



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Introdução ao estudo do Cálculo Variacional e da Curva  
Cicloide

Fernando Antônio Barros

Orientador: Prof. Carlos Maria Carballo

Dissertação apresentada ao Programa de Especialização em Matemática com ênfase em Cálculo Diferencial e Integral.

Belo Horizonte - MG  
2016

## AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a Deus, sinto que Ele sempre esteve presente em minha vida, nos momentos felizes e naqueles difíceis, quando precisamos muito de um verdadeiro amigo. E por falar em amigo, não tenho palavras para agradecer ao Prof. Carlos Maria Carballo, profissional de primeira grandeza que me orientou neste trabalho, e aproveito para afirmar que se não fosse pela sua inteligência ímpar, pela sua generosidade na doação de seu precioso tempo, eu jamais teria conseguido chegar ao fim desta jornada, portanto, caro Professor Carlos, o senhor terá sempre a minha eterna gratidão e admiração.

Quero agradecer também a três grandes mulheres que para mim são muito especiais, são pessoas que amam a vida, são exemplos de superação, de alegria pela vida e que me ajudaram muito a enfrentar muitos desafios, e eu tenho a sorte de tê-las por perto, são elas: a minha amada esposa Joelma, com quem tenho três filhos maravilhosos: Ian, Giovana e Íris; a minha querida mãe Maria Luiza e a minha querida sogra, Maria José, elas são pessoas abençoadas por Deus, fazem desse mundo um lugar muito melhor de se viver e sempre estarão em meu coração.

Agradeço à Coordenadora Prof<sup>a</sup> Jussara de Matos Moreira e a todos os professores com os quais tive a honra de conviver em sala de aula, possibilitando que todos nós, alunos, aprendêssemos e aprimorássemos nossos conhecimentos.

Quero agradecer também à Andréa e à Kelli, funcionárias da Pós-Graduação, pela atenção e cordialidade dispensadas a todos nós.

A todos vocês, o meu muito obrigado.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>O Cálculo Variacional</b>	<b>12</b>
2.1	Funções e funcionais . . . . .	12
2.2	Equação de Euler-Lagrange . . . . .	16
2.3	Problema da Braquistócrona . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Cicloide</b>	<b>33</b>
3.1	A geometria da curva Cicloide . . . . .	33
3.2	A Cicloide é tautócrona . . . . .	36
3.3	O uso do aplicativo Geogebra . . . . .	41

# Resumo

Nesta monografia procurou-se tratar, de uma forma simples e objetiva, das noções básicas iniciais de uma área da Matemática conhecida como Cálculo Variacional, abordando o conceito de funcional de forma didática e resolvendo problemas relativos à otimização através da aplicação da Equação de Euler-Lagrange, a qual será demonstrada nesta monografia, possibilitando ao leitor associar ao seu conhecimento prévio de Cálculo Diferencial e Integral uma noção básica desta interessante área da Matemática.

Também faz parte dos objetivos desta monografia mostrar que a Cicloide é uma curva especial, pois, além de ser a solução do “Problema da Braquistócrona”, o qual será tratado nesta monografia, esta curva também possui a interessante propriedade conhecida como “Tautócrona”, a qual será explicada em detalhes neste trabalho.

Ao final desta monografia, o objetivo foi determinar, através do aplicativo Geogebra, o comprimento do raio do círculo que gera uma curva Cicloide que deve interceptar um ponto dado no plano vertical.

# Capítulo 1

## Introdução

Quando se pesquisa sobre a História da Civilização, é possível constatar que a busca pela otimização das atividades faz parte do comportamento do ser humano, nas mais diversas áreas do conhecimento.

Desde a Idade dos Metais, que é a última fase da Pré-História que vai de 5000 a.C. até o surgimento da escrita pelos sumérios, em 4000 a.C., já se buscava criar ligas metálicas mais resistentes e duráveis para a confecção de ferramentas e armas, num procedimento contínuo de aperfeiçoamento, cujo resultado atual é o acesso a uma infinidade de materiais com características importantes, como as ligas metálicas que apresentam uma grande resistência aliada à leveza ou materiais que possuem a capacidade de serem submetidos a grandes tensões e diferenças de temperatura sem apresentar deformações consideráveis em suas estruturas.

Na época das grandes navegações, procurava-se projetar o formato dos barcos para que os mesmos apresentassem a menor resistência na água, adquirindo assim a maior velocidade possível, e também construía-se as velas das embarcações de modo a aproveitar a força dos ventos da forma mais eficiente. Os conhecimentos matemáticos e astronômicos da época, aliados ao uso de equipamentos como o astrolábio, o sextante e os relógios marítimos de grande precisão, possibilitavam que se navegasse com muito mais eficiência e segurança pelas rotas marítimas, na medida em que se podia determinar a latitude e a longitude de suas embarcações durante as viagens pelos oceanos, o que muito contribuiu para o desenvolvimento do comércio e do intercâmbio cultural entre diversos povos.

Em tempos de guerra, a Física, a Química e a Matemática foram usadas por diversos líderes com o objetivo de se promover as maiores baixas possíveis nas tropas inimigas, quando se buscava, por exemplo, produzir a melhor pólvora; determinar o melhor ângulo de disparo dos canhões e as dimensões e as formas de seus projéteis, de

maneira que estes pudessem ser os mais letais, atingindo a maior distância possível e com o maior potencial de destruição.

A procura pelas soluções dos desafios de cada época é a mola propulsora que impulsiona e projeta a sociedade a patamares mais elevados em relação aos conhecimentos científicos, ao aperfeiçoamento e à criação de técnicas mais modernas e eficientes, nas mais variadas áreas do conhecimento.

Desde a antiguidade, vários matemáticos e físicos procuravam compreender os fenômenos naturais e suas leis, tentavam determinar, através de experiências físicas e cálculos matemáticos, o princípio absoluto que rege a natureza, a qual era vista por muitos como a criação de um Deus perfeito.

O uso da Matemática com objetivo de se atingir a otimização pode ser constatado desde a Grécia Antiga através do poema épico denominado “A Lenda de Dido” (veja [1, p. 127]), o qual faz parte do Cântico I da “Eneida”, obra em que o poeta romano Virgílio (70 – 19 a.C.) narra a epopeia de Enéas de Tróia. De acordo com esta lenda, Dido era uma princesa fenícia do século IX a.C., da cidade de Tiro, localizada às margens do Mediterrâneo, onde hoje é o Líbano, e, conforme esta lenda, seu irmão, o rei Pigmalião, assassinou seu marido, o grande sacerdote Arquebas, para subtrair-lhe seus tesouros, e temendo sua própria morte, Dido então fugiu em um navio com um grande número de seguidores dispostos a fundar uma nova cidade (Cartago).

No lugar escolhido para ser Cartago, Dido tentou comprar terras do rei local para que pudessem se estabelecer, mas o acordo feito com o rei foi que ela só teria em terras o que pudesse abranger com o couro de um boi. Dido e seu grupo decidiram então cortar o couro em tiras tão finas quanto possível e emendar todas essas tiras de couro para englobar a maior área no formato de um semicírculo que tivesse o seu diâmetro às margens do oceano. O surpreendente procedimento de Dido demonstra o conhecimento sobre a solução do Problema Isoperimétrico, o qual questiona sobre qual deve ser a disposição geométrica de um fio de comprimento determinado para que o mesmo delimite a maior área possível.

A solução do Problema Isoperimétrico teria sido dada inicialmente pelo matemático grego Zenodoro (200-140 a.C.), mas a sua demonstração completa só teria sido conhecida em 1880, quando foi apresentada pelo matemático Karl Weierstrass (1815 – 1897) em seus seminários na Universidade de Berlim.

Até hoje, a solução do Problema Isoperimétrico é considerada por muitos como algo especial, pois, se demonstra que o fio abrangerá a maior área possível quando o mesmo for disposto na forma de uma circunferência.

A otimização dos resultados sempre interessou à humanidade por motivos óbvios

e, naturalmente, continua a fazer parte dos seus anseios. Desde a antiguidade, vários matemáticos e estudiosos se mostraram influenciados por um princípio metafísico: o de que a natureza segue sempre os caminhos mais simples e fáceis, evitando desperdícios ou a inutilidade, e essa ideia já estava presente nas obras do notável sábio grego, Aristóteles (384 - 322 a.C.), que afirmava que a natureza não faz nada em vão. Essa visão se justificava pelo fato de que à época muitos estudiosos acreditavam que o mundo teria sido criado por um Deus perfeito, criador das leis que regeriam os fenômenos naturais da forma mais simples e perfeita possível.

Vários matemáticos e físicos contribuíram para o desenvolvimento de conhecimentos relativos à otimização matemática nos séculos *XVI* e *XVII*, e um destes grandes cientistas foi Galileu Galilei (1564–1643), o qual desempenhou um papel essencial na Revolução Científica ao contribuir para o desenvolvimento de várias áreas da Matemática, Física e Astronomia, introduzindo o método científico e tentando descrever os fenômenos da Física através da linguagem matemática, sendo atribuída a Galileu a seguinte frase: "A Matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o Universo".

Em relação a Galileu, há relatos históricos que evidenciam a sua mente genial e demonstram que ele era capaz de observar detalhes e de elaborar teorias científicas sobre os mais variados campos relativos aos fenômenos naturais. Em relação ao movimento pendular, por exemplo, contam que certa vez Galileu teria observado as oscilações de um lustre da Catedral de Pisa e teria efetuado medidas do tempo das suas oscilações e comparado com a contagem das suas pulsações, e, dessa forma, ele teria verificado que mesmo quando as amplitudes das oscilações do lustre diminuam, os períodos destas eram iguais entre si (para pequenas oscilações).

Galileu apresentou suas conclusões à respeito do isocronismo de pêndulos com base em suas experiências e concluiu que o período de oscilação de um pêndulo depende do seu comprimento, mas independe da sua massa e da sua amplitude (para pequenas oscilações).

Por volta de 1630 Galileu fazia experiências sobre o tempo de queda de objetos e comparou o tempo de descida de uma esfera por um segmento circular com os tempos correspondentes às descidas da mesma esfera através de polígonos inscritos e de diversos arcos que uniam os pontos dados, e nestas experiências Galileu tinha o objetivo de determinar qual seria a curva plana que ligaria dois pontos  $A$  e  $B$ , com  $B$  em nível inferior, de tal forma que, apenas sob a ação da força da gravidade, esta esfera deveria percorrer a curva de  $A$  até  $B$  no menor intervalo de tempo possível. Na época, Galileu teria chegado à conclusão (incorreta) de que esta curva seria um

arco de uma circunferência.

