UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre a Conjectura de Gallai: Problemas Associados à Decomposição e Cobertura de Grafos

Marco Antonio Ticse Aucahuasi

Belo Horizonte - MG
12 de julho de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Marco Antonio Ticse Aucahuasi

Orientador: Bhalchandra Digambar Thatte

Sobre a Conjectura de Gallai: Problemas Associados à Decomposição e Cobertura de Grafos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEx) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
12 de julho de 2019

Aos meus pais Vidal e Maria Luisa.

Don't give up...!!!

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por ter me concedido força, perseverança e coragem na dedicação dos meus estudos e para concluir este trabalho.

Aos meus pais Vidal Ticse Sanchez e Maria Luisa Aucahuasi Pacheco por serem minha base e por todo amor, carinho e apoio que me fez ser o homem que sou hoje.

Ao meu orientador, Prof. Bhalchandra, por sua paciência, postura profissional e pelo tempo dedicado a mim sempre que precisei; um professor com quem aprendi muito e que admiro pela sua dedicação.

Aos membros da banca, professores Aldo Procacci e Maurício Collares, por contribuir com correções de grande valia mostrando interesse no tema, bem como questionamentos abordando problemas afins.

A meus professores Ezequiel Fajardo, Wilfredo Mendoza, Edinson Montoro e Dionisio Moreno da Universidade Nacional do Callao, quem sempre motivaram-me ao continuar a linha da matemática fora do Peru. A minha professora Jesus Victória da Pontifícia Universidade Católica do Peru, pelos conselhos e sempre ter uma porta aberta para mim.

A todos os professores do programa de PG-Mat. Aos professores Silas Luiz de Carvalho e Carlos Maria Carballo quem me deram ensinamentos e conselhos. Ao professor Remy de Paiva Sanchis, por depositar sua confiança e me dar a oportunidade de continuar meus objetivos. As funcionárias da secretaria, Andréa e Kelli que desde o início do mestrado sempre foram pessoas maravilhosas comigo.

A meu amigo E. Rocky que desde a graduação, sempre tive sua amizade. Aos meus amigos Javier, Matute, Eduardo "El Chato", Eduardo "Manito", Carlos "El colocho" e Miguel, que mais do que beber algumas cervejas e comer alguns espetinhos, encontrei excelentes amigos. Em particular, eu agradeço ao Arturo Fernandez pelos conselhos, o tempo e a amizade. Além disso, por acreditar em mim e confiar que ia a concluir o mestrado.

Finalmente, agradeço ao programa da OEA e a FAPEMING pelo apoio financeiro.

Abstract

This work is based on the study of Gallai's conjecture (1966), which tells us that any connected graph with n vertices can be decomposed into at most $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ edge-disjoint paths. One of the first results by Lovász (1968) is presented. It asserts that if a graph has at most one vertex of even degree, then the conjecture is true. Decompositions by trees and complete graphs are studied. We also study works of Donald (1980) and Pyber (1996) which extend Lovász's technique. Finally we study the result of Fan (2005) which states that if subgraph induced by even-degree vertices of a graph G is a graph with a certain property, then the conjecture is true for G.

Key words: Gallai's conjecture, decomposition, covering.

Resumo

Este trabalho está baseado no estudo da conjectura de Gallai (1966), que nos diz que qualquer grafo conexo com n vértices pode ser decomposto em no máximo $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ caminhos aresta-disjuntos. Apresenta-se um dos primeiros resultados obtidos por Lovász (1968), que afirma que se um grafo tem no máximo um vértice de grau par, então a conjectura é verdadeira. Brevemente, estuda-se as decomposições por árvores e grafos completos. Estudamos os trabalhos de Donald (1980) e Pyber (1996) que estenderam a técnica de Lovász. Finalmente, estudamos o resultado de Fan (2005) que afirma que se um subgrafo induzido por vértices de grau par de um grafo G é um grafo com certa propriedade, então a conjectura é verdadeira para G.

Palavras- chave: Conjectura de Gallai, decomposição, cobertura.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Ao longo dos últimos 50 anos, os problemas de decomposição e cobertura de grafos construíram relevantes áreas da pesquisa em teoria de grafos e combinatória. Em particular, uma questão feita por Paul Erdős permanece em aberto e deu origem à conjectura de Gallai.

Nesse sentido, estudaremos a evolução da conjectura de Gallai. No entanto, para ter uma noção do problema, é importante conhecer como foi proposta a conjectura. Inicialmente, em 1966, Erdős perguntou qual é o número mínimo de caminhos aresta disjuntos em que todo grafo conexo de n vértices pode ser decomposto. Nesse mesmo ano, Gallai conjecturou que tal número é $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Formalmente,

Conjectura de Gallai. *Se G é um grafo conexo de n vértices, então G pode ser decomposto em no máximo $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ caminhos.*

Segundo as definições padrão, uma decomposição de um grafo G é uma família $\mathcal{F} = \{H_1, \ldots, H_r\}$ de subgrafos aresta-disjuntos de G tal que cada aresta de G pertence a exatamente um H_i. Além disso, se cada H_i é um caminho, então $\mathcal{F}$ é chamada de decomposição por caminhos de G. A cardinalidade mínima de uma decomposição por caminhos de G é chamada de path number e é denotada por $p(G)$.

Umas das primeiras contribuições na direção de resolver tal conjectura foi dada por Lovász [9], que usou uma técnica que até hoje é muito empregada. Sob essas definições, o autor apresentou o seguinte teorema:

Teorema (Lovász, 1966)**.** *Um grafo G com n vértices tem uma decomposição $\mathcal{F}$ em no máximo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ caminhos ou ciclos.*

Uma das consequências desse teorema é que, se G contém no máximo um vértice de grau par, então G pode ser decomposto em $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ caminhos aresta-disjuntos. Anos depois, a partir deste teorema, Donald [6] mostrou que um grafo G pode ser decomposto em $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ caminhos aresta-disjuntos.

Posteriormente, Pyber [10], provou que a conjectura é verdadeira quando cada ciclo de G contém pelo menos um vértice de grau ímpar. A partir desse resultado, temos que:

Teorema (Pyber, 1996). *Todo grafo conexo G com n vértices pode ser coberto por $\frac{n}{2} + O(n^{\frac{3}{4}})$ caminhos.*

Teorema (Pyber, 1996). *Todo grafo conexo G de n vértices com e arestas pode ser coberto por $\frac{n}{2} + 4(\frac{e}{n})$ caminhos.*

A partir da técnica usada no procedimento da demonstração feita em Lovász [9], Fan [8] nos diz que por meio de uma construção é possível decompor um grafo G (não necessariamente conexo) em $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ caminhos aresta-disjuntos, se o subgrafo induzido pelos vértices de grau par de G é um α-grafo. Em outras palavras, foi obtido o seguinte resultado:

Teorema (Fan, 2005). *Seja G um grafo com n vértices (não necessariamente conexo). Se o E-subgrafo de G é um α-grafo, então G pode ser decomposto em $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ caminhos aresta-disjuntos.*

Com todo isso, nesta dissertação, estudamos os 4 resultados descritos acima descrevendo a evolução da conjectura.

No primeiro capítulo, serão introduzidos as principais definições e propriedades sobre grafos, tendo o intuito de facilitar a compreensão dos seguintes capítulos.

No segundo capítulo, mostramos com detalhe a técnica usada por Lovász na demostração de seu teorema e alguns resultados para grafos especiais.

No terceiro capítulo, introduzimos os conceitos referentes a cobertura na demostração dos teoremas de Pyber.

No quarto capítulo, a partir da técnica de Lovász, provamos o resultado de Fan resolvendo um caso particular da conjectura.

Capítulo 1

Notações e conceitos básicos

Neste capítulo definiremos os conceitos e resultados padrões baseados nos livros de C. Berge [1], D. West [12] e J. Bondy e U. S. R. Murty [2] da teoria de grafos. Tais conceitos serão importantes para nossos estudos ao longo deste trabalho.

1.1 Grafos

Definição 1.1.1. Um **grafo** G é uma tripla $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, consistindo de um conjunto não vazio de vértices V, um conjunto de arestas E (disjunto de V), e uma função incidente ψ_G que associa cada aresta de G um par não ordenados de vértices de G. Se e é uma aresta e u e v são vértices tal que $\psi_G(e) = uv$, então e une u e v; os vértices de uma aresta são chamados de *extremidades*. Dizemos que u é **adjacente** a v se e somente se $\{u, v\} \in E$. Quando u e v são extremidades de uma aresta, são ditas adjacentes ou vizinhos. Uma aresta como $\{u, v\}$ será denotada simplesmente por uv ou por vu. Um **laço** (loop) é uma aresta cujas extremidades são iguais. Uma **aresta múltipla** ou aresta paralela são arestas que possuem os mesmos vértices como extremidades.

Un **grafo simples** é um grafo sem loops nem arestas múltiplas. Nesta dissertação estudaremos só grafos simples. O termo grafo sempre faz referência a grafos simples.

Definição 1.1.2. Seja $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ um grafo. A **ordem** de um grafo G é o número de vértices de G. O **tamanho** de um grafo G é o numero de arestas de G. Além disso, $|V| = n$ e $|E| = m$ denotam o número de vértices e o número de arestas, respetivamente. Dado um $v \in V$, denotamos por $N_G(v)$ (ou simplesmente por $N(v)$) ao conjunto dos vértices adjacentes a v, isto é, $N_G(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$. O **grau** de v, denotado por

$d_G(v)$ (ou simplesmente $d(v)$), é o número de vértices adjacentes a v, isto é,

$$d_G(v) = d(v) = |N_G(v)|$$

O grau máximo de G é definido como $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$. O grau mínimo de G é definido como $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$

Definição 1.1.3. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que G é **regular** quando todos seus vértices têm o mesmo grau, ou seja, $\delta(G) = \Delta(G)$. Um grafo é k-regular se $d(v) = k$ para todo vértice v.

Observação 1.1.4. Um vértice v é isolado se $d(v) = 0$. Um vértice v é universal quando está conectado por arestas a todos os demais vértices, isto é, $N(v) = V(G)\backslash\{v\}$. Se v é um vértice universal então $d(v) = n - 1$.

Definição 1.1.5. Um grafo **trivial** é um grafo com um único vértice (n = 1). Um grafo **nulo** é um grafo com seus conjuntos de vértices e arestas vazios.

Teorema 1.1.6. *Em qualquer grafo simples G,*

$$\sum_{v_i \in V(G)}^{n} d(v_i) = 2m.$$

Corolário 1.1.7. *Em um grafo qualquer, o número de vértices de grau ímpar é par.*

Definição 1.1.8. Um **subgrafo** de um grafo G é um grafo H ($H \subseteq G$) se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e ψ_H é uma restrição de ψ_G em $E(H)$. Quando $H \subseteq G$ mas $H \neq G$, dizemos que H é um subgrafo próprio de G ($H \subset G$). Um **subgrafo gerador** (spanning subgraph) de G é um subgrafo H de G tal que $V(H) = V(G)$.

Notação 1.1.9. Seja G um grafo. Se $B \subseteq E(G)$, então $G\backslash B$ é o grafo obtido de G apagando todas as arestas de B. Seja $S \subseteq V(G)$, então $G - S$ é o grafo obtido de G apagando todos os vértices de S junto com todas suas arestas com pelo menos uma extremidade em S. Se $S = \{x\}$, denotaremos como $G - x$.

Definição 1.1.10. Um subgrafo H é um **subgrafo induzido** de G se, para qualquer par de vértices x e y de H, xy é uma aresta de H se e somente se xy é uma aresta de G. Em outras palavras, H é um subgrafo induzido de G se ele tem todas as arestas que aparecem em G

sobre o mesmo conjunto de vértices. Se o conjunto de vértices de H é um subconjunto S de $V(G)$, então H pode ser escrito como $G[S]$ e diz-se ser induzido por S.

Exemplo 1.1.11. No seguinte grafo G, mostra-se a diferença entre grafo induzido e grafo gerador.

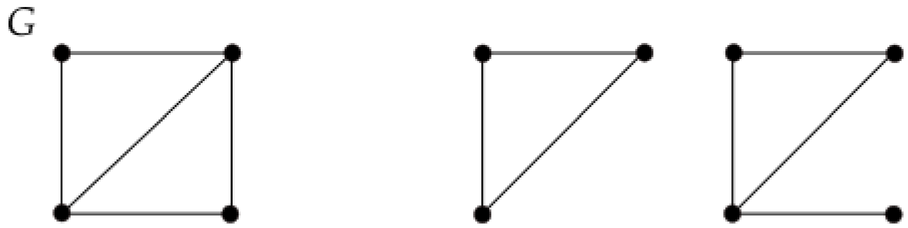


Figura 1.1: Subgrafo induzido e subgrafo gerador

Definição 1.1.12. O **complemento** de um grafo G é o grafo $\bar{G}$ tal que $V(G) = V(\bar{G})$ e $E(\bar{G}) = \{uv \backslash uv \notin E(G)\}$. Note que G e seu complemento são grafos disjuntos em arestas. Portanto, $G \cap \bar{G}$ é um grafo sem arestas. Além disso, $G \cup \bar{G}$ é um grafo completo.

Definição 1.1.13. Um grafo G é um **grafo completo** se quaisquer dois vértices de G são vizinhos. O número de arestas de um grafo completo é

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Denotamos por K_n um grafo completo com n vértices. Um grafo completo é um grafo regular com todos seus vértices de grau $n-1$. Um **clique** num grafo G é um subgrafo que é completo.

Definição 1.1.14. Um **conjunto independente** (ou conjunto estável) em um grafo é um conjunto de vértices não adjacentes entre si.

Definição 1.1.15. Um **caminho** de n vértices, denotado por P_n, é um grafo tal que $V(P_n) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e $E(P_n) = e_1, e_2, ..., e_{n-1}$, onde, $e_i = v_i v_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n-1$. Um caminho é simples se não tem vértices repetidos. Um **ciclo** de n vértices, denotado por C_n, é um grafo tal que $V(C_n) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e $E(C_n) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, onde, $e_i = v_i v_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n-1$, e $e_n = v_1 v_n$. Em um ciclo, devemos ter $n \geq 3$. O **comprimento** de um caminho ou ciclo é o numero de arestas do caminho ou ciclo. Um caminho de comprimento k tem $k+1$ vértices. Um ciclo de comprimento k tem k vértices.

Teorema 1.1.16. *Se um grafo contém exatamente dois vértices de grau ímpar, existe um caminho ligando esses dois vértices.*

Demonstração. Seja G um grafo onde todos os vértices são de grau par, exceto os vértices v_1 e v_2. Pelo Corolário 1.1.7, não existe um grafo (ou uma componente) que tem um número ímpar de vértices de grau ímpar. Então v_1 e v_2 devem pertencer à mesma componente, e deve existir um caminho entre eles. ■

Teorema 1.1.17. *Seja G um grafo no qual todos os vértices tenham grau pelo menos 2. Então, G contém um ciclo.*

Demonstração. Dado $v \in V$, construiremos um ciclo através de um processo recursivo. Escolhemos v_1 um vértice qualquer adjacente a v e, para cada $i > 1$, escolhemos v_{i+1} algum vértice diferente de v_{i-1} adjacente à v_i. Temos que a existência de tais vértices é garantida por hipótese (pois cada vértice pertence a no mínimo duas arestas) e como G tem um número finito de vértices, devemos em algum momento escolher um vértice já escolhido antes. Se v_k é o primeiro tal vértice, então o percurso entre as duas ocorrências de v_k é um ciclo, como queríamos. ■

Teorema 1.1.18. *Um grafo admite uma decomposição por ciclos se e somente se os vértices de G têm grau par.*

Definição 1.1.19. Um **caminho Hamiltoniano** é um caminho que visita cada vértice de G exatamente uma vez. Um grafo que contém um caminho Hamiltoniano é chamado um grafo Hamiltoniano. Um grafo é Hamilton-conexo se para cada par de vértices existe um caminho Hamiltoniano entre os dois vértices. Analogamente para **ciclo Hamiltoniano**.

Definição 1.1.20. Seja $G = (V, E)$ um grafo e $u, v \in V$.

- A **distância** entre dois vértices u e v é o comprimento do menor caminho de u a v no grafo G. Utilizamos a notação $dist(u, v)$ para representar a distância entre u e v.
- A **excentricidade** de um vértice v em um grafo G é definida como

$$exc(v) = \max\{dist(v, w) \backslash w \in V(G)\}$$

- O **diâmetro** de um grafo está definido da seguinte maneira

$$diam(G) = \max\{exc(v) \backslash v \in V(G)\}$$

Definição 1.1.21. Um grafo $G = (V, E)$ é **conexo** se para todo par de vértices $u, v \in V$ existe um caminho de u para v. Caso contrário, é chamado desconexo. Uma **componente conexa** de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G. Denotamos por $k(G)$ o número de componentes conexas de G. É claro que G é conexo se e somente se $k(G) = 1$.

Observação 1.1.22. O adjetivo maximal significa o seguinte: se H é componente conexa de G então não existe um grafo conexo H' tal que $H \subset H' \subseteq G$, ou seja, não existe subgrafo conexo H' de G tal que H é subgrafo próprio de H'.

Definição 1.1.23. Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ é a união de dois conjuntos disjuntos independentes chamados partes de G, isto é, se pudermos escrever $V = V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são conjuntos não vazios, disjuntos e independentes.

Definição 1.1.24. Um grafo **bipartido completo**, $G = (V_1 + V_2, E)$, é um grafo bipartido tal que para quaisquer dois vértices, $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$, v_1v_2 é uma aresta em G. O grafo bipartido completo com partes de tamanho $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$, é denotado por $K_{n,m}$.

1.2 Árvores

Nesta subseção, apresentaremos uma classe de grafo que chamamos de árvore e estudaremos alguns resultados sobre eles.

Definição 1.2.1. Um grafo sem ciclos é chamado **acíclico**. Uma **árvore** é um grafo conexo acíclico. Uma **floresta** é um grafo acíclico cujas componentes conexas são árvores. Uma **folha** ou vértice pendente é um vértice de grau 1. Uma árvore geradora é um subgrafo gerador que é uma árvore. Uma estrela é uma árvore consistindo de um vértice adjacente a todos os demais vértices. A estrela com n vértices é um grafo bipartido completo $K_{1,n-1}$.

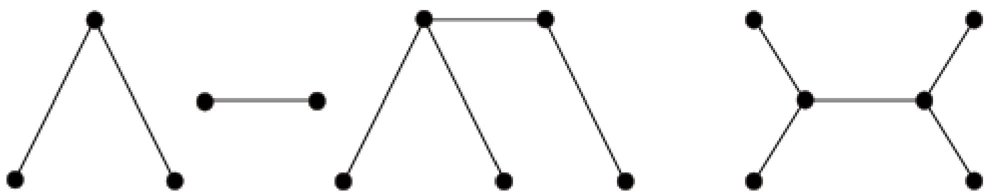


Figura 1.2: Floresta e árvore

Teorema 1.2.2. *Um grafo T é uma árvore se e somente se existe um único caminho entre cada par de vértices de T.*

Corolário 1.2.3. *Se G é um grafo conexo, então G contém pelo menos um ciclo se e somente se* $m \geq n$.

Corolário 1.2.4. *Toda árvore não trivial tem pelo menos dois vértices de grau 1.*

Proposição 1.2.5. *Toda árvore não trivial tem pelo menos duas folhas.*

Proposição 1.2.6. *Sejam* T *uma árvore e* v *uma folha de* T*. Então,* $T - v$ *é uma árvore.*

Definição 1.2.7. Uma **ponte** ou **aresta de corte** (cut-edge) de um grafo conexo G é uma aresta e tal que $k(G - e) > k(G)$. Em outras palavras, uma aresta é uma ponte se sua exclusão desconecta o grafo.

Proposição 1.2.8. *Toda aresta em uma árvore é uma ponte.*

Teorema 1.2.9. *Uma aresta e é uma ponte de G se e somente se não existe ciclo contendo e em G.*

Teorema 1.2.10. *Um grafo conexo T é uma árvore se e somente toda aresta de T é uma ponte.*

A partir das definições, teoremas, proposições e corolários podemos escrever o seguinte teorema.

Teorema 1.2.11. *Seja T um grafo com n vértices. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *T é uma árvore.*
2. *T não contém ciclos e tem* $n - 1$ *arestas.*
3. *T é conexo e* $m = n - 1$.
4. *T é conexo e toda aresta de G é uma ponte.*
5. *Todo par de vértices de T é ligado por um único caminho.*

1.3 Conectividade

Definição 1.3.1. Dado um grafo conexo G, um conjunto de vértices $S \in V(G)$ é um **separador** de G se $k(G - S) > k(G)$. Um **vértice de corte** de um grafo é um vértice tal que a remoção deste vértice provoca um aumento no número de componentes conexas.

Exemplo 1.3.2. No seguinte grafo conexo, C é um separador, pois a remoção do mesmo gera dois componentes conexas.

