rangle = \sqrt{d_{12}}(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))$$

$$\langle P_{12}, Q_{32} \rangle = (\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3)) + \sqrt{d_{13}}(\cos(\theta_1) + \alpha_{21}^2(1 - \cos(\theta_1)))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3)) + \sqrt{a_{13}}(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1))(\cos(\theta_3) + \alpha_{33}^2(1 - \cos(\theta_3)))$$

$$\langle P_{21}, R_{23} \rangle = \alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2)$$

$$\langle P_{21}, P_{23} \rangle = \cos(\theta_2) + \alpha_{22}^2(1 - \cos(\theta_2))$$

$$\langle P_{21}, P_{32} \rangle = \sqrt{d_{23}}(\cos(\theta_2) + \alpha_{22}^2(1 - \cos(\theta_2)))$$

$$\langle P_{21}, Q_{23} \rangle = \alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2)$$

$$\langle P_{21}, Q_{32} \rangle = \sqrt{a_{23}}(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))$$

$$\langle Q_{12}, R_{23} \rangle = \sqrt{a_{12}}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))$$

$$\langle Q_{12}, P_{23} \rangle = \sqrt{a_{12}}(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))$$

$$\langle Q_{12}, P_{32} \rangle = (\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) + \sqrt{d_{13}}(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1))(\cos(\theta_3) + \alpha_{23}^2(1 - \cos(\theta_3))) + \sqrt{a_{13}}(\cos(\theta_1) + \alpha_{31}^2(1 - \cos(\theta_1)))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3))$$

$$\langle Q_{12}, Q_{23} \rangle = \sqrt{a_{12}}(\cos(\theta_2) + \alpha_{32}^2(1 - \cos(\theta_2)))$$

$$\langle Q_{12}, Q_{32} \rangle = (\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3)) + \sqrt{d_{13}}(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3)) + \sqrt{a_{13}}(\cos(\theta_1) + \alpha_{31}^2(1 - \cos(\theta_1)))(\cos(\theta_3) + \alpha_{33}^2(1 - \cos(\theta_3)))$$

$$\langle Q_{21}, R_{23} \rangle = \alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2)$$

$$\langle Q_{21}, P_{23} \rangle = \alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2)$$

$$\langle Q_{21}, P_{32} \rangle = \sqrt{d_{23}}(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))$$

$$\langle Q_{21}, Q_{23} \rangle = \cos(\theta_2) + \alpha_{32}^2(1 - \cos(\theta_2))$$

$$\langle Q_{21}, Q_{32} \rangle = \sqrt{a_{23}}(\cos(\theta_2) + \alpha_{32}^2(1 - \cos(\theta_2)))$$

(ii) Entradas do bloco E_2 :

$$\langle R_{12}, R_{13} \rangle = \cos(\theta_1) + \alpha_{11}^2(1 - \cos(\theta_1))$$

$$\langle R_{12}, P_{13} \rangle = \alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1)$$

$$\langle R_{12}, P_{31} \rangle = \sqrt{d_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1))$$

$$\begin{aligned}
\langle R_{12}, Q_{13} \rangle &= \alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1) \\
\langle R_{12}, Q_{31} \rangle &= \sqrt{a_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1)) \\
\langle P_{12}, R_{13} \rangle &= \alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1) \\
\langle P_{12}, P_{13} \rangle &= \cos(\theta_1) + \alpha_{21}^2(1 - \cos(\theta_1)) \\
\langle P_{12}, P_{31} \rangle &= \sqrt{d_{13}}(\cos(\theta_1) + \alpha_{21}^2(1 - \cos(\theta_1))) \\
\langle P_{12}, Q_{13} \rangle &= \alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1) \\
\langle P_{12}, Q_{31} \rangle &= \sqrt{a_{13}}(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1)) \\
\langle P_{21}, R_{13} \rangle &= \sqrt{d_{12}}(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1)) \\
\langle P_{21}, P_{13} \rangle &= \sqrt{d_{12}}(\cos(\theta_1) + \alpha_{21}^2(1 - \cos(\theta_1))) \\
\langle P_{21}, P_{31} \rangle &= (\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) + \\
&\quad \sqrt{d_{23}}(\cos(\theta_2) + \alpha_{22}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\cos(\theta_3) + \alpha_{23}^2(1 - \cos(\theta_3))) + \sqrt{a_{23}}(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \\
&\quad \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3)) \\
\langle P_{21}, Q_{13} \rangle &= \sqrt{d_{12}}(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1)) \\
\langle P_{21}, Q_{31} \rangle &= (\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3)) + \\
&\quad \sqrt{d_{23}}(\cos(\theta_2) + \alpha_{22}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3)) + \sqrt{a_{23}}(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \\
&\quad \cos(\theta_2)) - \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_3) + \alpha_{33}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
\langle Q_{12}, R_{13} \rangle &= \alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1) \\
\langle Q_{12}, P_{13} \rangle &= \alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1) \\
\langle Q_{12}, P_{31} \rangle &= \sqrt{d_{13}}(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1)) \\
\langle Q_{12}, Q_{13} \rangle &= \cos(\theta_1) + \alpha_{31}^2(1 - \cos(\theta_1)) \\
\langle Q_{12}, Q_{31} \rangle &= \sqrt{a_{13}}(\cos(\theta_1) + \alpha_{31}^2(1 - \cos(\theta_1))) \\
\langle Q_{21}, R_{13} \rangle &= \sqrt{a_{12}}(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1)) \\
\langle Q_{21}, P_{13} \rangle &= \sqrt{a_{12}}(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1)) \\
\langle Q_{21}, P_{31} \rangle &= (\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) + \\
&\quad \sqrt{d_{23}}(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_3) + \alpha_{23}^2(1 - \cos(\theta_3))) + \sqrt{a_{23}}(\cos(\theta_2) + \\
&\quad \alpha_{32}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3))
\end{aligned}$$

$$\langle Q_{21}, Q_{13} \rangle = \sqrt{a_{12}}(\cos(\theta_1) + \alpha_{31}^2(1 - \cos(\theta_1)))$$

$$\begin{aligned} \langle Q_{21}, Q_{31} \rangle &= (\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3)) + \sqrt{d_{23}} \\ &(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3)) + \sqrt{a_{23}}(\cos(\theta_2) + \\ &\alpha_{32}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\cos(\theta_3) + \alpha_{33}^2(1 - \cos(\theta_3))) \end{aligned}$$

(iii) Entradas do bloco E_3 :

$$\langle R_{23}, R_{13} \rangle = \cos(\theta_3) + \alpha_{13}^2(1 - \cos(\theta_3))$$

$$\langle R_{23}, P_{13} \rangle = \sqrt{d_{13}}(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3))$$

$$\langle R_{23}, P_{31} \rangle = \alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)$$

$$\langle R_{23}, Q_{13} \rangle = \sqrt{a_{13}}(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3))$$

$$\langle R_{23}, Q_{31} \rangle = \alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3)$$

$$\langle P_{23}, R_{13} \rangle = \sqrt{d_{23}}(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3))$$

$$\begin{aligned} \langle P_{23}, P_{13} \rangle &= (\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1)) + \\ &\sqrt{d_{12}}(\cos(\theta_2) + \alpha_{22}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\cos(\theta_1) + \alpha_{21}^2(1 - \cos(\theta_1))) + \sqrt{a_{12}}(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \\ &\alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1)) \end{aligned}$$

$$\langle P_{23}, P_{31} \rangle = \sqrt{d_{23}}(\cos(\theta_3) + \alpha_{23}^2(1 - \cos(\theta_3)))$$

$$\begin{aligned} \langle P_{23}, Q_{13} \rangle &= (\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1)) + \\ &\sqrt{d_{12}}(\cos(\theta_2) + \alpha_{22}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1)) + \sqrt{a_{12}}(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \\ &\cos(\theta_2)) + \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_1) + \alpha_{31}^2(1 - \cos(\theta_1))) \end{aligned}$$

$$\langle P_{23}, Q_{31} \rangle = \sqrt{d_{23}}(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3))$$

$$\langle P_{32}, R_{13} \rangle = \alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)$$

