

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese

Região de Instabilidade em Bilhares

CARLOS ALBERTO SALAZAR MERCADO

Belo Horizonte

2019

© 2019, Carlos Alberto Salazar Mercado.
Todos os direitos reservados

Ficha catalográfica elaborada pelo bibliotecário Célio Resende
Diniz - CRB 6ª Reg. nº 2403

Salazar Mercado, Carlos Alberto.

S161r Região de instabilidade em bilhares / Carlos Alberto
Salazar Mercado — Belo Horizonte, 2019.
84 f. il.; 29 cm.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas
Gerais – Departamento de Matemática.

Orientador: Mário Jorge Dias Carneiro.

1. Matemática - Teses. 2. Sistemas dinâmicos
diferenciais - Teses. I. Orientador. II. Título.

CDU 51(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CARLOS ALBERTO SALAZAR MERCADO

Região de Instabilidade em Bilhares

Tese apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Mário Jorge Dias Carneiro

Belo Horizonte

2019



FOLHA DE APROVAÇÃO

Região de Instabilidade em Bilhares

CARLOS ALBERTO SALAZAR MERCADO

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Mário Jorge Dias Carneiro

Prof. Mário Jorge Dias Carneiro :
UFMG

Pablo

Prof. Pablo Daniel Carrasco Correa
UFMG

Regis Castijos Alves Soares Junior

Prof. Regis Castijos Alves Soares Junior
UFJF

Salvador Addas Zanata

Prof. Salvador Addas Zanata
USP

Sônia Pinto de Carvalho

Profa. Sônia Pinto de Carvalho
UFMG

Belo Horizonte, 18 de fevereiro de 2019.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus e ao seu filho Jesus Cristo por tudo.

À minha mãe por tudo que fez para que eu tivesse a oportunidade de estudar.

À minha esposa por cada palavra de apoio em todos estes anos, pela amizade, amor e compreensão.

Aos meus irmãos Alexander e Ivan e ao Martin, meu também pai de coração, pelo amor.

Ao meu orientador Mário Jorge Dias Carneiro pela orientação e infinita paciência que teve em cada encontro.

A todos os professores com os quais eu tive a honra de aprender.

Aos Membros da banca pela gentileza de participar da avaliação deste trabalho.

Aos meus amigos Joses, Miguel, Farley, Edwin, Julio, Renato, Mario, Aislan, Luiz, Divane, Viviane, Jailton, Carlos, Joel, Jhon, Guido e todos os colegas pelo companherismo e atenção.

A Eliane e à Kelli pela ajuda e disposição.

Ao CNPq e a CAPES pela bolsa de estudos.

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo estudar a região primária de instabilidade de uma aplicação do bilhar para estabelecer condições para obter uma versão do teorema de Mather, em uma certa topologia dos bilhares em ovais, e a destruição de certas cáusticas ressonantes não convexas em um bilhar elíptico usando o fluxo de curvatura.

Palavras-chave: Região de instabilidade, bilhares, cáusticas ressonantes, fluxo de curvatura.

Abstract

This research has as main objective to study a primary instability region of a billiard application to establish conditions to get a Mather's theorem in a certain topology on ovals billiards and the destruction of nonconvex resonant caustics in a elliptical billiard by the curvature flow.

Keywords: Instability region, Billiards, resonant caustics, curvature flow.

Sumário

Introdução	xii
1 Preliminares	1
1.1 Bilhares	1
1.1.1 Topologia no conjunto dos Bilhares	4
2 Cáusticas não Convexas Ressonantes de Bilhares em Curvas Obtidas pela Ação do Fluxo de Curvatura na Elipse	13
2.1 Sobre Cáusticas não Convexas e Pontos Normais	14
2.2 O Fluxo de Curvatura	17
2.3 Bilhar em uma família de curvas obtidas ao perturbar a elipse pelo fluxo de curvatura	18
2.4 Cáusticas não convexas	29
3 Região de Instabilidade para Bilhares com Diâmetros Hi- perbólicos	40
3.1 Pontos Normais	48
3.2 O conjunto $\Gamma = [0, 2\pi) \times \{\pi/2\}$	52
4 Círculos Fantomas	64
4.1 Fluxo do Campo Gradiente do Princípio Variacional	68

<i>SUMÁRIO</i>	xi
4.2 Construção dos Círculos Fantasma	70
Bibliografia	81

Introdução

As funções twist que preservam área tem sido objeto de intenso estudo como exemplos de sistemas dinâmicos que exibem uma gama completa de comportamento, do regular ao caótico. Neste trabalho estudaremos um caso particular de funções twist, a transformação do bilhar.

Consideremos α uma curva fechada em \mathbb{R}^2 , regular de classe C^r , $r > 1$ orientada em sentido anti-horário e com curvatura positiva em todo ponto, chamaremos este tipo de curvas de ovais. O problema do bilhar em α consiste no livre movimento de uma partícula na região plana limitada por α sendo refletida elasticamente em cada impacto com a fronteira da curva. Uma vez que a partícula se move com velocidade constante no interior da região, o movimento é completamente determinado pelo ponto de reflexão na curva α e a direção do movimento imediatamente após cada reflexão. Isto define a aplicação do bilhar f de α no conjunto $\mathcal{A} = [0, 2\pi) \times [0, \pi)$.

É possível deformar uma curva oval α na direção do seu vetor normal a uma velocidade dada pela sua curvatura, esta evolução gera um fluxo chamado de fluxo de curvatura. J. Damasceno, M. J. Dias Carneiro e R. Ramírez-Ros demonstraram em [9] que o fluxo de curvatura aplicado na elipse destrói as cáusticas ressonantes convexas, as conexões de sela e au-

menta a entropia destruindo assim a integrabilidade do bilhar inicial. Neste texto provaremos que as cáusticas não convexas associadas a órbitas ressonantes do bilhar na elipse também são destruídas quando aplicamos o fluxo de curvatura à elipse.

Este texto está dividido em 4 capítulos. O primeiro capítulo contém os preliminares, os quais serão usados nos seguintes capítulos.

No segundo capítulo, estudamos a destruição das cáusticas ressonantes não convexas da aplicação do bilhar na elipse, pela ação do fluxo de curvatura, primeiro para o caso de órbitas normais de período 4 e usando o potencial de Melnikov, baseado nas ideias dos artigos [9] e [23] temos o primeiro resultado da tese **Teorema A**: As cáusticas não convexas ressonantes do bilhar na elipse Q_0 , do tipo $(m, 2n)$, são destruídas quando perturbamos a elipse original pelo fluxo de curvatura. Juntamente com a destruição da separatriz (Damasceno-Carneiro-Ramirez-Ros) em [9], dão origem a uma região de instabilidade que ilustraremos nos seguintes capítulos.

Uma curva contínua, fechada e simples γ , contida no cilindro \mathcal{A} , que não é homotópica a um ponto é chamada de curva rotacional. Uma tal curva será invariante pela aplicação do bilhar f se $f(\gamma) = \gamma$. A inexistência de curvas rotacionais invariantes pode gerar regiões invariantes, homeomorfas ao cilindro (ou anel). Uma tal região, limitada por duas curvas invariantes (homotopicamente não triviais), que não contém curvas invariantes homotopicamente não triviais é chamada Região de instabilidade de Birkhoff.

Em [5] e [6] Birkhoff demonstrou que a fronteira de regiões de instabilidade

são gráficos de funções Lipschitz e que existem pontos, dentro da região de instabilidade, cujos α - ou ω - limites se encontram na fronteira desta região.

Usando argumentos topológicos Le Calvez estudou em [20] propriedades dinâmicas da região de instabilidade. No Capítulo 3, nós estudaremos as propriedades dinâmicas de uma região de instabilidade particular, a que contém um ponto periódico hiperbólico de período 2, que chamaremos de região primária de instabilidade, **RPI**. Usando simetria do espaço de fase podemos obter alguns resultados. Outras referências para este capítulo são o trabalho [12] de M. Dias Carneiro, S. Pinto-de-Carvalho e S. Oliffson Kamphorst e o livro [7] de M. Dias Carneiro, Clodoaldo Ragazzo e Salvador Zanata.

Le Calvez estudou algumas propriedades de certos conjuntos chamados de conjuntos estáveis e instáveis, A^+ , A^- , Ω^+ e Ω^- . Estes conjuntos são fechados e contêm uma curva rotacional invariante, ver a definição em 3.4. Na **Proposição B**, demonstramos o segundo resultado da tese:

1. Os conjuntos A^+ , A^- , Ω^+ e Ω^- tem medida nula.
2. No caso da aplicação do bilhar, seja $R(\theta, \phi) = (\theta, \pi - \phi)$ a reflexão em torno à reta $\phi = \pi/2$, então $R(A^+) = \Omega^-$ e $R(A^-) = \Omega^+$.
3. No caso da aplicação do bilhar, temos $A^+ \cap \Omega_- \neq \emptyset$ e $A^- \cap \Omega_+ \neq \emptyset$.

Neste texto estudaremos essas propriedades no caso particular do twist aplicação do bilhar na elipse, considerando uma topologia no conjunto das ovas definida por perturbações normais da curva oval. Usando algumas propriedades geométricas como a reflexividade, podemos garantir a existência de certos pontos dinamicamente interessantes, como por exemplo pontos homoclínicos e heteroclínicos, algumas propriedades obtidas na tese estão resu-

midas no **Teorema C**, no qual demonstramos as seguintes afirmações:

1. Seja σ um ponto periódico hiperbólico de período 2 e $\overline{W^s(\sigma)}$ o complementar das ilhas. Se $p \in \overline{W^s(\sigma)}$, com p fora da fronteira da região de instabilidade e o fecho do ramo da variedade invariante $W^s(p)$ (respectivamente $W^u(p)$) separa o anel \mathcal{A} então a variedade invariante $W^s(p)$ (respectivamente $W^u(p)$) tem π_1 projeção em todo $[0, 2\pi)$.
2. Seja um ponto periódico hiperbólico $p \in \overline{W^s(\sigma)}$, onde σ é um ponto periódico hiperbólico de período 2. Se o conjunto $W^s(\sigma) \cap W^u(p)$ (respectivamente $W^u(\sigma) \cap W^s(p)$) tem interseção transversal então a variedade invariante $W^s(p)$ (respectivamente $W^u(p)$) tem projeção na primeira coordenada sobrejetiva.
3. Consideremos um ponto periódico hiperbólico p fora de Γ , no complementar do fecho das ilhas elípticas e fora da fronteira da região de instabilidade. Se os fechos de um ramo das variedades invariantes separam o anel \mathcal{A} então existe ponto heteroclínico associado a p e ao ponto hiperbólico de período 2 σ .
4. Sejam dois pontos periódicos hiperbólicos p_1 e p_2 fora de Γ , no complementar do fecho das ilhas elípticas e fora da fronteira da região de instabilidade. Se os fechos dos ramos das variedades invariantes separam o anel \mathcal{A} , então $W^u(p_1) \cap W^s(p_2) \neq \emptyset$.
5. Sejam p um ponto periódico hiperbólico fora de Γ , no complementar do fecho das ilhas elípticas e fora da fronteira da região de instabilidade e σ um ponto periódico hiperbólico de período 2. Se os fechos de um ramo das variedades invariantes separam o anel \mathcal{A} então $\overline{W^u(\sigma)} = \overline{W^s(p)}$.

6. Sejam σ um ponto hiperbólico de período 2 e $\Gamma = [0, 2\pi) \times \{\pi/2\}$, então $\Gamma \cap \overline{W^s(\sigma)}$ é um conjunto perfeito.

Em uma palestra de Marie-Claude Arnaud ela formulou a seguinte questão: Se uma função twist conservativo tem uma curva que é gráfico de uma função contínua com número de rotação irracional sob o qual a dinâmica restrita tem uma órbita densa, essa curva é necessariamente de classe C^1 ? Ver questão 2.13 de [1].

Com o objetivo de responder, parcialmente, esta questão estudamos no último capítulo um certo conjunto chamado Círculo Fantasma que foi primeiramente estudado pelo Golé em [17]. Um círculo fantasma é um conjunto em \mathbb{R}^Z tal que sua projeção no cilindro são curvas homotopicamente não triviais, tem pontos periódicos e tem uma propriedade de ordenação vertical segundo seu número de rotação, para a definição precisa ver definição 4.11.

Provaremos, sob certas condições, que as curvas rotacionais invariantes que constituem a fronteira da região de instabilidade estudada no capítulo 3 é uniformemente aproximada por projeções de círculos fantasmas racionais. Ao intersectarmos estes conjuntos, projeções de círculos fantasmas, com o conjunto de instabilidade obtemos um conjunto perfeito. Com isto temos o último resultado da tese

Teorema D:

- 1 Seja o número de rotação da curva rotacional invariante C^+ na fronteira da região de instabilidade um número irracional. Se qualquer vizinhança aberta dentro da região de instabilidade contém um ponto periódico hiperbólico com índice de Morse menor ou igual a 1, então a curva C^+ é a projeção de um círculo fantasma irracional que são aproximados uniformemente por círculos fantasmas racionais. Além disso os conjuntos estáveis e instáveis de Le Calvez intersectam C_ρ , projeção

do círculo fantasma Λ_ρ , nas lacunas do conjunto de Aubry-Mather M_ρ de minimizadores recorrentes de número de rotação ρ .

2 Se Λ contido na RPI é a projeção de um círculo fantasma, então $\Lambda \cap \overline{W^s(p)}$ é um conjunto perfeito.

Finalmente consideramos algumas questões que serão objeto de futuras pesquisas.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Bilhares

Nesta seção vamos tratar sobre um tipo particular das aplicações do tipo twist, conhecidas como aplicações do bilhar.

Seja α uma curva em \mathbb{R}^2 simples e fechada, C^r -regular, $r \geq 3$, orientada em sentido antihorário com curvatura positiva em todo ponto, chamaremos este tipo de curvas de *oval*.

Uma oval pode ser parametrizada por $\theta \in [0, 2\pi)$, o ângulo entre uma direção fixa e a tangente orientada.

O problema do bilhar em α consiste no livre movimento de uma partícula na região plana limitada por α , sendo refletida elasticamente em cada impacto com a fronteira da região limitada pela curva α . Uma vez que a partícula se move com velocidade constante no interior da região, o movimento é completamente determinado pelo ponto de reflexão na curva α e a direção do movimento imediatamente após cada reflexão. Assim, o ângulo θ , que localiza o ponto de reflexão, e o ângulo ϕ entre a direção do movimento e o vetor tangente, orientado, à curva no ponto de reflexão, pode ser usado

para descrever o sistema. Este modelo define uma função, conhecida como aplicação do bilhar

$$f : [0, 2\pi) \times [0, \pi) \rightarrow [0, 2\pi) \times [0, \pi).$$

Consideremos $\mathcal{A} = [0, 2\pi) \times [0, \pi)$ munido da forma simplética $\omega = dr \wedge d\theta = d\lambda$, onde $\lambda = rd\theta$ é chamada de 1-forma de Liouville.

Definição 1.1. $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ é dita **função twist positiva** se é um C^1 difeomorfismo e

1. f é isotópico à identidade $Id_{\mathcal{A}}$, (f preserva orientação e as duas fronteiras).
2. Para $\epsilon > 0$, $D(\pi_1 \circ f)(x)(0, 1) > \epsilon$, onde π_1 a projeção na primeira coordenada de \mathcal{A} . Se $D(\pi_1 \circ f)(x)(0, 1) < -\epsilon$ dizemos que f é uma **função twist negativa**.

f é uma função twist conservativo se $f^*\lambda - \lambda$ é uma 1-forma exata, ou seja se $f^*\lambda - \lambda = d\mu$ o que implica que $d(f^*\lambda - \lambda) = 0$ e assim temos $f^*d\lambda - d\lambda = 0$. Logo f é uma função twist conservativo se $f^*\omega = \omega$, para $\omega = d\lambda$.

Esta função tem propriedades muito bem conhecidas, detalhadas por exemplo em [7], [19] e [27]. Enunciaremos algumas propriedades importantes desta aplicação que serão usadas neste texto.

1. Se α é uma curva de classe C^r , a aplicação do bilhar associada será de classe C^{r-1} .
2. A aplicação do bilhar preserva a medida $\mu(A) = \int_A \frac{ds}{dt} \sin(\phi) d\phi dt$, onde $s(t)$ representa o parâmetro comprimento de arco da curva α em $\alpha(t)$.

3. Se $f(\theta_0, \phi_0) = (\theta_1, \phi_1)$, a derivada de f no ponto (θ_0, ϕ_0) é dada por

$$Df(\theta_0, \phi_0) = \frac{1}{x_1} \begin{pmatrix} L - x_0 & L \\ L - x_0 - x_1 & L - x_1 \end{pmatrix}$$

onde $x_j = r(\theta_j) \sin(\phi_j)$, $L = |\alpha(\theta_1) - \alpha(\theta_0)|$, e $r(\theta)$ representa o raio de curvatura da curva no ponto θ .

Logo f é uma aplicação do tipo twist.

(\mathcal{A}, μ, f) define um sistema dinâmico bidimensional discreto.

A órbita do ponto (θ_0, ϕ_0) é o conjunto $\{f^n(\theta_0, \phi_0), n \in \mathbb{Z}\}$. Uma órbita é dita periódica se existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(\theta, \phi) = (\theta, \phi)$, o menor n é chamado de período da órbita.

Um ponto p periódico de período n é dito **hiperbólico** se $Df^n(p)$ tem autovalores de módulo distinto de 1, p é dito **elíptico** se os autovalores de $Df^n(p)$ não são números reais e tem módulo 1, em outro caso p é dito **parabólico** e chamaremos de ponto periódico degenerado.

Associado aos pontos periódicos hiperbólicos existem dois conjuntos invariantes imersos em \mathcal{A} , $W^s(p) = \{x \in \mathcal{A} / f^{ni}(x) \rightarrow p, i \rightarrow \infty\}$ e $W^u(p) = \{x \in \mathcal{A} / f^{ni}(x) \rightarrow p, i \rightarrow -\infty\}$ chamados de variedade estável e instável, respectivamente, do ponto p .

Definição 1.2. $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$, $q \neq p$ é chamado de **ponto homoclínico**, e se a interseção é transversal diremos que o ponto homoclínico é transversal.

Definição 1.3. Se $p \neq q$. $h \in W^s(p) \cap W^u(q)$ é chamado de **ponto heteroclínico**, e se a interseção é transversal diremos que o ponto heteroclínico é transversal.

Considere a aplicação de reflexão em torno à reta $\phi = \pi/2$, $R(\theta, \phi) = (\theta, \pi - \phi)$. Observe que $R^2 = Id$.

Uma outra propriedade interessante da aplicação do bilhar é que a inversa $f^{-1}(\theta_1, \phi_1) = (\theta_0, \phi_0)$ satisfaz que $R \circ f = f^{-1} \circ R$. De fato, se $f(\theta_0, \phi_0) = (\theta_1, \phi_1)$, então $R \circ f(\theta_0, \phi_0) = R(\theta_1, \phi_1) = (\theta_1, \pi - \phi_1)$ e assim $f \circ R \circ f(\theta_0, \phi_0) = f(\theta_1, \pi - \phi_1) = (\theta_0, \pi - \phi_0) = R(\theta_0, \phi_0)$

1.1.1 Topologia no conjunto dos Bilhares

Aplicações do Bilhar são um tipo muito especial de difeomorfismos e pequenas perturbações no espaço de funções podem produzir difeomorfismos que não correspondem a uma aplicação do bilhar. Para garantir que pequenas perturbações da aplicação do bilhar continuem sendo uma aplicação do bilhar vamos perturbar a fronteira da região limitada pela curva α e não a aplicação. Vamos seguir a abordagem feita em [14].

Movimentos rígidos e homotetias de ovais não mudam as características dinâmicas da aplicação do bilhar associado, definimos uma relação de equivalência onde uma curva α está relacionada com a curva β se existir uma homotetia ou movimentos rígidos que transformam α em β . Nosso estudo será feito no conjunto de curvas, módulo essa relação de equivalência.

Denotemos \mathcal{C} o conjunto das classes de equivalência das curvas ovais de classe C^{r+1} . Considere $\eta(\theta)$ o vetor normal à curva α em θ , para cada $\epsilon > 0$ defina a vizinhança tubular de α como

$$N_\epsilon(\alpha) = \{\alpha(\theta) + \lambda\eta(\theta), \theta \in [0, 2\pi), \lambda \in (-\epsilon, \epsilon)\}.$$

Definição 1.4. $[\beta] \in \mathcal{C}$ está ϵ -próximo de $[\alpha] \in \mathcal{C}$ se existem representantes $\alpha \in [\alpha]$ e $\beta \in [\beta]$ tal que a imagem de β esta contida em $N_\epsilon(\alpha)$ e a projeção canônica sobre a imagem de α é um difeomorfismo.

Uma consequência é que β pode ser escrita como $\beta(\theta) = \alpha(\theta) + \lambda(\theta)\eta(\theta)$, onde λ é 2π periódica e de classe C^r .

Denotamos por $|\lambda|_r = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \{|\lambda(\theta)|, |\lambda'(\theta)|, \dots, |\lambda^{(r)}(\theta)|\}$

Definição 1.5. $[\beta] \in \mathcal{C}$ está $\epsilon - C^r$ -próximo de $[\alpha] \in \mathcal{C}$ se $[\beta]$ está ϵ -próximo de α e $|\lambda|_r < \epsilon$.

Observação 1.6. É suficiente considerar perturbações com $|\lambda|_2 < \epsilon$, uma vez que o objetivo é perturbar um pouco a curva perturbando um pouco a curvatura e assim não alterar muito o comportamento dinâmico da aplicação do bilhar, ver [13].

Observação 1.7. Como a topologia em $C^r, r > 2$ é mais fina do que a topologia em C^2 e gostaríamos de falar sobre resultados genéricos na topologia mais fina, precisamos munir o conjunto de bilhares \mathcal{C} da topologia C^r e provar que existe um conjunto aberto e denso na topologia C^r e como \mathcal{C} é Baire, ver [14], então dito conjunto será residual. Dizemos que uma propriedade é **genérica** se existe um conjunto residual de bilhares onde tal propriedade é satisfeita. Uma vez que abertos em C^2 são abertos em $C^r, r > 2$, basta provar que os U_N definidos em [14] são densos na C^r topologia de \mathcal{C} . A prova seria a mesma, a menos de pequenas alterações como considerar que $\lambda''(\theta_1) \neq 0$ e $\lambda^{(r)}(\theta_1) \neq 0$ e as outras derivadas continuam sendo zero.

M. Dias Carneiro, S. Pinto-de-Carvalho e S. Oliffson Kamphorst provaram em [14] que genericamente existem apenas um número finito de pontos periódicos hiperbólicos ou elípticos e que a interseção das variedades invariantes associadas a pontos hiperbólicos é transversal. Complementando este resultado, Z. Xia e P. Zhang provaram em [28] que esta interseção genericamente acontece.

Considere a curva oval α parametrizada por comprimento de arco s . A função $h(s_0, s_1) = |\alpha(s_1) - \alpha(s_0)|$ será chamada de **função geradora** da aplicação do bilhar.

