

**FORMULAÇÃO DE MODELOS DE DANO TENSORIAL PARA ANÁLISE
FISICAMENTE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO SUBMETIDAS
A CARREGAMENTOS MONOTÔNICOS E CÍCLICOS**

Lívia Ramos Santos Pereira

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

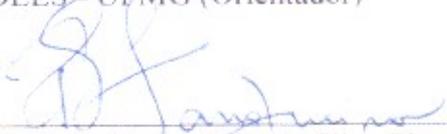
**"FORMULAÇÃO DE MODELOS DE DANO TENSORIAL PARA
ANÁLISE FÍSICAMENTE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE
CONCRETO SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS
MONOTÔNICOS E CÍCLICOS"**

Livia Ramos Santos Pereira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:


Prof. Dr. Samuel Silva Penna
DEES - UFMG (Orientador)


Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira
DEES - UFMG


Prof. Dr. Américo Campos Filho
UFRGS

Belo Horizonte, 20 de fevereiro de 2020

P436f

Pereira, Livia Ramos Santos.

Formulação de modelos de dano tensorial para análise fisicamente não linear de estruturas de concreto submetidas a carregamentos monotônicos e cíclicos [recurso eletrônico] / Livia Ramos Santos Pereira. - 2020.

1 recurso online (xxii, 106 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Samuel Silva Penna.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 101-106.

Bibliografia: f. 96-100.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Cálculo tensorial - Teses.
I. Penna, Samuel Silva. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)

No meio da confusão, encontre a simplicidade.

Albert Einstein

A todas as mentes, mãos e corações que contribuíram para esse trabalho.

Agradecimentos

Hoje minha felicidade de concluir este trabalho é real porque muitos compartilharam comigo sua concepção, a quem gostaria de agradecer.

A Deus, cujo nome e forma desconheço, mas que posso sentir em meu coração.

À minha mãe Márcia, pelo carinho e compreensão, e ao meu pai Jairo, por incentivar meus estudos. Ao meu querido irmão Júlio e à minha cunhada Cíntia, pelos conselhos e risadas.

Ao meu orientador Professor Samuel, por todo auxílio e suporte, sempre sorridente e solícito. Maior que sua simpatia, somente sua dedicação. Sou sua fã.

Ao Professor Roque e demais professores do time INSANE, pelos ensinamentos, e claro, por perguntarem diariamente se o trabalho estava pronto - parece que agora está!

Aos meus amigos de lar, Larissa e João, pelas comidinhas, conversas e trocas de conhecimento, vocês são para mim como uma família.

Aos amigos do INSANE, Bruna, Rapha e Gabis, a pesquisa foi mais proveitosa ao lado de vocês.

Ao Ruan, pelo companheirismo, paciência e afeto. Você me faz crescer como pessoa e me ensina a ver o melhor da vida.

À Juliana e aos demais funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, pela atenção e disponibilidade.

Ao CNPq, à CAPES e à FAPEMIG pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho objetiva estudar o desempenho de modelos constitutivos de dano ortotrópico baseados em Tensores de Efeito de Dano (TED), na análise estática fisicamente não linear de estruturas de concreto sujeitas a carregamentos monotônicos e cíclicos. Para tanto, adotou-se o sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*) como plataforma de implementação, que é um programa livre e de código aberto desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. A expansão do software ocorreu a partir da dedução e da implementação de tensores de efeito de dano, segundo propostas de diferentes autores. Tais tensores foram acoplados ao modelo constitutivo de fissuração distribuída para análises em estado plano de tensão. Quanto aos ciclos de carga, foram incorporados ao ambiente computacional ferramentas para incluir trechos de descarga e recarga a partir de uma diversidade de leis, como a secante, a elástica, segundo o conceito de ponto focal e a lei tensão-deformação prescrita por Popovics-Saenz. Para compreensão das características e limitações dos novos dispositivos de análise, foi realizada uma gama de simulações numéricas. Por fim, os recursos implementados foram validados diante da confrontação entre os resultados numéricos e curvas experimentais obtidas da literatura, avaliando estruturas submetidas a solicitações cíclicas de tração, compressão e flexão.

Palavras-Chave: Modelos de Dano Ortotrópico, Tensores de Efeito de Dano, Análise Estática Fisicamente Não Linear, Carregamentos Cíclicos.

Abstract

The present work aims to study the performance of constitutive models for orthotropic damage based on Damage Effect Tensors (DET) in the physically nonlinear static analysis of concrete structures subjected to monotonic and cyclic loading. For this, the INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*) system was adopted as an implementation platform, that is a free and open source software developed at the Structural Engineering Department of the Federal University of Minas Gerais. The software expansion occurred from the deduction and implementation of damage effect tensors, according to proposals from different authors. These tensors were coupled to the smeared cracking constitutive model for plane stress state analysis. As for the load cycles, tools have been incorporated into the computational environment to include unload and reload paths from a variety of laws, such as secant, elastic, the concept of focal point and the stress-strain law prescribed by Popovics-Saenz. In order to understand the features and limitations of the new analysis devices, a range of numerical simulations was performed. Finally, the implemented resources were validated through the comparison between the numerical results and experimental curves obtained from the literature, evaluating structures under cyclic tension, cyclic compression and cyclic bending loading.

Keywords: Orthotropic Damage Models, Damage Effect Tensors, Physically Nonlinear Static Analysis, Cyclic Loading.

Lista de Figuras

2.1	Volume Elementar Representativo - VER (Penna, 2011).	8
2.2	Incremento de tensão associado à degradação elástica (Penna, 2011).	14
3.1	Trajatórias de equilíbrio típicas em problemas não lineares (Fuina, 2004).	29
3.2	Diagrama de atividade do algoritmo genérico do processo incremental-iterativo (Fuina, 2004).	32
3.3	Detalhamento do diagrama de atividades da Figura 3.2 (Fuina, 2004).	33
3.4	Descarregamento e recarregamento secante.	38
3.5	Descarregamento e recarregamento elástico.	39
3.6	Descarregamento e recarregamento linear com ponto focal.	40
3.7	Controle de ciclos: método de controle por contagem de passos.	43
3.8	Controle de ciclos: método de controle por limite de carga.	44
4.1	Esquema de cores para representação UML das classes (Penna, 2011).	46
4.2	Organização do núcleo numérico do INSANE (Oliveira, 2018).	47
4.3	Hierarquia de classes de constitutivemodel.	50
4.4	Implementação dos tensores de efeito de dano.	50
4.5	Implementação da herança para controle de ciclos.	52
4.6	Hierarquia de classes de step.	52
4.7	Herança de classes para descrição das leis tensão-deformação para análises cíclicas.	54
5.1	Simulações numéricas para modelos constitutivos baseados em tensores de efeito de dano.	56
5.2	Curvas tensão-deformação: tração.	57
5.3	Refinamento da malha.	58

5.4	Instabilidade numérica observada para a hipótese de Darwin e Peck-	
	nold (1977).	58
5.5	Curvas tensão-deformação: compressão.	59
5.6	Trajectoria de equilíbrio: flexão.	61
5.7	Representação da malha adotada na análise numérica de compressão	
	diametral.	62
5.8	Trajectoria de equilíbrio: compressão diametral (dX).	63
5.9	Trajectoria de equilíbrio: compressão diametral (dY).	63
5.10	Modelo de tração pura para análise cíclica.	65
5.11	Curvas tensão-deformação para tração pura em estrutura submetida	
	a carregamento cíclico.	67
5.12	Curvas tensão-deformação para tração para as diferentes estratégias	
	de representação dos ciclos de carga.	68
5.13	Modelo de compressão pura para análise cíclica.	69
5.14	Curvas tensão-deformação para compressão pura em estrutura sub-	
	metida a carregamento cíclico.	70
5.15	Curvas tensão-deformação para compressão para as diferentes estra-	
	tégias de representação dos ciclos de carga.	71
5.16	Modelo de flexão em 3 pontos para análise cíclica.	72
5.17	Trajectorias de equilíbrio para flexão em 3 pontos em estrutura sub-	
	metida a carregamento cíclico.	73
5.18	Trajectorias de equilíbrio para flexão para as diferentes estratégias de	
	representação dos ciclos de carga.	74
5.19	Ensaio de tração pura.	76
5.20	Envoltórias monotônicas para diferentes valores de comprimento ca-	
	racterístico.	77
5.21	Curvas tensão × deformação para o ensaio de tração pura.	78
5.22	Curvas tensão × deformação para o ensaio de tração para as diferentes	
	estratégias de representação dos ciclos de carga.	79
5.23	Ensaio de compressão pura.	80
5.24	Curvas tensão × deformação para o ensaio de compressão para as	
	diferentes estratégias de representação dos ciclos de carga.	83
5.25	Curvas tensão × deformação para o ensaio de compressão pura.	84
5.26	Ensaio de flexão em 4 pontos - Hordijk (1991).	85

5.27 Malha adotada na simulação numérica do ensaio de Hordijk (1991).	85
5.28 Trajetória de equilíbrio para o ensaio de flexão em 4 pontos - Hordijk (1991).	87
5.29 Ensaio de flexão em 3 pontos - Perdikaris e Romeo (1995).	87
5.30 Malha adotada na simulação numérica do ensaio de Perdikaris e Romeo (1995).	88
5.31 Trajetória de equilíbrio para o ensaio de flexão em 3 pontos - Perdikaris e Romeo (1995).	89
A.1 Descarregamento e recarregamento segundo a lei tensão-deformação de Popovics-Saenz modificada (Bono, 2008).	102

Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros do material: tração pura com TED.	57
5.2	Parâmetros do material: compressão diametral com TED.	62
5.3	Parâmetros do material: tração pura com ciclos de carga.	67
5.4	Parâmetros do material: compressão pura com ciclos de carga	70
5.5	Parâmetros do material: tração pura (Gopalaratnam e Shah (1985)).	77
5.6	Parâmetros do material: compressão pura (Karsan e Jirsa (1969)).	81
5.7	Parâmetros do material: flexão em 4 pontos (Hordijk (1991)).	86
5.8	Parâmetros do material: flexão em 3 pontos (Perdikaris e Romeo	
	(1995)).	89

Lista de Abreviaturas e Siglas

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
DEES	Departamento de Engenharia de Estruturas
EPD	Estado Plano de Deformação
EPT	Estado Plano de Tensão
FAPEMIG	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais
INSANE	<i>INteractive Structural ANalysis Environment</i>
MDC	Mecânica do Dano Contínuo
MEF	Método dos Elementos Finitos
POO	Programação Orientada a Objetos
TED	Tensor de Efeito de Dano
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UML	<i>Unified Modeling Language</i>
VER	Volume Elementar Representativo

Lista de Símbolos

Capítulo 2

$D_{\vec{n}}$	Variável de dano na direção \vec{n}
δS	Plano de interseção entre um plano qualquer e o volume elementar representativo
δS_D	Área de microfissuras e microvazios contidos em δS
\vec{n}	Vetor de direção de propagação do dano
σ	Valor escalar da tensão
δF	Força normal aplicada na área δS
$\delta \tilde{S}$	Área da seção resistente
$\tilde{\sigma}$	Tensão efetiva escalar
D	Variável de dano
ε	Valor escalar da deformação equivalente
E	Módulo de elasticidade longitudinal do material íntegro
\tilde{E}	Módulo de elasticidade longitudinal do material deteriorado
σ_{ij}	Componentes do tensor de tensões
ε_{ij}	Componentes do tensor de deformações

E_{ijkl}	Componentes do tensor de rigidez secante
C_{ijkl}	Componentes do tensor de flexibilidade secante
E_{ijkl}^0	Componentes do tensor de rigidez do material íntegro
C_{ijkl}^0	Componentes do tensor de flexibilidade do material íntegro
E_{ijkl}^t	Operador tangente escrito em termos de rigidez
$\dot{\sigma}_{ij}^{inc}$	Componentes do tensor de tensão incremental associadas à rigidez elástica
$\dot{\sigma}_{ij}^d$	Componentes do tensor de tensão incremental associadas à degradação da rigidez
$\dot{\varepsilon}_{ij}^{inc}$	Componentes do tensor de deformação incremental associadas à flexibilidade elástica
$\dot{\varepsilon}_{ij}^d$	Componentes do tensor de deformação incremental associadas à variação da flexibilidade
$\dot{\lambda}_m$	Vetor de multiplicadores inelásticos
$d\varepsilon$	Incremento de deformação
$d\varepsilon^s$	Parcela do incremento de deformação associada à rigidez secante corrente
$d\varepsilon^d$	Parcela do incremento de deformação associada à degradação da rigidez
$d\sigma$	Incremento de tensão resultante
$d\sigma^{inc}$	Incremento de tensão associado ao incremento de deformação devido à degradação $d\varepsilon^d$
$d\sigma^d$	Incremento de tensão associado a ε^d

m_{mkl}	Componentes do tensor das direções da degradação no domínio das tensões
\bar{m}_{mkl}	Componentes do tensor das direções da degradação no domínio das deformações
H_{nm}	Componentes do tensor pós-crítico no domínio das tensões
\bar{H}_{nm}	Componentes do tensor pós-crítico no domínio das deformações
n_{nij}	Componentes do tensor dos gradientes das funções de carregamento no domínio das tensões
\bar{n}_{nij}	Componentes do tensor dos gradientes das funções de carregamento no domínio das deformações
\bar{M}_{mijkl}	Componentes do tensor das direções da variação do tensor de rigidez
F_n	Funções de carregamento
p_q	Conjunto de variáveis internas que controlam o processo de degradação no domínio das tensões
σ	Tensor de tensões
\mathbf{p}	Variáveis internas que controlam o processo de degradação no domínio das tensões
\mathbf{n}	Tensor das direções das funções de carregamento no domínio das tensões
\mathbf{m}	Tensor das direções da degradação no domínio das tensões
\mathbf{H}	Tensor pós-crítico no domínio das tensões
\mathbf{E}	Tensor de rigidez secante
\mathbf{C}	Tensor de flexibilidade secante

\mathbf{I}_4	Tensor identidade de quarta ordem
E_{ijkl}^D	Componentes do tensor de rigidez escrito em função das variáveis de dano
\mathcal{D}_*	Conjunto das variáveis de dano no domínio da flexibilidade
$\overline{\mathcal{D}}_*$	Conjunto das variáveis de dano no domínio da rigidez
$\overline{\mathcal{M}}_{m*}$	Direção da taxa de mudança das variáveis de dano no domínio da rigidez
G	Módulo de elasticidade transversal
ν	Coefficiente de Poisson
E^0	Módulo de elasticidade longitudinal do material íntegro
E_1	Módulo de elasticidade longitudinal na direção da primeira deformação principal
E_2	Módulo de elasticidade longitudinal na direção da segunda deformação principal
ν_1, ν_2	Influência da deformação normal na direção tangencial
E_{ijkl}^s	Componentes do tensor de rigidez secante
C_{ijkl}^s	Componentes do tensor de flexibilidade secante
σ_{ij}^{ef}	Componentes do tensor de tensões efetivas
ε_{ij}^{ef}	Componentes do tensor de deformações efetivas
$\overline{\alpha}_{ijkl}$	Componentes do tensor de efeito de dano sobre as tensões
α_{ijkl}	Componentes do tensor de efeito de dano sobre as deformações
I_{ijkl}^{sym}	Componentes do tensor identidade de quarta ordem
$\overline{\phi}$	Variável de integridade

ϕ	Inverso da variável de integridade
D_{ij}	Componentes do tensor das variáveis de dano
δ_{ij}	Delta de Kronecker
σ_{ij}^+	Componentes da parte positiva do tensor de tensões principais
σ_{ij}^-	Componentes da parte negativa do tensor de tensões principais
$\bar{\phi}$	Tensor integridade
ϕ	Inverso do tensor integridade
$\bar{\phi}_{ij}$	Componentes do tensor integridade
ϕ_{ij}	Componentes do tensor inverso do tensor integridade
\bar{w}_{ij}	Raiz quadrada do tensor integridade
w_{ij}	Raiz quadrada do tensor inverso do tensor integridade
$\bar{\phi}_{(1)}$	Integridade do material na direção da primeira deformação principal
$\bar{\phi}_{(2)}$	Integridade do material na direção da segunda deformação principal
A_1, A_2, B_1, B_2, C_1	Componentes do tensor de efeito de dano para o caso ortotrópico, cujos valores dependem da hipótese adotada

Capítulo 3

$[K_t]$	Matriz de rigidez tangente
$\{\delta U\}$	Vetor de incremento de deslocamentos
$\delta \lambda$	Incremento do fator de carga
$\{P\}$	Vetor de cargas de referência

$\{Q\}$	Vetor de cargas residuais
$[k_t^e]$	Matriz de rigidez tangente de um elemento finito
V_e	Volume de um elemento finito
$[B]$	Matriz das relações entre deformações e deslocamentos
$[E_t]$	Matriz constitutiva tangente
$\{F_{int}^e\}$	Vetor das forças nodais equivalentes a um estado de tensão interno de um elemento finito
$\{F_{int}\}$	Vetor das forças nodais equivalentes às tensões internas ao final de uma iteração
$\{\sigma\}$	Vetor de tensões
λ	Fator de carga
$\{U\}$	Vetor de deslocamentos
f	Função de carregamento
$\tilde{\varepsilon}$	Valor escalar da deformação equivalente
κ	Variável histórica
δf	Taxa de variação da função de carregamento
$\delta \kappa$	Taxa de variação da variável histórica
κ_0	Limite de deformação do regime elástico
E_s	Módulo de elasticidade longitudinal secante
ε_d	Valor da deformação no ponto descarga
σ_d	Valor da tensão no ponto de descarga

ε_r	Valor da deformação no ponto de recarga
σ_r	Valor da tensão no ponto de recarga
ε'	Deformação corrente no ciclo
σ'	Tensão corrente no ciclo
ε_f	Valor da deformação no ponto focal
σ_f	Valor da tensão no ponto focal
E^0	Módulo de elasticidade longitudinal inicial
E_{SG}	Módulo de elasticidade longitudinal secante generalizado
ε^e	Parcela elástica da deformação
ε^p	Parcela permanente da deformação
$\Delta\sigma$	Variação da tensão
E_L	Módulo de elasticidade longitudinal linear
ε_c	Deformação associada à resistência à compressão
f_c	Tensão relativa ao limite de resistência à compressão
ε_t	Deformação relativa ao limite elástico na tração
f_t	Tensão relativa ao limite de resistência à tração
ε_u	Deformação corrente

Capítulo 4

X	Variáveis de estado do problema
$\dot{\mathbf{X}}$	Primeira variação temporal da variável de estado

$\ddot{\mathbf{X}}$	Segunda variação temporal da variável de estado
\mathbf{A}	Matriz dos coeficientes associados à segunda variação temporal da variável de estado
\mathbf{B}	Matriz dos coeficientes associados à primeira variação temporal da variável de estado
\mathbf{C}	Matriz dos coeficientes associados à variável de estado
\mathbf{D}	Vetor de variáveis de estado duais
\mathbf{E}^s	Tensor de rigidez secante
$\overline{\mathbf{M}}$	Tensor das direções da variação do tensor de rigidez no domínio das deformações
$\overline{\mathbf{m}}$	Tensor das direções da degradação no domínio das deformações

Capítulo 5

ε_c	Deformação associada à resistência à compressão
f_c	Tensão relativa ao limite de resistência à compressão
ε_t	Deformação relativa ao limite elástico na tração
f_t	Tensão relativa ao limite de resistência à tração
E	Módulo de elasticidade longitudinal do material íntegro
ν	Coefficiente de Poisson
G_f	Energia de fratura por comprimento de trinca
h	Comprimento característico
β_r	Fator de retenção ao cisalhamento

ε_f	Valor da deformação no ponto focal
σ_f	Valor da tensão no ponto focal
ε_{f1}	Valor da deformação no ponto focal na direção principal 1
σ_{f1}	Valor da tensão no ponto focal na direção principal 1
ε_{f2}	Valor da deformação no ponto focal na direção principal 2
σ_{f2}	Valor da tensão no ponto focal na direção principal 2
β_{ref}	Parâmetro de ajuste da curva Popovics-Saenz segundo o valor da deformação no ponto de controle do ramo descendente da curva tensão-deformação
k_{ref}	Parâmetro de ajuste da curva Popovics-Saenz segundo o valor da tensão no ponto de controle do ramo descendente da curva tensão-deformação

Apêndice A

ε_u	Deformação corrente
σ	Tensão corrente
ε_c	Deformação associada à resistência à compressão
f_c	Tensão relativa ao limite de resistência à compressão
ε_t	Deformação relativa ao limite elástico na tração
f_t	Tensão relativa ao limite de resistência à tração
ε_f	Valor da deformação no ponto focal
σ_f	Valor da tensão no ponto focal
ε_d	Valor da deformação no ponto descarga

σ_d	Valor da tensão no ponto de descarga
ε_r	Valor da deformação no ponto de recarga
σ_r	Valor da tensão no ponto de recarga
E^0	Módulo de elasticidade inicial do concreto
E_d	Módulo de elasticidade no ponto de início da descarga
E_0^t	Módulo de elasticidade no ponto da descarga anterior
K, R	Parâmetros da curva tensão-deformação de Popovics-Saenz que variam para os trechos de carga, descarga e recarga
A, B, C, D	Variáveis da curva tensão-deformação de Popovics-Saenz que dependem da curva estar no ramo ascendente ou descendente

Apêndice B

σ_{ij}	Componentes do tensor de tensões
ε_{ij}	Componentes do tensor de deformações
E_{ijkl}	Componentes do tensor de rigidez secante
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformações
\mathbf{E}	Tensor de rigidez
E^0	Módulo de elasticidade longitudinal inicial
ν^0	Coefficiente de Poisson inicial
δ_{ij}	Delta de Kronecker
Λ^0	Primeiro parâmetro de Lamé

G^0 Segundo parâmetro de Lamé

Γ^0 Constante escrita em termos de E^0 e ν^0

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	viii
Lista de Abreviaturas e Siglas	ix
Lista de Símbolos	x
Sumário	xxi
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	4
1.1.1 Objetivo Geral	4
1.1.2 Objetivos Específicos	4
1.2 Organização do Texto	5
2 Mecânica do Dano Contínuo	6
2.1 Fundamentos da Mecânica do Dano Contínuo	7
2.2 Formulação para Modelos de Degradação	12
2.3 Tensores de Efeito de Dano	19
2.3.1 Tensor de Efeito de Dano por Carol et al. (2001a,b)	22
2.3.2 Tensor de Efeito de Dano por Darwin e Pecknold (1977)	24
2.3.3 Tensor de Efeito de Dano por Pitangueira (1998)	25
3 Análise Fisicamente Não Linear Cíclica	27
3.1 Análise Estática Não Linear	28
3.2 Condições de Carregamento	34
3.2.1 Critérios de Carregamento, Descarregamento e Recarregamento do Ponto Material	34
3.3 Comportamento do Material	35

3.3.1	Curvas Tensão-Deformação para Carregamento Cíclico	36
3.4	Métodos de Controle de Ciclo	42
4	Implementação Computacional	45
4.1	Organização do Núcleo Numérico	46
4.2	Implementação de Tensores de Efeito de Dano	48
4.3	Implementação dos Ciclos de Carregamento	51
4.4	Implementação das Leis Tensão-Deformação	52
5	Simulações Numéricas	55
5.1	Simulações para Avaliação da Implementação dos Tensores de Efeito de Dano	55
5.1.1	Tração Pura	56
5.1.2	Compressão Pura	59
5.1.3	Flexão em 3 Pontos	60
5.1.4	Compressão Diametral	61
5.2	Simulações para Avaliação da Implementação dos Ciclos de Carregamento	64
5.2.1	Tração Pura com Carregamento Cíclico	65
5.2.2	Compressão Pura com Carregamento Cíclico	69
5.2.3	Flexão em 3 Pontos com Carregamento Cíclico	72
5.3	Simulações Numéricas Validadas por Resultados Experimentais	75
5.3.1	Tração Pura - Gopalaratnam e Shah (1985)	75
5.3.2	Compressão Pura - Karsan e Jirsa (1969)	80
5.3.3	Flexão em 4 pontos - Hordijk (1991)	84
5.3.4	Flexão em 3 pontos - Perdikaris e Romeo (1995)	87
6	Considerações Finais	91
6.1	Sobre os Tensores de Efeito de Dano	92
6.2	Sobre a Análise Cíclica	93
6.3	Sugestões para Trabalhos Futuros	94
	Referências Bibliográficas	96
A	Curva Tensão-Deformação de Popovics-Saenz para Carregamento Cíclico	101
B	Composição Tensorial	104
B.1	Notação Indicial e Representação Matricial	104

Capítulo 1

Introdução

Um problema de mecânica estrutural é denominado não linear se sua rigidez varia em função dos deslocamentos da estrutura. A causa da não linearidade pode ser de origem geométrica, em que o equilíbrio da estrutura é obtido a partir de sua configuração deformada, ou física, oriunda da resposta não linear do material quando solicitado. O Método dos Elementos Finitos (MEF) permite a modelagem e a solução de problemas que demandam análises dessa natureza. Para tanto, deve-se resolver um sistema de equações algébricas não lineares, com o objetivo de obter a resposta da estrutura, representada pelas trajetórias de equilíbrio do modelo. Entende-se por trajetórias de equilíbrio curvas definidas por valores de carga e deslocamento obtidas a partir de métodos incrementais-iterativos.

Análises fisicamente não lineares demandam a utilização de modelos constitutivos para representar o comportamento do material que compõe uma estrutura. De acordo com [Luccioni \(1993\)](#) apud [Pituba \(1998\)](#), um modelo constitutivo é um modelo mecânico-matemático que descreve, de maneira simplificada, o comportamento tensão-deformação do material. Para materiais parcialmente frágeis, como o concreto, muitos modelos constitutivos foram formulados, fundamentados em teorias como a plasticidade clássica, a mecânica da fratura e a mecânica do dano contínuo.

No contexto da Mecânica do Dano Contínuo (MDC), [Lemaitre e Desmorat \(2005\)](#) definem dano como o surgimento e o crescimento de microvazios e microfissuras no meio material. A variável de dano, segundo [Kachanov \(1986\)](#), é um parâmetro

que mede as mudanças da estrutura do material, podendo ser quantificada pela deterioração micromecânica do material ou por uma análise fenomenológica das propriedades degradadas. Essa variável pode ser representada por um escalar, nos casos mais simples, ou por tensores, sendo sua forma mais geral um tensor de quarta ordem.

Diversas formulações matemáticas para descrever os modelos de dano foram desenvolvidas utilizando conceitos abstratos da termodinâmica, dificultando o entendimento do processo de degradação devido à carência de lastro físico dessa abordagem. Como alternativa, [Carol et al. \(1994\)](#) apresentaram uma estrutura teórica unificada para descrever modelos de degradação da rigidez elástica baseada no conceito de funções de carregamento. Nesse trabalho, a formulação foi desenvolvida estritamente para modelos de dano escalar. Posteriormente, diversos autores, entre eles [Carol et al. \(2001a\)](#), apresentaram formulações baseadas no então denominado tensor de efeito de dano.

O tensor de efeito de dano foi introduzido na mecânica do dano contínuo a partir do conceito de tensão efetiva em materiais degradados. Ao considerar que a tensão nominal atuante em uma configuração hipotética de integridade total produz a mesma energia de deformação da tensão efetiva atuante na configuração degradada corrente, define-se que os tensores de tensão efetiva e nominal estão relacionados por um tensor de quarta ordem, denominado tensor de efeito de dano ([Voyiadjis e Park \(1997\)](#)).

Ressalta-se ainda que, para uma análise completa de um determinado modelo estrutural sujeito à degradação, é crucial a descrição do comportamento do material para processos de carga, descarga e recarga. Mesmo para cargas externas monotônicas, a microestrutura do material pode apresentar redistribuição de tensões que conduzem a processos de descarregamento, devidos, por exemplo, ao surgimento e à propagação de fissuras no meio, conforme destacado por [Yankelevsky \(1989\)](#). Há ainda a necessidade de modelar situações onde o próprio carregamento é variável e

a estrutura está submetida a um histórico de cargas, o que caracteriza uma análise cíclica. Para tanto, demanda-se a utilização de leis tensão-deformação para carregamentos cíclicos e de um procedimento para o controle do processo incremental, definindo-se pontos para inversão do sinal do incremento da análise.

Neste cenário, o presente trabalho propõe a formulação e a implementação de modelos constitutivos baseados em tensores de efeito de dano, com o objetivo de desacoplar a forma original do tensor elástico da regra de degradação associada ao modelo constitutivo, garantindo maior generalização de modelos baseados em variáveis de dano. Diferentes leis de evolução do dano no meio material foram implementadas, cujas formulações foram fundamentadas nos trabalhos de [Carol et al. \(2001a\)](#), [Darwin e Pecknold \(1977\)](#) e [Pitangueira \(1998\)](#).

Para abranger as análises não lineares com carregamentos cíclicos, foram desenvolvidos dois métodos de controle de incremento, por contagem de passos do processo incremental-iterativo ou por limites estabelecidos para o fator de carga alcançado. Esses recursos permitem a inversão do sinal do incremento e controlam o início e o fim de cada trecho de descarga e recarga. Quanto às leis tensão-deformação que incluem carregamentos cíclicos, optou-se por implementar a lei secante, a lei elástica e as leis propostas por [Lee et al. \(1995\)](#) e [Popovics-Saenz \(Bono \(2008\)\)](#).

A implementação dos tensores de efeito de dano foi avaliada a partir de simulações numéricas de tração, compressão, flexão e compressão diametral. Como referência, foi utilizado o modelo de fissuração distribuída com direção fixa de propagação da fissura desenvolvido no trabalho de [Penna \(2011\)](#). As novas funcionalidades para descrição de análises não lineares com carregamentos cíclicos foram validadas por estudos qualitativos e pela comparação entre dados experimentais disponíveis na literatura e resultados numéricos obtidos com os recursos implementados.

Para o desenvolvimento da proposta, adotou-se como plataforma de implementação o software INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), que é um sistema computacional livre e de código aberto desenvolvido no Departamento de

Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais (DEES/UFMG). O INSANE é escrito, em sua grande parte, em linguagem JAVA, pautada no paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO), cuja metodologia propicia maior abstração, encapsulamento e generalização do código.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Esta dissertação de mestrado tem como objetivo formular e implementar modelos de dano ortotrópico baseados em tensores de efeito de dano, para análises estáticas fisicamente não lineares em estruturas de concreto submetidas a carregamentos monotônicos e cíclicos.

1.1.2 Objetivos Específicos

Visando o objetivo geral desta proposta, são definidos os objetivos específicos a seguir:

1. Formulação de tensores de efeito de dano a partir de modelos clássicos presentes na literatura;
2. Implementação de um conjunto de classes que seja capaz de representar e generalizar o tensor de efeito de dano;
3. Expansão do arcabouço teórico de modelos constitutivos disponível no INSANE, incluindo modelos de dano ortotrópico baseados em tensores de efeito de dano;
4. Implementação de procedimentos para a inclusão de análises com carregamento cíclico no INSANE;

5. Implementação de diferentes leis de descarregamento e recarregamento para representar com versatilidade os ciclos de carga.

1.2 Organização do Texto

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos e 2 apêndices.

O Capítulo [1](#) é um preâmbulo, apresentando o tema escolhido e fazendo uma breve explanação do assunto. São apresentados os objetivos do trabalho e a organização do texto.

No Capítulo [2](#) discute-se as premissas da Mecânica do Dano Contínuo (MDC) e a formulação matemática para modelos de degradação elástica. Nesse capítulo, também são apresentados os tensores de efeito de dano e diferentes propostas para sua representação.

O Capítulo [3](#) versa a respeito da metodologia para realização de análises não lineares, sejam elas referentes a carregamentos monotônicos ou cíclicos.

O Capítulo [4](#) refere-se à sistematização da implementação computacional desenvolvida para ampliação do núcleo numérico, com a inclusão de recursos para tratar a degradação do meio a partir de tensores de efeito de dano e incorporação de ferramentas para análises cíclicas.

No Capítulo [5](#) apresentam-se simulações numéricas para avaliar o desempenho da formulação desenvolvida neste trabalho, discutindo os resultados obtidos, suas aplicações e as limitações observadas.

O Capítulo [6](#) compreende as considerações finais acerca deste trabalho e propostas de estudos futuros afins com a presente dissertação.