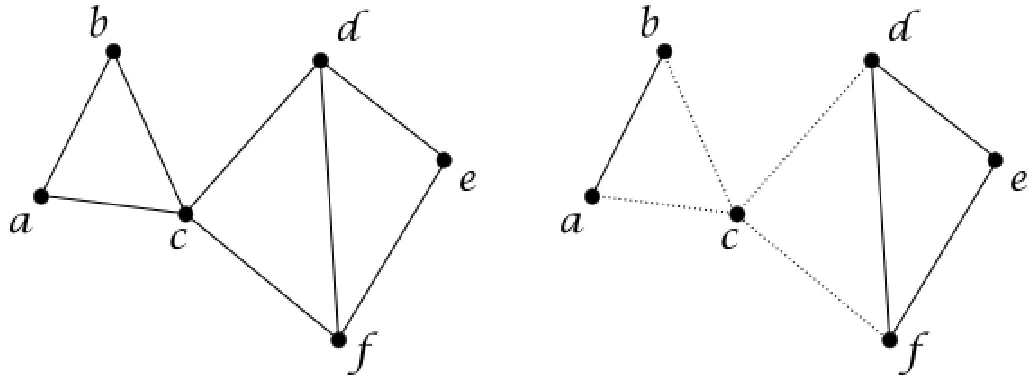


Figura 1.3: Vértice de corte

Definição 1.3.3. Um grafo conexo é **não separável** se não tem vértices de corte.

Definição 1.3.4. Um **bloco** de um grafo G é subgrafo conexo B de G tal que B é conexo maximal não separável de G. Se o próprio G é conexo e não tem vértice de corte, então, G é um bloco. Um **bloco final** em B é um bloco que contém no máximo um vértice de corte.

Observação 1.3.5.

- Dois blocos distintos em um grafo têm no máximo um vértice em comum; no caso de compartilharem um vértice, tal vértice será necessariamente um vértice de corte.
- Cada aresta de um grafo G está em um único bloco. Portanto, os blocos determinam uma partição de $E(G)$.
- Se B é um bloco de G, então B como um grafo não tem vértice de corte, mas B pode conter vértices que são vértices de corte de G.

1.4 Emparelhamentos

Definição 1.4.1. Seja G um grafo. Um conjunto de arestas $M \subseteq E(G)$ é chamado **emparelhamento** (matching), se $e \cap e' = \emptyset$ para quaisquer par de arestas distintas $e, e' \in M$. Em outras palavras, o conjunto $M \subseteq E(G)$ é um emparelhamento se tem a propriedade que cada vértice em $V(G)$ é incidente no máximo uma aresta de M. Dado um emparelhamento M e um vértice v, dizemos que M **satura** (ou cobre) v, se alguma aresta de M incide em v. Caso contrário, dizemos que v é um vértice **insaturado** (ou descoberto) por M.

Definição 1.4.2. Um emparelhamento M é **perfeito** se $|M| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; em outras palavras, M satura os vértices de G. Um emparelhamento M será **maximal** se não existir nenhum outro que o contenha propriamente, e será **máximo** se não existir nenhum outro de cardinalidade maior. É claro que todo emparelhamento máximo é maximal, mas nem todo emparelhamento maximal é máximo. O tamanho de um emparelhamento maximal é denotado por $v(G)$.

Exemplo 1.4.3. No grafo de Petersen, $v(G) = 5$,

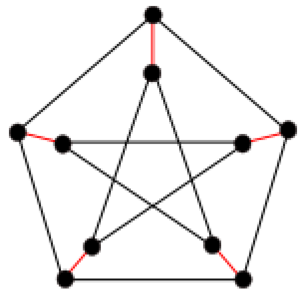


Figura 1.4: Emparelhamento do grafo de Petersen

Exemplo 1.4.4. Diferença entre emparelhamento maximal e emparelhamento perfeito.

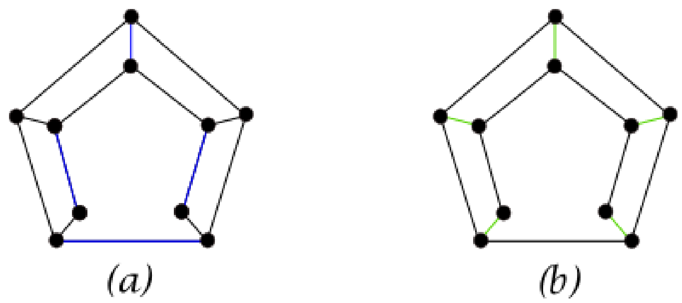


Figura 1.5: (a) Emparelhamento maximal, (b) Emparelhamento perfeito

Capítulo 2

Introdução à decomposição de grafos

Neste capitulo, estudaremos os artigos de Lovász [9] e Donald [6]. O objetivo é detalhar as ideias de decomposição de um grafo, seja por caminhos e ciclos, por árvores ou por grafos completos. Assim, nosso estudo está baseado em estudar o numero mínimo de subgrafos que decompõem um grafo G sendo estes de certa classe.

2.1 Decomposição por caminhos e ciclos

Vejamos algumas definições prévias para entender o teorema central desta seção.

Definição 2.1.1. Uma **decomposição** de um grafo G é uma família $\mathcal{F} = \{H_1, ..., H_r\}$ de subgrafos aresta-disjuntos de G tal que cada aresta de G pertence a exatamente um H_i. Se cada H_i é um caminho, então $\mathcal{F}$ é chamada de **decomposição por caminhos** de G. O conceito de decomposição por ciclos é definido analogamente.

Definição 2.1.2. A cardinalidade mínima de uma decomposição por caminhos de G é chamada de **path number** e é denotada por $p(G)$.

Conjectura 2.1.3 (Conjectura de Gallai)**.** *Se G é um grafo conexo de n vértices, então G pode ser decomposto em no máximo $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ caminhos.*

Em outras palavras, a conjectura de Gallai diz que $p(G) \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

Proposição 2.1.4. *Se G é um grafo só com vértices de grau impar, então $p(G) \geq \frac{n}{2}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, ..., P_k\}$ uma decomposição mínima por caminhos, isto é, $p(G) = k$. Como cada vértice é de grau impar, cada um é extremidade de pelo menos um caminho P_i onde $1 \leq i \leq k$, então $k \geq \frac{n}{2}$. ■

A proposição anterior mostra que a conjectura de Gallai é sharp, em outras palavras que é ótima.

É importante destacar que no artigo de Lovász [9], mostrou-se uns dos primeiros resultados sobre dita conjectura. Assim, o teorema a seguir é um dos principais resultados neste capítulo porque a técnica usada na demonstração se tornou uma técnica padrão para muitos resultados posteriores.

Teorema 2.1.5 (Lovász, 1968). *Um grafo G de n vértices tem uma decomposição $\mathcal{F}$ de no máximo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ caminhos ou ciclos.*

A seguinte demostração do teorema está baseado no artigo de Donald [6] que corrige um erro na prova original do Lovász.

Demonstração. Seja n o numero de vértices não isolados em G. Provaremos por indução em $\lambda(G) = 2m - n$. Se $\lambda(G) \leq 0$ então pelo Teorema 1.1.6,

$$\sum_{v \in V}^{n} d_G(v) = 2m \leq n.$$

Como $d_G(v) \geq 1, \forall\, v \in V(G)$, é claro que

$$\sum_{v \in V}^{n} d_G(v) \geq n.$$

Portanto, $d_G(v) = 1$, para todo v não isolado. Assim o teorema é verdadeiro para arestas isoladas, pois o grafo pode ser desconexo. Vamos supor que $\lambda(G) = 2m - n > 0$ e que o teorema é verdadeiro para qualquer grafo G' de ordem n' com:

$$\left\lfloor \frac{n'}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad e \quad \lambda(G') < \lambda(G) \tag{1}$$

A partir das condições anteriores, serão considerados dois casos para a demonstração do teorema.

Caso I: G tem pelo menos 1 vértice de grau par. Em Donald [6], chama-se *construção de Lovász em x* à seguinte construção: Suponhamos que existe pelo menos um vértice não isolado de grau par e seja $x \in V(G)$. Denotemos por $a_1, a_2, ..., a_k$ os vértices de grau par de G e $b_1, b_2, ..., b_l$ vértices de grau impar de G adjacentes a x em G. Seja G' o grafo obtido removendo-se as arestas $xa_i \in E(G)$. Denotando por n' e m' o número de vértices não-isolados e arestas de G', respectivamente, tem-se que G' satisfaz a condição (1), pois $n-1 \leq n' \leq n$ e $m' = m-k \leq m-1$. Assim $\lambda(G') \leq 2m-n-1 < \lambda(G)$. Por hipótese de indução, o grafo G' possui uma decomposição miníma $\mathcal{F}'$ de no máximo $\lfloor \frac{n'}{2} \rfloor$ caminhos ou ciclos aresta disjuntos de G' por (1).

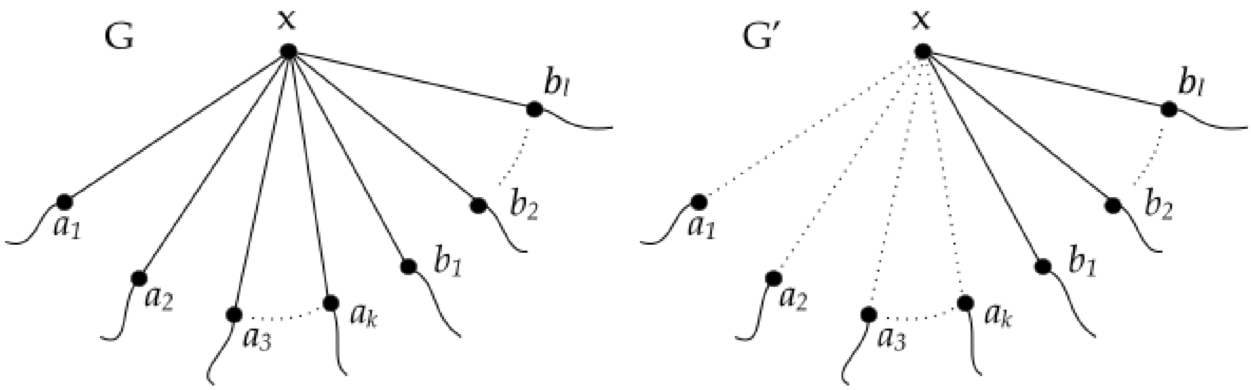
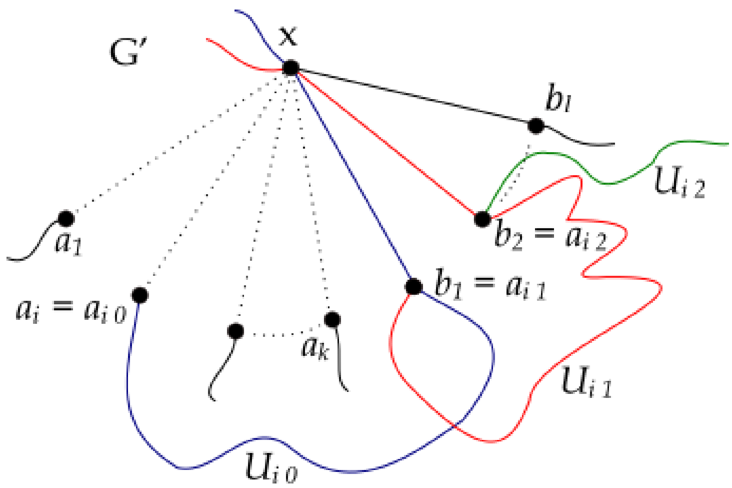


Figura 2.1: Construção do grafo G' no teorema de Lovász

Se H é o conjunto de vértices adjacentes a x em G, então todos os vértices de H têm grau ímpar em G'. Cada vértice de H em G' será um ponto final de pelo menos um caminho de $\mathcal{F}'$. Para cada $i = 1,2,..,k$ definimos uma sequência de vértices de H, $S_i = \{a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, ...\}$ tal que $a_{i,0} = a_i$ e $a_{i,\mu}$ é da seguinte forma: Como $a_{i,\mu} \in H$, $a_{i,\mu}$ tem grau impar em G' e por tanto existe um caminho $U_{i,\mu}$ de $\mathcal{F}'$ começando em $a_{i,\mu}$. Assim

- Se $x \notin U_{i,\mu}$ então a sequência acaba no ponto $a_{i,\mu}$.
- Se $x \in U_{i,\mu}$ então $a_{i,\mu+1}$ será o vértice que precede x.



Chamaremos cada sequência $S_i = \{a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, ...\}$ uma *Sequência de Lovász*. Neste ponto temos que fazer quatro observações importantes.

1. $a_{i,\mu}$ é adjacente a x em G' se e só se $\mu \geq 1$. A demostração é obvia pois, se suponhamos que $\mu = 0$, a aresta $xa_{i,\mu} = xa_i \notin E(G')$ pela construção de G', assim $\mu \geq 1$. Inversamente, pela construção das sequências de Lovász, $a_{i,\mu}$ é adjacente a x em G'.

2. Se $a_{i,\mu} = a_{j,\nu}$ então $i = j$ e $\mu = \nu$. Seja $a_{i,\mu} = a_{j,\nu}$ e suponhamos que $\mu \leq \nu$. Se $\mu = 0$, então $a_{j,\nu} = a_{i,0} = a_i$ mas $xa_i \notin E(G')$. Assim $xa_{j,\nu} \notin E(G')$, portanto $\nu = 0$. Se $a_i = a_j$ então $i = j$. Agora, se $\mu \geq 0$, consideremos um caminho W da decomposição $\mathcal{F}'$ que contem $xa_{i,\mu}$. Então $W = U_{i,\mu-1}$ pois $a_{i,\mu-1}$ foi obtido como o vértice do caminho $U_{i,\mu-1}$ que precede x. Da mesma forma, consideremos um caminho V da decomposição $\mathcal{F}'$ que contem $xa_{i,\mu} = xa_{j,\nu}$. Então, $V = U_{j,\nu-1}$. Mas como as decomposições são aresta disjuntas, então temos que

   $$U_{i,\mu-1} = W = V = U_{j,\nu-1} \quad e \quad a_{i,\mu-1} = xa_{j,\nu-1}$$

   Como $\mu \leq \nu$, se fizermos μ vezes o processo teremos que $a_{i,0} = a_{j,\nu-\mu}$. Assim, vale que $\mu = \nu$ e $i = j$. Isto implica que a sequência de Lovász é finita pois H é finito.

3. Os índices dos caminhos associados a uma sequência de Lovász não são únicos, em outras palavras, pode acontecer que $U_{i,\mu} = U_{j,\nu}$ com $(i,\mu) \neq (j,\nu)$.

4. A aresta $xa_{i,\mu} \in U_{i,\mu-1}$ se $\mu \geq 1$.

Definamos a função f, que a cada caminho $U_{i,\mu} \in \mathcal{F}'$ associará um caminho $f(U_{i,\mu})$, de modo que $\mathcal{F} = Im(f)$ seja uma decomposição das arestas de G em caminhos.

Seja H' o conjunto de vértices indexados de H. Seja U um caminho ou ciclo de $\mathcal{F}'$. Se U não tem a forma de $U_{i,\mu}$ então $f(U) = U$, isto é que f não altera U. Em outro caso, vamos distinguir dois pares de casos:

1. (a) Se $x \in U = U_{i,\mu}$.
   (b) Se $x \notin U = U_{i,\mu}$.

2. (a) Se $U = U_{i,\mu} = U_{j,\nu}$ onde $(i,\mu) \neq (j,\nu)$. (Isto quer dizer que o caminho $U_{i,\mu}$ tem duas extremidades em H', $a_{i,\mu}$ e $a_{j,\nu}$).
   (b) Se $U = U_{i,\mu}$ o índice é único. (Isto quer dizer que o caminho $U_{i,\mu}$ tem um único ponto final em H', $a_{i,\mu}$).

Vamos combinar dois a dois cada caso e definiremos $f(U)$:

- Caso 1.(a) e 2.(a): Como $x \in U_{i,\mu} = U_{j,\nu}$ e este caminho tem duas extremidades $a_{i,\mu}$ e $a_{j,\nu}$ em H', então definiremos

$$f(U_{i,\mu}) = U_{i,\mu} - xa_{i,\mu+1} - xa_{j,\nu+1} + xa_{i,\mu} + xa_{j,\nu}$$

que é um caminho.

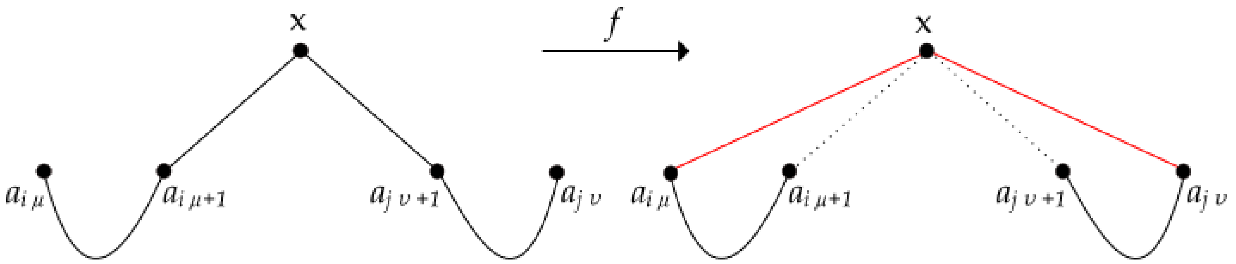


Figura 2.2: Caso: 1.(a) e 2.(a)

- Caso 1.(a) e 2.(b): Como $x \in U_{i,\mu}$ e este caminho tem um ponto final $a_{i,\mu}$ em H', então definiremos

$$f(U_{i,\mu}) = U_{i,\mu} - xa_{i,\mu+1} + xa_{i,\mu}$$

que é um caminho.

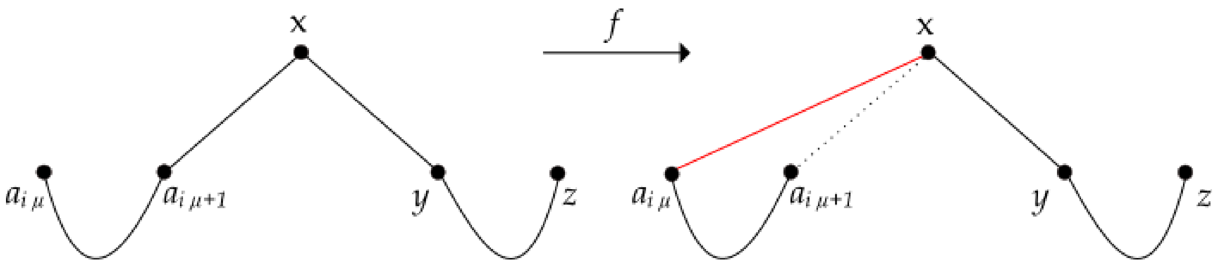


Figura 2.3: Caso: 1.(a) e 2.(b)

- Caso 1.(b) e 2.(a): Como $x \notin U_{i,\mu}$ e este caminho tem duas extremidades $a_{i,\mu}$ e $a_{j,\nu}$ em H', então definiremos

$$f(U_{i,\mu}) = U_{i,\mu} + xa_{i,\mu} + xa_{j,\nu}$$

que é um ciclo.

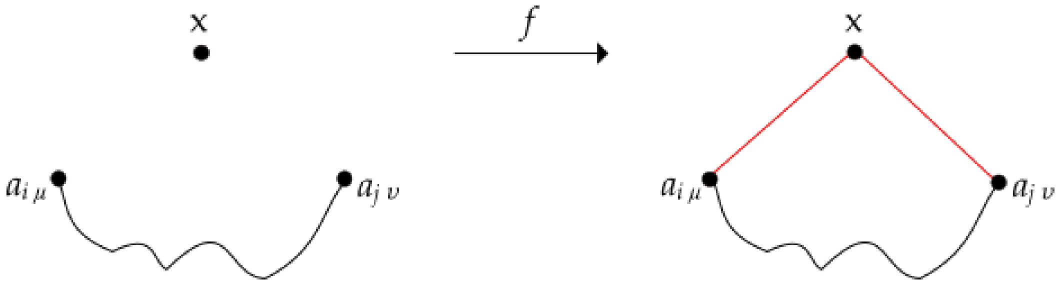


Figura 2.4: Caso: 1.(b) e 1.(a)

- Caso 1.(b) e 2.(b): Como $x \notin U_{i,\mu}$ e este caminho tem um ponto final $a_{i,\mu}$ em H', então definiremos

$$f(U_{i,\mu}) = U_{i,\mu} + xa_{i,\mu}$$

que é um caminho.