Vamos estudar a dinâmica de um subconjunto de $\mathcal{A} = [0, 2\pi) \times [0, \pi)$ que não contém nenhuma curva invariante. Birkhoff provou em [6] algumas propriedades de este conjunto e Le Calvez em [20], usando apenas argumentos topológicos, obteve resultados em esta direção e provou a existência de órbitas cujos α e ω limites estão contidos em partes distintas da fronteira desta região. Le Calvez também provou a existência de certos subconjuntos que se comportam como variedades estáveis e instáveis das partes conexas da fronteira de esta região.

Vamos escrever alguns resultados de [7], [12], [14] e [20].

Genericamente existem apenas um número finito de pontos periódicos, de período fixo, hiperbólicos ou elípticos e pelo menos um ponto hiperbólico de período 2, denotaremos um ponto periódico hiperbólico de período 2 de σ .

Uma curva contínua, fechada e simples $\gamma \subset \mathcal{A}$ que não é homotópica a um ponto é chamada de **curva rotacional**. Uma tal curva é dita **invariante** pela aplicação do bilhar f se $f(\gamma) = \gamma$. Existem bilhares cujo espaços de fase são folheados por curvas invariantes rotacionais e cujos espaços de fase não contêm nenhuma curva rotacional invariante. Assumindo suficiente regularidade da curva oval α a propriedade twist implica que existem curvas invariantes em qualquer vizinhança das fronteiras $[0, 2\pi) \times \{0\}$ e $[0, 2\pi) \times \{\pi\}$, Teorema de Kolmogorov, Arnold e Moser (KAM), ver por exemplo [26]. Birkhoff provou que as curvas rotacionais invariantes são gráficos de uma função de Lipschitz.

Definição 1.8. Seja α um oval. Uma curva suave $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ é dita uma **cáustica** se qualquer raio tangente a γ continua sendo tangente após iteração

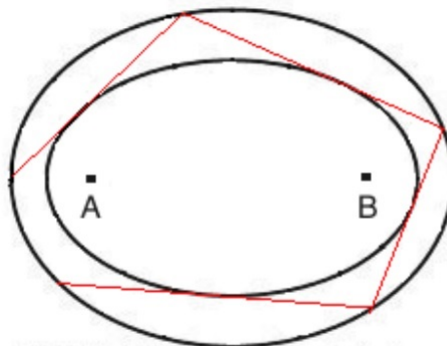


Figura 1.1: Cáustica

da transformação do bilhar. Ver figura 1.1.

Um bilhar é dito *integrável* se o espaço de fase é folheado por curvas invariantes de classe C^0 .

A conjectura de Birkhoff afirma que a fronteira de uma mesa de bilhar integrável associada a uma curva estritamente convexa é necessariamente uma elipse(ou uma circunferência como um caso especial). Muitos matemáticos trabalharam, e ainda trabalham, neste interessante problema. Avila, Simoi e Kaloshim provaram em [3] que deformações integráveis de uma elipse de pequena excentricidade é ainda uma elipse. Kaloshin e Sorrentino generalizaram o trabalho [3] e provaram em [18] que pequenas perturbações integráveis de uma elipse são elipses.

Definição 1.9. Uma região \mathcal{R} limitada por duas curvas rotacionais invariantes disjuntas C^+ e C^- que não contém curvas invariantes rotacionais no interior de \mathcal{R} é chamada de *Região de Instabilidade (RI)*.

A partir de este ponto nosso foco será o estudo das propriedades RI para bilhares genéricos com a topologia de [14].

O seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [14], lema 11, garante que uma curva rotacional invariante não pode intersectar o segmento $\Gamma = [0, 2\pi) \times \{\pi/2\}$

Lema 1.10. *Genericamente uma curva rotacional invariante não intersecta a curva $\Gamma = [0, 2\pi) \times \{\pi/2\}$.*

Isto implica, que para curvas ovais suficientemente regulares existe uma região limitada por curvas invariantes, que não contém outras curvas invariantes e que contém a curva Γ . Uma tal região é chamada de **Região primária de instabilidade**, (**RPI**).

O lema seguinte, cuja demonstração se encontra em [12] lema 6, garante que nenhuma curva invariante intersecta as variedades estáveis e instáveis do ponto periódico hiperbólico de período 2, o que proporciona uma forma alternativa de definir a região de instabilidade.

Lema 1.11. *Se σ é um ponto 2-periódico hiperbólico de f , então uma curva rotacional invariante γ não intersecta nenhuma das variedades invariantes $W^s(\sigma)$ e $W^u(\sigma)$.*

Consideremos a função $\pi_1 : \mathcal{A} \rightarrow [0, 2\pi)$ a projeção canônica na primeira coordenada.

Definição 1.12. Um **cilindro** $\mathcal{R} \subset \overline{\mathcal{A}}$ é um conjunto não vazio, conexo e fechado tal que $\pi_1(\mathcal{R}) = [0, 2\pi)$ e cuja fronteira são duas curvas rotacionais contínuas.

O seguinte teorema, cuja demonstração se encontra em [12], dá uma condição suficiente para ter uma região de instabilidade.

Teorema 1.13. *Seja σ um ponto 2-periódico hiperbólico e \mathcal{R} o menor cilindro que contém $\overline{W^u(\sigma)}$ então \mathcal{R} é uma região de instabilidade.*

Observação 1.14. Se \mathcal{R} contém outro ponto hiperbólico σ' , então contém a órbita do ponto periódico, fora das ilhas elípticas tal que $\pi_1(W^s(\sigma')) = [0, 2\pi)$, pela mesma construção do teorema anterior sabemos que o menor cilindro que contém $W^s(\sigma')$ é \mathcal{R} . Uma vez que se $\sigma' \in \mathcal{R}$ então $W^s(\sigma') \subset \mathcal{R}$ e $\overline{W^s(\sigma')} \subset \mathcal{R}$. Por outro lado, se o menor cilindro que contém $\overline{W^s(\sigma')}$ é \mathcal{R}' estritamente contido em \mathcal{R} , pelo teorema 1.15 de Birkhoff a fronteira de \mathcal{R}' está composta por curvas rotacionais invariantes disjuntas estritamente contidas em \mathcal{R} . Contradição.

A região de instabilidade tem algumas propriedades muito interessantes, como por exemplo Birkhoff provou em [6] que as curvas que constituem a fronteira da região de instabilidade são gráficos de funções Lipschitz e também que existe $x \in \mathcal{R}$ tal que o α e ω -limite de x estão nas curvas fronteiras do anel. Usando argumentos variacionais Mather também obteve resultados semelhantes. Os quais são:

Teorema 1.15. *Se a região de instabilidade tem como fronteira as curvas invariantes C^+ e C^- , então estas curvas são gráficos de funções de Lipschitz. Estas curvas são consequentemente rotacionais, pois não são homotópicas a um ponto.*

Teorema 1.16. *Se \mathcal{R} é uma região de instabilidade, então existe $x \in \mathcal{R}$ tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{dist}(f^k(x), C^+) = 0$ e $\lim_{k \rightarrow -\infty} \text{dist}(f^k(x), C^-) = 0$.*

Uma pergunta é se $\mathcal{R} = \overline{W^s(\sigma)}$, caso contrário como é o conjunto $\mathcal{R} - \overline{W^s(\sigma)}$. Sabemos que genericamente existem pontos elípticos, consequentemente, genericamente $\mathcal{R} \neq \overline{W^s(\sigma)}$. A seguinte proposição afirma que o com-

plementar de $\overline{W^s(\sigma)}$ em \mathcal{R} é uma reunião de conjuntos abertos, disjuntos. Chamaremos a cada aberto de *ilha elíptica*.

Proposição 1.17. *Seja σ um ponto 2-periódico hiperbólico. Seja V o complementar de $\overline{W^u(\sigma)}$ na região de instabilidade \mathcal{R} . Então $V = \cup_{n=1}^{\infty} V_n$ onde cada V_n são conjuntos abertos, disjuntos dois a dois, homeomorfos a discos e dinamicamente periódicos.*

Demonstração. V é um conjunto aberto e é união de suas componentes conexas abertas disjuntas. Seja V_i uma tal componente conexa, V_i não pode dividir o cilindro \mathcal{R} em duas partes disjuntas, pois $\overline{W^u(\sigma)}$ tem projeção na primeira coordenada no conjunto $[0, 2\pi)$ todo e contém as curvas rotacionais invariantes da fronteira de \mathcal{R} . Então V_i é homotopicamente trivial.

Como V tem área finita, pois está contido no espaço de fase $[0, 2\pi) \times [0, \pi]$ o qual tem área finita. Considere V_i uma componente conexa maximal de V , pelo teorema de recorrência de Poincaré existe n_i tal que $f^{n_i}(V_i) \cap V_i \neq \emptyset$. Como V_i é uma componente conexa maximal de V então $f^{n_i}(V_i) = V_i$, o que implica a periodicidade de V_i . \square

Corolário 1.18. *Para cada V_i de V existe um $n_i \in \mathbb{N}$, ∂V_i é um subconjunto fechado, conexo, com interior vazio, contido em $\overline{W^u(\sigma)}$ e invariante por f^{n_i} .*

É importante observar que para $n > 1$, como $f^n : U \rightarrow U$ preserva área, o teorema de recorrência de Poincaré afirma que quase todo ponto de U é f^n recorrente. Aplicando o teorema da curva transladada de Brouwer, obtemos que f^n deve ter um ponto fixo em U , ou seja, existem pontos periódicos em U .

Finalizaremos o capítulo ilustrando a dinâmica da aplicação do bilhar para o caso de curvas ovais simples.

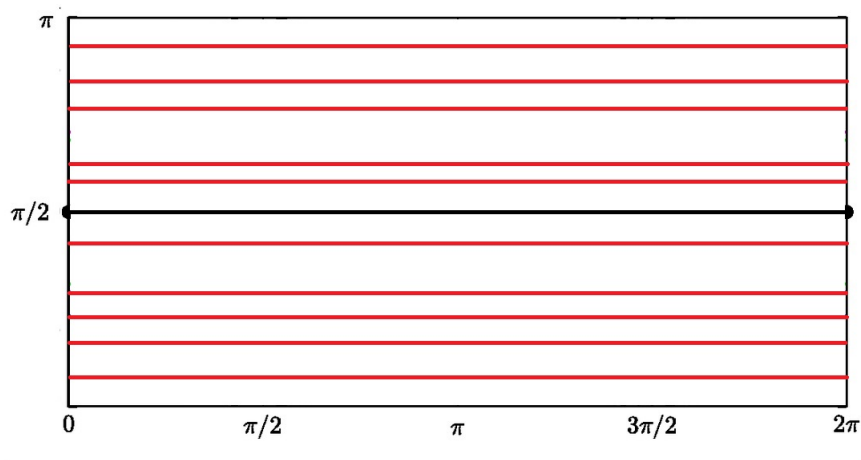


Figura 1.2: Espaço de fase do bilhar na circunferência

Exemplo 1.19. O bilhar no círculo.

Considere a curva $\alpha(t) = (rcos(t), rsen(t))$, para uma constante $r \in \mathbb{R}$. A aplicação do bilhar na elipse no círculo tem a propriedade de manter fixa a segunda coordenada, isto é $f(\theta, \phi) = (\theta + 2\phi \text{ mod } (2\pi), \phi)$ assim o espaço de fase consiste de segmentos de reta horizontais os quais são curvas invariantes pela aplicação do bilhar. Ver figura 1.2.

Exemplo 1.20. O bilhar na elipse.

Considere a curva $\beta(t) = (asen(t), bcos(t))$, para constantes $a, b \in \mathbb{R}^+, a > b > 0$. O espaço de fase da aplicação do bilhar f na elipse $\beta(t)$ consiste de curvas invariantes homotopicamente não triviais, de cores azul e roxo na figura 1.3, de curvas invariantes por f^2 homotopicamente triviais, de cores cinza e verde na figura 1.3 e as conexões de sela de cor preto.

Nos dois exemplos anteriores não existe uma região de instabilidade não vazia, uma vez que os espaços de fase são totalmente folheados por curvas

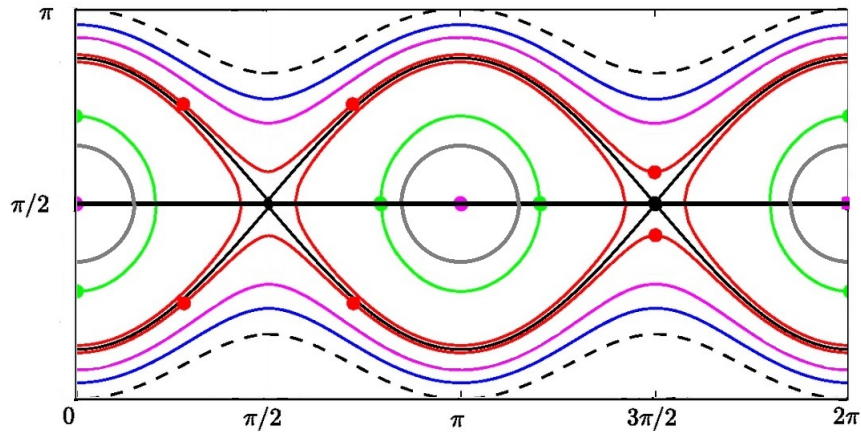


Figura 1.3: Espaço de fase do bilhar na elipse

invariantes. Nos próximos capítulos vamos estudar o bilhar definido em uma curva oval que é uma certa perturbação da elipse. Veremos que o espaço de fase deixa de ser folheado por curvas invariantes, criando-se uma região de instabilidade.

Capítulo 2

Cáusticas não Convexas

Ressonantes de Bilhares em

Curvas Obtidas pela Ação do

Fluxo de Curvatura na Elipse

O objetivo de este capítulo é ilustrar os resultados sobre a região de instabilidade simétrica, isto é, em torno dos diâmetros. Essa ilustração trata da perturbação do bilhar na elipse $Q_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$, $a > b > 0$ ao longo da família a um parâmetro obtida pelo fluxo de curvatura.

De acordo com [9], todas as curvas rotacionais invariantes com número de rotação racional são destruídas pelo fluxo de curvatura e, o mais relevante para a questão de estabilidade, a separatriz que conecta as órbitas hiperbólicas de período dois é destruída pois os ramos das variedades instáveis e estáveis tornam-se transversais.

Isso, é claro, implica na existência de uma região de instabilidade cuja fronteira é uma curva rotacional invariante irracional, mas não do tipo KAM.

Neste capítulo, provamos que não somente as cáusticas convexas, que correspondem aos Círculos Invariantes Rotacionais (CIR), são destruídas mas também as curvas ressonantes (número de rotação racional) que circundam o diâmetro elíptico. Isso implica também o surgimento de zonas de instabilidade em torno dessas órbitas.

O capítulo tem, portanto, duas partes. Na primeira, usando o teorema da função implícita, demonstramos a destruição das curvas homotopicamente triviais de número de rotação racional (cáusticas hiperbólicas) associadas a um ponto periódico normal de período 4 e na segunda, usando o potencial de Melnikov, demonstramos que certas curvas homotopicamente triviais associadas a cáusticas ressonantes são destruídas.

2.1 Sobre Cáusticas não Convexas e Pontos Normais

Em esta seção estudaremos um tipo particular de órbitas periódicas, chamadas de órbitas periódicas normais. Consideremos a curva $\Gamma = [0, 2\pi) \times \{\pi/2\}$.

Definição 2.1. Um ponto periódico $p \in \mathcal{R}$ cuja órbita contenha exatamente dois pontos em Γ será chamado de *ponto periódico normal*. Mais precisamente, a órbita de um ponto periódico normal será

$$\mathcal{O} = \{(\theta_0, \pi/2), (\theta_1, \phi_1), \dots, (\theta_{n-1}, \phi_{n-1}), (\theta_n, \pi/2), (\theta_{n-1}, \pi - \phi_{n-1}), \dots, (\theta_1, \pi - \phi_1)\}.$$

Vamos considerar o bilhar na elipse que estudamos no exemplo 1.20, para simplificar as contas, neste texto consideraremos $b = 1$. As cáusticas não convexas correspondem a curvas fechadas γ em torno dos pontos $(0, \pi/2)$ ou $(\pi, \pi/2)$, pontos periódicos elípticos de período dois. Essas curvas γ intersectam transversalmente o eixo de simetria Γ , em particular se $p \in \Gamma \cap \gamma$

é uma dessas interseções. Então p é um ponto periódico normal, isto é, $f^n(\Gamma) \cap \Gamma \neq \emptyset$.

Assim, a inexistência deste tipo de curva invariante pode ser provada diretamente se demonstrarmos que quando aplicamos o fluxo de curvatura, para $\epsilon > 0$, o ponto periódico normal é isolado, hiperbólico ou elíptico.

Exemplo 2.2. Pontos Normais de período 4

Seja $f(\theta, \phi)$ a aplicação do bilhar na elipse Q_0 , onde θ é o parâmetro da elipse e ϕ é o ângulo entre a direção do movimento de uma partícula em Q_0 com a reta tangente à curva orientada.

Sabemos que existem pontos periódicos hiperbólicos, os pontos correspondentes ao diâmetro maior, e pontos elípticos, correspondentes ao diâmetro menor. Todos os outros pontos periódicos de f são parabólicos, isto é se (θ_0, ϕ_0) é um ponto periódico de período n , então a matriz $Df^n(\theta_0, \phi_0)$ tem autovalores 1 ou -1.

A seguir vamos verificar que na aplicação do bilhar na elipse existem órbitas normais de período 4 e estas são parabólicas.

Pela simetria da elipse, basta garantir que existe um ponto $(a \operatorname{sen}(\theta_0), \cos(\theta_0))$ tal que

$$\langle (a \operatorname{sen}(\theta_0), \cos(\theta_0)) - (0, 1), (a \operatorname{cos}(\theta_0), -\operatorname{sen}(\theta_0)) \rangle = 0 \quad (2.1)$$

Ou seja, $a^2 \operatorname{sen}(\theta_0) \cos(\theta_0) - \operatorname{sen}(\theta_0) \cos(\theta_0) + \operatorname{sen}(\theta_0) = 0$. Obtendo que θ_0 deve satisfazer que

$$\cos(\theta_0) = 1/(1 - a^2). \quad (2.2)$$

Observemos que a equação (2.2) fornece uma condição suficiente e necessária para a existência dos pontos normais de período 4, pois $\cos(\theta_0) \geq -1$ então $\sqrt{2} \leq a$.

Pela simetria da elipse $\theta_1 = 2\pi - \theta_0$ é também um ponto normal de período 4. Verificaremos que a órbita $O_4 = \{(\theta_0, \pi/2), (0, \phi_1), (\theta_1, \pi/2), (0, \pi - \phi_1)\}$ é uma órbita parabólica.

De fato, sabemos que a derivada da aplicação de bilhar f no ponto (θ_0, ϕ_0) é representada pela matriz

$$Df(\theta_0, \phi_0) = \frac{1}{\text{sen}(\phi_1)} \begin{bmatrix} \frac{\tau - d_0}{r_0} & \tau \\ \frac{\tau - d_0 - d_1}{r_0 r_1} & \frac{\tau - d_1}{r_1} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

onde $f(\theta_0, \phi_0) = (\theta_1, \phi_1)$, $\tau = |\alpha(\theta_1) - \alpha(\theta_0)|$, $d_i = r_i \text{sen}(\phi_i)$ e r_i é o raio de curvatura no ponto θ_i . Então

$$\begin{aligned} A &= Df^4(\theta_0, \pi/2) = Df(0, \pi - \phi_1) \circ Df(\theta_1, \pi/2) \circ Df(0, \phi_1) \circ Df(\theta_0, \pi/2) \\ &= \left(\frac{1}{\text{sen}(\phi_1)} \begin{bmatrix} \frac{L - r_1 \text{sen}(\phi_1)}{r_1} & L \\ \frac{L - r_1 \text{sen}(\phi_1) - r}{r r_1} & \frac{L - r}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L - r}{r} & L \\ \frac{L - r_1 \text{sen}(\phi_1) - r}{r r_1} & \frac{L - r_1 \text{sen}(\phi_1)}{r_1} \end{bmatrix} \right)^2. \end{aligned}$$

Onde $L = |\alpha(\theta_0) - \alpha(0)|$, $r = r(\alpha(\theta_0)) = r(\alpha(\theta_1))$ e $r_1 = r(\alpha(0))$.

Observemos que se

$$X = \frac{1}{\text{sen}(\phi_1)} \begin{bmatrix} \frac{L - r_1 \text{sen}(\phi_1)}{r_1} & L \\ \frac{L - r_1 \text{sen}(\phi_1) - r}{r r_1} & \frac{L - r}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L - r}{r} & L \\ \frac{L - r_1 \text{sen}(\phi_1) - r}{r r_1} & \frac{L - r_1 \text{sen}(\phi_1)}{r_1} \end{bmatrix}$$

tem autovalores 1 ou -1, ou se o traço da matriz X é 0, então A terá autovalores 1 ou -1 e assim $(\theta_0, \pi/2)$ será um ponto parabólico e está contido em uma curva invariante homotopicamente trivial de período 4.

Como os pontos periódicos hiperbólicos ou elípticos são isolados e os pontos periódicos contidos na curva homotopicamente trivial de período 4 não são isolados então necessariamente o ponto $(\theta_0, \pi/2)$ será um ponto parabólico.

2.2 O Fluxo de Curvatura

Dada uma curva oval Q_0 é possível criar outras curvas movendo a primeira em direção do vetor normal, que aponta para o interior da curva, em cada ponto a uma velocidade dada pela curvatura. Esta evolução gera um fluxo chamado de fluxo de curvatura.

Os primeiros a estudar este fluxo foram M. Gage e R. Hamilton em [16], eles provaram no seu teorema principal que, sob a ação do fluxo de curvatura, Q_0 se contrai a uma circunferência no seguinte sentido:

1. A razão do raio inscrito com o raio circunscrito tende a um.
2. A razão da curvatura máxima e a curvatura mínima tende a um.
3. As derivadas de ordem superior da curvatura tendem a zero uniformemente.

Seja $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Seja $Q_0 = q_0(\mathbb{T})$, $q_0 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável, fechada e mergulhada em \mathbb{R}^2 . O fluxo de curvatura no tempo t de Q_0 é a curva $Q_t = q(\mathbb{T}, t)$ onde $q : \mathbb{T} \times [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^2$, e $q(\phi, t)$ satisfaz o problema de valor inicial

$$\frac{\partial q(\phi, t)}{\partial t} = \kappa(\phi, t)N(\phi), q(\phi, 0) = q_0.$$

Onde κ e N são a curvatura e o vetor normal à curva q_0 que aponta para dentro, respectivamente.

Sabemos que a dinâmica da aplicação do bilhar na elipse é integrável, ou seja o espaço de fase é folheado por curvas invariantes, tem entropia topológica zero e possui uma família de cáusticas convexas e não convexas. J. Damasceno, M. Carneiro e R. Ramírez-Ros provaram em [9] que o fluxo de curvatura na elipse destrói a integrabilidade, as conexões de sela e todas as cáusticas convexas ressonantes, tendo entropia positiva.

O objetivo deste capítulo é provar que certas cáusticas não convexas ressonantes também são destruídas, como foi sugerido por Sônia Pinto de Carvalho e Rafael Ramírez-Ros em [23].