$$\langle P_{32}, P_{13} \rangle = \sqrt{d_{13}}(\cos(\theta_3) + \alpha_{23}^2(1 - \cos(\theta_3)))$$

$$\langle P_{32}, P_{31} \rangle = \cos(\theta_3) + \alpha_{23}^2(1 - \cos(\theta_3))$$

$$\langle P_{32}, Q_{13} \rangle = \sqrt{a_{13}}(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3))$$

$$\langle P_{32}, Q_{31} \rangle = \alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3)$$

$$\langle Q_{23}, R_{13} \rangle = \sqrt{a_{23}}(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3))$$

$$\begin{aligned}
\langle Q_{23}, P_{13} \rangle &= (\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1)) + \\
&\sqrt{d_{12}}(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_1) + \alpha_{21}^2(1 - \cos(\theta_1))) + \sqrt{a_{12}}(\cos(\theta_2) + \\
&\alpha_{32}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1)) \\
\langle Q_{23}, P_{31} \rangle &= \sqrt{a_{23}}(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3)) \\
\langle Q_{23}, Q_{13} \rangle &= (\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1)) + \sqrt{d_{12}} \\
&(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1)) + \sqrt{a_{12}}(\cos(\theta_2) + \\
&\alpha_{32}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\cos(\theta_1) + \alpha_{31}^2(1 - \cos(\theta_1))) \\
\langle Q_{23}, Q_{31} \rangle &= \sqrt{a_{23}}(\cos(\theta_3) + \alpha_{33}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
\langle Q_{32}, R_{13} \rangle &= \alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3) \\
\langle Q_{32}, P_{13} \rangle &= \sqrt{d_{13}}(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3)) \\
\langle Q_{32}, P_{31} \rangle &= \alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3) \\
\langle Q_{32}, Q_{13} \rangle &= \sqrt{a_{13}}(\cos(\theta_3) + \alpha_{33}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
\langle Q_{32}, Q_{31} \rangle &= \cos(\theta_3) + \alpha_{33}^2(1 - \cos(\theta_3)) \quad .
\end{aligned}$$

Note que algumas das entradas acima podem ser expressadas de duas formas. Por exemplo, para recuperar a entrada $\langle R_{12}, P_{32} \rangle$ em termos dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição obtidos da fórmula de Rodrigues, podemos fazer de duas maneiras. A primeira seria usando o produto

$$[R_{12} \quad P_{21} \quad Q_{21}] = [R_{23} \quad P_{23} \quad Q_{23}] T_2^{-1} ,$$

obtendo assim a expressão

$$\langle R_{12}, P_{32} \rangle = \sqrt{d_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2)) ,$$

dada mais acima.

A segunda maneira seria usando os produtos

$$[R_{12} \quad P_{12} \quad Q_{12}] = [R_{13} \quad P_{13} \quad Q_{13}] T_1^{-1} \quad e \quad [R_{23} \quad P_{32} \quad Q_{32}] = [R_{13} \quad P_{31} \quad Q_{31}] T_3^{-1} ,$$

obtendo assim a expressão

$$\begin{aligned}
\langle R_{12}, P_{32} \rangle &= (\cos(\theta_1) + \alpha_{11}^2(1 - \cos(\theta_1)))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{d_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1))(\cos(\theta_3) + \alpha_{23}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
&+ \sqrt{a_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3))
\end{aligned}$$

e conseqüentemente, subtraindo as expressões obtidas acima, temos a seguinte relação entre os parâmetros

$$\begin{aligned}
D_{1 \times 8} &= [\sqrt{d_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))] \\
&- [(\cos(\theta_1) + \alpha_{11}^2(1 - \cos(\theta_1)))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{d_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1))(\cos(\theta_3) + \alpha_{23}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
&+ \sqrt{a_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde $D_{1 \times 8}$ denota a relação obtida da subtração das duas expressões decorrentes da aplicação da forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no ponto da linha 1 com o ponto da coluna 8 da matriz de Gram em questão. Da mesma maneira obtemos outras relações entre os parâmetros, as quais explicitamos abaixo.

$$\begin{aligned}
D_{1 \times 6} &= [\cos(\theta_2) + \alpha_{12}^2(1 - \cos(\theta_2))] \\
&- [(\cos(\theta_1) + \alpha_{11}^2(1 - \cos(\theta_1)))(\cos(\theta_3) + \alpha_{13}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
&+ \sqrt{d_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{a_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{1 \times 11} &= [\cos(\theta_1) + \alpha_{11}^2(1 - \cos(\theta_1))] \\
&- [(\cos(\theta_2) + \alpha_{12}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\cos(\theta_3) + \alpha_{13}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
&+ \sqrt{d_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{a_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{6 \times 11} &= [\cos(\theta_3) + \alpha_{13}^2(1 - \cos(\theta_3))] \\
&- [(\cos(\theta_2) + \alpha_{12}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\cos(\theta_1) + \alpha_{11}^2(1 - \cos(\theta_1))) \\
&+ \sqrt{d_{12}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1)) \\
&+ \sqrt{a_{12}}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{1 \times 10} &= [\sqrt{a_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))] \\
&- [(\cos(\theta_1) + \alpha_{11}^2(1 - \cos(\theta_1)))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{d_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{a_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))(\cos(\theta_3) + \alpha_{33}^2(1 - \cos(\theta_3)))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{1 \times 13} &= [\sqrt{d_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1))] \\
&- [(\cos(\theta_2) + \alpha_{12}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{d_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_3) + \alpha_{23}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
&+ \sqrt{a_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{1 \times 15} &= [\sqrt{a_{13}}(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))] \\
&- [(\cos(\theta_2) + \alpha_{12}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{d_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{23}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{13}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{a_{23}}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_3) + \alpha_{33}^2(1 - \cos(\theta_3)))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{2 \times 6} &= [\sqrt{d_{12}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))] \\
&- [(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1))(\cos(\theta_3) + \alpha_{13}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
&+ \sqrt{d_{13}}(\cos(\theta_1) + \alpha_{21}^2(1 - \cos(\theta_1)))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{a_{13}}(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{4 \times 6} &= [\sqrt{a_{12}}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))] \\
&- [(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))(\cos(\theta_3) + \alpha_{13}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
&+ \sqrt{d_{13}}(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{a_{13}}(\cos(\theta_1) + \alpha_{31}^2(1 - \cos(\theta_1)))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{6 \times 12} &= [\sqrt{d_{13}}(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3))] \\
&- [(\cos(\theta_2) + \alpha_{12}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1)) \\
&+ \sqrt{d_{12}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_1) + \alpha_{21}^2(1 - \cos(\theta_1))) \\
&+ \sqrt{a_{12}}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{6 \times 14} &= [\sqrt{a_{13}}(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3))] \\
&- [(\cos(\theta_2) + \alpha_{12}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1)) \\
&+ \sqrt{d_{12}}(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{21}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{11}\text{sen}(\theta_1)) \\
&+ \sqrt{a_{12}}(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_1) + \alpha_{31}^2(1 - \cos(\theta_1)))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{3 \times 11} &= [\sqrt{d_{12}}(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1))] \\
&- [(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_3) + \alpha_{13}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
&+ \sqrt{d_{23}}(\cos(\theta_2) + \alpha_{22}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{a_{23}}(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{5 \times 11} &= [\sqrt{a_{12}}(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))] \\
&- [(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_3) + \alpha_{13}^2(1 - \cos(\theta_3))) \\
&+ \sqrt{d_{23}}(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3)) \\
&+ \sqrt{a_{23}}(\cos(\theta_2) + \alpha_{32}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{7 \times 11} &= [\sqrt{d_{23}}(\alpha_{13}\alpha_{23}(1 - \cos(\theta_3)) + \alpha_{33}\text{sen}(\theta_3))] \\
&- [(\alpha_{12}\alpha_{22}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{32}\text{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_1) + \alpha_{11}^2(1 - \cos(\theta_1))) \\
&+ \sqrt{d_{12}}(\cos(\theta_2) + \alpha_{22}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1)) \\
&+ \sqrt{a_{12}}(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{9 \times 11} &= [\sqrt{a_{23}}(\alpha_{13}\alpha_{33}(1 - \cos(\theta_3)) - \alpha_{23}\text{sen}(\theta_3))] \\
&- [(\alpha_{12}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) + \alpha_{22}\text{sen}(\theta_2))(\cos(\theta_1) + \alpha_{11}^2(1 - \cos(\theta_1))) \\
&+ \sqrt{d_{12}}(\alpha_{22}\alpha_{32}(1 - \cos(\theta_2)) - \alpha_{12}\text{sen}(\theta_2))(\alpha_{11}\alpha_{21}(1 - \cos(\theta_1)) + \alpha_{31}\text{sen}(\theta_1)) \\
&+ \sqrt{a_{12}}(\cos(\theta_2) + \alpha_{32}^2(1 - \cos(\theta_2)))(\alpha_{11}\alpha_{31}(1 - \cos(\theta_1)) - \alpha_{21}\text{sen}(\theta_1))] \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Agora vamos listar as entradas da matriz de Gram dada no Teorema 4.31, recuperadas em termos dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição. Vamos explicitar, para esse caso, as entradas dos blocos E_1 , E_2 e E_3 , respectivamente.

