UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Um estudo sobre pontos extremos em espaços de Banach

Ramon Gustavo de Melo

Belo Horizonte
2019

RAMON GUSTAVO DE MELO

UM ESTUDO SOBRE PONTOS EXTREMOS EM ESPAÇOS DE BANACH

Versão final da dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Hamilton Prado Bueno.
Coorientador: Antônio Zumpano Pereira Santos.

Belo Horizonte
2019

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz - CRB 6ª Região nº 819

Melo, Ramon Gustavo de.

M528e Um estudo sobre pontos extremos em espaços de Banach / Ramon Gustavo de Melo — Belo Horizonte, 2019.

141 f. il.; 29 cm.

(Dissertação) - Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Matemática.

Orientador: Hamilton Prado Bueno.
Coorientador: Antônio Zumpano Pereira Santos.

1. Matemática – Teses. 2. Equações Diferenciais Parciais – Teses. 3. Banach, Espaços de – Teses. I. Orientador. II. Coorientador. III. Título.

CDU 51(043)

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Um estudo sobre pontos extremos em espaços de Banach

RAMON GUSTAVO DE MELO

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Hamilton Prado Bueno
UFMG

Prof. Antônio Zumpano Pereira Santos
UFMG

Prof. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho
UFU

Prof. Rémy de Paiva Sanchis
UFMG

Belo Horizonte, 09 de agosto de 2019.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Agradecimentos

Em primeiro lugar, louvo a Deus pelas graças obtidas durante todo o caminho acadêmico que percorri até aqui.

Além disso, sou grato a meus familiares, em especial a meus pais Antônio e Sônia, pelo apoio, carinho e orações.

Solidários também foram os professores Gabriel Nagy e Vicente Montesinos Santalucía, os quais me auxiliaram esclarecendo dúvidas do texto.

Por fim, agradeço aos meus orientadores Antônio Zumpano Pereira Santos e Hamilton Prado Bueno. Considero como um grande privilégio ter deles o apoio e a instrução.

Depois de lhes lavar os pés e tomar as suas vestes, sentou-se novamente à mesa e perguntou-lhes: "Sabeis o que vos fiz? Vós me chamais Mestre e Senhor, e dizeis bem, porque eu o sou. Logo, se eu, vosso Senhor e Mestre, vos lavei os pés, também vós deveis lavar-vos os pés uns aos outros."

Evangelho de Jesus Cristo conservado pela Comunidade de João, cap. 13, vv. 12-14.

Resumo

Nesta obra exibimos conclusões topológicas e geométricas associadas a dois espaços de Banach e a seus duais topológicos. Além disso, empregamos o Teorema de Krein-Milman e um outro resultado para obtermos dois ganhos. O primeiro é a determinação do conjunto de pontos extremos da bola fechada $B[\mathbf{0}, 1]$ dos duais de três espaços de Banach simples. Já o segundo consiste em uma prova para o Teorema de Banach-Stone.

Palavras-chave: Ponto extremo. O Teorema de Banach-Stone.

Abstract

In this work are exhibited topological and geometric facts related to two Banach spaces and its topological dual spaces. Moreover, the Krein-Milman Theorem and other statement are applied in order to get two profits. The first of them is the finding of the set of extreme points of the closed ball $B[\mathbf{0}, 1]$ of the dual space of three simple Banach spaces. The second profit, in its turn, consists in a proof for the Banach-Stone Theorem.

Key-words: Extreme point. Banach-Stone Theorem.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Sumário

Introdução

Sejam V um espaço normado e $C \subseteq V$ um conjunto convexo. Diz-se que $x \in C$ é um ponto extremo de C se não há segmento de reta em C tendo x como ponto interno. Trata-se, portanto, da generalização do conceito de vértice, como o conhecemos nas geometrias plana e espacial. A importância desses elementos já era evidente em resultados obtidos na primeira metade do século XX. Por exemplo, suponha que C, além de convexo, seja compacto. Então, o Teorema de Krein-Milman revela-nos que, em um sentido topológico e algébrico, os pontos extremos de C são capazes de "gerar" C. E, para destacar ainda mais essa importância, notamos que da conclusão de Krein-Milman decorrem consequências em diversas áreas da Matemática, tais quais: Otimização, Teoria das C^*-álgebras, Teoria das representações e Probabilidade.

Neste trabalho desejamos, principalmente, conhecer alguns resultados envolvendo pontos extremos e aplicar essa teoria em certos espaços de Banach.

Iniciamos o texto revendo teorias que fundamentam nossa pesquisa. Nessa etapa, abordamos conceitos e resultados relacionados aos seguintes temas: Teoria dos Conjuntos, Álgebra Linear, Topologia, Teoria dos Espaços Métricos, Análise Real, Teoria da Medida e Integração e Análise Funcional. Tudo isso é realizado no **Capítulo 0**.

Já no **Capítulo 1** apresentamos dois espaços de Banach e examinamos conclusões topológicas e geométricas associadas a eles e a seus duais topológicos.

Em seguida, abrimos o **Capítulo 2** com a definição de ponto extremo. Prosseguimos estudando propriedades de pontos extremos em alguns espaços simples. Depois, passamos à teoria que nos permitirá determinar pontos extremos em duais topológicos.

O **Capítulo 3** é o lugar da primeira aplicação da teoria citada no parágrafo acima. Nesse capítulo, encontraremos o conjunto de todos os pontos extremos da bola $B[\mathbf{0}, 1]$ do dual topológico de três espaços de Banach elementares. Um quarto espaço também é analisado.

Finalizamos a dissertação no **Capítulo 4** exibindo uma segunda aplicação. Trata-se de uma prova para o Teorema de Banach-Stone.

Esperamos que nossa redação esteja bem próxima de um texto autossuficiente para o(a) leitor(a) que conhece conceitos elementares da Álgebra Linear e tem experiência equivalente à de um primeiro curso de Análise Real.

Demonstrações que decorrem facilmente das definições envolvidas foram veladas. Nesses casos, escrevemos que "a demonstração é direta". Em adição, escolhemos omitir as provas de três enunciados: o Lema 0.118 (p. 49), a Proposição 0.140 (p. 54) e o Lema 0.147 (p. 55). Pelo primeiro, conseguimos construir uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ curiosa. O segundo, por sua vez, garante a existência e a unicidade da medida de Lebesgue em $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$. Por fim, o terceiro resultado anuncia uma generalização para o Teorema Fundamental do Cálculo. Para as demais conclusões indicamos dicas para a prova ou provas detalhadas.

Além disso, muitos **Exemplos** e **Observações** feitos na obra contêm resultados simples que serão utilizados de maneira silenciosa, por vezes.

Os espaços analisados no **Capítulo 3** são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Por essa razão e também por simplicidade, trataremos frequentemente os espaços vetoriais considerando o corpo dos reais, embora isso não seja necessário.

Capítulo 0

Fundamentos

0.1 Teoria dos Conjuntos

Começamos dando significado a certos símbolos utilizados no texto. Depois, observaremos alguns conceitos e resultados.

Notação 0.1. **(a)** Chamaremos de naturais os números inteiros positivos. O conjunto dos números naturais será denotado por $\mathbb{N}$.
(b) Se $n \in \mathbb{N}$, marcamos: $[n] := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
(c) Dado um conjunto X, representamos por $\mathcal{P}(X)$ a coleção dos subconjuntos de X.
(d) Considere a função $f : X \to Y$ e o conjunto $A \subseteq X$. Indicamos: $f(A) := \{f(a) : a \in A\}$. Além disso, definimos $f|_A : A \to Y$ por $f|_A(a) := f(a)$ para todo $a \in A$.

Definição 0.2 (Produto cartesiano). *O produto cartesiano de uma família de conjuntos* $\{X_i\}_{i\in I}$ *é a coleção de todas as funções* $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ *tais que* $f(i) \in X_i$ *para cada* $i \in I$*. Designamos esse produto por* $\prod_{i\in I} X_i$.

Usualmente, indicamos um elemento f de $\prod_{i\in I} X_i$ como $(x_i)_{i\in I}$, em que $x_i = f(i)$. Quando $I = [n]$, escrevemos $\prod_{i\in I} X_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Nesse caso, um elemento do produto pode ser expresso por uma lista ordenada com n termos, tal qual $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definição 0.3 (Projeções). *Considere o produto cartesiano* $X := \prod_{i\in I} X_i$ *e o índice* $k \in I$*. A função* $\pi_k : X \to X_k$ *definida por:*

$$\pi_k[(x_i)_{i\in I}] = x_k \qquad \forall\ (x_i)_{i\in I} \in X$$

é chamada projeção na coordenada k*.*

Definição 0.4 (Conjunto enumerável). *Um conjunto X é enumerável se X é finito ou se existe $f : X \to \mathbb{N}$ bijetiva.*

Lema 0.5. *Sejam X e Y conjuntos enumeráveis. Então $X \times Y$ é enumerável.*

Dica para a demonstração. Primeiramente, note que se A é enumerável, então todo $B \subseteq A$ é enumerável. Depois, use $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ dada por $f(m,n) := 2^m 3^n$ para mostrar que $\mathbb{N}^2$ é enumerável. Por último, tome $\alpha : X \to \mathbb{N}$ e $\beta : Y \to \mathbb{N}$ injetivas e considere $G : X \times Y \to \mathbb{N}^2$ dada por $G(x,y) := (\alpha(x), \beta(y))$. □

Corolário 0.6. *Se $\{X_i\}_{i\in[n]}$ é uma coleção de conjuntos enumeráveis, então $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ é enumerável.*

Proposição 0.7. *Considere uma família de conjuntos enumeráveis $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Então, $X := \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável.*

Dica para a demonstração. Para cada m natural tome $f_m : \mathbb{N} \to X_m$ sobrejetiva. Em seguida, defina $f : \mathbb{N}^2 \to X$ por $f(m,n) := f_m(n)$. Note que f é sobrejetiva e $\mathbb{N}^2$ é enumerável. □

Adiante, nosso objetivo será demonstrar o importante *Lema de Zorn*[1]. Dele dependem conclusões cruciais em diversos ramos da Matemática. Aqui, o lema ampara, por exemplo, o *Teorema de Hahn-Banach*, cujo papel é central na Análise Funcional.

Começamos examinando alguns conceitos.

Definição 0.8 (Relação). *Uma relação em um conjunto X é um subconjunto $\mathcal{R}$ de $X \times X$. Escrevemos $x\mathcal{R}y$ quando $(x,y) \in X \times X$.*

Definição 0.9 (Ordem parcial, conjunto parcialmente ordenado). *Dado um conjunto X, uma ordem parcial em X é uma relação $\preceq$ em X tal que:*

(a) *$x \preceq x$ para todo $x \in X$.*

(b) *Se $x \preceq y$ e $y \preceq x$, então $x = y$.*

(c) *Se $x \preceq y$ e $y \preceq z$, então $x \preceq z$.*

Um par $(X, \preceq)$ em que X é um conjunto e $\preceq$ uma ordem parcial em X é chamado de conjunto parcialmente ordenado.

[1]Max August Zorn (1906-1993), matemático alemão. Suas principais áreas de estudo foram Álgebra e Análise Numérica.

Definição 0.10 (Cadeia, cotas inferior e superior, elementos minimal e maximal). *Sejam X um conjunto e $\preceq$ uma ordem parcial em X.*
(a) *Uma cadeia em X é um subconjunto $C \subseteq X$ tal que, para quaisquer $x, y \in C$, $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.*
(b) *Dado $Y \subseteq X$, uma cota inferior (respectivamente, superior) de Y é um elemento $x \in X$ tal que $x \preceq y$ (respectivamente, $y \preceq x$) para cada $y \in Y$.*
(c) *Um elemento $m \in X$ é chamado minimal (respectivamente, maximal) se o único $x \in X$ que cumpre $x \preceq m$ (respectivamente, $m \preceq x$) é o próprio m.*

O Lema de Zorn decorre facilmente do enunciado seguinte.

Lema 0.11. *Considere um conjunto $X \neq \emptyset$ e um $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(X)$. Suponha que o conjunto parcialmente ordenado $(\Gamma, \subseteq)$ cumpra as seguintes condições:*
(a) *Se $A \in \Gamma$ e $B \subseteq A$, então $B \in \Gamma$.*
(b) *Se $\mathcal{C}$ é uma cadeia em Γ, então $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \in \Gamma$.*

Então $(\Gamma, \subseteq)$ possui um elemento maximal.

Dica para a demonstração. Primeiramente, para cada $A \in \Gamma$ defina $A_* := \{x \in X : A \cup \{x\} \in \Gamma\}$. Depois, tome uma função $f : \mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\} \to X$ tal que $f(Y) \in Y$, para qualquer $Y \subseteq X$ não vazio. Em seguida, estabeleça $g : \Gamma \to \Gamma$ pela lei:

$$g(A) := \begin{cases} A, & A_*\backslash A = \emptyset \\ A \cup \{f(A_*\backslash A)\}, & A_*\backslash A \neq \emptyset \end{cases}.$$

Desse modo, $A_*\backslash A = \emptyset$ se, e somente se, A é maximal em Γ. Por isso, para obtermos o resultado desejado, mostraremos que

$$\exists\ A \in \Gamma : g(A) = A. \tag{$*$}$$

Para facilitar a argumentação vindoura, introduziremos um conceito. Dizemos que $\Pi \subseteq \Gamma$ é uma torre se:
(P1) $\emptyset \in \Pi$.
(P2) Se $A \in \Pi$, então $g(A) \in \Pi$.
(P3) Se $\mathcal{C}$ é uma cadeia em Π, então $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \in \Pi$.

Observe que existe pelo menos uma torre. Denotando por Π_0 a interseção de todas as torres, temos que Π_0 é uma torre. A afirmação $(*)$ segue do fato de Π_0 ser uma cadeia, o que constataremos na sequência. Começamos apresentando outra definição.

Dizemos que $C \in \Pi_0$ é comparável quando, para todo $A \in \Pi_0$, temos $A \subseteq C$ ou $C \subseteq A$. Fixe $C \in \Pi_0$ comparável. Então, pela definição de g, se $A \in \Pi_0$ é um subconjunto próprio de C, temos $g(A) \subseteq C$. Agora, considere

$$\Lambda := \{A \in \Pi_0 : A \subseteq C \text{ ou } g(C) \subseteq A\}.$$

Assim, Λ é uma torre. De fato, Λ claramente satisfaz as propriedades (P1) e (P3). Para verificar (P2), divida em três casos, se necessário: (i) A é um subconjunto próprio de C, (ii) $A = C$, e (iii) $g(C) \subseteq A$. Sendo assim, decorre da definição de Π_0 que $\Lambda = \Pi_0$.

Do exposto, conclui-se que quando C é comparável, $g(C)$ é também comparável. Logo, a família Φ dos conjuntos comparáveis satisfaz (P2). Em adição, ela cumpre também (P1) e (P3), como facilmente podemos verificar. Decorre que Φ é uma torre. Por isso, $\Pi_0 = \Phi$ é uma cadeia.

Uma vez que Π_0 é uma cadeia e uma torre, $U := \bigcup_{P \in \Pi_0} P \in \Pi_0$. Também, pela definição de U, $g(U) \subseteq U$. Como a inclusão reversa é óbvia, obtemos $g(U) = U$ e provamos $(*)$. □

Proposição 0.12 (Zorn). *Seja $(X, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado em que cada cadeia $C \subseteq X$ admite uma cota superior. Nesse caso, X possui um elemento maximal.*

Demonstração. Considere $p : X \to \mathcal{P}(X)$ dada por:

$$p(x) := \{y \in X : y \preceq x\}, \qquad \forall\, x \in X.$$

Indicando $\Gamma := p(X)$, vemos que $(\Gamma, \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado. Além disso, p é injetiva e $p(x_1) \subseteq p(x_2) \Leftrightarrow x_1 \preceq x_2$. Dessa forma, provar a existência de um elemento maximal em X é equivalente a provar que há um elemento maximal em Γ.

Da correspondência entre $(X, \preceq)$ e $(\Gamma, \subseteq)$ resulta que $(\Gamma, \subseteq)$ respeita as hipóteses do lema anterior. Por essa razão, $(\Gamma, \subseteq)$ possui um elemento maximal, completando a prova. ■

Observação 0.13. Considere um conjunto parcialmente ordenado $(X, \preceq)$ em que cada cadeia $C \subseteq X$ admite uma cota inferior. Depois, seja $\succeq$ a relação em X expressa por $x \succeq y \Leftrightarrow y \preceq x$. Empregando o Lema de Zorn com o conjunto parcialmente ordenado $(X, \succeq)$ garantimos que $(X, \preceq)$ possui um elemento minimal.

0.2 Álgebra Linear

Nesta seção, conceitos elementares de Álgebra Linear, como os de espaço vetorial, subespaço, base e espaço quociente são supostos conhecidos. Quando omitirmos o corpo de escalares $\mathbb{K}$ referente a um espaço vetorial, significa que $\mathbb{K}$ pode ser, indiferentemente, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Novamente iniciamos com algumas convenções.

Notação 0.14. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

(a) O vetor nulo de V será representado por $\mathbf{0}$.

(b) Dados $A, B \subseteq V$, fixamos:

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\} \qquad \text{e} \qquad A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}.$$

Em particular, se $B := \{b\}$, temos $A + b := A + B$ e $A - b := A - B$.

(c) Dados $A \subseteq V$ e $k \in \mathbb{K}$, denotamos $kA := \{ka : a \in A\}$.
(d) Se $A \subseteq V$, o subespaço gerado por A será indicado por $\langle A \rangle$. Em particular, se $A := \{a\}$, escreveremos $\langle a \rangle := \langle A \rangle$.

Continuamos expondo algumas propriedades simples.

Lema 0.15. *Considere um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V e uma função $f : V \to \mathbb{R}$ linear. Então:*
(a) *Se $C \subseteq V$ é convexo, então $f(C)$ é convexo.*
(b) *Se $C \subseteq \mathbb{R}$ é convexo, então $f^{-1}(C)$ é convexo.*

Demonstração. A prova é direta. ■

Lema 0.16. *Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e $W \subseteq V$ enumerável. Então, $\langle W \rangle$ é enumerável.*

Dica para a demonstração. Aproxime os escalares reais por números racionais. □

Lema 0.17. *Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e $f : V \to \mathbb{R}$ uma função linear e não nula. Então,* $\dim(V/\operatorname{Ker}(f)) = 1$.

Demonstração. Tome $v_0 \in V$ tal que $f(v_0) \neq 0$. Seja $q := v + \operatorname{Ker}(f) \in V/\operatorname{Ker}(f)$. Uma vez que

$$f\left(\frac{f(v)}{f(v_0)}v_0 - v\right) = 0,$$

temos $q = \frac{f(v)}{f(v_0)}[v_0 + \operatorname{Ker}(f)]$. Por essa razão, $\{v_0 + \operatorname{Ker}(f)\}$ é uma base para $V/\operatorname{Ker}(f)$. ■

0.3 Topologia

Um dos conceitos mais fundamentais em nosso estudo é o de *topologia*, o qual é apresentado abaixo. Consequentemente, muitas considerações feitas na presente seção são recorrentes no texto.

Definição 0.18 (Topologia, espaço topológico). *Dado um conjunto X, uma topologia em X é uma coleção $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ com as seguintes propriedades:*
(a) $\emptyset, X \in \tau$.
(b) *Se $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma família de elementos de τ, então* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.
(c) *Se $\{A_i\}_{i \in [n]}$ é uma família de elementos de τ, então* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

Um espaço topológico é um par (X, τ), em que τ é uma topologia em X.

Exemplo 0.19. Dado um conjunto qualquer X, existem duas topologias elementares em X: $\{\emptyset, X\}$ e $\mathcal{P}(X)$.

O próximo exemplo mostra um espaço topológico menos trivial.

Exemplo 0.20. Considere a coleção $\tau_{\mathbb{R}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dada por:

$$U \in \tau_{\mathbb{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in U\ \exists\ a, b \in \mathbb{R} : x \in (a, b) \subseteq U.$$

Com argumentos simples verificamos que $\tau_{\mathbb{R}}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$. Ela é chamada de **topologia euclidiana**.

Observação 0.21. **(a)** Representaremos um espaço topológico (X, τ) por X quando τ é conhecida ou arbitrária.
(b) Em nossas discussões, a única topologia considerada em $\mathbb{R}$ será a topologia euclidiana. Por isso, iremos omitir sua menção.

Adiante, daremos nomes especiais a dois tipos de subconjuntos de um espaço topológico X.

Definição 0.22 (Conjunto aberto, conjunto fechado). *Seja (X, τ) um espaço topológico. Um subconjunto A de X é dito aberto se $A \in \tau$. Um subconjunto F de X é dito fechado se $X \backslash F$ é um conjunto aberto.*

Observação 0.23. Se X for um espaço topológico e $\{F_i\}_{i \in I}$ for uma coleção de conjuntos fechados, então $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ é fechado. Para constatar isso, basta lembrar que, se $\{A_i\}_{i \in I}$ for uma família de subconjuntos de um conjunto C fixado, então

$$C \backslash \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (C \backslash A_i).$$

Observação 0.24. Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, A é uma união de intervalos abertos limitados. De fato, se A é aberto, para cada $a \in A$ existe um intervalo aberto limitado I_a tal que $a \in I_a \subseteq A$. Portanto, $A = \bigcup\limits_{a \in A} I_a$. Além disso, claramente, todo intervalo aberto limitado é um conjunto aberto, o que garante a recíproca.

Definição 0.25 (Vizinhança). *Considere um espaço topológico X e $x \in X$. Uma vizinhança de x é um conjunto aberto contendo x.*

Observe que todo ponto de um espaço topológico X possui uma vizinhança, já que X é um conjunto aberto.

Definição 0.26 (Ponto interior, interior). *Considere um espaço topológico X e um conjunto $A \subseteq X$. Dizemos que $a \in A$ é um ponto interior de A se existe uma vizinhança U de a tal que $U \subseteq A$. Chamamos interior de A, e representamos por* $\mathrm{Int}(A)$, *o conjunto de todos os pontos interiores de A.*

Dado um espaço topológico X, todo $Y \subseteq X$ também admite uma estrutura natural de espaço topológico. Mais precisamente, temos a conclusão adiante, cuja demonstração é direta.

Proposição 0.27. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subseteq X$. A coleção $\tau_Y := \{A \cap Y : A \in \tau\}$ é uma topologia em Y.*

A topologia anunciada anteriormente é chamada **topologia induzida** em Y por τ.

A seguir, exibimos o conceito de *base* para uma topologia τ. Trata-se de um subconjunto de τ por meio do qual conseguimos caracterizar todos os abertos. Dessa forma, uma base para τ descreve τ.

Definição 0.28 (Base, base de vizinhanças). *Seja (X, τ) um espaço topológico.*
(a) *Dizemos que $\mathcal{B} \subseteq \tau$ é uma base para τ se todo elemento de τ é uma união de elementos de $\mathcal{B}$.*
(b) *Admita que $\mathcal{B}$ seja uma base para τ e que $x \in X$. Uma base de vizinhanças de x é formada por todos os conjuntos em $\mathcal{B}$ que contêm o ponto x.*

Exemplo 0.29. De acordo com a Observação 0.24, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ é uma base para a topologia euclidiana.

Definição 0.30 (Subbase). *Suponha que (X, τ) seja um espaço topológico e que $\mathcal{S} \subseteq \tau$. Dizemos que $\mathcal{S}$ é uma subbase para τ se a coleção de todas as interseções finitas de elementos de $\mathcal{S}$ formam uma base para τ.*

Exemplo 0.31. Consoante o Exemplo 0.29, percebemos que

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} := \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$$

é uma subbase para a topologia euclidiana.

Dado um espaço topológico (X, τ), como saber se uma dada família de abertos é uma base para τ? O lema abaixo auxilia-nos diante desta questão.

Lema 0.32. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma família $\mathcal{B}$ de abertos é uma base para τ se, e somente se, para quaisquer $U \in \tau$ e $u \in U$ existe $B_u \in \mathcal{B}$ tal que $u \in B_u \subseteq U$.*

Dica para a demonstração. **(⇒)** A verificação é direta.
(⇐) Note que $U = \displaystyle\bigcup_{u \in U} B_u$. □

A proposição abaixo permite-nos verificar se duas topologias em um mesmo conjunto são iguais isentando-nos do trabalho de comparar os elementos delas.

Proposição 0.33. *Sejam τ_1 e τ_2 topologias em X e $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases para τ_1 e τ_2, nessa ordem. Então, $\tau_1 = \tau_2$ se, e somente se, ocorrem as seguintes condições:*
(a) *Para cada $B_1 \in \mathcal{B}_1$ e cada $b_1 \in B_1$ existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $b_1 \in B_2 \subseteq B_1$.*
(b) *Para cada $B_2 \in \mathcal{B}_2$ e cada $b_2 \in B_2$ existe $B_1 \in \mathcal{B}_1$ tal que $b_2 \in B_1 \subseteq B_2$.*

Dica para a demonstração. Utilize o lema anterior. □

Na definição que segue, inauguramos a formalização da noção de "proximidade" em espaços topológicos.

Definição 0.34 (Ponto de acumulação, fecho). *Considere um espaço topológico X e um conjunto $M \subseteq X$. Um ponto $x \in X$ é chamado ponto de acumulação de M se toda vizinhança de x contém algum ponto de $M \backslash \{x\}$. A união de M e do conjunto de pontos de acumulação de M é chamada fecho de M e indicada por $\overline{M}$.*

Outro conceito importante em Topologia é o de *densidade*, que será exibido na sequência.

Definição 0.35 (Conjunto denso). *Sejam X um espaço topológico e um conjunto $M \subseteq X$. Dizemos que M é denso em X se $\overline{M} = X$.*

Observação 0.36. (a) M é denso em X se, e somente se, todo $A \subseteq X$ aberto contém um ponto de M. Isso provém simplesmente das definições acima.
(b) Considere que M seja denso em X. Se $M \subseteq N$, então N é denso em X. Com efeito, todo ponto de acumulação de M é ponto de acumulação de N.

Agora caracterizaremos os conjuntos abertos e fechados de um espaço topológico usando as definições de ponto interior e de ponto de acumulação.

Lema 0.37. *Considere um espaço topológico X e um conjunto $M \subseteq X$. Então:*
(a) *M é aberto se, e somente se, $M = \mathrm{Int}(M)$.*
(b) *M é fechado se, e somente se, $M = \overline{M}$.*

Dica para a demonstração. **(a)** A prova é direta.
(b) **($\Rightarrow$)** Suponha que $p \in X \backslash M$ seja um ponto de acumulação de M. Então, $X \backslash M$ é um aberto contendo p, o que leva a um absurdo.
($\Leftarrow$) Para cada $x \in X \backslash M$, existe uma vizinhança A_x de x disjunta de M. □

Seguimos com um resultado elementar da Análise Real.

Lema 0.38. (a) *Se $F \subseteq \mathbb{R}$ é fechado e limitado superiormente, então $\sup(F) \in F$.*
(b) *Se $F \subseteq \mathbb{R}$ é fechado e limitado inferiormente, então $\inf(F) \in F$.*

Dica para a demonstração. **(a)** Faça $s := \sup(F)$ e suponha que $s \in \mathbb{R}\backslash F$. Como $\mathbb{R}\backslash F$ é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}\backslash F$. Isso contradiz o fato de s ser o supremo de F.
(b) O argumento é análogo ao anterior. $\square$

Em um primeiro curso de Cálculo conhecemos o conceito de *continuidade* para funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. O que temos adiante é uma generalização dessa propriedade seguida de algumas equivalências.

Definição 0.39 (Função contínua). *Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços topológicos e uma aplicação $f : X \to Y$. Dizemos que f é contínua em $x \in X$ se, para toda vizinhança V de $f(x)$ existe uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subseteq V$. Além disso, dizemos que f é contínua em X, ou simplesmente contínua, se f é contínua em todo ponto $x \in X$.*

Lema 0.40. *Considere os espaços topológicos (X, τ_1) e (Y, τ_2) e a função $f : X \to Y$. Então, f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(A) \in \tau_1$ para qualquer $A \in \tau_2$.*

Dica para a demonstração. **($\Rightarrow$)** Seja $A \in \tau_2$ e $A' := A \cap f(X)$. Se $A' = \emptyset$, $f^{-1}(A)$ é aberto. Senão, para cada $y \in A'$ existe $O_y \in \tau_1$ tal que $f(O_y) \subseteq A$.
($\Leftarrow$) Trivial. $\square$

Observação 0.41. **(a)** Acabamos de notar que uma função $f : X \to Y$ é contínua quando a preimagem de qualquer aberto de Y é um aberto de X. É fácil demonstrar uma caracterização parecida: f é contínua se, e somente se, a preimagem de todo fechado de Y é um fechado de X.
(b) A composição de duas funções contínuas é uma função contínua. A verificação desse fato é simples se usamos o lema precedente.

Proposição 0.42. *Suponha que X e Y sejam espaços topológicos. Uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para qualquer $A \subseteq X$.*

Demonstração. **($\Rightarrow$)** Escolha $A \subseteq X$. Por continuidade, $f^{-1}[\overline{f(A)}]$ é um fechado contendo A. Logo, $\overline{A} \subseteq f^{-1}[\overline{f(A)}]$, isto é, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
($\Leftarrow$) Seja $C \subseteq Y$ fechado. Assim, $f[\overline{f^{-1}(C)}] \subseteq \overline{f[f^{-1}(C)]} \subseteq \overline{C} = C$. Portanto, $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$. Em vista disso, $f^{-1}(C)$ é fechado. Concluímos, desse modo, que f é contínua. $\blacksquare$

Proposição 0.43. *Sejam os espaços topológicos (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) e a função $f : X_1 \to X_2$. Então, f é contínua se, e somente se, as imagens inversas dos membros de uma subbase de τ_2 pertencem a τ_1.*

Demonstração. (⇒) Trivial.
(⇐) Considere $\mathcal{S}$ uma subbase para τ_2 e $O \in \tau_2$. Então, escreva:

$$O = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in[n_i]} S_{i,j},$$

em que, para qualquer $i \in I$, $n_i \in \mathbb{N}$ e $S_{i,1}, S_{i,2}, \ldots, S_{i,n_i} \in \mathcal{S}$. Nesse caso,

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in[n_i]} f^{-1}(S_{i,j}) \in \tau_1.$$

■

Notação 0.44. Seja X um espaço topológico. Indicaremos por $\mathcal{C}(X)$ o conjunto das funções de X em $\mathbb{R}$ contínuas.

Conhecendo-se uma família de espaços topológicos $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$, como definir uma topologia útil em $\prod_{i\in I} X_i$? A proposição abaixo fornece-nos uma solução.

Proposição 0.45. *Considere uma coleção de espaços topológicos $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$. A família*

$$\mathcal{B}_\times := \left\{ \prod_{i\in I} A_i : A_i \in \tau_i \text{ e } A_i = X_i \text{ exceto para finitos índices.} \right\}$$

é uma base para uma topologia $\tau_\times$ em $X := \prod_{i\in I} X_i$.

A topologia $\tau_\times$ estabelecida anteriormente é denominada **topologia produto**. O espaço topológico $(X, \tau_\times)$ é chamado de **espaço produto**.

Observação 0.46. As projeções π_k estabelecidas na Definição 0.3 são contínuas. De fato, se $A_k \in \tau_k$, então $\pi_k^{-1}(A_k) = \prod_{i\in I} U_i$, em que $U_i = A_k$ se $i = k$ e $U_i = X_i$ caso contrário.

Lema 0.47. *Dados um espaço topológico (Y, τ) e uma família de espaços topológicos $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$, seja $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$. Então, f é contínua se, e somente se, para qualquer $i \in I$, $\pi_i \circ f : Y \to X_i$ é contínua.*

Demonstração. Se f for contínua, então, conforme a observação anterior, $\pi_i \circ f$ é contínua, qualquer que seja $i \in I$.

Reciprocamente, suponha que as funções da forma $\pi_i \circ f$ sejam contínuas. Primeiramente, escolha $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_\times$ e admita que $\mathcal{U} = \prod_{i\in I} U_i$, em que $U_i = X_i$ se $i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ e $U_i \in \tau_i$, caso contrário. Logo,

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = [(\pi_{i_1} \circ f)^{-1}(U_{i_1})] \cap [(\pi_{i_2} \circ f)^{-1}(U_{i_2})] \cap \cdots \cap [(\pi_{i_n} \circ f)^{-1}(U_{i_n})].$$

Decorre da hipótese que $f^{-1}(\mathcal{U})$ é um aberto de Y. Agora, de modo geral, tome $\mathcal{A} \in \tau_\times$ e escreva $\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$, em que cada $\mathcal{U}_i$ é um elemento da base $\mathcal{B}_\times$. Então

$$f^{-1}(\mathcal{A}) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\mathcal{U}_i) \in \tau,$$

pelo que constatamos acima. ■

Alguns espaços topológicos apresentam uma propriedade interessante: podemos "aproximar" todos os seus pontos partindo de um conjunto enumerável de elementos. Referimo-nos aos *espaços separáveis*.

Definição 0.48 (Espaço separável). *Dado um espaço topológico X, dizemos que X é separável se existe $Y \subseteq X$ enumerável tal que $\overline{Y} = X$.*

Lema 0.49. *Admita que $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in [n]}$ seja uma coleção finita de espaços topológicos separáveis. Então, $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \tau_\times)$ é separável.*

Demonstração. Por hipótese, para cada $i \in [n]$ existe $M_i \subseteq X_i$ enumerável e denso em X_i. Conforme o Corolário 0.6, $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ é enumerável. Além disso, pela Observação 0.36, vemos facilmente que $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ é denso em $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. ■

Uma das propriedades topológicas mais destacadas é a *compacidade*. Para conhecê-la, necessitamos da próxima definição.

Definição 0.50 (Cobertura, subcobertura, cobertura aberta). *Dado um conjunto X, uma cobertura de X é uma coleção $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ cuja união dos elementos é X. Nesse caso, dizemos que $\mathcal{C}$ cobre X. Uma subcobertura $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$ é um subconjunto de $\mathcal{C}$ que também cobre X. Quando X for um espaço topológico, uma cobertura aberta de X será uma cobertura formada por conjuntos abertos.*

Definição 0.51 (Espaço compacto, conjunto compacto). *Seja (X, τ) um espaço topológico.*

(a) *Dizemos que X é um espaço compacto se, a partir de qualquer cobertura aberta $\mathcal{C}$ de X, podemos obter uma subcobertura $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ finita.*

(b) *Um subconjunto $Y \subseteq X$ é compacto se o espaço (Y, τ_Y) é compacto, em que τ_Y é a topologia induzida em Y por τ.*

Exemplo 0.52. O intervalo $[a, b]$ é compacto. Por simplicidade e sem perder a generalidade, verificaremos a afirmação no caso em que $a = 0$ e $b = 1$. Para a prova, seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta de $[0, 1]$ e estabeleça:

$$P := \{x \in [0, 1] : [0, x] \text{ pode ser coberto por finitos elementos de } \mathcal{C}\}.$$

Como $0 \in P$ e P é limitado superiormente por 1, $s := \sup(P) \in \mathbb{R}$. Aliás, pelas definições de sup e de P, segue que $s \in [0, 1]$. Afirmamos que $s \in P$. Em verdade, o resultado é óbvio se

$s = 0$. Se $s > 0$, existem $A \in \mathcal{C}$ e $\epsilon \in (0, s)$ tais que $(s - \epsilon, s] \subseteq A$. Logo, pela definição de s, $s \in P$. Finalmente, mostraremos que $s = 1$. Suponha que $s < 1$ e tome $B \in \mathcal{C}$ contendo s. Como B é aberto na reta, existe $\epsilon > 0$ tal que $[s, s + \epsilon) \subseteq B$, contradizendo o fato de s ser o supremo de P.

Um pouco mais adiante, veremos uma forma simples de se provar a compacidade de $[a, b]$ supondo a compacidade de $[0, 1]$.

Observação 0.53. Seja X um espaço topológico. Segue facilmente da definição anterior que:

(a) Todo $Y \subseteq X$ finito é compacto.

(b) Se $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ são subconjuntos de X compactos, então $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} Y_i$ é compacto.

Nosso próximo objetivo é dar uma caracterização útil aos compactos de $\mathbb{R}$, através do *Teorema de Heine*[2]*-Borel*[3]. No caminho, conheceremos outra importante classe de espaços topológicos: a dos chamados *espaços de Hausdorff*[4].

Lema 0.54. *Todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ é limitado.*

Dica para a demonstração. Tome $A \subseteq \mathbb{R}$ ilimitado e considere a cobertura $\{(-n, n) \cap A : n \in \mathbb{N}\}$ de A. $\square$

Lema 0.55. *Considere um espaço compacto X e $F \subseteq X$ um fechado. Então, F é compacto.*

Dica para a demonstração. Se $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de F, então

$$\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cup (X \backslash F) = X.$$

$\square$

Definição 0.56 (Espaço de Hausdorff). *Um espaço topológico X é de Hausdorff se, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ distintos existirem vizinhanças U de x_1 e V de x_2 tais que $U \cap V = \emptyset$.*

Coloquialmente, um espaço topológico é de Hausdorff quando conseguimos "separar" quaisquer dois de seus pontos usando abertos disjuntos.

Exemplo 0.57. Evidentemente, $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ é um espaço de Hausdorff.

---

[2] Heinrich Eduard Heine (1821-1881), matemático alemão. Conhecido por resultados obtidos na Análise Real.

[3] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956), matemático e político francês. Foi um dos pioneiros da Teoria da Medida e suas aplicações à Probabilidade.

[4] Felix Hausdorff (1868-1942), matemático alemão. É considerado um dos fundadores da topologia moderna e contribuiu significativamente em áreas como Teoria dos Conjuntos, Teoria da Medida e Análise Funcional.

Lema 0.58. *Suponha que X seja um espaço de Hausdorff e que $K \subseteq X$ seja um compacto. Então, K é fechado.*

Dica para a demonstração. Tome $p \in X \backslash K$. Para cada $k \in K$, existem abertos disjuntos $U_k \ni p$ e $W_k \ni k$. Cobrindo K, mostre que existe um aberto $U \ni p$ disjunto de K. □

Corolário 0.59. *Se X é um espaço de Hausdorff, todo subconjunto finito de X é fechado.*

Proposição 0.60 (Heine, Borel). *Um subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, K é limitado e fechado.*

Demonstração. Se $K \subseteq \mathbb{R}$ é compacto, segue diretamente do Lema 0.54 e do Lema 0.58 que K é limitado e fechado. Reciprocamente, se K é limitado, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $K \subseteq [a, b]$ Então, como K é fechado, resulta do Lema 0.55 que K é compacto. ■

Os dois resultados adiante relacionam compacidade e continuidade. Sumariamente, o primeiro anuncia que a imagem contínua de um compacto é um compacto.

Lema 0.61. *Seja $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ uma função contínua e sobrejetiva. Se (X, τ_1) é compacto, então (Y, τ_2) é compacto.*

Demonstração. Admita que $\{U_i\}_{i \in I}$ seja uma cobertura aberta de Y. Por hipótese, existem $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ tais que $X = f^{-1}(U_{i_1}) \cup f^{-1}(U_{i_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{i_n})$. Então, como f é sobrejetiva, $Y = f(X) = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. ■

Observação 0.62. Como consequência do resultado acima, todo intervalo da forma $[a, b]$ é compacto. De fato, $f : [0, 1] \to [a, b]$ dada por $f(x) = (b - a)x + a$ é contínua e sobrejetiva.

Proposição 0.63. *Considere um espaço compacto K e uma função contínua $f : K \to \mathbb{R}$. Então, o conjunto $f(K)$ possui um elemento máximo e um elemento mínimo.*

Demonstração. De acordo com o Lema 0.61, $f(K)$ é compacto. Logo, pelo Teorema de Heine-Borel, $f(K)$ é limitado e fechado. Assim, conforme o Lema 0.38, $\sup[f(K)] \in f(K)$. Por isso, $\sup[f(K)]$ é um elemento máximo de $f(K)$. Analogamente, $\inf[f(K)]$ é um elemento mínimo de $f(K)$. ■

A seguir, veremos que em um espaço topológico compacto, qualquer família formada por conjuntos fechados apresenta uma característica conhecida como *propriedade da interseção finita*.

Lema 0.64. *Sejam X um espaço topológico compacto e $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos fechados. Suponha que para qualquer subcoleção finita $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \subseteq \mathcal{F}$ temos $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$. Então, $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponha que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$. Tomando o complemento de ambos os membros da igualdade e usando a compacidade de X, deduzimos que existe

$$\{X \backslash F_1, X \backslash F_2, \ldots, X \backslash F_n\} \subseteq \{X \backslash F : F \in \mathcal{F}\}$$

tal que $\bigcup_{i=1}^{n}(X \backslash F_i) = X$. Nesse caso, $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$, contrariando a hipótese sobre $\mathcal{F}$. Portanto, $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$. ■

A noção de equivalência é essencial em todos os ramos da Matemática. Por exemplo, na Teoria dos Conjuntos, as coleções $\{a, b, c, d\}$ e $\{1, 2, 3, 4\}$ são *equivalentes*, pois existe uma bijeção entre elas. Em Topologia, dois espaços topológicos são equivalentes quando existe uma bijeção entre eles capaz de preservar os abertos. Ela é chamada *homeomorfismo*.

Definição 0.65 (Homeomorfismo, espaços homeomorfos). *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que X e Y são homeomorfos, e escrevemos $X \simeq Y$, quando existe uma bijeção contínua $h : X \to Y$ tal que h^{-1} é contínua. Neste caso, a função h é chamada de homeomorfismo.*

Veremos um fato básico antes de apresentar um exemplo.

Lema 0.66. *Suponha que $g : X \to Y$ seja um homeomorfismo e escolha $a \in X$. Então, os conjuntos $X \backslash \{a\}$ e $Y \backslash \{g(a)\}$, munidos das respectivas topologias induzidas, são homeomorfos.*

Dica para a demonstração. Use $h := g|_{X \backslash \{a\}}$. □

Exemplo 0.67. Considere $K := [-1, 1]$ como subespaço de $\mathbb{R}$ (munido da topologia euclidiana). Em seguida, seja $\mathcal{B}$ a coleção de todos os "retângulos abertos"

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\},$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Nesse caso, $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia $\tau_{\mathbb{R}^2}$ em $\mathbb{R}^2$, chamada de **topologia euclidiana**. Depois, tome $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ como subespaço de $\mathbb{R}^2$. Assim, K e L não são homeomorfos. Com efeito, suponha que $h : K \to L$ seja um homeomorfismo. Então, pelo lema anterior, $K \backslash \{0\}$ e $L \backslash \{h(0)\}$ são homeomorfos. Ora, $[-1, 0) \subseteq K \backslash \{0\}$ é um conjunto aberto e fechado. Por outro lado, não existe $A \subseteq L \backslash \{h(0)\}$ aberto e fechado. Isso nega o fato de $K \backslash \{0\} \simeq L \backslash \{0\}$. Consequentemente, $K \not\simeq L$.

Destacamos mais um resultado envolvendo o conceito de homeomorfismo.

Proposição 0.68. *Sejam Y um espaço de Hausdorff, K um espaço compacto e $f : K \to Y$ uma função bijetiva e contínua. Então, f é um homeomorfismo.*

Demonstração. Tudo o que temos a fazer é provar que f^{-1} é contínua. Para isso, tome $A \subseteq K$ aberto. Consoante o Lema 0.55, $K \backslash A$ é compacto. Logo, por continuidade, $f(K \backslash A)$ é compacto. Assim, decorre do Lema 0.58 que $f(K \backslash A)$ é fechado. Já que f é uma bijeção, $Y \backslash f(K \backslash A) = f(A)$. Desse modo, $f(A)$ é um aberto de Y. ■

Avançamos conhecendo mais um gênero de espaços topológicos.