Em 1641, quando Galileu já estava cego, ocorreu-lhe que fosse possível adaptar o pêndulo a relógios, utilizando pesos ou molas, mas ele nunca teria concretizado esta ideia.

Outro grande cientista que se dedicou ao estudo sobre os fenômenos naturais e as leis que os governam foi o francês Pierre de Fermat (1601 – 1665), que, em agosto de 1657, enunciou o famoso “Princípio do Tempo Mínimo”, o qual afirma o seguinte: “A luz, para ir de um ponto  $A$  até outro ponto  $B$ , o fará pela trajetória cujo tempo de trânsito seja o menor possível”, e este princípio pode ser constatado através do processo da incidência e reflexão da luz em espelhos planos, onde os ângulos de incidência e de reflexão possuem a mesma medida, de forma que a luz percorra a distância entre dois pontos do espaço no menor intervalo de tempo possível.

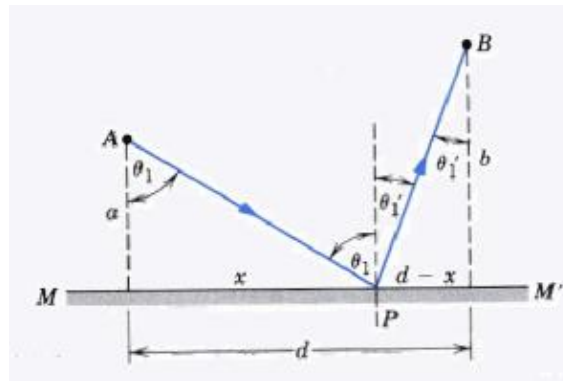


Figura 1: Reflexão no espelho plano

Um dos grandes cientistas que também muito contribuiu com estudos relativos ao movimento pendular foi o matemático, físico e astrônomo holandês, Christian Huygens (1629 – 1695), que, em 1673, publicou a sua obra intitulada “Horologium Oscillatorium” (Relógio Pendular), e foi quando formulou o interessante problema intitulado: “Problema da Tautócrona” (Tauto=mesmo + Chrono=tempo), o qual indagava: Qual é a curva descrita em um plano vertical que, independentemente da posição inicial em que se coloque um objeto sobre a mesma, o tempo que o objeto leva para atingir o ponto mais baixo da curva seja sempre o mesmo? (Considerando que este objeto esteja sujeito apenas à força gravitacional e não sofra a ação da força de atrito).



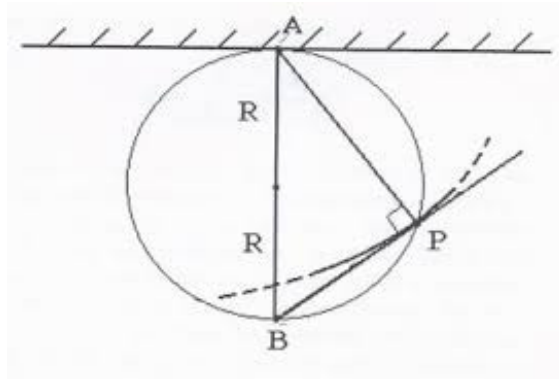


Figura 2: Pêndulo

É possível pensar que durante o período que Huygens pensava sobre a solução do “Problema da Tautócrona”, ele buscava uma relação com o fato do movimento pendular apresentar o seu período invariável para pequenos ângulos, ou seja, o pêndulo levava tempos iguais para percorrer distâncias distintas, considerando apenas ângulos com pequenas amplitudes.

Huygens havia inventado o relógio de pêndulo cuja extremidade inferior descreve um arco de circunferência, e, a partir de suas experiências, sabia que, para pequenos ângulos de abertura, o período de um pêndulo simples não depende da sua amplitude e nem da sua massa. De forma comparativa, Huygens verificou que se abandonasse uma esfera em uma rampa na forma de uma semicircunferência, o tempo que a esfera levava para atingir o ponto mais baixo da trajetória dependia da altura em que a mesma era abandonada sobre a curva, e, nesta época, ocorreu-lhe considerar o que aconteceria se a superfície hemisférica fosse substituída por outra, cuja secção fosse um arco de Cicloide invertido, e foi quando Huygens ficou surpreso ao observar que em tal caso a esfera chegava ao ponto mais baixo da curva levando sempre o mesmo tempo, independentemente da altura em que a esfera fosse colocada sobre a Cicloide.

Huygens provou, geometricamente, que a Cicloide é tautócrona, ou seja, apresenta a propriedade de que quando um objeto se desloca sobre a mesma, desprezando-se o atrito e somente sob a ação da gravidade, o tempo que este objeto leva para atingir o ponto mais baixo da curva (ponto de mínimo) será sempre o mesmo, independentemente da posição inicial na qual ele é colocado na curva. Além disso, Huygens verificou também que se um pêndulo construído na forma de uma esfera

presa por um fio deformável se movimentar entre dois arcos cicloidais fixos de mesmo comprimento que o pêndulo, a trajetória descrita pela esfera será um arco cicloidal.

De posse desses conhecimentos, Huygens construiu um relógio cujo pêndulo era limitado por dois anteparos na forma de Cicloides, procurando assim construir um relógio cujo período de oscilação não se alterasse com a variação da amplitude de seus movimentos.

A seguir, podemos observar a representação gráfica de um Pêndulo Cicloidal, onde  $PQ$  e  $PR$  são anteparos fixos na forma de arcos cicloidais, os quais limitam o movimento do pêndulo  $PS$ , o qual é construído com uma esfera na extremidade de um fio deformável, de forma que, à medida que o pêndulo se movimenta entre os anteparos fixos, a esfera irá descrever um arco de Cicloide, portanto, apresentará a propriedade tautócrona.

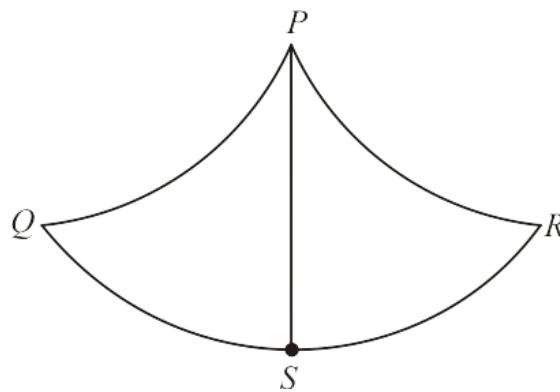


Figura 3: Pêndulo cicloidal

Neste contexto histórico, estavam germinando as ideias de uma importante área da Matemática que ficou conhecida como Cálculo Variacional.

Em se tratando do Cálculo Variacional, podemos considerar também o grande matemático e físico Isaac Newton (1643 – 1727) como um dos seus precursores, considerando que Newton propôs, no segundo volume da sua célebre obra “Principia Mathematica”, publicada em 1687, o problema de se determinar a forma da superfície de revolução de um sólido que apresentasse a menor resistência possível quando o mesmo atravessasse um fluido, e este é um problema sobre otimização, típico do Cálculo Variacional.

A Matemática vem sendo construída e desenvolvida desde a mais remota antigui-

dade, e o seu desenvolvimento se deve muito à busca de soluções de problemas que desafiaram as mentes mais brilhantes de cada época. No séc. XVII, o Cálculo Variacional foi criado para solucionar problemas às otimizações de resultados, e graças ao seu desenvolvimento, hoje é possível obter soluções otimizadas para inúmeros problemas, nas mais variadas áreas do conhecimento.

# Capítulo 2

## O Cálculo Variacional

### 2.1 Funções e funcionais

Partindo de uma análise básica e simplificada, pode-se considerar que o Cálculo Variacional é uma área da Matemática que foi criada para se determinar as funções que extremizam os seus respectivos funcionais. Mas afinal, o que vem a ser um funcional?

Com o objetivo de ser didático em relação à idéia intuitiva do que vem a ser um funcional, pode-se fazer uma comparação entre uma função com o domínio definido no conjunto dos números reais e um funcional cujo domínio é um espaço definido de funções.

Toda função contínua, com domínio no conjunto dos números reais, possui, para cada elemento do seu domínio, um elemento correspondente que pertence ao seu conjunto imagem. Por exemplo, a função quadrática  $y(x) = x^2$ , com  $x \in \mathbb{R}$ , possui um elemento em seu conjunto imagem correspondente a cada elemento de seu domínio, como se observa a seguir:

para  $x = 0$  temos  $y = 0$ ,

para  $x = 1$  temos  $y = 1$ ,

para  $x = 2$  temos  $y = 4$ ,

ou seja, para cada valor de  $x$ , a função retornará apenas um determinado valor da função  $y(x)$ .

Há uma semelhança entre os conceitos de função e funcional, no entanto, o domínio de um funcional não é formado por números reais, mas sim por funções, e para cada função substituída no funcional dado o resultado será um número real.

Para se compreender melhor o conceito de funcional, vejamos a solução do problema a seguir. Seja o funcional

$$I(y) = \int_0^4 y(x) dx,$$

onde  $y(x)$  representa uma função derivável qualquer em relação à variável  $x$ , sendo que este funcional fornece como resultado o valor da área sob a curva representada pela função  $y(x)$ , a qual é limitada no intervalo  $0 \leq x \leq 4$ , com  $x \in \mathbb{R}$ . A partir deste funcional dado, qual das funções a seguir abrange a maior área entre o seu gráfico e o eixo das abscissas no intervalo dado?

a)  $y = x^2$

b)  $y = e^x$

c)  $y = \sqrt{x+1}$

d)  $y = 2x$

Após os devidos cálculos, os resultados das respectivas áreas são:

a)  $I(y) = \int_0^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = 64.$

b)  $I(y) = \int_0^4 e^x dx = e^x \Big|_0^4 \approx 53,6$

c)  $I(y) = \int_0^4 \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 \approx 6,78$

d)  $I(y) = \int_0^4 2x dx = x^2 \Big|_0^4 = 16$

Portanto, dentre as funções dadas, aquela que determina a maior área sob o seu gráfico é a função quadrática  $y = x^2$ .

