UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Faculdade de Educação
Mestrado Profissional em Educação e Docência

Ana Paula Marques

O ENSINO DE FUNÇÕES NO 9º ANO: construindo significados para Função a partir de generalizações

Belo Horizonte
2019

Ana Paula Marques

O ensino de Funções no 9º ano: construindo significados para Função a partir de generalizações

Versão final

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação e Docência da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação na linha de Educação Matemática.

Orientadora: Profª Dra. Maria Cristina Costa Ferreira

Belo Horizonte
2019

M357e
T

Marques, Ana Paula, 1981-
O ensino de funções no 9º ano [manuscrito] : construindo significados para função a partir de generalizações / Ana Paula Marques. - Belo Horizonte, 2019.
210 f. : enc, il.

Dissertação -- (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.
Orientadora: Maria Cristina Costa Ferreira.
Bibliografia: f. 144-147.
Apêndices: f. 148-210.
[Inclui apêndice contendo produto educacional com o título: "Construindo o conceito de função por meio de generalizações"].

1. Educação -- Teses. 2. Matemática -- Estudo e ensino -- Teses. 3. Matemática -- Métodos de ensino -- Teses. 4. Funções (Matemática) -- Métodos de ensino -- Teses. 5. Álgebra -- Métodos de ensino -- Teses. 6. Matemática -- Aprendizagem baseada em problemas -- Teses. 7. Matemática -- Motivação na educação -- Teses. 8. Educação básica -- Teses.
I. Título. II. Ferreira, Maria Cristina Costa, 1952-. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.

CDD- 372.7

Catalogação da Fonte : Biblioteca da FaE/UFMG (Setor de referência)

Bibliotecário: Ivanir Fernandes Leandro CRB: MG-002576/O

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA/MP

UFMG

FOLHA DE APROVAÇÃO

O ensino de funções no 9º ano: construindo significados para função a partir de generalizações

ANA PAULA MARQUES

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA/MP, como requisito para obtenção do grau de Mestre em EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA, área de concentração ENSINO E APRENDIZAGEM.

Aprovada em 21 de fevereiro de 2019, pela banca constituída pelos membros:

Prof(a). Wagner Ahmad Auarek - Orientador
FaE/UFMG

Prof(a). Maria Cristina Costa Ferreira – Co-orientadora
ICEX/UFMG

Prof(a). Maria Laura Magalhães Gomes
UFMG

Prof(a). Teresinha Fumi Kawasaki
Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte, 21 de fevereiro de 2019.

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho a todos que acreditaram e torceram por mim. Sinto toda a energia e acredito que ela me sustentou por todo esse tempo.
Dedico ainda a todos que acreditam no poder de transformação da educação. Em tempos de ignorância sejamos a resistência.

AGRADECIMENTOS

Parece que não acordei desse sonho, porém, ao fazer esses agradecimentos tenho a certeza de que é verdade. Consegui! Por isso, agradeço a cada ser de luz que contribuiu para esse processo.

À minha mãe, minha primeira professora. Agradeço a companhia no trajeto, o apoio incondicional, toda torcida e compreensão. Essa vitória também é sua. E tenha certeza de que tudo faz parte da nossa evolução.

Ao meu pai que é luz em minha vida. E, certamente emana energia para continuar tudo por aqui. Deixou a semente lançada e as tarefas rascunhadas. Estou trabalhando para colher os frutos.

Agradeço ao meu irmão Adriel e minha cunhada Cátia por toda torcida, incentivo e carinho.

Às minhas sobrinhas/afilhadas Manuela e Marina. Vocês é luz na minha vida, acalento da minha alma e razão para acreditar em mim.

A toda minha família e, em especial, aos que estiveram ou estão no magistério: unidos trabalhamos para construir uma sociedade mais justa. E fazemos isso por meio da educação. Somos a diferença. Somos resistência.

A todos os alunos que já tive durante minha vida profissional e, em especial, às minhas turmas do 9º ano de 2018. A caminhada foi longa, o caminho com algumas curvas, porém, chegamos ao final. Vocês foram inspiração, motivo e os sujeitos de uma grande mudança em minha vida. Sou mestre! Agradeço a todos e torço por vocês!

Aos meus amigos e companheiros dessa incrível jornada chamada vida. Agradeço por coexistirmos.

A todos os professores que tive durante a vida. Sei que será injusto citar nomes, pois são muitos e todos especiais. Por isso deixo uma homenagem ao professor Dale Willian Bean, que hoje mora em nossas lembranças e nos projetos e trabalhos que desenvolveu enquanto esteve entre nós.

Aos professores do PROMESTRE, que foram essenciais para essa conquista. E, de um modo especial, aos da linha de Educação Matemática. Agradeço pela acolhida. Hoje sou uma pessoa melhor graças a cada um de vocês.

Agradeço às professoras Maria Laura e Teresinha pela contribuição na banca de qualificação e no dia da defesa. Percebi a competência e o carinho demonstrados por meio das palavras, observações e correções que fizeram. Vocês foram muito importantes para essa conquista.

Minha gratidão ao professor Wagner pela acolhida e oportunidade.

Agradeço Ana Rafaela que contribuiu na banca de defesa, por meio de um olhar cuidadoso com o meu trabalho.

Agradeço aos colegas do mestrado e, em especial, os da linha de Educação Matemática: Denise, Andreza, Felipe e Weslei. Com vocês a caminhada ficou mais leve e divertida. Vencemos!!!

E, certamente, a pessoa mais importante nessa caminhada: minha orientadora Maria Cristina. Agradeço por todas as palavras, conselhos, contribuições e conversas. Sei que sou “difícil”, mas nós conseguimos! Haverá um distanciamento físico, porém, os laços foram construídos. Levarei esses momentos por toda minha vida. Gratidão!

“Where there is desire there is gonna be a flame
Where there is a flame someone's bound to get burned
But just because it burns doesn't mean you're gonna die
You gotta get up and try, and try, and try
You gotta get up and try, and try, and try
You gotta get up and try, and try, and try.”

Pink

Resumo

O interesse para a realização desta pesquisa surgiu a partir das experiências que vivenciei como professora nos anos iniciais e, posteriormente, como professora de matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, quando pude observar como o sentimento positivo dos alunos, em relação à Matemática, ia diminuindo ao longo dos anos da Educação Básica. Segundo João Pedro da Ponte, Números e Álgebra são temas importantes e presentes nas diretrizes educacionais de muitos países, mas, tradicionalmente, os números são trabalhados no início da escolarização, enquanto a álgebra aparece nos anos finais, causando uma ruptura entre um conteúdo e outro. Além disso, autores como James J. Kaput e Caroline Kieran afirmam que, tradicionalmente, os conteúdos algébricos têm sido trabalhados como um conjunto de regras de procedimentos que, muitas vezes, não têm conexão com os outros conteúdos matemáticos nem tampouco com as situações do mundo real. Isso pode contribuir para a falta de interesse dos alunos em compreender os conteúdos matemáticos, em especial os algébricos. Contrariando essa visão redutora da álgebra, diversos pesquisadores (João Pedro da Ponte, Luis Radford e David Carraher) defendem a ideia de que o objetivo principal para o trabalho com esse conteúdo deve ser o desenvolvimento do pensamento algébrico, o que pode ser realizado por meio do estudo de sequências e padrões com vistas à construção de generalizações, desde os anos iniciais de escolarização. Nessa perspectiva, desenvolvemos uma pesquisa cuja questão de investigação foi "É possível construir o conceito de função em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental a partir do estudo de sequências com foco na generalização de padrões?" A pesquisa foi realizada em minhas turmas do 9º ano da Escola Municipal Ana Amélia de Queiroz, que está situada na cidade de Itabirito/MG. O objetivo da pesquisa foi investigar a possibilidade de construir o conceito de função, em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, a partir de tarefas envolvendo sequências e problemas contextualizados com foco na generalização de padrões. Para tal, foram elaboradas duas atividades, sendo a primeira composta por duas tarefas e trabalhadas nas três turmas e a segunda, com três tarefas e aplicadas em apenas uma turma. Os resultados obtidos apontam para a dificuldade que muitos alunos apresentam em construir generalizações matemáticas. Muitos utilizam ainda a linguagem natural, outros conseguem encontrar as regras por meio de tentativas e erros e apenas poucos percebem as regularidades existentes, exprimindo-as em linguagem matemática. Esses resultados sugerem que o trabalho com sequências e padrões seja realizado desde os anos iniciais, uma vez que são etapas importantes para o desenvolvimento do pensamento algébrico e também do pensamento funcional. A pesquisa gerou, como produto, um livreto para professores com alguns apontamentos para o desenvolvimento de um trabalho a partir de sequências e padrões com foco em generalizações além de situações-problema para a construção do conceito de função.

Palavras chave: Álgebra na Educação Básica. Introdução às Funções no 9º ano. Desenvolvimento do Pensamento Algébrico e Funcional. Sequências e Padrões. Generalização; Educação Matemática.

Abstract

The interest for this research came from the experiences that I had as a teacher in the early years and later as a mathematics teacher in the final years of elementary school, when I could observe how the positive feeling of the students, in relation to mathematics, decreased over the years of Basic Education. According to João Pedro da Ponte, Numbers and Algebra are important themes and present in the educational guidelines of many countries, but, traditionally, numbers are worked at the beginning of schooling, while algebra appears in the final years, causing a rupture between one content and another. Moreover, authors such as James J. Kaput and Caroline Kieran claim that traditionally algebraic contents have been worked as a set of rules of procedures that often have no connection with the other mathematical content nor the situations of the real world. This may contribute to students' lack of interest in understanding mathematical content, especially algebraic content. Contradicting this reductive vision of algebra, several researchers (João Pedro da Ponte, Luis Radford and David Carraher) defend the idea that the main objective for the work with this content should be the development of the algebraic thought, which can be realized through the study of sequences and patterns with a view to the construction of generalizations, since the initial years of schooling. From this perspective, we developed a survey which the research question was "Is it possible to build the concept of function in 9th grade classes of elementary school from the study of sequences focusing on the generalization of patterns?" The survey was conducted in my 9th grade classes of the Escola Municipal Ana Amélia de Queiroz, which is located in the city of Itabirito/MG. The objective of the research was to investigate the possibility of constructing the concept of function in 9th grade classes of elementary school, from tasks involving sequences and contextualized problems with a focus on the generalization of patterns. For this, two activities were prepared, the first consisting of two tasks and worked in three classes and the second with three tasks and applied in only one class. The results obtained point to the difficulty that many students have in constructing mathematical generalizations. Many still use natural language, others can find the rules through trial and error, and only a few perceive the existing regularities, expressing them in mathematical language. These results suggest that working with sequences and patterns should be carried out since the early years, as they are important steps for the development of algebraic thinking and also of functional thinking. The research generated as a product, a booklet for teachers with some notes for the development of a work from sequences and patterns focusing on generalizations as well as problem situations for the construction of the concept of function.

Key words: Algebra in Basic Education. Introduction to functions in the 9th grade. Development of algebraic and functional thinking. Sequences and patterns. Generalization. Mathematics education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Atividade exploratória sugerida para alunos do 3º ano do Ensino Fundamental para cálculo do termo desconhecido.....30
Figura 2: Balança de pratos como estratégia para a introdução de equações 43
Figura 3: “Qual é a regra?”.....51
Figura 4: Utilização do sinal de igualdade.....55
Figura 5: Alunos do 9º ano da turma 14.....67
Figura 6: Resposta do aluno M20.....77
Figura 7: Resposta da aluna P2.....79
Figura 8: Resposta do aluno M4.....79
Figura 9: resposta da aluna P16.....80
Figura 10: Reposta da aluna à Questão 1- “a”, Tarefa 2.....91
Figura 11: Discussão a respeito das sequências apresentadas.....92
Figura 12: Reposta da aluna P1 à Questão 2, “a”.....94
Figura 13: Reposta da aluna M7 à Questão 2, a).....95
Figura 14: Apresentação dos resultados.....108
Figura 15: Responda da aluna P11 à Questão 3.....112
Figura 16: Reposta do aluno P26 à Questão 4.....113
Figura 17: Resposta da aluna P22 à Questão 4.....113
Figura 18: Resposta da aluna P27 à questão 5.....115
Figura 19: Resposta da aluna P20 à questão 5.....116
Figura 20: Resposta da aluna P7 à questão 5.....116
Figura 21: Resposta da aluna P28 à questão 5.....117
Figura 22: Resposta da aluna P18 à questão 5.....117
Figura 23: Resposta da aluna P22 à questão 5.....118
Figura 24: Resposta da aluna P20 à questão 6.....119
Figura 25: Resposta da aluna P20 à questão 8 e 9.....119
Figura 26: Resposta da aluna P21 à questão 8 e 9.....120
Figura 27: Resposta da aluna P6 à questão 7.....121
Figura 28: Resposta da aluna P11 à questão 1 item “a”.....124
Figura 29: Resposta do aluno P23 à questão 1 item “a”.....124
Figura 30: resposta do aluno P13 à questão 1 item “a”.....124
Figura 31: Resposta da aluna P14 à questão 1 item “a”.....124

Figura 32: Resposta da aluna P4 à questão 1 item “a”.....125
Figura 33: Resposta da aluna P22 à questão 1 item “a”.....125
Figura 34: Resposta da aluna P1 à questão 1 item “a”.....126
Figura 35: Resposta da aluna P26 à questão 1 item “a”.....126
Figura 36: Resposta da aluna P27 à questão 1 itens “a” e “b”.....127
Figura 37: Resposta da aluna P2 à questão 1 item “b”.....127
Figura 38: Resposta da aluna P12 à questão 1 item “c”.....128
Figura 39: Resposta da aluna P18 à questão 1 item “c”.....128
Figura 40: Resposta da aluna P1 à questão 1 item “c”.....129
Figura 41: Resposta da aluna P20 à questão 1 item “c”.....129
Figura 42: Resposta da aluna P29 à questão 2 item “c”.....132
Figura 43: Resposta da aluna P18 à questão 3.....136
Figura 44: Resposta da aluna P26 à questão 3.....136
Figura 45: Resposta da aluna P21 à questão 4 item “b”.....137

LISTA DE QUADROS

Quadro1: Vertentes fundamentais do pensamento algébrico.....45
Quadro 2: Principais ideias apresentadas à Questão 1.....76
Quadro3: Respostas à Questão 2.....79
Quadro 4: Resumo das respostas à Questão 2.....80
Quadro 5: Respostas dos alunos à Quarta questão (“Para casa”).....85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Distribuição de alunos por turma em 2018.....63
Tabela 2: Dinâmica das atividades.....70

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CBC – Currículo Básico Comum

CEFET – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

COEP – Comitê de Ética em Pesquisa

EJA – Educação de Jovens e Adultos

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

OMI – Olimpíadas de Matemática de Itabirito

PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais

PNLD – Plano Nacional do Livro Didático

PROMESTRE – Programa de Mestrado Profissional em Educação e Docência

SIMAVE – Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública

TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais

UFOP – Universidade Federal de Ouro Preto

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO 25
1.1 - Percurso acadêmico 25
1.2 - Motivações para a elaboração do trabalho 30
CAPÍTULO 2 – ASPECTOS RELEVANTES PARA A PESQUISA SOBRE O ENSINO DA ÁLGEBRA ESCOLAR 35
2.1 – Diretrizes para o ensino de álgebra no Brasil 35
2.1.1- O ensino de álgebra em documentos oficiais 36
2.1.2 – Sobre o ensino de álgebra em livros didáticos 39
2.1.3 – Ensino de álgebra segundo a Base Nacional Comum Curricular - BNCC 42
2.2 – Algumas discussões a respeito da Educação Algébrica 44
2.2.1- Ensino de álgebra e pesquisas em Educação Matemática 44
2.2.2 – O que caracteriza o pensamento ou o raciocínio algébrico? 46
2.2.3 – O que caracteriza o pensamento funcional? 51
2.3 – Aritmética e Álgebra: opostas, complementares ou unívocas? 55
2.4 – Das generalizações de sequências e padrões às Funções 58
CAPÍTULO 3 – PERCURSOS METODOLÓGICOS 61
3.1- O campo da pesquisa 63
3.1.1 – A escola 64
3.2 – Os sujeitos da pesquisa 66
3.2.1 – Turma P – Sala 14 66
3.2.2 – Turma M – Sala 15 67
3.2.3 – Turma B – Sala 16 68
3.2.4 – A escolha da turma P 68
3.3 – A coleta de dados 70
3.4 – Dinâmica da pesquisa 71
3.5 – Produto Educacional 73
CAPÍTULO 4 – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS 75
4.1 – Atividade I: Investigando sequências 77
4.1.1 – Atividade I. Tarefa1: Investigando: o que é uma sequência? 77
4.1.2 – Atividade I. Tarefa 2: Qual é o próximo número da sequência? 91
4.2 – Atividade II: Introduzindo Funções a partir de generalizações 102
4.2.1 – Atividade II. Tarefa 1: Observando e generalizando padrões 102

4.2.2 - Atividade II.2: Sequência de mesas e cadeiras 110
4.2.3 - Atividade II.3: O problema dos cofrinhos 123
CONSIDERAÇÕES FINAIS 142
REFERÊNCIAS 146
APÊNDICES 150

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos meu percurso acadêmico e as motivações que contribuíram para a construção deste trabalho. Descreveremos, ainda, a questão que norteou a pesquisa realizada, assim como seus objetivos.

1.1 - Percurso acadêmico

A proposta deste trabalho tem suas raízes no meu percurso enquanto estudante e posteriormente como professora da Educação Básica.

Trago uma lembrança do tempo em que era estudante dos anos finais do Ensino Fundamental, quando enfrentei um momento delicado em minha vida e minha dedicação ao estudo dos conteúdos matemáticos foi crucial para superar os problemas que estava vivenciando. A descoberta do gosto pela Matemática aconteceu na 7ª série (atualmente 8º ano), sendo que os conteúdos trabalhados naquele momento eram aqueles característicos da álgebra escolar: monômios, polinômios, produtos notáveis, resolução de equações etc. Era um estudo baseado em memorização e exercícios de fixação que fazia com que eu estudasse bastante até "entender" a matéria. Por esse motivo, fui procurada diversas vezes por meus colegas para fazer grupos de estudo com eles. Aquele momento foi importante para melhorar minha autoestima, que estava baixa. Embora a vontade de ser professora de Matemática não tenha nascido naquele momento, guardo um enorme carinho por esse conteúdo e por tudo o que vivi naquela época.

Ao iniciar o Ensino Médio, a opção pelo curso de Magistério não foi de fato uma escolha, mas uma imposição da família, que acreditava ser essa uma profissão adequada para mulheres. Concluí o curso em 1998 e no ano de 1999 tive a primeira oportunidade para atuar como professora, lecionando para uma turma de 1ª série em uma escola rural da cidade de Mariana. Não foi, a princípio, uma experiência muito boa, uma vez que estava atuando em uma profissão que não tinha escolhido. Ademais, sonhava em fazer um curso superior. Porém, os conteúdos vistos no Magistério não me possibilitaram uma formação aprofundada dos conteúdos comuns do Ensino Médio que eram cobrados nos vestibulares. Tínhamos uma carga horária que contemplava majoritariamente as disciplinas didáticas e pedagógicas para a formação de professores e disciplinas como Português e Matemática tinham apenas duas aulas

semanais. Mais ainda, disciplinas como Química, Física, Biologia, Geografia e História não faziam parte da grade curricular do curso.

Os primeiros contatos com a profissão contribuíram para despertar em mim o desejo de nela permanecer. Percebi que trabalhar com crianças e poder contribuir para a construção do conhecimento delas era desafiador e muito gratificante. Fui descobrindo, aos poucos, o quanto gostava dessa profissão e como, apesar das dificuldades, a atuação de um professor é importante para a formação do aluno tanto em relação ao conhecimento escolar como nas relações sociais. Percebo que às vezes a nossa contribuição vai muito além do ensino do conteúdo propriamente dito. Os alunos, principalmente alguns em situação de vulnerabilidade social, têm a escola e os professores como referências positivas em sua vida. E isso motiva nosso trabalho, o que foi importante para que eu aceitasse essa profissão.

Trabalhei durante dois anos na cidade de Mariana e, no ano de 2002, tive uma oportunidade de emprego na cidade de Itabirito. Lá, iniciei lecionando para uma turma de Educação Infantil em uma escola rural e, no ano seguinte, consegui vaga em outra unidade onde trabalhei com turmas do 3º, 4º e 5º anos durante 11 anos.

Durante essa etapa do meu percurso profissional, continuava sonhando em fazer um curso superior. Nos primeiros anos após a conclusão do Magistério, tentei alguns vestibulares para cursos em outras carreiras, como Engenharia e Turismo. Apesar de não conseguir ingressar em nenhum deles, não desisti e, ao perceber minha vocação para o Magistério, comecei a pensar em fazer algum curso de licenciatura. Nesse momento, algumas questões surgiram: “fazer um curso de Pedagogia para continuar como professora dos anos iniciais ou fazer Licenciatura em Matemática, que era a disciplina que eu mais gostava?” O mais natural era que fizesse o curso de Pedagogia, porém a possibilidade de ser professora de Matemática era atraente e fez com que eu decidisse cursar a Licenciatura em Matemática, embora ainda não tivesse a certeza se me adaptaria com os alunos das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Em 2002, finalmente, iniciei o curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Ouro Preto.

A entrada no curso representou uma realização pessoal, ainda que exigisse uma rotina de estudos bem diferente daquela a que estava acostumada. Durante os anos da graduação, trabalhava no período da manhã, estudava no período noturno, e as tardes eram divididas entre o planejamento das aulas e o estudo para as disciplinas do curso. Como consequência dessa rotina, não tive oportunidade de participar de nenhum projeto de extensão ou de iniciação científica oferecidos pela universidade. A falta de tempo disponível para me dedicar

às atividades extracurriculares fez com que eu perdesse muitas oportunidades interessantes que poderiam complementar minha formação. Destaco aqui o desejo de ser monitora das disciplinas de Cálculo, devido a minha identificação com o conteúdo dessa disciplina e o entendimento de que aprenderia mais ao ensinar aos colegas.

Percebi, a partir dessa experiência, que muitas questões que gostaria de ter estudado naquela época ficaram sem ser respondidas, tanto em relação a conteúdos da graduação quanto ao processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos da Educação Básica. Porém, o tempo de serviço como professora e a experiência obtida trouxeram respostas e algumas outras dúvidas a respeito de todo esse processo que envolve o ensino e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Um ponto a ser destacado é que, enquanto professora dos anos iniciais e graduanda no curso de Licenciatura em Matemática, fui solicitada diversas vezes a auxiliar as colegas de trabalho que tinham dúvidas em relação aos conteúdos matemáticos ou à maneira de ensinar determinado assunto. Percebia a insegurança e a dificuldade dessas professoras para lecionar alguns conteúdos de Matemática. Então, concluída a graduação em 2006, ingressei no Curso de Especialização em Educação Matemática e, embora não tivesse respostas para minhas colegas professoras dos anos iniciais, percebi que poderia me dedicar a pesquisar a formação dos professores que atuam nessas séries. Então, no curso de especialização, desenvolvi a pesquisa intitulada: "A formação dos professores polivalentes e as dificuldades em relação ao ensino dos conteúdos matemáticos para as séries iniciais: um estudo de caso de professoras e gestoras das Escolas Municipais Rurais de Itabirito"[1], que teve por objetivo investigar o processo de formação inicial dos professores polivalentes em relação aos conteúdos matemáticos a fim de compreender a dificuldade deles em relação ao trabalho com esses conteúdos em sala de aula.

A realização dessa pesquisa certamente contribuiu para meu crescimento pessoal e profissional. A compreensão das raízes das dificuldades que muitos colegas têm em relação ao trabalho com conteúdos matemáticos deixou a vontade de futuramente realizar pesquisas

[1] Orientado pelo professor Doutor Dale Willian Bean, esse trabalho discutiu a formação inicial e as impressões que professores e gestores das Escolas Municipais Rurais de Itabirito/MG tinham em relação aos conteúdos matemáticos. Realizado em duas etapas, a pesquisa contou com um questionário que foi aplicado ao grupo em uma reunião pedagógica e, posteriormente, foram realizadas três entrevistas com três professoras selecionadas a partir de alguns critérios. Como referencial teórico trouxemos as contribuições da professora Doutora Edda Cury que discute a formação inicial dos professores polivalentes. Os resultados apontaram para o fato de que, em geral, os cursos de formação dos professores não discutem os conteúdos que são trabalhados nos anos iniciais uma vez que acreditam que os alunos já trazem esse conhecimento prévio. Como consequência, constatamos que alguns professores sentem-se inseguros em trabalhar conteúdos matemáticos como as frações. Defendida no ano de 2009, a versão final está disponível nos arquivos da Universidade Federal de Ouro Preto.

em relação a esse tema. Essa experiência contribuiu para desenvolver e exercitar a produção escrita. Além disso, foi muito importante para minha formação, uma vez que, durante a graduação, não tivemos muitas oportunidades para desenvolver essa habilidade.

Concluí a graduação em 2006 e, devido à minha insegurança ou por comodidade, segui trabalhando somente com os anos iniciais até o ano de 2012. Ao ser aprovada em um concurso para a rede estadual de ensino, assumi, em 2013, o cargo de professora de Matemática.

Minha primeira experiência como professora de Matemática aconteceu em turmas da Educação de Jovens e Adultos (equivalente ao Ensino Médio) e em uma turma de Magistério. E foi desde esse momento que percebi a dificuldade de trabalhar os conteúdos propostos para a EJA, devido às dificuldades dos alunos com os conteúdos anteriores. Lembro-me que nas turmas da EJA 1 e 2, quando deveria trabalhar os conteúdos programáticos do 1º e 2º anos, tive que, inicialmente, fazer uma revisão de alguns conteúdos como: frações, números inteiros, expressões numéricas, equações do primeiro e segundo grau e alguns conceitos básicos da geometria. Somente no último bimestre consegui trabalhar algumas noções básicas de Função afim e Função do segundo grau.

É importante salientar o fato de que muitos desses alunos tinham um sentimento negativo em relação à Matemática. Quando me apresentei como professora de Matemática, percebi um desconforto mais explícito em alguns deles. Escutei ainda diversos relatos de insucesso em relação à disciplina. Uma frase que me marcou foi “gostei da senhora professora, só não gosto da matéria que a senhora trabalha. Deveria ter escolhido outra mais legal”.

Certamente essa oportunidade foi um desafio para minha prática, uma vez que se tratava da minha primeira experiência com alunos jovens e adultos. Não foi totalmente uma surpresa, já que sabemos que muitas pessoas não gostam dos conteúdos matemáticos. Todavia, vivenciar essa realidade e tentar realizar um trabalho que tem, como um dos objetivos, apresentar uma Matemática mais acessível para os alunos foi um grande desafio e, certamente, um momento de aprendizado para a minha prática docente.

Em 2014, tive minha primeira experiência lecionando Matemática em turmas regulares com o 6º ano. Como já havia trabalhado algumas vezes com turmas do 5º ano cujo conteúdo programático é bem semelhante ao do 6º, um dos maiores desafios foi desenvolver com esses alunos aqueles pontos que não haviam sido bem trabalhados anteriormente. Outro desafio foi lidar com as mudanças que ocorrem nos alunos durante a transição do 5º para o 6º

ano, principalmente em relação ao comportamento. É preciso ter, ao mesmo tempo, uma postura firme para manter a disciplina e ser flexível para lidar com as descobertas da adolescência.

Nesse mesmo ano assumi, no contra turno, as aulas de reforço para todas as turmas dos anos finais. Essa foi uma ótima oportunidade de perceber as dificuldades mais recorrentes dos alunos. Acostumados às "técnicas de resoluções" e aos exercícios do tipo "resolva" foi um desafio apresentar atividades com uma metodologia diferenciada.

Além disso, é importante colocar o meu lado de professora acostumada com as "técnicas de resolução". A falta de tempo para pesquisar atividades diferentes ou mesmo a insegurança em não conseguir cumprir o cronograma proposto nos leva a reproduzir a maneira como determinados conteúdos sempre são trabalhados.

Embora eu tivesse vontade de trabalhar os conteúdos de uma forma diferenciada, não é fácil mudar algo que já está "testado e comprovado". Por esse motivo, comecei a pesquisar produtos educacionais de mestrados profissionais que foram estudados e implementados em outras escolas e encontrei alguns exemplos interessantes. Certamente esses materiais contribuíram para o planejamento de algumas aulas diferenciadas que desenvolvi, em especial em algumas turmas do 6º ano. Isso foi, sem dúvida, o que motivou a escolha por um programa de mestrado profissional. O fato de desenvolver um trabalho que possa contribuir para meus colegas é a grande motivação para a realização desse curso.

Também atuo como tutora do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), na modalidade à distância. É possível perceber que os alunos desse curso possuem dificuldades em conteúdos básicos de Matemática e como isso implica no insucesso de muitos no curso. Com o objetivo de "amenizar esse impacto", o aluno, no primeiro período, faz as disciplinas de Matemática e Escola Básica I, II, III e IV, que contêm uma revisão dos conteúdos da Educação Básica. Mas, ainda assim, muitos não conseguem aprovação nessas disciplinas.

Ainda em relação à tutoria, percebemos uma grande dificuldade dos alunos em relação às disciplinas de Cálculo. Todavia, esses resultados não são exclusividade da educação a distância. Nos cursos presenciais de Matemática essa realidade também é comum, de acordo com Rafael e Escher (2015). E, por se tratar de uma disciplina cujo pré-requisito é o conhecimento dos conceitos de álgebra e Funções, essa realidade sinaliza para uma possível falha no trabalho com esses conteúdos na Educação Básica.

E, assim, a motivação para a elaboração do pré-projeto para a admissão no PROMESTRE foi consequência de toda essa trajetória vivenciada. Ainda que a ideia de realizar pesquisas que versem sobre a formação de professores ou o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos para os anos iniciais não tenha acabado, acredito que estudos a respeito do ensino de álgebra na Educação Básica são algo mais próximo da realidade que vivencio atualmente. E, nessa perspectiva, trouxe a ideia de uma pesquisa voltada para o ensino dos conteúdos algébricos desenvolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental.

A seguir farei um breve relato sobre a motivação para a construção desta pesquisa.

1.2 - Motivações para a elaboração do trabalho

Como estudante percebia, ainda na Educação Básica, o quanto era difícil o entendimento de algumas "técnicas de resolução" para diversos conteúdos e, em especial, os algébricos. Por mais que se esforçassem, muitos colegas não compreendiam a resolução das atividades e, talvez, não conseguissem atribuir significado a toda aquela manipulação de símbolos e letras para chegar a um resultado também sem muito sentido.

Já como professora, sinto um desconforto ao ensinar álgebra uma vez que aprendi esse conteúdo a partir de um conjunto de regras e resoluções e manipulação de símbolos. Como é possível tornar o ensino desse conteúdo mais significativo[2] para os alunos a fim de minimizar o insucesso deles e contribuir para um sentimento mais positivo em relação à Matemática?

Na busca por respostas para a dificuldade de muitos alunos em relação a esse conteúdo em todos os níveis de escolaridade, encontramos autores como Ponte *et.al* (2009), que acreditam que ainda hoje o foco do ensino de Álgebra na Educação Básica esteja reduzido à resolução sistemática de expressões e equações a partir de um conjunto de regras. O foco excessivo em letras, símbolos e técnicas de resolução faz com que a álgebra tenha um caráter exclusivamente escolar contribuindo para a perpetuação da ideia de que esse conteúdo é difícil e incompreensível para muitos estudantes.

A esse respeito, Lins e Gimenez (1997) chamam a atenção para o fato de que esse ensino pautado em técnicas de resolução acontece por "resignação dos professores". É uma situação, de acordo com os autores, que repousa sobre outros problemas como a apresentação

[2] Utilizaremos o termo "significativo" ou "aprendizagem significativa" em um senso comum, sem referências à Teoria da Aprendizagem Significativa desenvolvida por Ausubel.

de currículos “engessados” e a falta de conhecimento em relação a outros métodos ou metodologias de trabalho em relação aos conteúdos algébricos.

Ribeiro e Cury (2015) acreditam que muitos professores apenas ensinam da forma que aprenderam, perpetuando uma metodologia que em nada contribui para a compreensão dos conceitos.

Concordo com as ideias apresentadas por esses autores e trago minha experiência com o ensino dos conteúdos algébricos. Apesar do incômodo em trabalhar com listas de atividades e “exercícios de fixação”, para que o aluno “compreenda” expressões, equações ou operações com monômios e polinômios, não conseguia fazer de outra maneira. A insegurança e a falta de conhecimento contribuíam para perpetuar um ensino que priorizava as técnicas de resolução. E, a busca por algo diferenciado, trouxe para o PROMESTRE questões a respeito dos conteúdos algébricos na Educação Básica.

Com o objetivo de delimitar o foco da pesquisa iniciei algumas leituras a respeito do ensino de álgebra na Educação Básica e conheci trabalhos de autores como David Carraher e João Pedro da Ponte que defendem que o ensino desses conteúdos deve acontecer ainda nos anos iniciais de escolarização.

A decisão de desenvolver um trabalho com foco em Função aconteceu após a leitura de uma dissertação de mestrado defendida em 2010, por Luciane Regina Pavan, no Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá, cujo título é “A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças de 4ª série do Ensino Fundamental em situações-problema de estruturas aditivas e/ou multiplicativas”. O objetivo da pesquisa foi “investigar se crianças da 4ª série do Ensino Fundamental reconhecem e mobilizam elementos do Campo Conceitual de Função (como variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização) na resolução de situações-problema de estruturas aditiva e/ou multiplicativa” e o principal referencial teórico foi a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud. A autora desenvolveu e aplicou um conjunto atividades em uma turma do 4º ano.

A leitura dessa dissertação aconteceu como trabalho em uma disciplina para o mestrado e, apesar de não contribuir com o contexto para minha pesquisa, a ideia de trabalhar Funções, ainda que intuitivamente, chamou minha atenção, uma vez que esse conteúdo é desenvolvido, normalmente, a partir do 9º ano. De acordo com Schliemann *et al.* (2013), as equações podem não ser a melhor maneira de introduzir os conteúdos algébricos, sendo, de acordo com esses autores, as Funções o caminho mais adequado, uma vez que uma

abordagem funcional contribui para a compreensão da álgebra por meio de uma aritmética generalizada.

Tal perspectiva está associada à relação de dependência, característica do pensamento algébrico. De acordo com os estudos de Ponte (2009), baseados nos trabalhos de Kaput (1999):

> (...) o pensamento algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático leccionado desde os primeiros anos de escolaridade (PONTE, 2009, p. 9).

Realmente, desde os anos iniciais e até o 6º ano, os alunos já trabalham com situações e atividades que buscam encontrar o termo desconhecido, que é usualmente representado por símbolos, desenhos ou figuras geométricas e pode ser calculado a partir de operações aritméticas como na figura abaixo.

FIGURA 1 – ATIVIDADE EXPLORATÓRIA SUGERIDA PARA ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL PARA CÁLCULO DO TERMO DESCONHECIDO

3º exemplo: Pensei um número; adicionei 35 e obtive 82. Qual é o número que pensei?

Resolução:

$$\boxed{?} \xrightarrow{+\,35} 82$$

O número que pensei é menor que 82, conforme você pode observar no esquema acima; para calcular esse número, devemos fazer:

$82 - 35 = 47$

$$\begin{array}{r} 82 \\ -\ 35 \\ \hline 47 \end{array}$$

Resposta: O número que pensei é 47.

Fonte - GIOVANNI (1995, p. 46)

Por esse motivo, várias pesquisas apontam para o fato de que é possível desenvolver o pensamento algébrico ensinando aritmética. De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), ele deve ser construído gradativamente mesmo antes do conhecimento dos símbolos ou da linguagem algébrica. O ensino de álgebra desde os anos iniciais que também é defendido por Carraher e Schliemann (2008), que acreditam que, nessa fase, o estudante já é capaz de fazer conjecturas e criar generalizações.

Percebendo a possibilidade de trabalhar os conteúdos algébricos nos anos iniciais e, mais especificamente, construir a ideia de Função, embora intuitivamente, em séries anteriores ao 9º ano, busquei pesquisas que tratassem desse assunto. Algumas questões, a exemplo de: "como os alunos poderiam compreender os conceitos algébricos atribuindo algum sentido?" e "como poderia ensinar Funções de uma maneira diferente do que acontece normalmente?", conduziram a leituras de autores como Ponte e Carraher. Especificamente, a decisão de desenvolver um trabalho para a construção do conceito de Função a partir de generalização de sequências e padrões aconteceu a partir da leitura de um material elaborado por Ponte, Matos e Branco (2009), cujo título é "Sequências e Funções: materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3º ciclo – 7º ano". Percebi a possibilidade de trabalhar um conteúdo que considero tão importante para a formação do aluno de uma maneira que proporcionasse reflexão e construção do conhecimento.

Nesse sentido, trouxe para essa pesquisa a seguinte questão: "É possível construir o conceito de função em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental a partir do estudo de sequências com foco na generalização de padrões?"

Esta pesquisa tem como objetivo geral investigar a possibilidade de construir o conceito de função, em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, a partir de tarefas envolvendo sequências e padrões e problemas contextualizados com foco na generalização.

Os objetivos específicos da pesquisa são:

- Trabalhar com os alunos a ideia de regularidade por meio de atividades envolvendo sequências;
- Estimular nos alunos a construção de generalizações a partir de sequências;
- Trabalhar para que os alunos construam a ideia das relações funcionais;
- Utilizar situações-problema para construir a ideia de Função como relação de dependência.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos que serão apresentados a seguir.

Este primeiro contém a introdução e apresenta minha trajetória, a motivação da pesquisa, a questão de investigação e os objetivos geral e específicos.

No capítulo 2, descrevemos a fundamentação teórica que serviu de base para a pesquisa. Destacamos algumas ideias de pesquisadores que discutem o ensino de álgebra, o desenvolvimento do pensamento algébrico e o pensamento funcional. Trouxemos à luz

algumas considerações a respeito desses conteúdos, apresentados nas diretrizes que normatizam o ensino tanto em esfera nacional como para o estado de Minas Gerais.

O capítulo 3 traz a metodologia da pesquisa com seus objetivos, a proposta de duas atividades que foram desenvolvidas com alunos do 9º ano e os procedimentos adotados para o levantamento dos dados coletados através dos instrumentos elaborados para a pesquisa de campo.

O capítulo 4 trata da apresentação e análise dos resultados obtidos através dos procedimentos do capítulo 3.

Na parte final do trabalho apresentamos nossas considerações finais, as referências, os anexos e apêndices.

CAPÍTULO 2 – ASPECTOS RELEVANTES PARA A PESQUISA SOBRE O ENSINO DA ÁLGEBRA ESCOLAR

Neste capítulo, apresentaremos algumas concepções teóricas que nortearam nossos estudos e a pesquisa realizada.

2.1 – Diretrizes para o ensino de álgebra no Brasil

De acordo com minha experiência como professora da Educação Básica, observo que as principais fontes de pesquisa para o planejamento dos conteúdos para o ensino em sala de aula são os livros didáticos. No entanto, nos últimos anos, houve uma crescente preocupação das equipes gestoras em relação às avaliações externas como a Prova Brasil e o Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública, uma vez que os resultados nelas obtidos têm um impacto direto na dotação de verbas e de outros benefícios para as escolas. Isso fez com que muitos professores e supervisores começassem a sentir necessidade de conhecer, minimamente, as diretrizes propostas nos documentos oficiais relativos aos conteúdos de Português e Matemática, com o objetivo de trabalhar atividades equivalentes àquelas que seriam cobradas nessas avaliações.

Com o objetivo de compreender as diretrizes que nortearam o ensino de álgebra na educação brasileira, apresentaremos uma breve síntese da proposta de abordagem desse conteúdo em alguns documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e o Currículo Básico Comum (CBC), esse último o documento que regulamenta o ensino no estado de Minas Gerais.

Apresentamos ainda alguns descritores que norteiam os sistemas de avaliação em larga escala no Brasil, como a Prova Brasil, proposta pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), e o Sistema Mineiro de Avaliação (SIMAVE).

Fizemos também uma leitura do último Guia do Livro Didático que foi distribuído para as escolas públicas em 2016 com o objetivo de escolher os materiais que seriam utilizados no triênio 2017/2018/2019 dentro do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)[3].

[3] Trata-se de um programa federal de distribuição de livros didáticos para as escolas públicas. O guia citado contempla os anos finais do Ensino Fundamental e contempla o triênio 2017/2018/2019.

2.1.1- O ensino de álgebra em documentos oficiais

A partir de 1998, as diretrizes para o ensino no Brasil foram baseadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que tornaram fundamentais para a elaboração das propostas curriculares para as redes estaduais e municipais, de acordo com a realidade local.

Segundo Ribeiro e Cury (2015), um dos documentos utilizados para a elaboração dos PCNs foi *Principles and Standards for School Mathematics* (Princípios e Normas para a Matemática Escolar), publicado pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos). Esse documento não apresenta uma divisão entre os conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, sendo eles distribuídos ao longo dos 12 anos de escolarização da escola básica. No que diz respeito ao ensino de Álgebra, o documento sugere que esse conteúdo seja trabalhado com o objetivo de desenvolver o "pensamento matemático para formalizar padrões, Funções e generalizações" (RIBEIRO; CURY, 2015, p.3). Ademais, é ressaltado que esse trabalho deve ser realizado desde os anos iniciais de escolarização, por meio de atividades que desenvolvam o raciocínio algébrico.

E, em se tratando do ensino de álgebra, os PCNs recomendam que, ainda no 3º ciclo, "as noções algébricas sejam exploradas por meio de jogos, generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações" (BRASIL, 1998, p.84). Seria, de acordo com o documento, uma "pré-álgebra", que tem o objetivo de preparar o aluno para a construção da ideia da letra como uma variável funcional, o que aconteceria no 4º ciclo. A abordagem desse conteúdo poderia acontecer utilizando-se "situações-problema sobre variações de grandezas que fornecem excelentes contextos para desenvolver a noção de Função nos terceiro e quarto ciclos" (BRASIL, 1998, p.118). Ainda que apresentada de maneira clara e acessível, o próprio material traz uma discussão sobre o trabalho que é desenvolvido pelos professores ao afirmar que muitos "privilegiam o estudo do cálculo algébrico e das equações" (BRASIL, 1998, p.117), de forma descontextualizada.

Em relação ao ensino de Funções, os PCN´s sugerem que esse trabalho aconteça, a princípio, de forma intuitiva. É necessário, no entanto proporcionar situações que contribuam para a construção desse conceito para, posteriormente, serem trabalhados os aspectos mais formais. O material sugere que esse processo aconteça por meio de generalizações de sequências e padrões, que é o foco desta pesquisa. É recomendado ainda, que seja explorada a

noção de letras como variável e não só como incógnita. Essa última abordagem acontece com mais frequência.

A esse respeito, Ribeiro e Cury (2015) apresentam resultados de algumas pesquisas feitas com professores de Matemática que mostram que, em muitos casos, o ensino de Álgebra e Funções é desenvolvido com base em procedimentos mecânicos e ênfase na utilização dos símbolos e letras. O problema pode estar "relacionado ao fato das equações e Funções serem frequentemente compreendidas como um "amontoado" de símbolos, regras e procedimentos, muitas vezes desprovidos de significado" (RIBEIRO;CURY, 2015, p.20).

O Conteúdo Básico Comum (CBC) (Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais, 2005), que apresenta as diretrizes para o ensino dos conteúdos no estado de Minas Gerais, não deixa clara a importância do trabalho com Funções no Ensino Fundamental. Os conteúdos que compõem esse eixo são apresentados de forma mais detalhada no documento do Ensino Médio. Por outro lado, propõe que o trabalho com a álgebra deve acontecer em todas as séries dos anos finais do ensino fundamental. Para o 6º ano, a única habilidade a ser trabalhada seria a 7.2: "Traduzir informações dadas em textos ou verbalmente para a linguagem algébrica". As demais habilidades, como "utilizar linguagem algébrica, calcular valores de uma expressão algébrica ou equações", são sugeridas a partir do 7º ano (MINAS GERAIS, 2005, p.10).

Outros dois documentos oficiais importantes para serem apresentados são os que dão diretrizes para as avaliações externas aplicadas nas escolas públicas.

O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP)[4] realiza avaliações em larga escala, cujo objetivo é fazer um diagnóstico das habilidades desenvolvidas pelos alunos da Educação Básica em relação aos conteúdos de Português e Matemática. Nas diretrizes propostas para a Prova Brasil, o documento apresenta, em relação aos conteúdos algébricos, que o aluno deve, ao final do 9º ano, "calcular o valor numérico de uma expressão algébrica", "resolver problema que envolva equação do 2.º grau" e "identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões)" (BRASIL, 2008, p. 159). Essa última caracteriza, mais uma vez, a importância do ensino da pré-álgebra, como sugerido nos PCNs.

As diretrizes do Sistema Mineiro de Avaliação (SIMAVE) compõem uma matriz de referência para as avaliações em larga escala que ocorrem nas escolas públicas do estado de

[4] O INEP é responsável por criar mecanismos de avaliações em larga escala na Educação Básica. Por meio do SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica e da Prova Brasil, o instituto realiza um diagnóstico da Educação Básica avaliando a qualidade do ensino nas escolas públicas e particulares.

Minas Gerais. Por esse motivo, apresentam o conjunto de habilidades que devem ser desenvolvidas até os anos participantes da avaliação (5º, 7º, 9º do Ensino Fundamental, 1º e 3º do Ensino Médio). É possível observar que, para o 5º ano, não há qualquer habilidade relacionada aos conteúdos algébricos ou ao ensino de Funções. A álgebra é cobrada a partir do sétimo ano, porém, não é previsto o trabalho com as Funções no Ensino Fundamental e sim no Ensino Médio.

E, levando em consideração que muitos professores planejam suas aulas com base nos livros didáticos e alguns levam em consideração as diretrizes mencionadas, acreditamos que há algumas falhas significativas que podem interferir negativamente no desenvolvimento dos conteúdos algébricos propostos para o Ensino Fundamental. O que fica evidente é o fato de que os PCNs já trouxeram uma discussão a respeito de trabalhar a álgebra e as Funções antecipadamente, porém, o CBC não tem esse direcionamento.

A falta de conhecimento, por alguns professores, das propostas para o ensino de álgebra presentes nesses documentos, associada a um trabalho com foco em técnicas e procedimentos de resolução de equações e de cálculo algébrico reduz as oportunidades de que o aluno possa desenvolver argumentos, discutir as possibilidades de generalizações e criar conjecturas que são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A esse respeito, Lins e Gimenez (1997) acreditam que os currículos tradicionais que são utilizados nas escolas muitas vezes apresentam uma visão “cristalizada” das propostas de ensino e da metodologia de trabalho, submetendo o professor a um conjunto de regras e normas que devem ser seguidas. Ademais, para esses autores, muitos professores utilizam “métodos e técnicas” da forma que aprenderam como alunos, e não se sentem seguros em promover mudanças. Assim, acabam seguindo os livros didáticos uma vez que se sentem pressionados a “cumprir” todo o programa proposto até o final da etapa. É importante ressaltar ainda que há, em muitos casos, a necessidade de distribuir muitos conteúdos em poucas aulas, devido à carga-horária que, em muitos casos, é pequena.

Talvez haja uma ruptura entre os diversos materiais de referência para o ensino de álgebra nos anos finais, ou uma carência de estudos em relação a eles. O fato é que esse conteúdo ainda é trabalhado, em muitas escolas, de forma sistemática valorizando as técnicas de resolução em detrimento do desenvolvimento do pensamento algébrico.

2.1.2 – Sobre o ensino de álgebra em livros didáticos

Entendemos que o livro didático tem uma forte influência no trabalho do professor. Seja por sua praticidade, obrigatoriedade por parte da comunidade escolar ou mesmo pela falta de tempo do profissional em pesquisar múltiplas fontes, esse material é importante para o desenvolvimento dos conteúdos programáticos em sala de aula. Por esse motivo, a escolha do livro didático, pelos professores e equipe pedagógica, tem sido um ponto importante para a discussão das propostas de ensino a serem utilizadas nas escolas. E, em se tratando dos conteúdos matemáticos, essa escolha implica, em muitos casos, a maneira como o professor irá desenvolver o seu trabalho.

Para Lins e Gimenez (1997), a maioria dos livros didáticos disponíveis no mercado brasileiro seguiu, por muito tempo, as tendências denominadas "letristas" que reduzem o ensino de álgebra ao "cálculo com letras", no qual a atividade algébrica utiliza uma sequência que envolve técnica (algoritmo)/prática (exercícios). São tendências que identificam a aprendizagem da álgebra ao domínio de técnicas de resolução de equações e manipulação de símbolos. A explicação para tal fato, de acordo com esses autores, é que os professores estão acostumados com essa metodologia de trabalho e é necessário compreender que "qualquer proposta de mudança vai ter de passar por convencer muita gente de que a atividade algébrica não é cálculo literal" (LINS; GIMENEZ, 1997, p.105 e 106). A esse respeito, é interessante ressaltar que, ainda hoje há coleções que são elaboradas de acordo com essa perspectiva. O que percebemos, a partir de nossas experiências, é que alguns autores, embora apresentem alguns exemplos contextualizados para a introdução do conteúdo, não deixam de trazer sugestões de atividades do tipo "faça como o modelo".

