UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ÁLGEBRAS SERIAIS DERIVADAMENTE MANSAS

Ana Paula da Silva Cota

BELO HORIZONTE
MINAS GERAIS - BRASIL
2018

ANA PAULA DA SILVA COTA

ÁLGEBRAS SERIAIS DERIVADAMENTE MANSAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de doutor.

Orientador: Viktor Bekkert

BELO HORIZONTE - MG
2018

"Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas graças a Deus, não sou o que era antes."
(Marthin Luther King)

DEDICATÓRIA

À Elis, o passarinho lindo que tão cedo voou.

AGRADECIMENTOS

Não estive só nessa caminhada, pelo contrário, a trilhei de mãos dadas com pessoas muito especiais. Faltarão palavras para demonstrar todo o meu agradecimento.

Minha gratidão Àquele que é bom e misericordioso e que sempre me ampara nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, Aparecida e Paulo, aos quais devo a minha vida, agradeço por se esforçarem tanto, abdicando de desejos pessoais, para que eu tivesse uma educação de qualidade.

À minha irmã e grande amiga, Ana Carolina, por ser meu porto seguro e por estar sempre ao meu lado.

Ao meu esposo, com quem divido todas as minhas alegrias e angústias, por ser tão amigo e companheiro e por me estimular quando eu não acredito em mim mesma.

Ao meu amado filho Murilo, cujo nascimento representou o meu renascimento.

Aos meus amigos pelo apoio, por ouvirem minhas lamúrias e também pelos momentos de risadas e descontrações.

Ao meu orientador, Viktor Bekkert, tão importante nessa trajetória, por toda a paciência e por todo o aprendizado.

Aos membros da banca, pela disponibilidade e pelas valiosas sugestões e correções.

À Universidade Federal de Ouro Preto e ao Departamento de Matemática da mesma, pelos seis meses em que pude afastar-me de minhas atividades e dedicar-me exclusivamente ao doutorado. Ao colega Júlio César do Espírito Santo (in memoriam) por se esforçar tanto para que tal afastamento fosse possível.

RESUMO

COTA, Ana Paula da Silva, Doc., Universidade Federal de Minas Gerais, novembro, 2018. **Álgebras seriais derivadamente mansas**. Orientador: Viktor Bekkert.

Álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado podem ser divididas, de acordo com a Dicotomia Mansa-Selvagem para categorias derivadas ([7], [16]), em duas classes disjuntas: álgebras derivadamente mansas e álgebras derivadamente selvagens. Neste trabalho, provamos que uma álgebra serial à esquerda é derivadamente mansa se, e somente se, é derivadamente equivalente a uma álgebra skewed-gentle.

Palavras-chave: categoria derivada, álgebra derivadamente mansa, álgebra derivadamente selvagem, equivalência derivada, álgebra serial à esquerda, álgebra de Nakayama, álgebra skewed-gentle.

ABSTRACT

COTA, Ana Paula da Silva, Doc., Universidade Federal de Minas Gerais, november, 2018. **Derived tame serial algebras**. Adviser: Viktor Bekkert.

The Tame-Wild Dichotomy for derived categories establish that every finite dimensional algebra over an algebrically closed field is either derived tame or derived wild ([7], [16]). We proved that a left serial algebra is derived tame if and only if is derived equivalent to some skewed-gentle algebra.

Keywords: derived category, derived tame algebra, derived wild algebra, derived equivalency, left serial algebra, Nakayama algebra, skewed-gentle algebra.

SUMÁRIO

Introdução

Neste trabalho, denotaremos por k um corpo algebricamente fechado e as álgebras tratadas serão sempre k-álgebras básicas, conexas e de dimensão finita. Dada uma álgebra Λ, denotamos por $\Lambda - \text{mod}$ a categoria de Λ-módulos à esquerda finitamente gerados.

O estudo da categoria de módulos de uma álgebra Λ, na Teoria de Representações de Álgebras, é de suma importância. Como esta tarefa é complicada, algumas vezes é conveniente recorrermos a uma álgebra Γ Morita equivalente a Λ, ou seja, cujas respectivas categorias de módulos são equivalentes. Uma condição necessária e suficiente para que haja equivalência entre duas categorias de módulos foi estabelecida por Morita, em [28]. O Teorema de Morita, como ficou conhecido, diz que as categorias de módulos de Λ e Γ são equivalentes se, e somente se, existe um Λ-módulo projetivo e gerador P_Λ, tal que $\Gamma \cong \text{End}(P_\Lambda)$.

Uma álgebra é *mansa* se, para cada dimensão n, seus módulos indecomponíveis de dimensão n podem ser parametrizados por uma quantidade finita de famílias a um parâmetro, exceto possivelmente uma quantidade finita deles. Em contrapartida, uma álgebra é dita *selvagem* se possui famílias de módulos indecomponíveis que dependem de uma quantidade arbitrária de parâmetros. Intuitivamente, para uma álgebra mansa, é possível classificar seus módulos indecomponíveis enquanto, para uma álgebra selvagem, esta classificação é impossível. Em [15], Drozd apresentou o Teorema da Dicotomia que divide as k-álgebras de dimensão finita em duas classes disjuntas, a das *álgebras mansas* e a das *álgebras selvagens*. As álgebras de representação finita pertencem à classe das álgebras mansas. É bem conhecido, por exemplo, que uma álgebra hereditária é mansa se, e somente se, seu grafo subjacente é um grafo de Dynkin ou um grafo de Dynkin estendido.

Grothendieck e Verdier (veja [36]) introduziram o conceito de categoria derivada de uma categoria abeliana no contexto da Geometria Algébrica e da Álgebra Homológica. Posteriormente, em [25], Happel introduziu os conceitos de categoria triangulada e categoria derivada da categoria de módulos de uma álgebra na Teoria de Representações de Álgebras. Um importante resultado, obtido por Happel, foi que categorias derivadas são invariantes na Teoria de Inclinação, isto é, se Λ é uma álgebra de dimensão finita e T é um módulo inclinante, então as categorias derivadas $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ e $\mathcal{D}^b(\text{End}_\Lambda T)$ são equivalentes como categorias trianguladas. Este resultado apresenta grande semelhança com o Teorema de Morita e, a partir disso, em [32], Rickard generalizou o conceito de módulo inclinante para complexo inclinante, generalizando também o teorema de Happel: as categorias derivadas $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ e $\mathcal{D}^b(\Gamma)$, de duas álgebras Λ e Γ, são equivalentes se, e somente se, existe um complexo limitado $T_\bullet$ de Λ-módulos projetivos finitamente gerados, chamado *complexo inclinante*, para o qual $\mathrm{Hom}(T_\bullet, T_\bullet[i]) = 0$, para todo $i \neq 0$, $\mathrm{add}(T_\bullet)$ gera $\mathcal{K}^b(A - \mathrm{proj})$ como categoria triangulada, e $\mathrm{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} T_\bullet \cong \Gamma$. Este teorema ficou conhecido como Teorema de Morita para categorias derivadas. Nesta tese, este teorema será bastante útil. A partir destas equivalências, começaram a surgir alguns invariantes, por exemplo duas álgebras Λ e Γ derivadamente equivalentes têm centros e cohomologias de Hochschild isomorfos, Λ é gentle se, e somente se, Γ o é ([33]), Λ tem dimensão global finita se, e somente se, Γ o tem ([24], p.344).

Após o surgimento desses novos conceitos, surgiram definições análogas às de álgebras mansas e álgebras selvagens para categorias derivadas. Em [29], de la Peña introduziu o conceito de álgebra derivadamente mansa, no caso de dimensão global finita, através de álgebras repetitivas. Geiss e Krause ([22]) apresentaram uma definição de álgebras derivadamente mansas e derivadamente selvagens, no caso geral, e mostraram que a propriedade de ser derivadamente mansa é invariante por equivalência derivada. Bekkert e Drozd ([7]) estabeleceram a Dicotomia Mansa-Selvagem para categorias derivadas de álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, o que foi publicado por Drozd ([16]). Nesse sentido, começou-se a busca por classificar álgebras derivadamente mansas. Por exemplo, Brustle ([12]) classificou todas as álgebras árvores (álgebras de caminhos sobre um quiver com relações, básicas, cujo grafo subjacente é uma árvore) derivadamente mansas a menos de equivalência derivada. Dois anos depois, Bekkert e Merklen ([9])mostraram que toda álgebra gentle é derivadamente mansa; Bekkert, Marcos e Merklen ([8]) demonstraram que toda álgebra skewed-gentle é derivadamente mansa. Mais tarde, Bekkert, Drozd e Futorny ([6]) classificaram todas as álgebras locais ou com dois módulos simples derivadamente mansas; Bekkert e Drozd ([4]) estudaram a categoria derivada de álgebras cujo radical ao quadrado é zero. Recentemente, Freitas ([18]) determinou todas as álgebras de dimensão finita com três módulos simples que são derivadamente mansas.

O objetivo desta tese é classificar todas as álgebras seriais à esquerda derivadamente mansas. A classificação das álgebras seriais à direita poderá ser feita com raciocínio similar. Lembramos que se A é uma álgebra de dimensão global finita, então sua forma quadrática de Euler é definida sobre o grupo de Grothendieck de A por $\chi_A(\dim M) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_k (-1)^i \mathrm{Ext}_A^i(M, M)$, para um A-módulo M qualquer. Caso A seja uma álgebra árvore, o resultado vem de [12] e [21], conforme a condição 1 do próximo Teorema. Diante disso, estudamos aquelas álgebras seriais cujo quiver contém um ciclo. Esta ideia surgiu a partir da classificação, feita em [5], por Bekkert, Giraldo e Velez-Marulanda, de álgebras de Nakayama (álgebras seriais à esquerda e à direita, simultaneamente) derivadamente mansas. Para isso, primeiramente fizemos um estudo sobre as álgebras seriais à esquerda, quadráticas, com um ciclo, e obtivemos o seguinte resultado.

Teorema A. *Seja $A = kQ/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda, básica, conexa e quadrática. Então A é derivadamente mansa se, e somente se, uma das seguintes condições é válida:*

1. *A é uma álgebra árvore e sua forma quadrática de Euler é não-negativa;*
2. *A contém um ciclo e é skewed-gentle.*

Posteriormente, demonstramos o caso geral apresentado pelos dois próximos Teoremas, os quais são os resultados principais deste trabalho com destaque para o Teorema C. No caso em que A possui um ciclo, introduzimos duas classes de álgebras seriais à esquerda apresentadas a seguir, que serão necessárias para demonstrar tais teoremas. Para facilitar o entendimento das condições destas classes, introduzimos a definição abaixo. Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma k-álgebra, denotamos por R_A um conjunto minimal de relações que gera $\mathcal{I}$.

Definições 0.1 *Sejam $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra e R_A um conjunto minimal de relações.*

a. *Uma relação monomial em R_A, de comprimento r, será chamada* r-monômio*;*

b. *uma sequência de 3-monômios da forma $a_1a_2a_3, a_2a_3a_4, \ldots, a_na_{n+1}a_{n+2}$, onde $n \geq 2$, $a_i \in \mathcal{Q}_1$, para todo $1 \leq i \leq n+2$, e $a_ia_{i+1}a_{i+2} \in R_A$, para todo $1 \leq i \leq n$, será chamada* n-upla de 3-monômios consecutivos*;*

c. *um 3-monômio em R_A é dito* isolado *se não pertence a uma n-upla de 3-monômios consecutivos, $n > 1$.*

Naturalmente, uma 2-upla será chamada de *dupla* e uma 3-upla de *tripla*. No caso em que $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ é uma álgebra serial à esquerda, como todo vértice é término de, no máximo, uma flecha, consequentemente, R_A será formado por caminhos de $\mathcal{Q}$.

Dizemos que uma álgebra $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ serial à esquerda com ciclo $\mathcal{C}$, básica e conexa pertence à classe $\tilde{\mathcal{D}}$ se satisfaz as seguintes condições:

$\tilde{D}1$. $\mathcal{I}$ é gerado por caminhos de comprimento dois ou três;

$\tilde{D}2$. se abc é um 3-monômio isolado, então $t(c)$ é um poço;

$\tilde{D}3$. não existem n-uplas de 3-monômios consecutivos, para $n \geq 3$.

Seja $A \in \tilde{\mathcal{D}}$. Defina o conjunto $\Omega = \{i \in \mathcal{Q}_0 \mid i = s(c)$, onde abc é um 3-monômio isolado ou pertence a uma dupla de 3-monômios consecutivos $abc, bcd\}$. Denotamos a subálgebra plena quadrática eAe de A, em que $e = \sum_{i \in \mathcal{Q}_0 \setminus \Omega} e_i$, por A_{quad}.

Definimos a nova classe $\mathcal{D}$ formada pelas álgebras que pertencem a $\tilde{\mathcal{D}}$ e ainda satisfazem as seguintes condições:

1. se abc é um 3-monômio isolado ou pertence a uma dupla de 3-monômios consecutivos abc, bcd, então não existe flecha $f \neq b$ com $s(f) = s(b)$;
2. se abc é um 3-monômio isolado, então ocorre uma das situações abaixo:
   (a) $a, b \in \mathcal{C}_1$ e se existe flecha d, com $s(d) = s(c)$, então $d \in \mathcal{C}_1$ e $bd \notin R_A$;
   (b) $a, b, c \notin \mathcal{C}_1$ e existem, no máximo, duas flechas f e g, com $s(f) = s(g) = s(c)$, e estas devem satisfazer $abf, abg \notin \mathcal{I}$;

3. se $abc, bcd \in R_A$, então são satisfeitas as seguintes condições:
   (a) se $a \in \mathcal{C}_1$, então $b \in \mathcal{C}_1$;
   (b) $a, b, c \in \mathcal{C}_1$, então $d \in \mathcal{C}_1$;
   (c) se existe $f \neq d$, com $s(f) = s(d)$, devemos ter $bcf \in R_A$, $t(f)$ e $t(d)$ são poços e $c \notin \mathcal{C}_1$;
   (d) se existe $f \neq c$, com $s(f) = s(c)$, então devemos ter $bf, bfg \notin R_A$, para toda flecha g;
4. A_{quad} é skewed-gentle.

Teorema B. *Seja $A = k\mathcal{Q}_A/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda, básica, conexa e de dimensão finita. Então A é derivadamente mansa se, e somente se, umas das seguintes condições é válida:*

1. *A é uma álgebra árvore e sua forma de Euler é não-negativa;*
2. *Q_A contém um ciclo e A pertence a classe $\mathcal{D}$.*

Teorema C. *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com um ciclo, básica, conexa e de dimensão finita. Então A é derivadamente mansa se, e somente se, A é derivadamente equivalente a uma álgebra skewed-gentle.*

Este trabalho foi organizado através de dois capítulos, o primeiro destinado a alguns conceitos básicos sobre a Teoria de Representações de Álgebras, que serão importantes para compreensão dos resultados principais que encontram-se no Capítulo 2. Este último foi dividido em duas seções, a saber, "Álgebras Seriais Quadráticas" e "Álgebras Seriais: caso geral", sendo que na primeira delas o objetivo principal é demonstrar o Teorema A, enquanto a segunda seção refere-se ao caso geral de álgebras seriais à esquerda, no qual demonstramos os dois principais resultados desse trabalho, os Teoremas B e C. A seção "Álgebras Seriais: caso geral" foi estruturada em oito subseções, sendo que nas cinco primeiras demonstramos que uma álgebra serial à esquerda com um ciclo A pertencer à classe $\mathcal{D}$ é uma condição necessária para que A seja derivadamente mansa. A sexta subseção, intulada "A álgebra A^{Ω}", exibe uma construção fixada para A_{quad} e a construção de uma álgebra serial à esquerda skewed-gentle a partir de uma álgebra $A \in \mathcal{D}$. Além disso, demonstra-se a importante proposição que a equivalência derivada entre $A \in \mathcal{D}$ e A^{Ω}. As duas últimas subseções são destinadas às demonstrações dos Teoremas B e C, respectivamente.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo, abordaremos brevemente alguns conceitos, propriedades e resultados que serão usados ao longo do texto. Também fixaremos notações. Para maiores detalhes e demonstrações dos resultados abordados, sugerimos como referências [1], [3], [25] e [37]. Ao longo deste trabalho, consideraremos k um corpo algebricamente fechado e as álgebras aqui tratadas serão sempre k-álgebras básicas, conexas e de dimensão finita.

1.1 Quivers e Álgebras de Caminhos

Um *grafo* é representado por um conjunto de pontos (vértices) ligados por arestas. Quando as arestas possuem uma orientação são chamadas de flechas e, assim, o grafo passa a ser chamado de *quiver*. Ao esquecermos a orientação das flechas do quiver, temos um grafo associado, o qual chamamos *grafo subjacente*. Apresentaremos a seguir, a definição formal de um quiver e veremos como podemos corresponder a ele uma álgebra, chamada *álgebra de caminhos*. Também apresentaremos as condições para que uma álgebra qualquer seja isomorfa à álgebra de caminhos de um quiver.

Um *quiver* é uma quádrupla $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, s, t)$ que consiste de um conjunto de vértices $\mathcal{Q}_0$, um conjunto de flechas $\mathcal{Q}_1$ e duas aplicações $s,\ t\colon\ \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_0$ que determinam, para cada flecha $\alpha \in \mathcal{Q}_1$, o seu vértice de *origem* $s(\alpha)$ e o seu vértice de *término* $t(\alpha)$. Em geral, denotaremos o quiver $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, s, t)$ apenas por $\mathcal{Q}$. Um quiver $\mathcal{Q}$ é *finito*, se os conjuntos $\mathcal{Q}_0$ e $\mathcal{Q}_1$ são finitos, e é *conexo*, se o seu grafo subjacente for conexo. Os quivers tratados ao longo deste trabalho serão todos finitos e conexos com $\mathcal{Q}_1 \neq \varnothing$. Apresentamos um exemplo a seguir.

Exemplo 1.1

$$\mathcal{Q}: \quad \begin{tikzcd} & 5 & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\gamma"] & 4 \arrow[lll, bend left, "\delta"] \end{tikzcd}$$

Dados dois quivers $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, s, t)$ e $\mathcal{Q}' = (\mathcal{Q}'_0, \mathcal{Q}'_1, s', t')$, dizemos que $\mathcal{Q}'$ é um *subquiver* de $\mathcal{Q}$, se $\mathcal{Q}'_0 \subseteq \mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}'_1 \subseteq \mathcal{Q}_1$ e as aplicações s' e t' são as restrições dos mapas s e t ao conjunto $\mathcal{Q}'_0$, respectivamente. No caso em que $\mathcal{Q}'_1 = \{\alpha \in \mathcal{Q}_1 \mid s(\alpha) \in \mathcal{Q}'_0$ e $t(\alpha) \in \mathcal{Q}'_0\}$, dizemos que $\mathcal{Q}'$ é um *subquiver pleno* de $\mathcal{Q}$. Podemos observar que um subquiver pleno é unicamente determinado pelo seu conjunto de vértices.

Seja $\mathcal{Q}$ um quiver, dados dois vértices i, j (não necessariamente distintos), um *caminho* $C = (i|\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_l|j)$ de i para j, com comprimento $l \geq 1$, é uma sequência de flechas, tal que $s(\alpha_1) = i$, $t(\alpha_l) = j$ e $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$, para $1 \leq k < l$. Além disso, para cada vértice i, existe um caminho de comprimento 0, o qual chamamos *caminho trivial* e denotamos por $e_i = (i||i)$. Um caminho não trivial cujo vértice de origem coincide com o vértice de término é chamado *ciclo*. Se o ciclo tem comprimento 1, o chamamos de *laço*.

Sejam Q um quiver e k um corpo. Denotamos por $\mathbf{Pa}$ (resp. $\mathbf{Pa}_{\geq 1}$) o *conjunto de caminhos* (resp. *caminhos não triviais*) em $\mathcal{Q}$. Chamamos *álgebra de caminhos* de $\mathcal{Q}$ e, denotamos por $k\mathcal{Q}$, a k-álgebra que tem como base de seu espaço vetorial o conjunto $\mathbf{Pa}$, cujo produto é induzido pela composição de caminhos da forma: dados $\omega_1 = (i|a_1a_2 \ldots a_m|j), \omega_2 = (k|b_1b_2 \ldots b_n|l) \in \mathbf{Pa}$, temos $\omega_1\omega_2 = (i|a_1a_2 \ldots a_mb_1b_2 \ldots b_n|l)$, se $j = k$, e $\omega_1\omega_2 = 0$, caso contrário. Tal produto se estende por bilinearidade para qualquer elemento de $k\mathcal{Q}$.

Ao longo deste texto, muitas vezes denotaremos um caminho $\omega = (i|a_1a_2 \ldots a_l|j)$, simplesmente por $\omega = a_1a_2 \ldots a_l$. Todos os quivers tratados serão finitos, de forma que a álgebra de caminhos $k\mathcal{Q}$ possui unidade $1 = \sum_{i \in \mathcal{Q}_0} e_i$ e é conexa se, e somente se, o quiver $\mathcal{Q}$ o é.

Dado um quiver $\mathcal{Q}$ finito e conexo, o ideal de $k\mathcal{Q}$ gerado pelas flechas de $\mathcal{Q}$ será denotado por $R_{\mathcal{Q}}$. Dizemos que um ideal bilateral $\mathcal{I}$ de $k\mathcal{Q}$ é *admissível* se existe $m \geq 2$, para o qual $R_{\mathcal{Q}}^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_{\mathcal{Q}}^2$. Nesse caso, o par $(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ é chamado *quiver com relações* . Uma *relação* em $\mathcal{Q}$ com coeficientes em k é uma combinação k-linear de caminhos, de comprimento maior ou igual a 2, que possuam mesma origem e mesmo término. Todo ideal admissível $\mathcal{I}$ de $k\mathcal{Q}$ é finitamente gerado, isto é, existe um conjunto finito de relações $\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\}$ tal que $\mathcal{I} = \langle \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \rangle$, conforme está demonstrado em [1], páginas 56 e 57. Dizemos que uma relação é *monomial*, se tem a forma $\lambda\omega$, para $w \in \mathbf{Pa}$. Caso tenha a forma $\omega_1 - \omega_2$, onde ω_1 e ω_2 são caminhos, é chamada *relação comutativa* . Dizemos que uma relação ρ é *quadrática* se for uma combinação linear de caminhos de comprimento 2. A álgebra quociente $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ é chamada *álgebra de caminhos sobre o quiver com relações* . Denotamos por R_A um conjunto minimal de relações que gera $\mathcal{I}$ e chamamos uma relação pertencente a R_A de *relação minimal*. Nesse caso, denotando o radical de A por $\mathrm{rad}A$, temos $\mathrm{rad}A = R_{\mathcal{Q}}/\mathcal{I}$ e A é uma álgebra básica (veja [1], página 57). Além disso, a álgebra A é conexa se, e somente se, o quiver $\mathcal{Q}$ o é e, caso $\mathcal{Q}$ seja finito, temos A de dimensão finita (veja [1], página 55 e 56). Diante disso, trataremos, sem perda de generalidade, apenas álgebras básicas e conexas.

Dada uma álgebra $A = k(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$, dizemos que um elemento i de $\mathcal{Q}_0$ é um *vértice poço* (resp. *fonte*) se não existe flecha α, tal que $s(\alpha) = i$ (resp. $t(\alpha) = i$).

1.1.1 O quiver de uma álgebra de dimensão finita

Na seção anterior, vimos que podemos associar a um quiver uma k-álgebra associativa e básica. Nesta seção, apresentaremos um importante resultado da Teoria de Representação, devido a Gabriel[19], que nos diz quando uma k-álgebra é isomorfa à uma álgebra de caminhos sobre um quiver com relações.

Dados uma k-álgebra A básica, conexa e de dimensão finita, e um conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ completo de idempotentes ortogonais primitivos de A, associamos um quiver, chamado *quiver ordinário de* A e denotado por kQ_A, de forma que seu conjunto de vértices é $\{1, 2, \ldots, n\}$, que está em correspondência biunívoca com o conjunto dos idempotentes, e dados dois vértices i e j, as flechas $\alpha : i \to j$ estão em bijeção com os vetores de uma base do k-espaço vetorial $e_i \left(\dfrac{\mathrm{rad} A}{\mathrm{rad}^2 A}\right) e_j$. Definido desta maneira, podemos perceber que $\mathcal{Q}_A$ é finito e independe da escolha do conjunto de idempotentes ortogonais primitivos de A, como está demonstrado em [1], página 60. O próximo resultado segue de [19] e sua demonstração exibe uma construção para o ideal admissível.

Teorema 1.2 *(Gabriel) Seja A uma k-álgebra básica, conexa e de dimensão finita. Existe um ideal admissível $\mathcal{I}$ de kQ_A, tal que A é isomorfa a $\dfrac{kQ_A}{\mathcal{I}}$.*

De acordo com as considerações dessas duas seções, veremos toda k-álgebra básica, conexa e de dimensão finita como uma álgebra de caminhos sobre um quiver com relações.

Definição 1.3 *Sejam A uma k-álgebra de dimensão finita e B uma subálgebra de A. Dizemos que B é uma* subálgebra plena *de A, se B é da forma eAe, para algum idempotente e.*

Observação 1.4 *A álgebra eAe é uma subálgebra de A sem unidade.*

1.2 Representação de um quiver

Seja $\mathcal{Q}$ um quiver finito. Uma *representação* de $\mathcal{Q}$ é uma família $V = (V_i, T_\alpha)_{i\in\mathcal{Q}_0, \alpha\in\mathcal{Q}_1}$ em que associamos a, cada vértice i, um k-espaço vetorial V_i e, a cada flecha α, uma aplicação linear $T_\alpha : V_{s(\alpha)} \to V_{t(\alpha)}$. Dizemos que uma representação é de *dimensão finita*, se todo espaço vetorial V_i o é.

Dados um quiver $\mathcal{Q}$ e duas representações $V = (V_i, R_\alpha)$, $U = (U_i, T_\alpha)$ de $\mathcal{Q}$, um *morfismo* entre as representações $f : V \to U$ é uma família $f = (f_i)_{i\in\mathcal{Q}_0}$ de k-aplicações lineares $f_i : V_i \to U_i$ tais que, para cada $\alpha : i \to j$, $f_j R_\alpha = T_\alpha f_i$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "R_\alpha"] \arrow[d, "f_i"] & V_j \arrow[d, "f_j"] \\ U_i \arrow[r, "T_\alpha"'] & U_j \end{tikzcd}$$

Dados dois morfismos $f = (f_i) : V \to W$ e $g = (g_i) : W \to U$, a *composição* desses dois morfismos é definida por $fg = (f_i \circ g_i)_{i \in \mathcal{Q}_0} : V \to U$. Denotamos a categoria de representações de $\mathcal{Q}$ sobre k (categoria de representações de dimensão finita de $\mathcal{Q}$ sobre k) por $\mathrm{Rep}_k\mathcal{Q}$ (resp. $\mathrm{rep}_k\mathcal{Q}$). Um morfismo $f = (f_i) : V \to U$ é um *isomofismo*, se f_i é um isomorfismo, para todo $i \in \mathcal{Q}_0$, e dizemos que as representações U e V são *isomorfas*. A seguir, definiremos uma representação sobre um quiver com relações.

Dado um quiver finito $\mathcal{Q}$, seja $V = (V_i, T_\alpha)$ uma representação de $\mathcal{Q}$. Dado um caminho $\omega = (i|\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_l|j)$, definimos a *avaliação* de V sobre ω como a aplicação k-linear de Vi para V_j definida por $T_\omega = T_{\alpha_1}T_{\alpha_2} \ldots T_{\alpha_{l-1}}T_{\alpha_l}$. Esta definição se estende para uma combinação k-linear de caminhos com mesma origem e mesmo término, ou seja, seja $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\omega_i$ tal combinação, temos $T_\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i T_{\omega_i}$.

Dado um quiver com relações $(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$, uma representação $V = (V_i, T_\alpha)$ de $\mathcal{Q}$ é *limitada* por $\mathcal{I}$, se $T_\rho = 0$, para qualquer relação $\rho \in \mathcal{I}$. Denotamos $\mathrm{Rep}_k(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ (resp. $\mathrm{rep}_k(kQ, \mathcal{I})$) a subcategoria plena de $\mathrm{Rep}_k\mathcal{Q}$ (resp. $\mathrm{rep}_k\mathcal{Q}$)) que consiste de todas as representações de $\mathrm{Rep}_k\mathcal{Q}$ limitadas por $\mathcal{I}$.