No caso acima, para solucionar o problema bastou substituir cada uma das funções no funcional dado e calcular os respectivos resultados, mas, no Cálculo Variacional, o objetivo é determinar, dentre infinitas funções, aquela que deverá extremizar o funcional dado, ou seja, determinar a função que, se substituída no

funcional deverá gerar o valor extremo (máximo ou um mínimo) deste.

O processo para se determinar a função que extremiza o funcional, em parte, é semelhante àquele em que se determina o ponto extremo de uma função contínua e diferenciável em determinado intervalo, onde a derivada da função se anula.

Para melhor compreensão do significado de um funcional, pode-se analisar o problema proposto a seguir, o qual tem como objetivo determinar a expressão matemática (funcional) para se calcular o comprimento da curva representada pela função dada em um determinado intervalo:

**Problema resolvido:** Dados dois pontos distintos  $A(x_1; y_1)$  e  $B(x_2; y_2)$  pertencentes ao plano cartesiano  $xy$ , determinar o funcional que possibilite calcular o comprimento de uma curva qualquer, representada por  $y(x)$ , a qual interliga tais pontos.

**Solução:** Considerando uma curva  $C$  que seja definida pela equação  $y = y(x)$ , a qual representa a função procurada, sendo  $y(x)$  contínua no intervalo  $a \leq x \leq b$ , e com  $x \in \mathbb{R}$ , tal que a sua derivada também seja contínua neste intervalo. Para melhor descrever a situação analisada, obtemos uma poligonal de aproximação para a curva  $C$  a ser definida, dividindo o intervalo  $[a, b]$  do seu domínio em  $n$  subintervalos com extremidades  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e com larguras iguais a  $\Delta x_i$ . Se  $y_i = y(x_i)$ , então o ponto  $P_i(x_i, y_i)$  está em  $C$ , e a poligonal com vértices  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , ilustrada na figura abaixo é uma aproximação para  $C$ .

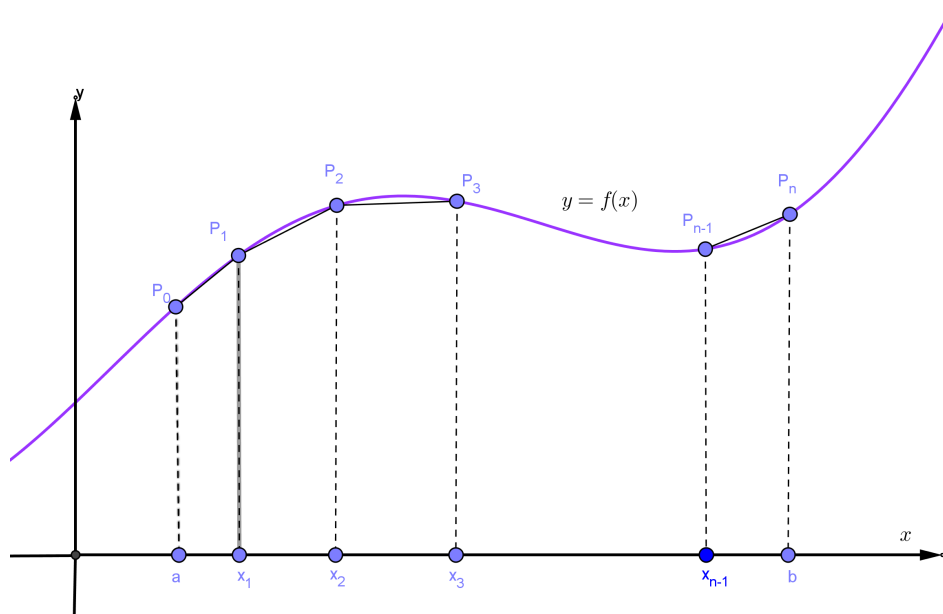


Figura 4: Comprimento do arco por aproximação de linhas poligonais.

O comprimento  $L$  da curva  $C$  é aproximadamente o mesmo dessa poligonal e a aproximação fica melhor quando  $n$  aumenta. Portanto, definimos o comprimento  $L$  da curva  $C$  com a equação representada por  $y(x)$ , no intervalo  $a \leq x \leq b$ , como sendo o limite dos comprimentos dessas poligonais inscritas (se o limite existir), conforme [2, p. 488]:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1} - P_i|$$

Se tomarmos  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  e  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ , então:

$$|P_{i-1} - P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Aplicando-se o Teorema do Valor Médio para a função  $f$ , no intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , concluímos que existe um número  $x_i^*$  entre  $x_{i-1}$  e  $x_i$ , tal que:

$$y(x_i) - y(x_{i-1}) = y'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

isto é,

$$\Delta y_i = y'(x_i^*) \Delta x_i.$$

Então, temos:

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (y'(x_i^*) \Delta x_i)^2} \\ &= \sqrt{1 + [y'(x_i^*)]^2} \sqrt{(\Delta x_i)^2} \\ &= \sqrt{1 + [y'(x_i^*)]^2} \Delta x_i. \end{aligned}$$

Logo, o comprimento do arco de uma curva suave representada pela função  $y(x)$  é dado pela expressão:

$$L(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [y'(x_i^*)]^2} \Delta x_i.$$

$$L[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \quad (2.1)$$

com  $y'(x)$  contínua no intervalo  $[a, b]$ .

Portanto, após os devidos cálculos, tem-se a expressão matemática (2.1) como exemplo de um funcional, cujo domínio não é composto por números reais, mas por funções deriváveis, e através deste funcional é possível calcular o comprimento da curva determinada pela função  $y(x)$  no intervalo  $a \leq x \leq b$ .

## 2.2 Equação de Euler-Lagrange

O Lema Fundamental do Cálculo Variacional, que é básico para o desenvolvimento da teoria do Cálculo Variacional, é demonstrado a seguir:

**Lema 1.** *Se  $G : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e se é válida a condição:*

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) G(x) dx = 0 \quad (2.2)$$

*para toda função diferenciável  $\eta(x) : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  então  $G(x) = 0$ , para todo  $x \in (x_1, x_2)$ .*

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que  $G(x') \neq 0$  para algum  $x' \in (x_1, x_2)$ , e,



sem perda de generalidade, que  $G(x') > 0$ . Pela continuidade de  $G$ , existe uma vizinhança de  $x'$ , digamos,  $c \leq x' \leq d$  na qual  $G(x') > 0, \forall x \in [c, d]$ . Mas com isso a igualdade (2.2) não se verifica para toda função diferenciável  $\eta(x)$ .

Por exemplo, considerando-se a função  $\eta(x)$  a seguir:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_1 \leq x \leq c \\ (x - c)^2(x - d)^2 & \text{se } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{se } d \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

obtém-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = \int_c^d [(x - c)^2(x - d)^2]G(x) dx$$

e como  $G(x) > 0$  para  $c \leq x \leq d$  tem-se que:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x) dx \neq 0$$

o que contradiz a hipótese. O caso  $G(x_1) < 0$  é análogo e assim o lema acima está provado.  $\square$

O objetivo básico do Cálculo Variacional é determinar a função diferenciável,  $y(x)$ , com  $y : [x_1; x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ , a qual tenha a sua derivada primeira  $y'(x)$  contínua no intervalo considerado, de modo que satisfaça às condições de fronteira dadas:  $y(x_1) = y_1$  e  $y(x_2) = y_2$ , e, dependendo do problema, minimize ou maximize o funcional  $I(y)$ , o qual é representado genericamente pela expressão a seguir, conforme [3, p. 292] e [4, p. 93]:

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z) dx \quad (2.3)$$

sendo  $x = x$ ;  $y = y(x)$  e  $z = y'(x)$ .

Analisando a integral acima, é importante que se compreenda que a função  $F(x, y, z)$  é uma função composta por  $x, y$  e  $y'$ , e, após a sua integração em relação a  $dx$ , o funcional  $I(y)$  dependerá apenas da função  $y$  e/ou da sua derivada  $y'$  e será independente da variável  $x$ .

A ideia básica inicial do Cálculo Variacional é admitir que haja uma função  $y(x)$  que extremiza o funcional dado, e, a partir desta função  $y(x)$ , cria-se uma nova

função parametrizada  $\bar{y}$ , a qual representará as funções vizinhas à função  $y(x)$  que estarão sujeitas às mesmas condições de fronteira da função  $y(x)$ .

Com o objetivo de representar uma família de funções que possui os mesmos extremos da função ótima  $y(x)$ , a qual extremiza o funcional dado, define-se uma nova função  $\bar{y}(x, \epsilon)$  da seguinte forma:

$$\bar{y}(x, \epsilon) = y(x) + \epsilon\eta(x), \quad (2.4)$$

tal que a função  $\bar{y}(x, \epsilon)$  seja parametrizada pelo fator  $\epsilon \in \mathbb{R}$  e a função  $\eta(x)$  seja uma função arbitrária derivável, tal que  $\eta(x) : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$  obedeça às seguintes condições de fronteira:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Dessa forma, assegura-se que a família de funções representadas por  $\bar{y}(x, \epsilon)$  obedeça, para qualquer valor de  $\epsilon$ , as condições de fronteira:

$$\bar{y}(x_1, \epsilon) = y(x_1) \quad \text{e} \quad \bar{y}(x_2, \epsilon) = y(x_2).$$

ou seja, determina-se que as funções  $\bar{y}(x, \epsilon)$  e  $y(x)$  sejam coincidentes nos extremos do intervalo definido pelos limites de integração  $x_1$  e  $x_2$  apresentados.