2.3 Bilhar em uma família de curvas obtidas ao perturbar a elipse pelo fluxo de curvatura

Consideremos a família de curvas Q_ϵ parametrizadas por

$$\chi(\epsilon, \theta) = (c \cosh(\mu(\theta)) \operatorname{sen}(\theta), c \operatorname{senh}(\mu(\theta)) \cos(\theta)), \epsilon > 0.$$

No lema 3.1 de [9] foi provado que a perturbação da elipse pelo fluxo de curvatura deforma a elipse inicial Q_0 em curvas $Q_\epsilon = \chi(\epsilon, \theta)$ onde $\mu = \mu_0 + \epsilon \mu_1(\theta) + O(\epsilon^2)$ e $\mu_1(\theta) = -\frac{a}{(a^2 \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta))^2}$.

A curvatura da curva no ponto θ é dada por

$$k_0(\theta) = \frac{a}{(a^2 \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta))^{3/2}}.$$

Observemos que $\chi(0, \theta) = (a \operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta))$ é exatamente a elipse Q_0 inicial.

Portanto a curva Q_ϵ tem $\mu(\theta) = \mu_0 - \frac{a\epsilon}{(a^2 \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta))^2} + O(\epsilon^2)$, μ_0 é tal que $c \operatorname{senh}(\mu_0) = 1$ e $c = \sqrt{a^2 - 1}$.

Em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ temos os vértices do eixo menor da elipse que estão associados aos pontos elípticos $(0, \pi/2)$ e $(\pi, \pi/2)$.

Mário D. Carneiro, Sônia P. de Carvalho e Sylvie O. Kamphorst provaram em [13] que a existência de ilhas elípticas é uma propriedade densa no conjunto de bilhares que tem pontos 2-periódicos elípticos e ainda qualquer perturbação normal possui pontos periódicos elípticos próximos do ponto elíptico inicial.

2.3 Biliar em uma família de curvas obtidas ao perturbar a elipse pelo fluxo de curvatura 19

Como os pontos periódicos elípticos são estáveis, então $(0, \pi/2)$ e $(\pi, \pi/2)$ continuam sendo elípticos para o bilhar definido na curva Q_ϵ , mais ainda, têm coeficiente de Birkhoff diferente de zero. Para este cálculo usaremos a fórmula para o primeiro coeficiente de Birkhoff para bilhares convexos obtida em [11].

Neste caso temos que $R'(0) = R'(\pi) = 0$ $R''(0) = R''(\pi) = 3(1 - a^2)$ e

$$\begin{aligned} \tau_1(\epsilon) &= \frac{-1}{8} \frac{(R_0 + R_1)}{R_0 R_1} - \frac{1}{8} \frac{L}{L - R_0 - R_1} \left(\frac{L - R_1}{L - R_0} R''(0) + \frac{L - R_0}{L - R_1} R''(\pi) \right) \\ &= \frac{-1}{4a^2} - \frac{3L(1 - a^2)}{4(L - 2a^2)}, \end{aligned}$$

e quando $\epsilon = 0$ temos que $L = 2$ e $\tau_1(0) < 0$, pela continuidade de τ_1 na variável ϵ concluímos que $\tau_1(\epsilon) \neq 0$ para ϵ suficientemente pequeno, como veremos logo a seguir a folhação total por curvas invariantes do espaço de fase da aplicação do bilhar na elipse é destruída, tendo assim uma região de instabilidade.

Portanto os pontos elípticos associados ao eixo menor das curvas $Q_\epsilon(\theta)$ são estáveis e assim têm curvas invariantes homotopicamente triviais que circundam os pontos fixos elípticos.

Uma pergunta natural é se para algum ϵ a curva $\chi(\epsilon, \theta)$ têm pontos normais de período 4. Observe que os pontos normais são interseções de Γ com iteradas de Γ , se esta interseção for transversal, então os pontos normais serão mantidos por pequenas perturbações da curva oval.

Para responder esta pergunta, observemos que a simetria da elipse é preservada pelo fluxo de curvatura e assim $\chi(\epsilon, \theta)$ terá um ponto normal $\theta_0(\epsilon)$ se existir um $\theta(\epsilon)$ tal que

$$F(\epsilon, \theta(\epsilon)) = \langle \chi(\epsilon, \theta(\epsilon)) - \chi(\epsilon, 0), \frac{d}{d\theta} \chi(\epsilon, \theta(\epsilon)) \rangle = 0. \quad (2.4)$$

2.3 Bilhar em uma família de curvas obtidas ao perturbar a elipse pelo fluxo de curvatura 20

Observemos que quando $\epsilon = 0$ a equação 2.4 se reduz à equação 2.1 ou seja $F(0, \theta_0) = 0$. Pelo teorema da função implícita vamos garantir que para cada ϵ em uma vizinhança do 0, existe um único $\theta(\epsilon)$ tal que a equação 2.4 é satisfeita, ou seja, a aplicação do bilhar f_ϵ na curva $\chi(\epsilon, \theta)$ tem um único ponto normal $\theta(\epsilon)$ em uma vizinhança de θ_0 . Para isto é suficiente garantir que $\frac{\partial F}{\partial \theta}(0, \theta_0) \neq 0$.

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta}(0, \theta_0) &= \left\langle \frac{d\chi}{d\theta}(\epsilon, \theta(\epsilon)), \frac{d\chi}{d\theta}(\epsilon, \theta(\epsilon)) \right\rangle + \left\langle \chi(\epsilon, \theta(\epsilon)) - \chi(\epsilon, 0), \frac{d^2}{d\theta^2} \chi(\epsilon, \theta(\epsilon)) \right\rangle \Big|_{\epsilon=0}^{\theta=\theta_0} \\ &= \langle (a \cos(\theta_0), -\text{sen}(\theta_0)), a \cos(\theta_0), -\text{sen}(\theta_0) \rangle \\ &\quad + \langle (a \text{sen}(\theta_0), \cos(\theta_0) - 1), (-a \text{sen}(\theta_0), -\cos(\theta_0)) \rangle \\ &= a^2 \cos^2(\theta_0) + \text{sen}^2(\theta_0) - a^2 \text{sen}^2(\theta_0) - \cos^2(\theta_0) + \cos(\theta_0) \\ &= (a^2 - 1)(2\cos^2(\theta_0) - 1) + \cos(\theta_0). \end{aligned}$$

Usando a equação 2.2 temos que $\frac{\partial F}{\partial \theta}(0, \theta_0) = -1 - a^2 + \frac{1}{(1-a^2)} \neq 0$, se $a > \sqrt{2}$.

Para cada $\epsilon \in I_0$, vizinhança de 0 onde $F(\epsilon, \theta(\epsilon)) = 0$, o ponto periódico normal de período 4 $(\theta(\epsilon), \pi/2)$ é ainda parabólico?

Para responder a esta pergunta devemos calcular os autovalores da matriz $A_\epsilon = Df_\epsilon^4(\theta_0(\epsilon), \pi/2)$. Como no caso da elipse, esta matriz é o quadrado de uma matriz X_ϵ a qual é produto de matrizes com certa simetria. Os seguintes lemas vão nos ajudar para determinar a natureza do ponto normal de período 4 associado à curva χ_ϵ .

Lema 2.3. Se $X = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$, $A = X^2$ e $\det(X) = 1$, então:

1. A tem autovalores reais e diferentes se $|a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}| > \frac{1}{\alpha}$.

2.3 Bilhar em uma família de curvas obtidas ao perturbar a elipse pelo fluxo de curvatura 21

2. *A tem autovalores complexos de módulo 1, diferentes de ± 1 , se $|a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}| < \frac{1}{\alpha}$ com $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \neq 0$.*

3. *A tem autovalores iguais a ± 1 se $|a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}| = \frac{1}{\alpha}$ ou $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} = 0$.*

Demonstração. Observemos que se $X = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ e o $\det(X) = 1$ então o polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + 1$ cujas raízes são

$$r = \frac{b_{11} + b_{22} \pm \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4}}{2}.$$

Se o traço da matriz X for ± 2 os autovalores serão iguais a ± 1 , se o traço da matriz X for em módulo maior que 2, então os autovalores serão reais e diferentes e se o traço da matriz X for em módulo menor do que 2, então os autovalores serão números complexos de módulo 1. Estudaremos o traço da matriz A

Como

$$X = \alpha \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} & 2a_{11}a_{12} \\ 2a_{21}a_{22} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

e

$$A = \alpha^2 \begin{bmatrix} (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})^2 + 4a_{11}a_{22}a_{12}a_{21} & 4(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})a_{11}a_{12} \\ 4(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})a_{21}a_{22} & (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})^2 + 4a_{11}a_{22}a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

então o

$$\text{traço}(A) = 2\alpha^2[(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})^2 + 4a_{11}a_{22}a_{12}a_{21}],$$

usando $\det(X) = \alpha^2[(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})^2 - 4a_{11}a_{22}a_{12}a_{21}] = 1$ temos que

$$\text{traço}(A) = 2\alpha^2\left[2(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right]$$

2.3 Bilhar em uma família de curvas obtidas ao perturbar a elipse pelo fluxo de curvatura 22

e assim o $\text{traço}(A) = \pm 2$. se e somente se $|a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}| = \frac{1}{\alpha}$ ou $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} = 0$.

Se $\text{traço}(A) > 2$ temos que $(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})^2 > \frac{1}{\alpha^2}$.

Se $-2 < \text{traço}(A) < 2$ temos que $-\frac{1}{\alpha} < (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) < \frac{1}{\alpha}$ com $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \neq 0$.

□

Se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \frac{1}{\alpha}$ o lema anterior pode se escrever como

Lema 2.4. Se $X = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$, $A = X^2$ e $\det(X) = 1$, então:

1. Os autovalores de A são reais e diferentes se $a_{11}a_{22} > \frac{1}{\alpha}$ ou $a_{11}a_{22} < 0$.
2. Os autovalores de A são números complexos de módulo 1, diferentes a ± 1 se $0 < a_{11}a_{22} < \frac{1}{\alpha}$ e $a_{11}a_{22} \neq \frac{1}{2\alpha}$.
3. Os autovalores de A são iguais a ± 1 se $a_{11}a_{22} = 0$ ou $a_{11}a_{22} = \frac{1}{\alpha}$ ou $a_{11}a_{22} = \frac{1}{2\alpha}$.

Demonstração. Basta substituir $a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - 1/\alpha$ no lema anterior. □

Observemos que, no caso da elipse, $a_{11} = 0$ e o item 3 do lema 2.4 é satisfeito.

No caso do bilhar f_ϵ na curva $\chi(\epsilon, \theta)$ será que $g(\epsilon) = a_{11}(\epsilon)a_{22}(\epsilon) = 0$? Como $g(0) = 0$ e $g'(0) = a'_{11}(0)a_{22}(0) + a_{11}(0)a'_{22}(0) = a'_{11}(0)a_{22}(0)$, para garantir que $g(\epsilon) \neq 0$ precisamos garantir que $a'_{11}(0) \neq 0$. Para isto consideremos a função $g(\epsilon) = L(\epsilon) - r_1(\epsilon)\text{sen}(\phi_1(\epsilon))$ e vamos verificar que $g'(0) \neq 0$. De fato:

2.3 Bilhar em uma família de curvas obtidas ao perturbar a elipse pelo fluxo de curvatura 23

$$g(\epsilon) = L(\epsilon) - r_1(\epsilon)\text{sen}(\phi_1(\epsilon)), \text{então} \quad (2.5)$$

$$g'(0) = L'(0) - r_1'(0)\text{sen}(\phi_1(0)) - r_1\text{cos}(\phi_1(0))\frac{d\phi_1(0)}{d\epsilon}. \quad (2.6)$$

Onde

$$L(\epsilon) = |\chi(\epsilon, \theta_0(\epsilon)) - \chi(\epsilon, 0)| = \langle \chi(\epsilon, \theta_0(\epsilon)) - \chi(\epsilon, 0), \chi(\epsilon, \theta_0(\epsilon)) - \chi(\epsilon, 0) \rangle^{1/2}$$

$$L'(\epsilon) = \frac{\langle \frac{d}{d\epsilon}\chi(\epsilon, \theta_0(\epsilon)) - \frac{d}{d\epsilon}\chi(\epsilon, 0), \chi(\epsilon, \theta_0(\epsilon)) - \chi(\epsilon, 0) \rangle}{|\chi(\epsilon, \theta_0(\epsilon)) - \chi(\epsilon, 0)|},$$

como

$$\chi(0, \theta_0) - \chi(0, 0) = (a\text{sen}(\theta_0), \text{cos}(\theta_0) - 1),$$

$$L = |\chi(\epsilon, \theta_0(\epsilon)) - \chi(\epsilon, 0)| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{d\epsilon}\chi(\epsilon, 0) = (0, c\cosh(\mu_0)\frac{d\mu}{d\epsilon}(0, 0)) = (0, \frac{-1}{a^2})$$

$$\frac{d}{d\epsilon}\chi(0, \theta_0) = (\text{sen}(\theta_0)(\frac{-a}{(a^2\text{cos}^2(\theta_0) + \text{sen}^2(\theta_0))^2})) + a\text{cos}(\theta_0)\frac{d\theta_0(0)}{d\epsilon},$$

$$, a\text{cos}(\theta_0)(\frac{-a}{(a^2\text{cos}^2(\theta_0) + \text{sen}^2(\theta_0))^2}) - \text{sen}(\theta_0)\frac{d\theta_0(0)}{d\epsilon}.$$

Finalmente,

$$L'(0) = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a^2} \left\{ a\text{sen}(\theta_0)(\text{sen}(\theta_0)(\frac{-a}{(a^2\text{cos}^2(\theta_0) + \text{sen}^2(\theta_0))^2})) + a\text{cos}(\theta_0)\frac{d\theta_0(0)}{d\epsilon} \right\} +$$

$$+ (\text{cos}(\theta_0) - 1)(a\text{cos}(\theta_0)(\frac{-a}{(a^2\text{cos}^2(\theta_0) + \text{sen}^2(\theta_0))^2}) - \text{sen}(\theta_0)\frac{d\theta_0(0)}{d\epsilon} + \frac{1}{a^2}) \left\} \right.$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a^2} \left\{ \frac{-a^2}{(a^2\text{cos}^2(\theta_0) + \text{sen}^2(\theta_0))^2} + \frac{a^2\text{cos}(\theta_0)}{(a^2\text{cos}^2(\theta_0) + \text{sen}^2(\theta_0))^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\text{cos}(\theta_0) - 1}{a^2} + (a^2\text{sen}(\theta_0)\text{cos}(\theta_0) - \text{sen}(\theta_0)\text{cos}(\theta_0) + \text{sen}(\theta_0))\frac{d\theta_0(0)}{d\epsilon} \right\}$$

Usando a equação 2.2 temos que $L'(0) = -\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2}(a^2 - 1 + \frac{1}{a^2-1})$. Vamos calcular $r_1'(0)$.

2.3 Biliar em uma família de curvas obtidas ao perturbar a elipse pelo fluxo de curvatura 24

$$r(\epsilon, \theta) = \frac{|\chi'(\epsilon, \theta)|^3}{|\chi'(\epsilon, \theta) \times \chi''(\epsilon, \theta)|}$$

Derivando em relação a ϵ e fazendo $\theta = 0$ temos:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} r(\epsilon, 0) = \frac{d}{d\epsilon} r_1(\epsilon) = \frac{|\chi'(\epsilon, 0) \times \chi''(\epsilon, 0)| \frac{d}{d\epsilon} |\chi'(\epsilon, 0)|^3 - |\chi'(\epsilon, 0)|^3 \frac{d}{d\epsilon} |\chi'(\epsilon, 0) \times \chi''(\epsilon, 0)|}{|\chi'(\epsilon, 0) \times \chi''(\epsilon, 0)|^2}$$

Mas $\chi'(0, 0) = (a, 0)$, $\chi''(0, 0) = (0, -1)$, $\frac{d}{d\epsilon} \chi'(0, 0) = (\frac{-1}{a^3}, 0)$, $\frac{d}{d\epsilon} \chi''(0, 0) = (0, 4a^{-4}(1 - a^2))$, $\frac{d}{d\epsilon} |\chi'(\epsilon, 0) \times \chi''(\epsilon, 0)|_{\epsilon=0} = \frac{-1}{a} + \frac{4a^2-5}{a^3}$ e

$$\frac{d}{d\epsilon} |\chi'(\epsilon, 0)|^3|_{\epsilon=0} = \frac{-3}{a}.$$

Então

$$r_1(0) = a^2, r_1'(0) = \frac{3a^2 - 2}{a^2}.$$

Vamos calcular $\theta'(0)$

Para isto usaremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial \epsilon}(0, \theta_0) &= \frac{-(a^2 - 1)^2}{a^3} \\ \frac{\partial^2 \chi(0, \theta_0)}{\partial \epsilon \partial \theta} &= \frac{4(a^2 - 1)^2 \sqrt{a^2 - 2}}{a^4}. \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\langle \chi(\epsilon, \theta(\epsilon)) - \chi(\epsilon, 0), \frac{\partial \chi(\epsilon, \theta(\epsilon))}{\partial \theta} \rangle = 0, \quad (2.7)$$

Usando $A = \cosh(\mu(\epsilon, \theta(\epsilon)))$, $B = \sinh(\mu(\epsilon, \theta(\epsilon)))$ temos que $A' = B\mu'$, $B' = A\mu'$, $A^2 - B^2 = 1$ e a equação 2.7 se reduz a

$$AB\mu' \frac{1}{2} \text{sen}(2\theta(\epsilon)) - B(0)A\mu' \cos(\theta(\epsilon)) + BB(0) \text{sen}\theta(\epsilon) = 0$$

derivando em relação a ϵ obtemos

$$a \frac{\partial^2 \mu}{\partial \epsilon \partial \theta}(0, \theta_0)(1 - \cos(\theta_0)) + (\cos(2\theta_0) - \cos(\theta_0)) \frac{d\theta(0)}{d\epsilon} + 2a \frac{\partial \mu}{\partial \epsilon}(0, \theta_0) \operatorname{sen}(\theta_0).$$

Substituindo os valores já calculados obtemos que

$$\frac{d\theta(0)}{d\epsilon} = \frac{2\sqrt{a^2 - 2}(a^2 - 1)^3}{a(a^4 - a^2 - 2)}.$$

Vamos calcular $\phi'_1(0)$.

$$\operatorname{sen}(\phi_1(\epsilon)) = \frac{c \operatorname{senh}(\mu(\epsilon, 0)) - c \operatorname{senh}(\mu(\epsilon, \theta(\epsilon))) \cos(\theta(\epsilon))}{L(\epsilon)}$$

observemos que $\operatorname{sen}(\phi_1(0)) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}$ e $\cos(\phi_1(0)) = \frac{\sqrt{a^2 - 2}}{\sqrt{a^2 - 1}}$. Derivando em relação a ϵ e avaliando em $\epsilon = 0$ obtemos:

$$\begin{aligned} \cos(\phi_1) \phi'_1(0) &= \frac{L(a \frac{\partial \mu(0,0)}{\partial \epsilon} - a \frac{\partial \mu(0,\theta_0)}{\partial \epsilon} \cos(\theta_0) + \operatorname{sen}(\theta_0) \frac{d\theta(0)}{d\epsilon}) - (1 - \cos(\theta_0)) L'(0)}{L^2} \\ \phi'(0) &= \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a^2 - 2} \frac{a^2 - 1}{a^4} \left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 1}} \left(\frac{-1}{a^2} + \frac{(a^2 - 1)^2}{a^2} \frac{1}{1 - a^2} + \frac{a\sqrt{a^2 - 2}}{a^2 - 1} \frac{d\theta(0)}{d\epsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2}{a^2 - 1} L'(0) \right] \end{aligned}$$

Simplificando e substituindo os valores de $\frac{d\theta(0)}{d\epsilon}$ e de $L'(0)$, obtemos que

$$\phi'_1(0) = \frac{-1}{a^4} + \frac{2(a^2 - 1)^3}{a^2 \sqrt{a^2 - 2} (a^4 - a^2 - 2)}.$$

Substituindo os valores obtidos na equação 2.6 temos que

$$g'(0) = -\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a^2} \left(a^2 - 1 + \frac{1}{a^2 - 1} \right) - \frac{3a^2 - 2}{a^2} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} - a^2 \frac{\sqrt{a^2 - 2}}{\sqrt{a^2 - 1}} \frac{d\phi_1(0)}{d\epsilon}$$

De onde decorre que $g'(0) < 0$ para $a > \sqrt{2}$. Então g é decrescente em uma vizinhança de 0, como $g(0) = 0$, então $g(\epsilon) = a(\epsilon)d(\epsilon) < 0$ para ϵ pequeno. Pelo lema 2.4 temos que o ponto periódico normal de período 4, $(\theta_0(\epsilon), \pi/2)$ é hiperbólico.

2.3 Bilhar em uma família de curvas obtidas ao perturbar a elipse pelo fluxo de curvatura 26

Observemos que isto implica que as cáusticas não convexas próximas da cáustica não convexa associada ao ponto periódico de período 4 são destruídas, uma vez que na elipse, o ponto periódico normal de período 4 parabólico se transforma em um ponto hiperbólico, isolado, pela ação do fluxo de curvatura na elipse.

Acreditamos que o mesmo argumento pode ser usado para provar que os pontos periódicos normais de período $2n$, $n > 2$ se tornam não degenerados, isolados, quando o fluxo de curvatura age no ponto periódico normal parabólico de período $2n$ na elipse. Porém as equações ficam mais sofisticadas.

Observamos que a ação do fluxo de curvatura na elipse produz curvas com simetria axial, nessa direção, consideramos os seguintes resultados.

Proposição 2.5. *Seja a curva oval simétrica com relação a reflexão sobre a reta suporte do diâmetro maior que corresponde a um ponto periódico hiperbólico $\sigma = (\theta, \pi/2)$. Se $(\theta + \theta_0, \pi/2 + \phi_0) \in W^s(\sigma)$ então $(\theta - \theta_0, \pi/2 - \phi_0) \in W^s(\sigma)$.*

Demonstração. Como $(\theta + \theta_0, \pi/2 + \phi_0) \in W^s(\sigma)$, consideremos o ponto no oval $\theta - \theta_0$, por causa da simetria da curva este ponto é exatamente o refletido de $\theta + \theta_0$ no eixo horizontal. As tangentes se intersectam no ponto do eixo de simetria, observemos que o segmento que une os pontos $(\theta + \theta_0, \pi/2 + \phi_0)$ e $f(\theta + \theta_0, \pi/2 + \phi_0) = (\alpha + \theta_1, \pi/2 + \phi_1)$ se intersecta em O_0 com o segmento que une os pontos $(\theta - \theta_0, \pi/2 - \phi_0)$ e $f(\theta - \theta_0, \pi/2 - \phi_0) = (\alpha - \theta_1, \pi/2 - \phi_1)$, por causa da simetria da curva, ver figura 2.1.

