UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

MESTRADO EM MATEMÁTICA

TORRE DE AUTOMORFISMOS E GRUPOS COMPLETOS

Érika Helena Assis

Belo Horizonte - MG

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Torre de automorfismos e grupos completos

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

ÉRIKA HELENA ASSIS
ORIENTADORA: ANA CRISTINA VIEIRA

BELO HORIZONTE - MG
2018

Ficha catalográfica elaborada pelo bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa - CRB 6ª Reg. nº 1510

Assis, Érika Helena.

A848t Torre de automorfismos e grupos completos / Érika Helena Assis — Belo Horizonte, 2018.
63 f. il.; 29 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Matemática.

Orientadora: Ana Cristina Vieira.

1. Matemática - Teses. 2. Automorfismo- Teses. 3. Teoria dos grupos - Teses. 4. Grupos finitos. I. Orientadora. II. Título.

CDU 51(043)

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Torre de automorfismos e grupos completos

ÉRIKA HELENA ASSIS

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Ana Cristina Vieira

Profa. Ana Cristina Vieira
UFMG

Monique M. L. Rocha

Pós-doc. Monique Müller Lopes Rocha
UFMG

Prof. Rafael Bezerra dos Santos
UFMG

Belo Horizonte, 12 de julho de 2018.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Sumário

Abstract

In this dissertation, we will develop the famous Wielandt's theorem, proved in 1939. This classical result says that the automorphism tower of a finite centreless group G stabilizes after finitely many steps. Moreover, we will study results about the complete groups.

Keywords: automorphism tower, complete groups.

Resumo

Nesta dissertação, demonstraremos o célebre Teorema de Wielandt, de 1939. Este famoso resultado garante que a torre de automorfismos de um grupo finito com o centro trivial estabiliza em um número finito de passos. Além disso, estudaremos resultados sobre grupos completos.

Palavras chaves: Torre de automorfismos, grupos completos.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por me suprir em todas as minhas necessidades, me amparar em todos os momentos e me possibilitar aprender lições maiores que as acadêmicas.

À minha mãe, Maria Raimunda, e minha tia, Rosa Maria, por acreditarem nos meus sonhos, por suas orações repletas de fé e por serem exemplos de força e perseverança nas dificuldades.

Ao Wagner pelo amparo permanente e por ser abrigo nos dias mais difíceis.

Aos meus familiares e amigos pelo carinho de sempre.

A minha orientadora, Ana Cristina, pelo incentivo e intenso apoio. Além disso, sou grata pelo carinho, pela paciência e tolerância, principalmente às dúvidas mais simples que me surgiram no árduo processo de conclusão dessa dissertação.

Aos amigos que conquistei durante a minha graduação, especialização e no mestrado. Todos contribuíram significativamente para realização deste sonho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Introdução

Dado um grupo G, denotamos o conjunto de todos os seus automorfismos por $Aut(G)$, que sabemos que é um grupo sob a operação de composição de funções. Quando G é um grupo de centro trivial temos que G está imerso em seu grupo de automorfismos e é possível verificar que o centro de $Aut(G)$ também é trivial.

Observando sucessivamente este procedimento, temos uma cadeia ascendente de grupos, conhecida como a torre de automorfismos de G. Uma pergunta pode ser feita: Podemos afirmar que esta cadeia se estabiliza? Em 1939, Wielandt (1910 - 2001) garantiu que sim, para grupos finitos, e temos o seguinte teorema:

Teorema 0.0.1. *A torre de automorfismos de um grupo finito e com centro trivial estabiliza em um número finito de passos.*

Ressaltamos que existem exemplos de grupos infinitos, com centro trivial, cuja torre de automorfismos não estabiliza.

Após definir sob quais condições a torre se estabiliza, a próxima questão a ser respondida é como ela se estabiliza. Diante disso, analisando a torre de automorfismos de um grupo finito, temos que ela se estabiliza quando a cadeia atinge um grupo especial, chamado grupo completo, que é um grupo com centro trivial onde todo automorfismo é interno.

Portanto, o objetivo desse trabalho é conhecer a torre de automorfismos de um grupo com centro trivial e demonstrar o clássico Teorema de Wielandt. Além disso, entendemos que o estudo dos grupos completos se faz necessário.

Mais detalhadamente, a dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 1, vamos definir a torre de automorfismos de um grupo e estudar os grupos completos. Já no Capítulo 2, abordaremos os conceitos e os resultados necessários para provar o Teorema de Wielandt. No Capítulo 3, vamos demonstrar o Teorema principal da nossa dissertação. Além disso, exploraremos o grupo diedral infinito, D_∞, um exemplo de um grupo infinito com centro trivial cuja torre de automorfismos não se estabiliza.

Capítulo 1

Torre de automorfismos

Neste capítulo, começaremos com o estudo do conceito de grupo de automorfismo de um grupo e estudaremos o grupo de automorfismo de grupos conhecidos. Em seguida, vamos descrever e definir a torre de automorfismos de um grupo com centro trivial.

Nossa última seção é dedicada aos conceitos e resultados básicos da Teoria de Grupos, os quais são pré-requisitos para discutir os resultados posteriores do trabalho.

A principal referência utilizada neste capítulo foi [10].

1.1 Automorfismos

Dado um grupo G, um homomorfismo bijetivo, ou seja, um isomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G$, é dito um automorfismo de G. O conjunto de todos os automorfismos de G é denotado por $Aut(G)$. Se $\varphi \in Aut(G)$ e H, K subgrupos de G onde $K \subset H$, temos

$$\varphi(H) \cong H \text{ e } |\varphi(H) : \varphi(K)| = |H : K|.$$

Se ainda $K \triangleleft H$ segue que

$$\varphi(K) \triangleleft \varphi(H) \text{ e } H/K \cong \varphi(H)/\varphi(K).$$

Um automorfismo preserva propriedades teóricas de grupos. É fácil ver que $Aut(G)$ é um grupo sob a operação de composição de funções.

Nosso objeto de trabalho são os grupos de automorfismos. Por isso, nesta primeira seção estudaremos o grupo de automorfismos de alguns grupos conhecidos.

Denotaremos o grupo simétrico de grau n por S_n e sabemos que este grupo é não abeliano, para $n \geq 3$. Começaremos estudando o grupo de automorfismos de S_3.

Exemplo 1.1.1. *O grupo simétrico S_3 é dado por*

$$\langle x, y | x^2 = y^3 = 1, xy = y^{-1}x \rangle.$$

Seus automorfismos são:

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 : x \longmapsto x & \varphi_2 : x \longmapsto x & \varphi_3 : x \longmapsto xy^{-1} \\ \quad\; y \longmapsto y & \quad\; y \longmapsto y^{-1} & \quad\; y \longmapsto y \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \varphi_4 : x \longmapsto xy & \varphi_5 : x \longmapsto xy & \varphi_6 : x \longmapsto xy^{-1} \\ \quad\; y \longmapsto y^{-1} & \quad\; y \longmapsto y & \quad\; y \longmapsto y^{-1} \end{array}$$

Temos $|Aut(S_3)| = 6$ e notamos que $\varphi_2\varphi_5 = \varphi_6$ e $\varphi_5\varphi_2 = \varphi_4$, então $Aut(S_3)$ não é abeliano. Portanto, $Aut(S_3) \cong S_3$.

Vamos demonstrar, no próximo capítulo, que $Aut(S_n) \cong S_n$, para $n \geq 3$ e $n \neq 6$. O próximo grupo é um exemplo de um grupo de automorfismos de um grupo abeliano.

Exemplo 1.1.2. *O grupo de Klein, denotado por K, é um grupo abeliano de ordem 4 onde todo elemento não trivial tem ordem 2. Denotando $K = \{1, a, b, ab\}$, os seus automorfismo são:*

$$\begin{array}{lll} \gamma_1 : a \longmapsto a & \gamma_2 : a \longmapsto b & \gamma_3 : a \longmapsto b \\ \quad\; b \longmapsto b & \quad\; b \longmapsto ab & \quad\; b \longmapsto a \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \gamma_4 : a \longmapsto b & \gamma_5 : a \longmapsto ab & \gamma_6 : a \longmapsto ab \\ \quad\; b \longmapsto ab & \quad\; b \longmapsto a & \quad\; b \longmapsto b. \end{array}$$

Note que como $\gamma_2\gamma_3 = \gamma_6$ e $\gamma_3\gamma_2 = \gamma_4$, $Aut(K)$ não é abeliano e $|Aut(K)| = 6$. Portanto, $Aut(K) \cong S_3$.

O grupo de Klein é um exemplo de um grupo abeliano com o grupo de automorfismos não abeliano. Por outro lado, não é difícil ver que o grupo de automorfismos de um grupo cíclico é abeliano. Relembramos que $U(\mathbb{Z}_n) = \{\overline{a} \in \mathbb{Z}_n | (a, n) = 1\}$ e $|U(\mathbb{Z}_n)| = \phi(n)$, onde $\phi(n)$ é o valor da função de Euler em n.

Exemplo 1.1.3. $Aut(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$, $Aut(\mathbb{Z}_n) \cong U(\mathbb{Z}_n)$.

A partir do exemplo anterior, podemos verificar que se p é primo, então $Aut(\mathbb{Z}_p) \cong U(\mathbb{Z}_p)$. De acordo com a teoria de corpos finitos, ver [1], se $\mathbb{F}$ é um corpo finito então o grupo multiplicativo de $\mathbb{F}$ é cíclico. Uma vez que $\mathbb{Z}_p$ é um corpo finito e $U(\mathbb{Z}_p)$ é seu grupo multiplicativo, então $U(\mathbb{Z}_p)$ é cíclico. Como $|U(\mathbb{Z}_p)| = p-1$, temos que $U(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$. Assim, $Aut(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$.

Por fim, recordamos que o grupo diedral de ordem $2n$ é o grupo de simetrias de um polígono regular de n lados e pode ser dado por:

$$D_{2n} = \langle r, \theta | r^2 = 1, \theta^n = 1, r\theta r^{-1} = \theta^{-1} \rangle.$$

Discutiremos o grupo de automorfismos do diedral D_8, cuja ordem é 8.

Exemplo 1.1.4. $D_8 = \langle r, \theta | r^2 = 1, \theta^4 = 1, r\theta = \theta^{-1} r \rangle$. *Seus automorfismos são:*

$$\begin{aligned} \varphi_1 : r &\longmapsto r & \varphi_2 : r &\longmapsto r & \varphi_3 : r &\longmapsto r\theta & \varphi_4 : r &\longmapsto r\theta \\ \theta &\longmapsto \theta & \theta &\longmapsto \theta^{-1} & \theta &\longmapsto \theta & \theta &\longmapsto \theta^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_5 : r &\longmapsto r\theta^2 & \varphi_6 : r &\longmapsto r\theta^2 & \varphi_7 : r &\longmapsto r\theta^{-1} & \varphi_8 : r &\longmapsto r\theta^{-1} \\ \theta &\longmapsto \theta & \theta &\longmapsto \theta^{-1} & \theta &\longmapsto \theta & \theta &\longmapsto \theta^{-1} \end{aligned}$$

Observamos que $|Aut(D_8)| = 8$. *Além disso,* $o(\varphi_2) = 2$, $o(\varphi_3) = 4$ *e* $\varphi_2\varphi_3 = \varphi_3^{-1}\varphi_2$. *Logo,* $Aut(D_8) = \langle \varphi_2, \varphi_3 \rangle \cong D_8$.

1.2 Torre de automorfismos

Considere g e x elementos de um grupo G. Definimos $x^g := gxg^{-1}$ como o conjugado de x por g. Para cada $g \in G$, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \tau_g : & G \longrightarrow G \\ & x \longmapsto gxg^{-1} = x^g. \end{aligned}$$

Afirmamos que τ_g é um isomorfismo. De fato, dados x, $y \in G$, então

$$\tau_g(xy) = g(xy)g^{-1} = \tau_g(x)\tau_g(y).$$

Além disso, dado $x \in Ker(\tau_g)$ segue que $x^g = 1$ e então $x = 1$. Logo $Ker(\tau_g) = 1$ e, assim τ_g é injetora. Agora, dado $x \in G$, considere $y = g^{-1}xg \in G$. Temos

$$\tau_g(y) = \tau_g(g^{-1}xg) = x$$

e assim τ_g é sobrejetora. Portanto a aplicação τ_g é um automorfismo de G. Em outras palavras, ela é um elemento particular do grupo $Aut(G)$.

Assim temos a seguinte definição:

Definição 1.2.1. *Seja g um elemento de um grupo G. O automorfismo τ_g é chamado automorfismo interno induzido por g. Denotamos $Inn(G) = \{\tau_g | g \in G\}$, como o conjunto de todos os automorfismos internos de G.*

Exemplo 1.2.2. *No Exemplo 1.1.1, é possível observar que todos os automorfismo de S_3 são internos. De fato, φ_1 induzido por 1, φ_2 induzido por x, φ_3 induzido por y^{-1}, φ_4 induzido por xy, φ_5 induzido por y e φ_6 induzido por xy^{-1}.*

Lema 1.2.3. *O conjunto dos automorfismo internos de G, $Inn(G)$, é um subgrupo normal em $Aut(G)$.*

Demonstração. Sejam $g, h \in G$. Para todo $x \in G$ temos que:

$$\tau_{gh}(x) = x^{gh} = (gh)x(gh)^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1} = \tau_g(hxh^{-1}) = \tau_g \circ \tau_h(x).$$

E, assim, a composição de automorfismos internos pertence a $Inn(G)$.

Claramente a aplicação $Id_G \in Inn(G)$ e note que para $\tau_g \in Inn(G)$, temos

$$(\tau_g \circ \tau_{g^{-1}})(x) = \tau_g(g^{-1}xg) = g(g^{-1}xg)g^{-1} = x.$$

Sendo assim, $(\tau_g)^{-1} = \tau_{g^{-1}}$. Com isso, $Inn(G)$ é um subgrupo de $Aut(G)$.

Além disso, $Inn(G) \lhd Aut(G)$. De fato, dado $\varphi \in Aut(G)$ e $\tau_g \in Inn(G)$ temos:

$$\begin{aligned}(\varphi\tau_g\varphi^{-1})(x) =& \varphi(\tau_g\varphi^{-1}(x)) \\ =& \varphi(g\varphi^{-1}(x)g^{-1}) \\ =& \varphi(g)x\varphi(g)^{-1} \\ =& \tau_{\varphi(g)}(x), \forall x \in G.\end{aligned}$$

Portanto $\varphi\tau_g\varphi^{-1} = \tau_{\varphi(g)} \in Inn(G)$. □

O teorema a seguir mostra uma propriedade importante dos automorfismos internos.

Teorema 1.2.4. *Seja G um grupo e denote por $Z(G)$ o seu centro, ou seja,*

$$Z(G) = \{g \in G \mid xg = gx, \ \forall \ x \in G \ \}.$$

Então temos:

$$\frac{G}{Z(G)} \cong Inn(G).$$

Demonstração. Vamos observar a aplicação

$$\begin{aligned} \tau_G : & G \longrightarrow Aut(G) \\ & g \longmapsto \tau_g \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.2.3, τ_G é um homomorfismo e $Im(\tau_G) = Inn(G)$. Além disso,

$$g \in Ker(\tau_G) \iff \tau_g(x) = x, \forall\, x \in G \iff gx = xg, \forall x \in G \iff g \in Z(G).$$

Então temos $Ker(\tau_G) = Z(G)$.

Pelo Teorema do Isomorfismo, segue que

$$\frac{G}{Z(G)} \cong Inn(G)$$

como queríamos. □

Corolário 1.2.5. *Se G tem centro trivial, então $Inn(G) \cong G$.*

Quando $Z(G)$ é trivial, é possível identificar $Inn(G)$ com G. A aplicação τ_G, como definimos na demonstração do Teorema 1.2.4, é considerada uma imersão de G em $Aut(G)$. Assim, podemos ver G como um subgrupo de $Aut(G)$. Representamos tal situação com a seguinte notação: $G \overset{\tau_G}{\hookrightarrow} Aut(G)$ e, com essa identificação, $G \trianglelefteq Aut(G)$.

Relembramos que dados G um grupo e H um subgrupo de G, definimos o centralizador de H em G como

$$C_G(H) = \{g \in G | gh = hg, \forall h \in H\}.$$

Lema 1.2.6. *Seja G um grupo. Se $Z(G) = 1$, então $C_{Aut(G)}(Inn(G)) = 1$.*

Demonstração. Tome $\varphi \in C_{Aut(G)}(Inn(G))$. Logo

$$\tau_g \varphi = \varphi \tau_g,\ \forall\, g \in G \Longrightarrow \tau_g = \varphi \tau_g \varphi^{-1},\ \forall g \in G.$$

De acordo com o Lema 1.2.3, temos que $\varphi \tau_g \varphi^{-1} = \tau_{\varphi(g)}$. Além disso, observe que

$$\tau_g = \varphi \tau_g \varphi^{-1} = \tau_{\varphi(g)} \Longrightarrow \tau_g = \tau_{\varphi(g)},\ \forall\, g \in G.$$

Na demonstração do Teorema 1.2.4, verificamos que $Ker(\tau_G) = Z(G)$. Como $Z(G)$ é trivial, então $Ker(\tau_G) = 1$, e, consequentemente, a aplicação τ_G é injetiva. Uma vez que $\tau_g = \tau_{\varphi(g)}$, temos que $g = \varphi(g)$, $\forall\, g \in G$. Logo $\varphi = Id$, como queríamos. □

Observação 1.2.7. *Se H é um subgrupo de um grupo G, então $Z(G) \leq C_G(H)$. Sendo assim, se $C_{Aut(G)}(Inn(G)) = 1$, então $Z(Aut(G)) = 1$. Logo, quando G é um grupo com centro trivial, temos que $Aut(G)$ é um grupo com centro trivial.*

Seja G um grupo com centro trivial. Inicialmente, vamos denotar $G_0 = G$. Considere

$$\tau_G : G \longrightarrow Aut(G).$$

Neste caso, sabemos que $G \xhookrightarrow{\tau_G} Aut(G)$ é uma imersão de G em $Aut(G)$ e $G \triangleleft Aut(G)$. Agora, vamos denotar $G_1 = Aut(G_0)$ e considerar

$$\tau_{G_1} : G_1 \longrightarrow Aut(G_1).$$

Pela Observação 1.2.7, $Z(G_1)$ é trivial. Então, $G_1 \xhookrightarrow{\tau_{G_1}} Aut(G_1)$ e $G_1 \triangleleft Aut(G_1) = G_2$. Portanto,

$$G = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft G_2.$$

Desta forma, podemos construir recursivamente uma cadeia ascendente de grupos. A partir do exposto, estamos aptos a enunciar à definição da torre de automorfismos. Utilizaremos os números ordinais para defini-lá, por isso solicitamos ver o Apêndice desta dissertação.

Definição 1.2.8. *Seja G um grupo com centro trivial. Definimos a torre de automorfismos de G como a cadeia ascendente de grupos*

$$G = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_\alpha \triangleleft G_{\alpha+1} \triangleleft \ldots$$

sendo α um número ordinal. Se α é um ordinal sucessor, definimos $G_{\alpha+1} = Aut(G_\alpha)$ e temos que $C_{G_{\alpha+1}}(G_\alpha) = 1$. Para γ um ordinal limite, definimos $G_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} G_\beta$.

