PROMESTRE
MESTRADO PROFISSIONAL
EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA

FaE
Faculdade de Educação

UFMG

DISSERTAÇÃO

ARTICULANDO CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL PARA O ENSINO DE NÚMEROS

WESLEI LIMA DE FIGUEIREDO

ORIENTADORA: SAMIRA ZAIDAN

Belo Horizonte, Fevereiro de 2019.

PROMESTRE
MESTRADO PROFISSIONAL
EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA

FaE
Faculdade de Educação

UFMG

DISSERTAÇÃO

ARTICULANDO CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL PARA O ENSINO DE NÚMEROS

WESLEI LIMA DE FIGUEIREDO

ORIENTADORA: SAMIRA ZAIDAN

Belo Horizonte, Fevereiro de 2019.

F475a T

Figueiredo, Weslei Lima de, 1974-

Articulando características do sistema de numeração decimal para o ensino de números [manuscrito] /Weslei Lima de Figueiredo. - Belo Horizonte, 2019.

148 f., enc.,il.

Bibliografia: f. 115-118.

Inclui apêndices.

Dissertação -- (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.

Orientadora: Samira Zaidan

1. Educação -- Teses. 2. Sistema decimal -- Teses. 3. Numeração -- teses. 4. Números naturais – Estudo e ensino -- Teses. 5. Matemática - Estudo e ensino – Teses. 6. Divisão (Aritmética) --Teses. 7. Algoritmos -- Teses. 8. Multiplicação – Teses.

I.. Zaidan, Samira. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação. III. Título.

CDD- 372.7

Catalogação da Fonte*: Biblioteca da FaE/UFMG (Setor de referência)

Bibliotecário: Ivaney Duarte. CRB6 2409

(Atenção: É proibida a alteração no conteúdo, na forma e na diagramação gráfica da ficha catalográfica†.)

* Ficha catalográfica elaborada com base nas informações fornecidas pelo autor, sem a presença do trabalho físico completo. A veracidade e correção das informações é de inteira responsabilidade do autor, conforme Art. 299, do Decreto Lei nº 2.848 de 07 de Dezembro de 1940 - "Omitir, em documento público ou particular, declaração que dele devia constar, ou nele inserir ou fazer inserir declaração falsa ou diversa da que devia ser escrita..."

† Conforme Art. 297, do Decreto Lei nº 2.848 de 07 de Dezembro de 1940: "Falsificar, no todo ou em parte, documento público, ou alterar documento público verdadeiro..."

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA/MP

UFMG

FOLHA DE APROVAÇÃO

ARTICULANDO CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL PARA O ENSINO DE NÚMEROS

WESLEI LIMA DE FIGUEIRÊDO

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA/MP, como requisito para obtenção do grau de Mestre em EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA, área de concentração ENSINO E APRENDIZAGEM.

Aprovada em 20 de fevereiro de 2019, pela banca constituída pelos membros:

Samira Zaidan

Prof(a). Samira Zaidan - Orientador
UFMG

Ana Paula Jahn

Prof(a). Ana Paula Jahn
Universidade de São Paulo

Prof(a). Diogo Alves de Faria Reis
UFMG

Prof(a). Denise Alves de Araújo
(UFMG).

Belo Horizonte, 20 de fevereiro de 2019.

Agradecimentos

A realização da presente dissertação de mestrado deve-se aos contributos de várias pessoas e instituição, sem os quais não teria tornado uma realidade e deixo aqui os meus sinceros agradecimentos.

À Universidade Federal de Minas Gerais e ao programa de Mestrado Profissional, PROMESTRE-FaE, por possibilitarem uma formação ampla e reconhecida.

A todos os professores do PROMESTRE-FaE, principalmente aos professores e professoras da linha de Educação Matemática, pela dedicação, contribuição, motivação e profissionalismo em suas mediações.

À minha orientadora Professora Doutora Samira Zaidan, por ter acreditado e confiado no projeto inicial e pela orientação na condução dos trabalhos, pois durante toda a caminhada agiu de forma respeitosa, profissional, eficiente, com tamanha sabedoria, paciência e educação admiráveis. Por sempre se disponibilizar de forma competente, prazerosa e atenciosa. Por propiciar alento, tranquilidade, serenidade e aprendizado até nos momentos mais delicados. Pela parceria e sensibilidade no trato para considerações dos trabalhos com as minhas atividades familiares, profissionais e sociais. Por fim, agradeço o aprendizado, amizade e confiança.

Aos amigos de sala, Ana Paula Marques, Andreza Castro Ribeiro, Denise França Stehling e Felipe Junio de Souza Oliveira pela caminhada, pela torcida, pelas parcerias e pelo aprendizado. Certamente as conversas extraclasses alimentaram e enriqueceram essa etapa.

À banca de qualificação,pelo norte dado na condução dos trabalhos, propiciando mais qualidade à produção final, pelo profissionalismo e sugestões: Professoras Ana Paula Jahn, Denise Alves de Araújo e Keli Cristina Conte.

Às Professoras Neila Marcelle Gualbeto Leite e Tatiane Reis do Amaral e ao Professor José Sergio Domingues, por fazerem parte de uma amizade iniciada neste trabalho.

Ao professor Marcus pela digitalização das imagens, aos professores Wulledson e Thiago e às professoras Alcione, Flávia e Jane. Ao Professor Ivair pelo incentivo e ajuda nos artigos e assuntos acadêmicos. Ao Professor Leandro pelo auxílio nas leituras e orientações diversas. Às Professoras Adriana e Dafne pela leitura, formatação e correções que foram de grande ajuda. À Professora Edina e a todos os amigos que contribuíram de diversas formas para o sucesso deste trabalho.

A toda minha família pelo carinho, apoio e valorização. Ao meu sobrinho Lucas pela ajuda nas traduções, à minha irmã Walnéria pela ajuda nas correções, a todos e, em especial, à minha irmã Waldélia, por propiciarem que eu tivesse tempo para a criação desta pesquisa.

Agradeço de forma muito carinhosa à minha mãe, Ângela, e minha Sogra, Raquel, pela torcida, afeto e principalmente pelas ações de cuidado com minhas filhas que me permitiram tranquilidade e tempo nos momentos de escrita.

À minha esposa Mariane pela cumplicidade, atenção, incentivo, confiança e por sempre acreditar e sonhar junto a mim, de modo a se tornar possível chegar até aqui. Pela dedicação às nossas filhas, tentando suprir e amenizar os momentos em que eu estava ausente. Agradeço com grande orgulho à minha filha, Ana, pelo carinho, paciência e compreensão de minhas faltas em suas inocentes brincadeiras. Agradeço também à chegada da minha filha Lara, que proporcionou renovações de ânimo e tranquilidade ao fim da jornada.

Agradeço a Deus por tornar tudo isso possível e por sempre me acompanhar.

Resumo

Este trabalho nasceu de experiências e reflexões acerca do ensino de números na escola básica. Toma como pressuposto que uma melhor compreensão da composição e decomposição dos números, bem como das demais características do Sistema de Numeração Decimal-SND, podem favorecer o ensino e a aprendizagem dos números racionais positivos na forma decimal. Toma também como pressuposto possibilidades de atuar diante das dificuldades persistentes na construção de capacidades operatórias com números decimais na escola básica. O SND é de uso amplo nas sociedades modernas, se mostra indispensável para inúmeras situações e suas aplicações estão ao alcance de todos. A riqueza e potencialidade do SND se apresentam ainda maiores quando unimos o ensino de números naturais com números decimais, enfatizando o seu caráter de sistema único. Apontamos, então, a necessidade de melhor percepção e uso das características do SND para compreender os algoritmos das operações, destacando a composição e decomposição do número, os diversos significados do valor posicional, a organização dos números com vírgula conjuntamente aos números naturais. Apresentamos também um conjunto de atividades, com as quais indicamos elementos do SND para melhor entendimento dos números e as operações de multiplicação e divisão em situações variadas. Nosso trabalho se volta para um diálogo com os professores, visando à formação docente em serviço e também inicial, considerando a possibilidade de ampliar as metodologias de ensino e oferecer elementos para enfrentar dificuldades.

Palavras-chave: Sistema de Numeração Decimal; Ensino de números naturais; Ensino de números com vírgula; Algoritmos da multiplicação; Algoritmos da divisão; Educação Matemática.

Abstract

This work emerges from experiences and reflections about the teaching of numbers in elementary school. It assumes that a better understanding of the Decimal Numeral System core characteristics, such as factorization, may favor both teaching and learning of positive rational numbers in decimal form.This study also assumes the possibility of acting in the face of persistent challenges in the development of operative capacities with decimal numbers in primary school. The Decimal Numeral System, here addressed as "DNS", is widely used in modern societies and, its applications, already indispensable for an uncountable number of situations, are accessible to all. The richness and potentiality of DNS shows itself even greater when we combine the teaching of natural numbers with decimal numbers, emphasizing how comprehensive the DNS really is. We then point out the need for improvement on the perception of the DNS's features to understand the algorithms behind the operations, highlighting the factorization and defactorization of numbers, the various meanings of positional value, the arrangement of rational numbers alongside natural numbers, etc. We present a set of explanatory and exploratory activities, where we look for DNS elements to better understand numbers and operations on the multiplication and division operations in varied situations. Our work turns to a dialogue with the teachers, aiming at both starter and in-service teacher training, considering to expand teaching possibilities and offer elements to face difficulties.

Key words: Decimal Numeral System; Teaching of natural numbers; Teaching of rational numbers; The Multiplication Algorithm; The Division Algorithm; Teaching Of Mathematics.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

Apresentação geral

Aprendi com meus pais que estudar era essencial na vida da maioria dos cidadãos e que eu tinha que fazer a minha parte, pois é uma responsabilidade intransferível. Cursei todo o ensino fundamental e médio em escola pública e no ano de 1994 ingressei no curso de Licenciatura em Matemática na FAFI – Faculdade de Filosofia e Letras de Belo Horizonte, hoje, UNI-BH, concluindo o curso em dezembro de 1996.

Iniciei minha caminhada como professor de escola pública e durante quatorze anos atuei na Rede Estadual de Ensino nas escolas da cidade de Vespasiano – MG. No período de 2002 a 2004, fui diretor da Escola Municipal "Bárbara Maria Salomão", também no município de Vespasiano, na qual funcionava apenas o ensino fundamental. Neste período, trabalhei muito visando meu crescimento pessoal, pois era preciso tomar decisões que afetavam diretamente mais de mil famílias em uma região carente. Foi uma experiência muito rica e durante esse período pude acompanhar mais de perto o processo de ensino de matemática nos anos iniciais que se desenvolvia na escola. Chamou minha atenção a criatividade envolvida na ação das professoras, mas também suas dificuldades, especificamente com as operações de números naturais e racionais.

Nos anos de 2005 e 2006, procurei aprimorar ainda mais os meus conhecimentos e concluí o curso de Especialização em Matemática para Professores, com ênfase em Cálculo, na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). O período também foi de muito crescimento profissional, pois o foco nas questões abordadas contribuiu com a minha prática até os dias de hoje, melhorando minha segurança para tratar os conteúdos, alavancando o processo de pesquisa e apontando soluções para questões relacionadas ao aprendizado matemático. Durante esse período, me deparei com uma situação embaraçosa: precisei efetuar uma divisão entre dois números racionais, no qual se tratava dividir 8004 quilômetros em 8 trechos iguais, e o resultado correto foi atingido por estimativa, ou seja, pelo uso do algoritmo convencional não se mostrava simples de resolver. Em conversa com alguns amigos, também professores de Matemática, percebi que determinados erros nos resultados das operações básicas eram muito comuns devido à complexidade dos algoritmos. Notei que geralmente a abordagem dos algoritmos se dava de forma mecanizada e quase sem sentido, pois o foco maior concentrava-se no procedimento do método de operar, e não no entendimento do processo de como operar os números racionais positivos. As dificuldades também chegavam até nós, professores dos anos finais do ensino fundamental e médio. Tal situação me levou a questionar os algoritmos das operações básicas e o entendimento que nós, professores, levávamos aos estudantes, a fim de detectar o que contribuía para dúvidas em um conteúdo considerado por muitos como trivial e elementar, como no exemplo citado. Trivial? Parece que operações como o exemplo citado não podem ser consideradas triviais. Por algum tempo investiguei como ocorria o processo de ensino nos anos iniciais do ensino fundamental, por meio de relatos de alguns professores e consulta a diversos livros didáticos adotados em escolas públicas e particulares. Desde então, penso nos números e operações. Observo, faço anotações e busco formas de entendimento para o seu ensino.

No início do ano de 2006 vi a possibilidade de adquirir uma experiência profissional em uma cultura completamente diferente da nossa. Fiz a escolha de vivenciar um ritmo de vida pessoal e profissional bastante diferente. Entre novembro de 2006 a novembro de 2008, trabalhei como professor de Matemática e Física do Colégio Pitágoras no Japão. As aulas eram ministradas em Português e o currículo adotado era o mesmo adotado no Brasil. Minha rotina de trabalho era intensa, além de atender às Unidades que se localizavam em diferentes províncias, havia a necessidade de trabalhar com salas de aulas multiseriadas, o que foi para mim uma grande novidade. Trabalhava ao mesmo tempo com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, até alunos do terceiro ano do Ensino Médio. A diversidade da sala multiseriada não se limitava apenas aos conteúdos, ali se reuniam alunos dos quatro cantos do Brasil com diferentes estilos de vida, diferentes níveis acadêmicos e sociais em um contexto onde a cultura era muito diferente da cultura brasileira. Esse período correspondeu à mais rica experiência profissional da minha carreira de professor. Após dois anos intensos, a saudade dos familiares contribuiu bastante para meu retorno ao Brasil.

Em fevereiro de 2009, trabalhei como professor de Matemática no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET), em Vespasiano – MG. Esta Unidade de ensino funcionava como um anexo do Campus I do CEFET de Belo Horizonte. Durante outubro de 2009 e outubro de 2011, fui professor substituto do CEFET-BH. No transcorrer desse período de trabalho como professor de Matemática, obtive um grande aprendizado, especificamente devido ao estilo diferente de ensino de uma Escola onde se valorizava a autonomia do aluno. Entretanto, destaco que em todas essas experiências pude notar as mesmas dificuldades de entendimento e uso dos números racionais e suas operações. Fui entendendo, então, que esse assunto se apresentava como um problema persistente e o desafio de entendê-lo me dominou.

No ano de 2014 acompanhei um grupo de professores da Rede Municipal de Vespasiano no estudo do uso dos algoritmos das quatro operações básicas e, em dezembro de

2015, publiquei um artigo na Revista de Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto, que destaca a realidade do ensino do sistema de numeração nos anos iniciais das escolas municipais das cidades de Vespasiano e São José da Lapa (FIGUEIREDO E SILVA, 2015).Neste artigo, como experiência piloto, há os resultados de um levantamento descritivo devotado a explorar o grau de percepção das professoras da região de Vespasiano e São José da Lapa quanto ao ensino dos algoritmos das operações fundamentais.

Atualmente leciono Matemática no Colégio Santa Dorotéia em Belo Horizonte – MG, cujo objetivo geral principal é a formação de um sujeito crítico e autônomo. Contudo, nota-se a necessidade de sempre haver melhorias no processo de aprendizagem. No segundo semestre de 2017 assumi também um cargo de professor na Rede Estadual de Minas Gerais, onde atuo no turno noturno. Em geral, as mesmas dificuldades são ainda observadas nestas experiências e os alunos esquecem a utilização de alguns recursos já aprendidos, provavelmente, porque a Matemática precisa ser melhor abordada em sua base e as definições apresentadas com maior clareza. As preocupações específicas com o ensino dos números e suas operações permanecem e me levaram ao mestrado profissional, onde pretendi retomar e aprofundar entendimentos e abordagens desse tema.

Introdução ao tema

Um dos elementos essenciais do raciocínio matemático é a ideia do número que está presente em várias situações do dia a dia de todos nós. Utilizamos os números quase todo o tempo mesmo sem a necessidade de percorrer por uma escolarização. Não há como ensinar matemática sem falar de números, pois é um conhecimento essencial para a vida social e para a própria compreensão da matemática.

Tomando como base a ideia de número, é pertinente pensarmos na sua organização lógica, sistematizada e coerente que contempla em seu formato toda a expansão das aplicações numéricas. Essa organização é encontrada em um conjunto de regras e normas que nos dias de hoje já está difundido e embasado e que recebe o nome de Sistema de Numeração Decimal ou Sistema de Numeração Indo-Arábico.

Vários estudos, como os de D´Ambrósio (1989), abordam dificuldades dos educandos com os números, quando as abordagens dos algoritmos das operações básicas no ensino eram compostas de regras que, embora funcionassem muito bem para atingir uma resposta correta, não havia a compreensão do que se estava fazendo. Na escola, o algoritmo convencional da divisão é ainda citado por alunos e professores como o mais difícil e levando a muitas incorreções, pois ideias essenciais para compreendê-lo não estavam muito claras, como o uso do zero e da vírgula no quociente.

Em nossa experiência e contato com práticas de ensino, verificamos que nas atividades de multiplicação era rotineiro fazer sequências organizadas dos produtos das combinações entre os algarismos, que recebia o nome de “fatos” (em referência a serem eles fatos fundamentais da matemática). Era exigência da escola, em demasia, a repetição dessa tarefa, mesmo concordando que é imprescindível saber que 3 x 5 é 15 ou que 9 x 7 é 63. Hoje sabemos que se apostou muito na memorização como método exaustivo de aprendizagem, pois a essência da operação de multiplicação, na qual se destaca sua funcionalidade, foi substituída por acreditar que ter um desempenho satisfatório em matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental I se limitava a saber, rapidamente e de forma decorada, tais “fatos”. Seria este, a nosso ver, um bom exemplo de um ensino focando a memorização, muitas vezes em detrimento da compreensão.

Para abordar situações como esta, buscamos o currículo da graduação de Matemática, com disciplinas voltadas para o conteúdo matemático e disciplinas voltadas para o ensino de conteúdo matemático, observando que dificilmente se menciona o ensino do Sistema de Numeração Decimal, pois há ideia que o entendimento da formação de números e a clareza dos algoritmos das operações básicas já estudados na escola básica são satisfatórios.

Em função da curiosidade e da necessidade de se obter respostas para as questões sobre o ensino do Sistema de Numeração Decimal buscamos estudos desvinculados do currículo escolar superior, já que não contempla geralmente a questão. Percebemos que são esparsos os materiais destinados aos professores e professoras que justificam a maioria dos porquês dos procedimentos dos algoritmos das operações básicas, especificamente pautados nas características do Sistema de Numeração Decimal. Os elementos que constituem o SND nos chamam a atenção como base argumentativa para entender o próprio sistema, de modo que passamos a construir argumentos e explicações referenciadas nas características do SND para justificar procedimentos algorítmicos, visando o seu ensino.

A proposta do PROMESTRE – FaE-UFMG, que proporciona desenvolver pesquisas e material de ensino capazes de melhorar a qualidade da educação, ofereceu a possibilidade de realização de um estudo que possa contribuir com a elaboração de um material voltado para professores que trate das características do Sistema de Numeração Decimal.

A proposta desse estudo, então, é investigar o ensino do Sistema de Numeração Decimal nos anos iniciais do Ensino Fundamental e nasceu de uma preocupação que tivemos em nossa prática docente com persistentes dificuldades dos estudantes em operar com números e, principalmente, na observação e contato com docentes do ensino fundamental. Procuraremos trazer situações que se apresentam com dificuldades de aprendizagem dos números racionais positivos, deixando a possibilidade de embaraços na compreensão da formação dos números e nos algoritmos das operações básicas. Cenários que estão diretamente ligadas ao ensino de números precisam de uma maior atenção, pois o nosso sistema de numeração, embora pareça simples, possui uma série de emaranhadas características intrínsecas e pautadas em pensamentos que justificam a praticidade dos números, mas que nem sempre são de fácil compreensão.

Destacaremos nesse estudo uma abordagem da formação dos números valorizando sua composição e decomposição, os algarismos, as ordens e classes, sua parte inteira e sua parte não inteira, o uso da vírgula, o sistema como aditivo e multiplicativo de base 10, como características do Sistema de Numeração Decimal. Quanto às operações, veremos a multiplicação e divisão, operações por nós escolhidas por representarem maiores dificuldades.

Apontaremos as formas de multiplicação como soma de parcelas repetidas, como organização retangular, como raciocínio combinatório, como raciocínio proporcional, representada na reta numerada, decompondo o número, sem o lápis e papel e, principalmente, a multiplicação utilizando o algoritmo convencional. Na divisão, contemplaremos algumas formas, particularidades e seu algoritmo convencional.

Dentro dessa perspectiva, esta proposta de pesquisa tem o seguinte objetivo: Investigar o ensino dos números racionais positivos nos anos iniciais do ensino fundamental referenciando-se nas características, propriedades e operações do sistema de numeração decimal, propondo um material de ensino para docentes.

Queremos que os tópicos abordados contribuam para uma boa reflexão sobre a utilização de regras do nosso sistema de numeração que é referenciado pelas sociedades modernas do mundo inteiro. É importante ressaltar que o conteúdo trabalhado aqui é voltado para discutir com professores, pois a linguagem e passos dados foram preparados para quem possui uma maturidade e experiência, diferente dos alunos que estão na Escola Básica. Nosso propósito é contribuir para um melhor entendimento da argumentação nas ações de ensino do Sistema de Numeração Decimal na expectativa de oferecer elementos para os professores ampliarem suas condições de ensino. Iremos recomendar que todos os trabalhos com os alunos sejam feitos valendo-se de materiais concretos e manipulativos, sempre recorrendo à formação dos números.

Para uma investigação sobre o ensino do Sistema de Numeração Decimal nos anos iniciais da Escola Básica, a metodologia utilizada nesse estudo se baseia em contato com produções anteriores de pesquisas já realizadas e materiais didáticos; a exploração de ideias do próprio autor que, registradas ao longo de sua experiência docente, foram agora retomadas, sistematizadas e redigidas propondo argumentos e possibilidades de ensino, preocupados com alguns pontos onde as dificuldades possam ser maiores. Foram consultados livros didáticos para observar e analisar o tratamento dado aos procedimentos algoritmos, selecionados por serem utilizados em escolas públicas, atualizados e por terem sido aprovados no Programa Nacional do Livro Didático.[1]

---

[1]Foram consultadas as seguintes coleções de livros didáticos:
.BORDEAUX, Ana Lúcia; RUBINSTEIN, Cléa; FRANÇA, Elizabeth; OGLIARI, Elizabeth; MIGUEL, Vânia. **Novo Bem-Me-Quer Matemática**. Ed. do Brasil, 2017, Vs 1, 2, 3, 4 e 5.
.DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Ápis. Matemática**. Ed. Ática, 2017. V.4.
.GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A Conquista da Matemática** – São Paulo: FTD, 2017. Vs. 1, 2, 3, 4 e 5.

Trata-se de uma investigação qualitativa sobre o ensino do sistema de numeração, voltada para a formação de professores. Para Bogdan e Knopp, "nada de presumir que se sabe o suficiente para reconhecer as questões importantes antes de efetuar a investigação" (1991, p. 50). A pesquisa iniciou-se pelo rol de procedimentos inexatos, confusos ou incompreensivos sobre o Sistema de Numeração Decimal levantados por nós e que, ao nosso ver, permeia boa parte do corpo discente e, de forma reservada, uma parte do corpo docente com que temos contato.

Como temos em nossa experiência e estudos uma formulação diante dos objetivos propostos, pudemos recorrer a anotações feitas ao longo dos anos da profissão e sistematizamos as dificuldades de ensino-aprendizagem, juntamente com aspectos dos conteúdos que merecem mais atenção. Para o recurso educativo (produto educacional) que tivemos de elaborar, dentro da proposta do PROMESTRE-FaE UFMG, inicialmente retomamos os pontos por nós observados que têm representado dificuldades para o ensino de números nos anos iniciais; elaboramos uma sequência de abordagem preliminar, em caráter experimental, considerando as características, propriedades e operações do sistema de numeração. Posteriormente reelaboramos a sequência e apresentamos um recurso educativo como um material didático de apoio ao professor e à professora em formato de minicurso, visando à formação inicial e continuada.

Um dos desafios que colocamos é certificar que o aluno, ao passar pelos anos iniciais do Ensino Fundamental, possa compreender o funcionamento do nosso sistema de numeração. Assim, é preciso nortear os algoritmos das operações básicas sempre valorizando o sistema de numeração, abordando de forma clara, contextualizada e também utilizando materiais manipulativos, de modo a garantir que nosso aluno saiba, desde o início de sua vida escolar, o funcionamento dos números.

A intenção desse estudo não é apontar qual é o melhor caminho a percorrer ao trabalhar na sala de aula com o ensino do Sistema de Numeração Decimal, pois sabemos que o contexto de onde acontece o aprendizado precisa ser considerado e vale mais que seguir uma orientação enrijecida. Pretendemos apresentar uma visão de como tratar o ensino de

---

.IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo; MILANI, Estela. **Presente Matemática Guia e Recursos Didáticos** – São Paulo: Editora Moderna, 2009. Vs. 2, 3 e 5.
.SILVEIRA, Ênio. **Aprender e Relacionar Matemática**. Editora Moderna, 2017. V. 1, 2, 3, 4 e 5.
.YOUSSEF, Antônio N,; GUELLI, Oscar A.. **Meu Livro de Matemática**. AJS, 2017. Vs 1, 2, 3, 4 e 5.

números, de modo a oferecer uma possibilidade que pode ajudar na prática de ensino do assunto. Queremos mostrar que podemos encarar o nosso Sistema de Numeração de forma mais completa, explorando bem as suas características e observando que elas se entrelaçam como um conjunto de informações baseadas em uma lógica e que pode ser um modo de favorecer o seu ensino em todos os níveis da escolarização. Visamos, assim, ofertar um suporte ao professor e à professora que está diretamente em sala de aula, apoiando-os em suas práticas, ratificando ou promovendo uma leitura mais centrada nos porquês de algumas abordagens vistas nos livros e materiais didáticos voltados para o ensino do Sistema de Numeração Decimal e apresentaremos uma possibilidade de compreender os procedimentos algoritmos de suas operações.

Assim, a partir de nossas experiências como professores do ensino fundamental e acessando estudos já realizados, formulamos uma hipótese de ensino dos números recorrendo às características do Sistema de Numeração Decimal. Acreditamos ser este um meio de dar explicações mais claras e significativas dos procedimentos dos algoritmos aos educandos.

Veremos no capítulo I apontamentos sobre os números racionais positivos com algumas questões que são de grande relevância para o ensino das características do Sistema de Numeração Decimal e nem sempre recebem destaque no processo ensino aprendizagem. Agrupamos as principais problematizações sobre o ensino de números que conseguimos referenciar, destacando alguns cuidados que podemos ter ao tratarmos do assunto, valorizando algumas abordagens que possam contribuir com determinadas situações que inibem ou estimulem o aprendizado do aluno, por meio de formas que excluem ou incluem um processo lógico.

No capítulo II, exploraremos estudos já realizados sobre o Sistema de Numeração Decimal como atuais teses e dissertações já aprovadas e que envolvem as ideias centrais do nosso trabalho.

No capítulo III, veremos a formação dos números no Sistema de Numeração Decimal, destacando as características do Sistema de Numeração Decimal, também referenciadas e com apontamentos voltados para a compreensão do sistema. Utilizamos de comparações das abordagens de alguns livros didáticos e de livros paradidáticos que contribuam para formação dos professores, para verificarmos o que há de comum no ensino de números nos anos iniciais.

No capítulo IV, abordaremos o Sistema de Numeração Decimal e suas operações de multiplicação e divisão. Veremos as principais ideias da multiplicação e seus procedimentos no uso do algoritmo convencional, além de algumas particularidades da divisão com foco principal no processo do algoritmo convencional da divisão.

Fazemos nossas considerações finais, procurando retomar os objetivos do estudo e apontando síntese de nossas ideias.

CAPÍTULO I

1. Alguns apontamentos sobre os números racionais e o seu ensino

A utilização dos números é amplamente difundida em diversos setores da vida humana e ocupa um espaço singular na sociedade na qual sua organização e praticidade movem o mundo. A organização dos números no Sistema de Numeração Decimal (doravante SND) significou um grande avanço na sua coesão e compreensão e, do ponto de vista da educação, no seu ensino. Veja a importância do SND para Teberosky e Tolchisnsky:

> A invenção e difusão do Sistema de Numeração Decimal constitui uma contribuição extraordinária que poderíamos comparar, sem nenhum exagero, à suposta modernização produzida pelas calculadoras e pelos computadores, porque facilitou o cálculo e, consequentemente, permitiu a evolução da matemática. (TEBEROSKY e TOLCHISNSKY, 2007, p.263).

Outros autores ainda podem ser citados, para Pires, "um sistema de numeração é um conjunto de princípios que constitui o artifício lógico de classificação em grupos e subgrupos das unidades que formam os números" (2013, p. 52). Já para Cardoso, "O Sistema de Numeração é um conjunto de regras usado para descrever quantidades, utilizando um determinado conjunto de símbolos" (2013, p. 8).

Praticamente em todo o universo social utiliza-se do SND, também conhecido como Sistema de Numeração Indo-Arábico. No âmbito da escolarização, materiais didáticos para formação de professores, como o de Centurión (1994, p.36), mostram que esse sistema possui características especiais:

. possui apenas dez símbolos com os quais pode-se escrever qualquer número;

. é de base dez, ou seja, sua organização e registro tomam como referência a quantidade dez, formando múltiplos e submúltiplos;

. é posicional, de modo que o lugar ocupado pelo algarismo no número define o seu valor;

. é aditivo, pois o valor do número pode ser obtido pela soma de seus valores posicionais;

. é multiplicativo, porque o algarismo de uma ordem representa dez vezes o algarismo da ordem à sua direita;

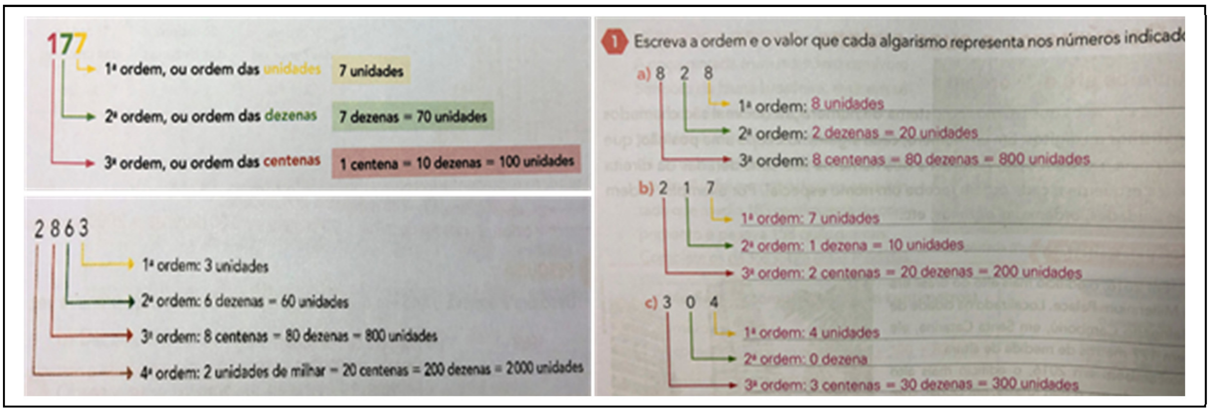
. possui o zero para indicar uma "posição vazia", o que é de grande relevância, pois completa as condições de registro dos números e, ainda, favorece enormemente as operações.

Muitas situações desafiantes surgem no ensino dos números, tarefa da escolarização durante todo o ensino fundamental, como o entendimento das características do SND e das operações numéricas. Buscaremos formular aqui algumas situações de ensino que merecem ser melhor analisadas para favorecer o seu ensino. Como modo de apresentação de nossas ideias, destacaremos alguns aspectos que merecem cuidados, esperando poder ajudar o professor e a professora no ensino dos números racionais positivos.

A primeira situação que destacamos é como tratar a organização das ordens no SND: articular a abordagem da parte inteira com a parte decimal. A comparação entre as ordens[2] de um número merece destaque e preocupação, pois há algumas maneiras de entender a sua apresentação. Por exemplo, o número 100 possui 100 unidades, 10 dezenas ou ainda 1 centena, mas também a informação que uma centena possui 1000 décimos parece ser relevante; ou que uma dezena possui mil centésimos também parece ser de importância, uma vez que tais comparações exigem uma extensão maior do pensamento sobre o posicionamento dos algarismos de um número. Pensamos que tais percepções mostram as possibilidades do SND.

O autor de livros didáticos Luiz Roberto Dante (2017, V.4, p.12-51), na Unidade 1 que possui o título Sistema de Numeração, apresenta comparações entre ordens diferentes da unidade duas vezes (p.23 e p.25) e disponibiliza o exercício 1 da p.24 com essa finalidade, conforme figura abaixo:

Figura 1: Atividade envolvendo comparações entre ordens



FONTE: DANTE, Luiz Roberto. Ápis Matemática, livro didático 4º ano. 2017, ps.23 – 25.

[2]Nos referiremos a Ordem de um número querendo dizer o posicionamento do algarismo no número. Exemplo: o número 35 possui o algarismo 3 na ordem das dezenas e o algarismo 5 na ordem das unidades.

Parece-nos bastante interessante levar a diferentes ordens a ideia de agrupamento na base 10 e não supor que, ao fazer isto apenas com as ordens da primeira classe[3], o aluno fará a extensão do pensamento para as demais. Parece-nos essencial, ainda, considerar situações específicas, como a colocação do zero em uma casa. Adiante, daremos exemplos e explicitaremos melhor esta preocupação. Logo, nesta primeira situação, queremos destacar a importância de se explorar com bastante intensidade as possibilidades de percepção do número a partir de seus valores posicionais no âmbito dos inteiros e também dos decimais. É válido lembrar que a lógica aplicada na comparação dos números inteiros é a mesma lógica usada nos números decimais e também na comparação de uma certa quantidade inteira em uma quantidade decimal, explorando, por exemplo, que em duas dezenas há duzentos décimos; que o número 7 também representa 70 décimos ou 700 centésimos.

Uma segunda situação de ensino que merece destaque está atrelada às quatro operações: utilizar a ideia do valor posicional para explicar a adição, subtração, multiplicação e divisão. Como compreender e proceder no ensino dos seus algoritmos? É possível, além do ato mecânico, dar explicações com base nas características do sistema ao passo a passo dos procedimentos de cada uma?

As operações básicas se ancoram em procedimentos essenciais e são, muitas vezes, estimuladas com expressões do tipo “vai um” ou “pega emprestado” sem uma clareza da ideia de transformação que ocorre. Acreditamos ser de grande importância que no algoritmo usual da multiplicação se explore um pouco mais o porquê, por exemplo, de não se preencher a ordem da unidade ao multiplicarmos o algarismo das dezenas do segundo fator pelo primeiro fator e também por que devemos somar o resultado da multiplicação das unidades do segundo fator pelo primeiro fator, com o resultado da multiplicação das dezenas do segundo fator com o primeiro fator. A mesma preocupação se estende para a divisão de números racionais, dado que no algoritmo convencional da divisão o destaque se resume na nomeação ou não das ordens do dividendo e quociente valorizando assim o entendimento da posição que o algarismo ocupa, uma vez que esse algoritmo possui essa exigência.

Essas são duas questões que preocupam professores quando vai tratar do assunto e nós aqui procuraremos explorar os entendimentos e procedimentos do sistema de numeração decimal e suas operações, na expectativa de poder colaborar com o ensino delas.

[3]Classe entendida como um conjunto de três ordens consecutivas a contar da vírgula. Por exemplos: o número 23 154 possui duas classes; 1 354,78 possui três classes.

1.1 Explorando a compreensão dos números racionais positivos para o ensino

Os professores e as professoras dos anos iniciais recebem a função de iniciar a construção da matemática na escola e o conteúdo de grande importância nessa construção é a formação dos números racionais positivos e suas operações. Para Pires (2013), é nos anos iniciais da escola básica que se introduz a ideia de números e utiliza-se do sistema de numeração para compreensão desse elemento-chave da matemática. Nos projetos curriculares hoje existentes, o ensino de números se prolonga pela escolarização do ensino fundamental, mas muitas vezes ainda aparecem como dificuldade para o aluno do ensino médio.

Para efeito de entendimento, apresentaremos a seguir algumas particularidades do SND que pretendemos destacar, uma vez que podem contribuir diretamente para o ensino-aprendizagem da ideia de número e seus algoritmos. Nós apresentaremos as particularidades de modo separado, mas entendemos que nos processos de ensino não podem ser vistas de modo isolado, porque se relacionam. Também não queremos indicar o momento da escolarização que devem ser utilizadas, porque pensamos em oferecer aos professores alternativas de entendimentos e abordagens, compreendendo que cada profissional tomará a decisão de quando e como ensinar.

<u>O número entendido e usado como algarismo</u>

Seria necessário separar entendimentos de número e algarismo? Em que essa separação pode ajudar? O símbolo 5, por exemplo, pode ser utilizado como número e como algarismo. Em determinados contextos esse uso não cria maiores problemas, mas é possível que em várias situações se pense que o número 35 seja formado pelos números 3 e 5 ou pelos algarismos 3 e 5, deixando transparecer que números e algarismos sejam sinônimos. Em sua coleção Imenes, Lellis e Milane (2009, v.2, p.12), não enfatizam a diferença entre algarismo e número, mas chamam a atenção que, por exemplo, o algarismo 4 não é o mesmo que o número 4. Para eles "essas diferenças não são discutidas porque crianças dessa faixa etária não veem importância nessas sutilezas lógicas". Isto é compreensível, mas haverá algum momento da escolarização em que tal ideia necessita ser explicitada.

