

Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática



**DEFEITO ZERO PARA BILHARES CONVEXOS EM  $\mathbb{H}^2$**

**TESE DE DOUTORADO**

**Vitor Luiz de Almeida**

**ORIENTADORA: Sônia Pinto de Carvalho**

**Belo Horizonte**

**Dezembro de 2017**

# Defeito zero para bilhares convexos em $\mathbb{H}^2$

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por **Vitor Luiz de Almeida**.

Banca examinadora:

Belo Horizonte, 14 de dezembro de 2017.

Profa. Sônia Pinto de Carvalho.

Prof. José Barbosa Gomes.

Prof. Luciano Coutinho dos Santos.

Prof. Marco Antônio Teixeira.

Prof. Sylvie M. O. K. L. da Silva.

Prof. Matthew Joseph Perlmutter.

Profa. **Sônia Pinto de Carvalho**.

*Orientadora*

Tese submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Matemática.

*Dedico à minha família, em especial, aos meus pais.*

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à DEUS pelo dom da vida.

À minha família, em especial, aos meus pais Silene e Alberto, pelo apoio e amor incondicionais.

Aos meus irmãos e cunhadas pelo apoio e compreensão de sempre.

Aos grandes amigos, pela força e torcida, em especial, Monique, Luiz Gustavo e Viviane pelo apoio durante toda a caminhada do meu doutorado.

Ao Prof. Mário Jorge pela orientação inicial e paciência.

À Prof. Sônia pelo acolhimento em um momento difícil, pela oportunidade dada e dedicação concedida a mim, pelos ensinamentos e desafios propostos e pela orientação conduzida de forma impecável.

Aos membros da banca examinadora pelas contribuições que enriqueceram ainda mais o trabalho desenvolvido.

Ao corpo docente da pós-graduação do DMAT - UFMG pelos ensinamentos, em particular, a professora Sylvie pelo acompanhamento durante toda a fase de elaboração desta tese de doutorado.

Aos mestres do DME - PUC Minas, em particular, os professores Lurdinha, Pedro, Roney, Flaviana e Carina pelo incentivo constante em dar continuidade aos meus estudos em nível de Doutorado.

Aos amigos e colegas da Matemática (UFOP, UFMG e PUC Minas) pelo companheirismo.

A Fatinha e Gislene, minhas eternas professoras.

Por último, e não menos importante, às queridas amigas Marina e Marília.

## Resumo

Seja  $Q$  uma região estritamente geodesicamente convexa do plano hiperbólico e tal que seu bordo é uma curva simples, fechada, com curvatura geodésica estritamente positiva. Um bilhar em  $Q$  consiste no movimento livre de uma partícula, fazendo colisões elásticas com o bordo desta região. Neste trabalho, mostraremos que, genericamente, nenhuma trajetória periódica colide múltiplas vezes em um mesmo ponto com ângulos distintos. Também mostraremos que duas órbitas distintas de mesmo período não têm, genericamente, pontos em comum. A principal ferramenta utilizada é o teorema da Transversalidade de Thom nos multijatos de funções em  $C_{\text{emb}}^{\infty}(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ .

**Palavras-chave:** bilhares convexos, plano hiperbólico, órbitas periódicas, defeito zero.

## Abstract

Let  $Q$  be a strictly geodesically convex region in the hyperbolic plane bounded by a closed curve with strictly positive geodesic curvature. A billiard on  $Q$  consists in the particle's free motion suffering elastic collisions with the boundary of the region. On this thesis, we will show that, generically, a periodic trajectory do not hit multiple times a same point with distinct angles. Additionally, we will show that, generically, two distinct periodic orbits and with same period do not have common points. The main tool we use is Thom's transversality theorem on multijets of functions in  $C_{\text{emb}}^{\infty}(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ .

**Keywords:** Convex billiards, hyperbolic plane, periodic orbits, zero defect.

# Sumário

Convenções e Simbologias Adotadas	3
Introdução	5
<b>1 A Geometria do Plano Hiperbólico</b>	<b>12</b>
1.1 O Plano Hiperbólico . . . . .	12
1.2 Noções preliminares sobre distâncias em $\mathbb{H}^2$ . . . . .	16
1.3 Aplicações ortogonais . . . . .	18
1.4 Métrica em $\mathbb{H}^2$ . . . . .	20
<b>2 O Bilhar no Plano Hiperbólico</b>	<b>26</b>
2.1 Conceitos iniciais . . . . .	26
2.2 Bilhares e função geradora . . . . .	29
<b>3 Resultados Principais</b>	<b>37</b>
3.1 $n$ -polígonos em $\mathbb{H}^2$ . . . . .	37
3.2 Preliminares do Teorema A . . . . .	43
3.3 Demonstração do Teorema A . . . . .	48
3.4 Teorema B . . . . .	64
Considerações Finais	79
Bibliografia	82

# Convenções e Simbologias Adotadas

Com o intuito de minimizar a repetição de fatos que aparecerão frequentemente ao longo de todo o texto e evitar possíveis confusões de notação, criamos este tópico que reúne as convenções e simbologias adotadas:

- (i) As notações  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{H}^2$  indicarão o espaço euclidiano  $n$ -dimensional, a esfera bidimensional e o plano hiperbólico, respectivamente. Em especial,  $\mathbb{S}^2_+$  indicará o hemisfério superior de  $\mathbb{S}^2$ ;
- (ii)  $\Gamma$  representará uma curva no espaço métrico  $X$ , com  $X = \mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{S}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ ;
- (iii)  $g = g(\cdot, \cdot)$  indicará a métrica adotada no espaço topológico  $X$ ;
- (iv)  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/|\Gamma|\mathbb{Z}$ , em que  $|\Gamma|$  indica o comprimento da curva  $\Gamma$ ;
- (v)  $C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  indicará o conjunto de todas as funções  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{H}^2$  de classe  $C^\infty$ ;
- (vi)  $C^\infty_{\text{emb}}(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  indicará o conjunto de todos os mergulhos  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{H}^2$  de classe  $C^\infty$ ;
- (vii)  $Q$  indicará um subconjunto de  $\mathbb{H}^2$  que é estritamente geodesicamente convexo;
- (viii)  $\omega$  e  $\delta$  indicarão padrões de  $n$ -polígonos em  $\mathbb{H}^2$ ;
- (ix)  $\mathbb{R}^{1,2}$  indicará o espaço tridimensional de Minkowsky;
- (x)  $q(\cdot)$  e  $p(\cdot, \cdot)$  indicarão, respectivamente, a forma quadrática e o produto interno Lorentzianos em  $\mathbb{R}^{1,2}$ ;
- (xi)  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  indicará a restrição de  $p(\cdot, \cdot)$  ao espaço tangente  $T_X\mathbb{H}^2$ ;
- (xii)  $O(\mathbb{R}^{1,2})$  indicará o grupo de aplicações ortogonais de  $\mathbb{R}^{1,2}$ ;
- (xiii)  $G(\mathbb{R}^{1,2})$  indicará o grupo de aplicações ortogonais de  $\mathbb{R}^{1,2}$  que preservam  $\mathbb{H}^2$ ;

- (xiv)  $\mathcal{F} : \Gamma \times (0, \pi) \longrightarrow \Gamma \times (0, \pi)$  indicará a aplicação bilhar e o cilindro  $\mathcal{M} = \Gamma \times (0, \pi)$  o seu espaço de fase;
- (xv)  $X^t$  indicará o conjunto de todas as  $t$ -uplas da forma  $(x_1, \dots, x_t)$ , com  $x_i \in X$ ;
- (xvi)  $X^{(t)}$  indicará o conjunto de todas as  $t$ -uplas da forma  $(x_1, \dots, x_t)$ , com  $x_i \in X$  e  $x_i \neq x_j$ , toda vez que  $i \neq j$ ;
- (xvii)  $f^t(\mathbf{s})$  indicará o conjunto de todas as  $t$ -uplas da forma  $(f(s_1), \dots, f(s_t))$ , com  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_t) \in \mathbb{T}^{(t)}$  e  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ ;
- (xviii)  $H_\omega(\cdot)$  indicará o perímetro geodésico de um  $n$ -polígono em  $\mathbb{H}^2$ ;
- (xix)  $\alpha$  e  $\beta$  indicarão, respectivamente, as aplicações fonte e alvo na teoria de 1-jatos;
- (xx)  $J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  indicará o conjunto de todos os 1-jatos com fonte em  $\mathbb{T}$  e alvo em  $\mathbb{H}^2$ ;
- (xxi)  $I_i(\omega)$  indicará o conjunto de todos os índices  $j$  para os quais existe um segmento geodésico que liga os pontos  $y_i$  e  $y_j$ , via o padrão  $\omega$ ;
- (xxii)  $U_\omega$  indicará o conjunto de todas as  $t$ -uplas distintas de  $\mathbb{H}^2$  em que o ponto  $y_i$  nunca pertence a envoltória convexa do conjunto  $\{y_j \mid j \in I_i(\omega)\}$ ;

# Introdução

O problema clássico do bilhar no plano foi definido, originalmente, por Birkhoff [4], no início do século XX. Em linhas gerais, podemos descrevê-lo da seguinte maneira: consideremos uma partícula pontual movendo-se em linha reta no interior de uma região compacta  $Q \subset \mathbb{R}^2$  e sofrendo reflexões elásticas ao chocar-se com o bordo  $\Gamma$  de  $Q$ . Se é dado um ponto de impacto e a direção de saída desse ponto, como podemos prever e compreender a dinâmica do movimento dessa partícula no interior dessa curva?

Apesar de já terem se passados mais de 100 anos da proposição do problema do bilhar, o tema continua em evidência no meio científico e é notória a sua relevância tanto dentro da própria Matemática quanto nas suas aplicações em outras áreas do conhecimento como, por exemplo, em estudos nas áreas de Ótica, Acústica, Mecânica Estatística e Física das Partículas.

Suponhamos que  $\Gamma$  esteja parametrizada pelo parâmetro comprimento de arco  $s$ ,  $0 \leq s < L$ , e denotemos por  $\psi$ ,  $0 < \psi < \pi$ , o ângulo entre o vetor tangente à curva  $\Gamma$  no ponto de impacto e o vetor velocidade da partícula nesse mesmo ponto. Como, por hipótese, as reflexões nos pontos de impacto são elásticas, segue que em cada um deles vale a lei do espelho, isto é, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Se  $s_1$  representa um ponto de impacto e  $\psi_1$  a direção de saída dele, então a aplicação

$$\mathcal{F} : [0, L) \times (0, \pi) \longrightarrow [0, L) \times (0, \pi)$$

que associa  $(s_1, \psi_1)$  ao próximo ponto de impacto e a próxima direção de saída,  $(s_2, \psi_2)$ , modela matematicamente o problema do bilhar.

É sabido que o comportamento dinâmico desse sistema depende fortemente do formato da curva  $\Gamma$ . Os dois exemplos clássicos de bilhares no plano que exibem comportamentos dinâmicos totalmente distintos são o bilhar no círculo e o bilhar no estádio: o primeiro deles é totalmente integrável, enquanto o segundo é completamente caótico.

Desde a publicação de Birkhoff [4], bilhares no plano vem sendo, exaustivamente, estudados. No caso especial de curvas ovais no plano, isto é, para curvas fechadas, regulares, simples, orientadas no sentido anti-horário, com classe de diferenciabilidade pelo menos  $C^2$  e com curvatura estritamente positiva, sabe-se que a aplicação  $\mathcal{F}$  é um difeomorfismo pelo menos  $C^1$  que define um sistema dinâmico bidimensional discreto, conservativo e que tem a propriedade *twist* com função geradora  $g(s_1, s_2) = -|\Gamma(s_2) - \Gamma(s_1)|$  (ver, por exemplo, [23]).

Além disso,  $C^2$  genericamente, é garantida a finitude da quantidade de órbitas  $N$ -periódicas, todas elas não-degeneradas, para cada  $N \in \mathbb{N}$ , conforme foi provado por M. J. Dias Carneiro, S. Oliffson Kamphorst e S. Pinto-de-Carvalho [11].

Naturalmente, podemos estender o problema do bilhar para subconjuntos compactos sobre superfícies  $S$  de curvatura constante. De forma análoga ao caso planar, supomos que uma partícula se move na região limitada por uma curva fechada  $\Gamma \subset S$ , seguindo trajetórias geodésicas, e sofrendo reflexões elásticas ao chocar-se com o bordo dessa região.

Quando comparado ao caso planar, bilhares sobre superfícies de curvatura constante ainda é um tema pouco explorado na literatura científica. Nos parágrafos seguintes, descreveremos, de forma sucinta, alguns resultados já estabelecidos para bilhares nesse tipo de superfície.

S. V. Bolotin [6] foi um dos pioneiros em estudos dessa natureza. Em 1992, ele publicou um resultado classificando os bilhares integráveis sobre superfícies de curvatura constante. Em linhas gerais, Bolotin provou que ou bilhar admite uma integral que é um polinômio quadrático na velocidade ou o bilhar admite uma integral de grau 4. Em qualquer um dos casos, ele exibe qual deve ser a estrutura do bordo da região considerada.

Um pouco mais tarde, B. Jovanovic [18] estudou, por meio do método de Kozlov, como obter sistemas integráveis a partir de perturbações de sistemas integráveis já conhecidos. Em especial, aplicou essa técnica para bilhares definidos no interior de quádricas em  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{H}^2$  e cujo o movimento da partícula era influenciado por um campo de forças conservativo.

No início de 1999, B. Gutkin, U. Smilansky e E. Gutkin [15] apresentaram

uma ampla classe de mesas de bilhares sobre  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{H}^2$  que possuem expoente de Lyapunov positivo. Nesse mesmo artigo, também são estabelecidas condições suficientes para garantir a hiperbolicidade de dinâmicas de bilhares sobre esses dois modelos de superfícies de curvatura constante. No ano seguinte, B. Gutkin [14] estende esses resultados para bilhares em que a partícula está sujeita à ação de um campo magnético homogêneo, estacionário e perpendicular às superfícies consideradas.

G. Popov e P. Topalov [22] mostraram, em 2008, que qualquer mesa de bilhar integrável sobre  $\mathbb{S}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$  é geodesicamente equivalente (no sentido de ter as mesmas trajetórias de bilhar) a uma mesa de bilhar dentro de um elipsóide, escolhido apropriadamente, no espaço euclidiano.

Em 2013, M. Bialy [3] provou que o único bilhar convexo sem pontos conjugados sobre o hemisfério superior  $\mathbb{S}_+^2$  ou sobre  $\mathbb{H}^2$  é o bilhar circular. Como consequência desse resultado, ele estabeleceu que se uma aplicação bilhar sobre uma curva  $\gamma$  contida em  $\mathbb{S}_+^2$  ou  $\mathbb{H}^2$  for totalmente integrável, então  $\gamma$  é, certamente, um círculo geodésico.

Órbitas periódicas também são objetos naturais de estudo dentro da teoria de Sistemas Dinâmicos. Em particular, para bilhares sobre superfícies de curvatura constante, V. Blumen, K. Y. Kim, J. Nance e V. Zharnitsky [5] provaram que, em  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{H}^2$ , para bilhares com bordo geodesicamente estritamente convexo, o conjunto das órbitas 3-periódicas tem medida nula.

Recentemente, S. Pinto-de-Carvalho e L. Coutinho dos Santos ([9], [10]) fizeram o estudo do problema do bilhar em ovais no hemisfério superior  $\mathbb{S}_+^2$  e no plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  estabelecendo, para esses dois casos, propriedades similares às propriedades já estabelecidas para o caso planar. Nesse trabalho, os autores mostraram, dentre outras afirmações, que a aplicação de bilhar nessas superfícies é um difeomorfismo conservativo do tipo *twist*. Além disso, confirmaram a existência de um número finito de órbitas de período  $n$ , todas não degeneradas em um aberto denso dos bilhares  $C^\infty$ , com pelo menos uma de tais órbitas sendo hiperbólica.

Contribuiremos com toda a teoria já desenvolvida para bilhares em superfícies de curvatura constante, estabelecendo duas importantes propriedades

genéricas para bilhares convexos em  $\mathbb{H}^2$ . Para descrever o que faremos, faz-se necessário fixarmos, previamente, algumas notações, definições e convenções.

Ao longo desse texto,  $\Gamma$  sempre representará uma curva fechada, simples, com curvatura geodésica estritamente positiva, de classe  $C^\infty$  e que engloba um domínio estritamente geodesicamente convexo  $Q \subset \mathbb{H}^2$ . Além disso, será encarada como imagem de uma aplicação  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ , onde  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/|\Gamma|\mathbb{Z}$  e  $|\Gamma|$  é o comprimento de  $\Gamma$ .

Um  $n$ -polígono em  $Q$  com vértices  $P_1, \dots, P_n$  em  $\Gamma = \partial Q$  será uma curva fechada  $\gamma$  formada por um número finito de segmentos geodésicos  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , em que  $\gamma_i$  é a única geodésica minimizante ligando os pontos  $P_i$  e  $P_{i+1}$  de  $\Gamma$  e  $P_{n+1} = P_1$ . Os pontos  $P_1, \dots, P_n$  serão chamados de pontos de reflexão de  $\Gamma$ . Em especial, se os vetores tangentes a  $\gamma_i$  e  $\gamma_{i+1}$  em  $P_{i+1}$  formarem ângulos agudos iguais com o vetor tangente  $\vec{t}_{P_{i+1}}$  à  $\Gamma$  em  $P_{i+1}$ , então iremos dizer que o  $n$ -polígono é uma trajetória de bilhar  $n$ -periódica em  $\Gamma$ .

Precisamos, também, estabelecer a noção de defeito de uma trajetória  $n$ -periódica de bilhar sobre  $\Gamma$ . Suponhamos que ela não possua nenhum ângulo de reflexão que seja reto. Definimos como defeito da trajetória, a diferença entre a quantidade de segmentos geodésicos distintos e a quantidade de pontos de reflexão distintos dela. A figura dada a seguir exhibe um exemplo de trajetória 6-periódica de bilhar que possui defeito um.

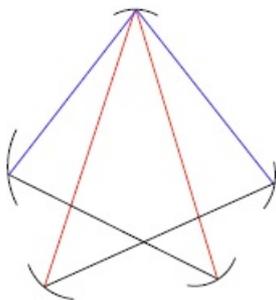


Figura 1: Exemplo de uma trajetória 6-periódica de bilhar com defeito um.

Se caso ela possuir pelo menos um ângulo de reflexão reto (e, portanto, exatamente dois), então o seu defeito será dado pela diferença entre a quantidade de segmentos geodésicos distintos, acrescido de uma unidade, e a quantidade

de pontos de reflexão distintos dela.

De posse dessas preliminares, enunciamos o primeiro resultado que foi estabelecido nessa tese de doutorado: a propriedade do defeito zero para bilhares convexos sobre  $\mathbb{H}^2$ .

Propriedade 1: Sejam  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/|\Gamma|\mathbb{Z}$  e  $\mathcal{A}$  o conjunto de todas as aplicações  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  tais que toda trajetória de bilhar  $n$ -periódica em  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  tem defeito zero. Então,  $\mathcal{A}$  possui um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ .

Além disso, a mesma argumentação empregada na propriedade do defeito zero foi adaptada e a seguinte qualidade adicional também pôde ser estabelecida para ele:

Propriedade 2: Seja  $\mathcal{B}$  o conjunto de todas as aplicações  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  tais que, quaisquer duas trajetórias de bilhar  $n$ -periódicas em  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  não possuem pontos de reflexão em comum. Então,  $\mathcal{B}$  possui um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ ;

As propriedades 1 e 2 já foram estudadas por L. Stojanov [26] para o problema do bilhar no  $\mathbb{R}^n$ . A técnica utilizada por ele baseia-se na construção de poligonais  $n$ -periódicas com pontos de reflexão em  $f(\mathbb{X})$ ,  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{X}, \mathbb{R}^n)$ , com  $\mathbb{X}$  sendo uma subvariedade  $(n - 1)$ -dimensional e de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$ . Para cada poligonal construída, sempre é possível exibir uma função sobrejetora  $\omega$  que descreve a maneira, segundo a qual, a poligonal passa pelos seus pontos de reflexão. Combinando esse método com argumentos do Teorema da transversalidade de Thom, L. Stojanov consegue validar seu resultado. Percebemos que, no final da década de 80, esse autor explorou bastante essa técnica, conforme nos mostra os artigos [27], [28] e [29].

Passados por volta de 30 anos, P. Zhang [31] retoma essa abordagem e apresenta, como um de seus resultados, uma versão das propriedades 1 e 2 de L. Stojanov para a esfera convexa  $\mathbb{S}^2$ .

Assim como fez P. Zhang [31], pretendemos apresentar e demonstrar, nessa tese de doutorado, as propriedades 1 e 2 mencionadas anteriormente para bilhares convexos em  $\mathbb{H}^2$ . Novamente, todas as ideias e técnicas que, aqui, serão utilizadas baseiam-se em adaptações das técnicas presentes nos artigos [27], [28] e [29], todos publicados, conjuntamente, por Stojanov e Petkov, e, em especial, nos artigos [26] e [31] publicados, respectivamente, por L. Stojanov e P. Zhang, e que trabalham exclusivamente com o tema em questão.

A tese está organizada em três capítulos. No primeiro, intitulado “A Geometria do Plano Hiperbólico”, apresentamos o modelo da folha superior do hiperbolóide  $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$  para o plano hiperbólico, destacando as geodésicas, a métrica e as isometrias presentes nesse espaço.

No segundo capítulo, “O Bilhar no Plano Hiperbólico”, retomamos todo o estudo realizado em [9] focando, em particular, nas versões análogas aos resultados clássicos para o problema do bilhar no plano euclidiano.

No último capítulo, intitulado “Resultados Principais”, iniciamos a apresentação com a definição e propriedades de  $n$ -polígonos em  $\mathbb{H}^2$ . Trabalhamos em um subconjunto  $Q$  de  $\mathbb{H}^2$  com características apropriadas, a saber, as regiões que denominamos de estritamente geodesicamente convexas. De posse das preliminares necessárias, utilizamos a teoria de 1-jatos em conjunto com o Teorema da Transversalidade de Thom, para demonstrarmos os seguintes resultados:

**Teorema A.** *Seja  $\mathcal{A}$  o conjunto de todas as funções  $f \in C_{emb}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  tais que  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  é uma curva simples, fechada, com curvatura geodésica estritamente positiva, bordo de um domínio geodesicamente estritamente convexo  $Q \subset \mathbb{H}^2$  e ainda que toda trajetória  $n$ -periódica de bilhar em  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  tenha defeito zero. Então,  $\mathcal{A}$  contém um subconjunto residual de  $C_{emb}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ .*

**Teorema B.** *Seja  $\mathcal{B}$  o conjunto de todas as funções  $f \in C_{emb}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  tais que  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  é uma curva simples, fechada, com curvatura geodésica estritamente positiva, bordo de um domínio  $Q \subset \mathbb{H}^2$  geodesicamente estritamente convexo. Suponhamos ainda que, fixado  $n$ , duas trajetórias  $n$ -periódicas de bilhar em  $\Gamma$*

não possuam pontos de reflexão em comum. Então,  $\mathcal{B}$  contém um subconjunto residual de  $C_{emb}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ .

A abordagem adotada nesse trabalho difere das abordagens apresentadas em [9] e [10], uma vez que eles consideram, exclusivamente, variações da curva  $\Gamma$  por perturbações normais. Superficialmente falando, para o Teorema A, selecionamos  $t$  pontos distintos em  $\mathbb{H}^2$  e fixamos um padrão  $\omega$  de ligá-los por segmentos geodésicos. Encarando as curvas como imagens de aplicações  $f \in C_{emb}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  e com o auxílio da teoria 1-multijatos, consideramos perturbações da curva  $\Gamma$  que fixam os  $t$  pontos distintos escolhidos e uma direção tangente em cada um deles. Usando argumentos de transversalidade, mostramos que, para  $n \geq t$ , é muito raro conseguir uma curva  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  tal que  $y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(n)}$  são os sucessivos pontos de reflexão de uma trajetória de bilhar  $n$ -periódica. Já a prova do Teorema B utiliza ligeiras adaptações de parte da argumentação já desenvolvida no primeiro resultado.

Por fim, apresentamos as considerações finais desse estudo, a proposição de novas pesquisas nesse eixo e as referências bibliográficas utilizadas.

# Capítulo 1

## A Geometria do Plano Hiperbólico

O objetivo central desse capítulo é descrever um modelo de geometria para o plano hiperbólico. Começamos introduzindo um novo produto interno no espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ , que denominaremos de produto interno Lorentziano. Ele traz um novo conceito de norma, onde é permitido um comprimento imaginário para os vetores. O  $\mathbb{R}^3$  com essa estrutura será denominado espaço de Minkowski e será denotado por  $\mathbb{R}^{1,2}$ . Nesse contexto, o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  será definido como a esfera unitária de raio imaginário de  $\mathbb{R}^{1,2}$ . Geometricamente falando,  $\mathbb{H}^2$  pode ser identificado com a folha superior do hiperbolóide de duas folhas  $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$ . Em particular, por meio dessa identificação, é possível verificarmos que as geodésicas do plano hiperbólico são interseções dessa folha com planos que passam pela origem. As definições e os resultados que, aqui apresentaremos, estão baseados nas referências [20], [25] e [30].

