

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# Conexões entre Mecânica Estatística e o Lema Local de Lovász: novas provas, novas cotas

Paula Mendes Soares Fialho

orientadores: *Aldo Procacci - UFMG*  
*Bernardo Nunes Borges de Lima - UFMG*

BELO HORIZONTE  
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# Conexões entre Mecânica Estatística e o Lema Local de Lovász: novas provas, novas cotas

Paula Mendes Soares Fialho

orientadores: *Aldo Procacci - UFMG*  
*Bernardo Nunes Borges de Lima - UFMG*

Tese apresentada ao Departamento de Matemática  
da Universidade Federal de Minas Gerais como parte  
dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em  
Matemática

BELO HORIZONTE  
2020

© 2020, Paula Mendes Soares Fialho.  
Todos os direitos reservados

Ficha catalográfica elaborada pelo bibliotecário Célio Resende Diniz  
CRB 6ª Região nº 2403

Fialho, Paula Mendes Soares.

F438c      Conexões entre mecânica estatística e o lema local  
de Lovász: novas provas, novas cotas / Paula Mendes  
Soares Fialho — Belo Horizonte, 2020.  
x, 63 f. il.; 29 cm.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas  
Gerais – Departamento de Matemática.

Orientador: Aldo Procacci.

Coorientador: Bernardo Nunes Borges de Lima.

1. Matemática - Teses. 2. Mecânica estatística -  
Teses. 3. Teoria dos grafos - Teses. 4. Algoritmos –  
Teses. I. Orientador. II. Coorientador. III. Título.

CDU 51(043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Conexões entre Mecânica Estatística e o Lema Local de Lovász: novas provas, novas cotas*

**PAULA MENDES SOARES FIALHO**

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Aldo Procacci  
UFMG

Prof. Bernardo Nunes Borges de Lima  
UFMG

Prof. Allbens Atman Picardi Faria  
CEFET-MG

Pós-Doc. Daniel Ungaretti Borges  
UFRJ

Prof. Gabriel de Moraes Coutinho  
DCC-UFMG

Prof. Paulo Cupertino de Lima  
UFMG

Prof. Roberto Fernández  
NYU-Shanghai

Belo Horizonte, 14 de fevereiro de 2020.

*Dedico esta tese à minha mãe, Maria.*

*“Não são nossas habilidades que mostram quem realmente somos, são as nossas escolhas.”*

*Alvo Dumbledore*

# Agradecimentos

O caminho percorrido até finalizar um doutorado é muito longo e percorrê-lo sozinha seria impossível. Contei com o auxílio de muitas pessoas durante essa trajetória e gostaria de começar agradecendo a Deus, por ter colocado pessoas tão especiais na minha vida.

Agradeço aos meus orientadores, Aldo e Bernardo. Agradeço ao Aldo pela disposição e paciência para me orientar, e por ter me apresentado coisas tão belas e interessantes quanto as presentes nesta tese. Todos os nossos encontros semanais foram muito divertidos, até mesmo aqueles nos quais a gente descobria erros nas nossas contas, pois o Aldo sempre tinha uma piadinha que nos fazia rir e motivava a seguir em frente. Quanto ao Bernardo, só cheguei até aqui porque depois de uma aula de Análise Combinatória, no primeiro semestre de 2011, ele me convidou para ser sua aluna de iniciação científica. Bernardo sempre respeitou minhas preferências na Matemática e se adaptou para me orientar. Muitos anos se passaram e ele esteve presente em cada etapa da minha educação desde então, me guiando, incentivando e também puxando a minha orelha quando necessário, mas sempre lá, presente, sendo o meu apoio. Gostaria de dizer que meus orientadores são modelos de professores e pesquisadores que desejo seguir durante toda minha vida. Ambos me ensinaram mais do que Matemática, me ensinaram através de exemplos como um excelente profissional deve ser.

Agradeço a toda minha família: meu marido Tiago, minha irmã Renata, meu pai Sérgio e principalmente minha mãe Maria. Minha mãe foi minha primeira professora, me ensinou a ler, escrever e a gostar de estudar. Ela teve grande influência na minha escolha pela Matemática (segundo ela, Matemática é a matéria mais fácil) e sempre acreditou que eu poderia ir longe. Assim, nos momentos difíceis durante o doutorado, o que me motivava era pensar no dia da defesa da minha tese, dia em que eu mostraria para ela que ela estava certa, que eu consegui, e que foi tudo graças a ela.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Por fim gostaria de agradecer à UFMG. Essa instituição me acolheu, me fez sentir em casa e me deu a melhor educação que um aluno poderia desejar. Sinto um amor muito grande por cada árvore, prédio e corredor desse lugar. Sou muito grata ao departamento de Matemática e a todos os professores com quem tive o prazer de estudar. A UFMG é um lugar que realiza sonhos e transforma vidas.

# Resumo

Neste trabalho abordamos dois assuntos que inicialmente parecem não relacionados, mas que, como foi provado recentemente, apresentam uma importante interseção entre si: a convergência de gás de polímeros, em Mecânica Estatística, e o Lema Local de Lovász, em Combinatória.

O gás de polímeros abstratos é um modelo discreto utilizado no estudo de diversos sistemas físicos. Um problema crucial para o modelo é encontrar um raio  $R$  tal que a pressão seja analítica e limitada no polidisco de raio  $R$ . A melhor cota para tal  $R$  é dada pelo critério de Fernández-Procacci, cuja prova envolve maquinário combinatorial pesado. Neste trabalho apresentamos uma nova prova alternativa para esse critério baseada em um simples argumento indutivo inspirado pela conexão entre o modelo de polímeros abstratos e o Lema Local de Lovász.

O Lema Local de Lovász é uma importante ferramenta utilizada para provar a existência de determinados objetos em Combinatória, sendo frequentemente empregado em problemas envolvendo colorações de grafos. Nesse contexto, apresentamos um algoritmo inspirado no Lema Local de Lovász que fornece uma nova cota superior para o índice cromático acíclico de um grafo. Finalizamos este trabalho apresentando uma generalização desse algoritmo que também é aplicável nos demais problemas abordados pelo Lema Local de Lovász.

**Palavras-chave:** Lema local de Lovász, algoritmo de Moser-Tardos, critério de Fernández-Procacci, coloração acíclica de arestas.



# Abstract

In this text we study two subjects that initially seem unrelated but, as it was recently shown, there is an important connection between them: the abstract polymer gas in Statistical Mechanics and the Lovász Local Lemma in Combinatorics.

The abstract polymer gas is a discrete model used to study a large number of physical systems. A key problem for the model is to find radii  $R$  such that the pressure is analytic and bounded in the polydisc of radii  $R$ . The best bound for the radii was given by Fernández-Procacci criterion, whose proof involves heavy combinatorial machinery. In this text we provide an alternative proof of this criterion based on a simple inductive argument inspired by the connection between the abstract polymer model and the Lovász Local Lemma.

The Lovász Local Lemma, which is an important tool used to prove the existence of some objects in Combinatorics, is commonly applied in problems concerning graph colorings. In this context, we provide an algorithm inspired by this lemma which allows us to obtain a new bound for the acyclic edge chromatic number. We conclude this text by presenting a generalization of this algorithm that can also be applied to other problems addressed by the Lovász Local Lemma.

**Keywords:** Lovász local lemma, Moser-Tardos algorithm, Fernández-Procacci criterion, acyclic edge coloring.

---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Uma nova prova do Critério de Fernández-Procacci</b>	<b>8</b>
2.1	Prova do Teorema 2.2 . . . . .	11
2.2	Gás de subconjuntos . . . . .	14
2.2.1	Conexão com o LLL . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Uma nova cota para o índice cromático acíclico</b>	<b>17</b>
3.1	O ALGORITMO-COLORAÇÃO . . . . .	18
3.2	A floresta testemunha . . . . .	22
3.3	O Algoritmo CORVAL . . . . .	26
3.4	A floresta não rotulada . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Uma variante do algoritmo de Moser- Tardos</b>	<b>34</b>
4.1	Demonstração do Teorema 4.7 . . . . .	38
4.1.1	A floresta testemunha . . . . .	39
4.1.2	O Algoritmo <i>L</i> -CHECK . . . . .	42
4.1.3	A floresta não rotulada . . . . .	44
4.2	Exemplos . . . . .	47
4.3	Comparando o método entropy compression com o LLL . . . . .	51
<b>A</b>	<b>Prova do Lema 3.4</b>	<b>55</b>
	<b>Tabela de símbolos</b>	<b>60</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>61</b>

# Lista de Figuras

3.1	Grafo $G = (V, E)$ . . . . .	23
3.2	Floresta $F'$ associada ao registro $\mathcal{L}$ . . . . .	24
3.3	Floresta testemunha $F$ construída a partir da floresta $F'$ . . . . .	25
3.4	Floresta testemunha não rotulada $\Phi$ . . . . .	30

# Lista de Algoritmos

1	ALGORITMO DE MOSER-TARDOS . . . . .	2
2	ALGORITMO-COLORAÇÃO . . . . .	19
3	RECOLORIR( $e, C$ ) . . . . .	20
4	CORVAL . . . . .	27
5	ALGORITMO-FLORESTA . . . . .	36
6	RESSORTEIO( $\psi, A$ ) . . . . .	37
7	$L$ -CHECK . . . . .	42
8	ALGORITMO ENTROPY COMPRESSION . . . . .	53

# Capítulo 1

## Introdução

Erdős e Lovász [7] em 1975 desenvolveram o Lema Local de Lovász (LLL), que é uma importante ferramenta utilizada em Combinatória para mostrar a existência de certas configurações. Seja  $X$  um conjunto finito e considere a família de eventos  $\mathcal{A} = (A_x)_{x \in X}$ , com probabilidade  $p_x = \mathbb{P}(A_x)$ , que são considerados eventos *ruins*, no sentido de que gostaríamos que nenhum deles ocorresse. O problema então se resume da seguinte maneira:

**Problema 1.1.** Deseja-se mostrar que  $\mathbb{P}(\cap_{x \in X} A_x^c) > 0$ . O quão grande  $p_x$  pode ser de forma a ainda garantir que  $\mathbb{P}(\cap_{x \in X} A_x^c) > 0$ ?

Claramente o Problema 1.1 se torna trivial ao se tratar de eventos mutuamente independentes, assim é interessante supor que exista dependência entre os eventos em  $\mathcal{A}$ . Erdős e Lovász conseguiram controlar as dependências dos eventos através de *grafos de dependência*. Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples, para todo  $v \in V$  definimos  $\Gamma_G(v)$  o conjunto dos vértices adjacentes a  $v$  em  $G$  e  $\Gamma_G^*(v) = \Gamma_G(v) \cup \{v\}$ .

**Definição 1.2** (Grafo de dependência). Dizemos que  $G = (X, E)$  é um grafo de dependência para a família de eventos  $\mathcal{A} = (A_x)_{x \in X}$  se para todo  $x \in X$  o evento  $A_x$  é independente da  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\{A_y; y \in X \setminus \Gamma_G^*(x)\}$ .

Observe que dada uma família de eventos, em geral o grafo de dependência não é único. De fato, se  $G = (V, E)$  é um grafo de dependência para uma família de eventos, então qualquer grafo  $G' = (V, E')$  com  $E \subset E'$  também o é.

**Teorema 1.3** (Lema Local de Lovász). *Seja  $G = (X, E)$  grafo de dependência para a família de eventos  $\mathcal{A} = (A_x)_{x \in X}$ , onde  $X$  é finito, com  $\mathbb{P}(A_x) = p_x$ . Se existem números reais  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_x\}_{x \in X}$ , com  $\mu_x \geq 0$  para todo  $x \in X$ , tais que*

$$p_x \leq \frac{\mu_x}{\varphi_x(\boldsymbol{\mu})}, \quad (1.1)$$

onde

$$\varphi_x(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{R \subseteq \Gamma_G^*(x)} \prod_{y \in R} \mu_y,$$

então

$$\mathbb{P}(\cap_{x \in X} A_x^c) > 0.$$

É comum encontrar na literatura o LLL enunciado em função de variáveis  $r_x = \frac{\mu_x}{1+\mu_x}$ , e portanto a Condição (1.1) pode ser escrita como

$$p_x \leq r_x \prod_{y \in \Gamma_G(x)} (1 - r_y).$$

Entretanto optamos por enunciá-lo usando a variável  $\mu_x$  ao invés da variável  $r_x$  por assim se assemelhar mais com o contexto de convergência de gás de polímeros.

Note que o Teorema 1.3 é um teorema de existência, ou seja, ele prova que existe uma atribuição de valores às variáveis aleatórias das quais os eventos em  $\mathcal{A}$  dependem que faz com que nenhum desses eventos ocorra. Entretanto, esse teorema não fornece os meios de obter tal configuração das variáveis aleatórias. Em 2010 Moser e Tardos [23] desenvolveram uma prova algorítmica para o LLL no caso em que os eventos em  $\mathcal{A}$  dependem de uma coleção finita de variáveis aleatórias mutuamente independentes  $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ .

**Definição 1.4.** Seja  $\mathcal{A}$  uma família finita de eventos que dependem da coleção finita de variáveis aleatórias mutuamente independentes  $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ . Para todo evento  $A \in \mathcal{A}$ , seja  $vbl(A) \subset \Psi$  o conjunto minimal de variáveis das quais o evento  $A$  depende, no sentido de que conhecendo-se os valores das variáveis em  $vbl(A)$  é possível dizer se o evento  $A$  ocorre ou não.

**Algoritmo 1:** ALGORITMO DE MOSER-TARDOS

- 1 Sorteie valores para todas as variáveis em  $\Psi$ ; **enquanto** *houver algum evento em  $\mathcal{A}$  ocorrendo, faça*
- 2     | escolha arbitrariamente um evento  $A_x$  que está ocorrendo e resorteie os
- |     valores em  $vbl(A_x)$ .
- 3 **fim**
- 4 **retorna** *coloração atual*

Observe que se o ALGORITMO DE MOSER-TARDOS para, então ele retorna uma configuração das variáveis na qual nenhum evento ruim ocorre. Moser e Tardos em [23] mostraram que esse algoritmo para e ainda oferece as mesmas cotas que o LLL.

**Teorema 1.5** (Moser-Tardos). *Considere  $\Psi$  e  $\mathcal{A} = (A_x)_{x \in X}$  como acima e seja  $G$  grafo de dependência dos eventos em  $\mathcal{A}$ . Se existem números reais  $\mu_x \in [0, \infty)$  para todo  $x \in X$ , tais que*

$$p_x \leq \frac{\mu_x}{\sum_{R \subseteq \Gamma_G^*(x)} \prod_{y \in R} \mu_y},$$

*então existe uma atribuição de valores a  $\Psi$  tal que nenhum evento em  $\mathcal{A}$  ocorre. Ainda mais, cada evento  $A_x$  é ressorteado no máximo  $\mu_x$  vezes, logo o número esperado de passos que o Algoritmo 1 executa antes de encontrar tal atribuição é no máximo  $\sum_{x \in X} \mu_x$ .*

Uma inesperada relação entre o LLL e o gás de polímeros abstratos foi mostrada por Scott e Sokal [28] em 2005, de fato essa relação já tinha sido implicitamente descoberta em 1985 por Shearer [29]. Em Mecânica Estatística, o gás de polímeros abstrato é um modelo discreto definido por uma tripla  $(\mathcal{P}, \mathbf{w}, W)$ , sendo que  $\mathcal{P}$  é um conjunto enumerável cujos elementos são chamados polímeros,  $\mathbf{w} = \{w_x\}_{x \in \mathcal{P}}$  é um vetor que associa a cada  $x \in \mathcal{P}$  um número complexo  $w_x$  (real na maioria das vezes, em situações físicas) chamado atividade do polímero  $x$  e  $W : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}$  é uma função, chamada *fator de Boltzmann*, tal que  $W(x, x) = 0$  para todo polímero  $x \in \mathcal{P}$  e  $W(x, y) = W(y, x)$  para todo par  $\{x, y\} \subseteq \mathcal{P}$ . Usualmente o par  $\{x, y\}$  é chamado *incompatível* se  $W(x, y) = 0$  e *compatível* se  $W(x, y) = 1$ , então observe que para cada  $x \in \mathcal{P}$  o par  $\{x, x\}$  é incompatível.

Denotamos por  $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathbb{E})$  o grafo simples cujo conjunto de vértices é o conjunto de polímeros  $\mathcal{P}$  e o conjunto de elos é definido por  $\mathbb{E} = \{(x, y); W(x, y) = 0\}$ . A vizinhança de um polímero  $x$  em  $\mathcal{G}$  é definida por  $\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x) = \{y \in \mathcal{P}; W(x, y) = 0\}$ , em outras palavras,  $\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)$  é o conjunto de todos os polímeros em  $\mathcal{P}$  incompatíveis com  $x$ . Note que  $|\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)| \geq 1$  para todo  $x \in \mathcal{P}$ , uma vez que cada polímero é incompatível consigo mesmo, e note também que dependendo da função  $W$  o conjunto  $\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)$  pode ser infinito.

Dado um subconjunto  $T \subseteq \mathcal{P}$ ,  $T$  é dito ser um *conjunto independente* de  $\mathcal{G}$  se dados quaisquer polímeros  $x$  e  $y$  em  $T$ , temos que  $(x, y) \notin \mathbb{E}$ , isto é, se  $T$  composto por polímeros dois a dois compatíveis. Denotaremos por  $I(\mathcal{G})$  o conjunto formado por todos os conjuntos independentes *finitos* de  $\mathcal{G}$ .

Dada uma coleção finita de polímeros  $X \subseteq \mathcal{P}$ , a função de partição grã-canônica no “volume finito”  $X$  é dada por qualquer uma das expressões abaixo (veja [28], por exemplo):

$$Z_X(\mathbf{w}) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in X^n} w_{x_1} \dots w_{x_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} W(x_i, x_j) \quad (1.2)$$

$$= \sum_{T \subseteq X} \prod_{x \in T} w_x \prod_{\{x, y\} \subset T} W(x, y) \quad (1.3)$$

$$= \sum_{\substack{T \subseteq X \\ T \in I(\mathcal{G})}} \prod_{x \in T} w_x, \quad (1.4)$$

com a convenção de que o produto vazio é igual a um. Quando  $\Lambda \subset \mathcal{P}$  é um conjunto infinito,  $Z_\Lambda(\mathbf{w})$  pode ainda ser interpretada como uma série de potências formal nas atividades dos polímeros.

O modelo foi inicialmente proposto por Kotecký e Preiss [20] em 1985 como uma generalização do modelo de polímeros na rede, introduzido por Gruber e Kunz [17] em 1968. O gás de polímeros abstrato é um modelo de grande relevância em Mecânica Estatística uma vez que ele é amplamente utilizado como uma ferramenta técnica para estudo de um grande número de sistemas físicos, como por exemplo sistemas de partículas e spin, modelos percolativos e teorias de campo. Todas as quantidades físicas do modelo podem ser deduzidas a partir da função de partição, por exemplo, a “pressão” do sistema no volume  $X$  é dada por

$$P_X(\mathbf{w}) = \frac{1}{|X|} \log Z_X(\mathbf{w}).$$

Expandindo  $\log Z_X(\mathbf{w})$  como uma série de Taylor nas atividades em torno de  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ , temos que

$$\log Z_X(\mathbf{w}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in X^n} \phi^T(x_1, \dots, x_n) w_{x_1} \dots w_{x_n},$$

logo a pressão pode ser reescrita da seguinte maneira

$$P_X(\mathbf{w}) = \frac{1}{|X|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in X^n} \phi^T(x_1, \dots, x_n) w_{x_1} \dots w_{x_n}. \quad (1.5)$$

A série de potências (1.5) é conhecida como *série de Mayer* da pressão e seus coeficientes  $\phi^T(x_1, \dots, x_n)$  admitem uma expressão, há bastante tempo conhecida, que depende apenas do grafo  $G = (V, E)$  com  $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  e  $E = \{\{x_i, x_j\} \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\}; W(x_i, x_j) = 0\}$ . A fórmula explícita para  $\phi^T(x_1, \dots, x_n)$  pode ser vista, por exemplo, em [9], Equação (2.4). Um importante problema para o modelo é o seguinte.

**Problema 1.6.** Encontrar um raio  $\mathbf{R} = \{R_x\}_{x \in \mathcal{P}}$ , com  $R_x \geq 0$  para todo  $x \in \mathcal{P}$ , tal que se  $|w_x| < R_x$  para todo  $x \in \mathcal{P}$  (abreviadamente  $|\mathbf{w}| < \mathbf{R}$ ), então a pressão é analítica e limitada com respeito às atividades, *uniformemente em X*.

A partir de 1996 a melhor cota para o raio  $\mathbf{R}$  se tornou a cota dada por Dobrushin [6].

**Teorema 1.7** (Critério de Dobrushin). *Seja  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_x\}_{x \in \mathcal{P}}$  uma coleção de números não negativos tal que*

$$|w_x| \leq \mathbf{R}_x^D \equiv \frac{\mu_x}{\varphi_x^D(\boldsymbol{\mu})}, \quad \forall x \in \mathcal{P}$$



com

$$\varphi_x^D(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{\substack{R \subset \mathcal{P} \\ R \text{ finito}}} \prod_{y \in R} \{\mu_y [1 - W(x, y)]\}.$$

Então, para todo conjunto finito  $X \subset \mathcal{P}$ ,  $Z_X(\mathbf{w}) \neq 0$ .

Em 2005, Scott e Sokal [28] provaram que o LLL e o Critério de Dobrushin são equivalentes no seguinte sentido: as conclusões do LLL valem para o grafo de dependência  $G = (X, E)$  e uma família de probabilidades  $\{p_x\}_{x \in X}$ , onde  $X$  é um conjunto finito, se e somente se, a função de partição  $Z_X$  é não nula no polidisco de raio  $\{p_x\}_{x \in X}$ . Nesse contexto podemos perceber que

- o evento  $A_x$ , com  $x \in X$  no LLL, corresponde ao polímero  $x$  em um conjunto finito  $X \subset \mathcal{P}$ , no gás de polímeros abstrato;
- eventos dependentes correspondem a polímeros incompatíveis;
- probabilidades dos eventos correspondem ao valor absoluto das atividades dos polímeros.

Em 2007 Fernández e Procacci [9] melhoraram a cota de Dobrushin com o Critério de Fernández-Procacci. Esse critério trouxe sensíveis melhoras em vários problemas em Mecânica Estatística, mas graças à relação mostrada no trabalho de Scott e Sokal, o Teorema 2.2 pôde ser adaptado para o contexto de Combinatória e assim apresentar uma melhora também para o LLL. De fato, essa melhora ficou conhecida como o *Lema Local de Lovász melhorado*, teorema de Bissacot et al. [4].

**Teorema 1.8** (Lema Local de Lovász melhorado). *Seja  $G = (X, E)$  o grafo de dependência da família de eventos  $\mathcal{A} = (A_x)_{x \in X}$ , com probabilidade  $\mathbb{P}(A_x) = p_x$ . Se existe  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_x\}_{x \in X}$ ,  $\mu_x \in [0, \infty)$  para todo  $x \in X$ , tal que para todo  $x \in X$*

$$p_x \leq \frac{\mu_x}{\varphi_x^*(\boldsymbol{\mu})}, \quad (1.6)$$

onde

$$\varphi_x^*(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{\substack{R \subseteq \Gamma_G^*(x), \\ R \text{ independente}}} \prod_{y \in R} \mu_y,$$

então

$$\mathbb{P}(\cap_{x \in X} A_x^c) > 0.$$

Em 2014, Pegden [25] adaptou a demonstração do Teorema 1.5 levando em consideração o novo critério para a convergência do gás de polímeros dado por Fernández e Procacci, obtendo assim uma demonstração algorítmica para o LLL melhorado, que é independente do resultado usando expansão em polímeros.

**Teorema 1.9** (Pegden). *Seja  $\Psi$  um conjunto finito de variáveis aleatórias mutuamente independentes em um espaço de probabilidade e seja  $\mathcal{A} = (A_x)_{x \in X}$  uma família finita*

de eventos determinados por essas variáveis. Se existem números  $0 < \mu_x < \infty$  para todo  $x \in X$  tais que a Condição (1.6) vale, então existe uma atribuição de valores às variáveis em  $\Psi$  tal que nenhum evento em  $\mathcal{A}$  ocorre. Ainda mais, o ALGORITMO DE MOSER-TARDOS (Algoritmo 1) ressorteia cada evento  $A_x$  no máximo  $\mu_x$  vezes antes de encontrar tal atribuição, assim o número esperado de passos é no máximo  $\sum_{x \in X} \mu_x$ .