(i) Entradas do bloco E_1 :

$$\langle Q_{12}, Q_{23} \rangle = \sqrt{a_{12}}\cos(\theta_2)$$

$$\langle Q_{21}, Q_{23} \rangle = \cos(\theta_2)$$

$$\langle R_{12}, Q_{23} \rangle = \text{sen}(\theta_2)$$

$$\langle Q_{12}, Q_{32} \rangle = -\text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_3) + \sqrt{a_{13}}\cos(\theta_1)\cos(\theta_3)$$

$$\langle Q_{21}, Q_{32} \rangle = \sqrt{a_{23}}\cos(\theta_2)$$

$$\langle R_{12}, Q_{32} \rangle = \sqrt{a_{23}}\text{sen}(\theta_2)$$

$$\langle Q_{12}, R_{23} \rangle = -\sqrt{a_{12}}\text{sen}(\theta_2)$$

$$\langle Q_{21}, R_{23} \rangle = -\text{sen}(\theta_2)$$

$$\langle R_{12}, R_{23} \rangle = \cos(\theta_2)$$

(ii) Entradas do bloco E_2 :

$$\langle Q_{12}, Q_{13} \rangle = \cos(\theta_1)$$

$$\begin{aligned}
\langle Q_{21}, Q_{13} \rangle &= \sqrt{a_{12}} \cos(\theta_1) \\
\langle R_{12}, Q_{13} \rangle &= -\text{sen}(\theta_1) \\
\langle Q_{12}, Q_{31} \rangle &= \sqrt{a_{13}} \cos(\theta_1) \\
\langle Q_{21}, Q_{31} \rangle &= -\text{sen}(\theta_2) \text{sen}(\theta_3) + \sqrt{a_{23}} \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \\
\langle R_{12}, Q_{31} \rangle &= -\sqrt{a_{13}} \text{sen}(\theta_1) \\
\langle Q_{12}, R_{13} \rangle &= \text{sen}(\theta_1) \\
\langle Q_{21}, R_{13} \rangle &= \sqrt{a_{12}} \text{sen}(\theta_1) \\
\langle R_{12}, R_{13} \rangle &= \cos(\theta_1)
\end{aligned}$$

(iii) Entradas do bloco E_3 :

$$\begin{aligned}
\langle Q_{23}, Q_{13} \rangle &= -\text{sen}(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) + \sqrt{a_{12}} \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \\
\langle Q_{32}, Q_{13} \rangle &= \sqrt{a_{13}} \cos(\theta_3) \\
\langle R_{23}, Q_{13} \rangle &= \sqrt{a_{13}} \text{sen}(\theta_3) \\
\langle Q_{23}, Q_{31} \rangle &= \sqrt{a_{23}} \cos(\theta_3) \\
\langle Q_{32}, Q_{31} \rangle &= \cos(\theta_3) \\
\langle R_{23}, Q_{31} \rangle &= \text{sen}(\theta_3) \\
\langle Q_{23}, R_{13} \rangle &= -\sqrt{a_{23}} \text{sen}(\theta_3) \\
\langle Q_{32}, R_{13} \rangle &= -\text{sen}(\theta_3) \\
\langle R_{23}, R_{13} \rangle &= \cos(\theta_3) \quad .
\end{aligned}$$

Note que, para o caso de triplas duas a duas coplanar, algumas das entradas acima podem ser expressadas de duas formas. Por exemplo, para recuperar a entrada $\langle R_{12}, R_{23} \rangle$ em termos dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição, podemos fazer de duas maneiras. A primeira seria usando o produto

$$[R_0 \quad R_{23} \quad Q_{23}] = [R_0 \quad R_{12} \quad Q_{21}] T_2^{-1},$$

obtendo assim a expressão

$$\langle R_{12}, R_{23} \rangle = \cos(\theta_2),$$

dada mais acima.

A segunda maneira seria usando os produtos

$$[R_0 \ R_{12} \ Q_{12}] = [R_0 \ R_{13} \ Q_{13}] T_1^{-1} \quad e \quad [R_0 \ R_{23} \ Q_{32}] = [R_0 \ R_{13} \ Q_{31}] T_3,$$

obtendo assim a expressão

$$\langle R_{12}, R_{23} \rangle = \cos(\theta_1)\cos(\theta_3) - \sqrt{a_{13}}\text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_3)$$

e conseqüentemente, subtraindo as expressões obtidas acima, temos a seguinte relação entre os parâmetros

$$D_{2 \times 5} = \cos(\theta_1)\cos(\theta_3) - \sqrt{a_{13}}\text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_3) - \cos(\theta_2) = 0$$

onde $D_{2 \times 5}$ denota a relação obtida da subtração das duas expressões decorrentes da aplicação da forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no ponto da linha 2 com o ponto da coluna 5 da matriz de Gram em questão.

Da mesma maneira obtemos outras relações entre os parâmetros, as quais explicitamos abaixo:

$$\begin{aligned} D_{2 \times 8} &= \cos(\theta_2)\cos(\theta_3) - \sqrt{d_{23}}\text{sen}(\theta_2)\text{sen}(\theta_3) - \cos(\theta_1) = 0 \\ D_{5 \times 8} &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sqrt{d_{12}}\text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) - \cos(\theta_3) = 0 \\ D_{2 \times 7} &= \cos(\theta_1)\text{sen}(\theta_3) - \sqrt{d_{13}}\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_3) - \sqrt{d_{23}}\text{sen}(\theta_2) = 0 \\ D_{3 \times 5} &= \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_3) + \sqrt{d_{13}}\cos(\theta_1)\text{sen}(\theta_3) + \sqrt{d_{12}}\text{sen}(\theta_2) = 0 \\ D_{2 \times 10} &= \cos(\theta_2)\text{sen}(\theta_3) + \sqrt{d_{23}}\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_3) + \sqrt{d_{13}}\text{sen}(\theta_1) = 0 \\ D_{4 \times 8} &= -\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_3) - \sqrt{d_{23}}\cos(\theta_2)\text{sen}(\theta_3) - \sqrt{d_{12}}\text{sen}(\theta_1) = 0 \\ D_{5 \times 9} &= -\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sqrt{d_{12}}\cos(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) - \sqrt{d_{13}}\text{sen}(\theta_3) = 0 \\ D_{6 \times 8} &= \cos(\theta_1)\text{sen}(\theta_2) + \sqrt{d_{12}}\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sqrt{d_{23}}\text{sen}(\theta_3) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Apêndice C

Entradas da Matriz de Gram para Triplas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^4$ e Relações

Aqui vamos listar as entradas da matriz de Gram dada no Teorema 5.8, recuperadas em termos dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição. Vamos explicitar as entradas dos blocos E_1 , E_2 e E_3 , respectivamente.