Levantamos algumas preocupações sobre a necessidade de explicitar esta ideia. Após a percepção inicial do número pelas crianças, quando alcançam certa maturidade, corre-se o risco de considerar o maior número natural o 9, caso não se tenha o cuidado de fazer a distinção entre o 9 número e o 9algarismo. No decorrer da escolarização, seria de extrema dificuldade discernir que os números são formados pelos algarismos 0,1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 ou, ainda no mesmo contexto, os números são formados pelos números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. A extensão do raciocínio irá levar a que os estudantes percebam que todos os números se organizam pelo posicionamento de seus algarismos e esta é uma ideia necessária para compreender o SND. Entendemos que à medida que o estudante percebe a organização do sistema de numeração, compreender quais são os algarismos e como se organiza o número pode ser muito importante.

A composição e decomposição dos números

Característica essencial no SND e a qual julgamos importante valorizar e destacar é o processo de composição e decomposição de um número, e encontramos nos Conteúdos Conceituais dos Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN`s que é preciso ter:

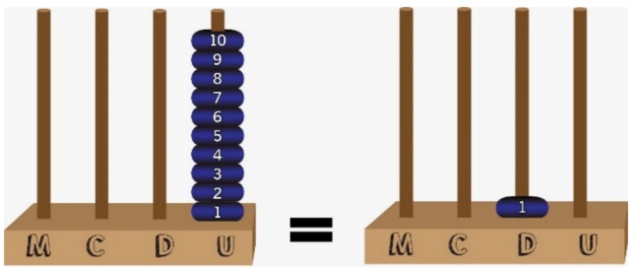
> - Compreensão e utilização das regras do sistema de numeração decimal, para leitura, escrita, comparação e ordenação de números naturais de qualquer ordem de grandeza.
> - Formulação de hipótese sobre a grandeza numérica, pela observação da posição dos algarismos na representação decimal de um número racional.
> - Extensão das regras do sistema de numeração decimal para compreensão, leitura e representação dos números racionais na forma decimal.
> - Comparação e ordenação de números racionais na forma decimal. (PCN’s 1997, p. 58)

Nesse sentido, decompor o número comparando suas ordens faz parte do cenário para a compreensão do processo de construção do pensamento numérico, pois é aceitável na vida cotidiana dizer que uma dezena equivale a dez unidades, uma centena equivale a dez dezenas, uma centena equivale a 100 unidades e assim por diante.

A utilização de um esquema lógico e organizado que explora as ordens de um número com recursos diversos, como o Quadro Posicional (QP) pode ser de extrema relevância no ensino do SND, pois os números devem ser apresentados de maneira gradativa e sem caracterizar uma única forma rígida. Tem se mostrado primordial no ensino que sejam acompanhados de materiais concretos e manipuláveis que facilitem a compreensão da lógica aplicada, onde os estudantes podem contar e medir, analisar situações e desenvolver os algoritmos. Para Smole e Diniz (2016, p.25) “pela confrontação de conhecimentos, a criança, além de poder entender os procedimentos utilizados, pode estabelecer relações entre os procedimentos distintos e aproximá-los entre si, apresentando maior compreensão do objeto estudado". Estudo de situações da vida cotidiana apresentados na forma de problemas tem sido também uma das proposições relevantes das autoras.

Apresentamos na figura abaixo uma visualização muito comum do reagrupamento de cada dez unidades para uma dezena, o que pode contribuir para o entendimento de equivalência entre duas ordens. A estrutura do recurso abaixo, que recebe o nome de ábaco[4], mostra com clareza uma transformação que dá início ao processo de entendimento de um sistema de base dez. Na representação é possível perceber que 10 unidades podem ser representadas por 1 dezena.

Figura 2: Correspondência entre ordens

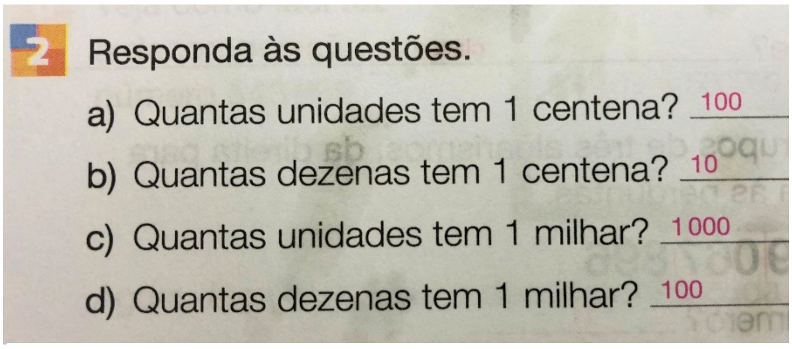


Fonte: Arquivo pessoal

Consideramos que tal organização necessita ser mostrada aos estudantes para ordens superiores e ordens das classes não inteiras, o que nem sempre ocorre em livros didáticos. Como exemplo, pode-se observar o livro didático de Silveira e Marques (2015), que é uma organizada obra destinada ao ensino de Matemática aos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Em sua Unidade 1 intitulada Números, que vai da página 12 até a página 39, embora abranja satisfatoriamente uma abordagem coerente com as preocupações que aqui apresentamos sobre o SND, há apenas uma atividade que envolve equivalência de ordens diferentes da unidade, que está na página 27, como vemos na figura abaixo.

[4]Ábaco é uma das mais antigas máquinas de calcular que serve para representar a composição e a decomposição de um número e é utilizado até os dias de hoje.

Figura 3: Atividade envolvendo ordens



FONTE: SILVEIRA e MARQUES. Matemática. livro didático 5º ano. 2015. P.27

Nosso entendimento é que tais relações devem ser exploradas e consideramos válido transitar também com as seguintes questões: Uma centena possui quantas dezenas? Quantas unidades? Uma unidade de milhar possui quantas dezenas? Quantas centenas? Quantas unidades? Uma dezena possui quantos décimos? Uma centena possui quantos centésimos? Veja que há uma infinidade de combinações que podem contribuir com a composição de um número. Por que não explorar tais comparações de forma sistematizada uma vez que reforçaria a ideia do posicionamento do algarismo em um número?

Como os números estão muito presentes na vida social, na investigação escolar de um número é possível assimilar intuitivamente que ele pertence a um sistema posicional. Por exemplo, 28 objetos representam quantidades diferentes de 82 objetos. Nota-se que o simples fato de trocar a posição do algarismo 8 com o algarismo 2, altera toda a quantidade dos objetos. Perceber essa diferença é quase automática, mas sua justificativa passa pelo entendimento que a cada dez unidades tem-se uma dezena ou que a cada dez dezenas tem-se uma centena. Se podemos considerar que tal ideia é tão clara, como no exemplo citado, e que o uso social a torna compreensível, por que não explicitar as outras ordens e contribuir com o raciocínio para o entendimento da característica do sistema posicional? A exploração para todas as ordens e a utilização de números maiores pode confirmar a validade da ideia para todo e qualquer número do SND. Não se pode esperar que o educando o faça sozinho, porque isto pode nem sempre ocorrer, o que terá consequências no momento do estudo das operações. Logo, nos parece preciso retomar a organização das ordens considerando números pequenos, médios e grandes, nos momentos que forem considerados adequados.

Será que satisfaz também acreditar que seja suficiente entender que o SND é um sistema posicional só por praticar a comparação entre ordens consecutivas, no qual se estabelece que dez elementos de uma determinada ordem equivalem a um elemento da ordem superior? Essa ideia também não nos parece trivial ou que por extensão seja de fácil compreensão. É essencial analisar e procurar ver com facilidade a sistematização das comparações entre centenas e décimos, unidade de milhar e dezenas, unidade de milhar e centésimo, centésimo e unidades ou décimo e milésimo.

Vejamos como seria interessante o professor poder ter segurança e ter o costume de mostrar que o número 237 possui 23 dezenas inteiras ou que possui 23,7 dezenas. Certamente é preciso considerar o ano escolar em que tal abordagem seja adequada, mas sua compreensão se mostra relevante para o entendimento do sistema e, daí, das operações, como veremos adiante. Outro exemplo é entender que o número 1251 possui 12 centenas inteiras ou que ele possui mais que 12 centenas e meia. Em se tratando de números decimais, o mesmo raciocínio se coloca, como por exemplo compreender que o número 21,35 possui 2135 centésimo ou 213 décimos, pois tal abordagem poderá induzir a uma boa noção do assunto analisado em situações-problema e do funcionamento posicional do nosso sistema de numeração.

Pode não ser considerado muito simples a explicação dos valores posicionais dos números, como os exemplos acima citados, porém, a omissão de abordagens como essas pode induzir a erros e, acreditamos, tais abordagens favorecem enormemente a compreensão da extensão e possibilidades do SND.

Outro exemplo: pode-se levar ao falso entendimento que no número 305, tem três centenas, zero dezena e cinco unidades. O que ocorre nessa análise errônea é que a quantidade na ordem das dezenas simples do número 305 não é explícito e não temos o costume de pensar no número como uma composição de valores baseado no posicionamento de suas ordens. Entender que o número 305 possui cinco unidades é outra confusão muito comum na análise de valores relativos e absolutos. Veja que 305 representa uma quantidade maior que 5, são 305 unidades, mas na representação de seus valores absolutos, tem-se uma análise individual de suas ordens, onde a ordem das unidades possui 5 unidades que é o valor do algarismo 5. Portanto, a análise do valor absoluto da ordem das unidades (valor do algarismo) induz ao entendimento que o valor da ordem das unidades se equivale as unidades que o número representa.

Continuando a abordar as quantidades das ordens, podemos valorizar ainda mais a dinâmica do nosso Sistema de Numeração, como por exemplo: afirmar que o número 35 possui cinco unidades e três dezenas nos parece mais uma convenção em função da praticidade na socialização com o objeto em questão do que uma regra absoluta; analisando de forma mais rigorosa, é possível considerar determinada confusão na comparação dos números 35 e 34, por exemplo. Como distinguir tais números quando nomeados pela ordem das dezenas uma vez que ambos possuem 3 dezenas? É notório que o número 35 é maior que 34, logo é preciso conhecer uma sutil generalização ao quantificar as ordens de um número. O número 35 possui três dezenas inteiras e cinco unidades ou o número 35 possui três dezenas e meia, enquanto que o número 34 não possui três dezenas e meia. Entender esse rigor ao quantificar as ordens de um número pode parecer supérfluo, mas julgamos de extrema importância que o professor e que a professora, assim como o educando e a educanda, transitem nesse contexto sem maiores surpresas. Em situações-problema certamente tais diferenciações terão suas consequências, de modo que ao compreender tais registros numéricos os estudantes terão também mais possibilidades de uso social dos números.

A organização do valor posicional do sistema de numeração pode ajudar a entender, por exemplo, que a cada dez unidades se tem uma dezena, que a cada dez dezenas se tem uma centena ou a cada 100 dezenas se tem uma unidade de milhar, mas o registro e a notação podem não esclarecer suficientemente essa questão para os alunos e tal fato pode ser notado em relação aos décimos, centésimos e milésimos. Como pode ser observado no seguinte caso: o número 204 possui duas centenas, zero dezenas e quatro unidades? Essa dúvida parece indicar o não entendimento do sistema de numeração decimal. Não seria exagero explicitar que este número possui 204 unidades, 20,4 dezenas, 20 dezenas inteiras e 4 unidades, 2,04 centenas, duas centenas inteiras e 4 unidades; assim como não seria errado citar que ele possui 2 centenas. Nossa indicação é que a flexibilização e versatilidade que pode ser construída nessa abordagem da organização posicional do número, o favorecerá nas ações que realizar com o SND.

Ainda considerando um exemplo de uma verificação inautêntica, tem-se que se o número 28 possui 2 dezenas e 8 unidades, então o número 1031 possui 1 unidade de milhar, não possui centena, possui 3 dezenas e possui 1 unidade ou que o número 3,02 possui 3 unidades, não possui décimo e possui 2 centésimos. Um exemplo muito prático que pode levar ao absurdo de uma possível confusão entre o valor relativo e o valor do algarismo de um número é quando uma pessoa que possui uma nota de dez reais nega-se a dizer que possui um real por não possuir explicitamente uma moeda de um real.

Dessa maneira, de modo mais ou menos aprofundado, pensamos que explorar a organização posicional dos números, considerando sua organização inteira e decimal, pode favorecer melhor compreensão do sistema e seus números. Para nós, tal entendimento irá favorecer a compreensão dos algoritmos, o que trataremos mais adiante.

Composição e decomposição de números na forma decimal

Outra situação curiosa no processo do ensino dos números racionais positivos é quando se trabalha com números decimais, também denominado como os números que contêm vírgula. Podemos perceber que, já nos anos iniciais da escolarização, é possível abordá-lo, pois há muitos exemplos do cotidiano que podem contribuir para sua assimilação. Para Van de Walle "não deveríamos permitir que as crianças estudassem conceitos de valor posicional sem encorajá-las a procurar números no mundo ao seu redor. Você não precisa de uma atividade prescrita para trazer números reais para a sala de aula" (2009, p. 236).

Pires (2013, p.120) salienta algumas expectativas de aprendizagem que são frequentemente citadas em documentos curriculares e nos primeiros anos do Ensino Fundamental onde há um destaque para o reconhecimento da utilização de números no seu contexto diário. O Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC-BRASIL, Secretaria de Educação Básica, 2014-2018) em seu caderno oito explora algumas conexões que podem ser feitas, destacando o próprio corpo da criança para a construção do sentido da medida na ordenação dos números decimais, pois é muito comum a visualização da relação peso x altura, por exemplo. No entendimento dos números com vírgula espera-se que uma criança do Ensino Fundamental compreenda que ter 24,5 kg significa ter mais de 24 kg e menos que 25 kg.

Ressalta-se ainda que no ensino dos números decimais o uso da vírgula na formação do número é de extrema importância, pois ela pode alterar totalmente a sua representação, como pode ser notado que 13,7 é diferente de 1,37. Já para o número 5 ou 5,0 a vírgula é indiferente e simplesmente ignorada, em muitos casos, mas não há grandes problemas deixar de apresentá-la em determinados contextos dos números inteiros. Deixar para apresentar a função da vírgula apenas quando utilizar o número decimal, pode ser que 2,0 passe a funcionar como se tivesse um significado diferente de 2,00 ou de 2,000 ou daquela definição já apresentada do número inteiro 2. Parece-nos que seria recomendável iniciar a compreensão dos números em um universo que expresse quantidades inteiras e ir adquirindo uma prática do uso da vírgula para não precisar separar a parte inteira da parte não inteira de um número decimal. Explorando a ideia, se faz necessário a contextualização da representação numérica, como nas situações: não seria indicado utilizar a escrita 28,0 para representar a quantidade de

28 cadeiras porque representamos cadeiras como um objeto inteiro, mas se tratando da medida da temperatura de um determinado ambiente, é bastante conveniente que utilize da escrita 28,0 para indicar 28 graus, assim como uma indicação da nota em um exame sendo 28 ou 28,0 pontos.

Nota-se que, quase sempre, visto em todos os livros didáticos referenciados aqui e disponibilizados pelo PNLD[5], o foco nos números decimais se dá ao final dos capítulos, o que pode evidenciar uma falta de preocupação como tempo destinado para o aprendizado na sala de aula, que pode não ser suficiente. Observamos em nossa experiência prática que essa situação acontece com frequência. Nossa preocupação ainda se dá no tratamento separado dos números decimais em relação ao SND, o que se verifica também nos livros, de modo que chega a configurar que a parte decimal dos números racionais não pertence ao SND ou que o processo utilizado em sua formação é totalmente desvinculado com o processo de formação dos números inteiros. Tal situação se configura como um desafio para os docentes, pois é preciso ter tempo para cada uma das partes, já que há inúmeras relações e possibilidades de seu ensino e tratar em algum momento da escolarização o SND como um todo, se faz necessário.

Além disso, ao ver a notação dos números decimais de modo separado e não relacionado com o número inteiro, como um assunto diferente, pode-se incorrer em erro, como nos mostram Moreira e David quando citam que:

> Na pesquisa do CSMS, M. Brown desenvolveu a parte do trabalho referente aos decimais. O primeiro tipo de dificuldade que ela relata é o seguinte: alguns alunos tendem a ver o decimal como um composto de dois números naturais separados por uma vírgula. Isso leva, por exemplo, a considerar 0,8 menor que 0,75 ou, de modo análogo, 4,9menor que 4,90. (MOREIRA e DAVID, 2010, p. 74)

Respeitando o tempo de assimilação dos alunos, por que não apresentar os números decimais juntamente com os números inteiros? Por que não valorizar a mesma lógica utilizada na composição dos números inteiros e fazer a apresentação dos decimais de forma a compor o SND? É preciso, é claro, analisar o contexto em que o ensino se dá para ter um planejamento adequado. Logicamente não se deve esperar que essa apresentação seja feita de forma

---

[5]PNLD-Plano Nacional do Livro Didático-MEC, Governo Federal, tem por objetivo oferecer a alunos e professores de escolas públicas, livros didáticos de qualidade para apoio ao processo de ensino e aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

rigorosa ou exigente, porque em alguns casos basta apenas a utilização da vírgula, como por exemplo, apresentar o número 2 como 2,0 ou 02,00. O uso da vírgula pode muito bem ser contextualizado e exemplificado nas questões monetárias ou de medidas. Por que não valorizar a mesma lógica utilizada na composição dos números inteiros e fazer a apresentação dos decimais de forma a compor o SND? Nossa pesquisa não chegou a um entendimento pormenorizado dessa situação em sala de aula, mas podemos indicar que o assunto não parece de simples explicação e entendimento, já que se refere a notações de mesmos números.

Por que não explorar com frequência os valores relativos e absolutos do número 3,05 ou do número 10,10 ou outro decimal qualquer uma vez que, em vários contextos, não há exclusividade de posicionamento para os números inteiros? Ocultar ou secundarizar no ensino a informação que a organização dos números decimais possui a mesma lógica dos números inteiros pode contribuir para o distanciamento do entendimento dos números decimais. Além disso, pode contribui com a ideia que os decimais fazem parte de um outro sistema de numeração, ou incorrendo no erro de levar ao entendimento que o número 3,05 não possui décimo ou que o número 10,10 possui 10 unidades e dez décimos. Nossa hipótese é que uma abordagem mais completa em todas as fases do ensino e aprendizagem contribuirá para uma visão mais esclarecedora sobre o Sistema, favorecendo sua compreensão e utilização.

Podemos observar nos livros didáticos referenciados por nós que os números decimais são apresentados como notação diferenciada dos números fracionários e com eles relacionado, de modo que quase não se vê uma abordagem inicial dos números com vírgula associada aos números inteiros. Deixar de abordar os números decimais juntamente com os números inteiros, ignorando até mesmo a importância da vírgula, pode acabar entrando em confronto com a realidade experimentada fora da escola, pois tem-se, por exemplo, a vivência de comparar os preços dos produtos de um supermercado ou as notas dos alunos em uma atividade avaliativa que ora contempla números inteiros, ora contempla números decimais. Nesse procedimento, pode estar havendo uma lacuna considerável que distancia a prática do dia a dia com o aprendizado.

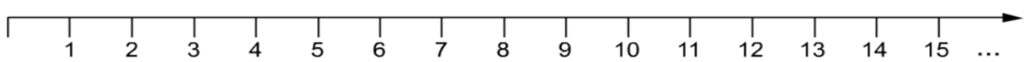
Problematizando mais um pouco a questão, destacamos que, em grande parte, o enfoque no ensino apenas dos números naturais ou inteiros, onde por exemplo se considera que 7 unidades são menores que 70 unidades, pode estar apontando que 7 décimos são menores que 70 centésimos, cometendo um erro por analogia e lendo a parte decimal de forma desatenta. Itzcovichi (2008, p.159) diz que é necessário deixar claro as relações próprias dos números decimais, pois muitas crianças acreditam que 3,8 é menor que 3,79 já que compreendem as propriedades dos números naturais onde 79 é maior que 8. Para Van de Walle (2009, p.370) ao colocar uma lista de números decimais em ordem do menor ao maior, o erro mais comum é selecionar o número com mais algarismos como o maior, tendo uma aplicação incorreta de ideias com números inteiros. Nesse sentido, Ponte, Branco e Matos destacam:

> Nota-se, porém, que mesmo na representação decimal surgem, por vezes, dificuldades significativas nos alunos, por exemplo, ao ordenar 0,7 e 0,14. Muitos deles ignoram o significado posicional dos algarismos e dizem que 0,14 é maior que 0,7 pois 14 é maior que 7. Na verdade nem todos os alunos generalizam as propriedades do Sistema de Numeração Decimal dos números inteiros para os números decimais, assunto que tem de ser abordado explicitamente na sala de aula. (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p.25)

Ao nomear as ordens de um número com frequência, tais distorções poderiam ser evitadas, uma vez que comparar 3,7 com 3,70 ressaltando que em 3,7 há 3 unidades e 7 décimos e em 3,70 encontramos 3 unidades e 70 centésimos, poderíamos identificar que a cada 1 décimo se tem 10 centésimos. Veja que reconhecer o lugar que o algarismo se encontra na formação do número é bastante essencial na compreensão da grandeza do próprio número evitando assim pensar que 0,8 seja menor que 0,75, pois em 0,8 há 8 décimos que corresponde a 80 centésimos que são maiores que os 75 centésimos do número 0,75.

Outra preocupação na abordagem dos números é a ideia intuitiva do infinito para permear a forma do "não ter fim", usando como exemplo apenas a continuidade dos números naturais e destacando que sempre haverá um sucessor presente. Ocorre que quando há o entendimento dos números decimais, a ideia de haver infinitos números entre dois inteiros trata-se de uma percepção que exige alto grau de abstração. Vejamos por exemplo, na figura 2 abaixo, a reta numerada dos naturais que é bastante usada para noção intuitiva de infinito.

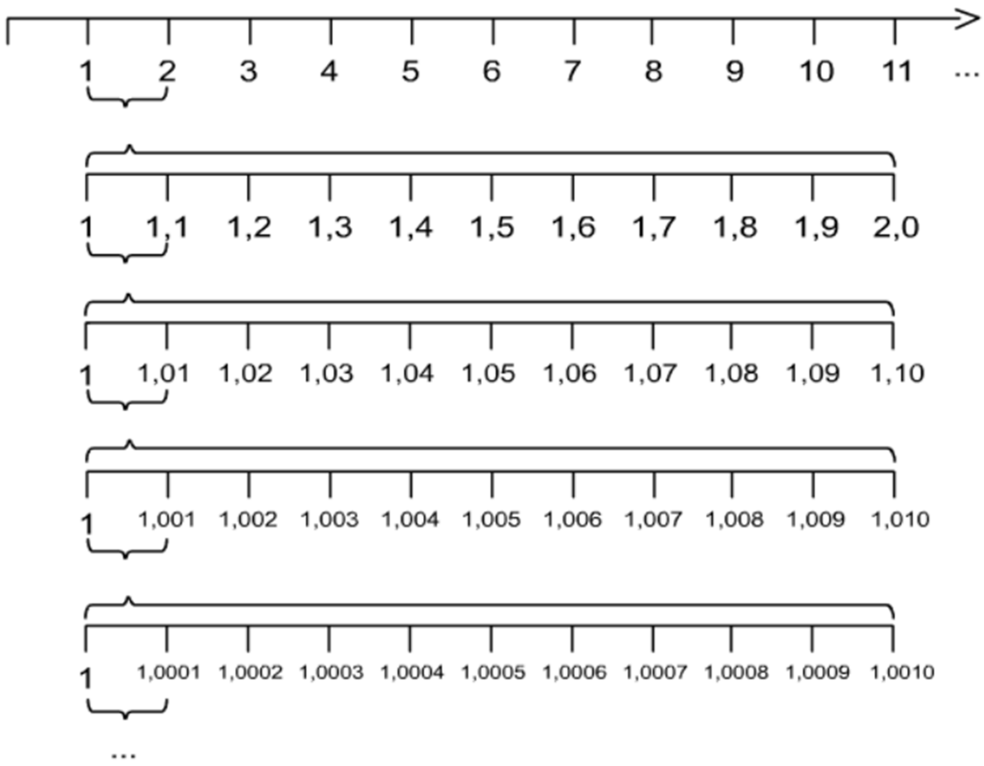
Figura 4: Reta numerada dos naturais



Fonte: Arquivo pessoal

Seria relevante para a aprendizagem que se apresentasse com frequência a mesma ideia intuitiva do infinito, como na figura 3, para um segmento de reta numerado com os decimais.

Figura 5: Reta numerada dos racionais positivos



Fonte: Arquivo pessoal

Essas observações apontam para a possibilidade de explorar a ideia intuitiva de que um segmento de reta é composto por infinitos números o que, do ponto de vista matemático, favorece a própria compreensão de infinito, além do entendimento de ordenação de conjuntos que poderá ser abordado na continuidade dos estudos.

1.2 Explorando as características do SND para o ensino das operações básicas

De um modo geral, o ensino de conceitos iniciais e fundamentais da matemática não tem se mostrado uma tarefa simples. Não se pode desconhecer as condições de trabalho dos docentes nas escolas públicas, que nem sempre favorecem o estudo e planejamento requeridos durante as práticas ou, ainda, a pressão advinda dos processos de avaliação institucional, a todo momento divulgando índices que precisam ser melhorados. Dadas as dificuldades operatórias demonstradas pelos estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental, largamente citada em noticiários e sistemas avaliativos diversos em nosso país, nós nos perguntamos se os docentes não se sentem pressionados a introduzir rapidamente os algoritmos das operações. Uma maior compreensão dos números racionais positivos, que normalmente se inicia nos primeiros anos do ensino fundamental, estaria sendo atropelado pela necessidade de valorizar as operações básicas da matemática?

Em seu artigo, Batista (1995) investigou que os erros cometidos por estudantes em vários tipos de operações envolvendo as quatro operações básicas é bastante alto em relação às expectativas de desempenho previstos nas propostas curriculares. Há vários aspectos que interferem para estes resultados e nada é tão simples. Do ponto de vista pedagógico, podemos apontar algumas limitações que poderiam ser superadas.

Nota-se que há materiais didáticos utilizados pelas escolas que parecem abandonar a abordagem da composição e decomposição completa dos números, ou seja, eles apressadamente caminham para o processo simplificado dos algoritmos das operações com os números racionais positivos e exploram pouco a compreensão dos números, seus usos sociais e possibilidades de registro. Para isso, sobrepõem-se à compreensão de certos procedimentos, como por exemplo utilizando de expressões como "vai um", "pega emprestado", "vai zero", "vai zero e vírgula".

Em nosso entendimento, o processo de ensino de operação dos números, quando se foca no seu algoritmo sem citar o nome de suas ordens ou explicar as razões de sua organização, pode dificultar a compreensão do educando, uma vez que o algoritmo convencional é pautado, em sua essência, na operação entre ordens individualmente.

No algoritmo convencional da adição, a transformação de dez unidades em uma dezena é sinônimo da expressão "vai um"; "pegar emprestado" no algoritmo convencional da subtração significa transforma uma dezena em 10 unidades, criando uma certa artificialidade como um "macete" para utilizar o procedimento. A não nomeação das ordens de um número no ensino do algoritmo convencional da multiplicação e da divisão pode levar à busca do suporte nos "macetes" do mesmo jeito. O que se pode perceber é que, ao executar esses algoritmos, se o entendimento é que o procedimento não pode ser explicado, pode-se criar uma dicotomia sem sentido: não se usa nomear as ordens em uma operação básica por julgar que seu entendimento se dará em função da exaustiva repetição dos algoritmos ou em função da exaustiva repetição dos algoritmos se entende que não precisa usar a nomeação das ordens de um número. Contudo, a nomeação das ordens de um número se faz necessária para um melhor entendimento do que se está fazendo, justificando os procedimentos do algoritmo formal. Nos PCN`s (1998), diante do ensino que não favorece as explicações dos procedimentos, temos:

> Essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos. (PCN's, 1998, p. 37)

É indispensável compreender o conjunto de regras e relações dos números para não cair numa prática mecanicista de ensino das operações, esta é uma ideia essencial de nossos estudos. Moreira e David (2010, p.58) dizem que estudos sugerem que vários erros que alunos cometem na utilização dos algoritmos das quatro operações possuem a justificativa do aluno não entender a lógica que justifica o algoritmo empregado. Ainda nesse contexto, Teberosky (2007) aponta que:

> Vários trabalhos demonstram que boa parte dos erros que os alunos cometem deve-se ao fato de terem aprendido a manipular símbolos de acordo com determinadas regras, sem se deterem no significado dos mesmos. (TEBEROSKY, 2007, p. 26)

Também Smole e Muniz (2013) dizem que:

> Não podemos banir a prática da técnica, mas não acreditamos em técnicas sem um pouco de compreensão. Por exemplo, muitas vezes já nos deparamos com alunos adultos que têm dificuldades em dividir números decimais (Onde acrescenta o zero? E a vírgula, quando coloco?) e, ao investigarmos suas dúvidas, percebemos que elas têm origem na compreensão do sistema de numeração decimal. (SMOLE e MUNIZ, 2013, p.47)

Em seu livro Kamii (1995) defende fortemente a proposta que os algoritmos não devem ser ensinados às crianças do 1º ano do Ensino Fundamental. Para ela "as crianças não consideram o valor posicional e desenvolvem um senso numérico pobre" e diz também:

> O algoritmo é conveniente para os adultos, se já compreenderam o valor posicional dos números. Para as crianças no primário, contudo, que têm tendência para pensar em cada coluna como unidade, o algarismo acaba por reforçar essa ideia. (KAMII, 1995, p.57-58)

Parece-nos que podemos avançar um pouco mais. Sem a compreensão do significado do valor posicional de um número, os algoritmos usados nas quatro operações básicas funcionarão como regras decoradas e sem sentido, podendo contribuir com sérios equívocos. Ao compreender os algoritmos, que funcionam de forma a operar separadamente as ordens de um número e ao apoderar-se da formação dos números, principalmente a composição e a decomposição, há um ganho quase incomensurável para o entendimento das operações básicas no ensino fundamental entre os números inteiros e principalmente entre os números decimais, implicando assim diretamente na compreensão dos números, do sistema e dos algoritmos utilizados nessas operações.

Características da Adição

Vamos explorar um pouco mais as ideias aqui apresentadas na abordagem da operação adição. Apontamos novamente, ancorados em nossas observações, experiências e nos autores citados, que priorizar o ensino dos algoritmos das quatro operações básicas da matemática sem o entendimento das características da formação dos números, pode levar a algumas práticas de aprendizagem automáticas, isentas de qualquer entendimento coerente ou até mesmo induzindo a procedimentos inadequados.

No algoritmo convencional da adição é muito comum usar da expressão "vai um" quando uma ordem excede nove unidades. Reiteramos que, em nossa visão, não há problemas nessa expressão, o problema é sua utilização desacompanhada de seu significado, induzindo à ideia de ser o processo operatório como "macetes". Para Centurión (1994, p.157), usar a técnica do "vai um" é aceitável, mas é necessário que se conheça muito bem o nosso sistema de numeração que, como sabemos, é um sistema de base dez e utiliza a representação posicional. Nosso entendimento é que tais características devem ser bem exploradas para todas as notações que os números do sistema possuem.

Observemos um exemplo no qual deseja-se resolver o seguinte problema: *Em um certo dia em um aeroporto, trinta e cinco aviões aterrissaram e outros dezoitos aviões decolaram. Determine quantos aviões passaram por esse aeroporto nesse dia.*

É possível perceber que o problema acima se trata de uma adição, trata-se da ideia de reunir, podendo-se utilizar como abaixo:

$$\begin{array}{rr} & {}^{1} \\ + & 35 \\ & 18 \\ \hline & 53 \end{array}$$

Vejamos que esse processo de soma não destaca o que "está por trás" dos algoritmos e, caso ele não seja compreendido de forma adequada, pode-se pensar que a soma será 413, pois 5 + 8 = 13 e 3 + 1 = 4, deixando sem sentido o valor posicional dos algarismos como na montagem do algoritmo abaixo:

$$\begin{array}{cccc} + & 3 & & 5 \\ & 1 & & 8 \\ \hline & 4 & 1 & 3 \end{array}$$

Observe que se na operação acima o entendimento for atrelado ao resultado "4" e "13" ou "40" e "13", temos um processo de soma incompleto e sem erro, faltando apenas uma etapa de transformação de 10 unidades em uma dezena, na obediência de organização do sistema com a base 10. É preciso compreender que a operação realizada é a reunião de quantidades previstas em cada ordem: 35 (30 + 5) e18 (10 + 8), de modo que reunimos 30 + 10 e 5 + 8 resultando 40 + 13, ou seja, 40 + 10 + 3 = 53.

Outro cuidado que precisamos ter ao utilizar o algoritmo convencional da adição é que sem se preocupar com qual ordem se está trabalhando, podemos nos deparar com somas equivocadas, porque não se sabe o que está operando. Ao somar 6 com 18, é possível que encontre erroneamente 78 como resultado:

$$\begin{array}{lcc} + & 6 & \\ & 1 & 8 \\ \hline & 7 & 8 \end{array}$$

Em seu artigo BATISTA (1995) verificou que:

> Os valores das centenas, dezenas e unidades não são colocados verticalmente um sobre o outro, ou seja, ao efetuar a soma ou subtração, o aluno em geral conta, juntos, os que estão superpostos na mesma coluna. (BATISTA, Ano 3 – Nº4/1995, p.65)

A expressão "vai um" é muito conhecida no algoritmo convencional da adição, mas será que é possível utilizar-se da expressão "vão dois"? E quando utilizar "vão três"? Será que é possível fazer uso da expressão "vão mil"? A condição para utilizar da expressão "vão dois", "vão três" e assim por diante, é que cada ordem tenha como soma valores que atinjam acima de 19 unidades, 29 unidades, etc. Contudo, veja que essas expressões dependem também do número de parcelas, pois em uma soma de apenas duas parcelas, o maior valor que uma ordem pode assumir é 18 (por reunir 9 + 9) que é abaixo de vinte unidades. Três parcelas em uma soma não garantem a transformação de duas unidades para a ordem superior, mas para que se tenha a transformação de duas unidades na ordem superior é preciso que se tenha no mínimo três parcelas. De forma geral, para usar das expressões "vão dois", "vão três", "vão n", será preciso ter três parcelas, quatro parcelas, etc.

Dessa forma, devemos tomar bastante cuidado para que não se evidencie que no ensino do algoritmo convencional da adição, o processo utilizado se mune de argumentos que mais parecem um "macete" para chegar ao resultado correto do que um algoritmo que se justifique matematicamente.

Características da Subtração

O algoritmo da subtração assenta-se nas ideias de retirar, comparar e quanto falta para completar. Portanto, ao subtrair 3 de 8 e executar a subtração 8 – 3, tem-se como um destaque a retirada de três unidades das oito unidades iniciais, mas também a ideia de quanto falta a 3 para se obter 8, e, ainda, para comparar qual é maior e menor. São ideias que, se estimuladas, proporcionarão melhor entendimento do educando para a resolução de situações-problema.

A essência da subtração ocorre em pensamento prático na vida social e favorece uma possibilidade de entender o que o algoritmo dessa operação representa. Observamos que pode ser interessante a utilização da ideia "quanto falta" ao resolver, por exemplo, a subtração 100 – 98. Veja que o pensamento de se retirar 98 unidades onde há 100 unidades pode ser substituído sem maiores prejuízos ao utilizar-se da ideia de que faltam2 unidades a 98 unidades para se obter 100 unidades.

No uso do algoritmo convencional, podemos perceber o uso da expressão "pegar emprestado" quando é necessário reorganizar os valores posicionais e, quase sempre, os professores indicam ser este o ponto de difícil ensino e aprendizagem. Também não vemos problema algum utilizar-se da expressão "pegar emprestado", porém é bom que ela esteja ancorada em uma justificativa matemática, mesmo que de forma intrínseca.

Assim:

$$\begin{array}{r} 22 \\ -\ \ 8 \\ \hline 14 \end{array}$$

Pode parecer satisfatório a justificativa do "pegar emprestado" se limitando a dizer que o minuendo (2) é menor que subtraendo (8), deixando de citar qual é a lógica que permite fazer a analogia com o "pegar emprestado", mas não vemos interesse nessa limitação.

É possível que, em algumas operações, a falta dos porquês que justifiquem os algoritmos contribua para o insucesso do ensino. Vejamos o exemplo: *Um aparelho de TV custa R$3005,00. No dia de hoje a loja oferece um desconto de R$ 1 008,00 para pagamento à vista. Determine quantos Reais serão necessários para a aquisição dessa televisão se comprada hoje e à vista.*

Após identificar que se trata de uma operação de subtração, com o uso da ideia de retirada, o algoritmo convencional é armado e, ao efetuar a subtração, percebe-se que será preciso utilizar da expressão "pegar emprestado" mais de uma vez. Algumas questões podem ser colocadas:

$$\begin{array}{r} 3\,005 \\ -\quad 1\,008 \\ \hline 1\,997 \end{array}$$

Pergunta-se: Foi preciso "pegar emprestado" mais de uma vez?

Como "pegar emprestado" de onde não tem?

De onde surgiu o 9 nas ordens das dezenas e centenas?

A "redistribuição" dos valores posicionais neste exemplo não se mostra uma tarefa simples. A mecanização do algoritmo se torna sem sentido quando economizamos no entendimento de seus porquês. Utilizar somente de eventuais atalhos para facilitar a compreensão de uma operação pode contribuir para um aprendizado confuso, tumultuado e pode, ainda, induzir o aluno ao entendimento de que ele deve apenas memorizar. É bastante relevante a verbalização da transformação das ordens, a fim de minimizar a impressão de que pode-se retirar o que não se tem quando se tratar de números positivos.