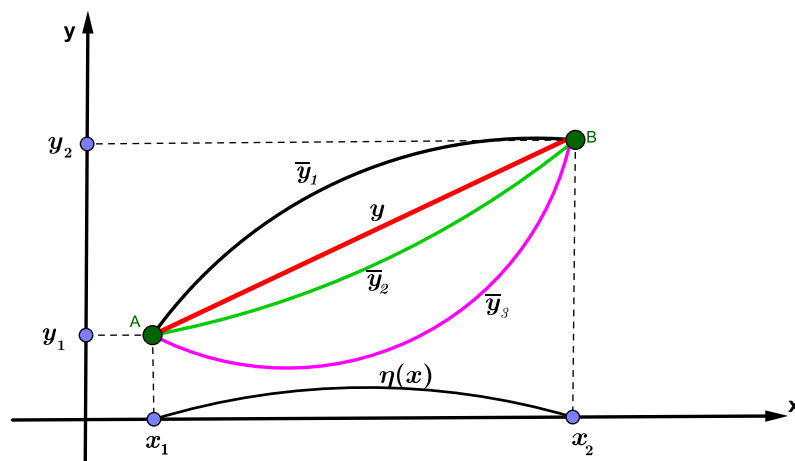


Figura 5: Curvas vizinhas à função ótima representada por  $y$

Tomando o funcional (2.3) e substituindo a função  $y(x)$  pela função  $\bar{y}(x, \epsilon)$  definida em (2.4), chegaremos à expressão:

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}(x, \epsilon), \bar{y}'(x, \epsilon)) dx \quad (2.5)$$

e neste ponto é importante que se compreenda que em (2.3) tem-se um funcional  $I(y)$  cujo domínio é um conjunto de funções e, após a substituição que gerou (2.5), não se terá mais um funcional, mas sim uma função,  $I(\epsilon)$ , cujo domínio é definido pelos possíveis valores de  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , pois, para cada função contínua e diferenciável  $\eta(x)$  dada, apenas o valor de  $\epsilon$  deverá variar, gerando os correspondentes valores de  $\bar{y}(x, \epsilon)$ .

A partir de (2.4), se tomarmos  $\epsilon = 0$ , teremos que  $\bar{y}(x, 0) = y(x) + 0$ , ou seja,  $\bar{y}(x, 0) = y(x)$ , e, conforme a hipótese inicial de que  $y(x)$  extremiza o funcional (2.3), então, para  $\epsilon = 0$ , tem-se que  $\bar{y}(x, 0)$  representará a função que extremiza (2.5).

Portanto, adotando-se  $\epsilon = 0$ , pode-se concluir que o valor correspondente da função  $I(\epsilon)$  relativa à equação (2.5), a qual foi criada a partir do funcional (2.3), será um extremo, e, baseando-se no fato de que no ponto extremo (máximo ou mínimo) de uma função a derivada é nula, e pode-se também afirmar que para o valor de  $\epsilon = 0$  a derivada da função  $I(\epsilon)$ , em relação a  $\epsilon$ , deverá ser nula, ou seja:

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \left( \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}(x, \epsilon), \bar{y}'(x, \epsilon)) dx \right) \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad (2.6)$$

Com a finalidade de se prosseguir nos cálculos da equação anterior, é necessário que se calcule a derivada de uma integral definida de uma função composta, fazendo-se necessário, nesta etapa, o emprego do importante lema conhecido como Regra de Leibniz, veja [5, Teorema 3, p. 66].

**Lema 2** (Regra de Leibniz). *Sejam  $f(x, t)$  uma função real definida num retângulo  $R = [a, b] \times [c, d] \in \mathbb{R}^2$  integrável em  $x$  para cada valor real de  $t$  e  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$  a sua derivada parcial contínua em  $x$  e  $t$  no mesmo retângulo.*

Seja o integral, função do parâmetro  $t$ , dada por:

$$I(t) = \int_a^b f(x, t) dt.$$

A derivada de  $I(t)$  é dada por:

$$I'(t) = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx.$$

Na sequência, de acordo o Lema 2, podemos dar continuidade a (2.6):

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F(x, \bar{y}(x, \epsilon), \bar{y}'(x, \epsilon))}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} dx = 0.$$

Na sequência, usando a “Regra da Cadeia”, temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}(x, \epsilon)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'(x, \epsilon)} \frac{\partial \bar{y}'(x, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} dx = 0 \quad (2.7)$$

De acordo com a parametrização definida:  $\bar{y}(x, \epsilon) = y(x) + \epsilon\eta(x)$ , pode-se determinar as seguintes equações:

$$\frac{\partial \bar{y}(x, \epsilon)}{\partial \epsilon} = \eta(x) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \bar{y}'(x, \epsilon)}{\partial \epsilon} = \eta'(x). \quad (2.9)$$

A partir da equação (2.4) e adotando-se  $\epsilon = 0$ , tem-se que  $\bar{y}(x, \epsilon) = y(x)$ , então pode-se substituir  $\bar{y}(x, \epsilon)$  por  $y(x)$  em (2.8) e (2.9) e se obter as seguintes equações:

$$\frac{\partial \bar{y}(x, 0)}{\partial \epsilon} = \frac{\partial y(x)}{\partial \epsilon} = \eta(x)$$

$$\frac{\partial \bar{y}'(x, 0)}{\partial \epsilon} = \frac{\partial y'(x)}{\partial \epsilon} = \eta'(x),$$

e após algumas substituições na equação (2.7), aliado ao fato de que a variável  $x$  não depende de  $\epsilon$ , o que faz com que  $\frac{\partial x}{\partial \epsilon} = 0$ , chegaremos ao seguinte resultado:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right) dx = 0. \quad (2.10)$$

A segunda parcela de (2.10) pode ser integrada por partes, como é visto a seguir:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) dx = \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x) dx \quad (2.11)$$

e, devido às condições de fronteira  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  tem-se que a primeira parcela do segundo membro da expressão acima se anula, conforme se representa a seguir:

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} = 0.$$

Portanto, após os cálculos descritos, tem-se que (2.10) foi reduzida à seguinte expressão:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x) \right) dx = 0$$

e, colocando  $\eta(x)$  em evidência, tem-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \eta(x) dx = 0, \quad (2.12)$$

sendo  $\eta(x)$  uma função arbitrária, requerendo-se apenas que a mesma seja derivável e obedeça às condições de fronteira já definidas em (2.2).

De acordo com o Lema 1, a partir de equação anterior podemos chegar à seguinte equação:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (2.13)$$

a qual é denominada **Equação de Euler-Lagrange**.

Através da Equação de Euler-Lagrange podemos determinar a função  $y(x)$  que extremiza um determinado funcional  $I[y(x)]$ , e é importante salientar que satisfazer esta equação é uma condição necessária para tal, porém não suficiente, pois, para se verificar se a referida função  $y(x)$  corresponde a um máximo, um mínimo ou a um ponto de inflexão são necessários outros cálculos mais complexos que não são abordados nesta monografia, mas podem ser verificados em [3].

Com o objetivo de se mostrar uma aplicação da Equação de Euler-Lagrange, vejamos a solução do problema a seguir:

*Problema:* Dados dois pontos distintos  $A(x_1; y_1)$  e  $B(x_2; y_2)$ , localizados no plano cartesiano  $xy$ , determinar, através da Equação de Euler-Lagrange, qual é a função que representa o menor caminho a ser percorrido entre  $A$  e  $B$ .

*Solução:* Inicialmente, admite-se que existe uma função  $y = y(x)$  que extremiza o funcional que representa o comprimento total de uma curva suave descrita através de uma função derivável  $y = y(x)$  em um intervalo que pertença ao seu domínio, sendo que, conforme (2.1), o referido funcional é representado pela expressão:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

sendo que o objetivo, neste caso, é determinar a função que extremiza este funcional, minimizando-o.

Conforme a definição de funcional dada em (2.3), temos:

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z) dx$$

com  $x = x$ ;  $y = y(x)$  e  $z = y'(x)$ .

Neste problema, a função  $F(x, y, y')$  é representada por  $\sqrt{1 + [y'(x)]^2}$  e não depende explicitamente de  $x$ .

Fazendo a substituição dos termos do funcional na Equação de Euler-Lagrange, a qual é dada a seguir, teremos:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

sendo que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

e

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} \left( \sqrt{1 + (y'(x))^2} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} = 0$$

como a derivada do termo acima em relação a  $x$  é igual a zero, pode-se concluir que este termo é uma constante, conforme explicitado a seguir:

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} = c \text{ (constante),}$$

logo

$$y'(x) = c\sqrt{1 + (y'(x))^2}$$

e, fazendo os cálculos para explicitar  $y'(x)$ , temos:

$$\begin{aligned}(y'(x))^2 &= \left(c\sqrt{1 + (y'(x))^2}\right)^2 \\ &= c^2(1 + (y'(x))^2).\end{aligned}$$

Portanto

$$(1 - c^2)(y'(x))^2 = c^2,$$

de onde

$$(y'(x))^2 = \frac{c^2}{1 - c^2},$$

e assim

$$y'(x) = \pm\sqrt{\frac{c^2}{1 - c^2}} = a,$$

onde  $a$  é constante. Considerando-se  $a > 0$  para fins de simplificação, a equação diferencial  $y'(x) = \frac{dy}{dx} = a$  é elementar e tem a solução geral do tipo  $y(x) = ax + b$ , onde  $b$  é uma constante de integração, e como a curva  $y(x)$  deve passar pelos pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , as constantes  $a$  e  $b$  são determinadas pela redução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

isto é,

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{e} \quad b = \frac{y_2x_1 - y_1x_2}{x_1 - x_2}.$$

Portanto, através da Equação de Euler-Lagrange foi possível determinar que o menor caminho entre dois pontos localizados em um plano corresponde a um segmento de reta representada pela função linear  $y(x) = ax + b$ , conforme já se sabia pelo senso comum.

Através do Cálculo Variacional, mais precisamente, da aplicação da Equação de Euler-Lagrange, foi possível determinar a função que extremiza o funcional em questão, ou seja, obtivemos uma função que representa a solução ótima para o pro-

blema, e, no caso em pauta, a solução encontrada representa um ponto de mínimo. Convém reiterar que é necessário que se faça uma análise para se determinar se a solução encontrada através da Equação de Euler Lagrange, a qual extremiza o funcional, corresponde a um ponto de mínimo, de máximo ou a um ponto de inflexão. O leitor interessado em se aprofundar no assunto poderá consultar [3].

## 2.3 Problema da Braquistócrona

Em 1696, o matemático Johann Bernoulli (1667 – 1748) propôs o **Problema da Braquistócrona**, palavra que tem origem grega: “brachisto” significa mais curto e “chronos” significa tempo, ou seja, o tempo mais curto. Na época, este problema foi enviado a vários matemáticos e alguns como Isaac Newton, Gottfried W. Leibniz, L’Hospital e Jakob Bernoulli apresentaram as suas soluções.