Após detalhar a construção da torre de automorfismos de um grupo e formalizar sua definição, é natural a seguinte dúvida: *A torre de automorfismos se estabiliza?* A questão foi solucionada pelo matemático Wielandt, para grupos finitos, em 1939. Diante disso, apresentamos o teorema central do nosso trabalho:

Teorema 1.2.9. *A torre de automorfismos de um grupo finito com centro trivial sempre estabiliza em um número finito de passos.*

A prova deste teorema está no capítulo final da dissertação. Além do teorema, que responde nossa pergunta principal, temos outro foco de estudo. Ele consiste em discutir o grupo em que a torre de automorfismos se estabiliza.

Observe que a torre se estabiliza em um grupo G_α se $G_\alpha = G_\gamma$, $\forall \gamma > \alpha$. Note então que $G_\alpha = G_{\alpha+1} = Aut(G_\alpha)$. Além disso, $G_\alpha \cong Inn(G_\alpha)$ e da relação $G_\alpha = G_{\alpha+1} = Aut(G_\alpha)$ temos que todos os automorfismos de G_α são internos. Sabemos que $Z(G_\alpha) = 1$ e observamos que $Aut(G_\alpha) = Inn(G_\alpha)$, grupos com tais características definimos como grupos completos. Um dos objetivos do próximo capítulo é estudar melhor os grupos completos.

1.3 Conceitos gerais sobre grupos

Nesta seção, vamos relembrar alguns resultados sobre teoria de grupos que serão úteis no decorrer dos próximos capítulos.

Relembramos que, dado G um grupo e H um subgrupo de G, o normalizador de H em G é definido como

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Note que $N_G(H) = G$ se, e somente se, $H \lhd G$. Além disso, se $K \leq G$ é tal que $K \subseteq N_G(H)$, então dizemos que K normaliza H, ou seja, dado $k \in K$ e $a \in H$ temos que $kak^{-1} = a^k \in H$.

É fácil ver que $N_G(H)$ e $C_G(H)$ são subgrupos de G e que $C_G(H)$ está contido em $N_G(H)$. Se tomarmos $g \in N_G(H)$ e $x \in C_G(H)$ então $gxg^{-1} \in C_G(H)$. De fato, se $h \in H$, logo

$$\begin{aligned} h(gxg^{-1}) =& (hg)xg^{-1} \\ =& (gh_1)xg^{-1}, \ \textit{para algum } h_1 \in H \\ =& gxh_1g^{-1} \\ =& (gxg^{-1})h. \end{aligned}$$

Portanto, $C_G(H) \lhd N_G(H)$.

Recordamos que dois elementos x e y de um grupo G são conjugados se existe um elemento $g \in G$ tal que $gxg^{-1} = y$. É fácil ver que a conjugação é uma relação de equivalência e suas classes de equivalência são as classes de conjugação. Para $x \in G$, denotaremos por $Cl(x)$ sua classe de conjugação e então

$$Cl(x) = \{x^g \mid g \in G\}.$$

Dado G um grupo e $x \in G$, considere $C_G(x)$ o conjunto de todos os elementos de G que comutam com x, ou seja

$$C_G(x) = \{g \in G \mid x^g = x\}.$$

Seja $Y = \{gC_G(x) \mid g \in G\}$. Note que $|Y| = [G : C_G(x)]$, ou seja a quantidade de classes laterais de $C_G(x)$ em G. Vamos mostrar que $|Cl(x)| = |Y|$. Sendo assim, definimos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \varphi\ : Cl(x) &\longrightarrow Y \\ x^g &\longmapsto gC_G(x). \end{aligned}$$

Note que a aplicação φ é sobrejetiva. Além disso, se $\varphi(x^{g_1}) = \varphi(x^{g_2})$, então $g_1C_G(x) = g_2C_G(x)$. Assim,

$$g_1C_G(x) = g_2C_G(x) \iff g_1^{-1}g_2 \in C_G(x) \iff g_1^{-1}g_2x = xg_1^{-1}g_2 \iff x^{g_1} = x^{g_2}.$$

Logo, φ é bijetiva. Portanto, $|Cl(x)| = [G : C_G(x)]$.

Sejam p um primo e G um grupo. Recordamos que G é dito um p-grupo se todo elemento de G tem ordem uma potência de p. Se G é um p-grupo finito, então G tem ordem potência de p. A partir das observações anteriores, vamos demonstrar o seguinte resultado:

Proposição 1.3.1. *Sejam G um p-grupo finito e N um subgrupo normal e não trivial de G. Então $N \cap Z(G) \neq 1$.*

Demonstração. Considere a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccccl} \varphi: & G & \longrightarrow & Aut(N) & & \\ & g & \longmapsto & \varphi_g & : & N \longrightarrow N \\ & & & & & n \longmapsto n^g. \end{array}$$

Note que a aplicação é uma ação por conjugação de G em N. Como $Cl(x) = \{x^g | x \in G\}$, segue que φ particiona N em classes de conjugação. Além disso, observe que $Cl(x) = \{x\}$ se, e somente se $x \in Z(G)$. Temos que $|Cl(x)| = [G : C_G(x)]$. Como G é um p-grupo, $|N|$ e $[G : C_G(x)]$ são potências de p. Note que:

$$N = \dot{\bigcup_{x\in N}} Cl(x) = (\dot{\bigcup_{|Cl(x)|>1}} Cl(x)) \dot{\bigcup} (\dot{\bigcup_{|Cl(x)|=1}} Cl(x)).$$

Então,

$$|N| = \sum_{|Cl(x)|>1} |Cl(x)| + \sum_{|Cl(x)|=1} |Cl(x)|.$$

Claramente temos que $\sum_{|Cl(x)|=1} |Cl(x)| = |Z(G) \cap N|$. Sendo assim,

$$|N| = \sum_{|Cl(x)|>1} |Cl(x)| + |Z(G) \cap N|.$$

Sabemos que p divide $[G : C_G(x)] = |Cl(x)|$, para todo $x \in N$ onde $|Cl(x)| > 1$, e divide $|N|$. Então p divide $|Z(G) \cap N|$. Logo $Z(G) \cap N \neq 1$, como queríamos. □

O conceito de subgrupo característico é muito utilizado ao longo do nosso trabalho. Por isso é necessário relembrar a seguinte definição:

Definição 1.3.2. *Seja G um grupo. Um subgrupo H de G é dito característico em G se $\varphi(H) = H$, para todo automorfismo de G. Denotaremos $H \underset{car}{<} G$, para indicar que H é característico em G*

Além da definição de um subgrupo característico, é útil observar que para cada $g \in G$, temos o seguinte automorfismo de G

$$\begin{aligned} \tau_g : & G \longrightarrow G \\ & x \longmapsto x^g. \end{aligned}$$

Logo $\tau_g(H) = H$, ou seja, para qualquer $h \in H$ então $\tau_g(h) \in H$. Sendo assim, $H^g = H$, para qualquer $g \in G$. Portanto $H \lhd G$ e segue que todo subgrupo característico em G é normal em G. Mas a recíproca não é verdadeira, analise nosso próximo exemplo:

Exemplo 1.3.3. *Seja H um grupo não trivial. Considere $G = H \times H$ e os subgrupos $H_1 = \{1\} \times H$ e $H_2 = H \times \{1\}$, como H não é trivial temos que $H_1 \neq H_2$. Os subgrupos H_1 e H_2 são normais em G. De fato, se $(1, h) \in H_1$ e $(h_1, h_2) \in G$, onde $h_1, h_2 \in H$ temos que*

$$(h_1, h_2)(1, h)(h_1, h_2)^{-1} = (h_1, h_2)(1, h)(h_1^{-1}, h_2^{-1}) = (1, h_2 h h_2^{-1}) \in H_1.$$

Analogamente, $H_2 \lhd G$. Considere o seguinte automorfismo de G:

$$\begin{aligned} \gamma : \quad G & \longrightarrow \quad G \\ (h_1, h_2) & \longmapsto (h_2, h_1). \end{aligned}$$

Note que $\gamma(1, h) = (h, 1)$, para todo $(1, h) \in H_1$. Claramente, $\gamma(H_1) \neq H_1$. Assim H_1 é normal em G e não é característico em G. Observamos o mesmo para o subgrupo H_2.

Destacaremos, de forma conveniente e ao longo da dissertação, alguns resultados envolvendo o conceito de subgrupo característico. Por hora, vamos recordar que:

Proposição 1.3.4. *Se $N \underset{car}{<} H$ e $H \lhd G$ então $N \lhd G$.*

Demonstração. Sejam $g \in G$ e τ_g um automorfismo interno de G induzido pelo elemento g. Uma vez que $H \triangleleft G$, temos que $\psi|_H : H \longrightarrow H$ é um automorfismo de H. Como $N \underset{\text{car}}{<} H$, segue que $(\psi|_H)(N) = N$. Assim, se $n \in N$, então $n^g = \psi(n) \in N$ e temos $N \triangleleft G$. □

Os Teoremas de Sylow também serão úteis ao longo do nosso trabalho. Apenas enunciaremos tais teoremas, as demonstrações podem ser encontradas em [10].

Teorema 1.3.5. *(Teoremas de Sylow). Seja G um grupo. Se $|G| = p^\alpha m$, p um primo e $(p, m) = 1$, então:*

1. *Para cada β, $1 \leq \beta \leq \alpha$, existe $H \leq G$ tal que $|H| = p^\beta$;*
2. *Seja $Syl_p(G) = \{P \leq G : |P| = p^\alpha\}$. Se $n_p = |Syl_p(G)|$ então $n_p|m$ e $n_p \equiv 1$ (mod p);*
3. *Dados $P, Q \in Syl_p(G)$, existe $g \in G$ tal que $P^g = Q$;*
4. *Se S é um p-subgrupo de G, então existe $P \in Syl_p(G)$ tal que $S \subseteq P$.*

A partir do Teorema 1.3.5, os p-subgrupos de Sylow formam uma única classe de equivalência de subgrupos conjugados. Note que a classe de equivalência consiste de um único elemento se, e somente se $gPg^{-1} = P$ para $\forall g \in G$, isto é $Syl_p(G) = \{P\}$. Tal situação ocorre se, e somente se $P \triangleleft G$.

Agora, considere a $|G| = p^\alpha m$ e p não divide m. Se $P \in Syl_p(G)$ e é normal, então $Syl_p(G) = \{P\}$. Note que a ordem e o índice de P são relativamente primos, pela Proposição 3.1.2, P é característico em G. A partir disso, temos que os subgrupos de Sylow normais são sempre característicos.

Proposição 1.3.6. *Sejam G um grupo finito e p um primo, tal que p divide $|G|$. Se $N \triangleleft G$ e $P \in Syl_p(G)$, então $P \cap N \in Syl_p(N)$.*

Demonstração. Inicialmente, considere $|G| = p^\alpha m$, com $(p, m) = 1$. Seja $P \in Syl_p(G)$ logo $|P| = p^\alpha$. Por hipótese, $N \triangleleft G$ e $P \leq G$ logo $P \cap N \triangleleft P$. Assim sendo, temos que $|P \cap N|$ divide a $|P|$, isto é, $|P \cap N| = p^\beta$, onde $\beta \leq \alpha$. Vamos mostrar que $P \cap N$ é um p-subgrupo de Sylow de N.

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[d, dash] & \\
& NP \arrow[dl, equal] \arrow[dr, dash] & \\
N \arrow[dr, dash] & & P \arrow[dl, equal] \arrow[ddl, bend left, "p^{\alpha}"] \\
& N \cap P \arrow[d, dash, "p^{\beta}"] & \\
& \{1\} &
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $|N| = [N : N \cap P]|N \cap P|$. Para mostrar o resultado desejado, basta verificar que p não divide $[N : N \cap P]$. De fato, note que

$$\frac{|N|}{|N \cap P|} = \frac{|NP|}{|P|} \Longrightarrow [N : N \cap P] = [NP : P].$$

Observe que $[G : P] = [G : NP][NP : P]$. Como P é um p-subgrupo de Sylow de G temos que p não divide $[G : P]$. Logo p não divide $[NP : P]$ e então p não divide $[N : N \cap P]$, como queríamos. $\square$

Capítulo 2

Grupos completos

Já mencionamos a importância dos grupos completos no estudo da torre de automorfismos de um grupo finito e com centro trivial. Os principais teoremas sobre os grupos completos, exigem o estudo do subgrupo comutador de um grupo G. Frisamos, também, que muitos dos resultados que asseguram a demonstração do Teorema de Wielandt, envolvem o cálculo sofisticado dos elementos comutadores de um dado grupo G. Por isso, o objetivo inicial deste capítulo é conceituar e discutir algumas propriedades do elemento comutador e do subgrupo comutador de um grupo.

Feito isso, nas últimas seções, estudaremos os grupos completos. Mais especificamente, vamos definir e exemplificar os grupos completos. Também demonstraremos o resultado de Holder ($\sim$1890)/Baer ($\sim$1950), que estabelece condições necessárias e suficientes para um grupo ser completo. Por fim, vamos provar dois resultados, ambos do matemático Burnside ($\sim$1910), também sobre tais grupos.

2.1 Comutadores

Começaremos a discutir os conceitos básicos sobre os elementos comutadores e o subgrupo comutador de um grupo G.

Dados x_1 e x_2 elementos de G, definimos o elemento comutador de x_1 e x_2 como:

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2.$$

Note que x_1 comuta com x_2 se, e somente se, $[x_1, x_2] = 1$. De forma geral, um elemento comutador de comprimento $n \geq 2$ é definido recursivamente pela regra

$$[x_1, \cdots, x_n] = [[x_1, \cdots, x_{n-1}], x_n].$$

Por convenção, $[x_1] = x_1$ e $[x,_n y] = [x, \underbrace{y, \cdots, y}_{n-vezes}]$. Agora, se X_1 e X_2 são subconjuntos não vazios de um grupo G, o subgrupo comutador de X_1 e X_2 é dado por

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle.$$

Mais geralmente, dados $X_1, \cdots, X_n$ subconjuntos não vazios de G, onde $n \geq 2$, definimos:

$$[X_1, \cdots, X_n] = [[X_n, \cdots, X_{n-1}], X_n].$$

Por simples verificação, temos $[X_1, X_2] = [X_2, X_1]$. Algumas vezes é conveniente escrever $[X,_n Y]$ para $[X, \underbrace{Y, \cdots, Y}_{n-vezes}]$. Por fim, recordamos que o subgrupo derivado ou subgrupo comutador de G é definido como $G' = [G, G]$, ou seja,

$$G' = \langle [x_1, x_2] | x_1, x_2 \in G \rangle.$$

Não é difícil verificar que G' é um subgrupo normal em G.

Exemplo 2.1.1. *O grupo dos quatérnios, denotado por Q_8, é um grupo não abeliano de ordem 8. Sua apresentação é:*

$$Q_8 = \langle a, b | a^4 = 1, a^2 = b^2, [a, b] = a^2 \rangle.$$

Os subgrupos normais de Q_8 são: $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$, $\langle a^2 \rangle$ e $\{1\}$. Observamos que subgrupo derivado de Q_8 é $\langle a^2 \rangle$.

Agora, introduziremos propriedades relacionados ao cálculo de comutadores.

Proposição 2.1.2. *Sejam x, y e z elementos de um grupo. Então:*

1. $[x, y] = [y, x]^{-1}$.
2. $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$.
3. $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$.
4. $[x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1}$.

Demonstração. 1. $[y, x]^{-1} = (y^{-1}x^{-1}yx)^{-1} = x^{-1}y^{-1}xy = [x, y]$.

2. $[x, z]^y [y, z] = y^{-1}[x, z]y[y, z] = y^{-1}x^{-1}z^{-1}xyz = (xy)^{-1}z^{-1}(xy)z = [xy, z]$.

3. Análogo ao item anterior.

4. $([x, y]^{y^{-1}})^{-1} = (y[x, y]y^{-1})^{-1} = (yx^{-1}y^{-1}x)^{-1} = x^{-1}yxy^{-1} = [x, y^{-1}]$. □

Proposição 2.1.3. *Sejam H e K subgrupos de um grupo G. Então:*

1. $[H,K]=[K,H]$*;*

2. $[H,K]\leq H$ *se, e somente se,* $K\leq N_G(H)$*.*

Demonstração. 1. Segue imediatamente da Proposição 2.1.2 item 1.

2. Dados $h\in H$ e $k\in K$, observe que $[h,k]=h^{-1}k^{-1}hk\in H$ se, e somente se, temos que $k^{-1}hk\in H$, $\forall k\in K$. Isto é, se, e somente se, $K\leq N_G(H)$.

□

Lema 2.1.4. *Suponha que* H *e* K *são subgrupos de um grupo* G *e que* K *normaliza* H*. Então* $[HK,K]=[H,K][K,K]$*.*

Demonstração. Claramente temos que:

$$[H,K][K,K]\subseteq[HK,K][HK,K]=[HK,K].$$

Por outro lado, seja $h\in H$ e $k_1,k_2\in K$. Pela Proposição 2.1.2 (item 2), segue que:

$$[hk_1,k_2]=[h,k_2]^{k_1}[k_1,k_2]=[h^{k_1},k_2^{k_1}][k_1,k_2].$$

Por hipótese K normaliza H, assim $[hk_1,k_2]\in[H,K][K,K]$. Portanto, $[H,K][K,K]\subseteq[HK,K]$. □

A próxima proposição é uma propriedade importante do subgrupo comutador e será útil em nosso último capítulo.

Proposição 2.1.5. *Seja* H *um subgrupo normal em um grupo* G*. Então o grupo quociente* G/H *é abeliano se, e somente se,* $G'\leq H$*.*

Demonstração. Suponha G/H abeliano. Sejam $x,y\in G$, logo

$$xyH=yxH\Longrightarrow x^{-1}y^{-1}xyH=H\Longrightarrow[x,y]\in H.$$

Logo, $\forall\, x,y\in G$ temos que $[x,y]\in H$. Portanto, $G'\leq H$. Agora, suponha que $G'\leq H$. Sejam $x,y\in G$, então

$$xyH=yxx^{-1}y^{-1}xyH=yx([x,y])H.$$

Como $G'\leq H$, temos que $([x,y])H=H$. Assim, $xyH=yxH$ e, então G/H é abeliano. □

2.2 Grupos completos

Nesta seção, definiremos os grupos completos e demonstraremos que S_n, quando $n \geq 3$ e $n \neq 6$, é um exemplo de grupo completo. Além disso, analisaremos o motivo de S_6 não ser classificado como completo. Por fim, demonstraremos dois resultados importantes sobre esses grupos, ambos do matemático Burnside.

