Ações de convergência de produtos livres

Lucas Henrique Rocha de Souza
Orientador: Victor Guerassimov

Departamento de matemática
Universidade Federal de Minas Gerais

Uma dissertação submetida para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Belo Horizonte 2017

Resumo

Seja G um grupo finitamente gerado que possui uma ação relativamente hiperbólica no conjunto de Cantor e seu conjunto $\mathcal{P}$ de representantes de subgrupos parabólicos é tal que todo elemento $P_i \in \mathcal{P}$ é relativamente hiperbólico com respeito a um conjunto $\mathcal{P}_i$ então o grupo G é relativamente hiperbólico com respeito a $\bigcup_i \mathcal{P}_i$ (consequência de [10]) e sua fronteira de Bowditch, $\partial_B(G, \bigcup_i \mathcal{P}_i)$ depende apenas dos espaços $\partial_B(P_i, \mathcal{P}_i)$. Como caso especial, mostraremos que se $G_1, ..., G_n$ são relativamente hiperbólicos então $\partial_B(G_1 * ... * G_n)$ depende topologicamente apenas dos espaços $\partial_B(G_i)$ (em que omitimos os conjuntos parabólicos por simplicidade). Nosso resultado principal generaliza [18], em que são caracterizadas as fronteiras hiperbólicas de produtos livres de grupos hiperbólicos. Entretanto, nossos métodos são diferentes dos usados em [18].

Abstract

Let G be a finitely generated group which has a relatively hyperbolic action on the Cantor set and its representative parabolic set $\mathcal{P}$ is such that every element $P_i \in \mathcal{P}$ is relatively hyperbolic with respect to a set $\mathcal{P}_i$, then G is relatively hyperbolic with respect to $\bigcup_i \mathcal{P}_i$ (consequence of [10]) and its Bowditch boundary, $\partial_B(G, \bigcup_i \mathcal{P}_i)$, depends only on the spaces $\partial_B(P_i, \mathcal{P}_i)$. In particular, if $G_1, ..., G_n$ are relatively hyperbolic then $\partial_B(G_1 * ... * G_n)$ only depends, topologically, of the spaces $\partial_B(G_i)$ (where we omitted for simplicity the parabolic sets). Our main result generalizes [18] where the hyperbolic boundaries of free products of hyperbolic groups are characterized. However, our methods are entirely different from that of [18].

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Leonid Potyagailo da Universidade de Lille por nos apresentar o artigo de Martin e Światkowski, [18], que resolveu o problema que estavamos trabalhando a princípio.

Agradeço ao Noah Schweber da Universidade de Winsconsin-Madison por apresentar-me ao método back-and-forth.

Agradeço ao Prof. Victor pela orientação e por tudo que eu pude aprender ao longo desse tempo.

E a todos que me ajudaram de alguma forma.

Sumário

1 Preliminares **9**

1.1 Notações . . . 9

1.2 Espaços uniformes . . . 9

1.3 Espaços topológicos . . . 12

1.4 Álgebras booleanas . . . 15

1.5 Teoria geométrica de grupos . . . 17

1.5.1 Ações de convergência . . . 17

1.5.2 Ações hiperbólicas e relativamente hiperbólicas . . . 21

1.5.3 Fronteira de Floyd . . . 22

2 Soma de espaços **24**

2.1 Aplicações contínuas entre somas de espaços . . . 26

2.2 Pullback de soma de espaços . . . 27

2.3 Functorialidade do soma-atrator . . . 29

2.4 Observação sobre soma de espaços . . . 31

3 Compactificações de $\mathbb{N}$ **33**

4 Compactificações de K_0 **39**

5 Produtos fibrados de compactificações de K_0 **44**

5.1 Explosões . . . 47

5.2 Produtos fibrados que não são explosões . . . 53

6 Ações de convergência **61**

6.1 O pullback semidireto . . . 61

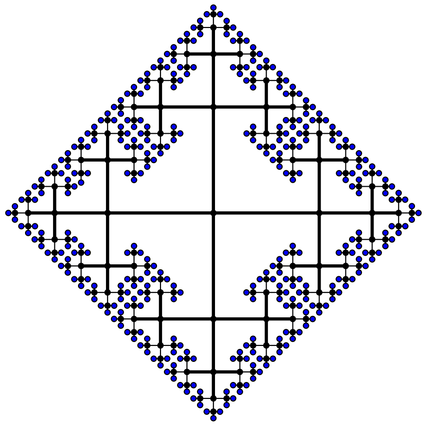
6.2 Fronteiras de Floyd e convergência . . . 69

6.3 Transitividade de ações relativamente hiperbólicas . . . 71

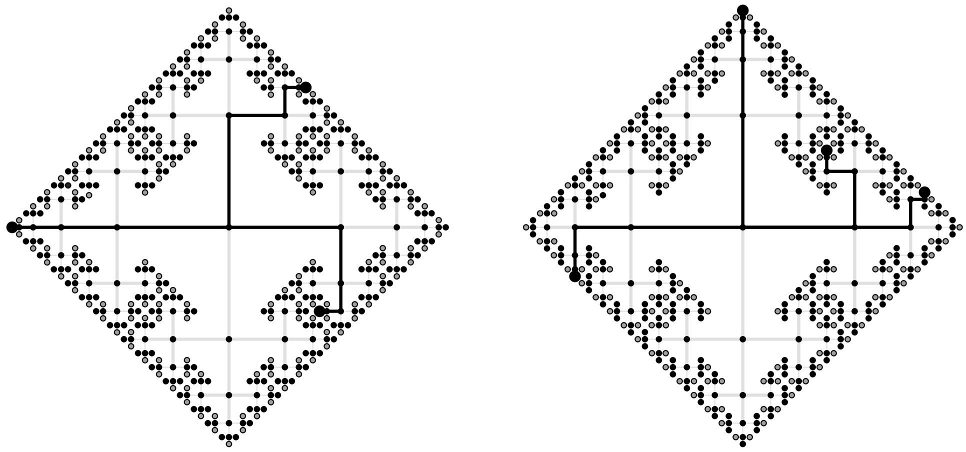
6.4 Ações relativamente hiperbólicas no conjunto de Cantor . . . 73

Introdução

Tomemos o grupo livre $F(a, b)$ gerado livremente pelos elementos a e b e o grafo de Cayley de $F(a, b)$ formado pelo mesmo conjunto de geradores. Este é a árvore 4 - regular apresentada abaixo.



Cada reta horizontal pode ser vista como uma cópia do grafo de Cayley de $\langle a \rangle$, enquanto cada reta vertical pode ser vista como uma cópia do grafo de Cayley de $\langle b \rangle$. Tomando o elemento neutro como base, podemos apresentar a fronteira hiperbólica do grupo livre como os raios geodésicos que saem do elemento neutro (a menos de distância de Hausdorff finita). Essa noção de fronteira hiperbólica não será usada durante o texto (será substituida por uma equivalente mas não construtiva), servindo apenas como forma de vizualização. Tais raios são separados em três conjuntos disjuntos: os raios que a partir de um ponto permanecem horizontais, os raios que a partir de um ponto permanecem verticais e os raios que oscilam entre partes horizontais e partes verticais indefinidamente. Os raios geodésicos horizontais podem ser vistos pertencendo a cópias da fronteira hiperbólica de $\langle a \rangle$, enquanto os raios geodésicos verticais podem ser vistos pertencendo a cópias da fronteira hiperbólica de $\langle b \rangle$. Ambas as fronteiras possuem apenas dois pontos.



Temos assim uma partição da fronteira hiperbólica, homeomorfa ao conjunto de Cantor, em três partes, sendo as duas primeiras enumeráveis, a terceira não enumerável e todas densas. Como o conjunto de Cantor é enumeravelmente densamente homogêneo, não há distinção topológica entre os dois primeiros conjuntos.

Sejam $G = \langle X_1 | Y_1 \rangle$ e $H = \langle X_2 | Y_2 \rangle$ e tomemos o grafo de Cayley $G * H$ com respeito ao conjunto de geradores $Y_1 \cup Y_2$. Se G e H são hiperbólicos então $G * H$ também é hiperbólico, portanto podemos considerar a fronteira hiperbólica do grafo de Cayley. De maneira análoga ao caso anterior, os elementos da fronteira hiperbólica podem ser divididos em três conjuntos disjuntos: os raios geodésicos que a partir de um ponto ficam em uma cópia de $\langle X_1 \rangle$ (classe lateral de $\langle X_1 \rangle$), os raios geodésicos que a partir de um ponto ficam em uma cópia de $\langle X_2 \rangle$ e os raios geodésicos que ficam oscilando indefinidamente. Cada uma dessas cópias de G ou de H determinam na fronteira hiperbólica de $G * H$ cópias das fronteiras hiperbólicas de G e de H. Como o conjunto de cópias de G ou de H é infinito enumerável, segue que o número de cópias das fronteiras também é.

Tal espaço comporta-se de forma muito similar ao conjunto de Cantor (K). De fato, existe uma aplicação contínua e sobrejetiva para K tal que é injetiva nos pontos do terceiro tipo e cada cópia da fronteira de G ou de H é levada em um ponto. Nosso objetivo é entender a topologia desse tipo de espaço. Para isso, provamos a unicidade das compactificações de $\mathbb{N}$ e do conjunto de Cantor menos um ponto (K_0) tais que o complementar desses conjuntos é um espaço metrizável sem pontos isolados dado (**Corolários 3.0.6** e **4.0.7**). Caracterizamos também os produtos fibrados sobre K tais que as fibras são as compactificações do conjunto de K_0 (**Proposição 5.0.4**) e um caso especifico ao qual garantimos unicidade (**Proposição 5.1.11**) e que é exatamente o tipo de espaço que aparece no caso acima. Todo o último capítulo serviu para que mostrássemos que esse espaço é de fato o que queremos.

Com essa unicidade podemos concluir que se G_1, G_2, H_1 e H_2 são grupos hiperbólicos tais que $\partial_\infty G_1 \cong \partial_\infty G_2$ e $\partial_\infty H_1 \cong \partial_\infty H_2$ então $\partial_\infty(G_1 * H_1) \cong \partial_\infty(G_2 * H_2)$, com ∂_∞ denotando a fronteira hiperbólica. Tal problema foi resolvido por Martin e Światkowski em [18] utilizando métodos geométricos.

Resolvemos então estender nossos métodos puramente topológicos a grupos relativamente hiperbólicos e fronteiras de Bowditch. Temos (os teoremas estão ligeiramente diferentes para evitar a notação usada durante o texto):

Teorema 6.4.3 Sejam $G = G_1 * ... * G_n$ e $G' = G'_1 * ... * G'_n$ finitamente gerados. Se $\forall i \in \{1, ...n\}$, $\partial_B(G_i, \mathcal{P}_i) \cong \partial_B(G'_i, \mathcal{P}'_i)$ então $\partial_B(G, \bigcup \mathcal{P}_i) \cong \partial_B(G', \bigcup \mathcal{P}'_i)$.

Teorema 6.4.4 Sejam $G = G_1 * ... * G_n$ finitamente gerado e $\mathcal{A}$ uma partição de $\{1, ..., n\}$ tal que se $i, j \in a \in \mathcal{A}$ então $\partial_B(G_i, \mathcal{P}_i) \cong \partial_B(G_j, \mathcal{P}_j)$ e $A = \{a_1, ..., a_k\}$ um conjunto de representantes dessa partição. Então $\partial_B(G, \bigcup \mathcal{P}_i) \cong \partial_B(G_{a_1} * ... * G_{a_k}, \bigcup \mathcal{P}_{a_i})$.

Que generalizam o problema apresentado acima.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Notações

1. Denotamos K como o conjunto de Cantor e K_0 o conjunto de Cantor menos um ponto.
2. Sempre usaremos $\mathbb{N}$ como o espaço topológico enumerável e discreto.
3. Se G é um grupo $H < G$ significa subgrupo de G.
4. Se C é um conjunto então $\#C$ significa cardinalidade de C.

1.2 Espaços uniformes

Definição 1.2.1. (Espaço uniforme) Sejam X um conjunto e $\mathfrak{U}$ um conjunto de subconjuntos de X^2. Dizemos que $\mathfrak{U}$ é uma estrutura uniforme de X se:

1. $\forall u \in \mathfrak{U},\ \Delta^2 X \subseteq \mathfrak{U}$, com $\Delta^2 X$ a diagonal,
2. se $u, v \in \mathfrak{U}$, então $u \cap v \in \mathfrak{U}$,
3. se $u \in \mathfrak{U}$ e $u \subseteq v$ então $v \in \mathfrak{U}$,
4. se $u \in \mathfrak{U}$ então $u^{-1} = \{(a, b) \in X^2 : (b, a) \in u\} \in \mathfrak{U}$,
5. se $u \in \mathfrak{U}$ então $\exists v \in \mathfrak{U}:\ v^2 = \{(a, b) \in X^2 : \exists c \in X : (a, c) \in v \text{ e } (c, b) \in v\} \subseteq u$.

Dizemos neste caso que o par $(X, \mathfrak{U})$ é um espaço uniforme e que os elementos de $\mathfrak{U}$ são entornos.

Definição 1.2.2. Sejam $(X, \mathfrak{U})$ um espaço uniforme, $Y \subseteq X$ e $u \in \mathfrak{U}$. Definimos $\mathfrak{B}(Y, u) = \{x \in X : \exists y \in Y : (y, x) \in u\}$.

Proposição 1.2.3. *(Proposição 1, §1.2, Capítulo II de [1]) Seja $(X, \mathfrak{U})$ é um espaço uniforme. Então existe uma única topologia em X tal que para para todo $x \in X$ o conjuuto $\{\mathfrak{B}(x,u) : u \in \mathfrak{U}\}$ forma o conjunto de vizinhanças de x. Dizemos nesse caso que tal topologia é gerada pela estrutura uniforme $\mathfrak{U}$.*

Toda propriedade topológica associada a algum espaço uniforme significará que o espaço topológico induzido possuirá tal propriedade.

Proposição 1.2.4. *(Proposição 3, §1.2, Capítulo II de [1]) Um espaço uniforme $(X, \mathfrak{U})$ é Hausdorff se e somente se $\Delta^2 X = \bigcap_{u \in \mathfrak{U}} u$.*

Definição 1.2.5. Sejam $(X, \mathfrak{U})$ um espaço uniforme, $u \in \mathfrak{U}$ e $A \subseteq X$. Dizemos que A é u-pequeno se $A \times A \subseteq u$. Denotemos por $Small(u) = \{A \subseteq X : A \text{ é } u\text{-pequeno}\}$.

Definição 1.2.6. Sejam $(X_1, \mathfrak{U}_1)$ e $(X_2, \mathfrak{U}_2)$ dois espaços uniformes. Uma aplicação $f : X_1 \to X_2$ é dita uniformemente contínua se $\forall u \in \mathfrak{U}_2,\ f^{-1}(u) \in \mathfrak{U}_1$, em que $f^{-1}(u) = \{(x,y) \in X_1 : (f(x), f(y)) \in \mathfrak{U}_2\}$.

Proposição 1.2.7. *(Proposição 1, §2.2, Capítulo II de [1]) Toda aplicação uniformemente contínua é contínua.*

Proposição 1.2.8. *Sejam $f : (X_1, \mathfrak{U}_1) \to (X_2, \mathfrak{U}_2)$ uma aplicação uniformemente contínua, $u \in \mathfrak{U}_2$ e $Y \subseteq X_2 :\ Y \in Small(u)$. Então $f^{-1}(Y) \in Small(f^{-1}(u))$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in f^{-1}(Y)$. Temos que $f(x), f(y) \in Y$, o que implica que $(f(x), f(y)) \in u$ e portanto $(x,y) \in f^{-1}(f(x)) \times f^{-1}(f(y)) \subseteq f^{-1}(u)$. Segue então que $f^{-1}(Y) \in Small(f^{-1}(u))$. □

Definição 1.2.9. Seja $(X, \mathfrak{U})$ um espaço uniforme. Um conjunto $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{U}$ é dito uma base de $\mathfrak{U}$ (ou sistema fundamental de entornos) se $\forall u \in \mathfrak{U},\ \exists v \in \mathfrak{B} :\ v \subseteq u$.

Denotemos uma ordem para $\mathfrak{U}$ em que $u \leqslant v$ se e somente se $v \subseteq u$. Então um subconjunto $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}$ é uma base se e somente se é cofinal com respeito a ordem.

Proposição 1.2.10. *Seja $(X, \mathfrak{U})$ um espaço uniforme. Então existe $\mathfrak{B}$ uma base de $\mathfrak{U}$ que é uma cadeia (i.e. é totalmente ordenada).*

Demonstração. Segue do fato que $\forall u, v \in \mathfrak{U},\ u \cap v \in \mathfrak{U}$. □

Proposição 1.2.11. *Seja $(X, \mathfrak{U})$ um espaço uniforme que possui base enumerável. Então existe uma base enumerável $\mathfrak{B}$ em $\mathfrak{U}$ tal que é bem ordenada e para todo elemento de $\mathfrak{B}$ o conjunto de antecessores é finito (é equivalente a $\mathbb{N}$ com a ordem usual).*

Proposição 1.2.12. *Sejam* $(X, \mathfrak{U})$ *um espaço uniforme e* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma base enumerável e encaixante* ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \subseteq u_n$) *de* $\mathfrak{U}$. *Então existe* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma base encaixante de* $\mathfrak{U}$ *tal que* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n^2 \subseteq u_n$.

Demonstração. Indução em n. Para $n = 1$, temos que existe $v_1 \in \mathfrak{U} : v_1^2 \in u_1$ e $v_1 \subseteq u_1$. Suponhamos que temos $v_1, ..., v_n$ tais que $\forall i \in \{1, ..., n\},\ v_i^2 \subseteq u_i,\ v_i \subseteq u_i$ e $\forall i \in \{1, ..., n-1\},\ v_{i+1} \subseteq v_i$. Como $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é base de $\mathfrak{U}$, $\exists j > n :\ u_j \subseteq v_n$. Mas $\exists v'_{n+1} \in \mathfrak{U} : v'^2_{n+1} \subseteq u_j$. Tome $v_{n+1} = v'_{n+1} \cap u_j$. Temos então que $v_{n+1} \subseteq v_n$, $v_{n+1} \subseteq u_j \subseteq u_{n+1}$ e $v_{n+1}^2 \subseteq v'^2_{n+1} \subseteq u_j \subseteq u_{n+1}$.

Portanto existe conjunto $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ encaixante de entornos tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n^2 \subseteq u_n$. Mas $v_{n+1} \subseteq u_j$, com $j > n$, o que implica que o conjunto $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é cofinal. Portanto $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base de $\mathfrak{U}$. $\square$

Proposição 1.2.13. *(Proposição 4, §2.4, Capítulo II de [1]) Sejam* X *um conjunto,* $\{(Y_i, \mathfrak{U}_i)\}_{i\in\Gamma}$ *uma família de espaços uniformes e* $\{f_i\}_{i\in\Gamma}$ *uma família de aplicações* $f_i : X \to Y_i$. *Então o conjunto* $\{f_{i_1}^{-1}(u_i) \cap ... \cap f_{i_n}^{-1}(u_n) : \forall j \in \{1, ..., n\},\ u_{i_j} \in \mathfrak{U}_{i_j}\}$ *forma uma base para uma estrutura uniforme em* X. *Tal estrutura uniforme será dita inicial com respeito à família* $\{f_i\}_{i\in\Gamma}$.

Proposição 1.2.14. *(Corolário, §2.4, Capítulo II de [1]) Sejam* X *um conjunto,* $\{(Y_i, \mathfrak{U}_i)\}_{i\in\Gamma}$ *uma família de espaços uniformes e* $\{f_i\}_{i\in\Gamma}$ *uma família de aplicações* $f_i : X \to Y_i$. *Então a topologia induzida pela estrutura uniforme inicial com respeito a* $\{f_i\}_{i\in\Gamma}$ *coincide com a topologia inicial com respeito a* $\{f_i\}_{i\in\Gamma}$.

Definição 1.2.15. Seja (X, d) um espaço métrico. Definimos a estrutura uniforme induzida pela métrica d como a estrutura uniforme gerada por $\{u_r : r > 0\}$, com $u_r = \{(x, y) \in X^2 : d(x, y) < r\}$.

Dizemos que um espaço uniforme $(X, \mathfrak{U})$ é metrizável se existe uma métrica em X que gera a estrutura uniforme $\mathfrak{U}$.

Proposição 1.2.16. *(Teorema 1, §2.4, Capítulo IX de [1]) Um espaço uniforme é metrizável se e somente se é Hausdorff e sua estrutura uniforme possui base enumerável.*

Proposição 1.2.17. *(Teorema 1, §4.1, Capítulo II de [1]) Seja* X *um espaço topológico Hausdorff compacto. Então existe uma única estrutura uniforme que gera a topologia de* X. *Tal estrutura uniforme é gerada pelo conjunto de vizinhanças de* $\Delta^2 X$ *em* X^2, *com a topologia produto.*

Proposição 1.2.18. *Seja X um espaço topológico Hausdorff compacto e $\mathfrak{U}$ a estrutura uniforme de X. Se F é fechado em X e $u \in \mathfrak{U}$ é fechado em X^2, então $\mathfrak{B}(F, u)$ é fechado em X.*

Demonstração. Se F é fechado em X então $F \times X$ é fechado em X^2, o que implica que $u \cap (F \times X)$ é fechado em X^2, pois u é fechado. Seja $\pi : X^2 \to X$ a aplicação de projeção na segunda coordenada. Como $u \cap (F \times X)$ é fechado, portanto compacto, segue que $\pi(u \cap (F \times X))$ é compacto, e portanto fechado em X. Mas $\pi(u \cap (F \times X)) = \{x \in X : \exists y \in F : (y, x) \in F \times X \text{ e } (y, x) \in u\} = \mathfrak{B}(F, u)$. Portanto $\mathfrak{B}(F, u)$ é fechado. □

Proposição 1.2.19. *(Teorema 2, §4.2, Capítulo II de [1]) Considere um mapa contínuo $f : (X_1, \mathfrak{U}_1) \to (X_2, \mathfrak{U}_2)$. Se X_1 é compacto, então f é uniformemente contínua.*

1.3 Espaços topológicos

Proposição 1.3.1. *(Teorema da subbase de Alexander) Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{S}$ uma subbase para a topologia de X. Então X é compacto se e somente se toda cobertura de X por abertos em $\mathcal{S}$ possui uma subcobertura finita.*

Proposição 1.3.2. *Sejam X, Y espaços Hausdorff e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua e fechada. Se $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subseteq Y$ é uma rede que converge para o ponto $y \in Y$, $\#f^{-1}(y) = 1$ e $x_\gamma \in f^{-1}(y_\gamma)$ então $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ converge para $f^{-1}(y)$.*

Demonstração. Suponhamos que $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ não converge para $f^{-1}(y)$. Então $\exists U$ aberto em X tal que $f^{-1}(y) \in U$ e $\exists \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma'}$ uma subrede cofinal (i.e. Γ' subconjunto cofinal de Γ) tal que $U \cap \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma'} = \emptyset$. Como f é fechada, temos que $f(X - U)$ é fechado. Mas $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma'} \subseteq f(X - U)$ pois $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma'} \subseteq X - U$. Como $f(X - U)$ é fechado, temos que $V = Y - f(X - U)$ é aberto e $y \in V$. Como $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma'} \cap V = \emptyset$, segue que $\{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma'}$ não converge para y, absurdo. Portanto $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ converge para $f^{-1}(y)$.

□

Proposição 1.3.3. *(Teorema 3.7.2 de [6]) Seja $f : X \to Y$ uma aplicação perfeita (i.e. X é Hausdorff e f é contínua, sobrejetiva, fechada e $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ é compacto). Se Y é compacto então X é compacto.*

Proposição 1.3.4. *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação perfeita. Se X possui base enumerável então Y possui base enumerável.*

Proposição 1.3.5. *Seja X um espaço metrizável. Então são equivalentes:*

1. X possui base enumerável

2. X é de Lindelöf

3. X é separável

Proposição 1.3.6. *(Teorema de Aleksandrov, §10.4, Capítulo I de [1]) Sejam X um espaço compacto, $\sim$ uma relação de equivalência em X e $\pi : X \to X/\sim$ a aplicação quociente. Então são equivalentes:*

1. $X/\sim$ é Hausdorff,

2. $\sim \in Closed(X^2)$,

3. π é fechada.

Definição 1.3.7. (Quaseconvexidade topológica) Sejam X um espaço Hausdorff compacto e $\sim$ uma relação de equivalência em X. Então $\sim$ é dita topologicamente quaseconvexa se $\forall q \in X$, a classe de equivalência $[q]$ é fechada e $\forall u \in \mathfrak{U}$, $\#\{[x] \subseteq X : [x] \notin Small(u)\} < \aleph_0$, com $\mathfrak{U}$ a única estrutura uniforme de X.

Proposição 1.3.8. *Sejam X um espaço Hausdorff compacto e $\sim$ uma relação de equivalência topologicamente quaseconvexa em X. Se $A \subseteq X/\sim$, definimos a relação $\sim_A = \Delta^2 X \cup \bigcup_{[x]\in A} [x]^2$ (em particular temos $\sim_{X/\sim} = \sim$). Então $\forall A \subseteq X/\sim$, $X/\sim_A$ é de Hausdorff.*

Demonstração. Seja $(x, y) \in Cl_{X^2}(\sim_A) - \Delta^2 X$. Como X é Hausdorff, $\exists u \in \mathfrak{U}$: $(x, y) \notin u$ (com $\mathfrak{U}$ a estrutura uniforme de X). Seja $v \in \mathfrak{U}$ simétrico e tal que $v^4 \subseteq u$. Tomemos $a = \mathfrak{B}(x, v) \times \mathfrak{B}(y, v)$. Se $[q] \in Small(v)$ e $a \cap [q]^2 \neq \emptyset$, então $\mathfrak{B}(x, v) \cup [q], \mathfrak{B}(y, v) \cup [q] \in Small(v^2)$ e portanto $\mathfrak{B}(x, v) \cup \mathfrak{B}(y, v) \in Small(v^4)$, absurdo pois $(x, y) \notin v^4 \subseteq u$. Temos então que $a \cap (\Delta^2 X \cup \bigcup_{[q]\in Small(v)} [q]^2) = \emptyset$. Pela quaseconvexidade topológica, temos que o conjunto $F = \{[q] \in A : [q] \notin Small(v)\}$ é finito. Como $(x, y) \in Cl(\sim_A)$, para toda vizinhança $U \subseteq a$ de (x, y), $U \cap \sim_A \neq \emptyset$, o que implica que $U \cap \bigcup_{[q]\in F} [q]^2 \neq \emptyset$. Portanto $(x, y) \in Cl_{X^2}(\bigcup_{[q]\in F} [q]^2) = \bigcup_{[q]\in F} Cl_{X^2}([q]^2) = \bigcup_{[q]\in F} [q]^2$, o que implica que $(x, y) \in \sim_A$. Portanto $\sim_A$ é fechado. Como X é Hausdorff compacto e $\sim_A$ é fechado, segue, pelo Teorema de Aleksandrov, que $X/\sim_A$ é Hausdorff. $\square$

Proposição 1.3.9. *Sejam X um espaço Hausdorff compacto, $\mathfrak{U}$ a estrutura uniforme de X, $\mathfrak{B}$ uma base de $\mathfrak{U}$ e $\sim$ uma relação de equivalência em X tal que $\forall u \in \mathfrak{B}$, $\#\{[x] \subseteq X : [x] \notin Small(u)\} < \aleph_0$, com $[x]$ a classe de x. Então $\sim$ é topologicamente quaseconvexa.*

Demonstração. Seja $u \in \mathfrak{U}$. Temos que $\exists v \in \mathfrak{B} : v \subseteq u$. Por hipótese temos que $\#\{[x] \subseteq X : [x] \notin Small(v)\} < \aleph_0$. Mas se $[x] \in Small(v)$ e $v \subseteq u$ então $[x] \in Small(u)$, o que implica que $\{[x] \subseteq X : [x] \notin Small(u)\} \subseteq \{[x] \subseteq X : [x] \notin Small(v)\}$. Portanto $\#\{[x] \subseteq X : [x] \notin Small(u)\} < \aleph_0$. Segue então que $\sim$ é topologicamente quaseconvexa. $\square$

Proposição 1.3.10. *(Teorema de metrização de Urysohn, Teorema 34.1 de [19]) Todo espaço regular e com base enumerável é metrizável.*

Corolário 1.3.11. *Um espaço Hausdorff e compacto é metrizável se e somente se possui base enumerável.*

Proposição 1.3.12. *(Corolário 3.1.20 de [6]) Sejam X um espaço compacto, m um cardinal infinito e $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ uma família de subespaços de X tal que $X = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$, $\#\Gamma \leqslant m$ e $\forall \alpha \in \Gamma$, $\omega(X_\alpha) \leqslant m$ (em que ω denota a menor cardinalidade de uma base para o espaço). Então $\omega(X) \leqslant m$.*

Corolário 1.3.13. *Seja X um espaço topológico Hausdorff, compacto e tal que existe uma família de subespaços $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que cada subespaço possui base enumerável e $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Então X é metrizável.*

Demonstração. Pela proposição anterior temos que X possui base enumerável e, como é compacto e Hausdorff, segue que é metrizável. $\square$

Definição 1.3.14. Seja X um espaço topológico. X é dito 0 - dimensional se todo ponto possui um sistema de vizinhanças formado por conjuntos aberto-fechados.

Proposição 1.3.15. *(Brouwer, Teorema 30.3 de [22]) K é o único, a menos de homeomorfismos, espaço topológico compacto, metrizável,* 0 *- dimensional e sem pontos isolados.*

Nosso enunciado difere da referência pois colocamos como hipótese o espaço ser 0-dimensional no lugar de totalmente desconexo. Mas tais propriedades são equivalentes para espaços Hausdorff compactos (Teorema 29.7 de [22]).

1.4 Álgebras booleanas

Definição 1.4.1. Uma álgebra booleana é um anel com unidade B tal que $\forall a \in B$, $a^2 = a$.