O Problema da Braquistócrona pode ser descrito da seguinte forma: Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos, posicionados no plano vertical  $xy$ , com o ponto  $A$  posicionado em um nível superior ao de  $B$  e sem pertencer à reta vertical que passa pelo ponto  $B$ . O problema consiste em se determinar qual deve ser a trajetória, no plano vertical, que interligue os pontos  $A$  e  $B$ , de tal forma que uma pequena esfera possa deslizar, a partir do repouso, de  $A$  até  $B$ , *no menor intervalo de tempo possível*, considerando-se que esta esfera sofra apenas a ação da força da gravidade, sem a ação da força de atrito.

A solução do Problema da Braquistócrona consiste em se determinar a função que representa a curva de descida mais rápida entre os pontos  $A$  e  $B$  nas condições supracitadas. Sabemos que há infinitas formas de trajetórias possíveis entre os pontos  $A$  e  $B$ , tais como uma reta, uma parábola, um ramo de hipérbole, etc, mas como determinar qual é a forma da trajetória na qual a esfera se deslocará de  $A$  até  $B$  no menor intervalo de tempo possível?

A seguir temos a representação gráfica de uma curva qualquer que representa a trajetória de uma esfera de massa  $m$  entre os pontos  $A$  e  $B$ .



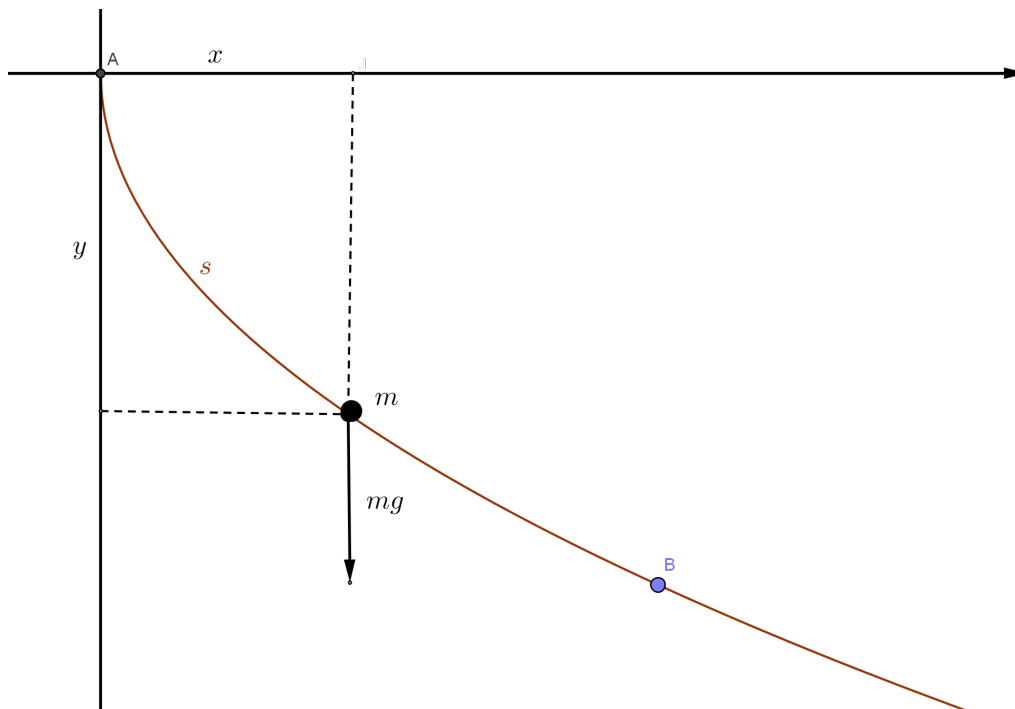


Figura 6: Deslocamento da esfera de massa  $m$

Com o objetivo de simplificar o problema proposto, evitando-se cálculos com números negativos relativos ao eixo  $y$ , considera-se que os pontos  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$  estejam no plano cartesiano  $xy$ , com o eixo  $y$  posicionado com sentido positivo para baixo e com o eixo horizontal  $x$  mantendo-se com o sentido positivo para a direita.

Admitindo-se que a esfera parta do repouso do ponto  $A(0,0)$ , que a trajetória descrita pela esfera até o ponto  $B$  no intervalo de tempo mais curto possível seja representada pela função  $y = y(x)$ , e denominando por  $s(x)$  o comprimento de arco descrito pela esfera ao descer pela referida curva, conforme (2.1), temos que:

$$s(x) = \int_{x_1}^x \sqrt{1 + y'(h)^2} dh$$

e, de acordo com o Teorema Fundamental do Cálculo (ver [2, p. 350]) temos:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}, \quad (2.14)$$

Agora, sabemos que

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Logo, pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
v &= \frac{ds}{dt} \\
&= \frac{ds}{dx} \frac{dx}{dt} \\
&= \sqrt{1 + y'^2} \frac{dx}{dt},
\end{aligned}$$

reescrevendo esta equação, temos:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

e pela derivada da função inversa, conclui-se que

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v}.$$

Integrando a equação acima em relação a  $x$  no intervalo  $[0, x]$ , obtemos:

$$T = \int_0^x \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v} dx \quad (2.15)$$

Para o cálculo da velocidade da esfera que se desloca pela curva entre os pontos  $A$  e  $B$  usamos a Lei da Conservação da Energia e o fato de não estarmos considerando a presença de forças dissipativas no problema. Assim, o decréscimo de energia potencial  $E_p$  é acompanhado por um igual acréscimo da energia cinética  $E_c$ , ou seja:

$$\Delta E_c = \Delta E_p$$

sendo que a Energia Cinética da esfera é dada por:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

onde  $m$  representa a massa da esfera e  $v$  representa a velocidade da mesma. A Energia Potencial Gravitacional da esfera é dada por:

$$E_p = m \cdot g \cdot y,$$

onde  $m$  representa a massa da esfera;  $g$  representa a aceleração da gravidade e  $y$  representa a altura da esfera em relação ao solo. De acordo com (2.3), temos:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = mg(y - y_1)$$

Portanto, a partir da equação acima e considerando que a esfera parte do repouso, temos que  $v = \sqrt{2g(y - y_1)}$ , e desde que estamos considerando as coordenadas do ponto inicial da esfera como sendo  $A(0, 0)$ , a expressão da velocidade em função da coordenada  $y$  que representa a altura em relação à posição final da esfera será dada por  $v = \sqrt{2gy}$ , e o tempo gasto para percorrer a trajetória entre os pontos  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$  poderá ser determinado através do seguinte funcional:

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx. \quad (2.16)$$

A qual foi obtida substituindo  $v = \sqrt{2gy}$  na equação (2.15).

Considerando a função

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}$$

relativa ao funcional (2.16), vamos usar a Equação de Euler-Lagrange para determinarmos a função que extremiza este funcional, no caso, a função que o minimiza, pois, se trata do deslocamento da esfera no *menor tempo possível*. Seja a Equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

Desenvolvendo o seu primeiro termo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} \right) \\ &= \sqrt{1 + (y')^2} \frac{\partial}{\partial y} y^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{1 + (y')^2} \left( -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Desenvolvendo o termo  $\partial F/\partial y'$  temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial}{\partial y'} (1+(y')^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{2} (1+(y')^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(y')\end{aligned}$$

Com isto calculemos agora

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \right] &= \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{y(1+(y')^2)}} \right) \\ &= \frac{y''(\sqrt{y(1+y'^2)}) - (y'(\sqrt{y(1+y'^2)})')}{(\sqrt{y \cdot (1+y'^2)})^2} \\ &= \frac{y''(\sqrt{y \cdot (1+y'^2)}) - \left( y' (y(1+y'^2))^{\frac{1}{2}} \right)'}{y(1+y'^2)} \\ &= \frac{y''(\sqrt{y(1+y'^2)}) - \left( y' \left( \frac{1}{2} (y(1+y'^2))^{-\frac{1}{2}} \right) (y'(1+y'^2) + y2y'y'') \right)}{y(1+y'^2)} \\ &= \frac{y''\sqrt{y(1+y'^2)}}{y(1+y'^2)} - \frac{1}{2} \frac{y'^2(1+y'^2) - 2yy'y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}}\end{aligned}$$

Substituindo esta equação e a equação (2.17) na Equação de Euler Lagrange, teremos:

$$-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y^{\frac{3}{2}}} - \frac{y''\sqrt{y(1+y'^2)}}{y(1+y'^2)} + \frac{1}{2} \frac{y'^2(1+y'^2) + 2yy'y''}{\sqrt{y(1+y'^2)^3}} = 0$$

de onde

$$\frac{-(1+2y'^2+y'^4) - 2y''y - 2y''yy'^2 + y'^2 + y'^4 + 2yy'^2y''}{2\sqrt{y^3(1+y'^2)^3}} = 0$$

Após simplificação chegaremos à seguinte equação diferencial:

$$\frac{-1 - y'^2 - 2yy''}{2\sqrt{y^3(1+y'^2)^3}} = 0$$

o que implica que  $-1 - y'^2 - 2yy'' = 0$ , ou seja  $2yy'' + y'^2 + 1 = 0$ . Se multiplicarmos ambos os membros desta equação por  $y'$ , chegaremos à equação diferencial:

$$2yy'y'' + y'^3 + y' = 0. \quad (2.18)$$

No próximo passo, observemos que:

$$\frac{d}{dx}[y + yy'^2] = 2yy'y'' + y'^3 + y'$$

que é a mesma equação (2.18). Portanto, se forem integrados ambos os lados da equação (2.18) com relação à variável independente  $x$ , se chegará à seguinte equação:

$$\int (2yy'y'' + y'^3 + y') dx = \int 0 dx$$

ou equivalentemente

$$\int \frac{d}{dx}[y + yy'^2] dx = C$$

onde  $C$  representa uma constante. Portanto, temos que

$$y + yy'^2 = C$$

e, obtém-se a equação:

$$y' = \sqrt{\frac{C - y}{y}},$$

onde a raiz será positiva devido ao eixo  $y$  ser orientado positivamente para baixo e a função ser crescente. Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{C - y}{y}}$$

ou equivalentemente

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{C - y}} \quad (2.19)$$

A partir deste ponto vamos introduzir a variável  $\phi$ , a qual representará o ângulo formado entre a reta tangente à curva no ponto  $P(x, y)$ , onde a esfera se encontra em cada instante  $t$ , e o eixo  $y$ , sendo que o ângulo  $\phi$  varia à medida que a esfera se desloca pela referida curva, conforme mostra o esboço a seguir:

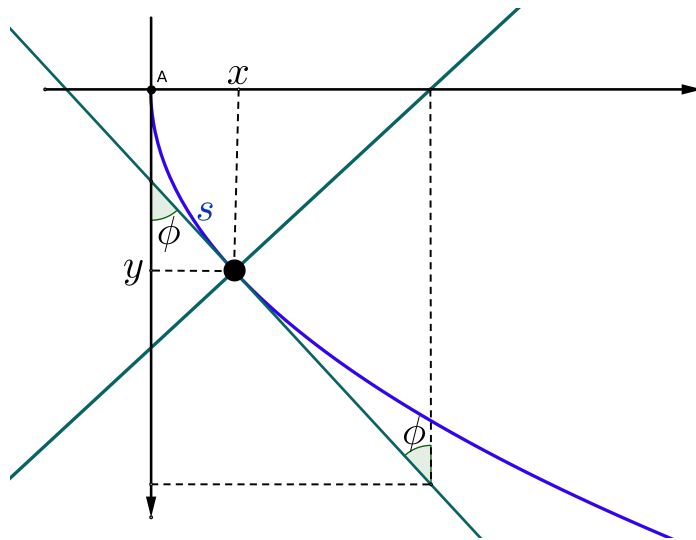


Figura 7: Representação da curva  $y$

Em seguida, podemos determinar a relação:

$$\tan \phi = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{C-y}}$$

elevando ao quadrado os extremos desta equação temos que:

$$\frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi} = \frac{y}{C-y}$$

assim

$$C \sin^2 \phi - y \sin^2 \phi = y \cos^2 \phi$$

de onde

$$y = C \sin^2 \phi \tag{2.20}$$

ou equivalentemente

$$y = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\phi).$$

Derivando  $y = C \sin^2 \phi$ , temos

$$\frac{dy}{d\phi} = 2C \sin \phi \cos \phi$$

e, conforme (2.19), temos:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{C-y}}$$

logo, aplicando a regra da cadeia

$$\frac{dx}{d\phi} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{d\phi} = \sqrt{\frac{y}{C-y}} 2C \sin \phi \cos \phi$$

substituindo  $y = C \sin^2 \phi$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\phi} &= \sqrt{\frac{C \sin^2 \phi}{C - C \sin^2 \phi}} 2C \sin \phi \cos \phi \\ &= C \sqrt{\frac{\sin^2 \phi}{1 - \sin^2 \phi}} 2 \sin \phi \cos \phi \\ &= C \frac{\sin \phi}{\cos \phi} 2 \sin \phi \cos \phi \\ &= C(1 - (1 - 2 \sin^2 \phi)) \\ &= C(1 - \cos 2\phi) \end{aligned}$$

Logo,  $dx = C(1 - \cos 2\phi)d\phi$ , e integrando esta equação temos que

$$\begin{aligned} x &= C \int 1 d\phi - \int \cos 2\phi d\phi \\ &= C \left( \phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi \right) \\ &= \frac{C}{2} (2\phi - \sin 2\phi) \end{aligned}$$

Portanto, para que a esfera se desloque do ponto  $A$  até o ponto  $B$  no menor intervalo de tempo possível, sob a ação apenas da força da gravidade, e sem a ação da força de atrito, ela deverá se deslocar através da curva representada pelas equações paramétricas deduzidas anteriormente e mostradas a seguir:

$$\begin{aligned} x &= \frac{C}{2} (2\phi - \sin 2\phi) \\ y &= \frac{C}{2} (1 - \cos 2\phi) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Tais equações paramétricas representam uma curva especial denominada Cicloide, sobre a qual se tratará no próximo capítulo.



# Capítulo 3

## Cicloide

### 3.1 A geometria da curva Cicloide

A curva Cicloide é uma curva especial e pode ser construída da seguinte forma: Seja um círculo de raio  $r$  posicionado sobre o eixo  $x$ , com um ponto  $P$  fixo em sua borda. Considerando que o ponto fixo  $P$  esteja inicialmente sobre a origem dos eixos do plano cartesiano  $xy$ , e que este círculo role, sem deslizar, no sentido positivo do eixo  $x$ , a curva descrita pelo ponto  $P$  durante a rolagem do círculo é denominada Cicloide.

A Cicloide é uma curva que foi estudada inicialmente no século XV por Nicholas Cusa (1401-1464) quando ele buscava determinar a área de um círculo através da integração. Outro matemático, Charles de Bovelles (1475-1566), foi um dos que avançou no estudo da Cicloide, e em um trabalho de geometria publicado em Paris em 1501, se referiu a essa curva relacionando-a com o “Problema da Quadratura do Círculo”. Os primeiros estudos rigorosos sobre a Cicloide que se tem conhecimento são devidos aos matemáticos Giles Person de Roberval (1602-1675), a Blaise Pascal (1623-1662) e a Evangelista Torricelli (1608-1647), um discípulo de Galileu Galilei (1564-1642). O próprio Galileu também estudou a curva Cicloide, sendo inclusive o primeiro a denominá-la de Cicloide em 1599, quando referiu-se a sua forma graciosa, sugerindo-a para compor o perfil dos arcos de construções em arquitetura.

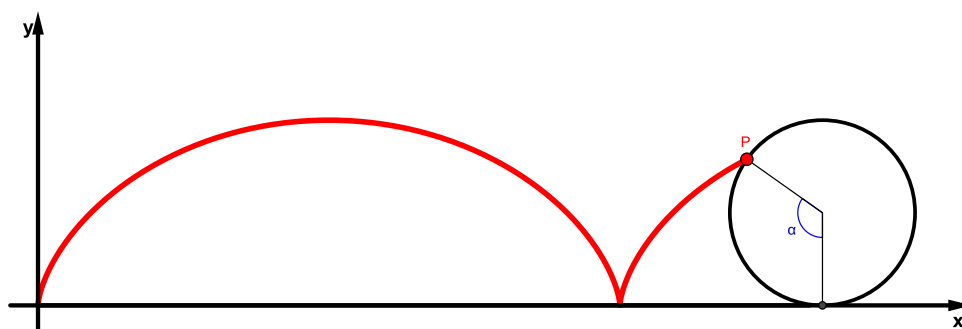


Figura 8: Formação da curva cicloide a partir da rolagem do círculo.

Com o objetivo de se deduzir as equações paramétricas da curva Cicloide, vamos considerar um círculo de raio  $r$  posicionado sobre o eixo  $x$ , de forma que na borda deste círculo tenha um ponto fixo denominado  $P(x, y)$ , o qual se encontra posicionado inicialmente sobre a origem dos eixos. Considerando que este círculo role, sem deslizar, ao longo do eixo  $x$ , no sentido positivo, deduz-se, a seguir, as equações paramétricas da curva descrita pelo ponto  $P(x, y)$ .

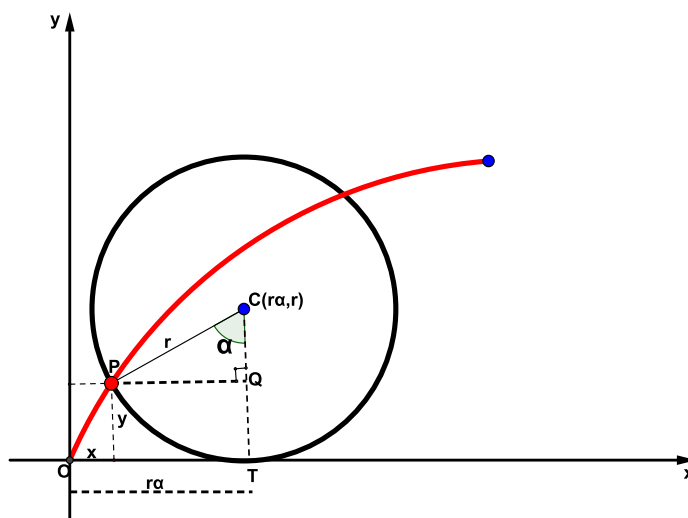


Figura 9: Rolagem do círculo gerando a curva Cicloide

Determinando-se como parâmetro o ângulo central  $\alpha$ , o qual é variável e é formado entre o segmento de reta vertical que possui como extremidades o centro do círculo e o eixo  $x$  e o segundo segmento de reta que possui como extremidades o

centro do círculo e o ponto  $P$  que é fixo na borda do círculo e muda de posição à medida que o círculo rola. Considerando inicialmente que o ponto  $P$  esteja sobre a origem dos eixos, com o ângulo  $\alpha$  nulo, a partir da figura anterior percebe-se que após o círculo ter girado  $\alpha$  radianos ao rolar no sentido horário ao longo do eixo  $x$ , a distância que o círculo rolou, a partir da origem, é:  $|OT| = \text{arc}PT = r\alpha$  e, dessa forma, o centro do círculo, durante a sua rolagem, terá como coordenadas, o ponto  $C(r\alpha, r)$ .

Sejam  $(x, y)$  as coordenadas cartesianas do ponto  $P$  na borda do círculo de raio  $r$ . As equações paramétricas da curva Cicloide, as quais possuem o ângulo central  $\alpha$  como parâmetro, são:

$$\begin{aligned} x &= |OT| - |PQ| \\ &= r\alpha - r \sin \alpha \\ &= r(\alpha - \sin \alpha) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} y &= |TC| - |QC| \\ &= r - r \cos \alpha \\ &= r(1 - \cos \alpha) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Na figura 10 podemos observar a formação da curva Cicloide invertida, a qual é gerada a partir do movimento de um ponto fixo posicionado na borda de um círculo que rola sob o eixo horizontal.

