

**ANÁLISE DE LOCALIZAÇÃO DE
DEFORMAÇÕES EM MODELOS
FISICAMENTE NÃO LINEARES**

Lucas Aleksander Faccini Fioresi

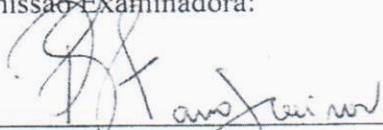
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"ANÁLISE DE LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES EM
MODELOS FÍSICAMENTE NÃO LINEARES"**

Lucas Aleksander Faccini Fioresi

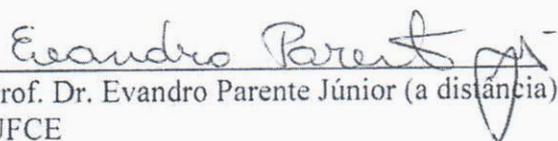
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:


Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira
DEES - UFMG (Orientador)


Prof. Dr. Samuel Silva Penna
DEES - UFMG (Coorientador)


Prof. Dr. Rodrigo Guerra Peixoto
DEES - UFMG


Prof. Dr. Evandro Parente Júnior (a distância)
UFCE

Belo Horizonte, 01 de julho de 2019

F518a

Fioresi, Lucas Aleksander Faccini.

Análise de localização de deformações em modelos fisicamente não lineares [recurso eletrônico] / Lucas Aleksander Faccini Fioresi. - 2019. 1 recurso online (xvi, 125 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira.
Coorientador: Samuel Silva Penna.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 119-125.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Método dos elementos finitos - Teses. 3. Simulação (Computadores) - Teses. I. Pitangueira, Roque Luiz da Silva. II. Penna, Samuel Silva. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 624(043)

Índice

Índice	iii
Lista de Tabelas	v
Lista de Figuras	viii
Lista de Abreviaturas e Siglas	ix
Lista de Símbolos	x
Resumo	xvi
Abstract	xvii
Agradecimentos	xviii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivos	3
1.2 Organização do Texto	3
2 ESTABILIDADE DO PONTO MATERIAL	5
2.1 Problema de Valor de Contorno para Taxas	5
2.2 Unicidade da solução do PVC	7
2.3 Estabilidade do Ponto Material	9
3 O FENÔMENO DE LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES	12
3.1 Descrição cinemática da zona inelástica	12
3.2 Localização de Deformações	15
3.3 Aspectos Históricos	19
3.4 Métodos Numéricos para Análises Não Lineares	20
3.5 Medida de Localização de Deformações	21
3.5.1 Definição do Tensor Acústico	21
3.5.2 Classificação dos tipos de bifurcação	30

4	ANÁLISE DE LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES	35
4.1	Representação do Comportamento Material	35
4.2	Abordagem Analítica para a Análise de Localização	41
4.3	Abordagem Numérica para a Análise de Localização	47
5	TÉCNICA NUMÉRICA IMPLEMENTADA	61
5.1	Técnica Numérica da Análise de Localização	62
5.1.1	Expressão Analítica para o Determinante do Tensor Acústico .	62
5.1.2	Solução do Sistema Não Linear de Equações	69
5.2	Implementação Computacional	71
5.2.1	Formulação Unificada para Modelos Constitutivos	71
5.2.2	Classe <i>Degeneration</i>	73
5.2.3	Classe <i>Model</i>	74
5.2.4	Subpacote <i>LocalizationAnalysis</i>	76
6	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	83
6.1	Tração Direta	83
6.2	Flexão em 3 pontos	93
6.3	Painel em “L”	96
6.4	Cisalhamento em 4 pontos	101
6.5	Bandas de Cisalhamento em Plasticidade	104
6.5.1	Tração Uniaxial	104
6.5.2	Ensaio de Punção	111
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	116
7.1	Contribuições deste Trabalho	116
7.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	117
	Referências Bibliográficas	119

Lista de Tabelas

3.1	Categorização dos tipos de bifurcação (Adaptado de Neilsen e Schreyer (1993)).	34
6.1	Tração Direta - Parâmetros adotados para modelos constitutivos. . .	85

Lista de Figuras

2.1	Problema de valor de contorno para taxas.	6
3.1	Campos cinemáticos durante a falha difusa (Jirásek (2001)).	13
3.2	Campos cinemáticos durante a descontinuidade fraca (Jirásek (2001)).	14
3.3	Campos cinemáticos durante a descontinuidade forte (Jirásek (2001)).	14
3.4	Bandas de deslizamento em prisma de cobre comprimido (Nadai (1931)).	16
3.5	Bandas de localização em corpo de prova de areia comprimido (Alshibli e Sture (2000)).	16
3.6	Esquema estrutural do ensaio de tração uniaxial da placa de concreto (Shah et al. (1995) <i>apud</i> Wolff (2010)).	17
3.7	Deslocamento medido pelos transdutores de deslocamento durante o ensaio (Shah et al. (1995) <i>apud</i> Wolff (2010)).	18
3.8	Resultados do sistema de emissão acústica (Shah et al. (1995) <i>apud</i> Wolff (2010)).	19
3.9	Corpo dividido por uma potencial superfície de descontinuidade (Jirásek (2007a)).	22
3.10	Componentes de tensão em um elemento infinitesimal.	23
3.11	Componentes do tensor de tensão no plano da descontinuidade.	24
3.12	Componentes do tensor de tensão no plano da descontinuidade (Jirásek (2007b) <i>apud</i> Silva (2016)).	25
3.13	Modos I e II de falha no plano (Jirásek (2007a)).	26
3.14	Classificação dos tipos de bifurcação para modelo não associado (Adaptado de Ottosen e Runesson (1991)).	33
3.15	Classificação dos tipos de bifurcação para modelo associado (Adaptado de Ottosen e Runesson (1991)).	33

4.1	Incremento de deformação associado à variação da flexibilidade (Penna (2011)).	37
4.2	Condição de carregamento biaxial (Doghri e Billardon (1995)).	45
4.3	Parametrização esférica (Mota et al. (2016)).	54
4.4	Parametrização estereográfica (Mota et al. (2016)).	55
4.5	Parametrização projetiva (Mota et al. (2016)).	56
4.6	Parametrização tangente (Mota et al. (2016)).	57
4.7	Parametrização cartesiana (Mota et al. (2016)).	58
4.8	Comportamento das funções a serem minimizadas para diferentes tipos de parametrização (Mota et al. (2016)).	59
5.1	Simbologia adotada na representação UML.	62
5.2	Intervenções realizadas na formulação unificada de modelos constitutivos.	72
5.3	Intervenções realizadas na classe <code>Degeneration</code>	74
5.4	Intervenções realizadas na classe <code>Model</code>	75
5.5	Classe <code>LocalizationAnalysisDataManager</code>	75
5.6	Novas classes implementadas para a análise de localização.	76
5.7	Classe <code>CartesianParametrization</code>	77
5.8	Novas classes implementadas para solução da otimização não linear.	78
5.9	Diagrama de atividades para análise de localização - Parte 1.	79
5.10	Diagrama de atividades para análise de localização - Parte 2.	80
5.11	Fluxograma da análise de localização no escopo de um elemento.	82
6.1	Tração Direta - Esquema estrutural.	84
6.2	Tração Direta - Trajetórias de equilíbrio: Parte 1.	86
6.3	Tração Direta - Trajetórias de equilíbrio: Parte 2.	87
6.4	Tração Direta - Análise de localização.	88
6.5	Tração Direta - Valor mínimo para o determinante do tensor acústico ao longo da análise para o modelo de plasticidade de von Mises.	89
6.6	Tração Direta - Malhas refinadas.	90
6.7	Tração Direta - Trajetórias de equilíbrio com refinamento de malha.	90
6.8	Tração Direta - Análise de localização com malhas refinadas.	91
6.9	Tração Direta - Esquema estrutural com elementos sólidos.	92
6.10	Tração Direta - Análise de localização para elementos sólidos.	93

6.11 Flexão em 3 pontos - Esquema Estrutural.	94
6.12 Flexão em 3 pontos - Discretização adotada.	95
6.13 Flexão em 3 pontos - Análise de localização no plano 'xy'.	95
6.14 Flexão em 3 pontos - Análise de localização em perspectiva.	96
6.15 Painel em "L" - Esquema Estrutural.	97
6.16 Painel em "L" - Trajetória de equilíbrio.	98
6.17 Painel em "L" - Análise de localização - Parte 1.	99
6.18 Painel em "L" - Análise de localização - Parte 2.	100
6.19 Cisalhamento em 4 pontos - Esquema estrutural.	101
6.20 Cisalhamento em 4 pontos - Discretização adotada.	102
6.21 Cisalhamento em 4 pontos - Análise de localização.	103
6.22 Tração Uniaxial - Esquema estrutural.	105
6.23 Tração Uniaxial - Discretizações adotadas.	106
6.24 Tração Uniaxial - Bandas de cisalhamento.	107
6.25 Tração Uniaxial - Comparação entre bandas de cisalhamento.	108
6.26 Tração Uniaxial - Análise de localização para malha grosseira.	110
6.27 Tração Uniaxial - Análise de localização para malha refinada.	111
6.28 Ensaio de Punção - Esquema estrutural.	112
6.29 Ensaio de Punção - Discretizações adotadas.	113
6.30 Ensaio de Punção - Bandas de cisalhamento.	113
6.31 Ensaio de Punção - Análise de localização para malha grosseira.	114
6.32 Ensaio de Punção - Análise de localização para malha refinada.	115

Lista de Abreviaturas e Siglas

MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MSM	Métodos sem Malha
PVC	Problema de Valor de Contorno
INSANE	<i>INteractive Structural ANalysis Environment</i>
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
LVDT	<i>Linear Vertical Displacement Transducer</i>
UML	<i>Unified Modelling Language</i>
CMSD	<i>Crack Mouth Sliding Displacement</i>

Lista de Símbolos

Capítulo 2

Ω	Volume do sólido
$\dot{\epsilon}_{ij}$	Tensor taxa de deformações
$\dot{\sigma}_{ij}$	Tensor taxa de tensões
\dot{u}_i	Tensor taxa de deslocamentos
\dot{f}_i	Tensor taxa de forças de superfície
$\dot{\sigma}_x$	Taxa de tensão normal na direção x
$\dot{\tau}_{xy}$	Taxa de tensão de cisalhamento na direção xy
$\dot{\tau}_{xz}$	Taxa de tensão de cisalhamento na direção xz
\dot{f}_x	Taxa de força de corpo na direção x
$\dot{\tau}_{yx}$	Taxa de tensão de cisalhamento na direção yx
$\dot{\sigma}_y$	Taxa de tensão normal na direção y
$\dot{\tau}_{yz}$	Taxa de tensão de cisalhamento na direção yz
\dot{f}_y	Taxa de força de corpo na direção y
$\dot{\tau}_{zx}$	Taxa de tensão de cisalhamento na direção zx
$\dot{\tau}_{zy}$	Taxa de tensão de cisalhamento na direção zy

$\dot{\sigma}_z$	Taxa de tensão normal na direção z
\dot{f}_z	Taxa de força de corpo na direção z
$\partial\Omega_1$	Contorno do sólido no qual forças de superfície são prescritas
\dot{T}_p	Forças de superfície prescritas
$\partial\Omega_2$	Contorno do sólido no qual campo de velocidades são prescritos
δv_p	Campo de velocidades virtuais prescrito
n_j	Direção normal ao contorno $\partial\Omega_2$
δW_i	Trabalho oriundo dos esforços internos
δW_e	Trabalho oriundo dos esforços externos
v_i^*	Campo de velocidade que satisfaz às condições de contorno prescritas em $\partial\Omega_2$
D_{ijkl}	Tensor constitutivo tangente

Capítulo 3

S_d	Superfície de descontinuidade
x_d	Ponto da superfície de descontinuidade
V^+	Subdomínio “positivo” do corpo considerado
V^-	Subdomínio “negativo” do corpo considerado
\mathbf{n}	Vetor normal à superfície de descontinuidade, direcionado para V^+
$\dot{\sigma}^+$	Taxa de tensão no subdomínio “positivo”
$\dot{\sigma}^-$	Taxa de tensão no subdomínio “negativo”

$\dot{\sigma}_{ij}^+$	Tensor taxa de tensões no subdomínio “positivo”
$\dot{\sigma}_{ij}^-$	Tensor taxa de tensões no subdomínio “negativo”
$\dot{\epsilon}_{ij}^+$	Tensor taxa de deformações no subdomínio “positivo”
$\dot{\epsilon}_{ij}^-$	Tensor taxa de deformações no subdomínio “negativo”
$[[\dot{\sigma}]]$	Salto na taxa de tensão
$[[\dot{\epsilon}]]$	Salto na taxa de deformação
σ_{tt}	Componente do tensor de tensão na direção tt
σ_{ts}	Componente do tensor de tensão na direção ts
σ_{st}	Componente do tensor de tensão na direção st
σ_{ss}	Componente do tensor de tensão na direção ss
σ_{nt}	Componente do tensor de tensão na direção nt
σ_{tn}	Componente do tensor de tensão na direção tn
σ_{nn}	Componente do tensor de tensão na direção nn
σ_{ns}	Componente do tensor de tensão na direção ns
σ_{sn}	Componente do tensor de tensão na direção sn
c	Multiplicador escalar arbitrário
c_i	Tensor de primeira ordem arbitrário
$\dot{\epsilon}$	Magnitude do salto no campo de deformações
\mathbf{m}	Vetor de polarização
D_{ijkl}^+	Tensor constitutivo tangente no subdomínio “positivo”

D_{ijkl}^-	Tensor constitutivo tangente no subdomínio “negativo”
Q_{jk}	Tensor acústico ou de localização
\bar{H}_{nm}	Tensor que indica os módulos pós-crítico
H^b	Módulo pós-crítico associado à perda de unicidade
H^{db}	Módulo pós-crítico associado à bifurcação descontínua
Q^{sym}	Tensor acústico simetrizado
H^{se}	Módulo pós-crítico associado à perda de elipticidade forte
H^l	Módulo pós-crítico associado a um ponto limite

Capítulo 4

E_{ijkl}	Tensor de rigidez secante
C_{ijkl}	Tensor de flexibilidade secante
F_n	Função de carregamento
$\bar{\mathbf{p}}$	Conjunto de variáveis internas definidas no domínio das deformações
$\dot{\lambda}_m$	Vetor de multiplicadores inelásticos
\bar{m}_{mkl}	Tensor que indica as direções de degradação
\bar{n}_{nij}	Tensor que indica as direções das funções de carregamento
I_{ijkl}	Tensor identidade de quarta ordem
Q_{jk}^e	Tensor de localização elástico
$\lambda^{(i)}$	Autovalores do tensor de localização
$y_k^{(i)}$	Autovalores do tensor de localização

D_{ijkl}^e	Tensor constitutivo elástico
P_{lj}^e	Inverso do tensor de localização elástico
α	Coefficiente de biaxialidade
E_{ijkl}^*	Tensor de 4 ^a ordem
ξ	Função escalar do módulo de <i>softening</i>
\mathcal{H}	Módulo de <i>softening</i>
P_{ij}	Tensor de 2 ^a ordem simétrico
R_{kl}	Tensor de 2 ^a ordem simétrico
\mathbf{J}	Matriz jacobiana ou hessiana
λ	Multiplicador de Lagrange
ϕ_t	Função quociente de Rayleigh
\mathbf{v}	Vetor parametrizado com a condição de ser unitário relaxada
\mathbf{D}^S	Tensor de rigidez secante

Capítulo 5

f	Função objetivo do processo de otimização
$\nabla f(\mathbf{x}_k)$	Gradiente da função f
$\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)$	Matriz hessiana simétrica da função f
$\ \nabla f(\mathbf{x}_k)\ $	Norma do gradiente da função f

Capítulo 6

D	Dano calculado a partir da sua lei de evolução
-----	--

D_x	Deslocamento horizontal
ε_{eq}	Medida de deformação equivalente
κ_0	Deformação equivalente a partir do qual o dano é iniciado
α	Valor máximo de dano admissível
β	Intensidade de evolução do dano
\tilde{E}	Módulo de elasticidade equivalente
f_e	Tensão equivalente relativa ao limite de resistência material
ν	Coefficiente de Poisson
f_c	Resistência limite à compressão
ε_c	Deformação limite à compressão
f_t	Resistência limite à tração
ε_t	Deformação limite à tração
ϕ	Parâmetro de localização
Δ	Deslocamento prescrito máximo
σ_y	Tensão limite de escoamento
D_y	Deslocamento vertical

Resumo

Esta dissertação apresenta uma técnica numérica de análise de localização de deformações em modelos fisicamente não lineares. A implementação computacional foi realizada na plataforma INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), um projeto de software livre desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. A degradação material usualmente se manifesta em uma pequena e menos resistente região da estrutura. Esta concentração de fenômenos irreversíveis em uma zona estreita do material é denotada por localização de deformações. Numericamente, a localização de deformações está associada à perda de elipticidade das equações diferenciais que governam o Problema de Valor de Contorno a ser solucionado. Considerando a singularidade do tensor acústico como a condição para ocorrência do fenômeno, a análise de localização consiste em encontrar uma direção para a qual o tensor acústico torna-se singular. A parametrização cartesiana foi utilizada neste trabalho, uma vez que ela proporciona maior estabilidade no processo numérico de solução ao relaxar a condição de que o vetor parametrizado precisa ser unitário. A técnica numérica implementada apresentou resultados adequados e foi validada a partir de simulações com grau crescente de complexidade. Primeiramente, considerou-se modelos nos quais a zona de localização foi predeterminada. Em seguida, exemplos que possuem correspondência experimental foram simulados. Posteriormente, comparou-se os resultados da técnica implementada com outras metodologias numéricas encontradas na literatura.

Palavras-Chave: Método dos Elementos Finitos, Análise Fisicamente Não Linear, Análise de Localização, Parametrização Cartesiana.

Abstract

This master's thesis presents a numerical technique for strain localization analysis in nonlinear material models. The proposed implementation was performed on the INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment) platform, an open source project developed in the Structural Engineering Department of the Federal University of Minas Gerais. Material degradation usually occurs in a small and weaker portion of the body. This concentration of irreversible phenomena in a narrow material zone is commonly referred as strain localization. Numerically, strain localization is associated with the loss of ellipticity of differential equations governing the Boundary Value Problem. Considering the singularity of the acoustic tensor as general condition for localization, strain localization analysis consists in finding the direction at which the acoustic tensor becomes singular. Cartesian parametrization was used in this work, since it provides stability in the numerical solution process by relaxing the condition of the normal direction vector be of unit length. The implemented numerical technique was validated with simulations of increasing complexity. First, models with a predetermined localization zone were considered. Then, examples with experimental correspondence were simulated. Lastly, a comparison between the results of the implemented numerical technique and others methodologies was described.

Keywords: Finite Element Method, Physically Nonlinear Analysis, Strain Localization Analysis, Cartesian Parametrization.

Agradecimentos

Aos meus pais, Lorette e Jacqueline, pelo amor e incentivo durante todas as etapas da minha vida.

À minha namorada, Érica, por todo companheirismo e apoio.

A meus orientadores, Roque e Samuel, pela confiança, interesse e excelência na orientação deste trabalho.

Aos demais professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG.

À equipe INSANE, pelo ambiente colaborativo e pelo legado essencial para realização deste trabalho.

Aos colegas de pós-graduação, pela leveza na convivência cotidiana.

À FAPEMIG e CAPES, pelo apoio financeiro.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A análise estrutural consiste em simular o comportamento de uma estrutura e prever sua resposta perante às ações que lhe foram aplicadas. Para realizar esta simulação, é necessário idealizar a estrutura em um modelo, no qual hipóteses são incorporadas. Estas simplificações concernem à geometria da estrutura, que pode ser considerada unidimensional, bidimensional ou tridimensional para fins de análise, ao comportamento material e ao regime de deformações.

Com as hipóteses do modelo estrutural e a definição de um método numérico, tem-se o modelo discreto de análise. Neste contexto, o Método dos Elementos Finitos (MEF) destaca-se como método numérico robusto para obtenção de solução aproximada das grandezas de interesse na análise estrutural, como deslocamentos, deformações e esforços internos.

O avanço da capacidade computacional consolidou o MEF como recurso para análise estrutural e possibilitou a realização de análises mais realistas, incluindo não linearidades. Uma estrutura é considerada não linear quando sua rigidez depende de seus deslocamentos. A não linearidade pode ser de origem geométrica, quando a relação entre deslocamentos e deformações é não linear, ou de origem física, quando a relação entre as tensões e deformações perde sua linearidade.

Uma análise estrutural que considera não linearidade requer a solução de um conjunto de equações algébricas não lineares. A solução deste tipo de análise consiste em procedimento incremental-iterativo no qual uma variável ou um conjunto de

variáveis é controlado e resulta em trajetórias de equilíbrio.

No âmbito de uma análise fisicamente não linear, torna-se necessário uma descrição fidedigna do comportamento material. A degradação material costuma suceder-se de forma localizada, como fissuração ou plastificação. O estudo destas falhas materiais localizadas é importante, uma vez que elas podem levar ao colapso estrutural, por vezes em condições não consideradas durante o dimensionamento.

A inclusão de heterogeneidades nas análises numéricas é outro aspecto relevante para a descrição realista do comportamento material. Materiais parcialmente frágeis, como o concreto, apresentam imperfeições resultantes da mistura aleatória e não uniforme dos materiais que o compõem. Materiais metálicos, por sua vez, possuem imperfeições oriundas de seus processos de fabricação.

Esta dissertação está inserida em um amplo projeto de pesquisa cujo principal objetivo é modelar numericamente materiais parcialmente frágeis através de estratégia multiescala incorporando a heterogeneidade do meio de modo a capturar (e eventualmente regularizar) os diversos fenômenos evidenciados por materiais que manifestem *softening*, tais como localização e efeito de tamanho.

Para tanto, neste projeto amplo, por meio de várias dissertações de mestrado e teses de doutorado, utilizar-se-á combinações de diferentes descrições do contínuo e diferentes métodos numéricos (MEF, MEFG, MSM) associados à Metodologia Global-Local como instrumentos para a interligação entre as escalas. Pretende-se contornar algumas das simplificações inerentes de modelagens de escala única (estrutural) e avaliar direta ou indiretamente os mecanismos responsáveis pelo comportamento frágil do meio, através de um modelo morfológico mesoscópico detalhado. Assim, intenciona-se contribuir com o conhecimento do campo da análise multiescala, carente em avaliações de materiais parcialmente frágeis.

1.1 Objetivos

Esta dissertação tem como objetivo geral descrever uma metodologia para análise de localização de deformações independente do modelo constitutivo e modelo de análise.

Para alcançar tal objetivo, conceitos relacionados à localização de deformações são apresentados, incluindo medidas que definem a ocorrência do fenômeno. Em seguida, fez-se uma revisão crítica das técnicas para análise de localização encontradas na literatura. Por fim, descreve-se a implementação computacional da metodologia proposta, que é verificada através de simulações numéricas com uso de diferentes discretizações, modelos constitutivos e modelos de análise.

1.2 Organização do Texto

Esta dissertação possui 7 capítulos, incluindo a presente introdução. O Capítulo 2 expõe as condições nas quais a solução numérica de um Problema de Valor de Contorno (PVC) é única, bem como apresenta conceitos associados à estabilidade do ponto material e descrição cinemática de regiões inelásticas.

O Capítulo 3 descreve o fenômeno de localização de deformações, discorre acerca das limitações que métodos numéricos enfrentam diante de sua ocorrência e define medidas de localização.

O Capítulo 4 revisa as técnicas para análise de localização encontradas na literatura. Ele é dividido em dois grupos principais, que abordam a análise de localização de maneira analítica e numérica.

O Capítulo 5 relata a implementação computacional realizada no âmbito desta dissertação, incluindo a formulação desenvolvida, estrutura de classes idealizada, modificações realizadas no sistema INSANE e recursos numéricos utilizados.

O Capítulo 6 apresenta as simulações numéricas utilizadas para validar a técnica implementada. Elas foram selecionadas de maneira crescente em complexidade.

Primeiramente, considerou-se modelos nos quais a zona de localização foi predeterminada. Em seguida, exemplos que possuem correspondência experimental foram simulados. Posteriormente, comparou-se os resultados da técnica implementada com outras metodologias numéricas encontradas na literatura.

Por fim, o Capítulo 7 resume as contribuições deste trabalho e destaca temas para futuros trabalhos.

Capítulo 2

ESTABILIDADE DO PONTO MATERIAL

2.1 Problema de Valor de Contorno para Taxas

Problemas de Valor de Contorno (PVC) são definidos por um sistema de equações diferenciais o qual possui um conjunto de restrições adicionais, denominadas como condições de contorno. A Figura 2.1 representa um PVC para um sólido que possui volume Ω . Assume-se que este sólido está sob pequenas deformações (Equação 2.1) e em condições de equilíbrio estático (Equações 2.2, 2.3, 2.4). Considerando as variações (taxas) de tensões e deformações, tem-se:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}[\dot{u}_{,i}\mathbf{e}_i + (\dot{u}_{,i}\mathbf{e}_i)^T] \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\tau}_{xz}}{\partial z} + \dot{f}_x = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \dot{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\tau}_{yz}}{\partial z} + \dot{f}_y = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \dot{\tau}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\tau}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\sigma}_z}{\partial z} + \dot{f}_z = 0 \quad (2.4)$$

em que,

\dot{f}_x , \dot{f}_y e \dot{f}_z são os componentes do tensor de forças de corpo no formato de taxa para

as direções x , y e z , respectivamente.

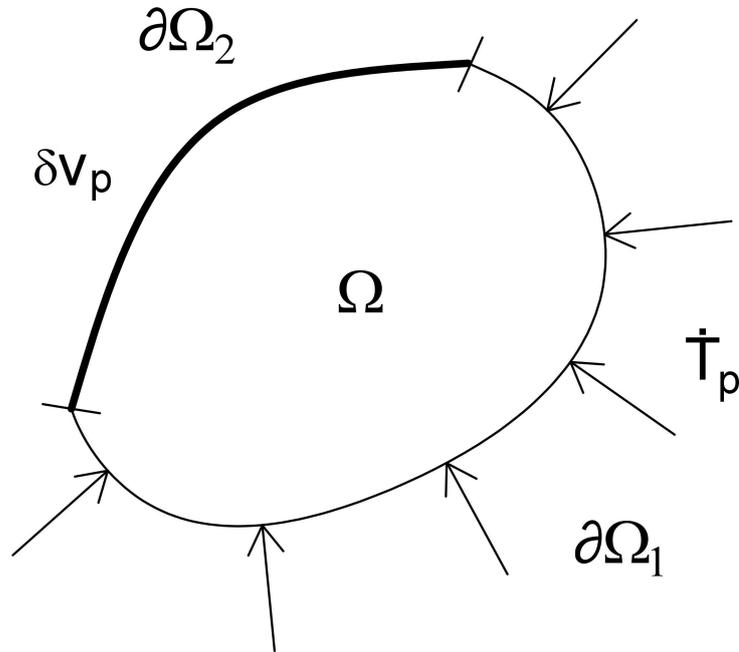


Figura 2.1: Problema de valor de contorno para taxas.

As condições de contorno são prescritas na forma de forças de superfícies ou campos de velocidades. No contorno indicado por $\partial\Omega_1$, são prescritas forças de superfície no sólido, representadas por \dot{T}_p . Por sua vez, o campo de velocidades virtual é prescrito no contorno indicado por $\partial\Omega_2$, representado por δv_p .

Para o PVC representado na Figura 2.1, o trabalho dos esforços internos é dado por:

$$\delta W_i = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (2.5)$$

O trabalho dos esforços externos é composto pelo somatório do trabalho devido às forças de corpo, do trabalho devido às forças prescritas na superfície $\partial\Omega_1$ e do trabalho devido ao campo de velocidade prescrito na superfície $\partial\Omega_2$. Matematicamente, tem-se:

$$\delta W_e = \int_{\Omega} \dot{f}_i v_i^* dV + \int_{\Omega_1} \dot{T}_p v_i^* dS + \int_{\Omega_2} (\dot{\sigma}_{ij} n_j) \delta v_p dS \quad (2.6)$$

em que,

v_i^* é um campo de velocidades qualquer que satisfaz às condições de contorno prescritas em $\partial\Omega_2$.

Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), sabe-se que $\delta W_i = \delta W_e$. Desta maneira, retomando as Equações 2.5 e 2.6, a relação do PTV para o PVC em formato de taxas é dada pela Equação 2.7:

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_{\Omega} \dot{f}_i v_i^* dV + \int_{\Omega_1} \dot{T}_p v_i^* dS + \int_{\Omega_2} (\dot{\sigma}_{ij} n_j) \delta v_p dS \quad (2.7)$$

2.2 Unicidade da solução do PVC

A dedução das condições necessárias para que um PVC apresente mais de uma solução no mesmo instante será reproduzida nesta seção a partir do trabalho de Forest e Lorentz (2004). Os autores consideraram os pares de tensores de taxa de tensão e deformação $(\dot{\sigma}_{ij}^A, \dot{\epsilon}_{ij}^A)$ e $(\dot{\sigma}_{ij}^B, \dot{\epsilon}_{ij}^B)$ como duas soluções possíveis para o PVC no mesmo instante de tempo.

Assim sendo, é possível combiná-los na formulação do PTV desenvolvida na Seção 2.1 da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^A \dot{\epsilon}_{ij}^A dV = \int_{\Omega} \dot{f}_i v_i^A dV + \int_{\Omega_1} \dot{T}_p v_i^A dS + \int_{\Omega_2} (\dot{\sigma}_{ij}^A n_j) v_p dS \quad (2.8)$$

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^A \dot{\epsilon}_{ij}^B dV = \int_{\Omega} \dot{f}_i v_i^B dV + \int_{\Omega_1} \dot{T}_p v_i^B dS + \int_{\Omega_2} (\dot{\sigma}_{ij}^A n_j) v_p dS \quad (2.9)$$

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^B \dot{\epsilon}_{ij}^A dV = \int_{\Omega} \dot{f}_i v_i^A dV + \int_{\Omega_1} \dot{T}_p v_i^A dS + \int_{\Omega_2} (\dot{\sigma}_{ij}^B n_j) v_p dS \quad (2.10)$$

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^B \dot{\epsilon}_{ij}^B dV = \int_{\Omega} \dot{f}_i v_i^B dV + \int_{\Omega_1} \dot{T}_p v_i^B dS + \int_{\Omega_2} (\dot{\sigma}_{ij}^B n_j) v_p dS \quad (2.11)$$

Considerando as combinações desenvolvidas nas Equações 2.8, 2.9, 2.10 e 2.11, pode-se determinar a condição necessária para que o PVC possua múltiplas soluções admissíveis no mesmo instante tempo. A Equação 2.12 representa a diferença entre a Equação 2.8 e a Equação 2.9.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^A \dot{\epsilon}_{ij}^A dV &= \int_{\Omega} \dot{f}_i v_i^A dV + \int_{\Omega_1} \dot{T}_p v_i^A dS + \int_{\Omega_2} (\dot{\sigma}_{ij}^A n_j) v_p dS \\ - \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^A \dot{\epsilon}_{ij}^B dV &= \int_{\Omega} \dot{f}_i v_i^B dV + \int_{\Omega_1} \dot{T}_p v_i^B dS + \int_{\Omega_2} (\dot{\sigma}_{ij}^A n_j) v_p dS \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^A \Delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_{\Omega} \dot{f}_i \Delta v_i dV + \int_{\Omega_1} \dot{T}_p \Delta v_i dS \quad (2.12)$$

em que,

$\Delta \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^A - \dot{\epsilon}_{ij}^B$ representa a diferença das taxas de deformação entre as possíveis soluções A e B;

$\Delta v_i = v_i^A - v_i^B$ representa a diferença nos campos de velocidade entre as possíveis soluções A e B.

De maneira análoga, a Equação 2.13 representa a diferença entre a Equação 2.10 e a Equação 2.11.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^B \dot{\epsilon}_{ij}^A dV &= \int_{\Omega} \dot{f}_i v_i^A dV + \int_{\Omega_1} \dot{T}_p v_i^A dS + \int_{\Omega_2} (\dot{\sigma}_{ij}^B n_j) v_p dS \\ - \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^B \dot{\epsilon}_{ij}^B dV &= \int_{\Omega} \dot{f}_i v_i^B dV + \int_{\Omega_1} \dot{T}_p v_i^B dS + \int_{\Omega_2} (\dot{\sigma}_{ij}^B n_j) v_p dS \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^B \Delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_{\Omega} \dot{f}_i \Delta v_i dV + \int_{\Omega_1} \dot{T}_p \Delta v_i dS \quad (2.13)$$

Por fim, a diferença da Equação 2.12 pela 2.13 é representada pela Equação 2.14.

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^A \Delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_{\Omega} \dot{f}_i \Delta v_i dV + \int_{\Omega_1} \dot{T}_p \Delta v_i dS$$

$$- \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^B \Delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_{\Omega} \dot{f}_i \Delta v_i dV + \int_{\Omega_1} \dot{T}_p \Delta v_i dS$$

$$\int_{\Omega} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV = 0 \quad (2.14)$$

em que,

$\Delta \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^A - \dot{\sigma}_{ij}^B$ representa a diferença das taxas de tensão entre as possíveis soluções A e B.

Desta maneira, a Equação 2.14 indica a condição necessária para a perda de unicidade na solução de um PVC. Tal perda pode resultar na bifurcação da solução deste problema e pode ser diretamente relacionada à estabilidade do ponto material, como mostrado na Seção 2.3.

2.3 Estabilidade do Ponto Material

A estabilidade de um sistema estrutural é definida por Maier e Hueckel (1979) como a tendência de se preservar uma configuração de equilíbrio apesar de perturbações. Schreyer e Neilsen (1996a) especificam dois tipos principais de instabilidade. A instabilidade estrutural está associada ao domínio do problema. Ela depende de diversos fatores, como geometria da estrutura, condições de contorno e relações constitutivas. A instabilidade (ou falha) do ponto material, por sua vez, está associada apenas às relações constitutivas do comportamento material.

Considerando linearidade geométrica, o critério de estabilidade do ponto material proposto por Drucker (1959) é dado pela Equação 2.15:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\sigma}_{ij} > 0 \quad (2.15)$$

em que,

$\dot{\epsilon}_{ij}$ é o tensor taxa de deformação;

$\dot{\sigma}_{ij}$ é o tensor taxa de tensão.

Para relações incrementalmente lineares entre tensão e deformação, o tensor taxa de tensão possui relação direta com o tensor taxa de deformação:

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.16)$$

em que,

D_{ijkl} é o tensor constitutivo tangente ou tensor de rigidez tangente.

Neste contexto, o critério para estabilidade material de Drucker (1959) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\dot{\epsilon}_{ij}D_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} > 0 \quad (2.17)$$

Considerando uma taxa de deformação arbitrária, a estabilidade material depende somente do tensor constitutivo tangente (D_{ijkl}), que está relacionado apenas a propriedades materiais e ao histórico de deformações do ponto analisado (Chen e Baker, 2003).

Para um carregamento uniaxial, o critério de Drucker (1959) para estabilidade material deixa de ser respeitado quando a inclinação da lei constitutiva é negativa. A instabilidade material pode ocorrer ainda no ramo ascendente da relação constitutiva quando o tensor constitutivo tangente não possui simetria, como no caso da plasticidade não associada (Rudnicki e Rice, 1975).

Para uma estrutura com volume V , Hill (1958) definiu que a estabilidade estrutural é garantida quando a Equação 2.18 é respeitada:

$$\int_V \dot{\epsilon}_{ij}\dot{\sigma}_{ij}dV > 0 \quad (2.18)$$

Uma inspeção visual das Equações 2.15 e 2.18 indica que a instabilidade material pode levar à instabilidade estrutural, mesmo na ausência de termos geometricamente não lineares. Por sua vez, uma estrutura estável de acordo com o critério de Hill (1958) tem a unicidade da solução do PVC garantida, conforme explicitado pela Equação 2.14 na Seção 2.2.

Schreyer e Neilsen (1996a) afirmam que a instabilidade material poderia ser usada como critério de engenharia para limite da validade das soluções numéricas. No entanto, determinadas condições de contorno, como deslocamentos prescritos, permitem que um corpo seja carregado muito além do ponto em que o critério de Drucker (1959) é satisfeito. Este carregamento adicional pode resultar na ocorrência de deformações não homogêneas e amolecimento ou *softening* (aumento de deformação acompanhada de diminuição na tensão) do material que compõe a estrutura.

Capítulo 3

O FENÔMENO DE LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES

3.1 Descrição cinemática da zona inelástica

De acordo com Rizzi (1993), a falha difusa representa um estado de bifurcação contínua do material. O termo bifurcação contínua indica que o material mantém-se contínuo, implicando que não há descontinuidades ou saltos nos campos cinemáticos neste ponto. Este estado de bifurcação pode ocorrer devido à singularidade do tensor de rigidez tangente da estrutura, usualmente associada a pontos limites da trajetória de equilíbrio.

Por outro lado, a falha difusa pode indicar instabilidade material e preceder um estado de bifurcação descontínua. Neste tipo de bifurcação, há concentração de fenômenos irreversíveis, como deformações plásticas para materiais elasto-plásticos e microfissuras para materiais parcialmente frágeis, em uma região da estrutura. Observam-se gradientes pronunciados nos campos de deslocamentos e deformações, que tornam-se descontínuos com o aumento da degradação material.

Jirásek (2001) definiu a falha difusa como o primeiro estágio do processo de formação de fissuras em materiais parcialmente frágeis. Nele, ocorre uma concentração

de deformações em uma zona estreita, porém os campos de deslocamentos e deformações permanecem contínuos. Fisicamente, a falha difusa pode ser interpretada como o instante no qual a zona de processo de fratura possui alta concentração de defeitos próximos ao seu centro. A Figura 3.1 ilustra os campos cinemáticos durante a falha de difusa. Nela, o eixo horizontal, denotado por x , representa uma coordenada ao longo do comprimento do corpo. Os eixos verticais, denotados por u e ε , representam deslocamento e deformação, respectivamente.