Definição 1.4.2. Seja X um conjunto. Denotemos por $Sub(X)$ o conjunto dos subconjuntos de X. Se X é um espaço topológico então denotemos por $Open(X)$ o conjunto de abertos de X, $Closed(X)$ o conjunto de fechados de X e $Clopen(X) = Open(X) \cap Closed(X)$.

Proposição 1.4.3. *Se X é conjunto então $Sub(X)$ é uma álgebra booleana com as operações Δ (diferença simétrica) e $\cap$ (intersecção). Se X for um espaço topológico, então $Clopen(X)$ é uma subálgebra de $Sub(X)$ com as mesmas operações.*

Proposição 1.4.4. *(Teorema 1.3 de [15]) Seja B uma álgebra booleana. Denotemos por $a \leqslant b$ se $ab = a$. Então $\leqslant$ é uma ordem parcial.*

Se $ab = a \cap b$, então $a \leqslant b$ significa $a \subseteq b$.

Proposição 1.4.5. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Então a aplicação $f^{-1} : Clopen(Y) \to Clopen(X)$ é um homomorfismo de álgebras booleanas, com f^{-1} a aplicação que leva um subconjunto de Y em sua imagem inversa pela aplicação f.*

Proposição 1.4.6. *(Teorema de Representação de Stone, Corolário 4.4 de [15]) As categorias Bool de álgebras booleanas com homomorfismos que preservam unidade e Stone de espaços Hausdorff, compactos e totalmente desconexos com aplicações contínuas são duais.*

Tais functores contravariantes são $Clopen : Stone \to Bool$, que leva X em $Clopen(X)$ e uma aplicação contínua f em f^{-1} e $Spec : Bool \to Stone$ que leva B em seu espectro e homomorfismos nas aplicações induzidas entre os espectros. Não serão definidos espectros pois não serão necessários para o texto. Basta dizer que, para $X, Y \in Stone$ e $h : Clopen(X) \to Clopen(Y)$ isomorfismo, h induz homeomorfismo $\tilde{h} : X \to Y$ definido por $\tilde{h}(x) = \bigcap\{h(A) : A \in Clopen(X), x \in A\}$.

Definição 1.4.7. Seja B uma álgebra booleana. Um elemento $a \in B$ é dito um átomo se $\forall b \in B,\ ab = 0$ ou $ab = a$, ou seja, a é um elemento minimal em $B - \{0\}$. O conjunto de átomos de B será denotado por $At(B)$.

Definição 1.4.8. Seja B uma álgebra booleana. Uma secção de B é uma subálgebra de dimensão 2 (dimensão com o sentido de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ - espaço vetorial).

Portanto é uma subálgebra com apenas dois átomos.

Definição 1.4.9. Sejam B uma álgebra booleana, $x \in B$ e σ uma secção de B. Dizemos que σ divide x se $xs \neq x$, para algum $s \in At(\sigma)$.

Proposição 1.4.10. *(Corolário 15.1 de [14]) Seja B uma álgebra booleana finita. Então B é isomorfa à álgebra booleana dada por $Sub(At(B))$.*

Proposição 1.4.11. *(Consequência do Teorema 11.3 de [14]) Sejam B uma álgebra booleana, $E \subseteq B - \{0\}$ subconjunto finito tal que $\forall x, y \in E,\ xy = 0$ e B' a subálgebra de B gerada por E. Então $E \subseteq At(B')$.*

Proposição 1.4.12. *(Lema 14.2 de [14]) Sejam B uma álgebra booleana, $E \subseteq At(B)$ e $x = \bigvee E$. Então $E = \{y \in At(B) : y \leqslant x\}$.*

Proposição 1.4.13. *Sejam B uma álgebra booleana, E subconjunto finito de B tal que $\forall x, y \in E,\ xy = 0$ e $\bigvee E = 1$ (supremo de E), e B' a subálgebra de B gerada por E. Então $E = At(B')$.*

Demonstração. Temos que $\bigvee E = 1$ em B' (pois E é finito) e vimos que $E \subseteq At(B')$, portanto $E = \{y \in At(B') : y \leqslant 1\} = At(B')$. □

Proposição 1.4.14. *Sejam B uma álgebra booleana, E subconjunto finito de B tal que $\forall x, y \in E,\ xy = 0$ e $\bigvee E = 1$, B' a subálgebra de B gerada por E e B'' uma subágebra finita de B tal que $B'' \nsubseteq B'$. Então $At(B') \nsubseteq At(B' + B'')$.*

Demonstração. Suponhamos que $At(B') \subseteq At(B' + B'')$. Temos que $E = At(B') \subseteq At(B' + B'')$ e $\bigvee E = 1$, o que implica que $E = \{y \in At(B' + B'') : y \leqslant 1\} = At(B' + B'')$. Portanto $B' + B'' = B'$ e portanto $B'' \subseteq B'$, absurdo. Portanto $At(B') \nsubseteq At(B' + B'')$. □

Proposição 1.4.15. *Sejam B uma álgebra booleana finita e A_1, A_2 subálgebras. Então $At(A_1 + A_2) = \{a_1a_2 \in B : a_1 \in At(A_1)$ e $a_2 \in At(A_2)\}$.*

Proposição 1.4.16. *$Clopen(K)$ é a única, a menos de isomorfismos, álgebra booleana não trivial, enumerável e sem átomos.*

1.5 Teoria geométrica de grupos

1.5.1 Ações de convergência

Definição 1.5.1. Seja X um espaço topológico. Denotemos por $X^{(n)}$ o espaço cujos pontos são subconjuntos de X com n elementos. Tal espaço carrega a topologia quociente de $(X^n - \Delta^{(n)}X)/S^n$, com $\Delta^{(n)}X = \{(x_1, ..., x_n) \in X^n : \exists i \neq j : x_i = x_j\}$, S^n o grupo simétrico e a ação como permutação de coordenadas. Temos que se $\psi : G \curvearrowright X$ é uma ação por homeomorfismos, então ψ induz uma ação por homeomorfismos $\psi^{(n)} : G \curvearrowright X^{(n)}$.

Definição 1.5.2. Sejam X um espaço Hausdorff localmente compacto, G um grupo e $\psi : G \curvearrowright X$ uma ação por homeomorfismos. Dizemos que ψ é propriamente descontínua se $\forall K \subseteq X$ compacto, o conjunto $\{g \in G : \psi(g, K) \cap K \neq \emptyset\}$ é finito. Dizemos que ψ é cocompacta se existe $K \subseteq X$ compacto tal que $\psi(G, K) = X$.

Definição 1.5.3. (Ação de convergência) Seja $\psi : G \curvearrowright X$ uma ação por homeomorfismos com X um espaço Hausdorff compacto. Dizemos que ψ é de convergência se a aplicação induzida $\psi^{(3)} : G \curvearrowright X^{(3)}$ é propriamente descontínua.

Definição 1.5.4. (Ponto limite) Seja $\psi : G \curvearrowright X$ uma ação por homeomorfismos. O conjunto de pontos limite é definido por $\Lambda_\psi X = \{x \in X : \exists y \in X : \ x$ é ponto de acumulação de $Orb_\psi y\}$. Dizemos que ψ é uma ação minimal se $\Lambda_\psi X = X$.

Proposição 1.5.5. *Seja $\psi : G \curvearrowright X$ uma ação de convergência minimal. Então $\forall x \in X$, $Orb_\psi x$ é densa em X.*

Proposição 1.5.6. *(Bowditch, Lema 1.4 de [2]) Sejam $\psi_i : G \curvearrowright X_i$ ações por homeomorfismos, com X_1 e X_2 compactos e $\pi : X_1 \to X_2$ uma aplicação contínua, sobrejetiva e G - equivariante. Se ψ_1 é de convergência então ψ_2 é de convergência.*

Definição 1.5.7. (Ponto cônico) Seja $\psi : G \curvearrowright X$ uma ação por homeomorfismos. Um ponto limite p é dito cônico se $\exists S \subseteq G$ um conjunto infinito tal que $\forall q \neq p$, $Cl_{X^2}(\psi^2(S, (p, q)) \cap \Delta^2 X = \emptyset$.

Proposição 1.5.8. *(Gerasimov, Proposição 7.5.2 de [10]) Sejam $\psi_i : G \curvearrowright X_i$ ações de convergência e $\rho : X_1 \to X_2$ aplicação contínua G - equivariante. Se $p \in X_2$ é ponto cônico, então $\#\rho^{-1}(p) = 1$ e $\rho^{-1}(p)$ é cônico.*

Definição 1.5.9. (Ponto parabólico limitado) Seja $\psi : G \curvearrowright X$ uma ação de convergência. Um ponto $p \in X$ é dito parabólico limitado se é ponto limite e a ação $\psi|_{Stab_\psi p \times (\Lambda_\psi X - \{p\})} : Stab_\psi p \curvearrowright \Lambda_\psi X - \{p\}$ é propriamente descontínua e cocompacta.

Proposição 1.5.10. *Seja $\psi : G \curvearrowright X$ uma ação de convergência. Então existem pontos limite que não são parabólicos limitados (e portanto o conjunto de pontos limite não parabólicos limitados é denso em $\Lambda_\psi X$).*

Proposição 1.5.11. *Sejam $\psi_i : G \curvearrowright X_i$ ações de convergência, com X_i Hausdorff compactos e $\rho : X_1 \to X_2$ aplicação contínua G - equivariante. Se $p \in X_2$ é ponto parabólico limitado e $\#\rho^{-1}(p) = 1$ então $\rho^{-1}(p)$ é parabólico limitado.*

Demonstração. Como p é parabólico limitado então $\exists K \subseteq \Lambda_{\psi_2} X_2 - \{p\}$ compacto tal que $\psi_2(Stab_{\psi_2} p, K) = \Lambda_{\psi_2} X_2 - \{p\}$. Temos que $\rho^{-1}(K)$ é fechado em X_1 e portanto compacto. Além disso, temos que $\rho^{-1}(K) \subseteq \Lambda_{\psi_1} X_1 - \{\rho^{-1}(p)\}$, visto que $p \notin K$. Seja $x \in \Lambda_{\psi_1} X_1 - \{\rho^{-1}(p)\}$. Temos que $\exists g \in Stab_{\psi_2} \rho(p) : \rho(x) \in \psi_2(g, K)$. Mas $Stab_{\psi_1} \rho^{-1}(p) = Stab_{\psi_2} p$, portanto $x \in \rho^{-1}(\psi_2(g, K)) = \psi_1(g, \rho^{-1}(K))$, o que implica que $\psi_1(Stab_{\psi_1} \rho^{-1}(p), \rho^{-1}(K)) = \Lambda_{\psi_1} X_1 - \{\rho^{-1}(p)\}$ e segue que ψ_1 restrita a $Stab_{\psi_1} \rho^{-1}(p)$ e $\Lambda_{\psi_1} X_1 - \{\rho^{-1}(p)\}$ é cocompacta.

Sejam $K \subseteq \Lambda_{\psi_1} X_1 - \{\rho^{-1}(p)\}$ um subconjunto compacto e $g \in \{h \in Stab_{\psi_1} \rho^{-1}(p) : \psi_1(h, K) \cap K \neq \emptyset\}$. Temos que $\psi_1(g, K) \cap K \neq \emptyset$, o que implica que $\rho(\psi_1(g, K) \cap K) \neq \emptyset$. Mas $\rho(\psi_1(g, K) \cap K) \subseteq \psi_2(g, \rho(K)) \cap \rho(K)$. Portanto $\psi_2(g, \rho(K)) \cap \rho(K) \neq \emptyset$, o que implica que $g \in \{h \in Stab_{\psi_2} p : \psi_2(h, \rho(K)) \cap \rho(K) \neq \emptyset\}$ que é um conjunto finito. Portanto $\{h \in Stab_{\psi_1} \rho^{-1}(p) : \psi_1(h, K) \cap K \neq \emptyset\}$ é finito, o que implica que ψ_1 restrita a $Stab_{\psi_1} \rho^{-1}(p)$ e $\Lambda_{\psi_1} X_1 - \{\rho^{-1}(p)\}$ é propriamente descontínua.

Portanto $\rho^{-1}(p)$ é ponto parabólico limitado. □

Proposição 1.5.12. *Sejam $\psi_i : G \curvearrowright X_i$ ações de convergência, com X_i Hausdorff compactos e $\rho : X_1 \to X_2$ aplicação contínua G - equivariante. Se $p \in X_1$ é ponto parabólico limitado e $\#\rho^{-1}(\rho(p)) = 1$, então $\rho(p)$ é parabólico limitado.*

Demonstração. Como p é parabólico limitado então $\exists K \subseteq \Lambda_{\psi_1} X_1 - \{p\}$ compacto tal que $\psi_1(Stab_{\psi_1} p, K) = \Lambda_{\psi_1} X_1 - \{p\}$. Temos que $\rho(K)$ é compacto. Além disso, temos que $\rho(K) \subseteq \Lambda_{\psi_2} X_2 - \{\rho(p)\}$, visto que $p \notin K$ e $\#\rho^{-1}(\rho(p)) = 1$. Sejam $x \in \Lambda_{\psi_2} X_2 - \{\rho(p)\}$ e $y \in \rho^{-1}(x)$. Temos que $\exists g \in Stab_{\psi_1} \rho(p) : y \in \psi_1(g, K)$. Mas $Stab_{\psi_1} p = Stab_{\psi_2} \rho(p)$, portanto $x = \rho(y) \in \rho(\psi_1(g, K)) = \psi_2(g, \rho(K))$, o que implica que $\psi_2(Stab_{\psi_1} \rho(p), \rho(K)) = \Lambda_{\psi_2} X_2 - \{\rho(p)\}$ e segue que ψ_2 restrita a $Stab_{\psi_2} \rho(p)$ e $\Lambda_{\psi_2} X_2 - \{\rho(p)\}$ é cocompacta.

Sejam $K \subseteq \Lambda_{\psi_2} X_2 - \{\rho(p)\}$ compacto e $g \in \{h \in Stab_{\psi_2} \rho(p) : \psi_2(h, K) \cap K \neq \emptyset\}$. Temos que $\psi_2(g, K) \cap K \neq \emptyset$, o que implica que $\rho^{-1}(\psi_2(g, K) \cap K) \neq \emptyset$. Mas $\rho^{-1}(\psi_2(g, K) \cap K) = \psi_1(g, \rho^{-1}(K)) \cap \rho^{-1}(K)$. Portanto $\psi_1(g, \rho^{-1}(K)) \cap \rho^{-1}(K) \neq \emptyset$, o que implica que $g \in \{h \in Stab_{\psi_1} p : \psi_1(h, \rho^{-1}(K)) \cap \rho^{-1}(K) \neq \emptyset\}$ que é um conjunto finito. Portanto $\{h \in Stab_{\psi_2}\rho(p) : \psi_2(h, K) \cap K \neq \emptyset\}$ é finito, o que implica que ψ_2 restrita a $Stab_{\psi_2}\rho(p)$ e $\Lambda_{\psi_2}X_2 - \{\rho(p)\}$ é propriamente descontínua.

Portanto $\rho(p)$ é ponto parabólico limitado. $\square$

Proposição 1.5.13. *(Gerasimov e Potyagailo, Corolário 5.10 de [12]) Sejam X_i espaços Hausdorff compactos, $\psi_i : G \curvearrowright X_i$ ações de convergência e $\rho : X_1 \to X_2$ aplicação contínua e G - equivariante. Se $p \in X_2$ é um ponto parabólico limitado, então $\rho^{-1}(p) = \Lambda_{\psi_1}(Stab_{\psi_2}p)$.*

Definição 1.5.14. (Quaseconvexidade dinâmica) Sejam $\psi : G \curvearrowright X$, com G discreto e X Hausdorff compacto de estrutura uniforme $\mathfrak{U}$, uma ação por homeomorfismos e $H < G$. Dizemos que H é dinamicamente quaseconvexo se $\forall u \in \mathfrak{U}$, $\{gH : \psi(g, \Lambda_\psi H) \notin Small(u)\} < \aleph_0$.

Proposição 1.5.15. *Sejam $\psi : G \curvearrowright X$, com G discreto e X espaço Hausdorff compacto, uma ação por homeomorfismos, $\mathfrak{U}$ a estrutura uniforme de X e $H < G$. Denotemos por $\sim$ a relação $\Delta^2 X \cup \bigcup\limits_{g \in G} \psi(g, \Lambda_\psi H)^2$. Suponhamos que $\forall g_1 \neq g_2 \in G$, $\psi(g_1, \Lambda_\psi H) \cap \psi(g_2, \Lambda_\psi H) = \emptyset$ ou $\psi(g_1, \Lambda_\psi H) = \psi(g_2, \Lambda_\psi H)$ (neste caso $\sim$ é de fato uma relação de equivalência). Se H é dinamicamente quaseconvexo então $\sim$ é topologicamente quaseconvexo. Se $\forall g \notin H$, $\psi(g, \Lambda_\psi H) \neq \Lambda_\psi H$ então quaseconvexidade topológica de $\sim$ implica quaseconvexidade dinâmica de H.*

Demonstração. Seja $u \in \mathfrak{U}$. Definimos os conjuntos $A = \{gH : \psi(g, \Lambda H) \notin Small(u)\}$, $B = \{\psi(g, \Lambda_\psi H) \notin Small(u)\}$ e $f_u : A \to B$ por $f_u(gH) = \psi(g, \Lambda_\psi H)$. Se $gH = g'H$ então $g'^{-1}g \in H$, o que implica que $\psi(g'^{-1}g, \Lambda_\psi H) = \Lambda_\psi H$ (pois $\Lambda_\psi H$ é o menor subconjunto H - invariante de X), e portanto $\psi(g', \Lambda_\psi H) = \psi(g', \psi(g'^{-1}g, \Lambda_\psi H)) = \psi(g, \Lambda_\psi H)$. Portanto f_u está bem definida e por construção é sobrejetiva. Se H é dinamicamente quaseconvexo então $\forall u \in \mathfrak{U}$, $\#A < \aleph_0$, o que implica que $\forall u \in \mathfrak{U}$, $\#B < \aleph_0$. Portanto $\sim$ é topologicamente quaseconvexo.

Se $g, g' \in G$ são tais que $\psi(g, \Lambda_\psi H) = \psi(g', \Lambda_\psi H)$ então $\psi(gg'^{-1}, \Lambda_\psi H) = \Lambda_\psi H$. Supondo que $\forall g \notin H$, $\psi(g, \Lambda_\psi H) \neq \Lambda_\psi H$, temos que $gg'^{-1} \in H$ e portanto $gH = g'H$. Portanto f_u é injetiva, o que implica que f_u é bijetiva. Temos então que $\forall u \in \mathfrak{U}$, $\#A = \#B$, o que implica que se $\sim$ é topologicamente quaseconvexa então H é dinamicamente quaseconvexo. $\square$

Corolário 1.5.16. *Sejam $\psi : G \curvearrowright X$, com G discreto e X Hausdorff compacto, uma ação por homeomorfismos e $H < G$ dinamicamente quaseconvexo e tal que $\forall g_1 \neq g_2 \in G$, $\psi(g_1, \Lambda_\psi H) \cap \psi(g_2, \Lambda_\psi H) = \emptyset$ ou $\psi(g_1, \Lambda_\psi H) = \psi(g_2, \Lambda_\psi H)$. Se $A \subseteq \{gH : g \in G\}$ e $\sim_A = \Delta^2 X \cup \bigcup\limits_{gH \in A} \psi(g, \Lambda_\psi H)^2$, então $X/\sim_A$ é de Hausdorff.*

Demonstração. Imediato da **Proposição 1.3.8**. $\square$

Proposição 1.5.17. *(Soma-Atrator - Gerasimov, Proposição 8.3.1 de [10]) Sejam G um grupo localmente compacto, X um espaço topológico Hausdorff e localmente compacto, Y um espaço topológico compacto, $\varphi : G \curvearrowright X$ uma ação própria e cocompacta e $\psi : G \curvearrowright Y$ uma ação de convergência. Então existe uma única topologia em $X \dot{\cup} Y$ em que X e Y são mergulhados e $\varphi + \psi$ (age como φ nos elementos de X e ψ nos elementos de Y) é de convergência.*

Tal espaço será chamado de soma-atrator de X e Y e será denotado por $X + Y$. Esse tipo de construção será apresentado no próximo capítulo. Ao final dele, será possível demonstrar a functorialidade do soma-atrator. Ficamos por enquanto com um caso especial que será necessário para a demonstração do caso mais geral:

Proposição 1.5.18. *(Gerasimov e Potyagailo, Lema 5.3 de [12]) Sejam G um grupo, Y_1, Y_2 espaços topológicos compactos, com $\#Y_2 > 2$, $\psi_i : G \curvearrowright Y_i$ ações de convergência, com ψ_2 minimal, e $\nu : Y_1 \to Y_2$ aplicações contínuas G - equivariantes. Então $id_G + \nu : G + Y_1 \to G + Y_2$ é uma aplicação contínua G - equivariante.*

Proposição 1.5.19. *Sejam G um grupo enumerável, X um espaço topológico localmente compacto e metrizável e $\varphi : G \curvearrowright X$ uma ação própriamente descontínua e cocompacta. Então X possui base enumerável.*

Demonstração. Seja $C \subseteq X$ um compacto tal que $X = \bigcup_{g \in G} \varphi(g, C)$. Tal compacto existe pois φ é cocompacta. Como X é localmente compacto, tomemos U_x vizinhança de $x \in C$ tal que $Cl_X U_x$ é compacto. Temos então que $\{U_x\}_{x \in C}$ cobre C, o que implica que existe subcobertura finita $\{U_1, ..., U_n\}$. Seja $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Temos que $Cl_X U = \bigcup_{i=1}^{n} Cl_X U_i$ que é compacto e $\bigcup_{g \in G} \varphi(g, U) \supseteq \bigcup_{g \in G} \varphi(g, C) = X$. Como X é metrizável, segue que $Cl_X U$ é metrizável e portanto possui base enumerável, pois é compacto. Portanto U possui base enumerável $\mathcal{B}_0$. Demonstraremos que $\mathcal{B} = \bigcup_{g \in G} \varphi(g, \mathcal{B}_0)$ é uma base enumerável de X. É imediato que é enumerável, pois é união enumerável de enumeráveis (já que G é enumerável). Sejam V aberto de X e $x \in V$. Temos que $\exists g \in G : \varphi(g, x) \in U$. Portanto $\exists B \in \mathcal{B}_0 : \ \varphi(g, x) \in B \subseteq \varphi(g, V) \cap U \subseteq \varphi(g, V)$, o que implica que $x \in \varphi(g^{-1}, B) \subseteq V$. Portanto $\mathcal{B}$ é uma base enumerável de X. $\square$

Corolário 1.5.20. *Sejam G um grupo enumerável, X um espaço topológico localmente compacto e metrizável, Y um espaço topológico compacto e metrizável, $\varphi : G \curvearrowright X$ uma ação própriamente descontínua e cocompacta e $\psi : G \curvearrowright Y$ uma ação de convergência. Então o soma-atrator $X + Y$ é metrizável.*

Demonstração. Pela proposição anterior, X possui base enumerável e como Y é compacto e metrizável, segue que também possui base enumerável. Como $X+Y$ é Hausdorff e compacto, segue pelo **Corolário 1.3.13** que $X+Y$ é metrizável. $\square$

1.5.2 Ações hiperbólicas e relativamente hiperbólicas

Definição 1.5.21. (Ação hiperbólica) Seja $\psi : G \curvearrowright X$ uma ação por homeomorfismos minimal. Então ψ é dita hiperbólica se é de convergência e cocompacta em triplas.

Proposição 1.5.22. *(Bowditch, Lema 5.1 de [2]) Sejam $\psi_i : G \curvearrowright X_i$ ações hiperbólicas minimais. Então $\exists \rho : X_1 \to X_2$ homeomorfismo G - equivariante.*

Nesse caso, dizemos que G é hiperbólico e dizemos que a fronteira hiperbólica de G é dada por $\partial_\infty G = X_1$.

Proposição 1.5.23. *(Bowditch, Proposição 1.13 de [2]) Um grupo hiperbólico age hiperbólicamente em sua fronteira hiperbólica.*

Proposição 1.5.24. *(Bowditch, Teorema 8.1 de [3]) Seja $\psi : G \curvearrowright X$ uma ação de convergência, com X metrizável. Então ψ é hiperbólica se e somente se todos os pontos de X são cônicos.*

Definição 1.5.25. (Ação relativamente hiperbólica) Seja $\psi : G \curvearrowright X$ uma ação por homeomorfismos minimal. Então ψ é dita relativamente hiperbólica se é de convergência, cocompacta em pares e não parabólica ($\#\Lambda_\psi X > 1$).

Proposição 1.5.26. *(Tukia, Teorema 1C de [21] e) Seja $\psi : G \curvearrowright X$ uma ação minimal de convergência, com X metrizável. Se todos os pontos de X são cônicos ou parabólicos limitados então ψ relativamente hiperbólica.*

Proposição 1.5.27. *(Gerasimov, Teorema principal de [9]) Seja $\psi : G \curvearrowright X$ uma ação relativamente hiperbólica. Então temos:*

1. *o número de órbitas de pontos limite não cônicos é finito,*
2. *a ação $\psi|_{Stab_\psi p \times (\Lambda_\psi X - \{p\})} : Stab_\psi p \curvearrowright \Lambda_\psi X - \{p\}$ é cocompacta, para todo ponto limite não cônico $p \in X$.*

Portanto uma ação minimal em um espaço métrico é relativamente hiperbólica se e somente se todos os pontos são cônicos ou parabólicos limitados.

Proposição 1.5.28. *(Gerasimov e Potyagailo, Corolário 6.1(e) de [12]) Sejam X_i Hausdorff compactos e $\psi_i : G \curvearrowright X_i$ ações relativamente hiperbólicas com respeito a um mesmo conjunto de grupos parabólicos $\mathcal{P}$. Então $\exists \rho : X_1 \to X_2$ homeomorfismo G - equivariante.*

Nesse caso, dizemos que a fronteira de Bowditch de G com respeito a $\mathcal{P}$ é dada por $\partial_B(G, \mathcal{P}) = X_1$.

1.5.3 Fronteira de Floyd

Definição 1.5.29. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ aplicação. Chamamos f de função escalar de Floyd se satisfaz:

1. $\exists K > 0 : \forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant \frac{f(n)}{f(n+1)} \leqslant K$
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n) < \infty$

Definição 1.5.30. Sejam Γ um grafo e $v \in \Gamma_0$. Se $(x, y) \in \Gamma_1$, definimos o comprimento da aresta com respeito a função escalar de Floyd f e ao vértice v, como $\ell_{f,v}((x, y)) = f(\min\{d(v, x), d(v, y)\})$. Definimos o comprimento de um caminho como a soma dos comprimentos de cada aresta contida nele. Finalmente, definimos a métrica de Floyd para Γ com respeito a f e v como $\delta_{f,v}(x, y) = \inf\limits_{\gamma} \ell_{f,v}(\gamma)$, com γ percorrendo todos os caminhos entre x e y.

Proposição 1.5.31. *$\delta_{f,v}$ é uma métrica.*

Definição 1.5.32. (Fronteira de Floyd) Definimos Γ_f o completamento por sequências de Cauchy de $(\Gamma, \delta_{f,v})$. O subespaço $\partial_f\Gamma = \Gamma_f - \Gamma$ é chamado de fronteira de Floyd de Γ com respeito a função f.

Proposição 1.5.33. *(Floyd, Lema 1 de [7]) A fronteira de Floyd é compacta.*

Proposição 1.5.34. *(Karlsson, Teorema 2 de [16]) A ação induzida de G em $\partial_f G$ é de convergência.*

Proposição 1.5.35. *(Gerasimov, Corolário do Teorema 3.4.6 de [10]) Sejam G finitamente gerado e $\psi : G \curvearrowright X$ uma ação relativamente hiperbólica. Então $\exists \lambda \in (0, 1) : \forall \lambda' \in (0, 1)$, com $\lambda' \geqslant \lambda$, $\exists F : \partial_f G \to X$ uma aplicação contínua, sobrejetiva e G - equivariante, com $f(n) = \lambda'^n$. Tal aplicação é dita o mapa de Floyd.*

Proposição 1.5.36. *(Gerasimov e Potyagailo, Corolário 7.8 de [11]) Seja* $\psi : G \curvearrowright X$ *uma ação relativamente hiperbólica, com* G *finitamente gerado. Se* p *é um ponto parabólico limitado em* ψ *e* $F : \partial_f G \to X$ *é o mapa de Floyd, então* $F^{-1}(p) = \partial_f(Stab_\psi p)$.

Capítulo 2

Soma de espaços

Dados dois espaços topológicos construiremos um novo espaço cujo conjunto é formado pela união disjunta dos dois espaços, a topologia é tal que se restrita a algum deles, coincide com a topologia inicial e um dos espaços é aberto. Veremos, **Proposição 2.0.7**, que todo espaço topológico pode ser construido desta forma, para quaisquer dois subespaços disjuntos cuja união é o espaço todo e um deles é aberto. Esse conceito foi usado por Gerasimov em [10] para construir soma-atratores.

Definição 2.0.1. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que uma aplicação $f : Closed(X) \to Closed(Y)$ é admissível se $f(\emptyset) = \emptyset$ e $\forall A, B \in Closed(X)$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Fixemos uma aplicação admissível f. Daremos uma topologia para $X \dot{\cup} Y$. Definimos como fechado um conjunto $A \subseteq X \dot{\cup} Y$ se $A \cap X \in Closed(X)$, $A \cap Y \in Closed(Y)$ e $f(A \cap X) \subseteq A$. Sendo assim, denotemos por τ_f o conjunto de complementares desses fechados e $X +_f Y = (X \dot{\cup} Y, \tau_f)$.

Proposição 2.0.2. *De fato τ_f é uma topologia.*

Demonstração. Temos que $(X \cup Y) \cap X = X \in Closed(X)$, $(X \cup Y) \cap Y = Y \in Closed(Y)$ e $f((X \cup Y) \cap X) = f(X) \subseteq X \cup Y$. Portanto $X \cup Y \in Closed(X +_f Y)$.