Observe que a diferença entre o Teorema 1.3 e o Teorema 1.8 está em  $\varphi_x(\boldsymbol{\mu})$ , que soma sobre todos os subconjuntos de  $\Gamma_G^*(x)$ , enquanto  $\varphi_x^*(\boldsymbol{\mu})$  soma apenas sobre os subconjuntos independentes de  $\Gamma_G^*(x)$ , ou seja,  $\varphi_x^*(\boldsymbol{\mu}) \leq \varphi_x(\boldsymbol{\mu})$ . Assim, caso  $\Gamma_G^*(x)$  seja um conjunto independente a melhora obtida pelo Teorema 1.8 é praticamente nula, enquanto se  $\Gamma_G^*(x)$  for um clique, essa melhora é maximal. Suponha que para algum  $x \in X$  a vizinhança  $\Gamma_G^*(x)$  seja formada pela união de cliques  $c_1, \dots, c_k$ , assim podemos escrever

$$\varphi_x^*(\boldsymbol{\mu}) \leq 1 + \sum_{j=1}^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} \sum_{x_1 \in c_{i_1}} \dots \sum_{x_j \in c_{i_j}} \mu_{x_1} \dots \mu_{x_j} = \prod_{i=1}^k \left( 1 + \sum_{y \in c_i} \mu_y \right). \quad (1.7)$$

Em 2012, Ndreca et al. [24] utilizaram o Teorema 1.8 juntamente com a desigualdade (1.7) para melhorar várias das antigas cotas sobre coloração de grafos, por exemplo, o *índice cromático acíclico*, o *índice cromático estrela* e o *índice cromático  $\beta$ -frugal*.

Em 2013, Esperet e Parreau [8] melhoraram as cotas superiores para o índice cromático acíclico e para o índice cromático estrela, descrevendo um novo método conhecido como *entropy compression*. Esse método pode ser aplicado a um grande número de problemas sobre coloração de grafos (veja por exemplo e.g. [18], [26], [5]). Essas melhoras levaram à crença de que o *entropy compression* é uma ferramenta mais eficiente do que o LLL, até mesmo melhor que a versão melhorada obtida por Bissacot et al. [4], para problemas envolvendo coloração de grafos. De fato, Alves et al. [3] sistematizaram o trabalho feito em [8] mostrando que esse método é sempre melhor que o Lema Local de Lovász melhorado juntamente com a Desigualdade (1.7).

Entretanto, recentemente uma melhora na cota superior de Esperet-Parreau para a coloração acíclica de arestas foi obtida por Giotis et al. [16]. Admiravelmente, os autores não fizeram uso do método *entropy compression*, mas sim desenvolveram uma variante do ALGORITMO DE MOSER-TARDOS. Esse resultado sugere que o resultado de Giotis et al. poderia ser melhorado levando em consideração algumas características do método *entropy compression*.

Neste texto apresentaremos novos resultados tanto sobre o gás de polímeros, quanto sobre o LLL. Inicializamos apresentando uma nova demonstração do Critério de Fernández-Procacci no Capítulo 2, bem mais simples que a original, utilizando um argumento indutivo. No Capítulo 3 melhoramos o resultado de Giotis et al., modificando levemente o método descrito em [16] adicionando o conceito de *sementes*, já utilizado pelo

método *entropy compression*. E finalizamos com o Capítulo 4, no qual generalizaremos o trabalho feito no Capítulo 3 obtendo uma nova versão algorítmica do LLL que oferece resultados tão bons quanto o *entropy compression*, acabando com a crença de que este último é um critério melhor que o LLL.

Esses três últimos capítulos deram origem aos artigos [10], [11] e [12], respectivamente, todos eles já submetidos.

## Capítulo 2

# Uma nova prova do Critério de Fernández-Procacci

Neste capítulo trataremos sobre o Critério de Fernández-Procacci no contexto de convergência de gás de polímeros (Teorema 2.2 abaixo). Esse critério melhora a cota dada por Dobrushin, Teorema 1.7, mas por outro lado, enquanto o Critério de Dobrushin foi provado usando um simples argumento indutivo, a prova do Critério de Fernández-Procacci dada em [9] envolve maquinário combinatorial pesado e em particular faz uso de expansão de cluster e desigualdades árvore-grafo. Assim, o nosso objetivo é apresentar uma prova alternativa do Critério de Fernández-Procacci baseada em um simples argumento indutivo. Essa nova prova foi inspirada na conexão entre o modelo de polímeros abstrato e o Lema Local de Lovász. De fato, a prova do Teorema 2.2 apresentada abaixo está implicitamente esquematizada na Seção 5.7 do artigo de Harvey e Vondrák [19], no qual uma generalização da versão algorítmica de Moser-Tardos do LLL é exibida.

Antes de enunciar o Critério de Fernández-Procacci, vamos relembrar que todas as “quantidades físicas” do modelo podem ser deduzidas a partir da função de partição  $Z_X(\mathbf{w})$  definida em (1.2), (1.3) e (1.4), sendo que a “pressão” do sistema no “volume finito”  $X$  é dada por

$$P_X(\mathbf{w}) = \frac{1}{|X|} \log Z_X(\mathbf{w}),$$

e dado um conjunto independente  $S \subset X$ , as correlações são definidas por

$$\phi_X(\mathbf{w}, S) = \left( \prod_{x \in S} w_x \right) \frac{Z_{X \setminus S}(\mathbf{w})}{Z_X(\mathbf{w})}. \quad (2.1)$$

Se  $S \notin I(\mathcal{G})$  então  $\phi_X(\mathbf{w}, S) = 0$ . Quando as atividades  $w_x$  são não negativas para todo  $x \in \mathcal{P}$  (abreviadamente  $\mathbf{w} \geq 0$ ), a função de correlação  $\phi_X(\mathbf{w}, S)$  coincide com a probabilidade de se ter uma configuração de polímeros em  $X$  contendo o conjunto  $S$ .

Como mencionado na Introdução (Problema 1.6), uma questão relevante para este

modelo é encontrar um raio  $\mathbf{R} = \{R_x\}_{x \in \mathcal{P}}$  (com  $R_x \geq 0$  para todo  $x \in \mathcal{P}$ ) tal que para  $|w_x| < R_x$  para todo  $x \in \mathcal{P}$ , a pressão e as funções correlação sejam analíticas com respeito às atividades *uniformemente em  $X$* . Como mencionado acima, a maneira clássica de se abordar esse problema é expandindo  $\log Z_X(\mathbf{w})$  como uma série de Taylor nas atividades em torno de  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ , relembre a equação (1.5)

$$P_X(\mathbf{w}) = \frac{1}{|X|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in X^n} \phi^T(x_1, \dots, x_n) w_{x_1} \dots w_{x_n},$$

e então tentar mostrar que a série em (1.5) é absolutamente convergente e limitada, uniformemente em  $X$ , em algum polidisco de raio  $\mathbf{R}$ , com  $|\mathbf{w}| \leq \mathbf{R}$ . Os coeficientes  $\phi^T(x_1, \dots, x_n)$  obedecem à *Propriedade do sinal alternado*

$$|\phi^T(x_1, \dots, x_n)| = (-1)^{n-1} \phi^T(x_1, \dots, x_n). \quad (2.2)$$

A identidade (2.2), que também é válida para sistemas interagindo via um potencial em pares não negativo (isto é, se  $0 \leq W(x, y) \leq 1$ ), é conhecida desde os anos sessenta (veja [27]). Uma simples prova indutiva de (2.2) no caso específico de polímeros abstratos encontra-se em [21]. Neste texto não precisamos da expressão explícita para  $\phi^T(x_1, \dots, x_n)$ , mas ela pode ser encontrada em [9], fórmula (2.4), por exemplo. Dado  $x \in X$ , vamos definir

$$\begin{aligned} \Theta_x^X(\mathbf{w}) &= \log Z_X(\mathbf{w}) - \log Z_{X \setminus \{x\}}(\mathbf{w}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \\ \exists i: x_i = x}} \phi^T(x_1, \dots, x_n) w_{x_1} \dots w_{x_n}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Observe que a analiticidade de  $\Theta_x^X(\mathbf{w})$  uniformemente em  $X$  implica imediatamente na analiticidade da pressão e das correlações, uniformemente em  $X$ . De fato, se  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ , podemos escrever

$$\log Z_X(\mathbf{w}) = \Theta_{x_1}^X(\mathbf{w}) + \sum_{i=2}^k \Theta_{x_i}^X \setminus \{x_1, \dots, x_{i-1}\}(\mathbf{w}),$$

e se  $S = \{x_1, \dots, x_p\} \subset X$ ,

$$\phi_X(\mathbf{w}, S) = \left( \prod_{x \in S} w_x \right) \exp \left( - \sum_{i=1}^{p-1} \Theta_{x_i}^X \setminus \{x_{i+1}, \dots, x_p\}(\mathbf{w}) - \Theta_{x_p}^X(\mathbf{w}) \right).$$

É útil definir a seguinte série de termos positivos

$$|\Theta|_x^X(\mathbf{p}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \\ \exists i: x_i = x}} |\phi^T(x_1, \dots, x_n)| p_{x_1} \cdots p_{x_n}, \quad (2.4)$$

sendo  $\mathbf{p} = \{p_x\}_{x \in \mathcal{P}}$  números não negativos, e pela propriedade do sinal alternado (2.2) temos que

$$|\Theta|_x^X(\mathbf{p}) = -\Theta_x^X(-\mathbf{p}). \quad (2.5)$$

Observe que se a série de termos positivos (2.4) converge então a série formal (2.3) converge absolutamente para qualquer  $\mathbf{w}$  no polidisco  $|\mathbf{w}| \leq \mathbf{p}$ . Assim o problema do modelo se resume da seguinte maneira.

**Problema 2.1.** Encontrar raio  $\mathbf{R} = \{R_x\}_{x \in \mathcal{P}}$ , com  $R_x \geq 0$  para todo  $x \in \mathcal{P}$ , tal que para  $|w_x| < R_x$  para todo  $x \in \mathcal{P}$ , a série  $|\Theta|_x^X(|\mathbf{w}|)$  seja limitada *uniformemente em  $X$* .

Em 2007 Fernández e Procacci provaram o seguinte teorema.

**Teorema 2.2** (Critério de Fernández-Procacci). *Seja  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_x\}_{x \in \mathcal{P}}$  uma coleção de números não negativos tais que*

$$|w_x| \leq \mathbf{R}_x^{\text{FP}} \equiv \frac{\mu_x}{\varphi_x^*(\boldsymbol{\mu})} \quad \forall x \in \mathcal{P}, \quad (2.6)$$

com

$$\begin{aligned} \varphi_x^*(\boldsymbol{\mu}) &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}^n} \mu_{x_1} \cdots \mu_{x_n} \prod_{i=1}^n [1 - W(x, x_i)] \prod_{1 \leq i < j \leq n} W(x_i, x_j) \\ &= \sum_{\substack{T \subseteq \mathcal{P} \\ T \text{ finito}}} \left( \prod_{y \in T} \{\mu_y [1 - W(x, y)]\} \right) \left( \prod_{\{y, z\} \subset T} W(y, z) \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Então a série  $|\Theta|_x^X(|\mathbf{w}|)$ , definida em (2.4), é convergente e além disso

$$|\Theta|_x^X(|\mathbf{w}|) \leq \ln(1 + \mu_x). \quad (2.8)$$

A seguir listamos algumas observações importantes sobre o Teorema 2.2.

**Observação 2.3.** *É fácil ver que cada parcela de (2.7) não será nula se, e só se,  $T$  é um conjunto independente em  $\mathcal{G}$ , tal que  $T \subseteq \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)$ . Então abusaremos da notação escrevendo  $\varphi_x^*(\boldsymbol{\mu}) \equiv Z_{\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\boldsymbol{\mu})$  (relembre que a função de partição  $Z_X$  foi definida para  $X$  finito, enquanto  $\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)$  pode ser infinito, dependendo de  $W$ ).*

**Observação 2.4.** Note que  $\varphi_x^*(\boldsymbol{\mu}) = Z_{\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\boldsymbol{\mu})$  é em geral uma série de potências com termos positivos em  $\boldsymbol{\mu}$ . Então, para garantir que o critério (2.6) seja não trivial, os números  $\boldsymbol{\mu}$  devem ser escolhidos tais que  $\varphi_x^*(\boldsymbol{\mu}) < +\infty$ . A esse respeito observe que  $\varphi_x^*(\boldsymbol{\mu}) < \exp\left(\sum_{y \in \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)} \mu_y\right)$ , assim  $\varphi_x^*(\boldsymbol{\mu})$  é finito para qualquer escolha de  $\boldsymbol{\mu}$  tal que  $\sum_{y \in \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)} \mu_y$  seja finito.

**Observação 2.5.** Um típico exemplo de realização do gás de polímeros abstrato é o chamado gás de subconjuntos, que é definido a partir de um conjunto enumerável  $\mathbb{V}$  que atua como um “espaço subjacente”. Os polímeros  $x$  são definidos como subconjuntos finitos de  $\mathbb{V}$ , ou seja,

$$\mathcal{P}_{\mathbb{V}} = \{x \subset \mathbb{V} : 0 < |x| < \infty\},$$

e a cada polímero  $x \in \mathcal{P}_{\mathbb{V}}$  associamos uma atividade  $w_x \in \mathbb{C}$ . Nesse caso a pressão física no “volume finito real”  $\Lambda \subset \mathbb{V}$  é definida como  $P_{\Lambda} = \frac{1}{|\Lambda|} \ln Z_{\mathcal{P}_{\Lambda}}(\mathbf{w})$ , onde  $\mathcal{P}_{\Lambda} = \{x \subset \mathbb{V} : x \subset \Lambda\}$ . É fácil mostrar que (2.8) implica que a pressão  $P_{\Lambda}$  é uniformemente limitada em  $\Lambda$  escolhendo os números  $\boldsymbol{\mu}$  de forma que

$$\sup_{v \in \mathbb{V}} \sum_{\substack{x \in \mathcal{P}_{\mathbb{V}}; \\ v \in x}} \mu_x = K < \infty.$$

Vamos discutir mais detalhes sobre a pressão  $P_{\Lambda}$  na Seção 2.2.

## 2.1 Prova do Teorema 2.2

Vamos começar relembrando duas importantes propriedades da função de partição  $Z_X(\mathbf{w})$  que seguem diretamente de qualquer uma das definições (1.2),(1.3) ou (1.4).

1) *Identidade fundamental:* Seja  $X \subset \mathcal{P}$  um conjunto finito e considere  $x \in X$ , então

$$Z_X(\mathbf{w}) = Z_{X \setminus \{x\}}(\mathbf{w}) + w_x Z_{X \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\mathbf{w}). \quad (2.9)$$

Basta observar em (1.4) que todo subconjunto independente  $T \subset X$  ou não contém  $x$  ou contém  $x$ , e neste caso não pode conter nenhum outro elemento de  $\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)$ .

2) *Log-subaditividade:* Sejam  $S, T \subseteq \mathcal{P}$  e considere  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_x\}_{x \in \mathcal{P}}$  com  $\mu_x \geq 0$  para todo polímero  $x \in \mathcal{P}$ , então

$$Z_{S \cup T}(\boldsymbol{\mu}) \leq Z_S(\boldsymbol{\mu}) Z_T(\boldsymbol{\mu}). \quad (2.10)$$

Observe que nesse caso  $S$  e  $T$  podem ser conjuntos infinitos, assim novamente estamos abusando da notação escrevendo  $Z_S(\boldsymbol{\mu})$  e  $Z_T(\boldsymbol{\mu})$ . Para mostrar esta desigualdade, primeiramente suponha que  $S \cap T = \emptyset$ , assim

$$Z_{S \cup T}(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{\substack{R \subseteq S \cup T \\ R \in \mathcal{I}(\mathcal{G})}} \prod_{x \in R} w_x = \sum_{\substack{R \subseteq S \cup T \\ R \in \mathcal{I}(\mathcal{G})}} \prod_{x \in R'} w_x \prod_{y \in R''} w_y.$$

onde  $R' = R \cap S$  e  $R'' = R \cap T$ . Assim cada parcela da soma correspondente ao membro esquerdo de (2.10) aparece também no membro direito, e as outras somas na direita são não negativas. Para o caso geral  $S \cap T \neq \emptyset$ , basta observar que

$$Z_S(\mathbf{w})Z_T(\mathbf{w}) \geq Z_S(\mathbf{w})Z_{T \setminus S}(\mathbf{w}) \geq Z_{S \cup (T \setminus S)}(\mathbf{w}) = Z_{S \cup T}(\mathbf{w}).$$

Dados números não negativos  $\mathbf{p} = \{p_x\}_{x \in X}$ , para todo subconjunto finito  $X \subseteq \mathcal{P}$  vamos denotar

$$Q_X(\mathbf{p}) = Z_X(-\mathbf{p}). \quad (2.11)$$

Observe que a identidade fundamental ainda é válida para  $Q$ , isto é, para todo  $x \in X$

$$Q_X(\mathbf{p}) = Q_{X \setminus \{x\}}(\mathbf{p}) - p_x Q_{X \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\mathbf{p}). \quad (2.12)$$

Relembre que  $Z_{\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\boldsymbol{\mu}) = \varphi_x^*(\boldsymbol{\mu})$ . A proposição seguinte é um desenvolvimento de Harvey e Vondrák ([19], Lema 5.41).

**Proposição 2.6.** *Sejam  $\boldsymbol{\mu} \equiv \{\mu_x\}_{x \in \mathcal{P}}$  e  $\mathbf{p} \equiv \{p_x\}_{x \in \mathcal{P}}$  coleções de números não negativos tais que*

$$p_x \leq R_x^{\text{FP}} = \frac{\mu_x}{Z_{\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\boldsymbol{\mu})}, \quad \forall x \in \mathcal{P}. \quad (2.13)$$

*Considere  $X \subset \mathcal{P}$  um conjunto finito, para todo  $T \subseteq X$  vamos denotar por  $T^c = X \setminus T$ . Assim, temos que*

$$\frac{Q_T(\mathbf{p})}{Q_{T \setminus \{x\}}(\mathbf{p})} \geq \frac{Z_{T^c}(\boldsymbol{\mu})}{Z_{(T \setminus \{x\})^c}(\boldsymbol{\mu})}, \quad \text{para todo } x \in T. \quad (2.14)$$

*Demonstração.* Vamos usar indução em  $|T|$ . Para  $T = \{x\}$ , observe que

$$\frac{Q_{\{x\}}(\mathbf{p})}{Q_{\emptyset}(\mathbf{p})} = \frac{1 - p_x}{1} = 1 - p_x.$$

Por outro lado,  $T^c = X \setminus \{x\}$  e  $(T \setminus \{x\})^c = X$ , então

$$Z_X(\boldsymbol{\mu}) = Z_{X \setminus \{x\}}(\boldsymbol{\mu}) + \mu_x Z_{X \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\boldsymbol{\mu}) \quad (2.15)$$

$$\geq Z_{X \setminus \{x\}}(\boldsymbol{\mu}) + p_x Z_{\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\boldsymbol{\mu}) Z_{X \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\boldsymbol{\mu}) \quad (2.16)$$

$$\geq Z_{X \setminus \{x\}}(\boldsymbol{\mu}) + p_x Z_{X \cup \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\boldsymbol{\mu}), \quad (2.17)$$

$$\geq Z_{X \setminus \{x\}}(\boldsymbol{\mu}) + p_x Z_X(\boldsymbol{\mu}) \quad (2.18)$$



sendo que a igualdade (2.15) segue da identidade fundamental (2.9), a desigualdade (2.16) segue da hipótese (2.13), a desigualdade (2.17) é devida a log-subaditividade e a desigualdade (2.18) segue trivialmente da definição de função de partição. Assim temos que

$$\frac{Z_{X \setminus \{x\}}(\boldsymbol{\mu})}{Z_X(\boldsymbol{\mu})} \leq 1 - p_x,$$

e portanto

$$\frac{Q_{\{x\}}(\mathbf{p})}{Q_{\emptyset}(\mathbf{p})} \geq \frac{Z_{X \setminus \{x\}}(\boldsymbol{\mu})}{Z_X(\boldsymbol{\mu})}.$$

Suponha agora que para qualquer subconjunto  $T' \subset X$  tal que  $|T'| < n$  e para qualquer  $x \in T'$  tenhamos que

$$\frac{Q_{T'}(\mathbf{p})}{Q_{T' \setminus \{x\}}(\mathbf{p})} \geq \frac{Z_{(T')^c}(\boldsymbol{\mu})}{Z_{(T' \setminus \{x\})^c}(\boldsymbol{\mu})}.$$

Agora vamos mostrar que (2.14) vale também se  $T \subseteq X$  é tal que  $|T| = n$ . Por (2.12) temos que

$$\frac{Q_T(\mathbf{p})}{Q_{T \setminus \{x\}}(\mathbf{p})} = \frac{Q_{T \setminus \{x\}}(\mathbf{p}) - p_x Q_{T \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\mathbf{p})}{Q_{T \setminus \{x\}}(\mathbf{p})} = 1 - p_x \frac{Q_{T \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\mathbf{p})}{Q_{T \setminus \{x\}}(\mathbf{p})}. \quad (2.19)$$

Observe que  $T \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x) = T \setminus (\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x) \cap T)$ . Suponha que  $|\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x) \cap T| = m + 1$  então podemos escrever  $\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x) \cap T = \{x, x_1, \dots, x_m\}$ , assim

$$\frac{Q_{T \setminus \{x\}}(\mathbf{p})}{Q_{T \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\mathbf{p})} = \frac{Q_{T \setminus \{x\}}(\mathbf{p})}{Q_{T \setminus \{x, x_1\}}(\mathbf{p})} \frac{Q_{T \setminus \{x, x_1\}}(\mathbf{p})}{Q_{T \setminus \{x, x_1, x_2\}}(\mathbf{p})} \dots \frac{Q_{T \setminus \{x, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}}(\mathbf{p})}{Q_{T \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\mathbf{p})}$$

e como cada parcela satisfaz a hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{Q_{T \setminus \{x\}}(\mathbf{p})}{Q_{T \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\mathbf{p})} &\geq \frac{Z_{(T \setminus \{x\})^c}(\boldsymbol{\mu})}{Z_{(T \setminus \{x, x_1\})^c}(\boldsymbol{\mu})} \frac{Z_{(T \setminus \{x, x_1\})^c}(\boldsymbol{\mu})}{Z_{(T \setminus \{x, x_1, x_2\})^c}(\boldsymbol{\mu})} \dots \frac{Z_{(T \setminus \{x, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\})^c}(\boldsymbol{\mu})}{Z_{(T \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x))^c}(\boldsymbol{\mu})} \\ &= \frac{Z_{(T \setminus \{x\})^c}(\boldsymbol{\mu})}{Z_{(T \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x))^c}(\boldsymbol{\mu})}. \end{aligned}$$

Então, usando a Equação (2.19), temos que

$$\frac{Q_T(\mathbf{p})}{Q_{T \setminus \{x\}}(\mathbf{p})} = 1 - p_x \frac{Q_{T \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\mathbf{p})}{Q_{T \setminus \{x\}}(\mathbf{p})} \quad (2.20)$$

$$\geq 1 - p_x \frac{Z_{(T \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x))^c}(\boldsymbol{\mu})}{Z_{(T \setminus \{x\})^c}(\boldsymbol{\mu})} \quad (2.21)$$

$$= 1 - p_x \frac{Z_{T^c \cup (\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x) \cap T)}(\boldsymbol{\mu})}{Z_{T^c \cup \{x\}}(\boldsymbol{\mu})} \quad (2.22)$$

$$\geq 1 - \frac{Z_{T^c \cup \{x\}}(\boldsymbol{\mu}) - Z_{T^c}(\boldsymbol{\mu})}{Z_{T^c \cup \{x\}}(\boldsymbol{\mu})} \quad (2.23)$$

$$= \frac{Z_{T^c}(\boldsymbol{\mu})}{Z_{T^c \cup \{x\}}(\boldsymbol{\mu})} \quad (2.24)$$

$$= \frac{Z_{T^c}(\boldsymbol{\mu})}{Z_{(T \setminus \{x\})^c}(\boldsymbol{\mu})}, \quad (2.25)$$

sendo que a desigualdade (2.23) segue de

$$\begin{aligned} Z_{T^c \cup \{x\}}(\boldsymbol{\mu}) &= Z_{T^c}(\boldsymbol{\mu}) + \mu_x Z_{T^c \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\boldsymbol{\mu}) \\ &\geq Z_{T^c}(\boldsymbol{\mu}) + p_x Z_{\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\boldsymbol{\mu}) Z_{T^c \setminus \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\boldsymbol{\mu}) \\ &\geq Z_{T^c}(\boldsymbol{\mu}) + p_x Z_{T^c \cup \Gamma_{\mathcal{G}}^*(x)}(\boldsymbol{\mu}) \\ &\geq Z_{T^c}(\boldsymbol{\mu}) + p_x Z_{T^c \cup (\Gamma_{\mathcal{G}}^*(x) \cap S)}(\boldsymbol{\mu}). \end{aligned}$$

□

Para concluir a prova do Teorema 2.2, vamos aplicar a Proposição 2.6 tomando  $T = X$ . Assim, para qualquer conjunto finito  $X \subset \mathcal{P}$ , para todo  $x \in X$  e para todo  $\mathbf{p} \leq \mathbf{R}^{\text{FP}}$  temos que

$$\frac{Z_X(-\mathbf{p})}{Z_{X \setminus \{x\}}(-\mathbf{p})} = \frac{Q_X(\mathbf{p})}{Q_{X \setminus \{x\}}(\mathbf{p})} \geq \frac{Z_{\emptyset}(\boldsymbol{\mu})}{Z_{\{x\}}(\boldsymbol{\mu})} = \frac{1}{1 + \mu_x},$$

e portanto, para todo  $X$  finito e todo  $x \in X$  temos

$$\frac{Z_{X \setminus \{x\}}(-\mathbf{p})}{Z_X(-\mathbf{p})} \leq 1 + \mu_x,$$

e por (2.5),

$$|\Theta_x^X(\mathbf{p}) = -\Theta_x^X(-\mathbf{p}) \leq \ln(1 + \mu_x),$$

e assim a prova do Teorema 2.2 está concluída.