Características da Multiplicação

Também para efetuar multiplicações as dificuldades no reordenamento dos números aparecem. O algoritmo convencional da multiplicação possui alguns detalhes que precisam ser mencionados para contribuir com possíveis lacunas em seu entendimento, evitando ser entendido como uma sequência de procedimentos sem que se saiba seus motivos, contribuindo para um processo mecanizado e sem sentido para o educando.

Vejamos dois detalhes significativos no algoritmo convencional da multiplicação, por exemplo, de 33 por 12:

33
x 12
66
+ 33
3 9 6

Multiplica-se a unidade (2) do segundo fator pelo primeiro fator e a dezena (1) do segundo fator pelo primeiro fator.

Adicionam-se os dois produtos.

Observa-se que, ao multiplicar a dezena (1) do segundo fator pela unidade (3) do primeiro fator, há o resultado (3), que é colocado na ordem das dezenas, significando 3 dezenas ou 30 unidades. Mesmo que seja mais difícil, muitas vezes, entender assim o algoritmo, consideramos necessário explicitar a situação criada. Se ocultar a informação do porquê desse processo, que se dá pela automatização do algoritmo com finalidade de otimizar o tempo gasto, é possível que, além de limitar o real entendimento da sistematização da lógica, possa demandar de mais tempo para que se tenha um entendimento satisfatório da operação.

O segundo detalhe nesse mesmo algoritmo que requer bastante atenção é o porquê da soma dos resultados da multiplicação da unidade (2) do segundo fator pelo primeiro fator, com o resultado da multiplicação da dezena (1) do segundo fator com o primeiro fator. Por que é preciso fazer uso da operação da adição em uma operação de multiplicação?

Na multiplicação de 203 por 125, há esses detalhes potencializados:

203
X 124
812
406
+ 203
25 172

Pergunta-se: por que "saltar" uma casa para colocar o resultado da multiplicação entre a dezena (2) do segundo fator pela unidade (3) do primeiro fator?

Por que "saltar" duas casas para colocar o resultado da multiplicação entre a centena (1) do segundo fator pela unidade (3) do primeiro fator?

Por que somar as três parcelas provenientes dos três produtos?

Outra situação no mínimo curiosa no algoritmo convencional da multiplicação é quando precisamos multiplicar números decimais. Nos livros didáticos referenciados nesse trabalho, a multiplicação entre números com vírgula é estimulada tendo a seguinte ideia como base: "para multiplicar números decimais, basta sumir com a vírgula, fazer a multiplicação normalmente e depois voltar com a vírgula conforme o número de casas decimais" (do livro Silveira e Marques, 2015), quando consideram apenas um único exemplo explicativo utilizando números fracionários (p.264), mas, como as demais obras referenciadas não apresentam atividades que exploram a transformação de números decimais em números inteiros e números inteiros em números decimais, justificando o "sumiço" e o "retorno" da vírgula ao fazer a operação.

Vejamos:

$$\begin{array}{r} 3{,}5 \\ \underline{1{,}3} \end{array}$$

Retirar as vírgulas e efetuar a multiplicação:

$$\begin{array}{rr} & {}^{1} \\ \times & 35 \\ & 13 \\ \hline + & 105 \\ & 35 \\ \hline & 455 \end{array}$$

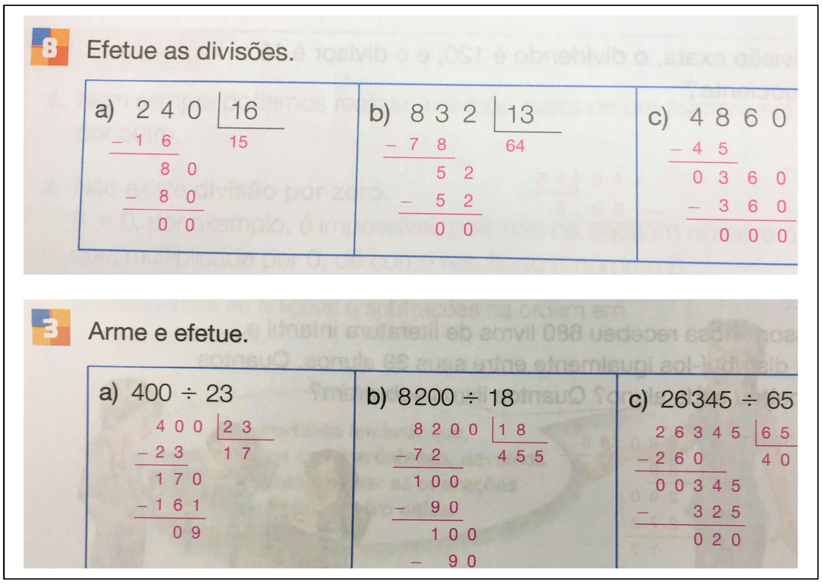
Como há 2 casas após a vírgula, o resultado será 4,55.

Pergunta-se: por que se utilizarmos tal procedimento sempre teremos o produto correto? Será mesmo suficiente a utilização desse algoritmo sem a justificativa coerente do "sumiço" e o "retorno" da vírgula?

Características da Divisão

Explorando as situações de divisão, como vemos em livros referenciados por nós, o algoritmo é apresentado como a divisão de cada ordem do dividendo sendo dividida pelo divisor, sem nomear essas ordens, sem citar seu posicionamento ou mencionar a decomposição do dividendo. Silveira e Marques (2015) apresentam, na Unidade 4 de seu livro, ao tratar da divisão com números naturais, como os exemplos na figura abaixo.

Figura 6: Atividade envolvendo divisões



FONTE: SILVEIRA e MARQUES. Matemática, livro didático 5º ano. 2015, P.90 e 93

Consideramos que as explicações para o entendimento de situações como essas podem ser melhoradas. Por exemplo, se precisarmos dividir um terreno de 60003 metros quadrados em 6 lotes de mesmo tamanho, poderia ser encontrado o valor 1000,5 metros quadrados. Vejamos o exemplo abaixo:

Um terreno de 6003 metros quadrados será dividido em 6 lotes de mesmo tamanho. Quantos metros quadrados terá cada lote?

Forma errada

```
 6 003 | 6
– 6      100,5
 0 0030
  –  30
      0
```

Veja que é muito comum o resultado ser dez vezes menor que o resultado correto, pois há uma confusão por não nomear a ordem que está dividindo.

Por estimativa percebemos que 6 000 dividido por 6 é 1 000, então 6 003 dividido por 6 será 1 000,5 e não 100,5.

Outro desafio recorrente é a explicação do algoritmo da divisão com números decimais. Sendo o dividendo decimal (ou até mesmo o dividendo e o divisor decimais), por que se pode igualar as casas decimais, "sumir" com a vírgula e aí dividir normalmente? Observa-se, nas práticas de ensino nos algoritmos da divisão, o uso excessivo de regras como "ora vai zero", "ora vai zero e vírgula no quociente" para justificar o processo do cálculo. Tais procedimentos decorados e sem o uso de seus porquês, muitas vezes, contribuem para um resultado errado de uma simples divisão. Vejamos o exemplo:

Determine a medida do ângulo interno de um pentágono regular sabendo que a soma das medidas de seus ângulos internos vale 540°.

Após identificado que a resolução se dá pela divisão da soma dos ângulos internos pelo número de ângulos do polígono, espera-se que a divisão seja feita, porém o algoritmo convencional da divisão, sem o seu devido cuidado, pode permitir que o aluno encontre como resposta 18° e não 108°. Veja:

Forma errada

```
  540 | 5
– 5     1 8
  040
 – 40
    0
```

Nesse processo, quando não se nomeia as ordens, pode-se incorrer no seguinte equívoco: divide-se 5 por 5, encontra 1 e obtém resto zero; "desce" o 4. Como 4 é menor que o divisor, "desce" o 0. Divide 40 por 5 e encontra-se 8.

Ao nomearmos as ordens do quociente verificamos, com mais facilidade, que encontramos 1 centena e 8 unidades, formando o número 108 e não 18 como quociente.

Outro exemplo: *Quanto custa cada objeto, se três objetos iguais custam juntos R$ 3,18?*

Forma errada	Outra forma errada
$\begin{array}{l\|l} 3{,}18 & 3 \\ \cline{2-2} -3 & 1{,}6 \\ \hline 018 & \\ -18 & \\ \hline 0 & \end{array}$	$3{,}18 \div 3 \Rightarrow \begin{cases} 3 \div 3 = 1 \\ 18 \div 3 = 6 \end{cases} \Rightarrow 1{,}6$

Algumas divisões podem ter seu quociente alterado quando estabelecidas regras decoradas, mesmo que elas tenham a finalidade de agilizar o processo da operação. Vejamos um outro exemplo com o dividendo e divisor decimais:

Um caibro de 13,5 metros de comprimento deverá ser dividido em partes iguais medindo 0,15 metro cada. Determine em quantas partes o caibro será dividido.

Observar o número de casas decimais	Igualar as casas decimais	Retirar a vírgula	Dividir "normalmente"
$13{,}5 \,\underline{\vert\, 0{,}15}$	$13{,}50 \,\underline{\vert\, 0{,}15}$	$1350 \,\underline{\vert\, 015}$	$\begin{array}{r\|l} 1350 & 15 \\ \cline{2-2} -135 & 90 \\ \hline 0 & \end{array}$

Pergunta-se: por que é preciso igualar as casas decimais?
Por que é preciso retirar a vírgula?
Por que não voltar com a vírgula após encontrar o quociente?

Em síntese: neste capítulo vimos algumas particularidades que podem comprometer o entendimento do SND e as operações numéricas por meio de breve exploração de algumas operações onde dificuldades podem aparecer. Chama a nossa atenção o ensino de números e algarismos, bem como na apresentação da composição e decomposição dos números, abrangendo não só a parte inteira do número. Nossa análise das situações aqui apresentadas indica que valorizar as ordens dos números pode propiciar um melhor entendimento também nas operações, pois o porquê de cada processo é fundamental para sua compreensão. Reafirmamos, ainda, que a utilização do recurso do tipo Quadro Posicional (QP) e outros que proporcionem a compreensão do valor posicional dentro do SND, é de extrema relevância no ensino, pois a formação dos números e os algoritmos devem ser apresentados de várias maneiras e sem caracterizar formas rígidas, além de ser primordial que sejam acompanhados de materiais manipuláveis e recursos didáticos diversos que facilitem a compreensão da lógica aplicada.

Nosso objetivo é que o aluno acerte uma operação básica sabendo o que está fazendo, para que não corra o risco de percorrer toda a escola básica e, no final do ciclo, lá no terceiro ano do ensino médio, ainda apresentar dificuldade na utilização do SND, como é possível se observar.

Neste capítulo, então, apresentamos algumas dificuldades que são observadas nas práticas escolares, buscamos alguns exemplos e referências em materiais didáticos, como um exercício exploratório. Uma vez caracterizadas algumas das principais dificuldades no entendimento dos números e suas operações, em situações de ensino, passaremos agora a analisar possibilidades que possam melhorar a abordagem dessas operações.

CAPÍTULO II

2. Alguns apontamentos sobre a produção existente

Veremos neste capítulo uma revisão e apontamentos de artigos e dissertações que falam sobre o SND. Procuramos no Portal de Periódico da CAPES/MEC estudos atuais que colaborassem com o nosso trabalho, introduzimos a questão do ensino do SND, separamos aqueles que possuíssem convergência de ideias e levantamos alguns pontos em comum com o nosso trabalho.

O artigo de Vece, Silva e Cury (2013) faz parte do Projeto de Pesquisa do Programa Observatório da Educação que apresenta uma análise de respostas dos estudantes do 4º e 5º anos a um conjunto de testes nacionais, envolvendo números naturais.

> O procedimento de análise de conteúdo foi realizado à luz de autores que tratam desse tema. Entre os resultados, destacamos que o ensino dos números naturais é um problema didático que merece atenção tanto no contexto escolar, quanto em pesquisas destinadas ao processo de aprendizagem do Sistema de Numeração Decimal nos anos iniciais do ensino fundamental. (VECE, SILVA e CURI, 2013, p.223)

O objetivo deste artigo é analisar algumas respostas de alunos referentes ao aprendizado de números naturais. Contudo, podemos destacar algumas situações sobre o ensino de números, pois as questões trabalhadas abordam basicamente a compreensão do sistema de numeração decimal com um direcionamento no valor posicional dos algarismos e na composição e decomposição de um número.

Já em sua primeira análise, as autoras trazem uma questão sobre composição e decomposição de um número, destacando a não compreensão da formação dos números por 32% dos alunos, em sua pesquisa, que fizeram a tarefa por justaposição e não pela representação posicional de seus algarismos. Em relação aos professores, as autoras trazem uma questão relevante:

> Algumas pesquisas – como as de Silva (2009, 2010) – realizadas no âmbito do grupo de pesquisa CCPPM mostram que professoras dos anos iniciais do ensino fundamental também têm dificuldades com a posicionalidade do sistema de numeração decimal e com as relações que existem por trás desta, para a formação do número. Mostram ainda que, talvez por suas dificuldades com relação às características desse sistema numérico, as professoras

> trabalham de forma tradicional, “separando os números em casinhas” para efetuar as operações fundamentais. (VECE, SILVA e CURI, 2013, ps.230-231)

Vêm ao encontro de nossa ideia que, quanto mais pudermos explorar as diversas comparações de ordens não consecutivas de um número, mais clareza poderá haver em relação à formação do número, e as autoras contribuem nesse sentido quando afirmam que:

> Os aspectos quantitativos revelam que os alunos que erraram a questão apresentam dificuldades na composição do número na ordem da dezena de milhar, o que nos leva a considerar que a construção do conceito acerca do valor posicional não é linear, mas, sim, desestruturado na ampliação da grandeza numérica. A compreensão das crianças das noções de agrupamentos e de contagem de agrupamentos é gradativa e parece desenvolver-se primeiramente com números da ordem das dezenas. Tal compreensão se amplia à medida que se faz um trabalho com números de diferentes grandezas, para possibilitar aos alunos a percepção de que as características do sistema de numeração decimal podem ser generalizadas para números de qualquer ordem. (VECE, SILVA e CURI, 2013, p.231)

Elas destacam ainda que uma grande parte dos alunos parece optar pelo uso de algoritmos convencionais em questões que não precisava recorrer a eles e “ao que parece, a resolução revela dificuldade de usar os princípios aditivos e multiplicativos na composição de um número e de fazer relações com o valor posicional. Esses conhecimentos facilitariam a própria utilização e a compreensão do algoritmo da divisão” (p. 233). Isso nos remete à questão de se ter a possibilidade de que na escola básica preocupa-se mais com os algoritmos convencionais do que a formação do número por sua composição.

Ainda sobre a formação dos números, as autoras destacam que:

> Os registros dos alunos em resposta à questão aberta de decomposição do número fizeram emergir as seguintes confirmações:
>
> - Nos procedimentos de decomposição, os alunos desconsideram o valor posicional do algarismo no número.
> - A incompreensão do valor posicional estende-se para as diferentes ordens e classes do número, aumentando o índice de erros na decomposição dos números na dezena de milhar.
>
> No caso dos números com zero intercalado, para suprir a ausência de quantidade em uma das ordens do número, a criança, ao decompor, sente a necessidade de colocar o zero para ocupar essa ordem. (VECE, SILVA e CURI, 2013, p.235)

Em suas considerações finais, as autoras concluem que o ensino dos números naturais é um problema didático, complementando que essa tarefa não é fácil se o professor não tiver conhecimentos para ensinar o conteúdo. Porém, podemos pensar um pouco mais além, levantando a seguinte questão: o ensino de números naturais e também o de números racionais positivos estão ligados diretamente a uma questão didático-metodológica ou passam pelo viés de conhecer e explorar necessariamente as características do SND?

Explorando o sentido de proporcionar crescimento do entendimento das características do SND e da importância da clareza por parte do professor, as autoras destacam que o "processo de generalização é construído em espiral, com avanços e retomadas conceituais" (p. 238). Ainda destacam:

> Esse processo se constrói em diferentes âmbitos, que vão formando uma malha, a partir da qual as crianças organizam, refletem, reorganizam e ampliam seus conhecimentos a respeito do sistema numérico. Sem compreensão deste, as crianças não fazem generalizações e utilizam o conhecimento mecanicamente. (VECE, SILVA e CURI, 2013, p.238)

Nós reforçamos a ideia e destacamos uma dificuldade, especificamente porque é um assunto estudado durante pelo menos sete dos nove anos do ensino fundamental, em paralelo com o próprio desenvolvimento dos alunos, envolvendo vários docentes e situações de ensino. No estudo citado, as autoras fazem as seguintes sugestões aos professores:

> - fazer uso continuamente do quadro de valor posicional e das cartelas sobrepostas para compor e decompor números em suas diferentes ordens e classes;
> - articular e explorar o conhecimento social a partir da leitura de números que circulam em diferentes portadores numéricos que ultrapassem a dezena de milhar;
> - comparar números de diversas ordens de grandeza e explorar as hipóteses das crianças para esse procedimento;
> - dar continuidade ao trabalho oral, com contagens que acompanhem a ordem de grandeza dos números, incluindo contagens de grupos equivalentes a um de unidades, colaborando para a ampliação do repertório numérico dos alunos. (VECE, SILVA e CURI, 2013, p.238)

Podemos observar que elas valorizam o entendimento da formação dos números e exploram as principais características do SND no ensino nos anos iniciais da escola básica. Ratificamos aqui a relevância da compreensão das características dos números por parte dos professores que atuam diretamente com o SND, pois acreditamos que esse seja o melhor caminho para a construção do pensamento matemático.

O artigo de Curi, Santos e Rabelo (2013), na mesma linha do anterior, apresenta análise da produção de estudantes do 5º ano, a partir de resultados de pesquisas institucionais (SAEB), apontando em seu resumo:

> Entre os resultados, destacamos que as características próprias do nosso sistema de escrita numérica, como agrupamentos de 10 em 10, trocas por unidades de ordem superior e a posicionalidade do sistema, nem sempre são incorporadas pelos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, apontando como dificuldades a utilização pelos alunos da escrita numérica por justaposição com base no número falado, o que confirma pesquisas das autoras citadas com esse tema. (CURI, SANTOS e RABELO – 2012, p.57)

O objetivo deste artigo é analisar aprendizagens e dificuldades envolvendo Sistema de Numeração Decimal (SND) reveladas nos itens: Saeb e Prova Brasil. Sobre o sistema de numeração decimal, as autoras começam a destacar que o seu ensino não é tão simples para o entendimento das crianças, como poderia parecer. Valorizam o fato de ele ser um sistema de posições e de ser agrupado em dez unidades. Citam estudos que dizem que não há uma compreensão extensiva no processo de composição e decomposição de um número como, por exemplo, que muitos alunos compreendem que 78 unidades correspondem a 7 dezenas e 8 unidades, mas não compreendem a correspondência entre 78 unidades com 6 dezenas e 18 unidades. Este exemplo contribui para a ideia de que a formação dos números precisa estar bastante clara para o estudante e, mais ainda, bastante clara para os profissionais que atuam diretamente com o SND.

As autoras também citam problemas no entendimento da ordem de grandeza de um número, pois se for colocado um algarismo à sua direita, ele ficará dez vezes maior, interferindo em sua decomposição. Destacam que o SND utiliza apenas 10 símbolos, chamados de algarismos, para formar qualquer número, sendo mais econômico em sua escrita que os outros sistemas numéricos que o antecedeu, mas, em função da variação de posicionamento dos algarismos, há maiores dificuldades para a compreensão na formação dos números, uma vez que há menos transparência em suas ações.

As autoras destacam que as professoras refletiram sobre suas práticas e que “perceberam, entre outras constatações, que elas trabalhavam com o SND de forma compartimentada e mecânica, usando números até a ordem de grandeza das centenas e aqueles que envolvem regularidades do sistema, sem zeros intercalados. Sentiram necessidade de aprofundamento teórico (p. 60), passando a falsa ideia de que, por serem números do cotidiano social, são de fácil ensino e aprendizagem.

Os problemas de compreensão do SND levantados nesse artigo ratificam a importância de que nos preocupemos um pouco mais com o ensino de números, pois a sua formação requer entendimento do posicionamento de cada algarismo e do agrupamento de dez unidades em cada ordem, características fundamentais do SND e que serão imbuídas nos algoritmos convencionais das quatro operações básicas. Em suas considerações finais, as autoras destacam que "todos os registros de respostas nos levam a crer que os alunos não se apropriaram da ordem de grandeza da unidade de milhar" (p. 68). Cremos que seja necessário dar mais ênfase ao ensino das características do SND antes das operações fundamentais em função de sua complexidade e pelas limitações de seu entendimento, pois as autoras ainda destacam que "as propostas que apresentavam números com zeros intercalados tiveram um percentual de erros significativamente maior, o que quer dizer que nem sempre a utilização do SND socialmente revela a compreensão das características desse sistema" (p. 68).

Embora o artigo não levante dados voltados exclusivamente para a formação de professores, podemos perceber que, diante das dificuldades verificadas também nesta pesquisa, nós nos perguntamos se a formação de professores tem dado respostas que possam subsidiar as práticas de ensino de números.

O artigo de Guimarães (2012) considera ser o livro didático um material central nas práticas docentes, recurso que é escolhido pelo professor em nosso país, propondo-se a indicar critérios a partir de análise de coleções espanholas e brasileiras, situando o SND. Assim, indica em seu resumo:

> Os livros didáticos analisados mostram uma mesma tendência de valorizar pouco o uso de materiais didáticos para a aprendizagem do sistema de numeração decimal em ambos os países. Entretanto, observa-se que as coleções brasileiras utilizam de forma enfática desenhos como um recurso a aprendizagem. Já as coleções espanholas continuam enfatizando apenas uma prática de cálculos descontextualizados e repetitivos. (GUIMARÃES. 2012, P.2)

O objetivo do artigo é auxiliar na escolha do livro didático que contribua com o ensino do SND, e a autora destaca a importância dessa ferramenta, sendo o ensino de matemática o que mais depende dos livros didáticos, os quais definem na prática a maioria das atividades propostas aos alunos e que possuem grande peso nos conteúdos e sequência do ensino.

A autora define o SND como "um conjunto de convenções e regras" criado para facilitar a representação de grandes quantidades e também as operações, mas um sistema “bastante sofisticado” (p. 3). Apresentam vários autores e estudos que destacam suas dificuldades.

Chamou-nos a atenção o destaque dado para a dificuldade dos professores ao lidarem com o SND em sua formação, fato comprovado em sua pesquisa. Aponta como uma das possíveis razões para isso a dificuldade dos docentes. A autora nos diz que:

> Na Espanha, Bosch, Gascón e Sierra (2009) realizaram um estudo com diferentes livros didáticos utilizados na formação de professores relacionados ao sistema de numeração decimal e afirmam que esse conteúdo está quase ausente no ensino atual e que este é um fenômeno praticamente universal. Esses resultados são surpreendentes uma vez que a aprendizagem do mesmo é fundamental. Como poderão os futuros professores ensinar seus alunos a compreender o SND se os mesmos não vêm aprendendo como ensinar nas suas formações iniciais? (GUIMARÃES. 2012, p.4)

Já para uma análise pautada em sala de aula, a autora relata que as estratégias utilizadas para o ensino do SND nos instrumentos de sua pesquisa basearam-se em atividades propostas em situações contextualizadas na formação dos currículos. “Em ambos os países e em todos os anos são encontradas atividades que buscam a compreensão das regras do sistema a partir de manipulação numérica ou envolvendo cálculos”. Porém, há um decréscimo das atividades pautadas no processo de ensino das regras e características do SND, diminuindo o incentivo para reflexões ou investigações sobre as funções dos números. Nesse sentido, a autora chama a atenção dizendo que:

> As atividades que envolvem a aprendizagem dos algoritmos dos cálculos nas quais as regras do SND são reafirmadas ou mesmo as que buscam levar a aprendizagem das regras do SND (base, quantidade de símbolos, valor posicional, princípios aditivos e multiplicativos, papel do zero) são as que, em geral, necessitam mais de apoios de materiais didáticos, uma vez que ambas aprendizagens envolvem a compreensão de estratégias complexas que precisam ser bem compreendidas para evitar que a aprendizagem se converta em mera habilidade. (GUIMARÃES. 2012, P.8)

Destacamos nesse artigo o fato de boa parte dos livros analisados no Brasil e na Espanha não trazerem atividades apoiadas em uma variedade de materiais concretos e pedagógicos como ábaco, quadro-valor-de-lugar (QVL), réguas de Cuisenaire, material dourado, entre outros, os quais são mencionados como suportes à aprendizagem e que se encontram largamente disponíveis.

Em suas conclusões, a autora destaca a importância de se apropriar das características dos SND comumente à utilização dos números:

> Os alunos apresentam dificuldades na aprendizagem do sistema de numeração decimal porque muito ainda precisa ser aprofundado sobre o ensino do mesmo, inclusive na formação inicial e continuada dos professores. É preciso que os alunos sejam levados a refletir sobre as funções dos números e sobre a lógica do sistema de numeração decimal da mesma forma que se deseja que os alunos compreendam a lógica do sistema alfabético. Na apropriação da escrita alfabética, não aprendemos letras para depois formar palavras e depois frases. Na apropriação do sistema de numeração decimal é não aprendemos números para depois operar. É preciso conviver com um ambiente letrado matematicamente que possibilite estabelecer relações entre quantidades numéricas e se apropriar da lógica do sistema de numeração decimal a partir de seu uso. Para tal, os recursos didáticos podem ser auxiliares à aprendizagem. (GUIMARÃES. 2012, Ps.16-17)

Reiteramos aqui a necessidade de propiciar diferentes formas de propor a aprendizagem, ancorando-se em atividades que permitam a aproximação das formas abstratas e suas generalizações de maneira lúdica.

Já o artigo de Rosso e Berti (2010) promove a discussão do erro do aluno nos processos formativos e a ação docente diante deles. A partir de uma investigação realizada em escola estadual, no estado Paraná, envolvendo a 5ª série (hoje 4º ano), o erro do aluno é considerado oportunidade de avançar nas aprendizagens.

> A investigação conclui que a complexidade e a provisoriedade do pensar e do conhecer se expressam na diversidade de respostas e estratégias presentes nos erros dos alunos e que a socialização dos erros promove a cooperação, a descentração e a autonomia do pensamento. (ROSSO e BERTI – 2010, p.1005)

O artigo se propõe a utilizar a abordagem piagetiana sobre a construção do conhecimento lógico-matemático e da autonomia para apresentar resultados da pesquisa sobre os erros cometidos por alunos quanto às operações elementares e ao sistema de numeração decimal. As questões referem-se a erros cometidos pelos alunos ao responder problemas que exigiam o conhecimento de operações aritméticas e do valor posicional do sistema de numeração decimal.

Em suas considerações finais, os autores destacam:

> As queixas referem-se a práticas didático pedagógicas de aprendizagem passiva ou bancária, individualizante, com o constrangimento do erro e a

> prática corretiva sem discussão. Isso expressa uma prática pautada na reprodução, na repetição de modelos, regras e técnicas incompreendidas, fixadas por memorização, sem reflexão crítica, impedindo o uso de estratégias operativas para a construção de conceitos e a compreensão de algoritmos, e inibindo as atitudes cooperativas e autônomas. É o aprender sob a égide do simples e do definitivo. Porém, a complexidade do pensar e a provisoriedade do conhecer em que se inscreve o erro indicam que o insucesso dos alunos não deriva de uma única causa: inclui as contingências da escola, que passam pela formação dos professores, currículo, ações didático-pedagógicas, organizações do sistema educacional, investimentos insuficientes da educação pública, indiferença social e familiar, entre outras. (ROSSO e BERTI – 2010, p.1030)

Mais uma vez destacamos as dificuldades de aprendizagens com o uso desnecessário de formas e regras sem sentido, como o uso dos algoritmos convencionais das quatro operações sem o devido entendimento da formação dos números, que muitas vezes são estimulados e trabalhados na escola básica.

O artigo de Nogueira e Signorinie (2010) confere importância ao estudo dos algoritmos nos anos iniciais da escolarização em pesquisa na qual foram realizadas entrevistas utilizando o "método clínico crítico piagetiano" com vinte crianças de uma escola pública.

> A análise dos resultados indica que elas reproduzem mecanicamente as técnicas operatórias convencionais sem perceber a relação existente entre esse dispositivo e os princípios e as propriedades do Sistema de Numeração Decimal. (NOGUEIRA e SIGNORINI, 2010 – p.259)

O artigo apresenta o seguinte problema da pesquisa: há construção do conhecimento matemático, particularmente do Sistema de Numeração Decimal, a partir do ensino da aritmética, com ênfase nos procedimentos algorítmicos? E os objetivos propostos foram pautados em estratégias para uma investigação sobre:

> ...a primeira denominada "da direita para a esquerda", investigou se as crianças compreendem a importância da organização espacial do algoritmo, isto é, para operar corretamente, as unidades devem estar "embaixo" das unidades, as dezenas na coluna das dezenas, etc.;
>
> a segunda estratégia, "para além do algoritmo" questionou se há outras maneiras de fazer as "contas" de adição e subtração sem lançar mão dos algoritmos convencionais, com a intenção de investigar se as crianças utilizam outras técnicas de resolução, bem como quais são elas;
>
> a terceira, a técnica do "vai um", consistiu em investigar se as crianças ao desenvolverem o procedimento algorítmico da adição, percebem que aí estão implícitos os princípios e as propriedades do SND, mais especificamente, se elas compreendem o valor posicional do algarismo;
>
> a quarta estratégia, técnica do "empresta um", permitiu observar se as crianças entendem que, na subtração com reserva, elas devem, antes de

> iniciar a “conta”, decompor uma dezena em dez unidades, somente então poderá subtrair. Esta estratégia também permitiu investigar se a criança percebe, no algoritmo da subtração, o SND.
>
> na última estratégia, “prova real”, o objetivo foi investigar se as crianças entendem as operações de adição e subtração como operações inversas, podendo utilizar uma para confirmar o resultado da outra. (NOGUEIRA e SIGNORINI, 2010 – p.262)

No decorrer da pesquisa, as autoras constataram que, apesar do uso correto do algoritmo para efetuar as operações, as crianças não sabiam dizer o porquê da organização espacial do algoritmo usado por elas e recorriam à própria organização espacial do algoritmo como único argumento para sua justificativa, concluindo que:

> Analisando essas frases que as crianças repetiram de maneira automática, a impressão é a de que estão “copiando” de algum lugar, porém, não entendem realmente o que isso significa. Este fato evidencia que o importante não é a repetição das regras de um procedimento e sim, propiciar situações de aprendizagem que permitam às crianças descobrirem as razões que o fundamentam, como, por exemplo, a formulação de perguntas acerca da pertinência ou não da utilização do algoritmo formal, a fim de levar a própria criança a indagar se é possível obter o mesmo resultado para uma determinada operação, procedendo da direita para a esquerda ou vice-versa (Lerner, 1995).(NOGUEIRA e SIGNORINI, 2010 – p.265)

A análise da pesquisa aponta problemas na compreensão dos conceitos de números e algarismos, que converge com nosso estudo, pois não nos parece imediata a constatação de que é por meio dos algarismos que construímos os números. A pesquisa cita as diferentes formas de se tratar o número 14, por exemplo, pois as crianças dizem “é o 1 desse 14” ou “o 1 é 1 e o 4 é 4”. Em relação à técnica do “vai um” no algoritmo convencional da adição, as autoras dizem que:

> Outro fato importante é a falta de conexão entre conceito e procedimento, nenhuma criança entrevistada conseguiu explicar que para operar corretamente o algoritmo da adição é necessário ficar atentos às regras que são necessárias seguir. Apesar de saber fazê-las, sua ação não é consciente a ponto de entender que tais regras estão fundamentadas no SND. Comprova essa afirmação os fatos de elas não terem emitido resposta adequada quando indagamos o que era o “um” que “subia”.
>
> Foi possível perceber também, ao longo das entrevistas, que elas manifestavam muita insegurança e falta de autonomia. (NOGUEIRA e SIGNORINI, 2010 – p.265)

Outra convergência desta pesquisa com os nossos estudos é sobre o que está por trás do algoritmo da subtração. Normalmente os resultados corretos não são acompanhados dos seus entendimentos, ou seja, é possível que se faça corretamente o algoritmo da divisão sem que se saiba que esse algoritmo se efetua pela decomposição dos números, uma vez que se opera ordem com ordem. As autoras destacam um pouco mais, pois os resultados apontam que as subtrações são feitas sem que se tenha conhecimento do conceito necessário para entender o mecanismo que utilizam. Em relação à técnica do "pegar emprestado" no algoritmo convencional da subtração, as autoras dizem que, considerando os alunos da terceira e quinta séries, não se pode perceber diferença significativa nas explicações que dão sobre os procedimentos operatórios que realizam; fica claro, como também já foi apontado em outros estudos, a compreensão do SND se dá por longo período, concluindo:

> ... É indispensável proporcionar às crianças condições para essa construção visando à compreensão de conceitos que são indispensáveis ao entendimento do valor do "um" que se pede emprestado, por exemplo. (NOGUEIRA e SIGNORINI, 2010 – p.270)

Em suas considerações finais, as autoras dizem que:

> Mesmo quando conseguem resolver as "contas" de adição e de subtração com reserva, as crianças parecem apenas ter memorizado as regras mecanicamente, sem entender que os princípios e as propriedades do SND estão na base das técnicas operatórias dessas operações. A atuação das crianças indica que o SND não está consolidado, e assim, podemos constatar que o ensino da aritmética centrado nos algoritmos não possibilitou avanços significativos no que se refere à efetiva construção deste sistema. Por outro lado, constatou-se também que, apesar de haverem cursado no mínimo quatro anos do Ensino Fundamental, quando chegam à quinta série, algumas crianças apresentam dificuldades, ou mesmo não sabem como utilizar as técnicas operatórias de resolução das operações aritméticas de adição e de subtração, indício de que o objetivo da aprendizagem dos procedimentos algorítmicos não foi atingido. (NOGUEIRA e SIGNORINI, 2010 – p.270)

Podemos notar que o foco deste artigo é o aluno e não o ensino de números no SND, mas percebemos que as estratégias utilizadas pelos pesquisados foram pautadas em uma instrumentalização escolar geridas nos moldes atuais da escola básica, sugerindo que há grandes problemas no ensino sobre o SND. Ratificamos que o processo sobre o uso dos algoritmos das quatro operações básicas precisa ser utilizado após e em paralelo com o entendimento da formação dos números, pois é pelo entendimento das características do SND, principalmente do valor posicional de cada algarismo no número, que o uso dos algoritmos convencionais poderá contribuir com um pensamento matemático satisfatório.

A dissertação de Tracanella (2018) destaca que as crianças iniciam sua vida escolar com algumas ideias sobre números e que é necessário um acompanhamento escolar para que se tenha uma fundamentação dos conceitos matemáticos. Essa ideia converge com nossos estudos, principalmente sobre os conhecidos números com vírgula, pois em diversas situações há a visualização dos números ao nosso redor.

O objetivo dessa dissertação é investigar que conhecimentos são mobilizados por alunos do quarto ano do Ensino Fundamental acerca do valor posicional no SND e sobre a compreensão do número zero nesse mesmo sistema. Em seu resumo destaca-se, sobre o zero:

> ...todos os educandos afirmaram que o zero "não vale nada", mas trouxeram justificativas que vão ao encontro dos fatos históricos apontados na breve contextualização realizada no primeiro capítulo da investigação. Notamos também que os participantes estão construindo seus conhecimentos acerca do SND, apresentando um conhecimento não estável, ou seja, que se altera de acordo com a pergunta feita referente à situação proposta. Os resultados encontrados nessa pesquisa apontam que o trabalho com o SND precisa ser contínuo, durante todos os anos iniciais do Ensino Fundamental, pois os alunos continuam construindo seus conhecimentos acerca do SND e ampliando sua compreensão sobre o número zero nos anos posteriores ao ciclo de alfabetização. (TRACANELLA, 2018 – p.10)

A dissertação inicia-se destacando que, em geral, o ensino sobre SND está voltado para uma aprendizagem mecanizada e fomenta duas questões que orientam a pesquisa: "Que conhecimentos sobre o valor posicional no SND são mobilizados por alunos de quarto ano do Ensino Fundamental?" e "Que significados para o número zero no SND são indicados por educandos de quarto ano do Ensino Fundamental?"

A pesquisa está canalizada mais para uma visão do aluno como parte do processo do objeto de estudo do que o professor, mas mesmo assim verificamos pontos que se entrelaçam com o nosso trabalho. A autora chama a atenção para a necessidade do processo do ensino sobre o SND:

> Podemos observar, através dos objetivos supracitados, tanto para o primeiro quanto para o segundo ciclo, que o trabalho com os números naturais é intenso com os alunos até o terceiro ano. Entretanto, do quarto ano em diante a quantidade de conteúdos relacionados a esse conjunto numérico diminui, pela inserção do estudo do conjunto dos números racionais, que assume grande parte do currículo de matemática. Sendo assim, podemos afirmar que tanto os pesquisadores que concebem o currículo quanto os autores de livros didáticos assumem que os alunos já aprenderam esses conteúdos e que não há a necessidade de ser retomados ou aprofundados. (TRACANELLA, 2018 – p.24)

Tracanella destaca que é importante a reflexão constante dos professores sobre o entendimento dos alunos, em especial sobre como pensam acerca dos conhecimentos matemáticos em relação ao conceito de números.