### 1.1 O Plano Hiperbólico

Consideremos o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido com a forma quadrática

$$q\left(\sum_{i=0}^2 x_i \mathbf{U}_i\right) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \quad (1.1)$$

## 1.1 O Plano Hiperbólico

---

para alguma base ortonormal  $\mathcal{U} = \{\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2\}$  desse espaço. Observemos que, nessa situação, temos  $q(\mathbf{U}_i) = e_i$ , com  $e_0 = -1$ ,  $e_1 = e_2 = 1$ . Dessa forma, podemos reescrever a expressão anterior da seguinte maneira:

$$q\left(\sum_{i=0}^2 x_i \mathbf{U}_i\right) = \sum_{i=0}^2 x_i^2 e_i$$

Se denotarmos por  $\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ , então a igualdade anterior pode ser traduzida, matricialmente, por:

$$q\left(\sum_{i=0}^2 x_i \mathbf{U}_i\right) = \mathbf{X}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{X}^T J \mathbf{X}$$

**Definição 1.** *Denominamos de espaço de Minkowski tridimensional, denotado por  $\mathbb{R}^{1,2}$  ou  $\mathbb{M}^3$ , o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido com a forma quadrática (1.1).*

O produto interno associado a essa forma quadrática é dado por

$$p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} [q(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) - q(\mathbf{X}) - q(\mathbf{Y})], \quad (1.2)$$

onde  $\mathbf{X} = \sum_{i=0}^2 x_i \mathbf{U}_i$  e  $\mathbf{Y} = \sum_{i=0}^2 y_i \mathbf{U}_i$ . Em termos das componentes desses vetores, podemos escrever a expressão (1.2) como

$$p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

ou ainda, matricialmente, por

$$p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^T J \mathbf{Y}$$

## 1.1 O Plano Hiperbólico

---

Notemos que, apesar dessa forma bilinear ser simétrica e não-degenerada, ela não é positiva-definida. Ela é conhecida na literatura como produto interno Lorentziano. Além disso, observemos que  $q(\mathbf{X}) = p(\mathbf{X}, \mathbf{X}), \forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{1,2}$ .

**Definição 2.** *Seja  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ . A norma Lorentziana desse vetor será definida por*

$$\|\mathbf{X}\| = \sqrt{p(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$$

É fácil percebermos que  $\|\mathbf{X}\|$  é positiva ou nula ou tem parte imaginária positiva. Além disso, se denotarmos por  $\bar{X} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , então  $\|\mathbf{X}\|^2 = |\bar{X}|^2 - x_0^2$ , em que  $|\cdot|$  denota a norma euclidiana de um vetor no espaço bidimensional. De uma forma geral, dados  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{1,2}$  e o produto interno euclidiano  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em  $\mathbb{R}^2$ , temos:

$$p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle - x_0 y_0$$

Notemos que o conjunto de vetores de  $\mathbb{R}^{1,2}$  cuja a norma é nula é, exatamente, o cone  $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2$ , chamado de cone de luz. Consoante com esse fato, observamos que o espaço  $\mathbb{R}^{1,2}$  fica decomposto em três regiões. Os vetores de cada uma dessas regiões podem ser classificados da seguinte maneira:

1.  $\mathbf{X}$  é do tipo luz se  $\|\mathbf{X}\| = 0$ ;
2.  $\mathbf{X}$  é do tipo espaço se  $\|\mathbf{X}\| > 0$ ;
3.  $\mathbf{X}$  é do tipo tempo se  $\|\mathbf{X}\|$  é um número imaginário.

Em particular, para as classificações (1) e (3), dizemos que  $\mathbf{X}$  é positivo (respectivamente, negativo) se  $x_0 > 0$  (respectivamente,  $x_0 < 0$ ).

**Definição 3.** *Chamaremos de plano hiperbólico e denotaremos por  $\mathbb{H}^2$ , o conjunto de todos os vetores  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{1,2}$  tais que*

## 1.1 O Plano Hiperbólico

---

$$q(\mathbf{X}) = -1 \quad \text{com } x_0 > 0, \quad (1.3)$$

isto é, o conjunto de vetores positivos do tipo tempo com norma imaginária  $i$ , ou ainda, a esfera unitária de raio imaginário de  $\mathbb{R}^{1,2}$ .

Escrevendo  $\mathbf{X} = \sum_{i=0}^2 x_i \mathbf{U}_i$ , observamos que a condição (1.3) pode ser reescrita como

$$x_0 = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2},$$

ou seja, a folha superior do hiperbolóide de duas folhas  $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$ . Procedendo de forma análoga ao que foi feito anteriormente, podemos definir o espaço hiperbólico  $n$ -dimensional  $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{1,n}$ . Em particular, escreveremos  $\mathbb{H}^1 = \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{R}^{1,1}$ .

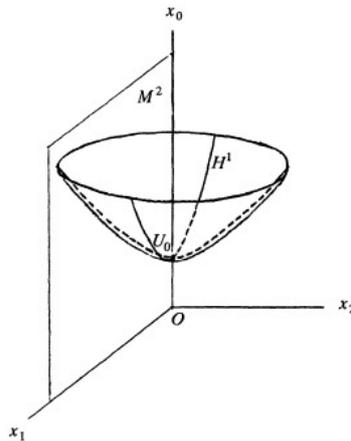


Figura 1.1: Um modelo para o plano hiperbólico.

## 1.2 Noções preliminares sobre distâncias em $\mathbb{H}^2$

---

**Definição 4.** As  $\mathbb{H}$  - retas do plano hiperbólico são as interseções não-vazias de  $\mathbb{H}^2$  com subespaços vetoriais bidimensionais de  $\mathbb{R}^{1,2}$ .

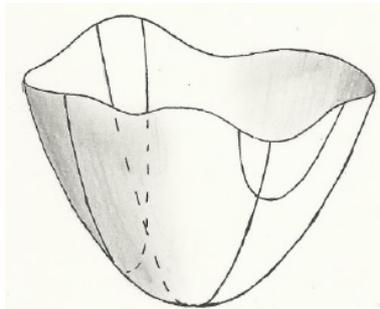


Figura 1.2: Exemplos de  $\mathbb{H}$ -retas em  $\mathbb{H}^2$ .

Uma importante  $\mathbb{H}$  - reta de  $\mathbb{H}^2$  é  $\mathbb{H}^1$ . Assim como ocorre na Geometria Euclidiana Plana, dados dois pontos distintos  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{H}^2$ , existe uma única  $\mathbb{H}$  - reta que passa por eles. Essa reta é obtida interceptando  $\mathbb{H}^2$  com o plano que passa pelos pontos  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{O}$ , em que  $\mathbf{O}$  indica a origem de  $\mathbb{R}^{1,2}$ . Entendemos como  $\mathbb{H}$ -segmento de extremos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , a porção da hipérbole compreendida entre esses pontos. Por fim, observamos que cada  $\mathbb{H}$ -reta separa o plano hiperbólico em dois  $\mathbb{H}$ -semiplanos. Além disso, duas  $\mathbb{H}$ -retas distintas possuem um ou nenhum ponto em comum. Esse resultado é o análogo do axioma das paralelas.

## 1.2 Noções preliminares sobre distâncias em $\mathbb{H}^2$

Nessa seção, definiremos a maneira segundo a qual mediremos as distâncias no plano hiperbólico. De forma superficial, veremos que a noção de distância em  $\mathbb{H}^2$  é similar a noção de comprimento de curvas em  $\mathbb{R}^3$ . Pensaremos em uma curva  $C$  nesse espaço como uma curva dentro de  $\mathbb{R}^{1,2}$ . Assim como ocorre no caso euclidiano, o comprimento de um trecho dessa curva entre os pontos  $A$  e  $B$  será definido como o limite (caso exista) dos comprimentos das poligonais inscritas nesse arco da curva. Em particular, obteremos a função comprimento

## 1.2 Noções preliminares sobre distâncias em $\mathbb{H}^2$

---

de arco para  $\mathbb{H}^1$ . Essa noção preliminar de distância será de suma importância para identificarmos como será computada as distâncias em  $\mathbb{H}^2$  nas próximas seções.

**Definição 5.** *Sejam  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  dois pontos distintos de  $\mathbb{H}^2$ . A distância entre eles, denotada por  $g(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , é definida da seguinte maneira:*

$$g(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \sqrt{q(\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_{j-1})}, \quad (1.4)$$

em que  $\mathcal{P} = \{\mathbf{A} = \mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n = \mathbf{B}\}$  é uma partição do  $\mathbb{H}$  - segmento de extremos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ ,  $\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq j \leq n} \{d_e(\mathbf{P}_j, \mathbf{P}_{j-1})\}$  e  $d_e(\mathbf{P}_j, \mathbf{P}_{j-1})$  indica a distância euclidiana entre esses dois pontos.

Mostraremos, mais adiante, que a expressão anterior está bem definida, isto é,  $\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_{j-1}$  é sempre um vetor do tipo espaço. Fixaremos, a partir de agora, a base ortonormal  $\mathcal{U} = \{\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2\}$  de  $\mathbb{R}^3$ , com  $\mathbf{U}_0 = (0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{U}_1 = (1, 0, 0)$  e  $\mathbf{U}_2 = (0, 1, 0)$ .

Seja  $\mathbf{AB}$  um  $\mathbb{H}$ -segmento de  $\mathbb{H}^1$  de extremos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , digamos,  $\mathbf{A} = a_0\mathbf{U}_0 + a_1\mathbf{U}_1$  e  $\mathbf{B} = b_0\mathbf{U}_0 + b_1\mathbf{U}_1$ , com  $a_1 < b_1$ . Uma parametrização natural para  $\mathbf{AB}$  é dada por  $F(t) = \sqrt{1+t^2}\mathbf{U}_0 + t\mathbf{U}_1$ ,  $a_1 \leq t \leq b_1$ . Logo,

$$g(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{-\frac{t^2}{1+t^2} + 1} dt = \operatorname{arcsinh}(b_1) - \operatorname{arcsinh}(a_1)$$

Se tomarmos  $\mathbf{A} = \mathbf{U}_0$  como ponto de referência, observamos que a função comprimento de arco é dada por  $g(t) = \operatorname{arcsinh}(t)$ , isto é,  $t = \sinh g$ . Isso nos mostra que a parametrização pelo comprimento de arco de  $\mathbb{H}^1$  é dada por

$$F(g) = \cosh(g)\mathbf{U}_0 + \sinh(g)\mathbf{U}_1, \quad \text{com } -\infty < g < \infty \quad (1.5)$$

### 1.3 Aplicações ortogonais

Nessa seção, definiremos as aplicações ortogonais no espaço de Minkowski. Veremos que, assim como no caso euclidiano, tais aplicações formam um grupo em relação à operação de composição. Em especial, focaremos nossa atenção nas aplicações ortogonais que preservam  $\mathbb{H}^2$ , isto é, que aplicam pontos desse espaço sobre ele mesmo. Restringindo essas aplicações ao plano hiperbólico, veremos que as mesmas preservam distâncias e, portanto, são isometrias.

**Definição 6.** *Uma aplicação linear  $T : \mathbb{R}^{1,2} \rightarrow \mathbb{R}^{1,2}$  é denominada ortogonal (em relação à forma quadrática  $q$ ) se*

$$q(T(\mathbf{X})) = q(\mathbf{X}), \quad \forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{1,2}, \quad (1.6)$$

*isto é, se  $T$  preserva a forma quadrática  $q$ .*

Observemos que, em relação à composição de aplicações, as aplicações ortogonais formam um grupo, denominado grupo ortogonal e representado por  $O(\mathbb{R}^{1,2})$ . Notemos que, para cada vetor  $\mathbf{X} = \sum_{i=0}^2 x_i \mathbf{U}_i$  de  $\mathbb{R}^{1,2}$ , podemos considerar a matriz coluna

$$[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

que o representa em relação à base  $\mathcal{U} = \{\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2\}$ . Além disso, para cada aplicação linear  $T : \mathbb{R}^{1,2} \rightarrow \mathbb{R}^{1,2}$ , existe uma única matriz  $A$  que a representa em relação à base  $\mathcal{U}$  e tal que a equação matricial

$$A[\mathbf{X}] = [T(\mathbf{X})], \quad \text{é verdadeira para cada } \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{1,2}.$$

### 1.3 Aplicações ortogonais

---

Lembrando que  $q(\mathbf{X}) = p(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ , segue que  $T$  é ortogonal se, e somente se,

$$p(T(\mathbf{X}), T(\mathbf{Y})) = p(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{1,2}.$$

Essa última igualdade pode ser expressa em termos matriciais da seguinte maneira:

$$A^T J A = J,$$

em que o símbolo  $A^T$  denota a matriz transposta de  $A$ .

Além disso, da equação anterior, podemos notar que, se  $T$  é uma aplicação ortogonal, então  $\det A = \pm 1$ , isto é, todas as aplicações ortogonais são invertíveis. Em particular, o conjunto de aplicações ortogonais tais que  $\det A = 1$  forma um subgrupo de  $O(\mathbb{R}^{1,2})$  de índice 2, denominado subgrupo ortogonal especial.

Consideremos  $T \in O(\mathbb{R}^{1,2})$  e suponhamos que  $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^2$ . Daí,

$$q(T(\mathbf{X})) = q(\mathbf{X}) = -1.$$

Isso nos mostra que  $T(\mathbf{X})$  ou  $-T(\mathbf{X})$  estão em  $\mathbb{H}^2$  (pelo menos um dos dois possui primeira coordenada positiva). Assim, as aplicações lineares  $T$  que aplicam  $\mathbb{H}^2$  sobre ele mesmo formam um outro subgrupo de índice 2, chamado de  $G(\mathbb{R}^{1,2})$ . Tomemos, então,  $T \in G(\mathbb{R}^{1,2})$ . Como  $T$  aplica cada subespaço vetorial bidimensional de  $\mathbb{R}^{1,2}$  sobre outro, podemos concluir, via [25] p.446, que  $T$  aplica geodésicas de  $\mathbb{H}^2$  em geodésicas desse mesmo espaço. Por fim, sejam  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{H}^2$ . Usando nossa definição de distância, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 g(T(\mathbf{A}), T(\mathbf{B})) &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \sqrt{q(T(\mathbf{P}_j) - T(\mathbf{P}_{j-1}))} \\
 &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \sqrt{q(T(\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_{j-1}))} \\
 &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \sqrt{q(\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_{j-1})} = g(\mathbf{A}, \mathbf{B})
 \end{aligned}$$

Assim, observamos que a restrição de uma aplicação  $T \in G(\mathbb{R}^{1,2})$  à  $\mathbb{H}^2$  preserva distâncias e, portanto, é uma  $\mathbb{H}$ -isometria.

## 1.4 Métrica em $\mathbb{H}^2$

Na seção 1.2, apresentamos de uma maneira informal uma expressão para calcular distâncias em  $\mathbb{H}^2$ . Vimos que, a partir dessa definição, é possível parametrizarmos  $\mathbb{H}^1$  pelo comprimento de arco. O objetivo central dessa seção é mostrar que a expressão dada em (1.4) está bem definida e que o cálculo de distâncias em  $\mathbb{H}^2$  pode ser reduzido ao cálculo de distâncias em  $\mathbb{H}^1$ , via alguma isometria interessante. Para isso, identificaremos, inicialmente, qual é a estrutura matricial de uma aplicação ortogonal em  $\mathbb{R}^{1,1}$ . Baseando-nos nessa estrutura e estendendo as ideias para  $\mathbb{R}^{1,2}$ , tomaremos dois subgrupos de  $G(\mathbb{R}^{1,2})$ : um deles fixando  $\mathbb{H}^1$  e outro fixando  $\mathbf{U}_0$ . Assim, veremos que o primeiro deles está associado às translações em  $\mathbb{H}^1$ , enquanto o segundo está associado com rotações em torno do eixo  $x_0$ . Por fim, estabeleceremos uma parametrização para  $\mathbb{H}^2$ , uma fórmula para calcular a distância entre seus pontos e a forma segundo a qual mediremos ângulos.

Consideremos uma aplicação  $T \in O(\mathbb{R}^{1,1})$ . Suponhamos que  $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$  para alguma base  $\mathcal{U} = \{\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1\}$  de  $\mathbb{R}^{1,1}$ . Da condição de ortogonalidade  $A^T J A = J$  e do fato que  $J^2 = I$ , segue que  $J A^T J = A^{-1}$ . Pode-se mostrar que (ver [30], p.139):

$$A = \begin{pmatrix} e \cosh s & f \sinh s \\ e \sinh s & f \cosh s \end{pmatrix}$$

em que  $e = \pm 1$  e  $f = \pm 1$ , com  $e$ ,  $f$  e  $s$  determinados unicamente por  $T$ . Em particular, podemos notar que  $T \in G(\mathbb{R}^{1,1})$ , isto é,  $T$  aplica  $\mathbb{H}^1$  em si mesmo se, e somente se,  $e = 1$ . De forma análoga, se  $T \in O(E^2)$ , isto é, se  $T$  é uma aplicação ortogonal do espaço euclidiano bidimensional, então

$$[T] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -h \sin \theta \\ \sin \theta & h \cos \theta \end{pmatrix}$$

em que  $h = \pm 1$ .

Consideremos, agora,  $G_1$  o subgrupo de  $G(\mathbb{R}^{1,2})$  tal que  $T(\mathbb{H}^1) = \mathbb{H}^1$ . Dessa forma, se denotarmos, novamente, por  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ , então  $a_{31} = a_{32} = 0$ , conforme mostrado em [30], p.142. Dessa forma, se  $T \in G_1$ , então  $T$  fixa  $\mathbb{R}^{1,1}$  (que é o subespaço bidimensional que contém  $\mathbb{H}^1$ ). Ainda segundo [30], usando a condição  $JA^TJ = A^{-1}$  (em relação à forma quadrática  $q$ ), podemos observar também que  $a_{13} = a_{23} = 0$ . Assim, vemos que  $T$  preserva o subespaço vetorial gerado por  $\mathbf{U}_2$ . Restringindo  $T$  a  $\mathbb{R}^{1,1}$ , notamos que essa aplicação atua como um elemento de  $G(\mathbb{R}^{1,1})$ , isto é,  $G_1$  é o conjunto formado por todas as aplicações da forma

$$A = \begin{pmatrix} \cosh s & f \sinh s & 0 \\ \sinh s & f \cosh s & 0 \\ 0 & 0 & \pm f \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

em que  $f = \pm 1$ , para algum  $s \in \mathbb{R}$ .

De forma análoga, se denotarmos por  $G_0$  o subgrupo de  $G(\mathbb{R}^{1,2})$  que fixa o subespaço gerado por  $\mathbf{U}_0$ , então  $T \in G_0$  também fixa o subespaço gerado por  $\mathbf{U}_1$  e  $\mathbf{U}_2$ . Assim, esse subespaço com a restrição da forma quadrática  $q(x_1u_1 + x_2u_2) = x_1^2 + x_2^2$  a ele é um plano euclidiano. Logo,  $T$  restrita a esse

## 1.4 Métrica em $\mathbb{H}^2$

---

subespaço é uma aplicação ortogonal de um espaço euclidiano bidimensional que fixa o eixo  $x_0$  e, portanto, só pode ser representada por

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -h \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & h \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{com } h = \pm 1 \quad (1.8)$$

**Definição 7.** *As aplicações lineares ortogonais (1.7) e (1.8) quando  $f = h = 1$  são denominadas  $\mathbb{H}$  - translação por  $s$  ao longo de  $\mathbb{H}^1$  e  $\mathbb{H}$  - rotação por  $\theta$  ao redor de  $x_0$  e serão denotadas, nessa ordem, por  $L_s$  e  $R_\theta$ .*

Para justificar a definição anterior, tomemos a parametrização (1.5) pelo comprimento de arco  $g$  de  $\mathbb{H}^1$  e defina a aplicação  $X^{-1}(g, \theta) = R_\theta(F(g))$ , isto é,

$$X^{-1}(g, \theta) = (\cosh g) \mathbf{U}_0 + (\sinh g \cos \theta) \mathbf{U}_1 + (\sinh g \sin \theta) \mathbf{U}_2$$

Ela é uma parametrização (em coordenadas polares hiperbólicas) para  $\mathbb{H}^2$  e o torna uma superfície riemanniana de  $\mathbb{R}^{1,2}$  com primeira forma fundamental dada por

$$q(\mathbf{V}) = a^2 + b^2 \sinh^2 g, \quad \text{em que } \mathbf{V} = aX_g^{-1} + bX_\theta^{-1} \quad (1.9)$$

Além disso, podemos observar que  $L_s(X^{-1}(g, 0)) = X^{-1}(g + s, 0)$  representa uma translação de  $s$  unidades ao longo de  $\mathbb{H}^1$  e  $R_\theta(X^{-1}(g, \phi)) = X^{-1}(g, \theta + \phi)$  uma rotação de  $\theta$  ao redor do eixo  $x_0$ .

Mostraremos, agora, que todos os cálculos envolvendo distâncias e ângulos em  $\mathbb{H}^2$  podem ser realizados sobre  $\mathbb{H}^1$ . Em particular, todo ponto de  $\mathbb{H}^2$  pode ser movido, via alguma isometria desse espaço, para o ponto  $\mathbf{U}_0 = (1, 0, 0)$ . De fato, se  $(g, \theta)$  são as coordenadas polares hiperbólicas de um ponto  $\mathbf{A}$ ,

então,  $L_{-g}R_{-\theta}$  é a isometria procurada que associa  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{U}_0$ . Além disso, dado qualquer outro ponto  $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^2$ , podemos aplicar a rotação apropriada  $R_{-\phi}$  (que fixa o eixo  $x_0$ ) e assumir que  $\mathbf{B} = X^{-1}(r, 0)$ , para algum  $r > 0$ .

Dessa forma, na definição (1.4), a menos de uma isometria, podemos supor que  $\mathbf{P}_{j-1} = X^{-1}(0, 0)$  e  $\mathbf{P}_j = X^{-1}(r, 0)$ , com  $r > 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} q(\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_{j-1}) &= q(X^{-1}(r, 0) - X^{-1}(0, 0)) \\ &= q(\cosh r - 1, \sinh r, 0) \\ &= -(\cosh r - 1)^2 + \sinh^2 r = -2(1 - \cosh r) \geq 0, \end{aligned}$$

ou seja, a expressão da distância está bem definida. Além disso, temos:

**Teorema 1.** *Sejam  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{H}^2$ . Então, a  $\mathbb{H}$ -distância entre eles é dada por*

$$g(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \arg \cosh (-p(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$$

*Demonstração.* De fato, podemos supor novamente que, a menos de uma isometria,  $\mathbf{A} = X^{-1}(0, 0)$  e  $\mathbf{B} = X^{-1}(g, 0)$ , com  $g > 0$ . Como

$$p(X^{-1}(0, 0), X^{-1}(g, 0)) = -\cosh g,$$

segue que  $g = \arg \cosh (-p(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ , o que mostra o resultado. □

A seguir, definiremos a maneira de medir ângulos em  $\mathbb{H}^2$ . De acordo com essa definição, observamos que ela depende, exclusivamente, do produto interno Lorentziano  $p$ , o qual é invariante por isometrias de  $\mathbb{H}^2$ . Portanto, a boa definição desse conceito, baseia-se, novamente, no fato que qualquer elemento de  $G(\mathbb{R}^{1,2})$  preserva medidas de ângulos, justamente por preservar medidas de distâncias nesse espaço.

**Definição 8.** Definimos o  $\mathbb{H}$  - ângulo, denotado por  $\angle BAC$ , como sendo  $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$ , em que os segmentos de geodésicas determinados pelos pares  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  são diferentes. A sua medida, denotada por  $m(\angle BAC)$ , é definida como se segue: sejam  $\vec{V}$  e  $\vec{W}$  vetores em  $\mathbb{R}^{1,2}$  tangentes a  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, em  $\mathbf{A}$  tais que  $q(\vec{V}) = q(\vec{W}) = 1$ . Então,

$$m(\angle BAC) = \arccos p(\vec{V}, \vec{W})$$

Conforme já foi mencionado, para verificarmos que a definição anterior é precisa, assumiremos que  $A = X^{-1}(0, 0)$ . Dessa forma, o plano tangente à  $\mathbb{H}^2$  nesse ponto é  $x_0 = 1$ , que é um plano euclidiano pois a forma quadrática  $q$  restrita a ele é dada por  $q(x_1u_0 + x_2u_2) = x_1^2 + x_2^2$ . Dessa forma,  $m(\angle BAC)$  é, portanto, a mesma medida euclidiana de ângulos.