Blanton e Kaput (2005) também afirmam que a maioria dos professores tem pouca ou nenhuma experiência em realizar um trabalho pedagógico com foco no desenvolvimento do raciocínio algébrico em consequência do tipo de ensino dos conteúdos de matemática a que tiveram acesso quando alunos. Por esse motivo, é difícil para o professor, no momento da escolha do livro didático, abandonar essa visão redutora do que é o ensino de álgebra e muitas vezes ele tem preferência pelos materiais que estejam de acordo com suas perspectivas e concepções para o ensino.

O Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que tem como objetivo apresentar os livros didáticos selecionados pelo PNLD para orientar as escolhas dos professores, traz algumas discussões a respeito dos processos que envolvem o ensino e a

aprendizagem de alguns conteúdos da Educação Básica. Por esse motivo, fizemos uma leitura do último material desse tipo, que serviu como referência para a escolha dos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental para o triênio de 2017/2018/2019.

Inicialmente, o material traz uma discussão sobre a "Matemática no mundo de hoje", estabelecendo relações entre os conteúdos matemáticos e a atividade humana em vários aspectos. Nesse ponto, é sugerido um trabalho que estabeleça conexões entre o que é desenvolvido em sala de aula e os conhecimentos que o aluno já possui em seu cotidiano. De acordo com Lins e Gimenez (1997), a matemática que encontramos nas ruas ou no dia a dia é diferente da matemática escolar. Para esses autores, "na rua podemos sempre ter uma ideia com base no uso que estamos fazendo de números, mas na escola o que se procura é o resultado exato, o que se consegue aplicando o algoritmo adequado" (LINS; GIMENEZ, 1997, p.15).

No que diz respeito à Educação Matemática, a obra aponta a necessidade de repensar os processos que envolvem o ensino dos conteúdos matemáticos ao defender que "ensinar Matemática não se reduz à transmissão de informações sobre o saber acumulado nesse campo" (BRASIL, 2017, p.9). É necessário, no entanto, que o aluno encontre um sentido no que está aprendendo, a fim de que seja estimulado a buscar novos conhecimentos.

Especificamente sobre o ensino de álgebra, o guia do PNLD enfatiza a importância do estudo das sequências, "que contribuem com a capacidade do estudante de argumentar e de justificar os seus raciocínios" além de propiciar também "o desenvolvimento gradual da ideia de regularidades, que podem levar à criação de modelos simbólicos para diversas situações" (BRASIL, 2017, p. 11). Além disso, afirma que

> Na continuação de sua vida escolar, tais noções ampliam-se e aprofundam-se para o estudo de outros papéis que a álgebra desempenha na Matemática, entre as quais se destacam o da generalização das propriedades de conjuntos particulares e o de instrumento de modelagem de fenômenos por meio de equações, inequações e Funções (BRASIL, 2017, p. 11).

Uma metodologia de ensino que o guia dá destaque é a "Resolução de Problemas", apresentada como uma atividade que não é simples e que deve proporcionar desafios ao estudante para criar estratégias e mobilizar conhecimentos, uma vez que a Matemática se desenvolveu a partir da necessidade de resolver problemas.

Ao fazer uma síntese das coleções aprovadas, o guia afirma que a álgebra está presente em todos os volumes na maioria delas, sendo que apenas em algumas aparece a partir do livro

do 7º ano. É recomendado que o conteúdo de álgebra seja apresentado por meio de articulações com outros campos como Geometria e Grandezas e Medidas. Todavia,

> (...) predomina nas obras um ensino sobrecarregado de nomenclatura dos elementos da álgebra: variável, termos, expressão algébrica, monômios, polinômios, grau, entre outros. Prevalece, também, a abordagem das operações algébricas de modo excessivamente técnico. Na formação escolar, tem sido aceito que a álgebra cumpra os papéis de generalização da aritmética, de resolução de equações e inequações e de estudo do conceito de Função, entre outros (BRASIL, 2017, p. 31).

E, em se tratando de Funções, o material ressalta a importância desse tópico como "uma das ideias fundamentais da matemática" (BRASIL, 2017, p.34). No entanto, os livros, com algumas exceções, trazem esse conteúdo somente no volume 9 (referente ao 9º ano). Por outro lado, há a sugestão de que com um "bom planejamento didático e com dosagem apropriada da nomenclatura e da simbologia matemáticas, é possível abordar o conceito de Função ao longo dos anos finais do ensino fundamental" (BRASIL, 2017, p.34).

Uma crítica apontada, em relação ao ensino de Função, é a falta de interação com outros conteúdos algébricos. Uma sugestão, apresentada no Guia, seria a possibilidade de introduzir Funções durante o trabalho com os Números Inteiros ou Grandezas Proporcionais, uma vez que esses dois conteúdos poderiam ser desenvolvidos visando o estabelecimento das relações funcionais. No entanto, isso raramente é apresentado nos livros.

Outro ponto negativo apontado pela obra é o fato de que "os conceitos básicos de domínio e contradomínio nem sempre são tratados com o rigor necessário". Porém, um aspecto positivo é que as "Funções são estudadas com valorização de diferentes representações, dentre as quais: as tabulares, as algébricas, os gráficos cartesianos" (BRASIL, 2017, p.35).

O Guia para a escolha do livro didático convida os professores para uma análise crítica em relação às coleções que foram aprovadas. O que nos chama a atenção é o fato, já mencionado por Lins e Gimenez (1997), de que os livros são produzidos baseados nas perspectivas de muitos professores, que desenvolvem um trabalho pautado em procedimentos técnicos e atividades de "fixação" dos conteúdos. Ou seja, essa era uma percepção existente já na década de 90.

Mudanças, nesse sentido, são necessárias, porém, esbarram em muitas concepções de ensino que estão arraigadas. Por esse motivo, fizemos uma análise da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com o objetivo de perceber se houve mudanças e quais foram em relação às propostas para o ensino dos conteúdos algébricos.

2.1.3 – Ensino de álgebra segundo a Base Nacional Comum Curricular - BNCC

O documento mais recente, de caráter normativo, que aponta o conjunto de conhecimentos essenciais que um aluno deve adquirir na Educação Básica é a BNCC, apresentada em 2017, e que foi desenvolvida a partir da Constituição de 1988, das Leis de Diretrizes e Bases de 1996 e do Plano Nacional de Educação de 2014.

Em relação à Matemática, a BNCC separa os seus conteúdos em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, "Grandezas e Medidas" e "Probabilidade e Estatística".

Especificamente, o documento sugere que o trabalho com a Álgebra tem como objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico, que é essencial para "utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos" (BRASIL, 2017, p. 268).

Um ponto importante é a recomendação de que o desenvolvimento dos conteúdos algébricos aconteça desde os anos iniciais, sem necessariamente utilizar símbolos ou letras. Nesse sentido, o trabalho será pautado no desenvolvimento das "ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade" (BRASIL, 2017, p.268), o que pode ser feito concomitantemente com o ensino da aritmética. Essa ideia está em consonância com autores como Carraher e Ponte, que defendem esse ponto de vista, uma vez que a construção do pensamento algébrico deve acontecer em todas as etapas de escolarização, eliminando, com isso, a ideia de ruptura entre aritmética e álgebra. A esse respeito, Lins e Gimenez acreditam que "há poucas noções tão enraizadas como a de que aprender aritmética deve vir antes de aprender álgebra" (LINS; GIMENEZ, 1997, p.9).

Concordamos com essa perspectiva, porém chamamos a atenção para o fato de que ela já havia sido apresentada nos PCNs. Talvez tenha havido um "abandono" na elaboração do CBC, o que pode ter contribuído para que, efetivamente, o trabalho com os conteúdos algébricos, especificamente as relações funcionais, não tenha de fato acontecido nas escolas públicas mineiras.

A seguir, apresentaremos alguns pontos citados na BNCC em relação ao desenvolvimento dos conteúdos algébricos propostos para a Educação Básica. Percebemos que eles aparecem de forma detalhada, por ano de escolarização, talvez na tentativa de garantir que os professores trabalhem em concomitância com a aritmética.

No 1º ano estão presentes os conteúdos “padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências”; “sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)” (BRASIL, 2017, p. 276). E, para cada ano seguinte, há sugestões de trabalho com os conteúdos algébricos de maneira gradual.

No 3º ano, aparece “relação de igualdade”, cuja habilidade a ser desenvolvida seria “compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença” (BRASIL, 2017, p. 285). Embora não seja necessária a utilização de letras, essa seria a ideia fundamental para a compreensão, posteriormente, das equações algébricas.

Para o 5º ano, é esperado que o aluno perceba “as propriedades da igualdade e desenvolva a noção de equivalência, além de trabalhar com grandezas diretamente proporcionais” (BRASIL, 2017, p.292).

O trabalho específico com a linguagem algébrica deverá ser desenvolvido no 7º ano, o que já era recomendado anteriormente. A partir dessas novas diretrizes, desde que a noção de equivalência seja introduzida, desde os anos iniciais, no estudo da aritmética generalizada, é possível que o aluno consiga posteriormente compreender melhor e utilizar símbolos e letras atribuindo-lhes sentido.

O tópico Função ficou reservado para o 9º ano, que seria a etapa final de todo o trabalho desenvolvido com os conteúdos algébricos nos anos anteriores. De acordo com o documento, a habilidade para esse conteúdo seria “compreender as Funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis” (BRASIL, 2017, p.315). O que é diferente das propostas anteriores é que o objetivo aqui é trabalhar o conceito de Funções, deixando os tópicos específicos (Funções Linear, Afim e do 2º Grau) para o Ensino Médio. Acreditamos, a partir de nossas experiências, que essa mudança será interessante para o aluno, uma vez que ele terá mais tempo para compreender esse conceito com suas múltiplas representações.

Diferentemente dos PCN’s, que indicavam o que deveria ser trabalhado nos ciclos, a BNCC apresenta uma redefinição dos conteúdos por ano de escolaridade. Também introduz os “objetos de conhecimento”, que são os conteúdos básicos que os alunos devem saber com as respectivas habilidades esperadas por etapa. Ainda que aprovada com muitas críticas, esses pontos apresentam, a meu ver, um avanço, pois trazem um direcionamento melhor aos

professores sobre o que deve ser trabalhado em cada série, independentemente da escola de origem do seu aluno. Especificamente, no caso da álgebra, sua introdução, desde os anos iniciais, pode também representar um avanço, uma vez que os alunos são inseridos, desde pequenos, às diferentes formas de pensar algebricamente, que será apresentado melhor *a posteriori.*

De acordo com estudos de pesquisadores como Carraher e Ponte, o desenvolvimento do pensamento algébrico, e, mais especificamente, do pensamento funcional, pode ser construído a partir de situações envolvendo sequências e padrões, o que está de acordo com as diretrizes propostas pela BNCC. A esse respeito, apresentaremos algumas concepções teóricas que contribuíram para a construção desta pesquisa.

2.2 – Algumas discussões a respeito da Educação Algébrica

Apresentaremos, a seguir, algumas discussões a respeito do ensino de álgebra.

2.2.1- Ensino de álgebra e pesquisas em Educação Matemática

Fazendo uma releitura das diretrizes para o ensino dos conteúdos algébricos na Educação Básica, percebemos sua importância dentre os diversos conteúdos presentes na Matemática. Todavia, esse tópico demonstra ser o mais complexo para os alunos, sendo objeto de diversos estudos e pesquisas. Nesse sentido questionamos quais são os objetos de ensino propostos pela álgebra? E como esses conteúdos podem ser trabalhados com vistas à aprendizagem real dos alunos?

Pesquisadores como Ponte et al.(2009) afirmam que há séculos atrás os conteúdos algébricos ensinados seriam expressões e equações algébricas, monômios, polinômios, entre outros e que essa realidade não está muito diferente nos dias de hoje. Um fato conhecido é que muitos professores apenas ensinam como aprenderam enquanto eram estudantes, dificultando as mudanças que são necessárias. De acordo com Grossmann e Ponte (2011), muitos professores recorrem às técnicas de resolução e “macetes”, buscando um “caminho mais fácil e mais curto” para finalizar os conteúdos propostos para cada etapa.

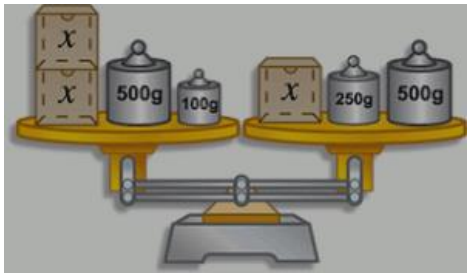
Ainda de acordo com Ponte et al (2009), a álgebra é trabalhada, em muitos casos, a partir de um conjunto sistemático de regras de resoluções, prevalecendo um aspecto redutor da álgebra que “desvaloriza muitos aspectos importantes desta área da matemática” (PONTE

et al., 2009, p.8). Para ele, um ponto importante a ser discutido é a utilização dos símbolos no ensino dos conteúdos algébricos. Eles não fazem sentido por si só, porém, não podem ser ignorados uma vez que são "poderosas ferramentas para a resolução de problemas" (PONTE *et al.*, 2009, p.8). Dessa forma, os símbolos são necessários, porém, o processo de ensino não pode ser baseado exclusivamente na manipulação deles.

Para Kaput (1999), tradicionalmente, a álgebra tem sido trabalhada como um conjunto de regras e procedimentos que, muitas vezes, não tem conexão com os outros conteúdos matemáticos nem tampouco com as situações do mundo real. Para esse autor, muitas situações propostas, para o ensino desses conteúdos, são artificiais e não oferecem a oportunidade de raciocinar e refletir a respeito do que se pretende que seja aprendido.

Lins e Gimenez (1997) apresentam o que chamam de algumas "tentativas superficiais", utilizadas por alguns professores, na tentativa de simplificar esse conteúdo, apresentadas, muitas vezes, a partir de situações-problema descontextualizadas. Um exemplo são as equações que podem obtidas através da balança de pratos:

FIGURA 2: BALANÇA DE PRATOS COMO ESTRATÉGIA PARA A INTRODUÇÃO DE EQUAÇÕES



Fonte: Internet[5]

Para esses autores, a tentativa de exemplificar a ideia de equações nem sempre pode ser efetiva, uma vez que os alunos não conseguem estabelecer relações com os processos de resolução. Nossas experiências, em relação ao trabalho com a "balança de pratos", demonstram que muitos percebem a necessidade de equilibrar o peso e conseguem calcular o valor de cada caixa (conforme exemplo apresentado), porém não compreendem a mesma relação quando estão diante de uma equação algébrica.

Em resumo, a atividade algébrica, em muitos casos, é descrita como "fazer ou usar álgebra. A versão mais banal dessa posição é a que descreve a atividade algébrica como calcular com letras" (LINS; GIMENEZ, 1997, p.90).

[5] Disponível em https://descomplica.com.br/blog/matematica/mapa-mental-equacoes-e-inequacoes-de-primeiro-e-segundo-graus/. Acessado em 24/12/2018.

Contrariando essa visão redutora da álgebra, alguns estudos como os de Blanton e Kaput (2004 e 2005), Carraher *et al* (2000, 2002,2006, 2007 e 2008), Kieran (2004), Ponte (1990 e 2006), entre outros, apontam para o fato de que o objetivo principal para o trabalho com esse conteúdo deve ser o desenvolvimento do pensamento algébrico. Essa nova perspectiva não sugere o abandono dos símbolos ou a utilização das técnicas de resolução, mas sim que esses procedimentos passam a ser auxiliares na resolução das situações-problema e não o objeto principal de aprendizagem.

De acordo com Ponte et al. (2009), os estudos dos conteúdos algébricos na Educação Básica devem ter como objetivo contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico e o autor cita o documento produzido pelo *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*, que apresenta como objetivos para o ensino desse conteúdo:

> • Compreender padrões, relações e Funções,
> • Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos,
> • Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas,
> • Analisar a variação em diversos contextos. (PONTE et al 2009, p. 10)

Assim, o estudo dos conteúdos algébricos deve contribuir para o desenvolvimento das habilidades nos estudantes de, para além dos cálculos algébricos, construir generalizações, lidar com as relações funcionais, construir modelos matemáticos para a resolução de situações-problema e saber utilizá-los em estruturas matemáticas simples ou complexas. E todos esses processos caracterizam o pensamento algébrico, que será mais detalhado a seguir.

2.2.2 – O que caracteriza o pensamento ou o raciocínio algébrico?

Se considerarmos a álgebra como uma atividade humana, concluímos que essa área do conhecimento é essencial para o desenvolvimento integral do indivíduo. Nesse sentido, qual seria o objetivo de estudar os conteúdos algébricos? Em comum, alguns dos autores por nós escolhidos para fundamentar a construção desta pesquisa, entendem que o objetivo seria o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nesse sentido, surge o questionamento: “o que seria o pensamento algébrico?” Para os autores Lins e Gimenez (1997), não há uma resposta exata para essa pergunta. Porém, há uma

proximidade sobre o que deveria caracterizar esse tipo de pensamento, de acordo com as pesquisas ou trabalhos desenvolvidos pelos diferentes autores.

Para Kaput (1999), o raciocínio algébrico pode ser considerado uma das ferramentas intelectuais mais poderosas da humanidade e o desafio é levar esse conhecimento para os alunos. O autor acredita que o pensamento algébrico surge quando são estabelecidas generalizações sobre dados, através de processos de conjecturas e argumentação que, ao serem trabalhadas gradualmente, contribuem para raciocínios mais complexos.

Radford (2006) acredita que o pensamento algébrico é "*uma forma particular de refletir matematicamente*[6]" (Tradução nossa). O autor cita Kant (1929) quando afirma que os objetos da geometria podem ser representados de várias maneiras, enquanto os objetos algébricos só podem ser representados indiretamente por meio de signos (sinais) que podem ser letras ou outra representação. No entanto, o uso de letra não necessariamente equivale a representar algebricamente.

Segundo Ponte et al. (2009), o pensamento algébrico pode ser caracterizado como a "capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações e Funções, além da capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas" (PONTE et al, 2009, p.10). Os autores citam o estudo de regularidades num dado conjunto de objetos como estratégia para desenvolver o pensamento algébrico. Esses autores acreditam que o pensamento algébrico é composto por três fases: representar, raciocinar e resolver problemas. O quadro a seguir resume essas fases:

QUADRO1: VERTENTES FUNDAMENTAIS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Representar	• Ler, compreender, escrever e operar com os símbolos usando as convenções algébricas usuais; • Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; • Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	• Relacionar (em particular, analisar propriedades); • Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando

[6] "It is clear that algebraic thinking is a particular form of reflecting mathematically". (RADFORD, 2006, p. V1-3)

	compreensão de regras; • Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	• Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e inequações), Funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Fonte: (Ponte *et al*. 2009, p. 11)

A ideia de representar permite que sejam utilizadas diferentes formas de representação, de acordo com a situação apresentada. É importante, nesse sentido, que as situações propostas sejam variadas e cada vez mais complexas, permitindo que os alunos construam e desenvolvam suas ideias.

Já raciocinar demanda tempo, é preciso analisar, discutir, conjecturar, errar e refletir sobre o erro. Talvez uma situação mais simples não demande tantos passos, porém é um construto para as situações mais complexas. E, ao oferecermos apenas "fórmulas prontas" e técnicas de resolução, não permitimos aos alunos que eles desenvolvam suas ideias. As generalizações ocorrem nesse processo e podem ser consequência de todo esse trabalho.

De acordo com Blanton e Kaput (2005), um trabalho com vistas ao desenvolvimento do raciocínio algébrico baseia-se em identificar, descrever, justificar e formalizar através de linguagem natural ou algébrica relações matemáticas entre quantidades que variam. Esses autores consideram o raciocínio algébrico como um processo que permite aos alunos generalizarem ideias matemáticas, a partir de discursos ou argumentações, que se tornam mais formais de acordo com o trabalho desenvolvido e a idade do estudante. Para esses autores esse raciocínio pode ser caracterizado como:

> *(a) O uso de aritmética como um domínio para a expressão e formalização de generalizações (generalização aritmética);*
> *(b) Generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional);*
> *(c) Modelagem como domínio para expressar e formalizar generalizações e*
> *(d) Generalização sobre sistemas matemáticos abstraídos de cálculos e relações*[7]. (Tradução nossa)

[7] (a) "the use of arithmetic as a domain for expressing and formalizing generalizations (generalized arithmetic)"; (b) "generalizing numerical patterns to describe functional relationships (functional thinking); (c) modeling as a domain for expressing and formalizing generalizations; and (d) generalizing about mathematical systems abstracted from computations and relations." (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413)

A expressão “generalização aritmética” é utilizada por outros autores quando sugerem que as operações não podem ser tratadas apenas para a obtenção de resultados de cálculos simples.

O estabelecimento de relações funcionais, parte primordial para o desenvolvimento do pensamento funcional (que será discutido posteriormente), também é apresentado pelos autores, sendo uma parte importante do pensamento algébrico. A esse respeito, Carraher e Schliemann (2002) acreditam que as operações matemáticas podem ser vistas como Funções, e que esse último conteúdo deveria ser utilizado para a introdução dos conteúdos algébricos.

A ideia de modelagem coloca em destaque a resolução de situações-problema nas quais os conteúdos algébricos aparecem como ferramentas de resolução. Nesse sentido, as expressões e equações algébricas deixam de ser o objetivo principal para o estudo da álgebra, passando a auxiliar nos processos de resolução.

Para Kieran (2004), o desenvolvimento do pensamento algébrico tem início no trabalho com a aritmética. Para a autora é necessário que os símbolos e as operações sejam trabalhados de forma consciente e reflexiva, não se resumindo a um conjunto de cálculos e respostas. Para isso, o estudo da aritmética deve ter:

> *1. Um foco nas relações e não apenas no cálculo de um valor numérico como resposta;*
> *2. Um foco nas operações, bem como nas operações inversas, e na ideia relacionada de fazer / desfazer;*
> *3. Um foco em representar e resolver um problema, em vez de meramente resolvê-lo;*
> *4. Um foco em números e letras, em vez de apenas números. Este inclui:*
> *(i) trabalhar com letras que podem às vezes ser desconhecidas, variáveis ou parâmetros;*
> *(ii) aceitar expressões literais não fechadas como respostas;*
> *(iii) comparar equivalência de expressões baseada em propriedades em vez de avaliação numérica;*
> *5. Ressignificação do sinal de igualdade*[8]. (Tradução nossa)

Ainda sobre generalizações, Radford (2006), baseando-se nas ideias de Kieran (1989), diz que generalizar é ver algo geral a partir de uma situação particular por meio de uma representação. Em outras palavras “*o escopo da generalidade que podemos alcançar dentro de certa camada*

[8] 1. “A focus on relations and not merely on the calculation of a numerical answer; 2. A focus on operations as well as their inverses, and on the related idea of doing / undoing; 3. A focus on both representing and solving a problem rather than on merely solving it; 4. A focus on both numbers and letters, rather than on numbers alone. This includes: (i) working with letters that may at times be unknowns, variables, or parameters; (ii) accepting unclosed literal expressions as responses; (iii) comparing expressions for equivalence based on properties rather than on numerical evaluation; 5. A refocusing of the meaning of the equal sign.” (KIERAN, 2014, p. 140 – 141)

é entrelaçado com a forma material que usamos para raciocinar e expressar o geral (por exemplo, o sistema semiótico algébrico padrão alfanumérico, linguagem natural ou qualquer outra coisa)[9] *"* (Tradução nossa). Esse autor acredita que um trabalho envolvendo a generalização de padrões e sequências é importante para desenvolver o pensamento algébrico, porém não é simples e nem acontece de repente.

Para Radford (2010), o estudo de generalizações por meio de sequências e padrões tem ganhado notoriedade nas pesquisas Educação Matemática nos últimos anos, porém, é importante ressaltar que nem sempre esse processo leva o aluno ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Radford (2011) afirma que a generalização é um processo humano natural e que qualquer palavra é o resultado de uma generalização. Tal fato repousa na ideia de que uma palavra pode descrever um conjunto de objetos e ser usada em diferentes situações.

De acordo com Kaput (1999), a generalização é a capacidade de perceber o que há de comum em determinadas situações por meio da percepção de padrões, procedimentos, estruturas e relações entre os termos ou objetos. É a capacidade de raciocinar e expor o que há de comum em situações particulares. Nesse sentido, a expressão das generalizações pode se dar utilizando a linguagem natural ou utilizando o formalismo matemático. Para esse autor, as generalizações podem ocorrer ainda na aritmética, nas situações de modelagem, na geometria e em todos os conteúdos da matemática, e, mais ainda, podendo ser exploradas desde os primeiros anos de escolarização.

Segundo Carraher et al. (2006), as generalizações estão no cerne do raciocínio algébrico e as operações aritméticas podem ser trabalhadas como Funções, assim como as notações algébricas podem dar suporte ao raciocínio matemático.

De acordo com Ponte *et al.* (2009), ao analisarem uma sequência, os alunos conseguem descrever as características comuns e gerais, possibilitando a percepção de uma regularidade e o estabelecimento de generalizações. Esses autores acreditam que, mesmo utilizando a linguagem natural, a descrição da generalização já exige uma grande capacidade de abstração.

Para Radford (2010), o trabalho com as generalizações de padrões deve acontecer a partir de sequências numérico-figurativas. Dessa maneira, é possível "perceber algo geral em uma situação particular". Todavia, a utilização de letras na resolução das atividades não

---

[9]" ... the scope of the generality that we can attain within a certain layer is interwoven with the material form that we use to reason and to express the general (e.g. the standard alphanumeric algebraic semiotic system, natural language or something else)." (RADFORD, 2006, p. vol 1-5)

significa que o aluno esteja, de fato, realizando uma atividade algébrica com a presença do pensamento algébrico.

Radford (2006) cita Kieran (1989) para esclarecer que generalizar vai além de "ver o geral no particular", sendo necessário saber expressar algebricamente. Por esse fato, o autor afirma que a generalização algébrica de um padrão acontece a partir da percepção do termo comum e a construção de uma regra, expressa em linguagem natural ou matemática, que sirva para todos os termos da sequência.

Nesse sentido, Radford (2006) faz algumas distinções importantes para a percepção dos processos que envolvem a generalização. O primeiro seria a *indução ingênua* que não é considerada como generalização e consiste na adivinhação de termos e de expressões para descrever uma regularidade. Embora seja considerado, pelo autor, "tentativas e erros e outras estratégias de adivinhação", esse processo antecede e pode contribuir para as generalizações algébricas. O segundo seriam as *generalizações aritméticas*, que acontece quando o aluno percebe uma regularidade, porém, não é capaz de elaborar uma regra para descobrir qualquer termo dessa sequência. E, finalmente, as *generalizações algébricas*, que é caracterizado quando o aluno consegue elaborar um esquema para encontrar outros elementos da sequência.

Em comum, as ideias dos autores que contribuíram para esta pesquisa convergem para o fato de que para o desenvolvimento do pensamento algébrico são necessárias situações que permitam a reflexão e argumentação a respeito do que é proposto. É necessário tempo, planejamento e a compreensão de que se trata de um trabalho longitudinal. Por esse motivo, todos os autores sugerem que esse trabalho ocorra nos anos iniciais de escolarização de maneira intuitiva. Uma boa estratégia, de acordo com algumas pesquisas, é o trabalho por meio de Funções que explore as relações funcionais a partir de situações-problemas. Por esse motivo, apresentaremos no próximo item as características do pensamento funcional.

2.2.3 – O que caracteriza o pensamento funcional?

Historicamente, a abordagem funcional apareceu tardiamente na história da educação matemática, de acordo com Carraher et al. (2008).

Kieran (2004) acrescenta que esse assunto surgiu nas discussões e atividades algébricas apenas no final da década de 80. Para a autora,

> *A abordagem funcional para o surgimento do pensamento algébrico sugere um estudo da álgebra que se concentra no desenvolvimento de experiências*

> *com Funções e famílias de Funções através de situações reais cujas relações quantitativas podem ser descritas por esses modelos*[10]. (Tradução nossa)

As relações funcionais podem, de acordo com Kieran (2004), oferecer situações em que a utilização de símbolos e letras se façam necessários. Sendo assim, o desenvolvimento do pensamento funcional está diretamente relacionado ao desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo uma estratégia importante.

Para Carraher et al. (2006), as Funções fazem parte tanto dos estudos de matemática pura quanto da matemática aplicada às ciências, como as engenharias e a estatística. Carraher et al. (2008) acreditam que as Funções desempenham um papel de integração entre a aritmética e a álgebra. Por esse motivo defende esse conteúdo como parte fundamental do currículo de matemática na escola básica. Por outro lado, Carraher et al. (2000) afirmam que, geralmente, nas diretrizes para o ensino de Funções há referências ao papel das operações aritméticas, porém, no ensino de aritmética o trabalho com Funções nem sempre é mencionado.

Nesse sentido, as operações são tratadas apenas como procedimentos para a realização de cálculos isolados e Funções é apresentado apenas no 9º ano, causando um distanciamento entre esses conteúdos. Para romper com essa perspectiva, Carraher *et al.* (2000) apontam para o fato de que trabalhar as operações aritméticas como Função é importante para que os alunos percebam as relações de variação e dependência.

Blanton e Kaput (2004) descrevem, de acordo com Smith (2003), o pensamento funcional como pensamento representacional, que pode ser compreendido como a relação entre duas ou mais quantidades que podem variar. Para que isso seja percebido pelos alunos, é necessário que esse trabalho seja desenvolvido durante todas as etapas de escolarização. A justificativa desses autores para um trabalho com Funções desde os anos iniciais é o fato de que esse conceito pode ser desenvolvido dentro de vários conteúdos matemáticos como Números e Operações, Frações, Proporcionalidade, entre outros.

Dessa maneira, desenvolver o pensamento funcional é essencial para a compreensão dos conceitos mais avançados de Funções. Carraher e Schliemann (2008) trazem a ideia de que esse conteúdo é introduzido, em aulas tradicionais, por meio de equações, e que esse processo em nada contribui para o entendimento de um assunto tão complexo. Por outro lado,

---

[10] "The functional approach to the emergence of algebraic thinking … suggests a study of algebra that centers on developing experiences with functions and families of functions through encounters with real world situations whose quantitative relationships can be described by those models." (Heid, 1996, p. 239 apud Kieran 20004, p.143)

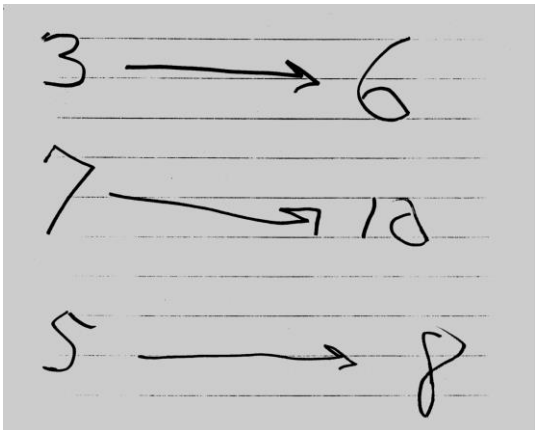
ao ser introduzido nos anos iniciais de escolarização, a partir de atividades que favoreçam a construção da ideia de dependência e variação, é possível que os alunos compreendam e atribuam significados a esse conceito.

Embora tenha características específicas, o pensamento funcional é, de acordo com Ribeiro e Cury (2015), parte do pensamento algébrico. Para Matos e Pontes (2008), o desenvolvimento do pensamento funcional está ancorado em relações entre variáveis, nas quais a variável independente pode assumir diversos valores. Carraher e Schliemann (2008) acreditam que

> *No início, os alunos aprendem a fazer generalizações em situações envolvendo quantidades físicas. Eles aprendem a usar tabelas, gráficos, notações algébricas e outras representações matemáticas para capturar aspectos gerais de seu raciocínio sobre tais situações. Gradualmente eles se sentem confortáveis usando letras para representar quantidades variáveis e operam diretamente em expressões algébricas. Apenas em estágios razoavelmente avançados os estudantes raciocinam em situações mais complexas dentro das restrições sintáticas desses sistemas simbólicos.* (tradução nossa)[11]

Para isso é necessário, de acordo com Carraher et al. (2000), que uma simples operação de adição seja percebida como uma Função definida em conjuntos de números e quantidades. Um exemplo apresentado pelos autores é a transformação a seguir:

FIGURA 3: "QUAL É A REGRA?"



Fonte: Carraher et al. (2000)

[11] "In the early going, students learn to make generalizations in situations involving physical quantities. They learn to use tables, graphs, algebraic notation, and other mathematical representations to capture general aspects of their reasoning about such situations. Gradually they become comfortable using letters to stand for variable quantities and operating directly on algebraic expressions. Only at fairly advanced stages do students reason at long stretches within the syntactical constraints of these symbolic systems." (CARRAHER ;SCHLIEMANN, 2008, p. 7)

Por meio desse exemplo, os alunos podem, além de realizar cálculos, perceber a lei de formação, que permite calcular valores diferentes dos apresentados. É possível fazer transformações de “ida e volta” (calcular o valor final sabendo o valor inicial e calcular o valor inicial dado o final), os quais Carraher et al. (2000), denominam como “valores de entrada e valores de saída”. Esse tipo de tarefa pode ser aplicada desde os anos iniciais, sendo que, os alunos podem, a princípio, perceber a lei de formação utilizando apenas a linguagem natural, avançando para a utilização de linguagem matemática.

Outros exemplos de trabalho com Funções seriam, de acordo com Carraher et al. (2000), situações-problema envolvendo dinheiro, altura ou idade, entre outros. Para esses autores, o conceito de Função surgiu da necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências de variáveis e generalizá-las obtendo leis quantitativas que se expressam analiticamente. Entender a Função como uma relação de dependência constitui um eixo importante que pode ser explorado em situações simples e cotidianas dentro ou fora do ambiente escolar.

Figueiredo (2010), em sua tese de doutorado, defendeu que a percepção de dependência é uma capacidade nata do ser humano. Esse autor acredita que uma criança consegue perceber que a distância que ela percorre em uma corrida vai “depender” da força que ela emprega em seu corpo, assim como a estratégia empregada para atirar pedra na fruta em uma árvore. “Em suma, seres humanos estão a todo tempo reconhecendo e operando relações de dependência. E o fazemos com absoluta espontaneidade, como se fizesse parte de nós, como se fosse uma característica natural e profundamente presente em nós” (FIGUEIREDO, 2010, p.65). Ainda que esse trabalho seja sobre o ensino superior, essas ideias são importantes podem e devem ser consideradas para a Educação Básica. Ademais, sabemos que a compreensão dos conteúdos algébricos é fundamental para os cursos técnicos e superiores que estejam dentro da área de exatas.

Embora seja um conceito amplo e que pode ser construído por alunos dos anos iniciais, o trabalho com as Funções acontece, normalmente, a partir do 9º ano do Ensino Fundamental. Contrariando essa prática, Santos et al. (2004) acreditam que

> A ideia de relações funcionais, inicialmente deve ser, intuitivamente desenvolvida na pré-escola e nas séries iniciais do ensino fundamental, através da observação de regularidades em eventos, formas, composições e conjuntos numéricos. Nas sequências, os alunos, além de descrever, entender, analisar, criar e relacionar uma variedade de padrões, devem representá-los analiticamente, através de letras, em expressões algébricas e equações. As representações gráficas em tabelas, em diferentes tipos de

> gráficos e diagramas, devem acompanhar todo o percurso da construção do conceito (SANTOS et al., 2004, p.6).

Para Radford (2006), a ideia de trabalhar com regularidades pode contribuir significativamente para esse processo. A capacidade de generalizar padrões é, de acordo com o autor, o escopo do pensamento algébrico e, de alguma maneira, contribui para o desenvolvimento do pensamento funcional.

Esse fato pode fazer a diferença no processo de aprendizagem dos alunos, uma vez que estes começam a construir o conceito de Função, ainda que de maneira informal, desde mais novos.

Nesse sentido, Carraher e Schliemann (2008) acreditam que a álgebra é importante e desempenha um papel fundamental na construção de conceitos desde o momento em que os alunos começam a aprender Matemática. Todavia, os autores salientam que não é comum o uso da palavra álgebra em turmas dos anos iniciais, mas são perceptíveis a capacidade e o raciocínio dos alunos quando estão diante de situações que utilizem o pensamento algébrico.

A partir das ideias dos autores citados, percebemos a importância do desenvolvimento de um trabalho que contemple o desenvolvimento do pensamento funcional desde os anos iniciais de escolarização. Por esse motivo e pela falta de discussões a respeito desse assunto, pesquisamos como e se essa ideia aparece nas diretrizes para o ensino de álgebra na Educação Básica.

2.3 – Aritmética e Álgebra: opostas, complementares ou unívocas?

Alguns pesquisadores, como Carraher, Kieran e Radford, acreditam que a aprendizagem dos conteúdos aritméticos não é, necessariamente, pré-requisito para o ensino da álgebra. O que acontece, comumente, é a crença de que é necessário que o estudante aprenda inicialmente a aritmética e, posteriormente, a álgebra, causando, nesse processo, uma ruptura entre esses conteúdos.

Kieran (2004) acredita que o trabalho com a aritmética, em muitos casos, não contribui para uma reflexão sobre os processos operatórios envolvidos e sim para simplesmente "fazer contas e obter resultados". A autora cita o livro *"Adding It Up (Kilpatrick, Swaffor & Findell, 2001)"*, no qual os autores afirmam que a transição entre aritmética e álgebra é algo que não faz muito sentido para os alunos: se na aritmética, por exemplo, o sinal de igualdade era tratado como um "símbolo separador" entre a operação e o

resultado, na álgebra ele tem outro sentido. Por esse motivo, "*os alunos que operam em um quadro aritmético de referência, tendem a não ver os aspectos relacionais das operações: seu foco está no cálculo*[12]*"* (Tradução nossa).

Essa percepção também é apontada por Carraher *et al.* (2000), quando afirmam que, na aritmética, o sinal de igualdade (=) é frequentemente interpretado como "unidirecional", enquanto os sinais de adição e subtração (+ e -) estão restritos à ideia de unir ou retirar. Ainda de acordo com esses autores, os operadores deveriam ser mais explorados com vistas para o estudo das relações funcionais.

De acordo com Ponte *et al.* (2009), os Números e a Álgebra são temas importantes e presentes nas diretrizes educacionais de muitos países. Enquanto os Números com seus sistemas de formação, operações e situações-problema são trabalhados no início da escolarização, a álgebra aparece nos anos finais, também reforçando a ideia de ruptura entre um conteúdo e outro.

Concordamos com essa ideia ao vivenciarmos situações nas quais o sinal da igualdade apenas "separa" a operação da resposta.

FIGURA 4: UTILIZAÇÃO DO SINAL DE IGUALDADE

5+5=10+5=15

Fonte – Ponte et al., 2009

A situação apresentada é típica e ocorre frequentemente com os alunos do 5º e 6º ano. Ao resolverem situações problema envolvendo uma sequência de operações, muitos colocam o sinal de igualdade para "separar" cada etapa da resolução e geralmente não refletem sobre seu significado.

Por esse motivo, muitos alunos, quando entram em contato com os conteúdos algébricos, não conseguem perceber pontos convergentes entre esses tópicos, construindo a ideia de que a álgebra é algo difícil e sem sentido.

A esse respeito, alguns autores trazem exemplos de como aritmética e álgebra podem ser desenvolvidas ao mesmo tempo. Para Lins e Gimenez (1997), uma situação comum, como

[12] "As the above suggests, students operating in an arithmetic frame of reference tend not to see the relational aspects of operations; their focus is on calculating." (KIERAN, 2004, p.140)

a utilização de dinheiro, pode ser útil para explorar tanto aspectos aritméticos quanto algébricos. Segundo esses autores, o trabalho com valores fixos pode ser encaminhado para casos mais complexos, nos quais mais de um valor pode satisfazer a mesma situação. Nesse caso, "o sentido numérico passa também pelas álgebras do dinheiro e outras, porque sentido numérico é uma coisa que se expressa nas decisões, mas depende da percepção genérica" (LINS; GIMENEZ, 1997, p.30).

Para Ribeiro e Cury (2015), o trabalho relacionado aos conteúdos algébricos deve ser iniciado utilizando situações-problema que estimulem o pensamento, a construção de conjecturas, a criação de condições para sua existência e resolução que, dependendo do contexto, poderá utilizar alguns símbolos. E, havendo generalizações, é possível que a ideia construída possa ser utilizada em outras situações semelhantes.

Kieran (2004) sugere que existem atividades matemáticas de meta-nível, que utilizam a álgebra como ferramenta para sua resolução. Como exemplo, temos resolução de problemas, modelagem, percepção de estruturas, padrões, generalizações, além de situações que permitam prever, justificar, analisar e provar. Tal estratégia contribui para a construção de significados dos conteúdos algébricos, podendo utilizar ou não os símbolos ou as letras. Nesse sentido, o foco está no desenvolvimento das maneiras de pensar e criar estratégias para a resolução de situações que podem ser cada vez mais complexas.

Um exemplo prático, que podemos considerar, é um projeto desenvolvido por David Carraher, juntamente com uma equipe de psicólogos e educadores matemáticos, envolvendo professores e alunos da Educação Básica. O projeto, denominado *Early algebra*[13], defende um trabalho que estimule o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos, desde o início da sua escolarização. É importante apresentar aos estudantes situações que ofereçam a oportunidade de analisar, criar estratégias e formular hipóteses desde os primeiros anos de escolarização para possíveis resoluções, uma vez que "*a justificativa para a construção de contextos de problemas menos ou mais complexos repousa sobre como a maioria dos jovens estudantes (e muitos adultos) aprende. Eles não tiram conclusões somente através de um conjunto de regras ou técnicas de resolução*[14]*"* (tradução nossa).

[13] Essa expressão está relacionada a um ensino de álgebra que tem início nos primeiros anos de escolarização. Utilizaremos essa expressão em nosso trabalho com o significado supracitado.

[14] "the justification for building on rich problem contexts rests on how most young students (and many adults) learn. They do not draw conclusions solely through logic and syntactical rules" (CARRAHER et al 2006, p. 236).

Carraher et.al (2006) acreditam que, ao trabalhar os conceitos gradualmente, é possível perceber a evolução do aluno. Partindo de situações simples, e aumentando o nível de dificuldade, as operações algébricas vão se tornando necessárias e significativas. Pensar em uma álgebra que seja desenvolvida ainda nos primeiros anos de escolarização é entender que, antes de abstrair conceitos complexos, é necessário que sejam criadas hipóteses e construídas generalizações.

Concordamos com a ideia dos autores e percebemos que entregar uma ideia "pronta" ao aluno não favorece sua compreensão e contribui para a falta de interesse e, como consequência, a não aprendizagem de álgebra. Além disso, aumenta o sentimento negativo de muitos estudantes em relação à Matemática.

Por esse motivo, Carraher et al (2008) acreditam que esse trabalho deve ser desenvolvido juntamente com os números e operações. Para que isso seja possível, eles sugerem uma abordagem que priorize o ensino de Funções, ainda que de maneira intuitiva, desde os primeiros anos de escolarização, a fim de que o processo de construção do conceito seja natural. Nesse sentido, Carraher et al. (2006) acreditam que a notação simbólica, as linhas numéricas, as tabelas de Funções e os gráficos são ferramentas poderosas que os alunos podem usar para entender e expressar as relações funcionais em uma grande variedade de contextos de problemas.

Em comum, esses autores defendem que a álgebra deve ser trabalhada de uma forma que contribua para a compreensão dos conceitos e não baseada em um conjunto de regras e técnicas de resolução, como acontece em vários sistemas de ensino. Para isso, é preciso que, ao ensinar os conceitos aritméticos, os professores tenham foco no desenvolvimento do pensamento algébrico fazendo um único trabalho que favoreça essa construção. Um caminho, considerado por muitos pesquisadores, é o trabalho a partir da generalização de sequências e padrões que pode e deve ser desenvolvido desde os anos iniciais de escolarização. A esse respeito trazemos, a seguir, algumas discussões a respeito do trabalho com generalizações.

2.4 – Das generalizações de sequências e padrões às Funções

Autores como Kaput (1999) e Schliemann et al (2001) acreditam que a transição entre a aritmética e a álgebra deve acontecer naturalmente, por meio da generalização e da percepção das relações funcionais. Um exemplo é o trabalho com tabelas, que podem ser utilizadas para representar os pares ordenados relacionado a Função. Por meio dessa atividade

é possível que, a partir das operações aritméticas, os alunos percebam que há uma regra de construção e consigam estabelecer generalizações.

Para Ponte (1999), “O ensino das Funções deverá atender a necessidade de articular de forma permanente as três formas de representação conhecidas pelos alunos: o numérico, o gráfico e o algébrico” (PONTE, 1999, p.7).

De acordo com Vale e Pimentel (2011), diversas pesquisas apontam para a matemática como uma ciência baseada em padrões. Nesse sentido, esse estudo, segundo as autoras, tem sido utilizado em vários países, indicando ser uma boa estratégia para desenvolver o pensamento matemático. Para Vale et.al (2007), a regularidade faz parte de muitos aspectos da vida do ser humano e a busca por padrões é algo da natureza humana.

E, em se tratando dos conteúdos matemáticos,

> Quando apelamos aos padrões no ensino da matemática é normalmente porque queremos ajudar os alunos a aprender uma matemática significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem facultando-lhes um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com a sua realidade e experiências. O estudo de padrões vai de encontro a este aspecto, apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e também previsões (VALE et al., 2007, p.5).

Por esse motivo, esses autores acreditam que os conteúdos algébricos devem ser introduzidos, ainda de forma intuitiva, por sequências e padrões, uma vez que a álgebra “pode ser definida como um sistema matemático utilizado para generalizar algumas operações matemáticas permitindo que letras ou outros símbolos substituam os números” (VALE et al., 2007, p.6).

Para Schlieman et al. (2001), a álgebra pode ser percebida como “aritmética generalizada”, uma vez que o aluno deixa de pensar o número e as operações em casos particulares, passando para as relações entre conjuntos numéricos e variáveis. Trata-se de estabelecer relações a partir de uma “ideia” geral: generalizações.

Blanton e Kaput (2004) identificaram que o desenvolvimento das relações funcionais pode ocorrer por meio da generalização de padrões numéricos.

Kaput (1999) apresenta cinco categorias para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Consideramos, para este trabalho, duas delas, a primeira é a álgebra como “generalização e formalização de padrões” e a quarta considera “o estudo de Funções e relações de variações”.

A esse respeito, Ponte et al. (2009) defendem a ideia de que

> Ao longo de toda a escolaridade, a análise de sequências permite aos alunos progredir de raciocínios recursivos para raciocínios envolvendo relações funcionais. Como refere o NCTM (2007), o trabalho com sequências pode construir uma base para a compreensão do conceito de função. (PONTE et al., 2009, p.14).

Esses autores ainda afirmam que

> O papel curricular do conceito de Funções encontra-se em três aspectos essenciais:
> (a) A natureza mais algébrica ou mais funcional;
> (b) A generalidade do conceito;
> (c) A sua aplicação a problemas e situações da vida real e de outras ciências (PONTE, 1990, p. 6).

E, concordando com a ideia desses autores, percebemos o potencial em trabalhar os conteúdos algébricos por meio de tarefas que envolvem generalizações de sequências e padrões com vistas para o ensino de Função. Por esse motivo, desenvolvemos duas atividades que serão apresentadas no próximo capítulo.

CAPÍTULO 3 – PERCURSOS METODOLÓGICOS

Como disse anteriormente, o presente trabalho advém de uma inquietação em relação ao ensino dos conceitos algébricos na Educação Básica. A partir da minha experiência como aluna e como professora de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, percebi as dificuldades recorrentes dos alunos com a Matemática, especialmente com os conteúdos relacionados à álgebra. O fato é que, em muitos casos, o ensino desses conteúdos está pautado em métodos e técnicas de resolução a que muitos alunos não atribuem sentido.

Tal fato é confirmado por autores como Ponte *et. al.* (2009), Ribeiro e Cury (2005), entre outros, quando apresentam o quanto esse bloco de conteúdos foi trabalhado, por vários anos, dando ênfase aos procedimentos mecânicos e ao uso excessivo de letras e símbolos. E, como consequência, é possível que muitos professores continuem ensinando esses conteúdos da maneira como aprenderam, ou seja, reproduzindo o mesmo método e contribuindo para uma abordagem com ênfase nos procedimentos e sem a necessária compreensão dos conceitos.

Com o objetivo de romper com essa tradição e trazer um novo sentido para o processo de ensino e aprendizagem, decidi elaborar uma proposta de pesquisa relacionada ao ensino e aprendizagem de Álgebra na Educação Básica. Assim como Minayo et al. (2011), acreditamos que

> É a pesquisa que alimenta a atividade de ensino e a atualiza frente à realidade do mundo. Portanto, embora seja uma prática teórica, a pesquisa vincula pensamento e ação. Ou seja, nada pode ser intelectualmente um problema, se não tiver sido, em primeiro lugar, um problema da vida prática. As questões da investigação estão, portanto, relacionadas a interesses e circunstâncias socialmente condicionadas. São frutos de determinada inserção no real, nele encontrando suas razões e seus objetivos (MINAYO et al., 2011, p. 17-18).

Embora eu não soubesse, a princípio, qual conteúdo específico escolheria para o desenvolvimento desta pesquisa, tinha a certeza de que dedicaria este trabalho aos conteúdos algébricos, acreditando na importância e relevância destes para a Educação Básica.

É importante ressaltar que, em muitos casos, a rotina de um professor da escola básica não permite que ele tenha tempo para pesquisar diferentes metodologias para o ensino de determinados conteúdos. E, consequentemente, não tem acesso às novas pesquisas e trabalhos desenvolvidos nas universidades.

Dessa maneira, a ideia original de trabalhar com os conteúdos algébricos foi trabalhada e discutida durante alguns meses e, após algumas leituras, resolvemos dedicar este estudo à realização de uma pesquisa a respeito da construção do conceito de funções por meio de sequências e padrões com foco na generalização.