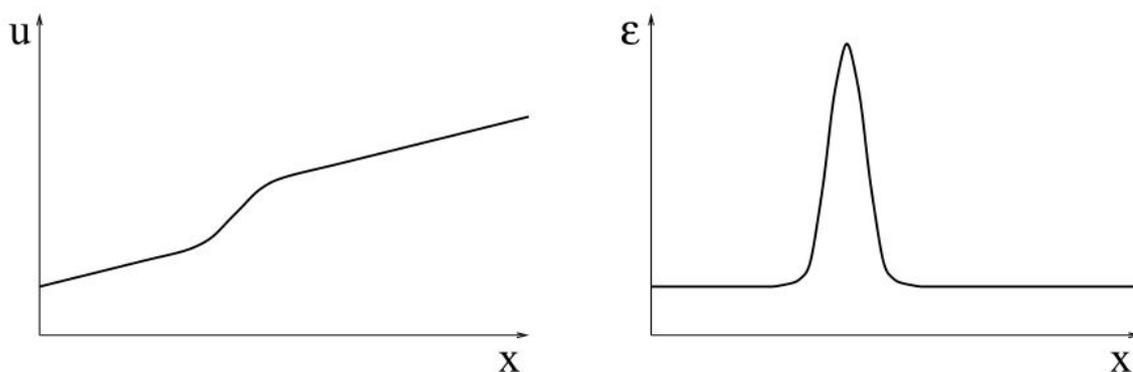


Figura 3.1: Campos cinemáticos durante a falha difusa (Jirásek (2001)).

O próximo estágio no processo de fissuração é denominado descontinuidade fraca. Nele, a deformação concentra-se em uma zona estreita, porém finita do material. Esta zona separa-se do restante do corpo por duas descontinuidades fracas, que representam curvas ou superfícies através das quais ocorre um salto no campo de deformações. O campo de deslocamentos, por sua vez, mantém-se contínuo. Em termos físicos, a descontinuidade fraca corresponde ao instante no qual a zona de processo de fratura possui densidade de microfissuras constante. A Figura 3.2, cujos eixos seguem a mesma notação descrita anteriormente, representa os campos cinemáticos durante a descontinuidade fraca.

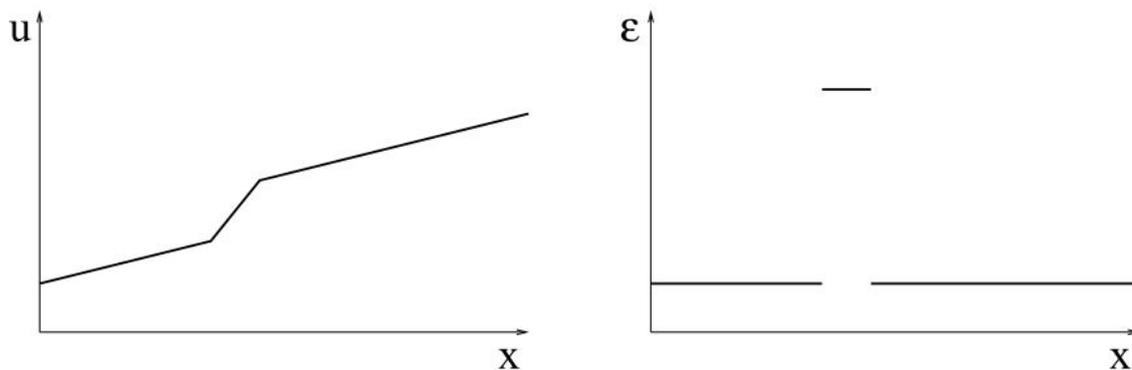


Figura 3.2: Campos cinemáticos durante a descontinuidade fraca (Jirásek (2001)).

Dando continuidade ao processo de fissuração, tem-se o estágio de descontinuidade forte. Nele, há a incorporação de um salto nos campos de deslocamentos. O campo de deformações consiste em uma parte regular, obtida através da diferenciação do campo de deslocamentos e em uma parte singular. Fisicamente, a descontinuidade forte indica uma microfissura com as faces adjacentes. A Figura 3.3 representa os campos cinemáticos durante a descontinuidade forte.

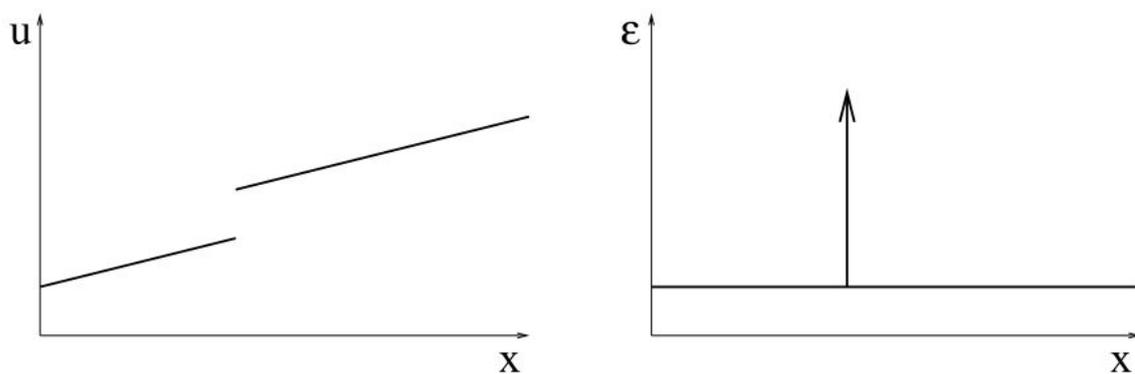


Figura 3.3: Campos cinemáticos durante a descontinuidade forte (Jirásek (2001)).

3.2 Localização de Deformações

O fenômeno de localização de deformações, segundo de Borst et al. (1993), consiste no surgimento de uma região estreita no material onde as deformações tendem a se concentrar, apesar das ações externas à estrutura manterem um carregamento monotônico. O estudo desta falha material localizada é importante, uma vez que a localização possui efeito prejudicial na integridade da estrutura e age como precursor da falha estrutural, por vezes em condições não consideradas durante o projeto.

Conforme de Borst et al. (1993), este fenômeno ocorre em diversos materiais, incluindo rochas, concreto, solo, metais, ligas metálicas e polímeros. Sua escala pode ter diferentes ordens de magnitude: a banda de localização possui largura menor do que 1 mm em metais e maior que metros em falhas rochosas.

Experimentalmente, a localização de deformações pode ser observada em ligas metálicas, como relatado em Nadai (1931) e Duszek-Perzyna e Perzyna (1993). Neste tipo de material, o fenômeno pode se manifestar como *bandas de Lüder*, também denominadas como bandas de deslizamento ou linhas de distensão. De acordo com Nadai (1931), estas linhas aparecem na superfície material quando a sollicitação atinge valores próximos à tensão de escoamento, com inclinação bem definida em relação à direção de carregamento. Elas rapidamente se expandem ao longo do comprimento da barra metálica e aumentam sua espessura no decorrer do processo de carregamento.

A Figura 3.4 ilustra a ocorrência e desenvolvimento de duas bandas de deslizamento em prismas de cobre durante uma compressão uniaxial. A origem das bandas foi definida por pequenos sulcos situados na lateral do prisma.

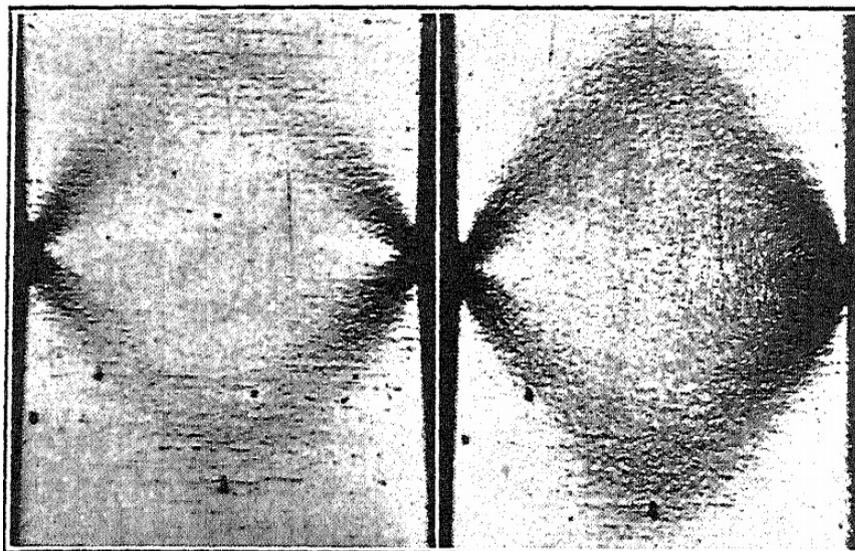


Figura 3.4: Bandas de deslizamento em prisma de cobre comprimido (Nadai (1931)).

A localização de deformações também é observada experimentalmente em geomateriais, como mostrado em Alshibli e Sture (2000) e Desrues e Viggiani (2004). A Figura 3.5 representa a ocorrência de bandas de cisalhamento em corpos de prova moldados com areia sujeitos a uma pressão confinante de compressão.

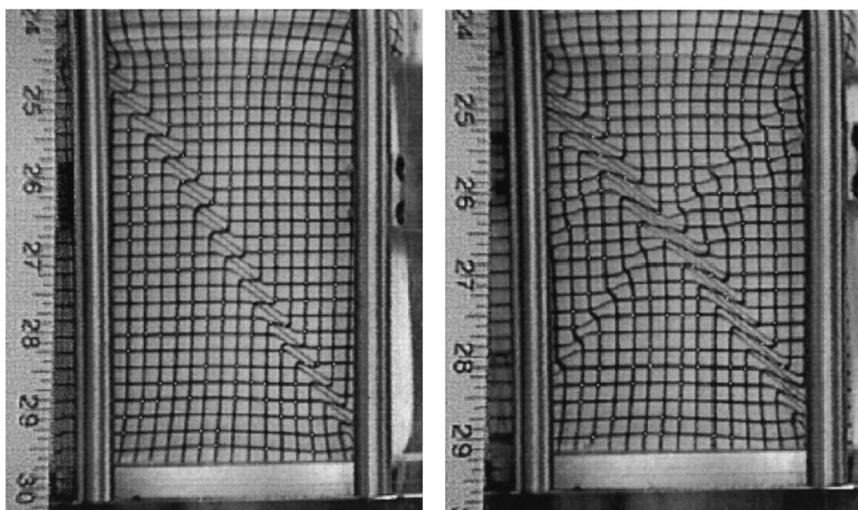


Figura 3.5: Bandas de localização em corpo de prova de areia comprimido (Alshibli e Sture (2000)).

Outra classe de materiais na qual a localização de deformações pode se manifestar é a dos materiais parcialmente frágeis, como relatado em Cedolin et al. (1987). Um estudo, descrito por Shah et al. (1995), ilustra o fenômeno de maneira representativa.

Uma placa de concreto, instrumentada com quatro transdutores de deslocamento linear (*Linear Vertical Displacement Transducer*, denotado por LVDT) ao longo de sua altura, é submetida à tração uniaxial, como ilustrado na Figura 3.6. A iniciação e propagação de fissuras internas no corpo de prova foram monitoradas por um sistema de emissão acústica.

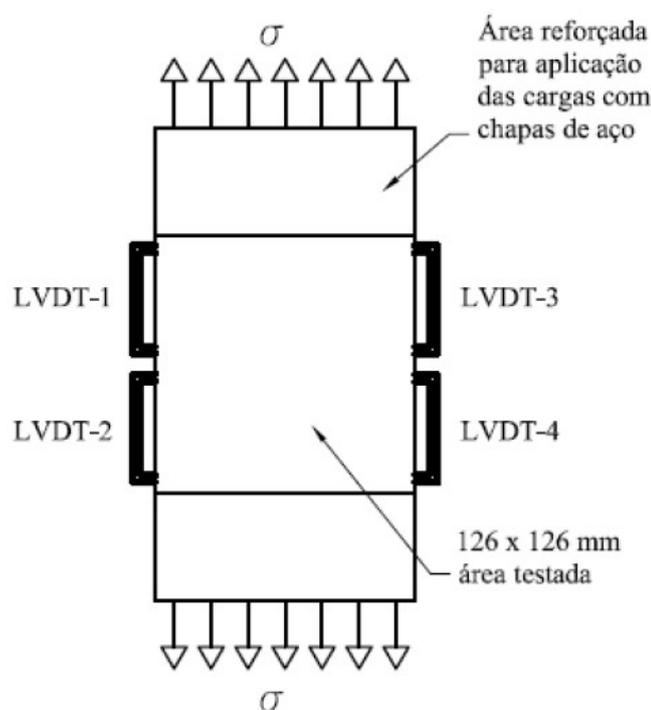


Figura 3.6: Esquema estrutural do ensaio de tração uniaxial da placa de concreto (Shah et al. (1995) *apud* Wolff (2010)).

Os transdutores de deslocamento apresentam comportamento semelhante durante o regime elástico e linear do material, como mostrado na Figura 3.7. No regime inelástico, apenas o transdutor LVDT-4 apontou deslocamento crescente, enquanto os demais indicavam descarregamento com diminuição do deslocamento medido.

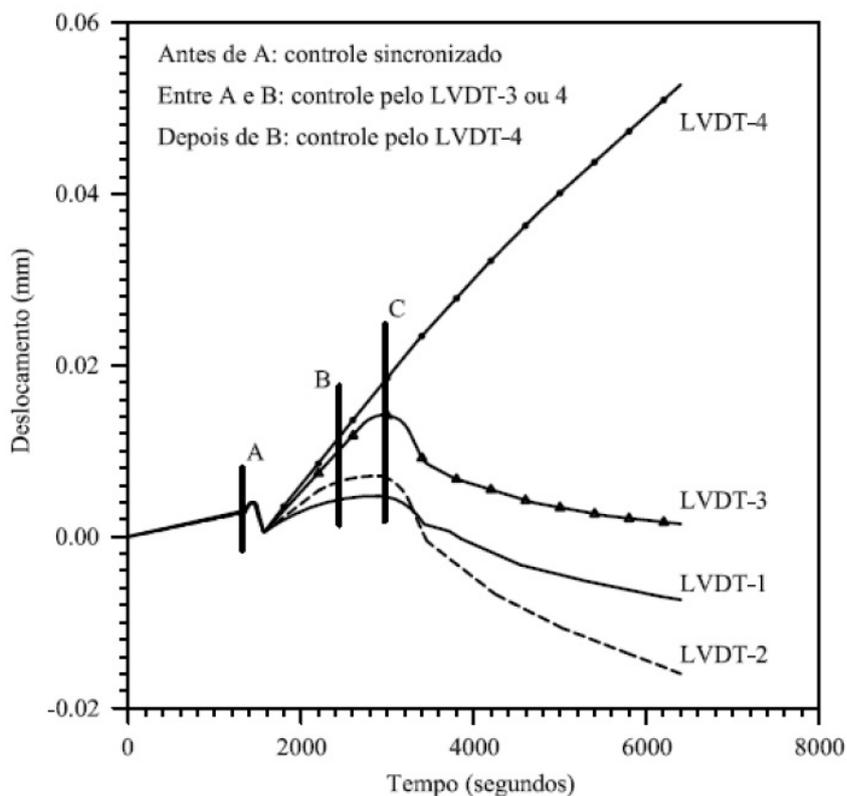


Figura 3.7: Deslocamento medido pelos transdutores de deslocamento durante o ensaio (Shah et al. (1995) *apud* Wolff (2010)).

Este comportamento inesperado pode ser interpretado à luz dos resultados do sistema de emissão acústica. Inicialmente (Figura 3.8 (a)), as fissuras internas ao concreto eram dispersas ao longo do corpo de prova. Após o momento em que a resposta dos transdutores deixou de ser semelhante (Figura 3.8 (b)), nota-se que a fissuração se concentrou na região de alcance do transdutor que media aumento de deslocamentos (LVDT-4). Houve o surgimento de uma banda estreita de fissuras internas nessa região (Figura 3.8 (c)). Esta banda indica que o dano do material começa a se localizar. Fisicamente, tem-se que uma trinca contínua forma-se a partir do intenso processo de fissuração concentrada em uma pequena parte do corpo.

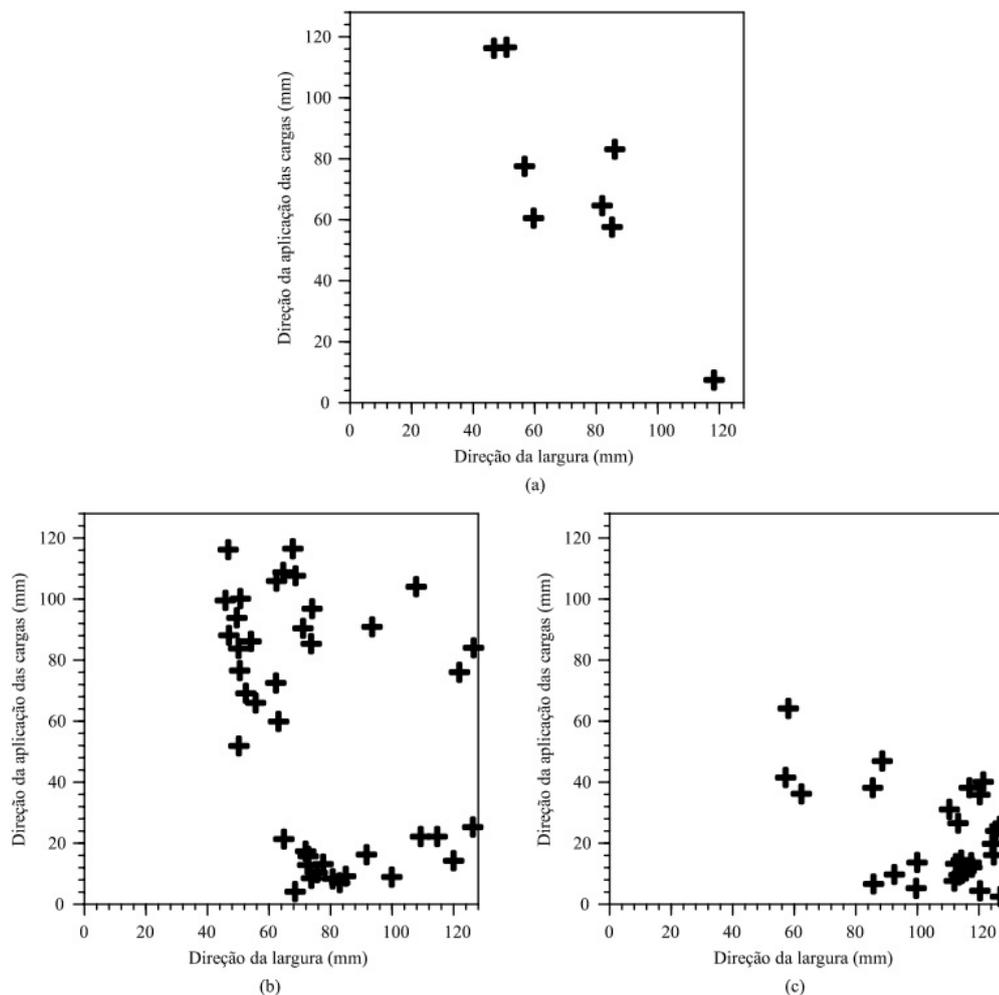


Figura 3.8: Resultados do sistema de emissão acústica (Shah et al. (1995) *apud* Wolff (2010)).

3.3 Aspectos Históricos

A localização de deformações está associada à bifurcação de um problema de taxas, na qual há o surgimento de uma superfície singular que contém uma descontinuidade ou um salto em determinada grandeza. Este fenômeno foi inicialmente estudado na propagação de ondas em meios elásticos (Hadamard (1903)) e elasto-plásticos (Hill (1962)) degradados.

Neste cenário, as ondas contêm uma descontinuidade no campo de velocidades.

A condição de localização coincide com a estacionariedade da frente da onda de aceleração, conforme a *condição de propagação de Fresnel-Hadamard*. Balbo e Proença (2003) apresentam uma discussão mais detalhada da condição de Fresnel-Hadamard, bem como demonstrações matemáticas relevantes.

Em um regime quase-estático de deformações, a mesma condição de localização é deduzida a partir da *condição de compatibilidade de Maxwell*. Conforme Balbo e Proença (2003), a hipótese associada à localização de deformações consiste em admitir a existência de um campo de velocidades (ou taxas de deslocamentos) contínuos no meio, porém com gradientes descontínuos em relação a uma superfície em seu interior.

3.4 Métodos Numéricos para Análises Não Lineares

Em simulações numéricas, a localização de deformações resulta na perda da elipticidade das equações diferenciais governantes do PVC, tornando-o mal posto (*ill-posed*). Conforme Peerlings (1999), as equações diferenciais que regem o PVC são elípticas em todo seu domínio para uma análise estrutural estática e hiperbólicas para uma análise estrutural dinâmica.

Matematicamente, a elipticidade implica que não pode haver descontinuidade na função aproximada e em suas derivadas. Driemeier (1999) especifica que um PVC mal posto possui um número infinito de soluções linearmente independentes.

A ocorrência de uma bifurcação descontínua fere a condição de elipticidade de um PVC bem posto. Conforme descrito na Seção 3.1, a falha difusa pode evoluir para uma descontinuidade fraca (campo de deformações descontínuos) e uma descontinuidade forte (campo de deslocamentos descontínuos e campo de deformações singular).

A falha na representação de localização de deformações ocorre em análises realizadas através do Método dos Elementos Finitos, mas também é comum a diferentes métodos numéricos, como Métodos sem Malha (Pamin, 2011).

Soluções numéricas de problemas de valor de contorno mal-postos são dependentes da discretização adotada. No caso do Método dos Elementos Finitos, o refinamento da malha resulta em um comportamento mais frágil da estrutura. A simulação busca encontrar uma condição compatível com uma fratura discreta e concentra deformações no menor volume de material admissível, ou seja, no menor elemento finito da malha. Com o refinamento da malha, a largura da zona tende a zero, obtendo-se soluções que convergem para uma resposta de energia dissipada nula, incompatíveis com fundamentos da Mecânica da Fratura (Driemeier, 1999).

De acordo com de Borst (2004), o refinamento da malha de elementos finitos também torna a solução numérica mais instável. Isto pode ser observado através do comportamento irregular das trajetórias de equilíbrio e pela recorrente divergência do processo de solução, mesmo com métodos de controle sofisticados. Esta instabilidade pode ser explicada pela introdução de novos possíveis estados de equilíbrios da estrutura com o refino da malha. Desta forma, o processo de solução iterativo tem que escolher entre esses estados de equilíbrio. A alternância de estados de equilíbrios escolhidos leva à divergência do processo de solução.

3.5 Medida de Localização de Deformações

3.5.1 Definição do Tensor Acústico

Conforme Pedrini (2008), em meios sólidos convencionais, interpreta-se que a localização decorre da formação de descontinuidades fracas, caracterizadas por campos de deslocamentos contínuos e de deformações descontínuos (vide Figura 3.2). Associa-se as descontinuidades fracas à instabilidade material, que conduz à perda da elipticidade das equações de equilíbrio incrementais, conhecida como bifurcação

descontínua.

Desta maneira, deve-se determinar as condições necessárias para que os incrementos de deformação se localizem em bandas estreitas, separadas do restante do corpo por superfícies de descontinuidades fracas. Esta análise foi realizada por Jirásek (2007a) e será reproduzida a seguir.

A análise é restrita ao ponto x_d da superfície de descontinuidade S_d na iminência da perda de continuidade no campo de deformações. A superfície de descontinuidade divide o corpo em dois subdomínios, denominados V^+ e V^- e sua direção é caracterizada pelo vetor \mathbf{n} , direcionado para V^+ , como mostrado na Figura 3.9.

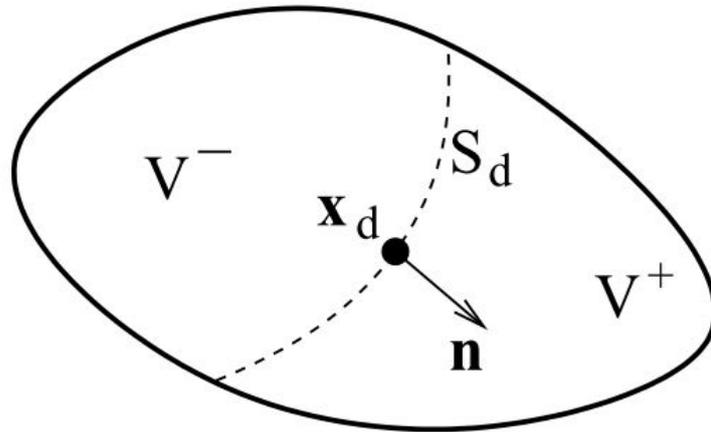


Figura 3.9: Corpo dividido por uma potencial superfície de descontinuidade (Jirásek (2007a)).

Uma vez que há descontinuidade através de S_d , deve-se diferenciar a abordagem do ponto x_d através de V^+ e V^- . Para tanto, usam-se os sobrescritos $+$ e $-$. Desta forma, $\dot{\sigma}^+$ e $\dot{\sigma}^-$ indicam as taxas de tensão no lado positivo e negativo da superfície de descontinuidade S_d . Além disso, a diferença entre as duas taxas, indicadas por $[[\dot{\sigma}]] = \dot{\sigma}^+ - \dot{\sigma}^-$, representa o salto no campo de tensões.

Apesar das descontinuidades nas taxas de tensão e deformação na superfície S_d ,

o salto destas duas grandezas não é completamente arbitrário. O salto na taxa de tensão $[[\dot{\sigma}]]$ é restrito pela continuidade de tensão e o salto na taxa de deformação $[[\dot{\epsilon}]]$ é restrito pela continuidade de deslocamento.

Se os componentes dos tensores de tensão e deformação forem considerados no plano e fora do plano definido pela superfície de descontinuidade S_d , a continuidade de tensão significa que as taxas de tensão fora do plano devem ser contínuas. Analogamente, a continuidade de deslocamento implica que taxas de deformação do plano devem ser contínuas. Os saltos, portanto, ocorrem nas taxas de tensão do plano e nas taxas de deformação fora do plano.

A continuidade de tensão pode ser ilustrada com maior clareza a partir do elemento infinitesimal representando na Figura 3.10. Por exemplo, assume-se um plano definido pelo vetor unitário da direção \mathbf{n} , denominado plano ts e hachurado na Figura 3.10, como o plano de ocorrência da descontinuidade.

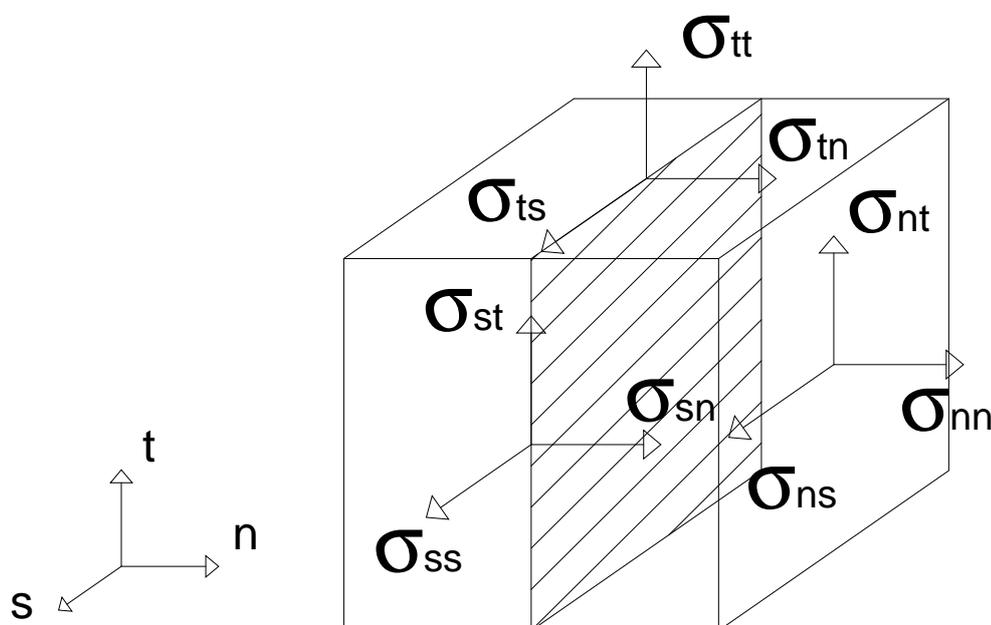


Figura 3.10: Componentes de tensão em um elemento infinitesimal.

As tensões no plano da descontinuidade estão representadas na Figura 3.11.

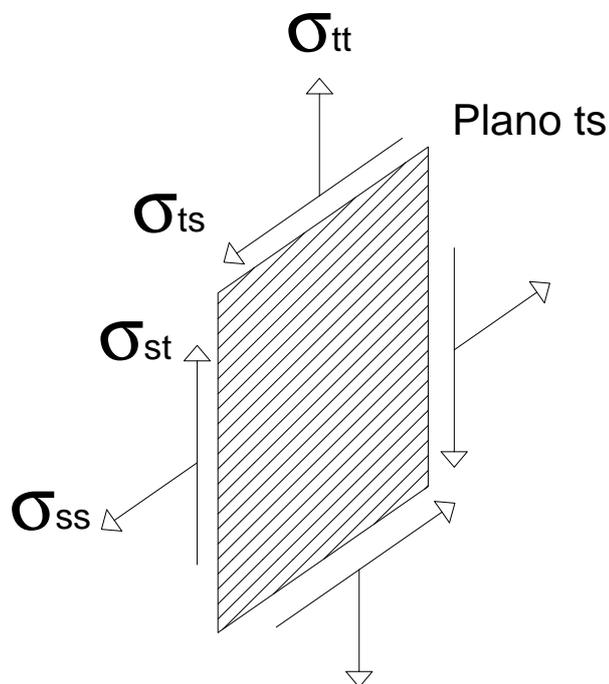


Figura 3.11: Componentes do tensor de tensão no plano da descontinuidade.

Os demais componentes do tensor de tensões, nominalmente σ_{nt} , σ_{tn} , σ_{nn} , σ_{ns} e σ_{sn} , encontram-se fora do plano da descontinuidade. Portanto, estes componentes do tensor são contínuos.

Jirásek (2007a) especializa a representação da continuidade de tensão para o caso plano. Apesar disso, a continuidade de tensão é retratada de maneira análoga. O componente de tensão que apresenta o salto (σ_{tt}) é indicado em vermelho na Figura 3.12. Os demais componentes (σ_{nt} e σ_{nn}), indicados em azul, são contínuos. Devido a esta condição, o vetor de forças de superfície (*traction*) é contínuo na superfície da descontinuidade considerada.

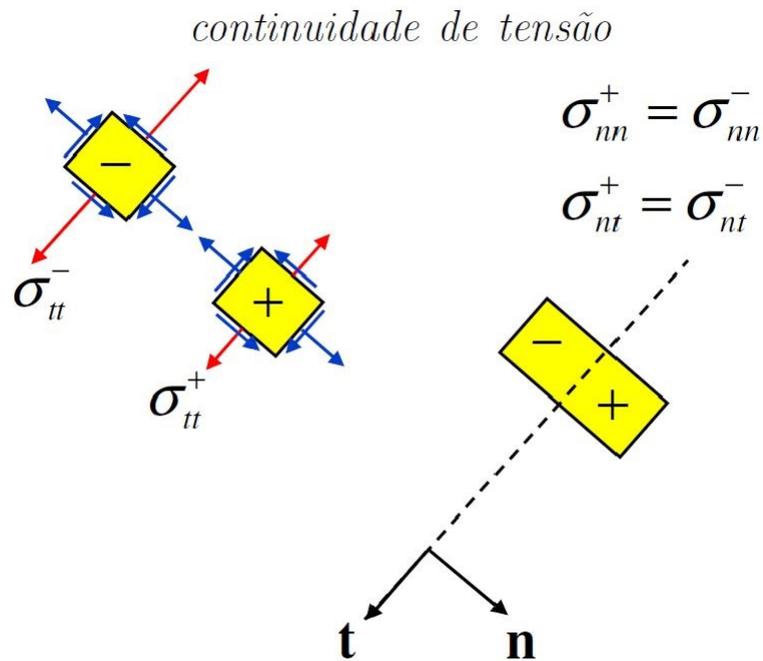


Figura 3.12: Componentes do tensor de tensão no plano da descontinuidade (Jirásek (2007b) *apud* Silva (2016)).

Matematicamente, a continuidade de tensão pode ser escrita como:

$$n_i \dot{\sigma}_{ij}^+ = n_i \dot{\sigma}_{ij}^- \quad (3.1)$$

A representação matemática da continuidade de deslocamento é mais complexa. Observa-se que o gradiente espacial de um determinado componente de deslocamento, por exemplo u_1 , tem projeções contínuas no plano tangente à superfície de descontinuidade e apenas o componente normal deste tensor de primeira ordem pode apresentar o salto. Desta forma, tem-se:

$$\left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_j} \right)^+ = \left(\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_j} \right)^- + c n_j \quad (3.2)$$

em que,

c é um multiplicador escalar arbitrário.

Generalizando esta relação para todos os componentes de deslocamento, tem-se:

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^+ = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^- + c_i n_j \quad (3.3)$$

em que,

c_i é um tensor de primeira ordem arbitrário.

É possível atribuir significado físico ao tensor c_i ao defini-lo como $\mathbf{c} = \dot{\epsilon} \mathbf{m}$, em que $\dot{\epsilon} = \|\mathbf{c}\|$ é a magnitude do salto e $\mathbf{m} = \mathbf{c}/\|\mathbf{c}\|$ é um tensor unitário de primeira ordem definido como vetor de polarização.

O ângulo definido pelos vetores unitários \mathbf{m} e \mathbf{n} caracteriza o tipo de falha. Quando \mathbf{m} é paralelo à \mathbf{n} , tem-se a falha por tração (modo I). Quando \mathbf{m} é perpendicular à \mathbf{n} , caracteriza-se o deslizamento por cisalhamento (modo II). Nos casos intermediários, define-se a falha como mista, na qual ambos modos de falha são observados. A Figura 3.13 ilustra os modos I e II de falha no plano.

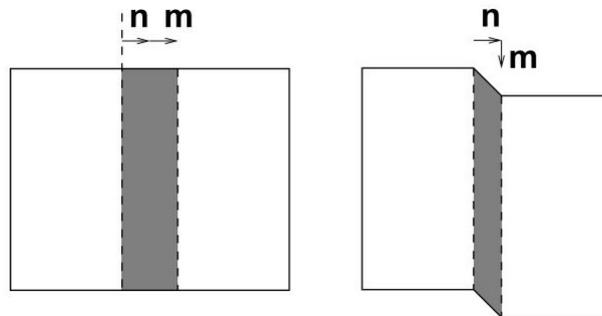


Figura 3.13: Modos I e II de falha no plano (Jirásek (2007a)).

A Equação 3.3 pode ser reescrita em termos de taxas de deformação e considerando a definição do vetor de polarização (\mathbf{m}):

$$\dot{\epsilon}_{ij}^+ = \dot{\epsilon}_{ij}^- + (m_i n_j) \dot{\epsilon} \quad (3.4)$$

Para a teoria de pequenas deformações, na qual as deformações são definidas como a parte simétrica do gradiente de deslocamento, a Equação 3.4 pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^+ = \dot{\epsilon}_{ij}^- + \frac{1}{2}(m_i n_j + n_i m_j) \dot{\epsilon} \quad (3.5)$$

As taxas de tensão e deformação se relacionam através da lei constitutiva, representada na Equação 2.16. O tensor constitutivo tangente depende do estado corrente do material, que inicialmente é o mesmo em ambos os lados da incipiente descontinuidade. Como as taxas de deformação são diferentes nos dois lados da descontinuidade, admite-se que, no caso geral, o tensor de rigidez tangente também pode ser diferente em cada lado. Portanto, as leis constitutivas indicam:

$$\dot{\sigma}_{ij}^+ = D_{ijkl}^+ \dot{\epsilon}_{kl}^+ \quad (3.6)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^- = D_{ijkl}^- \dot{\epsilon}_{kl}^- \quad (3.7)$$

Substituindo as leis constitutivas explicitadas nas Equações 3.6 e 3.7 na condição de continuidade de tensão (Equação 3.1), tem-se:

$$n_i D_{ijkl}^+ \dot{\epsilon}_{kl}^+ = n_i D_{ijkl}^- \dot{\epsilon}_{kl}^- \quad (3.8)$$

A relação entre as taxas de deformação na superfície de descontinuidade (Equação 3.5) pode ser substituída na Equação 3.8, resultando em:

$$n_i D_{ijkl}^+ \left[\dot{\epsilon}_{kl}^- + \frac{1}{2}(m_k n_l + n_k m_l) \dot{\epsilon} \right] = n_i D_{ijkl}^- \dot{\epsilon}_{kl}^- \quad (3.9)$$

Considerando a simetria menor do tensor de rigidez tangente ($D_{ijkl} = D_{ijlk}$) e expandindo a Equação 3.9, tem-se:

$$n_i D_{ijkl}^+ \dot{\epsilon}_{kl}^- + (n_i D_{ijkl}^+ m_k n_l) \dot{\epsilon} = n_i D_{ijkl}^- \dot{\epsilon}_{kl}^- \quad (3.10)$$

Movendo o primeiro termo da Equação 3.10 para o lado direito, obtém-se:

$$(n_i D_{ijkl}^+ n_l) m_k \dot{\epsilon} = n_i (D_{ijkl}^- - D_{ijkl}^+) \dot{\epsilon}_{kl}^- \quad (3.11)$$

A Equação 3.11 descreve a relação mais genérica possível para uma descontinuidade fraca incipiente. É possível simplificar esta relação se o tensor de rigidez tangente for considerado igual em ambos os lados da descontinuidade ($D_{ijkl}^+ = D_{ijkl}^- = D_{ijkl}$). Desta forma, o lado direito da Equação 3.11 torna-se nulo. Uma descontinuidade real só é obtida quando $\dot{\epsilon} \neq 0$, portanto, a Equação 3.11 torna-se:

$$(n_i D_{ijkl} n_l) m_k = 0 \quad (3.12)$$

Define-se o tensor acústico ou tensor de localização (\mathbf{Q}) como:

$$\mathbf{Q} = Q_{jk} = n_i D_{ijkl} n_l \quad (3.13)$$

A partir da Equação 3.12, nota-se que, durante a formação de uma descontinuidade fraca, o tensor de localização é singular e o vetor de polarização \mathbf{m} é seu autovetor associado ao autovalor nulo. Obtém-se, portanto, a condição clássica de localização:

$$\det(\mathbf{Q}) = 0 \quad (3.14)$$

A Equação 3.14 foi descrita pela primeira vez na literatura no trabalho de Rice (1976). O autor definiu-a como condição na qual a deformação plástica se localiza em uma banda com orientação definida por um vetor \mathbf{n} , separada do restante da estrutura.