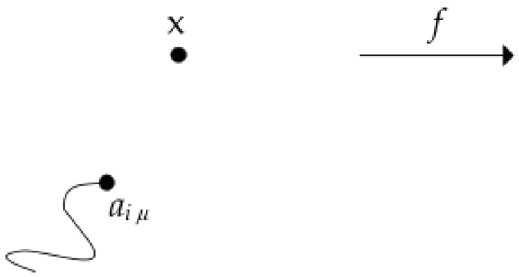


Figura 2.5: Caso: 1.(b) e 2.(b)

Com isto completamos a definição de f. Agora, nós temos que provar que os caminhos e ciclos formados por f são uma decomposição das arestas de G, isto é, se yz é uma aresta de G então yz está contido em exatamente um $f(U)$. Claramente, se uma aresta yz não é da forma $xa_{i,\mu}$ então yz aparece em algum U de $\mathcal{F}'$, e também em, e somente em $f(U)$. Assim, resta provar apenas que se $xa_{k,\rho} \in f(U_{i,\mu})$ então $U_{i,\mu} = U_{k,\rho}$. Seja $xa_{k,\rho}$ uma aresta de $f(U_{i,\mu})$ e suponhamos que $xa_{k,\rho} \neq xa_{i,\mu}$. Vejamos $U_{i,\mu}$ para cada caso mencionados acima:

- Se $U_{i,\mu}$ é da mesma forma que no caso 1.(a) e 2.(a) e no caso 1.(b) e 2.(a), então $U_{i,\mu} = U_{j,\nu}$, onde $(i,\mu) \neq (j,\nu)$. Assim, as únicas arestas de $f(U_{i,\mu})$ adjacentes a x são x$a_{i,\mu}$ e $xa_{j,\nu}$. Já que $xa_{k,\rho} \neq xa_{i,\mu}$, se segue que $a_{k,\rho} = a_{j,\nu}$, então pela observação 2, temos $(k,\rho) = (j,\nu)$, e portanto $xa_{k,\rho} \in f(U_{k,\rho}) = f(U_{j,\nu}) = f(U_{i,\mu})$.

- Se $U_{i,\mu}$ é da mesma forma no caso 1.(a) e 2.(b), seja $U_{i,\mu} = (a_{i,\mu}, ..., a_{i,\mu+1}, x, y, ..., z)$.Se $xa_{k,\rho} \in f(U_{i,\mu})$ e $xa_{k,\rho} \neq xa_{i,\mu}$ então $a_{k,\rho} = y$. Desta maneira $z = a_{k,\rho-1}$ e $U_{i,\mu} =$

$U_{k,\rho-1}$. Mas $U_{i,\mu}$ tem só um ponto final em H', então $(i,\mu) = (k,\rho-1)$ e $a_{i,\mu} = a_{k,\rho-1} = z$. Portanto $U_{i,\mu}$ deve ter sido um ciclo o que não é o caso. Assim $xa_{k,\rho} \notin f(U_{i,\mu})$ a não ser que $(k,\rho) = (i,\mu)$.

- Se $U_{i,\mu}$ é da mesma forma no caso 1.(b) e 2.(b) a única aresta de $f(U_{i,\mu})$ adjacente a x é $a_{i,\mu}$.

Isto completa a construção de Lovász em x. Assim $f(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$ é uma decomposição das arestas de G em caminhos ou ciclos disjuntos e $|f(\mathcal{F}')| = |\mathcal{F}|$. Com esta construção obtemos uma decomposição de G a partir da decomposição de G'. Como G' tem pelo menos $n-1$ vértices não isolados e no máximo $m-1$ arestas, verifica-se que $\lambda(G') < \lambda(G)$, de modo que podemos aplicar a hipótese de indução em G'. Assim, tem-se

$$|\mathcal{F}| = |f(\mathcal{F}')| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

caminhos ou ciclos. Portanto $|\mathcal{F}| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Caso II: G só tem vértices de grau impar. Seja G um grafo com n vértices não isolados. Se G não contem vértices de grau par, seja G_1 o grafo obtido tomando-se um vértice x de grau pelo menos 3 e adicionando um vértice a_1 no meio de alguma aresta adjacente a x. Assim, G_1 contem $n_1 = n+1$ vértices não isolados. Se repetimos a construção de Lovász para o grafo G_1, vamos obter o grafo G_1' que satisfaz a condição (1), já que $n_1' = n+1$ e $m_1' = m$ (pois x não se tornou isolado porque escolhemos x com grau pelo menos 3 no começo), além do que,

$$\lambda(G_1') = 2m_1' - n_1' = 2m - (n+1) < 2m - n = \lambda(G).$$

Então como n é par, G_1 pode ser decomposto por

$$\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$$

caminhos ou ciclos disjuntos. Cada vértice de G_1 diferente de a_1 é o ponto final de pelo menos um caminho da decomposição (pois os vértices têm grau ímpar). Assim, a_1 não é ponto final de um caminho da decomposição. Portanto, os $\frac{n}{2}$ caminhos de G_1 também decompõem G. Com os resultados dos casos I e II, o teorema de Lovász está provado. ■

A partir do Teorema de Lovász vejamos alguns corolários.

Corolário 2.1.6. *Se G é um grafo só com vértices de grau impar, então*

$$p(G) = \frac{n}{2}$$

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ uma decomposição miníma por caminhos ou ciclos de G. Pelo Teorema de Lovász 2.1.5

$$|\mathcal{F}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Como G só têm vértices de grau impar, n é par pelo Corolário 1.1.7. Assim, temos

$$|\mathcal{F}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}.$$

Então pela Proposição 2.1.4 e com as considerações previas

$$\frac{n}{2} \leq p(G) \leq \frac{n}{2}.$$

Por tanto, $p(G) = \frac{n}{2}$.

∎

Corolário 2.1.7. *Se G é um grafo completo de $n = 2k$ vértices. Então, G tem uma decomposição em k caminhos hamiltonianos disjuntos.*

Demonstração. Ponhamos $G = K_{2k}$. Cada vértice de K_{2k} tem grau $2k - 1$, isto é, cada vértice tem grau impar. Seja $\mathcal{F}$ uma decomposição por caminhos ou ciclos mínima. Então, existe pelo menos $\frac{n}{2}$ caminhos, isto é,

$$|\mathcal{F}| \geq \frac{n}{2} = \frac{2k}{2} = k$$

caminhos. Do Teorema de Lovász 2.1.5, temos que $|\mathcal{F}| \leq k$ caminhos ou ciclos. Assim, $\mathcal{F}$ é uma família de k caminhos hamiltonianos. ∎

Corolário 2.1.8. *Se G é um grafo completo de $n = 2k + 1$ vértices. Então, G tem uma decomposição em k ciclos hamiltonianos disjuntos.*

Demonstração. Ponhamos $G = K_{2k+1}$. Cada vértice de K_{2k+1} tem grau $2k$, isto é, cada vértice tem grau par. Sabemos que um grafo admite uma decomposição por ciclos se e somente se os vértices de G tem grau par. Assim, K_{2k+1} admite uma decomposição por ciclos. Seja $\mathcal{F}$ uma decomposição por caminhos ou ciclos mínima. Pelo Teorema de Lovász 2.1.5,

$$|\mathcal{F}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{1}{2} \right\rfloor = k$$

caminhos ou ciclos. Assim, escrevendo $\mathcal{F} = \{H_1, \ldots, H_\ell\}$, tem-se $\ell \leq k$. Cada subgrafo na decomposição $\mathcal{F}$ tem no máximo $2k+1$ arestas, $|E(H_i)| \leq 2k+1$, então

$$\sum_{i=1}^{k} |E(H_i)| \leq k(2k+1).$$

Como K_{2k+1} é um grafo completo, então

$$|E(K_{2k+1})| = \frac{(2k+1)((2k+1)-1)}{2} = k(2k+1).$$

Assim, $\mathcal{F}$ tem k elementos e $|E(H_i)| = 2k+1$. Logo, cada H_i tem $2k+1$ arestas e cada H_i é um ciclo hamiltoniano. ∎

Corolário 2.1.9. *Se G é um grafo que contém exatamente u vértices de grau impar e g vértices de grau par $(g \geq 1)$, então,*

$$p(G) \leq \frac{u}{2} + g - 1.$$

Demonstração. A partir dos fatos, é claro que $u + g = n$, e pelo Corolário 1.1.7, u é par. Assim,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{u+g}{2} \right\rfloor = \frac{u}{2} + \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor$$

Seja $\mathcal{F} = \{P_1, ..., P_k, C_1, ..., C_m\}$ uma decomposição mínima por caminhos ou ciclos aresta-disjuntos do grafo G, então cada vértice de grau impar deve ser ponto final de pelo menos um caminho de $\mathcal{F}$. Logo, existem pelo menos $\frac{u}{2}$ caminhos em $\mathcal{F}$, isto é, se $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \{P_1, ..., P_k\}$ então $|\mathcal{F}_{\mathcal{P}}| \geq \frac{u}{2}$. Vejamos os seguintes casos:

- Se $g = 0$ ou $g = 1$. A partir do Teorema de Lovász 2.1.5,

  $$|\mathcal{F}| \leq \frac{u}{2} + \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor = \frac{u}{2}$$

  caminhos e ciclos disjuntos. É claro que se $|\mathcal{F}_{\mathcal{P}}| \leq |\mathcal{F}|$ então $|\mathcal{F}| = \frac{u}{2}$ caminhos, isto é

  $$p(G) = \frac{u}{2}$$

  Neste caso não existem ciclos; isto prova a Conjectura de Gallai 2.1.3.

- Se $g > 1$. Para fazer a demostração deste caso, vamos a construir o grafo G' a partir de G, da seguinte forma: Consideremos $g - 1$ novos vértices e unimos um a um com os vértices de grau par de G.

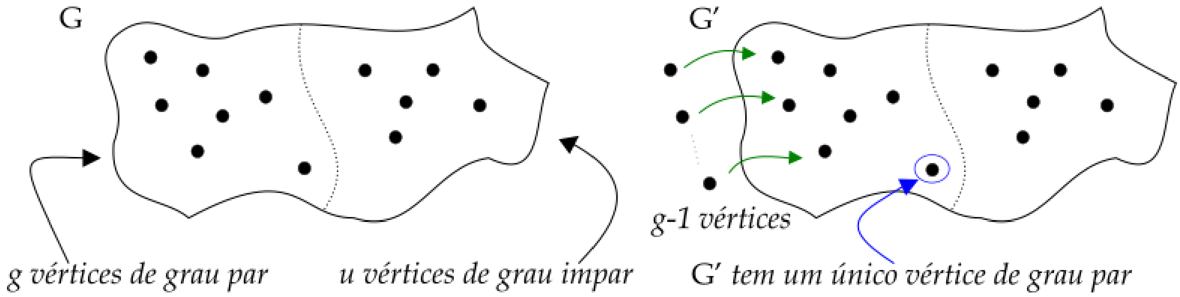


Figura 2.6: Construção do grafo G'

Desta forma, G' tem $n' = n + g - 1 = u + 2g - 1$. A partir do Teorema de Lovász 2.1.5, seja $\mathcal{F}'$ uma decomposição mínima de G' tal que

$$|\mathcal{F}'| \leq \left\lfloor \frac{u + 2g - 1}{2} \right\rfloor = \frac{u}{2} + g - 1$$

caminhos ou ciclos. Além disso, é claro que G' só tem-se um vértice de grau par, portanto G' está decomposto só em caminhos aresta disjuntos. Se apagamos as arestas que adicionamos obtemos uma decomposição de G, pois como cada vértice novo está unido com um vértice de grau par, o caminho não modificou-se. Por tanto

$$p(G) \leq \frac{u}{2} + g - 1.$$

A partir de ambos casos o corolário está provado. ■

Como consequência da demostração do primeiro caso no Corolário 2.1.9, a conjectura de Gallai foi verificada nesse caso particular. Formalmente,

Teorema 2.1.10. *Seja G um grafo conexo com n vértices que contém no máximo 1 vértice de grau par. Então $p(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

Corolário 2.1.11. *Se G é um grafo com n vértices. Então, G pode ser decomposto por no máximo $n - 1$ caminhos.*

Demonstração. Segue-se do Corolário 2.1.9. ■

Em Donald [6], o limite superior do Corolário 2.1.9 foi melhorado. Para reduzir tal limite superior de $p(G)$, vamos estender a construção de Lovász quebrando qualquer ciclo obtido a partir de f em caminhos. É claro que f produz ciclos só quando $U_{i,\mu} = U_{j,\nu}$ e os pontos $a_{i,\mu}$ e $a_{s,\nu}$ são finais das sequências de Lovász $S_{i,\mu}$ e $S_{s,\nu}$. Nesse sentido, precisamos de alguns resultados.

Proposição 2.1.12. *Seja f a função definida na construção de Lovász. Se q é o numero de ciclos formados por f então $q \leq \frac{k}{2}$, onde k é o numero de vértices de grau par adjacentes a x em G.*

Demonstração. Segue-se a partir da construção de Lovász no caso quando obtém-se ciclos. ∎

Lema 2.1.13. *Suponhamos que realizamos a construção de Lovász em x para obter uma decomposição por caminhos e ciclos $f(\mathcal{F}')$ de G. Seja k o numero de vértices de grau par adjacentes a x em G. Se $\mathcal{F}'$ consiste só de caminhos de G', então em $f(\mathcal{F}')$ temos exatamente q ciclos onde*

$$0 \leq q \leq \frac{k}{2} \tag{2}$$

$$p(G) \leq p(G') + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \tag{3}$$

Demonstração. Para provar (2) segue da Proposição 2.1.12. Seja q e p os números de ciclos e caminhos na decomposição de G, respetivamente. Então $|\mathcal{F}| = q + p$. Para obter só caminhos na decomposição de G, vamos definir uma função f' a partir da construção de Lovász que leva os ciclos de $\mathcal{F}$ em caminhos que particionam G (removendo arestas, os caminhos não mais particionam G), isto é

$$\begin{aligned} f' : \quad \mathcal{F} \quad &\longrightarrow \quad f'(\mathcal{F}) \\ U_{i,\mu}^{ciclo} \quad &\longmapsto \quad f'(U_{i,\mu}^{ciclo}) = U_{i,\mu}^{ciclo} - xa_{i,\mu} \end{aligned}$$

onde $U_{i,\mu}^{ciclo} = f(U_{i,\mu})$ são os ciclos da decomposição $\mathcal{F}$. É claro que $|f'(U_{i,\mu}^{ciclo})| = q_c$, onde q_c é o número de caminhos com cardinalidade q. Pela hipótese do lema, $\mathcal{F}'$ consiste só de caminhos, então $p(G') = q_c + p$. Assim,

$$\begin{aligned} p(G) &= q + p \\ &\leq q_c + q_a + p \\ &= p(G') + q_a \end{aligned}$$

onde q_a é o numero de arestas com cardinalidade q. Se emparelhamos cada par de arestas vamos obter caminhos de tamanho 2 ou 1 dependendo se q é par ou impar, vejamos:

- Se q é par então vamos obter $\frac{q}{2}$ caminhos de tamanho 2. Então,

  $$p(G) \leq p(G') + \frac{q}{2}$$

  caminhos.

- Se q é impar então vamos obter $\frac{q-1}{2}$ caminhos de tamanho 2, e um caminho de tamanho 1. Então,

  $$p(G) \leq p(G') + q = p(G') + \frac{q-1}{2} + 1 = p(G') + \frac{q+1}{2}$$

  caminhos.

Portanto,

$$p(G) \leq p(G') + \left\lfloor \frac{q+1}{2} \right\rfloor$$

caminhos. Assim (3) foi provado.

■

Observação 2.1.14. Na prova anterior definimos uma função f' para construir caminhos a partir de ciclos, este processo será chamado de **extensão da construção de Lovász**.

Lema 2.1.15. *Seja G um grafo, $x \in V(G)$ um vértice adjacente a um vértice de grau par. Se $f'(\mathcal{F}')$ é uma decomposição das arestas de G obtida pela realização da construção de Lovász em x e sua extensão, então pelo menos um caminho de $f'(\mathcal{F}')$ começa em x.*

O seguinte corolário mostra um novo limite superior ao Corolário 2.1.9.

Corolário 2.1.16 (Donald, 1980)**.** *Se G é um grafo que contém exatamente u vértices de grau impar e g vértices de grau par, então*

$$p(G) \leq \frac{1}{2}u + \left\lfloor \frac{3}{4}g \right\rfloor$$

Demonstração. Vamos demostrar a desigualdade como no Teorema de Lovász 2.1.5. Usaremos indução em $\lambda(G) = 2m - n$, onde m é o numero de arestas de G e n é o numero de vértices não isolados. Deste modo, se G só tem vértices de grau impar ($g = 0$), pelo Corolário 2.1.6 o resultado é imediato pois

$$p(G) = \frac{n}{2} = \frac{u+0}{2} = \frac{u}{2} + \left\lfloor \frac{3}{4} g \right\rfloor.$$

Assim, vamos a assumir que G contém pelo menos 1 vértice não isolado de grau par. Se $\lambda(G) = 1$, têm-se

$$1 = \lambda(G) = 2m - n = \left(\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) \right) - n,$$

onde o somatório cobre todo os vértices não isolados, e $d(v_i) \geq 1$ para cada v_i. Portanto, da igualdade se obtém arestas isoladas e duas arestas unidas por um vértice, em outras palavras, $n-1$ vértices de grau 1 e um vértice de grau 2. Pelo Corolário 2.1.9 tem-se o resultado. Vamos supor que a hipótese é verdadeira para qualquer grafo G' tal que $\lambda(G') < \lambda(G)$.

A partir das condições anteriores, consideramos 3 casos para a demonstração do corolário.

1. *Caso I: G contém pelo menos um par de vértices adjacentes de grau par.* Seja x tal vértice e seja $\{a_1, \ldots, a_k\}$ os vértices de grau par adjacentes a x.

   (a) *Caso I - a: Se $k \not\equiv 2 \pmod 4$.* Apagamos as arestas xa_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ e obtém-se o grafo G'. Se u' e g' são os números de vértices de grau impar e par, respectivamente em G', então

   $$p(G') \leq \frac{1}{2} u' + \left\lfloor \frac{3}{4} g' \right\rfloor$$

   Se q ciclos são produzidos pela construção de Lovász em x, então pela eq. (3) do Lema 2.1.13,

   $$p(G) \leq \frac{1}{2} u' + \left\lfloor \frac{3}{4} g' \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \tag{4}$$

   i. Se $k \equiv 0 \pmod 4$, o vértice x é de grau par em G', pois apagamos k arestas de G. Assim $u' = u + k$ e $g' \leq g - k$ (se x é isolado então $g' = h - k - 1$). Além disso, já que $2q \leq k$ então $\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \rfloor \leq \frac{1}{4} k$, pois q é par e,

   $$\left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} q \right\rfloor = \frac{q}{2} \leq \frac{1}{4} k.$$

Por tanto, da eq. (4) tem-se:

$$\begin{aligned}
p(G) &\leq \frac{1}{2}(u+k) + \left\lfloor \frac{3}{4}(g-k) \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \\
&= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}k + \left\lfloor \frac{3}{4}g \right\rfloor - \frac{3}{4}k + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \\
&= \frac{1}{2}u + \left\lfloor \frac{3}{4}g \right\rfloor + \frac{1}{2}k - \frac{3}{4}k + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \\
&= \frac{1}{2}u + \left\lfloor \frac{3}{4}g \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor - \frac{1}{4}k \\
&\leq \frac{1}{2}u + \left\lfloor \frac{3}{4}g \right\rfloor
\end{aligned}$$

ii. Se k é impar, x é impar em G' então $u' = u + k + 1$ e $g' = g - k - 1$. Assim, já que k é impar, é claro que $2q \leq k - 1$, pois q é impar e,

$$\left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor = \frac{1}{2}(q+1) = \frac{2q+1}{4} + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}(k+1).$$

Por tanto, da equação (4) tem-se:

$$\begin{aligned}
p(G) &\leq \frac{1}{2}(u+k+1) + \left\lfloor \frac{3}{4}(g-k-1) \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \\
&= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(k+1) + \left\lfloor \frac{3}{4}g - \frac{3}{4}(k+1) \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \\
&= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(k+1) + \left\lfloor \frac{3}{4}g \right\rfloor - \frac{3}{4}(k+1) \Big\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \\
&= \frac{1}{2}u + \left\lfloor \frac{3}{4}g \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor - \frac{1}{4}(k+1) \\
&\leq \frac{1}{2}u + \left\lfloor \frac{3}{4}g \right\rfloor.
\end{aligned}$$

(b) *Caso I - b: Se* $k \equiv 2 \pmod 4$. Vamos construir o grafo G_1 da seguinte forma: adicionamos um vértice y e a aresta $a_k y$ ao grafo G. É claro que $p(G) \leq p(G_1)$, já que se $\mathcal{F}_1$ é uma decomposição por caminhos de G_1, $a_k y$ é aresta inicial de qualquer caminho de $\mathcal{F}_1$, pois y é de grau impar. Assim, se apagamos $a_k y$, obtém-se dois possíveis casos:

- Se $P = \{a_k y\}$ é um caminho de $\mathcal{F}_1$, então $p(G_1) = p(G)$.
- Se $P = \{a_k y\}$ pertence a um caminho de $\mathcal{F}_1$, então $p(G_1) - 1 = p(G)$, isto é, $p(G_1) > p(G)$.

De ambos casos, tem-se que $p(G) \leq p(G_1)$. Com isto, temos que mostrar $p(G_1) \leq \frac{1}{2}u + \lfloor \frac{3}{4}g \rfloor$.