Definição 2.2.1. *Um grupo G é dito completo se $Z(G) = 1$ e $Aut(G) = Inn(G)$.*

Consequentemente, se G é completo segue que todo automorfismo de G é interno. Além disso, note que $G \cong Aut(G)$, pelo Teorema 1.2.4. Comentamos que, de acordo com o Teorema de Wielandt, a torre de um grupo finito se estabiliza em um grupo G_α se $G_\alpha = G_{\alpha+1} = Aut(G_\alpha)$. Sendo $G_\alpha \cong Inn(G_\alpha)$, temos $Inn(G_\alpha) \cong Aut(G_\alpha)$. Como os grupos são finitos, segue que $Inn(G_\alpha) = Aut(G_\alpha)$. Isto é, a torre de automorfismos de um grupo finito estabiliza se existe um ordinal α tal que G_α é um grupo completo. Diante disso, justificamos nosso interesse pelos grupos completos.

O simétrico S_n, quando $n \geq 3$ e $n \neq 6$, é um grupo completo. Para demonstrar que S_n é completo, com as condições já mencionadas, vamos conhecermos um pouco sobre os grupos simétricos. Não iremos demonstrar todos os resultados referentes à estrutura dos S_n. Pretendemos enunciar e comentar a maioria dos teoremas e proposições necessários para verificarmos que, quando $n \geq 3$ e $n \neq 6$, o $Z(S_n)$ é trivial e todos os automorfismos de S_n são internos. Para mais detalhes sobre a estrutura dos grupos simétricos indicamos as referências [4] e [2].

Uma forma de representar as permutações de S_n é utilizando a notação em ciclos, e utilizaremos esta notação. Dizemos que uma permutação $\sigma \in S_n$ é um $r-$ciclo de $S_n, r \geq 2$, se existem $i_1, i_2, \ldots, i_r$ elementos distintos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tais que:

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \ldots, \sigma(i_{r-1}) = i_r, \sigma(i_r) = i_1 \quad \text{e}$$

$$\sigma(j) = j \ \forall \ j \in \{1, \ldots, n\} - \{i_1, \ldots, i_r\}.$$

Nesse caso, usaremos a notação $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_r) \in \ S_n$.

Seja $\sigma \in S_n$ um r-ciclo e seja $\tau \in S_n$ um s-ciclo, $r, s \geq 2$. Dizemos que as permutações σ e τ são disjuntas se nenhum elemento de $\{1, 2, \ldots, n\}$ é movido por ambas. É fácil ver que se $\sigma, \tau \in S_n$ são ciclos disjuntos, então $\sigma\tau = \tau\sigma$.

Toda permutação não trivial $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$, pode ser escrita (de maneira única, a menos de ordenação) como um produto de ciclos disjuntos. Esta é a chamada estrutura cíclica de σ. Ciclos de comprimento 2 são chamados transposições. Desta forma, todo ciclo de S_n pode ser escrito como um produto(não necessariamente disjunto) de transposições. Além disso, definimos que uma permutação é par se pode ser escrita como um produto de um número par de transposições e notamos que ciclos de comprimento ímpar são permutações pares. O conjunto A_n das permutações pares de S_n é um subgrupo normal de ordem $\frac{n!}{2}$, chamado subgrupo alternado de S_n. Por fim, relembramos que S_n é gerado pelo conjunto $\{\ (1\ \ 2), (2\ \ 3), \cdots, (n-1\ \ n)\}$.

O próximo teorema garante que a conjugação ente os elementos de S_n preserva sua estrutura cíclica.

Teorema 2.2.2. *Duas permutações $\alpha, \beta \in S_n$ são conjugadas em S_n se, e somente se, α e β têm a mesma estrutura cíclica.*

Demonstração. Inicialmente, suponha que α e β são conjugadas, logo existe $\gamma \in S_n$ tal que $\beta = \alpha^\gamma = \gamma\alpha\gamma^{-1}$. Considere

$$\alpha = (i_i^{(1)} \cdots i_{k_1}^{(1)}) \cdots (i_i^{(s)} \cdots i_{k_s}^{(s)}).$$

Note que $\alpha(i_j^{(l)}) = i_{j+1}^{(l)}$, onde $1 \leq l \leq s$ e $1 \leq j \leq k_1, \cdots, k_s$. Além disso, como $\beta = \gamma\alpha\gamma^{-1}$ segue que $\beta\gamma = \gamma\alpha$. Diante disso, afirmamos que $\beta(\gamma(i_j^{(l)})) = \gamma(i_{j+1}^{(l)})$, onde $1 \leq l \leq s$. De fato, observe que

$$\beta(\gamma(i_j^{(l)})) = \gamma\alpha\gamma^{-1}(\gamma(i_j^{(l)})) = \gamma\alpha(i_j^{(l)}) = \gamma(i_{j+1}^{(l)}).$$

Sendo assim,

$$\beta = (\gamma(i_1^{(1)}) \cdots \gamma(i_{k_1}^{(1)})) \cdots (\gamma(i_1^{(s)}) \cdots \gamma(i_{k_s}^{(s)})).$$

Logo β tem a mesma estrutura cíclica de α. Por outro lado, suponha que α e β são duas permutações de S_n com a mesma estrutura cíclica. Sejam

$$\alpha = (i_i^{(1)} \cdots i_{k_1}^{(1)}) \cdots (i_i^{(s)} \cdots i_{k_s}^{(s)}) \ \text{ e } \ \beta = (i_i^{'(1)} \cdots i_{k_1}^{'(1)}) \cdots (i_i^{'(s)} \cdots i_{k_s}^{'(s)}).$$

Vamos definir $\gamma \in S_n$ da seguinte maneira: $\gamma(i_k^{(l)}) = i_k^{'(l)}$, onde $1 \leq l \leq s$ e $1 \leq j \leq k_1, \cdots, k_s$. Então segue que $\alpha^\gamma = \beta$, como queríamos. □

A seguir, temos um lema técnico que será útil para verificarmos que, quando $n \geq 3$ e $n \neq 6$, todos os automorfismos de S_n são internos.

Lema 2.2.3. *Sejam $n \neq 6$ e $\tau \in S_n$ um elemento de ordem 2 que é um produto de k transposições disjuntas. Então:*

1. *O tamanho da classe de conjugação de τ é*

$$\frac{n!}{2^k(n-2k)k!};$$

2. Se $k > 1$ então $|Cl(\tau)| \neq |Cl(\sigma)|$, para qualquer transposição σ de S_n.

Demonstração. Como $|S_n| = n!$ e $2|\ n!$, temos que existe $\tau \in S_n$, onde $\tau \neq 1$ e $o(\tau) = 2$. Assim, o grupo S_n possui um elemento de ordem 2 que é produto de k transposições disjuntas.

Observamos que τ consiste de um produto de k transposições disjuntas, onde $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, pois cada transposição possui dois elementos distintos que não se repetirão em nenhuma outra e temos no máximo n elementos para serem distribuídos. Fixado o número de transposições, vemos que τ fixa no máximo $n - 2k$ pontos.

Contaremos o tamanho da classe de conjugação de τ em termos de k e n. Analisando, novamente, que τ se escreve como produto de k transposições disjuntas, vemos então que as possibilidades de escrever a primeira transposição são $\frac{n(n-1)}{2}$.

A próxima possibilidade de escolha para a segunda transposição será $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$. De fato, ao escolhermos a primeira transposição, dois elementos já não podem mais serem escolhidos, dessa forma, a próxima escolha será entre $n - 2$ elementos.

Prosseguindo a contagem dessa forma e por argumentos de análise combinatória, segue que a possibilidade total de escolhas será dada pelo produto, então teremos

$$\frac{n!}{2^k(n-2k)!k!}$$

maneiras de escrever o produto de k transposições disjuntas, sendo $k!$ a quantidade de permutações entre as transposições disjuntas. Logo o tamanho da classe de conjugação de τ será dado por

$$|Cl(\tau)| = \frac{n!}{2^k(n-2k)!k!}.$$

Para provarmos o item 2, note que se $k = 1$, então τ é uma transposição e

$$|Cl(\tau)| = \frac{n!}{2(n-2)!}.$$

Queremos garantir que para $k > 1$, o tamanho da classe de τ é diferente do tamanho da classe de uma transposição , isto é,

$$\frac{n!}{2(n-2)!} \neq \frac{n!}{2^k(n-2k)!k!}.$$

Vamos provar então que

$$2(n-2)! \neq 2^k(n-2k)!k!, \quad \text{para} \quad 1 < k \leq \frac{n}{2}. \tag{2.1}$$

Se $k = 2$, é fácil ver que $4(n-4)!2! \neq 2(n-2)!$, $n \geq 2$. Assumimos então que $k \geq 3$ o que nos dá 3 transposições disjuntas, ou seja, temos $n \geq 6$. Mas por hipótese $n \neq 6$. Assim teremos $n > 6$. Observe que teremos uma igualdade em (2.1) caso $n = 6$ e $k = 3$, o que comprova a necessidade de nossa hipótese. Para mostrarmos (2.1), mostraremos que

$$2^k(n-2k)!k! < 2(n-2)!$$

que é o mesmo que

$$2^{k-1}(n-2k)!k! < (n-2)!.$$

Pela definição de número binomial temos

$$1 \leq \binom{n-k}{k} = \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}$$

e daí segue que

$$k!(n-2k)! \leq (n-k)!$$

ou então

$$2^{k-1}k!(n-2k)! \leq 2^{k-1}(n-k)!.$$

Assim, basta mostrar que

$$2^{k-1} < (n-2)(n-3)\ldots(n-(k-1)), \tag{2.2}$$

pois daí teremos, nossa relação desejada.

Para mostrar (2.2), observe que no lado direito dessa inequação temos $k-2$ fatores com o de menor valor sendo $(n-(k-1))$. Uma vez que este fator excede 4, teremos que os demais fatores também excederão 4. De fato, como $n > 6$ e $1 < k \leq \frac{n}{2}$, temos $0 < k-1 \leq \frac{n}{2} - 1 = \frac{n-2}{2}$. Mas para termos o menor valor de $(n-(k-1))$ precisamos que $k-1$ seja o maior possível, ou seja, $\frac{n-2}{2}$. Logo, chegamos que

$$n - \left(\frac{n-2}{2}\right) = \frac{n+2}{2} > 4$$

para $n > 6$. Temos então que o lado direito de (2.2) excede $4^{k-2} = 2^{2(k-2)} \geq 2^{k-1}$. $\square$

Agora, estamos prontos para provar que S_n, para $n \neq 6$ e $n \geq 3$, é um grupo completo.

Proposição 2.2.4. *Para $n \geq 3$, temos que $Z(S_n) = \{1\}$.*

Demonstração. Considere $\alpha \in S_n$ e α não trivial. Vamos mostrar que sempre existe $\tau \in S_n$ tal que $\alpha\tau \neq \tau\alpha$ e desta forma, temos que $\alpha \notin Z(S_n)$. Observe que sendo $\alpha \neq 1$ existe

$i \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $\alpha(i) = j \neq i$. Como $n \geq 3$, existe $k \in \{1, \cdots, n\}$, onde $k \neq i$ e $k \neq j$. Tome $\tau = (i\ k)$, assim temos que

$$\alpha\tau(i) = \alpha(k) \neq j \quad \text{e} \quad \tau\alpha(i) = \tau(j) = j.$$

Portanto, $\alpha\tau \neq \tau\alpha$. □

Teorema 2.2.5. *Se $n \neq 6$ então todo automorfismo de S_n é interno.*

Demonstração. Sejam $\sigma \in Aut(S_n)$ e ψ uma transposição em S_n. Um automorfismo leva conjuntos com m elementos em conjuntos com m elementos, ou seja, σ leva $\frac{n!}{2(n-2)!}$ elementos da classe de α em $\frac{n!}{2(n-2)!}$ elementos. Pelo Lema 2.2.3, uma classe com este tamanho só possui transposições, assim σ leva transposições em transposições.

Tome $c_i = (i\ i+1)$ para $1 \leq i \leq n-1$ e seja $\psi_i = \sigma(c_i)$. Para $i = 1$ escreva $\psi_1 = (a_1\ a_2)$. Observando que $c_1 = (1\ 2)$ e $c_2 = (2\ 3)$ não comutam, temos que ψ_1 e ψ_2 também não comutam, pois

$$\psi_1\psi_2 = \sigma(c_1)\sigma(c_2) = \sigma(c_1c_2) \neq \sigma(c_2c_1) = \psi_2\psi_1.$$

Podemos escrever então $\psi_2 = (a_2\ a_3)$ com $a_3 \neq a_1$. Analogamente, ψ_3 não comuta com ψ_2, pois c_3 não comuta com c_2. Assim ψ_3 deve possuir a_2 ou a_3. No entanto, uma vez que c_1 comuta com c_3, ψ_1 comuta ψ_3. Sendo assim, $\psi_3 = (a_3\ a_4)$ onde $a_4 \notin \{a_1, a_2, a_3\}$. Da mesma forma, ψ_4 possui interseção com ψ_3 e é disjunto de ψ_1, ψ_2. Assim sendo $\psi_4 = (a_4\ a_5)$, $a_5 \notin \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Continuando deste modo podemos escrever $\psi_i = (a_i\ a_{i+1})$ com $a_1, \ldots, a_n$ distintos, $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Seja $\gamma \in S_n$ uma permutação tal que $\gamma(i) = a_i$. Então $(c_i)^\gamma = \psi_i$. Se α é automorfismo interno induzido por γ, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} \alpha : S_n & \longrightarrow & S_n \\ \eta & \longmapsto & \eta^\gamma \end{array}$$

mostraremos que $\alpha^{-1}\sigma$ fixa cada c_i. Note que o conjunto $\{c_i\}$ gera S_n. Se $\alpha^{-1}\sigma$ fixar todo c_i, teremos que $\alpha^{-1}\sigma$ fixará todo elemento de S_n, ou seja, $\alpha^{-1}\sigma = Id$. Sabemos que $\psi_i = \sigma(c_i)$, logo $\alpha^{-1}(\sigma(c_i)) = \alpha^{-1}(\psi_i)$. Como

$$\begin{array}{rcl} \alpha^{-1} : S_n & \longrightarrow & S_n \\ \eta & \longmapsto & \eta^{\gamma^{-1}} \end{array}$$

e $\psi_i = c_i^\gamma$ temos

$$\alpha^{-1}(\sigma(c_i)) = \alpha^{-1}(\psi_i) = \alpha^{-1}(c_i^\gamma) = (c_i^\gamma)^{\gamma^{-1}} = c_i.$$

Assim $\alpha = \sigma$ é automorfismo interno, como queríamos demonstrar. □

Usando a Proposição 2.2.4 e o Teorema 2.2.5, provamos o seguinte:

Teorema 2.2.6. *S_n é um grupo completo, para todo $n \geq 3$ e $n \neq 6$.*

Para $n = 6$, não temos $S_n \cong Aut(S_n)$. Ou seja, S_6 tem um automorfismo que não é interno. Para demonstrar isso, é necessário discutir certas características do grupo S_6 e do seu grupo de automorfismos, $Aut(S_6)$.

O grupo S_6 possui um subgrupo, que denotaremos de K, com ordem 120 e que não contém transposições. O subgrupo K de S_6 é fundamental para demonstrar que S_6 e $Aut(S_6)$ não são isomorfos. Para começarmos a provar a existência do subgrupo K de S_6, recordamos que dado um conjunto não-vazio X, o conjunto $Sim(X)$ é considerado o conjunto de todos as permutações do conjunto X. É fácil verificar que $Sim(X)$ é um grupo. Um subgrupo S de $Sim(X)$ é denominado transitivo, se para cada par de elementos $x, y \in X$, existir uma permutação $\sigma \in S$, tal que $\sigma(x) = y$. Com o intuito de exemplificar as definições relembradas acima, destacamos que $K_4 = \{1, (12)(34), (13(24), (14)(23)\}$ é um subgrupo transitivo de S_4.

Agora, seja H um subgrupo de um grupo G. Considere o conjunto $X = \{xH \mid x \in G\}$, note que o número de elementos do conjunto X corresponde ao número de classes laterais de H em G e podemos definir o homomorfismo

$$\begin{array}{rcccl} \varphi: & G & \longrightarrow & Sim(X) & \\ & g & \longmapsto & \varphi_g & : \quad X \longrightarrow X \\ & & & & \quad\; xH \longmapsto gxH. \end{array}$$

Afirmamos que $Im(\varphi)$ é um subgrupo transitivo de $Sim(X)$. De fato, se tomarmos $x, y \in X$, então existem $a, b \in G$ tal que $x = aH$ e $y = bH$. Seja $g = ba^{-1} \in G$, claramente $\sigma = \varphi_g \in Im(\varphi)$. Observe que:

$$\varphi_g(aH) = gaH = (ba^{-1})aH = bH.$$

Diante disso, existe $\sigma \in Im(\varphi)$ tal que $\sigma(x) = y$.

À vista disso, vamos demonstrar o lema abaixo.

Lema 2.2.7. *Existe um subgrupo transitivo K de S_6 com ordem 120 que não contém transposições.*

Demonstração. Dado um grupo G e um subgrupo H, podemos definir o seguinte homomorfismo

$$\begin{array}{rclcl} \varphi: G & \longrightarrow & Sim(X) & & \\ g & \longmapsto & \varphi_g : X & \longrightarrow & X \\ & & aH & \longmapsto & gaH \end{array}$$

onde $X = \{aH|\ a \in G\}$. Inicialmente, vamos mostrar que $Im(\varphi)$ é um subgrupo transitivo de S_6 cuja ordem é 120. Considere $G = S_5$, $P \in Syl_5(S_5)$ e $H = N_G(P)$. Pelo Teorema de Sylow, temos que $n_5 \equiv 1\ (mod\ 5)$ e que n_5 divide 24. Sendo assim, $n_5 = 6$ pois P não é normal em S_5. Então $[G : N_G(P)] = 6$.

Diante disso, temos $|X| = 6$ e $|Sim(X)| = 6!$ o que implica que $Sim(X) \cong S_6$. Deste modo, no homomorfismo acima temos $\varphi : S_5 \to S_6$. Afirmamos que o homomorfismo é injetor. De fato, observe que

$$\begin{aligned} ker(\varphi) &= \{g \in S_5|\ \varphi_g = Id\} \\ &= \{g \in S_5|\ aH = gaH,\ \forall a \in G\}. \end{aligned}$$

Se $a = 1$, então $H = gH$, ou seja, $g \in H$. Logo $ker(\varphi) \leq H$ e assim $[G : H] \leq [G : ker(\varphi)]$. Como $ker(\varphi) \triangleleft S_5$ temos duas possibilidades: $ker(\varphi) = 1$ ou A_5. Observe que $[S_5 : ker(\varphi)] \geq 6$, então a única possibilidade coerente é $ker(\varphi) = 1$, mostrando que φ é um homomorfismo injetor.

Diante do exposto, temos que $|Im(\varphi)| = |S_5| = 120$ e $Im(\varphi) \leq S_6$. Além disso, note que $Im(\varphi)$ é um subgrupo transitivo de S_6. Denote $K = Im(\varphi)$, agora basta mostrar que K não possui transposições. A demostração é por contradição.