O Apêndice [A](#) aborda a lei tensão-deformação de Popovics-Saenz, incluindo a envoltória monotônica de compressão e os trechos de descarga e recarga.

O Apêndice [B](#), por fim, apresenta a composição tensorial adotada neste trabalho.

Capítulo 2

Mecânica do Dano Contínuo

Materiais submetidos a carregamentos mecânicos e condições ambientais desfavoráveis apresentam redução de resistência, tendo em vista o acúmulo de alterações em sua microestrutura. A fim de avaliar as consequências do dano gerado em uma estrutura devido à degradação do material e propor projetos confiáveis, torna-se de interesse da engenharia estudar o processo de deterioração, utilizando modelos analíticos e técnicas computacionais (Kachanov (1986)). Nesse contexto, surge a Mecânica do Dano Contínuo (MDC), com o trabalho pioneiro de Kachanov (1958).

Lemaitre e Desmorat (2005) definem dano como surgimento e crescimento de microvazios e microfissuras no meio material, que são descontinuidades presentes na microestrutura de um meio tido como homogêneo em escala macroscópica. Tal consideração pode ser feita a partir da definição de um Volume Elementar Representativo (VER). As dimensões dessa entidade geométrica são definidas de modo que as descontinuidades tornem-se suficientemente pequenas diante do VER, mas que esse seja suficientemente grande para representar a estrutura do material.

Para quantificar o processo progressivo de deterioração do material, são utilizadas as chamadas variáveis de dano. Essa variável, inicialmente tratada como um escalar por Kachanov (1958) para descrever o dano isotrópico, teve sua definição estendida de forma a incluir os efeitos da anisotropia inerente da degradação do meio, que

conduz a representação do dano por intermédio de notação tensorial.

Nessa conjuntura, surge o conceito de Tensor de Efeito de Dano (TED), o qual é desenvolvido a partir dos princípios de tensão efetiva e que busca representar a degradação anisotrópica a partir de um tensor de quarta ordem (Voyiadjis e Park (1997)). Esse tensor opera sobre o tensor de rigidez do material íntegro, fornecendo como resultado o tensor de rigidez secante corrente do material degradado.

Partindo do conceito de dano, diversos são os modelos constitutivos fundamentados nos princípios da mecânica do dano contínuo, tais como os modelos propostos por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989), Lemaitre e Chaboche (1990) e de Vree et al. (1995). Com o objetivo de desenvolver uma formulação teórica unificada para os modelos de degradação elástica, Carol et al. (1994) propuseram um desdobramento matemático dessa teoria partindo de uma abordagem mais direta, em detrimento das formulações baseadas na termodinâmica. Fundamentada no conceito de função de carregamento e nas terminologias e concepções bem estabelecidas para a plasticidade, essa formulação trouxe maior generalização e facilidade de entendimento do fenômeno de degradação do meio.

Neste trabalho, para a representação da forma tensorial do dano, foi adotada a formulação apresentada por Carol et al. (2001a). Diferentes leis de evolução de dano presentes na literatura foram estudadas, com o intuito de fornecer maior versatilidade para as análises dessa natureza. Optou-se pela implementação de tensores de efeito de dano desenvolvidos segundo os estudos de Carol et al. (2001a,b), Darwin e Pecknold (1977) e Pitangueira (1998).

2.1 Fundamentos da Mecânica do Dano Contínuo

A mecânica do dano contínuo é uma formulação teórica para análise dos efeitos da deterioração do material em sólidos submetidos a ações mecânicas ou térmicas. Diferentemente da mecânica da fratura, que trabalha com propagação de fissuras

macroscópicas, a mecânica do dano contínuo estuda o efeito e a evolução de um campo de defeitos continuamente distribuído no meio material, como microfissuras ou poros (Pituba (1998)). Seu desenvolvimento iniciou-se com Kachanov (1958) e, desde então, muitos modelos constitutivos que incorporam a definição de dano foram propostos. Para compreensão desses modelos, é fundamental abordar o conceito de variável de dano, que tem como propósito quantificar a deterioração do meio.

De acordo com Lemaitre e Desmorat (2005), o Volume Elementar Representativo (VER), ilustrado na Figura 2.1, é uma unidade volumétrica que permite a representação das propriedades de um meio material por variáveis homogeneizadas. Tal elemento é chamado representativo por suas dimensões serem suficientemente grandes para que seus defeitos tenham uma distribuição homogênea e suficientemente pequenas para que possa ser considerado como um ponto material do contínuo (Pituba (1998)).

Sendo δS a área de uma das faces do volume representativo, a qual define um plano cuja normal tem direção \vec{n} , e δS_D a área equivalente aos poros e às microfissuras, a variável de dano, denotada por $D_{\vec{n}}$, pode ser definida como a densidade de defeitos do VER, conforme a equação (2.1).

$$D_{\vec{n}} = \frac{\delta S_D}{\delta S}. \quad (2.1)$$

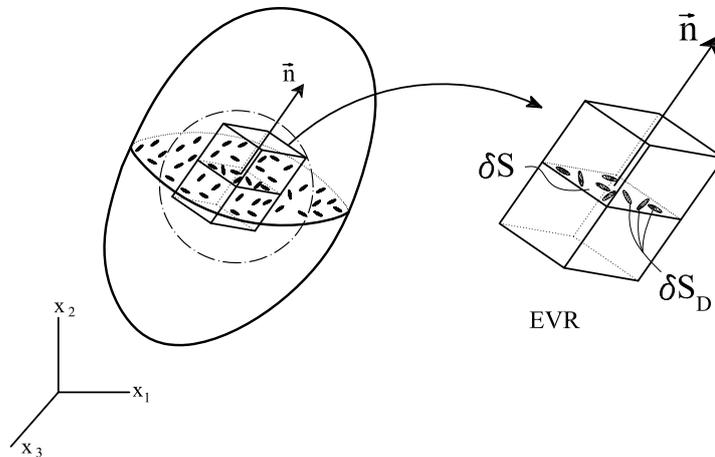


Figura 2.1: Volume Elementar Representativo - VER (Penna, 2011).

A variável de dano assume valores contidos no intervalo $0 \leq D_{\vec{n}} \leq 1$, em que $D_{\vec{n}} = 0$ indica material íntegro e $D_{\vec{n}} = 1$ corresponde a total deterioração do material.

Os valores de $D_{\vec{n}}$ variam com a orientação da normal \vec{n} caso o dano seja anisotrópico, com distribuição de fissuras segundo uma direção preferencial. Já o dano isotrópico refere-se a uma situação em que os microdefeitos se distribuem, por hipótese, uniformemente no meio material, sendo independentes da orientação da normal \vec{n} . Nesse caso, conforme a equação (2.2), um único valor da variável de dano caracteriza completamente o estado local de deterioração (Pituba (1998)).

$$D_{\vec{n}} = D \quad \forall \quad \vec{n}. \quad (2.2)$$

Modelos baseados em dano isotrópico, que consideram a variável escalar de dano, são adequados para análise de problemas unidimensionais e para aproximações de problemas tridimensionais com carregamento proporcional (Lemaitre e Desmorat (2005)). Contudo, como ressalta Pituba (1998), a distribuição de defeitos e microfissuras varia significativamente com a direção considerada, sendo intrinsecamente anisotrópica. Assim, torna-se relevante incluir os efeitos da anisotropia na formulação de modelos constitutivos, especialmente para casos de carregamento não proporcional, ainda que seja mais custoso trabalhar com a variável de dano anisotrópico, que assume caráter tensorial. Estudos como os desenvolvidos por Carol et al. (2001a,b) e Voyiadjis e Park (1997) buscam elaborar formulações admitindo dano anisotrópico.

Neste trabalho, são abordados modelos de dano ortotrópico, tendo em vista a maior simplicidade matemática desses em relação aos modelos de dano anisotrópico e a melhor caracterização do dano que esses oferecem diante do dano isotrópico. Assim, toma-se um nível intermediário de complexidade do problema, mas que é suficiente para representar a degradação de meios onde ocorre uma direção preferencial de propagação do dano. Um exemplo de fenômeno que pode ser bem representado pela condição de dano ortotrópico é a fissuração do concreto, já que esse material apresenta resistência distinta para os esforços de tração e compressão, sendo a região

tracionada aquela em que o dano se propaga com maior facilidade.

As teorias da mecânica do dano contínuo podem ainda ser classificadas conforme o significado físico das variáveis de dano, nas categorias de modelos de dano micromecânico e modelos de dano fenomenológico. A abordagem micromecânica da degradação do material utiliza uma média dos defeitos microscópicos para caracterizar o estado de deterioração, enquanto a abordagem fenomenológica quantifica o dano por meio da redução progressiva de uma propriedade mecânica global, como o módulo de elasticidade.

Penna (2011) enfatiza que, apesar do grande apelo físico, os modelos micromecânicos apresentam dificuldades experimentais de identificação das leis de evolução do dano, o que restringe sua utilização. Essas dificuldades decorrem da dependência dos modelos de dano micromecânico com a mesoescala do material, que para o concreto envolvem a caracterização da forma, da disposição, do volume e da natureza dos agregados. É necessário ainda uma análise de fenômenos de exsudação, de retração e de hidratação que podem originar defeitos iniciais e um estudo da interface pasta-agregado, que constitui uma região tipicamente frágil por onde as fissuras se propagam (Krajcinovic e Fanella (1986)).

Avaliar todos esses fatores é tarefa complexa e, por vezes, impede que a variável de dano seja mensurável diretamente. Assim, conforme relatado por Souza Neto et al. (2008), uma alternativa para contornar tais limitações é tratar a variável de dano a partir da abordagem fenomenológica. Observa-se, então, o comportamento do material em nível macroscópico, partindo da homogeneização do meio e de propriedades mais simples de se quantificar, como módulo de elasticidade, a tensão de escoamento e a densidade. Cabe ressaltar que, embora os modelos de dano fenomenológico sejam bem sucedidos em diversos casos, há situações que exigem inclusão da descrição microscópica do meio e uma abordagem puramente fenomenológica seria insuficiente para descrever a degradação do material com acurácia.

Para trabalhar com o conceito de dano fenomenológico, por sua vez, é necessário

definir tensão efetiva e deformação efetiva. Segundo Pituba (1998), a tensão efetiva é obtida tomando-se a parte da seção que resiste efetivamente ao carregamento. A tensão nominal σ é dada pela equação (2.3), sendo δF a força aplicada na seção de área δS do VER. Na presença de dano isotrópico, de medida escalar D , considerando a área da seção resistente $\delta \tilde{S}$ (equação (2.4)), a tensão efetiva $\tilde{\sigma}$ é definida pela equação (2.5):

$$\sigma = \frac{\delta F}{\delta S}, \quad (2.3)$$

$$\delta \tilde{S} = \delta S - \delta S_D, \quad (2.4)$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{\delta F}{\delta \tilde{S}} = \frac{\sigma}{1 - D}, \quad (2.5)$$

Com $D = \frac{\delta S_D}{\delta S}$ e a tensão efetiva assumindo os valores de σ , para material íntegro, e tendendo ao infinito no limite de $D = 1$, que representa o material totalmente danificado.

Quanto à deformação, é necessário escrevê-la como função do dano $\varepsilon = \varepsilon(D)$. Segundo Lemaitre e Desmorat (2005), o estado de deformação do material com dano pode ser obtido pela lei do comportamento do material íntegro (equação (2.6)), substituindo a tensão nominal pela tensão efetiva, como indica a equação (2.7):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (2.6)$$

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{E(1 - D)}. \quad (2.7)$$

Comparando as relações (2.6) e (2.7), é possível definir o módulo de elasticidade \tilde{E} , equivalente ao meio deteriorado, em função do módulo de elasticidade E do material íntegro:

$$\tilde{E} = (1 - D)E. \quad (2.8)$$

A equação (2.8) pode ser reescrita de forma que a variável de dano seja determinada a partir dos valores dos módulos de elasticidade, implicando em uma aplicação da abordagem fenomenológica do dano e obtendo:

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E}. \quad (2.9)$$

Pelas facilidades de representação do processo de dano fenomenológico, diversos modelos foram propostos baseando-se na degradação do módulo elástico. Podem ser citados os modelos de dano de Mazars e Pijaudier-Cabot (1989), Lemaitre e Chaboche (1990) e de Vree et al. (1995). Modelos tradicionais para descrever o processo de fissuração, como o modelo clássico de Rots (1988), são fundamentados nos mesmos princípios do dano fenomenológico, ainda que não considerem explicitamente a degradação elástica em termos de variáveis de dano.

Deve ser evidenciado que o desenvolvimento matemático apresentado anteriormente refere-se ao caso unidimensional de dano isotrópico. Contudo, o operador de dano, em sua generalização para modelos de dano anisotrópico, assume a forma de um tensor de quarta ordem. Tais representações são tratadas a partir dos tensores de efeito de dano, os quais serão apresentados detalhadamente ao longo deste capítulo.

2.2 Formulação para Modelos de Degradação

Estabelecer uma base comum para os modelos de degradação elástica conduz a uma maior generalização na forma de representar o comportamento do meio material. Para alcançar esse objetivo, muitos autores basearam-se nos princípios da termodinâmica e em seus processos energéticos. Apesar de geral, a termodinâmica apresenta pouca praticidade para a implementação computacional e há dificuldade em associar as variáveis da formulação com propriedades físicas do processo de degradação.

A fim de contornar essa dificuldade, Carol et al. (1994) propõem uma unificação teórica para modelos de degradação elástica baseados em uma única superfície de carregamento, fazendo uma analogia entre os modelos de dano e a teoria da plasticidade clássica. Essa proposta, inicialmente restrita a modelos de dano escalar, foi expandida para modelos tensoriais em trabalhos posteriores como o apresentado por Carol et al. (2001a).

Esse trabalho, entretanto, continuou limitado a uma única superfície de carregamento, motivando [Penna \(2011\)](#) a propor uma expansão da unificação teórica para modelos baseados em múltiplas funções de carregamento. Tais funções são utilizadas como recurso para observar a evolução das tensões e deformações nos pontos materiais, agrupando o critério de resistência e as variáveis históricas do modelo material.

Com base nesses estudos, a formulação geral para modelos de degradação elástica pode ser descrita pelo desenvolvimento matemático apresentado a seguir.

De acordo com as equações [2.10a](#) e [2.10b](#), a principal característica de modelos baseados em degradação elástica é a existência de uma relação total entre as tensões e as deformações:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad (2.10a,b)$$

em que σ_{ij} são as componentes do tensor de tensões, ε_{ij} são as componentes do tensor de deformações, E_{ijkl} são as componentes do tensor de rigidez secante e C_{ijkl} são as componentes do tensor de flexibilidade secante.

A partir das formulações baseadas em tensão e deformação, respectivamente, e utilizando a relação total expressa pelas equações [2.10](#), tem-se as variações das tensões e das deformações dadas por:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + \dot{C}_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad (2.11a,b)$$

ou, pela decomposição aditiva:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^{inc} - \dot{\sigma}_{ij}^d = E_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^d), \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{inc} - \dot{\varepsilon}_{ij}^d = C_{ijkl}(\dot{\sigma}_{kl} - \dot{\sigma}_{kl}^d), \quad (2.12a,b)$$

sendo:

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^d = \dot{\lambda}_m m_{mkl}, \quad \dot{\sigma}_{kl}^d = \dot{\lambda}_m \bar{m}_{mkl}, \quad (2.13a,b)$$

em que $\dot{\varepsilon}_{kl}^d$ e $\dot{\sigma}_{kl}^d$ referem-se, respectivamente, à variação da deformação de degradação e à variação da tensão de degradação. As componentes do vetor de multiplicadores

inelásticos são expressas por $\dot{\lambda}_m$, que representa a magnitude da degradação, e m_{mkl} e \bar{m}_{mkl} são as componentes do tensor das direções de degradação. As variáveis representadas com um ponto ($\dot{\cdot}$) superior, como $\dot{\sigma}_{ij}$, referem-se a taxa de variação da respectiva grandeza no pseudo-tempo. Já as variáveis sobrepostas por uma barra, como \bar{m}_{mkl} , são aquelas definidas no domínio das deformações, enquanto as demais variáveis são desenvolvidas no domínio das tensões.

A Figura 2.2 ilustra, para o caso unidimensional, a variação das grandezas associadas ao processo de degradação elástica, relativo a um incremento de tensão. As variáveis apresentadas são definidas como:

$d\varepsilon$ é o incremento de deformação;

$d\varepsilon^s$ é a parcela do incremento de deformação associada à rigidez secante corrente;

$d\varepsilon^d$ é a parcela do incremento de deformação associada à degradação da rigidez;

$d\sigma^{inc}$ é o incremento de tensão associado ao incremento de deformação $d\varepsilon$;

$d\sigma^d$ é o incremento de tensão associado ao incremento de deformação devido à degradação $d\varepsilon^d$;

$d\sigma$ é o incremento de tensão resultante.

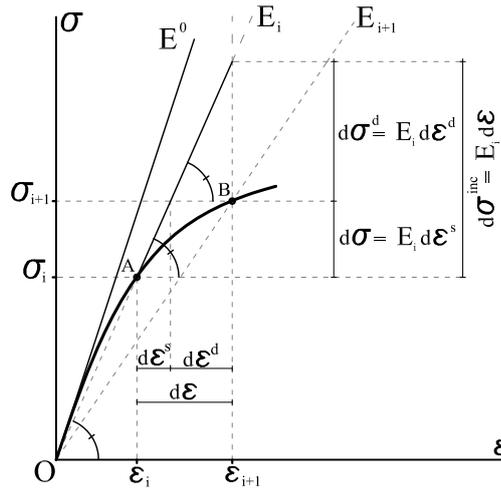


Figura 2.2: Incremento de tensão associado à degradação elástica (Penna, 2011).

O processo de carregamento, por sua vez, é acompanhado pela equação:

$$F_n(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) = f(\boldsymbol{\sigma}) - f(\mathbf{p}) \quad (2.14)$$

em que \mathbf{p} são variáveis internas que controlam o processo de degradação, sendo a função $f(\mathbf{p})$ a representação do histórico de carregamento no material. Essas variáveis podem ser escritas em termos de quaisquer grandezas, como por exemplo, as deformações de degradação ε_{kl}^d . Tem-se, então, a forma linearizada da condição de consistência para múltiplas funções de carregamento, dada por:

$$\dot{F}_n = \frac{\partial F_n}{\partial \sigma_{ij}} \Big|_p \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F_n}{\partial p_q} \Big|_\sigma \dot{p}_q = 0, \quad (2.15)$$

com

$$\dot{p}_q = \frac{\partial p_q}{\partial \varepsilon_{kl}^d} \dot{\varepsilon}_{kl}^d, \quad n_{nij} = \frac{\partial F_n}{\partial \sigma_{ij}} \Big|_p \quad (2.16a,b)$$

e

$$H_{nm} = - \frac{\partial F_n}{\partial \lambda_m} \Big|_\sigma = - \frac{\partial F_n}{\partial p_q} \Big|_\sigma \frac{\partial p_q}{\partial \varepsilon_{kl}^d} m_{mkl}. \quad (2.17)$$

Pode-se, então, reescrever a equação [2.15](#) na forma:

$$\dot{F}_n = n_{nij} \dot{\sigma}_{ij} - H_{nm} \dot{\lambda}_m = 0. \quad (2.18)$$

Os tensores \mathbf{m} , \mathbf{n} e \mathbf{H} indicam, respectivamente, as direções da propagação das deformações de degradação, as direções das funções de carregamento e os módulos inelásticos do material.

Combinando a equação [2.13a](#) com a equação [2.12a](#), tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda}_m m_{mkl}). \quad (2.19)$$

E substituindo a equação [2.19](#) na equação [2.18](#), pode-se escrever:

$$n_{nij} E_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda}_m m_{mkl}) - H_{nm} \dot{\lambda}_m = 0. \quad (2.20)$$

Desenvolvendo a equação [2.20](#) obtém-se o multiplicador inelástico:

$$\dot{\lambda}_m = \frac{n_{ncd} E_{cdkl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{H_{nm} + n_{npq} E_{pqrs} m_{mrs}}, \quad (2.21)$$

e, ao substituir a equação [2.21](#) na equação [2.13a](#), encontra-se a variação da deformação de degradação:

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^d = \frac{n_{ncd} E_{cdkl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{H_{nm} + n_{npq} E_{pqrs} m_{mrs}} m_{mkl}. \quad (2.22)$$

Retornando o resultado obtido na equação [2.22](#) na equação [2.12a](#), tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (2.23)$$

sendo E_{ijkl}^t o operador tangente, dado em termos de rigidez, expresso por:

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} - \frac{E_{ijab} m_{mab} n_{ncd} E_{cdkl}}{H_{nm} + n_{npq} E_{pqrs} m_{mrs}}. \quad (2.24)$$

De forma semelhante, desenvolve-se a formulação baseada em deformação. As formulações baseadas em tensão e deformação são chamadas duais, uma vez que expressões matemáticas análogas conduzem ao mesmo resultado para um mesmo estado de tensão ou deformação.

As relações entre as grandezas das formulações baseadas em tensão e em deformação podem ser expressas por:

$$\bar{m}_{mij} = -E_{ijkl} m_{mkl}, \quad \bar{n}_{nij} = E_{ijkl} n_{nkl}, \quad \bar{H}_{nm} = H_{nm} + n_{nij} E_{ijkl} m_{mkl}, \quad (2.25a,b,c)$$

enquanto o operador tangente é escrito como:

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} - \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{m}_{mij} \bar{n}_{nkl}. \quad (2.26)$$

Resta estabelecer as variações das tensões e deformações de degradação em função da variação da rigidez ou da flexibilidade, o que pode ser feito por meio da regra da degradação generalizada, já que nem sempre se tem uma forma explícita para determinar $\dot{\sigma}_{kl}^d$ e $\dot{\varepsilon}_{kl}^d$. Nesses casos, a forma de degradação do tensor de rigidez ou flexibilidade é uma hipótese do modelo.

Assim, comparando as equações [2.11](#) com as equações [2.12](#), obtém-se:

$$E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^d = -\dot{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}^d = -\dot{C}_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (2.27a,b)$$

Sabe-se que $\mathbf{E} : \mathbf{C} = \mathbf{I}_4$, assim, pela diferenciação desta equação, tem-se:

$$\dot{C}_{ijpq}E_{pqkl} + C_{ijpq}\dot{E}_{pqkl} = 0. \quad (2.28)$$

Isolando $\dot{\mathbf{E}}$ e $\dot{\mathbf{C}}$, encontra-se:

$$\dot{E}_{ijkl} = -E_{ijpq}\dot{C}_{pqrs}E_{rskl}, \quad \dot{C}_{ijkl} = -C_{ijpq}\dot{E}_{pqrs}C_{rskl}. \quad (2.29a,b)$$

Ao substituir a equação 2.29b na equação 2.27b, é possível escrever:

$$\dot{\sigma}_{kl}^d = \dot{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (2.30)$$

Define-se ainda a variação do tensor de rigidez como

$$\dot{E}_{ijkl} = \dot{\lambda}_m \bar{M}_{mijkl}, \quad (2.31)$$

em que $\dot{\lambda}_m$ é a magnitude e \bar{M}_{mijkl} é a direção da degradação da rigidez.

A equação 2.31 estabelece a taxa de degradação do tensor constitutivo em função de uma magnitude do processo de degradação e de uma direção. Tal relação é conhecida como Regra da Degradação Generalizada.

Tomando a formulação baseada em deformação, em concordância com a implementação computacional presente no INSANE para modelos de degradação elástica, e substituindo a equação 2.31 na equação 2.30, encontra-se

$$\dot{\sigma}_{ij}^d = \dot{\lambda}_m \bar{M}_{mijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (2.32)$$

Comparando a equação 2.32 com a equação 2.13b, tem-se

$$\bar{m}_{mij} = \bar{M}_{mijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (2.33)$$

Por fim, a equação 2.26 pode ser reescrita como:

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{H_{nm}} \bar{M}_{mijpq}\varepsilon_{pq}\bar{n}_{nkl}. \quad (2.34)$$

Ressalta-se que modelos que preconizam a degradação do tensor de rigidez consideram todos os parâmetros do material como variáveis que evoluem durante o processo de deterioração. Essa característica limita esses modelos, devido à dificuldade

de estabelecer leis de evolução para todos esses parâmetros. Um modelo ortotrópico, por exemplo, demanda leis de evolução para 21 parâmetros independentes.

Para contornar tais dificuldades são utilizadas grandezas que medem o quão degradado está o tensor de rigidez do material. Essas grandezas são as variáveis de dano, denotadas por \mathcal{D}_* . O símbolo “*” representa a natureza escalar, vetorial ou tensorial que essas variáveis podem assumir.

Nos modelos baseados em deformação, a rigidez passa a ser escrita como função das variáveis de dano e das constantes elásticas, na forma apresentada como:

$$E_{ijkl}^D = E_{ijkl}(E_{pqrs}^0, \overline{\mathcal{D}}_*), \quad (2.35)$$

que pode ser diferenciada, resultando em

$$\dot{E}_{ijkl}^D = \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \overline{\mathcal{D}}_*} \dot{\overline{\mathcal{D}}}_*. \quad (2.36)$$

Com a regra de fluxo para dano escrita como

$$\dot{\overline{\mathcal{D}}}_* = \dot{\lambda}_m \overline{\mathcal{M}}_{m*}, \quad (2.37)$$

em que $\dot{\lambda}_m$ é o multiplicador inelástico, ou multiplicador de dano, e $\overline{\mathcal{M}}_{m*}$ define a direção da taxa de mudança das variáveis de dano.

Substituindo a equação [2.31](#) e a equação [2.37](#) na equação [2.36](#), obtém-se a variação do tensor de rigidez em termos de variável de dano, conforme a equação [2.38](#).

$$\overline{M}_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \overline{\mathcal{D}}_*} \overline{\mathcal{M}}_{m*}. \quad (2.38)$$

O mesmo pode ser feito em relação à variação da flexibilidade dos modelos com formulação baseada em tensão.

A estrutura teórica unificada desenvolvida a partir dessa formulação permite a representação de diferentes modelos, como modelos baseados em tensão, modelos de plasticidade clássica, modelos baseados em deformação, modelos de dano e modelos baseados em degradação elástica em geral.

2.3 Tensores de Efeito de Dano

De acordo com [Penna \(2011\)](#), em modelos de dano definem-se as variáveis de dano e sua dependência com os tensores de rigidez e flexibilidade. Modelos isotrópicos, por exemplo, apresentam uma relação trivial dada pela equação [2.39](#), em que D é a variável de dano.

$$E_{ijkl}^D = (1 - D)E_{ijkl}^0. \quad (2.39)$$

Modelos com degradação anisotrópica, contudo, demandam relações mais complexas, que são definidas a partir dos conceitos da mecânica do dano contínuo. Nesses casos, torna-se necessário o uso da notação tensorial para apresentar os chamados tensores de efeito de dano. Diferentes autores apresentaram propostas de tensores de efeito de dano capazes de relacionar os tensores de rigidez e flexibilidade do material íntegro com seu respectivo tensor secante, que representa a hipótese de degradação do material.

[Lemaitre e Chaboche \(1978\)](#) expuseram uma hipótese de deformação equivalente para dano isotrópico, restrita às direções principais de dano, substituindo a tensão nominal pela efetiva nas relações constitutivas. Baseando-se nesse estudo, [Chow e Wang \(1987\)](#) apresentaram em seu trabalho uma transformação de sistemas de coordenadas, que permite reescrever o tensor de efeito de dano para um sistema cartesiano arbitrário, incluindo o efeito da degradação anisotrópica do meio material.

Outra concepção de degradação foi desenvolvida por [Carol et al. \(2001a,b\)](#), partindo do princípio de que as variáveis de dano relacionam grandezas efetivas com suas respectivas parcelas nominais por meio de um tensor de quarta ordem, o tensor de efeito de dano, representado por $\bar{\alpha}_{ijkl}$.

Já a abordagem de [Voyiadjis et al. \(2009\)](#) apresenta uma formulação teórica que acopla os princípios da degradação elástica e da plasticidade, a fim de descrever um modelo de dano anisotrópico para concretos. Devido ao comportamento distinto do concreto quando submetido a esforços de tração e de compressão, o tensor de tensões

foi decomposto em duas partes, uma positiva (+) e uma negativa (-), conforme a técnica da decomposição espectral:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^- \quad (2.40)$$

As parcelas positivas estão associadas ao esforço de tração, enquanto as parcelas negativas representam a compressão.

Propostas mais recentes de tensores de efeito de dano foram apresentadas por [Badreddine et al. \(2015\)](#), [Bogenfeld e Kreikemeier \(2017\)](#) e [Semenov \(2017\)](#). [Badreddine et al. \(2015\)](#) apresentam o tensor de efeito de dano como um tensor simétrico de quarta ordem, cujo desenvolvimento parte de um tensor de dano de segunda ordem definido em uma base de observação, o qual pode ser obtido por meio da transformação do dano no sistema principal segundo a orientação de degradação. [Bogenfeld e Kreikemeier \(2017\)](#), por sua vez, com o objetivo de representar o dano em planos oblíquos de fratura, buscaram abordar o fenômeno de degradação a partir de um tensor de dano de oitava ordem. Já o trabalho desenvolvido por [Semenov \(2017\)](#) volta-se para os tensores de efeito de dano ortotrópicos e os inconvenientes associados à sua inerente assimetria em casos gerais. Para contornar essas dificuldades, diversas são as propostas de simetrização presentes na literatura, como as simetrizações por soma e por produto descritas por [Carol et al. \(2001a\)](#). Esse contexto motivou [Semenov \(2017\)](#) a desenvolver um estudo a fim de unificar e generalizar o processo de simetrização do tensor de efeito de dano.

Os trabalhos desenvolvidos por [Darwin e Pecknold \(1977\)](#) e [Pitangueira \(1998\)](#) não utilizaram diretamente o conceito de tensor de efeito de dano. Contudo, um estudo aprofundado dessas duas abordagens permitiu, a partir das propostas apresentadas para os tensores de rigidez secante do material, obter tensores de efeito de dano que resultaram nas hipóteses de degradação admitidas por esses autores.

A formulação de [Darwin e Pecknold \(1977\)](#) se dispõe a representar um histórico de carregamento biaxial cíclico. O concreto é tratado, a princípio, como um material elástico linear a cada incremento de carga, tendo seu estado de tensão e deformação

corrigido ao término de cada passo com o objetivo de representar um comportamento ortotrópico. Nesse modelo, considera-se que a degradação é obtida nos eixos principais de tensão, uma vez que o dano, quando representado em eixos arbitrários, assume um aspecto anisotrópico. Dentre as hipóteses e simplificações adotadas, admite-se que as deformações de cisalhamento devidas à ação de momento fletor são desprezadas e é calculado um coeficiente de Poisson equivalente, dada pela equação [2.41](#):

$$\nu^2 = \nu_1 \nu_2. \quad (2.41)$$

Dessa forma, a matriz de rigidez corrente pode ser definida a partir de três variáveis, E_1 , E_2 e ν . Os índices subscritos, (1) e (2), referem-se as direções de ortotropia do material em questão.

[Pitangueira \(1998\)](#), por sua vez, parte da evolução do modelo de dano distribuído, pressupondo material ortotrópico com sistema local posicionado nas direções principais de ortotropia. Foram considerados casos de estado plano de tensão (EPT) e estado plano de deformação (EPD). O modelo apresentado pelo autor é adequado para tratar dano em tração ou compressão, por meio de uma relação constitutiva secante. Tais ponderações muito se assemelham com as determinadas no trabalho de [Darwin e Pecknold \(1977\)](#), entretanto, faz-se a diferenciação da hipótese de acoplamento adotada para definir o efeito de Poisson, nesta formulação definida como

$$\frac{\nu}{E^0} = \frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_2}{E_2}, \quad (2.42)$$

em que ν e E^0 são, respectivamente, o coeficiente de Poisson e o módulo de elasticidade longitudinal do material íntegro.

O presente trabalho foi elaborado a partir dos modelos propostos por [Carol et al. \(2001a,b\)](#), [Pitangueira \(1998\)](#) e [Darwin e Pecknold \(1977\)](#). A opção por desenvolver o estudo conforme tais formulações partiu do maior nível de detalhamento do desenvolvimento matemático apresentado por esses autores, bem como a possibilidade de abordar problemas envolvendo dano ortotrópico associado à modelagem constitutiva

do concreto, alvos deste estudo. Por esse motivo, esses modelos serão abordados com maior minúcia nos tópicos a seguir.