Ao ler trabalhos como os de Carraher et.al (2007) e Ponte et al (2009), identificamos a necessidade de construir esses conceitos em séries anteriores ao 9º ano. Isso nos motivou a iniciar o trabalho nas minhas turmas do 8º ano de uma escola municipal de Itabirito, onde lecionava no ano de 2017. Seria, de acordo com os textos citados, a oportunidade de realizarmos um trabalho durante um tempo maior e, como consequência, os resultados obtidos poderiam ser respaldados na construção, por etapas, desse conhecimento. Todavia, alguns fatores impediram a execução dessa proposta, tais como o processo de planejamento das tarefas e o próprio desenvolvimento dos conteúdos nas turmas do 8º ano, que é muito extenso.

Por esse motivo, o desenvolvimento do trabalho ocorreu em 2018, em turmas do 9º ano em uma escola municipal na cidade de Itabirito, onde leciono.

A opção por realizar uma pesquisa na própria turma está em consonância com as ideias apresentadas por Penteado e Garrido (2010), que explicam:

> Denomina-se pesquisa-ensino a que é realizada durante e como um ato docente, pelo profissional responsável por essa docência. Essa atuação visa à vivência de condutas investigativas na prática do ensino, que permitem exercê-lo como um processo criativo do saber docente. (...)
> Motiva a pesquisa-ensino o desejo de transformação da prática docente, que parece insatisfatória ao professor sob algum aspecto. Daí o seu caráter de pesquisa intervenção, ou seja, de pesquisa ação (PENTEADO; GARRIDO, 2010, p.36).

Ainda, de acordo com as autoras, também é possível perceber que o conhecimento a respeito dos processos de ensino é produzido a partir das situações vivenciadas, ou seja, o professor em sua prática é o protagonista da pesquisa, produzindo conhecimento e revendo suas práticas Nesse sentido, percebemos uma oportunidade de refletir e analisar a própria prática porque, de acordo com Zaidan et.al (2018), “a reflexão sobre a prática profissional será um elemento de contextualização e de formação para o pesquisador em seu auto estudo”(ZAIDAN et.al. 2018 p.100). Embora o foco dessa pesquisa não seja uma reflexão da minha prática de ensino, alguns aspectos profissionais estão descritos nas entrelinhas.

A seguir, apresentaremos o campo da pesquisa, bem como os sujeitos participantes.

3.1- O campo da pesquisa

Para responder as questões propostas, desenvolvemos duas atividades, que serão descritas ao final deste capítulo. As atividades foram aplicadas em turmas do 9º ano da Escola Municipal Ana Amélia de Queiroz, situada em Itabirito/MG. Para a análise foram coletados os dados das três turmas para a primeira atividade e apenas de uma turma para a segunda, por motivos que descreveremos posteriormente.

Para a realização desta pesquisa, inicialmente, ainda no ano de 2017, apresentei o projeto à direção e à supervisão da escola que aprovaram sua realização e ofereceram o apoio necessário a seu desenvolvimento. O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TLCE) foi assinado pela diretora no dia 23 de novembro do ano citado e submetido ao COEP juntamente com o projeto[15].

Nessa ocasião, conversei com a diretora sobre algumas possibilidades para a realização da pesquisa. A primeira delas foi sobre a escolha das turmas em que atuaria no ano de 2018, uma vez que, trabalhando com o 9º ano, eu poderia realizar a pesquisa nas minhas próprias turmas.

Outro pedido foi a possibilidade de poder contar com uma pessoa para auxiliar no desenvolvimento do trabalho. Havia pensado na professora de Matemática que é responsável por trabalhar com o reforço desse conteúdo. Já havia, antecipadamente, conversado informalmente com essa professora, que prontamente se dispôs a ajudar-me, adaptando seus horários.

Fui atendida, na ocasião, nos dois pedidos. A diretora ainda esclareceu que já era proposta da equipe escolar, para o ano de 2018, entregar uma solicitação aos pais que permitisse a utilização de fotos e filmagens para fins educacionais (divulgação de eventos, entrevistas ou matérias em jornais impressos e digitais, entre outros), garantindo a utilização desses meios para a minha pesquisa. Todavia, esclareci que se tratava de um trâmite da universidade e seria necessária a entrega dos TCLE´s aos alunos e aos pais.

O apoio da equipe gestora e pedagógica da escola foi muito importante. O sentimento de acolhimento e a disponibilidade de todos para a realização da pesquisa entram em consonância com as ideias de Zaidan et al. (2018) ao defenderem que

> (...) mesmo que a pesquisa sobre a própria prática no Mestrado Profissional enfoque o professor-pesquisador, individualmente, com um projeto e seus

[15] Esse projeto de pesquisa foi aprovado pelo COEP em 12/12/2017, conforme parecer nº 2.432.780.

> desdobramentos, é desejável que o pesquisador tenha sempre uma relação cooperativa e colaborativa com o ambiente de trabalho. Com isso, a pesquisa mostra respeito a seus interlocutores profissionais, poderá ter mais facilidades nas ações experimentais e mais atenção na aceitação de seus resultados (ZAIDAN et al., 2018, p. 96).

Iniciamos nosso trabalho em fevereiro de 2018, com o esclarecimento aos alunos quanto à pesquisa e a seus objetivos. Os TCLE´s foram entregues entre os dias 26 e 27 de fevereiro.

O auxílio da professora de reforço de Matemática não foi possível, embora estivesse tudo acertado. O fato é que ela recebeu um convite para trabalhar como Diretora Pedagógica de Ensino II e deixou a escola no início do ano letivo de 2018. Esse fato gerou algumas dificuldades para a realização do trabalho e será detalhado posteriormente.

A ideia inicial desta pesquisa era desenvolver o trabalho nas três turmas do 9º ano levando em consideração as características particulares encontradas em cada uma, que serão descritas posteriormente. Nesse sentido, trabalhamos com a primeira tarefa nessas turmas e, a partir da análise dos dados e das sugestões da banca de qualificação, optamos por continuar a intervenção em apenas uma delas.

Embora acreditássemos na possibilidade de obtermos resultados mais ricos e detalhados, o trabalho com as três turmas tornou-se inviável devido a alguns problemas que aconteceram no primeiro semestre. Foram algumas paralisações, greves e alguns dias dispensados em decorrência dos jogos da Copa do Mundo. Esses fatos, somados aos eventos que já acontecem comumente (Show de Talentos [16] e Feira de Ciências [17]), afetaram diretamente o desenvolvimento dos conteúdos previstos para o 1º e 2º bimestres, adiando por várias vezes a realização da segunda atividade. Por esse motivo resolvemos, a partir da tarefa 3 recolher os dados de apenas uma das turmas.

3.1.1 – A escola

A Escola Municipal Ana Amélia de Queiroz está localizada em um bairro residencial e afastado do centro.

---

[16] O Show de Talentos é uma atividade cultural que incentiva os alunos a “mostrarem seus talentos” por meio de danças, teatros, músicas, etc. Geralmente acontece no encerramento do segundo bimestre, porém, os preparativos (alunos saindo da sala para ensaios, por exemplo), ocorre durante todo o período do bimestre.

[17] A Feira de Ciências sempre aconteceu no segundo semestre. Este ano, devido a tantas intercorrências, foi adiantada para os últimos dias do 2º bimestre.

A escola possui três andares com 17 salas de aula, uma cantina (em que estão a cozinha e o refeitório) e salas que têm outras Funções.

No primeiro andar, temos a secretaria, a sala da supervisão e direção, biblioteca, sala dos professores, o laboratório de Informática e de Ciências (que possui poucos equipamentos), além de uma dispensa e um auditório. No segundo andar, temos 9 salas e a cantina, e no terceiro andar temos 8 salas.

A escola funciona nos períodos matutino e vespertino e contava, em 2018, com 786 alunos distribuídos da seguinte maneira:

TABELA 1 – DISTRIBUIÇÃO DE ALUNOS POR TURMA EM 2018

Turma	Número de salas	Quantidade de alunos	Turno de oferta
1º Período (Educação Infantil)	2	32	Vespertino
2º Período (Educação Infantil)	2	33	Matutino
1º ano	3	73	Vespertino
2º ano	4	69	Vespertino
3º ano	3	64	Vespertino
4º ano	3	80	Vespertino
5º ano	3	109	Matutino
6º ano	3	90	Matutino
7º ano	3	76	Matutino
8º ano	3	86	Matutino
9º ano	3	74	Matutino

Fonte: Arquivos da escola.

Os diretores das escolas municipais de Itabirito são indicados pela Secretaria Municipal de Educação e os vice-diretores devem pertencer ao quadro efetivo da escola (professor ou supervisor).

A escola possui uma diretora e duas vice-diretoras (uma para cada turno). Possui ainda 45 professores, 4 supervisoras, 1 inspetora de alunos, 3 secretárias, 3 cozinheiras, 9 serventes, 1 zelador e 1 vigia.

3.2 – Os sujeitos da pesquisa

Como mencionado anteriormente, a proposta inicial da pesquisa era que as atividades seriam trabalhadas nas três turmas, (uma vez que o conteúdo Funções faz parte do currículo do 9º ano), o que não foi possível devido à necessidade de reformulações constantes do cronograma. Assim, a primeira atividade foi desenvolvida com um total de 71 alunos, distribuídos nas três turmas, enquanto a segunda foi realizada em uma única turma com o total de 29 alunos. Para identificar as turmas, utilizaremos os números das salas em que os alunos estudam e para identificar o aluno por turma, utilizaremos uma letra para cada turma e um número para cada aluno.

A seguir apresentaremos um breve perfil de cada turma.

3.2.1 – Turma P – Sala 14

Essa turma tem 29 alunos, sendo 15 meninas e 14 meninos. Desse total, apenas dois alunos tiveram uma reprovação e ambos nos anos iniciais.

Trata-se de uma turma agitada, porém muito envolvida nos trabalhos e nas atividades que são propostas. O rendimento desses alunos sempre foi considerado de bom a ótimo.

A maioria dos alunos está estudando junto desde a educação infantil e uma característica dessa turma é o fato de todos se ajudarem em relação aos conteúdos e à organização escolar (trabalhos, apresentações etc.). Os alunos com mais dificuldade são auxiliados por seus colegas com a expectativa de "não deixar ninguém para trás" (fala comum na turma).

Um dos alunos já realizou iniciação científica devido às boas notas obtidas nas provas das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Outros dois já receberam menção honrosa por boas notas obtidas nas Olimpíadas de Matemática de Itabirito[18] (OMI).

Caracterizaremos essa turma pela letra P e cada aluno por seu número de chamada.

[18] Programa desenvolvido por estudantes universitários em parceria com a Secretaria Municipal de Educação que tem por objetivo incentivar os alunos a estudarem para a segunda fase da OBMEP. Os alunos que se classificam para a segunda fase da olimpíada nacional são selecionados a participar de alguns encontros extraclasses para aprofundar os estudos em relação aos conteúdos matemáticos. É realizada uma prova que premia os alunos que mais se destacaram.

3.2.2 – Turma M – Sala 15

Essa turma tem 25 alunos, sendo 12 meninos e 13 meninas. Sete desses alunos já foram reprovados em alguma série dos anos iniciais ou finais.

A turma tem alunos com um bom desempenho, alguns medianos e outros com dificuldades na aprendizagem. Temos dois alunos muito calados que apresentam uma grande dificuldade de socialização e baixo desempenho escolar. Temos outra aluna que, devido a um problema de saúde da mãe, tem desempenho muito fraco. Esses três alunos já tiveram encaminhamento para um profissional que trabalhe essas questões, porém nenhum deles segue um tratamento.

Temos também alguns alunos que estão "passando por um período de descobertas da adolescência" e não estão comprometidos com a escola e com os estudos.

Ainda cito o caso de uma aluna que, apesar do seu enorme esforço e comprometimento com os estudos, não consegue ter uma boa nota nas avaliações. O fato que intriga é a facilidade que ela tem ao fazer conjecturas e generalizações de forma rápida e correta.

Nessa turma, temos um portador de Acromatose (albinismo) e que possui baixa visão. É acompanhado por uma monitora que o auxilia na leitura do que é escrito no quadro. Ele tem acesso a uma lente computadorizada, porém não gosta de usá-la. Estuda na escola desde o 6º ano e nunca teve problemas com os colegas. Ele foi transferido de outra escola por causa de problemas de aceitação e comportamento. Atualmente, a monitora desse aluno se chama Maria, e ela autorizou a sua participação na pesquisa incluindo suas falas e intervenções, porém optou por utilizar um nome fictício. Essa monitora, além do trabalho com ele, envolve-se e auxilia toda a turma tanto nas atividades escolares como na organização e disciplina dos alunos. Ela é muito interessada nas aulas de Matemática e participa como se fosse uma aluna, o que a motivou para a escolha de fazer Licenciatura em Matemática como complementação ao curso de Pedagogia.

Trata-se de uma turma agitada e com alguns problemas de disciplina. É necessário paciência e firmeza para lidarmos com eles para que a aula transcorra da maneira desejada.

Caracterizamos essa turma pela letra M e cada aluno por seu número de chamada.

3.2.3 – Turma B – Sala 16

Essa é a menor turma do 9º ano da escola e conta com 17 alunos. São 9 meninas e 8 meninos e apenas 3 deles nunca foram reprovados.

Esses alunos, apesar de possuírem muitas dificuldades no processo de aprendizagem, são muito interessados. Nessa turma, assim como na 14, os alunos têm o hábito de ajudarem uns aos outros. A preocupação com os colegas é notória e a cobrança também. Não são raras as vezes que um colega pergunta ao outro: "fizeram a tarefa de tal matéria?", "amanhã é dia de entregar o trabalho". Já fui surpreendida, diversas vezes, por questionamentos:

Aluno 1: "Oh menino você entendeu o que a professora explicou?
Aluno 2: Entendi sim!
Aluno 1: Mentira. Você está distraído. Explica novamente professora que o "fulano" ali não entendeu.

Falas comuns nessa sala

Essas atitudes demonstram a união da turma e a vontade de provarem que são capazes de aprenderem e se destacarem, como foi possível perceber em várias situações ocorridas durante o ano. O resultado dessa união foi a aprovação de todos os alunos no ano de 2018.

O motivo de eles terem sido separados em uma única turma foi para que fosse possível realizar um trabalho respeitando o "tempo" dos alunos.

Essa turma será caracterizada pela letra B.

3.2.4 – A escolha da turma P

Pretendíamos trabalhar os dados obtidos nas três turmas, todavia, não foi possível, como mencionado anteriormente.

A proposta inicial era desenvolver as duas atividades ainda nos dois primeiros bimestres com as três turmas, o que não foi possível devido às mudanças ocorridas no calendário escolar. Devido a esse fato, a primeira atividade foi realizada no primeiro bimestre e, a segunda, que estava prevista para o segundo bimestre, foi realizada apenas no terceiro com a turma 14 (turma P).

FIGURA 5: ALUNOS DO 9º ANO DA TURMA 14

Fonte: Arquivo pessoal

Com o objetivo de compreendermos as datas, é necessário ressaltar que um bimestre letivo não é necessariamente, o período de dois meses. Como o calendário prevê duzentos dias de aula, cada bimestre tem, em média, 50 dias. No ano de 2018 a divisão foi:

- 1º bimestre – fevereiro, março e abril;
- 2º bimestre – maio, junho e julho;
- 3º bimestre – agosto, setembro e outubro (alguns dias);
- 4º bimestre – outubro, novembro e dezembro.

Os motivos para a escolha da turma P foram:

- O fato de todos os alunos terem entregado os TCLE's autorizando a participação;
- Por se tratar de uma turma heterogênea (alguns alunos com dificuldades, alguns medianos e outros com bons resultados nos conteúdos matemáticos);
- O fato de ser a maior turma do 9º ano e assim, uma vez que teríamos uma variedade maior de dados e desejável diversidade nas respostas;
- O nível de envolvimento dos alunos e as discussões ocorridas desde a primeira tarefa.

Entre os 29 alunos, temos os estudantes P10 e P13, que já foram reprovados uma vez em séries anteriores. O aluno P10 é pouco participativo e falta muito às aulas. Já o aluno P13 gosta de Matemática e se mostrou muito interessado nas tarefas propostas. Esse último aluno

não conseguia escrever as situações propostas em linguagem matemática, porém, conseguiu perceber, conjecturar e “provar” várias situações. Argumenta muito bem e defende suas ideias tentando provar aquilo em que acredita, mas é aberto a discussões, como veremos à frente.

Os alunos P15 e P26 já receberam menção honrosa da OMI e OBMEP. Destacamos a participação dos alunos P26 e P13, que foram responsáveis por conclusões interessantes para esta pesquisa. Os alunos P5, P19, P23, P24, P28 e P29 são considerados medianos. São esforçados e interessados, porém apresentam dificuldades, principalmente nos conteúdos matemáticos. Já os alunos P1, P6, P17, P20, P21 e P27 são considerados ótimos. O bom desempenho e as boas notas obtidas são perceptíveis em todos os conteúdos. A aluna P25 tem um histórico de faltas. Seu desempenho escolar é fraco em consequência da falta de interesse em relação aos conteúdos. Participou de poucas tarefas nesta pesquisa.

Entendemos que, ao escolher uma turma em detrimento das outras, perderíamos algumas respostas e conclusões interessantes. Todavia, o tempo para análise e conclusão deste trabalho, bem como, a rotina de uma professora pesquisadora que, enquanto professora, tem o planejamento que deve ser cumprido, bem como toda a parte burocrática da profissão (diários de classe, reuniões, eventos escolares etc.), e como pesquisadora tem todas as etapas a serem cumpridas, impediram a realização desse desejo.

Apesar disso, as contribuições que a turma escolhida trouxe para o trabalho certamente foram valiosas e importantes.

3.3 – A coleta de dados

Um dos objetivos de contar com a ajuda de outra professora seria o de auxiliar na coleta dos dados no momento da aplicação das atividades. Como isso não foi viável, a coleta aconteceu por meio das atividades escritas dos alunos, da gravação de áudio e vídeo, do diário de campo e de entrevistas realizadas posteriormente com alguns alunos que haviam apresentado respostas que julgamos interessantes.

Para a construção do diário de campo, utilizamos as duas perspectivas: uma descritiva e outra interpretativa. De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006),

> A perspectiva descritiva atém-se à descrição de tarefas e atividades, de eventos, de diálogos, de gestos e atitudes, de procedimentos didáticos, do ambiente e da dinâmica da prática do próprio comportamento do observador et. A perspectiva interpretativa, por sua vez, tenta olhar para a escola e a sala de aula como espaços socioculturais produzidos por seres humanos

> concretos, isto é, por sujeitos que participam da trama social [...] (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 119).

Esses autores ressaltam a importância de que o professor que pretende investigar sua própria prática faça as anotações imediatamente após a realização da tarefa. Além disso, enfatizam que é importante a utilização de outros instrumentos para a coleta de dados, como filmagem ou gravação.

Nesse sentido, eu deixava um caderno para anotações na mesa e ia anotando, durante a aula, em tópicos, para não perder situações importantes. O diário era complementado em momentos específicos:

- Sempre utilizava o horário de almoço da segunda-feira para complementar as anotações, uma vez que nesse dia trabalhava nos dois turnos;
- Quando a intervenção acontecia na quarta-feira, aproveitava o período de intervalo para completar as anotações;
- E, quando a intervenção acontecia na sexta-feira, fazia a complementação quando chegava em casa.

Os textos eram revistos, complementados, reestruturados e digitalizados com o objetivo de preservar os detalhes. Nesse sentido, as gravações contribuíram significativamente, uma vez que, sempre que escutava os áudios das aulas, percebia alguma coisa diferente. Os materiais produzidos pelos alunos também foram importantes fontes de pesquisa, sendo parte fundamental da análise construída.

3.4 – Dinâmica da pesquisa

A construção de um conceito matemático é um trabalho que pode envolver um ou vários passos diferentes para atingir o objetivo de aprendizagem.

Por esse motivo e a partir das nossas inquietudes em relação ao estudo dos conteúdos algébricos no Ensino Fundamental, propusemos duas atividades com o objetivo de contribuir para a construção das ideias iniciais a respeito de Função. Nesse sentido, cada atividade foi dividida em tarefas que serão descritas em um quadro no final deste capítulo.

Nas primeiras aulas, apresentamos aos alunos os objetivos e a motivação para a realização desta pesquisa. Entregamos os termos, para os alunos, que foram preenchidos na sala, e os termos para os responsáveis, que foram devolvidos nas aulas seguintes.

A primeira atividade, denominada “Investigando sequências”, teve como objetivo apresentar aos alunos a ideia de sequências e padrões. Foram elaboradas duas atividades contendo algumas etapas em cada uma delas. Segundo Radford (2006), generalizar é um processo gradual e requer situações diversificadas para que se possa contemplar a abstração do que se pretende construir. Elaboramos, então, tarefas exploratórias a fim de analisar a percepção que os alunos tinham em relação às sequências e padrões. Este é um procedimento que, sempre que possível, adoto com os meus alunos para que eles compreendam o que irão estudar.

A segunda atividade, denominada “Introduzindo Função a partir de generalizações”, teve como objetivo contribuir para a construção do conceito de Função, por meio de sequências e padrões e situações-problema, com vistas ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Essa atividade foi composta de três tarefas. Em duas delas, abordamos generalização a partir de sequências e padrões, e na terceira uma situação-problema com foco na lei de formação de uma Função.

TABELA 2: ORGANIZAÇÃO DAS ATIVIDADES

Ação	Objetivos	Data
Entrega dos TCLE`s (Anexos A e B)	• Apresentar a pesquisa e explicar os objetivos, os passos e a perspectiva do desenvolvimento; • Entregar os termos; • Os alunos deverão preencher o termo do menor e levar o dos pais.	Entre os dias 26 e 28/02/2018
Atividade I – Tarefa 1 Investigando: O que é uma sequência? (Apêndice A)	Compreender o conhecimento que os alunos têm sobre sequências;	1ª etapa: Questões 1 e 2 Data: 05/03/2018 2ª etapa: Para Casa (Questões 3 e 4) Data: 07 e

		08/03/2018
Atividade I – Tarefa 2 Qual é o próximo número da sequência? (Apêndice B)	Construir a ideia de generalização a partir de sequências dadas	23/24 e 27/04/2018
Atividade II – Tarefa 1 Observando e generalizando padrões (Apêndice C)	Perceber se os alunos compreenderam a ideia do termo geral ou da lei de formação da sequência.	20/08/2018
Atividade II – Tarefa 2 Sequência de mesas e cadeiras (Apêndice D)	Contribuir para que os alunos percebessem, a partir de mais uma sequência de figuras, o padrão envolvido, e encontrassem uma lei de formação da sequência.	03/09/2018
Atividade II – Tarefa 3 O problema do cofrinho (Apêndice E)	Perceber a lei de formação de uma Função a partir de uma sequência.	24/09/2018

Fonte: elaborado pela autora

Os alunos trabalharam individualmente ou em grupos conforme a dinâmica da atividade. Os grupos eram formados aleatoriamente, sem a intervenção da professora.

3.5 – Produto Educacional

O Produto Educacional é um requisito parcial para a conclusão do curso de Mestrado Profissional em Educação e Docência da Universidade Federal de Minas Gerais.

No decorrer do curso, o aluno, ao assumir o papel de professor-pesquisador, desenvolve estudos e elabora propostas de ensino que são levadas para a sala de aula e, posteriormente, avaliadas, visando seu aprimoramento. Como resultado final, temos a confecção de um produto educacional que “devolve à comunidade conhecimentos, saberes,

resultados e objetos de ensino que contribuem para a própria prática pedagógica e para a Escola como um todo" (Zaidan et al., 2018, p. 102).

Por esse motivo, selecionamos algumas tarefas que fizeram parte do escopo dessa pesquisa, além de outra prevista inicialmente para esse estudo, mas que não foi possível de ser aplicada em tempo hábil para conclusão desse trabalho. Optamos por apresentar situações que contribuam para a introdução de conteúdos algébricos por meio de generalizações e que podem ser adaptadas à realidade de cada turma.

No próximo capítulo apresentaremos uma análise dos dados obtidos a partir dessas atividades propostas.

CAPÍTULO 4 – APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

A realização desta pesquisa decorre de uma inquietude em não aceitar o trabalho "tradicional" que vem sendo desenvolvido envolvendo os conteúdos algébricos, em especial o ensino de Funções. O fato é que, tradicionalmente, esse tópico tem sido ensinado por meio de fórmulas e técnicas de resolução, além da utilização de letras e símbolos, que ocorre, em muitos casos, sem que o aluno perceba o sentido real, contribuindo para uma falta de entendimento e, como consequência, um desinteresse em estudar os conteúdos matemáticos.

Alguns autores, como Carraher et al. (2000) e Kieran (2004), acreditam que o trabalho com a aritmética e a álgebra, no contexto escolar, não pode ser feito separadamente. É necessário, nesse sentido, que esses conteúdos sejam desenvolvidos simultaneamente com vistas no desenvolvimento do pensamento algébrico.

A esse respeito, autores como Ponte, Carraher e Radford defendem que o desenvolvimento do pensamento algébrico deve acontecer gradualmente, a partir dos anos iniciais, por meio de um trabalho gradual e contínuo, que pode acontecer por meio de generalização de sequências e padrões. Por esse motivo trouxemos como proposta para essa pesquisa o desenvolvimento de uma sequência de atividades para o 9º ano com foco no ensino de Função a partir do trabalho com padrões e sequências.

A escolha das atividades foi baseada nas propostas apresentadas por Radford (2006 e 2010), Carraher (2008) e Ponte et al. (2009), além de autores como Vale e Pimentel (2011), que sugerem que o pensamento algébrico pode ser desenvolvido por meio de sequências e padrões, uma vez que

> O estudo dos padrões tem tido um forte desenvolvimento nos currículos de matemática de vários países devido às suas potencialidades podendo afirmar que mais do que um conteúdo a ensinar, fornece um contexto propício para que os alunos pensem matematicamente (VALE; PIMENTEL, 2011, p.1).

E essas autoras acreditam que desenvolver os conteúdos algébricos por meio de um trabalho com padrões e sequências contribui para estabelecer conexões entre o que o aluno já conhece e os novos conceitos a serem compreendidos e aprendidos e não memorizados, como acontece habitualmente.

Elaboramos, então, duas atividades compostas por diferentes tarefas cujos objetivos seriam contribuir para a construção, pelos alunos, das primeiras noções de Função por meio de sequências e padrões numéricos e geométricos. Nesse sentido, o objetivo dessas propostas

foi verificar se tarefas de sequências e padrões com foco nas generalizações algébricas podem contribuir para a construção da ideia de Função.

A primeira atividade, denominada “Investigando sequências”, contou com duas tarefas e foi desenvolvida nas três turmas. Já a segunda atividade, que recebeu o nome de “Introduzindo Funções a partir de generalizações”, foi composta por três tarefas que foram aplicadas nas três turmas, porém, recolhemos para análise somente o material da turma P, como já justificado no capítulo anterior.

A análise das atividades foi feita levando em consideração: as estratégias utilizadas pelos alunos, a generalização das sequências e padrões, a percepção das relações funcionais. Para tal, utilizamos as concepções dos pesquisadores apresentadas no referencial teórico desta dissertação.

Para Radford (2006), encontrar a regularidade em uma sequência nem sempre pode ser considerado uma generalização algébrica. De acordo com o autor, o aluno pode utilizar estratégias que não garantem validade para toda a sequência. Nesse sentido, Radford (2006), apresenta uma classificação:

1- Indução ingênua: o estudante propõe regras simples, em geral por meio de tentativas e erros ou outras estratégias de adivinhação, utilizando, na maioria dos casos, o raciocínio recursivo;
2- Generalização aritmética: o aluno consegue compreender uma regularidade entre os termos apresentados na sequência e até alguns que “vêm a seguir”, porém não consegue elaborar uma regra para encontrar qualquer termo;
3- Generalização algébrica: é perceber algo geral no particular. Nesse caso o estudante consegue perceber um esquema ou uma regra, que podem ser descritos por meio de uma expressão algébrica.

De acordo com Ponte et al. (2009), os alunos podem utilizar algumas estratégias para a exploração de sequências. De acordo com os autores, é possível perceber:

1- Estratégia de representação e contagem – O aluno representa todos os termos da sequência até o termo solicitado e conta os elementos que constituem essa sequência para determinar o termo da sucessão numérica correspondente. (PONTE et al., 2009, p.40)

2- Estratégia aditiva – Tem por base uma abordagem recursiva. O aluno compara termos consecutivos e identifica a alteração que ocorre de um termo para o seguinte. (PONTE *et al.*, 2009, p.41)
3- Estratégia do objeto inteiro – O aluno pode considerar um termo de uma dada ordem e com base nesse determinar o termo de uma ordem que é múltipla desta. (PONTE *et al.*, 2009, p.42)
4- Estratégia de decomposição dos termos – Permite identificar o processo de construção possibilitando a determinação de termos de ordens distantes. (PONTE *et al.*, 2009, p.43)

Vale ressaltar que tínhamos a pretensão de desenvolver mais uma tarefa com foco nas diferentes representações de Funções, o que não foi possível devido à falta de tempo hábil para finalizar a pesquisa.

A seguir, apresentaremos uma análise dos dados obtidos por meio das intervenções realizadas.

4.1 – Atividade I: Investigando sequências

Essa primeira atividade teve como objetivo investigar o conhecimento prévio dos alunos sobre sequências e explorar os padrões existentes. Foram tarefas simples, porém realizadas por meio de diálogos e construções individuais e coletivas. Os alunos tiveram a oportunidade de participar das discussões e expor suas ideias a partir das questões propostas.

4.1.1 – Atividade I. Tarefa1: Investigando: o que é uma sequência?

Essa tarefa teve como objetivo compreender os conhecimentos prévios dos alunos sobre sequências e foi realizada em dois dias diferentes. A primeira parte, composta por duas questões, foi aplicada em uma aula de 50 minutos, nas três turmas, no dia 05/03/2018, em três etapas:

- 1ª etapa: trabalho individual;
- 2ª etapa: trabalho em grupo;
- 3ª etapa: apresentação dos grupos.

O número de alunos presentes por turma foi

- Turma P – 27 alunos
- Turma M – 25 alunos
- Turma B – 16 alunos

Os alunos receberam uma folha com as seguintes questões :

Questão 1- Para você o que é uma sequência?
Questão 2 - Dê exemplo de uma sequência.

Inicialmente, essas questões foram respondidas individualmente e em seguida, as folhas foram recolhidas e a turma dividida em grupos que foram formados aleatoriamente.

As perguntas foram, então, copiadas no quadro e solicitamos que cada grupo discutisse e elaborasse uma síntese para apresentação para a turma.

Apesar de não haver a exigência de descrever uma sequência matemática, nas três salas apareceram as perguntas:

'Seria uma sequência numérica?"
"É uma sequência de números?"
"Tem que ser em relação à matemática?"

Extraído do Diário de Campo

Respondi que não e que eles deveriam explicar qual o significado que atribuíam a uma sequência. Um fato que chamou a atenção foi que, enquanto os alunos das turmas P e M apresentaram exemplos matemáticos e de outras situações fora da matemática, os alunos da turma B se limitaram a citar exemplos matemáticos.

QUADRO 2: PRINCIPAIS IDEIAS APRESENTADAS À QUESTÃO 1.

Resposta/Quantidade de alunos por turma	Turma P	Turma M	Turma B
"Sequência é uma ordem: um atrás do	21	13	13

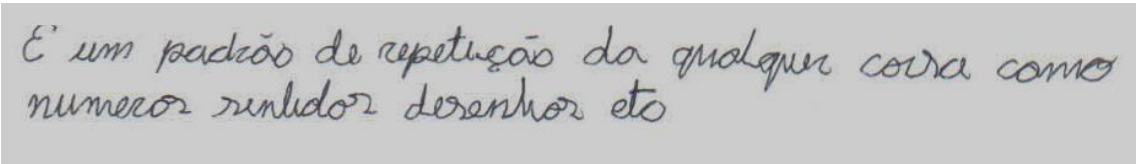
outro”			
“Sequência é uma repetição”	1	1	-
“Sequência é continuação”	5	6	1
“Sequência pode ser uma sequência numérica.”	-	3	2
Outras		1	1

Fonte: Elaborado pela própria autora

Essas respostas serviram de base para as discussões a respeito do que seria trabalhado. Ao entregarem as respostas, procurava discutir com eles o que havia de comum entre elas, proporcionando uma reflexão em relação às questões apresentadas.

Uma resposta nos chamou a atenção:

FIGURA 6: RESPOSTA DO ALUNO M20



Fonte: Arquivo pessoal.

Essa resposta ganhou destaque pela presença da palavra “padrão”. Ao ser questionado, durante a aula, a respeito do sentido dessa palavra, o aluno apresentou a seguinte justificativa:

Professora: M20, por que você acredita que sequência é um padrão de repetição?
M20: Porque sequência é uma coisa que vai acontecendo com um padrão de repetição. Vai acontecendo da mesma maneira.
Professora: Então, em uma sequência, sempre vai aparecer os mesmos elementos?
(O aluno pensou por um tempo)
M20: Vai sim. Mas tem que ter uma regra.
Professora: Explique melhor o que "seria essa regra".
M20: A regra é que faz acontecer a sequência. Olha o que eu coloquei no exemplo. São figuras geométricas que vão seguindo uma regra: um triângulo, um quadrado e dois círculos.
Professora: E sempre vai ser assim?
M20: Dependendo da regra. Nesse caso é. Mas se for outra coisa como números, aí muda. Mas tem que seguir um padrão ou uma mesma regra.

Extraído do material gravado

Nesse caso, acredita-se que o aluno perceba que há um "padrão" para a construção da sequência. A resposta do aluno remete às ideias apresentadas por Vale et al. (2007), quando afirmam que, em várias situações do quotidiano, o ser humano está à procura de regularidades e padrões. Faz parte da vida. A esse respeito Vale e Pimentel (2011), defendem que: "Na verdade, em qualquer interação, a nossa mente procura padrões e estabelece relações quer estejamos a fazer compras, a ler ou a fazer uma construção com cubos, independentemente do tipo de questões que pretendemos resolver" (VALE; PIMENTEL, 2011, p.1).

Embora a pergunta fosse aberta e possibilitasse diversas respostas, percebemos que a ideia de continuidade é apresentada por alguns alunos. Esse fato foi importante para a elaboração das outras tarefas propostas para a pesquisa.

Em relação à Questão 2, pedimos um exemplo de sequência e utilizamos, como critério de classificação, as que estavam dentro de um contexto matemático e as que não estavam:

QUADRO3: RESPOSTAS À QUESTÃO 2.

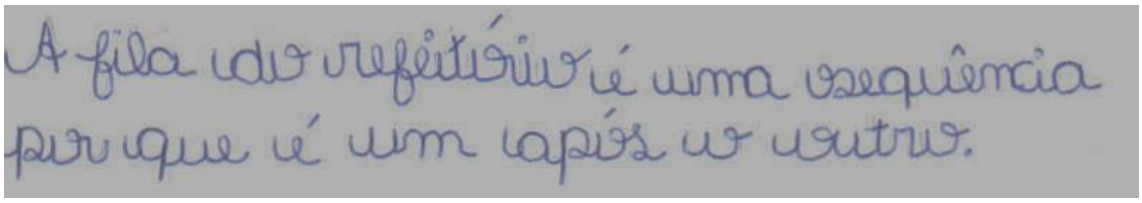
Resposta/ Quantidade de alunos	Turma P	Turma M	Turma B
Dentro do contexto matemático	21	19	16
Em outro contexto não matemático.	6	6	-

Fonte: Elaborado pela autora

Como exemplos de respostas temos:

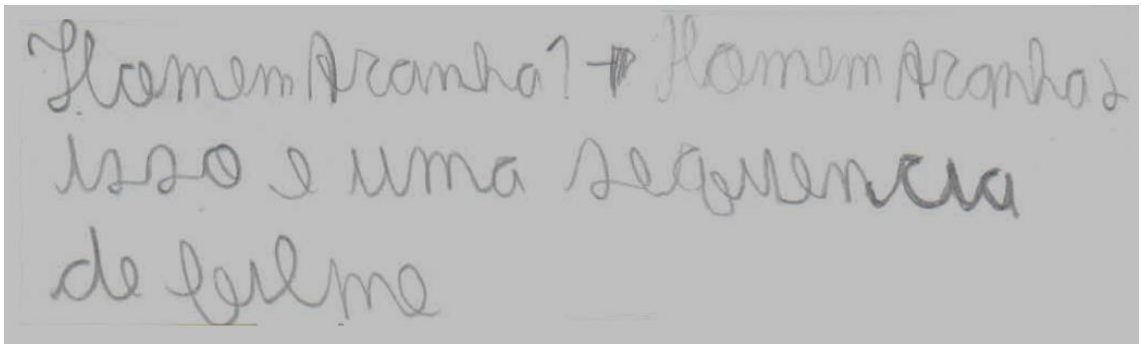
- Em contextos não matemáticos:

FIGURA 7: RESPOSTA DA ALUNA P2



Fonte: Arquivo pessoal

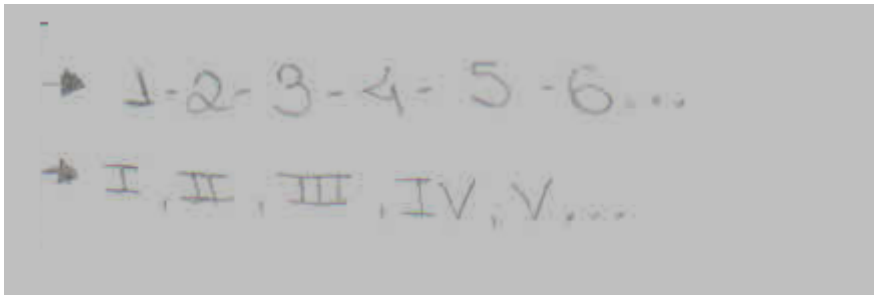
FIGURA 8: RESPOSTA DO ALUNO M4



Fonte: Arquivo pessoal

- Dentro do contexto matemático:

FIGURA 9: RESPOSTA DA ALUNA P16



Fonte: Arquivo pessoal

Retomando o objetivo da questão, é possível perceber que, em geral, os alunos compreendem o que é uma sequência e muitos a associam ao contexto matemático.

Após realizarem o trabalho individual, recolhi as folhas e solicitei aos alunos que formassem grupos. Passei as mesmas questões no quadro para que eles discutissem e preparassem uma apresentação para a turma.

Nesse momento foi possível identificar alguns conflitos. Fui solicitada, por alguns grupos, a esclarecer se teria que ser uma sequência matemática ou poderia ser relacionada a outro tema. Sugeri aos alunos que discutissem a questão e fizessem a melhor escolha.

A divisão dos grupos, nas três turmas, ficou:

- Turma P: sete grupos;
- Turma M: cinco grupos;
- Turma B: seis grupos.

QUADRO 4: RESUMO DAS RESPOSTAS À QUESTÃO 2.

Turma	Respostas
Turma P	• G1[19]: 1,2,3,4,5 “e assim vai”. • G2: Sequência é uma coisa que vem atrás da outra. Pode ser crescente ou decrescente. • G3: 10,20,30,40... • G4: Séries da Netflix • G5: 1,2,3,4,5,6... • G6: Séries de televisão • G7: Números que vêm em sequência de tantos em tantos.

[19] Foi utilizada a letra G referindo-se a grupo e o número de acordo com a ordem de apresentação. Não houve distinção de letras, nesse caso, para as diferentes turmas.

Turma M	• G1: Uma fila de carros na rua ou a sequência de programação da televisão. • G2: Uma sequência de desenhos ou um enigma: “qual é o número ou figura que vem depois?” • G3 e G5: Sequência é uma coisa que vem depois da outra. • G4: Pode ser, por exemplo, várias figuras geométricas ou cartas de baralho.
Turma B	• G1: 1,2,3,4,5 • G2: Uma expressão algébrica. • G3: Uma sequência pode ser, por exemplo, escrever todos os números. • G4: São números que seguem uma sequência. • G5: É escrever os números em ordem crescente. • G6: É escrever os números em qualquer ordem.

Fonte: Retirado do material dos alunos e elaborado pela autora.

Destacamos algumas falas que apresentaram algumas ideias interessantes.

O grupo 5 da turma P apresentou como exemplo, inicialmente, os números “1,2,3,4,5...”. Nesse momento, o aluno P26 (que fazia parte do primeiro grupo) questionou:

P26: Gente, todos os grupos deram exemplos de números positivos. Mas não podemos nos esquecer dos negativos. Eles fazem parte da sequência também.
(Nesse momento ele pediu para ir ao quadro e escreveu -2,-1,0,1,2...)
Professora: O que vocês acham:
P23: Eu achava que era só os números positivos. Tinha esquecido.
P21: Mas aí, P26, tem que colocar os três pontinhos antes do -2?
P26: É mesmo.
(O aluno colocou as reticências no local sugerido.)
P26: É infinito para os positivos e negativos.

Extraído da gravação

Nesse momento, acreditamos que os alunos perceberam que uma sequência pode ser infinita e certamente essa discussão foi importante para a construção desse conceito.

Outra percepção importante aconteceu em decorrência da apresentação dos grupos 1 e 2 da turma B. Na apresentação do grupo 1 surgiu o seguinte diálogo:

B18: Uma sequência pode ser 1,2,3,4,5. Está certo?
Professora: Pergunto para todos da turma: está certo?
B5: "Tá, uai". É um número atrás do outro.
Professora: Então, podemos continuar escrevendo os números?
B9: Se quiser pode. E se quiser parar também.
B10: Também acho. O grupo é que decide.
B15: Os números são infinitos, certo? Então podemos decidir se nossa sequência vai continuar ou não.
B12: Mas tem que ter uma regra. Para não sair escrevendo qualquer coisa.
Professora: E como seria essa regra?
B18: A regra é escrever os números positivos até o infinito.

Extraído da gravação

A questão de “criar uma regra” já havia sido levantada pela turma e esse é o primeiro passo até a generalização algébrica.

B12: Olha só, professora, o nosso grupo colocou como exemplo uma expressão.

B10: Mas uma expressão só tem uma resposta.

B8: É, mas tem uma regra. (Faz parte do grupo do aluno B10).

Professora: Então, para esse grupo o que é uma sequência?

B12: É uma coisa que vem depois da outra.

B16: Então como pode ser uma expressão? Só porque está organizado?

B10: Esse povo não pensa. Fala uma coisa e dá outro exemplo.

B12: É mesmo, professora. Achei que para ser uma sequência tinha que ter uma regra.

B8: Mas tem mesmo, “uai”. Só não pode ser uma expressão.

B15: Então dá outro exemplo aí.

B12: Ah, sei lá, 1, 2, 3, 4, 5 e continua.

Extraído da gravação

Nesse diálogo, é possível perceber que os alunos estão “à procura de uma regra”, ainda que erroneamente.

Ao final da tarefa, comentei com os alunos que as sequências, geralmente, possuem “regras” para sua construção e disse que veríamos outros exemplos nas aulas seguintes.

A situação descrita demonstra a importância de trabalhar os “conhecimentos prévios” dos alunos com o objetivo de que eles estabeleçam conexões entre o que já sabem e o que irão aprender. De acordo com Vale e Pimentel (2011), trata-se de um passo importante, uma vez que os alunos

> (...) obtêm um conhecimento mais profundo e duradouro, assim como desenvolvem a curiosidade e a criatividade, quando se realçam as conexões entre as ideias matemáticas que estão a ser trabalhadas e os conhecimentos matemáticos já adquiridos e também os da vida de todos os dias (VALE; PIMENTEL, 2011, p.1).

Concordamos com as ideias apresentadas e percebemos, em nossa prática, que os alunos se sentem motivados quando são desafiados com questões do seu cotidiano. Ao fazerem conexões entre os conteúdos matemáticos e situações do seu dia a dia, é possível que

eles compreendam melhor o que está sendo ensinado e construam um sentimento positivo em relação a essa matéria.

Para concluir a tarefa, os alunos das três turmas receberam um “Para Casa” que era composto por duas questões:

Para casa Questão 3: O que é uma sequência em Matemática? Questão 4: Pense em um exemplo.

Alguns alunos questionaram se eles teriam que criar a sequência ou poderiam copiar uma pronta. Esclareci que, independente de criar ou copiar um exemplo, o importante é que eles soubessem explicar como ela foi construída. Isso era essencial para a dinâmica da próxima aula.

É comum esse tipo de trabalho com as minhas turmas: deixar uma pergunta a respeito do conteúdo a ser desenvolvido para que os alunos pesquisem em casa. É, certamente, uma boa estratégia, uma vez que muitos já chegam com algumas definições e outras várias dúvidas, o que enriquece e contribui com a aula.

A segunda parte da tarefa, discussão sobre as perguntas propostas no “Para Casa”, foi realizada nos dias 07 e 08/03. Inicialmente, conferi os cadernos (sempre faço isso em todas as atividades de casa) e percebi que alguns alunos haviam feito a pesquisa solicitada, enquanto outros apenas escreveram os exemplos citados na aula anterior. Antes de iniciar as discussões, lembrei aos alunos a importância de citar a fonte de pesquisa. A maioria não havia feito isso e, quando questionados, afirmaram que haviam “pegado na internet”. Em seguida, expliquei qual seria a dinâmica da aula: formação de grupos para discussão das respostas e, posteriormente, apresentação, pelos grupos, de uma síntese das respostas.

A separação dos grupos aconteceu da seguinte maneira:

- Turma P: sete grupos;
- Turma M: seis grupos;
- Turma B: cinco grupos.

Um dos grupos apresentou a seguinte resposta à terceira questão:

"*Em matemática o conceito de sequência tem significado similar ao uso comum da palavra, mas recebe uma definição precisa. Formalmente falando, uma sequência é uma Função cujo domínio é um conjunto contável totalmente ordenado. Define-se o tamanho de uma sequência pelo número de elementos que esta possui, podendo existir sequências finitas ou infinitas*."

Essa definição foi apresentada na íntegra ou em partes por outros grupos.

Ao final da apresentação escrevi no quadro a definição para que os alunos refletissem. Alguns resultados serão apresentados posteriormente.

Apenas um grupo apresentou a definição de sequência em matemática como sendo *"uma sucessão de números que contém padrão complexo na matemática*".

Em relação à quarta questão, os alunos apresentaram os seguintes exemplos:

QUADRO 5: RESPOSTAS DOS ALUNOS À QUARTA QUESTÃO ("PARA CASA").

Turma	Exemplos
Turma P	• G1: Sequência de números, que é infinita, e a de números romanos que é finita, pois não apresentam números negativos; • G2: Sequência infinita, números primos entre 2 e 29. Sequências infinitas: números naturais, o conjunto de todos os números primos e o conjunto de todos os números pares; • G3: Sequências numéricas (1,2,3,4,5...) • G4: 1ª, 2ª e 3ª temporada de uma série, ou a sequência numérica de 5 em 5; • G5: Anos em que aconteceram os jogos Olímpicos ou Copa do Mundo; • G6: Sequência infinita e sequência de anos; • G7: Sequência de números do infinito negativo ao infinito positivo e sequência de bolinhas que vão aumentando.
Turma M	• G1 e G2: Sequência de números positivos; • G3: Sequência dos números múltiplos de 10; • G4: Sequência dos números apresentados na reta numérica; • G5: Sequência "que vai de 5 em 5"; • G6: Sequência de vários números a partir de uma regra.
Turma B	• G1, G3 e G6 apresentaram exemplos fora do contexto matemático (série de televisão e filmes);

	• G2: Sequência de números 1,2,3...; • G4: Números “pulando de 2 em 2”; • G5: Os números da reta numérica.

Fonte: retirado do material do aluno e elaborado pela autora

Percebemos, por meio das respostas, que muitos alunos trouxeram como exemplos alguns já discutidos na aula anterior. Apesar disso, é importante ressaltar a ideia de sequência finita e infinita apresentada por dois grupos da turma P.

Outro fato interessante foi uma discussão na turma B, na qual três grupos apresentaram exemplos que não estavam diretamente relacionados à Matemática.

B2: Professora, esse exemplo (referindo a sequência de séries da Netflix) está errado. Não tinha que ser sequência em matemática?
Professora: Então, o que vocês acham?
B14: Sei lá. Acho que está certo sim. Matemática não serve para tudo?
B9: É sim. Uma coisa explica a outra.
B10: Se a pergunta fosse só sequência estaria certo. Mas sequência matemática não é isso não. Nós não estudamos filmes em Matemática.
B18: É isso mesmo. Acho que vocês pesquisaram errado. Olharam só sequência e não sequência matemática igual foi solicitado.
B15: Fala sério! Vocês nem pesquisaram, né? Escreveram qualquer coisa.
B7: Pesquisamos sim. E se você pensar bem é a mesma coisa. Quando fala sequência numérica (1,2,3,4...), é a mesma coisa das temporadas.
Professora: Tudo bem, é válido. Porém definiremos melhor uma sequência Matemática.

Extraído da gravação

Momentos de discussões como esses são importantes para os alunos, é uma oportunidade de repensar os conceitos prévios e construir novos conhecimentos.

Com vistas a nosso objetivo final para esta pesquisa, levantamos uma discussão a respeito da definição de sequência que alguns alunos trouxeram. Ao ler o trecho: “uma sequência é uma Função cujo domínio é um conjunto contável e ordenado”, tivemos algumas

discussões interessantes nas turmas P e B. Com a turma M não foi possível trabalhar essas questões devido à falta de tempo.