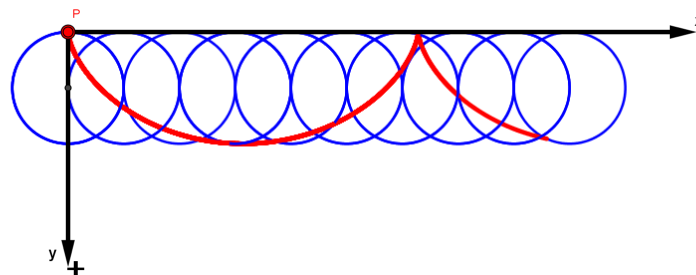


Figura 10: A curva Cicloide invertida

Retornando às equações paramétricas da Cicloide que foram representadas em (3.1) e (3.2), as mesmas também podem ser parametrizadas pelo ângulo  $\phi$  que é formado pela reta tangente à curva Cicloide no ponto  $P$ , o qual que muda de posição a cada instante durante a rolagem do círculo e o eixo vertical  $y$ . Pode-se observar na figura a seguir que o triângulo  $CPG$  é isósceles, pois, os ângulos relativos aos vértices  $P$  e  $G$  são congruentes, portanto, em relação aos ângulos  $\alpha$  e  $\phi$  temos que:

$$\alpha = 2\phi \tag{3.3}$$

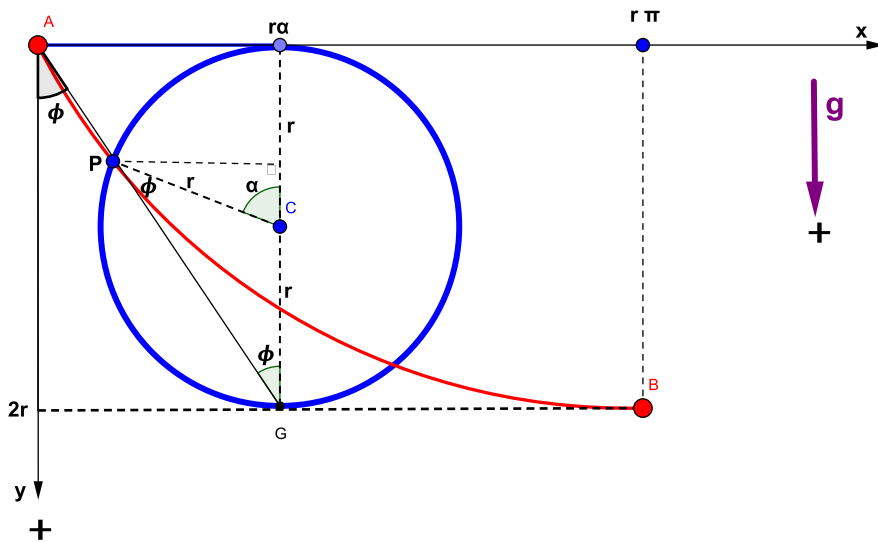


Figura 11: Evidenciando a relação entre os ângulos  $\phi$  e  $\alpha$

E, a partir da relação (3.3), as equações paramétricas (3.1) e (3.2) também podem ser parametrizadas pelo ângulo  $\phi$ , conforme segue:

$$x = r(2\phi - \sin 2\phi) \quad \text{e} \quad y = r(1 - \cos 2\phi).$$

### 3.2 A Cicloide é tautócrona

Tautócrona, do grego “tautos” que significa mesmo e “chronos” que significa tempo, é a propriedade da curva que, independentemente da posição em que se coloque uma esfera sobre ela, por exemplo, o tempo que esta esfera, partindo do repouso, leva

para se deslocar até o ponto mínimo da curva será sempre o mesmo, ou seja, o tempo de deslocamento da esfera até o ponto mais baixo da curva não dependerá da posição na qual a esfera irá iniciar o seu deslocamento, considerando que a esfera esteja sujeita apenas à força da gravidade e sem a interferência do atrito.

O “Problema da Tautócrona” surgiu em 1673 quando Christian Huygens (1629 – 1695) se dedicava a construção de um relógio de pêndulo, e a solução deste problema foi dada pelo próprio Huygens quando demonstrou, geometricamente, que a curva que possuía a propriedade tautócrona era a Cicloide, e, portanto, além de ser a solução do Problema da Braquistócrona, a curva Cicloide também apresenta a propriedade tautócrona, como será demonstrado nesta monografia. Considerando-se uma situação, representada pela figura 11, onde uma esfera de massa  $m$ , inicialmente em repouso e partindo de um ponto inicial  $A(x(\alpha_A), y(\alpha_A))$ , com  $\alpha_A \in [0, \pi]$ , se desloque sobre uma curva Cicloide invertida, tal que  $A(x(\alpha_A), y(\alpha_A))$  corresponda à posição inicial da esfera, e tomando como referência o ângulo central  $\alpha$  do círculo gerador da respectiva curva, e considerando que, posteriormente, essa esfera venha a atingir o ponto mínimo da curva, onde  $\alpha = \pi$ .

Para fins de simplificação, considera-se que a esfera se desloca no plano vertical, sem a ação do atrito, com o eixo  $y$  direcionado com o sentido positivo verticalmente para baixo. Inicialmente, calcula-se o tempo que a esfera demora para efetuar o movimento que inicia-se em um ponto qualquer da curva e finaliza no ponto mínimo desta, onde  $\alpha = \pi$ .

Recorrendo ao “Princípio da Conservação da Energia”, sabemos que ao longo da trajetória a energia mecânica da esfera se conserva, tendo-se:

$$E_{mecânica} = E_{Potencial} + E_{Cinética}.$$

No ponto  $A$  a energia cinética da esfera de massa  $m$  é nula, pois, considera-se que a mesma está inicialmente em repouso.

Sendo  $v$  a velocidade da esfera num ponto genérico  $P(x(\alpha), y(\alpha))$  da curva de parâmetro  $\alpha$ , com  $\alpha \in [\alpha_A, \pi]$  e  $h = y(\alpha) - y(\alpha_A)$ , onde  $\alpha$  representa o ângulo central variável, conforme mostra a figura 3.1 temos  $v^2(t) = \frac{2mgh}{m} = 2gh$ . Logo

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{2gh} \\
&= \sqrt{2g(y(\alpha) - y(\alpha_A))} \\
&= \sqrt{2g(R - R \cos \alpha - R + R \cos \alpha)} \\
&= \sqrt{2gR(\cos \alpha_A - \cos \alpha)}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Substituindo a relação trigonométrica:

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = \cos \alpha,$$

na equação (3.4), obtemos:

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{2gR \left( 2 \cos^2 \frac{\alpha_A}{2} - 1 - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 1 \right)} \\
&= \sqrt{4gR \left( \cos^2 \frac{\alpha_A}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)} \\
&= 2\sqrt{gR \left( \cos^2 \frac{\alpha_A}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Por outro lado, sendo  $s$  a função comprimento do arco percorrido pela esfera do ponto  $A$  até o ponto mais baixo da curva, temos que sendo que

$$v(t) = \frac{ds}{dt}(t).$$

Derivando as equações (3.1) e (3.2) em relação à  $\alpha$ , temos que

$$\frac{dx}{d\alpha} = r(1 - \cos \alpha) \tag{3.6}$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = r \sin \alpha \tag{3.7}$$

Agora, pela definição de comprimento do arco de uma curva parametrizada (veja [6, p. 602]) e por (3.6) e (3.7), temos que

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^\alpha \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2} d\alpha \\
&= \int_0^\alpha \sqrt{[r(1 - \cos \alpha)]^2 + (r \sin \alpha)^2} d\alpha \\
&= \int_0^\alpha \sqrt{r^2(2 - 2 \cos \alpha)} d\theta \\
&= \sqrt{2}r \int_0^\alpha \sqrt{1 - \cos \alpha} d\alpha.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Recordemos que

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

de onde

$$\sqrt{1 - \cos \alpha} = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Então, substituindo esta expressão em (3.8), temos

$$s = 2r \int_0^\alpha \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha,$$

e derivando respeito de  $\alpha$

$$\frac{ds}{d\alpha} = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$

de onde segue

$$ds = 2r \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha. \tag{3.9}$$

Como  $v(t) = \frac{ds}{dt}$ , segue que  $dt = \frac{ds}{v(t)}$  então, substituindo (3.9) e (3.5) nesta equação teremos

$$dt = \frac{2r \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha}{2\sqrt{gr \left( \cos^2 \frac{\alpha_A}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)}} \tag{3.10}$$

integrando ambos os membros de (3.10), temos

$$\begin{aligned}
 t &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\alpha_A}^{\pi} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\alpha_A}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} d\alpha \\
 &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\alpha_A}^{\pi} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha_A}{2} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha_A}{2}}}} d\alpha \\
 &= 2\sqrt{\frac{r}{g}} \left[ -\arcsin \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha_A}{2}} \right]_{\alpha_A}^{\pi} \\
 &= \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.
 \end{aligned}$$

Podemos então concluir que o tempo que a esfera leva para deslocar-se do ponto de partida  $A(x(\alpha_A), y(\alpha_A))$ , seja ele onde for, com  $\alpha_A \in [0, \pi]$ , até o ponto mais baixo da curva, será sempre o mesmo, não dependendo do ponto de partida da esfera, de forma que se conclui que a Cicloide possui a propriedade tautócrona.



Figura 12: Esferas que partem do repouso sobre a curva Cicloide.



A partir da propriedade tautócrona da Cicloide podemos construir um interessante sólido e denominá-lo de *Cuba Tautócrona*, a qual será gerada através da rotação completa de uma curva Cicloide invertida em torno de um eixo vertical que passa pelo seu ponto mínimo. Após a geração deste sólido, representado pela figura 13, pode-se verificar que o mesmo terá forma de uma cuba e apresentará a interessante propriedade tautócrona, de forma que, colocando-se esferas no interior da referida cuba, em qualquer posição, pode-se verificar que, após abandoná-las simultaneamente do repouso, de forma que se desloquem em direção ao ponto inferior da cuba, sujeitas apenas à força gravitacional, todas elas atingirão o ponto mais baixo da cuba no mesmo instante, independentemente das posições iniciais nas quais estas esferas foram colocadas dentro da cuba, pois, ao se deslocarem em direção ao ponto inferior da cuba, as esferas estarão se deslocando sobre curvas Cicloides idênticas e, portanto, estarão sujeitas à propriedade tautócrona descrita anteriormente.