2.3.1 Tensor de Efeito de Dano por Carol et al. (2001a,b)

Conforme já mencionado, os trabalhos de Carol et al. (2001a, b) partem do princípio de que as variáveis de dano relacionam grandezas efetivas com suas parcelas nominais por meio do tensor de efeito de dano $\bar{\alpha}_{ijkl}$. Assim, pode-se escrever:

$$\sigma_{ij} = \bar{\alpha}_{ijkl}\sigma_{kl}^{ef}, \quad \varepsilon_{ij}^{ef} = \bar{\alpha}_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (2.43a,b)$$

Ou, na forma inversa, utilizando o tensor de efeito de dano dual α_{ijkl} :

$$\sigma_{ij}^{ef} = \alpha_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = \alpha_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{ef}. \quad (2.44a,b)$$

sendo $\alpha_{ijpq}\bar{\alpha}_{pqkl} = \bar{\alpha}_{ijpq}\alpha_{pqkl} = I_{ijkl}^{sim}$.

Essas equações podem ser combinadas com as relações totais para tensão e deformação efetivas (equações 2.45a e 2.45b), conduzindo às relações expressas nas equações 2.46a e 2.46b, que permitem a obtenção dos tensores de rigidez e flexibilidade secantes.

$$\sigma_{ij}^{ef} = E_{ijkl}^0\varepsilon_{kl}^{ef}, \quad \varepsilon_{ij}^{ef} = C_{ijkl}^0\sigma_{kl}^{ef}, \quad (2.45a,b)$$

$$E_{ijkl}^s = \bar{\alpha}_{ijpq}E_{pqrs}^0\bar{\alpha}_{klrs}, \quad C_{ijkl}^s = \alpha_{pqij}C_{pqrs}^0\alpha_{rskl}. \quad (2.46a,b)$$

Devido à natureza simétrica dos tensores de rigidez e flexibilidade do material íntegro e do tensor de efeito de dano, as relações obtidas para a rigidez e a flexibilidade secante também fornecem resultados simétricos.

Considerando o dano isotrópico, o tensor de efeito de dano pode ser escrito como:

$$\bar{\alpha}_{ijkl} = \bar{\phi}I_{ijkl}^{sim}, \quad (2.47)$$

Conhecido esse formato, foi feita sua implementação no software INSANE. Foi proposto ainda um formato matemático alternativo, a fim de reduzir a demanda por operações tensoriais. Esse novo formato parte da equação 2.53, sendo o tensor de efeito de dano alternativo $\bar{\alpha}'$ estabelecido conforme a equação 2.54:

$$E_{ijkl}^s = \bar{\alpha}'_{ijpq} E_{pqkl}^0, \quad (2.53)$$

$$\bar{\alpha}' = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

com ν representando o coeficiente de Poisson do material e as variáveis definidas como:

$$A_1 = \frac{\bar{\phi}_{(1)}^2 - \nu^2 \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)}}{1 - \nu^2}; \quad B_1 = \frac{\nu \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} - \nu \bar{\phi}_{(1)}^2}{1 - \nu^2}; \quad C_1 = \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)}}{2}.$$

$$A_2 = \frac{\bar{\phi}_{(2)}^2 - \nu^2 \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)}}{1 - \nu^2}; \quad B_2 = \frac{\nu \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} - \nu \bar{\phi}_{(2)}^2}{1 - \nu^2};$$

2.3.2 Tensor de Efeito de Dano por Darwin e Pecknold (1977)

O modelo proposto por esses autores busca representar o comportamento do concreto, considerando a não linearidade e a ortotropia do material em análises de estado plano de tensões, por meio do tensor secante local:

$$\mathbf{E}^s = \frac{1}{(1 - \nu_1 \nu_2)} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_2 E_1 & 0 \\ \nu_1 E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_1 \nu_2)G \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

em que E_i é o módulo de elasticidade secante na direção i e ν_i refere-se ao coeficiente de Poisson, na direção principal i , com $i = 1, 2$. O módulo de elasticidade transversal no plano 1-2 é representado por G e dado pela equação:

$$G = \frac{E_1 E_2 - 2\sqrt{\nu_1 \nu_2} \sqrt{E_1 E_2}}{4(1 - \nu_1 \nu_2)}. \quad (2.56)$$

Considerando simetria da matriz constitutiva ($\nu_1 E_2 = \nu_2 E_1$) e um coeficiente de Poisson equivalente dado por $\nu = \sqrt{\nu_1 \nu_2}$, foi desenvolvido o tensor de efeito de dano para essa formulação, seguindo o formato alternativo proposto na equação [2.53](#) e a notação tensorial apresentada na equação [2.54](#).

Nesse caso as variáveis assumem novos valores:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\bar{\phi}_{(1)} - \nu^2 \sqrt{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)}}}{1 - \nu^2}; & B_2 &= \frac{\nu(\sqrt{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)}} - \bar{\phi}_{(2)})}{1 - \nu^2}; \\ A_2 &= \frac{\bar{\phi}_{(2)} - \nu^2 \sqrt{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)}}}{1 - \nu^2}; & C_1 &= \frac{\bar{\phi}_{(1)} + \bar{\phi}_{(2)} - 2\nu \sqrt{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)}}}{4}. \\ B_1 &= \frac{\nu(\sqrt{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)}} - \bar{\phi}_{(1)})}{1 - \nu^2}; \end{aligned}$$

Nesse modelo, a variável relativa à integridade, representada por $\bar{\phi}_i$, é dada por $(1 - D_i)$.

2.3.3 Tensor de Efeito de Dano por [Pitangueira \(1998\)](#)

Nesse modelo, tem-se como premissa que o material torna-se ortotrópico na região danificada e seu desenvolvimento matemático adota estado plano de tensões e ortotropia nas direções principais. Essas considerações conduzem ao mesmo tensor secante local apresentado na equação [2.55](#), sendo a hipótese de simetria da matriz de flexibilidade dada por:

$$\frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_2}{E_2} = \frac{\nu}{E_0}, \quad (2.57)$$

enquanto o módulo de elasticidade transversal é calculado como

$$G = \frac{E_0 E_1 E_2}{E_0 E_1 + E_0 E_2 + 2\nu E_1 E_2}. \quad (2.58)$$

Novamente, utilizando do formato alternativo do tensor de efeito de dano, é possível representá-lo pela equação [2.54](#).

Para tanto, as variáveis assumem os valores:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\bar{\phi}_{(1)}(1 - \nu^2 \bar{\phi}_{(2)})}{1 - \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} \nu^2}; & B_2 &= \frac{\nu \bar{\phi}_{(2)}(\bar{\phi}_{(1)} - 1)}{1 - \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} \nu^2}; \\ A_2 &= \frac{\bar{\phi}_{(2)}(1 - \nu^2 \bar{\phi}_{(1)})}{1 - \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} \nu^2}; & C_1 &= \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)}(1 + \nu)}{\bar{\phi}_{(1)} + \bar{\phi}_{(2)} + 2\nu \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)}}. \\ B_1 &= \frac{\nu \bar{\phi}_{(1)}(\bar{\phi}_{(2)} - 1)}{1 - \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} \nu^2}; \end{aligned}$$

A variável relativa à integridade, representada por $\bar{\phi}_i$, é obtida como $(1 - D_i)$.

Capítulo 3

Análise Fisicamente Não Linear Cíclica

Conforme discutido por Pitangueira (1998), é usual admitir na investigação do comportamento de estruturas compostas por materiais frágeis que esses são inicialmente elásticos, lineares, isotrópicos e, por hipótese, homogêneos. Contudo, com a aplicação de cargas que ocasionam conseqüentes deformações, essas propriedades são alteradas e os materiais deixam de ser elásticos, passam a se comportar não linearmente e apresentam condições de anisotropia. Tais efeitos resultam da deterioração do material. As regiões mais solicitadas da estrutura começam a apresentar características mecânicas distintas das regiões onde o material permanece íntegro, em decorrência da propagação do dano, conduzindo a comportamentos não lineares significativos.

A causa da não linearidade, nesse contexto, é de origem física, advinda da resposta do material mediante solicitação. Análises que incluem efeitos de não linearidade buscam, portanto, representar com maior veracidade o comportamento mecânico das estruturas, incluindo a degradação dos materiais que as constituem, quando esse fenômeno é relevante.

É possível ainda estudar o desempenho dessas estruturas quando submetidas a carregamentos cíclicos, o que conduz a análise a um nível de maior complexidade. Eventos como sismos, por exemplo, são bem representados por ciclos de histerese,

como exposto no trabalho de [Zhang et al. \(2018\)](#). Nessas circunstâncias, torna-se relevante o entendimento das trajetórias de descarga e recarga do material, bem com a possibilidade de inversão do carregamento.

Dessa forma, o termo fisicamente não linear pode ser compreendido como um estudo das alterações sofridas pelo material com a evolução do carregamento, enquanto o termo cíclico trata de diferentes estágios de solicitação, que incluem processos de carregamento, descarregamento e recarregamento. Cabe ressaltar que não é escopo deste trabalho tratar o fenômeno de fadiga, uma vez que esse decorre de carregamentos repetitivos, com elevado número de ciclos, que conduzem à ruptura mesmo em tensões menores que a resistência última do material. Aqui são tratados ciclos de carga a partir do ramo de amolecimento das trajetórias de equilíbrio da estrutura, causados por uma mudança eventual no carregamento, sem necessariamente estar associada a um padrão de repetição.

Feitas tais considerações, este capítulo versa sobre a análise fisicamente não linear cíclica, a qual é empregada nas simulações numéricas desenvolvidas neste estudo. As seções a seguir buscam elucidar, de forma breve e didática, como esse procedimento de solução é incorporado a análises que utilizam o método dos elementos finitos.

3.1 Análise Estática Não Linear

As chamadas trajetórias de equilíbrio são obtidas com o objetivo de representar graficamente o comportamento não linear de uma estrutura. Essa forma de representação, segundo [Fuina \(2004\)](#), abrange fenômenos de aumento de deslocamentos acompanhado por decréscimo de cargas ou, ainda, decréscimo de deslocamentos acompanhado por decréscimos de carga (Figura [3.1](#)).

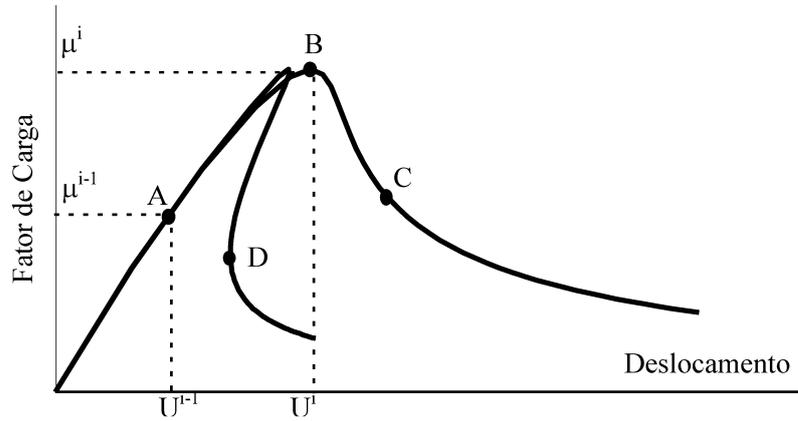


Figura 3.1: Trajetórias de equilíbrio típicas em problemas não lineares (Fuina, 2004).

A fim de caracterizar completamente essas trajetórias, definido o grau de liberdade de interesse, são utilizados processos incrementais-iterativos associados a métodos de controle, capazes de detectar pontos limites de carga e deslocamento (indicados pelos pontos B e D da Figura 3.1, respectivamente).

O processo incremental-iterativo é necessário, pois, em uma análise não linear o problema apresenta $N+1$ incógnitas (N deslocamentos nodais e um incremento de carga), $N+1$ equações (N equações de equilíbrio e uma equação de restrição) e há dependência da matriz de rigidez com relação ao vetor de deslocamentos nodais. A equação matricial do sistema não linear, calculada a partir de um método incremental-iterativo, pode ser escrita no formato:

$$[K_t]_{j-1}^i \{\delta U\}_j^i = \delta \lambda_j^i \cdot \{P\} + \{Q\}_{j-1}^i \quad (3.1)$$

sendo,

$[K_t]_{j-1}^i$ a matriz de rigidez tangente na iteração $j-1$ do passo i , que é função do campo de deslocamentos $\{U\}_{j-1}^i$;

$\{\delta U\}_j^i$ o vetor de deslocamentos incrementais da iteração j no passo i ;

$\delta \lambda_j^i$ o incremento do fator de carga da iteração j no passo i ;

$\{P\}$ o vetor de cargas de referência;

$\{Q\}_{j-1}^i$ o vetor de cargas residuais da iteração $j-1$ do passo i .

O vetor de cargas residuais é calculado pela diferença entre o vetor de cargas externas da iteração corrente e o vetor de forças equivalentes às tensões internas $\{F_{int}\}_j$. A montagem da matriz $[K_t]_{j-1}$ e do vetor $\{F_{int}\}_j$ é realizada a partir do método da rigidez direta, considerando a contribuição de cada elemento. Esse processo depende essencialmente de duas operações, definidas pelas equações (3.2) e (3.3):

$$[k_t^e] = \int_{V_e} [B]^T [E_t] [B] dV_e \quad (3.2)$$

$$\{F_{int}^e\} = \int_{V_e} [B]^T \{\sigma\} dV_e \quad (3.3)$$

em que,

$[k_t^e]$ é a matriz de rigidez tangente do elemento;

$[B]$ é a matriz das relações deformação-deslocamento;

$[E_t]$ é a matriz constitutiva tangente;

V_e é o volume do elemento;

$\{F_{int}^e\}$ é o vetor de cargas nodais equivalentes ao estado de tensão corrente de cada elemento;

$\{\sigma\}$ é o vetor de tensões do elemento finito.

Destaca-se que o cálculo das integrais das equações (3.2) e (3.3) aciona o modelo constitutivo, sendo que na primeira integral tem-se a matriz rigidez do elemento necessária ao processo incremental e a segunda é essencial na verificação do equilíbrio do modelo. A obtenção do incremento de carga $\delta\lambda_j$, por sua vez, é dependente do método de controle adotado.

O procedimento incremental-iterativo prossegue com o cálculo do vetor de deslocamentos incrementais, $\{\delta U\}_j$, expresso na equação (3.4), que pode ser decomposto em duas parcelas, uma associada à carga de referência, $\{\delta U\}_j^P$, e outra vinculada à carga residual, $\{\delta U\}_j^Q$, conforme apresentado nas equações (3.5) e (3.6):

$$\{\delta U\}_j = \delta\lambda_j \cdot \{\delta U\}_j^P + \{\delta U\}_j^Q, \quad (3.4)$$

$$[K]_{j-1} \{\delta U\}_j^P = \{P\}, \quad (3.5)$$

$$[K]_{j-1}\{\delta U\}_j^Q = \{Q\}_{j-1}. \quad (3.6)$$

Uma vez determinado $\{\delta U\}_j$, as variáveis referentes ao fator de carga, λ_j , e ao vetor de deslocamentos, $\{U\}_j$, para a iteração corrente j são atualizadas, conforme indicado nas equações (3.7) e (3.8):

$$\lambda_j = \lambda_{j-1} + \delta\lambda_j, \quad (3.7)$$

$$\{U\}_j = \{U\}_{j-1} + \{\delta U\}_j. \quad (3.8)$$

Ao término de cada iteração, verifica-se a convergência a partir da norma do vetor de cargas residuais, $\{Q\}_j$, e/ou da norma do vetor de deslocamentos iterativos, $\{\delta U\}_j$, comparando tais valores com uma tolerância previamente estabelecida. O vetor de cargas residuais é expresso por:

$$\{Q\}_j = \lambda_j \cdot \{P\} - \{F_{int}\}_j. \quad (3.9)$$

O processo iterativo continua até que o critério de convergência seja atendido.

A Figura 3.2 exibe um fluxograma de atividades que contém os principais passos do algoritmo genérico apresentado por Yang e Shieh (1990) e que resume o processo incremental-iterativo descrito anteriormente. A etapa destacada refere-se à obtenção do incremento de carga, $\delta\lambda_j$, cujo cálculo varia conforme o método de controle adotado.

Os métodos de controle mais utilizados são apresentados no quadro resumo da Figura 3.3. Dentre esses métodos, destaca-se o método de controle direto de deslocamento, tendo em vista que esse foi utilizado nas simulações numéricas desenvolvidas neste trabalho. A opção por esse método de controle partiu da forma de monitoração dos ciclos, que atua diretamente no sinal do incremento de deslocamento de um determinado nó para uma direção definida.

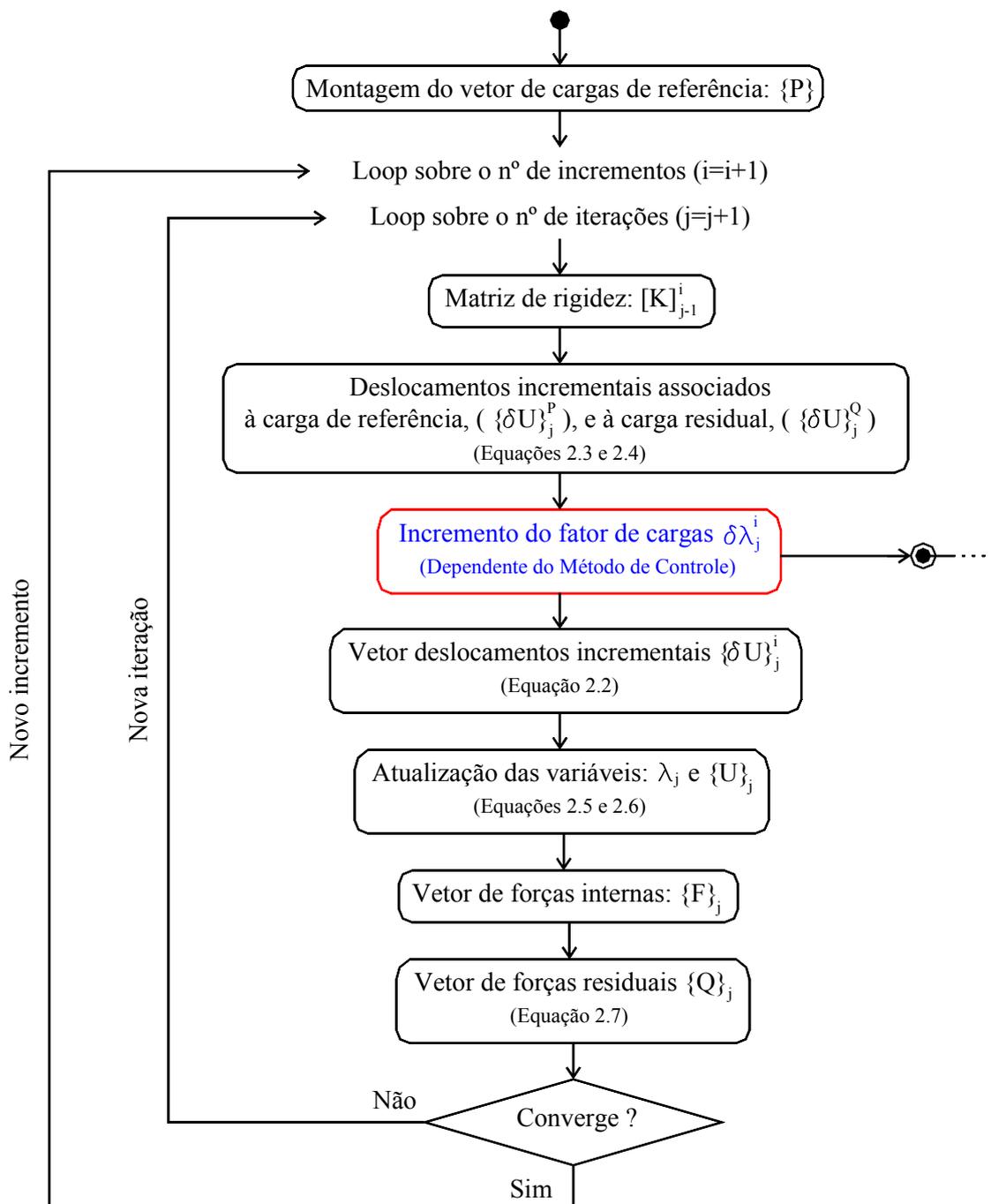


Figura 3.2: Diagrama de atividade do algoritmo genérico do processo incremental-iterativo (Fuina, 2004).

⋮
●
↓

MÉTODOS DE CONTROLE	$\delta\lambda$ para $j=1$	$\delta\lambda$ para $j>1$
Controle de Carga	$\delta\lambda_1 = \text{constante}$	$\delta\lambda_j = 0$
Controle Direto de Deslocamento	$\delta\lambda_1 = \frac{\delta U_1^k}{\delta U_1^{pk}}$	$\delta\lambda_j = -\frac{\delta U_j^{Qk}}{\delta U_j^{Pk}}$
Controle de Comprimento de Arco	$\delta\lambda_1 = \pm \frac{\Delta S}{\sqrt{\{\delta U\}_1^{pT} \cdot \{\delta U\}_1^p}}$	Trajétória de iteração ortogonal à tangente inicial: $\delta\lambda_j = -\frac{\{\Delta U\}_1^T \cdot \{\delta U\}_j^Q}{\{\Delta U\}_1^T \cdot \{\delta U\}_j^P}$
		Trajétória de iteração ortogonal à tangente da iteração anterior: $\delta\lambda_j = -\frac{\{\Delta U\}_{j-1}^T \cdot \{\delta U\}_j^Q}{\{\Delta U\}_{j-1}^T \cdot \{\delta U\}_j^P}$
		Trajétória cilíndrica: equação do 2º grau que permite obter $\delta\lambda_j$
Controle de Deslocamento Generalizado	$\delta\lambda_1 = \delta\lambda_1^1 \left(\frac{\{\delta U\}_1^{p,1T} \cdot \{\delta U\}_1^{p,1}}{\{\delta U\}_1^{p,i-1T} \cdot \{\delta U\}_1^{p,i}} \right)^{0,5}$	$\delta\lambda_j = -\frac{\{\delta U\}_1^{p,i-1T} \cdot \{\delta U\}_j^{Q,i}}{\{\delta U\}_1^{p,i-1T} \cdot \{\delta U\}_j^{P,i}}$
Controle por Trabalho	$\delta\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{\Delta W}{\{\delta U\}_1^{pT} \{P\}}}$	$\delta\lambda_j = -\frac{\{\delta U\}_j^{Q^T} \{P\}}{\{\delta U\}_j^{pT} \{P\}}$
Método do Resíduo Ortogonal	$\delta\lambda_1 = \pm \text{constante}$	$\delta\lambda_j = \delta\lambda_1 \left(-\frac{\{\tilde{Q}\}_j^T \cdot \{\Delta U\}_j}{\delta\lambda_1 \{P\}^T \cdot \{\Delta U\}_j} \right)$

Figura 3.3: Detalhamento do diagrama de atividades da Figura 3.2 (Fuina, 2004).

3.2 Condições de Carregamento

De acordo com Penna (2011), as condições de carregamento, descarregamento ou recarregamento ditam o decorrer da análise de uma estrutura. Por isso é fundamental conhecer os critérios que definem o estágio de carregamento do material que compõe o elemento estrutural, tanto para carregamentos monotônicos quanto para carregamentos cíclicos. Esses critérios usualmente são estabelecidos em função do estado de tensão ou deformação, regimes de comportamento e histórico das variáveis constitutivas dos pontos materiais.

Para carregamentos externos monotônicos, os processos de descarga e recarga estão associados a fenômenos internos inerentes ao comportamento do material, como a fissuração de meios parcialmente frágeis. Quanto aos carregamentos externos cíclicos, os laços de histerese resultam de variações nas solicitações aplicadas no elemento estrutural, refletindo diretamente no comportamento global da estrutura.

3.2.1 Critérios de Carregamento, Descarregamento e Recarregamento do Ponto Material

Segundo Penna (2011), as condições de Kuhn-Tucker representam uma metodologia eficiente para determinação do estado de carregamento, utilizando como artifício as funções de carregamento do modelo constitutivo e suas variáveis históricas. Para ilustrar as condições de carregamento toma-se a função

$$f = \tilde{\varepsilon} - \kappa, \quad (3.10)$$

em que f é a função de carregamento, $\tilde{\varepsilon}$ é uma medida de deformação e κ é a variável histórica do modelo, que pode, por exemplo, representar o maior valor já atingido por $\tilde{\varepsilon}$ na análise. O valor inicial dessa variável histórica é dado por κ_0 , que representa o limite de deformação do regime elástico. Uma vez que κ_0 é superado, o material passa ao regime inelástico, onde tem início o processo de degradação.

É válido ressaltar que os valores de f , $\tilde{\varepsilon}$ e κ do estado anterior são necessários para a determinação do estado corrente, já que é preciso conhecer o histórico de carregamento da estrutura. A variação dessas grandezas, por sua vez, é obtida a partir das equações:

$$\delta f = f_{j+1} - f_j, \quad (3.11)$$

$$\delta \kappa = \kappa_{j+1} - \kappa_j. \quad (3.12)$$

A fim de definir o estágio de carregamento vigente, as condições de carregamento, descarregamento e recarregamento podem ser resumidas em:

Carregamento elástico $\rightarrow f < 0; \delta f > 0; \kappa = \kappa_0; \delta \kappa = 0.$

Carregamento inelástico $\rightarrow f = 0; \delta f = 0; \kappa > \kappa_0; \delta \kappa > 0.$

Descarregamento $\rightarrow f < 0; \delta f < 0; \kappa > \kappa_0; \delta \kappa = 0.$

Recarregamento $\rightarrow f < 0; \delta f > 0; \kappa > \kappa_0; \delta \kappa = 0.$

Enfatiza-se que tanto o descarregamento quanto o recarregamento podem ocorrer no regime elástico. As condições de carregamento apresentadas são utilizadas sem restrições nesses casos, com a ressalva que κ será igual a κ_0 .

3.3 Comportamento do Material

Segundo [Yankelevsky \(1989\)](#), modelar o comportamento do concreto em processos de descarregamento e recarregamento é crucial para o desenvolvimento de modelos constitutivos completos, tendo em vista que diante do fenômeno de fissuração o material pode experimentar carregamentos cíclicos internos, ainda que esteja submetido a cargas externas monotônicas. Com a abertura de fissuras, essas regiões concentram esforços, entrando em regime de carregamento com dano, enquanto as áreas mais afastadas ficam submetidas ao descarregamento.

[Sinha et al. \(1964\)](#) foram os primeiros a descrever qualitativamente e quantitativamente a resposta tensão-deformação do concreto submetido a carregamentos cíclicos. Posteriormente [Karsan e Jirsa \(1969\)](#) demonstraram que os caminhos de descarga e recarga não são únicos e dependem do histórico de carregamento da estrutura. A partir de então, diferentes autores propuseram modelos com formulações matemáticas capazes de reproduzir o comportamento do concreto em testes com cargas de compressão e tração cíclicas.

Neste trabalho, é abordado o comportamento tensão-deformação do concreto para carregamentos cíclicos partindo das leis de descarregamento e recarregamento secante, elástica, linear generalizada (baseada em um ponto focal) e da lei proposta por Popovics-Saenz (essa última descrita nos trabalhos de [Popovics \(1973\)](#), [Bono \(2008\)](#), [Korsal et al. \(2011\)](#) e [Bahn \(1994\)](#)). Para obtenção do parâmetro de dano e do módulo inelástico nos trechos de descarga e recarga, adotou-se a estratégia de cálculo baseada no módulo secante generalizado, inspirada no trabalho de [Lee et al. \(1995\)](#).

3.3.1 Curvas Tensão-Deformação para Carregamento Cíclico

Os modelos constitutivos são representações mecânicas e matemáticas que buscam descrever uma ideia do comportamento de um dado material, dependendo diretamente de relações tensão-deformação. O modelo constitutivo utilizado neste trabalho é um modelo de dano tensorial baseado no fenômeno da fissuração distribuída. Nesse tipo de modelo, a degradação do material é obtida a partir de variáveis de dano calculadas segundo o módulo secante proveniente da curva tensão-deformação. Essas curvas são desenvolvidas a partir de experimentos laboratoriais e aproximações matemáticas com formas diversas, como relações não lineares, bilineares ou trilineares. Algumas das leis tensão-deformação consolidadas na literatura, formuladas para descrever o comportamento do concreto a tração e/ou compressão são as propostas de [Boone e Ingraffea \(1987\)](#), [Carreira e Chu \(1985\)](#) e [Carreira e](#)

Chu (1986), a aproximação bilinear, dentre outras.

Essas leis, entretanto, foram concebidas com o propósito de reproduzir o comportamento do material diante de carregamentos monotônicos. Para descrição completa do comportamento tensão-deformação perante carregamento cíclico foram adotadas diferentes estratégias para representar os trechos de descarregamento e recarregamento. A primeira delas utilizou o módulo secante, partindo do ponto de descarga até a origem, para descrição do ciclo. Outra estratégia tomou como referência o módulo elástico, sendo o processo cíclico conduzido pelo módulo de elasticidade do material íntegro. Em busca de um formato mais geral e tomando como referência o trabalho de Lee et al. (1995), foi desenvolvida uma metodologia que assume um ponto focal para o descarregamento. A princípio, essa formulação foi estabelecida para um descarregamento linear. Posteriormente, foi implementada a formulação de Popovics-Saenz, a qual também se beneficia do recurso de ponto focal, embora as trajetórias de descarga e recarga sejam não lineares.

3.3.1.1 Descarregamento e Recarregamento Secante

A formulação matemática para o processo cíclico baseado no descarregamento e no recarregamento secante é bastante intuitiva, tendo em vista que o dano corrente é calculado ao longo da reta secante ao ponto de descarga, cujas coordenadas são ε_d e σ_d . Assim, o módulo de elasticidade secante E_s é obtido como:

$$E_s = \frac{\sigma_d}{\varepsilon_d}, \quad (3.13)$$

ressaltando que a deformação no ponto de descarga, ε_d , é também a maior deformação a qual a estrutura já foi submetida, o que implica que esse valor está associado à variável histórica κ .

Partindo da determinação do módulo secante, a tensão em um ponto qualquer da reta de descarregamento e recarregamento (σ') resulta em:

$$\sigma' = E_s \varepsilon', \quad (3.14)$$

sendo ε' a deformação corrente.

A Figura 3.4 representa de forma gráfica o procedimento descrito. O ponto de coordenadas $(\varepsilon_r, \sigma_r)$ destacado na figura refere-se a um ponto genérico onde tem início o descarregamento da estrutura.

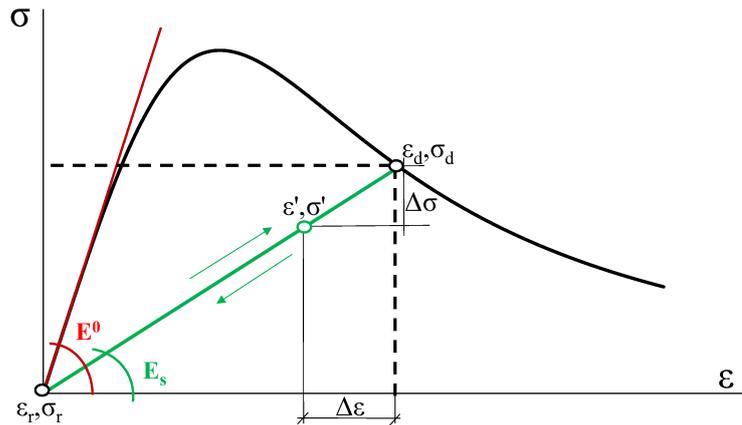


Figura 3.4: Descarregamento e recarregamento secante.