Sabemos que K contém um elemento α de ordem 5 que deve ser um 5-ciclo, digamos $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$. Suponha que $(i\ j)$ seja uma transposição em K. Como K é transitivo, existe um $\beta \in K$ tal que $\beta(j) = 6$ então $\beta^{-1}(6) = j$. Portanto $\beta(i\ j)\beta^{-1} \in K$, ou seja, é igual a $(l\ 6)$ para algum $l \neq 6$. Conjugando $(l\ 6)$ por todas as potências de α teremos que $(1\ 6)$, $(2\ 6)$, $(3\ 6)$, $(4\ 6)$ e $(5\ 6)$ pertencem a K. Já relembramos que esses elementos geram o S_6, assim $K = S_6$, absurdo. $\square$

Estamos aptos a mostrar o seguinte teorema:

Teorema 2.2.8. *Existe um automorfismo de S_6 que não é interno.*

Demonstração. De acordo com o Lema 2.2.7, temos K um subgrupo transitivo de S_6, cuja ordem é 120 e não possui transposições. Considere $\sigma : S_6 \longrightarrow Sim(X)$, onde $X = \{\alpha_1 K, \alpha_2 K, \cdots, \alpha_6 K\}$. Analogamente à demonstração do Lema 2.2.7, mostramos que σ é injetiva. Além disso, note que $|Sim(X)| = |S_6|$, então σ é sobrejetiva. Portanto, $\sigma \in Aut(S_6)$. Suponha, por absurdo, que $\sigma \in Inn(S_6)$. Sendo assim, σ é uma conjugação e preserva estrutura cíclica dos elementos de S_6. À vista do exposto, $\sigma((1\ 2)) = \sigma_{(1\ 2)}$ é uma transposição. Porém

$$\begin{aligned} \sigma : S_6 &\longrightarrow S_6 \\ (1\ 2) &\longmapsto \sigma_{(1\ 2)} : X \longrightarrow X \\ &\qquad\qquad \alpha_i K \longmapsto (1\ 2)\alpha_i K, \end{aligned}$$

para cada i. Com $\sigma_{(1\ 2)}$ é transposição então alguma classe $\alpha_i K$ tem que ser fixada, ou seja, exites i tal que $(1\ 2)\alpha_i K = \alpha_i K$. Se isto acontecer, $\alpha_i^{-1}(1\ 2)\alpha_i K = K$, teremos que

$\alpha_i^{-1}(1\ 2)\alpha_i \in K$. Absurdo, pois $\alpha_i^{-1}(1\ 2)\alpha_i$ é uma transposição e K não possui transposições.

Note que $\sigma_{(1\ 2)}$ não fixa as classes laterais e logo $\sigma_{(1\ 2)}$ não é uma transposição. Assim, $\varphi \notin Inn(S_6)$, ou seja, S_6 possui um automorfismo que não é interno $\square$

A partir do Teorema 2.2.8, temos nosso resultado almejado, isto é, o grupo S_6 não é um grupo completo.

2.3 Teoremas sobre grupos completos

A última seção do capítulo é dedicada aos resultados importantes sobre os grupos completos. Iniciaremos com definições e proposições que auxiliaram na demonstração desse teoremas. Sendo assim, vamos definir o produto central e fator direto de um grupo.

Definição 2.3.1. *Sejam $G_1, \ldots, G_n$ os subgrupos normais de um grupo G. Dizemos que G é o produto central de $G_1, \ldots, G_n$ se*

1. *$G = G_1 \ldots G_n$;*

2. *$[G_i, G_j] = 1$ para $i \neq j$;*

3. *$Z(G_i) = Z(G)$, onde $1 \leq i \leq n$.*

Definição 2.3.2. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Dizemos que H um fator direto de G se H é um subgrupo normal de G e existe K um subgrupo normal de G tal que $G = HK$ e $H \cap K = \{1\}$. Denotaremos $G = H \times K$.*

Utilizaremos na demonstração da caracterização dos grupos completos as proposições que seguem.

Proposição 2.3.3 (Lei Modular de Dedekind)**.** *Sejam H, K, L subgrupos de um grupo G e assuma que $K \subseteq L$. Então*

$$HK \cap L = (H \cap L)K.$$

Demonstração. Ver [10]. $\square$

Recordaremos, de forma breve, a definição de produto semi-direto de grupos. Consideremos H e K grupos e suponhamos que podemos definir um homomorfismo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \varphi : H &\longrightarrow Aut(K) \\ h &\longmapsto \varphi_h : K \longrightarrow K \\ &\qquad\qquad k \longmapsto \varphi_h(k) \end{aligned}$$

Assim, dizemos que H age sobre K. Considerando φ esta ação e o conjunto

$$H \times K = \{(h,k)|h \in H \text{ e } k \in K\}$$

é possível definir um produto em $H \times K$ dependendo da ação φ da seguinte maneira:

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1h_2, k_1\varphi_{h_1}(k_2)),$$

onde $h_1, h_2 \in H$ e $k_1, k_2 \in K$. A partir do produto definido, é fácil ver que o conjunto $H \times K$ é um grupo, denominado o produto semi-direto de H e K. Denotaremos por $H \ltimes K$. Observe que quando a ação é trivial, o produto semi-direto é o produto direto de $H \times K$, uma vez que $\varphi_h(k) = k \; \forall \; h \in H$, $\forall \; k \in K$, e assim

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1h_2, k_1k_2).$$

Proposição 2.3.4. *Seja A um grupo abeliano não trivial. Considere $D = A \times A$ e defina $\varphi \in Aut(D)$ por*

$$\begin{aligned} \varphi : & D \longrightarrow D \\ & (a_1, a_2) \longmapsto (a_1, a_1a_2). \end{aligned}$$

Seja $L = D \rtimes \langle\varphi\rangle$ o produto semi-direto de D e $\langle\varphi\rangle$. Então $Z(L) = L' \cong A$.

Demonstração. Ver [10]. □

Agora, vamos demonstrar um resultado que dá condição necessária e suficiente para um grupo ser completo. Apresentaremos a caracterização de grupos completos dada por Holder/Baer. O leitor também encontrará o resultado na referência [10].

Teorema 2.3.5. *Um grupo G é completo se, e somente se, sempre que $G \cong N$ onde $N \lhd H$ então necessariamente N é um fator direto de H.*

Demonstração. Inicialmente, suponha que G é um grupo completo e assuma que $G \cong N$ onde $N \lhd H$. Vamos mostrar que $H = N \times C$, para algum $C \lhd H$, tal que $H = CN$ e $C \cap N = \{1\}$. Considere $C = C_H(N)$. Como $C = C_H(N) \lhd N_H(N) = H$, então $C \lhd H$. Além disso, note que $C \cap N = Z(N)$. Assumimos que $G \cong N$, já que G tem centro trivial o mesmo ocorre com N. Então, $C \cap N = \{1\}$. Agora, vamos verificar que $H = CN$. Uma vez que N é completo, temos que $Aut(N) = Inn(N)$. Logo, se $\varphi \in Aut(N)$, então existe $y \in N$ tal que $\varphi = \tau_y$. Em particular, se $x \in H$ e tomamos

$$\begin{aligned} \varphi :& N \longrightarrow N \\ & n \longmapsto n^x, \end{aligned}$$

temos que $\varphi \in Aut(N)$ e

$$\begin{aligned} & \tau_y(n) = \varphi(n) \\ \iff \quad & n^y = n^x \\ \iff \quad & yny^{-1} = xnx^{-1} \\ \iff \quad & (x^{-1}y)n = n(x^{-1}y), \forall n \in N. \end{aligned}$$

Portanto, $x^{-1}y \in C$. Isto é, $x \in yC$ então $x = yc$, para algum $c \in C$, e $H = NC$. Temos que $H = N \times C$. Reciprocamente, vamos assumir que G tem a propriedade citada. Mostraremos que G é completo, isto é $Z(G) = 1$ e $G \cong Aut(G)$. Suponha, por absurdo, que $Z(G) \neq 1$. Logo, $Z(G)$ é um grupo abeliano não trivial e, pela Proposição 2.3.4, existe um grupo L tal que $Z(L) = L' \cong Z(G)$. Agora, consideramos M o produto central de L e G. Sendo assim, $Z(L) = Z(M) = Z(G)$, $[L, G] = 1$ e $L, G \lhd M$. Temos $M = LG$ e $L \cap G = Z(G)$. Como $G \lhd M$, por hipótese, temos que G é fator direto de M, ou seja, $M = G \times K$, onde $K \lhd M$. Sabemos que $[G, K] = 1$ logo K e G comutam e $K \leq C_M(G)$. Uma vez que $[L, G] = 1$, então $L \leq C_M(G)$. Afirmamos que $C_M(G) = L$ e, assim, $K \leq L$. De fato, usando a Lei de Dedekind, temos

$$\begin{aligned} C_M(G) =& M \cap C_M(G) \\ =& LG \cap C_M(G) \\ =& L(G \cap C_M(G)) \\ =& LZ(G) \\ =& L. \end{aligned}$$

Além disso, usando novamente a Lei de Dedekind, observamos que

$$\begin{aligned} L =& L \cap M \\ =& L \cap GK \\ =& (L \cap G)K \\ =& Z(G)K. \end{aligned}$$

Assim, $L' = [L, L] = [Z(G)K, Z(G)K]$. Como $K \leq C_M(G)$, segue que $[Z(G)K, Z(G)K] =$

$[K, K] = K'$. Por fim, note que

$$Z(G) = Z(L) = L' = K' \leq K \cap G = 1.$$

Com esta contradição garantimos que $Z(G) = 1$. Agora, vamos mostrar que $G \cong Aut(G)$. Já provamos que o centro de G é trivial, então $G \cong Inn(G)$. Sabemos que $Inn(G) \lhd Aut(G)$ e, por hipótese, vamos ter que $Aut(G) = Inn(G) \times R$, para algum $R \lhd Aut(G)$ e $[R, Inn(G)] = 1$. Logo $R \leq C_{Aut(G)}(Inn(G))$. Como $C_{Aut(G)}(Inn(G)) = \{1\}$, então $R = 1$. Com isso, concluímos que $Aut(G) = Inn(G)$ e, assim G é completo. □

Exploraremos resultados que garantem sob quais condições o grupo de automorfismos, $Aut(G)$, de um grupo G com centro trivial é um grupo completo.

Teorema 2.3.6 (Burnside)**.** *Se G é um grupo com centro trivial e $Inn(G) \underset{car}{<} Aut(G)$, então $Aut(G)$ é completo.*

Demonstração. Vamos mostrar que quando $Aut(G)$ é isomorfo a um subgrupo normal N de um grupo H então N é um fator direto de H e, pelo Teorema 2.3.5, garantimos que $Aut(G)$ é completo. Suponha que $N \lhd H$ e considere o seguinte isomorfismo

$$\psi : Aut(G) \longrightarrow N.$$

Denote $I = \psi(Inn(G))$. Como $Inn(G) \underset{\text{car}}{<} Aut(G)$ temos que $I \underset{\text{car}}{<} N$. Como G tem centro trivial, vamos considerar o isomorfismo $\tau : G \longrightarrow Inn(G)$. Então

$$\begin{array}{rclcl} G & \xrightarrow{\tau} & Inn(G) & \xrightarrow{\psi} & I \\ g & \longmapsto & \tau_g & \longmapsto & \psi(\tau_g). \end{array}$$

Note que como $I \underset{\text{car}}{<} N \trianglelefteq H$, então $I \trianglelefteq H$. Logo, para todo $h \in H$ temos que $h\psi(\tau_g)h^{-1} \in I$. Note que dado $h \in H$, o elemento h induz um automorfismo por conjugação sobre I. Como $G \cong I$, o elemento h também induz um automorfismo sobre G, a saber φ. Inicialmente, observe que:

$$\begin{array}{rclclcl} G & \xrightarrow{\varphi} & G & \xrightarrow{\tau} & Inn(G) & \xrightarrow{\psi} & I \\ g & \longmapsto & \varphi(g) & \longmapsto & \tau_{\varphi(g)} & \longmapsto & \psi(\tau_{\varphi(g)}). \end{array}$$

Agora, vamos analisar o diagrama considerando o automorfismo de I induzido por h.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi\tau"] & G \arrow[d, "\psi\tau"] \\ I \arrow[r, "\tau_h"] & I \end{tikzcd}$$

De acordo com o diagrama, observamos que $\psi\tau\varphi = \tau_h\psi\tau$. Assim, para todo $g \in G$, temos que:

$$\begin{aligned} (\psi\tau\varphi)(g) =& (\tau_h\psi\tau)(g) \\ \iff (\psi\tau)(\varphi(g)) =& (\tau_h\psi)(\tau_g) \\ \iff \psi(\tau_{\varphi(g)}) =& \tau_h(\psi(\tau_g)) \\ \iff \psi(\tau_{\varphi(g)}) =& h\psi(\tau_g)h^{-1}. \end{aligned}$$

Como $\tau_{\varphi(g)} = \varphi\tau_g\varphi^{-1}$, segue que:

$$\begin{aligned} \psi(\tau_{\varphi(g)}) =& h\psi(\tau_g)h^{-1} \\ \iff \psi(\varphi\tau_g\varphi^{-1}) =& h\psi(\tau_g)h^{-1} \\ \iff \psi(\varphi)\psi(\tau_g)\psi(\varphi)^{-1} =& h\psi(\tau_g)h^{-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\psi(\varphi)\psi(\tau_g)\psi(\varphi)^{-1} = h\psi(\tau_g)h^{-1} \Longrightarrow \psi(\tau_g)([\psi(\varphi)]^{-1}h) = ([\psi(\varphi)]^{-1}h)\psi(\tau_g).$$

Ou seja, $([\psi(\varphi)]^{-1}h)$ comuta com todo elemento de I. Portanto, $([\psi(\varphi)]^{-1}h) \in C_H(I) = C$ e $H = CN$. Note que $C \cap N = C_N(I)$ e como $C_{Aut(G)}(Inn(G)) = \{1\}$, temos que $C \cap N = \{1\}$. Por fim, como $N \lhd H$, $C = C_H(I) \lhd N_H(I) = H$. Assim, $H = C \times N$, como queríamos. □

Relembramos que um subgrupo normal minimal de um grupo G, é um subgrupo normal e não trivial que não contém um subgrupo normal não trivial de G. Isto é, se $N \lhd G$ e $N < H$, então $N = \{1\}$.

Teorema 2.3.7 (Burnside)**.** *Se G é simples não abeliano, então $Aut(G)$ é completo.*

Demonstração. Como G é não abeliano e simples, $Z(G) = \{1\}$ e temos $G \cong Inn(G) = I$. Além disso, I não pode conter um subgrupo normal não trivial. Assim, I é um subgrupo normal minimal de $Aut(G)$. Suponha, por absurdo, que $Aut(G)$ não é completo. Pelo resultado anterior, I não é característico em $Aut(G) = A$. Logo $I \neq \varphi(I)$, para algum $\varphi \in Aut(A)$. Note que $I \cap \varphi(I) \lhd A$. Como $I \cap \varphi(I) \leq I$ e I é simples temos que $I \cap \varphi(I) = \{1\}$. Com isso, $[I, \varphi(I)] = \{1\}$. Logo $\varphi(I) \leq C_A(I) = \{1\}$. Diante disso, $\varphi(I) = 1$ e $I = \{1\}$, pois φ é um isomorfismo de A. Consequentemente, $G = 1$ absurdo. Portanto, $Aut(G)$ é completo. □

Ressaltamos que se retiramos a hipótese de G ser não abeliano do teorema anterior, ou seja, se G é simples e abeliano então G é cíclico de ordem prima, isto é $G \cong \mathbb{Z}_p$. Sabemos que $Aut(\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$, logo $Aut(G)$ não é completo.

Capítulo 3

Subgrupos subnormais

A nossa demonstração do Teorema de Wielandt também está fundamentada no estudo sobre os subgrupos subnormais de um grupo finito. Vamos discutir sobre os subgrupos subnormais visando desenvolver a teoria necessária para demonstrar o seguinte teorema

Existe uma função $f : \omega \longrightarrow \omega$ tal que sempre que H for um subgrupo subnormal de um grupo finito G, onde $C_G(H) = 1$, então $|G| \leq f(|H|)$.

O Teorema acima, também da autoria do matemático Wielandt, é essencial para garantir a estabilidade da torre de automorfismo de um grupo finito e com centro trivial. Neste capítulo, nosso objetivo é discutir todos os resultados para demonstrá-lo. As referências utilizadas foram [10] e [14].

3.1 Série S-característica

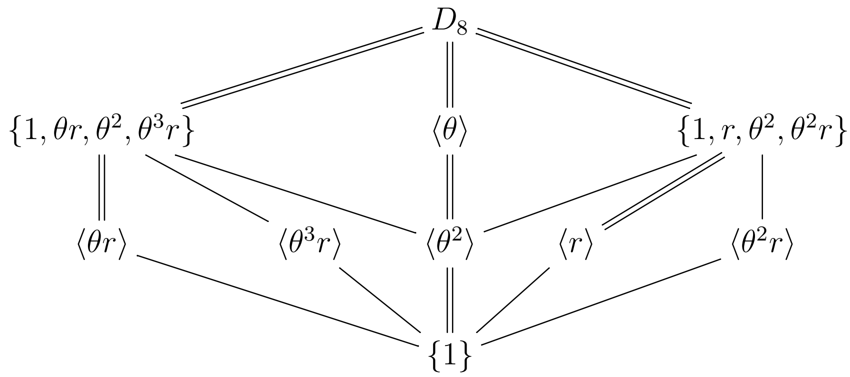
Na introdução, já ressaltamos nosso interesse nos subgrupos subnormais de um grupo finito e com centro trivial. Sendo assim, iniciaremos com a seguinte definição

Definição 3.1.1. *Seja H um subgrupo de um grupo G. Dizemos que H é um subgrupo subnormal em G se existem distintos subgrupos $H = H_0, H_1, \ldots, H_n = G$ tais que*

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_n = G$$

forma uma série finita de H para G. Denotaremos $H \underset{sn}{<} G$.

Um subgrupo $H \underset{\text{sn}}{<} G$ não é necessariamente um subgrupo normal em G. A normalidade entre grupos não é uma relação transitiva, ou seja, se $K \lhd H$ e $H \lhd G$ não é possível garantir que $K \lhd G$. Para reforçar nossa afirmação, vamos analisar o grupo D_8, que já definimos no primeiro capítulo. Sendo assim, observe seu reticulado



Considere $\langle r, \theta^2\rangle = \{1, \theta^2, r, r\theta^2\}$ e $\langle r\rangle = \{1, r\}$. Note que

$$\theta r \theta^{-1} = \theta r \theta^3 = r\theta^6 = r\theta^2 \notin \langle r\rangle.$$

Logo $\langle r\rangle$ não é normal em D_8. Mas considerando a seguinte série

$$\langle r\rangle \lhd \langle r, \theta^2\rangle \lhd D_8.$$

Temos que $\langle r\rangle \underset{\text{sn}}{<} D_8$.

Nos primeiros capítulos, já definimos e até utilizamos a noção de subgrupos característicos. Agora, vamos destacar uma proposição que estabelece quando um subgrupo subnormal de um grupo finito é característico.