Exemplo 1.5 *Considere o quiver $\mathcal{Q}$ abaixo e o ideal $\mathcal{I} = \langle \alpha\beta \rangle$.*

$$\mathcal{Q}: \quad \begin{tikzcd} & 4 & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\beta"] & 3. \end{tikzcd}$$

A seguir, temos V uma representação de $\mathcal{Q}$, para $x, y, z, t \in k$.

$$V: \quad \begin{tikzcd} & k & \\ k \arrow[r, "{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}"] & k^2 \arrow[u, "{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}"] \arrow[r, "{\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}}"] & k^2 \end{tikzcd}$$

A representação V é limitada por $\mathcal{I}$ se, e somente se, $x = y = 0$. Nesse caso, V é uma representação do quiver com relações $(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$.

Um dos interesses da Teoria de Representações é estudar a categoria de A-módulos à esquerda (resp. A-módulos à esquerda finitamente gerados) de uma determinada k-álgebra A de dimensão finita. Denotamos tal categoria por $A -$ Mod (resp. $A -$ mod). O Teorema abaixo, um importante resultado na Teoria de Representações devido à Gabriel [19], garante-nos que podemos estudar essa categoria por meio da categoria de representações de um quiver com relações.

Teorema 1.6 *Dada $A = k(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$, sendo $\mathcal{Q}$ um quiver conexo e finito e $\mathcal{I}$ um ideal admissível de $k\mathcal{Q}$. Existe uma equivalência k-linear de categorias*

$$F: \ A - \mathrm{Mod} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Rep}_k(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$$

que se restringe a uma equivalência das categorias $F: \ A - \mathrm{mod} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{rep}_k(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$.

Seja A uma álgebra básica e considere $\{S(1), \ldots, S(n)\}$ um conjunto completo de A-módulos simples não isomorfos dois a dois. Como A é básica, temos $A = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_n$, onde $Ae_i \ncong Ae_j$, para todo $i \neq j$.

Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra conexa e $\mathcal{I}$ admissível. Através da equivalência entre as categorias $A -$ mod e $\mathrm{rep}_k(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$, é possível descrever os módulos simples, os projetivos indecomponíveis e os injetivos indecomponíveis como representações do quiver com relações $(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$. Dado $i \in \mathcal{Q}_0$, o módulo simples $S(i)$ corresponde à representação $(S(i)_j, T_\alpha)_{j \in \mathcal{Q}_0, \alpha \in \mathcal{Q}_1}$ de $\mathcal{Q}$, tal que

$$S(i)_j = \begin{cases} k, & \text{se } j = i \\ 0, & \text{se } j \neq i \end{cases}$$
$$T_\alpha = 0, \text{para \ toda } \ \alpha \in \mathcal{Q}_1$$

De fato, a família de representações $(S(i))_{i \in \mathcal{Q}_0}$ forma um conjunto completo de representantes de classes de isomorfismos de A-módulos simples (consulte [1], página 76). Um A-módulo (à esquerda) Ae_i, denotado simplesmente por A_i, é *projetivo* indecomponível correspondente à representação $(P(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in \mathcal{Q}_0, \alpha \in \mathcal{Q}_1}$, onde $P(i)_j$ é o k-espaço vetorial cuja base é o conjunto $\{\underline{\omega} = \omega + \mathcal{I} \mid \omega \text{ caminho de } j \text{ para } i\}$ e, para cada flecha α, a k-aplicação linear $\varphi_\alpha : P(i)_{s(\alpha)} \to P(i)_{t(\alpha)}$, definida nesta base por $\varphi_\alpha(\underline{w}) = \underline{\alpha C}$. A representação correspondente ao A-módulo (à esquerda) injetivo indecomponível $e_i A$ é obtido por dualidade (para mais detalhes, consulte [1]).

1.3 Álgebras mansas e Álgebras selvagens

A importância de se estudar os objetos indecomponíveis na categoria $A -$ mod se deve pelo fato de que todo módulo $M \in A -$ mod se decompõe como uma soma direta de módulos indecomponíveis. Este resultado é o Teorema de Krull-Schmidt, que ainda garante que tal decomposição é única, a menos de isomorfismos e da ordem de seus somandos diretos. A ideia dessa seção é enxergar as álgebras do ponto de vista quantitativo de seus A-módulos indecomponíveis.

Definição 1.7 *Seja A uma k-álgebra de dimensão finita. Dizemos que A tem* representação finita*, se possui um número finito de classes de isomorfismos de A-módulos indecomponíveis, a menos de isomorfismo.*

Veremos adiante que existe um Teorema de dicotomia que divide as k-álgebras de dimensão finita em *álgebras mansas* e *álgebras selvagens* e que estas duas classes são disjuntas.

De forma intuitiva, uma álgebra é mansa A se existe, para cada dimensão d, uma parametrização de seus A-módulos indecomponíveis d-dimensionais por um número finito de famílias de um-parâmetro. Em contrapartida, a categoria de módulos de uma álgebra selvagem contém informações sobre todos os módulos indecomponíveis de todas as álgebras de dimensão finita.

Denotaremos por $\text{fin}k\langle x, y\rangle$ a subcategoria plena e exata de $k\langle x, y\rangle$-módulos cujos objetos são $k\langle x, y\rangle$-módulos de dimensão finita.

Definição 1.8 *Seja A uma k-álgebra de dimensão finita. Dizemos que A é* selvagem*, se existe um A-$k\langle x, y\rangle$-bimódulo M satisfazendo*

1. *M é livre e finitamente gerado como um $k\langle x, y\rangle$-módulo;*
2. *O funtor $M \otimes_{k\langle x,y\rangle} - : \text{fin}k\langle x, y\rangle \longrightarrow A-\text{mod}$ respeita classes de isomorfismo (isto é, $L \simeq L'$ se, e somente se, $M \otimes_{k\langle x,y\rangle} L' \simeq M \otimes_{k\langle x,y\rangle} L$) e leva módulo indecomponível em indecomponível.*

Definição 1.9 *Seja A uma k-álgebra de dimensão finita. Dizemos que A é* mansa *se, para qualquer dimensão $d > 0$, existe um número finito de A-$k[x]$-bimódulos M_i tais que*

1. *M_i é livre e finitamente gerado como um $k[x]$-módulo;*
2. *todo módulo indecomponível X de dimensão d, exceto um número finito, é isomorfo a $M_i \otimes_{k[x]} \dfrac{k[x]}{(x-\lambda)}$, para algum $\lambda \in k$ e para algum i.*

Observe que toda álgebra que tem representação finita é uma álgebra mansa. Em [15], Drozd mostrou que toda álgebra de dimensão finita pode ser classificada como mansas ou selvagens e que tais classes são disjuntas, conforme o teorema abaixo.

Teorema 1.10 *Toda álgebra de dimensão finita é ou mansa ou selvagem.*

Apresentaremos, a seguir, algumas classes de álgebras já classificadas com relação ao aspecto quantitativo de sua categoria de módulos.

Definição 1.11 *Seja A uma k-álgebra. Dizemos que A é* hereditária*, se todo submódulo de um A-módulo projetivo é projetivo.*

A seguir, exibiremos uma caracterização de uma álgebra de caminhos hereditária de acordo com o seu quiver.

Teorema 1.12 *Seja A uma álgebra básica, conexa e de dimensão finita. Então A é hereditária se, e somente se, $A \cong kQ$, onde Q é um quiver finito, conexo e acíclico.*

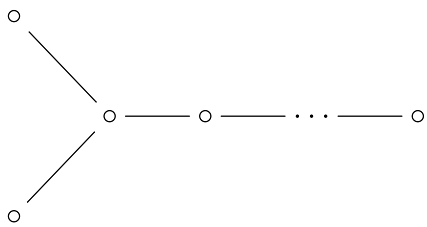
Veremos, no próximo teorema, que a álgebra de caminhos sobre um quiver, cujo grafo subjacente é algum dos grafos abaixo, já está caracterizada quanto ao seu tipo de representação.

Definição 1.13 *Os grafos listados abaixo como $A_m, D_n, \mathbb{E}_i$, para $i = 6, 7, 8$, são chamados grafos Dynkin, em que os subíndices indicam a quantidade de vértices do grafo, e os grafos $\tilde{A}_m, \tilde{D}_n, \tilde{\mathbb{E}}_i$, para $i = 6, 7, 8$, são chamados Dynkin estendidos, cuja respectiva quantidade de vértices corresponde ao subíndice mais um.*

A_m :

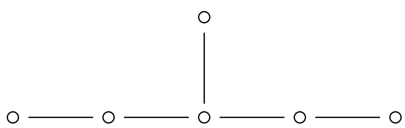
$m \geq 1$

D_n :

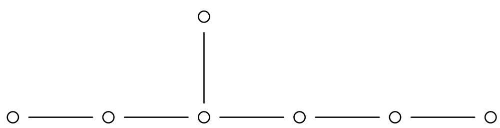


$n \geq 4$

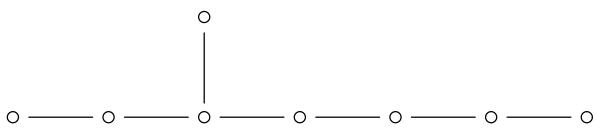
$\mathbb{E}_6$:

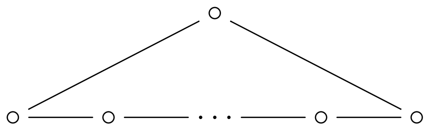


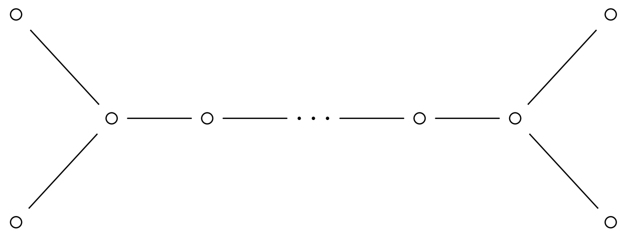
$\mathbb{E}_7$:

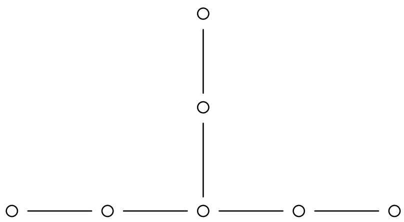


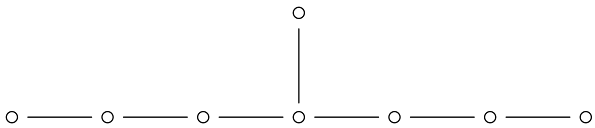
$\mathbb{E}_8$:

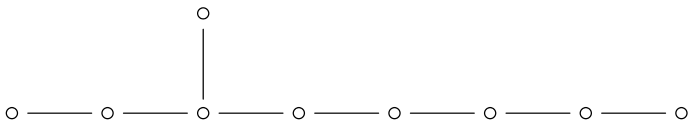


$\tilde{\mathbb{A}}_m$:  $m \geq 1$

$\tilde{\mathbb{D}}_n$:  $n \geq 4$

$\tilde{\mathbb{E}}_6$: 

$\tilde{\mathbb{E}}_7$: 

$\mathbb{E}_8$: 

Teorema 1.14 ([14], [19]) *Se $A = k\mathcal{Q}$ é uma álgebra hereditária, então A é mansa se, e somente se, o grafo subjacente a $\mathcal{Q}$ é um grafo Dynkin ou um Dynkin estendido.*

Lema 1.15 ([17]) *Seja A uma k-álgebra de dimensão finita. Se $\mathcal{I}$ é um ideal de A, não necessariamente admissível, tal que o quociente $\frac{A}{\mathcal{I}}$ é selvagem, então A o é.*

1.4 Categoria de Complexos

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva. Dados dois morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ em $\mathcal{A}$, denotamos por fg a sua composta, que é um morfismo de X para Z. Esta notação é conveniente porque $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ é sempre um $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$-bimódulo à esquerda e um $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(Y)$-bimódulo à direita. Dado um objeto X em $\mathcal{A}$, denotamos $\mathrm{add}(X)$ a subcategoria plena de $\mathcal{A}$ que consiste de todos os somandos diretos de somas finitas de cópias de X.

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana, definiremos a *categoria de complexos* $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, cujos objetos e morfismos estão definidos abaixo. Um *complexo de cocadeias* $X_\bullet =$

(X_i, d_i^X) é uma sequência de morfismos (d_i^X) entre objetos X_i em $\mathcal{A}$:

$$\cdots \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}^X} X_i \xrightarrow{d_i^X} X_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}^X} X_{i+2} \longrightarrow \ldots,$$

satisfazendo $d_i^X d_{i+1}^X = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Estes complexos são os objetos de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Os morfismos (d_i^X) são chamados *diferenciais* do complexo. Dados $X_\bullet, Y_\bullet \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, um *morfismo entre complexos* $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ é uma família de morfismos $f_\bullet = (f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{A}$, onde $f_i : X_i \to Y_i$ satisfazendo $f_i d_i^Y = d_i^X f_{i+1}$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & X_i \arrow[r, "d_i^X"] \arrow[d, "f_i"] & X_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i+1}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & Y_i \arrow[r, "d_i^Y"] & Y_{i+1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Prova-se que a categoria $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ também é abeliana. Dizemos que um complexo $X_\bullet$ é *limitado superiormente* (resp. *limitado inferiormente*), se existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $X_n = 0$, para todo inteiro $n > k$ (resp. $n < k$). O complexo é dito *limitado*, se é limitado superiormente e inferiormente. Dizemos que o complexo é *concentrado na componente* s, se $X_n = 0$, para todo $n \neq s$. Dados um complexo $X_\bullet = (X_i, d_i^X)$ e t um número inteiro, formamos um novo complexo $X[t]_\bullet$ em que $(X[t])_n = X_{n+t}$ com diferenciais $(-1)^t d_i^X : (X[t])_n \to (X[t])_{n-1}$.

1.5 Categorias Trianguladas

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. A seguir, o funtor aditivo $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é um automorfismo, ou seja, é invertível, logo existe um funtor T^{-1} sobre $\mathcal{C}$ tal que $T^{-1}T$ e TT^{-1} são funtores identidades. Um *triângulo em* $\mathcal{C}$ é uma sextupla (X, Y, Z, u, v, w), dada por objetos $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ e morfismos $u : X \to Y$, $v : Y \to Z$ e $w : Z \to TX$, usualmente denotado por

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX .$$

Um *morfismo entre triângulos* é uma tripla (f, g, h) de morfismos em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX'
\end{tikzcd}$$

comuta em $\mathcal{C}$. Dado um morfismo entre triângulos (f', g', h')

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "f'"] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "g'"] & Z' \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "h'"] & TX' \arrow[d, "Tf'"] \\
X'' \arrow[r, "u''"] & Y'' \arrow[r, "v''"] & Z'' \arrow[r, "w''"] & TX''
\end{tikzcd}$$

definimos a composição (ff', gg', hh') desses morfismos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "ff'"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "gg'"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "hh'"] & TX \arrow[d, "TfTf'"] \\ X'' \arrow[r, "u''"] & Y'' \arrow[r, "v''"] & Z'' \arrow[r, "w''"] & TX'' \end{tikzcd}$$

se tal diagrama for comutativo. Temos um *isomorfismo de triângulos*, caso f, g e h sejam isomorfismos em $\mathcal{C}$.

Definição 1.16 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. A estrutura de uma* categoria pré-triangulada *sobre $\mathcal{C}$ é dada por um automorfismo aditivo $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, chamado* funtor translação*, e um conjunto de triângulos $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$, denominados* triângulos exatos*, que satisfazem os três axiomas abaixo.*

(TR1) A classe dos triângulos exatos é fechada sobre isomorfismos de triângulos. Para qualquer objeto $X \in \mathcal{C}$, o triângulo $X \xrightarrow{\mathrm{id}} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$ é exato e, para qualquer morfismo $u : X \to Y$, existe um triângulo exato da forma $X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow Z \longrightarrow TX$.

(TR2) Um triângulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ é exato se, e somente se, o triângulo $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$ é exato.

(TR3) Dados dois triângulos exatos (u, v, w) e (u', v', w'). Para todo par de morfismos f e g, tais que $ug = fu'$, existe um morfismo h para o qual o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX' \end{tikzcd}$$

é um morfismo de triângulos.

Para simplificar, muitas vezes usaremos a seguinte notação: $T_n(X) = X[n]$, dizemos que $X[n]$ é o n-ésimo *shift* de X. A seguir, vamos introduzir um novo axioma, chamado *Axioma Octaedral.*

(TR4) Dados três triângulos exatos $(X, Y, U, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(Y, Z, W, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ e $(X, Z, V, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, com $\gamma_1 = \alpha_1\beta_1$, existe um triângulo exato $(U, V, W, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ que produz o diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "1"] & Y \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\beta_1"] & U \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, dashed, "\delta_1"] & TX \arrow[d, "T1=1_{TX}"] \\ X \arrow[r, "\gamma_1"] & Z \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & V \arrow[r, "\gamma_3"] \arrow[d, dashed, "\delta_2"] & TX \arrow[d, "T\alpha_1"] \\ & W \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\beta_3"] & W \arrow[r, "\beta_3"] \arrow[d, dashed, "\delta_3"] & TY \\ & TY \arrow[r, "T\alpha_2"] & TU & \end{tikzcd}$$

Definição 1.17 *Uma categoria $\mathcal{C}$ é chamada* categoria triangulada *se $\mathcal{C}$ é pré-triangulada e também satisfaz o axioma (TR4).*

Em uma categoria aditiva, um conjunto de triângulos $\mathcal{T}$ é chamado *triangulação*, se seus triângulos satisfazem as condições *(TR1)*, *(TR2)*, *(TR3)* e *(TR4)* .

1.6 Categoria Homotópica e Categoria Derivada

Sejam $f_\bullet$, $g_\bullet$ morfismos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Dizemos que $f_\bullet$ e $g_\bullet$ são *homotópicos* se existe uma família de morfismos $s = (s_i : X_i \to Y_{i-1})$ em $\mathcal{A}$ tal que $f_i - g_i = s_i d^Y_{i-1} + d^X_i s_{i+1}$, conforme diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{i-1} \arrow[r, "d^X_{i-1}"] & X_i \arrow[r, "d^X_i"] \arrow[dl, dashed, "s_i"'] \arrow[d, shift right, "f_i"'] \arrow[d, shift left, "g_i"] & X_{i+1} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "s_{i+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_{i-1} \arrow[r, "d^Y_{i-1}"] & Y_i \arrow[r, "d^Y_i"] & Y_{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Nesse caso, denotamos $f_\bullet \sim g_\bullet$ e chamamos s de *homotopia*. Se $f_\bullet \sim 0_\bullet$, dizemos que $f_\bullet$ é homotopicamente nulo.

Seja $\mathcal{I}$ conjunto dos morfismos homotopicamente nulos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, temos que $\mathcal{I}$ forma um ideal em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, o que significa que, para cada par $X_\bullet, Y_\bullet$ de complexos, um subgrupo

$$\mathcal{I}(X_\bullet, Y_\bullet) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X_\bullet, Y_\bullet)$$

tal que qualquer composição $f_\bullet g_\bullet$ de morfismos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ pertence a $\mathcal{I}$, se $f_\bullet$ ou $g_\bullet$ pertence a $\mathcal{I}$.

A *categoria homotópica* $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é o quociente de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ com respeito ao ideal $\mathcal{I}$, o que significa que os objetos de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ são complexos e os morfismos são morfismos de complexos módulo homotopia, ou seja, dados $X_\bullet, Y_\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$, o conjunto de morfismos entre $X_\bullet$ e $Y_\bullet$ está definido como

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X_\bullet, Y_\bullet) = \frac{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X_\bullet, Y_\bullet)}{\mathcal{I}(X_\bullet, Y_\bullet)}.$$

Se $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana, podemos definir o funtor de cohomogias $H_n : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, da seguinte forma: para cada $X_\bullet \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, defina $H_n(X_\bullet) = \dfrac{\mathrm{Ker}\ d^X_n}{\mathrm{Im}\ d^X_{n-1}}$, para cada morfismo $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$, defina $H_n(f_\bullet) : H_n(X_\bullet) \to H_n(Y_\bullet)$ por $H_n(f_\bullet)(\overline{x}) = \overline{f_n(x)}$. Se $H_n(X_\bullet) \neq 0$ apenas para uma quantidade finita de índices n, dizemos que $X_\bullet$ tem *cohomologia limitada.* O funtor definido acima está bem definido em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, já que se $f_\bullet \sim g_\bullet$, então $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Cada H_n é um funtor covariante da categoria de complexos de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{A}$. Um morfismo $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é chamado *quase-isomorfismo*, se

$H_n(f_\bullet)$ é um isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Os quase-isomorfismos têm um papel fundamental na definição de categoria derivada, para introduzirmos esta definição, apresentaremos, a seguir, o conceito de localização de uma categoria.

Definição 1.18 *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria e S uma classe de morfismos em $\mathcal{A}$. A* localização de $\mathcal{A}$ com respeito a S *é uma categoria $\mathcal{A}[S^{-1}]$ junto com um funtor $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}[S^{-1}]$, satisfazendo*

1. *$Q(s)$ é um isomorfismo, para todo $s \in S$;*
2. *se $\mathcal{T}$ é uma categoria, qualquer funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{T}$, tal que $F(s)$ é um isomorfismo, para todo $s \in S$, se fatora unicamente através de Q, ou seja, existe único $G : \mathcal{A}[S^{-1}] \to \mathcal{T}$ tal que o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{A}[S^{-1}] \arrow[d, dashed, "\exists!\ G"] \\ & \mathcal{T} \end{tikzcd}$$

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana, a *categoria derivada* de $\mathcal{A}$ é a localização de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ no conjunto S formado por todos os quase-isomorfismos em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Denotamos tal categoria por $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, ou seja, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \mathcal{K}(A)[S^{-1}]$, o que significa que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é obtida de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ invertendo-se formalmente os quase-isomorfismos. Embora $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ não sejam categorias abelianas, elas possuem propriedades que as tornam categorias trianguladas.

Neste trabalho, estamos interessados em trabalhar sobre a categoria abeliana de módulos à esquerda finitamente gerados, denotada por $A-$mod. Denotaremos suas categorias homotópica $\mathcal{K}(A-\text{mod})$ e derivada $\mathcal{D}(A-\text{mod})$ simplesmente por $\mathcal{K}(A)$ e $\mathcal{D}(A)$, respectivamente. Exibiremos, a seguir, o funtor translação e os triângulos exatos. O funtor translação $T : \mathcal{K}(A) \to \mathcal{K}(A)$ é definido da seguinte forma: dado um objeto $X_\bullet = (X_n, d_n^X) \in \mathcal{K}(A)$, temos o objeto $TX_\bullet = ((TX_\bullet)_n, d_n^{(TX)})$ em $\mathcal{K}(A)$, dado por $(TX_\bullet)_n = X_{n-1}$ e $d_n^{(TX)} = -d_{n-1}^X$.

A definição abaixo será útil para definirmos o conjunto de triângulos exatos.

Definição 1.19 *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva e $f : X_\bullet \to Y_\bullet$ um morfismo de complexos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Chamamos de* cone do morfismo f, *o complexo $(C_f)_\bullet$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, definido por $(C_f)_n = X_{n-1} \oplus Y_n$ e diferencial $d_n^{C_f} = \begin{bmatrix} -d_{n-1}^X & f_{n-1} \\ 0 & d_n^Y \end{bmatrix}$.*

Um triângulo em $\mathcal{K}(A)$ é um *triângulo exato* se é isomorfo a um triângulo da forma

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} C_f \xrightarrow{\beta(f)} X[1]$$

onde $\alpha(f)_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{id} \end{bmatrix}$ e $\beta(f)_n = \begin{bmatrix} \text{id} & 0 \end{bmatrix}$. Prova-se que a categoria homotópica $\mathcal{K}(A)$, com o funtor translação e os triângulos exatos definidos acima, é uma categoria triangulada.

Os dois próximos lemas serão bastante úteis neste trabalho. O leitor pode encontrar demonstrações em [26], página 8, e em [30], página 85.

Lema 1.20 *([26]) Considere os complexos*

$$X_\bullet: \quad \ldots 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \ldots$$

$$W_\bullet: \quad \ldots 0 \longrightarrow W_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \ldots$$

$$Y_\bullet: \quad \ldots 0 \longrightarrow Y_1 \xrightarrow{d} Y_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \ldots,$$

em que $Y_0 = X_0$ *e* $W_1 = Y_1$. *Se* $f_\bullet$ *e* $g_\bullet$ *são os morfismos*

$$\begin{tikzcd} X_\bullet \arrow[d, "f"] & \ldots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \ldots \\ Y_\bullet & \ldots 0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r, "d"] & Y_0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \ldots \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Y_\bullet \arrow[d, "g"] & \ldots 0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & Y_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \ldots \\ W_\bullet & \ldots 0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \ldots, \end{tikzcd}$$

então os cones $(C_f)_\bullet$ *e* $(C_g)_\bullet$, *em* $\mathcal{K}(A)$, *são isomorfos aos complexos* $Z_\bullet = (Z_i, d_i^Z)$ *e* $T_\bullet = (T_i, d_i^T)$, *respectivamente, onde* $Z_i = T_i = 0$, *para todo* $i \neq 1$, $Z_1 = Y_1$, $T_1 = Y_0$ *e* $d_i^Z = d_i^T = 0$, *para todo* $i \in \mathbb{Z}$.

Lema 1.21 *([30]) Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria aditiva e* $M_\bullet = (M_i, d_i^M)$ *um complexo de objetos de* $\mathcal{C}$ *na forma abaixo*

$$\cdots \longrightarrow Y_{i+2} \oplus X_{i+1} \oplus Y_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}^M} Y_{i+1} \oplus X_i \oplus Y_i \xrightarrow{d_i^M} Y_i \oplus X_{i-1} \oplus Y_{i-1} \longrightarrow \cdots,$$

onde

$$d_i^M = \begin{bmatrix} d_i^{11} & 0 & d_i^{13} \\ d_i^{21} & d_i^{22} & 0 \\ 1 & d_i^{32} & d_i^{33} \end{bmatrix},$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. *Então* $M_\bullet$ *é isomorfo ao complexo* $N_\bullet = (N_i, d_i^N)$, *onde* $N_i = M_i$ *e*

$$d_i^N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_i^{22} - d_i^{21} d_i^{32} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. *Em particular, na categoria homotópica* $\mathcal{K}(\mathcal{C})$, $M_\bullet$ *é isomorfo ao complexo abaixo.*

$$\cdots \longrightarrow X_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}^{22} - d_{i+1}^{21} d_{i+1}^{32}} X_i \xrightarrow{d_i^{22} - d_i^{21} d_i^{32}} X_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e S um conjunto de morfismos em $\mathcal{C}$. Dizemos que S *admite frações à esquerda* se satisfaz as seguintes propriedades:

(FE1) se $s : X \to Y$ e $t : Y \to Z$ são morfismos em S, então $st \in S$. Para todo objeto X em $\mathcal{C}$, o morfismo identidade $\mathrm{id}_X \in S$;

(FE2) para cada par de morfismos $X' \xrightarrow{f'} Y' \xleftarrow{s'} Y$, com $s' \in S$, existem morfismos $f \in \mathcal{C}$ e $s \in S$, para os quais o diagrama a seguir é comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, dashed, "s"'] & Y \arrow[d, "s'"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd};$$

(FE3) sejam $f, g : X \to Y$ dois morfismos em $\mathcal{C}$. Se existe $s : Y \to Y'$ em S, tal que $fs = gs$, então existe $t : X' \to X$ em S, tal que $tf = tg$.

De maneira dual, podemos definir quando S *admite frações à direita*. Caso o conjunto S admita frações à esquerda e à direita, o denominamos *sistema multiplicativo*.