Usando a regra de reflexão o ângulo de saída do ponto $\alpha + \theta_1$ será $\pi/2 - \phi_1$, analogamente ao caso anterior, por simetria o ângulo de saída do ponto $\alpha - \theta_1$ será $\pi/2 + \phi_1$ e as imagens pela aplicação do bilhar serão os pontos $(\theta + \theta_2, \pi/2 + \phi_2)$ e $(\theta - \theta_2, \pi/2 - \phi_2)$, observemos que o valor do ângulo decorre

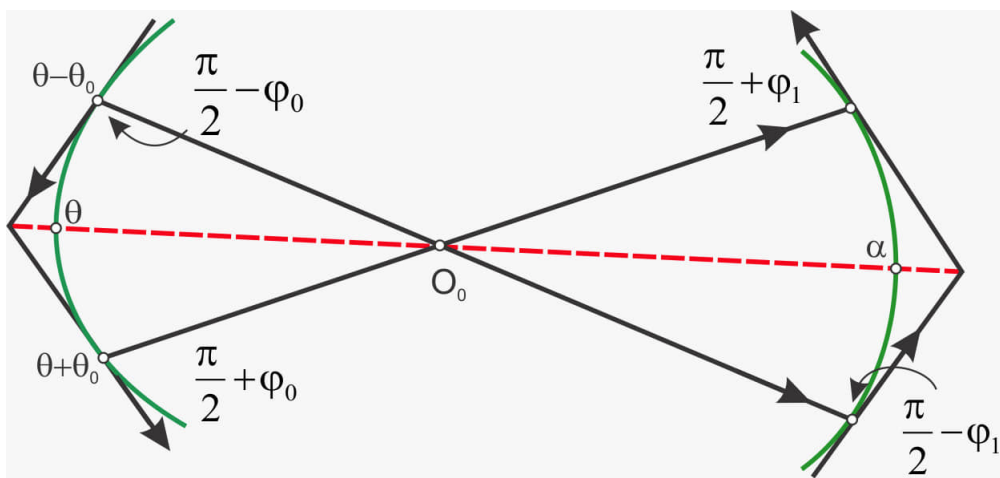


Figura 2.1: Órbita em um oval com simetria

da congruência de triângulos obtidos ao considerar os pontos $\theta - \theta_2, \theta + \theta_2$, o ponto de interseção dos segmentos que unem $\theta - \theta_2, \alpha - \theta_1$ e $\theta + \theta_2, \alpha + \theta_1$, chamado O_1 e o ponto de interseção das tangentes à curva em $(\theta + \theta_2, \pi/2 + \phi_2)$ e $(\theta - \theta_2, \pi/2 - \phi_2)$ ver figura [2.2](#)

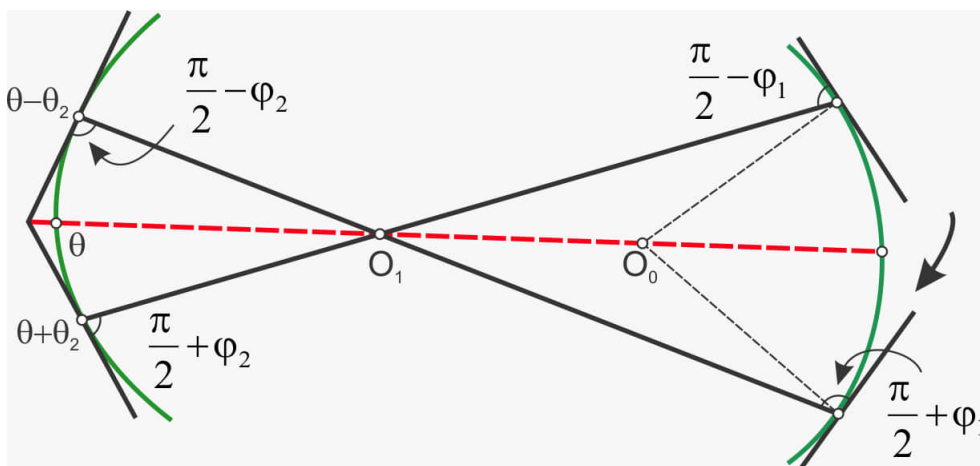


Figura 2.2: Órbita em um oval com simetria

Portanto, se $(\theta + \theta_0, \pi/2 + \phi_0) \in W^s(\sigma)$ então $f^{2n}(\theta + \theta_0, \pi/2 + \phi_0) = (\theta + \theta_{2n}, \pi/2 + \phi_{2n})$ tende a $\sigma = (\theta, \pi/2)$ quando $n \rightarrow +\infty$, ou seja $(\theta_{2n}, \phi_{2n}) \rightarrow (0, 0)$. Usando os argumentos geométricos acima temos que $f^{2n}(\theta - \theta_0, \pi/2 - \phi_0) = (\theta - \theta_{2n}, \pi/2 - \phi_{2n})$ tende a $\sigma = (\theta, \pi/2)$ quando $n \rightarrow +\infty$ pois $(\theta_{2n}, \phi_{2n}) \rightarrow (0, 0)$. Com isso temos que $(\theta - \theta_0, \pi/2 - \phi_0) \in W^s(\sigma)$. \square

Lema 2.6. *Seja $R(\theta, \phi) = (\theta, \pi - \phi)$ a reflexão em torno da reta $\phi = \pi/2$. Dado p um ponto k -periódico hiperbólico então temos que $R(p)$ é um ponto k -periódico hiperbólico e além disso temos que $R(W^u(p)) = W^s(R(p))$ e $R(W^s(p)) = W^u(R(p))$.*

Demonstração. Usando que $f^{-1} = R \circ f \circ R^{-1}$, temos que $f^{-k}(p) = R \circ f^k \circ R^{-1}(p)$ isto é, se $f^k(p) = p$ então $f^k(R^{-1}(p)) = R^{-1}(p)$ e assim $R^{-1}(p)$ é k -periódico. Como $R \circ f^{-n}(x) = f^n \circ R(x)$ e $R \circ f^n(x) = f^{-n} \circ R(x)$ concluímos que $R(W_{loc}^u(p)) = W_{loc}^s R(p)$ e $R(W_{loc}^s(p)) = W_{loc}^u R(p)$. Então $R(p)$ é um ponto hiperbólico.

Vamos provar primeiro que $R(W^u(p)) = W^s(R(p))$. Seja $x \in W^s(R(p))$, então $f^{nk}(x) \rightarrow R(p)$, quando $n \rightarrow \infty$. Assim $R \circ f^{nk}(x) \rightarrow p$ e então

$f^{-nk} \circ R(x) \rightarrow p$ e assim $R(x) \in W^u(p)$ e $x \in R(W^u(p))$.

Seja $x \in R(W^u(p))$ então $R(x) \in W^u(p)$ e pela definição temos que $f^{-kn}(R(x)) \rightarrow p$, quando $n \rightarrow \infty$, então $R \circ f^{kn}(x) \rightarrow p$, ou seja, $f^{kn}(x) \rightarrow R(p)$. Portanto $x \in W^s(R(p))$. A outra igualdade se prova de maneira análoga. \square

A proposição 2.5 implica que, sob a condição da curva oval ter simetria com respeito aos eixos coordenados, os ramos da variedade estável $W^s(p)$, E_1 e E_2 contêm os pontos $(\theta + \theta_k, \pi/2 + \phi_k) \in E_1$ e $(\theta - \theta_k, \pi/2 - \phi_k) \in E_2$, pelo lema 2.6, o refletido do ramo E_1 vai ser F_1 , ramo da variedade instável $W^u(p)$, ou seja $R(\theta + \theta_k, \pi/2 + \phi_k) = (\theta + \theta_k, \pi/2 - \phi_k) \in F_1$, observemos que E_1 e F_1 são simétricos respeito à vertical $x = \theta$. Com isto temos provado a seguinte proposição:

Proposição 2.7. *Seja a curva oval simétrica com relação a reflexão sobre a reta suporte do diâmetro maior que corresponde a um ponto periódico hiperbólico $\sigma = (\theta, \pi/2)$ então localmente as variedades invariantes são simétricas respeito à curva Γ e à reta vertical $x = \theta$.*

Para estudar o caso geral da destruição das cáusticas ressonantes não convexas, usaremos uma abordagem de mecânica clássica que estudaremos na seguinte seção

2.4 Cáusticas não convexas

Vamos abordar o problema do bilhar do ponto de vista da mecânica clássica, ver [2] e [21]. Ao considerar o movimento livre de uma partícula de massa 1 no interior da curva Q_0 sujeito à ação do Hamiltoniano $H(p_1, p_2) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2}$, sabemos que a trajetória da partícula será dada em uma linha reta e pelo

teorema da conservação da energia total, neste caso apenas energia cinética, a velocidade da trajetória terá módulo $\sqrt{p_1^2 + p_2^2} = c = \text{constante}$.

Por outro lado, S. Chang e R. Friedberg em [8] consideraram o Lagrangiano associado à dinâmica do bilhar como:

$$L(x(t), y(t), t) = \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{2} - V(x(t), y(t)),$$

onde $V = 0$ dentro da elipse e $V = \infty$ fora da elipse Q_0 .

Vamos escrever o Lagrangiano em umas coordenadas especiais, coordenadas elípticas, fazendo $x = c \cosh(\rho) \cos(\theta)$ e $y = c \sinh(\rho) \sin(\theta)$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Observemos que se $\theta = c = \text{constante}$, temos hipérbolas e se $\rho = c = \text{constante}$, temos elipses.

O Lagrangiano escrito nestas coordenadas é:

$$\begin{aligned} L(\rho(t), \theta(t), t) &= \frac{\left(\frac{d}{dt}[c \cosh(\rho(t)) \cos(\theta(t))]\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}[c \sinh(\rho(t)) \sin(\theta(t))]\right)^2}{2} - V(\rho(t), \theta(t)) \\ &= \frac{1}{2} [c \sinh(\rho(t)) \cos(\theta(t)) \rho'(t) - c \cosh(\rho(t)) \sin(\theta(t)) \theta'(t)]^2 \\ &+ \frac{1}{2} [c \cosh(\rho(t)) \sin(\theta(t)) \rho'(t) + c \sinh(\rho(t)) \cos(\theta(t)) \theta'(t)]^2 \\ &- V(\rho(t), \theta(t)) \\ &= \frac{c^2}{2} [\sinh^2(\rho(t)) \cos^2(\theta(t)) \rho'(t)^2 + \cosh^2(\rho(t)) \sin^2(\theta(t)) \theta'(t)^2] \\ &+ \frac{c^2}{2} [\cosh^2(\rho(t)) \sin^2(\theta(t)) \rho'(t)^2 + \sinh^2(\rho(t)) \cos^2(\theta(t)) \theta'(t)^2] \\ &- V(\rho(t), \theta(t)) \\ &= \frac{c^2}{2} [\sin^2(\theta(t)) \rho'(t)^2 + \sinh^2(\theta(t)) \rho'(t)^2] \\ &+ \frac{c^2}{2} [\sin^2(\theta(t)) \theta'(t)^2 + \sinh^2(\theta(t)) \theta'(t)^2] - V(\rho(t), \theta(t)) \\ &= \frac{c^2}{2} (\sin^2(\theta(t)) + \sinh^2(\theta(t))) (\rho'(t)^2 + \theta'(t)^2) - V(\rho(t), \theta(t)) \end{aligned}$$

Sabemos que as cáusticas do bilhar na elipse são elipses e hipérbolas confocais e têm equação

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1,$$

são hipérbolos se $b^2 < \lambda < a^2$ e elipses se $0 < \lambda < b^2$.

Chamaremos de λ_1 e λ_2 às soluções da equação quadrática na variável λ , onde $\lambda_1 = a^2 - c^2 \cosh^2(\rho) = c^2 - c^2 \sinh^2(\rho)$ e $\lambda_2 = a^2 - c^2 \cos^2(\theta) = c^2 + c^2 \sin^2(\theta)$, para cada valor de λ_1 , temos uma elipse e para cada valor de λ_2 , temos hipérbolos. Estas coordenadas são chamadas **coordenadas de Jacobi**

Observemos que $\lambda_1'(t) = -2c^2 \cosh(\rho(t)) \sinh(\rho(t)) \rho'(t)$ e $\lambda_2'(t) = -2c^2 \cos(\theta(t)) \sin(\theta(t)) \theta'(t)$, $\cos^2(\theta) = \frac{a^2 - \lambda_2}{c^2}$, $\sin^2(\theta) = \frac{\lambda_2 - b^2}{c^2}$ e $\sinh^2(\rho) = \frac{b^2 - \lambda_1}{c^2}$. Substituindo esses valores no Lagrangiano nas coordenadas ρ, θ temos o Lagrangiano nas coordenadas de Jacobi.

$$L(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}(r_1 \lambda_1'^2 + r_2 \lambda_2'^2),$$

$$\text{com } r_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(a^2 - \lambda_1)(b^2 - \lambda_2)} \text{ e } r_2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(a^2 - \lambda_2)(\lambda_2 - b^2)}.$$

Consequentemente os momentos são $p_1 = r_1 \lambda_1'(t)$ e $p_2 = r_2 \lambda_2'(t)$ e o Hamiltoniano é $H(p_1, p_2) = \frac{1}{2}(\frac{p_1^2}{r_1} + \frac{p_2^2}{r_2})$. A integral de movimento, integral primeira, é

$$I(\phi, v) = v^2 - \sin^2(\phi) + 1 = c.$$

Para $c < 1$ obtemos, no levantamento, curvas homotópicas a zero e para $c > 1$ temos as curvas invariantes homotopicamente não triviais (este tipo de curvas associadas às órbitas periódicas do tipo (m, n) são chamadas de círculos invariantes rotacionais) do espaço de fase do bilhar, ver figura 2.3. As parametrizações das curvas γ homotópicas a zero são

$$v = \pm \sqrt{\sin^2(\phi) - 1 + c}, \quad c \in (0, 1).$$

Quando $c = 1$, temos as parametrizações das separatrizes

$$\Gamma^\pm = \{(\phi, \pm \sin(\phi), \phi \in (0, \pi))\},$$

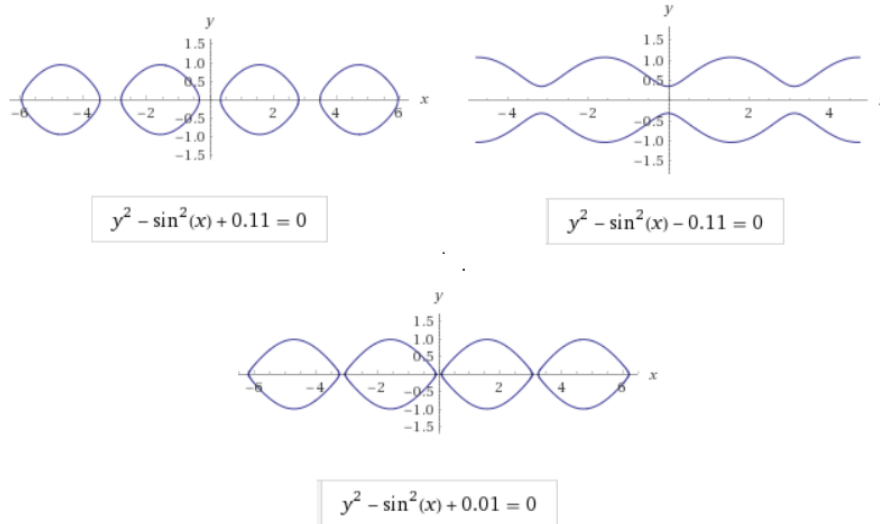


Figura 2.3: Curvas no espaço de fase associadas às cáusticas do Bilhar na Elipse

ver lema 4.1 de [10]. Observemos que γ não é invariante pela aplicação do bilhar f , pois as trajetórias das iteradas de pontos pertencentes a γ intersectam o eixo x , portanto a segunda iterada de γ pela aplicação do bilhar f volta a γ , isto é, γ é invariante por f^2 .

S. Chang e R. Friedberg estudaram em [8] as equações de Hamilton-Jacobi para o problema do bilhar, obtendo equações que descrevem o movimento de partículas no bilhar elíptico. Na seção 4.2 de [25], Renato S. dos Santos, Sônia P. de Carvalho e Sylvie O. Kamphorst fizeram um estudo mais detalhado das cáusticas não convexas no bilhar na elipse as quais estão associadas às órbitas ressonantes do tipo $(m, 2n)$ contidas em curvas homotópicas a zero. Observemos que as trajetórias que intersectam o eixo x entre os focos estão

associadas às curvas homotopicamente triviais e as projeções das trajetórias são tangentes às cáusticas. A coordenada de Jacobi λ_2 está determinada pelo parâmetro ψ definido implicitamente pela equação

$$\sqrt{1 - b/\psi} = cn\left(\frac{n}{m}K(k(\psi, b))\right),$$

onde $k \in (0, 1)$ é chamado de módulo e $K(k) = F(\pi/2, k)$ é a integral elíptica de primeiro tipo definida por

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}(\theta)}}.$$

Embora cada curva γ homotópica a zero (que está associada a cáusticas não convexas, hipérbolas, do bilhar na elipse) não seja o gráfico de uma função de ϕ , existe uma função $H(I, \Psi) = (\phi, v)$ para certas coordenadas (I, Ψ) tal que $H^{-1}(\gamma)$ é uma curva que é gráfico de uma função $\Psi(I)$, isto é $H^{-1}(\gamma) = \{(I, \Psi(I)), I \in \mathbb{T}\}$.

O objetivo é usar os resultados de [23] e de [9] para a curva $H^{-1}(\gamma)$ para garantirmos que as cáusticas não convexas ressonantes são destruídas pela ação do fluxo de curvatura na elipse.

A seguir, enunciaremos alguns lemas importantes sobre funções geradoras os quais serão usados para definir o potencial sub-harmônico de Melnikov.

Lema 2.8. *Seja $h(x, x')$ uma função geradora de $L(x, y) = (x', y')$, então $-h(x', x)$ é função geradora de $L^{-1}(x', y') = (x, y)$*

Demonstração. Observemos que $h(x, x') = |\alpha(x) - \alpha(x')| = h(x', x)$. Sabemos que $\frac{\partial h}{\partial x}(x, x') = y$ e $\frac{\partial h}{\partial x'}(x, x') = -y'$. Para $-h(x', x)$ ser função geradora de $L^{-1}(x', y')$ precisamos que $-h(x', x)$ satisfaça $\frac{\partial(-h)}{\partial x'}(x', x) = y'$ e $\frac{\partial(-h)}{\partial x}(x', x) = -y$, o qual decorre da hipótese. \square

Lema 2.9. *Sejam $h_1(x, x')$ uma função geradora de $L_1(x, y) = (x', y')$ e $h_2(x', x'')$ uma função geradora de $L_2(x', y') = (x'', y'')$, então $h_3(x, x'') =$*

$h_1(x, x') + h_2(x', x'')$, restrita às condições $\frac{\partial h_1}{\partial x'} + \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial h_2}{\partial x''} + \frac{\partial h_2}{\partial x'} = 0$, é função geradora de $(L_2 \circ L_1)(x, y) = (x'', y'')$

Demonstração. Temos que provar que $\frac{\partial h_3}{\partial x}(x, x'') = y$ e $\frac{\partial h_3}{\partial x''}(x, x'') = -y''$, isto decorre da definição de $h_3(x, x'')$, uma vez que $\frac{\partial h_3}{\partial x}(x, x'') = \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, x') = y$ e $\frac{\partial h_3}{\partial x''}(x, x'') = \frac{\partial h_2}{\partial x''}(x', x'') = -y''$. \square

Observemos que se $F(x, y) = f^2(x, y) = (x'', y'')$ e $h_1(x, x')$ é função geradora de f , então a função geradora de $F(x, x'')$ será $h_2(x, x'') = h_1(x, x') + h_1(x', x'')$, restrita às condições:

$$\frac{\partial h_1}{\partial x'}(x, x') + \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, x') = 0, \quad \frac{\partial h_1}{\partial x''}(x', x'') + \frac{\partial h_1}{\partial x'}(x', x'') = 0.$$

O seguinte corolário será muito importante para definirmos o potencial sub-harmônico de Melnikov.

Corolário 2.10. *Sejam $H(I, \Psi) = (\phi, v)$, $F_\epsilon(\phi, v) = (\Phi, V)$, $H^{-1}(\Phi, V) = (\bar{I}, \bar{\Psi})$ e $G_\epsilon = H^{-1} \circ F_\epsilon \circ H$. Sejam b_ϵ e h funções geradoras de F_ϵ e H , respectivamente. Então*

$$g_\epsilon(I, \bar{I}) = -h(\bar{I}, \bar{\Phi}) + b_\epsilon(\phi, \Phi) + h(I, \phi)$$

é função geradora de G .

Observemos que a função geradora de $G_\epsilon = H^{-1} \circ F_\epsilon \circ H$ depende apenas da função geradora de F_ϵ e das funções geradoras das mudanças de variáveis, que não dependem de ϵ . Isto implicará que ao perturbarmos, pelo fluxo de curvatura a curva inicial Q_0 , a função geradora de G_ϵ dependerá de ϵ apenas na parcela da função geradora de F_ϵ e não da mudança de coordenadas. Ver figura 2.4.

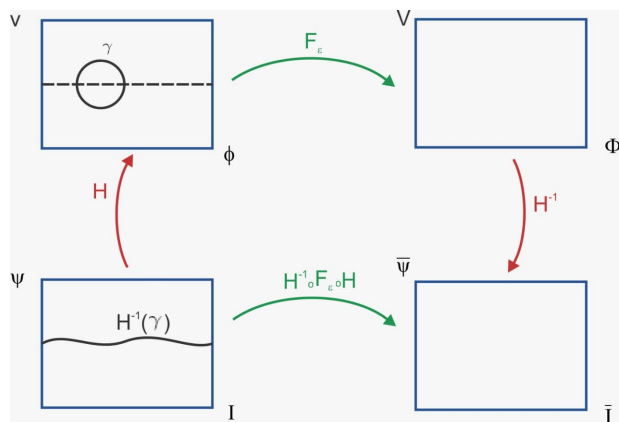


Figura 2.4: Mudana de Variáveis das funoes Geradoras

Teorema A

As cáusticas não convexas ressonantes do bilhar na elipse Q_0 , do tipo $(m, 2n)$, são destruídas quando perturbamos a elipse original pelo fluxo de curvatura.

Demonstraao. Seja γ uma curva homotópica a zero associada a uma cáustica não convexa ressonante do tipo $(m, 2n)$, associada   aplicaao do bilhar f , onde $2n$ representa o número de faces do polígono fechado e m representa o número de voltas na mesa do bilhar, equivalentemente no cilindro, no espao de fase. Se $z = (\phi, v) \in \gamma$, $\phi \in (0, \pi)$, $v > 0$, a trajetória de z intersecta o eixo x , tendo $f(\phi, v) = (\phi_1, v_1)$, $\phi_1 \in (\pi, 2\pi)$, $v_1 < 0$ e assim a segunda iterada de z , $f^2(\phi, v) = (\phi_2, v_2)$ tem $\phi_2 \in (0, \pi)$, $v_2 > 0$. Portanto γ   f^2 invariante.

Seja f_ϵ a aplicaao do bilhar na curva Q_ϵ com funao geradora b_ϵ , então usando o lema 2.9 a funao geradora de f_ϵ^2 será $b_\epsilon^2(x, x'') = b_\epsilon(x, x') + b_\epsilon(x', x'')$, restrito às condioes $\frac{\partial b_\epsilon}{\partial x'}(x, x') + \frac{\partial b_\epsilon}{\partial x}(x, x') = 0$, $\frac{\partial b_\epsilon}{\partial x''}(x', x'') + \frac{\partial b_\epsilon}{\partial x'}(x', x'') = 0$. Denotaremos por \bar{F}_ϵ ao levantamento de f_ϵ , em geral denotaremos com uma barra acima da funao ao levantamento da funao, isto é, \bar{F} denotará o

levantamento de F e h denotará a função geradora de H .

