UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS — UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Polinômios característicos de grafos e funções geradoras de passeios

Simeona Quispe Monterola

Belo Horizonte, MG
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS — UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Simeona Quispe Monterola

Orientador: Bhalchandra Digambar Thatte
Co-orientador: Maurício de Lemos Rodrigues Collares Neto

# Polinômios característicos de grafos e funções geradoras de passeios

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEx) da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte, MG
2019

Ficha catalográfica elaborada pelo bibliotecário Célio Resende Diniz - CRB 6ª Reg. nº 2403

Quispe Monterola, Simeona.

Q8p Polinômios característicos de grafos e funções geradoras de passeios / Simeona Quispe Monterola — Belo Horizonte, 2019.
64 f. il.; 29 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Matemática.

Orientador: Bhalchandra Digambar Thatte.
Coorientador: Maurício de Lemos Rodrigues Collares Neto.

1. Matemática - Teses. 2. Funções geradoras - Teses. 3. Polinômios - Teses. I. Orientador. II. Coorientador. III. Título.

CDU 51(043)

**Universidade Federal de Minas Gerais**
**Departamento de Matemática**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

# FOLHA DE APROVAÇÃO

*Polinômios Característicos de Grafos e Funções Geradoras de Passeios*

**SIMEONA QUISPE MONTEROLA**

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Thatte

Prof. Bhalchandra Digambar Thatte
UFMG

Maurício Collares Neto

Prof. Maurício de L. R. Collares
UFMG

C. Carballo

Prof. Carlos Maria Carballo
UFMG

Prof. Michel Spira
UFMG

Belo Horizonte, 30 de setembro de 2019.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

# Agradecimentos

A Deus pela oportunidade concedida, por me abençoar e guiar cada um dos meus passos.

A minha família e pessoas que conheci ao longo da minha vida que me motivaram e ajudaram sempre seguir nesta caminhada.

Agradeço de forma especial ao meu orientador, professor Bhalchandra. Muito obrigada por toda a disposição em me ajudar com o tema da dissertação. Sem você, não seria possível este trabalho. A meu coorientador, professor Maurício Collares, pela ajuda comprometida e paciência nas correções, o tempo dedicado em me explicar e escutar minhas duvidas que na minha inexperiência na matemática apareceram. De cada um aprendi a dedicação e comprometimento no estudo da matemática. Estarei grata a vocês.

Ao prof. Michel Spira, pelas muitas sugestões e observações dadas para a melhora da escrita na forma mais simples do conteúdo desta dissertação. Ao membros da banca, professores Michel Spira e Carlos Maria Carballo, por contribuir com correções que melhoraram a dissertação.

Agradeço ao PGMAT, as secretárias Andréa e Kelli por serem prestativas no momento indicado, e ao CNPq pelo auxílio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho temos como objetivo estudar as funções geradoras de passeios num grafo simples finito $G$, series de potência formais que representam o número de passeios de certo comprimento no grafo $G$. Veremos a relação entre a função geradora de passeios e os polinômios característicos de $G$ e de alguns subgrafos de $G$.

Formularemos o problema de reconstrução polinomial de um grafo $G$, e, usando como base as funções geradoras de passeios, provaremos que o polinômio característico de um grafo simples finito é determinado da coleção formada pelos pares de polinômios característicos dos subgrafo vértice-eliminados e de seus complementos. Também veremos que algumas propriedades do grafo são determinadas de seu deck polinomial e que algumas subclasses de grafos desconexos satisfazem a conjectura de reconstrução polinomial.

**Palavras-chave**: Funções geradoras, polinômios característicos, deck polinomial, reconstrução polinomial.

# Abstract

The goal of this work is to study the walk-generating functions of a (finite, simple) graph $G$, which are formal power series that represent the total number of walks of a given length in the graph $G$. We will look at the relationship between the walk-generating function and the characteristic polynomials of $G$ and some subgraphs of $G$.

We will state the polynomial reconstruction problem for a graph $G$, and we will use walk-generating functoins to prove that the characteristic polynomial of a finite simple graph is determined from the collection given py pairs of characteristic polynomials of the vertex-eliminated subgraphs and of their complements. We will also see that some properties of the graph are determined from its polynomial deck and that some subclasses of disconnected graphs satisfy the polynomial reconstruction conjecture.

**Keywords**: Generating functions, characteristic polynomials, polynomial deck, polynomial reconstruction.

# Sumário


**1 Preliminares** **13**

1.1 Grafos . . . . . 13

1.1.1 Grafos e matrizes . . . . . 15

1.2 Polinômio característico . . . . . 19

1.3 Série de potências formais . . . . . 25

1.4 Terminologia de reconstrução . . . . . 26

**2 Função geradora de passeios e polinômio característico** **28**

2.1 Função geradora de passeios e polinômio característico . . . . . 28

2.2 Uma fórmula de decomposição . . . . . 37

2.3 Conjuntos remoção-coespectrais . . . . . 40

**3 Reconstrução polinomial** **43**

3.1 Deck polinomial e a função geradora para o número de passeios . . . . . 43

3.2 Reconstrução a partir do deck de pares de polinômios . . . . . 49

**4 Reconstrução polinomial para subgrafos desconexos** **53**

4.1 Propriedades de grafos polinômio-reconstruíveis . . . . . 53

4.2 Propriedades de um par contraexemplo ao PRP . . . . . 60

4.3 Reconstrução polinomial de grafos desconexos . . . . . 61

4.3.1 Grafos desconexos com duas componentes unicíclicas . . . . . 62

4.3.2 Grafos desconexos com grafo roda como um componente . . . . . 63

# Lista de notações

| | |
|---|---|
| $G$ | Grafo |
| $\overline{G}$ | Complemento do grafo $G$ |
| $n(G)$ | Número de vértices do grafo $G$ |
| $m(G)$ | Número de arestas do grafo $G$ |
| $V(G)$ | Conjunto de vértices do grafo $G$ |
| $E(G)$ | Conjunto de arestas do grafo $G$ |
| $u \sim v$ | Adjacência entre os vértices $u$ e $v$ |
| $K_n$ | Grafo completo de $n$ vértices |
| $P_n$ | Caminho de $n$ vértices |
| $C_n$ | Ciclo de $n$ vértices |
| $d_G(i)$ | Grau do vértice $i$ no grafo $G$ |
| $\overline{d}_G$ | Multiconjunto de graus do grafo $G$ |
| $G \setminus v$ | Subgrafo obtido ao eliminar o vértice $v$ e todas as arestas incidentes a $v$ |
| $G \setminus e$ | Subgrafo obtido ao eliminar a aresta $e$ |
| $G \dot{\cup} H$ | União disjunta de $G$ e $H$ |
| $G \vee H$ | Junção de grafos $G$ e $H$ |
| $H \subseteq G$ | $H$ é subgrafo de $G$ |
| $G \cong H$ | $G$ isomorfo a $H$ |

| | |
|---|---|
| $\mathrm{adj}(A)$ | Adjunta de $A$ |
| $\det(G)$ | Determinante de $A$ |
| $r(G)$ | Posto do grafo $G$ |
| $s(G)$ | Co-posto do grafo $G$ |
| $c(G)$ | Número de ciclos em $G$ |
| $k(G)$ | Número de componentes em $G$ |
| $\phi(G,x)$ | Polinômio característico do grafo $G$ |
| RC | Conjectura de reconstrução de Ulam |
| PD | Deck polinomial |
| $\mathcal{C}(G)$ | Coleção de pares $(\phi(G \setminus i, x), \phi(\overline{G \setminus i}, x)$ |
| PRP | Problema de reconstrução polinomial |
| $W(G,x)$ | Matriz função geradora do número de passeios em $G$ |
| $W_{ij}(G,x)$ | Função geradora de passeios entre os vértices $i$ e $j$ |
| $W_{ii}(G,x)$ | Funções geradora do número de passeios fechados com início e fim no vértice $i$ |
| $\mathrm{TW}(G,x)$ | Função geradora do número total de passeios em $G$ |
| $W_i(G,x)$ | Função geradora do número de passeios que saem do vértice $i$ |
| $b(F,G)$ | Número de subgrafos isomorfos a $F$ em $G$ |
| $p$ | Número de pares de arestas incidentes |
| $T$ | Número de triângulos em um grafo $G$ |
| $q$ | Número de quadriláteros em um grafo $G$ |
| $S_k$ | $k$-ésimo momento espectral |

# Introdução

O propósito deste trabalho é estudar o polinômio característico de um grafo simples e suas relações com as funções geradoras de passeios.

Em 1941 Stanisław Marcin Ulam e Paul J. Kelly formularam o que na atualidade é conhecido como a conjectura de reconstrução de Ulam (RC). A conjetura diz que *todo grafo simples finito de pelo menos 3 vértices é reconstruível da coleção da classe de isomorfismos dos subgrafos próprios induzidos (ou da coleção dos subgrafos obtidos pela eliminação de vértices e seus respectivos arestas incidentes).* Em 1957, P.J. Kelly escreveu seu primeiro artigo sobre reconstrução de grafos, mostrando que árvores são reconstruíveis.

Em 1964 P. J. Kelly e Harary apresentaram uma formulação alternativa da Conjectura de Reconstrução (RC); nesse trabalho eles definem o *deck* $D(G)$ de $n$ cartas de um grafo $G$ com $n$ vértices, onde cada carta representa a classe de isomorfismo de um subgrafo $G \setminus v$, para $v \in V(G)$. O problema é reconstruir o grafo unicamente a partir do seu deck. Muitos resultados parciais foram provados, em particular para certas classes de grafos como grafos regulares, árvores, e grafos desconexos. No entanto, a conjectura de reconstrução não é válida para grafos direcionados, hipergrafos e grafos infinitos.

Em 1973, D. M. Cvetković propôs o *problema de reconstrução polinomial* (PRP), uma variação da conjectura de reconstrução. O PRP pergunta se é possível determinar o polinômio característico de um grafo $G$ de ordem $n > 2$ a partir do seu *deck polinomial* $\mathrm{PD}(G)$, onde deck polinomial é a coleção dos polinômios característicos dos subgrafos obtidos removendo-se um vértice. Pode-se achar mais detalhes na introdução do artigo [11].

Uma propriedade de um grafo $G$ é chamada *reconstruível* se ela é determinada pelo deck de $G$ e é chamada de *polinômio-reconstruível* se é determinada do deck polinomial de $G$. Em outras palavras, o problema de reconstrução polinomial para o grafo $G$ consiste em determinar se o polinômio característico de $G$ é polinômio-reconstruível.

A unicidade da reconstrução polinomial foi provada para muitas classes de grafos, como grafos regulares, árvores, grafos conexos com ao menos um autovalor $-2$, coroas e grafos com até 10 vértices [12]. Em geral o problema de reconstrução polinomial (PRP) é ainda um problema em aberto bem como a conjectura de reconstrução de Ulam.

Estruturamos esta dissertação em quatro capítulos.

No Capítulo 1 recordamos conceitos básicos que serão recorrentemente utilizados ao longo do trabalho, dentre os quais definições básicas da teoria de grafos, teoria espectral de grafos e o lema que relaciona a matriz de adjacência do grafo $G$ com o número de passeios em $G$ de comprimento $k$.

No Capítulo 2 definiremos as funções geradoras de passeios e determinaremos a função geradora para um passeio fechado no vértice $i$ no grafo $G$ mostrando que é satisfeita a identidade:

$$x^{-1}W_{ii}(G, x^{-1}) = \frac{\phi(G \setminus i, x)}{\phi(G, x)}.$$

Este resultado será generalizado para um subconjunto $D \subseteq V(G)$ de vértices.

No caso em que $D$ tem apenas dois vértices distintos $i, j$, obtemos a seguinte identidade para a função geradora de passeios:

$$x^{-1}W_{ij}(G, x^{-1}) = \sqrt{\phi(G \setminus i, x)\phi(G \setminus j, x) - \phi(G, x)\phi(G \setminus \{i, j\}, x)}/\phi(G, x).$$

Como consequência, provaremos que o polinômio característico do grafo $G$ é determinado a partir dos polinômios característicos dos subgrafos $G \setminus i$, $G \setminus j$, $G \setminus \{i, j\}$ e $G \setminus e$, onde $e = ij$ é uma aresta fixa, e é dada por

$$\phi(G, x) = \phi(G \setminus e, x) - \phi(G \setminus \{i, j\}, x) - 2\sqrt{\phi(G \setminus i, x)\phi(G \setminus j, x) - \phi(G \setminus e, x)\phi(G \setminus \{i, j\}, x)}.$$

Apresentaremos a função geradora para passeios entre dois vértices $i, j$, dada por

$$x^{-1}W_{ij}(G, x^{-1}) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{ij}} \frac{\phi(G \setminus P, x)}{\phi(G, x)},$$

onde $\mathcal{P}_{ij}$ é o conjunto de caminhos entre $i$ e $j$. Finalmente daremos uma relação para funções geradoras de passeios para a decomposição de um grafo $G$ em subgrafos $H$ e $K$, que chamaremos de fórmula de decomposição:

$$W_D(G, x)^{-1} = W_D(H, x)^{-1} + W_D(K, x)^{-1} + xA_D(G) - I,$$

onde $D = H \cap K$. Também veremos a relação que existe entre as funções geradoras de grafos coespectrais, provando um resultado que faz conexão entre os conjuntos de vértices remoção-coespectrais e as funções geradores para passeios entre estes conjuntos de vértices.

No Capítulo 3, estudaremos o problema de reconstrução polinomial para qualquer grafo com ordem maior que 2. O problema diz que polinômio característico do grafo $G$, $\phi(G, x)$, é determinado pelo conjunto

$$\mathcal{C}(G) = \{(\phi(G \setminus i, x), \phi(\overline{G \setminus i}, x)) : i \in V(G)\}.$$

No Capítulo 4 listaremos algumas propriedades de grafos que podem ser determinadas do deck polinomial. Listaremos também algumas propriedades que deve possuir um par contraexemplo ao problema de reconstrução polinomial; a seguir estudaremos a reconstrução polinomial de algumas subclasses de grafos desconexos, como grafos desconexos com duas componentes unicíclicas e grafos roda como componente.

**Em todos os capítulos, $G$ será considerado como grafo finito, simples de ordem $n$.**

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as definições básicas e lemas que serão usados nos outros capítulos. De um modo geral, as referências para este capítulo são [1, 7, 14].

## 1.1 Grafos

Um grafo $G$ é um par de conjuntos $(V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é chamado conjunto de vértices e $E(G) \subseteq \{\{a, b\} \subseteq V(G) : a \neq b\}$ é chamado conjunto de arestas. Uma aresta $e = \{u, v\} \in E(G)$ será denotada por $e = uv$. Se $uv \in E(G)$, então $u$ e $v$ são ditos *vértices adjacentes*, o que será denotado por $u \sim v$. O número de vértices de $G$ é denominado *ordem* de $G$, e é denotado por $n(G)$. O número de arestas de $G$ é denotado por $m(G)$.

**Definição 1.1.1** (Grau)**.** O grau de um vértice $v$ é o número de arestas incidentes ao vértice $v$, que denotaremos por

$$d_G(v) = |\{u \in V(G) : \{u, v\} \in E(G)\}|.$$

Se $d_G(u) = 0$ para um $u \in V(G)$, então o vértice $u$ será chamado de isolado. Se $d_G(u) = k$ para todo $u \in V(G)$, então $G$ será chamado de $k$-regular.

**Definição 1.1.2** (Isomorfismo de grafos)**.** Sejam $G$, $H$ grafos. Um isomorfismo entre $G$ e $H$ é uma bijeção $f \colon V(G) \to V(H)$, tal que $uv \in E(G)$ se, e somente se, $f(u)f(v) \in E(H)$. Diz-se que $G$ é isomorfo a $H$ se existe um isomorfismo entre $G$ e $H$. Denotaremos por $G \cong H$.

**Observação 1.1.3.** A relação de isomorfismo é uma relação de equivalência no conjunto de grafos. Uma relação de isomorfismo divide o conjunto de grafos em classes de equivalência chamadas de classes de isomorfismo. Uma propriedade de grafos é chamada de *invariante* se é constante em cada classe de isomorfismo.

Ainda permanece em aberto o conhecimento de uma lista completa de invariantes de um grafo $G$ capaz de caracterizar a classe de isomorfismo.

**Definição 1.1.4** (Grafo completo)**.** Um grafo é completo se cada par de vértices é adjacente. O grafo completo com conjunto de vértices $\{1, \ldots, n\}$ será denotado por $K_n$.

**Definição 1.1.5** (Multiconjunto de graus)**.** Seja $G$ um grafo com conjunto de vértices $V(G) = \{1, \ldots, n\}$. O multiconjunto de graus de $G$ é o multiconjunto dos graus de seus vértices, denotado por

$$\overline{d}_G \coloneqq \{d_G(1), d_G(2), \ldots, d_G(n)\}.$$

**Proposição 1.1.6.** Seja $G$ um grafo. Tem-se

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|.$$

**Definição 1.1.7** (Subgrafo)**.** Um subgrafo do grafo $G$ é um grafo $H$ tal que

$$V(H) \subseteq V(G) \quad \text{e} \quad E(H) \subseteq E(G).$$

Escreve-se $H \subseteq G$.

Um subgrafo $H \subseteq G$ é *subgrafo gerador* (spanning subgraph) de $G$ se $V(H) = V(G)$. $H$ é *próprio* se $H \neq G$. Dado $E \subseteq E(G)$, o grafo $G \setminus E$ é o subgrafo gerador de $G$ com conjunto de arestas $E(G) \setminus E$. Se $E = e$, escrevemos $G \setminus e$ para denotar $G \setminus \{e\}$.

Dado $X \subseteq V(G)$, o subgrafo de $G$ induzido por $X$ é o subgrafo com conjunto de vértices $X$ e conjunto de arestas formado por todas as arestas de $G$ com vértices em $X$. Dado $N \subseteq V(G)$, obtemos o subgrafo induzido $G \setminus N$ a partir de $G$ pela remoção dos vértices de $N$ e todas as arestas incidentes a eles. Denotamos $G \setminus \{v\}$ por $G \setminus v$ para o caso de um único vértice.