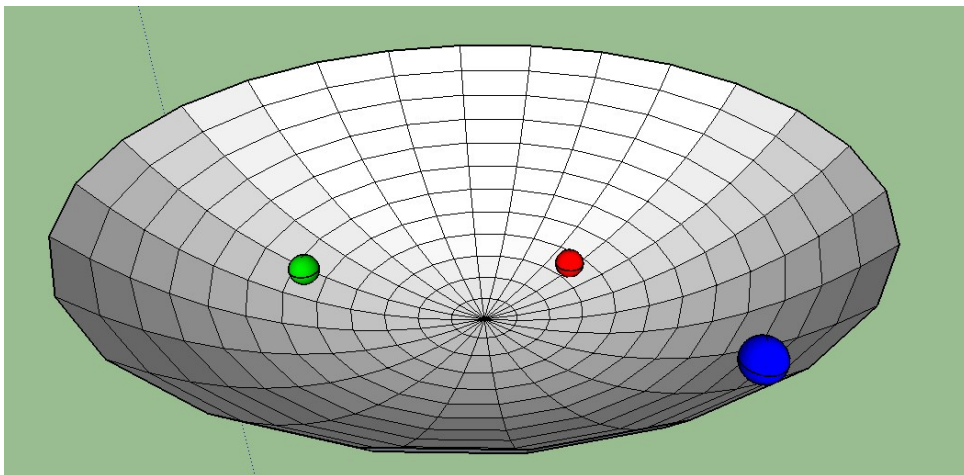


Figura 13: Cuba Tautócrona

### 3.3 O uso do aplicativo Geogebra

Como podemos determinar, através do aplicativo Geogebra, a medida do raio de um círculo que deverá gerar uma curva Cicloide que venha a interceptar um ponto pré-determinado no plano vertical?

Considera-se que o círculo gerador da Cicloide encontra-se inicialmente posicionado sobre a origem dos eixos do plano cartesiano, e que, ao rolar sobre o eixo

horizontal, no sentido horário, o mesmo gere uma curva Cicloide construída através do deslocamento de um ponto fixo  $K$  de sua extremidade.

Com o objetivo de que a curva Cicloide gerada deva interceptar o ponto genérico  $T(a; b)$ , o qual, para efeito de simplificação, é localizado no primeiro quadrante do plano vertical  $xy$ , e admitindo-se que existe um ponto fixo  $K$  sobre a borda de um círculo de raio desconhecido e que durante o seu movimento de rolagem no sentido horário sobre o eixo  $x$ , este ponto  $K$  irá gerar a Cicloide que deverá interceptar o referido ponto  $T(a; b)$ . Admite-se também que o círculo esteja com o seu ponto fixo  $K$  posicionado inicialmente sobre a origem dos eixos cartesianos  $xy$ .

*Solução:* Sendo as equações paramétricas da Cicloide:

$$\begin{aligned}x &= r(\alpha - \sin \alpha) \\y &= r(1 - \cos \alpha)\end{aligned}$$

e substituindo as coordenadas do ponto  $T(a, b)$  nas mesmas, teremos:

$$a = r(\alpha - \sin \alpha) \quad \text{e} \quad b = r(1 - \cos \alpha).$$

De onde teremos:

$$r = \frac{a}{\alpha - \sin \alpha} \quad \text{e} \quad r = \frac{b}{1 - \cos \alpha},$$

e, então, temos:

$$\frac{a}{\alpha - \sin \alpha} = \frac{b}{1 - \cos \alpha},$$

ou seja:

$$a(1 - \cos \alpha) = b(\alpha - \sin \alpha). \tag{3.11}$$

Através do aplicativo Geogebra é possível resolver esta equação determinando-se inicialmente a medida do ângulo  $\alpha$  em radianos e, em seguida, basta substituir o valor do ângulo  $\alpha$  em qualquer das equações anteriores para se determinar o valor correspondente do raio do círculo procurado.

Com o objetivo de se dar um exemplo desta aplicação, vamos determinar a medida do raio do círculo que, durante a sua rolagem, um ponto fixo  $K$  de sua extremidade, e que se encontra posicionado inicialmente na origem do plano cartesiano, deverá gerar uma curva Cicloide que deverá interceptar o ponto  $N(3; 3)$ . Sendo

as equações paramétricas da Cicloide:

$$\begin{aligned}x &= r(\alpha - \sin \alpha) \\y &= r(1 - \cos \alpha)\end{aligned}$$

e substituindo as coordenadas do ponto  $N(3, 3)$  nas mesmas, teremos:

$$3 = r(\alpha - \sin \alpha) \quad \text{e} \quad 3 = r(1 - \cos \alpha).$$

Assim

$$r = \frac{3}{\alpha - \sin \alpha} \quad \text{e} \quad r = \frac{3}{1 - \cos \alpha},$$

então:

$$\frac{3}{\alpha - \sin \alpha} = \frac{3}{1 - \cos \alpha},$$

ou seja:

$$\alpha - \sin \alpha = 1 - \cos \alpha \tag{3.12}$$

Nesta etapa, vamos usar o aplicativo Geogebra para determinar o valor do ângulo  $\alpha$  (em radianos) que soluciona a equação (3.12), sendo que o resultado será evidenciado graficamente através das coordenadas do ponto de interseção entre as funções  $f(\alpha) = \alpha - \sin \alpha$  e  $g(\alpha) = 1 - \cos \alpha$ .

Na figura 14 podemos verificar a plotagem dos gráficos das funções  $f(\alpha)$  e  $g(\alpha)$  e as coordenadas dos pontos  $A$  e  $P$  onde os gráficos destas funções se interceptam.

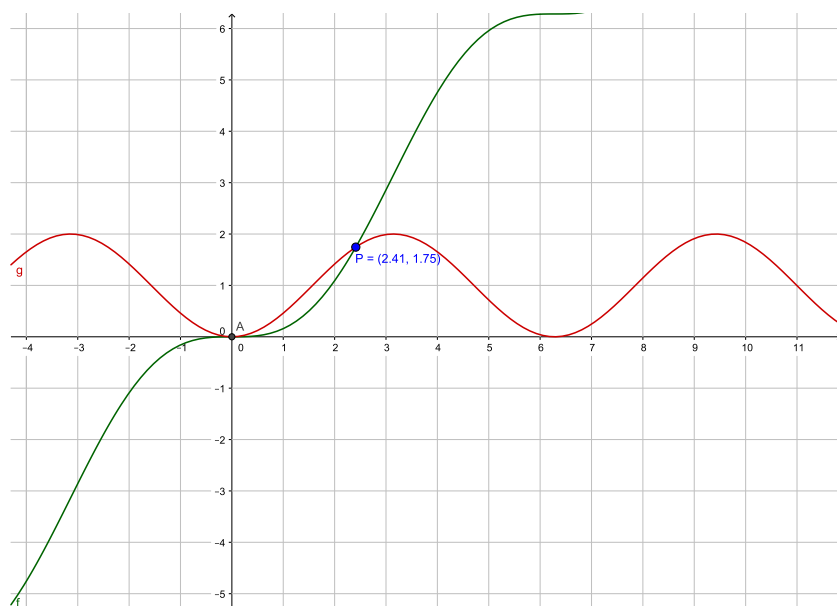


Figura 14: Interseção dos gráficos das funções  $f(\alpha)$  e  $g(\alpha)$

Através da análise gráfica citada, determinou-se que a solução da equação se verifica para  $\alpha=0$  e  $\alpha=2,41$  radianos, conforme é evidenciado pelas interseções nos pontos  $A(0,0)$  e  $P(2,41; 1,75)$ . Em seguida, substituindo o valor de  $\alpha = 2,41$  em alguma das equações para  $r$  determinamos o valor do raio do círculo gerador desta Cicloide, que neste caso deverá medir  $r = 1,72$ .

Com o objetivo de se fazer a verificação, utilizou-se novamente o aplicativo Geogebra na construção de um círculo com o raio  $r = 1,72$  e com o ponto fixo  $K$  de sua borda posicionado inicialmente na origem dos eixos cartesianos, e, na sequência, efetuando a rolagem deste círculo, ficou constatado que a curva Cicloide gerada passa pelo ponto  $N(3,3)$ , conforme se evidencia na figura 15.

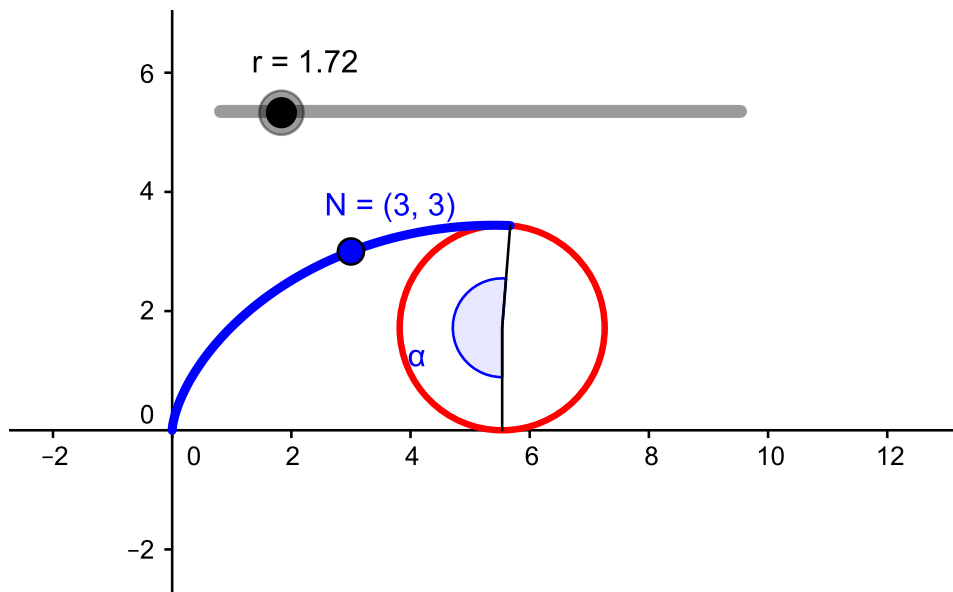


Figura 15: Gráfico da curva Cicloide

# Referências Bibliográficas

- [1] G. G. Garbi, “A Rainha das Ciências,” 2006.
- [2] J. STEWART, “Cálculo, vol. 1, 7<sup>a</sup> edição,” *CENGAGE Learning*, 2013.
- [3] L. ELSGOLTZ, “Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional,” 1975.
- [4] J. M. B. FILARDO and M. S. D. CATTANI, “Elementos de física e matemática 1a edição,” vol. 2, 2011.
- [5] E. L. Lima, *Análise Real*, vol. 2. IMPA, 1997.
- [6] J. STEWART, “Cálculo-vol. ii. 6a edição,” *São Paulo: Thomson*, vol. 2, 2013.