> Asseverou, além do mais, que a formação inicial dos professores em Matemática é insuficiente, que reflete em suas práticas limitadas em sala de aula, sem explorar mais a fundo os conceitos matemáticos fundamentais para a construção do pensamento com os educandos. Essa má formação também repercute na maneira como os professores utilizam os materiais disponíveis, sejam materiais concretos (ábaco, material dourado, entre outros) ou livros didáticos. O trabalho com os alunos na formação do conceito de número no SND precisa ser pautado na diversidade de atividades que estimulem os educandos a pensarem e confrontarem suas hipóteses com as de seus colegas, partindo do pressuposto que esse processo de construção desses conceitos é contínuo e demanda um estudo cada vez mais aprofundado em cada série do Ensino Fundamental. (TRACANELLA, 2018 – ps.58-59)

Não acreditamos que a responsabilização da necessidade de vários ajustes no ensino de números seja atrelada somente aos professores, mas a pouca compreensão da estrutura do SND por parte de quem está na linha de frente do ensino, possivelmente enraizada na formação inicial, pode sim contribuir com algumas lacunas comprometedoras no processo ensino aprendizagem.

Em outro trecho, ainda sobre a formação dos professores, Tracanella destaca:

> Os educadores não fazem um trabalho progressivo sobre esse assunto, pois acreditam que a aprendizagem dos atributos do SND e o trabalho com materiais concretos devem ser concentradas nos anos (séries) iniciais do Ensino Fundamental, sendo considerados já construídos nas séries seguintes. Sendo assim, o aluno não constrói um conhecimento adequado acerca do SND, apenas participando de um processo mecânico de aprendizagem. (TRACANELLA, 2018 – p.62)

Por se tratar de um Sistema, já é de se esperar que a teia que envolve sua formação dos números não seja tão elementar, e a autora destaca a necessidade de se conhecer as características do nosso sistema de numeração:

> Características do nosso SND que foram construídas historicamente, como a escrita econômica e a falta de transparência, são fatores que dificultam a compreensão do sistema. A falta de transparência implica no valor que cada algarismo assume de acordo com a posição na qual se encontra na escrita numérica, ou seja, precisamos saber qual é a potência da base para multiplicar por cada algarismo e determinar o valor do número. A economia na escrita advém da possibilidade de escrever qualquer número com apenas dez símbolos. (...) A partir desse fato podemos inferir que, para se apropriar do

> nosso SND, os alunos precisam conhecer essas propriedades e conseguir relacioná-las adequadamente. (TRACANELLA, 2018 – p.49)

Um outro apontamento interessante sobre a pesquisa em questão foi a apropriação da ideia de números por parte de alunos que se encontram em diferentes séries/anos de sua escolarização. A pesquisa aponta que o estudo realizado em diferentes anos da escolarização não mostrou uma regulação do aprendizado, ou seja, não é verdade que quem se encontra em um período maior de escolarização possui mais apropriação dos conteúdos. O que se pôde assegurar é o desenvolvimento da construção dos atributos do SND, sem que se tenha determinada estabilidade. Tracanella destaca também que a aprendizagem é uma construção, passando por idas e vindas em constantes reconstruções durante todo o ensino fundamental. (TRACANELLA, 2018, P. 116)

A autora encerra suas considerações ressaltando a importância do estudo do valor posicional, enfatizando a compreensão do zero no sistema, como "base para a construção da sequência dos números naturais e, em decorrência, dos outros conjuntos numéricos que os educandos aprendem durante suas vidas escolares." (TRACANELLA, 2018 – p.167).

Em seu estudo, Tracanella ainda destaca a necessidade de se respeitar a condição do entendimento das características do SND por parte dos alunos, promovendo a retomada do ensino em todos os períodos dos anos inicias do fundamental I, além de valorizar a necessidade de deixar claro o que se trabalha no processo de ensino sobre o SND.

Também consultamos a dissertação de Milan (2017) que objetiva a reflexão sobre o SND, focando as condições didáticas que possibilitam a compreensão daquilo que está oculto. Em seu resumo, destaca que:

> Nossa pesquisa trouxe contribuições relevantes, tais como: o modo como os alunos se relacionam, pensam e entendem o valor posicional; promover aproximações sucessivas sobre o valor dos algarismos que representam o primeiro agrupamento da base dez; justificar a eficácia das sequências didáticas na aprendizagem matemática; identificar variáveis, no ensino e aprendizagem, que asseguram o processo tanto de conceitualizações sucessivas a novos conhecimentos quanto de variáveis presentes no ensino usual, as quais inviabilizam o processo de construção dos conhecimentos pelos alunos; e, ainda, confirmar o potencial das discussões coletivas para a aprendizagem matemática. (Milan, 2017 – p.9)

A dissertação possui o foco em estudos detalhados que envolvem o ensino e a aprendizagem e, diante da constatação de que os alunos têm, muitas vezes, dificuldades em compreender as regularidades do sistema de numeração e principalmente "a posição" dos algarismos nos números, a autora optou por aplicar uma mesma sequência didática criada por um grupo de pesquisadores argentinos que tomava como ponto de partida a interação com a numeração escrita.

Sobre o ensino do SND, a autora destaca que;

> As escolas públicas brasileiras, de forma abrangente, trabalham com o ensino do sistema posicional desde o início das séries iniciais do ensino fundamental. A dificuldade de compreensão do valor posicional, pelas crianças, pode estar diretamente relacionada à complexidade que envolve seu funcionamento. É um sistema de numeração que, se comparado a outros, apresenta diferenças bastante pontuais que não são estudadas com a profundidade necessária. (MILAN, 2017 – p.22)

No decorrer de sua pesquisa, a autora infere que os alunos não dão pistas em suas construções, dificultando assim a construção de hipótese sobre o valor posicional, mas parece não solidificar o conhecimento sobre sistema posicional. Até mesmo uma ação de intervenção do professor não foi garantida, pois não houve segurança para tal:

> • A intervenção do professor, ação que necessitava ser assegurada para que os alunos pudessem analisar e refletir sobre o sistema de numeração, não foi garantida, pois ele não apresentou nenhuma segurança sobre como ajudar os alunos a produzir uma explicitação (a partir das diversas regras preliminares que aconteceriam durante a sequência) que pudesse ser considerada matematicamente correta.
>
> • A última atividade, cuja função seria a de encaminhar os alunos para a construção de uma regra que pudesse ser utilizada para antecipar o resultado das diversas somas com números de dois dígitos e, consequentemente, seguir com a institucionalização, não garantiu esse objetivo, pois não reproduzia as conclusões dos nossos alunos. (Milan, 2017 – p.68)

Em nosso estudo, levantamos a ideia de que a formalização dos algoritmos sobre as quatro operações fica melhor apresentada, e de forma mais objetivada, somente após a compreensão da formação dos números, uma vez que os algoritmos se sustentam quando operado ordem por ordem. Ainda assim, as ideias centrais dessa formação devem ser retomadas continuamente. Milan destaca que os alunos demonstram dificuldades com a estrutura dos algoritmos da adição e concluiu que "Essas dificuldades indicam a não compreensão do nosso sistema de numeração e seriam indispensáveis investimentos em situações didáticas que provocassem a análise das regularidades do sistema” (p.68). Não queremos transferir a responsabilidade de determinados insucessos para o professor, pois sabemos quão importante e essencial é seu papel. Assim, defendemos a ideia da formação do docente ser a mais completa possível, a fim de contribuir com justificativas que promovam elucidações sobre o objeto em estudo. Sem levar em consideração que o aluno precisa se sentir responsável por sua aprendizagem, pois o processo de ensino aprendizagem exige determinada autonomia por parte do discente.

Em nosso estudo, destacamos que o ensino sobre SND precisa ser pautado na formação dos números e que os algoritmos das quatro operações não aconteçam de forma imediata sem a valorização de seus porquês. Tais procedimentos são necessários já na formação inicial dos professores, pois é nela que podemos garantir um ensino sólido. A autora destaca a importância do professor se ater sobre o ensino do SND:

> São vários os estudos e pesquisas que evidenciam a complexidade na compreensão do SND por professores e, consequentemente, pelos alunos; e também a superficialidade que há no ensino da matemática nos cursos de graduação de professores do EF (Pedagogia); e o desconhecimento das regularidades presentes no sistema de numeração (tanto no professor quanto nos alunos) que prejudicam a compreensão do sistema posicional entre outros. (Milan, 2017 – ps.106 -107)

Em relação aos professores, a autora defende a ideia de que é indispensável conhecimentos sobre o assunto a trabalhar e destaca que “em nossa pesquisa confirmamos a importância da mediação do professor nas situações didáticas para a promoção de aprendizagem; a necessidade de conhecer e compreender as regularidades do SND” (p.119).

Chamamos a atenção o fato de que o estudo acima realizado só contemplou uma pequena parte ligada ao ensino do SND e, mesmo assim, podemos levantar situações que convergem com as nossas análises, ratificando a necessidade de haver um investimento maior, por parte dos gestores da educação básica, na estruturação do ensino sobre o SND.

O trabalho feito por Figueiredo e Silva (2015) apresenta os resultados de uma pesquisa feita com professores do ensino básico sobre o entendimento do SND.

O artigo procura evidenciar algumas deficiências no ensino do SND na escola básica no Brasil. Como uma abordagem mais voltada para a preparação dos professores que atuam nos anos iniciais do Fundamental I, os autores levantam uma situação preocupante no que tange o ensino de números. Em relação ao cenário atual dizem que:

> O cenário atual nas escolas de educação básica, em geral, apresenta um insucesso muito grande quando se exige que o aluno, em qualquer série que se encontre, resolva uma divisão simples do tipo: 60003 dividido por 6. A maioria apresenta como resposta o valor de 1000,5. Vejamos que, a operação inversa 1000,5 vezes 6 está longe de 60003. Este erro se dá desde a formação do estudante, pois não é habitual que se trabalhe o sistema de numeração de forma imprescindível. O ensino da composição ou decomposição de um numero, muitas vezes, é "atropelado" pela necessidade de se despender tempo no treinamento dos algoritmos das operações básicas. Assim, o aluno é levado a se preocupar mais com resultado final, e portanto não compreende por completo o que está fazendo. Um fato curioso é que, independentemente da situação financeira, tempo dedicado aos estudos, ou localização da moradia dos alunos, o percentual de insucesso na realização de uma divisão simples parece ser praticamente constante. (FIGUEIREDO e SILVA, 2015 – p.46)

Este artigo ratifica algumas ideias defendidas por nós, como a necessidade de se investir na formação dos números antes do uso dos algoritmos convencionais das operações básicas e que o SND precisa ser tratado como um só, envolvendo, em algum momento da alfabetização matemática, os números naturais e os números decimais conjuntamente.

O que aprendemos com esses estudos

Dentre as produções acadêmicas pesquisadas por nós que apresentam algum estudo sobre o SND, há a valorização do cuidado no tratamento do ensino de números. Em nossa pesquisa, focamos mais sobre como o professor pode lidar com a formação dos números e com as operações básicas, mas podemos notar pontos comuns em diversos estudos ligados os discentes. A preocupação com o valor posicional aparece claramente nos estudos, uma característica essencial do SND e cuja exploração pode favorecer a compreensão de algoritmos. Principalmente os problemas ligados aos algoritmos convencionais, nos chama a atenção os tipos de erros que são recorrentes, indicando a necessidade de flexibilizar os procedimentos e valorizar mais o uso compreensivo de capacidades operatórias.

Na maioria dos estudos relatados aqui, a formação dos professores aparece como um ponto a ser discutido, pois falar sobre o SND requer certos cuidados que não devem ser tratados como assuntos triviais. O próprio posicionamento do algarismo no número, que é uma característica dos SND, requer cuidados em seu ensino, pois vimos estudos apontando a necessidade de um tempo e atenção maiores para sua assimilação. Os estudos, sem síntese, nos falam sobre a necessidade de darmos uma atenção maior no processo ensino aprendizagem, pois são latentes e decepcionantes os resultados encontrados.

Certos de que o ensino sobre o SND requer uma atenção especial, podemos notar também que há grandes preocupações de se fazer um bom trabalho em sua difusão. No ponto de vista educacional, isso nos parece assertivo. Quanto mais se despertar a necessidade do cuidado e atenção no processo de ensino aprendizagem do SND, mais chances de ter claro o entendimento sobre números.

CAPÍTULO III

3. FORMAÇÃO DOS NÚMEROS NO SND

Veremos nesse capítulo alguns destaques sobre o Ensino do SND, com o objetivo de favorecer a construção de alternativas de ensino.

O sistema de numeração utilizado nos dias de hoje em diversos setores do mundo recebeu o nome de Sistema de Numeração Indo-Arábico, que também é conhecido por Sistema de Numeração Decimal.

Esse sistema, quando comparado com os outros sistemas de numeração que existiram ao longo da história humana, possui uma forma lógica e ágil, proporcionando cálculos mais sistematizados e relativamente mais rápidos de serem executados. É possível efetuar cálculos obedecendo uma mesma lógica para números considerados pequenos ou grandes; a ordem de grandeza de um número nesse sistema recebe uma nomenclatura que se utiliza de uma analogia em toda sua extensão e é um sistema que usufrui de poucos símbolos, apenas dez, para sua formação. Suas características são bem definidas e apesar de possuírem sentidos próprios, se entrelaçam formando uma ideia única, coerente e eficaz para a representação de quantidade, posição, medida ou um código.

Vejamos algumas características do nosso sistema de numeração que merecem destaques.

a) Algarismo e Número

No convívio social há certas situações na qual número e algarismo são termos que se misturam, relacionando-se sem maiores problemas em função de um contexto que priorize informações de quantidades ou medida. Por exemplo, dizer que cada número (em vez de dizer cada algarismo) do número 1 234 deverá ser escrito com as cores verde, amarela, azul e branco não interfere no entendimento do próprio número.

Para o dicionário Oxford de Matemática Essencial, (2012, p.34) números são “elementos básicos da aritmética, usados para expressar e registrar quantidades ou medidas” e algarismos são “símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 usados na aritmética do dia a dia”. Vários outros livros didáticos repetem esse entendimento e destacamos aqui, ainda, a importância de não confundirmos número e algarismo com numeral. Contudo, não podemos esquecer que em situações de ensino precisamos levar em conta o contexto quando utilizarmos algarismo ou número, pois da mesma forma que precisamos de uma situação para entendermos que a palavra manga se trata de uma fruta ou de uma parte da camisa, o símbolo 5 pode ser um número ou um algarismo. Na maioria dos cenários usaremos o símbolo 5 como algarismo para representar o número 5, porém o símbolo 5 isolado pode ser ao mesmo tempo um algarismo ou um número.

Todo número do nosso sistema de numeração é formado por algarismos, que conforme seu posicionamento, alinhava representações completamente diferentes. O número 18, formado pelos algarismos 1 e 8, configura uma situação completamente diferente da representação do número 81, que também é formado pelos algarismos 1 e 8.

Se utilizarmos os algarismos 1, 8 e 9, por exemplo, para compor um número de dois algarismos, teremos 9 representações diferentes (11, 18, 19, 81, 88, 89, 91, 98 e 99). Para compor um número de três algarismos, poderemos formar 27 representações diferentes e para um número de infinitas ordens, teremos infinitas representações diferentes.

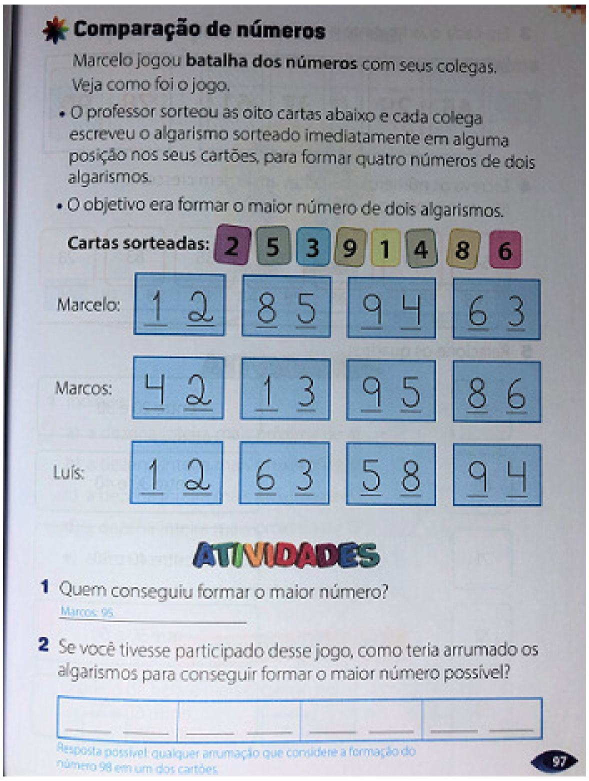
Utilizando-se dos 10 algarismos, podemos formar todos os números existentes, pois os algarismos podem se repetir ocupando todas as posições que se queira. Vale a pena ressaltar que, para fins práticos, não se considera o algarismo 0 como algarismo de um número se ele estiver à esquerda de outros algarismos, assim, o número 034 possui apenas dois algarismos (o algarismo 3 e o algarismo 4). Da mesma forma não consideramos o 0 como algarismo de um número quando estiver à direita após a vírgula, veja que o número 34,0 é composto por apenas dois algarismos (o algarismo 3 e o algarismo 4). Esta notação tem um sentido em situações onde ser afirmar a sua exatidão, por exemplo.

Youssef e Guelli (2017) alertam o professor para a importância de valorizar a diferença entre número e algarismo aos alunos e recomendam que, ao longo do ano escolar, é papel do professor destacar que algarismo pode ser um número, mas um número nem sempre pode ser algarismo. Para eles, algarismos e números são assim definidos:

> Os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 são símbolos do nosso sistema de numeração chamados indo-arábicos. Eles possuem esse nome, porque foram criados pelos povos da Índia que habitaram o vale do rio Indo, onde hoje é o Paquistão, e transmitido ao mundo da antiguidade pelos árabes.
>
> Com esses 10 símbolos é possível representar qualquer número. (YOUSSEF e GUELLI, 2017, V.4, p.16)

Com o significado de número e algarismo é possível que se tenha um melhor entendimento das características do SND, uma vez que a formação dos números não deve ser encarada de forma trivial. Um bom exemplo de atividades para o início do ensino do SND é apresentar alguns algarismos e solicitar que se forme alguns números com fizeram Bordeaux e outros (2017). Vejamos na figura abaixo.

Figura 7: Atividade envolvendo algarismos e números



FONTE: BORDEAUX E OUTROS, Novo Bem-Me-Quer Matemática, livro didático 2º ano. 2017, p.97

b) A Vírgula

Embora presenciemos em nosso cotidiano números desacompanhados da escrita da vírgula, sabemos que ela possui seu fundamental papel no SND. Além da vírgula separar a parte inteira da parte não inteira de um número, destacamos que todo número cardinal possui vírgula e que sua indicação na escrita pode ser opcional, pois podemos representar o número 5 de infinitas maneiras, como por exemplo 5,0 ou 5,0000. Naturalmente, é preciso que tais notações façam sentido no contexto em que forem utilizadas.

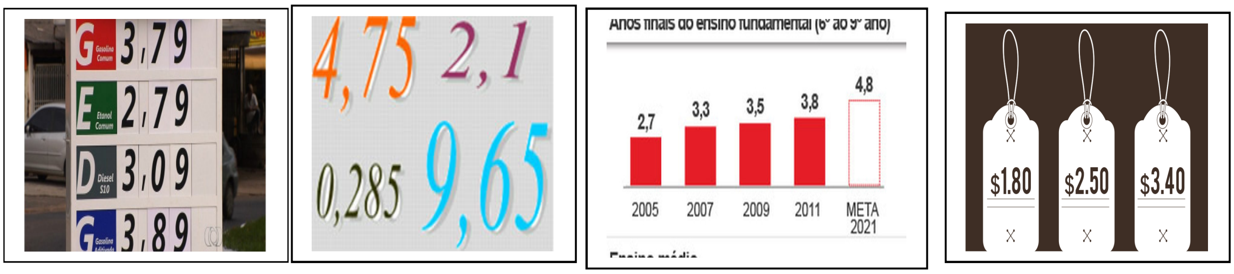
Logo, a vírgula nem sempre precisa ser destacada em um número do nosso sistema, mas seu posicionamento e relevância são indispensáveis, pois ela separa a representação da parte inteira da parte não inteira de um número.

<u>Parte Inteira</u> **,** <u>Parte não inteira</u>

Quando a parte não inteira de um número não exprimir quantidade é possível ocultá-la, deixando de utilizar a escrita da vírgula. O uso da vírgula se torna obrigatório quando a parte não inteira exprimir quantidade e isso independe se a parte inteira representar ou não quantidade. Como exemplo temos que o número 25,0 pode ser escrito como 25 (parte decimal não exprime quantidade), mas o número 0,25 (em sua forma decimal) não pode ser escrito sem o uso da vírgula porque sua parte não inteira exprime quantidade.

Os números com vírgulas aparecem constantemente em nosso cotidiano, vejamos alguns exemplos de números decimais:

Figura 8: Visualização de números decimais



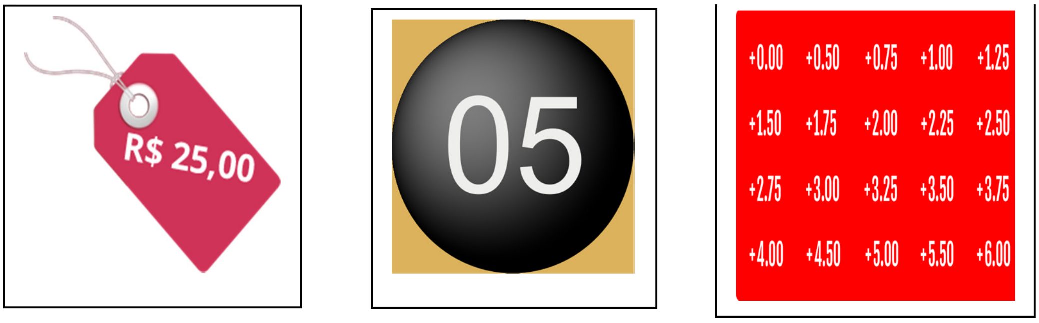
Fonte: https://www.google.com.br, acesso em 28/10/2018

Para nós, respeitando o tempo de aprendizagem de cada um, compreender o uso da vírgula nos números cardinais ajuda muito na compreensão dos números, como por exemplo, compreender que 8,7 é maior que 8 e menor que 9 ou que 8,7 é maior que o número 3.

<u>c) Ordens e Classes</u>

A ordem de um número é o posicionamento de um valor específico no número ou simplesmente o posicionamento do algarismo no número, sendo que um conjunto de ordens compõe um número. Todo número do nosso sistema de numeração possui infinitas ordens e infinitas classes, mesmo que não expressem quantidade. O preenchimento das ordens que expressam quantidade acontece de forma obrigatória em função da necessidade de realçar seu real valor, mas é muito comum utilizarmos a ideia do preenchimento das ordens de um número que não expressam quantidade. Vejamos alguns exemplos:

Figura 9: Visualização de números com ordem que não expressam quantidade



Fonte: https://www.google.com.br, acesso em 28/10/2018

Vale a pena ressaltar que há situações na qual se destacam o zero no preenchimento de uma ordem que não expressa quantidade, mas isso pode ser que aconteça pelo fato de precisar deixar todos os números trabalhados com a mesma quantidade de ordem, para reafirmar algum valor com a ideia de maior precisão.

É aceitável que a escrita de um número seja diversificada quanto à quantidade de ordens, pois o número 2 pode ser representado, por exemplo, como 02 ou 2,0 ou 02,00, mas, é bastante impraticável que a escrita de um número qualquer fique condicionada a utilização de suas infinitas ordens.

Vejamos a indicação do número 2 destacando suas infinitas ordens e classes que não expressam quantidades, o que pode fazer sentido em algum contexto muito específico:

Figura 10: Visualização de números com infinitas ordens que não expressam quantidade

...	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 2	,	0 0 0	0 0 0	0 0 0	...
	CLASSE DOS BILHÕES	CLASSE DOS MILHÕES	CLASSE DOS MILHARES	CLASSE DOS SIMPLES		CLASSE DOS MILÉSIMOS	CLASSE DOS MILIONÉSIMOS	CLASSE DOS BILIONÉSIMOS	

Fonte: Arquivo pessoal

É muito mais prático ocultarmos as infinitas ordens e classes que não expressam quantidades escrevendo o número dois naturalmente como2.

Uma expressão muito comum "zero à esquerda não faz diferença" ou "aquilo é um zero à esquerda" está atrelada a ideia acima de não ser necessário destacar uma ordem que não expressa quantidade. De forma análoga pode-se dizer da expressão "zero à direita após a vírgula não faz diferença", pois também não é necessário destacar uma ordem após a vírgula que não expressa quantidade.

Como um número pode possuir infinitas ordens, três ideias básicas que são obviedades relacionadas à sua composição:

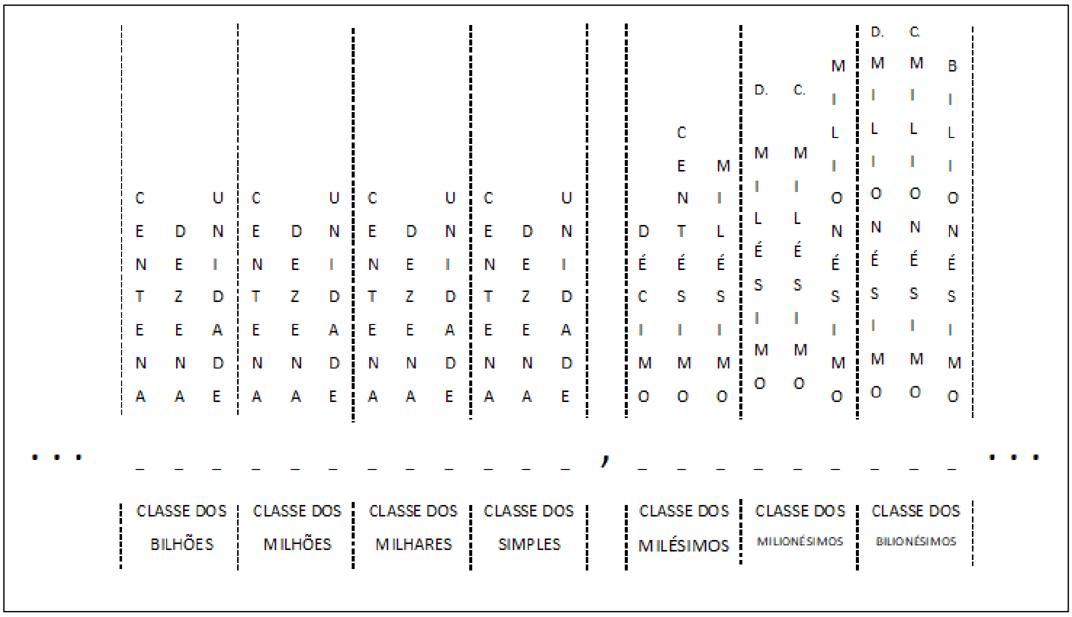
- A primeira ideia destaca que cada ordem é dez vezes maior que a ordem imediatamente inferior, assim quando uma ordem exceder 9 unidades haverá uma transformação a cada 10 unidades para uma unidade da ordem superior.
- A segunda ideia na formação do número é que cada ordem não pode exceder um valor maior que 9 unidades, assim o valor da ordem se limita ao valor de cada algarismo.
- A terceira é não precisar destacar a ordem que não expresse quantidade para o número, de modo que não devemos confundir o valor do algarismo com o valor expresso pela ordem. Vejamos: o número 20 possui o algarismo 2 na ordem das dezenas e o algarismo zero na ordem das unidades, mas se a ordem da dezena expressa quantidade significa que a ordem da unidade exprime um montante que foi excedido de 9, que no nosso exemplo totalizou 20 unidades.

Conjugando com essas ideias, cada ordem recebe um nome específico que segue um padrão comum atingindo todas as ordens que compõe tanto a parte inteira, como a parte não inteira de um número.

Para facilitar o entendimento da composição de um número, utiliza-se da classe de um número, que é o conjunto de três ordens consecutivas a partir da vírgula. Veja que para a parte inteira de um número tem-se a primeira classe chamada de classe simples, a segunda classe recebe o nome de classe de milhar, a terceira classe recebe o nome de milhão, a quarta classe é do bilhão, depois trilhão, etc. Para a parte não inteira de um número, também cada classe possui três ordens a partir da vírgula, sendo a primeira a classe dos milésimos, a segunda classe é dos milionésimos, a terceira dos bilionésimos e assim por diante.

Assim:

Figura 11: Visualização de ordens e classes de um número



Fonte: Arquivo pessoal

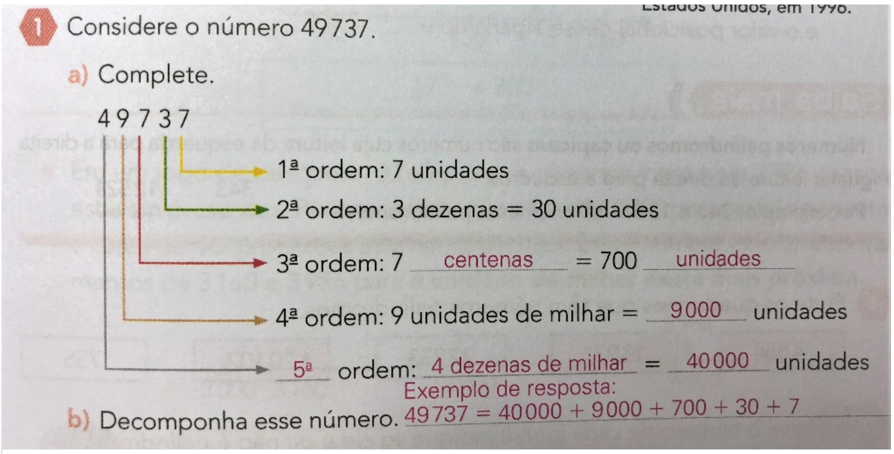
d) Valor Posicional do Algarismo: composição e decomposição de um número

Um número cardinal pode ser decomposto em diferentes formas, facilitando, em muitos casos, uma aplicação de sua representatividade. Expressões correspondentes de um número são bastante comuns em nosso cotidiano, como, por exemplo, dizer que em uma caixa há 2 dezenas de objetos ou 20 objetos, ou ainda que 501 pessoas correspondem a mais que 5 centenas de pessoas. Tais expressões estão ligadas diretamente à decomposição de um número que está ancorada em seu valor posicional, pois nosso Sistema é posicional e para Centurión:

> O Sistema Decimal é posicional porque o mesmo símbolo representa valores diferentes, dependendo da **posição** que ocupa no numeral. Por exemplo, no numeral 224, o algarismo 2 tem valor posicional **duzentos** e valor posicional **vinte**. (CENTURIÓN, 1994, p. 36)

Julgamos a decomposição e a composição de um número uma parte bastante relevante no ensino do SND, pois nos parece ser a essência da lógica que justifica o posicionamento do algarismo. Comparar suas ordens obedecendo que uma delas é dez vezes maior que a ordem à sua direita é de extremo hermetismo fascinante. Abaixo, podemos notar uma atividade muito comum para alunos do 4° e 5° anos nos livros didáticos do Ensino Fundamental I.

Figura 12: Atividade envolvendo dezena de milhar



FONTE: DANTE, Luiz Roberto. Ápis Matemática, livro didático 4º ano. 2017, p.27

Trata-se de um exercício voltado para a decomposição de um número inteiro. Nesse exercício, o autor aciona o valor posicional de cada algarismo, promovendo no tópico *a)* algumas comparações de ordens com as unidades (não encontramos, nos livros referenciados por nós, atividades que promovam comparações com as dezenas, centenas ou uma ordem decimal) e *b)* promovendo decomposição por ordens, pois apresenta um exemplo de resposta destacando para os professores, no guia do material de apoio, que o professor verifique se os alunos fizeram outras decomposições.

Achamos muito válida a abordagem nessa linha de diferentes decomposições, ou seja, além das decomposições convencionais que tratam de valores comparativos com a ordem da unidade, é preciso também fazer, estimular, propiciar, apresentar e conversar sobre as outras formas de comparações das ordens. Por exemplo, dizer que em 1 unidade de milhar há 10 centenas ou que em 4 dezenas de milhar há 400 centenas, ou ainda dizer que em 7 centenas há 70 000 centésimos. Podemos iniciar tais comparações entre ordens diferentes da ordem da unidade fazendo comparações com ordens vizinhas, do tipo dezenas de milhar e unidade de milhar, centena com dezena ou décimo com centésimo. Assim, poderia facilitar a percepção que cada ordem é maior que a ordem imediatamente inferior dez vezes. Como exemplo podemos explorar ainda que 4 dezenas de milhar são iguais a 40 unidades de milhar, ou que 9 centenas são iguais a 90 dezenas ou que 7 décimos são iguais a 70 centésimos, ou ainda que 30 milésimos são iguais a 3 centésimos.

Sabendo que uma ordem equivale a dez vezes a ordem imediatamente inferior ou, ainda, que a cada dez unidades de uma ordem há uma unidade da ordem imediatamente superior, temos que no estudo dos números racionais positivos cada ordem possui um valor relativo e uma infinidade de comparações que podem ser exploradas.

Chamamos a atenção para o grau de complexidade dessas comparações entre as ordens e ressaltamos que o momento de fazê-las depende do planejamento do professor, mas seu entendimento pode colaborar para a compreensão da formação dos números.

Vejamos algumas equivalências entre algumas ordens:

- 1 dezena é igual a 10 unidades;
- 0,5 dezena é igual a 5 unidades;
- 1 centena é igual a 10 dezenas que são iguais a 100 unidades;
- 0,8 centena é igual a 8 dezenas que são iguais a 80 unidades;
- 0,06 centena é igual a 0,6 dezena que é igual a 6 unidades;
- 3 unidades de milhar são iguais a 30 centenas que são iguais a 300 dezenas que são iguais a 3000 unidades;
- 0,5 unidade de milhar é igual a 5 centenas que são iguais a 50 dezenas que são iguais a 500 unidades;
- 0,002 unidade de milhar é igual a 0,2 centena que é igual a 2 dezenas que é igual a 2 unidades;
- 7 centésimos são iguais a 0,7 décimos que é igual a 0,07 unidade;
- 4 unidades são iguais a 40 décimos que são iguais a 400 centésimos que são iguais a 4000 milésimos.

Podemos dizer que os números 50 e 3,5 possuem:

50
- 50 unidades inteiras
- 5 dezenas inteira
- Meia centena
- 500 décimos

3,5
- 35 décimos inteiros
- 3 unidades inteiras e 5 décimos
- 3 unidades e meia
- Não possui dezena inteira

Podemos dizer também que o número 204 corresponde a 20 dezenas inteiras, 20,4 dezenas, 2 centenas inteiras ou 2,04 centenas.

Já em relação ao número 1002,08 temos:

- 100 208 centésimos inteiros;
- 10 020 décimos inteiros;
- 10 020,8 décimos;
- 1 002 unidades inteiras;
- 1 002, 08 unidades;
- 100 dezenas inteiras;
- 100,208 dezenas;
- 10 centenas inteiras;
- 10,0208 centenas;
- 1 unidade de milhar inteira;
- 1,00208 unidade de milhar.

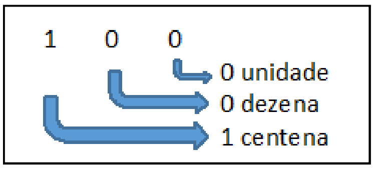
Flanar por esse contexto dos exemplos acima pode contribuir para situar os valores relativos de um número, pois não devemos confundir o valor do algarismo na ordem (muitas vezes chamado de valor absoluto) com o valor que essa ordem representa para o número.

O número 327 possui 3 centenas mais 2 dezenas mais 7 unidades e entende-se que se trata de ordens inteiras. Mas, dizer que esse número 327 possui 2 dezenas, sem mencionar suas centenas e unidades é bastante perigoso, pois é preciso um contexto muito particular e que especifique que se tratará do valor do algarismo na ordem das dezenas, pois 2 dezenas é igual a 20 unidades que se difere das 327 unidades que compõem o número.

Recorrendo ao exemplo dado no capítulo I que destaca as problemáticas sobre o SND dizendo que o número 305 possui 3 centenas, 0 dezena e 5 unidades, podemos notar dois graves equívocos: dizer que no número 305 há 0 dezena e dizer que ele possui 5 unidades. É importante entender o que se deseja analisar no número 305, pois nele temos os algarismos 3, 0 e 5 ocupando as ordens das centenas, dezenas e unidades, respectivamente. Assim, se quisermos dizer quais algarismos são utilizados na formação desse número, podemos dizer que são os algarismos 3, 0 e 5 (ou 0, 3 e 5 ou 5, 3 e 0 ou ainda quaisquer combinações entre os três algarismos). Se quisermos indicar o valor que cada algarismo exerce no número 305, temos que compreender sua decomposição, pois o possui 30 dezenas inteiras, confrontando com o dito de que há 0 dezena e o número 305 possui 305 unidades, diferente da ideia de ter apenas 5 unidades. Assim, no número 305, podemos observar que:

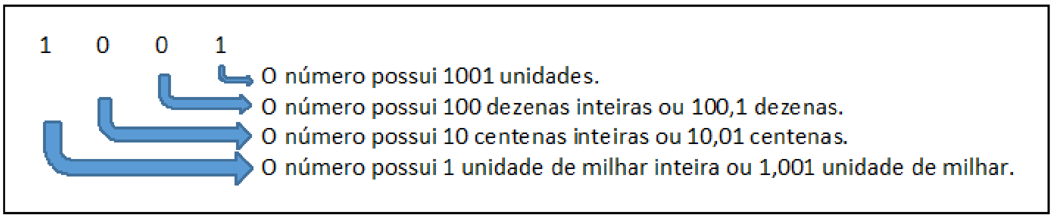
- o valor do algarismo na ordem das unidades é 5;
- o valor do algarismo na ordem das dezenas é 0;
- o valor do algarismo na ordem das centenas é 3;
- possui 305 unidades ou unidades inteiras;
- possui 30 dezenas inteiras ou 30,5 dezenas;
- possui 3 centenas inteiras ou 3, 05 centenas.