## 2.2 Gás de subconjuntos

O gás de subconjuntos foi proposto originalmente por Gruber e Kunz [17] como uma realização particular do gás de polímeros abstrato. Esse modelo é definido da seguinte

maneira. Dado um conjunto enumerável  $\mathbb{V}$ , o espaço de polímeros  $\mathcal{P}$  é definido como a coleção de todos os subconjuntos finitos de  $\mathbb{V}$ , ou seja,

$$\mathcal{P}_{\mathbb{V}} = \{x \subseteq \mathbb{V} : |x| < +\infty\}.$$

Observe que agora o polímero  $x$  representa um subconjunto de  $\mathbb{V}$  ao invés de simplesmente um elemento de  $\mathcal{P}$ , assim, polímeros agora possuem cardinalidade e então faz sentido falar em polímeros pequenos ou grandes. O fator de Boltzmann nesse caso é tal que dados  $x$  e  $x'$  dois polímeros em  $\mathcal{P}_{\mathbb{V}}$ , então

$$W(x, x') = \begin{cases} 0, & \text{se } x \cap x' \neq \emptyset \\ 1, & \text{se } x \cap x' = \emptyset \end{cases}$$

e, como antes, a cada polímero  $x \in \mathcal{P}$  associamos uma atividade  $w_x$ .

Seja  $\Lambda \subset \mathbb{V}$  um conjunto finito e seja  $\mathcal{P}_{\Lambda} = \{x \subseteq \mathbb{V} : x \subseteq \Lambda\}$ . A pressão do sistema é definida da seguinte maneira

$$P_{\Lambda}(\mathbf{w}) = \frac{1}{|\Lambda|} \ln Z_{\mathcal{P}_{\Lambda}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}_{\Lambda}^n} \phi^T(x_1, \dots, x_n) w_{x_1} \dots w_{x_n}.$$

Suponha que (2.6) valha com  $\mu$  escolhido de forma que

$$\sup_{v \in \mathbb{V}} \sum_{\substack{x \in \mathcal{P}_{\mathbb{V}}: \\ v \in x}} \mu_x < K$$

assim vamos mostrar que  $P_X(\mathbf{w})$  é absolutamente convergente e que  $|P_{\Lambda}(\mathbf{w})| \leq K$ . De fato, como (2.6) implica em (2.8) e lembrando que a definição (2.4), temos que

$$\begin{aligned} |\ln Z_{\mathcal{P}_{\Lambda}}(\mathbf{w})| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}_{\Lambda}^n} |\phi^T(x_1, \dots, x_n)| |w_{x_1}| \dots |w_{x_n}| \\ &\leq \sum_{v \in \Lambda} \sum_{\substack{x \in \mathcal{P}_{\Lambda}: \\ v \in x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{P}_{\Lambda}^n \\ \exists i: x_i = x}} |\phi^T(x_1, \dots, x_n)| |w_{x_1}| \dots |w_{x_n}| \\ &= \sum_{v \in \Lambda} \sum_{\substack{x \in \mathcal{P}_{\Lambda}: \\ v \in x}} |\Theta_x^{\Lambda}(|\mathbf{w}|)| \\ &\leq \sum_{v \in \Lambda} \sum_{\substack{x \in \mathcal{P}_{\Lambda}: \\ v \in x}} \ln(1 + \mu_x) \\ &\leq \sum_{v \in \Lambda} \sum_{\substack{x \in \mathcal{P}_{\mathbb{V}}: \\ v \in x}} \mu_x \\ &\leq K|\Lambda|. \end{aligned}$$

Na maioria das situações físicas, o conjunto  $\mathbb{V}$  é o conjunto de vértices de um grafo, como por exemplo a rede  $\mathbb{Z}^d$  com conjunto de elos sendo os vizinhos mais próximos em  $\mathbb{Z}^d$ . Em geral, a cada vértice  $v \in \mathbb{Z}^d$  também é associado uma variável aleatória  $s_v$ , chamada de *spin* de  $v$ , tomando valores em algum espaço  $\Omega_v$ , que frequentemente é o mesmo para todo  $v \in \mathbb{Z}^d$ , veja por exemplo [30].

### 2.2.1 Conexão com o LLL

Existe um paralelo entre o gás de subconjuntos e o LLL, no contexto de Moser-Tardos. De fato, quando se trata do gás de subconjuntos, a cota superior (1.7) sempre pode ser usada e assim a condição (2.6) é reescrita da seguinte maneira

$$|w_x| \leq \frac{\mu_x}{\prod_{v \in x} \left[ 1 + \sum_{\substack{x' \in \mathcal{P}_V \\ v \in x'}} \mu_{x'} \right]}, \quad \forall x \in \mathcal{P}_V. \quad (2.26)$$

O critério acima é constituído por várias desigualdades, uma para cada polímero em  $\mathcal{P}$ . Entretanto, ao se tratar do gás de subconjuntos esse critério pode ser trocado por apenas uma condição. De fato, por (2.26) temos que  $\mu_x > |w_x|$ , portanto uma escolha intuitiva, usando a notação do LLL, seria

$$\mu_x = |w_x| e^{a|vbl(A_x)|}$$

com  $a > 0$ . Assim, substituindo  $\mu_x$  em (2.26), no contexto de Moser-Tardos temos que o LLL pode ser reescrito da seguinte maneira.

**Lema 2.7.** *Dado um conjunto finito  $X$  e uma família finita de variáveis aleatórias mutuamente independentes  $\Psi$ , seja  $\mathcal{A} = (A_x)_{x \in X}$  uma família de eventos dependendo das variáveis em  $\Psi$  tal que  $p_x = \mathbb{P}(A_x)$ . Se existe  $a > 0$  tal que*

$$\sup_{\psi \in \Psi} \sum_{\substack{x \in X \\ \psi \in vbl(A_x)}} p_x e^{a|vbl(A_x)|} \leq e^a - 1, \quad (2.27)$$

então

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{x \in X} A_x^c\right) > 0$$

e o Algoritmo 1 encontra uma configuração  $\omega \in \bigcap_{x \in X} A_x^c$  com um número esperado de passos menor ou igual a  $\sum_{x \in X} p_x e^{a|vbl(A_x)|}$ .

## Capítulo 3

# Uma nova cota para o índice cromático acíclico

Seja  $G = (V, E)$  um grafo com conjunto de vértices  $V$ , conjunto de arestas  $E$ , tal que  $|E| = m$ , e grau máximo  $\Delta > 1$ . Dado  $N \in \mathbb{N}$ , denotaremos por  $[N] = \{1, 2, \dots, N\}$ . Uma coloração de arestas de  $G$  é uma função  $c : E \rightarrow [N]$ . Uma coloração de arestas de  $G$  é chamada *própria* se nenhum par de arestas adjacentes recebem a mesma cor, e uma coloração própria de  $G$  é dita *acíclica* se qualquer ciclo é colorido com no mínimo três cores. O número mínimo de cores necessárias para que um grafo  $G$  possua pelo menos uma coloração de arestas acíclica é chamado de *índice cromático acíclico de arestas* de  $G$  e é denotado por  $a'(G)$ .

Dado um grafo  $G$  com grau máximo  $\Delta$ , pelo Teorema de Vizing [31], uma cota inferior para  $a'(G)$  é  $\Delta$ . Já a busca pela cota superior para o índice cromático  $a'(G)$  começa com Alon e Reed [1] em 1991, quando os autores usando o LLL provaram que existe uma constante  $C \leq 64$  tal que  $a'(G) \leq C\Delta$ . Desde então esforços vem sendo feitos para diminuir essa constante  $C$ . Molloy e Reed mostraram que  $C \leq 16$  em [22] usando novamente o LLL. Fiamčík [13], e posteriormente Alon et al. [2] conjecturaram que  $a'(G) \leq \Delta + 2$ . Denotamos por *cintura* de  $G$  o número de arestas do menor ciclo em  $G$ . Em [2] a conjectura foi provada para grafos com cintura  $g \geq 2000\Delta \ln \Delta$ . A cota superior para  $a'(G)$  para grafos em geral com grau máximo  $\Delta$  obtida por Molloy e Reed em 1998 foi melhorada em 2012 por Ndreca et al. [24] que provaram que  $a'(G) \leq 9.62\Delta$  usando o LLL melhorado (Teorema 1.8). Apenas um ano depois, Esperet e Parreau [8] novamente melhoraram essa cota e mostraram que  $a'(G) \leq 4\Delta$  usando a seguinte observação crucial.

**Lema 3.1** (Esperet-Parreau). *Seja  $G$  um grafo com grau máximo  $\Delta$ , então é possível colorir sequencialmente as arestas de  $G$  usando  $N > 2(\Delta - 1)$  cores de modo que a coloração resultante seja própria e livre de ciclos bicromáticos de comprimento 4.*

*Demonstração.* Suponha que todas as cores são numeradas e todas as arestas também. Colorimos todas as arestas de acordo com a sua ordem, sendo que ao colorir a aresta e

evitamos cores que já foram usadas para colorir dois tipos de arestas:

- a) os vizinhos de  $e$ ; ou seja, evitamos no máximo  $2(\Delta - 1)$  cores;
- b) arestas  $e'$  tais que  $\{e, f, e', f'\}$  é um ciclo em  $G$  de comprimento 4, sendo que  $e$  e  $e'$  não são vizinhos e sendo que as arestas  $f$  e  $f'$  já foram coloridas e possuem a mesma cor. Como  $f$  e  $f'$  possuem a mesma cor, isso significa que a vizinhança de  $e$  foi colorida com no máximo  $2\Delta - 3$  cores, e evitando a cor de  $e'$  continuamos tendo que evitar no máximo  $2(\Delta - 1)$  cores.

□

Dado um ciclo  $C$  com um número par de arestas, dizemos que duas arestas  $e$  e  $e'$  possuem a mesma *paridade* se há um número ímpar de arestas entre  $e$  e  $e'$  em  $C$ . As arestas  $e$  e  $e'$  na demonstração acima possuem a mesma paridade, assim como as arestas  $f$  e  $f'$ .

Em [8], os autores conseguiram encaixar o Lema 3.1 no método *entropy compression*. Esse método se baseia em um algoritmo sequencial inspirado na versão algorítmica do LLL de Moser e Tardos (Algoritmo 1) e foi aplicado a um grande número de problemas sobre coloração de grafos, melhorando diversas cotas superiores de índices cromáticos anteriormente obtidas pelo LLL. Mais detalhes sobre o método *entropy compression* serão discutidos na Seção 4.3.

Essas melhorias nas cotas levaram à crença de que o *entropy compression* seria uma ferramenta mais eficiente do que o LLL, entretanto, recentemente uma nova melhoria na cota de Esperet-Parreau para  $a'(G)$  foi obtida por Giotis et al. [16], que mostraram que  $a'(G) \leq 3.74(\Delta - 1)$ . Admiravelmente, os autores não fizeram uso do *entropy compression*, mas basicamente apenas encaixaram o Lema 3.1 no esquema padrão de Moser-Tardos (que em geral é esperado produzir cotas idênticas às obtidas via LLL). Esse resultado sugere por um lado que a forte melhora obtida por Esperet e Parreau para  $a'(G)$  é mais devida ao Lema 3.1 do que ao método *entropy compression* e por outro lado que o resultado de Giotis et al. poderia ser melhorado levando em consideração algumas características desse método, além do Lema 3.1. Neste capítulo vamos mostrar que esse é justamente o caso. Modificando levemente o método descrito por Giotis et al. conseguimos uma nova melhora na cota superior para  $a'(G)$  obtendo  $a'(G) \leq 3.569(\Delta - 1)$ .

### 3.1 O ALGORITMO-COLORAÇÃO

Suponha que  $G = (V, E)$  seja um grafo com grau máximo  $\Delta$  tal que  $|E| = m$ , e que temos  $N = \lceil (2 + \gamma)(\Delta - 1) \rceil + 1$  cores, sendo  $\gamma$  um número positivo a ser determinado. Uma coloração (ou coloração parcial)  $\omega$  de  $E$  é uma função  $\omega : E \rightarrow [N]_0$ , sendo  $[N]_0 = [N] \cup \{0\}$ , e quando  $\omega(e) = 0$  dizemos que a aresta  $e$  está descolorida.

Um par de arestas adjacentes em  $G$  será chamado de uma *cereja* e diremos que uma cereja é *monocromática* se suas duas arestas são coloridas com a mesma cor. Chamaremos

um ciclo  $C$  de  $G$  de  $k$ -ciclo se  $C$  contém exatamente  $k$  arestas. Diremos que um  $2k$ -ciclo é *bicromático* se ele é colorido propriamente com duas cores, ou seja, arestas com a mesma paridade recebem a mesma cor. Denotaremos por  $X_{2k}$  a coleção de todos os  $2k$ -ciclos de  $G$ , e seja  $X = \cup_{k \geq 3} X_{2k}$ . Suponha que uma ordem tenha sido escolhida para os conjuntos  $V$ ,  $E$  e  $X$ .

Seja  $e \in E$  e considere  $\omega$  uma coloração parcial de  $E$  tal que  $\omega(e) = 0$ , definimos  $D(e, \omega)$  como o conjunto das cores disponíveis para a aresta  $e$  de modo a evitar cerejas monocromáticas e 4-ciclos bicromáticos. Pelo Lema 3.1 temos que  $|D(e, \omega)| \geq \lceil \gamma(\Delta - 1) \rceil + 1$  para qualquer aresta  $e$  e qualquer coloração parcial  $\omega$ .

Agora vamos descrever um procedimento, chamado ALGORITMO-COLORAÇÃO, o qual colore (e eventualmente recolore) sequencialmente as arestas de  $G$ . Cada tempo discreto  $t \in \mathbb{N}$  no qual o ALGORITMO-COLORAÇÃO colore (ou recolore) uma aresta será chamado de um *instante* e denotaremos por  $\omega_t$  a coloração (ou coloração parcial) de  $E$  no instante  $t$ . Dada uma coloração de  $E$ , dizemos que uma aresta  $e$  é *mal colorida* se existe algum ciclo  $C \in X$  tal que  $e \in C$  e  $C$  é bicromático. Analogamente, se não há nenhum ciclo bicromático  $C \in X$  tal que  $e \in C$ , então dizemos que  $e$  é *bem colorida*.

**Definição 3.2** (Semente). Dada uma coloração  $\omega$  e um ciclo  $C$ , definimos a semente de  $C$  como  $S(C) = \{f_1, f_2\} \subset C$ , sendo  $f_1$  a aresta que recebeu a cor que ela possui em  $\omega$  no instante mais antigo com relação às demais arestas em  $C$ , e  $f_2$  é escolhida dentre aquelas com paridade oposta a de  $f_1$  como a aresta que recebeu a cor que ela possui em  $\omega$  num instante mais antigo com relação às demais arestas com paridade oposta a de  $f_1$ .

**Observação 3.3.** Dado um ciclo  $C$  e dois instantes distintos  $t > t'$  a semente  $S(C)$  no instante  $t$  não é necessariamente igual a semente  $S(C)$  no instante  $t'$ .

**Algoritmo 2:** ALGORITMO-COLORAÇÃO

- 1 Dê cores a todas as arestas  $e \in E$  sequencialmente seguindo a ordenação pré-fixada da seguinte maneira: em cada instante  $t$  sorteie uniformemente um número  $r \in \{1, \dots, \lceil \gamma(\Delta - 1) \rceil + 1\}$  e atribua a  $e$  a  $r$ -ésima menor cor em  $D(e, \omega_{t-1})$ .
- 2 **enquanto** existir uma aresta mal colorida, seja  $e$  a maior aresta entre elas e seja  $C$  o maior ciclo bicromático que contenha  $e$ , e **faça**
- 3 | RECOLORIR( $e, C$ ).
- 4 **fim**
- 5 **retorna** coloração atual

Note que para qualquer  $t < m$ , onde  $m$  é o número de arestas de  $G$ , temos que  $\omega_t$  é uma coloração parcial própria sem 4-ciclos bicromáticos, enquanto para qualquer  $t \geq m$ ,  $\omega_t$  é uma coloração própria sem 4-ciclos bicromáticos.

**Algoritmo 3:** RECOLORIR( $e, C$ )

```

1 para as arestas em  $C$ , tome a semente  $S(C) \subset C$  e faça
2   | RECOLORIR todas as arestas em  $C \setminus S(C)$  sequencialmente (de acordo com a
   | ordem pré-fixada em  $E$ ) atribuindo à aresta recolorida no instante  $t$  a
   |  $r$ -ésima menor cor em  $D(f, \omega_{t-1})$ , em que  $r$  é sorteado uniformemente em
   |  $\{1, \dots, \lceil \gamma(\Delta - 1) \rceil + 1\}$ .
3 fim
4 enquanto existir alguma aresta em  $C \setminus S(C)$  que é mal colorida, seja  $e'$  a maior
   | entre essas arestas e seja  $C'$  o maior ciclo bicromático tal que  $e'$  é uma de suas
   | arestas, e faça
5   | RECOLORIR( $e', C'$ ).
6 fim

```

Um *passo* do ALGORITMO-COLORAÇÃO é o procedimento descrito na Linha 2 de RECOLORIR( $e, C$ ). Já uma *fase* do ALGORITMO-COLORAÇÃO é a coleção de passos feitos pelo ALGORITMO-COLORAÇÃO durante uma chamada de RECOLORIR( $e, C$ ) na Linha 3 do ALGORITMO-COLORAÇÃO. A *raiz* da fase  $i$  é o seu passo inicial, isto é, o primeiro par  $(e, C)$  ressorteado na fase  $i$ .

A cada execução do algoritmo associamos um *registro*, que é a lista

$$\mathcal{L} = ((e_1, C_1), (e_2, C_2), \dots)$$

dos passos feitos pelo algoritmo durante sua execução. Denotaremos por *aresta rótulo* (resp. *ciclo rótulo*) qualquer aresta (resp. ciclo) presente no registro  $\mathcal{L}$ . De acordo com as regras acima descritas,  $\mathcal{L}$  é uma variável aleatória determinada pelos sorteios aleatórios executados pelo algoritmo em cada passo. Se  $\mathcal{L}$  é finita, i.e. se  $|\mathcal{L}| = n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , então o algoritmo termina tendo executado  $n$  passos e produz uma coloração acíclica de arestas de  $G$ . Defina

$$P_n = \mathbb{P}(|\mathcal{L}| = n). \quad (3.1)$$

Em outras palavras,  $P_n$  é a probabilidade do ALGORITMO-COLORAÇÃO executar exatamente  $n$  passos.

**Observação 3.4.** *O procedimento RECOLORIR( $e, C$ ) é similar mas não idêntico àquele descrito em [16]. Em [16] em cada passo de RECOLOR( $e, C$ ) todas as arestas de  $C$  são recoloridas, enquanto em RECOLORIR( $e, C$ ), nós recolorimos apenas as arestas em  $C \setminus S(C)$ .*

Agora vamos provar algumas propriedades importantes do ALGORITMO-COLORAÇÃO.

**Lema 3.5.** *Em qualquer chamada de RECOLORIR( $e, C$ ) temos que  $e \notin S(C)$  e assim a aresta  $e$  sempre é ressorteada.*



*Demonstração.* Primeiramente considere uma chamada raiz de  $\text{RECOLORIR}(e, C)$  na Linha 3 do ALGORITMO-COLORAÇÃO. Note que o par  $(e, C)$  escolhido na Linha 2 do ALGORITMO-COLORAÇÃO é tal que  $e$  é a maior aresta no ciclo  $C$  e portanto  $e$  foi colorida após todas as arestas em  $C$ , o que significa que  $e$  não pode pertencer à semente  $S(C)$ . Considere agora uma chamada recursiva de  $\text{RECOLORIR}(e', C')$  na linha 4 de  $\text{RECOLORIR}(e, C)$ . Observe que nesse caso as arestas em  $C \setminus S(C)$  acabaram de ser recoloridas, e  $e'$  foi escolhida como a maior aresta em  $C \setminus S(C)$  que ainda pertence a um ciclo bicromático, e  $C'$  é o maior ciclo bicromático tal que  $e'$  é uma de suas arestas. Se  $C' = C$ , então o mesmo ciclo ainda é bicromático, e portanto a nova semente a ser escolhida é a mesma que antes, logo  $e'$  não está na semente. Se  $C' \neq C$ , então  $e'$  foi a última aresta a ser recolorida em  $C' \cap (C \setminus S(C))$  (enquanto as outras arestas de  $C'$  não foram recoloridas no passo anterior). Assim, no início do passo  $(e', C')$ ,  $e'$  é a aresta ressorteada no instante mais recente dentre todas as arestas pertencentes a  $C'$  e assim não pode pertencer a  $S(C')$ . □

**Lema 3.6.** *Considere qualquer chamada de  $\text{RECOLORIR}(e, C)$  e seja  $Y$  o conjunto de todas as arestas bem coloridas no início dessa chamada. Se a chamada  $\text{RECOLORIR}(e, C)$  termina, então todas as arestas em  $Y \cup (C \setminus S(C))$  estão bem coloridas.*

*Demonstração.* De acordo com o algoritmo, se  $\text{RECOLORIR}(e, C)$  termina então todas as arestas em  $C \setminus S(C)$  não pertencem a um ciclo bicromático. Assim nós só precisamos mostrar que nenhuma aresta em  $Y$  passa a pertencer a um ciclo bicromático no final de  $\text{RECOLORIR}(e, C)$ . Provaremos por absurdo. Suponha que  $\text{RECOLORIR}(e, C)$  dure  $n$  passos e suponha que  $f \in Y$  pertença a um ciclo bicromático  $B$  após o último passo de  $\text{RECOLORIR}(e, C)$ . Esse ciclo  $B$  não estava bicromático no início de  $\text{RECOLORIR}(e, C)$ , logo ele teve algumas de suas arestas recoloridas durante a execução de  $\text{RECOLORIR}(e, C)$  e está bicromático quando  $\text{RECOLORIR}(e, C)$  termina. Dessa maneira, deve existir um último passo  $n' \leq n$  de  $\text{RECOLORIR}(e, C)$  tal que  $B$  não está bicromático no passo  $n' - 1$ , se torna bicromático no passo  $n'$  e permanece bicromático durante os  $n - n'$  passos finais de  $\text{RECOLORIR}(e, C)$ . De acordo com  $\text{RECOLORIR}(e, C)$ , deve existir um ciclo  $B'$  e uma aresta  $f'$  tais que o processo  $\text{RECOLORIR}(f', B')$  foi chamado no passo  $n' - 1$  de  $\text{RECOLORIR}(e, C)$  e  $B$  compartilha pelo menos uma aresta  $g$  com o conjunto  $B' \setminus S(B')$ , e  $B$  se torna bicromático assim que as arestas em  $B' \setminus S(B')$  são recoloridas. Entretanto, o algoritmo nos diz que a aresta  $g \in \{B' \setminus S(B')\}$ , que também pertence ao ciclo  $B$ , não pode estar em um ciclo bicromático no final da chamada  $\text{RECOLORIR}(f', B')$ , logo, em algum passo  $n'' > n'$ ,  $B$ , que contém  $g$ , deve deixar de ser bicromático, absurdo! □

**Lema 3.7.** *O ALGORITMO-COLORAÇÃO executa, no máximo,  $m = |E|$  fases.*

*Demonstração.* Considere duas fases  $l$  e  $s$ , com  $l < s$ , geradas por uma execução do ALGORITMO-COLORAÇÃO e sejam  $(e_l, C_l)$  e  $(e_s, C_s)$  os pares ressorteados nos seus passos raízes respectivamente. Pelo Lema 3.6, todas arestas em  $C_l \setminus S(C_l)$  não estão em um ciclo bicromático quando a fase  $l$  termina (e no começo das sucessivas fases). Em particular, pelo Lema 3.5 temos que  $e_l \in C_l \setminus S(C_l)$ , logo  $e_l$  não pode estar em um ciclo bicromático no início da fase  $s$  e assim  $e_l \notin C_s$ . Concluimos então que  $e_l \neq e_s$ .  $\square$

## 3.2 A floresta testemunha

Nesta seção associaremos ao registro  $\mathcal{L}$  do ALGORITMO-COLORAÇÃO uma floresta rotulada formada por árvores enraizadas cujos vértices internos são rotulados com pares  $(e, C)$  pertencentes a  $\mathcal{L}$ , analogamente ao que foi feito em [16].

**Definição 3.8.** Seja  $v$  um vértice em uma árvore enraizada com raiz  $v_0$ . Dizemos que um vértice  $w$  é um ancestral de  $v$  se  $w$  pertence ao caminho de  $v_0$  a  $v$ .