**Definição 1.1.8** (Passeio (walk), caminho (path), ciclo (cycle))**.** Seja $G$ um grafo. Um passeio de comprimento $k \geq 0$ no grafo $G$ é uma sequência de vértices $v_0, \ldots, v_k$, onde $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para $1 \leq i \leq k$. Se $v_0 = v_k$ o passeio é chamado de fechado.

Um passeio com todos os vértices distintos é denominado *caminho*. Um passeio fechado em que os vértices $v_0, \ldots, v_{k-1}$ são distintos é denominado *ciclo*. Um caminho com $n$ vértices será denotado por $P_n$ e um ciclo com $n$ vértices será denotado por $C_n$.

Podemos observar que todo ciclo é um grafo 2-regular e $|V(C_n)| = |E(C_n)|$.

**Definição 1.1.9** (União de grafos)**.** Seja $G_1, \ldots, G_k$ grafos. A união dos $G_i$ é um grafo denotado por $G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$, com conjunto de vértices e arestas $\bigcup_{t=1}^{k} V(G_t)$ e $\bigcup_{t=1}^{k} E(G_t)$, respectivamente.

**Definição 1.1.10** (União disjunta)**.** Dados dois grafos $G_1$ e $G_2$ com $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, a união disjunta entre $G_1$ e $G_2$, denotada por $G_1 \dot\cup G_2$, é o grafo $G$ dado por $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$.

**Definição 1.1.11.** Seja $G$ um grafo com pelo menos um vértice. $G$ é dito *conexo* se para quaisquer $u, v \in V(G)$ existe um caminho unindo $u$ e $v$. Do contrário, $G$ é dito desconexo.

Dizemos que $G' \subseteq G$ é uma *componente* de $G$ se $G'$ é um subgrafo conexo maximal de $G$, isto é, se $G'$ é conexo e não existe um subgrafo conexo $H$ tal que $G' \subset H \subseteq G$. O número de componentes e número de ciclos de um grafo $G$ são denotados por $k(G)$ e $c(G)$ respectivamente.

**Definição 1.1.12** (Complemento de grafo)**.** O complemento $\overline{G}$ de um grafo $G$ é o grafo com conjunto de vértices $V(\overline{G}) = V(G)$ e conjunto de arestas definido por

$$E(\overline{G}) = \{\{u, v\} \in V(\overline{G}) : u \neq v \text{ e } \{u, v\} \notin E(G)\}.$$

### 1.1.1 Grafos e matrizes

**Definição 1.1.13** (Matriz de adjacência)**.** Seja $G$ um grafo com $V(G) = \{1, \ldots, n\}$. A matriz de adjacência de $G$, denotada por $A(G)$, é a matriz quadrada de ordem $n \times n$ cujas entradas $a_{ij}$ são dadas por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \sim j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A matriz $A(G)$ é simétrica e real, então $A(G)$ tem todos os seus autovalores reais.

Denotamos por $I_n$ e $J_n$ a matriz identidade de ordem $n \times n$ e matriz com todas as entradas iguais a 1, de ordem $n \times n$, respectivamente. A matriz de adjacência do grafo complementar $\overline{G}$ é dada por

$$A(\overline{G}) = J_n - (I_n + A(G)).$$

Apresentamos o seguinte lema, de suma importância porque estabelece uma relação entre o número de passeios de comprimento $\ell$ e a $\ell$-ésima potência da matriz de adjacência $A$ do grafo $G$.

**Lema 1.1.14.** Seja $G$ um grafo com conjunto de vértices $V(G) = \{1, \ldots, n\}$ e matriz de adjacência $A$, e seja $i, j \in V(G)$. Então o número de passeios em $G$ de $i$ a $j$ com comprimento $\ell$ é $(A^\ell)_{ij}$.

*Demonstração.* Faremos a demostração por indução sobre $\ell$. O resultado é verdadeiro para $\ell = 0$, pois $A^0 = I$. Suponha que o resultado é valido para um valor de $\ell$. Então, da identidade

$$(A^{\ell+1})_{ij} = \sum_{h=1}^{n} (A^\ell)_{ih} a_{hj},$$

deduz-se que $(A^{\ell+1})_{ij}$ é o número de passeios de comprimento $\ell + 1$ unindo os vértices $i$ e $j$. O resultado segue para todo $\ell$ por indução. $\square$

**Observação 1.1.15.** Com as condições do Lema 1.1.14, notamos que a entrada da diagonal principal $(A^{\ell})_{ii}$ de $A^{\ell}$ é o número de passeios fechados de comprimento $\ell$ que começam e terminam no vértice $i$; então o número total de passeios fechados de comprimento $\ell$ é dado por $\mathrm{tr}(A^{\ell})$.

**Definição 1.1.16** (Grafo elementar)**.** Um grafo elementar é um grafo simples, no qual cada componente é $K_2$ ou um ciclo.

Para cada aresta $uv \in E(G)$, com $e = uv$, vamos escolher um vértice final positivo e o outro vértice final negativo e dizemos que $G$ recebeu uma orientação.

**Definição 1.1.17** (Matriz de incidência)**.** Seja $G$ um grafo com $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e conjunto de arestas $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Dada uma orientação de $G$, a matriz de incidência de $G$ com respeito a essa orientação é a matriz $D$ de ordem $n \times m$ dada por

$$d_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se } v_i \text{ é vértice final positivo de } e_j, \\ -1 & \text{se } v_i \text{ é vértice final negativo de } e_j, \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

**Proposição 1.1.18.** Seja $G$ um grafo com $n$ vértices, $m$ arestas e $k$ componentes. Dada uma orientação de $G$, seja $D$ a matriz de incidência de $G$ com relação a essa orientação. Então o posto de $D$ é igual a $n - k$ e o co-posto de $D$ é igual a $m - n + k$.

*Demonstração.* Consideremos a matriz de incidência do grafo $G$ para uma orientação

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_k \end{bmatrix}$$

onde cada submatriz $D_i$ para $1 \leq i \leq k$ é a matriz de incidência de uma componente $G_i$ de $G$. Provaremos que o posto de $G_i$ é $n_i - 1$, onde $n_i = |V(G_i)|$. Denotaremos por $d_j$ à $j$-ésima linha de $D_j$, correspondente ao vértice $v_j$ em $G_i$.

Como em cada coluna há apenas um $+1$ e um $-1$, a soma das linhas em $D_i$ é 0. Portanto o posto de $G_i$ é no máximo $n_i - 1$ ou seja, suas linhas são linearmente dependentes. Seja $\sum_j \alpha_j d_j = 0$ uma dependência linear das linhas $d_1, \ldots, d_{n_i}$. Para qualquer $r$, a linha $d_r$ tem entradas não nulas apenas nas colunas correspondentes às arestas incidentes com $v_r$. Para cada uma dessas colunas, há apenas uma outra linha, digamos $d_s$, em que existe uma entrada diferente de zero (com sinal oposto à entrada diferente de zero em $d_r$). A relação de dependência requer, portanto, $\alpha_r = \alpha_s$. Assim, $\alpha_r = \alpha_s$ para toda aresta $v_r v_s$ de $G_i$.

Como $G_i$ é conexo, para quaisquer $u, w \in V(G_i)$ existe um caminho $u = v_0, \ldots, v_k = w$. Assim, $\alpha_{v_0} = \ldots = \alpha_{v_k}$, e portanto todos os $\alpha_j$ são iguais a um mesmo valor $\alpha$. Portanto a relação de dependência é $\alpha \cdot \sum_j d_j = 0$, ou seja

$$\mathcal{N}(D_i^{\intercal}) = \{(\alpha, \ldots, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\},$$

que tem dimensão 1. Assim $r(D_i) = r(D_i^{\intercal}) = n_i - 1$. Como isso se aplica para todas as componentes, o posto de $G$ é $\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k$. □

**Corolário 1.1.19.** Seja $G$ um grafo. Todas as orientações de $G$ geram matrizes de incidência de mesmo posto e mesmo co-posto.

*Demonstração.* O posto de qualquer matriz de incidência de $G$ é igual a $n - k$ pela proposição 1.1.18, número que independe da orientação escolhida. Raciocínio análogo se aplica ao co-posto. □

Tendo isso em vista, podemos definir o posto e o co-posto de um grafo.

**Definição 1.1.20** (Posto e co-posto de um grafo)**.** Seja $G$ um grafo. O posto e o co-posto de $G$, denotados por $r(G)$ e $s(G)$, são o posto e o co-posto da matriz de incidência de $G$ com respeito a uma orientação qualquer.

**Lema 1.1.21.** Seja $\Lambda$ um grafo elementar. O co-posto de $\Lambda$ é o numero de componentes ciclo em $\Lambda$.

*Demonstração.* Se $\Lambda$ tem um número $z$ de componentes $K_2$, então $m(\Lambda) = z + (n(\Lambda) - 2z) = n(\Lambda) - z$ e $c(\Lambda) = k(\Lambda) - z$. Portanto $c(\Lambda) = k(\Lambda) + n(\Lambda) - m(\Lambda)$ e, por definição de co-posto, $c(\Lambda) = s(\Lambda)$. □

Seja $G$ um grafo com conjunto de vértices $V(G) = \{1, \ldots, n\}$. Lembremos que o determinante de uma matriz $n \times n$ qualquer é dado por

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}, \tag{1.1}$$

onde $S_n$ é o conjunto de permutações de ordem $n$. Apresentamos a seguinte proposição.

**Proposição 1.1.22** (Harary 1962)**.** Seja $A$ a matriz de adjacência de um grafo $G$. Então

$$\det(A) = \sum_{\Lambda} (-1)^{r(\Lambda)} 2^{s(\Lambda)},$$

onde a soma é sobre todos os subgrafos elementares geradores $\Lambda$ de $G$.

*Demonstração.* Seja $P = \operatorname{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \dots a_{n,\pi(n)}$ um termo de (1.1). Este termo anula-se se para algum $i \in \{1, \dots, n\}$ tem-se $a_{i,\pi(i)} = 0$; nesse caso, $v_i v_{\pi(i)}$ não é aresta em $G$. Em particular, o termo anula-se se $\pi$ tem ponto fixo, pois o grafo não possui laços. Assim, se o termo correspondente à permutação $\pi$ é não nulo, então $\pi$ pode ser unicamente expressada como a composição de ciclos disjuntos de comprimento pelo menos 2.

Cada ciclo $(ij)$ de comprimento 2 da permutação, corresponde a fatores $a_{ij} a_{ji}$ de $P$, que significa uma aresta $v_i v_j$ em $G$.

Cada ciclo $(pqr \dots t)$, de comprimento maior que 2, corresponde ao fator $a_{pq} a_{qr} \dots a_{tp}$ e o significado no grafo $G$ é um ciclo $(v_p, v_q, \dots, v_t)$ em $G$.

Consequentemente cada termo não nulo na expressão do determinante corresponde a um subgrafo elementar $\Lambda$ de $G$ com $V(\Lambda) = V(G)$. Como cada ciclo de comprimento $\ell$ é produto de $\ell - 1$ transposições, cada ciclo par contribui em $(-1)$ para $\operatorname{sgn}(\pi)$. Assim, se denotarmos por $N_e$ o número de ciclos pares da permutação $\pi$, tem-se que $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{N_e}$.

Seja $N_o$ o número de ciclos de tamanho ímpar em $\pi$. Se existe $c_\ell$ ciclos de comprimento $\ell$, então vale que por

$$N_o = \sum_{\ell \text{ ímpar}} c_\ell \equiv \sum_{\ell=1}^{n} \ell c_\ell = n \pmod 2.$$

Portanto

$$r(\Lambda) = n - (N_o + N_e) \equiv N_e \pmod 2,$$

e assim $\operatorname{sgn}(\pi)$ é igual a $(-1)^{r(\Lambda)}$. Cada subgrafo elementar gerador $\Lambda$ com $c(\Lambda)$ ciclos corresponde a $2^{c(\Lambda)}$ permutações, pois existem duas maneiras de escolher a direção em que percorremos cada ciclo em $\pi$; pelo Lema 1.1.21, temos $s(\Lambda) = c(\Lambda)$. □

**Exemplo 1.1.23.** No grafo completo $K_4$ tem-se dois tipos de subgrafos elementares com $n = 4$:

- Subgrafo elementar isomorfo a $K_2 \dot\cup K_2$, para o qual tem-se $k(K_2 \dot\cup K_2) = 2$,

$$r(K_2 \dot\cup K_2) = 4 - 2 = 2; \qquad s(K_2 \dot\cup K_2) = 2 - 2 = 0.$$

- Subgrafo elementar isomorfo a $C_4$, para o qual tem-se $k(C_4) = 1$,

$$r(C_4) = 4 - 1 = 3; \qquad s(C_4) = 4 - 3 = 1.$$

Existem 3 subgrafos de cada tipo, logo

$$\det(A(K_4)) = 3 \cdot (-1)^2 2^0 + 3 \cdot (-1)^3 2^1 = -3.$$

## 1.2 Polinômio característico

**Definição 1.2.1** (Polinômio característico)**.** Seja $G$ um grafo com $n$ vértices e $A$ a matriz de adjacência de $G$. Então o polinômio característico de $G$ é

$$\phi(G, x) \coloneqq \det(xI - A),$$

onde $I$ é a matriz identidade de ordem $n$.

Assim, $\phi(G, x)$ é um polinômio de grau $n$ na variável $x$.

Vale lembrar que o polinômio característico não depende da rotulação dos vértices do grafo, pois se $A'$ é matriz de adjacência de uma re-rotulação de $G$, então existe uma matriz de permutação $B$ com $\det(B) = \det(B^{-1}) = \pm 1$ tal que $A' = B^\intercal AB = B^{-1}AB$, e assim $\det(xI - A') = \det(xI - A)$.

**Definição 1.2.2** (Autovalores de um grafo)**.** Os autovalores de um grafo $G$ são os autovalores da sua matriz de adjacência $A(G)$. Esses autovalores são as raízes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ do polinômio característico do grafo $G$, e portanto

$$\phi(G, x) = \det(xI - A) = \prod_{k=1}^{n} (x - \lambda_k).$$

**Definição 1.2.3** (Espectro)**.** O espectro de um grafo $G$ é o conjunto dos autovalores da matriz de adjacência $A$ junto com suas multiplicidades. Se os autovalores distintos de $A(G)$ são $\lambda_1 > \cdots > \lambda_t$ e seus multiplicidades são $m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_t)$, respectivamente, o espectro será denotado por

$$\operatorname{Spec}(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_t \\ m(\lambda_1) & \cdots & m(\lambda_t) \end{pmatrix}.$$

Um autovalor $\lambda \in \operatorname{Spec}(G)$ é simples se sua multiplicidade é 1. Além disso, o maior autovalor (em valor absoluto) do grafo $G$ é chamado de *índice* do grafo.

No seguinte exemplo, apresentamos o grafo de Petersen, que também será usado no Capítulo 2. O cálculo do polinômio característico do grafo foi feito com o auxílio do programa SageMath [13].

**Exemplo 1.2.4.** Seja $G$ o grafo de Petersen, exibido na Figura 1.1. O polinômio característico é dado por

$$\phi(G, x) = (x - 3)(x + 2)^4 (x - 1)^5. \tag{1.2}$$

O espectro de $G$ é dado por

$$\operatorname{Spec}(G) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

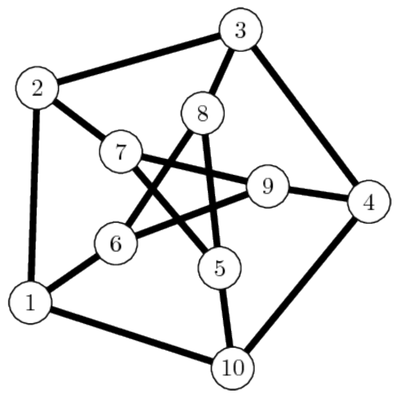


Figura 1.1: Grafo de Petersen.

**Definição 1.2.5** (Grafos coespectrais)**.** Sejam $G$ e $H$ dois grafos com $|V(G)| = |V(H)|$. $G$ e $H$ são ditos coespectrais se $\operatorname{Spec}(G) = \operatorname{Spec}(H)$ ou seja, se $\phi(G, x) = \phi(H, x)$.

**Exemplo 1.2.6.** Apresentamos na Figura 1.2, dois grafos $G$ e $H$ coespectrais não isomorfos com

$$\phi(G, x) = x^6 - 7x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 4x - 1 = \phi(H, x).$$

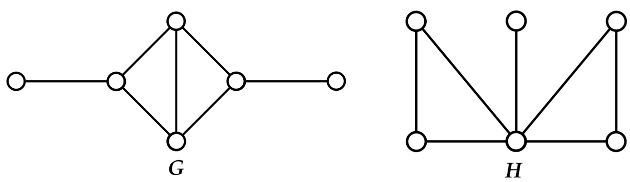


Figura 1.2: Grafos coespectrais.

**Proposição 1.2.7.** Os autovalores $\lambda_i$ satisfazem as seguintes propriedades:

1. Se
$$\phi(G, x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = \prod_{k=1}^{n} (x - \lambda_k).$$
Então $a_k = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} (-1)^k \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_k}$.

2. O coeficiente de $x^{n-1}$ em $\phi(G, x)$ é $-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -\operatorname{tr}(A)$.

3. $\prod \lambda_i = (-1)^n \phi(G, 0) = \det(A)$.

*Demonstração.* As propriedades enunciadas decorrem trivialmente de manipulações polinomiais. Por completude, incluímos suas provas:

1. No desenvolvimento do produto $\prod_{k=1}^{n}(x - \lambda_k)$ temos facilmente que o coeficiente de $x^{n-k}$ é $a_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} (-1)^k \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_k}$.