Seguindo os procedimentos anteriores, apagamos as arestas xa_k, $i = 1, \dots, k-1$ e obtém-se G_1'. Como $k \equiv 2 \pmod 4$, $k \geq 2$, logo $k-1 \geq 1$, ou seja, apagamos pelo menos uma aresta e não deixamos o vértice de grau par x isolado. É claro que $\lambda(G_1') < \lambda(G)$, isto é, $p(G_1') \leq \frac{1}{2}u_1' + \lfloor \frac{3}{4}g_1' \rfloor$. Como $k = \{2, 6, 10, \dots\}$, $k-1$ é impar e, já que em G_1 temos, $u_1 = u+2$ e $g_1 = g-1$, tem-se,

$$u_1' = u_1 + (k-1) + 1 = u + k + 2,$$
$$g_1' = g_1 - (k-1) - 1 = g - k - 1,$$

onde u_1' e g_1' são os números de vértices de grau impar e par de G_1', respetivamente. Como todo isso, fazemos a construção de Lovász para obter caminhos e ciclos, e efetuamos a extensão da construção de Lovász nos q ciclos. Assim,

$$\begin{aligned}
p(G_1) &\leq p(G_1') + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \\
&\leq \frac{1}{2}u_1' + \left\lfloor \frac{3}{4}g_1' \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \\
&= \frac{1}{2}(u+k+2) + \left\lfloor \frac{3}{4}(g-k-1) \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \\
&= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(k+2) + \left\lfloor \frac{3}{4}g - \frac{3}{4}(k+1) \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \\
&= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(k+2) + \left\lfloor \frac{3}{4}g - \frac{3}{4}(k-2+3) \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \\
&= \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}(k+2) + \left\lfloor \frac{3}{4}g - \frac{9}{4}) \right\rfloor - \frac{3}{4}(k-2) \left\lfloor + \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \\
&\leq \frac{1}{2}u + \left\lfloor \frac{3}{4}g \right\rfloor - \frac{1}{4}(k-2) + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1). \right\rfloor
\end{aligned} \tag{5}$$

Da eq. (2) do Corolário 2.1.13, obtém-se

$$0 \leq q \leq \frac{k-1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2q \leq k-1$$

$$\left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{1}{4}(k+1) \right\rfloor = \frac{1}{4}(k-2) \tag{6}$$

De (5) em (6), obtemos portanto

$$p(G) \leq p(G_1) \leq \frac{1}{2}u + \left\lfloor \frac{3}{4}g \right\rfloor.$$

2. *Caso II: G não contém um par de vértices adjacentes de grau par e existe um vértice y de grau par não isolado tal que para qualquer outro vértice z de grau par,* $d(y,z) \geq 3$. Seja

x um vértice de grau impar adjacente a y. Apagamos a aresta xy e completamos a construção de Lovász em x. Já que $d(y,z) \geq 3$, x não pode ser adjacente a qualquer outro vértice de grau par. Assim, $u' = u$ e $g' = g$. Além disso, como $k = 1$ então $q = 0$. Pelo Lema 2.1.13,

$$p(G) \leq p(G') + \left\lfloor \frac{1}{2}(q+1) \right\rfloor \leq \frac{u'}{2} + \left\lfloor \frac{3}{4}g' \right\rfloor = \frac{u}{2} + \left\lfloor \frac{3}{4}g \right\rfloor.$$

3. *Caso III: Se nenhum dos casos I ou II são válidos, existe um par de vértices de grau par x e z tal que $d(x,z) = 2$ e nem x nem z são adjacentes a qualquer vértice de grau par.* Assim, existe um vértice de grau impar y tal que xy e yz são arestas em G. Seguindo os procedimentos anteriores, apagamos a aresta xy e obtemos o grafo G_1 com u_1 vértices de grau impar e g_1 vértices de grau par em G_1.

   Além disso, x é adjacente só a vértices de grau impar em G_1; G_1 contém um par de vértices adjacentes de grau par y e z. Então, faremos a construção de Lovász e sua extensão em G_1 e y. Como $n = n_1 = n_1'$, $m_1' = m_1 - 1$ e $m_1 = m - 1$, obtém-se

$$\lambda(G_1') = 2m_1' - n_1' = 2(m_1 - 1) - n_1 < 2m_1 - n_1 = \lambda(G_1)$$

$$\lambda(G_1) = 2m_1 - n_1 = 2(m-1) - n < 2m - n = \lambda(G)$$

   Por tanto, $\lambda(G_1') < \lambda(G_1) < \lambda(G)$. Isso dá uma decomposição $\mathcal{F}_1$ das arestas de G_1 com $|\mathcal{F}_1| \leq \frac{1}{2}u_1 + \lfloor \frac{3}{4}g_1 \rfloor$. Pelo Lema 2.1.15, pelo menos um caminho que $\mathcal{F}_1$ tem um ponto final em y.

   É claro que ao reintroduzir a aresta xy, a cardinalidade $|\mathcal{F}_1|$ não altera-se. Como cada vértice adjacente a x é de grau impar em G_1 e já que y é ponto final de pelo menos um caminho de $\mathcal{F}_1$, então existe uma decomposição por caminhos ou ciclos $\mathcal{F}$ de G com cardinalidade $|\mathcal{F}_1|$. Não obstante, dita decomposição é só por caminhos, pois, na construção de Lovász, podemos obter ciclos só no caso particular quando existe um caminho $U_{i,\mu} = U_{j,\nu}$ e $a_{i,\mu}$ e $a_{j,\nu}$ são os pontos finais das sequencias S_i e S_j com $i \neq j$ (ver demostração do Teorema de Lovász 2.1.5). Posto que G_1 foi obtido por apagar só a aresta xy de G, estamos empregando uma só sequencia, assim, estão formado sem ciclos. Logo,

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| \leq \frac{1}{2}u_1 + \left\lfloor \frac{3}{4}g_1 \right\rfloor$$

onde $\mathcal{F}$ é uma decomposição por caminhos das arestas de G. No entanto, $u = u_1$ e $g = g_1$. Por tanto,

$$p(G) \leq \frac{1}{2}u + \left\lfloor \frac{3}{4}g \right\rfloor.$$

A partir dos casos I, II e III a desigualdade que mostra o novo limite superior está provado.

■

Donald [6] observa que, se a conjectura de Gallai 2.1.3 for verdadeira, então o melhor limite superior ao numero de caminhos de um grafo desconexo é $\lfloor \frac{2}{3}n \rfloor$, isto é, $p(G) \leq \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor$. Suponhamos que que G têm k componentes $G_1, G_2, ..., G_k$ não triviais (sem pontos isolados) onde cada um tem numero de vértices impar. Se G_i tem n_i vértices para $i = 1, 2, ..., k$, então $n_i \geq 3$, assim,

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i \geq 3k.$$

Logo, da conjectura de Gallai segue-se que

$$\begin{aligned} p(G) &= \sum_{i=1}^{k} p(G_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{n_i + 1}{2} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i + 1}{2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{k}{2} \\ &\leq \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{2n}{3}. \end{aligned}$$

Assim, G pode ser decomposto por no máximo $\lfloor \frac{2}{3}n \rfloor$ caminhos aresta disjuntos. Não obstante, Donald assinala que a partir da construção de Lovász, ainda não é possível obter $p(G) \leq \lfloor \frac{2}{3}n \rfloor$, pois ao quebrar ciclos para formar caminhos poderíamos criar mais $\lfloor \frac{1}{4}(g - 1) \rfloor$ novos caminhos.

2.2 Decomposição por árvores de diâmetro menor

Definição 2.2.1. Seja G um grafo com n vértices. Denotemos por $f_i(G)$ o menor número de árvores de diâmetro no máximo i necessárias para cobrir G. As árvores de diâmetro 2 e 3 são chamados estrelas (star) e estrela-dupla (double-stars), respetivamente.

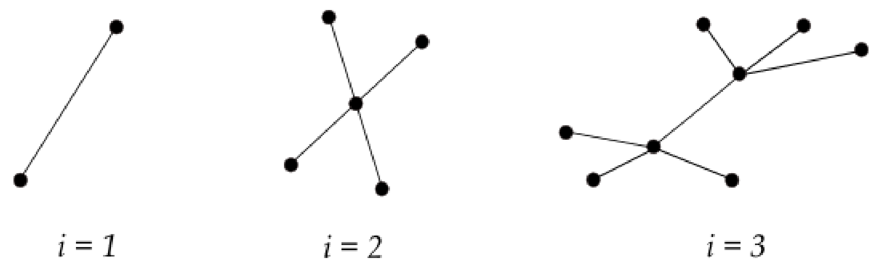


Figura 2.7: Árvores de diâmetro i

Definição 2.2.2. Seja G um grafo. Denotemos por τ o tamanho do maior conjunto independente de G.

Proposição 2.2.3. *Seja G um grafo com n vértices não isolados. Então* $\tau + f_2(G) = n$.

Demonstração. Ver [12] - pag 115. ■

Teorema 2.2.4. *Seja G um grafo com n vértices. Então G pode ser decomposto por no máximo* $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ *double-stars.*

Demonstração. Seja $M = \{a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_rb_r\}$ um emparelhamento maximal de G e seja $I = \{c_1, c_2, ..., c_s\}$ o conjunto dos vértices que não estão contidos em M. Se M é um emparelhamento perfeito, isto é, $|M| = r = \frac{n}{2}$, então todos os vértices que formam M cobrem G. Assim, $I = \emptyset$. É claro que pela maximalidade de M, o conjunto I é independente. Já que M esta formado por r arestas disjuntas, é claro que contém $2r$ vértices e, segundo a definição de τ, $|I| = s \leq \tau$. Assim,

$$n = 2r + s \leq 2r + \tau.$$

A partir da definição de diâmetro mínimo $f_3(G) \leq f_2(G)$ e, pela Proposição 2.2.3 obtém-se,

$$f_3(G) \leq f_2(G) = n - \tau \leq 2r. \tag{7}$$

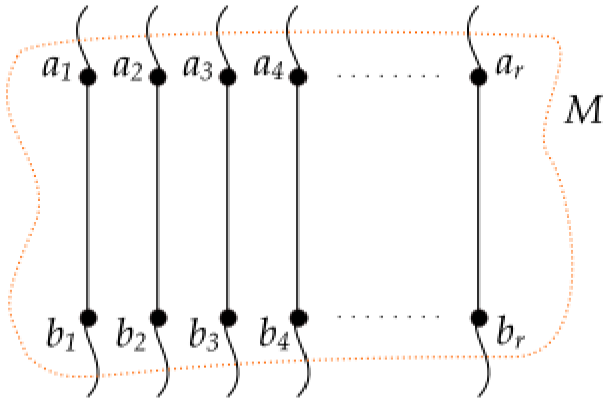


Figura 2.8: Emparelhamento M

Por outro lado vamos formar o conjunto S_i de árvores únicos da seguinte forma:

$$S_i = \{a_ib_i\} \cup \{a_ib_j \in E(G) : i < j\} \cup \{a_ia_j, b_ib_j \in E(G) : i > j\}$$

Por construção, S_i é formado por arestas adjacentes a a_ib_i, portanto S_i é double-star (sem triângulos). Seja T_i a estrela consistindo das arestas que contem c_i, isto são as arestas que não pertencem a M. Claramente $\{S_1, S_2, ..., S_r, T_1, T_2, ..., T_s\}$ cobre G, por tanto,

$$f_3(G) \leq r + s = 2r + s - r = n - r. \tag{8}$$

Multiplicando (8) por 2 e somando a (7), obtém-se,

$$f_3(G) + 2(f_3(G)) \leq 2r + 2n - 2r \quad \Rightarrow \quad f_3(G) \leq \frac{2n}{3}.$$

Por tanto, G pode ser decomposto por no máximo $\lfloor \frac{2}{3}n \rfloor$ double-stars. ■

2.3 Decomposição por grafos completos

Um dos primeiros resultados deste caso foi apresentado em Erdős, Goodman e Pósa [7], no ano 1966. A partir do teorema principal, em Lovász [9], assinala-se um exemplo para grafos completos bipartidos onde dito resultado é sharp.

Teorema 2.3.1 (Erdős, Goodman e Pósa, 1966)**.** *Seja G um grafo com n vértices. Então, as arestas de G podem ser decompostas por $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ subgrafos completos, cada um de ordem ≤ 3 .*

Demonstração. Vamos demostrar o teorema com indução em n. É claro que o teorema é verdadeiro quando $n = 2$, pois, só poderemos obter um subgrafo completo, que é ele mesmo. Vamos supor que a hipótese é verdadeira para qualquer grafo G' com $n' = n - 1$ vértices. Assim, vamos mostrar que o teorema também é válido para um grafo G de ordem $n > 2$. Vamos começar mostrando a seguinte igualdade,

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \tag{9}$$

Se consideramos $n = 2k$, tem-se

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = k^2 = \left\lfloor k^2 - k + k \right\rfloor &= \left\lfloor k^2 - k \right\rfloor + k \\ &= \left\lfloor \frac{(2k-1)^2}{4} - \frac{1}{4} \right\rfloor + k \\ &= \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

Se consideramos $n = 2k + 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2k+1)^2}{4} \right\rfloor = k^2 + k &= \left\lfloor k^2 + k \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

A partir das condições anteriores, consideramos 2 casos para a demonstração do teorema.

1. *Suponhamos que G contém um vértice x_0 que satisfaz $d_G(x_0) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.* Seja o subgrafo G_0 obtido de G por apagar o vértice x_0. Então, G_0 pode ser decomposto por $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor$ subgrafos completos pela hipóteses indutiva. Assim, para decompor as arestas de G precisaremos das arestas adjacentes ao vértice x_0. Logo, o numero mínimo de

subgrafos completos que decompõem as arestas de G é no máximo $\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Pela eq. (9), obtém-se $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ subgrafos completos.

2. *Suponhamos que cada vértice x de G satisfaz $d_G(x) > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.* Seja $k = \min_{x \in X}\{d_G(x)\}$. Podemos escrever $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + r$, $r > 0$, onde

$$r = k - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq k - \frac{n-1}{2} \leq k - \frac{k}{2} = \frac{k}{2}.$$

Com isto, seja x_1 um vértice de grau $k \geq 2r$.

Agora, devemos mostrar que o subgrafo gerado por $N_G(x_1)$ contém um emparelhamento de cardinalidade r. Seja M um emparelhamento maximal em $N_G(x_1)$ e suponha que $|E(M)| \leq r - 1$. Tome $y \in N_G(x_1) \setminus M$; então, pela maximalidade de M, y não é vizinho de nenhum vértice de $N_G(x_1) \setminus V(M)$. Logo,

$$\begin{aligned} d_G(y_{2r-1}) &\leq (2r-2) + (n-k) \\ &\leq 2r - 2 + n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - r = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + r - 2 \\ &\leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + r - 1 = k - 1 \end{aligned}$$

Mas, isto é uma contradição pois o grau mínimo de cada vértice em G é k. Assim, obtemos um emparelhamento de cardinalidade r gerado por x_1. Então, seja $N_G(x_1) = \{y_1, y_2, ..., y_{k-1}, y_k\}$ e, seja G_1 o subgrafo obtido por apagar o vértice x_1 e as r arestas de um emparelhamento $[y_1, y_2], [y_3, y_4], ..., [y_{2r-3}, y_{2r}]$. Pela hipótese indutiva, G_1 pode ser decomposto em $\lfloor \frac{(n-1)^2}{2} \rfloor$ grafos completos. Então, G pode ser decomposto por:

- Os r triângulos da forma $[x_1, y_1, y_2, x_1], ..., [x_1, y_{2r-1}, y_2 r, x_1]$.
- As $k - 2r$ arestas isoladas da forma $[x_1, y_{2r+1}], ..., [x_1, y_k]$.
- A cobertura de G_1.

Então, o numero mínimo de subgrafos completos com ordem ≤ 3 é no máximo

$$\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{2} \right\rfloor + r + (k - 2r) = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Assim, obtemos o resultado desejado.

Dos casos 1 e 2, obtém-se que o G pode ser coberto por $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ subgrafos completos, cada um com ordem ≤ 3. ∎

Exemplo 2.3.2. Em Lovász [9], assinala-se que a cota no teorema anterior é sharp. Isto é, que as arestas de algum grafo G de n vértices não podem ser decompostas por menos que $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ subgrafos de ordem ≤ 3. De fato, suponha o grafo G com n vértices da seguinte forma:

- Se $n = 2k$ é par, seja G o grafo completo bipartido $K_{k,k}$. O numero mínimo de subgrafos completos que precisamos para decompor todas as arestas é

$$k \cdot k = k^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4} = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

- Se $n = 2k + 1$ é impar, seja G o grafo completo bipartido $K_{k,k+1}$. O numero mínimo de subgrafos completos que precisamos para decompor todas as arestas é

$$k(k+1) = k^2 + k = \frac{(2k+1)^2 - 1}{4} = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Capítulo 3

Cobertura por caminhos

Seguindo os resultados de Lovász, neste capitulo estudaremos o artigo de Pyber [10]. Ao contrário de decomposição, uma cobertura de grafos não requer que os subgrafos sejam aresta-disjuntos. Assim, dito artigo está direcionado ao estudo de cobertura de grafos. Na primeira seção apresentaremos alguns resultados prévios que consequentemente serão usados na Seção 3.2 na demostração dos teoremas principais deste capitulo. É importante esclarecer que o longo do capitulo o termo *partição* é sinônimo de decomposição.

3.1 Resultados prévios

Exemplo 3.1.1. Seja G um grafo obtido a partir de um grafo completo K_{2m+1} através da remoção de um emparelhamento de tamanho $m-1$ arestas independentes. Veremos que G tem exatamente $(n-1)\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ arestas e que precisamos de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ caminhos para decompor G.

De fato, num grafo completo K_n, o grau de cada vértice é $n-1$, assim $d_{K_{2m+1}} = 2m$. Como em G apagamos $m-1$ arestas, então $2(m-1)$ vértices têm grau impar. Assim,

$$\begin{aligned}
|E(G)| &= |E(K_{2m+1})| - (m-1) \\
&= \frac{(2m+1)(2m+1-1)}{2} - (m-1) \\
&= m(2m+1) - (m-1) \\
&= m(2m) + 1.
\end{aligned}$$

Mas, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2m+1}{2} \rfloor = m$, se $n = 2m+1$.

Então,

$$|E(G)| = (n-1)\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \tag{1}$$

Com isto, tem-se $2(m-1)$ vértices de grau $2m-1$ e 3 vértices de grau $2m$. Cada vértice de grau impar é ponto final de pelo menos um caminho. Assim, G tem um único ciclo formado apenas por vértices de grau par, que é um triângulo. Já que G tem $2m+1$ vértices, então um caminho pode conter no máximo $2m$ arestas. Logo, m caminhos têm no máximo $m(2m)$ arestas. Mas, da eq. (1) precisamos pelo menos $m+1$ caminhos, isto é, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ caminhos.

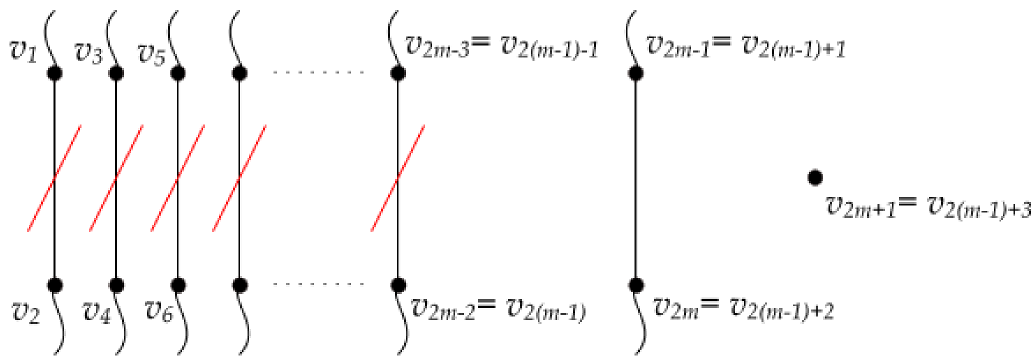


Figura 3.1: Grafo $G = K_{2m+1} - [m-1]$

A partir do exemplo anterior mostra-se que o seguinte teorema é falso sem a hipótese.

Teorema 3.1.2. *Suponha que cada ciclo de G contém um vértice de grau impar. Então, G pode ser coberto por $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ caminhos aresta disjuntos.*

Exemplo 3.1.3. Suponhamos H um grafo com m vértices contradizendo a Conjectura 2.1.3 de Gallai, isto é, $p(H) \geq \frac{m}{2} + 1$ elementos. Seja G um grafo de n vértices que consiste de um vértice v e k cópias vértice-disjuntas de H, tal que cada uma dessas cópias está conectada a v por uma aresta. O número de caminhos que precisa-se para cobrir G é pelo menos $k(\frac{m}{2} + 1) - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ caminhos.