Suponha que o algoritmo execute um total de  $r$  fases e que durante a fase  $s$ ,  $s \in \{1, \dots, r\}$ , o algoritmo execute  $n_s$  passos de modo que o registro do algoritmo seja

$$\mathcal{L} = ((e_1^1, C_1^1), \dots, (e_{n_1}^1, C_{n_1}^1), (e_1^2, C_1^2), \dots, (e_{n_2}^2, C_{n_2}^2), \dots, (e_1^r, C_1^r), \dots, (e_{n_r}^r, C_{n_r}^r)).$$

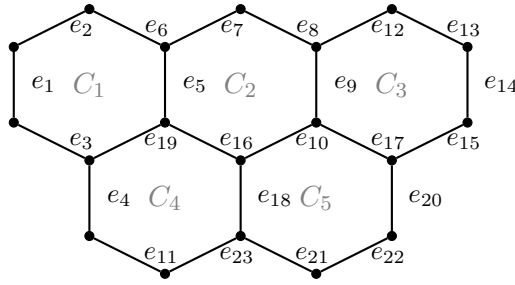
A cada fase  $s$ , com  $1 \leq s \leq r$ , associaremos uma árvore enraizada rotulada  $\tau'_s$ . Sejam

$$(e_1^s, C_1^s), \dots, (e_i^s, C_i^s), \dots, (e_{n_s}^s, C_{n_s}^s) \quad (3.2)$$

os pares recoloridos na fase  $s$ . Construimos a árvore  $\tau'_s$  da seguinte maneira.

- a) a raiz de  $\tau'_s$  é rotulada por  $(e_1^s, C_1^s)$ ;
- b) para  $i = 2, \dots, n_s$ , checamos se  $(e_i^s, C_i^s)$  é tal que  $e_i^s \in (C_{i-1}^s \setminus S(C_{i-1}^s))$ ,
  - se sim, adicionamos  $(e_i^s, C_i^s)$  como um filho de  $(e_{i-1}^s, C_{i-1}^s)$ ,
  - se não, retornamos a (3.2) checando os *ancestrais* (Definição 3.8) de  $(e_{i-1}^s, C_{i-1}^s)$  até encontrar um par  $(e_j^s, C_j^s)$ , com  $j < i$ , tal que  $e_i^s \in (C_j^s \setminus S(C_j^s))$ , e adicionamos  $(e_i^s, C_i^s)$  como um filho do vértice rotulado por  $(e_j^s, C_j^s)$ .

Note que  $n_s$  é o número total de vértices internos (vértices que possuem filhos) e folhas (vértices que não possuem filhos) de  $\tau'_s$ , e cada um desses vértices é rotulado com  $(e_i^s, C_i^s)$  com  $i = 1, \dots, n_s$ . Observe ainda que pelo Lema 3.6 o par  $(e_1^{s+1}, C_1^{s+1})$  é tal que  $e_1^{s+1} \notin (C_i^s \setminus S(C_i^s))$  para todo  $i \in [n_s]$  e para todo  $l \leq s$ , assim construimos uma nova árvore  $\tau'_{s+1}$  com raiz rotulada por  $(e_1^{s+1}, C_1^{s+1})$  seguindo a mesma regra descrita para construir  $\tau'_s$ .

Figura 3.1: Grafo  $G = (V, E)$ 

A floresta  $F' = \{\tau'_1, \dots, \tau'_r\}$  então obtida, associada unicamente ao registro  $\mathcal{L}$ , possui no máximo  $m$  árvores. De fato, o Lema 3.7 diz que o número de fases é no máximo  $m$ .

Observe que em cada árvore  $\tau'_s$  de  $F'$  a lista de rótulos dos vértices de  $\tau'_s$ , ordenados de acordo com *depth-first search* (isto é, a travessia começando na raiz da árvore e explorando cada um dos seus ramos o máximo possível antes de retroceder), coincide com a lista (3.2).

**Observação 3.9.** *Por construção, a correspondência  $\mathcal{L} \mapsto F'$  é uma injeção.*

**Exemplo 3.10.** *Suponha que o grafo  $G = (V, E)$  da Figura 3.1 tenha sido colorido segundo o ALGORITMO-COLORAÇÃO e que o registro produzido seja*

$$\mathcal{L} = ((e_{23}, C_4), (e_{19}, C_1), (e_{19}, C_1), (e_{18}, C_5), (e_{17}, C_3)).$$

Vamos produzir a floresta  $F'$  associada ao registro  $\mathcal{L}$ . Primeiramente anexamos uma raiz  $v_1^1$  com o rótulo  $(e_{23}, C_4)$ , o primeiro par em  $\mathcal{L}$ , dando início a árvore  $\tau_1^1$ . Em seguida, como  $e_{19}$  pertence a  $C_4 \setminus S(C_4)$ , onde  $S(C_4) = \{e_4, e_{11}\}$  (as primeiras arestas a serem coloridas em  $C_4$  com paridades opostas), anexamos um vértice  $v_2^1$  com rótulo  $(e_{19}, C_1)$  como filho da raiz  $v_1^1$ . Em seguida passamos para o terceiro par de  $\mathcal{L}$ , temos que  $e_{19}$  pertence a  $C_1 \setminus S(C_1)$ , onde  $S(C_1) = \{e_1, e_2\}$  e portanto anexamos um vértice  $v_3^1$  com rótulo  $(e_{19}, C_1)$  como filho do vértice  $v_2^1$ . Para o quarto par de  $\mathcal{L}$ , observe que  $e_{18} \notin (C_1 \setminus S(C_1))$ , assim  $(e_{18}, C_5)$  não pode ser anexado a  $v_3^1$ , observe que novamente como  $e_{18} \notin (C_1 \setminus S(C_1))$ ,  $(e_{18}, C_5)$  não pode ser anexado a  $v_2^1$ . Porém, como  $e_{18} \in (C_4 \setminus S(C_4))$ , anexamos um vértice  $v_4^1$  com rótulo  $(e_{18}, C_5)$  a  $v_1^1$ .

Por fim, para o quinto par de  $\mathcal{L}$ , como  $e_{17} \notin (C_5 \setminus S(C_5))$ , uma vez que  $S(C_5) = \{e_{10}, e_{17}\}$ , ele não pode ser anexado como filho de  $v_4^1$ . Observe também que  $e_{17} \notin (C_4 \setminus S(C_4))$ , logo acrescentamos uma outra raiz  $v_2^2$  com o rótulo  $(e_{17}, C_3)$  criando uma segunda árvore  $\tau_2^1$ .

Assim produzimos a floresta  $F' = \{\tau_1^1, \tau_2^1\}$ , Figura 3.2, que possui um total de  $|\mathcal{L}| = 5$  vértices.

Vamos mostrar três importantes propriedades das árvores que compõem a floresta  $F'$ .

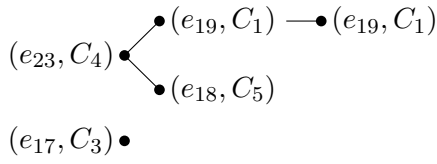


Figura 3.2: Floresta  $F'$  associada ao registro  $\mathcal{L}$

**Lema 3.11.** *Considere uma árvore  $\tau' \in F'$  e sejam  $v_i$  e  $v_j$  dois vértices em  $\tau'$  rotulados por  $(e_i, C_i)$  e  $(e_j, C_j)$  respectivamente .*

- a) *Se  $v_i$  é um filho de  $v_j$ , então  $e_i \in C_j \setminus S(C_j)$ .*
- b) *Se  $v_i$  e  $v_j$  são irmãos, então  $e_i \neq e_j$ .*
- c) *O vértice  $v_i$  possui no máximo  $|C_i| - 2$  filhos.*

*Demonstração.*

a) Segue da definição da construção da floresta.

b) Como  $v_i$  e  $v_j$  são irmãos, suponha que  $v_i$  e  $v_j$  sejam o  $i$ -ésimo e o  $j$ -ésimo filhos de um outro vértice em  $\tau'$ , com  $i < j$  na ordem natural dos vértices de  $\tau'$  induzida pelos passos do algoritmo. Para  $k$  tal que  $i \leq k < j$ , seja  $(e_k, C_k)$  o rótulo do  $k$ -ésimo irmão. Pelo Lema 3.6, quando  $\text{RECOLORIR}(e_k, C_k)$  termina, todas as arestas rótulos  $e_i, \dots, e_k$  não estão em um ciclo bicromático, da mesma forma que todas as arestas em  $(C_i \setminus S(C_i)) \cup \dots \cup (C_k \setminus S(C_k))$ . Assim,  $e_j$  não pode estar no conjunto  $\{e_i, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}\}$ .

c) Segue dos itens a) e b).

□

Considere  $F' = \{\tau'_1, \dots, \tau'_r\}$ . Defina  $E_{F'} = \{e_1^1, e_1^2, \dots, e_1^r\}$ , o conjunto das arestas rótulos das raízes das árvores em  $F'$ . Pela demonstração do Lema 3.7, as arestas em  $E_{F'}$  são todas distintas.

**Definição 3.12** (Floresta testemunha). Dado o registro  $\mathcal{L}$  do ALGORITMO-COLORAÇÃO, a floresta testemunha  $F$  associada a  $\mathcal{L}$  é construída a partir da floresta  $F'$  da seguinte maneira:

- 1) Adicione à floresta  $F'$  um vértice isolado para cada aresta em  $E \setminus E_{F'}$ , e os rotule por  $(e, \emptyset)$  com  $e \in E \setminus E_{F'}$ .
- 2) Para cada vértice  $v$  da floresta  $F'$ , com ciclo rótulo  $C_v$ , tal que  $v$  tem menos de  $|C_v| - 2$  filhos, faça: seja  $H_v$  o conjunto de arestas em  $C_v \setminus S(C_v)$  que não rotulam filhos de  $v$ . Para cada  $e \in H_v$  adicione a  $v$  uma folha com rótulo  $(e, \emptyset)$  de tal maneira que agora  $v$  possua exatamente  $|C_v| - 2$  filhos.

A nova floresta rotulada  $F$  assim obtida, unicamente associada à variável aleatória  $\mathcal{L}$  pelas prescrições descritas acima, é chamada de *floresta testemunha* produzida pelo ALGORITMO-COLORAÇÃO.

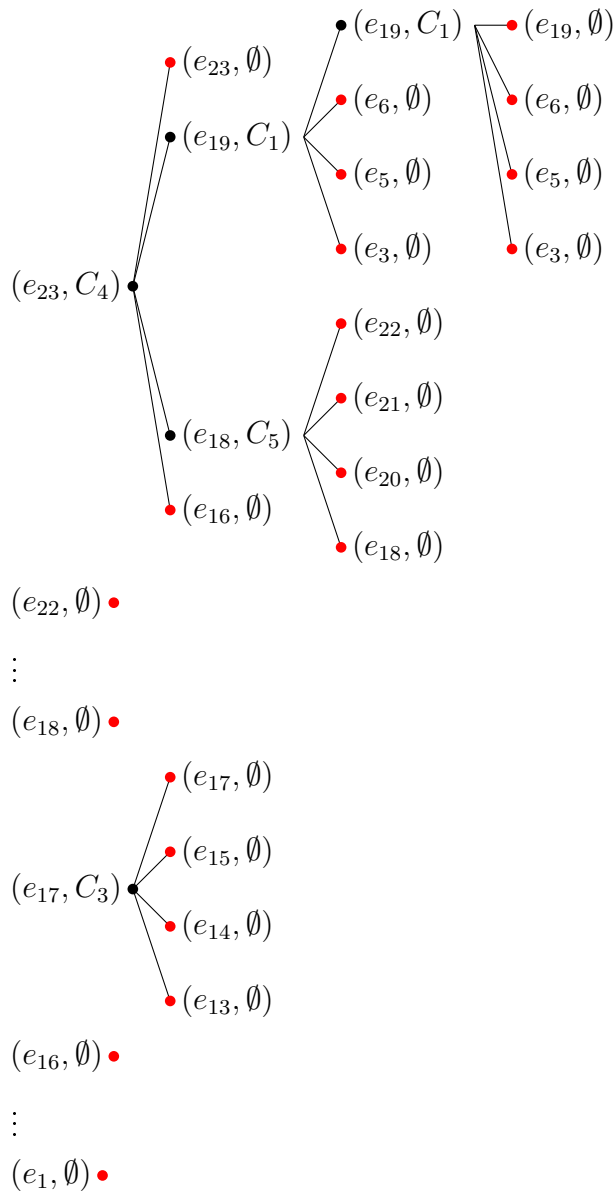


Figura 3.3: Floresta testemunha  $F$  construída a partir da floresta  $F'$

**Exemplo 3.13.** Na Figura 3.3 apresentamos a floresta testemunha obtida a partir da floresta  $F'$  da Figura 3.2 gerada no Exemplo 3.10. Os vértices em preto representam os vértices da floresta  $F'$ , enquanto os vértices em vermelho representam os vértices adicionados segundo a Definição 3.12. Observe que os vértices em vermelho foram adicionados respeitando a ordenação das arestas em  $E$ .

A floresta testemunha  $F$  (uma variável aleatória) possui as seguintes propriedades:

1.  $F$  é constituída por exatamente  $|E| = m$  árvores enraizadas rotuladas  $\tau_1, \dots, \tau_m$  (algumas das quais são apenas raízes isoladas).
2. Cada vértice interno  $v$  de  $\tau \in F$  carrega um rótulo  $(e_v, C_v)$  tal que  $e_v \in E$  e  $C_v \in X$ , enquanto cada folha  $\ell$  de  $\tau$  carrega um rótulo  $(e_\ell, \emptyset)$  tal que  $e_\ell \in E$ .

3. Seja  $v$  um vértice interno de  $\tau \in F$  com rótulo  $(e_v, C_v)$  e seja  $u$  um filho de  $v$ . Então a aresta rótulo de  $u$  é uma aresta de  $C_v$ .
4. Sejam  $v$  e  $v'$  dois vértices irmãos em alguma árvore  $\tau \in F$  e sejam  $(e_v, C_v)$  e  $(e_{v'}, C_{v'})$  seus rótulos respectivamente, então  $e_v \neq e_{v'}$ .
5. Seja  $v$  um vértice interno de  $\tau \in F$  e seja  $(e_v, C_v)$  seu rótulo, então  $v$  possui exatamente  $|C_v| - 2$  filhos.

Pela Observação 3.9, temos que registros distintos  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  necessariamente produzem florestas testemunhas distintas  $F_1$  e  $F_2$ . Seja  $\mathfrak{F}_n$  o conjunto de todas as florestas testemunha com  $n$  vértices internos e seja  $\mathfrak{F} = \cup_{n \geq 0} \mathfrak{F}_n$ .

Note que o número de vértices internos de uma floresta testemunha  $F$  é igual ao número total de vértices da floresta  $F'$  correspondente. Como o ALGORITMO-COLORAÇÃO dura  $n$  passos se, e somente se, a floresta testemunha associada ao registro  $\mathcal{L}$  do ALGORITMO-COLORAÇÃO possui  $n$  vértices internos, a probabilidade  $P_n$  definida em (3.1) pode ser escrita da seguinte maneira

$$P_n = \mathbb{P}(\text{a floresta testemunha produzida pelo Algoritmo 2 possui } n \text{ vértices internos}). \quad (3.3)$$

### 3.3 O Algoritmo CORVAL

Agora vamos introduzir um algoritmo de validação fortemente inspirado em Giotis et al. [16] com o objetivo de cotar  $P_n$ .

**Definição 3.14.** Um par de arestas adjacentes  $(e, f)$  é dito *ordenado* se  $e = \{v, u\}$ , com  $v < u$ , e  $f$  contém  $u$ . Dado um par ordenado  $(e, f)$  e um inteiro  $k \geq 3$ , dizemos que a tripla  $(e, f, k)$  é *admissível* em  $G$  se existe pelo menos um ciclo  $C$  em  $G$  contendo o par ordenado  $(e, f)$  tal que  $|C| = 2k$ .

**Definição 3.15.** Dado  $n \in \mathbb{N}$ , dizemos que  $S = \{(e_1^1, e_1^2, k_1), \dots, (e_n^1, e_n^2, k_n)\}$  é uma *sequência admissível* de  $G$  se, para todo  $i = 1, \dots, n$ , a tripla  $(e_i^1, e_i^2, k_i)$  é admissível em  $G$ . Denotamos por  $\mathfrak{S}_n$  o conjunto de todas sequências admissíveis de  $G$  constituídas por  $n$  triplas e definimos  $\mathfrak{S} = \cup_{n \geq 0} \mathfrak{S}_n$ .

**Observação 3.16.** Dada uma coloração própria de arestas de  $G$  e dado um par de arestas adjacentes  $(e, f)$  de  $G$ , existe no máximo um ciclo bicromático  $C$  contendo  $e$  e  $f$ .

Considere o Algoritmo 4, chamado CORVAL, cuja entrada é uma sequência admissível  $S = \{(e_1^1, e_1^2, k_1), \dots, (e_n^1, e_n^2, k_n)\}$ . Primeiramente CORVAL colore sequencialmente todas as arestas de  $G$ , em seguida ele recolora (sempre sequencialmente) algumas arestas de  $G$ .

Como antes, cada tempo discreto  $t \in \mathbb{N}$  em que CORVAL colore (ou recolore) uma aresta é chamado um *instante* e denotamos por  $\omega_t$  a coloração (ou coloração parcial) de  $E$  no instante  $t$ .

**Algoritmo 4: CORVAL**

**Entrada:**  $S = \{(e_1^1, e_1^2, k_1), \dots, (e_n^1, e_n^2, k_n)\}$

- 1 Dê cores a todas as arestas  $e \in E$  sequencialmente seguindo a ordenação pré-fixada da seguinte maneira: em cada instante  $t$  sorteie segundo a distribuição uniforme um número  $r \in \{1, \dots, \lceil \gamma(\Delta - 1) \rceil + 1\}$  e atribua a  $e$  a  $r$ -ésima menor cor em  $D(e, \omega_{t-1})$ .
- 2 **para**  $i = 1, \dots, n$ , **faça**
- 3     **se** existe um  $2k_i$ -ciclo bicromático contendo o par ordenado  $(e_i^1, e_i^2)$ , seja  $C_i$  esse único ciclo, **então**
- 4         RECOLORIR todas as arestas  $e \in C_i \setminus S(C_i)$  seguindo a ordem pré-fixada e escolhendo em cada instante  $t > m$  uma cor uniformemente aleatoriamente em  $D(e, \omega_{t-1})$ ;
- 5     **senão**
- 6         seja  $C_i$  um ciclo arbitrário (por exemplo, o maior) contendo  $e_i^1$  e  $e_i^2$  tal que  $|C_i| = 2k_i$  e RECOLORIR todas as arestas  $e \in C_i \setminus S(C_i)$  seguindo a ordem pré-fixada e escolhendo em cada instante  $t > m$  uma cor uniformemente aleatoriamente em  $D(e, \omega_{t-1})$ .
- 7     **fim**
- 8 **fim**

O processo descrito na linha 2 de CORVAL é chamado um *passo* de CORVAL e  $S(C_i)$  é a semente de  $C_i$  definida na Definição 3.2. É fácil ver que se  $S = \{(e_1^1, e_1^2, k_1), \dots, (e_n^1, e_n^2, k_n)\}$  é a entrada de CORVAL, o algoritmo executará exatamente  $n$  passos. Ainda mais, com tal entrada  $S$ , CORVAL atribui uma cor a uma aresta exatamente  $m + \sum_{i=1}^n (2k_i - 2)$  vezes, isto é, sua execução dura exatamente  $m + \sum_{i=1}^n (2k_i - 2)$  instantes.

**Observação 3.17.** *Nosso algoritmo CORVAL é similar mas não é idêntico ao algoritmo COLORVAL descrito em [16]. A diferença está no fato de que em [16], em cada passo  $i$  de COLORVAL todas as arestas de  $C_i$  são recoloridas, sendo que em nosso CORVAL recolorimos apenas as arestas em  $C_i \setminus S(C_i)$ .*

Note que o Algoritmo CORVAL produz como saída uma única sequência de ciclos  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\} \subset X^n$ . Dizemos que o algoritmo CORVAL é *bem sucedido* se todos os ciclos em  $\mathcal{C}$  foram escolhidos como ciclos bicromáticos. O lema abaixo fornece uma cota superior para a probabilidade de CORVAL ser bem sucedido.

**Lema 3.18.** *Dada uma sequência admissível  $S = \{(e_1^1, e_1^2, k_1), \dots, (e_n^1, e_n^2, k_n)\}$ , temos que*

$$\mathbb{P}(\text{CORVAL é bem sucedido em } S) \leq \left( \frac{1}{\lceil \gamma(\Delta - 1) \rceil + 1} \right)^n \prod_{s=1}^n \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{\lceil \gamma(\Delta - 1) \rceil + 1} \right)^{\Delta - 1} \right)^{2k_s - 3}. \quad (3.4)$$

A prova do Lema 3.18 está detalhada no Apêndice A, ela é idêntica à prova do Lema 5 em [16], onde a Observação 3.16 é crucial. Isso é devido ao fato de que nosso CORVAL é levemente diferente de COLORVAL, descrito em [16] (relembre a Observação 3.17). O ponto crucial é que, dado um ciclo  $C$  pertencente à saída  $\mathcal{C}$  de CORVAL, a probabilidade das arestas da semente  $S(C)$  (arestas que Giotis et al. chamam de *arestas iniciais de  $C$* ) receberem as cores que tornam  $C$  bicromático é (por definição) igual a um e assim eles não desempenham nenhum papel na estimativa (3.4). Abaixo, como feito em [16], reescrevemos a estimativa (3.4).

**Observação 3.19.** *Observe que  $\lceil \gamma(\Delta - 1) \rceil + 1 \geq \gamma(\Delta - 1) + 1$ . Usando a desigualdade  $1 - \frac{1}{1+x} > e^{-\frac{1}{x}}$ , válida para todo  $x > 0$ , a cota (3.4) pode ser simplificada da seguinte maneira*

$$\mathbb{P}(\text{CORVAL é bem sucedido em } S) \leq \frac{1}{(\Delta - 1)^n} \prod_{s=1}^n \left( \frac{1}{\gamma} \left( 1 - e^{-\frac{1}{\gamma}} \right)^{2k_s - 3} \right). \quad (3.5)$$

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $F \in \mathfrak{F}_n$ , lembrando que  $\mathfrak{F}_n$  é o conjunto de florestas testemunhas com exatamente  $n$  vértices internos. Suponha que  $F$  seja uma floresta associada ao registro  $\mathcal{L} = ((e_1, C_1), \dots, (e_n, C_n))$ , podemos associar unicamente a  $F$  a sequência admissível  $S = \{(e_1^1, e_1^2, k_1), \dots, (e_n^1, e_n^2, k_n)\}$  da seguinte maneira

- a) defina  $e_i^1$  em  $S$  como o  $e_i$  em  $\mathcal{L}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ ;
- b) defina  $e_i^2$  em  $S$  como sendo o vizinho de  $e_i^1$  em  $C_i$  (em  $\mathcal{L}$ ) tal que  $(e_i^1, e_i^2)$  seja ordenado;
- c) e defina  $k_i = \frac{|C_i|}{2}$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Dado  $S \in \mathfrak{S}$ , seja  $\mathcal{F}_S$  o conjunto de todas as florestas testemunhas em  $\mathfrak{F}$  tais que  $S$  é a sequência admissível associada correspondente. A Proposição 1 em [16] pode ser escrita como o lema abaixo.

**Lema 3.20.** *Dada uma sequência admissível  $S \in \mathfrak{S}$ , temos que*

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_S} \mathbb{P}(\text{ALGORITMO-COLORAÇÃO produz a floresta testemunha } F) \leq \mathbb{P}(\text{CORVAL é bem sucedido em } S).$$

*Demonstração.* Para qualquer  $F \in \mathcal{F}_S$ , seja  $Z_F$  o evento “o ALGORITMO-COLORAÇÃO produz a floresta testemunha  $F$ ”. Observe que

$$\mathbb{P} \left( \bigcup_{F \in \mathcal{F}_S} Z_F \right) = \sum_{F \in \mathcal{F}_S} \mathbb{P}(\text{ALGORITMO-COLORAÇÃO produz a floresta testemunha } F),$$

uma vez que os eventos  $Z_F$  são mutuamente disjuntos. Por outro lado,  $\mathbb{P} \left( \bigcup_{F \in \mathcal{F}_S} Z_F \right)$  é a probabilidade de que pelo menos uma floresta  $F \in \mathcal{F}_S$  seja a floresta testemunha produzida pelo ALGORITMO-COLORAÇÃO. Note que se todas as escolhas aleatórias feitas durante uma execução do ALGORITMO-COLORAÇÃO que produza um registro  $\mathcal{L}$ , tal que



sua floresta testemunha associada,  $F$ , esteja em  $\mathcal{F}_S$  também sejam feitas pelo algoritmo CORVAL com entrada  $S$ , então CORVAL é bem sucedido. Assim,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}_S} Z_F\right) \leq \mathbb{P}(\text{CORVAL é bem sucedido em } S).$$

□

Observe que o Lema 3.20 oferece uma cota superior para a probabilidade do ALGORITMO-COLORAÇÃO produzir uma floresta testemunha associada a um registro específico  $\mathcal{L}$ , que rotula os vértices da floresta, enquanto na probabilidade  $P_n$ , que desejamos calcular, os rótulos dos vértices da floresta não são importantes, apenas a quantidade  $n$  de vértices internos dessa floresta. Na próxima seção introduziremos então florestas não rotuladas para finalizar o cálculo de uma cota para  $P_n$ .

### 3.4 A floresta não rotulada

Todo o raciocínio desenvolvido nesta seção será feito visando a prova do seguinte teorema.