3.3.1.2 Descarregamento e Recarregamento Elástico

O método de descarga baseado no módulo elástico do material íntegro (E^0), por sua vez, beneficia-se do conhecimento prévio dessa propriedade mecânica. Assim, o caminho de descarregamento e recarregamento é definido como uma reta, que parte do ponto de descarga e tem uma inclinação igual a E^0 em relação ao eixo horizontal das deformações. Aqui é necessário introduzir o conceito de módulo secante generalizado, E_{SG} , que se refere a inclinação da reta que parte da origem até um ponto arbitrário pertencente à trajetória de descarregamento/recarregamento. Esse módulo varia ponto a ponto e é calculado por:

$$E_{SG} = \frac{\sigma'}{\varepsilon'}, \quad (3.15)$$

em que ε' é a deformação corrente e σ' é a tensão associada a essa deformação. Resta então definir o valor dessa tensão, em termos de E^0 , σ_d , ε_d e ε' . A Figura 3.5 ilustra a condição descarregamento/recarregamento descrita.

partir de um ponto focal, como apresentado na Figura 3.6. Nesse procedimento, é adotada uma trajetória representada por uma reta cujas extremidades situam-se no ponto de descarga (ε_d, σ_d) e no ponto definido como foco (ε_f, σ_f).

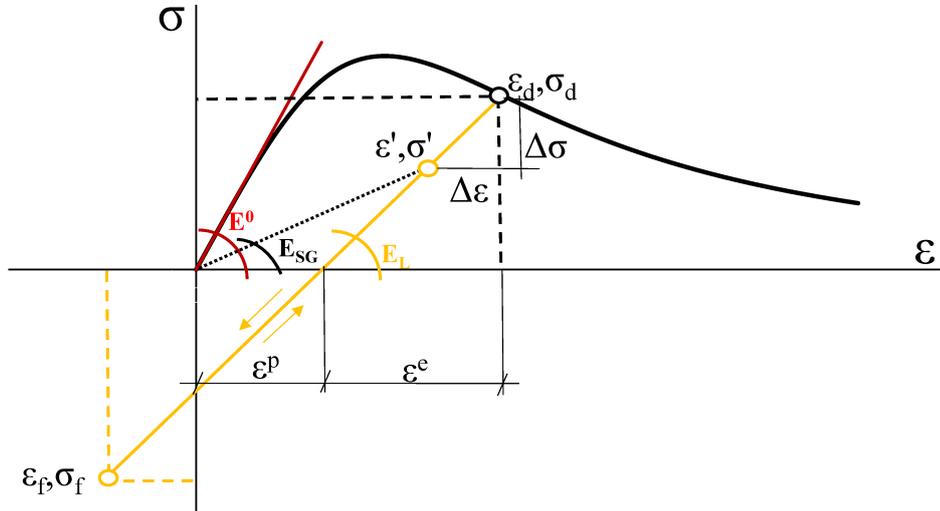


Figura 3.6: Descarregamento e recarregamento linear com ponto focal.

O primeiro passo é a determinação do denominado módulo linear (E_L), que é a inclinação da reta que define a trajetória de descarga/recarga. Essa inclinação é definida como:

$$E_L = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \frac{(\sigma_d - \sigma_f)}{(\varepsilon_d - \varepsilon_f)}. \quad (3.20)$$

Novamente, torna-se necessário o cálculo do módulo secante generalizado para obtenção do parâmetro de dano. Esse módulo, obtido pela equação 3.15 depende da determinação da tensão genérica ao longo da curva de descarga e recarga (σ'). Considerando o conceito de ponto focal e a definição do módulo linear, a equação 3.20 pode ser reescrita como:

$$E_L = \frac{(\sigma_d - \sigma_f)}{(\varepsilon_d - \varepsilon_f)} = \frac{(\sigma_d - \sigma')}{(\varepsilon_d - \varepsilon')}. \quad (3.21)$$

Logo, a partir da equação 3.21, tem-se

$$\sigma' = \sigma_d - \frac{(\sigma_d - \sigma_f)}{(\varepsilon_d - \varepsilon_f)}(\varepsilon_d - \varepsilon'). \quad (3.22)$$

De posse desses valores, fica estabelecido o procedimento de carregamento cíclico pautado no descarregamento/rearregamento linear tomando o ponto focal como referência.

3.3.1.4 Descarregamento e Rearregamento segundo Popovics-Saenz

A formulação de descarregamento e rearregamento linear com ponto focal pode ser expandida para diferentes caminhos de descarga e recarga, mantendo o conceito de ponto focal. Essa é a ideia apresentada no trabalho de Bono (2008), que adota a curva tensão-deformação de Popovics-Saenz, introduzindo as devidas modificações nas coordenadas de origem e de pico da curva para situações de descarga e recarga.

A curva de Popovics-Saenz descreve a resposta à compressão do concreto diante de um carregamento externo monotônico, sendo expressa pela equação (3.23).

$$\sigma = f_c \frac{K \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_c} \right)}{1 + A \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_c} \right) + B \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_c} \right)^2 + C \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_c} \right)^3 + D \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_c} \right)^R}, \quad (3.23)$$

em que:

K é dado por $E^0 \left(\frac{\varepsilon_c}{f_c} \right)$;

R é obtido por $\frac{K}{(K-1)}$;

f_c representa a resistência do concreto (tensão de pico);

ε_u é a deformação corrente;

ε_c é a deformação específica equivalente à f_c (deformação de pico);

e A , B , C e D são variáveis cujos valores dependem da curva estar no ramo ascendente ou descendente.

A descrição completa dessa formulação está disponível no Apêndice A, bem como as leis tensão-deformação modificadas para descrição do carregamento cíclico.

Segundo Kwon (2000) apud Bono (2008), o ponto focal para carga de compressão pode ser definido como a resistência à tração do concreto (ε_t, f_t). Para o carregamento de tração, deve-se adotar uma curva monotônica adequada para descrição do

comportamento do material segundo tal solicitação. As curvas de descarga e recarga desse modelo, contudo, podem ser utilizadas sem qualquer restrição, feita a ressalva que o ponto focal, nesse caso, é o ponto de resistência à compressão do concreto (ε_c, f_c) .

A degradação do material mediante o carregamento cíclico é obtida a partir do módulo de elasticidade secante, que pode ser calculado pela razão entre a tensão corrente (seja ela proveniente da curva de descarregamento ou da curva de recarregamento) e a deformação corrente.

3.4 Métodos de Controle de Ciclo

Com o intuito de controlar o início e o término dos ciclos de carga, foram desenvolvidos dois procedimentos que atuam sobre a carga externa aplicada à estrutura, identificando os pontos de descarga e recarga ao longo da análise. Tais procedimentos foram nomeados como controle de ciclo por contagem de passos e controle de ciclo por limite de carga. Ambos procedimentos foram desenvolvidos particularmente para o método de controle direto de deslocamento, intervindo no cálculo do fator de carga a partir da inversão do sinal do incremento de deslocamento. Para simular o comportamento de descarregamento, o algoritmo identifica o ponto de descarga informado e multiplica o fator de deslocamento por $-1, 0$, promovendo um alívio de carga que reflete no descarregamento do material. O recarregamento decorre de procedimento análogo, invertendo o sinal do fator de deslocamento uma segunda vez, quando atingido o ponto de recarga, o que resulta em um novo acréscimo da solicitação, sendo que o comportamento do material segue uma trajetória que o conduz de volta à curva monotônica.

O que difere os dois mecanismos de controle de ciclo são os dados informados para o algoritmo marcando o início ou o encerramento de um ciclo. No controle de ciclo por contagem de passos (Figura 3.7) deve-se informar, literalmente, os números

dos passos para começo dos processos de descarregamento e recarregamento. Nesse caso, é fundamental o conhecimento prévio da trajetória monotônica e do tamanho do incremento de carga adotado, já que não há qualquer dispositivo automatizado no algoritmo para auxiliar a determinação dos pontos críticos de descarga e recarga.

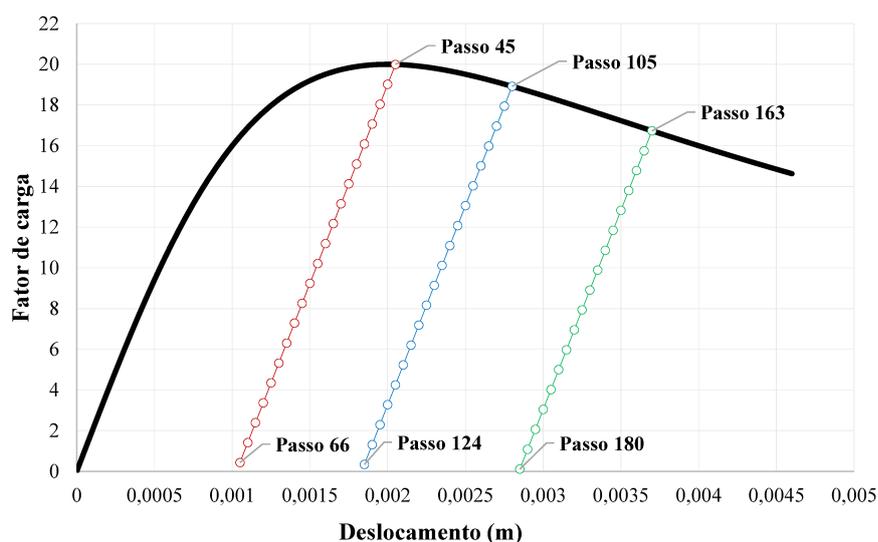


Figura 3.7: Controle de ciclos: método de controle por contagem de passos.

Já o controle de ciclo por limite de carga (Figura [3.8](#)) conta com um nível maior de sofisticação, uma vez que é definido um limite de carga para o qual o ciclo se inicia, marcando o descarregamento, bem como um limite de carga em que é introduzido o recarregamento. Também deve ser fornecida uma margem de tolerância demarcada a partir desses limites, uma vez que os pontos obtidos para a trajetória de equilíbrio raramente serão perfeitamente coincidentes com os pontos pré-determinados. A metodologia por controle do fator de carga facilita a parametrização de estudos experimentais, tendo em vista que está correlacionada apenas ao nível de carga atingido, sendo independente do tamanho do incremento adotado.

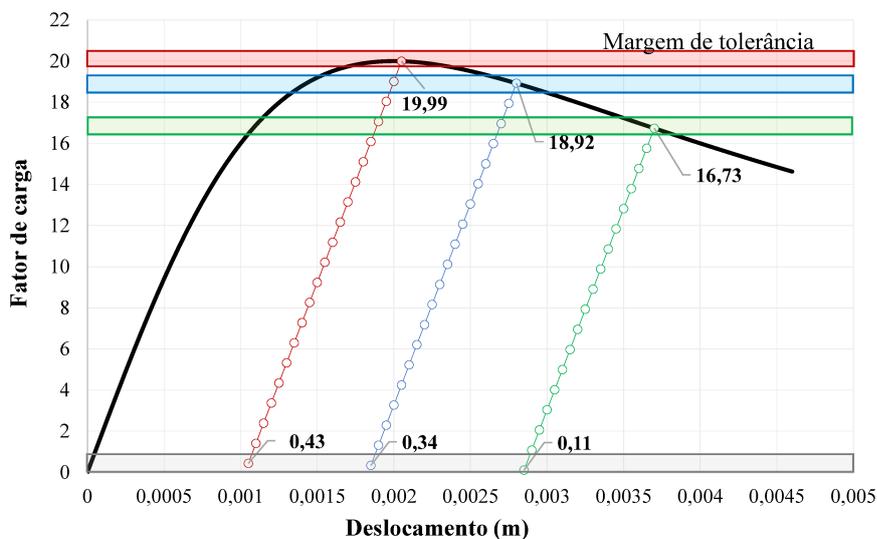


Figura 3.8: Controle de ciclos: método de controle por limite de carga.

Ressalta-se que essas duas estratégias foram implementadas para o trecho pós-pico da trajetória de equilíbrio, tendo em vista que para pontos que precedam o ponto de carga máxima admitiu-se que a tendência do material será descarregar e recarregar de forma elástica, segundo a curva monotônica. Essa implementação é válida somente para o método de controle direto de deslocamento e não há limitação para a quantidade de ciclos em uma análise.

Capítulo 4

Implementação Computacional

O INSANE (*INterative Structural ANalysis Environment*) é um sistema computacional para análise estrutural desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais, implementado, em sua grande parte, em linguagem JAVA, segundo o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO). A opção por essa linguagem, de acordo com [Fonseca \(2008\)](#), partiu da sua portabilidade, tendo em vista que não há qualquer tipo de dependência do programa em relação a plataforma, podendo ser compilado em um sistema operacional e executado em outro sem nenhum prejuízo.

Destaca-se o suporte à POO provido pela linguagem, que constitui uma metodologia de programação que proporciona segmentação do código, permitindo criar abstrações e generalizações a partir dos recursos de herança de classes e polimorfismo. Assim, conforme descrito por [Fonseca \(2006\)](#), o programa pode ser dividido em módulos independentes, permitindo o trabalho conjunto de diversas pessoas, em diferentes locais e épocas. Tal metodologia facilita a manutenção e expansão do código a partir de recursos de gerenciamento e controle de versões, possibilitando um desenvolvimento colaborativo e dinâmico do software.

O INSANE é constituído por três aplicações básicas, o pré-processador, o processador e o pós-processador. O pré-processador é um recurso gráfico interativo a partir

do qual o usuário fornece os dados de entrada da análise. O processador representa o núcleo numérico do sistema e é por meio dele que são obtidos os resultados de uma análise estrutural. O pós-processador, por sua vez, é uma interface gráfica que permite ao usuário visualizar os resultados calculados pelo processador.

As implementações do presente trabalho, que buscam inserir modelos constitutivos baseados em tensores de efeito de dano e análises com carregamentos cíclicos, situam-se essencialmente no núcleo numérico, mais especificamente na segmentação referente ao comportamento dos materiais, onde encontra-se o arcabouço teórico dos modelos constitutivos e leis tensão-deformação, originalmente implementados por [Penna \(2011\)](#). A segmentação responsável pela solução do modelo estrutural também demandou intervenções, a fim de incluir os processos de descarga e recarga.

Para facilitar a visualização das alterações propostas nesse trabalho, foi adotado um esquema de cores para representação das classes, conforme a figura [4.1](#).

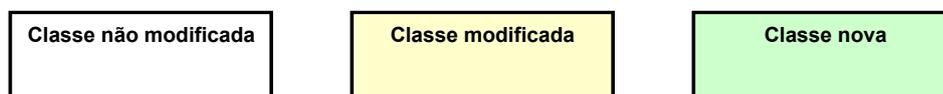


Figura 4.1: Esquema de cores para representação UML das classes ([Penna, 2011](#)).

4.1 Organização do Núcleo Numérico

O núcleo numérico do INSANE é estruturado em interfaces e classes abstratas que representam a solução de modelos discretos a partir de abstrações. Sua organização é estabelecida por relações entre as interfaces `Assembler` e `Persistence` e as classes abstratas `Model` e `Solution`, conforme descrito por [Fonseca \(2008\)](#). A Figura [4.2](#) apresenta um diagrama de organização das classes citadas e a forma de comunicação entre elas.

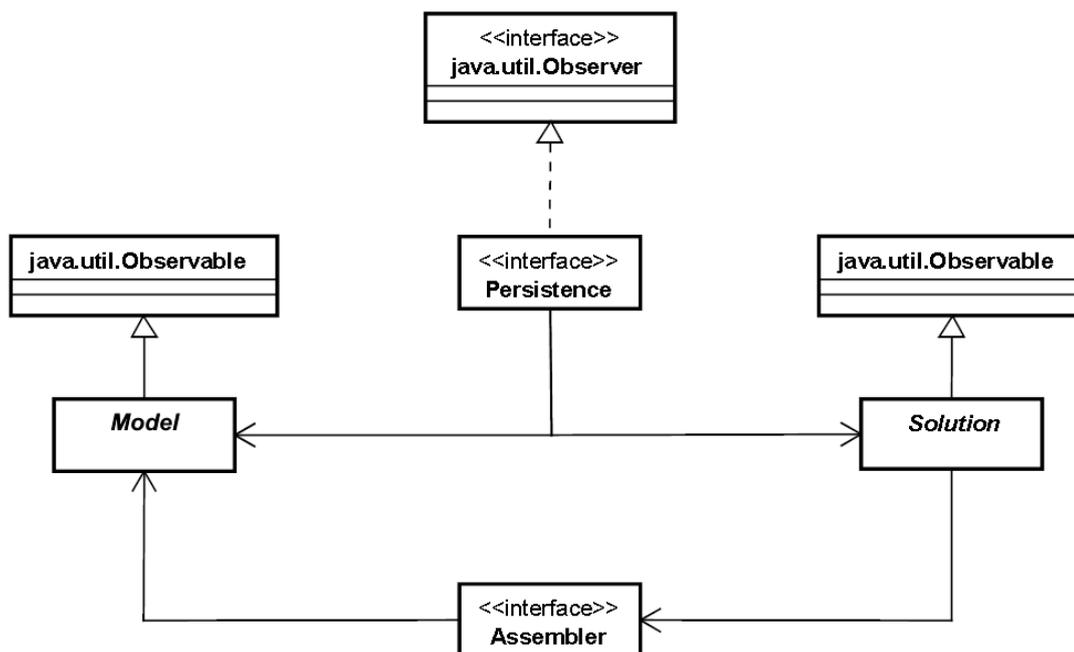


Figura 4.2: Organização do núcleo numérico do INSANE (Oliveira, 2018).

De acordo com Fonseca (2008), é a interface *Assembler* a responsável por montar o sistema que representa genericamente um problema de valor de contorno, dado por:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{D} \quad (4.1)$$

em que

\mathbf{X} é o vetor solução;

\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} são matrizes;

\mathbf{D} é um vetor que pode ou não depender de \mathbf{X} .

Segundo Penna (2011), a classe abstrata *Model* é responsável por armazenar os dados relativos ao modelo discreto, fornecendo para a interface *Assembler* as informações necessárias para montar a equação 4.1. A partir dessa equação, a classe abstrata *Solution* desencadeia o processo de solução para resolução desse sistema matricial, seja ele linear ou não linear. A interface *Persistence*, por sua vez, é encarregada de tratar os dados de entrada e persistir os dados de saída para as demais aplicações, sempre que ocorrerem alterações no estado do modelo discreto.

Esse processo de atualização de dados é feito a partir de um mecanismo de propagação de mudanças, seguindo o padrão *Observer-Observable*, que trabalha com objetos observadores e observados. Quando alguma mudança ocorre no estado dos componentes observados (`Model` e `Solution`), o componente observador (`Persistence`) é notificado para se atualizar, garantindo a comunicação e a consistência da análise.

4.2 Implementação de Tensores de Efeito de Dano

Sabendo que a degradação é um fenômeno que ocasiona alterações nas propriedades físicas do material, o conjunto de classes responsável pela obtenção dos modelos constitutivos baseados em tensores de efeito de dano foi implementado no projeto `materialmedia`. Seguindo o formato da estrutura teórica para modelos constitutivos implementada por Penna (2011), essa organização foi estendida com a inclusão de novos *Filters*, que contêm informações do modelo constitutivo representado, bem como as hipóteses de análise adotadas. Uma nova herança de classes foi implementada para representar os diferentes tensores de efeito de dano, cuja formulação foi descrita no Capítulo 2 deste trabalho.

A herança de classes `UnifiedConstitutiveModelFilter` (Figura 4.3), desenvolvida segundo Penna (2011) e oriunda da classe abstrata `ConstitutiveModelFilter`, sofreu uma expansão na sua especialização `MlfConstitutiveModelFilter`. Os modelos constitutivos implementados foram elaborados assumindo a hipótese de múltiplas funções de carregamento, devido à necessidade de se estabelecer funções de carregamento para descrição do processo de degradação nas direções principais de deformação, que são indispensáveis na representação da ortotropia do material. Tendo em vista essa demanda, foi implementada a classe `MlfoCmTensorialDamageFilter`.

Essa nova classe tem como campos as variáveis de dano nas direções principais

e o tensor de efeito de dano. Os métodos implementados *getSecantTensor()*, *directionRateChangeStiffness()* e *getInelasticPotential()* calculam, respectivamente, o tensor de rigidez secante (\mathbf{E}^s), o tensor das direções da variação do tensor de rigidez ($\overline{\mathbf{M}}$) e o tensor das direções de degradação no domínio das deformações ($\overline{\mathbf{m}}$). Seus parâmetros de entrada são o modelo de análise, o material e as variáveis constitutivas. Esses métodos incorporam os conceitos apresentados no Capítulo 2, em que o tensor de rigidez secante corrente é obtido a partir de uma relação entre o tensor de rigidez do material íntegro e o tensor de efeito de dano.

A classe `MlfoCmTensorialDamageFilter`, contudo, é genérica e não inclui as especificidades de um modelo de dano específico. Para a especialização do modelo de dano, foi implementada a classe `MlfoCmTensorialDamageFilterSmearedCracking`, que estende `MlfoCmTensorialDamageFilter`, e compreende as particularidades do modelo constitutivo de interesse. Uma variação dessa classe foi implementada para trabalhar com a abordagem alternativa do tensor de rigidez secante, que substitui a pré e pós-multiplicação do tensor de rigidez do material íntegro pelo tensor de efeito de dano por uma pré-multiplicação única. Essa classe foi nomeada `MlfoCmTensorialDamageFilterSmearedCrackingAdapted`.

É apresentado na Figura 4.3 o diagrama de heranças das novas classes implementadas no pacote `constitutivemodel`, que é parte do projeto `materialmedia`. A classe `MlfoCmTensorialDamageFilter` foi detalhada com maior minúcia, tendo em vista que as demais estendem seu formato de implementação. Os filtros previamente implementados por Penna (2011) não são representados, com o objetivo de uma visualização mais clara das alterações realizadas no código.

A implementação dos tensores de efeito de dano foi realizada com a inclusão de uma nova herança de classes (Figura 4.4), que estende a classe abstrata `DamageEffectTensor`, a qual contém métodos abstratos para cálculo do tensor de efeito de dano *getDamageEffectTensor()* e sua derivada *getDerivedDamageEffectTensor()*,

especializados nas classes herdeiras segundo a referência de formulação adotada. Esses métodos tem como parâmetro as variáveis constitutivas. Conforme discutido no Capítulo 2, optou-se por implementar os tensores que foram deduzidos dos estudos de Darwin e Pecknold (1977), Pitangueira (1998) e Carol et al. (2001a). Ressalta-se que o tensor de Carol et al. (2001a) foi implementado na forma originalmente descrita pelo autor e segundo a formulação alternativa desenvolvida para redução da demanda de cálculos tensoriais.

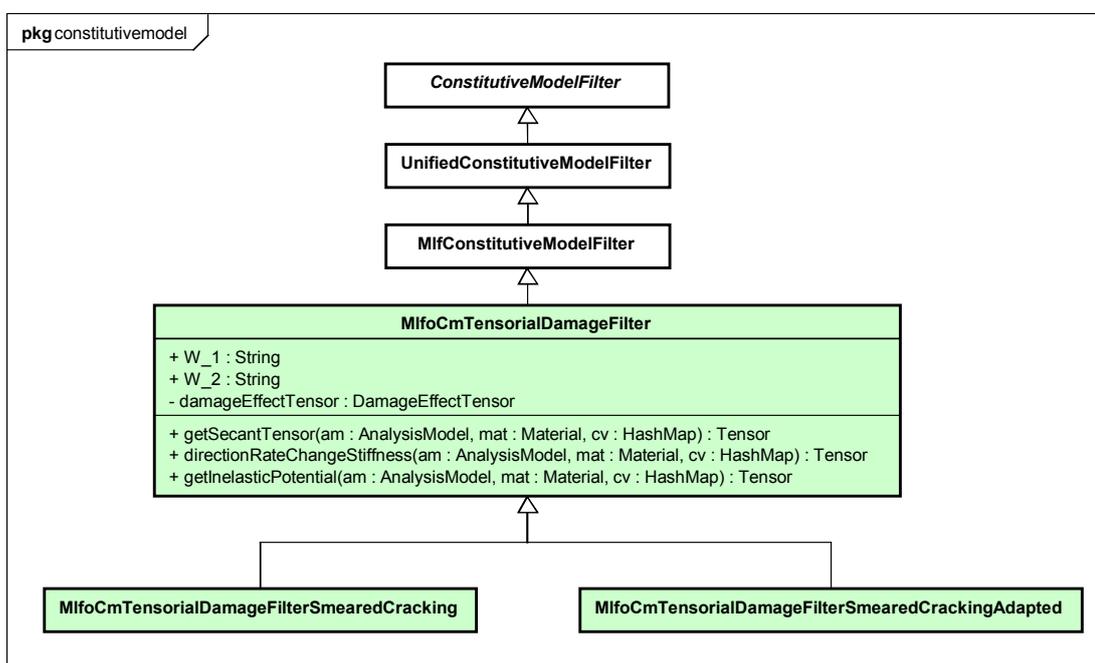


Figura 4.3: Hierarquia de classes de constitutivemodel.

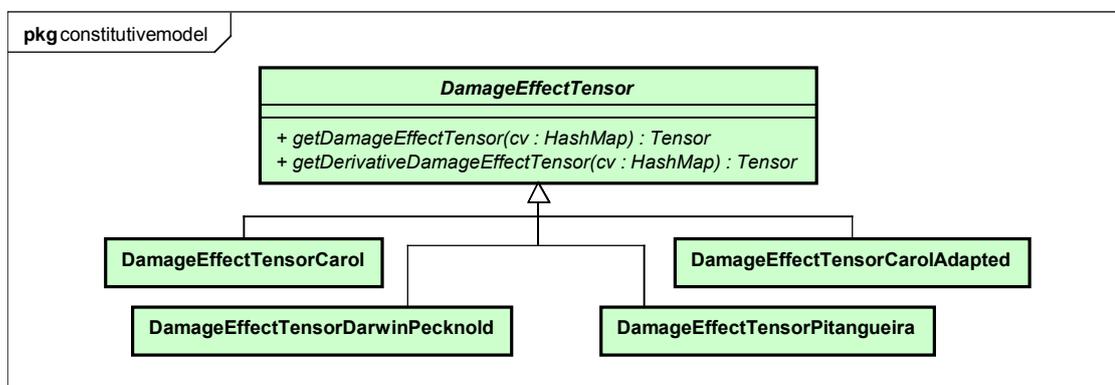


Figura 4.4: Implementação dos tensores de efeito de dano.

4.3 Implementação dos Ciclos de Carregamento

A fim de expandir o sistema computacional para análises cíclicas, em que a estrutura está sujeita a processos de carga, descarga e recarga, foi implementada a classe `StaticCyclicEquilibriumPath`, no projeto `solution` e na segmentação responsável pelo cálculo de cada passo incremental (pacote `step`). Originalmente, o INSANE conta com a classe `StaticEquilibriumPath`, responsável pela solução de problemas estáticos não lineares por meio de um processo incremental-iterativo, conforme relatado por [Fonseca \(2006\)](#). A nova classe nada mais é que uma adaptação da original, incluindo no processo de solução do modelo uma chamada para o método `setUpCycle()`, que é responsável pelo controle de ciclos, verificando se há inversão do incremento de deslocamentos, segundo um roteiro de ciclos fornecido como parâmetro de entrada.

O controle de ciclos, descrito no Capítulo [3](#), foi implementado conforme a herança de classes ilustrada na Figura [4.5](#). A classe abstrata `CycleControl` tem como campo um inteiro que fornece o número de ciclos que o usuário deseja simular ao longo da envoltória monotônica e suas herdeiras possuem como variável um vetor de inteiros ou reais, que fornece pontos limite para o início dos processos de descarga ou recarga, denominado *script* de carregamento. O controle de ciclos pode ser feito a partir de duas estratégias, por contagem de passos ou limite de carga, implementadas, respectivamente, nas classes `CountingStepsCycleControl` e `LoadFactorCycleControl`.

A Figura [4.6](#) mostra o diagrama UML da herança referente ao processo de solução de uma análise não linear cíclica. A classe abstrata é representada em amarelo pois demandou alterações, a fim de ser capaz de instanciar o novo tipo de solução cíclica implementado pela classe `StaticCyclicEquilibriumPath`. Essa classe difere da solução não linear original, implementada pela classe `StaticEquilibriumPath`, por possuir como parâmetro um objeto responsável pelo controle de ciclo e por

sobrescrever o método *execute()*, incluindo uma verificação capaz de identificar se o passo corrente é um ponto de descarga ou recarga.

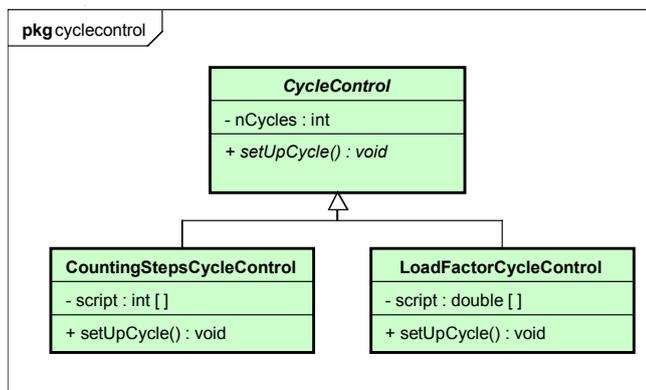


Figura 4.5: Implementação da herança para controle de ciclos.

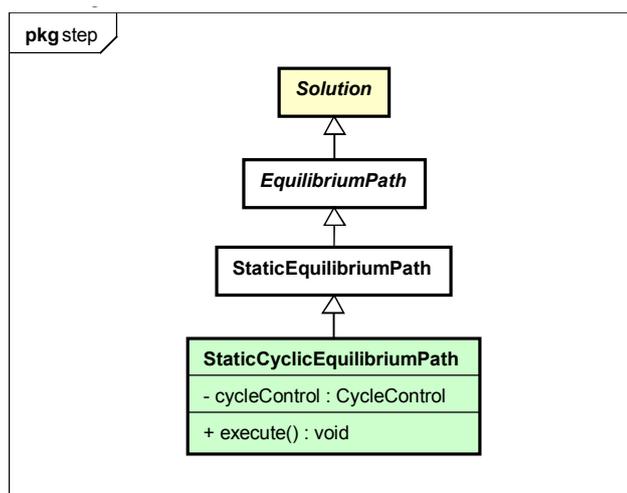


Figura 4.6: Hierarquia de classes de step.

4.4 Implementação das Leis Tensão-Deformação

A descrição da curva tensão-deformação de um material é dada a partir de uma lei monotônica e leis de descarregamento e recarregamento. O INSANE, até então, apresentava leis tensão-deformação restritas a cargas monotônicas, o que conduziu

à necessidade de implementar novas leis, capazes de descrever os ciclos de carregamento. O descarregamento/rearregamento secante não demandou novas implementações, uma vez que o cálculo do ciclo conforme essa hipótese já era contemplado pela implementação para carregamentos monótonos. As demais propostas, contudo (elástica, linear com foco e segundo Popovics-Saenz) foram implementadas a partir de novas classes para representar materiais com as referidas características.

As classes implementadas têm métodos para obtenção da tensão dada uma deformação, sendo distintos os métodos para cálculo da tensão na envoltória monotônica e nos regimes cíclicos. Há ainda métodos para obtenção do chamado módulo secante generalizado e da correspondente variável de dano em descarregamento ou rearregamento. Ressalta-se que a variável de dano que representa o estado de degradação real do material está associada à variável histórica do modelo e não com os regimes de descarga/recarga. Tomando como referência materiais baseadas na mecânica da fratura, adequados para representação de modelos constitutivos de fissuração distribuída, e a curva monotônica que adota a lei de [Boone et al. \(1986\)](#) para tração e [Carreira e Chu \(1985\)](#) para compressão, foram estabelecidas as diferentes leis de carga e descarga. Quanto à lei de Popovics-Saez, optou-se por implementá-la em sua totalidade, tanto para carregamentos monotônicos de compressão, quanto para carregamentos cíclicos.

As novas possibilidades de leis tensão-deformação implementadas, incluindo leis de carga e descarga, são mostradas na Figura [4.7](#). A classe abstrata `Material` foi modificada a fim de instanciar as novas leis implementadas, a partir do padrão *Factory*, enquanto a classe abstrata `FractureMechanicsBasedMaterials` sofreu alterações no âmbito das variáveis que definem um material baseado na mecânica da fratura, levando em conta a necessidade de incluir novos campos para descrição das leis de carregamento cíclico. Nem todas as leis tensão-deformação disponíveis no INSANE estão presentes no diagrama UML, com o objetivo de enfatizar as novas classes implementadas.