2. É uma consequência direta do item 1. Segue que o coeficiente de $x^{n-1}$ é $-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

3. A partir de $\det(xI - A) = \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$ para $x = 0$ temos a igualdade.

□

**Definição 1.2.8.** Seja $X$ uma matriz. A matriz $X[i, j]$ é a submatriz de $X$ obtida pela eliminação da $i$-ésima linha e $j$-ésima coluna. O determinante de $X[i, j]$ é chamado de $ij$-cofator de $X$.

**Definição 1.2.9** (Adjunta)**.** Seja $X$ uma matriz quadrada. A adjunta de $X$, denotada por $\text{adj}(X)$, é a matriz com $ij$-ésima entrada dada por $(-1)^{i+j} \det(X[j, i])$.

Como consequência da expansão do determinante por cofatores, a adjunta satisfaz a igualdade $X \,\text{adj}(X) = \det(X) I_n$. Assim, se $X$ é não-singular, vale a igualdade

$$X^{-1} = \frac{\text{adj}(X)}{\det(X)}. \tag{1.3}$$

**Definição 1.2.10** (Menor principal)**.** Seja $X$ uma matriz quadrada. Uma submatriz principal de $X$ é uma submatriz obtida ao escolher linhas e colunas de mesmos índices. O *menor principal* é o determinante da submatriz principal.

**Lema 1.2.11.** Sejam $X$ e $Y$ quaisquer duas matrizes de ordem $n \times n$. Então $\det(X + Y)$ é a soma dos determinantes das $2^n$ matrizes obtidas por substituir cada subconjunto das colunas de $X$ pelos correspondentes subconjuntos das colunas de $Y$.

*Demonstração.* Segue do fato (conhecido de Álgebra Linear) que o determinante é uma função linear em cada uma das colunas da matriz. □

**Corolário 1.2.12.** Seja $X$ uma matriz quadrada não-singular de ordem $n \times n$ e $y \in \mathbb{R}$. Então

$$\det(X + yJ_n) = \det(X) + y \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(X[i, j]).$$

**Teorema 1.2.13.** Sejam $G$ e $H$ grafos. O polinômio característico satisfaz as seguintes identidades:

(1) $\phi(G\dot\cup H,x)=\phi(G,x)\cdot\phi(H,x)$, onde $G\dot\cup H$ é a união disjunta de $G$ e $H$.

(2) $\dfrac{d}{dx}\phi(G,x)=\displaystyle\sum_{i\in V(G)}\phi(G\setminus i,x)$.

*Demonstração.* (1) Se $A(G)$ e $A(H)$ são as matrizes de adjacência dos grafos $G$ e $H$ respectivamente, então a matriz de adjacência do grafo $G\dot\cup H$ é dada por

$$A(G\dot\cup H)=\begin{pmatrix}A(G) & 0\\ 0 & A(H)\end{pmatrix},$$

de onde segue que

$$\phi(G\dot\cup H,x)=\det(xI_{n(G)}-A(G))\cdot\det(xI_{n(H)}-A(H))=\phi(G,x)\cdot\phi(H,x).$$

(2) Para um $h$ e $A$ tem-se

$$\phi(G,x+h)-\phi(G,x)=\det((x+h)I_n-A)-\det(xI_n-A)$$

Tomando $X=xI_n-A$ e $Y=hI_n$ no Lema 1.2.11, segue-se que

$$\begin{aligned}\phi(G,x+h)-\phi(G,x) &= \det(xI_n-A)+h\sum_{i\in V(G)}\det(xI_{n-1}-A(G\setminus i))\\ &\quad+\sum_{k=2}^{n}h^k f_{n-k}(x)-\det(xI_n-A),\end{aligned}$$

onde $f_{n-k}(x)$ denota os menores principais de ordem $n-k$ de $xI_n-A$. Assim,

$$\phi(G,x+h)-\phi(G,x)=h\sum_{i\in V(G)}\phi(G\setminus i,x)+\sum_{k=2}^{n}h^k f_{n-k}(x).$$

Dividindo $h$ e fazendo $h\to 0$, obtemos o resultado desejado.

□

**Exemplo 1.2.14.** Considerando o grafo de Petersen no Exemplo 1.2.4, o polinômio característico $\phi(G\setminus i,x)$ é $(x+2)^3(x-1)^4(x^2-2x-2)$ para todo $i=1,\ldots,10$. Logo

$$\sum_{i\in V(G)}\phi(G\setminus i,x)=10(x+2)^3(x-1)^4(x^2-2x-2).$$

Por outro lado, a derivada de (1.2) é

$$\frac{d}{dx}\phi(G,x) = 10(x+2)^3(x-1)^4(x^2-2x-2),$$

como provado no item (2) do Teorema 1.2.13.

O seguinte lema é válido para qualquer matriz $A$ e não só para a matriz de adjacência do grafo $G$. Portanto podemos determinar os coeficientes de $\phi(G,x)$ a partir dos determinantes $\det(A(H))$ dos subgrafos $H$ do grafo $G$.

**Lema 1.2.15** (Ver [7, p.20])**.** Seja $\det(xI_n - A) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ com $a_k = (-1)^k b_k$. Então $b_k$ é a soma dos menores principais de $A$ de ordem $k$.

*Demonstração.* A prova é imediata pelo Lema 1.2.11, tomando $X = xI$ e $Y = -A$. □

Na seguinte proposição, usando o Lema 1.2.15, daremos os três primeiros coeficientes $a_k$ do polinômio característico do grafo $G$.

**Proposição 1.2.16** (Ver [1, p.08])**.** O polinômio característico $\phi(G,x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ de um grafo $G$ satisfaz as seguintes igualdades:

(1) $a_1 = 0$.

(2) $-a_2 = |E(G)|$.

(3) $-a_3 = 2T$, onde $T$ é número de triângulos em $G$.

*Demonstração.* Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, o número $(-1)^i a_i$ é a soma dos menores principais de $A$ com $i$ linhas e colunas. Assim pode-se demostrar os itens.

(1) Como as entradas da diagonal da matriz adjacência $A$ são nulas, tem-se que $a_1 = -\operatorname{tr}(A) = 0$.

(2) Um menor principal com duas linhas e duas colunas, com entradas não todas nulas, tem a seguinte forma
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$
Existe uma relação unívoca entre esses menores e cada par de vértices adjacentes em $G$. Daqui $(-1)^2 a_2 = -|E(G)|$.

(3) Existem exatamente três possibilidades, a menos de permutações de linhas e colunas, para os menores principais não triviais com três linhas e três colunas:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

O único menor não-nulo é o último, cujo valor é 2; cada menor dessa forma corresponde a três vértices mutuamente adjacentes no grafo $G$, formando um triângulo.

□

Agora vamos estender a Proposição 1.1.22 para os coeficientes do polinômio característico do grafo $G$. O conhecimento da dependência dos coeficientes $a_k$ do polinômio característico e a estrutura do grafo $G$ é de suma importância.

**Proposição 1.2.17.** Seja $G$ um grafo. Então

$$(-1)^k a_k = \sum_{\Lambda} (-1)^{r(\Lambda)} 2^{s(\Lambda)}, \qquad 0 \leq k \leq n,$$

onde a soma é sobre todos os subgrafos elementares $\Lambda$ de $G$ com $|V(\Lambda)| = k$.

*Demonstração.* O número $(-1)^k a_k$ é a soma de todos os menores principais de $A$ com $k$ linhas e colunas. Cada um dos menores é o determinante da matriz de adjacência de um subgrafo induzido de $G$ com $k$ vértices. Qualquer subgrafo elementar com $k$ vértices é subgrafo de um desses subgrafos induzidos. Aplicando a Proposição 1.1.22 para cada menor, temos o resultado. □

**Teorema 1.2.18.** Se $\phi(G, x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ é o polinômio característico do grafo $G$, então

- Para $k = 0$,

$$a_k = 1.$$

- Para $k \geq 1$,

$$a_k = \sum_{\Lambda \in B_k} (-1)^{k(\Lambda)} 2^{c(\Lambda)},$$

onde $B_k$ é o conjunto de subgrafos elementares $\Lambda$ de $G$ que têm exatamente $k$ vértices.

*Demonstração.* Pela Proposição 1.2.17 os coeficientes $a_k$ são determinados por

$$a_k = \sum_{\Lambda | |V(\Lambda)| = k} (-1)^{r(\Lambda) - k} 2^{s(\Lambda)}. \tag{1.4}$$

Para um grafo elementar $\Lambda$, $s(\Lambda) = c(\Lambda)$ pelo Lema 1.1.21. Além disso, pela definição de posto,

$$r(\Lambda) - k = n(\Lambda) - k(\Lambda) - k = -k(\Lambda) \equiv k(\Lambda) \pmod 2.$$

Assim, $(-1)^{r(\Lambda)-k} 2^{s(\Lambda)} = (-1)^{k(\Lambda)} 2^{c(\Lambda)}$. Substituindo em (1.4), provamos o lema. □

## 1.3 Série de potências formais

**Definição 1.3.1** (Série de potência formal)**.** Seja $R$ um anel que contém $\mathbb{Q}$. Uma função $F\colon \mathbb{N} \to R$ pode ser representada por uma série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, onde $a_n = F(n)$. Essa série é chamada de série de potência formal. Denotaremos por $R[[x]]$ o conjunto das séries de potência formais com coeficientes em $R$, isto é,

$$R[[x]] = \left\{ \sum_{n\geq 0} a_n x^n : a_n \in R \right\}.$$

**Definição 1.3.2** (Soma e produto de series de potências)**.** Sejam $F, G \in R[[x]]$. Define-se a soma $F + G \in R[[X]]$ por

$$F + G = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$$

e o produto $F \cdot G \in R[[X]]$ por

$$F \cdot G = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i,$$

onde, para cada índice $k$,

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

**Definição 1.3.3** (Anel de série de potência formal)**.** Seja $R$ um anel com unidade. Então $(R[[x]], +, \cdot)$ é um anel com unidade $x^0$. O anel de série de potência não possui divisores de zero se, e somente se $R$ não possui divisores de zero.

Consideremos $f(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i \in R[[x]]$. Definimos $[x^i]\colon R[[x]] \to R$, o *operador coeficiente* em $R[[x]]$, por $[x^i]f = a_i$. O termo constante em $f$ é $[x^0]f$ e também será denotado por $f(0)$. Com isso, podemos definir os subconjuntos

$$R[[x]]_0 = \{f \in R[[x]] : f(0) = 0\}$$

e

$$R[[x]]_1 = \{f \in R[[x]] : (f(0))^{-1} \text{ existe}\}$$

de $R[[x]]$.

Seja $M_n(R)$ o conjunto de matrizes $n \times n$ com coeficientes em $R$. Existe uma identificação natural entre $M_n(R[[x]])$, o conjunto de todas as matrizes de ordem $n \times n$ com elementos em $R[[x]]$, e $(M_n(R))[[x]]$, o anel de séries de potência formais com coeficientes em $M_n(R)$. Formalmente, tal identificação é dada pelo isomorfismo

$$\begin{aligned} \psi\colon M_n(R[[x]]) &\to (M_n(R))[[x]] \\ [f_{ij}(x)]_{n\times n} &\mapsto \sum_r A_r x^r, \end{aligned}$$

onde $[A_r]_{ij} = [x^r]f_{ij}(x)$. Assim, matrizes de ordem $n \times n$ cujas entradas são séries de potência serão também tratadas como séries de potências com coeficientes em $M_n(R)$, anel com unidade $I_n$, e vice-versa.

**Definição 1.3.4** (Derivada formal)**.** Se $f(x) = \sum_{r\geq 0} a_r x^r \in R[[x]]$, então a *derivada formal* de $f$ com respeito a $x$ é dada por

$$\frac{d}{dx}f(x) = \sum_{r\geq 0}(r+1)a_{r+1}x^r$$

**Teorema 1.3.5** (Série geométrica formal)**.** Seja $R$ um anel. Se $F \in R[[x]]$ satisfaz $F(0) = 0$, então

$$(1-F)^{-1} = \frac{1}{1-F} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k \in R[[x]].$$

## 1.4 Terminologia de reconstrução

Nesta seção apresentamos algumas definições e terminologias que serão usados no capítulo 3.

**Definição 1.4.1** (Deck de um grafo)**.** Seja $G$ um grafo. O deck de $G$ é o multiconjunto

$$D(G) \coloneqq \{[G \setminus i] : i \in V(G)\},$$

onde $[H]$ denota a classe de isomorfismo de um grafo $H$ (ver Observação 1.1.3).

**Definição 1.4.2** (Deck polinomial)**.** O deck polinomial de um grafo $G$ é o multiconjunto dado por

$$\mathrm{PD}(G) \coloneqq \{\phi(G \setminus i, x) : i \in V(G)\}\,.$$

Uma propriedade de um grafo $G$ é chamada *reconstruível* se a propriedade de $G$ é determinada pelo deck de $G$. Uma propriedade de $G$ é chamada de *polinômio-reconstruível* se é determinada pelo deck polinomial de $G$.

**Definição 1.4.3** (Deck de pares de polinômios característicos)**.** Seja $G$ um grafo com conjunto de vértices $V(G)$. O deck de pares de polinômios característicos é definido por

$$\mathcal{C}(G) \coloneqq \{(\phi(G \setminus i, x), \phi(\overline{G \setminus i}, x)) : i \in V(G)\}.$$

# Capítulo 2

# Função geradora de passeios e polinômio característico

Neste capítulo estudaremos a relação entre a função geradora de passeios em $G$ e seu polinômio característico $\phi(G, x)$, obtemos algumas identidades que permitem determinar o polinômio característico $\phi(G, x)$ a partir dos polinômios característicos de alguns subgrafos de $G$.

Neste capítulo, $G$ sempre denotará um grafo com conjunto de vértices $V(G) = [n] := \{1, \ldots, n\}$. Lembramos também que $A(G)$ denota a matriz de adjacência do grafo $G$. Os resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados no artigo de Godsil [6] (ver também [7]).

## 2.1 Função geradora de passeios e polinômio característico

Nesta seção começaremos definindo a função geradora de passeios. Em seguida, será exposta a conexão que existe entre o polinômio característico de um grafo e sua função geradora de passeios.

**Definição 2.1.1** (Função geradora de passeios)**.** Seja $G$ um grafo com matriz de adjacência $A$. A função geradora de passeios entre os vértices $i$ e $j$ será definida por

$$W_{ij}(G, x) := \sum_{r=0}^{\infty} (A^r)_{ij} x^r.$$

Além disso, a matriz função geradora de passeios em $G$ é definida por

$$W(G, x) := \sum_{r=0}^{\infty} A^r x^r.$$

De acordo com o Teorema 1.3.5, vale que

$$W(G,x) = (I_n - xA)^{-1}. \tag{2.1}$$

Relembrando a propriedade da adjunta em (1.3), podemos calcular

$$(I_n - xA)^{-1} = x^{-1}(x^{-1}I_n - A)^{-1} = x^{-1}\frac{\operatorname{adj}(x^{-1}I_n - A)}{\det(x^{-1}I_n - A)} = x^{-1}\frac{\operatorname{adj}(x^{-1}I_n - A)}{\phi(G,x^{-1})}. \tag{2.2}$$

Combinando (2.1) e (2.2) e substituindo $x$ por $x^{-1}$, temos que

$$x^{-1}W(G,x^{-1}) = \frac{\operatorname{adj}(xI_n - A)}{\phi(G,x)}. \tag{2.3}$$

Definindo $\phi_{ij}(G,x)$ como a entrada $(i,j)$ da matriz $\operatorname{adj}(xI_n - A)$, que é um polinômio pela definição de adjunta, podemos escrever então

$$x^{-1}W_{ij}(G,x^{-1}) = \frac{\phi_{ij}(G,x)}{\phi(G,x)}. \tag{2.4}$$

A matriz $W(G,x^{-1})$ pode ser visto como uma matriz quadrada na qual cada entrada é uma função racional, ou como uma serie potência formal em $x$ sobre o anel de matriz $M_n(R)$, onde $R$ é o corpo.

O seguinte lema é importante porque permite compreender a relação entre as funções geradoras de passeios e o polinômio característico de um grafo $G$. Seja $X$ uma matriz quadrada de ordem $n$ e sejam $D, N \subseteq [n]$. Denotamos por $X_{D,N}$ a submatriz de $X$ com linhas indexadas por $D$ e colunas indexadas por $N$.

**Lema 2.1.2.** Seja $D \subseteq [n]$, e $P$ uma matriz quadrada não-singular de ordem $n$. Então

$$\det\left((P^{-1})_{D,D}\right) = \frac{\det(P_{D^c,D^c})}{\det(P)},$$

onde $D^c \coloneqq [n] \setminus D$.

*Demonstração.* Denotemos $r = |D|$. Permutando linhas e colunas, podemos supor que $D = \{1,\dots,r\}$. Seja $Q = \operatorname{adj}(P)$, e seja $R$ a matriz obtida substituindo-se as primeiras $r$ colunas da matriz identidade pelas colunas de $Q$ indexadas por $D$, isto é,

$$R = \left[\begin{array}{c|c} Q_{[n],D} & \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline I_{n-r} \end{array} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \det(P)(P^{-1})_{D,D} & \mathbf{0} \\ \hline * & I_{n-r} \end{array}\right]$$

Assim, como $R$ é triangular em blocos, vale que

$$\det(R) = \det(P)^r \det((P^{-1})_{D,D}). \tag{2.5}$$

Por outro lado, podemos calcular o produto

$$PR = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} Q_{[n],D} & \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline I_{n-r} \end{array} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} (PQ)_{[n],D} & \begin{array}{c} * \\ \hline P_{D^c,D^c} \end{array} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \det(P) I_r & * \\ \hline \mathbf{0} & P_{D^c,D^c} \end{array}\right].$$

Portanto

$$\det(P)\det(R) = \det(P)^r \det(P_{D^c,D^c}). \tag{2.6}$$

Usando (2.5) e (2.6), temos que

$$\det((P^{-1})_{D,D}) = \frac{\det(R)}{\det(P)^r} = \frac{\det(P_{D^c,D^c})}{\det(P)},$$

como queríamos. □

Daqui em diante, denotaremos por $W_D(G,x)$ a matriz $W(G,x)_{D,D}$, isto é, a submatriz de $W(G,x^{-1})$ cujas linhas e colunas são indexadas por $D$.