**Teorema 3.21.** *O índice cromático acíclico de arestas  $a'(G)$  de um grafo  $G$  com grau máximo  $\Delta$  admite a seguinte cota*

$$a'(G) \leq 3.569(\Delta - 1).$$

A estratégia para provar o Teorema 3.21 será mostrar que a probabilidade (3.3) do ALGORITMO-COLORAÇÃO durar  $n$  passos decai exponencialmente com  $n$ , o que implica que o ALGORITMO-COLORAÇÃO termina quase certamente retornando uma coloração acíclica de arestas.

Se o ALGORITMO-COLORAÇÃO dura  $n$  passos, então ele produz uma floresta testemunha com  $n$  vértices internos. Relembre que, se o vértice interno  $v$  de uma floresta testemunha possui como ciclo rótulo o ciclo  $C_v$ , então o vértice  $v$  possui exatamente  $|C_v| - 2$  filhos. Dado o registro  $\mathcal{L}$  do ALGORITMO-COLORAÇÃO tal que  $|\mathcal{L}| = n$  e dado a floresta testemunha  $F \in \mathfrak{F}_n$  associada a  $\mathcal{L}$  (isto é, com  $n$  vértices internos), removendo todos os rótulos dos vértices obtemos uma floresta testemunha não rotulada, que chamaremos de *floresta testemunha não rotulada* produzida pelo ALGORITMO-COLORAÇÃO e vamos denotá-la por  $\Phi$ . Essa floresta não rotulada  $\Phi$  é constituída por  $|E| = m$  árvores enraizadas ordenadas, possui um total de  $n$  vértices internos e é tal que cada vértice interno não rotulado  $v$  de  $\Phi$  possui  $|C_v| - 2$  filhos sendo  $C_v$  o rótulo do correspondente vértice em  $F$ .

A Figura 3.4 representa a floresta não rotulada obtida retirando-se os rótulos dos vértices da floresta testemunha  $F$  da Figura 3.3, obtida no Exemplo 3.13.

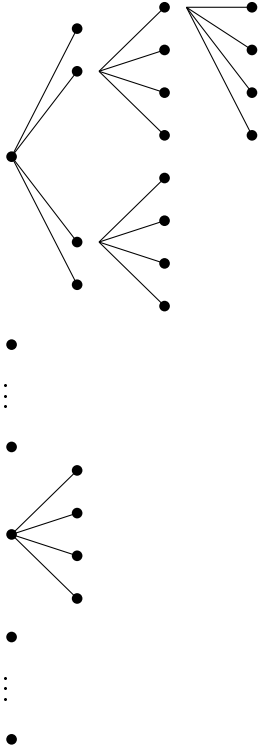


Figura 3.4: Floresta testemunha não rotulada  $\Phi$

Seja  $\mathcal{F}_n$  o conjunto de florestas não rotuladas constituídas por  $|E| = m$  árvores com  $n$  vértices internos e tal que cada vértice interno  $v$  possui um número de filhos no conjunto  $I = \{4, 6, 8, \dots\}$ . Para  $\Phi \in \mathcal{F}_n$  vamos definir

$$P_\Phi = \mathbb{P}(\Phi \text{ é a floresta testemunha não rotulada produzida pelo ALGORITMO-COLORAÇÃO}).$$

O lema abaixo é análogo ao que foi feito em [16], a diferença está, como sempre, nas sementes consideradas no ALGORITMO-COLORAÇÃO.

**Lema 3.22.** *Seja  $\Phi$  uma floresta em  $\mathcal{F}_n$  com vértices internos  $v_1, \dots, v_n$ . Seja  $2k_s - 2$  o número de filhos do vértice interno  $v_s \in \Phi$ ,  $s \in \{1, \dots, n\}$ . Então*

$$P_\Phi \leq \prod_{s=1}^n \left( \frac{1}{\gamma} \left( 1 - e^{-\frac{1}{\gamma}} \right)^{2k_s - 3} \right).$$

*Demonstração.* Dada  $\Phi \in \mathcal{F}_n$ ,  $\Phi$  é a floresta testemunha não rotulada associada a uma execução do ALGORITMO-COLORAÇÃO se, e só se, essa execução produz um registro  $\mathcal{L} = ((e_1, C_1), \dots, (e_n, C_n))$  que pode ser associado a  $\Phi$ . Então, vamos conferir quais são as possibilidades para  $\mathcal{L}$  e calcular a probabilidade de que uma execução produza um tal registro  $\mathcal{L}$ .

Primeiramente observe que, dada  $\Phi \in \mathcal{F}_n$ , conseguimos determinar a aresta rótulo de cada raiz de cada uma das  $m$  árvores que compõem essa floresta. De fato, as árvores são ordenadas de acordo com as arestas rótulos das raízes, da maior aresta para a menor

(veja Figura 3.3). Sendo assim a primeira aresta rótulo  $e_1$  do registro  $\mathcal{L}$  é unicamente determinada como sendo a  $(m-i)$ -ésima aresta, se as primeiras  $i$  árvores de  $\Phi$  são apenas raízes sem filhos.

Agora precisamos de um ciclo  $C_1$ , com  $e_1 \in C_1$ , que seja bicromático para formar o primeiro par de  $\mathcal{L}$ . A floresta não rotulada  $\Phi$  nos informa que este ciclo  $C_1$  deve possuir um número de arestas igual a  $2k_1 = s_{v_1} + 2$ , onde  $s_{v_1}$  é o número de filhos da raiz  $v_1$  da primeira árvore não trivial de  $\Phi$ . Vamos escolher uma aresta  $e_1^2$  dentre aquelas incidentes ao maior vértice de  $e_1$ ; observe que temos no máximo  $(\Delta-1)$  possibilidades para  $e_1^2$ . Assim temos uma tripla  $(e_1, e_1^2, k_1)$  tal que  $C_1$  deve ser um dos ciclos de tamanho  $2k_1$  contendo o par ordenado  $(e_1, e_1^2)$ . Para cada possível  $C_1$ , as duas arestas de  $C_1$  com paridade oposta que recebem suas cores primeiramente formam a semente  $S(C_1)$ , e assim sabemos quais são as arestas rótulos para todos os filhos de  $(e_1, C_1)$  em  $\Phi$ , nomeadamente, serão as arestas em  $C_1 \setminus S(C_1)$  em ordem decrescente.

Assim, a próxima aresta rótulo  $e_2$  em  $\mathcal{L}$  é determinada como o rótulo de  $v_2$ , primeiro filho do vértice  $v_1$ , que não é apenas uma folha. Novamente precisamos de um ciclo  $C_2$  contendo  $e_2$  que seja bicromático, tal que  $C_2$  possua exatamente  $2k_2 = s_{v_2} + 2$  arestas, onde  $s_{v_2}$  é o número de filhos que esse primeiro filho de  $v_1$  possui. Para determinar esse ciclo, vamos escolher uma aresta  $e_2^2$  incidente ao maior vértice de  $e_2$ ; temos no máximo  $(\Delta-1)$  opções. Observe então que agora temos uma tripla admissível  $(e_2, e_2^2, k_2)$  tal que precisamos que exista um ciclo bicromático  $C_2$  tal que  $e_2$  e  $e_2^2$  sejam vizinhos ordenados e  $|C_2| = 2k_2$ .

Procedemos dessa maneira seguindo a estrutura de  $\Phi$ : quando uma folha é atingida, retornamos ao último vértice interno  $v$  (*depth-first search*), passamos para o próximo filho de  $v$  que não seja uma folha e o rótulo deste vértice será a próxima entrada em  $\mathcal{L}$ . Quando uma árvore de  $\Phi$  é exaurida, vamos para a raiz da próxima árvore não trivial.

Como  $\Phi$  possui  $n$  vértices internos, teremos um fator  $(\Delta-1)^n$  para as possibilidades para cada  $e_i^2$ , com  $i = 1, \dots, n$ . Observe que em cada passo teremos uma tripla admissível  $(e_s, e_s^2, k_s)$  tal que precisamos que exista um ciclo bicromático  $C_s$  tal que  $|C_s| = 2k_s$  sendo que  $e_s$  e  $e_s^2$  são arestas vizinhas ordenadas em  $C_s$ . Assim, o que precisamos de fato é que o Algoritmo CORVAL seja bem sucedido com a entrada  $S = \{(e_1, e_1^2, k_1), \dots, (e_n, e_n^2, k_n)\}$ . Pelo Lema 3.20, a probabilidade de que pelo menos uma floresta  $F \in \mathcal{F}_S$  se torne a floresta testemunha do ALGORITMO-COLORAÇÃO é cotada pela probabilidade de CORVAL ser bem sucedido em  $S$ . Relembrando a Observação 3.19,

$$\mathbb{P}(\text{CORVAL é bem sucedido em } S) \leq \frac{1}{(\Delta-1)^n} \prod_{s=1}^n \left( \frac{1}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{1}{\gamma}}\right)^{2k_s-3} \right),$$

e contando o fator  $(\Delta-1)^n$ , temos que

$$P_{\Phi} \leq \prod_{s=1}^n \left( \frac{1}{\gamma} \left( 1 - e^{-\frac{1}{\gamma}} \right)^{2k_s-3} \right).$$

□

Assim a probabilidade  $P_n$  (veja (3.3)) de que o ALGORITMO-COLORAÇÃO dure  $n$  passos é cotada por

$$P_n \leq \sum_{\Phi \in \mathcal{F}_n} P_{\Phi}.$$

Para estimar  $\sum_{\Phi \in \mathcal{F}_n} P_{\Phi}$ , observe que cada floresta  $\Phi \in \mathcal{F}_n$  é constituída por  $m$  árvores  $\tau_1, \dots, \tau_m$  com  $n_1, \dots, n_m$  vértices internos respectivamente, tal que  $n_i \geq 0$  para todos  $i = 1, \dots, m$  e tal que  $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ . Note que o número de filhos de um vértice interno de qualquer árvore  $\tau \in \Phi$  está no conjunto  $I = \{4, 6, 8, \dots\}$ . Vamos denotar por  $\mathcal{T}$  o conjunto de todas as árvores ordenadas com número de filhos de cada vértice interno no conjunto  $I$  e seja  $\mathcal{T}_n$  o conjunto de árvores em  $\mathcal{T}$  com  $n$  vértices internos.

Para cada  $\tau \in \mathcal{T}$ , seja  $V_{\tau}$  o conjunto do seus vértices internos. Se  $v \in V_{\tau}$ , denotamos por  $s_v$  o seu número de filhos e seja  $k_v = \frac{s_v+2}{2} \in \{3, 4, \dots\}$ . Assim defina o peso de  $\tau$  como

$$\omega(\tau) = \prod_{v \in V_{\tau}} w_{k_v},$$

onde

$$w_k = \left( \frac{1}{\gamma} \left( 1 - e^{-\frac{1}{\gamma}} \right)^{2k-3} \right), \quad (3.6)$$

para  $k \geq 3$ . Para um dado  $n \in \mathbb{N}$ , defina

$$Q_n = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_n} \omega(\tau),$$

a soma dos pesos de todas tais árvores com  $n$  vértices internos. Assim, a probabilidade de que o ALGORITMO-COLORAÇÃO dure  $n$  passos é cotada por

$$P_n \leq \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_m = n \\ n_i \geq 0}} Q_{n_1} \dots Q_{n_m}. \quad (3.7)$$

É fácil ver que  $Q_n$  é definida pela relação de recorrência

$$Q_n = \sum_{k \geq 3} w_k \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_{2k-2} = n-1 \\ n_1 \geq 0, \dots, n_{2k-2} \geq 0}} Q_{n_1} \dots Q_{n_{2k-2}}, \quad (3.8)$$

com  $Q_0 = 1$ . Agora, definindo

$$W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n z^n,$$

Por (3.8) temos que

$$W(z) = z \sum_{k \geq 3} w_k (1 + W(z))^{2k-2}.$$

Finalmente, lembrando a definição (3.6) e definindo

$$\phi_E(x) = \sum_{k \geq 3} w_k (1 + x)^{2k-2} = \frac{1}{\gamma} \times \frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{\gamma}}\right)^3 (x + 1)^4}{1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{\gamma}}\right)^2 (x + 1)^2},$$

temos que

$$W(z) = z\phi_E(W(z)).$$

Agora usaremos um conhecido resultado de combinatória analítica usado para contar vários tipos de árvores (veja por exemplo [14], Proposição IV.5 pág. 278) que diz que a solução formal de  $W(z) = z\phi_E(W(z))$  é tal que seus coeficientes satisfaçam a relação

$$Q_n \leq \rho_\gamma^n$$

onde

$$\rho_\gamma = \min_{x > 0} \frac{\phi_E(x)}{x}.$$

Cálculos mostram que para  $\gamma = 1.569$  ou maior temos que  $\rho_\gamma < 1$ . Portanto, se  $\gamma \geq 1.569$ , lembrando (3.7), temos que

$$P_n \leq (n + 1)^m \rho_\gamma^n.$$

Em outras palavras, a probabilidade de que o ALGORITMO-COLORAÇÃO execute  $n$  passos decai exponencialmente em  $n$  quando  $n$  é suficientemente grande e assim o algoritmo para. Logo, o grafo  $G$  possui uma coloração acíclica de arestas se  $N \geq 3.569(\Delta - 1)$  e com isso finalizamos a prova do Teorema 3.21.

## Capítulo 4

# Uma variante do algoritmo de Moser-Tardos

Neste capítulo generalizaremos a estratégia usada no capítulo anterior para obter uma variante do Algoritmo de Moser-Tardos que aborde os demais problemas resolvidos pelo LLL. Muitas das definições e dos teoremas neste capítulo serão inspirados nas definições e teoremas do Capítulo 3, e portanto usaremos a mesma notação já introduzida no capítulo anterior.

Assim como no trabalho de Moser e Tardos, seja  $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$  um conjunto com  $m \in \mathbb{N}$  variáveis aleatórias mutuamente independentes em um espaço de probabilidade comum, seja  $X$  um conjunto finito e seja  $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x \in X}$  uma coleção finita de eventos que dependem das variáveis em  $\Psi$ . Para cada  $A_x \in \mathcal{A}$  vamos denotar por  $vbl(A_x) \subset \Psi$  o conjunto de variáveis das quais o evento  $A$  depende, isto é, o conjunto das variáveis em  $\Psi$  tais que conhecendo o seus valores sabemos dizer se o evento  $A$  ocorre ou não, e vamos representar por  $|A| = |vbl(A)|$ .

**Definição 4.1** (Semente). Seja  $A_x \in \mathcal{A}$  um evento que depende das variáveis  $vbl(A_x) \subset \Psi$ . Um subconjunto próprio  $S(A_x) \subset vbl(A_x)$  é chamado uma *semente* de  $A_x$  se, dado que o evento  $A_x$  está ocorrendo, se ressortearmos apenas as variáveis em  $vbl(A_x) \setminus S(A_x)$  mantendo o valor de todas as demais variáveis, então nessa nova configuração para todo evento  $A_y \in \mathcal{A}$  a probabilidade de ocorrência de  $A_y$  é no máximo  $\mathbb{P}(A_y)$  e nenhum outro subconjunto  $U$ , com  $vbl(A_x) \supset U \supset S(A_x)$ , possui essa propriedade.

A Definição 4.1 nos diz que uma vez que temos o conhecimento da ocorrência de um evento  $A$ , deixar as variáveis em  $S(A)$  sem ressortear não ajuda nenhum outro evento a ocorrer (incluindo o próprio evento  $A$ ). Se  $A$  é um evento *elementar*, isto é, tal que existe apenas uma configuração  $\omega$  que faz com que ele ocorra, então  $S = \emptyset$  é a única semente de  $A$ .

**Observação 4.2.** Nos casos em que as variáveis além de serem independentes são também identicamente distribuídas com distribuição uniforme em  $\{1, \dots, N\}$  (que é o caso da

maioria dos exemplos nos quais o LLL é aplicado), a Definição 4.1 é equivalente a dizer que denotando por  $\Omega_A$  o conjunto de todas as configurações que fazem com que o evento  $A$  ocorra, temos que  $|\Omega_A| = N^{|S(A)|}$ . Podemos notar que nesse caso, se sabemos que o evento  $A$  ocorre e sabemos os valores das variáveis em  $S(A)$ , então somos capazes de deduzir o valor das demais variáveis em  $vbl(A)$ . Da mesma maneira, se apenas temos a informação que o evento  $A$  está ocorrendo, então qualquer configuração das variáveis em  $S(A)$  é possível.

**Exemplo 4.3.** *Sejam  $G = (V, E)$  um grafo com grau máximo  $\Delta$  e  $N \in \mathbb{N}$ . Uma coloração dos vértices de  $G$  é uma função  $c : V \rightarrow [N]$ . Suponha que  $\mathbb{P}(c(v) = i) = \frac{1}{N}$  para todo  $v \in V$  e para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Então, nesse caso  $\Psi = \{\psi_v\}_{v \in V}$  onde  $\psi_v = \{\text{cor do vértice } v\}$ .*

Uma coloração de  $G$  é chamada não repetitiva se, para qualquer  $k \geq 1$ , nenhum caminho  $p = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k}\}$  é repetitivo, isto é, nenhum caminho é tal que  $c(v_i) = c(v_{i+k})$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$  (a segunda metade é colorida da mesma forma que a primeira metade). Em particular, o caso  $k = 1$  corresponde à definição de coloração própria. Dado um caminho  $p = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k}\}$ , considere o evento  $A_p = \{p \text{ é um caminho repetitivo}\}$ , nesse caso  $vbl(A_p) = \{\psi_{v_1}, \dots, \psi_{v_{2k}}\}$ . Observe que se  $A_p$  ocorre, para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$  sabemos que os vértices  $v_i$  e  $v_{k+i}$  estão coloridos com a mesma cor. Considere o conjunto de variáveis  $S = \{\psi_{v_1}, \dots, \psi_{v_k}\}$ , saber que  $A_p$  ocorre não nos dá nenhuma informação sobre o valor das variáveis em  $S$ , de fato os vértices  $v_1, \dots, v_k$  podem ter sido coloridos com qualquer cor. Assim, deixando as variáveis em  $S$  sem ressortear não favorece a ocorrência de nenhum outro evento. Por outro lado, considerando agora qualquer conjunto  $T_j = \{\psi_{v_1}, \dots, \psi_{v_k}, \psi_{v_{k+j}}\} \subset vbl(A_p)$ , com  $j \in \{1, \dots, k\}$ , o conhecimento da ocorrência de  $A_p$  indica que apenas configurações tais que  $v_j$  e  $v_{k+j}$  possuam a mesma cor são possíveis, ou seja, configurações nas quais  $\psi_{v_j} = \psi_{v_{k+j}}$ . Assim, deixar as variáveis em  $T_j$  sem ressortear favorece a ocorrência de  $A_p$ , bem como pode favorecer a ocorrência de algum evento  $A_{p'}$ , onde  $p'$  é um caminho possuindo os vértices  $v_j$  e  $v_{k+j}$  em suas metades opostas. Concluimos então que  $S$  é uma semente do evento  $A_p$ .

No Exemplo 4.3 usamos a Definição 4.1 para mostrar que  $S$  é uma semente de  $A_p$ , entretanto, como as variáveis nesse exemplo também são identicamente distribuídas, nós poderíamos ter usado a Observação 4.2: note que nesse caso  $|\Omega_{A_p}| = N^k$ , enquanto  $|S| = k$ .

**Definição 4.4.** Dado um evento  $A$  e uma variável  $\psi \in vbl(A)$ , vamos representar por  $S_\psi(A)$  uma semente de  $A$  tal que  $\psi \notin S_\psi(A)$ . Se o evento  $A$  e a variável  $\psi \in vbl(A)$  são tais que uma tal semente não existe, então definimos  $S_\psi(A) = \emptyset$ . Se a cardinalidade  $|S_\psi(A)|$  é a mesma para todo  $\psi \in vbl(A)$ , definimos  $\|A\| = |S_\psi(A)|$ , caso contrário, defina  $\|A\| = 0$ .

Observe que no Exemplo 4.3, se tomamos  $S' = \{\psi_{v_{k+1}}, \dots, \psi_{v_{2k}}\}$  e  $S'' = \{\psi_{v_1}, \dots, \psi_{v_{k-1}}, \psi_{v_{2k}}\}$ , temos que  $S'$  e  $S''$  também são sementes de  $A_p$ . Dado um evento  $A$  e uma variável  $\psi$ , em geral a semente  $S_\psi(A)$  não é única. Assim no Exemplo 4.3 tanto  $S'$  quanto  $S''$  são possíveis candidatos para  $S_{\psi_{v_k}}(A_p)$ .

**Observação 4.5.** *Dado um evento  $A$  e uma variável  $\psi \in vbl(A)$ , fixamos uma regra tal que  $S_\psi(A)$  é unicamente determinada.*

Vamos classificar os eventos  $A \in \mathcal{A}$  de acordo com  $|A| = |vbl(A)|$  e  $\|A\| = |S_\psi(A)|$ . Vamos definir  $E_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{N}$  como

$$E_{\mathcal{A}} = \{s \in \mathbb{N} : \exists A \in \mathcal{A} \text{ tal que } |A| - \|A\| = s\} \quad (4.1)$$

e para  $s \in \mathbb{N}$ , definimos

$$\mathcal{A}_s = \{A \in \mathcal{A} : |A| - \|A\| = s\}. \quad (4.2)$$

Finalmente, para todo  $\psi \in \Psi$ , definimos  $d_s(\psi)$  como o número de eventos  $A \in \mathcal{A}_s$  tais que  $\psi \in vbl(A)$ ,

$$d_s(\psi) = |\{A \in \mathcal{A}_s : \psi \in vbl(A)\}|, \quad (4.3)$$

e definimos

$$d_s = \max_{\psi \in \Psi} d_s(\psi). \quad (4.4)$$

Daqui em diante assumiremos que uma ordem total é fixada no conjunto de variáveis  $\Psi$  bem como no conjunto de eventos  $\mathcal{A}$ .

Vamos descrever agora um procedimento chamado ALGORITMO-FLORESTA que sorteia (e eventualmente ressorteia) as variáveis em  $\Psi$ . Dada uma configuração  $\omega$  de todas as variáveis  $\Psi$ , diremos que  $\psi$  é *ruim* se existe algum evento  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $\psi \in vbl(A)$  e  $A$  ocorre na configuração  $\omega$ , e diremos que  $\psi$  é *boa* se não existe  $A \in \mathcal{A}$  ocorrendo na configuração  $\omega$  tal que  $\psi \in vbl(A)$ .

**Algoritmo 5:** ALGORITMO-FLORESTA

- 1 Sorteie todas as variáveis em  $\Psi$ ,
- 2 **enquanto** existir uma variável ruim, selecione o par  $(\psi, A)$  sendo  $\psi$  a menor variável ruim e  $A$  o menor evento ocorrendo tal que  $\psi \in vbl(A)$ , e **faça**
- 3   |   RESSORTEIO( $\psi, A$ ).
- 4 **fim**
- 5 **retorna** configuração atual

Um *passo* do ALGORITMO-FLORESTA é o processo descrito na Linha 2 de RESSORTEIO( $\psi, A$ ). Uma *fase* do ALGORITMO-FLORESTA é a coleção de passos feitos



**Algoritmo 6:** RESSORTEIO( $\psi, A$ )

```

1 para o par  $(\psi, A)$ , tome  $S_\psi(A)$  a semente de  $A$  tal que  $\psi$  não pertence a  $S_\psi(A)$ 
  e faça
2 | RESSORTEIE todas as variáveis em  $vbl(A) \setminus S_\psi(A)$ 
3 fim
4 enquanto existir uma variável ruim em  $vbl(A) \setminus S_\psi(A)$  seja  $\psi'$  a menor dessas
  variáveis (na ordem total escolhida) e seja  $A'$  o menor evento ocorrendo tal que
   $\psi' \in vbl(A')$ , e faça
5 | RESSORTEIO( $\psi', A'$ ).
6 fim

```

pelo ALGORITMO-FLORESTA durante uma chamada de RESSORTEIO( $\psi, A$ ) na Linha 3 do ALGORITMO-FLORESTA. Note que uma fase é composta por muitos passos, o primeiro passo da  $i$ -ésima fase será chamado de passo *raiz* da fase  $i$ . O *registro* do algoritmo é a lista

$$\mathcal{L} = ((\psi_1, A_1), (\psi_2, A_2), \dots)$$

constituída pelos passos dados pelo algoritmo durante a sua execução. Denotaremos por *variável rótulo* (resp. *evento rótulo*) qualquer variável (resp. evento) listada no registro  $\mathcal{L}$ . De acordo com as regras descritas acima,  $\mathcal{L}$  é uma variável aleatória determinada pelos sorteios realizados pelo algoritmo em cada passo. Se  $\mathcal{L}$  é finito, isto é, se  $|\mathcal{L}| = n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , então o algoritmo termina tendo executado  $n$  passos e produz uma configuração  $\omega \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (A^c)$ . Vamos definir

$$P_n = \mathbb{P}(|\mathcal{L}| = n). \quad (4.5)$$

Em outras palavras  $P_n$  é a probabilidade de que o ALGORITMO-FLORESTA execute  $n$  passos.