Temos também que $\emptyset \cap X = \emptyset \in Closed(X)$, $\emptyset \cap \emptyset = Y \in Closed(Y)$ e $f(\emptyset \cap X) = f(\emptyset) = \emptyset$. Portanto $\emptyset \in Closed(X +_f Y)$.

Sejam $A, B \in Closed(X +_f Y)$. Neste caso, $(A \cup B) \cap X = (A \cap X) \cup (B \cap X) \in Closed(X)$, $(A \cup B) \cap Y = (A \cap Y) \cup (B \cap Y) \in Closed(Y)$ e $f((A \cup B) \cap X) = f((A \cap X) \cup (B \cap X)) = f(A \cap X) \cup f(B \cap X) \subseteq A \cup B$ (pois $f(A \cap X) \subseteq A$ e $f(B \cap X) \subseteq B$). Portanto $A \cup B \in Closed(X +_f Y)$.

Seja $\{A_i\}_{i \in \Gamma}$ uma família de fechados. Então $(\bigcap\limits_{i \in \Gamma} A_i) \cap X = \bigcap\limits_{i \in \Gamma} (A_i \cap X) \in Closed(X)$, pois cada $A_i \cap X \in Closed(X)$. Analogamente, $(\bigcap\limits_{i \in \Gamma} A_i) \cap Y \in Closed(Y)$.

E $\forall i \in \Gamma, f((\bigcap_{i\in\Gamma} A_i)\cap X) \subseteq f(A_i\cap X) \subseteq A_i$, o que implica que $f((\bigcap_{i\in\Gamma} A_i)\cap X) \subseteq \bigcap_{i\in\Gamma} A_i$. Portanto $\bigcap_{i\in\Gamma} A_i \in Closed(X +_f Y)$. $\square$

Proposição 2.0.3. *Seja $A \in Closed(X)$. Então $Cl_{X+_fY}A = A \cup f(A)$.*

Demonstração. Temos que $(A \cup f(A)) \cap X = A \in Closed(X)$, $(A \cup f(A)) \cap Y = f(A) \in Closed(Y)$ e $f((A \cup f(A)) \cap X) = f(A) \subseteq A \cup f(A)$. Portanto $A \cup f(A) \in Closed(X +_f Y)$.

Seja $B \in Closed(X +_f Y)$ tal que $A \subseteq B$. Temos que $f(B \cap X) \subseteq B$. Mas $f(B\cap X) = f((A\cup B)\cap X) = f(A\cap X)\cup f(B\cap X) = f(A)\cup f(B\cap X)$, o que implica que $f(A) \subseteq B$. Portanto $A \cup f(A) \subseteq B$.

Segue que $Cl_{X+_fY}A = A \cup f(A)$. $\square$

Corolário 2.0.4. *X é denso em $X +_f Y$ se e somente se $f(X) = Y$.*

Demonstração. Se $f(X) = Y$, então $Cl_{X+_fY}(X) = X \cup f(X) = X \cup Y$, o que implica que X é denso em $X +_f Y$. Se $f(X) = Y_1 \subsetneq Y$, então $Cl_{X+_fY}(X) = X \cup f(X) = X \cup Y_1 \subsetneq X \cup Y$, o que implica que X não é denso em $X +_f Y$. $\square$

Proposição 2.0.5. *Y é fechado em $X +_f Y$.*

Demonstração. Temos que $Y \cap X = \emptyset \in Closed(X)$, $Y \cap Y = Y \in Closed(Y)$ e $f(Y \cap X) = f(\emptyset) = \emptyset \subseteq Y$. Portanto $Y \in Closed(X +_f Y)$. $\square$

Proposição 2.0.6. *As aplicações $id_X : X \to X +_f Y$ e $id_Y : Y \to X +_f Y$ são mergulhos.*

Demonstração. Seja $F \in Closed(X +_f Y)$. Então $F \cap X \in Closed(X)$. Mas $F \cap X = id_X^{-1}(F)$. Portanto id_X é contínua. Seja $F \in Closed(X)$. Temos que $Cl_{X+_fY}(F) = F \cup (f(F))$ e $(F \cup (f(F))) \cap X = F$, o que implica que F é fechado em X como subespaço de $X +_f Y$. Portanto id_X é um mergulho.

Temos que Y é fechado em $X +_f Y$, portanto $\forall F \subseteq Y$, $F \in Closed(Y)$ se e somente se $F \in Closed(X +_f Y)$. Portanto id_Y é um mergulho. $\square$

Proposição 2.0.7. *Seja Z um espaço topológico tal que $Z = X\dot{\cup}Y$ e X é aberto. Definimos $f : Closed(X) \to Closed(Y)$ como $f(A) = Cl_Z(A)\cap Y$. Então Z e $X+_fY$ possuem a mesma topologia.*

Demonstração. Sejam $A, B \in Closed(X)$. Então $f(A \cup B) = Cl_Z(A \cup B) \cap Y = (Cl_Z(A) \cup Cl_Z(B)) \cap Y = (Cl_Z(A) \cap Y) \cup (Cl_Z(B) \cap Y) = f(A) \cup f(B)$. Além disso, $f(\emptyset) = Cl_Z(\emptyset) \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset$. Portanto f satisfaz as condições necessárias.

Seja $A \in Closed(Z)$. Temos que $A \cap X \in Closed(X)$, $A \cap Y \in Closed(Y)$ e $f(A \cap X) = Cl_Z(A \cap X) \cap Y \subseteq Cl_Z(A \cap X) \subseteq Cl_Z(A) = A$. Portanto $A \in Closed(X +_f Y)$. Seja $A \in Closed(X +_f Y)$. Então $A \cap X \in Closed(X)$, o que implica que $Cl_X(A \cap X) = A \cap X \subseteq A$. Mas $Cl_X(A \cap X) = Cl_Z(A \cap X) \cap X$, o que implica que $Cl_Z(A \cap X) \cap X \subseteq A$. Por outro lado temos que $f(A \cap X) \subseteq A$. Mas $f(A \cap X) = Cl_Z(A \cap X) \cap Y$, o que implica que $Cl_Z(A \cap X) \cap Y \subseteq A$. Portanto $Cl_Z(A \cap X) \subseteq A$. Mas $A = (A \cap X) \cup (A \cap Y)$, o que implica que $Cl_Z(A) = Cl_Z(A \cap X) \cup Cl_Z(A \cap Y)$. Como $Y \in Closed(Z)$ e $A \cap Y \in Closed(Y)$, segue que $A \cap Y \in Closed(Z)$ e portanto $Cl_Z(A \cap Y) = A \cap Y \subseteq A$. Portanto $Cl_Z(A) \subseteq A$ e segue que $A \in Closed(Z)$.

Portanto $Closed(Z) = Closed(X +_f Y)$.

□

Proposição 2.0.8. *Sejam X, Y espaços topológicos. Então $X +_\emptyset Y$ é o coproduto de X e Y.*

Demonstração. Temos que $X \cup f(X) = X \in Closed(X +_\emptyset Y)$. Portanto X e Y formam uma cisão de $X +_\emptyset Y$, o que implica que $X +_\emptyset Y$ é o coproduto de X e Y. □

2.1 Aplicações contínuas entre somas de espaços

Definição 2.1.1. Sejam $X +_f Y$ e $Z +_h W$ espaços topológicos e $\psi : X \to Z$ e $\phi : Y \to W$ aplicações contínuas. Então definimos $\psi + \phi : X +_f Y \to Z +_h W$ por $\psi + \phi(x) = \psi(x)$ se $x \in X$ e $\phi(x)$ se $x \in Y$. Se G é um grupo, $\psi : G \curvearrowright X$ e $\phi : G \curvearrowright Y$ então definimos $\psi + \phi : G \curvearrowright X +_f Y$ definida por $\psi + \phi(g, x) = \psi(g, x)$ se $x \in X$ e $\phi(g, x)$ se $x \in Y$.

Proposição 2.1.2. *Sejam $X +_f Y$ e $Z +_h W$ espaços topológicos e $\psi : X \to Z$ e $\phi : Y \to W$ aplicações contínuas. Então $\psi + \phi : X +_f Y \to Z +_h W$ é contínua se e somente se $\forall A \in Closed(Z),\ f(\psi^{-1}(A)) \subseteq \phi^{-1}(h(A))$.*

Obs. Em outras palavras, $\psi + \phi$ é contínua se e somente se temos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Closed(X) \arrow[r, "f"] & Closed(Y) \\
Closed(Z) \arrow[u, "\psi^{-1}"] \arrow[r, "h"] \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] & Closed(W) \arrow[u, "\phi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Seja $A \in Closed(Z+_h W)$. Temos que o conjunto $(\psi+\phi)^{-1}(A) = \psi^{-1}(A\cap Z)\cup\phi^{-1}(A\cap W)$. Provaremos que esse conjunto é fechado, mostrando que é igual ao seu fecho. Temos que $Cl_{X+_f Y}(\psi^{-1}(A\cap Z)\cup\phi^{-1}(A\cap W)) = Cl_{X+_f Y}(\psi^{-1}(A\cap Z))\cup Cl_{X+_f Y}(\phi^{-1}(A\cap W))$. Mas $Cl_{X+_f Y}(\psi^{-1}(A\cap Z)) = \psi^{-1}(A\cap Z)\cup f(\psi^{-1}(A\cap Z))$. Temos que $f(\psi^{-1}(A\cap Z)) \subseteq \phi^{-1}(h(A\cap Z))$ por hipótese e $\phi^{-1}(h(A\cap Z)) \subseteq \phi^{-1}(A\cap W)$, pois $A \in Closed(Z+_h W)$. Portanto $Cl_{X+_f Y}(\psi^{-1}(A\cap Z)) \subseteq \psi^{-1}(A\cap Z)\cup\phi^{-1}(A\cap W)$. Temos que $Cl_{X+_f Y}(\phi^{-1}(A\cap W)) = \phi^{-1}(A\cap W)$ (pois $A\cap W \in Closed(W)$ e ϕ é contínua) e portanto $Cl_{X+_f Y}(\psi^{-1}(A\cap Z)\cup\phi^{-1}(A\cap W)) \subseteq \psi^{-1}(A\cap Z)\cup\phi^{-1}(A\cap W)$ e segue a igualdade. Logo $\psi+\phi$ é contínua.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\psi+\phi$ é contínua. Seja $A \in Closed(Z)$. Temos que $A\cup h(A) \in Closed(Z+_h W)$. Pela continuidade de $\psi+\phi$, temos que $(\psi+\phi)^{-1}(A\cup h(A)) \in Closed(X+_f Y)$. Mas $(\psi+\phi)^{-1}(A\cup h(A)) = \psi^{-1}(A)\cup\phi^{-1}(h(A)) = Cl_{X+_f Y}(\psi^{-1}(A)\cup \phi^{-1}(h(A))) = Cl_{X+_f Y}(\psi^{-1}(A))\cup Cl_{X+_f Y}(\phi^{-1}(h(A)))$. Portanto $Cl_{X+_f Y}(\psi^{-1}(A)) \subseteq \psi^{-1}(A)\cup\phi^{-1}(h(A))$. Mas $Cl_{X+_f Y}(\psi^{-1}(A)) = \psi^{-1}(A)\cup f(\psi^{-1}(A))$ e $f(\psi^{-1}(A)\cap \psi^{-1}(A) = \emptyset$ (pois $\psi^{-1}(A)\subseteq X$). Segue então que $f(\psi^{-1}(A)) \subseteq \phi^{-1}(h(A))$, como queriamos demonstrar. $\square$

Corolário 2.1.3. *Sejam $X+_f Y$, $X+_{f'} Y$ espaços topológicos. Então a aplicação $id : X+_f Y \to X+_{f'} Y$ é contínua se e somente se $\forall A \in Closed(X)$, $f(A)\subseteq f'(A)$.*

Demonstração. Imediato. $\square$

2.2 Pullback de soma de espaços

Proposição 2.2.1. *Sejam X, W e $Y+_f Z$ espaços topológicos e aplicações contínuas $\pi : X \to Y$ e $\varpi : W \to Z$. Podemos definir $f^* : Closed(X) \to Closed(W)$ como $f^*(A) = \varpi^{-1}(f(Cl_Y(\pi(A))))$. Então $\pi+\varpi : X+_{f^*} W \to Y+_f Z$ é contínua.*

Demonstração. Temos que $f^*(\emptyset) = \varpi^{-1}(f(Cl_Y(\pi(\emptyset)))) = \varpi^{-1}(f(Cl_Y(\emptyset))) = \varpi^{-1}(f(\emptyset)) = \emptyset$ e $f^*(A\cup B) = \varpi^{-1}(f(Cl_Y(\pi(A\cup B)))) = \varpi^{-1}(f(Cl_Y(\pi(A)\cup\pi(B)))) = \varpi^{-1}(f(Cl_Y(\pi(A))\cup Cl_Y(\pi(B)))) = \varpi^{-1}(f(Cl_Y(\pi(A)))\cup f(Cl_Y(\pi(B)))) = \varpi^{-1}(f(Cl_Y(\pi(A))))\cup\varpi^{-1}(f(Cl_Y(\pi(B)))) = f^*(A)\cup f^*(B)$, portanto f^* é admissível.

Se $A \in Closed(Y)$ então $f^*(\pi^{-1}(A)) = \varpi^{-1}(f(Cl_Y(\pi(\pi^{-1}(A))))) = \varpi^{-1}(f(Cl_Y(A))) = \varpi^{-1}(f(A))$, ou seja, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
Closed(X) \arrow[r, "f^*"] & Closed(W) \\
Closed(Y) \arrow[u, "\pi^{-1}"] \arrow[r, "f"'] & Closed(Z) \arrow[u, "\varpi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Portanto $(\pi + \varpi) : X +_{f^*} W \to Y +_f Z$ é contínua. $\square$

Proposição 2.2.2. *Se π é sobrejetiva então $f^*(X) = \varpi^{-1}(f(Y))$.*

Demonstração. Temos que $f^*(X) = \varpi^{-1}(f(Cl_Y(\pi(X)))) = \varpi^{-1}(f(Y))$. $\square$

Proposição 2.2.3. *Considere $X +_{f'} W$ para alguma função f' tal que a aplicação $\pi + \varpi : X +_{f'} W \to Y +_f Z$ é contínua. Então $id_X + id_W : X +_{f'} W \to X +_{f^*} W$ é contínua.*

Demonstração. Como $\pi + \varpi$ é contínua, temos que $\forall B \in Closed(Y)$, $f'(\pi^{-1}(B)) \subseteq \varpi^{-1}(f(B)) = f^*(\pi^{-1}(B))$. Temos que $\forall A \in Closed(X)$, $f^*(\pi^{-1}(\pi(A))) = \varpi^{-1}(f(Cl_Y(\pi(\pi^{-1}(\pi(A)))))) = \varpi^{-1}(f(Cl_Y(\pi(A)))) = f^*(A)$. Seja $B = \pi(A)$. Então $f'(\pi^{-1}(\pi(A))) \subseteq f^*(\pi^{-1}(\pi(A))) = f^*(A)$. Mas $A \subseteq \pi^{-1}(\pi(A))$, o que implica que $f'(A) \subseteq f'(\pi^{-1}(\pi(A)))$. Portanto $f'(A) \subseteq f^*(A)$, o que implica que $id_X + id_W$ é contínua.

$\square$

Em outras palavras, f^* induz a topologia mais grossa (dentre as topologias que estendem as topologias de X e W) tal que a a aplicação $\pi + \varpi$ é contínua.

Proposição 2.2.4. *Se X, W e $Y +_f Z$ são Hausdorff e ϖ é injetiva então $X +_{f^*} W$ é Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$. Como X é Hausdorff, existem U, V abertos que separam x e y. Mas X é aberto em $X +_{f^*} W$, o que implica que U, V são abertos em $X +_{f^*} W$ que separam x e y. Sejam $x \in X$ e $y \in W$. Tomemos U, V abertos em $Y +_f Z$ que separam $\pi(x)$ e $\varpi(y)$ (que são pontos diferentes pois $\pi(x) \in Y$ e $\varpi(y) \in Z$). Portanto $(\pi + \varpi)^{-1}(U)$ e $(\pi + \varpi)^{-1}(V)$ separam x e y. Sejam agora $x, y \in W$. Como ϖ é injetiva, temos que $\varpi(x) \neq \varpi(y)$ e como $Y +_f Z$ é Hausdorff, existem U e V abertos disjuntos em $Y +_f Z$ que separam $\varpi(x)$ e $\varpi(y)$, o que implica que $(\pi + \varpi)^{-1}(U)$, $(\pi + \varpi)^{-1}(V)$ são abertos disjuntos em $X +_{f^*} W$ que separam x e y. Portanto $X +_{f^*} W$ é Hausdorff. $\square$

Proposição 2.2.5. *Se π e ϖ são fechadas então $\pi + \varpi : X +_{f^*} W \to Y +_f Z$ é fechada.*

Demonstração. Seja $A \in Closed(X +_{f^*} W)$. Temos neste caso que $A \cap X \in Closed(X)$, $A \cap W \in Closed(W)$ e $f^*(A \cap X) \subseteq A$. Como π e ϖ são fechadas, temos que $\pi(A \cap X) = (\pi + \varpi)(A) \cap Y \in Closed(Y)$, $\varpi(A \cap W) = (\pi + \varpi)(A) \cap Z \in Closed(Z)$ e $(\pi + \varpi)(f^*(A \cap X)) = \varpi(f^*(A \cap X)) \subseteq (\pi + \varpi)(A)$. Mas temos $f^*(A \cap X) =$

$\varpi^{-1}(f(\pi(A \cap X)))$, o que implica que $\varpi(f^*(A \cap X)) = \varpi(\varpi^{-1}(f(\pi(A \cap X)))) = f(\pi(A \cap X)) = f((\pi + \varpi)(A) \cap Y)$ e portanto $f((\pi + \varpi)(A) \cap Y) \subseteq (\pi + \varpi)(A)$. Segue então que $(\pi + \varpi)(A) \in Closed(Y +_f Z)$ e portanto $\pi + \varpi$ é fechada. □

Proposição 2.2.6. *(Lema do cubo) Sejam X_i, W_i e $Y_i +_{f_i} Z_i$ espaços topológicos, $\pi_i : X_i \to Y_i$ e $\varpi_i : W_i \to Z_i$ aplicações contínuas. Tomemos os respectivos pullbacks $f_i^* : Closed(X_i) \to Closed(W_i)$. Se $\mu + \nu : Y_1 +_{f_1} Z_1 \to Y_2 +_{f_2} Z_2$, $\psi : X_1 \to X_2$ e $\phi : W_1 \to W_2$ são aplicações contínuas que comutam os diagramas:*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi_1"] & X_2 \arrow[d, "\pi_2"'] \\ Y_1 \arrow[r, "\mu"] & Y_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\varpi_1"] & W_2 \arrow[d, "\varpi_2"'] \\ Z_1 \arrow[r, "\nu"] & Z_2 \end{tikzcd}$$

Então $\psi + \phi : X_1 +_{f_1^*} W_1 \to X_2 +_{f_2^*} W_2$ é contínua.

Demonstração. Consideremos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Closed(X_1) \arrow[rr, "f_1^*"] \arrow[drrr, phantom, "\mathbf{1}"] & & Closed(W_1) & \\
& Closed(X_2) \arrow[ul, "\psi^{-1}"] \arrow[rr, "f_2^*"] \arrow[dd, shift left, "Cl_{Y_2}\pi_2"] & & Closed(W_2) \arrow[ul, "\phi^{-1}"'] \\
Closed(Y_1) \arrow[uu, "\pi_1^{-1}"] \arrow[rr, "f_1"'] \arrow[drrr, phantom, "\mathbf{2}"] & & Closed(Z_1) \arrow[uu, "\varpi_1^{-1}"] & \\
& Closed(Y_2) \arrow[ul, "\mu^{-1}"] \arrow[uu, shift left, "\pi_2^{-1}"] \arrow[rr, "f_2"'] & & Closed(Z_2) \arrow[ul, "\nu^{-1}"'] \arrow[uu, "\varpi_2^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Temos que todos os retângulos laterais (exceto os retângulos com $Cl_{Y_2}\pi_2$) comutam pela definição de f_1^* e f_2^* ou por hipótese. Já no retângulo **2** temos que $\forall A \in Closed(Y_2)$, $f_1(\mu^{-1}(A)) \subseteq \nu^{-1}(f_2(A))$, pela continuidade de $\mu + \nu$. Seja $B \in Closed(X_2)$. Temos que $f_1^* \circ \psi^{-1}(B) \subseteq f_1^* \circ \psi^{-1} \circ \pi_2^{-1}(Cl_{Y_2}(\pi_2(B))) = f_1^* \circ \pi_1^{-1} \circ \mu^{-1}(Cl_{Y_2}(\pi_2(B))) = \varpi_1^{-1} \circ f_1 \circ \mu^{-1}(Cl_{Y_2}(\pi_2(B))) \subseteq \varpi_1^{-1} \circ \nu^{-1} \circ f_2(Cl_{Y_2}(\pi_2(B))) = \phi^{-1} \circ \varpi_2^{-1} \circ f_2(Cl_{Y_2}(\pi_2(B))) = \phi^{-1} \circ f_2^*(B)$. Segue então que $\psi + \phi$ é contínua.

□

2.3 Functorialidade do soma-atrator

Agora que temos as ferramentas de soma de espaços podemos entender um pouco melhor o soma-atrator e resolver o problema de sua functorialidade.

Primeiramente, é necessário dizer que, apesar de que em uma soma-atrator $X+Y$ não aparecer nenhum índice sobre o sinal de $+$, está subentendido que existe uma única aplicação de $Closed(X)$ para $Closed(Y)$ que realiza $X+Y$ como soma de espaços.

Sejam G um grupo, X espaço topológico Hausdorff e localmente compacto, Y espaço topológico Hausdorff compacto, $\varphi : G \curvearrowright X$ ação própria e cocompacta e $\psi : G \curvearrowright Y$ ação de convergência. Dividimos em dois casos. Se $X = G$ e φ é a multiplicação de G, então não apresentaremos (pois não é necessária para o desenvolvimento do texto) a construção da aplicação ∂ tal que $G+Y = G+_\partial Y$ (consulte [10]). No caso geral, seja $K \subseteq X$ um compacto tal que $\varphi(G,K) = X$. Se $S \subseteq X$, denotemos por $SK^{-1} = \{g \in G : \varphi(g,K) \cap S \neq \emptyset\}$. Seja então $\partial_X : Closed(X) \to Closed(Y)$ dado por $\partial_X(S) = \partial(SK^{-1})$. Temos então que ∂_X não depende da escolha de K e $X+Y = X +_{\partial_X} Y$.

Feitas as considerações, podemos demonstrar a functorialidade:

Proposição 2.3.1. *(Functorialidade do Soma-Atrator) Sejam G um grupo, X_1, X_2 espaços topológicos Hausdorff e localmente compactos, Y_1, Y_2 espaços topológicos compactos, com $\#Y_2 > 2$, $\varphi_i : G \curvearrowright X_i$ ações próprias e cocompactas e $\psi_i : G \curvearrowright Y_i$ ações de convergência, com ψ_2 minimal, e $\mu : X_1 \to X_2$, $\nu : Y_1 \to Y_2$ aplicações contínuas G - equivariantes. Então $\mu + \nu : X_1 + Y_1 \to X_2 + Y_2$ é uma aplicação contínua G - equivariante.*

Demonstração. Denotemos por ∂_i as aplicações tais que $G + Y_i = G +_{\partial_i} Y_i$. Sejam $K_i \subseteq X_i$ tais que $\varphi_i(G, K_i) = X_i$ e $\mu(K_1) \subseteq K_2$ (basta tomar $K_i' \subseteq X_i$ compactos tais que $\varphi_i(G, K_i) = X_i$ e então $K_1 = K_1'$ e $K_2 = \mu(K_1') \cup K_2'$). Tomemos então ∂_{X_i} as aplicações dadas por $\partial_{X_i}(S) = \partial_i(SK_i^{-1})$, para $S \in Closed(X_i)$.

Sejam $S \in Closed(X_2)$ e $g \in \mu^{-1}(S)K_1^{-1}$. Temos que $\varphi_1(g, K_1) \cap \mu^{-1}(S)$ é não vazio, o que implica que $\mu(\varphi_1(g,K_1) \cap \mu^{-1}(S)) \neq \emptyset$. Mas $\mu(\varphi_1(g,K_1) \cap \mu^{-1}(S)) \subseteq \mu(\varphi_1(g,K_1)) \cap \mu(\mu^{-1}(S)) \subseteq \varphi_2(g,K_2) \cap S$, o que implica que $\varphi_2(g,K_2) \cap S \neq \emptyset$ e portanto $g \in SK_2^{-1}$. Temos então que $\mu^{-1}(S)K_1^{-1} \subseteq SK_2^{-1}$.

Temos, pela **Proposição 1.5.18**, que $id_G + \nu : G +_{\partial_1} Y_1 \to G +_{\partial_2} Y_2$ é contínua, o que implica que ocorre o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} Closed(G) \arrow[r, "\partial_1"] & Closed(Y_1) \\ Closed(G) \arrow[u, "id_G^{-1}"] \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] & Closed(Y_2) \arrow[u, "\nu^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Temos, para $S \in Closed(X_2)$, que $\partial_{X_1}(\mu^{-1}(S)) = \partial_1(\mu^{-1}(S)K_1^{-1}) \subseteq \partial_1(SK_2^{-1}) \subseteq \nu^{-1}(\partial_2(SK_2^{-1})) = \nu^{-1}(\partial_{X_2}(S))$. Ou seja, temos o diagrama:

$$\begin{tikzcd} Closed(X_1) \arrow[r, "\partial_{X_1}"] & Closed(Y_1) \\ Closed(X_2) \arrow[u, "\mu^{-1}"] \arrow[r, "\partial_{X_2}"] \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] & Closed(Y_2) \arrow[u, "\nu^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

E portanto a aplicação $\mu + \nu : X_1 +_{\partial_{X_1}} Y_1 \to X_2 +_{\partial_{X_2}} Y_2$ é contínua.

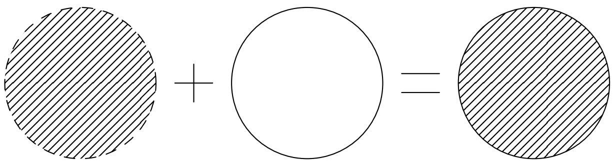
□

2.4 Observação sobre soma de espaços

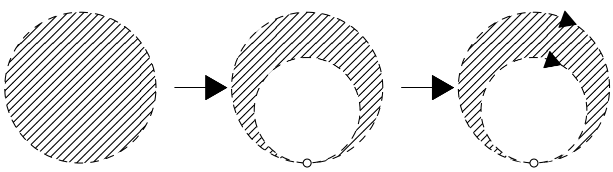
Nosso objetivo para os próximos dois capítulos será construir, a partir de um espaço compacto, Hausdorff e separável C, espaços Hausdorff compactos $\mathbb{N} +_f C$ e $K_0 +_{f'} C$ tais que $f(\mathbb{N}) = C$ e $f'(K_0) = C$. Ou seja, construiremos compactificações de $\mathbb{N}$ e de K_0 tais que o complementar de tais espaços será homeomorfo a C. Mostraremos a unicidade, a menos de homeomorfismos, de tais espaços.

A fim de deixar claro que essa unicidade de compactificação é uma propriedade bem especial dos espaços $\mathbb{N}$ e K_0, deixamos aqui um exemplo simples em que tal unicidade não ocorre:

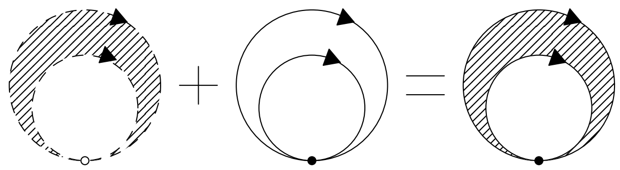
Tomemos D o disco aberto de dimensão 2 e colaremos S^1 de duas formas diferentes. A primeira é a canônica: $X_1 = D +_{f_1} S^1$ é o disco fechado de dimensão 2.



Na segunda, pegamos D e identificamos dois pontos no bordo. Como o bordo não pertence a D, o interior continua homeomorfo a D. Nosso novo bordo é homeomorfo a colagem de duas circunferências por um ponto. Identificamos então essas circunferências, o que novamente não altera o interior. Temos agora que o bordo passa a ser o espaço dado por essa identificação, que é homeomorfo a S^1.



Então, colamos uma cópia de S^1 ao longo desse bordo. Temos neste caso $X_2 = D +_{f_2} S^1$.



Temos que $X_1 \ncong X_2$, visto que, $\pi_1(X_1, p) = 1$ e $\pi_1(X_2, p) \cong \mathbb{Z}$, para $p \in D$. Portanto existem dois espaços que possuem duas colagens (compactas, Hausdorff, metrizáveis e com o primeiro espaço denso) distintas. É fácil ver que, desse exemplo, surge uma família infinita de espaços não homeomorfos formados como colagem entre D e S^1.

O plano projetivo real também é uma colagem da forma $D +_{f_3} S^1$ não homeomorfa aos casos anteriores.

Capítulo 3

Compactificações de $\mathbb{N}$

Proposição 3.0.1. *Seja C um espaço topológico Hausdorff, compacto, separável e sem pontos isolados. Então existe um espaço Hausdorff compacto da forma $\mathbb{N} +_f C$ tal que $f(\mathbb{N}) = C$.*

Demonstração. (Baseado no Exemplo 3.1 de [8]) Seja $S \subseteq C$ um subconjunto enumerável e denso. Seja $X = (C \times \{0\}) \cup (S \times \{1\})$, com a topologia gerada pelos conjuntos $\{(x, 1)\}$, com $x \in S$ e $(U \times \{0\}) \cup (S \cap (U - \{x\}) \times \{1\})$, com $x \in C$ e U vizinhança aberta de x em C. Estes então formam uma subbase $\mathcal{B}$ para uma topologia.