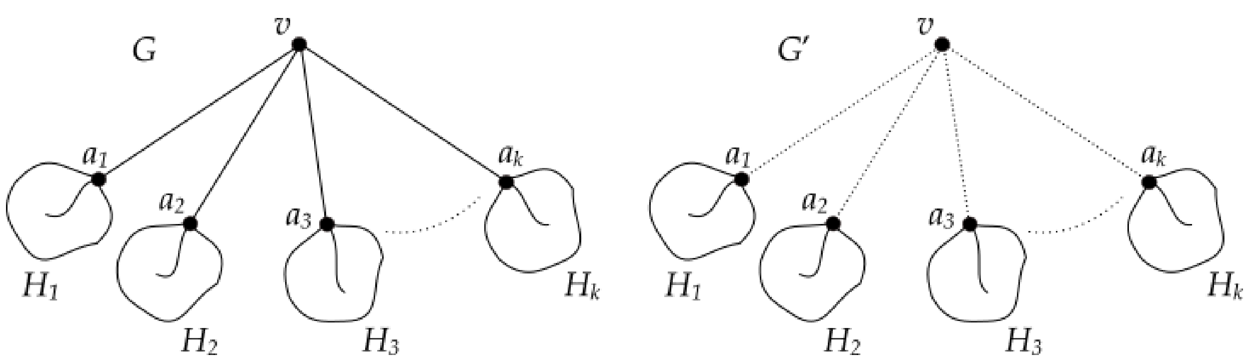


Figura 3.2: Grafo G e G'

De fato, seja $P_1, P_2, ..., P_r$ uma decomposição mínima por caminhos de G. Se apagamos todas as arestas adjacentes a v, então obtemos uma decomposição mínima $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ por caminhos de $G' = \bigcup_{i=1}^{k} H_i$, tal que ocorrem os seguintes casos:

1. $Q_i = P_j - vx$, para algum P_j e vx.

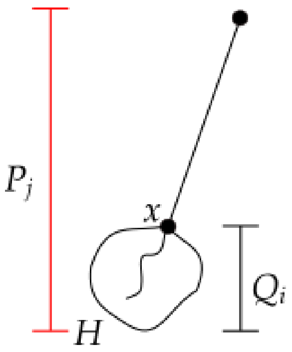


Figura 3.3: Caso 1. $Q_i = P_j - vx$

2. Q_i e Q_j são obtidos por $P_l - vx - vy$.

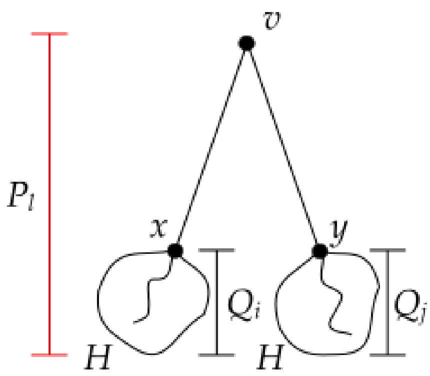


Figura 3.4: Caso 2. $Q_i(\text{ou } Q_j) = P_l - vx - vy$

3. $Q_i = P_j$, para algum P_j (P_j não contém vx).

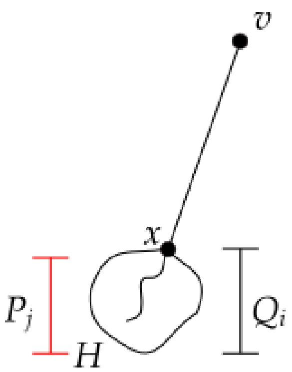


Figura 3.5: Caso 3. $Q_i = P_j$

4. $Q_i = P_j - vx - vy$ para algum P_j, vx e vy.

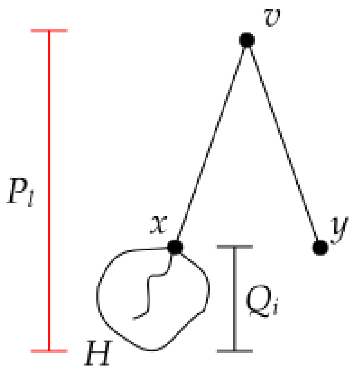


Figura 3.6: Caso 4. $Q_i = P_j - vx - vy$

Assim, a partir do caso 2, temos no máximo $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ pares de caminhos Q_i, P_j , então,

$$p(G) = r \geq s - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \tag{2}$$

onde $s = p(G')$. É claro que para obter p(G) mínimo, $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ tem que ser máximo. Entretanto, para cada H_i, temos que $p(H_i) \geq \frac{1}{2}m + 1$. Então

$$s = p(G') \geq k\Big(\frac{m}{2} + 1\Big).$$

Por tanto, da eq. (2) tem-se,

$$p(G) \geq k\Big(\frac{m}{2} + 1\Big) - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor.$$

Das condições de G, $n = mk + 1$, assim

$$p(G) \geq \frac{km}{2} + k - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \frac{km}{2} + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil = \frac{n}{2} + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Além disso, se $k \geq 2m + 3$, com m fixo, para $l \geq 0$ obtém-se ,

$$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - \frac{1}{2} = \frac{k}{2} - \frac{1}{2} = \frac{(2m + 3 + l)}{2} - \frac{1}{2} = m + 1 + \frac{l}{2} \tag{4}$$

$$\frac{n}{2m+1} = \frac{km+1}{2m+1} = \frac{(2m+3+l)m+1}{2m+1} = m + 1 + \frac{lm}{2m+1} = m + 1 + \frac{l}{2 + \frac{1}{m}} \tag{5}$$

Das equações (4) e (5), obtém-se,

$$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - \frac{1}{2} \geq \frac{n}{2m+1}.$$

Por tanto, na eq. (3), se $k \geq 2m+3$, obtém-se,

$$p(G) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2m+1}.$$

Na qual para um $m \geq 1$ fixo, é claro,

$$\frac{n}{2m+1} \nsim o(n).$$

Então, $p(G)$ não pode ser limitado assintoticamente por $\frac{n}{2} + o(n)$, se $n \to \infty$.

A partir deste ponto, cada decomposição por caminhos e ciclos de um grafo, terá um numero mínimo de ciclos. Assim, os seguintes resultados serão peças úteis nas demostrações dos teoremas nesta seção.

Lema 3.1.4. *Seja $\mathcal{F}$ uma decomposição por caminhos ou ciclos de um grafo G com um numero mínimo de ciclos dentre as decomposições por caminhos ou ciclos com no máximo $|\mathcal{F}|$ elementos. Seja C um ciclo de $\mathcal{F}$ e x um vértice arbitrário de C. Existem dois vértices $y, z \in V(C)$ tais que $xy, xz \in E(G)$ e ambos y, z têm grau par em G.*

Demonstração. Segue-se da técnica na demostração do Teorema 2.1.5. Seja a_1 e a_2 os C-vizinhos de x. Defina-se a sequência $\{a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,\Gamma_i}\}$ dos G-vizinhos de x, tal que $a_{i,o} = a_i$ e $a_{i,\mu}$ é definido da seguinte forma:

1. Se $a_{i,\mu}$ tem grau par, então a sequência termina.

2. Se $a_{i,\mu}$ tem grau impar,seja $P_{i,\mu}$ um caminho de $\mathcal{F}$ começando em $a_{i,\mu}$.

    (a) Se $x \notin P_{i,\mu}$, então a sequência termina.

    (b) Se $x \notin P_{i,\mu}$, então seja $a_{i,\mu+1}$ o vértice do caminho que precede x.

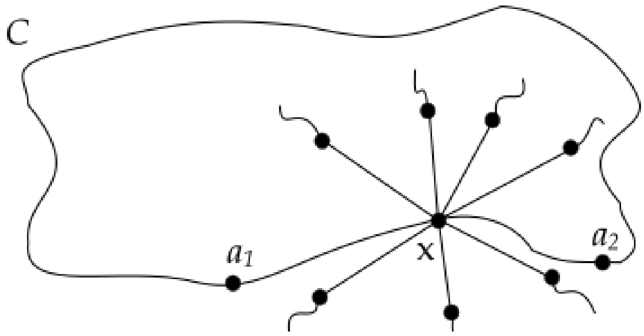


Figura 3.7: Ciclo C e os vizinhos de x

Sob estas condições, vamos mostrar que os $a_{i,\mu}$ são diferentes, que os últimos vértices das sequências são de grau par e pertencem ao ciclo C. Assim,

- *Se $a_{i,\mu} = a_{j,\nu}$, então $(i, \mu) = (j, \nu)$.*

  Se $\mu = 0$ e suponhamos que $\mu \leq \nu$. Assim, $a_{i,\mu} = a_{i,0} = a_i$ então, $xa_i \in E(C)$. Logo, $xa_{i,\nu} = xa_{j,\mu} \in E(C)$. Portanto, $v = 0$ pois $a_{j,\mu} \in C$. Além disso, já que $a_{j,0} = a_i$ então $j = i$. Deste modo $(i, \mu) = (j, \nu)$.

  Se $\mu \geq 0$, existe um caminho $P_{i,\mu-1}$ da decomposição $\mathcal{F}$ que contém $a_{i,\mu}$, tal que $a_{i,\mu-1}$ é ponto final do caminho e $xa_{i,\mu-1} \in E(P_{i,\mu+1})$. Do mesmo modo, existe um caminho $P_{j,\nu-1}$ da decomposição $\mathcal{F}$ que contém $a_{j,\nu}$, tal que $a_{j,\nu-1}$ é ponto final do caminho e $xa_{j,\nu-1} \in E(P_{j,\nu+1})$. Mas como $a_{i,\mu-1} = a_{j,\nu-1}$, então $xa_{i,\mu-1} = xa_{j,\nu-1}$ e, já que os caminhos da decomposição $\mathcal{F}$ são aresta disjuntos, obtém-se $P_{i,\mu-1} = P_{j,\nu-1}$ e $a_{i,\mu-1} = a_{j,\nu-1}$. Seguindo a técnica de Lovász, $a_{i,0} = a_{j,\nu-\mu}$. É claro que $\nu - \mu = 0$, então $(i, \mu) = (j, \nu)$.

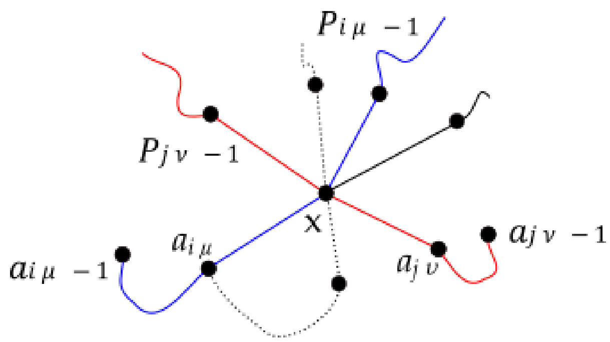


Figura 3.8: Construção dos caminhos $P_{i,\mu-1}$ e $P_{j,\nu-1}$ a partir dos vértices $a_{i,\mu-1}$ e $a_{j,\nu-1}$

- *Os últimos vértices das sequências, a_{1,Γ_1} e a_{2,Γ_2}, têm grau par.*

  Fazemos por contradição. Suponhamos que a_{1,Γ_1} e a_{2,Γ_2} tem grau impar. Assim, pela definição da sequência, existe um caminho P_{i,Γ_i} que não passa por x pois a_{i,Γ_i}

é o último vértice da sequência. Segue-se a seguinte modificação da decomposição $\mathcal{F}$,

$$
\begin{aligned}
C &\longrightarrow C \backslash xa_{i,0} \\
P_{i,0} &\longrightarrow P_{i,0} \cup xa_{i,0} \backslash xa_{i,1} \\
P_{i,1} &\longrightarrow P_{i,1} \cup xa_{i,1} \backslash xa_{i,2} \\
&\vdots \\
P_{i,\Gamma_{i-1}} &\longrightarrow P_{i,\Gamma_{i-1}} \cup xa_{i,\Gamma_{i-1}} \backslash xa_{i,\Gamma_i} \\
P_{i,\Gamma_i} &\longrightarrow P_{i,\Gamma_i} \cup xa_{i,\Gamma_i}
\end{aligned}
$$

A partir da modificação de $\mathcal{F}$, obtém-se uma decomposição por caminhos e ciclos $\mathcal{F}'$, tal que $|\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}|$. Mas o número de ciclos em $\mathcal{F}'$ é menor, o que é uma contradição. Então, a_{1,Γ_1} e a_{2,Γ_2}, têm grau par.

- *Os vértices a_{i,Γ_i}, pertencem ao ciclo C.*

  Fazemos por contradição. A partir do resultado anterior, suponhamos que $a_{i,\Gamma_i} \notin V(C)$. Segue-se a seguinte modificação da decomposição $\mathcal{F}$,

$$
\begin{aligned}
C &\longrightarrow C \cup xa_{i,\Gamma_i} \backslash xa_{i,0} \\
P_{i,0} &\longrightarrow P_{i,0} \cup xa_{i,0} \backslash xa_{i,1} \\
&\vdots \\
P_{i,\Gamma_{i-2}} &\longrightarrow P_{i,\Gamma_{i-2}} \cup xa_{i,\Gamma_{i-1}} \backslash xa_{i,\Gamma_{i-1}} \\
P_{i,\Gamma_{i-1}} &\longrightarrow P_{i,\Gamma_{i-1}} \cup xa_{i,\Gamma_i} \backslash xa_{i,\Gamma_i}
\end{aligned}
$$

  A partir da modificação de $\mathcal{F}$, obtém-se uma decomposição por caminhos e ciclos $\mathcal{F}'$, tal que $|\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}|$. Mas o número de ciclos em $\mathcal{F}'$ é menor, o que é uma contradição. Então, $a_{i,\Gamma_i} \in V(C)$.

Com isto, seja $y = a_{1,\Gamma_1}$ e $z = a_{2,\Gamma_2}$ que cumprem as propriedades requeridas. ∎

Corolário 3.1.5. *Seja $\mathcal{F}$ uma decomposição por caminhos e ciclos de um grafo G com um número mínimo de ciclos entre as decomposições por caminhos e ciclos tendo como máximo $|\mathcal{F}|$ elementos. Então, para cada ciclo $C \in \mathcal{F}$ existe um ciclo K de G tal que $V(K) \subseteq V(C)$ e os vértices de K têm grau par em G.*

Demonstração. Sob as condições do Lema 3.1.4, dado x existem $y, z \in V(C)$ tal que $xy, xz \in E(G)$ e têm grau par em G. Considere-se o subgrafo H de G induzido pelos vértices de grau par em C, isto é, $H = G[V(C)]$. Pelo lema anterior, cada vértice $x \in H$ é de pelo menos grau 2, assim $d_H(v_i) \geq 2$, $\forall\ v_i \in V(H)$. Logo, H contém um ciclo K. Então, $V(K) \subseteq V(H) \subseteq V(C)$. Portanto, existe um ciclo K de G tal que $V(K) \subseteq V(C)$ e os vértices de K têm grau par em G. ■

Lema 3.1.6. *Seja o grafo H uma união de dois ciclos C_1 e C_2 aresta-disjuntos mas não vértice-disjuntos. Suponha que H não pode ser coberto por dois caminhos. Então, C_1 tem uma aresta e com ambas as extremidades em $V(C_2)$.*

Demonstração. Suponhamos que não existe tal aresta e, isto é, se $e = (a_1, a_2)$ tal que $a_1, a_2 \in V(C_1)$, ou a_1 ou a_2 não estão em $V(C_2)$. Escolhe-se $x \in V(C_1) \cap V(C_2)$. Denotamos os a_1, b_1 e a_2, b_2 os C_1-vizinhos e C_2-vizinhos de x, respectivamente. Então $a_1, b_1 \notin V(C_2)$ e portanto ambos têm grau 2 em H.

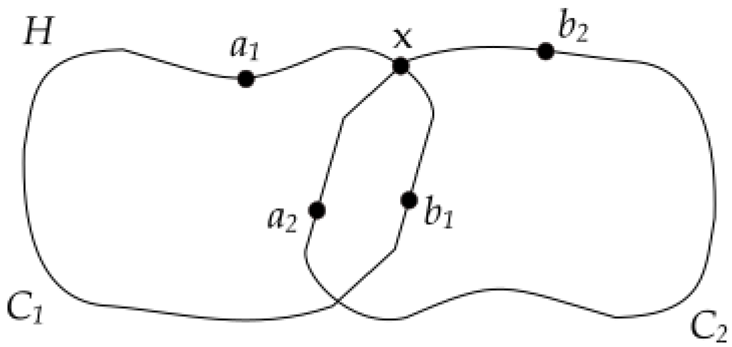


Figura 3.9: Ciclos C_1 e C_2

Sob estas condições, $a_2, b_2 \in V(C_1)$. De fato, suponhamos o contrario. Se $a_2 \notin V(C_1)$ (o outro caso é análogo) então H é união de dois caminhos $P_1 = C_1 \cup xa_2 \backslash xa_1$ e $P_2 = C_2 \cup xa_1 \backslash xa_2$, mas isso é impossível pela hipótese. Logo, $a_2, b_2 \in V(C_1)$, e por inferência $V(C_2) \subset V(C_1)$.

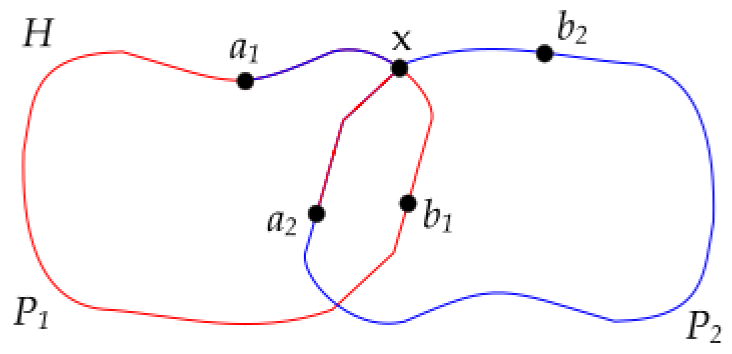


Figura 3.10: Construções dos caminhos P_1 e P_2

É claro que os vértices de C_2 cortam a C_1 em caminhos. Substituindo os caminhos por arestas, obtém-se o multigrafo 4-regular H' com duas decomposições hamiltonianas C_2 e C_1'. Do resultado de Thomason [11], H' tem outra decomposição. Portanto, H tem outra decomposição C_3, C_4 na união dos ciclos aresta disjuntas. Segue-se que existe o vértice $x \in V(C_2)$ com a_1 e b_1 vértices adjacentes em C_1, tais que $xa_1 \in E(C_3)$ e $xb_1 \in E(C_4)$.

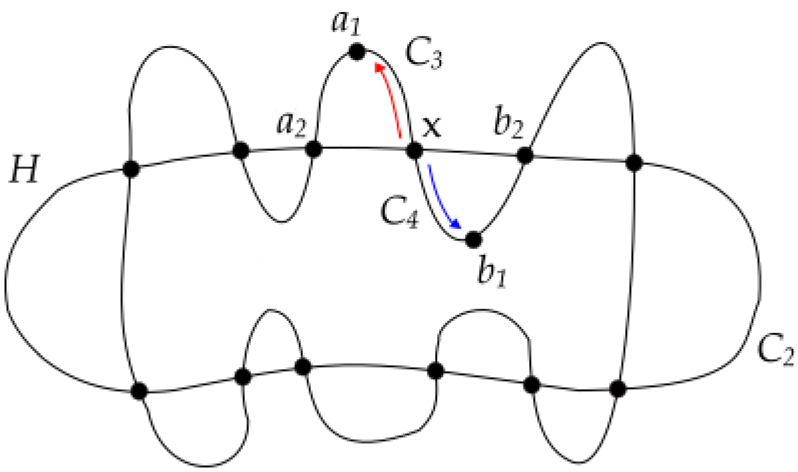


Figura 3.11: Construção de C_3 e C_4

Como a_1 e b_1 têm grau 2 em H, obtém-se que $a_1 \notin V(C)$ e $b_1 \notin E(C_3)$. Logo, H é a união de dois caminhos, $P_1' = (C_3 \cup xb_1)\backslash xa_1$ e $P_2' = (C_4 \cup xa_1)\backslash xb_1$, o que é uma contradição. Portanto, C_1 tem uma aresta e com ambas as extremidades em $V(C_2)$. ■

Lema 3.1.7. *Seja o grafo H uma união de um ciclo C e um caminho P aresta-disjuntos mas não vértice-disjuntos. Suponha que H não pode ser coberto por dois caminhos. Então, C tem uma aresta e com ambas as extremidades em P.*

Demonstração. Suponhamos que não existe tal aresta e, isto é, se $e = mn$ tais que $m, n \in V(C)$, então $m \notin V(P)$. Seja a o vértice final do caminho P. Seja x o vértice mais próximo de P e C. Seja m o vértice adjacente a x em C. Consideremos o caminho P_0, que conecta x e a, temos $V(C) \cap V(P_0) = x$. Se $m \notin V(P)$, então H é a união dos caminhos $P_1 = C \cup P_0 \backslash xm$ e $P_2 = C \cup xm \backslash P_0$, o que é uma contradição. Portanto, C tem uma aresta $e = mn = mx$ com ambas as extremidades em P.