Definição 0.69 (Espaço normal). *Um espaço topológico X chama-se normal quando satisfaz os seguintes axiomas:*

(a) *Dados $a, b \in X$ distintos, existem abertos A e B tais que*

$$\{a, b\} \cap A = \{a\} \qquad e \qquad \{a, b\} \cap B = \{b\}.$$

(b) *Dados F_1 e F_2 fechados disjuntos, existem abertos disjuntos A_1 e A_2 tais que $F_1 \subseteq A_1$ e $F_2 \subseteq A_2$.*

Na sequência observamos uma classe de espaços normais.

Lema 0.70. *Todo espaço compacto e de Hausdorff é normal.*

Demonstração. Seja X um espaço compacto e de Hausdorff. Evidentemente, precisamos verificar apenas a condição (b) da Definição 0.69. Para tanto, começamos afirmando que se $K \subseteq X$ é fechado e $x \notin K$, existem abertos A e O disjuntos tais que $x \in A$ e $K \subseteq O$. De fato, posto que X é de Hausdorff, para cada $k \in K$ existem abertos $A_k \ni x$ e $O_k \ni k$ disjuntos. Em adição, o Lema 0.55 revela que K é um compacto. Logo, existem $k_1, k_2, \ldots, k_n$ elementos de K tais que $\bigcup\limits_{i\in[n]} O_{k_i} \supseteq K$. Logo, $A := \bigcap\limits_{i\in[n]} A_{k_i}$ e $O := \bigcup\limits_{i\in[n]} O_{k_i}$ são abertos com as características desejadas.

Agora, sejam F e G subconjuntos de X fechados e disjuntos. De acordo com a afirmação anterior, para cada $x \in F$ existem abertos B_x e P_x disjuntos tais que $x \in B_x$ e $G \subseteq P_x$. Então, novamente por compacidade, existem $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tais que $\bigcup\limits_{i\in[n]} B_{x_i} \supseteq F$. Logo, $\bigcup\limits_{i\in[n]} B_{x_i}$ e $\bigcap\limits_{i\in[n]} P_{x_i}$ são abertos disjuntos que contêm F e G, nessa ordem. ■

O próximo enunciado mostra que nos espaços normais encontramos "muitas" funções contínuas a valores reais.

Proposição 0.71 (Urysohn[5]). *Considere um espaço topológico normal X e dois subconjuntos $A, B \subseteq X$ fechados e disjuntos. Então, existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ e $f(B) \subseteq \{1\}$.*

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que é possível obter, para cada $r \in Q := \mathbb{Q} \cap [0,1]$, um aberto $V_r \subseteq X$ de maneira que

$$\begin{array}{ll} (1) & r, s \in Q,\ r < s \quad \Rightarrow \quad \overline{V_r} \subseteq V_s \\ (2) & A \subseteq V_0,\ B \subseteq X \backslash V_1 \end{array}.$$

Tais abertos serão definidos por indução.

Sejam $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ e $\{r_3, r_4, \ldots, r_n, \ldots\}$ uma enumeração dos racionais em $(0,1)$. Depois, faça $V_1 := X \backslash B$. Porquanto X é normal, existem abertos disjuntos V_0 e U_0 tais que $A \subseteq V_0$ e $B \subseteq U_0$. Logo, $(X \backslash U_0) \subseteq V_1$ é um fechado contendo V_0. Por essa razão, $A \subseteq V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq V_1$. Assim, até aqui, foram satisfeitas a condição (2) e

$$(3_k) \quad i, j \leq k,\ r_i < r_j \quad \Rightarrow \quad \overline{V_{r_i}} \subseteq V_{r_j}$$

para $k = 2$. Em seguida, suponha que os conjuntos V_{r_i} estão definidos para $i \in [n]$, com $n \geq 2$, e cumpram (3_n). Indique

$$r_l := \max\{x \in \{r_1, \ldots, r_n\} : x < r_{n+1}\} \quad \text{e} \quad r_m := \min\{x \in \{r_1, \ldots, r_n\} : r_{n+1} < x\}.$$

Como $r_l < r_m$, segue de (3_n) que $\overline{V_{r_l}} \subseteq V_{r_m}$. Mais uma vez, visto que X é normal, existe um aberto $V_{r_{n+1}}$ tal que $\overline{V_{r_l}} \subseteq V_{r_{n+1}} \subseteq \overline{V_{r_{n+1}}} \subseteq V_{r_m}$. Desse modo, $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_{n+1}}$ obedecem (3_{n+1}). Concluímos que a sequência (V_{r_n}) construída nesse processo admite as propriedades (1) e (2).

Adiante, considere $f : X \to [0,1]$ dada por:

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{r : x \in V_r\}, & x \in V_1 \\ 1, & x \in X \backslash V_1 \end{cases}.$$

De (2), temos $f(A) \subseteq \{0\}$ e $f(B) \subseteq \{1\}$. Resta-nos mostrar que f é contínua. Começamos observando que

$$\{[0,a) : a \in (0,1]\} \cup \{(b,1] : b \in [0,1)\}$$

é uma subbase para a topologia em $[0,1]$ induzida por $\tau_{\mathbb{R}}$. Além disso, dado $a \in (0,1]$, temos $f(x) < a \Leftrightarrow \exists\ r < a : x \in V_r$. Logo,

$$f^{-1}([0,a)) = \bigcup\{V_r : r \in Q,\ r < a\}$$

é aberto. Em acréscimo, fixado $b \in [0,1)$, $f(x) > b \Leftrightarrow \exists\ s > b : x \notin V_s$. Assim, conforme (1), $f(x) > b \Leftrightarrow \exists\ t > b : x \notin \overline{V_t}$. Consequentemente,

$$f^{-1}((b,1]) = \bigcup\left\{X \backslash \overline{V_r} : r \in Q, r > b\right\} = X \backslash \left(\bigcap\{\overline{V_r} : r \in Q, r > b\}\right)$$

é aberto. Portanto, de acordo com a Proposição 0.43, f é contínua. ■

Na sequência, examinaremos um notável teorema da Topologia, provado pela primeira vez por Tychonoff[6]. Para o resultado, precisamos de um lema.

[5]Pavel Samuilovich Urysohn (1898-1924), matemático soviético. Topologia foi sua principal área de estudo.
[6]Andrey Nikolayevich Tikhonov (1906-1993), matemático e geofísico soviético e russo. Foi responsável por

Lema 0.72 (Alexander[7]). *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{S}$ uma subbase para τ. Se toda cobertura aberta de X composta por elementos de $\mathcal{S}$ possui uma subcobertura finita, então X é um espaço compacto.*

Dica para a demonstração. Suponha que X não seja compacto. Logo, o conjunto

$$\Gamma := \{\mathcal{C} \text{ é uma cobertura aberta de } X : \mathcal{C} \text{ não admite subcobertura finita}\}$$

é não vazio. De acordo com o Lema de Zorn (Proposição 0.12), $(\Gamma, \subseteq)$ contém um elemento maximal $\mathcal{M}$. Em seguida, defina

$$\mathcal{S}' := \{S \cap M : S \in \mathcal{S}, M \in \mathcal{M}\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{S}'$ cobre X. De fato, caso contrário, tome $x \in X \setminus \left(\bigcup_{A \in \mathcal{S}'} A \right)$. Note que existem $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ e $U \in \mathcal{M}$ tais que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq U.$$

Repare que $S_i \notin \mathcal{M}$ para qualquer $i \in [n]$. Em seguida, para cada $i \in [n]$ indique por $\mathcal{N}_i$ a união dos conjuntos de uma subcobertura finita extraída de $\mathcal{M} \cup \{S_i\}$. Designe $\mathcal{N}_i' := \mathcal{N}_i \setminus \{S_i\}$ para todo $i \in [n]$. Desse modo, $\mathcal{N}_i' \cup \{S_i\} = X$ para qualquer i e

$$U \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{N}_i' \right) \supseteq \left(\bigcap_{i=1}^{n} S_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{N}_i' \right) \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} (S_i \cup \mathcal{N}_i') = X.$$

Isso contradiz a maximalidade de $\mathcal{M}$ em Γ. Portanto, $\mathcal{S}'$ cobre X. Finalmente, refutamos a hipótese inicial observando que $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ e que $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{M}$. □

Na próxima conclusão utilizamos uma notação fixada na Definição 0.3.

Proposição 0.73 (Tychonoff). *Considere uma família $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ de espaços topológicos compactos. Então, $X := \prod_{i \in I} X_i$, munido da topologia produto, é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{S}$ a coleção dos conjuntos da forma $\pi_i^{-1}(A_i)$, em que $A_i \in \tau_i$. Note que $\mathcal{S}$ é uma subbase para X. Em acréscimo, seja $\mathcal{F}$ uma cobertura de X formada por elementos dessa subbase. Mostraremos que $\mathcal{F}$ possui subcobertura finita. Para começar, dado $i \in I$, indique $\mathcal{A}_i := \{A \in \tau_i : \pi_i^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$. Afirmamos que existe um $j \in I$ tal que $\mathcal{A}_j$ cobre X_j. Com efeito, caso contrário, para todo $i \in I$ existe $x_i \in X_i$ que não pertence à união de todos os elementos de $\mathcal{A}_i$. Dessa forma, obtemos $(x_i)_{i \in I} \in X$ tal

importantes contribuições à Topologia, Análise Funcional e Física Matemática.

[7] James Waddell Alexander II (1888-1971), matemático americano. Foi um dos pioneiros no estudo da Topologia Algébrica.

que $(x_i)_{i\in I} \notin \pi_k^{-1}(A)$, quaisquer que sejam $k \in I$ e $A \in \tau_k$. Todavia, visto que $\mathcal{F}$ é uma cobertura de X, isso não pode ocorrer.

Portanto, existe $j \in I$ tal que $\mathcal{A}_j$ cobre X_j. Uma vez que X_j é compacto, existem $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_j$ que compõem uma subcobertura de X_j. Assim,

$$\{\pi_j^{-1}(A_1), \pi_j^{-1}(A_2), \ldots, \pi_j^{-1}(A_n)\}$$

cobre X. Observe que todos os elementos desse conjunto estão em $\mathcal{F}$. Dessa forma, podemos aplicar o lema precedente e concluir que X é um espaço compacto. ■

Prosseguimos apresentando uma categoria de espaços vetoriais que também são topológicos. Na Seção 0.7 conheceremos os espaços vetoriais *normados* e estudaremos várias de suas propriedades. A definição que segue generaliza esse conceito e amplia, portanto, o alcance de alguns resultados.

Definição 0.74 (Espaço vetorial topológico). *Um espaço vetorial topológico V sobre o corpo $\mathbb{R}$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial no qual está definida uma topologia de modo que:*
(a) *todo subconjunto unitário de V é fechado;*
(b) *são contínuas as aplicações:*

$$(u, v) \in V \times V \mapsto u + v \in V \qquad e \qquad (\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V \mapsto \lambda v \in V.$$

Salientamos que no enunciado anterior a topologia considerada em $V \times V$ e em $\mathbb{R} \times V$ é a topologia produto.

Observação 0.75. Sejam V um espaço vetorial topológico, $A, B \subseteq V$ e $w \in V$. Assim, valem as seguintes propriedades:
(a) Se A é um aberto, então $A + w$ é um aberto. Amparados pelo Lema 0.37, podemos verificar facilmente esse resultado. Mais geralmente, se A for um aberto, então $A + B$ será um aberto, pois

$$A + B = \bigcup_{b\in B} (A + b).$$

(b) Se A é um fechado, então $A + w$ é fechado. Esse fato também decorre do Lema 0.37.
(c) A é convexo se, e somente se, $A + w$ é convexo. A demonstração é direta.

Lema 0.76. *Todo espaço vetorial topológico V é um espaço de Hausdorff.*

Dica para a demonstração. Inicialmente, afirmamos que é possível separar $\mathbf{0}$ de qualquer vetor x não nulo. De fato, escolha uma vizinhança $B \subseteq (V \backslash \{x\})$ de $\mathbf{0}$. Uma vez que a adição é uma função contínua, existem vizinhanças A_1 e A_2 de $\mathbf{0}$ tais que $A_1 + A_2 \subseteq B$. Nesse caso, $x - A_2$ é uma vizinhança de x disjunta de A_1. Desse modo, separamos $\mathbf{0}$ e x. Agora, considere $x, y \in V$ distintos. Use a continuidade da função $v \in V \mapsto v - y \in V$ e o resultado acima para separar x e y. □

Proposição 0.77. *Sejam V um espaço vetorial topológico, $F \subseteq V$ um fechado e $K \subseteq V$ um compacto. Então, o conjunto $F + K := \{u + v : u \in F, v \in K\}$ é fechado.*

Dica para a demonstração. Obviamente, basta verificarmos que $\overline{F+K} \subseteq F + K$. Com esse objetivo, tome $p \in \overline{F+K}$ e indique por Λ o conjunto das vizinhanças de $\mathbf{0}$. Pela definição de fecho, $(p + A) \cap (F + K) \neq \emptyset$, qualquer que seja $A \in \Lambda$. Desse modo, podemos definir para todo $A \in \Lambda$ o conjunto não vazio $\mathcal{I}_A := (p + A - F) \cap K$. Use o Lema 0.64 para tomar

$$q \in \bigcap_{A \in \Lambda} \overline{\mathcal{I}_A}.$$

Note que, para empregar o resultado, é necessário observar o Lema 0.76. Decorre que $(q + A_1) \cap \mathcal{I}_{A_2} \neq \emptyset$ para quaisquer $A_1, A_2 \in \Lambda$. Logo, $(q + A_1 - A_2) \cap (p - F) \neq \emptyset$. Agora, pela continuidade da subtração, dado $B \in \Lambda$, existem $A_1, A_2 \in \Lambda$ tais que $A_2 - A_1 \subseteq B$. Por tudo isso, obtemos $(p - q + B) \cap F \neq \emptyset$ para cada $B \in \Lambda$. Assim, $p - q \in \overline{F} = F$. Consequentemente, $p = (p - q) + q \in F + K$. □

Também na Seção 0.7 veremos que todo espaço normado admite um *espaço dual*, o qual pode ser atribuído também aos espaços vetoriais topológicos. Uma das condições necessárias para que o dual de um espaço vetorial topológico V não seja trivial é a de que V seja *localmente convexo*.

Definição 0.78 (Espaço localmente convexo). *Um espaço vetorial topológico V no qual cada vizinhança de zero contém uma vizinhança de zero convexa é chamado espaço localmente convexo. Neste caso, dizemos que a topologia de V é uma topologia localmente convexa.*

Finalizamos a seção com um aviso que estabelece novas notações na obra.

Observação 0.79. Visto que em um único conjunto podem ser definidas diversas topologias, será muitas vezes necessário distingui-las quando falamos de fecho, separabilidade, continuidade e compacidade, entre outros conceitos. Por exemplo, mencionaremos que $f : X \to Y$ é τ_1-τ_2-contínua para esclarecer que, em X, estamos considerando a topologia τ_1 e, em Y, τ_2. Como outra ilustração, diremos que X é τ-compacto se, a partir de toda cobertura $\mathcal{C} \subseteq \tau$, podemos obter uma subcobertura $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ finita.

0.4 Espaços Métricos

Prosseguimos com o estudo de uma classe especial de espaços topológicos. Coloquialmente, a vantagem compreendida por esses espaços é a de que podemos “medir a distância” entre seus pontos. São os chamados *espaços métricos*.

Definição 0.80 (Métrica, espaço métrico). *Dado um conjunto X, uma métrica em X é uma função $d : X \times X \to [0, \infty)$ tal que, para quaisquer $x, y, z \in X$:*

(a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $d(x, y) = d(y, x)$;

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Se d é uma métrica em X, o par (X, d) é chamado de espaço métrico.

Designaremos um espaço métrico (X, d) por X quando d é conhecida ou arbitrária.

O próximo enunciado evidencia que, se X é um espaço métrico, todo subconjunto de X admite uma estrutura de espaço métrico. A demonstração foi omitida, pois é trivial.

Proposição 0.81. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $Y \subseteq X$. A métrica d restrita a Y é uma métrica em Y, isto é, $(Y, d|_Y)$ é um espaço métrico.*

$(Y, d|_Y)$ é chamado de **subespaço métrico** de (X, d).

Considere um espaço métrico X. Em seguida, destacaremos alguns subconjuntos de X.

Definição 0.82 (Bola aberta, bola fechada, esfera). *Dados um espaço métrico (X, d), $a \in X$ e $\epsilon > 0$, estabelecemos os seguintes conjuntos:*

(a) $B(a; \epsilon) := \{x \in X : d(x, a) < \epsilon\}$, *chamado bola aberta de centro a e raio ϵ.*

(b) $B[a; \epsilon] := \{x \in X : d(x, a) \leq \epsilon\}$, *que representa a bola fechada de centro a e raio ϵ.*

(c) $S(a; \epsilon) := \{x \in X : d(x, a) = \epsilon\}$, *nomeado esfera de centro a e raio ϵ.*

O resultado abaixo revela que todo espaço métrico é também um espaço topológico. A demonstração é direta.

Proposição 0.83. *Dado um espaço métrico (X, d), considere a família*

$$\tau_d := \{A \subseteq X : \textit{para todo } a \in A \textit{ existe } \epsilon > 0 \textit{ de modo que } B(a; \epsilon) \subseteq A\}.$$

Logo, τ_d é uma topologia em X.

A topologia τ_d descrita na proposição acima é nomeada **topologia induzida pela métrica** d.

Quando tratarmos um espaço métrico X como topológico, sem mencionar a topologia em X, ficará convencionado que estamos referindo-nos a τ_d. Por exemplo, dizemos que um espaço métrico X é separável se (X, τ_d) o for.

Exemplo 0.84. Obviamente, a função $d_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ expressa por:

$$d_{\mathbb{R}}(x, y) := |x - y| \quad x, y \in \mathbb{R},$$

é uma métrica em $\mathbb{R}$. Além disso, a topologia em $\mathbb{R}$ induzida por $d_{\mathbb{R}}$ é a topologia euclidiana, como se nota facilmente. Em adição, $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ é separável, pois $\mathbb{Q}$ é denso em $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$. Uma prova dessa afirmação consta em [24], p. 84.

Subespaços de espaços topológicos separáveis não são separáveis em geral. Por outro lado, a separabilidade de um espaço métrico é legada a seus subespaços.

Lema 0.85. *Considere um espaço métrico (X, d) separável e $Y \subseteq X$. Então, $(Y, d|_Y)$ é separável.*

Dica para a demonstração. Tome $E \subseteq X$ enumerável e denso em X. Fixe $e \in E$ e defina $\operatorname{dist}(e, Y) := \inf\{d(e, y) : y \in Y\}$. Em seguida, para cada $n \in \mathbb{N}$ escolha $y_{e,n} \in Y$ tal que $d(e, y_{e,n}) < \operatorname{dist}(e, Y) + 1/n$. Depois, permita que e varie em E e mostre que $F := \{y_{e,n} : e \in E, n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto de Y enumerável e denso em Y. $\square$

No lema adiante, caracterizaremos as funções contínuas entre espaços métricos, isto é, entre espaços topológicos oriundos de espaços métricos. A prova é simples e, portanto, foi omitida.

Lema 0.86. *Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Uma função $T : X_1 \to X_2$ é contínua no ponto $a \in X_1$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$d_1(a, x) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_2(T(a), T(x)) < \epsilon.$$

Em seguida, conheceremos o conceito de convergência em espaços métricos. Várias definições e conclusões posteriores são generalizações das conhecidas na Análise Real, quando consideramos o espaço métrico $\mathbb{R}$.

Definição 0.87 (Sequência limitada). *Dizemos que uma sequência (x_n) em um espaço métrico (X, d) é limitada se*

$$\sup_{m,n \in \mathbb{N}} d(x_n, x_m) \in \mathbb{R}.$$

Definição 0.88 (Limite). *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (X, d) é convergente se existe $x \in X$ tal que $\lim d(x_n, x) = 0$. Nesse caso, x é chamado de limite de (x_n), e escrevemos $\lim x_n = x$. Além disso, dizemos que (x_n) converge para x, indicando por $x_n \to x$.*

Lema 0.89. *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma sequência convergente em X é limitada e seu limite é único.*

Dica para a demonstração. (i) Suponha que $x_n \to x$. Então, existe M natural tal que $n > M \Rightarrow d(x_n, x) < 1$. Use a desigualdade triangular. (ii) Considere que $x_n \to x$ e $x_n \to y$. Use a desigualdade triangular para calcular $d(x, y)$. $\square$

Lema 0.90. *Considere um espaço métrico (X, d) e um conjunto $M \subseteq X$. Então:*

(a) *$x \in \overline{M}$ se, e somente se, existe uma sequência (x_n) em M tal que $\lim x_n = x$.*

(b) *M é fechado se, e somente se, toda sequência em M convergente tem limite em M.*

Dica para a demonstração. **(a)** **(⇒)** Se $x \in M$, basta tomar a sequência $(x, x, x, \ldots)$. Se x é ponto de acumulação de M, então, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in M \cap B(x, 1/n)$ diferente de x. Faça $n \to \infty$. **(⇐)** Uma vez que $\lim x_n = x$, para toda vizinhança B de x, existe N natural tal que $\{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots\} \subseteq B$.
(b) Use o item anterior. □

Proposição 0.91. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos e $f : X \to Y$. Então, f é contínua em $a \in X$ se, e somente se, para toda sequência (x_n) em X,*

$$x_n \to a \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(a).$$

Dica para a demonstração. **(⇒)** Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon$. Além disso, existe N suficientemente grande tal que $n > N \Rightarrow d(x_n, a) < \delta$.
(⇐) Suponha que f não seja contínua em a. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ cumprindo $d(x_n, a) < 1/n$ e $d'(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$. □

Definição 0.92 (Sequência de Cauchy[8]). *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (X, d) é de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$ existe N natural tal que*

$$m, n > N \quad \Rightarrow \quad d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Lema 0.93. *Toda sequência convergente em um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

Dica para a demonstração. Use a desigualdade triangular. □

Podemos nos perguntar como definir a noção de equivalência entre dois espaços métricos X e Y. É natural pensar que X e Y são equivalentes quando há uma bijeção entre os conjuntos que consiga preservar as distâncias.

Definição 0.94 (Isometria, espaços isométricos). *Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Dizemos que $T : X_1 \to X_2$ é uma isometria se, para quaisquer $a, b \in X_1$, $d_1(a, b) = d_2[T(a), T(b)]$. Dizemos que X_1 e X_2 são isométricos, e notamos $X_1 \cong X_2$, se existe uma isometria bijetiva $T : X_1 \to X_2$.*

Observação 0.95. **(a)** Toda isometria é uma função injetiva. A verificação é direta.
(b) Sejam (X, d) e (Y, d') espaços isométricos. Se (X, d) for separável, então (Y, d') é separável. Realmente, tome $M \subseteq X$ enumerável e denso e $f : X \to Y$ uma isometria bijetiva. Uma argumentação simples nos revela que $f(M)$ é denso em Y.

[8] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), matemático, engenheiro e físico francês. Vários resultados da Análise levam seu nome.

Em $\mathbb{R}$, toda sequência de Cauchy converge. Dessa propriedade não desfrutam todos os espaços métricos, mas sim, aqueles chamados *completos*. A seguir, salientamos esse novo conceito e examinamos alguns resultados relacionados.

Definição 0.96 (Espaço completo). *Um espaço métrico X é chamado completo quando toda sequência de Cauchy em X converge para um ponto de X.*

Proposição 0.97. *Dado um espaço métrico completo X, um subespaço $M \subseteq X$ é completo se, e somente se, M é fechado.*

Demonstração. Em primeiro lugar, suponha que M seja completo e tome $x \in \overline{M}$. Conforme o Lema 0.90, existe uma sequência (x_n) em M tal que $x_n \to x$. Dado que M é completo e (x_n) é de Cauchy, $x \in M$. Logo, $\overline{M} \subseteq M$, ou seja $M = \overline{M}$. Portanto, M é fechado.

Agora, admita que M seja fechado e tome uma sequência de Cauchy (x_n) em M. Uma vez que X é completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Assim, $x \in M$, pelo Lema 0.90. ∎

Lema 0.98 (Cantor[9]). *Suponha que X seja um espaço métrico completo e que existam uma sequência (x_n) em X e uma sequência (r_n) de números reais positivos que converge para 0, tais que:*

$$B[x_1, r_1] \supseteq B[x_2, r_2] \supseteq \cdots \supseteq B[x_n, r_n] \supseteq \cdots .$$

Nesse caso, existe $x \in X$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n] = \{x\}.$$

Demonstração. Primeiramente, veremos que (x_n) é de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$, escolha N natural tal que $r_N < \epsilon$. Assim, se $m \geq n > N$,

$$d(x_m, x_n) \leq r_n < r_N < \epsilon,$$

posto que $B[x_m, r_m] \subseteq B[x_n, r_n]$ e que $r_n \to 0$. Por essa razão, (x_n) é uma sequência de Cauchy. Logo, como X é completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Em seguida, uma vez que $\{x_m, x_{m+1}, \ldots\} \subseteq B[x_m, r_m]$ para qualquer $m \in \mathbb{N}$, temos

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n].$$

Agora, suponha que $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n]$. Então, para todo n natural,

[9]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), matemático alemão. É considerado o fundador da Teoria dos Conjuntos.

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq 2r_n.$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, concluímos que $d(x, y) = 0$, isto é, que $x = y$. Consequentemente,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n] = \{x\}.$$

■

Proposição 0.99 (Baire[10]). *Considere um espaço métrico completo X e uma coleção enumerável $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos abertos e densos em X. Logo, $D := \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ é denso em X.*

Demonstração. Seja $B(x, r)$ uma bola aberta em X. Por hipótese, podemos escolher um elemento $x_1 \in D_1 \cap B(x, r)$. Uma vez que $D_1 \cap B(x, r)$ é um aberto, existe $r_1 \in (0, 1)$ tal que $B[x_1, r_1] \subseteq D_1 \cap B(x, r)$. Após isso, selecione $x_2 \in D_2 \cap B(x_1, r_1)$. Novamente, existe $r_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $B[x_2, r_2] \subseteq D_2 \cap B(x_1, r_1)$. Continuando esse processo, obtemos uma sequência (x_n) em X e outra sequência (r_n) de reais positivos com limite 0 tais que:

$$B[x_{n+1}, r_{n+1}] \subseteq [D_{n+1} \cap B(x_n, r_n)] \subseteq B(x_n, r_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, aplicando o lema anterior, constatamos que

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} [D_n \cap B(x_n, r_n)] \subseteq D \cap B(x, r).$$

Assim, concluímos que todo aberto de X contém algum ponto de D. Portanto, D é denso em X. ■

Outra maneira de enunciar o Teorema de Baire é: "Em um espaço métrico completo, a união enumerável de conjuntos fechados e de interiores vazios tem interior vazio."

O conjunto dos espaços metrizáveis é "menor" que o dos espaços topológicos. Aos espaços topológicos que admitem alguma métrica "compatível" com a estrutura topológica, damos o nome de *espaços metrizáveis*.

Definição 0.100 (Espaço metrizável). *Um espaço topológico (X, τ) é metrizável se existe uma métrica em X que induz τ.*

Certamente o(a) leitor(a) sabe que, se $K \subseteq \mathbb{R}$ é compacto, então toda sequência em K possui uma subsequência convergente. Nosso último objetivo nesta seção é mostrar que o mesmo ocorre em todo espaço métrico compacto.

Definição 0.101 (Espaço sequencialmente compacto). *Um espaço métrico X é*

[10] René-Louis Baire (1874-1932), matemático francês. Sua principal área de estudo foi a Análise.

denominado sequencialmente compacto se toda sequência em X admite uma subsequência convergente.

Lema 0.102. *Um espaço métrico X é sequencialmente compacto se, e somente se, todo $Y \subseteq X$ infinito possui um ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja X sequencialmente compacto e tome $Y \subseteq X$ infinito. Admita, sem perda de generalidade, que (y_n) seja uma sequência em Y formada por termos distintos aos pares. Então, por hipótese, (y_n) possui uma subsequência convergente. Claramente, o limite dessa nova sequência é um ponto de acumulação de Y.

Reciprocamente, considere que todo subconjunto infinito de X possua um ponto de acumulação. Seja (x_n) uma sequência em X. Se algum dos pontos da sequência aparece infinitas vezes, então ela claramente possui subsequência convergente. Caso contrário, escolha uma subsequência (x_{n_k}) com termos distintos aos pares. Pela hipótese, o conjunto $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ admite um ponto de acumulação x. Logo, assim como na prova do Lema 0.90, podemos escolher uma subsequência de (x_{n_k}) que converge para x. Por isso, X é sequencialmente compacto. ■

Proposição 0.103. *Todo espaço métrico compacto é sequencialmente compacto.*

Demonstração. Considere um espaço métrico compacto X. Segundo o lema acima, basta mostrar que todo $Y \subseteq X$ infinito admite um ponto de acumulação. Com efeito, suponha que exista $Y \subseteq X$ infinito que não possua um ponto de acumulação. Então, decorre do Lema 0.37 e do Lema 0.55 que Y é compacto. Todavia, pela hipótese anterior, para cada $y \in Y$ existe um aberto A_y tal que $Y \cap A_y = \{y\}$. Desse modo, os abertos $\{y\}$, com y percorrendo Y, compõem uma cobertura de Y a partir da qual não é possível tomar subcobertura finita, já que Y é infinito. Mas isso contradiz a conclusão de que Y é compacto. ■

0.5 Análise Real

Em nosso texto, uma sequência (a_n) de números reais será chamada **crescente** se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n natural, e **decrescente** caso $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Lembramos ainda que uma sequência é **monótona** quando é crescente ou decrescente.

Iniciamos a seção examinando algumas propriedades das sequências de números reais.

Lema 0.104. *Toda sequência (a_n) em $\mathbb{R}$ possui uma subsequência monótona.*

Dica para a demonstração. Dizemos que um termo a_M é dominante se $n > M \Rightarrow a_n < a_M$. Construa uma subsequência de (a_n) monótona considerando dois casos: quando existem infinitos termos dominantes e quando não. □

Lema 0.105. *Toda sequência em $\mathbb{R}$ monótona e limitada é convergente.*

Dica para a demonstração. Seja (a_n) uma sequência crescente e limitada. Então, $s := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$, existe N número natural tal que $a_N > s - \epsilon$. Continue e mostre que $a_n \to s$. □

Proposição 0.106 (Bolzano[11], Weierstrass[12]). *Toda sequência em $\mathbb{R}$ limitada possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Decorre dos dois lemas acima. ■

Prosseguimos recordando enunciados pertencentes à teoria das funções reais.

Definição 0.107 (Função uniformemente contínua). *Considere uma função real f definida em $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que f é uniformemente contínua se, para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ de maneira que:*

$$x, y \in X,\ |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Proposição 0.108. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é uniformemente contínua.*

Dica para a demonstração. Suponha que f não seja uniformemente contínua. Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que, para cada número natural n existem $x_n, y_n \in [a, b]$ cumprindo $|x_n - y_n| < 1/n$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. De acordo com a Proposição 0.106, podemos tomar uma subsequência convergente (x_{n_k}). Então, por continuidade,

$$\lim_{k\to\infty} [f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})] = 0,$$

o que nos conduz a uma contradição. □

Definição 0.109 (Convergência uniforme). *Uma sequência de funções (f_n) de X em $\mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f_n(x)| < \epsilon,$$

seja qual for $x \in X$. Nesse caso, notamos: $f_n \xrightarrow{u} f$.

[11] Bernardus Placidus Johann Nepomuk Gonzal Bolzano (1781-1848), matemático, lógico, filósofo, teólogo e padre, nascido no Reino da Boêmia.

[12] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), matemático alemão. Vários teoremas da Análise levam seu nome.

Lema 0.110. *Seja (f_n) uma sequência de funções reais limitadas definidas em um conjunto X. Se $f_n \xrightarrow{u} f$, então f é limitada.*

Demonstração. Por hipótese, existe um número natural N tal que, se $n > N$,

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| < 1.$$

Então, pela desigualdade triangular,

$$\sup_{x \in X} |f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_{N+1}(x)| + 1 < \infty.$$

■

Definição 0.111 (Sequência de Cauchy). *Seja X um conjunto. Uma sequência de funções (f_n) de X nos reais chama-se sequência de Cauchy quando, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$m, n > N \quad \Rightarrow \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \qquad \forall\, x \in X.$$

Lema 0.112. *Uma sequência de funções (f_n) de $X \subseteq \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ converge uniformemente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.*

Dica para a demonstração. **($\Rightarrow$)** Suponha que $f_n \xrightarrow{u} f$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2\ \forall\, x \in X$. Tome $m, n > N$ e estime $|f_m(x) - f_n(x)|$. **($\Leftarrow$)** Defina $f : X \to \mathbb{R}$ por $f(x) := \lim f_n(x)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > N \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)|\ \forall\, x \in X$. Fixe n e x e faça $m \to \infty$. □

Proposição 0.113. *Seja a um ponto de acumulação de $X \subseteq \mathbb{R}$. Suponha ainda que (f_n) seja uma sequência de funções de X em $\mathbb{R}$ tal que $f_n \xrightarrow{u} f$, e que, para cada n número natural exista $L_n := \lim_{x \to a} f_n(x)$. Nessas condições:*

(a) *Existe $L := \lim L_n$.*

(b) *Tem-se $L = \lim_{x \to a} f(x)$.*

Dica para a demonstração. **(a)** Mostre que (L_n) é de Cauchy através da desigualdade

$$|L_m - L_n| \leq |L_m - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n|.$$

Note que é necessário usar o lema precedente.

(b) Temos

$$|f(x) - L| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L|.$$

□

Nosso próximo propósito é obter o Teorema do Valor Médio. Para tanto, contaremos com dois resultados.

Lema 0.114. *Suponha que* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *atinja um valor extremo absoluto em* x_0. *Se* f *é diferenciável em* x_0, *então* $f'(x_0)=0$.

Dica para a demonstração. Como $-f'(x_0)$ existe, considere, sem perda de generalidade, que f atinge um valor máximo absoluto em x_0. Seja $f'(x_0)>0$. Então, existem $\delta>0$ e $x\in\mathbb{R}$ tais que $x\in(x_0,x_0+\delta)\subseteq(a,b)$ e

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0.$$

Daí, $f(x)>f(x_0)$, uma contradição. Analogamente, $f'(x_0)$ não pode ser negativo. □

Proposição 0.115 (Rolle[13]). *Seja* f *uma função real contínua em* $[a,b]$ *e diferenciável em* (a,b). *Se* $f(a)=f(b)$, *então existe* $x\in(a,b)$ *tal que* $f'(x)=0$.

Dica para a demonstração. Use a Proposição 0.63 e o lema acima. □

Proposição 0.116 (Teorema do Valor Médio). *Considere* f *uma função real contínua em* $[a,b]$ *e diferenciável em* (a,b). *Nessas condições, existe* $x\in(a,b)$ *tal que*

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Dica para a demonstração. Tome

$$g(x):=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$$

e utilize a proposição anterior. □

Do Teorema do Valor Médio depende o fato que segue.

Proposição 0.117. *Seja* (f_n) *uma sequência de funções deriváveis no intervalo* $[a,b]$. *Suponha que exista* $c\in[a,b]$ *tal que* $(f_n(c))$ *converge. Além disso, considere que* (f_n') *convirja uniformemente em* $[a,b]$ *para uma função* g. *Então,* (f_n) *converge uniformemente em* $[a,b]$ *para uma função derivável* f *tal que* $f'=g$.

Dica para a demonstração. Fixe $n,m\in\mathbb{N}$. Pelo Teorema do Valor Médio, para todo $x\in[a,b]$ existe $d\in(\min\{c,x\},\max\{c,x\})$ tal que

$$f_m(x)-f_n(x)=f_m(c)-f_n(c)+(x-c)[f_m'(d)-f_n'(d)].$$

Das hipóteses sobre c e (f_n') decorre que (f_n) é de Cauchy. Logo, existe f tal que $f_n\xrightarrow{u}f$ em $[a,b]$. Em seguida, escolha $x_0\in[a,b]$ e mostre que, se

[13] Michel Rolle (1652-1719), matemático francês. Dedicou-se ao estudo da Análise.

$$q_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{e} \qquad q(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

então $q_n \xrightarrow{u} q$ em $[a,b]\backslash\{x_0\}$. Finalmente, empregue a Proposição 0.113. $\square$

A Análise Real está repleta de funções que assumem propriedades surpreendentes. Entre elas estão as funções que, embora diferenciáveis, não são monótonas em intervalo aberto algum! O enunciado abaixo garante que elas existem. Optamos por omitir a prova e indicar onde ela pode ser encontrada. O resultado será necessário na demonstração da Proposição 1.23 (p. 94), da qual decorrerá o Teorema 1.24 (p. 94).

Lema 0.118. *Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ disjuntos, enumeráveis e densos em $\mathbb{R}$. Existe uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que:*

$$\begin{cases} h'(a) > 0, & \forall\ a \in A, \\ h'(b) < 0, & \forall\ b \in B, \quad e \\ -1 < h'(x) < 1, & \forall\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dica para a demonstração. Consulte [20], p. 109. $\square$

Algumas de nossas considerações futuras dependem também do Teorema do Valor Médio para derivadas, exposto a seguir.

Lema 0.119 (Darboux[14]). *Considere um intervalo fechado I, dois pontos $a, b \in I$, com $a < b$, e uma função diferenciável $f : I \to \mathbb{R}$. Então, para qualquer k no intervalo aberto com extremidades $f'(a)$ e $f'(b)$, existe um $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = k$.*

Dica para a demonstração. Suponha que $f'(a) < k < f'(b)$ e estabeleça $g : I \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) := kx - f(x)$ para todo $x \in I$. Então, $g'(a) > 0$ e $g'(b) < 0$. Por isso, g assume um máximo local em algum $c \in (a,b)$. Segue que $g'(c) = 0$. $\square$

Notação 0.120. Dado $X \subseteq \mathbb{R}$, estabelecemos:

$$\mathcal{C}^1(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ é diferenciável e } f' \in \mathcal{C}(X)\}.$$

Nosso próximo intento é apresentar o Teorema Fundamental do Cálculo. Antes de exibi-lo, trazemos alguns conceitos.

Definição 0.121. *Uma partição do intervalo $[a,b]$ é um subconjunto finito $P \subseteq [a,b]$ tal que $a, b \in P$. Ao escrevermos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ convencionaremos que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.*

[14] Jean-Gaston Darboux (1842-1917), matemático francês. Fez importantes contribuições na Geometria e na Análise.

Definição 0.122 (Soma inferior, soma superior). *Suponha que* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *seja uma função limitada e que* $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ *seja uma partição de* $[a, b]$. *Para cada* $i \in [n]$, *indiquemos o ínfimo e o supremo dos valores de* f *em* $[t_{i-1}, t_i]$ *por* m_i *e* M_i, *respectivamente. Definimos a soma inferior* $s(f; P)$ *e a soma superior* $S(f; P)$ *de* f *em relação a* P *por:*

$$s(f; P) := \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \qquad e \qquad S(f; P) := \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Definição 0.123 (Função integrável, integral). *Uma função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitada é dita integrável quando*

$$\sup_P s(f; P) = \inf_P S(f; P),$$

sendo o supremo e o ínfimo tomados sobre o conjunto das partições de $[a, b]$. *Esse valor comum é chamado integral de* f *e indicado por* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Definição 0.124 (Primitiva, derivativa). *Chama-se primitiva de* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *tal que* $F' = f$. *Uma função que possui uma primitiva é chamada de derivativa.*

Proposição 0.125 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se uma função integrável* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *possui uma primitiva* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, *então* $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Demonstração. Seja $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$. De acordo com o Teorema do Valor Médio, para todo $i \in [n]$ existe $x_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que

$$F(a) - F(b) = \sum_{i=1}^{n} [F(t_i) - F(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Se m_i e M_i são, nessa ordem, o ínfimo e o supremo de f em $[t_{i-1}, t_i]$, temos $m_i \leq f(x_i) \leq M_i$ para qualquer $i \in [n]$. Por isso, $s(f; P) \leq F(b) - F(a) \leq S(f; P)$. Logo,

$$\sup_P s(f; P) \leq F(b) - F(a) \leq \inf_P S(f; P).$$

Portanto, como f é integrável, $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$. ∎

Encerramos a presente seção verificando que qualquer função contínua definida em um intervalo limitado e fechado é integrável. Para essa tarefa necessitamos de uma conclusão elementar, que é exibida na sequência. Sua prova decorre das definições de sup e inf.

Lema 0.126. *Sejam* A *e* B *conjuntos limitados e não vazios de números reais. Suponha que, para quaisquer* $a \in A$ *e* $b \in B$, *tenhamos* $a \leq b$. *Então,* $\sup A = \inf B$ *se, e somente se, para cada* $\epsilon > 0$ *existem* $a \in A$ *e* $b \in B$ *tais que* $b - a < \epsilon$.

Demonstração. A prova é direta. ■

Proposição 0.127. *Toda função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua é integrável.*

Dica para a demonstração. Tome $\epsilon > 0$. De acordo com a Proposição 0.108, existe $\delta > 0$ tal que:

$$x, y \in [a, b],\ |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Em seguida, seja $P_\epsilon := \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$ tal que $\max\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \ldots t_n - t_{n-1}\} < \delta$. Estime $S(f; P_\epsilon) - s(f; P_\epsilon)$ e use o lema precedente. □

0.6 Teoria da Medida e Integração

Em algumas de nossas futuras discussões, invocaremos um enunciado mais geral que a Proposição 0.125. Ele repousa na *Teoria da Integração de Lebesgue*[15]. A prova que encontramos para o resultado é complexa e, por isso, escolhemos omiti-la e indicar uma fonte. Veremos aqui apenas as definições e propriedades necessárias para anunciar a conclusão. Começamos fixando um conjunto X e distinguindo uma classe de subconjuntos de X.

Definição 0.128 (σ-álgebra, espaço mensurável). *Dado um conjunto X, uma família $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ é chamada σ-álgebra em X quando satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $X \in \Sigma$.

(b) *Se $A \in \Sigma$, então $X \backslash A \in \Sigma$.*

(c) *Se (A_n) é uma sequência em Σ, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.*

Um par (X, Σ), em que X é um conjunto e Σ é uma σ-álgebra em X, é denominado espaço mensurável. Qualquer conjunto $A \in \Sigma$ é chamado de conjunto Σ-mensurável.

Observação 0.129. Considere uma sequência (A_n) de elementos de uma σ-álgebra Σ. Os axiomas (b) e (c) da definição anterior garantem que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

Exemplo 0.130. Escolhido um conjunto X, existem duas σ-álgebras triviais em X: $\{\emptyset, X\}$ e $\mathcal{P}(X)$. Se $Y \subseteq X$, então $\{\emptyset, Y, X\backslash Y, X\}$ é outra σ-álgebra em X.

O exemplo precedente nos mostra que um conjunto X pode gerar vários espaços mensuráveis. Além disso, se $\{(X, \Sigma_i)\}_{i \in I}$ é uma família de espaços mensuráveis, então, claramente,

$$\left(X, \bigcap_{i \in I} \Sigma_i\right)$$

[15] Henri Léon Lebesgue (1875-1941), matemático francês. Foi o inventor de um método de integração poderoso, permitindo grande expansão da Teoria da Integração.

é um espaço mensurável. Por $\bigcap_{i\in I}\Sigma_i$ denotamos a coleção de todos os subconjuntos de X que pertencem a todos os Σ_i. Essa observação autoriza a definição adiante.

Definição 0.131 (σ-álgebra de Borel). *Considere um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ e seja τ a topologia em X induzida pela topologia euclidiana de $\mathbb{R}$. Em acréscimo, indique por $\{\Sigma_i : i \in I\}$ a família de todas as σ-álgebras em X que contêm τ. A σ-álgebra de Borel em X é definida por*

$$\mathrm{Bor}(X) := \bigcap_{i\in I}\Sigma_i.$$

Em seguida, apresentamos um gênero de funções especial em nossa teoria.