A hipótese incorporada à Equação 3.11, de que a relação constitutiva é a mesma em ambos os lados da descontinuidade incipiente, pode ser incoerente para modelos constitutivos elastoplásticos. Como observado por Ottosen e Runesson (1991), o material pode responder a carregamentos plásticos em ambos os lados da superfície (bifurcação plástica/plástica) ou responder a carregamento plástico em um dos lados e descarregamento elástico no outro (bifurcação elástica/plástica).

No caso de bifurcação plástica/plástica, a consideração de mesma relação constitutiva é válida, preservando a dedução da condição clássica de localização descrita anteriormente. Para bifurcação elástica/plástica, obtém-se uma condição de localização distinta da representada na Equação 3.14, dependente de parâmetros específicos de modelos constitutivos elastoplásticos, como função de escoamento e potencial plástico.

No entanto, Ottosen e Runesson (1991) observaram que a situação limite entre regiões de comportamento material elástico e plástico é caracterizada por um carregamento neutro, que permite simplificar a relação obtida para a condição clássica de localização, dada pela Equação 3.14.

Adicionalmente, Ottosen e Runesson (1991) demonstraram, a partir de uma análise espectral do tensor de localização, que a bifurcação envolvendo descarregamento elástico em um dos lados da superfície de descontinuidade nunca precede a bifurcação com carregamento plástico em ambos os lados. Desta forma, o caso crítico para uma análise de localização corresponde a uma bifurcação plástica/plástica, validando o uso da Equação 3.14 como condição para o fenômeno de localização de deformações.

Matematicamente, a singularidade do tensor de localização, indicada na Equação 3.14, corresponde à perda de elipticidade das equações diferenciais governantes da análise estática.

O tensor de localização definido na Equação 3.13 depende do tensor de rigidez tangente D_{ijkl} e do vetor unitário normal à superfície de descontinuidade n_i . Na maioria dos casos, o tensor de rigidez tangente depende apenas do estado de carregamento do material e pode ser considerado conhecido. Desta maneira, a análise de localização consiste em procurar o vetor unitário \mathbf{n} que indique a direção na qual o tensor de localização é singular.

Se este vetor não existir, o campo de deformações permanece contínuo. A singularidade do tensor acústico é condição necessária, mas não suficiente para surgimento de uma descontinuidade fraca, pois a análise de localização realizada é puramente local, restrita ao ponto material e sua vizinhança infinitamente pequena.

O desenvolvimento de uma descontinuidade fraca em um corpo finito depende do estado do material, da vizinhança e de condições de contorno. Apesar disso, a análise do tensor de localização é largamente usada como indicador de possíveis modos de falhas descontínuas (Jirásek, 2007a).

De acordo com Schreyer e Neilsen (1996b), a existência de uma bifurcação descontínua, a perda do caráter positivo-definido do tensor acústico e a perda da elipticidade das equações diferenciais governantes são critérios equivalentes para indicar falha material. Desta forma, os autores dizem ser apropriado definir o início da falha material como o momento em que o primeiro destes critérios é satisfeito.

3.5.2 Classificação dos tipos de bifurcação

Com a exposição de conceitos relativos à unicidade da solução do PVC (Seção 2.2), bifurcação contínua e descontínua (Seção 3.1), elipticidade das equações diferenciais que governam o PVC em uma análise estática (Seção 3.4) e a definição do tensor acústico (Seção 3.5), pode-se categorizar os tipos de bifurcações encontrados

na literatura em função do módulo pós-crítico, denotado usualmente pelo tensor \bar{H}_{nm} .

A classificação doravante reproduzida encontra-se no trabalho de Ottosen e Runesson (1991). Ela foi elaborada para modelos de plasticidade com uma única função de carregamento. Desta forma, o módulo pós-crítico é representado, de maneira simplificada, por um tensor de ordem zero (escalar).

Apesar de restrita a modelos de plasticidade, esta classificação elucida a diferença entre conceitos que são comumente intercambiados na literatura. De acordo com Ottosen e Runesson (1991), a relação para estabilidade material, representada pela Equação 2.17 e abaixo reescrita, é condição suficiente para unicidade da solução do PVC:

$$\dot{\epsilon}_{ij} D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} > 0 \quad (3.15)$$

Denota-se H^b como o módulo pós-crítico no qual a condição de unicidade supracitada é violada pela primeira vez. A bifurcação descontínua não pode preceder a bifurcação geral (ou contínua) devido a restrições cinemáticas, descritas na Seção 3.1. Representando com H^{db} o módulo pós-crítico associado à bifurcação descontínua, tem-se a seguinte relação:

$$H^b \geq H^{db} \quad (3.16)$$

Quando se trata de modelos não associados, a relação constitutiva tangente pode deixar de ser simétrica no regime inelástico. Por conseguinte, o tensor acústico, definido na Equação 3.13, também pode tornar-se assimétrico. Para este tipo de modelo, define-se o conceito de elipticidade forte, no qual apenas a parcela simétrica do tensor acústico é considerada. A partir de uma dedução análoga, a perda de elipticidade forte ocorre quando:

$$\det(\mathbf{Q}^{sym}) = 0 \quad (3.17)$$

em que,

\mathbf{Q}^{sym} representa o tensor acústico simetrizado.

Considerando H^{se} como o módulo pós-crítico associado à perda de elipticidade forte, tem-se que:

$$H^b \geq H^{se} \geq H^{db} \quad (3.18)$$

Pontos limites na trajetória de equilíbrio ocorrem quando o tensor constitutivo tangente torna-se singular. Adota-se H^l como o módulo pós-crítico associado a um ponto limite e admite-se que $H^l = 0$ independentemente da associatividade do modelo constitutivo.

Uma análise espectral do tensor constitutivo tangente, feita por Runesson e Mroz (1989), mostra que o menor autovalor deste tensor é crescente com o aumento de H . A partir desta constatação, infere-se que:

$$H^b \geq H^l = 0 \quad (3.19)$$

A Figura 3.14 apresenta um resumo das relações definidas anteriormente para modelos não associados.

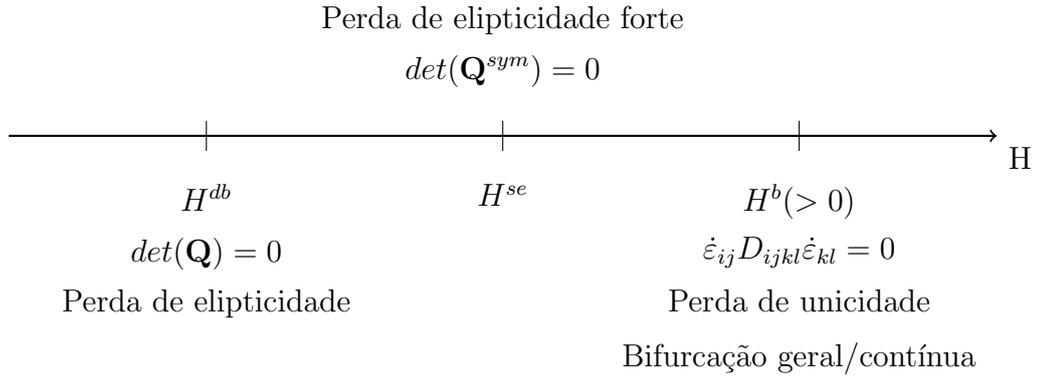


Figura 3.14: Classificação dos tipos de bifurcação para modelo não associado (Adaptado de Ottosen e Runesson (1991)).

Para o caso particular de modelos associados, a instabilidade material só ocorre após o tensor constitutivo tangente tornar-se singular. Desta forma, tem-se que:

$$H^b = H^l = 0 \quad (3.20)$$

A partir da Equação 3.20, pode-se concluir que bifurcações descontínuas não ocorrem no regime de *hardening* (endurecimento) para modelos de plasticidade associados, *i.e.* $H^{db} \leq 0$.

A Figura 3.15 apresenta um resumo das relações definidas anteriormente para modelos associados.

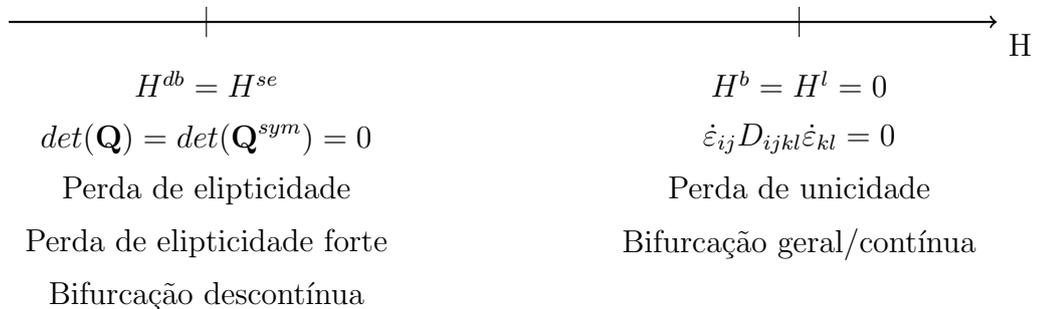


Figura 3.15: Classificação dos tipos de bifurcação para modelo associado (Adaptado de Ottosen e Runesson (1991)).

De maneira mais genérica, desconsiderando valores do módulo pós-crítico, Neilsen e Schreyer (1993) propuseram uma categorização dos tipos de bifurcação relatados na literatura. A Tabela 3.1 resume os critérios considerados pelos autores.

Tabela 3.1: Categorização dos tipos de bifurcação (Adaptado de Neilsen e Schreyer (1993)).

Tipo de bifurcação	Relação matemática	Modo de falha
Geral	$\dot{\epsilon}_{ij} D_{ijkl}^{sym} \dot{\epsilon}_{kl} = 0$	Difusa ou localizada
Ponto limite	$D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} = 0$	Difusa ou localizada
Perda de elipticidade forte	$det(Q_{jk}^{sym}) = 0$	Localizada
Bifurcação descontínua clássica	$det(Q_{jk}) = 0$	Localizada

De acordo com os autores, o critério de bifurcação geral é satisfeito quando o determinante da parcela simétrica do tensor constitutivo tangente torna-se nulo. Modelos constitutivos associados apresentam pontos coincidentes para detecção de bifurcação geral e ponto limite. Por sua vez, a bifurcação geral pode ocorrer no regime de *hardening* para modelos não associados, como demonstrado por Rudnicki e Rice (1975).

A perda de elipticidade forte ocorre quando o determinante da parcela simétrica do tensor acústico torna-se nulo. Novamente, modelos associados apresentam pontos coincidentes para detecção de perda de elipticidade forte e bifurcação descontínua clássica.

Neilsen e Schreyer (1993) classificam bifurcações descontínuas como um subgrupo das bifurcações gerais. Bifurcações descontínuas clássicas representam um subgrupo das bifurcações descontínuas, desde que satisfaçam o critério de perda da elipticidade forte.

Capítulo 4

ANÁLISE DE LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES

A análise de localização de deformações pode ser abordada de maneira analítica, na qual autores definem expressões fechadas para identificação do fenômeno. Este tipo de análise é caracterizado por uma implementação simples e por requerer pouco esforço computacional. Em contrapartida, as expressões analíticas são formuladas para condições de carregamento, modelos constitutivos e modelos de análise específicos.

Com o objetivo de obter um procedimento genérico, a análise de localização de deformações também foi tratada a partir de métodos numéricos. Desta maneira, a análise seria funcional tanto para modelos constitutivos complexos, quanto para casos genéricos de carregamento. Esta abordagem para análise de localização demanda maior esforço computacional e está sujeita às instabilidades inerentes a procedimentos numéricos.

4.1 Representação do Comportamento Material

O modelo constitutivo corresponde a uma formulação analítica desenvolvida para descrever o comportamento físico de um corpo, assumindo-o como um meio contínuo, e do material que o compõe. Esta descrição é realizada através de hipóteses que simplificam o complexo comportamento mecânico de diversos materiais.

A modelagem constitutiva tem sido desenvolvida de maneira extensiva e inúmeros modelos adequados para concreto, metais, rochas e solos encontram-se descritos na literatura. A análise física e geometricamente não linear de estruturas requer modelos constitutivos fidedignos ao comportamento material, que possibilitam a obtenção de trajetórias de equilíbrio completas. Os principais modelos utilizados no contexto da análise não linear de estruturas foram desenvolvidos baseados em fundamentos da Mecânica do Dano, da Mecânica da Fratura ou na Teoria da Plasticidade.

De acordo com Penna (2011), a termodinâmica é uma base comum para as três estruturas teóricas usadas na formulação constitutiva em geral. Desta maneira, uma formulação unificada para modelos constitutivos baseada nos processos energéticos envolvidos no comportamento material é possível. Apesar da generalidade, a termodinâmica é pouco prática no que tange a implementação computacional de modelos constitutivos em um contexto unificado.

No âmbito da modelagem computacional, Penna (2011) revisou as principais tentativas de unificação teórica dos modelos constitutivos encontradas na literatura. Destaca-se o trabalho de Carol et al. (1994), no qual uma unificação teórica de modelos baseados em degradação elástica com uma única superfície de carregamento é proposta.

Com o objetivo de garantir a inclusão de modelos multipotenciais e a independência do método numérico empregado, Penna (2011) apresenta uma expansão da estrutura teórica proposta por Carol et al. (1994). Sua implementação contempla diversos modelos constitutivos, formulados com uma ou várias funções de carregamento.

Neste trabalho, será reproduzida a formulação baseada em deformação da proposta unificada de Penna (2011). Conforme o autor, as formulações baseadas em tensão e deformação são ditas duais. Apesar de gerarem expressões matemáticas diferentes, apresentam o mesmo resultado para estados correspondentes de tensão e deformação.

Os modelos baseados em degradação elástica têm como principal característica a existência de uma relação total entre tensões e deformações. Logo, tem-se:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (4.2)$$

em que,

E_{ijkl} é o tensor de rigidez secante;

C_{ijkl} é o tensor de flexibilidade secante.

A função de carregamento da formulação baseada em deformação é dada por $F_n(\varepsilon, \bar{\mathbf{p}})$, em que $\bar{\mathbf{p}}$ representa o conjunto de variáveis internas do modelo definidas no domínio das deformações.

A partir do diagrama tensão-deformação para o caso unidimensional, representado na Figura 4.1, tem-se:

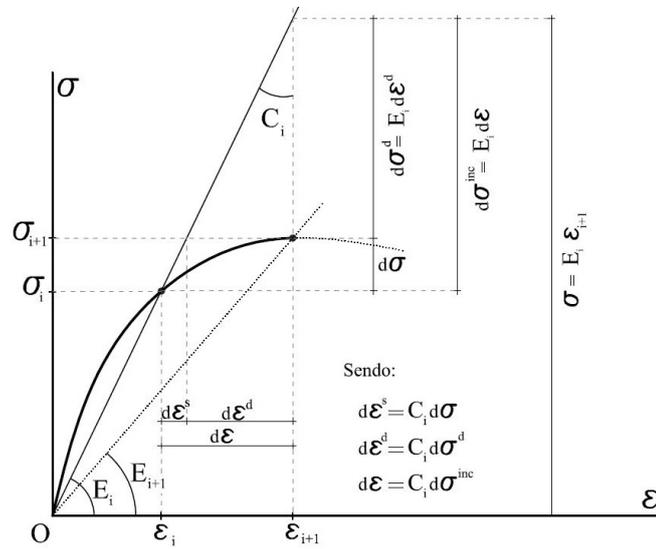


Figura 4.1: Incremento de deformação associado à variação da flexibilidade (Penna (2011)).

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{inc} - \dot{\varepsilon}_{ij}^d$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} - C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}^d$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = C_{ijkl}(\dot{\sigma}_{kl} - \dot{\sigma}_{kl}^d) \quad (4.3)$$

em que,

$\dot{\varepsilon}_{ij}^d$ é o tensor taxa de deformações relacionado à degradação da rigidez;

$\dot{\sigma}_{kl}^d$ é o tensor taxa de tensões relacionado à degradação da rigidez.

Neste momento, define-se que:

$$\dot{\sigma}_{kl}^d = \dot{\lambda}_m \bar{m}_{mkl} \quad (4.4)$$

em que,

$\dot{\lambda}_m$ é o vetor de multiplicadores inelásticos, que definem a magnitude do processo de degradação;

\bar{m}_{mkl} é o tensor que indica as direções de degradação.

A condição de consistência, na sua forma linearizada, é dada por:

$$\dot{F}_n = \left. \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{\bar{p}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \left. \frac{\partial F_n}{\partial \bar{p}_q} \right|_{\varepsilon} \dot{\bar{p}}_q = 0 \quad (4.5)$$

Por definição, tem-se:

$$\bar{n}_{nij} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{\bar{p}} \quad (4.6)$$

$$\bar{H}_{nm} = - \left. \frac{\partial F_n}{\partial \lambda_m} \right|_{\varepsilon} = - \left. \frac{\partial F_n}{\partial \bar{p}_q} \right|_{\varepsilon} \frac{\partial \bar{p}_q}{\partial \varepsilon_{kl}^d} \bar{m}_{mkl} \quad (4.7)$$

em que,

\bar{n}_{nij} é o tensor que indica as direções das funções de carregamento;

\bar{H}_{nm} é o tensor que indica os módulos pós-crítico (ou módulos de *Hardening-Softening*) do material.

Com as grandezas definidas nas Equações 4.6 e 4.7, a condição de consistência pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\bar{n}_{nij}\dot{\epsilon}_{ij} - \bar{H}_{nm}\dot{\lambda}_m = 0 \quad (4.8)$$

A fórmula explícita do multiplicador inelástico é obtida diretamente a partir da Equação 4.8:

$$\dot{\lambda}_m = \frac{1}{\bar{H}_{nm}}\bar{n}_{nij}\dot{\epsilon}_{ij} \quad (4.9)$$

A substituição da Equação 4.9 na Equação 4.4 resulta em:

$$\dot{\sigma}_{kl}^d = \frac{1}{\bar{H}_{nm}}\bar{n}_{nij}\dot{\epsilon}_{ij}\bar{m}_{mkl} \quad (4.10)$$

Substituindo a Equação 4.10 na Equação 4.3, tem-se:

$$C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} = \dot{\epsilon}_{ij} + C_{ijkl}\frac{1}{\bar{H}_{nm}}\bar{n}_{nij}\dot{\epsilon}_{ij}\bar{m}_{mkl} \quad (4.11)$$

Trocando os índices ij por pq na Equação 4.11, tem-se:

$$C_{pqkl}\dot{\sigma}_{kl} = \dot{\epsilon}_{pq} + C_{pqkl}\frac{1}{\bar{H}_{nm}}\bar{n}_{npq}\dot{\epsilon}_{pq}\bar{m}_{mkl} \quad (4.12)$$

Multiplicando a Equação 4.12 por E_{ijpq} , tem-se:

$$E_{ijpq}C_{pqkl}\dot{\sigma}_{kl} = E_{ijpq}\dot{\epsilon}_{pq} + E_{ijpq}C_{pqkl}\frac{1}{\bar{H}_{nm}}\bar{n}_{npq}\dot{\epsilon}_{pq}\bar{m}_{mkl}$$

$$I_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} = E_{ijpq}\dot{\epsilon}_{pq} + I_{ijkl}\frac{1}{\bar{H}_{nm}}\bar{n}_{npq}\dot{\epsilon}_{pq}\bar{m}_{mkl} \quad (4.13)$$

em que,

I_{ijkl} é o tensor identidade de quarta ordem.

Isolando $\dot{\varepsilon}_{pq}$ na Equação 4.13, tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(E_{ijpq} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{n}_{npq} \bar{m}_{mij} \right) \dot{\varepsilon}_{pq} \quad (4.14)$$

Intercambiando os índices pq por kl na Equação 4.14, tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{m}_{mij} \bar{n}_{nkl} \right) \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (4.15)$$

Considerando a relação direta entre a taxa de tensão e taxa de deformação, definida Seção 2.3 pela Equação 2.16, a Equação 4.15 permite definir que:

$$D_{ijkl} = E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{m}_{mij} \bar{n}_{nkl} \quad (4.16)$$

Desta maneira, o arcabouço teórico e computacional para modelos constitutivos baseados em degradação elástica desenvolvido por Penna (2011) permite a obtenção do tensor constitutivo tangente através da Equação 4.16 em sua formulação baseada em deformação.

A unificação realizada por Penna (2011) contemplou modelos de fissuração distribuída, dano e plasticidade. Além disso, um novo modelo de dano com múltiplas funções de carregamento foi desenvolvido e implementado. Nominalmente, destacam-se os seguintes modelos:

- Modelo Elastoplástico com Critério de Escoamento de von Mises;
- Modelo de Dano Isotrópico de Mazars (1984);
- Modelo de Dano Isotrópico de Mazars e Lemaitre (1984);

- Modelo de Dano Isotrópico de Simo e Ju (1987);
- Modelo de Dano Isotrópico de Ju (1989);
- Modelo de Dano Isotrópico de Lemaitre e Chaboche (1990);
- Modelo de Dano Isotrópico de de Vree et al. (1995);
- Modelo de Fissuras Distribuídas, com Direção Fixa ou Rotacional;
- Modelo de Dano Ortotrópico de de Borst e Gutierrez (1999);
- Modelo de Dano Volumétrico de Penna (2011).

No ambiente unificado desenvolvido por Penna (2011), Monteiro (2013) incluiu o modelo elastoplástico com dano proposto por Lemaitre (1985). De maneira análoga, Wolenski (2013) implementou o modelo de microplanos proposto por Leukart e Ramm (2006) com quatro medidas de deformações equivalentes (Simo e Ju (1987), Ju (1989), Lemaitre (1984) e de Vree et al. (1995)).

Considerando a classe de modelos constitutivos baseados em plasticidade, Oliveira (2016) incluiu os critérios de escoamento de Tresca, Rankine, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb e Ottosen na formulação unificada.

Adicionalmente, de Souza (2016) implementou uma formulação não local associada ao modelo de dano ortotrópico de de Borst e Gutierrez (1999). Peixoto (2016) incluiu o modelo de dano isotrópico com critério proposto por Oliver et al. (2006). Por fim, Gori (2018) incorporou a representação constitutiva do meio micropolar no ambiente unificado.

4.2 Abordagem Analítica para a Análise de Localização

Ortiz et al. (1987) propuseram uma técnica para melhorar o desempenho de uma classe de elementos finitos em problemas envolvendo falha localizada. Para aplicar

a técnica proposta, os autores definiram um procedimento analítico para detecção do início do fenômeno de localização.

Em análises bidimensionais, o vetor unitário n_i possui apenas dois componentes (n_1 e n_2) e a matriz de localização (*i.e.* tensor acústico ou tensor de localização) possui dimensões 2 x 2. Assim sendo, os autores expressaram o determinante do tensor acústico da seguinte maneira:

$$\det(\mathbf{Q}) = a_0 n_1^4 + a_1 n_1^3 n_2 + a_2 n_1^2 n_2^2 + a_3 n_1 n_2^3 + a_4 n_2^4 \quad (4.17)$$

em que,

a_0 , a_1 , a_2 , a_3 e a_4 representam os coeficientes da expressão polinomial, obtidos diretamente a partir dos componentes não nulos do tensor constitutivo tangente em uma análise plana.

Considerando uma parametrização polar, na qual $n_1 = \cos \theta$ e $n_2 = \sin \theta$, na Equação 4.17, a condição clássica de localização (Equação 3.14) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\det(\mathbf{Q}) := f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (4.18)$$

em que,

$$x = \tan \theta.$$

A análise de localização é realizada verificando o sinal da função f em seus pontos de mínimo. Quando $f < 0$, detecta-se a localização. Os pontos de mínimos são obtidos a partir de f' , derivada da função f em relação a x . Como f' é uma função polinomial de grau 3, é possível obter suas três raízes através de formulações analíticas, como o método de Cardan.

A análise de localização de Ortiz et al. (1987) considerou tensor acústico simétrico, possível apenas para modelos constitutivos associados. Ela foi avaliada em modelos constitutivos elastoplásticos de pequenas deformações e com dano isotrópico.

Em um estudo sobre propriedades da bifurcação descontínua em materiais elastoplásticos, Ottosen e Runesson (1991) obtiveram soluções analíticas para a direção de bifurcação e módulo de *hardening* crítico.

Os autores consideraram o problema de autovalor representado na Equação 4.19:

$$Q_{jk}y_k^{(i)} = \lambda^{(i)}Q_{jk}^e y_k^{(i)} \quad (4.19)$$

em que,

Q_{jk}^e indica o tensor de localização elástico, associado ao comportamento elástico do material.

O uso do tensor de localização elástico simplifica o processo de solução analítica dos autovalores $\lambda^{(i)}$ e autovetores $y_k^{(i)}$. Matematicamente, o tensor de localização elástico é representado por:

$$Q_{jk}^e = n_i D_{ijkl}^e n_k \quad (4.20)$$

em que,

D_{ijkl}^e é o tensor de rigidez elástica ou tensor constitutivo elástico.

O tensor de rigidez elástica é assumido como simétrico e positivo-definido. Logo, o tensor de localização elástico e seu inverso, denominado P_{lj}^e , também possuem estas propriedades. Multiplicando a Equação 4.19 por P_{lj}^e , obtém-se:

$$B_{lk}y_k^{(i)} = \lambda^{(i)}y_k^{(i)} \quad (4.21)$$

em que,

$$B_{lk} = P_{lj}^e Q_{jk}.$$

A Equação 4.21 representa o problema de autovalor solucionado. O critério de bifurcação descontínua foi considerado satisfeito quando o menor autovalor da Equação 4.21 torna-se nulo.

Para obter o resultado desta minimização com restrições, os autores utilizaram o método dos multiplicadores de Lagrange. Além disso, os autores consideraram que

o tensor constitutivo elástico é isotrópico e as funções de escoamento e de potencial plástico possuem as mesmas direções principais.

Ottosen e Runesson (1991) formularam expressões analíticas para uma classe de materiais elastoplásticos, incluindo modelo com critério de escoamento de von Mises, Rankine, Coulomb e Drucker-Prager.

Usando o mesmo arcabouço, Runesson et al. (1991) desenvolveram expressões analíticas para os modelos com critério de escoamento de Drucker-Prager, von Mises, Mohr-Coulomb e Tresca para análises planas (estado plano de tensão e deformação).

Rizzi et al. (1995) complementaram a metodologia proposta por Ottosen e Runesson (1991) ao considerarem a análise de bifurcação para modelos de dano escalar. Utilizando a unificação teórica de modelos constitutivos de Carol et al. (1994) com degradação elástica, os autores formularam expressões analíticas para o fenômeno de localização para modelos tridimensionais e planos.

Em outra vertente, Doghri e Billardon (1995) realizaram uma investigação do fenômeno de localização em materiais elastoplásticos. Uma classe geral de modelos constitutivos com pequenas deformações de acordo com a abordagem de Lemaitre e Chaboche (1990) foi usada durante a formulação desenvolvida.

O estudo da localização de deformações realizado foi restrito a modelos planos. O vetor unitário n_i foi parametrizado no plano com coordenadas polares, dadas por $n_1 = \cos \theta$ e $n_2 = \sin \theta$, de maneira análoga ao procedimento de Ortiz et al. (1987).

As condições de carregamento para a formulação de Doghri e Billardon (1995) também foram restringidas. Os autores consideraram apenas carregamento do tipo biaxial, em que não há tensões de cisalhamento.

Outra hipótese adotada é de que há um coeficiente de biaxialidade (α), interpretado como um coeficiente de proporcionalidade entre os carregamentos aplicados nas duas direções do plano. A Figura 4.2 ilustra a condição de carregamento biaxial.

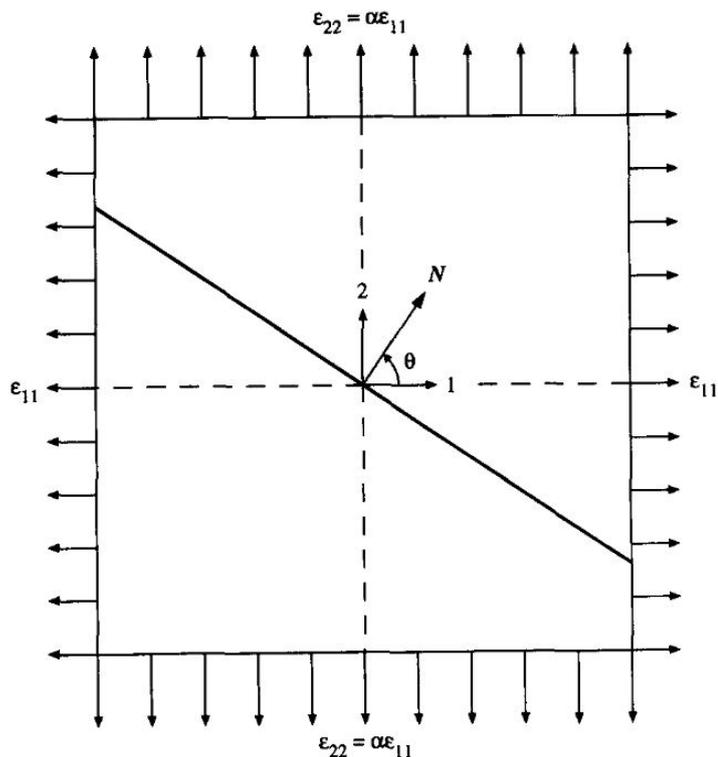


Figura 4.2: Condição de carregamento biaxial (Doghri e Billardon (1995)).

A análise de localização é desenvolvida a partir da condição de continuidade da taxa de tensão (Equação 3.1). A formulação analítica resultante apresentada depende do ângulo θ e do coeficiente de biaxialidade α .

Steinmann et al. (1994) formularam soluções analíticas para a análise de localização de um modelo específico de material ortotrópico. A análise foi realizada para modelos planos, resultando em expressões fechadas para o vetor n_i que define a superfície de descontinuidade.

Schreyer e Neilsen (1996a) desenvolveram um procedimento analítico para detectar perda de elipticidade com custo computacional reduzido. A análise foi baseada na constatação de que o menor autovalor do tensor acústico diminui com o aumento de deformações inelásticas no modelo estrutural. Quando este autovalor torna-se nulo, há perda de elipticidade das equações diferenciais do PVC e ocorre bifurcação descontínua no campo de deformações.

Durante a elaboração do método, os autores adotaram modelos constitutivos cujo tensor constitutivo tangente é obtido a partir de uma atualização de posto um do tensor constitutivo elástico. Conforme Maier et al. (1996), no contexto de modelagem constitutiva, uma atualização de posto um infere que um tensor de posto um (*i.e.* um tensor com apenas um autovalor não nulo) é adicionado ou subtraído do tensor de referência, que no caso é o tensor constitutivo elástico. A classe de modelos considerada por Schreyer e Neilsen (1996a) engloba modelos baseados em plasticidade e dano.

Assim como Ottosen e Runesson (1991), os autores abordaram a análise de localização como um problema de minimização com restrição do menor autovalor do tensor acústico. Este problema ocasionou um sistema de equações não lineares, cuja solução resultou em expressões analíticas para os componentes do vetor unitário n_i que indica a direção de bifurcação.

A análise proposta por Schreyer e Neilsen (1996a) é restrita a modelos constitutivos obtidos a partir de uma *rank-one modification* do tensor constitutivo elástico. Além disso, os autores assumiram durante o desenvolvimento da formulação um tensor constitutivo elástico isotrópico e simétrico.

Oliver e Huespe (2004) analisaram aspectos relacionados à modelagem numérica da falha material considerando a inclusão de descontinuidades fortes. Os autores consideraram uma classe de modelos constitutivos cujo tensor constitutivo tangente é dado por:

$$E_{ijkl}^{tang} = E_{ijkl}^* - \frac{1}{\xi(\mathcal{H})} P_{ij} R_{kl} \quad (4.22)$$

em que,

E_{ijkl}^* é um tensor de 4^a ordem;

$\xi(\mathcal{H})$ é uma função escalar do módulo de *softening*;

P_{ij} e R_{kl} são tensores de 2^a ordem simétricos.

Segundo os autores, modelos constitutivos elastoplásticos e de dano isotrópico

que possuem uma função crescente e monótona do módulo de *softening* (\mathcal{H}) podem ser representados pela classe supracitada.

A análise de bifurcação é abordada como um problema de otimização da função escalar do módulo de *softening*. No plano, a otimização proposta admite uma solução geométrica, considerada como uma analogia ao círculo de Mohr. Considerando uma parametrização esférica, os autores obtêm expressões fechadas para o vetor unitário n_i associado à bifurcação descontínua.

A solução analítica proposta por Oliver e Huespe (2004) é exata apenas para modelos associados, nos quais os tensores P_{ij} e R_{kl} são iguais. Nos demais casos, ela representa apenas uma aproximação das soluções da análise de bifurcação descontínua. Os autores apresentam expressões fechadas genéricas para modelos elastoplásticos e de dano isotrópico.

A abordagem analítica para a análise de localização de deformações resulta em expressões fechadas válidas apenas em condições específicas. Nota-se também que a aplicabilidade das expressões obtidas é reduzida devido à ausência de uma formulação unificada para modelos constitutivos, conforme discutido na Seção 4.1. Além disso, as soluções obtidas dependem de alguma técnica de parametrização para a direção da superfície de descontinuidade. Na maioria dos trabalhos descritos, os autores utilizaram a parametrização esférica. A escolha da técnica de parametrização é um aspecto importante na convergência de técnicas numéricas para a análise de localização, discutidas na Seção 4.3.

4.3 Abordagem Numérica para a Análise de Localização

Para modelos tridimensionais, o trabalho de Ortiz et al. (1987) propõe um procedimento numérico para análise de localização. Os autores realizaram a minimização com restrições do tensor acústico da seguinte maneira:

$$\min_{\|\mathbf{n}\|=1} f(\mathbf{n}) := \min_{\|\mathbf{n}\|=1} \det(n_i D_{ijkl} n_l) \quad (4.23)$$

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, Ortiz et al. (1987) consideraram a seguinte condição para obtenção de um mínimo para o determinante do tensor acústico:

$$\frac{\partial}{\partial n_i} [f(\mathbf{n}) - \lambda |\mathbf{n}|^2] = \frac{\partial f(\mathbf{n})}{\partial n_i} - 2\lambda n_i = 0 \quad (4.24)$$

em que,

λ é um multiplicador de Lagrange.

Com a diferenciação de f na Equação 4.24, obtém-se a seguinte expressão:

$$J_{il}(\mathbf{n}) n_l - \lambda n_i = 0 \quad (4.25)$$

em que,

J_{il} é um tensor de segunda ordem definido por $\det(\mathbf{Q}(\mathbf{n})) D_{ijkl} Q_{kj}^{-1}(\mathbf{n})$.

Para solucionar a Equação 4.25, de caráter não linear, os autores expressam o vetor de direção da superfície de descontinuidade (\mathbf{n}) em termos de uma parametrização esférica:

$$\mathbf{n}(\varphi, \theta) := \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

em que,

$\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Em seguida, Ortiz et al. (1987) propõem um procedimento iterativo com dois passos:

(i) O espaço parametrizado é varrido a cada incremento de 5 graus para ambas as variáveis com o objetivo de determinar a primeira aproximação para \mathbf{n} , denotada por \mathbf{n}^0 .

(ii) Definida a primeira aproximação para o vetor de direção \mathbf{n} , o procedimento iterativo é iniciado, como representado pela Equação 4.27.

$$J_{il}(\mathbf{n}^{(k)})n_i^{(k+1)} - \lambda^{(k+1)}n_i^{(k+1)} = 0 \quad (4.27)$$

em que,

k indica o contador de iterações;

Desta forma, um problema de autovalor é solucionado a cada iteração, considerando a matriz J_{il} calculada com o vetor $\mathbf{n}^{(k)}$ da iteração anterior. Os autores não descrevem os critérios para convergência utilizados no procedimento proposto.

O procedimento numérico de Ortiz et al. (1987) depende de quatro incógnitas, os três componentes do vetor \mathbf{n} e o multiplicador de Lagrange λ . Mosler (2005) propõe um novo método numérico para análise de bifurcação descontínua que depende apenas das variáveis oriundas do processo de parametrização do vetor de direção n_i .

O autor desenvolveu seu método considerando também a parametrização esférica da seguinte maneira:

$$\mathbf{n}(\alpha, \theta) = \begin{Bmatrix} \text{sen}\alpha \cos\theta \\ \text{sen}\alpha \text{sen}\theta \\ \cos\alpha \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

em que,

$\alpha \in [0, 2\pi]$ e $\theta \in [0, \pi]$.