Vamos observar o esquema abaixo sobre o número 100:



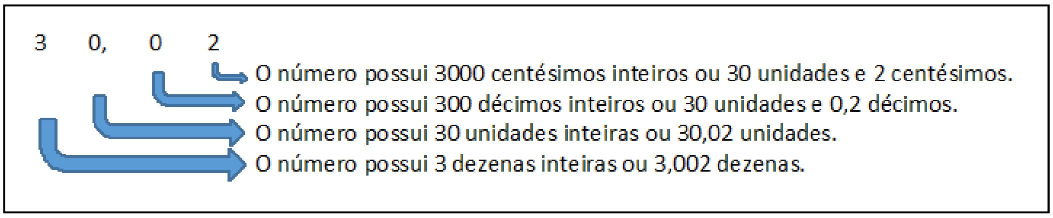
Este esquema só faz sentido para mencionarmos o valor do algarismo de suas ordens, pois ele induz a falsa representação de sua decomposição uma vez que o número 100 possui 1 centena inteira ou 10 dezenas inteiras ou 100 unidades.

Observamos agora o esquema abaixo sobre o número 1001:



Esse esquema representa corretamente um valor das ordens do número 1001.

O mesmo ocorre para os números decimais. Observe o esquema para o número 30,02:



Explorando uma situação prática que possa motivar a utilidade da decomposição de um número em nosso cotidiano, temos o uso da facilitação do troco em pagamentos diversos no comércio. Vejamos a seguinte situação:

Ao comprar um produto que custa R$ 8,50 João efetua o pagamento com uma nota de R$ 10,00. O atendente do caixa pergunta se João possui R$ 0,50 e a resposta de João é não. Mas, como pode ser possível ter R$ 10,00 e não ter R$ 0,50? O que está por trás dessa pergunta é o contexto social pois, na verdade, ao se perguntar se João possui R$ 0,50 o atendente do caixa quer saber se além dos R$ 10,00 João teria mais R$ 0,50 para facilitar o troco fazendo com que João recebesse uma nota de dois Reais ao contrário de receber duas moedas, uma de R$

1,00 e outra de R$ 0,50. A facilitação do troco acontece quando o valor de R$ 8,50 é decomposto como R$ 8,00 + R$ 0,50 para que a nota de R$ 10,00 pague R$ 8,00 (recebendo R$ 2,00 de troco) e os outros R$ 0,50 sejam pagos separadamente.

e) Um Sistema Aditivo e Multiplicativo de Base 10

O sistema de numeração caracteriza-se essencialmente pela base 10 porque cada agrupamento de dez unidades de uma ordem forma uma unidade da ordem imediatamente superior. A característica de ser aditivo e multiplicativo acontece simultaneamente em função da decomposição de cada número, pois todo número pode ser escrito como a soma das unidades compostas em cada ordem e cada ordem pode ser escrito como um produto do valor de seu algarismo por uma potência de 10.

Vejamos os exemplos:

O número 321 pode ser representado como$3 . 100 + 2 . 10 + 1$ ou $3 . 10^2 + 2 . 10^1 + 1 . 10^0$.

Da mesma forma:

O número7 859$\longrightarrow 7 . 1\,000 + 8 . 100 + 5 . 10 + 9$ ou $7 . 10^3 + 8 . 10^2 + 5 . 10^1 + 9 . 10^0$.

O número 500 $\longrightarrow 5 . 100$ ou $5 . 10^2$.

O número 820 007 $\longrightarrow 8 . 100\,000 + 2 . 10\,000 + 7$ ou $8 . 10^5 + 2 . 10^4 + 7 . 10^0$.

O número 820 000,7 $\longrightarrow 8 . 100\,000 + 2 . 10\,000 + 0{,}7$ ou $8 . 10^5 + 2 . 10^4 + 7.10^{-1}$.

O número 45, 67 $\longrightarrow$ $4 . 10 + 5 + 0{,}6 + 0{,}07$ ou $4 . 10^1 + 5.10^0 + 6.10^{-1} + 7.10^{-2}$.

O número 0,563 $\longrightarrow$ $0{,}5 + 0{,}06 + 0{,}003$ ou $5 . 10^{-1} + 6 . 10^{-2} + 3 . 10^{-3}$.

Desenvolvendo essa ideia, Marília Centurión aponta que

> O Sistema Decimal é multiplicativo porque um algarismo à esquerda de outro vale dez vezes o valor posicional que teria se estivesse ocupado a posição do outro. Por exemplo: $333 = 3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 3$. O Sistema Decimal é aditivo porque o valor do número é obtido pela adição dos valores posicionais que os símbolos adquirem nos respectivos lugares que ocupam. Por exemplo 425 = 400 + 20 + 5. (CENTURIÓN, 1994, p. 36-37)

<u>f) As características do SND</u>

O Sistema de Numeração Decimal é bastante utilizado no mundo todo, como se sabe, possui ricas características que contribuíram sobremaneira para a evolução da humanidade e o seu ensino para as novas gerações é essencial. A utilização de números decimais e de números inteiros faz parte do cotidiano de todos nós, presente em inúmeras situações informais e formais. Logo, é importante valorizar, em algum momento da escolarização, uma abordagem conjunta e articulada entre os decimais e inteiros como parte do mesmo sistema. Esse entendimento resgata a ideia de ser o Sistema de Numeração Decimal um só para números inteiros e decimais, mostrando ser necessário e possível articular suas representações, contemplando tanto os inteiros e os decimais. Nessa linha de pensamento e como nos fala os PCN`s (já citado nesse trabalho, p.19), é interessante que em algum momento da formação se utilize a apresentação da parte decimal e inteira de um número ao mesmo tempo, aproveitando a analogia em sua formação e valorizando, principalmente, o posicionamento de todos os seus elementos.

O sistema de numeração Indo-Arábico exige certo investimento escolar para sua compreensão, uma vez que a construção dos conceitos relativos a ele não se dá de uma só vez, mas sim pelo conjunto e entrelaçamento das características e ideias que o envolve. Além disso, como se desenvolve na escolarização por vários anos, exige planejamento específico.

As características do SND se misturam proporcionando um registro que serve para utilizar diversas grandezas e, com apenas 10 símbolos, podemos organizar a ideia do posicionamento do algarismo de um número compondo uma infinidade de possibilidades para a sua formação, inclusive a parte decimal do número. Nossa análise e indicação vai no sentido de não tratar as ordens decimais separadamente das ordens inteiras, dando ao educando a ideia da unicidade do Sistema.

Os números decimais, ou simplesmente números com vírgula, são números que circundam nossos cotidianos, pois estão presentes no comércio, nas medições ou para quantificar de modo geral. Embora possa não parecer, na vida cotidiana há muito mais números decimais do que naturais. Para Centurión, a representação dos números decimais está atrelada às frações e à organização de base 10, pois, para se ter um décimo, basta dividir uma unidade por dez. A autora afirma, ainda, que:

> O fato de nosso sistema de numeração ser posicional e ter base dez permitiu que as frações fossem representadas, na notação decimal, como números decimais. Para tanto foi necessário que se criasse uma forma de diferenciar a

parte inteira de um número, de sua parte fracionária. (CENTURIÓN, 1994, P.270)

Devido ao grau de importância e complexidade dos números e suas operações, há que se considerar ser um assunto tratado durante anos da escolarização e é no estudo do SND que sua compreensão é construída. Para efeito de ensino, o(a) professor(a) precisará considerar que um número é composto de duas partes: uma parte inteira e outra parte não inteira, em muitos momentos e fases do ensino se dedicando mais a uma delas. Entretanto, não podemos cogitar uma dessas partes desvinculada do número, cuidando então para que se promova a clareza de serem eles do mesmo Sistema.

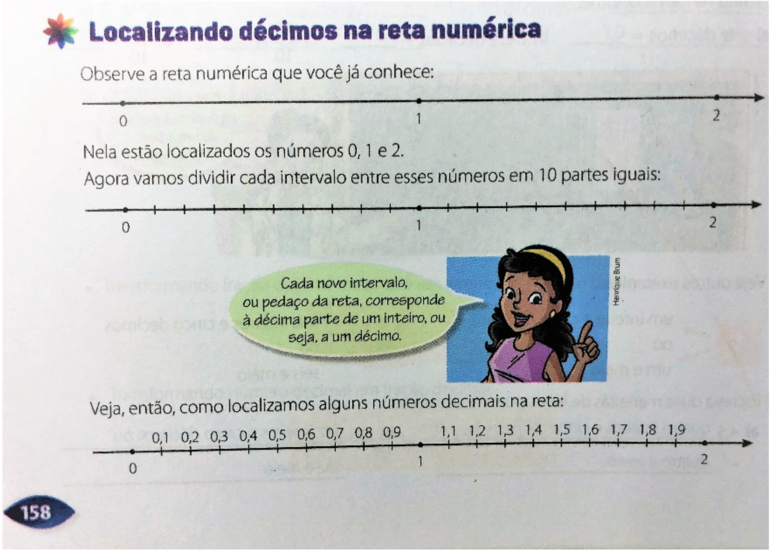
Nos livros didáticos do Ensino Fundamental I, pesquisados e referenciados aqui por nós, verificamos que os números decimais são apresentados no 4º ou 5º ano do Ensino Fundamental e sempre após o ensino dos números fracionários. Não condenamos essa prática, mas acreditamos que podem ser apresentados também durante o entendimento das características dos SND. Em nosso entendimento, a prática de tratar de modo tão separado o número natural e decimal parece diminuir a possibilidade de compreensão do próprio SND, por contribuir para a errônea ideia de que o nosso sistema numérico é composto por apenas números inteiros ou de se tratarem de números de sistemas diferentes.

Já nos primeiros anos da Educação Infantil, é possível que se tenha, no visual, situações com os números com vírgula e, ao avançar na escolarização, eles aparecem com mais frequência e fazem parte do nosso cotidiano em uma medida linear, um valor monetário ou uma quantificação qualquer. O que estamos defendendo é que condicionar a apresentação dos números com vírgula somente após o ensino dos números fracionários pode criar uma lacuna no entendimento do SND por acreditar que não possuem as mesmas características dos números inteiros. Fica, assim, o desafio aos professores de articular os números e suas representações, mostrando serem eles parte do mesmo SND.

Uma forma muito interessante para entendermos que os números com vírgula fazem parte do mesmo SDN que os números inteiros, (sem mencionar os números fracionários) pode ser visto na página158 do livro de Bordeauxet al. (2017), onde os autores apresentam a reta numerada.

Vejamos:

Figura 13: Atividade envolvendo décimos na reta numerada



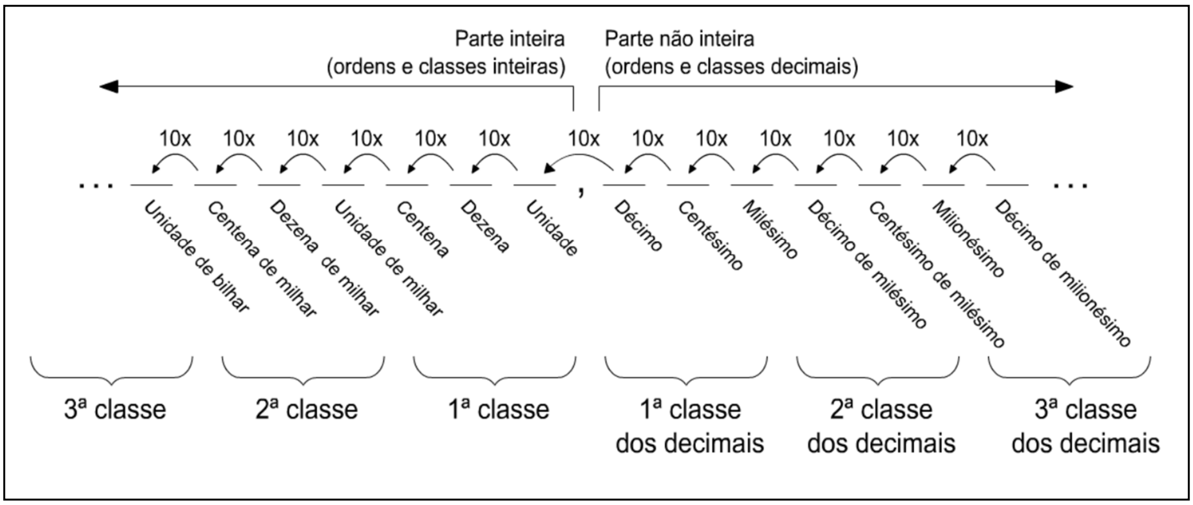
FONTE: BORDEAUX E OUTROS, Novo Bem-Me-Quer Matemática, livro didático 5º ano. 2017, p.158

Atividades dessa relevância para anos anteriores ao 5º ano talvez não sejam interessantes conforme o contexto de ensino, porque devemos respeitar o tempo de entendimento e assimilação de cada um. Contudo, vemos que promover a ordenação dos números na reta numerada pode estimular uma habilidade importante no desenvolvimento escolar que leve à percepção de como estes números se articulam. Assim, podemos representar o número 1,2 à direita do número 1 e à esquerda do número 2 na reta numerada, sem que se tenha a exigência de seu real posicionamento, apenas comparando que 1,2 é maior que 1 e menor que 2.

Diante das ideias aqui colocadas, entendemos que para uma melhor percepção do nosso sistema é importante que se invista no sistema como um todo, sem uma fragmentação desnecessária que pode contribuir para uma compreensão parcial ou errônea dos números e suas características. Assim, podemos dizer que o sistema de numeração indo-arábico sobrepuja um sistema posicional. Ele é formado por um conjunto de regras e elementos que nos permitem agrupamentos de 10 em 10, utilizando-se do zero e da vírgula, possuindo parte inteira e parte não inteira e contemplando com nomes específicos cada posicionamento de seus elementos.

Uma maneira de evidenciarmos as características de um número pode se dar no resumo do esquema abaixo:

Figura 14: Formação dos números



Fonte: Arquivo pessoal

CAPÍTULO IV

4. SND e suas operações

Ao se ensinar matemática nos contextos atuais, o professor sempre tem de responder perguntas sobre utilidades e usos dos conteúdos, mostrando que, muitas vezes, não se compreende o seu motivo ou qual sua aplicação. Em muitos casos, nós professores não nos preocupamos com detalhes, que entendemos ser irrelevantes ou por julgarmos supérfluos, porém é bastante comum nos depararmos com situações em que é necessário esmiuçar o objeto de estudo para que não percamos o seu propósito. Um bom exemplo é o ensino das operações básicas nos anos iniciais do ensino fundamental. Os algoritmos utilizados, muitas vezes, contribuem para que o aluno, em pouco tempo, esqueça como fazia uma "continha" simples de divisão, já que é levado a aprender os procedimentos formais e talvez, em função da necessidade de propiciá-lo de uma maneira mais fácil de atingir um resultado satisfatório nas quatro operações, não se dá a devida atenção aos porquês dos acontecimentos que justifiquem o algoritmo usado.

Nota-se nas práticas que temos contato que os algoritmos das quatro operações básicas recebem mais atenção do que a formação dos números, o que pode estar prejudicando a própria capacidade operatória, pois como nos fala D`Ambrosio (1989) "alunos passam a acreditar que a aprendizagem matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos". Nossa percepção é que o processo do algoritmo convencional das operações básicas, de modo geral, quase que atropela o processo de formação dos números e leva o aluno a atuar de forma memorizada e, muitas vezes, sem sentido. Acreditamos que o uso dos algoritmos não carece de mais atenção que o próprio sentido da operação. Veja que Alfonso inicia sua escrita sobre os algoritmos da seguinte forma:

> [6]Poucas vezes se pode encontrar na matemática um termo com tantas e tão rasas definições. Parece que toda vez que se quer explicá-lo, cada um faz sua conceituação de forma a usar uma artimanha que lhe permite desobrigar-se da responsabilidade. (ALFONSO, 2000, p.103, tradução nossa)

[6]Pocasveces se puede encontrar en matemáticas un término tan mal definido y sin embargo com tantas definiciones. Parece como si cada vez que se quiere explicar lo que es, cada cual hiciera de su capa un sayo y optara por cualquier argucia que le permitiera salir del paso.

Em nosso entendimento, a apresentação dos algoritmos das quatro operações básicas da matemática demanda uma maior exploração para uma compreensão ampla da composição e decomposição dos números, pois nos algarismos convencionais as operações ocorrem ordem por ordem de forma separadamente. A falta de melhor compreensão da decomposição dos números dificulta a aprendizagem das próprias operações. Não que se esgote um passo para dar outro, mas defendemos a necessidade de explorar mais aprofundadamente as características do SND antes e durante o estudo das operações e em qualquer nível da escolarização em que se ensina operações. Mais ainda, defendemos que o ensino das operações deve se basear e recorrer à organização do próprio SND. Nessa linha de pensamento, quando o ensino não leva a compreender a organização dos números na lógica do sistema de numeração, poderemos ter inúmeras lacunas durante toda a caminhada do entendimento dos fundamentos da matemática.

As operações básicas do SND merecem destaque especial devido à sua funcionalidade e poder de agilizar dados e se constitui como habilidade essencial da educação básica. É importante destacar que há várias maneiras e métodos para se operar números além dos algoritmos convencionais das quatro operações. Defendemos também seja oportunizado várias estratégias de cálculo sem enfatizar regras decoradas ou sistematizadas, que o raciocínio voltado para as operações seja estimulado e valorizado de diferentes maneiras e preferencialmente apresentados com materiais manipuláveis.

4.1 MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS POSITIVOS

Dentre as operações numéricas, optamos por tratar neste trabalho da multiplicação e da divisão, considerando o tempo disponível para o propósito do estudo e por estas operações apresentarem mais elementos sujeitos às observações destacadas por nós.

Já sabemos que a multiplicação está presente na composição e decomposição de um número caracterizando nosso sistema de numeração como um sistema multiplicativo. Entendemos que o número 325 pode ser escrito como $3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1$e Giovanni Júnior (2007) recomenda, em seu guia didático, que seja observado o valor posicional dos algarismos para facilitar a sua decomposição. Novamente chamamos a atenção para a importância do entendimento das características do SND antes e durante a exploração de suas operações.

Podemos perceber nos livros referenciados a existência de diversas maneiras de efetuar uma multiplicação, com alguns algoritmos, mostrando que se rompe com uma forma enrijecida e única de operar. Vamos aqui explorar caminhos diferenciados para o ensino da multiplicação de números racionais positivos na expectativa de oferecer possibilidades que estimulem o ensino da operação.

Multiplicação para facilitar cálculos de adição de parcelas repetidas

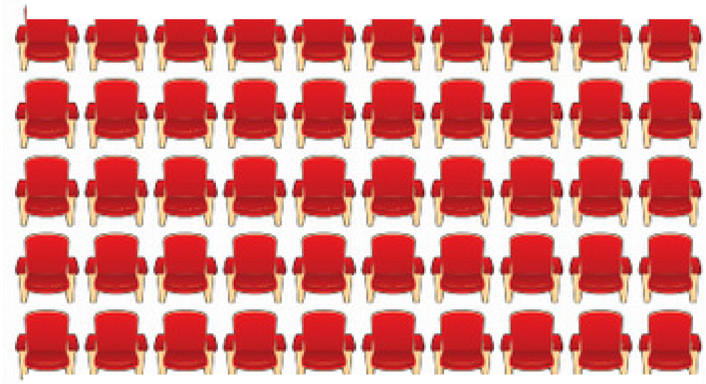
Um exemplo da ideia da multiplicação está na tarefa a seguir: encontrar o número total de cadernos que serão entregues a um grupo de 5 alunos, sabendo que cada aluno receberá 3 cadernos. Assim, no quadro abaixo temos:

ALUNO	QUANTIDADE DE CADERNO
Primeiro Aluno	**3**
Segundo Aluno	**3**
Terceiro Aluno	**3**
Quarto Aluno	**3**
Quinto Aluno	**3**
O número total de caderno será igual a **15**	

Veja que temos cinco alunos que receberão 3 cadernos cada ou uma soma de parcelas repetias 3 + 3 + 3 + 3 + 3 que possui soma igual a 15. Assim, a ideia da soma de parcelas repetidas pode ser substituída pela ideia de multiplicar 5 (que é o total de alunos) por 3 (que é o total de cadernos por aluno), resultando nos mesmos 15 cadernos para o grupo de alunos. Nesse caso, multiplicar 5 por 3 temos o multiplicador sendo o número 5 e o multiplicando o número 3.

Logo, a multiplicação agiliza e facilita determinadas contagens, pois não há a necessidade de efetuar adição de diversas parcelas. Vejamos outra situação: para encontrarmos a quantidade de cadeiras na figura abaixo, que possui a mesma quantidade de cadeiras por fila, basta encontrarmos o número de filas e quantas cadeiras há em cada fila. Uma quantidade assumirá o papel do multiplicador e a outra quantidade assumirá o papel do multiplicando.

Figura 15: Cadeiras enfileiradas



Fonte: https://www.google.com.br, acesso em 28/10/2018

No conjunto de cadeiras acima, temos 10 filas com 5 cadeiras em cada fila. Assim, o multiplicador poderá ser o número de filas e o multiplicando o número de casas por fila. O total de casas será o produto de 10 por 5. Vejamos duas maneiras para encontrarmos o número de cadeiras da figura acima:

<table>
<tr><td rowspan="2">1º Modo</td><td>Parcelas</td><td>Soma</td><td rowspan="4">Número total de cadeiras na figura acima é igual a 50</td></tr>
<tr><td>5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5</td><td>50</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2º modo</td><td>1° e 2° Fatores</td><td>Produto</td></tr>
<tr><td>10 x 5</td><td>50</td></tr>
</table>

Uma atenção especial em relação a multiplicação que precisamos ter é quando condicionamos a ideia da multiplicação à adição simples e puramente, pois isto pode nos levar a crer que em toda multiplicação de números positivos o produto será maior (ou igual) que seus fatores, já que na adição de números positivos toda soma é maior que qualquer de suas parcelas. Explicitaremos, a seguir, o porquê.

No universo dos números inteiros positivos, multiplicar um número qualquer por um número “n” é somar esse número a si mesmo n – 1 vezes. Assim, o produto nunca será menor que um de seus fatores. Já para os números racionais positivos, a multiplicação que envolve números no intervalo entre 0 e 1 possui uma característica diferente da ideia acima, pois o produto poderá ser menor que um de seus fatores. Veja que no campo dos números positivos, para fator menor que 1, o produto sempre será menor que um de seus fatores, pois não há ideia de associação de uma parcela inteira.

Podemos verificar que multiplicar 4 por 0,5 é o mesmo que somar 0,5 quatro vezes. Assim:

4 x 0,5 = 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 2

Temos o produto menor que um dos fatores e isso não ocorre quando não há fatores positivos menores que 1. Vejamos mais um exemplo:

Alice pretende distribuir entre seus 12 alunos pedaços que correspondem a 0,25 de uma barra de chocolate. Quantas barras de chocolate Alice precisará adquirir?

A soma dos 12 pedaços corresponde a 12 parcelas de 0,25 da barra, que pode ser substituída pela multiplicação de 12 vezes 0,25. Assim:

0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25= 12 . 0,25 = 5

Temos novamente um produto (5) menor que um fator (12).

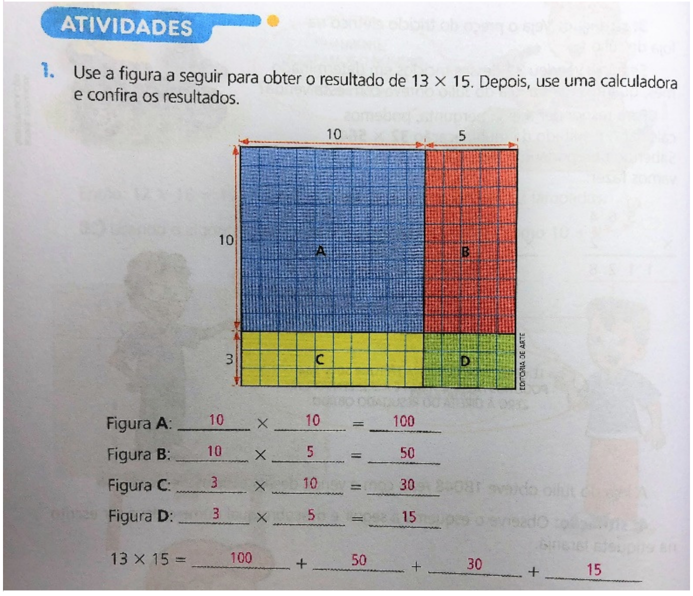
Queremos chamar a atenção para pequenos detalhes que podem fazer diferença no ensino, pois é bastante relevante explorarmos diversas possibilidade na caminhada escolar valorizando a ideia do contexto nos baseando em fundamentos matemáticos práticos e justificáveis.

<u>Multiplicação como organização retangular</u>

A multiplicação através da organização retangular trabalha intuitivamente a decomposição dos números e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, sem que se fale explicitamente nelas. Notemos mais uma vez a importância para o esclarecimento das características dos SND juntamente da abordagem de suas operações, pois é possível que se tenha um melhor entendimento de como multiplicar dois ou mais números.

Vejamos uma atividade proposta por Giovanni Júnior (2017), na qual os alunos precisarão observar a malha quadriculada que destaca os fatores decompostos, quantificar o número de quadradinhos em cada região e determinar a soma deles. Achamos interessante a prática de propor a situação da atividade oralmente antes de ler o texto do exercício para que se crie uma estimativa do resultado e estreite diferentes formas de pensar o problema.

Figura 16: Atividade envolvendo multiplicação retangular



FONTE: GIOVANNI JÚNIOR, A Conquista da Matemática, livro didático 4º ano. 2017, p.108

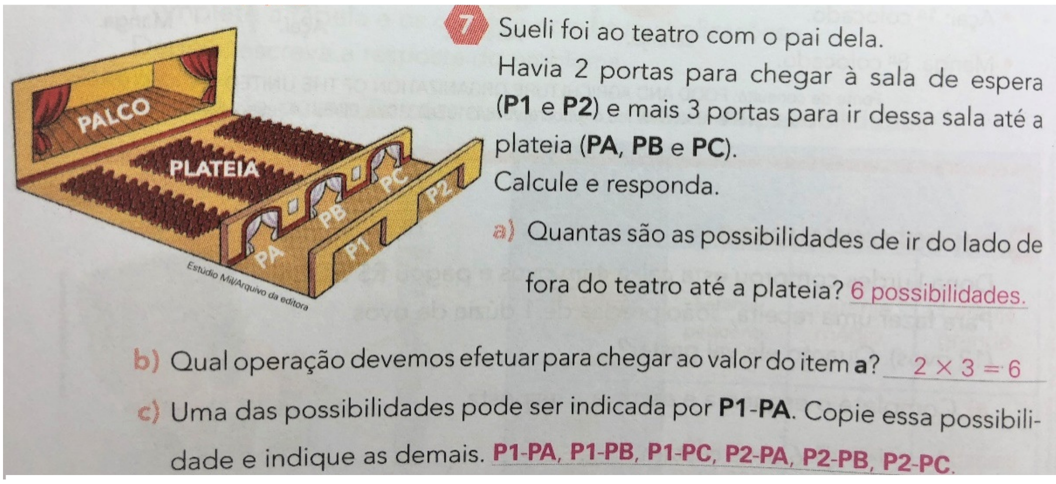
Cremos e esperamos que não haja grandes dificuldades no entendimento da atividade acima, mas é de enorme importância verificar qual estratégia e quanto foi compreendido do processo multiplicativo. Espera-se que o entendimento do porquê de haver uma adição no algoritmo multiplicativo passe pela ideia da decomposição dos números.

Multiplicação como raciocínio combinatório

Multiplicar utilizando um raciocínio combinatório pode ampliar o horizonte operatório dos estudantes, permitindo técnicas diferentes para a mesma operação.

No Guia Didático do livro de Dante (2017), o autor chama a atenção para que se tenha “mais uma estratégia para representar as combinações”, pois é importante explorar a árvore de possibilidades. Mas, podemos ir um pouco mais além, observe que a atividade proposta abaixo explora quantas e quais são as possibilidades de se chegar ao palco e isso permite que possamos verificar todas as combinações com a porta P1 e, por analogia, perceber que o mesmo será feito com a porta P2.Veja que as combinações entre as portas podem ocorrer de forma aleatória sem que se tenha um caminho único e sistematizado.

Figura 17: Atividade envolvendo multiplicação combinatório



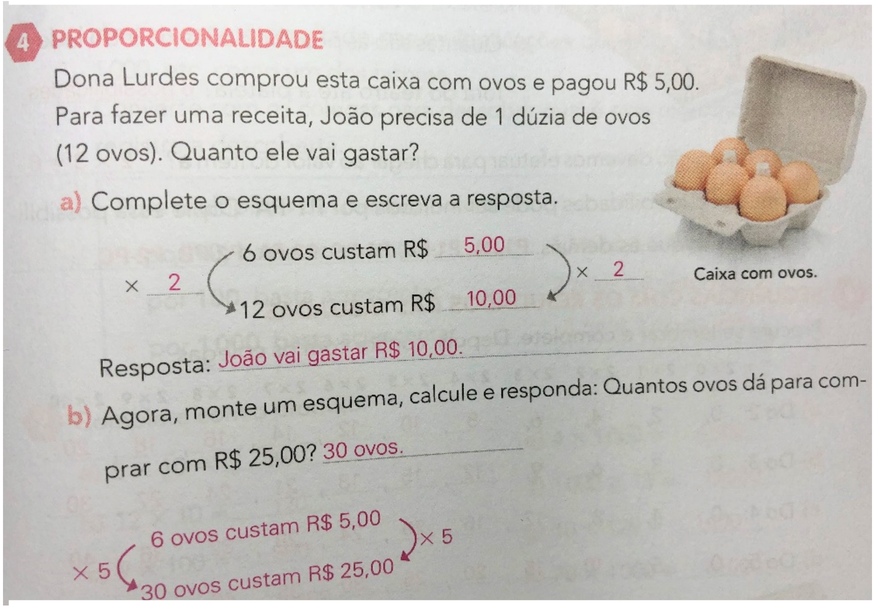
FONTE: DANTE, Luiz Roberto. Ápis Matemática, livro didático 4º ano. 2017, p. 126

Parece-nos interessante também a importância de se falar o que acontece ao combinar as possibilidades, ou seja, que podemos transformar a ideia de multiplicação combinatória em soma de parcelas repetidas e podemos notar que não é preciso uma quantidade excessiva de atividades desse nível para seu entendimento, pois não há exageradas fórmulas com regras condicionais para se pensar nessa multiplicação.

<u>Multiplicação como raciocínio proporcional</u>

A noção da proporcionalidade é um assunto bastante relevante para o campo da multiplicação e a ideia da multiplicação como raciocínio proporcional está atrelada a ideia de resolução de problemas que envolve grandezas distintas. Apresentando um esquema de aumento ou diminuição de valores podemos perceber a ideia da multiplicação como encontrado na atividade trabalhada por Dante (2017). Podemos observar que o dobro de 6 ovos é 12 ovos e que o dobro de R$ 5,00 é R$ 10,00.

Figura 18: Atividade envolvendo multiplicação proporcional



4 PROPORCIONALIDADE

Dona Lurdes comprou esta caixa com ovos e pagou R$ 5,00. Para fazer uma receita, João precisa de 1 dúzia de ovos (12 ovos). Quanto ele vai gastar?

a) Complete o esquema e escreva a resposta.

× 2 6 ovos custam R$ 5,00 × 2

12 ovos custam R$ 10,00

Caixa com ovos.

Resposta: João vai gastar R$ 10,00.

b) Agora, monte um esquema, calcule e responda: Quantos ovos dá para comprar com R$ 25,00? 30 ovos.

× 5 6 ovos custam R$ 5,00 × 5

30 ovos custam R$ 25,00

FONTE: DANTE, Luiz Roberto. Ápis Matemática, livro didático 4º ano. 2017, p. 125

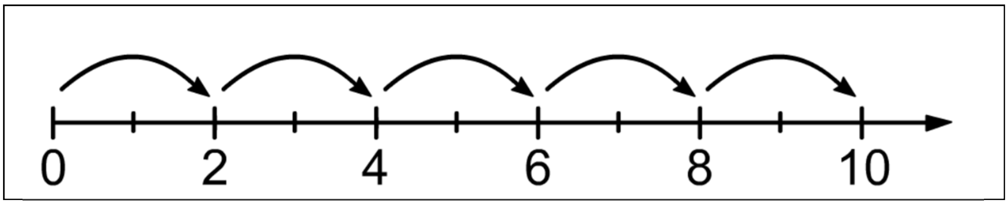
Munhoz et al. (2017) dizem que “no ensino fundamental, a noção de proporcionalidade deve ser utilizada a partir do trabalho com as primeiras noções de multiplicação, em que é tratada a relação entre duas grandezas que não são do mesmo universo” (MUNHOZ et al., 2017, p.80).

Podemos notar mais um exemplo da importância de se saber o que está fazendo e evitar formas decoradas e reproduzidas sem um sentido que justifique sua aplicação, pois o ensino das operações fundamentais dependem da ideia da formação dos números no SND.

Multiplicação na reta numerada

Na reta (semirreta) numerada a multiplicação possui um caráter muito similar ao da adição, pois possui a ideia de acrescentar valores. Veja que na reta a ideia é associar seus termos no mesmo sentido, onde o multiplicador corresponde o número de vezes que o multiplicando aparecerá. Como exemplo temos a representação do produto 5 vezes 2.

Figura 19: Multiplicação na reta numerada



Fonte: Arquivo pessoal

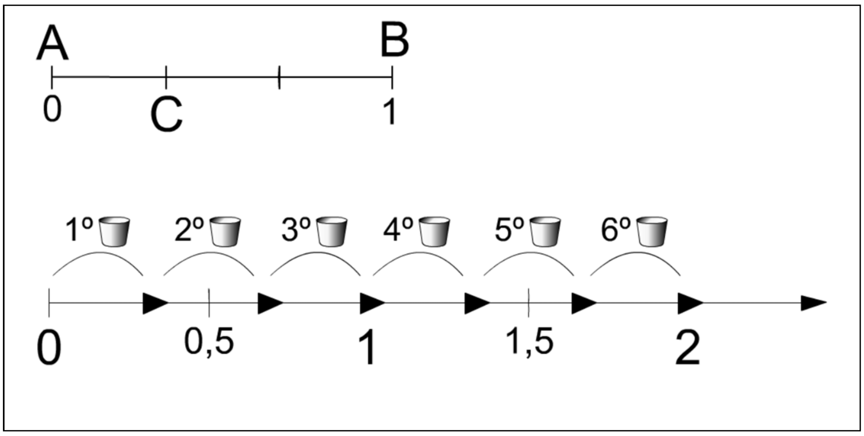
A representação acima foi iniciada do marco zero para facilitar o processo. Em seguida, mudamos (andamos) duas casas por cinco vezes no mesmo sentido, resultando no ponto que representa o produto de 5 por 2, que já sabemos ser 10.

Uma vantagem significativa nesse processo é a visualização do acréscimo das parcelas e que pode ser aplicado também para os números com vírgula. Vejamos o seguinte exemplo:

Lara deseja calcular o volume de um recipiente utilizando 6 baldes cheios de água que comporta um terço de litro cada balde. Se todos forem derramados no recipiente, qual será seu volume?

Associando cada unidade da reta a um litro, o multiplicador pode assumir a quantidade de baldes e o multiplicando a capacidade dos baldes. Na figura abaixo, cada unidade da reta corresponde ao segmento $\overline{AB}$ e a capacidade do balde corresponde ao segmento $\overline{AC}$:

Figura 20: Multiplicação na reta numerada

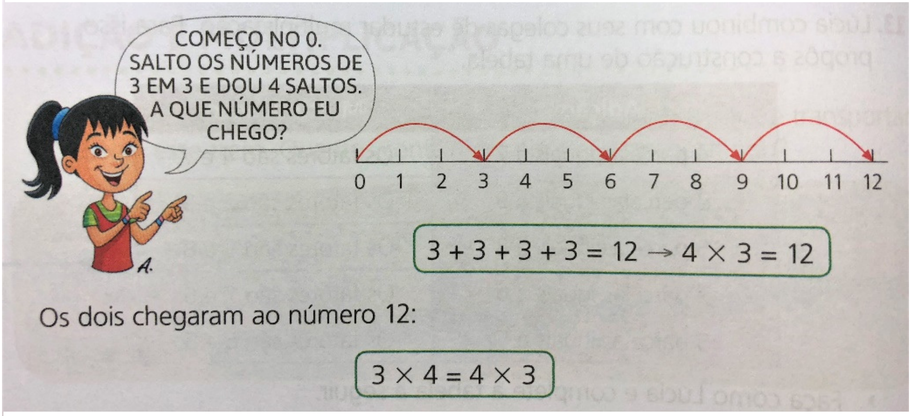


Fonte: Arquivo pessoal

Então, o volume do recipiente será de 2 litros.