Definição 0.132 (Função mensurável). *Seja (X,Σ) um espaço mensurável. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é Σ-mensurável se, para cada conjunto aberto A em $\mathbb{R}$, $f^{-1}(A) \in \Sigma$.*

Observação 0.133. Sejam (X,Σ) um espaço mensurável e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função Σ-mensurável. Se $F \subseteq \mathbb{R}$ é um fechado, então $f^{-1}(F) \in \Sigma$. Esse fato é consequência da definição anterior e da propriedade (b) da Definição 0.128. Em particular, $f^{-1}(\{a\})$ é um conjunto Σ-mensurável, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 0.134. (a) Considere um espaço mensurável (X,Σ) e fixe $k \in \mathbb{R}$. A função $f : X \to \mathbb{R}$ de valor constante igual a k é Σ-mensurável.
(b) Dado um espaço mensurável (X,Σ), escolha $E \in \Sigma$ e defina $\mathbf{1}_E$ em X por:

$$\mathbf{1}_E(x) := \begin{cases} 0, & x \notin E \\ 1, & x \in E \end{cases}.$$

Nesse caso, $\mathbf{1}_E$ é Σ-mensurável.
(c) Obviamente, toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua é $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$-mensurável.

Adiante, conheceremos novas maneiras de se caracterizar uma função mensurável.

Lema 0.135. *Dado um espaço mensurável (X,Σ), seja $f : X \to \mathbb{R}$. As seguintes condições são equivalentes:*
(a) *f é Σ-mensurável.*
(b) *Para cada $k \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) < k\} \in \Sigma$.*
(c) *Para cada $k \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) \geq k\} \in \Sigma$.*
(d) *Para cada $k \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) > k\} \in \Sigma$.*
(e) *Para cada $k \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : f(x) \leq k\} \in \Sigma$.*

Dica para a demonstração. Pela Definição 0.128, vemos que (b) $\Leftrightarrow$ (c) e (d) $\Leftrightarrow$ (e). Além disso,

$$\{x \in X : f(x) \geq k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X : f(x) > k - 1/n\}.$$

Desse modo, (d) $\Rightarrow$ (c). Em adição,

$$\{x \in X : f(x) > k\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \geq k + 1/n\}.$$

Por isso, (c) $\Rightarrow$ (d) e obtemos, até o momento (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e). Também, trivialmente, (a) $\Rightarrow$ (b). Finalmente, admita que a condição (b) valha. Então, sabemos que (d) também é verdadeira. Agora, tome um aberto $A \subseteq \mathbb{R}$. Use a Observação 0.24 para concluir que $f^{-1}(A) \in \Sigma$. Desse modo, (b) $\Rightarrow$ (a). □

Observação 0.136. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é Σ-mensurável, então $|f|$ é Σ-mensurável. De fato, se $k < 0$, $\{x \in X : |f(x)| > k\} = X \in \Sigma$. Caso $k \geq 0$,

$$\{x \in X : |f(x)| > k\} = \{x \in X : f(x) > k\} \cup \{x \in X : f(x) < -k\} \in \Sigma,$$

pelo lema precedente.

Na sequência, enunciamos uma propriedade da qual nos valeremos no próximo capítulo.

Proposição 0.137. *Seja (f_n) uma sequência de funções reais definidas em X e Σ-mensuráveis. Se (f_n) converge pontualmente para f em X, então f é Σ-mensurável.*

Demonstração. Em primeiro lugar, tome as funções I e S definidas em X por:

$$I(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \quad \text{e} \quad S(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \qquad \forall\, x \in X.$$

Observe que, para qualquer $k \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in X : I(x) \geq k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \geq k\}$$

e

$$\{x \in X : S(x) > k\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > k\}.$$

Logo, visto que cada função f_n é Σ-mensurável, I e S são Σ-mensuráveis. Assim, como

$$f(x) = \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \sup_{n\geq 1} \left[\inf_{m\geq n} f_m(x)\right] \qquad \forall\, x \in X,$$

concluímos que f é Σ-mensurável. ■

Outro conceito de que necessitamos é o de *medida*. Trata-se de uma função que permitiremos mapear valores em $[0, \infty] = [0, \infty) \cup \{\infty\}$. Antes de apresentá-lo, devemos estabelecer alguma aritmética $[0, \infty]$. Para nossos propósitos, será suficiente convencionamos:

$$a + \infty = \infty + a = \infty \qquad \forall\, 0 \leq a \leq \infty.$$

Definição 0.138 (Medida, espaço de medida). *Seja (X, Σ) um espaço mensurável. Uma medida em Σ é uma função $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ tal que:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) *Se (E_n) é uma sequência de conjuntos pertencentes a Σ disjuntos aos pares, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \qquad (*)$$

Dados um espaço mensurável (X, Σ) e uma medida μ em Σ, o terno ordenado (X, Σ, μ) é chamado de espaço de medida.

Ressaltamos que se temos $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \infty$ em $(*)$, significa que $\mu(E_n) = \infty$ para algum n ou que a série diverge.

Observação 0.139. Considere um espaço de medida (X, Σ, μ) e $A, B \in \Sigma$ tais que $A \subseteq B$. Então, $\mu(A) \leq \mu(B)$. Com efeito,

$$\mu(B) = \mu[A \cup (B \backslash A)] = \mu(A) + (B \backslash A) \geq \mu(A),$$

pois μ é não negativa. Em particular, $\mu(X) \geq \mu(A)$ qualquer que seja $A \in \Sigma$.

Em nosso texto destaca-se uma medida, que conheceremos agora.

Proposição 0.140. *Existe uma única medida λ em* $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ *tal que, para todo intervalo aberto e limitado $E := (a, b)$ tem-se $\lambda(E) = b - a$.*

Dica para a demonstração. Consulte [5], p. 96-104. □

A medida λ anunciada na proposição anterior é chamada de **medida de Lebesgue**. Podemos defini-la no espaço mensurável $([a, b], \mathrm{Bor}([a, b]))$, de modo análogo ao apresentado acima.

Introduzimos adiante uma notação e uma definição elementar.

Notação 0.141. Dado um espaço mensurável (X, Σ), indicaremos por $\mathcal{M}^+(X, \Sigma)$ o conjunto das funções de X em $[0, \infty]$ que são Σ-mensuráveis.

Definição 0.142. *Seja X um conjunto. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é simples quando $f(X)$ é finito.*

Iniciamos a teoria de integração tomando funções simples em $\mathcal{M}^+(X, \Sigma)$. Fixamos aqui outra regra: $0 \cdot \infty = 0$.

Definição 0.143 (Integração de funções simples). *Considere um espaço de medida (X, Σ, μ) e uma função $h \in \mathcal{M}^+(X, \Sigma)$. Suponha que $h(X) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e, para cada $i \in [n]$ seja $E_i := h^{-1}(\{a_i\})$. Então, a integral de h em relação a μ é definida por:*

$$\int h \, d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i).$$

Note que a Observação 0.133 garante que os conjuntos E_i acima descritos estão no domínio de μ.

Adiante aprenderemos a integrar uma classe maior de funções.

Definição 0.144 (Integração em $\mathcal{M}^+$). *Se (X, Σ, μ) for um espaço de medida e f pertencer a $\mathcal{M}^+(X, \Sigma)$, definimos a integral de f em relação a μ por:*

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int h \, d\mu \right\},$$

em que o supremo é tomado sobre todas as funções simples $h \in \mathcal{M}^+(X, \Sigma)$ tais que, para cada $x \in X$, $h(x) \leq f(x)$.

Notação 0.145. Considere um espaço mensurável (X, Σ) e μ uma medida definida em Σ. O conjunto $L(X, \Sigma, \mu)$ consiste de todas as funções f reais Σ-mensuráveis tais que

$$\int |f| \, d\mu < \infty.$$

Observação 0.146. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida em que $\mu(X) < \infty$. Além disso, seja $f : X \to \mathbb{R}$ limitada e Σ-mensurável. Então, $f \in L(X, \Sigma, \mu)$. Realmente, da Definição 0.144 e da Observação 0.139, inferimos que

$$\int |f| \, d\mu \leq \sup_{x \in X} |f(x)| \cdot \mu(X) < \infty.$$

Finalmente, podemos exibir o resultado que será útil no próximo capítulo. A medida λ citada nesse enunciado é a medida de Lebesgue.

Lema 0.147. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $f' \in L([a, b], \mathrm{Bor}([a, b]), \lambda)$. Então, para todo $x \in [a, b]$,*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) \, dt.$$

Dica para a demonstração. Consulte [31], p. 149. □

0.7 Análise Funcional

A seção mais longa do presente capítulo é devotada ao objeto mais fundamental da Análise Funcional: os *espaços normados*.

Definição 0.148 (Norma, espaço normado). *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma norma em V é uma função $\| \cdot \| : V \to [0, \infty)$ tal que:*

(a) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}$;

(b) $\|kv\| = |k|\|v\|$ *para quaisquer* $k \in \mathbb{K}, v \in V$;

(c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *para quaisquer* $u, v \in V$.

Dados um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V e uma norma $\| \cdot \|$ em V, o par $(V, \| \cdot \|)$ é chamado de $\mathbb{K}$-espaço normado ou, simplesmente, de espaço normado.

Indicaremos um espaço normado $(V, \| \cdot \|)$ por V quando a norma é conhecida ou arbitrária. Estendendo a convenção feita na Seção 0.2, quando não mencionarmos o corpo de escalares $\mathbb{K}$ referente a um espaço normado, $\mathbb{K}$ pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemplo 0.149. Sejam A um conjunto arbitrário e $\mathcal{B}(A)$ a coleção de todas as funções de A em $\mathbb{R}$ limitadas. Claramente, $\mathcal{B}(A)$ com as operações usuais de soma e de produto por escalares reais é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Em acréscimo, a aplicação $\|\cdot\|_\infty$ que mapeia cada $x \in \mathcal{B}(A)$ no número

$$\|x\|_\infty := \sup_{t\in A} |x(t)|$$

é uma norma em $\mathcal{B}(A)$. A prova desse fato é direta.

De acordo com a Proposição 0.63, se K é um espaço compacto, $\mathcal{C}(K) \subseteq \mathcal{B}(K)$. Logo, $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em $\mathcal{C}(K)$. Essa função, que nomearemos *norma do sup*, será bastante empregada no texto.

Em espaços normados podemos calcular a distância entre um vetor e um conjunto.

Definição 0.150 (Distância entre vetor e conjunto). *Considere um espaço normado V, um subconjunto $W \subseteq V$ e um vetor $v \in V$. Então, o ínfimo do conjunto $\{\|v - w\| : w \in W\}$ é chamado de distância entre v e W e indicado por* $\operatorname{dist}(v, W)$.

Em um mesmo espaço vetorial podem ser definidas diferentes normas. Algumas delas são chamadas *equivalentes*.

Definição 0.151 (Equivalência de normas). *Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ normas definidas em V. Dizemos que tais funções são equivalentes, e indicamos $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, se existem números reais positivos α e β tais que, para todo $v \in V$, $\alpha\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \beta\|v\|_1$.*

Observação 0.152. Considere um espaço vetorial V e seja $\mathcal{N}$ o conjunto de todas as normas em V. Note que $\sim$ define uma relação de equivalência em $\mathcal{N}$.

A alegação abaixo revela que qualquer espaço normado tem uma estrutura natural de espaço métrico. A prova dessa afirmação é simples.

Proposição 0.153. *Dado um espaço normado $(V, \|\cdot\|)$, a função d definida em $V \times V$ por:*

$$d(u, v) := \|u - v\| \qquad \forall\, u, v \in V$$

é uma métrica em V.

A métrica d construída na proposição anterior é chamada de **métrica induzida pela norma** $\|\cdot\|$. Graças a essa correspondência, a notação utilizada na Definição 0.82 ganha sentido imediato nos espaços normados. Por exemplo, se a é um vetor de $(V, \|\cdot\|)$, $B(a; 1)$ representa o conjunto $\{v \in V : \|v - a\| < 1\}$. Além disso, quando V for um espaço normado, indicaremos $B_V := B[\boldsymbol{0}; 1]$ e $S_V := S(\boldsymbol{0}; 1)$.

Uma outra consequência é que todo espaço normado é um espaço topológico.

Proposição 0.154. *Se $(V, \|\cdot\|)$ for um espaço normado, o conjunto*

$$\{B(v; \epsilon) : v \in V, \epsilon > 0\}$$

é uma base para uma topologia em V.

Demonstração. A prova é direta. ■

A topologia em um espaço normado V oriunda da métrica induzida pela norma, a qual foi anunciada acima, é chamada de **topologia forte** em V.

Observação 0.155. Sejam V um espaço vetorial e $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ normas em V equivalentes. Então, usando a Definição 0.151 e a Proposição 0.33, podemos verificar que as topologias fortes em V induzidas por $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são iguais.

Suprimiremos o prefixo τ_F quando tratarmos de fecho, compacidade e continuidade. Assim, dizer que uma função entre espaços normados é contínua significa dizer que ela é τ_F-τ_F-contínua. Também, se V for um espaço normado e $V \backslash A \in \tau_F$, então A é um conjunto fechado.

Observação 0.156. Todo espaço normado é um espaço localmente convexo. De fato, dada uma vizinhança A de $\mathbf{0}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\mathbf{0}, \epsilon) \subseteq A$. Como $B(\mathbf{0}, \epsilon)$ é um convexo, a afirmação está provada.

Agora que sabemos como metrizar qualquer espaço normado, obtemos imediatamente um conceito de convergência em espaços normados.

Definição 0.157 (Limite). *Uma sequência (v_n) em um espaço normado V é convergente se existe $v \in V$ tal que $\lim \|v_n - v\| = 0$. Nesse caso, chamamos v de limite de (v_n). Além disso, dizemos que (v_n) converge para v, e indicamos $v_n \to v$.*

Definição 0.158 (Sequência de Cauchy). *Uma sequência (v_n) em um espaço normado $(V, \|\cdot\|)$ é de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$m, n > N \quad \Rightarrow \quad \|v_m - v_n\| < \epsilon.$$

Teoremas poderosos sobre espaços métricos, como o Teorema de Cantor e o Teorema de Baire, ocorrem quando a *completude* desses espaços está garantida. Analogamente, espaços normados provenientes de espaços métricos completos possuem peculiaridades valorosas. Eles são anunciados adiante.

Definição 0.159 (Espaço de Banach[16]). *Sejam V um espaço normado e d a métrica induzida pela norma de V. Dizemos que V é um espaço de Banach se (V, d) é um espaço métrico completo. Em outras palavras, V é um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em V converge.*

[16]Stefan Banach (1892-1945), matemático polonês. Foi personagem central no desenvolvimento da Análise Funcional.

Exemplo 0.160. $\mathbb{R}$, munido da função valor absoluto, é um espaço de Banach. Daremos apenas algumas sugestões para a prova. Suponha que (a_n) seja uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Então, fixado $\epsilon > 0$, existe N natural tal que

$$n, m > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - a_m| < \epsilon. \tag{1}$$

Em particular, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $n > N' \Rightarrow |a_n - a_{N'+1}| < 1$. Use a desigualdade triangular para mostrar que (a_n) é limitada. Também de (1) decorre que, quando $m > N$, $a_m + \epsilon$ é uma cota superior para $\{a_n : n > N\}$. Portanto, $\beta_N := \sup\{a_n : n > N\} \leq a_m + \epsilon$ para cada $m > N$. Logo, $\beta_N - \epsilon$ é uma cota inferior para $\{a_m : m > N\}$. Por isso,

$$\limsup a_n \leq \beta_N \leq \inf\{a_m : m > N\} + \epsilon \leq \liminf a_n + \epsilon.$$

Exemplo 0.161. $(\mathcal{B}(A), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Com efeito, seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}(A)$. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > N \Rightarrow \|f_m - f_n\|_\infty < \epsilon$. Deriva daí que:

$$m, n > N \quad \Rightarrow \quad |f_n(a) - f_m(a)| < \epsilon \tag{2}$$

para todo $a \in A$. Portanto, para qualquer $a \in A$, $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Uma vez que $\mathbb{R}$ é completo, podemos então definir $f : A \to \mathbb{R}$ por $f(a) := \lim f_n(a)$.

Agora, verificaremos que (f_n) converge uniformemente para f. De fato, fazendo $m \to \infty$ em (2), obtemos:

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |f_n(a) - f(a)| \leq \epsilon$$

para todo $a \in A$. Por essa razão, (f_n) converge uniformemente para f. O Lema 0.110 finaliza a prova, pois garante que $f \in \mathcal{B}(A)$.

Nossas discussões encerram três noções de convexidade em espaços métricos, as quais serão expostas a partir de agora. Obviamente, a primeira já é familiar ao(à) leitor(a).

Definição 0.162 (Conjunto convexo). *Considere um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V e um conjunto $C \subseteq V$. Dizemos que C é convexo se, para quaisquer $u, v \in C$ e $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha u + (1 - \alpha)v \in C$.*

Lema 0.163. *Suponha que V seja um espaço normado e que $C \subseteq V$ seja convexo. Então, $\overline{C}$ é convexo.*

Demonstração. Selecione $u, v \in \overline{C}$. Então, existem sequências (u_n) e (v_n) em C tais que $u_n \to u$ e $v_n \to v$. Porquanto C é convexo, $\alpha u_n + (1 - \alpha)v_n \in C$, quaisquer que sejam $\alpha \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\alpha u + (1 - \alpha)v = \lim[\alpha u_n + (1 - \alpha)v_n] \in \overline{C}$. ■

Definição 0.164 (Espaço estritamente convexo). *Um $\mathbb{R}$-espaço normado $(V, \|\cdot\|)$ é denominado estritamente convexo se, para quaisquer $u, v \in S_V$ distintos e $\alpha \in (0, 1)$,*

$$\|\alpha u + (1 - \alpha)v\| < 1.$$

Em outras palavras, se V é estritamente convexo, então todo elemento de S_V se comporta, em certo sentido, como um "vértice" da bola B_V. Para formalizarmos esse sentido, devemos esperar até o Capítulo 2.

Exemplo 0.165. Fixe $n \in \mathbb{N}$. O conjunto $\mathbb{R}^n$ munido da norma $\|\cdot\|$ dada por:

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

é um espaço estritamente convexo.

Definição 0.166 (Espaço uniformemente convexo). *Um espaço normado $(V, \|\cdot\|)$ é uniformemente convexo se, para cada $0 < \epsilon \leq 2$ existe $\delta > 0$ tal que:*

$$u, v \in B_V, \|u - v\| \geq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left\|\frac{u+v}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$

Sendo assim, em um espaço uniformemente convexo V, o ponto médio de qualquer segmento de reta em B_V se encontra fora da esfera S_V. Em particular, S_V não pode conter segmentos de reta, ou seja, coloquialmente, a esfera S_V deve ser "redonda".

A seguir, observaremos alguns fatos que envolvem o conceito de separabilidade em espaços métricos.

Exemplo 0.167. $\mathcal{C}([0,1])$ é separável. Realmente, escolha $f \in \mathcal{C}([0,1])$ e fixe $\epsilon > 0$. Começamos aproximando f por uma função poligonal, como ilustra a Figura 1.

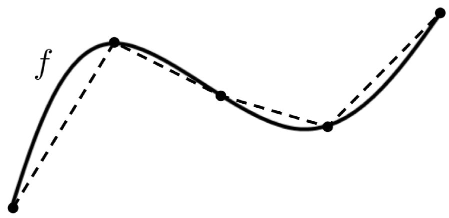

Figura 1: Aproximação de f por uma função poligonal.

Conforme a Proposição 0.108, f é uniformemente contínua. Nesse caso, existe n número natural tal que:

$$x, y \in [0,1], \ |x - y| \leq 1/n \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon. \tag{3}$$

Em seguida, seja g a função poligonal tal que:

$$\begin{cases} g(k/n) = f(k/n), & k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ g \text{ é afim em } \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right), & k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{cases}.$$

De (3), obtemos $\|f - g\|_\infty \leq \epsilon$.

Agora, consideremos outra função poligonal h, também com nós em k/n, com $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Além disso, h cumpre, para todo k:

$$\begin{cases} h(k/n) \in \mathbb{Q} \\ |g(k/n) - h(k/n)| < \epsilon \end{cases}.$$

Sendo assim, $\|g-h\|_\infty < \epsilon$ e, por isso, $\|f-h\|_\infty < 2\epsilon$. Visto que o conjunto das funções poligonais que tomam valores racionais nos nós $\{k/n\}_{k=0}^n$ é enumerável, a prova está completa.

Recorde que se V é um espaço vetorial e $U \subseteq V$ é um subespaço, então V/U designa o espaço quociente de V por U. Se V é normado com norma $\|\cdot\|$, então V/U admite naturalmente uma estrutura de espaço normado. De fato, $\|\cdot\|_Q : V/U \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\|v+U\|_Q := \inf\{\|v'\| : v'-v \in U\} \qquad \forall\ v \in V,$$

é obviamente uma norma. No resultado abaixo, estamos considerando o quociente como espaço topológico, com topologia induzida por $\|\cdot\|_Q$.

Lema 0.168. *Considere um espaço normado V e um subespaço U. Se V/U e U forem separáveis, então V é separável.*

Demonstração. Por hipótese, existe $\{c_n+U\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso em V/U e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso em U. Escolha $v \in V$ e considere a vizinhança $B(v;\delta)$ de v. Claramente, $B(v;\delta)+U$ é uma vizinhança de $v+U$ em V/U. Logo, existe um número natural k tal que $c_k+U \in B(v;\delta)+U$. Assim, existem $v' \in B(v;\delta)$ e $u \in U$ que cumprem $v' = c_k+u$. Portanto, pela densidade de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em U, podemos obter $l \in \mathbb{N}$ tal que $c_k+u_l \in B(v;\delta)$. Consequentemente, $\{c_n+u_m\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ é um subconjunto de V enumerável e denso. ■

O objeto que apresentaremos abaixo é conhecido pelo(a) leitor(a) que já estudou Álgebra Linear, ainda que em nível introdutório.

Definição 0.169 (Operador linear, funcional linear). *Sejam V e W $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Uma função $T : V \to W$ tal que:*
(a) $T(a+b) = T(a)+T(b) \quad \forall\ a,b \in V$;
(b) $T(ka) = kT(a) \quad \forall\ k \in \mathbb{K}, a \in V$,
é um operador linear. Em particular, se $W = \mathbb{K}$, então um operador linear de V em W é chamado de funcional linear.

Adiante, um resultado simples que abrange o conceito de isometria.

Lema 0.170. *Sejam V e W espaços normados e $T : V \to W$ uma isometria bijetiva. Então, $T(B_V) = B_W$.*

Demonstração. Visto que T preserva normas, $T(B_V) \subseteq B_W$.

Agora, tome $w \in B_W$. Como T é sobrejetiva, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Novamente, porque T é isometria, segue que $v \in B_V$. Por isso, $w \in T(B_V)$, isto é, $B_W \subseteq T(B_V)$. A igualdade está garantida. ■

O próximo objeto, por sua vez, é tema da Análise Funcional. Além de lineares, os operadores que veremos em seguida são contínuos.

Definição 0.171 (Operador linear limitado). *Sejam V e W espaços normados e um operador linear $T : V \to W$. Dizemos que T é limitado se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|T(v)\| \leq c\|v\|$ para todo $v \in V$. O conjunto de todos os operadores de V em W lineares e limitados será denotado por $\mathcal{B}(V, W)$.*

Exemplo 0.172. Considere um espaço compacto K, fixe $k \in K$ e defina $\delta_k : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$ por $\delta_k(x) := x(k)\ \forall\ x \in \mathcal{C}(K)$. Obviamente, δ_k é um operador linear. Além disso, $|\delta_k(x)| = |x(k)| \leq \|x\|_\infty$, qualquer que seja $x \in \mathcal{C}(K)$. Por isso, δ_k é limitado.

A próxima conclusão mostra-nos que $\mathcal{B}(V, W)$ pode ser disposto como espaço normado.

Proposição 0.173. *Sejam V e W $\mathbb{K}$-espaços normados. Então, $\mathcal{B}(V, W)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Além disso, a função $\|\cdot\|_* : \mathcal{B}(V, W) \to [0, \infty)$ dada por:*

$$\|T\|_* = \sup_{v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|}$$

é uma norma em $\mathcal{B}(V, W)$.

Demonstração. A prova é direta. ■

Agora, conheceremos outras maneiras de se calcular $\|T\|_*$.

Lema 0.174. *Considere V e W $\mathbb{K}$-espaços normados e $T \in \mathcal{B}(V, W)$. Então,*

$$\|T\|_* = \inf\{c > 0 : \|T(v)\| \leq c\|v\|\ \forall\ v \in V\} = \sup_{v \in B_V} \|T(v)\| = \sup_{v \in S_V} \|T(v)\|.$$

Demonstração. Quando $T = \mathbf{0}$, o resultado é trivial. Caso contrário, sejam:

$$m := \inf\{c > 0 : \|T(v)\| \leq c\|v\|, \forall\ v \in V\}, \quad s_1 := \sup_{v \in B_V} \|T(v)\| \quad \text{e} \quad s_2 := \sup_{v \in S_V} \|T(v)\|.$$

Por definição, $\|T(v)\| \leq \|T\|_*\|v\|\ \forall\ v \in V$. Logo, $m \leq \|T\|_*$. Além disso, se $c > 0$ e $\|T(v)\| \leq c\|v\|\ \forall\ v \in V$, então $\|T\|_* \leq c$. Por isso, $\|T\|_* \leq m$. Desse modo, $m = \|T\|_*$.

Se $\|v\| \leq 1$, segue que $\|T(v)\| \leq \|T\|_*\|v\| \leq \|T\|_*$. Assim, $s_1 \leq \|T\|_*$. Em acréscimo, suponha que $s_1 < \|T\|_*$ e tome $\epsilon := \|T\|_* - s_1$. Pela definição de $\|T\|_*$, existe $v \neq \mathbf{0}$ tal que

$$\frac{\|T(v)\|}{\|v\|} = \left\|T\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\| > \|T\|_* - \epsilon = s_1.$$

Uma vez que $\frac{v}{\|v\|}$ tem norma 1, chegamos a uma contradição. Em conclusão, $s_1 = \|T\|_*$. De modo similar, temos que $s_2 = \|T\|_*$. ■

Exemplo 0.175. No Exemplo 0.172, vimos que $\delta_k \in \mathcal{B}(\mathcal{C}(K), \mathbb{R})$. Agora, mostraremos que $\|\delta_k\|_* = 1$. Em primeiro lugar, usando o que já discutimos no exemplo mencionado e a primeira igualdade do lema acima, obtemos $\|\delta_k\|_* \leq 1$. Em seguida, seja $x_0 \in \mathcal{C}(K)$ a função de valor constante 1. Então, $\|x_0\|_\infty = 1$ e

$$\|\delta_k\|_* = \sup_{\|x\|_\infty=1} |\delta_k(x)| \geq |\delta_k(x_0)| = 1.$$

Combinando as desigualdades, conseguimos $\|\delta_k\|_* = 1$.

Observação 0.176. Se T for um operador linear limitado definido em V, escreveremos:

$$\|T\|_* = \sup_{v\neq \mathbf{0}} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|\leq 1} \|T(v)\| = \sup_{\|v\|=1} \|T(v)\|,$$

como é usual na literatura.

O resultado adiante revela-nos quando um operador linear entre espaços normados é contínuo, adotando-se as topologias fortes.

Lema 0.177. *Considere os espaços normados V e W, e um operador linear $T : V \to W$. Então:*

(a) *T é limitado se, e somente se, T é contínuo.*

(b) *Se T é contínuo em algum ponto, então T é contínuo.*

Demonstração. **(a)** Suponha que T seja limitado. Para $T = \mathbf{0}$, o resultado é obviamente válido. Então, admita que $T \neq \mathbf{0}$ e tome $v_0 \in V$ arbitrariamente. Observamos que, dado $\epsilon > 0$,

$$\|v - v_0\| < \frac{\epsilon}{\|T\|_*} \quad \Rightarrow \quad \|T(v) - T(v_0)\| = \|T(v - v_0)\| \leq \|T\|_* \|v - v_0\| < \epsilon.$$

Por essa razão, T é contínuo.

Reciprocamente, admita que T seja contínuo em $v_0 \in V$. Em particular, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|v - v_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|T(v) - T(v_0)\| < 1.$$

Em seguida, escolha $w \in V$ não nulo e indique $v_1 := v_0 + \frac{\delta}{2\|w\|} w$. Logo, já que T é linear,

$$\|T(v_1) - T(v_0)\| = \|T(v_1 - v_0)\| = \frac{\delta}{2\|w\|} \|T(w)\|.$$

Daí, posto que $\|v_1 - v_0\| = \delta/2 < \delta$, obtemos

$$\frac{\delta}{2\|w\|} \|T(w)\| < 1, \quad \text{isto é,} \quad \|T(w)\| < \frac{2}{\delta} \|w\|.$$

Portanto, T é limitado.

(b) Segue diretamente de (a). ■

Quando V é um $\mathbb{K}$-espaço normado, reservamos um nome espacial para $\mathcal{B}(V, \mathbb{K})$.

Definição 0.178 (Dual topológico). *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço normado. O conjunto dos funcionais lineares definidos em V que são τ_F-contínuos é chamado de espaço dual topológico de V e indicado por V^*.*

O enunciado abaixo aponta uma condição suficiente para que um funcional linear definido em um espaço normado seja contínuo. Nele, utilizamos uma propriedade elementar da Álgebra Linear: todo operador linear mapeia vetor nulo em vetor nulo.

Proposição 0.179. *Considere um espaço normado V e um funcional linear f definido em V. Se existe uma vizinhança A de $\mathbf{0}$ tal que $f(A)$ é limitado, então $f \in V^*$.*

Demonstração. Conforme o Lema 0.177, basta mostrar que f é contínua em $\mathbf{0}$. Assim, seja U uma vizinhança de 0. Como $f(A)$ é limitado e contém 0, existe $t > 0$ real tal que $f(A) \subseteq t \cdot U$. Por linearidade, $f(\frac{1}{t} \cdot A) \subseteq U$. Uma vez que $\frac{1}{t} \cdot A$ é aberto, concluímos que f é contínua em $\mathbf{0}$. ■

Uma vez que o dual topológico V^* de um espaço normado é outro espaço de norma $\|\cdot\|_*$, podemos obter o dual topológico de V^* de modo análogo ao feito para V.

Definição 0.180 (Espaço bidual). *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço normado. O conjunto dos funcionais lineares definidos em V^* e contínuos é chamado de espaço bidual de V e indicado por V^{**}.*

A norma definida em V^{**} pela aplicação da Proposição 0.173 será indicada por $\|\cdot\|_{**}$.

Neste momento, conheceremos um dos grandes teoremas da Análise Funcional: a *Propriedade da Limitação Uniforme*. Partiremos de uma hipótese pontual de limitação e conquistaremos uma limitação em sentido mais forte.

Proposição 0.181 (Banach, Steinhaus[17]). *Considere um espaço de Banach V, um espaço normado U e uma família $\{T_i\}_{i \in I}$ de elementos de $\mathcal{B}(V, U)$. Suponha que, para cada $v \in V$ exista um número real C_v tal que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(v)\| < C_v. \tag{4}$$

Então, $\sup_{i \in I} \|T_i\|_* < \infty$.

Demonstração. Por continuidade, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $i \in I$,

$$\{v \in V : \|T_i(v)\| \leq n\} = (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}([0, n])$$

é fechado. Logo, dado um número natural n,

$$A_n := \left\{v \in V : \sup_{i \in I} \|T_i(v)\| \leq n\right\} = \bigcap_{i \in I} \{v \in V : \|T_i(v)\| \leq n\}$$

é fechado. Da hipótese em (4) decorre que $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Desse modo, pelo Teorema de Baire (Proposição 0.99), existe $m \in \mathbb{N}$ tal que A_m tem interior não vazio. Por isso, podemos

[17] Władysław Hugo Dionizy Steinhaus (1887-1972), matemático e educador polonês. Colaborou com descobertas em diversas áreas da Matemática, tais como: Análise Funcional, Geometria e Lógica.

tomar $B(a;r) \subseteq A_m$. Em seguida, seja $u \in B_V$ arbitrário. Note que, se $w = a + ru$, então $\|w - a\| \leq r$, isto é, $w \in A_m$. Em vista disso, para qualquer $i \in I$,

$$\|T_i(u)\| = \frac{1}{r}\|T_i(w-a)\| \leq \frac{1}{r}(\|T_i(w)\| + \|T_i(a)\|) \leq \frac{2m}{r}.$$

Uma vez que m e r não dependem de $i \in I$ nem de $u \in B_V$, temos que

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_* \leq \frac{2m}{r}.$$

■

Seja V um espaço vetorial. Dados f e g funcionais lineares definidos em subconjuntos de V, diremos que g **estende** f, ou que g é uma **extensão** de f, se

$$\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g) \quad \text{e} \quad f(v) = g(v) \qquad \forall\, v \in \mathrm{Dom}(f).$$

Nosso objetivo subsequente é conhecer o importante *Teorema de Extensão de Hahn*[18]*-Banach* (Lema 0.183), o qual garante "extensão máxima" a funcionais lineares definidos em subespaços, sob algumas condições. Para tanto, expandiremos nossas fronteiras e conheceremos uma classe de funcionais mais geral que a dos funcionais lineares.

Definição 0.182 (Funcional sublinear positivamente homogêneo). *Dado um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V, nomeamos por funcional sublinear positivamente homogêneo uma função $p : V \to \mathbb{R}$ tal que, para todos $u, v \in V$ e $k \geq 0$,*

$$p(kv) = kp(v) \quad \text{e} \quad p(u+v) \leq p(u) + p(v).$$

Lema 0.183 (Hahn, Banach). *Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, $W \subseteq V$ um subespaço e p um funcional sublinear positivamente homogêneo definido em V. Se f for um funcional linear de domínio W tal que $f(w) \leq p(w)$ para cada $w \in W$, então existe um funcional linear F em V tal que $F|_W = f$ e $F(v) \leq p(v)$ qualquer que seja $v \in V$.*

Dica para a demonstração. Seja $\mathcal{E}$ o conjunto de todas as extensões lineares g de f tais que $g(v) \leq p(v)$ para todo $v \in \mathrm{Dom}(g)$. Estabeleça uma ordem parcial $\preceq$ em $\mathcal{E}$ expressa por:

$$g \preceq h \quad \Leftrightarrow \quad h \text{ é uma extensão de } g.$$

Tome uma cadeia $C \subseteq \mathcal{E}$ e defina $\widehat{g}$ em $\bigcup_{g \in C} \mathrm{Dom}(g)$ como $\widehat{g}(v) := g(v)$ se $v \in \mathrm{Dom}(g)$. Temos que $\widehat{g}$ está bem definida e é uma cota superior para C. Logo, pelo Lema de Zorn (Proposição 0.12), $\mathcal{E}$ apresenta um elemento maximal F.

Resta-nos provar que $\mathrm{Dom}(F) = V$. Supondo o contrário, tome $w \in V \setminus \mathrm{Dom}(F)$ e indique $U := \langle \mathrm{Dom}(F) \cup \{w\} \rangle$. Note que qualquer $u \in U$ pode ser escrito, de forma única, como $u = d + kw$, em que $d \in \mathrm{Dom}(F)$ e $k \in \mathbb{R}$. Então, mostraremos que existe $c \in \mathbb{R}$

[18] Hans Hahn (1879-1934), matemático austríaco. Análise Funcional, Topologia, Teoria dos Conjuntos e Análise Real são alguns dos ramos da matemática aos quais se dedicou.

tal que $h : U \to \mathbb{R}$ dada por $h(d + kw) := F(d) + kc$ pertence a $\mathcal{E}$. Isso nos conduz a um absurdo, pois $\mathrm{Dom}(F)$ está estritamente contido em U e F é maximal em $\mathcal{E}$. Com esse intento, sejam $a, b \in \mathrm{Dom}(F)$. Temos:

$$F(a) - F(b) \leq p(a + w) + p(-w - b), \quad \text{ou seja,} \quad -p(-w - b) - F(b) \leq p(a + w) - F(a).$$

Tome o supremo sobre $b \in \mathrm{Dom}(F)$ no primeiro membro e o ínfimo sobre $a \in \mathrm{Dom}(F)$ no segundo. Em seguida, denote por c a média aritmética dos dois valores anteriores. Dessa forma,

$$\begin{array}{ll} (i) & -p(-w - b) - F(b) \leq c \quad \forall\, b \in \mathrm{Dom}(F) \ \text{ e} \\ (ii) & c \leq p(a + w) - F(a) \quad \forall\, a \in \mathrm{Dom}(F). \end{array}$$

Por fim, escolha $u = d + kw$ em U. Se $k < 0$, substitua b por $\frac{d}{k}$ em (i) e multiplique a desigualdade por $-k$ para concluir que $h(u) \leq p(u)$. Caso $k > 0$, proceda de forma semelhante usando (ii). Quando $k = 0$, $h(u) \leq p(u)$ trivialmente. Do exposto, decorre que $h \in \mathcal{E}$, uma contradição. □

Prosseguimos expondo algumas conclusões provenientes do lema precedente.

Proposição 0.184. *Sejam V um espaço normado, $U \subseteq V$ um subespaço e $f \in U^*$. Então, existe $F \in V^*$ tal que F estende f e $\|F\|_{V^*} = \|f\|_{U^*}$, em que:*

$$\|F\|_{V^*} = \sup\{|F(v)| : v \in V, \|v\| = 1\} \quad e \quad \|f\|_{U^*} = \sup\{|f(u)| : u \in U, \|u\| = 1\}.$$

Dica para a demonstração. Para todo $u \in U$, defina $p(u) := \|f\|_{U^*}\|u\|$. Use o lema anterior. □

Proposição 0.185. *Suponha que V seja um espaço normado e que $v_0 \in V \backslash \{\mathbf{0}\}$. Então, existe $F \in V^*$ tal que $\|F\|_* = 1$ e $F(v_0) = \|v_0\|$.*

Dica para a demonstração. Defina f em $U := \langle v_0 \rangle$ por $f(kv_0) := k\|v_0\|$. Descubra que, para qualquer $x \in U$, $|f(x)| = \|x\|$ e, assim, que $\|f\|_{U^*} = 1$. Depois, aplique a proposição anterior. □

Corolário 0.186. *Se V for um espaço normado e $v \in V$, então*

$$\|v\| = \sup_{f \in V^* \backslash \{\mathbf{0}\}} \frac{|f(v)|}{\|f\|_*}.$$

Dica para a demonstração. $(\leq)$ Use a proposição precedente.
$(\geq)$ Note que $\|f(v)\| \leq \|f\|_*\|v\|$. □

Observação 0.187. Outra consequência imediata da Proposição 0.185 que julgamos válido destacar é enunciada a seguir. Dados um espaço normado V e um vetor não nulo $v_0 \in V$, existe $G \in V^*$ não nulo tal que $G(v_0) = 1$. Com efeito, faça $G := \frac{F}{\|v_0\|}$, em que F é o funcional obtido pela proposição citada.

Adiante, caminharemos rumo a duas consequências geométricas do Teorema de Extensão de Hahn-Banach. Iremos denominá-las por *Primeiro Teorema de Separação de Hahn-Banach* (Proposição 0.195) e *Segundo Teorema de Separação de Hahn-Banach* (Proposição 0.196). Iniciaremos com o conceito de *hiperplano* seguido de uma propriedade relacionada a ele.

Definição 0.188 (Hiperplano). *Dado um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V, um hiperplano de V é um conjunto da forma $H := \{v \in V : f(v) = k\}$, em que f é um funcional linear não nulo definido em V e k é uma constante real. Denotamos $H = [f = k]$.*

Proposição 0.189. *Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço normado e $H = [f = k]$ um hiperplano em V. Então, H é fechado se, e somente se, f é contínua.*

Demonstração. Se f for contínua, então H é fechado, pois é preimagem de um fechado.

Na outra direção, suponha que H seja fechado. Então, $V \backslash H$ é aberto. Além disso, já que f é não nulo, $V \backslash H \neq \emptyset$. Tome $v_0 \in V \backslash H$ e seja $f(v_0) < k$. Trata-se o outro caso analogamente. Em seguida, escolha $\epsilon > 0$ tal que $B(v_0; \epsilon) \subseteq V \backslash H$. Afirmamos que $f(v) < k$ para todo v em $B(v_0; \epsilon)$. De fato, considere que $u_0 \in B(v_0; \epsilon)$ e que $f(u_0) > k$. Daí, por convexidade, o vetor

$$\left(1 - \frac{f(u_0) - k}{f(u_0) - f(v_0)}\right) u_0 + \frac{f(u_0) - k}{f(u_0) - f(v_0)} v_0$$

está em $B(v_0; \epsilon)$ e é mapeado em k por f, o que é uma contradição. Logo, a afirmação está provada, e dela segue que $f(v_0 + \epsilon w) < k$ para todo $w \in B(\mathbf{0}; 1)$. Assim, $f(w) < \frac{1}{\epsilon}[k - f(v_0)]$, qualquer que seja $w \in B(\mathbf{0}; 1)$. Consequentemente, pela Proposição 0.179, f é contínua. ■

Os teoremas de separação que desejamos obter dependem ainda de conclusões acerca de um novo elemento de nossa teoria, o qual será anunciado na sequência.

Definição 0.190 (Funcional de Minkowski[19]). *Suponha que V seja um espaço vetorial e que $W \subseteq V$. A função $\mu_W : V \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\mu_W(v) := \inf\{\lambda > 0 : v/\lambda \in W\} \qquad \forall\, v \in V,$$

é denominada funcional de Minkowski em W.

Vejamos agora propriedades associadas a esse conceito.

Lema 0.191. *Considere um espaço vetorial real V e um convexo $C \subseteq V$ contendo $\mathbf{0}$. Então:*

(a) $\{v \in V : \mu_C(v) < 1\} \subseteq C \subseteq \{v \in V : \mu_C(v) \leq 1\}$.

(b) *Caso V for um espaço vetorial topológico e C for um aberto, temos $C = \{v \in V : \mu_C(v) < 1\}$.*

[19] Hermann Minkowski (1864-1909), matemático alemão. Dedicou-se, entre outras áreas, à Teoria dos Números.

(c) *Se V for um espaço normado e C for um fechado, temos $C = \{v \in V : \mu_C(v) \leq 1\}$.*

Demonstração. **(a)** Escolha $v \in V$ tal que $\mu_C(v) < 1$. Logo, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $v/\lambda \in C$. Segue por convexidade que

$$v = \lambda \frac{v}{\lambda} + (1-\lambda)\mathbf{0} \in C.$$

Por isso, a primeira inclusão vale. A segunda inclusão é óbvia, já que $v/1 \in C$ para todo $v \in C$.

(b) Mostraremos que $C \subseteq \{v \in V : \mu_C(v) < 1\}$, pois já garantimos a outra inclusão. Tome $c \in C$ e defina $f : \mathbb{R} \to V$ por $f(\lambda) := \lambda c$, qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Uma vez que C é aberto e f é contínua em $\lambda = 1$, existe $\delta > 1$ tal que $\delta c \in C$. Portanto, $\mu_C(c) \leq 1/\delta < 1$, como esperávamos.

(c) Escolhamos $v \in V$ tal que $\mu_C(v) = 1$ e provemos que $v \in C$. Pela definição de μ_C, existe uma sequência de reais (λ_n) convergindo para 1 tal que $\lambda_n > 1$ e $\frac{1}{\lambda_n}v \in C$ para todo n. Desse modo, $\frac{1}{\lambda_n}v \to v$. Decorre, pelas hipóteses sobre C, que

$$v = \lim \left(\frac{1}{\lambda_n} v + \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n} \mathbf{0} \right) \in C,$$

como desejado. De acordo com o item (a), a prova está completa. ■

Lema 0.192. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $C \subseteq V$ um convexo contendo $\mathbf{0}$ tais que $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda C = V$. Então, μ_C é um funcional sublinear positivamente homogêneo.*

Demonstração. Em primeiro lugar, comprovemos que μ_C é uma função com valores reais. Escolha $v \in V$. Por hipótese, existem $\lambda > 0$ e $c \in C$ tais que $v = \lambda c$. Logo, $v/\lambda \in C$. Por esse fato, $\mu_C(v) \in \mathbb{R}$.