**Corolário 2.1.3.** Seja $G$ um grafo e $D \subseteq V(G)$ com $|D| = r$. Então

$$x^{-r}\det(W_D(G,x^{-1})) = \frac{\phi(G \setminus D, x)}{\phi(G,x)}.$$

*Demonstração.* Seja $P = xI - A$. Por (2.1), tem-se que

$$W_D(G,x^{-1}) = (xP^{-1})_{D,D}.$$

Usando o Lema 2.1.2, temos que

$$x^{-|D|}\det(W_D(G,x^{-1})) = x^{-|D|}\det((xP^{-1})_{D,D}) = \frac{\det(P_{D^c,D^c})}{\det(P)}. \tag{2.7}$$

Por definição de polinômio característico tem-se que $\det(P) = \phi(G,x)$. Como $A_{D^c,D^c}$ é a matriz de adjacência do subgrafo $G \setminus D$, vale também que $\det(P_{D^c,D^c}) = \phi(G \setminus D, x)$. Substituindo tais igualdades em (2.7), concluímos a prova. □

**Corolário 2.1.4.** Seja $G$ um grafo. Para todo $i \in V(G)$, vale que

$$x^{-1}W_{ii}(G,x^{-1}) = \frac{\phi(G \setminus i, x)}{\phi(G,x)}.$$

*Demonstração.* Segue do Corolário 2.1.3 com $D = \{i\}$. □

**Corolário 2.1.5.** Seja $G$ um grafo, e seja $D = \{i, j\}$ com $i$, $j$ vértices distintos de $G$. Então,

$$x^{-1}W_{ij}(G, x^{-1}) = \frac{1}{\phi(G, x)}\sqrt{\phi(G \setminus i, x) \cdot \phi(G \setminus j, x) - \phi(G, x) \cdot \phi(G \setminus \{i, j\}, x)}.$$

*Demonstração.* Pela definição e pela simetria de $W(G, x)$,

$$\begin{aligned}\det(W_D(G, x^{-1})) &= W_{ii}(G, x^{-1}) \cdot W_{jj}(G, x^{-1}) - W_{ij}(G, x^{-1}) \cdot W_{ji}(G, x^{-1}) \\ &= W_{ii}(G, x^{-1}) \cdot W_{jj}(G, x^{-1}) - W_{ij}(G, x^{-1})^2\end{aligned}$$

Isolando o termo $W_{ij}$, multiplicando por $x^{-2}$ e usando o Corolário 2.1.4, temos que

$$\begin{aligned}x^{-2}W_{ij}(G, x^{-1})^2 &= x^{-1}W_{ii}(G, x^{-1}) \cdot x^{-1}W_{jj}(G, x^{-1}) - x^{-2}\det(W_D(G, x^{-1})) \\ &= \frac{\phi(G \setminus i, x)}{\phi(G, x)} \cdot \frac{\phi(G \setminus j, x)}{\phi(G, x)} - x^{-2}\det(W_D(G, x^{-1})) \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Além disso, pelo Corolário 2.1.3, temos

$$x^{-2}\det(W_D(G, x^{-1})) = \frac{\phi(G \setminus \{i, j\}, x)}{\phi(G, x)}.$$

Segue-se de (2.8) que

$$x^{-2}W_{ij}(G, x^{-1})^2 = \frac{\phi(G \setminus i, x) \cdot \phi(G \setminus j, x) - \phi(G, x) \cdot \phi(G \setminus \{i, j\}, x)}{\phi(G, x)^2}. \qquad (2.9)$$

Como $W_{ij}$ é função geradora, os coeficientes de $x^{-1}W_{ij}(G, x^{-1})$ são não-negativos, e portanto (2.9) implica a conclusão desejada. □

**Observação 2.1.6.** Comparando (2.4) com o Corolário 2.1.5, vemos que

$$\phi_{ij}(G, x) = \sqrt{\phi(G \setminus i, x) \cdot \phi(G \setminus j, x) - \phi(G, x) \cdot \phi(G \setminus \{i, j\}, x)},$$

e portanto o polinômio $\phi(G \setminus i, x) \cdot \phi(G \setminus j, x) - \phi(G, x) \cdot \phi(G \setminus \{i, j\}, x)$ é quadrado perfeito.

**Exemplo 2.1.7.** Considere $G$ como o grafo de Petersen dado no Exemplo 1.2.4. Tomando $i = 6$

e $j = 9$, podemos calcular os polinômios característicos que aparecem no Corolário 2.1.5.

$$\begin{aligned} \phi(G, x) &= (x-3)(x+2)^4(x-1)^5, \qquad (2.10)\\ \phi(G \setminus i, x) = \phi(G \setminus j, x) &= (x+2)^3(x-1)^4(x^2-2x-2)\\ \phi(G \setminus \{i,j\}, x) &= x(x+2)^2(x-1)^3(x^2-x-4)\\ \phi(G \setminus i, x) \cdot \phi(G \setminus j, x) &= (x+2)^6(x-1)^8(x^2-2x-2)^2\\ \phi(G, x) \cdot \phi(G \setminus \{i,j\}, x) &= x(x-3)(x+2)^6(x-1)^8(x^2-x-4). \end{aligned}$$

Logo

$$\phi(G \setminus i, x) \cdot \phi(G \setminus j, x) - \phi(G, x) \cdot \phi(G \setminus \{i,j\}, x) = (x-2)^2(x+2)^6(x-1)^8,$$

de acordo com a Observação 2.1.6. Além disso, usando o Corolário 2.1.5,

$$x^{-1}W_{ij}(G, x^{-1}) = \frac{(x-2)(x+2)^3(x-1)^4}{(x-3)(x+2)^4(x-1)^5} = \frac{x-2}{x^3-2x^2-5x+6},$$

Provaremos agora que, dado um grafo $G$, se conhecemos os polinômios característicos dos subgrafos obtidos eliminando-se no máximo dois vértices de $G$, podemos calcular os polinômios característicos de qualquer outro subgrafo induzido de $G$ a partir deles.

**Corolário 2.1.8.** Seja $G$ um grafo e $D \subseteq V(G)$. Então $\phi(G \setminus D, x)$ é determinado pelos polinômios $\phi(G \setminus A, x)$, onde $A$ varia por todos os subconjuntos de $D$ de tamanho no máximo 2.

*Demonstração.* Pelos Corolários 2.1.4 e 2.1.5, para cada $i, j \in D$, os polinômios

$$\phi(G \setminus i, x), \phi(G \setminus j, x), \phi(G \setminus \{i,j\}, x), \phi(G, x)$$

determinam $x^{-1}W_{ij}(G, x^{-1})$. Assim, variando $i, j \in D$, determinamos todas as coordenadas da matriz $x^{-1}W_D(G, x^{-1})$. Pelo Corolário 2.1.3,

$$\phi(G \setminus D, x) = x^{-r} \det(W_D(G, x^{-1})) \cdot \phi(G, x),$$

o que conclui a prova. □

Do Corolário 2.1.8 observamos que para recuperar o polinômio característico de um grafo $G$ é necessário somente considerar os polinômios característicos dos subgrafos obtidos de eliminar no máximo 2 vértices. No lema que segue, apresentamos uma expressão para recuperar o polinômio característico de $G$. Fixando uma aresta $e = ij \in E(G)$, pode-se expressar o polinômio característico do grafo $G$ a partir dos polinômios caraterísticos dos subgrafos $G \setminus i$, $G \setminus j$, $G \setminus \{i,j\}$ e $G \setminus e$.

**Lema 2.1.9.** Seja $G$ um grafo, e $e = ij$ uma aresta de $G$. Então

$$\phi(G,x) = \phi(G\setminus e,x) - \phi(G\setminus\{i,j\},x) - 2\sqrt{\phi(G\setminus i,x)\cdot\phi(G\setminus j,x) - \phi(G\setminus e,x)\cdot\phi(G\setminus\{i,j\},x)}.$$

*Demonstração.* Seja $E_{ij}$ a matriz com as entradas $ij$ e $ji$ iguais a 1 e todos as outras entradas iguais a zero. Então temos

$$xI_n - A = (xI_n - A(G\setminus e)) - E_{ij}.$$

Tomando $X = xI_n - A(G\setminus e)$ e $Y = -E_{ij}$ e usando o Lema 1.2.11 temos que

$$\det(xI_n - A(G)) = \det\left[xI_n - A(G\setminus e) + (-E_{ij})\right]$$

é a soma de $2^n$ determinantes das matrizes obtidas ao substituir cada subconjunto de colunas de $xI_n - A(G\setminus e)$ pelas correspondentes colunas de $-E_{ij}$. Como $E_{ij}$ tem apenas duas colunas não-nulas, apenas quatro desses determinantes são não-nulos. Denotando por $Z$ a submatriz de $X$ dada por $Z = xI_{n-2} - A(G\setminus\{i,j\})$ e supondo que $i = 1$ e $j = 2$ por simplicidade de notação, temos então

$$\det(xI_n - A(G)) = \det(X) + \left|\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & * & \cdots & * \\ -1 & x & * & \cdots & * \\ \hline 0 & * & & & \\ \vdots & \vdots & & Z & \\ 0 & * & & & \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc|ccc} x & -1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \hline * & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & Z & \\ * & 0 & & & \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc|ccc} 0 & -1 & * & \cdots & * \\ -1 & 0 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & Z & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right|,$$

onde $*$ denota as entradas originais de $xI_n - A$. Expandindo cada um dos determinantes por cofatores (escolhendo, em cada caso, uma coluna cuja única entrada não-nula seja $-1$), obtemos

$$\det(xI_n - A) = \det(X) - \operatorname{adj}(xI_n - A(G\setminus e))_{ji} - \operatorname{adj}(xI_n - A(G\setminus e))_{ij} - \det(Z).$$

Por definição de $\phi_{ij}$ (ver (2.3) e (2.4)), concluímos que

$$\begin{aligned}\phi(G,x) &= \phi(G\setminus e,x) - \phi_{ji}(G\setminus e,x) - \phi_{ij}(G\setminus e,x) - \phi(G\setminus\{i,j\},x)\\ &= \phi(G\setminus e,x) - 2\phi_{ij}(G\setminus e,x) - \phi(G\setminus\{i,j\},x).\end{aligned}$$

Usando a expressão para $\phi_{ij}(G\setminus e,x)$ obtida na Observação 2.1.6, concluímos a demostração. □

**Exemplo 2.1.10.** Considerando os dados do Exemplo 2.1.7, temos

$$\sqrt{\phi(G\setminus i,x)\cdot\phi(G\setminus j,x) - \phi(G\setminus e,x)\cdot\phi(G\setminus\{i,j\},x)} = 2^2(x+2)^2(x-1)^3.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\phi(G\setminus e,x)-\phi(G\setminus\{i,j\},x)-2\sqrt{\phi(G\setminus i,x)\cdot\phi(G\setminus j,x)-\phi(G\setminus e,x)\cdot\phi(G\setminus\{i,j\},x)}\\ =(x-3)(x+2)^4(x-1)^5=\phi(G,x),\end{aligned}$$

como em (2.10).

No seguinte corolário, damos um caso particular do Lema 2.1.9. Uma *aresta de corte* é uma aresta $e$ tal que $G\setminus e$ tem mais componentes que $G$.

**Corolário 2.1.11.** Seja $G$ um grafo e $e=ij$ uma aresta de corte de $G$. Temos

$$\phi(G,x)=\phi(G\setminus e,x)-\phi(G\setminus\{i,j\},x).$$

*Demonstração.* Por hipótese, não há caminho entre $i$ e $j$ em $G\setminus e$. Assim, $W_{ij}(G\setminus e,x^{-1})=0$, Aplicando o Corolário 2.1.5 ao grafo $G\setminus e$, segue-se que

$$\sqrt{\phi(G\setminus i,x)\cdot\phi(G\setminus j,x)-\phi(G\setminus e,x)\cdot\phi(G\setminus\{i,j\},x)}=x^{-1}W_{ij}(G\setminus e,x^{-1})=0.$$

O resultado segue aplicando o Lema 2.1.9. $\square$

**Exemplo 2.1.12.** Seja $G$ o grafo mostrado na Figura 2.1. Considerando a aresta $e=ij$, onde $i=3$ e $j=5$

$$\begin{aligned}\phi(G\setminus i,x)&=x(x-2)(x+1)^3(x^2-x-4),\\ \phi(G\setminus j,x)&=(x-3)(x-2)(x+1)^5,\\ \phi(G\setminus\{i,j\},x)&=(x-2)^2(x+1)^4,\\ \phi(G\setminus e,x)&=x(x-3)(x+1)^4(x^2-x-4).\end{aligned}$$

temos os produtos

$$\phi(G\setminus i,x)\cdot\phi(G\setminus j,x)=x(x-3)(x-2)^2(x+1)^8(x^2-x-4), \tag{2.11}$$

$$\phi(G\setminus e,x)\cdot\phi(G\setminus\{i,j\},x)=x(x-3)(x-2)^2(x+1)^8(x^2-x-4), \tag{2.12}$$

e vemos que (2.11) e (2.12) são iguais. Portanto

$$\phi(G,x)=\phi(G\setminus e,x)-\phi(G\setminus\{i,j\},x)=(x+1)^4(x^4-4x^3-2x^2+16x-4).$$

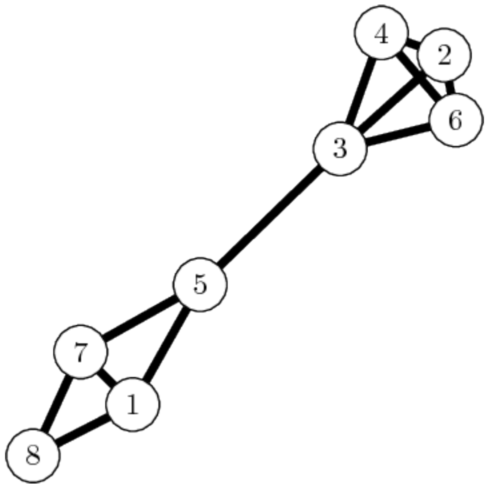


Figura 2.1: Grafo com aresta de corte

No próximo lema, daremos outra expressão para a função racional $x^{-1}W_{ij}(G, x^{-1})$ e deduziremos uma expressão para o polinômio $\phi_{ij}(G, x)$.

**Definição 2.1.13** (Função geradora de passeios sem volta). Seja $N_{ij}(G, x)$ a função geradora de passeios em $G$ que iniciam no vértice $i$, terminam no vértice $j$ e não passam pelo vértice $i$ depois do primeiro passo. Estes passeios são chamados *passeios sem volta.*

Além disso, denotaremos por $\mathcal{P}_{ij} = \mathcal{P}_{ij}(G)$ o conjunto de caminhos em $G$ que iniciam no vértice $i$ e terminam no vértice $j$.

**Lema 2.1.14.** Sejam $G$ um grafo e $i \neq j$ dois vértices de $G$. Então

$$x^{-1}W_{ij}(G, x^{-1}) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{ij}} \frac{\phi(G \setminus P, x)}{\phi(G, x)}. \tag{2.13}$$

*Demonstração.* A prova será por indução no número de vértices de $G$. O resultado é válido para caminhos de comprimento 1, Qualquer passeio do vértice $i$ para o vértice $j$ em $G$ de comprimento $m$ pode ser decomposto de modo único em um passeio fechado com inicio e fim no vértice $i$, de comprimento $k$ possivelmente igual a 0, seguido de um passeio sem volta de $i$ para $j$, de comprimento $m - k$. Mais especificamente, dado o passeio

$$i = v_0, v_1, \ldots, v_m = j,$$

seja $k$ o maior índice tal que $v_k = i$; então o passeio original pode ser decomposto em $v_0, v_1, \ldots, v_k$, um passeio fechado, e $v_k = i, v_{k+1}, \ldots, v_m = j$, um passeio sem volta. Assim

$$x^{-1}W_{ij}(G, x^{-1}) = x^{-1}W_{ii}(G, x^{-1})N_{ij}(G, x^{-1}). \tag{2.14}$$

Por outro lado, como $i \neq j$, cada passeio sem volta $i = v_0, v_{k+1}, \ldots, v_m = j$ de comprimento $m$ pode ser decomposto em um passeio $i = v_0, v_1$ de comprimento 1 e um passeio $v_1, \ldots, v_m = j$ passeio de comprimento $m-1$ no subgrafo $G \setminus i$. Assim, particionando de acordo com $v_1$,

$$N_{ij}(G, x^{-1}) = \sum_{\ell \sim i} x^{-1} W_{\ell j}(G \setminus i, x^{-1}).$$

Podemos assumir que (2.13) é válido para o subgrafo $G \setminus i$. Então,

$$\sum_{\ell \sim i} x^{-1} W_{\ell j}(G \setminus i, x^{-1}) = \sum_{\ell \sim i} \sum_{P \in \mathcal{P}_{\ell j}(G \setminus i)} \frac{\phi((G \setminus i) \setminus P, x)}{\phi(G \setminus i, x)} = \sum_{P \in \mathcal{P}_{ij}(G)} \frac{\phi(G \setminus P, x)}{\phi(G \setminus i, x)},$$

logo

$$N_{ij}(G, x^{-1}) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{ij}(G)} \frac{\phi(G \setminus P, x)}{\phi(G \setminus i, x)}$$

Substituindo em (2.14), temos

$$x^{-1} W_{ij}(G, x^{-1}) = x^{-1} W_{ii}(G, x^{-1}) \sum_{P \in \mathcal{P}_{ij}(G)} \frac{\phi(G \setminus P, x)}{\phi(G \setminus i, x)}.$$

Usando o Corolário 2.1.4 no termo $x^{-1} W_{ii}(G, x^{-1})$, segue-se que

$$x^{-1} W_{ij}(G, x^{-1}) = \frac{\phi(G \setminus i, x)}{\phi(G, x)} \sum_{P \in \mathcal{P}_{ij}(G)} \frac{\phi(G \setminus P, x)}{\phi(G \setminus i, x)},$$

e desse modo concluímos a demostração. □

**Corolário 2.1.15.** Seja $G$ um grafo e $i \neq j$ dois vértices de $G$. Então

$$\phi_{ij}(G, x) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{ij}} \phi(G \setminus P, x).$$

*Demonstração.* Segue do Lema 2.1.14 e de (2.4) que

$$\frac{\phi_{ij}(G, x)}{\phi(G, x)} = \sum_{p \in \mathcal{P}_{ij}} \frac{\phi(G \setminus P, x)}{\phi(G, x)}.$$

Cancelando os fatores $\phi(G, x)$, temos o resultado desejado. □

## 2.2 Uma fórmula de decomposição

Nesta seção, vamos a obter a função geradora de passeios de um grafo $G$ composto de dois subgrafos não-disjuntos. Sejam $H$ e $K$ dois grafos tais que $D = H \cap K \neq \emptyset$, e seja $G = H \cup K$.