Sejam $(x, 1), (y, 1) \in X$, com $x \neq y$. Os próprios pontos são abertos portanto separam-se. Sejam $(x, 1), (y, 0) \in X$, com $x \neq y$. Como C é T_1, $\exists U$ aberto de C tal que $y \in U$ e $x \notin U$. Então $(x, 1) \notin (U \times \{0\}) \cup (S \cap (U - \{y\}) \times \{1\})$, o que implica que $\{(x, 1)\}$ e $(U \times \{0\}) \cup (S \cap (U - \{y\}) \times \{1\})$ separam $(x, 1)$ e $(y, 0)$. Sejam $(x, 1), (x, 0) \in X$. Se U é um aberto de C tal que $x \in U$ então $(U \times \{0\}) \cup (S \cap (U - \{x\}) \times \{1\})$ e $\{(x, 1)\}$ separam $(x, 0)$ e $(x, 1)$. Sejam $(x, 0), (y, 0) \in X$, com $x \neq y$. Como C é Hausdorff, $\exists U, V$ abertos em C tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Então $(U \times \{0\}) \cup (S \cap (U - \{x\}) \times \{1\})$ e $(V \times \{0\}) \cup (S \cap (V - \{y\}) \times \{1\})$ são abertos disjuntos que separam $(x, 0)$ e $(y, 0)$. Portanto X é Hausdorff.

Temos que $g : C \to X$ tal que $g(x) = (x, 0)$ é contínua e por C ser compacto e X ser Hausdorff, segue que $C \times \{0\} = g(C) \cong C$. Seja $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ uma cobertura aberta de X por elementos da subbase $\mathcal{B}$. Como $C \times \{0\}$ é compacto $\exists \{V_{\alpha_1}, ..., V_{\alpha_n}\}$ subcobertura de $C \times \{0\}$. Temos que $\forall i$, $\exists x_i \in C$ e $\exists U_i$ aberto em C e vizinhança de x_i tal que $V_{\alpha_i} = (U_i \times \{0\}) \cup (S \cap (U_i - \{x_i\}) \times \{1\})$. Nesse caso, $\{U_1 \times \{0\}, ..., U_n \times \{0\}\}$ cobre $C \times \{0\}$, o que implica que $\{S \cap (U_1 - \{x_1\}) \times \{1\}, ..., S \cap (U_n - \{x_n\}) \times \{1\}\}$ cobre $(S \times \{1\}) - \{(x_1, 1), ..., (x_n, 1)\}$. Seja $V_{\alpha_{n+i}}$ algum elemento de $\mathcal{V}$ tal que $x_i \in$

$V_{\alpha_{n+i}}$. Então $\{V_{\alpha_1}, ..., V_{\alpha_{2n}}\}$ é uma subcobertura de X. Pelo teorema da subbase de Alexander segue que X é compacto.

Temos que todo elemento de $\mathcal{B}$ intersecta $S \times \{1\}$ (pois C não possui pontos isolados), o que implica que $Cl_X(S\times\{1\}) = X$. Portanto $X = (S\times\{1\})+_f(C\times\{0\})$, para alguma função f tal que $f(S \times \{1\}) = C \times \{0\}$, $S \times \{1\} \cong \mathbb{N}$ e $C \times \{0\} \cong C$. $\square$

Proposição 3.0.2. *Sejam C um espaço compacto e metrizável e $\mathbb{N} +_f C$ uma compactificação de $\mathbb{N}$. Então $\mathbb{N} +_f C$ é metrizável.*

Demonstração. Imediato do **Corolário 1.3.13**. $\square$

Proposição 3.0.3. *Sejam C um espaço topológico compacto, metrizável e sem pontos isolados e $X = \mathbb{N}+_f C$ um espaço compacto tal que $f(\mathbb{N}) = C$. Então dado S subconjunto enumerável e denso de C existe $\tau : X \to X$ aplicação contínua e idempotente, tal que $Im\ \tau = C$, $\tau(\mathbb{N}) = S$ e $\forall x \in S,\ \#\tau^{-1}(x) = \aleph_0$.*

Demonstração. Sejam $\mathfrak{U}$ a estrutura uniforme de X, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma base encaixante da estrutura uniforme $\mathfrak{U}$, com $u_1 = X^2$ e $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma enumeração de S. Seja $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma base encaixante de $\mathfrak{U}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n^2 \subseteq u_n$ e $v_1 = X^2$. Para $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $A_n = \{m \in \mathbb{N} : m \in \mathfrak{B}(S, v_n) - \mathfrak{B}(S, v_{n+1})\}$ (tais conjuntos podem ser vazios). Como $\mathbb{N} +_f C$ é compacto e $v_1 = X^2$, segue que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$ e $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n$ é finito, e como é $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base encaixante temos que $\forall n_1 \neq n_2 \in \mathbb{N},\ A_{n_1} \cap A_{n_2} = \emptyset$. Sejam $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in A_{g(n)}$ e $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma nova enumeração de $\mathbb{N}$ tal que se $a < a'$ então $g(a) \leqslant g(a')$.

Construimos então um argumento back-and-forth (referência sobre o assunto: Seção 2.4 de [17]):

Seja $q_1 = \min \mathbb{N}$ (com a nova ordem). Então existe sequência N_1 que converge para algum $p_1 \in S$ e tal que $q_1 \in N_1$ e $\forall a \in N_1,\ (a, p_1) \in v_1$.

Seja $p_2 = \min S - \{p_1\}$. Então existe uma sequência $N_2 \subseteq \mathbb{N} - N_1$ tal que N_2 converge para p_2 e $\forall a \in N_1,\ (a, p_2) \in v_1$.

Geralmente temos:

Seja $q_{2n+1} = \min \mathbb{N} - \bigcup\limits_{i=1}^{2n} N_i$. Como $\mathbb{N} - (\bigcup\limits_{i=1}^{2n} N_i \cup \{p_i\})$ é aberto em X e existe uma sequência de elementos de $\mathbb{N}$ que converge para algum ponto em $S - \bigcup\limits_{i=1}^{2n}\{p_i\}$, então existe sequência $N_{2n+1} \subseteq \mathbb{N} - \bigcup\limits_{i=1}^{2n} N_i$ que converge para algum $p_{2n+1} \in S - \bigcup\limits_{i=1}^{2n}\{p_i\}$ e tal que $q_{2n+1} \in N_{2n+1}$ e $\forall a \in N_{2n+1},\ (a, p_{2n+1}) \in v_{g(q_{n+1})}$.

Seja $p_{2n+2} = \min S - \bigcup_{i=1}^{2n+1} \{p_i\}$. Como $\mathbb{N} - (\bigcup_{i=1}^{2n+1} N_i \cup \{p_i\})$ é aberto em X e existe uma sequência de elementos de $\mathbb{N}$ que converge para p_{2n+2}, então existe uma sequência $N_{2n+2} \subseteq \mathbb{N} - \bigcup_{i=1}^{2n+1} N_i$ tal que N_2 converge para p_{2n+2} e $\forall a \in N_{2n+2},\ (a, p_{2n+2}) \in v_{g(q_{n+1})}$.

Portanto temos que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} N_i = \mathbb{N}$ e $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{p_i\} = S$. Temos que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in N_n,\ (a, p_n) \in v_{g(q_n)}$ se n for ímpar e $(a, p_n) \in v_{g(q_{n-1})}$ se n for par. Temos então que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a, b \in N_n,\ (a, b) \in u_{g(q_n)}$ se n for ímpar e $(a, b) \in u_{g(q_{n-1})}$ se n for par. Ou seja, se n for ímpar $N_n \cup \{p_n\} \in Small(u_{g(q_n)})$ e se n for par, $N_n \cup \{p_n\} \in Small(u_{g(q_{n-1})})$.

Tome a relação de equivalência $\sim = \Delta^2 X \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (N_n \cup \{p_n\})^2$. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $N_n \cup \{p_n\} \notin Small(u_m)$. Temos então que $m > g(q_n)$ pois $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é encaixante. Mas o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : g(q_n) < m\}$ é finito (pois cada A_i é finito). Portanto o conjunto $\{N_n \cup \{p_n\} : N_n \cup \{p_n\} \notin Small(u_m)\}$ também é finito. Como $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é base de $\mathfrak{U}$, segue que $\sim$ é topologicamente quaseconvexa.

Seja então $\pi : X \to X/\sim$ a aplicação quociente. Como X é compacto e $\sim$ é topologicamente quaseconvexa temos que $X/\sim$ é Hausdorff (**Proposição 1.3.8**). Temos que $\pi|_C$ é bijetiva, o que implica que é um homeomorfismo, pois C é compacto. Se $\iota : C \to \mathbb{N}+_f C$ é a aplicação de inclusão então $\tau = \iota \circ (\pi|_C)^{-1} \circ \pi : \mathbb{N}+_f C \to \mathbb{N}+_f C$ é a aplicação procurada (τ é contínua pois é composta de três aplicações contínuas).

□

E agora podemos compactificar $\mathbb{N}$ de tal forma que C seja metrizável mas com pontos isolados:

Proposição 3.0.4. *Seja C um espaço topológico compacto e metrizável. Então existe um espaço Hausdorff compacto da forma $\mathbb{N} +_f C$ tal que $f(\mathbb{N}) = C$.*

Demonstração. Se C não possui pontos isolados, temos o caso da **Proposição 3.0.1**. Se C possui pontos isloados, então $C_1 = C \times I$, com $I = [0, 1]$ é um espaço compacto, metrizável e sem pontos isolados. Portanto, pela **Proposição 3.0.1**, existe um espaço Hausdorff compacto da forma $\mathbb{N} +_f C_1$ tal que $f(\mathbb{N}) = C_1$. Tome S um subconjunto enumerável e denso de C_1 tal que $S_0 = S \cap (C \times \{0\})$ é denso em $C \times \{0\}$. Pela proposição anterior, existe uma aplicação contínua $\tau : \mathbb{N} +_f C_1 \to \mathbb{N} +_f C_1$ tal que τ é idempotente, $Im\ \tau = C_1,\ \tau(\mathbb{N}) = S$ e $\forall x \in S,\ \#\tau^{-1}(x) = \aleph_0$.

Pela continuidade de τ, $\tau^{-1}(C \times \{0\})$ é fechado, e portanto compacto. Como $\forall x \in S_0,\ \#\tau^{-1}(x) = \aleph_0$ e $\tau^{-1}(x) - \{x\}$ forma uma sequência que converge para x, segue que $f(\tau^{-1}(C \times \{0\}) \cap \mathbb{N}) \supseteq Cl_{\mathbb{N}+_f C_1} S_0 = C \times \{0\}$. Por outro lado, $\tau^{-1}(C \times \{0\})$

é fechado, o que implica que $f(\tau^{-1}(C \times \{0\}) \cap \mathbb{N}) \subseteq C \times \{0\}$, o que implica que $f(\tau^{-1}(C\times\{0\})\cap\mathbb{N}) = C\times\{0\}$. Temos então que $\tau^{-1}(C\times\{0\})\cap\mathbb{N} \cong \mathbb{N}$, $C\times\{0\} \cong C$ e $(\tau^{-1}(C\times\{0\})\cap\mathbb{N})+_f(C\times\{0\})$ é compacto, Hausdorff e $f(\tau^{-1}(C\times\{0\})\cap\mathbb{N}) = C\times\{0\}$, ou seja, é o espaço procurado. □

Mas já temos a existência de aplicações idempotentes para tais espaços pois na **Proposição 3.0.3** não havia a hipótese dos espaços não possuirem pontos isolados.

Proposição 3.0.5. *Sejam C um espaço topológico Hausdorff, compacto e separável, S_i subconjunto enumerável e denso em C, $X_i = \mathbb{N}+_{f_i}C$ um espaço Hausdorff compacto tal que $f(\mathbb{N}) = C$ e $\tau_i : X_i \to X_i$ aplicações contínuas e idempotentes, tais que $Im\ \tau_i = C$, $\tau_i(\mathbb{N}) = S_i$ e $\forall x \in S$, $\#\tau_i^{-1}(x) = \aleph_0$. Se $\psi : C \to C$ é um homeomorfismo tal que $\psi(S_1) = S_2$ então existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que comuta o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "\phi"] & C \arrow[d, "\psi"'] \\ \mathbb{N} \arrow[r, "\tau_2"'] & C \end{tikzcd}$$

Demonstração. Temos que $\forall x \in S_1$, $\#\tau_1^{-1}(x) = \#\tau_2^{-1}(\psi(x)) = \aleph_0$, portanto existe $\phi_x : \tau_1^{-1}(x) \to \tau_2^{-1}(\psi(x))$ uma bijeção. Por construção o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \tau_1^{-1}(x) \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "\phi_x"] & C \arrow[d, "\psi"'] \\ \tau_2^{-1}(\psi(x)) \arrow[r, "\tau_2"'] & C \end{tikzcd}$$

Então $\phi = \bigcup_{x\in S_1} \phi_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é um homeomorfismo e comuta o diagrama. □

Proposição 3.0.6. *Seja C um espaço topológico Hausdorff, compacto, separável. Então existe, a menos de homeomorfismos que fixam C, um único espaço X Hausdorff compacto da forma $\mathbb{N} +_f C$ tal que $f(\mathbb{N}) = C$.*

Demonstração. Sejam $X_i = \mathbb{N} +_{f_i} C$ dois destes espaços, S um subconjunto enumerável e denso de C e τ_i duas respectivas aplicações contínuas idempotentes tais que $Im\ \tau_i = C$, $\tau_i(\mathbb{N}) = S$ e $\forall x \in S$, $\#\tau_i^{-1}(x) = \aleph_0$. (demonstramos a existência de tais aplicações acima). Pela proposição anterior existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ homeomorfismo que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "\phi"] & C \arrow[d, "id_C"'] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "\tau_2"'] & C
\end{tikzcd}$$

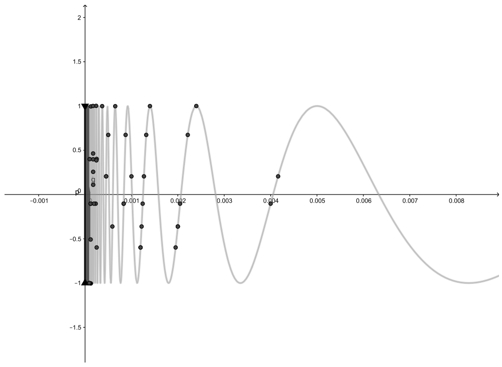
Seja $(\phi + id_C) : \mathbb{N} +_{f_1} C \to \mathbb{N} +_{f_2} C$. Temos que $(\phi + id_C)$ fixa C. Seja $\{x_j\}_{j\in\Gamma} \subseteq \mathbb{N} +_{f_1} C$ uma rede que converge para um ponto $x \in C$. Se quase todo ponto pertence a C, suponhamos todo ponto, então $\{\phi + id_C(x_j)\}_{j\in\Gamma} = \{x_j\}_{j\in\Gamma}$ que converge para $\phi + id_C(x) = x$. Se quase todo ponto pertence a $\mathbb{N}$, suponhamos todo ponto, então temos que, pela continuidade de τ_1, $\{\tau_1(x_j)\}_{j\in\Gamma}$ converge para $\tau_1(x) = x$. Mas $\tau_1 = \tau_2 \circ \phi$, o que implica que $\{\tau_2 \circ \phi(x_j)\}_{j\in\Gamma}$ converge para x. Seja x' um ponto de acumulação da rede $\{\phi(x_j)\}_{j\in\Gamma}$. Se $x' \in C$ então $\tau_2(x')$ é ponto de acumulação de $\{\tau_2 \circ \phi(x_j)\}_{j\in\Gamma}$, o que implica que $x' = x$. Se $x' \in \mathbb{N}$ então $\exists \Gamma' \subseteq \Gamma$ subconjunto cofinal tal que $\forall j \in \Gamma'$, $\phi(x_j) = x'$ (pois os pontos de $\mathbb{N}$ são isolados). Mas isso implica que $\forall j \in \Gamma'$, $x_j = \phi^{-1}(x')$, o que implica que $\phi^{-1}(x')$ é ponto de acumulação de $\{x_j\}_{j\in\Gamma}$, absurdo. Portanto o único ponto de acumulação de $\{\phi(x_j)\}_{j\in\Gamma}$ é x, o que implica que, pela compacidade de $\mathbb{N} +_{f_2} C$, $\{\phi(x_j)\}_{j\in\Gamma}$ converge para x. Mas $\{\phi(x_j)\}_{j\in\Gamma} = \{\phi + id_C(x_j)\}_{j\in\Gamma}$, o que implica que $\{\phi + id_C(x_j)\}_{j\in\Gamma}$ converge para x. Se a rede possuir muitos pontos em $\mathbb{N}$ e muitos pontos em C, basta dividir em duas subsequências. Portanto $\phi + id_C$ é contínua e, analogamente, $(\phi + id_C)^{-1} = \phi^{-1} + id_C$ também é contínua. $\square$

Tal teorema é devido a Peczyński e pode ser encontrado em [23] (Proposição 8.8) e no artigo original [20] (p. 87).

Terminaremos essa seção com um exemplo de soma $\mathbb{N} + I$, com $I = [-1, 1]$.

Exemplo 3.0.7. Sejam $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = sen(\frac{1}{x})$ e $X = Cl_{\mathbb{R}^2} Gr(f) = Gr(f) \cup (\{0\} \times [-1, 1])$. Tomemos $\{\frac{1}{2n\pi}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Temos que a sequência é decrescente, converge para 0 e $\forall n \in \mathbb{N}$, $f((\frac{1}{2(n+1)\pi}, \frac{1}{2n\pi})) = [-1, 1]$. Sejam S um subconjunto enumerável e denso em $[-1, 1]$ e $g : \mathbb{N} \to S$ tal que $\forall s \in S$, $\#g^{-1}(s) = \aleph_0$. Temos que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in S$, $s \in f((\frac{1}{2(n+1)\pi}, \frac{1}{2n\pi}))$, portanto tome $x_n \in (\frac{1}{2(n+1)\pi}, \frac{1}{2n\pi})$ tal que $f(x_n) = g(n)$. Nosso espaço será então $Y = \{(x_n, g(n))\}_{n\in\mathbb{N}} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$.

Temos que $(x_n, g(n)) \in (\frac{1}{2(n+1)\pi}, \frac{1}{2n\pi}) \times \mathbb{R}$ e $\forall m \neq n \in \mathbb{N}$, $((\frac{1}{2(n+1)\pi}, \frac{1}{2n\pi}) \times \mathbb{R})$ e $((\frac{1}{2(m+1)\pi}, \frac{1}{2m\pi}) \times \mathbb{R})$ são disjuntos, o que implica que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{(x_n, g(n))\}$ é aberto em Y. Portanto $\{x_n, g(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \cong \mathbb{N}$ e é aberto em Y. Seja $(x_{n_i}, g(n_i))_{i\in\mathbb{N}}$ uma seqûencia convergente em $\mathbb{R}^2$. Temos que $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge para 0, pois $\frac{1}{2(n_i+1)\pi} \leqslant x_{n_i} \leqslant \frac{1}{2n_i\pi}$ e $\{\frac{1}{2n\pi}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0. Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(n) \in [-1, 1]$, segue que $(x_{n_i}, g(n_i))_{i\in\mathbb{N}}$ converge para algum ponto em $\{0\} \times [-1, 1] \subseteq Y$. Portanto Y é fechado em $\mathbb{R}^2$.



Como $Y \subseteq X$ e X é compacto, segue que Y é um espaço compacto. Portanto $Y = \{(x_n, g(n))\}_{n\in\mathbb{N}} +_h (\{0\} \times I)$ para algum h e é compacto. Como $\forall s \in S$, $\{(x_n, g(n)) : g(n) = s\}$ converge para s, segue que $S \subseteq h(\{(x_n, g(n))\}_{n\in\mathbb{N}})$, o que implica que $h(\{(x_n, g(n))\}_{n\in\mathbb{N}}) = \{0\} \times I$, pois S é denso em $\{0\} \times I$. Portanto $Y \cong \mathbb{N} +_{h'} I$ para alguma função h' tal que $h'(\mathbb{N}) = I$ e $\mathbb{N} +_{h'} I$ é compacto e Hausdorff.

Capítulo 4

Compactificações de K_0

Proposição 4.0.1. *Seja C um espaço topológico Hausdorff, compacto e separável. Então existe um espaço Hausdorff compacto da forma $K_0 +_f C$ tal que $f(K_0) = C$.*

Demonstração. Sejam $\{L_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma partição de K_0 por abertos compactos e $L = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} L_i^2$. Temos que $K_0/L \cong \mathbb{N}$, portanto $\exists f : Closed(K_0/L) \to Closed(C)$ tal que $X = K_0/L +_f C$ é Hausdorff compacto e $f(K_0/L) = C$. Temos que $\nu : K_0 \to K_0/L$ a aplicação quociente é fechada pois K_0/L é discreto. Tomemos f^* o pullback de f por ν e id_C e $\bar{X} = K_0 +_{f^*} C$. Temos pela **Proposição 2.2.1** que a aplicação $(\nu + id) : \bar{X} \to X$ é contínua, pela **Proposição 2.2.5** que $\nu + id$ é fechada, pela sobrejetividade de ν que $f^*(K_0) = f(K_0/L) = C$ e pela **Proposição 2.2.4** que $\bar{X}$ é Hausdorff. Temos também que $\forall x \in C$, $(\nu + id)^{-1}(x) = x$ e $\forall \nu(L_i) \in K_0/L$, $(\nu + id)^{-1}(\nu(L_i)) = L_i$ que é compacto, portanto a aplicação $\nu + id$ é perfeita. Como X é compacto, segue, pela **Proposição 1.3.3**, que $\bar{X}$ é compacto.

Portanto $\bar{X}$ é o espaço procurado.

□

O espaço construido acima será denotado por K_C.

Proposição 4.0.2. *Sejam C um espaço compacto e metrizável e $K_0 +_f C$ uma compactificação de K_0. Então $K_0 +_f C$ é metrizável.*

Demonstração. Imediato do **Corolário 1.3.13**. □

Mostraremos agora a unicidade, a menos de homeomorfismos que preservam C, desse espaço.

Proposição 4.0.3. *Sejam C um espaço topológico compacto e metrizável e $(X, \mathfrak{U}) = K_0 +_f C$ espaço compacto tal que $f(K_0) = C$. Então existe $L = \{L_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma partição por abertos compactos de K_0 tal que $\forall u \in \mathfrak{U}$, $\#\{j \in \mathbb{N} : L_j \notin Small(u)\} < \aleph_0$.*

Demonstração. Temos que $\forall u \in \mathfrak{U}$, $\exists U$ cobertura de K_0 por abertos-fechados u - pequenos (por exemplo $\{int\mathfrak{B}(x, v) \cap K_0\}_{x \in K_0}$, com $v^2 \subseteq u$). Como K_0 é 0 - dimensional e localmente compacto, podemos construir um refinamento U' tal que todo elemento é aberto e compacto. Como U' é refinamento, todo elemento ainda é u - pequeno. Como K_0 possui base enumerável segue que é de Lindelöf e portanto podemos tomar uma subcobertura de U', $U'' = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Tomemos $V_1 = U_1$, $V_i = U_i - (U_1 \cup ... \cup U_{i-1})$ para $i \in \mathbb{N}$ e $U''' = \{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Temos que U''' é uma cobertura por abertos compactos pois $U_1 \cup ... \cup U_{i-1}$ é fechado (aberto) em X, o que implica que V_i é aberto (fechado) em X. Além disso temos que por construção é uma partição e refina U. Portanto $\forall u \in \mathfrak{U}$, $\exists V$ partição enumerável de K_0 por abertos compactos u - pequenos.

Como X é metrizável, existe $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma base de $\mathfrak{U}$. Tomemos $U = \{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ partição por abertos compactos u_1 - pequenos de X. Temos que $\forall i \in \mathbb{N}$, V_i é um espaço compacto, 0 - dimensional e possui base enumerável. Portanto possui uma partição $U_i = \{V_{i,1}, ..., V_{i,k_i}\}$ por abertos compactos u_i - pequenos (podemos deixar $U_1 = \{V_1\}$). Temos que $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $V_{i,j}$ é um aberto contido em V_i que é aberto em X, portanto é aberto em X. Segue então que $U' = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} U_i$ é uma partição por abertos compactos de K_0. Sejam $u \in \mathfrak{U}$ e $L \in \{V \in U' : V \notin Small(u)\}$. Seja $i \in \mathbb{N}$ tal que $u_i \subseteq u$. Temos que $L \notin Small(u_i)$, o que implica que $L \in \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} U_j$ que é um conjunto finito. Portanto $\{V \in U' : V \notin Small(u)\}$ é finito. □

Proposição 4.0.4. *Sejam C um espaço topológico compacto e metrizável e $(X, \mathfrak{U}) = K_0 +_f C$ espaço Hausdorff compacto tal que $f(K_0) = C$. Se $L = \{L_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma partição por abertos compactos de K_0 tal que $\forall u \in \mathfrak{U}$, $\#\{j \in \mathbb{N} : L_j \notin Small(u)\} < \aleph_0$ e $\theta = \Delta X^2 \cup \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} L_j^2$, então $\bar{X} = X/\theta$ é homeomorfo ao único espaço Hausdorff compacto da forma $\mathbb{N} +_{f'} C$, com $f'(\mathbb{N}) = C$.*

Demonstração. Seja $\varrho : X \to \bar{X}$ a aplicação quociente. Temos que $\forall j \in \mathbb{N}, L_j$ é aberto em X, o que implica que $\varrho(L_j)$ é aberto em $\bar{X}$. Segue então que $\varrho(K_0)$ é discreto, aberto em $\bar{X}$ e infinito enumerável pois a partição de K_0 é infinita enumerável. Temos também que $\varrho|_C$ é bijetiva, o que implica que $\varrho(C) \cong C$. Temos então que $\bar{X} = \varrho(K_0) +_{f'} C$ para alguma função f' e $\varrho(K_0) \cong \mathbb{N}$. Além disso é compacto, já que X é compacto. Por construção temos que θ é topologicamente quaseconvexo, o que implica que, pela Proposição **1.3.8**, X/θ é Hausdorff.

Portanto $\bar{X} \cong \mathbb{N} +_{f'} C$, com $f'(\mathbb{N}) = C$. □

Proposição 4.0.5. *Sejam C um espaço topológico compacto e metrizável e $X = K_0 +_f C$ espaço Hausdorff compacto tal que $f(K_0) = C$. Seja uma aplicação contínua $\rho + id_C : K_0 +_f C \to \mathbb{N} +_{f'} C$, com $\mathbb{N} +_{f'} C$ Hausdorff compacto e tal que $f'(\mathbb{N}) = C$. Então f é o pullback de f' pelas aplicações ρ e id_C.*

Demonstração. Por hipótese $\rho + id_C$ é contínua, o que implica que, pela **Proposição 2.2.3**, a aplicação $id_{K_0} + id_C : K_0 +_f C \to K_0 +_{(f')^*} C$ é contínua. Como $K_0 +_f C$ é compacto e $K_0 +_{(f')^*} C$ é Hausdorff (pela **Proposição 2.2.4**), segue que $id_{K_0} + id_C$ é homeomorfismo, o que implica que $f = (f')^*$. □

Proposição 4.0.6. *Sejam C_1, C_2 espaços topológicos compactos e metrizáveis e $X_i = K_0 +_{f_i} C_i$ espaços Hausdorff compactos tais que $f_i(K_0) = C_i$. Sejam $L_i = \{L_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ partições por abertos compactos de K_0 e $\rho_i + id_{C_i} : K_0 +_{f_i} C_i \to \mathbb{N} +_{f'_i} C_i$ aplicações contínuas, com $\bar{X}_i = \mathbb{N} +_{f'_i} C_i$ Hausdorff compactos e tais que $f'_i(\mathbb{N}) = C_i$. Suponhamos que $\forall j \in \mathbb{N}, \forall i = 1, 2,\ \rho_i(L_{i,j}) = j$. Se $\psi + \phi : \mathbb{N} +_{f'_1} C_1 \to \mathbb{N} +_{f'_2} C_2$ é contínua, então $\exists : \bar{\psi} + \phi : K_0 +_{f_1} C_1 \to K_0 +_{f_2} C_2$ aplicação contínua que comuta o diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\bar{\psi}+\phi"] \arrow[d, "\rho_1+id_C"'] & X_2 \arrow[d, "\rho_2+id_C"] \\
\bar{X}_1 \arrow[r, "\psi+\phi"'] & \bar{X}_2
\end{tikzcd}$$

Além disso, se $\psi + \phi$ é homeomorfismo então $\bar{\psi} + \phi$ também será.

Demonstração. Como todos os $L_{i,j}$ são abertos e fechados de K_0, temos que são todos homeomorfos a K. Seja $\psi_j : L_{1,j} \to L_{2,\psi(j)}$ homeomorfismo. Como K_0 é o coproduto de L_i com as aplicações de inclusão, temos que as aplicações ψ_j estendem unicamente para um homeomorfismo $\bar{\psi} : K_0 \to K_0$. Segue o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
L_{1,j} \arrow[r, "\psi_j"] \arrow[d, hook] & L_{2,\psi(j)} \arrow[d, hook] \\
K_0 \arrow[r, "\bar{\psi}"] \arrow[d, "\rho_1"] & K_0 \arrow[d, "\rho_2"'] \\
\mathbb{N} \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

Tomemos $\bar{\psi} + \phi : K_0 +_{f_1} C_1 \to K_0 +_{f_2} C_2$. Temos que cada componente é contínua, $f_i = (f'_i)^*$ e os diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} K_0 & \xrightarrow{\bar{\psi}} & K_0 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_1} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_2} \\ \mathbb{N} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{N} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{\phi} & C_2 \\ \downarrow{\scriptstyle id_{C_1}} & & \downarrow{\scriptstyle id_{C_2}} \\ C_1 & \xrightarrow{\phi} & C_2 \end{array}$$

Pelo **Lema do cubo** a aplicação $\bar{\psi} + \phi$ é contínua e analogamente temos que $(\bar{\psi} + \phi)^{-1} = \bar{\psi}^{-1} + \phi^{-1}$ também é contínua, caso exista $\psi^{-1} + \phi^{-1}$.