Além do mais, dados $v \in V$ e $k \geq 0$,

$$\mu_C(kv) = \inf\{\lambda > 0 : (kv)/\lambda \in C\} = k \cdot \inf\{\lambda > 0 : v/\lambda \in C\} = k\mu_C(v).$$

Finalmente, sejam $v, w \in V$. Fixe $s > \mu_C(v)$ e $t > \mu_C(w)$. Por definição, existe $s_0 < s$ tal que $v/s_0 \in C$. Alegamos que $s_0 C \subseteq sC$. Realmente, $\mathbf{0} \in sC$ e, dado $c \in C$,

$$s_0 c = \frac{s_0}{s} sc + \left(1 - \frac{s_0}{s}\right) \mathbf{0} \in sC,$$

pela convexidade de sC. Assim, $v \in sC$. Analogamente, $w \in tC$. Logo, por convexidade,

$$v + w \in (s+t) \left(\frac{s}{s+t} C + \frac{t}{s+t} C \right) \subseteq (s+t)C.$$

Portanto, $\mu_C(v+w) \leq s + t$. Em vista da escolha de s e t, segue que $\mu_C(v+w) \leq \mu_C(v) + \mu_C(w)$. Concluímos que μ_C é um funcional sublinear positivamente homogêneo. ■

Observação 0.193. Se V for um espaço vetorial topológico sobre $\mathbb{R}$ e $C \subseteq V$ for um conjunto aberto e convexo que contém $\mathbf{0}$, então $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda C = V$. De fato, tome $v \in V$ e considere

$f_v : \mathbb{R} \to V$ dada por $f_v(\lambda) := \lambda v$. Assim, f é contínua e $f(0) = \mathbf{0} \in C$. Por essa razão, existe $\delta > 0$ tal que $\delta v \in C$. Logo, $v \in \frac{1}{\delta}C$. Assim, $V \subseteq \bigcup_{\lambda > 0} \lambda C$ e a alegação está provada, pois a outra inclusão é trivial.

O último requisito para os teoremas de separação é a proposição que segue.

Proposição 0.194. *Considere um $\mathbb{R}$-espaço vetorial topológico V, $C \subset V$ um conjunto aberto e convexo que contém $\mathbf{0}$ e $v_0 \in V \backslash C$. Nessas condições, existe um funcional linear e contínuo $F : V \to \mathbb{R}$ tal que $F(v_0) = 1$ e $F(c) < 1$ para todo $c \in C$.*

Demonstração. Defina $f : \langle v_0 \rangle \to \mathbb{R}$ por $f(kv_0) := k$ para cada $k \in \mathbb{R}$. Claramente, f é linear. Agora mostraremos que $f(v) \leq \mu_C(v)$ para cada $v \in \langle v_0 \rangle$. De fato, se $k < 0$ $f(kv_0) = k < 0 \leq \mu_C(kv_0)$, obviamente. Finalmente, caso $k \geq 0$, temos

$$f(kv_0) = k \leq k\mu_C(v_0) = \mu_C(kv_0),$$

visto que $\mu_C(v_0) \geq 1$ pelo Lema 0.191. Decorre do Teorema de Extensão de Hahn-Banach (Lema 0.183) que existe um funcional linear $F : V \to \mathbb{R}$ tal que F estende f e $F(v) \leq \mu_C(v)$ para qualquer $v \in V$. Observe que $F(v_0) = 1$ e que, pelo Lema 0.191, $F(v) < 1$ quando $v \in C$.

Em seguida, veremos que F é contínuo. Por linearidade, basta verificarmos que F é contínuo na origem. Para tanto, fixe $\epsilon > 0$. Encontraremos uma vizinhança $A_\epsilon \subseteq V$ de $\mathbf{0}$ tal que $F(A_\epsilon) \subseteq (-\epsilon, \epsilon)$. Com esse propósito, tome $A_\epsilon := (-\epsilon C) \cap (\epsilon C)$, que é um conjunto não vazio, pois $\mathbf{0} \in A_\epsilon$. Então, para cada $a \in A_\epsilon$, $\pm a \in \epsilon C$, isto é, $\pm a/\epsilon \in C$. Logo, pelo Lema 0.191, $\mu_C(\pm a) < \epsilon$ para todo $a \in A_\epsilon$. Isso implica que $|F(a)| < \epsilon$ quando $a \in A_\epsilon$ e a prova se encerra. ∎

Proposição 0.195 (Hahn, Banach). *Considere um $\mathbb{R}$-espaço vetorial topológico V e dois subconjuntos de V não vazios, disjuntos e convexos A e B. Se A for aberto, então existem um funcional linear contínuo $F : V \to \mathbb{R}$ e um número real k tais que:*

$$F(a) < k \leq F(b) \qquad \forall\, a \in A, b \in B.$$

Demonstração. Fixe $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ e defina:

$$C := A - B - a_0 + b_0 = \{a - b - a_0 + b_0 : a \in A, b \in B\}.$$

Conforme a Observação 0.75,

$$C = \bigcup_{b \in B} (A - b - a_0 + b_0)$$

é aberto. Além disso, facilmente descobrimos que C é convexo e $\mathbf{0} \in C$. Em adição, $b_0 - a_0 \notin C$, pois $A \cap B = \emptyset$. Desse modo, decorre da proposição precedente que existe um funcional linear e contínuo $F : V \to \mathbb{R}$ tal que $F(b_0 - a_0) = 1$ e $F(c) < 1$ para todo $c \in C$. Pela definição de C segue que para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$ temos

$F(a-b-a_0+b_0) < F(b_0-a_0)$, ou seja, $F(a) < F(b)$. Indicando $k := \inf_{b \in B} F(b)$ concluímos que

$$F(a) \leq k \leq F(b) \qquad \forall\, a \in A, b \in B. \tag{5}$$

Resta-nos provar que $F(a) < k$ para todo $a \in A$. Com esse propósito, suponha que exista $x \in A$ tal que $F(x) = k$. Seja $h : \mathbb{R} \to V$ dada pela lei: $h(\lambda) := x + \lambda(b_0 - a_0)$, em que $\lambda \in \mathbb{R}$. Como h é contínua em $\lambda = 0$ e A é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $x + \epsilon(b_0 - a_0) \in A$. Logo, segundo (5), $F(x + \epsilon(b_0 - a_0)) \leq k$. Todavia, dessa expressão obtemos $\epsilon \leq 0$, o que é uma contradição. ■

Proposição 0.196 (Hahn, Banach). *Seja V um $\mathbb{R}$-espaço localmente convexo e sejam C e D subconjuntos de V não vazios, convexos e disjuntos. Considere que C seja um compacto e D seja um fechado. Então, existem um funcional linear contínuo $F : V \to \mathbb{R}$ e números $k, l \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$F(c) \leq k < l \leq F(d) \qquad \forall\, c \in C, d \in D.$$

Demonstração. Adote $B := D - C$. Claramente, B é convexo e $\mathbf{0} \notin B$. Em adição, B é fechado, conforme a Proposição 0.77. Então, visto que V é localmente convexo, existe um conjunto aberto e convexo $A \subseteq V \backslash B$ contendo o vetor nulo. Assim, pela proposição anterior, existem um funcional linear contínuo $F : V \to \mathbb{R}$ e um número real r tais que:

$$F(a) < r \leq F(b) \qquad \forall\, a \in A, b \in B.$$

Note que $r > 0$ já que $\mathbf{0} \in A$ e $F(\mathbf{0}) = 0$. Logo, pela linearidade de F, encontramos:

$$0 < r \leq F(d) - F(c) \qquad \forall\, c \in C, d \in D.$$

Portanto, tomando $k := \sup_{c \in C} F(c)$ e $l := \inf_{d \in D} F(d)$ temos:

$$F(c) \leq k < l \leq F(d) \qquad \forall\, c \in C, d \in D,$$

como desejado. ■

Corolário 0.197. *Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço normado e $U \subseteq V$ um subespaço. Então, U é denso em V se, e somente se, o único $f \in V^*$ que anula U é o funcional nulo (isto é, também anula V).*

Demonstração. Admita que $\overline{U} = V$ e que $f \in V^*$ anula U. Depois, tome $v \in V$. Por densidade, existe uma sequência (u_n) em U tal que $u_n \to v$. Então, pela continuidade de f, $f(u_n) \to f(v)$. Logo, $f(v) = 0$, ou seja, f é o vetor nulo de V^*.

Reciprocamente, suponha que $\overline{U} \neq V$ e tome $v_0 \in V \backslash \overline{U}$. Observe que o Lema 0.163 revela que $\overline{U}$ é convexo. Pela proposição precedente, existem $f \in V^*$ e $k \in \mathbb{R}$ tais que $f(u) < k < f(v_0)$ para qualquer $u \in U$. Uma vez que U é um subespaço vetorial, decorre que $f(u) = 0$ para todo $u \in U$. Concluímos que f é um funcional não nulo de V^* que anula U. ■

Encerradas as consequências geométricas do Teorema de Extensão de Hahn-Banach, veremos a seguir um resultado que não depende do teorema, mas que envolve a noção de separação.

Proposição 0.198. *Seja U um subespaço fechado de um $\mathbb{R}$-espaço normado V. Se $v_0 \notin U$, então existe $F \in S_{V^*}$ tal que $F(v) = 0$ para qualquer $v \in U$ e $F(v_0) = \operatorname{dist}(v_0, U)$.*

Demonstração. Indique $d := \operatorname{dist}(v_0, U)$ e $W := \langle U \cup \{v_0\} \rangle$. Considere a função $f : W \to \mathbb{R}$ dada por $f(u + kv_0) := kd$, em que $u \in U$ e $k \in \mathbb{R}$. Mostraremos, em primeiro lugar, que f está bem determinada. Suponha que $u_1 + k_1 v_0 = u_2 + k_2 v_0$, em que $u_1, u_2 \in U$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Então, $u_1 - u_2 = (k_2 - k_1)v_0$. Uma vez que U é um subespaço e não contém v_0, segue que $u_1 = u_2$ e $k_1 = k_2$, como esperávamos. Além do mais, f é claramente linear.

Em adição, para todo $w = u + kv_0 \in W$ não nulo,

$$f(w) = kd = \frac{kd\|w\|}{\|u + kv_0\|} = \frac{d\|w\|}{\|v_0 - (-\frac{u}{k})\|} \leq \frac{d\|w\|}{d} = \|w\|.$$

Portanto, $\|f\|_{W^*} \leq 1$. Por outro lado, pela definição de d, existe uma sequência (u_n) em U tal que $\|u_n - v_0\| \to d$. Também, $f|_U = \mathbf{0}$. Assim, para todo número natural n,

$$d = |-1d| = |f(u_n - v_0)| \leq \|f\|_{W^*} \|u_n - v_0\|.$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, conseguimos $d \leq \|f\|_{W^*} d$. Em vista disso, temos $\|f\|_{W^*} = 1$ e $f(v_0) = d$. Finalmente, pela Proposição 0.184, o resultado segue. ■

Finalizamos esta seção introduzindo um conceito e verificando um resultado simples relacionado a ele.

Definição 0.199 (Operador adjunto). *Sejam V e W espaços de Banach e $T \in \mathcal{B}(V, W)$. O operador $T^* : W^* \to V^*$ tal que, dado $\gamma \in W^*$,*

$$[T^*(\gamma)](v) = \gamma[T(v)] \qquad \forall\, v \in V$$

é chamado de adjunto de T.

Lema 0.200. *Considere os espaços de Banach V e W e seja $T \in \mathcal{B}(V, W)$. Então:*
(a) *T^* é linear.*
(b) *T^* é limitado.*
(c) *T^* é uma isometria bijetiva quando T for uma isometria bijetiva.*

Demonstração. **(a)** A prova é direta.
(b) Qualquer que seja $\gamma \in W^*$,

$$\|T^*(\gamma)\|_* = \sup_{\|v\|\leq 1} |[T^*(\gamma)](v)| = \sup_{\|v\|\leq 1} |\gamma[T(v)]| \leq \sup_{\|v\|\leq 1} \|\gamma\|_* |T(v)| = \|\gamma\|_* \|T\|_*.$$

Portanto, T^* é limitado.

(c) Suponha que T seja uma isometria bijetiva. Depois, admita que $T^*(\gamma) = T^*(\theta)$. Logo, para todo $v \in V$, $\gamma[T(v)] = \theta[T(v)]$. Posto que T é sobrejetiva, temos $\gamma(w) = \theta(w)$ para cada $w \in W$. Assim, $\gamma = \theta$ e T^* é injetiva.

Agora, tome $\theta \in V^*$. Já que T é uma isometria bijetiva, T^{-1} é contínua. Por isso, $\theta \circ T^{-1} \in W^*$ e $T^*(\theta \circ T^{-1}) = \theta$. Concluímos que T^* é sobrejetiva.

Finalmente, dado $\gamma \in W^*$, decorre das hipóteses sobre T que

$$\|T^*(\gamma)\|_* = \sup_{\|v\|\leq 1} |\gamma[T(v)]| = \sup_{\|w\|\leq 1} |\gamma(w)| = \|\gamma\|_*.$$

Dessa forma, T^* é uma isometria. ■

0.8 Topologias fracas

Começamos com uma definição.

Definição 0.201 (Dual algébrico). *Dado um espaço vetorial V o conjunto V' de todos os funcionais lineares definidos em V é denominado espaço dual algébrico de V.*

Dados um espaço vetorial V e uma família $\mathcal{F} \subseteq V'$, considere a tarefa de se definir uma topologia τ em V tal que todo $f \in \mathcal{F}$ seja contínuo em relação a ela. Poderíamos nos contentar em escolher $\tau = \mathcal{P}(X)$, o que tornaria contínuo todo elemento de V'. Contudo, há um revés nessa escolha: quando "aumentamos" τ, podemos "aumentar a chance" de um elemento de V' ser contínuo, mas podemos também "diminuir o número" de compactos de τ. Para perceber isso, basta observar o Lema 0.40 e a Definição 0.51.

Esta seção nos orientará diante dessa indecisão. Na sequência, temos um resultado topológico fundamental.

Proposição 0.202. *Sejam X um conjunto, $\{Y_i\}_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos e $\{f_i\}_{i\in I}$ uma coleção de funções da forma $f_i : X \to Y_i$. Para cada $i \in I$ e cada aberto A_i em Y_i, considere o conjunto:*

$$f_i^{-1}(A_i) := \{x \in X : f_i(x) \in A_i\}.$$

Além disso, seja $\mathcal{B}$ a coleção de todas as interseções finitas de conjuntos da forma $f_i^{-1}(A_i)$. Então, existe uma topologia τ em X que tem $\mathcal{B}$ como base.

Demonstração. Basta mostrar que a família formada por todas as uniões de elementos de $\mathcal{B}$ é uma topologia em X. A prova é direta. ■

A topologia τ obtida na proposição anterior é denominada **topologia gerada** por $\{f_i\}_{i\in I}$.

Notação 0.203. Dado um espaço vetorial V, tome $v_0 \in V$, $\mathcal{F} \subseteq V'$, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ e $\epsilon > 0$. Indicamos:

$$U(v_0; f_1, \ldots, f_n; \epsilon) := \{v \in V : |f_i(v) - f_i(v_0)| < \epsilon \ \ \forall\, i \in [n]\}.$$

Repare que $U(v_0; f_1, \ldots, f_n; \epsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}[(f_i(v_0) - \epsilon, f_i(v_0) + \epsilon)]$. Logo, a família de todos os conjuntos da forma $U(v_0; f_1, \ldots, f_n; \epsilon)$, em que $v_0 \in V$, $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ e $\epsilon > 0$ é uma base para a topologia em V gerada por $\mathcal{F}$.

Continuando, exibimos um enunciado simples que envolve a Definição 0.74.

Lema 0.204. *Considere que V seja um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e tome $\mathcal{F} \subseteq V'$. Dessa forma, V, munido da topologia gerada por $\mathcal{F}$, é um espaço vetorial topológico.*

Dica para a demonstração. Seja $\psi : V \times V \to V$ tal que $\psi(u, v) := u + v$. Dada a vizinhança $U(\mathbf{0}; f_1, \ldots, f_n; \epsilon)$ do vetor nulo de V, mostre que

$$\psi(U(\mathbf{0}; f_1, \ldots, f_n; \epsilon/2) \times U(\mathbf{0}; f_1, \ldots, f_n; \epsilon/2)) \subseteq U(\mathbf{0}; f_1, \ldots, f_n; \epsilon).$$

Depois, aplique o Lema 0.177. De modo semelhante, verifique que $\varphi : \mathbb{R} \times V \to V$ tal que $\varphi(k, v) := kv$ é contínua.

Trataremos, neste momento, um caso específico do problema apresentado no início da seção. Fixado um espaço normado V, suponha que queiramos definir em V uma topologia que preserve a continuidade dos elementos de V^* e que "maximize" o número de compactos. Estamos falando da *topologia fraca* em V.

Definição 0.205 (Topologia fraca). *A topologia fraca no espaço normado V, denotada por $\tau_w(V, V^*)$, é a topologia gerada pelos elementos de V^*.*

Quando V for conhecido, indicaremos $\tau_w(V, V^*)$ por τ_w. Em acréscimo, dados um espaço normado V e $A \subseteq V$, o τ_w-fecho de A será sinalizado por $\overline{A}^w$. Repare que $\tau_w \subseteq \tau_F$.

Em seguida, verificaremos algumas características elementares que envolvem a topologia fraca.

Lema 0.206. *Considere um $\mathbb{R}$-espaço normado V e um conjunto $C \subseteq V$ convexo. Então,*
(a) *C é fechado se, e somente se, é τ_w-fechado.*
(b) $\overline{C} = \overline{C}^w$.

Dica para a demonstração. **(a)** **($\Rightarrow$)** Se $C = V$, o resultado é imediato. Senão, tome $v_0 \in V \backslash C$. Use a Proposição 0.196 para obter uma vizinhança de v_0 na topologia fraca disjunta de C.
($\Leftarrow$) Trivial.
(b) Aplique o τ_w-fecho em $C \subseteq \overline{C}$ e use (a) para concluir que $\overline{C}^w \subseteq \overline{C}$. Depois, proceda de modo similar com $C \subseteq \overline{C}^w$.

Lema 0.207. *Suponha que V seja um $\mathbb{R}$-espaço normado. Então, (V, τ_w) é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração. Sejam u e v pontos distintos de V. Pelo Segundo Teorema de Separação de Hahn-Banach, existem $f \in V^*$ e $k \in \mathbb{R}$ tais que $u \in f^{-1}\{(-\infty, k)\}$ e $v \in f^{-1}\{(k, \infty)\}$, isto é, u e v pertencem a abertos da topologia fraca disjuntos. Sendo u e v arbitrários, segue que (V, τ_w) é de Hausdorff. ■

Neste momento, apresentaremos um gênero de funcionais definidos no espaço dual V^* que participará de muitas discussões dos capítulos 3 e 4.

Proposição 0.208. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço normado e fixe $v \in V$. Defina $\delta_v : V^* \to \mathbb{K}$ por $\delta_v(f) := f(v)$ para todo $f \in V^*$. Nesse caso:*
(a) $\delta_v \in V^{**}$.
(b) *A função $J : V \to V^{**}$ que associa cada $v \in V$ ao funcional δ_v é uma isometria linear.*

Demonstração. **(a)** Claramente, δ_v é linear. Além do mais,

$$\sup_{\|f\|_* \le 1} |\delta_v(f)| = \sup_{\|f\|_* \le 1} |f(v)| \le \sup_{\|f\|_* \le 1} \|f\|_* \|v\| \le \|v\|.$$

Logo, δ_v é também contínuo. Portanto, $\delta_v \in V^{**}$.
(b) A linearidade de J também se verifica facilmente. Em acréscimo, usando o Corolário 0.186, temos:

$$\|\delta_v\|_{**} = \sup_{f \neq \mathbf{0}} \frac{|\delta_v(f)|}{\|f\|_*} = \sup_{f \neq \mathbf{0}} \frac{|f(v)|}{\|f\|_*} = \|v\|.$$

■

Escolha um espaço normado V. O resultado anterior revela-nos que existe uma isometria bijetiva entre V e um subconjunto de V^{**}. Quando esse subconjunto for o próprio bidual, alcançamos uma classe especial de espaços.

Definição 0.209 (Espaço reflexivo). *Um $\mathbb{K}$-espaço normado V é nomeado reflexivo se a aplicação J definida na Proposição 0.208 é sobrejetiva, isto é, se $J(V) = V^{**}$.*

O próximo resultado revela que, quando V é um espaço de Banach, sua reflexividade depende da reflexividade de V^*.

Lema 0.210. *Seja V um espaço de Banach. Então, V é reflexivo se, e somente se, V^* é reflexivo.*

Dica para a demonstração. (⇒) Além de $J : V \to V^{**}$, considere $J^* : V^* \to V^{***}$ tal que $[J^*(f)](\gamma) = \gamma(f)$. Tome $\Lambda \in V^{***}$. Precisamos mostrar que existe $g \in V^*$ tal que $\Lambda = J^*(g)$. Faça $g := \Lambda \circ J$ e use a reflexividade de V.
(⇐) Em primeiro lugar, mostre que $J(V)$ é um subespaço fechado de V^{**}. Para isso, observe que J é uma isometria linear e que V é de Banach. Em seguida, suponha que $\gamma \in V^{**} \backslash J(V)$. Decorre da Proposição 0.198 e da reflexividade de V^* que existe $f \in V^*$ tal que $\Lambda = J^*(f)$, em que Λ é conforme o funcional na tese da proposição citada. Por um lado, $f(v) = 0 \ \forall \ v \in V$. Por outro, $\gamma(f) \neq 0$, uma contradição. □

Observação 0.211. Seja V um espaço normado. Então, $J(B_V)$ é fechado em V^{**}. Para demonstrarmos isso, iniciamos tomando uma sequência (δ_{v_n}) em $J(B_V)$ tal que $\delta_{v_n} \to \gamma \in V^{**}$. Conforme o Lema 0.90, basta mostrarmos que $\gamma \in J(B_V)$ para concluirmos a demonstração. E, realmente, uma vez que J é uma isometria e B_V é um fechado, existe $v \in B_V$ tal que $v_n \to v$. Assim, $\gamma = \delta_v \in J(B_V)$, como queríamos.

O dual de um espaço normado, além das topologias forte e fraca, admite outra topologia importante. Abaixo, iremos apresentá-la e, posteriormente, observaremos algumas propriedades interessantes relacionadas a ela.

Definição 0.212 (Topologia fraca-estrela). *A topologia fraca-estrela no dual V^* do espaço normado V, simbolizada por $\tau_*(V^*, V)$, é a topologia gerada pelos elementos de*

$$J(V) := \{\delta_v : v \in V\}.$$

Informalmente, $\tau_*(V^*, V)$ é a “menor” topologia em V^* em que todo elemento de $J(V)$ é contínuo.

Quando não houver risco de ambiguidade, indicaremos $\tau_*(V, V^*)$ como τ_*. Além disso, se V é um espaço normado e $A \subseteq V^*$, o τ_*-fecho de A será representado por $\overline{A}^*$.

Observação 0.213. Admita que V seja um espaço normado e que $K \subseteq V^*$ seja compacto. Então, K é τ_*-compacto. Com efeito, uma vez que $\tau_* \subseteq \tau_F$, essa afirmação segue facilmente pela definição de compacidade.

A seguir, anunciamos algumas propriedades importantes da topologia τ_*.

Proposição 0.214. *Dados $\gamma_0 \in V^*$, $\epsilon > 0$ e um conjunto finito $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ em V, considere a coleção:*

$$U(\gamma_0; v_1, v_2, \ldots, v_k; \epsilon) := \{\gamma \in V^* \ : \ |\gamma(v_i) - \gamma_0(v_i)| < \epsilon \quad \forall\, i \in [k]\}.$$

Então, $U(\gamma_0; v_1, v_2, \ldots, v_k; \epsilon)$ é uma vizinhança de γ_0 para a topologia fraca-estrela. Uma base de vizinhanças de γ_0 em τ_* é obtida ao variarmos $k \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ e $v_i \in V$, para $i \in [k]$.

Demonstração. Para provar a primeira alegação, escrevemos:

$$\begin{aligned} U(\gamma_0; v_1, v_2, \ldots, v_k; \epsilon) &= \{\gamma \in V^* \ : \ \gamma_0(v_i) - \epsilon < \gamma(v_i) < \gamma_0(v_i) + \epsilon \ \ \forall\, i \in [k]\} \\ &= \{\gamma \in V^* \ : \ \delta_{v_i}(\gamma) \in (\gamma_0(v_i) - \epsilon, \gamma_0(v_i) + \epsilon) \ \ \forall\, i \in [k]\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{k} \delta_{v_i}^{-1}\{(\gamma_0(v_i) - \epsilon, \gamma_0(v_i) + \epsilon)\}. \end{aligned}$$

A segunda afirmação é óbvia. ■

Lema 0.215. *Seja V um espaço normado real. Então, (V^*, τ_*) é de Hausdorff.*

Demonstração. Escolha $f_1, f_2 \in V^*$ disjuntos. Então, existe $v \in V$ tal que $f_1(v) \neq f_2(v)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $f_1(v) < k < f_2(v)$. Então, f_1 e f_2 pertencem a elementos disjuntos de τ_*, pois $f_1 \in \delta_v^{-1}\{(-\infty, k)\}$ e $f_2 \in \delta_v^{-1}\{(k, \infty)\}$. ■

Proposição 0.216. *A topologia τ_* no espaço normado V^* é localmente convexa.*

Demonstração. Mostraremos que todo $U = U(\gamma; v_1, v_2, \ldots, v_k; \epsilon) \in \tau_*$ é convexo, o que garante o resultado. De fato, escolha $\gamma_1, \gamma_2 \in U$ e $t \in [0, 1]$. Então, para todo $i \in [k]$,

$$\begin{aligned} |[t\gamma_1 + (1-t)\gamma_2](v_i) - \gamma(v_i)| &= |t\gamma_1(v_i) + (1-t)\gamma_2(v_i) - t\gamma(v_i) - (1-t)\gamma(v_i)| \\ &\leq t|\gamma_1(v_i) - \gamma(v_i)| + (1-t)|\gamma_2(v_i) - \gamma(v_i)| \\ &< t\epsilon + (1-t)\epsilon \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $t\gamma_1 + (1-t)\gamma_2 \in U$. Desse modo, U é convexo. ■

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço normado. Por definição, todo funcional linear da forma $\delta_v : V^* \to \mathbb{K}$ é τ_*-contínuo. Através dos dois enunciados adiante veremos que vale a recíproca: qualquer funcional linear $\gamma : V^* \to \mathbb{K}$ contínuo na topologia fraca-estrela é um elemento de $J(V)$.

Lema 0.217. *Suponha que V seja um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e que $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ sejam funcionais lineares definidos em V. Se $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_i) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, então f é uma combinação linear de $f_1, f_2, \ldots, f_n$, isto é, existem $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$ tais que $f = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i$.*

Demonstração. Considere as transformações lineares $T : V \to \mathbb{K}^n$ e $U : T(V) \to \mathbb{K}$ dadas por:

$$T(v) := (f_1(v), \ldots, f_n(v)) \qquad \text{e} \qquad U(f_1(v), \ldots, f_n(v)) := f(v)$$

para cada $v \in V$. Verifiquemos que U está bem definida. Seja $(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = (f_1(y), \ldots, f_n(y))$. Então, por linearidade, $x - y \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_i) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Desse modo, $f(x-y) = 0$, ou seja, $f(x) = f(y)$, como esperávamos. Além disso, U é linear. Assim, podemos empregar o Teorema de Extensão de Hahn-Banach e tomar $\widetilde{U} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ extensão linear de U. Logo, uma vez que $\widetilde{U}$ é uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita, existem $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$f(v) = U(f_1(v), \ldots, f_n(v)) = \widetilde{U}(f_1(v), \ldots, f_n(v)) = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(v),$$

qualquer que seja $v \in V$. ■

Proposição 0.218. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço normado e $\gamma : V^* \to \mathbb{K}$ um funcional linear τ_*-contínuo. Então, existe $v \in V$ tal que $\gamma = \delta_v$.*

Demonstração. Dado que γ é τ_*-contínuo e $\gamma(\mathbf{0}) = 0$, existe uma vizinhança $U = U(\mathbf{0}; v_1, v_2, \ldots, v_n; \epsilon)$ da origem de V^* na topologia fraca-estrela tal que $|\gamma(f)| < 1$ para todo $f \in U$. Afirmamos que $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\delta_{v_i}) \subseteq \mathrm{Ker}(\gamma)$. Realmente, suponha que $\delta_{v_i}(f) = f(v_i) = 0$ para cada $i \in [n]$. Isso implica que $mf \in U$, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. Portanto, para todo número natural m temos $|\gamma(mf)| < 1$, isto é, $|\gamma(f)| < 1/m$. Assim, $|\gamma(f)| = 0$ e $f \in \mathrm{Ker}(\gamma)$. Desse modo, verificamos a afirmação. Em seguida, pelo lema anterior, existem $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$ tais que $\gamma = \sum_{i=1}^{n} k_i \delta_{v_i}$. Indicando $v := \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$, segue que $\gamma = \delta_v$. ■

Em seguida apresentamos outras propriedades da topologia fraca-estrela.

Lema 0.219. *Sejam V um espaço normado e Y um espaço topológico. Então, uma aplicação $\gamma : Y \to V^*$ é τ_*-contínua se, e somente se, $\delta_v \circ \gamma : Y \to \mathbb{R}$ é contínua para todo $v \in V$.*

Dica para a demonstração. **($\Rightarrow$)** Trivial.
($\Leftarrow$) Tome um aberto $A \subseteq V^*$ na topologia fraca-estrela e expresse-o considerando a base sugerida pela Proposição 0.214. Adiante, calcule $\gamma^{-1}(A)$ lembrando-se de que a inversa de uma função preserva uniões e interseções. □

Lema 0.220 (Banach, Alaoglu[20]). *Considere que V seja um espaço normado. Então, o conjunto B_{V^*} é τ_*-compacto.*

[20]Leonidas Alaoglu (1914-1981), matemático americano. Contribuiu em áreas como Topologia e Análise Funcional.

Dica para a demonstração. Para cada $v \in V$, considere $I_v := [-\|v\|, \|v\|]$. Pelo Teorema de Tychonoff (Proposição 0.73), $P := \prod_{v \in V} I_v$ é um espaço topológico compacto. Defina $\varphi : B_{V^*} \to P$ por $\varphi(f) := (f(v))_{v \in V}$. Claramente, φ é injetiva. Use o Lema 0.47 e o lema precedente para mostrar que φ e φ^{-1} são τ_*-contínuas. Resta-nos agora constatar que $I_\varphi := \varphi(B_{V^*})$ é fechado. Para tanto, tome $F = (F_v)_{v \in V} \in \overline{I_\varphi}$. Verifique que $f : V \to \mathbb{R}$ dada por $f(v) := F_v$ está em B_{V^*}. Daí, $F = (f(v))_{v \in V}$ e $F \in I_\varphi$. □

Proposição 0.221. *Considere um espaço de Banach V e um conjunto $U \subseteq V^*$. Então, U é τ_*-compacto se, e somente se, U é τ_*-fechado e limitado em norma.*

Demonstração. Suponha que U seja compacto na topologia fraca-estrela. Uma vez que (V^*, τ_*) é de Hausdorff, U é τ_*-fechado. Além disso, o Lema 0.61 mostrou-nos que a imagem contínua de compacto é compacto. Sendo assim, para todo $v \in V$,

$$\sup_{f \in U} |f(v)| = \sup_{f \in U} |\delta_v(f)| < \infty.$$

Por essa razão, do Princípio da Limitação Uniforme (Proposição 0.181) segue que $\sup_{f \in U} \|f\|_*$ é um número real. Logo, U é limitado em norma.

Reciprocamente, admita que U seja τ_*-fechado e limitado em norma. Assim, existe $t > 0$ tal que $U \subseteq t \cdot B_{V^*}$. Portanto, decorre do Teorema de Banach-Alaoglu e do Lema 0.55 que U é compacto na topologia fraca-estrela. ■

Prosseguimos exibindo dois resultados que associam metrizabilidade e separabilidade nas topologias fracas.

Lema 0.222. *Seja V um espaço normado. Então, V é separável se, e somente se, B_{V^*} é τ_*-metrizável.*

Dica para a demonstração. ($\Rightarrow$) Tome $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B_V$ denso em B_V. Defina d em $B_{V^*} \times B_{V^*}$ por:

$$d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f(x_n) - g(x_n)|.$$

Então, d é uma métrica em B_{V^*}. Resta-nos mostrar que a topologia induzida por d é a topologia induzida em B_{V^*} por τ_*. Faremos isso invocando a Proposição 0.33.

Para tanto, fixamos $f_0 \in B_{V^*}$ e tomamos uma vizinhança

$$U := \{f \in B_{V^*} : |f(v_i) - f_0(v_i)| < \epsilon, \ \forall\, i \in [m]\}$$

de f_0 na topologia fraca-estrela de B_{V^*}. Suponha, sem perda de generalidade, que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$ são não nulos. Além disso, indique $M := \max\{\|v_1\|, \ldots, \|v_m\|\}$, $\delta := \epsilon/M$ e $u_i := \frac{v_i}{\|v_i\|}$ para cada $i \in [m]$. Por densidade, para todo $i \in [m]$ existe um número natural n_i tal que $\|x_{n_i} - u_i\| < \delta/4$. Escolha $r > 0$ tal que

$$r < \min\left\{\frac{\delta}{2^{n_i+1}} : i \in [m]\right\}.$$

Logo, se $f \in B_{V^*}$ e $d(f, f_0) < r$,

$$\begin{array}{rcl} |f(u_i) - f_0(u_i)| & = & |f(u_i - x_{n_i}) - f_0(u_i - x_{n_i}) + f(x_{n_i}) - f_0(x_{n_i})| \\ & \leq & \|f - f_0\|_* \|u_i - x_{n_i}\| + |f(x_{n_i}) - f_0(x_{n_i})| \\ & < & (\|f\| + \|f_0\|_*)\frac{\delta}{4} + r \cdot 2^{n_i} \\ & \leq & \delta \end{array}$$

para todo $i \in [m]$. Sendo assim,

$$B(f_0; r) := \{f \in B_{V^*} : d(f, f_0) < r\} \subseteq \{f \in B_{V^*} : |f(u_i) - f_0(u_i)| < \delta \ \ \forall\, i \in [m]\} \subseteq U.$$

Agora, considere a bola aberta $B(f_0; r_0)$ do espaço métrico (B_{V^*}, d). Tome $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{r_0}{4}.$$

Em seguida, escolha $0 < \epsilon < r_0/2$ e defina $W := \{f \in B_{V^*} : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \epsilon \ \ \forall\, i \in [m]\}$. Então, $W \subseteq B(f_0, r_0)$, pois, dado $f \in W$,

$$\begin{array}{rcl} d(f, f_0) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i}|f(x_i) - f_0(x_i)| + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}|f(x_i) - f_0(x_i)| \\ & < & \epsilon \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i}\right) + \|f - f_0\|_* \left(\displaystyle\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\|x_i\|\right) \\ & < & r_0. \end{array}$$

($\Leftarrow$) Seja d a métrica que induz a topologia τ_* em B_{V^*}. Para cada $n \in \mathbb{N}$, indique $B_n := \{f \in B_{V^*} : d(f, \mathbf{0}) < 1/n\}$ e seja $A_n \subseteq B_n$ uma vizinhança de $\mathbf{0}$ na topologia fraca-estrela de V^*. Podemos considerar que $A_n = \{f \in B_{V^*} : |f(v)| < \epsilon_n, \ \forall\, v \in \Omega_n\}$, sendo $\epsilon_n > 0$ e Ω_n um subconjunto finito de V. Agora, defina $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Se $f \in V^*$ anula D, então $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, isto é, $f = \mathbf{0}$. Então, de acordo com o Corolário 0.197, $\langle D \rangle$ é denso em V. □

Lema 0.223. *Seja V um espaço de Banach. Então, V^* é separável se, e somente se, B_V é τ_w-metrizável.*

Dica para a demonstração. **($\Rightarrow$)** Use argumentos análogos ao empregados no lema precedente.

($\Leftarrow$) Seja d uma métrica em B_V que induz a mesma topologia que $\tau_w(V, V^*)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, indique $P_n := \{v \in B_V : d(v, \mathbf{0}) < 1/n\}$. Em seguida, para todo n número natural tome uma vizinhança fraca Q_n de $\mathbf{0}$ tal que $Q_n \subseteq P_n$. Admita que

$$Q_n := \{v \in V : |f(v)| < \epsilon_n, \quad \forall\, f \in \Omega_n\},$$

sendo $\epsilon_n > 0$ e $\Omega_n \subseteq V^*$ finito. Depois, represente por U o subespaço de V^* gerado por $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$.

Afirmamos que U é denso em V^*, o que garante o resultado desejado. Com efeito, suponha que $\overline{U} \neq V^*$. Decorre do Corolário 0.197 que existem $\rho \in V^{**}$ e $g \in V^*$ tais que:

$$\|\rho\|_{**} = 1, \qquad \rho(g) > 1 \qquad \text{e} \qquad \rho(f) = 0 \;\; \forall\, f \in U.$$

Agora, defina $W := \{v \in B_V : |g(v)| < 1/2\}$. Então, existe um número natural $m \geq 1$ tal que $Q_m \subseteq W$. Além disso, existe $v_0 \in B_V$ satisfazendo:

$$\begin{cases} |f(v_0) - \rho(f)| < \epsilon_m & \forall\, f \in \Omega_m, \\ |g(v_0) - \rho(g)| < 1/2. \end{cases}$$

Do exposto, deduzimos que $v_0 \in Q_m$ e que $|g(v_0)| > 1/2$, o que não pode ocorrer. □

Nosso último propósito nesta seção é exibir um resultado que associa o conceito geométrico de convexidade uniforme ao de reflexividade. Para tanto, precisamos de um enunciado importante, chamado de *Teorema de Goldstine*[21] (Proposição 0.226). Este teorema, por sua vez, depende do enunciado que segue.

Lema 0.224. *Considere que C seja um subconjunto convexo e fechado de um $\mathbb{R}$-espaço normado V. Se $v_0 \notin C$, então existe $f \in V^*$ tal que $f(v_0) > \sup\{f(c) : c \in C\}$.*

Demonstração. A princípio, suponha que $\mathbf{0} \in C$. Indicando $\delta := \operatorname{dist}(v_0, C)$, temos $\delta > 0$, já que C é fechado. Agora, considere $D := \{v \in V : \operatorname{dist}(v, C) \leq \delta/2\}$. Visto que $\mathbf{0} \in C$, conseguimos $\frac{\delta}{4} B_V \subseteq D$. Logo, $\mathbf{0} \in \operatorname{Int}(D)$. Além disso, D é fechado. De fato, seja (d_n) uma sequência em D com limite d. Usando a desigualdade:

$$\|d - c\| \leq \|d - d_n\| + \|d_n - c\|$$

e aplicando os conceitos de convergência e de ínfimo, constatamos que $d \in D$. Por isso, D é fechado. Em adição, D é convexo. Também, $v_0 \notin D$, porquanto $\operatorname{dist}(v_0, C) = \delta > \delta/2$. Concluímos, conforme o Lema 0.191, que $\mu_D(v_0) > 1$.

Em seguida, defina $f : \langle v_0 \rangle \to \mathbb{R}$ por $f(kv_0) := k\mu_D(v_0)$ para cada escalar k. Afirmamos que $f \leq \mu_D$ em $\langle v_0 \rangle$. Por certo, se $k \geq 0$, então, pela definição de μ_D, $f(kv_0) = k\mu_D(v_0) = \mu_D(kv_0)$. Caso $k < 0$, $f(kv_0) = k\mu_D(v_0) < 0 \leq \mu_D(kv_0)$. Logo, amparados pelo Lema 0.192 e pelo Lema 0.183, obtemos um funcional linear F definido em V tal que $F \leq \mu_D$ em V.

Quando $v = \frac{v}{1} \in D$, $\mu_D(v) \leq 1$. Por isso, $F(v) \leq \mu_D(v) \leq 1$ para cada $v \in D$. Além do mais, já que $\mathbf{0} \in \operatorname{Int}(D)$, F é limitado em uma vizinhança da origem. Assim, pela Proposição 0.179, $F \in V^*$. Por fim, $F(v_0) = f(v_0) = \mu_D(v_0) > 1 \geq \sup\{F(c) : c \in C\}$, pois $C \subseteq D$.

[21]Herman Heine Goldstine (1913-2004), matemático e cientista da computação americano.

Para tratar o caso geral, fixe $c_0 \in C$ e aplique o resultado obtido para o subconjunto $C - c_0$ e o vetor $v_0 - c_0$. ■

Corolário 0.225. *Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço normado e $C \subseteq V$ um aberto e convexo. Dado $v_0 \notin C$, existe $\gamma \in V^*$ tal que $\gamma(c) < \gamma(v_0)$ para todo $c \in C$.*

Demonstração. Fixe $c_0 \in C$ e considere $D := C - c_0$ e $y := v_0 - c_0$. Após isso, estabeleça $f : \langle y \rangle \to \mathbb{R}$ tal que $f(ky) := k\mu_D(y)$ para cada escalar k. Como na proposição acima, verifica-se que $f \leq \mu_D$ em $\langle y \rangle$ e que existe $F \in V^*$ tal que $F \leq \mu_D$ em V. Em seguida, note que D é aberto e que $y \notin D$. Desse modo, Lema 0.191 garante-nos que $F(y) = f(y) = \mu_D(y) \geq 1$. Também, pelo mesmo resultado, $F(d) \leq \mu_D(d) < 1$ se $d \in D$. Portanto, $F(d) < F(y)$, qualquer que seja $d \in D$. Logo, $F(c - c_0) < F(v_0 - c_0)$ para cada $c \in C$. Sendo F linear, o resultado segue. ■

Proposição 0.226 (Goldstine). *Se V for um $\mathbb{R}$-espaço normado, então $J(B_V)$ é τ_*-denso em $B_{V^{**}}$.*

Demonstração. Já que J é uma isometria, $J(B_V) \subseteq B_{V^{**}}$. Em adição, dos lemas 0.220 e 0.76, deduzimos que $\overline{J(B_V)}^* \subseteq B_{V^{**}}$. Admita que exista $\theta_0 \in B_{V^{**}} \backslash \overline{J(B_V)}^*$. Nesse caso, pelo Lema 0.224, existe um funcional linear Γ definido em V^{**} tal que Γ é τ_*-contínuo e

$$\Gamma(\theta_0) > \sup\{\Gamma(\theta) : \theta \in \overline{J(B_V)}^*\}.$$

Agora, considere $\delta^* : V^* \to V^{***}$ em que, fixado $f \in V^*$, $[\delta^*(f)](\gamma) := \gamma(f)$ para todo $\gamma \in V^{**}$. Posto que Γ é τ_*-contínuo, existe $g \in V^*$ tal que $\Gamma = \delta^*(g)$. Assim,

$$\theta_0(g) > \sup\{\Gamma(\theta) : \theta \in \overline{J(B_V)}^*\}.$$

Por essa razão, e como, para cada $v \in B_V$, $[\delta^*(g)](\delta_v) = \delta_v(g) = g(v)$, obtemos:

$$\sup\{g(v) : v \in B_V\} < \sup\{\Gamma(\theta) : \theta \in \overline{J(B_V)}^*\} < \theta_0(g) \leq \|\theta_0\|_{**}\|g\|_* \leq \|g\|_*.$$

Então, visto que B_V é simétrico, conseguimos $\sup\{|g(v)| : v \in B_V\} < \|g\|_*$, que é um absurdo. Por tudo isso, temos $\overline{J(B_V)}^* = B_{V^{**}}$. ■

Enfim, podemos apresentar o último resultado desta seção.