■

Lema 3.1.8. *Seja G um grafo conexo de n vértices e seja $x \leq n$ um número par. Exite um subgrafo $R \subset G$ tal que:*

1. *Qualquer caminho P de um grafo $G \backslash R$ contém no máximo x vértices que têm grau par em $G \backslash R$*

2. *Existe no máximo um vértice w_0 de grau par maior que x^2 em $G \backslash R$*

3. *As arestas de R podem ser cobertas por $2(\frac{n}{x})$ caminhos de G.*

Demonstração. Seja V o conjunto dos vértices de grau par de V. Define-se a sequência $\{V_0, V_1, ..., V_r\}$ de subconjuntos de V tal que $V_0 = V$ e suponha que V_i está definido da seguinte forma:

- Se existe um caminho P_{i+1} de G contendo x vértices de V_i, então omitir os vértices de V_i para obter V_{i+1} (P_{i+1} pode conter qualquer numero de vértices de V_i)

- Se não existe um caminho P_{i+1}, então a sequencia termina.

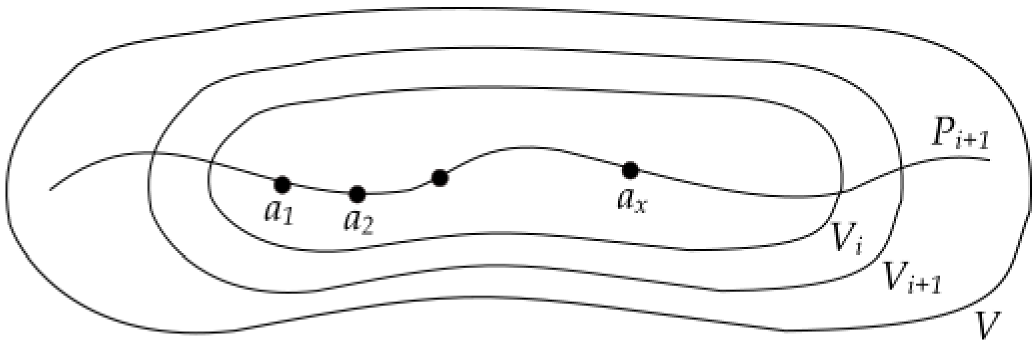


Figura 3.12: Construção de V_i

Como cada subconjunto V tem pelo menos x vértices, é claro que $rx \leq n$. Assim,

$$r \leq \frac{n}{x} \tag{6}$$

Considere-se o subgrafo H formado pelas arestas de G com pelo menos um vértice em V_r. Já que V_r é ultimo subconjunto da sequência, então não existe um caminho contendo x vértices de V_r. Se P é um caminho em H, então pelo menos $\left\lfloor \frac{|V(P)|}{2} \right\rfloor$ dos vértices do caminho pertencem a V_r. De fato,

- Se $|V(P)|$ é par, então o número de vértices do caminho P que contem vértices de V_r é $\frac{|V(P)|}{2}$.

- Se $|V(P)|$ é impar, então o número de vértices do caminho P que contem vértices de V_r é $\frac{|V(P)|-1}{2}$.

Logo, P contém pelo menos $\left\lfloor \frac{|V(P)|}{2} \right\rfloor$ vértices de V_r e consequentemente P tem comprimento de no máximo $2x - 1$. Pelo resultado de Erdös e Gallai apontado em Pyber [10], se um grafo de n vértices tem $\geq nx$ arestas, então dito grafo contém um caminho de comprimento $\leq 2x$. Para nosso caso, $P \in H$ tem comprimento $\leq 2x - 1 < 2x$, então em H tem-se $|E(H)| < nx$. Seja W o conjunto dos vértices de V_r que têm grau pelo menos x^2, observa-se que $|W| \leq 2(\frac{n}{x})$. De fato, seja W' o conjunto de arestas que têm pelo menos um vértice de grau x^2. Assim,

$$|W|\left(\frac{x^2}{2}\right) \leq |W'| \leq E(H).$$

Logo, $|W|(\frac{x^2}{2}) \leq |E(H)| < nx$. Então

$$|W| < 2\left(\frac{n}{x}\right). \tag{7}$$

Seguindo a demostração, defina-se R. Para um $t = \lfloor \frac{|W|}{2} \rfloor$, peguemos t caminhos $Q_1, ..., Q_t$ conectando arbitrariamente pares distintos de vértices de W. Cada P_i com $i = 1, 2, ..., r$ contém x vértices $a_i^1, a_i^2, ..., a_i^{x-1}, a_i^x$ de V_{i-1}. Considere-se os sub caminhos $P_i^1, P_i^2, ..., P_i^{\frac{x}{2}}$ de P_i conectando os vértices a_i^1 e a_i^2, a_i^3 e a_i^4,..., a_i^{x-1} e a_i^x. Assim, R está definido como modulo 2 da soma dos caminhos $Q_1, ..., Q_t$ e todos os caminhos P_i^j.

Em $G \backslash R$ só os vértices em $V_r \backslash W$ tem grau par, além de no máximo 1 vértice de W. Com isto, os item (1) e (2) são satisfeitos pela definição de V_r e W. Como os caminhos $P_1, ..., Q_r$ e $Q_1, ..., Q_t$ cobrem as arestas de R, o item (3) é provado.

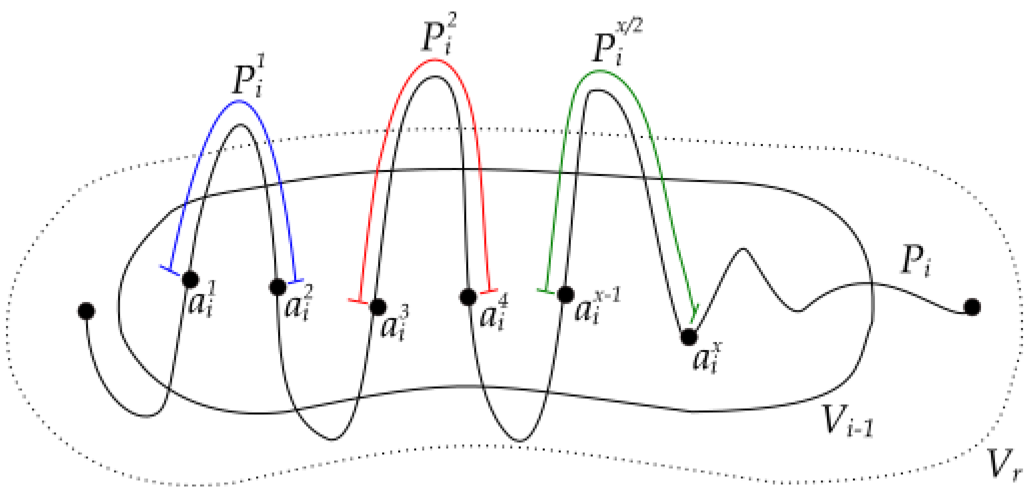


Figura 3.13: Caminho P_i e seus sub caminhos

■

3.2 Teoremas principais sobre coberturas

Teorema 3.2.1. *Todo grafo conexo G com n vértices pode ser coberto por*

$$\frac{n}{2} + O(n^{\frac{3}{4}})$$

caminhos.

Demonstração. Escolhe-se um numero par pequeno $x \geq n^{\frac{1}{4}}$ e considera-se o subgrafo $R \subset G$ como no Lema 3.1.8. Consideramos uma decomposição $\mathcal{F}$ de $G \backslash R$ com $|\mathcal{F}| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ caminhos ou ciclos aresta disjuntos onde o numero de ciclos é mínimo.

Na decomposição $\mathcal{F}$, qualquer ciclo C tem comprimento de no máximo x^3, isto é $|E(C)| \leq x^3$. Da fato, seja W o conjunto dos vértices de $w \in V(C)$ de grau par em $G \backslash R$, com $w \neq w_0$. Se os vértices de $G \backslash R$ formam um caminho, então pelo Lema 3.1.8(1), qualquer caminho de $G \backslash R$ contém no máximo x vértices de grau par. Mas, como os vértices de W são de grau par em $G \backslash R$, então $|W| \leq x$. Pelo lema 3.1.8(2), os vértices em W têm no máximo $|W|x^2 \leq x^3$ $G \backslash R$-vizinhos em C. Por outro lado, pelo lema 3.1.4, existem dois vértices vizinhos de um vértice arbitrário de C tal que ditos vértices são de grau par em $G \backslash R$. Logo, cada vértice de C tem um $G \backslash R$-vizinho em W. Assim $|E(C)| \leq x^3$.

Se C_1 e C_2 são dois ciclos vértice-disjuntos de $\mathcal{F}$, então como G é conexo, é claro que G pode ser coberto por dois caminhos de G. Tanto como seja possível, trocamos pares de ciclos não necessariamente vértice-disjunto, com pares de caminhos de G para cobrir estes ciclos. Embora teremos alguns pares de ciclos que não foram trocados por caminhos, este procedimento não mudará o numero de elementos de $\mathcal{F}$. Assim, conseguimos uma cobertura $\mathcal{F}'$ de $G \backslash R$ com

$$|\mathcal{F}'| = |\mathcal{F}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2}$$

caminhos e ciclos, de forma que os ciclos $C_1, C_2, ..., C_t$, são emparelhados intersectando ciclos de $\mathcal{F}$ e a união de C_1 e C_i, com $i = 1, 2, \ldots, t$ não podem ser cobertas por dois caminhos.

Visto que $|E(C_1)| \leq x^3$, C_1 tem no máximo x^3 vértices. Pelo lema 3.1.6, cada C_i tem uma aresta e_i com ambos os vértices em $V(C_1)$. As arestas e_i constituem o grafo H tal que $|V(H)| \leq x^3$, já que $|V(C_1)| \leq x^3$. Pelo Corolário 2.1.11, H pode ser coberto por $x^3 - 1$ caminhos aresta disjuntos. Particularmente, H pode ser coberto por x^3 caminhos. Cada par de ciclos C_i que foram trocados por caminhos, alterou a cardinalidade de $\mathcal{F}'$, pois, o número de caminhos em H tem que ser somado ao total de caminhos que precisa-se para cobrir $G\backslash R$. Segue-se que $G\backslash R$ pode ser coberto $\frac{n}{2} + x^3$ caminhos. Mas, como $x \geq n^{\frac{1}{4}}$ é um número par pequeno, Então,

$$x^3 \leq \left(n^{\frac{1}{4}} + 2\right)^3 = n^{\frac{3}{4}} + 12n^{\frac{1}{4}} + 6n^{\frac{1}{2}} + 8$$

Assim, $G\backslash R$ pode ser coberto por no máximo $\frac{n}{2} + n^{\frac{3}{4}} + 12n^{\frac{1}{4}} + 6n^{\frac{1}{2}} + 8$ caminhos. Pelo lema 3.1.8 (3), R pode ser coberto por $2(\frac{n}{x})$ caminhos. Mas, como $x \geq n^{\frac{1}{4}}$ é um número par pequeno,

$$2\left(\frac{n}{x}\right) \leq \frac{2n}{n^{\frac{1}{4}}} = 2n^{\frac{3}{4}}$$

Portanto, G pode ser coberto por no máximo

$$\frac{n}{2} + 3n^{\frac{3}{4}} + 12n^{\frac{1}{4}} + 6n^{\frac{1}{2}} + 8$$

caminhos. Seja $f(n) = 3n^{\frac{3}{4}} + 12n^{\frac{1}{4}} + 6n^{\frac{1}{2}} + 8$. Então, $n_0 = n^{\frac{1}{4}} \leq x = n$, tal que $f(n) \leq 3n^{\frac{3}{4}}$. Portanto, G pode ser coberto por no máximo

$$\frac{n}{2} + O(n^{\frac{3}{4}})$$

caminhos. ■

Teorema 3.2.2. *Todo grafo conexo G de n vértices com e arestas pode ser coberto por*

$$\frac{n}{2} + 4\left(\frac{e}{n}\right)$$

caminhos.

Demonstração. Seja G um grafo conexo com e arestas. Seja $\mathcal{F}$ uma decomposição por caminhos ou ciclos de G. Pelo Teorema 2.1.5, $|\mathcal{F}| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ caminhos e ciclos aresta disjuntos. Quebrando ciclos e caminhos se necessário, podemos assumir que $|\mathcal{F}|$ é exatamente $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, isto é,

$$|\mathcal{F}| = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \tag{8}$$

caminhos e ciclos aresta-disjuntos. Considere-se tal cobertura com um numero mínimo de ciclos.

Classificaremos os elementos de $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ...\}$, da seguinte forma: Chamaremos $\mathcal{F}_i$ de *grande* se $E(\mathcal{F}_i) \geq 4e/n$, e *pequeno* caso contrário. É claro que existem como máximo $\frac{n}{4}$ elementos grandes. De fato, suponhamos que todos os elementos de $\mathcal{F}$ são grandes, assim $|\mathcal{F}| = g$, tem-se,

$$|E(\mathcal{F}_1)| + |E(\mathcal{F}_2)| + ... + |E(\mathcal{F}_g)| \geq \frac{4e}{n} + \frac{4e}{n} + ... + \frac{4e}{n} = g\left(\frac{4e}{n}\right)$$

Como, $e = |E(G)| = \sum_{i=1}^{g} |E(\mathcal{F}_i)|$, então $e \geq \frac{4eg}{n}$. Logo, $\frac{n}{4} \geq g$, onde g é o numero de elementos grandes de $\mathcal{F}$. Alem disso, da eq. (8),

$$g \leq \frac{n}{4} = \frac{\frac{n}{2}}{2} \leq \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} = \frac{|\mathcal{F}|}{2} \tag{9}$$

Portanto, existem como máximo $\frac{|\mathcal{F}|}{2}$ elementos grandes de $\mathcal{F}$.

Seguindo o processo da demostração do teorema anterior, usamos o fato que a união vértice-disjunta de dois ciclos ou um ciclo e um caminho, sempre pode ser coberta por dois caminhos de G. Assim,

- Trocamos pares consistindo de um ciclo grande e um elemento pequeno, com pares de caminhos cobrindo suas arestas, tanto como seja possível. Nesse sentido, obtém-se uma cobertura $\mathcal{F}_1$ de G com $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ caminhos e ciclos, tal que todos os ciclos de $\mathcal{F}_1$ vêm de $\mathcal{F}$. Além disso, os ciclos grandes restantes intersectam cada elemento pequeno restante.

- Trocamos pares consistindo de ciclos pequenos com pares de caminhos cobrindo suas arestas, tanto como seja possível. Similarmente, obtém-se uma cobertura $\mathcal{F}_2$ de G com $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ caminhos e ciclos.

Prosseguindo, afirmamos que todos os ciclos $C_1, C_2, ..., C_t$ de $\mathcal{F}_2$, intersectam qualquer elemento pequeno S de $\mathcal{F}$. De fato, se existe um ciclo pequeno C_j em $\mathcal{F}_2$, então, $S = C_j$. Se não exitem ciclos pequenos, todos os ciclos de $\mathcal{F}_2$, são ciclos grandes que vêm de $\mathcal{F}_1$, e estes intersectam os elementos pequenos em $\mathcal{F}_1$, pelo o primeiro item linhas acima.

A partir da seleção de $\mathcal{F}_2$ e S, é fato que a união de S e C_i com $i = 1, 2, ..., t$ tal que $S \neq C_j$, não pode ser coberta por dos caminhos. Assim, pelos lemas 3.1.6 e 3.1.7, cada um dos ciclos C_i tem uma aresta e_i com ambos vértices em $V(S)$. Além disso,

- Se S é um caminho pequeno então $|V(S)| < \frac{4e}{n} + 1$.

- Se S é um ciclo pequeno então $|V(S)| < \frac{4e}{n}$.

Logo,

$$|V(S)| \leq \frac{4e}{n} + 1.$$

Então, a partir do Corolário 2.1.11, as arestas e_i podem ser cobertas por no máximo $\frac{4e}{n}$ caminhos de G. Cada par de elementos que foram trocados por caminhos alterou a cardinalidade de $\mathcal{F}_2$, pois o número de caminhos que precisa-se para cobrir as arestas e_i têm que ser somados ao total de caminhos já obtidos, isto é, G pode ser coberto por

$$\frac{n}{2} + 4\left(\frac{e}{n}\right)$$

caminhos.

■

Capítulo 4

Decomposição por caminhos e a conjectura de Gallai

Neste capitulo estudaremos o artigo de Fan [8], que mostrou que a conjectura de Gallai é verdadeira para certos grafos obtidos através de uma sequência de α-operações, definidas a seguir.

4.1 Resultados prévios

Definição 4.1.1. Seja H um grafo. O par (S, y), consistindo de um conjunto independente S e um vértice $y \in S$, é chamado um α-par se satisfizer os seguintes requisitos: Para todo vértice $v \in S \backslash \{y\}$, se $d_H(v) \geq 2$, então,

1. $d_H(u) \leq 3$, $\forall \ u \in N_H(v)$.

2. $d_H(u) = 3$, para no máximo 2 vértices $u \in N_H(v)$.

Em outras palavras, todos os vizinhos de v têm grau máximo 3, dos quais no máximo 2 deles têm grau exatamente 3.

Definição 4.1.2. Uma α-operação em H pode ser:

1. adicionar um vértice isolado, ou

2. escolher um α-par (S, y) e adicionar um vértice x ligado a cada vértice de S; nesse caso a tripla ordenada (x, S, y) é chamada α-tripla de uma α-operação.

Definição 4.1.3. Um α-grafo é um grafo que pode ser obtido de um conjunto vazio através de uma sequencia de α-operações. Assim, vamos definir o conjunto vazio como um α-grafo.

Teorema 4.1.4. *Seja G um grafo com n vértices.*

1. *G é um α-grafo se e somente se pode ser obtido por uma α-operação em algum α-grafo com $n-1$ vértices, $n \geq 1$.*

2. *Se G é um α-grafo, então os vértices de G podem ser ordenados como $x_1x_2...x_n$ tal que se G_i denota o subgrafo induzido pelos $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, então G_i é um α-grafo obtido por uma α-operação em G_{i-1}, onde $1 \leq i \leq n$, $G_0 =$ e $G_n = G$. Tal ordenação $x_1x_2...x_n$ é chamada α-ordenação de $V(G)$.*

3. *G é um α-grafo se e somente se $V(G)$ tem uma α-ordenação .*

Observação 4.1.5. Seja G um α-grafo. Então G não tem triângulos.

Proposição 4.1.6. *Qualquer subgrafo de um α-grafo é um α-grafo.*

Demonstração. Seja G um α-grafo com n vértices. Pelo Teorema 4.1.4, $V(G)$ contém uma α-ordenação $x_1x_2...x_n$. Se H é um subgrafo induzido pelos vértices $x_1, x_2, ..., x_i$ onde $1 \leq i \leq n$, então H é α-grafo. ■

Definição 4.1.7. Uma subdivisão de um grafo G é um grafo que pode ser obtido a partir de G por uma sequência de subdivisões de arestas.

Proposição 4.1.8. *Qualquer subdivisão de um α-grafo é um α-grafo.*

Demonstração. Seja G um α-grafo. Suponhamos que $xy \in E(G)$ e seja o grafo H obtido a partir de G ao substituir xy com o caminho $xa_1a_2a_3...a_ky$, $k \geq 1$. Como G é α-grafo, então $V(G)$ tem uma α-ordenação, digamos, $v_1v_2...xv_i...v_jy...v_n$. Então, $V(H)$ tem uma α-ordenação, $v_1v_2...xv_i...v_ja_1a_2a_3...a_ky...v_n$. Logo H é um α-grafo. ■

O seguinte resultado é uma generalização do Teorema 3.1.2 do Pyber [10], pois dizer que o E-grafo é uma floresta é dizer que cada ciclo contém um vértice de grau ímpar.

Proposição 4.1.9. *As florestas são α-grafos.*

Demonstração. Seja F uma floresta.

- Se $E(F) = \emptyset$, então F só tem vértices isolados. Assim, qualquer ordenação de $V(F)$ é uma α-ordenação. Então F é um α-grafo.

- Suponhamos que $E(F) \neq \emptyset$. Já que F é uma floresta, então existe um vértice x tal que $d_F(x) = 1$. Seja $H = F - x$ uma floresta. Assim, usamos indução ao numero de vértices. Se $n = 1$, então o resultado segue-se da primeira parte da demostração. Suponhamos que a proposição é valida para qualquer floresta F' com $n' < n$ vértices. Logo, H é α-grafo. Seja y o único vizinho de x em F. Então, F é obtido a partir de H por adicionar x conetado a y, que é uma α-operação com α-triplo $(x, \{y\}, y)$. Assim, F é um α-grafo.

Por tanto, uma floresta é um α-grafo. ∎

Proposição 4.1.10. *Se cada bloco de G é um grafo com grau no máximo 3 sem triângulos, então G é um α-grafo.*

Demonstração. Usamos indução ao numero de vértices $|V(G)| = n$. Se $n = 1$, a proposição é verdadeira. Suponhamos que se $n \geq 2$ a proposição é verdadeira para todo grafo G' com $n' < n$.