O resultado mais importante desta seção será expressar o polinômio característico do grafo $G$ em termos dos polinômios característicos de $H$ e $K$ e também em termos dos subgrafos obtidos ao apagar um ou dois vértices em $H \cap K$. Antes, precisaremos de uma definição.

**Definição 2.2.1.** Seja $G$ um grafo e $D \subset V(G)$ não-vazio. Definimos $M_D(G, x)$ como a função geradora de passeios de comprimento pelo menos 2 cujos únicos vértices em $D$ são o inicial e o final.

Lembremos que $W_D(G, x)$ é a função geradora de passeios em $G$ com o primeiro e ultimo vértice em $D$. A seguinte identidade relaciona $M_D$ e $W_D$.

**Lema 2.2.2.** Seja $G$ um grafo, $D \subset V(G)$ não-vazio e $M_D$ como na Definição 2.2.1. Então,

$$W_D(G, x) = I_r + W_D(G, x) \cdot (xA_D(G) + M_D(G, x)), \tag{2.15}$$

onde $A_D(G) = A(G)_{D,D}$ é a submatriz de $A(G)$ dada pelas linhas e colunas com índices em $D$.

*Demonstração.* Denotaremos

$$W_D(G, x) = \sum_{i=0}^{\infty} W_i x^i \qquad \text{e} \qquad M_D(G, x) = \sum_{i=2}^{\infty} M_i x^i.$$

Como $W_0 = I_r$, o termo constante dos dois lados de (2.15) é igual. Para $m \geq 1$, queremos mostrar que o coeficiente de $x^m$ é igual dos dois lados, isto é, que

$$W_m = W_{m-1} A_D + \sum_{k=0}^{m-2} W_k M_{m-k}.$$

Para provar a igualdade acima, iremos particionar os passeios $v_0, \ldots, v_m$ que começam e terminam em $D$ em duas classes:

1. A classe dos passeios com $v_{m-1} \in D$. Todo passeio dessa forma é a união de um passeio de comprimento $m - 1$ que começa e termina em $D$ com um passeio de comprimento 1 (uma aresta) de $D$ para $D$. Isso corresponde ao primeiro termo do lado direito.

2. Para os demais, seja $k$ o maior índice de um vértice (exceto o final) em $D$. Então $0 \leq k \leq m - 2$ e o passeio pode ser decomposto de modo único como um passeio $v_0, \ldots, v_k$ que

começa e termina em $D$ e um passeio $v_k, \ldots, v_m$ com $v_{k+1}, \ldots, v_{m-1} \notin D$. Isso corresponde ao somatório do lado direito.

Isso conclui a prova da afirmação. $\square$

**Teorema 2.2.3.** Seja $G = H \cup K$, onde $H$ e $K$ são subgrafos induzidos de $G$, e $D = V(H \cap K)$. Se $r = |D| > 0$, então

$$W_D(G,x)^{-1} = W_D(H,x)^{-1} + W_D(K,x)^{-1} + xA_D - I_r,$$

onde $A_D = A(G)_{D,D}$ é a submatriz de $A(G)$ dada pelas linhas e colunas com índices em $D$.

*Demonstração.* Isolando $M_D$ na conclusão do Lema 2.2.2, temos

$$M_D(G,x) = I_r - xA_D - W_D(G,x)^{-1}. \tag{2.16}$$

Qualquer passeio em $G$ com apenas seu primeiro e ultimo vértice em $D$ deve estar contido inteiramente em $H$ ou em $K$. Então

$$M_D(G,x) = M_D(H,x) + M_D(K,x). \tag{2.17}$$

É claro que (2.16) é válida para os grafos $H$ e $K$. Assim,

$$\begin{aligned} M_D(H,x) &= I_r - xA_D - W_D(H,x)^{-1} \\ M_D(K,x) &= I_r - xA_D - W_D(K,x)^{-1}. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.17) temos

$$M_D(G,x) = 2(I_r - xA_D) - W_D(H,x)^{-1} - W_D(K,x)^{-1}. \tag{2.18}$$

Logo substituindo (2.18) em (2.16) obtemos

$$\begin{aligned} W_D(G,x)^{-1} &= I_r - xA_D - (2(I_r - xA_D) - W_D(H,x)^{-1} - W_D(K,x)^{-1}) \\ &= W_D(H,x)^{-1} + W_D(K,x)^{-1} + xA_D - I_r, \end{aligned}$$

provando assim o teorema. $\square$

No seguinte corolário, apresentamos o polinômio característico para o grafo $G$ no caso em que a interseção dos subgrafos induzidos $H$ e $K$ contem apenas um vértice $v$.

**Corolário 2.2.4.** Seja $G$ um grafo dado por $G = H \cup K$, com $V(H \cap K) = \{i\}$. Então

$$\phi(G, x) = \phi(H \setminus i, x) \cdot \phi(K, x) + \phi(H, x) \cdot \phi(K \setminus i, x) - x\phi(H \setminus i, x) \cdot \phi(K \setminus i, x).$$

*Demonstração.* O Teorema 2.2.3, aplicado com $D = \{i\}$, diz que

$$W_{ii}(G, x)^{-1} = W_{ii}(H, x)^{-1} + W_{ii}(K, x)^{-1} - 1.$$

Aplicando o Corolário 2.1.4 três vezes, obtém-se

$$\frac{\phi(G, x^{-1})}{x^{-1}\phi(G \setminus i, x^{-1})} = \frac{\phi(H, x^{-1})}{x^{-1}\phi(H \setminus i, x^{-1})} + \frac{\phi(K, x^{-1})}{x^{-1}\phi(K \setminus i, x^{-1})} - 1. \tag{2.19}$$

Pelo Teorema 1.2.13(1), podemos expressar

$$\phi(G \setminus i, x) = \phi((H \cup K) \setminus i, x) = \phi(H \setminus i, x) \cdot \phi(K \setminus i, x).$$

Substituindo em (2.19), temos que

$$\frac{\phi(G, x^{-1})}{x^{-1}\phi(H \setminus i, x^{-1}) \cdot \phi(K \setminus i, x^{-1})} = \frac{\phi(H, x^{-1})}{x^{-1}\phi(H \setminus i, x^{-1})} + \frac{\phi(K, x^{-1})}{x^{-1}\phi(K \setminus i, x^{-1})} - 1.$$

Multiplicando por $x^{-1}\phi(H \setminus i, x^{-1}) \cdot \phi(K \setminus i, x^{-1})$ e substituindo $x^{-1}$ por $x$, provamos o resultado afirmado. □

**Exemplo 2.2.5.** Considerando a Figura 2.1 no Exemplo 2.1.12, com vértice de corte $i = 3$, e os grafos $H$ e $K$ com $V(H) = \{8, 1, 3, 5, 7\}$ e $V(K) = \{2, 3, 4, 6\}$ respectivamente. Temos

$$\begin{aligned}
\phi(H, x) &= (x + 1)(x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 2), \\
\phi(H \setminus i, x) &= x(x + 1)(x^2 - x - 4), \\
\phi(K, x) &= (x - 3)(x + 1)^3, \\
\phi(K \setminus i, x) &= (x - 2)(x + 1)^2.
\end{aligned}$$

Logo, temos os produtos

$$\begin{aligned}
\phi(H, x) \cdot \phi(K \setminus i, x) &= (x + 1)^3(x - 2)(x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 2), \\
\phi(K, x) \cdot \phi(H \setminus i, x) &= x(x - 3)(x + 1)^4(x^2 - x - 4), \\
\phi(H \setminus i, x) \cdot \phi(K \setminus i, x) &= x(x - 2)(x + 1)^3(x^2 - x - 4).
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando o Corolário 2.2.4. Temos

$$\begin{aligned}\phi(G,x) &= \phi(H,x)\cdot\phi(K\setminus i,x)+\phi(K,x)\phi(H\setminus i,x)-x\phi(H\setminus i,x)\cdot\phi(K\setminus i,x)\\ &= (x+1)^4(x^4-4x^3-2x^2+16x-4).\end{aligned}$$

## 2.3 Conjuntos remoção-coespectrais

Nesta seção, definiremos o conceito de conjuntos remoção-coespectrais, e daremos uma relação entre as funções geradoras de subconjuntos de vértices remoção-coespectrais. Esta parte da teoria pode-se encontrar no trabalho de Schwenk [10].

**Definição 2.3.1.** Sejam $G$ e $H$ grafos. Diz-se que $S \subseteq V(G)$ e $T \subseteq V(H)$ são remoção-coespectrais se existe uma bijeção $\beta\colon S \to T$ tal que para todo $A \subseteq S$, vale que

$$\phi(G\setminus A,x)=\phi(H\setminus\beta(A),x).$$

O nome remoção-coespectral será motivado pela Proposição 2.3.4. Antes de prová-la, iremos precisar de alguns resultados. A proposição abaixo é um análogo do Corolário 2.1.8.

**Proposição 2.3.2.** Sejam $S$ e $T$ conjuntos de vértices de $G$ e $H$, respectivamente, e $\beta$ uma bijeção entre $S$ e $T$. Então $S$ e $T$ são conjuntos remoção-coespectrais com relação a $\beta$ se, e somente se

$$\phi(G\setminus A,x)=\phi(H\setminus\beta(A),x)$$

para todo $A \subseteq S$ de tamanho no máximo 2.

*Demonstração.* Uma das direções é direta. Para provar a outra, suponha que $\phi(G\setminus A,x)=\phi(H\setminus\beta(A),x)$ para todo $A\subseteq S$ de tamanho no máximo 2. Pelo Corolário 2.1.8, $\phi(G\setminus D,x)=\phi(H\setminus\beta(D),x)$ para todo $A\subseteq D$. Assim, $S$ e $T$ são conjuntos remoção-coespectrais. □

Em 1979, Schwenk provou o seguinte resultado.

**Proposição 2.3.3.** Sejam $G$ e $H$ grafos, e $S \subset V(G)$ e $T\subset V(H)$ conjuntos de vértices remoção-coespectrais com relação à bijeção $\beta$. Então $W_{ij}(G,x^{-1})=W_{\beta(i)\beta(j)}(H,x^{-1})$ para quaisquer $i,j\in S$.

*Demonstração.* Suponhamos que $\phi(G\setminus A,x)=\phi(H\setminus\beta(A),x)$ para todo $A\subseteq S$. Então, tomando $A=\emptyset$, tem-se $\phi(G,x)=\phi(H,x)$. Para $i\in S$, tomando $A=\{i\}$, tem-se que

$$\phi(G\setminus\{i\},x)=\phi(H\setminus\{\beta(i)\},x). \tag{2.20}$$

Logo, pelo Corolário 2.1.4, $W_{ii}(G, x^{-1}) = W_{\beta(i),\beta(i)}(H, x^{-1})$ para todo $i \in S$. Agora, para $i, j \in S$ com $i \neq j$, podemos tomar $A = \{i, j\}$ e obter que

$$\phi(G \setminus \{i, j\}, x) = \phi(H \setminus \{\beta(i), \beta(j)\}, x).$$

Aplicando o Corolário 2.1.5 e usando (2.20), temos que $W_{ij}(G, x^{-1}) = W_{\beta(i),\beta(j)}(H, x^{-1})$ para quaisquer $i, j \in S$ com $i \neq j$. Isso conclui a prova. $\square$

Se $S$ e $T$ são conjuntos remoção-coespectrais com relação à bijeção $\beta$ então pelo Proposição 2.3.3, temos

$$W_{ij}(G, x^{-1}) = W_{\beta(i)\beta(j)}(H, x^{-1}),$$

para quaisquer $i, j \in S$. Em outras palavras, o número de passeios em $G$ entre $i$ e $j$ de um dado comprimento $k$ é igual ao número de passeios em $H$ entre $\beta(i)$ e $\beta(j)$ de mesmo comprimento. Colocando $k = 1$, conclui-se que $ij \in E(G)$ se e, somente se $\beta(i)\beta(j) \in E(H)$. Logo $\beta$ é um isomorfismo entre os subgrafos induzidos por $S$ e $T$ em $G$ e $H$.

Baseando-se na observação acima, vejamos uma consequência para a fórmula de decomposição dada no Teorema 2.2.3.

**Proposição 2.3.4.** Seja $G = H \cup K$, onde $H$ e $K$ são subgrafos induzidos de $G$, e $D = V(H \cap K)$. Seja também $K'$ um grafo com um subconjunto $D' \subset V(K')$ tal que $D$ e $D'$ são remoção-coespectrais com relação à bijeção $\beta$. O grafo $G'$ obtido substituindo $K$ por $K'$ em $G$ (identificando-se os vértices de $D$ com os de $D'$ de acordo com a bijeção $\beta$), isto é,

$$\begin{aligned} V(G') &= V(H \setminus D) \cup V(K') \\ E(G') &= E(H \setminus D) \cup E(K') \cup \{\{u, \beta(v)\} : uv \in E(H), u \notin D, v \in D\} \end{aligned}$$

satisfaz $\phi(G, x) = \phi(G', x)$.

*Demonstração.* Renomeando os vértices de $K'$, podemos supor que $\beta$ é a função identidade e $D = D'$. Assim,

$$\phi(K \setminus A, x) = \phi(K' \setminus A, x) \tag{2.21}$$

para todo $A \subseteq D$. Logo, pela Proposição 2.3.3, temos $W_{ij}(K, x^{-1}) = W_{ij}(K', x^{-1})$ para todo $i, j \in D$. Portanto do Teorema 2.2.3 temos

$$\begin{aligned} W_D(G, x)^{-1} &= W_D(H, x)^{-1} + W_D(K, x)^{-1} + xA_D - I_r \\ &= W_D(H, x)^{-1} + W_D(K', x)^{-1} + xA_D - I_r = W_D(G', x)^{-1}. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\det(W_D(G,x))^{-1} = \det(W_D(G',x))^{-1}.$$

Usando o Corolário 2.1.3 para expandir os determinantes acima, deduzimos que

$$\frac{\phi(G,x^{-1})}{\phi(G \setminus D, x^{-1})} = \frac{\phi(G',x^{-1})}{\phi(G' \setminus D, x^{-1})}.$$

Aplicando o Teorema 1.2.13, obtemos

$$\frac{\phi(G,x^{-1})}{\phi(H \setminus D, x^{-1}) \cdot \phi(K \setminus D, x^{-1})} = \frac{\phi(G',x^{-1})}{\phi(H \setminus D, x^{-1}) \cdot \phi(K' \setminus D, x^{-1})}.$$

Substituindo $x^{-1}$ por $x$ e usando (2.21) para cancelar os denominadores, concluímos $\phi(G,x) = \phi(G',x)$, como queríamos. $\square$

Seja $K$ e $K'$ os grafos da Figura 2.2 com conjuntos remoção-coespectrais $D$ e $D'$, devido a Godsil e McKay e apresentado em [10], é dado na Figura 2.2. Com ele e a Proposição 2.3.4, podemos construir infinitos pares de grafos coespectrais. Pois os polinômios característicos $\phi(K,x)$, $\phi(K \setminus d_1, x)$, $\phi(K \setminus \{d_1, d_2\}, x)$ são iguais aos polinômios característicos dos subgrafos $K'$, $K \setminus d'_1$, $K' \setminus \{d'_1, d'_2\}$.

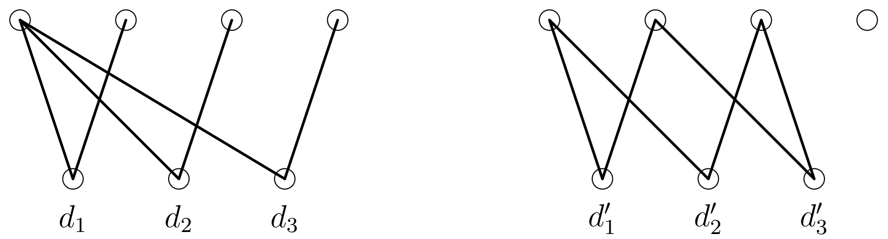


Figura 2.2: Dois grafos com 7 vértices cada, tais que $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ e $D' = \{d'_1, d'_2, d'_3\}$ são conjuntos remoção-coespectrais.

# Capítulo 3

# Reconstrução polinomial

Neste capítulo vamos estudar o problema de reconstrução polinomial para um grafo simples $G$, com ordem pelo menos 3. Dizemos que o polinômio característico do grafo $G$ é polinômio-reconstruível se ele é determinado pelo deck polinomial (ver Definição 3.1.1).

O teorema central deste capítulo irá mostrar que o polinômio característico de um grafo finito com ordem maior que 2, é unicamente determinado do deck de pares de polinômios característicos (ver Definição 3.1.2).

Basicamente seguiremos neste capítulo os artigos de Cvetković, Doob e Sachs [5] e Hagos [8].

## 3.1 Deck polinomial e a função geradora para o número total de passeios

Nesta seção, apresentaremos o Teorema 3.1.5 e lemas que serão usados na demonstração do teorema central deste capítulo, o Teorema 3.2.2.