P20 e P29: Função é o conteúdo que vamos estudar no primeiro bimestre.
Professora: Mas o que é função?
P20: Difícil, professora.
P12: Tem a ver com sequências?
Professora: O que acham?
Vários: Tem sim.
P13: Acho que tem porque estava na explicação de sequências.
P26: Não sei o que é função, mas essa última parte ("conjunto contável ordenado") significa que são vários números em ordem. Que pode ser resultado de uma conta.
P28: É mesmo. Concordo.
P7: Você não entendeu nada, não é P28? E fica falando isso.
P28: Entendi sim. É só ir fazendo as contas uai. Tipo 1+1=2, 2+1=3 e assim vai. Aumenta as contas e forma uma sequência de números.
Professora: Concordam com essa ideia?
P14: Eu concordo. Mas está certo ou errado?
Professora: Vamos ter essa resposta nas próximas aulas.
P22: Sacanagem, né, professora.

Extraído da gravação da turma B

Como mencionado anteriormente, essas questões são importantes para despertar a curiosidade dos alunos em relação aos conteúdos que irão aprender. Muitos sabiam que aprenderiam Funções, por se tratar de um conteúdo comum para o 9º ano e, a partir desse momento, eles ficaram mais atentos para entender o "porquê das sequências terem relação com as Funções."

Um fato curioso aconteceu na turma 16, na qual estudava um aluno que havia repetido o 9º ano (esse aluno foi transferido para outra escola no mês de abril). Ao iniciar a discussão a respeito da definição de sequências matemáticas, já citada anteriormente, percebemos algo interessante:

B15: Eu não entendi nada. Estava falando de sequência e agora é função? Tá doido, que confusão.

B8: Quem deve saber isso é o B6, porque ele é repetente.

B6: Não me lembro disso. Acho que estudei função... sei lá, tinha um tal de delta. Acho que é isso. Mas não sei mais.

B7: Eu acho que tem a ver com sequência sim. Olha essa palavra "conjunto".

B3: Nada a ver. Conjunto é outra coisa.

B7: É mesmo. E você lembra o que é conjunto?

B3: Lembro sim. A gente abria as chaves e colocava números tipo 1, 2, 3, 4 e fechava as chaves. Isso era conjunto.

B7: Então isso é sequência.

B3: Oh é mesmo!

B10: E tem essa palavra "ordenado". Quer dizer que está em ordem. Parece que essa matéria é fácil.

B8: Fácil nada. Não tem nada fácil em matemática.

Professora: Mais alguma coisa, pessoal?

B17: Fala se é isso mesmo, uai.

Professora: Vamos comentar sobre isso nas próximas aulas.

Extraído da gravação da turma M

Esse diálogo demonstra que o aluno tem poucas lembranças do que estudou no ano anterior. A esse respeito, encontramos pesquisas como a de Ponte et al. (2009), que acreditam que os conteúdos algébricos ainda são trabalhados por meio de um conjunto de regras e técnicas de resolução de exercício, o que contribui para a falta de compreensão dos conteúdos estudados. Além disso, de acordo com Vale e Pimentel (2011), quando não há conexões entre os conteúdos, o estudante fica limitado a "a recordar um conjunto de fatos, conceitos e procedimentos de forma isolada" (VALE; PIMENTEL, 2011, p1), o que pode contribuir para situações como a descrita.

Embora aparentemente simples essa tarefa foi muito importante para o desenvolvimento das próximas atividades que compõem a pesquisa. É notório como os alunos

já trazem um conhecimento prévio a respeito de sequências sendo que, em muitos casos, conseguem fazer uma conexão com os conteúdos matemáticos.

Durante as tarefas foi possível iniciar várias discussões, além de rever alguns conteúdos matemáticos que os alunos já haviam aprendido em anos anteriores. Além disso, a presença de palavras como "padrões, regras de formação, ordens, Funções", entre outras, foram oportunas para mobilizar alguns conhecimentos dos alunos com vistas no objetivo final da pesquisa.

Nesse sentido, percebemos que um trabalho envolvendo "sequências e padrões" demanda tempo e propostas variadas. Para autores como Kieran (2004), Carraher et al (2000), entre outros, é necessário que esse trabalho seja desenvolvido durante todos os anos de escolarização, porém isso nem sempre acontece. Embora essas diretrizes sejam apresentadas nos PCN´s, os livros didáticos não trazem essa abordagem, o que pode contribuir para que muitos professores não percebam a importância das sequências e padrões para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos. De acordo com Vale e Pimentel (2011), "a procura de padrões numa dada situação mobiliza vários conceitos e capacidades matemáticas" (VALE; PIMENTEL, 2011, p.2), o que pode contribuir, segundo Blanton e Kaput (2004), para o desenvolvimento das relações funcionais.

A seguir, apresentaremos o resultado da segunda tarefa referente à primeira atividade.

4.1.2 – Atividade I. Tarefa 2: Qual é o próximo número da sequência?

Para essa tarefa, utilizamos algumas sequências simples com o objetivo de introduzir aos alunos outros exemplos semelhantes aos anteriores, porém, um pouco mais complexos dos que foram apresentados por eles. De acordo com Kieran (2004) e outros pesquisadores, esse trabalho deverá ser gradual sendo que as situações apresentadas devem ser cada vez mais complexas, possibilitando aos alunos a construção de generalizações.

Além disso, o desenvolvimento das relações funcionais, que é o objetivo desta pesquisa, pode acontecer, de acordo com Matos e Ponte (2008), por meio de "processos importantes do raciocínio matemático como a identificação de padrões e regularidades, a representação, a generalização e a particularização" (MATOS; PONTE, 2008, p.202).

Por esse motivo dividimos essa tarefa em quatro etapas, sendo:

- 1ª etapa: "Qual é o próximo número da sequência?", que foi realizada individualmente e aberta para discussão;

- 2ª etapa: “Desafios da internet”, também realizada individualmente;
- 3ª etapa: “Para casa”;
- 4ª etapa: Discussão do “Para casa” e apresentação para a turma, que foi realizada em grupo.

Essa tarefa foi realizada nos dias 19, 20, 26 e 27/04, com a seguinte distribuição:

- Turma P: 20 e 27/04;
- Turma M: 19 e 26/04;
- Turma B: 20 e 27/04.

Iniciamos a tarefa entregando aos alunos a questão a seguir:

Questão 1: Qual é o próximo número das sequências a seguir?

a) 1, 3, 5, 7, 9, 11...
b) 1, 2, 4, 7, 11...
c) 1000, 990, 970, 940, 900, 850...

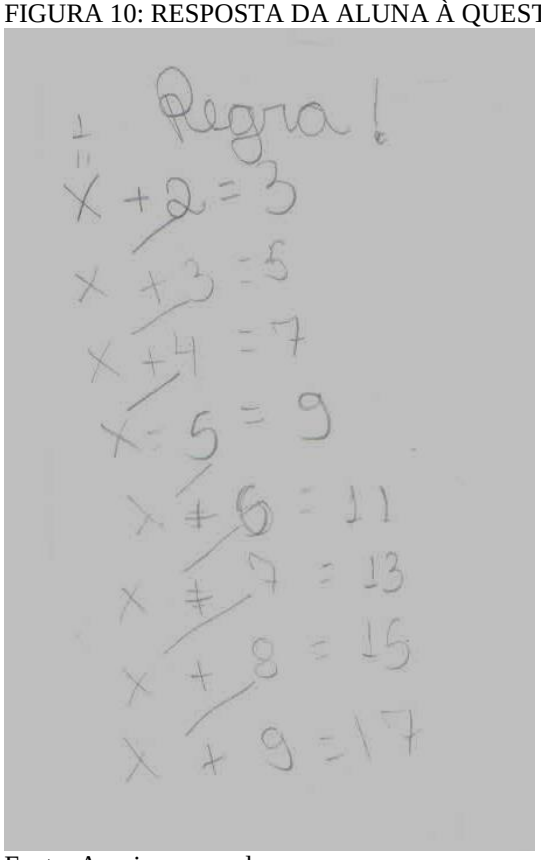
Os alunos das três turmas responderam essa questão rapidamente. Recolhi as folhas e escrevi as sequências no quadro para que discutíssemos as respostas. Iniciei com as perguntas: “qual seria o próximo número de cada sequência?” e “como eles encontraram a resposta?”.

Os alunos não encontraram dificuldades em responder à primeira pergunta, porém, perceberam que poderia haver diferentes respostas para a segunda.

Em relação à primeira sequência, destacamos algumas respostas:

- A aluna B10 escreveu uma “regra”:

FIGURA 10: RESPOSTA DA ALUNA À QUESTÃO 1- A), TAREFA 2



Fonte: Arquivo pessoal

Analisando a resposta apresentada pela aluna B10, é possível identificar a utilização da letra para representar o termo anterior (as linhas desenhadas deixam isso mais claro). Nesse caso não há indícios de generalização, porém, é uma etapa importante e necessária. A esse respeito, Vale et al. (2007), acreditam que "encontrar o termo seguinte de uma sequência é normalmente o primeiro passo para chegar à álgebra" (VALE *et al.*; 2007, p.6). Para Ponte et al. (2009), a aluna utilizou uma estratégia aditiva com uma abordagem recursiva.

Já as respostas a seguir sugerem, de acordo com Ponte et al. (2009), que os alunos utilizaram uma estratégia de representação e contagem.

- Para o aluno B12 trata – se de "uma sequência dos números ímpares".
- O aluno P26 apresentou a ideia de "Somar o anterior mais dois" e a aluna P20 complementou com a frase "Desde que o anterior seja ímpar". A esse respeito, a aluna P7 lembrou que eram apenas os números positivos.

Observar as diferentes respostas é importante para a percepção da maturidade de cada aluno. Embora sejam próximas, percebemos que o aluno B12 percebeu que se trata de um

determinado conjunto de números, enquanto a aluna P7 já conseguiu perceber uma regra para a construção da sequência. De acordo com Blanton e Kaput (2005), os alunos já estão envolvidos em um raciocínio algébrico, porém de forma diferenciada. Nesse caso a aluna P7 observa a sequência utilizando um padrão recursivo que, de acordo com os estudos de Radford (2006), trata-se de uma generalização aritmética.

No caso da segunda sequência, percebemos que muitos alunos conseguiam compreender a regra, porém, não conseguiam explicá-la. As falas que destacamos são:

- P1: É só ir pulando: primeiro um, depois dois, depois três e assim vai.
- P26: É o número mais a sequência de números. (eu não estou sabendo explicar...). É assim: você pega o número que deu e vai somando com a sequência de números positivos.
- P20: Pega o primeiro e soma com um e dá o segundo. Depois pega o segundo e soma com dois, que dá o terceiro. É sempre o número com ele mesmo.

FIGURA 11: DISCUSSÃO A RESPEITO DAS SEQUÊNCIAS APRESENTADAS

Fonte: Arquivo pessoal

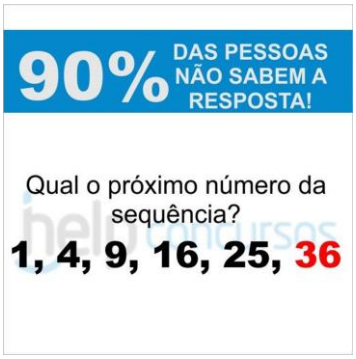
Nesse caso, foi possível observar o quanto construir generalizações demanda tempo. Muitos alunos percebem o que acontece na sequência, porém, não conseguem escrever uma regra válida para ela. Percebe-se, nesse sentido, que os alunos conseguem construir generalizações aritméticas que, de acordo com Radford (2006), são mais pobres por não permitir descrever o que acontece com qualquer termo da sequência. No entanto, é importante lembrar que se trata de um processo contínuo e gradual, e que deve ser explorado desde os

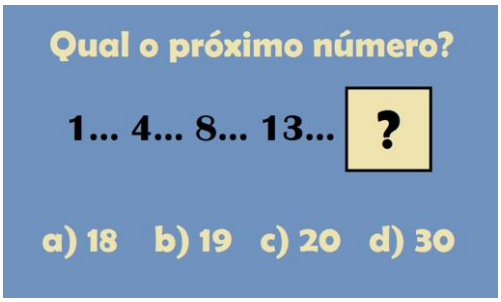
anos iniciais de escolarização. E, uma vez que não tenha sido explorado nas séries anteriores, devemos esperar que os alunos, ainda que sejam do 9º ano, ainda apresentam suas respostas utilizando a aritmética.

Nesse sentido, acreditamos que, por meio de situações como essas, é que os alunos vão desenvolvendo linguagens cada vez mais elaboradas, aproximando-se mais da linguagem matemática. O item "c" também gerou algumas discussões, semelhantes às que ocorreram no item anterior.

A segunda questão traz dois desafios que foram retirados da internet. O objetivo dessa proposta seria trazer situações que os alunos encontram facilmente nas redes sociais para o contexto escolar.

Questão 2: Vamos resolver alguns desafios encontrados na internet:

a) 

b) 

Fonte:https://www.quandoqualquercoisa.pt/desafio-logica-sequencia-numeros-consegue-resolver/

A folha[20] foi entregue aos alunos e solicitei que respondessem as questões.

O passo seguinte foi a entrega da terceira questão.

Questão 3

a) É possível estabelecer uma regra para descobrir o próximo número em cada situação?
b) De que maneira?

Ao recolher as folhas, percebi que poucos conseguiram explicitar uma regra, especialmente no item "b", embora a maioria tenha apresentado o resultado corretamente.

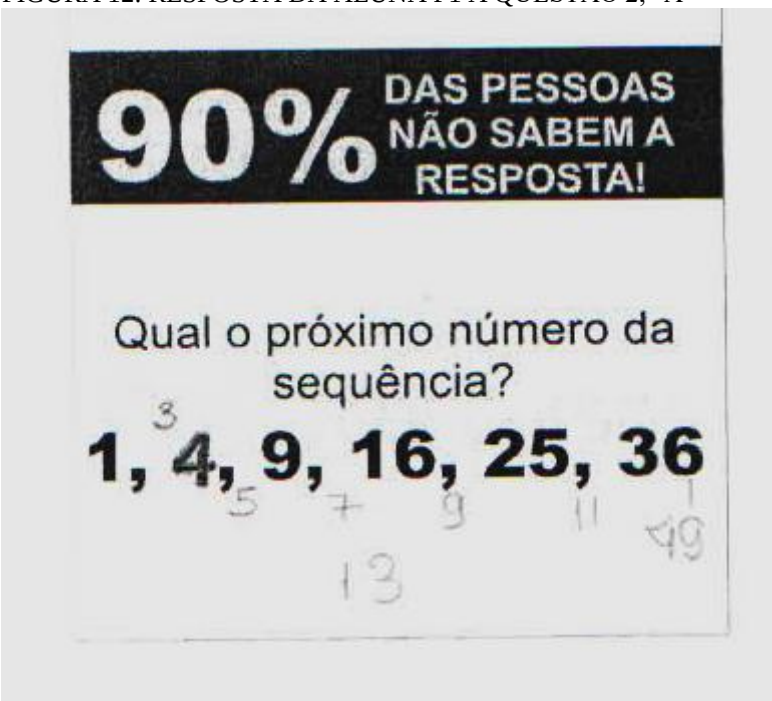
[20] As duas primeiras questões estavam na mesma folha, porém, foram separadas no momento da aplicação da tarefa. O objetivo foi que os alunos se concentrassem em cada questão.

Consideramos aqui as respostas e as justificativas ao item a)

- Das três turmas, 5 alunos não responderam ao item;
- Apenas a aluna M 26 não encontrou o resultado corretamente.

Em comum, 12 alunos das três turmas apresentaram a justificativa a seguir:

FIGURA 12: RESPOSTA DA ALUNA P1 À QUESTÃO 2, “A”

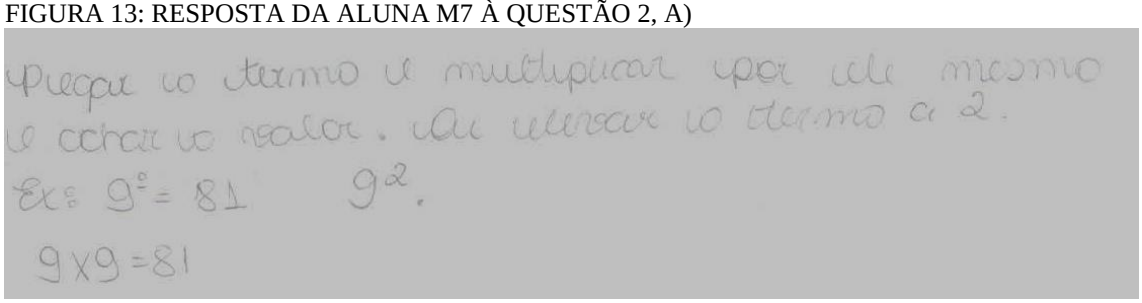


Fonte: Arquivo pessoal

Acredita-se que os alunos que utilizaram essa justificativa perceberam um padrão crescente, uma vez que os números que representam as diferenças entre os termos consecutivos cresciam de “2 em 2”. Mais uma vez percebemos o raciocínio recursivo e uma generalização aritmética, de acordo com os estudos de Radford (2006).

Outros 10 alunos apresentaram justificativas similares à que foi apresentada pela aluna M7:

FIGURA 13: RESPOSTA DA ALUNA M7 À QUESTÃO 2, A)


Pegar o termo e multiplicar por ele mesmo e achar o valor. Ou elevar o termo a 2.
Ex: $9^2 = 81$ 9^2.
9x9=81

Fonte: Arquivo pessoal

Nesse caso, é possível perceber, de acordo com Radford (2010), que esses alunos já conseguem obter uma expressão geral a partir de casos particulares. De acordo as pesquisas desenvolvidas por Radford, Kieran, entre outros autores, generalizar é perceber o que há de comum em uma situação apresentada e saber que essa semelhança pode ser aplicada a todos os termos de uma sequência.

Há um destaque para a resposta da aluna M25. Trata-se de uma estudante que tem dificuldades em vários conteúdos. Para avaliar seu desempenho, os professores, no momento dos conselhos de classe (reunião para discutir a situação dos alunos durante cada etapa), levam em consideração a persistência, o comprometimento e a assiduidade para estabelecer uma nota. Caso contrário, essa aluna já teria sido reprovada algumas vezes. O que chamou a atenção foi a rapidez com que ela concluiu que para achar o próximo número da sequência bastaria multiplicar o número por ele mesmo. Os colegas não deram credibilidade a sua resposta no início, porém ela defendeu a sua posição até convencer os outros. E, durante o desenvolvimento desta pesquisa, a aluna seguiu participando com entusiasmo e contribuindo com boas sugestões.

O item “a” gerou muitas discussões, não sobrando tempo para explorar o item “b”. Como houve, nas três turmas, apenas cinco justificativas, não as trouxemos para discussão. Finalizamos a tarefa com a entrega e explicação do “Para casa”, que deveria ser discutido e apresentado na semana seguinte. Esse prazo de uma semana não foi intencional, mas sim por outras atividades que os alunos deveriam fazer nos dias seguintes.

A justificativa para essa questão repousa nas ideias de Ponte et al. (2009), quando afirmam que é “importante que, para além de continuar sequências dadas, os alunos possam explorar e descrever sequências” (PONTE et al.; 2009, p.58). Desse modo, foi possível que cada um pesquisasse ou desenvolvesse uma sequência, pensando na sua lei de construção.

Para Casa

Questão 4

Pense em um desafio, que envolva sequência numérica, para ser apresentado aos colegas.

No dia previsto para a discussão do “Para casa”, estavam presentes:

- Turma P: vinte e oito alunos;
- Turma M: vinte e quatro alunos;
- Turma B: quinze alunos.

Inicialmente olhei os cadernos (como costume) e expliquei que os alunos deveriam formar grupos.

Cada grupo apresentaria os desafios que tinha trazido e escolheria um deles para ser apresentado para os outros colegas da turma. Essa tarefa teve como objetivo estimular os alunos a pesquisarem ou construírem sequências numéricas para desafiar os colegas. Implicitamente, eles estavam sendo desafiados a pensarem ou descobrirem a regra de construção, que contribui, de acordo com os nossos estudos, para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A aula foi, nas três turmas, muito interessante. A maioria dos desafios foi retirada da internet, porém alguns foram elaborados pelos próprios alunos. Foi possível perceber o envolvimento de muitos que, em outras aulas, são pouco participativos.

Destacamos algumas respostas:

Na turma P, o quinto grupo a se apresentar escreveu no quadro a sequência:

Grupo 5: 1, 8, 29, 92, 281...

P26: Essa é bem difícil. Quero ver vocês conseguirem.

P18.: Vocês vão ter que resolver na raça.

P26: Eu passei para o pessoal lá de casa e ninguém conseguiu.

P27: Aí é sacanagem, né?

P21: Vai gente.

Retirado da gravação da turma P

Os alunos tentaram, por um tempo, descobrir a regra da sequência, porém, não conseguiram chegar a uma conclusão. O aluno P20 tenta resolver a questão, pede para ir ao quadro e faz algumas tentativas, sem sucesso. Nesse momento, o aluno P26 explica a regra com um exemplo no quadro: $1 \times 3 + 5 = 8$:

P12: Mas qual é a regra? O número vezes três mais cinco.

P28: Mas e o um? (os alunos não escutaram)

P13: P26, eu pensei assim, porém não dá certo com o um. No caso, o primeiro número deveria ser o cinco.

Retirado da gravação da turma P

Nesse caso, os alunos perceberam que a regra não era válida para o primeiro número. O grupo encerrou a apresentação para que os outros grupos se apresentassem, porém a discussão continuou mesmo após o final das apresentações, quando faltavam alguns minutos para o término da aula. Todos do grupo se reuniram na carteira de P13 e coloquei o gravador próximo ao grupo para registrar a conversa. Alguns trechos da discussão foram importantes:

P26: Não entendi, P13. Porque cinco?

P13: Se a sequência começasse com zero, seria três vezes o zero mais cinco. Aí começava com cinco. Mas, como começou com um, seria três vezes um mais cinco. Seu primeiro número deveria ser o oito.

P26: Oh P21, chega aí. Nossa sequência deveria ter começado com o oito. Por isso a galera não entendeu.

P13: Mas eu acertei né, "véio"?

P26: Acertou. Professora, se der tempo, podemos falar com a turma?

Professora: Se der tempo, vocês falam. Ou deixem para a próxima aula.

Retirado da gravação da turma P

Merece destaque a persistência dos alunos em chegar a uma conclusão. E isso ficou claro quando, na aula seguinte, perguntei ao grupo de eles gostariam de comentar o desafio proposto por eles. Fui surpreendida com o fato de os alunos já terem solicitado ao professor de Ciências que deixasse alguns minutos da aula para esclarecerem a questão. Essa atitude demonstra o quanto essa tarefa foi importante para eles.

Ainda que esses alunos estejam no campo das generalizações aritméticas, percebemos certa evolução ao tentarem estabelecer uma regra e "testá-la" para todos os termos. É importante lembrarmos, no entanto, que muitos desses tiveram pouca ou nenhuma oportunidade de trabalhar com sequências e padrões nos anos anteriores. Nesse sentido, esperávamos certa dificuldade, uma vez que "ao longo de toda escolaridade, a análise de sequências permite aos alunos progredir de raciocínios recursivos para raciocínio envolvendo relações funcionais" (PONTE et al., 2009, p.41).

Foram muitos desafios interessantes propostos pelos alunos, que nos permitiram relembrar alguns conceitos vistos anteriormente como números primos e raízes e potências. Esses momentos foram, sem dúvida, importantes para algumas revisões e retomadas de alguns conteúdos. São as conexões que, de acordo com Vale e Pimentel, são fundamentais para "construir novos conhecimentos sobre os conhecimentos previamente adquiridos, mas de forma integrada" (VALE; PIMENTEL, 2011, p.1).

Outra sequência apresentada, por um grupo da turma 15, foi a Sequência de Fibonacci. Embora não soubessem de que se tratava de uma sequência conhecida, o grupo colocou o desafio no quadro:

Grupo 5: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

As discussões a respeito dessa sequência foram:

M12: O próximo número é o 34.

M23: Por que?

M12 e M22 ao mesmo tempo: Porque soma o da frente com o de trás.

M12: O primeiro mais o segundo dá o terceiro. O segundo mais o terceiro dá o quarto.

M21: Está certo.

Maria: Vocês estão bons nos desafios, hein?

Extraído da gravação da turma M

As respostas ainda representam um raciocínio recursivo com possibilidades limitadas de encontrar qualquer termo da sequência.

Resumindo, a maior parte dos exemplos trazidos pelos alunos apresentaram características semelhantes às que foram mencionadas. Tratam-se, se acordo com Ponte et al (2009), de sequências crescentes, cuja estratégia de resolução, geralmente, é aditiva, que tem por base uma abordagem recursiva. Para esses autores, "esta estratégia muitas vezes constitui um obstáculo à determinação da relação entre cada termo e sua ordem", podendo "conduzir a generalizações erradas" (PONTE et al., 2009, p.45).

A título de síntese dessa primeira atividade, observamos que poucos alunos conseguiram apresentar generalizações algébricas, o que aconteceu, exclusivamente, na Questão 2 item a). Todavia, a percepção das regularidades e a construção das regras que envolvem as sequências é algo que os estudantes percebem mais naturalmente, uma vez que, de acordo com Vale e Pimentel (2011), a busca por padrões faz parte da atividade humana.

4.2 – Atividade II: Introduzindo Funções a partir de generalizações

Essa atividade é composta por três tarefas. As duas primeiras tiveram como objetivo explorar a construção de generalizações por meio de sequências e padrões geométricos. A terceira trata-se de uma situação-problema cujos objetivos serão apresentados posteriormente.

4.2.1 – Atividade II. Tarefa 1: Observando e generalizando padrões

Essa tarefa teve como objetivo investigar a compreensão, pelos alunos, do termo geral ou da lei de formação de uma sequência. Esse tipo de atividade é pouco explorado nos livros didáticos e consequentemente, não entra do planejamento de alguns professores, o que posso dizer por experiência própria. Espera- se, com essa tarefa, que o aluno consiga calcular a quantidade de quadradinhos de uma figura em uma determinada posição, ainda que utilizando desenhos das figuras em uma posição longínqua ou com um número grande de quadradinhos. De acordo com Vale e Pimentel (2011), "a utilização de padrões figurativos incentiva a conexão entre os números, a álgebra e a geometria suscitando diferentes representações e a abordagem de tópicos como as características das figuras (...)" (VALE; PIMENTEL, 2011, p.5).

Corroborando as ideias de Ponte *et. al.* (2009a), tivemos como objetivos para a realização dessa atividade que os alunos conseguissem:

- Reforçar a compreensão da noção de termo geral de uma sequência e da sua representação utilizando símbolos matemáticos;
- Mostrar que são capazes de determinar o termo geral de uma sequência, bem como termos de várias ordens a partir do termo geral e ordens correspondentes a vários termos;
- Exprimir resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente ou por escrito, usando notação, simbologia e vocabulários próprios. (PONTE et al., 2009a, p.31)

Essa tarefa foi realizada no dia 13 de agosto de 2018 e foram utilizadas duas aulas de cinquenta minutos cada para o seu desenvolvimento. Estavam presentes 26 alunos.

Inicialmente, os alunos receberam as questões e responderam individualmente. Em seguida, eles formaram grupos, aleatoriamente, com o objetivo de discutirem as questões, e finalmente eles apresentarem as conclusões aos outros colegas.

Optamos por fazer a análise das três primeiras questões.

Tarefa II.1- Observando e generalizando padrões

Observe a sequência de figuras abaixo e responda:

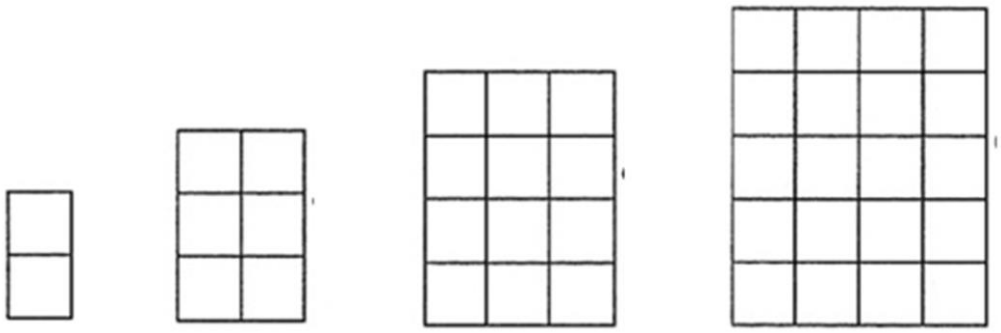


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Questão 1: Desenhe as duas próximas figuras dessa sequência.

Questão 2: Qual a quantidade de quadradinhos da 6ª figura da sequência? E da sétima?

Questão 3: Sem desenhar, quantos quadradinhos teriam a

a) 10ª figura?

b) 15ª figura?

c) 23ª figura?

d)Justifique sua resposta.

Na Questão 1, solicitamos que os alunos desenhassem as duas figuras seguintes da sequência. Esse item teve como objetivo observar se os alunos compreenderam a formação da sequência e, se eles conseguiriam construir as duas figuras seguintes. Apenas dois alunos não conseguiram representar corretamente as figuras que vinham na sequência, sendo que ambos erraram a quantidade de quadradinhos da figura 6.

Na Questão 2, solicitamos aos alunos que escrevessem o número de quadradinhos que teriam as figuras 6 e 7. Como não mencionamos a necessidade da utilização do desenho, gostaríamos de saber de que forma o aluno conseguiria identificar a 7ª figura (se através do desenho ou utilizando a regra de formação). Nesse item, apenas uma aluna não chegou ao resultado correto para a figura 7. Outra constatação é que nenhum aluno utilizou desenhos para encontrar o número de quadradinhos dessa figura.

Na Questão 3, solicitamos aos alunos que identificassem o número de quadradinhos das figuras 10, 15 e 23 e explicassem a maneira como encontraram os resultados. Essa questão já exigia do aluno uma visão mais global e a identificação da regra de formação dessa sequência. Nesse ponto, os alunos já poderiam expressar os processos de formação da sequência por meio de frases ou mesmo da utilização de símbolos matemáticos.

Pelos resultados obtidos, percebemos que alguns alunos compreenderam a ideia de formação da sequência, porém não conseguiram utilizar a linguagem algébrica para expressá-la.

P29: Eu fiz assim: é só acrescentar um quadradinho em cima e outro do lado e multiplica por dois. Menos a figura 1.
P27: Mas aí não dá o resultado. Na figura dois tem três quadradinhos "em pé" e dois "deitados" (eu confundo vertical e horizontal, mas deu pra entender, né?). Então se você acrescentar mais dois e multiplicar por dois, o resultado é 16. E a próxima figura tem 12.
P4: Não é multiplicar por dois é multiplicar os dois.
P27: Ai confundiu mais ainda.
P29: É porque nós não estamos conseguindo explicar direito. Se você acrescentar um quadradinho em cima e outro do lado e depois contar o total de quadradinhos na vertical e na horizontal e só multiplicar os dois. Entendeu?
P27: Ah! Entendi. Então o jeito que você falou é que ficou estranho. Não é multiplicar por dois e sim os dois.

Extraído da gravação do dia 13/08

O diálogo acima nos permite observar a dificuldade de alguns alunos na compreensão da ideia da formação da lei, ainda que utilizassem a linguagem natural para descrição da sequência. Embora o aluno conseguisse encontrar uma regra válida para a situação proposta, ele ainda não foi capaz de utilizar a linguagem algébrica para definir a situação. De acordo com Ponte (2009), a aluna utilizou uma estratégia aditiva, uma vez que percebeu as diferenças entre um termo e outro.

Para Radford (2006), ao perceber o que há de comum entre as figuras, acontece uma indução ingênua, o que não caracteriza generalização. Ainda de acordo com Radford (2010a), os alunos tendem a recorrer a recursos experienciais mais acessíveis antes de utilizarem uma

linguagem mais estrutural. De acordo com o autor, isso acontece devido à dificuldade que o estudante tem em construir uma generalidade, ainda que em linguagem natural.

Dois alunos utilizaram a linguagem matemática para representar a situação:

P21: n(n+1)
P18: $x^2 + x$.

Extraído do material escrito

As respostas desses alunos nos chamaram a atenção, uma vez que apresentaram uma expressão algébrica. Então, resolvemos solicitar-lhes, em outro dia, que nos explicassem o que haviam pensado:

Professora: P21, gostaria que me explicasse como você chegou a essa conclusão.
P21: Eu pensei assim: a figura 3 tem 3 quadradinhos na horizontal e 4 na vertical. Para calcular é só multiplicar o valor da horizontal pela vertical.
Professora: Mas por que você utilizou $n\ (n + 1)$*?*
P21: É por causa do que eu falei. Na horizontal tem o mesmo número de quadradinhos que indica a figura (apontou para "Figura 3"). Tem três no caso. E na vertical tem quatro. Então eu usei o n *para representar o número da figura e o* $n + 1$ *para saber que tem que multiplicar pelo número que vem depois.*
Professora: Pelo número que vem depois?
P21: Isso. Na vertical vai ter sempre um número que vem a mais. Foi assim que eu pensei.

Extraído da gravação em 16/08/2018

Como percebemos, o aluno já utiliza linguagem e símbolos matemáticos para representar a ideia de sequência, conseguindo fazer generalizações, reforçando assim "a compreensão da noção de termo geral de uma sequência e da sua representação utilizando símbolos matemáticos" (PONTE et al., 2009, p.31). A estratégia utilizada, de acordo com Ponte *et.al* (2009), foi a de decomposição de termos, uma vez que ele conseguiu explicar a possível maneira de calcular qualquer termo dessa sequência.

Já o outro aluno explicou sua resposta da seguinte maneira:

P18: Eu pensei no x porque sempre que queremos calcular alguma coisa que não conhecemos usamos essa letra.
Professora: É uma incógnita?
P18: É isso aí. Se eu for justificar um por um não vai dar certo. Aí eu pensei em uma letra que vai dar certo para qualquer figura.
Professora: Então por que utilizar $x^2 + x$?
P18: Eu pensei no x para representar a posição da figura. Tipo assim se eu quiser calcular o número de quadrinhos da figura 100, então o x vai valer 100. Ai eu elevo 100 a dois e depois eu somo com 100.
Professora: E vai dar certo?
P18: Dá sim. Dá para provar com essas quatro figuras que já está desenhada. Olha a figura 1: 1 elevado a dois dá um e somado mais 1 nós temos dois quadradinhos. Não tem erro.

Extraído da gravação em 16/08/2018

A estratégia utilizada pelo aluno P18 é semelhante à que foi utilizada por P21. O aluno conseguiu, por meio de uma linguagem matemática, explicitar uma generalidade e justificar que é válida para todos os termos.

Outro ponto interessante desse diálogo é perceber que, embora intuitivamente, o aluno tem um conhecimento a respeito de letra como variável. Ao perguntar se "era uma incógnita", obtive uma resposta positiva, ainda que ele percebesse que o valor da letra utilizada poderia variar de acordo com a figura procurada.

Outra resposta que nos chamou a atenção foi:

P26: O termo vezes 2 mais o resultado anterior.

Extraído do material escrito

É possível identificar a generalização algébrica, ainda que utilizando a linguagem materna.

Observando as gravações, percebemos como esse aluno foi insistente em tentar provar a sua justificativa, embora o grupo não concordasse com ele:

P26: A justificativa para a número três é o termo vezes dois mais o resultado anterior.

P13: Não seria o termo elevado a dois não?

P26: Não. Eu fiz assim. Se for o termo elevado a dois não dá certo. 3: É o termo vezes ele mesmo mais o termo.

P8: Que doideira, P13. Isso não dá certo não.

P12: É o termo elevado a dois.

P8: Então o termo vezes o termo do P13 é o termo elevado a dois.

P26: Mas não dá certo não. A figura três por exemplo: 3×3 *e dá 9.*

P13: Mas aí soma mais três. E dá 12.

P12: Viajou demais.

P26: É isso mesmo: $3 \times 3 + 3 = 12$. *Conta aí gente. Dá 12 mesmo.*

P12: Então multiplica por dois?

P8: Não. Eleva a dois. É o número por ele mesmo.

P26: Isso mesmo. A figura 4. Temos que multiplicar 4×4 *dá 16. E depois somar mais 4 que dá 20.*

P12: Oh é mesmo. Eu não estava entendendo essa conta. Agora deu certo.

Extraído da gravação

Esse fato nos motivou a chamar o aluno, em outra aula, para explicar o que ele havia pensado para chegar àquela conclusão. Como não tínhamos gravador no momento, registramos a conversa imediatamente a fim de preservar seus detalhes:

Professora: Gostaria que explicasse como você chegou a essa justificativa.
P26: Foi fácil. Eu peguei a figura 1 (apontando para a figura) e encaixei aqui na figura dois. Aí sobraram dois quadradinhos em cima e dois do lado.
Professora: Explique melhor.

Nesse momento o aluno coloriu dois quadradinhos da figura dois e disse:

P26: É isso aqui. O que eu colori é a figura um. Aí sobraram dois quadradinhos em cima e dois do lado. Então duas vezes dois dá quatro mais dois quadradinhos da figura anterior.
Professora: E isso "dá certo" sempre?
P26: Dá sim! (o aluno justificou da mesma maneira com a figura seguinte).
Professora: E quando não conhecemos o número de quadradinhos da figura anterior?
P26: Os "caras" lá do grupo também falaram isso. Mas não é difícil. Se eu quiser saber quantos quadradinhos terá a figura 100, por exemplo, eu sei que terão cem quadradinhos do lado e cem na parte de cima.
Professora: E quantos quadradinhos têm na figura anterior?
P26: São cem. É o que "dá para encaixar" na figura. Desse jeito fica fácil encontrar a figura que vem antes e a que vem depois.
Professora: Então a 99º figura tem 100 quadradinhos?
P26: Sim! (pensando...). Espera aí. Não pode ter 100 não. Não tem jeito de dar cem quadradinhos.
Professora: Mas por quê?
P26: Porque se eu multiplicar 99 por dois dá 198. Muito mais que 100. Espera aí professora. Deixa que eu vou fazer uns cálculos aqui.

Extraído do diário de campo

Continuei trabalhando os conteúdos quando o aluno chamou e mostrou um papel com contas e desenhos.

P26: Acho que a resposta é 9900. A figura anterior à centésima tem 9900 quadradinhos. Eu fiz uma "embolada aqui", mas é isso. Se colocar 100 quadradinhos na parte de cima e 100 do lado teremos 100 linhas e 99 colunas. Multiplicando dá esse resultado. É isso mesmo?

Registro do diálogo em 17/08/2018

Nesse exemplo, percebemos a ideia de recorrência, bem como a utilização da representação geométrica como justificativa para o resultado. De acordo com Radford (2006), o aluno conseguiu construir uma generalização ao elaborar um esquema para encontrar outros elementos da sequência.

A busca do aluno por uma explicação válida para essa questão nos remete às ideias de Radford (2010a), quando afirma que o pensamento algébrico são as ações utilizadas pelos estudantes por meio das tarefas generalizadoras. O autor cita ainda Vygotsky, ao afirmar que *"a compreensão da linguagem escrita é feita através da fala oral, mas gradualmente esse caminho é encurtado, o elo intermediário na forma de fala oral desaparece e a linguagem escrita torna-se um símbolo direto tão compreensível quanto a fala oral* [21]"(Tradução nossa).

Voltando aos objetivos propostos para essa tarefa, observamos que muitos alunos já conseguem apresentar uma noção do termo geral de uma sequência, porém apenas alguns conseguiram expressá-lo por meio da linguagem algébrica. A esse respeito, Ponte *et.al* (2009a), acreditam que "uma generalização acerca de uma sequência pode ser representada usando palavras ou expressões algébricas" (PONTE et al, 2009a, p. 4).

Todavia, encontramos em Radford (2006) a citação de Kieran (1998), ao defender que apenas a capacidade de ver o geral no particular não é necessariamente generalização. Para isso, de acordo com a autora, é preciso ser capaz de representar algebricamente, de uma forma que o torna distintamente algébrico.

A esse respeito, acreditamos que tarefas com esses objetivos são pouco exploradas na Educação Básica. Por esse motivo não podemos esperar que os alunos consigam construir generalizações algébricas sem que antes trabalhem com a aritmética generalizada, a linguagem oral e a indução ingênua (ou tentativas e erros).

[21] "Understanding written language is done through oral speech, but gradually this path is shortened, the intermediate link in the form of oral speech drops away and written language becomes a direct symbol just as understandable as oral speech." (VYGOTSKY 1997 *apud* RADFORD 2010 a, p. 258)

4.2.2 - Atividade II.2: Sequência de mesas e cadeiras

Essa tarefa tem por objetivo contribuir para a construção o conceito de funções a partir de sequências e padrões. Baseada em uma proposta de Carraher et al (2007), trata-se de uma atividade já apresentada em outros trabalhos ou dissertações como a de Veloso (2012), cujo objetivo era analisar como a percepção e generalização de padrões e sequências podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico e da linguagem algébrica. No caso específico da nossa pesquisa, gostaríamos de verificar se os alunos associam, ainda que intuitivamente, o conceito de funções a essa situação.

A aula aconteceu no dia 03/09/2018 e estavam presentes 26 alunos. Utilizamos duas aulas de cinquenta minutos para a realização da atividade. Optamos por um trabalho individual e, posteriormente, uma discussão a respeito dos resultados obtidos. De acordo com Carraher et al (2007), “diferentes maneiras de "visualizar" um padrão são equivalentes a diferentes conceituações que podem se adequar a diferentes expressões algébricas” (CARRAHER et al, 2007, p. 14), o que justifica essa escolha de um trabalho individual com o objetivo de percebermos a ideia apresentada por cada aluno.

FIGURA 14: APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Fonte: arquivo pessoal

Carraher et al. (2007) desenvolveram esse trabalho no programa *Early Álgebra* em escolas americanas com crianças entre 8 e 11 anos que estavam no 3º ano de escolarização. Esse programa é desenvolvido com alunos dos anos iniciais, uma vez que o autor e sua equipe acreditam que o trabalho com os conteúdos algébricos deve acontecer gradualmente a partir dos primeiros anos de escolarização.

Trazer essa proposta para uma turma de 9º ano é uma aposta para a introdução de Funções, uma vez que os alunos dessa série provavelmente não tiveram contato com esses

conceitos nas séries anteriores. Esse fato está relacionado ao plano de curso, que prevê que esse tópico seja trabalhado apenas na série supracitada.

Carraher *et al.* (2007) acreditam que não é possível a compreensão de Funções apenas através das expressões fechadas ou das técnicas de resolução. É preciso que esse trabalho seja desenvolvido gradualmente. Nesse sentido, o trabalho com padrões e sequências pode ser um caminho que conduzirá o aluno a uma percepção recursiva, à ideia de generalização e construção de uma expressão algébrica fechada, à compreensão das variáveis dependentes e independentes e ao entendimento de todos os conceitos de funções. De acordo com os autores, um trabalho com sequências é um caminho para a compreensão do conceito de Função, porém, não é correto que o aluno pense que uma Função é uma sequência. O autor sugere um trabalho sistemático com foco nas generalizações que, ao se tornarem mais elaboradas e internalizadas, possibilitam a compreensão das variáveis dependentes e independentes.

Assim, utilizamos alguns critérios de análise propostos por Carraher et al. (2007), com foco na percepção da ideia de funções para as manifestações dos alunos apresentadas na tarefa "Contando mesas e cadeiras". Os autores perceberam duas categorias específicas com algumas subcategorias.

Na primeira categoria, foram agrupados os alunos que tratam o número de assentos ou pessoas como uma sequência recursiva e, na segunda categoria, aqueles que conseguiram perceber que um número está em função do outro. Nesse sentido, temos:

Sequência recursiva

- Generalização recursiva utilizando apenas uma coluna de saída: nessa fase o aluno compreende que a cada mesa que for acrescentada é possível acrescentar mais duas cadeiras. Geralmente conta-se "um a um" ou utilizam-se desenhos para chegar a um resultado qualquer.
- Generalização recursiva utilizando uma coluna auxiliar: o aluno consegue perceber uma regra de formação, através de uma operação em que se utiliza um número de "entrada" para chegar a um resultado.

Um número está em função do outro

- Contar as cadeiras das bordas associando-as ao número de mesas: nesse caso, o aluno consegue perceber que o número de mesas tem uma relação direta com o número de cadeiras. É possível que seja associado a uma variável o número de mesas ao qual, ao

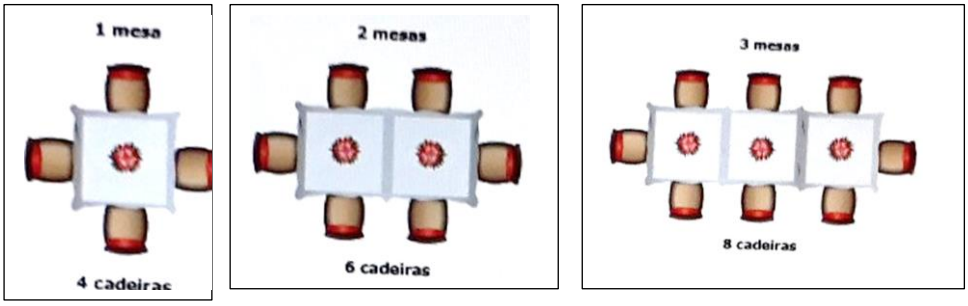
se repetirem por duas vezes, somam-se mais dois considerando as duas cadeiras que estão nas cabeceiras.

- Contar o total de cadeiras e excluir aquelas que estariam entre as mesas: o aluno consegue perceber que em cada mesa há quatro cadeiras e que, a cada mesa acrescentada, duas cadeiras devem ser retiradas.

Iniciamos a aula com uma breve explicação de que se tratava de mais uma etapa da pesquisa. Nesse momento, dissemos que a tarefa deveria ser feita individualmente e da melhor maneira possível. As perguntas estavam distribuídas em duas folhas que foram entregues separadamente, em um intervalo de vinte e cinto minutos, com recolhimento de ambas ao final do processo. A primeira folha trazia as Questões de 1 até 4 e apresentava aos alunos a ideia da tarefa. Na segunda etapa, era necessário preencher a tabela apresentada e responder as questões seguintes.

Tarefa II.2- sequência de mesas e cadeiras – Folha 1

Observe a disposição das mesas em uma determinada situação:



As mesas são dispostas formando uma fila. Continuando essa sequência de mesas e cadeiras, responda:

Questão 1: Escreva o que acontece na sequência apresentada:

Questão 2: Cada vez que é adicionada uma mesa, quantas pessoas a mais podem se sentar?

Questão 3: Pense em uma estratégia para calcular o número de pessoas que poderiam se sentar em uma sequência de 50 mesas:

Questão 4: E se fossem 50 pessoas, quantas mesas seriam necessárias? Justifique sua resposta da melhor forma possível:

Ao solicitarmos aos alunos que escrevessem o que acontece na sequência, obtivemos algumas respostas que destacamos:

- Utilizando a percepção visual "*a cada imagem uma mesa é adicionada*" (P21) ou "*4 mesas = 10 cadeiras e 5 mesas = 12 cadeiras*"(P9). Nesse caso, esses alunos conseguiram, de acordo com Carraher *et al.* (2007), realizar uma generalização recursiva utilizando apenas uma coluna de saída, contando de um em um.
- O aluno P6 apresentou a expressão algébrica "$2m + 2 = c$", em que "m" seriam as mesas e "c" as cadeiras. Nesse caso ele conseguiu perceber, de acordo com Carraher (2007), que um número está em função do outro.
- A aluna P11 não conseguiu perceber corretamente a situação ao afirmar que "*A cada mesa são colocadas quatro cadeiras*". Nesse caso, parece ter contado as mesas separadamente.

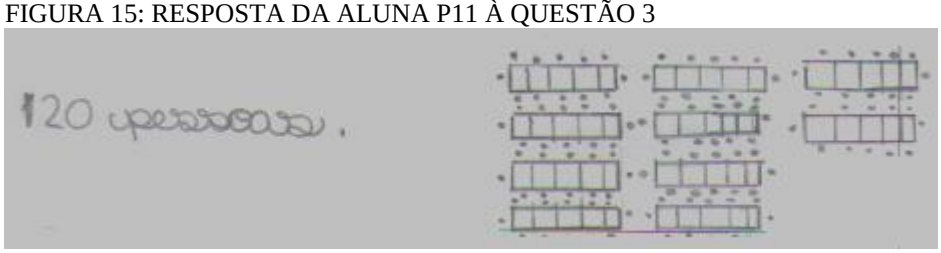
Entre os que perceberam a lei da formação da sequência, 15 alunos apresentaram a resposta: "*a cada mesa colocada adiciona – se duas cadeiras*". Desses, dois escreveram suas justificativas, por meio de linguagem algébrica: o aluno P26 escreveu "$n \times 2 + 2$" e a aluna P7 "$2x + 2$". Com alguma semelhança à resposta anterior, dois alunos concluíram que "*as cadeiras aumentam de dois em dois*". Em todos os casos, os alunos utilizaram a generalização recursiva.

Obtivemos, ainda, duas respostas que enfatizaram a visualização das cadeiras que foram retiradas, porém não estavam corretas. A aluna P15 explicitou que "*a cada mesa adicionada, a mesa que foi adicionada perde uma cadeira e a mesa anterior a ela perde duas cadeiras*", enquanto a aluna P2 disse que "*é acrescentado três cadeiras e retirada duas*".

O que pretendíamos com a Questão 2: "cada vez que é adicionada uma mesa, quantas pessoas podem se sentar?", foi estimular a percepção dos alunos em relação à regularidade com termos constantes. Nessa questão, 23 alunos concluíram corretamente que seriam duas pessoas, 2 alunos afirmaram que seriam 3 pessoas e 1 aluno respondeu que seriam 4 pessoas. Por ser uma questão que previa uma resposta direta, nenhum aluno apresentou justificativa.