Consideremos $H : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ um C^1 -difeomorfismo tal que $H^{-1}(\gamma)$ é gráfico de uma função $v(x)$ em \mathbb{T}^1 e $\partial_2 \overline{\pi_1 G^{2n}}(x, v(x)) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \geq 1$, onde $G = H^{-1} \circ f \circ H$. Verificaremos que $H^{-1}(\gamma)$ é um círculo G_ϵ^{2n} -invariante rotacional ressonante. A invariância se segue das seguintes igualdades:

$$G^{2n}(H^{-1}(\gamma)) = H^{-1}(f^{2n}(H(H^{-1}(\gamma)))) = H^{-1}f^{2n}(\gamma) = H^{-1}(\gamma).$$

$H^{-1}(\gamma)$ é ressonante pois H sendo difeomorfismo é injetiva, consequentemente está associada a um polígono fechado de $2n$ lados. Observemos que $H^{-1}(\gamma)$ é uma curva homotopicamente não trivial, invariante e ressonante em \mathcal{A} .

Como $\partial_2 \overline{\pi_1 G^{2n}}(x, v(x)) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \geq 1$, pelo teorema da função implícita podemos garantir que existem funções $v_\epsilon, v_\epsilon^* : \mathbb{T} \rightarrow (0, \pi)$ tal que $v_\epsilon(x) = v(x) + O(\epsilon)$, $v_\epsilon^*(x) = v(x) + O(\epsilon)$ e $G_\epsilon^{2n}(x, v_\epsilon(x)) = (x, v_\epsilon^*(x))$ para todo $x \in \mathbb{T}$, ver lema 3 de [23]. Observemos que o RIC $H^{-1}(\gamma)$ permanecerá sob a ação de f_ϵ^2 se, e somente se, os gráficos de v_ϵ e v_ϵ^* são iguais.

Seja $L_\epsilon : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo levantamento é

$$\begin{aligned} \overline{L}_\epsilon(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} b_\epsilon^2(\overline{x}_{2j}(x, \epsilon), \overline{x}_{2j+2}(x, \epsilon)) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} [b_\epsilon(\overline{x}_{2j}(x, \epsilon), \overline{x}_{2j+1}(x, \epsilon)) + b_\epsilon(\overline{x}_{2j+1}(x, \epsilon), \overline{x}_{2j+2}(x, \epsilon))] \\ &= \sum_{j=0}^{2n-1} b_\epsilon(\overline{x}_j(x, \epsilon), \overline{x}_{j+1}(x, \epsilon)) \end{aligned}$$

com $\bar{x}_j(x, \epsilon) = \bar{\pi}_1 \bar{f}_\epsilon^j(x, \bar{v}_\epsilon(x))$. Provaremos que $v_\epsilon^* - v_\epsilon = L'_\epsilon(x) \neq 0$. Fato

$$\begin{aligned} \bar{L}'_\epsilon(x) &= \sum_{j=1}^{2n-1} [\partial_2 b_\epsilon(\bar{x}_{j-1}(x, \epsilon), \bar{x}_j(x, \epsilon)) + \partial_1 b_\epsilon(\bar{x}_j(x, \epsilon), \bar{x}_{j+1}(x, \epsilon))] \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x} + \\ &\quad + \partial_2 b_\epsilon(\bar{x}_{2n-1}(x, \epsilon), \bar{x}_{2n}(x, \epsilon)) + \partial_1 b_\epsilon(\bar{x}_0(x, \epsilon), \bar{x}_1(x, \epsilon)) \\ &= \bar{y}_{2n} - \bar{y}_0 \\ &= \bar{v}^*(x) - \bar{v}(x) \end{aligned}$$

Dizemos que L_ϵ é o **potencial sub-harmônico** de $H^{-1}(\gamma)$ sob a perturbação f_ϵ^2 . A importância do estudo do potencial sub-harmônico é que através dele estudaremos a não persistência das cáusticas não convexas invariantes, isto é, se o potencial sub-harmônico for não constante então os gráficos $\bar{v}^*(x)$ e $\bar{v}(x)$ são distintos e as curvas $H^{-1}(\gamma)$ não persistirão pela ação do fluxo de curvatura.

Consideremos $L_\epsilon(x) = L_0(x) + \epsilon L_1(x) + O(\epsilon^2)$, $L_0(x)$ é constante, uma vez que $L'_0(x) = v_0^* - v_0 = 0$. Assim, se provarmos que $L_1(x)$ é não nulo, teremos que $L_\epsilon(x)$ é não constante e podemos concluir que $H^{-1}(\gamma)$ não permanece sob a ação de f_ϵ^2 . $L_1(x)$ é chamado de potencial sub-harmônico de Melnikov de $H^{-1}(\gamma)$.

A proposição 7 de [23] diz que se $b_\epsilon^2 = b + \epsilon b_1 + O(\epsilon^2)$ então o levantamento $\bar{L}_1(x)$ do potencial sub-harmônico de Melnikov para f_ϵ^2 é

$$\bar{L}_1^{(m, 2n)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_1(x_{2j}, x_{2j+2}),$$

onde

$$x_j = \bar{\pi}_1 \bar{f}_\epsilon^j(x, v(x)).$$

Usando os corolários anteriores temos que, para certas coordenadas (y_k, x_k)

$$b_\epsilon^2(x_{2k}, x_{2k+2}) = g(y_{2k}, y_{2k+2}) + h(y_{2k+2}, x_{2k+2}) - h(y_{2k}, x_{2k}),$$

e assim

$$\begin{aligned}
\overline{L}_1^{(m,2n)}(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} g_1(y_{2j}, y_{2j+2}) + \sum_{j=0}^{n-1} [h_1(y_{2j+2}, x_{2j+2}) - h_1(y_{2j}, x_{2j})] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} g_1(y_{2j}, y_{2j+2}) + h_1(y_{2n}, x_{2n}) - h_1(y_0, x_0) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} g_1(y_{2j}, y_{2j+2}) + h_1(y_0 + m, x_0 + m) - h_1(y_0, x_0) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} g_1(y_{2j}, y_{2j+2}).
\end{aligned}$$

onde $x_j = \overline{\pi}_1 \overline{f}^j(x, \overline{x})$.

Observemos que g_1 é o termo linear da expansão de Taylor da função geradora g , a qual é aplicada no levantamento de $H^{-1}(\gamma)$ que é um círculo invariante rotacional ressonante. Para provarmos que o potencial sub-harmônico é não constante, usaremos uma mudança de variáveis para termos, na nova variável, uma translação do tipo $t = t + \delta$. Usaremos integrais elípticas.

Considerando $\lambda \in (b, a)$, temos que $k \in (0, 1)$ e $\delta \in (0, 2K)$ estão definidos por

$$k^2 = \frac{a^2 - \lambda^2}{a^2 - b^2}, \quad \delta = 2 \int_0^{\mu/2} (1 - k^2 \operatorname{sen}^2(\phi))^{-1/2} d\phi.$$

Onde $\mu \in (0, \pi)$ satisfaz $\operatorname{sen}(\mu/2) = \lambda/b$. Usando um resultado de Chang-Friedberg em [8], ver página 1540, temos que se $q_j = (acn(t_j, k), bsn(t_j, k))$, então $t_{j+1} = t_j + \delta$.

Embora $\mu_1(\phi)$ não seja uma função inteira e por isso não possamos aplicar diretamente a proposição 14 de [23], como a perturbação da elipse(o fluxo de curvatura) é a mesma que em [9], temos que

$$\tilde{\mu}_1(t) = \frac{-ab}{(a^2 cn^2(t) + b^2 sn^2(t))^2}.$$

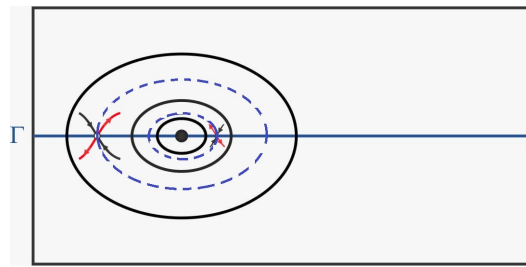


Figura 2.5: Destruição das curvas homotópicas a zero associadas às cáusticas não convexas ressonantes

Sendo assim, pela proposição 5.3 de [9] podemos garantir que o primeiro termo do potencial sub-harmônico é não nulo. Com isto temos que as cáusticas não convexas ressonantes são destruídas pela ação do fluxo de curvatura, ver figura 2.5.

□

Capítulo 3

Região de Instabilidade para Bilhares com Diâmetros Hiperbólicos

Em este capítulo vamos a estudar a dinâmica em um subconjunto $\mathcal{A} = [0, 2\pi) \times (0, \pi/2)$ que não contém nenhuma curva invariante, chamada de região de instabilidade. Mário D. Carneiro, Sônia P. de Carvalho e Sylvie O. Kamphorst provaram, para aplicações de bilhar definidas em curvas ovais, que genericamente se duas variedades invariantes de pontos periódicos hiperbólicos se intersectam, então existe um ponto de interseção transversal. Z. Xia e P. Zhang provaram que se a interseção das variedades invariantes de pontos hiperbólicos é não vazia então existe interseção transversal, ver [12] e [28].

Neste capítulo estudaremos, usando por exemplo simetria, a existência de pontos homoclínicos e heteroclínicos na região primária de instabilidade para a aplicação do bilhar, obtendo uma versão do teorema de Mather, ver

a prova em [22].

Teorema 3.1. *Seja Σ uma superfície diferenciável difeomorfa à esfera S^2 . Se $F \in \text{Dif}_\omega^r(\Sigma)$, conjunto de difeomorfismos de classe C^r em Σ e ω uma forma de volume, tal que:*

1. *Não possui pontos degenerados,*
2. *cada ponto elíptico é Moser estável e*
3. *não possui conexões de sela.*

Então o número de rotação de qualquer domínio periódico conexo simplesmente não trivial é irracional e os ramos dos pontos periódicos têm o mesmo fecho.

É importante ressaltar que as hipóteses de este teorema são satisfeitas genericamente, na topologia de Whitney, em $\text{Dif}_\omega^r(\Sigma)$. Ver [24].

Este resultado pode ser provado usando argumentos semelhantes aos de Franks-Le Calvez, teorema 6.2 em [15], mas apresentamos uma prova alternativa, válida especificamente para a região de instabilidade de bilhares que estamos tratando em este trabalho, não precisando assim do uso da teoria dos primos fins nem da hipótese de existência de pontos homoclínicos e, a diferença de [15], não usamos a topologia de Whitney mas consideramos os resultados genéricos no sentido da topologia descrita em [14], uma vez que ao perturbamos um mapa do bilhar na topologia dos k -jatos, Whitney, não necessariamente temos um mapa do bilhar.

A seguinte proposição afirma que genericamente as fronteiras das ilhas elípticas não podem conter pontos hiperbólicos. Bangert e Mather provaram, sem hipótese de genericidade, a existência de pontos heteroclínicos entre conjuntos de Mather em particular, pontos periódicos. Assim, pontos

periódicos que são parte do conjunto de Mather, minimizantes, têm orbitas heteroclínicas. Se eles forem hiperbólicos, no caso genérico, então a existência de um ponto transversal implica na existência de um ponto homoclínico. Assim temos pontos homoclínicos transversais, ver teorema 5.8 e a observação antes do teorema 7.6 em [4].

Para a seguinte proposição, vamos lembrar a observação 1.7 do capítulo 1. Dizemos que uma propriedade é **genérica** se existe um conjunto residual de bilhares onde tal propriedade é satisfeita.

Proposição 3.2. *Em uma dinâmica genérica, as fronteiras de ilhas elípticas de um mapa do bilhar não podem conter pontos hiperbólicos.*

Demonstração. Consideremos a ilha elíptica V de período n_1 e sua fronteira ∂V . Suponha que existe um ponto periódico hiperbólico $p \in \partial V$ de período n_2 , consideremos $n = m.m.c(n_1, n_2)$ e σ um ponto hiperbólico de período 2 do teorema 1.13. Temos as seguintes situações:

1. $W^s(p) \cap \partial V = \{p\}$ e $W^u(p) \cap \partial V = \{p\}$

Pelo corolário 4.4 de [28] genericamente existe um ponto homoclínico transversal h associado a p , defina o conjunto $\Sigma_\delta = W^u(p) \cap B(h, \delta)$, onde $B(h, \delta)$ é a bola de centro em h e raio δ . Usando o λ -lema, para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m = nn_1 > n_0$, $n \in \mathbb{N}$, temos que $f^m(\Sigma_\delta)$ está ϵ -próximo de $W_{loc}^u(p)$, obtendo assim pontos de $W^u(p)$ tanto em V quanto em $\overline{W^s(\sigma)}$. O qual é uma contradição uma vez que tanto V quanto $\overline{W^s(\sigma)}$ e $W^u(p)$ são conjuntos invariantes. Ver figura 3.1.

2. $W^s(p) \cap \partial V \neq \{p\}$ ou $W^u(p) \cap \partial V \neq \{p\}$

Vamos supor que $W^s(p) \cap \partial V \neq \{p\}$, se há apenas um conjunto de medida, de Lebesgue unidimensional, nula de pontos em $W^s(p) \cap \partial V$, a

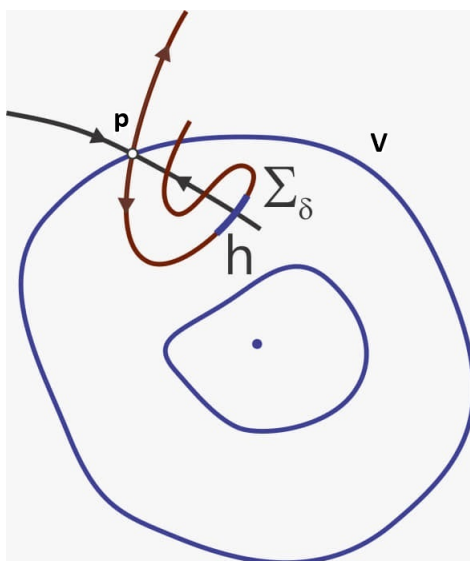


Figura 3.1: Ponto Hiperbólico na Fronteira de Uma Ilha Elíptica

contradição é obtida como no caso anterior, uma vez que se $W_{loc}^s(p)$ não está contido em ∂V e como as variedades $W^s(p)$ e $W^u(p)$ se intersectam transversalmente, podemos usar o λ - lema a uma seção transversal a uma vizinhança do ponto homoclínico que existe pelo corolário 4.4 de [28].

Caso $W^s(p) \cap \partial V$ tenha medida positiva, isto é, $W_{loc}^s(p) \subset \partial V$, basta considerar um ramo de $W^u(p)$ que se intersecta transversalmente com $W^s(p)$ no ponto h , pelo corolário 4.4 de [28]. Caso $h \in \bar{V}$, teremos pontos de $W^u(p)$ tanto em V quanto em $\overline{W^s(\sigma)}$. Caso $h \in \bar{V}^C$, complementar de \bar{V} , usando o λ - lema a seção Σ_δ garantimos a existência de pontos de $W^u(p)$ tanto em V quanto em $\overline{W^s(\sigma)}$, tendo assim uma contradição por causa da invariância de V , $\overline{W^s(\sigma)}$ e $W^u(p)$.

O caso $W^u(p) \cap \partial V \neq \{p\}$ é análogo. Ver figura 3.2.

Observemos que se um ponto periódico está na fronteira, então, por invariância, toda sua órbita está na fronteira. Assim a dinâmica na fronteira é

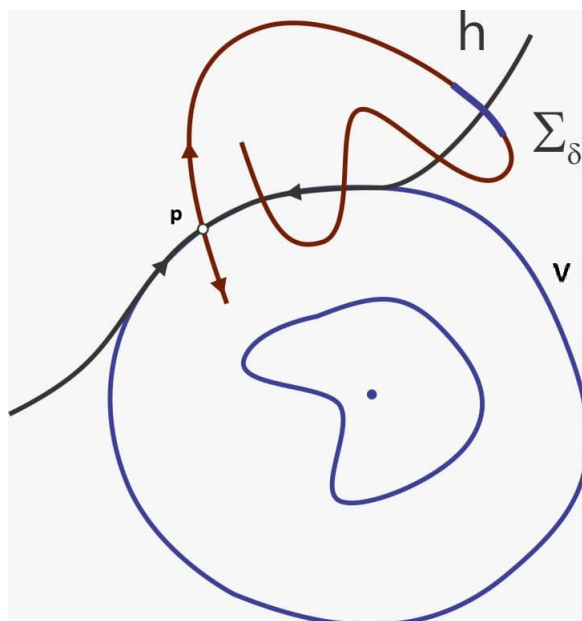


Figura 3.2: Ponto Hiperbólico na Fronteira de Uma Ilha Elíptica

de um homeomorfismo do círculo com número de rotação racional, se o ponto periódico tem um ramo na fronteira, então por invariância todo o ramo está contido na fronteira e temos separatrizes que se conectam, o qual é uma contradição pois interseções de variedades invariantes têm que ser transversais, [14]. \square

Chamaremos de coroa limitada por C^- a um subconjunto de \mathcal{A} ,

$$C = \{(\theta, \phi) \in \mathcal{A} / C^-(\theta) \leq \phi \leq \Psi(\theta)\}$$

e coroa limitada por C^+ a um subconjunto de \mathcal{A} ,

$$C = \{(\theta, \phi) \in \mathcal{A} / \Psi(\theta) \leq \phi \leq C^+(\theta)\},$$

para alguma função contínua $\Psi : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico está contido em \mathcal{A} .

O seguinte teorema garante que o fecho das iteradas de qualquer coroa limitada por C^- sempre contém C^+ .

Teorema 3.3. *Seja C uma coroa limitada por C^- , então $C^+ \subset \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} f^n(C)}$.*

Demonstração. Ver [20], proposição 1.1. \square

Observação 3.4. Consideremos as seguintes notações:

Chamaremos de C_Γ^- a coroa limitada por C^- e por $\Gamma = [0, 2\pi) \times \{\pi/2\}$. Os conjuntos $\cap_{n \in \mathbb{N}} f^n(C_\Gamma^-)$ e $\cap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(C_\Gamma^-)$ são fechados e contêm C^- , denotemos por A^- e Ω^- as componentes conexas que contêm C^- , respectivamente.

Analogamente, chamaremos C_Γ^+ a coroa limitada por Γ e por C^+ . Consideremos os conjuntos $\cap_{n \in \mathbb{N}} f^n(C_\Gamma^+)$ e $\cap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(C_\Gamma^+)$ são conjuntos fechados que contêm C^+ , denotemos por A^+ e Ω^+ as componentes conexas que contêm C^+ , respectivamente.

Chamaremos de variedade estável da curva $C^+(C^-)$ ao conjunto $\Omega^+(\Omega^-)$ e de variedade instável da curva $C^+(C^-)$ ao conjunto $A^+(A^-)$. Para justificar esses nomes temos o seguinte teorema

Teorema 3.5. *As seguintes propriedades são satisfeitas*

1. $f^{-1}(A^+) \subset A^+, f^{-1}(A^-) \subset A^-, f(\Omega^+) \subset \Omega^+, f(\Omega^-) \subset \Omega^-$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(A^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\Omega^-) = C^-$.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(A^+) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\Omega^+) = C^+$.
3. Γ intersecta cada um dos conjuntos A^+, A^-, Ω^+ e Ω^- .

Demonstração. Ver [20], proposição 2.1. \square

Observação 3.6. Dos itens 1 e 2 do teorema anterior decorre que os conjuntos A^+, A^- e Ω^+, Ω^- são disjuntos, uma vez que se existisse um ponto $p \in A^+ \cap A^-$ pela propriedade *a* temos que para todo número natural k , $f^{-k}(p) \in A^+ \cap A^-$ e pela propriedade *b*, $f^{-k}(p)$ deve se aproximar simultaneamente de C^- e C^+ , o qual não é possível. Argumentos semelhantes provam que Ω^+, Ω^- são disjuntos.

Proposição B

Os seguintes itens são verdadeiros para os conjuntos estáveis e instáveis de Le Calvez.

1. Os conjuntos A^+ , A^- , Ω^+ e Ω^- tem medida nula.
2. No caso da aplicação do bilhar, seja $R(\theta, \phi) = (\theta, \pi - \phi)$ a reflexão em torno à reta $\phi = \pi/2$, então $R(A^+) = \Omega^-$ e $R(A^-) = \Omega^+$.
3. No caso da aplicação do bilhar, temos $A^+ \cap \Omega_- \neq \emptyset$ e $A^- \cap \Omega_+ \neq \emptyset$.

Demonstração. 1. Suponhamos que A^+ tem medida positiva e $V_a \subset A^+$, um subconjunto de medida positiva. Seja V a componente conexa maximal de V_a em A^+ . Pelo teorema de recorrência de Poincaré, existem $n \in \mathbb{N}$ tal que $V \cap f^n(V) \neq \emptyset$, como V foi escolhido como a componente conexa maximal que contém a , então $f^n(V) = V$ o qual não é possível pela construção de A^+ .

As outras provas são análogas.

2. Como A^+ é a componente conexa de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(C_\Gamma^+)$ que contém C^+ , então $R(A^+) \subset R(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(C_\Gamma^+)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R(f^n(C_\Gamma^+)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}R(C_\Gamma^+) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(C_\Gamma^-)$ que contém $R(C^+) = C^-$, ou seja $R(A^+)$ é a componente conexa de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(C_\Gamma^-)$ que contém C^- . Então $R(A^+) = \Omega^-$ e analogamente temos que $R(A^-) = \Omega^+$.
3. Pelo item anterior sabemos que $R(A^+) = \Omega^-$, usando o teorema 3.5 temos que A^+ e Ω^- intersectam Γ conseqüentemente seja $x \in \Gamma \cap A^+$, então $x \in \Omega^-$ e assim $A^+ \cap \Omega_- \neq \emptyset$.

O caso $A^- \cap \Omega_+ \neq \emptyset$ é totalmente análogo.

□

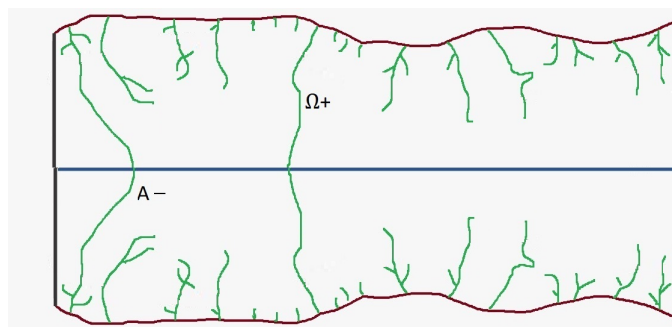


Figura 3.3: Conjuntos de Le Calvez na região de instabilidade da aplicação do bilhar

A figura 3.3 representa os conjuntos de Le Calvez na região de instabilidade da aplicação do bilhar.