(i) Entradas do bloco E_1 :

$$\langle R_{12}, R_{23} \rangle = e^{-i\alpha_{12}} \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{22})$$

$$\langle R_{12}, P_{23} \rangle = -e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{12}} \operatorname{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{22}-i\beta_{32}} \operatorname{sen}(\theta_{22}) \operatorname{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12})$$

$$\langle R_{12}, P_{32} \rangle = \sqrt{d_{23}} (-e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{12}} \operatorname{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{22}-i\beta_{32}} \operatorname{sen}(\theta_{22}) \operatorname{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12}))$$

$$\langle R_{12}, Q_{23} \rangle = e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{12}+i\beta_{32}} \operatorname{sen}(\theta_{12}) \operatorname{sen}(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{22}} \operatorname{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32})$$

$$\langle R_{12}, Q_{32} \rangle = \sqrt{a_{23}} (e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{12}+i\beta_{32}} \operatorname{sen}(\theta_{12}) \operatorname{sen}(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{22}} \operatorname{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}))$$

$$\langle P_{12}, R_{23} \rangle = \sqrt{d_{12}} (e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}} \operatorname{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{22}))$$

$$\langle P_{12}, P_{23} \rangle = \sqrt{d_{12}} (e^{-i\alpha_{22}} \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}+i\beta_{22}-i\beta_{32}} \operatorname{sen}(\theta_{12}) \operatorname{sen}(\theta_{22}) \operatorname{sen}(\theta_{32}))$$

$$\begin{aligned} \langle P_{12}, P_{32} \rangle &= (e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}} \operatorname{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{21})) (e^{i\alpha_{23}+i\beta_{13}} \operatorname{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{23})) + \sqrt{d_{13}} (e^{-i\alpha_{21}} \\ &\cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \operatorname{sen}(\theta_{11}) \operatorname{sen}(\theta_{21}) \operatorname{sen}(\theta_{31})) (e^{i\alpha_{23}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) - \\ &e^{i\alpha_{23}+i\beta_{13}-i\beta_{23}+i\beta_{33}} \operatorname{sen}(\theta_{13}) \operatorname{sen}(\theta_{23}) \operatorname{sen}(\theta_{33})) + \sqrt{a_{13}} (-e^{-i\alpha_{21}+i\beta_{31}} \operatorname{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11}) - \end{aligned}$$

$$e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{31}) (-e^{i\alpha_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13}) - e^{i\alpha_{23}+i\beta_{13}-i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{13})\text{sen}(\theta_{23})\cos(\theta_{33}))$$

$$\langle P_{12}, Q_{23} \rangle = \sqrt{d_{12}}(-e^{-i\alpha_{22}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12}) - e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}+i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{32}))$$

$$\langle P_{12}, Q_{32} \rangle = (e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{21})) (e^{-i\alpha_{13}-i\alpha_{23}+i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23})) + \sqrt{d_{13}} (e^{-i\alpha_{21}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11})\text{sen}(\theta_{21})\text{sen}(\theta_{31}))(e^{-i\alpha_{13}-i\alpha_{23}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{23})) + \sqrt{a_{13}} (-e^{-i\alpha_{21}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{31})) (e^{-i\alpha_{13}-i\alpha_{23}} \cos(\theta_{23})\cos(\theta_{33}))$$

$$\langle P_{21}, R_{23} \rangle = e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12})\cos(\theta_{22})$$

$$\langle P_{21}, P_{23} \rangle = e^{-i\alpha_{22}} \cos(\theta_{12})\cos(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}+i\beta_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12})\text{sen}(\theta_{22})\text{sen}(\theta_{32})$$

$$\langle P_{21}, P_{32} \rangle = \sqrt{d_{23}}(e^{-i\alpha_{22}} \cos(\theta_{12})\cos(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}+i\beta_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12})\text{sen}(\theta_{22})\text{sen}(\theta_{32}))$$

$$\langle P_{21}, Q_{23} \rangle = -e^{-i\alpha_{22}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32})\cos(\theta_{12}) - e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}+i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{12})\text{sen}(\theta_{22})\cos(\theta_{32})$$

$$\langle P_{21}, Q_{32} \rangle = \sqrt{a_{23}}(-e^{-i\alpha_{22}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12}) - e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}+i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})) \cos(\theta_{32}))$$

$$\langle Q_{12}, R_{23} \rangle = \sqrt{a_{12}}(e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22}))$$

$$\langle Q_{12}, P_{23} \rangle = \sqrt{a_{12}}(e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32})\cos(\theta_{22}))$$

$$\langle Q_{12}, P_{32} \rangle = (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21})) (e^{i\alpha_{23}+i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{23})) + \sqrt{d_{13}} (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31})\cos(\theta_{21}))(e^{i\alpha_{23}} \cos(\theta_{13})\cos(\theta_{33}) - e^{i\alpha_{23}+i\beta_{13}-i\beta_{23}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13})\text{sen}(\theta_{23})\text{sen}(\theta_{33})) + \sqrt{a_{13}}(e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}} \cos(\theta_{21}) \cos(\theta_{31})) (-e^{i\alpha_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13}) - e^{i\alpha_{23}+i\beta_{13}-i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{23})\cos(\theta_{33}))$$

$$\langle Q_{12}, Q_{23} \rangle = \sqrt{a_{12}}(e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}} \cos(\theta_{22})\cos(\theta_{32}))$$

$$\langle Q_{12}, Q_{32} \rangle = (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21})) (e^{-i\alpha_{13}-i\alpha_{23}+i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23})) + \sqrt{d_{13}} (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31})\cos(\theta_{21}))(e^{-i\alpha_{13}-i\alpha_{23}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33})\cos(\theta_{23})) + \sqrt{a_{13}} (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}} \cos(\theta_{21})\cos(\theta_{31})) (e^{-i\alpha_{13}-i\alpha_{23}} \cos(\theta_{23})\cos(\theta_{33}))$$

$$\langle Q_{21}, R_{23} \rangle = e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22})$$

$$\langle Q_{21}, P_{23} \rangle = e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32})\cos(\theta_{22})$$

$$\langle Q_{21}, P_{32} \rangle = \sqrt{d_{23}}(e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32})\cos(\theta_{22}))$$

$$\langle Q_{21}, Q_{23} \rangle = e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}} \cos(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})$$

$$\langle Q_{21}, Q_{32} \rangle = \sqrt{a_{23}} (e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}} \cos(\theta_{22}) \cos(\theta_{32}))$$

(ii) Entradas do bloco E_2 :

$$\langle R_{12}, R_{13} \rangle = e^{-i\alpha_{11}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{21})$$

$$\langle R_{12}, P_{13} \rangle = -e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11})$$

$$\langle R_{12}, P_{31} \rangle = \sqrt{d_{13}} (-e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11}))$$

$$\langle R_{12}, Q_{13} \rangle = e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31})$$

$$\langle R_{12}, Q_{31} \rangle = \sqrt{a_{13}} (e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}))$$

$$\langle P_{12}, R_{13} \rangle = e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{21})$$

$$\langle P_{12}, P_{13} \rangle = e^{-i\alpha_{21}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31})$$

$$\langle P_{12}, P_{31} \rangle = \sqrt{d_{13}} (e^{-i\alpha_{21}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31}))$$

$$\langle P_{12}, Q_{13} \rangle = -e^{-i\alpha_{21}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{31})$$

$$\langle P_{12}, Q_{31} \rangle = \sqrt{a_{13}} (-e^{-i\alpha_{21}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{31}))$$

$$\langle P_{21}, R_{13} \rangle = \sqrt{d_{12}} (e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{21}))$$

$$\langle P_{21}, P_{13} \rangle = \sqrt{d_{12}} (e^{-i\alpha_{21}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31}))$$

$$\begin{aligned} \langle P_{21}, P_{31} \rangle &= (e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{22})) (-e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{23}-i\beta_{33}} \\ &\text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13})) + \sqrt{d_{23}} (e^{-i\alpha_{22}} \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}+i\beta_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12}) \\ &\text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{32})) (e^{-i\alpha_{23}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}+i\beta_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33})) \\ &+ \sqrt{a_{23}} (-e^{-i\alpha_{22}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12}) - e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}+i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})) \\ &(e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{23})) \end{aligned}$$

$$\langle P_{21}, Q_{13} \rangle = \sqrt{d_{12}} (-e^{-i\alpha_{21}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{31}))$$