Na Questão 3, era necessário que os alunos "pensassem em uma estratégia para calcular o número de pessoas que poderiam se sentar em uma sequência de 50 mesas". Propor esse número foi estratégico, uma vez que eles poderiam chegar à resposta utilizando desenhos, contando de "um em um", ou mesmo formulando uma expressão aritmética para a obtenção de resposta. Observou-se que 8 alunos não conseguiram chegar à resposta correta. Desses, destacamos a resposta da aluna P11, que não considerou que as mesas deveriam ser dispostas em uma fila.

FIGURA 15: RESPOSTA DA ALUNA P11 À QUESTÃO 3



Fonte: Arquivo pessoal

Ainda em relação à Questão 3, tivemos 18 alunos que chegaram à resposta correta, porém, utilizaram estratégias diferentes: três escreveram a operação aritmética "50. 2 + 2", outros três fizeram algumas operações de soma e multiplicação, três utilizaram frases para justificar a resposta, três representaram através de desenho as mesas e as cadeiras, dois

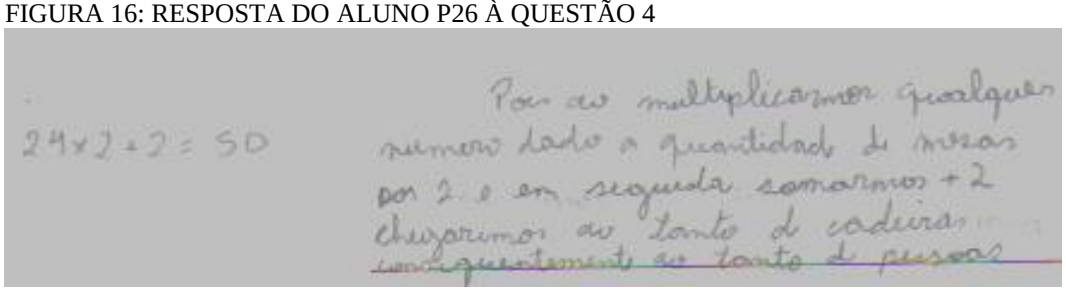
utilizaram a estratégia de contar de “dois em dois” e três alunos utilizaram equações ou expressões algébricas: “ P21: $(x.2) + 2$”, “P18: $2x + 2$” e “P27: $y = (x - 1) + 3$”.

A Questão 4 invertia a lógica utilizada nas anteriores e solicitava aos alunos que pensassem a quantidade de mesas que seriam necessárias para 50 pessoas. Do total, 8 alunos não chegaram a uma resposta correta, sendo que 6 deles também não conseguiram responder a pergunta anterior

Em relação aos 18 alunos que chegaram à resposta esperada, 10 deles desenharam todas as mesas, 5 fizeram associações até obterem a resposta, outros realizaram operações e alguns utilizaram expressões algébricas. Destaque para algumas justificativas: “*24 mesas, porque de acordo com a lei que eu criei é o número de mesas multiplicado por 2, e o resultado adiciona 2*” (P28); e o aluno P21, que obteve a expressão da Função inversa: “ $\frac{x}{2} - 1$" .

Outra resposta que destacamos:

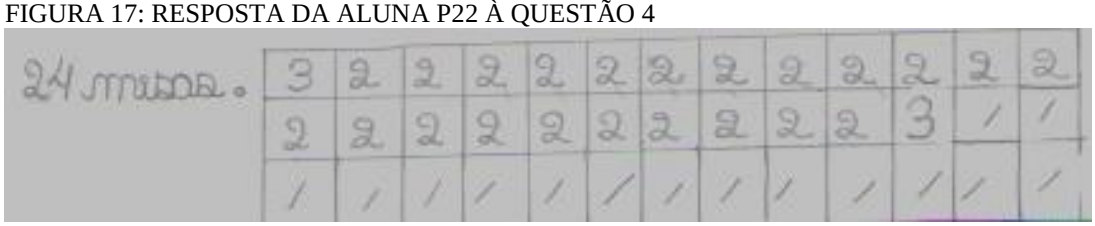
FIGURA 16: RESPOSTA DO ALUNO P26 À QUESTÃO 4



Fonte: material do aluno

Esse aluno já consegue perceber que a quantidade de cadeiras está em função da quantidade de mesas, de acordo com Carraher et al (2007), e que a quantidade de mesas está em função da quantidade de cadeiras também é válido. A ideia de função, ainda que intuitivamente, já está presente em algumas respostas, sendo essa a que ficou mais evidente. Examinamos outra resposta, a da aluna P22.

FIGURA 17: RESPOSTA DA ALUNA P22 À QUESTÃO 4



Fonte: material do aluno

Observa-se que essa aluna percebeu as mesas que estão na cabeceira. Ela ainda se encontra no nível aritmético e recorreu à utilização de desenhos para a obtenção da resposta. Ela utilizou, de acordo com Ponte et al (2009), a estratégia de representação e contagem e, de acordo com Carraher et al. (2007), utilizou a generalização recursiva.

Durante a aplicação dessa tarefa, os alunos fizeram poucas perguntas, sendo a maioria para pedir que eu verificasse se estava certo, se poderiam representar através de desenhos ou ilustrações e ainda "tentar explicar" como haviam feito a questão. Em todos os questionamentos, lembramos que eles deveriam fazer da melhor maneira e não corrigiríamos como certo ou errado; apenas observaríamos o que fora feito.

A segunda folha só foi entregue no momento que a maioria dos alunos já havia terminado a primeira. Essa estratégia teve como objetivo deixar que os alunos refletissem sobre as primeiras questões sem serem influenciados pela tabela.

Tarefa II.2- sequência de mesas e cadeiras – folha 2

Questão 5: Complete a tabela:

Número de mesas	Mostre como chegou à resposta	Número de pessoas
1		
2		
3		
4		
10		
25		
		24
		20
		11

Questão 6: Como é possível saber o número de mesas que é preciso juntar se souberes o número de pessoas que vão se sentar?

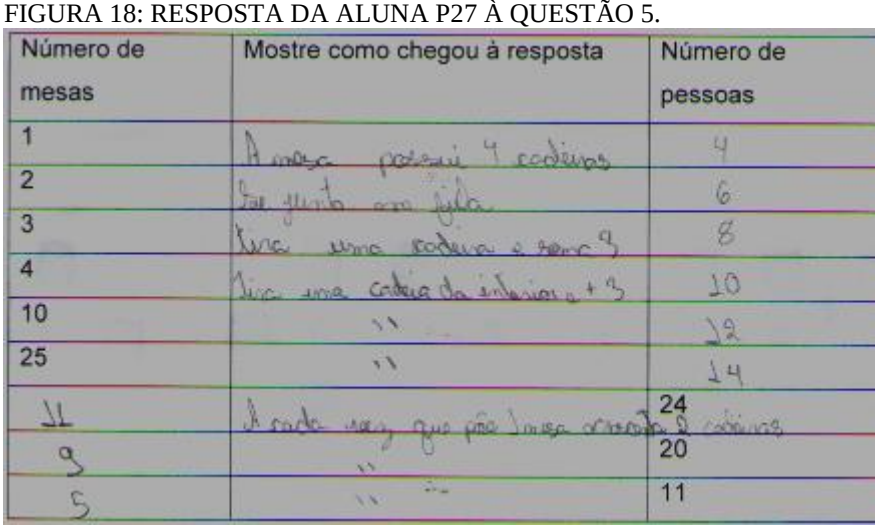
Questão 7: Como é possível saber o número de cadeiras se souber o número de mesas disponíveis?

Questão 8: Quantas pessoas podem se sentar em *n* mesas?

Questão 9: Quantas mesas são necessárias para acomodar X pessoas?

A Questão 5 apresentava uma tabela que tinha como variável independente o número de mesas (número de entrada, segundo Carraher), a variável dependente como número de pessoas (número de saída, de acordo com o mesmo autor) e uma coluna auxiliar para identificar a estratégia utilizada pelos alunos para a resolução da situação apresentada. Na tabela, apresentamos seis “números de entrada” e três “números de saída”. Em relação ao número de pessoas que poderiam se sentar nas cadeiras, tivemos sete alunos que não conseguiram chegar a um valor correto. O maior número de erros foi em relação à quantidade de pessoas que poderiam se sentar em 25 mesas.

FIGURA 18: RESPOSTA DA ALUNA P27 À QUESTÃO 5.



Número de mesas	Mostre como chegou à resposta	Número de pessoas
1	A mesa possui 4 cadeiras	4
2	Se junta em fila	6
3	Tira uma cadeira e sem 3	8
4	Tira uma cadeira da inferior e + 3	10
10	"	12
25	"	14
12	A cada vez que põe 1 mesa acrescenta 2 cadeiras	24
9	"	20
5	"	11

Fonte: material do aluno

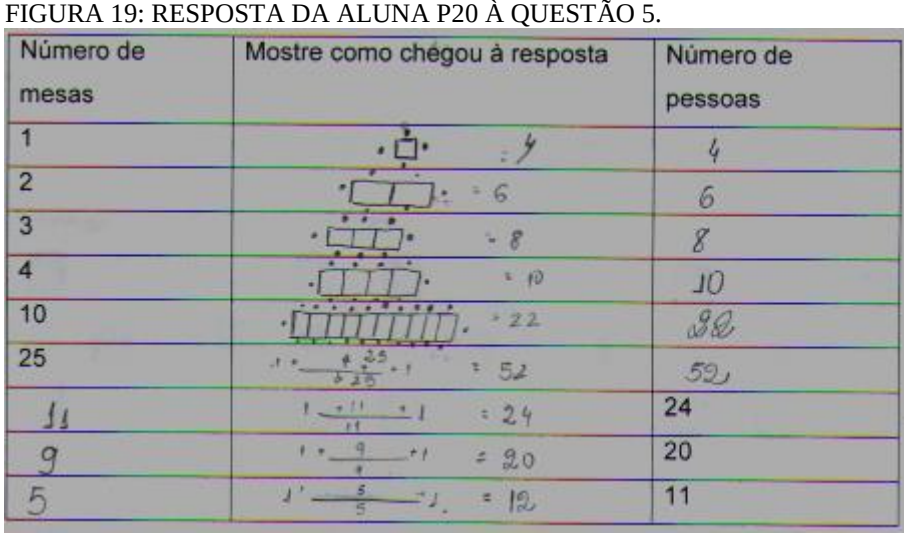
No exemplo exposto, a aluna P27 conseguiu perceber a regularidade, porém não percebeu que, ao contar de “dois em dois”, o número de mesas variava pulando de 4 para 10. Por outro lado, a justificativa utilizada faz certo sentido, uma vez que, ao retirar a cadeira do meio, acrescentam-se as três da mesa que será acrescentada. Nesse sentido seria, de acordo com Carraher et al. (2007), uma generalização recursiva.

De acordo com Schliemann et al. (2013), o trabalho com tabelas serve, a princípio, para representar variáveis e expressar generalizações ainda que não seja a generalização algébrica. Para esses autores, essa forma de representação é mais fácil e acessível para os estudantes do que a notação algébrica, o que não pode ser desconsiderado, sendo um caminho.

Sete alunos usaram exclusivamente desenhos para demonstrar como chegaram à resposta, com destaque para a aluna P20 que, nas três últimas linhas (que envolviam função ou imagem inversa), conseguiu perceber que para compor o número de pessoas bastava contar

o número de pessoas de cada lado e somar com duas pessoas que poderiam se sentar na cabeceira.

FIGURA 19: RESPOSTA DA ALUNA P20 À QUESTÃO 5.

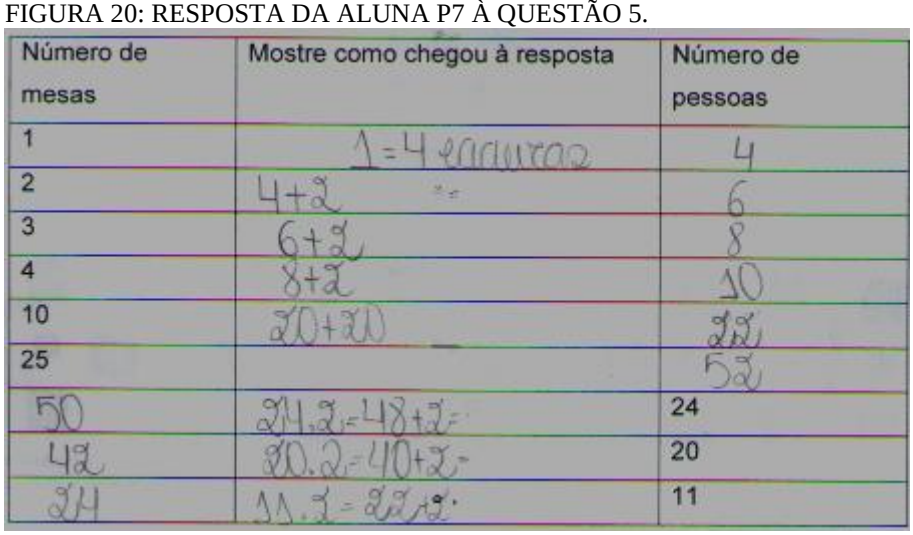


Número de mesas	Mostre como chegou à resposta	Número de pessoas
1	= 4	4
2	= 6	6
3	= 8	8
4	= 10	10
10	= 22	22
25	= 52	52
11	= 24	24
9	= 20	20
5	= 12	11

Fonte: material do aluno

Identificamos oito alunos que utilizaram o raciocínio recursivo utilizando apenas o número de saída.

FIGURA 20: RESPOSTA DA ALUNA P7 À QUESTÃO 5.



Número de mesas	Mostre como chegou à resposta	Número de pessoas
1	1=4 cadeiras	4
2	4+2	6
3	6+2	8
4	8+2	10
10	20+20	22
25		52
50	24.2=48+2=	24
42	20.2=40+2=	20
24	11.2=22+2	11

Fonte: material do aluno

A aluna P7 conseguiu chegar ao resultado somando dois à resposta obtida na linha anterior. Já nos últimos itens a aluna demonstra ter compreendido a ideia, porém não conseguiu perceber a ideia de calcular o número de mesas a partir do número de cadeiras.

Nove alunos conseguiram obter as respostas corretas utilizando a ideia recursiva por meio da coluna de entrada para justificar os cálculos. Como exemplos, temos P28 e P18:

FIGURA 21: RESPOSTA DA ALUNA P28 À QUESTÃO 5.

Número de mesas	Mostre como chegou à resposta	Número de pessoas
1	1.2+2.	4
2	2.2+2	6
3	3.2+2.	8
4	4.2+2	10
10	10.2+2	22
25	25.2+2	52
11	24÷2-1	24
9	20÷2-1	20
4,5	11÷2-1	11

Fonte: material do aluno

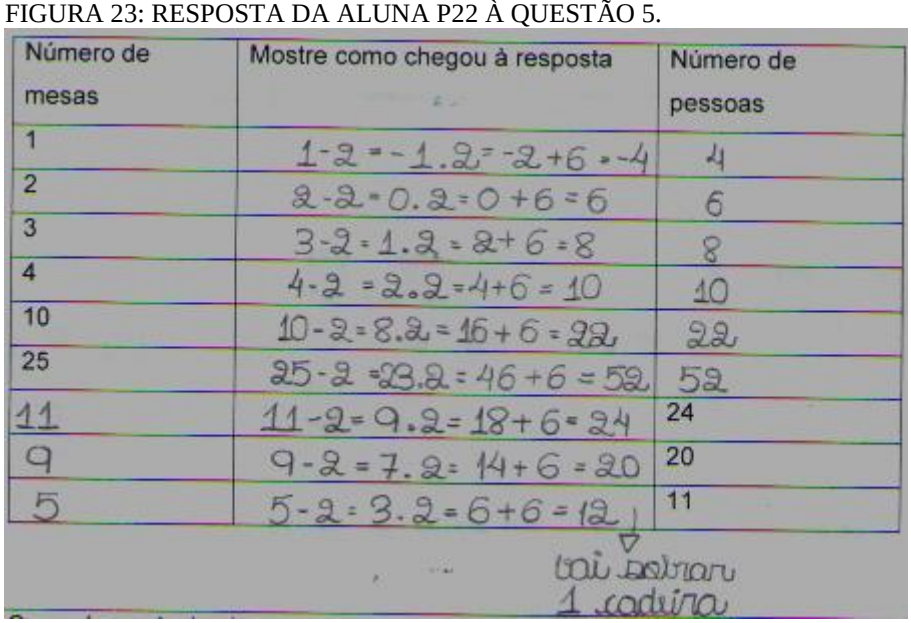
FIGURA 22: RESPOSTA DA ALUNA P18 À QUESTÃO 5.

Número de mesas	Mostre como chegou à resposta	Número de pessoas
1	2X+2	4
2	2X+2	6
3	2X+2	8
4	2X+2	10
10	2X+2	22
25	2X+2	52
11	dividir por 2 depois subtrair 2	24
9	dividir por 2 depois subtrair 1	20
5	dividir por 2 depois subtrair 1	11

Fonte: material do aluno

A forma como a aluna P22 mostrou como chegou à resposta foi interessante. Ela percebeu uma lei que permitia encontrar o resultado por meio da expressão: “número de cadeira menos 2 com o resultado multiplicado por seis”.

FIGURA 23: RESPOSTA DA ALUNA P22 À QUESTÃO 5.



Número de mesas	Mostre como chegou à resposta	Número de pessoas
1	1-2 = -1.2 = -2+6 = -4	4
2	2-2 = 0.2 = 0+6 = 6	6
3	3-2 = 1.2 = 2+6 = 8	8
4	4-2 = 2.2 = 4+6 = 10	10
10	10-2 = 8.2 = 16+6 = 22	22
25	25-2 = 23.2 = 46+6 = 52	52
11	11-2 = 9.2 = 18+6 = 24	24
9	9-2 = 7.2 = 14+6 = 20	20
5	5-2 = 3.2 = 6+6 = 12	11

vai sobrar 1 cadeira

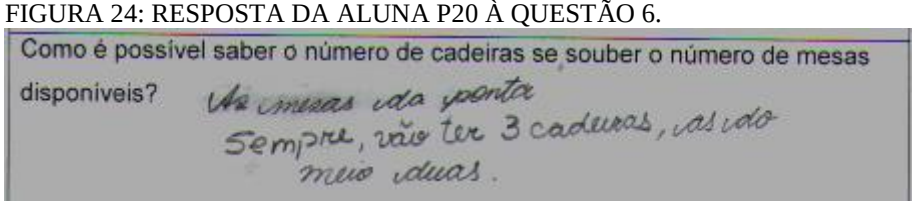
Fonte: material do aluno

Ao ser questionada sobre o processo que utilizou para obter o resultado, a aluna respondeu que “foi tentando fazer uma regra até que deu certo”. Para Radford (2006), trata-se de uma indução ingênua a partir de tentativas e erros.

Ainda sobre essa questão, é importante observar as respostas ao número de mesas necessárias para 11 pessoas. A imagem referente à resposta da aluna P22 apresenta o que vários alunos questionaram: “se poderia sobrar uma cadeira”. A esse respeito, tivemos dois alunos que não responderam e oito que não chegaram ao número correto. Desses, três alunos apresentaram como resposta 4,5, demonstrando a falta de percepção e/ou interpretação do que foi solicitado.

As Questões 6 e 7 tinham como objetivo verificar se os alunos percebiam a relação de dependência do número de cadeiras em relação ao número de mesas ou vice-versa. Essa percepção é importante para o foco desta pesquisa, que seria a introdução do conceito de função por meio de atividades que envolvam a generalização, sequências e padrões. Nove alunos não conseguiram apresentar uma explicação coerente com a situação apresentada. Três alunos afirmaram que é possível encontrar a resposta através de desenhos. Seis alunos apresentaram a ideia da contagem de “dois em dois”, como explicou a aluna P20:

FIGURA 24: RESPOSTA DA ALUNA P20 À QUESTÃO 6.


Como é possível saber o número de cadeiras se souber o número de mesas disponiveis?

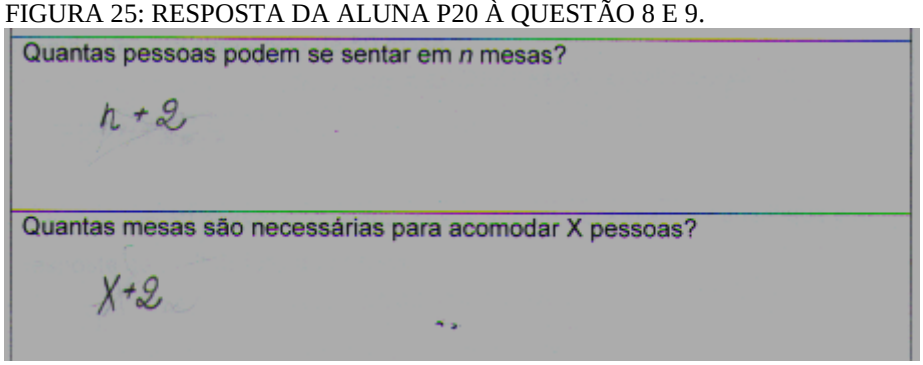
As mesas da ponta sempre, vão ter 3 cadeiras, as do meio duas.

Fonte: material do aluno

Oito alunos apresentaram a resposta por meio de frases, expressões algébricas ou Função. Alguns deles não conseguiram apresentar duas ideias diferentes, utilizando a mesma para justificar os dois itens.

As Questões 8 e 9 já exigiam uma ideia mais geral da situação. Era esperada uma generalização utilizando expressões algébricas, uma vez que as perguntas se referiam n mesas e x pessoas. Tivemos uma aluna que não respondeu a questão e seis alunos que apresentaram explicação através de frases. Doze alunos escreveram expressões algébricas, porém, sem coerência com a situação apresentada.

FIGURA 25: RESPOSTA DA ALUNA P20 À QUESTÃO 8 E 9.


Quantas pessoas podem se sentar em *n* mesas?

$n+2$

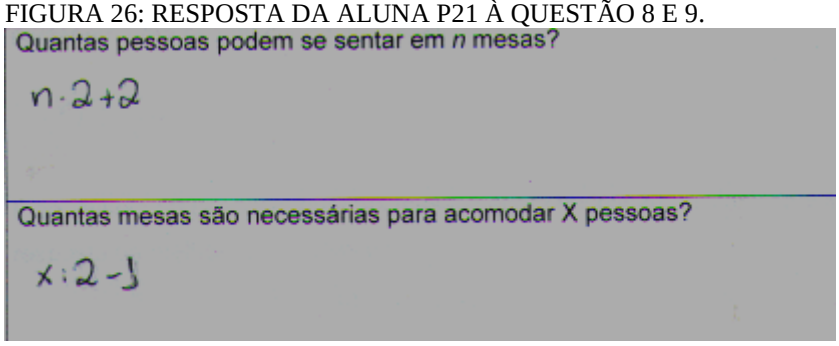
Quantas mesas são necessárias para acomodar X pessoas?

$X+2$

Fonte: material do aluno

Sete alunos apresentaram expressões algébricas coerentes com a situação problema apresentada. Como exemplo, temos a aluna P21.

FIGURA 26: RESPOSTA DA ALUNA P21 À QUESTÃO 8 E 9.



Fonte: material do aluno

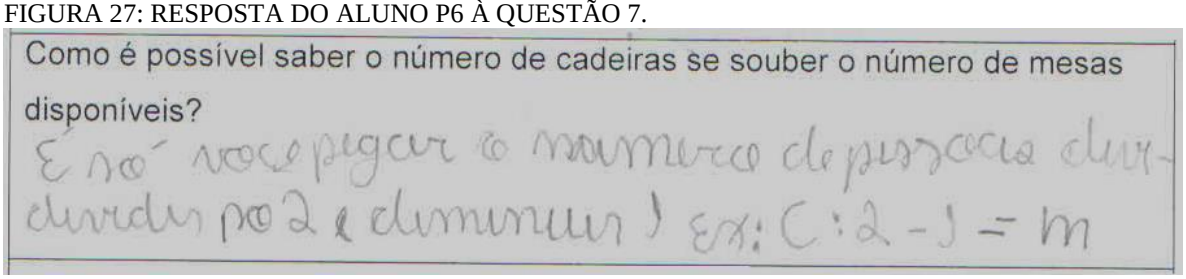
A tarefa durou aproximadamente 60 minutos e, assim que terminaram, os alunos entregaram as folhas e iniciamos uma discussão a respeito. A primeira "polêmica" foi em relação ao item 5, quando era necessário calcular o número de mesas para 11 pessoas. Alguns alunos haviam respondido que eram necessárias 4,5 mesas enquanto outros defendiam que a resposta certa seriam 5 mesas.

> *P17: Eu deixei essa questão sem resposta. Dava um "número com vírgula", e não é possível por se tratar de mesas.*
> *P28: Era só arredondar, P17. Se sobrar uma cadeira não tem problema.*
> *P6: É mesmo. Na hora "a gente" vai fazendo as contas sem pensar bem. Eu coloquei 4,5, mas já percebi meu erro.*
>
> Extraído da gravação

Trazer a fala do aluno P6 foi interessante, uma vez que esse aluno foi coerente nas outras respostas dessa tarefa. Como já mencionado anteriormente, a resposta à primeira questão já apresentava uma expressão algébrica e uma percepção de que o número de mesas está em função do número de cadeiras.

De acordo com Kieran (2004) e Radford (2006), esse aluno já consegue generalizar a situação. Ele utiliza tanto a linguagem natural como a algébrica, como podemos observar a seguir:

FIGURA 27: RESPOSTA DO ALUNO P6 À QUESTÃO 7.


Como é possível saber o número de cadeiras se souber o número de mesas disponíveis?

É só você pegar o numero de pessoas dividir por 2 e diminuir 1 ex: C : 2 - 1 = m

Fonte: material do aluno

Essa percepção de dependência (cadeiras e mesas) é importante para o desenvolvimento do pensamento funcional, que é o objetivo desta pesquisa. De acordo com Carraher et al (2007), normalmente os alunos pensam em Funções lineares recursivamente, mas há uma boa razão para trabalhar esse conteúdo por meio de situações que envolvam "entrada e saída". Os autores defendem ainda que o trabalho com generalizações é importante para a compreensão de alguns conteúdos matemáticos, incluindo a álgebra. Para isso, é necessário aprender a utilizar a notação algébrica extraindo novas informações a partir delas.

Nesse sentido, acreditamos no potencial desse tipo de tarefa para a construção do conceito inicial de Função, uma vez que alguns alunos já percebem a questão de variação (quando percebem que a cada mesa são necessárias duas cadeiras, por exemplo) e dependência (o número de cadeiras depende do número de mesas).

Por esse motivo, adaptamos uma tarefa proposta no *Early Algebra*, que será apresentada e analisada a seguir.

4.2.3 - Atividade II.3: O problema dos cofrinhos

Baseada em um conjunto de propostas desenvolvidas por Carraher e seu grupo, essa tarefa encerra a Atividade II, que teve como objetivo verificar a possibilidade de trabalhar, com alunos de 9º ano, a introdução do conceito de função a partir de sequências e generalizações. Utilizando problemas contextualizados, espera-se que o aluno desenvolva sua capacidade de construir generalizações e de perceber relações de dependência em uma sequência.

A atividade original tem como título "*The Piggy Banks*[22]" e tem como objetivo utilizar algumas estratégias para determinar valores desconhecidos.

[22] Pesquisado em https://wikis.uit.tufts.edu/confluence/display/EarlyAlgebraResources/Third+Grade+Lessons. Acessado em 20/05/2018

Nosso objetivo foi, além de identificar o tipo de elaboração das generalizações realizadas pelos alunos, por exemplo, utilizando linguagem natural ou expressões algébricas, observar as relações funcionais percebidas por eles. Trata-se de uma tarefa que contempla a construção de diferentes representações de Funções em gráficos e tabelas. Nesse sentido, nos apoiamos nas ideias apresentadas por Carraher e Schliemann (2002), que acreditam que:

> (a) Operações aritméticas podem ser vistas como Funções;
> (b) A generalização está no cerne do raciocínio algébrico;
> (c) Devemos fornecer aos alunos oportunidades de usar letras para representar quantidades desconhecidas e para variáveis (CARRAHER; SCHLIEMANN, 2002, p. 1).

A situação apresentada possibilitou que os alunos trabalhassem com um valor desconhecido, dentro de uma situação comum na vida de muitos: lidar com dinheiro. Diferente das outras tarefas, essa traz uma situação que faz parte do cotidiano dos estudantes e, certamente, contribuiu para muitas discussões.

O desenvolvimento dessa tarefa aconteceu no dia 24/09/2018 em uma aula de cinquenta minutos. Estavam presentes 27 alunos, que trabalharam individualmente. A tarefa foi dividida em quatro etapas, cada uma delas escrita em uma folha separadamente. Optamos por recolher cada folha antes de entregar a seguinte para que fosse possível preservar a resposta inicial do aluno sem a interferência das informações presentes nas demais folhas.

Para introduzir a tarefa, perguntamos aos alunos se eles tinham o costume de guardar dinheiro e de que maneira o faziam. Algumas respostas, apresentadas a seguir, ilustram esse primeiro momento.

P14: Eu não consigo juntar dinheiro. Gasto tudo que ganho.

P28: Pois eu nunca ganho nada (risos).

P26: Eu guardo sim. Para comprar coisas maiores. Se ficar gastando com coisas bobas não tem como comprar o que "a gente quer".

P23: Eu também junto dinheiro.

Professora: E como vocês guardam esse dinheiro?

P23: Eu deixo em uma carteira no guarda-roupa.

P26: Eu guardo em uma caixinha.

Extraído da gravação

Após essa introdução, expliquei que a tarefa tinha como personagens João e Maria, que tinham guardado quantias de dinheiro. Entreguei, então, a primeira folha da tarefa e sugeri que respondessem as questões justificando cada item.

Tarefa II.3 - Problema do cofrinho

João e Maria possuem, cada um, uma determinada quantia em dinheiro. Maria tem R$ 40,00 em sua carteira e o restante está guardado no cofrinho. Conversando com Maria, João descobriu que tem cinco vezes a quantia que há no cofrinho de Maria.

Questão 1

a) É possível saber quanto dinheiro cada um possui? De que maneira?
b) É possível determinar quem tem mais dinheiro? Justifique sua resposta.
c) Se você souber quanto há no cofrinho de Maria, o que é preciso fazer para determinar a quantia de João? Explique qual a operação matemática você usaria.

Para uma melhor compreensão, em relação às respostas dadas ao item "a" da questão 1, separamos em alguns grupos::

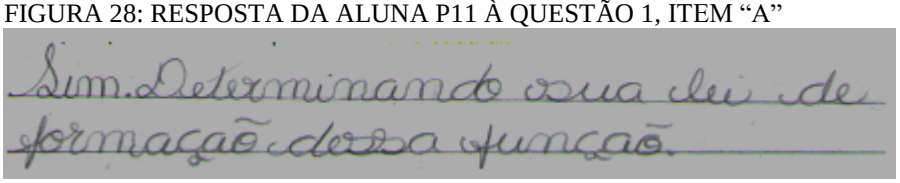
- Grupo 1 – 12 alunos responderam que "sim", entre os quais 7 apresentaram alguma justificativa;
- Grupo 2 – 3 alunos não responderam nem "sim" nem "não, mas apresentaram alguma justificativa, dois deles utilizando a palavra "depende" e o outro uma expressão funcional;

- Grupo 3 – 11 alunos responderam que “não”, entre os quais 7 apresentaram alguma justificativa;
- Grupo 4 – 1 aluna deixou o item em branco, apesar de deixar escrito nas margens da folha de respostas as expressões: Maria = 40,00 + x e João = 5x.

As respostas do Grupo 1 podem ser separadas em 4 tipos:

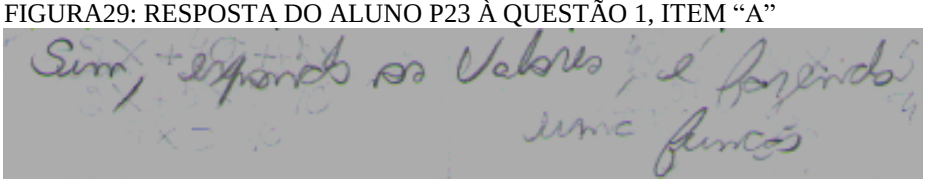
- 1º tipo – Utilização da palavra função - 5 alunos utilizaram a palavra “função” em suas justificativas:

FIGURA 28: RESPOSTA DA ALUNA P11 À QUESTÃO 1, ITEM “A”



Fonte: material do aluno

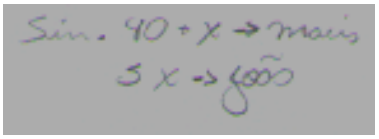
FIGURA29: RESPOSTA DO ALUNO P23 À QUESTÃO 1, ITEM “A”



Fonte: material do aluno

- 2º tipo– Utilização de expressões algébricas - 2 alunos justificaram utilizando expressões algébricas:

FIGURA 30: RESPOSTA DO ALUNO P13 À QUESTÃO 1, ITEM “A”



Fonte: material do aluno

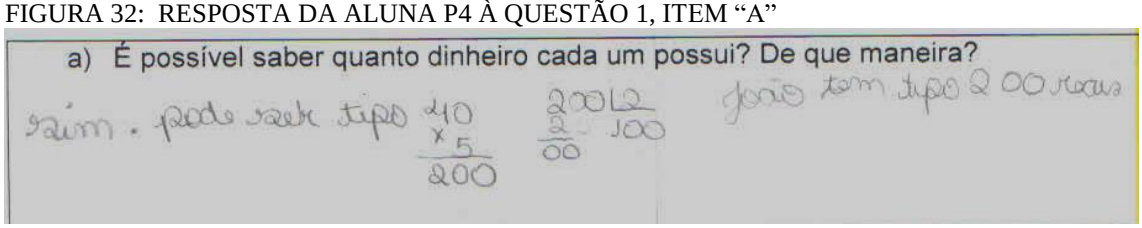
FIGURA 31: RESPOSTA DA ALUNA P14 À QUESTÃO 1, ITEM “A”

Fonte: material do aluno

- 3º tipo – Necessidade de conhecer o valor no cofrinho – 4 alunos apresentaram a ideia de que é possível determinar quanto tem cada um desde que se apresente um valor exato existente no cofre.

- 4º tipo– Utilização de exemplos numéricos - um aluno utilizou exemplos numéricos.

FIGURA 32: RESPOSTA DA ALUNA P4 À QUESTÃO 1, ITEM “A”



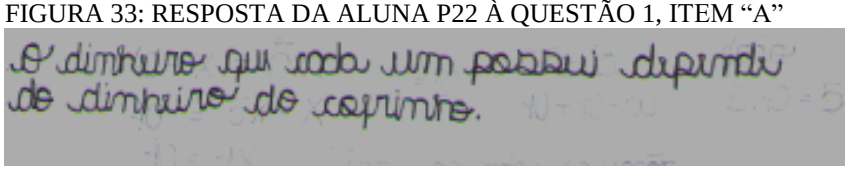
Fonte: material do aluno

De acordo com Carraher e Schliemann (2002), a ambiguidade das respostas é necessária, uma vez que os estudantes podem discutir a respeito das diversas possibilidades. Nesse sentido, percebemos que estudantes como a aluna P4 “estão presos” aos cálculos aritméticos e conseguem justificar sua resposta por meio de um valor determinado. Por outro lado, encontramos alunos como P13 e P14, que têm uma percepção mais aritmética e conseguem generalizar por meio de uma expressão aritmética.

Já o grupo 2 separamos em dois tipos:

- 2 alunos justificaram suas respostas utilizando a palavra depende.

FIGURA 33: RESPOSTA DA ALUNA P22 À QUESTÃO 1, ITEM “A”



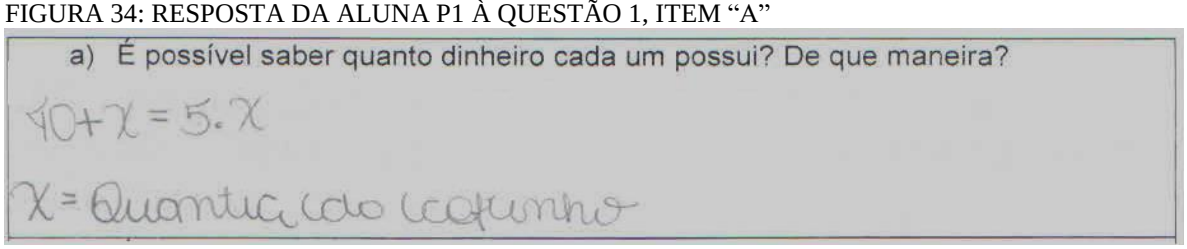
Fonte: material do aluno

Ao utilizar a palavra “depende”, é possível que a aluna tenha compreendido a relação existente entre as grandezas que foram trabalhadas.

A resposta da aluna P1 (apresentada abaixo) sugere que ela também percebe a dependência existente. Nesse caso, ela “tentou” justificar sua resposta por meio de uma equação algébrica, porém de maneira equivocada.

- 2 alunos utilizaram expressões algébricas como justificativa: P1 utilizou equação e P29 Função.

FIGURA 34: RESPOSTA DA ALUNA P1 À QUESTÃO 1, ITEM “A”


a) É possível saber quanto dinheiro cada um possui? De que maneira?

$10+x=5.x$

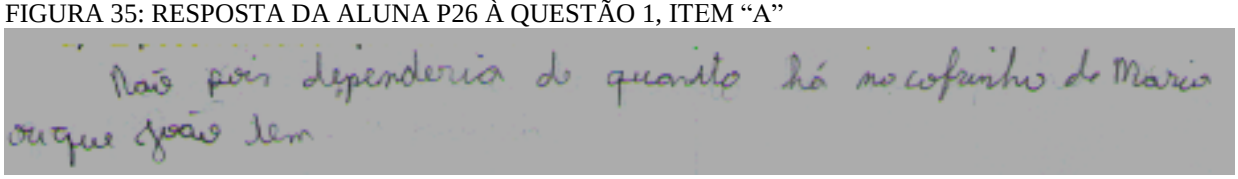
x = Quantia do cofrinho

Fonte: material do aluno

Nesses casos, os alunos conseguiram compreender a lei de formação que há nessa situação recorrendo à ideia de que é possível calcular a quantia de cada personagem a partir do valor que há no cofrinho.

Em relação ao Grupo 3, observamos que as justificativas convergiam para a ideia de que não era possível saber a quantidade de dinheiro que cada um possui, uma vez que não era conhecido o valor que havia no cofre. Dentre as justificativas destacamos a resposta do aluno P26, que já traz o verbo “depender”, que representa uma parte fundamental da ideia de Função.

FIGURA 35: RESPOSTA DA ALUNA P26 À QUESTÃO 1, ITEM “A”


Não pois dependeria do quanto há no cofrinho de Maria porque João tem

Fonte: material do aluno

Encontramos também essa ideia de dependência na resposta da aluna P22. Embora ela não tenha uma resposta “sim ou não”, a justificativa aponta para o entendimento de que é possível saber a quantia de cada um, a partir de um valor dado.

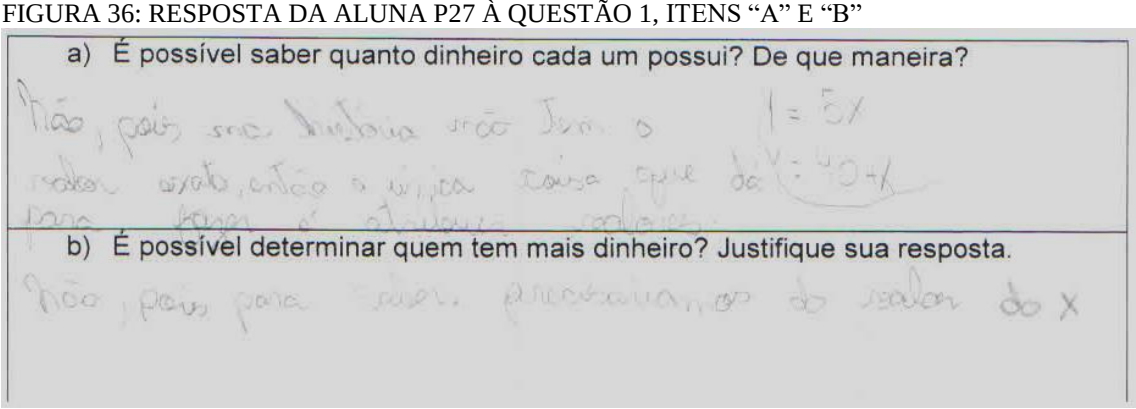
Acreditamos que a palavra “função” apresentada em algumas respostas pode ser explicada pelo fato de alguns alunos estarem fazendo cursinhos preparatórios para processo seletivo para a escola técnica. Porém, a ideia de “dependência” parece mais intuitiva e consequência das percepções dos alunos em relação à atividade proposta.

No item “b” da primeira questão, perguntamos se era possível determinar quem tinha mais dinheiro, apresentado uma justificativa. Separamos as respostas semelhantes em 3 grupos:

- Grupo 1 - 2 alunos que não escreveram nem “sim” nem “não”;
- Grupo 2 - 14 alunos acreditaram que não é possível determinar quem tem mais dinheiro;
- Grupo 3 - 11 alunos responderam que “sim”.

A justificativa dos alunos que responderam “não” convergia para a ideia de que “não sabe os valores” ou “não sabe quanto tem no cofrinho”. Como exemplo, trouxemos a resposta da aluna P27:

FIGURA 36: RESPOSTA DA ALUNA P27 À QUESTÃO 1, ITENS “A” E “B”


a) É possível saber quanto dinheiro cada um possui? De que maneira?

b) É possível determinar quem tem mais dinheiro? Justifique sua resposta.

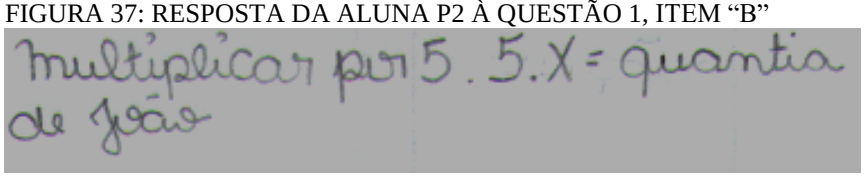
Fonte: material do aluno

A aluna justifica o item “a” por meio de expressões algébricas, porém ainda está presa aos valores aritméticos quando responde que não era possível determinar o valor que cada um possui. Nesse sentido, e em consonância com as ideias apresentadas por Carraher e Schliemann (2002), percebemos a importância de apresentar situações que possibilitem a utilização de letras como um valor desconhecido ou como uma variável. Dessa forma, é possível que a aluna, ainda que intuitivamente, tenha percebido que as respostas “dependiam” do valor que havia no cofrinho.

Dos 11 alunos que responderam “sim” a essa questão:

- 2 utilizaram Funções, ainda que equivocadamente;
- 2 alunos utilizaram a ideia de que “multiplicar por 5 é sempre maior do que somar”;

FIGURA 37: RESPOSTA DA ALUNA P2 À QUESTÃO 1, ITEM “B”



Fonte: material do aluno

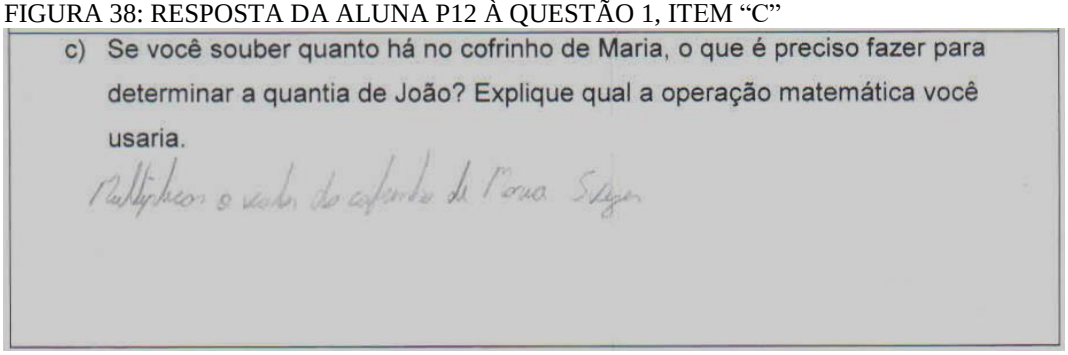
- Os outros sete alunos usaram como justificativa ao item a necessidade de “precisar saber o valor que há no cofrinho”.

É interessante ressaltar que alguns alunos que responderam “sim” ao item “b” e alguns que responderam “não” utilizaram justificativas muito parecidas. É provável que a construção da ideia de dependência esteja presente no grupo que respondeu “sim”.

O item “c” da Questão 1 solicitava que os alunos explicassem qual seria a operação matemática utilizada para saber a quantidade de dinheiro que João possuía a partir do valor que havia no cofrinho. Dessa vez conseguimos separar as respostas em quatro grupos:

- Grupo 1 – 7 alunos responderam por meio de frases;

FIGURA 38: RESPOSTA DA ALUNA P12 À QUESTÃO 1, ITEM “C”

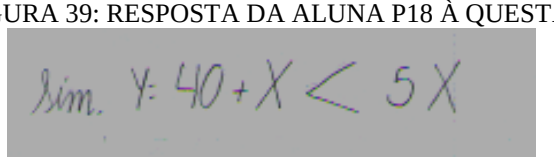

c) Se você souber quanto há no cofrinho de Maria, o que é preciso fazer para determinar a quantia de João? Explique qual a operação matemática você usaria.

Multiplicar o valor do cofrinho de Maria 5 vezes

Fonte: material do aluno

- Grupo 2 – 14 alunos utilizaram notação algébrica. Desses, 12 alunos escreveram a expressão $5x$ e os outros 2 escreveram equivocadamente uma inequação:

FIGURA 39: RESPOSTA DA ALUNA P18 À QUESTÃO 1, ITEM “C”

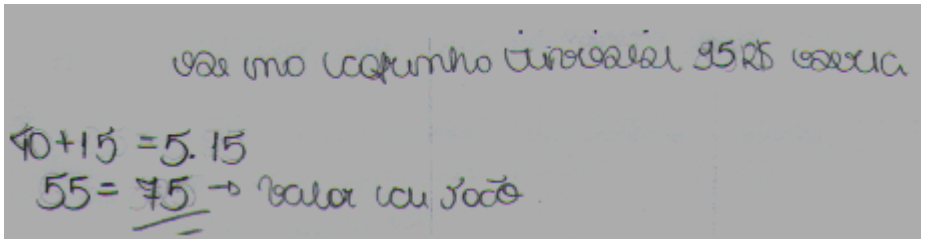

Sim. Y: 40 + X < 5X

Fonte: material do aluno

Analisando a resposta do aluno P18, percebemos que, ainda que não tenha usado uma maneira correta, o sinal de desigualdade foi uma “tentativa” de mostrar que o valor de João será maior do que de Maria, por se tratar de uma multiplicação.

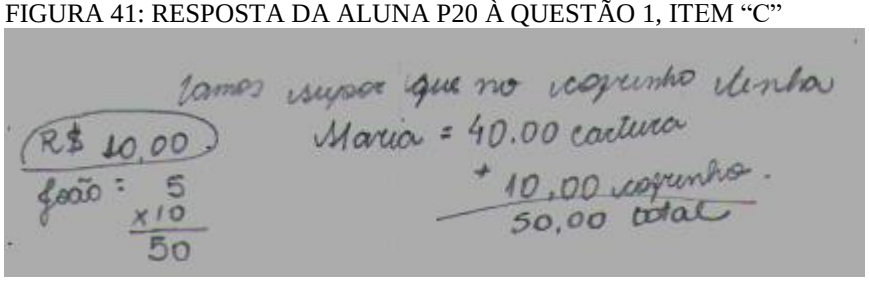
Grupo 3 – 4 alunos utilizaram exemplos numéricos;

FIGURA 40: RESPOSTA DA ALUNA P1 À QUESTÃO 1, ITEM “C”



Fonte: material do aluno

FIGURA 41: RESPOSTA DA ALUNA P20 À QUESTÃO 1, ITEM “C”



Fonte: material do aluno

Essas respostas apontam para o fato de que esses alunos ainda estão presos à ideia aritmética ou à resolução de equações, uma vez que o ensino de álgebra, nas séries anteriores, comumente está pautado nos processos de resolução e manipulação de símbolos.

- Grupo 4 – 2 alunos utilizaram termos da Função ou Função do 1º grau;

As respostas dadas ao item “c” apontam para a hipótese de que a maioria dos alunos (21) acredita que “João” tem mais dinheiro, pois ele possui cinco vezes mais. Isso sugere a existência de uma imagem conceitual de que o resultado de uma multiplicação é sempre maior do que de uma adição.

Analisando as respostas dessa primeira questão, observamos, mais uma vez, que alguns alunos ainda utilizam os conhecimentos aritméticos para a resolução dos itens, apresentando visão mais restrita em relação à variação de quantidades. Já outros conseguem perceber a utilização da letra como variável, percebendo algumas relações funcionais. Assim sendo, foi possível concluir que:

- 11 alunos não utilizaram letras para identificar a quantidade desconhecida e justificaram suas conclusões por meio de valores numéricos ou linguagem natural;
- Um aluno apresenta uma desigualdade que pode ser justificada pela ideia de que um resultado de multiplicação é sempre maior que uma soma;

- Só uma aluna utiliza equações em todos os itens, apresentando, ainda que de uma forma completamente equivocada, notação funcional.