Corolário 3.7. *Os conjuntos A^+ , A^- e seus refletidos não intersectam as ilhas elípticas. Equivalentemente, os conjuntos A^+ , A^- e seus refletidos estão contidos em $\overline{W^s(\sigma)}$.*

Demonstração. Consideremos o complementar do conjunto de instabilidade $V = \cup_{n=1}^{\infty} V_i$, onde V_i é uma ilha elíptica. Se existisse algum $x \in V_i \cap A^+$, suponha que o período da ilha elíptica V_i seja k , então para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos que $f^{-kn}(x) \in f^{-kn}(V_i) \cap f^{-kn}(A^+) = V_i \cap f^{-kn}(A^+)$, como $f^{-kn}(A^+)$ tende à curva fronteira C^+ , pelo item 2 do teorema de 3.5 temos que, para n suficientemente grande, $V_i \cap f^{-n}(A^+) = \emptyset$. Contradição, logo V_i e A^+ são disjuntos. As demonstrações das afirmações para os conjuntos A^- , Ω^+ e Ω^- são análogas. \square

3.1 Pontos Normais

Nesta seção vamos estudar um tipo particular de pontos periódicos, aqueles que têm ângulo de saída igual $\pi/2$. Consideremos a curva $\Gamma = [0, 2\pi) \times \{\pi/2\}$. As regiões de instabilidade contêm pontos não periódicos ordenados que estão em um conjunto de Mather ou não ordenados que estão associados a subconjuntos caóticos. Destaca-se no caso da RPI um subconjunto especial de pontos periódicos chamados de normais, ver definição 2.1. Equivalentemente

Definição 3.8. Um ponto $x = (\theta, \phi) \in \Gamma$ é dito um ponto normal se existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in \Gamma$.

Um ponto periódico hiperbólico p de período 2 é um exemplo de ponto normal de período 2. Uma pergunta interessante é se existem este tipo de pontos periódicos para período maior.

O conjunto $\Gamma \cap f(\Gamma)$ é o conjunto dos pontos periódicos de período 2 e em geral, para $n > 2$, o conjunto $F_n = \Gamma \cap f^n(\Gamma)$ está contido em $Per(n) \cup PN(2n)$, onde $PN(2n)$ denota o conjunto de pontos periódicos normais de período $2n$ e $Per(n)$ o conjunto de pontos periódicos de período n . Com efeito, se $x \in F_n$, então $f^n(y) = x$, para algum $y \in \Gamma$, temos dois casos

1. Se $x = y$, então $x \in Per(n)$.
2. Se $x \neq y$, então temos dois pontos distintos que pertencem à mesma órbita em Γ e por simetria das órbitas periódicas normais temos que $f^{2n}(y) = f^n(x) = y$ e $f^{2n}(x) = x$ e assim temos que $x \in PN(2n)$.

Observação 3.9. Os pontos em $\Gamma \cap f^n(\Gamma)$ são periódicos e M. Carneiro, S. Kamphorst e S. de Carvalho provaram em [14] que genericamente os pontos periódicos são todos não degenerados. Então todos os pontos em $\Gamma \cap f^n(\Gamma)$,

que são os pontos normais tem dois pontos da órbita em Γ , são genericamente hiperbólicos ou elípticos.

Como $f^n(f^n(\Gamma) \cap f^{-n}(\Gamma)) \subset f^{2n}(\Gamma) \cap \Gamma$, se encontrarmos pontos $x \in f^n(\Gamma) \cap f^{-n}(\Gamma)$ teremos um ponto $y = f^n(x)$ ou $2n$ periódico ou periódico normal de período $4n$. Uma condição necessária para a existência de tais pontos, por exemplo quando $n = 1$, é que $f(\Gamma) \cap f^{-1}(\Gamma) \neq \emptyset$ e para isto é necessário que o gráfico de $f(\Gamma)$ tenha pelo menos um ponto com tangente vertical. Chamaremos a estes pontos de **pontos de dobra**. Vamos caracterizar, em termos geométricos, a existência destes pontos. Considere $T(\theta)$ e $r(\theta)$ como o vetor tangente à curva e o raio de curvatura da curva α no ponto θ , respectivamente.

Defina $F_1(\theta_0, \theta_1) = \langle \alpha(\theta_1) - \alpha(\theta_0), T(\theta_0) \rangle$. Então

$$F_1(\theta_0, \theta_1) = 0 \iff f(\theta_0, \pi/2) = (\theta_1, \phi_1).$$

Derivando F_1 com respeito à variável θ_1 temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \theta_1}(\theta_0, \theta_1) &= \langle \alpha'(\theta_1), T(\theta_0) \rangle = \langle r(\theta_1)T(\theta_1), T(\theta_0) \rangle \\ &= r(\theta_1)\langle T(\theta_1), T(\theta_0) \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

pois $T(\theta_1)$ e $T(\theta_0)$ não são ortogonais. Pelo teorema da função implícita existem vizinhanças de θ_0 , V_{θ_0} , e de θ_1 , V_{θ_1} , e uma C^{r-1} função $\xi : V_{\theta_0} \rightarrow V_{\theta_1}$ tal que $F_1(\theta, \xi(\theta)) = 0$, para todo $\theta \in V_{\theta_0}$ e $\xi(\theta_0) = \theta_1$.

Agora, $F_1(\theta, \xi(\theta)) = 0 \iff f(\theta, \pi/2) = (\xi(\theta), \phi(\theta))$. Como $\xi'(\theta) = 0$ se, e somente se, a componente horizontal do vetor velocidade da primeira iterada de Γ é 0, temos um ponto de dobra.

Vamos procurar os pontos θ tal que $\xi'(\theta) = 0$.

Como $\frac{\partial F_1}{\partial \theta_0} + \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\theta_0} = 0$ então $\xi'(\theta) = 0 \iff \frac{\partial F_1}{\partial \theta_0} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \theta_0} &= \langle -\alpha'(\theta_0), T(\theta_0) \rangle + \langle \alpha(\theta_1) - \alpha(\theta_0), T'(\theta_0) \rangle \\ &= -r(\theta_0) \langle T(\theta_0), T(\theta_0) \rangle + \langle \alpha(\theta_1) - \alpha(\theta_0), N(\theta_0) \rangle \end{aligned}$$

Como $\langle T(\theta_0), T(\theta_0) \rangle = 1$ e

$$\langle \alpha(\theta_1) - \alpha(\theta_0), N(\theta_0) \rangle = |\alpha(\theta_1) - \alpha(\theta_0)|$$

temos que

$$\xi'(\theta) = 0 \iff r(\theta) = |\alpha(\theta_1) - \alpha(\theta_0)|,$$

Ou seja para termos ponto de dobra é necessário que a evoluta intersecte à curva α .

Já vimos o que significa ter interseção das iteradas da curva Γ , agora vamos estudar algumas propriedades do conjunto $X = \cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\Gamma)$ estudadas por Birkhoff, Herman e Le Calvez em [20]. Nessa direção, temos a seguinte proposição

Proposição 3.10. *Sejam $\Gamma = [0, 2\pi) \times \{\pi/2\}$ e $X = \cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\Gamma)$, então*

1. X e \overline{X} são f invariantes.
2. \overline{X} contém as fronteiras de \mathcal{R} , C^+ e C^- .
3. Seja σ o ponto periódico hiperbólico de período 2. Então $\overline{W^s(\sigma)} \subset \overline{X}$.

Demonstração. 1. X é f invariante, pois

$$f(X) = f(\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\Gamma)) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} f \circ f^n(\Gamma) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} f^{n+1}(\Gamma) = X.$$

\overline{X} é f invariante, pois se $x \in \overline{X}$, então existem $x_i \in X$ tais que $x_i \rightarrow x$, pela invariância de X e continuidade de f , existem $f(x_i) \in X$ tais que $f(x_i) \rightarrow f(x)$ e assim $f(x) \in \overline{X}$. Reciprocamente, se $x \in \overline{X}$ então

existem $x_i \in X$ tais que $x_i \rightarrow x$, pela invariância de X e continuidade de f^{-1} , existem $f^{-1}(x_i) \in X$ tais que $f^{-1}(x_i) \rightarrow f^{-1}(x)$ e assim $f^{-1}(x) \in \overline{X}$, ou seja $x \in f(\overline{X})$.

2. É uma consequência direta do teorema de Birkhoff, proposição 1.1 em [20].
3. Consideremos um ponto arbitrário x em $\overline{W^s(\sigma)}$ e uma vizinhança $B_\epsilon(x)$ de raio ϵ . Então existe um $y \in B_\epsilon(x) \cap W^s(\sigma)$. Consideremos uma seção transversal $\Sigma = \Gamma \cap B_\epsilon(\sigma)$ à variedade estável de σ , em σ . Aplicando o λ -lema a esta seção concluímos que alguma iterada da seção Γ está arbitrariamente próxima de x em $B_\epsilon(x)$. Com o qual concluímos que toda vizinhança na região de instabilidade contém pontos de X , obtendo assim o que queríamos provar.

□

A seguinte proposição resume algumas propriedades dos pontos periódicos normais.

Proposição 3.11. *1. A órbita de um ponto periódico normal tem apenas dois pontos distintos em Γ .*

2. Dados dois pontos distintos x e $f^k(x)$ em Γ , então existe um ponto y $2k$ -periódico.

3. Se x é um ponto periódico normal, então x tem período par.

4. Se x é um ponto homoclínico transversal normal de um ponto periódico hiperbólico de período $2, p$, e as variedades invariantes intersectam transversalmente a Γ , então arbitrariamente próximo de x existem pontos periódicos normais.

5. Os pontos periódicos normais são não ordenados no sentido de Birkhoff.

Demonstração. 1. A órbita de um ponto periódico normal de período $2n$

é $O(p) = \{p, f(p), \dots, f^n(p), f^{n+1}(p), \dots, f^{2n-1}(p)\}$ está formada por apenas dois pontos cuja direção de movimento é ortogonal à tangente o que implica a existência de exatamente dois pontos em Γ .

2. Seja $y = f^k(x)$, então $f^{2k}(x) = f^k(y) = f^k(R(y))$, pois $y \in \Gamma$ e assim $f^{2k}(x) = f^k(y) = R(f^{-k}(y)) = R(x) = x$, então x e $y = f^k(x)$ são pontos $2k$ periódicos.

3. Pelo item 1, sabemos que existem exatamente dois pontos da órbita de x em Γ , digamos $f^n(x) = y \in \Gamma$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Então $R \circ f^n(x) = y$, isto é $f^{-1} \circ R(x) = y$. Como $R(x) = x$, temos que $f^{-1}(x) = y$, isto é, $f^{2n}(x) = x$.

4. Sejam $D \subset W^u(p)$ um compacto e conexo que contém p e x e $\Sigma \subset \Gamma$ uma seção transversal a $W^s(p)$ em x , pelo λ -lema, para $\epsilon > 0$ existe um inteiro positivo n tal que $f^n(\Sigma)$ está C^1 ϵ -próximo de D . Então $f^n(\Gamma)$ intersecta transversalmente Γ , próximo de x . Esta interseção é um ponto periódico normal.

5. Ver observação 4.5 no próximo capítulo.

□

3.2 O conjunto $\Gamma = [0, 2\pi) \times \{\pi/2\}$

Nesta seção vamos estudar como a curva Γ “codifica” a dinâmica na região de instabilidade usando o conjunto da reunião das iteradas de Γ , $X = \cup_{k=1}^{\infty} f^k(\Gamma)$. Aqui a palavra codifica quer dizer que as informações dinâmicas

de qualquer parte da região de instabilidade podem ser obtidas a partir de Γ .

Também vamos tratar sobre pontos homoclínicos na região de instabilidade. M. Carneiro, S. Kamphorst e S. de Carvalho provaram em [14] que genericamente os pontos hiperbólicos cujas variedades invariantes se intersectam, necessariamente se intersectam transversalmente. Em particular, se existem pontos homoclínicos então existem pontos homoclínicos transversais para uma classe residual de bilhares. Z. Xia e P. Zhang provaram em [28] que existe um conjunto residual na topologia dos bilhares $C^r, r > 2$, veja seção 1.1.1, tal que para toda aplicação do bilhar associada a uma curva neste conjunto tem ponto homoclínico transversal para cada ponto periódico hiperbólico.

Definição 3.12. Dizemos que um conjunto K separa o anel \mathcal{A} se $\mathcal{A} - K$ são duas componentes conexas do anel \mathcal{A} .

Teorema 3.13. *Se um conjunto K é invariante, fechado, conexo e separa o anel \mathcal{A} então K é igual a uma das curvas fronteiras do anel \mathcal{A} ou K contém as duas curvas fronteiras do anel \mathcal{A} .*

Demonstração. Ver teorema 1.1 de [20]. □

Exemplo 3.14. No bilhar na elipse, as variedades invariantes associadas ao ponto periódico hiperbólico separam o espaço de fase. Em [9] foi demonstrado que ao aplicar o fluxo de curvatura na elipse as conexões de sela são destruídas, obtendo assim, pontos homoclínicos e o fecho das variedades invariantes associadas ao ponto hiperbólico de período 2 separam a região de instabilidade \mathcal{R} .

Se o ponto periódico hiperbólico q está dentro de alguma ilha elíptica sabemos, pelo corolário 1.18, que a fronteira das ilhas A_i são invariantes por alguma iterada de f logo as variedades invariantes associadas ao ponto hiperbólico q estão inteiramente contidas na ilha correspondente.

Por outro lado se q é um ponto hiperbólico na fronteira da ilha A_i , sabemos que as variedades invariantes, estável e instável, são transversais logo pelo menos uma dessas variedades invariantes intersecta à fronteira da ilha A_i transversalmente. A seguinte proposição pode ser aplicada para considerar este caso

Proposição 3.15. *Sejam σ um ponto periódico hiperbólico de período 2 e q um ponto hiperbólico na fronteira das ilhas elípticas. Se um dos ramos de $W^s(q)$ ou de $W^u(q)$ intersecta $\overline{W^s(\sigma)}$ em um ponto diferente de q então o ramo da variedade está inteiramente contido em $\overline{W^s(\sigma)}$.*

Demonstração. Uma versão mais geral de este resultado se encontra em [20], lema 3.1.

□

Esta proposição implica que se existe um ponto hiperbólico na fronteira de uma ilha elíptica, então os ramos das variedades que se encontrem dentro da ilha não podem sair da ilha. Neste caso não foi usado apenas a invariância da fronteira das ilhas, pois estas fronteiras podem estar compostas por conexões de selas, no caso não genérico.

Vamos provar alguns resultados interessantes ao respeito de existência de pontos homoclínicos e heteroclínicos associados a quaisquer pontos hiperbólicos dentro da região de instabilidade. Para isto vamos usar o fato provado por Bangert em [4], o qual garante a existência de uma órbita hete-

roclínica associada a um ponto hiperbólico σ de período 2 dado que chamaremos de diâmetro, o objetivo de esta seção é provar o **teorema C** enunciado a seguir:

Teorema C

Os seguintes resultados são válidos

1. Seja σ um ponto periódico hiperbólico de período 2 e $\overline{W^s(\sigma)}$ o complementar das ilhas. Se $p \in \overline{W^s(\sigma)}$, com p fora da fronteira da região de instabilidade e o fecho do ramo da variedade invariante $W^s(p)$ (respectivamente $W^u(p)$) separa o anel \mathcal{A} então a variedade invariante $W^s(p)$ (respectivamente $W^u(p)$) tem π_1 projeção em todo $[0, 2\pi)$.

Demonstração. Ver proposição 3.18. □

2. Seja um ponto periódico hiperbólico $p \in \overline{W^s(\sigma)}$, onde σ é um ponto periódico hiperbólico de período 2. Se o conjunto $W^s(\sigma) \cap W^u(p)$ (respectivamente $W^u(\sigma) \cap W^s(p)$) tem interseção transversal então a variedade invariante $W^s(p)$ (respectivamente $W^u(p)$) tem projeção na primeira coordenada sobrejetiva.

Demonstração. Ver proposição 3.19. □

3. Consideremos um ponto periódico hiperbólico p fora de Γ , no complementar do fecho das ilhas elípticas e fora da fronteira da região de instabilidade. Se os fechos de um ramo das variedades invariantes separam o anel \mathcal{A} então existe ponto heteroclínico associado a p e ao ponto hiperbólico de período 2 σ .

Demonstração. Ver proposição 3.20. □

4. Sejam dois pontos periódicos hiperbólicos p_1 e p_2 fora de Γ , no complementar do fecho das ilhas elípticas e fora da fronteira da região de instabilidade. Se os fechos dos ramos das variedades invariantes separam o anel \mathcal{A} , então $W^u(p_1) \cap W^s(p_2) \neq \emptyset$.

Demonstração. Ver proposição 3.22. □

5. Sejam p um ponto periódico hiperbólico fora de Γ , no complementar do fecho das ilhas elípticas e fora da fronteira da região de instabilidade e σ um ponto periódico hiperbólico de período 2. Se os fechos de um ramo das variedades invariantes separam o anel \mathcal{A} então $\overline{W^u(\sigma)} = \overline{W^s(p)}$. Se uma função twist conservativa tem uma curva que é gráfico de uma função contínua com número de rotação irracional sob o qual a dinâmica restrita tem uma órbita densa, essa curva é necessariamente de classe C^1 ?

Demonstração. Ver proposição 3.23. □

6. Sejam σ um ponto hiperbólico de período 2 e $\Gamma = [0, 2\pi) \times \{\pi/2\}$, então $\Gamma \cap \overline{W^s(\sigma)}$ é um conjunto perfeito.

Demonstração. Ver proposição 3.24. □

A seguinte proposição garante que os fechos das variedades invariantes do ponto hiperbólico de período 2, diâmetro hiperbólico, são iguais. A demonstração pode ser encontrada na proposição 16 de [12].

Proposição 3.16. *Seja σ um ponto periódico hiperbólico de período 2, então tem-se $\overline{W^u(\sigma)} = \overline{W^s(\sigma)}$.*

Mário D. Carneiro, Sônia P. de Carvalho e Sylvie O. Kamphorst provaram em [14] que uma condição suficiente para garantirmos que os fechos das variedades invariantes associadas a pontos hiperbólicos fora das ilhas elípticas sejam iguais é que as variedades invariantes sejam π_1 sobrejetivas. Nosso objetivo é estudar condições suficientes para garantirmos a π_1 sobrejetividade das variedades invariantes.

Definição 3.17. Dizemos que um ponto periódico elíptico de período n é Moser estável se admite um sistema fundamental de vizinhanças as quais são discos fechados D tal que f^n restrito à ∂D é minimal, onde minimal quer dizer que não existe um subconjunto fechado e próprio de D invariante por f .

As seguintes duas proposições mostram relações entre a existência de pontos homoclínicos de um ponto hiperbólico e o fato das variedades invariantes serem π_1 -sobrejetivas.

Proposição 3.18. *Seja σ um ponto periódico hiperbólico de período 2 e $\overline{W^s(\sigma)}$ o complementar das ilhas. Se $p \in \overline{W^s(\sigma)}$, com p fora da fronteira da região de instabilidade e o fecho do ramo da variedade invariante $W^s(p)$ (respectivamente $W^u(p)$) separa o anel \mathcal{A} então a variedade invariante $W^s(p)$ (respectivamente $W^u(p)$) tem π_1 projeção em todo $[0, 2\pi)$.*

Demonstração. Chamemos de L ao ramo da variedade invariante associada ao ponto periódico hiperbólico p da hipótese, pelo teorema 3.13 podemos concluir que \overline{L} é igual a uma curva fronteira da região de instabilidade ou \overline{L} contém as duas curvas fronteiras da região de instabilidade. \overline{L} não pode ser igual a uma das curvas fronteiras pois por hipótese o ponto hiperbólico não pertence a uma curva na fronteira da região de instabilidade.

Como a projeção na primeira coordenada das curvas fronteiras da região de instabilidade é $[0, 2\pi)$ concluímos que $\pi_1(\bar{L}) = [0, 2\pi)$.

Observemos que $\pi_1(L)$ não pode conter dois pontos distintos $a, b \in [0, 2\pi)$, pois o conjunto \bar{L} é conexo. Suponhamos que $\pi_1(\bar{L}) = [0, 2\pi) - \{\theta_0\}$, isto implica que existe uma acumulação do ramo L na vertical $V_{\theta_0} = \{\theta_0\} \times [0, \pi]$. Observe que $V_{\theta_0} \cap f(V_{\theta_0}) = \emptyset$, uma vez que a aplicação do bilhar f transforma elementos da curva, parametrizados por θ , em elementos distintos. Analogamente, $V_{\theta_0} \cap f^{-1}(V_{\theta_0}) = \emptyset$.

De esta maneira temos um aberto que contém a fibra V_{θ_0} limitado por $f(V_{\theta_0})$ e $f^{-1}(V_{\theta_0})$, como L se acumula em V_{θ_0} , necessariamente L intersecta $f(V_{\theta_0}) \cup f^{-1}(V_{\theta_0})$, pela invariância de L concluímos que $L \cap V_{\theta_0} \neq \emptyset$. Portanto $\pi_1(L) = [0, 2\pi)$. \square

É possível obter que a variedade invariante se projete sobrejetivamente em $[0, 2\pi)$ se considerarmos a hipótese de existência de ponto heteroclínico, como demonstramos na seguinte proposição:

Proposição 3.19. *Seja um ponto periódico hiperbólico $p \in \overline{W^s(\sigma)}$, onde σ é um ponto periódico hiperbólico de período 2. Se o conjunto $W^s(\sigma) \cap W^u(p)$ (respectivamente $W^u(\sigma) \cap W^s(p)$) tem interseção transversal então a variedade invariante $W^s(p)$ (respectivamente $W^u(p)$) tem projeção na primeira coordenada sobrejetiva.*

Demonstração. Consideremos o caso $W^s(\sigma) \cap W^u(p) \neq \emptyset$, sejam $h \in W^s(\sigma) \cap W^u(p)$ e $\Sigma_\delta = B(h, \delta) \cap W^u(p)$, onde $B(h, \delta)$ denota a bola de centro em h e raio δ . Usando o λ - lema podemos concluir que para quaisquer K e ϵ reais positivos, existe um N tal que para todo $n > N$ a componente conexa

de $f^n(\Sigma_\delta) \cap V(W_K^u(\sigma), \epsilon)$ que contém $f^n(h)$ está ϵ -próximo de $W_K^u(\sigma)$, onde $W_K^u(\sigma)$ é a variedade instável de σ de raio K e $V(W_K^u(\sigma), \epsilon)$ é uma vizinhança de raio ϵ de $W_K^u(\sigma)$. Como $\pi_1(W^u(\sigma)) = [0, 2\pi)$, existe um $K_0 > 0$ tal que $\pi_1(W_{K_0}^u(\sigma)) = [0, 2\pi)$, para este $K_0 > 0$ aplicaremos o λ -lema e concluímos que a partir de uma certa iterada, todas as iteradas da seção Σ_δ estão ϵ -próximo de $W_{K_0}^u(\sigma)$, conseqüentemente $\pi_1(\Sigma_\delta) = [0, 2\pi)$ e assim $\pi_1(W^u(\sigma)) = [0, 2\pi)$. \square

A seguinte proposição demonstra que genericamente existem pontos heteroclínicos associados ao ponto periódico hiperbólico de período 2 e a um ponto hiperbólico no complementar das ilhas elípticas

Proposição 3.20. *Consideremos um ponto periódico hiperbólico p fora de Γ , no complementar do fecho das ilhas elípticas e fora da fronteira da região de instabilidade. Se os fechos de um ramo das variedades invariantes separam o anel \mathcal{A} então existe ponto heteroclínico associado a p e ao ponto hiperbólico de período 2 σ .*

Demonstração. Por hipótese o fecho de um ramo das variedades invariantes separa o anel \mathcal{A} , como o ponto hiperbólico está fora da fronteira, pelo teorema 3.13 estes fechos contêm as curvas rotacionais invariantes da fronteira do anel. Conseqüentemente cada ramo deve se aproximar das duas curvas rotacionais invariantes que constituem a fronteira da região de instabilidade, isto é, cada ramo intersecta Γ . Considere K e L um ramo da variedade estável e instável de p respectivamente que conecta p com Γ . Pelo lema 2.6 sabemos que o refletido de K e L , $R(K)$ e $R(L)$ são variedades invariantes instável e estável de $R(p)$, respectivamente. Como K e L intersectam Γ , então $R(K)$ e $R(L)$ também intersectam Γ , considere o conjunto aberto A limitado pelos pontos periódicos hiperbólicos p , $R(p)$ e pelas curvas $K, L, R(K)$ e $R(L)$. O

conjunto A não é a fronteira de uma ilha elíptica, pois o ponto p está no complementar do fecho das ilhas elípticas, assim concluímos que A contém pontos de $\overline{W^s(\sigma)}$. Se σ não pertence a A então um ramo das variedades invariantes de σ tem que intersectar A , obtendo assim pontos heteroclínicos de σ e p . Analogamente, se $\sigma \in A$, como os ramos das variedades invariantes de σ tem que se aproximar da fronteira da região de instabilidade, necessariamente temos interseção entre um ramo de variedade invariante de σ e de p , obtendo um ponto heteroclínico.