$$\langle P_{21}, Q_{31} \rangle = (e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{22})) (e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{13}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23}) \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33})) + \sqrt{d_{23}} (e^{-i\alpha_{22}} \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}+i\beta_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12})$$

$$\begin{aligned} & \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{32})) (-e^{-i\alpha_{23}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13}) - e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}+i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{23}) \\ & \cos(\theta_{33})) + \sqrt{a_{23}} (-e^{-i\alpha_{22}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12}) - e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}+i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})) \\ & (e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}} \cos(\theta_{23}) \cos(\theta_{33})) \end{aligned}$$

$$\langle Q_{12}, R_{13} \rangle = e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21})$$

$$\langle Q_{12}, P_{13} \rangle = e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{21})$$

$$\langle Q_{12}, P_{31} \rangle = \sqrt{d_{13}} (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{21}))$$

$$\langle Q_{12}, Q_{13} \rangle = e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}} \cos(\theta_{21}) \cos(\theta_{31})$$

$$\langle Q_{12}, Q_{31} \rangle = \sqrt{a_{13}} (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}} \cos(\theta_{21}) \cos(\theta_{31}))$$

$$\langle Q_{21}, R_{13} \rangle = \sqrt{a_{12}} (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21}))$$

$$\langle Q_{21}, P_{13} \rangle = \sqrt{a_{12}} (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{21}))$$

$$\begin{aligned} \langle Q_{21}, P_{31} \rangle &= (e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22})) (-e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{23}-i\beta_{33}} \\ & \text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13})) + \sqrt{d_{23}} (e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{22})) (e^{-i\alpha_{23}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) \\ & - e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}+i\beta_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33})) + \sqrt{a_{23}} (e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}} \cos(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})) \\ & (e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{23})) \end{aligned}$$

$$\langle Q_{21}, Q_{13} \rangle = \sqrt{a_{12}} (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}} \cos(\theta_{21}) \cos(\theta_{31}))$$

$$\begin{aligned} \langle Q_{21}, Q_{31} \rangle &= (e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22})) (e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{13}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{23}} \\ & \text{sen}(\theta_{23}) \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33})) + \sqrt{d_{23}} (e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{22})) (-e^{-i\alpha_{23}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \\ & \cos(\theta_{13}) - e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}+i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{23}) \cos(\theta_{33})) + \sqrt{a_{23}} (e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}} \cos(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})) \\ & (e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}} \cos(\theta_{23}) \cos(\theta_{33})) \end{aligned}$$

(iii) Entradas do bloco E_3 :

$$\langle R_{23}, R_{13} \rangle = e^{-i\alpha_{13}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{23})$$

$$\langle R_{23}, P_{13} \rangle = \sqrt{d_{13}} (-e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13}))$$

$$\langle R_{23}, P_{31} \rangle = -e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13})$$

$$\langle R_{23}, Q_{13} \rangle = \sqrt{a_{13}} (e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{13}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23}) \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}))$$

$$\langle R_{23}, Q_{31} \rangle = e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{13}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23}) \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33})$$

$$\begin{aligned}
\langle P_{23}, R_{13} \rangle &= \sqrt{d_{23}} (e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{23})) \\
\langle P_{23}, P_{13} \rangle &= (-e^{i\alpha_{12}-i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{i\alpha_{12}-i\beta_{22}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12})) \\
&(-e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11})) + \sqrt{d_{12}} (e^{i\alpha_{22}} \\
&\cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{i\alpha_{22}+i\beta_{12}-i\beta_{22}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{32})) (e^{-i\alpha_{21}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - \\
&e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31})) + \sqrt{a_{12}} (e^{-i\alpha_{12}-i\alpha_{22}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{22})) \\
&(e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{21})) \\
\langle P_{23}, P_{31} \rangle &= \sqrt{d_{23}} (e^{-i\alpha_{23}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}+i\beta_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33})) \\
\langle P_{23}, Q_{13} \rangle &= (-e^{i\alpha_{12}-i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{i\alpha_{12}-i\beta_{22}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12})) \\
&(e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31})) + \sqrt{d_{12}} (e^{i\alpha_{22}} \\
&\cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{i\alpha_{22}+i\beta_{12}-i\beta_{22}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{32})) (-e^{-i\alpha_{21}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \\
&\cos(\theta_{11}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{31})) + \sqrt{a_{12}} (e^{-i\alpha_{12}-i\alpha_{22}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \\
&\cos(\theta_{22})) (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}} \cos(\theta_{21}) \cos(\theta_{31})) \\
\langle P_{23}, Q_{31} \rangle &= \sqrt{d_{23}} (-e^{-i\alpha_{23}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13}) - e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}+i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{23}) \\
&\cos(\theta_{33})) \\
\langle P_{32}, R_{13} \rangle &= e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{23}) \\
\langle P_{32}, P_{13} \rangle &= \sqrt{d_{13}} (e^{-i\alpha_{23}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}+i\beta_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33})) \\
\langle P_{32}, P_{31} \rangle &= e^{-i\alpha_{23}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}+i\beta_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33}) \\
\langle P_{32}, Q_{13} \rangle &= \sqrt{a_{13}} (-e^{-i\alpha_{23}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13}) - e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}+i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{23}) \\
&\cos(\theta_{33})) \\
\langle P_{32}, Q_{31} \rangle &= -e^{-i\alpha_{23}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13}) - e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}+i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{23}) \cos(\theta_{33}) \\
\langle Q_{23}, R_{13} \rangle &= \sqrt{a_{23}} (e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}-i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23})) \\
\langle Q_{23}, P_{13} \rangle &= (e^{i\alpha_{12}-i\beta_{12}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{32}) - e^{i\alpha_{12}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32})) \\
&(-e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11})) + \sqrt{d_{12}} \\
&(-e^{i\alpha_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12}) - e^{i\alpha_{22}+i\beta_{12}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})) (e^{-i\alpha_{21}} \cos(\theta_{11}) \\
&\cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31})) + \sqrt{a_{12}} (e^{-i\alpha_{12}-i\alpha_{22}} \cos(\theta_{22}) \\
&\cos(\theta_{32})) (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{21})) \\
\langle Q_{23}, P_{31} \rangle &= \sqrt{a_{23}} (e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{23}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle Q_{23}, Q_{13} \rangle &= (e^{i\alpha_{12}-i\beta_{12}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{32}) - e^{i\alpha_{12}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32})) \\
&(e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31})) + \sqrt{d_{12}} \\
&(-e^{i\alpha_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12}) - e^{i\alpha_{22}+i\beta_{12}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})) (-e^{-i\alpha_{21}+i\beta_{31}} \\
&\text{sen}(\theta_{31})\cos(\theta_{11}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{11})\text{sen}(\theta_{21})\cos(\theta_{31})) + \sqrt{a_{12}} (e^{-i\alpha_{12}-i\alpha_{22}} \cos(\theta_{22}) \\
&\cos(\theta_{32})) (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}} \cos(\theta_{21})\cos(\theta_{31})) \\
\langle Q_{23}, Q_{31} \rangle &= \sqrt{a_{23}}(e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}} \cos(\theta_{23})\cos(\theta_{33})) \\
\langle Q_{32}, R_{13} \rangle &= e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}-i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23}) \\
\langle Q_{32}, P_{13} \rangle &= \sqrt{d_{13}}(e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33})\cos(\theta_{23})) \\
\langle Q_{32}, P_{31} \rangle &= e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33})\cos(\theta_{23}) \\
\langle Q_{32}, Q_{13} \rangle &= \sqrt{a_{13}}(e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}} \cos(\theta_{23})\cos(\theta_{33})) \\
\langle Q_{32}, Q_{31} \rangle &= e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}} \cos(\theta_{23})\cos(\theta_{33}) \quad .
\end{aligned}$$

Note que algumas das entradas acima podem ser expressadas de duas formas. Por exemplo, para recuperar a entrada $\langle R_{12}, P_{32} \rangle$ em termos dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição, podemos fazer de duas maneiras. A primeira seria usando o produto

$$[R_{12} \quad P_{21} \quad Q_{21}] = [R_{23} \quad P_{23} \quad Q_{23}] T_2^{-1} ,$$

obtendo assim a expressão

$$\langle R_{12}, P_{32} \rangle = \sqrt{d_{23}}(-e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12})\cos(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{22})\text{sen}(\theta_{32}))\cos(\theta_{12}) ,$$

dada mais acima.