As tarefas realizadas anteriormente, com foco na generalização de padrões e sequências, podem ter contribuído para que os alunos que utilizaram letras para identificar o valor desconhecido conseguissem formular expressões que justificassem suas respostas. Por esse motivo, acreditamos que um trabalho com generalização de sequências e padrões contribuiu para a construção do conhecimento em relação ao conceito de função.

Os alunos responderam a questão 1 em pouco menos de dez minutos e devolveram as folhas. Perguntamos sobre o que acharam das perguntas e alguns expressarem a dificuldade em respondê-las, uma vez que “não havia o valor do cofrinho”. Outros alunos argumentaram que “quando não há valores definidos é só utilizar uma letra que pode representar qualquer valor”. . Percebe-se que a necessidade em encontrar uma resposta exata ainda é forte. Certamente, mudar esse contexto envolve um trabalho contínuo e gradual e deve acontecer por meio de tarefas variadas.

Ao recolher as respostas da questão 1, entregamos a questão seguinte explicando o que deveria ser feito.

Questão 2

a) Como não sabemos o quanto Maria tem em seu cofrinho, vamos pensar em algumas possibilidades. Complete a tabela de acordo com as informações:

Quantia dentro do cofrinho de Maria	Quantia total de Maria (cofrinho e carteira)	Quantia de João
R$ 5,00	5,00 + 40,00 = 45,00	R$ 25,00
R$ 15,00		
	R$ 60,00	R$ 100,00
		R$ 125,00
X		
		Y

b) E agora, é possível determinar quem tem mais dinheiro? Justifique.

c) É possível que João e Maria tenham a mesma quantia em dinheiro? Justifique.

O primeiro item dessa segunda questão foi analisado em duas etapas. Na primeira, observamos os alunos que conseguiram apresentar corretamente os valores numéricos. Do total de 27 alunos, 18 chegaram às respostas corretas e os demais tiveram de um a três erros.

Na segunda etapa, analisamos as respostas correspondentes às letras x e y. Assim,

- 8 alunos apresentaram uma expressão algébrica válida para x e y;
- 12 alunos apresentaram uma expressão válida apenas para x;
- 7 alunos não conseguiram a expressão nem para x e nem para y.

Em relação ao item “b”:

- 15 alunos afirmaram que “sim” e tiveram, em comum, a justificativa de que “agora há valores”.
- 5 alunos responderam que não e as justificativas foram:

P6: “Há possibilidade dos dois terem a mesma quantia”.

P22: “Não, isso são possibilidades, não o valor correto”.

P27: “Não, pois depende do valor que se atribui para ver se dará mais ou menos”.

P28: “Não, porque dependendo dos valores determinados as vezes João tem mais e as vezes Maria tem mais”.

P18: “Não. Por depende do quanto há no cofre.”

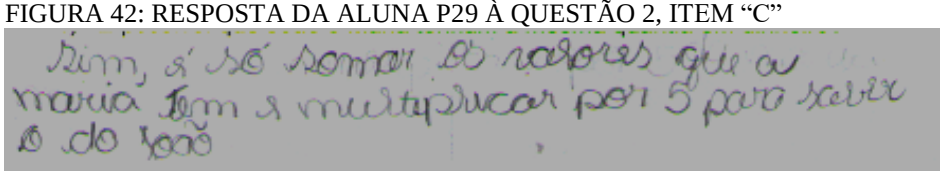
- Os alunos P10 e P14 afirmaram que depende da quantidade de dinheiro que há no cofrinho.
- 5 alunos concluíram que João possui mais.

Em comum, as justificativas mostram que os alunos perceberam a relação de dependência entre as variáveis, o que sugere que eles podem estar considerando a possibilidade da variação da quantidade de dinheiro do cofrinho. Os alunos P10 e P14 foram mais cautelosos ao responderam que “depende”, uma vez que é necessário saber o valor do cofre. E cinco alunos afirmaram que João possui a quantia maior, sendo a justificativa mais comum que ele possui “cinco vezes o valor do cofrinho”.

No item “c” da questão 2, perguntamos se era possível que os personagens tenham, em algum momento, a mesma quantidade de dinheiro.

- Os alunos P4 e P23 demonstraram dúvidas ao afirmarem que “há possibilidades, porém é necessário confirmar”.
- 11 alunos acreditam que não é possível, sendo a resposta mais comum que “João tem cinco vezes mais que Maria”.
- 14 alunos afirmaram que sim, sendo que, 12 deles concluíram que era necessário que o cofrinho tivesse R$10,00, e 2 alunos apresentaram uma justificativa equivocada:

FIGURA 42: RESPOSTA DA ALUNA P29 À QUESTÃO 2, ITEM “C”


Sim, é só somar os valores que a maria tem e multiplicar por 5 para saber o do João

Fonte: material do aluno

Os alunos terminaram essa etapa e as folhas foram recolhidas. Novamente, perguntei o que eles acharam dessa questão e, dessa vez, muitos deles afirmaram que “estava mais fácil pois haviam valores”. Destaque para a fala de dois alunos:

P28: Ter um valor não é tão importante assim. As letras estão aí para isso. Substituir valores.
P12: Mas com valores fica muito mais fácil.
P13: Realmente fica mais fácil. Mas utilizamos as letras para representar qualquer valor ou qualquer situação. Igual aquele problema das cadeiras (o aluno estava mencionando a tarefas das mesas e cadeiras), se “a gente” não encontrasse uma regra geral não dava para calcular um número muito grande, tipo mil mesas.
P12: Então quando estamos usando letras é a mesma coisa da regra geral?

Extraído da gravação e das anotações

A discussão a respeito da segunda questão foi breve e, embora houvesse outras falas, essa foi interessante. O aluno P13 conseguiu estabelecer uma relação entre a tarefa de sequências e padrões e o problema do cofrinho, enquanto P12 entendeu a importância da “regra geral”.

O próximo item tratava-se de completar um gráfico a partir da situação descrita. Para isso, a tabela foi escrita no quadro e a folha do gráfico entregue aos alunos. A mensagem inicial foi lida (não estava impressa na folha).

Construção do gráfico

Vamos utilizar os dados da tabela para esboçar o gráfico da quantidade total de dinheiro que cada um possui.

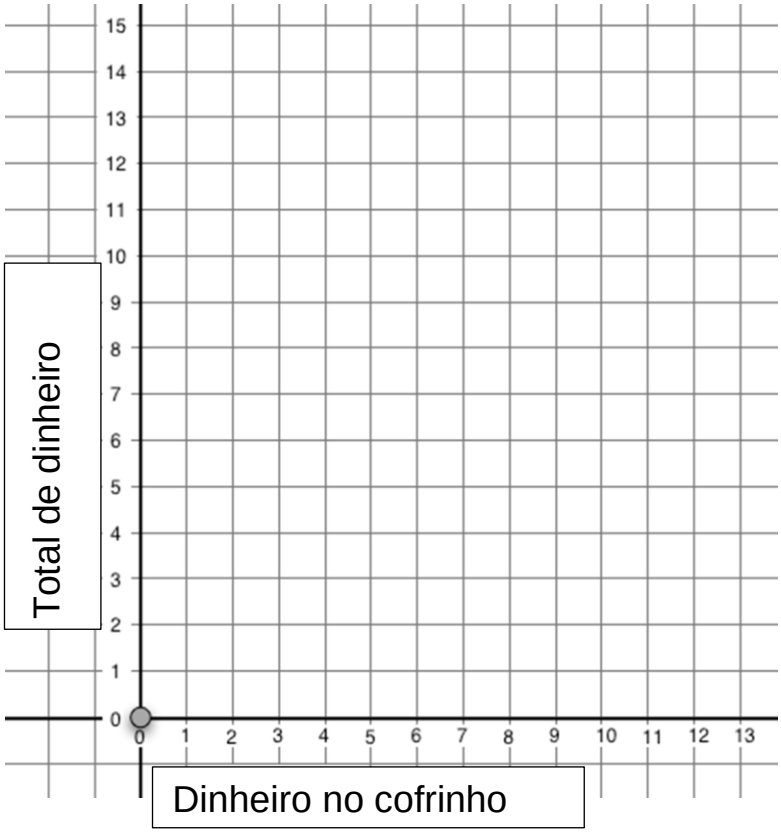
Vamos recordar:

- *Maria possui certa quantidade no cofrinho mais 40 reais na carteira;*
- *João possui 5 vezes a quantidade que Maria tem no cofrinho.*

Utilize cores diferentes e marque os pontos correspondentes ao valor de cada um.

Faça a legenda.

Ligue os pontos referentes a cada um dos personagens.



Ao receberam o gráfico, alguns alunos questionaram como eles deveriam representar o dinheiro que havia no cofrinho. Sugeri que marcassem essa quantidade com o lápis de escrever.

Enquanto as outras questões foram respondidas sem a minha intervenção, para essa eles fizeram muitas perguntas. Atendi cada aluno na sua mesa para evitar que eles ficassem andando pela sala. As principais dúvidas eram em relação à marcação: se poderiam representar as quantias de João e Maria, se era necessário atribuir mais valores, onde iniciaria a reta e para mostrar o local de interseção das quantidades.

Evitei dar as respostas, estimulando a reflexão. Enfatizei que a tarefa não seria avaliada como "certa ou errada", e eu consideraria o que eles fizessem. Como resultado, tivemos apenas sete alunos que não conseguiram construir o gráfico corretamente.

Essa preocupação, em todas as tarefas, foi recorrente: tentar entregar as "respostas certas". Os alunos questionaram várias vezes "se valeria ponto", "o que aconteceria se eles não acertassem" ou "eu não quero mandar coisa errada para a pesquisa". Conversei com eles e apontei os objetivos que pretendia, porém perguntas como essas foram feitas em quase todas as aulas dedicadas às tarefas.

Sem eu recolher os gráficos, os alunos receberam a questão a seguir:

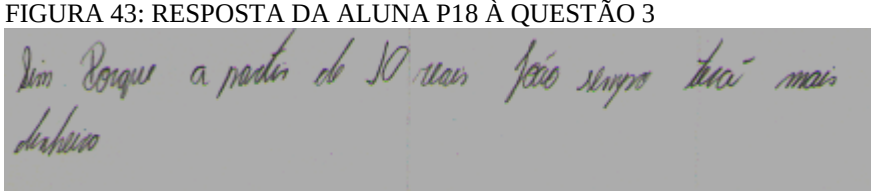
Questão 3

Observando o gráfico, responda:
É possível determinar quem tem mais dinheiro, mesmo sem saber a quantidade que Maria tem no cofrinho? Por quê?

Como resposta, 14 alunos responderam que não é possível determinar quem tem mais dinheiro, sendo a justificativa mais comum que "dependia do valor que estava no cofrinho".

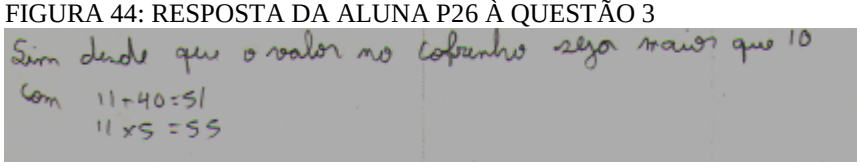
Os demais responderam que "sim", sendo que alguns justificaram que "João sempre terá cinco vezes mais que o valor que Maria tem no cofre." No entanto, duas justificativas nos chamaram a atenção:

FIGURA 43: RESPOSTA DA ALUNA P18 À QUESTÃO 3


Sim Porque a partir de 10 reais João sempre terá mais dinheiro

Fonte: material do aluno

FIGURA 44: RESPOSTA DA ALUNA P26 À QUESTÃO 3


Sim desde que o valor no cofrinho seja maior que 10
Com 11+40=51
11 x5 =55

Fonte: material do aluno

Observa-se que, assim como P26, outros alunos conseguiram perceber que, a partir de certo valor, João passaria a ter mais dinheiro que Maria.

Alguns conseguiram utilizar as informações obtidas na tabela e no gráfico para construírem suas respostas. Todavia, outros ainda permaneceram com a ideia de que João teria sempre mais dinheiro, pois seu valor era cinco vezes o do cofrinho.

A última questão também foi entregue antes do recolhimento do gráfico. A tabela também estava exposta no quadro, para que os alunos pudessem consultá-la caso necessário.

Questão 4

a) Maria sempre terá mais dinheiro que João? Por quê?
b) Qual é a quantia que deverá ter no cofrinho para que João e Maria tenham a mesma quantia? Como você percebeu isso? O que acontece com as retas nesse ponto?
c) Se a quantidade de dinheiro no cofrinho for muito grande quem terá mais dinheiro? Justifique suas conclusões.

Em relação ao item “a” da questão 4, todos os alunos responderam “não”, porém com justificativas diferentes:

- 7 alunos acreditam que não é possível pelo fato de “João ter o dinheiro multiplicado por 5” (P17).
- 6 alunos justificaram que “nem sempre, pois dependeria do valor do cofrinho” (P15).
- 5 alunos perceberam, possivelmente a partir do gráfico, que “tem a parte que João tem mais” (P23).

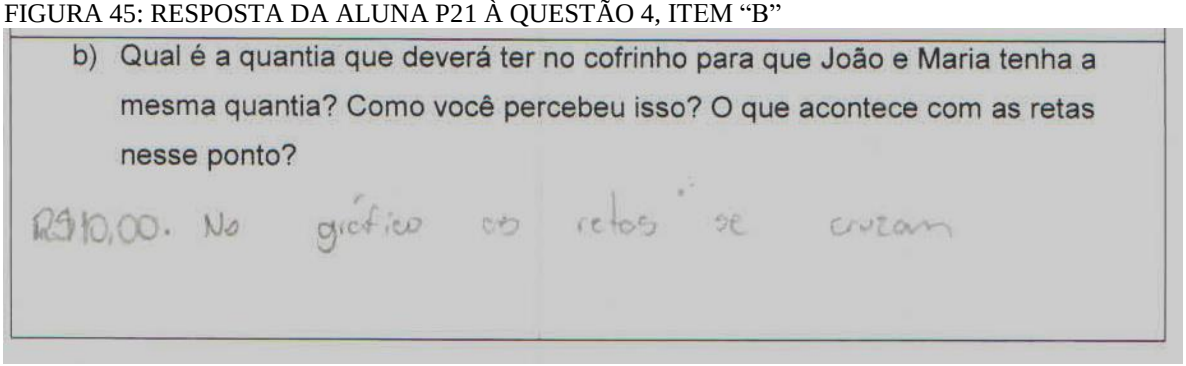
- 2 alunos observaram que se o valor do cofrinho for 9 ou menos Maria terá mais dinheiro que João.
- 7 alunos utilizaram justificativas que convergiam para a ideia de não saber o valor do cofrinho, ou que “o valor do cofrinho cresce junto ao dinheiro do João” (P22).

A diversidade de justificativas ao item demostra que alguns alunos ainda estão presos em operações aritméticas e não conseguem visualizar a situação completa. É importante ressaltar aqueles que, mesmo com o gráfico, ainda defendiam que João sempre terá mais dinheiro, uma vez que seu valor é 5 vezes a quantia do cofrinho. Por outro lado, outros já perceberam que, em algum momento, Maria possuía uma quantia maior que João, demonstrando visão geral de toda a situação-problema apresentada.

A partir do item “b”, tínhamos como objetivo observar se os alunos conseguiram perceber que havia uma determinada quantia no cofrinho que deixava os dois com a mesma quantidade de dinheiro. Era possível que essa conclusão fosse construída a partir de questões anteriores ou mesmo por meio da construção do gráfico. Nesse sentido obtivemos:

- 7 alunos não conseguiram chegar à resposta correta.
- Os alunos P5, P9, P13 e P18 perceberam os valores iguais e justificaram a partir de operações aritméticas.
- O aluno P21 justificou a partir da observação do gráfico:

FIGURA 45: RESPOSTA DA ALUNA P21 À QUESTÃO 4, ITEM “B”


b) Qual é a quantia que deverá ter no cofrinho para que João e Maria tenha a mesma quantia? Como você percebeu isso? O que acontece com as retas nesse ponto?

R$10,00. No gráfico as retas se cruzam

Fonte: material do aluno

- 15 alunos justificaram através de operações aritméticas e observação do gráfico.

A esse respeito, segundo Schliemann *et al.* (2013), por meio do gráfico de uma Função o aluno pode perceber alguns pontos importantes como: a "lei" para sua construção, as relações funcionais, possibilitando ainda a comparação entre diferentes Funções.

Concordamos com esses autores ao observarmos a explicação dos alunos. Ao mencionar que "as retas se cruzam", é possível que a estudante P21 tenha compreendido a ideia de interseção, ainda que informalmente. Compreender o conceito de uma maneira mais formal e matemática seria, provavelmente, mais simples e compreensível para o estudante.

O item "c" tinha como objetivo provocar uma reflexão a respeito em relação à possibilidade de o cofrinho ter um valor alto. A esse respeito:

- As justificativas de 24 alunos convergiam para a ideia de que o dinheiro de João é 5 vezes a quantia do cofrinho.
- 1 aluno não apresentou o personagem que teria mais dinheiro, afirmando que "não sabemos os valores, então não sabemos quem tem mais" (P9).
- O aluno P13 argumentou que "João, porque Maria só terá o valor do cofre mais R$40,00".
- De acordo com o aluno P19, quem teria a maior quantia seria João, pois, "quanto maior a quantidade do cofrinho maior o dinheiro que ele tem".
- Já o aluno P23 percebeu a resposta por meio da observação do gráfico ao afirmar que "as retas deles está muito mais acima do que de Maria".

As respostas ao item "c" evidenciam que, de acordo com Schliemann et al. (2013), a percepção visual é importante para que o estudante perceba certas características das Funções. Por outro lado, é notório que alguns alunos não conseguiram ver a situação dos personagens em relação a um valor mais alto de dinheiro no cofrinho.

Por meio dessa tarefa conseguimos observar alguns aspectos interessantes e norteadores para o trabalho com as Funções em turmas do 9º ano.

O primeiro deles é a dificuldade que muitos alunos apresentaram para trabalhar com as expressões algébricas, ainda que esse conteúdo fosse trabalhado no 7º ano. Esse fato pode ser explicado por meio das ideias de Lins e Gimenez (2001) e Ponte et al.(2008), que chamam a atenção para a ênfase dada ao trabalho em álgebra com a manipulação de símbolos e letras em detrimento da compreensão dos conceitos.

A segunda dificuldade observada é a visão aritmética que muitos alunos ainda possuem. Muitos não conseguem generalizar e utilizar a álgebra para apresentar as ideias e justificar suas respostas. A esse respeito encontramos possíveis justificativas em Carraher

(2007), que acredita que os conceitos algébricos devem ser trabalhados ainda nos anos iniciais, de forma intuitiva, a fim de que o aprendizado aconteça gradualmente.

A título de síntese da atividade II, não percebemos um grande avanço em relação aos processos de generalização. A maioria dos alunos não conseguiu generalizar algebricamente, ficando no campo da indução ingênua ou da generalização aritmética, como propôs Radford (2006). Todavia, acreditamos que o trabalho com sequências e padrões foi importante para que muitos alunos conseguissem expressar, em linguagem natural ou algébrica, as respostas para o “Problema dos Cofrinhos”.

A seguir, apresentaremos nossas considerações a respeito de todo o trabalho que foi desenvolvido, pontuando os pontos positivos e negativos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao encerrar este estudo, acreditamos ter respondido a questão de pesquisa apresentada, muito embora, compreendemos que se trata de um assunto amplo que requer muitas pesquisas a respeito.

Nessas considerações finais, apresentaremos nossas reflexões sobre a investigação que realizamos, buscando responder à questão da pesquisa: "É possível construir o conceito de Função em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental a partir do estudo de sequências com foco na generalização de padrões?", por acreditarmos que os conteúdos algébricos, especialmente o ensino de Funções, é trabalhado, por muitos professores por meio de procedimentos e técnicas de resolução, o que não contribui para um efetivo aprendizado desse tópico.

Com objetivo de investigar a possibilidade de construir o conceito de função, em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, a partir de tarefas envolvendo sequências e padrões e problemas contextualizados com foco na generalização, nos propusemos a conhecer, por meio de uma pesquisa bibliográfica, o pensamento e os trabalhos publicados de autores/pesquisadores sobre o ensino de dos conteúdos algébricos na Educação Básica, bem como entender as possíveis dificuldades em relação a esse processo.

Constatamos que, ainda hoje o foco está nas expressões algébricas, equações e manipulação de letras e números. Todavia, de acordo com alguns pesquisadores como Blanton e Kaput, Carraher, Kaput, Kieran, Radford, Ponte, entre outros, o objetivo para o ensino da álgebra seja o desenvolvimento do pensamento algébrico que, de acordo com Radford (2006), trata-se de uma forma particular de pensar matematicamente.

Para alguns pesquisadores a álgebra é um conteúdo desenvolvido exclusivamente dentro da escola e, por esse motivo, deve ser construído com o aluno gradualmente. Por esse motivo, Schliemann et al. (2013), entre outros pesquisadores, defendem que o ensino das equações não deve ser utilizado para a introdução dos conteúdos algébricos, e sim as Funções.

Nesse sentido, vários estudos apontam para um trabalho com foco no desenvolvimento do pensamento funcional, uma vez que as Funções, ao contrário das equações, fazem parte do cotidiano e podem ser exploradas sob aspectos e representações diferentes.

Para Blanton e Kaput (2004), o trabalho com Funções pode ser iniciado nos anos iniciais de escolarização, uma vez que aborda vários conteúdos como: números, operações, frações e proporcionalidade.

Com vistas no desenvolvimento do pensamento algébrico, autores como Radford (2006) e Ponte *et al.* (2009) sugerem um trabalho com foco em generalizações por meio de sequências e padrões, uma vez que a percepção de padrões faz parte da vida.

Por esse motivo, elaboramos duas atividades, que foram desenvolvidas em turmas do 9º ano da Escola Municipal Ana Amélia de Queiroz, sob minha regência.

A primeira atividade, denominada "Investigando sequências", teve como objetivo apresentar perceber o conhecimento dos alunos em relação às sequências e padrões. Foi composta por duas tarefas e aplicada nas três turmas de 9º ano que havia na escola. Os resultados obtidos apontaram para alguns fatos: os alunos tiveram pouco ou nenhum contato com esse tipo de atividades e, que era necessário escolher apenas uma turma para terminar a pesquisa.

Por meio dessa primeira atividade foi possível observar o desenvolvimento de alguns alunos que pouco ou nada participam das aulas tradicionais. O pouco interesse ou a falta de compreensão dos conteúdos matemáticos fazem com que alguns estudantes não perguntem, argumentem ou mesmo interajam com os outros colegas. Muitos desses já construíram um conceito negativo em relação à Matemática, que pode ser consequência de experiências anteriores ou mesmo de seus familiares.

Nesse sentido, ao serem solicitados a escrever o que é uma sequência ou encontrar o próximo número, percebemos uma participação massiva e a vontade de acertar sem o medo de errar. Muitos consideraram tarefas "extras", fora do contexto dos conteúdos que estavam aprendendo. Um bom exemplo é a participação da aluna M25 que era considerada fraca, uma vez que não conseguia notas boas em diferentes conteúdos. Foi possível observar o quanto a autoconfiança dessa aluna aumentou e, como consequência, seus resultados se tornaram melhores no decorrer do ano.

Estimular os alunos a pesquisarem conceitos a respeito do que estudaríamos ou elaborar sequência favoreceu momentos de discussões e retomadas de alguns conteúdos trabalhados nas séries anteriores. Como exemplos temos os números primos e as frações, que fizeram parte de alguns desafios apresentados pelos alunos na atividade I, tarefa 2. Foi, certamente, uma boa oportunidade de revisão desses conceitos e outros uma vez que eram necessários para a resolução da tarefa.

A segunda atividade, denominada "Introduzindo Função a partir de generalizações" teve como objetivo contribuir para a construção da ideia de Função. Para a elaboração, levamos em consideração os trabalhos de alguns pesquisadores como Kaput (1999), Kieran

(2004), Radford (2006), Carraher et al. (2007) e Ponte et al (2009) que, em comum, acreditam que as tarefas de generalização de sequências e padrões contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico sendo importante para o estudo das relações funcionais. Por esse motivo, as duas primeiras tarefas abordavam sequências e padrões e, a terceira, foi a adaptação de uma situação-problema desenvolvida por Carraher e seu grupo de pesquisa.

Essa atividade, embora tenha sido desenvolvida nas três turmas, consideramos apenas os dados da turma 14. Todavia, é interessante mencionar que os alunos das outras turmas também se interessaram e participaram ativamente. Destaque para a última tarefa "O problema do cofrinho", que rendeu discussões dentro e fora do contexto da atividade. Além de realizarem as questões propostas, os alunos trouxeram questões do cotidiano como a importância de guardar dinheiro, metas e sonhos que são possíveis realizar por meio da organização financeira. Esses fatos chamam a atenção e confirma a ideia de momentos que contribuem para o desenvolvimento do aluno em diversas áreas da vida. E, em se tratando do trabalho com a Educação Financeira, percebemos certa carência no currículo tradicional.

Em se tratando do trabalho com sequências e padrões percebemos que, os resultados obtidos, apontam para o fato de que esse trabalho é interessante e pode contribuir para a retomada de conteúdos já desenvolvidos anteriormente. Ademais, de acordo com Ponte *et.al* (2009), os alunos em contato com esse tipo de tarefa, é estimulado a analisar, conjecturar e criar estratégias que vão ficando cada vez mais elaboradas contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Concordamos com essas ideais e acreditamos, a partir das atividades desenvolvidas com os alunos do 9º ano, que muitos conseguiram perceber alguns tópicos como "dependência e variação", porém eram necessárias outras tarefas para que esses conceitos fossem mais explorados.

Como pontos positivos das intervenções, observamos o envolvimento dos alunos em especial, daqueles que comumente participam muito durante as aulas. Além disso, percebemos que as tarefas causaram muitas discussões interessantes entre os alunos. Em alguns momentos, foi necessário recordar conceitos já trabalhados, como: frações, raízes e potências, números primos, entre outros que foram surgindo no decorrer das aulas.

Em se tratando do conceito de Função, observamos que alguns alunos já conseguiram apresentar algumas ideias e já utilizaram alguns termos que fazem parte desse conteúdo. Acreditamos que o número de tarefas foi insuficiente, porém algumas transcorrências durante

o ano impediram que realizássemos outras intervenções, uma vez que não teríamos tempo hábil para a finalização dessa pesquisa.

Reconhecemos ainda que a condução das tarefas poderia ser diferente em alguns pontos. Um destaque é a retomada das tarefas nas aulas posteriores a fim de trazer novas discussões e, consequentemente, percepções e conclusões dos alunos.

Outro ponto a ser ressaltado é o fato de que as expectativas iniciais da pesquisa estavam além do que foi realizado. Tínhamos a expectativa de trabalhar alguns conceitos a respeito de Função, porém, não foi possível. Todavia, é inegável o quanto as reflexões e aprendizados contribuíram para o meu crescimento profissional e pessoal.

Por esse motivo os resultados desse trabalho serão retomados para a escola, tanto aos colegas professores quanto ao aprimoramento e aplicação das tarefas para outras turmas. Ademais, percebemos uma perspectiva diferente em relação ao trabalho com os conteúdos algébricos.

REFERÊNCIAS

BLANTON, Maria L; KAPUT, James J. Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. **Proceedings of the International Group For the Psychology of Mathematics Education**, v. 2, p. 135–142, 2004.

BLANTON, Maria L; KAPUT, James J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, National Council of Teachers of Mathematics, v. 36, nº 5, p. 412-446, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. PDE: **PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais. Terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental: Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.1998.

BRASIL. Ministério da Educação. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação : **Prova Brasil: ensino fundamental : matrizes de referência, tópicos e descritores**. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2011b) **Guia de Livros Didáticos PNLD 2017** Matemática. Brasília: MEC. 2017

CARRAHER, David W; SCHLIEMANN, Analucia D; BRIZUELA, Barbara M. Treating operations as functions. **XXII annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Tucson, Arizona, 2000. Disponível em http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/publications.asp. Acesso em: 30 jun. 2017.

CARRAHER, David W.; SCHILEMANN, Analúcia.D.. Empirical and Logical truth in Early Algebra activities: from guessing amounts to representing variables. **Symposium paper NCTM 2002 Research Presession**. Las Vegas, Nevada, abril 2002. Disponível em http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/publications.asp. Acesso em: 30 jun. 2017.

CARRAHER, David W.; SCHIEMANN, Analúcia. D.; BRIZUELA, Bárbara. M.; EARNEST, Darrel. Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 37, nº 2, p. 87-115, 2006.

CARRAHER, David W.; SCHLIEMANN, Analucia D; MARTINEZ, Mara. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM Mathematics Education**, v. 40, p. 3-22, 2007.
CARRAHER, David W.; SCHLIEMANN, Analucia D; SCHWARTZ, Judah L. Early algebra is not the same as algebra early. In: **Algebra in the early grades**, p. 235-272, New York, 2008.

FIGUEIREDO, Auriluci de Carvalho., **Saberes e concepções de educação algébrica em um curso de Licenciatura em Matemática** – Tese (Doutorado em Educação Matemática)– Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, p.288, 2007.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. Contribuições para repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, v.4. nº1 (10), p. 78 – 91, 1993.

FIORENTINI, Dario; FERNANDES, Fernando. Luís. Pereira; CRISTOVÃO, Eliane Matesco, Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. **Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação do Professor**, p. 1 – 22. 2005.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio **Investigação em educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3ª ed. Campinas: Autores Associados, 2006.

GIOVANNI, José. Ruy; GIOVANNI, José Ruy. **Viva Vida: Matemática**, v. 3. São Paulo: FTD, 1995.

GROSSMANN, Maria Teresa; PONTE, João Pedro. O sentido de símbolo de um aluno e a álgebra do 12º ano. Pesquisado em https://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/16.Grossmann%20e%20Ponte.pdf Acessado em 20/10/2017

KAPUT, James. J. Teaching and learning a new algebra. **Mathematics classrooms that promote understanding. Routledge**, p. 145-168, 1999.

KIERAN, Carolyn. Algebraic thinking in the early grades: What is it. **The Mathematics Educator**, p. 139-151, 2004.

MINAS GERAIS, Matrizes de Referência para Avaliação. Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública. Matemática (Simave). Juiz de Fora: Faculdade de Educação/CAEd, UFJF, 2009

MINAS GERAIS, Conteúdo Básico Comum – Matemática (2005). Educação Básica - Ensino Fundamental (5a a 8a séries).

MINAYO, Maria Cecília de Souza; DESLANDES, Suely Ferreira; GOMES, Romeu. Pesquisa social: teoria, método e criatividade. **Editora Vozes Limitada**, 2011.

PAVAN, Luciane Regina. **A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças de 4ª série do Ensino Fundamental em situações-problema de estruturas aditivas e/ou multiplicativas**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.

PENTEADO, Heloisa Dupas; GARRIDO Elisa. Pesquisa-ensino: A comunicação escolar na formação do professor**. Editora Paulinas**. São Paulo, 2010.

PONTE, João Pedro da. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Repositório da Universidade de Lisboa. Faculdade de Ciências. Faculdade de Educação. p. 3-9, 1990.

PONTE, João Pedro da, Números e álgebra no currículo escolar. **XIV EIEM-Encontro de Investigação em Educação Matemática**, p. 5-27, 2006.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana**.** Álgebra no ensino básico**. Lisboa: Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC) do Ministério da Educação de Portugal**, 2009.

RADFORD, Luis. Factual, Contextual and symbolic generalizations in algebra. **Proceedings Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME** , p. 4-81, 2001.

RADFORD, Luis.; PEIRCE, Charles Sanders. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, North American chapter. p. 2-21.2006.

RADFORD, Luis, Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA** p.37-62. 2010. Disponível em <http://hdl.handle.net/10481/3505> Acesso em 02/08/2018

RADFORD, Luis. Elementary forms of algebraic thinking in young students. **Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME** p. 73-80. 2010ª.

RAFAEL, Rosane Cordeiro; ESCHER, Marco Antônio. Evasão, baixo rendimento e reprovações em Cálculo Diferencial e Integral: uma questão a ser discutida. **VII Encontro Mineiro de Educação Matemática**. Juiz de Fora (MG), 2015.
RIBEIRO, Alessandro Jaques, CURY, Helena Noronha, Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função. Coleção Tendências em Educação Matemática.1ª ed. **Autêntica Editora**, 2015

SCHLIEMANN, Analucia D.; CARRAHER, David Willian; BRIZUELA, Barbara M. When tables become function tables. **Proceedings of the XXV Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands**, Vol. 4, 145-152.

SCHLIEMANN, Analucia D., CARRAHER, David W., GOODROW, Anthony., CADLLE, M., & PORTER, M.. Equations in elementary school. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.). **Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, **PME.** Kiel, Germany, v.4 p. 161-168. 2013.

VALE, Isabel , BORRALHO, Antônio, CABRITA, Isabel, PALHARES, Pedro Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. **Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), Números e Álgebra SEM - SPCE.** Lisboa, p. 193-211, 2007.

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa Padrões: um tema transversal do currículo. **Educação e matemática.** - Lisboa : Associação de Professores de Matemática, Nº 85, p. 14-20, v. 85, p. 14-20, 2005.

VELOSO, Débora S. **O desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos no Ensino Fundamental: análise de tarefas desenvolvidas em uma classe do 6º ano** – Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UFOP, Ouro Preto, 2012.

ZAIDAN, Samira.; FERREIRA, Maria Cristina Costa; KAWASAKI, Terezinha Fumi. A pesquisa da própria prática no Mestrado Profissional. **Educação em Pesquisa**. Salvador, v.3, n.1, p.88-105, jan/abr 2018

APÊNDICES

Apêndice A

Escola Municipal Ana Amélia Queiroz 10 de setembro de 2006 Respeitando as DifeRenças	**Escola Municipal Ana Amélia de Queiroz**			
	Matemática	9ºano	Professora Ana Paula	Data: ____/_____/____
	Aluno:			

ATIVIDADE I – INVESTIGANDO SEQUÊNCIAS

TAREFA 1 – Investigando: o que é uma sequência?

Questão 1 - Para você o que é uma sequência?

Questão 2 - Dê exemplo de uma sequência.

Para casa

Questão 3: O que é uma sequência em Matemática?

Questão 4: Pense em um exemplo.

Apêndice B

Escola Municipal Ana Amélia Queiroz 10 de setembro de 2006 Respeitando as DifeRenças	**Escola Municipal Ana Amélia de Queiroz**			
	Matemática	9ºano	Professora Ana Paula	Data: ____/_____/____
	Aluno:			

ATIVIDADE I – INVESTIGANDO SEQUÊNCIAS

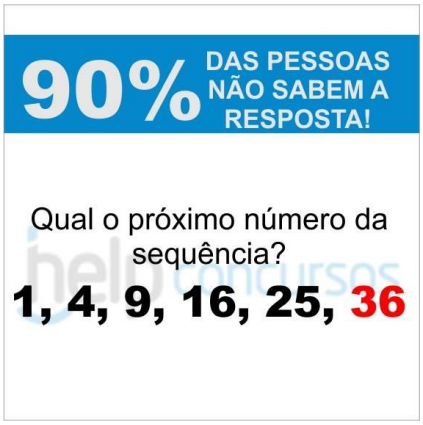
TAREFA 2 – Qual é o próximo número da sequência?

Questão 1: Qual é o próximo número das sequências a seguir?

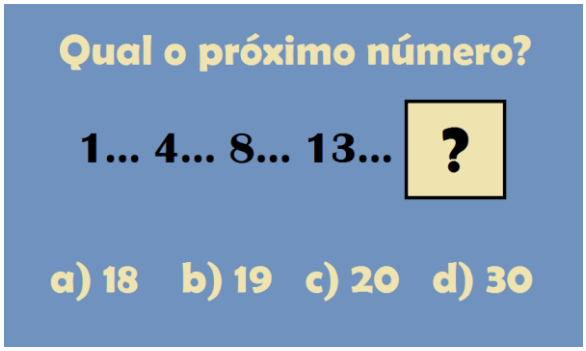
a) 1, 3, 5, 7, 9, 11...
b) 1, 2, 4, 7, 11...
c) 1000, 990, 970, 940, 900, 850...

Questão 2: Vamos resolver alguns desafios encontrados na internet:

a)



b)



Questão 3

c) É possível estabelecer uma regra para descobrir o próximo número em cada situação?
d) De que maneira?

Para casa

Questão 4

Pense em um desafio, que envolva sequência numérica, para ser apresentado aos colegas.

Apêndice C

Escola Municipal Ana Amélia Queiroz 10 de setembro de 2006 Respeitando as DifeRenças	**Escola Municipal Ana Amélia de Queiroz**			
	Matemática	9ºano	Professora Ana Paula	Data: ____/_____/____
	Aluno:			

ATIVIDADE II – INTRODUZINDO FUNÇÕES A PARTIR DE GENERALIZAÇÕES

TAREFA 1 – Observando e generalizando padrões

Observe a sequência de figuras abaixo e responda as perguntas.

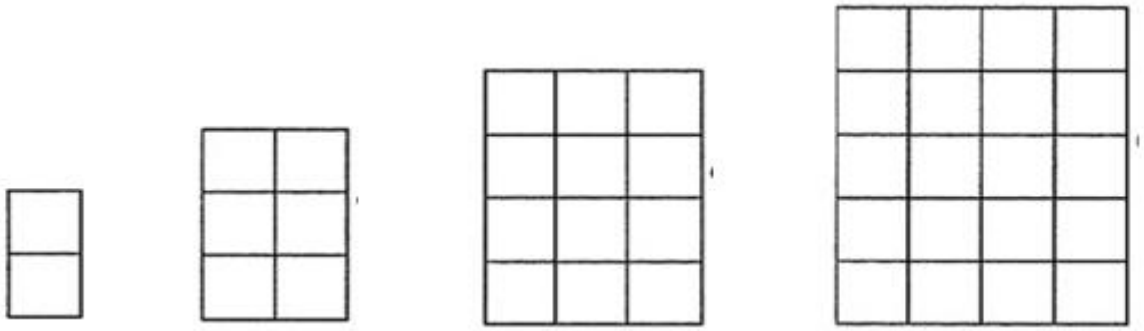


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Questão 1: Desenhe as duas próximas figuras dessa sequência.
Questão 2: Qual a quantidade de quadradinhos da 6ª figura da sequência? E da sétima?
Questão 3: Sem desenhar, quantos quadradinhos teriam a a) 10ª figura? b) 15ª figura?

c) E a 23ª figura?

d) Justifique sua resposta.

Questão 4: Para organizar os dados obtidos complete a tabela a seguir.

Posição	Número de quadradinhos
1ª	
2ª	
3ª	
4ª	
5ª	
6ª	
7ª	
8ª	
9ª	
10ª	
...	
n	

Questão 5: Um aluno disse que a expressão algébrica n(n + 1) representa o número total de quadrinhos em cada figura. Você concorda com ele? Justifique sua resposta.

Questão 6: Outra aluna encontrou a expressão algébrica $n^2 + n$. Essa expressão está correta? Justifique sua resposta.

Questão 7: As expressões encontradas pelos alunos são equivalentes? Por quê?

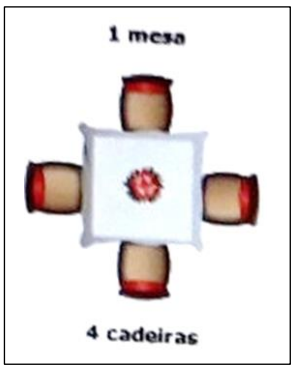
	Escola Municipal Ana Amélia de Queiroz			
Escola Municipal Ana Amélia Queiroz 10 de setembro de 2006 Respeitando as DifeRenças	Matemática	9ºano	Professora	Data: ____/_____/____
	Aluno:			

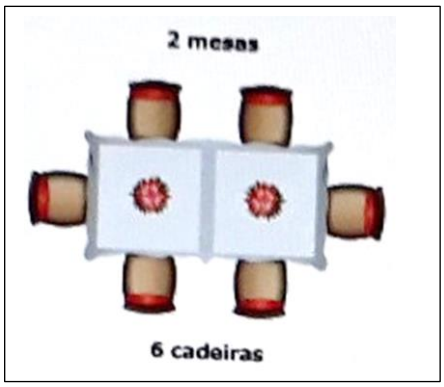
ATIVIDADE II – INTRODUZINDO FUNÇÕES A PARTIR DE GENERALIZAÇÕES

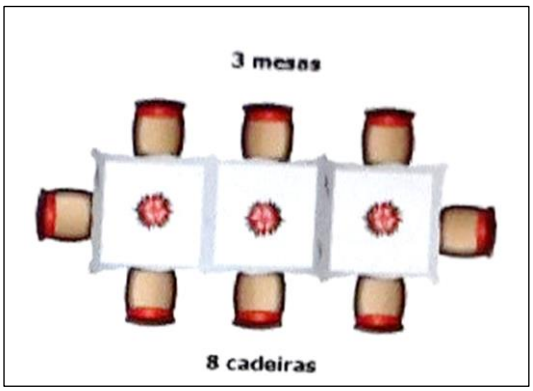
TAREFA 2 – Sequência de mesas e cadeiras

FOLHA 1 -

Observe a disposição das mesas em uma determinada situação:







As mesas são dispostas formando uma fila. Continuando essa sequência de mesas e cadeiras, responda:

Questão1: Escreva o que acontece na sequência apresentada:
Questão 2: Cada vez que é adicionada uma mesa, quantas pessoas a mais podem se sentar?
Questão 3: Pense em uma estratégia para calcular o número de pessoas que poderiam se sentar em uma sequência de 50 mesas:
Questão 4: E se fossem 50 pessoas, quantas mesas seriam necessárias? Justifique sua resposta da melhor forma possível:

Folha 2

Questão 5: Complete a tabela:

Número de mesas	Mostre como chegou à resposta	Número de pessoas
1		
2		
3		
4		
10		
25		
		24
		20
		11

Questão 6: Como é possível saber o número de mesas que é preciso juntar se souberes o número de pessoas que vão se sentar?

Questão 7: Como é possível saber o número de cadeiras se souber o número de mesas disponíveis?

Questão 8: Quantas pessoas podem se sentar em *n* mesas?

Questão 9: Quantas mesas são necessárias para acomodar X pessoas?

Apêndice E

	Escola Municipal Ana Amélia de Queiroz			
Escola Municipal Ana Amélia Queiroz 10 de setembro de 2006 Respeitando as Diferenças	Matemática	9ºano	Professora	Data: ____/_____/____
	Aluno:			

ATIVIDADE II – INTRODUZINDO FUNÇÕES A PARTIR DE GENERALIZAÇÕES

TAREFA.3: O problema dos cofrinhos

João e Maria possuem cada uma, uma determinada quantia em dinheiro. Maria tem R$ 40,00 em sua carteira e o restante está guardado no cofrinho. Conversando com Maria, João descobriu que tem cinco vezes a quantia que há no cofrinho de Maria.

Questão 1

a) É possível saber quanto dinheiro cada um possui? De que maneira?
b) É possível determinar quem tem mais dinheiro? Justifique sua resposta.
c) Se você souber quanto há no cofrinho de Maria, o que é preciso fazer para determinar a quantia de João? Explique qual a operação matemática você usaria.

Questão 2

a) Como não sabemos o quanto Maria tem em seu cofrinho, vamos pensar em algumas possibilidades. Complete a tabela de acordo com as informações:

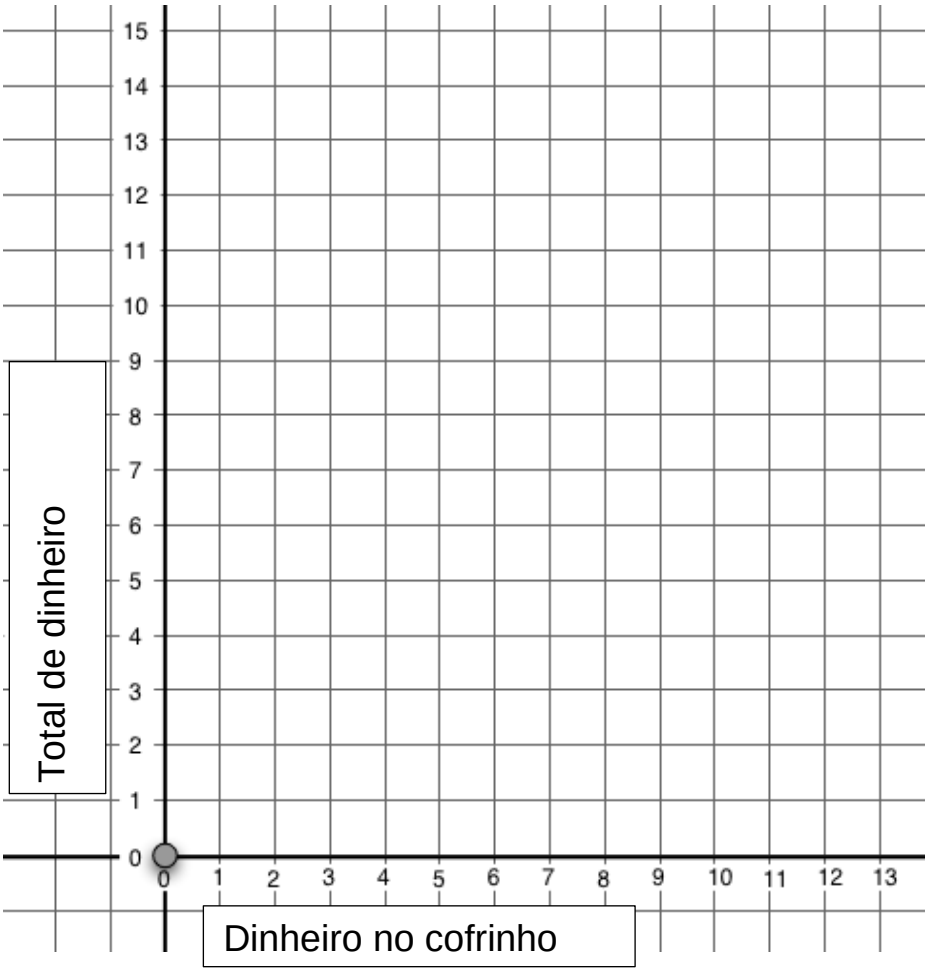
Quantia dentro do cofrinho de Maria	Quantia total de Maria (cofrinho e carteira)	Quantia de João
R$ 5,00	5,00 + 4,00 = 45,00	R$ 25,00
R$ 15,00		
	R$ 60,00	R$ 100,00
		R$ 125,00
X		
		Y

b) E agora, é possível determinar quem tem mais dinheiro? Justifique:
c) É possível que João e Maria tenham a mesma quantia em dinheiro? Justifique:

Questão 3

Observando o gráfico, responda:

É possível determinar quem tem mais dinheiro, mesmo sem saber a quantidade que Maria tem no cofrinho? Por quê?



Questão 4

a) Maria sempre terá mais dinheiro que João? Por quê?
b) Qual é a quantia que deverá ter no cofrinho para que João e Maria tenha a mesma quantia? Como você percebeu isso? O que acontece com as retas nesse ponto?
c) Se a quantidade de dinheiro no cofrinho for muito grande quem terá mais dinheiro? Justifique suas conclusões?

Apêndice F - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhores pais e/ou responsáveis pelos estudantes do 9º ano da Escola Municipal Ana Amélia Queiroz,

Convidamos os estudantes do 9º ano para participar da pesquisa acadêmica: *Desenvolvimento do pensamento algébrico: construindo significados para a Álgebra dos anos finais do Ensino Fundamental*, com a participação da professora de Matemática e aluna do Mestrado da Faculdade de Educação da UFMG, Ana Paula Marques. A pesquisa tem por objetivo pesquisar concepções de educação algébrica, desenvolvimento do pensamento algébrico e estratégias de ensino relativas aos conteúdos de álgebra presentes nos anos finais do ensino fundamental para a construção de uma sequência didática que será aplicada em turmas do 9º ano. Partindo do pressuposto que é papel da escola inserir as pessoas no mundo do trabalho, nas relações sociais e na cultura, é relevante o desenvolvimento de propostas de ensino que estimulem a construção de estratégias, a criatividade, a iniciativa e a comprovação e justificativa de resultados. A pesquisa acontecerá durante as aulas regulares de matemática, com a autorização da equipe gestora dessa instituição, a partir da aplicação de uma sequência de atividades envolvendo alguns conteúdos algébricos. Eventualmente, poderemos fazer reuniões fora do horário de aula, mas sempre em comum acordo com os estudantes e professor(a). Esse trabalho poderá contribuir para o desenvolvimento das capacidades anteriormente citadas e se mostra como uma alternativa ao ensino de álgebra baseado na manipulação de símbolos, às vezes sem significado para os estudantes. Durante as aulas, a pesquisadora realizará observações, anotações e gravações em áudio e vídeo, a fim de ser capaz de avaliar também posteriormente as relações, interações, registro e falas de sala de aula.

Apenas com o consentimento de V. Sª é que o estudante poderá participar da pesquisa, ressaltando que:

- ✓ Não haverá qualquer atividade proposta que extrapole as tarefas escolares comuns;
- ✓ A participação não envolverá gastos de qualquer natureza, pois os custos previstos são de responsabilidade da pesquisadora;
- ✓ O material coletado (anotações e gravações) será de uso exclusivo para fins da pesquisa. Não serão, portanto, utilizados para avaliação de condutas dos estudantes.
- ✓ Os resultados serão divulgados utilizando-se nomes fictícios para que seja garantida a privacidade e preservada a identidade de cada estudante;
- ✓ Os registros em vídeo comporão um banco de dados que poderão ser utilizados nesta e em outras pesquisas do grupo ao qual a pesquisadora faz parte.