Youssef e Guelli (2017) apresentam a reta numerada na figura abaixo e chamam a atenção, no Guia de recurso didático, para a importância de se começar esse processo do zero: "É importante conversar com os alunos acerca da representação do zero na reta numérica, este representa o marco inicial. Da mesma forma, essa representação aparece na régua e em outros instrumentos de medida." (YOUSSEF E GUELLI, 2017, P.89)

Figura 21: A reta numerada



FONTE: YOUSSEF e GUELLI, Meu Livro de Matemática, livro didático 4º ano. 2017, p. 90

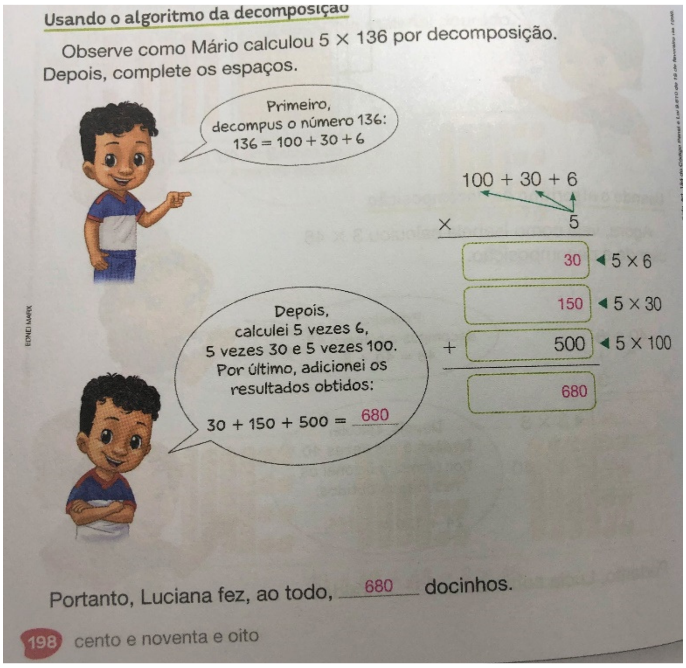
Parece-nos que uma desvantagem nesse processo é sua praticidade para números considerados grandes ou números com vírgula. Veja que não haveria grande utilidade pedagógica multiplicarmos, por exemplo, 153 por 551 ou 13,2 por 17,3.

Multiplicação como decomposição

O método de multiplicação por decomposição é bastante utilizado e bastante eficiente na essência da multiplicação no que tange a ideia de soma de parcelas repetidas. Além desse processo explorar a formação do número por meio de sua decomposição, intrinsicamente contribui com o cálculo sem o uso do lápis e do papel, pois permite uma aplicação da potência de 10.

Silveira (2017, p. 195) apresenta a multiplicação por decomposição e chama a atenção para "a importância dos alunos perceberem que o mesmo objeto matemático pode ser tratado de diversas representações". Vejamos uma atividade que explora o método da multiplicação por decomposição utilizado por Silveira em seu volume 3 na unidade 9:

Figura 22: Atividade Envolvendo Multiplicação por



FONTE: SILVEIRA. Matemática, livro didático 3º ano. 2017, P.198.

Novamente chamamos a atenção para a importância de se compreender a composição e decomposição previamente de um número. Ao ter claro o significado da formação dos números, o entendimento dos algoritmos pode acontecer de forma mais significativa e mais imediata.

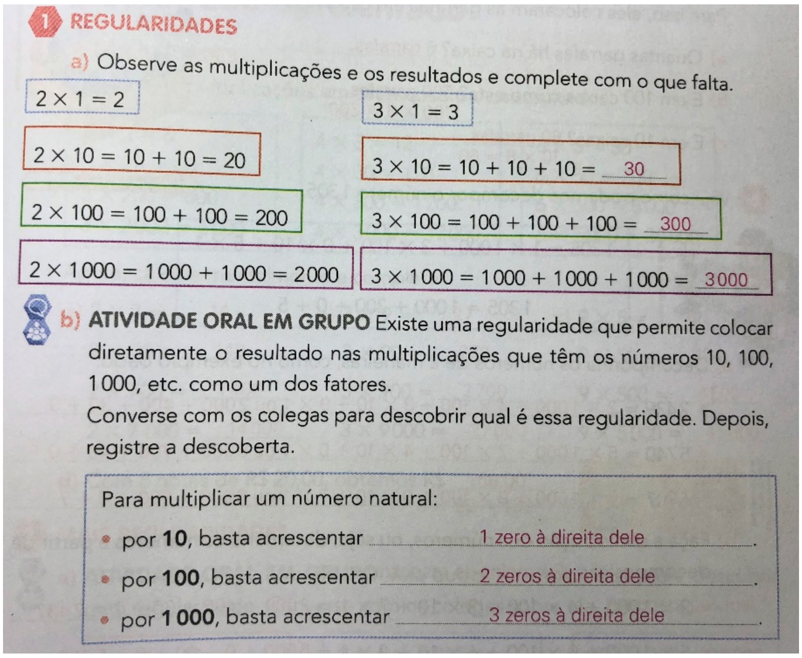
Multiplicação por 10, 100, 1000 e outros

Há algumas operações que, em função de sua complexidade, são necessários lápis e papel. Outras exigem recursos computacionais, mas também sempre há cálculos que conseguimos executar mentalmente e com diferentes recursos, fazendo parte ou não de uma vida escolar. Eles são estimulados por curiosidade, habilidade, operações reincidentes, práticas de dia a dia, etc. Para Centurión:

> É muito importante que se considere, no ensino escolar, os cálculos mentais. Os cálculos, envolvendo lápis e papel, com os algoritmos tradicionais, nem sempre são fáceis de se fazerem na vida prática. Por isso é importante que as pessoas possam entender o significado das operações e desenvolver suas próprias técnicas para calcular, pois, em todas elas, está implícito o conhecimento do nosso sistema de numeração. (CENTURIÓN, 1994, P.152)

Acreditamos que o cálculo mental precisa ser estimulado e uma forma de explorá-lo na multiplicação é acompanhando a ideia da atividade proposta por Dante (2017) ao efetuar uma multiplicação cujo um dos fatores seja 10, 100, 1000, etc.

Figura 23: Atividade Envolvendo Multiplicação por 10, 100 e 1000



1 REGULARIDADES

a) Observe as multiplicações e os resultados e complete com o que falta.

$2 \times 1 = 2$	$3 \times 1 = 3$
$2 \times 10 = 10 + 10 = 20$	$3 \times 10 = 10 + 10 + 10 =$ 30
$2 \times 100 = 100 + 100 = 200$	$3 \times 100 = 100 + 100 + 100 =$ 300
$2 \times 1000 = 1000 + 1000 = 2000$	$3 \times 1000 = 1000 + 1000 + 1000 =$ 3000

b) **ATIVIDADE ORAL EM GRUPO** Existe uma regularidade que permite colocar diretamente o resultado nas multiplicações que têm os números 10, 100, 1 000, etc. como um dos fatores.
Converse com os colegas para descobrir qual é essa regularidade. Depois, registre a descoberta.

Para multiplicar um número natural:

- por **10**, basta acrescentar 1 zero à direita dele.
- por **100**, basta acrescentar 2 zeros à direita dele.
- por **1 000**, basta acrescentar 3 zeros à direita dele.

FONTE: DANTE, Luiz Roberto. Ápis Matemática, livro didático 4º ano. 2017, p. 127

O foco desta regularidade dos produtos de potência de 10 pode resultar na agilidade do cálculo e pode ser interessante pela prática em si, que permite acrescentar a quantidade de zero(s) ao número que multiplicado, mas também pelo entendimento do por que essa multiplicação sempre estará correta. Podemos perceber que, ao multiplicar um número por uma potência de 10, aumentamos a ordem de grandeza desse número proporcionalmente. Esse fato não se dá por coincidência, e sim por que o nosso SND é de base 10, vemos então, mais um motivo para compreendermos as características do nosso sistema numérico durante o ensino das operações.

Adquirir essa prática de cálculo mental na qual um dos fatores seja 10, 100, 1000 ou mais pode exigir um pouco de prática, mas nos leva a explorar um pouco mais, como no exemplo para a multiplicação de 4 por 5, pois 5 é um divisor de 10. Sabemos que o produto de 4 por 10 será 40 porque basta acrescer um zero ao 4, obtendo 4 . 10 = 40. Como 10 é o dobro de 5, podemos pensar que o produto de 4 por 5 (que é metade de 10) será a metade. Assim, 4 . 5 = 20.

Outros casos semelhantes podem ser citados e observados para análise, como pode-se ver a seguir. Se o produto de 36 por 10 é 360, o produto de 36 por 5 será a metade de 360 que é 180, pois 5 é a metade de 10. Se o produto de 480 por 1000 é 480 000, teremos o produto de 480 por 500 igual a 240 000 (podemos pensar que multiplicar um número por 500 é a mesma coisa que multiplicar esse número por 1000 e depois dividir o resultado por 2, porque 500 é igual a metade de 1000). Explorando um pouco mais ainda, temos que o produto de 30 por 15 é 450, pois podemos pensar que o produto de 30 por 15 é o mesmo que multiplicar 30 por 10 e somar com a metade desse produto, porque 15 é igual a 10 mais sua metade. Estes são alguns passos do cálculo mental que podem ser estimulados pelo(a) professor(a).

É importante criar expectativas imediatas para a prática do cálculo mental, pois temos que respeitar e compreender que cada um possui seu tempo de aprendizado além de uma necessidade de investimento diferenciado. Certamente, uma boa compreensão das características do SND antes de explorar cálculos sem o uso de lápis e papel contribui bastante para agilizar o processo dessa aprendizagem.

MULTIPLICAÇÃO E SEU ALGORITMO CONVENCIONAL

Vimos algumas técnicas para efetuar uma multiplicação no SND e reiteramos a necessidade dessa diversidade de maneiras de se apresentar uma multiplicação por contribuir com diferentes modos de se pensar, sem falar em outras possibilidades mais concretas que podem ser trabalhadas. Julgamos importante também o entendimento do algoritmo convencional da multiplicação e, por isso, teremos um cuidado especial para tratarmos dele.

O algoritmo convencional da multiplicação é um conjunto de regras que podem facilitar o entendimento do cálculo do produto, principalmente entre números considerados grandes. Daremos uma atenção especial a ele por julgarmos ser um algoritmo que funciona muito bem ao utilizar um processo para o cálculo da multiplicação. Ademais, por ser bastante utilizado no ensino fundamental e médio. Entretanto, podemos apontar dificuldades e lacunas em seu ensino.

Lembramos novamente que na visão aqui apresentada o entendimento das características do SND age diretamente na facilitação do processo dos algoritmos; tratando-se dos algoritmos convencionais, o qual operamos separadamente com as ordens de um número, trabalhamos com o posicionamento do algarismo no número e utilizamos da equivalência entre as ordens. Mesmo sabendo de sua eficiência, não podemos considerar que o algoritmo convencional será a maneira mais indicada, muito menos que será a única para efetuarmos uma multiplicação.

O algoritmo convencional da multiplicação consiste em decompor seus fatores ou simplesmente multiplicar, em separado, todas as ordens do primeiro fator por todas as ordens do segundo fator e depois adicionar os resultados. O resultado de cada multiplicação irá compor um número que representará o produto final. Nesse processo, é indispensável nomear as ordens de forma a sempre destacar qual está sendo operada. Para Youssef e Guelli:

> A conta armada da multiplicação (algoritmo) é um dispositivo muito sintético, com procedimentos que ficam “escondidos”, implícitos. Para que os alunos utilizem com compreensão dos seus passos, é preciso explicitar os cálculos e as decomposições envolvidas, permitindo que eles analisem cada um e entendam os seus porquês.
>
> Nas contas em que os dois fatores têm dois algarismos, a propriedade distributiva, que foi explorada nas páginas anteriores, tem um papel importante: decompõe-se o fator multiplicado, e os resultados dos produtos obtidos são escritos como parcelas de uma adição, que no final são somadas para obtermos o total. Conforme os alunos forem se apropriando do algoritmo, é importante não esquecer que esse é apenas um dos recursos de cálculo de que podem lançar mão. É importante não definir de antemão que um procedimento seja melhor ou mais conveniente que o outro; mais importante que isso é desenvolver um repertório de estratégias para poder escolher qual usar, a depender da situação. (YOUSSEF e GUELLI, 2017, P.108 e P.109)

Para uma melhor compreensão desse algoritmo, precisamos destacar algumas particularidades.

a) Por que “saltarmos” uma ordem?

É muito comum, na multiplicação da ordem das dezenas do segundo fator pelo primeiro fator, “saltarmos” uma casa (ordem das unidades).

Veja:

	C	D	U	
	1			
		3	2	
x		2	3	
		9	6	
+	6	4		(“Salta” ou “pula” a ordem das unidades)
	7	3	6	

Isso ocorre por tentativa de facilitar o processo, pois multiplicar 2 dezenas por 32 unidades resulta em 64 dezenas ou 640 unidades. Multiplicando ordem por ordem, teríamos que o produto de 2 (dezena do segundo fator) por 2 (unidade do primeiro fator) resulta em 4 dezenas ou 40 unidades. Desse modo, temos que situar as ordens alinhando-as, facilitando a adição das parcelas de cada produto encontrado e, por consequência, trabalhando com dezenas não é preciso preencher a ordem da unidade, deixando essa casa vazia.

b) Se o algoritmo é de multiplicação, por que usar uma adição?

No algoritmo da multiplicação aparece uma soma. Veja:

	C	D	U	
	1			
		3	2	
x		2	3	
		9	6	
+	6	4	0	Por que somar 96 com 640?
	7	3	6	

O segundo fator 23 foi decomposto em 20 e em 3 unidades. Assim, encontramos dois produtos: 3 unidades por 32 que resulta em 96 unidades e 20 unidades por 32 que resulta em 640 unidades. A soma se faz necessária para reunir as partes decompostas, formando o número que será o produto final.

c) Número de ordem do segundo fator

O número de ordem do segundo fator é igual ou menor que o número de parcelas ao compor o produto. Como a ordem dos fatores não altera o produto, podemos tratar o número 13 como segundo fator, do qual teremos duas parcelas para concluir o produto, ou tratar 12031 como segundo fator, tendo, então, cinco parcelas.

Vejamos:

	CM	DM	UM	C	D	U	
				1			
					1	3	
x		1	2	0	3	1	
					1	3	
				3	9	0	
			0	0	0	0	5 PARCELAS
		2	6	0	0	0	
+	1	3	0	0	0	0	
	1	5	6	4	0	3	

Neste exemplo, é claro que seria muito mais prático inverter os fatores, mas sua utilização nos ajudará a mostrar a própria organização do sistema, por isso o utilizamos. Se o segundo fator tiver todas as ordens exprimindo quantidade (algarismo diferente de zero), o número de parcelas, ao compor o produto, será igual ao número de ordens do segundo fator. Se o segundo fator não tiver todas as ordens exprimindo quantidade (algarismo diferente de zero), o número de parcelas, ao compor o produto, poderá ser menor que o número de ordens do segundo fator. Fica, assim, evidente a importância do zero para cobrir todas as casas decimais.

d) Por que não multiplicarmos o número todo?

Visando a praticidade, o algoritmo convencional prioriza a multiplicação de cada ordem separadamente. Veja que, para uma multiplicação de 3 por 14, não ficaria muito complicado representar 14 + 14 + 14 chegando a 42 como produto. Porém, não seria nada prático efetuarmos uma multiplicação de números considerados grandes como, por exemplo, a multiplicação de 135 por 89. Não há razão ou mesmo facilidade para fazer esta conta mentalmente. É notório que as multiplicações efetuadas entre as ordens se tornam mais confortáveis para memorizar os produtos, pois cada ordem não comporta mais que 9 unidades. Assim, não há necessidade de memorizar fatores maiores ou iguais a 10.

e) Qual ordem resulta ao multiplicarmos as ordens?

Tratamos a seguir como a multiplicação conserva ou altera a organização das ordens e classes. Vejamos alguns exemplos

- A ordem da unidade multiplicada por uma ordem “w” qualquer resulta na própria ordem “w” ou em uma ordem imediatamente superior a “w”.

  1 unidade vezes 1 centena = 1 U x 100 U = 100 U = 1 C (resultou em centena, mesma ordem do segundo fator);

  2 unidades vezes 4 dezenas de Milhar = 2 U x 40 000 U = 80 000 U = 8 DM (resultou em dezenas de milhar, mesma ordem do segundo fator);

  9 unidades vezes 9 décimos = 9 U x 0,9 U = 8,1 U (resultou em unidades, uma ordem superior à ordem do segundo fator).

- Dezena multiplicando uma ordem “w” qualquer, resulta em uma ordem imediatamente superior à ordem “w” ou duas ordens imediatamente superiores a “w”.

  1 dezena vezes 1 centena = 10 U x 100 U = 1 000 U = 1 UM (resultou em unidade de milhar, uma ordem superior à ordem do segundo fator);

  1 dezena vezes 9 centésimos = 10 U x 0,09 U = 0,9 U = 9 d (resultou em décimos, uma ordem superior à ordem do segundo fator);

  9 dezenas vezes 9 dezenas = 90 U x 90 U = 8 100 U = 8,1 UM (resultou em unidades de milhar, duas ordens superiores à ordem do segundo fator).

- Centena multiplicando uma ordem “w” qualquer, resulta em duas ordens imediatamente superiores a “w” ou em três ordens imediatamente superiores a “w”.

  1 centena vezes 1 décimo = 100 U x 0,1 U = 10 U = 1 D (resultou em dezena, duas ordens superiores à ordem do segundo fator);

  3 centenas vezes 2 dezenas = 300 U x 20 U = 6 000 U = 6 UM (resultou em unidades de milhar, duas ordens superiores à ordem do segundo fator);

  9 centenas vezes 9 dezenas = 900 U x 90 U = 81 000 U = 8,1 DM (resultou em dezenas de milhar, três ordens superiores à ordem do segundo fator).

- Décimo multiplicando uma ordem “w” qualquer, resulta em uma ordem imediatamente inferior a “w” ou na mesma ordem “w”.

1 décimo vezes 1 centena = 0,1 U x 100 U = 10 U = 1 D (resultou em dezena, uma ordem inferior à ordem do segundo fator);

1 décimo vezes 9 décimos = 0,1 U x 0,9 U = 0,09 U = 9 c (resultou em centésimos, uma ordem inferior à ordem do segundo fator);

9 décimos vezes 9 dezenas = 0,9 U x 90 U = 81 U = 8,1 D (resultou em dezenas, a mesma ordem do segundo fator).

- Centésimo multiplicando uma ordem "w" qualquer, resulta em duas ordens imediatamente inferiores a "w" ou em uma ordem imediatamente inferior a "w".

1 centésimo vezes 1 dezena de milhar = 0,01 U x 10 000 U = 100 U = 1 C (resultou em centena, duas ordens inferiores à ordem do segundo fator);

4 centésimos vezes 1 dezena = 0,04 U x 10 U = 0,4 U = 4 d (resultou em décimos, duas ordens inferiores à ordem do segundo fator);

9 centésimos vezes 9 unidades = 0,09 U x 9 U = 0,81 U = 8,1 d (resultou em décimo, uma ordem inferior à ordem do segundo fator).

Após analisarmos essas particularidades, podemos compreender melhor partes que não recebem um certo destaque no algoritmo convencional em função da praticidade de se obter o produto de um número qualquer. Vejamos nos exemplos abaixo como encontrar alguns produtos:

<u>Multiplicar 3 por 25.</u>

O algoritmo consiste em alinharmos as ordens e, preferencialmente, usarmos o 3 como segundo fator. Basta multiplicarmos as unidades do segundo fator por todas as ordens do primeiro.

	D	U
	2	5
x		3
	6	15

→

	D	U
	1	
	2	5
x		3
	7	5

Multiplicamos a unidade 3 do segundo fator com a unidade 5 do primeiro, e encontramos 15 unidades. Depois, multiplicamos a unidade 3 do segundo fator com a dezena 2 do primeiro e encontramos 6 dezenas. Vejamos que é preciso fazer a transformação de 10 unidades em 1 dezena após efetuarmos o segundo fator por todas as ordens do primeiro.

Multiplicar 25 por 13.

	D	U
	2	5
x	1	3

O segundo fator dessa multiplicação possui 13 unidades, que foi decomposto em (10 + 3) unidades ou 1 dezena e 3 unidades.

→

	D	U
	2	5
x	1	3
	6	15

Multiplica-se a unidade (3) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 6 dezenas e 15 unidades ou 7 dezenas e 5 unidades.

→

	C	D	U
	1	1	
		2	5
x		1	3
		7	5
+	2	5	0

Multiplica-se a dezena (1) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 2 centenas e 5 dezenas ou 250 unidades.

→

	C	D	U
	1	1	
		2	5
x		1	3
		7	5
+	2	5	0
	3	2	5

O produto final será a soma do primeiro produto (75 unidades) com o segundo produto (250 unidades).

Multiplicar 26 por 32 ou multiplicar 32 por 26?

Devido à propriedade comutativa, temos que o produto de 26 por 32 será o mesmo para o produto 32 por 26. Mas, o que muda no algoritmo convencional?

Vamos utilizar o algoritmo convencional para o primeiro fator igual a 26 e o segundo fator igual a 32:

	C	D	U
		2	6
x		3	2

O segundo fator dessa multiplicação possui 32 unidades, que foi decomposto em (30 + 2) unidades ou 3 dezenas e 2 unidades.

→

	C	D	U
		2	6
x		3	2
		4	12

Multiplica-se a unidade (2) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 4 dezenas e 12 unidades ou 5 dezenas e 2 unidades.

→

	C	D	U
		1	
		2	6
x		3	2
		5	2
	6	18	

Multiplica-se a dezena (3) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 6 centenas e 18 dezenas ou 780 unidades.

→

	C	D	U
		1	
		2	6
x		3	2
	1	5	2
+	7	8	0
	8	3	2

O produto final será 832, que é a soma do primeiro produto (152 unidades) com o segundo produto (780 unidades).

Agora, vamos utilizar o algoritmo convencional para o primeiro fator igual a 32 e o segundo fator igual a 26:

	C	D	U
		3	2
x		2	6

O segundo fator dessa multiplicação possui 26 unidades, que foi decomposto em (20 + 6) unidades ou 2 dezenas e 6 unidades.

→

	C	D	U
		3	2
x		2	6
		18	12

Multiplica-se a unidade (6) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 18 dezenas e 12 unidades ou 192 unidades.

→

	C	D	U
		3	2
x		2	6
	1	9	2
	6	4	

Multiplica-se a dezena (2) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 6 centenas e 4 dezenas ou 640 unidades.

→

	C	D	U
	1		
		3	2
x		2	6
	1	9	2
+	6	4	0
	8	3	2

O produto final será 832, que é a soma do primeiro produto (192 unidades) com o segundo produto (640 unidades).

Devemos ressaltar que o produto de 26 por 32 é o mesmo que o produto de 32 por 26, mas ambas as operações não dizem a mesma coisa, a organização fica diferente e o número de parcelas em cada uma delas é diferente da outra.

<u>Multiplicar 132 por 25 ou multiplicar 25 por 132?</u>

Embora possamos perceber que o produto de 132 por 25 é o mesmo que o produto de 25 por 132, perceberemos que o conforto para efetuarmos o algoritmo não é o mesmo. Vamos utilizar o algoritmo convencional para o primeiro fator igual a 132 e o segundo fator igual a 25:

	C	D	U
	1	3	2
x		2	5

O segundo fator possui 25 unidades, que foi decomposto em (20 + 5) unidades ou 2 dezenas e 5 unidades.

→

	C	D	U
	1	3	2
x		2	5
	5	15	10

Multiplica-se a unidade (5) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 5 centenas, 15 dezenas e 10 unidades ou 6 centenas e 6 dezenas.

→

	UM	C	D	U
		1	1	
		1	3	2
x			2	5
		6	6	0
+	2	6	4	

Multiplica-se a dezena (2) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 2 unidades de milhar, 6 centenas e 4 dezenas ou 2640 unidades.

→

	UM	C	D	U
	1	1^1	1	
		1	3	2
x			2	5
		6	6	0
+	2	6	4	
	3	3	0	0

O produto final será 3300 unidades, que é a soma do primeiro produto (640 unidaes) com o segundo produto(2640

Agora, vamos utilizar o algoritmo convencional para o primeiro fator igual a 25 e o segundo fator igual a 132:

	C	D	U
		2	5
x	1	3	2

O segundo fator dessa multiplicação possui 132 unidades, que foi decomposto em (100 + 30 + 2) unidades ou 1 centena, 3 dezenas e 2 unidades.

→

	C	D	U
		2	5
x	1	3	2
		4	10

Multiplica-se a unidade (2) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 4 dezenas e 10 unidades ou 50 unidades.

→

	C	D	U
		1	
		2	5
x	1	3	2
		5	0
+	6	15	

Multiplica-se a dezena (3) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 6 dezenas e 15 unidades ou 750 unidades.

→

	UM	C	D	U
		1	1	
			2	5
x		1	3	2
			5	0
		7	5	
+	2	5		

Multiplica-se a centena (1) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 2 unidades de milhar e 5 centenas ou 2500 unidades.

→

	UM	C	D	U
	1	1^1	1	
			2	5
x		1	3	2
			5	0
		7	5	
+	2	5		
	3	3	0	0

O produto final será 3300, que é a soma do primeiro produto (50 unidades) com o segundo produto (750 unidades) com o terceiro produto (2500 unidades).

Os exemplos a seguir envolvem multiplicação de números decimais. Veja que o mecanismo utilizado é o mesmo mecanismo para números naturais.

Multiplicar 3 por 52,5

Gabriela comprou três livros no valor de R$ 52,5 cada um. Determine quanto Gabriela pagou nos três livros.

	D	U	d
	5	2,	5
x		3	

Basta multiplicarmos o segundo fator (3) por todas as ordens do primeiro fator.

→

	D	U	d
	5	2,	5
x		3	
	15	6	15

Multiplica-se a unidade (3) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 15 dezenas, 6 unidades e 15 décimos.

→

	C	D	U	d
	1		1	
		5	2,	5
x			3	
	1	5	7,	5

Após as definidas transformações, o produto será 157,5.

Assim, Gabriela pagou R$ 157,50 nos livros.

Multiplicar 32, 8 por 1,4.

	D	U	d
	3	2,	8
x		1,	4

É preciso multiplicar o segundo fator decomposto em 1 unidade e 4 décimos.

→

	D	U	d	c
	3	2,	8	
x		1,	4	
		12	8	32

Multiplica-se o décimo (4) do segundo fator pelo primeiro fator, que resulta em 12 unidades, 8 décimos e 32 centésimos.

→

	D	U	d	c
	3	2,	8	
x		1,	4	
	1	3,	1	2

O produto do décimo (4) do segundo fator pelo primeiro fator, resulta em 13,12 unidades.

→

	D	U	d	c
	3	2,	8	
x		1,	4	
	1	3,	1	2
	3	2,	8	

Multiplica-se a unidade (1) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 3 dezenas, 2 unidades e 8 décimos ou em 32,8 unidades.

→

	D	U	d	c
	3	2,	8	
x		1,	4	
	1	3,	1	2
+	3	2,	8	0
	4	5,	9	2

O produto final será 45,92 unidades, que é a soma do primeiro produto (13,12 unidades) com o segundo produto (32,8 unidades).

No exemplo, mantivemos a vírgula porque ela estará indicando a parte inteira separada da parte decimal e, à medida que multiplicamos os fatores e os colocamos nos seus devidos valores posicionais, o resultado já será um número organizado em sua composição. A presença da vírgula não representa dificuldade neste caso.

Uma maneira muito prática e usual de efetuarmos fatores decimais consiste em “esquecermos” da vírgula, efetuarmos a multiplicação normalmente, contarmos quantas casas decimais há nos fatores e “voltarmos” com a vírgula conforme o número de casas decimais. Vejamos o mesmo produto do exemplo anterior, porém resolvendo com o artifício de “esquecermos” da vírgula.

<u>Multiplicar 32, 8 por 1,4 (“esquecendo da vírgula”).</u>

	D	U	d
	3	2,	8
x		1,	4

Cada fator possui uma casa decimal.

“Sumindo” com a vírgula, temos 328 vezes 14.

→

	C	D	U
	3	2	8
x		1	4
	12	8	32

Multiplica-se a unidade (4) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 12 centenas, 8 dezenas e 32 unidades ou 1312 unidades.

→

	UM	C	D	U
		3	2	8
x			1	4
	1	3	1	2
	3	2	8	

Multiplica-se a dezena (1) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 328 dezenas.

→

	UM	C	D	U
		3	2	8
x			1	4
	1	3	1	2
+	3	2	8	0
	4	5	9	2

O produto final será 4592, que é a soma do primeiro produto (1312 unidades) com o segundo produto (3280 unidades).

→

	UM	C	D	U
		3	2	8
x			1	4
	1	3	1	2
+	3	2	8	0
	4	5	9	2
	4	5,	9	2

Como cada fator inicial possuía uma casa decimal, “voltamos” com a vírgula duas casas decimais (uma para cada fator), encontrando assim o produto final igual a 45,92 unidades.

O artifício acima utilizado só é válido porque “sumir” com a vírgula significa multiplicar cada fator por uma potência de 10. Se um fator tiver uma casa decimal, basta multiplicá-lo por 10 para que se torne um número inteiro. Se o fator tiver três casas decimais, basta multiplicá-lo por 1000 para se tornar um número inteiro. Se o fator tiver “n” casas decimais, basta multiplicá-lo pelo número formado pelo algarismo 1 e “n” zeros. Vejamos que 32,8 multiplicado por 10 é igual a 328 e 1,4 multiplicado por 10 é igual a 14. Após a multiplicação dos novos números inteiros, é preciso dividir o produto encontrado pela mesma quantidade que foram multiplicados os fatores. Se no nosso exemplo foi multiplicado por 10 cada fator, o produto foi multiplicado por 100. Assim, é preciso dividir o produto por 100 para obtermos o produto dos termos originais. A contagem das casas decimais e o seu registro no resultado resolve a situação, embora seja preciso que se compreenda o porquê.

Vejamos mais um exemplo.

Multiplicar 3,26 por 1,25

	U	d	c
	3,	2	6
x	1,	2	5

Os fatores juntos possuem 4 casas decimais.

Multiplicando cada fator por 100, estaremos multiplicando o produto por 10 000.

→

	C	D	U
	3	2	6
x	1	2	5

Podemos multiplicar 326 unidades por 125 unidades. Ao obter o produto, devemos dividi-lo por 10 000, que encontraremos o produto correspondentes aos fatores originais.

→

	C	D	U
	3	2	6
x	1	2	5
	15	10	30

Multiplica-se a unidade (5) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 15 centenas, 10 dezenas e 30 unidades ou 1 630 unidades.

→

	UM	C	D	U
		3	2	6
x		1	2	5
	1	6	3	0
	6	4	12	

Multiplica-se a dezena (2) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 6 unidades de milhar, 4 centenas e 12 dezenas ou 6520 unidades

→

	DM	UM	C	D	U
			3	2	6
x			1	2	5
		1	6	3	0
		6	5	2	0
	3	2	6		

Multiplica-se a centena (1) do segundo fator pelo primeiro fator que resulta em 3 dezenas de milhar, 2 unidades de milhar e 6 centenas ou 12 600 unidades.

→

	DM	UM	C	D	U
	1	1			
			3	2	6
x			1	2	5
		1	6	3	0
		6	5	2	0
+	3	2	6	0	0
	4	0	7	5	0

O produto 40 750 que é a soma do primeiro produto (1630 unidades) com o segundo produto (6520 unidades) com o terceiro produto (32600 unidades), será divido por 10000 resultando em 4,075 o produto final.

4.2 DIVISÃO DE NÚMEROS RACIONAIS POSITIVOS

Repartir de forma igualitária é a essência da divisão, do ponto de vista matemático. A divisão pode acontecer basicamente por meio da ideia de separar em grupos iguais ou de quantas vezes um valor cabe em outro (ideia relacionada à medida).

Um exemplo da ideia de separar em grupos:

João precisa dividir R$ 300,00 para seus três filhos. Quantos reais receberá cada filho de João?

<table>
<tr><th>VALOR A SER DIVIDIDO</th><th>VALOR POR GRUPO</th></tr>
<tr><td rowspan="3">R$ 300,00</td><td>R$ 100,00</td></tr>
<tr><td>R$ 100,00</td></tr>
<tr><td>R$ 100,00</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ao separar R$ 300,00 igualmente para os 3 filhos, tem-se R$ 100,00 para cada filho de João.</td></tr>
</table>

Um exemplo de divisão a partir da ideia de verificar quantas vezes uma quantia cabe em outra:

Um balde possui a capacidade de 20 litros. Quantos baldes de - 4 litros cada - serão necessários para encher totalmente esse balde maior?

<table>
<tr><th>BALDES MENORES</th><th>BALDE MAIOR</th></tr>
<tr><td>Balde de 4 litros</td><td rowspan="5">Balde de 20 litros</td></tr>
<tr><td>Balde de 4 litros</td></tr>
<tr><td>Balde de 4 litros</td></tr>
<tr><td>Balde de 4 litros</td></tr>
<tr><td>Balde de 4 litros</td></tr>
<tr><td colspan="2">5 baldes menores é o número máximo de baldes que cabem no balde maior</td></tr>
</table>

Nos livros didáticos e na prática escolar, há diversos algoritmos para efetuarmos uma divisão e não há uma regra que impeça a utilização de alguns deles, mas é preciso ter cuidado com algumas particularidades.

Atrelar na divisão a ideia de repartir, simples e puramente, pode nos levar a crer que em toda divisão que envolve números positivos, o quociente nunca será maior (ou igual) que o número a ser dividido. Contudo, nas divisões cujos divisores são números racionais positivos pertencentes ao intervalo entre 0 e 1, teremos sempre um quociente maior que o dividendo.

Vejamos o exemplo de dividir 8 por 0,5. Se fôssemos dividir 8 por 1, teríamos 8 grupos com 1 elemento cada. Porém, o divisor original é a metade de 1 inteiro e cada grupo de 1 elemento passará a ter a metade de 1, sendo preciso o dobro de grupos em relação à divisão por um inteiro. Logo, para dividir 8 por meio será preciso o dobro de grupos em relação à divisão de 8 por 1, ou seja, ao dividir 8 por 0,5 encontraremos 16 como quociente. Aqui foram mobilizadas ideias para se compreender que raciocínio explica a divisão proposta. Vamos a mais um exemplo.

Lara pretende dividir 12 barras de chocolates em pedaços que correspondam a 0,25 de uma barra. Quantos pedaços de chocolates Lara terá?

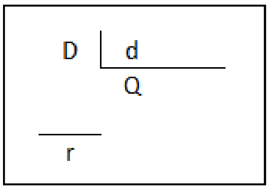
Veja que em cada barra Lara terá que dividir ao meio cada metade, obtendo, assim, 4 pedaços de chocolate em cada. Como são 12 barras, Lara terá um total de 48 pedaços de chocolate ao todo.

Nos dois exemplos acima, os quocientes são maiores que os respectivos dividendos.

4.3 ALGUMAS PARTICULARIDADES DA DIVISÃO

Divisão exata e divisão não exata

Ao efetuarmos uma divisão, é preciso compreender que seu resultado é um conjugado entre quociente e o resto. Uma divisão exata possui resto sempre igual a zero, e o dividendo múltiplo de seu divisor. Em uma divisão não exata, por sua vez, o resto é sempre diferente de zero, sendo o dividendo não múltiplo de seu divisor.

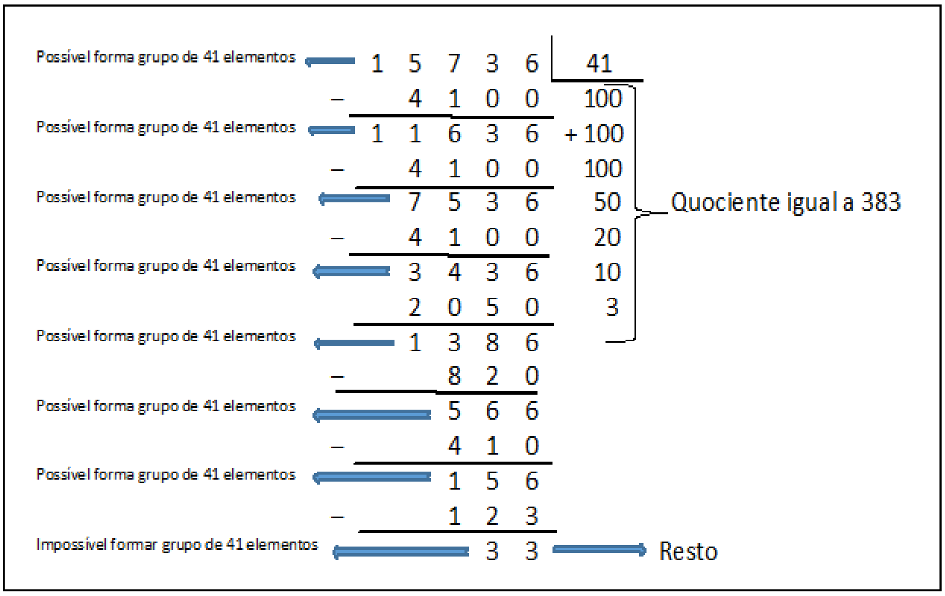


Se “r” igual 0 temos uma divisão exata, se “r” diferente de zero temos uma divisão não exata.