A segunda maneira seria usando os produtos

$$[R_{12} \quad P_{12} \quad Q_{12}] = [R_{13} \quad P_{13} \quad Q_{13}] T_1^{-1} \quad e \quad [R_{23} \quad P_{32} \quad Q_{32}] = [R_{13} \quad P_{31} \quad Q_{31}] T_3^{-1} ,$$

obtendo assim a expressão

$$\begin{aligned}
\langle R_{12}, P_{32} \rangle &= (e^{-i\alpha_{11}} \cos(\theta_{11})\cos(\theta_{21}))(e^{i\alpha_{23}+i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{23})) + \sqrt{d_{13}}(-e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \\
&\cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31})\cos(\theta_{11}))(e^{i\alpha_{23}} \cos(\theta_{13})\cos(\theta_{33}) - e^{i\alpha_{23}+i\beta_{13}-i\beta_{23}+i\beta_{33}} \\
&\text{sen}(\theta_{13})\text{sen}(\theta_{23})\text{sen}(\theta_{33})) + \sqrt{a_{13}}(e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11})\text{sen}(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21})\cos(\theta_{11}) \\
&\cos(\theta_{31})) (-e^{i\alpha_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13}) - e^{i\alpha_{23}+i\beta_{13}-i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{23})\cos(\theta_{33}))
\end{aligned}$$

e conseqüentemente, subtraindo as expressões obtidas acima, temos a seguinte relação entre os parâmetros

$$D_{1 \times 8} = [\sqrt{d_{23}} (-e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{32})) \cos(\theta_{12})] \\ - [(e^{-i\alpha_{11}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{21})) (e^{i\alpha_{23}+i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{23})) + \sqrt{d_{13}} (-e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) \\ - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11})) (e^{i\alpha_{23}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) - e^{i\alpha_{23}+i\beta_{13}-i\beta_{23}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \\ \text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33})) + \sqrt{a_{13}} (e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{11}) \\ \cos(\theta_{31})) (-e^{i\alpha_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13}) - e^{i\alpha_{23}+i\beta_{13}-i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{23}) \cos(\theta_{33}))] = 0$$

onde $D_{1 \times 8}$ denota a relação obtida da subtração das duas expressões decorrentes da aplicação da forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no ponto da linha 1 com o ponto da coluna 8 da matriz de Gram em questão.

Da mesma maneira obtemos outras relações entre os parâmetros, as quais são dadas por:

$$D_{1 \times 6} = [e^{-i\alpha_{12}} \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{22})] - [(e^{-i\alpha_{11}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{21})) (e^{i\alpha_{13}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{23})) + \sqrt{d_{13}} \\ (-e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11})) (-e^{i\alpha_{13}-i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \\ \cos(\theta_{33}) - e^{i\alpha_{13}-i\beta_{23}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13})) + \sqrt{a_{13}} (e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{31}) - \\ e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31})) (e^{i\alpha_{13}-i\beta_{13}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{33}) - e^{i\alpha_{13}-i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23}) \cos(\theta_{13}) \\ \cos(\theta_{33}))] = 0$$

$$D_{1 \times 11} = [e^{-i\alpha_{11}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{21})] - [(e^{-i\alpha_{12}} \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{22})) (e^{-i\alpha_{13}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{23})) + \sqrt{d_{23}} \\ (-e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12})) (e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \\ \cos(\theta_{23})) + \sqrt{a_{23}} (e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{12}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32})) \\ (e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}-i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23}))] = 0$$

$$D_{6 \times 11} = [e^{-i\alpha_{13}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{23})] - [(e^{i\alpha_{12}} \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{22})) (e^{-i\alpha_{11}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{21})) + \sqrt{d_{12}} \\ (e^{i\alpha_{22}+i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{22})) (e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{21})) + \sqrt{a_{12}} (e^{-i\alpha_{12}-i\alpha_{22}+i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22})) \\ (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21}))] = 0$$

$$D_{1 \times 10} = [\sqrt{a_{23}} (e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{12}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}))] - \\ [(e^{-i\alpha_{11}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{21})) (e^{-i\alpha_{13}-i\alpha_{23}+i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23})) + \sqrt{d_{13}} (-e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - \\ e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11})) (e^{-i\alpha_{13}-i\alpha_{23}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{23})) + \sqrt{a_{13}} \\ (e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31})) (e^{-i\alpha_{13}-i\alpha_{23}} \cos(\theta_{23}) \\ \cos(\theta_{33}))] = 0$$

$$D_{1 \times 13} = [\sqrt{d_{13}}(-e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11}))] - [(e^{-i\alpha_{12}} \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{22})) (-e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13})) + \sqrt{d_{23}} (-e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12})) (e^{-i\alpha_{23}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}+i\beta_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33})) + \sqrt{a_{23}} (e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{12}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32})) (e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{23}))] = 0$$

$$D_{1 \times 15} = [\sqrt{a_{13}} (e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}))] - [(e^{-i\alpha_{12}} \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{22})) (e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{13}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23}) \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33})) + \sqrt{d_{23}} (-e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12})) (-e^{-i\alpha_{23}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13}) - e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}+i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{23}) \cos(\theta_{33})) + \sqrt{a_{23}} (e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{12}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{12}+i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32})) (e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}} \cos(\theta_{23}) \cos(\theta_{33}))] = 0$$

$$D_{2 \times 6} = [\sqrt{d_{12}} (e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{22}))] - [(e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{21})) (e^{i\alpha_{13}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{23})) + \sqrt{d_{13}} (e^{-i\alpha_{21}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31})) (-e^{i\alpha_{13}-i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) - e^{i\alpha_{13}-i\beta_{23}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13})) + \sqrt{a_{13}} (-e^{-i\alpha_{21}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{31})) (e^{i\alpha_{13}-i\beta_{13}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{33}) - e^{i\alpha_{13}-i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23}) \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}))] = 0$$

$$D_{4 \times 6} = [\sqrt{a_{12}} (e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22}))] - [(e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21})) (e^{i\alpha_{13}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{23})) + \sqrt{d_{13}} (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{21})) (-e^{i\alpha_{13}-i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) - e^{i\alpha_{13}-i\beta_{23}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13})) + \sqrt{a_{13}} (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}} \cos(\theta_{21}) \cos(\theta_{31})) (e^{i\alpha_{13}-i\beta_{13}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{33}) - e^{i\alpha_{13}-i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23}) \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}))] = 0$$

$$D_{6 \times 12} = [\sqrt{d_{13}} (-e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{23}-i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{23}) \text{sen}(\theta_{33}) \cos(\theta_{13}))] - [(e^{i\alpha_{12}} \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{22})) (-e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11})) + \sqrt{d_{12}} (e^{i\alpha_{22}+i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{22})) (e^{-i\alpha_{21}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \text{sen}(\theta_{31})) + \sqrt{a_{12}} (e^{-i\alpha_{12}-i\alpha_{22}+i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22})) (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{21}))] = 0$$

$$D_{6 \times 14} = [\sqrt{a_{13}} (e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{13}+i\beta_{33}} \text{sen}(\theta_{13}) \text{sen}(\theta_{33}) - e^{-i\alpha_{13}+i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23}) \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{33}))] - [(e^{i\alpha_{12}} \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{22})) (e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{11}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{31}) - e^{-i\alpha_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{31})) + \sqrt{d_{12}} (e^{i\alpha_{22}+i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{22})) (-e^{-i\alpha_{21}+i\beta_{31}} \text{sen}(\theta_{31}) \cos(\theta_{11}) - e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}+i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{11}) \text{sen}(\theta_{21}) \cos(\theta_{31})) + \sqrt{a_{12}} (e^{-i\alpha_{12}-i\alpha_{22}+i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22})) (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}} \cos(\theta_{21}) \cos(\theta_{31}))] = 0$$