Definição 1.22 *Sejam $\mathcal{T}$ uma categoria triangulada, com funtor translação T, e S um conjunto de morfismos de $\mathcal{T}$ que forma um sistema multiplicativo. Dizemos que S é* compatível com a triangulação, *se são válidas as seguintes condições:*

1. *$s \in S$ se, e somente se, o morfismo $T(s) \in S$;*

2. *dados triângulos exatos, $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ e $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z \xrightarrow{w'} TX'$, e dois morfismos $s : X \to X'$ e $s' : Y \to Y'$ em S, tais que $fs' = sf'$, existe $t : Z \to Z' \in S$ que completa o diagrama abaixo a um morfismo de triângulos.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "s'"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "t"] & TX \arrow[d, "Ts"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z \arrow[r, "w'"] & TX' \end{tikzcd}$$

Teorema 1.23 *Sejam $\mathcal{T}$ uma categoria triangulada e S um sistema multiplicativo compatível com a triangulação. Então a localização $\mathcal{T}[S^{-1}]$ é uma categoria triangulada e a classe dos triângulos exatos é fechada pelo funtor de localização.*

O conjunto S, formado pelos quase-isomorfismos em $\mathcal{K}(A)$, usado para localizar $\mathcal{K}(A)$ e obter $\mathcal{D}(A)$, é um sistema multiplicativo compatível com a triangulação, o que nos garante que $\mathcal{D}(A)$ é triangulada. Dada A uma k-álgebra, a subcategoria plena de $A-\mathrm{mod}$ cujos objetos são projetivos será denotada por $A-\mathrm{proj}$. Em $\mathcal{K}(A)$ temos as seguintes subcategorias trianguladas plenas:

$$\mathcal{K}^{-}(A) = \{X_\bullet = (X_i) \in \mathcal{K}(A) \mid \exists i_0 \text{ t.q. } X_i = 0, \forall i \geq i_0\}$$
$$\mathcal{K}^{+}(A) = \{X_\bullet = (X_i) \in \mathcal{K}(A) \mid \exists i_0 \text{ t.q. } X_i = 0, \forall i \leq i_0\}$$
$$\mathcal{K}^{b}(A) = \mathcal{K}^{-}(A) \cap \mathcal{K}^{+}(A).$$

A localização de cada uma das categorias anteriores com respeito ao conjunto S dos quase-isomorfismos gera as correspondentes categorias derivadas $\mathcal{D}^{-}(A)$, $\mathcal{D}^{+}(A)$ e $\mathcal{D}^{b}(A)$, respectivamente. Outras subcategorias plenas de $\mathcal{K}(A)$ importantes são

$$\mathcal{K}^{-,b}(A) = \{X_\bullet = (X_i) \in \mathcal{K}^{-}(A) \mid X_\bullet \text{ tem cohomologia limitada}\}$$
$$\mathcal{K}^{+,b}(A) = \{X_\bullet = (X_i) \in \mathcal{K}^{+}(A) \mid X_\bullet \text{ tem cohomologia limitada}\}.$$

Definição 1.24 *Duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são* equivalentes *se existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, bem como isomorfismos naturais $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \to GF$ e $\varsigma : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to FG$. O funtor F é chamado um quase-inverso de G (resp. G é um quase-inverso de F).*

Como critério prático para decidir quando duas categorias são equivalentes (ou quando um funtor é uma equivalência), temos a proposição abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [38].

Proposição 1.25 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Então F é uma equivalência se F induz bijeções sobre o conjunto dos homomorfismos e, ainda, se dado qualquer objeto $D \in \mathcal{D}$, existe um objeto $C \in \mathcal{C}$, tal que $F(C) \simeq D$.*

Teorema 1.26 *([26], pág. 113) $\mathcal{D}^{-}(A)$ é equivalente $\mathcal{K}^{-}(A - \mathrm{proj})$. A imagem de $\mathcal{D}^{b}(A)$ sobre essa equivalência é $\mathcal{K}^{-,b}(A - \mathrm{proj})$.*

Definição 1.27 *Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ categorias trianguladas. Um funtor $F : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ é um* funtor de categorias trianguladas *se F leva triângulos exatos em triângulos exatos e $FT_2 = T_1F$, onde T_i é o funtor shift na categoria trianguladas $\mathcal{T}_i$.*

Neste trabalho, dada uma certa álgebra A, muitas vezes, interessa-nos compreender como os objetos indecomponíveis da categoria derivada $\mathcal{D}^{b}(A)$ podem ser parametrizados. Contudo, nem sempre conseguiremos fazê-lo de forma direta, então recorreremos a outra álgebra em que isso seja possível. Essa ideia é embasada no conhecido teorema devido à Rickard, denominado Teorema de Morita para Categorias Derivadas (veja [32]).

Definição 1.28 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria triangulada. Dizemos que uma subcategoria plena $\mathcal{B}$* gera $\mathcal{C}$ como categoria triangulada*, se não existe uma subcategoria própria, plena e triangulada de $\mathcal{C}$, fechada sobre isomorfismos, que contém $\mathcal{B}$.*

Teorema 1.29 *(Teorema de Morita para Categorias Derivadas) Sejam A e B duas k-álgebras. São equivalentes:*

(a) $\mathcal{D}^{b}(A)$ e $\mathcal{D}^{b}(B)$ são equivalentes como categorias trianguladas;

(b) $\mathcal{K}^{b}(A - \mathrm{proj})$ e $\mathcal{K}^{b}(B - \mathrm{proj})$ são equivalentes como categorias trianguladas;

(c) B é isomorfa a $\mathrm{End}(T_\bullet)$, onde $T_\bullet$ é um complexo em $\mathcal{K}^b(A{-}\mathrm{proj})$ satisfazendo:

1) $\mathrm{Hom}(T_\bullet, T[i]_\bullet) = 0$, *para todo* $i \neq 0$,

2) $\mathrm{add}(T_\bullet)$ *gera* $\mathcal{K}^b(A - \mathrm{proj})$ *como categoria triangulada.*

Observe que, em [32], o Teorema 1.29 está exposto sobre módulos à direita, assim, sobre módulos à esquerda, deveríamos ter $B^{op} \simeq \mathrm{End}_{A-\mathrm{proj}}(T_\bullet)$, contudo a notação de composição de morfismos, estabelecida no início desta seção, permite-nos obter o resultado como apresentado. Um objeto $T_\bullet$ em $\mathcal{K}^b(A - \mathrm{proj})$ que satisfaça as condições *(c1)* e *(c2)* é chamado *complexo inclinante sobre A*. Dizemos que A e B são *derivadamente equivalentes*, se $\mathcal{D}^b(A)$ e $\mathcal{D}^b(B)$ são equivalentes como categorias trianguladas.

A seguir, faremos um exemplo para ilustrar o Teorema 1.29. Antes disso, apresentaremos ferramentas para facilitar o entendimento da ilustração.

Definição 1.30 *Seja $A = k(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ uma k-álgebra. Dados $i, j \in \mathcal{Q}_0$ e w um caminho não nulo de i para j, temos*

i) a multiplicação à esquerda por w gera um homomorfismo de Ae_j para Ae_i, que denotaremos $w\cdot$;

ii) a multiplicação à direita por w gera um homomorfismo de Ae_i para Ae_j, que denotaremos por $\cdot w$.

O Lema a seguir foi demonstrado para módulos à direita por Freitas, em [18], e nos será útil nas demonstrações de alguns lemas da seção "Álgebras Seriais".

Lema 1.31 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra. Dados $i, j, k \in \mathcal{Q}_0$ e w um caminho não nulo de k para j, considere os complexos $M_\bullet : \ \ldots 0 \longrightarrow A_k \xrightarrow{w} A_j \longrightarrow 0 \ldots$ (concentrado nos graus 1 e 0) e $L_\bullet : \ \ldots 0 \longrightarrow A_i \longrightarrow 0 \ldots$ (concentrado no grau 0). São válidas as seguintes sentenças:*

1. $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^bA}(L_\bullet, M[r]_\bullet) \cong \begin{cases} \dfrac{e_iAe_j}{e_iAw}, & \textit{se } r = 0 \\ e_iAe_k \cap \ker(\cdot w), & \textit{se } r = 1 \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

2. $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^bA}(M_\bullet, L[r]_\bullet) \cong \begin{cases} \dfrac{e_kAe_i}{wAe_i}, & \textit{se } r = -1 \\ e_jAe_i \cap \ker(w\cdot), & \textit{se } r = 0 \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

3. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^bA}(M_\bullet, M[r]_\bullet) \cong \begin{cases} \dfrac{e_kAe_j}{e_kAw + wAe_j} & \textit{se } r = -1 \\ \dfrac{[(s,t)]}{[(wf, fw)]}, & \textit{com } (s,t) \in e_kAe_k \times e_jAe_j, \\ wt = sw \text{ e } f \in e_jAe_k, & \textit{se } r = 0 \\ \ker(w\cdot) \cap \ker(\cdot w), & \textit{se } r = 1 \\ 0, & \textit{caso contrário,} \end{cases}$

No exemplo a seguir, dado um espaço vetorial V e vetores $v_i \in V$, para i em algum conjunto J, denotaremos por $[(v_i)_{i\in J}]$, o subespaço gerado por $\{v_i \mid i \in J\}$.

Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ a álgebra, em que o quiver $\mathcal{Q}$ é dado por

$$\begin{tikzcd} & & 5 & \\ 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[r, "b"] & 3 \arrow[u, "f"] \arrow[r, "c"] & 4 \arrow[lll, bend left, "d"] \end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I} = \langle abc, bcd \rangle$. Como aplicação do Teorema 1.29, exibiremos um complexo inclinante de A-módulos e encontraremos uma álgebra B que é derivadamente equivalente a A pelo Teorema 1.29. Defina o complexo $T_\bullet = \oplus_{i\in\mathcal{Q}_0} T_i$ de A-módulos da seguinte forma: $T_i : \ldots 0 \to A_i \to 0 \ldots$ (concentrado no grau 0), caso $i \neq 2$, e $T_2 : \ \ldots 0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\ b\ } A_3 \longrightarrow 0 \ldots$ (concentrado nos graus 1 e 0). Para verificarmos que o complexo $T_\bullet$ é inclinante, devemos mostrar que $\mathrm{Hom}(T_\bullet, T[r]_\bullet) = 0$, para todo $r \neq 0$, e a categoria $\mathrm{add}(T_\bullet)$ gera $\mathcal{K}^b(A - \mathrm{proj})$ como categoria triangulada. É fácil checar que, dados $i, j \neq 2$, $\mathrm{Hom}(T_i, T_j[r]) = 0$, para todo $r \neq 0$. Além disso, se $i \neq 2$, temos $\mathrm{Hom}(T_2, T_i[r]) = 0$, para todo $r \neq -1, 0$, e $\mathrm{Hom}(T_i, T_2[r]) = 0$, para todo $r \neq 0, 1$, e se $i = 2$, então $\mathrm{Hom}(T_2, T_2[r]) = 0$, para todo $r \neq -1, 0, 1$. Pelo Lema 1.31, segue que $\mathrm{Hom}(T_2, T_i[-1]) = 0$, quando $i, j \neq 2$, pois $e_2Ae_i = bAe_i$. Além disso, observe que $\mathrm{Hom}(T_i, T_2[1]) = 0$, já que $\ker(\cdot b) = 0$. E ainda que $\mathrm{Hom}(T_2, T_2[-1]) = 0$, pois $e_2Ae_3 = e_2Ab + bAe_3 = [b]$, e $\mathrm{Hom}(T_2, T_2[1]) = 0$, uma vez que $\ker(\cdot b) = 0$. Com isso, concluímos que $\mathrm{Hom}(T_\bullet, T[r]_\bullet) = 0$, para todo $r \neq 0$. Segue do Lema 1.20 que $\mathrm{add}(T_\bullet)$ gera $\mathcal{K}^b(A - \mathrm{proj})$ como categoria triangulada. Portanto, $T_\bullet$ é um complexo inclinante.
Agora determinaremos $\mathrm{End}T_\bullet$, já que, pelo Teorema 1.29, A e $\mathrm{End}T_\bullet$ são derivadamente equivalentes. Considere os homomorfismos abaixo:

$$\begin{tikzcd}
T_1 : \arrow[d, "\alpha"] & \dots 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "ab"] & 0 \dots \\
T_3 : & \dots 0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r] & 0 \dots
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T_3 : \arrow[d, "\mu"] & \dots 0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \dots \\
T_5 : & \dots 0 \arrow[r] & A_5 \arrow[r] & 0 \dots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T_3 : \arrow[d, "\gamma"] & \dots 0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \dots \\
T_4 : & \dots 0 \arrow[r] & A_4 \arrow[r] & 0 \dots
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T_4 : \arrow[d, "\delta"] & \dots 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \dots \\
T_1 : & \dots 0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r] & 0 \dots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T_3 : \arrow[d, "\varepsilon"] & \dots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "e_3"] & 0 \dots \\
T_2 : & \dots 0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "b"] & A_3 \arrow[r] & 0 \dots
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T_2 : \arrow[d, "\lambda"] & \dots 0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "b"] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "cd"] & 0 \dots \\
T_1 : & \dots 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & 0 \dots
\end{tikzcd}$$

De acordo com o Lema 1.31, os homomorfismos entre os somandos diretos de $T_\bullet$ são:

$$\mathrm{Hom}(T_i, T_j) \cong \begin{cases}
[\mathrm{id}_{T_i}], & \text{se } i = j = 1, 2, 4, 5 \\
[\lambda]\,, & \text{se } i = 2, j = 1 \\
[\varepsilon]\,, & \text{se } i = 3, j = 2 \\
[\gamma]\,, & \text{se } i = 3, j = 4 \\
[\mu]\,, & \text{se } i = 3, j = 5 \\
[\delta]\,, & \text{se } i = 4, j = 1 \\
[\alpha\mu]\,, & \text{se } i = 1, j = 5 \\
[\lambda\alpha]\,, & \text{se } i = 2, j = 3 \\
[\lambda\alpha\mu]\,, & \text{se } i = 2, j = 5 \\
[\gamma\delta]\,, & \text{se } i = 3, j = 1 \\
[\mathrm{id}_{T_i}, \gamma\delta\alpha]\,, & \text{se } i = j = 3 \\
[\delta\alpha]\,, & \text{se } i = 4, j = 3 \\
[\delta\alpha\gamma]\,, & \text{se } i = 4, j = 5 \\
0, & \text{caso contrário.}
\end{cases}$$

Com estes homomorfismos calculados, podemos considerar $\mathrm{End} T_\bullet \cong k\mathcal{Q}_B/\mathcal{I}_B$, onde

$$\mathcal{Q}_B : \quad \begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[dr, "\delta"] & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 3 \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] \arrow[d, "\mu"'] & & 1 \\
 & 5 & 2 \arrow[ur, "\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I}_B$ um ideal de $k\mathcal{Q}_B$. No diagrama, as linhas tracejadas verticais sobre um vértice 1 representam o ciclo existente de 1 para 1. Uma flecha $\phi : i \to j$ em $\mathcal{Q}_B$ corresponde ao homomorfismo $\phi : T_i \to T_j$. Podemos ver que $\gamma\delta - \varepsilon\lambda = \alpha\gamma = \alpha\varepsilon = 0$ em $\mathrm{End}T_\bullet$, logo $\langle \gamma\delta - \varepsilon\lambda, \alpha\gamma, \alpha\varepsilon \rangle \subseteq \mathcal{I}_B$. Como $\dim_k \mathrm{Hom}(T_i, T_j) = \dim_k e_i \left(\frac{k\Delta}{\mathcal{I}_B}\right) e_j$, temos $\mathcal{I}_B = \langle \gamma\delta - \varepsilon\lambda, \alpha\gamma, \alpha\varepsilon \rangle$.

1.7 Álgebras derivadamente mansas e Álgebras derivadamente selvagens

Um problema fundamental na Teoria de Representação de Álgebras é classificar todos os módulos indecomponíveis, a menos de isomorfismo. Geiss e Krause ([22]) introduziram uma noção de álgebras mansas e álgebras selvagens para a categoria derivada de álgebras de dimensão finita. Em [7], Bekkert e Drozd estabeleceram a Dicotomia Mansa-Selvagem para categorias derivadas, mais tarde publicada em [16].

Sejam A e B duas k-álgebras. Dado $X_\bullet = (X_i, d_i^X)$ um complexo limitado de módulos sobre $B \otimes A$, podemos definir o funtor

$$\begin{array}{rrcl} X_\bullet \otimes - : & B - \mathrm{mod} & \longrightarrow & \mathcal{C}^b(A) \\ & M & \longmapsto & Y_\bullet = (Y_i, d_i^Y), \text{ em que } Y_i = X_i \otimes M \text{ e } d_i^Y = d_i^X \otimes \mathrm{id}_M \\ & f & \longmapsto & g_\bullet = (g_i), \text{ em que } g_i = \mathrm{id}_{X_i} \otimes f \end{array}$$

A definição de álgebra derivadamente mansa que apresentaremos, a seguir, é análoga à definição de mansa de Drozd [15]. Para isso, usaremos a definição: dado um complexo $X_\bullet \in \mathcal{D}^b(A)$, a *dimensão cohomológica* de $X_\bullet$ é dada pelo vetor $h\text{-}\dim X_\bullet = (\dim H_n(X_\bullet))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Definição 1.32 *Seja A uma k-álgebra, onde k é um corpo. Dizemos que A é* derivadamente mansa *se, para cada vetor $v = (v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de números naturais, existem uma localização $R = k[x]_f$ com respeito a algum $f \in k[x]$ e um número finito de complexos limitados de $R - A$-bimódulos $(C_1)_\bullet$, $(C_2)_\bullet$, ..., $(C_n)_\bullet$, satisfazendo:*

1. *cada $(C_j)_i$ é finitamente gerado e livre sobre R;*
2. *a menos de uma quantidade finita, todo indecomponível $X_\bullet \in \mathcal{D}^b(A)$ com $h\text{-}\dim X_\bullet = v$ é isomorfo a $S \otimes_R C_j$, para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$ e algum R-módulo simples S.*

Pela Definição 1.32, vimos que A é derivadamente mansa se, para cada vetor de números naturais v, os objetos indecomponíveis de $\mathcal{D}^b(A)$ cuja dimensão cohomológica é v podem ser parametrizados por uma quantidade finita de famílias de um parâmetro. Dado um A-módulo M, denotamos JM o radical de M.

Definição 1.33 *Seja A uma k-álgebra, onde k é um corpo. Dizemos que A é* derivadamente selvagem, *se existe um complexo limitado $N = (N^i, d_N^i)$ de módulos projetivos sobre $k\langle x, y\rangle \otimes A$, tal que $\mathrm{Im} d_N^n \subseteq JN^{n+1}$, e o funtor $- \otimes N : \mathrm{fin} k\langle x, y\rangle \to \mathcal{D}^b(A)$ satisfaz*

1. *$L \otimes_{k\langle x,y\rangle} N \simeq L' \otimes_{k\langle x,y\rangle} N$ se, e somente se, $L \simeq L'$;*
2. *$L \otimes_{k\langle x,y\rangle} N$ é indecomponível se, e somente se, L é indecomponível.*

Veremos alguns exemplos que ilustram essas definições adiante. O teorema a seguir refere-se ao análogo da Dicotomia Mansa-Selvagem para categorias derivadas [7].

Teorema 1.34 *Toda álgebra de dimensão finita, sobre um corpo algebricamente fechado, é ou derivadamente mansa ou derivadamente selvagem.*

Com o resultado a seguir, Geiss e Krause provaram que a classe das álgebras derivadamente mansas é fechada por equivalência derivada [22] (veja Teorema 5.1, página 13).

Teorema 1.35 *[22] Sejam A e B álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k. Se A e B são derivadamente equivalentes, então A é derivadamente mansa se, e somente se, B o é.*

Proposição 1.36 *Sejam k um corpo algebricamente fechado e A uma k-álgebra. Se A é selvagem, então A é derivadamente selvagem.*

Corolário 1.37 *Sejam k um corpo e A uma k-álgebra. Se A é derivadamente mansa, então A é mansa.*

Corolário 1.38 *Toda álgebra hereditária cujo grafo subjacente não é um diagrama de Dynkin ou de Dynkin estendido é derivadamente selvagem.*

Exemplo 1.39 *Considere $A = k(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ a álgebra, em que o quiver $\mathcal{Q}$ é dado por*

$$\begin{tikzcd} & 3 & \\ 0 \arrow[r, "a_0"] & 1 \arrow[u, "c"] \arrow[r, "a_1"] & 2 \arrow[ll, bend left, "a_2"] \end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I} = \langle a_0 a_1, a_0 c\rangle$. Vamos mostrar que A é derivadamente selvagem. Para isso, considere a álgebra hereditária $W = k\Delta$, onde Δ é o quiver abaixo.

$$\Delta : \quad \begin{tikzcd} & & 10 & & & & & & \\ 1 \arrow[r, "p_1"] & 2 \arrow[r, "p_2"] & 3 \arrow[u, "q"] \arrow[r, "p_3"] & 4 \arrow[r, "p_4"] & 5 \arrow[r, "p_5"] & 6 \arrow[r, "p_6"] & 7 \arrow[r, "p_7"] & 8 \arrow[r, "p_8"] & 9 \end{tikzcd}$$

Sabemos que a álgebra W é selvagem, pelo Corolário 1.38. Com isso, existe um $W - k\langle x,y\rangle$ - bimódulo $M = M(W)$, finitamente gerado e livre sobre $k\langle x,y\rangle$, tal que o funtor $M\otimes_{k\langle x,y\rangle} -$, da categoria dos $k\langle x,y\rangle$ - módulos para a categoria de W-módulos, preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Podemos trabalhar com o bimódulo M como a $k\langle x,y\rangle$-representação de Δ a seguir

$$\begin{tikzcd}
 & & M_{10} & & & & & & \\
M_1 \arrow[r, "M(p_1)"] & M_2 \arrow[r, "M(p_2)"] & M_3 \arrow[u, "M(q)"'] \arrow[r, "M(p_3)"] & M_4 \arrow[r, "M(p_4)"] & M_5 \arrow[r, "M(p_5)"] & M_6 \arrow[r, "M(p_6)"] & M_7 \arrow[r, "M(p_7)"] & M_8 \arrow[r, "M(p_8)"] & M_9
\end{tikzcd}$$

Denotamos por d_l o posto de $M(l)$ sobre $k\langle x,y\rangle$. Considere N o seguinte complexo de $A - k\langle x,y\rangle$-bimódulos, em que $w = a_1a_2a_0$:

$$\begin{tikzcd}
 & & & d_{10}A_3 & & & & & \\
d_1A_1 \arrow[r, "wM(p_1)"] & d_2A_1 \arrow[r, "wM(p_2)"] & d_3A_1 \arrow[ur, "cM(q)"] \arrow[r, "wM(p_3)"] & d_4A_1 \arrow[r, "wM(p_4)"] & d_5A_1 \arrow[r, "wM(p_5)"] & d_6A_1 \arrow[r, "wM(p_6)"] & d_7A_1 \arrow[r, "wM(p_7)"] & d_8A_1 \arrow[r, "wM(p_8)"] & d_9A_1
\end{tikzcd}$$

onde $A_1 = Ae_1$ e $A_3 = Ae_3$. Verificaremos que o funtor $N\otimes_{k\langle x,y\rangle} -$, que leva a categoria dos $k\langle x,y\rangle$-módulos para a categoria $\mathcal{K}^b(A - \mathrm{proj})$, preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos, donde seguirá que A é derivadamente selvagem. Dados $(V_i, T(l_i))$ um objeto e f_i um morfismo de $\mathrm{rep}_k(\Delta)$, considere o funtor $G : \mathrm{rep}_k(\Delta) \longrightarrow \mathcal{K}^b(A - \mathrm{proj})$, tal que $G((V_i, T(l_i)))$ é o complexo

$$\begin{tikzcd}
 & & & A_3\otimes V_{10} & & & \\
A_1\otimes V_1 \arrow[r, "w\otimes T(l_1)"] & A_1\otimes V_2 \arrow[r, "w\otimes T(l_2)"] & A_1\otimes V_3 \arrow[ur, "w\otimes T(l_{10})"] \arrow[r, "w\otimes T(l_3)"] & A_1\otimes V_4 \arrow[r, "w\otimes T(l_4)"] & A_1\otimes V_5 \arrow[r, "w\otimes T(l_5)"] & A_1\otimes V_6 \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "w\otimes T(l_6)"] & A_1\otimes V_7 \arrow[r, "w\otimes T(l_7)"] & A_1\otimes V_8 \arrow[r, "w\otimes T(l_8)"] & A_1\otimes V_9
\end{tikzcd}$$

e $G((f_i))$ é o morfismo

$$\left[e_1\otimes f_1, e_1\otimes f_2, e_1\otimes f_3, \begin{pmatrix} e_1\otimes f_4 & 0 \\ 0 & e_3\otimes f_{10}\end{pmatrix}, e_1\otimes f_5, e_1\otimes f_6, e_1\otimes f_7, e_1\otimes f_8, e_1\otimes f_9\right].$$

O funtor G preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos, o que implica que a composta $G\circ M\otimes_{k\langle x,y\rangle} - : \mathrm{fin}k\langle x,y\rangle \longrightarrow \mathcal{K}^b(A - \mathrm{proj})$ também preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Como os funtores $N\otimes_{k\langle x,y\rangle} -$ e $G\circ M\otimes_{k\langle x,y\rangle} -$ são isomorfos, segue o que queríamos.

O leitor poderá tomar o exemplo 1.39 como referência às verificações que serão omitidas nas demonstrações de alguns lemas do capítulo "Álgebras Seriais".

Lema 1.40 *[6] Sejam A uma k-álgebra e B uma subálgebra plena de A. Se B é derivadamente selvagem, então A também o é.*

Exemplo 1.41 *Seja $A = k(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ a álgebra, em que $\mathcal{Q}$ é o quiver*

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 & \\
0 \arrow[r, "a_0"] & 1 \arrow[r, "a_1"] & 2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[u, "c"] & 3 \arrow[lll, bend left, "a_3"]
\end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I} = \langle a_0a_1a_2, a_1a_2a_3, a_1c \rangle$. Vamos mostrar que A é derivadamente selvagem, exibindo uma subálgebra plena, conforme o Lema 1.40. Considere B a subálgebra plena eAe de A, em que $e = \sum_{k \in \mathcal{Q}_0 \setminus \{1,3\}} e_i$. Observe que $B = k\mathcal{Q}_B / \langle R_B \rangle$, onde o quiver $\mathcal{Q}_B$ é

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "b_0"] & 2 \arrow[l, bend left, "b_2"] \arrow[r, "c"] & 4
\end{tikzcd}$$

e o conjunto $R_B = \{b_0b_2, b_0c\}$. Segue de [18] que B é derivadamente selvagem.

Os lemas a seguir podem ser encontrados em [6], respectivos Lemas 3.2 e 3.3, página 2442.

Lema 1.42 *Seja $A = k(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ uma k-álgebra. Dados $a, b \in \mathcal{Q}_1$ e $w = \sum_i \lambda_i w_i \notin \mathcal{I}$, onde $\lambda_i \in k$ e w_i são caminhos de comprimento maior ou igual a 1, com $s(w_i) = s(w_j)$ e $t(w_i) = t(w_j)$, para quaisquer i, j. Se $s(a) = s(b)$, $t(a) = t(b)$, $t(a) = s(w)$ (resp. $s(a) = t(w)$) e $aw, bw \in \mathcal{I}$ (resp. $wa, wb \in \mathcal{I}$), então A é derivadamente selvagem.*

Lema 1.43 *Seja $A = k(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ uma k-álgebra. Se existem $a, b \in \mathcal{Q}_1$, tais que $s(a) = t(a) = s(b)$ (resp. $s(a) = t(a) = t(b)$) e $a^2, ab \in \mathcal{I}$ (resp. $a^2, ba \in \mathcal{I}$), então A é derivadamente selvagem.*

Em [4], Bekkert e Drozd classificaram álgebras de radical ao quadrado zero derivadamente mansas, Teorema 1.1, página 6 (veja também [10]). Como nossas álgebras são de dimensão finita, tal teorema restringi-se ao resultado abaixo.

Teorema 1.44 *Seja A uma álgebra com $\mathrm{rad}^2 A = 0$. Então A é derivadamente mansa se, e somente se, Q_A é um quiver de Dynkin ou de Dynkin estendido.*

1.8 Álgebras Gentle e Álgebras Skewed-Gentle

Nesta seção, apresentamos duas classes de álgebras que têm um papel essencial nesse trabalho, as álgebras gentle e as álgebras skewed-gentle. Apresentaremos também resultados que garantem que elas são derivadamente mansas. Para mais detalhes, sugerimos ao leitor que consulte [2], [23] e [9]. Considere $\mathcal{Q}$ um quiver e $\mathcal{I}$ um ideal admissível na álgebra de caminhos $k\mathcal{Q}$.