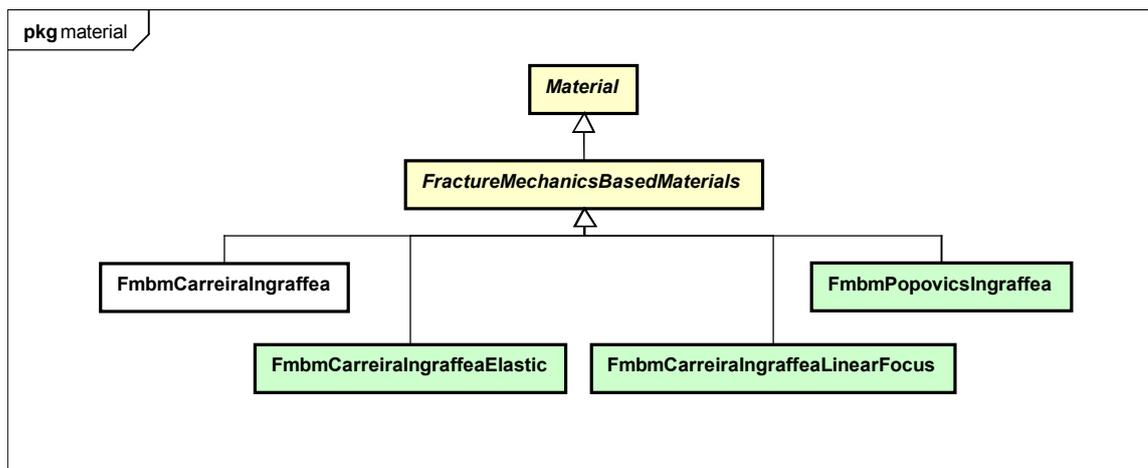


Figura 4.7: Herança de classes para descrição das leis tensão-deformação para análises cíclicas.

Como houve alterações nos métodos responsáveis pelos cálculos da tensão e do módulo secante, que são essenciais na obtenção do dano corrente, fez-se indispensável a implementação de um novo filtro capaz de representar um modelo constitutivo que permite, além da adoção dos tensores de efeito de dano em sua formulação, a inserção dos ciclos de carga. Essa classe foi nomeada como `MlfoCmTensorialDamageFilterSmearedCrackingCyclic` e sua particularidade em relação a classe `MlfoCmTensorialDamageFilterSmearedCracking` é exatamente a chamada dos novos métodos para os trechos de descarga e recarga no método `unLoadLaw()`. A classe original implementa a hipótese de descarga/recarga baseada no módulo secante.

Deve ser salientado que toda a implementação realizada beneficiou-se do paradigma da POO e que as novas classes introduzidas no código, tanto para os modelos constitutivos de dano tensorial, quanto para o controle de ciclos e descrição das leis tensão-deformação, utilizaram o recurso de herança, o que propicia expansões futuras dessas segmentações do núcleo numérico.

Capítulo 5

Simulações Numéricas

Neste capítulo são apresentadas simulações numéricas, a fim de avaliar o desempenho do modelo de dano tensorial, bem como da estratégia de carregamento cíclico. A partir de exemplos básicos de tração e compressão direta, flexão em três pontos e compressão diametral, pode-se aferir o comportamento dos modelos constitutivos baseados em tensores de efeito de dano, ressaltando as características e limitações de cada um. A resposta de elementos estruturais submetidos a carregamentos cíclicos, por sua vez, é analisada de forma qualitativa segundo a introdução de ciclos arbitrários em envoltórias monotônicas previamente estabelecidas. Por fim, foram realizadas simulações numéricas de ensaios experimentais disponíveis na literatura.

5.1 Simulações para Avaliação da Implementação dos Tensores de Efeito de Dano

Para avaliar a implementação dos modelos de dano tensorial foram realizadas simulações numéricas de ensaios elementares. Conforme representado na Figura [5.1](#), as simulações incluíram modelos de tração pura (a), compressão pura (b), flexão em 3 pontos (c) e compressão diametral (d). Os nós e as direções de controle dos deslocamentos são destacados pelas setas em preto.

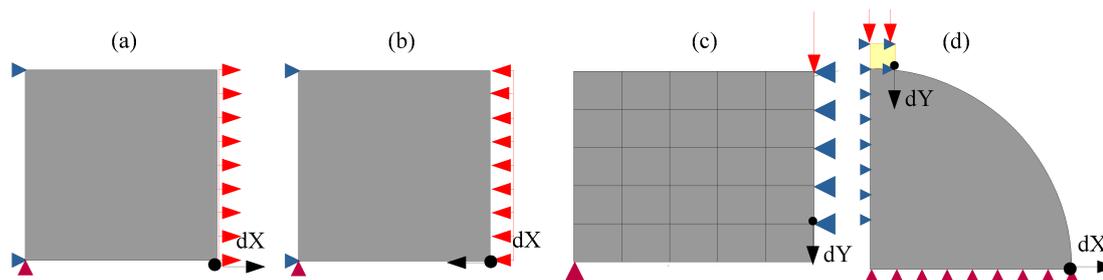


Figura 5.1: Simulações numéricas para modelos constitutivos baseados em tensores de efeito de dano.

Nas simulações, foram adotados o modelo de dano tensorial com tensor efeito de dano baseado nas hipóteses de Pitangueira (1998), Carol et al. (2001a,b) e Darwin e Pecknold (1977). Nesse modelo, considerou-se dano distribuído com direção fixa e leis de evolução de dano baseadas em leis tensão-deformação típicas para o concreto.

Na análise não linear foi adotado processo incremental-iterativo de Newton-Raphson com equilíbrio tangente.

Para fins de comparação, foi utilizado como referência o modelo constitutivo de fissuração distribuída com direção fixa de propagação, implementado por Penna (2011) no software INSANE.

5.1.1 Tração Pura

A primeira simulação realizada foi de uma chapa em estado plano de tensões, modelada com um único elemento finito do tipo quadrilateral de 4 nós, com dimensões unitárias, submetida a um carregamento de tração pura também unitário aplicado em sua face direita. As restrições nodais foram aplicadas na face esquerda do elemento, permitindo o deslocamento vertical, na direção transversal ao carregamento, devido ao efeito de Poisson. A solução não linear contou com um limite de passos igual a 200, com tolerância para convergência, em deslocamento e força, de $1,0 \times 10^{-4}$. O método de controle utilizado foi o controle direto de deslocamento, com incremento de $5,0 \times 10^{-6}$ m a cada passo.

O material que constitui o elemento estrutural segue a lei de [Carreira e Chu \(1985\)](#) para compressão e de [Boone et al. \(1986\)](#) para tração, com resistência do concreto à compressão de $f_c = 20$ MPa e à tração de $f_t = 2$ MPa. A deformação associada à resistência à compressão adotada foi de $\varepsilon_c = 0,002$, o módulo de elasticidade longitudinal foi considerado como $E = 20000$ MPa e o coeficiente de Poisson dado por $\nu = 0,2$. A energia de fratura adotada foi de $G_f = 2,0 \times 10^{-5}$ MN/m, o comprimento característico foi $h = 0,05$ m e o fator de retenção ao cisalhamento igual a $\beta_r = 0,05$. A Tabela [5.1](#) apresenta um resumo dos parâmetros do material adotado nessa análise. As curvas tensão-deformação são apresentados no gráfico da Figura [5.2](#).

Tabela 5.1: Parâmetros do material: tração pura com TED.

Parâmetros das leis Carreira e Chu (1985) e Boone et al. (1986) .			
f_c	20 MPa	f_t	2 MPa
ε_c	0,002	E	20000 MPa
ν	0,2	G_f	$2,0 \times 10^{-5}$ MN/m
h	0,05 m	β_r	0,05

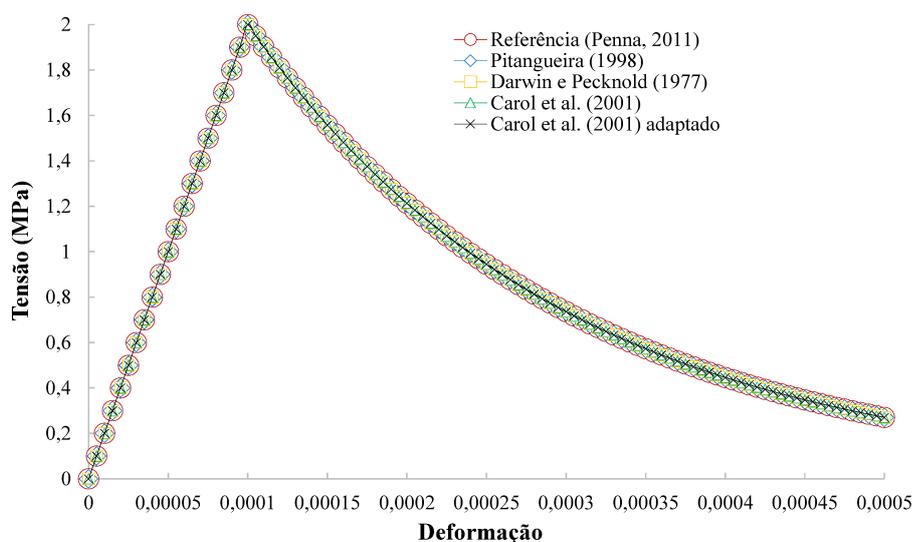


Figura 5.2: Curvas tensão-deformação: tração.

Com o objetivo de avaliar a estabilidade numérica dos modelos baseados em tensores de efeito de dano diante do refinamento da malha, o exemplo anterior foi simulado com malhas de 4, 16 e 64 elementos, conforme indicado na Figura 5.3. Os modelos com tensores de efeito de dano propostos por Carol et al. (2001a), no formato convencional e alternativo, e o tensor de efeito de dano baseado na proposta de Pitangueira (1998) apresentaram resultados idênticos aos obtidos com a malha de um só elemento. Contudo, a hipótese de tensor de efeito de dano de Darwin e Pecknold (1977) apresentou comportamento instável da curva tensão-deformação com o refinamento da malha, conforme ilustrado na Figura 5.4, o que indica que esse modelo apresenta uma maior dependência de malha que as demais hipóteses.

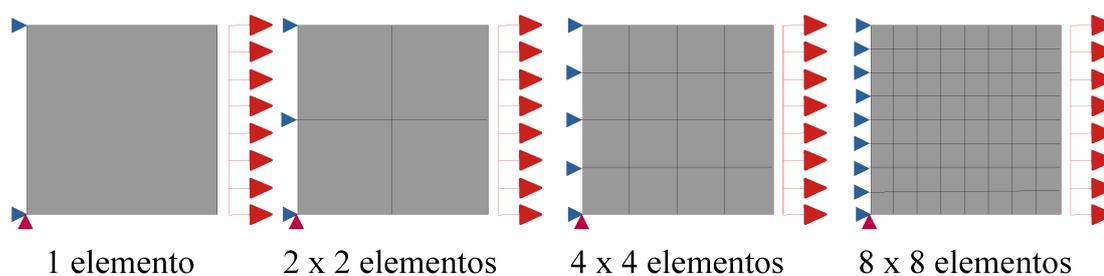


Figura 5.3: Refinamento da malha.

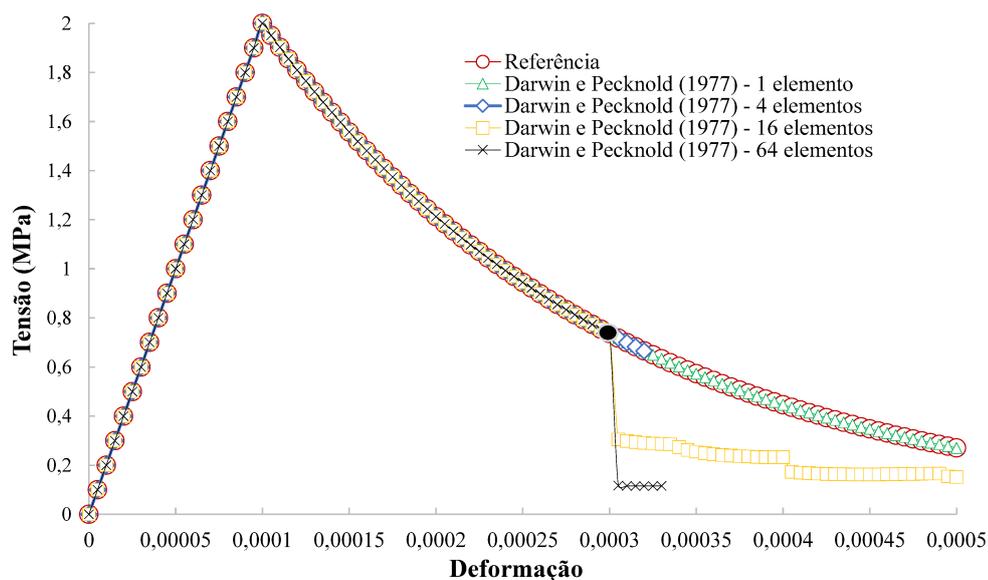


Figura 5.4: Instabilidade numérica observada para a hipótese de Darwin e Pecknold (1977).

A partir desses resultados, constata-se que as simulações numéricas realizadas a partir dos tensores de efeito de dano apresentaram resultados ótimos para a tração pura, com exceção do modelo proposto por Darwin e Pecknold (1977), cujo comportamento da curva tensão-deformação foi irregular com a discretização da malha. Supõe-se que esse modelo é mais sensível a variações no refinamento da malha, pois, sua hipótese de simetrização do tensor secante local inclui raízes nesse operador, o que pode conduzir a instabilidades numéricas.

5.1.2 Compressão Pura

Para a compressão foi realizado procedimento análogo ao descrito para a tração. Os parâmetros de entrada do modelo foram os mesmos aplicados à tração, feitas as ressalvas que o carregamento, que agora representa uma compressão pura, teve seu sentido de aplicação invertido e que o incremento de deslocamento adotado foi de $-5,0 \times 10^{-5}$ m. Os resultados dessa simulação são apresentados na Figura 5.5.

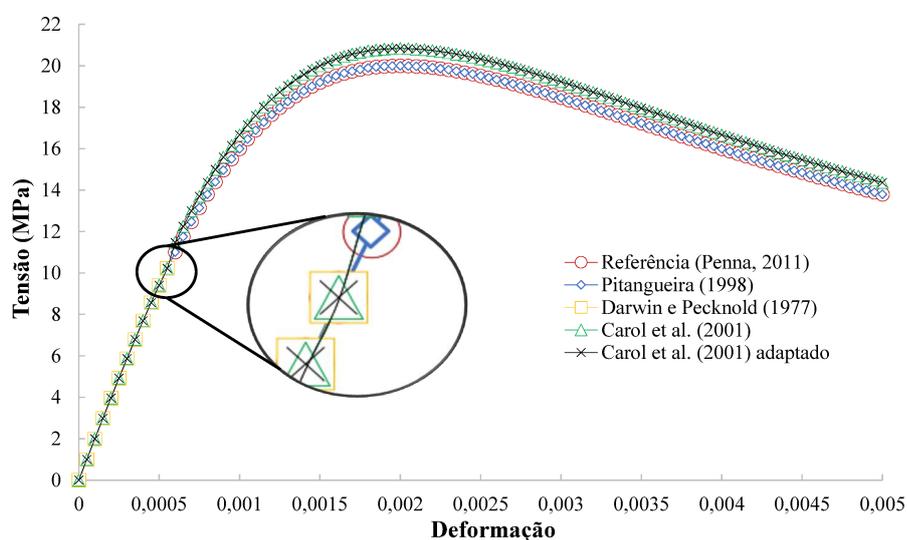


Figura 5.5: Curvas tensão-deformação: compressão.

Percebe-se, portanto, que apenas a proposta de tensor de efeito de dano formulada a partir de Pitangueira (1998) foi capaz de representar com precisão a trajetória de equilíbrio, em concordância com a curva de referência. O modelo de Darwin e

Pecknold (1977) divergiu no passo 12, ponto em que ocorre acentuação do comportamento não linear do material. Foi observado, ainda, que as variáveis de dano evoluíram de maneira abrupta, partindo do zero para um valor próximo do limite de degradação. Já os modelos baseados no tensor proposto por Carol et al. (2001a) conseguiram representar adequadamente a forma da curva, contudo, a resistência última do material foi superestimada. Observa-se que, nesses casos, houve uma mudança repentina da inclinação da curva tensão-deformação na região destacada da Figura 5.5, o que ocasionou a diferença de pico dessas hipóteses em comparação com a referência. Essa alteração da inclinação é resultado da utilização de um recurso que permitiu o aumento da tolerância do processo incremental-iterativo de $1,0 \times 10^{-4}$ para $1,0 \times 10^{-2}$, evitando que a análise fosse interrompida precocemente. Mais estudos são necessários para compreender as limitações das respectivas propostas de tensores de dano e porque elas não apresentaram resultados satisfatórios para a compressão pura.

5.1.3 Flexão em 3 Pontos

A simulação do exemplo de flexão em 3 pontos partiu da análise de uma viga com 2,50 m de comprimento, 1,00 m de altura e espessura unitária. A modelagem considerou a simetria do modelo em relação ao eixo y , simulando metade da geometria. A malha utilizada foi de 5×5 elementos do tipo quadrilateral de 4 nós. A fim de simular os efeitos de uma trinca inicial, foi retirado o apoio horizontal no nó inferior na face direita da viga, como apresentado na Figura 5.1c. O carregamento é composto por uma carga incremental de módulo unitário, no sentido negativo do eixo y (sendo aplicada uma carga de $-0,50$ MN, tendo em vista à simetria do modelo).

As propriedades do material foram as mesmas utilizadas nos exemplos de tração e compressão. A solução não linear foi limitada em 500 passos, com tolerância para convergência por deslocamento e carga de $1,0 \times 10^{-4}$. O incremento de deslocamento foi definido como $1,0 \times 10^{-2}$ m e o método de controle adotado foi o controle de

deslocamentos generalizado, conforme apresentado por [Fuina \(2004\)](#). Os resultados obtidos para as diferentes formulações de tensores de efeito de dano são apresentados na Figura [5.6](#).

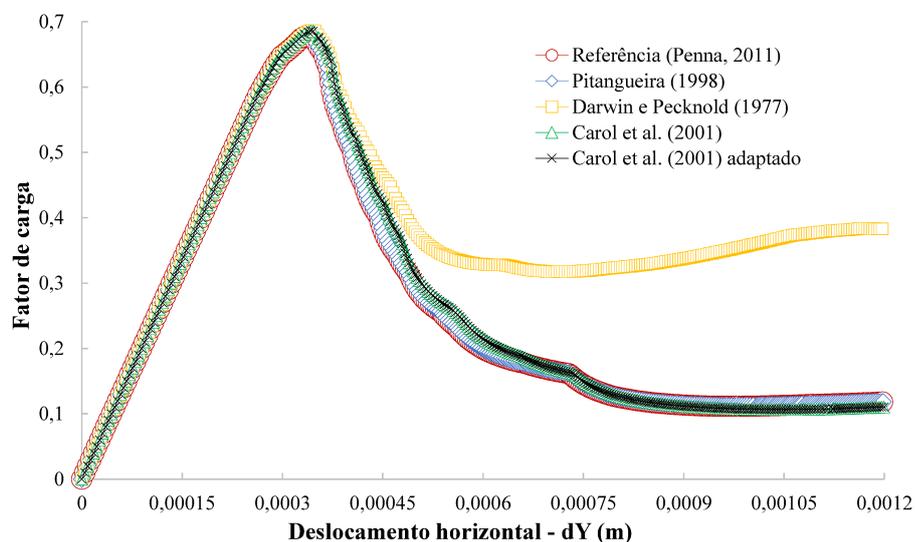


Figura 5.6: Trajetória de equilíbrio: flexão.

Observa-se que nas análises para flexão, os modelos se mostraram estáveis e concordantes com a curva de referência. Ressalta-se que o modelo de [Darwin e Pecknold \(1977\)](#) apresentou um enrijecimento observado no ramo pós-pico da trajetória de equilíbrio, o que pode estar relacionado à forma particular proposta pelos autores para o cálculo do módulo de elasticidade transversal do material, sob o qual atua o fator de retenção ao cisalhamento, que tende a induzir um travamento artificial de tensões.

5.1.4 Compressão Diametral

O ensaio de compressão diametral busca obter de forma indireta a resistência a tração do material, utilizando um corpo de prova cilíndrico. A geometria do corpo ensaiado permite que a simulação numérica se beneficie da simetria dupla do modelo. Feitas essas considerações, foi realizada a análise de um quarto do corpo de prova, com 40 mm de raio, adaptando as restrições nodais de forma adequada. Foi adotada

uma malha de 130 elementos do tipo triangular de 3 nós (como apresentado na Figura 5.7). Os dois nós inferiores da face esquerda do modelo foram liberados a fim de representar os efeitos de uma trinca inicial. O carregamento foi aplicado sobre um bloco rígido, considerando a condição de simetria do modelo, no valor de $-0,25$ N em cada nó do elemento.

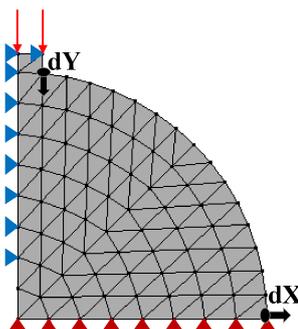


Figura 5.7: Representação da malha adotada na análise numérica de compressão diametral.

Novamente foram adotadas leis de compressão de Carreira e Chu (1985) e de tração de Boone et al. (1986) para o concreto. Os parâmetros de entrada desse material foram a resistência do concreto à compressão de $f_c = 25$ N/mm² e à tração de $f_t = 2,5$ N/mm², a deformação associada à resistência do concreto em compressão $\varepsilon_c = 0,002$, o módulo de elasticidade dado por $E = 20000$ N/mm² e o coeficiente de Poisson de valor $\nu = 0,2$. A energia de fratura adotada foi de $G_f = 0,1$ N/mm, sendo o comprimento característico $h = 50$ mm e o fator de retenção ao cisalhamento $\beta_r = 0,05$. Tais parâmetros são resumidos na Tabela 5.2

Tabela 5.2: Parâmetros do material: compressão diametral com TED.

Parâmetros das leis Carreira e Chu (1985) e Boone et al. (1986).			
f_c	25 N/mm ²	f_t	2,5 N/mm ²
ε_c	0,002	E	20000 N/mm ²
ν	0,2	G_f	0,1 N/mm
h	50 mm	β_r	0,05

O bloco rígido foi considerado linear elástico, com $E = 200000 \text{ N/mm}^2$ e $\nu = 0,2$. A análise não linear contou com um número máximo de passos igual a 180 e tolerância para convergência de deslocamento e carga de $1,0 \times 10^{-3}$. O método de controle adotado foi o controle direto de deslocamento, com incremento de $1,34 \times 10^{-4} \text{ mm}$, aplicado no nó de controle horizontal. Os resultados obtidos para as várias hipóteses dos tensores de efeito de dano implementados podem ser observados nas Figuras 5.8 e 5.9:

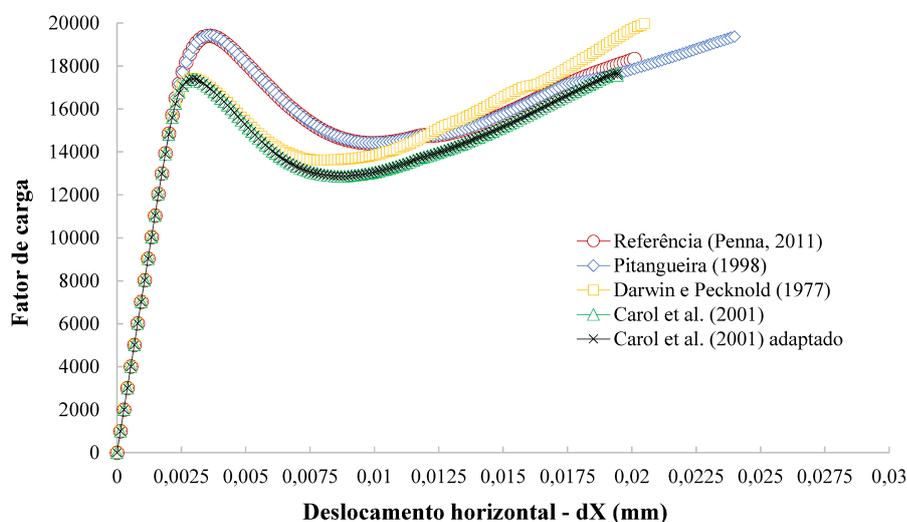


Figura 5.8: Trajetória de equilíbrio: compressão diametral (dX).

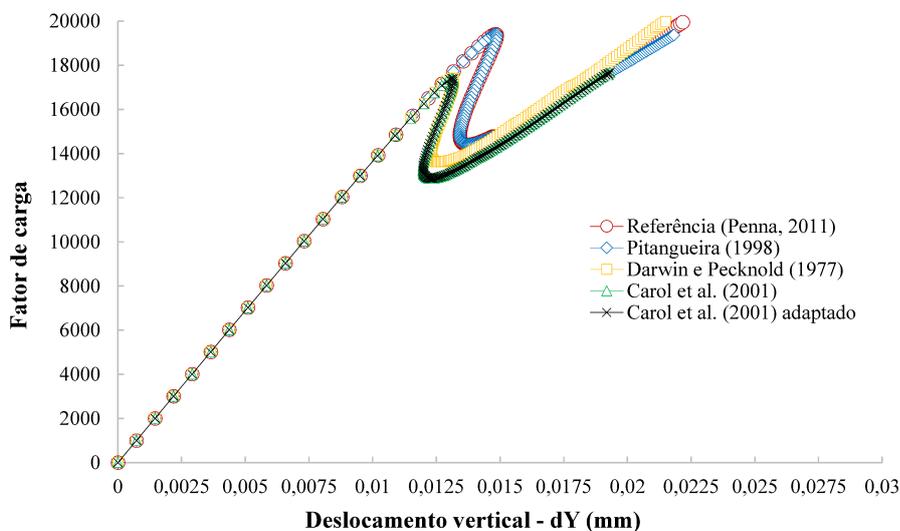


Figura 5.9: Trajetória de equilíbrio: compressão diametral (dY).

Tendo em vista as trajetórias de equilíbrio apresentadas, os resultados foram considerados bastante satisfatórios. A trajetória que representa o modelo de [Pitangueira \(1998\)](#) foi a que mais se aproximou da referência, o que é explicado pelo fato de ambas partirem do mesmo princípio teórico, apresentando diferenças apenas quanto ao seu desenvolvimento matemático. Já as propostas de tensor de efeito de [Carol et al. \(2001a\)](#) e [Darwin e Pecknold \(1977\)](#) resultaram em trajetórias muito similares, ainda que apresentem um pico levemente inferior ao da referência. Uma possível fonte da diferença observada entre os picos pode ser a existência de uma região com compressão localizada, onde ocorre a aplicação da carga, uma vez que os tensores de [Carol et al. \(2001a\)](#) e [Darwin e Pecknold \(1977\)](#) apresentaram limitações diante desse tipo de solicitação. A utilização do bloco rígido entre as forças aplicadas e a estrutura em estudo buscou amenizar esse tipo de fenômeno. Ressalta-se ainda que modelos distintos, em geral, podem representar esse tipo de disparidade, devido às suas hipóteses iniciais.

5.2 Simulações para Avaliação da Implementação dos Ciclos de Carregamento

A partir dos conceitos de análise fisicamente não linear e carregamentos cíclicos apresentados no Capítulo [3](#), foram implementadas no software INSANE novas funcionalidades, capazes de incluir ciclos de carga nas trajetórias de equilíbrio, refletindo variações na solicitação do elemento estrutural. Para testar a validade dessa expansão do código, foram elaborados exemplos de tração, compressão e flexão, com envoltórias monotônicas previamente estabelecidas e inclusão de ciclos arbitrários segundo as leis secante, elástica, linear com foco e a lei de Popovics-Saenz.

Devido à maior estabilidade dos resultados apresentados, adotou-se para as análises cíclicas o modelo de dano tensorial com hipótese do tensor de efeito de dano baseado no trabalho de [Pitangueira \(1998\)](#). O método de controle utilizado foi o

controle direto de deslocamento, uma vez que foi o método considerado na implementação do procedimento de monitoração do processo cíclico de carga, descarga e recarga. O objetivo dessas simulações é avaliar de forma qualitativa a resposta das estruturas diante da introdução de oscilações no carregamento.

5.2.1 Tração Pura com Carregamento Cíclico

Os diferentes processos de descarga e recarga implementados são apresentados em um exemplo de tração axial modelada com elementos finitos planos, que apresenta estados de tensão e deformação simples, favorecendo a representação dos ciclos. A configuração geométrica, as condições de contorno e a malha adotada nesse problema são ilustradas na Figura 5.10. A chapa em estado plano de tensão foi discretizada em 16 elementos quadriláteros de 4 nós e sua espessura foi determinada como unitária. A análise não linear foi limitada a 500 passos e os ciclos foram introduzidos a partir do controle por contagem de passos. O nó e a direção de controle são destacados na Figura 5.10 e o incremento de deslocamentos adotado foi de $5,0 \times 10^{-6}$ m a cada passo. A tolerância de convergência adotada, para força e deslocamento, foi de $1,0 \times 10^{-4}$.

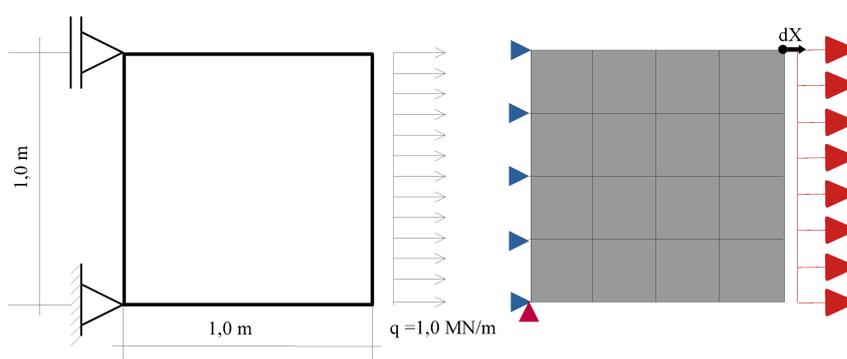


Figura 5.10: Modelo de tração pura para análise cíclica.

Os parâmetros do material foram definidos para as lei tensão-deformação adotadas. Para os exemplos com ciclo secante e elástico, adotando lei de compressão conforme Carreira e Chu (1985) e lei de tração de acordo com Boone et al. (1986),

foram definidos o coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$, as resistências do concreto à compressão, $f_c = 20$ MPa, e a tração, $f_t = 2$ MPa, com módulo de elasticidade longitudinal de $E = 20000$ MPa. A deformação limite do concreto associada à resistência à compressão adotada foi de $\varepsilon_c = 0,002$. O comprimento característico foi $h = 0,05$ m, com fator de retenção ao cisalhamento de $\beta_r = 0,05$. A energia de fratura em questão foi $G_f = 2,0 \times 10^{-5}$ MN/m.

Para o modelo com descarregamento/rearregamento linear baseado em ponto focal, além das informações já estabelecidas para caracterização do material, foram definidas também às coordenadas desse ponto, nesse caso estimadas segundo a resistência do concreto à compressão ($\varepsilon_f = -0,002$, $\sigma_f = -20$ MPa).

Quanto à lei de Popovics-Saenz, estabeleceu-se um foco para a direção traçionada (1) e um foco para a direção comprimida (2), além dos parâmetros de ajuste demandados por essa curva, β_{ref} e k_{ref} . Esses valores foram, respectivamente: $\varepsilon_{f1} = -0,002$, $\sigma_{f1} = -20$ MPa, $\varepsilon_{f2} = 0,0001$, $\sigma_{f2} = 2$ MPa, $\beta_{ref} = 1,8$ e $k_{ref} = 0,85$. Os parâmetros de ajuste foram definidos de forma que a lei monotônica de compressão de Popovics-Saenz seja equivalente à lei proposta por [Carreira e Chu \(1985\)](#), facilitando a comparação das curvas tensão-deformação. Foi simulado ainda um modelo que adota a lei tensão-deformação de Popovics-Saenz com o foco das duas direções na origem, a fim de avaliar a sensibilidade dessa lei à variação do ponto focal. A Tabela [5.3](#) apresenta os parâmetros adotados de forma resumida.

A Figura [5.11](#) ilustra os resultados obtidos para as diferentes propostas de ciclo, lembrando que esses foram inseridos de forma aleatória ao longo da curva monotônica, tendo em vista o caráter qualitativo dessa análise. Para melhor visualização dos resultados, esses são apresentados individualmente na Figura [5.12](#).