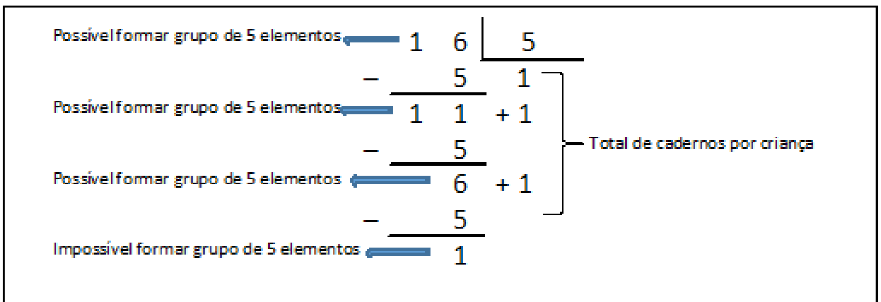
O resto da divisão é sempre menor que o divisor

Em uma divisão, o resto precisa ser menor que o divisor, pois, ao efetuarmos uma divisão, estamos formando grupos de quantidades iguais; com a possibilidade do resto maior ou igual ao divisor tem-se a condição de formação de mais grupos. Vejamos o exemplo:

Dividir 15 736 por 41, onde foram sendo formados os grupos de 41 unidades:

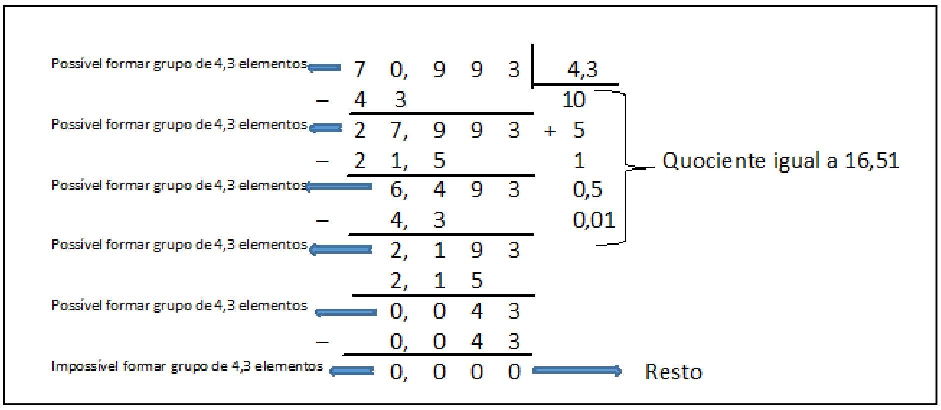


Outro exemplo: Dezesseis cadernos deverão ser distribuídos para 5 crianças. Determine quantos cadernos cada criança receberá.



Assim, cada criança receberá 3 cadernos cada e sobrará 1.

Podemos fazer uso da estimativa e formar mais que um grupo por vez. O mesmo raciocínio pode ser utilizado para números com vírgula. Vejamos como fica a divisão de 70,993 por 4,3.

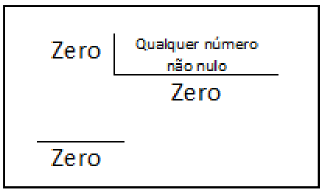


Zero é divisível por qualquer número não nulo

Do ponto de vista da matemática, o zero é o único número que é divisível por qualquer número não nulo e isso pode ser visto com as duas ideias que envolvem a operação de divisão. Neste caso, se separarmos em grupos de quantidades iguais, teremos, naturalmente, a ausência de elementos nos grupos. Dividir zero por 4 é o mesmo que termos quatro grupos com zero elemento cada. Se pensarmos em quantas vezes uma quantidade cabe em outra, temos que não há quantidade que caiba em uma “ausência de quantidade”.

Podemos dizer que dividir zero por 4 é o mesmo que dizer que o 4 não cabe vez alguma dentro do zero.

Assim:



ZERO ÷ Qualquer número não nulo = ZERO

O Zero como divisor

Na definição matemática, não existe uma divisão de um número não nulo por zero e isso pode ser visto com a ideia de separarmos em grupos, pois há uma impossibilidade de se formar grupos contendo zero elementos que indicam um valor não nulo. Veja que em uma eventual divisão de 4 por zero, teríamos que encontrar uma quantidade de grupos que não expressam quantidade, cujo somatório de zeros seja igual a 4, e tal fato se mostra impossível de ocorrer.

Observando por um outro lado, a divisão por zero não ocorre porque não há representatividade no divisor, assim como dividir algo para ninguém ou por nada?

$$\begin{array}{r|l} \text{Qualquer número não nulo} & \text{Zero} \\ \cline{2-2} & \nexists \\ \hline ? & \end{array}$$

<u>Simplificação do dividendo e divisor</u>

Uma caixa grande com 90 cadernos idênticos custa R$ 1 800,00 e uma caixa menor com 45 caderno também custa R$ 900,00. Veja que o preço de cada caderno é de R$ 20,00 em ambas as caixas.

$$\begin{array}{r|l} 1800 & 90 \\ \cline{2-2} & 20 \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 900 & 45 \\ \cline{2-2} & 20 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Observe que o dividendo e o divisor da primeira operação foram ambos divididos por dois e o quociente não foi alterado.

Observa-se, assim, que, em uma divisão exata, não há problema multiplicarmos (ou dividirmos) um número não nulo, pelo dividendo e pelo divisor, pois está implícito que o resto também foi multiplicado (ou dividido) pelo mesmo número, uma vez que esse produto sempre será zero. Porém, para uma divisão cujo resto não é um número nulo, também é preciso multiplicá-lo (ou dividi-lo) quando o dividendo e o divisor forem multiplicados (ou divididos) por um número não nulo. Vejamos os exemplos abaixo:

Ao dividirmos 48 por 14, encontramos quociente 3 e o resto 6.

$$\begin{array}{r|l} 48 & 14 \\ \cline{2-2} -\ \underline{42} & 3 \\ 6 & \end{array}$$

Se dividirmos o dividendo e o divisor por 2, faremos a divisão de 24 por 7:

Veja que o resto 6 da divisão de 48 por 14 também foi divido por 2. Assim, ao dividir 24 por 7 encontramos o mesmo quociente 3 e resto 3. Essa situação se repete sempre e mostra que as operações darão o mesmo resultado.

Ao dividirmos 2 600 por 500 iremos encontrar como quociente 5 e o resto 100.

$$\begin{array}{r|l} 2600 & 500 \\ \cline{2-2} -\ \underline{2500} & 5 \\ 100 & \end{array}$$

Se simplificarmos a divisão, dividindo o dividendo e o divisor por 100, faremos a divisão de 26 por 5:

$$\begin{array}{r|l} 26 & 5 \\ \cline{2-2} -\ \underline{25} & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Veja que o resto da divisão de 26 por 5 é 1, será preciso multiplicá-lo por 100 (o mesmo número que simplificou o dividendo e divisor da operação anterior) para obtermos os mesmos termos da divisão original. Nesses casos, contudo, o resultado da operação será o mesmo.

DIVISÃO COMO OPERAÇÃO INVERSA DA MULTIPLICAÇÃO

A divisão é a operação inversa da multiplicação ou a multiplicação é a operação inversa da divisão, porque considera-se que, o que uma faz, a outra desfaz.

Veja que podemos considerar a operação (2 . 5 = 10) associada à ideia da operação inversa (10 : 2 = 5) ou (10 : 5 = 2)

$$\begin{array}{r|l} 24 & 7 \\ \hline -\ 21 & 3 \\ \hline 3 & \end{array}$$

É verdade, também, que a utilização da operação inversa nos permite conferir o resultado de uma operação. Vejamos os exemplos para multiplicação e divisão:

A professora Ana distribuiu 15 livros de literatura para suas três alunas. Cada uma recebeu 5 livros, pois, o número de livros que cada uma recebeu (5) vezes o número de primas (3) é igual a 15.

15 : 3 = 5	→	Uma situação inversa	→	5 . 3 = 15	ou	3 .5 = 15

Como sabemos que não há uma divisão cujo denominador seja nulo, torna-se notório, ao usarmos da operação inversa da divisão, que dividir um número não nulo qualquer "w" por zero seria equivalente a encontrar um número que, multiplicado por zero, dê "w", o que é impossível.

"w" : 0 = ∄ , pois ? . 0 = "w"

Baseado na ideia da operação inversa, pode-se dizer que há uma relação fundamental na divisão. Veja que os termos de uma divisão são dividendo, divisor, quociente e o resto. Se dividindo o dividendo pelo divisor temos um quociente e um resto, então é válida a relação que o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente mais o resto.

Na divisão, $\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline & Q \\ \hline r & \end{array}$ temos que: D = d . Q + r

DIVISÃO DECOMPONDO O DIVIDENDO

Um algoritmo muito comum na divisão consiste em decompor o dividendo. Expressando o valor relativo de suas ordens, efetua-se a divisão das partes decompostas. O quociente será a soma das divisões dessas partes. Vejamos os exemplos:

Efetuar a divisão de 3954 por 3

3000	+ 900	+ 50	+ 4		3
− 3000					1000
0	+ 900	+ 50	+ 4		+ 300
	− 900				+ 16
	0	+ 50	+ 4		+ 2
		− 48			1 318
		2	+ 4 =	6	
			−	6	
				0	

Efetuar a divisão de 867 por 17

800	+ 60	+ 7				17
− 799						47
1	+ 60	+ 7 =	61	+ 7		+ 3
		−	51			+ 1
			10	+ 7 =	17	51
				−	17	
					0	

Mesmo utilizando-se da estimativa na divisão de cada valor relativo pelo divisor, esse processo não é muito confortável quando o valor relativo de uma ordem não for múltiplo do divisor. De todo modo, ele pode constituir-se em um momento do ensino porque a operação, considerando os valores posicionais, irá proporcionar maior compreensão do próprio algoritmo convencional.

DIVISÃO E SEU ALGORITMO CONVENCIONAL

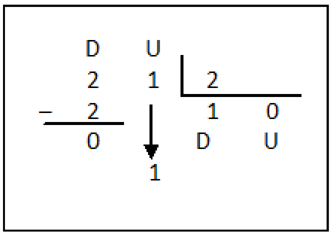
O algoritmo convencional da divisão é um conjunto de regras que podem facilitar o entendimento dos cálculos do quociente e resto, principalmente quando envolvem números considerados muito grandes ou muito pequenos. Reafirmamos aqui a importância de se compreender as características do SND para melhor utilizar do algoritmo convencional da divisão, uma vez que ele se organiza com a divisão em separado de suas ordens. Vejamos como Munhoz, Nazareth e Toledo abordam o processo desse algoritmo.

> A grande diferença entre o processo americano e o processo euclidiano da divisão é:
> - O processo americano trabalha sempre com o **total de unidades** do dividendo;
> - O processo euclidiano decompõe o dividendo em **suas ordens** (U; D; C; UM; ...).
>
> Assim, esse processo usa o **valor posicional** dos algarismos, em que o trabalho com **agrupamento e trocas de 10 em 10** é essencial.
> Um procedimento simples e que evita erros (principalmente nos casos em que há zeros intercalados no quociente) é indicar, no dividendo e no quociente, quais são as ordens que estão sendo usadas.
> Para iniciar as atividades deve-se usar material de manipulação, com a formação de grupos de 10 em 10: ficha (de 1; 10; 100; 1000) ou material similar. (MUNHOZ, NAZARETH e TOLEDO, 2017, V.4, P.109)

Podemos notar que, nomeando as ordens nesse processo, sua dinâmica parece ser facilitada pelo fato de se entender o que está dividindo. É importante destacar a transformação de unidades que completa esse processo. Por isso valorizamos o entendimento das características do SND.

Vejamos os exemplos abaixo.

<u>Dividir 21 por 2</u>



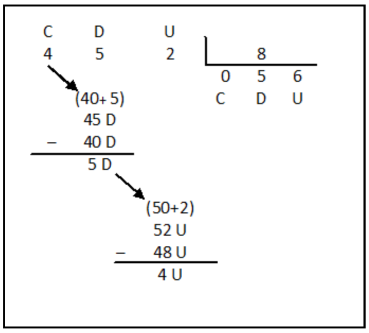
A divisão consiste em dividir ordens separadamente:

- Dividir 2 dezenas por 2 unidades é igual a 1 dezena e resto zero;

- Dividir 1 unidade por 2 unidades é igual a 0 unidade e resto 1.

Assim, o quociente é 10 e resto 1.

<u>Dividir 452 por 8</u>



A divisão consiste em dividir ordens separadamente:
- Dividir 4 centenas por 8 unidades é igual a 0 centena e resto 4;
- 4 centenas são iguais a 40 dezenas, mais 5 dezenas, tem-se 45 dezenas;
- Dividir 45 dezenas por 8 unidades é igual a 5 dezenas e resto 5;
- 5 dezenas são iguais a 50 unidades, mais 2 unidades, tem-se 52 unidades;
- Dividir 52 unidades por 8 unidades é igual a 6 unidades e resto 4.

Assim, o quociente é 56 e resto 4.

Dividir 60 003 por 6

```
 60 003 | 6
        |------
 6        1000,5
--------
00 0030
  − 30
 ------
    0
```

Veja o esquema que mostra um possível erro do uso do algoritmo convencional. Observe que ao "descer" o algarismo 3 acrescenta-se a vírgula no quociente, pois 3 não é dividido por 6. Assim, coloca-se um zero no 3 do dividendo, formando 30 décimos que dividido por 6 é igual a 5 décimos.

Podemos notar que 1000,5 vezes 6 é diferente de 60 003. Por estimativa nota-se que mil vezes 6 é diferente de 60 mil. Vejamos a mesma operação acrescentando os nomes das ordens do dividendo e do quociente, de forma a minimizar esse equívoco.

```
DM UM C  D  U
 6  0  0  0  3 | 6
               |-------------------
− 6              1 0   0 0 0 , 5
---------------
 0  0  0  0  3   DM UM  C D U , d
       3 U
 ---------------
   30 décimos
−  30
  --------
    0
```

Ao nomearmos as ordens do dividendo e do quociente e ao utilizarmos do mesmo procedimento do algoritmo convencional, deveremos preencher a ordem da unidade com o algarismo zero, evitando, assim, o quociente dez vezes menor que o quociente correto.

Dividir 1 414 por 14

```
 1 414 | 14
       |------
  14     11
-------
  014
    14
 ------
    0
```

Vejamos uma estratégia que compromete toda a operação:

Como 1 não dá para dividir por 14, temos 14 dividido por 14 que é igual a 1. Desce o 1. Um não dá para dividir por 14, desce o quatro. Por último temos 14 dividido por 14 igual a 1.

Podemos notar, também, que 11 vezes 14 é diferente de 1 414. Vejamos novamente a prática de nomear as ordens do dividendo e do quociente com a finalidade de diminuir a possibilidade de efetuar erroneamente essa divisão.

```
   C D U
  14 1 4   | 14
  14         -----
  ------     1 0 1
  0          C D U
   1 D + 4U
  ----------
  10 U + 4 U
  ----------
  14 Unidades
  14
  ----------
     0
```

Por estimativa, podemos dividir 14 centenas por 14, assim encontraremos 1 centena no quociente. Ao tentarmos dividir 1 dezena por 14, encontraremos zero dezena. Devemos transformar 1 dezena em 10 unidades e dividir 14 unidades por 14 para encontrarmos 1 unidade, obtendo 101 no quociente.

Dividir 9,003 por 3

Podemos efetuar o mesmo procedimento do algoritmo convencional quando o dividendo for um número com vírgula e o divisor um número natural, pois como o algoritmo se efetiva ao dividirmos as ordens do dividendo separadamente, naturalmente teremos um quociente com um número com vírgula.

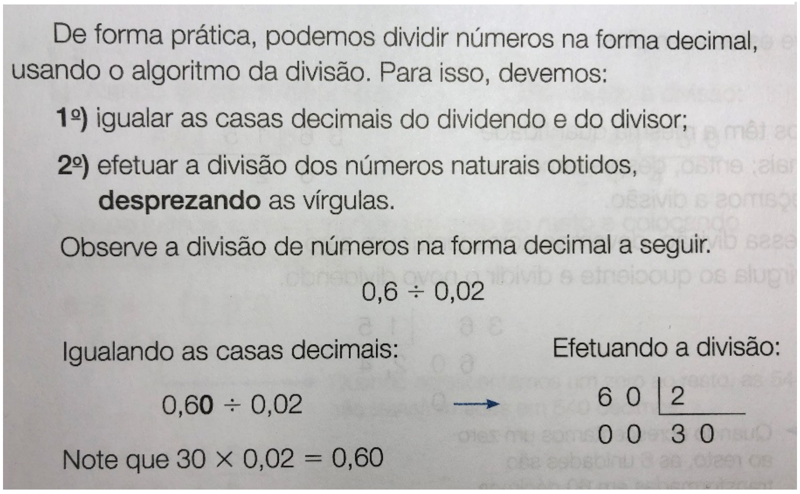
```
  U, d  c  m
  9, 0  0  3  | 3
  3             ---------
  -----------   3, 0 0 1
  0             U, d c m
    0
      0
         3
     -   3
  -----------
         0
```

Observe que ao nomearmos as ordens o quociente é obtido com maior segurança.

Assim, a divisão de 9, 003 por 3 é 3,001

Alguns livros tratam a divisão dos números decimais através de uma regra simplificada, mas consideramos essencial mencionar o que está por trás de sua justificativa. É bastante prático utilizarmos do artifício de igualarmos o número de casas decimais, “sumirmos” com a vírgula e efetuarmos a divisão normalmente. Vamos observar, na figura 24, como Silveira e Marques (2015) apresentam a divisão com o divisor sendo um número decimal.

Figura 24: Processo prático para divisão com números decimais



De forma prática, podemos dividir números na forma decimal, usando o algoritmo da divisão. Para isso, devemos:

1º) igualar as casas decimais do dividendo e do divisor;

2º) efetuar a divisão dos números naturais obtidos, **desprezando** as vírgulas.

Observe a divisão de números na forma decimal a seguir.

$0,6 \div 0,02$

Igualando as casas decimais:

$0,60 \div 0,02 \longrightarrow$

Efetuando a divisão:

$$\begin{array}{r|l} 6\ 0 & 2 \\ \hline 0\ 0 & 3\ 0 \end{array}$$

Note que $30 \times 0,02 = 0,60$

FONTE: SILVEIRA e MARQUES, Matemática, livro didático 5º ano. 2015, p. 269

Uma explicação plausível para a prática do processo acima é que podemos multiplicar o dividendo e o divisor por 100. Assim, teremos um novo dividendo igual a 60 unidades e um novo divisor igual a 2 unidades. Ao se efetuar a divisão de 60 por 2, teremos 30 unidades para o quociente.

Vejamos mais um exemplo:

Um xarope é vendido em frasco de 80 ml. Quantos frascos são necessários para se ter 12,4 litros desse xarope?

Podemos identificar que uma solução para essa atividade é descobrir quantas vezes o conteúdo do frasco de xarope cabe em 12,4 litros. Assim, podemos utilizar da operação inversa da multiplicação que é a divisão. Utilizando do processo convencional, temos:

```
DM UM  C  D  U
 1  2  4  0  0 |  80
 -  8  0       |_______________
 ___________     0   0  1  5  5
    4  4 C      DM UM  C  D  U
    4  4  0 D
 -  4  0  0
 ___________
       40 D
       400 U
     - 400
 ___________
         0
```

Logo, para se ter 12,4 litros de xarope em frasco de 80 ml serão necessários 155 frascos.

Uma boa observação no algoritmo convencional da divisão é que podemos simplificar seus termos, ou seja, podemos dividir o dividendo e o divisor por um mesmo número não nulo, pois simplificar uma fração consiste em obter uma fração irredutível.

Assim,

- Dividir 12 400 por 80 é o mesmo que dividir 1 240 por 8. (Podemos simplificar cada termo por 10)
- Dividir 1 240 por 8 é o mesmo que dividir 620 por 4. (Podemos simplificar cada termo por 2)
- Dividir 620 por 4 é o mesmo que dividir 310 por 2. (Podemos simplificar cada termo por 2)
- Dividir 310 por 2 é o mesmo que encontrar a metade de 310 que é 155.

Esse processo se torna mais interessante quando conseguimos utilizar cálculos da divisão mentalmente, ou seja, sem o uso do lápis e do papel.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática é uma ferramenta indispensável para a sociedade e, como professores, facilitar sua compreensão é nosso desafio, pois promover a aprendizagem para sua aplicação na vida é nossa meta. Com esse designo, é importante destacar a evolução da educação matemática e sua contribuição nos processos de aprendizagem, sempre buscando o alinhamento necessário para o sucesso escolar no ensino, em um entendimento de ser a formação básica um direito de todos.

Por um período, o foco do ensino da matemática era "fazer contas". Assim, o uso dos algoritmos e suas regras eram prioridades. Na escolarização de nossos pais, por exemplo, há constantes referências sobre as listas de exercícios e a grande valorização na capacidade operatória quando conquistada. Temos inúmeros exemplos de simplificações dos processos de aprendizagem que mais se pareciam com "macetes" e funcionavam como foco maior nos procedimentos educacionais. Para os dias de hoje, quando temos grande diversidade nas escolas, temos outros contextos nas visões educacionais e o foco é valorizar o entendimento, os porquês que circundam todos os conteúdos da sala de aula.

O uso dos algoritmos convencionais das operações básicas é bastante importante para a aplicação dos números, mas, como já se analisou, sua aprendizagem não tem sido fácil na escolarização, mostrando dificuldades e formação com lacunas. Assim, no entendimento aqui apresentado, devemos utilizá-los pela sua praticidade, mas é imprescindível esmiuçar os porquês de falas prontas sobre seus procedimentos. Clarear o entendimento dos algoritmos passa pela percepção das principais características do SND e não somente por regras que precisam ser decoradas. Destacar os obstáculos do ensino dos números não pode ser visto como a transferência da responsabilidade do ensino para o(a) professor(a), pois a sua formação deixa lacunas que dificultam essa tarefa. Então pretendemos levantar discussões sobre a abordagem dos números nos anos iniciais sem transpassar ou refutar o(a) professor(a), pois é preciso entender por completo o que sustenta os argumentos usados no nosso sistema de numeração para que o processo de ensino-aprendizagem não seja comprometido.

Nesse trabalho, o objetivo foi investigar o ensino dos números racionais positivos no ensino fundamental referenciando-se nas características, propriedades e operações do sistema de numeração decimal e propor um material para a formação de docentes. Para isso, destacamos dois pontos importantes no ensino do SND, como conclusão de nosso estudo:

- É preciso valorizar um pouco mais, no ensino, a composição e decomposição de um número, pois, tendo uma atenção maior na sua formação, é possível ter melhor visão e trato da sua grandeza, compreensão de seus termos como a ordem, a classe, a vírgula, sua parte inteira e sua parte não inteira. Com a composição e decomposição do número, a essência do valor posicional fica mais evidente e o entendimento dos algoritmos convencionais tende a ser facilitado, uma vez que suas ordens são operadas separadamente.
- Em algum momento da escolarização, é preciso tratar e explanar o SND sem a separação dos números naturais dos números com vírgula. Vejamos que, na maioria dos materiais didáticos, os números decimais apenas são apresentados após os números fracionários. Reiteramos que não há problemas em atrelar os números com vírgulas aos números fracionários, mas deixar de apresentá-los na formação dos números naturais contribui para a ideia errônea de que há dois sistemas de numeração.

Quando iniciamos esta pesquisa, nossa proposta era a investigação do ensino dos números juntamente com um grupo de estudo composto por docentes dos anos iniciais que, por meio de suas práticas, analisaríamos a abordagem dos números racionais positivos nos principais livros didáticos, além de contribuir na criação de um material didático que contemplasse a formação dos números e suas quatro operações, na visão aqui apresentada. No decorrer das atividades, percebemos que não haveria tempo suficiente para tal e limitamo-nos a evidenciar as principais problemáticas do ensino do SND, a formação dos números, uma atenção nas operações de multiplicação e divisão e a produção de um material didático abrangendo menor conteúdo.

Nesse sentido, este trabalho se faz necessário para destacar o que nos parece como algumas falhas na compreensão dos instrumentos básicos da construção da formalização da matemática escolar usada nos anos iniciais da escola básica. Cabe dizer também que se trata de um estudo que não está integralizado ou totalmente cercado das significativas observações sobre o ensino de números e que suas lacunas sirvam de inspirações para melhorias futuras.

Julgamos importante apresentar as características do SND, a abordagem dos números com vírgula e os algoritmos convencionais aos professores do Ensino Fundamental, porque acreditamos contribuir com o significado teórico em suas práticas em sala de aula.

Sobrelevamos tais práticas que são capazes de alavancar infinitos valores na vida escolar dos alunos, contribuindo com sua formação de um autêntico cidadão.

Com este trabalho, não desconhecemos as condições de trabalho do docente na escola pública, ao contrário, temos a pretensão de oferecer um material para ser discutido e analisado, com expectativa de que, ampliando a compreensão do(a) professor(a), ele/ela possa ampliar as possibilidades de ensino, sempre analisando seu contexto de ação. É necessário destacar que o(a) professor(a) é capaz de promover um aprendizado que perdure por toda a vida. Um aprendizado que o aluno tenha como base conceitos fundamentais, possa estimular o raciocínio matemático e seja-lhe útil como sujeito social.

REFERÊNCIAS

Materiais didáticos consultados

AIDAR, Márcia Marinho. **A Aventura do Saber Matemática.** Editora Leya, 2011. V. 2.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática – Juntos Nessa.** Editora Leya, 2014. V. 2.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. Editora Moderna, 2015. V. 6.

BORDEAUX, Ana Lúcia; RUBINSTEIN, Cléa; FRANÇA, Elizabeth; OGLIARI, Elizabeth; MIGUEL, Vânia. **Novo Bem-Me-Quer Matemática**. Ed. do Brasil, 2017, Vs 1, 2, 3, 4 e 5.

CATUNDA, Omar; DANTAS, Martha Maria de Souza; NOGUEIRA, Eliana Costa; ARAÚJO, Norma Coelho de; GUIMARÃES, Eunice da Conceição; SOUZA, Neide Clotilde de Pinho e; MORENO, Maria Augusta de Araújo. **Ensino Atualizado da Matemática – Um Curso Ginasial**. Editora São Paulo, 1970.

CENTURIÓN, Marília; SCALA, Júnia La; RODRIGUES, Arnaldo. **Matemática – Conjunto do Saber.** Editora FTD, 2016. V. 5

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática** – Editora Ática, 2009. V. 2.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Ápis. Matemática**. Ed. Ática, 2014. Vs. 2 e 3.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Ápis. Matemática**. Ed. Ática, 2017. V.4.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A Conquista da Matemática** – São Paulo: Editora FTD, 2017. Vs. 1, 2, 3, 4 e 5.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar – Conjunto e Funções.** Editora Atual, 1994. V. 1.

IFRAH, Georges. **História Universal dos Algarismos: A inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo.** Tradução Alberto Munhoz e Ana Beatriz Kalisoy. 2 ed. Rio de Janeiro. Nova Fronteira, 2000. Vs. 1 e 2.

IMENES, Luiz Inácio. **Vivendo a Matemática – A Numeração Indo-Arábica.** Editora Scipione, 1997.

IMENES, Luiz Inácio. **Vivendo a Matemática – Brincando com Números.** Editora Scipione, 1990.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo; MILANI, Estela. **Presente Matemática Guia e Recursos Didáticos** – São Paulo: Editora Moderna, 2009. Vs. 2, 3 e 5.

LASINSKAS, Ana Cláudia; POGGETTI, Liane G; VASCONCELLOS, Maria José; CARLINI, Sandra. **Matemática – Mundo Amigo.** Editora SM, 2015. V. 2.

LONGEN, Adilson. **Matemática – Projeto Jimboê.** Editora do Brasil, 2014. V. 2.

MENDONÇA, Leandra Célia Seabra; BARBOSA, Mônica Alves da Silva. **Matemática – Sistema de Ensino Poliedro.** Editora Poliedro.

MUNHOZ, Ainda Ferreira; NAZARETH, Helenalda; TOLEDO, Marília. **Coleção Eu Gosto Matemática.** São Paulo, 2017, Vs. 1, 2, 3, 4 e 5.

MORANDI, Henrique. **Matemática: Método Moderno**. Livraria Francisco Alves, 1971.

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. **Matemática**. Editora Moderna, 2015. Vs. 4 e 5.

SILVEIRA, Ênio. **Aprender e Relacionar Matemática**. Editora Moderna, 2017. V. 1, 2, 3, 4 e 5.

SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Materiais Manipulativos para o Ensino de Frações e Números Decimais.** Editora Penso, 2016.

SMOLE, Kátia Stocco; MUNIZ, Cristiano Alberto. **A Matemática em Sala de Aula**: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental – Porto Alegre, 2013.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ Maria Ignez; MARIM Vlademir. **Faça Matemática! Guia de Recursos Didáticos** – São Paulo: Editora FTD, 2016, Partes 1 e 2.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZN Maria Ignez; MARIM Vlademir. **Saber Matemática** – São Paulo: Editora FTD, 2013. V. 5.

TOSATTO, Carla Cristina; TOSATTO, Cláudia Miriam; PERACCHI Edilaine do Pilar F. **Matemática – Pequenos Exploradores.** Editora Positivo, 2014. V. 4.

VIEIRA, Fábio; RIBEIRO, Jackson; Pessôa Karina. **Matemática – A Escola é Nossa.** Editora Scipione, 2013. Vs. 4 e 5.

YOUSSEF, Antônio Nicolau; GUELLI, Oscar Augusto. **Meu Livro de Matemática**. Editora AJS, 2017. Vs 1, 2, 3, 4 e 5.

Referências

ALFONSO, Bernardo. **Numeración y Cálculo.**3 ed. Madrid: Sintesis, 2000.

BATISTA, Célia Guarnieri. **Fracasso Escolar: análise de erros em operações matemáticas**. Zetetiké, V. 3, n. 4, p. 61 – 72, nov. 1995.

BOGDAN, R.C.; KNOPP, S. B. **Investigação Qualitativa em Educação,** 1991.

BRASIL. **Guia de Livros Didáticos: PNLD**: Alfabetização Matemática: ensino fundamental anos iniciais. – Brasília: MEC, SEB, 2016.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. – Brasília: MEC, SEF, 1997.

BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa:** Saberes Matemáticos e Outros Campos do Saber. – Brasília: MEC, SEB, 2014 - 2018.

CARDOSO, Virgínia Cardia. **Materiais didáticos para as quatro operações**. CAEM IME – USP, 2013.

CENTURIÓN, Marília. Conteúdo e Metodologia da Matemática - **Números e Operações**. São Paulo: Editora Scipione, 1994.

COLL, César; TEBEROSKY, Ana. **Aprendendo Matemática: Conteúdos Essenciais para o Ensino Fundamental.** Editora Ática, 2002.

CURI, Edda; SANTOS, Cintia Aparecida Bento dos; RABELO, Maria Helena. **Aprendizagens e dificuldades de alunos de 5º ano com relação ao sistema de numeração decimal.** EMR-RS. Ano 13, 2012- número 13 - V.2, p.57 a 69.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.

DORNELAS, Beatriz V. **Escrita e Números: Relações Iniciais.** Porto Alegre. Artimed,1998.

Dicionário Oxford de matemática essencial / organizado por Frank Tapson; edição brasileira – São Paulo: Oxford University Press, 2012.

FEREIRA, Jamil. **A construção dos Números.** SBM, 2013.

FIGUEIREDO, W. L.; SILVA, I. R. Deficiência no uso dos algoritmos convencionais para operações fundamentais na educação básica: um estudo piloto**. Revista da Estatística da UFOP**, 4, p. 44-63, 2015.

GUIMARÃES, Gilda. **Anais do V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, Petrópolis –RJ, 2012.

ITZCOVICHI, Horacio. **La Matemática Escolar: lasprátcas de ensenanzaenel aula.** Sique, 2008.

KAMII, Constance. **Desvendando a Aritmética**: Implicações da teoria de Piaget. Campinas, SP. Papirus, 1995.

MILAN, Ivonildes dos Santos. **O ENSINO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: as relações com a aprendizagem do sistema posicional.** PUC – SP, 2017.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela M. S. **A formação do professor de matemática – Licenciatura e Prática Docente Escolar**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

NOGUEIRA, Clélia Maria e SIGNORINI, Marcela Boccoli. **CRIANÇAS, ALGORITMOS E O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL.** Investigações em Ensino de Ciências – V15(2), ps. 259-274, 2010.

PADOVAM, Daniela; GUERRA, Isabel Cristina; MILAN, Ivonides. **Matemática – Projeto Prosa**. Editora Saraiva, 2008. V. 2.

PIRES, Célia Maria Carolino. **Números Naturais e Operações – Como Eu Ensino**. São Paulo. Editora Melhoramento, 2013.

PONTE, João Pedro; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa, 2009.

ROSSO, Ademir José e BERTI, Nívia Martins. **O ERRO E O ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DO DESENVOLVIMENTO DA AUTONOMIA DO ALUNO.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 23, nº 37, p. 1005 a 1035,2010.

TRACANELLA, Aline Tafarelo. **O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL: um estudo sobre o valor posicional.** PUC– SP, 2018.

TEBEROSKY, Ana; TOLCHINSKY, Liliana. **Além da Alfabetização**: A aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. Editora Ática – 2007.

VECE, Janaina Pinheiro; SILVA, Simone Dias da; CURI, Edda. **Desatando os nós do Sistemade Numeração Decimal: investigações sobre o processo de aprendizagem dos**

alunos do 5º ano do Ensino Fundamental a partir de questões do SAEB/Prova Brasil. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.15, n.1, p.223-240, 2013

WALLE, John A. Van de. **Matemática no Ensino Fundamental – Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula.** Editora Artmed, 2009.

PROMESTRE
MESTRADO PROFISSIONAL
EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA

FaE
Faculdade de Educação

UFMG

RECURSO EDUCATIVO

ARTICULANDO CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL PARA O ENSINO DE NÚMEROS

WESLEI LIMA DE FIGUEIREDO

ORIENTADORA: SAMIRA ZAIDAN

Belo Horizonte, Março de 2019.

Introdução

A matemática é uma ferramenta indispensável para a sociedade e facilitar sua compreensão é nosso desafio como educadores, promover a aprendizagem para sua aplicação na vida pessoal, profissional e social é nosso objetivo. Mais consciente da ideia da docência, o ensino educa, aceita diferentes vivências, compreende todo o histórico escolar e acolhe o aluno.

Queremos que os tópicos abordados aqui contribuam para uma boa reflexão sobre a utilização de regras do nosso sistema de numeração que é utilizado pelas sociedades modernas do mundo inteiro.

É importante ressaltar que o conteúdo trabalhado aqui é exclusivo para o professor (ou profissionais da educação), pois toda linguagem e passos foram preparados para quem possui uma maturidade e experiência diferentes dos alunos que estão nos anos iniciais da Escola Básica. Nosso foco é o diálogo com o(a) professor(a) e ampliar possibilidades de ensino.

Várias abordagens apresentadas não são indicadas para trabalhar com os alunos em sala de aula sem que se tenha uma reformulação do assunto, porque entendemos que cada profissional é que sabe do seu contexto de ação. Não veremos aqui relatos de práticas, pois a nossa intenção é levantar a problematização dos entendimentos acerca dos números, contribuir para uma melhor argumentação e ações de ensino do Sistema de Numeração. Nossa indicação é que todos os trabalhos com os alunos sejam feitos valendo-se de materiais concretos e manipulativos e sempre recorrendo à formação dos números.

É importante assegurar que determinadas técnicas ou abordagens trabalhadas em sala sejam compatíveis com a expectativa de cada agrupamento de alunos e o que está previsto para cada ano da escolarização. Destacar uma abordagem pautada na clareza das características do sistema de numeração e suas operações que são trabalhados nos anos iniciais do Ensino Fundamental é a grande essência desse material proposto. Imenes (2014) reforça que o material didático não possui função de promover ao aluno a garantia de "saber tudo", pois, além de outras diversidades, os estudantes possuem seu próprio tempo de aprendizagem. Por isso que, para essa proposta, o foco maior é o professor, pois é ele quem vai conduzir os trabalhos e discernir o quanto pode avançar em suas aulas.

É necessário destacar que o professor é capaz de promover um aprendizado facilitador que perdure por toda a vida. Um aprendizado onde o aluno tenha como base conceitos fundamentais e que possa estimular uma linha de raciocínio que não conflite com o óbvio ou que sirva apenas para assuntos triviais do cotidiano.

A proposta desse Recurso Educativo (Produto Educacional) do PROMESTRE – UFMG é a apresentação de um material didático de apoio ao professor e à professora em formato de minicurso, visando à formação inicial e continuada que possui o foco no ensino do sistema numérico. Com ele pretendemos valorizar sua constituição, destacando a lógica do sistema de numeração, suas principais características e os algoritmos convencionais das operações básicas.

Nesse sentido, este trabalho se faz necessário para destacar o que nos parece como algumas lacunas na compreensão dos instrumentos básicos da construção da formalização do Sistema de Numeração Decimal nos anos iniciais do Ensino Fundamental, que se estende por toda escolarização básica. Veremos algumas situações que levam à falta do entendimento no ensino do nosso sistema de numeração, bem como uma abordagem pautada nos porquês dos algoritmos mais utilizados nas operações básicas dos números racionais positivos, respaldando em análise bibliográfica de materiais didáticos e paradidáticos adotados pelos professores e professoras.

Para promover uma interatividade maior teremos, após os slides, um modelo de atividade que servirá para a prática dos exemplos propostos no minicurso. Assim, cada participante poderá colaborar com sua resposta, sendo optativa sua socialização.

Destacar os obstáculos do ensino dos números não é transferir a responsabilidade para o professor, então pretendemos levantar discussões sobre a abordagem dos números nos anos iniciais sem transpassar ou refutar o professor ou a professora, pois é relevante termos a possibilidade de expandir o que sustenta os argumentos usados no nosso sistema de numeração de forma a contribuir com o sucesso do processo de ensino-aprendizado.

Lembre-se que podemos destinar um momento em sala, em casa, no parque e em diversos outros locais para que o aluno tome gosto da prática de fazer uma boa leitura e atividades desafiadoras que explorem a matemática.

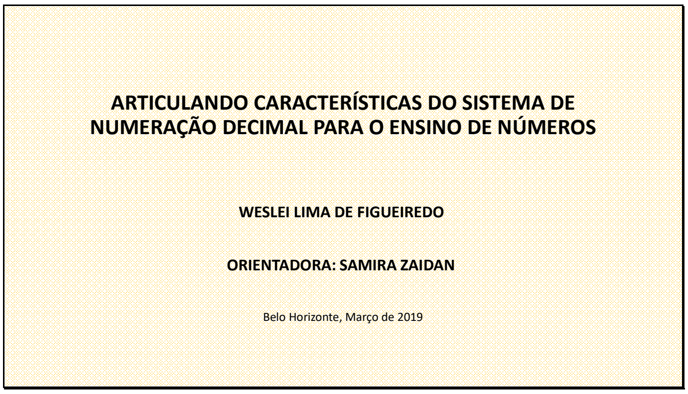
Apresentação do Minicurso

A partir de agora veremos os slides apresentados durante o minicurso e, através dos comentários abaixo de cada slide, a ideia da proposta da discussão dos trabalhos. No minicurso haverá uma breve exibição de dois pequenos vídeos que colaborarão na abertura dos trabalhos.