□

Corolário 4.0.7. *Seja C um espaço topológico compacto e metrizável. Então o espaço compacto da forma $K_0 +_f C$ tal que $f(K_0) = C$ é único, a menos de homeomorfismos que fixam C. Tal espaço deverá então ser homeomorfo a K_C.*

Demonstração. Sejam $(X_i, \mathfrak{U}_i)$, para $i = 1, 2$, espaços Hausdorff compactos tais que $X_i = K_0 +_{f_i} C$, com $f_i(K_0) = C$. Pela **Proposição 4.0.3**, existe $L_i = \{L_{ij}\}_{j\in\mathbb{N}}$ partição por abertos compactos de K_0 tal que $\forall u \in \mathfrak{U}_i$, $\{i \in \mathbb{N} : L_{ij} \notin Small(u)\}$ é finito. Tomemos $\theta_i = \Delta^2 X_i \cup \bigcup_{j\in\mathbb{N}} L^2_{i,j}$, $\bar{X}_i = X_i/\theta_i$ e $\varrho_i : X_i \to \bar{X}_i$ a aplicação quociente. Então $\bar{X}_i \cong \mathbb{N} +_{f'_i} C$, com $f'_i(\mathbb{N}) = C$.

Logo $\bar{X}_i$ é único, a menos de homeomorfismos que fixam C. Seja $\psi + id_C : \bar{X}_1 \to \bar{X}_2$ um desses homeomorfismos. Pela proposição anterior $\psi + id_C$ pode ser levantado para um homeomorfismo $\bar{\psi} + id_C : X_1 \to X_2$. Portanto $X_1 \cong X_2$. □

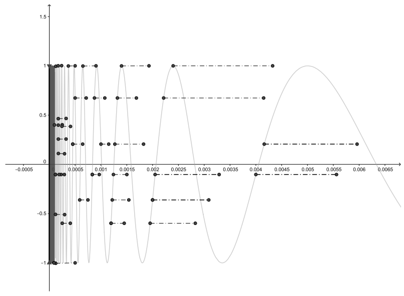
Proposição 4.0.8. *Seja $\sim = \Delta^2(K_C) \cup C^2$. Então $K_C/\sim \cong K$.*

Demonstração. Como K_C é compacto, temos que $K_C/\sim$ também é. Temos que $\sim = \Delta^2 K_C \cup C^2$ é fechado em K_C^2, portanto $K_C/\sim$ é Hausdorff. Seja π a aplicação quociente. Temos que $\pi|_{K_0}$ é injetiva e aberta (pois K_0 é aberto de K_C e todo aberto de K_0 é saturado), o que implica que $\pi|_{K_0}$ é um mergulho. Como $\#\pi(C) = 1$, segue que $K_C/\sim$ é a compactificação de um ponto de K_0. Portanto $K_C/\sim \cong K$. □

Terminaremos essa seção com um exemplo de soma $K_0 + I$, com $I = [-1, 1]$.

Exemplo 4.0.9. Tomemos Y o espaço construido no **Exemplo 3.0.7**. Vimos que $\exists \{V_x\}_{x\in Y-(\{0\}\times I)}$ um conjunto de abertos dois a dois disjuntos de $\mathbb{R}^2$ tal que $\forall x \in Y - (\{0\} \times I)$, $x \in V_x$. Suponhamos que se x possui primeira coordenada m então $diam\ V_x < m$. Tome C_x um conjunto de Cantor horizontal tal que $x \in C_x \subseteq V_x$. Nosso espaço será $Z = (\{0\} \times I) \cup \bigcup_x C_x$.

Como $x \in C_x \subseteq V_x$ e $\forall x \neq y$, $V_x \cap V_y = \emptyset$, segue que $\forall x$, C_x é aberto em Y. Portanto $\bigcup_x C_x \cong \dot{\bigcup}_x K \cong K_0$ e é aberto em Z. Seja $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência



convergente, em $\mathbb{R}^2$ de elementos de Z. Se $\#\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \cap (\{0\}\times I) = \aleph_0$ (respectivamente $\#\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \cap C_x = \aleph_0$ para algum x) então uma subsequência converge para um elemento de $\{0\} \times I$ (respectivamente C_x) por compacidade, o que implica que $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algum elemento de $\{0\}\times I \subseteq Z$ (respectivamente $C_x \subseteq Z$). Suponhamos então que $\#\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \cap (\{0\}\times I) < \aleph_0$ e $\forall x,\ \#\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \cap C_x < \aleph_0$. Seja $(x_n, y_n) \in Y - (\{0\} \times I)$ tal que $(a_n, b_n) \in C_{(x_n,y_n)}$. Como C_x é sempre horizontal, temos que $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = b_n$. Portanto $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algum ponto em I. Temos também que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 e $\forall n \in \mathbb{N},\ d(x_n, a_n) < x_n$, o que implica que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0. Portanto $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algum elemento de $0 \times I \subseteq Z$. Portanto Z é fechado. Mas Z é limitado pois Y é limitado e $Z \subseteq \mathfrak{B}(Y, 1)$, já que $\forall x,\ diam\ V_x < 1$. Portanto Z é compacto. Temos que $\{0\} \times I \subseteq Cl_Z(Y - (\{0\} \times I)) \subseteq Cl_Z(\bigcup_x C_x)$, o que implica que $Cl_Z(\bigcup_x C_x) = Z$. Portanto $Z = (\bigcup_x C_x) +_j (\{0\} \times I)$ para algum j, é compacto e $j(\bigcup_x C_x) = \{0\} \times I$, o que implica que $Z \cong K_I$.

Capítulo 5

Produtos fibrados de compactificações de K_0

Definição 5.0.1. Sejam $P \subseteq K$ e $\mathcal{C} = \{C_p\}_{p \in P}$ uma família de espaços topológicos compactos e metrizáveis. Denotamos por $\pi_p : K_{C_p} \to K$ aplicação sobrejetiva e contínua tal que $\pi_p(C_p) = \{p\}$ e $\pi_p|_{K_0}$ é injetiva. Tal aplicação sempre existe pois K é homogêneo. Denotemos por $K_{\mathcal{C}} = \varprojlim\{K_{C_p}, \pi_p\}_{p \in P}$.

Proposição 5.0.2. *Sejam Z um espaço Hausdorff compacto, $P \subseteq Z$, $\{X_p\}_{p \in P}$ uma família de espaços topológicos Hausdorff e compactos, $\varpi_p : X_p \to Z$ contínuas, sobrejetivas e injetivas em $\varpi_p|_{Z - \varpi_p^{-1}(p)}$ e $X = \varprojlim\{X_p, \varpi_p\}_{p \in P}$. Tomemos a seguinte relação em X : $\sim = \Delta^2 X^2 \cup \bigcup\limits_{p \in P} \pi^{-1}(p)^2$, com $\pi : X \to Z$ a aplicação de projeção. Então $\sim$ é topologicamente quaseconvexa.*

Demonstração. Sejam $\mathfrak{U}$ a estrutura uniforme compatível com a topologia de X, $\mathfrak{U}_p$ a estrutura uniforme compatível com a topologia de X_p e $\mathfrak{B}$ a base de $\mathfrak{U}$ formada pelos conjuntos da forma $\pi_{p_1}^{-1}(u_{p_1}) \cap ... \cap \pi_{p_n}^{-1}(u_{p_n})$, com $u_{p_i} \in \mathfrak{U}_{p_i}$ e $\pi_p : X \to X_p$ a aplicação de projeção. Sejam então $u \in \mathfrak{B} : u = \pi_{p_1}^{-1}(u_{p_1}) \cap ... \cap \pi_{p_n}^{-1}(u_{p_n})$ e $p \in P$: $\pi^{-1}(p) \notin Small(u)$. Então $\exists i \in \{1, , , n\}$: $\pi^{-1}(p) \notin Small(\pi_{p_i}^{-1}(u_{p_i}))$, o que implica que $\pi_{p_i}(\pi^{-1}(p)) \notin Small(u_{p_i})$ (**Proposição 1.2.8**). Mas $\pi_{p_i}(\pi^{-1}(p))$ é apenas um ponto para todo $p \neq p_i$ e pontos são sempre pequenos. Portanto $p \in \{p_1, ..., p_n\}$, o que implica que $\#\{\pi^{-1}(p) : \pi^{-1}(p) \notin Small(u)\} < \aleph_0$. Como usamos um elemento u qualquer de $\mathfrak{B}$, temos que $\sim$ é topologicamente quaseconvexa (**Proposição 1.3.9**). □

Como caso especial tomemos $X = K_{\mathcal{C}}$ e temos que $\sim = \Delta^2 K_{\mathcal{C}}^2 \cup \bigcup\limits_{p \in P} \pi^{-1}(p)^2$ definida em $K_{\mathcal{C}}$ é topologicamente quaseconvexa.

Proposição 5.0.3. *Em $K_{\mathcal{C}}$ valem as seguintes propriedades:*

1. $\pi|_{\pi^{-1}(K-P)}$ *é injetiva,*

2. $\forall p \in P,\ \pi^{-1}(p) \cong C_p$*,*

3. $\forall p \in P,\ Cl_{K_{\mathcal{C}}}(K_{\mathcal{C}} - C_p) = K_{\mathcal{C}}$*.*

4. $\forall p \in P$*, o quociente* $K_{\mathcal{C}}/\sim_p$ *é Hausdorff, com* $\sim_p = \Delta^2 K_{\mathcal{C}} \cup \bigcup_{q \neq p} \pi^{-1}(q)^2$*.*

Demonstração. As propriedades 1 e 2 são imediatas e a propriedade 4 segue da proposição anterior. Provemos então 3. Suponhamos que $\exists p \in P : Cl_{K_{\mathcal{C}}}(K_{\mathcal{C}} - \pi_p^{-1}(C_p)) \neq X$. Portanto $\exists x \in U \subseteq \pi_p^{-1}(C_p)$, com U aberto em $K_{\mathcal{C}}$. Mas U é saturado em π_p, o que implica que $\pi_p(U)$ é aberto em K_{C_p} e $\pi_p(U) \subseteq C_p$, absurdo pois K_0 é denso em K_{C_p}. Portanto $\forall p \in P$, $Cl_{K_{\mathcal{C}}}(K_{\mathcal{C}} - \pi_p^{-1}(C_p)) = X$. □

Proposição 5.0.4. *(Caracterização de produtos fibrados) Sejam* X *um espaço topológico compacto e metrizável,* $\pi : X \to K$ *uma aplicação quociente,* $P \subseteq K$ *e* $\mathcal{C} = \{C_p\}_{p \in P}$ *uma família dois a dois disjunta de subespaços compactos de* X*. Suponhamos que:*

1. $\pi|_{\pi^{-1}(K-P)}$ *é injetiva,*

2. $\forall p \in P,\ \pi^{-1}(p) = C_p$*,*

3. $\forall p \in P,\ Cl_X(X - C_p) = X$*.*

4. $\forall p \in P$*, o quociente* $X_p = X/\sim_p$ *é Hausdorff, com* $\sim_p = \Delta^2 X \cup \bigcup_{q \neq p} C_q^2$*.*

Então $X \cong K_{\mathcal{C}}$*.*

Demonstração. Seja $p \in P$. Mostraremos que $X_p \cong K_{C_p}$. Temos que X_p é compacto pois X é compacto e é Hausdorff por hipótese.

Seja $\pi_p : X \to X_p$ a aplicação quociente. Temos que $\pi_p(X - C_p) = X_p - \pi_p(C_p)$ o que implica que $\pi_p^{-1}(Cl_{X_p}(X_p - \pi_p(C_p)))$ é um fechado de X que contém $X - C_p$ que é denso por hipótese. Portanto $\pi_p^{-1}(Cl_{X_p}(X_p - \pi_p(C_p))) = X$, o que implica que $\pi_p(C_p) \subseteq Cl_{X_p}(X_p - \pi_p(C_p))$. Portanto $Cl_{X_p}(X_p - \pi_p(C_p)) = X_p$. Segue então que $X_p = (X_p - \pi_p(C_p)) +_f \pi_p(C_p)$, com $f(X_p - \pi_p(C_p)) = \pi_p(C_p)$. Como π_p é perfeita (pois $\forall q \in P$, C_q é compacto) e fechada (pois X é compacto e X_p é Hausdorff), temos que X_p possui base enumerável (pois X possui base enumerável, já que é compacto e metrizável), o que implica que X_p é metrizável. Mostrando que $X_p - \pi_p(C_p) \cong K_0$ e $\pi_p(C_p) \cong C_p$, segue do teorema de caracterização que $X_p \cong K_{C_p}$.

Temos que $\pi_p|_{C_p}$ é uma aplicação injetiva. Da compacidade segue que é um mergulho. Seja $\pi'_p : X_p \to K$ a aplicação quociente tal que $\pi = \pi'_p \circ \pi_p$. Temos que $\pi'_p|_{X_p - \pi_p(C_p)}$ é injetiva, contínua e $Im\ \pi'_p|_{X_p - \pi_p(C_p)} = K - \{p\}$. Seja S um fechado de $X_p - \pi_p(C_p)$. Então $S = S' \cap (X_p - \pi_p(C_p))$, com S' fechado de X_p. Se $S = S'$, então S é compacto, o que implica que $\pi'_p(S)$ é compacto e portanto fechado em $K - \{p\}$. Se $S \neq S'$ temos que $\pi'_p(S' - S) = p$, o que implica que $\pi'_p(S) = \pi'_p(S') - \{p\}$. Como $\pi'_p(S')$ é fechado em K, segue que $\pi'_p(S')$ é fechado em $K - \{p\}$. Portanto $\pi'_p|_{X_p - \pi_p(C_p)}$ é uma aplicação fechada, o que implica que é um homeomorfismo entre $X_p - \pi_p(C_p)$ e $K - \{p\}$.

Temos então que $X_p \cong K_{C_p}$. A aplicação π'_p é tal que $\pi'_p|_{X_p - \pi_p(C_p)}$ é injetiva e $\pi'^{-1}_p(p) = \pi_p(C_p) \cong C_p$, portanto, tomemos $(K_{\mathcal{C}}, \{\tilde{\pi}_p, \tilde{\pi}\}_{p \in P}) := \varprojlim \{X_p, \pi'_p\}$. Como π_p e π'_p foram construidos de tal forma que $\pi = \pi'_p \circ \pi_p$, temos que π e $\{\pi_p\}_{p \in P}$ induzem uma única aplicação contínua $\varpi : X \to K_{\mathcal{C}}$ que comuta o diagrama ($\forall p \in P$):

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[ddl, "\pi_p"'] \arrow[ddr, "\pi"] \arrow[d, dotted, "\varpi"] & \\
& K_{\mathcal{C}} \arrow[dl, "\tilde{\pi}_p"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & \\
X_p \arrow[rr, "\pi'_p"'] & & K
\end{tikzcd}$$

Como π e $\forall p \in P$, π_p são sobrejetivas, segue que ϖ é sobrejetiva. Sejam $x \neq y \in X$. Se $\pi(x) \neq \pi(y)$, segue que $\varpi(x) \neq \varpi(y)$. Se $\pi(x) = \pi(y)$, $\exists p \in P :\ x, y \in C_p$. Como $\pi_p|_{C_p}$ é injetiva, segue que $\pi_p(x) \neq \pi_p(y)$ e portanto $\varpi(x) \neq \varpi(y)$. Portanto ϖ é injetiva. Como X é compacto e $K_{\mathcal{C}}$ é Hausdorff (pois por hipótese cada X_p é Hausdorff), segue que ϖ é uma aplicação fechada. Portanto ϖ é um homeomorfismo entre X e $K_{\mathcal{C}}$.

$\square$

Temos com a **Proposição 5.0.4** que os espaços descritos acima são limites inversos. Porém veremos que existem espaços não homeomorfos mas construidos a partir do mesmo conjunto $\mathcal{C}$ (e com aplicações distintas sobre K). Iremos apresentar dois resultados, um positivo e outro negativo, sobre tal questão. Para nossos propósitos o resultado positivo será suficiente.

5.1 Explosões

Definição 5.1.1. Sejam X um espaço topológico compacto e metrizável, $\pi : X \to K$ uma aplicação quociente, $P \subseteq K$ e $\mathcal{C} = \{C_p\}_{p \in P}$ uma família dois a dois disjunta de subespaços de X compactos (chamados de manchas). A aplicação π é dita uma explosão em P se:

1. P é enumerável,
2. $\pi|_{\pi^{-1}(K-P)}$ é injetiva,
3. $\forall p \in P,\ \pi^{-1}(p) = C_p$,
4. seja $\sim$ a relação de equivalência em P: $p \sim q$ se e somente se $C_p \cong C_q$ (diremos que p e q possuem mesmo tipo). Então para todo $p \in P$ a classe de p é densa em K,
5. $\forall p \in P,\ Cl_X(X - C_p) = X$.
6. a relação de equivalência $\Delta^2 X \cup \bigcup\limits_{p \in P} C_p^2$ é topologicamente quaseconvexa.

Primeiramente precisamos de saber se tais espaços são limites inversos, como os caracterizados pela **Proposição 5.0.4**. Para tal, faltaria apenas a condição de que os quocientes são Hausdorff, mas a quaseconvexidade topológica de $\sim$ resolve nosso problema. Temos então:

Proposição 5.1.2. *Sejam X um espaço topológico compacto e metrizável, $\pi : X \to K$ uma explosão em P e $S \subseteq P$. Definimos $X_S = X/\sim_{P-S}$, com $\sim_{P-S} = \Delta^2 X \cup \bigcup\limits_{q \notin S} C_q^2$. Então $\forall S \subseteq P$, o espaço X_S é Hausdorff.*

Demonstração. Imediato da **Proposição 1.3.8**. □

Definição 5.1.3. Sejam $\pi : X \to K$ uma explosão em $P \subseteq K$ e $\mathcal{T}$ uma família enumerável de espaços topológicos compactos e metrizáveis. Dizemos que π é do tipo $\mathcal{T}$ se $\forall p \in P,\ \exists T \in \mathcal{T} :\ C_p \cong T$ e $\forall T \in \mathcal{T}, \exists p \in P :\ T \cong C_p$. Denotemos por $P_T = \{p \in P : C_p \cong T\}$.

Mostraremos a equivalência entre explosões de mesmo tipo.

Definição 5.1.4. Seja $\pi : X \to K$ uma explosão com respeito ao conjunto $P \subseteq K$. Sejam $S \subseteq S' \subseteq P$. Definimos por $\pi_S^{S'} : X_{S'} \to X_S$, $\pi_{S'} : X \to X_{S'}$ e $\pi^S : X_S \to K$ as aplicações contínuas induzidas por π. Denotemos por $\mathfrak{U}$ a estrutura uniforme de X, $\mathfrak{U}_S$ a estrutura uniforme de X_S e $\mathfrak{U}_K$ a estrutura uniforme de K.

Temos que $X_\emptyset$ pode ser identificado com K e $X_P = X$.

Definição 5.1.5. Sejam X um espaço topológico compacto e metrizável, $\pi : X \to K$ uma explosão em P e família $\mathcal{C} = \{C_p\}_{p\in P}$. Uma aproximação da explosão π consiste em uma tripla $(S, u, B(u))$ em que S é um subconjunto finito de P, u é um entorno fechado de K e $B(u)$ é uma subálgebra booleana de $Clopen(K)$ que satisfazem:

1. os conjuntos $\mathfrak{B}(s, u)$ com $s \in S$ são distintos e formam uma partição de K,

2. $u = \bigcup\limits_{s\in S} \mathfrak{B}(s, u)^2$,

3. $B(u)$ é gerada por seu conjunto de átomos e este é dado por $\{\mathfrak{B}(s, u)) : s \in S\}$.

Como u é fechado, $\mathfrak{B}(s, u)$ é fechado e como $\{\mathfrak{B}(s, u)\}_{s\in S}$ forma uma partição finita (pois S é finito) de K, temos que $\mathfrak{B}(s, u)$ também é aberto e portanto $\mathfrak{B}(s, u) \in Clopen(K)$.

Definição 5.1.6. Seja $\pi : X \to K$ uma explosão com respeito ao conjunto $P \subseteq K$. Um refinamento elementar de uma aproximação $(S, u, B(u))$ é uma aproximação $(S', u', B(u'))$ tal que $S \subseteq S'$, $u' \subsetneq u$ e $B(u) \subseteq B(u')$.

Proposição 5.1.7. *Sejam $\pi : X \to K$ uma explosão com respeito ao conjunto $P \subseteq K$, $(S, u, B(u))$ uma aproximação, $\sigma \in \mathcal{S} : \sigma \nsubseteq B(u)$, $p \in S$ tal que $\mathfrak{B}(p, u) \notin At(B(u) + \sigma)$ e $w \in \mathfrak{U}_p$. Então existe refinamento elementar $(S', u', B(u'))$ tal que $\{A \in At(B(u)) : p \notin A\} \subseteq At(u')$ e $\forall s \in S' - S$, $(\pi^p)^{-1}(\mathfrak{B}(s, u')) \in Small(w_p)$.*

Obs. Seja $\sigma \in \mathcal{S} : \sigma \nsubseteq B(u)$. Temos que $B(u)$ está estritamente contido em $Clopen(K)$ ($B(u)$ é finito e $Clopen(K)$ não, portanto não podem ser iguais), o que implica que algum $\sigma \nsubseteq B(u)$ sempre existe. E pela proposição **Proposição 1.4.14** sempre existe $p \in S$ tal que $\mathfrak{B}(p, u) \notin At(B(u) + \sigma)$. Portanto, do teorema segue que toda aproximação possui refinamento elementar.

Demonstração. O $B(u)$ - átomo $\mathfrak{B}(p, u)$ se divide em dois $B(u) + \sigma$ - átomos, pois σ é uma secção (e portanto possui apenas dois átomos) e pela **Proposição 1.4.15**. Denotemos tais átomos por W_p e W'_p de tal forma que $p \in W_p$ (lembramos que os dois átomos formam uma partição de $\mathfrak{B}(p, u)$, pois são intersecções de $\mathfrak{B}(p, u)$ com os átomos que geram σ, logo p deve estar em um dos dois apenas).

Seja $v \in \mathfrak{U}_K$ um entorno tal que $v \cap W_p^2 \subsetneq u \cap W_p^2$ e $\mathfrak{B}(p, v) \subset W_p$. Podemos cobrir $W_p - \mathfrak{B}(p, v)$ por um conjunto finito $\mathcal{H}$ (pois estamos sempre dentro de algum compacto) de abertos-fechados disjuntos e u - pequenos e cada um contido em algum átomo de $B(u) + \sigma$. Podemos supor que $\forall H \in \mathcal{H}$, $(\pi^p)^{-1}(H) \in Small(w)$, pois bastaria cobrir $(\pi^p)^{-1}(H)$ por abertos-fechados disjuntos e w-pequenos e suas imagens seriam abertos-fechados com as propriedades desejadas. Analogamente, podemos cobrir W'_p por um conjunto finito $\mathcal{J}$ de abertos-fechados disjuntos tais que suas imagens inversas por π^p são w-pequenas.

Tomemos B a subálgebra de $Clopen(K)$ gerada por $B(u) \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{J}$ e o conjunto $S' = S \cup \{q_H : H \in \mathcal{H}\} \cup \{q_J : J \in \mathcal{J}\}$, com q_H algum ponto de $P \cap H$ e q_J algum ponto de $P \cap J$ (P é denso, e H e J são abertos, portanto $P \cap H \neq \emptyset$ e $P \cap J \neq \emptyset$). Por construção, cada átomo de B possui apenas um ponto de S' e, pela definição de átomo, cada ponto de S' pertence a um único átomo de B. Seja A_q o átomo de B que contém $q \in S'$. Se $q \in S - \{p\}$, segue que $A_q = \mathfrak{B}(q, u)$ (o $B(u)$-átomo que contém q). Se $q = q_H$, então $A_q = H$. Se $q = q_J$, então $A_q = J$. E temos que $A_p = \mathfrak{B}(p, v)$.

Definiremos $u' = \bigcup_{q \in S'} A_q^2$ e $B(u') = B$. Como u' é união finita de abertos-fechados, segue que também é aberto-fechado. Portanto u' é vizinhaça de $\Delta^2 K$, o que implica que $u' \in \mathfrak{U}_K$. Como os conjuntos A_q são dois a dois disjuntos, segue que $\forall q \in S'$, $\mathfrak{B}(q, u') = A_q$. Segue então que as condições de aproximação são satisfeitas.

Temos que $u' \subset u$, pois cada pedaço foi construido u - pequeno, e a inclusão é estrita já que $\mathfrak{B}(p, u') = \mathfrak{B}(p, v) \subsetneq \mathfrak{B}(p, u)$, pela escolha de v. Portanto temos uma aproximação $(S', u', B(u'))$ que refina $(S, u, B(u))$.

Pela construção de $\mathcal{H}$ e de $\mathcal{J}$, segue que $\forall s \in S' - S$, $(\pi^p)^{-1}(\mathfrak{B}(s, u')) \in Small(w)$.

□

Esse ponto p será chamado de ativo e todos os outros em S de passivos no refinamento.

De fato o $B(u)$-átomo $\mathfrak{B}(p, u)$ é dividido em W_p e W'_p por σ e ambos estão contidos em $B(u')$. Todos os outros $B(u)$-átomos, pela construção, ainda são átomos de $B(u')$. Portanto podemos tomar uma sequência finita de refinamentos cujos pontos ativos estão nos $B(u)$-átomos restantes até chegarmos a uma álgebra B'. Temos neste caso que nenhum átomo de B' é dividido por σ, o que implica que $\sigma \subseteq B'$. Tal sequência finita de refinamentos será dita uma sequência de inclusão de σ. Vale observar que dado $p \in P - S$, tal sequência de inclusão de sigma pode incluir p no primeiro termo do refinamento.

Definição 5.1.8. Sejam X_1, X_2 espaços compactos e metrizáveis, $\pi_i : X_i \to K$ explosões em P_i e famílias $\mathcal{C}_i = \{C_{i,p}\}_{p \in P_i}$ de mesmo tipo. Sejam $(S_i, u_i, B(u_i))$ aproximações referentes às explosões π_i. Uma sincronização entre as aproximações consiste em homeomorfismos $\theta : X_{1,S_1} \to X_{2,S_2}$ e $\theta_K : K \to K$ tais que $\theta_K(S_1) = S_2$, $\theta_K(u_1) = u_2$ e o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} X_{1,S_1} \arrow[r, "\pi_1^{S_1}"] \arrow[d, "\theta"] & K \arrow[d, "\theta_K"] \\ X_{2,S_2} \arrow[r, "\pi_2^{S_2}"] & K \end{tikzcd}$$

Temos que, para $p \in S_1$, $\theta_K(\mathfrak{B}(p, u_1)) = \mathfrak{B}(\theta_K(p), u_2)$ (lembrando que θ_K é uniformemente contínua pois K é compacto). Sendo assim, θ_K induz um isomorfismo $\tilde{\theta} : B(u_1) \to B(u_2)$.

Proposição 5.1.9. *Sejam X_1, X_2 espaços compactos e metrizáveis, $\pi_i : X_i \to K$ explosões em P_i e famílias $\mathcal{C}_i = \{C_{i,p}\}_{p \in P_i}$ de mesmo tipo. Sejam $(S_i, u_i, B(u_i))$ aproximações referentes às explosões π_i e θ uma sincronização entre essas aproximações. Se $(S_1', u_1', B(u_1'))$ é um refinamento de $(S_1, u_1, B(u_1))$ então existem um refinamento $(S_2', u_2', B(u_2'))$ de $(S_2, u_2, B(u_2))$ e uma sincronização θ' entre as aproximações $(S_1', u_1', B(u_1'))$ e $(S_2', u_2', B(u_2'))$.*

Demonstração. Seja $u_2' = \theta_K(u_1')$. Como θ_K é homeomorfismo uniforme, segue que $u_2' \in \mathfrak{U}_K$. Como $u_1' \subsetneq u_1$, segue que $u_2' \subsetneq u_2$. Para cada $q \in S_1' - S_1$, com $q \in P_{1,T}$, tome $r_q \in \theta_K(\mathfrak{B}(q, u_1')) \cap P_{2,T}$ (essa intersecção é não vazia pois $\theta_K(\mathfrak{B}(q, u_1'))$ é aberto e $P_{2,T}$ é denso). Seja $S_2' = S_2 \cup \{r_q : q \in S_1' - S_1\}$. Temos também que $\forall q \in S_2'$, $\mathfrak{B}(q, u_2') = \theta_K(\mathfrak{B}(\theta_K^{-1}(q), u_1'))$, com $\theta_K^{-1}(q) \in S_1'$. Portanto $(S_2', u_2', B(u_2'))$ é um refinamento de $(S_2, u_2, B(u_2))$, com $B(u_2')$ a subálgebra de $Clopen(K)$ gerada pelo conjunto $\{\mathfrak{B}(q, u_2') : q \in S_2'\}$.

Para $q \in S_1'$ tal que $\mathfrak{B}(q, u_1) \in At(B(u_1'))$, defina $\theta_K'|_{\mathfrak{B}(q,u_1')} = \theta_K|_{\mathfrak{B}(q,u_1')}$ e $\theta'|_{(\pi_1^{S_1'})^{-1}(\mathfrak{B}(q,u_1'))} = (\pi_{S_2'}^{S_2'})^{-1} \circ \theta \circ \pi_{S_1}^{S_1'}|_{(\pi_1^{S_1'})^{-1}(\mathfrak{B}(q,u_1'))}$ (é um homeomrfismo sobre a imagem já que cada um dos três é homeomorfismo sobre a imagem).