Proposição 3.1.2. *Seja G um grupo finito. Se H é um subgrupo normal de G cuja ordem e o índice são relativamente primos, então $H \underset{car}{<} G$.*

Demonstração. Seja $|H| = m$ e $[G : H] = n$, tal que $(m, n) = 1$ e $|G| = mn$. Se $\varphi \in Aut(G)$, então $\varphi(H) = I$ também tem ordem m e HI é um subgrupo de G. Denote $d = |H \cap I|$. Temos que $d|m$ e $|HI| = \frac{m^2}{d}$. Sendo assim, segue que $(\frac{m^2}{d})|mn$. Como $(m, n) = 1$, seque que $m = d$ e temos $H = \varphi(H)$, $\forall\ \varphi \in Aut(G)$. Portanto, $H \underset{\text{car}}{<} G$. □

Ressaltamos que sob essas hipóteses, H é o único subgrupo normal de G de ordem m, logo característico. Agora, vamos começar a demonstrar o seguinte teorema

Teorema 3.1.3. *Existe uma função $f : \omega \longrightarrow \omega$ tal que sempre que H for um subgrupo subnormal de um grupo finito G, onde $C_G(H) = 1$, então $|G| \leq f(|H|)$.*

O primeiro passo para provar o Teorema 3.1.3 será construir uma série estritamente crescente de subgrupos característicos em H, a saber

$$1 = S_0 < S_1 < \cdots < S_t = H.$$

e depois construir uma série correspondente e parcial de subgrupos característicos em G

$$1 = R_0 \leq R_1 \leq \cdots \leq R_t.$$

A série é denominada parcial pois o subgrupo $R_t \neq G$.

Para definir detalhadamente as séries desejadas, precisamos introduzir um importante subgrupo característico: $O_p(G)$. Por esse motivo, recordemos que se H e K são p-subgrupos normais de um grupo G, HK é um p-subgrupo normal de G. Por indução, verificamos que se $H_1, H_2, \ldots, H_n$ são p-subgrupos normais de G, então $H_1 H_2 \ldots H_n$ também é um p-subgrupo normal de G. Segue que G tem um único p-subgrupo normal maximal, a saber o subgrupo gerado por todos os seus p-subgrupos normais. Isto motiva a nossa definição

Definição 3.1.4. *Seja G um grupo finito e p um primo. Definimos o $O_p(G)$ como o único p-subgrupo normal maximal de G.*

Exemplo 3.1.5. *Considere o grupo simétrico S_4, cuja ordem é $2^3 \cdot 3$. Sabemos que os subgrupos normais de S_4 são: K (o grupo de Klein), A_4 (o subgrupo das permutações pares de S_4) e os seus subgrupos triviais. Assim, temos que $O_2(S_4) = K$.*

Dado φ um automorfismo de um grupo G e H e K p-subgrupos normais de G, temos que $\varphi(H)$ e $\varphi(G)$ também são p-subgrupos normais de G. Além disso, ressaltamos que $O_p(G)$ é um subgrupo característico em G.

Dadas as definições dos subgrupos subnormais de um grupo G e do seu $O_p(G)$. Demonstraremos a seguinte proposição:

Proposição 3.1.6. *Seja G um grupo e p um primo. Se H é um p-subgrupo de G e subnormal em G, então $H \leq O_p(G)$.*

Demonstração. Como $H \underset{\text{sn}}{<} G$, então existe uma série finita tal que

$$H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \cdots \triangleleft H_{l-1} \triangleleft H_l = G.$$

Vamos demonstrar o resultado por indução sobre l. Se $l = 1$, então $H \triangleleft G$. Logo H é um p-subgrupo normal de G, segue que $H \leq O_p(G)$.

Agora, vamos considerar $l > 1$ e pela hipótese de indução, temos que $H \leq O_p(H_{l-1})$. Note que $O_p(H_{l-1}) \underset{\text{car}}{<} H_{l-1}$ e $H_{l-1} \triangleleft H_l$, então $O_p(H_{l-1}) \triangleleft H_l = G$, pela Proposição 1.3.4. Isto significa que $O_p(H_{l-1}) \leq O_p(G)$ e logo $H \leq O_p(G)$. □

Além da Proposição 3.1.6, é útil observar que:

Observação 3.1.7. *Considere G um grupo finito e p um primo, tal que p divide $|G|$. Não é possível afirmar que o $O_p(G)$ é um p-subgrupo de Sylow de G. Para exemplificar, vamos analisar novamente o grupo simétrico S_4. Como $|S_4| = 2^3 \cdot 3$, temos que se $P \in Syl_2(S_4)$ então $|P| = 2^3$. Já verificamos que $O_2(S_4) = K$ e $|K| = 2^2$.*

A próxima definição é muito importante.

Definição 3.1.8. *Um grupo finito G é dito ser semissimples se não tem subgrupos abelianos normais não triviais.*

Com o intuito de exemplificar os grupos semissimples, mencionamos os grupos simétricos S_n, onde $n \geq 5$. Diante do exposto, estamos aptos a começar a discutir os lemas iniciais para demonstrarmos o Teorema 3.1.3.

Lema 3.1.9. *Seja H um grupo finito. Então existe uma série de subgrupos em H*

$$1 = S_0 < S_1 < \cdots < S_t = H \tag{3.1}$$

onde cada S_i é característico em H e, além disso, ou S_{i+1}/S_i é gerado por todos os subgrupos subnormais simples de H/S_i ou S_{i+1}/S_i é um p_i-grupo, para algum primo p_i dividindo $|H|$.

Demonstração. Inicialmente, vamos supor que o grupo finito H é semissimples. Neste caso, definimos S_1 como o subgrupo de H gerado por todos os subgrupos subnormais, simples e não abelianos de H. Caso H não tenha nenhum subgrupo subnormal, simples e não abeliano, então definimos $S_1 = 1$. Agora, verificaremos que S_1 é característico em H. Para isso, vamos considerar $\varphi \in Aut(H)$ e $T \leq H$, tal que $T \underset{\text{sn}}{<} H$, não abeliano e simples. Como φ é um automorfismo de H e $T \leq H$, temos que $\varphi(T) \cong T$ e, consequentemente, $\varphi(T) \underset{\text{sn}}{<} H$, não abeliano e simples. Assim, de acordo com a definição de S_1, temos que $\varphi(T) \subseteq S_1$. Sendo assim, S_1 é invariante para todo automorfismo em $Aut(H)$, então é característico em H.

Por outro lado, vamos supor que o grupo finito H não é semissimples. Sendo assim, existe $N \leq H$, tal que N é normal em H, abeliano e não trivial. Considere o primo p_1, tal que p_1 divide $|N|$, e seja $P \in Syl_{p_1}(N)$. Como N é abeliano, temos que $P \lhd N$ e, então P é um p_i-subgrupo de Sylow de N normal. Diante disso, podemos afirmar que P é característico em N. Além disso, como $P \underset{\text{car}}{<} N$ e $N \lhd H$, segue que $P \lhd H$, pela Proposição 1.3.4. De acordo com a definição do $O_p(G)$ de um grupo finito G e de um primo p, temos que $O_{p_1}(H)$ é o produto de todos os subgrupos normais de H cuja ordem é uma potência do primo p_1. Desse modo, $P \leq O_{p_1}(H)$ e, também, podemos afirmar que $O_{p_1}(H) \neq 1$. Neste caso, definimos $S_1 = O_{p_1}(H)$ e, temos que $S_1 \underset{\text{car}}{<} H$.

A fim de continuar a definição da série, vamos analisar o grupo H/S_1. Se H/S_1 é semissimples, definimos S_2/S_1 como o subgrupo gerado por todos os subgrupos subnormais, simples e não abelianos de H/S_1. Caso H/S_1 não é semissimples, considere um primo que divide $|H/S_1|$, a saber p_2. Definimos $S_2/S_1 = O_{p_2}(H/S_1)$, e sabemos que $O_{p_2}(H/S_1) \neq 1$. Em todo caso, $S_2/S_1 \underset{\text{car}}{<} H/S_1$ e, com isso, $S_2 \underset{\text{car}}{<} H$. Continuamos desta forma e então temos uma série

$$1 = S_0 < S_1 < \cdots < S_t = H$$

onde cada $S_i \underset{\text{car}}{<} H$, para $\forall\ i = 1, \ldots, t$. □

Vamos nos referir a série em (3.1) como a série S-característica de H.

Lema 3.1.10. *Seja G um grupo finito. Considere H um subgrupo de G e uma série S-característica de H. Então existe uma série parcial de subgrupos em G*

$$1 = R_0 < R_1 < \cdots < R_t \tag{3.2}$$

onde cada R_i é característico em G e, além disso, R_{i+1}/R_i é gerado por todos os subgrupos subnormais simples e não abelianos de G/R_i, caso S_{i+1}/S_i seja gerado por todos os subgrupos subnormais, simples e não abelianos de H/S_i ou R_{i+1}/R_i é p_i-grupo, caso S_{i+1}/S_i seja p_i-grupo.

Demonstração. Vamos construir uma série parcial de subgrupos $R_i \leq G$

$$1 = R_0 < R_1 < \cdots < R_t$$

onde cada $R_i \underset{\text{car}}{<} G$, $\forall\ i = 1, \ldots, t$. Considere $H \leq G$ e sua série S-característica, conforme no Lema 3.1.9, a saber

$$1 = S_0 < S_1 < \cdots < S_t = H.$$

Para $i = 0$, sabemos que $S_0 = 1$ e, então definimos $R_0 = 1$. Para $i = 1$, analisaremos a semissimplicidade de H. Se H é semissimples, então temos que S_1 é gerado por todos os subgrupos subnormais, simples e não abelianos de H. Assim, consideraremos R_1 gerado por todos os subgrupos subnormais, simples e não abelianos de G. Neste caso, analogamente a argumentação feita na demonstração do Lema 3.1.9, garantimos que $R_1 \underset{\text{car}}{<} G$. Quando H não é semissimples, definimos $S_1 = O_{p_1}(H)$, para algum primo p_1 que divide $|H|$. Sendo assim, definimos $R_1 = O_{p_1}(G)$. Já discutimos que $O_{p_1}(G) \underset{\text{car}}{<} G$, e, portanto temos $R_1 \underset{\text{car}}{<} G$.

Para $i = 2$, vamos observar a semissimplicidade do grupo quociente H/S_1. Assim, se H/S_1 é semissimples, temos S_2/S_1 gerado por todos os subgrupos subnormais, simples e não abelianos de H/S_1. Sendo assim, tome R_2/R_1 gerado por tais subgrupos de G/R_1. Além disso, segue que $R_2 \underset{\text{car}}{<} G$. Agora, quando H/S_1 não é semissimples, segue que $S_2/S_1 = O_{p_2}(H/S_1)$. Diante disso, vamos considerar $R_2/R_1 = O_{p_2}(G/R_1)$. Como $R_2/R_1 \underset{\text{car}}{\leq} G/R_1$, então $R_2 \underset{\text{car}}{\leq} G$. Procedendo da mesma maneira, definimos $R_i \leq G$, onde R_i é característico em G, $\forall\ i = 3, \ldots, t$.

Ressaltamos que R_i/R_{i-1} é gerado por todos os subgrupos subnormais, simples e não abelianos de G/R_{i-1}, se S_i/S_{i-1} é o subgrupo correspondente de H/S_i. Por outro lado, $R_i/R_{i-1} = O_{p_i}(G/R_{i-1})$, se $S_i/S_{i-1} = O_{p_i}(H/S_{i-1})$. $\square$

A série em (3.2) é dita uma série em G correspondente a série S-característica de H.

Lema 3.1.11. *Sejam G um grupo finito e H um subgrupo subnormal de G. Considere a série S-característica de H e sua série correspondente em G, como nos Lemas 3.1.9 e 3.1.10. Então $S_i \leq R_i$, $\forall\ i = 1, \ldots, t$.*

Demonstração. Vamos verificar que as séries são relacionadas pela inclusão $S_i \leq R_i$, $\forall\ i = 1, \ldots, t$. Por construção das séries, claramente $S_0 \leq R_0$. Para $i = 1$, vamos analisar duas possíveis situações. Na primeira situação, se S_1 for gerado pelos subgrupos subnormais, simples e não abelianos de H, sabemos que R_1 é gerado pelos subgrupos subnormais, simples e não abelianos de G. Como $H \leq G$, em particular, os subgrupos subnormais, simples e não abelianos de H também são de G, logo $S_1 \leq R_1$. Na segunda situação, se $S_1 = O_{p_1}(H)$, sabemos que $R_1 = O_{p_1}(G)$. Como $O_{p_1}(H) \lhd H$ e $H \underset{\text{sn}}{\leq} G$, segue que $O_{p_1}(H) \underset{\text{sn}}{\leq} G$. Assim, pela Proposição 3.1.6, $O_{p_1}(H) \leq O_{p_1}(G)$ e, portanto, $S_1 \leq R_1$.

Agora, suponhamos que o resultado é válido para algum $1 < i < t$, isto é, $S_i \leq R_i$. Vamos provar que $S_{i+1} \leq R_{i+1}$.

Se $(S_{i+1}R_i)/R_i = 1$, então $S_{i+1} \leq R_i \leq R_{i+1}$ e temos o resultado almejado. Sendo assim, assumimos que $(S_{i+1}R_i)/R_i \neq 1$. Observe que

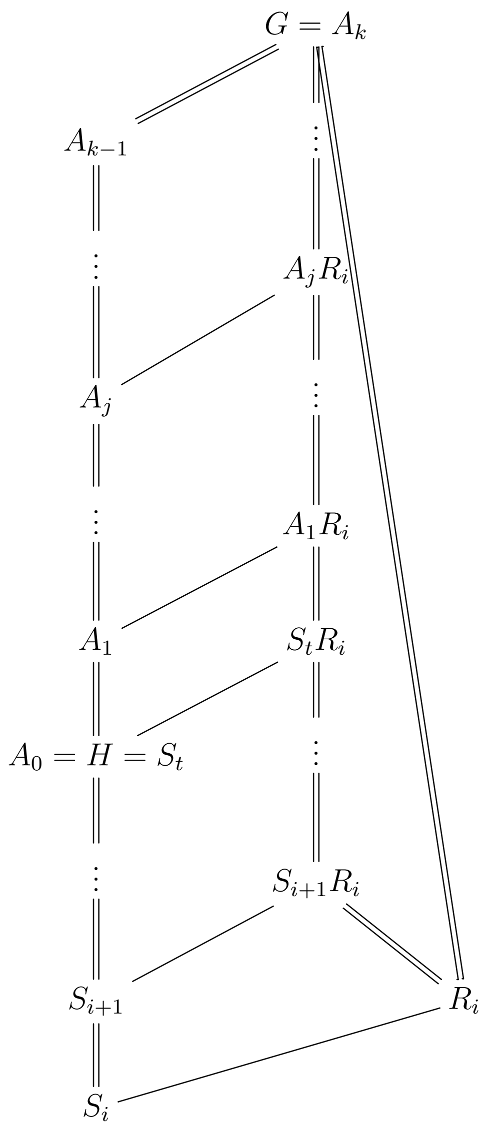
$$\begin{tikzcd}
 & S_{i+1}R_i \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal] & \\
S_{i+1} \arrow[dr, equal] \arrow[dd, equal] & & R_i \arrow[dl, equal] \\
 & S_{i+1} \cap R_i \arrow[dl, equal] & \\
S_{i-1} & &
\end{tikzcd}$$

Note que
$$\frac{S_{i+1}R_i}{R_i} \cong \frac{S_{i+1}}{S_{i+1} \cap R_i},$$
então $(S_{i+1}R_i)/R_i$ é uma imagem homomórfica de S_{i+1}/S_i. Sabemos que S_{i+1}/S_i ou é um p_i-grupo ou é gerado por subgrupos subnormais, simples e não abelianos de H/S_{i-1}. Diante disso, temos que $(S_{i+1}R_i)/R_i$ ou é um p_i-grupo ou é gerado por subgrupos subnormais.

Recordamos que a definição de S_{i+1}/S_i, e consequentemente de $(S_{i+1}R_i)/R_i$, depende da semissimplicidade de H/S_i, como discutimos na demonstração do Lema 3.1.10. Devido a esse fato, analisaremos a semissimplicidade de H/S_i para finalizarmos a demonstração do nosso resultado. Porém, antes de continuarmos, afirmamos que $(S_{i+1}R_i)/R_i \underset{\text{sn}}{<} G/R_i$. De fato, como $H \underset{\text{sn}}{<} G$, considere os subgrupos distintos $H = A_0, A_1, \cdots, A_K = G$, tais que

$$H = A_0 \triangleleft A_1 \triangleleft \cdots \triangleleft A_k = G.$$

Além disso, vamos observar a figura abaixo



Dessa maneira, podemos considerar a seguinte série

$$(S_{i+1}R_i)/R_i \triangleleft \cdots \triangleleft (S_tR_i)/R_i \triangleleft (A_1R_i)/R_i \triangleleft \cdots \triangleleft (A_kR_i)/R_i = G/R_i.$$

Portanto, $(S_{i+1}R_i)/R_i \underset{\text{sn}}{<} G/R_i$.

Agora, vamos analisar a semissimplicidade de H/S_i. Para H/S_i não semissimples, $(S_{i+1}R_i)/R_i$ é um p_i-grupo. Analogamente ao outro caso, tal fato decorre de que $S_{i+1}/S_i = O_{p_i}(H/S_i)$, e, consequentemente $R_{i+1}/R_i = O_{p_i}(G/R_i)$. Como $(S_{i+1}R_i)/R_i$ é um p_i-grupo e $(S_{i+1}R_i)/R_i \underset{\text{sn}}{<} G/R_i$, temos que $(S_{i+1}R_i)/R_i \leq O_{p_i}(G/R_i)$, pela Proposição 3.1.6.

Se H/S_i é semissimples, então S_{i+1}/S_i é gerado por subgrupos subnormais, simples e não abelianos de H/S_i. Consequentemente $(S_{i+1}R_i)/R_i$ também é gerado por subgrupos subnormais, simples e não abelianos de G/R_{i-1}. De acordo com a construção da série em G correspondente a série S-característica de H, temos que R_{i+1}/R_i é gerado pelos subgrupos subnormais, simples e não abelianos de G/R_i. Assim, $(S_{i+1}R_i)/R_i \leq R_{i+1}/R_i$, então $S_{i+1}R_i \leq R_{i+1}$ e temos $S_{i+1} \leq R_{i+1}$. Novamente, observamos que $(S_{i+1}R_i)/R_i \leq R_{i+1}/R_i$, logo $S_{i+1} \leq R_{i+1}$. Assim, confirmamos a relação de inclusão entre as séries. $\square$

3.2 Cálculo de comutadores e subgrupos subnormais

Nesta seção, utilizaremos o cálculo de elementos e subgrupos comutadores para desenvolvermos resultados sobre os subgrupos subnormais de um grupo G. O conjunto de definições, proposições e teoremas discutidos contribuem para a compreensão da demonstração do Teorema 3.1.3.

Inicialmente, recordaremos as seguintes definições:

Definição 3.2.1. *Sejam G um grupo e $X \subseteq G$. Definimos o fecho normal de X em G, denotado por X^G, como a interseção de todos os subgrupos normais em G que contém X, ou seja*

$$X^G = \bigcap_{H \,\triangleleft\, G \text{ e } X \subseteq H} H.$$

Dado $g \in G$, definimos X^g como o conjunto $g^{-1}Xg = \langle g^{-1}xg \mid x \in X \rangle$. O core de X em G, denotado por $Core_G(X)$, é definido como

$$Core_G(X) = \bigcap_{g \in G} X^g.$$

Da Definição 3.2.1, observamos que X^G é o menor subgrupo normal de G o qual contém X. Além disso, se H é um subgrupo de G, então H é um subgrupo normal em G se, e somente se $H^G = H$. Agora, a partir da definição acima vamos enunciar e demonstração algumas proposições.