Por fim, apresentamos o resultado (ver [30], [20]):

**Teorema 2.** Sejam  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  dois pontos distintos de  $\mathbb{H}^2$ . Denotemos por  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  o plano gerado pelos vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . São equivalentes:

(a) A única geodésica  $\gamma$  que passa pelos pontos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  é dada por

$$\gamma = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \cap \mathbb{H}^2.$$

(b) A única geodésica  $\gamma$  que parte de  $\mathbf{A}$  na direção de  $\vec{v} = \frac{1}{\sinh g(\mathbf{A}, \mathbf{B})} [\mathbf{B} + p(\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{A}]$  passa por  $\mathbf{B}$  e é dada por

$$\gamma(t) = \mathbf{A} \cosh t + \vec{v} \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Demonstração.* Suponhamos que a condição (a) seja verdadeira e construamos o vetor unitário

$$\vec{v} = \frac{1}{\sinh g(\mathbf{A}, \mathbf{B})} [\mathbf{B} + p(\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{A}].$$

Como  $p(\mathbf{A}, \vec{v}) = 0$  e  $\mathbf{A}$  é um vetor normal a  $\mathbb{H}^2$  nesse ponto, segue que  $\vec{v} \in T_{\mathbf{A}}\mathbb{H}^2$ . Dessa forma,  $\gamma = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \cap \mathbb{H}^2 = [\mathbf{A}, \vec{v}] \cap \mathbb{H}^2$ . Logo, a menos de uma isometria, podemos supor que  $\mathbf{A} = (1, 0, 0)$  e  $\mathbf{B} = (\cosh g, \sinh g, 0)$ , para  $g = g(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ . Portanto, uma parametrização para  $\gamma$  é

$$\gamma(t) = \cosh(t) \mathbf{U}_0 + \sinh(t) \mathbf{U}_1, \quad t \in \mathbb{R},$$

com  $\mathbf{A} = \mathbf{U}_0 = (1, 0, 0)$  e  $\mathbf{U}_1 = (0, 1, 0)$  e isso demonstra que  $(a) \Rightarrow (b)$ .

Suponhamos, agora, que a condição  $(b)$  seja verdadeira. É fácil percebermos que  $\gamma(0) = \mathbf{A}$ ,  $\gamma(g(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \mathbf{B}$  e  $p(\gamma(t), \gamma(t)) = -1, \forall t \in \mathbb{R}$ . Além disso,  $\vec{v}$  é um versor do vetor  $\text{proj}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}$ . Como, a menos de uma isometria,  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \cap \mathbb{H}^2$  pode ser parametrizada por  $\gamma(t) = \cosh(t) \mathbf{U}_0 + \sinh(t) \mathbf{U}_1, t \in \mathbb{R}$ , segue que  $\gamma = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \cap \mathbb{H}^2$ . Portanto, está demonstrado que  $(b) \Rightarrow (a)$ .  $\square$

# Capítulo 2

## O Bilhar no Plano Hiperbólico

Nesse capítulo, apresentaremos a definição da aplicação bilhar em uma região apropriada  $Q \subset \mathbb{H}^2$ , a saber, uma região estritamente geodesicamente convexa. Mostraremos, conforme já foi estudado por S. Pinto-de-Carvalho e L. Coutinho dos Santos [10], que a aplicação bilhar em  $Q$  possui propriedades análogas às propriedades da aplicação bilhar no plano euclidiano, a saber, ela é um difeomorfismo *twist* que preserva a medida de área e cuja classe de diferenciabilidade é, pelo menos,  $C^1$ .

### 2.1 Conceitos iniciais

Seja  $\mathbb{R}^{1,2}$  o espaço tridimensional de Minkowski munido com o produto interno Lorentziano  $p = p(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  definido em (1.2). Consideraremos o modelo da folha superior do hiperbolóide de duas folhas  $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$ ,  $x_0 > 0$ , com a métrica dada pela função distância  $g = g(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  estabelecida no Teorema (1). Guardaremos a notação  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  quando estivermos trabalhando com a restrição de  $p$  ao espaço tangente de  $\mathbb{H}^2$ , isto é, para cada  $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^2$ , escreveremos

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle_{\mathbf{X}} = p(\vec{v}_1, \vec{v}_2), \quad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_{\mathbf{X}}\mathbb{H}^2.$$

Quando não houver chance de confusão, omitiremos o ponto  $\mathbf{X}$  na notação  $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle_{\mathbf{X}}$ .

## 2.1 Conceitos iniciais

---

Uma região  $Q \subset \mathbb{H}^2$  será denominada de estritamente geodesicamente convexa se ela for um domínio compacto, simplesmente conexo e tal que, para quaisquer pares de pontos nela, a geodésica minimizante que os liga está inteiramente contida lá. Além disso, exceto para os pontos extremos, a geodésica está inteiramente contido no interior de  $Q$ .

Seja  $\Gamma$  uma curva contida em  $\mathbb{H}^2$ , de classe  $C^q$ ,  $q \geq 2$ , fechada, simples, orientada positivamente e com curvatura geodésica estritamente positiva ( $\kappa > 0$ ). Denotemos por  $L$  o comprimento total da curva  $\Gamma$ . Suponhamos que  $\Gamma$  esteja parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , isto é,  $\|\Gamma'(s)\| = 1$ ,  $\forall s \in (0, L)$ .

Para compreendermos o que é a aplicação do bilhar sobre o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ , tomaremos como ponto de partida o seguinte problema:

Suponhamos que uma partícula se mova dentro da curva  $\Gamma$ , seguindo trajetórias geodésicas com velocidade constante e igual a um e sofrendo reflexões elásticas quando a mesma choca-se com o bordo  $\Gamma$ . Se é dado um ponto de impacto e a direção de saída desse ponto, como podemos prever e compreender a dinâmica do movimento dessa partícula no interior dessa curva?

Descreveremos a seguir como podemos traduzir esse problema para a linguagem matemática. Seja  $Q \subset \mathbb{H}^2$  uma região estritamente geodesicamente convexa tal que  $\Gamma = \partial Q$ . Consideremos um ponto  $\mathbf{X}_1 \in \Gamma$  e uma direção  $\vec{v}_1 \in T_{\mathbf{X}_1}\mathbb{H}^2$  que aponta para o interior de  $Q$ . Assim, existe uma única geodésica  $\gamma$  que passa por  $\mathbf{X}_1$  e tem vetor tangente, em  $\mathbf{X}_1$ , igual a  $\vec{v}_1$ . Como  $\Gamma = \partial Q$  é uma curva fechada, segue que a geodésica  $\gamma$  deverá interceptar novamente esse conjunto em um novo ponto que denominaremos de  $\mathbf{X}_2$ . Seja  $\vec{v}_2$  o vetor obtido pela reflexão do vetor tangente a  $\gamma$  em  $\mathbf{X}_2$ , em relação ao vetor tangente a  $\Gamma$  nesse mesmo ponto. Definiremos a trajetória da partícula após a reflexão como sendo a geodésica que parte de  $\mathbf{X}_2$  e tem vetor tangente, em  $\mathbf{X}_2$ , igual a  $\vec{v}_2$ .

## 2.1 Conceitos iniciais

---

Coloquemos  $0 < \psi_1 < \pi$  o ângulo entre o vetor tangente a  $\Gamma$  em  $\mathbf{X}_1$  e o vetor  $\vec{v}_1$  e denotemos por  $0 < \psi_2 < \pi$  o ângulo entre o vetor tangente a  $\Gamma$  em  $\mathbf{X}_2$  e o vetor tangente à geodésica  $\gamma$ , em  $\mathbf{X}_2$ . Os números  $s_1$  e  $\psi_1$  são, respectivamente, o ponto e ângulo de saída, enquanto  $\psi_2$  é o ângulo de batida ou de incidência. Por construção,  $\psi_2$  também é o ângulo entre o vetor tangente à  $\Gamma$  em  $\mathbf{X}_2$  e o vetor  $\vec{v}_2$ , já descrito anteriormente. Esse último ângulo é conhecido como ângulo de reflexão.

Até o final desta seção, a curva  $\Gamma$  está parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . Além disso, por simplicidade, escreveremos  $s$  ao invés de  $\Gamma(s)$ , para cada ponto  $\Gamma(s) \in \Gamma$ .

Consideremos dados  $s_1 \in \Gamma$  e  $\psi_1 \in (0, \pi)$ . Assim, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \Gamma \times (0, \pi) &\longrightarrow \Gamma \times (0, \pi) \\ (s_1, \psi_1) &\longmapsto (s_2, \psi_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

que modela o problema do bilhar. O cilindro  $\mathcal{M} = \Gamma \times (0, \pi)$  é denominado espaço de fase do bilhar.

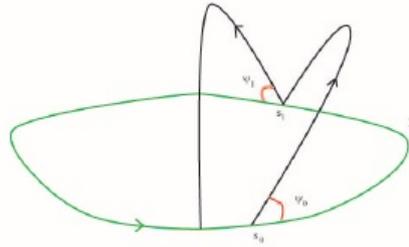


Figura 2.1: O problema do bilhar.

Por fim, observamos que a partícula descreve uma trajetória poligonal que é formada por segmentos geodésicos. Nesse contexto, dizemos que o conjunto  $\{(s_1, \psi_1), (s_2, \psi_2), \dots, (s_j, \psi_j), \dots\}$  representa uma órbita (para frente) do bilhar se  $(s_j, \psi_j) = \mathcal{F}(s_{j-1}, \psi_{j-1}), \forall j \in \{2, 3, \dots\}$ . A poligonal na mesa do bilhar cujos vértices são os pontos  $\Gamma(s_j)$  é denominada trajetória do bilhar.

## 2.2 Bilhares e função geradora

Como já dito no Teorema 1 da seção 1.4, a distância entre dois pontos  $\Gamma(s_1), \Gamma(s_2) \in \mathbb{H}^2$  é dada por

$$g(s_1, s_2) = \arg \cosh(-p(\Gamma(s_1), \Gamma(s_2)))$$

O teorema dado a seguir mostra que a função distância  $g = g(s_1, s_2)$  satisfaz a duas condições específicas, que caracterizam  $g$  como uma função geradora para a aplicação bilhar  $\mathcal{F} : \Gamma \times (0, \pi) \longrightarrow \Gamma \times (0, \pi)$ .

**Teorema 3.** *Seja  $\mathcal{F}(s_1, \psi_1) = (s_2, \psi_2)$  uma aplicação bilhar no cilindro  $\mathcal{M}$ . Então,*

$$\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = -\cos \psi_1 \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2) = \cos \psi_2$$

*Demonstração.* Inicialmente, observemos que a derivada da relação  $\cosh(g(s_1, s_2)) = -p(\Gamma(s_1), \Gamma(s_2))$  com respeito à variável  $s_1$  nos fornece

$$\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{-p(\Gamma'(s_1), \Gamma(s_2))}{\sinh(g(s_1, s_2))}$$

Por outro lado, como  $\Gamma(s_2)$  é o ponto de encontro entre a curva  $\Gamma$  e a geodésica  $\gamma$  que parte de  $\Gamma(s_1)$  em uma certa direção unitária  $\vec{v}_1$ , segue que

$$\Gamma(s_2) = \Gamma(s_1) \cosh(g(s_1, s_2)) + \vec{v}_1 \sinh(g(s_1, s_2))$$

Logo,

## 2.2 Bilhares e função geradora

---

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) &= \frac{-p(\Gamma'(s_1), \Gamma(s_1) \cosh(g(s_1, s_2)) + \vec{v}_1 \sinh(g(s_1, s_2)))}{\sinh(g(s_1, s_2))} \\ &= \frac{-\cosh(g(s_1, s_2)) p(\Gamma'(s_1), \Gamma(s_1)) - \sinh(g(s_1, s_2)) p(\Gamma'(s_1), \vec{v}_1)}{\sinh(g(s_1, s_2))}\end{aligned}$$

Lembrando que  $\cos \psi_1 = p(\Gamma'(s_1), \vec{v}_1)$  e como  $p(\Gamma(s), \Gamma(s)) = -1$ ,  $p(\Gamma(s), \Gamma'(s)) = 0$ ,  $\forall s \in \Gamma$ , obtemos:

$$\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = -\cos \psi_1$$

Para verificarmos a validade da segunda igualdade, procederemos de forma análoga à que foi descrita anteriormente, com pequenas modificações durante a argumentação. A derivada da relação  $\cosh(g(s_1, s_2)) = -p(\Gamma(s_1), \Gamma(s_2))$  com respeito à variável  $s_2$  nos fornece

$$\frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2) = \frac{-p(\Gamma(s_1), \Gamma'(s_2))}{\sinh(g(s_1, s_2))}$$

Denotemos por  $\vec{u}_2$  o vetor tangente, em  $\Gamma(s_2)$ , à geodésica  $\gamma$  que parte de  $\Gamma(s_1)$  na direção de  $\vec{v}_1$ . Por construção, o vetor  $\vec{v}_2$  é a reflexão do vetor  $\vec{u}_2$  em torno de  $\Gamma'(s_2)$ . Por definição,  $\cos \psi_2 = p(\Gamma'(s_2), \vec{v}_2)$ . Dessa forma,  $\cos \psi_2 = p(\Gamma'(s_2), \vec{u}_2)$ . Além disso, podemos escrever

$$\Gamma(s_1) = \Gamma(s_2) \cosh(g(s_1, s_2)) - \vec{u}_2 \sinh(g(s_1, s_2))$$

Portanto,

## 2.2 Bilhares e função geradora

---

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2) &= \frac{-p(\Gamma(s_2) \cosh(g(s_1, s_2)) - \vec{u}_2 \sinh(g(s_1, s_2)), \Gamma'(s_2))}{\sinh(g(s_1, s_2))} \\
 &= \frac{-\cosh(g(s_1, s_2)) p(\Gamma(s_2), \Gamma'(s_2)) + \sinh(g(s_1, s_2)) p(\vec{u}_2, \Gamma'(s_2))}{\sinh(g(s_1, s_2))} \\
 &= \cos \psi_2
 \end{aligned}$$

Assim, o resultado fica demonstrado. □

Uma consequência imediata do teorema anterior é:

**Corolário 4.** *A aplicação bilhar  $\mathcal{F}$  no cilindro  $\mathcal{M}$  preserva a medida  $d\mu = \sin \psi d\psi ds$ .*

*Demonstração.* Como são válidas as igualdades para a função  $g$

$$\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = -\cos \psi_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2) = \cos \psi_2,$$

segue que  $dg = -\cos \psi_1 ds_1 + \cos \psi_2 ds_2$ . Tomando a diferencial exterior, concluimos que:

$$0 = d^2g = \sin \psi_1 d\psi_1 \wedge ds_1 - \sin \psi_2 d\psi_2 \wedge ds_2$$

Isso nos mostra que a forma simplética  $\sin \psi d\psi \wedge ds$  é invariante pela aplicação  $\mathcal{F}$ , o que conclui a prova do resultado. □

Outra consequência do teorema anterior é que podemos detectar quando três pontos distintos sobre uma curva  $\Gamma \subset \mathbb{H}^2$  constituem, ou não, um trecho de uma trajetória de bilhar. Essa detecção faz uso de um funcional  $W$ , chamado

## 2.2 Bilhares e função geradora

---

de funcional ação. Vale ressaltarmos que existe um resultado análogo a esse para bilhares no plano. Essa caracterização de trechos de poligonais como trechos de trajetórias de bilhar é conhecida como “Princípio de Maupertuis”.

**Corolário 5.** *Sejam  $\Gamma(s_0)$ ,  $\Gamma(s_1)$  e  $\Gamma(s_2)$  três pontos distintos sobre uma curva  $\Gamma = \partial Q \subset \mathbb{H}^2$ . Suponhamos que  $\psi_1$  seja o ângulo, em  $T_{\Gamma(s_1)}\mathbb{H}^2$ , entre o vetor tangente  $\Gamma'(s_1)$  e a direção tangente à geodésica que liga os pontos  $\Gamma(s_0)$  e  $\Gamma(s_1)$ , nessa ordem. Suponhamos, também, que  $\psi_2$  seja o ângulo, em  $T_{\Gamma(s_1)}\mathbb{H}^2$ , entre o vetor tangente  $\Gamma'(s_1)$  e a direção tangente à geodésica que liga os pontos  $\Gamma(s_1)$  e  $\Gamma(s_2)$ , nessa ordem. Consideremos o funcional*

$$W(s_1) = g(s_0, s_1) + g(s_1, s_2)$$

*As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a)  $s_1$  é ponto crítico do funcional  $W$ ;
- (b) *As geodésicas que ligam  $\Gamma(s_0)$  a  $\Gamma(s_1)$  e  $\Gamma(s_1)$  a  $\Gamma(s_2)$  são trechos consecutivos de uma trajetória de bilhar.*

*Demonstração.* Suponhamos, inicialmente, que  $s_1$  seja um ponto crítico do funcional  $W$ . Uma vez que

$$\frac{dW}{ds_1} = \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_0, s_1) + \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2)$$

segue, baseando-nos no teorema anterior, que  $0 = \frac{dW}{ds_1} = \cos \psi_2 - \cos \psi_1$ . Lembrando que  $\psi_1, \psi_2 \in (0, \pi)$ , concluímos que  $\psi_1 = \psi_2$ , ou seja, as geodésicas que ligam  $\Gamma(s_0)$  a  $\Gamma(s_1)$  e  $\Gamma(s_1)$  a  $\Gamma(s_2)$  são trechos consecutivos de uma trajetória de bilhar. De forma análoga, se a condição (b) for assumida como verdadeira, podemos reverter, naturalmente, os argumentos apresentados anteriormente. Portanto, as condições (a) e (b) são equivalentes.  $\square$

No que se segue, nosso objetivo é provarmos que a aplicação do bilhar  $\mathcal{F}$

## 2.2 Bilhares e função geradora

---

definida no cilindro  $\mathcal{M}$  é um difeomorfismo de classe, pelo menos,  $C^1$  e que possui a propriedade twist. Para isto, usaremos os argumentos clássicos de funções implícitas para uma aplicação adequada  $G$  que definiremos em breve. Em um dado momento, necessitaremos demonstrar que:

**Lema 6.** *A distância geodésica  $g$  em  $\mathbb{H}^2$  satisfaz a seguinte relação:*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_2 \partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{\sinh g(s_1, s_2)}$$

*Demonstração.* Baseando-nos na demonstração do Teorema 3, já sabemos que

$$\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{-p(\Gamma'(s_1), \Gamma(s_2))}{\sinh(g(s_1, s_2))} = -\cos \psi_1$$

Segue daí, que  $\frac{\partial^2 g}{\partial s_2 \partial s_1}(s_1, s_2) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{-p(\Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2)) \sinh g(s_1, s_2) + p(\Gamma'(s_1), \Gamma(s_2)) \cosh g(s_1, s_2) \left( \frac{\partial}{\partial s_2} g(s_1, s_2) \right)}{\sinh^2 g(s_1, s_2)} \\ &= \frac{-p(\Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2)) + \cos \psi_1 \cosh g(s_1, s_2) \cos \psi_2}{\sinh g(s_1, s_2)} \end{aligned}$$

Vamos denotar por  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  e por  $\{-\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  as bases ortonormais nos espaços  $T_{\Gamma(s_1)}\mathbb{H}^2$  e  $T_{\Gamma(s_2)}\mathbb{H}^2$ , em que  $\vec{v}_1$  indica o vetor tangente à geodésica, em  $\Gamma(s_1)$ , que liga os pontos  $\Gamma(s_1)$  a  $\Gamma(s_2)$ , nessa ordem, e  $-\vec{v}_1$  indica o vetor tangente à geodésica, em  $\Gamma(s_2)$ , que liga os pontos  $\Gamma(s_2)$  a  $\Gamma(s_1)$ , nessa ordem.

Nessas condições, podemos escrever  $\Gamma'(s_1) = \cos \psi_1 \vec{v}_1 + \sin \psi_1 \vec{v}_2$  e  $\Gamma'(s_2) = (-\cos \psi_2)(-\vec{v}_1) - \sin \psi_2 \vec{v}_2$ . Os vetores unitários  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_2$  são iguais, pois são normais ao plano que deu origem à geodésica minimizante que liga os pontos  $\Gamma(s_1)$  e  $\Gamma(s_2)$ . Então, segue desse fato que  $p(\vec{v}_2, \vec{v}_2) = 1$ . Outra consequência é  $p(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$  e  $p(\vec{v}_2, \vec{v}_1) = 0$ .

## 2.2 Bilhares e função geradora

---

Portanto,  $p(\Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2)) = \cos \psi_1 \cos \psi_2 p(\vec{v}_1, \vec{v}_1) - \sin \psi_1 \sin \psi_2 p(\vec{v}_2, \vec{v}_2)$ . Como, a menos de uma transformação ortogonal, podemos considerar que  $\Gamma(s_1) = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$ ,  $\Gamma(s_2) = (\cosh l, \sinh l, 0)$  e  $\vec{v}_1 = (\sinh l, \cosh l, 0)$ , para  $l = g(s_1, s_2)$ , segue que  $p(\vec{v}_1, \vec{v}_1) = \cosh g(s_1, s_2)$ .

Assim,

$$\frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} g(s_1, s_2) = \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{\sinh g(s_1, s_2)}$$

o que prova o nosso lema. □

Agora, estamos aptos para mostrar que, se  $\Gamma = \partial Q$  está parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  e é de classe  $C^q$ ,  $q \geq 2$ , então a aplicação bilhar  $\mathcal{F}$  definida no cilindro  $\mathcal{M}$  é um difeomorfismo de classe  $C^{q-1}$  que possui a propriedade *twist*. Baseando-nos na definição apresentada por Dias Carneiro, Ragazzo e Zanata [23], entendemos que a aplicação  $\mathcal{F}$  possui a propriedade *twist* se, para algum levantamento  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ , tivermos  $\frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) > 0$ .

**Teorema 7.** *Seja  $Q \subset \mathbb{H}^2$  uma região estritamente geodesicamente convexa tal que  $\Gamma = \partial Q$ . Suponhamos que  $\Gamma$  seja uma curva de classe  $C^q$ ,  $q \geq 2$ , parametrizada pelo comprimento de arco, fechada, simples, orientada positivamente e com curvatura geodésica estritamente positiva. Se  $\mathcal{F}$  é uma aplicação de bilhar definida no cilindro  $\mathcal{M}$ , então  $\mathcal{F}$  é um difeomorfismo com classe de diferenciabilidade  $C^{q-1}$  e que possui a propriedade *twist*.*

*Demonstração.* Inicialmente, vamos definir as variáveis conjugadas  $\mathbf{p}_j = \cos \psi_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . Segue, como uma consequência imediata do Teorema 3, que  $\mathcal{F}(s_1, \psi_1) = (s_2, \psi_2)$  se, e somente se,  $\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = -\mathbf{p}_1$  e  $\frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2) = \mathbf{p}_2$ . Para a verificação do resultado enunciado, o primeiro passo que devemos dar é mostrar que a aplicação  $s_2 = s_2(s_1, \mathbf{p}_1)$  é diferenciável e de classe  $C^{q-1}$ .

Consideremos, então, a aplicação

## 2.2 Bilhares e função geradora

---

$$G : V_1 \times V_2 \times (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(s_1, s_2, \mathbf{p}_1) \mapsto G(s_1, s_2, \mathbf{p}_1) = \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) + \mathbf{p}_1,$$

em que  $V_1$  e  $V_2$  são vizinhanças coordenadas disjuntas de  $s_1$  e  $s_2$ , respectivamente. De acordo com o Lema 6, observamos que  $\frac{\partial G}{\partial s_2} \neq 0$ . Dessa forma, pelo teorema das funções ímplicas,  $s_2 = s_2(s_1, \mathbf{p}_1)$  é uma função de classe  $C^{q-1}$ , uma vez que  $\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2)$  tem essa classe de diferenciabilidade.

Um argumento similar nos mostra que  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2(s_1, s_2(s_1, \mathbf{p}_1))$  também é uma função de classe  $C^{q-1}$ . Para concluirmos a prova, devemos checar que a aplicação bilhar  $\mathcal{F}$  é bijetora.

Notemos que, em um problema de bilhar, sempre é possível revertermos a trajetória de uma partícula em  $Q$ , com pontos de reflexão consecutivos em  $\Gamma(s_1)$  e  $\Gamma(s_2)$ . De fato, se em  $\Gamma(s_2)$  tomarmos a direção de saída  $\pi - \psi_2$ , então obteremos, via a aplicação do bilhar, que  $\mathcal{F}(s_2, \pi - \psi_2) = (s_1, \psi_1)$ , ou seja, com a direção especificada anteriormente, o ponto de reflexão subsequente a  $\Gamma(s_2)$  é  $\Gamma(s_1)$ .