Para $q \in S_1'$ tal que $\mathfrak{B}(q, u_1) \notin At(B(u_1'))$, temos que $\mathfrak{B}(q, u_1')$ e $\mathfrak{B}(\theta_K(q), u_2')$ são ambos homeomorfos a K, o que implica que os espaços $(\pi_1^{S_1'})^{-1}(\mathfrak{B}(q, u_1'))$ e $(\pi_2^{S_2'})^{-1}(\mathfrak{B}(\theta_K(q), u_2'))$ são ambos homeomorfos a K_{C_q} (pois $q \in P_{1,T}$ e $r_q \in P_{2,T}$). Tome então $\theta'|_{(\pi_1^{S_1'})^{-1}(\mathfrak{B}(q,u_1'))} : (\pi_1^{S_1'})^{-1}(\mathfrak{B}(q, u_1')) \to (\pi_2^{S_2'})^{-1}(\mathfrak{B}(\theta_K(q), u_2'))$ um homeomorfismo e $\theta_K'|_{\mathfrak{B}(q,u_1)} : \mathfrak{B}(q, u_1') \to \mathfrak{B}(\theta_K(q), u_2')$ um homeomorfismo que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\pi_1^{S'_1})^{-1}(\mathfrak{B}(q,u'_1)) \arrow[r, "\pi_1^{S_1}"] \arrow[d, "\theta'|_{(\pi_1^{S'_1})^{-1}(\mathfrak{B}(q,u'_1))}"'] & \mathfrak{B}(q,u'_1) \arrow[d, "\theta_K|_{\mathfrak{B}(q,u'_1)}"] \\
(\pi_1^{S'_1})^{-1}(\mathfrak{B}(\theta_K(q),u'_1)) \arrow[r, "\pi_2^{S_2}"] & \mathfrak{B}(\theta_K(q),u'_2)
\end{tikzcd}$$

No primeiro caso, o mesmo diagrama comuta. Portanto temos homeomorfismos $\theta' : X_{1,S'_1} \to X_{2,S'_2}$ e $\theta'_K : K \to K$ que comutam o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X_{1,S'_1} \arrow[r, "\pi_1^{S'_1}"] \arrow[d, "\theta'"] & K \arrow[d, "\theta'_K"] \\
X_{2,S'_2} \arrow[r, "\pi_2^{S'_2}"] & K
\end{tikzcd}$$

Como θ'_K foi construida de tal forma que $\forall q \in S'_1$, $\theta'_K(\mathfrak{B}(q,u'_1)) = \mathfrak{B}(\theta_K(q),u'_2)$ e, para $q \in S'_1 - S_1$, $\mathfrak{B}(\theta_K(q),u'_2) = \mathfrak{B}(r_q,u'_2)$, segue que $\theta'_K(u'_1) = \theta'_K(\bigcup_{q\in S'_1}\mathfrak{B}(q,u'_1)) = \bigcup_{q\in S'_1}\theta'_K(\mathfrak{B}(q,u'_1)) = \bigcup_{q\in S'_1}\mathfrak{B}(\theta_K(q),u'_2) = \bigcup_{q\in S'_2}\mathfrak{B}(q,u'_2) = u'_2$. Portanto θ' e θ'_K formam uma sincronização entre $(S'_1, u'_1, B(u'_1))$ e $(S'_2, u'_2, B(u'_2))$.

□

Definição 5.1.10. Seja $\pi : X \to K$ uma explosão com respeito ao conjunto $P \subseteq K$. Uma estrutura direcional de π consiste em uma enumeração de $P = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, um conjunto enumerado $\mathcal{S} = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de secções de $Clopen(K)$ tal que $Clopen(K) = \sum \mathcal{S}$ e $\forall p \in P$, $\mathfrak{B}_p = \{b_{p,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma base encaixante de $\mathfrak{U}_p$.

Teorema 5.1.11. *Sejam X_1, X_2 espaços compactos e metrizáveis, $\pi_i : X_i \to K$ explosões em P_i e famílias $\mathcal{C}_i = \{C_{i,p}\}_{p\in P_i}$ de mesmo tipo $\mathcal{T}$. Então $\exists\zeta : X_1 \to X_2$ e $\exists\varphi : K \to K$ homeomorfismos que comutam o diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\zeta"] & K \arrow[d, "\varphi"] \\
X_2 \arrow[r, "\pi_2"] & K
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Fixemos estruturas direcionais com o mesmo conjunto de secções $\mathcal{S}$ e mesma enumeração e bases $\mathfrak{B}_{i,p} = \{b_{i,p,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{U}_{i,p}$, com $i \in \{1,2\}$. Seja $\mathfrak{B}_K$ base de $\mathfrak{U}_K$.

Tomemos $p_{1,1} = \min P_1$. Seja $T \in \mathcal{T}$ tal que $p_{1,1} \in P_{1,T}$. Tomemos então $p_{2,2} = \min P_{2,T}$, $S_{i,1} = \{p_{i,1}\}$ e $u_{i,1} = X_i^2$. Temos que $(S_{i,1}, u_{i,1}, B(u_{i,1}))$ são aproximações e um homeomorfismo qualquer $\theta_1 : X_{p_1} \to X_{p_2}$ é uma sincronização. Esse θ existe pois p_1 e p_2 estão associados ao mesmo tipo.

Seja $\sigma = \min\{\sigma \in \mathcal{S} : \varsigma \nsubseteq B(u_1)\}$. Tomemos $(S_{1,2}, u_{1,2}, B(u_{1,2}))$ um refinamento de $(S_{1,1}, u_{1,1}, B(u_{1,1}))$ tal que $\sigma \subseteq B(u_{1,2})$ (depois de uma sequência de inclusões de σ) e tal que $\forall q \in S_{1,2} - S_{1,1}$, $\forall p \in S_{1,1}$, $(\pi^p)^{-1}(\mathfrak{B}(q, u_{1,2})) \in Small(b_{1,p,2})$. Tomemos um refinamento $(S_{2,2}, u_{2,2}, B(u_{2,2}))$ com uma sincronização θ_1.

Por um argumento back-and-forth, construimos duas sequências de refinamentos $(S_{i,n}, u_{i,n}, B(u_{i,n}))_{n\in\mathbb{N}}$, sincronizados por aplicações $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que para todo $n \in \mathbb{N}$, o n-ésimo termo de $\mathcal{S}$ está em $B(u_{i,2n})$, o n-ésimo termo de P_i está em $S_{i,2n}$ e $\forall q \in S_{i,2n} - S_{i,2n-1}$, $\forall p \in S_{i,2n-1}$, $(\pi^p)^{-1}(\mathfrak{B}(q, u_{i,2n})) \in Small(b_{i,p,n})$, para $i = 1$ e 2 . Seja $B_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(u_{i,n})$. Como $\forall \sigma \in \mathcal{S}, \sigma \subset B_i$, e $\sum \mathcal{S} = Clopen(K)$, segue que $B_1 = B_2 = Clopen(K)$. Temos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\theta}_n : B(u_{1,n}) \to B(u_{2,n})$ é um isomorfismo, o que induz um isomorfismo $\tilde{\theta} : B_1 \to B_2$. Pelo teorema de representação de Stone, $\tilde{\theta}$ está em correspondência com um homeomorfismo $\varphi : K \to K$ tal que $\varphi(P_1) = P_2$. Tal homeomorfismo é dado por $\varphi(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{\tilde{\theta}(A) \in At(B(u_{i,n})) : x \in A\}$.

Seja $p \in P_1$. Temos que φ induz $\varphi_p : (\pi_1^p)^{-1}(K - \{p\}) \to (\pi_2^{\varphi(p)})^{-1}(K - \{\varphi(p)\})$, um homeomorfismo que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\pi_1^p)^{-1}(K-\{p\}) \arrow[r, "\varphi_p"] \arrow[d, "\pi_1^p"] & (\pi_2^{\varphi(p)})^{-1}(K-\{\varphi(p)\}) \arrow[d, "\pi_2^{\varphi(p)}"] \\
K \arrow[r, "\varphi"] & K
\end{tikzcd}$$

Tome $n = \min\{m \in \mathbb{N} : p \in S_{1,m}\}$. Defina $\theta_p : X_{1,p} \to X_{2,\varphi(p)}$ o homeomorfismo que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X_{1,S_{1,n}} \arrow[r, "\theta_n"] \arrow[d, "\pi_{1,p}^{S_{1,n}}"] & X_{2,S_{2,n}} \arrow[d, "\pi_{2,\varphi(p)}^{S_{2,n}}"] \\
X_{1,p} \arrow[r, "\theta_p"] & X_{2,\varphi(p)}
\end{tikzcd}$$

Defina $\alpha_p : (\pi_1^p)^{-1}(p) \to (\pi_2^{\varphi(p)})^{-1}(\varphi(p))$ por $\alpha_p = \theta_p|_{(\pi_1^p)^{-1}(p)}$. Temos que α_p é homeomorfismo.

Para alguma escolha de f_1 e f_2, temos $X_{1,p} = (\pi_1^p)^{-1}(K - \{p\}) +_{f_1} (\pi_1^p)^{-1}(p)$ e $X_{2,p} = (\pi_2^{\varphi(p)})^{-1}(K - \{\varphi(p)\}) +_{f_2} (\pi_2^{\varphi(p)})^{-1}(\varphi(p))$. Podemos tomar então o mapa $\zeta_p = \varphi_p + \alpha_p : X_{1,p} \to X_{2,\varphi(p)}$.

Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X_{1,p}$ uma sequência que converge para um ponto x. Se $x \in (\pi_1^p)^{-1}(K - \{p\})$, então $\{\zeta_p(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\zeta_p(x)$ pela continuidade de φ_p. Suponhamos $x \in (\pi_1^p)^{-1}(p)$. Basta supor $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (\pi_1^p)^{-1}(K - \{p\})$ ou $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (\pi_1^p)^{-1}(p)$. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (\pi_1^p)^{-1}(p)$, então $\{\zeta_p(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\zeta_p(x)$ pela continuidade de α_p. Suponhamos então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (\pi_1^p)^{-1}(K-\{p\})$. Se $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq P_1$ é tal que $\forall n \in \mathbb{N}, \pi^p(x_n) \in \mathfrak{B}(y_n, u_{1,n})$, então $\partial(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\pi^p)^{-1}(\mathfrak{B}(y_n, u_{1,n}))) = \{x\}$ (pois, por construção, quase todos esses conjuntos são w-pequenos, $\forall w \in \mathfrak{U}_p$). Segue da continuidade de θ_p que $\partial(\theta_p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\pi^p)^{-1}(\mathfrak{B}(y_n, u_{1,n})))) = \theta_p(\partial(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\pi^p)^{-1}(\mathfrak{B}(y_n, u_{1,n})))) = \{\theta_p(x)\} = \{\zeta_p(x)\}$. Mas $\{\zeta_p(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \theta_p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\pi^p)^{-1}(\mathfrak{B}(y_n, u_{1,n})))$ (pois cada $\zeta_p(x_n)$ pertence a $(\pi^p)^{-1}(\mathfrak{B}(y_n, u_{1,n}))$ pela construção de φ e a comutatividade do primeiro diagrama). Logo $\{\zeta_p(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ se acumula apenas em $\zeta_p(x)$, o que implica que converge para $\zeta_p(x)$. Portanto ζ_p é contínua. Analogamente temos que ζ_p^{-1} também é contínua.

Portanto temos uma família de homeomorfismos $\{\zeta_p\}_{p\in P_1}$ que comutam os diagramas:

$$\begin{tikzcd} X_{1,p} \arrow[r, "\zeta_p"] \arrow[d, "\pi_1^p"] & X_{2,\varphi(p)} \arrow[d, "\pi_2^{\varphi(p)}"] \\ K \arrow[r, "\varphi"] & K \end{tikzcd}$$

Portanto existe um homeomorfismo $\zeta' : X'_1 \to X'_2$, com $X'_i = \varprojlim\{X_{i,p}, \pi_i^p\}_{p\in P_i}$, que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} X'_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\zeta'"] & K \arrow[d, "\varphi"] \\ X'_2 \arrow[r, "\pi_2"] & K \end{tikzcd}$$

Mas, pela **Proposição 5.0.4**, $X_i \cong X'_i$, portanto segue o teorema. $\square$

5.2 Produtos fibrados que não são explosões

Essa seção não será necessária para nosso resultado principal, mas serve como um aviso de que nossos objetos não são tão bem comportados como parecem.

Proposição 5.2.1. *Sejam C um compacto metrizável, $\mathbb{N} +_f C$ um espaço Hausdorff compacto tal que $f(\mathbb{N}) = C$, $\mathbb{N} + \{\infty\}$ a compactificação por um ponto de $\mathbb{N}$ e uma aplicação $\pi : \mathbb{N} +_f C \to \mathbb{N} + \{\infty\}$ tal que $\pi|_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é bijetiva e $\pi(C) = \infty$. Então π é contínua.*

Demonstração. Seja $F \in Closed(\mathbb{N} + \{\infty\})$.Se $\infty \notin F$ então $\#F < \aleph_0$, o que implica que $\#\pi^{-1}(F) = \#F < \aleph_0$ e portanto $\pi^{-1}(F) \in Closed(\mathbb{N} +_f C)$. Se $\infty \in F$ então $\pi^{-1}(F) = \pi^{-1}(F - \{\infty\}) \cup C$. Mas temos que o conjunto $\pi^{-1}(F - \{\infty\}) \cup C = \pi^{-1}(F - \{\infty\}) \cup f(\pi^{-1}(F - \{\infty\})) \cup C \in Closed(\mathbb{N} +_f C)$. Portanto π é contínua. $\square$

Proposição 5.2.2. *Sejam C um compacto metrizável com $\#C > 2$ e $\mathbb{N} +_f C$ um espaço Hausdorff compacto tal que $f(\mathbb{N}) = C$. Então existem aplicações contínuas $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} +_f C \to \mathbb{N} + \{\infty\}$ tais que $\pi_1|_{\mathbb{N}}, \pi_2|_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ são bijetivas, $\pi_1(C) = \pi_2(C) = \infty$ e não existe homeomorfismo $\xi : \mathbb{N} +_f C \to \mathbb{N} +_f C$ que comuta o diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} +_f C \arrow[d, "\xi"] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\
\mathbb{N} +_f C \arrow[r, "\pi_2"] & \mathbb{N} + \{\infty\}
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Sejam $S = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $T = \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $W = \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números naturais distintos, duas a duas disjuntas e tais que S converge para $s \in C$, T converge para $t \in C$ e W converge para $w \in C$, com $s \neq t$, $t \neq w$ e $w \neq s$. Seja também $R \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\#R = \#(\mathbb{N} - R) = \aleph_0$. Tomemos $S = S_1 \dot{\cup} S_2$, com $\#S_1 = \#S_2 = \aleph_0$ e $R = R_1 \dot{\cup} R_2$ com $\#R_1 = \#R_2 = \aleph_0$. Definimos π_1 alguma aplicação tal que $\pi_1(S_1) = R_1$, $\pi_1(S_2) = R_2$, é bijetiva em $\mathbb{N}$, $\pi_1(C) = \infty$ e é contínua. Continuidade vimos que sempre ocorre e as outras condições acontecem devido as cardinalidades. Analogamente, existe uma aplicação π_2 tal que $\pi_2(T) = R_1$, $\pi_2(W) = R_2$, é bijetiva em $\mathbb{N}$, $\pi_2(C) = \infty$ e é contínua.

Suponhamos que existe homeomorfismo $\xi : \mathbb{N} +_f C \to \mathbb{N} +_f C$ tal que $\pi_1 = \pi_2 \circ \xi$. Como π_1 e π_2 são bijetivas em $\mathbb{N}$, temos que $\xi|_{\mathbb{N}} = \pi_2|_{\mathbb{N}}^{-1} \circ \pi_1|_{\mathbb{N}}$. Como ξ é contínua e S converge para s, segue que $\xi(S)$ converge para $\xi(s)$. Mas $\xi(S)$ possui duas subsequências $\xi(S_1) = \pi_2^{-1}(\pi_1(S_1)) = T$ e $\xi(S_2) = \pi_2^{-1}(\pi_1(S_2)) = W$ que convergem respectivamente para t e w que são distintos. Portanto $\xi(S)$ diverge, abusrdo.

Portanto $\nexists \xi : \mathbb{N} +_f C \to \mathbb{N} +_f C$ homeomorfismo tal que $\pi_1 = \pi_2 \circ \xi$.

□

Proposição 5.2.3. *Seja C um compacto metrizável com $\#C > 2$. Então existem $\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2 : K_C \to K$ aplicações contínuas e sobrejetivas tais que $\bar{\pi}_1(C) = \bar{\pi}_2(C) = p$, $\bar{\pi}_i|_{K_0} : K_0 \to K - \{p\}$ são bijetivas e não existe homeomorfismo $\bar{\xi} : K_C \to K_C$ que comuta o diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
K_C \arrow[d, "\bar{\xi}"] \arrow[dr, "\bar{\pi}_1"] & \\
K_C \arrow[r, "\bar{\pi}_2"] & K
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Sejam $\varrho : K_C \to \mathbb{N} +_f C$ uma aplicação quociente tal que $\varrho(K_0) = \mathbb{N}$ e $\varrho|_C = id_C$ e $\rho : K \to \mathbb{N} + \{\infty\}$ uma aplicação quociente tal que $\#\rho^{-1}(\infty) = 1$ (o segundo caso é apenas C como apenas um ponto, já vimos que tais aplicações existem). Tomemos $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} +_f C \to \mathbb{N} + \{\infty\}$ aplicações contínuas tais que $\pi_1|_{\mathbb{N}}, \pi_2|_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ são bijetivas, $\pi_1(C) = \pi_2(C) = \infty$ e não existe homeomorfismo $\xi : \mathbb{N} +_f C \to \mathbb{N} +_f C$ tal que que $\pi_1 = \pi_2 \circ \xi$.

Pela **Proposição 4.0.6** existem aplicações contínuas $\bar{\pi}_i : K_C \to K$ que comutam os diagramas (para $i = 1, 2$):

$$\begin{tikzcd}
K_C \arrow[r, "\varrho"] \arrow[d, "\bar{\pi}_i"] & \mathbb{N} +_f C \arrow[d, "\pi_i"] \\
K \arrow[r, "\rho"] & \mathbb{N} + \{\infty\}
\end{tikzcd}$$

Suponhamos que $\exists \bar{\xi} : K_C \to K_C$ homeomorfismo tal que $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2 \circ \bar{\xi}$. Mostraremos que isso implica que $\exists \xi : \mathbb{N} +_f C \to \mathbb{N} +_f C$ homeomorfismo tal que $\pi_1 = \pi_2 \circ \xi$, contradizendo nossa escolha de π_1 e π_2.

Temos que $\bar{\xi}|_{K_0} = \bar{\pi}_2|^{-1}_{K-\rho^{-1}(\infty)} \circ \bar{\pi}_1|_{K_0}$ pois as aplicações são bijetivas nesses subconjuntos. Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\bar{\xi}(\varrho^{-1}(n)) = \bar{\pi}_2{}^{-1}(\bar{\pi}_1(\varrho^{-1}(n))) = \bar{\pi}_2{}^{-1}(\rho^{-1}(\pi_1(n))) = \varrho^{-1}(\pi_2^{-1}(\pi_1(n)))$, o que implica que $\varrho \circ \bar{\xi}(\varrho^{-1}(n)) = \pi_2^{-1}(\pi_1(n))$. Como ϱ é uma aplicação quociente e $\varrho \circ \bar{\xi}$ é constante em cada conjunto $\varrho^{-1}(x)$, com $x \in \mathbb{N} +_f C$, então $\exists \xi : \mathbb{N} +_f C \to \mathbb{N} +_f C$ contínua que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
K_C \arrow[r, "\varrho"] \arrow[d, dashed, "\bar{\xi}"] & \mathbb{N} +_f C \arrow[d, dashed, "\xi"] \\
K_C \arrow[r, "\varrho"] & \mathbb{N} +_f C
\end{tikzcd}$$

Nesse caso, todo o diagrama comuta (exceto por enquanto o triângulo à direita):

$$\begin{tikzcd}
K_C \arrow[rr, "\varrho"] \arrow[dr, "\bar{\pi}_1"] \arrow[dd, dashed, "\bar{\xi}"] & & \mathbb{N} +_f C \arrow[dr, "\pi_1"] \arrow[dd, dashed, "\xi"] & \\
& K \arrow[rr, "\rho"] & & \mathbb{N} + \{\infty\} \\
K_C \arrow[ur, "\bar{\pi}_2"] \arrow[rr, "\varrho"] & & \mathbb{N} +_f C \arrow[ur, "\pi_2"] &
\end{tikzcd}$$

Temos que $\forall m \neq n \in \mathbb{N}$, $\bar{\xi}(\varrho^{-1}(m)) \cap \bar{\xi}(\varrho^{-1}(n)) = \emptyset$, o que implica que $\xi(m) \neq \xi(n)$, portanto ξ é injetiva (já que é bijetiva em C). Como $\varrho \circ \bar{\xi}$ é sobrejetiva, segue que ξ é sobrejetiva. Portanto ξ é bijetiva e, como o espaço é Hausdorff compacto, segue que ξ é um homeomorfismo. Temos também que $\xi \circ \varrho = \varrho \circ \bar{\xi}$, o que implica que $\varrho = \xi^{-1} \circ \varrho \circ \bar{\xi}$. Portanto $\pi_1 \circ \varrho = \pi_1 \circ \xi^{-1} \circ \varrho \circ \bar{\xi}$. Mas $\pi_1 \circ \varrho = \pi_2 \circ \varrho \circ \bar{\xi}$, o que implica que $\pi_2 \circ \varrho \circ \bar{\xi} = \pi_1 \circ \xi^{-1} \circ \varrho \circ \bar{\xi}$. Como $\bar{\xi}$ é bijetiva, temos que $\pi_2 \circ \varrho = \pi_1 \circ \xi^{-1} \circ \varrho$ e como ϱ é sobrejetiva, temos que $\pi_2 = \pi_1 \circ \xi^{-1}$ e portanto $\pi_2 \circ \xi = \pi_1$, absurdo.

Portanto $\nexists \bar{\xi} : K_C \to K_C$ homeomorfismo tal que $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2 \circ \bar{\xi}$.

$\square$

Corolário 5.2.4. *Seja C um compacto metrizável com $\#C > 2$. Então $\forall \omega : K \to K$, homeomorfismo, existem $\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2 : K_C \to K$ aplicações contínuas e sobrejetivas tais que $\bar{\pi}_1(C) = \bar{\pi}_2(C) = p$, $\pi_i|_{K_0} : K_0 \to K - \{p\}$ são bijetivas e não existe homeomorfismo $\bar{\xi} : K_C \to K_C$ que comuta o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} K_C \arrow[r, "\bar{\pi}_1"] \arrow[d, "\bar{\xi}"] & K \arrow[d, "\omega"] \\ K_C \arrow[r, "\bar{\pi}_2"] & K \end{tikzcd}$$

Demonstração. Basta tomar $\pi_1 : K_C \to K$ e $\pi_2 : K_C \to K$ tais que não existe $\bar{\xi} : K_C \to K_C$ homeomorfismo tal que $\pi_2 \circ \bar{\xi} = \pi_1$. Temos que $\bar{\pi}_1 = \pi_1$ e $\bar{\pi}_2 = \omega \circ \pi_2$ são as aplicações procuradas. $\square$

Proposição 5.2.5. *Sejam C um compacto metrizável, $\omega : K \to K$ um homeomorfismo e $\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2 : K_C \to K$ aplicações contínuas e sobrejetivas tais que $\pi_1(C) = \pi_2(C) = p$, $\pi_i|_{K_0} : K_0 \to K - \{p\}$ são bijetivas e não existe homeomorfismo $\bar{\xi} : K_C \to K_C$ que comuta o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} K_C \arrow[r, "\bar{\pi}_1"] \arrow[d, "\bar{\xi}"] & K \arrow[d, "\omega"] \\ K_C \arrow[r, "\bar{\pi}_2"] & K \end{tikzcd}$$

Seja $\omega' : K \to K$ um homeomorfismo. Se ω' possui mesmo germe de ω em p, ou seja, $\omega'|_U = \omega|_U$ para algum aberto U, então não existe homeomorfismo $\bar{\xi}' : K_C \to K_C$ que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} K_C \arrow[r, "\bar{\pi}_1"] \arrow[d, "\bar{\xi}'"] & K \arrow[d, "\omega'"] \\ K_C \arrow[r, "\bar{\pi}_2"] & K \end{tikzcd}$$

Demonstração. Suponhamos que existe $\bar{\xi}'$ que comute o segundo diagrama. Seja U aberto-fechado em K tal que $\omega'|_U = \omega|_U$. Temos então que o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^{-1}(U) \arrow[r, "\bar{\pi}_1|_{\pi_1^{-1}(U)}"] \arrow[d, "\bar{\xi}'|_{\pi_1^{-1}(U)}"'] & K \arrow[d, "\omega"] \\
\pi_2^{-1}(\omega(U)) \arrow[r, "\bar{\pi}_2|_{\pi_2^{-1}(\omega(U))}"'] & K
\end{tikzcd}$$

Seja $A = K_C - \pi_1^{-1}(U)$ e $B = K_C - \pi_2^{-1}(\omega(U))$. Temos que $K_C = \pi_1^{-1}(U)\dot{\cup}A = \pi_2^{-1}(\omega(U))\dot{\cup}B$ e as restrições $\pi_1|_A$ e $\pi_2|_B$ são mergulhos tais que a aplicação $\zeta = \pi_2^{-1} \circ \omega \circ \pi_1|_A : A \to B$ é um homeomorfismo. Portanto $\bar{\xi} = \bar{\xi}'|_{\pi_1^{-1}(U)} + \zeta : K_C \to K_C$ é um homeomorfismo que comuta o primeiro diagrama, absurdo. Portanto não existe $\bar{\xi}'$ que comute o segundo diagrama.

$\square$

Proposição 5.2.6. *Seja $\mathcal{C} = \{C_p\}_{p\in P}$, uma família de espaços compactos, metrizáveis e conexos. Tomemos $\pi : K_{\mathcal{C}} \to K$ a aplicação de projeção. Então as componentes conexas de $K_{\mathcal{C}}$ são dadas por $\pi^{-1}(x)$, com $x \in K$.*

Demonstração. Sejam, para $p \in P$, $\varpi_p : K_{\mathcal{C}} \to K_{C_p}$ as aplicações de projeção. Sejam $x \in K - P$ e A a componente conexa de $\pi^{-1}(x)$. Temos que $\pi(A)$ é conexo, o que implica que $\pi(A) = x$, e portanto $A = \pi^{-1}(x)$. Sejam $p \in P$ e B a componente conexa de $\varpi_p^{-1}(C_p)$ (que sabemos que é conexo pois C_p é conexo e $\varpi_p^{-1}(C_p) \cong C_p$). Temos que $\varpi_p(B)$ é conexo, o que implica que $\varpi_p(B) = C_p$. Portanto $B = \varpi_p^{-1}(C_p) = \pi^{-1}(p)$. $\square$

Proposição 5.2.7. *Seja $\mathcal{C} = \{C_p\}_{p\in P}$, uma família de espaços compactos, metrizáveis, conexos e com mais de um ponto. Seja $\omega : K_{\mathcal{C}} \to K_{\mathcal{C}}$ um homeomorfismo. Então ω é induzido pelo limite inverso.*

Demonstração. Tomemos $\pi : K_{\mathcal{C}} \to K$ e $\varpi_p : K_{\mathcal{C}} \to K_{C_p}$ as aplicações de projeção. Como ω é contínua, temos que preserva componentes conexas. Portanto $\forall x \in K$, $\omega|_{\pi^{-1}(x)}$ é constante, o que implica que $\exists! \omega' : K \to K$ homeomorfismo que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
K_{\mathcal{C}} \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\pi"] & K_{\mathcal{C}} \arrow[d, "\pi"] \\
K \arrow[r, "\omega'"] & K
\end{tikzcd}$$

Analogamente, temos que $\forall x \in K_{C_p}$, $\varpi_{\omega'(p)} \circ \omega|_{\varpi_p^{-1}(x)}$ é constante, o que implica que $\exists! \omega_p : K_{C_p} \to K_{C_{\omega'(p)}}$ aplicação contínua que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} K_{\mathcal{C}} \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\varpi_p"] & K_{\mathcal{C}} \arrow[d, "\varpi_{\omega'(p)}"] \\ K_{C_p} \arrow[r, "\omega_p"] & K_{C_{\omega'(p)}} \end{tikzcd}$$

Sejam $\pi_p : K_{C_p} \to K$ as aplicações quociente tais que $\forall p \in P,\ \pi = \pi_p \circ \varpi_p$. Analogamente, $\exists! \omega'_p : K \to K$ que o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} K_{C_p} \arrow[r, "\omega_p"] \arrow[d, "\pi_p"] & K_{C_{\omega'(p)}} \arrow[d, "\pi_{\omega'(p)}"] \\ K \arrow[r, "\omega'_p"] & K \end{tikzcd}$$

Portanto o diagrama todo comuta:

$$\begin{tikzcd} K_{\mathcal{C}} \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\varpi_p"] & K_{\mathcal{C}} \arrow[d, "\varpi_{\omega'(p)}"] \\ K_{C_p} \arrow[r, "\omega_p"] \arrow[d, "\pi_p"] & K_{C_{\omega'(p)}} \arrow[d, "\pi_{\omega'(p)}"] \\ K \arrow[r, "\omega'_p"] & K \end{tikzcd}$$

Como $\forall p \in P,\ \pi = \pi_p \circ \varpi_p$, segue pela unicidade de ω', que $\forall p \in P,\ \omega'_p = \omega'$. Portanto ω' comuta os diagramas ($\forall p \in P$), o que implica que ω é induzido por $\{\omega_p\}_{p \in P}$ e ω'.