De maneira direta, a partir da Equação 4.28, obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} = \begin{Bmatrix} \cos\alpha \cos\theta \\ \cos\alpha \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\alpha \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} = \begin{Bmatrix} -\text{sen}\alpha \text{sen}\theta \\ \text{sen}\alpha \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \alpha^2} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \alpha \cos \theta \\ -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{cos} \alpha \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \alpha \partial \theta} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \alpha \cos \theta \\ -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \theta^2} = \begin{pmatrix} -\operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{cos} \alpha \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Define-se uma função f , que no contexto da análise de localização de deformações é dada por $f := \det \mathbf{Q}(\mathbf{n}(\alpha, \theta))$. Usando a regra da cadeia, a condição necessária para um ponto extremo da função f é dada por:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

A aplicação da regra de cadeia na Equação 4.34 evidenciou a necessidade de determinar a derivada de f em relação a \mathbf{n} . Para computá-la, Mosler (2005) introduziu o tensor de terceira ordem \mathcal{C}_{ijk} , definido como:

$$\mathcal{C}_{ijk} = D_{kijl} n_l + n_l D_{lij} k \quad (4.35)$$

A derivada de f em relação ao vetor de direção da superfície de descontinuidade \mathbf{n} é obtida em função do tensor \mathcal{C}_{ijk} . Sua formulação encontra-se descrita integralmente no trabalho de Mosler (2005).

O autor trata a condição necessária para obtenção de um mínimo da função f , descrita na Equação 4.34, como um sistema não linear de equações a ser solucionado. O método de Newton é o procedimento numérico mais comum para solução deste tipo de problema. Considerando a função $f := \det \mathbf{Q}(\mathbf{n}(\alpha, \theta))$ e a Equação 4.34, o procedimento iterativo do método de Newton é representado por:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_k \\ \theta_k \end{Bmatrix} - \mathbf{J}^{-1}(\alpha_k, \theta_k) \begin{Bmatrix} \frac{\partial f(\alpha_k, \theta_k)}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f(\alpha_k, \theta_k)}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

em que,

k indica o contador de iterações;

$\mathbf{J}^{-1}(\alpha_k, \theta_k)$ é o inverso da matriz jacobiana ou hessiana aplicada no par de variáveis do passo k , cuja representação explícita é:

$$\mathbf{J}(\alpha_k, \theta_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\alpha_k, \theta_k)}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 f(\alpha_k, \theta_k)}{\partial \alpha \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 f(\alpha_k, \theta_k)}{\partial \theta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 f(\alpha_k, \theta_k)}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Como explicitado na Equação 4.37, as derivadas de segunda ordem da função f são necessárias no processo iterativo de Newton. De maneira análoga, Mosler (2005) considera as derivadas de segunda ordem do vetor \mathbf{n} (Equações 4.31, 4.32, 4.33) e aplica a regra da cadeia. A formulação explícita para as derivadas de segunda ordem da função f é extensa e encontra-se exposta integralmente no trabalho de Mosler (2005).

Devido a sua convergência quadrática, o método de Newton é um recurso eficiente para a obtenção de raízes de um sistema não linear de equações. No entanto, ele requer um ponto de partida, cuja influência na probabilidade de convergência do procedimento iterativo é considerável. Para obter um ponto inicial adequado, realiza-se um processo de varredura do espaço parametrizado, de maneira análoga à

Ortiz et al. (1987).

Uma vez encontrado o par de variáveis $(\alpha_{sol}, \theta_{sol})$ que corresponde à solução do sistema não linear de equações definido na Equação 4.34, deve-se avaliar a função objetivo f neste ponto. A singularidade do tensor acústico é detectada quando $f(\alpha_{sol}, \theta_{sol}) \leq 0$. Para $f(\alpha_{sol}, \theta_{sol}) > 0$, não há singularidade e, conseqüentemente, não ocorre o fenômeno de localização de deformações.

A direção da superfície de descontinuidade, representada pelo vetor unitário \mathbf{n} , é recuperada diretamente aplicando as variáveis $(\alpha_{sol}, \theta_{sol})$ na Equação 4.28, que define a parametrização esférica utilizada por Mosler (2005).

Oliver et al. (2010) propuseram um procedimento numérico para solução do problema de bifurcação descontínua material. Em seu trabalho, os autores discutiram sobre o custo computacional de procedimentos de varredura do espaço parametrizado e linearização do sistema não linear de equações através do método de Newton.

Considerando também que a análise de localização de deformações deve ser realizada em cada ponto material e a cada passo da análise não linear, Oliver et al. (2010) desenvolveram um procedimento iterativo baseado na solução de um problema de autovalor conjugado do tensor acústico.

A singularidade do tensor acústico foi considerada como condição necessária para a bifurcação. Em termos gerais, o procedimento de Oliver et al. (2010) busca os vetores \mathbf{n} e \mathbf{m} , para um dado tensor constitutivo tangente \mathbf{D} , que resultam no menor autovalor do tensor acústico, denotado por λ_t , nulo.

Os autores utilizaram o princípio de Rayleigh para definir a seguinte relação:

$$\lambda_t^{min}(\mathbf{n}) = \min_{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3} \phi_t(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \quad (4.38)$$

em que,

$\phi_t(\mathbf{n}, \mathbf{m}) := \mathbf{m} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}$ é a função quociente de Rayleigh.

Para um tensor acústico $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ simétrico, considerando a Equação 4.38, tem-se:

$$\lambda_t := \min_{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3} \lambda_t^{min}(\mathbf{n}) = \min_{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3} \underbrace{\left(\min_{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3} \phi_t(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \right)}_{\lambda_t^{min}(\mathbf{n})} = \min_{\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{R}^3} \phi_t(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \quad (4.39)$$

Desta forma, a obtenção do menor autovalor do tensor acústico, realizada a partir da Equação 4.39, resultará em um par de vetores unitários (\mathbf{n}, \mathbf{m}) que minimizam a função quociente $\phi_t(\mathbf{n}, \mathbf{m})$.

Assumindo simetria do tensor constitutivo tangente, o problema de autovalor conjugado é definido da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} = \lambda_t^{min} \mathbf{n} \\ \mathbf{Q}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = \mu_t^{min} \mathbf{m} \end{cases} \quad (4.40)$$

em que,

$$\lambda_t^{min} = \mu_t^{min}.$$

A solução da Equação 4.40 é obtida através de um procedimento numérico de dois passos:

(i) Encontrar o par de vetores (\mathbf{n}, \mathbf{m}) , bem como o menor autovalor λ_t^{min} para um passo qualquer da análise não linear.

(ii) Quando λ_t^{min} obtido em (i) torna-se nulo, detecta-se a bifurcação no passo correspondente da análise não linear. O par conjugado (\mathbf{n}, \mathbf{m}) deste passo, portanto, define a solução da análise de bifurcação descontínua.

O algoritmo usado para o passo (i) encontra-se disponível em Oliver et al. (2010). Os autores ressaltam que, devido à simetria do problema, os pares de vetores (\mathbf{n}, \mathbf{m}) e (\mathbf{m}, \mathbf{n}) podem ser considerados soluções da análise de bifurcação e não é possível diferenciá-los no escopo do seu trabalho.

Para relações constitutivas que resultam em um tensor constitutivo tangente assimétrico, o tensor acústico pode apresentar três autovalores reais ou um autovalor real e dois imaginários conjugados. Para garantir o funcionamento do método,

deve-se simetrizar o tensor acústico antes de considerá-lo no problema de autovalor conjugado representado na Equação 4.40. Tal procedimento torna a solução da técnica proposta por Oliver et al. (2010) uma aproximação para o par de (\mathbf{n}, \mathbf{m}) .

Conforme Mota et al. (2016), a parametrização esférica é a mais utilizada na análise numérica de bifurcações. Nela, os componentes do vetor \mathbf{n} são restritos à esfera unitária S^2 e representados pelos seus ângulos polares θ e azimutais φ , como representado na Figura 4.3.

Corroborando com a afirmação de Mota et al. (2016), este tipo de parametrização esférica já foi definido neste texto pelas Equações 4.26 e 4.28, utilizadas durante a descrição dos trabalhos de Ortiz et al. (1987) e Mosler (2005), respectivamente.

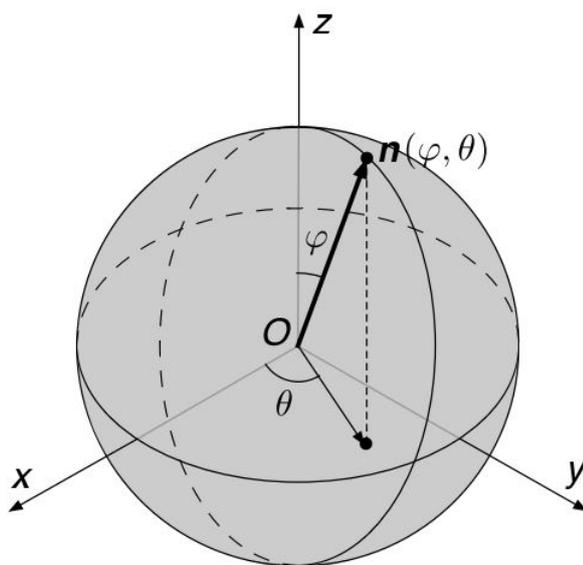


Figura 4.3: Parametrização esférica (Mota et al. (2016)).

A esfera unitária S^2 é parametrizada com o auxílio de um plano equatorial na parametrização estereográfica, representada na Figura 4.4. Considera-se um ponto P contido no plano equatorial e que pertence a uma linha que passa tanto no polo norte Q da esfera quanto na ponta do vetor \mathbf{n} . As coordenadas cartesianas x e y do ponto P podem ser obtidas através da interseção entre a linha e a esfera. Neste caso, o vetor normal unitário \mathbf{n} expresso em termos de base canônica é dado por:

$$\mathbf{n}(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \\ \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \\ \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

em que os parâmetros $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-1, 1]$.

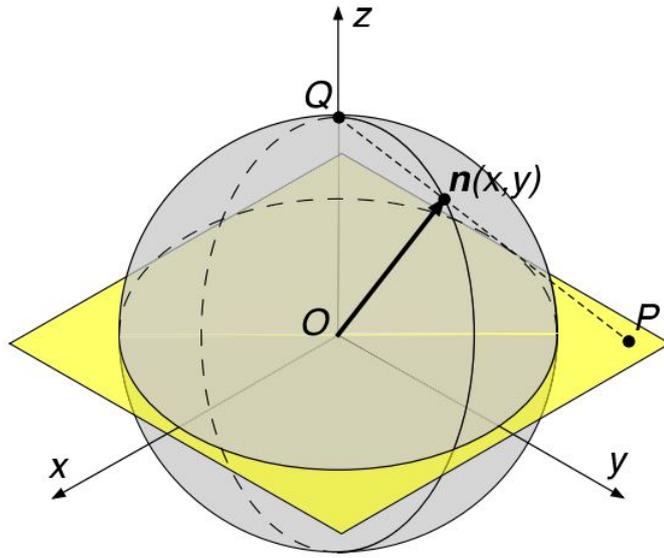


Figura 4.4: Parametrização estereográfica (Mota et al. (2016)).

Na parametrização projetiva, representada pela Figura 4.5, a norma do vetor posição de um ponto P com respeito ao centro de uma esfera é restringida para obter o vetor unitário \mathbf{n} . Este tipo de projeção é equivalente à projeção do ponto P na esfera unitária S^2 . Desta forma, tem-se:

$$\mathbf{n}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

em que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e os parâmetros $x \in [-1, 1]$, $y \in [-1, 1]$ e $z \in [-1, 1]$.

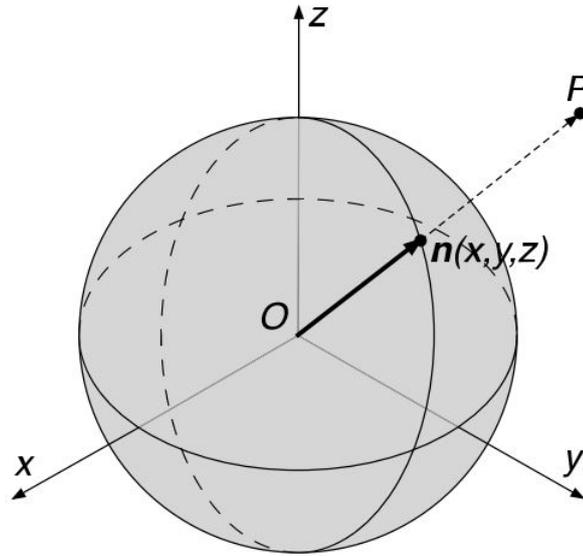


Figura 4.5: Parametrização projetiva (Mota et al. (2016)).

A parametrização tangente, representada na Figura 4.6, consiste na esfera unitária definida por um plano tangente. Define-se \mathbf{u} como o vetor de posição do ponto P que possui o ponto de contato Q como origem e pertence ao plano tangente. Além disso, \mathbf{e} representa o vetor de posição do ponto de contato Q com o centro da esfera unitária. Com a definição de um vetor de rotação $\theta := \mathbf{e} \times \mathbf{u}$, é possível expressar o vetor \mathbf{n} na base canônica da seguinte maneira:

$$\mathbf{n}(x, y) := \begin{pmatrix} x \operatorname{sen} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ y \operatorname{sen} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

em que os parâmetros $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $y \in [-\pi/2, \pi/2]$.

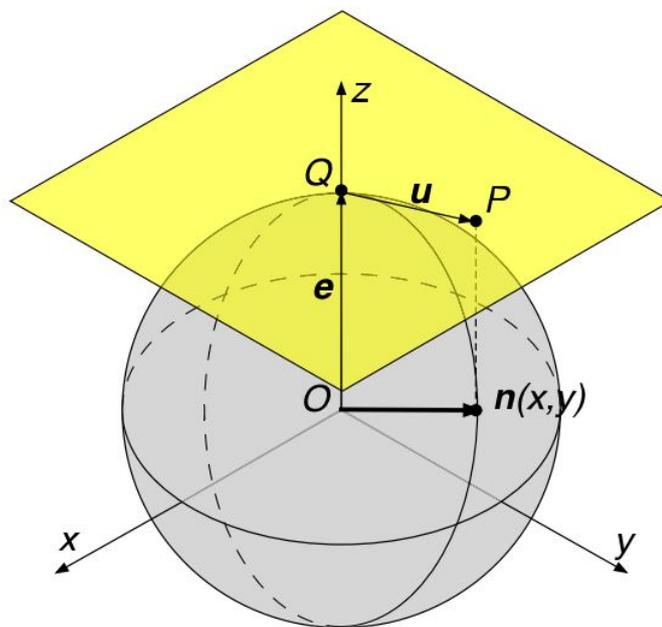


Figura 4.6: Parametrização tangente (Mota et al. (2016)).

As quatro técnicas de parametrização descritas anteriormente buscam os componentes do vetor \mathbf{n} com o uso de uma esfera unitária. Em seu trabalho, Mota et al. (2016) desenvolveram um novo tipo de parametrização, denominada cartesiana. Nela, a condição do vetor parametrizado ser unitário é relaxada, definindo assim um novo vetor denotado por \mathbf{v} .

O vetor \mathbf{v} na parametrização cartesiana é confinado em um cubo centrado na origem e com aresta de comprimento igual a 2, como representado na Figura 4.7. Na análise de localização de deformações usando a parametrização cartesiana, somente três faces do cubo precisam ser consideradas devido à simetria da condição de bifurcação.

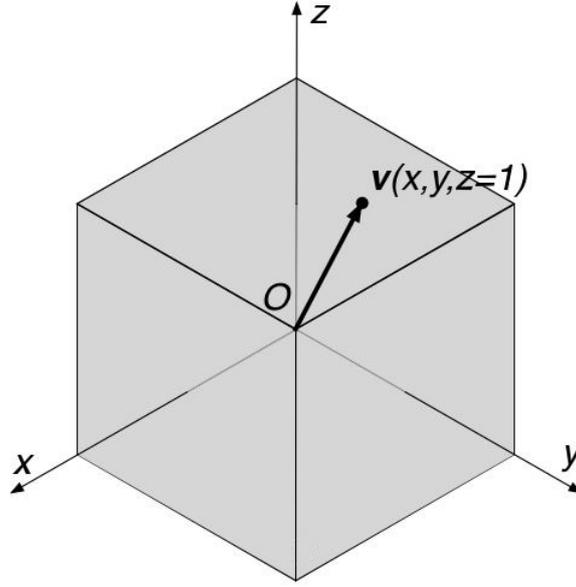


Figura 4.7: Parametrização cartesiana (Mota et al. (2016)).

Matematicamente, o vetor \mathbf{v} é definido da seguinte maneira:

$$\mathbf{v}(x, y, z) := \begin{cases} [x, y, 1]^T, & \text{se } x \in [-1, 1] \text{ e } y \in [-1, 1]; \\ [1, y, z]^T, & \text{se } y \in [-1, 1] \text{ e } z \in [-1, 1]; \\ [x, 1, z]^T, & \text{se } z \in [-1, 1] \text{ e } x \in [-1, 1]; \\ [1, 1, 1]^T, & \text{para demais casos.} \end{cases} \quad (4.44)$$

Mota et al. (2016) abordam a análise de bifurcação como um problema de otimização. Para cada face do cubo, tem-se um sistema não linear de equações a ser solucionado. Considerando a face do cubo na qual a coordenada z é constante, por exemplo, tem-se que os componentes do vetor \mathbf{v} são: $n_1 = x$, $n_2 = y$ e $n_3 = 1$. Portanto, a otimização será realizada para as variáveis x e y , com as restrições de que $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-1, 1]$.

Uma vez solucionado o sistema não linear de equações, o próximo passo da análise de localização consiste em avaliar o determinante do tensor acústico, denominado como função f , para os valores de x_{sol} e y_{sol} obtidos. A singularidade do tensor

de localização, no caso exemplificado, é detectada quando $f(x_{sol}, y_{sol}) \leq 0$. Para $f(x_{sol}, y_{sol}) > 0$, não há singularidade e, conseqüentemente, não ocorre o fenômeno de localização de deformações.

Quando comparada às técnicas de parametrização clássicas (esférica, estereográfica, projetiva e tangente), a parametrização cartesiana apresentou comportamento mais simples da função f a ser minimizada. A Figura 4.8 ilustra a diferença no comportamento das funções para uma das faces do cubo parametrizado considerando um carregamento de cisalhamento simples em um modelo de dano isotrópico.

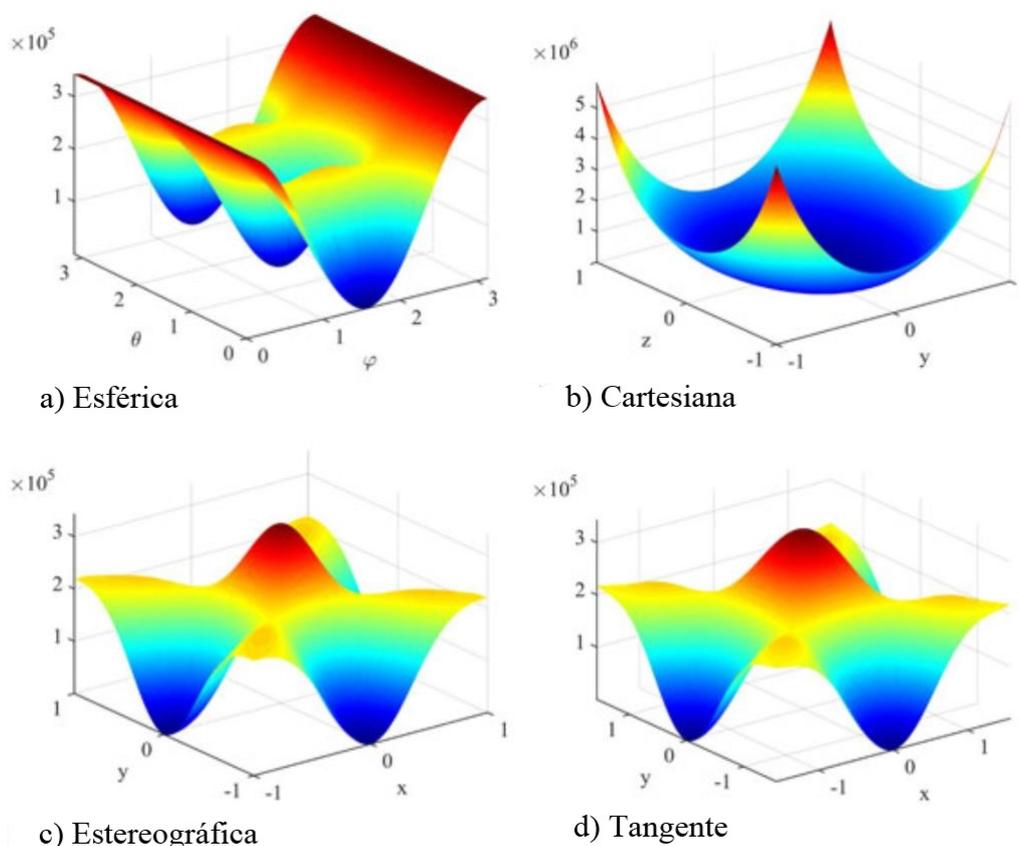


Figura 4.8: Comportamento das funções a serem minimizadas para diferentes tipos de parametrização (Mota et al. (2016)).

O comportamento mais simples, representado na Figura 4.8, proporciona melhor desempenho para a análise de localização realizada através da parametrização cartesiana. Métodos numéricos para a solução do sistema não linear de equações,

como o método de Newton, possuem menor dependência do palpite inicial e maior probabilidade de convergência com o uso da parametrização cartesiana.

O vetor unitário \mathbf{n} , que define a direção normal à superfície de descontinuidade, pode ser recuperado a partir do vetor \mathbf{v} da seguinte maneira:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \quad (4.45)$$

em que,

$\|\mathbf{v}\|$ denota a norma do vetor \mathbf{v} .

Em sua contribuição ao sistema computacional INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), Silva (2016) considerou o fenômeno de localização de deformações como estágio limiar de nucleação de fissuras. A análise de localização implementada utilizou a parametrização polar, considerando o ângulo formado entre a direção do eixo x e do vetor \mathbf{n} .

Visando um processo menos custoso computacionalmente, Silva (2016) assumiu que o tensor de rigidez tangente, definido de maneira geral por $\mathbf{D} = \mathbf{D}^S + (\partial\mathbf{D}^S/\partial\varepsilon)\varepsilon$, tem como componentes não nulos somente aqueles formados por um componente não nulo do tensor de rigidez secante. Desta maneira, foi considerado que as posições não nulas do tensor de rigidez tangente \mathbf{D} são as mesmas não nulas do tensor de rigidez secante \mathbf{D}^S , desprezando-se a contribuição da parcela $(\partial\mathbf{D}^S/\partial\varepsilon)\varepsilon$ para os demais componentes.

Considerando apenas a análise plana e a hipótese assumida para o tensor de rigidez tangente, a análise de localização definida por Silva (2016) consistiu na busca pelas raízes de um polinômio do segundo grau.

Capítulo 5

TÉCNICA NUMÉRICA IMPLEMENTADA

Neste trabalho, adota-se a parametrização cartesiana para definir a direção do vetor normal à superfície de descontinuidade oriunda da localização de deformações. Esta técnica numérica apresenta potencial eficiência computacional ao definir uma função objetivo com comportamento mais simples do que as demais técnicas de parametrização. Ela também exhibe robustez através da estabilidade proporcionada durante a solução numérica do problema de otimização não linear.

Apesar da escolha pela parametrização cartesiana, a implementação que será descrita neste capítulo foi concebida para possibilitar a adição de outras técnicas de parametrização, bem como análises de localização de deformações que não são formuladas a partir da singularidade do tensor acústico.

Este trabalho foi implementado no sistema computacional INSANE, que é um projeto de *software* livre, implementado em linguagem Java segundo o paradigma da Programação Orientada a Objetos e desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais.

As modificações realizadas no INSANE serão descritas neste capítulo através de diagramas de classe, conforme a linguagem padronizada UML (*Unified Modeling Language*). A Figura 5.1 ilustra a simbologia adotada. Classes que não foram modificadas serão representadas pela cor branca, classes modificadas serão representadas em amarelo e novas classes em verde.

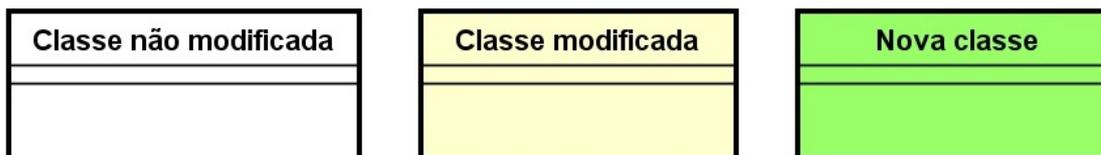


Figura 5.1: Simbologia adotada na representação UML.

5.1 Técnica Numérica da Análise de Localização

5.1.1 Expressão Analítica para o Determinante do Tensor Acústico

A Equação 3.13 define o tensor acústico, cuja singularidade é utilizada como critério clássico para ocorrência de uma descontinuidade fraca. Para tratá-la numericamente, é necessário obter a expressão analítica para cada um dos componentes deste tensor. Desta maneira, deve-se expandir a Equação 3.13 quanto aos seus índices mudos:

$$\begin{aligned}
 Q_{jk} = & n_1 D_{1jk1} n_1 + n_1 D_{1jk2} n_2 + n_1 D_{1jk3} n_3 + n_2 D_{2jk1} n_1 + n_2 D_{2jk2} n_2 + n_2 D_{2jk3} n_3 \\
 & + n_3 D_{3jk1} n_1 + n_3 D_{3jk2} n_2 + n_3 D_{3jk3} n_3
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Considerando agora os índices livres da Equação 5.1, cada componente do tensor acústico pode ser explicitado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= n_1 D_{1111} n_1 + n_1 D_{1112} n_2 + n_1 D_{1113} n_3 + n_2 D_{2111} n_1 + n_2 D_{2112} n_2 + n_2 D_{2113} n_3 \\
&\quad + n_3 D_{3111} n_1 + n_3 D_{3112} n_2 + n_3 D_{3113} n_3 \\
Q_{12} &= n_1 D_{1121} n_1 + n_1 D_{1122} n_2 + n_1 D_{1123} n_3 + n_2 D_{2121} n_1 + n_2 D_{2122} n_2 + n_2 D_{2123} n_3 \\
&\quad + n_3 D_{3121} n_1 + n_3 D_{3122} n_2 + n_3 D_{3123} n_3 \\
Q_{13} &= n_1 D_{1131} n_1 + n_1 D_{1132} n_2 + n_1 D_{1133} n_3 + n_2 D_{2131} n_1 + n_2 D_{2132} n_2 + n_2 D_{2133} n_3 \\
&\quad + n_3 D_{3131} n_1 + n_3 D_{3132} n_2 + n_3 D_{3133} n_3 \\
Q_{21} &= n_1 D_{1211} n_1 + n_1 D_{1212} n_2 + n_1 D_{1213} n_3 + n_2 D_{2211} n_1 + n_2 D_{2212} n_2 + n_2 D_{2213} n_3 \\
&\quad + n_3 D_{3211} n_1 + n_3 D_{3212} n_2 + n_3 D_{3213} n_3 \\
Q_{22} &= n_1 D_{1221} n_1 + n_1 D_{1222} n_2 + n_1 D_{1223} n_3 + n_2 D_{2221} n_1 + n_2 D_{2222} n_2 + n_2 D_{2223} n_3 \\
&\quad + n_3 D_{3221} n_1 + n_3 D_{3222} n_2 + n_3 D_{3223} n_3 \\
Q_{23} &= n_1 D_{1231} n_1 + n_1 D_{1232} n_2 + n_1 D_{1233} n_3 + n_2 D_{2231} n_1 + n_2 D_{2232} n_2 + n_2 D_{2233} n_3 \\
&\quad + n_3 D_{3231} n_1 + n_3 D_{3232} n_2 + n_3 D_{3233} n_3 \\
Q_{31} &= n_1 D_{1311} n_1 + n_1 D_{1312} n_2 + n_1 D_{1313} n_3 + n_2 D_{2311} n_1 + n_2 D_{2312} n_2 + n_2 D_{2313} n_3 \\
&\quad + n_3 D_{3311} n_1 + n_3 D_{3312} n_2 + n_3 D_{3313} n_3 \\
Q_{32} &= n_1 D_{1321} n_1 + n_1 D_{1322} n_2 + n_1 D_{1323} n_3 + n_2 D_{2321} n_1 + n_2 D_{2322} n_2 + n_2 D_{2323} n_3 \\
&\quad + n_3 D_{3321} n_1 + n_3 D_{3322} n_2 + n_3 D_{3323} n_3 \\
Q_{33} &= n_1 D_{1331} n_1 + n_1 D_{1332} n_2 + n_1 D_{1333} n_3 + n_2 D_{2331} n_1 + n_2 D_{2332} n_2 + n_2 D_{2333} n_3 \\
&\quad + n_3 D_{3331} n_1 + n_3 D_{3332} n_2 + n_3 D_{3333} n_3
\end{aligned} \tag{5.2}$$

O tensor acústico é um tensor de segunda ordem e pode ser representado por uma matriz da seguinte maneira:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

O determinante do tensor acústico, por sua vez, é explicitado pela seguinte relação:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{Q}) = & Q_{11}Q_{22}Q_{33} + Q_{12}Q_{23}Q_{31} + Q_{13}Q_{21}Q_{32} \\ & - (Q_{13}Q_{22}Q_{31} + Q_{11}Q_{23}Q_{32} + Q_{12}Q_{21}Q_{33}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

De acordo com Mota et al. (2016), a análise da singularidade do tensor acústico, indicada pela Equação 3.14, pode ser parametrizada em função de um conjunto de parâmetros q . Estes parâmetros dependem da face do cubo na qual a verificação está sendo realizada. De maneira geral, a otimização pode ser definida como:

$$\frac{\partial f(q)}{\partial q} = 0 \quad (5.5)$$

em que,

$f := \det(\mathbf{Q})$ é definida como função objetivo da otimização.

Para a face do cubo na qual a coordenada z é constante, tem-se, a partir da Equação 4.44:

$$\mathbf{v}(x, y) := \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Na face considerada, para a parametrização cartesiana, os componentes do vetor normal à superfície de descontinuidade são: $n_1 = x$, $n_2 = y$ e $n_3 = 1$. Portanto, o conjunto de parâmetros q pode ser especificado para as duas variáveis x e y . Para obter a formulação explícita da função f , deve-se substituir a relação supracitada

para n_1 , n_2 e n_3 na Equação 5.2:

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= x^2 D_{1111} + xy D_{1112} + x D_{1113} + xy D_{2111} + y^2 D_{2112} + y D_{2113} + x D_{3111} + y D_{3112} + D_{3113} \\
Q_{12} &= x^2 D_{1121} + xy D_{1122} + x D_{1123} + xy D_{2121} + y^2 D_{2122} + y D_{2123} + x D_{3121} + y D_{3122} + D_{3123} \\
Q_{13} &= x^2 D_{1131} + xy D_{1132} + x D_{1133} + xy D_{2131} + y^2 D_{2132} + y D_{2133} + x D_{3131} + y D_{3132} + D_{3133} \\
Q_{21} &= x^2 D_{1211} + xy D_{1212} + x D_{1213} + xy D_{2211} + y^2 D_{2212} + y D_{2213} + x D_{3211} + y D_{3212} + D_{3213} \\
Q_{22} &= x^2 D_{1221} + xy D_{1222} + x D_{1223} + xy D_{2221} + y^2 D_{2222} + y D_{2223} + x D_{3221} + y D_{3222} + D_{3223} \\
Q_{23} &= x^2 D_{1231} + xy D_{1232} + x D_{1233} + xy D_{2231} + y^2 D_{2232} + y D_{2233} + x D_{3231} + y D_{3232} + D_{3233} \\
Q_{31} &= x^2 D_{1311} + xy D_{1312} + x D_{1313} + xy D_{2311} + y^2 D_{2312} + y D_{2313} + x D_{3311} + y D_{3312} + D_{3313} \\
Q_{32} &= x^2 D_{1321} + xy D_{1322} + x D_{1323} + xy D_{2321} + y^2 D_{2322} + y D_{2323} + x D_{3321} + y D_{3322} + D_{3323} \\
Q_{33} &= x^2 D_{1331} + xy D_{1332} + x D_{1333} + xy D_{2331} + y^2 D_{2332} + y D_{2333} + x D_{3331} + y D_{3332} + D_{3333}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Com cada termo do tensor acústico definido pela Equação 5.6, deve-se realizar o cálculo do determinante do tensor acústico, como explicitado na Equação 5.4. Na face do cubo com coordenada z constante, a função f pode ser representada no seguinte formato:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 x^2 + e_1 xy + f_1 y^2 + g_1 x^3 + h_1 x^2 y + l_1 xy^2 + m_1 y^3 + n_1 x^4 \\
&\quad + o_1 x^3 y + p_1 x^2 y^2 + q_1 xy^3 + r_1 y^4 + s_1 x^5 + t_1 x^4 y + u_1 x^3 y^2 + v_1 x^2 y^3 + w_1 xy^4 \\
&\quad + \alpha_1 y^5 + \beta_1 x^6 + \gamma_1 x^5 y + \delta_1 x^4 y^2 + \varepsilon_1 x^3 y^3 + \zeta_1 x^2 y^4 + \eta_1 xy^5 + \theta_1 y^6
\end{aligned} \tag{5.7}$$

em que,

$a_1, b_1, c_1, \dots, \eta_1$ e θ_1 são os coeficientes da expressão polinomial obtidos a partir dos componentes do tensor constitutivo tangente.

A otimização, representada de maneira geral pela Equação 5.5, resulta em um sistema não linear de equações para a face na qual a coordenada z é constante:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

A solução deste tipo de sistema de equações será discutida na Seção 5.1.2. Uma vez solucionada, tem-se o par (x_{sol}, y_{sol}) associado a um ponto ótimo da função objetivo f . A análise de localização consiste em avaliar esta função para o par (x_{sol}, y_{sol}) obtido. A singularidade do tensor de localização é detectada quando $f(x_{sol}, y_{sol}) \leq 0$. Para $f(x_{sol}, y_{sol}) > 0$, não há singularidade e, conseqüentemente, não ocorre o fenômeno de localização de deformações.

Como discutido na Seção 4.3, a técnica proposta por Mota et al. (2016) requer a verificação de três faces do cubo que define o espaço parametrizado. O procedimento para as demais faces é análogo ao exposto anteriormente.

Para a face com a coordenada x constante, tem-se a partir da Equação 4.44:

$$\mathbf{v}(y, z) := \begin{Bmatrix} 1 \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

Considerando $n_1 = 1$, $n_2 = y$ e $n_3 = z$ na Equação 5.2:

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= D_{1111} + yD_{1112} + zD_{1113} + yD_{2111} + y^2D_{2112} + yzD_{2113} + zD_{3111} + yzD_{3112} + z^2D_{3113} \\
Q_{12} &= D_{1121} + yD_{1122} + zD_{1123} + yD_{2121} + y^2D_{2122} + yzD_{2123} + zD_{3121} + yzD_{3122} + z^2D_{3123} \\
Q_{13} &= D_{1131} + yD_{1132} + zD_{1133} + yD_{2131} + y^2D_{2132} + yzD_{2133} + zD_{3131} + yzD_{3132} + z^2D_{3133} \\
Q_{21} &= D_{1211} + yD_{1212} + zD_{1213} + yD_{2211} + y^2D_{2212} + yzD_{2213} + zD_{3211} + yzD_{3212} + z^2D_{3213} \\
Q_{22} &= D_{1221} + yD_{1222} + zD_{1223} + yD_{2221} + y^2D_{2222} + yzD_{2223} + zD_{3221} + yzD_{3222} + z^2D_{3223} \\
Q_{23} &= D_{1231} + yD_{1232} + zD_{1233} + yD_{2231} + y^2D_{2232} + yzD_{2233} + zD_{3231} + yzD_{3232} + z^2D_{3233} \\
Q_{31} &= D_{1311} + yD_{1312} + zD_{1313} + yD_{2311} + y^2D_{2312} + yzD_{2313} + zD_{3311} + yzD_{3312} + z^2D_{3313} \\
Q_{32} &= D_{1321} + yD_{1322} + zD_{1323} + yD_{2321} + y^2D_{2322} + yzD_{2323} + zD_{3321} + yzD_{3322} + z^2D_{3323} \\
Q_{33} &= D_{1331} + yD_{1332} + zD_{1333} + yD_{2331} + y^2D_{2332} + yzD_{2333} + zD_{3331} + yzD_{3332} + z^2D_{3333}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

A função f , portanto, pode ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
f(y, z) &= a_2 + b_2y + c_2z + d_2y^2 + e_2yz + f_2z^2 + g_2y^3 + h_2y^2z + l_2yz^2 + m_2z^3 + n_2y^4 \\
&\quad + o_2y^3z + p_2y^2z^2 + q_2yz^3 + r_2z^4 + s_2y^5 + t_2y^4z + u_2y^3z^2 + v_2y^2z^3 + w_2yz^4 \\
&\quad + \alpha_2z^5 + \beta_2y^6 + \gamma_2y^5z + \delta_2y^4z^2 + \varepsilon_2y^3z^3 + \zeta_2y^2z^4 + \eta_2yz^5 + \theta_2z^6
\end{aligned} \tag{5.10}$$

em que,

$a_2, b_2, c_2, \dots, \eta_2$ e θ_2 são os coeficientes da expressão polinomial obtidos a partir dos componentes do tensor constitutivo tangente.