**Definição 3.1.1** (Deck polinomial)**.** O deck polinomial de um grafo $G$ é o multiconjunto dado por

$$\mathrm{PD}(G) \coloneqq \{\phi(G \setminus i, x) : i \in V(G)\}.$$

**Definição 3.1.2** (Deck de pares de polinômios característicos)**.** Seja $G$ um grafo com conjunto de vértices $V(G)$. O deck de pares de polinômios característicos é definido por

$$\mathcal{C}(G) \coloneqq \{(\phi(G \setminus i, x), \phi(\overline{G \setminus i}, x)) : i \in V(G)\}.$$

**Definição 3.1.3** (Função geradora do número total de passeios)**.** Seja $G$ um grafo. A função geradora do número total de passeios em $G$ em função de seu comprimento será denotada por $\mathrm{TW}(G, x)$.

Se $W(G,x)$ é a matriz função geradora de passeios, então claramente $\mathrm{TW}(G,x)$ é a soma das entradas de $W(G,x)$. Simbolicamente, $\mathrm{TW}(G,x) = \mathbb{1}^\intercal W(G,x)\mathbb{1}$, onde $\mathbb{1} := [1,\dots,1]^\intercal$.

**Definição 3.1.4.** Seja $G$ um grafo. A função geradora do número total de passeios em $G$ que saem do vértice $i$, indexados por seu comprimento, será denotada por $W_i(G,x)$.

Vale que $W_i(G,x)$ é a soma da $i$-ésima linha de $W(G,x)$. Em outras palavras, $W_i(G,x) = e_i^\intercal W(G,x)\mathbb{1}$, onde $e_i$ é o vetor com a $i$-ésima coordenada igual a 1 e as demais iguais a 0.

**Teorema 3.1.5** (Ver [5, p.44])**.** Seja $G$ um grafo. A função geradora para o número total de passeios em $G$ satisfaz

$$\mathrm{TW}(G,x) = x^{-1}\left((-1)^n \frac{\phi(\overline{G},-1-x^{-1})}{\phi(G,x^{-1})} - 1\right).$$

*Demonstração.* De (2.1) e (1.3), temos que a função geradora do número total de passeios em $G$ é dada por

$$\mathrm{TW}(G,x) = \mathbb{1}^\intercal W(G,x)\mathbb{1} = \mathbb{1}^\intercal (I_n - xA)^{-1}\mathbb{1} = \frac{\mathbb{1}^t(\mathrm{adj}(I_n - xA))\mathbb{1}}{\det(I_n - xA)}.$$

Definindo $B = I_n - xA$ e aplicando a definição de adjunta (Definição 1.2.9), segue-se que

$$\mathrm{TW}(G,x) = \frac{1}{\det(B)} \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(B[j,i]),$$

onde $\det(B[i,j])$ é o $ij$-cofator de $B$. Pelo Corolário 1.2.12 (com $X = B$ e $y = x$), temos

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(B[j,i]) &= x^{-1}(\det\{(I_n - xA) + xJ_n\} - \det(B)) \\ &= x^{-1}(\det\{(1+x)I_n - x(A + I_n - J_n)\} - \det(B)) \\ &= x^{-1}(\det\{(1+x)I_n + x\overline{A}\} - \det(B)),\end{aligned}$$

onde $\overline{A} = J_n - I_n - A$ é a matriz de adjacência do grafo complemento $\overline{G}$. Logo, tem-se

$$\mathrm{TW}(G,x) = x^{-1}\frac{\det[(1+x)I_n + x\overline{A}] - \det(B)}{\det(B)}$$

Colocando $-x$ em evidência no numerador e $x$ em evidência no denominador, temos que

$$\begin{aligned}\mathrm{TW}(G,x) &= x^{-1}\left((-1)^n\frac{\det[(-1-x^{-1})I_n-\overline{A}]}{\det(x^{-1}I_n-A)}-1\right)\\ &= x^{-1}\left((-1)^n\frac{\phi(\overline{G},-1-x^{-1})}{\phi(G,x^{-1})}-1\right),\end{aligned}$$

concluindo a prova. □

No próximo lema apresentamos outra igualdade para a função geradora do número total de passeios no grafo $G$. Lembre-se que $W_{ii}(G,x)$ é a função geradora para passeios fechados dada na Definição 2.1.1.

**Lema 3.1.6.** Seja $G$ um grafo. A função geradora para o número total de passeios em $G$ satisfaz

$$\mathrm{TW}(G,x) = \mathrm{TW}(G\setminus i,x)+\frac{W_i^2(G,x)}{W_{ii}(G,x)}.$$

*Demonstração.* Seja $S_i(G,x)$ a função geradora de passeios que passam pelo vértice $i$ no grafo $G$. A função geradora do número total de passeios satisfaz a igualdade

$$\mathrm{TW}(G,x) = \mathrm{TW}(G\setminus i,x)+S_i(G,x), \tag{3.1}$$

Além disso, seja $N_{ij}(G,x)$ a função geradora de passeios sem volta entre $i$ e $j$ (ver Definição 2.1.13). Cada passeio que passa pelo vértice $i$ começa em um vértice $j$ e termina num vértice $k$. Tais passeios podem decompor-se em um passeio que começa em $j$ e termina em $i$ sem passar previamente por $i$, um passeio fechado em $i$, e um passeio sem volta de $i$ a um vértice $k$, e portanto

$$S_i(G,x)=\sum_{j,k=1}^{n}N_{ij}(G,x)W_{ii}(G,x)N_{ik}(G,x),$$

Assim, por raciocínio análogo ao usado em (2.14),

$$S_i(G,x)=\sum_{j,k=1}^{n}N_{ji}(G,x)W_{ii}(G,x)\frac{W_{ii}(G,x)N_{ik}(G,x)}{W_{ii}(G,x)}=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{W_{ji}(G,x)W_{ik}(G,x)}{W_{ii}(G,x)}.$$

Logo,

$$S_i(G,x)=\frac{1}{W_{ii}(G,x)}\left(\sum_{j=1}^{n}W_{ji}(G,x)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}W_{ik}(G,x)\right)=\frac{W_i(G,x)^2}{W_{ii}(G,x)}$$

Logo, substituindo em (3.1), conclui-se a prova. □

No seguinte lema veremos a relação que existe entre o número de arestas e a função geradora para o número total de passeios em dois grafos $G$ e $H$.

**Lema 3.1.7.** Sejam $G$ e $H$ dois grafos com $|V(G)| = |V(H)|$ e com $|E(G)| > |E(H)|$. Então, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\mathrm{TW}(G, x) > \mathrm{TW}(H, x)$ para $x \in (0, \varepsilon)$.

*Demonstração.* Pela definição de $W(G, x)$ (Definição 2.1.1) e usando o fato de que uma aresta contribui em 2 para a soma das entradas de $A$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{TW}(G, x) &= \mathbb{1}^\intercal W(G, x)\mathbb{1} \\
&= \mathbb{1}^\intercal \left( I_n + xA + x^2A^2 \sum_{k=1}^{\infty} A^k x^k \right) \mathbb{1} \\
&= |V(G)| + 2|E(G)|x + O(x^2),
\end{aligned}$$

onde $O(x^2)$ denota uma função $f$ tal que existem $\varepsilon' > 0$ e $C > 0$ satisfazendo $|f(x)| < Cx^2$ para $0 < x < \varepsilon'$. Fazendo a mesma operação para $\mathrm{TW}(H, x)$ temos

$$\mathrm{TW}(H, x) = |V(H)| + 2|E(H)|x + O(x^2).$$

Assim, usando que $|V(G)| = |V(H)|$, temos

$$\mathrm{TW}(G, x) - \mathrm{TW}(H, x) = 2x(|E(G)| - |E(H)|) + O(x^2).$$

Usando $|E(G)| - |E(H)| \geq 1$ e a definição de $O(x^2)$, obtemos que para $0 < x < \min\{\varepsilon', 1/C\}$,

$$\mathrm{TW}(G, x) - \mathrm{TW}(H, x) \geq 2x - x > 0,$$

como desejado. $\square$

**Lema 3.1.8.** Dado um grafo $G$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que para qualquer par de vértices $i, j \in V(G)$, temos

$$(d_G(i) - d_G(j)) \cdot (\mathrm{TW}(G \setminus i, x) - \mathrm{TW}(G \setminus j, x)) \leq 0, \quad \text{para} \quad x \in (0, \varepsilon).$$

*Demonstração.* O caso em que $d_G(i) = d_G(j)$ é trivial. Suponha que $d_G(i) > d_G(j)$, então $|E(G \setminus i)| < |E(G \setminus j)|$. Logo pelo Lema 3.1.7, temos que existe um intervalo $(0, \varepsilon_{ij})$ tal que

$$\mathrm{TW}(G \setminus i, x) < \mathrm{TW}(G \setminus j, x),$$

tendo assim a desigualdade. Analogamente, se $d_G(i) < d_G(j)$ temos a mesma desigualdade. Escolhendo $\varepsilon = \min_{1 \leq i,j \leq n} \varepsilon_{ij}$, provamos o lema. $\square$

No seguinte lema, acharemos uma expressão para o polinômio característico de $G$ que será usada para concluir a demostração do Teorema 3.2.2, que afirma que o polinômio característico é reconstruível da coleção de pares de polinômios característicos.

**Lema 3.1.9.** Para qualquer grafo $G$ tem-se

$$\phi(G, x^{-1}) = \frac{x^{-1}}{\frac{d}{dx}(x\,\mathrm{TW}(G,x))} \sum_{i \in V(G)} (\mathrm{TW}(G,x) - \mathrm{TW}(G \setminus i, x))\phi(G \setminus i, x^{-1}).$$

*Demonstração.* Considerando a função geradora para o número total de passeios

$$\mathrm{TW}(G,x) = \mathbb{1}^\intercal W(G,x)\mathbb{1} = \mathbb{1}^t (I_n - xA)^{-1}\mathbb{1}.$$

Seja

$$\overline{W}(G,x) \coloneqq (W_1(G,x), \ldots, W_n(G,x))^\intercal.$$

Derivando $W_G(x)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\mathrm{TW}(G,x) &= \mathbb{1}^\intercal \frac{d}{dx}(I_n - xA)^{-1}\mathbb{1} \\ &= \mathbb{1}^\intercal (I_n - xA)^{-2} A\mathbb{1} \\ &= \overline{W}(G,x)^\intercal A \overline{W}(G,x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Da função geradora para o número total de passeios no grafo $G$, obtemos uma igualdade para $\frac{d}{dx}(x\,\mathrm{TW}(G,x))$

$$\begin{aligned} \mathrm{TW}(G,x) &= \mathbb{1}^\intercal W(G,x) W(G,x)^{-1} W(G,x)\mathbb{1} \\ &= \overline{W}(G,x)^\intercal (I_n - xA)\overline{W}(G,x) \\ &= \overline{W}(G,x)^\intercal \overline{W}(G,x) - x\overline{W}(G,x)^\intercal A \overline{W}(G,x), \end{aligned}$$

por (3.2) se tem

$$\mathrm{TW}(G,x) = \overline{W}(G,x)^\intercal \overline{W}(G,x) - x\frac{d}{dx}\mathrm{TW}(G,x)$$

pela regra da derivada para $\mathrm{TW}(G,x) + x\frac{d}{dx}\mathrm{TW}(G,x)$, conseguimos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x\,\mathrm{TW}(G,x)) &= \overline{W}(G,x)^\intercal \overline{W}(G,x) \\ &= \sum_{i \in V(G)} W_i^2(G,x). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Por outro lado, do Lema 3.1.6 e do Corolário 2.1.4, tem-se

$$W_i^2(x) = x^{-1}\frac{\phi(G \setminus i, x^{-1})}{\phi(G, x^{-1})}(\mathrm{TW}(G,x) - \mathrm{TW}(G \setminus i, x)) \tag{3.4}$$

Substituindo (3.4) em (3.3), obtém-se

$$\frac{d}{dx}\left(x\,\mathrm{TW}(G,x)\right) = \sum_{i\in V(G)} x^{-1}\frac{\phi(G \setminus i, x^{-1})}{\phi(G, x^{-1})}(\mathrm{TW}(G,x) - \mathrm{TW}(G \setminus i, x)).$$

Logo,

$$\phi(G, x^{-1}) = \frac{x^{-1}}{\frac{d}{dx}(x\cdot \mathrm{TW}(G,x))}\sum_{i\in V(G)}(\mathrm{TW}(G,x) - \mathrm{TW}(G \setminus i, x))\phi(G \setminus i, x^{-1})$$

como queríamos. □

**Lema 3.1.10.** Seja $G$ um grafo com $n > 2$ vértices. Se $PD(G)$ é conhecido então o número de arestas $|E(G)|$ é conhecido.

*Demonstração.* Pela Proposição 1.2.16, o número de arestas é determinado pelo polinômio característico. Em outras palavras, conhecendo $\phi(G \setminus i, x)$ temos $|E(G \setminus i)|$. Sabemos que o grau do vértice $i$ é dado por $d_G(i) = |E(G)| - |E(G \setminus i)|$, assim

$$\sum_{i\in V(G)}(|E(G)| - |E(G \setminus i)|) = \sum_{i\in V(G)} d_G(i).$$

Usando a Proposição 1.1.6 para $\sum_{i\in V(G)} d_G(i)$, temos

$$n|E(G)| - \sum_{i\in V(G)}|E(G \setminus i)| = 2|E(G)|$$

ou seja

$$|E(G)| = \frac{1}{n-2}\sum_{i\in V(G)}|E(G \setminus i)|.$$

Portanto $|E(G)|$ é determinado por $PD(G)$. □

No seguinte lema, demostraremos que se dois grafos tem o mesmo deck polinomial, então eles terão o mesmo multiconjunto de graus.

**Lema 3.1.11.** Sejam $G$ e $H$ dois grafos, ambos com $n > 2$ vértices. Se $\mathrm{PD}(G) = \mathrm{PD}(H)$, então $\overline{d}_G = \overline{d}_H$.

*Demonstração.* Re-rotulando os vértices de $H$, podemos supor que $\phi(G \setminus i, x) = \phi(H \setminus i, x)$ para $i = 1, \ldots, n$. Como o número de arestas de um grafo é determinado pelo seu polinômio característico, temos que $|E(G \setminus i)| = |E(H \setminus i)|$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Além disso, pelo Lema 3.1.10, $|E(G)| = |E(H)|$. Assim,

$$d_G(i) = |E(G)| - |E(G \setminus i)| = |E(H)| - |E(H \setminus i)| = d_H(i),$$

o que prova o lema. $\square$

## 3.2 Reconstrução a partir do deck de pares de polinômios

O problema de reconstrução polinomial (PRP) dado por D. M. Cvetković no ano de 1973 consiste em provar que o polinômio característico de um grafo $G$ de ordem $n$ é determinado a partir do seu deck polinomial. Tal problema permanece em aberto, e alguns casos particulares serão estudados no Capítulo 4.

Uma variação do PRP consiste em determinar se $\phi(G, x)$ é recuperável do deck de pares de polinômios (o multiconjunto de pares $(\phi(G \setminus i, x), \phi(\overline{G \setminus i}, x))$ para $i \in V(G)$). Para ver que tal variação é de fato interessante, note que o polinômio característico de $\overline{G}$ não pode ser calculado a partir do polinômio característico de $G$, como mostra o exemplo abaixo.

**Exemplo 3.2.1.** Como apresentamos no Exemplo 1.2.6, os grafos $G$ e $H$ têm mesmo polinômio característico

$$\phi(G, x) = x^6 - 7x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 4x - 1 = \phi(H, x).$$

Mas

$$\phi(\overline{G}, x) = x^2(x + 2)(x^3 - 2x^2 - 4x + 4) \neq x^3(x + 2)(x^2 - 2x - 4) = \phi(\overline{H}, x).$$

O teorema abaixo resolve a variação do PRP mencionada.