$\square$

Corolário 5.2.8. *Existem $\mathcal{C} = \{C_p\}_{p \in P}$, uma família de espaços compactos e metrizáveis e famílias de aplicações $\{\pi_p\}_{p \in P}, \{\pi'_p\}_{p \in P}$, com $\pi_p, \pi'_p : K_{C_p} \to K$ tais que seus respectivos limites inversos, $K_{\mathcal{C}}$ e $K'_{\mathcal{C}}$ não são homeomorfos.*

Demonstração. Sejam U, V abertos fechados não triviais de K tais que $K = U \dot{\cup} V$. Temos que $U \cong V \cong K$, o que implica que $\exists \omega : K \to K$ homeomorfismo tal que $\omega(U) = V$ e $\omega|_V = \omega^{-1}$. Temos neste caso que $\omega^2 = id_K$. Tomemos P' subconjunto denso de U e $P = P' \cup \omega(P')$. Temos que P é denso em K. Escolhemos $\forall p \in P', C_p$ de tal forma que todo C_p é conexo, com mais de um ponto e $\forall p, q \in P', C_p \ncong C_q$. Escolhemos também, para $p \in P'$, as aplicações $\pi_p : K_{C_p} \to K$ de projeção. Seja $p_0 \in P'$. Tomemos, $\forall p \in P', C_{\omega(p)} \cong C_p$, $\pi_{\omega(p)} : K_{C_{\omega(p)}} \to K$ aplicações de projeção tais que o diagrama comuta para todo $p \in P$ e alguma aplicação ω_p:

$$\begin{tikzcd} K_{C_p} \arrow[r, "\pi_p"] \arrow[d, "\omega_p"] & K \arrow[d, "\omega"] \\ K_{C_{\omega(p)}} \arrow[r, "\pi_{\omega(p)}"] & K \end{tikzcd}$$

Seja assim $K_{\mathcal{C}} = \varprojlim\{K_{C_p}, \bar{\pi}_p\}_{p\in P}$. Tomemos $\forall p \in P - \{p_0\},\ \pi'_p = \pi_p,\ \pi'_{p_0} = \pi_{p_0}$ e $\pi'_{\omega(p_0)}$ tal que o diagrama não comuta para nenhuma aplicação ω_p (vimos que tal aplicação existe). Seja assim $K'_{\mathcal{C}} = \varprojlim\{K_{C_p}, \bar{\pi}'_p\}_{p\in P}$.

Seja $\xi : K_{\mathcal{C}} \to K_{\mathcal{C}}$ o homeomorfismo induzido pelas aplicações ω e $\{\omega_p\}_{p\in P_1}$. Temos então que $\xi(\pi^{-1}(p_0)) = \pi^{-1}(\omega(p_0))$, com $\pi : K_{\mathcal{C}} \to K$ a aplicação de projeção. Seja agora $\xi' : K'_{\mathcal{C}} \to K'_{\mathcal{C}}$ um homeomorfismo tal que $\xi'(\pi'^{-1}(p_0)) = \pi'^{-1}(\omega(p_0))$, com $\pi' : K'_{\mathcal{C}} \to K$ a aplicação de projeção. Como cada C_p é conexo e com mais de um ponto, temos que ξ' é induzido por homeomorfismos $\omega' : K \to K$ e $\omega'_p : K_{C_p} \to K_{C_{\omega'(p)}}$ que comutam o diagrama, para todo $p \in P$:

$$\begin{tikzcd} K_{C_p} \arrow[r, "\pi'_p"] \arrow[d, "\omega'_p"] & K \arrow[d, "\omega'"] \\ K_{C_{\omega'(p)}} \arrow[r, "\pi'_{\omega'(p)}"] & K \end{tikzcd}$$

Como $\xi'(\pi'^{-1}(p_0)) = \pi'^{-1}(\omega(p_0))$, temos que $\omega'(p_0) = \omega(p_0)$, o que implica que $\exists U_0, V_0$ abertos tais que $p_0 \in U_0,\ \omega'(p_0) \in V_0,\ V_0 \subseteq V$ e $\omega'(U_0) = V_0$. Podemos tomar $U_0 \subseteq U$. Temos neste caso que $\forall p \in P \cap U_0,\ \xi'(\pi'^{-1}(p)) = \pi'^{-1}(\omega(p))$ pois para $p \in U_0,\ C_{\omega(p)}$ é o único espaço homeomorfo a C_p, tal que o índice está em V. Portanto $\forall p \in U_0,\ \omega'(p) = \omega(p)$. Então ω e ω' possuem o mesmo germe em p_0, o que implica que $\nexists \omega_{p_0} : K_{C_{p_0}} \to K_{C_{\omega(p_0)}}$ que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} K_{C_{p_0}} \arrow[r, "\pi'_p"] \arrow[d, "\omega'_p"] & K \arrow[d, "\omega'"] \\ K_{C_{\omega(p_0)}} \arrow[r, "\pi'_{\omega'(p)}"] & K \end{tikzcd}$$

Contradizendo o fato de ξ' ser induzida por pelo limite inverso. Portanto não existe $\xi' : K'_{\mathcal{C}} \to K'_{\mathcal{C}}$ homeomorfismo tal que $\xi'(\pi'^{-1}(p_0)) = \pi'^{-1}(\omega(p_0))$.

Segue então que $K_{\mathcal{C}}$ é transitivo em cada conjunto de componentes conexas homeomorfas não unitárias e $K'_{\mathcal{C}}$ não é. Portanto $K_{\mathcal{C}} \ncong K'_{\mathcal{C}}$.

□

Temos neste caso que o limite inverso não é unicamente determinado pelos espaços $\mathcal{C}$, mostrando que pelo menos alguma das condições para ter explosões é necessária para garantir a unicidade. Nenhum dos espaços construidos na proposição anterior foi explosão pois as classes de equivalência de tipo em P possuiam apenas dois elementos.

Capítulo 6

Ações de convergência

6.1 O pullback semidireto

Sejam G um grupo, Z um espaço topológico Hausdorff compacto, $\varphi : G \curvearrowright Z$ uma ação de convergência minimal, $P \subseteq Z$ o conjunto de pontos parabólicos limitados de φ, $P' \subseteq P$ um conjunto de representantes de órbitas, $\mathcal{C} = \{C_p\}_{p \in P'}$ uma família de espaços topológicos Hausdorff, compactos, $H = \{H_p\}_{p \in P'}$, com $H_p \subseteq G$ conjuntos minimais tais que $Orb_{\varphi|_{H_p \times Z}} p = Orb_\varphi p$ e $H_p(q)$, para $q \in Orb_\varphi p$, o único elemento de H_p tal que $\varphi(H_p(q), p) = q$. Definimos para $p \in P'$ e $q \in Orb_\varphi p$, $C_q = C_p$. Seja $\eta = \{\eta_p\}_{p \in P'}$, com $\eta_p : Stab_\varphi p \curvearrowright C_p$ ações minimais de convergência. Sejam $p \in P'$ e $q \in Orb_\varphi p$. Temos que $Stab_\varphi q = H_p(q)(Stab_\varphi p)H_p(q)^{-1}$. Neste caso, tomemos $\eta_q : Stab_\varphi q \curvearrowright C_q$ dada por $\eta_q(h, \_) = \eta_p(H_p(q)^{-1} h H_p(q), \_)$. Temos que $\eta_q(h_1 h_2, \_) = \eta_p(H_p(q)^{-1} h_1 h_2 H_p(q), \_) = \eta_p(H_p(q)^{-1} h_1 H_p(q) H_p(q)^{-1} h_2 H_p(q), \_) = \eta_p(H_p(q)^{-1} h_1 H_p(q), \_) \circ \eta_p(H_p(q)^{-1} h_2 H_p(q), \_) = \eta_q(h_1, \_) \circ \eta_q(h_2, \_)$, o que implica que η_q é uma ação de grupos, que é minimal e de convergência pois por construção é equivalente a η_p.

Como P é o conjunto de pontos parabólicos limitados, temos que $\forall p \in P$, a ação $\varphi|_{Stab_\varphi p \times (Z - \{p\})}$ é própria e cocompacta, portanto podemos tomar a soma-atrator $X_p = (Z - \{p\}) + C_p$ e temos que a ação $\psi_p = \varphi|_{Stab_\varphi p \times (Z - \{p\})} + \eta_p : Stab_\varphi p \curvearrowright X_p$ é de convergência. Temos que a aplicação quociente $\pi_p : X_p \to Z$, tal que $\pi_p|_{Z - \{p\}}$ é a aplicação de inclusão de $Z - \{p\}$ e $\pi_p(C_p) = p$, é $Stab_\varphi p$ - equivariante com respeito a ψ_p e φ, respectivamente.

Para $p \in P'$, $q \in Orb_\varphi p$ e $g \in G - Stab_\varphi p$, tomemos $\psi_q(g, \_) : X_q \to X_{\varphi(g,q)}$ dada por $\psi_q(g, \_) = \varphi(g, \_)|_{Z - \{q\}} + \eta_p(H_p(\varphi(g, q))^{-1} g H_p(q), \_)$, (já que $H_p(\varphi(g, q))^{-1} g H_p(q) \in Stab_\varphi p$). Temos que $\tau : Stab_\varphi q \to Stab_\varphi \varphi(g, q)$ tal que $\tau(x) = gxg^{-1}$ é um isomorfismo e os diagramas comutam ($\forall h \in Stab_\varphi q$):

$$\begin{tikzcd} Z-\{q\} \arrow[r, "\varphi(g,\_)"'] \arrow[d, "\varphi(h,\_)"'] & Z-\{\varphi(g,q)\} \arrow[d, "\varphi(\tau(h),\_)"] \\ Z-\{q\} \arrow[r, "\varphi(g,\_)"'] & Z-\{\varphi(g,q)\} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_q \arrow[r, "\eta_p(H_p(\varphi(g,q))^{-1}gH_p(q),\_)"] \arrow[d, "\eta_q(h,\_)"'] & C_{\varphi(g,q)} \arrow[d, "\eta_{\varphi(g,q)}(\tau(h),\_)"] \\ C_q \arrow[r, "\eta_p(H_p(\varphi(g,q))^{-1}gH_p(q),\_)"'] & C_{\varphi(g,q)} \end{tikzcd}$$

No último diagrama, ambos os termos dão $\eta_p(H_p(\varphi(g,q))^{-1}gH_p(q),\_)$. Portanto $\psi_q(g,\_)$ é homeomorfismo (pela functorialidade do soma-atrator, com respeito ao isomorfismo τ). Temos que $\forall p \in P,\ \psi_p(gh,\_)|_{Z-\{p\}} = \varphi(gh,\_) = \varphi(g,\_) \circ \varphi(h,\_) = \psi_{\varphi(h,p)}(g,\_)|_{Z-\{\varphi(h,p)\}} \circ \psi_p(h,\_)|_{Z-\{p\}}$. Como $\forall p \in P,\ Z-\{p\}$ é denso em X_p, temos que $\psi_p(gh,\_) = \psi_{\varphi(g,p)}(g,\_) \circ \psi_p(h,\_)$. Além disso, temos que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} X_p \arrow[r, "\psi_p(g,\_)"'] \arrow[d, "\pi_p"'] & X_{\varphi(g,p)} \arrow[d, "\pi_{\varphi(g,p)}"] \\ Z \arrow[r, "\varphi(g,\_)"] & Z \end{tikzcd}$$

A aplicação induzida $\psi(g,\_) : \prod_{p\in P} X_p \to \prod_{p\in P} X_p$ é contínua e, como $\psi_p(gh,\_) = \psi_{\varphi(h,p)}(g,\_) \circ \psi_p(h,\_)$, segue que $\psi(gh,\_) = \psi(g,\_) \circ \psi(h,\_)$, ou seja, ψ é uma ação do grupo G. Como todas as aplicações ψ_p comutam o diagrama acima, temos que o subespaço $X = \varprojlim(\{X_p\}_{p\in P}, \{\pi_p\}_{p\in P})$ é G - invariante.

Tomemos $\varpi_p : X \to X_p$ a aplicação de projeção e $\pi = \pi_p \circ \varpi_p$, não importando qual ponto p por conta da definição de produto fibrado. Denotemos ψ restrita a X por $\varphi \ltimes \eta$ e, para concordar com a notação, denotemos X por $Z \ltimes \mathcal{C}$. O par $(Z \ltimes \mathcal{C}, \varphi \ltimes \eta)$ será dito pullback semidireto de (Z,φ) por $(\mathcal{C},\eta)$. Essa construção depende da família minimal $\{H_p\}_{p\in P'}$ mas tal dependência será omitida ao longo do texto.

Proposição 6.1.1. *Sejam $\mathcal{C}' = \{C'_p\}_{p\in P'}$ uma família de espaços Hausdorff compactos, $\eta' = \{\eta'_p\}_{p\in P'}$ uma família de ações de convergência $\eta'_p : Stab_\varphi p \curvearrowright C'_p$ e $\phi = \{\phi_p\}_{p\in P'}$ uma família de aplicações contínuas $\phi_p : C_p \to C'_p$ equivariantes em η_p e η'_p, respectivamente. Então as aplicações $id_{Z-\{p\}} + \phi_p : (Z-\{p\}) + C_p \to (Z-\{p\}) + C'_p$ induzem uma aplicação $\varphi \ltimes \phi : Z \ltimes \mathcal{C} \to Z \ltimes \mathcal{C}'$ contínua e equivariante com respeito a $\varphi \ltimes \eta$ e $\varphi \ltimes \eta'$, respectivamente.*

Demonstração. Sejam $p \in P'$ e $q \in Orb_\varphi p$. Definimos $\phi_q : C_q \to C'_q$ por $\phi_q = \phi_p$ e $X'_q = (Z-\{q\}) + C'_q$. Como $\forall h \in Stab_\varphi q,\ \eta_q(h,\_) = \eta_p(H_p(q)^{-1}hH_p(q),\_)$ e ϕ_p é equivariante com respeito a η_p, segue que ϕ_q é equivariante com respeito a η_q.

Temos pela **Proposição 2.3.1** que as aplicações $id_{Z-\{q\}}+\phi_q$ são contínuas e $Stab_\varphi q$ - equivariantes e, pela definição das aplicações, temos que o diagrama sempre comuta:

$$\begin{tikzcd}
X_q \arrow[r, "id+\phi_q"'] \arrow[d, "\pi_q"'] & X'_q \arrow[d, "\pi'_q"] \\
Z \arrow[r, "id"] & Z
\end{tikzcd}$$

Com π_q e π'_q as aplicações quociente. Portanto induzem uma aplicação contínua $\varphi \ltimes \phi : Z \ltimes \mathcal{C} \to Z \ltimes \mathcal{C}'$. Aplicação essa que comuta os diagramas:

$$\begin{tikzcd}
Z \ltimes \mathcal{C} \arrow[r, "\varphi\ltimes\phi"'] \arrow[d, "\varpi_q"'] & Z \ltimes \mathcal{C}' \arrow[d, "\varpi'_q"] \\
X_q \arrow[r, "id+\phi_q"'] & X'_q
\end{tikzcd}$$

Com ϖ_q e ϖ'_q as aplicações de projeção. Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Z \ltimes \mathcal{C} \arrow[rr, "\varphi\ltimes\phi"'] \arrow[dr, "\varphi\ltimes\eta(g,_)"] \arrow[dd, "\varpi_q"'] & & Z \ltimes \mathcal{C}' \arrow[dr, "\varphi\ltimes\eta'(g,_)"] \arrow[dd, "\varpi'_q"'] & \\
& Z \ltimes \mathcal{C} \arrow[rr, "\varphi\ltimes\phi"'] \arrow[dd, "\varpi_{\varphi(g,q)}"'] & & Z \ltimes \mathcal{C}' \arrow[dd, "\varpi'_{\varphi(g,q)}"] \\
X_q \arrow[rr, "id+\phi_q"'] \arrow[dr, "\psi_q(g,_)"] \arrow[dd, "\pi_q"'] & & X'_q \arrow[dr, "\psi'_q(g,_)"] \arrow[dd, "\pi'_q"'] & \\
& X_{\varphi(g,q)} \arrow[rr, "id+\phi_{\varphi(g,q)}"'] \arrow[dd, "\pi_{\varphi(g,q)}"'] & & X'_{\varphi(g,q)} \arrow[dd, "\pi'_{\varphi(g,q)}"] \\
Z \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "\varphi(g,_)"'] & & Z \arrow[dr, "\varphi(g,_)"] & \\
& Z \arrow[rr, "id"] & & Z
\arrow[from=1-1, to=2-4, phantom, "\mathbf{1}"]
\arrow[from=3-1, to=4-4, phantom, "\mathbf{2}"]
\arrow[from=5-1, to=6-4, phantom, "\mathbf{3}"]
\end{tikzcd}$$

Todos os quadrados do diagrama comutam exceto, a princípio, os quadrados **1** e **2**. Temos que:

$$(id+\phi_{\varphi(g,q)}) \circ \psi_q(g,\_)|_{Z-\{q\}} = \varphi(g,\_)|_{Z-\{q\}} = \psi'_q(g,\_) \circ (id+\phi_q)|_{Z-\{q\}}$$

E

$$(id+\phi_{\varphi(g,q)}) \circ \psi_q(g,\_)|_{C_q} = \phi_{\varphi(g,q)} \circ \eta_p(H_p(\varphi(g,q))^{-1}gH_p(q),\_) =$$

$$\eta'_p(H_p(\varphi(g,q))^{-1}gH_p(q),\_) \circ \phi_{\varphi(g,q)} = \eta'_p(H_p(\varphi(g,q))^{-1}gH_p(q),\_) \circ \phi_q =$$

$$\psi'_q(g,\_) \circ (id+\phi_q)|_{C_q}$$

Pois ϕ_p é equivariante com relação a η_p e η'_p e $\phi_p = \phi_q = \phi_{\varphi(g,q)}$. Portanto o quadrado **2** comuta. Temos que $\varphi \ltimes \eta(g, \_)$ é induzido pelas aplicações $\psi_q(g, \_)$ e $\varphi(g, \_)$, $\forall q \in P$ e $\varphi \ltimes \phi$ é induzido pelas aplicações $id_{Z-\{q\}} + \phi_q$ e id_Z, $\forall q \in P$. Pelo fato de que o quadrado **2** comuta e pela functorialidade das aplicações induzidas pelo limite inverso, segue que o quadrado **1** comuta.

Portanto $\varphi \ltimes \phi$ é equivariante com respeito a $\varphi \ltimes \eta$ e $\varphi \ltimes \eta'$, respectivamente.

□

Definição 6.1.2. Seja G um grupo. Denotemos por $CTop(G)$ a categoria cujos objetos são ações minimais de G por homeomorfismos em espaços topológicos Hausdorff compactos, por $Conv(G)$ a categoria cujos objetos são ações minimais de convergência de G em espaços Hausdorff compactos e por $MCTop(G)$ (respec. $MConv(G)$) a subcategoria plena de $CTop(G)$ (respec. $Conv(G)$) tal que as ações são sobre espaços metrizáveis. Em todas as categorias os morfismos são aplicações contínuas equivariantes.

Proposição 6.1.3. *$\forall \eta$, $\varphi \ltimes \eta$ é minimal.*

Demonstração. Seja $x \in Z \ltimes \mathcal{C}$. Se $\pi(x) = p \in P$, então tome $y \in C_p \subseteq X_p$ e $\{g_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subseteq Stab_\varphi p$ tais que $\lim \eta_p(g_\gamma, y) = \pi_p(x)$ (existem pois η_p é minimal). Neste caso, temos que $\lim \varphi \ltimes \eta(g_\gamma, \pi_p^{-1}(y)) = x$, visto que $\#\pi_p^{-1}(\pi_p(x)) = 1$. Se $\pi(x) \notin P$, então, pela minimalidade de φ, $\exists y \in Z$ e $\{g_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subseteq G$ tais que $\lim \varphi(g_\gamma, y) = \pi(x)$. Se $y' \in \pi^{-1}(y)$ então $\lim \varphi \ltimes \eta(g_\gamma, y') = x$, visto que $\#\pi^{-1}(x) = 1$. Portanto $\varphi \ltimes \eta$ é minimal. □

Proposição 6.1.4. *Sejam G um grupo, Z um compacto Hausdorff, $\varphi : G \curvearrowright Z$ uma ação de convergência, P o conjunto de pontos parabólicos de φ, $P' \subseteq P$ um conjunto de representantes de órbitas e $H = \{H_p\}_{p\in P'}$ a família de subconjuntos minimais de G tais que $Orb_{\varphi|_{H_p \times Z}} p = Orb_\varphi p$. Então o mapa $\varphi\ltimes : \prod_{p\in P'} Conv(Stab_\varphi p) \to CTop(G)$ tal que $\varphi \ltimes (\eta) = \varphi \ltimes \eta$ e $\varphi \ltimes (\phi) = \varphi \ltimes \phi$, em que η é uma família de ações de convergência e ϕ é uma família de aplicações equivariantes, é um functor.*

Demonstração. Pela **Proposição 6.1.1** temos que se $\phi = \{\phi_p\}_{p\in P}$ é uma família de aplicações contínuas equivariantes então $\varphi \ltimes \phi$ é uma aplicação contínua G - equivariante. Mas $\varphi \ltimes \phi$ é induzida por aplicações $id + \phi_p$. Segue pela functorialidade do limite inverso e pelo fato que $id + (\phi'_p \circ \phi_p) = (id + \phi'_p) \circ (id + \phi_p)$ (para alguma família $\phi' = \{\phi'_p\}_{p\in P}$) que $\varphi \ltimes (\phi'_p \circ \phi_p) = (\varphi \ltimes \phi'_p) \circ (\varphi \ltimes \phi_p)$. Portanto $\varphi\ltimes$ é um functor, cuja imagem está em $CTop(G)$, pela proposição anterior. □

Denotaremos $\varphi\ltimes$ pelo pullback semidireto de φ.

Proposição 6.1.5. *Se G e P são enumeráveis, então o functor $\varphi\ltimes$ se restringe ao functor (que manteremos o nome) $\varphi\ltimes : \prod_{p\in P'} MConv(Stab_\varphi p) \to MCTop(G)$.*

Demonstração. Temos que, pela **Proposição 1.5.20**, X_p é metrizável, o que implica que $\prod_{p\in P} X_p$ é metrizável, já que P é enumerável. Como X é um subespaço de $\prod_{p\in P} X_p$, segue que X é metrizável. $\square$

O pullback semidireto não depende da escolha da família H:

Proposição 6.1.6. *Seja $\varphi\ltimes'$ induzida pela aplicação φ, por P' e pela família minimal $H' = \{H'_p\}_{p\in P'}$. Então existe um isomorfismo natural entre $\varphi\ltimes$ e $\varphi\ltimes'$.*

Demonstração. Sejam $X = Z \ltimes \mathcal{C}$ e $X' = Z \ltimes \mathcal{C}$ para uma mesma família de ações η. Tomemos, para $p \in P'$ e $q \in Orb_\varphi p$, a aplicação $T_{\eta q} : X_q \to X'_q$ definida por $id_{Z-\{q\}} + \eta_p(H'_p(q)^{-1}H_p(q), \_)$ (observe que $H'_p(q)^{-1}H_p(q) \in Orb_\varphi p$). Temos que os seguintes diagramas comutam ($\forall h \in Stab_\varphi q$):

$$\begin{tikzcd}
Z-\{q\} \arrow[r, "id"'] \arrow[d, "\varphi(h,_)"'] & Z-\{q\} \arrow[d, "\varphi(h,_)"] \\
Z-\{q\} \arrow[r, "id"'] & Z-\{q\}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_q \arrow[r, "\eta_p(H'_p(q)^{-1}H_p(q),_)"] \arrow[d, "\eta_p(H_p(q)^{-1}hH_p(q),_)"] & C_q \arrow[d, "\eta_p(H'_p(q)^{-1}hH'_p(q),_)"] \\
C_q \arrow[r, "\eta_p(H'_p(q)^{-1}H_p(q),_)"'] & C_q
\end{tikzcd}$$

O que implica que, pela functorialidade do soma-atrator, $T_{\eta q}$ é homeomorfismo. Temos que $\forall q \in P$, o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
X_q \arrow[r, "T_{\eta q}"'] \arrow[d, "\pi_q"'] & X'_q \arrow[d, "\pi'_q"] \\
Z \arrow[r, "id"'] & Z
\end{tikzcd}$$

O que implica que a família de aplicações $\{T_{\eta q}\}_{q\in P}$ induz um homeomorfismo $T_\eta : X \to X'$. E segue que T é G - equivariante pois $\forall g \in G$, os diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
Z-\{q\} \arrow[r, "\varphi(g,q)"'] \arrow[d, "id"'] & Z-\{\varphi(g,q)\} \arrow[d, "id"] \\
Z-\{q\} \arrow[r, "\varphi(g,q)"'] & Z-\{\varphi(g,q)\}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_q \arrow[r, "\eta_p(H_p(\varphi(g,q))^{-1}gH_p(q),_)"] \arrow[d, "\eta_p(H'_p(q)^{-1}H_p(q),_)"] & C_{\varphi(g,q)} \arrow[d, "\eta_p(H'_p(\varphi(g,q))^{-1}H_p(\varphi(g,q)),_)"] \\
C_q \arrow[r, "\eta_p(H'_p(\varphi(g,q))^{-1}gH'_p(q),_)"'] & C_{\varphi(g,q)}
\end{tikzcd}$$

Portanto T_η é um isomorfismo entre $\varphi \ltimes \eta$ e $\varphi \ltimes' \eta$. Tome $T = \{T_\eta\}_\eta : \varphi\ltimes \Rightarrow \varphi\ltimes'$. Tomemos $Y = Z \times \mathcal{D}$ e $Y' = Z \times' \mathcal{D}$, para uma família de espaços $\mathcal{D} = \{D_p\}_{p\in P'}$ e uma família de ações $\mu = \{\mu_p\}_{p\in P'}$. Seja $\phi = \{\phi_p\}_{p\in P'} : \eta \to \mu$ um morfismo. Temos que, $\forall p \in P'$ e $q \in Orb_\varphi p$, os diagramas comutam (pois ϕ_q é equivariante com relação a η_q e μ_q):

$$\begin{tikzcd} Z-\{q\} \arrow[r, "id"'] \arrow[d, "id"'] & Z-\{q\} \arrow[d, "id"] \\ Z-\{q\} \arrow[r, "id"'] & Z-\{q\} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_q \arrow[r, "\phi_q"] \arrow[d, "T_{\eta q}"] & D_q \arrow[d, "T_{\mu q}"] \\ C_q \arrow[r, "\phi_q"'] & D_q \end{tikzcd}$$

O que implica que o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi\ltimes\phi"'] \arrow[d, "T_\eta"'] & Y \arrow[d, "T_\mu"] \\ X' \arrow[r, "\varphi\ltimes'\phi"'] & Y' \end{tikzcd}$$

E portanto T é uma transformação natural. Como $\forall\eta$, T_η é isomorfismo, segue que T é um isomorfismo natural.

□

Gostariamos de restringir nossos functores $\varphi\ltimes$ a categoria $Cong(G)$. Nessa dissertação iremos manter esse desejo ainda como conjectura.

Conjectura 1.(versão forte) $\forall\eta$, $\varphi \ltimes \eta$ é de convergência.

Conjectura 2.(versão fraca) Se φ é relativamente hiperbólica então $\forall\eta$, $\varphi \ltimes \eta$ é de convergência.

Veremos mais a frente que esse tipo de resultado é válido para grupos finitamente gerados e ações relativamente hiperbólicas.

Proposição 6.1.7. *Se $p \in P$ então $Stab_\varphi p$ é dinamicamente quaseconvexo com respeito a ação $\varphi \ltimes \eta$.*

Demonstração. Temos que a relação de equivalência $\sim = \Delta^2 X \cup \bigcup_{p\in P} \pi^{-1}(p)^2$ é topologicamente quaseconvexa (**Proposição 5.0.2**). Mas temos que $\pi^{-1}(p) = \Lambda_{\varphi\ltimes\eta}(Stab_\varphi p)$ (**Proposição 1.5.13**), o que implica que $\sim = \Delta^2 X \cup \bigcup_{p\in Orb_\varphi p} \Lambda_{\varphi\ltimes\eta}(Stab_\varphi p)^2$ é topologicamente quaseconvexa. Mas, pela construção de $\varphi\ltimes\eta$, temos que se $g \notin Stab_\varphi p$, então $\varphi \ltimes \eta(g, \Lambda_{\varphi\ltimes\eta}(Stab_\varphi p)) = \Lambda_{\varphi\ltimes\eta}(Stab_\varphi \varphi(g,p)) = \pi^{-1}(\varphi(g,p))$. Como $\pi^{-1}(\varphi(g,p)) = \pi^{-1}(p)$ ou $\pi^{-1}(\varphi(g,p)) \cap \pi^{-1}(p) = \emptyset$, segue, pela **Proposição 1.5.15**, que $Stab_\varphi p$ é dinamicamente quaseconvexo. □

Proposição 6.1.8. *Sejam* $\alpha : G \curvearrowright Y$ *ação de convergência e* $F : Y \to Z$ *uma aplicação contínua, sobrejetiva e* G *- equivariante. Se* $F|_{F^{-1}(Z-P)}$ *é injetiva, então existe um único homeomorfismo equivariante* $\bar{F} : Y \to Z \ltimes \mathcal{C}$*, com* $\mathcal{C} = \{\Lambda_\alpha(Stab_\varphi p)\}_{p \in P'}$ *que comuta com as respectivas projeções em* Z.