Definição 1.45 *Dizemos que um quiver $\mathcal{Q}$ é* bisserial*, se todo vértice de $\mathcal{Q}$ é origem e término de, no máximo, duas flechas.*

Definições 1.46 *Dizemos que um par $(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$, onde $\mathcal{Q}$ é um quiver e $\mathcal{I}$ é um ideal admissível, é:*

1. bisserial especial *, se $\mathcal{Q}$ é bisserial e se para cada flecha β, existe, no máximo, uma flecha α, com $t(\alpha) = s(\beta)$ e $\alpha\beta \notin \mathcal{I}$, e, no máximo, uma flecha γ, com $s(\gamma) = t(\beta)$ e $\beta\gamma \notin \mathcal{I}$.*

2. gentle*, se $\mathcal{Q}$ é bisserial especial e se valem as afirmações:*

   (G1) $\mathcal{I}$ é gerado por 2-monômios,

   (G2) para cada flecha β, existe, no máximo, uma flecha α, com $t(\alpha) = s(\beta)$ e $\alpha\beta \in \mathcal{I}$, e, no máximo, uma flecha γ, com $s(\gamma) = t(\beta)$ e $\beta\gamma \in \mathcal{I}$.

Definição 1.47 *Uma k-álgebra A é chamada* gentle *se é Morita equivalente a uma álgebra quociente $k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$, em que $(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ é um par gentle.*

Exemplo 1.48 *A álgebra $A = k(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ é gentle, para $\mathcal{Q}$ o quiver abaixo*

$$\begin{tikzcd}
 & 3 & \\
0 \arrow[r, "a_0"] & 1 \arrow[u, "c"] \arrow[r, "a_1"] & 2 \arrow[ll, bend left, "a_2"]
\end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I} = \langle a_0 a_1 \rangle$.

O próximo teorema segue de [31], página 493. (ver também [9]).

Teorema 1.49 *Toda álgebra gentle é derivadamente mansa.*

Dado um quiver $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, s, t)$, fixaremos alguns de seus vértices, os quais serão chamados *vértices especiais*, e denotaremos o conjunto formado por eles por S_p. Um vértice que pertença ao conjunto $\mathcal{Q}_0 \backslash S_p$ será chamado *vértice ordinário*. Seja R um conjunto de relações em $\mathcal{Q}$, a partir de uma tripla $(\mathcal{Q}, S_p, R)$, corresponderemos o par $(\mathcal{Q}^{sp}, \langle R^{sp} \rangle)$, em que o quiver $\mathcal{Q}^{sp} = (\mathcal{Q}_0^{sp}, \mathcal{Q}_1^{sp}, \overline{s}, \overline{t})$ é tal que $\mathcal{Q}_0^{sp} := \mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_1^{sp} := \mathcal{Q}_1 \cup \{\alpha_i \mid i \in S_p\}$, as aplicações $\overline{s}$ e $\overline{t}$ são as restrições de s e t, respectivamente, sobre o conjunto $\mathcal{Q}_1$, cada α_i é um laço no vértice i e $R^{sp} := R \cup \{\alpha_i^2 \mid i \in S_p\}$.

Definição 1.50 *Uma tripla $(\mathcal{Q}, S_p, R)$ como acima é chamada* skewed-gentle *se o par correspondente $(\mathcal{Q}^{sp}, \langle R^{sp} \rangle)$ é gentle.*

Dada uma tripla $(\mathcal{Q}, S_p, R)$ skewed-gentle, associamos a cada vértice $i \in \mathcal{Q}_0$ um conjunto denotado por $\mathcal{Q}_0(i)$, tal que se i é um vértice especial, então $\mathcal{Q}_0(i) = \{i^-, i^+\}$, e se i é um vértice ordinário, então $\mathcal{Q}_0(i) = \{i\}$. Definiremos agora um novo par, que denotaremos $(\mathcal{Q}^{sg}, \langle R^{sg} \rangle)$, como segue:

$\mathcal{Q}_0^{sg} := \cup_{i \in \mathcal{Q}_0} \mathcal{Q}_0(i)$;

$\mathcal{Q}_1^{sg}[j,k] := \{(j,a,k) \mid a \in \mathcal{Q}_1, j \in \mathcal{Q}_0(s(a)), k \in \mathcal{Q}_0(t(a))\}$, que denota o conjunto de todas as flechas de j para k, onde j e k são vértices de $\mathcal{Q}_0^{sg}$;

$$R^{sg} = \left\{ \sum_{k \in \mathcal{Q}_0(s(b))} \lambda_k (j,a,k)(k,b,l) \mid ab \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{Q}_0(s(a)), l \in \mathcal{Q}_0(t(b)) \right\} \text{ com}$$

$$\lambda_k = \begin{cases} -1, & \text{se } k = i^-, \text{ para algum } i \in \mathcal{Q}_0 \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que as relações em R^{sg} são monomiais ou comutativas.

Definição 1.51 *Uma k-álgebra A é chamada* skewed-gentle*, se é Morita equivalente a uma álgebra quociente $k\mathcal{Q}^{sg}/\langle R^{sg} \rangle$, onde a tripla $(\mathcal{Q}, S_p, R)$ é skewed-gentle.*

Uma álgebra skewed-gentle é construída a partir de uma álgebra gentle e de um conjunto de vértices especiais.

Exemplo 1.52 *Considere a tripla $(\mathcal{Q}, S_p, R)$, onde $S_p = \{2, 4\}$, $R = \{\beta\varepsilon, \gamma\delta\}$ e $\mathcal{Q}$ é o quiver abaixo.*

$$\begin{tikzcd}
 & 4 & & \\
0 \arrow[r, "\beta"] & 1 \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r, "\gamma"] & 2 \arrow[r, "\delta"] & 3 \arrow[lll, bend left, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

Note que o par $(\mathcal{Q}^{sp}, \langle R^{sp} \rangle)$, onde $\mathcal{Q}^{sp}$ é o quiver abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & 4 \arrow[loop above, "\alpha_4"] & & \\
0 \arrow[r, "\beta"] & 1 \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r, "\gamma"] & 2 \arrow[loop above, "\alpha_2"] \arrow[r, "\delta"] & 3 \arrow[lll, bend left, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

e $R^{sp} = \{\alpha_2^2, \alpha_4^2, \beta\varepsilon, \gamma\delta\}$, é um par gentle e, consequentemente, a álgebra $k\mathcal{Q}^{sg}/\langle R^{sg} \rangle$ é skewed-gentle, sendo Q^{sg} o quiver

$$\begin{tikzcd}
 & 4^+ & & 4^- & 2^+ \arrow[dr, "\delta^+"] & & \\
0 \arrow[rr, "p"] & & 1 \arrow[ul, "\varepsilon^+"'] \arrow[ur, "\varepsilon^-"] \arrow[urr, "\gamma^+"'] \arrow[drr, "\gamma^-"'] & & & 3 \arrow[r, "q"] & 0 \\
 & & & & 2^- \arrow[ur, "\delta^-"'] & &
\end{tikzcd}$$

em que $p = (0, \beta, 1)$, $q = (3, \sigma, 0)$, $\varepsilon^+ = (0, \varepsilon, 4^+)$, $\varepsilon^- = (1, \varepsilon, 4^-)$, $\gamma^+ = (1, \gamma, 2^+)$, $\gamma^- = (1, \gamma, 2^-)$, $\delta^+ = (2^+, \delta, 3)$ *e* $\gamma^- = (2^-, \delta, 3)$, *e* $R^{sg} = \{p\varepsilon^+, p\varepsilon^-, \gamma^+\delta^+ - \gamma^-\delta^-\}$. *O tracejado vertical nesse quiver apenas representa o ciclo existente de 0 para 0, usaremos essa estratégia no restante do texto para que os quivers tenham visualizações melhores, já que o mesmo contém dois ciclos. Tal estratégia será usada em outros momentos ao longo do texto.*

O teorema abaixo será de suma importância para a demonstração do teorema principal, ele segue de [23], Corolário 5.5, página 325 (ver também [8]).

Teorema 1.53 *Toda álgebra skewed-gentle é derivadamente mansa.*

Em muitos lemas desse texto, para mostrarmos que uma álgebra é derivadamente mansa ou derivadamente selvagem, o faremos de forma indireta, exibindo outra álgebra que seja derivadamente equivalente, na qual tal característica seja mais fácil de ser identificada, conforme exemplo abaixo.

Exemplo 1.54 *No exemplo 1.6, verificamos que* A *é derivadamente equivalente à álgebra* $B = k\mathcal{Q}_B/\mathcal{I}_B$. *Podemos verificar que* B *é uma álgebra skewed-gentle. De fato, considere o quiver abaixo*

$$\Delta : \quad \begin{tikzcd} & 4 & \\ 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "b"] & 3 \arrow[ll, bend left, "c"] \end{tikzcd}$$

Considerando $J = \langle ab, bc\rangle$ *e* $S_p = \{3\}$, *verificamos que a tripla* (Δ, S_p, J) *é skewed-gentle e a álgebra skewed-gentle correspondente é* $k\Delta^{sg}/J^{sg}$ *é tal que*

$$\Delta^{sg} : \quad \begin{tikzcd} & & 3^+ \arrow[dr, "{(3^+,c,1)}"] & \\ 1 \arrow[r, "{(1,a,2)}"] & 2 \arrow[ur, "{(2,b,3^+)}"] \arrow[dr, "{(2,b,3^-)}"'] \arrow[d, "{(2,d,4)}"'] & & 1 \\ & 4 & 3^- \arrow[ur, "{(3^-,c,1)}"'] & \end{tikzcd}$$

e $J^{sg} = \langle (1, a, 2)(2, b, 3^+), (1, a, 2)(2, b, 3^-), (2, b, 3^+)(3^+, c, 1) - (2, b, 3^-)(3^-, c, 1)\rangle$. *Observe que as álgebras* $k\Delta^{sg}/J^{sg}$ *e* $k\mathcal{Q}_B/\mathcal{I}_B$ *são isomorfas, como gostaríamos de mostrar.*

Em geral, a classe das álgebras derivadamente mansas não é fechada por quociente, como podemos ver no exemplo abaixo.

Exemplo 1.55 *De acordo com o Lema 1.15, se o quociente de uma álgebra por um ideal é selvagem, então* A *é selvagem. Apresentamos um exemplo de que isso* *não se aplica para a categoria derivada. Considere o quiver abaixo.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q}: & 1 \arrow[loop above, "a"] \arrow[r, "b"] & 2 \end{tikzcd}$$

Se $A = k(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$, *para* $\mathcal{I} = \langle a^2 \rangle$, *então* A *é uma álgebra gentle e, pelo Teorema 1.49,* A *é derivadamente mansa. A álgebra* $B = k\mathcal{Q}/\langle a^2, ab\rangle$ *é quociente de* A *pelo ideal* $J = \langle ab \rangle$, *e é derivadamente selvagem pelo Lema 1.43.*

Capítulo 2

Álgebras Seriais

Relembramos ao leitor que nossas álgebras são de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Os conceitos e resultados prévios sobre álgebras seriais, apresentados aqui, podem ser encontrados em [1].

Seja A uma k-álgebra. Dado um A-módulo à esquerda M, existe uma cadeia $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots M_m = M$ de submódulos de M, tal que $\dfrac{M_{i+1}}{M_i}$ é um módulo simples, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, a qual chamamos uma *série de composição.*

Definições 2.1 *a. Um A-módulo $_AM$ é* unisserial *se tem uma única série de composição.*

b. Dizemos que uma k-álgebra A é serial à esquerda *(resp.* serial à direita*) se todo A-módulo à esquerda (resp. à direita) projetivo indecomponível é unisserial.*

O resultado a seguir caracteriza a unisserialidade de um módulo, uma demonstração pode ser encontrada em [1], Lema 2.2, página 164, e é fácil.

Lema 2.2 *Seja M um A-módulo à esquerda. Então M é unisserial se, e somente se, a série de radicais $M \supset \mathrm{rad}M \supset \mathrm{rad}^2M \supset \ldots \supset 0$ é uma série de composição.*

Exemplo 2.3 *Considere as três álgebras hereditárias a seguir.*

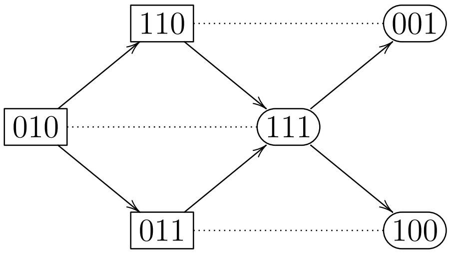
$A = \mathcal{Q}_A$: $1 \xleftarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$

$A^{op} = \mathcal{Q}_{A^{op}}$: $1 \xrightarrow{a} 2 \xleftarrow{b} 3$

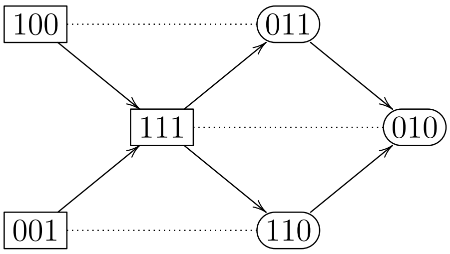
$C = \mathcal{Q}_C$: $1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$

Usando o método de tricotamento (veja [1], páginas 125–138), construímos os respectivos quivers de Auslander-Reiten apresentados abaixo. Os módulos injetivos aparecem em molduras arredondadas, os projetivos em molduras retangulares simples e os projetivos-injetivos em moldura retangular dupla. As translações de Auslander-Reiten são representadas por linhas pontilhadas. Relembramos que nossos módulos são à esquerda.

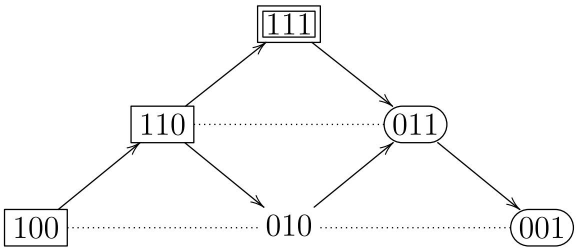
Γ_A :



$\Gamma_{A^{op}}$:



Γ_B :



Em Γ_A, usando o Lema 2.2, constatamos facilmente que os três módulos à esquerda projetivos indecomponíveis admitem série de composição única, portanto A é serial à esquerda. Entretanto A não é serial à direita, pois os A-módulos à direita projetivos indecomponíveis coincidem com os A^{op}-módulos à esquerda projetivos, e, de acordo com $\Gamma_{A^{op}}$, temos o A^{op}-módulo à esquerda projetivo 111 com duas séries de composição. Dualmente, A^{op} é serial à direita, mas não serial à esquerda. Já a álgebra B é serial à esquerda e à direita.

Definição 2.4 *Dizemos que uma k-álgebra A é* de Nakayama *se é serial à esquerda e à direita, simultaneamente.*

Em [5], Bekkert, Giraldo e Velez-Marulanda provaram que uma álgebra de Nakayama derivadamente mansa sem módulo projetivo simples é gentle ou derivadamente equivalente a uma álgebra skewed-gentle, como apresentamos adiante. O resultado a seguir caracteriza uma álgebra Nakayama, para mais detalhes, consulte [27] ou [1] (Teorema 3.2, página 168).

Teorema 2.5 *Uma k-álgebra conexa e básica A é de Nakayama se, e somente se, A é isomorfa à álgebra de caminhos sobre um quiver com relações $(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$, onde $\mathcal{Q}$ possui um dos tipos a seguir:*

$$\mathbb{L}_n : \ 0 \xrightarrow{a_0} 1 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} n$$

$$\mathbb{C}_n : \ \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "a_0"] & 1 \arrow[r, "a_1"] & \cdots \arrow[r, "a_{n-2}"] & n-1 \arrow[lll, bend left, "a_{n-1}"] \end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I}$ é um ideal em $k\mathcal{Q}$ gerado por um conjunto de caminhos não vazio de $\mathcal{Q}$ de comprimento maior ou igual a 2. Caso $\mathcal{Q} = \mathbb{C}_n$, temos $\mathcal{Q}_0 = \mathbb{Z}/(n)$.

Lembramos que se A é uma álgebra de dimensão global finita, então sua forma quadrática de Euler é definida sobre o grupo de Grothendieck de A por $\chi_A(\dim M) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \dim_k \mathrm{Ext}_A^i(M, M)$, para um A-módulo M qualquer, onde $\dim M$ significa o vetor dimensão de M. Apresentamos abaixo, a classificação das álgebras de Nakayama derivadamente mansas feita em [5], Teorema 1.1.

Teorema 2.6 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra básica, conexa e de Nakayama. Então A é derivadamente mansa se, e somente se, satisfaz uma das condições a seguir:*

1. *$\mathcal{Q}$ é do tipo $\mathbb{L}_n$ e sua forma de Euler é não-negativa;*
2. *$\mathcal{Q}$ é do tipo $\mathbb{C}_n$ e A satisfaz as seguintes condições:*
   - *(a) $\mathcal{I}$ é gerado por caminhos de comprimento dois ou três;*
   - *(b) se $a_i a_{i+1} a_{i+2} \in R_A$, então ou $a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} \in R_A$ ou $a_{i-1} a_i a_{i+1} \in R_A$;*
   - *(c) se $a_i a_{i+1} a_{i+2}, a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} \in R_A$, então $a_{i-1} a_i a_{i+1}, a_{i+2} a_{i+3} a_{i+4} \notin R_A$,*

onde R_A representa um conjunto minimal de caminhos que gera $\mathcal{I}$.

Bekkert, Giraldo e Velez-Marulanda ainda caracterizaram as álgebras do item 2 do Teorema 2.6 (veja [5], Teorema 1.2).

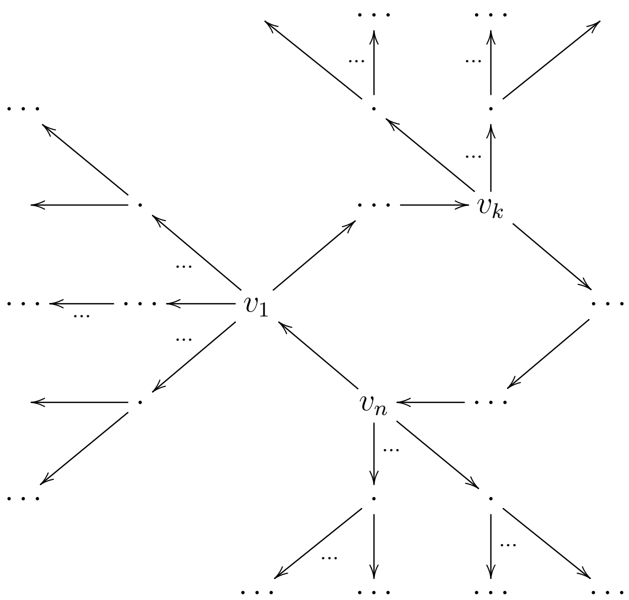
Teorema 2.7 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama, tal que $\mathcal{Q}$ é do tipo $\mathbb{C}_n$. Então A é derivadamente mansa se, e somente se, A é derivadamente equivalente a uma álgebra skewed-gentle.*

O Teorema 1.2 afirma que cada k-álgebra A conexa, básica e de dimensão finita é isomorfa à àlgebra de caminhos de um quiver com relações $(\mathcal{Q}_A, \mathcal{I})$, para algum ideal admissível $\mathcal{I}$ de $k\mathcal{Q}_A$. Diante disso, consideraremos $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ a partir daqui, para simplificar a notação, mas lembre-se que $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_A$, pelo Teorema 1.2. Trataremos os casos em que A é uma k-álgebra serial à esquerda, embora tenhamos resultados análogos para A serial à direita. Sugerimos ao leitor que consulte [1], Teorema 2.6, página 166, para uma demonstração dual do próximo teorema.

Teorema 2.8 *Uma k-álgebra básica é serial à esquerda se, e somente se, cada vértice de $(\mathcal{Q}_A)_0$ é término de, no máximo, uma flecha.*

Observação 2.9 *Observe que, de forma dual à que foi comentada em [1], páginas 166 e 167, se uma álgebra $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ é serial à esquerda, básica e conexa, então o quiver $\mathcal{Q}$ ou é uma árvore ou contém um único ciclo (orientado), o qual será representado por $\mathcal{C}$, na maioria das vezes. As álgebras $A = k(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$, , no caso em que $\mathcal{Q}$ é uma árvore, são derivadamente mansas precisamente quando sua forma de Euler é não negativa, classificação esta dada por Brüstle [12] e Geiss [20]. Por isso, neste texto, restringiremo-nos às álgebras seriais à esquerda com um ciclo.*

Nos resultados e comentários a seguir, consideraremos a álgebra $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ serial à esquerda, em que o quiver $\mathcal{Q}$ contém um ciclo $\mathcal{C}$, ou seja, $\mathcal{Q}$ é da forma



e o ideal $\mathcal{I}$ de $k\mathcal{Q}$ é gerado por um conjunto minimal R_A de caminhos de $\mathcal{Q}$ de comprimento maior ou igual a 2. A subálgebra plena $N = eAe$, onde $e = \sum_{i \in \mathcal{C}_0} e_i$, é de Nakayama e podemos considerar que $N = k\mathcal{C}/\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$, onde $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ é o ideal em $k\mathcal{Q}$ gerado pelo subconjunto dos caminhos de R_A que estão em $\mathcal{C}$. Portanto, toda álgebra serial à esquerda com um ciclo contém uma subálgebra plena de Nakayama. Dessas considerações e do Teorema 2.6, segue o próximo resultado.

Lema 2.10 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com um ciclo. Se A é derivadamente mansa, então a subálgebra plena N satisfaz a condição 2 do Teorema 2.6.*

Observação 2.11 *Para uma álgebra serial à esquerda A, em geral, sabemos que todo vértice i é término de, no máximo, uma flecha de $\mathcal{Q}$, pelo Teorema 2.8. No caso em que A é serial à esquerda com um ciclo, podemos deduzir que cada vértice i é término de exatamente uma flecha.*

Usando a definição de álgebra gentle, apresentada nas Definições 1.46 e 1.47, e o Teorema 2.8 que caracteriza uma álgebra serial, obtemos o seguinte Lema.

Lema 2.12 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra com um ciclo. Então A é gentle e serial à esquerda se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *$\mathcal{I}$ é gerado por 2-monômios;*
2. *cada vértice de $\mathcal{Q}$ é início de, no máximo, duas flechas e término de exatamente uma flecha;*
3. *para cada flecha a, existe, no máximo, uma flecha b com $s(b) = t(a)$, tal que $ab \notin \mathcal{I}$;*

4. *para cada flecha a, existe, no máximo, uma flecha b com $s(b) = t(a)$, tal que $ab \in \mathcal{I}$.*

Introduziremos, agora, notações que serão muito úteis nas demonstrações dos Lemas dessa seção. Dada uma flecha α, denotamos $\max(-, \alpha)$ um caminho maximal w em Q da forma $w = v\alpha$, para algum caminho v de comprimento $l(v) \geq 0$, tal que $w \notin \mathcal{I}$. Dado vértice i, denotamos $\max(-, i)$ um caminho maximal $w \notin \mathcal{I}$, de comprimento $l(w) \geq 1$, terminando no vértice i.

Observação 2.13 *Conforme relatamos no início deste texto, estamos considerando que todos os quivers são finitos, conexos e $\mathcal{Q}_1 \neq \varnothing$. Dessa forma, dada $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda, se $i \in \mathcal{Q}_0$ e $a \in \mathcal{Q}_1$, sempre existem os caminhos $max(-, a)$ e $max(-, i)$. Além disso, é fácil ver que eles são únicos.*

2.1 Álgebras Seriais Quadráticas

A partir daqui, todas as álgebras seriais à esquerda tratadas conterão um ciclo $\mathcal{C}$, embora este fato possa não estar explícito. O próximo lema caracteriza todas as álgebras skewed-gentle que também são seriais à esquerda.

Definição 2.14 *Uma álgebra $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ é chamada* quadrática*, se $\mathcal{I}$ é gerado por relações quadráticas.*

Lema 2.15 *Seja $(\mathcal{Q}, S_p, R)$ uma tripla skewed-gentle, com par gentle associado $(\mathcal{Q}^{sp}, \langle R^{sp} \rangle)$. Seja $A = k\mathcal{Q}^{sg}/\langle R^{sg} \rangle$ a álgebra skewed-gentle correspondente à tripla $(\mathcal{Q}, S_p, R)$. Então A é serial à esquerda se, e somente se, $k\mathcal{Q}/\langle R \rangle$ é serial à esquerda e o conjunto S_p é formado apenas por poços.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Por contrapositiva, vamos provar que se $k\mathcal{Q}/\langle R \rangle$ não é serial à esquerda ou existe um vértice em S_p que não é um poço, então A também não é serial à esquerda. Primeiramente, suponha que $k\mathcal{Q}/\langle R \rangle$ não é serial à esquerda. Pelo Teorema 2.8, existem duas flechas distintas a e b em $\mathcal{Q}$, tais que $t(a) = t(b)$. De fato, se $t(a) = t(b) \notin S_p$, então as flechas $(s(a), a, t(a))$ e $(s(b), b, t(b))$ são distintas e pertencem a $\mathcal{Q}_1^{sg}$, logo A não é serial à esquerda pelo Teorema 2.8. Agora, se $t(a) = t(b) \in S_p$, então, em particular, as flechas $(s(a), a, t(a)^-)$, $(s(a), a, t(a)^+)$ são distintas e pertencem a $\mathcal{Q}_1^{sg}$ e, novamente, A não é serial à esquerda. Vamos mostrar agora que o conjunto S_p é formado apenas por poços. Se $i \in S_p$ e existe $b \in \mathcal{Q}_1$, tal que $s(b) = i$, notamos que as flechas $(i^+, b, t(b))$ e $(i^-, b, t(b))$ pertencentes a $\mathcal{Q}^{sg}$ são distintas e possuem o mesmo término, portanto A não é serial à esquerda. ($\Leftarrow$) Suponha que $k\mathcal{Q}/\langle R \rangle$ é serial à esquerda e S_p é um conjunto de vértices poços. Dado um vértice $i \in \mathcal{Q}$, se $i \in S_p$, temos $\mathcal{Q}_0(i) = \{i^-, i^+\}$ (resp. se $i \notin S_p$, então $\mathcal{Q}_0(i) = \{i\}$). Como i é término de exatamente uma flecha e também é um poço, então os vértices i^- e i^+ de $\mathcal{Q}^{sg}$ também são poços (resp. $i \in \mathcal{Q}^{sg}$ é também um poço). Logo, todo vértice de $\mathcal{Q}^{sg}$ é término de, no máximo, uma flecha, portanto A é serial à esquerda. $\square$

Corolário 2.16 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda, quadrática. Então A é skewed-gentle se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *cada vértice de $\mathcal{Q}$ é início de, no máximo, quatro flechas;*
2. *para cada flecha a, existem, no máximo, duas flechas b e c com $s(b) = s(c) = t(a)$, tais que $ab, ac \notin \mathcal{I}$;*
3. *para cada flecha a, existem, no máximo, duas flecha b e c com $s(b) = s(c) = t(a)$, tais que $ab, ac \in \mathcal{I}$;*
4. *se existem as flechas a, b, c satisfazendo o item 2 ou o item 3, então $t(b)$ e $t(c)$ são poços.*

Demonstração: Segue imediatamente da demonstração do Lema 2.15. □

Observe que para álgebras seriais à esquerda com ciclo, a condição 1 segue de 2 e 3.

Com o Lema 2.15, caracterizamos todas as álgebras skewed-gentle seriais à esquerda. O próximo Lema é técnico, mas será bastante útil em demonstrações de alguns lemas desta seção.