Slide 1

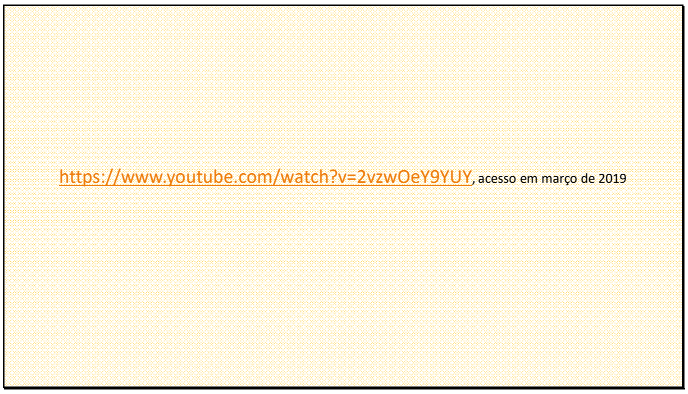
Informação sobre a apresentação

Slide 2



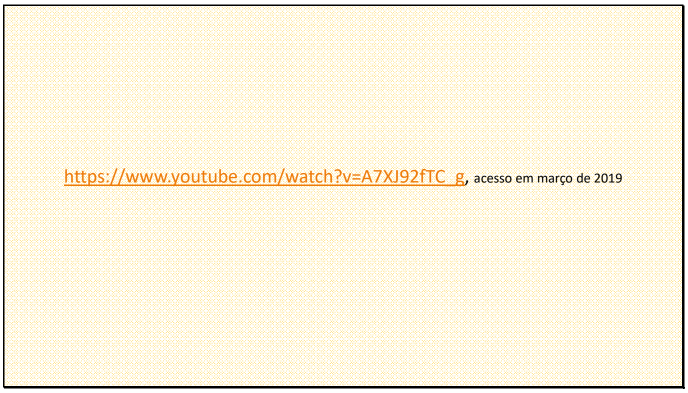
Informação sobre a apresentação: Este recurso foi construído na dissertação de mesmo título, sob orientação da Professora Samira Zaidan. Data 20/02/2019

Slide 3



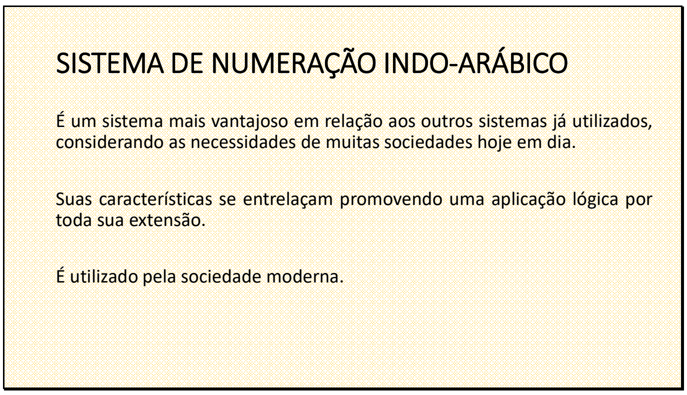
Apresentação de um vídeo para comunicabilidade

Slide 4



Apresentação de um vídeo para comunicabilidade

Slide 5



Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 6

ATIVIDADE 1:

- No Sistema de Numeração Decimal quanto vale o símbolo 5 nos números 54 e 45?
- No Sistema de Numeração Romano quanto vale o símbolo X nos números XI e IX?
- Os dois Sistemas são posicionais?

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 7

SISTEMAS POSICIONAIS

- Sistema de numeração decimal é posicional: aditivo e multiplicativo.
- $54 \neq 45$
- Sistema romano de numeração é posicional: aditivo e subtrativo.
- $XI \neq IX$

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 8

ATIVIDADE 2:

- Como podemos definir “Número”?
- Como podemos definir “Algarismo”?
- Em que situação da vida social podemos dizer que temos um número ou um algarismo?

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 9

ALGARISMOS

Utilizando desses algarismos podemos formar todos os números existentes.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 10

ATIVIDADE 3:

- Pensando bem, em 08 há quantos algarismos? E em 8,0 há quantos algarismos?
- O símbolo 5 é considerado número ou algarismo?

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 11

- Todo número do nosso sistema de numeração é formado por algarismos, que conforme seu posicionamento, alinhava representações completamente diferentes.
- 18 é diferente de 81.
- 08 não representa um número de dois algarismos;
- 8,0 não representa um número de dois algarismos;
- O símbolo 5, por exemplo, pode ser utilizado como número e como algarismo.

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 12

A VÍRGULA

- Uso da vírgula pode ser opcional?

13,7 é diferente de 1,37
5 é indiferente de 5,0

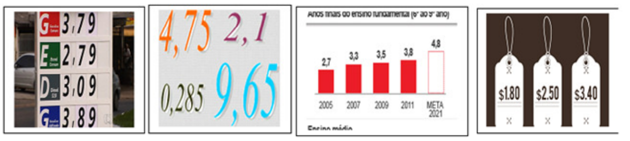
- Cuidado ao tratar a vírgula, pois pode ser que 2,0 passe a funcionar como se tivesse um significado diferente de 2,00 ou de 2,000 ou do número inteiro 2.

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 13

Quando e como a vírgula é apresentada na escola atual?

Visualização de números decimais



Fonte: https://www.google.com.br, acesso em 28/10/2018

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 14

ORDEM E CLASSE

- Todo número possui infinitas ordens e infinitas classes, mesmo que não expressam quantidade.

...	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 2	,	0 0 0	0 0 0	0 0 0	...
	CLASSE DOS BILHÕES	CLASSE DOS MILHÕES	CLASSE DOS MILHARES	CLASSE DOS SIMPLES		CLASSE DOS MILÉSIMOS	CLASSE DOS MILIONÉSIMOS	CLASSE DOS BILIONÉSIMOS	

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 15

3 REGRAS BÁSICAS

I) Não é preciso destacar ordem que não expressa quantidade;

II) Cada ordem não pode exceder 9 unidades;

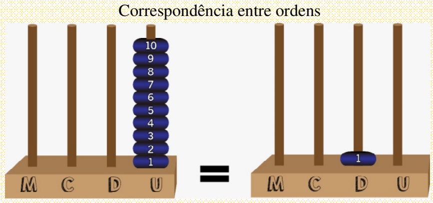
III) Cada ordem é 10 vezes maior que a ordem imediatamente inferior.

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 16

EQUIVALÊNCIA DE ORDENS

Correspondência entre ordens



Fonte: Arquivo pessoal

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 17

- O número 237 possui 23 dezenas inteiras ou 23,7 dezenas.
- O número 21,35 possui 2135 centésimo ou 213,5 décimos
- Cuidado: O número 305 possui 3 centenas, 0 dezena e 5 unidades?

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 18

O número 50 possui:

- 50 unidades inteiras;
- 5 dezenas inteiras;
- Meia centena;
- 500 décimos;
- 50 000 milésimos;
- Etc.

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 19

- Observe o esquema abaixo sobre o número 100

1 0 0
0 unidade
0 dezena
1 centena

- Observe o esquema abaixo sobre o número 1001

1 0 0 1
O número possui 1001 unidades.
O número possui 100 dezenas inteiras ou 100,1 dezenas.
O número possui 10 centenas inteiras ou 10,01 centenas.
O número possui 1 unidade de milhar inteira ou 1,001 unidade de milhar.

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 20

SISTEMA DE BASE 10 ADITIVO E MULTIPLICATIVO

- A característica de ser aditivo e multiplicativo acontece simultaneamente em função da decomposição de cada número, pois todo número pode ser escrito como a soma das unidades compostas em cada ordem e cada ordem pode ser escrito como um produto de seu valor absoluto por uma potência de 10.

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 21

Vejamos os exemplos:

- O número 321 é igual a 3 . 100 + 2 . 10 + 1 ou $3 . 10^2 + 2 . 10^1 + 1 . 10^0$.
- 500 = 5 . 100 ou $5 . 10^2$.
- 45, 67 = $4 . 10^1 + 5.10^0 + 6.10^{-1} + 7.10^{-2}$.

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 22

ATIVIDADE 4:

Vamos decompor o número 155.

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 23

VARIADAS FORMAS DE DECOPOSIÇÃO

155 = 100 + 50 + 5

155 = 50 + 50 + 50 + 5

155 = 5 + 5 + 5 + ... + 5 (31 parcelas iguais)

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 24

ATIVIDADE 5:

Em 3,05 há quantos décimos?

Em 0,10 há quantos décimos?

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 25

TIPO DE ERRO RECORRENTE

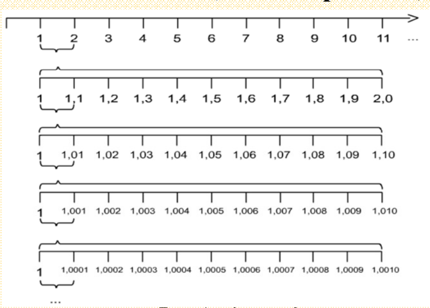
Em 3,05 não há décimo;

O número 0,10 possui dez décimos.

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 26

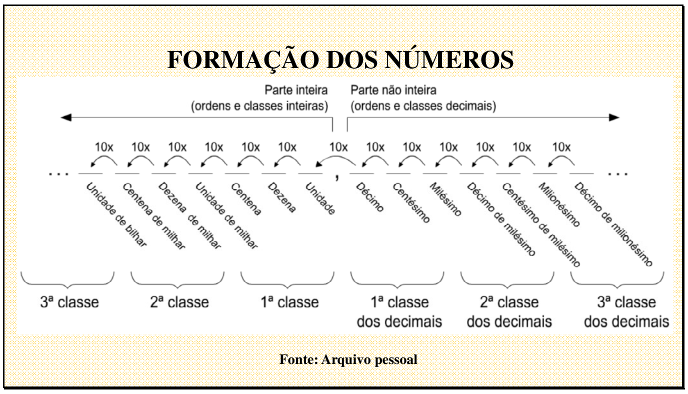
Reta numerada (racionais positivos)



Fonte: Arquivo pessoal

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 27



Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 28

IMPORTÂNCIA DOS NÚMEROS DECIMAIS

- BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa:** Saberes Matemáticos e Outros Campos do Saber. – Brasília: MEC, SEB, 2014-2018.
- ITZCOVICHI, Horacio. **La Matemática Escolar: las prátcas de ensenanza en el aula.** Sique, 2008.
- MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela M. S. **A formação do professor de matemática – Licenciatura e Prática Docente Escolar**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.
- PONTE, João Pedro; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa, 2009.
- WALLE, John A. Van de. **Matemática no Ensino Fundamental – Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula.** Editora Artmed, 2009.

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 29

IMPORTÂNCIA DA FORMAÇÃO DOS NÚMEROS

- BATISTA, Célia Guarnieri. **Fracasso Escolar: análise de erros em operações matemáticas**. Zetetiké, V. 3, n. 4, p. 61 – 72, nov. 1995.
- CENTURIÓN, Marília. **Conteúdo e Metodologia da Matemática - Números e Operações**. São Paulo: Editora Scipione, 1994.
- KAMII, Constance. **Desvendando a Aritmética**: Implicações da teoria de Piaget. Campinas, SP. Papirus, 1995.LASINSKAS, Ana Cláudia; POGGETTI, Liane G; VASCONCELLOS, Maria José; CARLINI, Sandra. **Matemática – Mundo Amigo.** Editora SM, 2015. V. 2.
- MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela M. S. **A formação do professor de matemática – Licenciatura e Prática Docente Escolar**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.
- SMOLE, Kátia Stocco; MUNIZ, Cristiano Alberto. **A Matemática em Sala de Aula**: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental – Porto Alegre, 2013.
- TEBEROSKY, Ana; TOLCHINSKY, Liliana. **Além da Alfabetização**: A aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. Editora Ática – 2007.

Apresentação do Sistema de Numeração Decimal

Slide 30

ALGORITMOS CONVENCIONAIS

- RECOMENDAMOS QUE O USO DOS ALGORIMTOS CONVENCIONAIS SEJAM EXPLORADOS APÓS A DEVIDA COMPREENSÃO DA FORMAÇÃO DOS NÚMEROS, QUE CONTEMPLEM OS NÚMEROS COM VÍRGULA E QUE SEJAM VISUALIZADOS ATRAVÉS DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS.

Apresentação das operações básicas

Slide 31

ADIÇÃO

- A representação numérica da reunião de objetos de mesma natureza é a essência da Adição.
- Essa reunião pode acontecer basicamente através da junção entre quantidades ou acréscimo dessas quantidades.

Apresentação das operações básicas

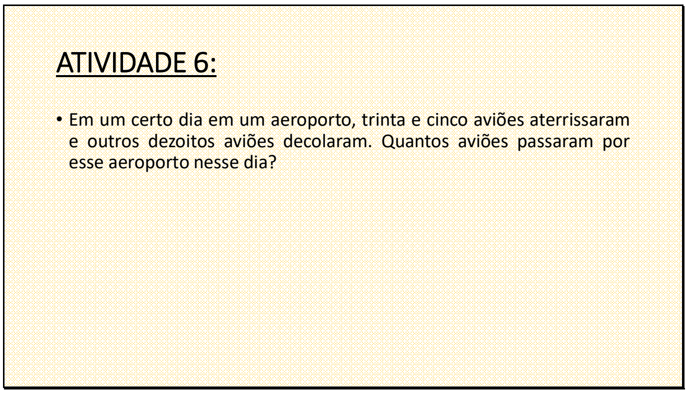
Slide 32

ADIÇÃO

- Operar ordens separadamente;
- Alinhar as mesmas ordens de cada parcela e encontrar suas somas.
- Nomear as ordens para facilitar quais ordens serão adicionadas.

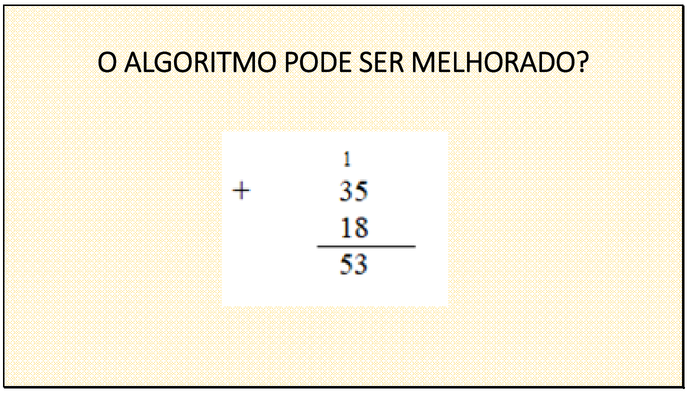
Apresentação das operações básicas

Slide 33



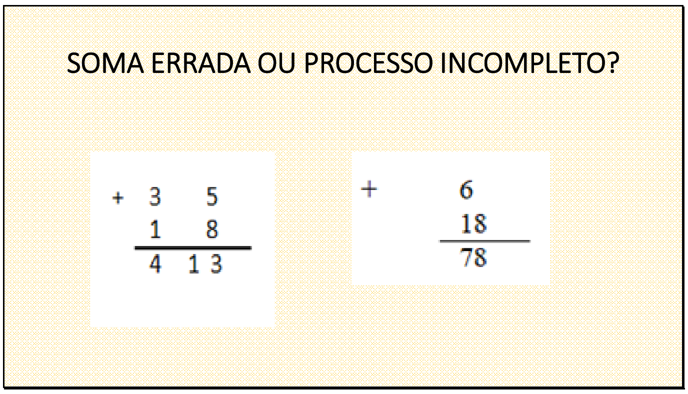
Apresentação das operações básicas

Slide 34



Apresentação das operações básicas

Slide 35



Apresentação das operações básicas

Slide 36

ATIVIDADE 7:

- É comum fazer uso da expressão “vai um” no algoritmo convencional da adição. Quando usar da expressão “vão três” ou “vão mil” nesse algoritmo? Qual a relação com o número de parcelas?

Apresentação das operações básicas

Slide 37

SUBTRAÇÃO

- A representação numérica da diferença entre dois objetos de mesma natureza é a essência da subtração.
- A subtração pode acontecer basicamente através da ideia da retirada, da ideia de comparação ou da ideia de completar.

Apresentação das operações básicas

Slide 38

SUBTRAÇÃO

- Operar ordens separadamente.
- Alinhar as mesmas ordens do minuendo com subtraendo e efetua-las.
- Nomear as ordens para facilitar quais ordens serão adicionadas.
- Uso da expressão “pegar emprestado”.

Apresentação das operações básicas

Slide 39

ATIVIDADE 8:

- Um aparelho de TV custa R$ 3 005,00. No dia de hoje a loja oferece um desconto de R$ 1 008,00 para pagamento à vista. Quantos Reais serão necessários para a aquisição dessa televisão se comprada hoje e à vista?

Apresentação das operações básicas

Slide 40

- **O ALGORITMO PODE SER MELHORADO?**

$$\begin{array}{r} 3\,005 \\ -\ 1\,008 \\ \hline 1\,997 \end{array}$$

Foi preciso "pegar emprestado" mais de uma vez?

Como "pegar emprestado" de onde não tem?

De onde surgiu o 9 nas ordens das dezenas e centenas?

Apresentação das operações básicas

Slide 41

MULTIPLICAÇÃO

- A multiplicação pode está associada a uma adição de parcelas repetidas e sua essência está em facilitar o cálculo.

Outras ideias da multiplicação:

Multiplicação como organização retangular;
Multiplicação como raciocínio combinatório;
Multiplicação como raciocínio proporcional;
Multiplicação na reta numerada;
Multiplicação por decomposição;
Multiplicação sem o uso de lados e papel.

Apresentação das operações básicas

Slide 42

ATIVIDADE 9:

- Você deseja que seu salário seja multiplicado por um número entre 0 e 1?

Apresentação das operações básicas

Slide 43

MULTIPLICAÇÃO

Atrelar a multiplicação a adição, simples e puramente, pode nos levar a crer que em toda multiplicação de números positivos o produto será maior (ou igual) que seus fatores.

Apresentação das operações básicas

Slide 44

ATIVIDADE 10:

- Observe o algoritmo convencional da multiplicação utilizado abaixo.

	C	D	U	
	1			
		3	2	
x		2	3	
		9	6	
+	6	4		(“Salta” ou “pula” a ordem das unidades)
	7	3	6	

- a) Explique o porquê de “saltarmos uma casa” ao multiplicarmos a ordem da dezena do segundo fator (2) pelo primeiro fator (32).
- b) Explique o porquê de somarmos 96 unidades com 640 unidades.

Apresentação das operações básicas

Slide 45

	C	D	U	
	1			
		3	2	
x		2	3	
		9	6	
+	6	4		("Salta" ou "pula" a ordem das unidades)
	7	3	6	

- a) "Saltar essa casa" é o mesmo que expressar o resultado em dezenas.
- b) A soma é para compormos o número que foi decomposto durante o processo.

Apresentação das operações básicas

Slide 46

ATIVIDADE 11:

- Agora vamos fazer a multiplicação entre os números 3,2 e 2,3.

Apresentação das operações básicas

Slide 47

- Retirar a vírgula, multiplicar "normalmente" e depois voltar com a vírgula;
- 3,2 multiplicado por 10 é igual a 32;
- 2,3 multiplicado por 10 é igual a 23;
- 736 dividido por 100 é igual a 7,36.

Apresentação das operações básicas

Slide 48

DIVISÃO

- A divisão pode acontecer basicamente através da ideia de separar em grupos iguais ou através da ideia de quantas vezes uma quantidade cabe em outra.

Apresentação das operações básicas

Slide 49

ATIVIDADE 12:

- Você deseja que seu salário seja dividido por um número entre 0 e 1?

Apresentação das operações básicas

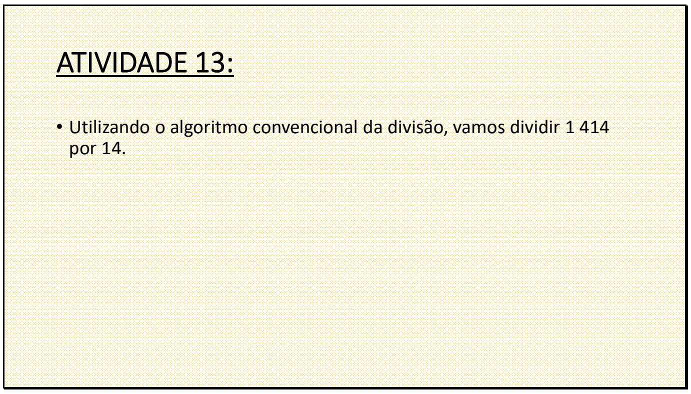
Slide 50

DIVISÃO

- Atrelar a divisão a ideia de repartir, simples e puramente, pode nos levar a crer que em toda divisão que envolve números positivos, o quociente nunca será maior (ou igual) que o número a ser dividido.

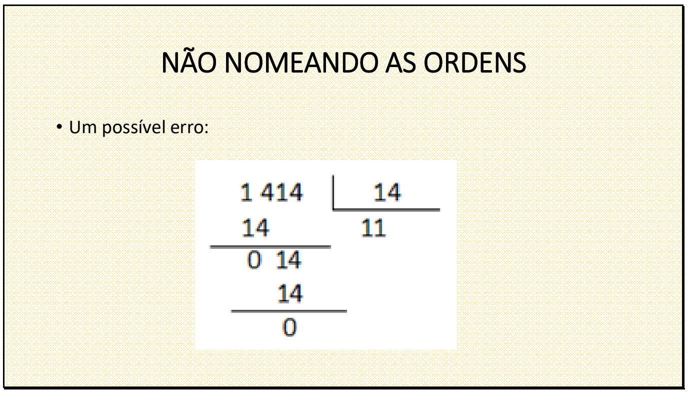
Apresentação das operações básicas

Slide 51



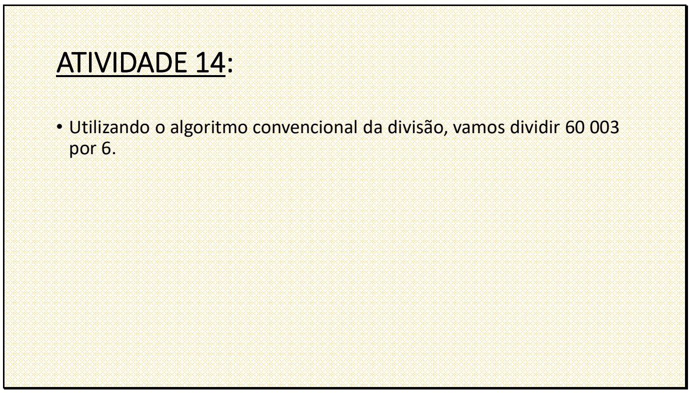
Apresentação das operações básicas

Slide 52



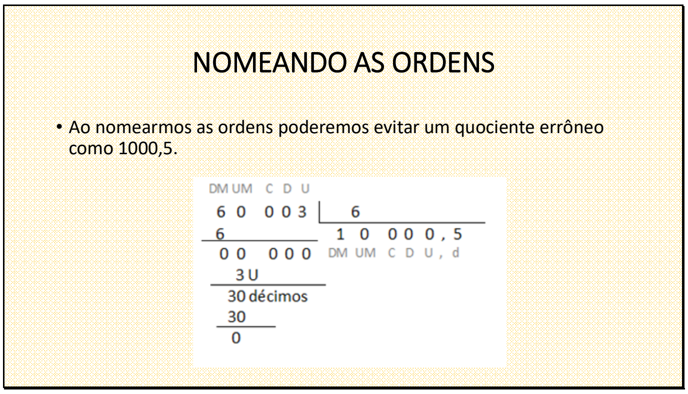
Apresentação das operações básicas

Slide 53



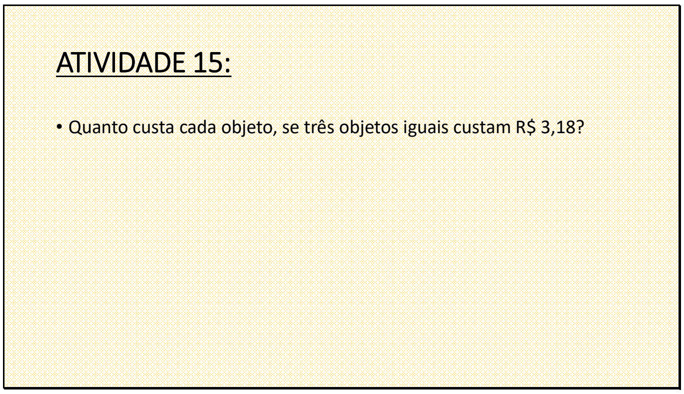
Apresentação das operações básicas

Slide 54



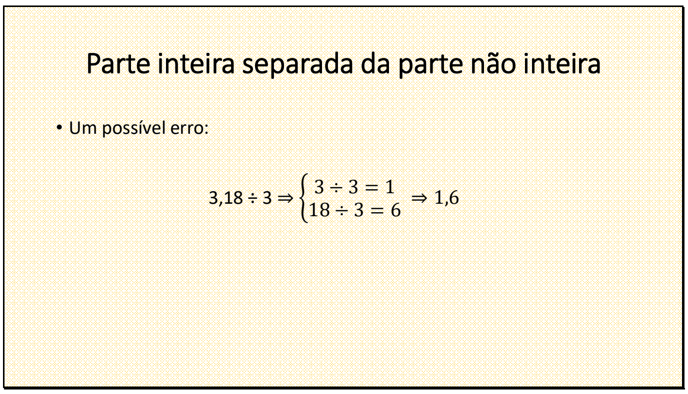
Apresentação das operações básicas

Slide 55



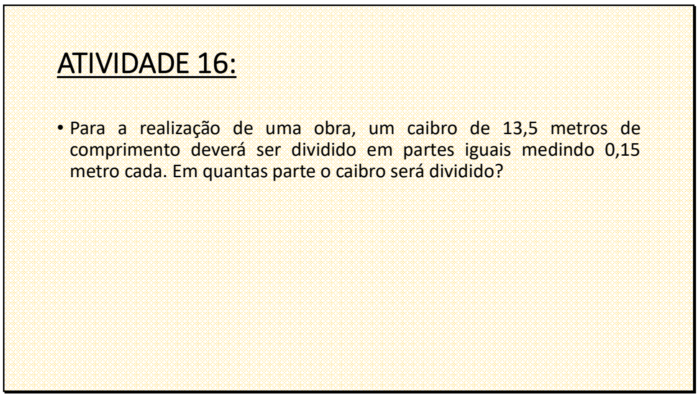
Apresentação das operações básicas

Slide 56



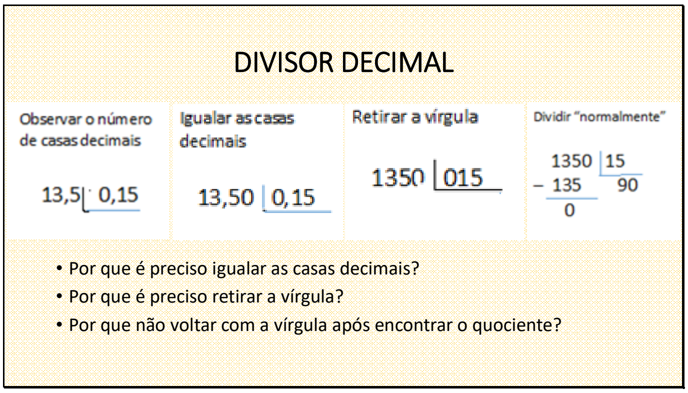
Apresentação das operações básicas

Slide 57



Apresentação das operações básicas

Slide 58



Apresentação das operações básicas

Slide 59

Apresentação das referências bibliográficas

Slide 60

- GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A Conquista da Matemática** – São Paulo: Editora FTD, 2017. Vs. 1, 2, 3, 4 e 5
- IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar – Conjunto e Funções.** Editora Atual, 1994. V. 1.
- IFRAH, Georges. **História Universal dos Algarismos: A inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo.** Tradução Alberto Munhoz e Ana Beatriz Kalisoy. 2 ed. Rio de Janeiro. Nova Fronteira, 2000. Vs. 1 e 2.
- IMENES, Luiz Inácio. **Vivendo a Matemática – A Numeração Indo-Arábica.** Editora Scipione, 1997.
- IMENES, Luiz Inácio. **Vivendo a Matemática – Brincando com Números.** Editora Scipione, 1990.
- IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo; MILANI, Estela. **Presente Matemática Guia e Recursos Didáticos** – São Paulo: Editora Moderna, 2009. Vs. 2, 3 e 5.
- LONGEN, Adilson. **Matemática – Projeto Jimboê.** Editora do Brasil, 2014. V. 2.
- MENDONÇA, Leandra Célia Seabra; BARBOSA, Mônica Alves da Silva. **Matemática – Sistema de Ensino Poliedro.** Editora Poliedro. MUNHOZ, Ainda Ferreira; NAZARETH, Helenalda; TOLEDO, Marília. **Coleção Eu Gosto Matemática.** São Paulo, 2017, Vs. 1, 2, 3, 4 e 5.
- MORANDI, Henrique. **Matemática: Método Moderno**. Livraria Francisco Alves, 1971.
- SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. **Matemática**. Editora Moderna, 2015. Vs. 4 e 5.
- SILVEIRA, Ênio. **Aprender e Relacionar Matemática**. Editora Moderna, 2017. V. 1, 2, 3, 4 e 5.
- SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Materiais Manipulativos para o Ensino de Frações e Números Decimais.** Editora Penso, 2016.

Apresentação das referências bibliográficas

Slide 61

- SMOLE, Kátia Stocco; MUNIZ, Cristiano Alberto. **A Matemática em Sala de Aula**: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental – Porto Alegre, 2013.
- SMOLE, Kátia Stocco; DINIZN Maria Ignez; MARIM Vlademir. **Faça Matemática! Guia de Recursos Didáticos** – São Paulo: Editora FTD, 2016, Partes 1 e 2.
- SMOLE, Kátia Stocco; DINIZN Maria Ignez; MARIM Vlademir. **Saber Matemática** – São Paulo: Editora FTD, 2013. V. 5.
- TOSATTO, Carla Cristina; TOSATTO, Cláudia Miriam; PERACCHI Edilaine do Pilar F. **Matemática – Pequenos Exploradores.** Editora Positivo, 2014. V. 4.
- VIEIRA, Fábio; RIBEIRO, Jackson; Pessôa Karina. **Matemática – A Escola é Nossa.** Editora Scipione, 2013. Vs. 4 e 5.
- YOUSSEF, Antônio Nicolau; GUELLI, Oscar Augusto. **Meu Livro de Matemática**. Editora AJS, 2017. Vs 1, 2, 3, 4 e 5.
- **Referências**
- ALFONSO, Bernardo. **Numeración y Cálculo.** 3 ed. Madrid: Sintesis, 2000.
- BATISTA, Célia Guarnieri. **Fracasso Escolar: análise de erros em operações matemáticas**. Zetetiké, V. 3, n. 4, p. 61 – 72, nov. 1995.
- BOGDAN, R.C.; KNOPP, S. B. **Investigação Qualitativa em Educação,** 1991.
- BRASIL. **Guia de Livros Didáticos: PNLD**: Alfabetização Matemática: ensino fundamental anos iniciais. – Brasília: MEC, SEB, 2016.

Apresentação das referências bibliográficas

Slide 62

- BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. – Brasília: MEC, SEF, 1997.
- BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa:** Saberes Matemáticos e Outros Campos do Saber. – Brasília: MEC, SEB, 2014-2018.
- CARDOSO, Virgínia Cardia. **Materiais didáticos para as quatro operações**. CAEM IME – USP, 2013.
- COLL, César; TEBEROSKY, Ana. **Aprendendo Matemática: Conteúdos Essenciais para o Ensino Fundamental.** Editora Ática, 2002.
- D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasilia. 1989. P. 15-19.
- DORNELAS, Beatriz V. **Escrita e Números: Relações Iniciais.** Porto Alegre. Artimed,1998.
- **Dicionário Oxford de matemática essencial** / organizado por Frank Tapson; edição brasileira – São Paulo: Oxford University Press, 2012.
- FEREIRA, Jamil. **A construção dos Números.** SBM, 2013.
- FIGUEIREDO, W. L.; SILVA, I. R. **Deficiência no uso dos algoritmos convencionais para operações fundamentais na educação básica**: um estudo piloto**.** Revista da Estatística da UFOP, 4, p. 44-63, 2015.
- ITZCOVICHI, Horacio. **La Matemática Escolar: las prátcas de ensenanza en el aula.** Sique, 2008.
- KAMII, Constance. **Desvendando a Aritmética**: Implicações da teoria de Piaget. Campinas, SP. Papirus, 1995.LASINSKAS, Ana Cláudia; POGGETTI, Liane G; VASCONCELLOS, Maria José; CARLINI, Sandra. **Matemática – Mundo Amigo.** Editora SM, 2015. V. 2.

Apresentação das referências bibliográficas

Slide 63

- MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela M. S. **A formação do professor de matemática – Licenciatura e Prática Docente Escolar**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.
- PADOVAM, Daniela; GUERRA, Isabel Cristina; MILAN, Ivonides. **Matemática – Projeto Prosa**. Editra Saraiva, 2008. V. 2.
- PIRES, Célia Maria Carolino. **Números Naturais e Operações – Como Eu Ensino**. São Paulo. Editora Melhoramento, 2013.
- PONTE, João Pedro; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa, 2009.
- TEBEROSKY, Ana; TOLCHINSKY, Liliana. **Além da Alfabetização**: A aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. Editora Ática – 2007.
- WALLE, John A. Van de. **Matemática no Ensino Fundamental – Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula.** Editora Artmed, 2009.

Apresentação das referências bibliográficas

Slide 64

OBRIGADO!

- wesleilf@yahoo.com.br
- (31) 99634-8456

Agradecimentos

PROMESTRE
MESTRADO PROFISSIONAL
EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA

FaE
Faculdade de Educação

UFMG

RECURSO EDUCATIVO

MINICURSO

ARTICULANDO CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL PARA O ENSINO DE NÚMEROS

WESLEI LIMA DE FIGUEIREDO

Belo Horizonte, Março de 2019

Este recurso educativo (como produto educacional) foi elaborado a partir do estudo da dissertação "Articulando as características do SND para o ensino de números", sob orientação da Professora Samira Zaidan, Faculdade de Educação, UFMG.

Minicurso

Público alvo: professores que ensinam Matemática

Objetivo: explorar possibilidades de compreensão visando o ensino de números e suas operações a partir das características do Sistema de Numeração Decimal, especificamente pelo valor posicional; discutir experiências de ensino e proporcionar trocas.

Desenvolvimento: apresentação de atividades para discussão.

ATIVIDADE 1:

a) No Sistema de Numeração Decimal quanto vale o símbolo 5 nos números 54 e 45?

b) No Sistema de Numeração Romano quanto vale o símbolo X nos números XI e IX?

c) Os dois Sistemas são posicionais?

ATIVIDADE 2:

a) Como podemos definir “Número”?

b) Como podemos definir “Algarismo”?

c) Em que situação da vida social podemos dizer que temos um número ou um algarismo?

ATIVIDADE 3:

a) Pensando bem, em 08 há quantos algarismos? E em 8,0 há quantos algarismos?

b) O símbolo 5 é considerado número ou algarismo?

ATIVIDADE 4:

Vamos decompor o número 155.

ATIVIDADE 5:

a) Em 3,05 há quantos décimos?

b) Em 0,10 há quantos décimos?

ATIVIDADE 6:

Em um certo dia em um aeroporto, trinta e cinco aviões aterrissaram e outros dezoitos aviões decolaram. Quantos aviões passaram por esse aeroporto nesse dia?

ATIVIDADE 7:

É comum fazer uso da expressão “vai um” no algoritmo convencional da adição. Quando usar da expressão “vão três” ou “vão mil” nesse algoritmo? Qual a relação com o número de parcelas?

ATIVIDADE 8:

Um aparelho de TV custa R$ 3 005,00. No dia de hoje a loja oferece um desconto de R$ 1 008,00 para pagamento à vista. Determine quantos Reais serão necessários para a aquisição dessa televisão se comprada hoje e à vista.

ATIVIDADE 9:

Você deseja que seu salário seja multiplicado por um número entre 0 e 1?

ATIVIDADE 10:

Observe o algoritmo convencional da multiplicação utilizado abaixo.

	C	D	U	
	1			
		3	2	
x		2	3	
		9	6	
+	6	4		(“Salta” ou “pula” a ordem das unidades)
	7	3	6	

a) Explique o porquê de “saltarmos uma casa” ao multiplicarmos a ordem da dezena do segundo fator (2) pelo primeiro fator (32).

b) Explique o porquê de somarmos 96 unidades com 640 unidades.

ATIVIDADE 11:

Agora vamos fazer a multiplicação entre os números 3,2 e 2,3.

ATIVIDADE 12:

Você deseja que seu salário seja dividido por um número entre 0 e 1?

ATIVIDADE 13:

Utilizando o algoritmo convencional da divisão, vamos dividir 1 414 por 14.

ATIVIDADE 14:

Utilizando o algoritmo convencional da divisão, vamos dividir 60 003 por 6.

ATIVIDADE 15:

Quanto custa cada objeto, se três objetos iguais custam R$ 3,18?

ATIVIDADE 16:

Para a realização de uma obra, um caibro de 13,5 metros de comprimento deverá ser dividido em partes iguais medindo 0,15 metro cada. Em quantas parte o caibro será dividido?