Proposição 3.2.2. *Sejam X um subconjunto e H um subgrupo de um grupo G. Então*

1. $X^H = \langle X, [X, H]\rangle$.

2. $[X, H]^H = [X, H]$.

Demonstração. 1. Dados $x \in X$ e $h \in H$, temos que $x^h \in X^H$. Note que

$$x[x, h] = x(x^{-1}h^{-1}xh) = x^h \in \langle X, [X, H]\rangle.$$

Da definição 3.2.1, temos $X \subseteq X^H$. Como $x[x, h] = x^h \in X^H$, segue que $[X, H] \leq X^H$, $\forall\ x \in X$ e $h \in H$. Sendo assim, $\langle X, [X, H]\rangle \leq X^H$. Portanto, $X^H = \langle X, [X, H]\rangle$.

2. Claramente $[X, H] \leq [X, H]^H$. Agora, vamos verificar a inclusão contrária. Observe que o grupo $[X, H]^H$ é gerado por elementos da forma $[x, h_1]^{h_2}$, onde $x \in X$ e $h_1, h_2 \in H$. Da Proposição 2.1.2 item 3, temos que $[x, h_1h_2] = [x, h_2][x, h_1]^{h_2}$. Assim, note que $[x, h_1]^{h_2} = [x, h_2]^{-1}[x, h_1h_2]$. Logo, $[x, h_1]^{h_2} \in [X, H]$ e, temos $[X, H]^H = [X, H]$.

□

Proposição 3.2.3. *Suponha que H e K são subgrupos de um grupo G e que $J = \langle H, K\rangle$. Então*

1. $[H, K] \trianglelefteq J$;

2. $K^J = [H, K]K$.

Demonstração. 1. Sejam $h_1, h_2 \in H$ e $k \in K$. Pela Proposição 2.1.2, segue que

$$[h_1, k]^{h_2} = [h_1h_2, k][h_2, k]^{-1} \in [H, K].$$

Logo, H normaliza $[H, K]$. Como $[H, K] = [K, H]$, dados $k_1, k_2 \in K$ e $h \in H$ temos que

$$[k_1, h]^{k_2} = [k_1k_2, h][k_2, h]^{-1} \in [K, H].$$

Assim, K normaliza $[K, H] = [H, K]$ e então $[H, K] \trianglelefteq J$.

2. Vamos mostrar que $[H, K]K$ é o menor subgrupo normal de J o qual contém K. Afirmamos que $[H, K]K \trianglelefteq J$. Pelo item 1, $[H, K]^g = [H, K]$, $\forall g \in J$. Se $g \in K$, então

$$([H, K]K)^g = [H, K]^g K^g = [H, K]K.$$

Logo K normaliza $[H, K]K$. Por outro lado, suponha $g \in H$ e $k \in K$. Assim

$$g^{-1}k^{-1}g = g^{-1}k^{-1}gkk^{-1} = [g, k]k^{-1} \in [H, K]K.$$

Portanto, se $g \in H$ então $K^g \leq [H, K]K$ e então

$$([H, K]K)^g = [H, K]^g K^g \leq [H, K]K.$$

Diante disso, H também normaliza $[H, K]K$. Portanto, $[H, K]K \trianglelefteq J$. Agora, suponha que N é um subgrupo de J tal que $K \leq N \trianglelefteq J$. Note que para cada $h \in H$ e $k \in K$, temos que $(h^{-1}k^{-1}h)k = [h, k] \in N$. Logo $[H, K] \leq N$ e, então $[H, K]K \leq N$. □

Vamos definir uma ferramenta essencial denominada série sucessiva de fechos normais.

Definição 3.2.4. *Seja X é um subconjunto não-vazio de G. Uma sequência de subgrupos $X^{G,i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ é definida pelas seguintes regras*

$$X^{G,0} = G,\ X^{G,1} = X^G \text{ e } X^{G,i+1} = X^{X^{G,i}}.$$

Além disso, X está contido em todo $X^{G,i}$ e

$$\cdots\ X^{G,2} \triangleleft X^{G,1} \triangleleft X^{G,0} = G.$$

Claramente, $X^{G,1}$ é o fecho normal X^G em G. A sequência assim definida é chamada série sucessiva de fechos normais.

O próximo resultado dará uma caracterização de subgrupos subnormais via a série sucessiva de fechos normais.

Proposição 3.2.5. *Seja $H \underset{sn}{<} G$ e suponha que*

$$H = H_n \triangleleft H_{n-1} \triangleleft \cdots \triangleleft H_0 = G$$

é uma série finita de H para G. Então $H^{G,i} \leq H_i$, $\forall\ 0 \leq i \leq n$, e então $H = H^{G,n}$.

Demonstração. A demonstração será por indução sobre i. Para $i = 0$, o resultado é imediato. Suponhamos que a afirmação é válida para algum $i > 0$, ou seja, $H^{G,i} \leq H_i$. Vamos verificar para $i+1$. Utilizando a definição da série sucessiva de fechos normais e pela hipótese de indução, temos:

$$H^{G,i+1} = H^{H^{G,i}} \leq H^{H_i} \leq H_{i+1}^{H_i} = H_{i+1}.$$

□

O tamanho da série sucessiva de fechos normais é chamado índice subnormal de H em G e será denotado por $s(G : H)$. De acordo com a Proposição 3.2.5, um subgrupo H é subnormal em G se, e somente se, $H = H^{G,n}$ para algum $n \geq 0$. Claramente, $s(G : H) = 0$ precisamente quando $H = G$. Já $s(G : H) = 1$ se, e somente se, $H \lhd G$ e $H \neq G$. Além disso, observando detalhadamente a série

$$H = H^{G,n} \lhd H^{G,n-1} \lhd \cdots \lhd H^{G,1} \lhd H^{G,0} = G$$

e pela definição 3.2.1, percebemos que de todas as séries que caracterizam H como um subgrupo subnormal em G a série sucessiva de fechos normais é a mais curta. Por fim, ressaltamos que

$$H \underset{\text{sn}}{<} K \underset{\text{sn}}{<} G \Longrightarrow H \underset{\text{sn}}{<} G \text{ e } s(G : H) \leq s(G : H) + s(K : H).$$

Vamos demonstrar uma fórmula útil para $H^{G,i}$. Inicialmente, vamos considerar a seguinte proposição

Proposição 3.2.6. *Sejam H e K subgrupos de um grupo G. Se $H \leq N_G(K)$ e $HK \leq G$, então $HK = \langle H, K \rangle = KH$.*

Demonstração. Sejam $h \in H$ e $k \in K$, logo $hk \in HK$. Note que

$$hk = hkh^{-1}h = (hkh^{-1})h.$$

Como $H \leq N_G(K)$, temos que $hkh^{-1} = k_1$. Assim,

$$hk = (hkh^{-1})h = k_1 h \in KH.$$

Portanto, $HK \subseteq KH$. Por outro lado, $kh \in KH$. Agora, note que

$$kh = hh^{-1}kh = h(h^{-1}kh).$$

Como $H \leq N_G(K)$, temos que $h^{-1}kh = k_2$. Assim,

$$kh = hk_2 \in HK.$$

Portanto, $KH \subseteq HK$. Por fim, $HK = KH$. Sabemos que $HK \subseteq \langle H, K \rangle$ é sempre válido. Como $HK \leq G$, temos que $\langle H, K \rangle \leq HK$. Assim, $HK = \langle HK \rangle$. □

Agora, vamos nos dedicar ao resultado desejado.

Proposição 3.2.7. *Se $H \leq G$, então $H^{G,i} = [G,_i H]H$ para todo $i \geq 1$.*

Demonstração. Usaremos indução sobre i. Para $i = 0$, $H^{G,0} = G$ e o resultado é imediato. Agora, assumimos o resultado válido para $0 < i$, isto é $H^{G,i} = [G,_i H]H$. Sendo assim, vamos verificar o resultado para $i+1$. De acordo com a definição da série sucessivas de fechos normais, temos que $H^{G,i+1} = H^{H^{G,i}}$. Assim, pela hipótese de indução temos que

$$H^{H^{G,i}} = H^{[G,_iH]H}.$$

Agora, vamos verificar que H normaliza $[G,H]H$. Sejam $h_1, h_2 \in H$ e $g \in G$, considere $[g,h_1]^{h_2}$. Pela Proposição 2.1.2,(item 3), temos que

$$[g, h_1h_2] = [g,h_1][g,h_1]^{h_2} \Longrightarrow [g,h_1]^{-1}[g,h_1h_2] = [g,h_1]^{h_2}.$$

Assim, $[g,h_1]^{h_2} \in [G,H]$. Diante do exposto, podemos afirmar que H normaliza $[G,H]H$. Indutivamente observamos que $H \subseteq N_G([G,iH])$, para todo $i \leq 1$. Sendo assim, podemos garantir que $\langle [G,_i H], H\rangle = [G,_i H]H$.

Pela Proposição 3.2.2, segue que

$$H^{[G,_iH]H} = [[G,_i H], H]H = [G,_{i+1} H]H.$$

Assim, $H^{G,i+1} = [G,_{i+1} H]H$, como queríamos demonstrar. □

Diante dos resultados expostos, vamos discutir o seguinte teorema:

Teorema 3.2.8. *Sejam $H \underset{sn}{<} G$, $K \underset{sn}{<} G$ e assuma que $H \cap K = 1$. Se H é um grupo simples não abeliano, então $[H,K] = 1$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $[H,K] \neq 1$. Podemos escolher K de forma que $s = s(\langle H,K\rangle : H)$ seja o menor possível, ou seja, se existe $L \underset{\text{sn}}{<} G$ tal que $s(\langle H,L\rangle : H) < s$, então $[L,H] = 1$. Considere $J = \langle H,K\rangle$.

Para $s \neq 0$, então $H \trianglelefteq J$. Note que como $K \leq J = N_J(H)$, então $[H,K] \leq H$, pela Proposição 2.1.3. Observe que $[H,K] \trianglelefteq H$, pois da Proposição3.2.2(item 2) temos que $[H,K]^H = [H,K]$. Como H é um grupo simples e $[H,K] \neq 1$, temos que $[H,K] = H$. Pela Proposição 3.2.3 (item 2), segue que $[H,K]K = K^J$ e, então temos $H \leq K^J$. Uma vez que, K^J é o menor subgrupo normal de J que contém K e s é o menor possível, temos que $K^J = J$.

Agora, note que como $K \underset{\text{sn}}{<} J$, assim temos que $K = K^{J,n}$, para algum n, conforme a Proposição 3.2.5. Como $K^J = J$, logo $K^{J,n} = J$, para todo n, e portanto $K = J$. Então $H = H \cap J = H \cap K = 1$, absurdo.

Agora, vamos analisar $s > 1$. Neste caso, H não é um subgrupo normal de J e então existe um elemento $g \in K$, tal que $H \neq H^g = g^{-1}Hg$. Observe que $H^g \underset{\text{sn}}{<} G$ e, consequentemente $H \cap H^g \underset{\text{sn}}{<} H$. Como H é simples temos que $H \cap H^g = 1$.

Observe que $H \underset{\text{sn}}{<} J$. De acordo com a construção da série sucessiva de fechos normais de H em J temos que:

$$H \lhd \cdots \lhd H^J \lhd J.$$

Logo $s(H^J : H) = s(J : H) - 1 = s - 1$. Como $\langle H, H^g \rangle \leq H^{\langle H, H^g \rangle} \leq H^J$, segue que $s(\langle H, H^g \rangle : H) \leq s - 1$. Mas s é o menor possível, logo $[H, H^g] = 1$.

Sejam $h_1, h_2 \in H$, então

$$\begin{aligned} 1 &= [h_1, h_2^g] \\ &= [h_1, g^{-1}h_2 g] \\ &= [h_1, h_2 h_2^{-1} g^{-1} h_2 g] \\ &= [h_1, h_2[h_2, g]], \ \forall g \in G. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.1.2 (item 3), segue que

$$[h_1, h_2[h_2, g]] = [h_1, [h_2, g]][h_1, h_2]^{[h_2, g]}.$$

Como H normaliza $[H, K]$, temos que:

$$h^{-1}[h', k]^{-1} h[h, k] \in [H, K], \ \forall\ h, h' \in H \text{ e } k \in K.$$

Portanto, $[H, [H, K]] \leq [H, K]$. Assim

$$1 = [h_1, [h_2, g]][h_1, h_2]^{[h_2, g]} \Longrightarrow [h_1, h_2]^{[h_2, g]} = [h_1, [h_2, g]]^{-1} \in [H, K].$$

Como $g \in K$ e $[h_2, g]^{-1}[h_1, h_2][h_2, g] \in [H, K]$, então $[h_1, h_2] \in [H, K]$ para todo $h_1, h_2 \in H$. Logo $[H, H] \leq [H, K]$. Por hipótese H é um grupo simples e não abeliano, segue que $H' = [H, H] = H$. Diante disso, temos que $H \leq [H, K]$. No caso anterior, verificamos que $K^J = J$. Sendo assim, concluímos que $H = 1$, absurdo.

□

Corolário 3.2.9. *Um subgrupo subnormal simples não abeliano de G normaliza todo subgrupo subnormal de G.*

Demonstração. Sejam $H \underset{\text{sn}}{<} G$, onde H é simples e não abeliano, e $K \underset{\text{sn}}{<} G$. Vamos provar que H normaliza K. Como $K \underset{\text{sn}}{<} G$, considere $n = s(G : K)$ e

$$K = K_0 \lhd K_1 \lhd K_2 \lhd \cdots \lhd K_n = G$$

uma série de tamanho finito de K em G. Fazendo a interseção da série com $H \leq G$, temos que

$$H \cap K = H \cap K_0 \lhd H \cap K_1 \lhd H \cap K_2 \lhd \cdots \lhd H \cap K_n = H$$

Logo $H \cap K \underset{\text{sn}}{<} H$ e, por hipótese, H é simples temos que $H \cap K = 1$ ou $H \cap K = H$. Se $H \cap K = H$, temos $H \leq K$. Sendo assim, $[K, H] \leq K$, então $H \leq N_G(K)$, pela Proposição 2.1.3. Por outro lado, se $H \cap K = 1$ então $[H, K] = 1$, pelo Teorema 3.2.8. E assim, concluímos a demonstração. □

Para prosseguirmos, vamos definir o subgrupo $O^p(G)$ de um grupo finito G.

Suponha que N_1 e N_2 são subgrupos normais de um grupo finito G, tais que G/N_1 e G/N_2 são p-grupos. Considere o homomorfismo

$$\pi : G \longrightarrow G/N_1 \times G/N_2$$

definido por $\pi(h) = (hN_1, hN_2)$. Note que $Ker(\pi) = N_1 \cap N_2$. Pelo Teorema do Isomorfismo, temos que:

$$\frac{G}{N_1 \cap N_2} \cong \frac{G}{N_1} \times \frac{G}{N_2}$$

Sendo assim, $G/(N_1 \cap N_2)$ também é um p-grupo. Isto implica que existe o menor subgrupo normal N de G tal que G/N é um p-grupo. Diante disso, temos a definição abaixo:

Definição 3.2.10. *Seja G um grupo finito e p um primo. Definimos $O^p(G)$ como o menor subgrupo normal de G tal que $G/O^p(G)$ é um p-grupo.*

Para finalizarmos a demonstração do Teorema 3.1.3, vamos provar o seguinte resultado:

Teorema 3.2.11. *Suponha H um subgrupo normal de um grupo finito G e p um primo. Então $O_p(G)$ normaliza $O^p(H)$.*

Demonstração. Inicialmente, vamos denotar $O_p(G) = R$ e $O^p(H) = M$. Afirmamos que $[R, M, M] = [R, M]$. Começaremos verificando que $[R, M, M] \leq [R, M]$, e também vamos provar que $[R, M, M] \lhd [R, M]$. Primeiramente, observe que M normaliza $[R, M]$. De fato, sejam $a, m \in M$ e $r \in R$. Note que $[r, m]^a = [r^a, m^a]$ e $r^a \in R$, $m^a \in M$, pois $R \lhd G$. Sendo assim, obtemos $[R, M]^a \in [R, M]$, $\forall\ a \in M$, como observado.

Além disso, é possível notar que $[R, M] \leq R$. Uma vez que $R \lhd G$, segue que

$$[r, m] = r^{-1}m^{-1}rm = r^{-1}r^m \in R.$$

Diante disso, $[R, M] \leq R$. De acordo com a Proposição 3.2.3, temos que $[[R, M], M] \lhd$

$\langle [R, M], M \rangle$. Sendo assim, podemos analisar que

$$[R, M, M] = [[R, M], M] \lhd \langle [R, M], M \rangle \leq [R, M].$$

Portanto, $[R, M, M] \leq [R, M]$ e $[R, M, M] \lhd [R, M]$.

Agora, vamos verificar a inclusão contrária, isto é, $[R, M] \leq [R, M, M]$. Sejam $r \in R$ e $x, y \in M$. Usando a definição de comutadores, verificamos que:

$$[xy, r] = (xy)^{-1} r^{-1} (xy) r = y^{-1} x^{-1} r^{-1} xyr.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} [x, r][[x, r], y][y, r] &= [x, r][x, r]^{-1} y^{-1} [x, r] y [y, r] \\ &= (y^{-1} x^{-1} r^{-1} xry)(y^{-1} r^{-1} yr) \\ &= y^{-1} x^{-1} r^{-1} xyr. \end{aligned}$$

Assim, $[xy, r] = [x, r][[x, r], y][y, r]$. Então $[xy, r] = [x, r][y, r] \ mod \ [R, M, M]$, já que $[[x, r], y] = [[r, x]^{-1}, y] \in [R, M, M]$. Diante disso, temos que a aplicação

$$\varphi : M \longrightarrow [R, M]/[R, M, M]$$

definida por $\varphi(x) = [x, r][R, M, M]$ é um homomorfismo. Considere $K = Ker(\varphi)$. Pelo Teorema do Isomorfismo, temos que

$$\frac{M}{K} \cong Im(\varphi) \leq \frac{[R, M]}{[R, M, M]}.$$

Como $[R, M] \leq R$ é um p-grupo, segue que M/K é um p-grupo. Considere L, o core de K em H, ou seja, $L = \bigcap_{h \in H} K^h$. Então L é um subgrupo normal de H e $L \leq K \leq M$.

Seja $H = \{h_1, \ldots, h_t\}$. Então podemos definir um homomorfismo

$$\psi : M \longrightarrow \frac{M}{K^{h_1}} \times \cdots \times \frac{M}{K^{h_t}}$$

definido por $\psi(x) = (xK^{h_1}, \ldots, xK^{h_t})$. É fácil observar que $Ker(\psi) = L$, e temos que M/L é um p-grupo. Note que

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[d, dash] \\
M \arrow[d, dash] \arrow[d, bend left, "p-grupo"] \\
K \arrow[d, dash] \\
L \arrow[uu, bend left, "p-grupo"]
\end{tikzcd}$$

Sabemos que M é o menor subgrupo de H tal que H/M é um p-grupo, logo $M = K = L$. Assim, $[x,r] \in [R,M,M]$, $\forall\ x \in M$ e $r \in R$. Portanto $[R,M] \leq [R,M,M]$, obtemos a afirmação almejada.