**Observação 4.6.** *Observe que, uma vez que  $\psi \notin S_\psi(A)$ , em RESSORTEIO( $\psi, A$ ) a variável  $\psi$  é sempre ressorteada.*

Agora estamos quase aptos a enunciar o principal teorema deste capítulo, precisamos apenas introduzir algumas notações. Para  $s \in E_{\mathcal{A}}$  (que foi definido em (4.1)), sejam

$$p_s = \max_{A \in \mathcal{A}_s} \mathbb{P}(A) \quad (4.6)$$

e

$$\phi_{E_{\mathcal{A}}}(x) = \sum_{s \in E_{\mathcal{A}}} p_s d_s (x+1)^s. \quad (4.7)$$

**Teorema 4.7.** *Suponha que*

$$\min_{x>0} \frac{\phi_{E_{\mathcal{A}}}(x)}{x} < 1, \quad (4.8)$$

então existe uma configuração das variáveis  $\Psi$  tal que nenhum evento da família  $\mathcal{A}$  ocorre.

**Observação 4.8.** Note que

$$\inf_{x>0} \frac{\phi_{E_{\mathcal{A}}}(x)}{x} = \phi'_{E_{\mathcal{A}}}(t),$$

sendo que  $t$  é a única raiz positiva da equação  $\phi_{E_{\mathcal{A}}}(x) - x\phi'_{E_{\mathcal{A}}}(x) = 0$ .

A próxima seção será dedicada a prova do Teorema 4.7.

## 4.1 Demonstração do Teorema 4.7

A estratégia para provar o Teorema 4.7 será mostrar que a probabilidade do ALGORITMO-FLORESTA durar pelo menos  $n$  passos decai exponencialmente em  $n$ , o que implica que ALGORITMO-FLORESTA termina quase certamente, retornando uma configuração de  $\Psi$  tal que todos os eventos em  $\mathcal{A}$  não ocorrem. Vamos começar provando algumas propriedades importantes do ALGORITMO-FLORESTA.

**Teorema 4.9.** *Considere qualquer chamada de  $\text{RESSORTEIO}(\psi, A)$  e seja  $Y$  o conjunto das variáveis boas no início da chamada. Se essa chamada termina, então todas as variáveis em  $Y \cup \{vbl(A) \setminus S_{\psi}(A)\}$  são boas ao final dessa chamada.*

*Demonstração.* De acordo com o algoritmo, se  $\text{RESSORTEIO}(\psi, A)$  termina então as variáveis em  $vbl(A) \setminus S_{\psi}(A)$  são boas, assim nós precisamos apenas provar que as variáveis em  $Y$  continuam sendo boas ao final de  $\text{RESSORTEIO}(\psi, A)$ . Suponha que  $\phi \in Y$  e que  $\text{RESSORTEIO}(\psi, A)$  termine após ter executado  $n$  passos. Suponha por absurdo que após esses  $n$  passos  $\phi$  se torne uma variável ruim. Isso significa que existe um evento  $B \in \mathcal{A}$  tal que  $\phi \in vbl(B)$ ,  $B$  não está ocorrendo no início da chamada de  $\text{RESSORTEIO}(\psi, A)$ , esse evento tem algumas de suas variáveis ressorteadas durante a execução de  $\text{RESSORTEIO}(\psi, A)$  e passa a ocorrer ao final desses  $n$  passos. A princípio esse evento  $B$  pode ter passado a ocorrer e parado de ocorrer diversas vezes durante os passos de  $\text{RESSORTEIO}(\psi, A)$ , mas como no final desse ressorteio  $B$  ocorre, isso significa que existe um último passo  $n' \leq n$  de  $\text{RESSORTEIO}(\psi, A)$  tal que  $B$  não estava ocorrendo no passo  $n' - 1$ , passou a ocorrer no passo  $n'$  e permaneceu ocorrendo durante os restantes  $n - n'$  passos de  $\text{RESSORTEIO}(\psi, A)$ .

Considere esse último passo  $n'$  de  $\text{RESSORTEIO}(\psi, A)$  em que o evento  $B$  passa a ocorrer e continua ocorrendo. Existe um evento  $C$  e uma variável  $\xi$  tal que o processo  $\text{RESSORTEIO}(\xi, C)$  foi chamado no passo  $n' - 1$  de  $\text{RESSORTEIO}(\psi, A)$ ,  $B$  compartilha no mínimo uma variável  $\varphi$  com o conjunto  $vbl(C) \setminus S_{\xi}(C)$  e  $B$  passou a ocorrer assim que as variáveis em  $vbl(C) \setminus S_{\xi}(C)$  foram ressorteadas. Entretanto, o algoritmo nos diz que qualquer variável em  $\{vbl(C) \setminus S_{\xi}(C)\}$  deve ser boa para que a chamada  $\text{RESSORTEIO}(\xi, C)$  termine, inclusive  $\varphi$ , o que ocorre em algum passo  $n'' > n'$ . Assim, nesse passo  $n''$ , como

$\varphi$  também pertence a  $vbl(B)$ , temos que  $B$  não pode ocorrer, o que contradiz a definição de  $n'$ .

□

**Lema 4.10.** *O ALGORITMO-FLORESTA executa no máximo  $m = |\Psi|$  fases.*

*Demonstração.* Considere duas fases  $l$  e  $s$ , com  $l < s$ , geradas por uma execução do ALGORITMO-FLORESTA e suponha que  $(\psi_l, A_l)$  e  $(\psi_s, A_s)$  sejam os pares ressorteados no passo raiz da fase  $l$  e da fase  $s$  respectivamente. Pelo Teorema 4.9, todas as variáveis em  $vbl(A_l) \setminus S_{\psi_l}(A_l)$  estão boas quando a fase  $l$  termina e no começo de cada fase sucessiva. Em particular, pela Observação 4.6, como  $\psi_l \in vbl(A_l) \setminus S_{\psi_l}(A_l)$ , temos que  $\psi_l$  é boa quando a fase  $l$  termina e assim  $\psi_l \notin vbl(A_s)$ . Em conclusão  $\psi_l \neq \psi_s$ .

□

É importante notar que o Lema 4.10 funciona uma vez que a variável rótulo nunca está na semente, e portanto a variável rótulo pode ser ressorteada e se tornar boa.

### 4.1.1 A floresta testemunha

Assim como feito no Capítulo 3, agora também associaremos a cada execução do algoritmo uma floresta rotulada, formada por árvores rotuladas enraizadas cujos vértices são rotulados pelos pares  $(\psi, A)$  pertencentes ao registro  $\mathcal{L}$ .

Suponha que o algoritmo execute  $r$  fases e que durante a fase  $s$ ,  $s \in \{1, \dots, r\}$ , o algoritmo execute  $n_s$  passos, de maneira que o registro do algoritmo seja

$$\mathcal{L} = ((\psi_1^1, A_1^1), \dots, (\psi_{n_1}^1, A_{n_1}^1), (\psi_1^2, A_1^2), \dots, (\psi_{n_2}^2, A_{n_2}^2), \dots, (\psi_1^r, A_1^r), \dots, (\psi_{n_r}^r, A_{n_r}^r)). \quad (4.9)$$

A cada fase  $s$ ,  $1 \leq s \leq r$ , associaremos uma árvore  $\tau'_s$ . Sejam

$$(\psi_1^s, A_1^s), \dots, (\psi_i^s, A_i^s), \dots, (\psi_{n_s}^s, A_{n_s}^s) \quad (4.10)$$

os pares ressorteados na fase  $s$ . Construímos a árvore  $\tau'_s$  da seguinte maneira.

- a) A raiz de  $\tau'_s$  é rotulada por  $(\psi_1^s, A_1^s)$ , o par ressorteado no passo raiz da fase  $s$ .
- b) Para  $i > 1$ , procedemos checando se  $(\psi_i^s, A_i^s)$  é tal que  $\psi_i^s \in (vbl(A_{i-1}^s) \setminus S_{\psi_{i-1}^s}(A_{i-1}^s))$ , - se sim, adicionamos  $(\psi_i^s, A_i^s)$  como um filho de  $(\psi_{i-1}^s, A_{i-1}^s)$ , - caso contrário, voltamos em (4.10) checando os ancestrais (Definição 3.8) do vértice rotulado por  $(\psi_{i-1}^s, A_{i-1}^s)$  até encontrar um par  $(\psi_j^s, A_j^s)$ , com  $j < i$ , tal que  $\psi_i^s \in (vbl(A_j^s) \setminus S_{\psi_j^s}(A_j^s))$ , e adicionamos  $(\psi_i^s, A_i^s)$  como um filho de  $(\psi_j^s, A_j^s)$ .

Observe que pela construção do ALGORITMO-FLORESTA, todos os pares  $(\psi_i^s, A_i^s)$ , com  $i = 1, \dots, n_s$ , podem ser adicionados a  $\tau'_s$  dessa maneira, assim  $\tau'_s$  possui  $n_s$  vértices (incluindo folhas) com rótulos  $(\psi_i^s, A_i^s)$  com  $i = 1, \dots, n_s$ . Pelo Teorema 4.9 o par  $(\psi_1^{s+1}, A_1^{s+1})$  é o primeiro par em (4.9) que não pode ser adicionado a  $\tau'_s$  seguindo as

instruções acima, então construímos uma nova árvore  $\tau'_{s+1}$  com raiz  $(\psi_1^{s+1}, A_1^{s+1})$  seguindo a mesma regra descrita para construir  $\tau'_s$ .

Note que os vértices da floresta definida acima são naturalmente ordenados de acordo com a ordem natural dos passos dados pelo algoritmo. A floresta  $F' = \{\tau'_1, \dots, \tau'_r\}$  assim obtida unicamente associada ao registro  $\mathcal{L}$  é tal que, para cada  $s \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\tau'_s$  é uma árvore enraizada ordenada com  $n_s$  vértices e cada vértice de  $\tau'_s$  possui rótulo  $(\psi, A)$  onde  $\psi \in \text{vbl}(A)$  e  $A \in \mathcal{A}$ . Pelo Lema 4.10 temos que  $r \leq m$  e assim a floresta  $F'$  contém no máximo  $m$  árvores.

Observe também que em cada árvore  $\tau'_s$  de  $F'$  a lista dos rótulos dos vértices de  $\tau'_s$ , ordenados de acordo com *depth-first search*, coincide com a lista (4.10).

**Observação 4.11.** *Por construção, a correspondência  $\mathcal{L} \mapsto F'$  é uma injeção.*

O próximo lema é análogo ao Lema 3.11.

**Lema 4.12.** *Considere uma árvore  $\tau' \in F'$ , e sejam  $v_i$  e  $v_j$  dois vértices em  $\tau'$  com rótulos  $(\psi_i, A_i)$  e  $(\psi_j, A_j)$  respectivamente.*

- a) *Se  $v_i$  é um filho de  $v_j$ , então  $\psi_i \in (\text{vbl}(A_j) \setminus S_{\psi_j}(A_j))$ .*
- b) *Se  $v_i$  e  $v_j$  são irmãos em  $\tau'$ , então  $\psi_i \neq \psi_j$ .*
- c) *Qualquer vértice  $v \in \tau'$  com rótulo  $(\psi, A)$  possui no máximo  $|A| - \|A\|$  filhos, onde  $|A| = |\text{vbl}(A)|$  e  $\|A\| = |S_\psi(A)|$  (ver Definição 4.4).*

*Demonstração.*

a) Segue da definição da construção da floresta.

b) Como  $v_i$  e  $v_j$  são irmãos, suponha que  $v_i$  e  $v_j$  sejam o  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo filhos de algum vértice em  $\tau'$ , com  $i < j$  na ordem natural dos vértices de  $\tau'$  induzida pelos passos do algoritmo. Para  $q$  tal que  $i \leq q < j$ , seja  $(\psi_q, A_q)$  o rótulo do  $q$ -ésimo irmão. Pelo Teorema 4.9 quando  $\text{RESSORTEIO}(\psi_q, A_q)$  termina, todas as variáveis rótulos  $\psi_i, \dots, \psi_q$  dos irmãos de  $v_j$  estão boas, assim como todas as variáveis em  $(\text{vbl}(A_i) \setminus S_{\psi_i}(A_i)) \cup \dots \cup (\text{vbl}(A_q) \setminus S_{\psi_q}(A_q))$ . Dessa maneira  $\psi_j$  não pode estar no conjunto  $\{\psi_i, \psi_{i+1}, \dots, \psi_{j-1}\}$ .

c) Segue dos itens a) e b).

□

Dada uma floresta  $F'$  produzida pelo algoritmo, seja  $\Psi_{F'}$  o conjunto das variáveis que rotula as raízes das árvores da floresta, isto é,

$$\Psi_{F'} = \{\psi \in \Psi; \exists A \in \mathcal{A} \text{ tal que } (\psi, A) \text{ é raiz de alguma } \tau' \in F'\}.$$

A prova do Lema 4.10 garante que as variáveis em  $\Psi_{F'}$  são todas distintas.

**Definição 4.13** (Floresta testemunha). Dado o registro  $\mathcal{L}$  de uma execução do ALGORITMO-FLORESTA e a floresta  $F'$ , associamos uma nova floresta  $F$  ao ALGORITMO-FLORESTA adicionando a  $F'$  novos vértices da seguinte maneira:

- 1) Para cada variável em  $\psi \in \Psi \setminus \Psi_{F'}$  adicionamos à floresta  $F'$  uma nova raiz isolada com o rótulo  $(\psi, \emptyset)$ .
- 2) Para cada vértice  $v \in F'$  com rótulo  $(\psi, A)$  com menos de  $|A| - \|A\|$  filhos, faça o seguinte: Seja  $H_v$  o conjunto das variáveis em  $vbl(A) \setminus S_\psi(A)$  que não são variáveis rótulos dos filhos de  $v$ . Para cada  $\psi \in H_v$  adicionamos a  $v$  uma folha com rótulo  $(\psi, \emptyset)$  de modo que  $v$  possua agora exatamente  $|A| - \|A\|$  filhos.

A nova floresta rotulada  $F$  é chamada *floresta testemunha* produzida pelo ALGORITMO-FLORESTA.

De fato, o procedimento descrito acima da criação da floresta rotulada é muito semelhante ao que foi descrito na Seção 3.2. As árvores continuam sendo ordenadas de acordo com a variável rótulo, a diferença é que neste caso as variáveis estão ordenadas da menor para a maior, enquanto na Seção 3.2 elas estão ordenadas da maior para a menor (veja a Figura 3.3).

Observe que uma floresta testemunha  $F$  (que é uma variável aleatória) possui as seguintes propriedades:

1.  $F$  é constituída por exatamente  $|\Psi| = m$  árvores enraizadas rotuladas  $\tau_1, \dots, \tau_m$  (algumas das quais são apenas vértices isolados), sendo que a variável rótulo de  $\tau_i$  é a variável  $\psi_i$ .
2. Seja  $u$  um filho do vértice  $v$  em  $\tau \in F$  e suponha que  $(\psi_u, A_u)$  e  $(\psi_v, A_v)$  sejam seus rótulos respectivamente. Então  $\psi_u \in vbl(A_v)$ .
3. Cada vértice interno  $v$  de  $\tau \in F$  possui um rótulo  $(\psi_v, A_v)$ , onde  $\psi_v \in vbl(A_v)$  e  $A_v \in \mathcal{A}$ , enquanto cada folha  $\ell$  de  $\tau$  possui um rótulo  $(\psi_\ell, \emptyset)$  tal que  $\psi_\ell \in vbl(A_w)$ , onde  $w$  é o pai de  $\ell$ .
4. Suponha que  $(\psi_i, A_i)$  e  $(\psi_j, A_j)$  sejam os rótulos de dois irmãos quaisquer em alguma árvore  $\tau \in F$ , então  $\psi_i \neq \psi_j$ .
5. Seja  $v$  um vértice interno qualquer de uma árvore  $\tau \in F$  rotulado por  $(\psi, A)$ , então o vértice  $v$  possui exatamente  $|A| - \|A\|$  filhos.

Seja  $\mathfrak{F}_n$  o conjunto de florestas rotuladas contendo exatamente  $n$  vértices internos satisfazendo as propriedades 1-5 listadas acima e seja  $\mathfrak{F} = \cup_{n \geq 0} \mathfrak{F}_n$ .

Relembre a Observação 4.11, que enfatiza que o mapeamento  $\mathcal{L} \mapsto F$  é uma injeção. Uma vez que o ALGORITMO-FLORESTA dura  $n$  passos se e só se a floresta

testemunha associada ao registro  $\mathcal{L}$  do ALGORITMO-FLORESTA possui  $n$  vértices internos, a probabilidade  $P_n$  definida em (4.5) pode ser escrita como

$$P_n = \mathbb{P}(\text{a floresta testemunha produzida pelo Algoritmo 5 possui } n \text{ vértices internos}). \quad (4.11)$$

### 4.1.2 O Algoritmo $L$ -CHECK

O nosso objetivo é estimar a probabilidade do ALGORITMO-FLORESTA produzir uma floresta testemunha  $F$  com  $n$  vértices internos. Para esse fim descrevemos agora um algoritmo, chamado  $L$ -CHECK, cuja entrada é uma sequência  $L = ((\psi_1, A_1), \dots, (\psi_n, A_n))$  tal que para cada entrada  $(\psi_i, A_i)$  temos que  $\psi_i \in \text{vbl}(A_i)$ . Essa sequência  $L$  não é necessariamente o registro de uma execução do ALGORITMO-FLORESTA. O algoritmo  $L$ -CHECK primeiramente sorteia todas as variáveis em  $\Psi$  e em seguida ressorteia algumas das variáveis em  $\Psi$ .

#### Algoritmo 7: $L$ -CHECK

<p><b>Entrada:</b> Sequência <math>L = ((\psi_1, A_1), \dots, (\psi_n, A_n))</math></p> <p>1 Sorteie todas as variáveis em <math>\Psi</math>.</p> <p>2 <b>para</b> <math>i = 1, \dots, n</math>, <b>faça</b></p> <p>3     <b>se</b> o evento <math>A_i</math> ocorre, <b>então</b></p> <p>4           tome <math>S_{\psi_i}(A_i)</math> a semente de <math>A_i</math> tal que <math>\psi_i \notin S_{\psi_i}(A_i)</math> e RESSORTEIE todas as</p> <p>             variáveis em <math>\text{vbl}(A_i) \setminus S_{\psi_i}(A_i)</math>.</p> <p>5     <b>senão</b></p> <p>6           retorne <i>falha</i>.</p> <p>7     <b>fim</b></p> <p>8 <b>fim</b></p>
--

O procedimento descrito na Linha 4 de  $L$ -CHECK é chamado de *passo*. Claramente, se  $L = ((\psi_1, A_1), \dots, (\psi_n, A_n))$  é a entrada de  $L$ -CHECK, sua execução durará exatamente  $n$  passos, caso não retorne falha, e observe que o Algoritmo  $L$ -CHECK não retorna falha se, e só se, em cada passo  $i$ , o evento  $A_i$  ocorre sob a atual configuração das variáveis.

**Observação 4.14.** *É importante ressaltar que na  $i$ -ésima repetição da Linha 3 de  $L$ -CHECK a única informação que temos é se o evento  $A_i$  ocorre ou não, de fato, não sabemos a configuração das variáveis em  $\text{vbl}(A_i)$ .*

**Observação 4.15.** *A semente na Linha 3 de  $L$ -CHECK é escolhida segundo a mesma regra fixada para o ALGORITMO-FLORESTA (veja Observação 4.5).*

**Lema 4.16.** *Seja  $L = ((\psi_1, A_1), \dots, (\psi_n, A_n))$ , então*

$$\mathbb{P}(L\text{-CHECK não retorna falha}) \leq \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

*Demonstração.* Considere o primeiro passo de  $L$ -CHECK: sorteamos todas as variáveis em  $\Psi$  e temos que checar se o evento  $A_1$  ocorre, se ele não ocorre então paramos, caso contrário, tomamos a semente  $S_{\psi_1}(A_1)$  e ressorteamos as variáveis em  $vbl(A_1) \setminus S_{\psi_1}(A_1)$ . Como  $S_{\psi_1}(A_1)$  é uma semente, temos que a nova configuração  $\omega$  é tal que qualquer evento  $A_x \in \mathcal{A}$  tem probabilidade no máximo  $\mathbb{P}(A_x)$  de ocorrer. Assim, por indução, em cada passo  $i$  a probabilidade de  $A_i$  ocorrer é  $\mathbb{P}(A_i)$ . Como o Algoritmo  $L$ -CHECK não retorna falha apenas se todos os eventos  $A_i$  ocorrem, então

$$\mathbb{P}(L\text{-CHECK não retorna falha)} \leq \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i). \quad (4.12)$$

□

**Observação 4.17.** Note que no  $i$ -ésimo passo de  $L$ -CHECK apenas os valores das variáveis em  $vbl(A_i) \setminus S_{\psi_i}(A_i)$  são ressorteadas, assim, no início do passo  $i + 1$  a distribuição das variáveis é a mesma que a da Linha 1. Esse não é o caso do ALGORITMO-FLORESTA, uma vez que isso significaria que o algoritmo não está fazendo nenhum progresso na busca de uma configuração tal que nenhum dos eventos em  $\mathcal{A}$  ocorra.

Na seção anterior associamos a cada registro  $\mathcal{L} = ((\psi_1, A_1), \dots, (\psi_n, A_n))$  uma floresta testemunha  $F$  com  $n$  vértices internos. Observe que os rótulos das folhas não estão incluídos no registro.

**Lema 4.18.** Dada a floresta  $F$  associada ao registro  $\mathcal{L} = ((\psi_1, A_1), \dots, (\psi_n, A_n))$ , temos que

$$\mathbb{P}(\text{ALGORITMO-FLORESTA produz a floresta testemunha } F) \leq \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i). \quad (4.13)$$

*Demonstração.* Observe que se todas as escolhas aleatórias feitas por uma execução do ALGORITMO-FLORESTA que produz  $F$  como floresta testemunha também forem feitas pelo Algoritmo  $L$ -CHECK com entrada  $\mathcal{L}$ , então em cada passo  $i$  o evento  $A_i$  ocorre, e portanto  $\mathcal{L}$ -CHECK não retorna falha. Assim,

$$\mathbb{P}(\text{ALGORITMO-FLORESTA produz a floresta testemunha } F) \leq \mathbb{P}(\mathcal{L}\text{-CHECK não retorna falha}). \quad (4.14)$$

O resultado segue então do Lema 4.16.

□

Assim obtemos uma cota superior para a probabilidade do ALGORITMO-FLORESTA produzir uma floresta testemunha específica  $F$  associada ao registro  $\mathcal{L}$ , que indica quais são os rótulos de cada vértice interno da floresta. Entretanto, observe que a probabilidade  $P_n$  definida em (4.11) não depende dos rótulos da floresta testemunha, mas apenas da quantidade  $n$  de entradas no registro do algoritmo. Na próxima seção consideraremos então florestas não rotuladas com  $n$  vértices internos.

### 4.1.3 A floresta não rotulada

Como visto anteriormente, se ALGORITMO-FLORESTA dura  $n$  passos, então ele pode ser associado a uma floresta testemunha com  $n$  vértices internos. Relembre que se o vértice interno  $v$  da floresta testemunha tem como evento rótulo  $A_v$ , então esse vértice possui exatamente  $s_v = |A_v| - \|A\|$  filhos. Dado o registro  $\mathcal{L}$  do ALGORITMO-FLORESTA tal que  $|\mathcal{L}| = n$  e dada a floresta testemunha  $F \in \mathfrak{F}_n$  associada a  $\mathcal{L}$  (isto é, com  $n$  vértices internos), definimos a função

$$g : \mathfrak{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n;$$

$$g(F) = \Phi.$$

A função  $g$  remove todos os rótulos de  $F$ , criando uma floresta não rotulada  $\Phi \in \mathcal{F}_n$ , onde  $\mathcal{F}_n$  é o conjunto das florestas não rotuladas constituídas por  $|\Psi| = m$  árvores tendo no total  $n$  vértices internos e tal que cada vértice interno  $v$  possui um número de filhos no conjunto

$$E'_A = \{s \in \mathbb{N} : \exists A \in \mathcal{A} \text{ tal que } |vbl(A)| - \|A\| = s\}$$

definido em (4.1). Chamaremos  $\Phi$  de *floresta testemunha não rotulada* produzida pelo ALGORITMO-FLORESTA.

Para  $\Phi \in \mathcal{F}_n$  vamos calcular

$$\begin{aligned} P_\Phi &= \mathbb{P}(\Phi \text{ é a floresta testemunha não rotulada produzida pelo ALGORITMO-FLORESTA}) \\ &= \sum_{\substack{F \in \mathfrak{F}_n; \\ g(F) = \Phi}} \mathbb{P}(\text{o ALGORITMO-FLORESTA produz a floresta testemunha } F) \\ &\leq \sum_{\substack{F \in \mathfrak{F}_n; \\ g(F) = \Phi}} \prod_{v \in F} \mathbb{P}(A_v) \\ &\leq \prod_{v \in \Phi} p_{s_v} \sum_{\substack{F \in \mathfrak{F}_n; \\ g(F) = \Phi}} 1, \end{aligned} \tag{4.15}$$

onde  $p_s = \max_{A \in \mathcal{A}_s} \mathbb{P}(A)$  (veja (4.6)) e a primeira desigualdade em (4.15) é devida ao Lema 4.18.