A pesquisa apresenta riscos mínimos à saúde e ao bem-estar de seus participantes. Porém poderá haver desconforto ou constrangimento na participação dos sujeitos na pesquisa, uma vez que esta envolve filmagens. O mesmo poderá acontecer em relação ao tempo dedicado à atividade. Para que isso seja evitado, nos propomos a realizar todos os esforços possíveis para assegurar a naturalidade dos mesmos e minimizar possíveis riscos e desconfortos.. Está garantida a indenização em casos de eventuais danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

Em qualquer momento, V. Sª poderá solicitar esclarecimentos sobre quaisquer aspectos desta pesquisa através do telefone (31) 35616137 ou pelo e-mail: marks_ana22@yahoo.com.br.

Caso você deseje recusar a participação do seu filho ou retirar o seu consentimento em qualquer fase da pesquisa tem total liberdade para fazê-lo.

Sentindo-se esclarecido(a) em relação à proposta e concordando em participar voluntariamente desta pesquisa, peço-lhe a gentileza de assinar e devolver o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE),

assinando em duas vias, sendo que uma das vias ficará com V. Sª e a outra será arquivada pelos pesquisadores por cinco anos, de acordo com a Resolução 466/2012.

Atenciosamente,

_____
Ana Paula Marques (Professora de Matemática e aluna do Mestrado)

_____
Dr. Wagner Ahmad Auarek (Coordenador da pesquisa)

_____
Dra. Maria Cristina Costa Ferreira (coorientadora)

Agradecemos desde já sua colaboração

( ) Concordo e autorizo a realização da pesquisa, com gravação das atividades de Matemática, nos termos propostos.

( ) Discordo e desautorizo a realização da pesquisa.

Nome do estudante: _____

Assinatura do pai ou responsável: _____

Itabirito, _____de _____ de 201__

Comitê de Ética na Pesquisa/UFMG - Av. Antônio Carlos, 6627 - Unidade Administrativa II - 2º andar/ sala 2005 - Campus Pampulha - Belo Horizonte, MG Fone: 31 3409-4592CEP 31270-901 e-mail: coep@prpq.ufmg.br

Apêndice G - TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DO MENOR (TALE)

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DO MENOR

Prezado estudante do 9º ano da Escola Municipal Ana Amélia Queiroz,

Convidamos você para participar da pesquisa acadêmica *Desenvolvimento do pensamento algébrico: construindo significados para a Álgebra dos anos finais do Ensino Fundamental* com a participação da aluna do Mestrado da Faculdade de Educação da UFMG, Ana Paula Marques. A pesquisa tem por objetivo apresentar-lhe uma proposta de ensino de álgebra onde o trabalho com letras não seja prioridade, mas sim o desenvolvimento sua criatividade, da capacidade de estabelecer conexões entre os campos da matemática e compreender as capacidades matemáticas que vocês possuem. A pesquisa acontecerá durante as aulas regulares de matemática a partir da aplicação de uma sequência de atividades envolvendo alguns conteúdos algébricos. Eventualmente, poderemos fazer reuniões fora do horário de aula, mas sempre em comum acordo com os estudantes e professor(a). Esse trabalho pode contribuir para o desenvolvimento das capacidades anteriormente citadas e se mostra como uma alternativa ao ensino de álgebra baseado na manipulação de símbolos, às vezes sem significado. Durante as aulas, a pesquisadora realizará observações, anotações e gravações em áudio e vídeo, a fim de ser capaz de avaliar também posteriormente as relações, interações, registros e discursos de sala de aula.

Apenas com seu consentimento e de seu responsável legal é que poderá participar da pesquisa, ressaltando que:

- ✓ Não haverá qualquer atividade proposta que extrapole as tarefas escolares comuns;
- ✓ A participação não envolverá gastos de qualquer natureza, pois os custos previstos são de responsabilidade da pesquisadora;
- ✓ O material coletado (anotações e gravações) será de uso exclusivo para fins da pesquisa. Não serão, portanto, utilizados para avaliação de condutas dos estudantes. Os resultados serão divulgados utilizando-se nomes fictícios para que seja garantida a sua privacidade e preservada a sua identidade;
- ✓ Os registros em vídeo comporão um banco de dados que poderão ser utilizados nesta e em outras pesquisas do grupo ao qual a pesquisadora faz parte.

A pesquisa apresenta riscos mínimos à saúde e ao bem-estar de seus participantes. A pesquisa apresenta riscos mínimos à saúde e ao bem-estar de seus participantes. Porém poderá haver desconforto ou constrangimento na participação dos sujeitos na pesquisa, uma vez que esta envolve filmagens. O mesmo poderá acontecer em relação ao tempo dedicado à atividade. Para que isso seja evitado, nos propomos a realizar todos os esforços possíveis para assegurar a naturalidade dos mesmos e minimizar possíveis riscos e Desconfortos. Está garantida a indenização em casos de eventuais danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

Em qualquer momento, você poderá solicitar esclarecimentos sobre quaisquer aspectos desta pesquisa através do telefone (31) 35616137 ou pelo e-mail: marks_ana22@yahoo.com.br.

Caso você deseje recusar a participação ou retirar o seu consentimento em qualquer fase da pesquisa tem total liberdade para fazê-lo.

Sentindo-se esclarecido(a) em relação à proposta e concordando em participar voluntariamente desta pesquisa, peço-lhe a gentileza de assinar e devolver o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido do Menor

(TALE), assinando em duas vias, sendo que uma das vias ficará com você e a outra será arquivada pelos pesquisadores por cinco anos, de acordo com a Resolução 466/2012.

Atenciosamente,

_____
Ana Paula Marques (Professora de Matemática e aluna do Mestrado)

_____
Dr. Wagner Ahmad Auarek (Coordenador da pesquisa)

_____
Dra. Maria Cristina Costa Ferreira (coorientadora)

Agradecemos desde já sua colaboração

( ) Concordo e autorizo a realização da pesquisa, com gravação das atividades de Matemática, nos termos propostos.

( ) Discordo e desautorizo a realização da pesquisa.

Nome do estudante: _____

Assinatura do estudante: _____

Itabirito, _____de _____ de 201__

Apêndice H - AUTORIZAÇÃO DA ESCOLA

AUTORIZAÇÃO

À direção da Escola Municipal Ana Amélia Queiroz, na pessoa do prezada diretora Lúcia Anunciação Marinho

Solicitamos a sua autorização para iniciar a pesquisa acadêmica: *Desenvolvimento do pensamento algébrico: construindo significados para a Álgebra dos anos finais do Ensino Fundamental* com a participação da aluna do Mestrado Profissional da Faculdade de Educação da UFMG, Ana Paula Marques. A pesquisa tem por objetivo pesquisar concepções de educação algébrica, desenvolvimento do pensamento algébrico e estratégias de ensino relativas aos conteúdos de álgebra presentes nos anos finais do ensino fundamental para a construção de uma sequência didática que será aplicada em turmas do 9º ano. Partindo do pressuposto que é papel da escola inserir as pessoas no mundo do trabalho, nas relações sociais e na cultura, é relevante o desenvolvimento de propostas de ensino que estimulem a construção de estratégias, a criatividade, a iniciativa e a comprovação e justificativa de resultados.

A pesquisa acontecerá durante as aulas regulares de matemática, a partir da aplicação de uma sequência de atividades envolvendo alguns conteúdos de álgebra que são trabalhados no 8º e 9º ano. Eventualmente, poderemos fazer reuniões fora do horário de aula, mas sempre em comum acordo com os estudantes e professor(a). Esse trabalho pode contribuir para o desenvolvimento das capacidades anteriormente citadas e se mostra como uma alternativa ao ensino de álgebra baseado na manipulação de símbolos, às vezes sem significado para os estudantes. Durante as aulas, a pesquisadora realizará observações, anotações e gravações em áudio e vídeo, a fim de ser capaz de avaliar também posteriormente as relações, interações, registro e falas em sala de aula.

Apenas com a autorização da direção da Escola, dos responsáveis e dos estudantes é que acontecerá a pesquisa, ressaltando que:

- ✓ Não haverá qualquer atividade proposta que extrapole as tarefas escolares comuns;
- ✓ A participação não envolverá gastos de qualquer natureza, pois os custos previstos são de responsabilidade da pesquisadora;
- ✓ O material coletado (anotações e gravações) será de uso exclusivo para fins da pesquisa. Não serão, portanto, utilizados para avaliação de condutas dos estudantes e nem para avaliação da prática do professor.
- ✓ Os resultados serão divulgados utilizando-se nomes fictícios para que seja garantida a privacidade e preservada a identidade do participante da pesquisa;
- ✓ Os registros em vídeo comporão um banco de dados que poderão ser utilizados nesta e em outras pesquisas do grupo ao qual a pesquisadora faz parte.

A pesquisa apresenta riscos mínimos à saúde e ao bem-estar de seus participantes. Porém poderá haver desconforto ou constrangimento na participação dos sujeitos na pesquisa, uma vez que esta envolve filmagens. O mesmo poderá acontecer em relação ao tempo dedicado à atividade. Para que isso seja evitado, nos propomos a realizar todos os esforços possíveis para assegurar a naturalidade dos mesmos e minimizar possíveis riscos e desconfortos. Está garantida a indenização em casos de eventuais danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

Em qualquer momento, a Escola poderá solicitar esclarecimentos sobre quaisquer aspectos desta pesquisa através do telefone (31) 35616137 ou pelo e-mail: marks_ana22@yahoo.com.br.

Sentindo-se esclarecida em relação à proposta e concordando em participar voluntariamente desta pesquisa, peço-lhe a gentileza de assinar e devolver a autorização assinando em duas vias, sendo que uma das vias ficará com V. Sª e a outra será arquivada pelos pesquisadores por cinco anos, de acordo com a Resolução 466/2012.
Atenciosamente,

_____
Ana Paula Marques (Professora de Matemática e aluna do Mestrado)

_____
Dr. Wagner Ahmad Auarek (Coordenador da pesquisa)

_____
Dra. Maria Cristina Costa Ferreira (coorientadora)

Agradecemos desde já sua colaboração

( ) Concordo e autorizo a realização da pesquisa, com gravação das atividades de matemática nos termos propostos.

( ) Discordo e desautorizo a realização da pesquisa.

_____

Lúcia Anunciação Marinho (Diretora da Escola Municipal Ana Amélia Queiroz)

Itabirito,_____de _____ de 201__

Apêndice I - TERMO DE COMPROMISSO

TERMO DE COMPROMISSO

Declaro que conheço e cumprirei os requisitos da resolução 466/12 e suas complementares. Comprometo-me a utilizar os materiais e dados coletados exclusivamente para os fins previstos no protocolo e publicar os resultados sejam eles favoráveis ou não. Aceito as responsabilidades pela condução científica do projeto. Tenho ciência que essa folha será anexada ao projeto devidamente assinada e fará parte integrante da documentação da mesma.

_____

Ana Paula Marques

Marks_ana22@yahoo.com.br

Pesquisadora

_____

Dr. Wagner Ahmad Auarek

Coordenador da pesquisa

_____

Dra. Maria Cristina Costa Ferreira (coorientadora)

_____

Profª Drª Maria Cristina Costa Ferreira
mcristinaferreira@gmail.com
(coorientadora)

Apêndice J

PROMESTRE

MESTRADO PROFISSIONAL
EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA

Construindo o conceito de Função por meio de generalizações

Construindo o Conceito de Função por meio de Generalizações

Descrição

Produto educacional produzido como requisito parcial para a conclusão do Mestrado Profissional em Educação e Docência da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais - PROMESTRE

Orientadora

Profª Dra. Maria Cristina Costa Ferreira

Mestranda

Ana Paula Marques

marks_ana22@yahoo.com.br

2019

Apresentação

Como professora, sempre me senti incomodada ao trabalhar os conteúdos algébricos com o tradicional método "faça como o modelo" e atividades de fixação.

Por mais que entendesse que essas atividades eram necessárias, tinha vontade de introduzir maneiras diferentes para abordar os conteúdos algébricos.

Ao trazer minhas inquietudes para um mestrado profissional, encontrei alguns autores que apresentavam uma proposta diferenciada para a introdução dos conteúdos algébricos: iniciar por meio das relações funcionais. Para minha surpresa, percebi que esses conceitos podem ser trabalhados desde os anos iniciais.

Dessa maneira, me propus a realizar uma pesquisa em turmas do 9º ano, que trouxesse uma nova abordagem a esse respeito: introduzir a ideia de funções por meio de generalizações algébricas e atividades contextualizadas.

Nesse material apresento tarefas envolvendo conteúdos algébricos para o Ensino Fundamental sendo que, algumas delas, que podem ser trabalhadas com qualquer turma do Ensino Fundamental, incluindo os Anos Iniciais. Sugerimos aos colegas que façam as adaptações necessárias, de acordo com a realidade da turma.

Boa leitura!!!

Sumário

Apresentação.....169

Um pouco sobre o ensino de Álgebra 171

Tarefas e Sugestões 174

Bloco 1 – Observando e generalizando padrões 176

Tarefa 1 – Quantos quadradinhos têm nas figuras? 176

Tarefa 2 – Sequência de mesas e cadeiras 182

Tarefa 3 – Sequência n2 189

Bloco 2 – Introduzindo Funções a partir de generalizações 193

Tarefa 1– O problema do cofrinho.....193

Tarefa 2– Quem compartilha minha Função? 202

A título de síntese 209

Referências 210

Um pouco sobre o ensino de Álgebra

Enquanto estudante da educação básica sempre gostei muito de matemática, em especial dos conteúdos algébricos. Já como professora de Matemática, sentia o desconforto em ensinar esses conteúdos enfatizando as técnicas de resolução e a manipulação de símbolos e letras. A esse respeito, encontramos autores, como Lins e Gimenez (1997), que acreditam que muitos professores ensinam os conteúdos matemáticos da forma como aprenderam enquanto alunos, por não conhecerem outras maneiras de ensinar ou por não terem coragem de fazer diferente.

Por esse motivo, busquei em um programa de mestrado profissional, estudos que discutiam processos diferenciados de ensino e aprendizagem dos conteúdos algébricos. Meu interesse estava em proporcionar, aos alunos da Educação Básica, uma aprendizagem mais significativa 23 e diferenciada do que acontece comumente. Pesquisadores como James J. Kaput, Caroline Kieran,David Carraher, Luis Radford, João Pedro da Ponte acreditam que o objetivo para o ensino desse conteúdo, na Educação Básica, é contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Para Kaput (1999), o raciocínio algébrico pode ser considerado uma das ferramentas intelectuais mais poderosas da humanidade e o pensamento algébrico pode ser desenvolvido pelo estabelecimento de generalizações sobre dados, utilizando conjecturas e argumentação.

Já Radford (2006) acredita que pensar algebricamente é "*uma forma particular de refletir matematicamente*[24]" (Tradução nossa).

Ponte *et al.* (2009) trazem uma conceituação mais específica sobre o pensamento algébrico, caracterizando-o como a "capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações e funções, além da capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas" (PONTE *et al*, 2009, p.10).

---

23 O uso da palavra "significativa" deve ser compreendido no sentido comum. Conhecemos a Teoria da Aprendizagem Significativa proposta por Ausubel, porém não utilizaremos essa concepção.

24 It is clear that algebraic thinking is a particular form of reflecting mathematically. (RADFORD, 2006, p. v1-3)

Para Kieran (2004), o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ter início no trabalho com a aritmética. De acordo com essa autora, nos processos de ensino e aprendizagem dos conteúdos aritméticos é possível desenvolver vários conceitos algébricos, ainda que de forma intuitiva.

Carraher *et al.* (2006) também consideram que as generalizações estão no cerne do raciocínio algébrico. Para esses autores, as operações aritméticas podem ser trabalhadas como funções contribuindo, ainda que intuitivamente, para o desenvolvimento do pensamento funcional. De acordo com Carraher *et al* (2008), a introdução dos conteúdos algébricos, por meio das relações funcionais, permite que os alunos percebam, gradualmente, a necessidade da utilização da linguagem matemática e consigam utilizá-la de uma forma mais significativa. Esses autores desenvolvem um programa de pesquisa e ensino denominado *Early Algebra*[25], realizado em algumas escolas estadunidenses com o objetivo de estimular o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais de escolarização.

Em comum, Carraher, Kieran, Ponte, Kaput e Radford defendem que um trabalho com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico deve acontecer ainda nos anos iniciais, por meio de generalizações de sequências e padrões, uma vez que, de acordo com Radford (2010), generalizar é um processo natural e humano. No entanto, é necessário salientar, de acordo com Radford (2011), que nem todos os processos de generalização levam o aluno a pensar algebricamente.

A esse respeito, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC também sugere que o trabalho com os conceitos algébricos deve ter início no 1º ano do Ensino Fundamental. Esse deve acontecer por meio do desenvolvimento de atividades envolvendo "padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências" e "sequências recursivas: observação de regras utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo)" (BRASIL 2017, p. 276). E, nos anos seguintes, esse trabalho deve ser desenvolvido gradualmente com vista à compreensão dos conteúdos algébricos de uma forma significativa.

---

25 Esse termo está relacionado a um ensino de álgebra que tem inícios nos primeiros anos de escolarização. Utilizaremos esse termo em nosso trabalho com o significado supracitado.

Embora não haja menção explícita à abordagem das relações funcionais, acreditamos que o desenvolvimento dos conteúdos algébricos desde os anos iniciais, como está proposto na BNCC, contribua de maneira efetiva para a compreensão do conceito de função, uma vez que, de acordo com Ponte *et al* (2009), "o trabalho com sequências – de figuras, números ou outro tipo de objetos – conduz naturalmente ao estudo de regularidades, sendo um excelente veículo para promover o pensamento sobre variáveis e funções" (PONTE *et al*., 2009, p.31).

Concordando com essas ideias, desenvolvemos duas atividades para introdução do conceito de função utilizando generalizações de padrões que foram aplicadas em turmas do 9° ano de uma escola pública de cidade de Itabirito/MG. Os resultados dessa intervenção foram analisados na dissertação de mestrado que está disponível na página do PROMESTRE.

Esse é um breve resumo das leituras realizadas para a elaboração da dissertação e caso o(a) leitor(a) se interesse em conhecer melhor as ideias desses autores, apresentamos algumas referências ao final deste material.

Tarefas e Sugestões

De acordo com os estudos realizados, o trabalho envolvendo sequências e generalizações deve ser desenvolvido em todas as séries que compõem a Educação Básica, contribuindo assim para a compreensão do conceito de função.

Por concordar com esse ponto de vista, apresentamos neste material algumas atividades que acreditamos auxiliar na construção das ideias iniciais de Função.

Algumas dessas atividades foram aplicadas no nosso trabalho de campo e estão acompanhadas de respostas dos alunos, o que pode auxiliar o trabalho do colega professor(a) e sugerir as adaptações necessárias de acordo com a realidade da sua turma.

As atividades serão apresentadas em dois blocos. O primeiro deles é composto por três tarefas que envolvem sequências e padrões com foco em generalizações. As duas primeiras fizeram parte da pesquisa que deu origem a este produto educacional.

No segundo bloco, serão apresentadas duas tarefas contextualizadas visando a explicitação da relação funcional entre as variáveis e a utilização da escrita na linguagem matemática. Nesse bloco, apenas a primeira tarefa fez parte do escopo da pesquisa.

Bloco 1

Atividade 1

- Observando e generalizando padrões

Atividade 2

- Sequência de mesas e cadeiras

Atividade 3

- Sequência n^2

Bloco 1 – Observando e generalizando padrões

Tarefa 1 – Quantos quadradinhos têm nas figuras?

Essa tarefa é uma adaptação de uma atividade constante em Vale e Pimentel (2011), na qual pretende-se que o aluno determine a quantidade de quadrinhos das próximas figuras a partir de um padrão.

Corroborando com as ideias de Ponte *et al.* (2009a), os objetivos dessa tarefa são que os alunos consigam:

1. Reforçar a compreensão da noção de termo geral de uma sequência e da sua representação utilizando símbolos matemáticos;
2. Mostrar que são capazes de determinar o termo geral de uma sequência, bem como termos de várias ordens a partir do termo geral e ordens correspondentes a vários termos;
3. Exprimir resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente ou por escrito, usando notação, simbologia e vocabulários próprios (PONTE *et al* 2009a, p.31).

Esse tipo de tarefa contribui para que o aluno desenvolva estratégias para determinar os termos seguintes. Para isso, é necessário que o professor estimule a turma por meio de questionamentos e perguntas, bem como possibilite que os estudantes apresentem suas hipóteses e conclusões.

As sugestões aqui apresentadas foram utilizadas na pesquisa, porém, há outras possibilidades de explorar esse tipo de tarefas.

Essa tarefa é composta de 10 questões, incluindo uma tabela, e será apresentada por partes.

QUANTOS QUADRADINHOS TÊM NAS FIGURAS

Observe a sequência de figuras abaixo e responda:

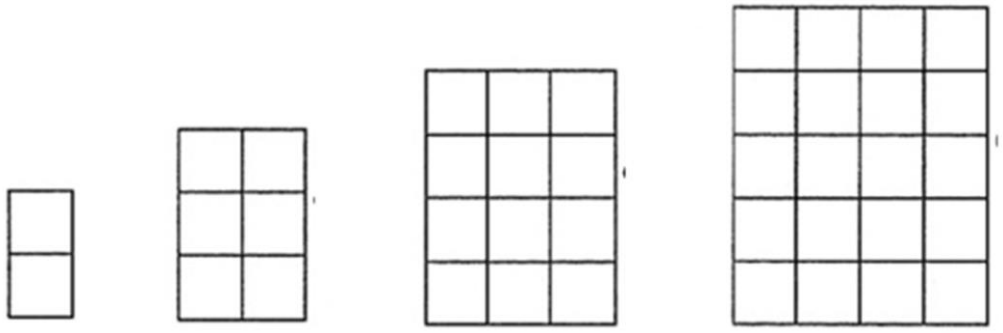


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3** **Figura 4**

Questão 1: Desenhe as duas próximas figuras dessa sequência.

Questão 2: Qual a quantidade de quadradinhos da 6ª figura da sequência? E da sétima?

Questão 3: Sem desenhar, quantos quadradinhos teriam a:

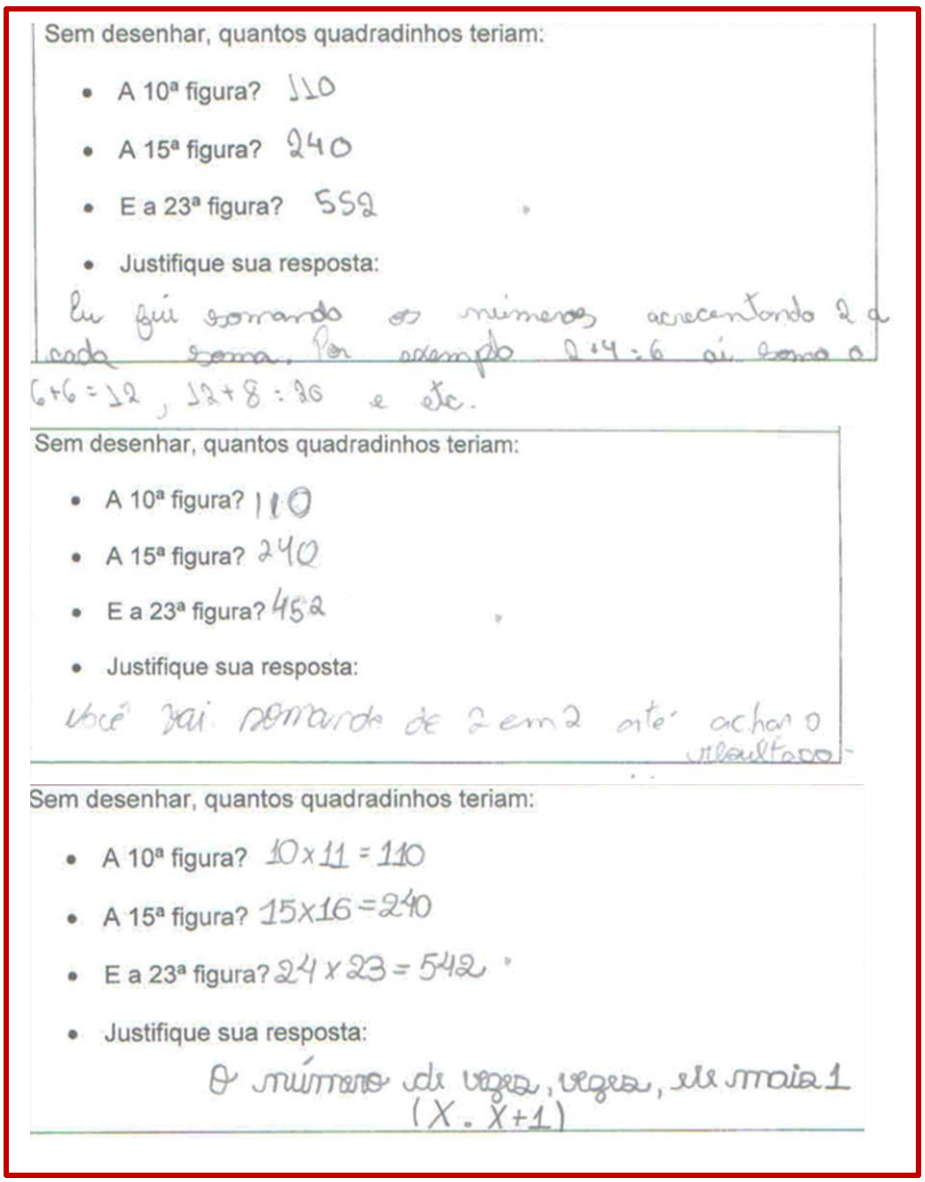
a) 10ª figura?

b) 15ª figura?

c) 23ª figura?

d) Justifique sua resposta.

A seguir, apresentamos algumas respostas obtidas no desenvolvimento da pesquisa. Por meio delas, é possível perceber diferentes estratégias utilizadas pelos alunos para justificativa de suas respostas. Certamente, há alguns erros conceituais e de cálculos, o que deve ser discutido com a turma, porém é importante ressaltar a riqueza desse material para explicitar os diferentes níveis de compreensão dos alunos e ajudá-los na construção dos conceitos matemáticos envolvidos.



Sem desenhar, quantos quadradinhos teriam:

- A 10ª figura? 110
- A 15ª figura? 240
- E a 23ª figura? 552
- Justifique sua resposta:

Eu fui somando os números acrescentando 2 a cada soma. Por exemplo 2+4=6 aí soma o 6+6=12, 12+8=20 e etc.

Sem desenhar, quantos quadradinhos teriam:

- A 10ª figura? 110
- A 15ª figura? 240
- E a 23ª figura? 452
- Justifique sua resposta:

Você vai somando de 2 em 2 até achar o resultado.

Sem desenhar, quantos quadradinhos teriam:

- A 10ª figura? 10x11=110
- A 15ª figura? 15x16=240
- E a 23ª figura? 24x23=542
- Justifique sua resposta:

O número de vezes, vezes, ele mais 1 (X . X+1)

No primeiro caso, o aluno obteve as respostas corretamente utilizando uma estratégia recursiva, isto é, ele observa o que ocorre na passagem de um termo para o termo seguinte. Por exemplo, a figura 2 pode ser obtida da figura 1 pela justaposição de 2 quadradinhos na parte lateral e outros 2 na parte superior, obtendo 2+(2+2)=2+4= 6 quadrinhos. A figura 3 pode ser obtida da figura 2 pela justaposição de 3 quadradinhos na parte lateral e 3 na parte superior, obtendo 6+(3+3)=6+6=12 quadradinhos.

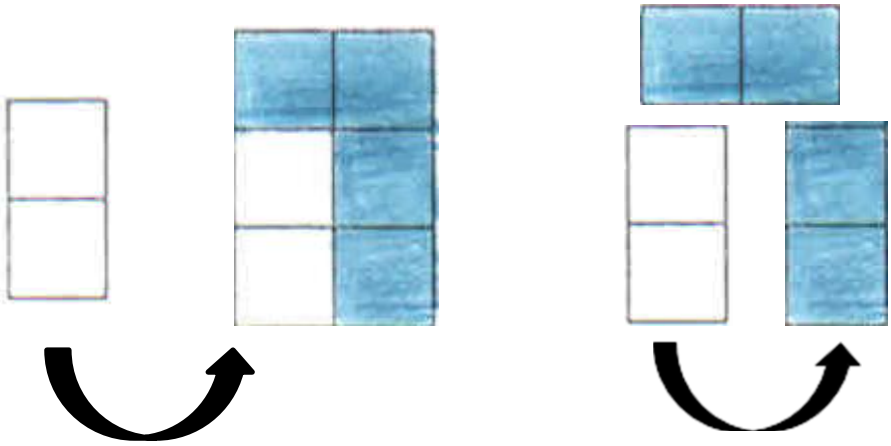


Figura 1 Justaposição

No segundo caso, o aluno acerta somente as duas primeiras respostas e não deixa clara a estratégia utilizada para obtê-las.

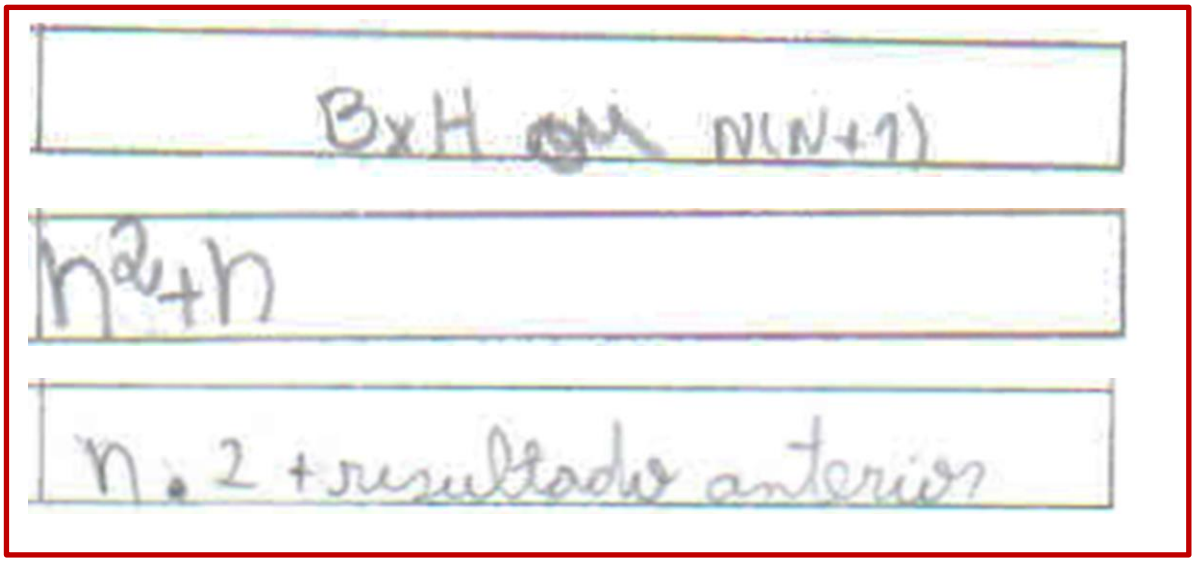
Já no terceiro caso, o aluno acerta as duas primeiras respostas, mas erra no cálculo da multiplicação 23×24. Ele consegue obter a lei de formação da sequência por meio de generalização, utilizando a linguagem algébrica. Ele percebe que para qualquer n, a figura contém n quadradinhos na horizontal e $(n+1)$ na vertical, obtendo $n(n+1)$ quadradinhos no total. Observa-se que a notação utilizada pelo aluno não está correta, porém está muito próxima disso.

Esses dados mostram que, apesar de alguns alunos terem conseguido realizar os cálculos, justificar a resposta não foi uma tarefa simples e gerou muitas dúvidas durante a discussão em sala. Acreditamos que o ato de argumentar sobre a estratégia utilizada para obter as respostas é algo pouco explorado na Educação Básica, ainda que seja uma etapa importante para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Questão 4: Para organizar os dados obtidos, complete a tabela a seguir.

Posição	Número de quadradinhos
1ª	
2ª	
3ª	
4ª	
5ª	
6ª	
7ª	
8ª	
9ª	
10ª	
...	
n	

O objetivo dessa questão era que os alunos organizassem os dados obtidos e ver se eles eram capazes de perceber a lei de formação da sequência e obter uma expressão algébrica para ela. A seguir, apresentamos algumas respostas obtidas na pesquisa.



Embora todas as respostas estejam corretas, percebemos diferentes possibilidades de modelos de generalização. Por exemplo, no segundo caso, o aluno pode ter decomposto a figura n em um quadrado $n \times n$ com a justaposição de um retângulo $n \times 1$, obtendo o resultado $n^2 + n$. Além disso, as respostas apresentadas evidenciam diferentes maneiras de utilização da linguagem algébrica.

A seguir apresentamos mais algumas sugestões de questões que poderão ser exploradas nessa tarefa.

Questão 5: Um aluno disse que a expressão algébrica $n(n + 1)$ representa o número total de quadrinhos em cada figura. Você concorda com ele? Justifique sua resposta.

Questão 6: Outra aluna encontrou a expressão algébrica $n2 + n$. Essa expressão está correta? Justifique sua resposta.

Questão 7: As expressões encontradas pelos alunos são equivalentes? Por quê?

Tarefa 2 – Sequência de mesas e cadeiras

Essa tarefa foi baseada em uma proposta de Carraher *et al.* (2007), com o objetivo de perceber como os alunos associariam, ainda que intuitivamente, o conceito de função a essa situação.

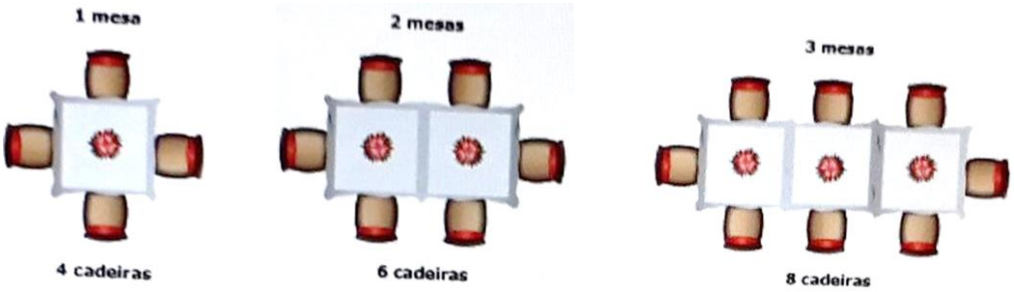
O autor e sua equipe acreditam que o trabalho com os conteúdos algébricos deve acontecer gradualmente a partir dos primeiros anos de escolarização.

Essa atividade faz parte do programa *Early Algebra* desenvolvido por esses pesquisadores em escolas dos Estados Unidos com crianças entre 8 e 11 anos que estavam no 3° ano de escolarização.

Apesar dela ter sido proposta originalmente para alunos de até 11 anos, acreditamos que esse trabalho pode ser desenvolvido em qualquer turma da educação básica com as devidas adaptações.

A discussão das estratégias utilizadas pelos alunos e a análise dos erros ou tentativas frustradas podem contribuir para que eles percebam a relação existente entre as variáveis presentes na situação e obtenham a ideia do termo geral da sequência.

Observe a disposição das mesas em uma determinada situação:



Fonte: Imagem da internet26

26 Disponível em https://brainly.com.br/tarefa/21360830 Acesso em 22/05/2018

Na pesquisa, essa tarefa foi copiada em folhas separadas e distribuídas individualmente. Todavia, outra alternativa é a projeção do material por meio do Datashow para uma discussão prévia a respeito do que acontece nessa sequência.

As mesas são dispostas formando uma fila. Continuando essa sequência de mesas e cadeiras, responda:

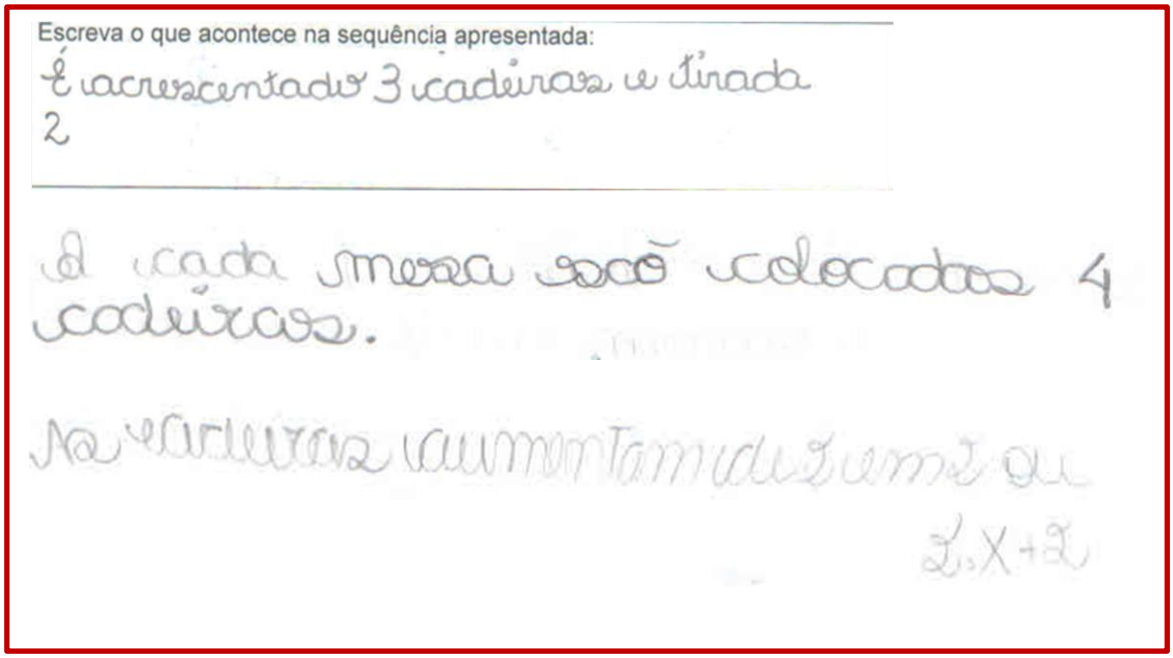
Questão 1: Escreva o que acontece na sequência apresentada.

Questão 2: Cada vez que é adicionada uma mesa, quantas pessoas a mais podem se sentar?

Questão 3: Pense em uma estratégia para calcular o número de pessoas que poderiam se sentar em uma sequência de 50 mesas.

Questão 4: E se fossem 50 pessoas, quantas mesas seriam necessárias? Justifique sua resposta da melhor forma possível.

Por meio de algumas respostas foi possível identificar diferentes estratégias escolhidas pelos alunos que, por vezes, estavam incorretas. Ao contrário de corrigir como "certo ou errado", optamos por criar momentos de discussão com a turma o que, de acordo com minhas observações, contribuiu para que muitos alunos compreendessem melhor o que estava sendo solicitado nas questões.

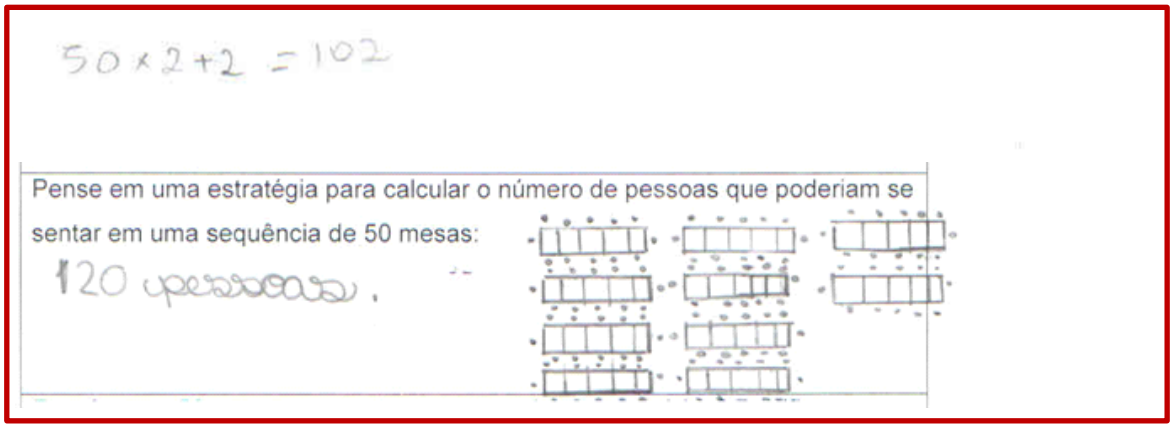

Escreva o que acontece na sequência apresentada:

É acrescentado 3 cadeiras e tirada 2

A cada mesa são colocadas 4 cadeiras.

As cadeiras aumentam de 2 em 2 ou 2.X+2

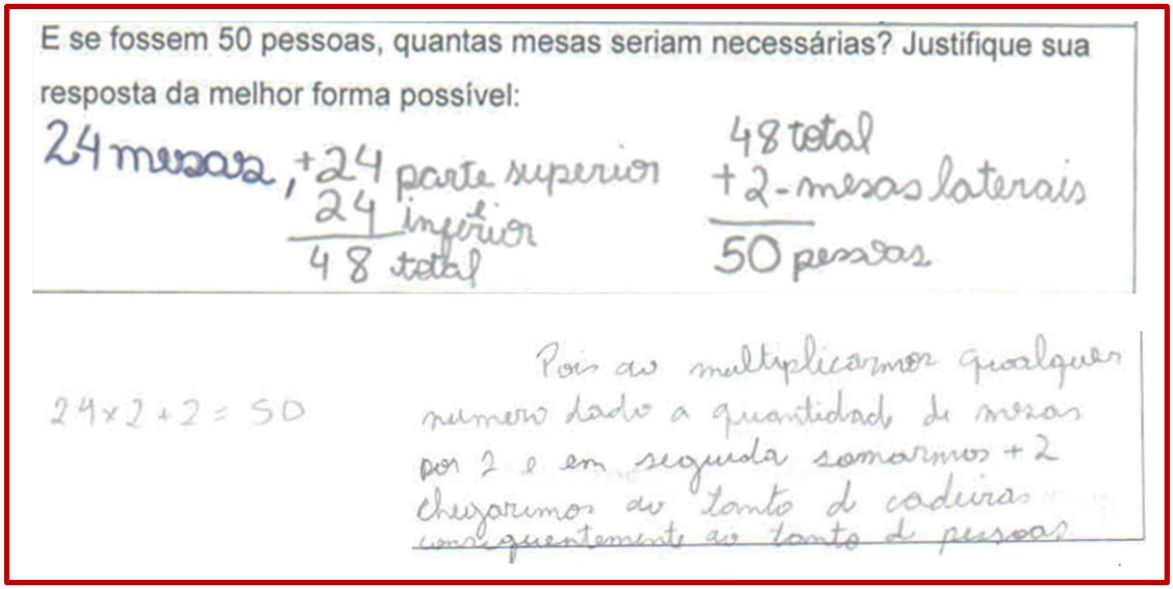
Selecionamos três respostas distintas sendo que as duas primeiras estão incorretas. Na terceira resposta o aluno já apresenta uma expressão algébrica ainda que não isso não tivesse sido solicitado.


50 x 2 + 2 = 102

Pense em uma estratégia para calcular o número de pessoas que poderiam se sentar em uma sequência de 50 mesas:

120 pessoas.

No primeiro caso, o aluno apresenta a resposta correta sem justificativa. Já no segundo, é possível perceber a tentativa de construir um "cenário" para representar toda a situação e chegar a uma resposta numérica, ainda que a ideia de continuidade (as mesas deveriam estar todas unidas), não tenha sido considerada.


E se fossem 50 pessoas, quantas mesas seriam necessárias? Justifique sua resposta da melhor forma possível:

24 mesas, +24 parte superior
24 inferior
48 total

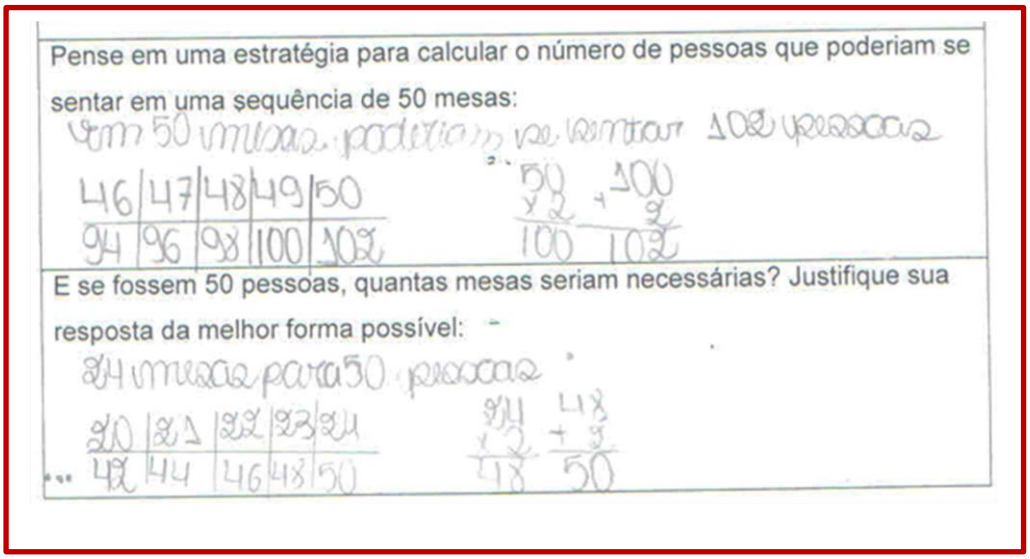
48 total
+2 - mesas laterais
50 pessoas

24 x 2 + 2 = 50

Pois ao multiplicarmos qualquer numero dado a quantidade de mesas por 2 e em seguida somarmos + 2 chegaremos ao tanto de cadeiras consequentemente ao tanto de pessoas

Essas situações mostram respostas corretas em que os alunos apresentam uma visão global da situação e uma justificativa aritmética.

Nos dois exemplos a seguir, identificamos outras estratégias utilizadas pelos alunos.


Pense em uma estratégia para calcular o número de pessoas que poderiam se sentar em uma sequência de 50 mesas:

Em 50 mesas poderiam se sentar 102 pessoas

46	47	48	49	50
94	96	98	100	102

50 x 2 = 100 + 2 = 100 102

E se fossem 50 pessoas, quantas mesas seriam necessárias? Justifique sua resposta da melhor forma possível:

24 mesas para 50 pessoas

20	21	22	23	24
42	44	46	48	50

24 x 2 = 48 + 2 = 48 50

Em comum, é possível perceber a construção de uma tabela auxiliar com a apresentação de casos intermediários como justificativa para sua resposta. Além disso, identificamos a introdução antecipada da representação de função como tabela, o que não havia ainda sido trabalhado em sala.

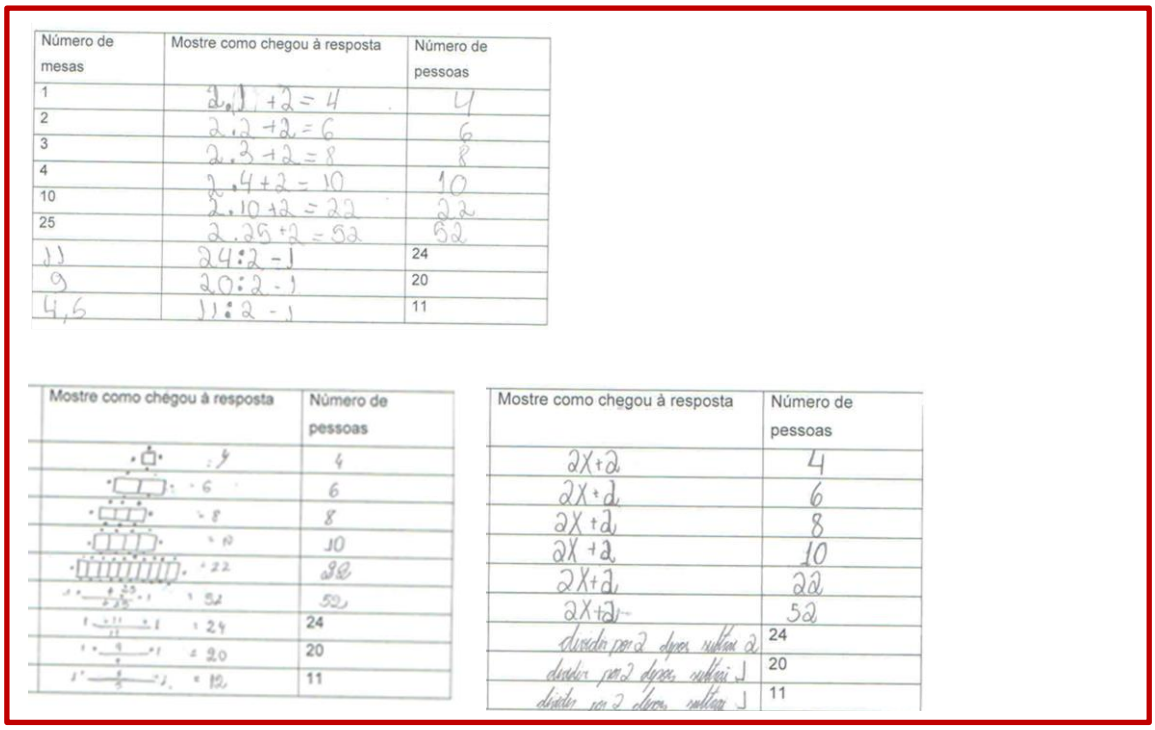
A próxima questão contém uma tabela para ser preenchida e, ao contrário da tarefa anterior, explora o que ocorre com a função para valores numéricos dados no domínio ou no contradomínio, que não estão em sequência. Além de solicitar que os alunos encontrem a quantidade de pessoas a partir do número de mesas, é necessário criar uma estratégia que permita calcular o número de mesas dada a quantidade de pessoas.