A otimização resulta em um sistema não linear de equações quanto às variáveis y e z :

$$\begin{cases} \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f(y, z)}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

Por fim, para a face com a coordenada y constante, tem-se, a partir da Equação 4.44:

$$\mathbf{v}(x, z) := \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

Considerando $n_1 = x$, $n_2 = 1$ e $n_3 = z$ na Equação 5.2:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= x^2 D_{1111} + x D_{1112} + xz D_{1113} + x D_{2111} + D_{2112} + z D_{2113} + xz D_{3111} + z D_{3112} + z^2 D_{3113} \\ Q_{12} &= x^2 D_{1121} + x D_{1122} + xz D_{1123} + x D_{2121} + D_{2122} + z D_{2123} + xz D_{3121} + z D_{3122} + z^2 D_{3123} \\ Q_{13} &= x^2 D_{1131} + x D_{1132} + xz D_{1133} + x D_{2131} + D_{2132} + z D_{2133} + xz D_{3131} + z D_{3132} + z^2 D_{3133} \\ Q_{21} &= x^2 D_{1211} + x D_{1212} + xz D_{1213} + x D_{2211} + D_{2212} + z D_{2213} + xz D_{3211} + z D_{3212} + z^2 D_{3213} \\ Q_{22} &= x^2 D_{1221} + x D_{1222} + xz D_{1223} + x D_{2221} + D_{2222} + z D_{2223} + xz D_{3221} + z D_{3222} + z^2 D_{3223} \\ Q_{23} &= x^2 D_{1231} + x D_{1232} + xz D_{1233} + x D_{2231} + D_{2232} + z D_{2233} + xz D_{3231} + z D_{3232} + z^2 D_{3233} \\ Q_{31} &= x^2 D_{1311} + x D_{1312} + xz D_{1313} + x D_{2311} + D_{2312} + z D_{2313} + xz D_{3311} + z D_{3312} + z^2 D_{3313} \\ Q_{32} &= x^2 D_{1321} + x D_{1322} + xz D_{1323} + x D_{2321} + D_{2322} + z D_{2323} + xz D_{3321} + z D_{3322} + z^2 D_{3323} \\ Q_{33} &= x^2 D_{1331} + x D_{1332} + xz D_{1333} + x D_{2331} + D_{2332} + z D_{2333} + xz D_{3331} + z D_{3332} + z^2 D_{3333} \end{aligned} \tag{5.12}$$

A função f , portanto, pode ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(x, z) &= a_3 + b_3 x + c_3 z + d_3 x^2 + e_3 xz + f_3 z^2 + g_3 x^3 + h_3 x^2 z + l_3 xz^2 + m_3 z^3 + n_3 x^4 \\ &\quad + o_3 x^3 z + p_3 x^2 z^2 + q_3 xz^3 + r_3 z^4 + s_3 x^5 + t_3 x^4 z + u_3 x^3 z^2 + v_3 x^2 z^3 + w_3 xz^4 \\ &\quad + \alpha_3 z^5 + \beta_3 x^6 + \gamma_3 x^5 z + \delta_3 x^4 z^2 + \varepsilon_3 x^3 z^3 + \zeta_3 x^2 z^4 + \eta_3 xz^5 + \theta_3 z^6 \end{aligned} \tag{5.13}$$

em que,

$a_3, b_3, c_3, \dots, \eta_3$ e θ_3 são os coeficientes da expressão polinomial obtidos a partir dos componentes do tensor constitutivo tangente.

A otimização resulta em um sistema não linear de equações quanto às variáveis x e z :

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

5.1.2 Solução do Sistema Não Linear de Equações

Como exposto na Seção 4.3, o método de Newton é comumente utilizado na solução numérica de sistemas não lineares de equações. Ele consiste em expandir uma função f através de sua série de Taylor até o termo de 2^a ordem, obtendo uma aproximação quadrática. Matematicamente, tem-se:

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_k) + [f(\mathbf{x}_k),_i \mathbf{e}_i]^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^T [f(\mathbf{x}_k),_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j]^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = q(\mathbf{x}) \quad (5.15)$$

em que,

$$f(\mathbf{x}_k),_i \mathbf{e}_i = \nabla f(\mathbf{x}_k) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T \text{ é o gradiente da função } f;$$

$$f(\mathbf{x}_k),_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \nabla^2 f(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \text{ é a matriz hessiana simétrica}$$

da função f .

O próximo ponto do processo iterativo, \mathbf{x}_{k+1} , é determinado pelo mínimo de $q(\mathbf{x})$. Para realizar tal análise, é necessário determinar o gradiente de $q(\mathbf{x})$:

$$q(\mathbf{x})_{,i}\mathbf{e}_i = f(\mathbf{x}_k)_{,i}\mathbf{e}_i + f(\mathbf{x}_k)_{,ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \quad (5.16)$$

Um ponto mínimo da aproximação $q(\mathbf{x})$ é caracterizado por $q(\mathbf{x})_{,i}\mathbf{e}_i = 0$. Desta forma, obtém-se, a partir da Equação 5.16:

$$f(\mathbf{x}_k)_{,ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = -f(\mathbf{x}_k)_{,i}\mathbf{e}_i \quad (5.17)$$

Neste instante, adota-se a hipótese que a matriz hessiana de f é invertível. Multiplicando ambos os lados da Equação 5.17 por $[f(\mathbf{x}_k)_{,ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]^{-1}$, tem-se:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_k = -[f(\mathbf{x}_k)_{,ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]^{-1}f(\mathbf{x}_k)_{,i}\mathbf{e}_i \quad (5.18)$$

Com um rearranjo dos termos da Equação 5.18, obtém-se a atualização iterativa realizada pelo método de Newton:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - [f(\mathbf{x}_k)_{,ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]^{-1}f(\mathbf{x}_k)_{,i}\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_k - [\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)]^{-1}\nabla f(\mathbf{x}_k) \quad (5.19)$$

Neste trabalho, o critério de convergência adotado para o método de Newton foi a norma do vetor gradiente de f , ao final de uma iteração, ser menor que uma tolerância pré-definida. Matematicamente, esta relação pode ser representada por:

$$\|f(\mathbf{x}_k)_{,i}\mathbf{e}_i\| = \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| < \text{tolerância} \quad (5.20)$$

Como discutido na Seção 4.3, o método de Newton requer um ponto de partida ou palpite inicial. Considerando o melhor desempenho numérico associado à parametrização cartesiana, adotou-se um ponto de partida aleatório no espaço parametrizado neste trabalho.

Além disso, as derivadas de primeira e segunda ordem da função objetivo são requeridas para montagem do vetor gradiente e da matriz hessiana, respectivamente. A representação da função f descrita pelas Equações 5.7 (face com z constante), 5.10 (face com x constante) e 5.13 (face com y constante) permite a obtenção das suas derivadas de maneira simples e direta.

Para a face com z constante, por exemplo, as derivadas de primeira ordem são representadas pelas Equações 5.21 e 5.22:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = & b_1 + 2d_1x + e_1y + 3g_1x^2 + 2h_1xy + l_1y^2 + 4n_1x^3 + 3o_1x^2y + 2p_1xy^2 + q_1y^3 \\ & + 5s_1x^4 + 4t_1x^3y + 3u_1x^2y^2 + 2v_1xy^3 + w_1y^4 + 6\beta_1x^5 + 5\gamma_1x^4y + 4\delta_1x^3y^2 \\ & + 3\varepsilon_1x^2y^3 + 2\zeta_1xy^4 + \eta_1y^5 \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} = & c_1 + e_1x + 2f_1y + h_1x^2 + 2l_1xy + 3m_1y^2 + o_1x^3 + 2p_1x^2y + 3q_1xy^2 + 4r_1y^3 \\ & + t_1x^4 + 2u_1x^3y + 3v_1x^2y^2 + 4w_1xy^3 + 5\alpha_1y^4 + \gamma_1x^5 + 2\delta_1x^4y + 3\varepsilon_1x^3y^2 \\ & + 4\zeta_1x^2y^3 + 5\eta_1xy^4 + 6\theta_1y^5 \end{aligned} \quad (5.22)$$

5.2 Implementação Computacional

5.2.1 Formulação Unificada para Modelos Constitutivos

No sistema INSANE, o pacote `MaterialMedia` contém classes e interfaces utilizadas na representação do comportamento dos materiais. Dentre elas, destacam-se a classe abstrata `Material` e suas herdeiras, que possuem atributos e métodos necessários para descrição das propriedades de diferentes materiais.

A estrutura unificada para modelos constitutivos de Penna (2011), descrita na Seção 4.1, encontra-se inserida neste pacote. A Figura 5.2 representa, de maneira

simplificada, a herança definida por Penna (2011). Ela consiste na superclasse `UnifiedConstitutiveModel` e suas herdeiras `UCMSingleLoadingFunction` e `UCMMultipleLoadingFunction` que representam, respectivamente, formulações com uma e múltiplas funções de carregamento.

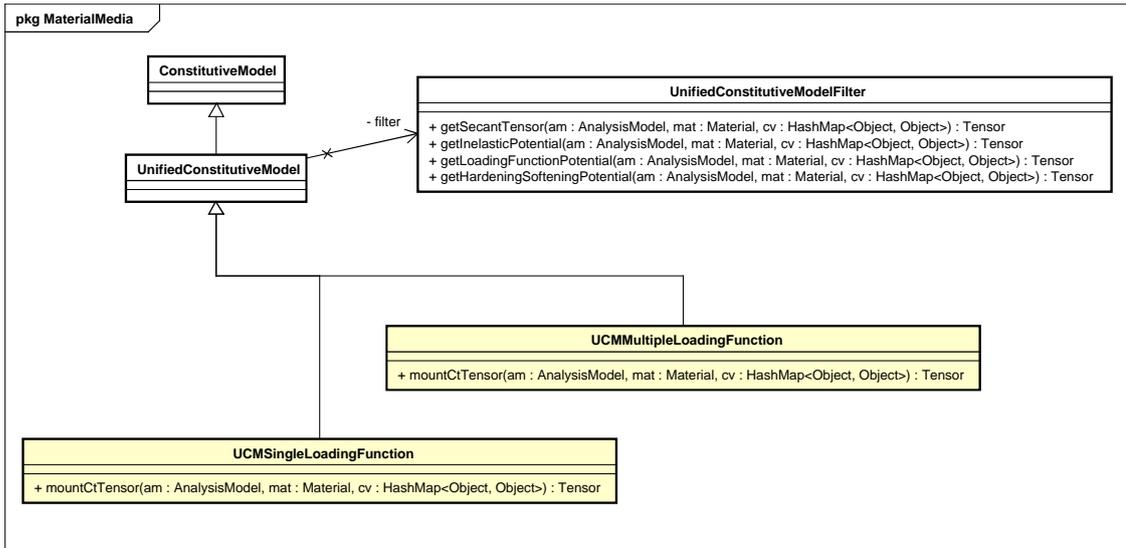


Figura 5.2: Intervenções realizadas na formulação unificada de modelos constitutivos.

Conforme Penna (2011), o modelo constitutivo realiza todas operações requeridas no processo de solução do modelo, delegando as especificidades ao seu respectivo *Filter*. Na Figura 5.2, nota-se que a classe `UnifiedConstitutiveModel` possui uma instância de `UnifiedConstitutiveModelFilter`, a superclasse das classes que definem os *Filters*.

Ainda na Figura 5.2, foram apresentados métodos da superclasse `UnifiedConstitutiveModelFilter`. Cada método é responsável por um dos tensores necessários para o cálculo do tensor constitutivo tangente através da Equação 4.16, abaixo reescrita:

$$D_{ijkl} = E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{m}_{mij} \bar{n}_{nkl} \quad (5.23)$$

O método *getSecantTensor(...)* fornece o tensor constitutivo secante (E_{ijkl}). Os métodos *getInelasticPotential(...)* e *getLoadingFunctionPotential(...)* retornam, respectivamente, o tensor que indica as direções de degradação (\bar{n}_{mij}) e o que indica as direções das funções de carregamento (\bar{n}_{nkl}). Por fim, o método *getHardeningSofteningPotential(...)* retorna o tensor que indica os módulos pós-crítico do material (\bar{H}_{nm}).

As classes `UCMSingleLoadingFunction` e `UCMMultipleLoadingFunction` foram modificadas com a adição do método indicado na Figura 5.2, *mountCtTensor(...)*, que retorna o tensor constitutivo tangente no ponto material. O aludido método apenas realiza a operação representada pela Equação 5.23 a partir dos tensores retornados, de maneira particular para cada modelo constitutivo, por seu respectivo *Filter*.

A partir dos procedimentos descritos anteriormente, obtém-se o tensor constitutivo tangente (D_{ijkl}), imprescindível para a análise de localização de deformações baseada na singularidade do tensor acústico.

5.2.2 Classe Degeneration

De acordo com Penna (2011), a classe `Degeneration` representa a degeneração na geometria do elemento. Elas armazenam, para um ponto material qualquer (na maioria das vezes, os pontos de integração do modelo), os dados de grandezas internas dos modelos constitutivos, como tensões, deformações e variáveis de dano. A Figura 5.3 representa, de maneira simplificada, a estrutura de dados associados à superclasse `Degeneration` e suas herdeiras.

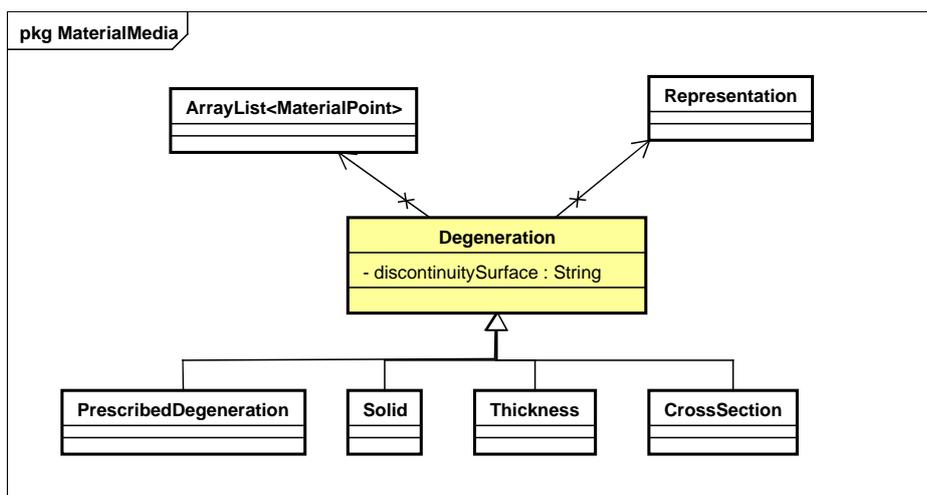


Figura 5.3: Intervenções realizadas na classe *Degeneration*.

A superclasse *Degeneration* foi modificada com a adição de um atributo *String*, denotado por *discontinuitySurface*, como indicado pela Figura 5.3. Este atributo atua como chave identificadora (*key*) para um mapa de variáveis (*HashMap*) do objeto da classe *Degeneration*. O vetor normal à superfície de descontinuidade, obtido numericamente após a análise de localização, será armazenado na posição associada à esta chave identificadora.

5.2.3 Classe Model

Conforma Penna (2011), a classe *Model* possui todos os dados relativos ao modelo discreto a ser analisado, como lista de nós e elementos. A Figura 5.4 representa, de maneira simplificada, a estrutura de dados associados à superclasse *Model* e suas herdeiras.

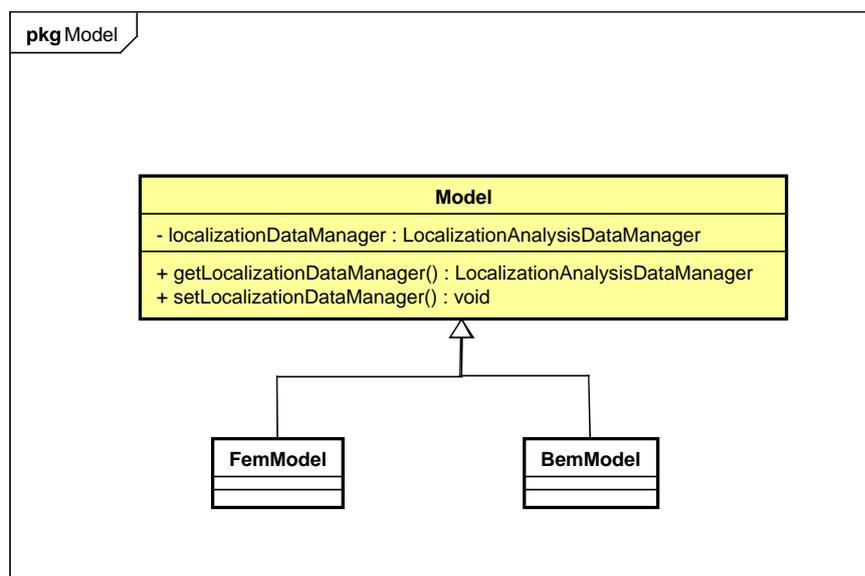


Figura 5.4: Intervenções realizadas na classe Model.

A superclasse Model foi modificada com a adição de um atributo denominado LocalizationAnalysisDataManager, cuja função é gerenciar a análise de localização, encapsulando a varredura das listas de elementos e degenerações (pontos de integração) e as chamadas dos demais métodos necessários durante a técnica.

Como ilustrado na Figura 5.5, a classe LocalizationAnalysisDataManager possui um método construtor, que recebe um objeto da classe Model como parâmetro. Além disso, a classe possui apenas um outro método, denotado por *compute(...)*, que é responsável por disparar o processo de análise de localização.

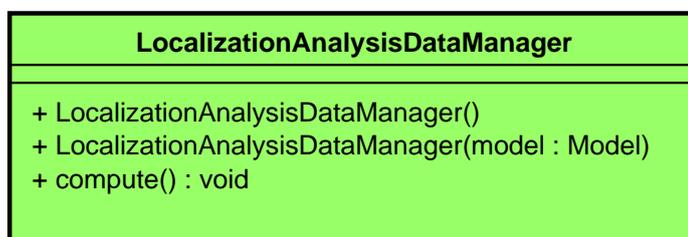


Figura 5.5: Classe LocalizationAnalysisDataManager.

5.2.4 Subpacote LocalizationAnalysis

Considerando sua relação direta com modelos constitutivos e propriedades materiais, a análise de localização descrita neste trabalho encontra-se no pacote `MaterialMedia`. A Figura 5.6 traz algumas das novas classes implementadas no sistema INSANE.

Apesar de baseada na singularidade do tensor acústico, a estrutura de classes proposta foi desenvolvida para possibilitar a implementação de outras formulações e bases teóricas para análise de localização. Para realizar tal tarefa, basta implementá-las no mesmo nível hierárquico da superclasse `AcousticTensorBased`. A implementação de outras técnicas de parametrização, como a esférica, também pode se realizada no mesmo nível hierárquico da classe `CartesianParametrization`

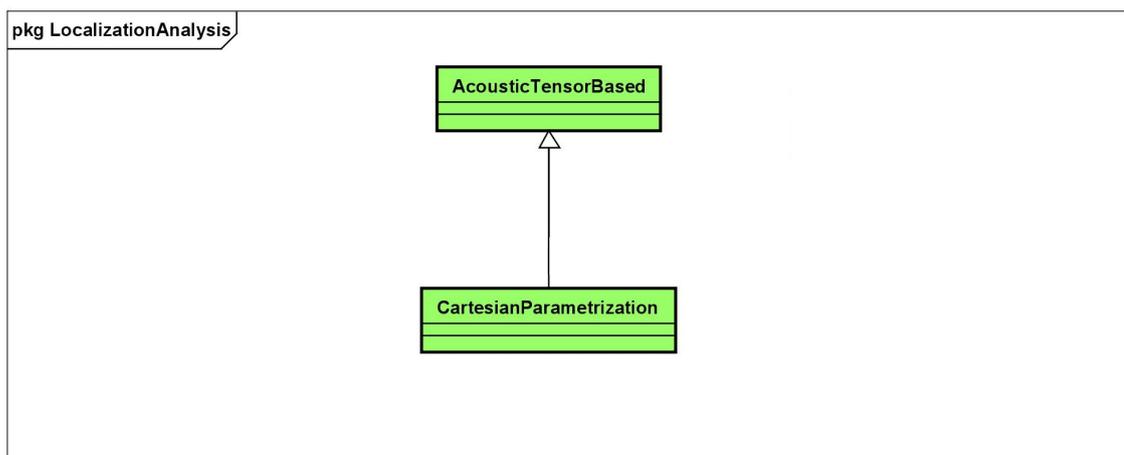


Figura 5.6: Novas classes implementadas para a análise de localização.

A classe `CartesianParametrization`, fundamental para a análise de localização desenvolvida, encontra-se descrita em maiores detalhes na Figura 5.7. Ela possui um atributo do tipo `IVector`, denotado por *surfaceDirection*, que armazena o vetor normal à superfície de descontinuidade, obtido numericamente durante a análise de localização.

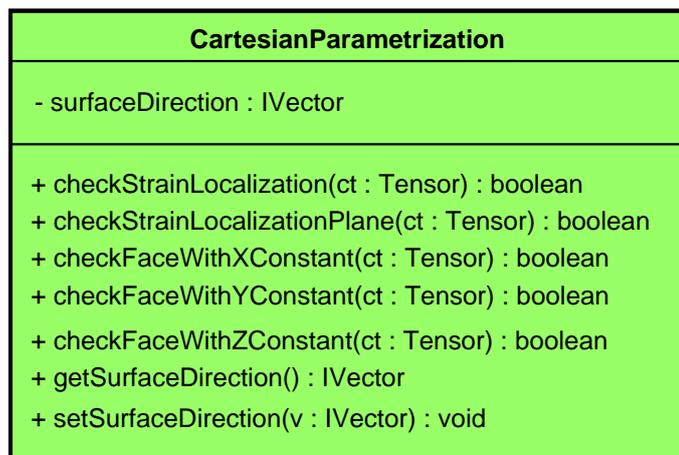


Figura 5.7: Classe CartesianParametrization.

Os métodos *checkFaceWithXConstant(...)*, *checkFaceWithYConstant(...)* e *checkFaceWithZConstant(...)* são responsáveis pela verificação do fenômeno de localização nas faces com coordenada x , y e z constantes, respectivamente. Eles recebem como parâmetro o tensor constitutivo tangente (objeto da classe **Tensor**) e retornam uma variável booleana, que indica a ocorrência ou não da localização. Ademais, quando o fenômeno é detectado na face considerada, estes métodos armazenam a direção obtida, denotada na Seção 4.3 por \mathbf{v} , na variável *auxDirection*.

O método *checkStrainLocalization(...)* encapsula todo o processo numérico para análise de localização. Ele é responsável pela chamada dos três métodos supracitados e por definir a direção unitária da superfície de descontinuidade, denotada previamente por \mathbf{n} . Como indicado na Equação 4.45, o vetor unitário é obtido através da normalização do vetor \mathbf{v} . Ele é armazenado no outro atributo da classe, *surfaceDirection*.

Por fim, o método *checkStrainLocalizationPlane(...)* pode ser interpretado como uma especificação da análise de localização para modelos planos. Ele atua de maneira análoga ao *checkStrainLocalization(...)*, abrangendo todo o processo descrito

anteriormente. Sua distinção consiste em considerar apenas direções normais à superfície de descontinuidade que se encontram no plano de análise, visando melhor desempenho.

Conforme exposto anteriormente, a análise de localização requer solução de um sistema não linear de equações de maneira recorrente. No contexto deste trabalho, considerando as três faces verificadas através da parametrização cartesiana, a solução deste problema foi delegada ao conjunto de classes representado na Figura 5.8.

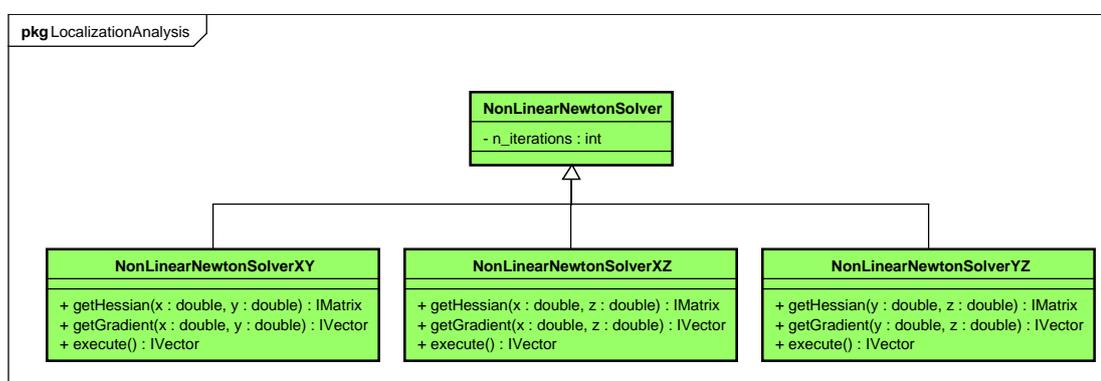


Figura 5.8: Novas classes implementadas para solução da otimização não linear.

Os métodos representados na Figura 5.8 constituem o método de Newton, como descrito na Seção 5.1.2. O método *getHessian(...)* retorna a matriz hessiana da função a ser otimizada, bem como o método *getGradient(...)* retorna o vetor da gradiente da mesma função.

O comando *execute(...)* é o responsável pelo início do processo de solução iterativo. Usufruindo da menor sensibilidade da parametrização cartesiana ao palpite inicial do processo de solução, utilizou-se um ponto de partida aleatório dentro do espaço parametrizado.

A análise de localização de deformações implementada e sua interação com os demais recursos do sistema INSANE são detalhadas no diagrama de atividades das Figuras 5.9 e 5.10.

O procedimento é realizado ao final de um passo de carga da análise incremental,

ou seja, com o modelo estrutural equilibrado. Para garantir tal condição, a análise de localização é iniciada durante a execução do método *update(...)* da classe `Model`, desde que assim definido pelo usuário.

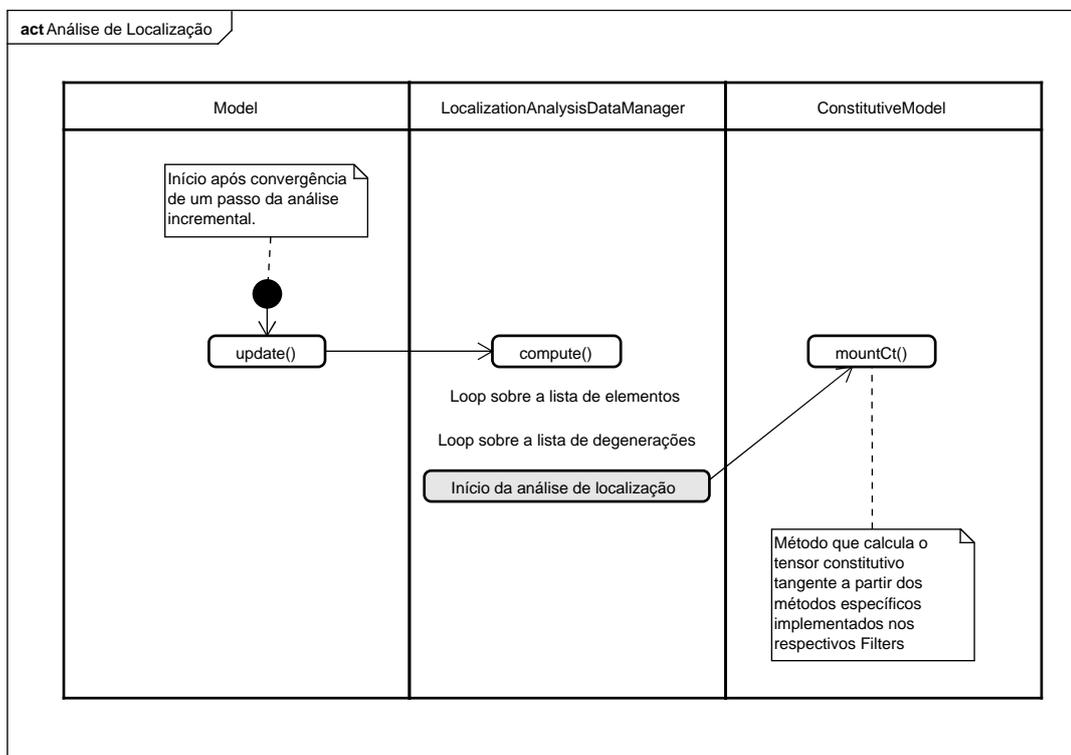


Figura 5.9: Diagrama de atividades para análise de localização - Parte 1.

Com o modelo equilibrado, inicia-se com um *loop* sobre a lista de elementos (objetos da superclasse `Element`). Para cada elemento, faz-se uma varredura em sua lista de degenerações (objetos da superclasse `Degeneration` que representam os pontos de integração). Cada degeneração possui uma instância da classe `ConstitutiveModel` e é capaz de obter, através da formulação unificada de Penna (2011), o tensor constitutivo tangente para seu estado corrente.

Recebendo o tensor constitutivo tangente como parâmetro, a análise de localização é iniciada com o método *checkStrainLocalization(...)*, como mostra a Figura 5.10. Este método é chamado a partir de um objeto da classe `CartesianParameterization`. Através do método *checkFaceWithZConstant(...)*, a face do cubo que

parametriza o espaço que possui a coordenada z constante é verificada.

O método *checkFaceWithZConstant(...)* procede da seguinte maneira: 81 variáveis do tipo *double* são inicializadas para armazenar cada um dos componentes do tensor constitutivo. Utilizando-as, os coeficientes da expressão polinomial ($a_1, b_1, c_1, \dots, ah_1$ e al_1 , conforme Equação 5.7), necessários para se definir a função f que expressa o determinante do tensor acústico, são calculados e armazenados.

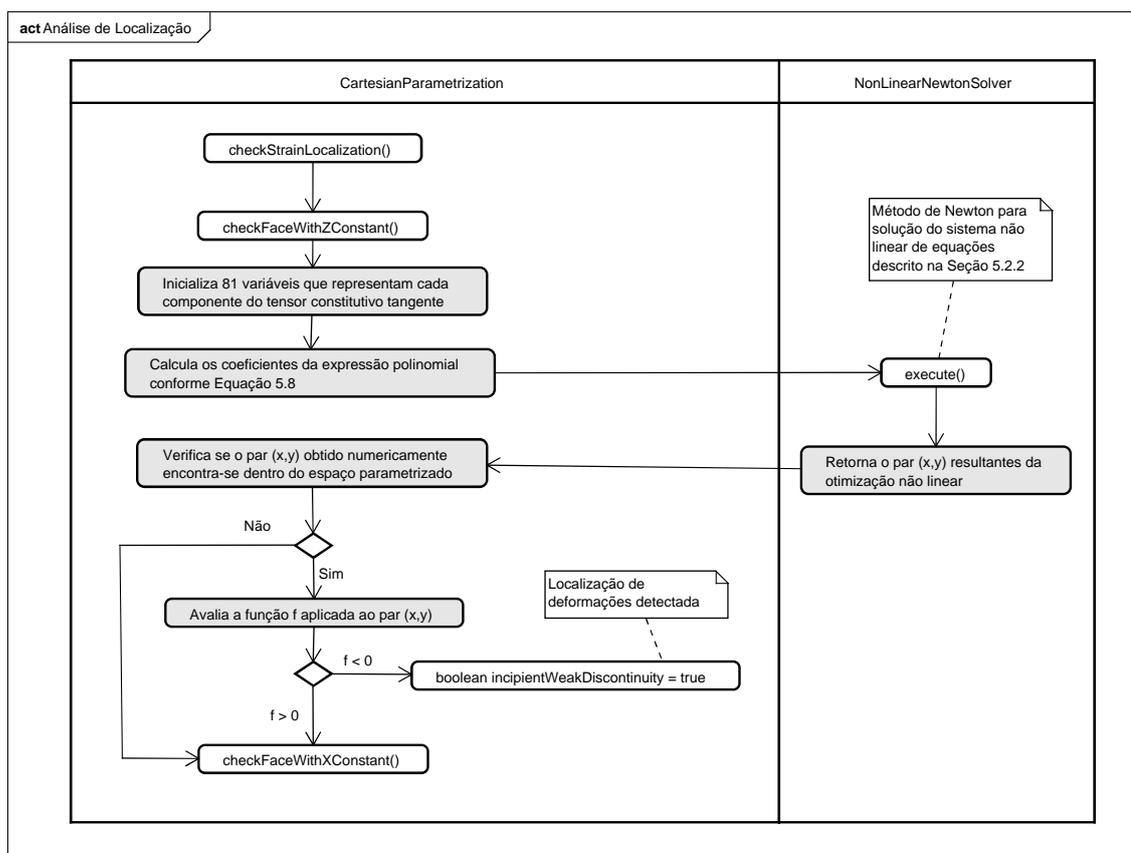


Figura 5.10: Diagrama de atividades para análise de localização - Parte 2.

Os coeficientes da expressão polinomial são fornecidos à classe responsável pela solução do sistema não linear de equações na face em análise (classe *NonLinearNewtonSolverXY*). Utilizando o método de Newton, o método *execute(...)* retorna o par x_{sol} e y_{sol} resultante da otimização da função f .

A primeira ação consiste em verificar se o par x_{sol} e y_{sol} é uma solução consistente com a técnica de parametrização cartesiana. O espaço parametrizado para a face em

questão é definido por $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$. Portanto, a solução do processo de otimização deve estar restrita a este domínio.

Mesmo com um palpite inicial interno ao domínio parametrizado, o processo iterativo pode convergir para uma solução localizada fora deste espaço. Neste caso, a análise de localização desconsidera a solução obtida e prossegue para a verificação da próxima face do cubo que parametriza o espaço.

Quando a solução respeita o espaço parametrizado, avalia-se a função f para os valores de x_{sol} e y_{sol} . Se $f(x_{sol}, y_{sol}) \leq 0$, detecta-se a localização de deformações e a variável booleana *incipientWeakDiscontinuity*, que será retornada ao final do método, é definida como *true*. Se $f(x_{sol}, y_{sol}) > 0$, a análise de localização prossegue para a verificação da próxima face com o método *checkFaceWithYConstant(...)*.

A sequência de passos aqui descrita é praticamente idêntica à adotada nos métodos que verificam as demais faces do cubo parametrizado, *checkFaceWithXConstant(...)* e *checkFaceWithYConstant(...)*. A única distinção entre eles consiste no cálculo realizado para determinar os coeficientes da expressão polinomial que define f .

De maneira conceitual, a Figura 5.11 apresenta um fluxograma com as atividades que compõem a análise de localização no escopo de um elemento.

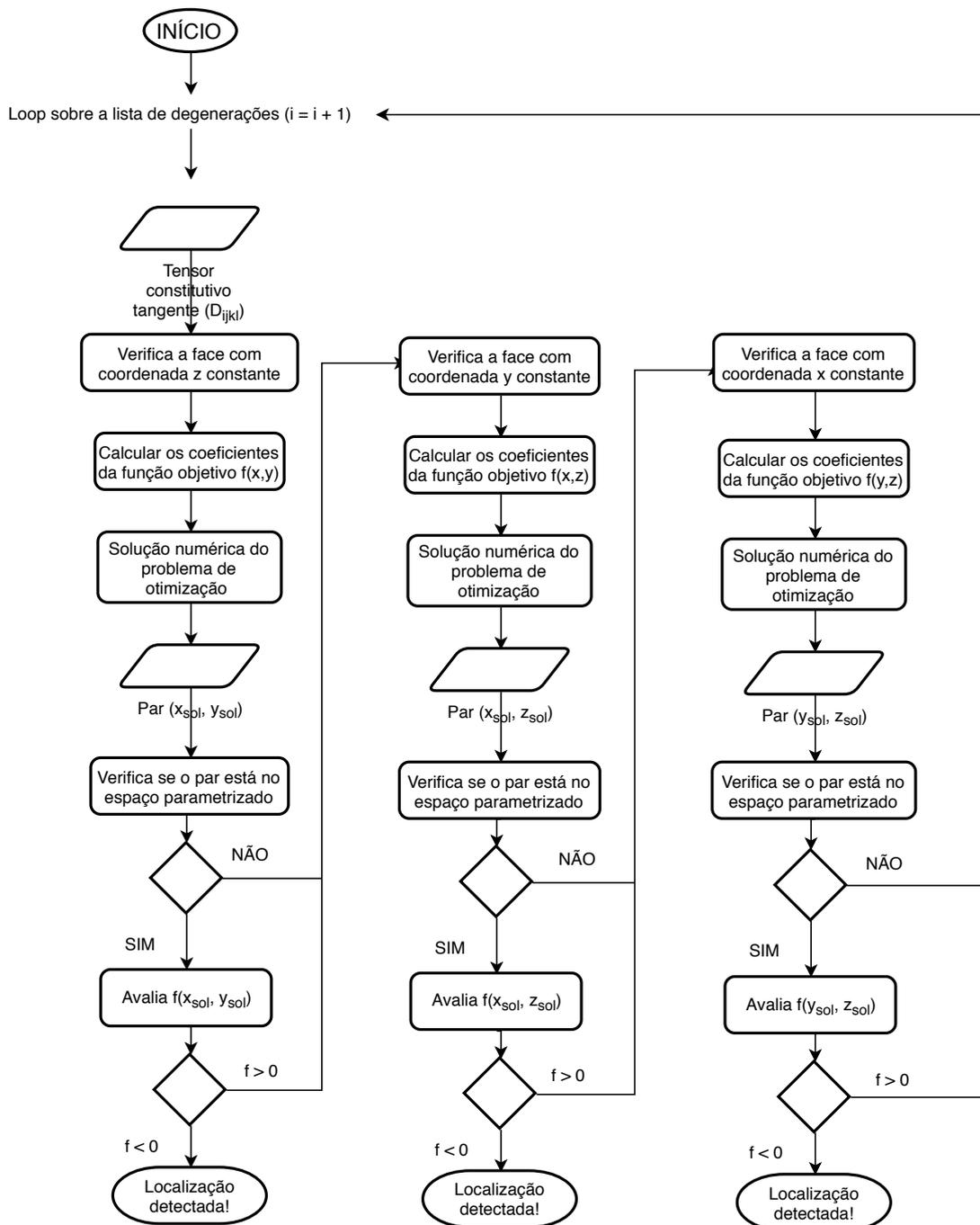


Figura 5.11: Fluxograma da análise de localização no escopo de um elemento.

Capítulo 6

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

A técnica para análise de localização de deformações implementada é avaliada quanto a sua generalidade neste capítulo. Mais especificamente, cenários com diferentes modelos constitutivos e modelos de análise são apreciados em simulações numéricas.

Os resultados da análise de localização são apresentados através de entidades geométricas incluídas no módulo de pós-processamento do sistema INSANE. O vetor unitário \mathbf{n} , normal à superfície de descontinuidade e obtido numericamente, é representado por uma seta vermelha nos pontos materiais (de integração) em que a localização de deformações foi detectada. Adicionalmente, usou-se uma linha verde para indicar, de maneira qualitativa, a direção de uma trinca ou fissura decorrente da degradação no meio material.