Formalmente, a maneira mais adequada para descrevermos essa reversibilidade é usarmos a aplicação involução  $\mathcal{I} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ . Ela é definida por  $\mathcal{I}(s, \psi) = (s, \pi - \psi)$ . Inicialmente, observamos que  $\mathcal{I} \circ \mathcal{I}$  é a aplicação identidade de  $\mathcal{M}$ . Além disso,

$$(\mathcal{I} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{I})(s_2, \psi_2) = (s_1, \pi - \psi_1),$$

Portanto, se  $\mathcal{F}^{-1}$  denota a aplicação inversa de  $\mathcal{F}$ , então faz sentido definirmos  $\mathcal{F}^{-1}(s_2, \psi_2) = (\mathcal{I} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{I})(s_2, \psi_2)$ . Assim,  $\mathcal{F}^{-1}$  também é de classe  $C^{q-1}$ , o que nos garante que  $\mathcal{F}$  é um difeomorfismo de classe  $C^{q-1}$ .

Por fim, para demonstrarmos que  $\mathcal{F}$  tem a propriedade *twist*, basta checar-mos que  $\frac{\partial}{\partial \psi_1} s_2(s_1, \psi_1) > 0$ . Para isto, lembremo-nos que a relação  $\frac{\partial}{\partial s_1} g(s_1, s_2) = -\cos \psi_1$  define, implicitamente,  $s_2$  como função de  $s_1$  e  $\psi_1$ .

## 2.2 Bilhares e função geradora

---

Logo, tomando a derivada, em ambos os membros dessa última igualdade, em relação à variável  $\psi_1$ , temos:

$$\frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} g(s_1, s_2) \cdot \frac{\partial}{\partial \psi_1} s_2(s_1, \psi_1) = \sin \psi_1 > 0$$

Combinando esse último cálculo com o resultado do Lema 6, obtemos a propriedade *twist* para a aplicação  $\mathcal{F}$ .

□

# Capítulo 3

## Resultados Principais

O objetivo central desse capítulo é apresentarmos as demonstrações dos resultados principais desta tese de doutorado. Para isso, faz-se necessário apresentarmos, inicialmente, algumas definições sobre  $n$ -polígonos em  $\mathbb{H}^2$ . Veremos que, associado a um  $n$ -polígono, sempre existe uma função sobrejetora  $\omega$  que descreve a maneira segundo a qual ele (o polígono) passa pelos seus vértices. Usando argumentos de transversalidade, mostraremos que, fixada uma aplicação padrão  $\omega$ , ser uma trajetória  $n$ -periódica de bilhar com defeito positivo é um caso raro de se ocorrer. Desse argumento, concluiremos a demonstração do nosso resultado. Com ligeiras modificações na argumentação desenvolvida, checaremos que duas trajetórias  $n$ -periódicas distintas não possuem pontos de reflexão em comum.

### 3.1 $n$ -polígonos em $\mathbb{H}^2$

Nessa seção, retomaremos a definição de um subconjunto muito especial de  $\mathbb{H}^2$ , a saber, um domínio  $Q$  estritamente geodesicamente convexo. Garantiremos que, dados quaisquer dois pontos nesse conjunto, a geodésica minimizante que os une está inteiramente contida nele. Dessa forma, se são dados  $t$  pontos distintos na fronteira de  $Q \subset \mathbb{H}^2$ , então é possível criarmos um  $n$ -polígono,  $n \geq t$ , ligando-os, por meio de geodésicas e obedecendo um certo padrão pré-determinado. Apresentaremos, também, a classificação das trajetórias de bilhar  $n$ -periódicas (e, em seguida, dos padrões associados a  $n$ -polígonos, em

geral) em simétricas e não-simétricas. Por fim, serão dadas as definições de defeito e perímetro geodésico de um  $n$ -polígono.

**Definição 9.** *Seja  $\mathbb{H}^2$  a folha superior do hiperbolóide  $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$ ,  $x_0 > 0$ , munida com o produto interno (1.2). Dizemos que um subconjunto compacto  $Q \subset \mathbb{H}^2$  é um domínio geodesicamente convexo se  $Q$  é simplesmente conexo e, para quaisquer pares de pontos  $P_1, P_2 \in Q$ , existe uma geodésica minimizante ligando  $P_1$  a  $P_2$ . Um domínio geodesicamente convexo  $Q \subset \mathbb{H}^2$  é denominado estritamente geodesicamente convexo se o interior de cada geodésica minimizante está contido no interior de  $Q$ .*

O bordo da região  $Q$  considerada será identificado com um mergulho  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{H}^2$ . Por simplicidade, escreveremos  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  que, de acordo com nossas suposições, será uma curva fechada, simples e de classe  $C^\infty$  que engloba um domínio estritamente geodesicamente convexo  $Q$ . Suporemos, também, que  $\Gamma$  tem curvatura geodésica estritamente positiva.

A curvatura geodésica positiva de  $\Gamma$  é uma condição suficiente para garantirmos convexidade geodésica, isto é, se uma curva  $\Gamma$  é regular, simples, fechada e tem curvatura geodésica estritamente positiva, então qualquer geodésica tangente a  $\Gamma$  a intercepta em, no máximo, um ponto (ver, por exemplo, Brickell [7]).

Denotaremos por  $C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  o conjunto de todas as aplicações  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{H}^2$  de classe  $C^\infty$ , munido com a topologia  $C^\infty$  de Whitney. Consideraremos, também, o conjunto  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  de todos os mergulhos de  $\mathbb{T}$  em  $\mathbb{H}^2$ . De acordo com [13] (ver Proposição 3.3, página 44),  $C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  é um espaço de Baire. Além disso, como  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  é um aberto de  $C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ , segue que  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  também é um espaço de Baire.

**Definição 10.** *Um  $n$ -polígono em  $Q$  com vértices  $P_1, \dots, P_n$  em  $\Gamma$  é uma curva fechada  $\gamma$  formada por um número finito de segmentos de geodésicas  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , em que  $\gamma_i$  é a única geodésica minimizante ligando os pontos  $P_i$  e  $P_{i+1}$  de  $\Gamma$  e  $P_{n+1} = P_1$ . Os pontos  $P_1, \dots, P_n$  serão chamados de pontos de reflexão de  $\gamma$ .*

### 3.1 $n$ -polígonos em $\mathbb{H}^2$

---

Com base em nossas suposições, nenhum segmento de geodésica  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , intersecta transversalmente ou tangencialmente  $\Gamma$ . Em particular, se os vetores tangentes a  $\gamma_i$  e  $\gamma_{i+1}$  em  $P_{i+1}$  formam ângulos agudos iguais para todo  $i$  com o vetor tangente  $\vec{t}_{P_{i+1}}$  a  $\Gamma$  em  $P_{i+1}$ , então dizemos que o  $n$ -polígono é uma trajetória de bilhar  $n$ -periódica em  $\Gamma$ . É importante observarmos que é possível que um  $n$ -polígono  $\gamma$  tenha alguns de seus pontos de reflexão coincidentes, conforme ilustra a figura 3.1 a seguir.

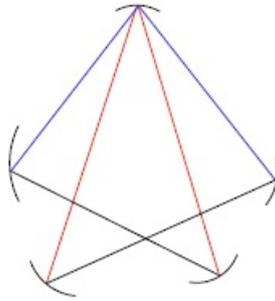


Figura 3.1: Exemplo de um  $n$ - polígono com pontos de reflexão coincidentes.

**Definição 11.** Dizemos que uma trajetória  $n$ -periódica de bilhar  $\gamma$  é simétrica se existe algum segmento de geodésica  $\gamma_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , de  $\gamma$  que é ortogonal a  $\Gamma$  em  $P_i$  ou  $P_{i+1}$ . Em qualquer outro caso, dizemos que  $\gamma$  é não-simétrica.

Observemos que, no primeiro caso, ou  $n = 2$  ou  $n > 2$  e existem, exatamente, dois segmentos de geodésica  $\gamma_i$  de  $\gamma$  que são ortogonais a  $\Gamma$  em algum dos seus pontos, conforme ilustra a figura 3.2 a seguir.

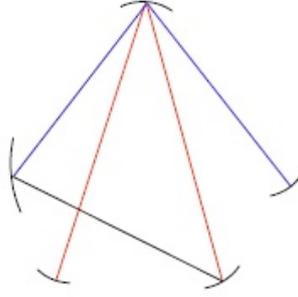


Figura 3.2: Exemplo de um  $n$ -polígono simétrico com pontos de reflexão coincidentes.

O conceito de defeito de uma trajetória de bilhar, tema central desse trabalho, é definido como se segue.

**Definição 12.** *Seja  $\gamma$  uma trajetória  $n$ -periódica em  $Q$  com pontos de reflexão em  $\Gamma$ . Denotemos por  $m$  a quantidade de segmentos geodésicos distintos de  $\gamma$  e por  $t$  a quantidade de pontos de reflexão distintos de  $\gamma$ . O defeito de  $\gamma$ , denotado por  $d(\gamma)$ , será calculado da seguinte maneira:*

$$d(\gamma) = \begin{cases} m - t, & \text{caso } \gamma \text{ seja não-simétrica,} \\ m + 1 - t, & \text{caso } \gamma \text{ seja simétrica.} \end{cases}$$

Por exemplo, os defeitos dos  $n$ -polígonos apresentados nas figuras 3.1 e 3.2 são, respectivamente,  $1(= 6 - 5)$  e  $1(= 5 + 1 - 5)$ . Dessa forma, baseando-nos nos conceitos desenvolvidos até então, podemos enunciar o primeiro resultado que demonstraremos nesta tese de doutorado:

**Teorema A.** *Seja  $\mathcal{A}$  o conjunto de todas as funções  $f \in C_{emb}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  tais que  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  é uma curva simples, fechada, com curvatura geodésica estritamente positiva, bordo de um domínio geodesicamente estritamente convexo  $Q \subset \mathbb{H}^2$  e ainda que toda trajetória  $n$ -periódica de bilhar em  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  tenha defeito zero. Então,  $\mathcal{A}$  contém um subconjunto residual de  $C_{emb}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ .*

Antes de apresentarmos a demonstração do teorema, iremos exibir uma série de propriedades que uma trajetória  $n$ -periódica de bilhar em  $\Gamma$ . Chama-

### 3.1 $n$ -polígonos em $\mathbb{H}^2$

---

remos de curva oval  $\Gamma$  uma curva fechada, simples, com curvatura geodésica estritamente positiva, de classe  $C^\infty$  e que engloba um domínio estritamente geodesicamente convexo  $Q \subset \mathbb{H}^2$  e consideraremos  $\gamma$  uma trajetória de bilhar  $n$ -periódica não-simétrica sobre essa oval, com  $n \geq 3$ . Nessa situação, existem  $n$  pontos de reflexão  $P'_i$ s,  $i = 1, \dots, n$ , sobre  $\Gamma$ , não necessariamente distintos. Denotemos por  $\{y_1, \dots, y_t\}$ ,  $n \geq t$ , os  $t$  pontos de reflexão distintos de  $\gamma$ .

Suponhamos que a trajetória possua defeito positivo, isto é,  $d(\gamma) = n - t > 0$  e que  $(y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(n)})$  sejam os  $t$  pontos ordenados de reflexão da trajetória de bilhar  $n$ -periódica  $\gamma$ , em que a aplicação sobrejetora

$$\omega : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, t\}, \quad \omega(i) \neq \omega(i+1), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

tem o papel de descrever o padrão segundo o qual a trajetória de bilhar  $\gamma$  passa através dos seus pontos de reflexão. Sem perda de generalidade, suporemos que  $\omega(1) = 1$  e  $\{i \in \{2, \dots, n\} \mid \omega(i) = 1\} = \{i_2, i_3, \dots, i_r\}$ , para algum  $r \geq 2$ . Para ilustrar essa situação, consideremos a trajetória de bilhar 6-periódica não-simétrica dada a seguir.

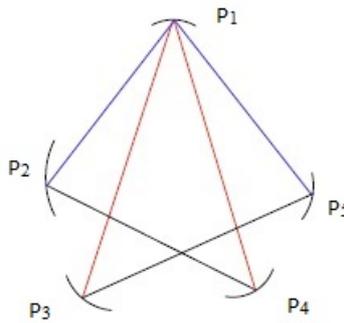


Figura 3.3: Exemplo de um padrão para a trajetória de bilhar 6-periódica.

Observemos que, para o caso anterior, um exemplo de padrão  $\omega$  é:

$$\begin{aligned} \omega(1) &= 1 & \omega(3) &= 5 & \omega(5) &= 2 \\ \omega(2) &= 3 & \omega(4) &= 1 & \omega(6) &= 4 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Fixemos, agora,  $t \geq 3$  pontos distintos em  $Q$ , digamos  $y_1, \dots, y_t$ . Se é dado um número natural  $n$ ,  $n \geq t$ , então podemos criar um  $n$ -polígono em  $Q$  com pontos de reflexão em  $y_1, \dots, y_t$ , obedecendo um certo padrão  $\omega : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$  de ligar, via geodésicas minimizantes, esses  $t$  pontos. Naturalmente, é possível estendermos o domínio da aplicação  $\omega$  para  $\mathbb{Z}$ , apenas impondo uma condição de periodicidade. Dessa maneira, ao definirmos classificações para os padrões, estaremos, indiretamente, classificando os  $n$ -polígonos. A definição a seguir tem a função de apresentar essas classificações. Notemos que elas se assemelham às classificações já dadas para trajetórias  $n$ -periódicas de bilhar.

**Definição 13.** *Consideremos uma aplicação sobrejetora  $\omega : \mathbb{Z} \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$ ,  $t \in \mathbb{N}$ ,  $t \geq 3$ , tal que  $\omega(i) \neq \omega(i+1)$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}$ . Dizemos que  $\omega$  é:*

1.  *$n$ -periódica, se  $\omega(i+n) = \omega(i)$ ,  $\forall i \in \mathbb{Z}$ ;*
2. *não-simétrica, se é  $n$ -periódica e  $\{\omega(i), \omega(i+1)\} \neq \{\omega(j), \omega(j+1)\}$ ,  $\forall 1 \leq i < j \leq n$ ;*
3. *simétrica, se é  $n$ -periódica,  $n = 2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , e existe  $i_0 = 1, 2, \dots, n$  tal que a condição*

$$\{\omega(i), \omega(i+1)\} \neq \{\omega(j), \omega(j+1)\}, \forall i_0 \leq i < j \leq i_0 + m,$$

*é verdadeira e  $\omega(i_0 + m + i) = \omega(i_0 + m - i)$ , com  $i = 1, 2, \dots, m - 1$ ;*

O conjunto das aplicações  $\omega$  que são não-simétricas ou simétricas será denominado de conjunto das aplicações admissíveis. Observemos que, nas condições descritas na definição anterior com  $t, n \in \mathbb{N}$  fixados, existe apenas uma quantidade finita de aplicações admissíveis  $\omega$  e, portanto, uma quantidade finita de tipos de  $n$ -polígonos em  $Q$  com pontos de reflexão em  $y_1, \dots, y_t$ . Assumiremos que, de agora em diante, um padrão  $\omega$  estará fixado.

### 3.2 Preliminares do Teorema A

---

A partir desse momento, se  $X$  denota um conjunto qualquer, então usaremos a notação  $X^{(t)}$  para indicar o conjunto das  $t$ -uplas distintas de  $X^t$ , isto é, se  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_t) \in X^{(t)}$ , então  $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ .

Seja  $\mathbb{T}^{(t)} \subset \mathbb{T}^t$  o conjunto de todas as  $t$ -uplas  $(s_1, s_2, \dots, s_t)$  tais que  $s_i \neq s_j$ , toda vez que  $i \neq j$ . Dessa forma, para cada

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_t) \in \mathbb{T}^{(t)} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = f^t(\mathbf{s}) = (f(s_1), f(s_2), \dots, f(s_t)) \in \mathbb{H}^2,$$

com  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ , podemos sempre criar um  $n$ -polígono que tem  $t$  pontos de reflexão distintos e um padrão  $\omega$  conhecido, isto é,  $\{y_{\omega(1)}, y_{\omega(2)}, \dots, y_{\omega(n)}\}$  são os sucessivos pontos de reflexão de  $\gamma$  sobre  $\Gamma = f(\mathbb{T})$ .

**Definição 14.** *Sejam  $y_{\omega(1)}, y_{\omega(2)}, \dots, y_{\omega(n)}$  os sucessivos pontos de reflexão de um  $n$ -polígono com um padrão  $\omega$  conhecido. Seu perímetro geodésico é dado por*

$$H_\omega(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n g(y_{\omega(i)}, y_{\omega(i+1)}),$$

em que  $g$  é a função distância dada pelo Teorema 1.

### 3.2 Preliminares do Teorema A

Esta seção é dedicada à apresentação das principais definições sobre a teoria de 1-jatos e multijatos que serão utilizadas neste trabalho. Veremos que a noção de 1-jato de uma aplicação  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{H}^2$  é, basicamente, uma maneira de descrever o conjunto de todas as funções  $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{H}^2$  que possuem o mesmo polinômio de Taylor de 1ª ordem que  $f$  em  $s \in \mathbb{T}$ . Tal conjunto tem estrutura de variedade Riemanniana. Além disso, usando-se a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2) &\longrightarrow \mathbb{T} \\ \sigma &\longmapsto \alpha(\sigma) = \text{fonte de } \sigma, \end{aligned}$$

### 3.2 Preliminares do Teorema A

---

veremos que é possível definirmos a  $t$ -folha de 1-jatos, a qual também tem estrutura de variedade Riemanniana. Outra aplicação que usaremos no desenrolar do trabalho será a aplicação

$$\begin{aligned}\beta : J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2) &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ \sigma &\mapsto \beta(\sigma) = \text{alvo de } \sigma.\end{aligned}$$

Todos esses conceitos que descreveremos baseiam-se em [13]. Por fim, construiremos uma subvariedade aberta  $W$  com propriedades muito particulares e que serão de extrema importância nos resultados seguintes. Em especial, veremos que os elementos dela nos darão multijatos com fontes distintas, alvos distintos e tais que sempre existe um polígono convexo com vértices em  $t$  pontos distintos escolhidos em  $Q$ .

**Definição 15.** *Sejam  $f, g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{H}^2$  aplicações de classe  $C^\infty$ .*

1. *Dizemos que  $f$  tem um contato de primeira ordem com  $g$  em  $p$  se  $f(p) = g(p) = q$  e  $Df(p) = Dg(p)$  como aplicações de  $T_p\mathbb{T} \longrightarrow T_q\mathbb{H}^2$ ;*
2. *Denotaremos por  $J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)_{p,q}$ , com  $q = g(p)$ , o conjunto de todas as funções  $f$  que tem contato de primeira ordem com  $g$  em  $p$ ;*
3. *Seja  $J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2) = \bigcup_{(p,q) \in \mathbb{T} \times \mathbb{H}^2} J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)_{p,q}$ . Um elemento  $\sigma \in J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  é denominado de 1-jato de  $\mathbb{T}$  em  $\mathbb{H}^2$ .*
4. *Seja  $\sigma \in J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ . Então, existem  $p \in \mathbb{T}$  e  $q \in \mathbb{H}^2$  tais que  $\sigma \in J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)_{p,q}$ . Os pontos  $p$  e  $q$  são denominados de fonte e alvo de  $\sigma$ .*

Conforme descrito em [13] (ver Teorema 2.7, página 40), é possível dar ao conjunto  $J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  uma estrutura de variedade Riemanniana de classe  $C^\infty$ , cuja dimensão será  $1 + 2 + 2 = 5$ . Descrevendo de forma superficial, uma vizinhança coordenada de  $\sigma \in J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  é dada por  $J^1(U, V)$ , em que  $U$  e  $V$  são vizinhanças coordenadas da fonte e do alvo de  $\sigma$ , respectivamente. Assim, em uma carta local nessa vizinhança, as coordenadas de  $\sigma$  são  $(u, v, A)$ , em

### 3.2 Preliminares do Teorema A

---

que  $u$ ,  $v$  e  $A$  representam, localmente, a fonte, o alvo e a derivada da aplicação na fonte, nessa ordem.

**Definição 16.** *As aplicações  $\alpha : J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2) \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $\sigma \mapsto$  fonte de  $\sigma$  e  $\beta : J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2) \rightarrow \mathbb{H}^2$ ,  $\sigma \mapsto$  alvo de  $\sigma$  são, também, denominadas de fonte e alvo de  $\sigma$ , respectivamente.*

Relembremos que as notações  $\mathbb{T}^t$  e  $\mathbb{T}^{(t)}$  possuem significados diferentes. Enquanto a primeira indica somente o conjunto das  $t$ -uplas de  $\mathbb{T}$ , a segunda será utilizada, exclusivamente, para representar as  $t$ -uplas  $(s_1, \dots, s_t)$  tais que  $s_i \neq s_j, \forall i \neq j$ .

Seja  $J_t^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2) = (\alpha^t)^{-1}(\mathbb{T}^{(t)})$ , em que  $\alpha^t : [J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)]^t \rightarrow \mathbb{T}^t$  é definida por  $\alpha^t(\sigma_1, \dots, \sigma_t) = (\alpha(\sigma_1), \dots, \alpha(\sigma_t))$ . Como  $J_t^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  é um aberto na variedade Riemanniana  $[J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)]^t$ , segue que ela também tem estrutura de variedade Riemanniana. Ela é conhecida na literatura pertinente ao assunto como a  $t$ -folha do fibrado de 1-jatos. Além disso, para cada  $f \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ , sempre existe uma aplicação  $j_t^1 f : \mathbb{T}^{(t)} \rightarrow J_t^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  que é definida, canonicamente, por  $j_t^1 f(s_1, s_2, \dots, s_t) = (j^1 f(s_1), j^1 f(s_2), \dots, j^1 f(s_t))$  e tem a mesma classe de diferenciabilidade de  $f$ .

Tecnicamente, necessitamos definir dois conjuntos que serão de suma importância no texto que se segue.

**Definição 17.** *Fixada uma aplicação admissível  $\omega$ , definimos*

$$I_i(\omega) = \{j \in \{1, 2, \dots, t\} \mid \exists k = 1, 2, \dots, n \text{ com } \{i, j\} = \{\omega(k), \omega(k+1)\}\},$$

para cada  $i \in \text{Im } \omega$ .

Observemos que o conjunto  $I_i(\omega)$  é, justamente, o conjunto de índices  $j$  associado ao padrão  $\omega$  para os quais existe um segmento geodésico  $\gamma_i$  de  $\gamma$  ligando os pontos  $y_i$  e  $y_j$ . Por exemplo, suponhamos que sejam dados 5 pontos distintos e que, a partir deles, construimos, via um padrão  $\omega$  pré-determinado, um 6-polígono, como o da Figura 3.3.

### 3.2 Preliminares do Teorema A

---

Um exemplo de padrão  $\omega$  para esse 6-polígono é:

$$\begin{aligned}\omega(1) &= 1 & \omega(3) &= 5 & \omega(5) &= 2 \\ \omega(2) &= 3 & \omega(4) &= 1 & \omega(6) &= 4\end{aligned}$$

Assim, para este padrão  $\omega$  considerado, temos:  $I_1 = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $I_2 = \{1, 4\}$ ,  $I_3 = \{1, 5\}$ ,  $I_4 = \{1, 2\}$  e  $I_5 = \{1, 3\}$ .

**Definição 18.** *Seja  $\omega$  uma aplicação admissível. Definimos:*

$$U_\omega = \left\{ (y_1, \dots, y_t) \in (\mathbb{H}^2)^{(t)} \mid y_i \notin \text{envoltória convexa de } \left\{ y_j \in (\mathbb{H}^2)^{(t)} \mid j \in I_i \right\} \right\},$$

em que  $i \in \text{Im } \omega$ .

Consideremos  $V_\omega$  o conjunto dos multijatos

$$\tau = (j^1 f_1(s_1), j^1 f_2(s_2), \dots, j^1 f_t(s_t))$$

cujas fontes não são, necessariamente, distintas, satisfazendo as seguintes condições:

1.  $f_i(s_i) \neq f_j(s_j)$ , para cada  $i \neq j$ ;
2.  $f'_i(s_i) \neq \vec{0}$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, t$ ;
3. Seja  $\vec{\eta}_j \in T_{f_i(s_i)}\mathbb{H}^2$  a direção tangente à geodésica minimizante que liga os pontos  $f_j(s_j)$  e  $f_i(s_i)$ , com  $j \in I_i(\omega)$ . Então,  $\frac{\partial}{\partial v_j^{(p)}} \langle \vec{\eta}_j, \vec{\eta}_{f_i(s_i)} \rangle \neq 0$ , para  $p \in \{1, 2\}$ .

Geometricamente falando, a condição técnica 3 impõe que os diferentes pontos  $f_j(s_j)$  escolhidos que se ligam, via um padrão  $\omega$  pré-estabelecido, ao ponto  $f_i(s_i)$  não podem pertencer a um mesmo trecho de geodésica minimizante.

### 3.2 Preliminares do Teorema A

---

Observemos que ela, conjuntamente com a definição do conjunto  $U_\omega$ , garantem que, com os  $t$  pontos distintos escolhidos em  $Q$ , sempre conseguiremos traçar um polígono geodésico que é geodesicamente convexo e que possui vértices nos pontos  $y_1, \dots, y_t$ .