Agora, denote $T = \langle R, M\rangle = RM$. Pela Proposição 3.2.7, temos que $M^{T,i} = [T,_i M]M$. Assim,

$$M^{T,1} = [T,M]M = [RM,M]M.$$

Como $R, M \leq G$ e M normaliza R, segue do Lema 2.1.4 que

$$\begin{aligned}
[RM,M]M &= [R,M][M,M]M \\
&= [R,M]M.
\end{aligned}$$

Analogamente, pela Proposição 3.2.7 e pelo Lema 2.1.4 temos que:

$$\begin{aligned}
M^{T,2} = [T,_2 M]M &= [T,M,M]M \\
&= [RM,M,M]M \\
&= [R,M,M]M.
\end{aligned}$$

Considerando a afirmação, obtemos que $M^{T,1} = M^{T,2}$ e, logo $M^{T,1} = M^{T,i}$ para todo $i \geq 1$. Como $M \trianglelefteq H$ e $H \underset{\text{sn}}{\leq} G$, segue que $M \underset{\text{sn}}{\leq} G$ e, consequentemente $M \underset{\text{sn}}{\leq} T$. Sendo assim, pela Proposição 3.2.5, segue que existe um inteiro $n \geq 1$, tal que $M = M^{T,n}$. Então

$$M = M^{T,n} = M^{T,1} = M^T.$$

Portanto, $M = M^R$ e $R = O_p(G)$ normaliza $M = O^p(G)$. $\square$

3.3 Uma cota para $|G|$

Enfim, vamos provar o teorema principal deste capítulo.

Teorema 3.1.3. Existe uma função $f : \omega \longrightarrow \omega$ tal que sempre que H for um subgrupo subnormal de um grupo finito G, onde $C_G(H) = 1$, então $|G| \leq f(|H|)$.

Relembramos que, pelos Lemas 3.1.9 e 3.1.10, existe uma série estritamente crescente de subgrupos característicos em H, a saber

$$1 = S_0 < S_1 < \cdots < S_t = H.$$

e uma série correspondente e parcial de subgrupos característicos em G

$$1 = R_0 \leq R_1 \leq \cdots \leq R_t < G.$$

Como R_t é um subgrupo característico de G, podemos definir um homomorfismo da seguinte maneira

$$\begin{array}{rcccl} \psi: & G & \longrightarrow & Aut(R_t) & \\ & g & \longmapsto & \tau_g & : R_t \longrightarrow R_t \\ & & & & \quad a \longmapsto a^g \end{array}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} Ker(\psi) &= \{g \in G | \psi = Id\} \\ &= \{g \in G | a^g = a, \forall a \in R_t\} \\ &= C_G(R_t). \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Isomorfismo, segue

$$\frac{G}{C_G(R_t)} \cong Im(\psi) \leq Aut(R_t).$$

Pelo Lema 3.1.11, temos $H = S_t \leq R_t$. Diante disso, segue que $C_G(R_t) \leq C_G(H)$. Por hipótese, $C_G(H) = 1$, então

$$|G| \leq |Aut(R_t)|.$$

Sabemos que dado um grupo K e considerando o $Sim(K)$, todas as permutações dos elementos de K, temos que $|Sim(K)| = |K|!$. Como todo automorfismo de $Aut(K)$ é uma bijeção de K em K, notamos que

$$|Aut(K)| \leq |Sim(K)| = |K|!.$$

Portanto,

$$|G| \leq |Aut(R_t)| \leq |R_t|!.$$

Sendo assim, para verificarmos o teorema é suficiente limitar $|R_{i+1}|$ em termos de $|R_i|$. Por sua vez, limitar $|R_i|$ em termos de $|R_{i-1}|$. Por fim, indutivamente, limitá-los por $|H|$.

Lema 3.3.1. *Sejam G um grupo finito e $H \underset{sn}{<} G$, onde $C_G(H) = 1$. Considere*

$$1 = R_0 < R_1 < \cdots < R_t$$

a série parcial em G correspondente a uma série S-característica de H. Então para cada $i = 1, \ldots, t$ existe um inteiro m, que depende apenas $|H|$ e i, tal que $|R_i| \leq m$.

Demonstração. Usaremos indução sobre i. Vamos denotar $m_i = |R_i|$ para cada $0 \leq i \leq t$. Definimos $m_0 = 1$. Nosso objetivo é limitar m_{i+1} em termos de m_i e $|H|$. Para isso, dividiremos a demonstração em dois casos.

Caso 1. Se H é semissimples, então $m_{i+1} \leq (|H|m_i)!$.

Inicialmente, vamos considerar a série S-característica de H e sua série correspondente em G. Como H é semissimples, temos que S_{i+1}/S_i é gerado por todos os subgrupos subnormais, simples e não abelianos de H/S_i. Consequentemente, R_{i+1}/R_i também é gerado por tais subgrupos de G/R_i.

Como $H \underset{\text{sn}}{<} G$, temos que $HR_i/R_i \underset{\text{sn}}{<} G/R_i$. Diante disso, R_{i+1}/R_i normaliza HR_i/R_i, pelo Teorema 3.2.9. Sendo assim, R_{i+1} normaliza HR_i. Considere $\psi : R_{i+1} \longrightarrow Aut(HR_i)$ o homomorfismo definido por $\psi(g) = \tau_g$. Como $C_{R_{i+1}}(HR_i) \leq C_G(H) = 1$, temos que ψ é uma imersão.Dessa maneira,

$$|R_{i+1}| \leq |Aut(HR_i)| \leq (|H|m_i)!.$$

Assim, denotamos $m = (|H|m_i)!$ e o lema está provado para este caso.

Caso 2. Se H não é semissimples, então $m_{i+1} \leq m_i(|H|m_i)!$.

Como H não é semissimples, S_{i+1}/S_i, e, consequentemente, R_{i+1}/R_i, é um p_i-grupo. Por construção, temos que $R_{i+1}/R_i = O_{p_i}(G/R_i)$ e, por hipótese, temos que $H \underset{\text{sn}}{<} G$ e $C_G(H) = 1$. Vamos denotar $N_i = O^{p_i}(H)$ e H/N_i é o maior p_i-grupo quociente de H. Afirmamos que $O^{p_i}((HR_i)/R_i) = (N_iR_i)/R_i$.

Para provarmos a afirmação anterior, considere M um subgrupo tal que $R_i \trianglelefteq M$ e $M/R_i = O^{p_i}(HR_i/R_i)$. Uma vez que,

$$\frac{(HR_i)}{(N_iR_i)} \cong \frac{(HR_i)/R_i}{(N_iR_i)/R_i}$$

é um p_i-grupo, segue que $M \leq (N_iR_i)$. Considere o homomorfismo

$$\psi : H \longrightarrow (HN_i)/M$$

definido por $\psi(h) = hM$. Podemos observar que $Ker(\psi) = H \cap M$. Pelo Teorema do Isomorfismo, temos que $H/(H \cap M)$ é isomorfo a um subgrupo do p_i-grupo HN_i/M. Assim $N_i \leq H \cap M$ e, então $N_iR_i \leq M$. Portanto, $M = N_iR_i$ e provamos a afirmação.

Como $HR_i/R_i \underset{\text{sn}}{<} G/R_i$, temos que $O_{p_i}(G/R_i) = R_{i+1}/R_i$ normaliza $N_iR_i/R_i = O^{p_i}((HR_i)/R_i)$, pelo Teorema 3.2.11. Consequentemente, R_{i+1} normaliza N_iR_i.

Agora, vamos denotar $C_{i+1} = C_{R_{i+1}}(N_iR_i)$. Além disso, considere $\psi : R_{i+1} \longrightarrow Aut(N_iR_i)$ o homomorfismo definido por $\psi(g) = \tau_g$. Sendo assim, $Ker(\psi) = C_{i+1}$ e

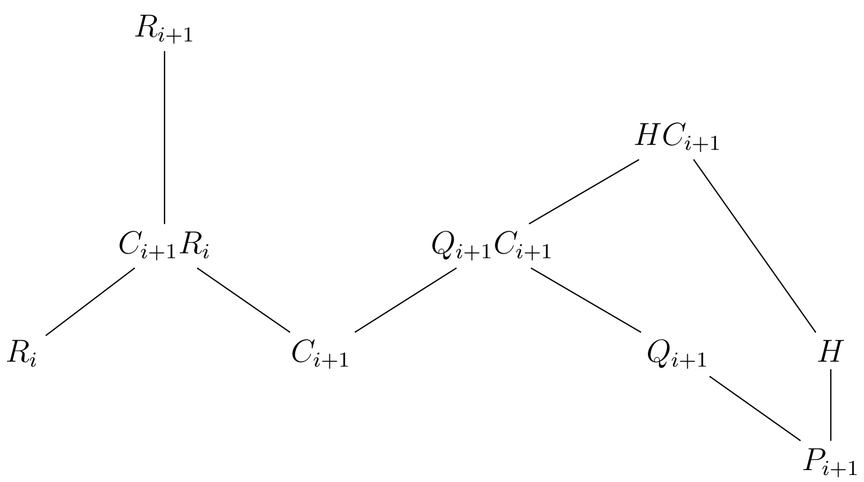
$$[R_{i+1} : C_{i+1}] \leq |Aut(N_iR_i)| < |N_iR_i|! < (|H||R_i|)!.$$

Logo, pela hipótese de indução, segue que

$$[R_{i+1} : C_{i+1}] \leq (|H|m_i)!.$$

Agora, basta mostrar que $C_{i+1} \leq R_i$. Uma vez que C_{i+1} é um subgrupo de R_i, de acordo com a hipótese de indução, teremos $|C_{i+1}| \leq m_i$. Sendo assim, $|R_{i+1}| \leq m_i((|H|m_i)!)$. Finalmente, tomamos $m = m_i(|H|m_i)!$ e lema está satisfeito também para este caso.

A seguir, vamos verificar que $C_{i+1} \leq R_i$. Para provar o resultado almejado, considere P_{i+1} um p_{i+1}-subgrupo de Sylow de H e Q_{i+1} um p_{i+1}-subgrupo de Sylow de HC_{i+1} contendo P_{i+1}.



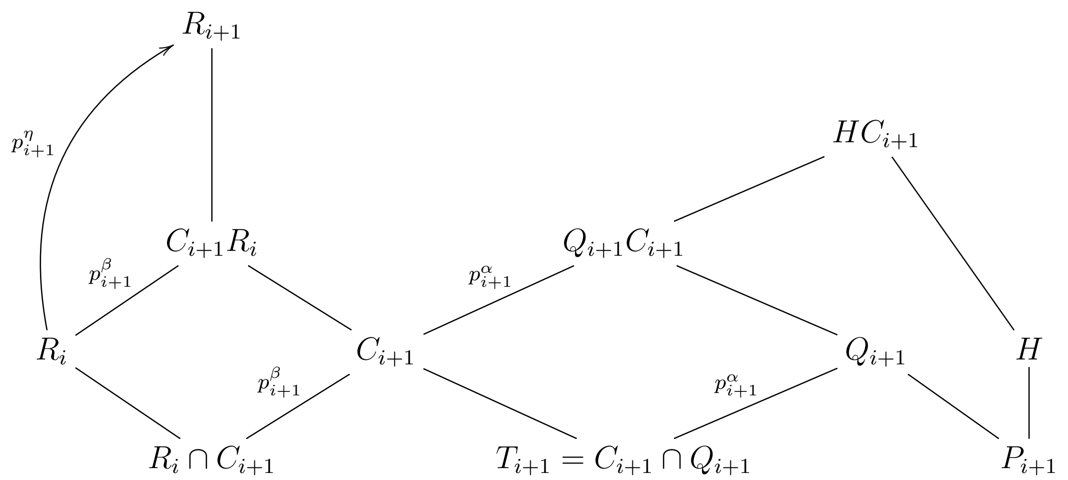
Inicialmente, observe que P_{i+1} normaliza N_iR_i. Para justificarmos a observação, note que P_{i+1} normaliza N_i, pois $N_i \trianglelefteq H$ e P_{i+1} é um p_{i+1}-subgrupo de Sylow de H. Além disso, temos que $R_i \underset{\text{car}}{<} G$ então $R_i \trianglelefteq G$. Logo P_{i+1} normaliza R_i. Assim, P_{i+1} normaliza N_iR_i.

Afirmamos que $C_{i+1}^{P_{i+1}} = C_{i+1}$, ou seja, P_{i+1} normaliza C_{i+1}. Para provarmos a afirmação, considere $x \in C_{i+1}$ e $p \in P_{i+1}$. Vamos verificar que $x^p \in C_{i+1}$. Uma vez que $x \in C_{i+1}$, então $x \in R_{i+1}$. Como $R_{i+1} \trianglelefteq G$ e $P_{i+1} \leq H \underset{\text{sn}}{<} G$, temos $x^p \in R_{i+1}$. Agora, tome $nr \in N_iR_i$ e observe

$$x^p(nr) = [x(nr)^{p^{-1}}]^p = [(nr)^{p^{-1}}x]^p = (nr)x^p,$$

pois temos que P_{i+1} normaliza N_iR_i. Diante do exposto, provamos que P_{i+1} normaliza C_{i+1}.

Agora, denote $T_{i+1} = C_{i+1} \cap Q_{i+1}$. Observe que $Q_{i+1} \in Syl_{p_{i+1}}(Q_{i+1}C_{i+1})$, então $C_{i+1} \cap Q_{i+1} \in Syl_{p_{i+1}}(C_{i+1})$. Por outro lado, observe também que o índice $[C_{i+1} : R_i \cap C_{i+1}]$ é potência de p_{i+1}. Veja o seguinte diagrama:



Afirmamos que $T_{i+1} = 1$. Sendo assim, o índice $[C_{i+1} : R_i \cap C_{i+1}]$ deve ser 1, ou seja, $C_i = R_{i-1} \cap C_i$. Portanto $C_{i+1} \leq R_i$, como queremos.

Vamos mostrar que $T_{i+1} = 1$. Suponhamos, por absurdo, que $T_{i+1} \neq 1$. Note que $P_{i+1}T_{i+1}$ é um p_{i+1}-grupo. Pela Proposição 1.3.1, como vamos ter $T_{i+1} \triangleleft P_{i+1}T_{i+1}$, segue que $T_{i+1} \cap Z(P_{i+1}T_{i+1}) \neq 1$.

Agora, tome $1 \neq x \in T_{i+1} \cap Z(P_{i+1}T_{i+1})$. Como $P_{i+1} \in Syl_{p_{i+1}}H$ e H/N_{i+1} é o maior p_{i+1}-grupo quociente de H temos que $([H : P_{i+1}], [H : N_{i+1}]) = 1$. Além disso, segue que $H = P_{i+1}N_{i+1}$. Assim, vamos ter $x \in C_G(N_{i+1}) = 1$, absurdo. Logo, $T_{i+1} = 1$, como afirmado e temos o resultado desejado.

□

Observação 3.3.2. *O resultado garante que a existência de uma função f, tal que sempre que H for um subgrupo subnormal de um grupo G e $C_G(H)$ trivial, $|G|$ é limitada pela imagem da função aplicada $|H|$.*

Capítulo 4

Teorema de Wielandt

Os capítulos anteriores apresentaram definições e resultados que são fundamentais para a demonstração do Teorema de Wielandt. Neste momento, estamos aptos a demonstrar o resultado. Por isso, realizaremos esta tarefa neste capítulo final.

Por fim, discutiremos um exemplo de um grupo cujo centro é trivial e a torre de automorfismos não termina em um número finito de passos. Este grupo é infinito, o que demonstra que a hipótese de finitude é essencial.

4.1 Demonstração do Teorema

Abaixo, discutiremos o último resultado necessário para demonstrar o teorema de Wielandt.

Proposição 4.1.1. *Considere uma série ascendente de grupos*

$$G = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_\alpha \lhd G_{\alpha+1} \lhd \cdots$$

onde $C_{G_{\alpha+1}}(G_\alpha) = 1$, $\forall\ \alpha$. *Então* $C_{G_\alpha}(G) = 1$, *para todo ordinal* α.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existe um ordinal α, tal que $C = C_{G_\alpha}(G) \neq 1$. Considere α o menor ordinal possível nestas condições, ou seja, $C_{G_\gamma}(G) = 1$, $\forall \gamma < \alpha$. Note que α não é um ordinal limite. Caso contrário, pela definição da torre de automorfismos, $G_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$. Diante disso, temos que existe $\beta < \alpha$ tal que $C_{G_\beta}(G) \neq 1$, contradizendo a minimalidade de α.

Afirmamos que $[G_\gamma, C] = 1$, $\forall\ \gamma < \alpha$. Com a afirmação provada, teremos $C \subseteq C_{G_\alpha}(G_\gamma)$, para todo $\gamma < \alpha$, e, em particular, $C \subseteq C_{G_\alpha}(G_{\alpha-1}) = 1$. Absurdo, pois, por hipótese, tomamos $C \neq 1$.

Além disso, a afirmação garante que C comuta com todo elemento de G_γ, para todo $\gamma < \alpha$. Vamos supor, novamente por absurdo, que existe um ordinal γ e ele é o menor ordinal tal que

$[G_\gamma, C] \neq 1$. Note que γ não é um ordinal limite, caso contrário, pela definição da torre, $G_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} G_\beta$. Assim existe $\beta < \gamma$, tal que $[G_\beta, C] \neq 1$. Observe que para $\gamma = 0$, temos que $[G_0, C] = 1$. De fato, pois C é o centralizador de $G = G_0$ em G_γ. Além disso, segue que $\gamma > 0$.

Agora, suponha que para todo $\beta < \gamma$, temos que $[G_\beta, C] = 1$. Assim, temos que $[G_{\gamma-1}, C] = 1$ e podemos observar que C comuta com todo elemento de $G_{\gamma-1}$. Diante disso, C está contido em $C_{G_\alpha}(G_{\gamma-1})$.

Por outro lado, se $x \in C_{G_\alpha}(G_{\gamma-1})$ então $x \in G_\alpha$ e comuta com todo elemento de $G_{\gamma-1}$. Porém, G está contido em $G_{\gamma-1}$, logo x comuta com todo elemento de G. Assim,

$$C_{G_\alpha}(G_{\gamma-1}) \subseteq C_{G_\gamma}(G) = C.$$

Portanto, $C = C_{G_\alpha}(G_{\gamma-1})$.