Proposição 0.227 (Milman[22], Pettis[23]). *Todo espaço de Banach real e uniformemente convexo é reflexivo.*

[22] David Pinhusovich Milman (1912-1982), matemático soviético e, posteriormente, israelita. Especializou-se em Análise Funcional.

[23] Billy James Pettis (1912-1979), matemático americano. Conhecido por suas contribuições na Análise Funcional.

Demonstração. Admita que V seja um espaço de Banach uniformemente convexo e escolha $\gamma \in V^{**}$ de norma igual a 1. Devemos mostrar que $\gamma \in J(B_V)$. Primeiramente, note que $J(B_V)$ é fechado, conforme revelou a Observação 0.211. Nesse caso, é suficiente provar que

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ v \in B_V : \|\gamma - \delta_v\|_{**} \leq \epsilon. \tag{6}$$

Assim, fixe $\epsilon > 0$. Por hipótese, existe $d > 0$ tal que

$$x, y \in B_V, \|x - y\| \geq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \|x + y\| \leq 2 - 2d.$$

Em seguida, tome f na esfera unitária de V^* tal que $\gamma(f) > 1 - d/2$, o que é possível, já que $\|\gamma\|_{**} = 1$. Agora, indique:

$$A_1 := \{\theta \in V^{**} : |\gamma(f) - \theta(f)| < d/2\}.$$

Note que A_1 é uma vizinhança de γ na topologia fraca-estrela de V^{**}. Então, conforme a proposição precedente, $A_1 \cap J(B_V) \neq \emptyset$. Por isso, existe $u \in B_V$ tal que $\delta_u \in A_1$.

Afirmamos que u cumpre (6). Realmente, suponha que $\|\gamma - \delta_u\| > \epsilon$. Desse modo, definindo $A_2 := V^{**} \backslash (\delta_u + \epsilon B_{V^{**}})$, temos $\gamma \in A_2$. Dos lemas 0.220 e 0.215 inferimos que $B_{V^{**}}$ é um conjunto fechado na topologia fraca-estrela. Portanto, A_2 também é uma vizinhança de γ na topologia fraca-estrela. Por essa razão, o Teorema de Goldstine assegura que $(A_1 \cap A_2) \cap J(B_V) \neq \emptyset$, ou seja, existe $w \in B_V$ tal que $\delta_w \in A_1 \cap A_2$. Uma vez que $\delta_u, \delta_w \in A_1$, temos:

$$|\gamma(f) - \delta_u(f)| < d/2 \quad \text{e} \quad |\gamma(f) - \delta_w(f)| < d/2,$$

de onde decorre que

$$2\gamma(f) < f(u + w) + d \leq \|u + w\| + d.$$

Por isso e pela escolha de f, encontramos $\|u+w\| > 2-2d$. Daí, visto que V é uniformemente convexo, segue que $\|u-w\| < \epsilon$. Porquanto J é uma isometria, conseguimos $\|\delta_u - \delta_w\|_{**} < \epsilon$. Todavia, isso contradiz a hipótese de que $\delta_w \in A_2$. Do exposto, a afirmação está provada e, assim, a prova está completa. ■

0.9 Redes

Na Seção 0.4, vimos que uma função $f : X \to Y$ entre espaços métricos é contínua em um ponto $x \in X$ se, e somente se, $x_n \to x$ implica que $f(x_n) \to f(x)$. Para descrever uma função contínua entre espaços topológicos quaisquer, precisamos de um conceito mais amplo que o de sequência. Por isso, estudaremos as chamadas *redes* em espaços topológicos. Antes de conhecê-las, introduzimos os *conjuntos dirigidos*.

Definição 0.228 (Conjunto dirigido). *Um conjunto dirigido é um par $(\Delta, \leq)$ em que Δ é um conjunto e $\leq$ é uma relação em Δ satisfazendo:*

(a) *$d \leq d$ para todo $d \in \Delta$.*

(b) *Se $d_1, d_2, d_3 \in \Delta$, $d_1 \leq d_2$ e $d_2 \leq d_3$, então $d_1 \leq d_3$.*

(c) *Para quaisquer $d_1, d_2 \in \Delta$ existe $d_3 \in \Delta$ tal que $d_1 \leq d_3$ e $d_2 \leq d_3$.*

Escreveremos $d_1 \geq d_2$ quando $d_2 \leq d_1$. Além do mais, representaremos um conjunto dirigido $(\Delta, \leq)$ por Δ quando $\leq$ é conhecida ou arbitrária.

Definição 0.229 (Rede). *Uma rede em um conjunto X é uma função $f : \Delta \to X$, em que Δ é um conjunto dirigido. Usualmente, denotaremos o ponto $f(d)$ por x_d, e indicaremos a rede f por $(x_d)_{d\in\Delta}$, isto é, por seu conjunto imagem.*

A partir do conceito de redes, surge a noção de convergência a seguir.

Definição 0.230. *Dizemos que a rede $(x_d)_{d\in\Delta}$ no espaço topológico X converge para $x \in X$, e escrevemos $x_d \rightharpoonup x$ se, para cada vizinhança U de x existir $d_0 \in \Delta$ tal que $x_d \in U$ para todo $d \geq d_0$.*

Indicaremos $x_d \rightharpoonup x$ por $x_d \overset{w}{\rightharpoonup} x$ ou por $x_d \overset{*}{\rightharpoonup} x$ conforme a topologia em X seja τ_w ou τ_*, respectivamente.

Exemplo 0.231. Sejam X um espaço topológico, $x \in X$ e $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x. O conjunto $\mathcal{B}_x$ munido pela relação:

$$U_1 \leq U_2 \quad \Leftrightarrow \quad U_2 \subseteq U_1$$

é um conjunto dirigido. Neste caso, escolhendo $x_U \in U$ para cada $U \in \mathcal{B}_x$, conseguimos uma rede $(x_U)_{U\in\mathcal{B}_x}$ em X que converge para x.

Prosseguimos com dois resultados que generalizam propriedades já conhecidas em espaços métricos.

Lema 0.232. *Sejam X um espaço topológico e $A \subseteq X$. Então, $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe uma rede $(x_d)_{d\in\Delta}$ em A tal que $x_d \rightharpoonup x$.*

Demonstração. Suponha que $x \in \overline{A}$ e que $\mathcal{B}_x$ seja uma base de vizinhanças de x. Para cada $B \in \mathcal{B}_x$, selecione $x_B \in B \cap A$. Empregando em $\mathcal{B}_x$ a relação descrita no exemplo acima, vemos que $(x_B)_{B\in\mathcal{B}_x}$ é uma rede que converge para x. Por construção, essa rede está contida em A.

Reciprocamente, admita que exista uma rede $(x_d)_{d\in\Delta}$ em A tal que $x_d \rightharpoonup x$. Seja U uma vizinhança de x. Pela hipótese de convergência, existe $d_0 \in \Delta$ tal que $x_d \in U$ para todo $d \geq d_0$. Se $x_d = x$ para todo $d \geq d_0$, então $x \in A$ e o resultado está garantido. Caso contrário, podemos escolher $d' \geq d_0$ tal que $x_{d'} \neq x$. Dessa forma, $x_{d'}$ é um elemento de $U \cap A$ diferente de x. Portanto, x é um ponto de acumulação de A e, sendo assim, $x \in \overline{A}$. ∎

Proposição 0.233. *Considere os espaços topológicos X e Y. Uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se,*

$$x_d \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad f(x_d) \rightharpoonup f(x), \qquad \textit{para toda rede } (x_d)_{d\in\Delta} \textit{ em } X.$$

Demonstração. Suponha que f seja contínua e que $(x_d)_{d\in\Delta}$ seja uma rede em X tal que $x_d \rightharpoonup x$. Por continuidade, dada uma vizinhança U de $f(x)$, existe uma vizinhança V de x tal que $f(V) \subseteq U$. Além disso, pela hipótese de convergência, existe $d_0 \in \Delta$ tal que $x_d \in V$ sempre que $d \geq d_0$. Por isso, $f(x_d) \in f(V) \subseteq U$ desde que $d \geq d_0$. Concluímos, desse modo, que $f(x_d) \rightharpoonup f(x)$.

Reciprocamente, suponha que $f(x_d) \rightharpoonup f(x)$ para toda rede $(x_d)_{d\in D}$ em X tal que $x_d \rightharpoonup x$. Ambicionando usar a Proposição 0.42, tomemos $A \subseteq X$ e $x \in \overline{A}$. De acordo com o lema anterior, existe uma rede $(x_d)_{d\in\Delta}$ em A convergindo para $x \in X$. Nesse caso, $(f(x_d))_{d\in\Delta}$ é uma rede em $f(A)$ e, por hipótese, $f(x_d) \rightharpoonup f(x)$. Pelo mesmo lema, decorre que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Isto prova que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$. Portanto, conforme a Proposição 0.42, f é contínua. ■

Seja V um espaço normado real. Descobrimos na seção anterior que (V, τ_w) e (V^*, τ_*) são espaços de Hausdorff. Com esse fato lucramos a unicidade do limite de redes convergentes nesses espaços, conforme anuncia a próxima proposição.

Proposição 0.234. *Um espaço topológico X é de Hausdorff se, e somente se, toda rede em X converge para, no máximo, um elemento de X.*

Demonstração. Suponha que X seja um espaço de Hausdorff e que $(x_d)_{d\in\Delta}$ seja uma rede em X tal que $x_d \rightharpoonup x$ e $x_d \rightharpoonup y$. Provaremos que $x = y$. Com efeito, considere $x \neq y$. Então, tome $A_1 \ni x$ e $A_2 \ni y$ abertos disjuntos. Pelas hipóteses de convergência, existem $d_1, d_2 \in \Delta$ tais que $x_d \in A_1$ se $d \geq d_1$ e $x_d \in A_2$ se $d \geq d_2$. Em seguida, escolha $d' \in \Delta$ tal que $d' \geq d_1$ e $d' \geq d_2$. Logo, $x_{d'} \in A_1 \cap A_2$, um absurdo. Por essa razão, $x = y$, ou seja, o limite é único.

Reciprocamente, admita que toda rede em X convirja para, no máximo, um elemento de X. Como preparação, afirmamos que $F := \{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$ é fechado em $X \times X$ com a topologia produto. Realmente, do contrário, o Lema 0.232 garante que existe uma rede $(x_d, x_d)_{d\in\Delta}$ em F que converge para $(x, y) \in (X \times X)\backslash F$. Assim, usando a continuidade das projeções na primeira e na segunda coordenada e a proposição precedente, temos $x_d \rightharpoonup x$ e $x_d \rightharpoonup y$. Contudo, isso é uma contradição, já que $x \neq y$. Consequentemente, F é fechado.

Agora, tome $x, y \in X$ distintos. Mostraremos que podemos separá-los por abertos disjuntos. De fato, uma vez que $(x, y) \in (X \times X)\backslash F$ e $(X \times X)\backslash F$ é aberto, existem abertos $A_1 \ni x$ e $A_2 \ni y$ tais que $A_1 \times A_2 \subseteq (X \times X)\backslash F$. Então, pela definição de F, temos $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, como queríamos. ■

Na sequência conheceremos uma caracterização de convergência na topologia fraca-estrela.

Lema 0.235. *Considere que V seja um espaço normado real, $(\gamma_d)_{d\in\Delta}$ seja uma rede em V^* e que $\gamma \in V^*$. Então, $\gamma_d \overset{*}{\rightharpoonup} \gamma$ se, e somente se, $\gamma_d(v) \rightharpoonup \gamma(v)$ para todo $v \in V$.*

Demonstração. Suponha que $\gamma_d \overset{*}{\rightharpoonup} \gamma$ e tome $v \in V$. Dada uma vizinhança A de $\gamma(v)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(\gamma(v) - \epsilon, \gamma(v) + \epsilon) \subseteq A$. Pela hipótese, existe $d_0 \in \Delta$ tal que $\gamma_d \in U(\gamma; v; \epsilon)$ para todo $d \geq d_0$. Logo, $|\gamma_d(v) - \gamma(v)| < \epsilon$ quando $d \geq d_0$. Assim, $\gamma_d(v) \in (\gamma(v) - \epsilon, \gamma(v) + \epsilon) \subseteq A$ desde que $d \geq d_0$. Portanto, $\gamma_d(v) \rightharpoonup \gamma(v)$.

Reciprocamente, admita que $\gamma_d(v) \rightharpoonup \gamma(v)$ para todo $v \in V$. Considere a vizinhança $U(\gamma; v_1, \ldots, v_k; \epsilon)$ de γ na topologia fraca-estrela. Por hipótese, $\gamma_d(v_i) \rightharpoonup \gamma(v_i)$, com $i \in [k]$. Desse modo, para cada $1 \leq i \leq k$ existe $d_i \in \Delta$ tal que $d \geq d_i$ implica $|\gamma_d(v_i) - \gamma(v_i)| < \epsilon$. Em vista disso, escolhendo $m \geq d_i$ para todo $i \in [k]$, teremos $\gamma_d \in U(\gamma; v_1, \ldots, v_k; \epsilon)$ para qualquer $d \geq m$. Por isso, $\gamma_d \overset{*}{\rightharpoonup} \gamma$. ∎

Encerramos a seção revelando uma qualidade dos operadores adjuntos, os quais foram apresentados na Definição 0.199.

Proposição 0.236. *Todo operador adjunto é τ_*-τ_*-contínuo.*

Demonstração. Considere o operador adjunto $T^* : W^* \to V^*$ e tome uma rede (γ_d) em W^* tal que $\gamma_d \overset{*}{\rightharpoonup} \gamma$, com γ em W^*. Então, conforme o lema anterior,

$$[T^*(\gamma_d)](v) = \gamma_d[T(v)] \rightharpoonup \gamma[T(v)] = [T^*(\gamma)](v)$$

para todo $v \in V$. Empregando novamente o Lema 0.235, concluímos que $T^*(\gamma_d) \overset{*}{\rightharpoonup} T^*(\gamma)$. A Proposição 0.233 completa a prova. ∎

Capítulo 1

Um ensaio sobre dois espaços de Banach

Uma vez finalizada a preparação teórica, iremos, no presente capítulo, estudar os seguintes conjuntos:

$$E_1 := \{x \in \mathcal{C}^1[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}$$

e

$$E_2 := \{x : [0,1] \to \mathbb{R} \mid x \text{ é diferenciável}, x' \text{ é limitada},\ x(0) = x(1) = 0\}.$$

Visto que os dois conjuntos compartilham diversas características, iremos representá-los simplesmente por E, voltando à designação precisa quando necessário.

Logo abaixo daremos a eles estruturas de espaços normados e mostraremos que tais espaços são de Banach. Depois, exploraremos propriedades topológicas e geométricas de E_1, E_2 e de seus duais topológicos.

Proposição 1.1. **(a)** *O conjunto E munido das operações usuais de soma e produto por escalar real é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.*
(b) *A função $\|\cdot\|_E$ que associa, a cada $x \in E$, o número:*

$$\|x\|_E := \|x'\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x'(t)|$$

é uma norma em E.

Demonstração. **(a)** A demonstração é direta.
(b) Mostraremos apenas que o único vetor de E com norma 0 é o vetor nulo. As outras verificações são diretas. Suponha que $\|x\|_E = 0$. Então, x' é nula. Disso e da continuidade de x segue que x é constante. Logo, como $x(0) = 0$, temos $x = \mathbf{0}$. ■

No resultado que segue empregamos a notação $\|\cdot\|_\infty$ estabelecida no Exemplo 0.149 (p. 56) e o símbolo λ para designar a medida de Lebesgue, cuja origem é a Proposição 0.140 (p. 54).

Proposição 1.2. **(a)** *As funções $\|\cdot\|_+$ e $\|\cdot\|_{\max}$ definidas em E por:*

$$\|x\|_+ := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty \qquad e \qquad \|x\|_{\max} := \max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\}$$

são normas em E.

(b) *As normas* $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_+$ *e* $\|\cdot\|_{\max}$ *são equivalentes aos pares.*

Demonstração. **(a)** A verificação é direta.
(b) Primeiramente, consideremos $E = E_1$. Fixado $x \in E_1$, observamos que, para todo $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |x(t)| &= \left|x(0) + \textstyle\int_0^t x'(s)\,ds\right|, \quad \text{pelas proposições 0.127 (p. 51) e 0.125 (p. 50)} \\ &\leq \textstyle\int_0^t |x'(s)|\,ds \\ &\leq t \cdot \sup_{s\in[0,1]} |x'(s)| \\ &\leq \|x\|_{E_1}, \end{aligned}$$

pois $t \in [0,1]$. Assim, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_{E_1}$. Portanto, $\|x\|_{E_1} \leq \|x\|_+ \leq 2\|x\|_{E_1}$. Como x é arbitrário, concluímos que $\|\cdot\|_{E_1} \sim \|\cdot\|_+$. Além disso, de $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_{E_1}$, temos $\|\cdot\|_{\max} = \|\cdot\|_{E_1}$. Logo, $\|\cdot\|_{\max} \sim \|\cdot\|_{E_1}$. Por transitividade, a prova está completa.

Agora, tratamos o caso em que $E = E_2$. Escolha $x \in E_2$. Por definição, x é diferenciável em $[0,1]$. Em adição, pela definição de derivada, x' é o limite pontual de funções contínuas. Por continuidade, tais funções são $\mathrm{Bor}([0,1])$-mensuráveis. Por isso, x' é $\mathrm{Bor}([0,1])$-mensurável, conforme a Proposição 0.137 (p. 53). Ainda, como x' é limitada e $\lambda([0,1]) = 1$, x' pertence a $L([0,1], \mathrm{Bor}([0,1]), \lambda)$. Logo, para qualquer $t \in [0,1]$, $x(t) = x(t) - x(0) = \int_0^t x'(s)\,ds$. Desse modo, valem os mesmos argumentos do primeiro caso. ■

Proposição 1.3. $(E, \|\cdot\|_E)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$. Assim, (x_n') é de Cauchy em $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Uma vez que $\|x_0\|_\infty \leq \|x_0\|_{E_1}$, qualquer que seja $x_0 \in E_1$, descobrimos que (x_n) é de Cauchy em $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Então, como esse espaço é completo, existe $x \in \mathcal{C}([0,1])$ tal que $x_n \to x$ na norma do sup. Mostraremos que essa convergência também ocorre na norma $\|\cdot\|_{E_1}$. De fato, do exposto até aqui, concluímos que (x_n') converge uniformemente para uma função contínua y e que, para qualquer $s \in [0,1]$, $(x_n(s))$ converge em $\mathbb{R}$. Logo, pela Proposição 0.117 (p. 48), $x' = y$. Portanto, $x \in E_1$. Finalmente, da convergência uniforme obtida acima, segue o resultado desejado.

Agora, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$. Então,

$$\lim_{m,n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |x_m'(t) - x_n'(t)| = 0.$$

Por isso, para cada $s \in [0,1]$, $(x_n'(s))$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Defina $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $y(t) := \lim x_n'(t)\ \forall\ t \in [0,1]$. Vamos mostrar que tal convergência é uniforme. Com efeito, da hipótese sobre (x_n) resulta que, dado $\epsilon > 0$ existe um número natural N tal que $m, n \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\|_{E_2} < \epsilon$. Assim,

$$\begin{aligned} m \geq N &\Rightarrow \|x_N - x_m\|_{E_2} < \epsilon \\ &\Rightarrow \lim_{m\to\infty} \|x_N - x_m\|_{E_2} \leq \epsilon \\ &\Rightarrow \sup_{t\in[0,1]} |x_N'(t) - y(t)| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Em acréscimo, a sequência $(x_n(0))$ converge, pois é constante. Então, conforme a Proposição 0.117, (x_n) converge uniformemente para uma função x derivável, tal que $x' = y$. Além disso, o Lema 0.110 (p. 47) garante que $x \in E_2$. Consequentemente, a prova está concluída. ■

Em seguida, analisaremos o espaço E^*. Começamos conhecendo alguns de seus elementos.

Lema 1.4. *Escolha $t \in [0,1]$ e defina $\varphi_t : E \to \mathbb{R}$ por $\varphi_t(x) := x(t)$ para cada $x \in E$. Então:*
(a) $\varphi_t \in E^*$.
(b) *Para qualquer $s \in [0,1]$, temos $\|\varphi_t - \varphi_s\|_* \le |t-s|$.*
(c) $\|\varphi_t\|_* \le \frac{1}{2}$.
(d) *A função $\mu : [0,1] \to E^*$, dada por $\mu(s) := \varphi_s$ para todo $s \in [0,1]$, é contínua.*

Demonstração. **(a)** Claramente, φ_t é linear. Além disso, para qualquer $x \in E$, temos $|\varphi_t(x)| = |x(t)| \le \|x\|_\infty \le \|x\|_E$. Logo, φ_t é contínuo. Portanto, $\varphi_t \in E^*$.
(b) Tome $s \in [0,1]$. Pelo Teorema do Valor Médio, se $|x(t) - x(s)| > |t-s|$ para algum $x \in E$, então $\|x\|_E > 1$. Usando a contrapositiva dessa afirmação, conseguimos:

$$\|\varphi_t - \varphi_s\|_* = \sup_{\|x\|_E \le 1} |(\varphi_t - \varphi_s)(x)| = \sup_{\|x\|_E \le 1} |x(t) - x(s)| \le |t-s|.$$

(c) Basta analisar os casos em que $t \le 1/2$ e $t > 1/2$ usando argumentos semelhantes aos do item anterior.
(d) Substituindo $t = 0$ em (b), conseguimos $\|\varphi_s\|_* \le |s|\ \forall\ s \in [0,1]$. Assim, $\|\mu(s)\|_* \le |s|$ para qualquer $s \in [0,1]$. Logo, μ é contínua. ■

Lema 1.5. *Fixe $t \in [0,1]$ e defina $\psi_t : E \to \mathbb{R}$ por: $\psi_t(x) := x'(t)$ para cada $x \in E$. Nesse caso:*
(a) $\psi_t \in E^*$.
(b) *Para qualquer $s \in [0,1] \backslash \{t\}$, temos $\|\psi_t - \psi_s\|_* = 2$.*
(c) $\|\psi_t\|_* = 1$.

Demonstração. **(a)** A linearidade de ψ_t é de simples verificação. Além do mais, para todo $x \in E$, $|\psi_t(x)| = |x'(t)| \le \|x\|_E$. Logo, ψ_t é contínuo. Desse modo, $\psi_t \in E^*$.
(b) Tome $s \in [0,1]$ diferente de t. Primeiramente, veja que

$$\|\psi_t - \psi_s\|_* = \sup_{\|x\|_E \le 1} |(\psi_t - \psi_s)(x)| \le \sup_{\|x\|_E \le 1} |x'(t)| + \sup_{\|x\|_E \le 1} |x'(s)| \le 1 + 1 = 2.$$

Assim, para conseguirmos a igualdade desejada, basta obtermos $x_0 \in B_E$ tal que

$$|(\psi_t - \psi_s)(x_0)| = |x_0'(t) - x_0'(s)| = 2.$$

Mostraremos como construir esse elemento quando $0 < t < s < 1$. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Considere a função $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é exibido na

Figura 1.1. Os números reais δ e ϵ foram escolhidos de modo que $\int_0^1 y(u)\,du = 0$. Então, podemos definir $x_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ fixando, para cada $a \in [0,1]$, $x_0(a) := \int_0^a y(u)\,du$.

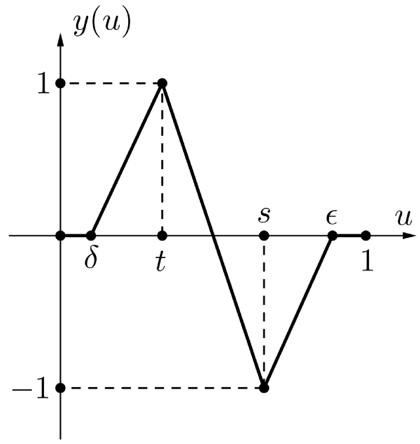

Figura 1.1: Construção para a prova do Lema 1.5, item (b).

(c) A verificação é semelhante à do item prévio. ∎

A conclusão anterior revela-nos algo muito curioso sobre a geometria de E^*: existe um conjunto não enumerável de elementos da esfera S_{E^*} tal que quaisquer dois de seus pontos são "diametralmente opostos"!

Continuemos investigando outras propriedades topológicas do espaço E^*.

Teorema 1.6. *E^* não é separável.*

Demonstração. Suponha que $A \subseteq E^*$ seja denso. Para cada $t \in [0,1]$, defina:

$$B_t := \{\gamma \in E^* : \|\gamma - \psi_t\|_* < 1/2\}.$$

De acordo com o item (b) do Lema 1.5, $\{B_t\}_{t\in[0,1]}$ é um conjunto não enumerável de abertos disjuntos aos pares na topologia forte de E^*. Uma vez que A deve conter algum elemento de cada B_t, segue que A é não enumerável. Concluímos que todo $A \subseteq E^*$ denso em E^* não é enumerável. Portanto, E^* não é separável. ∎

Lema 1.7. *Considere $A \subseteq [0,1]$ enumerável e denso. Então, $M := \langle\{\varphi_t : t \in A\}\rangle$ não é denso em E^*.*

Demonstração. Seja $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma enumeração do conjunto $\{\varphi_t : t \in A\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $C_n := \left\{\sum_{k=1}^{n} q_k\varphi_k : q_k \in \mathbb{Q}\right\}$. Repare que, para qualquer n, existe bijeção entre C_n e $\mathbb{Q}^n$. Logo, cada C_n é enumerável. Como consequência, $M' := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ é enumerável. Em acréscimo, uma vez que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, concluímos que M' é denso em M. Agora, suponha que M seja denso em E^*. Então, M' é denso em E^*. Mas isso contraria a não separabilidade de E^*, já provada. Por isso, M não pode ser denso em E^*. ■

Observamos que a notação δ_x na prova do teorema que segue foi fixada no Exemplo 0.172 (p. 61).

Teorema 1.8. **(a)** *E^* não é τ_w-separável.*
(b) *E^* é τ_*-separável.*

Demonstração. **(a)** Seja (γ_n) uma sequência em E^* e considere $G := \langle\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$. Já que G é convexo, pelo Lema 0.206 (p. 72), $\overline{G} = \overline{G}^w$. Essa igualdade e o Teorema 1.6 garantem que $\overline{G}^w \neq E^*$. Logo, $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ não pode ser τ_w-denso em E^*. Em vista disso, E^* não é τ_w-separável.
(b) Considere M' e A como no lema anterior. Mostraremos que M' é τ_*-denso em E^*, logrando o resultado. Suponha que exista $x \in E$ tal que δ_x anule M'. Nesse caso, para todo $t \in A$ $\delta_x(\varphi_t) = 0$, ou seja, $x(t) = 0$. Por continuidade e como $x(0) = 0$, decorre que $x = \mathbf{0}$. Logo, $\delta_x = \mathbf{0}$. Dessa forma, o Corolário 0.197 (p. 69) revela que M' é τ_*-denso em E^*. ■

Proposição 1.9. **(a)** *O conjunto $S := \langle\{\psi_t : t \in [0,1]\}\rangle$ é τ_*-denso em E^*.*
(b) *Para todo $t \in [0,1]$, $S_t := \langle\{\psi_s : s \neq t\}\rangle$ é τ_*-denso em E^*.*

Demonstração. As provas são similares à do item (b) no teorema anterior. ■

Lema 1.10. *A função $\eta : [0,1] \to E_1^*$, dada por $\eta(t) := \psi_t$ para cada $t \in [0,1]$, é τ_*-contínua.*

Demonstração. Escolha $t \in [0,1]$ arbitrariamente e seja (t_d) uma rede em $[0,1]$ com limite t. Por continuidade, para qualquer $x \in E$, temos que $x'(t_d) \rightharpoonup x'(t)$, isto é, $\psi_{t_d}(x) \rightharpoonup \psi_t(x)$. Conforme o Lema 0.235 (p. 84), $\psi_{t_d} \overset{*}{\rightharpoonup} \psi_t$. Portanto, η é τ_*-contínua. ■

Corolário 1.11. *O conjunto $\{\psi_t : t \in [0,1]\} \subseteq E_1^*$ é τ_*-fechado.*

Demonstração. Segue da proposição anterior e da Proposição 0.221 (p. 77). ■

Proposição 1.12. *Considere um conjunto* $D \subseteq [0,1]$ *enumerável e denso, e estabeleça* $S_D := \langle \{\psi_t : t \in D\} \rangle$. *Então,* S_D *é* τ_**-denso em* E_1^*.

Demonstração. Suponha que δ_x anule S_D. Então, para qualquer $t \in D$, $\delta_x(\psi_t) = \psi_t(x) = x'(t) = 0$. Por continuidade, temos $x' = \mathbf{0}$. Uma vez que x é contínua, descobrimos que x é constante. Daí, $x = \mathbf{0}$, pois $x(0) = 0$. Portanto, δ_x é nulo. Desse modo, o Corolário 0.197 (p. 69) assegura que S_D é τ_*-denso em E_1^*. ∎

Conferiremos, por fim, algumas propriedades geométricas de E^*.

Proposição 1.13. **(a)** *Para quaisquer* $t, s, \alpha \in [0,1]$, *temos* $\|(1-\alpha)\psi_t + \alpha\psi_s\|_* = 1$. *Em particular,* E^* *não é estritamente convexo.*
(b) E^* *não é uniformemente convexo.*

Demonstração. **(a)** Utilizando a desigualdade triangular e o Lema 1.5, vemos facilmente que $\|(1-\alpha)\psi_t + \alpha\psi_s\|_* \leq 1$. Em seguida, por uma construção semelhante à feita no mesmo lema, garantimos que existe $x_0 \in S_E$ tal que $x_0'(t) = x_0'(s) = 1$. Por isso, a igualdade está provada.
(b) Escolha $t, s, \in [0,1]$, com $t \neq s$. Certamente, $\|\psi_t + \psi_s\|_* \leq 2$. Em adição, conseguimos $\|\psi_t + \psi_s\|_* \geq 2$ ao consideramos x_0 como no item acima. Logo, $\|\psi_t + \psi_s\|_* = 2$. Desse modo, $\psi_t, \psi_s \in B_E$, mas $\|\psi_t + \psi_s\|_* > 2(1-\delta)$, qualquer que seja $\delta > 0$. Portanto, E^* não é uniformemente convexo. ∎

Prosseguimos voltando nossa atenção para o espaço E. Se necessário, recorde as notações definidas na Proposição 0.208 (p. 73).

Teorema 1.14. *E não é reflexivo.*

Demonstração. Tome os conjuntos A e M como no Lema 1.7. Por ele e pelo Corolário 0.197 (p. 69), existe $\Gamma \in E^{**}$ não nulo que anula M. Afirmamos que $\Gamma \notin J(E)$. Com efeito, suponha que $\Gamma = \delta_x$ para algum $x \in E$. Então, para todo $t \in A$, $\delta_x(\varphi_t) = \Gamma(\varphi_t)$, isto é, $x(t) = 0$. Já que x é contínua e A é denso em $[0,1]$, deduzimos que x é a função constante nula. Contudo, isso implica a nulidade do funcional Γ, o que é uma contradição. Assim, a afirmação está provada. Dessa maneira, $J(E) \neq E^{**}$, isto é, E não é reflexivo. ∎

Corolário 1.15. **(a)** *E não é uniformemente convexo.*
(b) *M não é* τ_w*-denso em* E^*.
(c) *E^* não é reflexivo.*

Demonstração. **(a)** Resulta da Proposição 0.227 (p. 80).
(b) Segue do Corolário 0.197 (p. 69) tomando o funcional Γ obtido no teorema acima.
(c) Decorre da Proposição 1.3, do Lema 0.210 (p. 73) e do teorema precedente. ∎

Em seguida, exibiremos outra prova de que E não é reflexivo. Lembramos que $[n]$ denota o conjunto dos inteiros positivos inferiores ou iguais a n.

Lema 1.16. *Fixe $t \in [0,1]$ e considere $S_t := \langle\{\psi_s : s \neq t\}\rangle$. Então, $\psi_t \notin \overline{S_t}$.*

Demonstração. Começamos afirmando que $\|\psi_t - \gamma\|_* \geq 1$, qualquer que seja $\gamma \in S_t$. De fato, tome $\gamma \in S_t$. Então, podemos escrever $\gamma = \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_{s_k}$, em que $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $s_1, \ldots, s_n \in [0,1]\backslash\{t\}$. Amparados por uma construção semelhante à do Lema 1.5, tomemos $x_0 \in S_E$ tal que $x_0'(t) = 1$ e $x_0'(s_k) = 0$ para cada $k \in [n]$. Logo,

$$\|\psi_t - \gamma\|_* = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |(\psi_t - \gamma)(x)| \geq |(\psi_t - \gamma)(x_0)| = 1.$$

Provada a afirmação, segue que $B(\psi_t; 1/2) \cap S_t = \emptyset$. Por isso, $\psi_t \notin \overline{S_t}$. ∎

Teorema 1.17. *E não é reflexivo.*

Demonstração. Primeiramente, afirmamos que, fixado $t \in [0,1]$,

$$\operatorname{dist}(\psi_t, \overline{S_t}) = \inf\{\|\gamma - \psi_t\|_* : \gamma \in \overline{S_t}\} > 0.$$

Realmente, suponha que $\operatorname{dist}(\psi_t, \overline{S_t}) = 0$. Então, pela definição de ínfimo, existe $\gamma \in \overline{S_t}$ tal que $\|\gamma - \psi_t\|_* < \frac{1}{2}$. Seja (γ_n) uma sequência em S_t tal que $\gamma_n \to \gamma$. Logo, pela continuidade da norma e pelo lema anterior,

$$\|\gamma - \psi_t\|_* = \|\lim(\gamma_n - \psi_t)\|_* = \lim \|\gamma_n - \psi_t\|_* \geq 1.$$

Dessa forma, obtemos um absurdo. Em vista disso, $\operatorname{dist}(\psi_t, \overline{S_t}) > 0$.

Agora, empregamos a Proposição 0.198 (p. 70) e o Lema 1.16 e tomamos $\Gamma \in S_{E^{**}}$ que anula $\overline{S_t}$ e mapeia ψ_t em $\operatorname{dist}(\psi_t, \overline{S_t})$. Provaremos que $\Gamma \notin J(E)$, o que garante o resultado desejado. Pretendendo uma contradição, suponha que $\Gamma = \delta_x$ para algum $x \in E$. Em particular, para todo $s \neq t$, $\delta_x(\psi_s) = \Gamma(\psi_s)$, ou seja, $x'(s) = 0$. A continuidade de x e o fato de que $x(0) = 0$ implicam que $x = \mathbf{0}$, contrariando o fato de Γ ter norma igual a 1. ∎

Corolário 1.18. *S_t não é τ_w-denso em E^*.*

Demonstração. Basta aplicar o Corolário 0.197 (p. 69) tomando o funcional Γ obtido no teorema acima. ∎

Teorema 1.19. *E_1 é separável.*

Demonstração. Defina $\|\cdot\| : \mathcal{C}([0,1]) \times \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ por $\|(x,y)\| := \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ para qualquer $(x,y) \in \mathcal{C}([0,1]) \times \mathcal{C}([0,1])$. Facilmente vemos que $\|\cdot\|$ é uma norma. Agora, estabeleça $T : E_1 \to \mathcal{C}([0,1]) \times \mathcal{C}([0,1])$ expressa por $T(x) := (x, x')$ para qualquer $x \in E_1$. Claramente, T é linear. Em acréscimo, se atribuímos a E_1 a norma $\|\cdot\|_+$, T torna-se uma isometria. No Exemplo 0.167 (p. 59), vimos que $\mathcal{C}([0,1])$ é separável. Então, aplicando o Lema 0.49 (p. 31) e o Lema 0.85 (p. 41), concluímos que $T(E_1)$ é separável. Finalmente, como T é uma isometria, temos que E_1 é separável. ■

Corolário 1.20. **(a)** *$B_{E_1^*}$ é τ_*-metrizável.*
(b) *B_E não é τ_w-metrizável.*

Demonstração. **(a)** Provém do teorema acima e do Lema 0.222 (p. 77).
(b) Procede do Teorema 1.6 e do Lema 0.223 (p. 78). ■

Proposição 1.21. *Toda sequência em E^* limitada em norma possui subsequência convergente na topologia τ_*.*

Demonstração. Primeiramente, note que o Lema 0.220 (p. 76) e o item (a) do corolário precedente asseguram que o espaço topológico $(B_{E_1^*}, \tau_*)$ é compacto e metrizável. Logo, conforme a Proposição 0.103 (p. 45), ele é sequencialmente compacto. Posto isso, tome uma sequência (γ_n) em E^* limitada em norma. Sendo assim, existe um número real $C > 0$ tal que $\|\gamma_n\|_* < C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que $(\frac{\gamma_n}{C})$ é uma sequência em $B_{E_1^*}$, existem uma subsequência $(\frac{\gamma_{n_k}}{C})$ e $\gamma \in B_{E_1^*}$ tais que $\frac{\gamma_{n_k}}{C} \overset{*}{\rightharpoonup} \gamma$. Portanto, $\gamma_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} C\gamma$. ■

Nosso próximo propósito neste capítulo é demonstrar que, ao contrário de E_1, E_2 não é separável. Preparamo-nos para essa tarefa investigando dois resultados.

Lema 1.22. *Considere os conjuntos:*

$$W := \{x : [0,1] \to \mathbb{R} \mid x \textit{ é limitada e derivativa}\} \quad e \quad V := \{x \in W : \overline{\operatorname{Ker}(x)} = [0,1]\}.$$

Então:
(a) *W é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.*
(b) *V é um subespaço de W.*
(c) *$(V, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. **(a)** A prova é direta.
(b) Admita que (x_n) seja uma sequência em V e, para cada $n \in \mathbb{N}$ indique $K_n := \operatorname{Ker}(x_n)$. Como preparação, provaremos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ é denso em $[0,1]$. Para esse fim, começamos

afirmando que, dado n número natural, existe uma sequência $(A_{n_k})_k$ de abertos da reta tal que $K_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$. Por simplicidade e mantendo a generalidade, verificaremos a declaração fixando $n = 1$. Seja F_1 uma primitiva de x_1. Estabeleça, para todo $m \in \mathbb{N}$, a função f_m expressa por:

$$f_m(t) := \frac{F_1\left(t + \frac{1}{m}\right) - F_1(t)}{\frac{1}{m}}, \quad t \in \left[0, 1 - \frac{1}{m}\right].$$

Assim, dado $t \in [0,1]$, $\lim_{m\to\infty} f_m(t) = F_1'(t) = x_1(t)$. Por essa razão, segue que

$$\begin{aligned} s \in \mathrm{Ker}(x_1) &\Leftrightarrow |x_1(s)| = 0 \\ &\Leftrightarrow \liminf |f_m(s)| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, i, j \in \mathbb{N},\ \exists\, L \geq j : |f_L(s)| < 1/i \\ &\Leftrightarrow s \in \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{L=j}^{\infty} U_{i,L}, \end{aligned}$$

em que $U_{i,L} := \{t \in \mathbb{R} : |f_L(t)| < 1/i\}$. Então,

$$\mathrm{Ker}(x_1) = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{L=j}^{\infty} U_{i,L},$$

o que comprova a afirmação.

Finalmente, note que cada A_{n_k} é denso em $[0,1]$, já que $A_{n_k} \supseteq K_n$. Logo, pelo Teorema de Baire (p. 44),

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$$

é denso em $[0,1]$, como queríamos.

Agora, passemos para a demonstração do lema. Sejam $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, pelo item (a), $\alpha x \in W$. Além disso, $\mathrm{Ker}(\alpha x) = \alpha \mathrm{Ker}(x)$ é denso em $[0,1]$. Constatamos que $\alpha x \in V$. Em adição, certamente $x - y \in W$ e $\mathrm{Ker}(x-y) \supseteq \mathrm{Ker}(x) \cap \mathrm{Ker}(y)$. Logo, do exposto acima, segue que $\mathrm{Ker}(x-y)$ é denso em $[0,1]$. Assim, temos que $x - y \in V$.

(c) Inicialmente, observamos que $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em V, pois $V \subseteq \mathcal{B}([0,1])$. Então, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $(V, \|\cdot\|_\infty)$. Consoante o Exemplo 0.161 (p. 58), vemos que (x_n) converge uniformemente para uma função $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ limitada. Para cada n, seja y_n uma primitiva de x_n. Em seguida, defina, para todo n, a função transladada $z_n := y_n - y_n(0)$. Logo, z_n é uma primitiva de x_n e $z_n(0) \to 0$. Portanto, de acordo com a Proposição 0.117 (p. 48), existe $z : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivável tal que $z_n \xrightarrow{u} z$ e $z' = x$. Dessa forma, x é uma função derivativa.

Resta-nos mostrar que $\mathrm{Ker}(x)$ é denso em $[0,1]$. Afirmamos que $\mathrm{Ker}(x) \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(x_n)$, o que, observado o item acima, garante o resultado. Com efeito, tome $s \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(x_n)$. Dessa forma, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n(s) = 0$. Uma vez que $x_n \to x$, segue que $x(s) = 0$, ou seja, $s \in \mathrm{Ker}(x)$.

Do exposto, temos $x \in V$, o que certifica a completude de V. ■

Proposição 1.23. *V não é separável.*

Demonstração. Como preparação, sejam P e Q subconjuntos de $[0,1]$ disjuntos, enumeráveis e densos. Por exemplo, selecione $P := \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e $Q := \{q + \sqrt{2} : q \in \mathbb{Q}\} \cap [0,1]$. Baseados no Lema 0.118 (p. 49), sabemos que existe $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $|f'(t)| < 1$ para todo $t \in [0,1]$, f' é positiva em P e negativa em Q. Logo, $f' \in W$. Seja $(a,b) \subseteq [0,1]$. Então, existem $p, q \in (a,b)$ tais que $p < q$, $p \in P$ e $q \in Q$. Conforme o Teorema de Darboux (p. 49), existe $c \in (p,q)$ tal que $f'(c) = 0$. Assim, $c \in \mathrm{Ker}(f')$. Disso decorre que $\mathrm{Ker}(f')$ é denso em $[0,1]$. Portanto, $f' \in V$.

Agora, tome uma sequência (x_n) em V. Mostraremos que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é denso em V. Denotando $K_n := \mathrm{Ker}(x_n)$, sabemos, pelo lema precedente, que $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ é denso em $[0,1]$. Em seguida, tome $s \in K \cap P$. Dessa forma,

$$\|f' - x_n\|_\infty \geq |f'(s) - x_n(s)| = f'(s) > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Por isso, a interseção de $B(f'; f'(s)/2)$ e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é vazia. Logo, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é denso em V. Consequentemente, V não é separável. ■

Teorema 1.24. *E_2 não é separável.*

Demonstração. Começamos tomando $\gamma : V \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in V$, $\gamma(x) := \int_0^1 x(t)\, dt$. O Lema 0.147 (p. 55) torna γ bem definida. Claramente, γ é linear. Em acréscimo,

$$|\gamma(x)| = \left| \int_0^1 x(t)\, dt \right| \leq \int_0^1 |x(t)|\, dt \leq \|x\|_\infty \quad \forall\, x \in V.$$

Logo, γ é contínua. Seja $K := \mathrm{Ker}(\gamma)$. Se $\gamma = \mathbf{0}$, então $K = V$ e, segundo a proposição acima, K não é separável. Caso contrário, $\dim(V/K) = 1$, garante o Lema 0.17 (p. 25). Nesse caso, existe $x_0 \in V$ tal que $V/K = \{\alpha \overline{x_0} : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Afirmamos que $d : V/K \times V/K \to \mathbb{R}$ dada por $d(\alpha \overline{x_0}, \beta \overline{x_0}) := |\alpha - \beta|$ é uma métrica em V/K. Verificaremos apenas que d está bem definida, pois o trabalho restante é simples. Como $K \neq V$ e K é um subespaço, segue que $x_0 \notin K$. Logo, se $\alpha x_0 \in K$, teremos $\alpha = 0$. Assim, suponha que $\alpha \overline{x_0} = \beta \overline{x_0}$. Daí, $(\alpha - \beta) x_0 = k$ para algum $k \in K$. Por isso, $(\alpha - \beta) x_0 \in K$, o que implica que $\alpha = \beta$. Portanto, d está bem definida. Em vista disso, $i : V/K \to \mathbb{R}$ dada por $i(\alpha \overline{x_0}) := \alpha$ é uma isometria bijetiva. Consequentemente, V/K e $\mathbb{R}$ são isométricos. Logo, V/K é separável, pois $\mathbb{R}$ o é. Assim sendo, decorre da proposição anterior e do Lema 0.168 (p. 60) que K não é separável.