Sabemos, também, que  $\mathbb{H}^2$  é um espaço métrico e, portanto, um espaço de Hausdorff. Dessa forma, a diagonal  $\Delta$  de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  é um conjunto fechado, ou seja, o seu complemento é um conjunto aberto. Portanto, a condição 1 pode ser reescrita da seguinte maneira: o conjunto dos multijatos que possuem alvos distintos é obtido tomando-se a pré-imagem do conjunto  $(\mathbb{H}^2)^t - \Delta_{i,j}$  pela aplicação  $\beta^t : [J^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)]^t \longrightarrow (\mathbb{H}^2)^t$ ,  $(\sigma_1, \dots, \sigma_t) \mapsto (\beta(\sigma_1), \dots, \beta(\sigma_t))$ , em que  $\Delta_{i,j}$  representa a diagonal do produto cartesiano do  $i$ -ésimo fator de  $(\mathbb{H}^2)^t$  pelo  $j$ -ésimo fator do mesmo conjunto.

A interpretação da condição 2 é imediata uma vez que ela pode ser traduzida como o conjunto de todas as aplicações que têm posto máximo.

Denotemos por  $W = V_\omega \cap J_t^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2) \cap (\beta^t)^{-1}(U_\omega)$ . Observemos que ele é um conjunto aberto na variedade  $J_t^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  e, portanto, uma subvariedade dela. Descreveremos, a partir de agora, uma vizinhança coordenada de um ponto  $\tau \in W$ . Observemos que existem vizinhanças  $U_i$  de  $s_i$  e  $V_i \subset \mathbb{H}^2$  de  $f_i(U_i)$ ,  $1 \leq i \leq t$ , com  $U_i \cap U_k = \emptyset$  e  $V_i \cap V_k = \emptyset$ , toda vez que  $i \neq k$ , tais que

$$\Omega = W \cap \left( \prod_{i=1}^t J^1(U_i, V_i) \right)$$

é uma vizinhança coordenada de  $\tau$ .

Para obtermos uma carta local para essa vizinhança, tomemos as cartas locais  $\Psi_i : U_i \subset \mathbb{T} \longrightarrow [0, 1]$  e  $X_i : V_i \subset \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ . A partir delas, construiremos a aplicação

$$\Theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{(t)} \times (\mathbb{R}^2)^{(t)} \times \mathbb{R}^{2t}$$

definida da seguinte maneira:

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

$$\Theta(\tau) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{A}),$$

em que  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_t)$ ,  $\mathbf{v} = \left( (v_1^{(1)}, v_1^{(2)}), (v_2^{(1)}, v_2^{(2)}), \dots, (v_t^{(1)}, v_t^{(2)}) \right)$ ,  $\mathbf{A} = \left( (a_1^{(1)}, a_1^{(2)}), (a_2^{(1)}, a_2^{(2)}), \dots, (a_t^{(1)}, a_t^{(2)}) \right)$ ,  $\Psi_i(s_i) = u_i$ ,  $X_i(f_i(s_i)) = (v_i^{(1)}, v_i^{(2)})$  e  $a_i^{(j)} = \frac{d}{du_i} v_i^{(j)}(u_i)$ , com  $1 \leq i \leq t$  e  $j \in \{1, 2\}$ .

Por simplicidade, chamaremos os elementos de  $\Theta(\Omega)$  de  $\xi$ , ou seja,

$$\xi = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{A})$$

### 3.3 Demonstração do Teorema A

Inicialmente, suponhamos que  $\gamma$  seja uma trajetória de bilhar  $n$ -periódica e com defeito positivo em  $\Gamma = f(\mathbb{T})$ ,  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ . Dessa forma, é possível encontrarmos um padrão  $\omega : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, t\}$  que descreve a maneira segundo a qual essa trajetória atravessa os seus pontos de reflexão. Sem perda de generalidade, podemos supor que  $\omega^{-1}(1) = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ , com  $i_1 = 1$ , isto é, que  $\gamma$  possui apenas um ponto de reflexão múltiplo. Observemos que, nessa situação, são válidas as seguintes afirmações:

- (I) Existe um elemento  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_t) \in \mathbb{T}^{(t)}$  tal que  $\mathbf{y} = f^t(\mathbf{s}) \in U_\omega$ ;
- (II)  $\frac{\partial}{\partial u_i} H_\omega(f \circ \Psi_1^{-1}(u_1), \dots, f \circ \Psi_t^{-1}(u_t)) = 0$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, t\}$  e, em particular, para  $i \in \{2, \dots, t\}$ ;
- (III) Para cada  $l \in \{1, \dots, r\}$ , denotemos por  $a = \omega(i_l - 1)$  e  $b = \omega(i_l + 1)$ . Se os vetores  $\vec{\eta}_a$  e  $\vec{\eta}_b$  em  $T_{f(s_1)}\mathbb{H}^2$  são as direções tangentes às geodésicas minimizantes que ligam os pontos  $y_a = f(s_a)$  a  $y_1 = f(s_1)$  e  $y_b = f(s_b)$  a  $y_1 = f(s_1)$ , nessa ordem, então  $\vec{\eta}_a + \vec{\eta}_b$  é um vetor na direção de  $\vec{t}_{f(s_1)} = f'(s_1)$ .

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

Para um  $n$ -polígono  $\gamma$  qualquer com defeito positivo em  $\Gamma$ , fixemos, novamente, sem perda de generalidade, uma aplicação admissível

$$\omega : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, t\}$$

tal que  $\omega^{-1}(1) = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ , com  $i_1 = 1$ . É importante salientarmos que, para um  $n$ -polígono  $\gamma$  qualquer, as condições (II) e (III) podem não ser verdadeiras.

Em relação a (III), sejam  $\{\vec{t}_{f(s_1)}, \vec{n}_{f(s_1)}\}$  uma base ortonormal em  $T_{f(s_1)}\mathbb{H}^2$  e  $\vec{\eta}_a$  e  $\vec{\eta}_b$  as direções tangentes já definidas. Escreveremos

$$\vec{\eta}_a + \vec{\eta}_b = c_1^l \vec{t}_{f(s_1)} + c_2^l \vec{n}_{f(s_1)}$$

Vamos tratar, inicialmente, o caso em que  $\omega$  é uma aplicação admissível e não-simétrica. Denotaremos por  $T_\omega$  o conjunto de todas as funções  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  que satisfazem a seguinte condição: para cada  $\mathbf{s} \in \mathbb{T}^{(t)}$  com  $f^t(\mathbf{s}) \in U_\omega$  e  $\frac{\partial}{\partial u_i} H_\omega(f \circ \Psi_1^{-1}(u_1), \dots, f \circ \Psi_t^{-1}(u_t)) = 0$ ,  $i \in \{2, \dots, t\}$ , existe pelo menos um  $l \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $c_2^l(\mathbf{y}) \neq 0$  para  $a = \omega(i_l - 1)$  e  $b = \omega(i_l + 1)$ .

Vamos fazer uma pausa para analisarmos atentamente a definição do conjunto  $T_\omega$ . Consideremos que sejam dados  $t$  pontos distintos em  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  e suponhamos que o padrão de como esses pontos serão ligados seja conhecido, isto é,  $\omega$  é uma aplicação admissível fixada. Então, existe  $\mathbf{s} \in \mathbb{T}^{(t)}$  tal que:

- (i) É possível criarmos um polígono geodesicamente convexo de vértices em  $f(s_1), \dots, f(s_t)$ ;
- (ii) Não temos a garantia que  $y_a, y_1, y_b$  é uma sequência ordenada de pontos de reflexão de uma trajetória de bilhar. Para todas as demais sequências ordenadas por  $\omega$ , a propriedade “ser uma trajetória de bilhar” é verdadeira;
- (iii) Existe pelo menos um  $l \in \{1, \dots, r\}$ , tal que os vetores  $\vec{\eta}_a$  e  $\vec{\eta}_b$  não satisfazem a lei do espelho em relação ao vetor  $\vec{t}_{f(s_1)}$ .

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

Com o intuito de ilustrar as descrições **(i)**, **(ii)** e **(iii)**, observemos, novamente, o exemplo do 6-polígono da Figura 3.3, com o padrão  $\omega$  dado por (3.1). Primeiramente, notemos que as geodésicas minimizantes que ligam os pontos  $P_i$  e  $P_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , com  $P_6 = P_1$ , formam um polígono geodesicamente convexo de 5 vértices. Além disso, excetuando as sequências ordenadas (por  $\omega$ ) de pontos  $P_5, P_1, P_2$  e  $P_4, P_1, P_3$ , temos a garantia que todas as demais sequências ordenadas constituem trechos consecutivos de uma trajetória de bilhar. Por fim, como  $\omega^{-1}(1) = \{1, 4\}$ , segue que ou  $\vec{\eta}_5 + \vec{\eta}_2$  ou  $\vec{\eta}_4 + \vec{\eta}_3$  não estão na direção de  $\vec{t}_{P_1}$ .

A estratégia que será empregada a seguir é pautada em mostrarmos que o conjunto  $T_\omega$  possui um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ . Em outras palavras, esse fato nos garantirá que uma trajetória de bilhar  $n$ -periódica com defeito positivo em  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  é um caso raro de se ocorrer.

Vale ressaltar que, inicialmente, essa estratégia se aplica ao caso de apenas um ponto de reflexão múltiplo. A demonstração para o caso geral se reduz a tomar interseções dos conjuntos  $T_\omega$  que serão construídos de forma similar ao caso mais simples.

Para isso, definiremos o conjunto  $\Sigma$  de todos os multijatos

$$\tau = (j^1 f_1(s_1), \dots, j^1 f_t(s_t)) \in W$$

que satisfazem as seguintes condições:

- (1)  $\frac{\partial}{\partial u_i} H_\omega(f_1 \circ \Psi^{-1}(u_1), \dots, f_t \circ \Psi^{-1}(u_t)) = 0$ , para cada  $i \in \{2, \dots, t\}$ ;
- (2) Para cada  $l \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\langle \vec{\eta}_a + \vec{\eta}_b, \vec{n}_{f_1(s_1)} \rangle = 0$ , em que  $a = \omega(i_l - 1)$ ,  $b = \omega(i_l + 1)$  e  $\vec{n}_{f_1(s_1)} \perp \vec{t}_{f_1(s_1)}$ .

Observemos que uma forma alternativa para a condição **(1)** é dada por

$$\left\langle \vec{\nabla}_{f_i(s_i)} H_\omega(f_1(s_1), \dots, f_t(s_t)), \vec{t}_{f_i(s_i)} \right\rangle = 0,$$

para cada  $i \in \{2, \dots, t\}$ . Além disso, veremos mais adiante no Lema 8 que

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_{f_i(s_i)} H_\omega &= \left( \sum_{q \in I_i(\omega)} \frac{-p \left( \frac{\partial}{\partial v_i^1}, f_q(s_q) \right)}{\sinh g(f_i(s_i), f_q(s_q))}, \sum_{q \in I_i(\omega)} \frac{-p \left( \frac{\partial}{\partial v_i^2}, f_q(s_q) \right)}{\sinh g(f_i(s_i), f_q(s_q))} \right) \\ &= \sum_{q \in I_i(\omega)} \frac{-1}{\sinh g(f_i(s_i), f_q(s_q))} \left( p \left( \frac{\partial}{\partial v_i^1}, f_q(s_q) \right), p \left( \frac{\partial}{\partial v_i^2}, f_q(s_q) \right) \right),\end{aligned}$$

ou seja, ele é a soma de vetores unitários de  $T_{f_i(s_i)}\mathbb{H}^2$ . Por último, a condição **(2)** assegura, certamente, que

$$T_\omega = \left\{ f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2) \mid j_t^1 f(\mathbb{T}^{(t)}) \cap \Sigma = \emptyset \right\}.$$

Vamos descrever, em linhas gerais, o papel desempenhado pelos elementos do conjunto  $\Sigma$ . Suponhamos que  $\tau \in \Sigma$ . Então, podemos considerar  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_t) \in \mathbb{T}^{(t)}$  e uma coleção de funções  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, t$ , tais que  $y_i = f_i(s_i) \neq f_j(s_j) = y_j$ , para  $i \neq j$ , e vetores  $\vec{t}_{y_i} = f'_i(s_i) \in T_{f_i(s_i)}$ , todos não-nulos. Uma vez que  $j^1 f_i(s_i)$  representa o conjunto de todas as funções que têm contato de primeira ordem com  $f_i$  em  $s_i$ , então um elemento  $\tau \in \Sigma$  é responsável por criar, simultaneamente, famílias de curvas numa vizinhança de cada  $y_i$  que preservam tanto o ponto quanto a direção tangente fixados. Essas serão as perturbações consideradas por nós nesse trabalho.

Os lemas que apresentaremos a seguir, garantirão a existência de duas subvariedades de  $W$  que apresentam a mesma codimensão. Para construí-las, consideraremos uma aplicação apropriada  $K$  de tal maneira que as duas subvariedades serão tratadas como imagem inversa de um valor regular dessa aplicação. Além disso, veremos que a reunião delas conterà o conjunto  $\Sigma$  definido previamente. Esse fato será de fundamental importância nos argumentos de transversalidade que usaremos adiante.

**Lema 8.** *Para todo  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_t) \in U_\omega$  e para todo  $i \in \text{Im } \omega$ , existe  $j \in \{1, 2\}$  com  $\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}} H_\omega(\mathbf{y}) \neq 0$ .*

*Demonstração.* Antes de iniciarmos a demonstração desse lema, vamos recordar dois fatos sobre o modelo do hiperbolóide para o plano hiperbólico:

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

1. O vetor posição de cada ponto  $A \in \mathbb{H}^2$  é, também, um vetor normal a  $T_A\mathbb{H}^2$ ;
2. A única geodésica determinada por dois pontos distintos  $A$  e  $B$  em  $\mathbb{H}^2$  é obtida pela interseção do plano hiperbólico com o plano gerado pelos vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$ , em que  $O$  indica a origem de  $\mathbb{R}^{1,2}$ ;

Alternativamente, podemos caracterizar a única geodésica determinada pelos dois pontos distintos  $A$  e  $B$  em  $\mathbb{H}^2$  como a única geodésica que parte do ponto  $A$  seguindo a direção do vetor  $\vec{v} = \vec{OB} - \text{proj}_{\vec{OA}}\vec{OB}$ , isto é,  $\vec{v} = \vec{OB} + p(\vec{OA}, \vec{OB})\vec{OA}$ .

Começemos, então, a verificação do resultado. Derivando a relação  $H_\omega(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n g(y_{\omega(k)}, y_{\omega(k+1)})$  com respeito à variável  $v_i^{(j)}$ , obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial v_i^j} H_\omega(\mathbf{y}) = \sum_{q \in I_i(\omega)} \frac{-p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^j}, y_q\right)}{\sinh g(y_i, y_q)}$$

Aqui,  $\frac{\partial}{\partial v_i^j}$  denota, novamente, uma direção principal em  $T_{y_i}\mathbb{H}^2$ .

Por absurdo, suponhamos que  $\frac{\partial}{\partial v_i^j} H_\omega(\mathbf{y}) = 0$ , para todo  $j \in \{1, 2\}$ . Então,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{y_i} H_\omega(\mathbf{y}) &= \left( \sum_{q \in I_i(\omega)} \frac{-p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^1}, y_q\right)}{\sinh g(y_i, y_q)}, \sum_{q \in I_i(\omega)} \frac{-p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^2}, y_q\right)}{\sinh g(y_i, y_q)} \right) = \\ &= \sum_{q \in I_i(\omega)} \frac{-1}{\sinh g(y_i, y_q)} \left( p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^1}, y_q\right), p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^2}, y_q\right) \right) = \\ &= \vec{0}, \end{aligned}$$

Notemos que o vetor  $\vec{v}_q = \left( p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^1}, y_q\right), p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^2}, y_q\right) \right)$  é, precisamente, a projeção ortogonal do vetor  $y_q$  em  $T_{y_i}\mathbb{H}^2$ , ou seja,  $\vec{v}_q = y_q + p(y_i, y_q)y_i$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_q\| &= \sqrt{p(\vec{v}_q, \vec{v}_q)} = \\ &= \sqrt{[p(y_i, y_q)]^2 - 1} = \sinh g(y_i, y_q) \end{aligned}$$

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

uma vez que  $p(y_i, y_q) = -\cosh g(y_i, y_q)$ .

Logo, cada vetor presente na soma

$$\sum_{q \in I_i(\omega)} \frac{1}{\sinh g(y_i, y_q)} \left( p \left( \frac{\partial}{\partial v_i^1}, y_q \right), p \left( \frac{\partial}{\partial v_i^2}, y_q \right) \right) \quad (3.2)$$

é unitário. Portanto, se a igualdade  $\vec{\nabla}_{y_i} H_\omega(\mathbf{y}) = \vec{0}$  for verdadeira, então os vetores unitários nas direções de  $\vec{v}_q$  são vértices de um polígono regular. Como a cardinalidade de  $I_i(\omega)$  é sempre par, segue que devem existir pares de vetores na soma (3.2) que se cancelam.

Sejam  $\vec{v}_{q_1}$  e  $\vec{v}_{q_2}$  um par de vetores nessa situação. As geodésicas que partem de  $y_i$  nas direções  $\vec{v}_{q_1}$  e  $\vec{v}_{q_2}$  especificadas anteriormente, na verdade, são iguais. Dessa forma, o ponto  $y_i$  pertence à envoltória convexa do conjunto  $\{y_q \mid q \in I_i(\omega)\}$ , o que gera uma contradição com nossa hipótese. Assim, fica verificado o nosso resultado.  $\square$

**Lema 9.** *Existem duas subvariedades de classe  $C^\infty$  de  $W$ , nomeadas de  $M_1$  e  $M_2$ , tais que suas codimensões são dadas por  $t + r - 1$ . Além disso,  $\Sigma \subset (M_1 \cup M_2)$ .*

*Demonstração.* Tomemos, inicialmente, uma vizinhança coordenada  $\Omega$  de um multijato  $\tau \in \Sigma$  e uma carta coordenada  $\Theta$  em  $\Omega$ , conforme já foi descrito anteriormente. O resultado estará demonstrado se formos capazes de mostrar que  $\Theta(\Omega \cap \Sigma)$  está contido em uma subvariedade de classe  $C^\infty$  de  $\Theta(\Omega)$  com codimensão  $t + r - 1$ .

Consideremos  $l \in \{1, \dots, r\}$  e coloquemos  $a = \omega(i_l - 1)$  e  $b = \omega(i_l + 1)$ . Para  $m \in \{1, 2\}$ , definiremos as aplicações  $d_l^{(m)} : \Theta(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$d_l^{(m)}(\xi) = \langle \vec{\eta}_a + \vec{\eta}_b, \vec{e}_m \rangle - \langle \vec{\eta}_a + \vec{\eta}_b, \vec{t}_{f_1(s_1)} \rangle \langle \vec{t}_{f_1(s_1)}, \vec{e}_m \rangle,$$

em que  $\xi = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}) \in \Theta(\Omega)$  e  $\vec{e}_1 = \frac{\partial}{\partial v_1^{(1)}}$  e  $\vec{e}_2 = \frac{\partial}{\partial v_1^{(2)}}$  são as direções principais em  $T_{f_1(s_1)}\mathbb{H}^2$ . Notemos que, por definição,  $d_l^{(m)}$  é responsável por selecionar a

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

componente  $m$  da parte normal do vetor  $\vec{\eta}_a + \vec{\eta}_b$  em relação à base ortonormal  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  de  $T_{f_1(s_1)}\mathbb{H}^2$ .

Em adicional, lembremos que o plano hiperbólico está parametrizado pelas coordenadas polares hiperbólicas, a saber,

$$X_i^{-1}(v_i^{(1)}, v_i^{(2)}) = \left( \cosh v_i^{(1)}, \sinh v_i^{(1)} \cos v_i^{(2)}, \sinh v_i^{(1)} \sin v_i^{(2)} \right)$$

na vizinhança  $V_i$  de cada ponto  $f_i(s_i)$ ,  $1 \leq i \leq t$ . Portanto,

$$\vec{e}_1 = DX_1^{-1}(v_1^{(1)}, v_1^{(2)}) \cdot (1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{e}_2 = DX_1^{-1}(v_1^{(1)}, v_1^{(2)}) \cdot (0, 1)$$

Consideremos, também, as aplicações  $b_p : \Theta(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p = 2, \dots, t$ , definidas por

$$\begin{aligned} b_p(\xi) &= \left\langle \vec{\nabla}_{f_p(s_p)} H_\omega(f_1(s_1), \dots, f_t(s_t)), \vec{t}_{f_p(s_p)} \right\rangle \\ &= \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial v_p^{(1)}} H_\omega, \frac{\partial}{\partial v_p^{(2)}} H_\omega \right), (a_p^{(1)}, a_p^{(2)}) \right\rangle \end{aligned}$$

Sejam ainda, para  $m \in \{1, 2\}$ , os conjuntos

$$O_m = \{ \xi \in \Theta(\Omega) \mid \langle \vec{n}_{f_1(s_1)}, \vec{e}_m \rangle \neq 0 \}.$$

Notemos que  $O_m$  é um conjunto aberto de  $\Theta(\Omega)$ . Além disso,  $O_1 \cup O_2 = \Theta(\Omega)$ . Dessa forma, o lema estará provado se mostrarmos que, para  $m \in \{1, 2\}$ ,  $\Theta(\Omega \cap \Sigma) \cap O_m$  está contido em uma subvariedade de classe  $C^\infty$  de  $O_m$  com codimensão  $t + r - 1$ .

Para provarmos isso, vamos fixar, inicialmente,  $m_0 = 1$  ou  $2$ . Consideremos a aplicação  $K : O_{m_0} \rightarrow \mathbb{R}^{t+r-1}$ , definida por:

$$K(\xi) = (b_p(\xi), d_t^m(\xi)),$$

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

em que  $p = 2, \dots, t$ ,  $l = 1, \dots, r$ ,  $m \neq m_0$ .

Se olharmos, atentamente, as condições 1 e 2 presentes na definição do conjunto  $\Sigma$  juntamente com a definição da aplicação  $K$ , então perceberemos que  $O_{m_0} \cap \Theta(\Omega \cap \Sigma) \subset K^{-1}(0)$ . Dessa maneira, a verificação do resultado estará concluída se mostrarmos que  $K$  é uma submersão em cada ponto de  $O_{m_0}$ . Nessas condições, todo ponto de  $K^{-1}(0)$  é um ponto regular de  $K$  e, conseqüentemente,  $K^{-1}(0)$  é uma subvariedade de  $O_{m_0}$  com codimensão  $t+r-1$  (ver Teorema, página 27, de [19]).

Para alcançarmos o objetivo descrito anteriormente, consideremos  $\xi \in O_{m_0}$  e suponhamos que a combinação linear

$$\sum_{p=2}^t B_p \vec{\nabla} b_p(\xi) + \sum_{l=1}^r D_l^{(m)} \vec{\nabla} d_l^{(m)}(\xi) = \vec{0}, \quad (3.3)$$

seja válida para os números reais  $B_p$  e  $D_l^{(m)}$ . Observemos que, para  $p \in \{2, \dots, t\}$  e  $j \in \{1, 2\}$  fixados, temos

$$\frac{\partial}{\partial a_p^{(1)}} b_p(\xi) = \frac{\partial}{\partial v_p^{(1)}} H_\omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial a_p^{(2)}} b_p(\xi) = \left[ \frac{\partial}{\partial v_p^{(2)}} H_\omega \right] \sinh v_p^{(1)}.$$

Além disso,  $\frac{\partial}{\partial a_p^{(j)}} d_l^{(m)}(\xi) = 0$ . Dessa forma,

$$B_p \frac{\partial}{\partial v_p^{(j)}} H_\omega \left( X_1^{-1}(v_1^{(1)}, v_1^{(2)}), \dots, X_t^{-1}(v_t^{(1)}, v_t^{(2)}) \right) = 0,$$

ou seja,  $B_p = 0$ , uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial v_p^{(j)}} H_\omega \left( X_1^{-1}(v_1^{(1)}, v_1^{(2)}), \dots, X_t^{-1}(v_t^{(1)}, v_t^{(2)}) \right) \neq 0,$$

conforme nos mostra o Lema 8 apresentado anteriormente. Portanto, a primeira soma presente em (3.3) é trivial.