Demonstração. Como $\forall p \in P$, $F^{-1}(p) = \Lambda_\alpha(Stab_\varphi p)$ (**Proposição 1.5.13**), temos que a ação $\alpha|_{Stab_\varphi \times F^{-1}(p)} : Stab_\varphi p \curvearrowright F^{-1}(p)$ é minimal (e é de convergência), podemos tomar $\mathcal{C} = \{F^{-1}(p)\}_{p \in P'}$ e $\eta = \{\alpha|_{Stab_\varphi \times F^{-1}(p)}\}_{p \in P'}$. Escolhemos também a família $H = \{H_p\}$ de subconjuntos de G. Definimos para $p \in P'$, a aplicação $F_p : Y = (Y - F^{-1}(p)) + F^{-1}(p) \to (Z - \{p\}) + F^{-1}(p) = X_p$ como $F_p = F|_{Y - F^{-1}(p)} + id_{F^{-1}(p)}$ e para $p \in P'$ e $q \in Orb_\varphi p$, $F_q : Y = (Y - F^{-1}(q)) + F^{-1}(q) \to (Z - \{q\}) + F^{-1}(p) = X_q$, como $F_q = F|_{Y - F^{-1}(q)} + \alpha(H_p(q)^{-1}, \_)|_{F^{-1}(q)}$. Temos que $\forall p \in P$, F_p é $Stab_\varphi p$ - equivariante. De fato, para $\alpha(H_p(q)^{-1}, \_)|_{F^{-1}(q)}$ e $g \in Stab_\varphi q$, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd}
F^{-1}(q) \arrow[r, "\alpha(g,_)"] \arrow[d, "\alpha(H_p(q)^{-1},_)"'] & F^{-1}(q) \arrow[d, "\alpha(H_p(q)^{-1},_)"] \\
F^{-1}(p) \arrow[r, "\alpha(H_p(q)^{-1} g H_p(q),_)"'] & F^{-1}(p)
\end{tikzcd}$$

Pela functorialidade do soma-atrator segue que $\forall p \in P$, F_p é contínua. Temos também que, $\forall p \in P'$, $\forall q \in Orb_\varphi p$ e $\forall g \in G - Stab_\varphi q$, o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
F^{-1}(q) \arrow[r, "\alpha(g,_)"] \arrow[d, "\alpha(H_p(q)^{-1},_)"'] & F^{-1}(\varphi(g,q)) \arrow[d, "\alpha(H_p(\varphi(g,q))^{-1},_)"] \\
F^{-1}(p) \arrow[r, "\alpha(H_p(\varphi(g,q))^{-1} g H_p(q),_)"'] & F^{-1}(p)
\end{tikzcd}$$

O que implica que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\alpha(g,_)"] \arrow[d, "F_q"'] & Y \arrow[d, "F_{\varphi(g,q)}"] \\
X_q \arrow[r, "\psi_q(g,_)"'] & X_{\varphi(g,q)}
\end{tikzcd}$$

Com $\psi_q(g, \_) = \varphi(g, \_)|_{Z - \{q\}} + \alpha(H_p(\varphi(g, q))^{-1} g H_p(q), \_)|_{F^{-1}(p)}$ a aplicação definida na construção do pullback semidireto. Portanto as aplicações $\{F_p\}_{p \in P}$ e F induzem uma aplicação contínua $\bar{F} : Y \to Z \ltimes \mathcal{C}$. Temos que $\bar{F}$ é sobrejetiva pois cada aplicação é sobrejetiva e é injetiva pois cada F_p é injetiva em $F^{-1}(p)$ e todas as aplicações são bijetivas no conjunto dos pontos não parabólicos limitados. Portanto $\bar{F}$ é um homeomorfismo.

Consideremos o seguinte diagrama (para $q \in P$):

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rrr, "\alpha(g,_)"] \arrow[dr, "\bar{F}"] \arrow[dd, "F_q"'] & & & Y \arrow[dl, "\bar{F}"'] \arrow[dd, "F_{\varphi(g,q)}"] \\
& Z \ltimes \mathcal{C} \arrow[r, "\psi(g,_)"] \arrow[dl, "\varpi_q"] & Z \ltimes \mathcal{C} \arrow[dr, "\varpi_{\varphi(g,q)}"] & \\
X_q \arrow[rrr, "\psi_q(g,_)"] & & & X_{\varphi(g,q)}
\end{tikzcd}$$

Temos que os dois triângulos comutam pela construção de $\bar{F}$ e o trapézio de baixo comuta pela construção de ψ. Temos que $F_q|_{F^{-1}(q)}$, $\varpi_q|_{\bar{F}(F^{-1}(q))}$, $F_{\varphi(g,q)}|_{F^{-1}(\varphi(g,q))}$ e $\varpi_{\varphi(g,q)}|_{\bar{F}(F^{-1}(\varphi(g,q)))}$ são bijetivas, o que implica que $\bar{F}^{-1} \circ \psi(g, \_) \circ \bar{F}|_{F^{-1}(q)} = F^{-1}_{\varphi(g,q)} \circ \psi_q(g, \_) \circ F_q|_{F^{-1}(q)} = \alpha(g, \_)|_{F^{-1}(q)}$, como foi visto anteriormente. Variando q em P, segue que $\bar{F}|_{F^{-1}(P)}$ é G - equivariante. Como $F^{-1}(P)$ é denso em Y, segue que $\bar{F}$ é G - equivariante. Portanto $Y \cong Z \ltimes \mathcal{C}$, com $\mathcal{C} = \{F^{-1}(p)\}_{p \in P'}$ e cujo homeomorfismo é equivariante com respeito a α e $\psi = \varphi \ltimes \eta$, com $\eta = \{\alpha|_{Stab_\varphi \times F^{-1}(p)}\}_{p \in P'}$. A unicidade de $\bar{F}$ segue do fato que tal aplicação é unicamente determinada em $Y - F^{-1}(P)$, que é denso em Y.

□

Ou seja, $\alpha \cong \varphi \ltimes \eta$, com $\eta = \{\alpha|_{Stab_\varphi \times F^{-1}(p)}\}_{p \in P'}$ e tal isomorfismo é único.

Corolário 6.1.9. *Sejam $\alpha : G \curvearrowright Y$ ação de convergência e $F : Y \to Z$ uma aplicação contínua, sobrejetiva, G - equivariante e tal que $F|_{F^{-1}(Z-P)}$ é injetiva. Então $\forall p \in P$, $Stab_\varphi p$ é dinamicamente quaseconvexo com respeito a α.*

Demonstração. Imediato. □

Em particular temos:

Corolário 6.1.10. *Sejam $\alpha : G \curvearrowright Y$ ação relativamente hiperbólica e $F : Y \to Z$ uma aplicação contínua, sobrejetiva e G - equivariante. Então $\forall p \in P$, $Stab_\varphi p$ é dinamicamente quaseconvexo com respeito a α.*

Demonstração. Imediato. □

Proposição 6.1.11. *Sejam $\psi_i : G \curvearrowright Y_i$ ações de convergência e $F_i : Y_i \to Z$ uma aplicação contínua, sobrejetiva e G - equivariante tais que $\forall p \in P'$, $Stab_{\varphi_i} p$ é dinamicamente quaseconvexo com respeito as ações ψ_i, P' é finito e $F_i|_{F_i^{-1}(Z-P)}$ é* *injetiva. Seja $J : Y_1 \to Y_2$ é uma aplicação contínua e G - equivariante tal que o diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, "J"] \arrow[d, "F_1"'] & Y_2 \arrow[dl, "F_2"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Então existe uma única aplicação $\bar{J}$ contínua e G - equivariante entre $Z \ltimes \mathcal{C}_1$ e $Z \ltimes \mathcal{C}_2$, com $\mathcal{C}_i = \{\Lambda_{\psi_i}(Stab_{\varphi_i} p)\}_{p \in P'}$ que comuta o diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, "J"] \arrow[d, "\bar{F}_1"'] & Y_2 \arrow[d, "\bar{F}_2"] \\ Z \ltimes \mathcal{C}_1 \arrow[r, "\bar{J}"] & Z \ltimes \mathcal{C}_2 \end{tikzcd}$$

Demonstração. Temos que $\bar{J} = \bar{F}_2 \circ J \circ \bar{F}_1$ é uma aplicação contínua e G - equivariante que comuta o diagrama. Temos que $\bar{F}_1$ e $\bar{F}_2$ são unicamente determinadas, portanto $\bar{J}$ também é unicamente determinado. □

6.2 Fronteiras de Floyd e convergência

Como para a ação na fronteira de Floyd ainda não temos quaseconvexidade dinâmica para os estabilizadores de pontos parabólicos de Z, precisamos de uma demonstração diferente:

Proposição 6.2.1. *Se G é finitamente gerado, φ e $\forall p \in P'$, η_p são relativamente hiperbólicas, então $\exists \lambda \in (0,1)$ tal que $\partial_f G \cong Z \ltimes \mathcal{C}$, com $\mathcal{C} = \{\partial_f(Stab_\varphi p)\}_{p \in P'}$, com $f(n) = \lambda^n$. Temos que tal homeomorfismo é G - equivariante e comuta com as projeções. Além disso, $\forall \lambda' \in (0,1) :\ \lambda' > \lambda$ ainda é válido o resultado.*

Demonstração. Como a ação φ é relativamente hiperbólica, temos , pela **Proposição 1.5.35**, que existe o mapa de Floyd $F : \partial_f G \to Z$ para algum $\lambda \in (0,1)$. Como $\forall p \in P,\ F^{-1}(p) = \partial_f(Stab_\varphi p)$ (**Proposição 1.5.36**), temos que a ação $\psi|_{Stab_\varphi \times \partial_f(Stab_\varphi p)} : Stab_\varphi p \curvearrowright \partial_f(Stab_\varphi p)$ é de convergência (**Proposição 1.5.34**), podemos tomar $\mathcal{C} = \{\partial_f(Stab_\varphi p)\}_{p \in P'}$ e $\eta = \{\psi|_{Stab_\varphi \times \partial_f(Stab_\varphi p)}\}_{p \in P'}$. Temos que $\forall p \in P,\ F_p = F|_{\partial_f G - \partial_f(Stab_\varphi p)} + id : (\partial_f G - \partial_f(Stab_\varphi p)) + \partial_f(Stab_\varphi p) \to (Z - \{p\}) + \partial_f(Stab_\varphi p)$ é $Stab_\varphi p$ - equivariante e contínua em cada um dos termos, o que implica, pela functorialidade do soma-atrator, que é contínua. Portanto as aplicações $\{F_p\}_{p \in P}$ e F induzem uma aplicação contínua $\bar{F} : \partial_f G \to Z \ltimes \mathcal{C}$. Temos que $\bar{F}$ é sobrejetiva pois cada aplicação é sobrejetiva e é injetiva pois cada F_p é injetiva em $\partial_f(Stab_\varphi p)$ e todas as aplicações são bijetivas no conjunto dos pontos cônicos. Portanto $\bar{F}$ é um homeomorfismo. Como cada aplicação é G - equivariante se restrita ao conjunto de pontos cônicos, segue que $\bar{F}$ é G - equivariante no conjunto dos pontos cônicos. Como o conjunto dos pontos cônicos é denso em $\partial_f G$, segue que $\bar{F}$ é G - equivariante. Portanto $\partial_f G \cong Z \ltimes \mathcal{C}$, com $\mathcal{C} = \{\partial_f(Stab_\varphi p)\}_{p \in P'}$ e cujo homeomorfismo é equivariante com respeito a ψ e $\varphi \ltimes \eta$, com $\eta = \{\psi|_{Stab_\varphi \times \partial_f(Stab_\varphi p)}\}_{p \in P'}$.

□

Corolário 6.2.2. *Se G é finitamente gerado e φ é relativamente hiperbólica, então $\forall p \in P$, $Stab_\varphi p$ é dinamicamente quaseconvexo com respeito a ação $\psi : G \curvearrowright \partial_f G$.*

Demonstração. Imediato. □

Proposição 6.2.3. *Se G é finitamente gerado, ψ e $\forall p \in P'$, η_p são relativamente hiperbólicas, então $\exists F_X : \partial_f G \to X$ aplicação contínua, sobrejetiva e G - equivariante, com $f(n) = \lambda^n$ para o mesmo λ acima.*

Demonstração. Temos neste caso que $Y_q = (Y_q - F_q(F^{-1}(q))) + F_q(F^{-1}(q))$ a soma-atrator com respeito a ação $\psi_q : Stab_\varphi q \curvearrowright Y_q$, com $F'_q|_{Y_q - F_q(F^{-1}(q))} : Y_q - F_q(F^{-1}(q)) \to Z - \{q\}$ e $F_q|_{\partial_f(Stab_\varphi q)} : F_q(F^{-1}(q)) \to \partial_f(Stab_\varphi q)$ homeomorfismos $Stab_\varphi q$ - invariantes. Como η_q é relativamente hiperbólica (pois é equivalente a alguma ação η_p com $p \in P'$ e todas essas são, por hipótese, relativamente hiperbólicas), $\exists J_q : F_q(F^{-1}(q)) \to C_q$ aplicação contínua equivariante. Pela functorialidade do soma-atrator, a aplicação $J'_q = F'_q|_{Y_q - F_q(F^{-1}(q))} + J_q : Y_q = (Y_q - F_q(F^{-1}(q))) + F_q(F^{-1}(q)) \to (Z - \{q\}) + C_q = X_q$ é uma aplicação contínua, sobrejetiva e $Stab_\varphi q$ - equivariante. Temos que o diagrama sempre comuta:

$$\begin{tikzcd} Y_q \arrow[d, "J'_q"'] \arrow[dr, "F'_q"] & \\ X_q \arrow[r, "\pi_p"'] & Z \end{tikzcd}$$

Pois por construção comuta em $Y_q - F_q(F^{-1}(q))$ e o restante é levado em q por ambos os lados. Pela propriedade do produto fibrado, temos que $\exists F_X : \partial_f G \to X$ aplicação contínua. Como cada J'_q é sobrejetiva, segue que F_X também é sobrejetiva. Como cada aplicação é G - equivariante ao restringir ao conjunto dos pontos cônicos, segue que F_X é G - equivariante no conjunto dos pontos cônicos. Como o conjunto dos pontos cônicos é denso em Y, segue que F_X é G - equivariante. □

E temos o resultado sobre convergência:

Corolário 6.2.4. *Se G é finitamente gerado, ψ e $\forall p \in P'$, η_p são relativamente hiperbólicas, então a ação $\varphi \ltimes \eta : G \curvearrowright X$ é de convergência.*

Demonstração. Temos uma aplicação $\exists F_X : \partial_f G \to X$ contínua, sobrejetiva e G - equivariante, o que implica, pela **Proposição 1.5.6** que a ação $\varphi \ltimes \eta$ deve ser de convergência, visto que pela **Proposição 1.5.34** a ação $\psi : G \curvearrowright \partial_f G$ é de convergência. $\square$

6.3 Transitividade de ações relativamente hiperbólicas

Suponhamos aqui que $\psi \ltimes \eta$ é de convergência (vimos que é de fato quando G é finitamente gerado e η, e $\forall p \in P'$, η_p são relativamente hiperbólicas).

Proposição 6.3.1. *Sejam $A_p \subseteq C_p$ e $A \subseteq Z$ os conjuntos de pontos cônicos com respeito as ações η_p e φ, respectivamente. Então os pontos de $\pi^{-1}(A) \cup \bigcup\limits_{p \in P} \pi_p^{-1}(A_p)$ são cônicos.*

Demonstração. Temos que π é uma aplicação G - invariante, portanto os elementos de $\pi^{-1}(A)$ são pontos cônicos de X. Temos também que $\forall p \in P$, π_p é $Stab_\varphi p$ - invariante, portanto os elementos de $\pi_p^{-1}(A_p)$ são pontos cônicos de X, com respeito a $Stab_\varphi p$, o que implica que são pontos cônicos de X com respeito a G. Portanto os elementos de $\pi^{-1}(A) \cup \bigcup\limits_{p \in P} \pi_p^{-1}(A_p)$ são cônicos. $\square$

Corolário 6.3.2. *Se $\forall p \in P'$, $A_p = C_p$ e $A = Z - P$, então todos os pontos de X são cônicos.*

Demonstração. Temos que $\pi^{-1}(A) \cup \bigcup\limits_{p \in P} \pi_p^{-1}(A_p) = \pi^{-1}(Z - P) \cup \bigcup\limits_{p \in P} \pi_p^{-1}(C_p) = X$. Portanto todos os pontos são cônicos. $\square$

Corolário 6.3.3. *Se G é finitamente gerado e φ possui apenas pontos cônicos e parabólicos limitados então $\varphi \ltimes$ leva ações hiperbólicas em ações hiperbólicas. Segue neste caso que $\partial_\infty G = Z \ltimes \{\partial_\infty Stab_\varphi p\}_{p \in P'}$.*

Demonstração. Como todas as ações η_p são hiperbólicas, todos os pontos dos conjuntos C_p são cônicos, o que implica que todos os pontos $Z \ltimes \mathcal{C}$ são cônicos e portanto $\varphi \ltimes \eta$ é hiperbólica. Da unicidade segue que $\partial_\infty G = Z \ltimes \{\partial_\infty Stab_\varphi p\}_{p \in P'}$. $\square$

Proposição 6.3.4. *Sejam $B_p \subseteq C_p$ os conjuntos de pontos parabólicos limitados com respeito a ação η_p. Então o conjunto dos pontos parabólicos limitados com respeito a ação $\varphi \ltimes \eta$ é dado por $\bigcup_{p \in P} \pi_p^{-1}(B_p)$.*

Demonstração. Seja $x \in B_p$. Temos que $\#\pi_p^{-1}(x) = 1$ e, pela **Proposição 1.5.11**, temos que $\pi_p^{-1}(x)$ é parabólico limitado. Portanto os pontos de $\bigcup_{p \in P} \pi_p^{-1}(B_p)$ são parabólicos limitados.

Seja x um ponto parabólico limitado. Se $x \notin P$, então $x = \pi^{-1}(\pi(x))$, o que implica, pela **Proposição 1.5.12**, que $\pi(x)$ é parabólico limitado, absurdo pela definição de P. Temos então que $\pi(x) \in P$. Temos que $\#\pi_p^{-1}(\pi_p(x)) = 1$, o que implica, pela **Proposição 1.5.12**, que $\pi_p(x)$ é parabólico limitado e portanto $x \in \pi_p^{-1}(B_p)$.

Portanto o conjunto dos pontos parabólicos limitados de $\varphi \ltimes \eta$ é dado por $\bigcup_{p \in P} \pi_p^{-1}(B_p)$. □

Corolário 6.3.5. *Se $\forall p \in P'$, $A_p \cup B_p = C_p$ e $A \cup P = Z$, então todos os pontos de X são cônicos ou parabólicos limitados.*

Demonstração. Seja $p \in Orb_\varphi p_0$, com $p_0 \in P'$. Então temos que $\exists g \in H_{p_0} : \varphi(g, p_0) = p$. Por construção de η_p, temso que $A_p = \varphi(g, A_{p_0})$ e $B_p = \varphi(g, B_{p_0})$. Portanto $\forall p \in P$, $A_p \cup B_p = C_p$. Temos então que $(\pi^{-1}(A) \cup \bigcup_{p \in P} \pi_p^{-1}(A_p)) \cup \bigcup_{p \in P} \pi_p^{-1}(B_p) = \pi^{-1}(A) \cup \bigcup_{p \in P} \pi_p^{-1}(A_p \cup B_p) = \pi^{-1}(A) \cup \bigcup_{p \in P} \pi_p^{-1}(C_p) = \pi^{-1}(A) \cup \pi^{-1}(P) = \pi^{-1}(Z) = X$. Portanto todos os pontos de X são cônicos ou parabólicos limitados. □

Corolário 6.3.6. *Se G é finitamente gerado, e φ é relativamente hiperbólica então $\varphi \ltimes$ leva ações $\eta = \{\eta_p\}_{p \in P'}$ relativamente hiperbólicas em ações $\varphi \ltimes \eta$ relativamente hiperbólicas. Segue neste caso que $\partial_B(G, \bigcup_{p \in P'} \mathcal{P}_p) = Z \ltimes \{\partial_B(Stab_\varphi p, \mathcal{P}_p)\}_{p \in P'}$, em que $\mathcal{P}_p$ é um conjunto de representantes de subgrupos parabólicos limitados da ação η_p de $Stab_\varphi p$ em C_p.*

Demonstração. Como φ e as ações de $\eta = \{\eta_p\}_{p \in P'}$ são relativamente hiperbólicas, todos os pontos (em Z ou em C_p) são parabólicos limitados ou cônicos. Pelo corolário anterior temos que todos os pontos de $X = Z \ltimes \{\partial_B(Stab_\varphi p, \mathcal{P}_p)\}_{p \in P'}$ são parabólicos limitados ou cônicos. Como X é metrizável, isso implica que $\varphi \ltimes \eta$ é relativamente hiperbólica.

Se $x \in C_p$ é parabólico limitado então $\pi_p^{-1}(x)$ é parabólico limitado e $Stab_{\eta_p} x = Stab_{\varphi \ltimes \eta} \pi_p^{-1}(x)$. Da unicidade de ações relativamente hiperbólicas (de um conjunto de subgrupos parabólicos limitados fixado), segue a igualdade $\partial_B(G, \bigcup_{p \in P'} \mathcal{P}_p) = Z \ltimes \{\partial_B(Stab_\varphi p, \mathcal{P}_p)\}_{p \in P'}$. □

Corolário 6.3.7. *(Propriedade de transitividade) Se G é finitamente gerado e relativamente hiperbólico, pela ação φ, com respeito ao conjunto $\mathcal{P}$ de representantes de subgrupos parabólicos e cada $P \in \mathcal{P}$ é relativamente hiperbólico com respeito ao conjunto de representantes $\mathcal{P}_P$ então G é relativamente hiperbólico com respeito ao conjunto de representantes $\bigcup \mathcal{P}_P$ e $\partial_B(G, \bigcup \mathcal{P}_P) = \partial_B(G, \mathcal{P}) \ltimes \{\partial_B(P, \mathcal{P}_P)\}_{P\in\mathcal{P}}$.*

O fato de G ser relativamente hiperbólico com respeito ao conjunto $\bigcup \mathcal{P}_P$ é devido a Drutu e Sapir [5].

Demonstração. Imediato do corolário anterior. □

6.4 Ações relativamente hiperbólicas no conjunto de Cantor

Sejam G um grupo finitamente gerado, $\varphi : G \curvearrowright K$ uma ação relativamente hiperbólica, $P \subseteq K$ o conjunto de pontos parabólicos limitados φ - invariantes, $P' \subseteq P$ conjunto finito de representantes de órbitas, $H = \{H_p\}_{p\in P'}$ família de conjuntos minimais tais que $Orb_{\varphi|_{H_p \times K}} p = Orb_\varphi p$. Tomemos $\mathcal{C} = \{C_p\}_{p\in P'}$ uma família de espaços compactos e metrizáveis e $\eta_p : Stab_\varphi p \curvearrowright C_p$ ações relativamente hiperbólicas.

Proposição 6.4.1. *A aplicação quociente $\pi : K \ltimes \mathcal{C} \to K$ é uma explosão de tipo $\mathcal{C}$ (abuso de notação para: as classes de homeomorfismos dos espaços em $\mathcal{C}$).*

Demonstração. Temos por hipótese que P é enumerável e por construção que $\pi|_{\pi^{-1}(K-P)}$ é injetiva, $\pi^{-1}(p) = \pi_p^{-1}(C_p) \cong C_p \in \mathcal{C}$ e $\forall p \in P,\ Cl_X(X - \pi_p^{-1}(C_p)) = X$. Como φ é de convergência e minimal, temos (**Proposição 1.5.5**) que $\forall p \in P,\ Orb_\varphi p$ é densa em K, portanto as classes de equivalência são densas em K. Pela **Proposição 5.0.2** temos que a relação $\Delta^2(K \ltimes \mathcal{C}) \cup \bigcup\limits_{p\in P} \pi^{-1}(p)^2$ é topologicamente quaseconvexa. Portanto π é uma explosão do tipo $\mathcal{C}$. □

Corolário 6.4.2. *O espaço topológico $K \ltimes \mathcal{C}$ depende apenas das classes de espaços a menos de homeomorfismos em $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Segue da **Proposição 5.1.11**. □

Como caso especial temos que o produto livre $G = G_1 * ... * G_n$ é relativamente hiperbólico com respeito a $\{G_1, ..., G_n\}$. Seja $\psi : G \curvearrowright \partial_B(G, \{G_1, ..., G_n\})$ ação de convergência e cocompacta em pares. Temos que, se $G_1, ..., G_n$ são finitamente gerados, $\partial_B(G, \{G_1, ..., G_n\}) \cong K$ e o conjunto de pontos parabólicos limitados é dado por $P = P_1\dot{\cup}...\dot{\cup}P_n$, tal que $\forall i,\ P_i$ é um subconjunto enumerável e denso em $\partial_B(G, \{G_1, ..., G_n\})$.

Vimos que $K \ltimes \mathcal{C}$ depende apenas de $\mathcal{C} = \{C_1, ...C_n\}$, portanto temos os seguintes teoremas:

Teorema 6.4.3. *Seja $G' = G'_1 * ... * G'_n$ finitamente gerado. Se $C_i \cong \partial_B(G_i, \mathcal{P}_i) \cong \partial_B(G'_i, \mathcal{P}'_i)$ então $K \ltimes \mathcal{C} \cong \partial_B(G, \bigcup \mathcal{P}_i) \cong \partial_B(G', \bigcup \mathcal{P}'_i)$.*

Demonstração. Pelo **Corolário 6.3.6** segue que $K \ltimes \mathcal{C} \cong \partial_B(G, \bigcup \mathcal{P}_i)$ e como os espaços $\partial_B(G, \bigcup \mathcal{P}_i)$ e $\partial_B(G', \bigcup \mathcal{P}'_i)$ possuem mesmo tipo de explosão para a projeção em K, segue que $\partial_B(G, \bigcup \mathcal{P}_i) \cong \partial_B(G', \bigcup \mathcal{P}'_i)$. $\square$

Teorema 6.4.4. *Sejam $\mathcal{A}$ uma partição de $\{1, ..., n\}$ tal que se $i, j \in a \in \mathcal{A}$ então $\partial_B(G_i, \mathcal{P}_i) \cong \partial_B(G_j, \mathcal{P}_j)$ e $\{a_1, ..., a_k\}$ um conjunto de representantes dessa partição. Então $\partial_B(G, \bigcup \mathcal{P}_i) \cong \partial_B(G_{a_1} * ... * G_{a_k}, \bigcup \mathcal{P}_{a_i})$.*

Demonstração. Todos os espaços de $\mathcal{C}$ ainda são homeomorfos a manchas do espaço $\partial_B(G_{a_1} * ... * G_{a_k}, \bigcup \mathcal{P}_{a_i})$, o que implica que o tipo da explosão não muda. Portanto os espaços são homeomorfos. $\square$

Aplicamos os teoremas aos casos em que as ações de cada G_i são hiperbólicas (e portanto os grupos são hiperbólicos, pelo **Corolário 6.3.3**). Temos:

Corolário 6.4.5. *Seja $G' = G'_1 * ... * G'_n$ tal que cada G'_i é hiperbólico. Se $\forall i \in \{1, .., n\}$, $\partial_\infty G_i \cong \partial_\infty G'_i$ então $\partial_\infty G \cong \partial_\infty G'$.*

Demonstração. Imediato. $\square$

Corolário 6.4.6. *Sejam $\mathcal{A}$ uma partição de $\{1, ..., n\}$ tal que se $i, j \in a \in \mathcal{A}$ então $\partial_\infty G_i \cong \partial_\infty G_j$ e $\{a_1, ..., a_k\}$ um conjunto de representantes dessa partição. Então $\partial_\infty G \cong \partial_\infty(G_{a_1} * ... * G_{a_k})$.*

Demonstração. Imediato. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] N. Bourbaki, *Topologie Générale.* Hermann, Paris, 1965.

[2] B. H. Bowditch, *Convergence groups and configuration spaces.* in "Group theory down under"(ed. J.Cossey, C.F.Miller, W.D.Neumann, M.Shapiro), de Gruyter, p. 23-54, 1999.

[3] B. H. Bowditch, *A Topological Characterization of Hyperbolic Groups.* J. Amer Math. Soc., v. 11, p.643-667, 1998.

[4] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature.* Springer, 1964.

[5] C. Drutu and M. Sapir, *Tree-graded spaces and asymptotic cones of groups. With an appendix by D. Osin and M. Sapir.* Topology v. 44, n. 5, p. 959-1058, 2005.

[6] R. Engelking, *General Topology.* Sigma Series in Pure Mathematics, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[7] W. J. Floyd, *Group completions and limit sets of Kleinian groups.* Inventiones Mathematicae v. 57, n. 3, p. 205–18, 1980.

[8] R. C. Freiwald, *An Introduction to Set Theory and Topology.* Notas de aula, Washington University in St. Louis, 2014.

[9] V. Gerasimov, *Expansive convergence groups are relatively hyperbolic.* Geometric and Functional Analysis, v. 19, p. 137-169, 2009.

[10] V. Gerasimov, *Floyd maps for relatively hyperbolic groups.* Geometric and Functional Analysis, v. 22, p. 1361-1399, 2012.

[11] V. Gerasimov and L. Potyagailo, *Non-finitely generated relatively hyperbolic groups and Floyd quasiconvexity.* Groups, Geometry and Dynamics, v. 9, n. 2, p. 369–434, 2015.

[12] V. Gerasimov and L. Potyagailo, *Similar relatively hyperbolic actions of a group*. International Mathematics Research Notices, v. 2016, n. 7, p. 2068-2103, 2016.

[13] E. Ghys and P. de la Harpe, *Sur les grupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, 1990.

[14] S. Givant and P. Halmos, *Introduction to Boolean Algebras*. Undergraduate texts in mathematics, Springer, 2007.

[15] P. T. Johnstone, *Stone spaces*. Cambridge University Press, 1982.

[16] A. Karlsson, *Free subgroups of groups with nontrivial Floyd boundary*. Comm. Algebra, v. 31, p. 5361-5376, 2003.

[17] D. Marker, *Model Theory: An Introduction*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.

[18] A. Martin, and J. Światkowski, *Infinitely-ended hyperbolic groups with homeomorphic Gromov boundaries*. Journal of Group Theory, v. 18, n. 2, p. 273-289, 2015.

[19] J. R. Munkres, *Topology*. Prentice Hall, 2002.

[20] A. Pelczyński, *A remark on space* 2^X *for zero - dimensional* X. Bull. Pol. Acad. Sci. v. 13, p. 85 - 89, 1965.

[21] P. Tukia, *Conical limit points and uniform convergence groups*. J. rein angew. Math. n. 501, p. 71-98, 1998.

[22] S. Willard, *General Topology*. Addison-Wesley Series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, 1968.

[23] A. Wanes and S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*. Pure and Applied Mathematics, Marcell Dekker, Inc., 1999.