Lema 2.17 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda e quadrática. Seja $b : k \to j$ uma flecha de $\mathcal{Q}$. Se b é a única flecha começando em k e $ab, bc \notin \mathcal{I}$, para quaisquer flechas a e c, com $t(a) = s(b)$ e $s(c) = t(b)$, então o complexo $T_\bullet = \oplus_{i \in \mathcal{Q}_0} T_i$, onde $T_k : \ \ldots 0 \longrightarrow A_k \xrightarrow{b} A_j \longrightarrow 0 \ldots$ (concentrado nos graus 1 e 0) e $T_i : \ \ldots 0 \longrightarrow A_i \longrightarrow 0 \ldots$ (concentrado no grau 0), para todo $i \neq k$, é inclinante.*

Demonstração: A demonstração segue usando o Lema 1.31. □

Observação 2.18 *Usando os Lemas 1.31 e 2.15, observamos que* $\mathrm{End}T_\bullet$ *é isomorfa a $B = k\mathcal{Q}_B/\mathcal{I}_B$, em que $\mathcal{Q}_B$ é obtido através de $\mathcal{Q}$ trocando-se os vértices j e k de posição, de modo que a flecha $b : k \to j$, torna-se $\tilde{b} : j \to k$ e cada flecha $a : i \to k$ em $\mathcal{Q}$ é substituída por $\tilde{a} : i \to j$ em $\mathcal{Q}_B$. Todas as demais flechas são preservadas. O ideal $\mathcal{I}_B$ é gerado pelo conjunto $R_A \cup \{\tilde{a}\tilde{b}\}$.*

Nos lemas seguintes, mostraremos que uma álgebra serial à esquerda e quadrática, mas não skewed-gentle é derivadamente selvagem. Conforme o item 4 do Corolário 2.16, dada uma flecha $a : j \to i$, se existem duas flechas distintas b e c com $s(b) = s(c) = i$, tais que $ab, ac \in \mathcal{I}$ (resp. $ab, ac \notin \mathcal{I}$), então devemos ter $t(b)$ e $t(c)$ poços. Os dois próximos lemas mostram que, caso $t(b)$ ou $t(c)$ não seja um poço, A é derivadamente selvagem.

Lema 2.19 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com um ciclo, quadrática. Sejam $a : j \to i$ uma flecha de $\mathcal{Q}$, para a qual existem duas flechas distintas b e c, com $s(b) = s(c) = i$, e d uma flecha com $s(d) = t(c)$. Se $ab, ac \in \mathcal{I}$, então A é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Seja a a referida flecha. Trataremos separadamente os casos: $c \in \mathcal{C}_1$ ou $c \notin \mathcal{C}_1$.
<u>Caso 1.</u> $c \in \mathcal{C}_1$
Nesse caso, como A é serial à esquerda e $c \in \mathcal{C}_1$, então existe uma flecha em $\mathcal{C}_1$, cujo término é $s(c)$ e, como $t(a) = s(c)$, concluímos que $a \in \mathcal{C}_1$. Além disso, pelo mesmo motivo, existe uma flecha em $\mathcal{C}$ com início em $t(c)$. Sem perda de generalidade, suporemos que tal flecha é d, pois caso $d \notin \mathcal{C}_1$, usaríamos um raciocínio similar sobre a subálgebra plena eAe de A, onde $e = \sum_{j \in \mathcal{Q}_0 \setminus \{t(d)\}} e_j$. Para cada vértice $k \in \mathcal{C}_0$, existem únicas flechas α_k e β_k em $\mathcal{C}$, tais que $t(\alpha_k) = s(\beta_k) = k$. Denotemos por E o conjunto dos vértices $k \in \mathcal{C}_0$, tais que $\alpha_k \beta_k \in \mathcal{I}$. Observe que $E \neq \varnothing$, já que A é de dimensão finita. Considere a subálgebra plena $B = eAe$ de A, onde $e = \sum_{j \in E} e_j$. Como estamos supondo $d \in \mathcal{C}_1$, temos $i \in E$. Não é difícil verificar que $B = k\mathcal{Q}_B / \langle R_B \rangle$, em que $(\mathcal{Q}_B)_0$ é composto por todos os vértices de E, e $(\mathcal{Q}_B)_1$ está em correspondência biunívoca com os caminhos maximais entre os vértices de $(\mathcal{Q}_B)_0$ em $\mathcal{Q}$. Assim, temos $\mathrm{rad}^2 B = 0$. Portanto, pelo Teorema 1.44, segue que B é derivadamente selvagem e, consequentemente, pelo Lema 1.40, A o é.
<u>Caso 2.</u> $c \notin \mathcal{C}_1$
Como A é serial à esquerda, é claro que $d \notin \mathcal{C}_1$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $t(b)$ e $t(d)$ são poços e d é a única flecha começando em $t(c)$. Caso contrário, existirá uma subálgebra plena de A com tais condições. Dessa maneira, consideramos que $b \notin \mathcal{C}_1$, pois senão o resultado segue por simetria ao caso anterior. Também podemos supor que $cd \in R_A$, pois se $cd \notin R_A$, usamos o Lema 2.17 e obtemos uma álgebra derivadamente equivalente com esta propriedade. Considere a álgebra hereditária $W = k\Delta$, onde Δ é o quiver

$$\Delta : \quad \begin{tikzcd} & & & & & & 10 & & \\ 1 \arrow[r, "p_1"] & 2 \arrow[r, "p_2"] & 3 \arrow[r, "p_3"] & 4 \arrow[r, "p_4"] & 5 \arrow[r, "p_5"] & 6 \arrow[r, "p_6"] & 7 \arrow[u, "p_9"'] \arrow[r, "p_7"] & 8 \arrow[r, "p_8"] & 9 \end{tikzcd}$$

Sabemos que a álgebra W é selvagem pelo Teorema 1.14. Com isso, existe um W-$k\langle x, y\rangle$-bimódulo $M = M(W)$, finitamente gerado e livre sobre $k\langle x, y\rangle$ tal que o funtor $M \otimes_{k\langle x,y\rangle} -$, da categoria dos $k\langle x, y\rangle$ - módulos para a categoria de W-módulos, preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Podemos tratar M como a $k\langle x, y\rangle$-representação de Δ a seguir

$$\begin{tikzcd} & & & & & & M_{10} & & \\ M_1 \arrow[r, "M(p_1)"] & M_2 \arrow[r, "M(p_2)"] & M_3 \arrow[r, "M(p_3)"] & M_4 \arrow[r, "M(p_4)"] & M_5 \arrow[r, "M(p_5)"] & M_6 \arrow[r, "M(p_6)"] & M_7 \arrow[u, "M(p_9)"'] \arrow[r, "M(p_7)"] & M_8 \arrow[r, "M(p_8)"] & M_9 \end{tikzcd}$$

Considere $w_6 = \max(-, a)$ $w_5 = \max(-, s(w_6))$, $w_4 = \max(-, s(w_5))$, $w_3 = \max(-, s(w_4))$, $w_2 = \max(-, s(w_3))$, $w_1 = \max(-, s(w_2))$. Denote por $s_l = s(w_l)$, caso $1 \leq l \leq 6$, $s_8 = t(c)$, $s_9 = t(d)$ e $s_{10} = t(b)$. Denotamos por d_l o posto de $M(l)$ sobre $k\langle x, y\rangle$.

Considere N o seguinte complexo de $A - k\langle x, y\rangle$-bimódulos:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & & & & d_{10}A_{s_{10}} & & \\
d_1A_{s_1} \arrow[r, "w_1M(p_1)"] & d_2A_{s_2} \arrow[r, "w_2M(p_2)"] & d_3A_{s_3} \arrow[r, "w_3M(p_3)"] & d_4A_{s_4} \arrow[r, "w_4M(p_4)"] & d_5A_{s_5} \arrow[r, "w_5M(p_5)"] & d_6A_{s_6} \arrow[r, "w_6M(p_6)"] & d_7A_i \arrow[ur, "bM(p_8)"] \arrow[r, "cM(p_7)"] & d_8A_{s_8} \arrow[r, "dM(p_8)"] & d_9A_{s_9}
\end{tikzcd}$$

onde $A_l = Ae_l$. De forma análoga à que foi feita no exemplo 1.39, verificamos que o funtor $N \otimes_{k\langle x,y\rangle} -$, que leva a categoria dos $k\langle x,y\rangle$- módulos para a categoria $\mathcal{K}^b(A - \text{proj})$, preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Portanto, a álgebra A é derivadamente selvagem. $\square$

Lema 2.20 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com um ciclo, quadrática. Sejam $a : i \to j$ uma flecha de $\mathcal{Q}$, para a qual existem exatamente duas flechas distintas b e c com $s(b) = s(c) = j$ e d uma flecha com $s(d) = t(c)$. Se $ab, ac \notin \mathcal{I}$, então A é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Seja a a referida flecha. Temos dois casos a tratar: $c \in \mathcal{C}_1$ ou $c \notin \mathcal{C}_1$. Vamos mostrar que A é derivadamente equivalente a uma álgebra que possui uma subálgebra plena do caso 1 da demonstração do Lema 2.19. Defina o complexo $T_\bullet = \oplus_{k\in\mathcal{Q}_0} T_k$, onde $T_j : 0 \longrightarrow A_j \xrightarrow{[b\ c]} A_{t(b)} \oplus A_{t(c)} \longrightarrow 0$, $T_{t(b)}$: $0 \longrightarrow A_j \xrightarrow{b} A_{t(b)} \longrightarrow 0$, $T_{t(c)} : 0 \longrightarrow A_j \xrightarrow{c} A_{t(c)} \longrightarrow 0$ (concentrados nos graus 1 e 0) e $T_k : 0 \to A_k \to 0$ (concentrado no grau 0), para todo $k \neq j, t(b), t(c)$. Caso $c \in \mathcal{C}_1$, é claro que $a \in \mathcal{C}_1$. Nesse caso, também suporemos $d \in \mathcal{C}_1$, conforme fizemos no Lema 2.19. Como A é de dimensão finita, podemos supor, sem perda de generalidade, que $cd \in R_A$. Caso contrário, usaríamos um raciocínio similar sobre a subálgebra plena eAe de A, onde $e = \sum_{l\in E\cup\{j\}} e_l$ e E é o conjunto definido no caso 1 da demonstração do Lema 2.19. Observe que $E \neq \varnothing$, já que A é de dimensão finita. No caso em que $c \notin \mathcal{C}_1$, como A é serial à esquerda, é claro que $d \notin \mathcal{C}_1$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $t(b)$ e $t(d)$ sejam poços e d é a única flecha começando em $t(c)$, pois, caso contrário, existirá uma subálgebra plena de A com essas condições. Observe então que consideramos $b \notin \mathcal{C}_1$, pois senão seria um caso simétrico ao que $c \in \mathcal{C}_1$. Suporemos também que $cd \in R_A$, já que se $cd \notin R_A$, usamos o Lema 2.17 e obtemos uma álgebra derivadamente equivalente com tal propriedade. Em ambos os casos, usando o Lema 1.31, verificamos que $\mathrm{Hom}(T_\bullet, T[r]_\bullet) = 0$, para todo $r \neq 0$, e através do Lema 1.20 checamos que $\mathrm{add}(T_\bullet)$ gera $\mathcal{K}^b(A - \text{proj})$ como categoria triangulada. Portanto, o Teorema 1.29 nos garante que $T_\bullet$ é um complexo inclinante. Ainda usando o Lema 1.31, constatamos que a álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}T_\bullet$ é isomorfa a uma álgebra de caminhos $B = k\mathcal{Q}_B/\langle R_B\rangle$, em que o conjunto R_B é obtido através R_A substituindo-se a relação cd pelo par ab, ac. Como B satisfaz as condições do Caso 1 da demonstração do Lema 2.19, temos B derivadamente selvagem. O resultado segue dos Teoremas 1.29 e 1.35. $\square$

Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra skewed-gentle e serial à esquerda com um ciclo. Dada flecha $a : j \to i$, se existem três flechas distintas b, c e d com $s(b) = s(c) = s(d) = i$, tais que $ab, ac \in \mathcal{I}$ (resp. $ab, ac \notin \mathcal{I}$), então devemos ter $ad \notin \mathcal{I}$ (resp.

$ad \in \mathcal{I}$) de acordo com a condição **??** (resp. **??**) do Corolário 2.16. Os dois próximos Lemas mostram que, caso contrário, temos A derivadamente selvagem.

Lema 2.21 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda, quadrática, com um ciclo. Seja $a : j \to i$ uma flecha de $\mathcal{Q}$, para a qual existem três flechas b, c e d com $s(b) = s(c) = s(d) = i$. Se $ab, ac, ad \in \mathcal{I}$, então A é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Como $\mathcal{Q}$ possui um ciclo e A é serial à esquerda, existe uma flecha $f : k \to j$. Considere a álgebra hereditária $W = k\Delta$, onde Δ é o quiver abaixo

$$\Delta : \quad \begin{tikzcd} & & 5 & \\ 1 \arrow[r, "p_1"] & 2 \arrow[r, "p_2"] & 3 \arrow[u, "p_4"'] \arrow[r, "p_3"] \arrow[d, "p_5"] & 4 \\ & & 6 & \end{tikzcd}$$

Sabemos que a álgebra W é selvagem pelo Teorema 1.14. Com isso, existe um W-$k\langle x, y\rangle$-bimódulo $M = M(W)$, finitamente gerado e livre sobre $k\langle x, y\rangle$ tal que o funtor $M \otimes_{k\langle x,y\rangle} -$, da categoria dos $k\langle x, y\rangle$-módulos para a categoria de W-módulos, preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Podemos trabalhar com o bimódulo M como a $k\langle x, y\rangle$-representação de Δ a seguir

$$\begin{tikzcd} & & M_5 & \\ M_1 \arrow[r, "M(p_1)"] & M_2 \arrow[r, "M(p_2)"] & M_3 \arrow[u, "M(p_4)"'] \arrow[r, "M(p_3)"] \arrow[d, "M(p_5)"] & M_4 \\ & & M_6 & \end{tikzcd}$$

Considere $w_2 = \max(-, a)$ e $w_1 = \max(-, s(w_2))$, que sempre existem. Denotamos $s_1 = s(w_1)$ (ou $s_1 = t(w_1)$), $s_2 = s(w_2)$, $s_3 = i$, $s_4 = t(c)$, $s_5 = t(b)$, e $s_6 = t(d)$, além de d_l o posto de $M(l)$ sobre $k\langle x, y\rangle$. Considere N o seguinte complexo de A-$k\langle x, y\rangle$-bimódulos:

$$W : \quad \begin{tikzcd} & & & d_5A_{s_5} \\ d_1A_{s_1} \arrow[r, "w_1M(p_1)"] & d_2A_{s_2} \arrow[r, "w_2M(p_2)"] & d_3A_{s_3} \arrow[ur, "bM(p_4)"] \arrow[r, "cM(p_3)"] \arrow[dr, "dM(p_5)"'] & d_4A_{s_4} \\ & & & d_6A_{s_6} \end{tikzcd}$$

onde $A_l = Ae_l$. De maneira análoga à que fizemos no Exemplo 1.39, verificamos que o funtor $N \otimes_{k\langle x,y\rangle} -$, que leva a categoria dos $k\langle x, y\rangle$-módulos para a categoria $\mathcal{K}^b(A - \text{proj})$, preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Portanto, a álgebra A é derivadamente selvagem. $\square$

Lema 2.22 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com um ciclo, quadrá-*

tica. Seja $a : j \to i$ uma flecha de $\mathcal{Q}$, para a qual existem três flechas b, c e d com $s(b) = s(c) = s(d) = i$. Se $ab, ac, ad \notin \mathcal{I}$, então A é derivadamente selvagem.

Demonstração: Como $\mathcal{Q}$ possui um ciclo e A é serial à esquerda, existe uma flecha $f : k \to j$. Se $fa \notin \mathcal{I}$, considere a álgebra hereditária $W = k\Delta$, onde Δ é o quiver

$$\Delta: \quad \begin{tikzcd} & & t(b) & \\ k \arrow[r, "f"] & j \arrow[r, "a"] & i \arrow[u, "b"] \arrow[r, "d"] \arrow[d, "c"] & t(d) \\ & & t(c) & \end{tikzcd}$$

Pelo Teorema 1.14, já é conhecido que W é selvagem. Observe que $W = A/J$, onde $J = \langle \alpha \in \mathcal{Q}_1 \mid \alpha \neq a, b, c, d, f \rangle$. Pelo Lema 1.15, concluímos que A é selvagem e, pela Proposição 1.36, temos A derivadamente selvagem.
Vamos considerar agora o caso em que $fa \in \mathcal{I}$. Considere a subálgebra plena $B = eAe$ de A, onde $e = \sum_{k \in \mathcal{Q}_0 \setminus \{i\}} e_k$. Podemos considerar que $B = k\mathcal{Q}_B/\mathcal{I}_B$, em que $\mathcal{Q}_B$é obtido através de $\mathcal{Q}_A$ substituindo-se os caminhos ab, ac e ad por flechas, digamos $\tilde{b}, \tilde{c}$ e $\tilde{d}$, respectivamente. Observe então que B satisfaz as condições do Lema 2.21 (para flechas $f, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$), logo B é derivadamente selvagem e, consequentemente, A é derivadamente selvagem. □

2.1.1 Demonstração do Teorema A.

Demonstração: No caso A.1, o resultado segue pelo Teorema 1.1 [12]. Agora, no caso A.2, por contraposição, suponha que A não é skewed-gentle. De acordo com o Lema 2.15 e o Corolário 2.16, isso significa que as condições de um dos Lemas 2.19, 2.20, 2.21 ou 2.22 deve ser satisfeita. Com isso, obtemos que A é derivadamente selvagem. Daí, temos o resultado desejado. Reciprocamente, se A é skewed-gentle, então A é derivadamente mansa pelo Teorema 1.53. □

2.2 Álgebras Seriais: caso geral

Com o intuito de facilitar o entendimento da Definição 0.1 feita na Introdução, apresentamos os exemplos abaixo.

Exemplos 2.23 *Considere a álgebra $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$, em cada situação abaixo.*

a. $\mathcal{Q}: \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \end{tikzcd}$

Considere $\mathcal{I} = \langle a^3 \rangle$. Observamos que aaa não é um 3-monômio isolado, já que aaa, aaa é uma dupla de 3-monômios consecutivos, por exemplo. Observe que aaa, aaa, aaa é uma tripla de 3-monômios consecutivos e, assim, *por diante.*

b. $\mathcal{Q}:$
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] & 2 \arrow[l, bend left, "b"] \end{tikzcd}$$

Seja $\mathcal{I} = \langle aba, bab \rangle$. *Temos* aba, bab, aba *uma tripla de* 3*-monômios consecutivos e não existem* 3*-monômios isolados.*

c.

$\mathcal{Q}:$
$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "b"] & \\ 1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[ll, "c"] \end{tikzcd}$$

Seja $\mathcal{I}_1 = \langle abc, bca \rangle$. *Notamos que não existem* 3*-monômios isolados,* abc, bca *é a única dupla de* 3*-monômios consecutivos e não existem* n*-uplas de* 3*-monômios consecutivos, para* $n \geq 3$. *Em contrapartida, se* $\mathcal{I}_2 = \langle abc, ca \rangle$, *o único* 3*-monômio isolado é* abc *e não existem duplas ou triplas de* 3*-monômios consecutivos.*

d. Considere a álgebra A *do exemplo 1.6. Temos* abc, bcd *uma dupla de* 3*-monômios consecutivos e não existem* 3*-monômios isolados nem* n*-uplas de* 3*-monômios consecutivos com* $n \geq 3$. *É fácil ver que* A *está de acordo com todas as exigências da Definição 3d da classe* $\mathcal{D}$, *isto é,* $A \in \mathcal{D}$.

Denotaremos por R_A^r o subconjunto de R_A formado por r-monômios.

Observação 2.24 *Seja* $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ *uma álgebra serial à esquerda. Para que* A *pertença à classe* $\mathcal{D}$, *observamos que*

1. *as condições* $\tilde{D}2$ *e* $\tilde{D}3$ *da definição da classe* $\tilde{\mathcal{D}}$ *exigem que um* 3*-monômio seja isolado ou pertença a uma dupla de consecutivas;*

2. *dada uma dupla de* 3*-monômios consecutivos* abc, bcd, *as condições 3c e 4 permitem que* abc, bcf *também seja duplas de* 3*-monômios consecutivos, com* $f \neq d$, *desde que* $t(d)$ *e* $t(f)$ *sejam poços. Mas, claramente,* abc *não pode pertencer a uma terceira dupla de consecutivas, senão a condição 4 não seria satisfeita;*

3. *se* A *é quadrática, todas as condições da classe* $\mathcal{D}$ *se reduzem à apenas a condição 4, pois a condição* $\tilde{D}1$ *é automaticamente satisfeita e as demais perdem o sentido. Note que isso é compatível com o Teorema A.*

A seguir, exibiremos alguns exemplos para elucidar as condições da classe $\mathcal{D}$.

Exemplos 2.25 *Seja* $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ *uma álgebra serial à esquerda.*

1. *Considere o quiver abaixo*

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \cdot & & \\
\cdot \arrow[r, "f"] \arrow[rrrrrr, dash, bend right] & \cdot \arrow[r, "a"] & \cdot \arrow[r, "b"] & \cdot \arrow[r, "c"] & \cdot \arrow[u, "h"] \arrow[r, "d"] & \cdot \arrow[r, "g"] & \cdot
\end{tikzcd}$$

um subquiver de $\mathcal{Q}$. Observe que

- *se abc fosse um 3-monômio isolado, então $A \notin \mathcal{D}$, pois a condição $\tilde{D}2$ não seria satisfeita, já que $t(c)$ não é um poço;*
- *se $fab, abc \in R_A$, então $bcd, bch \notin R_A$, pois fab, abc, bcd ou fab, abc, bch não podem ser triplas de 3-monômios consecutivos pela condição $\tilde{D}3$;*
- *se fab, abc fosse uma dupla de 3-monômios consecutivos, $bcd, bch \notin R_A$ e $cd, ch \notin R_A$ (resp. $cd, ch \in R_A$), a subálgebra plena quadrática A_{quad} não seria skewed-gentle (pois satisfaria o Lema 2.20 (resp. 2.19)), logo A não satisfaria a condição 4;*
- *se abc, bch fosse uma dupla de 3-monômios consecutivos, então A não satisfaria a condição 3b;*
- *se abc, bcd e abc, bch fossem duplas de 3-monômios consecutivos, A não satisfaria a condição 3c, já que $t(d)$ não é um poço;*
- *se bcd, cdg fosse uma dupla de 3-monômios consecutivos e $bch \in \mathcal{I}$, então A não satisfaria a condição 3d.*

2. *Considere o quiver abaixo*

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[dr] \arrow[dd, dash, bend right=60] & & & & & \\
 & \cdots \arrow[dl] \arrow[r, "f"] & \cdot \arrow[r, "a"] & \cdot \arrow[r, "b"] \arrow[d, "h"] & \cdot \arrow[r, "c"] & \cdot \\
\cdot & & & \cdot & &
\end{tikzcd}$$

um subquiver de $\mathcal{Q}$, onde $abc \in R_A$ com $t(c)$ um poço.

- *Se abc fosse um 3-monômio isolado, a existência da flecha h contradiz a condição 1 da definição classe $\mathcal{D}$;*
- *se fab, abc fosse uma dupla de 3-monômios consecutivos e $f \in \mathcal{C}_1$, pela condição 3a, então $A \notin \mathcal{D}$. Se $fah \in R_A$ ou $ah \in R_A$, então $A \notin \mathcal{D}$, já que a condição 3d não seria satisfeita.*

3. *Considere o quiver abaixo*

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[r, "a"] & \cdot \arrow[dr, "b"] & & \\
\cdot \arrow[ur, "f"] \arrow[drr, dash, bend right] & & & \cdot \arrow[r, "c"] \arrow[dl, "d"] & \cdot \\
 & & \cdot & &
\end{tikzcd}$$

um subquiver de $\mathcal{Q}$. Note que

- *fab, abc não poderia ser uma dupla de 3-monômios consecutivos, senão a condição 3a não seria satisfeita;*
- *fab, abd e fab, abc não poderiam ser duplas de 3-monômios consecutivos, senão a condição 3c não seria satisfeita.*
- *se abc é um 3-monômio isolado, então devemos ter $t(c)$ um poço em $\mathcal{Q}$ e não pode existir flecha $f \neq d$ com $s(f) = s(c)$, de acordo com a condição 2a. Além disso, tal condição exige que $bd \notin R_A$, para que $A \in \mathcal{D}$;*
- *se $abc \notin R_A$ e $abdg \notin \mathcal{I}$, para $g \in \mathcal{C}_1$ com $s(g) = t(d)$, para que A pertença a $\mathcal{D}$, devemos ter $bc \in R_A$, pois, caso contrário, a condição 4 não seria satisfeita. De modo análogo, se $abc \notin R_A$ e $bd \in R_A$, devemos ter $bc \notin R_A$.*

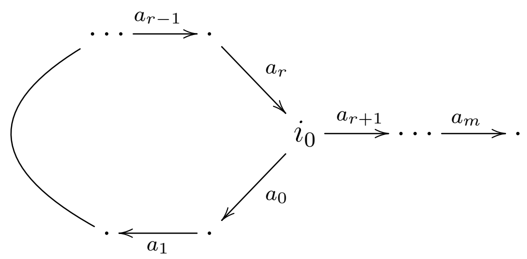
Tomando como referência a ideia de caracterização de álgebras de Nakayama derivadamente mansas feita no artigo [5], apresentamos, na Introdução, uma classe de álgebras seriais à esquerda com um ciclo, a qual mostraremos adiante ser derivadamente mansas.

Dado $i \in \Omega$ (conforme definimos na Introdução), sabemos que ou existe um 3-monômio isolado abc ou existe uma dupla de 3-monômios consecutivos abc, bcd, tal que $i = s(c)$. Usaremos as seguintes notações $i_- = s(b)$ e $i_+ = t(c)$, para b e c flechas conforme a descrição acima. Essas notações serão úteis em alguns dos próximos lemas. Para demonstrar os Teoremas B e C, começaremos demonstrando que uma álgebra que não pertence à classe $\tilde{\mathcal{D}}$ é derivadamente selvagem.