Pode-se perceber que todas as estratégias de descarga e recarga apresentaram resultados satisfatórios, uma vez que as curvas tensão-deformação conseguiram representar com eficácia os ciclos de histerese. Assim, fica demonstrado que a implementação realizada para introdução de ciclos de carregamento é adequada para

elementos estruturais submetidos à tração pura.

Tabela 5.3: Parâmetros do material: tração pura com ciclos de carga.

Parâmetros das leis Carreira e Chu (1985) e Boone et al. (1986)			
f_c	20 MPa	f_t	2 MPa
ε_c	0,002	E	20000 MPa
ν	0,2	G_f	$2,0 \times 10^{-5}$ MN/m
h	0,05 m	β_r	0,05
Parâmetros da lei de ciclo de carga linear com foco			
ε_f	-0,002	σ_f	-20 MPa
Parâmetros da lei de Popovics-Saenz			
β_{ref}	1,8	k_{ref}	0,85
ε_{f1}	-0,002	σ_{f1}	-20 MPa
ε_{f2}	0,0001	σ_{f2}	2 MPa

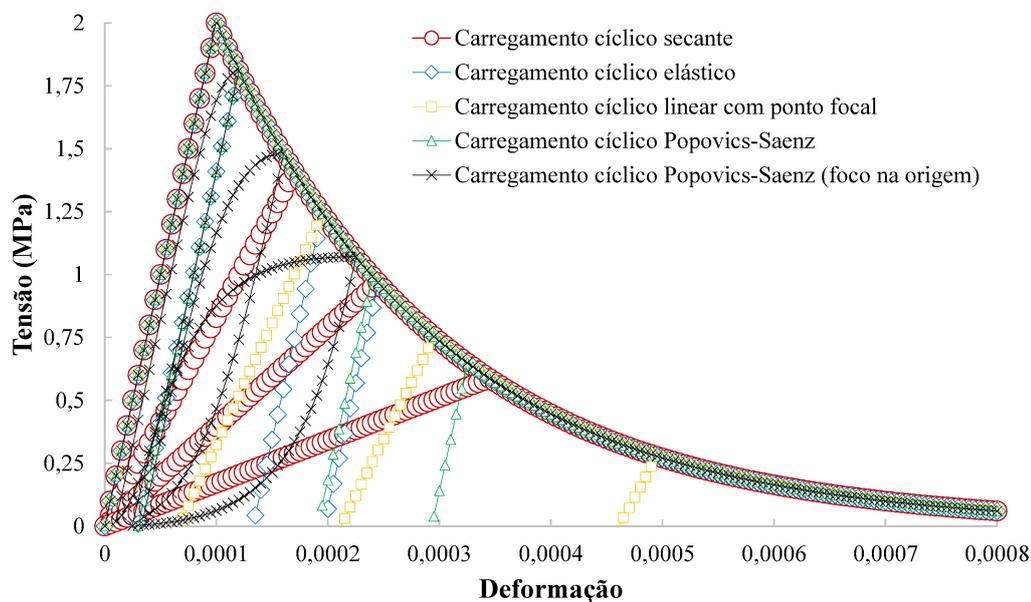


Figura 5.11: Curvas tensão-deformação para tração pura em estrutura submetida a carregamento cíclico.

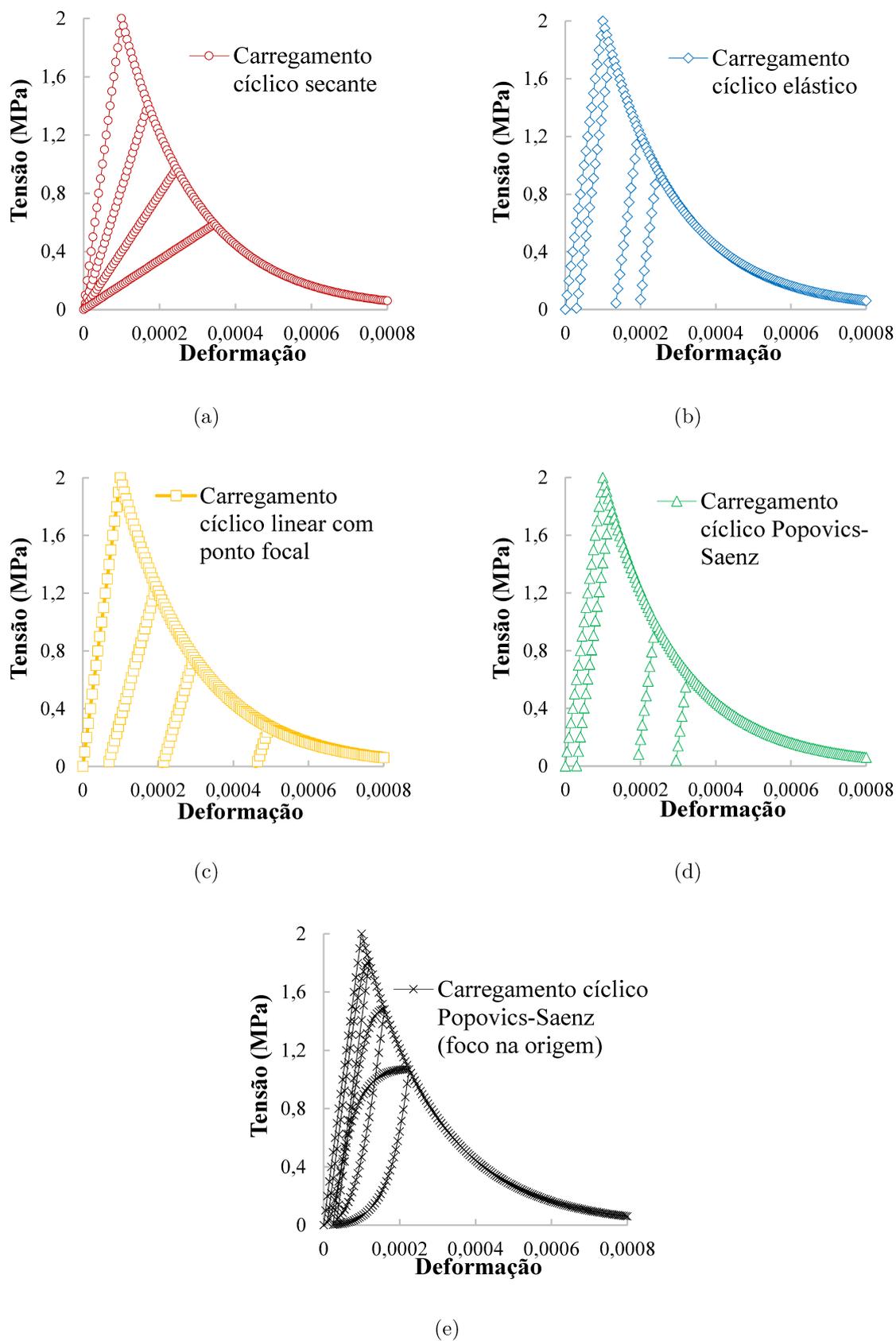


Figura 5.12: Curvas tensão-deformação para tração para as diferentes estratégias de representação dos ciclos de carga.

5.2.2 Compressão Pura com Carregamento Cíclico

De forma análoga ao exemplo de tração pura, foi realizada a simulação para a compressão pura com carregamento cíclico. A Figura 5.13 mostra a configuração geométrica do elemento estrutural ensaiado, assim como suas restrições, solicitações e a malha adotada. Na figura tem-se indicado o nó e a direção de controle. Novamente, foram utilizados 16 elementos quadriláteros de 4 nós e a espessura da chapa foi definida como unitária. A análise não linear foi limitada a 450 passos e o controle de ciclos desta vez foi definido por limite de carga. O incremento de deslocamentos foi de $-5,0 \times 10^{-5}$ m a cada passo, enquanto a tolerância de convergência estabelecida foi de $1,0 \times 10^{-4}$, para carga e deslocamento.

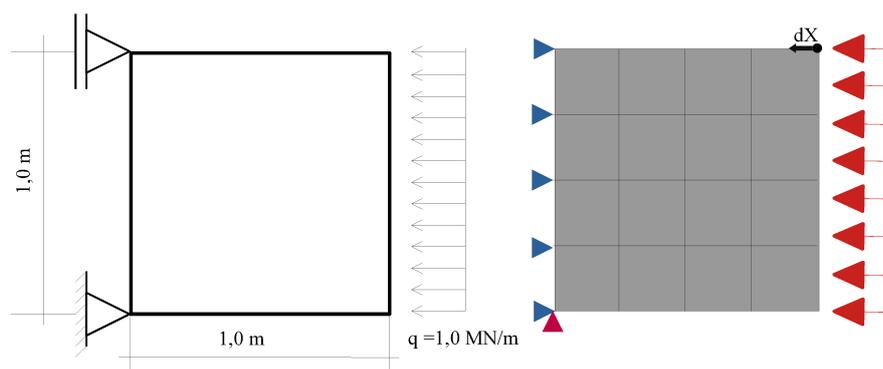


Figura 5.13: Modelo de compressão pura para análise cíclica.

Os parâmetros do material foram os mesmos utilizados no exemplo de tração pura, feita a adaptação dos focos para a lei Popovics-Saenz, já que neste caso a direção comprimida é a direção (1) e a direção tracionada é a direção (2). Assim, os focos desse modelo foram definidos como $\varepsilon_{f1} = 0,0001$, $\sigma_{f1} = 2$ MPa e $\varepsilon_{f2} = -0,0001$, $\sigma_{f2} = -20$ MPa. Para a lei de descarregamento linear, o foco foi estimado como a resistência à tração do concreto ($\varepsilon_f = 0,0001$, $\sigma_f = 2$ MPa). Os referidos parâmetros são apresentados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4: Parâmetros do material: compressão pura com ciclos de carga

Parâmetros da lei de ciclo de carga linear com foco			
ε_f	0,0001	σ_f	2 MPa
Parâmetros da lei de Popovics-Saenz			
β_{ref}	1,8	k_{ref}	0,85
ε_{f1}	0,0001	σ_{f1}	2 MPa
ε_{f2}	-0,002	σ_{f2}	-20 MPa

A Figura 5.14 ilustra as relações tensão-deformação para as variadas propostas de ciclos, dispostos de forma arbitrária ao longo da curva monotônica. Tais resultados podem ser analisados individualmente na Figura 5.15.

Assim como verificado para a tração, ficou comprovada a possibilidade de introduzir ciclos de carregamento para elementos estruturais sujeitos à compressão pura, uma vez que todas as estratégias de descarga e recarga foram representadas adequadamente segundo as curvas tensão-deformação obtidas.

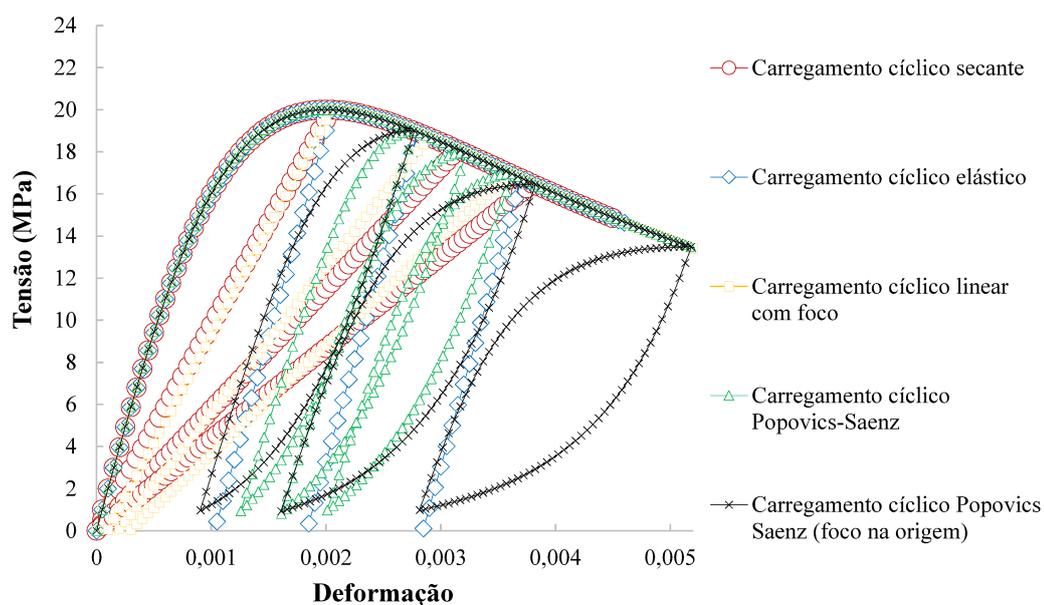


Figura 5.14: Curvas tensão-deformação para compressão pura em estrutura submetida a carregamento cíclico.

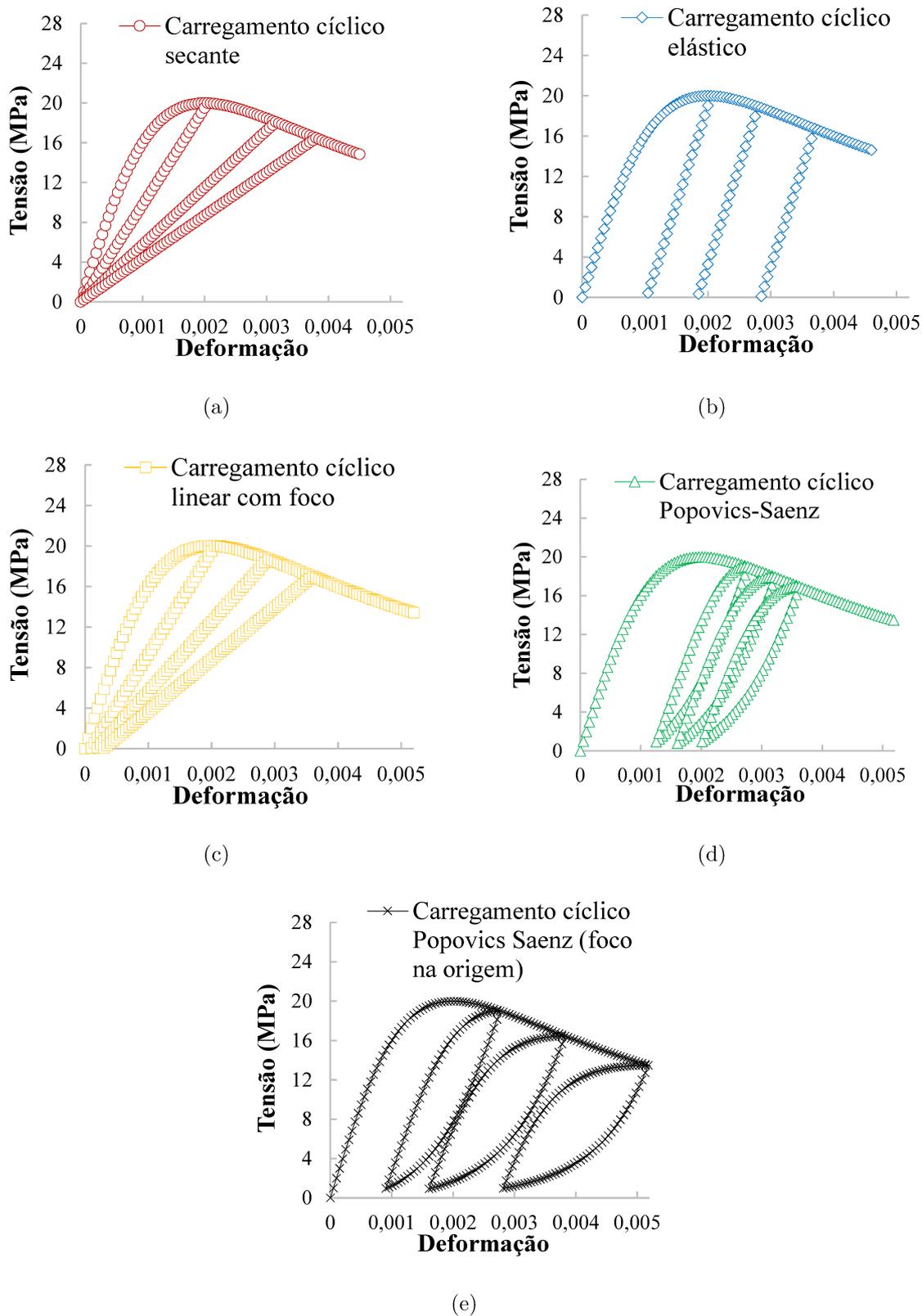


Figura 5.15: Curvas tensão-deformação para compressão para as diferentes estratégias de representação dos ciclos de carga.

5.2.3 Flexão em 3 Pontos com Carregamento Cíclico

Com a intenção de avaliar as estratégias de descarga e recarga para um estado mais complexo de sollicitação, é apresentado um modelo de flexão em 3 pontos, conforme ilustrado na Figura 5.16. Nessa figura é apresentada a geometria da viga em análise, suas condições de contorno, a malha de elementos finitos escolhida e são destacados o nó e a direção de controle. Ressalta-se a presença de uma descontinuidade no centro do vão da viga, que busca representar uma trinca inicial no modelo. A análise não linear foi restrita a 1000 passos e o incremento de deslocamentos adotado foi de $-4,0 \times 10^{-6}$ m. Optou-se pelo controle de ciclos por contagem de passos.

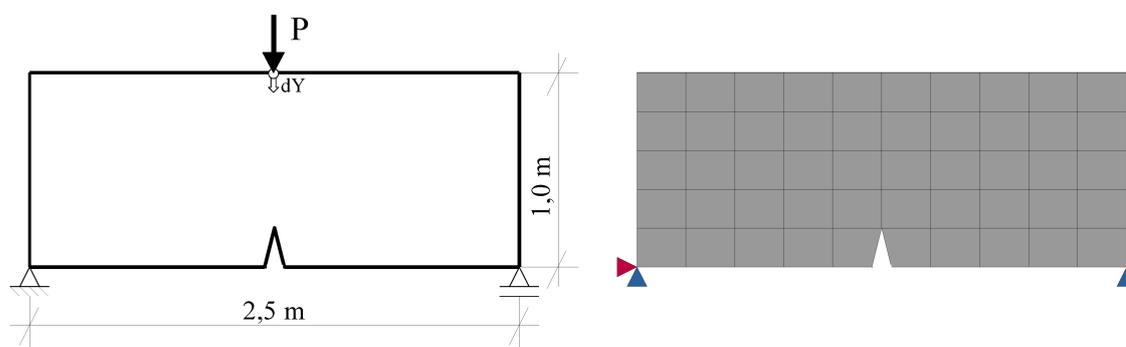


Figura 5.16: Modelo de flexão em 3 pontos para análise cíclica.

Quanto aos parâmetros do material, foram mantidos os valores definidos nas análises de tração e compressão. Para o modelo com descarregamento/re-carregamento linear baseado em ponto focal, foram estabelecidas também às coordenadas desse ponto, nesse caso dadas por $\varepsilon_f = 0,0001$ e $\sigma_f = -0,5$ MPa. Esses valores foram escolhidos para melhor visualização do conceito de ponto focal no traçado das trajetórias de equilíbrio.

Na Figura 5.17 são apresentados as trajetórias de equilíbrio para as simulações numéricas de flexão diante das diferentes propostas de ciclo. As curvas são apresentadas individualmente na Figura 5.18, evidenciando os resultados obtidos para cada uma das estratégias.

Foi constatado que o modelo de flexão apresentou instabilidade mediante a introdução dos ciclos de carregamento. A exceção foi a estratégia secante, que se mostrou robusta para a representação dos ciclos. Acredita-se que os laços de carga definidos a partir do descarregamento e recarregamento secante são mais estáveis pois o tensor de efeito de dano é calculado a partir das variáveis constitutivas correntes e não a partir do módulo secante generalizado, como é feito nas demais hipóteses.

Considerando a lei Popovics-Saenz foram estudados diferentes focos. Contudo, observou-se resultados satisfatórios apenas para o caso em que os focos de ambas as direções foram definidos na origem. Para as demais tentativas, verificou-se instabilidade da estratégia, cuja origem pode estar relacionada a alguma dificuldade de equilíbrio em consequência da estratégia de secante generalizada.

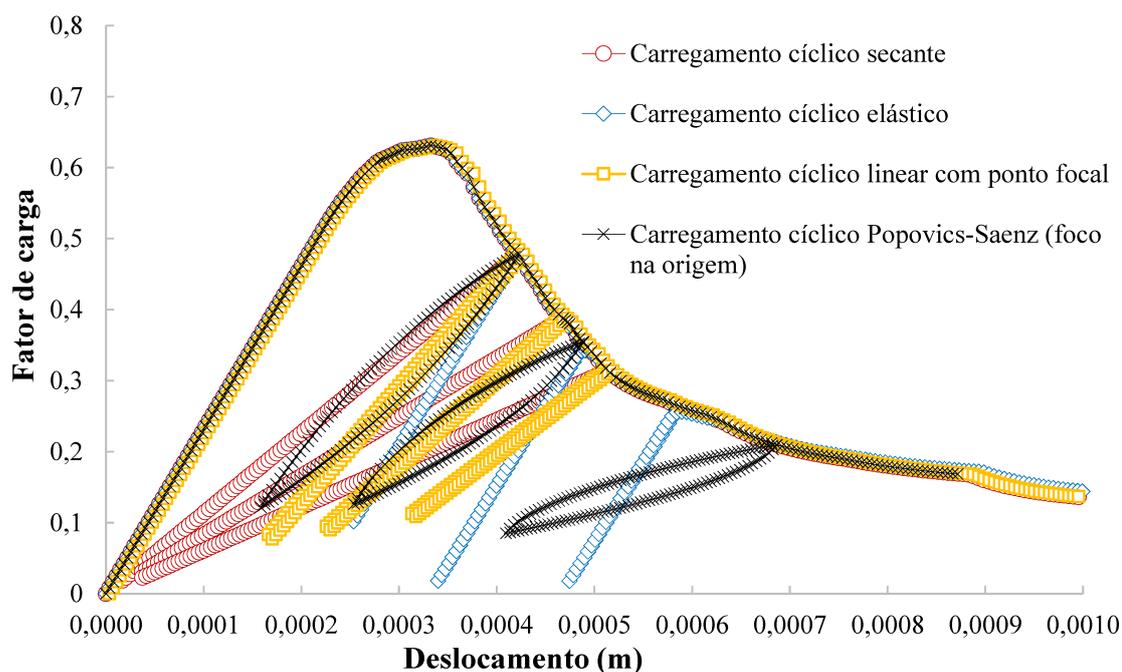


Figura 5.17: Trajetórias de equilíbrio para flexão em 3 pontos em estrutura submetida a carregamento cíclico.

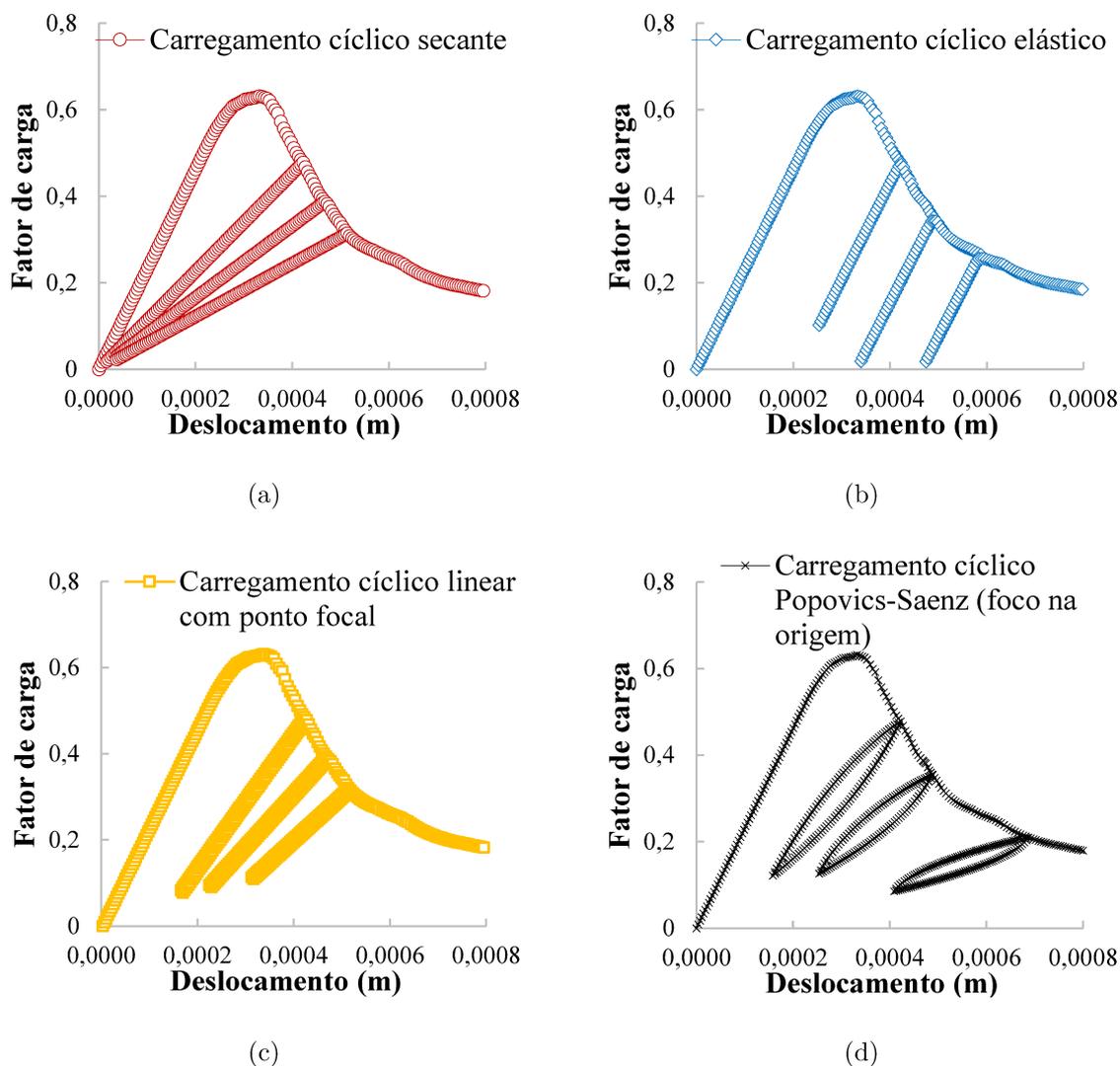


Figura 5.18: Trajetórias de equilíbrio para flexão para as diferentes estratégias de representação dos ciclos de carga.

Por ser um estado de solicitação mais complexo que a tração e a compressão pura, a volubilidade dos ciclos de carga para a flexão pode ser inerente à formulação implementada, uma vez que as referências utilizadas para seu desenvolvimento partiram sempre das condições mais elementares de carregamento e há carência de estudos para carga cíclica em elementos estruturais de concreto simples submetidos à flexão. Assim, é primordial que este trabalho tenha continuidade, para adequação da metodologia desenvolvida para carregamentos diversos.

5.3 Simulações Numéricas Validadas por Resultados Experimentais

Os exemplos anteriores foram desenvolvidos no intuito de apresentar as ferramentas implementadas tanto para os modelos constitutivos baseados em tensores de efeito de dano quanto para a introdução de ciclos de descarga e recarga. Tais simulações elucidaram quanto às novas possibilidades de análise. Contudo, para verificar a eficácia dessas funcionalidades, é preciso confrontar simulações numéricas com respostas experimentais, de forma que a concordância entre esses resultados sirva de indicativo para validação dos recursos desenvolvidos neste estudo. Com esse propósito foram elaboradas análises numéricas de tração, compressão e flexão, as quais foram comparadas com dados experimentais presentes na literatura.

5.3.1 Tração Pura - **Gopalaratnam e Shah (1985)**

Gopalaratnam e Shah (1985) realizaram uma série de ensaios em corpos de prova de concreto simples, com geometria prismática de base retangular, submetidos à tração cíclica. Utilizando amostras de dimensões $305 \times 76 \times 19$ mm, concreto com resistência à tração de $f_t = 3,53$ MPa, deformação limite do regime elástico para a tração igual a $\varepsilon_t = 1,18 \times 10^{-4}$ e energia de fratura de $G_f = 0,0564$ N/mm, os autores obtiveram a curva tensão-deformação experimental.

Para a simulação numérica do ensaio, adotou-se uma malha com 60 elementos finitos quadrilaterais de 4 nós, como ilustrado na Figura **5.19**. Também é mostrado na figura as condições de contorno da simulação e o nó de controle. A análise não linear foi limitada em 2000 passos. O incremento de deslocamento adotado foi de $5,0 \times 10^{-7}$ m e os ciclos foram introduzidos a partir do controle por limite de carga.

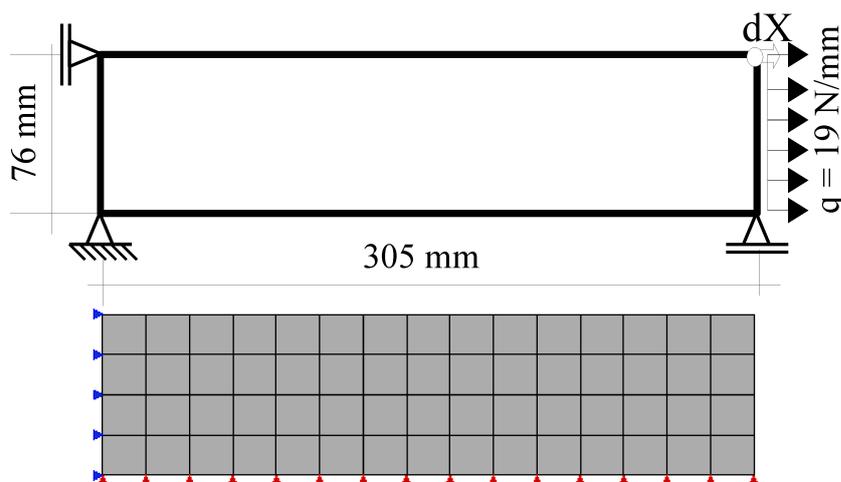


Figura 5.19: Ensaio de tração pura.

Na simulação foram adotadas leis de dano baseadas nas propostas de Boone et al. (1986) para a tração e Carreira e Chu (1985) para compressão. Estimou-se o coeficiente de Poisson como $\nu = 0,18$, a resistência do concreto à compressão como $f_c = 40,4$ MPa e a deformação limite associada à resistência do concreto à compressão de $\varepsilon_c = 0,002$. O coeficiente de retenção ao cisalhamento foi admitido como $\beta_r = 0,05$ e as variáveis de dano foram limitadas ao valor de 0,92.

Para determinar o valor do comprimento característico foi feita uma análise de como esse parâmetro interfere na forma da curva tensão-deformação (Figura 5.20). Sendo 83 mm a medida de deformação utilizada no ensaio experimental, foram comparadas as respostas obtidas para seus múltiplos $h = 41,5$ mm, $h = 83$ mm e $h = 166$ mm. O resultado que melhor representou a curva do ensaio foi o de maior valor de comprimento característico, sendo por isso adotado $h = 166$ mm na parametrização da envoltória monotônica.

Para a hipótese de descarregamento/re carregamento linear definido a partir de um ponto focal, adotou-se como foco a resistência à compressão do concreto. Já para a lei Popovics-Saenz, a direção tracionada (1) teve seu foco na resistência à compressão do concreto, enquanto a direção comprimida (2) teve o foco estabelecido na resistência do concreto à tração. Os coeficientes de ajuste dessa lei foram

definidos, via tentativa e erro, de forma que essa seja equivalente à lei [Carreira e Chu \(1985\)](#) para compressão monotônica, com $\beta_{ref} = 1,8$ e $k_{ref} = 0,85$. A Tabela [5.5](#) apresenta um resumo dos parâmetros do material adotados no modelo.