A partir disso, podemos mostrar que C é G_γ-invariante. Ou seja, se $a \in C$ e $h \in G_\gamma$, então

$$a^h = hah^{-1} \in C = C_{G_\alpha}(G_{\gamma-1}).$$

De fato, considere $a \in C$ e $h \in G_\gamma$. Inicialmente, observe que se $g \in G_{\gamma-1}$. Como $G_{\gamma-1} \lhd G_\gamma$, temos $h^{-1}gh \in G_{\gamma-1}$. Assim,

$$(hah^{-1})g = ha(h^{-1}gh)h^{-1} = h(h^{-1}gh)ah^{-1} = g(hah^{-1}).$$

Portanto, $hah^{-1} \in C_{G_\alpha}(G_{\gamma-1}) = C$, e temos que C é G_γ-invariante. Além disso, $\forall\ x \in G_\gamma$ e $y \in C$ temos que $[x, y] \in C \cap G_{\gamma-1}$. Dessa forma,

$$[G_\gamma, C] \subseteq C \cap G_{\gamma-1} = C_{G_\alpha}(G) \cap G_{\gamma-1} = C_{G_{\gamma-1}}(G) = 1,$$

absurdo. Assim, a afirmação está provada e o resultado também.

□

Teorema 4.1.2 (Teorema de Wielandt)**.** *A torre de automorfismos de um grupo finito e com centro trivial estabiliza em um número finito de passos.*

Demonstração. Considere G um grupo com centro trivial. Definimos a torre de automorfismos de G como uma cadeia ascendente de grupos, a saber

$$G = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_\alpha \lhd G_{\alpha+1} \lhd \ldots,$$

sendo α um número ordinal. Para α um ordinal sucessor, definimos $G_{\alpha+1} = Aut(G_\alpha)$ e para γ um ordinal limite, definimos $G_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} G_\beta$. Observe que para cada $n < \omega$, G é um subgrupo subnormal de G_n e temos que $C_{G_{n+1}}(G_n) = 1$. Sendo assim, temos que $C_{G_n}(G) = \{1\}$, pela

Proposição 4.1.1. Então, pelo Teorema 3.1.3, existe uma cota superior para $|G_n|$ dependendo somente de $|G|$, isto é, existe um inteiro m tal que $|G_n| \leq m$, para todo $n < \omega$, onde $m = f(|G|)$. Ressaltamos que a cota definida é suficiente para limitar G_n para todo n. Diante disso, existe n tal que $G_n = G_{n+1}$, como queríamos. $\square$

4.2 O grupo diedral infinito

Nesta última seção, vamos estudar a torre de automorfismos do grupo $G = D_\infty$ e verificar que ela estabiliza em um número finito de passos.

Inicialmente, relembramos que involução de um grupo é um elemento de ordem 2. O grupo $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1 \rangle$, gerado por duas involuções, é chamado diedral infinito. Usualmente, o grupo é denotado por D_∞.

Agora, considere $c = ab$. O elemento c tem ordem infinita e

$$aca^{-1} = a(ab)a^{-1} = ba = c^{-1} \text{ e } bcb^{-1} = babb^{-1} = ba = c^{-1}.$$

Assim, definindo $C = \langle c \rangle$, temos que $C \lhd G$.

Podemos definir o diedral infinito, também, como um produto semi-direto de dois grupos. Para isso, considere $H = \langle a \rangle$, cíclico gerado por a e de ordem 2. Além disso, tome $C = \langle c \rangle$, cíclico infinito gerado por c. Por fim, seja a ação

$$\begin{aligned} \psi : \quad \langle a \rangle &\longrightarrow Aut(C) \\ a \quad &\longmapsto \quad \varphi_a \;:\; C \longrightarrow C \\ &\qquad\qquad\quad c \longmapsto c^{-1} \end{aligned}$$

Portanto, $D_\infty = \langle a \rangle \ltimes C$.

Agora, vamos discutir resultados úteis sobre o diedral infinito.

Lema 4.2.1. *Considere $D_\infty = \langle a \rangle \ltimes C$. Então C é um subgrupo característico de D_∞.*

Demonstração. Denote $G = D_\infty$. Observe que se $g \in G \backslash C$, então $g = c^n a$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Além disso, note que

$$g^2 = (c^n a)^2 = c^n a c^n a = c^n a c^n a^{-1} = c^n (a c^n a^{-1}) = c^n c^{-n} = 1.$$

Assim, todo elemento de $G \backslash C$ tem ordem 2. Logo, se $\varphi \in Aut(D_\infty)$ e $x \in C$, então $\varphi(x) \in C$, pois φ preserva a ordem dos elementos. $\square$

Lema 4.2.2. *Considere $D_\infty = \langle a \rangle \ltimes C$. O subgrupo derivado de D_∞ é igual a $\langle c^2 \rangle$.*

Demonstração. Denote $G = D_\infty$. Vamos mostrar que $G' = \langle c^2 \rangle$. Inicialmente, note que $c^2 = (ab)(ab) = [a,b]$ e, assim, $\langle c^2 \rangle \leq G'$. Agora, vamos mostrar a inclusão contrária. Todo elemento do grupo quociente $G/\langle c^2 \rangle$ tem ordem 2. Como os elementos de $G/\langle c^2 \rangle$ são involuções, segue que o grupo é abeliano. Assim, pela Proposição 2.1.5, temos que $G' \leq \langle c^2 \rangle$. Portanto, $G' = [G,G] = \langle c^2 \rangle$. $\square$

Lema 4.2.3. *O D_∞ tem duas classes de conjugação de involuções, a saber*

$$Cl(a) = \{c^{2n}a | n \in \mathbb{Z}\} \quad e \quad Cl(b) = \{c^{2n+1}a | n \in \mathbb{Z}\}.$$

Demonstração. Observe que:

$$c^n a c^{-n} = c^n a (a c^n a) = c^n c^n a = c^{2n} a.$$

Como todo elemento de G é da forma (c^n) ou $(c^n a)$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$a^{c^n} = c^n a c^{-n} = c^{2n} a \quad \text{e} \quad a^{c^n a} = (c^n a) a (a c^{-n}) = c^n a c^{-n} = c^{2n} a.$$

Portanto, $Cl(a) = \{c^{2n}a | n \in \mathbb{Z}\}$. Como $c = ab$, logo $b = ac$ e assim

$$b^{c^n} = c^n (ac) c^{-n} = (c^n a c^{-n}) c = c(c^n a c^{-n}) = c^{2n+1} a.$$

Por outro lado,

$$b^{c^n a} = c^n a (ac) a c^{-n} = c^n c a c^{-n} = c c^{2n} a = c^{2n+1} a.$$

Assim, $Cl(b) = \{c^{2n+1}a | n \in \mathbb{Z}\}$. $\square$

Considere $G = D_\infty$. Seja $\pi \in Aut(G)$ definido por:

$$\begin{aligned} \pi : &G \longrightarrow G \\ &a \longmapsto b \\ &b \longmapsto a. \end{aligned}$$

Observe que $\pi \in Aut(G)$, $\pi \notin Inn(G)$ e tem ordem 2.

Lema 4.2.4. $Aut(D_\infty) = \langle \pi, \tau_a \rangle$.

Demonstração. Denote $G = D_\infty$. Seja

$$\begin{aligned} \tau_a : &G \longrightarrow G \\ &x \longmapsto axa^{-1} = axa. \end{aligned}$$

Inicialmente, afirmamos que $\pi\tau_a\pi^{-1} = \tau_b$. Vamos verificar para os geradores a e b

$$(\pi\tau_a\pi^{-1})(a) = \pi(\tau_a(b)) = \pi(aba) = bab = \tau_b(a) \quad \text{e} \quad (\pi\tau_a\pi^{-1})(b) = \pi(\tau_a(a)) = \pi(a) = b = \tau_b(b).$$

Então temos que $Inn(G) \leq \langle \pi,\ \tau_a \rangle$. Considere $\varphi \in Aut(G)$, um automorfismo arbitrário. Vamos provar que $\varphi \in \langle \pi, \tau_a \rangle$. Considere $\mathcal{A} = Cl(a) \cup Cl(b)$, φ permuta os elementos de $\mathcal{A}$. Se necessário, podemos substituir φ por $\pi\varphi$ e supor, sem perder a generalidade, que $\varphi(Cl(a)) = Cl(a)$, logo $\varphi(a) = c^{2n}a$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Agora, seja $g = c^{-n}$ e $\psi = \tau_g\varphi$, então

$$\psi(a) = (\tau_g\varphi)(a) = \tau_g(\varphi(a)) = \tau_g(c^{2n}a) = g(c^{2n}a)g^{-1} = c^{-n}(c^{2n}a)c^n.$$

Já verificamos que $c^{2n}a = c^n a c^{-n}$, logo,

$$\psi(a) = c^{-n}(c^n a c^{-n})c^n = a.$$

Como $C = \langle c \rangle$ é um subgrupo característico em G, segue que $\psi(C) = C$. Diante disso, $\psi(c) = c$ ou $\psi(c) = c^{-1}$. Vamos analisar os dois casos possíveis. Para $\psi(c) = c$, temos

$$\psi(ab) = ab \Longrightarrow \psi(a)\psi(b) = ab \Longrightarrow a\psi(b) = ab \Longrightarrow \psi(b) = b.$$

Como $\psi(b) = b$ e $\psi(a) = a$, então $\psi = Id$. Já para $\psi(c) = c^{-1}$, temos

$$\psi(ab) = aca^{-1} \Longrightarrow \psi(a)\psi(b) = aca^{-1} \Longrightarrow a\psi(b) = aca^{-1} \Longrightarrow \psi(b) = ca^{-1} = aba^{-1}.$$

Logo, $\psi = \tau_a$. Sendo $\psi = \tau_g\varphi$, para $\psi = Id$ temos que $\varphi = \tau_{g^{-1}} = \tau_{c^n}$, então $\varphi \in Inn(G) \leq \langle \pi,\ \tau_a \rangle$. Para $\psi = \tau_a$ temos $\varphi = \tau_{c^n}\tau_a$ e, novamente, $\varphi \in Inn(G)$. Em ambas as situações, $\varphi \in \langle \pi, \tau_a \rangle$ e $Aut(G) = \langle \pi, \tau_a \rangle$.

□

Além disso, é interessante observar que $\tau_a\pi$ tem ordem infinita. Para tanto, note que

$$(\tau_a\pi)(a) = \tau_a\pi(a) = \tau_a(b) = aba^{-1} = aba.$$

Aplicando novamente, temos que

$$(\tau_a\pi)^2(a) = (\tau_a\pi)(aba^{-1}) = [(\tau_a\pi)(a)][(\tau_a\pi)(b)][(\tau_a\pi)(a^{-1})] = ababa^{-1}.$$

Observe que para todo $n \in \mathbb{N}$ $(\tau_a\pi)^n(a) \neq a$, pois não existe relação entre a e b, $(\tau_a\pi)^n(a)$ é uma expressão $ababab\ldots a$. Sendo assim, $(\tau_a\pi)^n$ nunca é identidade e, então $\tau_a\pi$ tem ordem infinita.

Como $Aut(D_\infty) = \langle \pi, \tau_a \rangle$ onde $\pi^2 = 1,\ \tau_a^2 = 1$, então $Aut(D_\infty) \cong D_\infty$. O grupo D_∞ possui o centro trivial, assim analisando sua torre de automorfismos observamos que os grupos que a compõem são isomorfos a D_∞. Já observamos que

$$Inn(D_\infty) < Aut(D_\infty),$$

pois $\pi \in Aut(D_\infty)$ e $\pi \notin Inn(D_\infty)$. Assim, D_∞ não é completo. Diante disso, a torre de automorfismos do diedral infinito não se estabiliza em um número finito de passos.

4.3 Considerações finais

Na década de 70, foram provados resultados interessantes sobre a torre de automorfismos de alguns grupos específicos. Por exemplo, Rae e Roseblade, em [9], provaram que a torre de automorfismos de um grupo de Cernikov, com centro trivial, também estabiliza em um número finito de passos. Lembramos que um grupo de Cernikov pode ser definido como um grupo satisfazendo condição minimal de cadeia para subgrupos, tendo um subgrupo normal abeliano de índice finito.

Já Hulse, em [6], provou que a torre de automorfismos de um grupo policíclico se estabiliza após um número enumerável de passos. Recordamos que um grupo policíclico é um grupo que possui uma série de subgrupos subnormais, a saber

$$\{1\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = G,$$

onde G_{i+1}/G_i é cíclico, para todo $i = 0, \cdots, n$.

Até aquele momento, a discussão se a torre de automorfismos, de um grupo arbitrário e com centro trivial, estabiliza ou não ainda estava em aberto. Porém em 1984, Simon Thomas provou que a torre de automorfismo de um grupo arbitrário G com centro trivial estabiliza após no máximo $(2^{|G|})^+$ passos, onde c^+ denota o cardinal sucessor de um número cardinal c. Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.3.1. *Se G é um grupo infinito com centro trivial, então a torre de automorfismos* *de G estabiliza após no máximo $(2^{|G|})^+$ passos.*

A demonstração do teorema é baseada em resultados básicos sobre a torre de automorfismos de um grupo e propriedades dos números cardinais infinitos e pode ser vista em [14].

O matemático Simon ressalta que a discussão ainda não acabou e ainda existem perguntas interessantes sobre a torre de automorfismos de grupos infinitos. Sabemos que, para G finito e com centro trivial, a torre se estabiliza em um ordinal α tal que $G_{\alpha+1} = G_\alpha$. Neste caso, Simon define $\tau(G)$, o tamanho da torre de automorfismo, como α. No caso infinito, o matemático levanta vários questionamentos, entre eles se é possível a existência de um cardinal fixo κ tal que $\tau(G) \leq \kappa$ para todo G infinito com centro trivial.

Ressaltamos que para mais informações sobre grupos completos, é possível consultar a referência [11].

Apêndice A

Números ordinais

Os números ordinais, apresentados por Cantor por volta de 1883, serão úteis na nossa definição da torre de automorfismos de um grupo. Por isso, faremos uma breve discussão sobre os ordinais. As principais referências utilizadas neste apêndice foram [3] e [8].

A.1 Resultados

Para desenvolver a teoria, Cantor introduziu o conceito de um conjunto bem ordenado. Sendo assim, iniciaremos relembrando as seguintes definições.

Definição A.1.1. *Uma ordem parcial é uma relação binária em um conjunto X a qual é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Além disso, uma ordem parcial em X é chamada total se para todo x e y em X, ou $x \leq y$ ou $y \leq x$. Neste caso, X é denominado um conjunto totalmente ordenado.*

Definição A.1.2. *Um conjunto totalmente ordenado é dito ser bem-ordenado se todo subconjunto não-vazio tem um menor elemento.*

A partir das definições anteriores, vamos definir os ordinais.

Definição A.1.3. *Um número ordinal, ou somente ordinal, é definido como um conjunto bem-ordenado α tal que cada elemento β em α é igual o conjunto dos seus antecessores em α, isto é*

$$\beta = \{\xi \in \alpha : \xi < \beta\}.$$

O conjunto dos números naturais é um conjunto bem ordenado, e o utilizaremos para exemplificar os ordinais. Para isso, vamos identificar cada número natural com o conjunto dos seus antecessores, assim como o matemático von Neumann:

$$\begin{aligned}
0 &:= \emptyset, \\
1 &:= 0 \cup \{0\} = \{0\}, \\
2 &:= 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}, \\
3 &:= 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}, \\
4 &:= 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\},
\end{aligned}$$

E, em geral

$$n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

Usualmente utilizamos letras gregas para denotar os ordinais. O conjunto de todos os números naturais é denotado por ω, de modo que:

$$\omega = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

Alguns ordinais são finitos, eles são justamente os números naturais. Enquanto outros são chamados de transfinitos. O menor deles é o ω. Cada ordinal α possui um sucessor imediato, a saber $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Exemplo A.1.4. *O sucessor de ω é definido pelo conjunto*

$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega\}.$$

Considere, agora, o sucessor de $\omega + 1$, ou seja:

$$(\omega + 1) + 1 = \omega + 1 \cup \{\omega + 1\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1\} := \omega + 2.$$

De maneira geral,

$$(\omega + n) + 1 = \omega + n \cup \{\omega + n\} = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + n\} := \omega + (n + 1).$$

É possível continuar o processo. Assim sendo, vamos definir $\omega + \omega$ ou $(\omega 2)$ para ser o conjunto dos números naturais e o número da forma $\omega + n$, onde n varia sobre os naturais.

$$\omega 2 = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$$

Logo, $\omega 2 + 1 = \omega 2 \cup \{\omega 2\} = \{0, 1, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega 2\}$. Continuando o processo, *definimos o sucessor de* $(\omega 2+1)+1$, *ou seja,*

$$(\omega 2+1)+1=(\omega 2+1)\cup\{0,1,\ldots,\omega,\omega+1,\ldots,\omega 2,\omega 2+1\}.$$

Analogamente, definimos os ordinais $\omega m+n$, *onde* m *e* n *são números naturais. E* $\omega m+n$ *consiste de todos os ordinais da forma:*

$$\begin{array}{cccc}
n(=\omega 0+1) & n(=\omega 1+1) & n(=\omega 2+1) & \cdots \\
1 & \omega+1 & \omega+2 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
n & \omega+n & \omega 2+n & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
\omega & \omega+\omega=\omega 2 & \omega 2+\omega=\omega 3 & \cdots
\end{array}$$

Todo α um ordinal finito não-nulo tem um chamado antecessor imediato, isto é, um ordinal β tal que $\alpha=\beta+1$. Esta afirmação não é sempre verdadeira para os ordinais transfinitos. Diante disso, um ordinal transfinito que tem um antecessor imediato é chamado um ordinal sucessor, já os outros são chamados de ordinal limite.

Exemplo A.1.5. *Os ordinais* ω, $\omega 2$ *são exemplos de ordinais limites. Já* $\omega+5$, $\omega 5+9$, *são exemplos de ordinais sucessores.*

Referências Bibliográficas

[1] D. S. Dummit, R. M. Foote, *Abstract Algebra*, 3nd ed. USA, 2004.

[2] D. S. S. M. Fonseca,*Grupos e seus Automorfismos*, Monografia (Especialização em Matemática), Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.

[3] S. Givant, P. Halmos, *Introduction to Boolean Algebras.* USA, 2009.

[4] A. Gonçalves, *Introdução à Álgebra*, 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[5] D. Gorenstein, *Finite Groups*, 2nd ed. USA, 1980.

[6] J. A. Hulse, *Automorphism towers of polycyclic groups.* J. Algebra 16(1970), 347-398.

[7] I. M. Isaacs, *Finite Group Theory.* USA, 2008.

[8] P. T. Johstone, *Notes on Logic and Set Theory.* USA, 2002.

[9] A. Rae, J. E. Roseblade, *Automorphism towers of extremal groups.* Math. Z. 117(1970), 70-75.

[10] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, 2nd ed. USA, 1995.

[11] D. J. S. Robinson, *Recent Results on Finite Complete Groups.* Algebra Carbondale 1980. Lecture Notes in Math. Vol. 848, Springer-Verlag, Berlin (1981), 178-185.

[12] S. Thomas, *The Automorphism Tower Problem.* Proc. Amer. Math. Soc. 95(1985), 166-168.

[13] S. Thomas, *The Automorphism Tower Problem II.* Israel. J. Math. 103(1998), 93-109.

[14] S. Thomas, *The Automorphism Tower Problem.* USA, 2009. Disponível em: www.math.rutgers.edu/ sthomas/book.ps

[15] H. Wielandt, *Eine Verallgemeinerung der Invarienten Untergruppen.* Math. Z. 45(1939), 209-244.