6.1 Tração Direta

Um ensaio de tração direta foi modelado com elementos finitos planos. O objetivo desta simulação é demonstrar a funcionalidade da análise de localização implementada para diferentes modelos constitutivos. As condições de carregamento, contorno e discretizações utilizadas estão representadas na Figura 6.1.

Inicialmente, o modelo foi discretizado com 3 elementos finitos quadrilaterais de 4 nós. O elemento central, hachurado na Figura 6.1, foi enfraquecido a fim de induzir

a ocorrência da localização de deformações em seus pontos materiais.

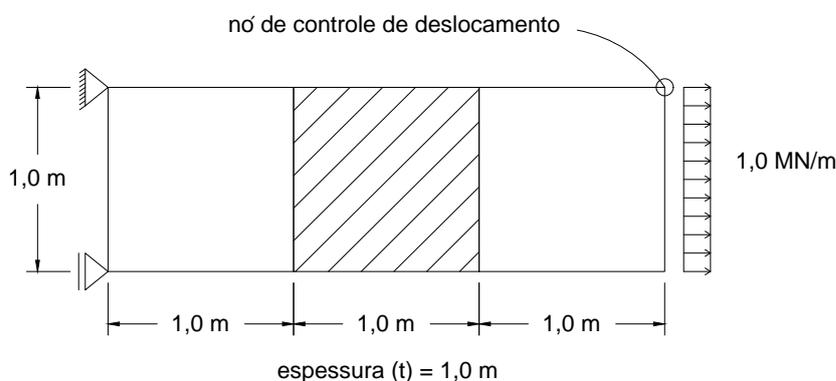


Figura 6.1: Tração Direta - Esquema estrutural.

A análise de localização foi realizada para diversos modelos constitutivos implementados no INSANE. Os parâmetros materiais considerados para todos os modelos foram módulo de elasticidade de 20000,0 MPa e coeficiente de Poisson de 0,2.

Para modelos de dano, adotou-se uma lei de evolução do dano de caráter exponencial, dada pela Equação 6.1:

$$D(\varepsilon_{eq}) = 1 - \frac{\kappa_0}{\varepsilon_{eq}} [1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\varepsilon_{eq} - \kappa_0)}] \quad (6.1)$$

em que,

ε_{eq} é a medida de deformação equivalente, calculada de maneira específica em cada modelo constitutivo;

κ_0 é o valor de deformação equivalente a partir do qual o processo de dano é iniciado;

α é o valor máximo de dano admissível;

β é a intensidade de evolução do dano.

A Tabela 6.1 apresenta os parâmetros adotados para cada modelo constitutivo utilizado. Nela, o símbolo M1 denota o material com suas propriedades regulares e M2 representa o material enfraquecido.

Tabela 6.1: Tração Direta - Parâmetros adotados para modelos constitutivos.

Modelo constitutivo	Parâmetros adotados
Dano de de Vree et al. (1995)	M1: $\alpha = 0,999$ $\beta = 2550$ $\kappa_0 = 1,5 \times 10^{-4}$
	M2: $\alpha = 0,999$ $\beta = 2550$ $\kappa_0 = 1,35 \times 10^{-4}$
Dano de Mazars (1984)	M1: $\alpha_t = 0,95$ $\beta_t = 10000$ $\kappa_0 = 3 \times 10^{-4}$
	M1: $\alpha_c = 1,0$ $\beta_c = 3000$ $\kappa_0 = 3 \times 10^{-4}$
	M2: $\alpha_t = 0,95$ $\beta_t = 10000$ $\kappa_0 = 1 \times 10^{-4}$
	M2: $\alpha_c = 1,0$ $\beta_c = 3000$ $\kappa_0 = 1 \times 10^{-4}$
Dano de Simo e Ju (1987)	M1: $\alpha = 0,999$ $\beta = 15$ $\kappa_0 = 0,0160$
	M2: $\alpha = 0,999$ $\beta = 15$ $\kappa_0 = 0,0145$
Dano de Mazars e Lemaitre (1984)	M1: $\alpha = 0,99$ $\beta = 1500$ $\kappa_0 = 1,1 \times 10^{-4}$
	M2: $\alpha = 0,99$ $\beta = 1500$ $\kappa_0 = 1,05 \times 10^{-4}$
Dano de Lemaitre e Chaboche (1990)	M1: $\alpha = 0,99$ $\beta = 1500$ $\kappa_0 = 1,1 \times 10^{-4}$
	M2: $\alpha = 0,99$ $\beta = 1500$ $\kappa_0 = 1,04 \times 10^{-4}$
Dano Volumétrico de Penna (2011)	M1: $\alpha_t = 0,999$ $\beta_t = 1000$ $\kappa_0 = 8 \times 10^{-5}$
	M1: $\alpha_c = 0,999$ $\beta_c = 1000$ $\kappa_0 = 8 \times 10^{-5}$
	M2: $\alpha_t = 0,999$ $\beta_t = 1000$ $\kappa_0 = 7,4 \times 10^{-5}$
	M2: $\alpha_c = 0,999$ $\beta_c = 1000$ $\kappa_0 = 7,4 \times 10^{-5}$
Fissuração Distribuída	M1: $f_t = 2,2$ MPa $f_c = 22,0$ MPa
	$\varepsilon_c = 0,002$ $G_f = 3 \times 10^{-5}$ MN/m
	$h = 0,05$ m, $\beta_r = 0,05$
	M2: $f_t = 2,0$ MPa $f_c = 20,0$ MPa
	$\varepsilon_c = 0,002$ $G_f = 2 \times 10^{-5}$ MN/m
	$h = 0,05$ m, $\beta_r = 0,05$
	Lei de Carreira-Ingraffea
Plasticidade com critério de von Mises	M1: $\sigma_y = 2,2$ MPa $H = -2000,0$ MPa
	M2: $\sigma_y = 2,0$ MPa $H = -2000,0$ MPa
	Lei de <i>softening</i> linear

Na solução do modelo, empregou-se o método de controle direto de deslocamento, incrementando em $1 \times 10^{-5} \text{ m}$ o deslocamento horizontal (D_x) do nó de controle indicado na Figura 6.1. A carga de referência adotada foi de $1,0 \text{ MN/m}$. A tolerância admitida para a convergência de cada passo foi de 1×10^{-4} .

As Figuras 6.2 e 6.3 apresentam as trajetórias de equilíbrio do deslocamento horizontal do nó de controle. O passo no qual a localização de deformações foi detectada pela primeira vez foi marcado com um 'x' em cada trajetória.

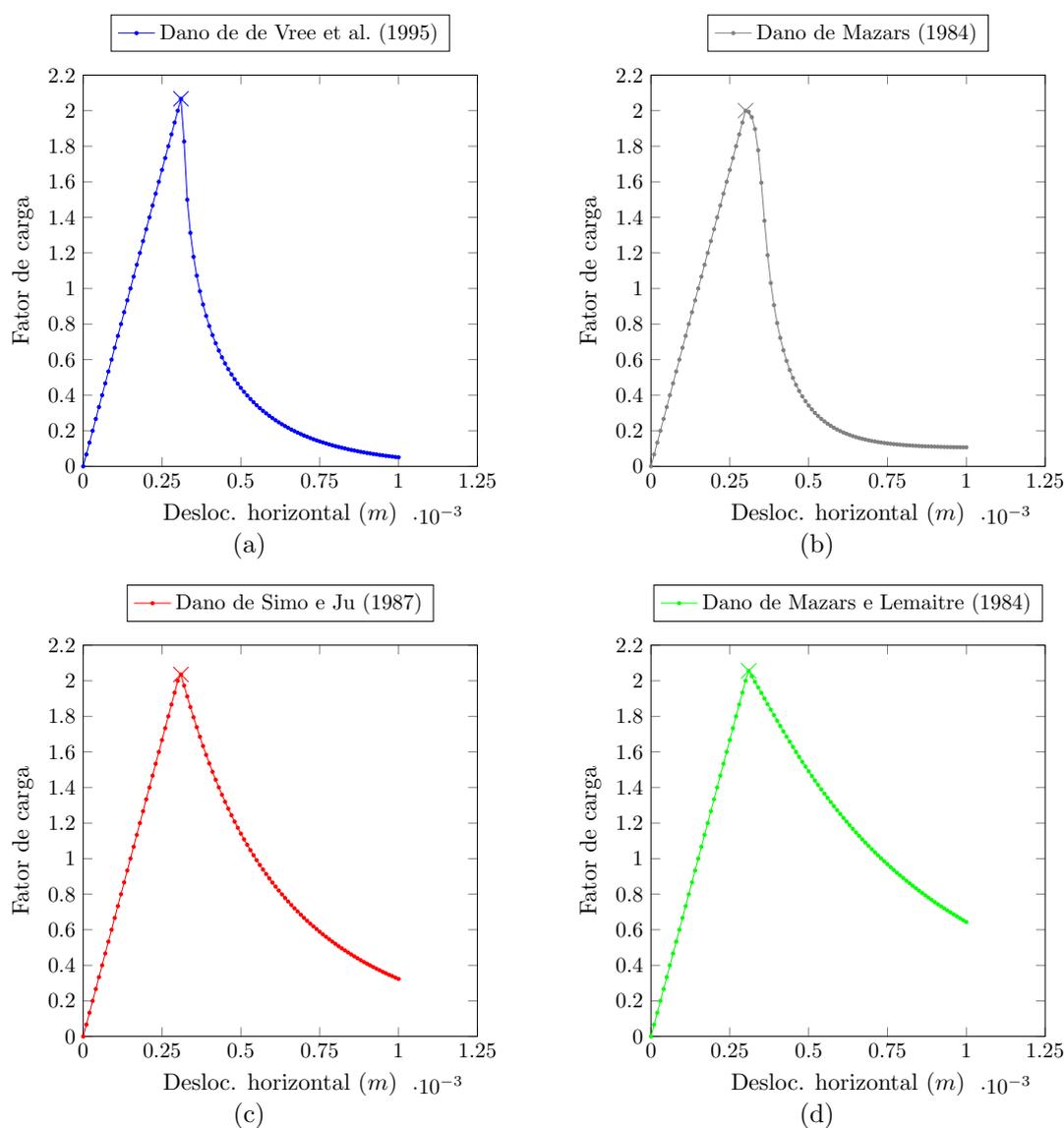


Figura 6.2: Tração Direta - Trajetórias de equilíbrio: Parte 1.

Observa-se que a análise de localização foi capaz de indicar a ocorrência do

fenômeno em todos modelos constitutivos considerados. Devido à simplicidade do modelo, o ponto de detecção inicial coincidiu com o pico da trajetória de equilíbrio em todos casos, com exceção do modelo de plasticidade com critério de von Mises.

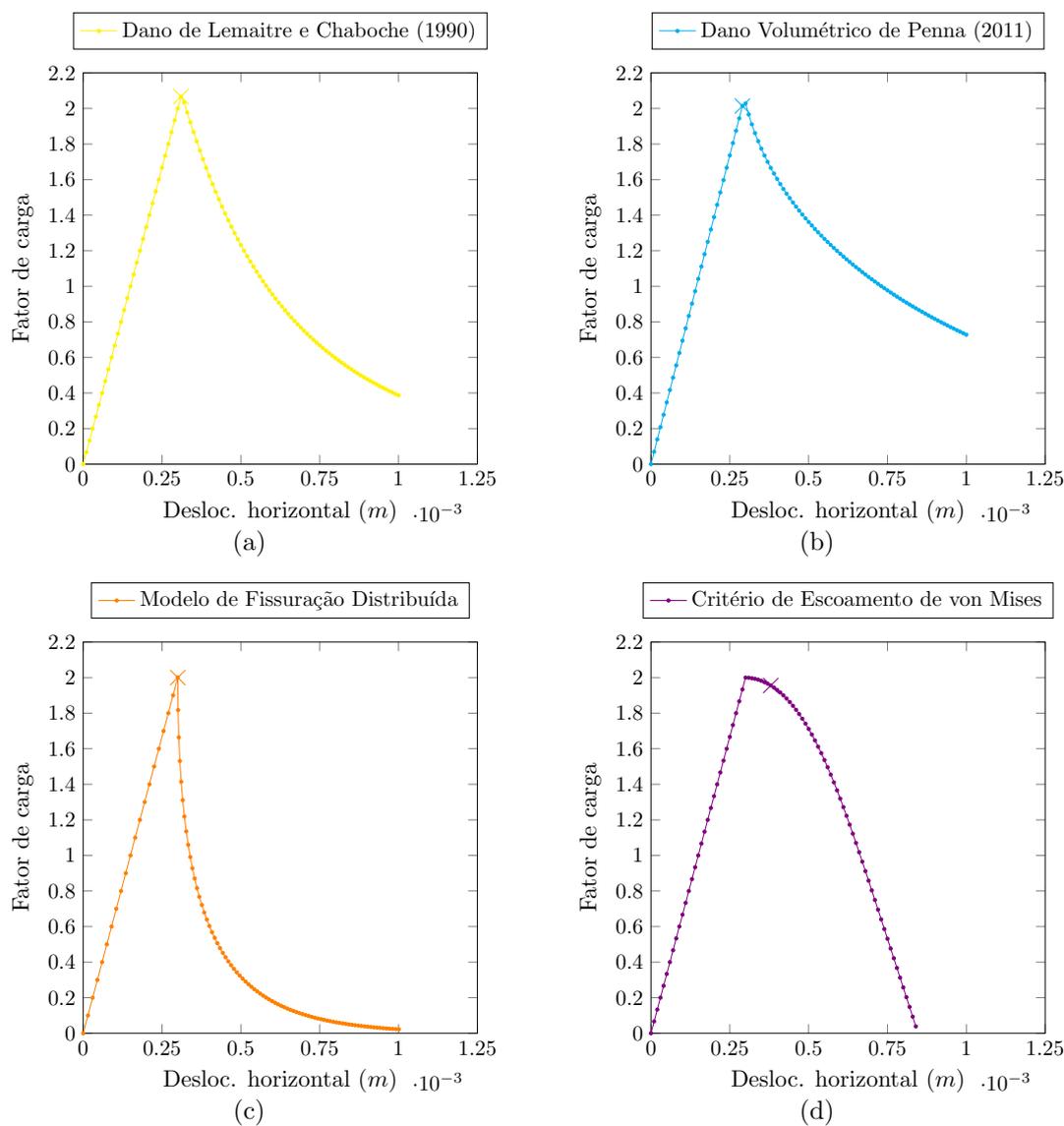
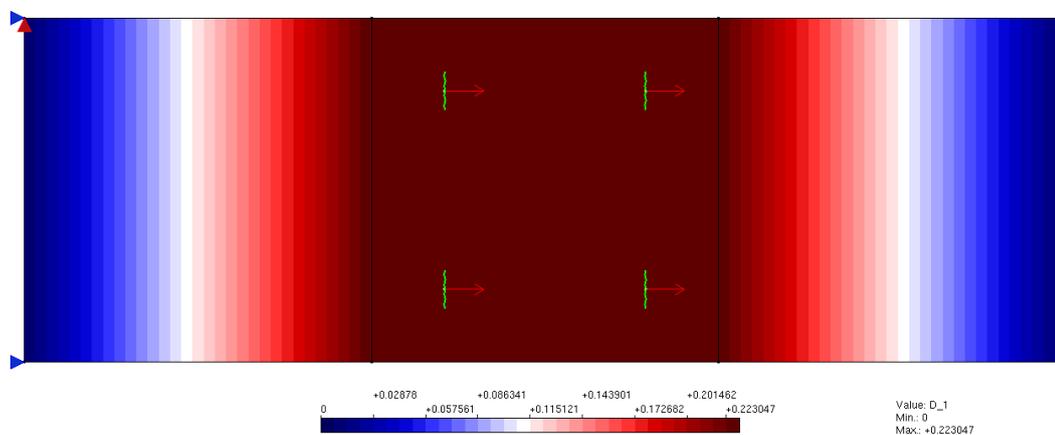


Figura 6.3: Tração Direta - Trajetórias de equilíbrio: Parte 2.

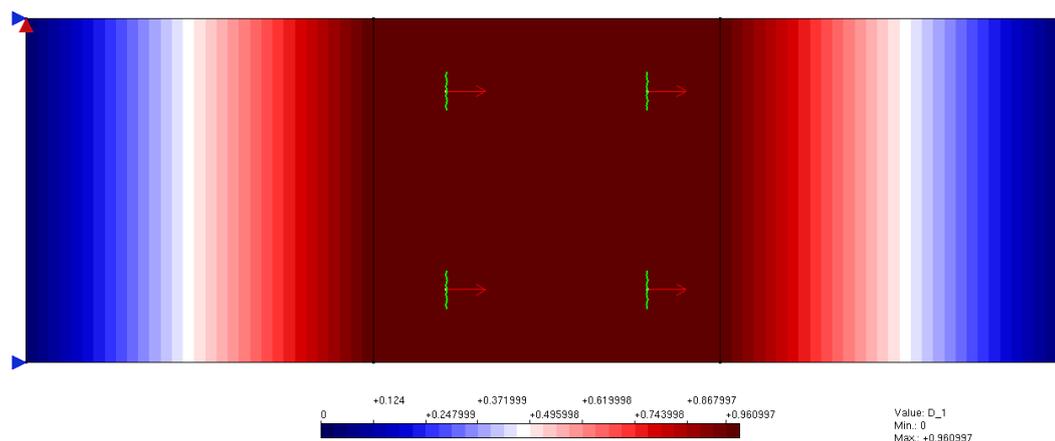
A Figura 6.4 apresenta os resultados da análise de localização e o dano na direção horizontal (D_x) para o modelo constitutivo de fissuração distribuída em dois passos de carga. Respostas similares às mostradas na Figura 6.4 foram obtidas para os demais modelos constitutivos.

Como esperado, a degradação material concentrou-se no elemento central, propositalmente enfraquecido. A localização de deformações foi detectada simultaneamente nos quatro pontos materiais deste elemento durante todo o regime de *softening*.

Para o modelo considerado, a direção normal à superfície de descontinuidade pode ser prevista a partir do carregamento aplicado. Infere-se que o vetor unitário \mathbf{n} é paralelo à direção de carregamento, resultando em fissuras verticais. Os resultados ilustrados na Figura 6.4 indicam correlação com o comportamento presumido.



Passo 45



Passo 96

Figura 6.4: Tração Direta - Análise de localização.

A Figura 6.5 mostra a variação do valor mínimo do determinante do tensor acústico no decorrer da análise realizada com o modelo de plasticidade de von Mises. No regime elástico, o mínimo do determinante do tensor acústico mantém-se constante com módulo de, aproximadamente, $1,5 \times 10^{12}$. Uma vez no ramo inelástico, com a trajetória de equilíbrio descendente, o mínimo do determinante é degradado até tornar-se negativo no passo 41.

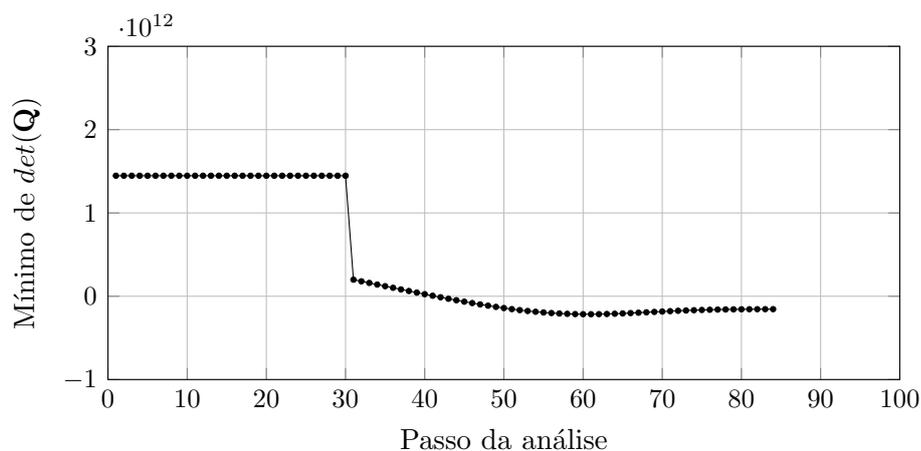


Figura 6.5: Tração Direta - Valor mínimo para o determinante do tensor acústico ao longo da análise para o modelo de plasticidade de von Mises.

A perda de objetividade da análise numérica diante da localização de deformações pode ser ilustrada nesta simulação. Para realizar tal tarefa, o modelo foi discretizado com 5, 7 e 11 elementos finitos planos, conforme mostrado pela Figura 6.6. De maneira similar, o elemento central foi enfraquecido com o objetivo de induzir a localização de deformações em seus pontos de integração.

A solução do modelo foi realizada com os mesmos métodos e parâmetros descritos anteriormente. Adotou-se o modelo constitutivo de Mazars e Lemaitre (1984) com as propriedades explicitadas na Tabela 6.1.

A Figura 6.7 apresenta as trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes discretizações consideradas. Constata-se a perda de ductilidade estrutural com a diminuição da região enfraquecida. Como discutido na Seção 3.4, a análise numérica tenta simular uma fratura discreta e localiza a degradação material no menor volume

de material admissível, que depende da discretização adotada. Com o refinamento da malha, a energia dispendida no processo de fratura desta região tende a zero e o comportamento estrutural torna-se cada vez mais frágil.

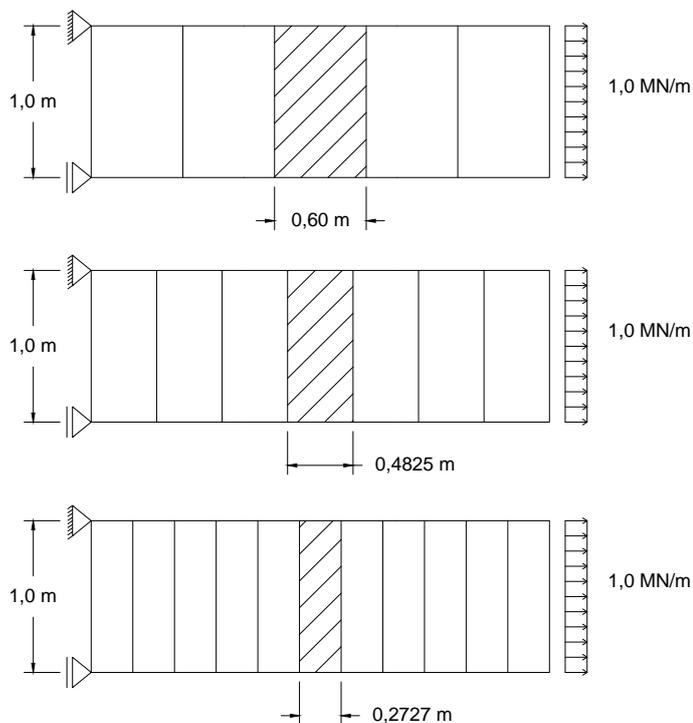


Figura 6.6: Tração Direta - Malhas refinadas.

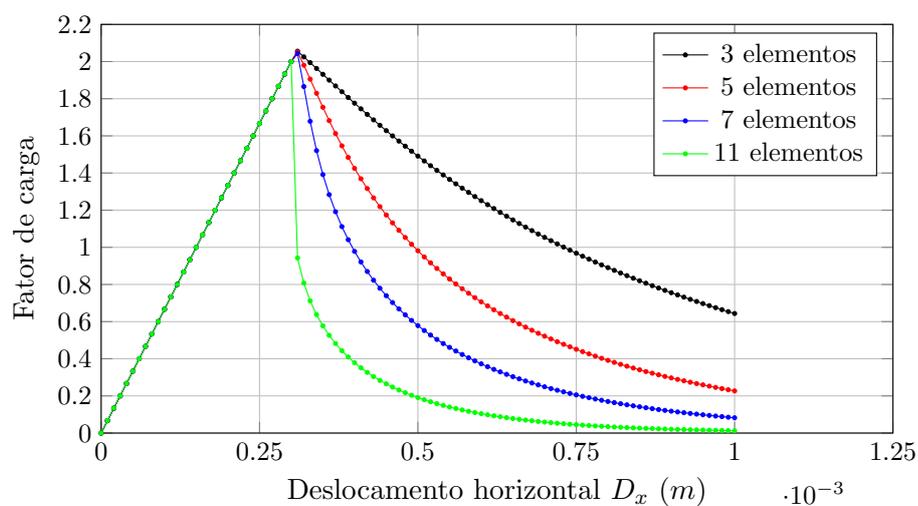


Figura 6.7: Tração Direta - Trajetórias de equilíbrio com refinamento de malha.

Mesmo com a perda de objetividade da simulação numérica, a análise de localização implementada manteve-se consistente. A Figura 6.8 apresenta os resultados da análise para um passo que se encontra no ramo descendente das trajetórias de equilíbrio.

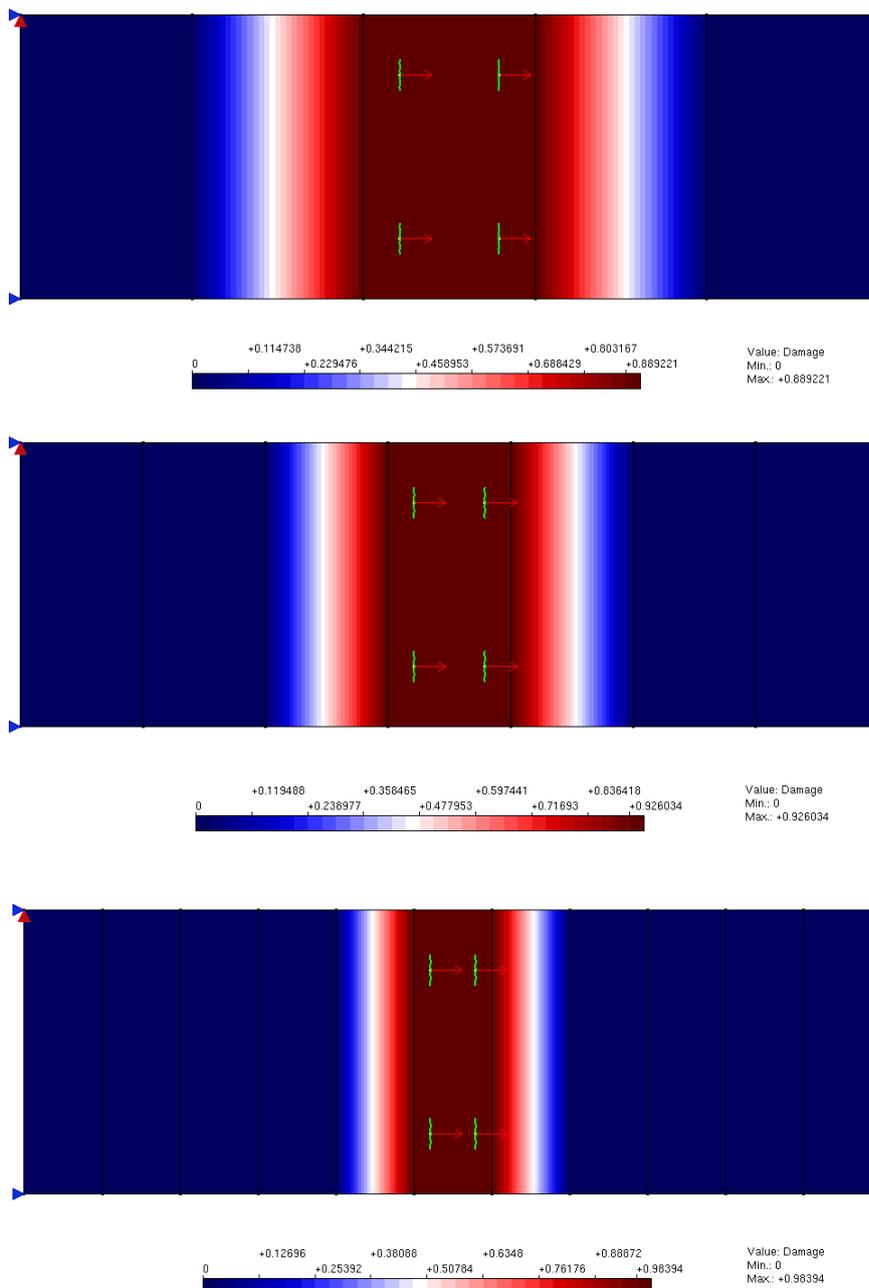


Figura 6.8: Tração Direta - Análise de localização com malhas refinadas.

O ensaio de tração direta também pode ser modelado através de elementos finitos sólidos. As condições de carregamento, contorno e discretizações utilizadas estão representadas na Figura 6.9.

Em analogia à discretização plana, a malha foi definida com 3 elementos finitos hexaédricos de 8 nós. O elemento central, representado com hachuras em sua superfície na Figura 6.9, foi enfraquecido para induzir a ocorrência da localização em seu domínio.

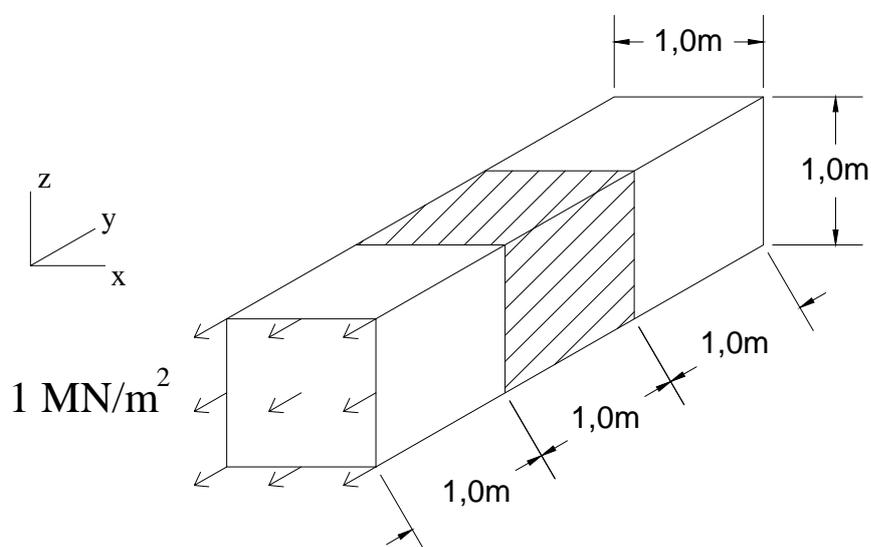


Figura 6.9: Tração Direta - Esquema estrutural com elementos sólidos.

O modelo foi solucionado com o mesmo conjunto de modelos constitutivos descritos na análise plana. As trajetórias de equilíbrio encontradas foram idênticas às representadas nas Figuras 6.2 e 6.3.

Apesar da mudança no modelo de análise, a formulação desenvolvida para identificar a localização apresentou resultados adequados. A Figura 6.10 ilustra a concentração da degradação material no elemento central enfraquecido e a detecção da localização nos oito pontos de integração do elemento finito hexaédrico.

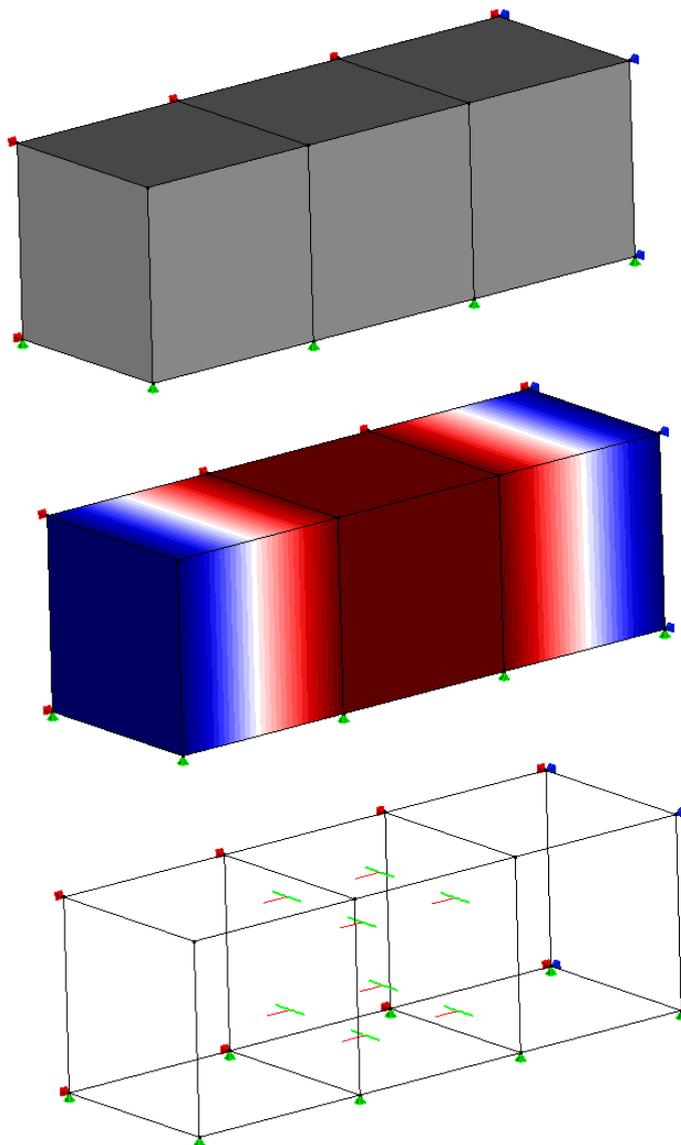


Figura 6.10: Tração Direta - Análise de localização para elementos sólidos.

6.2 Flexão em 3 pontos

Uma viga submetida à flexão em 3 pontos, ensaiada experimentalmente por Petersson (1981), foi modelada com elementos finitos hexaédricos de 8 nós. O objetivo desta simulação é demonstrar a aplicabilidade da análise de localização implementada para carregamentos e discretizações genéricas em malhas de elementos sólidos.

A Figura 6.11 mostra o esquema estrutural adotado.

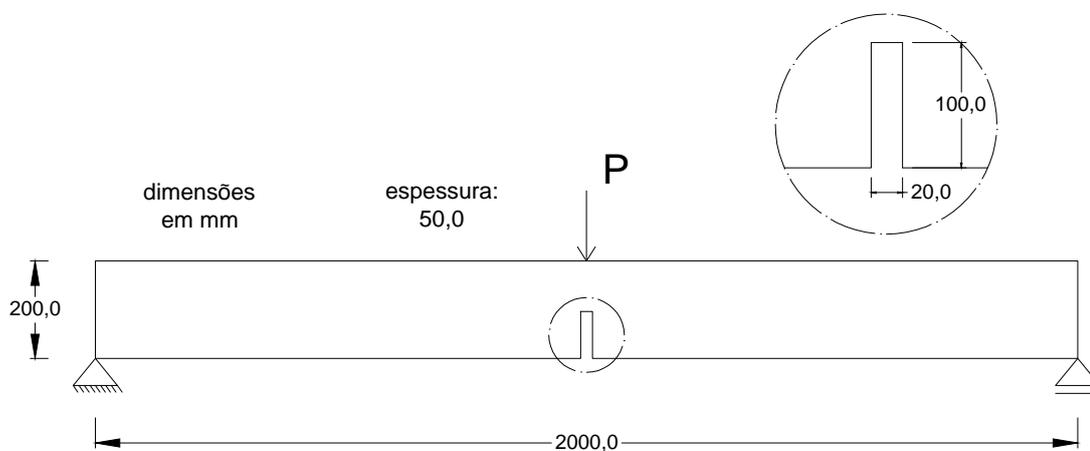


Figura 6.11: Flexão em 3 pontos - Esquema Estrutural.

A Figura 6.12 apresenta a discretização e condições de contorno adotadas. O modelo constitutivo considerado foi o de fissuração distribuída com direção fixa. As propriedades materiais foram selecionadas para simular um material parcialmente frágil, como o concreto. O módulo de elasticidade adotado foi de $30000,0 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson de 0,2, resistência última à compressão de $33,3 \text{ N/mm}^2$ e à tração de $3,33 \text{ N/mm}^2$.

A solução do modelo considerou o controle de deslocamentos generalizados, com incremento inicial do fator de carga de 0,02. A carga de referência, denotada por P , foi assumida como 800 N . A tolerância admitida foi de 1×10^{-4} .

A região do entalhe, situada na borda inferior da viga, é caracterizada por esforços predominantemente de tração e elevada concentração de tensão. Devido às propriedades materiais selecionadas, espera-se que a degradação material seja mais pronunciada nesta região.

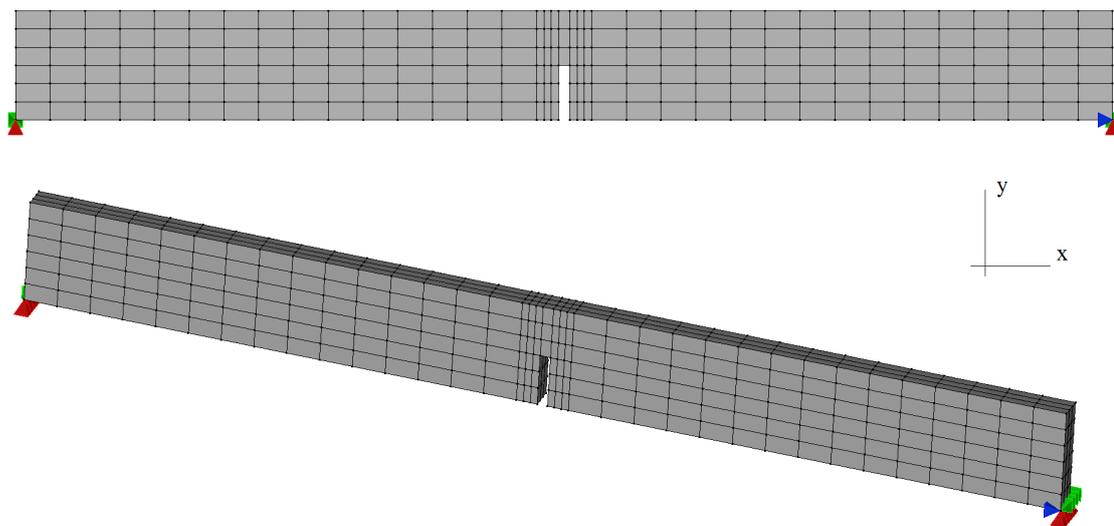


Figura 6.12: Flexão em 3 pontos - Discretização adotada.