$$D_{3 \times 11} = [\sqrt{d_{12}}(e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{21}))] - [(e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{22})) (e^{-i\alpha_{13}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{23})) + \sqrt{d_{23}} (e^{-i\alpha_{22}} \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}+i\beta_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{32})) (e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{23})) + \sqrt{a_{23}} (-e^{-i\alpha_{22}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12}) - e^{-i\alpha_{22}-i\beta_{12}+i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})) (e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}-i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23}))] = 0$$

$$D_{5 \times 11} = [\sqrt{a_{12}}(e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21}))] - [(e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22})) (e^{-i\alpha_{13}} \cos(\theta_{13}) \cos(\theta_{23})) + \sqrt{d_{23}} (e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{22})) (e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{23})) + \sqrt{a_{23}} (e^{i\alpha_{12}+i\alpha_{22}} \cos(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})) (e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}-i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23}))] = 0$$

$$D_{7 \times 11} = [\sqrt{d_{23}}(e^{-i\alpha_{23}-i\beta_{13}} \text{sen}(\theta_{13}) \cos(\theta_{23}))] - [(-e^{i\alpha_{12}-i\beta_{12}} \text{sen}(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{i\alpha_{12}-i\beta_{22}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12})) (e^{-i\alpha_{11}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{21})) + \sqrt{d_{12}} (e^{i\alpha_{22}} \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32}) - e^{i\alpha_{22}+i\beta_{12}-i\beta_{22}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{22}) \text{sen}(\theta_{32})) (e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{21})) + \sqrt{a_{12}} (e^{-i\alpha_{12}-i\alpha_{22}+i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{22})) (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21}))] = 0$$

$$D_{9 \times 11} = [\sqrt{a_{23}}(e^{i\alpha_{13}+i\alpha_{23}-i\beta_{23}} \text{sen}(\theta_{23}))] - [(e^{i\alpha_{12}-i\beta_{12}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{32}) - e^{i\alpha_{12}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{12}) \cos(\theta_{32})) (e^{-i\alpha_{11}} \cos(\theta_{11}) \cos(\theta_{21})) + \sqrt{d_{12}} (-e^{i\alpha_{22}-i\beta_{32}} \text{sen}(\theta_{32}) \cos(\theta_{12}) - e^{i\alpha_{22}+i\beta_{12}-i\beta_{22}} \text{sen}(\theta_{12}) \text{sen}(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})) (e^{-i\alpha_{21}-i\beta_{11}} \text{sen}(\theta_{11}) \cos(\theta_{21})) + \sqrt{a_{12}} (e^{-i\alpha_{12}-i\alpha_{22}} \cos(\theta_{22}) \cos(\theta_{32})) (e^{i\alpha_{11}+i\alpha_{21}-i\beta_{21}} \text{sen}(\theta_{21}))] = 0$$

Agora vamos listar as entradas da matriz de Gram dada no Teorema 5.37, recuperadas em termos dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição. Vamos explicitar, para esse caso, as entradas dos blocos E_1 , E_2 e E_3 , respectivamente.

(i) Entradas do bloco E_1 :

$$\langle R_{12}, R_{23} \rangle = e^{-i\alpha_{22}} \cos(\theta_{32})$$

$$\langle Q_{12}, R_{23} \rangle = \sqrt{a_{12}} e^{i\alpha_{22}} \text{sen}(\theta_{32})$$

$$\langle Q_{21}, R_{23} \rangle = e^{i\alpha_{22}} \text{sen}(\theta_{32})$$

$$\langle R_{12}, Q_{32} \rangle = -\sqrt{a_{23}} e^{-i\alpha_{22}} \text{sen}(\theta_{32})$$

$$\langle Q_{12}, Q_{32} \rangle = -e^{i\alpha_{21}-i\alpha_{23}} \text{sen}(\theta_{31}) \text{sen}(\theta_{33}) + \sqrt{a_{13}} e^{-i\alpha_{21}-i\alpha_{23}} \cos(\theta_{31}) \cos(\theta_{33})$$

$$\langle Q_{21}, Q_{32} \rangle = \sqrt{a_{23}} e^{i\alpha_{22}} \cos(\theta_{32})$$

$$\langle R_{12}, Q_{23} \rangle = -e^{-i\alpha_{22}} \text{sen}(\theta_{32})$$

$$\langle Q_{12}, Q_{23} \rangle = \sqrt{a_{12}} e^{i\alpha_{22}} \cos(\theta_{32})$$

$$\langle Q_{21}, Q_{23} \rangle = e^{i\alpha_{22}} \cos(\theta_{32})$$

(ii) Entradas do bloco E_2 :

$$\langle R_{12}, R_{13} \rangle = e^{i\alpha_{21}} \cos(\theta_{31})$$

$$\langle Q_{12}, R_{13} \rangle = -e^{i\alpha_{21}} \sin(\theta_{31})$$

$$\langle Q_{21}, R_{13} \rangle = -\sqrt{a_{12}} e^{i\alpha_{21}} \cos(\theta_{31})$$

$$\langle R_{12}, Q_{13} \rangle = e^{-i\alpha_{21}} \sin(\theta_{31})$$

$$\langle Q_{12}, Q_{13} \rangle = e^{-i\alpha_{21}} \cos(\theta_{31})$$

$$\langle Q_{21}, Q_{13} \rangle = \sqrt{a_{12}} e^{-i\alpha_{21}} \cos(\theta_{31})$$

$$\langle R_{12}, Q_{31} \rangle = \sqrt{a_{13}} e^{-i\alpha_{21}} \sin(\theta_{31})$$

$$\langle Q_{12}, Q_{31} \rangle = \sqrt{a_{13}} e^{-i\alpha_{21}} \cos(\theta_{31})$$

$$\langle Q_{21}, Q_{31} \rangle = -e^{i\alpha_{22} - i\alpha_{23}} \sin(\theta_{32}) \sin(\theta_{33}) + \sqrt{a_{23}} e^{i\alpha_{22} + i\alpha_{23}} \cos(\theta_{32}) \cos(\theta_{33})$$

(iii) Entradas do bloco E_3 :

$$\langle R_{23}, R_{13} \rangle = e^{-i\alpha_{23}} \cos(\theta_{33})$$

$$\langle Q_{32}, R_{13} \rangle = e^{i\alpha_{23}} \sin(\theta_{33})$$

$$\langle Q_{23}, R_{13} \rangle = \sqrt{a_{23}} e^{i\alpha_{23}} \sin(\theta_{33})$$

$$\langle R_{23}, Q_{13} \rangle = -\sqrt{a_{13}} e^{-i\alpha_{23}} \sin(\theta_{33})$$

$$\langle Q_{32}, Q_{13} \rangle = \sqrt{a_{13}} e^{i\alpha_{23}} \cos(\theta_{33})$$

$$\langle Q_{23}, Q_{13} \rangle = -e^{i\alpha_{22} - i\alpha_{21}} \sin(\theta_{31}) \sin(\theta_{32}) + \sqrt{a_{12}} e^{-i\alpha_{21} - i\alpha_{22}} \cos(\theta_{31}) \cos(\theta_{32})$$

$$\langle R_{23}, Q_{31} \rangle = -e^{-i\alpha_{23}} \sin(\theta_{33})$$

$$\langle Q_{32}, Q_{31} \rangle = e^{i\alpha_{23}} \cos(\theta_{33})$$

$$\langle Q_{23}, Q_{31} \rangle = \sqrt{a_{23}} e^{i\alpha_{23}} \cos(\theta_{33}) \quad .$$

Note que, para o caso de triplas duas a duas coplanar, algumas das entradas acima podem ser expressadas de duas formas. Por exemplo, para recuperar a entrada $\langle R_{12}, R_{23} \rangle$ em temos

dos parâmetros básicos e dos ângulos de transição, podemos fazer de duas maneiras. A primeira seria usando o produto

$$[R_0 \ R_{12} \ Q_{21}] = [R_0 \ R_{23} \ Q_{23}] T_2^{-1},$$

obtendo assim a expressão

$$\langle R_{12}, R_{23} \rangle = e^{-i\alpha_{22}} \cos(\theta_{32}),$$

dada mais acima.