Para a segunda soma presente em (3.3), fixemos  $l = 1, \dots, r$  e  $m = 1$  ou  $2$ , com  $m \neq m_0$ , e lembremos que  $a = \omega(j_l - 1)$  e  $b = \omega(j_l + 1)$ . Dessa forma,

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

os vetores  $\vec{\eta}_a$  e  $\vec{\eta}_b$  dependem, exclusivamente, dos pares de pontos  $f_1(s_1)$  e  $f_a(s_a)$  e  $f_1(s_1)$  e  $f_b(s_b)$ , respectivamente, ou seja,  $\partial d_l^{(m)}/\partial v_i^{(j)} = 0$ , toda vez que  $i \notin \{1, a, b\}$  e  $j \in \{1, 2\}$ . Atentando-nos para as componentes de  $\vec{\nabla} d_l^{(m)}(\xi)$  correspondentes as derivadas parciais  $\partial d_l^{(m)}/\partial v_a^{(j)}$ , obtemos:

$$D_l^{(m)} \frac{\partial d_l^{(m)}}{\partial v_a^{(j)}} = 0$$

Para entendermos melhor a expressão de  $d_l^{(m)}$  por meio das componentes dos vetores que compõem sua definição, escreveremos  $\vec{\eta}_a + \vec{\eta}_b = (\eta_a^{(1)} + \eta_b^{(1)}, \eta_a^{(2)} + \eta_b^{(2)})$  e  $\vec{t}_{f_1(s_1)} = (a_1^{(1)}, a_1^{(2)})$ . Dessa forma,

$$d_l^{(m)}(\xi) = \langle \vec{\eta}_a + \vec{\eta}_b, \vec{e}_m \rangle - \langle \vec{\eta}_a + \vec{\eta}_b, \vec{t}_{f_1(s_1)} \rangle \underbrace{\langle \vec{t}_{f_1(s_1)}, \vec{e}_m \rangle}_{= a_1^{(m)}}$$

Então,

$$d_l^{(m)}(\xi) = \left\langle \left( \eta_a^{(1)} + \eta_b^{(1)}, \eta_a^{(2)} + \eta_b^{(2)} \right), \vec{e}_m \right\rangle - \left\langle \left( \eta_a^{(1)} + \eta_b^{(1)}, \eta_a^{(2)} + \eta_b^{(2)} \right), \left( a_1^{(1)}, a_1^{(2)} \right) \right\rangle a_1^{(m)}$$

Ou seja,

$$d_l^{(m)}(\xi) = \eta_a^{(m)} + \eta_b^{(m)} - \left[ a_1^{(1)} \left( \eta_a^{(1)} + \eta_b^{(1)} \right) + a_1^{(2)} \left( \eta_a^{(2)} + \eta_b^{(2)} \right) \sinh^2 v_1^{(1)} \right] a_1^{(m)}$$

Portanto,

$$d_l^{(m)}(\xi) = \eta_a^{(m)} + \eta_b^{(m)} - \left( \eta_a^{(1)} + \eta_b^{(1)} \right) a_1^{(1)} a_1^{(m)} - \left( \eta_a^{(2)} + \eta_b^{(2)} \right) a_1^{(2)} a_1^{(m)} \sinh^2 v_1^{(1)}$$

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

Conforme já mencionado, a geodésica que parte de  $y_1$  em direção a  $y_b$  independe de  $y_a$ . Isso nos assegura que  $\frac{\partial}{\partial v_a^{(j)}} \vec{\eta}_b = \vec{0}$ . Daí, derivando a expressão que define  $d_l^{(m)}$  em relação a  $v_a^{(j)}$ , obtemos

$$\frac{\partial d_l^{(m)}}{\partial v_a^{(j)}} = \frac{\partial}{\partial v_a^j} \eta_a^{(m)} - \frac{\partial}{\partial v_a^j} \eta_a^{(1)} a_1^{(1)} a_1^{(m)} - \frac{\partial}{\partial v_a^j} \eta_a^{(2)} a_1^{(2)} a_1^{(m)} \sinh^2 v_1^{(1)}$$

A definição do produto interno no espaço tangente  $T_{f_1(s_1)} \mathbb{H}^2$  permite-nos escrever

$$\frac{\partial d_l^{(m)}}{\partial v_a^{(j)}} = \frac{\partial}{\partial v_a^j} \eta_a^{(m)} - a_1^{(m)} \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial v_a^j} \eta_a^{(1)}, \frac{\partial}{\partial v_a^j} \eta_a^{(2)} \right), \left( a_1^{(1)}, a_1^{(2)} \right) \right\rangle$$

Rearranjando a expressão anterior e lembrando que  $\vec{\eta}_a = \left( \eta_a^{(1)}, \eta_a^{(2)} \right)$  e  $\vec{t}_{f_1(s_1)} = \left( a_1^{(1)}, a_1^{(2)} \right)$ , obteremos:

$$\frac{\partial d_l^{(m)}}{\partial v_a^{(j)}} = \frac{\partial}{\partial v_a^j} \left[ \eta_a^{(m)} - a_1^{(m)} \langle \vec{\eta}_a, \vec{t}_{f_1(s_1)} \rangle \right]$$

Assim,

$$D_l^{(m)} \frac{\partial d_l^{(m)}}{\partial v_a^j} = 0 \Leftrightarrow D_l^{(m)} \left( \frac{\partial}{\partial v_a^j} \left[ \eta_a^{(m)} - a_1^{(m)} \langle \vec{\eta}_a, \vec{t}_{f_1(s_1)} \rangle \right] \right) = 0$$

Por conveniência, colocaremos  $D_l^{(m_0)} = 0$ . Além disso, para  $m = 2$ , multiplicaremos a igualdade por  $\sinh^2 v_1^{(1)}$ . Dessa forma, se denotarmos por  $D_l = \left( D_l^{(1)}, D_l^{(2)} \right)$ , então poderemos combinar as expressões que são obtidas da condição anterior, quando  $m = 1$  e  $2$ , e reescrevê-las da seguinte maneira:

$$\left\langle D_l, \frac{\partial}{\partial v_a^j} \left( \vec{\eta}_a - \langle \vec{\eta}_a, \vec{t}_{f_1(s_1)} \rangle \vec{t}_{f_1(s_1)} \right) \right\rangle = \left\langle D_l, \frac{\partial}{\partial v_a^j} \langle \vec{\eta}_a, \vec{n}_{f_1(s_1)} \rangle \vec{n}_{f_1(s_1)} \right\rangle = 0$$

Como  $\langle \vec{n}_{f_1(s_1)}, \vec{e}_m \rangle \neq 0$  e  $\frac{\partial}{\partial v_a^j} \langle \vec{\eta}_a, \vec{n}_{f_1(s_1)} \rangle \neq 0$ , segue que  $D_l^{(m)} = 0$ , isto é,  $D_l = \vec{0}$ . Portanto, a segunda soma presente em (3.3) também é trivial. Isso

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

mostra que a aplicação  $K$  é uma submersão em cada ponto de  $O_{m_0}$ . Assim,  $K^{-1}(0)$  é uma subvariedade de  $O_{m_0}$  de codimensão  $t + r - 1$ .  $\square$

Para compreendermos melhor a primeira consequência do resultado anterior, vamos fazer uma pausa e esclarecer alguns conceitos relativos ao teorema da transversalidade de Thom (ver [13]).

**Definição 19.** *Sejam  $X$  e  $Y$  duas variedades de classe  $C^\infty$  e  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação com essa mesma classe de diferenciabilidade. Sejam, ainda,  $\mathcal{W}$  uma subvariedade de  $Y$  e  $x \in X$ . Dizemos que  $f$  intersecta transversalmente  $\mathcal{W}$  em  $x$ , e denotaremos por  $f \pitchfork \mathcal{W}$  em  $x$ , se uma das condições exclusivas a seguir for satisfeita:*

1.  $f(x) \notin \mathcal{W}$ ;
2.  $f(x) \in \mathcal{W}$  e  $T_{f(x)}Y = T_{f(x)}\mathcal{W} + Df(x) \cdot T_xX$ .

*Em particular, dizemos que  $f \pitchfork \mathcal{W}$  sobre  $\mathfrak{A}$ , se  $\mathfrak{A} \subset X$  e  $f \pitchfork \mathcal{W}$  para cada  $x \in \mathfrak{A}$ . Por fim, dizemos que  $f \pitchfork \mathcal{W}$ , se  $f \pitchfork \mathcal{W}$  sobre  $X$ .*

Na definição anterior, tomaremos  $X = \mathbb{T}^{(t)}$ ,  $Y = J_t^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  e, para cada  $f \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ , consideraremos a aplicação  $j_t^1 f : \mathbb{T}^{(t)} \rightarrow J_t^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  que possui a mesma classe de diferenciabilidade de  $f$ .

Mostraremos no resultado seguinte que, quando tomamos  $\mathcal{W} = M_m$ ,  $m \in \{1, 2\}$ , o fato de  $j_t^1 f \pitchfork M_m$  acarreta que  $j_t^1 f(\mathbb{T}^{(t)}) \cap M_m = \emptyset$ . Em outras palavras, temos:

**Teorema 10.** *Suponhamos que  $j_t^1 f \pitchfork M_m$ ,  $m \in \{1, 2\}$ . Então,*

$$j_t^1 f(\mathbb{T}) \cap M_m = \emptyset,$$

*para cada  $m \in \{1, 2\}$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, observemos que para cada  $m \in \{1, 2\}$ , o Lema 9 assegura que o conjunto  $M_m$  tem estrutura de subvariedade de  $W$ . Uma vez

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

que  $W$  é um conjunto aberto na variedade  $J_t^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ , segue que qualquer  $M_m$  também é uma subvariedade dela.

Suponhamos, por absurdo, que  $j_t^1 f(\mathbf{s}) \in M_m$ , para algum  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_t)$  e para algum  $m \in \{1, 2\}$ . Então, baseando-nos na definição 19, podemos escrever

$$T_{j_t^1 f(\mathbf{s})} M_m + D [j_t^1 f(\mathbf{s})] \cdot T_{\mathbf{s}} \mathbb{T}^{(t)} = T_{j_t^1 f(\mathbf{s})} J_t^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$$

Por outro lado, sabemos que:

$$\dim (T_{j_t^1 f(\mathbf{s})} M_m + D [j_t^1 f(\mathbf{s})] \cdot T_{\mathbf{s}} \mathbb{T}^{(t)}) \leq \dim (T_{j_t^1 f(\mathbf{s})} M_m) + \dim (D [j_t^1 f(\mathbf{s})] \cdot T_{\mathbf{s}} \mathbb{T}^{(t)})$$

Como  $\dim (T_{j_t^1 f(\mathbf{s})} M_m) = \dim M_m$ , segue que  $\text{codim } M_m = \text{codim } (T_{j_t^1 f(\mathbf{s})} M_m)$ . Além disso, usando o fato que  $r \geq 2$ , podemos concluir que

$$\text{codim } M_m = t + r - 1 \geq t + 1 > t = \dim \mathbb{T}^{(t)}.$$

Dessa forma,  $\dim M_m + \dim \mathbb{T}^{(t)} < \dim M_m + \text{codim } M_m = \dim J_t^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ . Assim, lembrando que  $\dim (D [j_t^1 f(\mathbf{s})] \cdot T_{\mathbf{s}} \mathbb{T}^{(t)}) < \dim \mathbb{T}^{(t)}$ , verificamos que é impossível que  $T_{j_t^1 f(\mathbf{s})} M_m + D [j_t^1 f(\mathbf{s})] \cdot T_{\mathbf{s}} \mathbb{T}^{(t)} = T_{j_t^1 f(\mathbf{s})} J_t^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  e isso gera uma contradição com a nossa suposição inicial.  $\square$

De acordo com o resultado anterior, podemos concluir que o conjunto  $S_m$  das funções  $f \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  tais que  $j_t^1 f \pitchfork M_m$  tem a propriedade

$$j_t^1 f(\mathbb{T}^{(t)}) \cap M_m = \emptyset.$$

Além disso, lembrando que  $T_\omega = \left\{ f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2) \mid j_t^1 f(\mathbb{T}^{(t)}) \cap \Sigma = \emptyset \right\}$  e  $\Sigma \subset M_1 \cup M_2$ , podemos concluir que  $S_1 \cap S_2 \cap C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2) \subset T_\omega$ .

Portanto, se garantirmos que  $S_m$  seja residual em  $C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ , então concluiremos que  $S_m \cap C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  será residual em  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ , uma vez que esse último conjunto é um espaço de Baire. Como consequência,  $T_\omega$  conterá

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^{\infty}(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ . Essas afirmações serão garantidas pelo Teorema da Multitransversalidade de Thom (ver o Teorema 4.13, página 57, de [13]), cuja versão adaptada ao nosso caso enunciamos a seguir.

**Teorema 11.** *Seja  $M_m$  uma subvariedade de  $J_t^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ . Consideremos o conjunto*

$$S_m = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2) \mid j_t^1 f \pitchfork M_m\}$$

*Então,  $S_m$  é um subconjunto residual de  $C^{\infty}(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ .*

A primeira consequência do Teorema 11 é:

**Corolário 12.** *O conjunto  $T_{\omega}$  contém um subconjunto residual de  $C^{\infty}(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ .*

*Demonstração.* Basta combinarmos os comentários anteriores. □

Por fim, baseando-nos em todos os resultados já obtidos, podemos enunciar e demonstrar que:

**Corolário 13.** *O conjunto  $T'$  de todas as funções  $f \in C_{\text{emb}}^{\infty}(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ , tais que toda trajetória  $n$ -periódica de bilhar periódica e não-simétrica em  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  tem defeito zero, contém um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^{\infty}(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ .*

*Demonstração.* Fixemos um período  $n$  e consideremos todas as aplicações admissíveis (não-simétricas)  $\omega : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, t\}$ , com  $n \geq t$ . Da teoria apresentada na seção 3.1, sabemos que existe somente um número finito de padrões não-simétricos do tipo  $\omega$ . Além disso, baseando-nos no Corolário 12, podemos afirmar, para  $n > t$  e  $\omega^{-1}(1) = \{i_1, \dots, i_r\}$ , com  $i_1 = 1$ , que o conjunto  $T_{\omega}$  contém um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^{\infty}(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ . Dessa forma, quando  $\omega$  percorre todas as aplicações admissíveis (não-simétricas) citadas anteriormente, o conjunto  $\bigcap T_{\omega}$  tem a propriedade de conter também um conjunto aberto e denso em  $C_{\text{emb}}^{\infty}(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  e, portanto, residual.

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

Assim, dada uma aplicação  $f \in \bigcap T_\omega$ , sabemos que qualquer  $n$ -polígono em  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  que possui um ponto de reflexão múltiplo  $\omega$  é, muito raramente (no sentido da teoria de Baire), uma trajetória  $n$ -periódica de bilhar em  $\Gamma$ .

O raciocínio empregado no caso de múltiplas batidas é análogo. Para cada aplicação padrão  $\omega$  com  $q$  pontos de reflexão múltiplos, podemos mostrar que o conjunto  $T_\omega$  (associado a essa nova situação) contém um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ . Como a quantidade de pontos em que podem haver batidas múltiplas é sempre finita, segue que a quantidade de conjuntos  $T_\omega$  na situação anterior é finita. Assim, notamos que a interseção de todos os conjuntos  $T_\omega$ , associados a um único ou vários pontos de reflexão, é um subconjunto de  $T'$ , ou seja,  $T'$  possui um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ , o que prova o corolário.  $\square$

Para deixarmos a demonstração do Teorema A completa, consideraremos, agora, o caso em que o padrão  $\omega$  é classificado como simétrico. Com pequenas modificações nos argumentos já desenvolvidos, seremos capazes de verificar que o nosso resultado também é válido para esse caso.

Suponhamos, então, que  $\gamma$  seja uma trajetória de bilhar  $n$ -periódica e simétrica em  $\Gamma = f(\mathbb{T})$ ,  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ , que possui defeito positivo. Dessa forma, é possível encontrarmos uma aplicação sobrejetora simétrica

$$\omega : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, t\}$$

que descreve a maneira segundo a qual  $\gamma$  passa pelos seus pontos de reflexão. Já sabemos que, em aplicações desse tipo,  $n = 2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Por simplicidade, o raciocínio que será desenvolvido se aplica para o caso de um ponto de reflexão múltiplo. Para os demais casos, podemos empregar um argumento similar ao que foi descrito para padrões não-simétricos. Além disso, podemos selecionar um padrão simétrico  $\omega$  apropriado de tal maneira que  $i_0 = 1$ , ou seja, a condição

$$\{\omega(i), \omega(i+1)\} \neq \{\omega(j), \omega(j+1)\}, \quad \forall 1 \leq i < j \leq 1+m$$

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

sempre é verdadeira e  $\omega(1 + m + i) = \omega(1 + m - i)$ , com  $i = 1, 2, \dots, m - 1$ . Ela nos garante que os trechos de segmentos geodésicos ligando os pontos  $y_{\omega(i)}$  e  $y_{\omega(i+1)}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , são todos distintos.

Com o intuito de clarear as ideias dos últimos parágrafos, consideremos a trajetória de bilhar 10-periódica dada pela figura a seguir.

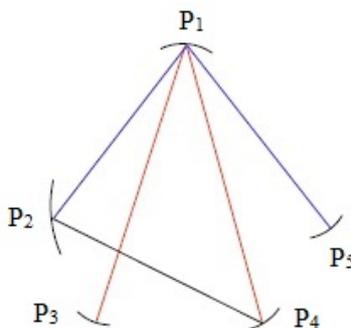


Figura 3.4: Exemplo de uma trajetória de bilhar 10-periódica.

Podemos observar que um exemplo de padrão  $\omega$  para ela é:

$$\begin{aligned} \omega(1) = 3 \quad \omega(3) = 4 \quad \omega(5) = 1 \quad \omega(7) = 1 \quad \omega(9) = 4 \\ \omega(2) = 1 \quad \omega(4) = 2 \quad \omega(6) = 5 \quad \omega(8) = 2 \quad \omega(10) = 1 \end{aligned}$$

Observemos que, para o padrão anterior, poderíamos tomar  $i_0 = 1$  ou 6. Como a trajetória  $\gamma$  de nosso exemplo tem defeito positivo, segue que, ao percorrermos uma vez os segmentos geodésicos distintos dela, pelo menos um ponto de reflexão dessa trajetória será atravessado mais de uma vez. De acordo com a Figura 3.4, podemos escrever:

$$\text{card}(\omega^{-1}(1) \cap \{1, 2, \dots, 6\}) > 1$$

De forma geral, se  $\gamma$  é uma trajetória de bilhar  $n$ -periódica, simétrica e com defeito positivo em  $\Gamma$ , então existe  $j_0 \in \{1, 2, \dots, t\}$  tal que

$$r = \text{card}(\omega^{-1}(j_0) \cap \{1, 2, \dots, m + 1\}) > 1, \quad (3.4)$$

### 3.3 Demonstração do Teorema A

---

ou seja,  $\omega^{-1}(j_0) \cap \{1, 2, \dots, m+1\} = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ .

Fixemos uma aplicação  $\omega$  simétrica satisfazendo a condição (3.4). Para cada coleção de  $t$  pontos distintos dados em  $\Gamma = f(\mathbb{T})$ , podemos criar um  $n$ -polígono em  $Q$  com pontos de reflexão nesses pontos. Assim como foi feito no caso não-simétrico, podemos definir um conjunto similar ao conjunto  $T_\omega$ , cujos elementos são todas as funções  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  que atendem a seguinte condição: para cada  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_t) \in \mathbb{T}^{(t)}$  com  $f^t(\mathbf{s}) \in U_\omega$  e  $\frac{\partial}{\partial u_i} H_\omega = 0$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, t\}$ ,  $i \neq j_0$ , sempre existe pelo menos um  $l \in \{1, \dots, r\}$  tal que  $\vec{\eta}_a + \vec{\eta}_b$  não está na direção de  $\vec{t}_{P_{j_0}}$ , em que  $a = \omega(i_l - 1)$ ,  $b = \omega(i_l + 1)$  e  $j_0 = \omega(i_l)$ .

Faremos os comentários gerais sobre a demonstração para o caso simétrico, baseando-nos no exemplo do 10 - polígono dado pela Figura 3.4. A construção do conjunto similar ao conjunto  $T_\omega$  nos garante, novamente, que o polígono obtido ligando os pontos  $P_i$  e  $P_{i+1}$  é um polígono geodesicamente convexo com 5 vértices. Além disso, excetuando as sequências ordenadas (por  $\omega$ ) de três pontos

$$P_3, P_1 \text{ e } P_4, \quad P_2, P_1 \text{ e } P_5, \quad P_5, P_1 \text{ e } P_2 \text{ e } P_4, P_1 \text{ e } P_3,$$

todas as demais sequências ordenadas de três pontos constituem trechos consecutivos de uma trajetória de bilhar. Ademais, como  $\omega^{-1}(1) = \{2, 5, 7, 10\}$ , segue que os vetores  $\pm(\vec{\eta}_3 + \vec{\eta}_4)$  e  $\pm(\vec{\eta}_2 + \vec{\eta}_5)$  não estão na direção de  $\vec{t}_{P_1}$ .

Por fim, podemos construir um conjunto similar ao conjunto  $\Sigma$ , isto é, o conjunto de todos os multijatos

$$\tau = (j^1 f_1(s_1), \dots, j^1 f_t(s_t)) \in W$$

que satisfazem as condições:

1.  $\frac{\partial}{\partial u_i} H_\omega = 0$ , para cada  $i \in \{1, \dots, t\}$ ,  $i \neq j_0$ ;
2. Para cada  $l \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\langle \vec{\eta}_a + \vec{\eta}_b, \vec{n}_{f_{j_0}(s_{j_0})} \rangle = 0$ , em que  $a = \omega(i_l - 1)$ ,  $b = \omega(i_l + 1)$  e  $j_0 = \omega(i_l)$ .

### 3.4 Teorema B

---

Utilizando os mesmos argumentos de transversalidade que foram descritos no caso não-simétrico, é possível verificarmos que o análogo do conjunto  $T_\omega$  construído para esse caso contém um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ , ou seja, novamente ser uma trajetória de bilhar  $n$ -periódica, simétrica e com defeito positivo é um caso raro de se ocorrer.

Potanto, se  $T''$  indica o conjunto de todas as aplicações  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  tais que toda trajetória de bilhar  $n$ -periódica e simétrica em  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  tem defeito, então  $\bigcap T_\omega \subset T''$ , fato que comprova que ele contém um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ . Além disso,  $T' \cap T'' \subset \mathcal{A}$ . Assim, a prova do nosso Teorema A fica completa.

### 3.4 Teorema B

O segundo e último resultado que apresentaremos nesta tese de doutorado tem sua prova fundamentada em uma adaptação dos argumentos já utilizados anteriormente. De forma superficial, ele nos diz que, genericamente, duas trajetórias distintas de bilhar em  $\Gamma = \partial Q$  com o mesmo período não possuem nenhum ponto de reflexão em comum.

**Teorema B.** *Seja  $\mathcal{B}$  o conjunto de todas as funções  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  tais que  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  é uma curva simples, fechada, com curvatura geodésica estritamente positiva, bordo de um domínio  $Q \subset \mathbb{H}^2$  geodesicamente estritamente convexo. Suponhamos ainda que, fixado  $n$ , duas trajetórias  $n$ -periódicas de bilhar em  $\Gamma$  não possuam pontos de reflexão em comum. Então,  $\mathcal{B}$  contém um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ .*

Inicialmente, suponhamos que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sejam duas trajetórias  $n$ -periódicas de bilhar distintas em  $\Gamma = f(\mathbb{T})$ , com  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ . Denotemos por  $y_1, \dots, y_k$  os  $k$  pontos distintos de reflexão, tomados em conjunto, de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Então, existem duas aplicações padrões

$$\omega, \delta : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, k\}$$

### 3.4 Teorema B

---

que descrevem as maneiras, segundo as quais, as trajetórias  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , nessa ordem, passam através dos seus pontos de reflexão em  $\Gamma$ . Além disso, elas satisfazem as seguintes condições:

- (i)  $\text{Im } \omega \cup \text{Im } \delta = \{1, \dots, k\}$ ;
- (ii)  $\{\omega(i), \omega(i+1)\} \neq \{\delta(j), \delta(j+1)\}$ , para cada  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

A interpretação da primeira condição é imediata. Já a segunda nos garante que  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , sendo trajetórias  $n$ -periódicas de bilhar distintas em  $\Gamma$ , não possuem segmentos geodésicos em comum.

Apropriaremos da notação e nomenclatura já utilizadas em [21], isto é, a quádrupla  $\Lambda = (n, k, \omega, \delta)$  atendendo as condições anteriores será denominada de configuração e o par  $(\gamma_1, \gamma_2)$  será considerado do tipo  $\Lambda$ .

Para um par nessa situação, a  $k$ -upla  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k) \in U_\omega \cap U_\delta$ . Além disso,

$$H_\omega(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n g(y_{\omega(i)}, y_{\omega(i+1)}) \quad \text{e} \quad H_\delta(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n g(y_{\delta(i)}, y_{\delta(i+1)}) \quad (3.5)$$

indicam os perímetros geodésicos das trajetórias  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , respectivamente.

De maneira similar a que foi feita na demonstração do Teorema A, basta entendermos o caso em que há, exatamente, um ponto de reflexão em comum entre as trajetórias. Sem perda de generalidade, assumiremos que

$$\omega(1) = \delta(1) = 1, \quad (3.6)$$

ou seja,  $y_1$  é esse tal ponto.