A Figura 6.13 ilustra o resultado da análise para o primeiro passo no qual a localização é detectada. O mesmo resultado é apresentado em perspectiva na Figura 6.14. Como esperado, o indicador de localização aponta a ocorrência do fenômeno em pontos materiais de elementos situado na região do entalhe.

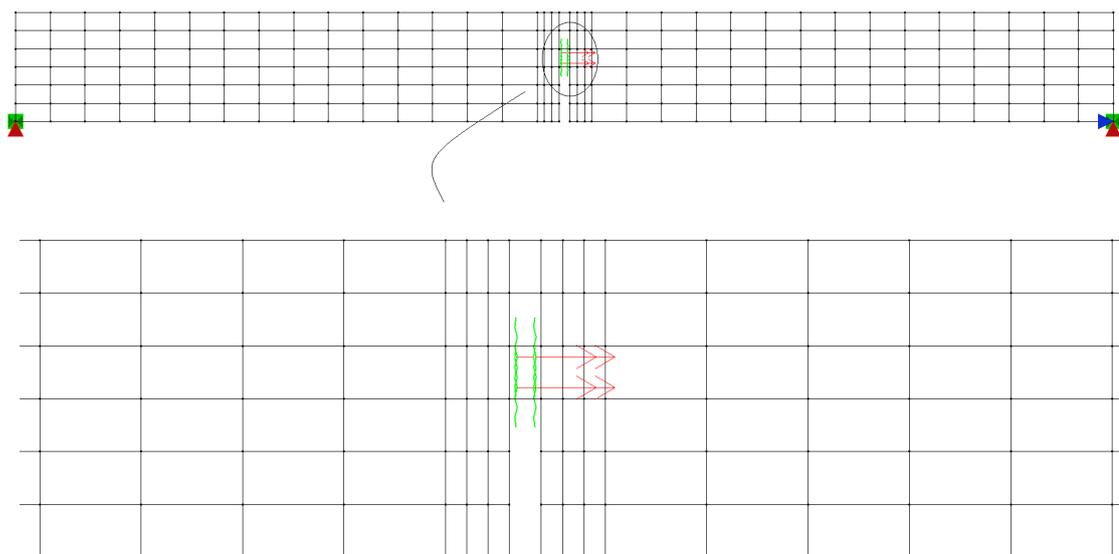


Figura 6.13: Flexão em 3 pontos - Análise de localização no plano 'xy'.

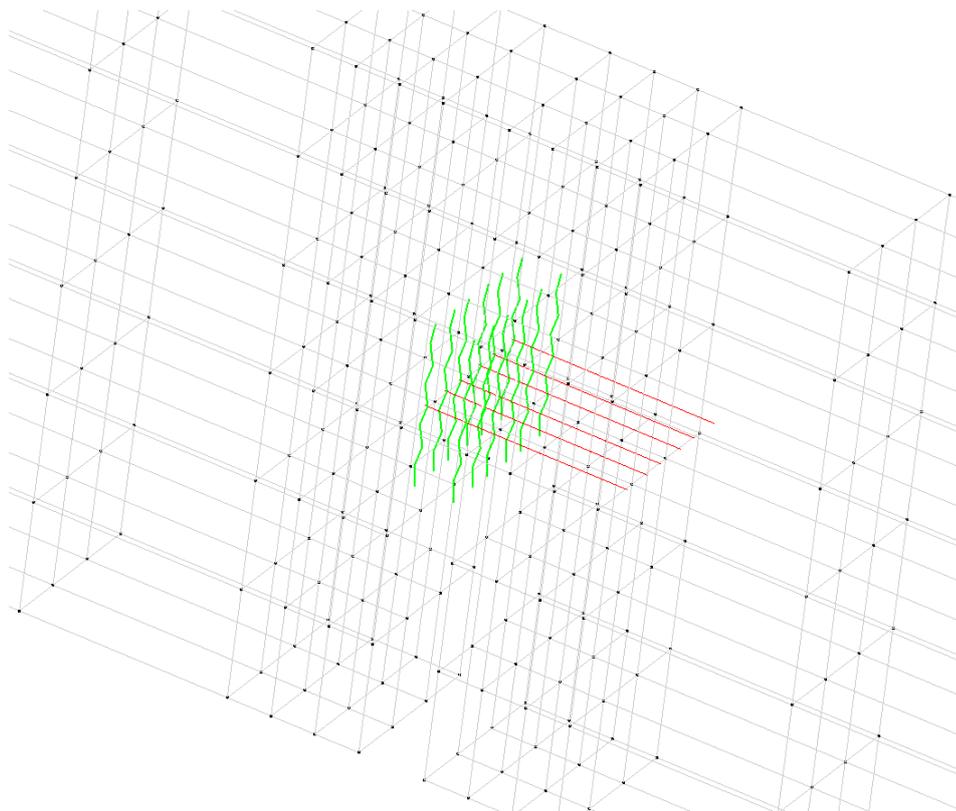


Figura 6.14: Flexão em 3 pontos - Análise de localização em perspectiva.

6.3 Painel em “L”

O ensaio experimental de um painel em “L”, descrito em Winkler et al. (2004), foi modelado com elementos planos triangulares de 3 nós. Esta simulação objetiva demonstrar a aplicabilidade da análise de localização implementada para carregamentos e discretizações genéricas em malhas de elementos planos triangulares. Além disso, ela contempla um modo de fratura predominantemente do modo I.

A Figura 6.15 mostra o esquema estrutural adotado, com suas condições de contorno e carregamento aplicados.

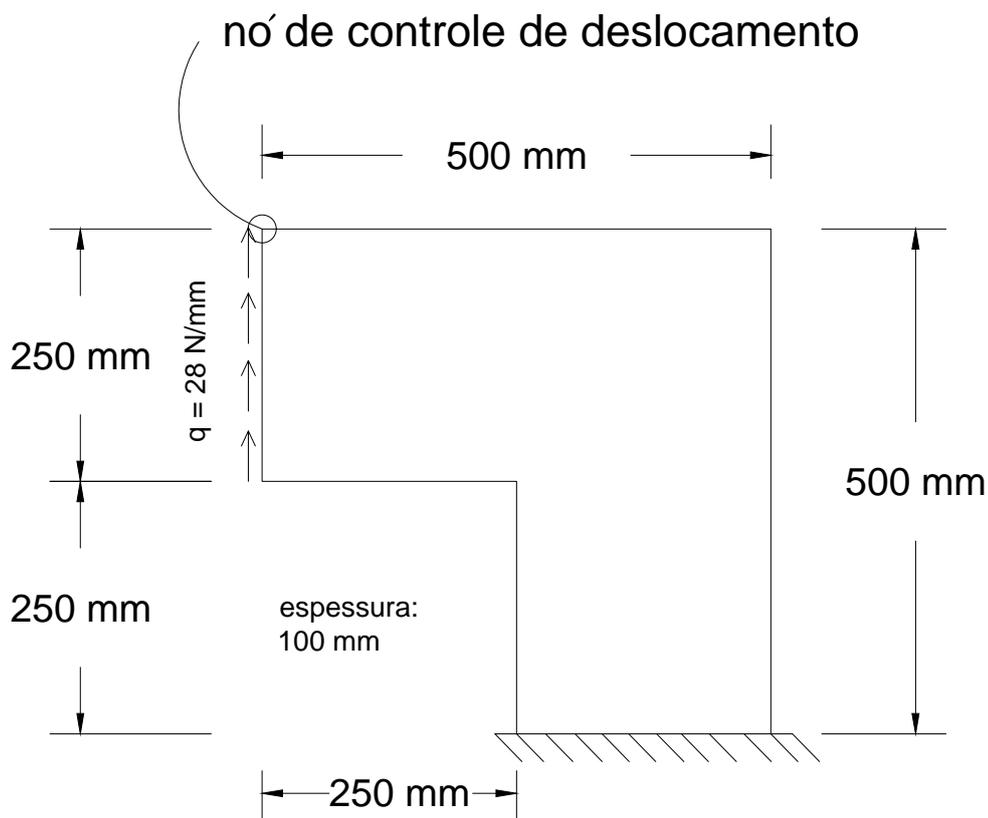


Figura 6.15: Painel em "L" - Esquema Estrutural.

As propriedades materiais consideradas neste modelo foram módulo de elasticidade de 25850 N/mm^2 e coeficiente de Poisson de 0,18. O modelo constitutivo adotado foi o de dano volumétrico proposto por Penna (2011), com a seguinte lei de evolução de dano polinomial:

$$D(\varepsilon_{eq}) = 1 - \frac{1}{\tilde{E}\varepsilon_{eq}} \frac{\frac{f_e k \varepsilon_{eq}}{\kappa_0}}{k - 1 + \left(\frac{\varepsilon_{eq}}{\kappa_0}\right)^k} \quad (6.2)$$

em que,

\tilde{E} é o módulo de elasticidade equivalente;

f_e é a tensão equivalente relativa ao limite de resistência material.

O parâmetro k é calculado a partir das demais grandezas descritas anteriormente:

$$k = \frac{1}{1 - \frac{f_e}{\kappa_0 \tilde{E}}} \quad (6.3)$$

Para o comportamento material à tração, adotou-se $f_e = 1,43 \text{ N/mm}^2$, $\kappa_0 = 2,15 \times 10^{-4}$ e $\tilde{E} = 13463,0 \text{ N/mm}^2$. Por sua vez, para o comportamento material à compressão, considerou-se $f_e = 16,0 \text{ N/mm}^2$, $\kappa_0 = 2,2 \times 10^{-3}$ e $\tilde{E} = 13463,0 \text{ N/mm}^2$.

No processo de solução, empregou-se o método de controle direto de deslocamento, incremento de $0,01 \text{ mm}$ no deslocamento vertical (D_y) do nó destacado na Figura 6.15. A carga de referência foi de 28 N/mm e a tolerância admitida para a convergência de cada passo foi de 1×10^{-3} .

A Figura 6.16 mostra a trajetória de equilíbrio obtida para o grau de liberdade controlado durante a solução.

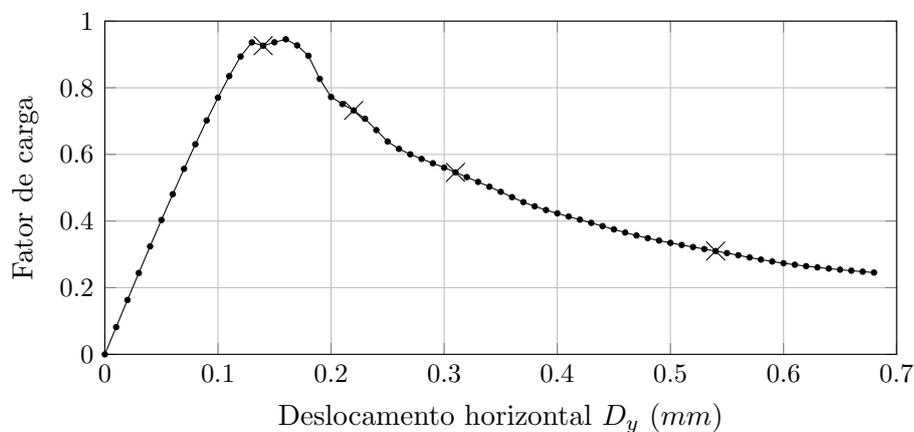


Figura 6.16: Painel em “L” - Trajetória de equilíbrio.

Por sua vez, as Figuras 6.17 e 6.18 apresentam o resultado da análise de localização de deformações para os 4 passos destacados com um 'x' na trajetória. Destaca-se a correlação observada entre a detecção do fenômeno de localização e a degradação material, representada pelo dano na direção ε_1 ao longo do domínio discretizado.

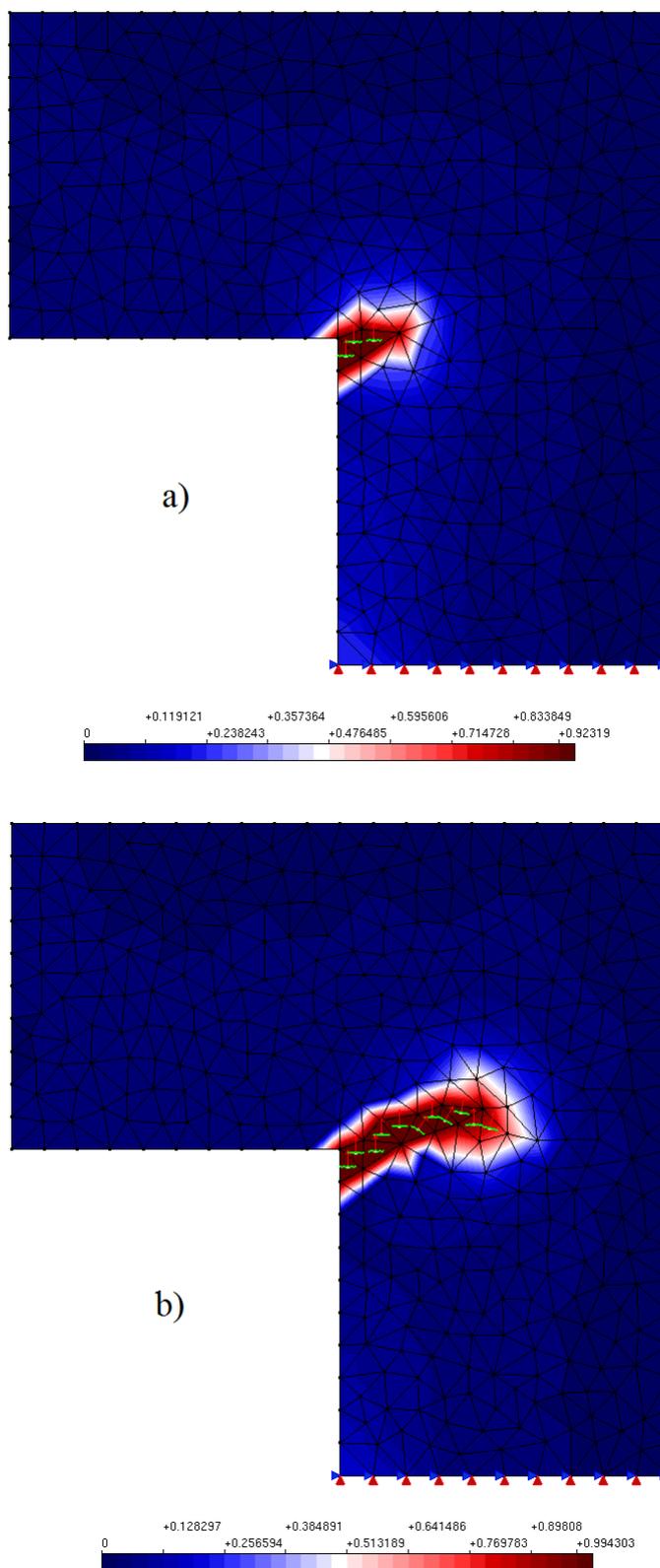


Figura 6.17: Painel em “L” - Análise de localização - Parte 1.

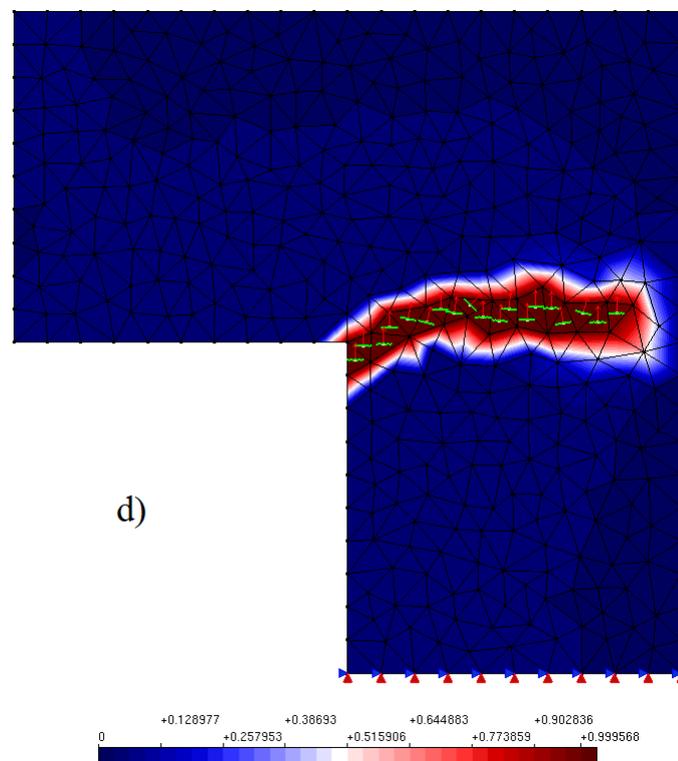
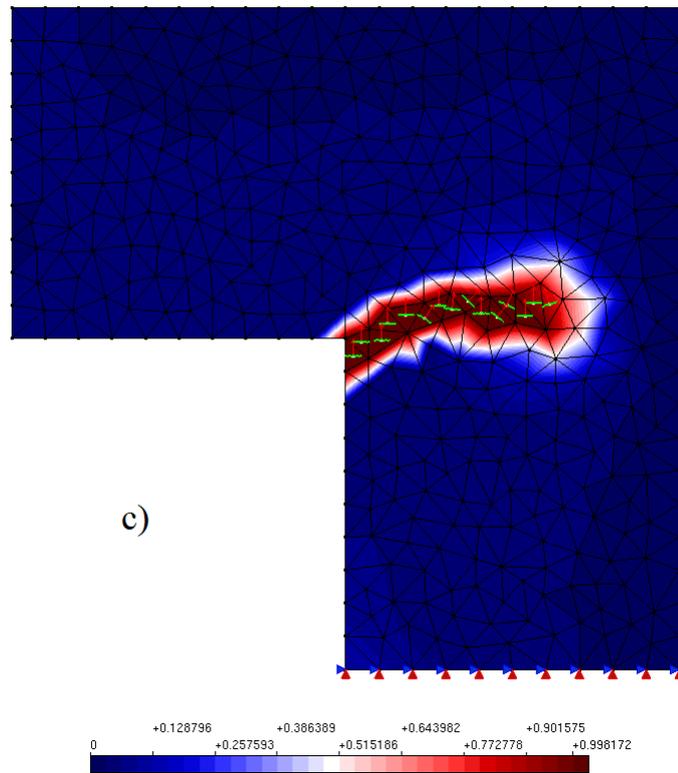


Figura 6.18: Painel em “L” - Análise de localização - Parte 2.

6.4 Cisalhamento em 4 pontos

Uma viga sob cisalhamento em 4 pontos, cujo esquema estrutural encontra-se representado na Figura 6.19, foi modelada com elementos finitos planos quadriláteros. Este elemento estrutural exibe um modo misto de sollicitação, cuja modelagem é complexa devido à simulação dos efeitos resultantes de esforços de cisalhamento em meios parcialmente frágeis (Penna, 2011). Neste cenário, esta simulação visa demonstrar a generalidade da análise de localização implementada quanto aos tipos de carregamentos aplicados.

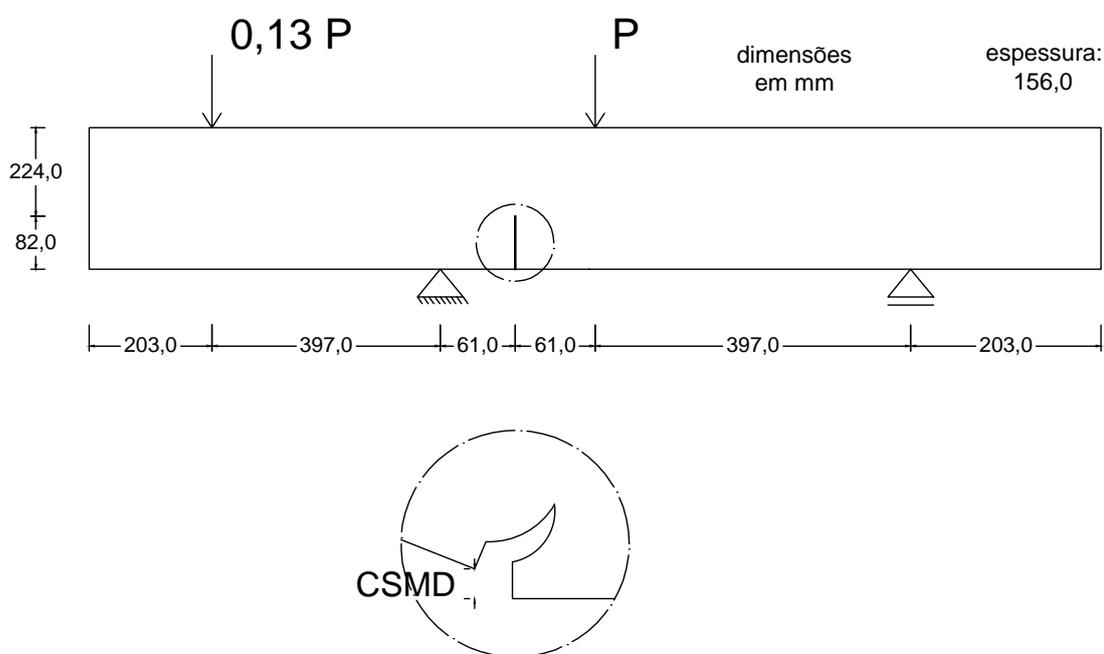


Figura 6.19: Cisalhamento em 4 pontos - Esquema estrutural.

A carga de referência foi de $P = 130000,0 N$. A Figura 6.20 apresenta a discretização adotada. Toma-se como referência o ensaio experimental realizado por Arrea e Ingraffea (1982), cujos resultados foram obtidos em função do deslocamento vertical relativo das extremidades da trinca (CMSD, “*Crack Mouth Sliding Displacement*”).

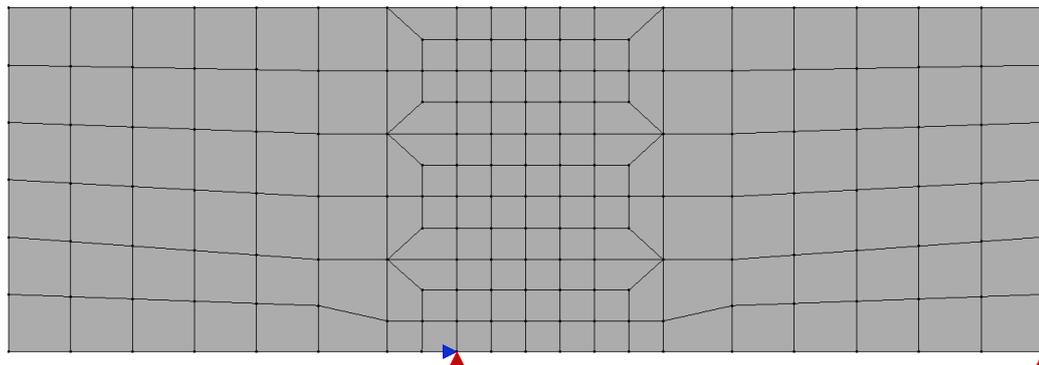
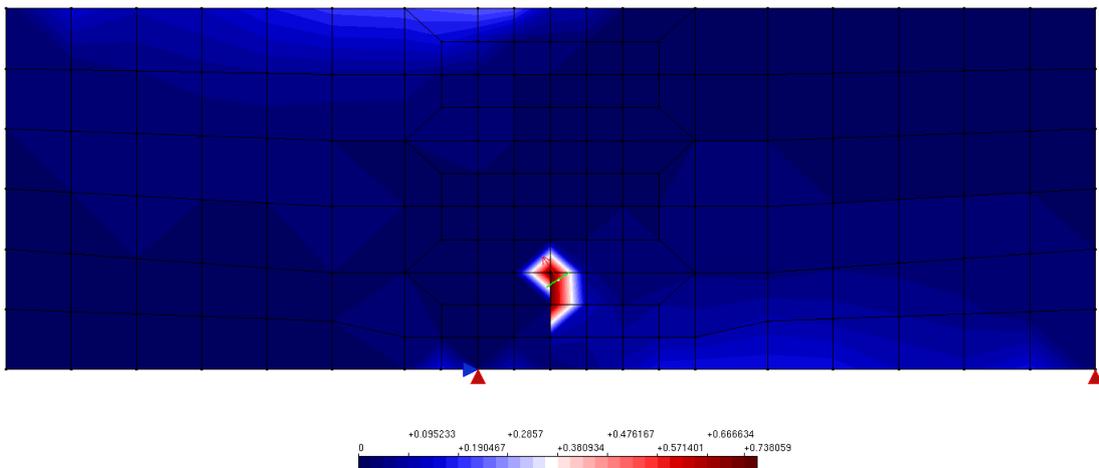


Figura 6.20: Cisalhamento em 4 pontos - Discretização adotada.

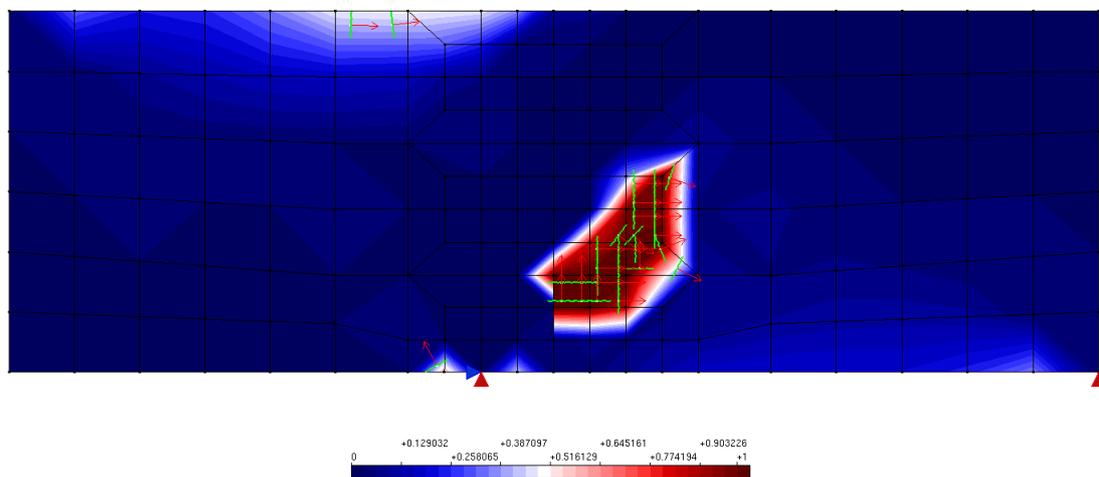
O modelo constitutivo selecionado foi o de fissuração distribuída com direção fixa. Por sua vez, as propriedades materiais adotadas foram $E = 24800,0 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,18$, $f_c = 34,0 \text{ N/mm}^2$, $\varepsilon_c = 0,0024$, $f_t = 3,4 \text{ N/mm}^2$ e $\varepsilon_t = 0,00024$. O modelo foi solucionado com o método de controle de comprimento de arco cilíndrico com incremento inicial do fator de carga de 0,0125 e tolerância de 1×10^{-4} .

A Figura 6.21 apresenta os resultados da análise de localização realizada em 3 passos de carga distintos e o dano na direção ε_1 ao longo do domínio discretizado. Observa-se boa correlação entre a detecção do fenômeno de localização e o dano material.

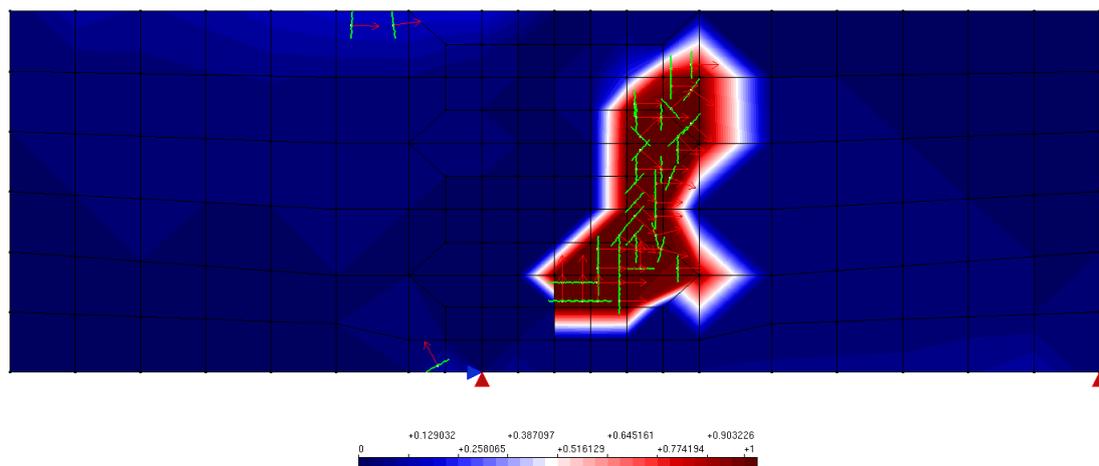
A direção normal à superfície de descontinuidade, obtida numericamente em cada passo da análise, indica a capacidade da técnica implementada em descrever a degradação material resultante de esforços cisalhantes. No limiar da zona de degradação (ou na zona de propagação da trinca), a direção na qual o tensor acústico torna-se singular é inclinada, característica de uma fratura em modo II.



Passo 45



Passo 150



Passo 300

Figura 6.21: Cisalhamento em 4 pontos - Análise de localização.

6.5 Bandas de Cisalhamento em Plasticidade

Como discutido na Seção 3.2, a localização de deformações pode se manifestar como bandas de cisalhamento (*shear bands*) em materiais elastoplásticos. A modelagem adequada destas bandas em simulações numéricas é um tópico de estudo ativo entre pesquisadores e está diretamente relacionado com métodos para detecção de instabilidades materiais e localização de deformações.

Schreyer e Neilsen (1996a) descrevem testes analíticos e numéricos para determinar a ocorrência da localização em elementos finitos. Em sua metodologia numérica, os autores calculam um parâmetro de localização, denotado por ϕ , para cada elemento. Este parâmetro varia de 0 a 1, sendo $\phi = 0$ o estado inicial para toda a malha e $\phi = 1$ a detecção da instabilidade material no elemento.

Duas simulações descritas no trabalho de Schreyer e Neilsen (1996a) serão reproduzidas nesta seção e seus resultados serão comparados com a técnica de localização de deformações implementada.

6.5.1 Tração Uniaxial

O primeiro exemplo consiste em um corpo retangular, com dimensões de 1 *in* x 3 *in*, em Estado Plano de Deformação (EPD) e submetido a um deslocamento prescrito máximo (Δ) de 0,06 *in* em toda sua superfície superior. A Figura 6.22 ilustra as condições de carregamento e contorno consideradas.

O modelo constitutivo utilizado foi o de plasticidade com critério de von Mises. As propriedades materiais adotadas foram módulo de elasticidade de 30×10^6 psi, coeficiente de Poisson de 0,3, tensão limite de escoamento (σ_y) de 30×10^3 psi e módulo pós-crítico (H) de -20×10^{-3} psi.

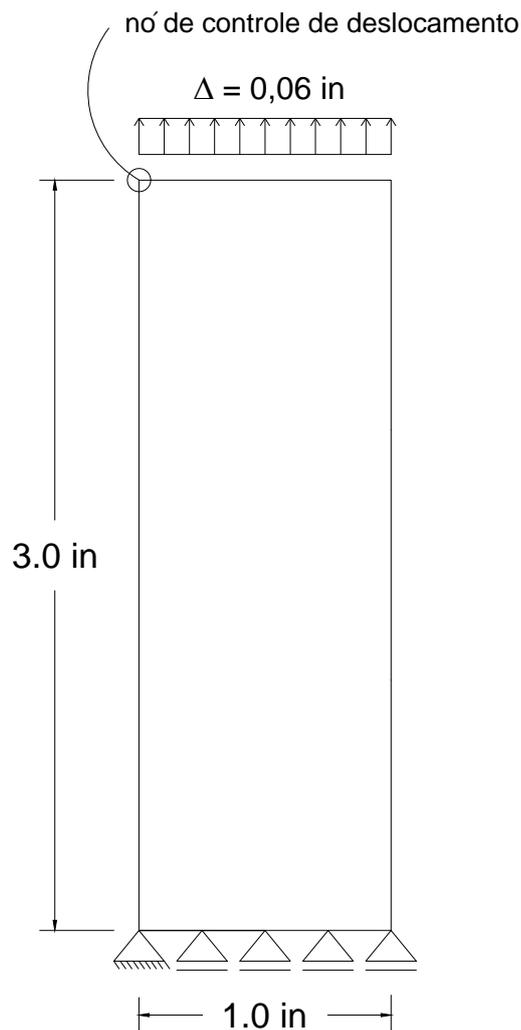


Figura 6.22: Tração Uniaxial - Esquema estrutural.

Duas discretizações foram adotadas, conforme mostrado pela Figura 6.23. Assim como no trabalho original, uma imperfeição geométrica foi introduzida em ambas as malhas ao se reduzir a largura de um elemento finito na altura média do modelo. Esta imperfeição será responsável pela ocorrência da banda de localização na análise.

Empregou-se o método de controle direto de deslocamentos no processo de solução. O deslocamento vertical (D_y) do nó indicado na Figura 6.22 foi incrementado em $3 \times 10^{-4} \text{ in}$ a cada passo. Para reproduzir fidedignamente o deslocamento prescrito em toda superfície superior do modelo, os demais deslocamentos verticais dos nós desta face foram considerados iguais aos do nó de controle.

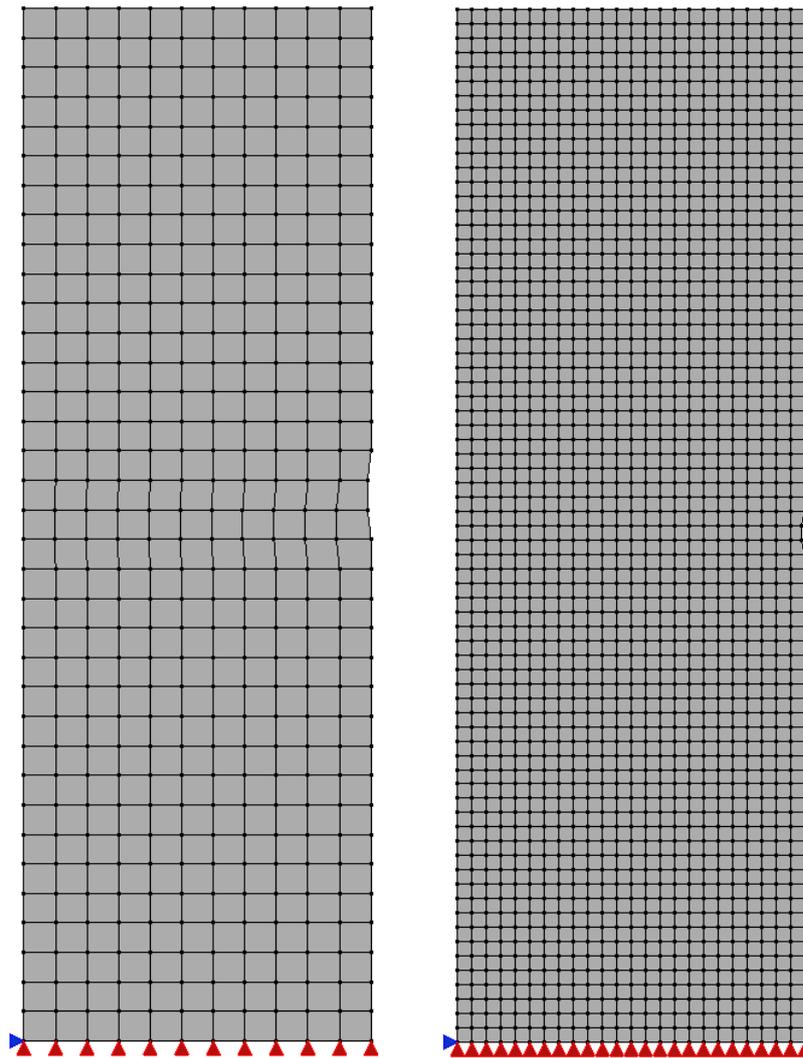


Figura 6.23: Tração Uniaxial - Discretizações adotadas.

Conforme esperado, há a ocorrência de bandas de cisalhamento bem definidas e pronunciadas em ambas as discretizações. A Figura 6.24 mostra as regiões de concentração da deformação ε_{yy} ao longo do domínio considerado.