Seja B um bloco final de G. Se $B = G$ (isto é, se G é 2-conexo), seja b qualquer vértice de B; de outra forma suponhamos $B \neq G$ e seja b o único vértice de corte contido em B. Seja x o vértice vizinho de b em B e consideremos os vizinhos de x. É claro que $N_B(x) = N_G(x)$. Consideramos $S = N_G(x)$ e $H = G - x$. O conjunto S é um conjunto independente pois em B não tem-se triângulos (não são vizinhos). Logo b não é vizinho de qualquer vértice $v \in S \backslash \{b\}$, e já que B tem grau no máximo 3, $d_H(u) \leq 3$ para todo $u \in N_H(v)$. Da mesma forma temos que $N_H(v) \leq 2$. Assim, existem no máximo dois vértices $u \in N_H(v)$ que têm grau exatamente 3.

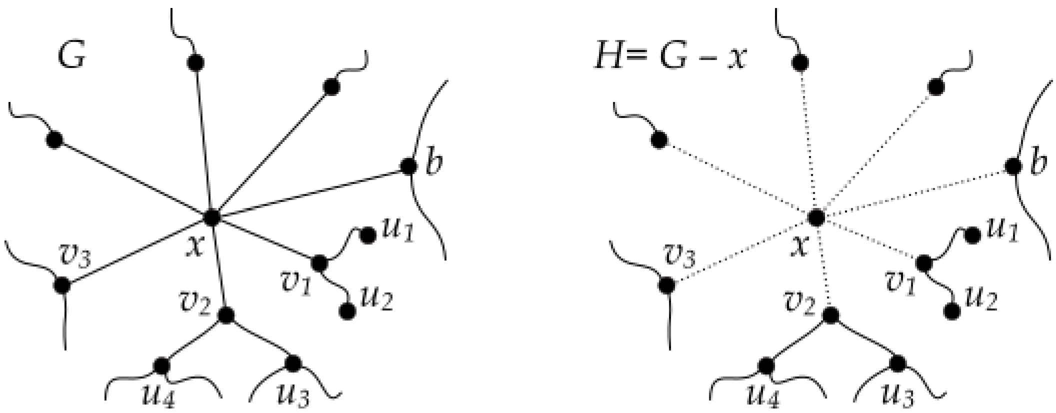


Figura 4.1: Construção do grafo $H = G - x$

A partir do Teorema 4.1.4, se em H escolhemos o par (S, b) e adicionamos o vértice x ligado a cada vértice de S, então podemos obter G por uma α-operação com uma α-tripla (x, S, b). Pela hipóteses indutiva H é um α-grafo, então G é α-grafo.

■

4.2 Lemas técnicos

Definição 4.2.1. Seja $\mathcal{D}$ uma decomposição por caminhos de um grafo G. Para o vértice $v \in V(G)$, denotamos $\mathcal{D}(v)$ ao número de caminhos não triviais em $\mathcal{D}$ que tem v como ponto final. Se x é um vértice de grau impar em G, então $\mathcal{D}(x) \geq 1$.

Definição 4.2.2. Seja G um grafo. Seja a um vértice em G e B o conjunto das arestas incidentes a a. Fixamos $H = G \backslash B$. Suponhamos que $\mathcal{D}$ é uma decomposição por caminhos de H. Para qualquer $A \subseteq B$, $A = \{ax_i \mid 1 \leq i \leq k\}$, dizemos que A é *adicionável* com a respeito a $\mathcal{D}$ se $H \cup A$ tem uma decomposição $\mathcal{D}^*$ tal que,

1. $|\mathcal{D}^*| = |\mathcal{D}|$;
2. $\mathcal{D}^*(a) = \mathcal{D}(a) + |A|$ e $\mathcal{D}^*(x_i) = \mathcal{D}(x_i) - 1$, $1 \leq i \leq k$;
3. $\mathcal{D}^*(v) = \mathcal{D}(v)$ para cada $v \in V(G) \backslash \{a, x_1, \ldots, x_k\}$.

À decomposição $\mathcal{D}^*$ vamos chamar de *transformação* de $\mathcal{D}$ por adicionar A em a.

Lema 4.2.3. *Seja a um vértice em G, e $H = G \backslash \{ax_1, ax_2, \ldots, ax_s\}$ onde $x_i \in N_G(a)$. Suponhamos que $\mathcal{D}$ é uma decomposição por caminhos de H. Então, um dos seguintes resultados:*

1. *existe um $x \in \{ax_1, ax_2, ..., , ax_s\}$ tal que ax é adicionável com a respeito a $\mathcal{D}$;*
2. $\sum_{i=1}^{s} \mathcal{D}(x_i) \leq |\{v \in N_H(a) \ : \ \mathcal{D}(v) = 0\}|$.

Demonstração. Ao igual que a maioria das demostrações desta dissertação, usaremos a técnica usada por Lovász no capitulo 1. Assim, consideremos o seguinte conjunto de pares,

$$R = \{(x, P); x \in \{x_1, ..., x_s\} \text{ e } P \text{ um caminho não trivial em } \mathcal{D} \text{ com ponto final } x\}$$

É claro que a cardinalidade de R esta determinado por x, isto é, $\sum_{i=1}^{s} \mathcal{D}(x_i) = |R|$. Cada par $(x, P) \in R$, será associado com uma sequência $b_1 P_1 b_2 P_2 ...$, construída da seguinte forma:

1. $b_1 = x$; $P_1 = P$

2. Suponhamos que P_i foi definido, $i \geq 1$.

   (a) Se P_i não contém a, então a sequência termina em P_i;

   (b) Se P_i contém a, então seja b_{i+1} o ultimo vértice ao longo de P_i começando em b_i.

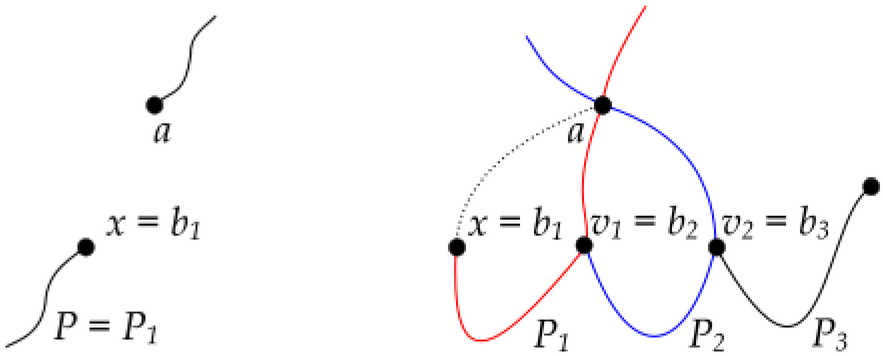


Figura 4.2: Sequencias b_1P_1 e $b_1P_1b_2P_2b_3P_3$

3. Suponhamos que b_i foi definido, $i \geq 1$.

   (a) Se $\mathcal{D}(b_i) = 0$, então a sequência termina em b_i;

   (b) Se $\mathcal{D}(b_i) \neq 0$, então seja P_i o caminho em $\mathcal{D}$ começando em b_i.

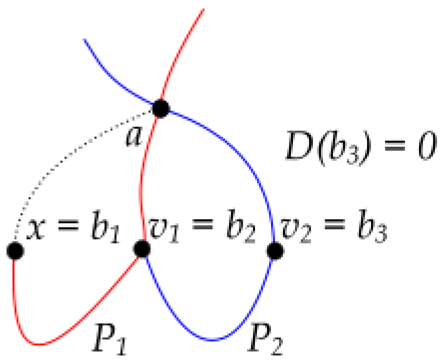


Figura 4.3: Sequencia $b_1P_1b_2P_2b_3$

É claro que b_{i+1} é unicamente determinado pelo caminho P_i (contendo $b_{i+1}a$) e sua extremidade b_i.

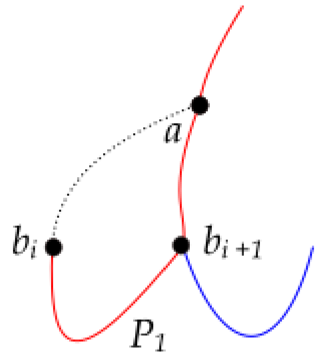


Figura 4.4: Caminho P_i contendo $b_{i+1}a$

Dito par (P_i, b_i) é único pois existe só um caminho em $\mathcal{D}$ que contém $b_{i+1}a$; além disso, as duas extremidades do caminho são distintos. Logo, se $i \neq j$ então $b_i \neq b_j$. Portanto, a sequência $b_1P_1b_2P_2...$ é finita.

Como $\mathcal{D}$ é sua decomposição de o grafo H que foi obtido por apagar as arestas adjacentes a a em G, vejamos os seguintes casos:

- Se a sequência terminar num caminho P_t (item 2 da construção), consideremos o caminhos

$$P_i' = \Big(P_i \backslash \{b_{i+1}a\}\Big) \cup \{b_i a\},$$

$$P_t' = P_t \cup b_t a$$

onde $1 \leq i \leq t-1$.

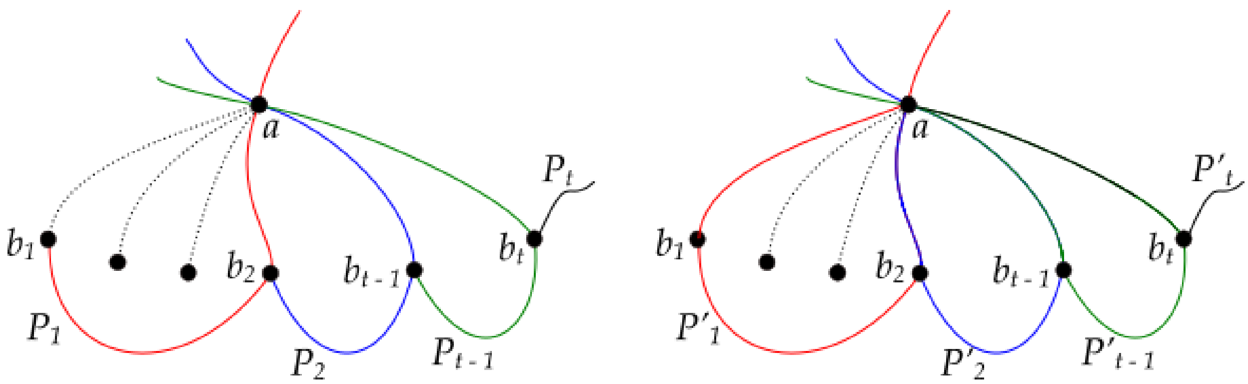


Figura 4.5: Construção dos caminhos de $\mathcal{D}^*$

Então, $\mathcal{D}^* = \{\mathcal{D} \backslash P_1, P_2, ..., P_t\} \cup \{P_1', P_2', ..., P_t'\}$ é uma decomposição por caminhos de $H \cup ax$, tal que,

- $|\mathcal{D}^*| = |\mathcal{D}|$;
- $\mathcal{D}^*(a) = \mathcal{D}(a) + 1$ e $\mathcal{D}^*(x) = \mathcal{D}(x) - 1$, $1 \leq i \leq t-1$;

– $\mathcal{D}^*(v) = \mathcal{D}(v)$ para cada $v \in V(G)\backslash\{a, x\}$.

Por tanto, da Definição 4.2.2, ax é adicionável com a respeito a $\mathcal{D}$, o que prova o item 1 do lema.

- Se a sequência terminar num caminho b_t (item 3 da construção), isto é, $\mathcal{D}(b_t) = 0$. Consideremos, (w, P) e (z, Q) pares distintos em R associados com as sequências $w_1P_1w_2P_2...P_{t-1}w_t$ e $z_1Q_1z_2Q_2...Q_{m-1}z_m$, respetivamente, onde $w_1 = w$, $P_1 = P$, $z_1 = Z$, $Q_1 = Q$, e $\mathcal{D}(w_t) = \mathcal{D}(z_m) = 0$.

  A partir das considerações previas, $w_t \neq z_m$. De fato, suponhamos o contrario, isto é $w_t = z_m$. Sem perda da generalidade, suponhamos que $t \leq m$. Visto que um caminho em $\mathcal{D}$ contendo $w_ta(= z_m)$ é único, temos que

$$P_{t-1} = Q_{m-1}.$$

  Agora, w_{t-1} é final do caminho P_{t-1} com w_t entre w_{t-1} e a; z_{m-1} é final do caminho Q_{m-1} com $z_m = (w_t)$ entre z_{m-1} e a. Assim, o ponto final do caminho $P_{t-1}(= Q_{m-1})$ é único. Logo, $w_{t-1} = z_{m-1}$.

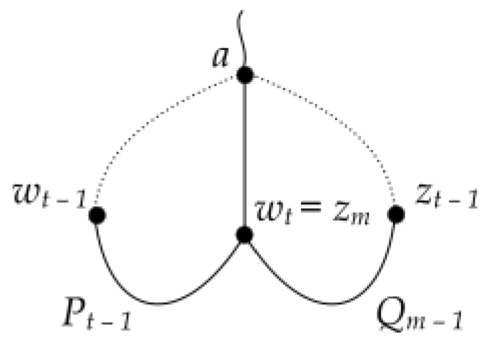


Figura 4.6: Caminhos $P_{t-1} = Q_{m-1}$

  Fazendo recursivamente, temos que se $t \leq m$,

$$P_1 = Q_{m-1-(t-2)} = Q_{m-t+1} \text{ e } w_1 = z_{m-t+1}.$$

  Como $w_1 = w$ e $w \in \{x_1, x_2, ..., x_s\}$, temos que $w_1a \notin E(H)$, isto é, $z_{m-t+1}a \notin E(H)$, o que implica que $z_{m-t+1} = z_1$ e $t = m$. Então,

$$P_1 = Q_{m-t+1} = Q_1 \text{ e } w_1 = z_1.$$

Mas como os pares (w_1, P) e (z_1, Q) são distintos, então tem-se uma contradição. Portanto, $w_t \neq z_m$.

Para qualquer par distinto de elementos de R temos uma aplicação injetora de R até $\{x \in N_H(a) : \mathcal{D}(x) = 0\}$. Logo,

$$|\{x \in N_H(a) : \mathcal{D}(x) = 0\}| \geq |R| = \sum_{i=1}^{s} \mathcal{D}(x_i).$$

É claro que a partir da construção, estabelecemos que só pode ocorrer os item (1) e (2), independentemente. Assim, o Lema 4.2.3 é provado. ■

Lema 4.2.4. *Seja G um grafo e $ab \in E(G)$. Suponhamos que $\mathcal{D}$ é uma decomposição por caminhos de $H = G \backslash \{ab\}$. Se $\mathcal{D}(b) > |\{v \in N_H(a) : \mathcal{D}(v) = 0\}|$, então ab é adicionável com a respeito de $\mathcal{D}$.*

Demonstração. A partir do Lema 4.2.3, se o item (2) é rejeitado, segue-se com $s = 1$. ■

Lema 4.2.5. *Seja $a \in V(G)$ e $H = G \backslash \{ax_1, ax_2, ..., , ax_s\}$ onde $x_i \in N_G(a)$. Suponhamos que $\mathcal{D}$ é uma decomposição por caminhos de H com $\mathcal{D}(x_i) \geq 1$ para cada i, $1 \leq i \leq s$. Então existe um $A \subseteq \{ax_1, ax_2, ..., , ax_s\}$ tal que,*

1. *$|A| \geq \lceil \frac{s-r}{2} \rceil$, onde $r = |\{v \in N_H(a) : \mathcal{D}(a) = 0\}|$*
2. *A é adicionável com a respeito de $\mathcal{D}$.*

Demonstração. Usamos indução ao numero $s - r$. Se $s - r \leq 0$, segue-se o caso trivial pois tomando $A = \emptyset$ então,

$$\left\lceil \frac{s-r}{2} \right\rceil \leq \frac{s-r}{2} \leq 0 = |A|.$$

Suponhamos que $s - r \geq 1$ e que o lema é verdadeiro para qualquer valor pequeno de $s - r$ (pode ser $s - n - 1$). Como $\mathcal{D}(x_i) \geq 1$ para cada i, $1 \leq i \leq s$, e usando $s - r \leq 1$, temos que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{s} \mathcal{D}(x_i) \geq s \geq 1 + r = 1 + |\{v \in N_H(a) : \mathcal{D}(v) = 0\}| \\ > |\{v \in N_H(a) : \mathcal{D}(v) = 0\}|. \end{aligned}$$

A partir do Lema 4.2.3, existe um $x \in \{x_1, x_2, ..., x_s\}$, tal que se $x = x_s$, ax_s é adicionável com a respeito de $\mathcal{D}(a)$. Consideremos a $\mathcal{D}'(a)$ uma transformação de $\mathcal{D}(a)$ por adicionar ax_s a a.

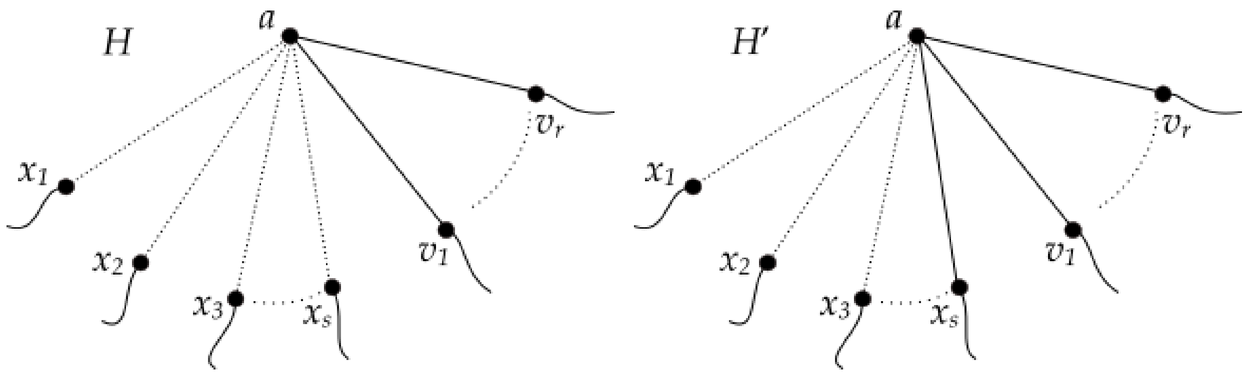


Figura 4.7: Grafo $H' = H \cup \{ax_s\}$

Consideremos $s' = s - 1$ e $H' = H \cup \{ax_s\} = G \backslash \{ax_1, ..., ax_{s-2}, ax_{s'}\}$. Então, $\mathcal{D}'(a)$ é uma decomposição por caminhos de H' com, $\mathcal{D}'(x_i) = \mathcal{D}(x_i) \geq 1$ para cada i, $1 \leq i \leq s' = s - 1$. Seja $r' = |\{v \in N_{H'}(a) \ : \ \mathcal{D}(v) = 0\}|$. É claro que $r' \geq r$ pois,

- Se $\mathcal{D}(x_s) \neq 0$, então $r' = r$.
- Se $\mathcal{D}(x_s) = 0$, então $r' = r + 1$.

Logo, $s' - r' = s - 1 - r' \leq s - 1 - r = s - r - 1$. Pela hipótese indutiva, exite um $A' \subseteq \{ax_1, ..., ax_s{}'\}$ tal que,

- $|A'| \geq \lceil \frac{s'-r'}{2} \rceil$.
- A' é adicionável com a respeito de $\mathcal{D}'$.

Além disso, temos que $|A'| \geq \lceil \frac{s-r}{2} \rceil - 1$. De fato,

$$|A'| \geq \left\lceil \frac{s' - r'}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{s - 1 - r'}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{s - r}{2} \right\rceil, \text{se } r' = r,$$

$$|A'| \geq \left\lceil \frac{s' - r'}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{s - 1 - (r+1)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{s - r}{2} - 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{s - r}{2} \right\rceil - 1, \text{se } r' = r + 1.$$

Fixando $A = A' \cup \{ax_s\}$. Então A é adicionável com a respeito de $\mathcal{D}$ e $|A| = |A'| + 1 \geq \lceil \frac{s-r}{2} \rceil$.

■

Lema 4.2.6. *Seja $a \in V(G)$ e $H = G \backslash \{ax_1, ax_2, ..., , ax_h\}$ onde $x_i \in N_G(a)$. Suponhamos que $\mathcal{D}$ é uma decomposição por caminhos de H com $\mathcal{D}(v) \geq 1$ para todo $v \in N_G(a)$. Então, para qualquer $x \in \{x_1, x_2, ..., , x_h\}$, existe um $B \subseteq \{ax_1, ax_2, ..., , ax_h\}$, tal que,*

1. *$ax \in B$ e $|B| \geq \lceil \frac{h}{2} \rceil$.*

2. *B é adicionável em a com respeito de $\mathcal{D}$.*

Demonstração. Consideremos $W = H \cup \{ax\}$. Então $H = W \backslash \{ax\}$. Como $\mathcal{D}(v) \geq 1$ para todo $v \in N_H(a) \cup \{x_1, x_2, ..., x_h\}$, temos que $\mathcal{D}(x) \geq 1$ e $|\{v \in N_H(a) : \mathcal{D}(v) = 0\}|$. A partir do Lema 4.2.4, ax é adicionável com a respeito de $\mathcal{D}$. Da mesma forma que a demostração do lema anterior, seja $\mathcal{D}'$ uma transformação de $\mathcal{D}$ por adicionar ax a a. Sem perdida de generalidade, assumimos que $x = x_h$.