□

Observação 3.21. Observemos que se os 4 ramos das variedades invariantes têm o mesmo fecho então temos que os conjuntos $W^s(p) \cap W^u(\sigma)$ e $W^u(p) \cap W^s(\sigma)$ têm interseção não vazia. Particularmente se os ramos de um ponto hiperbólico têm o mesmo fecho podemos concluir na existência de um ponto heteroclínico associado a p e ao seu refletido $R(p)$.

A seguinte proposição fornece condições suficientes para garantirmos a existência de pontos heteroclínicos associados a dois pontos hiperbólicos.

Proposição 3.22. *Sejam dois pontos periódicos hiperbólicos p_1 e p_2 fora de Γ , no complementar do fecho das ilhas elípticas e fora da fronteira da região de instabilidade. Se os fechos dos ramos das variedades invariantes separam o anel \mathcal{A} , então $W^u(p_1) \cap W^s(p_2) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Pela observação 3.21 podemos considerar pontos homoclínicos associados às duas variedades invariantes. Consideremos um ponto hiperbólico σ associado ao ponto periódico hiperbólico de período 2. Então, pela proposição 3.20 temos que existem pontos heteroclínicos $h_1 \in W^u(p_1) \cap W^s(\sigma)$ e $h_2 \in W^s(p_2) \cap W^u(\sigma)$ transversais associados a p_1 com σ e a p_2 com σ , respectivamente. Consideremos uma seção transversal em h_i à variedade in-

variante de σ , Σ_i associada ao ponto p_i , $i = 1, 2$. Pelo λ - lema C^r próximo das variedades estáveis em uma vizinhança de σ existem iteradas das seções transversais Σ_i , como a interseção das variedades invariantes em σ é transversal, então a interseção das iteradas de Σ_1 com as iteradas de Σ_2 é transversal. Como Σ_1 está associado a uma variedade invariante de p_1 e Σ_2 está associado a uma variedade invariante de p_2 , então temos a existência de pontos heteroclínicos transversais arbitrariamente próximos à curva Γ .

Se os pontos heteroclínicos transversais são associados a a p_1 com σ e a p_2 com $f(\sigma)$, aplicando λ - lema para p_1 e p_2 temos que existem retângulos de σ e $f(\sigma)$ arbitrariamente próxima de uma variedade invariante. Escolha, por exemplo, uma vizinhança retangular de $f(\sigma)$ a qual contém infinitos segmentos da variedade invariante associada a p_2 , iterando esta vizinhança até intersectar com o ponto de interseção heteroclínica do diâmetro e dado que as variedades invariantes se acumulam na outra variedade invariante, aplicando λ -lema vamos ter o mesmo caso anterior. \square

Esta proposição garante a existência de um ponto heteroclínico associado aos pontos periódicos hiperbólicos q_1 e q_2 .

A seguinte proposição é um resultado conhecido provado por exemplo sob as hipóteses genéricas de todos os pontos periódicos serem não degenerados, todos os pontos elípticos serem Moser estáveis e não existir conexões de sela, cuja validade para difeomorfismos homeomorfos à esfera S^2 foi provada por Mather, ver teorema 6.2 em [15] e por Mário D. Carneiro, Sônia P. de Carvalho e Sylvie O. Kamphorst no artigo [14], ver proposição 20. Neste capítulo damos uma outra condição suficiente para garantir que os fechos das variedades invariantes são iguais.

Proposição 3.23. *Sejam p um ponto periódico hiperbólico fora de Γ , no complementar do fecho das ilhas elípticas e fora da fronteira da região de instabilidade e σ um ponto periódico hiperbólico de período 2. Se os fechos de um ramo das variedades invariantes separam o anel \mathcal{A} então $\overline{W^u(\sigma)} = \overline{W^s(p)}$.*

Demonstração. Pela proposição 3.20 sabemos que existe um ponto heteroclínico associado ao ponto σ e o ponto p . Provemos primeiro que $W^u(\sigma) \subset \overline{W^s(p)}$. De fato, se não for verdade, existirá um elemento $x \in W^u(\sigma)$ que não pertence a $\overline{W^s(p)}$. Então existe uma vizinhança aberta V_x de x tal que $V_x \cap \overline{W^s(p)} = \emptyset$. Seja V a componente conexa fora de $\overline{W^s(p)}$ que contém V_x , como h é um ponto heteroclínico a σ e p , existe um número $r \in \mathbb{Z}$ tal que $f^{-r}(h) \in V$ mas $h \in \overline{W^s(p)}$ então $f^{-r}(h) \in \overline{W^s(p)}$, pois $\overline{W^s(p)}$ é f -invariante. Então $f^{-r}(h) \in V \cap \overline{W^s(p)} \neq \emptyset$, contradição. Provemos agora que $W^s(p) \subset \overline{W^u(\sigma)}$. De fato, suponhamos que não é verdade, então existe $x \in W^s(p)$ que não pertence a $\overline{W^u(\sigma)}$. Logo existe uma vizinhança aberta U_x de x tal que $U_x \cap \overline{W^u(\sigma)} = \emptyset$. Seja U a componente conexa fora de $\overline{W^s(p)}$ que contém U_x , como h é um ponto heteroclínico então existe um $r \in \mathbb{Z}$ tal que $f^r(h) \in U$ e como $h \in W^u(\sigma)$ então $h \in \overline{W^u(\sigma)}$ e pela invariância de f temos que $f^r(h) \in \overline{W^u(\sigma)}$ Então $f^r(h) \in U \cap \overline{W^u(\sigma)} \neq \emptyset$, contradição. Isto prova que $\overline{W^u(\sigma)} = \overline{W^s(p)}$. \square

Esta proposição relaciona os fechos das variedades invariantes associadas ao diâmetro hiperbólico e ao ponto periódico hiperbólico p que está fora das ilhas.

A seguinte proposição prova que o subconjunto de Γ fora das ilhas elípticas tem a propriedade de todos seus pontos serem de acumulação.

Proposição 3.24. *Sejam σ um ponto hiperbólico de período 2 e $\Gamma = [0, 2\pi) \times \{\pi/2\}$, então $\Gamma \cap \overline{W^s(\sigma)}$ é um conjunto perfeito.*

Demonstração. Devemos provar que todo ponto no conjunto é um ponto de acumulação. Vamos supor, pelo absurdo, que existe um ponto $x \in \Gamma \cap \overline{W^s(\sigma)}$ que é isolado em $\overline{W^s(\sigma)}$. Isto é, existe uma vizinhança de $x \in \Gamma \cap \overline{W^s(\sigma)}$, V_x tal que $V_x \cap \overline{W^s(\sigma)} = \{x\}$ e $V_x^* \cap \Gamma \cap \overline{W^s(\sigma)} = \emptyset$, onde $V_x^* = V_x - \{x\}$. Como $\mathcal{A} = \overline{W^s(\sigma)} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i$ então temos que $V_x^* \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i$. Ou seja, V_x^* intersecta $(A_{i_1} \cup A_{i_2}) \cap \Gamma$. Isto implica que x é o único ponto de Γ que está na fronteira das ilhas A_{i_1} e A_{i_2} .

Sejam τ_1 e τ_2 os períodos de A_{i_1} e A_{i_2} respectivamente. Afirmamos que x é um ponto periódico de período $m = m.m.c.(\tau_1, \tau_2)$. De fato, como m é múltiplo de τ_1 e τ_2 temos que $f^m(\partial A_{i_1}) = \partial A_{i_1}$ e $f^m(\partial A_{i_2}) = \partial A_{i_2}$. Como $x \in \partial A_{i_1} \cap \partial A_{i_2}$, então $x \in f^m(\partial A_{i_1}) \cap f^m(\partial A_{i_2})$ e assim $f^{-m}(x) \in \partial A_{i_1}$ e $f^{-m}(x) \in \partial A_{i_2}$. Então $f^{-m}(x) \in \partial A_{i_1} \cap \partial A_{i_2}$.

Assumindo que o conjunto $\partial A_{i_1} \cap \partial A_{i_2}$ têm apenas um ponto, x , então $f^{-m}(x) = x$ e assim x é periódico de período m .

Como, genericamente, os pontos periódicos são hiperbólicos ou elípticos então x tem que ser elíptico ou hiperbólico. Porém não pode ser elíptico, uma vez que (assumindo que os pontos elípticos são Moser estáveis) não existe um sistema fundamental de vizinhanças invariantes, fechadas ao redor de x . Também x não pode ser hiperbólico, pois se for hiperbólico, como pertence a fronteira de ilhas, então existiria conexão de selas nestas fronteiras, o qual não é possível em uma dinâmica genérica, ver 3.2.

Portanto não existem pontos isolados em $\Gamma \cap \overline{W^s(\sigma)}$. □

Capítulo 4

Círculos Fantasmas

No ano 2014, em Salto-Uruguaí, Marie-Claude Arnaud proferiu uma palestra onde ela se formulou a seguinte questão: Se uma função twist conservativa tem uma curva que é gráfico de uma função contínua com número de rotação irracional sob o qual a dinâmica restrita tem uma órbita densa, essa curva é necessariamente de classe C^1 ? Ver questão 2.13 de [1].

Com o objetivo de responder, parcialmente, esta questão estudamos em este capítulo um certo conjunto chamado Círculo Fantasma que foi primeiramente estudado, no caso geral de funções Twist, pelo Golé em [17]. Abordaremos um caso particular de uma aplicação do tipo twist, a aplicação do bilhar, e serão descritos os círculos fantasmas associados à aplicação do bilhar.

Consideremos a curva oval α , a aplicação do bilhar $f : [0, L] \times [0, \pi) \rightarrow [0, L] \times [0, \pi)$, e o levantamento $F : \mathbb{R} \times [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R} \times [0, \pi)$ cuja função geradora é $S(x_1, x_2) = |\alpha(x_1) - \alpha(x_2)|$.

Vamos descrever algumas propriedades básicas das funções twist.

Consideremos $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ o círculo unitário, $\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ o anel infinito e $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ definida como $\pi(x, y) = (x \bmod 1, y)$ a projeção na primeira

coordenada.

Seja $F : \mathbb{R} \times [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ um C^1 -difeomorfismo, $F(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$ satisfazendo as seguintes propriedades

1. F é isotópico à identidade, isto é, F pode ser deformado continuamente por homeomorfismos no cilindro à identidade.
2. $F(x + 1, y) = F(x, y) + (1, 0)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
3. Existe uma função $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $YdX - ydx = dS$, satisfazendo $S(x + 1, y) = S(x, y)$.
4. F tem a propriedade de twist uniforme, isto é, $\frac{\partial X}{\partial y} \geq c > 0$.

Esta função F define uma função $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\pi \circ F = f \circ \pi$. F e f são chamadas de **funções do tipo twist positivas** e F é o **levantamento de f** .

A função S é chamada de **função geradora de F** e se $F(x_k, y_k) = (x_{k+1}, y_{k+1})$ então $y_k = -\partial_1 S(x_k, x_{k+1}) = \partial_2 S(x_{k-1}, x_k)$. A equação

$$\partial_2 S(x_{k-1}, x_k) + \partial_1 S(x_k, x_{k+1}) = 0$$

caracteriza os elementos x_k que pertencem a uma órbita, onde ∂_i denota a derivada parcial em relação à i -ésima variável. Portanto as órbitas de F podem ser determinadas pelos pontos críticos do princípio variacional

$$W(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S(x_k, x_{k+1}). \quad (4.1)$$

Sejam p e q dois primos relativos. As órbitas do tipo (p, q) de F são as órbitas $F^n(x_0, y_0) = (x_n, y_n)$ tal que $x_{n+q} = x_n + p, n \in \mathbb{Z}$. O conjunto destas órbitas será denotado como X_{pq} , a π - projeção desta órbita no anel é chamada de (p, q) - órbita periódica e seu número de rotação é p/q .

A estabilidade linear das órbitas periódicas do tipo (p, q) são determinadas pelos autovalores da matriz $Df^q(z)$ ou, equivalentemente, usando a fórmula de MacKay-Meiss, ver [7], pela Hessiana do princípio variacional

$$W_{pq}(x) = \sum_{k=0}^{q-1} S(x_k, x_{k+1}),$$

onde $x = (\cdots, x_0, x_1, x_2, \cdots)$, e $(x_k, -\partial_1 S(x_k, x_{k+1}))$ é levantamento de z .

Pela teoria de Aubry-Mather, para cada par de primos relativos (p, q) , existem pelo menos duas órbitas para o twist F , uma que minimiza a ação, chamada de minimizante do tipo (p, q) e outra chamada órbita min-max do tipo (p, q) .

Considere H_q a matriz Hessiana do princípio variacional W_{pq} avaliada no ponto crítico $x = (x_n)$ a assinatura, (r, s) , onde r é o número de autovalores negativos e s é o número de autovalores positivos, da matriz H_q em uma órbita não degenerada minimizante é $(0, q)$ e uma órbita min-max tem assinatura $(1, q-1)$, o número de autovalores negativos é chamado de índice de Morse da órbita.

Uma propriedade importante das órbitas não degeneradas minimizantes do tipo (p, q) é que elas têm uma certa ordem,

Definição 4.1. Um conjunto $M \subset \mathcal{A}$ de uma função do tipo twist positivo f é dito **bem ordenado** se para cada $(x, y), (x', y') \in \pi^{-1}(M)$ temos que se $x < x'$ então $X(x, y) < X(x', y')$, uma órbita do tipo (p, q) bem ordenada é dita **órbita de Birkhoff**.

Definição 4.2. Sejam $z \in \mathbb{A}$, (x, y) o levantamento de z e $F^n(x, y) = (x_n, y_n)$. Definimos o **número de rotação** de z como $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n}$.

É importante destacar que este número não depende de z na órbita e para diferentes levantamentos este número é o mesmo módulo 1, ver [19].

Definição 4.3. Um conjunto de **Aubry-Mather** é o menor conjunto bem ordenado, fechado e f -invariante, definimos o número de rotação de um conjunto de Aubry-Mather, M , como o número de rotação de qualquer órbita contida no conjunto, o complemento da projeção de M em S^1 são intervalos chamados de **lacunas do conjunto de Aubry-Mather**.

Um resultado muito importante com respeito a este conjunto é o Teorema de Aubry-Mather, cuja prova se encontra em [19], que enunciamos a seguir

Teorema 4.4. *Seja ρ um número irracional e f uma função twist conservativa no anel. Então existe um conjunto M invariante no qual toda órbita é minimizante e possui número de rotação ρ . Tal conjunto possui uma das seguintes caracterizações:*

1. *Ou M é uma curva rotacional invariante dada pelo gráfico de uma função de Lipschitz em S^1 .*
2. *Ou M é um conjunto de Cantor invariante que está contido no gráfico de uma função de Lipschitz em S^1 , neste caso M será um conjunto de Aubry-Mather*

Observação 4.5. As órbitas periódicas normais, introduzidas no capítulo anterior, não são órbitas de Birkhoff. Pois, nas órbitas normais existem pontos do tipo $(x_{i-1}, \theta_{i-1}), (x_i, \pi/2), (x_{i+1}, \theta_{i+1})$, satisfazendo $x_{i+1} = x_{i-1}$ e $\theta_{i+1} = -\theta_{i-1}$, conseqüentemente a propriedade de boa ordenação não é satisfeita, uma vez que se $x_{i-1} < x_i$ não temos que $\pi_1(F(x_{i-1}, \theta_{i-1})) = x_i < x_{i+1} = x_{i-1}$

O seguinte lema caracteriza as órbitas bem ordenadas em termos de desigualdades. Consideremos as seguintes notações para $x = (x_k), y = (y_k), k \in \mathbb{Z}$:

$$x \leq y \iff x_k \leq y_k, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$x < y \iff x \leq y, x \neq y$$

$$x \prec y \iff x_k < y_k, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Lema 4.6. *Uma órbita periódica do tipo (p, q) é bem ordenada se e somente se a correspondente sequência $x = (x_k)$ é ciclicamente ordenada, isto é ou $x \leq \tau_{ij}(x)$ ou $\tau_{ij}(x) \leq x$, onde $(\tau_{ij}x)_k = x_{k+i} + j, \forall i, j, k \in \mathbb{Z}$.*

Para cada sequência $x = (x_k)$ associamos o gráfico da função $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, A(k) = x_k$, chamaremos a este gráfico de diagrama de Aubry. Dizemos que duas sequências $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ se intersectam se existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_k - y_k$ e $x_{k+1} - y_{k+1}$ têm sinais diferentes, ou se $x_k = y_k$ mas $x_{k-1} - y_{k-1}$ e $x_{k+1} - y_{k+1}$ têm sinais diferentes. Dizemos que a interseção é transversal se não é tangencial, isto é, se não existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_k = y_k$ mas $x_{k-1} - y_{k-1}$ e $x_{k+1} - y_{k+1}$ têm os mesmos sinais, sequências transversais serão denotadas por $x \pitchfork y$. O índice de interseção $I(x, y)$ denotará o número de cruzamentos de sequências transversais.

4.1 Fluxo do Campo Gradiente do Princípio Variacional

Considere a equação diferencial em $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$

$$x'_k = -\nabla W(x)_k = -[\partial_1 S(x_k, x_{k+1}) + \partial_2 S(x_{k-1}, x_k)], k \in \mathbb{Z},$$

considere a norma do espaço $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$

$$|x| = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x_k|}{2^{|k|}}.$$

Denotemos por X o subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ de norma limitada, o qual é um espaço de Banach e assumindo C^2 - diferenciabilidade da função geradora

S podemos concluir (pelo teorema de existência e unicidade de E.D.O.s) que existe um C^1 -fluxo local ψ^t em X , na topologia de convergência pontual.

Observemos que os pontos singulares do campo gradiente (pontos fixos do fluxo) correspondem às órbitas do levantamento, F , da aplicação do bilhar f . Considere $\pi : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{A}$ definida por $\pi(x) = \pi(\cdots, x_0, x_1, x_2, \cdots) = (x_0, -\partial_1 S(x_0, x_1))$.

Angenent e Golé notaram a semelhança entre a EDO acima com o fluxo do calor de equações diferenciais parciais parabólicas, com o qual obtiveram algumas propriedades do fluxo ψ^t . Vamos listar algumas. As demonstrações podem ser encontradas em [17].

Lema 4.7. *Para cada $x, y \in X$, com $x < y$, temos que $\psi^t(x) \prec \psi^t(y)$, $t > 0$.*

Lema 4.8 (*Lema de Sturmian*). *Sejam $x, y \in X$ com diferentes números de rotação. Se x e y não são transversais, então para todo $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, $\psi^{\pm\epsilon}(x), \psi^{\pm\epsilon}(y)$ são transversais e*

$$I(\psi^{-\epsilon}(x), \psi^{-\epsilon}(y)) > I(\psi^{\epsilon}(x), \psi^{\epsilon}(y)),$$

e se $\psi^t(x) \pitchfork \psi^t(y)$, seu índice de interseção não muda no tempo.

Analogamente podemos definir o fluxo associado à equação diferencial ordinária associada à ação

$$W_{pq}(x) = \sum_{k=0}^{q-1} S(x_k, x_{k+1}).$$

Observemos que neste caso o sistema de equações diferenciais é finito,

$$x'_k = -\nabla W_{pq}(x)_k = -[\partial_1 S(x_k, x_{k+1}) + \partial_2 S(x_{k-1}, x_k)], k = 0 \cdots q-1.$$

Vamos chamar, também, de ψ^t ao fluxo desse sistema, X_{pq} ao conjunto de órbitas do tipo (p, q) e W_{pq} sua ação periódica.

Corolário 4.9. *O conjunto de seqüências ciclicamente ordenadas, CO , ciclicamente ordenadas com número de rotação ρ , CO_ρ , o conjunto X_{pq} e seus quocientes por \mathbb{Z} são invariantes pelo fluxo ψ^t .*

Demonstração. Seja x uma seqüência em CO, CO_ρ ou em X_{pq} , isto é ou $x \leq \tau_{ij}(x)$ ou $\tau_{ij}(x) \leq x$. Pelo fluxo ser monótono, lema 4.7, concluímos a invariância do fluxo. \square

Teorema 4.10. *Sejam $X^K = \{x \in X; \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_k - x_{k-1}| < K\}$ e $C \subset X^K / \mathbb{Z}$ um conjunto compacto, invariante por $\tau_{1,0}$ e invariante para frente pelo fluxo ψ^t . Então C contém um ponto fixo para o fluxo gradiente, em particular, CO_ρ / \mathbb{Z} contém pontos singulares e assim a aplicação do bilhar tem uma órbita com número de rotação ρ .*

Demonstração. Ver teorema 15.1 em [17]. \square

4.2 Construção dos Círculos Fantasma

Definição 4.11. Um subconjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ é dito um **círculo fantasma** se é

1. totalmente ordenado: $x, y \in \Lambda$ então $x \prec y$ ou $y \prec x$,
2. invariante por τ_{ij} e pelo fluxo ψ^t ,
3. fechado e conexo.

Definição 4.12. Um subconjunto $A \in X_{pq}$ é dito um **esqueleto** se

1. A consiste de pontos críticos de W_{pq} com índice de Morse (número de autovalores negativos) menor ou igual a 1.

2. A é invariante pela ação de τ_{ij} ,
3. A é completamente ordenado.

Um esqueleto é dito **maximal** se o único esqueleto que contém inteiramente a A é o mesmo A .