**Teorema 3.2.2.** Seja $G$ um grafo com $n$ vértices. O polinômio característico de $G$ é determinado pelo multiconjunto

$$\mathcal{C}(G) = \{(\phi(G \setminus i, x), \phi(\overline{G \setminus i}, x)) : i \in V(G)\}.$$

*Demonstração.* Vamos supor que o polinômio característico de $G$ não seja determinado por $\mathcal{C}(G)$. Isto é, existe um grafo $H$ tal que $\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}(H)$ mas $\phi(G, x) \neq \phi(H, x)$. Como $\mathcal{C}(G)$ trivialmente determina $\mathrm{PD}(G)$, temos pelo Lema 3.1.11 que

$$d_G(i) = d_H(i); \qquad \text{para } \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Além disso, como $\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}(H)$, podemos aplicar o Teorema 3.1.5 e concluir que

$$\mathrm{TW}(G \setminus i, x) = \mathrm{TW}(H \setminus i, x); \qquad \text{para } \ i = 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Consideremos o intervalo $(0, \varepsilon)$ dado pelo Lema 3.1.7. Para $x \in (0, \varepsilon)$, iremos demonstrar que $\mathrm{TW}(G, x) = \mathrm{TW}(H, x)$, o que implicará $\phi(G, x) = \phi(H, x)$. Suponhamos por contradição que $\mathrm{TW}(G, x) > \mathrm{TW}(H, x)$. Considerando qualquer par $i, j \in V(G)$, temos pelo Lema 3.1.8 que

$$(d_G(i) - d_G(j)) \cdot (\mathrm{TW}(G \setminus i, x) - \mathrm{TW}(G \setminus j, x)) \cdot (\mathrm{TW}(G, x) - \mathrm{TW}(H, x)) \leq 0. \tag{3.7}$$

Fazendo o produto e usando (3.6)

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{TW}(G \setminus i, x) - \mathrm{TW}(G \setminus j, x)][\mathrm{TW}(G, x) - \mathrm{TW}(H, x)] \\
&= (\mathrm{TW}(G, x) - \mathrm{TW}(G \setminus i, x))(\mathrm{TW}(H, x) - \mathrm{TW}(H \setminus j, x)) \\
&- (\mathrm{TW}(H, x) - \mathrm{TW}(H \setminus i, x))(\mathrm{TW}(G, x) - \mathrm{TW}(G \setminus j, x)),
\end{aligned}$$

aplicando o Lema 3.1.6 quatro vezes do lado direito, temos

$$[\mathrm{TW}(G \setminus i, x) - \mathrm{TW}(G \setminus j, x)][\mathrm{TW}(G, x) - \mathrm{TW}(H, x)] = \frac{W_i^2(G, x)}{W_{ii}(G, x)} \frac{W_j^2(G, x)}{W_{jj}(H, x)} - \frac{W_i^2(H, x)}{W_{ii}(H, x)} \frac{W_j^2(G, x)}{W_{jj}(G, x)}. \tag{3.8}$$

Para simplificar (3.8), usaremos o Corolário 2.1.4 e a hipótese para concluir que

$$\begin{aligned}
W_{ii}(G, x) W_{jj}(H, x) &= x^{-1} \frac{\phi(G \setminus i, x^{-1})}{\phi(G, x^{-1})} x^{-1} \frac{\phi(H \setminus j, x^{-1})}{\phi(H, x^{-1})} \\
&= x^{-1} \frac{\phi(H \setminus i, x^{-1})}{\phi(H, x^{-1})} x^{-1} \frac{\phi(G \setminus j, x^{-1})}{\phi(G, x^{-1})} \\
&= W_{ii}(H, x) W_{jj}(G, x).
\end{aligned}$$

Assim, substituindo em (3.8),

$$(\mathrm{TW}(G \setminus i, x)) - \mathrm{TW}(G \setminus j, x))(\mathrm{TW}(G, x) - \mathrm{TW}(H, x)) = \frac{W_i^2(G, x) W_j^2(H, x) - W_i^2(H, x) W_j^2(G, x)}{W_{ii}(H, x) W_{jj}(G, x)},$$

e portanto de (3.7) concluímos, usando a identidade $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, que

$$(d_G(i) - d_G(j))(W_i(G, x) W_j(H, x) - W_i(H, x) W_j(G, x)) \left( \frac{W_i(G, x) W_j(H, x) + W_i(H, x) W_j(G, x)}{W_{ii}(H, x) W_{jj}(G, x)} \right) \leq 0.$$

Como o último fator do lado direito é positivo para $x > 0$, temos que

$$(d_G(i) - d_G(j)) \cdot (W_i(G, x) W_j(H, x) - W_i(H, x) W_j(G, x)) \leq 0.$$

Expandindo e usando (3.5), temos:

$$\begin{aligned} d_G(i)W_i(G,x)W_j(H,x) + d_G(j)W_i(H,x)W_j(G,x) \\ -d_H(i)W_i(H,x)W_j(G,x) - d_H(j)W_i(G,x)W_j(H,x) \leq 0. \end{aligned}$$

Somando sobre todos os vértices $i, j$, obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_i d_G(i)W_i(G,x)\sum_j W_j(H,x) + \sum_j d_G(j)W_j(G,x)\sum_i W_i(H,x) \\ &-\sum_i d_H(i)W_i(H,x)\sum_j W_j(G,x) - \sum_j d_H(j)W_j(H,x)\sum_i W_i(G,x) \\ &= \mathrm{TW}(H,x)\sum_i d_G(i)W_i(G,x) + \mathrm{TW}(H,x)\sum_j d_G(j)W_j(G,x) \\ &- \mathrm{TW}(G,x)\sum_i d_H(i)W_i(H,x) - \mathrm{TW}(G,x)\sum_j d_H(j)W_j(H,x) \leq 0, \end{aligned}$$

de onde segue-se que

$$\mathrm{TW}(H,x)\sum_i d_G(i)W_i(G,x) \leq \mathrm{TW}(G,x)\sum_i d_H(i)W_i(H,x). \tag{3.9}$$

Sabemos que $W(G,x) = I_n + xAW(G,x)$. Consequentemente,

$$\mathrm{TW}(G,x) = \mathbb{1}^t(I_n + xAW(G,x))\mathbb{1} = n + x\mathbb{1}^t AW(G,x)\mathbb{1} = n + x\sum_{i=1}^{n} d_G(i)W_i(G,x),$$

e portanto vale a identidade

$$\sum_{i=1}^{n} d_G(i)W_i(G,x) = x^{-1}(\mathrm{TW}(G,x) - n). \tag{3.10}$$

Usando (3.10) em (3.9), segue-se que para $x > 0$,

$$x^{-1}\,\mathrm{TW}(H,x)(\mathrm{TW}(G,x) - n) \leq x^{-1}\,\mathrm{TW}(G,x)(\mathrm{TW}(H,x) - n).$$

Cancelando termos e reordenando, obtemos $n\,\mathrm{TW}(G,x) \leq n\,\mathrm{TW}(H,x)$, contradição ao assumido que $\mathrm{TW}(G,x) > \mathrm{TW}(H,x)$. Portanto temos que $\mathrm{TW}(G,x) = \mathrm{TW}(H,x)$, donde concluímos que $\mathrm{TW}(G,x)$ é re construível de $\mathcal{C}(G)$. Logo, pelo Lema 3.1.9 e (3.6) temos que

$$\phi(G,x^{-1}) = \phi(H,x^{-1}),$$

assim provamos que o polinômio caraterístico de $G$ é unicamente determinado por $\mathcal{C}(G)$. $\square$

# Capítulo 4

# Reconstrução polinomial para certas subclasses de grafos desconexos

Neste capítulo vamos demostrar algumas propriedades dos grafos polinômio-reconstruíveis. Desenvolvemos propriedades que um par contraexemplo para o problema de reconstrução polinomial deve ter, e apresentamos o problema de reconstrução polinomial para certas subclasses de grafos desconexos. O conteúdo deste capítulo é baseado no artigo de Coates, Lauri e Sciriha [2].

## 4.1 Propriedades de grafos polinômio-reconstruíveis

Nesta seção, apresentamos as propriedades e invariantes de um grafo $G$ que são polinômio-reconstruíveis.

**Definição 4.1.1** (Propriedade polinômio-reconstruível)**.** Uma propriedade ou invariante é dito(a) polinômio-reconstruível se é determinado(a) pelo deck polinomial $\mathrm{PD}(G)$.

Em particular, o polinômio característico de um grafo é polinômio-reconstruível se para todo grafo $H$ com $\mathrm{PD}(G) = \mathrm{PD}(H)$, tem-se que $\phi(G, x) = \phi(H, x)$. Neste capítulo, vamos denotar o polinômio característico $\phi(G, x)$ por $\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$, a menos que seja mencionado o contrário.

**Proposição 4.1.2.** Seja $G$ um grafo. Os coeficientes de $\phi(G, x)$ a menos do termo constante são determinados pelo deck polinomial.

*Demonstração.* Pelo Teorema 1.2.13(2), temos $\frac{d}{dx}\phi(G, x) = \sum_{i \in V(G)} \phi(G \setminus i, x)$. Integrando o polinômio $\frac{d}{dx}\phi(G, x)$, se obtém os coeficientes do polinômio característico a menos do termo constante. □

**Lema 4.1.3.** Sejam $G$ um grafo e $\lambda$ autovalor de $G$. Então $\phi(G, x)$ é determinado por $PD(G)$ e $\lambda$.

*Demonstração.* Pela Proposição 4.1.2 temos que todos menos o termo constante $a_n$ podem ser determinados. Se $\lambda$ é autovalor do grafo $G$, então $\phi(G, \lambda) = 0$ e $a_n$ pode ser determinado, logo $\phi(G, x)$ é polinômio-reconstruível. □

O chamado Teorema de entrelaçamento (*interlacing*) de Cauchy é muito usado no problema de reconstrução polinomial. No caso particular em que o usaremos, ele afirma que os autovalores de uma matriz $n \times n$ simétrica $A$ e de um menor principal de $A$ de dimensão $n-1$ estão entrelaçados (isto é, se intercalam). Aplicando-o à matriz de adjacência de um grafo $G$, obtemos o seguinte resultado.

**Teorema 4.1.4** (Teorema de entrelaçamento, ver [4])**.** Seja $G$ um grafo com $|V(G)| = n$ e seja $v \in V(G)$. Seja $\mathrm{Spec}(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ e seja $\mathrm{Spec}(G \setminus v) = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}\}$ onde $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_{n-1}$. Então os autovalores de $G \setminus v$ entrelaçam aqueles autovalores de $G$, isto é,

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n.$$

**Corolário 4.1.5.** Se $\phi(G \setminus v, x)$ para algum $v \in V(G)$ tem autovalor $\mu$ repetido, então $\mu$ é autovalor de $G$ e $\phi(G, x)$ é reconstruível.

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.1.4 temos que $\mu \leq \lambda_j \leq \mu$ para algum autovalor $\lambda_j \in \mathrm{Spec}(G)$, e portanto $\mu = \lambda_j$. Assim, qualquer autovalor repetido de $G \setminus v$ é também autovalor de $G$, e pelo Lema 4.1.3 temos que $\phi(G, x)$ é reconstruível. □

Certas propriedades ou invariantes de um grafo $G$ podem ser determinados do deck polinomial $\mathrm{PD}(G)$, listaremos algumas. Também apresentamos alguns lemas importantes.

**Lema 4.1.6.** Seja $G$ um grafo. O multiconjunto de graus $\overline{d}_G$ é polinômio-reconstruível.

*Demonstração.* No Lema 3.1.11 já foi dada o lema e a demostração. Apresentamos outra demostração. Seja $\phi(G \setminus i, x) \in \mathrm{PD}(G)$. Então

$$d_G(i) = |E(G)| - |E(G \setminus i)| = -a_2 + [x^2]\phi(G \setminus i, x)$$

onde $a_2$ é determinado pela Proposição 4.1.2. Logo $\overline{d}_G$ é polinômio-reconstruível. □

Seja $G$ um grafo; denota-se por $b(F, G)$ para o número de subgrafos de $G$ isomorfos a $F$.

**Teorema 4.1.7.** O menor comprimento de um ciclo ímpar de um grafo $G$ e o número de tais ciclos pode ser determinado de $\mathrm{PD}(G)$.

*Demonstração.* Pela Proposição 4.1.2, obtém-se os coeficientes $a_i$ de $\phi(G,x)$ exceto o termo constante $a_n$. Seja $2r+1$ o menor número ímpar diferente de 1 tal que $G$ contém ciclo de comprimento $2r+1$. Note que, para todo $1 \leq i \leq r$, a Proposição 1.2.17 diz que

$$-a_{2i+1} = \sum_{\Lambda} (-1)^{r(\Lambda)} 2^{s(\Lambda)},$$

onde o somatório é sobre todos os subgrafos elementares $\Lambda$ de $2i+1$ vértices. Se $i < r$, então $a_{2i+1} = 0$, pois um grafo elementar ou é constituído apenas de arestas isoladas (o que é impossível por paridade), ou contém um ciclo (o que impossível por minimalidade de $r$).

Pelo mesmo raciocínio, todos os grafos elementares com $2r+1$ vértices são ciclos de $2r+1$ vértices. Assim,

$$-a_{2r+1} = (-1)^{r(C_{2r+1})} 2^{s(C_{2r+1})} b(C_{2r+1}, G)$$

onde

$$r(C_{2r+1}) = 2r+1-1 = 2r \qquad \text{e} \qquad s(C_{2r+1}) = m(2r+1) - r(C_{2r+1}) = 2r+1-2r = 1.$$

Então $-a_{2r+1} = 2b(C_{2r+1}, G)$, e portanto $b(C_{2r+1}, G) = -a_{2r+1}/2$ pode ser determinado a partir de $\mathrm{PD}(G)$ pela Proposição 4.1.2. □

**Lema 4.1.8.** O número de passeios fechados de comprimento $k$ que iniciam e terminam no vértice $i$ no grafo $G$ pode ser calculado a partir do $\mathrm{PD}(G)$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

*Demonstração.* Pelo Corolário 2.1.4 temos

$$W_{ii}(G,x) = \frac{\phi(G \setminus i, x^{-1})}{x\phi(G, x^{-1})} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}, \tag{4.1}$$

onde $a_k$ são os coeficientes do polinômio característico. Pela Proposição 4.1.2, os termos não-constantes do polinômio característico são determinados pelo deck polinomial. Vamos calcular a série $\sum_{\ell \geq 0} c_\ell x^\ell$ tal que $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k \geq 0} c_l x^l\right) = 1$. Cada coeficiente $c_\ell$ é determinado pelos coeficientes $a_k$ para $k = 0, \ldots, \ell$. Logo, para $0 \leq i \leq n-1$, os coeficientes de $x^i$ em

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k\right)\left(\sum_{\ell \geq 0} c_\ell x^\ell\right)$$

são determinados pelos coeficientes $a_k$ para $k = 0, \ldots, n-1$, não dependendo portanto do termo constante $a_n$. Comparando com (4.1), vemos que $(A^k)_{ii}$ é determinado de $\mathrm{PD}(G)$ para $k = 0, \ldots, n-1$. □

Abaixo definimos polinômios simétricos elementares e apresentamos as fórmulas de Newton. No nosso contexto, elas mostram uma conexão entre os polinômios simétricos e os autovalores do polinômio característico de um grafo $G$.

**Definição 4.1.9** (Polinômios simétricos elementares)**.** O $k$-ésimo polinômio simétrico elementar em $n$ variáveis é dado por

$$s_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \qquad \text{para } k = 1, 2, \dots, n$$

**Teorema 4.1.10** (Identidades de Newton, ver [9])**.** Para $n \geq 0$ e $k \geq 1$, defina

$$p_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

Então, se $1 \leq k \leq n$

$$p_k = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} p_{k-i} s_i + (-1)^{k-1} k s_k.$$

**Definição 4.1.11** (Momento espectral)**.** Seja $G$ um grafo. Para um $k \in \mathbb{N}$, o $k$-ésimo momento espectral de $G$ é a soma das $k$-ésima potências dos $n$ autovalores, ou seja,

$$S_k := \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(G)} \lambda^k,$$

onde $\mathrm{Spec}(G)$ foi dado na Definição 1.2.3.

**Observação 4.1.12.** O momento espectral satisfaz $S_k = \mathrm{tr}(A(G)^k)$. Assim, $S_k$ conta o número de passeios fechados de comprimento $k$.

**Observação 4.1.13.** Seja $G$ um grafo com polinômio característico $\sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}$ e autovalores $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k$. Tem-se que

$$s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k} = (-1)^k a_k,$$

e as funções de Newton são os momentos espectrais

$$p_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^k = S_k.$$

As identidades de Newton dizem que $S_k = -\sum_{i=1}^{k-1} a_i S_{k-i} - k a_k$ para $k = 1, \dots, n$.

**Exemplo 4.1.14.** Seja $G$ um grafo. Determinamos os cinco primeiros momentos espectrais. Lembre-se da Proposição 1.2.16 que $a_1 = 0$, $a_2 = -m$ e $a_3 = -2T$, onde $T$ é o número de triângulos.

Temos $S_1 = -a_1 = 0$. Além disso,

$$S_2 = -a_2 S_1 - 2a_2 = -2a_2 = 2m.$$

Continuando, temos

$$S_3 = -a_1 S_2 - a_2 S_1 - 3a_3 = -3a_3 = 6T.$$

Usando os momentos espectrais já calculados, temos

$$\begin{aligned} S_4 &= -a_1 S_3 - a_2 S_2 - a_3 S_1 - 4a_4 \\ &= -0 \cdot 6T - (-m)(2m) - (-2T) \cdot 0 - 4a_4 = 2m^2 - 4a_4. \end{aligned}$$

Para $k = 5$, temos

$$\begin{aligned} S_5 &= -a_1 S_4 - a_2 S_3 - a_3 S_2 - a_4 S_1 - 5a_5 \\ &= -(-m)(6T) - (-2T)(2m) - 5a_5 = 10mT - 5a_5. \end{aligned}$$

**Corolário 4.1.15.** Seja $G$ um grafo. Os momentos espectrais $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$, de $G$ são determinados por $\mathrm{PD}(G)$.

*Demonstração.* Pela Observação 4.1.13 para os momentos espectrais, $S_k = -\sum_{i=1}^{k-1} a_i S_{k-i} - k a_k$ para $k = 1, \ldots, n$. Dessa expresão, vemos que os momentos espectrais $S_2, S_3, \ldots, S_{n-1}$ podem ser obtidos dos coeficientes $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ do polinômio característico e como cada coeficiente é determinado do $\mathrm{PD}(G)$, os momentos espectrais são polinômio-reconstruíveis. □

**Lema 4.1.16.** Seja $G$ um grafo com $n$ vértices, $m$ arestas, $p$ de pares de arestas incidentes e $q$ cópias de $C_4$ em $G$. O quarto momento espectral $S_4$ de $G$, é dado por

$$S_4 = 2m + 4p + 8q.$$

*Demonstração.* Pelo Exemplo 4.1.14 o quarto momento espectral é dado por $S_4 = 2m^2 - 4a_4$ e aplicando o Teorema 1.2.18 para determinar o coeficiente $a_4$, temos

$$a_4 = \sum_{\Lambda} (-1)^{k(\Lambda)} 2^{c(\Lambda)}.$$

Há dois casos para $\Lambda$: ou $\Lambda$ é isomorfo a $K_2 \dot{\cup} K_2$ ou a $C_4$. Para o caso $K_2 \dot{\cup} K_2$, temos $k(K_2 \dot{\cup} K_2) = 2$

e $c(K_2\dot{\cup}K_2) = 0$. Além disso,

$$b(K_2\dot{\cup}K_2, G) = \binom{m}{2} - p.$$

Já para o caso $C_4$, temos $k(C_4) = 1$ e $c(C_4) = 1$. Então

$$\begin{aligned} a_4 &= \sum_{\Lambda\in[K_2\dot{\cup}K_2]} (-1)^2 \cdot 2^0 + \sum_{\Lambda\in[C_4]} (-1)^1 \cdot 2^1 \\ &= b(K_2\dot{\cup}K_2, G) - 2b(C_4, G), \\ &= \frac{m(m-1)}{2} - p - 2b(C_4, G). \end{aligned}$$

Substituindo $a_4$ em $S_4$, temos

$$S_4 = 2m^2 - 4\left[\frac{m(m-1)}{2} - p - 2b(C_4, G)\right].$$

Como $q \coloneqq b(C_4, G)$, temos

$$S_4 = 2m^2 - 2m(m-1) + 4p + 8q = 2m + 4p + 8q,$$

como afirmado. □

**Teorema 4.1.17.** Seja $G$ um grafo. Se $n \geq 5$, o número de quadriláteros $q$ de $G$ é determinado por $\mathrm{PD}(G)$.