A segunda maneira seria usando os produtos

$$[R_0 \ R_{12} \ Q_{12}] = [R_0 \ R_{13} \ Q_{13}] T_1 \quad \text{e} \quad [R_0 \ R_{23} \ Q_{32}] = [R_0 \ R_{13} \ Q_{31}] T_3^{-1},$$

obtendo assim a expressão

$$\langle R_{12}, R_{23} \rangle = e^{i\alpha_{21} + i\alpha_{23}} \cos(\theta_{31}) \cos(\theta_{33}) - \sqrt{a_{13}} e^{-i\alpha_{21} + i\alpha_{23}} \text{sen}(\theta_{31}) \text{sen}(\theta_{33})$$

e conseqüentemente, subtraindo as expressões obtidas acima, temos a seguinte relação entre os parâmetros

$$\begin{aligned} D_{2 \times 5} &= e^{-i\alpha_{22}} \cos(\theta_{32}) - [e^{i\alpha_{21} + i\alpha_{23}} \cos(\theta_{31}) \cos(\theta_{33}) - \sqrt{a_{13}} e^{-i\alpha_{21} + i\alpha_{23}} \text{sen}(\theta_{31}) \text{sen}(\theta_{33})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde $D_{2 \times 5}$ denota a relação obtida da subtração das duas expressões decorrentes da aplicação da forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no ponto da linha 2 com o ponto da coluna 5 da matriz de Gram em questão. Da mesma maneira obtemos outras relações entre os parâmetros, as quais explicitamos abaixo:

$$\begin{aligned} D_{3 \times 5} &= \sqrt{a_{12}} e^{i\alpha_{22}} s(\theta_{22}) + [e^{i\alpha_{21} + i\alpha_{23}} s(\theta_{31}) c(\theta_{33}) + \sqrt{a_{13}} e^{-i\alpha_{21} + i\alpha_{23}} c(\theta_{31}) s(\theta_{33})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{2 \times 7} &= -\sqrt{a_{23}} e^{-i\alpha_{22}} s(\theta_{32}) - [e^{i\alpha_{21} - i\alpha_{23}} c(\theta_{31}) s(\theta_{33}) + \sqrt{a_{13}} e^{-i\alpha_{21} - i\alpha_{23}} s(\theta_{31}) c(\theta_{33})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{2 \times 8} &= e^{i\alpha_{21}} c(\theta_{31}) - [e^{-i\alpha_{22} - i\alpha_{23}} c(\theta_{32}) c(\theta_{33}) - \sqrt{a_{23}} e^{-i\alpha_{22} + i\alpha_{23}} s(\theta_{32}) s(\theta_{33})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{2 \times 10} &= \sqrt{a_{13}} e^{-i\alpha_{21}} s(\theta_{31}) - [-e^{-i\alpha_{22} - i\alpha_{23}} c(\theta_{32}) s(\theta_{33}) - \sqrt{a_{23}} e^{-i\alpha_{22} + i\alpha_{23}} s(\theta_{32}) c(\theta_{33})] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{4 \times 8} &= -\sqrt{a_{12}} e^{i\alpha_{21}} s(\theta_{31}) - [e^{i\alpha_{22} - i\alpha_{23}} s(\theta_{32}) c(\theta_{33}) + \sqrt{a_{23}} e^{i\alpha_{22} + i\alpha_{23}} c(\theta_{32}) s(\theta_{33})] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{5 \times 8} &= e^{-i\alpha_{23}} c(\theta_{33}) - [e^{i\alpha_{22} + i\alpha_{21}} c(\theta_{31}) c(\theta_{32}) - \sqrt{a_{12}} e^{-i\alpha_{22} + i\alpha_{21}} s(\theta_{31}) s(\theta_{32})] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{5 \times 9} &= -\sqrt{a_{13}} e^{-i\alpha_{23}} s(\theta_{33}) - [e^{i\alpha_{22} - i\alpha_{21}} s(\theta_{31}) c(\theta_{32}) + \sqrt{a_{12}} e^{-i\alpha_{21} - i\alpha_{22}} c(\theta_{31}) s(\theta_{32})] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{6 \times 8} &= \sqrt{a_{23}} e^{i\alpha_{23}} s(\theta_{33}) - [-e^{i\alpha_{22} + i\alpha_{21}} c(\theta_{31}) s(\theta_{32}) - \sqrt{a_{12}} e^{-i\alpha_{22} + i\alpha_{21}} s(\theta_{31}) c(\theta_{32})] \\
&= 0
\end{aligned}$$

onde $s(\theta_{3j}) = \text{sen}(\theta_{3j})$ e $c(\theta_{3j}) = \text{cos}(\theta_{3j})$, para $j = 1, 2, 3$.

Referências Bibliográficas

- [1] Bishop, R. L. and O’Neill, B. *Manifolds of negative curvature*. Trans. Amer. Math. Soc., 145 : 1 – 49, 1969.
- [2] Chen, S. S.; Greenberg, L. Hyperbolic spaces. *Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers)*, pp. 49 – 87. Academic Press, New York, 1974.
- [3] Cunha, H.; Dutenhefner, F.; Gusevskii, N.; Thebaldi, R. *The moduli space of complex geodesics in the complex hyperbolic plane*. J. Geom. Anal. 22 (2012), no. 2, 295–319.
- [4] D’ALESSANDRO, D. Introduction to quantum control and dynamics. Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008.
- [5] FENCHEL, W. Elementary geometry in hyperbolic space, volume 11 of De Gruyter Studies in Mathematics. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1989. With an editorial by Heinz Bauer.
- [6] François, D.; Nicolas, R. *Sur la classification des hexagones hyperboliques à angles droits en dimension 5*. Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques 23.5 (2014): 1049-1061.
- [7] GOLDMAN, W. M.(1-MD) Complex hyperbolic geometry. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. *The Clarendon Press, Oxford University Press, New York*, 1999. XX + 316 pp.
- [8] HARTSHORNE, R. (1977), Algebraic Geometry, Berlin, New York: Springer-Verlag, ISBN 978 – 0 – 387 – 90244 – 9, MR 0463157, Zbl 0367.14001.

- [9] Höfer, R. m -point invariants of real geometries. *Beiträge Algebra Geom.*, 40(1):261–266, 1999.
- [10] HORN, R. A.; Johnson, C. R. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge (1985).
- [11] IVERSEN, B. *Hyperbolic Geometry*. London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press (1992).
- [12] Javier Ticona Yucra, *Espaço de módulos de triplas de geodésicas complexas no espaço hiperbólico complexo de dimensão 3*. Tese de doutorado - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Belo Horizonte, 2017.
- [13] KOSTRIKIN, A. I.; MANIN, Y. I. Linear algebra and geometry. Translated from the second Russian (1986) edition by M. E. Alferieff. Revised reprint of the 1989 English edition. Algebra, Logic and Applications, 1. *Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam*, 1997. $X + 308$ pp.
- [14] Kourouniotis, C. *Complex length coordinates for quasi-fuchsian groups*. *Mathematika*. Volume 41, Issue 1, 173 – 188, (1994).
- [15] MASKIT, B. *Kleinian Groups*. Springer–Verlag Berlin Heidelberg (1988).
- [16] Peow Tan, Ser Loi Wong, Yan Zhang, Ying. *Delambre-Gauss Formulas for Augmented, Right-Angled Hexagons in Hyperbolic 4-Space*. *Advances in Mathematics*. Volume 230, Issue 3, 927 – 956, (2011).
- [17] R. Parker, John. *Notes on complex hyperbolic geometry*. 16 de jun de 2010. Notas de Aula - University of Durham.
- [18] RATCLIFFE, J. G. *Foundations of hyperbolic manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, 149. Springer–Verlag (1994), New York.
- [19] SCHARLAU, W. *Quadratic and Hermitian forms*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 270. Springer–Verlag, Berlin, 1985. $X + 421$ pp.

[20] ROMAN, S. *Advanced Linear Algebra*. Graduate Texts in Mathematics, Springer (2007).