Agora observe que

$$\sum_{\substack{F \in \mathfrak{F}; \\ g(F) = \Phi}} 1 \leq \prod_{v \in \Phi} d_{s_v}. \tag{4.16}$$

De fato, dada uma floresta testemunha não rotulada  $\Phi \in \mathcal{F}_n$ , conseguimos determinar a variável rótulo da raiz de cada uma das  $m$  árvores que compõem essa floresta, uma vez que as árvores são ordenadas de acordo com as variáveis rótulos das raízes, da menor para a maior, pela definição de floresta testemunha. Considere a raiz  $v$  da primeira árvore não trivial  $\tau_1$  e suponha que a sua variável rótulo seja  $\psi_v$ . Se  $v$  possui  $s_v$  filhos, observe que pela construção do ALGORITMO-FLORESTA temos no máximo  $d_{s_v}$  opções para o



evento rótulo de  $v$ . Fixados a variável rótulo e o evento rótulo  $A_v$  de  $v$ , sabemos qual é a semente  $S_{\psi_v}(A_v)$  tomada pelo algoritmo e portanto conseguimos definir quais são as variáveis rótulo de cada um dos filhos de  $v$ , de fato são, em ordem crescente, as variáveis em  $vbl(A_v) \setminus S_{\psi_v}(A_v)$ . Passamos então a considerar  $v'$  o primeiro filho de  $v$  que não é uma folha, suponha que sua variável rótulo seja  $\psi_{v'}$ . Se  $v'$  possui  $s_{v'}$  filhos, novamente pela construção do algoritmo temos no máximo  $d_{s_{v'}}$  opções para o evento rótulo de  $v'$ . Uma vez fixado o evento rótulo  $A_{v'}$ , a semente  $S_{\psi_{v'}}(A_{v'})$  é determinada pela mesma regra definida para o algoritmo e sabemos que os filhos de  $v'$  recebem como rótulo, em ordem, as variáveis em  $vbl(A_{v'}) \setminus S_{\psi_{v'}}(A_{v'})$ . Prosseguimos dessa maneira percorrendo cada ramo de  $\tau_1$ . Ao finalizar a análise para a árvore  $\tau_1$ , passamos a analisar, da mesma maneira, a segunda árvore não trivial  $\tau_2$ .

Observe então que cada vértice interno  $v$  dessa floresta não rotulada  $\Phi$  contribui com um fator  $d_{s_v}$  na contagem das florestas rotuladas que dão origem a  $\Phi$ . Assim,

$$P_{\Phi} \leq \prod_{v \in \Phi} d_{s_v} p_{s_v}.$$

Claramente a probabilidade  $P_n$  (veja (4.11)) do ALGORITMO-FLORESTA durar  $n$  passos é cotada por

$$P_n \leq \sum_{\Phi \in \mathcal{F}_n} P_{\Phi}.$$

Para estimar  $\sum_{\Phi \in \mathcal{F}_n} P_{\Phi}$ , observe que cada floresta  $\Phi \in \mathcal{F}_n$  é constituída por  $m$  árvores  $\tau_1, \dots, \tau_m$  com  $n_1, \dots, n_m$  vértices internos, tais que  $n_i \geq 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ . Note que o número de filhos de um vértice interno de qualquer  $\tau \in \Phi$  toma valores no conjunto  $E_{\mathcal{A}}$ . Vamos denotar por  $\mathcal{T}$  o conjunto das árvores enraizadas com número de filhos dos vértices internos tomando valores em  $E_{\mathcal{A}}$  e seja  $\mathcal{T}_{n_i}$  o conjunto das árvores em  $\mathcal{T}$  com  $n_i$  vértices internos.

Para  $s \in E_{\mathcal{A}}$ , vamos denotar

$$w_s = d_s p_s.$$

Para uma árvore  $\tau \in \mathcal{T}$ , seja  $V_{\tau}$  o seu conjunto de vértices internos. Defina o peso de  $\tau$  da seguinte maneira

$$\omega(\tau) = \prod_{v \in V_{\tau}} w_{s_v}$$

onde  $s_v$  é o número de filhos do vértice  $v$ , e, para um dado  $n \in \mathbb{N}$ , seja

$$Q_n = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_n} \omega(\tau),$$

a soma dos pesos de todas tais árvores com  $n$  vértices internos. Assim, a probabilidade

do ALGORITMO-FLORESTA durar  $n$  passos é cotada por

$$P_n \leq \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_m = n \\ n_i \geq 0}} Q_{n_1} \dots Q_{n_m}.$$

Observe que  $Q_n$  obedece a relação de recorrência

$$Q_n = \sum_{s \in E_A} w_s \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_s = n-1 \\ n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0}} Q_{n_1} \dots Q_{n_s}, \quad (4.17)$$

com  $Q_0 = 1$ . Agora, definindo

$$W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n z^n,$$

por (4.17) temos que

$$\begin{aligned} W(z) &= z \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s \in E_A} w_s \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_s = n-1 \\ n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0}} Q_{n_1} z^{n_1} \dots Q_{n_s} z^{n_s} \\ &= z \sum_{s \in E_A} w_s \prod_{i=1}^s \sum_{n_i \geq 0} Q_{n_i} z^{n_i} \\ &= z \sum_{s \in E_A} w_s \prod_{i=1}^s [1 + \sum_{n_i \geq 1} Q_{n_i} z^{n_i}] \\ &= z \sum_{s \in E_A} w_s (1 + W(z))^s, \end{aligned}$$

e definindo

$$\phi_{E_A}(x) = \sum_{s \in E_A} w_s (1 + x)^s$$

temos que

$$W(z) = z \phi_{E_A}(W(z)).$$

Assim como no Capítulo 3, usamos a Proposição IV.5 de [14] para obter que os coeficientes de  $W(z)$  obedecem a formula de crescimento exponencial

$$Q_n \leq \rho^n$$

onde

$$\rho = \min_{x > 0} \frac{\phi_{E_A}(x)}{x}.$$

Assim,

$$P_n \leq \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_m = n \\ n_i \geq 0}} Q_{n_1} \dots Q_{n_m} \leq \rho^n \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_m = n \\ n_i \geq 0}} 1 \leq \rho^n (n+1)^m,$$

e se a condição (4.8) vale, temos então que a probabilidade de que o ALGORITMO-FLORESTA dure pelo menos  $n$  passos decai exponencialmente em  $n$  ou seja, o algoritmo para quase certamente. Assim concluimos a demonstração do Teorema 4.7.

## 4.2 Exemplos

Nesta seção aplicaremos o Teorema 4.7 em alguns exemplos envolvendo coloração de grafos. Considere um grafo  $G = (V, E)$  com grau máximo  $\Delta$  e seja  $N \in \mathbb{N}$  o número total de cores. Relembre que uma coloração dos vértices de  $G$  é uma função  $c : V \rightarrow [N]$  e, respectivamente, uma coloração das arestas de  $G$  é uma função  $c' : E \rightarrow [N]$ . Vamos começar finalizando o Exemplo 4.3, discutido no início deste capítulo.

### Exemplo 4.19. Coloração não repetitiva de vértices

Relembre que uma coloração  $c$  de vértices de um grafo  $G$  é chamada não repetitiva se, para qualquer  $s \geq 1$ , nenhum caminho  $p = \{v_1, v_2, \dots, v_{2s}\}$  é tal que  $c(v_i) = c(v_{i+s})$  para todo  $i = 1, 2, \dots, s$ . Chamamos de índice cromático não repetitivo  $\pi(G)$  o menor número  $N$  de cores tal que existe uma coloração não repetitiva dos vértices de  $G$  usando  $N$  cores.

O conjunto das variáveis é  $\Psi = \{\psi_v\}_{v \in V}$ , onde  $\psi_v = \{\text{cor do vértice } v\}$  e a cor de cada vértice é escolhida segundo a distribuição uniforme. Seja  $P_s$  o conjunto de todos os caminhos com  $2s$  vértices e defina  $P = \cup_{s \geq 1} P_s$ . O conjunto dos eventos ruins que queremos evitar nesse caso é o conjunto  $\mathcal{A} = \{A_p\}_{p \in P}$ , sendo  $A_p$  o evento “o caminho  $p$  é repetitivo”.

Para cada evento  $A_p$  e cada vértice  $v \in \text{vbl}(A_p)$ , a regra para a escolha de  $S_v(A_p)$  será a seguinte: tome  $S_v(A_p)$  como a metade do caminho  $p$  que não contém o vértice  $v$ . Assim para todo  $A_p$  com  $p \in P_s$ , a semente terá tamanho  $s$ . Portanto, no presente caso, o conjunto  $E_{\mathcal{A}}$  definido em (4.1) é dado por,

$$E_{\mathcal{A}} = \{s; s \in \mathbb{N}\}.$$

Desejamos aplicar o Teorema 4.7 a fim de obter uma cota superior para o número de cores  $N$ . No caso em consideração, dado  $s \in E_{\mathcal{A}}$ , o número  $d_s$  definido em (4.4) representa o número de caminhos de tamanho  $2s$  contendo um vértice fixo, que pode ser cotado superiormente por

$$d_s \leq s\Delta^{2s-1}.$$

Suponha  $N = (1 + b)\Delta^2$ , então  $\mathbb{P}(A_p) = \frac{1}{N^s}$  para todo  $p \in P_s$ . Assim,

$$p_s = \frac{1}{N^s} = \frac{1}{(1 + b)^s \Delta^{2s}}.$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
\phi_{E_{\mathcal{A}}}(x) &= \sum_{s \geq 1} s \Delta^{2s-1} \frac{1}{(1+b)^s \Delta^{2s}} (x+1)^s \\
&= \frac{1}{\Delta} \sum_{s \geq 1} s \left( \frac{x+1}{b+1} \right)^s \\
&= \frac{1}{\Delta} \frac{\frac{x+1}{b+1}}{\left(1 - \frac{x+1}{b+1}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\Delta} \frac{(b+1)(x+1)}{(b-x)^2}.
\end{aligned}$$

A condição (4.8) nesse caso se transforma em

$$\min_{x>0} \left( \frac{1}{\Delta} \frac{(b+1)(x+1)}{x(b-x)^2} \right) < 1,$$

e observe que o mínimo de  $\frac{\phi_{E_{\mathcal{A}}}(x)}{x}$  ocorre em

$$\tau = \frac{\sqrt{9+8b}-3}{4},$$

e

$$\frac{\phi_{E_{\mathcal{A}}}(\tau)}{\tau} = \frac{1}{\Delta} \frac{\sqrt{(8b+9)^3+8b^2+36b+27}}{8b^3}.$$

Assim, definindo  $b_0(\Delta)$  como a solução da equação

$$\frac{\sqrt{(8b+9)^3+8b^2+36b+27}}{8b^3} = \Delta,$$

temos que o índice cromático não repetitivo  $\pi(G)$  de um grafo com grau máximo  $\Delta$  é tal que

$$\pi(G) \leq (1 + b_0(\Delta)) \Delta^2.$$

Vamos comparar nossa cota com o Teorema 8 em [18], que usa o método entropy compression, e afirma que

$$\pi(G) \leq \left(1 + d_0(\Delta)\right) \Delta^2$$

com

$$d_0(\Delta) = \left[ \frac{3}{2^{2/3}} + \frac{2^{2/3}}{\Delta^{1/3} - 2^{1/3}} \right] \Delta^{-1/3}.$$

Assim, por exemplo,

$$b_0(3) = 2.3143 \qquad d_0(3) = 7.3469$$

$$b_0(10) = 1.29 \qquad d_0(10) = 1.701$$

$$\begin{array}{ll}
b_0(100) = 0.487 & d_0(100) = 0.5082 \\
b_0(10^3) = 0.205 & d_0(10^3) = 0.207 \\
b_0(10^6) = 0.019 & d_0(10^6) = 0.019
\end{array}$$

e

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \Delta^{1/3} b_0(\Delta) = 1.88988 \quad \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \Delta^{1/3} d_0(\Delta) = 1.88988.$$

Portanto, podemos notar que a nossa cota é melhor que [18] para valores pequenos de  $\Delta$  enquanto é assintoticamente equivalente para valores grandes de  $\Delta$ .

**Exemplo 4.20.** Índice Facial Thue Choice de grafos planares

Dado um grafo planar  $G = (V, E)$ , um caminho facial de  $G$  é um caminho de  $G$  que é a fronteira de uma face de  $G$ . Suponha que para toda aresta  $e \in E$  uma lista  $L_e$  de  $k$  cores seja dada, o menor inteiro  $k$  tal que para toda coleção de listas  $\{L_e\}_{e \in E}$  com  $|L_e| = k$  existe uma coloração de arestas de  $G$  tal que todo caminho facial de  $G$  é não repetitivo é chamado de índice facial Thue choice de  $G$  e é denotado por  $\pi'_{fl}(G)$ . Observe que o conjunto das variáveis aleatórias independentes neste caso é  $\Psi = \{L_e\}_{e \in E}$ .

Vamos denotar por  $\mathcal{P}$  o conjunto de todos os caminhos faciais com um número par de arestas. Para todo  $p \in \mathcal{P}$  seja  $A_p$  o evento “ $p$  é repetitivo”, isto é, se  $p = \{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}\}$  temos que  $c'(e_i) = c'(e_{i+n})$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  onde  $c'(e)$  é a cor escolhida na lista  $L_e$  via algum experimento aleatório. A família de eventos ruins é neste caso  $\mathcal{A} = \{A_p\}_{p \in \mathcal{P}}$ . Observe que, se  $|p| = 2n$  então  $|A_p| = 2n$ , e, portanto

$$E_{\mathcal{A}} = \{2, 4, 6, \dots\}.$$

Analogamente ao Exemplo 4.3, dado um evento  $A_p$  e uma aresta  $e \in \text{vbl}(A_p)$  vamos fixar como regra tomar como semente  $S_e(A_p)$  a metade de  $p$  que não contém  $e$ . Note que  $\mathbb{P}(A_p) \leq \frac{1}{k^n}$  para todo  $p$  tal que  $|p| = 2n$ , e usando o fato de que toda aresta de um grafo planar está contido em no máximo  $4n$  caminhos faciais de  $G$  de tamanho  $2n$  (pois uma aresta em um grafo planar pode estar em no máximo 2 caminhos faciais e para cada um desses caminhos ele pode estar em  $2n$  possíveis posições), temos que

$$d_n \leq 4n,$$

e assim

$$\begin{aligned}
\phi_{E_{\mathcal{A}}}(x) &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{k^n} 4n(x+1)^n \\
&= \frac{4k(x+1)}{(k-x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\min_{x>0} \frac{\phi_{E_A}(x)}{x} < 1$$

desde que  $k \geq 12$ , que é a mesma cota obtida em [26] via entropy compression.

**Exemplo 4.21.** Coloração frugal de vértices

Dado um grafo  $G = (V, E)$ , uma coloração própria de vértices de  $G$  é dita  $\beta$ -frugal se todo vértice possui no máximo  $\beta$  vértices da mesma cor em sua vizinhança. O número mínimo de cores necessárias tal que um grafo  $G$  possua pelo menos uma coloração própria  $\beta$ -frugal de vértices é chamado de número cromático  $\beta$ -frugal de  $G$  e é denotado por  $\chi_\beta(G)$ .

Seja  $G = (V, E)$  um grafo com grau máximo  $\Delta$  e suponha que temos  $N$  cores disponíveis que são atribuídas a cada vértice segundo a distribuição uniforme. A sequência das variáveis aleatórias para essa coloração é definida como  $\Psi = \{\psi_v\}_{v \in V}$  sendo que  $\psi_v$  é a cor do vértice  $v \in V$ .

Observe que nesta situação temos dois tipos de eventos ruins. Primeiramente a coloração deve ser própria, ou seja, para todo vértice  $v \in V$  a coloração deve ser tal que  $c(v) \neq c(u)$  para todo  $u \in \Gamma(v) = \{w \in V; \{v, w\} \in E\}$ . Assim, para cada aresta  $e = \{u, v\}$  definimos o evento

$$A_e = \{u \text{ e } v \text{ possuem a mesma cor}\},$$

e definimos  $\mathcal{A} = \{A_e\}_{e \in E}$ . O segundo tipo de evento ruim é se um vértice possui mais de  $\beta$  vértices coloridos com a mesma cor em sua vizinhança. Assim, dado  $v \in V$ , seja  $H_\beta^v = \{Y \subset \Gamma^*(v) : |Y| = \beta + 1\}$ , ou seja,  $H_\beta^v$  é o conjunto de todos os subconjuntos da vizinhança  $\Gamma^*(v) = \Gamma \cup \{v\}$  de  $v$  com exatamente  $\beta + 1$  vértices. Dados  $v \in V$  e  $h_\beta^v \in H_\beta^v$ , definimos o evento

$$B_{h_\beta^v} = \{\text{todos os vértices em } h_\beta^v \text{ recebem a mesma cor}\},$$

e seja  $\mathcal{B} = \{B_{h_\beta^v}\}_{v \in V, h_\beta^v \in H_\beta^v}$ .

Observe que para cada  $e \in E$  temos que  $\mathbb{P}(A_e) = \frac{1}{N}$ ,  $|A_e| = 2$  e  $\|A_e\| = 1$ . De fato, pela Observação 4.2, o número de configurações que fazem  $A_e$  ocorrer é igual a  $N$ , enquanto  $N^{|S|} = N$ , onde  $S$  é o conjunto formado por apenas um dos vértices de  $e$ . Assim, a semente de  $A_e$  é composta por um dos vértices de  $e$  e obviamente  $S_u(A_e) = \{v\}$  e  $S_v(A_e) = \{u\}$ .

Por outro lado, para cada  $v \in V$  e  $h_\beta^v \in H_\beta^v$  temos que  $\mathbb{P}(B_{h_\beta^v}) = \frac{1}{N^\beta}$ ,  $|B_{h_\beta^v}| = \beta + 1$  e  $\|B_{h_\beta^v}\| = 1$ . De fato, pela Observação 4.2 o número de configurações que fazem  $B_{h_\beta^v}$  ocorrer é igual a  $N$ , enquanto  $N^{|S|} = N$ , onde  $S$  é o conjunto formado por apenas um dos vértices de  $h_\beta^v$ . Podemos definir a seguinte regra para a escolha da semente: se  $u \in h_\beta^v$

to me

$$S_u(B_{h_\beta^v}) = \{u'; \text{tal que } u' \text{ é o menor vértice maior que } u\}.$$

Assim,  $E_{\mathcal{A}} = \{1, \beta\}$  e observe que  $d_1 = \Delta$  e  $d_\beta \leq \Delta \binom{\Delta}{\beta} \leq \frac{\Delta^{1+\beta}}{\beta!}$ . Logo, neste exemplo a função  $\phi_{E_{\mathcal{A}}}(x)$  definida em (4.7) é a seguinte

$$\phi_{E_{\mathcal{A}}}(x) \leq \frac{\Delta}{N}(x+1) + \frac{1}{N^\beta} \frac{\Delta^{1+\beta}}{\beta!} (x+1)^\beta,$$

e após alguns cálculos podemos mostrar que

$$\chi_\beta(G) \leq \frac{\Delta^{1+\frac{1}{\beta}}}{\beta!^{1/\beta}} \beta(\beta-1)^{\frac{1}{\beta}-1} + \Delta \quad (4.18)$$

que é a mesma cota obtida pelo método entropy compression em [3].

### 4.3 Comparando o método entropy compression com o LLL

Como o ALGORITMO DE MOSER-TARDOS é muito simples, várias tentativas de refiná-lo foram feitas ao longo dos anos, veja [5] e [8]. Em particular, o algoritmo proposto por Esperet e Parreau [8] apresenta diferenças fundamentais com relação ao Algoritmo 1. De fato, ao invés de sortear inicialmente todas as variáveis e depois ressortear algumas variáveis até a obtenção de uma configuração na qual nenhum evento ocorra, o algoritmo de Esperet e Parreau se inicia com a configuração vazia, na qual nenhuma variável possui um valor atribuído, e depois eles sorteiam um valor para cada variável, uma por uma, e quando um evento passa a ocorrer, o algoritmo apaga o valor de algumas variáveis retornando a uma configuração boa. Esperet e Parreau também sugerem em [8] que através desse algoritmo pode-se obter um método geral capaz de tratar da maioria das aplicações em problemas envolvendo coloração de grafos e de fato essa afirmação foi comprovada em [18], [26], [15], artigos nos quais vários problemas combinatoriais foram tratados usando o esquema de Esperet e Parreau, obtendo cotas melhores que as obtidas via LLL e LLL melhorado.

Uma sistematização do esquema apresentado em [8] foi apresentada em [3] juntamente com uma conexão com o LLL e o LLL melhorado. O método *entropy compression* pode ser implementado em qualquer aplicação que possa ser analisada através de uma configuração de variáveis como em Moser e Tardos com a restrição de que todas as variáveis  $\psi_1, \dots, \psi_m$  tomam valores em um espaço em comum  $\Omega$  tal que  $|\Omega| = N$  segundo a distribuição uniforme. Praticamente todas as aplicações do método *entropy compression* disponíveis na literatura caem no caso de variáveis uniformes, a única exceção conhecida é a coloração acíclica de arestas (veja [3]).

**Observação 4.22.** *O método entropy compression também pode ser aplicado em casos nos quais as variáveis tomam valores em diferentes espaços  $\Omega_i$ , mas tais que  $|\Omega_i| = N$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ , de acordo com a distribuição uniforme. Esse é o caso do Exemplo 4.20 .*

No contexto do *entropy compression*, seja  $X$  um conjunto finito,  $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x \in X}$  uma coleção de eventos ruins e  $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$  a coleção de variáveis aleatórias das quais os eventos em  $\mathcal{A}$  dependem. A definição de sementes será aquela dada na Observação 4.2, note que com essa definição temos que para todo  $x \in X$

$$\mathbb{P}(A_x) = \frac{1}{N^{|vbl(A_x)| - |S(A_x)|}}.$$

Como anteriormente, vamos supor que dados um evento  $A \in \mathcal{A}$  e uma variável  $\psi \in vbl(A_x)$  fixamos uma regra para determinar unicamente a semente  $S_\psi(A)$  que não contém a variável  $\psi$ . Relembre a definição dada na equação (4.1)

$$E_{\mathcal{A}} = \{s \in \mathbb{N} : \exists A \in \mathcal{A} \text{ tal que } |A| - \|A\| = s\}.$$

Para  $s \in E_{\mathcal{A}}$  e  $\psi \in \Psi$  defina

$$\mathcal{A}_s(\psi) = \{A \in \mathcal{A} \text{ tal que } |A| - \|A\| = s \text{ e } \psi \in vbl(A)\}$$

e veja que em (4.3) definimos  $d_s(\psi) = |\mathcal{A}_s(\psi)|$  e em (4.4)

$$d_s = \max_{\psi \in \Psi} d_s(\psi).$$

Seja  $t$  um número natural e seja  $V_t$  um elemento de  $[N]^t$  (i.e.  $V_t$  é um vetor com  $t$  entradas sendo que cada uma delas toma valor em  $\{1, \dots, N\}$ ). O ALGORITMO ENTROPY COMPRESSION, apresentado em [3], toma como entrada  $V_t$ , executa no máximo  $t$  passos e em cada passo  $i \in [t]$  produz uma configuração parcial  $\omega_i$  como será descrito abaixo.

Note que em cada passo  $i$ , a coloração parcial  $\omega_i$  é tal que nenhum evento em  $\mathcal{A}$  ocorre. O ALGORITMO ENTROPY COMPRESSION executa no máximo  $t$  passos, uma vez que ele pode produzir uma configuração  $\omega_j$  no passo  $j$ , com  $j < t$ , tal que todas as  $m$  variáveis em  $\Psi$  receberam um valor e nenhum evento em  $\mathcal{A}$  ocorre sob  $\omega_j$ , nesse caso apenas as primeiras  $j$  entradas de  $V_t$  são utilizadas. Dizemos que esse algoritmo é bem sucedido se ele para tendo executado  $j$  passos, com  $j \leq t$ , ou seja, o algoritmo retorna falha se após executar  $t$  passos ainda temos alguma variável que não recebeu algum valor. Observe que o ALGORITMO ENTROPY COMPRESSION pode ser determinístico ou aleatório, dependendo do modo em que as entradas de  $V_t$  são escolhidas. Em [3] o seguinte teorema é provado.

**Teorema 4.23** (Lema Entropy Compression). *Seja  $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$  uma coleção finita de variáveis aleatórias i.i.d. tomando valores no conjunto  $\{1, \dots, N\}$  e seja  $\mathcal{A}$  uma família*



**Algoritmo 8:** ALGORITMO ENTROPY COMPRESSION

**Entrada:** vetor  $V_t$

- 1 **Passo 0:** tome  $\omega_0 = (0, \dots, 0)$ , isto é, a configuração tal que nenhuma  $\psi$  foi sorteada.
- 2 **Passo  $i$  com  $i \geq 1$**
- 3 **Se** no passo  $i - 1$  a configuração  $\omega_{i-1}$  não possui alguma entrada igual a 0, pare o algoritmo.
- 4 **Caso** no passo  $i - 1$  a configuração  $\omega_{i-1}$  possui alguma entrada igual a 0, tome  $\psi_j$  a menor variável que tal que  $\omega_{i-1}(\psi_j) = 0$  e atribua a  $\psi_j$  o valor na  $i$ -ésima entrada de  $V_t$
- 5 **se algum evento em  $\mathcal{A}$  passa a ocorrer então**
- 6     seja  $A$  o menor evento ocorrendo, por construção  $\psi_j \in vbl(A)$ , tome a semente  $S_{\psi_j}(A)$  e para todo  $\psi \in \Psi$  defina
- 7     
$$\omega_i(\psi) = \begin{cases} 0, & \text{se } \psi \in (vbl(A) \setminus S_{\psi_j}(A)), \\ \omega_{i-1}(\psi), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
- 8     e vá para o passo  $i + 1$ ,
- 8 **senão**
- 9     defina
- 10     
$$\omega_i(\psi) = \begin{cases} i\text{-ésima entrada de } V_t, & \text{se } \psi = \psi_j, \\ \omega_{i-1}(\psi), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
- 11     e vá para o passo  $i + 1$ .
- 11 **fim**

finita de eventos que dependem das variáveis aleatórias em  $\Psi$ . Se existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\frac{1 + \sum_{s \in E'_s} d_s \alpha^s}{\alpha} < N \quad (4.19)$$

então existe uma configuração das variáveis em  $\Psi$  tal que nenhum evento em  $\mathcal{A}$  ocorre. Além disso, o número esperado de passos que o ALGORITMO ENTROPY COMPRESSION gasta para encontrar tal configuração é uma função linear no número de variáveis  $m$ , quase certamente.