2.2.1 As condições da definição da classe $\tilde{\mathcal{D}}$

Lema 2.26 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com um ciclo, satisfazendo as condições $\tilde{D}1$, mas não satisfaz a condição $\tilde{D}2$, então A é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{C}$ o ciclo de $\mathcal{Q}$ e abc um 3-monômio isolado para o qual a condição $\tilde{D}2$ da classe $\tilde{\mathcal{D}}$ não seja satisfeita, ou seja, $t(c)$ não é um poço. Nesse caso, existe flecha d, com $s(d) = t(c)$. É claro que $a, b, c \notin \mathcal{C}_1$ simultaneamente pelo Lema 2.10. Vamos dizer que A é $\tilde{D}2$-minimal se A satisfaz as condições desse lema e, para toda subálgebra plena S de A, ou S não contém um ciclo ou satisfaz a condição $\tilde{D}2$. Sem perda de generalidade, podemos supor A $\tilde{D}2$-minimal. Observe que se $i \in \mathcal{Q}_0$ é tal que não existe caminho em $\mathcal{Q}$ de i para $t(d)$, então a subálgebra plena cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0\backslash\{i\}$ possui ciclo e não satisfaz a condição $\tilde{D}2$, o que contradiz a $\tilde{D}2$-minimalidade de A. Daí, segue que o quiver $\mathcal{Q}$ é da forma



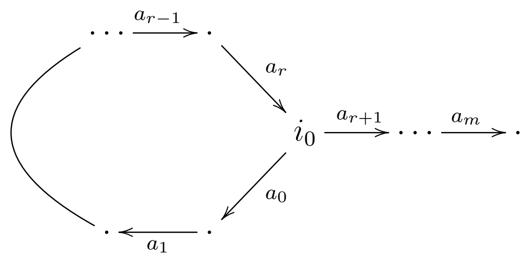
onde $a_m = d$ e $R_A^3 = \{abc\}$. Sem perda de generalidade, digamos que a, b, c e d sejam flechas da seguinte forma:

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{c} 4 \xrightarrow{d} 5\,.$$

Notamos também que caso $a_{j-1}a_j \notin \mathcal{I}$ ($\cdot \xrightarrow{a_{j-1}} j \xrightarrow{a_j} \cdot$), para $j \notin \{i_0, 2, 3\}$, então a subálgebra plena cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0 \backslash \{j\}$ possui ciclo e não satisfaz a condição $\tilde{D}2$, o que contradiz a $\tilde{D}2$-minimalidade de A. Se $i_0 \neq 2$, considere o complexo $T_\bullet = \oplus_{i \in \mathcal{Q}_0} T_i$ de A-módulos por: $T_i : 0 \to A_i \to 0$ (concentrado no grau 0), para $i \neq 2$, e $T_2 : 0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{b} A_3 \longrightarrow 0$ (concentrado nos graus 1 e 0). Usando o Lema 1.31, verificamos que $\mathrm{Hom}(T_i, T_j[r]) = 0$, para quaisquer $i, j \neq 2$ e $r \neq 0$, e, para $i \neq 2$, $\mathrm{Hom}(T_i, T_2[r]) = 0$ sempre que $r \neq 0, 1$ e $\mathrm{Hom}(T_2, T_j[r])$ se $r \neq -1, 0$. Além disso, $\mathrm{Hom}(T_i, T_2[1]) = 0$, pois $\ker(\cdot b) = 0$, e $\mathrm{Hom}(T_2, T_j[-1]) \cong \dfrac{e_2Ae_j}{bAe_j} = 0$. Com isso, observamos que a condição *(c1)* do Teorema 1.29 é satisfeita. Pelo Lema 1.20, constatamos que a condição *(c2)* do Teorema 1.29 também é satisfeita, consequentemente, $T_\bullet$ é um complexo inclinante. Nesse caso, A é derivadamente equivalente à álgebra $B = k\mathcal{Q}_B/\mathcal{I}_B$ obtida de A da seguinte forma: o quiver $\mathcal{Q}_B$ é obtido de $\mathcal{Q}$ substituindo-se o subquiver $1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$ de $\mathcal{Q}_1$ pela flecha $1 \xrightarrow{u} 3$ e acrescentando-se uma nova flecha $3 \xrightarrow{v} 2$ e o ideal $\mathcal{I}_B$ de $k\mathcal{Q}_B$ é gerado pelo conjunto R_B, obtido através de R_A, substituindo-se o 3-monômio abc pelos 2-monômios uc, uv e o possível 2-monômio fa pelo 2-monômio fu. Observamos que B é uma subálgebra plena quadrática não skewed-gentle (satisfaz as condições do Lema 2.19), logo B é derivadamente selvagem e, pelo Lema 1.40 e pelos Teoremas 1.29 e 1.35, A é derivadamente selvagem. Agora vamos considerar o caso em que $i_0 = 2$. Seja $g \in \mathcal{C}_1$, tal que $s(g) = t(a)$. Se $ag \in \mathcal{I}$, a subálgebra plena $C = eAe$ de A, onde $e = \sum_{k \in \mathcal{Q}_0 \backslash \{3\}} e_k$ também é quadrática não skewed-gentle. Se $ag \notin \mathcal{I}$, então a subálgebra plena $C = eAe$ de A, onde $e = \sum_{k \in \mathcal{Q}_0 \backslash \{4,5\}} e_k$ também é quadrática não skewed-gentle. Com isso, temos o resultado desejado. □

Lema 2.27 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com um ciclo que não satisfaz a condição $\tilde{D}1$. Então A é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Seja $\mathcal{C}$ o ciclo de $\mathcal{Q}$. Sem perda de generalidade, vamos supor que exista um r-monômio com $r > 3$. É claro que todas as flechas de tal r-monômio não podem pertencer a $\mathcal{C}_1$ simultaneamente pelo Lema 2.10. Vamos dizer que A é $\tilde{D}1$-minimal se A satisfaz as condições desse lema e, para toda subálgebra plena S de A, ou S não contém um ciclo ou satisfaz a condição $\tilde{D}1$. Sem perda de generalidade, podemos supor A $\tilde{D}1$-minimal. De modo similar à álgebra $\tilde{D}2$-minimal, temos o quiver $\mathcal{Q}$ da forma



e existe um 4-monômio $abcd$, tal que $a_m = d$ e $R_A = R_A^2 \cup \{abcd\}$. Sem perda de generalidade, digamos que a, b, c e d sejam flechas da seguinte forma:

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{c} 4 \xrightarrow{d} 5\,.$$

Notamos também que caso $a_{j-1}a_j \notin \mathcal{I}$ $(\cdot \xrightarrow{a_{j-1}} j \xrightarrow{a_j} \cdot)$, para $j \notin \{i_0, 2, 3, 4\}$, então a subálgebra plena cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0 \backslash \{j\}$ possui ciclo e não satisfaz a condição $\tilde{D}1$, o que contradiz a $\tilde{D}1$-minimalidade de A. Temos as seguintes possibilidades:

<u>Caso 1.</u> $i_0 \neq 2, 3$.

Considere $B = k\mathcal{Q}_B/\mathcal{I}_B$ a álgebra obtida de A da seguinte forma: o quiver $\mathcal{Q}_B$ é obtido de $\mathcal{Q}$ substituindo-se o subquiver

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{c} 4 \xrightarrow{d} 5$$

pelo quiver

$$\begin{tikzcd} & 2 & & \\ 1 \arrow[r, "f"] & 3 \arrow[u, "g"] \arrow[r, "c"] & 4 \arrow[r, "d"] & 5 \end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I}_B$ é o ideal de $k\mathcal{Q}_B$ gerado pelo conjunto obtido através de R_A excluindo-se o 4-monômio $abcd$ e substituindo-se o possível 2-monômio ua pelo 2-monômio uf. A álgebra B é quadrática não skewed-gentle (satisfaz as condições do Lema 2.20), logo B é derivadamente selvagem pelo Teorema A. Mostraremos que A é derivadamente equivalente à álgebra B. Para construir a equivalência derivada, defina o complexo $T_\bullet = \oplus_{i \in \mathcal{Q}_0} T_i$ de A-módulos por: $T_i : 0 \longrightarrow A_i \longrightarrow 0$ (concentrado no grau 0), para $i \in \mathcal{Q}_0 \backslash \{3, 4, 5\}$, e $T_3 : 0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{bcd} A_5 \longrightarrow 0$, $T_4 : 0 \longrightarrow A_3 \xrightarrow{cd} A_5 \longrightarrow 0$, $T_5 : 0 \longrightarrow A_4 \xrightarrow{d} A_5 \longrightarrow 0$ (concentrados nos graus 0 e -1). Usando o Lema 1.31, verificamos que a condição *(c1)* do Teorema 1.29 é satisfeita. E usando o Lema 1.20, constatamos que a condição *(c2)* do Teorema 1.29 também é satisfeita, consequentemente, $T_\bullet$ é um complexo inclinante. Além disso, com o Lema 1.31, obtemos que a álgebra de endomorfismos End$T_\bullet$ é isomorfa a B. Portanto, o resultado segue dos Teoremas 1.29, 1.35.

Caso 2. $i_0 = 2$.
A subálgebra plena $C = eAe$ de A, em que $e = \sum_{i \in \mathcal{Q}_0 \setminus \{3\}} e_i$ possui um 3-monômio isolado com uma única flecha em $\mathcal{C}$. Esse caso foi analisado na demonstração do Lema 2.26, o qual demonstramos ser derivadamente selvagem, então A derivadamente selvagem pelo Lema 1.40.
Caso 3. $i_0 = 3$.
A subálgebra plena $C = eAe$ de A, em que $e = \sum_{i \in \mathcal{Q}_0 \setminus \{2\}} e_i$, também possui um 3-monômio isolado com uma única flecha em $\mathcal{C}$. Analogamente ao caso anterior, temos o resultado. $\square$

Lema 2.28 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com um ciclo. Se A satisfaz a condição $\tilde{D}1$, mas não satisfaz a condição $\tilde{D}3$, então A é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Seja $\mathcal{C}$ o ciclo de $\mathcal{Q}$. Como A satisfaz a condição $\tilde{D}1$ e não satisfaz a condição $\tilde{D}3$, existe uma n-upla de 3-monômios consecutivos, com $n > 2$. Vamos dizer que A é $\tilde{D}3$-minimal se A satisfaz as condições desse lema e, para toda subálgebra plena S de A, ou S não contém um ciclo ou satisfaz a condição $\tilde{D}3$. Sem perda de generalidade, podemos supor A $\tilde{D}3$-minimal. Então o quiver $\mathcal{Q}$ tem a mesma forma do quiver dos Lemas 2.26 e 2.27 e existe uma tripla de 3-monômios consecutivos fab, abc, bcd e $R_A^3 = \{fab, abc, bcd\}$. Sem perda de generalidade, digamos que as flechas da tripla sejam da forma

$$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} 4 \xrightarrow{c} 5 \xrightarrow{d} 6\,.$$

Caso $a_{j-1}a_j \notin \mathcal{I}$ $(\cdot \xrightarrow{a_{j-1}} j \xrightarrow{a_j} \cdot)$, para $j \notin \{i_0, 2, 3, 4, 5\}$, então a subálgebra plena cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0 \setminus \{j\}$ possui ciclo e não satisfaz a condição $\tilde{D}3$, o que contradiz a $\tilde{D}3$-minimalidade de A. Considere a subálgebra plena $B = eAe$ de A, em que $e = \sum_{k \in \mathcal{Q}_0 \setminus \{5\}} e_k$. Considerando $g = cd$, podemos supor que $B = k\mathcal{Q}_B / \langle R_B \rangle$, onde $(\mathcal{Q}_B)_0 = (\mathcal{Q})_0 \setminus \{5\}$ e $(\mathcal{Q})_1$ é obtido através de $\mathcal{Q}_1$ substituindo-se o subquiver $4 \xrightarrow{c} 5 \xrightarrow{d} 6$ pela flecha $4 \xrightarrow{g} 6$ e $R_B = (R_A \setminus \{abc, bcd\}) \cup \{bg\}$. Nesse caso, R_B contém o 3-monômio fab isolado, tal que $t(b)$ não é um poço, assim, temos o resultado pelo Lema 2.26. $\square$

A partir dos lemas desta subseção, para demonstrarmos os lemas da próxima, podemos supor que $A \in \tilde{\mathcal{D}}$.

2.2.2 A condição 4 da definição da classe $\mathcal{D}$

Lema 2.29 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com um ciclo. Se A satisfaz todas as condições da definição da classe $\tilde{\mathcal{D}}$ e não satisfaz a condição 4, então A é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Se a subálgebra plena quadrática A_{quad} de A não é skewed-gentle, pelo Teorema A, segue que A_{quad} é derivadamente selvagem e o resultado segue do Lema 1.40. $\square$

2.2.3 A condição 1 da definição da classe $\mathcal{D}$

Seja $i \in \Omega$, pela condição 1 da definição de $\mathcal{D}$, não existe flecha $h \in \mathcal{Q}_1$ com $s(h) = i_-$. Vejamos que, nos casos em que existe tal h, A é derivadamente selvagem.

Lema 2.30 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com um ciclo, satisfazendo as condições da classe $\tilde{\mathcal{D}}$ e a condição 4 da classe $\mathcal{D}$. Se A não satisfaz a condição 1, então A é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{C}$ o ciclo de $\mathcal{Q}$ e abc um 3-monômio que não satisfaz a condição 1, ou seja, existe uma flecha $f \neq b$ com $s(f) = s(b)$. De acordo com as condições $\tilde{D}2$ e $\tilde{D}3$, abc pode ser um 3-monômio isolado ou pertencer a uma dupla de consecutivas. Vamos dizer que A é $D1$-minimal se A satisfaz as condições desse lema e, para toda subálgebra plena S de A, ou S não contém um ciclo ou satisfaz a condição 1. Sem perda de generalidade, podemos supor A $D1$-minimal. Observe que se $i \in \mathcal{Q}_0 \backslash \{t(f)\}$ é tal que não existe caminho em $\mathcal{Q}$ de i para $t(c)$, então a subálgebra plena cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0 \backslash \{i\}$ possui ciclo e não satisfaz a condição 1, o que contradiz a $D1$-minimalidade de A. Assim, se existe flecha d, com $s(d) = t(c)$, temos $R_A^3 = \{abc, bcd\}$ e $d \in \mathcal{C}_1$, caso abc, bcd seja uma dupla de 3-monômios consecutivos, ou $R_A^3 = \{abc\}$, caso abc seja um 3-monômio isolado. O quiver $\mathcal{Q}$ admite um subquiver da forma

$$\begin{tikzcd} & 5 & & \\ 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[u, "f"] \arrow[r, "b"] & 3 \arrow[r, "c"] & 4. \end{tikzcd}$$

Caso abc seja isolado, se $2 \in \mathcal{C}_0$ e $c \in \mathcal{C}_1$ (consequentemente $a, b \in \mathcal{C}_1$), o resultado segue pelo Lema 2.26. Se $2 \in \mathcal{C}_0$, $c \notin \mathcal{C}_1$ e $f \in \mathcal{C}_1$, então, caso $af \in R_A$, temos o resultado aplicando o Lema 2.19 à subálgebra plena de A cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0 \backslash \{3\}$, e, caso $af \notin R_A$, obtemos o resultado aplicando o Lema 2.20 à subálgebra plena de A cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0 \backslash \{4\}$. Então resta-nos tratar os casos abaixo.

<u>Caso 1.</u> abc, bcd é uma dupla de 3-monômios consecutivos ($d \in \mathcal{C}_1$).
Nesse caso, observamos que $a, b, c \in \mathcal{C}_1$ e, consequentemente $f \notin \mathcal{C}_1$. Se $af \notin \mathcal{I}$, a subálgebra plena de A cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0 \backslash \{4\}$ é derivadamente selvagem, pois satisfaz as condições do Lema 2.20. Agora, se $af \in R_A$, a subálgebra plena de A cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0 \backslash \{3\}$ é derivadamente selvagem, já que satisfaz as condições do Lema 2.19. Em ambos os casos, obtemos A derivadamente selvagem pelo Lema 1.40.

<u>Caso 2.</u> abc é 3-monômio isolado e $2 \notin \mathcal{C}_0$.
Se $af \notin \mathcal{I}$, obtemos o resultado através dos Lema 1.40 e 2.20, uma vez que a subálgebra plena cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0 \backslash \{2\}$ satisfaz a condição deste último. Se $af \in \mathcal{I}$, considere o complexo de A-módulos $T_\bullet = \oplus_{i \in \mathcal{Q}_0} T_i$, onde $T_2 : \ \ldots 0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{[b\ f]} A_3 \oplus A_5 \longrightarrow 0 \ldots$ (concentrado nos graus 1 e 0) e $T_i : \ \ldots 0 \longrightarrow A_i \longrightarrow 0 \ldots$ (concentrado no grau 0), para todo $i \neq 2$. É claro que $\mathrm{Hom}(T_i, T_j[r]) = 0$, para todo $i, j \neq 2$ e $r \neq 0$. Como $\mathrm{Hom}(A_i, A_j) \cong e_i A e_j$, também não é difícil verificar que $\mathrm{Hom}(T_2, T_i[r]) = 0$, se $i \neq 2$ e $r \neq 0$, e que $\mathrm{Hom}(T_2, T_2[r]) = 0$, se $r \neq 0$. Além disso, $\mathrm{Hom}(T_i, T_2[r]) = 0$, se $i \neq 2$ e $r \neq 0$, pois $ab \notin \mathcal{I}$ e $af \in \mathcal{I}$. Dessa forma,

verificamos $T_\bullet$ é um complexo inclinante. Já temos $\mathrm{Hom}(T_i, T_j[0]) \cong e_iAe_j$. De maneira similar aos homorfismos do Lema 1.31, verificamos que $\mathrm{Hom}(T_2, T_i[0]) = 0$ se $i \neq 2$, $\mathrm{Hom}(T_i, T_2[0]) = 0$ se $i \neq 2, 3, 5$, $\mathrm{Hom}(T_3, T_2[0]) \cong [(e_3 0)]$, $\mathrm{Hom}(T_5, T_2[0]) \cong [(0 e_5)]$, $\mathrm{Hom}(T_2, T_2[0]) \cong \left[e_2, \begin{pmatrix} e_3 & 0 \\ 0 & e_5 \end{pmatrix}\right]$. Portanto, a álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}T_\bullet$ é isomorfa à álgebra $B = k\mathcal{Q}_B/\mathcal{I}_B$, em que $\mathcal{Q}_B$ é obtido através de $\mathcal{Q}$ substituindo-se o subquiver

$$\begin{tikzcd} & 5 & & \\ 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[r, "b"] \arrow[u, "h"] & 3 \arrow[r, "c"] & 4 \end{tikzcd}$$

pelo quiver

$$\begin{tikzcd} & 4 & & \\ 1 \arrow[r, "\tilde{a}"] & 3 \arrow[r, "\tilde{b}"] \arrow[u, "c"] & 2 & 5 \arrow[l, "\tilde{h}"'] \end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I}_B$ é o ideal gerado pelo conjunto R_B, obtido através de R_A, substituindo-se o 3-monômio abc pelos 2-monômios $\tilde{a}\tilde{b}, \tilde{a}c$ e o possível monômio ua, onde $u \in \mathcal{Q}_1$ com $t(u) = s(a)$, pelo monômio $u\tilde{a}$. Observe que, embora a álgebra B não seja serial à esquerda, é uma álgebra derivadamente selvagem. De fato, considere a álgebra hereditária $W = k\Delta$, onde Δ é o quiver a seguir

$$\begin{tikzcd} & & & & & & 10 & & \\ \Delta: \; 1 \arrow[r, "p_1"] & 2 \arrow[r, "p_2"] & 3 \arrow[r, "p_3"] & 4 \arrow[r, "p_4"] & 5 \arrow[r, "p_5"] & 6 \arrow[r, "p_6"] & 7 \arrow[r, "p_7"] \arrow[u, "p_9"] & 8 & 9 \arrow[l, "p_8"'] \end{tikzcd}$$

Temos W é selvagem pelo Teorema 1.14. Com isso, existe um W-$k\langle x, y\rangle$-bimódulo $M = M(W)$, finitamente gerado e livre sobre $k\langle x, y\rangle$ tal que o funtor $M \otimes_{k\langle x,y\rangle} -$, da categoria dos $k\langle x, y\rangle$-módulos para a categoria de W-módulos, preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Podemos trabalhar com o bimódulo M como a $k\langle x, y\rangle$-representação de Δ abaixo

$$\begin{tikzcd} & & & & & & M_{10} & & \\ M_1 \arrow[r, "M(p_1)"] & M_2 \arrow[r, "M(p_2)"] & M_3 \arrow[r, "M(p_3)"] & M_4 \arrow[r, "M(p_4)"] & M_5 \arrow[r, "M(p_5)"] & M_6 \arrow[r, "M(p_6)"] & M_7 \arrow[r, "M(p_7)"] \arrow[u, "M(p_9)"] & M_8 & M_9 \arrow[l, "M(p_8)"'] \end{tikzcd}$$

Considere $w_6 = \max(-, \tilde{a})$, $w_i = \max(-, s(w_{i+1}))$, para todo $1 \leq i \leq 5$. Denote por $s_l = s(w_l)$, caso $1 \leq l \leq 6$, $s_7 = s(\tilde{b})$, $s_8 = t(\tilde{b})$, $s_9 = s(\tilde{f})$ e $s_{10} = t(c)$, além de d_l o posto de $M(l)$ sobre $k\langle x, y\rangle$. Considere N o seguinte complexo de $A - k\langle x, y\rangle$-bimódulos:

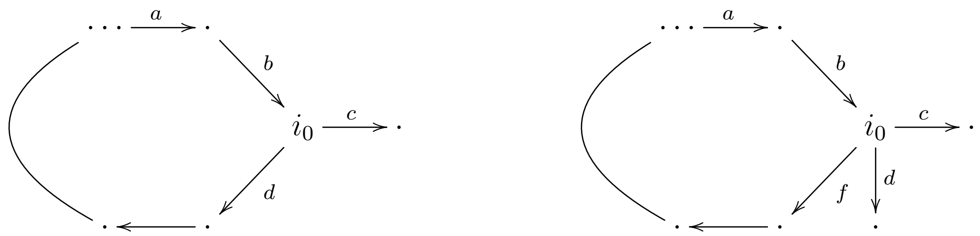
$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & d_9A_{s_9} \arrow[dr, "\tilde{f}M(p_8)"] & \\
d_1A_{s_1} \arrow[r, "w_1M(p_1)"] & d_2A_{s_2} \arrow[r, "w_2M(p_2)"] & d_3A_{s_3} \arrow[r, "w_3M(p_3)"] & d_4A_{s_4} \arrow[r, "w_4M(p_4)"] & d_5A_{s_5} \arrow[r, "w_5M(p_5)"] & d_6A_{s_6} \arrow[r, "w_6M(p_6)"] & d_7A_{s_7} \arrow[r, "\tilde{b}M(p_7)"] \arrow[dr, "cM(p_9)"'] & d_8A_{s_8} \\
 & & & & & & & d_{10}A_{s_{10}}
\end{tikzcd}$$

onde $A_l = Ae_l$. De modo análogo ao que fizemos no exemplo 1.39, verificamos que o funtor $N \otimes_{k\langle x,y\rangle} -$, que leva a categoria dos $k\langle x,y\rangle$- módulos para a categoria $\mathcal{K}^b(B - \text{proj})$, preserva indecomponíveis e classes de isomorfismos. Portanto, a álgebra B é derivadamente selvagem e, pelos Teoremas 1.29 e 1.35, A derivadamente selvagem. $\square$

2.2.4 A condição 2 da definição da classe $\mathcal{D}$

Lema 2.31 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com ciclo $\mathcal{C}$, satisfazendo as condições da classe $\tilde{\mathcal{D}}$ e a condição 4 da classe $\mathcal{D}$. Se existem um 3-monômio isolado, tal que $a, b \in \mathcal{C}_1$, e uma flecha d com $s(d) = s(c)$, tal que $d \notin \mathcal{C}_1$ ou $bd \in R_A$, então A é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Sejam abc e d os referidos 3-monômio e flecha, respectivamente. Obviamente $c \notin \mathcal{C}_1$, já que $t(c)$ é poço. Vamos chamar A de $D2a$-minimal se A satisfaz as condições desse lema e, para toda subálgebra plena S de A, ou S não contém um ciclo ou satisfaz acondição 2a. Sem perda de generalidade, podemos supor A $D2a$-minimal. Canonicamente como fizemos nos Lemas 2.26, e 2.27, já sabemos o formato de $\mathcal{Q}$, a saber, um dos quiver abaixo.



Sem perda de generalidade, digamos que a, b, c, d sejam tais que

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[r, "b"] & 3 \arrow[r, "c"] \arrow[d, "d"] & 4 \\
 & & 5 &
\end{tikzcd}$$

É claro que se $d \in \mathcal{C}_1$ e $bd \in \mathcal{I}$, então a subálgebra plena de A cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0\backslash\{2\}$ é quadrática não skewed-gentle (satisfaz as condições do Lema 2.19), logo derivadamente selvagem e, consequentemente, obtemos A derivadamente selvagem pelo Lema 1.40. Além disso, $abd \notin R_A$, pois A_{quad} é skewed-gentle (condição 4). Com isso, concluímos que no caso em que $d \in \mathcal{C}_1$, devemos ter $bd \notin \mathcal{I}$.

No caso em que $d \notin \mathcal{C}_1$ suporemos $bf, abf \notin \mathcal{I}$. É claro que devemos ter $abd \in \mathcal{I}$, caso contrário, teríamos um absurdo, pois A não satisfaria a condição 4. Assim, temos dois casos a analisar: $abd \in R_A$ ou $bd \in R_A$. Como $abf \notin R_A$, podemos supor que os vértices $1, 2$ e 3 não são todos iguais, senão A seria de dimensão infinita.
Caso 1. $abd \in R_A$
Suporemos então que $a \neq b$. Considere $B = k\mathcal{Q}_B/\mathcal{I}_B$ a álgebra serial à esquerda com um ciclo obtida através de A da seguinte forma: o quiver $\mathcal{Q}_B$ é obtido de $\mathcal{Q}$ substituindo-se o subquiver

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

de $\mathcal{C}_1$ pelo quiver

$$1 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{h} 2\ ,$$

em que apenas a flecha g pertence ao ciclo de B, e $\mathcal{I}_B$ é o ideal de $k\mathcal{Q}_B$ gerado por $R_B = (R_A \backslash \{abc, abd, ua\}) \cup \{gc, gd, ug, gh\}$. A álgebra plena B é quadrática, mas não é skewed-gentle (por satisfazer as condições do Lema 2.21), logo é derivadamente selvagem pelo Teorema A. Com o intuito de construir uma equivalência derivada entre A e B, defina o complexo $T_\bullet = \oplus_{i \in \mathcal{Q}_0} T_i$ de A-módulos por: $T_i : 0 \to A_i \to 0$ (no grau 0), para $i \neq 2$, e $T_2 :\ 0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{b} A_3 \longrightarrow 0$ (nos graus 1 e 0). Através do Lema 1.31, verificamos que $\mathrm{Hom}(T_\bullet, T_\bullet[r]) = 0$ sempre que $r \neq 0$, isto é, a condição *(c1)* do Teorema 1.29 satisfeita. Usando o Lema 1.20, constatamos que a condição *(c2)* também o é, o que nos garante que o complexo $T_\bullet$ é inclinante. Ainda pelo Lema 1.31 deduzimos que a álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}T_\bullet$ é isomorfa a B. O resultado desejado segue pelos Teoremas 1.29 e 1.35.
Caso 2. $bd \in R_A$
Observamos que o mesmo complexo usado no caso 1 também é inclinante nesse caso. Além disso, a álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}T_\bullet$ é isomorfa à álgebra serial à esquerda com um ciclo $C = k\mathcal{Q}_C/\mathcal{I}_C$, onde o quiver $\mathcal{Q}_C$ é obtido de $\mathcal{Q}$ substituindo-se o subquiver

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{d} 5$$

pelo quiver

$$1 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{h} 2 \xrightarrow{w} 5\ ,$$

em que apenas a flecha g pertence ao ciclo de C, e $\mathcal{I}_C$ é o ideal de $k\mathcal{Q}_C$ gerado por $R_C = (R_A \backslash \{abc, bd, ua\}) \cup \{gc, gh, ug\}$. A álgebra C é quadrática, mas não é skewed-gentle (satisfaz as hipóteses do Lema 2.19), então é derivadamente selvagem pelo Teorema A. Portanto, C é derivadamente selvagem pelo Lema 1.40 e, consequentemente, A é derivadamente selvagem pelos Teoremas 1.29, 1.35. □

Lema 2.32 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com ciclo $\mathcal{C}$, satisfazendo as condições da classe $\tilde{\mathcal{D}}$ e a condição 4 da classe $\mathcal{D}$. Se existe um 3-monômio isolado, tal que $a, b, c \notin \mathcal{C}_1$, que não satisfaz a condição 2b, então A é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Considere abc tal 3-monômio isolado. Vamos chamar A de *D2b*-minimal se A satisfaz as condições desse lema e, para toda subálgebra plena

S de A, ou S não contém um ciclo ou satisfaz a condição 2b. Sem perda de generalidade, podemos supor A $D2b$-minimal.