Agora, recordamos o seguinte fato elementar do Cálculo: se f é uma função derivativa e F é uma primitiva de f, então G é uma primitiva de f se, e somente se, $F - G$ é uma constante. Diante disso, dado $x \in V$, existe uma única primitiva F_x de x tal que $F_x(0) = 0$. Logo, podemos definir T em K tal que $T(x) := F_x$ para todo $x \in K$. Afirmamos que $F_x \in E_2$. De fato, F_x possui derivada limitada, a qual é x. Além do mais, por construção, $F_x(0) = 0$. Também,

$$F_x(1) = F_x(1) - F_x(0) = \int_0^1 x(t)\,dt = \gamma(x) = 0,$$

sendo a última igualdade garantida pelo fato de x estar em K. Completamos, assim, a prova da alegação. Note, ainda, que T é linear. Em acréscimo, para qualquer $x \in K$,

$$\|T(x)\|_{E_2} = \|F_x\|_{E_2} = \|F_x'\|_\infty = \|x\|_\infty.$$

Portanto, T é contínua e é uma isometria. Dessa maneira, $T(K)$ não é separável, pois K não o é. Finalmente, obtemos que $E_2 \supseteq T(K)$ não é separável. ■

Encerramos o capítulo apresentando um atributo geométrico de E.

Proposição 1.25. *E não é um espaço estritamente convexo.*

Demonstração. Tome $x, y \in S_E$ tais que $x \neq y$ e $x'(s) = y'(s) = 1$ para algum $s \in [0,1]$. Então, para todo $\alpha \in [0,1]$,

$$\|(1-\alpha)x + \alpha y\|_E = \sup_{t\in[0,1]} |(1-\alpha)x'(t) + \alpha y'(t)| \geq |(1-\alpha)x'(s) + \alpha y'(s)| = 1.$$

Além do mais, a desigualdade triangular nos dá $\|(1-\alpha)x+\alpha y\|_E \leq 1$. Logo, para qualquer $\alpha \in [0,1]$, $\|(1-\alpha)x + \alpha y\|_E = 1$. Portanto, E não é estritamente convexo. ■

Capítulo 2

Pontos extremos

2.1 Definição

Suponha que C seja um subconjunto convexo de um espaço normado V. No presente capítulo daremos nossa atenção aos elementos de C que se comportam como "vértices" de C. São os chamados *pontos extremos*.

Definição 2.1 (Ponto extremo). *Sejam V um espaço vetorial e $C \subseteq V$ um convexo. Dizemos que $w \in C$ é um ponto extremo de C se, para quaisquer $\alpha \in (0, 1)$, $c_1, c_2 \in C$,*

$$w = \alpha c_1 + (1 - \alpha)c_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = w.$$

Indicaremos por $\mathrm{Ext}(C)$ *o conjunto dos pontos extremos de C.*

Assim, quando $w \in \mathrm{Ext}(C)$, a única maneira de expressar w como combinação convexa de dois elementos de C é escrevendo $w = (1 - \alpha)w + \alpha w$, ou seja, é a forma trivial. Geometricamente, isso significa que nenhum segmento de reta com extremidades em C passa por w.

A observação abaixo revela que se queremos encontrar pontos extremos de C, podemos restringir nossa exploração à "fronteira" de C.

Observação 2.2. Tome um espaço normado V e um subconjunto $C \subseteq V$ convexo. Temos que $\mathrm{Ext}(C) \cap \mathrm{Int}(C) = \emptyset$.

Com efeito, considere $v \in \mathrm{Int}(C)$. Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(v; \epsilon) \subseteq C$. Em seguida, seja $S := \{kv : k \in \mathbb{R}, k \geq 0\}$. Geometricamente, S é a semirreta com origem em $\mathbf{0}$ e que passa por v. Então, para $l > 0$ suficientemente pequeno, $(1 - l)v, (1 + l)v \in S \cap B(v; \epsilon)$. Uma vez que

$$v = \frac{(1 - l)v + (1 + l)v}{2},$$

v não é um ponto extremo de C.

2.2 Exemplos

Como preparação para os próximos capítulos, iniciaremos uma busca por pontos extremos em alguns espaços de Banach simples. Ao tratarmos esses espaços, será comum o emprego das notações B_X e S_X adotadas na Definição 0.82 (p. 40).

Proposição 2.3. *Considere $X := (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Então, os pontos extremos de B_X são as funções constantes $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$.*

Demonstração. Primeiramente, provaremos que x_1 e x_2 pertencem a $\mathrm{Ext}(B_X)$. Suponha que existam $\alpha \in (0,1)$ e $c_1, c_2 \in B_X$ tais que:

$$1 = x_1(t) = \alpha c_1(t) + (1-\alpha)c_2(t)$$

qualquer que seja $t \in [0,1]$. Já que 1 é o valor máximo que c_1 e c_2 podem assumir, devemos ter $c_1(t) = c_2(t) = 1$ para todo $t \in [0,1]$. Isso implica que $x_1 \in \mathrm{Ext}(B_X)$. De forma similar, $x_2 \in \mathrm{Ext}(B_X)$. Portanto, $\{x_1, x_2\} \subseteq \mathrm{Ext}(B_X)$.

Para conseguirmos a inclusão reversa, precisamos de um argumento mais sofisticado. Começamos escolhendo $x \in \mathrm{Ext}(B_X)$. Depois, definimos as funções y, z em $[0,1]$ por:

$$y(t) := x(t) + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sen}[\pi x(t)] \quad \text{e} \quad z(t) := x(t) - \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sen}[\pi x(t)], \qquad \forall\, t \in [0,1].$$

Claramente, $y, z \in X$. Em seguida, vamos mostrar que $\|y\|_\infty = \|z\|_\infty = 1$. Realmente, como $\|x\|_\infty = 1$, existe $s \in [0,1]$ tal que $x(s) = \pm 1$. Logo,

$$\|y\|_\infty \geq \left| x(s) + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sen}[\pi x(s)] \right| = \left| \pm 1 + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sen}(\pm\pi) \right| = 1.$$

Agora, considere a função $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(a) := a + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sen}(\pi a) \qquad \forall\, a \in [-1,1].$$

Observe que $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$ e f' é positiva em $(-1,1)$. Por isso, $|f| \leq 1$ em $[-1,1]$. Então, $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y(t) \leq 1 \Rightarrow |y(t)| \leq 1$. Assim, $\|y\|_\infty \leq 1$. Do exposto, segue que $\|y\|_\infty = 1$. De modo semelhante prova-se que $\|z\|_\infty = 1$.

Além disso, $x = \frac{y+z}{2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ext}(B_X) \;&\Rightarrow\; y = z \\ &\Rightarrow\; \mathrm{sen}[\pi x(t)] = \mathrm{sen}[-\pi x(t)] \quad \forall\, t \in [0,1] \\ &\Rightarrow\; \pi x(t) = \pi k,\;\; k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

qualquer que seja $t \in [0,1]$. Disso e do fato de x ser contínua, decorre que x é constante. Dado que $\|x\|_\infty = 1$, concluímos que $x \in \{x_1, x_2\}$. ■

Na observação adiante, fazemos algumas reflexões sobre o mesmo espaço tratado anteriormente. Elas não são necessárias para a compreensão do restante do texto e, por isso, a leitura da observação é facultativa.

Observação 2.4. Considere $X := (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Além disso, seja $A = (a_n)$ uma sequência em $[0,1]$ com termos distintos aos pares. Para cada $n \in \mathbb{N}$, indicamos $A_n := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $X_n := \{x \in X : x(t) = 0 \;\; \forall\, t \in A_n\}$. Desse modo,

(a) X_n é subespaço de X.

(b) B_{X_n} não possui pontos extremos, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

(c) Se A for denso em $[0,1]$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \{\mathbf{0}\}$.

(d) $\dim(X_{n-1}/X_n) = 1$ para cada $n > 1$.

Demonstração. **(a)** A prova é direta.
(b) Fixe $n \in \mathbb{N}$ e considere $x \in B_{X_n}$. Defina as funções y e z como na proposição anterior. Daí, $y, z \in B_{X_n}$ e $x = \frac{y+z}{2}$. Para obtermos $x \notin \operatorname{Ext}(B_{X_n})$, e com isso o resultado esperado, é suficiente mostramos que y e z são elementos distintos. Realmente, se $y = z$, então, como sabemos, teríamos $x = 1$ ou $x = -1$. Todavia, nenhum dos casos ocorre, já que x se anula em X_n. Logo, $x \notin \operatorname{Ext}(B_{X_n})$
(c) Decorre facilmente da continuidade dos elementos de X.
(d) Escolha $n > 1$ e seja $\gamma : X_{n-1} \to \mathbb{R}$ expressa por $\gamma(x) := x(a_n)$ para cada $x \in X_{n-1}$. Logo, γ é um funcional linear não nulo de núcleo X_n. Assim, pelo Lema 0.17 (p. 25), $\dim(X_{n-1}/X_n) = 1$. ∎

Na sequência, analisaremos dois espaços normados tendo $X := \mathcal{C}^1([0,1])$ como espaço vetorial. No primeiro caso, não revelaremos $\operatorname{Ext}(B_X)$ completamente. Todavia, exploraremos algumas propriedades.

Proposição 2.5. *Seja $X := \mathcal{C}^1([0,1])$ e estabeleça $\|\cdot\|_{\max} : X \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\|x\|_{\max} := \max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\} \qquad \forall\, x \in X.$$

Logo:
(a) *$\|\cdot\|_{\max}$ é uma norma em X.*
(b) *Se $x \in \operatorname{Ext}(B_X)$, então $\|x\|_\infty \geq \|x'\|_\infty$.*
(c) *Quando $x \in \operatorname{Ext}(B_X)$ e $\|x\|_\infty > \|x'\|_\infty$, então $x = -1$ ou $x = 1$.*
(d) *As funções x_1, x_2, x_3 e x_4 definidas em $[0,1]$ pelas leis:*

$$x_1(t) := t, \quad x_2(t) := -t, \quad x_3(t) := t - 1 \quad e \quad x_4(t) := -t + 1 \qquad \forall\, t \in [0,1]$$

pertencem a $\operatorname{Ext}(B_X)$.
(e) *Considere que $x \in \operatorname{Ext}(B_X)$ é diferente dos elementos mencionados em (c) e (d). Sendo assim, x não possui raízes reais.*
(f) *A distância entre dois pontos extremos distintos, escolhidos entre aqueles explicitados em (c) e (d), é 1 ou 2.*

Demonstração. **(a)** A verificação é direta.
(b) Tome $x \in S_X$ e suponha que $\|x\|_\infty < \|x'\|_\infty$. Veremos que $x \notin \operatorname{Ext}(B_X)$. Começamos definindo funções y, z em $[0,1]$ sendo que, para cada $t \in [0,1]$,

$$y(t) := x(t) + \frac{1 - \|x\|_\infty}{2} \qquad \text{e} \qquad z(t) := x(t) - \frac{1 - \|x\|_\infty}{2}.$$

Obviamente, $y, z \in X$. Além do mais,

$$1 = \frac{2}{2} > \frac{1 + \|x\|_\infty}{2} = \|x\|_\infty + \frac{1 - \|x\|_\infty}{2} \geq \left\| x + \frac{1 - \|x\|_\infty}{2} \right\|_\infty .$$

Por isso, e sabendo que $\|x'\|_\infty = 1$, conseguimos:

$$\|y\|_{\max} = \max \left\{ \left\| x(t) + \frac{1 - \|x\|_\infty}{2} \right\|_\infty , \|x'\|_\infty \right\} = 1.$$

De modo semelhante, $\|z\|_{\max} = 1$. Em resumo, x é o ponto médio de dois elementos distintos de B_X. Consequentemente, $x \notin \mathrm{Ext}(B_X)$.

(c) Escolha $x \in \mathrm{Ext}(B_X)$ tal que $\|x\|_\infty > \|x'\|_\infty$. Depois, tome $\gamma \in \mathcal{C}^1([-1,1])$ tal que:

$$\begin{cases} \gamma(-1) = \gamma(1) = 0, \\ \gamma \text{ é positiva em } (-1,1) \text{ e} \\ \|\gamma'\|_\infty < 1. \end{cases}$$

Considere as funções:

$$f := x + \gamma \circ x \qquad \text{e} \qquad g := x - \gamma \circ x$$

definidas em $[0,1]$. Assim, $f, g \in X$. A seguir, mostraremos que f e g possuem norma 1. Primeiramente, sejam F e G funções de $[-1,1]$ em $\mathbb{R}$ dadas por:

$$F(u) := u + \gamma(u) \quad \text{e} \quad G(u) := u - \gamma(u) \qquad \forall\, u \in [-1,1].$$

Então, $F'(u) = 1 + \gamma'(u)$. Já que $\|\gamma'\|_\infty < 1$, F' é positiva. Logo, F é estritamente crescente. Assim, visto que $F(-1) = -1$ e $F(1) = 1$, temos $\|F\|_\infty = 1$. Porquanto $f = F \circ x$, segue que $\|f\|_\infty \leq 1$. Em acréscimo, como $\|x\|_\infty = 1$, existe $s \in [0,1]$ tal que $|x(s)| = 1$. Daí, $|f(s)| = 1$. Portanto, $\|f\|_\infty = 1$. Se derivamos $G(u) = u - \gamma(u)$ e usamos argumento parecido, obtemos também que $\|g\|_\infty = 1$.

Agora, observe que

$$\|f'\|_\infty = \|x' + x'\gamma' \circ x\|_\infty \leq \|x'\|_\infty (1 + \|\gamma' \circ x\|_\infty) \leq \|x'\|_\infty (1 + \|\gamma'\|_\infty).$$

Como $\|x'\|_\infty < 1$ e γ é contínua, é possível escolher γ que também nos garanta $\|f'\|_\infty < 1$. Analogamente, $\|g'\|_\infty < 1$. Desse modo, $\|f\|_{\max} = \|g\|_{\max} = 1$ e $x = \frac{f+g}{2}$. Em vista disso, $x \notin \mathrm{Ext}(B_X)$ se $f \neq g$. Então,

$$x \in \mathrm{Ext}(B_X) \quad \Rightarrow \quad f = g \quad \Rightarrow \quad \gamma \circ x = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Finalmente, repetindo a exposição feita na prova da Proposição 2.3, concluímos que $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$ são os únicos elementos de $\mathrm{Ext}(B_X)$, neste caso.

(d) Suponha que existam $w_1, w_2 \in B_X$ e $\alpha \in [0,1]$ tais que

$$t = \alpha w_1(t) + (1-\alpha) w_2(t) \tag{2.1}$$

para cada $t \in [0,1]$. Posto que $\|w_1'\|_\infty, \|w_2'\|_\infty \leq 1$, pelo Teorema do Valor Médio concluímos que $w_1(t) \leq t$ e $w_2(t) \leq t$ para todo $t \in [0,1]$. Disso e de (2.1), segue que $w_1 = w_2 = x_1$. Portanto, $x_1 \in \mathrm{Ext}(B_X)$. De modo análogo, x_2 é um ponto extremo de B_X.

Agora, tome $v_1, v_2 \in B_X$ e $\alpha \in [0,1]$ tais que:

$$t - 1 = \alpha v_1(t) + (1-\alpha) v_2(t) \tag{2.2}$$

para todo $t \in [0,1]$. Derivando, obtemos $1 = \alpha v_1'(t) + (1-\alpha)v_2'(t)$. Então, já que $\|v_1'\|_\infty, \|v_2'\|_\infty \leq 1$, concluímos que v_1' e v_2' são funções de valor constante igual a 1. Por isso, $v_1(t) = t + c_1$ e $v_2(t) = t + c_2$, em que c_1, c_2 são números reais fixos. Em adição, porquanto $\|v_1\|_\infty, \|v_2\|_\infty \leq 1$, obtemos $c_1, c_2 \in [-1, 0]$. Em seguida, substituindo $v_1(t) = t + c_1$ e $v_2(t) = t + c_2$ na expressão (2.2), deduzimos que $c_1 = c_2 = -1$. Assim, $x_3 \in \operatorname{Ext}(B_X)$. Analogamente, $x_4 \in \operatorname{Ext}(B_X)$.

(e) Seja $x \in X$ tal que $\|x\|_\infty = \|x'\|_\infty = 1$. Suponha que $r \in [0,1]$ seja uma raiz de x. Defina as funções p e q em $[0,1]$ por

$$p(t) := x'(t) + \gamma[x'(t)] \quad \text{e} \quad q(t) := x'(t) - \gamma[x'(t)] \qquad \forall\, t \in [0,1],$$

sendo γ a função da prova de (c). Claramente, p e q são contínuas. Além disso, por análise semelhante àquela feita em (c), obtemos $\|p\|_\infty = 1$ e $\|q\|_\infty = 1$. Também, $x' = \frac{p+q}{2}$.

Agora, recorra às aplicações P e Q definidas em $[0,1]$ por:

$$P(t) := \int_r^t p(s)\, ds \quad \text{e} \quad Q(t) := \int_r^t q(s)\, ds \qquad \forall\, t \in [0,1].$$

Note que $P, Q \in X$. Afirmamos que P e Q estão em B_X. Realmente,

$$\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \left| \int_r^t p(s)\, ds \right| \leq |t - r| \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \|P'\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |p(t)| = 1.$$

Desse modo, $\|P\|_{\max} = 1$. Analogamente, $\|Q\|_{\max} = 1$.

Em seguida, observe que $P(t) + Q(t) = \int_r^t p(s) + q(s)\, ds$, o que nos conduz a:

$$\frac{P(t) + Q(t)}{2} = \int_r^t x'(s)\, ds = x(t) - x(r) = x(t).$$

Então, uma vez que x possui uma raiz,

$$\gamma \circ x' \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad p \neq q \quad \Rightarrow \quad P \neq Q \quad \Rightarrow \quad x \notin \operatorname{Ext}(B_X).$$

Consequentemente, se $x \in \operatorname{Ext}(B_X)$ não corresponde aos casos em (c) e (d), então x não admite raízes reais.

(f) A verificação é direta. ∎

Proposição 2.6. *Considere* $X := \mathcal{C}^1([0,1])$ *e* $\|\cdot\|_+ : X \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$\|x\|_+ := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty \qquad \forall\, x \in X.$$

Então:

(a) $\|\cdot\|_+$ *é uma norma em* X.

(b) $\operatorname{Ext}(B_X) = \{x = -1, x = 1\}$.

(c) *Seja* Y *o subespaço de* X *formado pelas funções da forma* $t \mapsto at + b$, *com* $a, b \in \mathbb{R}$. *Logo,* $\operatorname{Ext}(B_Y)$ *possui* 4 *elementos.*

Demonstração. **(a)** A prova é direta.

(b) Escolha x na esfera S_X. Perceba que não podemos ter $\|x\|_\infty = 0$ e $\|x'\|_\infty = 1$. Em acréscimo, se $\|x\|_\infty = 1$ e $\|x'\|_\infty = 0$, então x é uma função de valor constante -1 ou 1.

Assim, resta-nos investigar o caso em que

$$m := \|x\|_\infty < 1 \quad \text{e} \quad n := \|x'\|_\infty < 1, \qquad \text{com } m + n + 1. \tag{2.3}$$

Como veremos, não existem pontos extremos sob essas circunstâncias.

Para tanto, tome $x \in B_X$ que cumpre (2.3). Também, seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar e contínua tal que

$$\begin{cases} 0 \leq g(r) \leq 3a, & 0 \leq r \leq \epsilon \\ g(r) = a, & r \geq \epsilon \text{ e} \\ \int_0^\epsilon g(s)\, ds = a\epsilon \end{cases},$$

em que a e ϵ são números positivos a serem escolhidos mais adiante. Uma vez que g é contínua, g possui primitivas. Dentre elas, seja G a que mapeia 0 em $-a$. Dessa forma, G é uma função par e

$$G(r) = \begin{cases} ar - a, & r \geq \epsilon \\ -ar - a, & r \leq -\epsilon \end{cases}.$$

Agora, estabelecemos em $[0, 1]$ seguintes aplicações y e z:

$$y(t) := x(t) + G[x(t)] \quad \text{e} \quad z(t) := x(t) - G[x(t)] \qquad \forall\, t \in [0, 1].$$

Afirmamos que $y \in B_X$. Para a verificação, analisaremos três casos:

Caso 1. Suponha que $x(t) \geq \epsilon$. Então, para a pequeno o suficiente,

$$|y(t)| = |x(t) + ax(t) - a| = |(1 + a)x(t) - a| \leq (1 + a)m - a$$

e

$$|y'(t)| = |x'(t) + x'(t)G'[x(t)]| = |x'(t)(1 + a)| \leq n(1 + a).$$

Logo, $|y(t)| + |y'(t)| \leq (1 + a)m - a + n(1 + a) = 1$. Decorre daí que $\|y\|_+ \leq 1$.

Caso 2. Admita que $x(t) \leq -\epsilon$. Escolhendo a suficientemente pequeno, encontramos:

$$|y(t)| = |x(t) - ax(t) - a| \leq |(1 - a)x(t)| + |a| \leq (1 - a)m + a$$

e

$$|y'(t)| = |x'(t) + x'(t)G'[x(t)]| = |x'(t)(1 - a)| \leq (1 - a)n.$$

Novamente, somando as inequações, temos $\|y\|_+ \leq 1$.

Caso 3. Considere $|x(t)| \leq \epsilon$. Desse modo, para a e ϵ suficientemente pequenos,

$$\begin{aligned} |y(t)| + |y'(t)| &\leq |x(t)| + |G[x(t)]| + |x'(t)| + |x'(t)G'[x(t)]| \\ &\leq \epsilon + |a\epsilon + a| + n + n \cdot 3a \leq 1. \end{aligned}$$

Do exposto, $y \in B_X$, como esperávamos. De modo correlato, temos que $z \in B_X$. Sendo assim, se $x = \frac{y+z}{2}$ é um ponto extremo de B_X, então $y = z$. Em seguida, repare que

$$y = z \quad \Rightarrow \quad G[x(t)] = 0 \;\; \forall\, t \in [0, 1].$$

Ademais, da construção de G para $\epsilon < 1$ decorre que $G[x(s)] = 0 \Leftrightarrow x(s) = \pm 1$. Posto que x é contínua, deveríamos ter, nessa situação, $x = 1$ ou $x = -1$. Entretanto, em nenhum dos casos temos $m, n < 1$. Portanto, $x \notin \mathrm{Ext}(C)$.

(c) Considere a norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\|(a,b)\| := \sup\{|at+b| : t \in [0,1]\} + |a|$$

para cada $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, e a função $\theta : Y \to \mathbb{R}^2$ tal que $\theta(ax+b) := (a,b)$. Obviamente, θ é uma isometria bijetiva. Revelaremos que $B_{\mathbb{R}^2}$ com essa norma apresenta 4 pontos extremos. Para isso, construiremos $B_{\mathbb{R}^2}$ explorando diversos casos:

Caso I. Sejam $a, b \geq 0$. Então, $\|(a,b)\| = |a+b| + |a| = 2a + b$. Assim, $\|(a,b)\| \leq 1 \Leftrightarrow b \leq 1 - 2a$.

Caso II. Admita que $a, b \leq 0$. Nessa situação, temos:

$$\|(a,b)\| = |a+b| + |a| = -a - b - a = -2a - b.$$

Daí, $\|(a,b)\| \leq 1 \Leftrightarrow b \geq -2a - 1$.

Caso III. Tome $a \geq 0$ e $b \leq 0$, com $|b| \geq a$. Logo, $\|(a,b)\| = |b| + |a| = -b + a$. Por isso, $\|(a,b)\| \leq 1 \Leftrightarrow b \geq a - 1$.

Caso IV. Sejam $a \geq 0$ e $b \leq 0$, com $|b| \leq a$. Desse modo,

$$\|(a,b)\| = \max\{|b|, |a+b|\} + a = \max\{-b, a+b\} + a.$$

Primeiramente, suponha que $\max\{-b, a+b\} = -b$. Isso ocorre se, e somente se, $b \leq -a/2$. Além do mais, sob essa hipótese, $\|(a,b)\| \leq 1 \Leftrightarrow b \geq a - 1$. Ainda neste caso, considere que $\max\{-b, a+b\} = a + b$. Logo, $b \geq -a/2$. Também, nessas condições,

$$\|(a,b)\| \leq 1 \Leftrightarrow a + b + a \leq 1 \Leftrightarrow b \leq 1 - 2a.$$

Caso V. Considere $a \leq 0$ e $b \geq 0$. Então, procedemos como nos casos III e IV.

Após essas ponderações, constatamos que a bola desejada é a região cinza na Figura 2.1. Inferimos, pois, que $P_1 := \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $P_2 := (0,1)$, $P_3 := \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e $P_4 := (0,-1)$ são os elementos de $\mathrm{Ext}(B_{\mathbb{R}^2})$. Visto que θ é uma isometria, descobrimos que B_Y possui 4 pontos extremos.

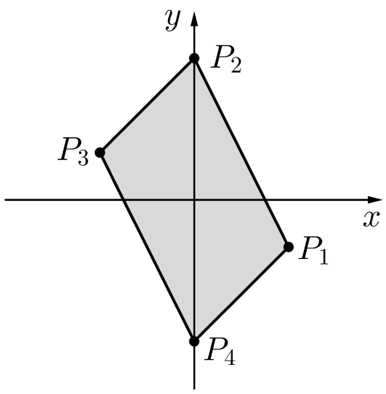

Figura 2.1: Representação de $B_{\mathbb{R}^2}$.
P_1, P_2, P_3 e P_4 são seus pontos extremos.

■

2.3 Teoria

Observados os resultados anteriores, passaremos agora à teoria que nos permitirá, nos capítulos seguintes, determinar pontos extremos em duais topológicos.

Definição 2.7 (Envoltória convexa). *Sejam V um espaço vetorial real e $A \subseteq V$. Chamamos envoltória convexa de A o conjunto* $\operatorname{conv}(A)$ *definido por:*

$$\operatorname{conv}(A) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \,:\, n \in \mathbb{N},\, x_j \in A,\, \lambda_j \geq 0,\, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Demonstra-se com facilidade que $\operatorname{conv}(A)$ é a interseção de todos os subconjuntos convexos de V contendo A. Em particular, $\operatorname{conv}(A)$ é um convexo.

Definição 2.8 (Subconjunto extremo). *Considere um espaço vetorial V e $C \subseteq V$ um convexo. Ainda, admita que $P \subseteq C$ seja convexo. Dizemos que P é um subconjunto extremo de C quando se verifica a seguinte implicação:*

$$p \in P \text{ e } p \text{ é combinação convexa de } u, v \in C \quad \Rightarrow \quad u, v \in P.$$

Repare que se $\{w\}$ é um subconjunto extremo de C, então w é um ponto extremo de C.

Um dos elementos mais importantes na teoria reservada para esta seção é o *Teorema de Krein*[1]*-Milman*, o qual decorre do lema adiante. Antes de observá-lo, gostaríamos de salientar que o símbolo V^* designa o dual topológico do espaço normado V e que τ_* se refere à topologia fraca-estrela.

Lema 2.9 (Krein, Milman). *Sejam V um espaço vetorial topológico localmente convexo e $K \subseteq V$ não vazio, convexo e compacto. Se $f \in V^*$, então o conjunto dos pontos de K nos quais f atinge o valor máximo é um subconjunto extremo de K. Em particular,* $\operatorname{Ext}(K) \neq \emptyset$.

Dica para a demonstração. Observando a Proposição 0.63 (p. 33) fixamos

$$m := \max_{k \in K} f(k) \quad \text{e} \quad M := \{k \in K : f(k) = m\}.$$

Facilmente vemos que M, além de não vazio, é fechado e convexo. Por fim, admita que $w \in M$ e que existam $a \in [0,1]$ e $u, v \in K$ tais que $w = au + (1-a)v$. Precisamos mostrar que $u, v \in M$. Para isso, note que $m = f(w) = af(u) + (1-a)f(v)$ e $f(u), f(v) \leq m$. □

Proposição 2.10 (Krein, Milman). *Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço normado e $K \subseteq V$ não vazio, convexo e compacto. Então, $K = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{Ext}(K))}$. Em particular,* $\operatorname{Ext}(K) \neq \emptyset$.

[1] Mark Krein (1907-1989), matemático soviético. Teoria dos Operadores e Teoria das Representações foram algumas das áreas nas quais se destacou.

Demonstração. Indiquemos $A := \mathrm{Ext}(K)$ e $C := \overline{\mathrm{conv}(A)}$. Desejamos provar que $K = C$. Inicialmente, vemos que $C \subseteq K$, já que K é convexo por hipótese, e fechado, conforme os lemas 0.76 (p. 38) e 0.58 (p. 33). Suponha que exista $v_0 \in K \backslash C$. Pelo Lema 2.9, $A \neq \emptyset$, o que nos dá $C \neq \emptyset$. Logo, o Lema 0.224 (p. 79) revela-nos que existe $f \in V^*$ tal que $f(v_0) > \sup\limits_{v \in C} f(v)$. Em adição, o Lema 0.55 (p. 32) mostra que $C \subseteq K$ é compacto. Disto e do fato de $A \subseteq C$, obtemos

$$f(v_0) > \max_{v \in C} f(v) \geq \max_{v \in A} f(v). \tag{2.4}$$

Em seguida, designe $m := \max\limits_{v \in K} f(v)$. Assim, pelo Lema 2.9, $M := f^{-1}(\{m\}) \cap K$ possui um ponto extremo. Nesse caso, escolha $w \in \mathrm{Ext}(M)$. Afirmamos que $w \in \mathrm{Ext}(K) = A$. Com efeito, sejam $k_1, k_2 \in K$ e $\alpha \in [0, 1]$ tais que $w = \alpha k_1 + (1 - \alpha)k_2$. Então, aplicando f nos membros da equação, deduzimos, da definição de m, que $k_1, k_2 \in M$. Visto que w é um ponto extremo de M, segue que $k_1 = k_2 = w$. Desse modo, provamos a afirmação. Por isso,

$$\begin{aligned} f(w) &\geq f(v_0), && \text{pois } w \in M \\ &> \max_{v \in A} f(v), && \text{segundo (2.4)} \\ &\geq f(w), \end{aligned}$$

visto que $w \in A$. Através desta contradição, conseguimos $C = K$, como esperado. ■

Observação 2.11. (a) A prova anterior depende do Lema de Zorn (p. 24), pois o Lema 0.224 (p. 79) é provado mediante o Lema 0.183 (p. 64). Contudo, caso V possua dimensão finita, podemos verificar a proposição acima sem recorrermos ao resultado de Zorn. Isso é feito em [36], p. 275.

(b) Considere o espaço $X := (\mathcal{C}([0, 1]), \| \cdot \|_\infty)$, indicado na Proposição 2.3. Podemos utilizar o teorema acima para mostrarmos que, se V for um espaço de Banach, então $V^* \ncong X$. De fato, pelo Teorema de Banach-Alaoglu (p. 76), B_{V^*} é τ_*-compacto. Então, pelo Teorema de Krein-Milman, $B_{V^*} = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(B_{V^*}))}^*$.

Sabemos, pela proposição acima citada, que $\mathrm{Ext}(X)$ possui apenas dois pontos: $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. Logo, $\mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(X))$ é um segmento de reta. Afirmamos que $\mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(X))$ é τ_*-fechado. Com efeito, considere $g : \mathbb{R} \to X$ tal que $g(r) := (1 - r)x_1 + rx_2$ para cada r real. Uma vez que g é contínua, $g([0, 1]) = \mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(X))$ é compacto e, por isso, é τ_*-compacto. Por isso e pelo Lema 0.58 (p. 33), a afirmação está provada.

Assim, $\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(X))}^*$ tem dimensão 2. Por outro lado, X tem dimensão infinita. Desse modo, $B_X \ncong \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(X))}^*$. Consequentemente, V^* não é isométrico a X.

Finalizamos o capítulo com uma proposição que, assim como o Teorema de Krein-Milman, será ferramenta essencial para as aplicações que as próximas páginas compreendem. Para prová-la, precisamos do lema que segue.

Lema 2.12. *Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e $C_1, C_2, \ldots, C_n$ subconjuntos convexos de*

V. Indique:

$$U := \bigcup_{i=1}^{n} C_i, \qquad P := C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$$

e

$$S := \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_i \geq 0 \ \forall\ i, \quad t_1 + \ldots + t_n = 1\}.$$

Também defina $\Gamma : S \times P \to V$ estabelecendo, para quaisquer $t := (t_1, \ldots, t_n) \in S$ e $c := (c_1, \ldots, c_n) \in P$,

$$\Gamma(t, c) := \sum_{i=1}^{n} t_i c_i.$$

Dessa forma, $\Gamma(S \times P) = \mathrm{conv}(U)$.

Demonstração. Vamos atestar que $\mathrm{conv}(U) \subseteq \Gamma(S \times P)$. A inclusão reversa é óbvia. Tome $u \in \mathrm{conv}(U)$ e suponha, sem perda de generalidade, que $u = \sum_{i=1}^{n} t_i c_i$, com $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in S$ e $(c_1, \ldots, c_n) \in P$. Então,

$$u = \Gamma[(t_1, t_2, \ldots, t_n), (c_1, c_2, \ldots, c_n)] \in \Gamma(S \times P).$$

Por isso, $\mathrm{conv}(U) \subseteq \Gamma(S \times P)$. ■

Note que, no lema acima, se admitirmos também que V é um espaço vetorial topológico e que cada C_k é um compacto, então $\mathrm{conv}(U)$ será compacto, porque Γ é contínua.

No próximo enunciado encontramos a notação V' fixada na Definição 0.201 (p. 71) e o conceito de topologia gerada, cuja origem é a Proposição 0.202 (p. 71).

Proposição 2.13. *Seja (V, τ) um espaço de Hausdorff tal que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e τ é gerada por $\mathcal{P} \subseteq V'$. Tome $C \subseteq V$ convexo e compacto e $F \subseteq C$ fechado tais que $\overline{\mathrm{conv}(F)} = C$. Então, $\mathrm{Ext}(C) \subseteq F$.*

Demonstração. Desejando uma contradição, suponha que exista $v \in \mathrm{Ext}(C) \backslash F$. Como F é fechado, existe uma vizinhança W de v disjunta de F. Escolha $W' := \bigcap_{i=1}^{m} \gamma_i^{-1}(A_i) \subseteq W$, em que $v \in W'$, os γ_i estão em $\mathcal{P}$ e os A_i são abertos da reta. Para cada $i \in [m]$, escolha um intervalo aberto limitado $I_i \subseteq A_i$ de modo que $\bigcap_{i=1}^{m} \gamma_i^{-1}(I_i) \neq \emptyset$. Uma vez que cada I_i é interseção de duas semirretas abertas, concluímos que existe uma vizinhança de v disjunta de F da forma $U := \bigcap_{i=1}^{n} \gamma_i^{-1}(L_i)$, de modo que $\gamma_i \in \mathcal{P}$ e L_i é um intervalo aberto e ilimitado para cada $i \in [n]$. Notemos $U_i := \gamma_i^{-1}(L_i)$. Assim, $v \notin \bigcup_{i=1}^{n} V \backslash U_i$. De acordo com o Lema 0.15 (p. 25), U_i e $V \backslash U_i$ são convexos para todo $i \in [n]$. Agora, indiquemos $K_i := (V \backslash U_i) \cap C$ e $K := \bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Observe que cada K_i é convexo, porque é a interseção de conjuntos convexos. Uma vez que V é de Hausdorff e C é compacto, vemos que C é fechado. Logo, cada K_i é fechado. Além disso, temos $K_i \subseteq C$ para todo i, de modo que todos esses n conjuntos são compactos. Portanto, segundo a observação que fizemos após o lema anterior, $\mathrm{conv}(K)$ é compacto. Por essa razão, $\mathrm{conv}(K)$ é fechado.

Agora, mostraremos que $v \in \mathrm{conv}(K)$. Dado que $U \cap F = \emptyset$, temos $F \subseteq K$. Realmente, se $x \in F \subseteq (V \backslash U)$, então existe $j \in [n]$ tal que $x \in V \backslash U_j$. Segue que $x \in K_j \subseteq K$. Por isso, $\mathrm{conv}(F) \subseteq \mathrm{conv}(K)$. Em adição, como $\mathrm{conv}(K)$ é fechado, $\overline{\mathrm{conv}(F)} \subseteq \mathrm{conv}(K)$. Daí, usando a hipótese do enunciado, obtemos $\mathrm{Ext}(C) \subseteq C = \overline{\mathrm{conv}(F)} \subseteq \mathrm{conv}(K)$. Consequentemente, $v \in \mathrm{conv}(K)$.

Por fim, passemos à construção do absurdo. Inicialmente, afirmamos que se v é combinação convexa de n elementos de K, então v é igual a pelo menos um desses elementos. Com efeito, se $n = 2$, a afirmação é válida, já que v é um ponto extremo de C. Em seguida, suponha que o resultado valha para $n-1$ elementos e seja $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ uma combinação convexa de valor v, na qual $v_i \in K$, qualquer que seja $i \in [n]$. Então,

$$v = s\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{s} v_i\right) + \lambda_n v_n, \qquad \text{com } s := \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1}.$$

Visto que $v \in \mathrm{Ext}(C)$, temos que $v = v_n$ ou $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{s} v_i$. Por esta razão e pela hipótese de indução, $v = v_i$ para algum $i \in [n]$. Dessa forma, a afirmação está provada. Através dela, concluímos que:

$$v \notin \bigcup_{i=1}^{n} V \backslash U_i \quad \Rightarrow \quad v \notin K \quad \Rightarrow \quad v \notin \mathrm{conv}(K),$$

o que é uma contradição. ■

Capítulo 3

Aplicação 1: Pontos extremos em duais

Chegou o momento de analisarmos $\text{Ext}(B_{X^*})$ para alguns espaços familiares X. Cada seção que segue recebe o título do espaço X considerado.

3.1 Espaço $\mathcal{C}([0,1])$ com a norma do sup

Nesta seção estudaremos dual do espaço $X := (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Dado $t \in [0,1]$, indicamos por φ_t a função de X em $\mathbb{R}$ expressa por $\varphi_t(x) := x(t)$ para cada $x \in X$. Além disso, definimos $\Phi^+ := \{\varphi_t : t \in [0,1]\}$, $\Phi^- := \{-\varphi_t : t \in [0,1]\}$ e $\Phi := \Phi^+ \cup \Phi^-$. Descobriremos que $\text{Ext}(B_{X^*}) = \Phi$.

Proposição 3.1. **(a)** $\varphi_t \in X^*$ *para todo* $t \in [0,1]$.
(b) $\|\varphi_t\|_* = 1$, *qualquer que seja* $t \in [0,1]$.
(c) $\text{conv}(\Phi^+)$ *e* $\text{conv}(\Phi^-)$ *estão contidos em* S_{X^*}.
(d) *Sejam* μ *e* η *funções de* $[0,1]$ *em* Φ *tais que, para cada* $t \in [0,1]$, $\mu(t) := \varphi_t$ *e* $\eta(t) := -\varphi_t$. *Então,* μ *e* η *são* τ_**-contínuas. Em particular,* Φ *é* τ_**-compacto.*
(e) $\text{conv}(\Phi)$ *é* τ_**-denso em* B_{X^*}.

Demonstração. **(a)** A prova é direta.
(b) Fixe $t \in [0,1]$. Observe que

$$\|\varphi_t\|_* = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} |\varphi_t(x)| = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} |x(t)| \leq 1.$$

Além do mais, seja $x_0 \in X$ a função de valor constante 1. Porquanto x_0 tem norma 1, fica $\|\varphi_t\|_* \geq |x_0(t)| = 1$. Assim, $\|\varphi_t\|_* = 1$.
(c) Provaremos que $\text{conv}(\Phi^+) \subseteq S_{X^*}$ por indução sobre o número n de termos da combinação convexa. Sejam $t_1, t_2, \alpha \in [0,1]$. Desse modo, pela desigualdade triangular e pelo item acima, $\|\alpha\varphi_{t_1} + (1-\alpha)\varphi_{t_2}\|_* \leq \alpha\|\varphi_{t_1}\|_* + (1-\alpha)\|\varphi_{t_2}\|_* = 1$. Usando a mesma função constante do item anterior, conseguimos $\|\alpha\varphi_{t_1} + (1-\alpha)\varphi_{t_2}\|_* = 1$. Logo, o resultado vale para $n = 2$. Agora, admita que ele seja verdadeiro para $n-1$ termos e considere $\alpha_1\varphi_{t_1} + \alpha_2\varphi_{t_2} + \ldots + \alpha_n\varphi_{t_n}$ uma combinação convexa de elementos de Φ^+. Repare que

podemos escrevê-la como

$$s\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{s}\varphi_{t_i}\right)+\alpha_n\varphi_{t_n},$$

com $s := \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}$. Então, pela hipótese de indução e pela desigualdade triangular, a expressão acima tem norma igual ou inferior a $s \cdot 1 + \alpha_n = 1$. Mais uma vez, repetimos o raciocínio do item precedente para obtermos a desigualdade reversa. Como consequência, $\|\alpha_1\varphi_{t_1} + \alpha_2\varphi_{t_2} + \ldots + \alpha_n\varphi_{t_n}\|_* = 1$ e a demonstração está completa. De modo semelhante garantimos que $\mathrm{conv}(\Phi^-) \subseteq S_{X^*}$.

(d) Comprovaremos que μ é τ_*-contínua. O outro caso tem tratamento análogo. Seja (t_d) uma rede em $[0,1]$ com limite t. Por continuidade, $x(t_d) \rightharpoonup x(t)$, qualquer que seja $x \in X$. Equivalentemente, $\varphi_{t_d}(x) \rightharpoonup \varphi_t(x)$ para todo $x \in X$. Por essa razão, $\varphi_{t_d} \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi_t$, de acordo com o Lema 0.235 (p. 84).

(e) Pelo item (b), segue facilmente que $\mathrm{conv}(\Phi) \subseteq B_{X^*}$. Uma vez que B_{X^*} é τ_*-compacto e (X^*, τ_*) é de Hausdorff, então B_{X^*} é τ_*-fechado. Por isso, $\overline{\mathrm{conv}(\Phi)}^* \subseteq B_{X^*}$. Suponha que exista $\theta \in B_{X^*}\backslash\overline{\mathrm{conv}(\Phi)}^*$. Observe que, pela Proposição 0.221 (p. 77), $\overline{\mathrm{conv}(\Phi)}^*$ é τ_*-compacto. Logo, pelo Segundo Teorema de Separação de Hahn-Banach (p. 69), existe $\delta_{x_0} \in X^{**}$ tal que $\delta_{x_0}(\gamma) \leq 1 < \delta_{x_0}(\theta)$, qualquer que seja $\gamma \in \Phi$. Assim, fazendo γ percorrer Φ, descobrimos que, para todo $t \in [0,1]$, $|x_0(t)| \leq 1$. Portanto, $\|x_0\|_\infty \leq 1$ e $\theta(x_0) > 1$. Dessa forma,

$$\|\theta\|_* = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} |\theta(x)| \geq \theta(x_0) > 1,$$

o que nega a hipótese de que $\theta \in B_{X^*}$. ■

Teorema 3.2. $\mathrm{Ext}(B_{X^*}) = \Phi$.

Demonstração. Conforme o Teorema de Banach-Alaoglu (p. 76), B_{X^*} é τ_*-compacto. Além disso, pelo item (d) da proposição anterior e pela Proposição 0.221 (p. 77), Φ é τ_*-fechado. Também já sabemos que $\overline{\mathrm{conv}(\Phi)}^* = B_{X^*}$. Por tudo isso, decorre da Proposição 2.13 (p. 106) que $\mathrm{Ext}(B_{X^*}) \subseteq \Phi$.