Outro ponto de destaque dessa questão foi no momento em que era necessário calcular o número de mesas necessárias para 11 pessoas. Como o resultado não era exato, alguns alunos perceberam que poderia sobrar uma cadeira, enquanto outros apresentaram, como resposta, um número decimal.

Questão 5: Complete a tabela:

Número de mesas	Mostre como chegou à resposta	Número de pessoas
1		
2		
3		
4		
10		
25		
		24
		20
		11

Por meio das três repostas apresentadas a seguir observamos as estratégias que os alunos utilizaram para justificar suas respostas. Nesse sentido, é interessante observar que os alunos utilizam operações matemáticas, desenhos e expressões algébricas.



Número de mesas	Mostre como chegou à resposta	Número de pessoas
1	2.1 +2 = 4	4
2	2.2 +2 = 6	6
3	2.3 +2 = 8	8
4	2.4+2 = 10	10
10	2.10 +2 = 22	22
25	2.25 +2 = 52	52
11	24:2 -1	24
9	20:2 -1	20
4,5	11:2 -1	11

Mostre como chegou à resposta	Número de pessoas
: 4	4
: 6	6
: 8	8
: 10	10
: 22	22
: 52	52
: 24	24
: 20	20
: 10	11

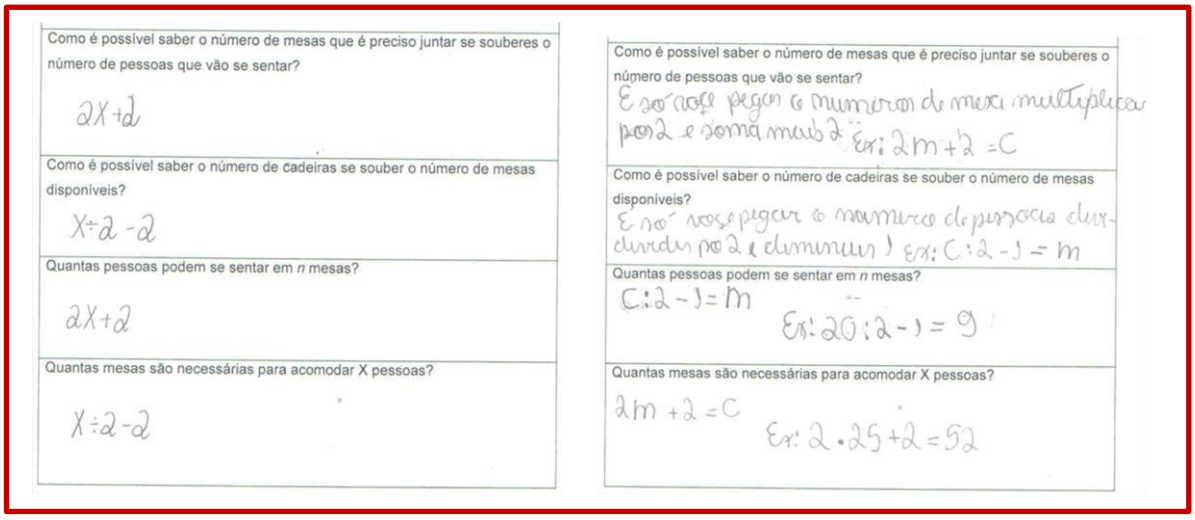
Mostre como chegou à resposta	Número de pessoas
2X+2	4
2X+2	6
2X+2	8
2X+2	10
2X+2	22
2X+2	52
dividir por 2 depois subtrair 2	24
dividir por 2 depois subtrair 1	20
dividir por 2 depois subtrair 1	11

Mais uma observação importante sobre as respostas anteriores, é que alguns alunos apresentaram como resposta para o número de mesas necessário para acomodar 11 pessoas, 4,5 mesas, desconsiderando o contexto da situação. Esse fato ocorreu com outros alunos.

As próximas questões visam a apresentação da "regra" para a sequência dada e possibilitam a explicitação dos diferentes níveis de abstração e utilização da linguagem algébrica pelos alunos.

Questão 6: Como é possível saber o número de mesas que é preciso juntar se souberes o número de pessoas que vão se sentar?
Questão 7: Como é possível saber o número de cadeiras se souber o número de mesas disponíveis?
Questão 8: Quantas pessoas podem se sentar em *n* mesas?
Questão 9: Quantas mesas são necessárias para acomodar X pessoas?

Com uma exigência maior em relação à utilização da linguagem matemática, observamos que muitos alunos compreendiam a ideia da sequência, porém não conseguiam representá-la por meio de uma expressão algébrica.


Como é possível saber o número de mesas que é preciso juntar se souberes o número de pessoas que vão se sentar?
2X+2
Como é possível saber o número de cadeiras se souber o número de mesas disponíveis?
X÷2-2
Quantas pessoas podem se sentar em *n* mesas?
2X+2
Quantas mesas são necessárias para acomodar X pessoas?
X÷2-2

Como é possível saber o número de mesas que é preciso juntar se souberes o número de pessoas que vão se sentar?
É só você pegar o numero de mesa multiplicar por 2 e soma mais 2 Ex: 2m+2=C
Como é possível saber o número de cadeiras se souber o número de mesas disponíveis?
É só você pegar o numero de pessoas dividir por 2 e diminuir 1 Ex: C:2-1=m
Quantas pessoas podem se sentar em *n* mesas?
C:2-1=m
Ex: 20:2-1=9
Quantas mesas são necessárias para acomodar X pessoas?
2m+2=C
Ex: 2.25+2=52

Nos dois casos apresentados anteriormente, os alunos utilizaram a linguagem algébrica, ainda que, na primeira situação a expressão escrita não esteja correta no segundo e quarto itens.

Já as respostas apresentadas no segundo caso (à direita da tabela) estão completas e o aluno procurou justificá-las por meio de frases ou operações aritméticas.

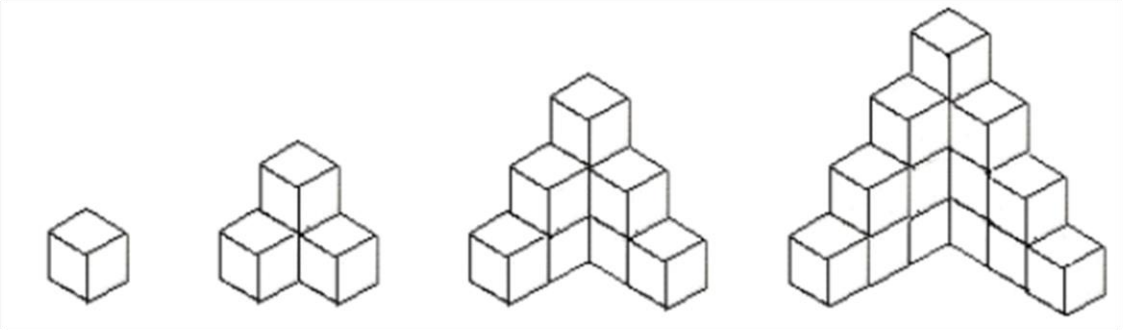
Tarefa 3 – Sequência n^2

A seguir, apresentamos sugestões de tarefas que têm, em comum, o objetivo de contribuir para a percepção do padrão n^2. Exploradas de diferentes maneiras, é possível construir a ideia do termo geral por meio de materiais concretos e desafios encontrados na internet.

A primeira questão foi inspirada em uma tarefa constante do material de Ponte *et al* (2009).

Questão 1: Sequência de cubos

Observe a formação a seguir:



Questão 1 - Escreva suas percepções em relação à formação das figuras:

a) Há algo em comum? Se sim, o que?

b) Você consegue ver todos os lados das figuras? Registre suas conclusões

Inicialmente, o professor poderá utilizar cubos de qualquer material como exemplo abaixo:

Uma sugestão é colocá-los sobre uma mesa no centro da sala e convidar os alunos para construírem a sequência utilizando o material. O interessante, nesse sentido, é explorar as diferentes formações possíveis mantendo o mesmo número de cubos, o que pode conduzir à percepção da lei de formação da sequência.

As questões a seguir podem auxiliar os alunos na compreensão da situação apresentada.

Questão 2 - Responda:

a) Quantos cubos há em cada figura?

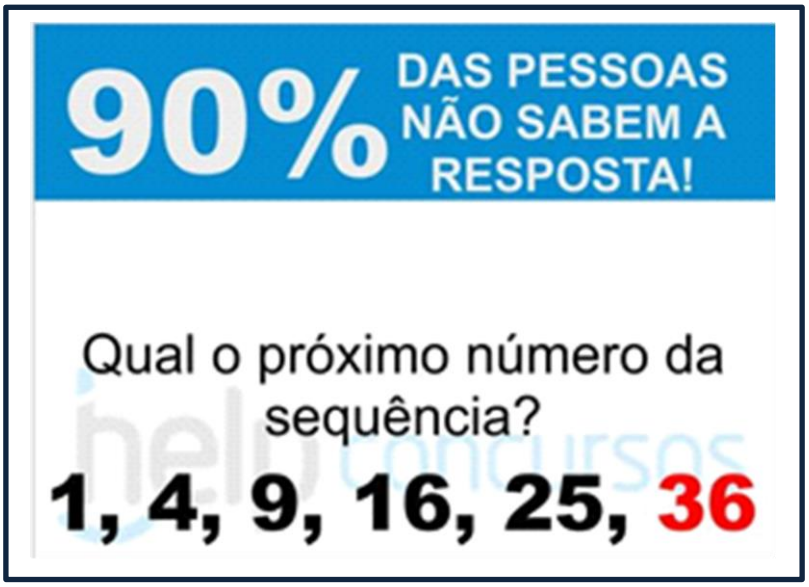
b) Qual seria a quantidade de cubos na formação da 5ª figura?

c) Como podemos descobrir o número de cubos que a 100ª figura terá?

d) Pense em uma lei de formação para essa sequência

Questão 2: Sequência numérica - desafio da internet

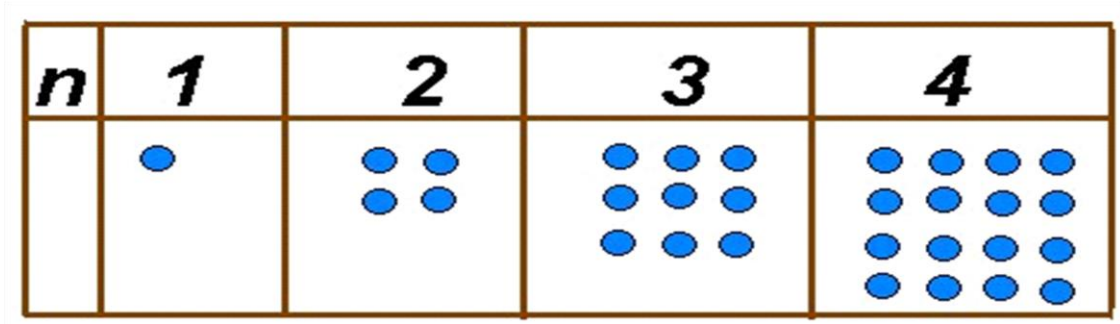
A segunda questão contém um desafio encontrado na internet e discutido, frequentemente, nas redes sociais. Muitos alunos possuem acesso à internet e encontram situações como essas o que pode ser um estímulo para a realização da tarefa.



Fonte: https://www.quandoqualquercoisa.pt/desafio-logica-sequencia-numeros-consegue-resolver/

Questão 3: Sequência de Bolinhas

Essa questão pode ser feita utilizando material concreto ou apenas desenhos, com a utilização de uma tabela auxiliar.



1º termo	2º termo	3º termo	4º termo	5º termo	6º termo	7º termo	*n* termo
1	4	9	16	25			

Bloco 2

Atividade 1

- O problema do cofrinho

Atividade 2

- Quem compartilha minha Função?

Bloco 2 – Introduzindo Funções a partir de generalizações

Tarefa 1– O problema do cofrinho

Essa tarefa, aplicada durante a pesquisa, teve por objetivo verificar a possibilidade de trabalhar, com alunos de 9° ano, a introdução do conceito de função por meio de uma situação contextualizada.

Baseada em um conjunto de atividades propostas por David Carraher e seu grupo, cujo título original é *The Piggy Banks*[27]", as perguntas foram traduzidas e adaptadas.

Trata-se de uma tarefa que pode e deve ser desenvolvida em várias etapas, sendo necessárias algumas aulas priorizando momentos de discussão e reflexões sobre o contexto do problema e as respostas dos alunos.

A sugestão, para a primeira etapa, é apresentar à turma a situação a ser explorada.

João e Maria possuem cada um, uma determinada quantia em dinheiro. Maria tem R$ 40,00 em sua carteira e o restante está guardado no cofrinho. Conversando com Maria, João descobriu que tem cinco vezes a quantia que há no cofrinho de Maria.

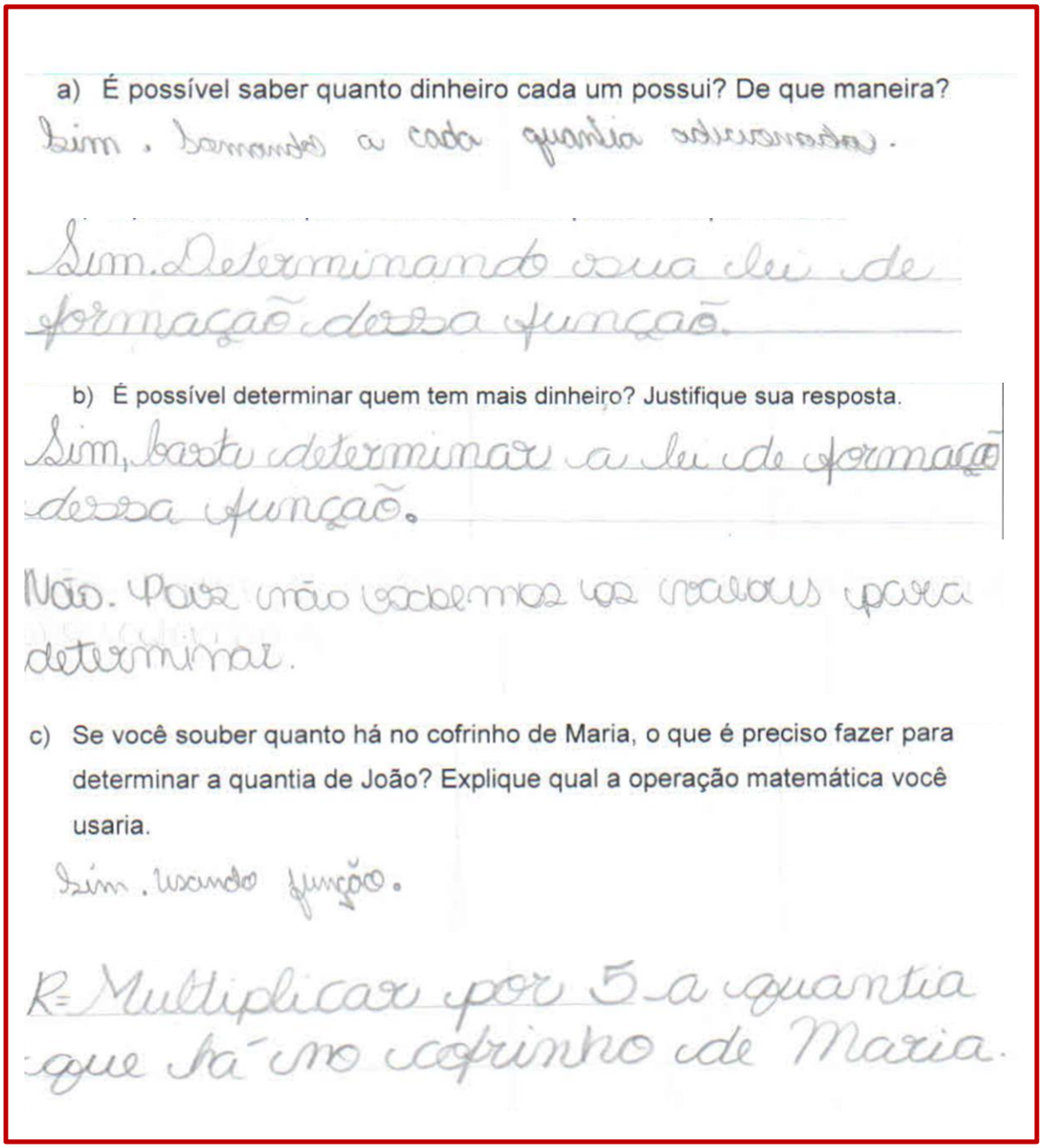
Questão 1

d) É possível saber quanto dinheiro cada um possui? De que maneira?
e) É possível determinar quem tem mais dinheiro? Justifique sua resposta.
f) Se você souber quanto há no cofrinho de Maria, o que é preciso fazer para determinar a quantia de João? Explique qual a operação matemática você usaria.

[27] Pesquisado em https://wikis.uit.tufts.edu/confluence/display/EarlyAlgebraResources/Third+Grade+Lessons. Acessado em 20/05/2018

A variedade nas respostas pode contribuir para a compreensão da situação proposta por meio das discussões com a turma. É necessário considerar a inexistência de uma única resposta correta uma vez que devemos levar em conta a interpretação dada pelos alunos.

A seguir, apresentamos algumas respostas obtidas durante a pesquisa.



a) É possível saber quanto dinheiro cada um possui? De que maneira?

Sim. Somando a cada quantia adicionada.

Sim. Determinando sua lei de formação dessa função.

b) É possível determinar quem tem mais dinheiro? Justifique sua resposta.

Sim, basta determinar a lei de formação dessa função.

Não. Pois não sabemos os valores para determinar.

c) Se você souber quanto há no cofrinho de Maria, o que é preciso fazer para determinar a quantia de João? Explique qual a operação matemática você usaria.

Sim. Usando função.

R= Multiplicar por 5 a quantia que há no cofrinho de Maria.

Destaque para a utilização do termo “Função”. Embora tivéssemos alunos que frequentavam cursinhos preparatórios para escolas técnicas, esse assunto ainda não havia sido discutido com a turma.

Outro ponto de destaque é a necessidade que alguns alunos tinham em ter um valor numérico para poder dar uma resposta, como podemos ver na justificativa apresentada por alguns deles: “não era possível obter uma reposta uma vez que não foi dado o valor que havia no cofrinho”.

A próxima questão apresenta uma tabela com valores no domínio e no contradomínio das funções que expressam matematicamente a situação do problema. Ao utilizar letras para representar variáveis no domínio e no contradomínio, foi possível perceber a dificuldade de muitos alunos de expressar a função por meio de uma expressão algébrica.

Questão 2

d) **Como não sabemos o quanto Maria tem em seu cofrinho, vamos pensar em algumas possibilidades. Complete a tabela de acordo com as informações:**

Quantia dentro do cofrinho de Maria	Quantia total de Maria (cofrinho e carteira)	Quantia de João
R$ 5,00	5,00 + 40,00 = 45,00	R$ 25,00
R$ 15,00		
	R$ 60,00	R$ 100,00
		R$ 125,00
X		
		Y

e) **E agora, é possível determinar quem tem mais dinheiro? Justifique.**

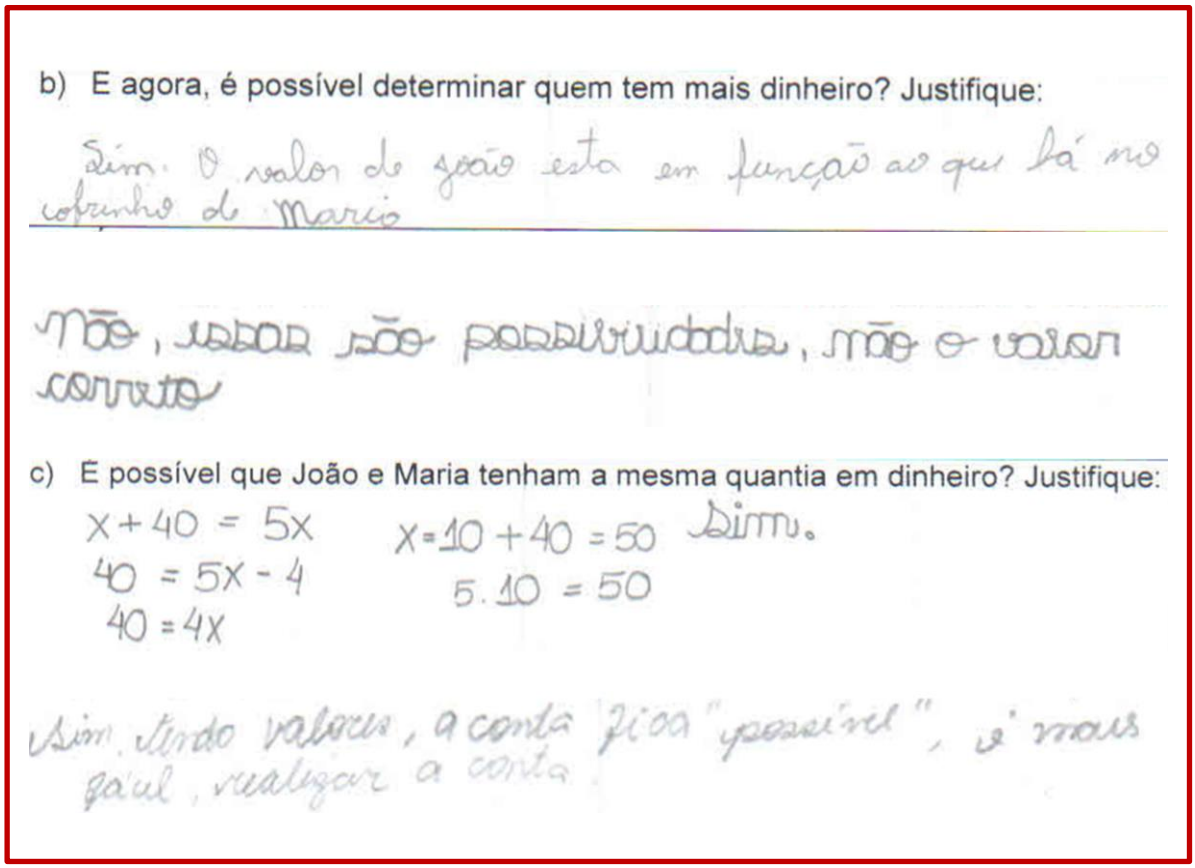
f) **É possível que João e Maria tenham a mesma quantia em dinheiro? Justifique.**

Destaque para os termos “é possível” e “justifique” que têm como objetivo estimular o aluno a expressar sua opinião sem a preocupação de estar certo ou errado. As discussões, a esse respeito, podem ser feitas por meio da formação de grupos ou com a turma toda.

Quantia dentro do cofrinho de Maria	Quantia total de Maria (cofrinho e carteira)	Quantia de João
R$ 5,00	5,00 + 00 = 45,00	R$ 25,00
R$ 15,00	15,00+40,00=55,00	R$ 75,00
R$ 20,00	R$ 60,00	R$ 100,00
25,00	R$65,00	R$ 125,00
X	40+X	5X
$\frac{Y}{5}$	$\frac{Y}{5}$ + 40	Y

Quantia dentro do cofrinho de Maria	Quantia total de Maria (cofrinho e carteira)	Quantia de João
R$ 5,00	5,00 + 40,00 = 45,00	R$ 25,00
R$ 15,00	15,00 + 40,00 = 55,00	R$ 75,00
R$ 20,00	R$ 60,00	R$ 100,00
R$ 25,00	R$ 25,00+40=65,00	R$ 125,00
X	X+40 = 40+X	5X
Y	$\frac{Y}{5}$	Y

Embora a maior parte dos alunos conseguisse calcular corretamente o valor numérico da imagem tanto direta como inversa para casos específicos, o mesmo não ocorreu quando era necessário generalizar os procedimentos aritméticos utilizados para obter as expressões algébricas. Embora o primeiro caso apresentado no quadro anterior esteja correto, mesmo os alunos que utilizaram expressões algébricas, tiveram dificuldades para escrevê-las corretamente, como visto no segundo caso.



b) E agora, é possível determinar quem tem mais dinheiro? Justifique:

Sim. O valor de João esta em função ao que há no cofrinho de Mario

Não, essas são possibilidades, não o valor correto

c) É possível que João e Maria tenham a mesma quantia em dinheiro? Justifique:

$x + 40 = 5x$
$40 = 5x - 4$
$40 = 4x$

$x = 10 + 40 = 50$
$5 . 10 = 50$

Sim.

Sim. Sendo valores, a conta fica "possível", é mais fácil realizar a conta.

Mais uma vez encontramos o temo "função" utilizado naturalmente. A ideia de não ter uma resposta correta e sim possibilidades é apresentada nessas respostas. Além disso, há a utilização correta de equação algébrica, apesar de apresentar um erro em uma etapa intermediária da resolução, possivelmente de distração.

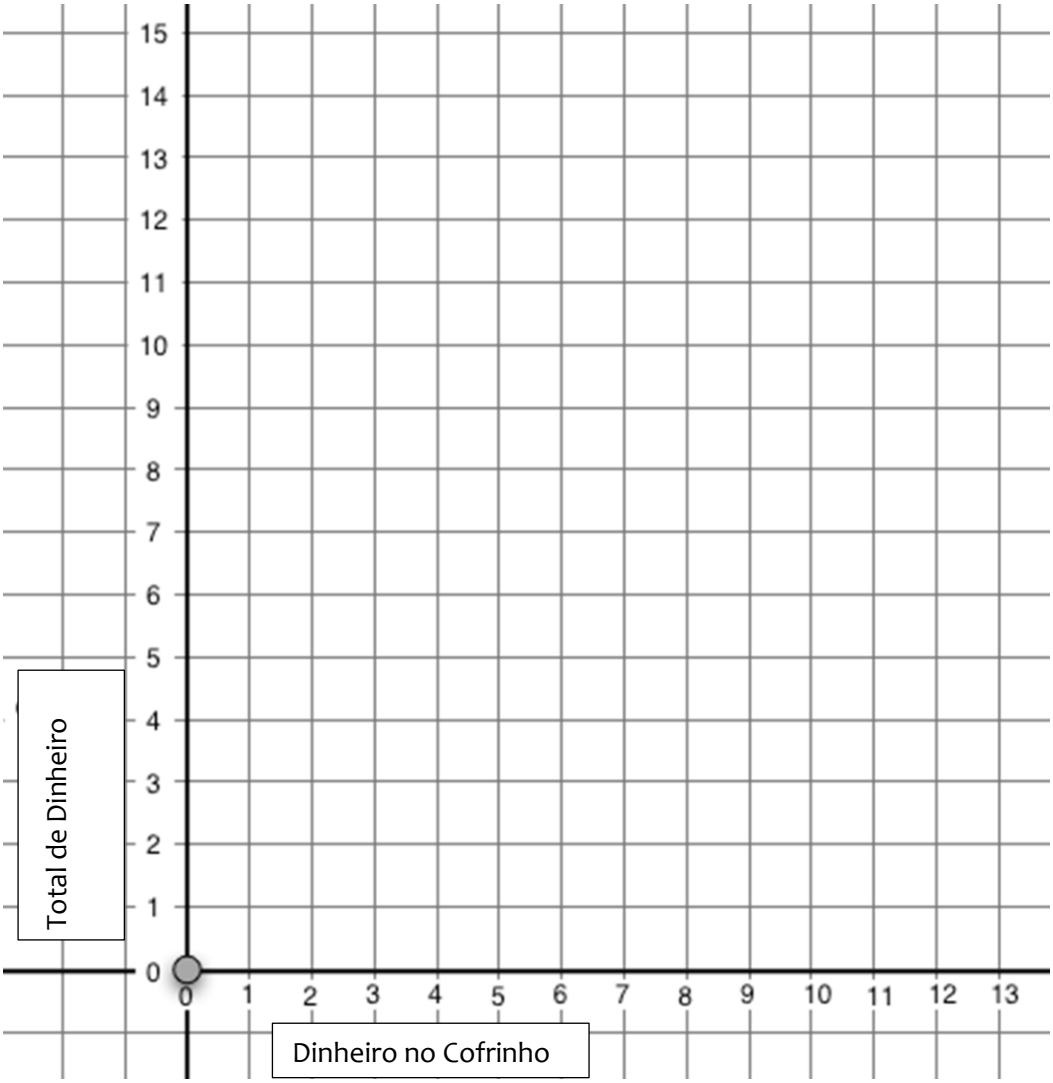
A próxima questão envolve a construção de um gráfico e no momento da realização da pesquisa esse assunto não havia sido desenvolvido com a turma. Talvez, por esse motivo, os alunos não conseguiram inicialmente compreender o que estava sendo solicitado. Porém, após algum tempo de discussão, foi possível realizar essa tarefa sem que os alunos necessitassem de mais intervenções.

Vamos utilizar os dados da tabela para esboçar o gráfico da quantidade total de dinheiro que cada um possui.

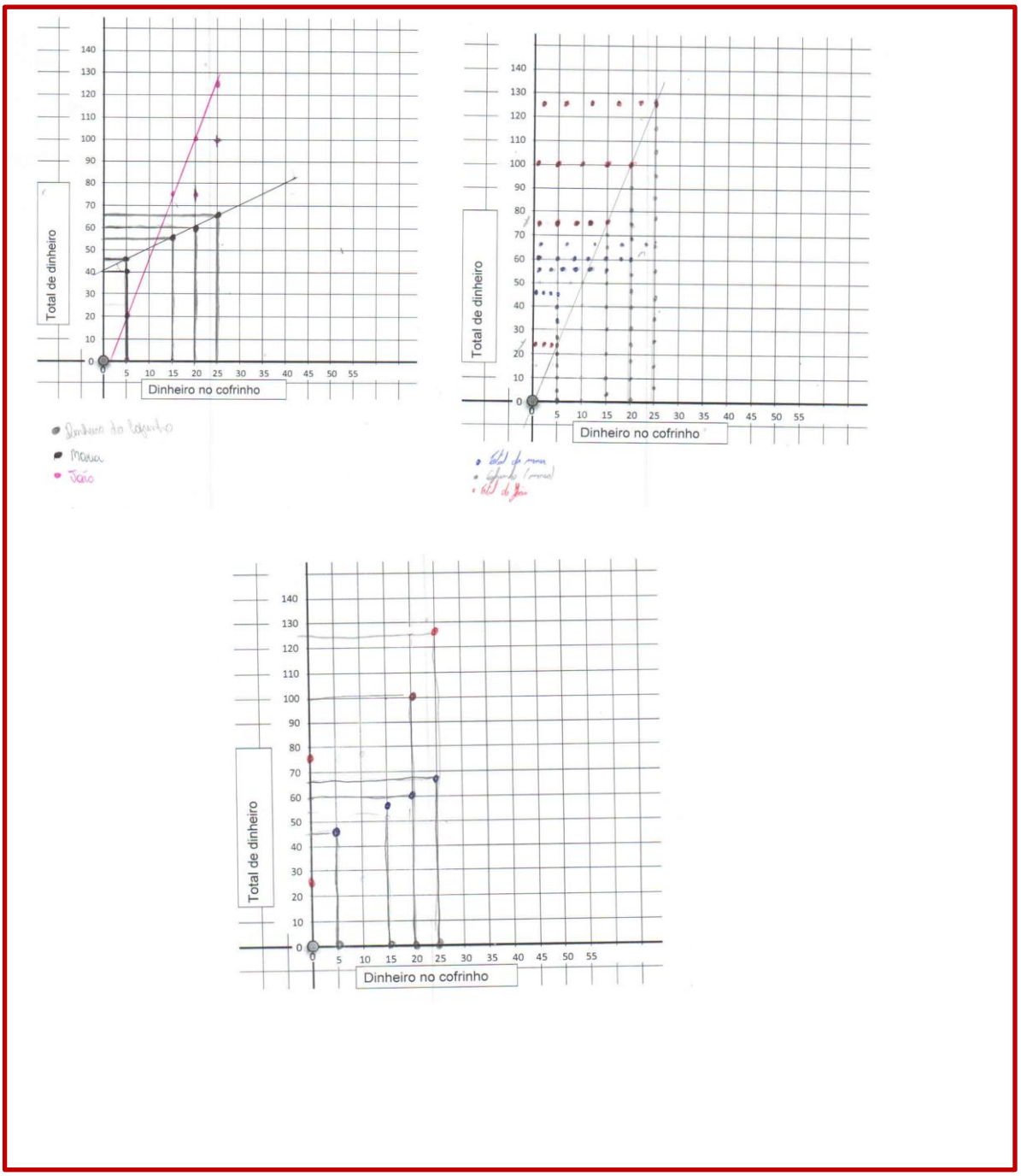
Vamos recordar:

- Maria possui certa quantidade no cofrinho mais 40 reais na carteira;
- João possui 5 vezes a quantidade que Maria tem no cofrinho.

- Utilize cores diferentes e marque os pontos correspondentes ao valor de cada um.
- Faça a legenda.
- Ligue os pontos referentes a cada um dos personagens.



Algumas respostas obtidas durante a pesquisa mostram que alguns alunos conseguiram construir o gráfico corretamente, enquanto outros marcaram apenas os pontos. Por ser uma tarefa nova para a turma, essa atitude era esperada.



No primeiro caso o aluno apresenta o gráfico completo com as respostas de João e Maria. No segundo caso é possível ver representados vários pontos e a reta correspondente à situação de João. Já terceira resposta, percebemos a representação dos pares ordenados, porém, sem a reta correspondente. Essas três situações foram comuns entre as respostas apresentadas pela turma durante a pesquisa.

Para responder as questões 3 e 4 era necessário observar o gráfico construído.

Questão 3

Observando o gráfico, responda:
É possível determinar quem tem mais dinheiro, mesmo sem saber a quantidade que Maria tem no cofrinho? Por quê?

Questão 4

d) Maria sempre terá mais dinheiro que João? Por quê?
e) Qual é a quantia que deverá ter no cofrinho para que João e Maria tenham a mesma quantia? Como você percebeu isso? O que acontece com as retas nesse ponto?
f) Se a quantidade de dinheiro no cofrinho for muito grande quem terá mais dinheiro? Justifique suas conclusões?

É possível determinar quem tem mais dinheiro, mesmo sem saber a quantidade que Maria tem no cofrinho? Por quê?

Sim, a gente pode deduzir um valor.

a) Maria sempre terá mais dinheiro que João? Por quê?

Não. Porque João sempre terá o valor de Maria vezes de 5 vezes

b) Qual é a quantia que deverá ter no cofrinho para que João e Maria tenha a mesma quantia? Como você percebeu isso? O que acontece com as retas nesse ponto?

10 10+10=50 os pontos vão ser os
10X5=50 mesmos.

c) Se a quantidade de dinheiro no cofrinho for muito grande quem terá mais dinheiro? Justifique suas conclusões?

João, porque o valor dele é cinco vezes e do gráfico.

Percebemos, a partir das respostas anteriores, que alguns alunos não conseguiram construir o gráfico corretamente ou não utilizaram as informações nele apresentadas. Isso fica evidente nas respostas "a" uma vez que não houve a percepção de que, com alguns valores, Maria teria mais dinheiro que João. A explicação pode estar no fato de que esse tipo de atividade não seja muito explorado antes do trabalho com o conteúdo de Funções. Nesse sentido, acreditamos ser necessário que esse tipo de situação seja trabalhada previamente.

Tarefa 2– Quem compartilha minha Função?

Essa tarefa foi adaptada de uma proposta feita por David W. Carraher e seu grupo para o programa *Early Algebra,* com o título original "*Who Shares My Function*?"[28].

Para a realização dessa tarefa é desejável que os alunos já tenham compreendido expressões algébricas, bem como, a construção de tabelas e gráficos. Ela tem como objetivo estimular os alunos a perceber as três maneiras de representar uma função, fazendo associações entre elas.

Ela pode ser realizada por meio de um jogo em que os alunos deverão encontrar a pessoa ou o grupo que "compartilha a mesma Função".

Jogo: Quem compartilha minha Função?

Ao analisarmos o nosso dia-a-dia, percebemos que vários eventos podem estar em função de outros.

Uma viagem pode ser um bom exemplo. Nas viagens de carro podemos calcular o tempo que vamos gastar ou a quantidade de combustível de acordo com a distância a ser percorrida ou a potência do carro utilizado.

O fato é que, com organização e planejamento, é possível realizar cálculos nos quais um valor depende do outro. Esses dados podem ser descritos em uma tabela, um gráfico e também em uma expressão algébrica. E, todos esses elementos representam a mesma situação.

Nessa tarefa, os alunos receberão uma carta que pode conter: uma expressão algébrica, uma tabela ou um gráfico. O desafio, nesse caso, é descobrir quais são os colegas cujas cartas representam a mesma situação.

O exemplo em questão apresenta funções lineares e afins, porém, pode ser adaptado para outras situações.

---

[28] Pesquisado em https://wikis.uit.tufts.edu/confluence/pages/viewpage.action?pageId=33416542 Acessado em 28/12/2017

Regras

1- Cada aluno ou grupo receberá uma carta aleatória;
2- A carta pode ter uma expressão algébrica, uma tabela ou um gráfico;
3- O objetivo do jogo é que o aluno ou o grupo encontre as outras duas cartas que representam sua função;
4- Os vencedores são aqueles que conseguirem reunir as três cartas primeiro.

Carta com expressões

$y = 10x$

$y = x + 5$

$y = \frac{1}{2}x - 1$

$y = 5$

$y = \frac{1}{2}x + 5$

Carta com tabelas

X	Y
4	1
8	3
10	4
24	11
50	24
100	49

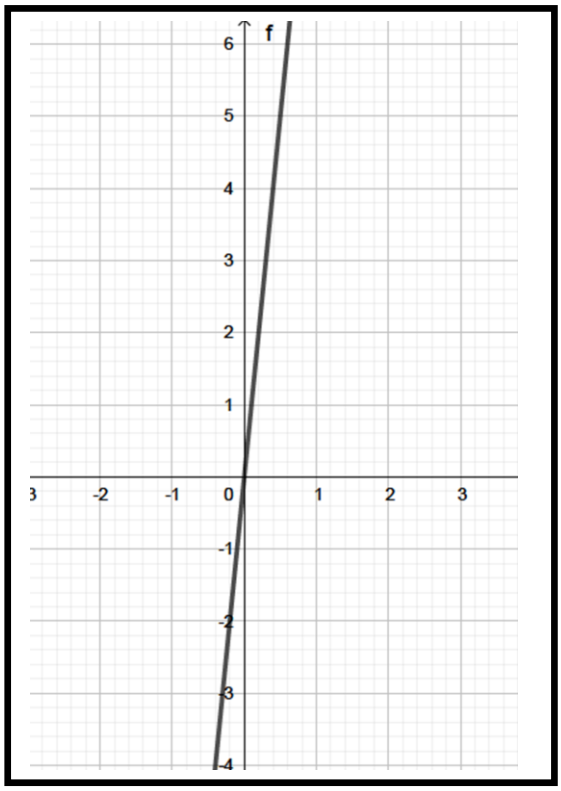
X	Y
0	5
5	5
7	5
13	5
27	5
50	5

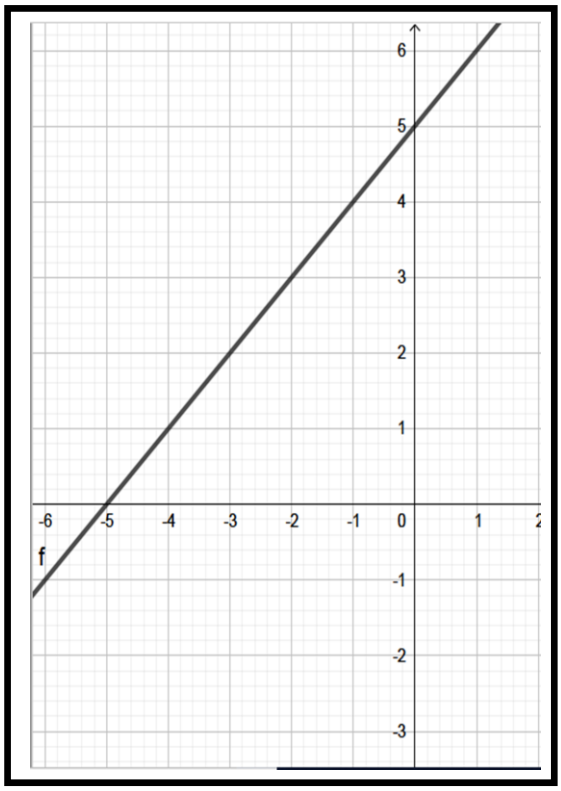
X	Y
0	5
5	55
7	75
13	135
27	275
50	505

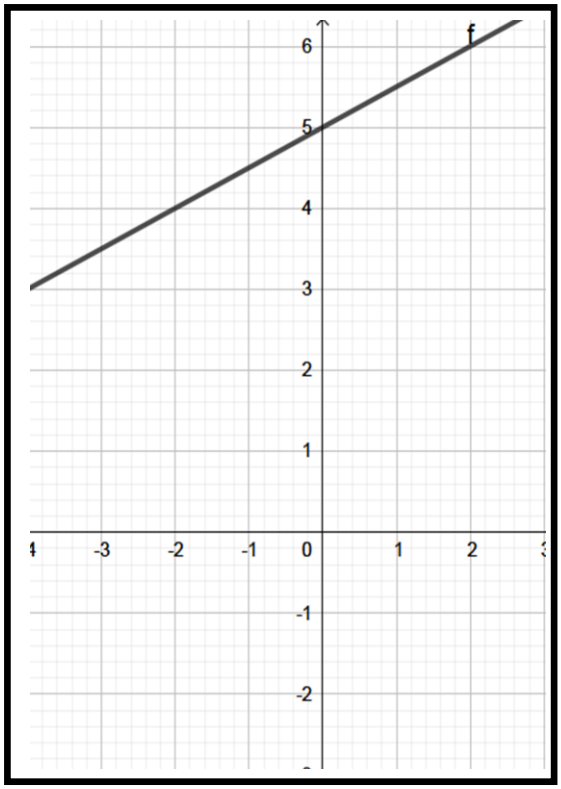
X	Y
0	5
4	7
8	9
28	19
50	30
100	55

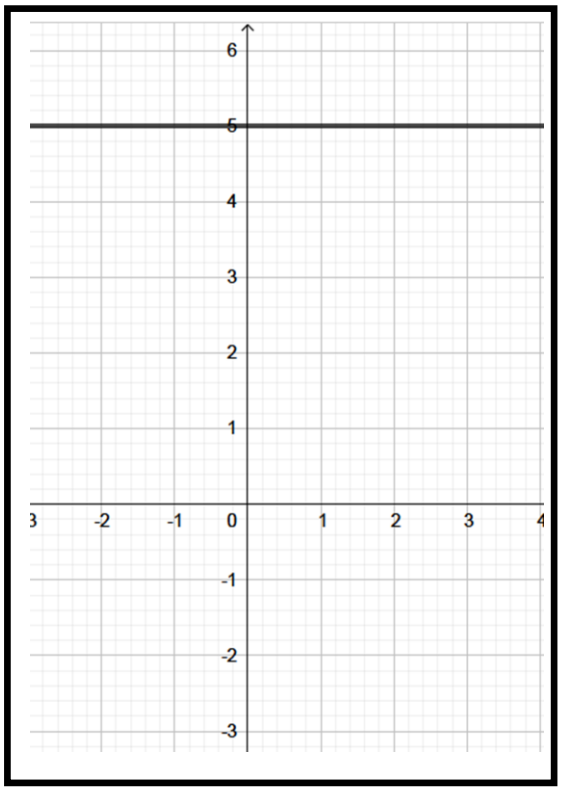
X	Y
0	0
5	50
7	70
13	130
27	270
100	1000

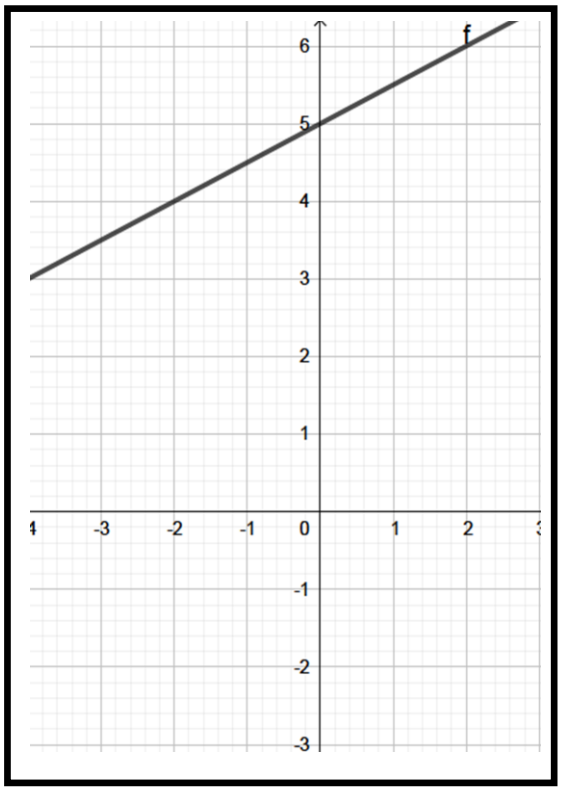
Carta com os gráficos











Sugestões para o professor

- Essa proposta foi retirada do site *Early Algebra*[29], no qual encontramos diversas atividades que podem ser adaptadas e trabalhadas em todas as turmas da Educação Básica;
- Embora o site esteja em inglês, os programas de tradução, que encontramos na internet, são uma excelente ferramenta para auxiliar os colegas que não possuem um bom conhecimento de inglês.

[29] Pesquisado em https://wikis.uit.tufts.edu/confluence/display/EarlyAlgebraResources/Third+Grade+Lessons Acessado em 28/12/2017

A título de síntese

Sabemos o quanto alguns alunos não se identificam com os conteúdos algébricos e, em muitos casos, com a Matemática. Algumas pesquisas apontam para o fato que esse problema pode ser consequência de um processo de aprendizagem baseada em técnicas de resolução que não fazem sentido para o estudante.

Buscar uma proposta diferenciada para o ensino dos conteúdos algébricos possibilitou que "descobríssemos" diversas pesquisas que apresentam propostas interessantes para o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra na educação básica. Percebemos, entre diversos aspectos, que o objetivo principal para o ensino desse conteúdo repousa no desenvolvimento do pensamento algébrico, de acordo com diversos autores.

Além disso, algo em comum para Ponte, Carraher, Kaput, Kieran entre outros, é o fato de que esse trabalho deve acontecer em todas as etapas de escolarização. Uma sugestão, de acordo com Radford e outros autores, é um trabalho com foco nas generalizações por meio de atividades envolvendo sequências e padrões. De fato, essa sugestão está presente na BNCC devendo ser considerada então.

Por esse motivo apresentamos algumas tarefas que podem ser adaptadas e trabalhadas em todas as etapas da educação básica. Oferecemos um material rico e acessível a todos uma vez que utilizamos recursos simples e acessíveis a todos os professores.

Por fim, convidamos os nossos colegas a se debruçarem nas pesquisas a esse respeito, a fim de conhecer outras perspectivas de ensino dos conteúdos algébricos. Podemos afirmar que existem muitos materiais interessantes que podem ser adaptados e trabalhados em diversas realidades. Temos a certeza que a haverá algumas mudanças de paradigmas e um "novo olhar" para o desenvolvimento dos conteúdos algébricos.

Referências bibliográficas

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/**Secretaria de Educação Básica**, 2017.

CARRAHER, David W.; SCHIEMANN, Analúcia. D.; BRIZUELA, Bárbara. M.; EARNEST, Darrel. Arithmetic and Algebra in **Early Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education**, v. 37, no 2, p. 87-115, 2006.

CARRAHER, David W.; SCHLIEMANN, Analucia D; SCHWARTZ, Judah L. Early algebra is not the same as algebra early. In: **Algebra in the early grades**, p. 235-272, New York, 2008.

KAPUT, James. J. Teaching and learning a new algebra. **Mathematics classrooms that promote understanding. Routledge,** p. 145-168, 1999.

KIERAN, Carolyn. Algebraic thinking in the early grades: What is it. **The Mathematics Educator,** p. 139-151, 2004.

PONTE, João Pedro da. O conceito de função no currículo de Matemática. **Repositório da Universidade de Lisboa. Faculdade de Ciências. Faculdade de Educação.** p. 3-9, 1990.

PONTE, João Pedro da, Números e álgebra no currículo escolar. **XIV EIEM-Encontro de Investigação em Educação Matemática**, p. 5-27, 2006.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. Álgebra no ensino básico. Lisboa: **Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC) do Ministério da Educação de Portugal**, 2009.

PONTE, Jõao Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana, **Sequências e Funções: Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3° ciclo – 7° ano** Lisboa: Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC) do Ministério da Educação de Portugal, 2009a.

RADFORD, Luis; PEIRCE, Charles Sanders. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In**: Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education**, North American chapter. 2006. p. 2-21.

RADFORD, Luis, Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA** p.37-62. 2010. Disponível em <http://hdl.handle.net/10481/3505> Acesso em 02/08/2018

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa Padrões: um tema transversal do currículo. Educação e matemática. - Lisboa : **Associação de Professores de Matemática**, N° 85, p. 14-20, v. 85, p. 14-20, 2005.