As afirmações (I), (II) e (III) feitas no início da seção 3.3 podem ser adaptadas para esse caso da seguinte maneira:

- (1) Existe  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{T}^{(k)}$  tal que  $\mathbf{y} = f^k(\mathbf{s}) \in U_\omega \cap U_\delta$ ;

### 3.4 Teorema B

---

- (2)  $\frac{\partial}{\partial u_i} H_\omega (f \circ \Psi^{-1}(u_1), \dots, f \circ \Psi^{-1}(u_k)) = 0, \forall i \in \{1, \dots, k\}$  e, em particular, para os índices  $i$  tais que  $f(s_i)$  é um ponto de reflexão de  $\gamma_1$ . A mesma afirmação continua válida se trocarmos  $\omega$  por  $\delta$  e  $\gamma_1$  por  $\gamma_2$ ;
- (3) Denotemos por  $\vec{\eta}_{\omega(k)}$  e  $\vec{\eta}_{\omega(2)}$ , em  $T_{f(s_1)}\mathbb{H}^2$ , as direções tangentes às geodésicas minimizantes que ligam os pontos  $y_{\omega(k)}$  a  $y_1$  e  $y_1$  a  $y_{\omega(2)}$ , nessa ordem. Façamos a mesma notação trocando  $\omega$  por  $\delta$ . Como  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são trajetórias  $n$ -periódicas de bilhar, segue que tanto  $\vec{\eta}_{\omega(k)} + \vec{\eta}_{\omega(2)}$  quanto  $\vec{\eta}_{\delta(k)} + \vec{\eta}_{\delta(2)}$  estão na direção de  $\vec{t}_{f(s_1)} = f'(s_1)$ .

Consideremos a função  $F : \mathbb{T}^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(\mathbf{y}) = H_\omega(\mathbf{y}) + H_\delta(\mathbf{y}) \quad (3.7)$$

Segue, como consequência imediata do item (2), que:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} F (f \circ \Psi^{-1}(u_1), \dots, f \circ \Psi^{-1}(u_k)) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Em particular,  $\frac{\partial}{\partial u_i} F (f \circ \Psi^{-1}(u_1), \dots, f \circ \Psi^{-1}(u_k)) = 0, \forall i \in \{2, \dots, k\}$ .

Os mesmos argumentos utilizados na demonstração do Teorema A serão usados na verificação do Teorema B com a ligeira mudança da aplicação  $H_\omega$  pela aplicação  $F$ . Revisitaremos as principais passagens ali desenvolvidas comentando, sempre que necessário, as mudanças efetuadas.

Além disso, os passos da demonstração serão delineados para o caso em que as trajetórias  $n$ -periódicas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  com pontos de reflexão em  $\Gamma$  são não-simétricas. Para o caso simétrico ou o caso misto (uma não-simétrica e a outra simétrica), a estratégia da demonstração é similar à estratégia que descreveremos a seguir.

*Demonstração do Teorema B.* Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  dois  $n$ -polígonos distintos em  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  que não possuem segmentos geodésicos em comum e que não percorrem mais de uma vez, em seu período fundamental, um mesmo trecho de segmento geodésico.

### 3.4 Teorema B

---

Podemos expressar essas condições por meio da existência de duas aplicações  $\omega, \delta : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, k\}$  que satisfazem as condições **(i)** e **(ii)** e tais que,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , temos:

**(a)**  $\omega(i) \neq \omega(i+1)$  e  $\delta(i) \neq \delta(i+1)$ ;

Alem disso, para cada  $1 \leq i < j \leq n$ , são verdadeiras:

**(b)**  $\{\omega(i), \omega(i+1)\} \neq \{\omega(j), \omega(j+1)\}$  e  $\{\delta(i), \delta(i+1)\} \neq \{\delta(j), \delta(j+1)\}$ .

Denotemos por  $\mathcal{B}_\Lambda$  o conjunto das funções  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  que satisfazem a seguinte condição: se  $\mathbf{s} \in \mathbb{T}^{(k)}$  é tal que  $\frac{\partial}{\partial u_i} H_\omega = 0, \forall i \in \{1, \dots, k\}$ , com  $f^k(\mathbf{s}) \in U_\omega \cap U_\delta$  e  $\frac{\partial}{\partial u_i} F = 0, \forall i \in \{2, \dots, k\}$ , então ou  $\vec{\eta}_{\omega(k)} + \vec{\eta}_{\omega(2)}$  ou  $\vec{\eta}_{\delta(k)} + \vec{\eta}_{\delta(2)}$  não está na direção de  $\vec{t}_{f(s_1)} = f'(s_1)$ .

Vamos descrever, geometricamente, o significado do conjunto  $\mathcal{B}_\Lambda$ . Seja  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  uma curva desse conjunto e tomemos uma coleção de  $k$  pontos sobre ela.

1. Toda vez que os sucessivos pontos de reflexão  $y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(n)}$  do  $n$ -polígono ordenado por  $\omega$  forem uma trajetória de bilhar sem a ocorrência de pontos múltiplos de reflexão, então os sucessivos pontos de reflexão  $y_{\delta(1)}, \dots, y_{\delta(n)}$  do  $n$ -polígono ordenado por  $\delta$  não podem representar uma trajetória  $n$ -periódica de bilhar em  $\Gamma$ ;
2. Excetuando a sequência ordenada de pontos  $y_{\delta(n)}, y_1$  e  $y_{\delta(2)}$ , todas as demais sequências ordenadas por  $\delta$  constituem trechos de trajetórias de bilhar.

Na descrição dada anteriormente, podemos supor que ambos os  $n$ -polígonos não possuem pontos múltiplos de reflexão, uma vez que  $C^\infty$  genericamente, é muito raro que eles representem uma trajetória  $n$ -periódica de bilhar, conforme já foi provado no Teorema A.

Notemos que  $\bigcap_{\Lambda} \mathcal{B}_\Lambda \subset \mathcal{B}$ , em que  $\mathcal{B}$  é o conjunto definido no enunciado do Teorema B e  $\Lambda$  percorre todas as configurações que satisfazem a condição

### 3.4 Teorema B

---

(3.6). Dessa forma, nosso trabalho se reduz a mostrar que  $\mathcal{B}_\Lambda$  contém um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ . É isso que desenvolveremos no texto descrito a seguir.

Fixemos uma configuração  $\Lambda = (n, k, \omega, \delta)$  com  $\omega$  e  $\delta$  satisfazendo (3.6), (i), (ii), (a) e (b). Sejam  $H_\omega$ ,  $H_\delta$  e  $F$  as funções definidas em (3.5) e (3.7). Para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , definiremos os conjuntos

$$\mathcal{U}_i = \left\{ (y_1, \dots, y_k) \in U_\omega \cap U_\delta \mid \left( \frac{\partial}{\partial v_i^{(1)}} F, \frac{\partial}{\partial v_i^{(2)}} F \right) \neq \vec{0} \right\}$$

e  $\tilde{\mathcal{U}} = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{U}_i$ .

Observemos que cada  $\mathcal{U}_i$  é um conjunto aberto de  $U_\omega \cap U_\delta$  e, consequentemente,  $\tilde{\mathcal{U}}$  também o é. Além disso, se  $i \notin \text{Im } \omega \cap \text{Im } \delta$ , então  $y_i$  é, exclusivamente, um ponto de reflexão do  $n$ -polígono ordenado por  $\omega$  ou por  $\delta$ . Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $y_i$  seja ponto de reflexão do  $n$ -polígono ordenado por  $\omega$ . Dessa forma,

$$\left( \frac{\partial}{\partial v_i^{(1)}} F, \frac{\partial}{\partial v_i^{(2)}} F \right) = \left( \frac{\partial}{\partial v_i^{(1)}} H_\omega, \frac{\partial}{\partial v_i^{(2)}} H_\omega \right)$$

que é um vetor não nulo pelo Lema 8. Portanto,  $\mathcal{U}_i = U_\omega \cap U_\delta$ , toda vez que  $i \notin \text{Im } \omega \cap \text{Im } \delta$ .

Denotemos por  $T_\Lambda$  o conjunto de todas as funções  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  tais que para todo  $\mathbf{s} \in \mathbb{T}^{(k)}$  com  $f^k(\mathbf{s}) \in \tilde{\mathcal{U}}$  e  $\frac{\partial}{\partial u_i} F = 0$ ,  $i \in \{2, \dots, k\}$ , a condição  $\vec{\eta}_{\omega^{(k)}} + \vec{\eta}_{\omega^{(2)}}$  ou  $\vec{\eta}_{\delta^{(k)}} + \vec{\eta}_{\delta^{(2)}}$  estar na direção de  $\vec{t}_{f(s_1)} = f'(s_1)$  não é satisfeita.

**Lema 14.** *O conjunto  $T_\Lambda$  contém um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ .*

*Demonstração.* A demonstração desse lema usa argumentos similares aos argumentos utilizados na prova do Corolário 12. Comentaremos, em linhas gerais, os passos que levam a justificativa desse resultado:

1. Construir uma variedade  $W_\Lambda$  similar à variedade  $W$  construída nas preliminares da demonstração do Teorema A;

### 3.4 Teorema B

---

2. Definir, inicialmente, o conjunto de multijatos  $\Sigma_\Lambda \subset W_\Lambda$ , similar ao conjunto  $\Sigma$  da seção 3.3, que satisfaz a condição: se  $\mathbf{s} \in \mathbb{T}^{(k)}$ , com  $f^k(\mathbf{s}) \in \tilde{\mathcal{U}}$  e  $\frac{\partial}{\partial u_i} F = 0$ , para cada  $i \in \{2, \dots, k\}$ , então  $\vec{\eta}_{\omega(k)} + \vec{\eta}_{\omega(2)}$  e  $\vec{\eta}_{\delta(k)} + \vec{\eta}_{\delta(2)}$  sempre estão na direção de  $\vec{t}_{f(s_1)} = f'(s_1)$ ;
3. Observar que  $T_\Lambda \cap \Sigma_\Lambda = \emptyset$ ;
4. Considerar uma vizinhança coordenada  $\Omega_\Lambda$  de um multijato  $\tau_\Lambda \in \Sigma_\Lambda$  e uma carta local  $\Theta_\Lambda$  da forma  $\xi_\Lambda = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{A})$ ;
5. Construir as aplicações auxiliares

$$(a) \quad b_p^\Lambda(\xi_\Lambda) = \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial v_p^{(1)}} F, \frac{\partial}{\partial v_p^{(2)}} F \right), \left( a_p^{(1)}, a_p^{(2)} \right) \right\rangle, \text{ para } p = 2, \dots, k;$$

$$(b) \quad d_\omega^{(m)}(\xi_\Lambda) = \langle \langle \vec{\eta}_{\omega(k)} + \vec{\eta}_{\omega(2)}, \vec{n}_{f_1(s_1)} \rangle \vec{n}_{f_1(s_1)}, \vec{e}_m \rangle, \text{ para } m = 1 \text{ ou } 2;$$

$$(c) \quad d_\delta^{(m)}(\xi_\Lambda) = \langle \langle \vec{\eta}_{\delta(k)} + \vec{\eta}_{\delta(2)}, \vec{n}_{f_1(s_1)} \rangle \vec{n}_{f_1(s_1)}, \vec{e}_m \rangle, \text{ para } m = 1 \text{ ou } 2;$$

6. Criar a aplicação

$$K_\Lambda(\xi_\Lambda) = \left( b_p^\Lambda(\xi_\Lambda), d_\omega^{(m)}(\xi_\Lambda), d_\delta^{(m)}(\xi_\Lambda) \right),$$

com  $p = 2, \dots, k$  e  $m = 1$  ou  $2$ ;

7. Usar as definições de  $\Sigma_\Lambda$  e  $K_\Lambda$  e perceber, assim como ocorreu na seção 3.3, que  $O_{m_0} \cap \Theta(\Omega_\Lambda \cap \Sigma_\Lambda) \subset K_\Lambda^{-1}(0)$ ;
8. Verificar que  $K_\Lambda$  é uma submersão por meio da independência linear dos vetores  $\vec{\nabla} b_p^\Lambda$ ,  $\vec{\nabla} d_\omega^{(m)}$  e  $\vec{\nabla} d_\delta^{(m)}$ , isto é, verificando que a equação vetorial

$$\sum_{p=2}^k B_p^\Lambda \vec{\nabla} b_p^\Lambda + D_\omega^{(m)} \vec{\nabla} d_\omega^{(m)} + D_\delta^{(m)} \vec{\nabla} d_\delta^{(m)} = \vec{0}$$

só admite a solução trivial  $B_p^\Lambda = D_\omega^{(m)} = D_\delta^{(m)} = 0$ ,  $p = 2, \dots, k$  e  $m$  fixado igual a 1 ou 2;

9. Perceber que a verificação relativa aos coeficientes  $B_p^\Lambda$  segue os mesmos moldes da seção 3.3, ou seja, atentando-nos apenas para as componentes do vetor  $\vec{\nabla} b_p^\Lambda$  associadas às derivadas parciais  $\frac{\partial}{\partial a_p^{(j)}} b_p^\Lambda(\xi)$ ,  $j = 1, 2$ .

### 3.4 Teorema B

---

Uma vez que  $f^k(\mathbf{s}) \in \tilde{\mathcal{U}}$ , podemos concluir que  $\frac{\partial}{\partial v_p^{(j)}} F \neq 0$ , para cada  $p = 2, \dots, k$  e para  $j = 1$  ou  $2$ , e, assim,  $B_p^\Lambda = 0$ ;

10. Notar que os cálculos relativos aos coeficientes  $D_\omega^{(m)}$  e  $D_\delta^{(m)}$  são análogos aos cálculos desenvolvidos na seção 3.3, trocando-se o índice “ $a$ ” por  $\omega(k)$  e  $\delta(k)$ , respectivamente;
11. Observar a existência de duas subvariedades  $M_m^\Lambda$  de  $W_\Lambda$ ,  $m = 1$  ou  $2$ , que possuem a mesma codimensão, a saber,  $k + 1$ . Aplicar um argumento similar ao argumento presente no Teorema 10 e nos comentários subsequentes a ele, juntamente com o Teorema 11 (trocando-se  $t$  por  $k$ ) para concluir que  $T_\Lambda$  contém um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ .

□

Além disso, para  $i \in \text{Im } \omega \cap \text{Im } \delta$ , denotemos por  $T_i$  o conjunto de todas as funções  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  tais que, se  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{T}^{(k)}$  é tal que  $\frac{\partial}{\partial u_j} H_\omega = 0$ , para todo  $j \in \{1, \dots, k\}$  e  $f^k(\mathbf{s}) \in U_\omega \cap U_\delta$ , então  $f^k(\mathbf{s}) \in \mathcal{U}_i$ . Grosseiramente falando, se  $f \in T_i$ , então  $\Gamma = f(\mathbb{T})$  representa uma curva na qual os pontos  $y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(n)}$ , com  $\mathbf{y} = f^k(\mathbf{s})$ , são os sucessivos pontos de reflexão de uma trajetória de bilhar ordenada pelo padrão  $\omega$ . O mesmo não ocorre para o padrão  $\delta$ , já que  $f^k(\mathbf{s}) \in \mathcal{U}_i$  acarreta  $\frac{\partial}{\partial u_i} H_\delta \neq 0$ .

Afirmamos que

$$\bigcap_{i \in \text{Im } \omega \cap \text{Im } \delta} T_i \cap T_\Lambda \subset \mathcal{B}_\Lambda.$$

De fato, suponhamos que  $f$  seja um elemento do conjunto à esquerda do símbolo de inclusão, com  $\frac{\partial}{\partial u_i} H_\omega = 0$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $f^k(\mathbf{s}) \in U_\omega \cap U_\delta$  e  $\frac{\partial}{\partial u_j} F = 0$ , para  $j \in \{2, \dots, k\}$ .

Lembre-mo-nos que se  $i \notin \text{Im } \omega \cap \text{Im } \delta$ , então  $\mathcal{U}_i = U_\omega \cap U_\delta$ . Por outro lado, o fato de  $f \in T_i$ , para cada  $i \in \text{Im } \omega \cap \text{Im } \delta$ , acarreta que sempre  $f^k(\mathbf{s}) \in \mathcal{U}_i \subset U_\omega \cap U_\delta$ . Portanto,  $f^k(\mathbf{s}) \in \mathcal{U}_i$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ , e assim,  $f^k(\mathbf{s}) \in \tilde{\mathcal{U}}$ .

### 3.4 Teorema B

---

Além disso, como  $f \in T_\Lambda$ , segue que a condição de  $\vec{\eta}_{\omega(k)} + \vec{\eta}_{\omega(2)}$  ou  $\vec{\eta}_{\delta(k)} + \vec{\eta}_{\delta(2)}$  estar na direção de  $\vec{t}_{f(s_1)} = f'(s_1)$  não é satisfeita. Portanto,  $f \in \mathcal{B}_\Lambda$ .

Baseando-nos no que foi descrito no último parágrafo, percebemos que o Teorema B estará demonstrado se provarmos que  $T_i$  contém um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ , para cada  $i \in \text{Im } \omega \cap \text{Im } \delta$ .

Para isto, consideraremos a aplicação  $L : U_\omega \cap U_\delta \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$L(\mathbf{y}) = \left( \frac{\partial}{\partial v_i^{(1)}} H_\omega(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial v_i^{(1)}} H_\delta(\mathbf{y}), \frac{\partial}{\partial v_i^{(2)}} H_\omega(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial v_i^{(2)}} H_\delta(\mathbf{y}) \right) \quad (3.8)$$

Observemos que, para  $f \in T_i$ , sempre temos  $f^k(\mathbf{s}) \in \mathcal{U}_i$ , isto é, a  $k$ -upla  $(f(s_1), \dots, f(s_k))$  é tal que

$$\left( \frac{\partial}{\partial v_i^{(1)}} F(\mathbf{y}), \frac{\partial}{\partial v_i^{(2)}} F(\mathbf{y}) \right) \neq \vec{0}.$$

Assim,  $L(f^k(\mathbf{s})) \neq \vec{0}$ . Outra condição especial que a função  $L$  satisfaz é não possuir pontos críticos em  $U_\omega \cap U_\delta$ , conforme está descrito no lema a seguir.

**Lema 15.** *Seja  $L$  a função definida em (3.8). Então,*

$$DL(\mathbf{y}) \neq \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{y} \in U_\omega \cap U_\delta.$$

*Demonstração.* Suponhamos, por absurdo, que exista  $\mathbf{y} \in U_\omega \cap U_\delta$  tal que  $DL(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ . Recordemos que, para cada  $j \in \{1, 2\}$ , a componente  $j$  de  $L$  é dada por:

$$\begin{aligned} L^{(j)} &= \frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}} H_\omega(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}} H_\delta(\mathbf{y}) \\ &= \sum_{q \in I_i(\omega)} \frac{-p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, y_q\right)}{\sinh g(y_i, y_q)} + \sum_{q \in I_i(\delta)} \frac{-p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, y_q\right)}{\sinh g(y_i, y_q)}, \end{aligned}$$

em que  $\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}$  indica a  $j$ -ésima direção principal em  $T_{y_i} \mathbb{H}^2$ . Dessa maneira, a

### 3.4 Teorema B

---

suposição  $DL(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$  para algum  $\mathbf{y} \in U_\omega \cap U_\delta$  acarreta, para  $j = 1$  ou  $2$ , que  $\frac{\partial}{\partial v_i^{(1)}} L^{(j)} = \frac{\partial}{\partial v_i^{(2)}} L^{(j)} = 0, \forall i = 1, \dots, k$ .

Se considerarmos  $\mathfrak{q} \in I_i(\omega)$ , então a condição (ii) do início dessa seção nos garante que  $\mathfrak{q} \notin I_i(\delta)$ . Isso nos sugere calcular a derivada parcial de  $L^{(j)}$  em relação à variável  $v_{\mathfrak{q}}^{(t)}$ , uma vez que  $\frac{\partial}{\partial v_{\mathfrak{q}}^{(t)}} \sum_{q \in I_i(\delta)} \frac{-p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^j}, y_q\right)}{\sinh g(y_i, y_q)} = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_{\mathfrak{q}}^{(t)}} L^{(j)} &= \frac{\partial}{\partial v_{\mathfrak{q}}^{(t)}} \sum_{q \in I_i(\omega)} \frac{-p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^j}, y_q\right)}{\sinh g(y_i, y_q)} \\ &= \frac{\partial}{\partial v_{\mathfrak{q}}^{(t)}} \left[ \frac{-p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^j}, y_{\mathfrak{q}}\right)}{\sinh g(y_i, y_{\mathfrak{q}})} \right] \end{aligned}$$

Aplicando a regra do quociente nessa última expressão, percebemos que

$$\frac{\partial}{\partial v_{\mathfrak{q}}^{(t)}} L^{(j)} = \frac{\partial}{\partial v_{\mathfrak{q}}^{(t)}} \left[ \frac{-p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^j}, y_{\mathfrak{q}}\right)}{\sinh g(y_i, y_{\mathfrak{q}})} \right] = -\frac{A - B}{C}, \text{ com}$$

$$A = \left[ p\left(\frac{\partial}{\partial v_{\mathfrak{q}}^{(t)}} \left[ \frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}} \right], y_{\mathfrak{q}}\right) + p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, \frac{\partial}{\partial v_{\mathfrak{q}}^{(t)}}\right) \right] \cdot \sinh g(y_i, y_{\mathfrak{q}}),$$

$$B = p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, y_{\mathfrak{q}}\right) \cdot \cosh g(y_i, y_{\mathfrak{q}}) \cdot \left[ \frac{-p\left(\frac{\partial}{\partial v_{\mathfrak{q}}^{(t)}}, y_i\right)}{\sinh g(y_i, y_{\mathfrak{q}})} \right] \text{ e}$$

$$C = \sinh^2 g(y_i, y_{\mathfrak{q}})$$

A direção principal  $\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}$  em  $T_{y_i} \mathbb{H}^2$  depende, exclusivamente, de  $y_i$ . Então,

$$p\left(\frac{\partial}{\partial v_{\mathfrak{q}}^{(t)}} \left[ \frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}} \right], y_{\mathfrak{q}}\right) = 0$$

De modo que,

### 3.4 Teorema B

---

$$\frac{\partial}{\partial v_q^{(t)}} L^{(j)} = \frac{-p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, \frac{\partial}{\partial v_q^{(t)}}\right) \cdot \sinh^2 g(y_i, y_q) + p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, y_q\right) \cdot \cosh g(y_i, y_q) \cdot \left[-p\left(\frac{\partial}{\partial v_q^{(t)}}, y_i\right)\right]}{\sinh^3 g(y_i, y_q)}$$

Denotemos por  $\vec{\eta}_q$  a projeção ortogonal, em  $T_{y_i}\mathbb{H}^2$ , do vetor  $y_q$ . Dessa maneira, podemos escrever:

$$\cosh g(y_i, y_q) = -p(y_i, y_q), p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, y_q\right) = p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, \vec{\eta}_q\right) \text{ e } p(\vec{\eta}_q, \vec{\eta}_q) = \sinh^2 g(y_i, y_q)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_q^{(t)}} L^{(j)} &= \frac{-p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, \frac{\partial}{\partial v_q^{(t)}}\right) \cdot p(\vec{\eta}_q, \vec{\eta}_q) + p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, \vec{\eta}_q\right) \cdot [-p(y_i, y_q)] \cdot \left[-p\left(\frac{\partial}{\partial v_q^{(t)}}, y_i\right)\right]}{\sinh^3 g(y_i, y_q)} \\ &= \frac{-p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, \frac{\partial}{\partial v_q^{(t)}}\right) \cdot p(\vec{\eta}_q, \vec{\eta}_q) + p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, \vec{\eta}_q\right) \cdot \left[p\left(\frac{\partial}{\partial v_q^{(t)}}, p(y_i, y_q)y_i\right)\right]}{\sinh^3 g(y_i, y_q)} \end{aligned}$$

Lembrando que  $\vec{\eta}_q = y_q + p(y_i, y_q)y_i$  e  $p\left(y_q, \frac{\partial}{\partial v_q^{(t)}}\right) = 0$ , podemos reescrever a expressão anterior da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_q^{(t)}} L^{(j)} &= \frac{p\left(-p(\vec{\eta}_q, \vec{\eta}_q) \frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, \frac{\partial}{\partial v_q^{(t)}}\right) + p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, \vec{\eta}_q\right) \cdot \left[p\left(\frac{\partial}{\partial v_q^{(t)}}, \vec{\eta}_q\right)\right]}{\sinh^3 g(y_i, y_q)} \\ &= \frac{p\left(-p(\vec{\eta}_q, \vec{\eta}_q) \frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}} + p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, \vec{\eta}_q\right) \vec{\eta}_q, \frac{\partial}{\partial v_q^{(t)}}\right)}{\sinh^3 g(y_i, y_q)} \end{aligned}$$

Primeiramente, observemos que o vetor

$$-p(\vec{\eta}_q, \vec{\eta}_q) \frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}} + p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, \vec{\eta}_q\right) \vec{\eta}_q \in T_{y_i}\mathbb{H}^2,$$

### 3.4 Teorema B

---

uma vez que ele é combinação linear de vetores desse espaço vetorial. Por absurdo, estamos supondo que existe pelo menos um  $\mathbf{y} \in U_\omega \cap U_\delta$  tal que  $DL(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ . Em particular, para esse  $\mathbf{y}$  e cada  $j, t \in \{1, 2\}$ , temos  $\frac{\partial}{\partial v_q^{(t)}} L^{(j)} = 0$ . Assim, fixando um  $j$  e tomando  $t = 1$  e  $2$ , observamos que essa última condição nos garante que o vetor dado anteriormente é ortogonal às direções principais  $\frac{\partial}{\partial v_q^{(t)}}$ , isto é, ele é um vetor paralelo ao vetor  $y_q$ .