Para conseguirmos a inclusão reversa, começamos fixando $s \in [0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja x_n a função cujo gráfico é exibido na Figura 3.1. Note que essas funções estão na esfera S_X.

Em seguida, defina, para todo n natural, o conjunto $H_n := \{\gamma \in X^* : \gamma(x_n) = 1\}$ e designe $H := \bigcap_{i=1}^{n} H_n$. Já que $H_n = \delta_{x_n}^{-1}(\{1\})$, cada H_n é τ_*-fechado. Por isso, H é τ_*-fechado. Também, como cada H_n é convexo, H é convexo. Além disso, segue do Lema 0.55 (p. 32) que $H \cap B_{X^*}$ é τ_*-compacto. Perceba que esse conjunto é não vazio, pois $\varphi_s \in H \cap B_{X^*}$. Logo, pelo Teorema de Krein-Milman (p. 104), $\mathrm{Ext}(H \cap B_{X^*}) \neq \emptyset$.

Afirmamos que $\mathrm{Ext}(H \cap B_{X^*}) \subseteq \mathrm{Ext}(B_{X^*})$. De fato, tome $\gamma \in \mathrm{Ext}(H \cap B_{X^*})$ e suponha que $\gamma = \alpha f + (1-\alpha)g$, com $f, g \in B_{X^*}$ e $\alpha \in [0,1]$. Então,

$$1 = \alpha f(x_n) + (1-\alpha)g(x_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

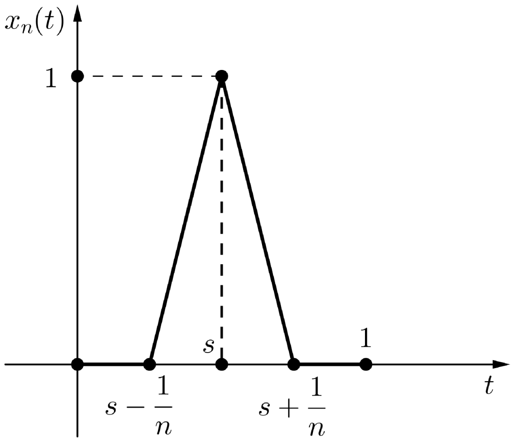

Figura 3.1: Gráfico da função x_n.

Repare que

$$1 \geq \|f\|_* = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} |f(x)| \geq |f(x_n)|,$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, para todo número natural n, $|g(x_n)| \leq 1$. Assim, decorre de (3.1) que $f(x_n) = g(x_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, temos $f, g \in H \cap B_{X^*}$. Visto que $\gamma \in \mathrm{Ext}(H \cap B_{X^*})$, segue que $f = g$. Concluímos a prova da afirmação.

Agora, observe que $\Phi \cap (H \cap B_{X^*}) = \varphi_s$. Como

$$\mathrm{Ext}(H \cap B_{X^*}) \subseteq \mathrm{Ext}(B_{X^*}) \subseteq \Phi,$$

inferimos que $\varphi_s \in \mathrm{Ext}(H \cap B_{X^*})$, e daí, que $\varphi_s \in \mathrm{Ext}(B_{X^*})$. Por simetria, $-\varphi_s \in \mathrm{Ext}(B_{X^*})$. Uma vez que s é arbitrário em $[0, 1]$, constatamos que $\Phi \subseteq \mathrm{Ext}(B_{X^*})$. ■

Ao descrevermos $\mathrm{Ext}(B_{X^*})$, concluímos o propósito principal desta seção. Adiante, complementamos nosso estudo explorando algumas propriedades geométricas de B_X e de B_{X^*}. Mais especificamente, estamos interessados em investigar as *arestas* e as *faces* dessas bolas, caso haja. Tratam-se de elementos que identificaremos a seguir, após definirmos os *segmentos de reta*.

Definição 3.3 (Segmento de reta). *Dados um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V e dois vetores $v, w \in V$ distintos, definimos os seguintes conjuntos:*

(a) $[v, w] := \{kv + (1-k)w : k \in [0, 1]\}$, *chamado de segmento de reta fechado.*

(b) $(v, w) := \{kv + (1-k)w : k \in (0, 1)\}$, *chamado de segmento de reta aberto.*

Definição 3.4 (Aresta, face). *Seja V um espaço normado.*

(a) *Uma aresta de B_V é um segmento de reta $[u, v]$ tal que $u, v \in \mathrm{Ext}(B_V)$, $[u, v] \subseteq S_V$ e (u, v) é disjunto de qualquer outro segmento aberto com extremidades em $\mathrm{Ext}(B_V)$.*

(b) *Suponha que $\Pi(V) := \{A \subseteq \mathrm{Ext}(B_V) : \mathrm{conv}(A) \subseteq S_V\}$, com a relação de inclusão $\subseteq$, possua um elemento maximal M. Nesse caso, o conjunto $\mathrm{conv}(M)$ é chamado face de B_V.*

Exemplo 3.5. **(a)** Obviamente, se V é um espaço normado e $\operatorname{Ext}(B_V) = \emptyset$, então B_V não possui arestas nem faces.
(b) Na Proposição 2.3 (p. 98) tratamos o espaço $X := (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ e vimos que $\operatorname{Ext}(B_X) = \{x_1, x_2\}$, em que x_1 e x_2 são as funções constantes de S_X. Repare que

$$\left\|\frac{x_1 + x_2}{2}\right\|_\infty = 0,$$

e, assim, $\frac{x_1+x_2}{2} \notin S_X$. Portanto, B_X não possui arestas e as únicas faces de B_X são os conjuntos $\{x_1\}$ e $\{x_2\}$.
(c) Seja V um espaço normado estritamente convexo. Facilmente, vemos que B_V não possui arestas. Em seguida, verificaremos que $\operatorname{Ext}(B_V) = S_V$. Isso mostra que $\Pi(V) = \emptyset$, o que evidencia que B_V também não possui faces. Provaremos que $S_V \subseteq \operatorname{Ext}(B_V)$, pois a outra inclusão é clara. Tome $x \in V \setminus \operatorname{Ext}(B_V)$. Primeiramente, se $x \notin B_V$, temos $x \in V \setminus S_V$. Num segundo caso, considere que $x \in B_V$. Logo, existem $y, z \in B_V$ tais que $y \neq z$ e $x = \frac{y+z}{2}$. Se $y, z \in S_V$, então $\|x\|_\infty < 1$ pela hipótese sobre V. Senão, a desigualdade triangular da norma nos dá, mais uma vez, $\|x\|_\infty < 1$. De todo modo, obtemos $x \in V \setminus S_V$ e terminamos a verificação.
(d) Considere $f, g \in \Phi$ com $f \neq g$. Então, $[f,g]$ é uma aresta de B_{X^*}, em que $X := (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. De fato, admita que $f = \varphi_t$ e $g = -\varphi_s$. Em primeiro lugar, já sabemos que $f, g \in \operatorname{Ext}(B_{X^*})$. Em seguida, veremos que $[f,g] \subseteq S_{X^*}$. Para isso, fixe $k \in [0,1]$. Claramente, $\|kf + (1-k)g\|_* \leq 1$. Além disso, existe $x_0 \in X$ de norma igual a 1 tal que $x_0(t) = 1$ e $x_0(s) = -1$. Então, usando a definição de $\|\cdot\|_*$, obtemos $\|kf + (1-k)g\|_* = 1$. Portanto, $[f,g] \subseteq S_{X^*}$. Finalmente, suponha que existam $h_1, h_2 \in \operatorname{Ext}(B_{X^*})$ e $\alpha, \beta \in (0,1)$ cumprindo

$$\alpha f + (1-\alpha)g = \beta h_1 + (1-\beta)h_2. \tag{3.2}$$

Percebemos facilmente que existe $x_1 \in X$ tal que $x_1(t) = 1$, $x_1(s) = -1$ e $h_1(x_1) = h_2(x_2) = 0$. Assim, de (3.2) decorre que $1 = 0$, um absurdo. Do exposto, concluímos que $[f,g] \subseteq S_{X^*}$. Os demais casos são tratados de maneira similar.

Na sequência, conheceremos algumas arestas de B_{X^*}, em que $X := (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Proposição 3.6. *Se $s, t \in [0,1]$ e $s \neq t$, então $[\varphi_s, \varphi_t]$ e $[-\varphi_s, -\varphi_t]$ são arestas de B_{X^*}.*

Demonstração. Consideraremos apenas o primeiro tipo de segmento de reta, pois a prova relativa ao outro é semelhante. Já sabemos que $\varphi_s, \varphi_t \in \operatorname{Ext}(B_{X^*})$. Além disso, uma vez que $\varphi_s, \varphi_t \in S_{X^*}$, temos $\|(1-k)\varphi_s + k\varphi_t\|_* \leq 1$ para todo $k \in [0,1]$. Em adição, claramente existe $x_0 \in B_X$ tal que $x_0(s) = x_0(t) = 1$. Desse modo,

$$\|(1-k)\varphi_s + k\varphi_t\|_* \geq |(1-k)\varphi_s(x_0) + k\varphi_t(x_0)| = |(1-k)x_0(s) + kx_0(t)| = 1$$

para cada $k \in [0,1]$. Por isso, $\|(1-k)\varphi_s + k\varphi_t\|_* = 1$ para todo $k \in [0,1]$, isto é, $[\varphi_s, \varphi_t] \subseteq S_{X^*}$. Por fim, suponha que existam $k, l \in (0,1)$ e $f, g \in \operatorname{Ext}(B_{X^*})$ tais que

$$(1-k)\varphi_s + k\varphi_t = (1-l)f + lg. \tag{3.3}$$

Sejam $f = \varphi_u$ e $g = \varphi_v$, com $u \neq v$, e escolha $x_1 \in X$ tal que $x_1(s) = x_1(u) = 0$ e $x_1(t) = x_1(v) = 1$. Então, de (3.3) decorre que $k = l$. Logo, $s = u$ e $t = v$. Para as outras possíveis escolhas de $f, g \in \text{Ext}(B_{X^*})$ podem ser necessários argumentos diferentes, mas todos são simples e envolvem apenas a escolha de uma função especial $x \in X$. Por tudo isso, concluímos que $[\varphi_s, \varphi_t]$ é uma aresta de B_{X^*}. ■

Adiante revelaremos uma face de B_{X^*}. Para isso, um lema é necessário.

Lema 3.7. *Sejam A_1 e A_2 subconjuntos de $[0,1]$ tais que $A_1 \cup A_2 = [0,1]$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Estabeleça $\Phi_1 := \{\varphi_t : t \in A_1\}$ e $\Phi_2 := \{-\varphi_t : t \in A_2\}$. Então,* $\text{conv}(\Phi_1 \cup \Phi_2) \subseteq S_{X^*}$.

Demonstração. Tome $\gamma \in \text{conv}(\Phi_1 \cup \Phi_2)$ e escreva:

$$\gamma = \lambda_1 \varphi_{t_1} + \ldots + \lambda_n \varphi_{t_n} + \lambda_{n+1}(-\varphi_{t_{n+1}}) + \ldots + \lambda_m(-\varphi_{t_m}).$$

Servindo-nos da desigualdade triangular da norma, obtemos $\|\gamma\|_* \leq 1$. Para obtermos a igualdade, seja x_0 a função definida em $[0,1]$ por:

$$\begin{cases} x_0(0) = x_0(1) = 0 \\ x_0(t) = 1 \text{ se } t \in \{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \backslash \{0,1\} \\ x_0(t) = -1 \text{ se } t \in \{t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots, t_m\} \backslash \{0,1\} \\ x_0 \text{ é afim nos subintervalos determinados por } t_1, t_2, \ldots, t_m \end{cases} .$$

Dessa maneira, $\|x_0\|_\infty = 1$ e $|\gamma(x_0)| = 1$. Consequentemente, $\|\gamma\|_* = 1$. ■

Proposição 3.8. *Suponha que A_1 e A_2 sejam subconjuntos de $[0,1]$ tais que $A_1 \cup A_2 = [0,1]$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Defina $\Phi_1 := \{\varphi_t : t \in A_1\}$ e $\Phi_2 := \{-\varphi_t : t \in A_2\}$. Assim,* $\text{conv}(\Phi_1 \cup \Phi_2)$ *é uma face de B_{X^*}.*

Demonstração. Já sabemos que $(\Phi_1 \cup \Phi_2) \subseteq \text{Ext}(B_{X^*})$. Além disso, segundo o Lema 3.7, $\text{conv}(\Phi_1 \cup \Phi_2) \subseteq S_{X^*}$. Logo, $(\Phi_1 \cup \Phi_2) \in \Pi(X^*)$. Resta-nos mostrar que $\Phi_1 \cup \Phi_2$ é um elemento maximal de $\Pi(X^*)$. Com efeito, suponha que $B \in \Pi(X^*)$ contenha $\Phi_1 \cup \Phi_2$ estritamente. Logo, existe $\gamma \in B \backslash (\Phi_1 \cup \Phi_2)$. Indique $\gamma = \varphi_s$, $s \in [0,1]$. Como $\gamma \notin \Phi_1$, então $s \in A_2$. Por essa razão, $\varphi_s, -\varphi_s \in B$, o que nos traz $\mathbf{0} \in \text{conv}(B)$. Desse modo, $\text{conv}(B) \nsubseteq S_{X^*}$ e B não pode pertencer a $\Pi(X^*)$. O mesmo ocorre se pressupusermos $\gamma = -\varphi_r$, $r \in [0,1]$. Concluímos que $\Phi_1 \cup \Phi_2$ é maximal em $\Pi(X^*)$. ■

3.2 Subespaço de $\mathcal{C}^1([0,1])$ com a norma do sup da derivada

Neste momento nos dedicaremos ao espaço $(E_1, \|\cdot\|_E)$, conhecido no Capítulo 1. Empregando a notação estabelecida do Lema 1.5 (p. 87), adotaremos $\Psi := \{\pm\psi_t : t \in [0,1]\}$.

Teorema 3.9. $\mathrm{Ext}(B_{E_1^*}) = \Psi$.

Demonstração. Amparados pelo Lema 1.10 (p. 89), descobrimos que Ψ é união de dois conjuntos τ_*-compactos: $\{\psi_t : t \in [0,1]\}$ e $\{-\psi_t : t \in [0,1]\}$. Por isso, Ψ é τ_*-compacto. Uma vez que (E_1^*, τ_*) é de Hausdorff, Ψ é τ_*-fechado. Em acréscimo, um juízo análogo ao apresentado na prova da Proposição 3.1 assegura que $\mathrm{conv}(\Psi)$ é τ_*-denso em $B_{E_1^*}$. À vista da Proposição 2.13 (p. 106), temos que $\mathrm{Ext}(B_{E_1^*}) \subseteq \Psi$.

Para conseguirmos a inclusão reversa, comecemos fixando $s \in [0,1]$. Para cada número natural n, seja $x_n \in S_{E_1}$ tal que $x_n'(s) = 1$ e x_n' é nula fora do intervalo $\left(s - \frac{1}{n}, s + \frac{1}{n}\right)$. A seguir, conheceremos uma maneira de se obter essa sequência de funções. Na Figura 3.2 temos o gráfico da função y_n, definida em $[0,1]$. A aplicação é afim por partes e os pontos A, B, C e D sobre o eixo horizontal possuem abscissas valendo $s - \frac{1}{n}$, $s - \frac{1}{2n}$, $s + \frac{1}{2n}$ e $s + \frac{1}{n}$, nessa ordem. Então, podemos construir x_n declarando $x_n(u) := \int_0^u y_n(t)\,dt$ para todo $u \in [0,1]$. Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $H_n := \{\gamma \in E_1^* : \gamma(x_n) = 1\}$ e seja $H := \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$. Repetindo a argumentação usada na verificação do Teorema 3.2, concluímos que $\Psi \subseteq \mathrm{Ext}(B_{E_1^*})$. ■

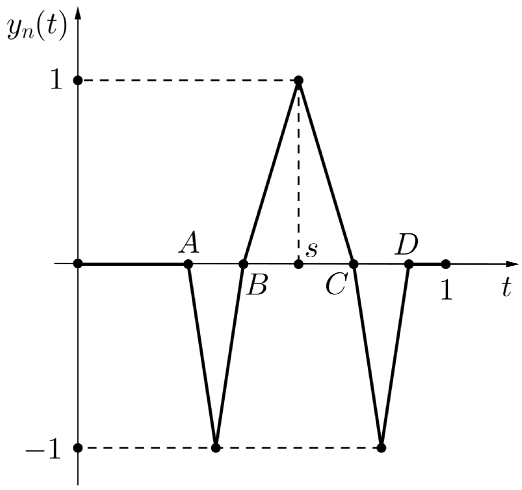

Figura 3.2: Construção para a prova do Teorema 3.9.

3.3 Espaço $\mathcal{C}^1([0,1])$ com a norma do máximo

Agora analisaremos o espaço $Y := (\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_{\max})$, em que

$$\|y\|_{\max} := \max\{\|y\|_\infty, \|y'\|_\infty\} \qquad \forall\, y \in \mathcal{C}^1([0,1]).$$

Dado $t \in [0,1]$, definimos em Y as funções φ_t e ψ_t de modo afim ao já estabelecido no texto. Além disso, indicamos $\Phi := \{\pm\varphi_t : t \in [0,1]\}$, $\Psi := \{\pm\psi_t : t \in [0,1]\}$ e $\Omega := \Phi \cup \Psi$. Claramente, $\Omega \subseteq Y^*$.

Iniciamos com uma proposição.

Proposição 3.10. **(a)** $\Omega \subseteq S_{Y^*}$.
(b) Ω *é* τ_**-compacto.*
(c) $\operatorname{conv}(\Omega)$ *é* τ_**-denso em* B_{Y^*}.

Demonstração. **(a)** Escolha $s \in [0,1]$. Uma vez que, para todo $y \in Y$, $|y(s)| \leq \|y\|_\infty \leq \|y\|_{\max}$, segue naturalmente da definição de $\|\cdot\|_*$ que $\|\varphi_s\|_* \leq 1$. Ademais, seja y_0 a função de $[0,1]$ em $\{1\}$. Então, $y_0 \in S_Y$ e $\|\varphi_s\|_* \geq |\varphi_s(y_0)| = 1$. Portanto, $\|\varphi_s\|_* = 1$. De modo semelhante, $|y'(s)| \leq \|y'\|_\infty \leq \|y\|_{\max}$. Daí, $\|\psi_s\|_* \leq 1$. Além disso, se y_1 é a função identidade em $[0,1]$, temos $y_1 \in S_Y$ e $|\psi_s(y_1)| = 1$. Logo, $\|\psi_s\|_* = 1$. Posto que s é arbitrário, a verificação está completa.
(b) Segue pelas mesmas alegações feitas nas provas do Lema 1.10 (p. 89) e da Proposição 3.1.
(c) Decorre do item (a) que $\operatorname{conv}(\Omega) \subseteq B_{Y^*}$. Além disso, $\overline{\operatorname{conv}(\Omega)}^* \subseteq B_{Y^*}$, conforme os lemas 0.220 (p. 76) e 0.58 (p. 33). Agora, suponha que $\theta \in B_{Y^*} \backslash \overline{\operatorname{conv}(\Omega)}^*$. De acordo com a Proposição 0.221 (p. 77), $\overline{\operatorname{conv}(\Omega)}^*$ é τ_*-compacto. Assim, pelo Segundo Teorema de Separação de Hahn-Banach (p. 69), existe $\delta_{y_0} \in Y^{**}$ tal que $\delta_{y_0}(\gamma) \leq 1 < \delta_{y_0}(\theta)$, qualquer que seja $\gamma \in \Omega$. Da primeira desigualdade, segue que, para qualquer $t \in [0,1]$, $\pm\varphi_t(y_0) \leq 1$ e $\pm\psi_t(y_0) \leq 1$. Logo, $\|y_0\|_\infty, \|y_0'\|_\infty \leq 1$. Por isso, $\|y_0\|_{\max} \leq 1$. Por outro lado, a segunda desigualdade nos conduz a $\|\theta\|_* \geq |\theta(y_0)| > 1$, uma contradição, já que $\theta \in B_{Y^*}$. ■

Teorema 3.11. $\operatorname{Ext}(B_{Y^*}) = \Omega$.

Demonstração. De acordo com o item (c) da proposição anterior e a Proposição 2.13 (p. 106), segue que $\operatorname{Ext}(B_{Y^*}) \subseteq \Omega$.

Pretendendo a inclusão reversa, selecione $s \in [0,1]$ e seja $y \in B_Y$ dada por:

$$\begin{cases} y(s) = 1, & \\ y(t) < 1, & \forall\, t \neq s \\ y'(t) < 1, & \forall\, t \in [0,1] \end{cases}.$$

Por exemplo, se $s \in (0,1)$, podemos tomar:

$$y(t) := \begin{cases} \dfrac{\alpha - 1}{s^2}(t-s)^2 + 1, & t \in [0,s] \\[2ex] \dfrac{\beta - 1}{(1-s)^2}(t-s)^2 + 1, & t \in [s,1] \end{cases},$$

para $\alpha, \beta < 1$ e suficientemente próximos de 1. Caso $s \in \{0,1\}$, basta usar apenas uma das parábolas. Após isso, indique $H := \{\gamma \in Y^* : \gamma(y) = 1\}$. Por raciocínio similar ao usado diante do Teorema 3.2, concluímos que $\Phi \subseteq \operatorname{Ext}(B_{Y^*})$. Sublinhamos que, nesse caso, empregamos a função y para provarmos que $\operatorname{Ext}(H \cap B_{Y^*}) \subseteq \operatorname{Ext}(B_{Y^*})$.

Agora, escolha $s \in [0,1]$ e considere $y \in B_Y$ que satisfaz:

$$\begin{cases} y'(s) = 1, & \\ y'(t) < 1, & \forall\, t \neq s \\ y(t) < 1, & \forall\, t \in [0,1] \end{cases}.$$

Particularmente, se $s \in (0,1)$, podemos estabelecer:

$$z(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{s}t, & t \in [0,s] \\ \\ \dfrac{1}{s-1}t - \dfrac{1}{s-1}, & t \in [s,1] \end{cases}, \tag{3.4}$$

e, posteriormente, $y(u) := \int_0^u z(t)\,dt$, qualquer que seja $u \in [0,1]$. Observamos que o gráfico de z são lados do triângulo com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$ e $(s,1)$. Quando $s \in \{0,1\}$, é suficiente considerar apenas um dos segmentos de reta descritos em (3.4). Em seguida, designe $H := \{\gamma \in Y^* : \gamma(y) = 1\}$. Então, por argumento próximo ao exposto acima, conseguimos $\Psi \subseteq \operatorname{Ext}(B_{Y^*})$. Portanto, $\Omega \subseteq \operatorname{Ext}(B_{Y^*})$. ■

Para finalizar a seção, analisaremos algumas características geométricas de B_{Y^*}.

Proposição 3.12. **(a)** *Considere $t, s \in [0,1]$ distintos. Então, $[\varphi_t, \varphi_s]$ é uma aresta de B_{Y^*}.*
(b) *Quaisquer que sejam $s, t \in [0,1]$, $[\varphi_t, -\varphi_s]$ não é uma aresta de B_{Y^*}.*
(c) *Sejam $t, s \in [0,1]$ distintos. Logo, $[\psi_t, \psi_s]$ e $[\psi_t, -\psi_s]$ são arestas de B_{Y^*}.*

Demonstração. **(a)** Primeiro, verificaremos que $[\varphi_t, \varphi_s] \subseteq S_{Y^*}$. Adote $t < s$ e seja $k \in [0,1]$ arbitrário. Pela desigualdade triangular, $\|k\varphi_t + (1-k)\varphi_s\|_* \leq 1$. Em acréscimo, para $\alpha, \beta < 1$ e suficientemente próximos de 1, a função y definida em $[0,1]$ por:

$$y(u) := \begin{cases} \dfrac{\alpha - 1}{t^2}(u-t)^2 + 1, & u \in [0,t] \\ 1, & u \in [t,s] \\ \dfrac{\beta - 1}{(1-s)^2}(u-s)^2 + 1, & u \in [s,1] \end{cases}$$

está na esfera de Y. Logo, $\|k\varphi_t + (1-k)\varphi_s\|_* \geq |[k\varphi_t + (1-k)\varphi_s](y)| = 1$. Sendo assim, $\|k\varphi_t + (1-k)\varphi_s\|_* = 1$. Uma vez que k é arbitrário, $[\varphi_t, \varphi_s] \subseteq S_{Y^*}$, como queríamos.

A condição restante pode ser certificada procedendo-se como na Proposição 3.6. Aqui precisamos construir funções um pouco mais complexas, já que estamos lidando com o conjunto $\mathcal{C}^1([0,1])$. Além disso, a nova discussão pode ser mais longa, pois em $\operatorname{Ext}(B_{Y^*})$ encontramos funcionais da forma $\pm\varphi_t$ e do tipo $\pm\psi_t$.
(b) Pelo Teorema do Valor Médio, se $y_0 \in Y$ e $|y_0(t) - y_0(s)| > 1$, então $\|y_0\|_{\max} > 1$. Por essa razão,

$$\|\varphi_t - \varphi_s\|_* = \sup_{\|y\|_{\max} \leq 1} |y(t) - y(s)| \leq 1, \quad \text{e, assim,} \quad \left\| \frac{\varphi_t - \varphi_s}{2} \right\|_* < 1.$$

Logo, $[\varphi_t, -\varphi_s]$ não está contido na esfera de Y^*.
(c) Provaremos que $[\psi_t, \psi_s]$ é uma aresta, pois o outro caso tem tratamento correlato. Através de raciocínio semelhante ao do item (a), obtemos $[\psi_t, \psi_s] \subseteq S_{Y^*}$. Nesse caso, a função identidade em $[0,1]$ pode ser usada para mostrarmos que $\|k\psi_t + (1-k)\psi_s\|_* \geq 1$. Mais uma vez, o resto da prova é análogo ao argumento construído na Proposição 3.6. ■

3.4 Espaço $\mathcal{C}^1([0,1])$ com a norma da soma

Finalizamos o capítulo tratando o espaço $Z := (\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_+)$, em que

$$\|z\|_+ := \|z\|_\infty + \|z'\|_\infty \qquad \forall\, z \in \mathcal{C}^1([0,1]).$$

Neste último caso, não seremos capazes de determinar $\mathrm{Ext}(B_{Z^*})$. Todavia, conheceremos alguns de seus elementos.

Dados $t, s \in [0,1]$, indicaremos por $\lambda_{s,t}$ e por $\sigma_{s,t}$ as funções definidas em Z por:

$$\lambda_{s,t}(z) := z'(s) + z(t) \quad \text{e} \quad \sigma_{s,t}(z) := z'(s) - z(t) \qquad \forall\, z \in Z.$$

Além disso, designaremos: $\Lambda := \{\pm\lambda_{s,t} : s,t \in [0,1]\}$, $\Sigma := \{\pm\sigma_{s,t} : t,s \in [0,1]\}$ e $\Delta := \Lambda \cup \Sigma$.

Começaremos apresentando um lema.

Lema 3.13. $\Delta \subseteq S_{Z^*}$.

Demonstração. Claramente, $\Delta \subseteq Z^*$. Para confirmarmos que os elementos de Δ possuem norma igual a 1, basta recorrermos à definição de $\|\cdot\|_*$ é à função $z_0 \in Z$ de valor constante 1. ■

Na prova do enunciado abaixo, empregamos um fato simples sobre desigualdades de números reais: se a, b e k são números reais tais que $|a+b| \leq k$ e $|a-b| \leq k$, então $|a|+|b| \leq k$. Essa propriedade pode ser verificada facilmente considerando-se quatro casos, cada um correspondente a uma das possíveis combinações de sinais de a e de b.

Proposição 3.14. $\mathrm{Ext}(B_{Z^*}) \subseteq \Delta$.

Demonstração. Considere as funções f e g definidas em $[0,1]\times[0,1]$ por:

$$f(s,t) := \lambda_{s,t} \quad \text{e} \quad g(s,t) := \sigma_{s,t} \qquad \forall\, (s,t) \in [0,1]\times[0,1].$$

Por juízo afim ao exibido na prova do Lema 1.10 (p. 89), concluímos que f e g são τ_*-contínuas. Logo, Λ e Σ são τ_*-compactos, implicando que Δ também o é. Agora, provaremos que o fecho de $\mathrm{conv}(\Delta)$ na topologia fraca-estrela é igual a B_{Z^*}. Inicialmente, note que $\mathrm{conv}(\Delta) \subseteq B_{Z^*}$, pelo lema acima. Mais ainda, já que B_{Z^*} é τ_*-fechado, $\overline{\mathrm{conv}(\Delta)}^* \subseteq B_{Z^*}$. Suponha que exista $\theta \in B_{Z^*} \backslash \overline{\mathrm{conv}(\Delta)}^*$. Então, pelo Segundo Teorema de Separação de Hahn-Banach (p. 69), existe $\delta_{z_0} \in Z^{**}$ tal que $\delta_{z_0}(\gamma) \leq 1 < \delta_{z_0}(\theta)$ para qualquer $\gamma \in \Delta$. Em vista disso, dados $t_1, t_2 \in [0,1]$, $|z_0'(t_1) + z_0(t_2)| \leq 1$ e $|z_0'(t_1) - z_0(t_2)| \leq 1$. Dessa maneira, $|z_0'(t_1)| + |z_0(t_2)| \leq 1$. Tomando o supremo, encontramos $\|z_0\|_+ = \|z_0\|_\infty + \|z_0'\|_\infty \leq 1 < \theta(z_0)$. Todavia,

$$\|z_0\|_+ = \sup_{\|\gamma\|_* \leq 1} |\gamma(z_0)| \geq \theta(z_0)$$

e, portanto, temos um absurdo. Assim, $\overline{\mathrm{conv}(\Delta)}^* = B_{Z^*}$. Finalmente, pela Proposição 2.13 (p. 106), obtemos $\mathrm{Ext}(B_{Z^*}) \subseteq \Delta$. ■

Infelizmente, não sabemos se todo elemento de Δ é ponto extremo de B_{Z^*}. Entretanto, veremos que existe um subconjunto "grande" de Δ contido em $\mathrm{Ext}(B_{Z^*})$. Com isso concluiremos nossa análise.

Teorema 3.15. *Adote*

$$\Delta' := \{\pm\lambda_{s,t} : s,t \in [0,1], s \neq t\} \cup \{\pm\sigma_{s,t} : t,s \in [0,1], t \neq s\}.$$

Então, $\Delta' \subseteq \mathrm{Ext}(B_{Z^*})$.

Demonstração. Em primeiro lugar, fixe $a, b \in [0,1]$ com $a < b$. Seja $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função cujo gráfico é formado pelos segmentos de reta que ligam os pontos $(0,0)$ a (a,q), (a,q) a $(b,0)$ e $(b,0)$ a $(1,-\epsilon)$, em que $q = \frac{2}{b+2}$ e $\epsilon > 0$ será determinado depois. A Figura 3.3 ilustra essa aplicação.

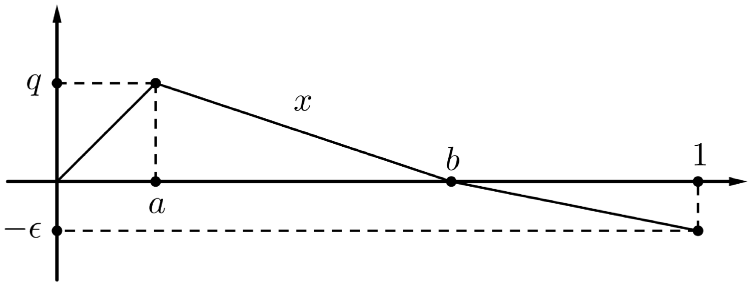

Figura 3.3: A função x.

Além disso, considere a função z em $[0,1]$ dada por $z(t) := \int_0^t x(u)\,du$ para cada $t \in [0,1]$. Claramente, $t = b$ é o único ponto de máximo absoluto de z e $u = a$ é o único ponto de máximo absoluto de z'. Escolha $\epsilon \in (0,q)$ pequeno o suficiente para que $z(1) \geq 0$. Note que $z \in Z$ e que

$$\|z\|_+ = q + \frac{bq}{2} = \frac{2}{b+2} + \frac{b}{b+2} = 1,$$

isto é, $z \in S_Z$.

Prosseguindo, seja $H := \{\gamma \in Z^* : \gamma(z) = 1\}$. Uma vez que $H = \delta_z^{-1}(\{1\})$, H é τ_*-fechado. Logo, $H \cap B_{Z^*}$ é τ_*-compacto. Em adição,

$$\lambda_{a,b}(z) = z'(a) + z(b) = q + \frac{bq}{2} = 1.$$

Daí, $\lambda_{a,b} \in H \cap B_{Z^*}$, o que mostra que a interseção não é o conjunto vazio. Em seguida, afirmamos que $\lambda_{a,b}$ é o único elemento de Δ que pertence a $H \cap B_{Z^*}$. Realmente, selecione $s, t \in [0,1]$ de modo aleatório. Admita que $\lambda_{s,t} \in H \cap B_{Z^*}$. Então, $\lambda_{s,t}(z) = z'(s) + z(t) = 1$. Por inspeção, vemos facilmente que devemos ter $s = a$ e $t = b$. Agora, note que

$$z'(s) + z(t) \geq -\epsilon + z(1) \geq -\epsilon > -q > -1.$$

Portanto, $-\lambda_{s,t}(z) \neq 1$, ou seja, $-\lambda_{s,t} \notin H \cap B_{Z^*}$. Também, $\sigma_{s,t}(z) = z'(s) - z(t) \leq q < 1$, de onde obtemos $\sigma_{s,t} \notin H \cap B_{Z^*}$. Além do mais,

$$-\sigma_{s,t}(z) = -z'(s) + z(t) \geq -\epsilon - \frac{bq}{2} > -q - \frac{bq}{2} = -1,$$

mostrando que $-\sigma_{s,t} \notin H \cap B_{Z^*}$. Encerramos, assim, a prova da afirmação.

Por argumento similar ao usado para o Teorema 3.2 e pela proposição anterior, conseguimos $\mathrm{Ext}(H \cap B_{Z^*}) \subseteq \mathrm{Ext}(B_{Z^*}) \subseteq \Delta$. Em consequência, $\lambda_{a,b} \in \mathrm{Ext}(B_{Z^*})$, quaisquer que sejam $a, b \in [0,1]$ distintos. Ponderando de forma semelhante com a função $w : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $w(t) := z(1-t)\ \forall\, t \in [0,1]$, revelamos que $\sigma_{a,b} \in \mathrm{Ext}(B_{Z^*})$, em que $a, b \in [0,1]$ e $a \neq b$. Por simetria, concluímos que $\Delta' \subseteq \mathrm{Ext}(B_{Z^*})$. ■

Capítulo 4

Aplicação 2: O Teorema de Banach-Stone

Neste capítulo usaremos a teoria de pontos extremos para lucrarmos um resultado clássico da Análise Funcional. Começamos com um enunciado que envolve a noção de separar um ponto de um conjunto.

Proposição 4.1. *Considere um $\mathbb{R}$-espaço normado V e $A \subseteq V^*$ um conjunto convexo e τ_*-fechado. Se $f \in V^* \backslash A$, então existe $v \in V$ tal que $f(v) > \sup\{g(v) : g \in A\}$.*

Demonstração. Porquanto $V^* \backslash A$ é τ_*-aberto, existe uma vizinhança U de $\mathbf{0}$ na topologia fraca-estrela tal que $(f+U) \cap A = \emptyset$. Sendo (V^*, τ_*) um espaço localmente convexo, podemos supor que U é uma vizinhança convexa de zero e escrever $U = \{g \in V^* : |g(v_i)| < \epsilon,\ i \in [n]\}$ para certos $v_1, \ldots, v_n \in V$ e $\epsilon > 0$.

Pela simetria de U, $f \notin A + U$. Também, $A + U$ é aberto na topologia fraca-estrela, conforme garante a Observação 0.75 (p. 38). Decorre disso que $A+U$ é aberto na topologia forte. Em adição, $A + U$ é convexo. Então, pelo Corolário 0.225 (p. 80), existe $\gamma \in V^{**}$ tal que

$$\gamma(f) > \sup_{h \in A+U}\{\gamma(h)\} \geq \sup_{g \in A}\{\gamma(g)\}. \tag{4.1}$$

Afirmamos que $\gamma = \delta_v$ para algum $v \in V$. De fato, fixe $g_0 \in A$. Indique $C := \sup\limits_{h \in U}\{\gamma(h)\}$. De (4.1), decorre que

$$\gamma(f) > \sup_{\substack{g \in A \\ h \in U}}\{\gamma(h+g)\} \geq \gamma(g_0) + C.$$

Portanto, $C \in \mathbb{R}$. Agora, seja $p \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(\delta_{v_i})$. Nesse caso, $tp \in U$ para todo $t > 0$. Segue que $\gamma(tp) \leq C$, ou seja, $\gamma(p) \leq \frac{C}{t}$. De modo afim, $\gamma(-p) \leq \frac{C}{t}$ para cada $t > 0$. Logo, $\gamma(p) = 0$. Assim, conforme o Lema 0.217 (p. 75), existem escalares $k_1, \ldots, k_n$ tais que:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} k_i \delta_{v_i} = \delta_v, \quad \text{com } v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i,$$

o que prova a afirmação. Consequentemente, o resultado segue por (4.1). ■

Nossa última etapa de preparação para o *Teorema de Banach-Stone*[1] envolve resultados relacionados ao conceito de *variedade suporte*. Antes de conhecê-lo, apresentamos um outro elemento.

Definição 4.2 (Subespaço afim). *Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e $A \subseteq V$. Dizemos que A é um subespaço afim de V se existem um vetor $v \in V$ e um subespaço $S \subseteq V$ tais que $A = v + S$.*

Observação 4.3. Todo subespaço afim é um conjunto convexo. A verificação é direta.

Prosseguimos exibindo uma propriedade elementar sobre subespaços afins.

Lema 4.4. *Considere um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V e uma família $\{A_i : i \in I\}$ de subespaços afins de V. Nesse caso, $\bigcap_{i\in I} A_i$ é um subespaço afim de V.*

Demonstração. Por hipótese, para cada $i \in I$ podemos escolher $v_i \in V$ e $S_i \subseteq V$ subespaço tais que $A_i = v_i + S_i$. Selecione $u \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Dado $i \in I$, tome $s_i \in S_i$ tal que $u = v_i + s_i$. Afirmamos que $A_i = u + S_i$ para cada $i \in I$. De fato, se $w \in A_i$, existe $r_i \in S_i$ de modo que $w = v_i + r_i = u + (r_i - s_i) \in u + S_i$. Além do mais, dado $r_i \in S_i$, temos $u + r_i = v_i + (s_i + r_i) \in A_i$. Assim, a afirmação está comprovada.

Agora, mostraremos que $\bigcap_{i\in I} A_i = u + \bigcap_{i\in I} S_i$. Desse modo, concluiremos a demonstração, pois a interseção de subespaços é um subespaço. Seja $x = u + y$, com $y \in \bigcap_{i\in I} S_i$. Decorre da afirmação anterior que $x \in A_i$ para todo $i \in I$, isto é, $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Logo, $u + \bigcap_{i\in I} S_i \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$. Em seguida, tome $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Então, para qualquer $i \in I$ existe $t_i \in S_i$ tal que

$$x = v_i + t_i = u + (t_i - s_i) \in u + S_i.$$

Portanto, $x \in u + \bigcap_{i\in I} S_i$. Por isso, $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq u + \bigcap_{i\in I} S_i$. ■

Podemos, afinal, definir uma variedade suporte.

Definição 4.5 (Variedade suporte). *Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, $C \subseteq V$ um convexo e A um subespaço afim de V. A é uma variedade suporte para C se:*

(a) $A \cap C \neq \emptyset$.

(b) $[c_1, c_2] \subseteq C$ *e* $(c_1, c_2) \cap A \neq \emptyset$ *implicam* $[c_1, c_2] \subseteq A$.

Avançamos notando algumas conclusões relativas ao conceito anterior.

[1] Marshall Harvey Stone (1903-1989), matemático americano. Contribuiu em áreas como Análise Real, Análise Funcional e Topologia.

Lema 4.6. *Seja C um subconjunto convexo de um espaço normado V. Se H é uma variedade suporte para C tal que $H \cap C = \{v\}$, então $v \in \operatorname{Ext}(C)$.*

Demonstração. Suponha que $v \notin \operatorname{Ext}(C)$. Como $v \in C$, segue que existem $v_1, v_2 \in C$ distintos tais que $v = \frac{v_1+v_2}{2}$. Então, já que $[v_1, v_2] \subseteq C$, $v \in (v_1, v_2) \cap H$ e H é uma variedade suporte para C, $[v_1, v_2] \subseteq H$. Assim, $[v_1, v_2] \subseteq H \cap C$, o que não pode ocorrer, pois $H \cap C = \{v\}$. Desse modo, $v \in \operatorname{Ext}(C)$. ∎

Lema 4.7. *Considere V um espaço normado, $C \subseteq V^*$ um convexo e $\delta_v \in V^{**}$ não nulo. Também admita que exista $\gamma_0 \in C$ tal que $\sup\limits_{\gamma \in C} \delta_v(\gamma) = \delta_v(\gamma_0) = a$. Então, $H := \delta_v^{-1}(\{a\})$ é uma variedade suporte para C.*

Demonstração. Em primeiro lugar, verificaremos que H é um subespaço afim de V^*. Tome $\theta \in V^*$ tal que $\delta_v(\theta) = \theta(v) \neq 0$, o que é possível, porquanto $\delta_v \neq \mathbf{0}$. Em seguida, denote $\theta_0 := \frac{a}{\theta(v)}\theta$. Afirmamos que $H = \theta_0 + \operatorname{Ker}(\delta_v)$. Realmente, dado $\theta_0 + \kappa \in \theta_0 + \operatorname{Ker}(\delta_v)$, temos:

$$\delta_v(\theta_0 + \kappa) = \delta_v(\theta_0) + \delta_v(\kappa) = \delta_v(\theta_0) = \theta_0(v) = \frac{a}{\theta(v)}\theta(v) = a.$$

Logo, $\theta_0 + \operatorname{Ker}(\delta_v) \subseteq H$. Agora, escolha $\gamma \in H$ e faça $\mu := \gamma - \theta_0$. Uma vez que

$$\delta_v(\mu) = \delta_v(\gamma) - \delta_v(\theta_0) = a - a = 0,$$

obtemos $\mu \in \operatorname{Ker}(\delta_v)$. Daí, $\gamma = \theta_0 + \mu \in \theta_0 + \operatorname{Ker}(\delta_v)$. Concluímos, assim, a prova da afirmação.

Depois disso, repare que $\gamma_0 \in H \cap C$, garantindo que $H \cap C \neq \emptyset$.

Por fim, suponha que $[\gamma, \theta] \subseteq C$ e que exista $t \in (0,1)$ tal que $t\gamma + (1-t)\theta \in H$. Logo,

$$t\delta_v(\gamma) + (1-t)\delta_v(\theta) = a.$$

Pela definição de a, inferimos que $\delta_v(\gamma) = \delta_v(\theta) = a$. Portanto, $\delta_v[s\gamma + (1-s)\theta] = a$, qualquer que seja $s \in [0,1]$. Por essa razão, $[\gamma, \theta] \subseteq H$. Consequentemente, H é uma variedade suporte para C. ∎

Proposição 4.8. *Considere que V seja um espaço normado e que $K \subseteq V^*$ seja convexo e τ_*-compacto. Se $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma cadeia de conjuntos τ_*-fechados e variedades suporte para K, então $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ é uma variedade suporte para K.*

Demonstração. De acordo com o Lema 4.4, $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ é um subespaço afim de V^*. Adiante, mostraremos que

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cap K = \bigcap_{i \in I}(A_i \cap K) \neq \emptyset \tag{4.2}$$

através do Lema 0.64 (p. 34). Como preparação, afirmamos que, dado $i \in I$, $A_i \cap K$ é τ_*-fechado. Com efeito, sendo K τ_*-compacto, então K é τ_*-fechado. Logo, $A_i \cap K$ é τ_*-fechado. Agora, seja $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq I$. Dado que $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma cadeia, podemos supor que $A_{i_1} \subseteq A_{i_2} \subseteq \ldots \subseteq A_{i_n}$, de modo que $(A_{i_1} \cap K) \subseteq (A_{i_2} \cap K) \subseteq \ldots \subseteq (A_{i_n} \cap K)$. Nesse caso, $\bigcap_{j=1}^{n}(A_{i_j} \cap K) = A_{i_1} \cap K \neq \emptyset$, já que A_{i_1} é uma variedade suporte para K. Assim, como K é τ_*-compacto, o lema citado justifica (4.2).