Exemplo 4.13. Considere o bilhar na elipse, quem seria o esqueleto de $X_{1,2}$? Para respondermos a esta pergunta observemos que $X_{1,2}$ é o conjunto de órbitas do tipo $(1, 2)$ ou seja $x_{n+2} = x_n + 1$ que ao projetarmos em \mathcal{A} temos apenas os pontos periódicos de período 2. Como no bilhar na elipse existem apenas 4 de estes pontos, dos quais são dois hiperbólicos e dois elípticos, observamos que os pontos hiperbólicos são os que minimizam a ação de $W_{1,2} = S(x_1, x_2) = |\alpha(x_2) - \alpha(x_1)|$, e os pontos elípticos são os pontos min-max.

As π -projeções dos círculos fantasmas contêm os conjuntos de Aubry-Mather, uma vez que o conjunto, Σ_ρ de todas as órbitas de um conjunto de Aubry-Mather, M , de número de rotação ρ é um subconjunto completamente ordenado de CO_ρ .

Para construir círculos fantasma racionais, vamos unir as variedades instáveis dos pontos hiperbólicos de f , os mínimos, e os pontos sela do tipo min-max, da ação W_{pq} em X_{pq} . Considere um número racional $\rho = p/q$ e W_{pq} uma função de Morse de X_{pq} , isto é todos os pontos críticos são não degenerados.

Seja x um ponto crítico de W_{pq} a matriz Hessiana é

$$-\nabla^2 W_{pq}(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & \beta_q \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \beta_{q-1} \\ \beta_q & 0 & \cdots & \beta_{q-1} & \alpha_q \end{bmatrix},$$

onde $\alpha_j = -\partial_{22}S(x_{j-1}, x_j) - \partial_{11}S(x_j, x_{j+1})$ e $\beta_j = -\partial_{12}S(x_{j-1}, x_j)$. Considerando que na aplicação do bilhar $S(x_j, x_{j+1}) = |\alpha(x_j) - \alpha(x_{j+1})|$ temos que

$$\alpha_j = -\left(\frac{1}{S(x_{j-1}, x_j)} + \frac{1}{S(x_j, x_{j+1})}\right) \sin^2(\theta_j) - 2K(x_j) \sin(\theta_j)$$

e

$$\beta_j = -\frac{\sin(\theta_j)\sin(\theta_{j+1})}{S(x_j, x_{j+1})}.$$

observa-se que são maiores que zero, portanto podemos aplicar o teorema de Perron-Frobenius para garantir a existência de um, único, maior autovalor λ de $-\nabla^2 W_{pq}(x)$ e o autovetor $v = v_\lambda$ associado a λ pode ser escolhido com coordenadas todas positivas.

Se x é um ponto crítico de índice 1, existem órbitas $\alpha_\pm(x, t)$ de ψ^t e defina

$$\alpha_\pm(x, t) = x \pm e^{\lambda t} v + o(e^{\lambda t}).$$

Estas órbitas constituem a variedade instável de x e são monótonas, então

$$w_\pm(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha_\pm(x, t)$$

existem e são pontos críticos da ação W_{pq}

Teorema 4.14. *Suponha que $W_{pq}(x)$ seja uma função de Morse, se A é um esqueleto maximal, então*

$$\Lambda_A = \{\alpha_{\pm}(x, t); t \in \mathbb{R}, x \in A \text{ é um mini-max}\} \cup A$$

é um C^1 - Círculo Fantasma.

Exemplo 4.15. No caso do bilhar na elipse, como foi observado no exemplo 4.13, a projeção do esqueleto $X_{1,2}$ é constituído apenas por 4 pontos, pelo teorema anterior o círculo fantasma é constituído pelo levantamento de curvas que unem os pontos elípticos e hiperbólicos de período 2.

A seguinte proposição garante a existência de círculos fantasmas com número de rotação irracional, como limite de círculos fantasmas com número de rotação racional, ver proposição 20.2 de [17].

Considere a seguinte notação $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ se: Ou $\Lambda_1 \prec \Lambda_2$ ou $\rho(\Lambda_1) = \rho(\Lambda_2)$ e $\pi(\Lambda_1)$ não está necessariamente estritamente sob $\pi(\Lambda_2)$.

Proposição 4.16. *Seja $\Lambda^{(j)}$ uma sequência crescente de círculos fantasmas e*

$$\Lambda^{(1)} \leq \Lambda^{(2)} \leq \Lambda^{(3)} \leq \dots$$

Assumamos que o número de rotação de $\Lambda^{(j)} = \rho_j$ é limitado superiormente. Então existe um único círculo fantasma $\Lambda^{(\infty)}$ tal que $\Lambda^{(j)} \rightarrow \Lambda^{(\infty)}$ quando $j \rightarrow +\infty$, além disso, se $x^{(j)}(\psi)$ é a parametrização de $\Lambda^{(j)}$ com $x_0^{(j)}(\psi) = \psi$, então $x_k^{(j)}(\psi) \rightarrow x_k^{(\infty)}(\psi)$ quando $j \rightarrow +\infty$, onde $x_k^{(\infty)}(\psi)$ é a parametrização de $\Lambda^{(\infty)}$ com $x_0^{(\infty)}(\psi) = \psi$.

O seguinte teorema proporciona uma ordenação vertical nos círculos fantasmas que por sua vez contêm os conjuntos de Aubry-Mather

Teorema 4.17. *Dados um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e um $\rho \in [a, b]$, existe uma família de círculos C_ρ homotopicamente não triviais no cilindro tal que:*

1. Cada C_ρ é a π -projeção de um círculo fantasma Λ_ρ .
2. Dois C_{ρ_1} e C_{ρ_2} são disjuntos e se $\rho_1 > \rho_2$, então C_{ρ_1} está acima de C_{ρ_2} .
3. Cada C_ρ contém o conjunto de Aubry-Mather M_ρ de minimizadores recorrentes de número de rotação ρ .

No capítulo anterior estudamos algumas propriedades dos conjuntos estáveis e instáveis de Le Calvez, por exemplo ver Teorema A. No seguinte teorema será demonstrado que a fronteira da região de instabilidade é a projeção de um Círculo Fantasma irracional.

Na proposição 3.24 do capítulo anterior foi provado que o conjunto $\Lambda \cap \overline{W^s(p)}$ é um conjunto perfeito. O item 2 do seguinte teorema, cuja demonstração segue o mesmo raciocínio que a demonstração da proposição 3.24, garante que todo ponto nas projeções dos círculos fantasmas e no conjunto de instabilidade $\overline{W^s(p)}$ é ponto de acumulação.

Teorema D

As seguintes afirmações são verdadeiras

- 1 Seja o número de rotação da curva rotacional invariante C^+ na fronteira da região de instabilidade um número irracional. Se qualquer vizinhança aberta dentro da região de instabilidade contém um ponto periódico hiperbólico com índice de Morse menor ou igual a 1, então a curva C^+ é a projeção de um círculo fantasma irracional que são aproximados uniformemente por círculos fantasmas racionais. Além disso os conjuntos estáveis e instáveis de Le Calvez intersectam C_ρ , projeção do círculo fantasma Λ_ρ , nas lacunas do conjunto de Aubry-Mather M_ρ de minimizadores recorrentes de número de rotação ρ .

2 Se Λ contido na RPI é a projeção de um círculo fantasma e σ é um ponto periódico hiperbólico de período 2. Então $\Lambda \cap \overline{W^s(\sigma)}$ é um conjunto perfeito.

Demonstração. 1 Seja C^+ uma curva rotacional invariante contida na fronteira da região de instabilidade cujo número de rotação é $\rho \notin \mathbb{Q}$. Seja $\rho_k \in \mathbb{Q}$ uma sequência estritamente crescente que converge a ρ , pelo teorema 4.17 para cada $\rho_k \in [0, \rho]$ existem círculos C_{ρ_k} homotopicamente não triviais em \mathcal{A} que são projeção de círculos fantasmas Λ^{ρ_k} , e temos que (Λ^{ρ_k}) é uma sequência crescente de círculos fantasmas, caso contrário teríamos uma contradição com o item *b* do teorema 4.17. Pela proposição 4.16 podemos concluir que há um único círculo fantasma Λ que é o limite de Λ^{ρ_k} e ainda mais, esta convergência é monótona e uniforme.

Afirmamos que se toda vizinhança de C^+ contém pontos periódicos, hiperbólico com índice de Morse menor ou igual a 1, então $\pi(\Lambda) = C^+$, pois se supormos que $\pi(\Lambda)$ está sob C^+ , consideremos um aberto V entre essas duas curvas e assim existe um ponto periódico $z \in V$, portanto o levantamento de z pertence a algum esqueleto do tipo (p, q) , pois se trata de um ponto periódico hiperbólico com índice de Morse menor ou igual a 1, e assim z pertence a algum círculo fantasma racional. Contradição, uma vez que $\Lambda^{p/q} \prec \Lambda$.

Os conjuntos estáveis e instáveis Ω^+, Ω^-, A^+ e A^- não intersectam os pontos periódicos por causa do teorema 3.5. Consequentemente os conjuntos estáveis e instáveis não podem intersectar os pontos críticos do princípio variacional e assim não intersecta o esqueleto do círculo fan-

tasma. Pelo teorema item 3 do 4.17, a projeção do círculo fantasma contém o conjunto de Aubry-Mather o qual é f -invariante, portanto não pode intersectar os conjuntos estáveis e instáveis de Le Calvez. Ver figura 4.1.

Observação 4.18. Com respeito à outra curva rotacional invariante, C^- , na fronteira da região de instabilidade, temos o mesmo resultado por simetria da região de instabilidade.

2 Devemos provar que todo ponto no conjunto $\Lambda \cap \overline{W^s(\sigma)}$ é um ponto de acumulação. Vamos supor, pelo absurdo, que existe um ponto $x \in \Lambda \cap \overline{W^s(\sigma)}$ que é isolado em $\overline{W^s(\sigma)}$. Isto é, existe uma vizinhança V_x de $x \in \Lambda \cap \overline{W^s(\sigma)}$, tal que $V_x \cap \overline{W^s(\sigma)} = \{x\}$ e $V_x^* \cap \Lambda \cap \overline{W^s(\sigma)} = \emptyset$, onde $V_x^* = V_x - \{x\}$. Como $\mathcal{A} = \overline{W^s(\sigma)} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i$, onde A_i são ilhas elípticas, então temos que $V_x^* \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i$. Ou seja, V_x^* intersecta $(A_{i_1} \cup A_{i_2}) \cap \Lambda$. Isto implica que x é o único ponto de Λ que está na fronteira das ilhas A_{i_1} e A_{i_2} .

Sejam τ_1 e τ_2 os períodos de A_{i_1} e A_{i_2} respectivamente. Afirmamos que x é um ponto periódico de período $m = m.m.c.(\tau_1, \tau_2)$. De fato, como m é múltiplo de τ_1 e τ_2 temos que $f^m(\partial A_{i_1}) = \partial A_{i_1}$ e $f^m(\partial A_{i_2}) = \partial A_{i_2}$. Como $x \in \partial A_{i_1} \cap \partial A_{i_2}$, então $x \in f^m(\partial A_{i_1}) \cap f^m(\partial A_{i_2})$ e assim $f^{-m}(x) \in \partial A_{i_1}$ e $f^{-m}(x) \in \partial A_{i_2}$. Então $f^{-m}(x) \in \partial A_{i_1} \cap \partial A_{i_2}$.

Assumindo que o conjunto $\partial A_{i_1} \cap \partial A_{i_2}$ têm apenas um ponto, x , então $f^{-m}(x) = x$ e assim x é periódico de período m .

Como, genericamente, os pontos periódicos são hiperbólicos ou elípticos então x tem que ser elíptico ou hiperbólico. Porém não pode ser elíptico, uma vez que (assumindo que os pontos elípticos são Moser estáveis) não

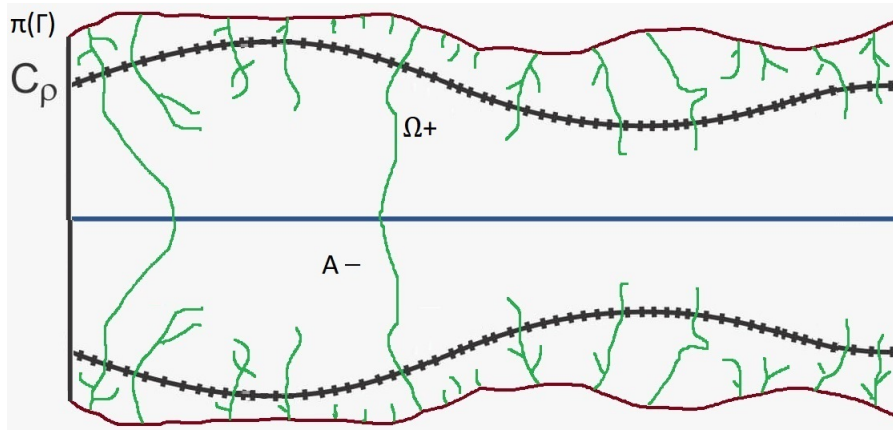


Figura 4.1: Fronteira da Região de Instabilidade

existe um sistema fundamental de vizinhanças invariantes, fechadas ao redor de x . Também x não pode ser hiperbólico, pois se for hiperbólico, como pertence à fronteira de ilhas, então existiria conexão de selas nestas fronteiras, o qual não é possível em uma dinâmica genérica, ver 3.2.

Portanto não existem pontos isolados em $\Lambda \cap \overline{W^s(\sigma)}$. Ver figura 4.2.

□

É importante indicar que a resposta à pergunta da Marie-Claude Arnaud, Se uma função twist conservativa tem uma curva que é gráfico de uma função contínua com número de rotação irracional sob o qual a dinâmica restrita tem uma órbita densa, essa curva é necessariamente de classe C^1 ? não foi respondida. Uma vez que a fronteira da região de instabilidade de uma aplicação do bilhar é o gráfico de uma função contínua, genericamente com número de rotação irracional e conseqüentemente as órbitas são densas, mas a aproximação por círculos fantasmas, que são curvas de classe C^1 , é C^0 então não podemos garantir que a fronteira de uma região de instabilidade seja C^1 .

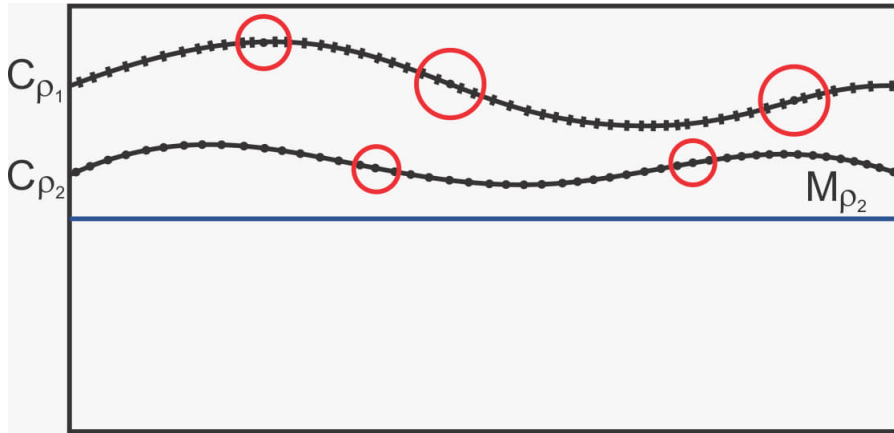


Figura 4.2: Ordenação vertical das projeções dos círculos fantasma, conjunto de Aubry-Mather M_{ρ_2} em C_{ρ_2} e $\Lambda \cap \overline{W^s(p)}$ é um conjunto perfeito em C_{ρ_1} .

A figura seguinte ilustra o comportamento das cáusticas não convexas ressonantes ao aplicar o fluxo de curvatura à elipse. Observemos que ao termos que o ponto parabólico tornou-se hiperbólico então temos novas regiões de instabilidade dentro de cada anel limitado por curvas homotópicas a zero não ressonantes que não são destruídas pelo fluxo de curvatura, pois o ponto elíptico é Moser estável e tem que ter curvas ao redor do ponto elíptico, uma vez que o primeiro coeficiente de Birkhoff é diferente de zero, como foi calculado no capítulo 2. Com o qual temos uma região de instabilidade primária em cada um destes anéis, e pelo estudado no capítulo 3, temos todas as conclusões estudadas em geral nesse capítulo, em particular ilhas elípticas, pontos homoclínicos e heteroclínicos, ver figura 4.3.

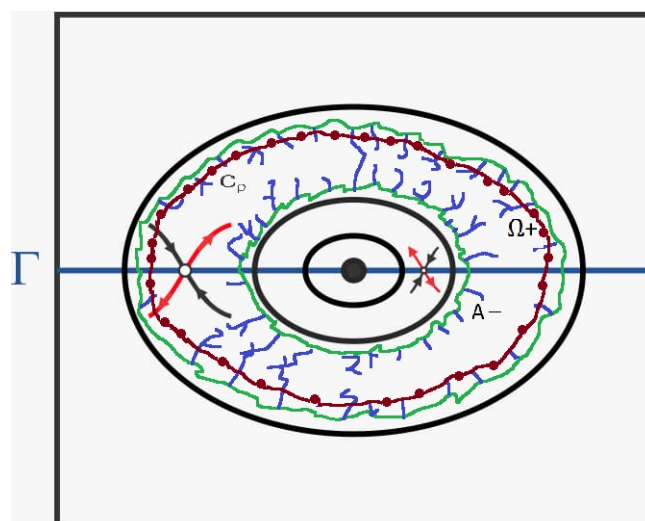


Figura 4.3: Destruição de cáusticas não convexas ressonantes, conjuntos estáveis e instáveis de Le-Calvez (de azul) e círculo fantasma (vermelho escuro) próximo da fronteira da região de instabilidade (verde)

Problemas futuros

Para finalizar o texto, serão enumeradas algumas questões decorrentes deste trabalho que serão objeto de futuras pesquisas.

- Considerando a existência de ilhas elípticas fora da curva Γ , é possível usar argumentos semelhantes aos desenvolvidos no capítulo 2 para provarmos que as cáusticas não convexas ressonantes também serão destruídas pela ação do fluxo de curvatura?
- Algumas propriedades de Γ , por exemplo se $K = \overline{W^s(p)} \cap \Gamma$ tem medida de Lebesgue positiva, parece ser que região de instabilidade menos as ilhas elípticas tem medida positiva também.
- Le Calvez estudou certos conjuntos “estáveis e instáveis” que contêm as duas curvas de Lipschitz que constituem o bordo da região de instabilidade. É possível que estes conjuntos proporcionem informação ao respeito da regularidade ou irregularidade destas curvas?
- É conhecido que a existência de um ponto homoclínico transversal gera um conjunto hiperbólico conhecido como ferradura de Smale, ou seja se existe um ponto homoclínico transversal existem infinitos pontos homoclínicos transversais. O conjunto dos pontos homoclínicos transversais fora das ilhas elípticas é denso em $\overline{W^s(p)}$? ϵ -denso?
- Dentro de uma ilha elíptica a dinâmica é parecida ao que acontece na região de instabilidade, mas como é a dinâmica na fronteira de uma ilha?
- É possível estender a prova da destruição das curvas homotópicas a zero contidas numa ilha elíptica, quando a ilha não intersecta Γ ?

Referências Bibliográficas

- [1] M.-C. Arnaud. Hyperbolicity for Conservative Twist Maps of the 2-Dimensional Annulus . *Publicaciones Matematicas del Uruguay*, July 2016.
- [2] V. Arnold. Métodos matemáticos da mecânica clássica. *mir, Moscou*, 1987.
- [3] Avila-Simoi-Kaloshin. An integrable deformation of an ellipse of small eccentricity is an ellipse. *Annals of Mathematics*, 20(4 série):527–558, 2016.
- [4] V. Bangert. Mather sets for twist maps and geodesics on tori. In *Dynamics reported, Vol. 1*, volume 1 of *Dynam. Report. Ser. Dynam. Systems Appl.*, pages 1–56. Wiley, Chichester, 1988.
- [5] G. D. Birkhoff. Sur quelques courbes fermées remarquables. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 60:1–26, 1932.
- [6] G. D. Birkhoff. Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques. *Memoriae Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaeî*, 1:85–216, 1935.
- [7] M. J. D. Carneiro, C. Ragazzo, and S. Zanata. Introdução à dinâmica das aplicações do tipo twist. *Publicações Matemáticas - Impa*, 2006.

-
- [8] S.-J. Chang and R. Friedberg. Elliptical billiards and Poncelet's theorem. *Journal of Mathematical Physics*, 29:1537–1550, July 1988.
- [9] J. Damasceno, M. J. Dias Carneiro, and R. Ramirez-Ros. The billiard inside an ellipse deformed by the curvature flow. *Proc. Amer. Math. Soc.* 145 (2017), 705-719.
- [10] A. Delshams and R. Ramírez-Ros. Poincaré - melnikov - arnold method for analytic planar maps. 1996.
- [11] M. J. Dias Carneiro, S. Oliffson Kamphorst, and S. Pinto-de-Carvalho. The first Birkhoff coefficient and the stability of 2-periodic orbits on billiards. *Experiment. Math.*, 14(3):299–306, 2005.
- [12] M. J. Dias Carneiro, S. Oliffson Kamphorst, and S. Pinto-de-Carvalho. The primary instability region for billiards on ovals. 03 2006.
- [13] M. J. Dias Carneiro, S. Oliffson Kamphorst, and S. Pinto-de-Carvalho. Elliptic islands in strictly convex billiards. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(3):799–812, 2003.
- [14] M. J. Dias Carneiro, S. Oliffson Kamphorst, and S. Pinto-de-Carvalho. Periodic orbits of generic oval billiards. *Nonlinearity*, 20(10):2453, 2007.
- [15] J. Franks and P. L. Calvez. Regions of instability for non-twist maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 23(1):111–141, 02 2003.
- [16] M. Gage and R. S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. Differential Geom.*, 23(1):69–96, 1986.
- [17] C. Golé. Symplectic twist maps: Global variational techniques. 2001.

- [18] V. Kaloshin and A. Sorrentino. On local birkhoff conjecture for convex billiards. 03 2016.
- [19] A. Katok and B. Hasselblatt. Introduction to the modern theory of dynamical systems. 54, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
- [20] P. Le Calvez. Propriétés dynamiques des régions d’instability. *Annales scientifiques de l’É.N.S.*, 20(4 série):443–464, 1987.
- [21] A. Lopes. Tópicos de mecânica clássica. *Publicações Matemáticas. Impa*, 2012.
- [22] J. N. Mather. Invariant subsets for area preserving homeomorphisms of surfaces. In *Mathematical analysis and applications, Part B*, volume 7 of *Adv. in Math. Suppl. Stud.*, pages 531–562. Academic Press, New York-London, 1981.
- [23] S. Pinto-de-Carvalho and R. Ramírez-Ros. Non-persistence of resonant caustics in perturbed elliptic billiards. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 33(6):1876–1890, 2013.
- [24] D. Pixton. Planar homoclinic points. *J Differential Equations*, 44(3):365–382.
- [25] R. S. dos Santos, S. Pinto-de-Carvalho, and S. Oliffson Kamphorst. O bilhar elíptico e a equação de Hamilton-Jacobi. *Monografia UFMG*.
- [26] C. L. Siegel and J. K. Moser. Lectures on celestial mechanics. *Springer*, 1971.

-
- [27] S. Tabachnikov. *Geometry and billiards*, volume 30 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2005.
- [28] Z. Xia and P. Zhang. Homoclinic points for convex billiards. *Nonlinearity*, 27(6):1181, 2014.