Digamos que a, b e c sejam da forma

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{c} 4 \, .$$

É claro que não podem existir três flechas f, g, h em $\mathcal{Q}$ diferentes de c, com $s(f) = s(g) = s(h) = s(c) = 3$, tais que $abf, abg, abh \notin \mathcal{I}$, pois senão A_{quad} seria não skewed-gentle, contradizendo a condição 4. Ainda nesse sentido, se existem apenas tais f e g, também não poderíamos ter $abf, abg \in R_A$ simultaneamente. Dessa forma, resta-nos analisar os seguintes casos.
<u>Caso 1.</u> Existe $f \in \mathcal{Q}_1$ com $s(f) = s(c) = 3$ e $abf \in R_A$.
Digamos $t(f) = 5$. Pela $D2b$-minimalidade de A, temos $R_A^3 = \{abc, abf\}$. Considere $B = k\mathcal{Q}_B/\mathcal{I}_B$ a álgebra obtida de A da seguinte forma: o quiver $\mathcal{Q}_B$ é obtido de $\mathcal{Q}$ substituindo-se o subquiver

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

de $\mathcal{C}_1$ pelo quiver

$$1 \xrightarrow{u} 3 \xrightarrow{v} 2 \, ,$$

e $\mathcal{I}_B$ é o ideal de $k\mathcal{Q}_B$ gerado por R_B, obtido através de R_A, substituindo-se os 3-monômios abc, abf e qualquer possível monômio do tipo wa, onde $w \in \mathcal{Q}_1$ com $t(u) = s(a)$, pelas relações monomiais uc, uf e wu, respectivamente, e acrecentando-se o monômio uv. Observe que B é uma álgebra quadrática não skewed-gentle (satisfaz as condições do Lema 2.21), logo derivadamente selvagem pelo Teorema A. Vamos construir uma equivalência derivada entre A e B. Defina o complexo $T_\bullet = \oplus_{i \in \mathcal{Q}_0} T_i$ de A-módulos por: $T_i : 0 \to A_i \to 0$ (no grau 0), para $i \neq 2$, e $T_2 : \ 0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{b} A_3 \longrightarrow 0$ (nos graus 1 e 0). Através do Lema 1.31, verificamos que $\mathrm{Hom}(T_\bullet, T_\bullet[r]) = 0$ sempre que $r \neq 0$, isto é, a condição *(c1)* do Teorema 1.29 satisfeita. Usando o Lema 1.20, constatamos que a condição *(c2)* também o é, o que nos garante que o complexo $T_\bullet$ é inclinante. Ainda pelo Lema 1.31 deduzimos que a álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}T_\bullet$ é isomorfa a B. O resultado desejado segue pelos Teoremas 1.29 e 1.35.
<u>Caso 2.</u> Existe $f \in \mathcal{Q}_1$, com $s(f) = s(c) = 3$ e $bf \in R_A$.
Digamos $t(f) = 5$. Observamos que o mesmo complexo usado no caso 1 também é inclinante nesse caso. A álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}T_\bullet$ é isomorfa à $C = k\mathcal{Q}_C/\mathcal{I}_C$, onde o quiver $\mathcal{Q}_C$ é obtido de $\mathcal{Q}$ substituindo-se o subquiver

$$\begin{tikzcd} & & & 4 \\ 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[r, "b"] & 3 \arrow[ur, "c"] \arrow[r, "f"] & 5 \end{tikzcd}$$

de $\mathcal{C}_1$ pelo quiver

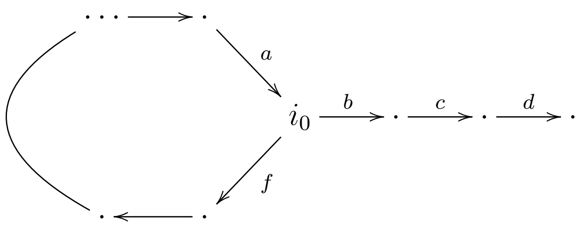
$$\begin{tikzcd} & & 4 & & \\ 1 \arrow[r, "u"] & 3 \arrow[ur, "c"] \arrow[r, "v"] & 2 \arrow[r, "r"] & 5 \end{tikzcd} \, ,$$

e $\mathcal{I}_C$ é o ideal de $k\mathcal{Q}_C$ gerado por R_C, obtido através de R_A, substituindo-se as relações monomiais abc, bf e qualquer possível do tipo wa, onde $w \in \mathcal{Q}_1$ com $t(w) = s(a)$, pelas relações uc, uv e wu. Notamos que C é derivadamente selvagem pelo Teorema A (veja que C satisfaz as condições do Lema 2.19). Consequentemente, C é derivadamente selvagem. Portanto, A também é derivadamente selvagem pelos Teoremas 1.29 e 1.35. $\square$

2.2.5 A condição 3 da definição da classe $\mathcal{D}$

Lema 2.33 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com um ciclo, satisfazendo as condições da classe $\tilde{\mathcal{D}}$ e a condição 4 da classe $\mathcal{D}$. Se A não satisfaz a condição 3a, então A é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Seja $\mathcal{C}$ o ciclo de $\mathcal{Q}$. Vamos chamar A de $D3a$-minimal se A satisfaz as condições desse lema e, para toda subálgebra plena S de A, ou S não contém um ciclo ou satisfaz a condição 3a. Sem perda de generalidade, podemos supor A $D3a$-minimal. Considere abc, bcd uma dupla 3-monômios consecutivos de modo que não satisfaz a condição 3a, ou seja, $a \in \mathcal{C}_1$ e $b \notin \mathcal{C}_1$. Canonicamente como já fizemos antes, o quiver $\mathcal{Q}$ é da forma



e $R_A^3 = \{abc, bcd\}$. É claro que $af \notin \mathcal{I}$, pois senão A_{quad} não seria skewed-gentle. Observe que a necessidade da condição 3a está intimamente relacionada à condição 2 de $\mathcal{D}$, já que a subálgebra plena de A cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0 \backslash \{t(d)\}$ contém um 3-monômio isolado em que apenas $a \in \mathcal{C}_1$, a qual garatimos ser derivadamente selvagem pelo Lema 2.26. Portanto, o resultado segue pelo Lema 1.40. $\square$

Lema 2.34 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com um ciclo, satisfazendo as condições da classe $\tilde{\mathcal{D}}$ e a condição 4 da classe $\mathcal{D}$. Se A não satisfaz a condição 3b, então A é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Seja $\mathcal{C}$ o ciclo de $\mathcal{Q}$. Chamaremos A de $D3b$-minimal se A satisfaz as condições desse lema e, para toda subálgebra plena S de A, ou S não contém um ciclo ou satisfaz a condição 3b. Sem perda de generalidade, podemos supor A $D3b$-minimal. Considere abc, bcd uma dupla de 3-monômios consecutivos que não satisfaz a condição 3b, ou seja, $a, b, c \in \mathcal{C}_1$ e $d \notin \mathcal{C}_1$. Canonicamente, temos $\mathcal{Q}$ com o seguinte formato

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[r, "b"] & \cdot \arrow[dr, "c"] & & \\
\vdots \arrow[ur, "a"] & & & i_0 \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "f"] & \cdot \\
 & \cdot \arrow[ul] & \cdot \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

É claro que $cf \notin \mathcal{I}$, pois, caso contrário, A_{quad} seria não skewed-gentle, contradizendo a condição 4. Observamos que a subálgebra plena de A cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0 \backslash \{t(a)\}$ é quadrática não skewed-gentle (satisfaz as condições do Lema 2.20), logo derivadamente selvagem pelo Teorema A e segue do Lema 1.40 que A é derivadamente selvagem. $\square$

Lema 2.35 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com um ciclo, satisfazendo as condições da classe $\tilde{\mathcal{D}}$ e a condição 4 da classe $\mathcal{D}$. Se A não satisfaz a condição 3c, então A é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Seja $\mathcal{C}$ o ciclo de $\mathcal{Q}$. Considere abc, bcd uma dupla de 3-monômios consecutivos para a qual a condição 3c não é satisfeita, ou seja, existe flecha $f \neq d$, com $s(f) = s(d)$, tal que $bcf \notin R_A$ ou $t(f)$ (resp. $t(d)$) não é poço ou $c \in \mathcal{C}_1$. Chamaremos A de $D3c$-minimal se A satisfaz as condições desse lema e, para toda subálgebra plena S de A, ou S não contém um ciclo ou satisfaz a condição 3c. Sem perda de generalidade, podemos supor A $D3c$-minimal. Como A é serial à esquerda, se $c \notin \mathcal{C}_1$, é claro que $d, f \notin \mathcal{C}_1$. Nesse caso, suponha que $bcf \in R_A$, mas que $t(f)$ não seja um poço, então existe uma flecha g, com $s(g) = t(f)$, e como A satisfaz a condição $\tilde{D}3$ da classe $\tilde{\mathcal{D}}$, $cfg \notin R_A$. Isso gera uma contradição da condição 4.
Por simetria, segue que $t(d)$ também deve ser um poço. Se $c \in \mathcal{C}_1$, pelo fato de A ser serial à esquerda, é claro que $a, b \in \mathcal{C}_1$. Se $d, f \notin \mathcal{C}_1$, o resultado segue pelo Lema 2.34. Também é impossível termos $d, f \in \mathcal{C}_1$, pois $s(d) = s(f)$. Agora, observe que caso em que $t(d)$ e $t(f)$ sejam poços, $c \notin \mathcal{C}_1$, mas $bcf \notin R_A$, a subálgebra plena B de A, cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0 \backslash \{t(d)\}$, não satisfaria a condição $\tilde{D}2$ da definição da classe $\tilde{\mathcal{D}}$, já que abc é um 3-monômio isolado em B, em que $t(c)$ não é um poço. Portanto, o resultado segue dos Lemas 1.40 e 2.26. $\square$

Lema 2.36 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra serial à esquerda com um ciclo, satisfazendo as condições da classe $\tilde{\mathcal{D}}$ e a condição 4 da classe $\mathcal{D}$. Se A não satisfaz a condição 3d, então A é derivadamente selvagem.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{C}$ o ciclo de A e abc, bcd uma dupla de 3-monômios consecutivos para a qual a condição 3d não é satisfeita, ou seja, existe flecha $f \neq c$, com $s(f) = s(c)$, tal que ou $bf \in R_A$ ou $bfg \in R_A$, para qualquer flecha g. Dizemos que A de $D3d$-minimal se A satisfaz as condições desse lema e, para toda subálgebra plena S de A, ou S não contém um ciclo ou satisfaz a condição 3d. Sem perda de generalidade, podemos supor A $D3d$-minimal. Nesse caso, temos $i = s(c) \in \Omega$ e $i_- = s(b)$, conforme notação previamente estabelecida. É claro que devemos ter $abf \notin R_A$, pois, caso contrário, teríamos uma contradição da condição 4. Primeiramente, suponha que $bf \in R_A$. Considere a subálgebra plena B de A cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0 \backslash \{i_-\}$. Podemos supor $B = k\mathcal{Q}_B/\mathcal{I}_B$, onde $\mathcal{Q}_B$ é obtido de $\mathcal{Q}$ substituindo-se o caminho $s(a) \xrightarrow{a} i_- \xrightarrow{b} i$ pela flecha $\tilde{a} : s(a) \to i$, onde $\tilde{a} = ab$, e $\mathcal{I}_B$ é obtido de R_A, substituindo-se a dupla de 3-monômios consecutivos abc, bcd e qualquer possível relação monomial do tipo wa, em que $w \in \mathcal{Q}_1$ com $t(w) = s(a)$, pelas relações $\tilde{a}c$ e $w\tilde{a}$, respectivamente. Observamos que B é quadrática, mas não é skewed-gentle, logo derivadamente selvagem pelo Teorema A. Segue do Lema 1.40 que A também é derivadamente selvagem.
Agora, suponha que exista flecha g, com $s(g) = t(f)$, tal que $bfg \in R_A$. É claro que $t(g)$ é um poço, senão teríamos uma contradição da $D3d$-minimalidade de A. Nesse caso, observe que $t(f) \in \Omega$. Considere a subálgebra plena C de A cujo conjunto de vértices é $\mathcal{Q}_0 \backslash \{t(f)\}$. Podemos supor $C = k\mathcal{Q}_C/\mathcal{I}_C$, onde $\mathcal{Q}_C$ é obtido de $\mathcal{Q}$ substituindo-se o caminho $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} t(g)$ pela flecha $\tilde{f} : i \to t(g)$, onde $\tilde{f} = fg$, e $\mathcal{I}_C$ é obtido de R_A, substituindo-se o 3-monômio bcf pelas relações $b\tilde{f}$ e $\tilde{f}u$, respectivamente. Observamos que C é uma álgebra em condições similares à álgebra B anteriormente tratada, logo C é derivadamente selvagem e, consequentemente, A também o é. $\square$

2.2.6 A álgebra A^Ω

Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra pertencente à classe $\mathcal{D}$. Conforme definimos na Introdução, temos $\Omega = \{i \in \mathcal{Q}_0 \mid i = s(c)$, onde abc é um 3-monômio isolado ou pertence a uma dupla de 3-monômios consecutivos $abc, bcd\}$. Algumas vezes, denotaremos tal conjunto por Ω_A para explicitar a qual álgebra ele está relacionado. Também relembramos o leitor que a subálgebra plena quadrática eAe de A, em que $e = \sum_{i \in \mathcal{Q}_0 \backslash \Omega} e_i$, é denotada por A_{quad}. Dado $i \in \Omega$, nos referiremos a um 3-monômio isolado abc (resp. uma dupla de 3-monômios consecutivos abc, bcd), tal que $i = s(c)$, como *3-monômio isolado associado a i* (resp. *dupla de 3-monômios consecutivos associada a i*). O próximo lema nos garantirá que não existem um 3-monômio isolado e uma dupla de 3-monômios consecutivos associados a um mesmo vértice de Ω, simultaneamente.

Lema 2.37 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra pertencente à classe $\mathcal{D}$. Se $i \in \Omega$, então ou existe um 3-monômio isolado associado a i ou existe uma dupla de 3-monômios consecutivos associada a i.*

Demonstração: Se $i \in \Omega$, por definição, existe um 3-monômio isolado associado a i ou uma dupla de 3-monômios consecutivos associada a i. Suponha que exista um 3-monômio isolado abc, tal que $i = s(c)$. Como A é serial à esquerda, pelo Teorema 2.8, a flecha b é a única flecha de $\mathcal{Q}$ que termina em i, assim, supondo que também exista uma dupla de 3-monômios consecutivos associada a i, esta deve ter a forma abd, bdf, onde $d \neq c$. Observamos que a existência da flecha f faz com que a álgebra A_{quad} satisfaça o Lema 2.19, logo A_{quad} não é skewed-gentle pelo Teorema A, o que é um absurdo, já que $A \in \mathcal{D}$. $\square$

Não é difícil observar que o conjunto de vértices da álgebra A_{quad} é $\mathcal{Q}_0 \backslash \Omega$, mais detalhadamente, podemos supor A_{quad} da forma $k\mathcal{Q}_{A_{quad}}/\mathcal{I}_{A_{quad}}$, em que $\mathcal{Q}_{A_{quad}}$ é obtido através de $\mathcal{Q}$, onde $(\mathcal{Q}_{A_{quad}})_0 = \mathcal{Q}_0 \backslash \Omega$ e, de modo que, para cada $i \in \Omega$, os subquivers de $\mathcal{Q}$ da forma $j \xrightarrow{b} i \xrightarrow{c} t(c)$ sejam substituídos pelo quiver $j \xrightarrow{\tilde{c}} t(c)$, onde $\tilde{c} = bc$. Isso significa que o conjunto de flechas de $\mathcal{Q}_{A_{quad}}$ está em correspondência biunívoca com o conjunto $\mathcal{Q}_1 \backslash \{b \mid abc$ é um 3-monômio isolado ou abc, bcd é uma dupla de 3-monômios consecutivos$\}$, uma vez que, para cada par de flechas b, c de $\mathcal{Q}_1$ a serem excluídas, haverá o acréscimo de uma nova flecha $\tilde{c} : s(b) \to t(c)$. Já $\mathcal{I}_{A_{quad}}$ é o ideal de $k\mathcal{Q}_{A_{quad}}$, gerado pelo conjunto $R_{A_{quad}}$, obtido através do conjunto R_A, da seguinte forma: se abc é um 3-monômio isolado, então substitua-o por $a\tilde{c}$; se abc, bcd é uma dupla de 3-monômios consecutivos, então substitua-a pelo par de 2-monômios $a\tilde{c}, \tilde{c}d$. Isto é, como $\tilde{c} = bc$, também existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto R_A e o conjunto gerador de $\mathcal{I}_{A_{quad}}$. Com isso, a partir de agora consideraremos $A_{quad} = k\mathcal{Q}_{A_{quad}}/\mathcal{I}_{A_{quad}}$.

Como $A \in \mathcal{D}$, de acordo com as condições 1 e 3c, constatamos que, se $i \in \Omega$, então $i_-, i_+ \notin \Omega$. Pelas condições 3d e 4, ainda percebemos que existe único $i_+ \in \mathcal{Q}_0$. Como A_{quad} é skewed-gentle, existe uma tripla skewed-gentle (Δ, S_p, R), onde S_p é um conjunto formado apenas por poços, conforme o Lema 2.15, e de modo que $A_{quad} \cong k\Delta^{sg}/\langle R^{sg}\rangle$. Com o intuito de demonstrarmos o Teorema C, vamos fixar a construção de uma tripla correspondente, o que também facilitará o entendimento dos exemplos que virão a seguir, da seguinte forma: se $j \in (Q_{A_{quad}})_0$, então existe única flecha α, tal que $t(\alpha) = j$ (Observação 2.11). Se existem flechas distintas β, γ em $Q_{A_{quad}}$, para as quais $\alpha\beta, \alpha\gamma \in R_{A_{quad}}$ (respectivamente $\alpha\beta, \alpha\gamma \notin R_{A_{quad}}$), pelos Lemas 2.19 e 2.20, já sabemos que $t(\beta)$ e $t(\gamma)$ são poços, já que A_{quad} é skewed-gentle. Para cada $j \in (Q_{A_{quad}})_0$, considere Δ o quiver obtido de $Q_{A_{quad}}$ pela exclusão da flecha γ, ou seja, em Δ, β é a única flecha com início em j, tal que $\alpha\beta \in R_{A_{quad}}$ (respectivamente $\alpha\beta \notin R_{A_{quad}}$). O conjunto R é o subconjunto de $R_{A_{quad}}$, tal que, para cada par de flechas β, γ, exclui-se a relação $\alpha\gamma$ (resp. não modifica-se relação alguma). O conjunto S_p é formado pelos vértices da forma $t(\beta)$, onde β é uma flecha conforme a que foi descrita. No caso em que A_{quad} é gentle, tal construção é desnecessária, ou seja, $\Delta = \mathcal{Q}_{A_{quad}}$, $S_p = \varnothing$ e $R = R_{A_{quad}}$.

Lema 2.38 *Seja $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra pertencente à classe $\mathcal{D}$. Se (Δ, S_p, R) é a tripla descrita acima, então $A_{quad} \cong k\Delta^{sg}/\langle R^{sg}\rangle$.*

Demonstração: Como $A \in \mathcal{D}$, pela condição 4, A_{quad} é skewed-gentle. De acordo com o Corolário 2.16, para cada flecha α em $Q_{A_{quad}}$, existem, no máximo, $\beta, \gamma \in (Q_{A_{quad}})_1$, tais que $\alpha\beta, \alpha\gamma \in R_{A_{quad}}$ (resp. $\alpha\beta, \alpha\gamma \notin R_{A_{quad}}$) e, nesse caso, os vértices $t(\beta)$ e $t(\gamma)$ são poços. Pela construção fixada para a respectiva tripla, localmente, para cada $\alpha \in (Q_{A_{quad}})_1$, se existe apenas uma flecha β, tal que $s(\beta) = t(\alpha)$, não há nada a se fazer. Agora, se existem exatamente as duas flechas β e γ mencionadas, então o quiver Δ contém apenas uma delas, digamos β. Nesse caso, $t(\beta) \in S_p$. Quanto a R, como a única flecha que possui término em $s(\gamma) = s(\beta)$ é a α, ao excluirmos a flecha γ de $(Q_{A_{quad}})_1$, excluímos de $R_{A_{quad}}$ qualquer relação envolvendo γ. A exclusão de γ nos garante que, para cada vértice, existem, no máximo, duas flechas começando nele e, para cada flecha α em Δ, existe única flecha β, tal que $\alpha\beta \in R$ (resp. $\alpha\beta \notin R$). Aliando isso ao fato de que o vértice $t(\beta)$ também é um poço em Δ, de modo que S_p é formado apenas por poços, concluímos que o par $(\Delta^{sp}, \langle R^{sp} \rangle)$ é gentle, ou seja, a tripla (Δ, S_p, R) é skewed-gentle. A álgebra $k\Delta^{sg}/\langle R^{sg} \rangle$ é tal que, localmente, para cada $\alpha \in \Delta_1$, temos a correspondente flecha $(s(\alpha), \alpha, t(\alpha))$ em Δ^{sg} e existirão duas flechas $(t(\alpha), \beta, t(\beta)^-)$, $(t(\alpha), \beta, t(\beta)^+)$ em Δ^{sg}, tais que $(s(\alpha), \alpha, t(\alpha))(t(\alpha), \beta, t(\beta)^-), (s(\alpha), \alpha, t(\alpha))(t(\alpha), \beta, t(\beta)^+) \in R^{sg}$ (resp. $(s(\alpha), \alpha, t(\alpha))(t(\alpha), \beta, t(\beta)^-), (s(\alpha), \alpha, t(\alpha))(t(\alpha), \beta, t(\beta)^+) \notin R^{sg}$). Observamos que as relações $(s(\alpha), \alpha, t(\alpha))(t(\alpha), \beta, t(\beta)^-), (s(\alpha), \alpha, t(\alpha))(t(\alpha), \beta, t(\beta)^+) \in R^{sg}$ estão em correspondência com as relações $\alpha\beta, \alpha\gamma$ em $Q_{A_{quad}}$. Desse modo, podemos enxergar o isomorfismo entre as respectivas álgebras. $\square$

Exemplo 2.39 *Considere $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ a álgebra serial à esquerda, em que $\mathcal{Q}$ é o quiver a seguir*

$$\begin{tikzcd}
& & & 8 & & 6 \\
1 \arrow[r, bend left, "a"] & 2 \arrow[l, bend left, "b"] \arrow[r, "c"] & 3 \arrow[r, "d"] & 4 \arrow[u, "h"] \arrow[r, "e"] & 5 \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"] & \\
& & & & & 7
\end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I} = \langle ab, cde, def, deg \rangle$. Temos $A_{quad} = k\mathcal{Q}_{A_{quad}}/\mathcal{I}_{A_{quad}}$, onde $\mathcal{Q}_{A_{quad}}$ é o quiver

$$\begin{tikzcd}
& & 8 & & 6 \\
1 \arrow[r, bend left, "a"] & 2 \arrow[l, bend left, "b"] \arrow[r, "c"] & 3 \arrow[u, "\tilde{h}"] \arrow[r, "\tilde{e}"] & 5 \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"] & \\
& & & & 7
\end{tikzcd}$$

e $R_{A_{quad}} = \{ab, c\tilde{e}, \tilde{e}f, \tilde{e}g\}$. Verificamos que $A \in \mathcal{D}$ e $\Omega = \{4\}$. Para a flecha $\tilde{e}$ em $\mathcal{Q}_{A_{quad}}$, existem duas flechas distintas f e g, tais que $\tilde{e}f, \tilde{e}g \in R_{A_{quad}}$. Assim, consideramos a tripla (Δ, S_p, R), em que Δ é o quiver

$$\begin{tikzcd}
 & & 8 & & \\
1 \arrow[r, bend left, "a"] & 2 \arrow[l, bend left, "b"] \arrow[r, "c"] & 3 \arrow[u, "\tilde{h}"] \arrow[r, "\tilde{e}"] & 5 \arrow[r, "f"] & 6,
\end{tikzcd}$$

$S_p = \{6\}$ e $R = \{ab, c\tilde{e}, \tilde{e}f\}$. O par $(\Delta^{sp}, \langle R^{sp} \rangle)$ é tal que Δ^{sp} é o quiver abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & & 8 & & \\
1 \arrow[r, bend left, "a"] & 2 \arrow[l, bend left, "b"] \arrow[r, "c"] & 3 \arrow[u, "\tilde{h}"] \arrow[r, "\tilde{e}"] & 5 \arrow[r, "f"] & 6 \arrow[loop above, "\alpha_6"]
\end{tikzcd}$$

e $R^{sp} = \{ab, c\tilde{e}, \tilde{e}f, \alpha_6^2\}$, o qual verificamos que é gentle, logo a tripla (Δ, S_p, R) é skewed-gentle. A correspondente álgebra skewed-gentle $k\Delta^{sg}/\langle R^{sg} \rangle$ é tal que Δ^{sg} é o quiver a seguir

$$\begin{tikzcd}
 & & 8 & & 6^- \\
1 \arrow[r, bend left, "{(1,a,2)}"] & 2 \arrow[l, bend left, "{(2,b,1)}"] \arrow[r, "{(2,c,3)}"] & 3 \arrow[u, "{(3,\tilde{h},8)}"] \arrow[r, "{(3,\tilde{e},5)}"] & 5 \arrow[ur, "{(5,f,6^-)}"] \arrow[dr, "{(5,f,6^+)}"'] & \\
 & & & & 6^+
\end{tikzcd}$$

e $R^{sg} = \{(1, a, 2)(2, b, 1), (2, c, 3)(3, \tilde{e}, 5), (3, \tilde{e}, 5)(5, f, 6^-), (3, \tilde{e}, 5)(5, f, 6^+)\}$. De modo que $A_{quad} \cong k\Delta^{sg}/\langle R^{sg} \rangle$.

Sejam $A \in \mathcal{D}$ e (Δ, S_p, R) a correspondente tripla skewed-gentle de A_{quad}, conforme construção acima. Dado $i \in \Omega$, demonstramos, no lema abaixo, que $i_+ \in \Delta_0$, o que nos garante, consequentemente que i_+ não é um vértice especial.

Lema 2.40 *Sejam $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra pertencente à classe $\mathcal{D}$ e (Δ, S_p, R) a tripla skewed-gentle para a qual $A_{quad} \cong k\Delta^{sg}/\langle R^{sg} \rangle$, conforme a descrição acima. Se $i \in \Omega$, então $i_+ \in \Delta_0$.*

Demonstração: Dado $i \in \Omega$, temos duas possibilidades: ou existe um 3-monômio isolado abc ou existe uma dupla de 3-monômios consecutivos abc, bcd, em que $i_+ = t(c)$. Como $(\mathcal{Q}_{quad})_0 = \mathcal{Q}_0 \backslash \{i\}$, é claro que $i_+ \in (\mathcal{Q}_{quad})_0$. Pela construção fixada da tripla (Δ, S_p, R), para cada vértice $j \in (\mathcal{Q}_{quad})_0$, para o qual existe uma flecha com início nele, temos $j \in \Delta_0$. Logo, no caso em que abc, bcd é uma dupla de 3-monômios consecutivos, claramente, temos $i_+ \in \Delta_0$. Agora, se abc é um 3-monômio isolado, i_+ é um poço (condição $\tilde{D}2$). De acordo com as condições 2 e 4, não existe flecha d, de modo que ao considerarmos A_{quad}, teríamos $a\tilde{c}, ad \in R_{A_{quad}}$. Isso significa que $i_+ \in \Delta_0$ e $i_+ \notin S_p$. $\square$

Dessa forma, seja $A \in \mathcal{D}$, defina $\tilde{S}_p = S_p \cup \{j \in \Delta_0 \mid j = i_+, \text{para algum } i \in \Omega\}$. Verificamos que a tripla $(\Delta, \tilde{S}_p, R)$ é skewed-gentle, ou seja, o par $(\Delta^{\tilde{s}p}, \langle R^{\tilde{s}p} \rangle)$ é gentle. De fato, se i_+ não é um poço (caso em que abc, bcd é uma dupla de 3-monômios consecutivos), temos $\tilde{c}d \in R_{A_{quad}}$ e a condição 3c nos garante que, consequentemente, d é a única flecha em Δ satisfazendo $\tilde{c}d \in R$, o que significa que i_+ é início apenas da flecha d e término apenas da flecha $\tilde{c}$ em Δ. Se i_+ é um poço (caso em que abc é 3-monômio isolado), então a única flecha em Δ que termina em i_+ é $\tilde{c}$. Dessa forma, observamos que o par $(\Delta^{\tilde{s}p}, \langle R^{\tilde{s}p} \rangle)$ é gentle. Denotamos por $A^{\Omega} = k\Delta^{\tilde{s}g} / \langle R^{\tilde{s}g} \rangle$ a correspondente álgebra skewed-gentle.