Por último, suponha que $[\gamma, \theta] \subseteq K$ e que exista $t \in (0,1)$ tal que $t\gamma + (1-t)\theta \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Uma vez que cada A_i é uma variedade suporte para K, $[\gamma, \theta] \subseteq A_i$ para todo $i \in I$. Portanto, $[\gamma, \theta] \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$. ■

O próximo passo rumo ao Teorema de Banach-Stone é a descrição de $\mathrm{Ext}(B_{\mathcal{C}(K)^*})$, em que K é um espaço compacto e de Hausdorff. Ela ocorrerá logo após os dois enunciados posteriores.

Lema 4.9. *Seja K um espaço compacto e de Hausdorff. Então:*
(a) *Dados $a, b \in K$ distintos, existe $x \in \mathcal{C}(K)$ tal que $x(a) \neq x(b)$.*
(b) *$(\{\delta_k : k \in K\}, \tau_*)$ e $(\{-\delta_k : k \in K\}, \tau_*)$ são homeomorfos a K.*

Demonstração. **(a)** Sabemos, pelo Lema 0.70 (p. 35), que K é normal. Em adição, do Corolário 0.59 (p. 33) decorre que $\{a\}$ e $\{b\}$ são fechados. Sendo assim, o Lema de Urysohn (p. 35) garante que existe $x \in \mathcal{C}(K)$ tal que $x(a) \neq x(b)$, como queríamos.
(b) Defina $\mu : K \to \{\delta_k : k \in K\}$ por: $\mu(k) := \delta_k$ para cada $k \in K$. Afirmamos que μ é injetiva. De fato, se $\mu(a) = \mu(b)$, então, $\delta_a = \delta_b$. Assim, pelo item anterior, devemos ter $a = b$. Por construção, μ é também sobrejetiva. Agora, mostraremos que μ é τ_*-contínua. Seja $(k_i)_{i \in I}$ uma rede em K convergindo para $k \in K$. De acordo com a Proposição 0.233 (p. 83), $x(k_i) \rightharpoonup x(k)$ para todo $x \in \mathcal{C}(K)$. Então, conforme o Lema 0.235 (p. 84), $\delta_{k_i} \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_k$. Logo, μ é τ_*-contínua. Finalmente, pela Proposição 0.68 (p. 35), μ é um homeomorfismo.

De modo similar verifica-se que $(\{-\delta_k : k \in K\}, \tau_*) \simeq K$. ■

Proposição 4.10. *Sejam V um espaço normado, $C \subseteq V^*$ um conjunto convexo e τ_*-compacto e $A \subseteq V^*$ um τ_*-fechado. Se A é uma variedade suporte para C, então A contém algum ponto extremo de C.*

Demonstração. Indique por $\mathcal{F}$ a família de todos os subconjuntos de A que são τ_*-fechados e variedades suporte para C. Por hipótese, $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Considere uma cadeia $\{A_i\}_{i \in I}$ em $\mathcal{F}$. Claramente, $\bigcap_{i \in I} A_i$ é τ_*-fechado. Além disso, a Proposição 4.8 assegura-nos de que essa interseção é uma variedade suporte para C. Logo, $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$. Dessa maneira, toda cadeia em $\mathcal{F}$ possui uma cota inferior. Então, pelo Lema de Zorn (p. 24), existe um elemento minimal $M \in \mathcal{F}$.

Em seguida, veremos que $M \cap C$ é um conjunto unitário. Primeiro, note que $M \cap C$ é não vazio, posto que M é uma variedade suporte para C. Agora, suponha que existam $\gamma_1, \gamma_2 \in M \cap C$ distintos. Daí, existe $v \in V$ tal que $\gamma_1(v) \neq \gamma_2(v)$. Assim, $\delta_v(\gamma_1) \neq \delta_v(\gamma_2)$. Uma vez que $M \cap C$ é τ_*-compacto (pelo Lema 0.55, p. 32), existe $\theta \in M \cap C$ tal que

$$\delta_v(\theta) = \sup_{\gamma \in M \cap C} \delta_v(\gamma).$$

Observe que δ_v é não nulo, pois $v \neq \mathbf{0}$. Em adição, $M \cap C$ é convexo, porque é a interseção de dois convexos. Logo, fixando $a = \delta_v(\theta)$, obtemos, aplicando o Lema 4.7, que $\delta_v^{-1}(\{a\})$ é uma variedade suporte para $M \cap C$.

Adiante, conseguiremos uma contradição ao descobrirmos que $M' := M \cap \delta_v^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{F}$ e que M' está estritamente contido em M. Inicialmente, note que $\theta \in M'$, garantindo que $M' \neq \emptyset$. Além disso, $M' \subseteq A$, obviamente. Também, M' é τ_*-fechado, pois é interseção de conjuntos τ_*-fechados. Para concluirmos que $M' \in \mathcal{F}$, resta-nos mostrar que M' é uma variedade suporte para C, o que faremos agora. Segundo o Lema 4.4, M' é um subespaço afim de V^*. Em adição,

$$M' \cap C = \delta_v^{-1}(\{a\}) \cap (M \cap C) \neq \emptyset,$$

já que $\delta_v^{-1}(\{a\})$ é uma variedade suporte para $M \cap C$. Em seguida, admita que $[\alpha, \beta] \subseteq C$ e que $(\alpha, \beta) \cap M' \neq \emptyset$. Como M é uma variedade suporte para C, segue que $[\alpha, \beta] \subseteq M$. Assim, $[\alpha, \beta] \subseteq M \cap C$ e $(\alpha, \beta) \cap \delta_v^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$. Uma vez que $\delta_v^{-1}(\{a\})$ é uma variedade suporte para $M \cap C$, $[\alpha, \beta] \subseteq \delta_v^{-1}(\{a\})$. Do exposto, $[\alpha, \beta] \subseteq M'$. Por isso, M' é uma variedade suporte para C. Concluímos que $M' \in \mathcal{F}$.

Finalmente, visto que $\delta_v(\gamma_1) \neq \delta_v(\gamma_2)$ e que $M' \subseteq \delta_v^{-1}(\{a\})$, M' possui, no máximo, um elemento de $\{\gamma_1, \gamma_2\}$. Consequentemente, M' está estritamente contido em M, o que é um absurdo, pois M é minimal em $\mathcal{F}$. Dessa forma, $M \cap C$ é unitário. Logo, conforme o Lema 4.6, $M \subseteq A$ contém um ponto extremo de C, garantindo o resultado esperado. ■

Proposição 4.11. *Seja K um espaço compacto e de Hausdorff. Nesse caso,* $\operatorname{Ext}(B_{\mathcal{C}(K)^*}) = \{\pm\delta_k : k \in K\}$.

Demonstração. ($\subseteq$) Adote $\Delta := \{\pm\delta_k : k \in K\}$ e $A := \overline{\operatorname{conv}(\Delta)}^*$. Primeiramente, afirmamos que $A = B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Com efeito, baseando-nos no Exemplo 0.175 (p. 61), vemos que $\Delta \subseteq B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Uma vez que $B_{\mathcal{C}(K)^*}$ é convexa, $\operatorname{conv}(\Delta) \subseteq B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Aplicando o fecho e observando o Teorema de Banach-Alaoglu (p. 76) e o Lema 0.58 (p. 33), obtemos $A \subseteq B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Para a inclusão reversa, suponha que exista $\theta \in B_{\mathcal{C}(K)^*} \setminus A$. Logo, pela Proposição 4.1, existe $x \in \mathcal{C}(K)$ tal que $\theta(x) > \sup\{\gamma(x) : \gamma \in A\}$. Note que $x \neq \mathbf{0}$. Além do mais, como A é simétrico, $\sup\{\gamma(x) : \gamma \in A\} = \sup\{|\gamma(x)| : \gamma \in A\}$. Posto isso, adote $p := \sup\{|\gamma(x)| : \gamma \in A\}$. Uma vez que x não é o vetor nulo e $\Delta \subseteq A$, segue que $p > 0$. Em seguida, tome $y := x/p$. Então, $\theta(y) = \frac{1}{p}\theta(x) > \frac{1}{p}p = 1$. Em acréscimo,

$$\sup\{|\gamma(y)| : \gamma \in A\} = \frac{1}{p}\sup\{|\gamma(x)| : \gamma \in A\} = 1.$$

Portanto,

$$\|y\|_\infty = \sup_{k\in K}|y(k)| = \sup_{k\in K}|\delta_k(y)| \leq \sup_{\gamma\in A}|\gamma(y)| = 1.$$

Daí, $\theta(y) \leq |\theta(y)| \leq \|\theta\|_* \cdot \|y\|_\infty \leq 1\cdot 1 = 1$, o que é uma contradição, já que havíamos obtido $\theta(y) > 1$. Concluímos que $B_{\mathcal{C}(K)^*} \subseteq A$.

Justificada a afirmação, observamos, mediante o Lema 4.9, que

$$\Delta = \{\delta_k : k \in K\} \cup \{-\delta_k : k \in K\}$$

é compacto na topologia fraca-estrela. Logo, Δ é fechado em τ_*. Assim, aplicando a Proposição 2.13 (p. 106), descobrimos que $\mathrm{Ext}(B_{\mathcal{C}(K)^*}) \subseteq \{\pm\delta_k : k \in K\}$.

($\supseteq$) Fixe $k_0 \in K$ e considere a família $\mathcal{A}$ de todas as vizinhanças de k_0. Segundo o Lema de Urysohn (p. 35), dado $U \in \mathcal{A}$, existe $x_U \in B_{\mathcal{C}(K)}$ tal que x_U se anula em $K\backslash U$ e $x_U(k_0) = 1$.

Alegamos que $H_U := \{\gamma \in \mathcal{C}(K)^* : \gamma(x_U) = 1\}$ é uma variedade suporte de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Primeiramente, verificaremos que H_U é um subespaço afim de $\mathcal{C}(K)^*$. Para isso, começamos escolhendo $\rho \in \mathcal{C}(K)^*$ não nulo tal que $\rho(x_U) = 1$, o que é possível segundo a Observação 0.187 (p. 65). Nesse caso, obtemos $H = \delta_{x_U}^{-1}(\{1\}) = \delta_{x_U}^{-1}(\{0\}) + \rho$. Uma vez que $\delta_{x_U}^{-1}(\{0\})$ é um subespaço de $\mathcal{C}(K)^*$, concluímos que H_U é um subespaço afim de $\mathcal{C}(K)^*$.

Em acréscimo, $\delta_{k_0} \in H_U \cap B_{\mathcal{C}(K)^*}$, de modo que $H_U \cap B_{\mathcal{C}(K)^*} \neq \emptyset$. Além disso, admita que existam $[\gamma,\theta] \subseteq B_{\mathcal{C}(K)^*}$ e $t \in (0,1)$ tais que $t\gamma + (1-t)\theta \in H_U$. Visto que $\gamma \in B_{\mathcal{C}(K)^*}$,

$$\gamma(x_U) \leq |\gamma(x_U)| \leq \|\gamma\|_* \cdot \|x_U\|_\infty \leq 1.$$

De modo correlato, $\theta(x_U) \leq 1$. Se $\gamma(x_U) < 1$, então

$$1 = [t\gamma + (1-t)\theta](x_U) = t\gamma(x_U) + (1-t)\theta(x_U) < t + (1-t) = 1,$$

um absurdo. Logo, $\gamma(x_U) = 1$. Analogamente, $\theta(x_U) = 1$. Assim, para todo $s \in [0,1]$, $s\gamma(x_U) + (1-s)\theta(x_U) = 1$. Portanto $[\gamma,\theta] \subseteq H_U$ e a alegação está provada. Em adição, $H_U = \delta_{x_U}^{-1}(\{1\})$ é τ_*-fechado.

Posteriormente, defina $H := \bigcap_{U\in\mathcal{A}} H_U$. Mostraremos que H é uma variedade suporte para $B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Do Lema 4.4 decorre que H é um subespaço afim de $\mathcal{C}(K)^*$. Ainda, $\delta_{k_0} \in H \cap B_{\mathcal{C}(K)^*}$, revelando que a interseção não é nula. Finalmente, suponha que existam $[\gamma,\theta] \subseteq B_{\mathcal{C}(K)^*}$ e $t \in (0,1)$ tais que $t\gamma + (1-t)\theta \in H$. Então, $t\gamma + (1-t)\theta \in H_U$ para cada $U \in \mathcal{A}$. Assim, observando os parágrafos anteriores, concluímos que, dado $U \in \mathcal{A}$, $[\gamma,\theta] \subseteq H_U$. Por isso, $[\gamma,\theta] \subseteq H$ e H é uma variedade suporte para $B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Em acréscimo, H é fechado na topologia fraca-estrela, visto que é interseção de conjuntos τ_*-fechados. Nesse caso, a proposição precedente garante que H contém algum ponto extremo de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Por essa razão, $H \cap \{\pm\delta_k : k \in K\} \neq \emptyset$.

Afirmamos que $H \cap \{\pm\delta_k : k \in K\backslash\{k_0\}\} = \emptyset$. Realmente, admita que $\delta_k \in H$, com $k \neq k_0$. Como K é um espaço de Hausdorff, existem abertos $P \ni k$ e $Q \ni k_0$ disjuntos. Temos $x_U(k) = \delta_k(x_U) = 1$ para qualquer $U \in \mathcal{A}$, porquanto $\delta_k \in H$. Em particular, $x_Q(k) = \delta_k(x_Q) = 1$. Todavia, por construção, x_Q é nula em $K\backslash Q$ e, logo, $x_Q(k) = 0$.

Devido a essa contradição, $\delta_k \notin H$ quando $k \neq k_0$. Além do mais, visto que H é um subespaço, $-\delta_k \notin H$ se $k \neq k_0$.

Decorre da afirmação que o conjunto $\{\pm\delta_{k_0}\}$ contém algum ponto extremo de $B_{\mathcal{C}(K)^*}$. Por simetria e pelo fato de k_0 ter sido escolhido arbitrariamente, concluímos que

$$\{\pm\delta_k : k \in K\} \subseteq \operatorname{Ext}(B_{\mathcal{C}(K)^*}).$$

■

Resta-nos observar apenas um resultado simples.

Lema 4.12. *Sejam V e W espaços normados, $T : V \to W$ uma bijeção linear e $C \subseteq V$ um convexo. Então, $T[\operatorname{Ext}(C)] = \operatorname{Ext}[T(C)]$.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que $T[\operatorname{Ext}(C)] \subseteq \operatorname{Ext}[T(C)]$. Escolha $w \in W\setminus \operatorname{Ext}[T(C)]$. Se $w \notin T(C)$, obtemos imediatamente que $w \notin T[\operatorname{Ext}(C)]$. Caso contrário, existem $x, y \in T(C)$ distintos tais que $w = \frac{x+y}{2}$. Sejam $x = T(a)$ e $y = T(b)$. Porquanto T é injetiva e linear, vemos que $w = T(\frac{a+b}{2})$ não é imagem de um ponto extremo de C. Daí, $w \notin T[\operatorname{Ext}(C)]$. Provamos, dessa forma, que $W\setminus \operatorname{Ext}[T(C)] \subseteq W\setminus T[\operatorname{Ext}(C)]$, o que garante a inclusão inicial.

Por fim, revelaremos que $W\setminus T[\operatorname{Ext}(C)] \subseteq W\setminus \operatorname{Ext}[T(C)]$ para completar a prova. Selecione $w \in W\setminus T[\operatorname{Ext}(C)]$. Caso $w \notin T(C)$, então $w \notin \operatorname{Ext}[T(C)]$. Do contrário, w é imagem de um ponto em $C\setminus \operatorname{Ext}(C)$. Logo, $w = T(\frac{a+b}{2})$, em que a e b são pontos distintos de C. Dado que T é linear e injetiva, concluímos que $w = \frac{T(a)+T(b)}{2}$ não é ponto extremo de $T(C)$. ■

Finalmente, possuímos todas as disposições necessárias para obtermos o teorema aguardado.

Teorema 4.13 (Banach, Stone). *Sejam K e L espaços compactos e de Hausdorff. Então, K e L são homeomorfos se, e somente se, existe uma isometria linear e bijetiva de $\mathcal{C}(K)$ em $\mathcal{C}(L)$.*

Demonstração. **($\Rightarrow$)** Suponha que $h : K \to L$ seja um homeomorfismo. Defina $T : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ por $T(x) := x \circ h^{-1}$, $\forall\ x \in \mathcal{C}(K)$. Uma vez que h é uma bijeção, segue que, para cada $x \in \mathcal{C}(K)$,

$$\|T(x)\|_\infty = \|x \circ h^{-1}\|_\infty = \sup_{l \in L} |(x \circ h^{-1})(l)| = \sup_{k \in K} |x(k)| = \|x\|_\infty.$$

Logo, T é uma isometria. Claramente, T é também linear. Resta-nos mostrar que T é sobrejetiva. Com efeito, tome $y \in \mathcal{C}(L)$. Assim, $y \circ h \in \mathcal{C}(K)$ e $T(y \circ h) = y$. Portanto, T é uma isometria linear e bijetiva, como queríamos.

($\Leftarrow$) Suponha que $T : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ seja uma isometria linear e bijetiva. De acordo com o Lema 0.200 (p. 70), T^* é uma isometria linear e bijetiva. Aplicando sucessivamente o Lema 4.12, o fato de T^* ser isometria bijetiva e a Proposição 4.11, conseguimos:

$$T^*[\mathrm{Ext}(B_{\mathcal{C}(L)^*})] = \mathrm{Ext}[T^*(B_{\mathcal{C}(L)^*})] = \mathrm{Ext}(B_{\mathcal{C}(K)^*}) = \{\pm\delta_k\}_{k\in K}.$$

Pela mesma proposição, $\mathrm{Ext}(B_{\mathcal{C}(L)^*}) = \{\pm\delta_l\}_{l\in L}$. Por tudo isso, $T^*[\{\pm\delta_l\}_{l\in L}] = \{\pm\delta_k\}_{k\in K}$.

Posto que T^* é uma bijeção, para cada $l \in L$ existem um único $h(l) \in K$ e um único $\varepsilon(l) \in \{-1, 1\}$ tais que $T^*(\delta_l) = \varepsilon(l)\delta_{h(l)}$. Definimos, assim, funções $h : L \to K$ e $\varepsilon : L \to \mathbb{R}$.

Afirmamos que ε é contínua. De fato, seja (l_a) uma rede em L tal que $l_a \rightharpoonup l \in L$. Pela Proposição 0.233 (p. 83), $x(l_a) \rightharpoonup x(l)$ para todo $x \in \mathcal{C}(L)$. Então, $\delta_{l_a}(x) \rightharpoonup \delta_l(x)$ para cada $x \in \mathcal{C}(L)$. Sendo assim, conforme o Lema 0.235 (p. 84), $\delta_{l_a} \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_l$. Depois disso, recorde que T^* é τ_*-τ_*-contínua, segundo a Proposição 0.236 (p. 84). Portanto, $T^*(\delta_{l_a}) \overset{*}{\rightharpoonup} T^*(\delta_l)$, isto é, $\varepsilon(l_a)\delta_{h(l_a)} \overset{*}{\rightharpoonup} \varepsilon(l)\delta_{h(l)}$. Logo, novamente pelo Lema 0.235, $\varepsilon(l_a)\delta_{h(l_a)}(x) \rightharpoonup \varepsilon(l)\delta_{h(l)}(x)$ para qualquer $x \in \mathcal{C}(K)$. Em particular, quando x é a função constante de valor 1, temos $\varepsilon(l_a) \rightharpoonup \varepsilon(l)$. Assim, ε é contínua.

Por fim, provaremos que h é um homeomorfismo. Para garantir que h é injetiva, suponha que $h(l) = h(m)$. Afirmamos que, nesse caso, $\varepsilon(l) = \varepsilon(m)$. Com efeito, se $\varepsilon(l) \neq \varepsilon(m)$, $T^*(\delta_l) + T^*(\delta_m) = \mathbf{0}$. Então, já que T^* é linear e injetiva, temos $\delta_l + \delta_m = \mathbf{0}$. Portanto, $x(l) + x(m) = 0$ para todo $x \in \mathcal{C}(K)$, o que não ocorre. Desse modo, quando $h(l) = h(m)$, $\varepsilon(l) = \varepsilon(m)$ e, nesse caso, $T^*(\delta_l) = T^*(\delta_m)$. Usando novamente a injetividade de T^*, revelamos que $\delta_l = \delta_m$. Consequentemente, $l = m$.

Em seguida, tome $k \in K$. Temos que $\delta_k \in \mathrm{Ext}(B_{\mathcal{C}(K)^*}) = T^*[\mathrm{Ext}(B_{\mathcal{C}(L)^*})]$. Porquanto T^* é uma bijeção, existe um único $l \in L$ tal que $\delta_k = T^*(\pm\delta_l) = \varepsilon(l)\delta_{h(l)}$. Por essa razão, $\delta_k(x) = \varepsilon(l)\delta_{h(l)}(x)$, qualquer que seja $x \in \mathcal{C}(K)$. Tomando x de imagem $\{1\}$, descobrimos que $\varepsilon(l) = 1$. Assim, $\delta_k = \delta_{h(l)}$. Consequentemente, $k = h(l)$ e h é sobrejetiva.

Agora, veremos que h é contínua. Admita que (l_a) seja uma rede em L tal que $l_a \rightharpoonup l$. Nesse caso, já sabemos que $\varepsilon(l_a)\delta_{h(l_a)} \overset{*}{\rightharpoonup} \varepsilon(l)\delta_{h(l)}$ e que $\varepsilon(l_a) \rightharpoonup \varepsilon(l)$. Daí, a partir de certo índice, $\varepsilon(l_a) = \varepsilon(l)$ e temos $\delta_{h(l_a)} \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_{h(l)}$. Resulta da prova do Lema 4.9 que $h(l_a) \rightharpoonup h(l)$. Em vista disso, h é contínua.

Em conclusão, h é um homeomorfismo, pois é uma bijeção contínua definida em um compacto. ■

Observação 4.14. **(a)** Sejam K e L espaços compactos e considere que $h : K \to L$ seja uma sobrejeção. Nessas condições, existe uma isometria linear de $\mathcal{C}(L)$ em $\mathcal{C}(K)$. Realmente, considere $T : \mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(K)$ tal que, fixado $y \in \mathcal{C}(L)$,

$$[T(y)](k) := y[h(k)], \qquad \forall\ k \in K.$$

Evidentemente, T é linear. Além do mais,

$$\|T(y)\|_\infty = \sup_{k\in K} |y[h(k)]| = \sup_{l\in L} |y(l)| = \|y\|_\infty,$$

qualquer que seja $y \in \mathcal{C}(L)$. Por essa razão, T é uma isometria.

(b) Considere os espaços $K := [-1, 1]$ e $L := \{(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) : 0 \leq \alpha < 2\pi\}$, os quais são compactos e de Hausdorff. Em seguida, defina $T : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ tal que, fixado $x \in \mathcal{C}(K)$,

$$[T(x)][(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)] := x(\cos\alpha), \qquad \forall\ (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \in L.$$

Escolhido $x \in \mathcal{C}(K)$, temos

$$\|T(x)\|_\infty = \sup_{l \in L} |[T(x)](l)| = \sup_{0 \leq \alpha < 2\pi} |x(\cos\alpha)| = \|x\|_\infty,$$

uma vez que $\cos\alpha$ percorre K quando α percorre o intervalo $[0, 2\pi)$. Por isso, T é uma isometria.

Agora, seja $U : \mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(K)$ em que, dado $y \in \mathcal{C}(L)$,

$$[U(y)](k) := y(e^{i\pi(k+1)}), \qquad \forall\ k \in K.$$

Assim, para qualquer $y \in \mathcal{C}(L)$,

$$\|U(y)\|_\infty = \sup_{k \in K} |[U(y)](k)| = \sup_{k \in K} |y(e^{i\pi(k+1)})| = \sup_{l \in L} |y(l)| = \|y\|_\infty.$$

Logo, U também é uma isometria. Em adição, T e U são claramente lineares. Por outro lado, K e L não são homeomorfos, conforme o Exemplo 0.67 (p. 34).

Apêndice A

Lista de correspondência entre citações e fontes

Obviamente, a grande maioria das definições e resultados contidos neste texto foram extraídos de ou baseados em outras obras. Abaixo, indicamos a origem de cada um desses enunciados.

0.2: [27], p. 259
0.3: [27], p. 260
0.4: [24], p. 48
0.5: [24], p. 50
0.7: [24], p. 51
0.8: [16], p. 3
0.9: [21], p. 210
0.10: [18], p. 54-57
0.11: [18], p. 62-65
0.12: [18], p. 62-65
0.17: [23], p. 57
0.18: [27], p. 24
0.22: [27], p. 31 e 33
0.24: [27], p. 55
0.25: [28], p. 96
0.26: [9], p. 23
0.27: [27], p. 90
0.28: [27], p. 56 e [35], p. 4
0.30: [27], p. 68
0.32: [27], p. 63
0.33: [27], p. 64
0.34: [27], p. 72
0.35: [27], p. 77
0.37: [27], p. 75 e 82
0.38: [27], p. 84
0.39: [28], p. 104
0.40: [28], p. 102
0.42: [28], p. 104
0.43: [17], p. 313
0.45: [27], p. 259
0.47: [27], p. 261
0.48: [27], p. 153
0.50: [27], p. 176
0.51: [27], p. 176
0.52: [10], p. 20
0.54: [27], p. 181
0.55: [27], p. 180
0.56: [27], p. 132
0.58: [27], p. 181
0.60: [27], p. 181-182
0.61: [27], p. 179
0.63: [27], p. 183
0.64: [28], p. 169
0.65: [27], p. 95
0.66: [27], p. 104
0.68: [27], p. 185
0.69: [14], p. 40
0.70: [3], p. 46
0.71: [14], p. 41
0.72: [2]
0.73: [41]
0.74: [22], p. 1
0.76: [22], p. 1
0.77: [29], p. 61
0.78: [8], p. 227
0.80: [21], p. 3
0.81: [21], p. 4
0.82: [21], p. 18
0.85: [25], p. 306
0.87: [21], p. 26
0.88: [21], p. 25
0.89: [21], p. 26
0.90: [21], p. 30
0.91: [21], p. 30
0.92: [21], p. 28
0.93: [21], p. 29
0.94: [21], p. 41
0.96: [21], p. 28
0.97: [21], p. 30
0.98: [38]
0.99: [37]
0.100: [27], p. 133
0.101: [25], p. 250
0.102: [13]
0.103: [13]
0.104: [30], p. 71
0.105: [30], p. 57
0.106: [30], p. 72
0.107: [24], p. 241
0.108: [30], p. 143
0.109: [24], p. 365

0.110: [1], p. 217
0.111: [24], p. 368
0.112: [24], p. 368
0.113: [24], p. 372
0.114: [30], p. 232
0.115: [30], p. 233
0.116: [30], p. 233
0.117: [24], p. 380
0.118: [20], p. 109
0.119: [30], p. 236
0.121: [24], p. 304
0.122: [24], p. 305
0.123: [24], p. 313
0.124: [24], p. 323 e [32], p. 4
0.125: [24], p. 324
0.126: [24], p. 314
0.127: [24], p. 319
0.128: [31], p. 8
0.131: [31], p. 12
0.132: [31], p. 8
0.134: [5], p. 8-9
0.135: [5], p. 8
0.136: [5], p. 10
0.137: [5], p. 12
0.138: [5], p. 19
0.139: [5], p. 21
0.140: [5], p. 96-104
0.142: [5], p. 27
0.143: [5], p. 28
0.144: [5], p. 30
0.147: [31], p. 149
0.148: [21], p. 58-59
0.149: [8], p. 3
0.150: [8], p. 64
0.151: [21], p. 75
0.157: [21], p. 67
0.158: [21], p. 67
0.159: [21], p. 58
0.160: [30], p. 63
0.162: [21], p. 65
0.164: [8], p. 180
0.166: [8], p. 166
0.167: [12], p. 163
0.168: [19], p. 8
0.169: [21], p. 82, 83, 104
0.171: [21], p. 91
0.173: [21], p. 92
0.174: [8], p. 50
0.177: [21], p. 97
0.178: [21], p. 119
0.179: [22], p. 2
0.180: [21], p. 239
0.181: [8], p. 38
0.182: [21], p. 213
0.183: [21], p. 214
0.184: [21], p. 221
0.185: [21], p. 223
0.186: [21], p. 223
0.188: [11], p. 4
0.189: [11], p. 5
0.190: [15], p. 42
0.191: [15], p. 54
0.192: [29], p. 56 e [11], p. 5
0.193: [29], p. 58
0.194: [29], p. 58
0.195: [29], p. 59
0.196: [29], p. 61
0.197: [11], p. 8
0.198: [15], p. 41
0.199: [15], p. 51
0.200: [34], p. 7
0.201: [21], p. 106
0.202: [8], p. 142
0.204: [7], p. 342-343
0.205: [8], p. 143
0.206: [11], p. 60
0.207: [11], p. 57
0.208: [11], p. 8-9
0.209: [11], p. 67
0.210: [6], p. 37-38
0.211: [11], p. 69
0.212: [8], p. 152
0.214: [11], p. 63
0.215: [11], p. 63
0.216: [7], p. 344
0.217: [8], p. 153
0.218: [8], p. 154
0.219: [6], p. 59
0.220: [6], p. 59
0.222: [8], p. 161 e [11], p. 75
0.223: [11], p. 74
0.224: [15], p. 43
0.225: [15], p. 43
0.226: [4], p. 33
0.227: [11], p. 77
0.228: [8], p. 355
0.229: [8], p. 355
0.230: [8], p. 356
0.231: [8], p. 356
0.232: [8], p. 356
0.233: [8], p. 356
0.234: [8], p. 356
0.236: [26], p. 14
1.4: [32], p. 1
1.5: [32], p. 1
1.6: [32], p. 1
1.7: [32], p. 2
1.8: [32], p. 2-3
1.9: [32], p. 3
1.10: [32], p. 3
1.11: [32], p. 3
1.12: [32], p. 6
1.13: [32], p. 1
1.14: [32], p. 2
1.15: [32], p. 2
1.16: [32], p. 2
1.17: [32], p. 2
1.18: [32], p. 2
1.19: [32], p. 4
1.20: [32], p. 4
1.21: [32], p. 4
1.22: [32], p. 4
1.23: [32], p. 5
1.24: [32], p. 5-6
1.25: [32], p. 3
2.1: [15], p. 76
2.3: [32], p. 7
2.4: [32], p. 7
2.5: [32], p. 7
2.6: [32], p. 9
2.7: [11], p. 17
2.8: [39]
2.9: [39]
2.10: [40]
2.11: [32], p. 7

2.12: [33], p. 1
2.13: [33], p. 1
3.1: [33], p. 3
3.2: [33], p. 3
3.4: [33], p. 4
3.5: [33], p. 4
3.6: [33], p. 4
3.7: [33], p. 4
3.8: [33], p. 4
3.9: [33], p. 5
3.10: [33], p. 6-7
3.11: [33], p. 7
3.12: [33], p. 7
3.13: [33], p. 8
3.14: [33], p. 8
3.15: [33], p. 9
4.1: [15], p. 70
4.2: [15], p. 76
4.4: [34], p. 29
4.5: [15], p. 76
4.6: [15], p. 76
4.7: [34], p. 28
4.8: [34], p. 30
4.9: [34], p. 23
4.10: [34], p. 31
4.11: [34], p. 38
4.12: [34], p. 39
4.13: [34], p. 40

Apêndice B

Fotos dos matemáticos citados no texto

Se tivemos a oportunidade de apresentar nossas modestas considerações à teoria dos pontos extremos em espaços de Banach, devemos tudo aos grandes cientistas que nos precederam. Os matemáticos ilustrados logo abaixo são citados no texto. Não conseguimos as fotos de Leonidas Alaoglu, David Pinhusovich Milman e de Billy James Pettis.

As fontes das imagens são apresentadas posteriormente. Os sites foram acessados no dia 18 de Junho de 2019. Alteramos as imagens apenas por meio de cortes e redimensionamentos.

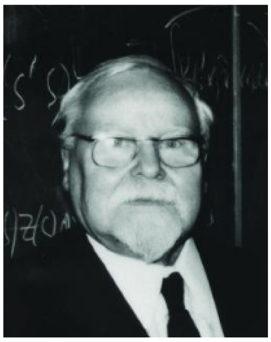

Figura B.1: Andrey Nikolayevich Tikhonov (1906-1993)

Figura B.2: Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Figura B.3: Bernardus Placidus J. N. G. Bolzano (1781-1848)

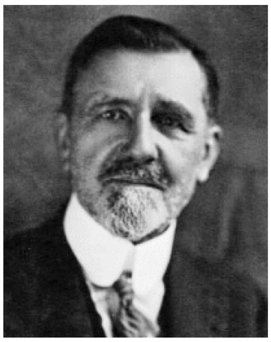

Figura B.4: Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956)

Figura B.5: Felix Hausdorff (1868-1942)

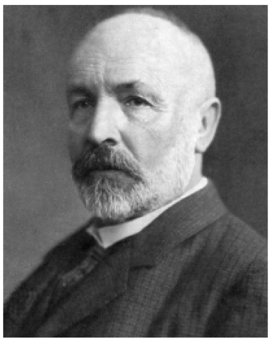

Figura B.6: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)


Figura B.7: Hans Hahn (1879-1934)


Figura B.8: Heinrich Eduard Heine (1821-1881)


Figura B.9: Henri Léon Lebesgue (1875-1941)


Figura B.10: Herman Heine Goldstine (1913-2004)


Figura B.11: Hermann Minkowski (1864-1909)


Figura B.12: James Waddell Alexander II (1888-1971)


Figura B.13: Jean-Gaston Darboux (1842-1917)


Figura B.14: Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

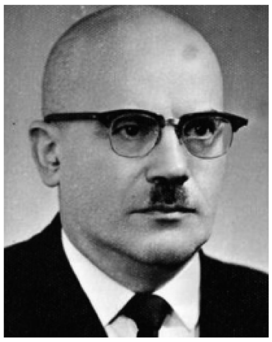
Figura B.15: Mark Krein (1907-1989)

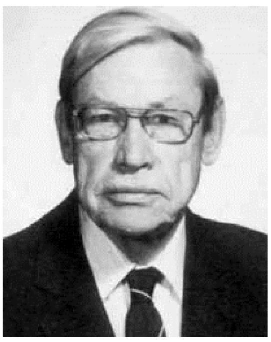
Figura B.16: Marshall Harvey Stone (1903-1989)


Figura B.17: Max August Zorn (1906-1993)


Figura B.18: Michel Rolle (1652-1719)

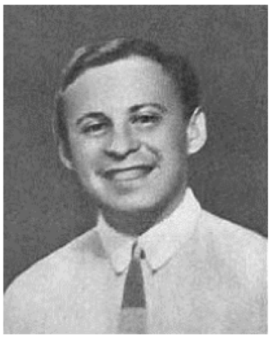

Figura B.19: Pavel Samuilovich Urysohn (1898-1924)

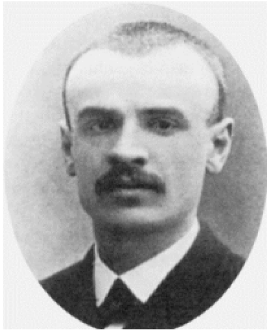

Figura B.20: René-Louis Baire (1874-1932)

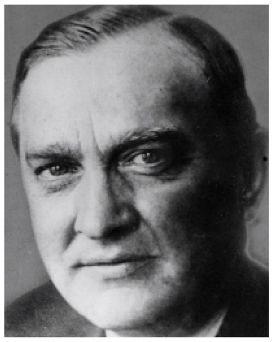

Figura B.21: Stefan Banach (1892-1945)

Figura B.22: Władysław Hugo Dionizy Steinhaus (1887-1972)

Fontes das figuras

Figura B.1: https://en.wikipedia.org/wiki/Andrey_Nikolayevich_Tikhonov
Figura B.2: https://en.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis_Cauchy
Figura B.3: https://en.wikipedia.org/wiki/Bernard_Bolzano
Figura B.4: https://en.wikipedia.org/wiki/Émile_Borel
Figura B.5: https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff
Figura B.6: https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor
Figura B.7: https://en.wikipedia.org/wiki/Hans_Hahn_(mathematician)
Figura B.8: https://en.wikipedia.org/wiki/Eduard_Heine
Figura B.9: https://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Lebesgue
Figura B.10: https://en.wikipedia.org/wiki/Herman_Goldstine
Figura B.11: https://en.wikipedia.org/wiki/Hermann_Minkowski
Figura B.12: https://en.wikipedia.org/wiki/James_Waddell_Alexander_II
Figura B.13: https://en.wikipedia.org/wiki/Jean_Gaston_Darboux
Figura B.14: https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass
Figura B.15: http://mathematics.in.ua/index.php/uk/persons/item/36-mark-krein
Figura B.16: https://vi.wikipedia.org/wiki/Marshall_Harvey_Stone
Figura B.17: https://www.geni.com/people/Max-A-Zorn/600000000408073629
Figura B.18: https://en.wikipedia.org/wiki/Michel_Rolle
Figura B.19: https://en.wikipedia.org/wiki/Pavel_Urysohn
Figura B.20: https://en.wikipedia.org/wiki/René-Louis_Baire

Figura B.21: https://en.wikipedia.org/wiki/Stefan_Banach
Figura B.22: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/Steinhaus.html

Referências

[1] AGARWAL, R. P.; FLAUT, C.; O'REGAN, D. **An Introduction to Real Analysis**. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2018.

[2] ALEXANDER'S SUBBASE THEOREM. **Mathonline**. Available at: <http://mathonline.wikidot.com/alexander-s-subbasis-theorem>. Accessed 8 April 2019.

[3] ALIPRANTIS, C. D.; BORDER, C. K. **Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide**. 3rd ed. Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.

[4] BARBU, V.; PRECUPANU, T. **Convexity and Optimization in Banach Spaces**. 4th ed. [S.l.]: Springer, 2012.

[5] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: John Wiley & Sons, 1995.

[6] BIEZUNER, R. J. **Notas de Aula: Análise Funcional**. Belo Horizonte, 2009. Disponível em: <http://150.164.25.15/∼rodney/>. Acesso em: 04 jun. 2019.

[7] BACHMAN, G.; NARICI, L. **Functional Analysis**. New York: Academic Press, 1966.

[8] BOTELHO, G. M. A.; PELLEGRINO, D. M.; TEIXEIRA, E. V. **Fundamentos de Análise Funcional**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção Textos Universitários)

[9] BOURBAKI, N. **General Topology: Part 1**. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1966. (Series Elements of Mathematics)

[10] BREDON, G. E. **Topology and Geometry**. New York: Springer-Verlag, 1993.

[11] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer-Verlag, 2011.

[12] CAROTHERS, N. L. **Real Analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[13] SEEGER, A. **Characterization of compactness for metric spaces**. 2013. Available at: <https://www.math.wisc.edu/∼seeger/522/c13.pdf>. Accessed 10 April 2019. Lecture Notes.

[14] ENGELKING, R. **General Topology**. Berlin: Heldermann, 1989. (Sigma series in pure mathematics, vol. 6)

[15] FABIAN M. et al. **Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry**. New York: Springer-Verlag, 2001.

[16] FRALEIGH, J. B. **A First Course in Abstract Algebra**. 7th ed. Boston: Pearson Education, 2002.

[17] GIVANT S.; HALMOS, P. **Introduction to Boolean Algebras**. New York: Springer, 2009.

[18] HALMOS, P. R. **Naive set theory**. New York: Springer, 1974.

[19] HEIL, C. **Functional Analysis Lecture Notes: Quotient Spaces**. 2007. Available at: <http://people.math.gatech.edu/ heil/6338/summer08/section6a.pdf>. Accessed 30 March 2019.

[20] KHARAZISHVILI, A. **Strange Functions in Real Analysis**. 3rd ed. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2018.

[21] KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. New York: John Wiley & Sons Inc, 1978.

[22] JIANG, H. **Functional Analysis**. Available at: <https://pdfs.semanticscholar.org/c33c/2a204591f068b2f8e0bb85239f6ed99ee978.pdf>. Accessed 1 April 2019.

[23] LAX, P. D. **Functional analysis**. New York: John Wiley & Sons Inc, 2002.

[24] LIMA, E. L. **Curso de Análise: volume 1**. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

[25] LIMA, E. L. **Espaços métricos**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

[26] MEER, E. C. H. **The Banach-Stone Theorem**. Leiden: Leiden University, 2014. Available at: <https://www.universiteitleiden.nl/binaries/content/assets/science/mi/scripties/bachvandermeer.pdf>. Accessed 20 May 2019. Bachelor's thesis.

[27] MORRIS, S. A. **Topology without tears**. March 17, 2019. Available at: <http://www.topologywithouttears.net/topbook.pdf>. Accessed 1 April 2019.

[28] MUNKRES, J. R. **Topology**. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

[29] NAGY, G. **Real Analysis**. Manhattan: 2001. Available at: <https://www.math.ksu.edu/~nagy/real-an/real-an-old/notes.pdf>. Accessed 08 June 2019.

[30] ROSS, K. A. **Elementary Analysis: The Theory of Calculus**. 2nd ed. New York: Springer, 2013.

[31] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. 3rd ed. Singapore: McGraw-Hill, 1987.

[32] SANTOS, A. Z. P. **Um estudo sobre dois espaços de Banach**. Belo Horizonte: 2017. Notas de aula.

[33] SANTOS, A. Z. P. **Um exemplo sobre a geometria de pontos extremos**. Belo Horizonte: 2018. Notas de aula.

[34] SANTOS, J. B. **Variações do Teorema de Banach-Stone**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2016. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45131/tde-03042017-145643/pt-br.php>. Acesso em: 10 mar. 2019. Dissertação de mestrado.

[35] SCHAEFER, H. H.; WOLFF, M. P. **Topological Vector Spaces**. 2nd ed. New York: Macmillan Company, 1999.

[36] SERGE, L. **Linear Algebra**. 3rd ed. New York: Springer, 1987.

[37] THE BAIRE CATEGORY THEOREM FOR COMPLETE METRIC SPACES. **Mathonline**. Available at: <http://mathonline.wikidot.com/the-baire-category-theorem-for-complete-metric-spaces>. Accessed 9 April 2019.

[38] THE CANTOR INTERSECTION THEOREM FOR COMPLETE METRIC SPACES. **Mathonline**. Available at: <http://mathonline.wikidot.com/the-cantor-intersection-theorem-for-complete-metric-spaces>. Acessed 9 April 2019.

[39] THE KREIN-MILMAN LEMMA. **Mathonline**. Available at: <http://mathonline.wikidot.com/the-krein-milman-lemma>. Accessed 10 June 2019.

[40] THE KREIN-MILMAN THEOREM. **Mathonline**. Available at: <http://mathonline.wikidot.com/the-krein-milman-theorem>. Accessed 10 June 2019.

[41] TYCHONOFF'S THEOREM FOR ARBITRARY PRODUCTS OF COMPACT SETS. **Mathonline**. Available at: <http://mathonline.wikidot.com/tychonoff-s-theorem-for-arbitrary-products-of-compact-sets>. Accessed 8 April 2019.