*Demonstração.* Sabemos do Lema 4.1.16 que $S_4 = 2m + 4p + 8q$. Além disso, pode-se calcular

$$m = \sum_{i\in V(G)} d_G(i)/2 \qquad \text{e} \qquad p = \sum_{i\in V(G)} \binom{d_G(i)}{2}.$$

Como $m$ e $p$ são determinados pelo $\mathrm{PD}(G)$ pelo Lema 4.1.6, e $S_4$ é determinado pelo $\mathrm{PD}(G)$ pelo Corolário 4.1.15, então $q$ também é determinado por $\mathrm{PD}(G)$. □

**Definição 4.1.18.** Seja $G$ um grafo. Uma aresta $e = ij \in E(G)$ é chamada de aresta pendente se $d_G(i) = 1$ ou $d_G(j) = 1$.

Por exemplo, o grafo da Figura 4.1, chamado de *triângulo com aresta pendente*, tem uma aresta com essa propriedade.

**Lema 4.1.19.** Seja $G$ um grafo e $F$ o grafo da Figura 4.1. O número de triângulos com arestas pendentes $s(F, G)$ em $G$ é dado por

$$b(F, G) = \frac{1}{2} \sum_{i\in V(G)} (A^3)_{ii}(d_G(i) - 2).$$

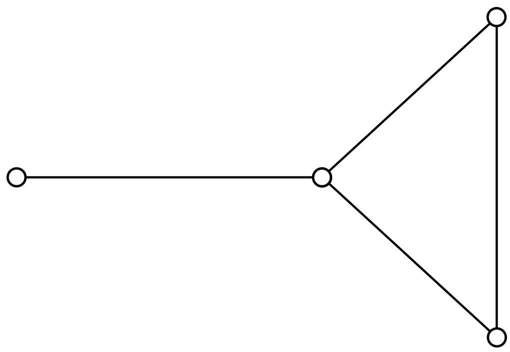

Figura 4.1: Triângulo com uma aresta pendente.

*Demonstração.* Para cada triângulo $\{i, j, k\}$ de $G$, o número de cópias de $F$ contendo tal triângulo e uma aresta pendente conectada a $i$ é $(d_G(i) - 2)$, onde o termo 2 corresponde às arestas $ij$ e $ik$ que participam do triângulo. Pelo Lema 4.1.8 o número de passeios fechados de comprimento 3 que tem inicio e fim no vértice $i$ é dado por $(A^3)_{ii}$. Somando sobre todos os vértices $i$,

$$\sum_{i \in V(G)} (A^3)_{ii}(d_G(i) - 2).$$

Como cada triângulo $\{i, j, k\}$ corresponde a dois passeios de comprimento 3 começando em $i$, provamos o resultado. □

**Teorema 4.1.20.** Seja $G$ um grafo. O número de pentágonos de $G$ é determinado por $\mathrm{PD}(G)$.

*Demonstração.* Pela Observação 4.1.12, o quinto momento espectral $S_5$ é igual ao número de passeios fechados de comprimento 5. Os subgrafos de $G$ que correspondem a passeios fechados de comprimento 5 são o pentágono $(C_5)$, triângulo $(C_3)$ e triângulo com aresta pendente $(F)$, assim usando os momentos espectrais na fórmula de Newton, tem-se

$$S_5 = 10mT - 5a_5. \tag{4.2}$$

Calculando $a_5$ a partir do Teorema 1.2.18

$$\begin{aligned} a_5 &= \sum_{|B|=5} (-1)^{k(B)} 2^{c(B)} \\ &= (-1)^2 2^1 b(K_3 \dot\cup K_2, G) + (-1)^1 2^1 b(C_5, G) \\ &= 2b(K_3 \dot\cup K_2, G) - 2b(C_5, G). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Para encontrar uma fórmula para o número de triângulos, iremos contar o número de modos de escolher quatro arestas tal que três delas formem um triângulo. Por um lado, esse número é

$T \cdot (m-3)$, escolhendo um triângulo e depois outra aresta fora do triângulo escolhido. Por outro lado, o grafo formado pelas quatro arestas pode ou ser um $K_3 \dot{\cup} K_2$, se a aresta for vértice-disjunta do triângulo, ou um $F$, caso contrário. Assim,

$$T \cdot (m-3) = b(K_3 \dot{\cup} K_2, G) + b(F, G). \tag{4.4}$$

Podemos substituir (4.3) e (4.4) em (4.2) para obter

$$\begin{aligned} S_5 &= 10mT - 5[2b(K_3 \dot{\cup} K_2, G) - 2b(C_5, G)] \\ &= 10mT - 10mT + 30T + 10b(F, G) + 10b(C_5, G). \end{aligned}$$

Como $S_5$, $b(F, G)$ e $T$ são determinados por PD$(G)$, $b(C_5, G)$ também é determinado por PD$(G)$. □

## 4.2 Propriedades de um par contraexemplo ao PRP

Sejam $G$ e $H$ grafos com $|V(G)| = |V(H)|$. O par $(G, H)$ é um par contraexemplo ao problema de reconstrução polinomial (PRP) se os polinômios característicos são diferentes, $\phi(G, x) \neq \phi(H, x)$, mas os decks polinomiais são iguais, PD$(G) =$ PD$(H)$.

Algumas propriedades que um par contraexemplo deve ter são apresentados nos seguintes lemas. A menos que seja afirmado o contrário, $(G, H)$ será tomado como um par contraexemplo ao PRP.

Pela Proposição 4.1.2, os polinômios característicos dos grafos $G$ e $H$ diferem só no termo constante $a_n$. Portanto, para o par contraexemplo $(G, H)$ os polinômios característicos satisfazem a equação

$$\phi(G, x) = \phi(H, x) + \Delta a_n \qquad \Delta a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Veremos abaixo outras propriedades do par $(G, H)$

**Lema 4.2.1.** $G$ e $H$ não tem autovalores em comum.

*Demonstração.* Segue pelo Lema 4.1.3. Suponhamos que $G$ e $H$ tiveram pelo menos um autovalor em comun. Logo o polinômio característico de $G$ é reconstruível, contradizendo à suposição que $(G, H)$ é um par contraexemplo. □

**Lema 4.2.2.** Os polinômios de PD$(G)$ não têm autovalores repetidos.

*Demonstração.* Equivalente ao Corolário 4.1.5. □

**Lema 4.2.3.** Se $(G, H)$ é um par contraexemplo, ou $G$ ou $H$ é conexo.

*Demonstração.* Seja $G$ um grafo desconexo com componentes $G_1, \ldots, G_k$, e $\lambda_1(G)$ o maior autovalor de $G$. Então existe uma componente $G_i$ com $\lambda_1(G_i) = \lambda_1(G)$ e um vértice $v \in V(G) \setminus V(G_i)$. Como o espectro de um grafo desconexo é a união dos espectros de suas componentes, $\lambda_1(G \setminus v) \geq \lambda_1(G_i) = \lambda_1(G)$. Além disso, pelo Teorema 4.1.4, $\lambda_1(G \setminus w) \leq \lambda_1(G)$ para todo vértice $w \in V(G)$. Assim, $\lambda_1(G)$ é o maior autovalor de um subgrafo da forma $G \setminus w$, e portanto é reconstruível do deck polinomial.

Supondo $\mathrm{PD}(G) = \mathrm{PD}(H)$, isso implica que $G$ e $H$ possuem o mesmo autovalor máximo, contradizendo o Lema 4.2.1. Portanto $G$ e $H$ não podem ser ambos grafos desconexos. □

Na tentativa de estender o par contraexemplo para o PRP, uma pergunta natural seria: Um par contraexemplo $(G_1, G_2)$, pode gerar uma família infinita de pares contraexemplos da forma $(G_1 \dot\cup H, G_2 \dot\cup H)$, onde $H$ é um grafo arbitrário? A resposta é negativa devido ao Lema 4.2.3.

## 4.3 Reconstrução polinomial de certas subclasses de grafos desconexos

Grafos desconexos com mais de duas componentes e com duas componentes de diferentes ordens já foram provados ser polinômio-reconstruíveis em [3].

**Teorema 4.3.1** (Ver [3])**.** Seja $G$ um grafo desconexo com $|V(G)| \geq 3$ e exatamente duas componentes conexas $G_1$ e $G_2$. Se $|V(G_1)| \neq |V(G_2)|$ então $\phi(G, x)$ é polinômio-reconstruível.

**Teorema 4.3.2** (Ver [3])**.** Seja $G$ um grafo desconexo e $G_1, \ldots, G_k$ suas componentes conexas. Se $k > 2$, então $\phi(G, x)$ é polinômio-reconstruível.

**Corolário 4.3.3.** Seja $G$ um grafo desconexo com número ímpar de vértices. Então $\phi(G, x)$ é polinômio-reconstruível.

*Demonstração.* Se o grafo tiver duas componentes, cada componente tem número de vértices diferente e a conclusão segue do Teorema 4.3.1. Se $G$ tiver um número de componentes maior que dois, então podemos aplicar o Teorema 4.3.2 para obter o resultado desejado. □

Dos resultados acima, as únicas classes de grafos não conexos que ainda não foram provados ser polinômio-reconstruível são os grafos não conexos com exatamente dois componentes de mesmo ordem. Nos seguintes subseções, provaremos que o PRP é válido para alguns grafos desconexos com componentes da mesmo ordem.

### 4.3.1 Grafos desconexos com duas componentes unicíclicas

Nessa subseção, trataremos dos chamados *grafos unicíclos*, que são grafos que contém exatamente um ciclo. Em [12] foi provado que grafos unicíclicos são polinômio-reconstruíveis. Esse resultado será usado para provar que um grafo $G$ desconexo com duas componentes unicíclicas também é polinômio-reconstruível.

**Exemplo 4.3.4.** O espectro de um grafo ciclo $C_n$ é dado por

$$\mathrm{Spec}(C_n) = \begin{pmatrix} 2 & 2\cos 2\pi/n & \cdots & 2\cos(n-1)\pi/2 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \quad \text{se } n \text{ é impar.}$$

$$\mathrm{Spec}(C_n) = \begin{pmatrix} 2 & 2\cos 2\pi/n & \cdots & 2\cos(n-2)\pi/n & -2 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{se } n \text{ é par.}$$

(ver [1, pag. 17]). Assim, $C_n$ possui pelo menos um autovalor repetido.

**Teorema 4.3.5** (Teorema 3.5 em [12])**.** Se $G$ é um grafo unicíclico então $\phi(G,x)$ é determinado pelo deck polinomial.

**Teorema 4.3.6.** Seja $G$ um grafo com exatamente duas componentes $G_1$ e $G_2$, e suponha que $G_1$ e $G_2$ são grafos unicíclicos. Então $\phi(G,x)$ é polinômio-reconstruível.

*Demonstração.* Seja $n = |V(G)|$. Suponhamos que $G$ não seja polinômio-reconstruível, isto é, que existe um grafo $H$ tal que $(G,H)$ seja um contraexemplo ao problema de reconstrução polinomial. Dividiremos em dois casos de acordo com os tamanhos das componentes:

- Quando $|V(G_1)| \neq |V(G_2)|$, $\phi(G,x)$ é polinômio-reconstruível pelo Teorema 4.3.1,

- Quando $|V(G_1)| = |V(G_2)| = n/2$, como cada componente é unicíclica, segue que

  $$m(G_1) = |V(G_1)| = \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad m(G_2) = |V(G_2)| = \frac{n}{2},$$

  logo $|V(G)| = m(G) = m(G_1) + m(G_2) = n$.

Como $G$ é desconexo, segue pelo Lema 4.2.3 que o grafo $H$ é conexo. Além disso, $|V(H)| = n$ e $m(H) = m(G)$, logo $m(H) = n$, isto só pode acontecer se $H$ é um grafo unicíclico e de [12], segue que o polinômio característico é reconstruível. Portanto, o par de $(G,H)$, não pode ser um par contraexemplo, contradizendo a suposição. Logo $\phi(G,x)$ é polinômio-reconstruível. □

### 4.3.2 Grafos desconexos com grafo roda como um componente

Nesta seção provaremos que o polinômio característico da classe de grafos desconexos com grafo roda como um dos componentes é polinômio-reconstruível. Isto será provado usando as propriedades do vértice dominante que o grafo roda possui, pois a existência do vértice dominante cria autovalores repetidos em um elemento do deck polinomial.

**Definição 4.3.7** (Produto completo ou junção (join))**.** O produto completo ou junção de grafos $G$ e $H$ com conjuntos de vértices disjuntos, denotado por $G \vee H$, é o grafo com conjuntos de vértices

$$V(G \vee H) = V(G) \cup V(H)$$

e conjunto de arestas

$$E(G \vee H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G), v \in V(H)\}.$$

**Exemplo 4.3.8.** Apresentamos a junção de dois grafos $P_4$ e $C_3$ na Figura 4.2.

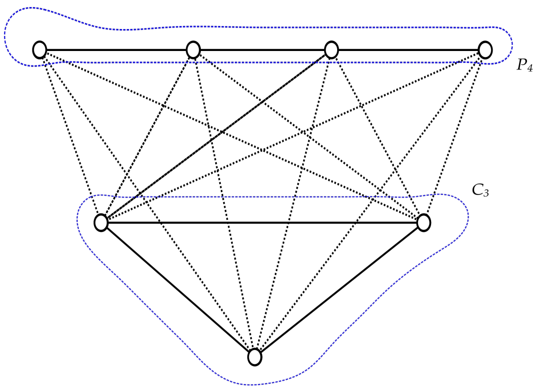


Figura 4.2: $P_4 \vee K_3$.

**Definição 4.3.9** (Grafo roda (wheel))**.** Um grafo roda é um grafo obtido ao fazer a junção de um grafo ciclo $C_{n-1}$ (assim, $n \geq 4$) e um novo vértice $K_1$. Escrevemos

$$W_n = K_1 \vee C_{n-1}.$$

Seja $v$ um vértice, adicionando o vértice $v$ ao ciclo $C_{n-1}$ obtendo-se o grafo roda, nesse caso $v$ com $d_G(v) = k \geq 3$, será chamado de *vértice dominante*.

**Exemplo 4.3.10.** Apresentamos um grafo roda $W_6 = K_1 \vee C_5$. Ver Figura 4.3.

**Teorema 4.3.11.** Seja $G$ um grafo desconexo tal que uma das componentes é um grafo roda. Então $\phi(G, x)$ é polinômio-reconstruível.

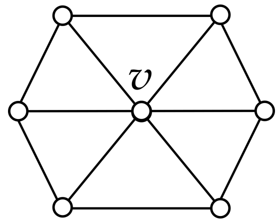


Figura 4.3: Grafo roda.

*Demonstração.* Denotemos as componentes do grafo $G$ por $G_1, \ldots, G_k$. suponhamos sem perda de geralidade que $G_1$ é o componente é grafo roda. com vértice dominante $i$ e $d_{G_1}(i) = k \geq 3$, logo o deck obtido ao eliminar $i$ será dado por

$$G \setminus i = C_k \cup G_2,$$

e o correspondente polinômio característico em $\mathrm{PD}(G)$ é dado por:

$$\phi(G \setminus i, x) = \phi(G_2, x) \cdot \phi(C_k, x).$$

Como todo ciclo possui um autovalor $\mu$ repetido, pelo menos um polinômio de $\mathrm{PD}(G)$ tem autovalor repetido. Assim, $\phi(G, x)$ é polinômio-reconstruível pelo Corolário 4.1.5. $\square$

# Referências Bibliográficas


[1] N. Biggs. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1993.

[2] J. Coates, J. Lauri, and I. Sciriha. Polynomial reconstruction for certain subclasses of disconnected graphs. *Graph Theory Notes N. Y.*, 63:41–48, 2012.

[3] D. Cvetković and M. Lepović. Seeking counterexamples to the reconstruction conjecture for the characteristic polynomial of graphs and a positive result. *Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math.*, 23:91–100, 1998.

[4] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. *Eigenspaces of graphs*, volume 66 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[5] D. M. Cvetković, M. Doob, and H. Sachs. *Spectra of graphs*. Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, third edition, 1995. Theory and applications.

[6] C. D. Godsil. Walk generating functions, Christoffel-Darboux identities and the adjacency matrix of a graph. *Combin. Probab. Comput.*, 1(1):13–25, 1992.

[7] C. D. Godsil. *Algebraic combinatorics*. Chapman and Hall Mathematics Series. Chapman & Hall, New York, 1993.

[8] E. M. Hagos. The characteristic polynomial of a graph is reconstructible from the characteristic polynomials of its vertex-deleted subgraphs and their complements. *Electron. J. Combin.*, 7:Research Paper 12, 9, 2000.

[9] D. G. Mead. Newton's identities. *Amer. Math. Monthly*, 99(8):749–751, 1992.

[10] A. J. Schwenk. Removal-cospectral sets of vertices in a graph. In *Proceedings of the Tenth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1979)*, Congress. Numer., XXIII–XXIV, pages 849–860. Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1979.

[11] I. Sciriha and M. J. Formosa. On polynomial reconstruction of disconnected graphs. *Util. Math.*, 64:33–44, 2003.

[12] S. K. Simić and Z. Stanić. The polynomial reconstruction of unicyclic graphs is unique. *Linear Multilinear Algebra*, 55(1):35–43, 2007.

[13] W. Stein et al. *Sage Mathematics Software (Version 7.2)*. The Sage Development Team, 2016. `http://www.sagemath.org`.

[14] D. B. West. *Introduction to graph theory.* Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1996.