Fixando nossa atenção no vetor  $y_q \in \mathbb{H}^2$ , verificamos que, à priori, só existem duas possibilidades: ou o vetor  $y_q \in T_{y_i} \mathbb{H}^2$  ou não. Da primeira possibilidade, segue que sua projeção ortogonal sobre  $T_{y_i} \mathbb{H}^2$  é ele próprio, ou seja,  $\vec{\eta}_q = y_q$ . Dessa forma, podemos escrever:

$$-p(y_q, y_q) \frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}} + p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, y_q\right) y_q = \alpha_j y_q,$$

para algum  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ . Essa igualdade só pode ser verificada se  $\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}$  for paralelo ao vetor  $y_q$ , isto é,  $\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}} = \beta_j y_q$ , para algum  $\beta_j \in \mathbb{R}$ , com  $j = 1$  ou  $2$ . Contudo, isso acarreta em uma contradição, uma vez que  $\left\{ \frac{\partial}{\partial v_i^{(1)}}, \frac{\partial}{\partial v_i^{(2)}} \right\}$  é uma base de  $T_{y_i} \mathbb{H}^2$  e, em particular, um conjunto linearmente independente. Portanto, essa possibilidade não pode acontecer.

Da segunda possibilidade, assumimos que  $y_q \notin T_{y_i} \mathbb{H}^2$ . Uma vez que, para cada  $j = 1$  ou  $2$ , o vetor

$$-p(\vec{\eta}_q, \vec{\eta}_q) \frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}} + p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, \vec{\eta}_q\right) \vec{\eta}_q \in T_{y_i} \mathbb{H}^2,$$

concluimos que ele é o vetor nulo de  $T_{y_i} \mathbb{H}^2$ , já que o vetor nulo é o único de  $T_{y_i} \mathbb{H}^2$  que atende a condição de ser paralelo ao vetor  $y_q$ . Dessa forma, se  $\left\{ \frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, \vec{\eta}_q \right\}$  é um conjunto linearmente independente para  $j = 1$  e  $2$ , então  $p(\vec{\eta}_q, \vec{\eta}_q) = p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, \vec{\eta}_q\right) = 0$ . Por outro lado, se  $\left\{ \frac{\partial}{\partial v_i^{(j)}}, \vec{\eta}_q \right\}$  é um conjunto linearmente dependente para algum  $j = 1$  ou  $2$ , digamos  $j = 1$ ,

### 3.4 Teorema B

---

então  $\left\{ \frac{\partial}{\partial v_i^{(2)}}, \vec{\eta}_q \right\}$  é um conjunto linearmente independente e, novamente,  $p(\vec{\eta}_q, \vec{\eta}_q) = p\left(\frac{\partial}{\partial v_i^{(2)}}, \vec{\eta}_q\right) = 0$ . Em qualquer caso, isso nos mostra que  $p(\vec{\eta}_q, \vec{\eta}_q) = 0$ .

Fazendo os cálculos necessários, obtemos:

$$\begin{aligned}
 0 &= p(\vec{\eta}_q, \vec{\eta}_q) \\
 &= p(y_q + p(y_i, y_q)y_i, y_q + p(y_i, y_q)y_i) \\
 &= p(y_q, y_q) + 2[p(y_q, y_i)]^2 + [p(y_q, y_i)]^2 p(y_i, y_i) \\
 &= -1 + 2[p(y_q, y_i)]^2 - [p(y_q, y_i)]^2 \\
 &= -1 + [p(y_q, y_i)]^2
 \end{aligned}$$

Assim,  $[p(y_q, y_i)]^2 = 1$ . Como  $y_i, y_q \in \mathbb{H}^2$ , concluímos que  $p(y_q, y_i) = -1$ . Usando a fórmula de distância presente no Teorema 1, concluímos que  $y_i = y_q$ , fato que gera uma contradição com nossa suposição inicial, uma vez que  $q \in I_i(\omega)$  e, conseqüentemente,  $q \neq i$ . Dessa forma, fica concluída a demonstração desse lema.  $\square$

Para as funções  $F$  e  $L$  definidas em (3.7) e (3.8),  $U = U_\omega \cap U_\delta$ ,  $\mathcal{T} = T_i$ , com  $i \in \text{Im } \omega \cap \text{Im } \delta$ , e trocando-se  $\mathbb{R}^n$  por  $\mathbb{H}^2$  e  $\mathbb{X}$  por  $\mathbb{T}$ , o resultado estabelecido em [21] que enunciaremos a seguir (ver Teorema 3.1, página 632), garantirá que  $T_i$  possui um subconjunto residual de  $C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  e, portanto,  $\mathcal{B}_\Lambda$  também. Assim, a demonstração do nosso Teorema B estará finalizada para o caso não simétrico.

**Teorema 16.** *Sejam  $n \geq 2$ ,  $k \geq 2$ ,  $q \geq 1$  números inteiros,  $U$  um aberto de  $(\mathbb{R}^n)^{(k)}$ ,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  e  $L : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  duas aplicações de classe  $C^\infty$ . Suponhamos que  $L$  não possua pontos críticos em  $U$ , isto é,  $DL(\mathbf{y}) \neq \mathbf{0}$ ,  $\forall \mathbf{y} \in U$  e*

$$\left( \frac{\partial}{\partial y_i^{(1)}} F(\mathbf{y}), \frac{\partial}{\partial y_i^{(2)}} F(\mathbf{y}) \right) \neq \vec{0}, \quad \forall i = 1, \dots, k, \quad \forall \mathbf{y} \in U.$$

### 3.4 Teorema B

---

Seja  $\mathbb{X}$  uma subvariedade  $(n-1)$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$  e denotemos por  $\mathcal{T}$  o conjunto de todas as funções  $f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{X}, \mathbb{R}^n)$  tais que, para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{X}^{(k)}$  que é ponto crítico de  $F \circ f^k$  e com  $f^k(\mathbf{s}) \in U$ , sempre temos  $L(f^k(\mathbf{s})) \neq \vec{0}$ . Então,  $\mathcal{T}$  contém um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{X}, \mathbb{R}^n)$ .

Observemos que a verificação do resultado anterior se resume ao caso em que  $q = 1$ . De fato, suponhamos que ele seja verdadeiro para esse valor de  $q$  e denotemos por

$$U_t = \left\{ \mathbf{y} \in U_\omega \cap U_\delta \mid \frac{\partial}{\partial v_i^j} L^{(t)} \neq 0 \right\}, \text{ para cada } t = 1, \dots, q.$$

Claramente, cada  $U_t$  é um conjunto aberto de  $U_\omega \cap U_\delta$  e  $U_\omega \cap U_\delta = \bigcup_{t=1}^q U_t$ .

Denotemos por  $\mathcal{T}^{(t)}$  o conjunto de todas as funções  $f \in C_{\text{emb}}(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  tais que para todo  $\mathbf{s} \in \mathbb{T}^k$  que é um ponto crítico de  $F \circ f^k$  com  $f^k(\mathbf{s}) \in U_\omega \cap U_\delta$ , sempre temos  $L^{(t)}(f^k(\mathbf{s})) \neq \vec{0}$ . Como a afirmação é suposta ser válida para  $q = 1$ , segue que cada  $\mathcal{T}^{(t)}$  contém um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ , o mesmo ocorrendo com  $\mathcal{T}$ , uma vez que  $\bigcap_{t=1}^q \mathcal{T}^{(t)} \subset \mathcal{T}$ .

De agora em diante, vamos supor que  $q = 1$ , ou seja,  $L : U_\omega \cap U_\delta \rightarrow \mathbb{R}$  é nossa aplicação de classe  $C^\infty$ . Seja  $W_{\mathcal{T}} = (\alpha^k)^{-1}(\mathbb{T}^{(k)}) \cap (\beta^k)^{-1}(U_\omega \cap U_\delta)$  a subvariedade aberta de  $J_t^1(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ , em que  $\alpha$  e  $\beta$  são as aplicações mencionadas na definição 16.

Consideremos o conjunto  $\Sigma_{\mathcal{T}}$  de todos os multijatos

$$\tau = (f_1(s_1), \dots, f_k(s_k)) \in W_{\mathcal{T}}$$

tais que  $\frac{\partial}{\partial u_i} F((f_1 \circ \Psi_1^{-1})(u_i), \dots, (f_k \circ \Psi_k^{-1})(u_i)) = 0$ , com  $\Psi_i$  sendo uma carta local numa vizinhança de  $s_i \in \mathbb{T}$  e  $L(f_1(s_1), \dots, f_k(s_k)) = \vec{0}$ . As definições dos conjuntos  $\mathcal{T}$  e  $\Sigma_{\mathcal{T}}$  permitem-nos concluir que

$$\mathcal{T} = \left\{ f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2) \mid j_k^1 f(\mathbb{T}) \cap \Sigma_{\mathcal{T}} = \emptyset \right\}$$

### 3.4 Teorema B

---

A partir desse ponto, a ideia é mostrar que existem duas subvariedades  $M_1^T$  e  $M_2^T$  de  $W_{\mathcal{T}}$ , ambas de classe  $C^\infty$ , com as seguintes propriedades:

$$\text{codim } M_m^T = k + 1 \quad \text{e} \quad \Sigma_{\mathcal{T}} \subset M_1^T \cup M_2^T$$

Para isto, consideraremos uma vizinhança coordenada  $\mathcal{D}$  de  $\tau \in \Sigma_{\mathcal{T}}$  e  $\theta_{\mathcal{T}}$  uma carta local da forma  $\xi = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{A})$ , nos mesmos moldes que já foram feitos na demonstração do Lema 9.

Uma vez que  $f \in T_i$ , segue que pelo menos uma das duas condições a seguir é verificada:

$$\frac{\partial}{\partial v_i^{(1)}} F(\mathbf{y}) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial v_i^{(2)}} F(\mathbf{y}) \neq 0$$

Suponhamos que a primeira delas seja verdadeira. Para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , definiremos

$$b_i(\xi) = \frac{\partial}{\partial v_i^{(1)}} F(\mathbf{y}) a_i^{(1)} + \frac{\partial}{\partial v_i^{(2)}} F(\mathbf{y}) a_i^{(2)}$$

A aplicação  $K_{\mathcal{T}} : \theta(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$  dada por

$$K_{\mathcal{T}}(\xi) = (b_i(\xi), L(\Psi_1^{-1}(v_1), \dots, \Psi_k^{-1}(v_k)))$$

é tal que  $\theta(\mathcal{D} \cap \Sigma_{\mathcal{T}}) \subset K_{\mathcal{T}}^{-1}(0)$ . Uma vez que  $\mathcal{D} \subset W_{\mathcal{T}}$ , segue que  $\Psi_i^{-1}(v_i) \in U_\omega \cap U_\delta$ , ou seja,  $L$  está bem definida e, conseqüentemente,  $K_{\mathcal{T}}$  também.

Procederemos da mesma forma que na demonstração do Lema 9. Nossa estratégia será mostrar que  $K_{\mathcal{T}}$  é uma submersão em cada ponto de  $\theta(\mathcal{D})$  por meio da independência linear dos vetores  $\vec{\nabla} b_i(\xi)$  e  $\vec{\nabla} L$ .

Tomemos a combinação linear

$$\sum_{i=1}^k B_i \cdot \vec{\nabla} b_i(\xi) + C \cdot \vec{\nabla} L = \vec{0}, \quad (3.9)$$

### 3.4 Teorema B

---

com  $B_i$  e  $C$  números reais. Desejamos verificar que  $B_i = C = 0$ , para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Considerando as componentes de  $\vec{\nabla} b_i(\xi)$  e  $\vec{\nabla} L$  associadas as derivadas parciais em relação às variáveis  $a_i^{(1)}$  e  $a_i^{(2)}$ , obtemos:

$$B_i \frac{\partial}{\partial v_i^{(1)}} F = 0 \quad \text{e} \quad B_i \frac{\partial}{\partial v_i^{(2)}} F = 0$$

Como pelo menos um das duas derivadas parciais anteriores é diferente de zero, segue que  $B_i$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ . Logo, a igualdade (3.9) se reduz à  $C \cdot \vec{\nabla} L = \vec{0}$ . Da hipótese de  $L$  não possuir pontos críticos em  $U_\omega \cap U_\delta$ , segue que  $C = 0$ , fato que verifica nossa afirmação inicial.

Por fim, para  $m = 1$  e  $2$ , construiremos os conjuntos

$$S_{\mathcal{T}}^m = \{f \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2) \mid j_k^1 f(\mathbb{T}) \pitchfork M_m^{\mathcal{T}}\}$$

Usando argumentos de transversalidade similares ao do Teorema 10, concluímos que

$$S_{\mathcal{T}}^m = \{f \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2) \mid j_k^1 f(\mathbb{T}) \cap M_m^{\mathcal{T}} = \emptyset\}$$

Por outro lado, uma adaptação do Teorema 11 nos afirma que  $S_{\mathcal{T}}^m$  é um conjunto residual em  $C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ . Uma vez que tanto  $C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  quanto  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  são espaços de Baire, segue que  $S_{\mathcal{T}}^m \cap C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$  é também residual em  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ .

Recordando que

$$\mathcal{T} = \left\{ f \in C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2) \mid j_k^1 f(\mathbb{T}) \cap \Sigma_{\mathcal{T}} = \emptyset \right\}$$

e  $\Sigma_{\mathcal{T}} \subset M_1^{\mathcal{T}} \cup M_2^{\mathcal{T}}$ , podemos concluir que  $S_{\mathcal{T}}^1 \cap S_{\mathcal{T}}^2 \subset \mathcal{T}$ , ou seja,  $\mathcal{T}$  contém um subconjunto residual de  $C_{\text{emb}}^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{H}^2)$ . Isso completa a verificação do nosso Teorema B para o caso considerado.

□

# Considerações Finais

Por meio desse estudo, verificamos que,  $C^\infty$  genericamente, é muito raro ocorrer que uma trajetória  $n$ -periódica de bilhar em subconjuntos especiais  $Q$  de  $\mathbb{H}^2$  tenha múltiplos pontos de reflexão. Percebemos que a técnica empregada para verificar esse resultado pode ser adaptada e aplicada em outros contextos que envolvem a obtenção de propriedades genéricas.

Uma dessas adaptações apareceu no Teorema B, o qual garante que,  $C^\infty$  genericamente, duas trajetórias  $n$ -periódicas de bilhar em  $Q$  não possuem pontos de reflexão em comum.

É natural nos perguntarmos se não há outras adaptações dessa técnica. Surgiram, assim, no desenrolar desse trabalho, algumas questões cujas respostas ainda não sabemos. São elas:

1. É possível generalizarmos os resultados presentes nos Teoremas A e B para bilhares convexos em hipersuperfícies de  $\mathbb{H}^n$ ? Será que a mesma estratégia usada aqui se aplica nesse caso?
2. A mesma abordagem feita no Teorema B se aplica ao considerarmos duas trajetórias distintas com períodos diferentes?
3.  $C^\infty$  genericamente, duas trajetórias de bilhar em  $\mathbb{H}^2$  possuem períodos racionalmente independentes? Em caso afirmativo, é possível estendermos essa propriedade para bilhares em hipersuperfícies de  $\mathbb{H}^n$ ?
4. É possível construirmos um exemplo de bilhar em  $\mathbb{H}^2$  tal que infinitas trajetórias de mesmo período possuam um único ponto de reflexão em comum?
5.  $C^\infty$  genericamente, para bilhares convexos em  $\mathbb{H}^2$ , é verdade que todo ponto periódico ou é hiperbólico ou é elíptico com número de rotação irracional? Em caso afirmativo, é possível garantirmos alguma interseção transversal homoclínica para todos os pontos periódicos hiperbólicos?

Acreditamos que as respostas aos questionamentos 1, 2 e 3 sejam verdadeiras, uma vez que eles já foram respondidas, satisfatoriamente, para bilhares em hipersuperfícies do  $\mathbb{R}^n$ , nos artigos publicados por L. Stojanov [26] e V. Petkov [21]. Soma-se a isso o fato que os argumentos e cálculos necessários para a checagem das propriedades 1 e 2 estabelecidas em nosso trabalho puderam ser adaptadas de forma natural do espaço euclidiano para o plano hiperbólico. No que tange à pergunta 4, infelizmente não temos nenhuma ideia, até o presente momento, se tal construção é possível ou não.

Por último, é plausível supormos que a pergunta 5 seja respondida afirmativamente. De fato, os autores M.J. Dias Carneiro, S. Oliffson Kamphorst e S. Pinto-de-Carvalho [11] já mostraram que o problema do bilhar em uma curva oval  $\Gamma$  plana define um sistema dinâmico bidimensional conservativo que possui a propriedade *twist* e tem função geradora  $g(s_1, s_2) = -|\Gamma(s_2), \Gamma(s_1)|$ . Usando perturbações normais de  $\Gamma$ , os autores mostram que, para cada período  $N$ , ter apenas um número finito de órbitas periódicas, todas não-degeneradas, é uma propriedade genérica. Mais ainda, eles verificaram que a interseção entre as curvas invariantes de dois pontos hiperbólicos são sempre transversais. Contudo, em nenhum momento durante a argumentação sobre a densidade das curvas ovais foi levado em consideração uma possível existência de múltiplos pontos de reflexão.

Já as conclusões apresentadas por L. Coutinho dos Santos e S. Pinto-de-Carvalho [10] garantem que o conjunto das ovais sobre  $\mathbb{H}^2$  que gozam da propriedade “ter um número finito de órbitas  $n$ -periódicas, todas não degeneradas” é denso, enquanto que para  $\mathbb{S}_+^2$  é uma propriedade aberta. Em particular, no desenrolar de sua argumentação, os autores tomaram o cuidado de considerar a possível existência de múltiplos pontos de reflexão. Felizmente, a mesma abordagem apresentada por eles pode ser aplicada no caso do problema do bilhar sobre ovais no plano e, assim, complementar a prova apresentada em [11].

Ainda nessa linha de raciocínio, P. Zhang [31] provou que o conjunto de todas as funções  $f \in C_{\text{emb}}(\mathbb{T}, \mathbb{S}^2)$  tais que a região englobada por elas seja estritamente geodesicamente convexa e que todo ponto  $n$ -periódico para

uma aplicação bilhar seja não degenerado é um conjunto aberto e denso de  $C_{\text{emb}}(\mathbb{T}, \mathbb{S}^2)$ . Ele vai além, e prova que  $C^\infty$  genericamente, todo ponto periódico ou é hiperbólico ou é elíptico com número de rotação irracional. Mais ainda, todos os pontos periódicos hiperbólicos admitem alguma interseção transversal homoclínica.

Portanto, uma resposta afirmativa para a pergunta 5 estabeleceria, para  $\mathbb{H}^2$ , certas propriedades genéricas já conhecidas para os casos de bilhares no plano euclidiano e na esfera convexa, e que não foram abordadas pelos autores L. Coutinho dos Santos e S. Pinto-de-Carvalho no artigo [10].

# Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, P. V. *Geometria diferencial*. 1ª ed. - Rio de Janeiro: SBM, 1998.
- [2] BENEDETTI, R., PETRONIO, C. *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Universitext, New York: Springer-Verlag (1992).
- [3] BIALY, M. *Hopf Rigidity for convex billiards on the hemisphere and hyperbolic plane*. Discrete Conti. Dynam. Syst. 33 (2013), 3903-3913.
- [4] BIRKHOFF, G. D. *Dynamical Systems*. Providence, RI: A.M.S. Colloquium Publications, 1966, (Original ed. 1927).
- [5] BLUMEN, V.; KIM, K.Y.; NANCE, J.; ZARNITSKY, V. *Three-period orbits in billiards on the surfaces of constant curvature*. Int.Math.Res.Not., 2012, 21, 5014 - 5024.
- [6] BOLOTIN, S. V. *Integrable billiards on surfaces of constant curvature*. (Russian) Mat. Zametki 51 (1992), 20-28; (translation) Math. Notes 51 (1992), 117-123.
- [7] BRICKELL, F; HSIUNG, C.C. *The total absolute curvature of closed curves in Riemannian manifold*. J. Diff. Geom., 1974, 9, 177-193.
- [8] CARMO, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. 4ª ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [9] COUTINHO DOS SANTOS, L. *Bilhares convexos em superfícies de curvatura constante*. Tese de doutorado - UFMG, 2014.

- [10] COUTINHO DOS SANTOS, L.; PINTO-DE-CARVALHO, S. *Periodic orbits of oval billiards on surfaces of constant curvature*. Dynamical Systems, Volume 32, nº2, 283-294, 2017.
- [11] DIAS CARNEIRO, M. J.; OLIFFSON KAMPHORST, S.; PINTO-DE-CARVALHO, S. *Periodic orbits of generic oval billiards*, Nonlinearity, 2007, 20, 2453-2462.
- [12] DIAS CARNEIRO, M. J.; OLIFFSON KAMPHORST, S.; PINTO-DE-CARVALHO, S. *Elliptic Island in Strictly Convex Billiards*. Ergodic Theory of Dynamical Systems, 23/3, 799-812, 2003.
- [13] GOLUBITSKY, M., GUILLEMIN, V. *Stable Mappings and Their Singularities*. In: Graduate Texts in Mathematics, vol. 14. Springer, Berlin (1973).
- [14] GUTKIN, B. *Hyperbolic magnetic billiards on surface of constant curvature*. Commun. Math. Phys. 217, 33 (2001).
- [15] GUTKIN, B.; SMILANSKY, U.; GUTKIN, E. *Hyperbolic Billiards on surfaces of constant curvature*. Comm. Math. Phys. 208 (1999), 65-90.
- [16] HASSELBLATT, B.; KATOK, A. *A first course in dynamics : with a panorama of recent developments*. New York: Cambridge University Press, 2003.
- [17] HASSELBLATT, B.; KATOK, A. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. New York: Cambridge University Press, 1997.
- [18] JOVANOVIĆ B., *Integrable perturbations of billiards on constant curvature surfaces*. Phys. Lett. A 231, 1997, 353 - 358.
- [19] JÚDICE, E. D. *O Teorema de Sard e suas aplicações* (Publicações matemáticas). Rio de Janeiro: IMPA, 2011. Ergodic Theory of Dynamical Systems, 23/3, 799-812, 2003.

- [20] PAUPERT, J. *Introduction to Hyperbolic Geometry*. Disponível em <<https://math.la.asu.edu/~paupert/HyperbolicGeometryNotes.pdf>>. Acessado em: 29/01/2017.
- [21] PETKOV, V.; STOJANOV, L. *Periods of multiple reflecting geodesics and inverse spectral results*. Amer. J. Math. 109, 619-668, 1987.
- [22] POPOV, G.; TOPALOV, P. *Discrete analog of the projective equivalence and integrable billiard tables*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 28, 1657-1684, 2008.
- [23] RAGAZZO, C. G., DIAS CARNEIRO, M. J., ZANATA, S. A. *Introdução à Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist* (Publicações Matemáticas): IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [24] REID, M., SZENDROI, B. *Spherical and hyperbolic non-Euclidean geometry*. In Geometry and Topology (pp. 34-61). Cambridge: Cambridge, 2005.
- [25] REYNOLDS, W. F. *Hyperbolic Geometry on a Hyperboloid*. The American Mathematical Monthly, vol. 100, no. 5, 1993, 442 - 455.
- [26] STOJANOV, L. *Generic properties of periodic reflecting rays*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 7(4), 597-609, 1987. doi:10.1017/S0143385700004223.
- [27] STOJANOV, L.; PETKOV, V. *Propriétés génériques de l'application de Poincaré et des géodésiques périodiques généralisées*. Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986): 1-12. <<http://eudml.org/doc/111886>>.
- [28] STOJANOV, L.; PETKOV, V. *Periodic geodesics of generic nonconvex domains in  $\mathbb{R}^2$  and the Poisson relation*. Bull. Amer. Math. Soc. 15 (1986), 88-90.
- [29] STOJANOV, L.; PETKOV, V. *On the number of periodic reflecting rays in generic domains*. Ergodic Theory and Dynam. Sys. 8 (1988), 81-91.

- [30] SOLHEIM, Z. S. L. *The hyperboloid model of hyperbolic geometry* - (2012).  
EWU Masters Thesis Collection. Paper 240.
- [31] ZHANG, P. *Convex billiards on convex spheres*. Annales de l'Institut  
Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, Volume 34, Issue 4, 2017, Pa-  
ges 793-816, ISSN 0294-1449.