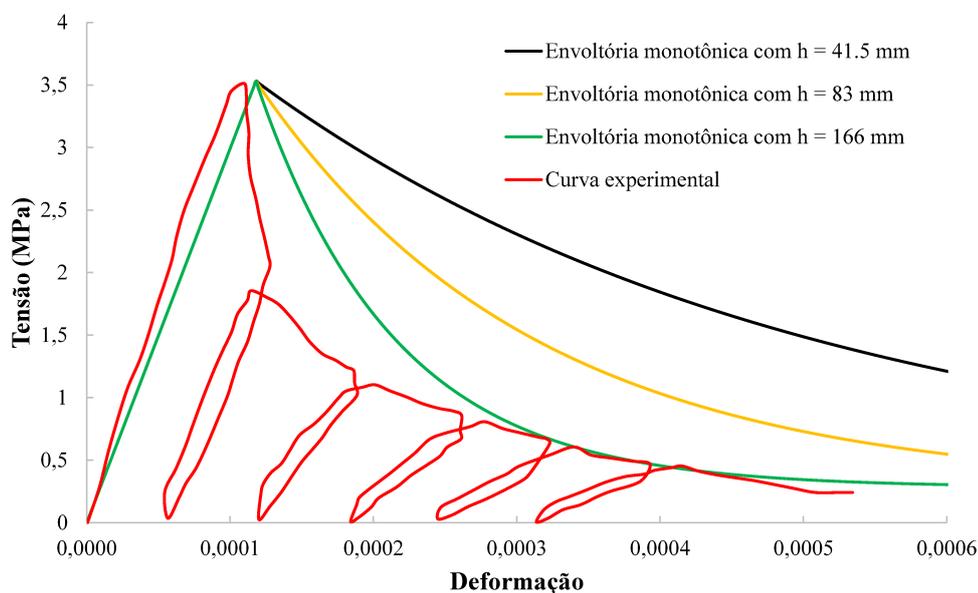


Figura 5.20: Envoltórias monotônicas para diferentes valores de comprimento característico.

Tabela 5.5: Parâmetros do material: tração pura ([Gopalaratnam e Shah \(1985\)](#)).

Parâmetros das leis Carreira e Chu (1985) e Boone et al. (1986)			
f_c	40,4 MPa	f_t	3,53 MPa
ε_c	0,002	E	29915 MPa
ν	0,18	G_f	0,0564 N/mm
h	166 mm	β_r	0,05
Parâmetros da lei de ciclo de carga linear com foco			
ε_f	-0,002	σ_f	-40,4 MPa
Parâmetros da lei de Popovics-Saenz			
β_{ref}	1,8	k_{ref}	0,85
ε_{f1}	-0,002	σ_{f1}	-40,4 MPa
ε_{f2}	0,000118	σ_{f2}	3,53 MPa

A comparação entre os resultados obtidos na simulação com os resultados experimentais de [Gopalaratnam e Shah \(1985\)](#) é mostrada na Figura [5.21](#), em que são ilustradas, simultaneamente, as diferentes estratégias numéricas implementadas, bem como a curva experimental e a envoltória monotônica. Na Figura [5.22](#) são apresentados, em gráfico individuais, os resultados da curva tensão \times deformação obtidos na simulação do ensaio, para todas as hipóteses de descarregamento/rearregamento, acompanhados da curva experimental.

Priorizou-se que os ciclos tivessem início no ponto de descarga da curva experimental para as estratégias de descarregamento/rearregamento secante, linear com foco e para a lei de Popovics. Já no descarregamento elástico, a intenção foi simular as deformações permanentes observadas no experimento, de forma que o ponto de recarga fosse o mais próximo possível do valor dessa deformação residual.

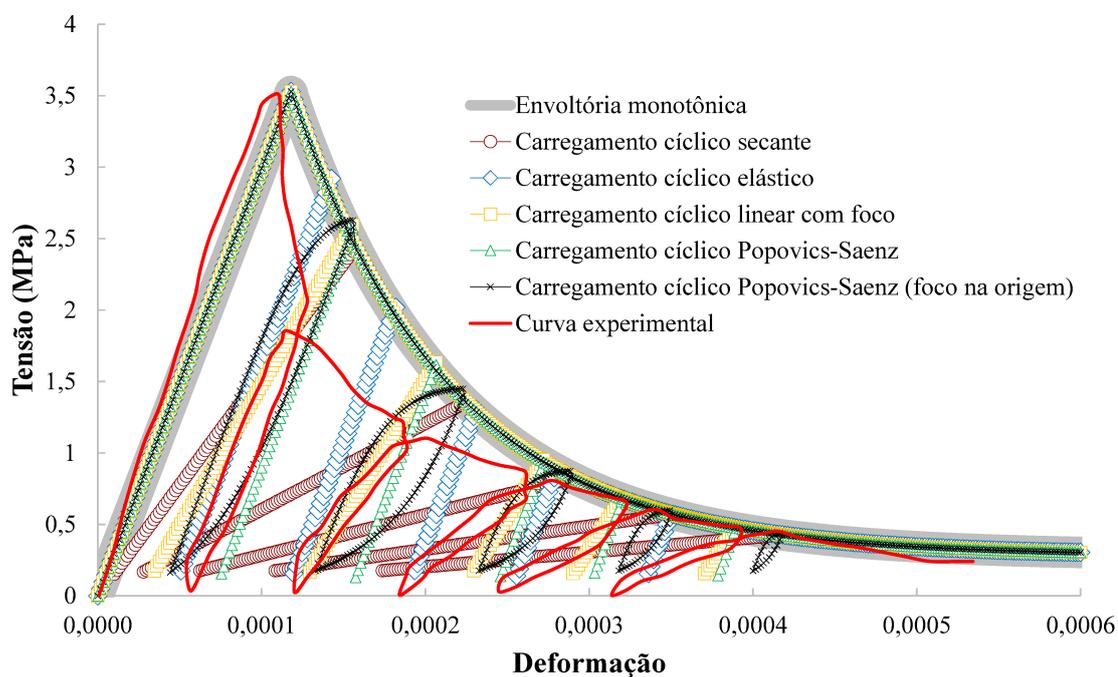


Figura 5.21: Curvas tensão \times deformação para o ensaio de tração pura.

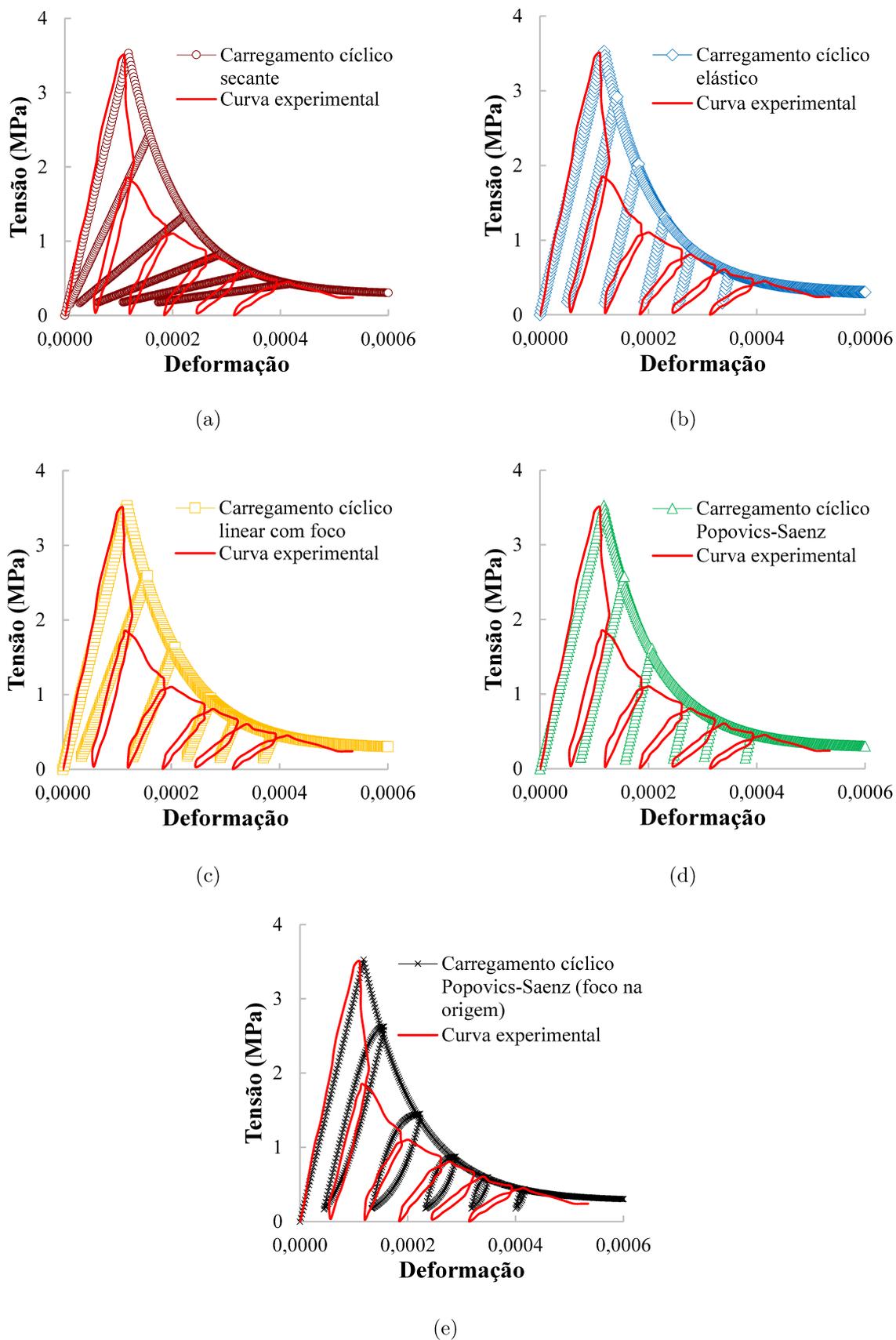


Figura 5.22: Curvas tensão \times deformação para o ensaio de tração para as diferentes estratégias de representação dos ciclos de carga.

As curvas obtidas numericamente foram coerentes com a curva experimental, uma vez que foram capazes de simular os laços de histerese segundo as leis tensão \times deformação implementadas. Todas as estratégias conseguiram reproduzir os cinco ciclos observados no ensaio, permitindo versatilidade na representação dos pontos de descarga e recarga, assim como na forma da trajetória de equilíbrio nos trechos de descarregamento e recarregamento.

5.3.2 Compressão Pura - Karsan e Jirsa (1969)

Para o carregamento de compressão cíclica, a análise numérica partiu dos estudos experimentais de Karsan e Jirsa (1969) (apud Nguyen (2005)). A simulação adotou um modelo simples, com um único elemento finito quadrilateral de 4 nós, cujas geometria e condições de contorno são apresentadas na Figura 5.23, bem como o nó e a direção de controle.

O número de passos das análises foi limitado em 6000. O incremento de deslocamento adotado foi de $-5,0 \times 10^{-5}$ m e a introdução dos ciclos partiu do controle por limite de carga. A tolerância para convergência foi estabelecida, considerando os critérios de carga e de deslocamento, como $1,0 \times 10^{-4}$.

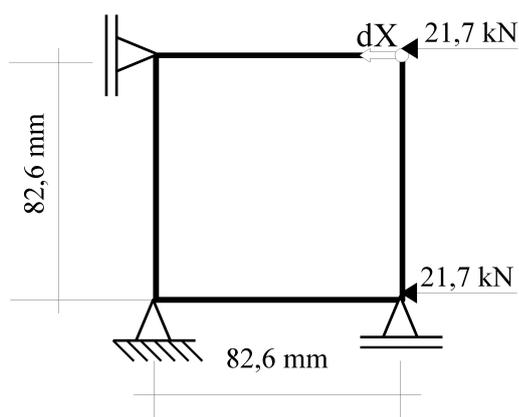


Figura 5.23: Ensaio de compressão pura.

Os parâmetros fornecidos do ensaio foram o coeficiente de Poisson $\nu = 0,18$, o módulo de elasticidade $E = 31000$ MPa, a energia de fratura $G_f = 0,04$ N/mm, a

resistência do concreto à compressão $f_c = 27,6$ MPa e o comprimento característico $h = 82,6$ mm. Os demais parâmetros necessários às leis de tração de [Boone et al. \(1986\)](#) e de compressão de [Carreira e Chu \(1985\)](#) foram estimados, assumindo os seguintes valores: resistência do concreto à tração $f_t = 2,76$ MPa, deformação limite associada à resistência do concreto à compressão $\varepsilon_c = 0,0016$ e fator de retenção ao cisalhamento $\beta_r = 0,05$.

Para a lei de descarregamento/re-carregamento linear com referência em um ponto focal, tomou-se a resistência do concreto à tração como foco. Na lei Popovics-Saenz, o foco definido para a direção comprimida (1) foi a resistência à tração do concreto, enquanto a direção tracionada (2) teve como ponto focal a resistência à compressão do concreto. Os parâmetros de ajuste dessa lei foram definidos de forma que a curva monotônica de compressão concorde com a curva de [Carreira e Chu \(1985\)](#), com $\beta_{ref} = 1,7$ e $k_{ref} = 0,85$. A Tabela [5.6](#) apresenta todos os parâmetros necessários às leis tensão-deformação utilizadas, de forma sintetizada.

Tabela 5.6: Parâmetros do material: compressão pura ([Karsan e Jirsa \(1969\)](#)).

Parâmetros das leis Carreira e Chu (1985) e Boone et al. (1986)			
f_c	27,6 MPa	f_t	2,76 MPa
ε_c	0,0016	E	31700 MPa
ν	0,18	G_f	0,04 N/mm
h	82,6 mm	β_r	0,05
Parâmetros da lei de ciclo de carga linear com foco			
ε_f	0,000087	σ_f	2,76 MPa
Parâmetros da lei de Popovics-Saenz			
β_{ref}	1,7	k_{ref}	0,85
ε_{f1}	0,000087	σ_{f1}	2,76 MPa
ε_{f2}	-0,0016	σ_{f2}	-27,6 MPa

Os resultados das diferentes propostas de ciclos implementadas são ilustrados individualmente na Figura 5.24. A Figura 5.25 apresenta, simultaneamente, as curvas obtidas para as diferentes estratégias de ciclo, acompanhadas pela curva experimental de Karsan e Jirsa (1969) e pela envoltória monotônica.

Observa-se que alguns modelos representaram muito bem o início da descarga, como a estratégia secante e a estratégia linear com foco, enquanto o modelo de descarregamento/rearregamento elástico foi eficiente na representação das deformações permanentes em cada ciclo. Já as abordagens que seguem a lei de Popovics-Saenz mostraram-se mais eficazes na descrição do caminho do ciclo durante a descarga e a recarga. Assim, ter disponível diferentes hipóteses de descarregamento/rearregamento, permite uma maior versatilidade de representação, a partir da qual podem ser definidas prioridades na modelagem numérica.

Ressalta-se que, embora os resultados tenham sido coerentes com o ensaio, observa-se a necessidade de se estabelecer um foco mais adequado para a lei de descarregamento. Por exemplo, no caso da lei linear (Figura 5.24(c)), os pontos de descarga são consistentes com os de ensaio, contudo, as deformações permanentes são bastante diferentes para os ciclos finais. Na lei de Popovics-Saenz (Figuras 5.24(d) 5.24(e)), por sua vez, tem-se os pontos de descarregamento e as deformações permanentes consistentes com o experimento, contudo, a configuração dos laços de histerese não corresponde com precisão à observada no ensaio, especialmente para o foco na origem. Dessa forma, além dos focos adotados neste estudo, que são o ponto de resistência à tração e a origem, outras propostas de ponto focal devem ser avaliadas, a fim de compreender mais profundamente a influência desse parâmetro na representação das trajetórias de equilíbrio.

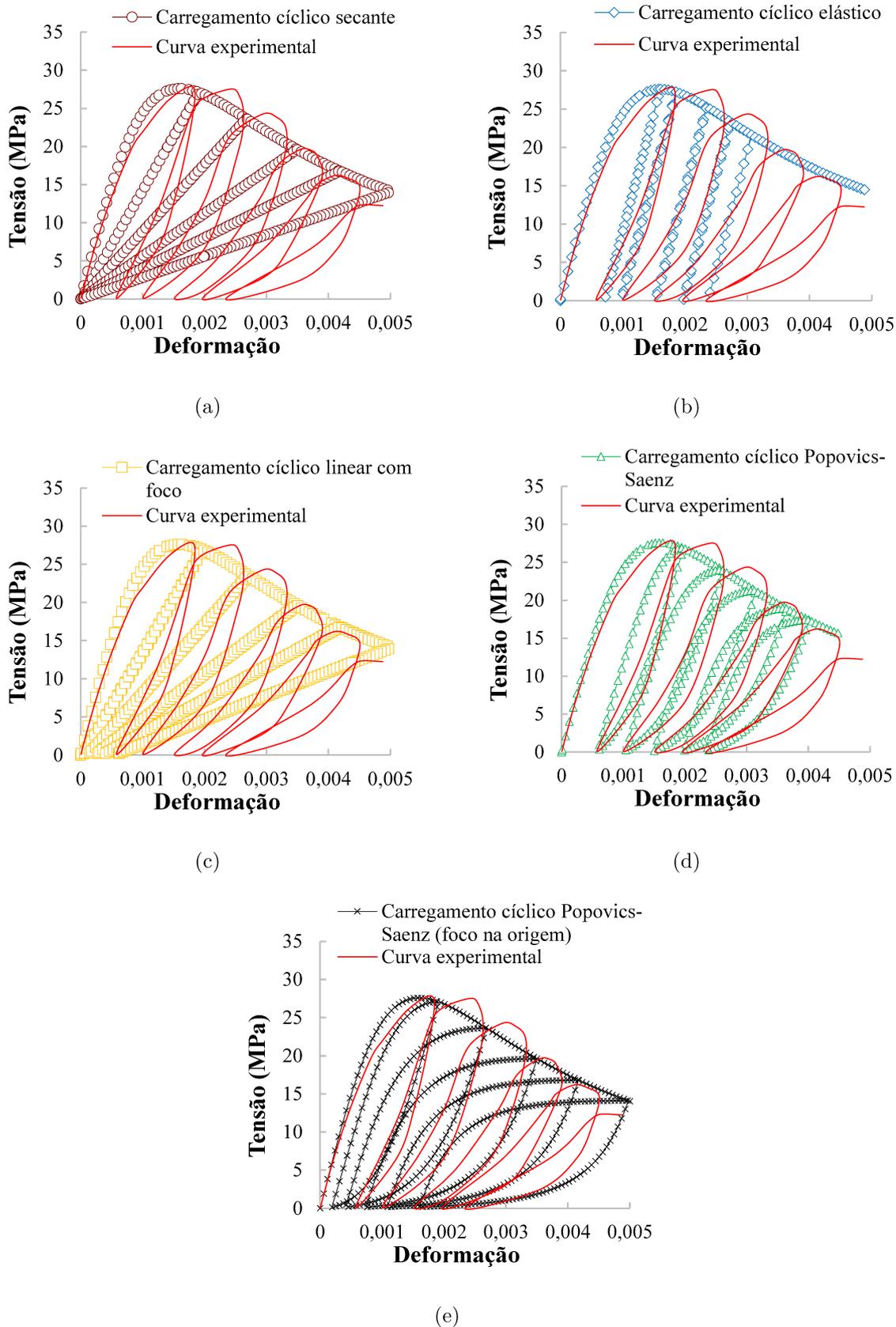


Figura 5.24: Curvas tensão \times deformação para o ensaio de compressão para as diferentes estratégias de representação dos ciclos de carga.

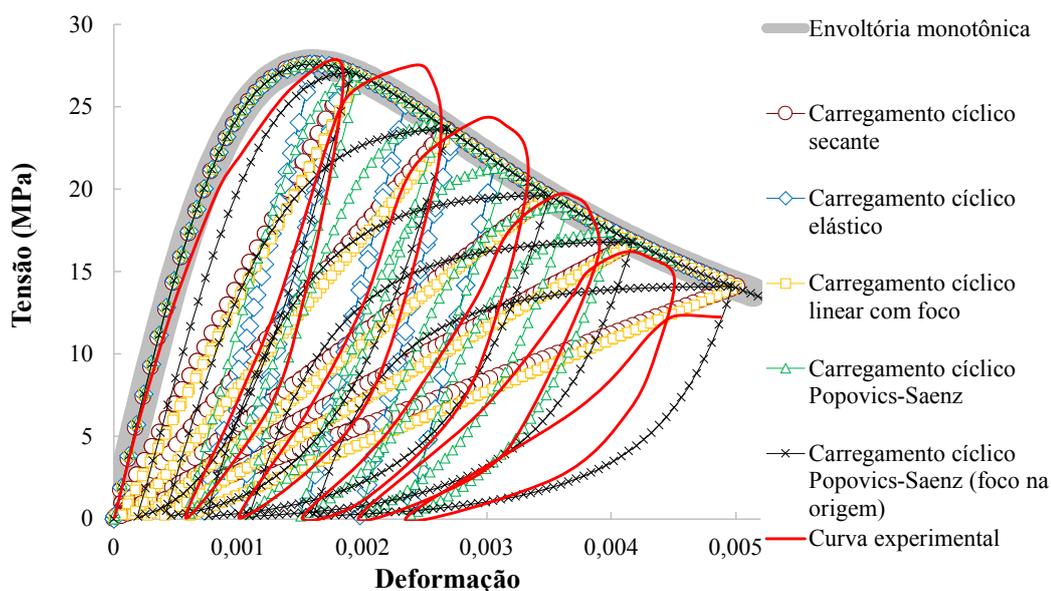


Figura 5.25: Curvas tensão \times deformação para o ensaio de compressão pura.

5.3.3 Flexão em 4 pontos - **Hordijk (1991)**

Considerando o trabalho experimental desenvolvido por **Hordijk (1991)** para uma viga submetida a flexão em 4 pontos em regime de carregamento cíclico, foi efetuada a simulação numérica com um modelo cuja geometria, condições de contorno, nó e direção de controle são apresentados na Figura **5.26**. A carga P representa um carregamento unitário. Beneficiando-se da simetria do modelo, optou-se por modelar apenas metade da viga.

A malha adotada foi discretizada em 18×10 elementos, do tipo quadrilateral de 4 nós (Figura **5.27**). A análise não linear foi limitada a 900 passos e o incremento de deslocamentos assumido como $-2,0 \times 10^{-3}$ mm. Os ciclos foram introduzidos na envoltória monotônica segundo o controle por limite de carga e a tolerância de convergência, por deslocamento e carga, foi de $1,0 \times 10^{-4}$.

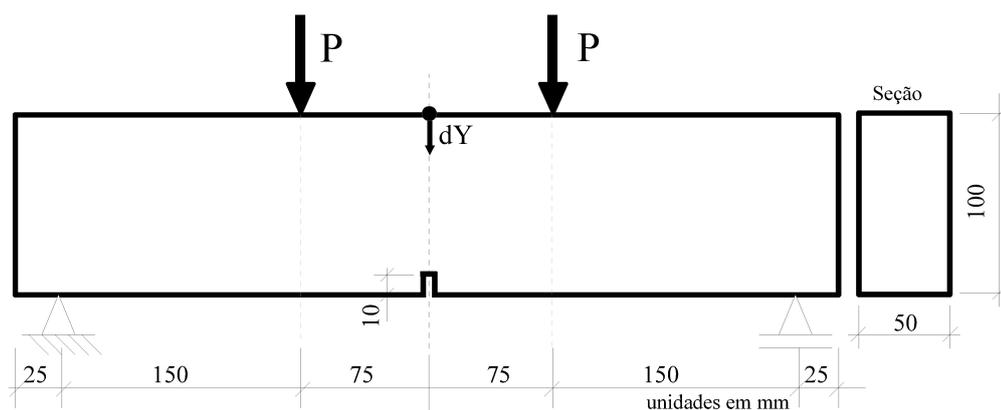


Figura 5.26: Ensaio de flexão em 4 pontos - [Hordijk \(1991\)](#).

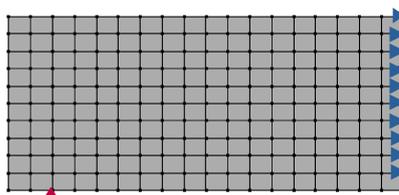


Figura 5.27: Malha adotada na simulação numérica do ensaio de [Hordijk \(1991\)](#).

Os parâmetros do ensaio disponíveis para a análise numérica foram calculados como a média dos valores obtidos por [Hordijk \(1991\)](#) em seus ensaios, sendo a resistência do concreto definida como $f_c = 59,9$ MPa para a compressão e $f_t = 3,375$ MPa para a tração, o módulo de elasticidade de 40485 MPa e energia de fratura dada por $G_f = 0,115$ N/m. Para descrição completa das leis de tração de [Boone et al. \(1986\)](#) e de compressão de [Carreira e Chu \(1985\)](#), estimou-se os demais parâmetros de entrada, cujos valores foram: coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$, deformação limite do concreto associada à resistência à compressão de $\varepsilon_c = 0,002$, comprimento característico $h = 15$ mm, valor considerado adequado para representar todas as fases do meio material e igual a três vezes o diâmetro máximo do agregado adotado no ensaio, fator de retenção ao cisalhamento $\beta_r = 1,0 \times 10^{-4}$ e variáveis de dano limitadas ao valor de 0,92. A Tabela [5.7](#) apresenta os parâmetros do material para as leis tensão-deformação de modo sintetizado.

Tabela 5.7: Parâmetros do material: flexão em 4 pontos (Hordijk (1991)).

Parâmetros das leis		Carreira e Chu (1985)	e	Boone et al. (1986)
f_c	59,9 MPa			f_t 3,375 MPa
ε_c	0,002			E 40485 MPa
ν	0,2			G_f 0,115 N/m
h	15 mm			β_r $1,0 \times 10^{-4}$

Conforme discutido nas análises qualitativas de flexão, elementos estruturais submetidos a esse tipo de esforço responderam de forma instável a introdução de alguns tipos de ciclo em sua trajetória de equilíbrio. Por esse motivo, optou-se apenas pela formulação secante nas solicitações dessa natureza.

A resposta encontrada na simulação é apresentada na Figura 5.28, juntamente da curva experimental e da envoltória monotônica. A trajetória de equilíbrio da análise numérica foi obtida para o ponto de aplicação da carga, em concordância com a medição de deslocamentos do ensaio.

O resultado numérico foi condizente com a curva experimental, levando em consideração as limitações da representação dos laços de histerese a partir da abordagem secante. Os pontos de descarregamento foram muito bem descritos, contudo, a hipótese secante não representou adequadamente os ciclos finais, tendo em vista que nessa formulação os ciclos são sempre direcionados para a origem e as deformações permanentes não podem ser reproduzidas. As demais propostas de descarregamento/rearregamento não foram capazes de descrever os laços de carga, o que pode estar associado com uma limitação relativa ao cálculo das tensões pelo método da secante generalizada.

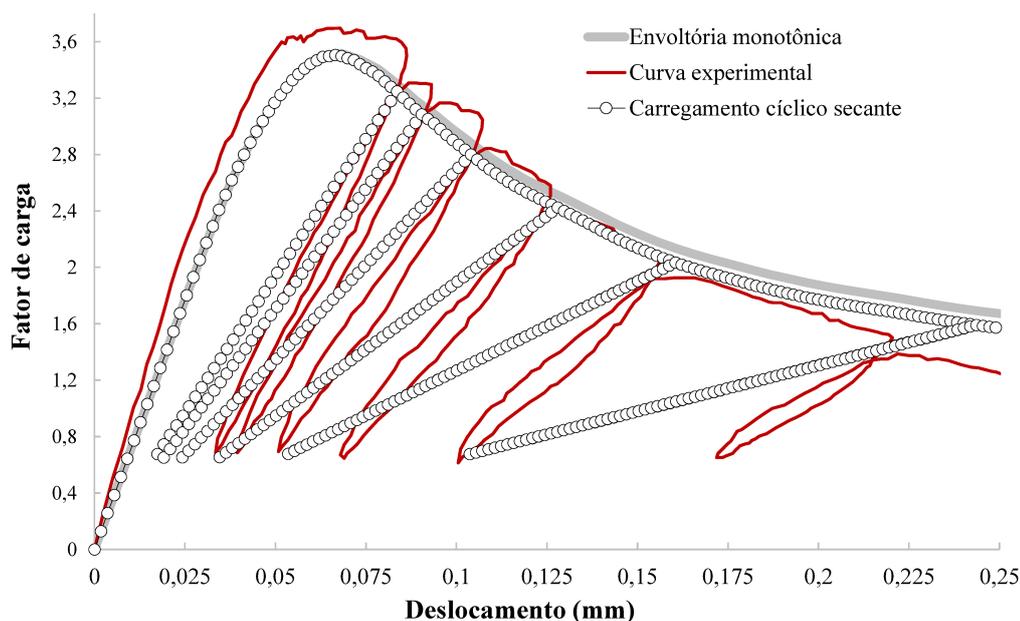


Figura 5.28: Trajetória de equilíbrio para o ensaio de flexão em 4 pontos - Hordijk (1991).

5.3.4 Flexão em 3 pontos - Perdikaris e Romeo (1995)

Os trabalhos de Stamoulis e Giannakopoulos (2008) e Marzec e Tejchman (2012) apresentam informações sobre o ensaio de flexão em 3 pontos com carregamento cíclico originalmente realizado por Perdikaris e Romeo (1995). Tomando a viga com as menores dimensões ensaiada por esses autores, cuja geometria, condições de contorno, nó e direção de controle são apresentados na Figura 5.29, é possível comparar a curva experimental com a curva oriunda das simulações numéricas.

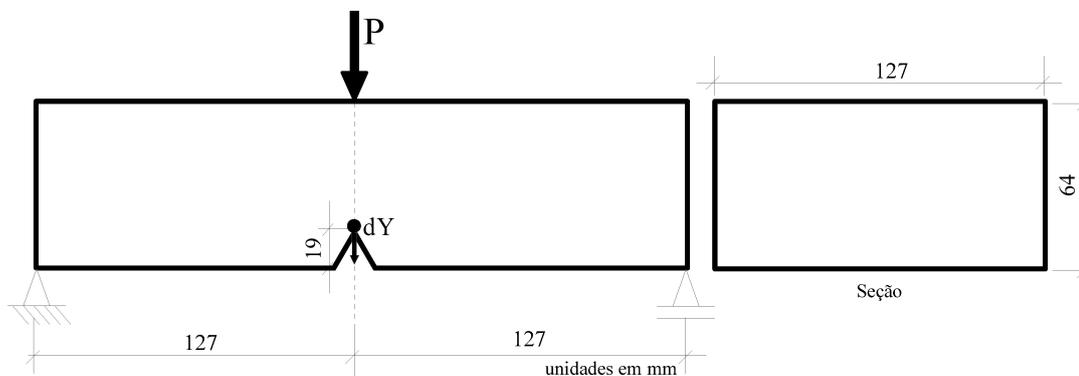


Figura 5.29: Ensaio de flexão em 3 pontos - Perdikaris e Romeo (1995).

Novamente, com o objetivo de poupar recursos computacionais e tirando proveito da simetria do modelo, optou-se por modelar apenas metade da viga. Tendo em vista essa simplificação, o valor unitário de P foi reduzido à metade, sendo aplicado um carregamento de 0,5 N. O modelo estrutural foi discretizado em uma malha de 20×10 elementos quadriláteros de 4 nós (Figura 5.30).

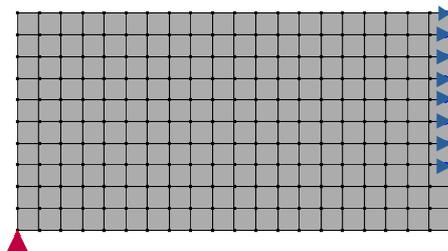


Figura 5.30: Malha adotada na simulação numérica do ensaio de [Perdikaris e Romeo \(1995\)](#).

A análise não linear ficou restringida a 2900 passo. O incremento de deslocamentos escolhido foi de $-3,0 \times 10^{-4}$ mm e a tolerância de convergência por força e deslocamento foi de $1,0 \times 10^{-4}$.

Os parâmetros do material foram definidos de acordo com os dados informados por [Stamoulis e Giannakopoulos \(2008\)](#) e [Marzec e Tejchman \(2012\)](#). Esses autores apresentaram intervalos de valores para cada uma das variáveis obtidas experimentalmente, a partir dos quais foram estabelecidas a resistência do concreto à compressão $f_c = 63,4$ MPa, a resistência do concreto à tração $f_t = 4,77$ MPa, o módulo de elasticidade longitudinal $E = 45600$ MPa, o coeficiente de Poisson de $\nu = 0,2$ e energia de fratura de $G_f = 0,0451$ MN/mm. O comprimento característico adotado foi de $h = 24$ mm, correspondendo a quatro vezes o diâmetro máximo do agregado graúdo.