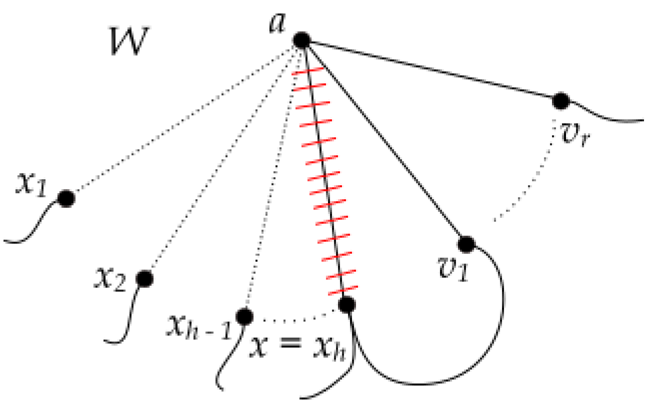


Figura 4.8: Grafo $W = H \cup \{ax\}$

Consideremos $s = h - 1$. Então, $W = H \cup \{ax_1, ax_2, ..., ax_h\}$. Fixamos $r = |\{v \in N_W(a) : \mathcal{D}'(v) = 0\}|$. Temos que $r \leq 1$, pois se,

$$v \in N_W(a) = N_{H \cup \{ax\}}(a) = N_H(a) \cup x_h$$

então, $r = 0$ ou 1. Pelo Lema 4.2.5, existe um $A \subseteq \{ax_1, ..., ax_s\}$ tal que,

- $|A| \geq \lceil \frac{s-r}{2} \rceil$.

- A é adicionável com a respeito de $\mathcal{D}'$.

Além disso, temos que $|A| \geq \lceil \frac{h}{2} \rceil - 1$. De fato,

$$|A| \geq \left\lceil \frac{s-r}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{h-1-1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{h-2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{h}{2} \right\rceil - 1.$$

Fixando $B = A \cup \{ax\}$. Então B é adicionável com a respeito de $\mathcal{D}$ e $|B| = |A| + 1 \geq \lceil \frac{h}{2} \rceil$. ■

Lema 4.2.7. *Seja $b \in V(G)$ e $H = G \backslash \{bx_1, bx_2, ..., , bx_k\}$ onde $x_i \in N_G(b)$. Se H tem uma decomposição por caminhos $\mathcal{D}$ tal que $|\{v \in N_H(x_i) \ : \ \mathcal{D}(v) = 0\}| \leq m$, para cada i, $1 \leq i \leq k$, e $\mathcal{D} \geq k + m$, onde m é um numero inteiro não negativo, então G tem uma decomposição por caminhos $\mathcal{D}^*$ com $|\mathcal{D}^*| = |\mathcal{D}|$.*

Demonstração. Usamos indução ao numero k. Se $k = 0$, então $G = H$ e o lema é verdadeiro com $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$. Suponhamos que $k \geq 1$ e que o lema é verdadeiro para qualquer valor pequeno de k. Consideremos o vértice x_k. Pelas condições do lema,

$$\mathcal{D}(b) \geq k + m \geq m + 1 \geq |\{v \in N_H(x_k) \ : \ \mathcal{D}(v) = 0\}| + 1 > |\{v \in N_H(x_k) \ : \ \mathcal{D}(v) = 0\}|.$$

A partir do Lema 4.2.4, se $\mathcal{D}(b) > |\{v \in N_H(x_k) \ : \ \mathcal{D}(v) = 0\}|$ então bx_k é adicionável com b respeito de $\mathcal{D}$. Consideremos $\mathcal{D}'$ uma transformação de $\mathcal{D}$ por adicionar bx_k a x_k. Seja $H' = H \cup \{bx_k\} = G \backslash \{bx_1, ..., bx_{k-1}\}$. Assim,

$$\mathcal{D}'(x_k) = \mathcal{D}(x_k) + 1 \geq 1.$$

Logo, temos para cada i, $1 \leq i \leq k-1$,

$$\begin{aligned} |\{v \in N_{H'}(x_i) \ : \ \mathcal{D}'(v) = 0\}| &= |\{v \in N_{H \cup \{bx_k\}}(x_i) \ : \ \mathcal{D}'(v) = 0\}| \\ &\leq |\{v \in N_H(x_i) \ : \ \mathcal{D}'(v) = 0\}| \\ &\leq m, \end{aligned}$$

e $\mathcal{D}'(b) = \mathcal{D}(b) - 1 \geq k - 1 + m$. Como $\mathcal{D}'$ é uma decomposição por caminhos de H', então pela hipóteses indutiva, G tem uma decomposição por caminhos $\mathcal{D}^*$ com $|\mathcal{D}^*| = |\mathcal{D}'|$. Já que $|\mathcal{D}'| = |\mathcal{D}|$, então $|\mathcal{D}'| = |\mathcal{D}|$.

■

Lema 4.2.8. *Seja F um E-subgrafo de um grafo G. $a \in V(F)$ e $\{x_1, x_2, ..., , x_s\} \subseteq N_F(a)$, onde s é um número impar e $d_F(x_i) \leq 3$, $2 \leq i \leq s$, se $G \backslash \{ax_1, ax_2, \ldots, , ax_s\}$ tem uma decomposição por caminhos $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D}(v) \geq 1$ para todo $v \in N_G(a) \cup \{a\}$, então G tem uma decomposição por caminhos $\mathcal{D}^*$ com $|\mathcal{D}^*| = |\mathcal{D}|$.*

Demonstração. De acordo com o lema 4.2.6, existe um $B \subseteq \{ax_1, ax_2, ..., , ax_s\}$, tal que,

1. $ax_1 \in B$ e $|B| \geq \lceil \frac{s}{2} \rceil$.

2. B é adicionável em a com respeito de $\mathcal{D}$.

Seja $\mathcal{D}'$ a transformação de $\mathcal{D}$ por adicionar B a a. Assim, obtemos,

$$\mathcal{D}'(a) \geq \mathcal{D}(a) + |B| \geq |B| + 1. \tag{1}$$

Como s é impar, então $s = 2k+1$. Fazendo uma remarcação, assumimos que $B \subseteq \{ax_1, ax_2, ..., ax_t\}$, onde,

$$t = |B| \geq \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil = \lceil k+1 \rceil = k+1. \tag{2}$$

Consideremos $H = G \backslash \{ax_{t+1}, ax_{t+2}, ..., ax_s\}$.

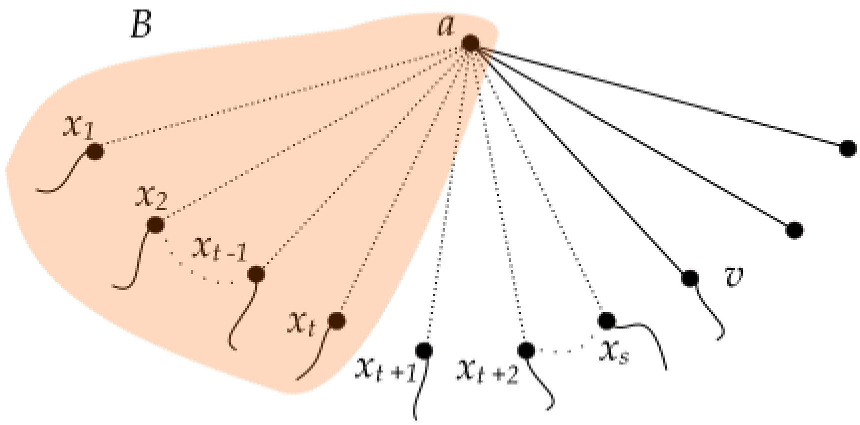


Figura 4.9: Construção do grafo $H = G \backslash \{ax_{t+1}, ax_{t+2}, ..., ax_s\}$

Assim, $\mathcal{D}'$ é uma decomposição de H tal que, pela eq. (1) e (2),

$$\mathcal{D}'(a) \geq |B| + 1 = t + 1 \geq k + 2.$$

Além disso, da eq. (1) e já que $s = 2k+1$ então,

$$|\{ax_{t+1}, ax_{t+2}, ..., ax_s\}| = s - t \leq k.$$

Seja $W = F - a$. Das condições do lema, $d_F(x_i) \leq 3$, $2 \leq i \leq s$, temos que para qualquer $x \in \{x_{t+1}, x_{t+2}, ..., x_s\}$, $d_W(x) \leq 2$. Logo, existem no máximo 2 vizinhos de x com grau par em H. Por tanto,

$$|\{v \in N_H(x_i)\ :\ \mathcal{D}(v) = 0\}| \leq 2, \text{ para cada } i, t+1 \leq i \leq s$$

Assim, seguindo as condições do Lema 4.2.7, temos que para $m = 2$, G tem uma decomposição por caminhos $\mathcal{D}^*$ com $|\mathcal{D}^*| = |\mathcal{D}'| = |\mathcal{D}|$. Portanto o lema é provado. ∎

4.3 Teorema principal sobre decomposição

O seguinte teorema é uma extensão ao resultado de Pyber [10], quem provou que a conjectura de Gallai 2.1.3 é verdadeira se o subgrafo induzido por vértice de grau par de G é uma floresta.

Definição 4.3.1. O E-subgrafo é um subgrafo do grafo G induzido por os vértices de grau par em G.

Teorema 4.3.2. *Seja G um grafo com n vértices (não necessariamente conexo). Se o E-subgrafo de G é um α-grafo. Então G pode ser decomposto em $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ caminhos.*

Demonstração. Usamos indução ao número de arestas $|E(G)| = m$. Se $m = 0$, então o teorema se mantém trivialmente. Suponhamos que $m \geq 1$ e que o teorema é verdadeiro para todo grafo G' com $m' < m$.

Consideremos F um E-subgrafo de G. Suponhamos que o $E(F) \neq \emptyset$. Da condição do teorema, F é um α-grafo. Consideremos a α-ordenação $a_1 a_2 ... a_m$ de $V(F)$. Já que um vértice isolado pode ser colado em qualquer posição da α-ordenação, podemos assumir que a_m não é um vértice isolado em F, isto é, que pelo menos tem um vizinho, então $d_F(a_m) \geq 1$. Usamos a seguinte notação,

$$a = a_m\ ,\ N_F(a) = \{x_1, x_2, ..., x_s\}\ ,\ W = F - a,$$

onde $s \geq 1$.

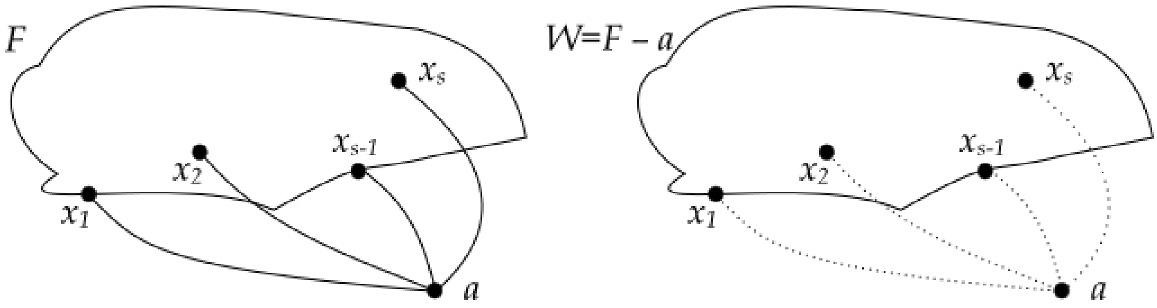


Figura 4.10: Grafo $W = F - a$

Pela definição, F é obtido a partir de W por adicionar a ligado ao conjunto independente $\{x_1, x_2, ..., x_s\}$ com a seguinte propriedade: Existe um $y \in \{x_1, x_2, ..., x_s\}$, considere $y = x_1$, tal que se $d_W(x_i) \geq 2$, então $d_W(u) \leq 3$, para todo $u \in N_W(x_i)$ e existe no máximo dois vértices da forma u com $d_W(u) = 3$, onde $2 \leq i \leq s$. Já que F é um E-subgrafo de G, os vértices $\{a, x_1, x_2, ..., x_s\}$ são de grau par G, estudemos os seguintes casos.

1. *Se s é impar e $d_W(x_i) \leq 2$, para cada $2 \leq i \leq s$.*

   Consideremos $H = G \backslash \{ax_1, ..., ax_s\}$. Então $F - \{ax_1, ..., ax_s\}$ é um E-subgrafo de H, e pela Proposição 4.1.6 é um α-grafo. A partir da hipótese indutiva, H tem uma decomposição por camihos $\mathcal{D}$ tal que $|\mathcal{D}| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Como s é impar, temos que cada vértice de $\{a, x_1, ..., x_s\}$ têm grau impar em H e pela definição de F, cada vértice de $N_H(a)$tem grau impar em H. Logo, $\mathcal{D}(v) \geq 1$ para todo $v \in N_H(a) \cup \{a\}$. Satisfazendo as condições do Lema 4.2.8, G tem uma decomposição por caminhos $\mathcal{D}'$ tal que,

   $$|\mathcal{D}'| = |\mathcal{D}| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

   Assim, G pode ser decomposto em $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ caminhos.

2. *Se s é par e $d_W(x_i) \leq 2$, para cada $2 \leq i \leq s$.*

   (a) *Se $d_W(x_s) = 0$.*

   Consideremos $H = G \backslash \{ax_s\}$ (os vértices x_s e a têm grau impar em H). Analogamente como no caso 1, $F - \{x_s, a\}$ é um E-subgrafo de H. Pela Proposição 4.1.6, $F - \{x_s, a\}$ é um α-grafo. Da hipótese indutiva temos que H' tem uma decomposição por caminhos $\mathcal{D}$ com $|\mathcal{D}| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Como $d_W(x_s) = 0$, então cada vizinho de x_s tem grau impar em H. Logo, $\mathcal{D}(v) \geq 1$ para todo $v \in N_H(x_s)$. Já que a tem grau impar em H, $\mathcal{D}(v) \geq 1$. Segue-se,

$$\mathcal{D}(v) > |v \in N_H(x_s) \ : \ \mathcal{D}(v) = 0| = 0.$$

Satisfazendo as condições do Lema 4.2.4, $\{x_s, a\}$ é adicionável com $\{x_s\}$ respeito de $\mathcal{D}$. Assim, obtemos uma decomposição de G com $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ caminhos.

(b) *Se* $d_W(x_s) = 1$.

Seja $y \in N_W(x_s)$ (único). Consideremos, $H = G \backslash \{ax_1, ..., ax_{s-1}, yx_s\}$. Como $\{x_1, ..., x_s\}$ é um conjunto independente, temos que $y \neq x_i$, $1 \leq i \leq s$. Logo, já que s é par, cada vértice de $\{a, x_1, ..., x_s, y\}$ tem grau impar em H. Analogamente, o E-subgrafo de H é um α-grafo e pela hipóteses indutiva, H tem uma decomposição por caminhos com $|\mathcal{D}| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Segue-se,

$$|\{v \in N_H(x_s) \ : \ \mathcal{D}(v) = 0\}| = 0 \text{ e } \mathcal{D}(y) \geq 1.$$

Satisfazendo as condições do Lema 4.2.4, $\{x_s, y\}$ é adicionável com $\{x_s\}$ respeito de $\mathcal{D}$. Seja $\mathcal{D}'$ uma transformação de $\mathcal{D}$ por adicionar yx_s a X_s e considerando,

$$H' = H \cup \{ax_1, ax_2, ..., ax_{s-1}\}.$$

Logo, $\mathcal{D}'$ é uma decomposição por caminhos de H' com $|\mathcal{D}'| = |\mathcal{D}|$. Além disso, $\mathcal{D}'(x_s) = \mathcal{D}(x_s) + 1 \geq 2$. Por tanto,

$$\mathcal{D}'(v) \geq 1 \ \text{ para todo } \ v \in N_G(a) \cup \{a\}.$$

Como $s - 1$ é impar, $\{x_1, x_2, ..., x_{s-1}\} \subseteq N_F(a)$. Satisfazendo as condições do Lema 4.2.8, G tem uma decomposição por caminhos $\mathcal{D}^*$ com,

$$|\mathcal{D}^*| = |\mathcal{D}'| = |\mathcal{D}| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Assim, obtemos uma decomposição de G com $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ caminhos.

3. *Existe* $x \in \{a, x_1, x_2, ..., x_s\}$ *tal que* $d_W(x_i) \leq 2$.

A partir das condições da propriedade ao inicio da demonstração, $d_W(u) \leq 3$ para todo $u \in N_W(x_i)$ e existe no máximo dois vértices da forma u com $d_W(u) = 3$.

Seja $N_W(x) = \{u_1, u_2, ..., u_l\}$ e consideremos o conjunto de vétices $S = N_F(x) = \{a, u_1, u_2, ..., u_l\}$. Pela Observação 4.1.5, temos que S é conjunto independente. Seja $Z = F - x$ e $H = G \backslash \{xv \ : \ v \in S\}$. Como $d_W(u_i) \leq 3$ para cada i, $1 \leq i \leq l$, temos que,

$$d_Z(u_i) \leq 3 \text{ para cada } i,\ 1 \leq i \leq l \tag{3}$$

Dependendo de l, sejam os seguintes casos:

- Se l é par. Pela forma de S, é claro que $|S| = l + 1$ é um número impar. Substituindo Z por W e x por a, segue-se o caso I da eq. (3).
- Se l é impar. Como l é o numero de vizinhos de x em W e já que $d_W(x) \geq 2$, então $l \geq 3$. Além disso, existe no máximo dois vértices da forma u_i com $d_W(u_i) = 3$. Podemos assumir que

  $$d_W(u_l) \leq 2 \text{ e } d_Z(u_l) \leq 1.$$

  Substituindo a por x, usando o fato do caso II e a partir da eq. (3), temos que:
  - Se $d_Z(u_l) = 0$, segue-se do caso 2 - (a).
  - Se $d_Z(u_l) = 1$, segue-se do caso 2 - (b).

  Assim, o caso III é provado.

A partir dos resultados no caso I, II, e III, se o E-subgrafo de G é α-grafo, então G pode ser decomposto em $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ caminhos. Portanto a conjectura de Gallai é provada nesta classe de grafo.

■

Corolário 4.3.3. *Seja G o grafo com n vértices (não necessariamente conexo). Se cada bloco de um E-subgrafo de G com grau no máximo 3 sem tirânulos, então G pode ser decomposto em $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ caminhos.*

Demonstração. Segue-se a partir da Proposição 4.1.10 com o resultado do teorema anterior.

■

Capítulo 5

Conclusões finais

Neste trabalho elaboramos um texto relativo ao estudo de decomposição e cobertura de grafos que pode ser utilizado por alunos do ensino superior e alunos de iniciação científica em diferentes cursos.

A partir do segundo capitulo, mostramos a técnica de Lovász para tratar decomposições de grafos por caminhos que se mostrou frutífera para atacar problemas muito estudados ao longo dos anos. Além disso, a relação do terceiro e quarto capitulo fortaleceu e ampliou os conhecimentos das técnicas das demonstrações dos temas já mencionados.

Em particular, misturar este tópico com as diferentes áreas das ciências não é uma ideia distante, pois atualmente temos informação sobre as aplicações em redes, projetos de blocos e bioinformática. Mas o estudo teórico não pode ficar afastado do foco principal. Assim, pretendemos continuar trabalhando nesta área a partir dos artigos de Botler e Jimenez. [5, 4] e [3].

Referências Bibliográficas

[1] Berge, C. *Graphs and hypergraphs*, revised ed. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York., 1976. Translated from the French by Edward Minieka, North-Holland Mathematical Library, Vol. 6.

[2] Bondy, J. A., and Murty, U. S. R. *Graph theory*, vol. 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008.

[3] Botler, F., and Jiménez, A. On path decompositions of 2k-regular graphs. *Discrete Mathematics 340*, 6 (2017), 1405–1411.

[4] Botler, F., Mota, G. O., Oshiro, M. T., and Wakabayashi, Y. Decomposing highly edge-connected graphs into paths of any given length. *Journal of Combinatorial Theory, Series B 122* (2017), 508–542.

[5] Botler, F., Sambinelli, M., Coelho, R. S., and Lee, O. On Gallai's and Hajős' conjectures for graphs with treewidth at most 3. *arXiv preprint arXiv:1706.04334* (2017).

[6] Donald, A. An upper bound for the path number of a graph. *J. Graph Theory 4*, 2 (1980), 189–201.

[7] Erdős, P., Goodman, A. W., and Pósa, L. The representation of a graph by set intersections. *Canad. J. Math. 18* (1966), 106–112.

[8] Fan, G. Path decompositions and Gallai's conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B 93*, 2 (2005), 117–125.

[9] Lovász, L. On covering of graphs. In *Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966)*. Academic Press, New York, 1968, pp. 231–236.

[10] PYBER, L. Covering the edges of a connected graph by paths. *J. Combin. Theory Ser. B 66*, 1 (1996), 152–159.

[11] THOMASON, A. G. Hamiltonian cycles and uniquely edge colourable graphs. In *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 3. Elsevier, 1978, pp. 259–268.

[12] WEST, D. B. *Introduction to graph theory*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1996.