A condição (4.19) é conhecida como *critério entropy compression*. O teorema acima é capaz de reproduzir todos os resultados obtidos através do esquema introduzido por Esperet e Parreau e em [3] os autores mostram que o Teorema 4.23 realmente produz melhores resultados que o LLL. De fato, é simples comparar o critério entropy compression com o critério (2.27). Como neste caso as variáveis são i.i.d., temos que se  $A_x \in \mathcal{A}_s(\psi)$  então  $\mathbb{P}(A_x) = \frac{1}{k^s}$ . Defina

$$q = \max_{x \in X} \left\{ \frac{|vbl(\mathcal{A}_x)|}{|s_x|} \right\} \quad (4.20)$$

onde  $s_x = |vbl(\mathcal{A}_x)| - \|A_x\|$ , assim obtemos

$$\sup_{\psi \in \Psi} \sum_{\substack{x \in X \\ \psi \in \text{vbl}(A_x)}} p_x e^{a|\text{vbl}(A_x)|} \leq \sum_{s \in E_A} d_s p_s e^{aqs}.$$

Ou seja, a condição (2.27) é satisfeita se

$$\sum_{s \in E_A} d_s p_s e^{aqs} \leq e^a - 1, \quad (4.21)$$

e tomando  $\alpha = \frac{e^{aq}}{k}$ , se existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\frac{(1 + \sum_{s \in E_A} d_s \alpha^s)^q}{\alpha} \leq k. \quad (4.22)$$

Observe que o expoente  $q$  definido em (4.20) na desigualdade (4.22) é a razão pela qual o critério *entropy compression* (4.19) obtém cotas melhores que as dadas pelo LLL (excluindo a coloração acíclica de arestas).

Agora observe que (4.7) é equivalente à condição (4.19) do Lema Entropy Compression. De fato, quando as variáveis aleatórias são i.i.d. temos que  $p_s = \frac{1}{N^s}$  e assim tomando  $\alpha = (\xi + 1)/k$  a condição (4.7) é reescrita da forma (4.19). Ou seja, mostramos que a nossa variante do algoritmo de Moser-Tardos oferece as mesmas cotas que o método *entropy compression*.

# Apêndice A

## Prova do Lema 3.4

Essa prova está contida em [16]. Começamos dando algumas definições.

**Definição A.1.** Dada uma sequência admissível  $S = \{(e_1^1, e_1^2, k_1), \dots, (e_n^1, e_n^2, k_n)\}$  uma sequência  $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_n)$  de ciclos é chamada *compatível com  $S$*  se para cada  $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $C_s$  possui exatamente  $2k_s$  arestas e contém o par ordenado  $\{e_s^1, e_s^2\}$ . Chamamos  $e_s^1$  e  $e_s^2$  de *arestas pivotais* de  $C_s$  e as demais arestas de  $C_s$  serão representadas em ordem por  $e_s^3, \dots, e_s^{2k_s}$ . Os vértices de uma aresta  $e_s^i$  serão representados por  $v_s^i$  e  $v_s^{i+1}$ .

Note que a saída de uma execução de CORVAL é uma das possíveis sequências de ciclos compatíveis com  $S$ .

**Definição A.2.** Dadas uma sequência admissível  $S = \{(e_1^1, e_1^2, k_1), \dots, (e_n^1, e_n^2, k_n)\}$ , uma execução de CORVAL e uma sequência de ciclos  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$  compatível com  $S$  (não necessariamente a saída da execução de CORVAL), sejam  $e_s^i$ , com  $i = 1, 2$ , as primeiras arestas de  $C_s$  a receber a cor que elas possuem no passo  $s$  tal que  $e_s^i$  possui a mesma paridade da aresta pivotal  $e_s^i$ , com  $i = 1, 2$ .

**Observação A.3.** *Observe que as arestas  $e_s^{l_1}$  e  $e_s^{l_2}$  possuem uma definição semelhante a das arestas que formam a semente de  $C_s$  (Definição 3.2), podendo variar apenas a ordem das arestas na semente. Entretanto, durante todo o Capítulo 3 ao se tratar de semente consideramos o conjunto semente e não o par ordenado, logo podemos referir às arestas da Definição A.2 como semente de  $C_s$  e denotaremos  $S(C_s) = \{e_s^{l_1}, e_s^{l_2}\}$ .*

Dizemos que a aresta  $e$  possui a cor  $c$  no passo  $s$  se  $e$  chega no início do passo  $s$  com a cor  $c$ . De fato, a cor  $c$  é importante pois CORVAL procura por ciclos bicromáticos, logo checamos se  $c$  torna um ciclo  $C_s$  bicromático. Seja  $\text{time}(s, e)$  o último instante tal que a aresta  $e$  recebe a cor que ela possui no passo  $s$ .

**Observação A.4.** *Observe que é possível existir dois passos  $s$  e  $s'$  tais que  $\text{time}(s, e) = \text{time}(s', e)$  para uma aresta  $e$ . De fato, uma aresta pode não ter sua cor ressorteada durante vários passos. Entretanto, se  $C_{s'}$  é o ciclo escolhido por CORVAL no passo  $s' < s$*

$e$  é uma aresta pertencente a  $C_{s'} \setminus S(C_{s'})$ , então  $\text{time}(s, e) > \text{time}(s', e)$ , uma vez que a cor de  $e$  é necessariamente ressorteada no passo  $s'$  (mesmo se a nova cor atribuída for exatamente a cor anterior é considerado um novo instante). Por outro lado, observe que  $\text{time}(e, s) \neq \text{time}(f, s')$  para todas arestas  $e \neq f$  e todos passos  $s$  e  $s'$  (mesmo se  $s = s'$ ), uma vez que em cada instante apenas uma aresta tem sua cor ressorteada.

**Definição A.5** (Ordem cronológica). Dada uma sequência admissível  $S$  e uma sequência compatível  $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_n)$ , definimos a ordem cronológica das arestas em  $(C_s \setminus S(C_s))_{s=1}^n$  como a ordem induzida por  $\text{time}(s, e_s^i)$ .

**Observação A.6.** Observe que não definimos a ordem cronológica para arestas na semente, uma vez que se  $C_{s'}$  é o ciclo escolhido por CORVAL no passo  $s' < s$  e  $e$  é uma aresta que pertence a  $S(C_{s'})$ , então podemos ter  $\text{time}(s, e) = \text{time}(s', e)$ , já que a cor de  $e$  não foi ressorteada no passo  $s'$ .

Dados uma aresta  $e$ , um passo  $s$  e uma cor  $c$ , definimos o evento

$$CA(s, c, e) = \{e \text{ recebeu a cor } c \text{ no instante } \text{time}(s, e)\},$$

e, dados uma aresta  $e$ , um passo  $s$  e um ciclo  $C_s$  que contém  $e$ , definimos o evento

$$CCA(C_s, e) = \{e \text{ recebeu a mesma cor que a aresta na semente de } C_s \text{ com a mesma paridade}\},$$

e este último evento é chamado de evento *atribuição correta de cor*.

**Definição A.7.** Uma condicional anterior de um evento  $CA(s, c, e)$  é qualquer coleção de eventos  $CA(s', c', e')$  (ou suas negações) tais que  $\text{time}(s, e) > \text{time}(s', e')$ .

Observe que

$$\mathbb{P}(CA(s, c, e) | \sigma(\text{condicional anterior})) \leq \frac{1}{\lceil \gamma(\Delta - 1) \rceil + 1} \leq \frac{1}{\gamma(\Delta - 1) + 1}. \quad (\text{A.1})$$

Entretanto, para arestas na semente, por definição temos que

$$\mathbb{P}(CCA(C_s, e_s^{l_s^1})) = \mathbb{P}(CCA(C_s, e_s^{l_s^2})) = 1, \quad \forall s = 1, \dots, n. \quad (\text{A.2})$$

Logo não precisamos considerar o evento atribuição correta de cor para arestas em semente. Assim, vamos considerar  $CCA(C_s, e_s^i)$  para todo  $i \geq 3$ , com a convenção que  $CCA(C_s, e_s^{l_s^i})$  corresponde à aresta pivotal com a mesma paridade da aresta  $e_s^{l_s^i}$  na semente. Observe que temos  $2k' := \sum_{s=1}^n (2k_s - 2)$  eventos CCA.

Agora temos todas as ferramentas necessárias para provar o Lema 3.4.

*Demonstração do Lema 3.4.* Primeiramente relembre que dada uma sequência de ciclos  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$  compatível com a sequência admissível  $S$ , para cada  $s \in \{1, \dots, n\}$  as

arestas de  $C_s$  são representadas por  $\{e_s^1, \dots, e_s^{2k_s}\}$ , onde  $e_s^1$  e  $e_s^2$  são as arestas pivotais e os vértices de  $e_s^i$  são denotados por  $v_s^i$  e  $v_s^{i+1}$ . Relembre também que a semente  $\{e_s^{l_s^1}, e_s^{l_s^2}\}$  é escolhida como as primeiras arestas com paridades opostas a serem coloridas em  $C_s$  com a cor que elas possuem no passo  $s$ , então observe que para o ciclo  $C_s$  se tornar bicromático, as arestas em  $\{e_s^1, \dots, e_s^{2k_s}\} \setminus \{e_s^{l_s^1}, e_s^{l_s^2}\}$  devem receber a mesma cor que as arestas na semente com a mesma paridade.

Considere o vértice  $v_s^i$ , vamos ordenar todas as arestas  $f \neq e_s^{i-1}$  incidentes a  $v_s^i$  por  $time(f, s)$  (pela Observação A.4 temos que  $time(f, s) \neq time(f', s)$  para todo  $f \neq f'$ ) e vamos representá-los por  $o^1, \dots, o^{\delta_s^i}$ , onde  $\delta_s^i$  é o número de vizinhos de  $e_s^{i-1}$  compartilhando o vértice  $v_s^i$ , assim  $\delta_s^i \leq \Delta - 1$ . Quando  $e_s^{i-1}$  é a última aresta de  $C_s$ , isto é, a aresta  $e_s^{2k_s}$ , podemos tomar  $\delta_s^i = 1$ .

Sejam  $\mathcal{E}_c^1, \dots, \mathcal{E}_c^{2k'}$  os eventos  $CCA(C_s, e_s^i)$ , com  $1 \leq s \leq n$  e  $i = 3, \dots, 2k_s$  na ordem cronológica, sendo  $2k' = \sum_{s=1}^n (2k_s - 2)$ . Pelas Observações A.4 e A.6, esses eventos correspondem a diferentes instantes. Seja  $\mathcal{A}_t$  a condicional anterior tal que todos os primeiros (cronologicamente)  $t - 1$  eventos  $CCA$  ocorrem (observe que  $\mathcal{A}_t$  depende da execução de CORVAL).

Vamos definir a *ordem geométrica* das arestas de  $C$  como aquela em que os ciclos são ordenados pela ordem na sequência  $\mathcal{C}$  e, em cada ciclo, as arestas são ordenados de acordo com a Definição A.1. Denotaremos por  $\mathcal{E}_c^{t_k}$  o  $k$ -ésimo evento  $CCA$ , com  $k = 1, \dots, 2k'$  na ordem geométrica.

Agora vamos definir uma variável aleatória  $C$  sobre as escolhas aleatórias feitas por CORVAL. Seja  $C$  a única sequência de ciclos tal que para todo  $C_s$  em  $C$ , toda aresta não pivotal  $e_s^i$  é tal que:

- 1)  $e_s^i$  é a única aresta saindo de  $v_s^i$  tal que no início do passo  $s$  essa aresta possui a mesma cor da aresta pivotal com a mesma paridade, se tal aresta existe,
- 2) caso contrário,  $e_s^i$  é a primeira aresta saindo de  $v_s^i$  na ordem pré-fixada das arestas de forma a ser possível fechar um ciclo.

Essa função é bem definida sobre o espaço de escolhas aleatórias de CORVAL, de fato, não é possível haver duas arestas monocromáticas saindo de um mesmo vértice. Assim temos que  $e_s^i$ ,  $\delta_s^i$  e  $o^l$  também são variáveis aleatórias bem definidas que dependem de  $S$  e dos escolhas aleatórias feitas por CORVAL.

Observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{CORVAL é bem sucedido em } S) &= \mathbb{P}(C \text{ é bicromático}) \\ &= \prod_{t=1}^{2k'} \mathbb{P}(\mathcal{E}_c^t | \mathcal{A}_t) \\ &= \prod_{k=1}^{2k'} \mathbb{P}(\mathcal{E}_c^{t_k} | \mathcal{A}_{t_k}). \end{aligned}$$

De fato, o evento “ $C$  é bicromático” implica no evento “CORVAL é bem sucedido em  $S$ ” e a primeira igualdade segue do fato de que não podemos ter duas arestas monocromáticas incidentes ao mesmo vértice. A segunda igualdade segue da Equação (A.2), de fato, no nosso CORVAL as arestas na semente não são ressorteadas. A última igualdade é apenas uma reordenação pela ordem geométrica.

Vamos calcular uma cota superior para  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_c^{t_k} | \mathcal{A}_t)$ . Suponha que o evento  $\mathcal{E}_c^{t_k}$  seja o evento  $CCA(C_s, e_s^i)$  para algum  $s$  e algum  $i$ . Sejam  $\delta_k = \delta_s^i$  e  $c_k$  a cor correta para  $e_s^i$ . Para  $l = 1, \dots, \delta_k$ , seja  $E^l$  o evento “ $e_s^i$  é a  $l$ -ésima aresta saindo de  $v_s^i$  e recebe a cor correta”, isto é,

$$E^l = \{(e_s^i = o^l) \cap (CA(s, c_k, o^l))\}.$$

Se  $e_s^i$  é uma aresta na semente, então consideramos a aresta pivotal correspondente. Temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{E}_c^{t_k} | \mathcal{A}_t) &= \mathbb{P}(CA(s, c_k, e_s^i) | \mathcal{A}_t) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{l=1}^{\delta_k} E^l | \mathcal{A}_t\right), \end{aligned} \tag{A.3}$$

onde (A.3) é a probabilidade de que  $e_s^i$  seja uma das  $\delta_k$  arestas cronologicamente saindo de  $v_s^i$  e recebe a cor correta. Agora observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{l=1}^{\delta_k} E^l | \mathcal{A}_t\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{l=1}^{\delta_k} (E^l)^c | \mathcal{A}_t\right) \\ &= 1 - \prod_{l=1}^{\delta_k} \mathbb{P}\left((E^l)^c | \bigcap_{m=1}^{l-1} (E^m)^c \cap \mathcal{A}_t\right). \end{aligned}$$

Se  $l$  é tal que  $e_s^i \neq o^l$ , então

$$\mathbb{P}\left((E^l)^c | \bigcap_{m=1}^{l-1} (E^m)^c \cap \mathcal{A}_t\right) = 1,$$

caso contrário,  $E^l = (CA(s, c_k, e_s^i))$  e  $\{\bigcap_{m=1}^{l-1} (E^m)^c \cap \mathcal{A}_t\}$  é um condicional anterior, logo, por (A.1),

$$\mathbb{P}\left((E^l)^c | \bigcap_{m=1}^{l-1} (E^m)^c \cap \mathcal{A}_t\right) \geq 1 - \frac{1}{\gamma(\Delta - 1) + 1}.$$

Assim mostramos que

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_c^{t_k} | \mathcal{A}_t) \leq 1 - \prod_{l=1}^{\delta_k} \left(1 - \frac{1}{\gamma(\Delta - 1) + 1}\right).$$

Para cada  $e_s^i = o^{\delta_k}$ , vamos definir o número  $d_k$  tal que  $d_k = 1$  se  $e_s^i$  for a última aresta

do ciclo  $C_s$ , e  $d_k = \Delta - 1$  caso contrário. Assim,

$$\prod_{l=1}^{\delta_k} \left(1 - \frac{1}{\gamma(\Delta - 1) + 1}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{\gamma(\Delta - 1) + 1}\right)^{d_k},$$

e logo,

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_c^{t_k} | \mathcal{A}_t) \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma(\Delta - 1) + 1}\right)^{d_k}.$$

Observe que entre  $k = 1, \dots, 2k'$  existem  $n$  valores de  $k$  tais que  $d_k = 1$ , um para cada ciclo, e para os outros  $\sum_{s=1}^n (2k_s - 3)$  valores de  $k$ , temos que  $d_k = \Delta - 1$ , então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{CORVAL é bem sucedido em } S) &= \prod_{k=1}^{2k'} \mathbb{P}(\mathcal{E}_c^{t_k} | \mathcal{A}_t) \\ &\leq \prod_{k=1}^{2k'} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma(\Delta - 1) + 1}\right)^{d_k}\right] \\ &= \left(\frac{1}{\gamma(\Delta - 1) + 1}\right)^n \prod_{s=1}^n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma(\Delta - 1) + 1}\right)^{\Delta - 1}\right)^{2k_s - 3}. \end{aligned}$$

□

## Tabela de Símbolos

$X$	Conjunto finito
$\mathcal{A}$	Família de eventos.
$G(V, E)$	Grafo simples cujo conjunto de vértices é $V$ e conjunto de elos é $E$
$\Gamma_G(v)$	Conjunto dos vizinhos de $v$ no grafo $G$
$\Gamma_G^*(v)$	$\Gamma_G(v) \cup \{v\}$
LLL	Lema Local de Lovász
$\Psi$	Conjunto formado por $m$ variáveis aleatórias.
$vbl(A)$	Conjunto minimal de variáveis das quais o evento $A$ depende
$\mathcal{P}$	Conjunto enumerável de polímeros
$w_x$	Atividade do polímero $x$
$W$	Fator de Boltzmann
$Z_X(w)$	Função de partição no volume finito $X$
$P_X$	Pressão no volume $X$
$\mathbf{R}^D$	Raio obtido pelo Critério de Dobrushin
$\mathbf{R}^{FP}$	Raio obtido pelo Critério de Fernández-Procacci
$[N]$	Naturais de 1 a $N$
$\omega$	Coloração parcial
$D(e, \omega)$	Conjunto das cores disponíveis para o aresta $e$ que evitam cerejas monocromáticas e 4-ciclos bicromáticos
$\mathcal{L}$	Registro do algoritmo
$P_n$	Probabilidade do algoritmo executar $n$ passos
$F'$	Floresta associada ao algoritmo
$F$	Floresta testemunha
$\tilde{\mathfrak{F}}_n$	Conjunto das florestas testemunhas com $n$ vértices internos
$\mathfrak{S}_n$	Conjunto das sequências admissíveis com $n$ entradas
$\mathcal{F}_S$	Conjunto das florestas testemunhas em tais que $S$ é a correspondente sequência admissível associada
$\mathcal{F}_n$	Conjunto das florestas não rotuladas com $n$ vértices internos
$s_v$	Número de filhos do vértice $v$
$\mathcal{T}_n$	Conjunto das árvores enraizadas com $n$ vértices internos



---

## Referências Bibliográficas

- [1] Alon, N. Mc Diarmid, C.; Reed, B.; *Acyclic colouring of graphs*, Random Structures and Algorithms, **2**, no. 3, 277-288 (1991).
- [2] Alon, N.; Sudakov, B.; Zaks, A.; *Acyclic edge colorings of graphs*, Journal of Graph Theory, **37**, Issue 3, 157-167 (2001)
- [3] Alves, R. G.; Procacci, A.; Sanchis, R.; *A local lemma via entropy compression*, Preprint, arXiv math.CO/1509.04638v2
- [4] Bissacot, R.; Fernández, R.; Procacci A.; Scoppola, B.; *An Improvement of the Lovász Local Lemma via Cluster Expansion*, Combinatorics Probability and Computing, **20**, n. 5, 709-719 (2011)
- [5] Dujmovic, V.; Joret, G.; Kozik, J.; Wood, D. R.; *Nonrepetitive colouring via entropy compression*, to appear in Combinatorica, DOI: 10.1007/s00493-015-3070-6.
- [6] Dobrushin , R. L.; *Perturbation methods of the theory of Gibbsian fields*, in P. Bernard (editor), Lectures on Probability Theory and Statistics, Lecture Notes in Mathematics Volume 1648, 1996, pp 1-66 Springer-Verlag, Berlin, (1996).
- [7] Erdős, P. and Lovász, L.; *Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions*, in *Infinite and finite sets*. Vol. II, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, Vol. 10, pp. 609-627. North-Holland, Amsterdam, (1975).
- [8] Esperet, L.; Parreau, A.; *Acyclic edge-coloring using entropy compression*, European Journal of Combinatorics, **34**, In. 6, 1019- 1027 (2013).
- [9] Fernández, R.; Procacci A.; *Cluster expansion for abstract polymer models. New bounds from an old approach*, Communications in Mathematical Physics. **274**, n.1, 123-140 (2007).
- [10] Fialho, P. M. S.; *Abstract polymer gas. A simple inductive proof of the Fernández-Procacci criterion*, J Stat Phys (2020). <https://doi.org/10.1007/s10955-020-02507-1>.
- [11] Fialho, P. M. S.; de Lima, B. N. B.; Procacci, A.; *A new bound on the acyclic edge chromatic index*, Preprint, arXiv:1912.04436, (2019).

- [12] Fialho, P. M. S.; de Lima, B. N. B.; Procacci, A.; *Moser-Tardos resampling algorithm, entropy compression method and the subset gas*, Preprint, arXiv:2001.00880 (2020)
- [13] Fiamčík, J.; *The acyclic chromatic class of a graph*, Math. Slovaca **28** 139–145 (1978) (in Russian).
- [14] Flajolet, P.; Sedgewick, R.; *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press (2009).
- [15] Francetić, N.; Stevens, B.; *Asymptotic size of covering arrays: an application of entropy compression*, J. Comb. Designs, **25**, Issue 6, 243-257 (2017).
- [16] Giotis, I.; Kirousis, L.; Psaromiligkos, K. I.; Thilikos, D. M.; *Acyclic edge coloring through the Lovász Local Lemma*, Theoretical Computer Science, Elsevier, 665, pp.40 - 50, (2017). (10.1016/j.tcs.2016.12.011). (hal-01632338). See also arXiv:1407.5374(v9) (2018).
- [17] Gruber, C.; Kunz, H.; *General properties of polymer systems*. Comm. Math. Phys. **22**, 133–61 (1971).
- [18] Gonçalves, D.; Montassier, M. Pinlou, A.; *Entropy compression method applied to graph colorings*, arXiv:1406.4380 (2014).
- [19] Harvey, N.; Vondrák, J.; *An algorithmic proof of the Lovász local lemma via resampling oracles*, arXiv:1504.02044 (2015).
- [20] Kotecký, R.; Preiss, D.; *Cluster expansion for abstract polymer models*. Commun. Math. Phys., **103**, 491–498 (1986).
- [21] Miracle-Solé, S.; *On the convergence of cluster expansions*. Physica A **279**, 244-249 (2000).
- [22] Molloy, M.; Reed, B.; *Further algorithmic aspects of Lovász local lemma*, in: The 30th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1998, p. 524-529.
- [23] Moser, R. ; Tardos, G.; *A constructive proof of the general Lovász Local Lemma*, J. ACM **57** Article 11, 15 pages (2010).
- [24] Ndreca, S.; Procacci, A.; Scoppola, B.; *Improved bounds on coloring of graphs*, European Journal of Combinatorics, **33**, n 4, p. 592-609 (2012).
- [25] Pegden, W.; *An extension of the Moser-Tardos algorithmic local lemma*, SIAM J. Discrete Math. **28**, 911-917 (2013).
- [26] Przybyło, J.; *On the Facial Thue Choice Index via Entropy Compression*, Journal of Graph Theory, **77**, Issue 3, 180-189, (2014).

- 
- [27] Ruelle, D.; *Statistical mechanics: Rigorous results*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam (1969).
- [28] Scott, A.; Sokal, A. D.; *The repulsive lattice gas, the independent-set polynomial, and the Lovász local lemma*, J. Stat. Phys. **118**, no. 5-6, 1151–1261, (2005).
- [29] Shearer, J. B.; *On a problem of Spencer*. Combinatorica **5**, 241-245, (1985).
- [30] Sinai, Y.G.; *Theory of Phase Transitions: Rigorous Results*. Pergamon, Oxford (1982).
- [31] Vizing, V. G.; *On an estimate of the chromatic class of a  $p$ -graph* (in Russian), Diskret, Analiz 3, Pages 25-30 (1964).