Os demais parâmetros necessários para a descrição completa das curvas tensão-deformação de [Boone et al. \(1986\)](#) e [Carreira e Chu \(1986\)](#) foram estimados de forma a concordar com a curva experimental, chegando aos seguintes valores: deformação limite associada à resistência do concreto à compressão de $\varepsilon_c = 0,0015$ e fator de

retenção ao cisalhamento de $\beta_r = 0,00$. Todos os parâmetros adotados no modelo para caracterização das curvas tensão-deformação são listados na Tabela 5.8.

Tabela 5.8: Parâmetros do material: flexão em 3 pontos (Perdikaris e Romeo (1995)).

Parâmetros das leis Carreira e Chu (1985) e Boone et al. (1986).			
f_c	63,4 MPa	f_t	4,77 MPa
ε_c	0,0015	E	45600 MPa
ν	0,2	G_f	0,0451 MN/mm
h	24 mm	β_r	0,0

Assim como a simulação numérica realizada para representar o ensaio de flexão em 4 pontos de Hordijk (1991), esse ensaio foi validado apenas para a estratégia secante, em virtude da maior estabilidade desse tipo de ciclo diante da solicitação de flexão. O resultado numérico, assim como a curva experimental e a envoltória monotônica são ilustrados na Figura 5.31.

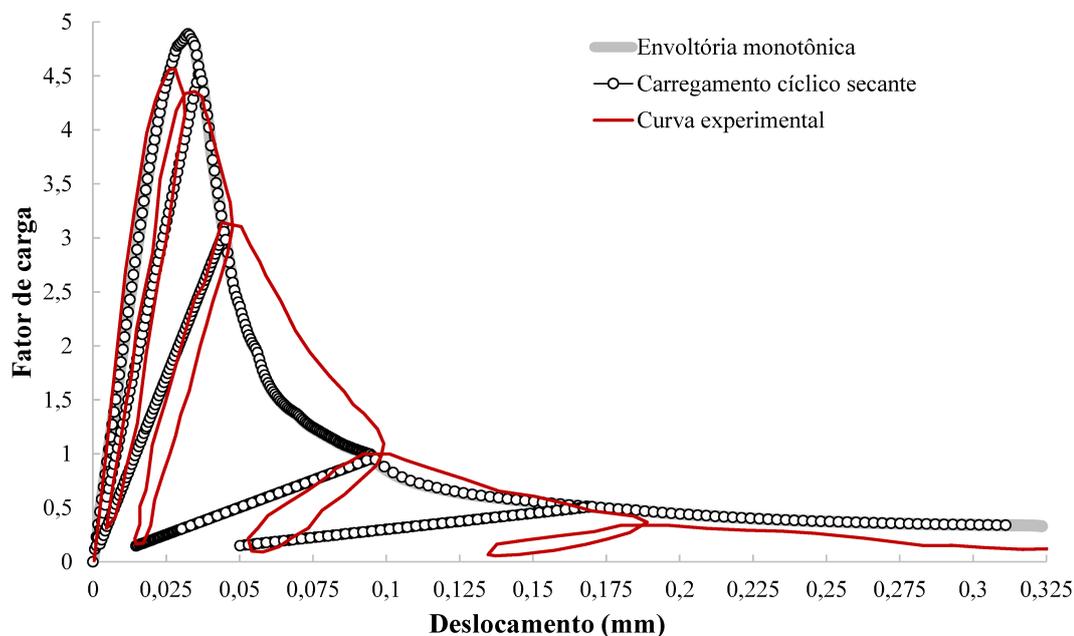


Figura 5.31: Trajetória de equilíbrio para o ensaio de flexão em 3 pontos - Perdikaris e Romeo (1995).

Mais uma vez pode-se dizer que a resposta computacional foi coerente com o resultado experimental, considerando as características intrínsecas ao descarregamento/re carregamento secante. Os pontos de descarga foram bem representados nos três primeiros ciclos, contudo, o último ciclo da análise apresentou uma decalagem significativa do ciclo experimental. Essa discrepância deve-se à região da trajetória de equilíbrio em que esse laço de carga está situado, que é praticamente horizontal, com fator de carga aproximadamente constante com o acréscimo de deslocamento. Sabendo que o procedimento de monitoração de ciclos adotado foi o de limite de carga, esse encontrou dificuldades em definir o ponto de descarga em um patamar de carga pouco variável. Uma possível solução para contornar esse inconveniente seria utilizar o método de monitoração de ciclos por contagem de passos.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho, apresentou-se uma alternativa para a descrição de modelos constitutivos ortotrópicos de fissuração distribuída por meio dos tensores de efeito de dano. Tal abordagem foi considerada relevante tendo em vista a possibilidade de utilizar diferentes hipóteses de degradação para um mesmo modelo constitutivo, o que pode proporcionar uma melhor representação de um dado material.

Em busca de ampliar ainda mais a generalidade desses modelos, foram implementadas leis tensão-deformação capazes de caracterizar completamente o comportamento de um material, incluindo, além da envoltória monotônica, leis de descarga e recarga.

A fim de validar a implementação desenvolvida neste estudo, foram realizadas diversas simulações. A princípio, com o objetivo de avaliar qualitativamente a eficácia do modelo de dano tensorial implementado, foram desenvolvidos exemplos com os tensores de efeito de dano, tomando como referência os resultados obtidos segundo o arcabouço teórico desenvolvido por [Penna \(2011\)](#). Com o mesmo intuito, foram feitas análises cíclicas para envoltórias monotônicas previamente estabelecidas e ciclos arbitrários. Esses testes foram essenciais para compreender as características e as limitações dos recursos computacionais desenvolvidos.

Por fim, foram realizadas análises com os modelos constitutivos elaborados neste

trabalho e inclusão de ciclos. Dessa vez, contudo, os resultados foram confrontados com respostas experimentais presentes na literatura. Esses exemplos foram essenciais para a validação deste estudo, tendo em vista que permite a comparação de dados numéricos com resultados laboratoriais, indicando se os modelos desenvolvidos realmente são capazes de reproduzir, ainda que de forma simplificada, o comportamento estrutural real e a resposta do material.

As seções a seguir apresentam breves discussões a respeito dos resultados obtidos para as diferentes análises e das expansões realizadas no núcleo numérico do INSANE, bem como levanta possíveis estudos futuros que poderão complementar e enriquecer este trabalho, dando continuidade à linha de pesquisa de Mecânica Computacional do Concreto.

6.1 Sobre os Tensores de Efeito de Dano

As simulações numéricas realizadas a partir dos tensores de efeito de dano, conforme descrito no Capítulo 5, apresentaram resultados ótimos para a tração pura, entretanto, o modelo de Darwin e Pecknold (1977) mostrou-se instável diante do refinamento da malha, o que está relacionado com sua formulação matemática e a hipótese de simetrização do tensor de rigidez secante local.

Para a compressão, o único modelo capaz de representar adequadamente a trajetória de equilíbrio foi o modelo baseado na proposta de Pitangueira (1998). A compressão pura pode ser uma solicitação de difícil modelagem considerando modelos de fissuração distribuída, já que a direção de aplicação da carga é perpendicular a direção de ruptura da estrutura. Mais estudos devem ser realizados a fim de compreender as limitações dos modelos baseados em tensores de efeito de dano associados à compressão, avaliando também as respostas dessas hipóteses para carregamentos combinados como, por exemplo, carregamentos biaxiais e triaxiais.

Em relação à flexão, os modelos apresentaram trajetórias de equilíbrio estáveis e

consistentes, ressaltando o efeito de enrijecimento para a análise utilizando o tensor de efeito de dano de [Darwin e Pecknold \(1977\)](#), que foi atribuído à hipótese de cálculo do módulo de elasticidade transversal do material.

Por fim, no exemplo referente à compressão diametral, os resultados apresentaram concordância com a referência, ainda que em alguns modelos o pico da trajetória de equilíbrio tenha sido inferior ao da referência. Acredita-se que essa diferença tenha como origem as hipóteses iniciais dos modelos de degradação, que apresentam particularidades entre si.

Sugere-se que essa pesquisa tenha continuidade com um maior aprofundamento das análises para carregamento de compressão pura e análise da estabilidade numérica dos modelos desenvolvidos. Deve ser evidenciado que o método de implementação utilizado favorece a generalização e, portanto, o software está preparado para receber novas formulações de tensores de efeito de dano.

6.2 Sobre a Análise Cíclica

Quanto aos ciclos de carga, as análises qualitativas demonstraram que os procedimentos para controle de ciclos implementados atendem ao objetivo proposto, simulando ciclos com diferentes características, para tração, compressão e flexão. A variedade de leis implementadas permite uma melhor representação dos laços de histerese, de forma que, em função da modelagem pretendida, se tenha uma hipótese apropriada.

Os exemplos validados por curvas experimentais, por sua vez, serviram para mostrar a eficácia das estratégias desenvolvidas para análise cíclica em modelos submetidos a tração e a compressão direta. As simulações de vigas submetidas a flexão, contudo, ficaram restritas à representação secante dos ciclos. Como não é necessário trabalhar com um módulo secante generalizado e variáveis de dano estritamente

matemáticas, o descarregamento/re carregamento secante do material foi mais estável, comportamento que pode ser atribuído ao fato dessa hipótese considerar o valor corrente das variáveis constitutivas. As demais abordagens partem de desdobramentos matemáticos que mostraram-se eficientes para a compressão e a tração, mas insuficientes para representar ciclos em casos de flexão.

A fim de compreender melhor o comportamento dos ciclos de carga para flexão, buscou-se na literatura diferentes ensaios ou descrição desse fenômeno e o que se observou foi a carência de experimentos com cargas cíclicas para esse tipo de solicitação. Até mesmo resultados numéricos são escassos para representação de flexão cíclica e, quando apresentados, partem de modelos de concreto armado. Diante desse cenário, entende-se a necessidade de estender as ferramentas disponíveis para representação das armaduras, a fim de avaliar mais detalhadamente as limitações das estratégias desenvolvidas.

Por fim, considera-se que o propósito de viabilizar análises cíclicas foi alcançado, ainda que com limitações, e que este estudo serviu como um ponto inicial para o desenvolvimento de artifícios capazes de simular ciclos de histerese no ambiente INSANE.

6.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

A fim de dar continuidade à linha de pesquisa, tendo como base este trabalho, sugerem-se algumas propostas para estudos futuros:

1. Implementar outras hipóteses de tensores de efeito de dano, estudando sua estabilidade numérica e a possibilidade de serem utilizados com modelos constitutivos diversos e diferentes leis de comportamento dos materiais;
2. Averiguar o fenômeno de instabilidade numérica para os modelos constitutivos baseados em tensores de efeito de dano e como é possível tratá-lo;

3. Implementar novas leis tensão-deformação, incluindo trechos de descarga e recarga. Analisar a viabilidade de mesclar leis distintas para os processos de descarregamento e recarregamento, flexibilizando ainda mais a forma de representação dos ciclos;
4. Avaliar a possibilidade de implementar leis tensão-deformação com foco variável, a fim de representar de maneira fidedigna os laços de histerese. Para tanto, é necessário aprofundar o entendimento do conceito de foco;
5. Estender a formulação para permitir a introdução de ciclos em uma envoltória monotônica para elementos de barra;
6. Expandir a análise cíclica para o concreto armado, tendo em vista que apenas o concreto simples foi objeto deste trabalho. Assim, deve ser desenvolvida uma formulação adequada para representar o comportamento da armadura;
7. Realizar um estudo para que a análise cíclica seja implementada juntamente com modelos baseados na decomposição aditiva do tensor de deformações, tendo em vista a separação da parcela de deformação permanente da parcela de deformação recuperável e o cálculo de tensões via algoritmo de retorno;
8. Estudar formas de viabilizar as estratégias de ciclo que não atuaram conforme a expectativa para os modelos de flexão, bem como analisar possíveis limitações da implementação desenvolvida no presente trabalho;
9. Ampliar a análise não linear cíclica, compreendendo casos com inversão de carregamento.

Referências Bibliográficas

- Badreddine, H., Khemais, S. e Nguyen, T. D., 2015. ‘Damage anisotropy and its effect on the plastic anisotropy evolution under finite strains’. *St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*, vol. 3, pp. 271–283.
- Bahn, B. Y., 1994. Behavior of concrete and slender reinforced concrete columns under cyclic axial compression with bidirectional eccentricities. Tese de Doutorado, Faculty of New Jersey Institute of Technology, New Jersey, USA.
- Bogenfeld, R. e Kreikemeier, J., 2017. ‘A tensorial based progressive damage model for fiber reinforced polymers’. *Composite Structures*, vol. 168, pp. 608–618.
- Bono, G. F. F., 2008. Modelos Constitutivos para Análise Tridimensional de Estruturas de Concreto Armado através do Método dos Elementos Finitos. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil.
- Boone, T. e Ingraffea, A. R., 1987. ‘Simulation of the fracture process at rock interfaces’. *In: Proceedings of the fourth international conference in Numerical Methods in Fracture Mechanics*, pp. 519–531.
- Boone, T., Wawrzynek, P. A. e Ingraffea, A. R., 1986. ‘Simulation of the fracture process in rock with application to hydrofracturing’. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*, vol. 23 (3), pp. 255–265.
- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 1994. ‘A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, pp. 2835–2865.
- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 2001a. ‘On the formulation of anisotropic elastic

- degradation. i. theory based on pseudo-logarithmic damage tensor rate'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 491–518.
- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 2001b. 'On the formulation of anisotropic elastic degradation. ii. generalized pseudo-rankine model for tensile damage'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 519–546.
- Carreira, D. e Chu, K. H., 1985. 'Stress-strain relationship for plain concrete in compression'. *American Concrete Institute Journal*, vol. 82(6), pp. 797–804.
- Carreira, D. e Chu, K. H., 1986. 'Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension'. *American Concrete Institute Journal*, vol. 83(1), pp. 21–28.
- Chow, C. L. e Wang, J., 1987. 'An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics'. *International Journal of Fracture*, vol. 33, pp. 3–16.
- Cordebois, J. e Sidoroff, F., 1982. 'Endommagement anisotrope en élasticité at plasticité'. *J. Mécanique Théorique et Appliquée Numéro Spécial*, .
- Darwin, D. e Pecknold, D. A., 1977. 'Nonlinear biaxial stress-strains law for concrete'. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 103, pp. 229–241.
- de Vree, J. H., Brekelmans, W. A. M. e van Gils, M. A. J., 1995. 'Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics.'. *Computers e Structures* 55 (4), pp. 581–588.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, M. T., 2006. Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não linear com modelos reticulados de seções transversais compostas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S., 2004. Métodos de controle de deformações para análise não linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Gopalaratnam, V. e Shah, S., 1985. ‘Softening response of plain concret in direct tension’. *ACI Journal*, vol. 82, pp. 310–323.
- Hordijk, D. A., 1991. Local approach to fatigue of concrete. Tese de Doutorado, Delft University Technology.
- Kachanov, L. M., 1958. ‘Time of the rupture process of non-linear solid mechanics’. *Otd. Tech. Nauk.*, vol. 8, pp. 28–31.
- Kachanov, L. M., 1986. *Introduction to continuum damage mechanics*. Springer, Brookline.
- Karsan, I. D. e Jirsa, J. O., 1969. ‘Behavior of concrete under compressive loadings’. *ASCE Journal of Structural Engineering*, vol. 95(12), pp. 310–323.
- Korsal, H. O., Turgay, T., Karakoç, C. e Ayçenk, S., 2011. ‘Modeling aspects concerning the axial behavior of rc columns’. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, vol. 72, pp. 175–182.
- Krajcinovic, D. e Fanella, D., 1986. ‘A micromechanical damage model for concrete’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 25, pp. 585–596.
- Kwon, M., 2000. Three dimensional finite element analysis for reinforced concrete members. Tese de Doutorado, University of Colorado, Boulder, USA.
- Lee, Y. H. e Willam, K., 1997. ‘Mechanical properties of concrete in uniaxial compression’. *ACI Materials Journal*, vol. 94(6), pp. 457–471.
- Lee, Y.-H., Willam, K. e Kang, H.-D., 1995. ‘Experimental observations of concrete behavior under uniaxial compression’. *In: Proceedings FRAMCOS-2*, pp. 397–414.
- Lemaitre, J. e Chaboche, J. L., 1978. ‘Aspects phénoménologiques de la rupture par endommagement’. *Journal de Mécanique Appliquée*, vol. 2, pp. 317–365.
- Lemaitre, J. e Chaboche, J. L., 1990. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Lemaitre, J. e Desmorat, R., 2005. *Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures*. Springer, Cachan.

- Luccioni, B. M., 1993. Formulaci3n de um modelo constitutivo para materiales ortotropos. Tese de Doutorado, Universidad Nacional de Tucum3n, San Miguel de Tucum3n, Argentina.
- Marzec, I. e Tejchman, J., 2012. ‘Enhanced coupled elasto-plastic-damage models to describe concrete behaviour in cyclic laboratory tests: comparison and improvement’. *Archives of Mechanics*, vol. 64(3), pp. 227–259.
- Mazars, J. e Pijaudier-Cabot, G., 1989. ‘Continuum damage theory applications to concrete’. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, vol. 115, pp. 345–365.
- Nguyen, G. D., 2005. A Thermodynamic Approach to Constitutive Modelling of Concrete using Damage Mechanics and Plasticity Theory. Tese de Doutorado, University of Oxford, Oxford, UK.
- Oliveira, T. S., 2018. An3lise de problemas bidimensionais pelo m3todo dos elementos finitos generalizados est3vel (MEFGE). Disserta3n de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Penna, S. S., 2011. Formula3n Multipotencial para Modelos de Degrada3n El3stica - Unifica3n Te3rica, Proposta de Novo Modelo, Implementa3n Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Perdikaris, P. C. e Romeo, A., 1995. ‘Size effect on fracture energy of concrete and stability issues in three-point bending fracture toughness testing’. *ACI Mater*, vol. 92, pp. 483–496.
- Pitangueira, R. L. S., 1998. Mec3nica de Estruturas de Concreto com Inclus3n de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade. Tese de Doutorado, PUC - Pontif3cia Universidade Cat3lica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Pituba, J. J. C., 1998. Estudo e aplica3n de modelos constitutivos para concreto fundamentados na mec3nica do dano cont3nuo. Disserta3n de Mestrado, Universidade de S3o Carlos, S3o Carlos, SP, Brasil.
- Popovics, S. A., 1973. ‘A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete.’. *Cement and Concrete Research*, vol. 3(5), pp. 583–599.

- Rots, J. G., 1988. Computational modeling of concrete fracture. Tese de Doutorado, Delft University of Technology, Delft, Holanda.
- Semenov, A. S., 2017. ‘Symmetrization of the effective stress tensor for anisotropic damaged continua’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 63, pp. 11–31.
- Sinha, B. P., Gerstle, K. H. e Tulin, L. G., 1964. ‘Stress-strain relations for concrete under cyclic loading’. *ACI Structural Journal*, vol. 61, pp. 195–211.
- Souza Neto, E. A., Perić, D. e Owen, D. R. J., 2008. *Computational methods for plasticity*. Wiley, United Kingdom.
- Stamoulis, K. e Giannakopoulos, A. E., 2008. ‘Size effect on strength, toughness and fatigue crack growth of gradient elastic solids’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, pp. 4921–4935.
- Voyiadjis, G. Z. e Park, T., 1997. ‘Anisotropic damage effect tensor for the symmetrization of the effective stress tensor’. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 64, pp. 106–110.
- Voyiadjis, G. Z., Taqieddin, Z. N. e Kattan, P. I., 2009. ‘Theoretical formulation for a coupled elastic-plastic anisotropic damage model for concrete using the strain energy equivalence concept’. *International Journal of Damage Mechanics*, vol. 18, pp. 603–638.
- Yang, Y. B. e Shieh, M. S., 1990. ‘Solution method for nonlinear problems with multiple critical points’. *AIAA Journal*, vol. 28(12), pp. 2110–2116.
- Yankelevsky, D., 1989. ‘Uniaxial behavior of concrete in cyclic tension’. *Journal of Structural Engineering*, vol. 115, pp. 166–182.
- Zhang, P., Ren, Q. e Lei, D., 2018. ‘Hysteretic model for concrete under cyclic tension and tension-compression reversals’. *Engineering Structures*, vol. 163, pp. 388–395.

Apêndice A

Curva Tensão-Deformação de Popovics-Saenz para Carregamento Cíclico

A consideração de um carregamento cíclico, segundo Bono (2008), pode ser feita a partir da curva monotônica de Popovics-Saenz (equação A.1), considerando algumas modificações nas coordenadas de origem e de pico, a fim de representar os processos de descarga e recarga.

$$\sigma = f_c \frac{K \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_c} \right)}{1 + A \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_c} \right) + B \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_c} \right)^2 + C \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_c} \right)^3 + D \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_c} \right)^R}, \quad (\text{A.1})$$

em que:

K é dado por $E^0 \left(\frac{\varepsilon_c}{f_c} \right)$;

R é obtido por $\frac{K}{(K-1)}$;

f_c representa a resistência do concreto (tensão de pico);

ε_u é a deformação corrente;

ε_c é a deformação específica equivalente à f_c (deformação de pico);

e A , B , C e D são variáveis cujos valores dependem da curva estar no ramo ascendente ou descendente.

Ramo ascendente:

$$\left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_c} \right) \leq 1 : A = B = C = 0; D = (K - 1);$$

Ramo descendente:

$$\left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_c} \right) > 1 : A = C + K - 2; B = 1 - 2C;$$

$$C = \frac{K}{(\beta_{ref} - 1)^2} \left(\frac{1}{k_{ref}} - 1 \right) - \frac{1}{\beta_{ref}}; D = 0.$$

Em que β_{ref} e k_{ref} são parâmetros de ajuste da curva diretamente associados a um ponto de controle do ramo descendente da curva tensão-deformação monotônica.

As curvas de descarga e recarga desse modelo nada mais são que adaptações da curva monotônica. Para o processo de descarga, a origem da curva torna-se o ponto $(\varepsilon_d, \sigma_d)$, onde se inicia o descarregamento, e o pico é substituído pelo ponto focal $(\varepsilon_f, \sigma_f)$. Para a recarga, a origem é dada pelo ponto $(\varepsilon_r, \sigma_r)$, onde se inicia o recarregamento, e o pico é substituído pelo ponto de origem da descarga $(\varepsilon_d, \sigma_d)$. Ao chegar nesse ponto, retorna-se a curva monotônica expressa pela equação [A.1](#). Todo o procedimento descrito é representado na Figura [A.1](#).

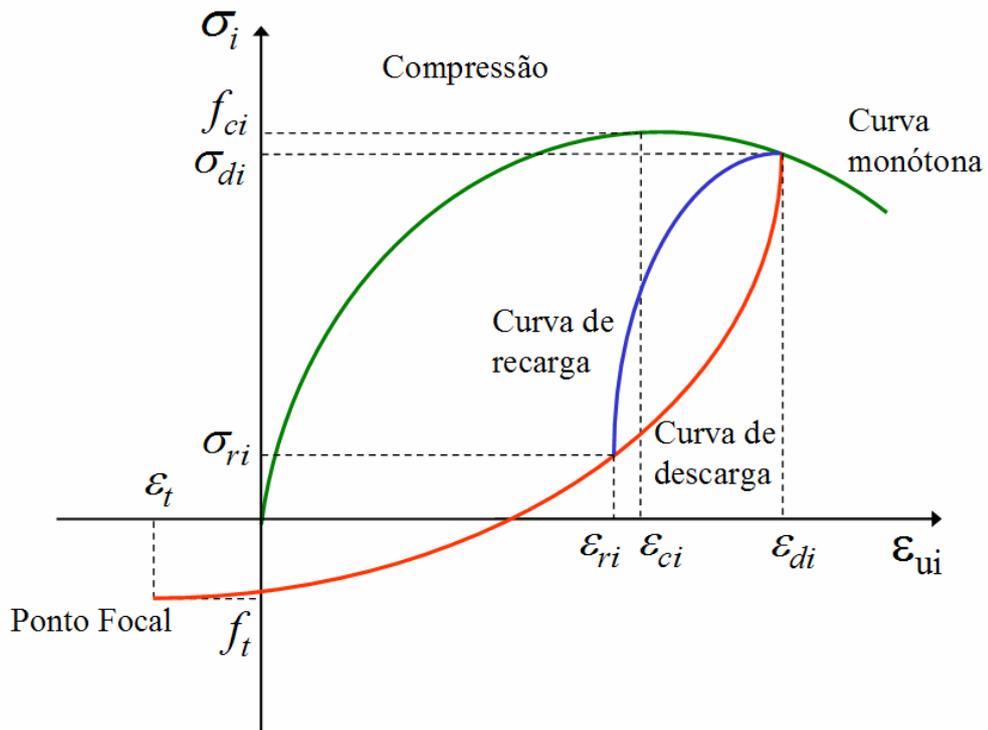


Figura A.1: Descarregamento e recarregamento segundo a lei tensão-deformação de Popovics-Saenz modificada ([Bono, 2008](#)).

A partir das alterações nos pontos de origem e de pico, a expressão original pode ser reescrita para os trechos de descarregamento e recarregamento. O processo de descarga é dado por:

Ramos ascendente:

$$\text{Com } \left(\frac{\varepsilon_d - \varepsilon_u}{\varepsilon_d - \varepsilon_f} \right) \leq 1 : A = B = C = 0; D = (K - 1).$$

$$\sigma = \sigma_d - \frac{(\sigma_d - \sigma_f) K \left(\frac{\varepsilon_d - \varepsilon_u}{\varepsilon_d - \varepsilon_f} \right)}{1 + D \left(\frac{\varepsilon_d - \varepsilon_u}{\varepsilon_d - \varepsilon_f} \right)^R}, \quad (\text{A.2})$$

em que:

$$K = E_d \left(\frac{\varepsilon_d - \varepsilon_f}{\sigma_d - \sigma_f} \right);$$

$$R = \frac{K}{K - 1}.$$

Sendo E_d o módulo de elasticidade no ponto onde iniciou a descarga, determinado pela seguinte expressão:

$$E_d = e^{\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_c}} E_0^t, \quad (\text{A.3})$$

em que E_0^t é o módulo de elasticidade do ponto de descarga anterior. Por simplicidade, neste trabalho, foi considerado que $E_0^t = E^0$, com E^0 representando o módulo de elasticidade inicial do concreto.

Ramos descendente:

$$\text{Com } \left(\frac{\varepsilon_d - \varepsilon_u}{\varepsilon_d - \varepsilon_f} \right) > 1 : \text{retorna-se à respectiva curva monotônica.}$$

O processo de recarga, por sua vez, é obtido conforme as seguintes equações:

Ramos ascendente:

$$\text{Com } \left(\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_u}{\varepsilon_r - \varepsilon_d} \right) \leq 1 : A = B = C = 0; D = (K - 1).$$

$$\sigma = \sigma_r - \frac{(\sigma_r - \sigma_d) K \left(\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_u}{\varepsilon_r - \varepsilon_d} \right)}{1 + A \left(\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_u}{\varepsilon_r - \varepsilon_d} \right) + B \left(\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_u}{\varepsilon_r - \varepsilon_d} \right)^2 + C \left(\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_u}{\varepsilon_r - \varepsilon_d} \right)^3 + D \left(\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_u}{\varepsilon_r - \varepsilon_d} \right)^R}, \quad (\text{A.4})$$

em que:

$$K = E_d \left(\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_d}{\sigma_r - \sigma_d} \right);$$

$$R = \frac{K}{K - 1}.$$

Ramos descendente:

$$\text{Com } \left(\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_u}{\varepsilon_r - \varepsilon_d} \right) > 1 : \text{a curva monotônica é retomada.}$$

Apêndice B

Composição Tensorial

No Capítulo 2 foram apresentadas diferentes hipóteses de degradação a partir dos tensores de efeito de dano. Neste Apêndice é detalhada a composição tensorial adotada, em conformidade com o estudo de Penna (2011), a qual permitiu a representação dessas entidades matemáticas. A notação indicial que será descrita é adequada à forma de armazenamento do núcleo numérico do INSANE, de modo que um tensor de ordem n seja escrito a partir uma matriz de ordem 3^n .

B.1 Notação Indicial e Representação Matricial

Conforme discutido, o modelo sólido tridimensional é o caso mais geral para modelos de análise, sendo expresso segundo a relação total

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (\text{B.1})$$

em que os tensores de tensão e deformação são escritos, respectivamente, como

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2a,b})$$

O tensor de rigidez, por sua vez, é dado por um tensor de quarta ordem, sendo representado como

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1112} & E_{1113} & E_{1211} & E_{1212} & E_{1213} & E_{1311} & E_{1312} & E_{1313} \\ E_{1121} & E_{1122} & E_{1123} & E_{1221} & E_{1222} & E_{1223} & E_{1321} & E_{1322} & E_{1323} \\ E_{1131} & E_{1132} & E_{1133} & E_{1231} & E_{1232} & E_{1233} & E_{1331} & E_{1332} & E_{1333} \\ \hline E_{2111} & E_{2112} & E_{2113} & E_{2211} & E_{2212} & E_{2213} & E_{2311} & E_{2312} & E_{2313} \\ E_{2121} & E_{2122} & E_{2123} & E_{2221} & E_{2222} & E_{2223} & E_{2321} & E_{2322} & E_{2323} \\ E_{2131} & E_{2132} & E_{2133} & E_{2231} & E_{2232} & E_{2233} & E_{2331} & E_{2332} & E_{2333} \\ \hline E_{3111} & E_{3112} & E_{3113} & E_{3211} & E_{3212} & E_{3213} & E_{3311} & E_{3312} & E_{3313} \\ E_{3121} & E_{3122} & E_{3123} & E_{3221} & E_{3222} & E_{3223} & E_{3321} & E_{3322} & E_{3323} \\ E_{3131} & E_{3132} & E_{3133} & E_{3231} & E_{3232} & E_{3233} & E_{3331} & E_{3332} & E_{3333} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Cabe ressaltar que, definido o modelo constitutivo em questão, muitas das componentes do operador de rigidez são anuladas. Assumindo a ortotropia do meio, para uma análise tridimensional, o tensor de rigidez secante é dado como

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{1111} & 0 & 0 & 0 & E_{1212} & 0 & 0 & 0 & E_{1313} \\ 0 & E_{1122} & 0 & E_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{1133} & 0 & 0 & 0 & E_{1331} & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{2112} & 0 & E_{2211} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{2121} & 0 & 0 & 0 & E_{2222} & 0 & 0 & 0 & E_{2323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2233} & 0 & E_{2332} & 0 \\ \hline 0 & 0 & E_{3113} & 0 & 0 & 0 & E_{3311} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{3223} & 0 & E_{3322} & 0 \\ E_{3131} & 0 & 0 & 0 & E_{3232} & 0 & 0 & 0 & E_{3333} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Ao considerar o estágio inicial de uma análise estrutural, em regime elástico linear isotrópico, as componentes desse tensor podem ser expressas, pela notação indicial

$$E_{ijkl} = \Lambda^0 \delta_{ij} \delta_{kl} + G^0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (\text{B.5})$$

em que Λ^0 e G^0 são os parâmetros de Lamé, que podem ser escritos a partir do módulo de elasticidade inicial do material, E^0 , e do coeficiente de Poisson, ν^0 , conforme as equações [B.6a,b](#).

$$\Lambda^0 = \frac{\nu^0 E^0}{(1 + \nu^0)(1 - 2\nu^0)}, \quad G^0 = \frac{E^0}{2(1 + \nu^0)}. \quad (\text{B.6a,b})$$

Para os modelos em estado plano de tensão, abordados neste trabalho, a rigidez secante pode ser resumida ainda em

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} E_{1111} & 0 & 0 & 0 & E_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{1122} & 0 & E_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{2112} & 0 & E_{2211} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{2121} & 0 & 0 & 0 & E_{2222} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (\text{B.7})$$

com as componentes dadas segundo o formato indicial, para o caso elástico linear isotrópico, por

$$E_{ijkl} = \Gamma^0 \delta_{ij} \delta_{kl} + G^0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (\text{B.8})$$

sendo

$$\Gamma^0 = \frac{E^0 \nu^0}{(1 - \nu^0)(1 + \nu^0)}. \quad (\text{B.9})$$

Definida essa composição tensorial, os tensores de efeito de dano formulados neste estudo foram desenvolvidos a partir do formato matricial apresentado, sendo suas componentes calculadas de acordo com a notação indicial aqui exposta.