Exemplo 2.41 *Considere $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ a álgebra serial à esquerda, em que $\mathcal{Q}$ é o quiver a seguir*

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dr, "b"] & & & & 7 \\
1 \arrow[ur, "a"] & & 3 \arrow[dl, "c"] \arrow[r, "f"] & 5 \arrow[r, "g"] & 6 \arrow[ur, "d"] \arrow[dr, "l"'] & \\
 & 4 \arrow[ul, "h"] & & & & 8
\end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I} = \langle abc, bcd, fgh \rangle$. Temos $A_{quad} = k\mathcal{Q}_{A_{quad}}/\mathcal{I}_{A_{quad}}$, onde

$$\mathcal{Q}_{A_{quad}} : \quad \begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "a"] & & & 7 \\
 & 2 \arrow[dl, "\tilde{c}"] \arrow[r, "\tilde{f}"] & 5 \arrow[ur, "\tilde{h}"] \arrow[dr, "\tilde{l}"'] & \\
4 \arrow[uu, "d"] & & & 8
\end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I}_{A_{quad}} = \left\langle a\tilde{c}, \tilde{c}d, \tilde{f}\tilde{h} \right\rangle$ e também verificamos que $A \in \mathcal{D}$. Observamos que A_{quad} é uma álgebra gentle, logo podemos supor A_{quad} obtida a partir da tripla (Δ, S_p, R), em que $\Delta = \mathcal{Q}_{A_{quad}}$, $S_p = \varnothing$ e $R = \{a\tilde{c}, \tilde{c}d, \tilde{f}\tilde{h}\}$. Observe que os vértices $3, 6 \in \Omega$ e, assim, $3_+ = 4, 6_+ = 7 \in \Delta_0$. De acordo com a construção de A^{Ω}, temos $\tilde{S}_p = \{4, 7\}$ e $A^{\Omega} = k\Delta^{\tilde{s}g} / \langle R^{\tilde{s}g} \rangle$, onde

$$
\Delta^{\tilde{sg}}: \quad
\begin{tikzcd}
 & & & 4^+ \arrow[dr, "{(4^+,d,1)}"] & \\
1 \arrow[rr, "{(1,a,2)}"] & & 2 \arrow[ur, "{(2,\tilde{c},4^+)}"] \arrow[dr, "{(2,\tilde{c},4^-)}"'] \arrow[d, "{(2,\tilde{f},5)}"'] & & 1 \\
 & & 5 \arrow[dl, "{(5,\tilde{h},7^+)}"'] \arrow[d, "{(5,\tilde{h},7^-)}"'] \arrow[dr, "{(5,\tilde{l},8)}"] & 4^- \arrow[ur, "{(4^-,d,1)}"'] & \\
 & 7^+ & 7^- & 8 &
\end{tikzcd}
$$

e $R^{\tilde{sg}} = \{(1,a,2)(2,\tilde{c},4^+), (1,a,2)(2,\tilde{c},4^-), (2,\tilde{c},4^+)(4^+,d,1) - (2,\tilde{c},4^-)(4^-,d,1),$ $(2,\tilde{f},5)(5,\tilde{h},7^+), (2,\tilde{f},5)(5,\tilde{h},7^-)\}$.

Exemplo 2.42 *Considere $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ a álgebra serial à esquerda, em que $\mathcal{Q}$ é o quiver a seguir*

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "a"] & & & & & 7 \\
 & 2 \arrow[dl, "b"] \arrow[r, "d"] & 4 \arrow[r, "e"] & 5 \arrow[r, "f"] & 5 \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "h"'] & \\
3 \arrow[uu, "c"] & & & & & 8
\end{tikzcd}
$$

e $\mathcal{I} = \langle ab, def, efg, efh \rangle$. Temos $A_{quad} = k\mathcal{Q}_{A_{quad}}/\mathcal{I}_{A_{quad}}$, onde

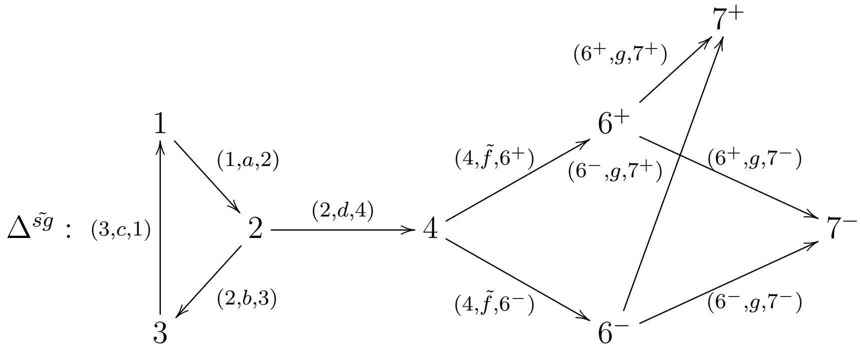
$$
\mathcal{Q}_{A_{quad}}: \quad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "a"] & & & 7 \\
 & 2 \arrow[dl, "b"] \arrow[r, "d"] & 4 \arrow[r, "\tilde{c}"] & 6 \arrow[u, "g"] \arrow[d, "h"'] \\
3 \arrow[uu, "c"] & & & 8
\end{tikzcd}
$$

e $\mathcal{I}_{A_{quad}} = \left\langle ab, d\tilde{f}, \tilde{f}g, \tilde{f}h \right\rangle$. De fato, A_{quad} é uma álgebra skewed-gentle, obtida a partir da tripla skewed-gentle (Δ, S_p, R), em que

$$
\Delta: \quad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "a"] & & & & \\
 & 2 \arrow[dl, "b"] \arrow[r, "d"] & 4 \arrow[r, "\tilde{f}"] & 6 \arrow[r, "g"] & 7 \\
3 \arrow[uu, "c"] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$S_p = \{7\}$ e $R = \{ab, d\tilde{f}, \tilde{f}g\}$, ou seja, $A_{quad} \cong k\Delta^{sg}/\langle R^{sg} \rangle$. Verificamos que $A \in \mathcal{D}$. Observamos que $5 \in \Omega_A$ e $5_+ = 6$. Notamos que, de fato, $6 \in \Delta_0$. Pela

construção de A^{Ω}, $\tilde{S}_p = \{6, 7\}$, *de modo que* $A^{\Omega} = k\Delta^{\widetilde{sg}} / \langle R^{\widetilde{sg}} \rangle$, *isto é,*



e $R^{\widetilde{sg}} = \{(1,a,2)(2,b,3),\ (2,d,4)(4,\tilde{f},6^-),\ (2,d,4)(4,\tilde{f},6^+),\ (4,\tilde{f},6^+)(6^+,g,7^+) - -(4,\tilde{f},6^-)(6^-,g,7^+),\ (4,\tilde{f},6^+)(6^+,g,7^-) - (4,\tilde{f},6^-)(6^-,g,7^-)\}$.

Proposição 2.43 *Seja* $A = kQ/\mathcal{I}$ *uma álgebra serial à esquerda com um ciclo pertencente à classe* $\mathcal{D}$. *Então* A *é derivadamente equivalente à algebra skewed-gentle* A^{Ω}.

Demonstração: Pelo Lema 2.37, para cada $i \in \Omega$, ou existe um 3-monômio isolado ou uma dupla de 3-monômios consecutivos associados a i, por isso, podemos supor que possuam a forma $a_ib_ic_i$ ou $a_ib_ic_i, b_ic_id_i$, respectivamente. Como A é serial à esquerda, pela Observação 2.11, para cada vértice, existe exatamente uma flecha terminando nele. Em particular, para cada $i \in \Omega$, a única flecha com término i é b_i. Como $A \in \mathcal{D}$, pela condição 1, podemos concluir que b_i é a única flecha começando em i_-, o que significa que, para cada $i \in \Omega$, i_- é único. Defina o complexo $T_\bullet = \oplus_{j \in Q_0} T_j$ de A-módulos da seguinte forma: para cada $i \in \Omega$, $T_{i_-}\ :\ 0 \longrightarrow A_{i_-} \xrightarrow{b_i} A_i \longrightarrow 0$ (concentrado nos graus 1 e 0), e, para $j \neq i_-$, $T_j : 0 \to A_j \to 0$ (concentrado no grau 0), inclusive para $j \in \Omega$. Pelo Lema 1.31, se $j, k \neq i_-$ e $r \neq 0$, temos $\mathrm{Hom}(T_j, T_k[r]) = 0$. Além disso, caso $j \neq i_-$,

$$\mathrm{Hom}(T_j, T_{i_-}[r]) \cong \begin{cases} e_jAe_{i_-} \cap \ker(\cdot b_i), & \text{se } r = 1 \\ 0, & \text{se } r \neq 0, 1 \end{cases}$$

Como $a_ib_ic_i$ é um 3-monômio, temos $a_ib_i \notin R_A$. Se $a_ib_ic_i$ é isolado, então $fa_ib_i \notin R_A$, por outro lado, se $a_ib_ic_i, b_ic_id_i$ é uma dupla de 3-monômios consecutivos, então $fa_ib_i \notin R_A$ (pela condição $\tilde{D}3$ de $\tilde{\mathcal{D}}$), para qualquer possível flecha f, com $t(f) = s(a_i)$. Da condição $\tilde{D}1$, segue que $\ker(\cdot b_i) = 0$, logo $\mathrm{Hom}(T_j, T_{i_-}[1]) = 0$ pelo Lema 1.31. Daí, concluímos que $\mathrm{Hom}(T_j, T_{i_-}[r]) = 0$, para todo $r \neq 0$.Também temos

$$\mathrm{Hom}(T_{i_-}, T_j[r]) \cong \begin{cases} \dfrac{e_{i_-}Ae_j}{b_iAe_j}, & \text{se } r = -1 \\ 0, & \text{se } r \neq -1, 0 \end{cases}$$

Como b_i é a única flecha começando em i_-, logo $e_{i_-}Ae_j = b_iAe_j$ e, então, $\mathrm{Hom}(T_{i_-}, T_j[-1]) = 0$. Com isso, concluímos que $\mathrm{Hom}(T_{i_-}, T_j[r]) = 0$, para todo

$r \neq 0$. Ainda pelo Lema 1.31, temos

$$\mathrm{Hom}(T_{i_-}, T_{i_-}[r]) \cong \begin{cases} \dfrac{e_{i_-}Ae_i}{e_{i_-}Ab_i + b_iAe_i}, & \text{se } r = -1 \\ \ker(b_i\cdot) \cap \ker(\cdot b_i), & \text{se } r = 1 \\ 0, & \text{se } r \neq -1, 0, 1 \end{cases}$$

Com argumentos já realizados nessa demonstração, temos $e_{i_-}Ae_i = e_{i_-}Ab_i = b_iAe_i$, logo $\mathrm{Hom}(T_{i_-}, T_{i_-}[-1]) = 0$. Além disso, $\mathrm{Hom}(T_{i_-}, T_{i_-}[1]) = 0$, já que $\ker(\cdot b_i) = 0$. Com todas essas verificações, concluímos que $\mathrm{Hom}(T_\bullet, T[r]_\bullet) = 0$, para todo $r \neq 0$. De acordo com o Lema 1.20, ainda verificamos que $\mathrm{add}(T_\bullet)$ gera $\mathcal{K}^b(A - \mathrm{proj})$ como categoria triangulada. Com essas duas últimas considerações, temos $T_\bullet$ um complexo inclinante, já que satisfaz as condições *(c1)* e *(c2)* do Teorema 1.29.
Agora, resta-nos verificar que a álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}T_\bullet$ é isomorfa a A^Ω. Novamente, usaremos o Lema 1.31, considerando os casos em que $r = 0$. Se $j, k \neq i_-$, temos $\mathrm{Hom}(T_j, T_k[0]) \cong e_jAe_k$. Isso quer dizer que se $j, k \neq i_-$, então os caminhos que começam em j e terminam em k na álgebra $\mathrm{End}T_\bullet$ estão em correspondência com os que vão de j para k em A. Observe que $\mathrm{Hom}(T_{s(a_i)}, T_i[0]) \cong [a_ib_i]$. Assim, digamos que a flecha correspondente (em $\mathrm{End}T_\bullet$) que começa no vértice $s(a_i)$ e termina em i seja α. Se $j \neq i_-$, $\mathrm{Hom}(T_j, T_{i_-}[0]) \cong \dfrac{e_jAe_i}{e_jAb_i}$. Como A é serial à esquerda, b_i é a única flecha com término em i, logo $e_jAe_i = e_jAb_i$, caso $j \neq i$, ou seja, $\mathrm{Hom}(T_j, T_{i_-}[0]) = 0$, se $j \neq i_-, i$. Agora, $\mathrm{Hom}(T_i, T_{i_-}[0]) = [e_i]$. Isso significa que existe um único caminho em $\mathrm{End}T_\bullet$ que terminam em i_- e este começa em i. Então digamos que a flecha correspondente (em $\mathrm{End}T_\bullet$) que começa em i e termina em i_- seja β. Se $a_ib_ic_i$ é um 3-monômio isolado associado a i, observamos que i_- é um poço. Deduzimos que $\alpha\beta = 0$ em $\mathrm{End}T_\bullet$. Também observamos que $\mathrm{Hom}(T_i, T_{i_+}[0]) \cong [c_i]$, então digamos que seja $\gamma : i \to i_+$ a flecha correspondente em $\mathrm{End}T_bu$. Deduzimos que $\alpha\gamma = 0$ em $\mathrm{End}T_\bullet$. Além disso, $\mathrm{Hom}(T_{i_-}, T_j[0]) \cong e_iAe_j \cap \ker(b_i\cdot)$. Considere, primeiramente, que $a_ib_ic_i$ é um 3-monômio isolado associado a i, ou seja, $i_+ = t(c_i)$ é um poço. Se existe flecha d, com $s(d) = s(c_i)$, devemos ter $b_id \notin R_A$ e também que $b_idf \notin R_A$, para qualquer $f \in Q_1$ (condição 2 de $\mathcal{D}$). Por esse fato e por não existirem r-monômios para $r > 3$ (condição $\tilde{D}1$), temos $\ker(b_i\cdot) = 0$, portanto, $\mathrm{Hom}(T_{i_-}, T_j[0]) = 0$ nesse caso. Isso significa que i_- é um poço em $\mathrm{End}T_\bullet$. Agora, supondo que $a_ib_ic_i, b_ic_id_i$ é uma dupla de 3-monômios consecutivos associada a i, pela condição 3c, se existe $f_i \neq d_i$, com $s(f_i) = s(d_i)$, devemos ter $b_ic_if_i \in R_A$. Também observamos que, nesse caso, f_i é a única com esta propriedade, já que a condição 4 deve ser satisfeita. Com isso, obtemos $\ker(b_i\cdot) = [c_id_i, c_if_i]$, caso exista tal f_i ou $\ker(b_i\cdot) = [c_id_i]$, caso contrário. Com isso, temos $\mathrm{Hom}(T_{i_-}, T_j[0]) = 0$ quando $j \neq t(d_i)$ e, também, $j \neq t(f_i)$ caso exista f_i. Assim, concluímos que, caso exista tal f_i, existem dois caminhos em $\mathrm{End}T_\bullet$ que começam em i_-, um deles terminando em $t(d_i)$ e outro em $t(f_i)$ ou existe um único caminho que começa em i_- e este termina em $t(d_i)$, caso contrário. Digamos que seja $\delta : i_- \to t(d_i)$ a flecha correspondente a d_i em $\mathrm{End}T_\bullet$ e, possivelmente, $\varepsilon : i_- \to t(f_i)$ a correspondente a f_i. Observamos também que, nesse caso, $\mathrm{Hom}(T_{i_+}, T_{t(d_i)}[0]) \cong [d_i]$ e, possivelmente, $\mathrm{Hom}(T_{i_+}, T_{t(f_i)}[0]) \cong [f_i]$. Digamos $\rho : i_+ \to t(d_i)$ a flecha correspondente em $\mathrm{End}T_\bullet$ e, possivelmente,

$\mu : i_+ \to t(f_i)$. Verificamos que o fato de $t(d_i)$ e $t(f_i)$ (caso exista) serem poços em $\mathcal{Q}$ (3c) induz que também sejam poços em $\mathrm{End}T_\bullet$. Ainda deduzimos que $\beta\delta - \gamma\rho = \beta\varepsilon - \gamma\mu = 0$ em $\mathrm{End}T_\bullet$.
Pela condição 1, a única flecha começando em i_- é b_i, logo um caminho que começa e termina em i_- não pode ser da forma $b_i w a_i$, pois $a_i b_i \notin R_A$ e A é de dimensão finita. Portanto, o único caminho que começa e termina em i_- é o caminho trivial, isto é, $e_{i_-} A e_{i_-} = [e_{i_-}]$. No Lema 1.31, temos $(s,t) \in e_{i_-} A e_{i_-} \times e_i A e_i$, tal que $b_i t = s b_i$, se, e somente se, $(s,t) \in [(e_{i_-}, e_i)]$. Com isso, concluímos que, em $\mathrm{End}T_\bullet$, o único caminho começando e terminando no vértice i_- é o caminho trivial.
Resumindo, concluímos que, localmente, a partir de um 3-monômio isolado $a_i b_i c_i$ (Caso 1), obtemos, em $\mathrm{End}T_\bullet$, o seguinte subquiver:

$$\begin{tikzcd} & & & & & & i_- \\ A : s(a_i) \arrow[r, "a_i"] & i_- \arrow[r, "b_i"] & i \arrow[r, "c_i"] & i_+ & \rightsquigarrow & \mathrm{End}T_\bullet : s(a_i) \arrow[r, "\alpha"] & i \arrow[u, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] \\ & & & & & & i_+ \end{tikzcd}$$

satisfazendo $\alpha\beta = \alpha\gamma = 0$. Já uma dupla de 3-monômios consecutivos $a_i b_i c_i, b_i c_i d_i$ (Caso 2) origina, em $\mathrm{End}T_\bullet$, o seguinte subquiver:

$$\begin{tikzcd} & & & & & & & & i_- \arrow[dr, "\delta"] & \\ A : s(a_i) \arrow[r, "a_i"] & i_- \arrow[r, "b_i"] & i \arrow[r, "c_i"] & i_+ \arrow[r, "d_i"] & t(d_i) & \rightsquigarrow & \mathrm{End}T_\bullet : s(a_i) \arrow[r, "\alpha"] & i \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & t(d_i) \\ & & & & & & & & i_+ \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

satisfazendo $\alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\delta - \gamma\rho = 0$. Comparando essas observações com a construção da álgebra A^Ω feita ainda nessa seção, verificamos o isomorfismo entre A^Ω e $\mathrm{End}T_\bullet$. De fato, no Caso 1, identificamos as flechas α, β e γ (em $\mathrm{End}T_\bullet$) com as flechas $(s(a_i), a_i, i_-), (i_-, \tilde{c}_i, i_+^+)$ e $(i_-, \tilde{c}_i, i_+^-)$ (em A^Ω), respectivamente, e, no Caso 2, identificamos as flechas $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho$ (e possíveis ε, μ), em $\mathrm{End}T_\bullet$, com as flechas $(s(a_i), a_i, i_-), (i_-, \tilde{c}_i, i_+^+), (i_-, \tilde{c}_i, i_+^-), (i_+^+, d_i, t(d_i)), (i_+^-, d_i, t(d_i))$ (e possivelmente $(i_+^+, f_i, t(f_i)), (i_+^-, f_i, t(f_i))$), em A^Ω. Assim, obtemos a equivalência derivada desejada. $\square$

Exemplo 2.44 *Considere as álgebras do exemplo 2.23.*

a. *Já sabemos que A é derivadamente selvagem por [6], Teorema A, página 2434. Observe que $A \notin \mathcal{D}$, pois, devido à existência da referida tripla de 3-monômios consecutivos, A não satisfaz a condição $\tilde{D}3$.*

b. *Sabemos que A é derivadamente selvagem por [6], Proposição 2.6, página 2438. Também temos $A \notin \mathcal{D}$, devido à existência da referida tripla de 3-monômios consecutivos.*

c. *Sabemos que A é derivadamente mansa por [18], Teorema Principal, páginas*

10–11, *e também por* [5], *Teorema* 1.1, *página* 2. *E temos* $A \in \mathcal{D}$, *como esperado.*

Exemplo 2.45 *É interessante observarmos que, por exemplo, que* A_{quad} *pode ser skewed-gentle sem que* $A \in \mathcal{D}$. *Considere* $A = k\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ *a álgebra serial à esquerda, em que* $\mathcal{Q}$ *é o quiver a seguir*

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 5 \\
1 \arrow[r, bend left, "a"] & 2 \arrow[l, bend left, "b"] \arrow[r, "c"] & 3 \arrow[r, "d"] & 4 \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
 & & & & 6
\end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I} = \langle ab, cdf, cdg \rangle$. *Temos* $\Omega = \{4\}$ *e* $A_{quad} = k\mathcal{Q}_{A_{quad}}/\mathcal{I}_{A_{quad}}$, *onde* $\mathcal{Q}_{A_{quad}}$ *é o quiver abaixo*

$$\begin{tikzcd}
 & & & 5 \\
1 \arrow[r, bend left, "a"] & 2 \arrow[l, bend left, "b"] \arrow[r, "c"] & 3 \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\tilde{g}"'] & \\
 & & & 6
\end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I} = \left\langle ab, c\tilde{f}, c\tilde{g} \right\rangle$, *ou seja,* A_{quad} *é skewed-gentle. Notamos que* $4_- = 3$. *Por outro lado, considere o complexo* $T_\bullet = \oplus_{j \in \mathcal{Q}_0} T_j$ *de* A*-módulos tal que:* $T_3 : \; 0 \longrightarrow A_3 \xrightarrow{d}$ $\xrightarrow{d} A_4 \longrightarrow 0$ *(concentrado nos graus 1 e 0), e, para* $j \neq 3$, $T_j : 0 \to A_j \to 0$ *(concentrado no grau 0). Observe que esse é o mesmo complexo definido na Proposição 2.43. De forma análoga às verificações realizadas na demonstração da respectiva proposição, verificamos que* A *é derivadamente equivalente à álgebra* $B = k\mathcal{Q}_B/\mathcal{I}_B$, *em que* $\mathcal{Q}_B$ *é o quiver abaixo*

$$\begin{tikzcd}
 & & & 5 \\
1 \arrow[r, bend left, "a"] & 2 \arrow[l, bend left, "b"] \arrow[r, "c"] & 3 \arrow[ur, "\tilde{\tilde{f}}"] \arrow[r, "\tilde{\tilde{d}}"] \arrow[dr, "\tilde{\tilde{g}}"'] & 4 \\
 & & & 6
\end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I}_B = \left\langle ab, c\tilde{\tilde{d}}, c\tilde{\tilde{f}}, c\tilde{\tilde{g}} \right\rangle$. *Constatamos que a álgebra quadrática* B *satisfaz as condições do Lema 2.21, portanto* B *é derivadamente selvagem e, pelos Teoremas 1.29 1.35,* A *também o é.*

2.2.7 Demonstração do Teorema B

Demonstração: No caso B.1, o resultado segue pelo Teorema 1.1 de [12]. Agora, no caso B.2, temos:
($\Rightarrow$) Por contraposição, suponha que $A \notin \mathcal{D}$. Se $A \notin \tilde{\mathcal{D}}$, os Lemas 2.26, 2.27 e 2.28 nos garantem que A é derivadamente selvagem. Agora, se $A \in \tilde{\mathcal{D}}$, uma das condições de $\mathcal{D}$ não é satisfeita, o que significa que A satisfaz um dos Lemas 2.29, 2.30, 2.31, 2.32, 2.33, 2.34, 2.35 ou 2.36. Consequentemente, temos A derivadamente selvagem. Com isso, temos o resultado desejado.
($\Leftarrow$) Se $A \in \mathcal{D}$, segue da Proposição 2.43 e dos Teoremas 1.35, 1.49 e 1.53 que A é derivadamente mansa. $\square$

2.2.8 Demonstração do Teorema C

Demonstração:
($\Rightarrow$) Segue do Teorema B e da Proposição 2.43.

($\Leftarrow$) Segue diretamente dos Teoremas 1.35 e 1.53. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] I. Assem, I. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, vol. 1, Cambrigde Univesity Press, Cambrigde (2006).

[2] I. Assem, A. Skowroński, *Iterated tilted algebras of type* $\widetilde{\mathbb{A}}_n$, Math. Z. **195** (1987), 269–290.

[3] M. Barot, *Introduction to the Representation Theory of Algebras*, Springer (2015).

[4] V. Bekkert, Y. Drozd, *Derived categories for algebras with radical square zero*, in: Algebras, representations and applications, Cotemp. Math. **483**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2009), 55–62.

[5] V. Bekkert, H. Giraldo, J. Velez-Marulanda, *Derived tame Nakayama algebras*, to appear.

[6] V. Bekkert, Yu. Drozd, V. Futorny, *Derived tame local and two-point algebras*, J. Algebra **322** (2009), 2433–2448.

[7] V. Bekkert, Yu. Drozd, *Tame-wild dichotomy for derived categories*, arXiv:math/0310352v1 (2003).

[8] V. Bekkert, E. Marcos, H. A. Merklen, *Indecomposables in derived categories of skewed-gentle algebras*, Comm. Algebra **31** (2003), 2615-2654.

[9] V. Bekkert, H. A. Merklen, *Indecomposables in derived categories of gentle algebras*, Algebr. Represent. Theory **6** (2003), 285–302.

[10] R. Bautista, S. Liu, *The bounded derived categories of an algebra with radical squared zero*, J. Algebra **482** (2017), 303–345.

[11] G. Bobiński, Ch. Geiss, A. Skowroński, *Classification of discrete derived categories*, Cent. Eur. J. Math. **2** (2004), 19–49.

[12] T. Brüstle, *Derived-tame tree algebras*, Compositio Mathematica **129** (2001), 301–323.

[13] D. Castonguay, *Derived-Tame blowing-up of tree algebras*, Journal of Algebra (20) **289** (2005).

[14] P. Donavan, M. R. Freislich, *The Representation Theory of Finite Graphs ans Associated Algebras*, Carleton Mathematical Lecture Notes, No. 5. Carleton University (1973).

[15] Yu. Drozd, *Tame and wild matrix problem*, in: Representations and quadratic forms, Institute of Mathematics, Kiev (1979), 39–74; English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. **128** (1986), 31–55.

[16] Yu. Drozd, *Derived Tame and derived wild algebras*, Algebra Discrete Math. **3** (2004), 57–74.

[17] K. Erdmann, *Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras*, Springer (1990).

[18] A. X. Freitas, *Álgebras derivadamente mansas com três módulos simples*, Teses UFMG (2016).

[19] P. Gabriel. *Unzerlegbare Darstellungen*, Manuscripta Math **6** (1972), 71–103.

[20] Ch. Geiss, *On degeneration of tame and wild algebras*, Arch. Math. **64** (1995), 11–16.

[21] Ch. Geiss, *Derived tame algebras and Euler-forms*, Mathematische Zeitschrift **239** (2002), 829–862.

[22] Ch. Geiss, H. Krause, *On the notion of derived tameness*, J. Algebra Appl. **1** (2002), 135–157.

[23] Ch. Geiss, J. A. de la Peña, *Auslander-Reiten components for clans*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **5** (1999), 307–326.

[24] D. Happel, *On the derived category os a finite-dimensional algebra*, Comment. Math. Helv. (62) **3** (1987), 339–389.

[25] D. Happel, *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, Cambridge University Press (1988).

[26] S. Konig, A. Zimmermann, *Derived equivalences for group rings*, Springer (1998).

[27] H. Kupisch, *Beiträge zur Theorie nichthalbeinfacher Ringe mit Minimalbedinggung*, J. reine angew. Math. **201** (1959), 100–112.

[28] K. Morita, *Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimim condition*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiki Daigaki Sect **6** (1958).

[29] J. A. de la Peña. *Algebra whose derived category is tame.* Contemporary Mathematics (117) **229** (1998), 117–127.

[30] R. C. Picanço, *Morfismos irredutíveis na categoria derivada de álgebras gentle*, Teses UFMG (2010).

[31] Z. Pogorzaly, A. Skowroński, *Self-injective biserial standard algebras*, J. Algebra **138** (1991) 491–504.

[32] J. Rickard. *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989) 436–456.

[33] J. Schröer, A. Zimmermann, *Stable endomorphism algebras of modules over special biserial algebras*, Math. Z. **244** (2003) 515–530.

[34] D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, vol. 2, Cambridge Univertsity Press (2007).

[35] D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, vol. 3, Cambridge Univertsity Press (2007).

[36] J. Verdier. *Catégories dérivées, état 0*, SGA 4 1/2, Springer LNM **569** (1977) 162–311.

[37] C. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press (1994).

[38] A. Zimmermann, *Representation Theory: A Homological Algebra Point of View (Algebra and Applications)*, Springer (2014).

Índice Remissivo