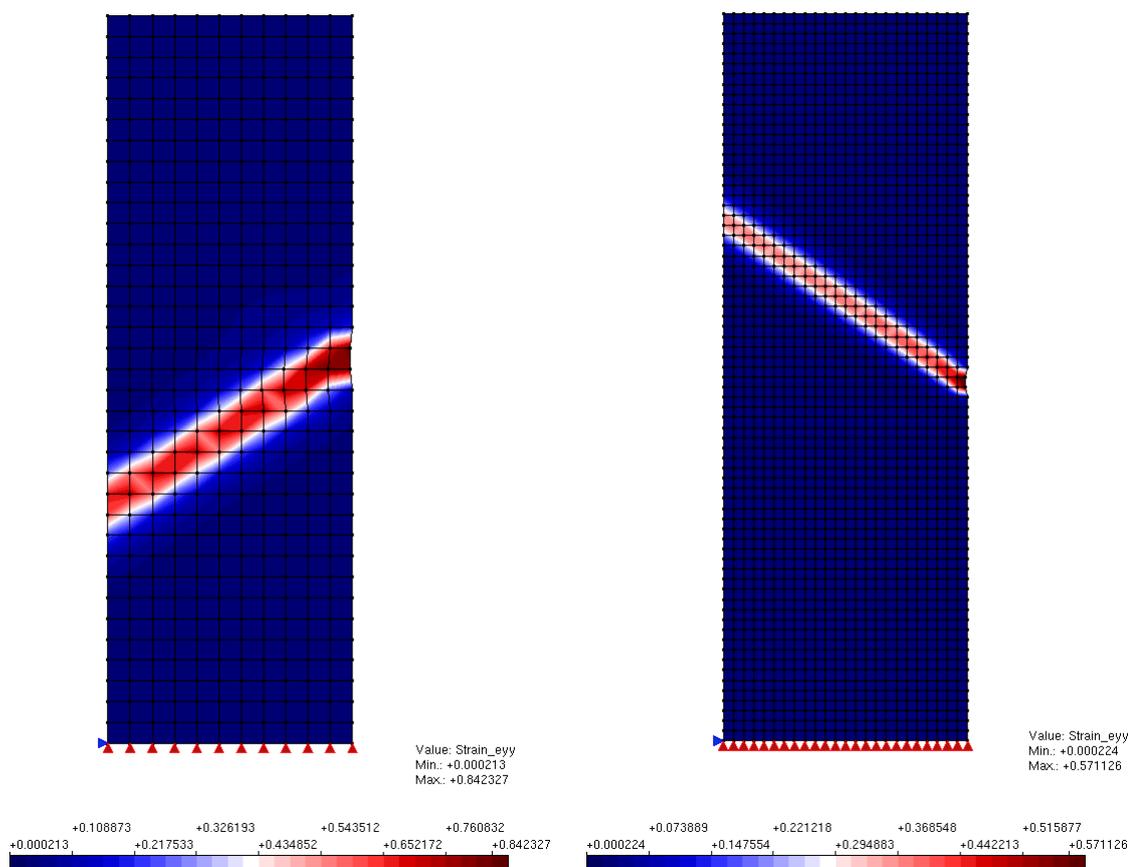


Figura 6.24: Tração Uniaxial - Bandas de cisalhamento.

Na Figura 6.24, nota-se que as bandas de cisalhamento possuem origem no ponto de imperfeição geométrica. Apesar disso, as simulações resultaram em bandas com orientações distintas, simétricas em relação a uma linha horizontal que passa pelo ponto de imperfeição.

A comparação entre resultados obtidos no INSANE e no trabalho de Schreyer e Neilsen (1996a) para a malha refinada é ilustrada pela Figura 6.25. Observa-se que, nos primeiros passos da simulação, há duas regiões de localização simétricas em ambas as análises. No decorrer do processo de carregamento, as soluções divergem quanto à banda preferencial para concentração da deformação plástica.

A Figura 6.26 compara os resultados da análise de localização implementada com o parâmetro de localização de Schreyer e Neilsen (1996a) para a malha grosseira. Na Figura 6.26(a), destaca-se o passo em que a localização de deformações foi apontada pela primeira vez. A detecção inicial ocorreu em pontos materiais dispersos, com pouca correspondência com o caráter localizado do fenômeno.

Em um passo mais tardio da simulação, como o mostrado na Figura 6.26(b), a análise de localização aponta a ocorrência do fenômeno apenas em pontos materiais que se encontram na região da banda de cisalhamento. A Figura 6.26(c) apresenta o mesmo resultado na análise do trabalho de Schreyer e Neilsen (1996a).

Para um mesmo ponto material, houve alternância na direção normal à superfície de descontinuidade obtida no decorrer da simulação. A oscilação ocorreu entre as duas possíveis direções no plano que definem a banda de localização. A técnica numérica para análise de localização desenvolvida por Oliver et al. (2010), descrita na Seção 4.3, apresentou um comportamento similar ao observado. Ela resulta em um par de vetores que definem a direção normal à superfície de descontinuidade (\mathbf{n}) e o vetor de polarização (\mathbf{m}). No entanto, devido à simetria da condição de bifurcação, não é possível especificá-los diante do par de vetores obtido.

Estima-se que tal instabilidade é consequência da solução numérica do problema de otimização não linear. Como discutido na Seção 5.1.2, o método de Newton foi utilizado com um ponto de partida aleatório no espaço parametrizado. Este palpite inicial influencia diretamente na convergência do método e pode resultar em um ponto ótimo global ou local. Quando mínimos locais também indicam a ocorrência do fenômeno de localização, diferentes direções normais à superfície de descontinuidade podem ser obtidas a cada passo da análise.

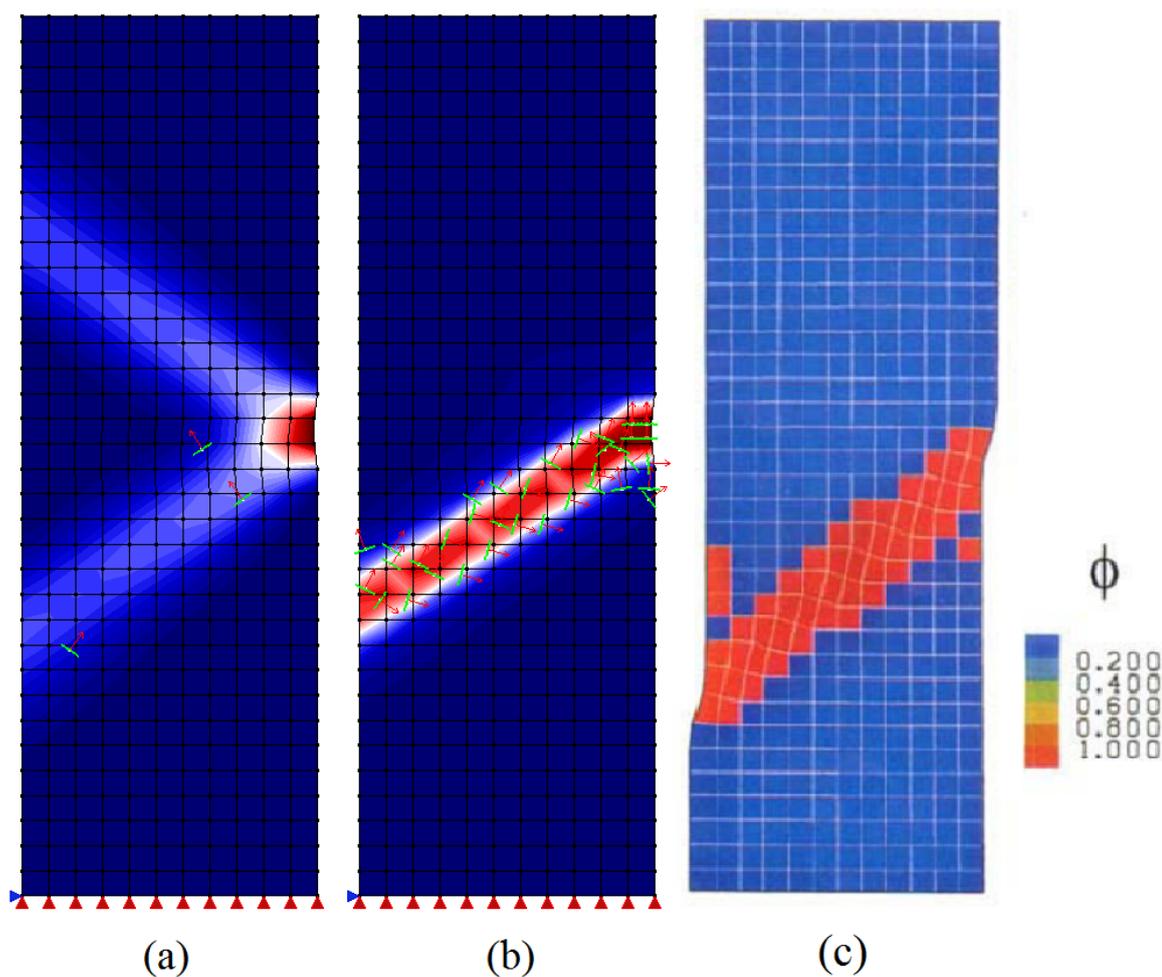


Figura 6.26: Tração Uniaxial - Análise de localização para malha grosseira.

A Figura 6.27 compara os resultados da análise de localização implementada com o parâmetro de localização de Schreyer e Neilsen (1996a) para a malha refinada. A detecção inicial, mostrada na Figura 6.27(a), ocorre em pontos materiais dispersos, de maneira similar à simulação realizada com uma discretização mais grosseira.

A Figura 6.27(b) apresenta a resposta da análise de localização para um dos passos finais da simulação e a Figura 6.27(c) apresenta o mesmo resultado na análise do trabalho de Schreyer e Neilsen (1996a).

Assim como na análise com malha grosseira, houve oscilação na direção normal à superfície de descontinuidade obtida. Tal intercorrência corrobora com a hipótese

levantada anteriormente, que associa a instabilidade nas direções com a solução numérica da otimização através do método de Newton.

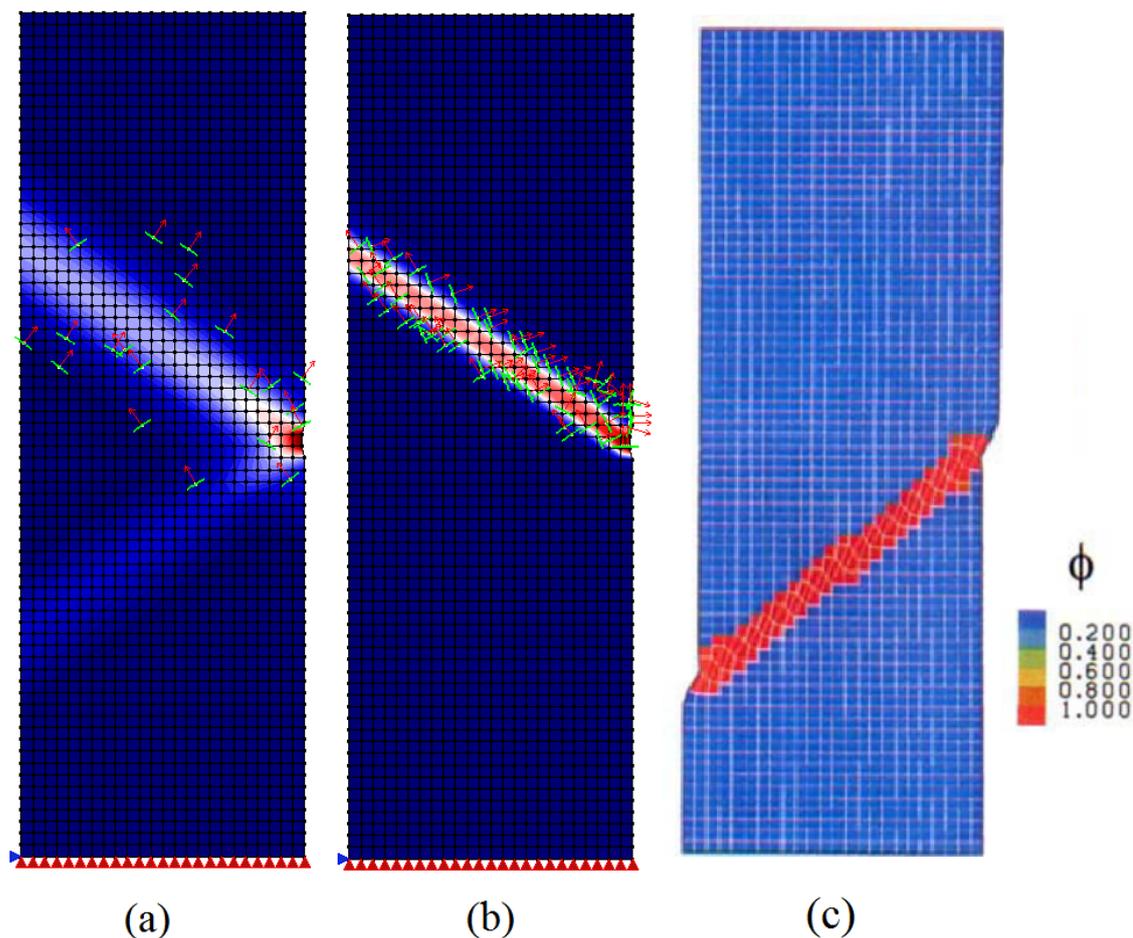


Figura 6.27: Tração Uniaxial - Análise de localização para malha refinada.

6.5.2 Ensaio de Punção

O segundo exemplo consiste em um bloco quadrado, com dimensões de 12 in x 12 in , em EPD. O bloco é submetido a um deslocamento prescrito máximo (Δ) de $0,24\text{ in}$, simulando um esforço de punção. A Figura 6.28 ilustra as condições de carregamento e contorno consideradas.

Novamente, o modelo constitutivo utilizado foi o de plasticidade com critério de von Mises. As propriedades materiais adotadas foram módulo de elasticidade de 30

$\times 10^6$ psi, coeficiente de Poisson de 0,3, tensão limite de escoamento (σ_y) de 30×10^3 psi e módulo pós-crítico (H) de -20×10^{-3} psi.

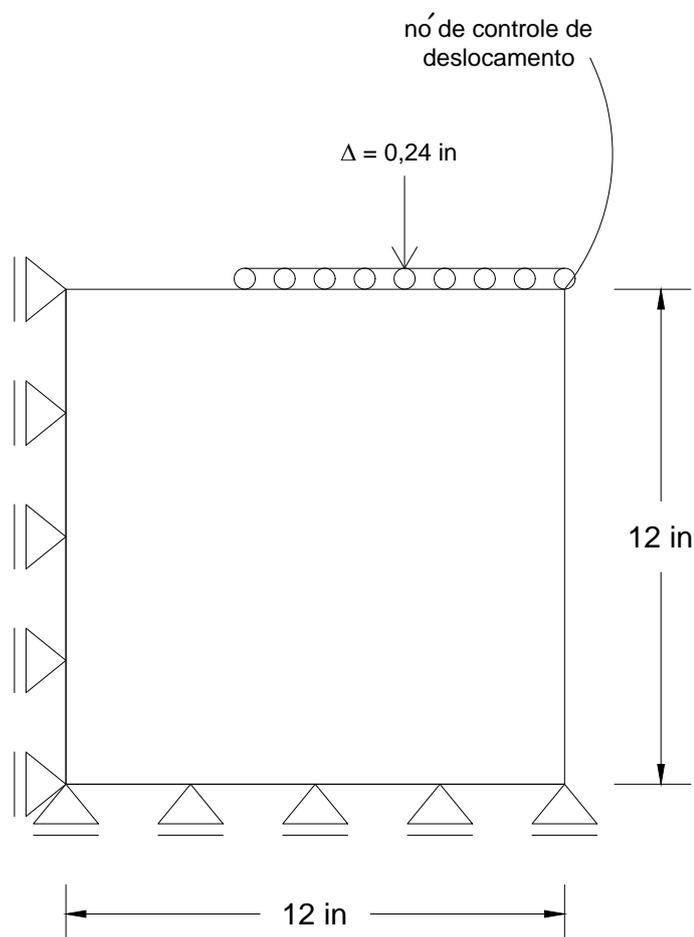


Figura 6.28: Ensaio de Punção - Esquema estrutural.

Duas discretizações foram adotadas, conforme mostrado pela Figura 6.29. A natureza assimétrica do esforço será responsável pela ocorrência da banda de localização na análise.

Na solução do modelo, empregou-se o método de controle direto de deslocamentos. O deslocamento vertical (D_y) do nó indicado na Figura 6.28 foi incrementado em -3×10^{-4} in a cada passo. De maneira análoga à simulação anterior, a metodologia *master-slave* foi utilizada para garantir que os demais nós com deslocamentos prescritos acompanhem o nó de controle da solução.

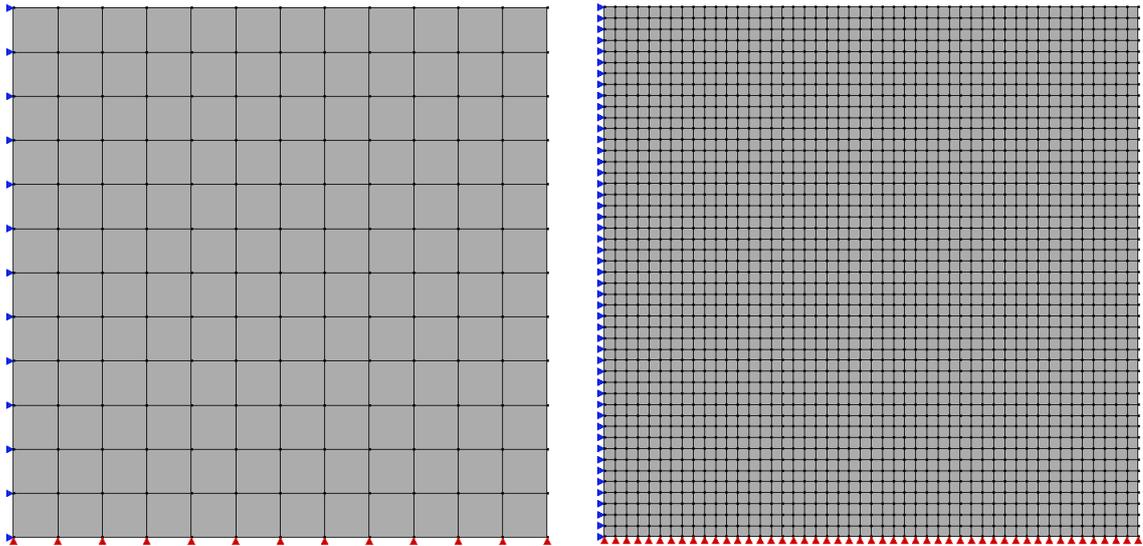


Figura 6.29: Ensaio de Punção - Discretizações adotadas.

Bandas de localização de deformações bem definidas foram observadas para as duas discretizações consideradas. A Figura 6.30 ilustra as regiões de concentração da deformação de cisalhamento γ_{xy} ao longo do domínio considerado.

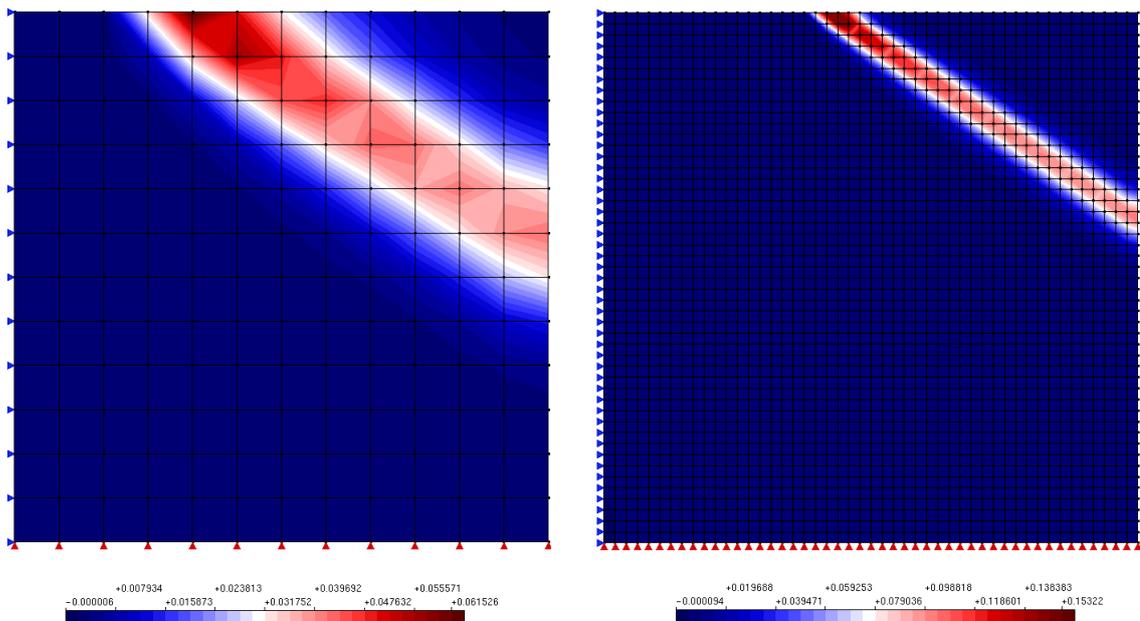


Figura 6.30: Ensaio de Punção - Bandas de cisalhamento.

A comparação entre o resultado da análise de localização e o parâmetro de localização proposto por Schreyer e Neilsen (1996a) é mostrada, para a malha grosseira, pelas Figuras 6.31(a) e 6.31(b). De maneira similar ao exemplo anterior, houve alternância na direção normal à superfície de descontinuidade obtida. Os vetores que definem a superfície de descontinuidade (\mathbf{n}) e a direção de polarização (\mathbf{m}) permutaram livremente.

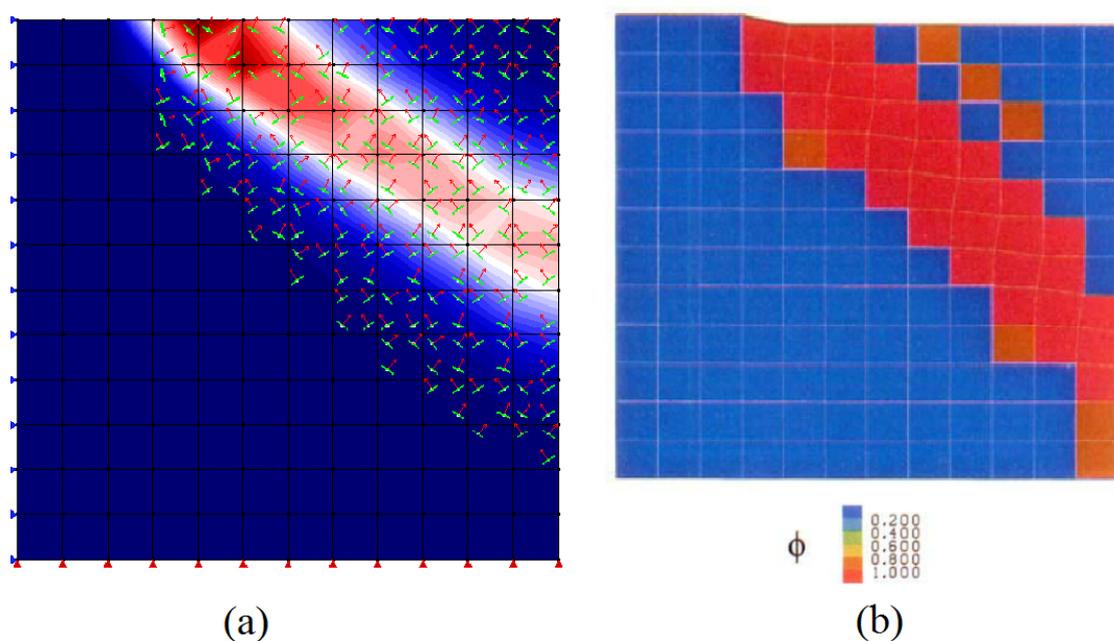


Figura 6.31: Ensaio de Punção - Análise de localização para malha grosseira.

Por fim, as Figuras 6.32(a) e 6.32(b) apresentam o resultado da análise de localização para a malha refinada e o parâmetro de localização proposto por Schreyer e Neilsen (1996a). Observa-se boa correlação entre as técnicas confrontadas. Novamente, nota-se oscilação para a direção normal à superfície de descontinuidade obtida.

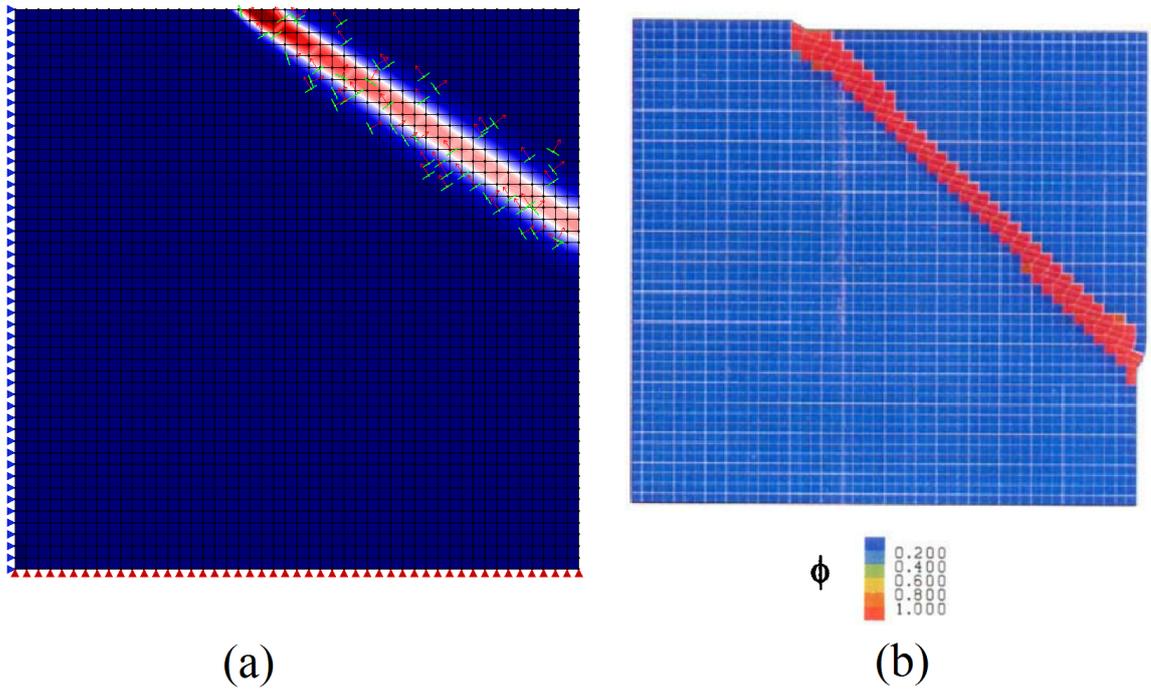


Figura 6.32: Ensaio de Punção - Análise de localização para malha refinada.

Capítulo 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 Contribuições deste Trabalho

Neste trabalho, foi formulada uma metodologia para análise de localização de deformações desvinculada da seleção de modelos constitutivos e modelos de análise. Esta independência foi alcançada considerando a singularidade do tensor acústico como condição para localização de deformações e utilizando um método numérico para solucionar o problema de otimização oriundo da análise de localização.

A análise de localização implementada utilizou a parametrização cartesiana, descrita por Mota et al. (2016), para definir a direção da superfície de descontinuidade. Esta técnica difere das tradicionais ao relaxar a condição de que o vetor parametrizado seja unitário. O trabalho de Mota et al. (2016) descreve os fundamentos matemáticos deste tipo de parametrização, mas não trata da aplicação da técnica nos diversos cenários de simulações numéricas expostas neste trabalho. Os resultados obtidos atestam a aplicabilidade da parametrização cartesiana para diferentes discretizações, modelos constitutivos, modelos de análise e tipos de carregamento.

O fenômeno de localização de deformações é observado em diversos materiais, como metais, concreto, rochas e solos. Matematicamente, a localização está diretamente associada à perda de elipticidade das equações diferenciais que governam um Problema de Valor de Contorno. A abordagem numérica para análise de localização permite também a generalidade em relação ao método numérico utilizado. No escopo desta dissertação, porém, considerou-se somente o Método dos Elementos

Finitos.

No contexto da análise estrutural, o Problema de Valor de Contorno é solucionado para as grandezas de interesse (deslocamentos, deformações e tensões), de maneira aproximada, através de métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos. Tais métodos perdem sua objetividade diante da localização de deformações e seus resultados tornam-se dependentes da discretização adotada.

Diante deste cenário, a análise de localização fornece informações pertinentes a métodos de regularização do contínuo, que visam preservar a objetividade do modelo numérico durante toda análise. Para estratégias multiescala, pontos materiais nos quais o fenômeno de localização foi detectado podem constituir escalas subjacentes de análise.

7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Com base neste trabalho, sugerem-se as seguintes expansões para o sistema INSANE:

1. Ampliar o escopo da análise de localização no sistema INSANE através da implementação de técnicas que não sejam baseadas na singularidade do tensor acústico;
2. Investigar o uso da metodologia proposta na detecção do fenômeno de localização de deformações numericamente induzido;
3. Implementar as técnicas de parametrização tradicionais (esférica, estereográfica, projetiva e tangente) descritas na Seção 4.3;
4. Ampliar a generalidade da análise de localização para os demais métodos numéricos implementados no INSANE, como Método dos Elementos de Contorno, Métodos sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados;

5. Avaliar o uso de outras metodologias para solução numérica do sistema não linear, como busca linear, métodos quase-Newton e método PSO (*Particle Swarm Optimization*);
6. Automatizar a definição de domínios locais para uma análise numérica que utiliza a estratégia multiescala;
7. Investigar a propagação de fissuras com o uso de indicadores do fenômeno de localização de deformações.

Referências Bibliográficas

- Alshibli, K. A. e Sture, S., 2000. ‘Shear band formation in plane strain experiments of sand’. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, vol. 126(6), pp. 495–503.
- Arrea, M. e Ingraffea, A., (1982), Mixed mode crack propagation in mortar and concrete., Relatório técnico 81-13, Departement Of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, EUA. Citado por Rots et al. (1985).
- Balbo, A. R. e Proença, S. P. B., 2003. ‘Análise de localização de deformação em modelos constitutivos de dano contínuo’. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, vol. 4(2), pp. 149–158.
- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 1994. ‘A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31(20), pp. 2835–2865.
- Cedolin, L., Poli, S. D. e Iori, I., 1987. ‘Tensile behavior of concrete’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 113(3), pp. 431–449.
- Chen, G. e Baker, G., 2003. ‘Material softening and structural instability’. *Advances in Structural Engineering*, vol. 6(4), pp. 353–357.
- de Borst, R., 2004. ‘Damage, material instabilities, and failure’. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, vol. 2, pp. 335–373.
- de Borst, R. e Gutierrez, M. A., 1999. ‘A unified framework for concrete damage and fracture models including size effects.’. *International Journal of Fracture* 95, pp. 261–277.

- de Borst, R., Sluys, L., Muhlhaus, H. e Pamin, J., 1993. 'Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation'. *Engineering Computations*, vol. 10, pp. 99–121.
- de Souza, P. L. F. B., 2016. Modelo de dano ortotrópico não local aplicado a regularização de resultados na análise fisicamente não linear. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- de Vree, J. H., Brekelmans, W. A. M. e van Gils, M. A. J., 1995. 'Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics.'. *Computers e Structures* 55 (4), pp. 581–588.
- Desrues, J. e Viggiani, G., 2004. 'Strain localization in sand: An overview of the experimental results obtained in grenoble using stereophotogrammetry'. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28(4), pp. 279–321.
- Doghri, I. e Billardon, R., 1995. 'Investigation of localization due to damage in elasto-plastic materials'. *Mechanics of Materials*, vol. 19, pp. 129–149.
- Driemeier, L., 1999. Contribuição ao estudo da localização de deformações com modelos constitutivos de dano e plasticidade. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Drucker, D. C., 1959. 'A definition of stable inelastic material'. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 26, pp. 101–106.
- Duszek-Perzyna, M. K. e Perzyna, P., 1993. 'Adiabatic shear band localization in elastic-plastic single crystals'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30(1), pp. 61–89.
- Forest, S. e Lorentz, E., 2004. *Local approach to fracture*. Ecole des Mines de Paris - Les Presses.
- Gori, L., 2018. Failure analysis of quasi-brittle media using the micropolar continuum theory, elastic-degrading constitutive models, and smoothed point interpolation methods. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.

- Hadamard, J., (1903), Leçons sur la propagation des ondes et les équation de l'hydrodynamique, in 'Librairie Scientifique A. Hermann et Fils'.
- Hill, R., 1958. 'A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids'. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 6(3), pp. 236–249.
- Hill, R., 1962. 'Acceleration waves in solids'. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 10(1), pp. 1–16.
- Jirásek, M., 2001. 'Modeling of localized damage and fracture in quasibrittle materials'. *Lecture Notes in Physics*, vol. 568, pp. 17–29.
- Jirásek, M., 2007a. 'Mathematical analysis of strain localization'. *Revue Européenne de Génie Civil*, vol. 11(7-8), pp. 977–991.
- Jirásek, M., (2007b), Mathematical analysis of strain localization, in 'ALERT Doctoral School 2007 - Damage and fracture in geomaterials', Aussois, France.
- Ju, J. W., 1989. 'On energy-based coupled elastoplasticity damage theories: constitutive modeling and computational aspects.'. *International Journal of Solids and Structures* 25 (7), pp. 803–833.
- Lemaitre, J., 1984. 'How to use damage mechanics'. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 80, pp. 233–245.
- Lemaitre, J., 1985. 'Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 51, pp. 31–49.
- Lemaitre, J. e Chaboche, J. L., 1990. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Leukart, M. e Ramm, E., 2006. 'Identification and interpretation of microplane material laws'. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 132(March), pp. 295–305.
- Maier, G. e Hueckel, T., 1979. 'Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials'. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, vol. 16, pp. 77–92.

- Maier, G., Willam, K. e Rizzi, E., 1996. ‘On failure indicators in multi- dissipative materials’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33(2), pp. 3187–3214.
- Mazars, J., 1984. Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non lineaire et á la rupture du béton de structure. Tese de Doutorado, Université Paris, Paris.
- Mazars, J. e Lemaitre, J., 1984. ‘Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete.’. *Shah, S. P. (Ed.), Application Of Fracture Mechanics to Cementitious Composites. NATO Advanced Research Workshop, 4-7 Setembro. Northwestern University*, pp. 375–378.
- Monteiro, A. B., 2013. Ambiente teórico-computacional unificado para modelos constitutivos: Inclusão de modelo elastoplástico com dano. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Mosler, J., 2005. ‘Numerical analyses of discontinuous material bifurcation: Strong and weak discontinuities’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194(9-11), pp. 979–1000.
- Mota, A., Chen, Q., Foulk III, J. W., Ostien, J. T. e Lai, Z., 2016. ‘A cartesian parametrization for the numerical analysis of material instability’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 108, pp. 156–180.
- Nadai, A., 1931. *Plasticity: A mechanics of the plastic state of matter*. McGraw-Hill.
- Neilsen, M. K. e Schreyer, H. L., 1993. ‘Bifurcations in elastic-plastic materials’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30, pp. 521–544.
- Oliveira, D. B., 2016. Implementação computacional de modelos elastoplásticos para análise fisicamente não linear. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Oliver, J. e Huespe, A. E., 2004. ‘Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193(27), pp. 2987–3014.

- Oliver, J., Huespe, A. E., Blanco, S. e Linero, D. L., 2006. ‘Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 7093–7114.
- Oliver, J., Huespe, A. E., Cante, J. C. e Diaz, G., 2010. ‘On the numerical resolution of the discontinuous material bifurcation problem’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, pp. 786–804.
- Ortiz, M., Leroy, Y. e Needleman, A., 1987. ‘A finite element method for localized failure analysis’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 61(2), pp. 189–214.
- Ottosen, N. S. e Runesson, K., 1991. ‘Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 27(4), pp. 401–421.
- Pamin, J., 2011. ‘Computational modelling of localized deformations with regularized continuum models’. *Mechanics and Control*, vol. 30(1), pp. 27–33.
- Pedrini, R. A. A., 2008. Análise de propagação arbitrária de descontinuidades fortes em sólidos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Peerlings, R. H., 1999. Enhanced damage modelling for fracture and fatigue. Tese de Doutorado, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, Holanda.
- Peixoto, R. G., 2016. Análise de Degradação Material, Bifurcação e Transição entre Descontinuidades Fracas e Fortes Através do Método dos Elementos de Contorno. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.
- Penna, S. S., 2011. Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica - Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Petersson, P. E., 1981. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. Tese de Doutorado, Lund Institute of Technology, Lund, Suécia.
- Rice, J. R., (1976), The localization of plastic deformation, *in* '14th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics - Delft, Holanda.', pp. 207–220.
- Rigo, E., 1999. Métodos de otimização aplicados a análise de estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Rizzi, E., 1993. Localization analysis of damaged materials. Dissertação de Mestrado, University of Colorado, Denver, CO, EUA.
- Rizzi, E., Carol, I. e Willam, K., 1995. 'Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage'. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 121(4), pp. 541–554.
- Rots, J. G., Nauta, P., Kusters, G. M. e Blaauwendrra, J., 1985. 'Smearred crack approach and fracture localization in concrete'. *HERON 30*, vol. (1), pp. 1–48.
- Rudnicki, J. W. e Rice, J. R., 1975. 'Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials'. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 23(6), pp. 371–394.
- Runesson, K. e Mroz, Z., 1989. 'A note on nonassociated plastic flow rules'. *International Journal of Plasticity*, vol. 5, pp. 639–658.
- Runesson, K., Ottosen, N. S. e Perić, D., 1991. 'Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain'. *International Journal of Plasticity*, vol. 7(1-2), pp. 99–121.
- Schreyer, H. e Neilsen, M., 1996a. 'Analytical and numerical tests for loss of material stability'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39(10), pp. 1721–1736.
- Schreyer, H. e Neilsen, M., 1996b. 'Discontinuous bifurcation states for associated smooth plasticity and damage with isotropic elasticity'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33(20-22), pp. 3239–3256.

- Shah, S. P., Swartz, S. E. e Ouyang, C., 1995. *Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and other Quasi-Brittle Materials*. John Wiley & Sons, Inc.
- Silva, L. L., 2016. Sistema gráfico interativo para análise de nucleação e propagação de trincas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Simo, J. C. e Ju, J. W., 1987. ‘Strain- and stress-based continuum damage models - i. formulation.’. *International Journal of Solids and Structures* 23 (7), pp. 821–840.
- Steinmann, P., Miehe, C. e Stein, E., 1994. ‘On the localization analysis of orthotropic solids’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 42(12), pp. 1969–1994.
- Winkler, B., Hofstetter, G. e Lehar, H., 2004. ‘Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining’. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, pp. 797–819.
- Wolenski, A. R. V., 2013. Ambiente teórico-computacional unificado para modelos constitutivos: Inclusão de modelo de microplanos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Wolff, K. P., 2010. Implementação computacional de um modelo de fissuração para o concreto baseado no método dos elementos finitos estendido (xfem). Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.