UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Problema não linear envolvendo o p-laplaciano fracionário com crescimento exponencial e polinomial

Eduardo Huerto Caqui

Belo Horizonte - MG

11 de novembro de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Eduardo Huerto Caqui

Orientador:

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki

Coorientador:

Prof. Dr. Hamilton Prado Bueno.

Problema não linear envolvendo o p-laplaciano fracionário com crescimento exponencial e polinomial

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do grau de doutor em Matemática.

Belo Horizonte - MG

11 de novembro de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz - CRB 6ª Região nº 819

Huerto Caqui, Eduardo.

H887p Problema não linear envolvendo o p-laplaciano fracionário com crescimento exponencial e polinomial / Eduardo Huerto Caqui — Belo Horizonte, 2019.
286 f. il.; 29 cm.

Tese(doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Matemática.

Orientador: Olimpio Hiroshi Miyagaki.
Coorientador: Hamilton Prado Bueno

1. Matemática - Teses. 2. Equações diferenciais Parciais - Teses. 3. Princípios variacionais - Teses. I. Orientador. II. Coorientador. III. Título.

CDU 51(043)

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Problema não linear envolvendo p-laplaciano fracionário com crescimento exponencial e polinomial

EDUARDO HUERTO CAQUI

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Olímpio Hiroshi Miyagaki
UFSCar

Prof. Hamilton Prado Bueno
UFMG

Prof. Bruno Mendes Rodrigues
UFOP

Prof. Fábio Rodrigues Pereira
UFJF

Prof. Marcelo Fernandes Furtado
UnB

Ronaldo B. Assunção
Prof. Ronaldo Brasileiro Assunção
UFMG

Belo Horizonte, 11 de novembro de 2019.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Agradecimentos

Ao meu orientador, Olimpio Hiroshi Miyagaki, pela paciência e excelente orientação.

Ao meu coorientador, Hamilton Bueno Prado, bons conselhos oferecidos.

À meus professores pelos ensinamentos que contribuíram para minha formação, especialmente ao professor Fábio Rodrigues Pereira.

Aos meus pais pelo carinho incondicional, incentivo, ensinamentos, apoio e por todo que sempre me deram.

Aos meus amigos de curso.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro.

À minha família.

Resumo

Usando métodos variacionais, neste trabalho estudamos existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problema elíptico envolvendo crescimento subcrítico e crítico do tipo Trudinger-Moser. Tratamos também de uma classe de problema elíptico envolvendo crescimento crítico de Sobolev.

Palavras-chave: Métodos variacionais, expoente crítico, desigualdade de Trudinger-Moser.

Abstract

Using variational methods, we study the existence and multiplicity of solutions to an elliptic problem class involving subcritical and critical Trudinger-Moser growth. We are also dealing with an elliptical problem class involving Sobolev's critical growth.

Keywords: Variational methods, critical exponent, Trudinger-Moser inequality.

Sumário

Introdução

São várias as dificuldades quando se trabalha com equações diferenciais: o tipo de operador, a falta de compacidade das imersões de Sobolev e o comportamento da não-linearidade são algumas delas. Neste trabalho apresentaremos resultados de existência e multiplicidade para equações envolvendo operadores não-locais. Mais precisamente, no Capítulo 1 estudamos o seguinte problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_p u &= -\lambda|u|^{q-2}u + a|u|^{p-2}u + f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, com $0 < s < 1$, $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}$ e não-linearidades f do tipo exponencial (no sentido Trudinger-Moser)

(i) subcrítico, isto é, $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(t)|}{\exp\left(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}\right)} = 0$, para todo $\alpha > 0$ e

(ii) crítico, no sentido que existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(t)|}{\exp\left(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}\right)} = \begin{cases} \infty, & \text{se } 0 < \alpha < \alpha_0 \\ 0, & \text{se } \alpha > \alpha_0, \end{cases}$$

e no Capítulo 2 estudamos o problema:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_p u &= -\lambda|u|^{q-2}u + a|u|^{p-2}u + b(u^+)^{p^*_s-1} \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, com $0 < s < 1$, $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}$ e

$$p_s^* = \begin{cases} \dfrac{pN}{N - sp}, & \text{se} \quad sp < N, \\ \infty, & \text{se} \quad sp \geq N, \end{cases}$$

o exponente crítico fracionário de Sobolev.

Os problemas (1) e (2) podem ser colocados na forma

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = -\lambda |u|^{q-2}u + a|u|^{p-2}u + f(u) & \text{em} \ \ \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \ \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, com $0 < s < 1$, $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}$ e diferentes não-linearidades f.

O operador p-laplaciano fracionário $(-\Delta)_p^s$ é definido por

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2 \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,\epsilon)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} \mathrm{d}y,$$

para uma função mensurável u e $x \in \mathbb{R}^N$. Para mais informações sobre estes operadores, consulte o Apêndice A.

Recentemente, problemas envolvendo operadores não-locais têm sido amplamente estudados na literatura e atraído a atenção de muitos matemáticos de diferentes áreas de pesquisa. Esse tipo de operador não-local surge na descrição de vários fenômenos nas ciências aplicadas, como otimização, finanças, transições de fase, materiais estratificados, difusão anômala, luxação de cristais, limites ultra-relativísticos da mecânica quântica, fluxos quase-geostróficos, dispersão múltipla, superfícies mínimas, ciência dos materiais e ondas de água. Para uma introdução elementar a este tópico e uma lista ainda não exaustiva de referências relacionadas, consulte, por exemplo, [44].

O espaço de funções no qual esperamos encontrar soluções para o problema (3) é o espaço de Sobolev fracionário dado por:

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty \right\}.$$

Como estas soluções devem ser nulas fora de Ω, é natural considerarmos como espaço ambiente o subconjunto $X_p^s \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$X_p^s = \left\{ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) : u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \right\}.$$

Um dos primeiros problemas do tipo (3) - no caso, envolvendo o operador laplaciano e $f = 0$ - foi exposto em 1994 por Ambrosetti, Brezis e Cerami [5]. Mais precisamente, foi abordado o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p\,, & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

com $0 < q < 1 < p$. Os autores mostraram a existência de um valor $\Lambda > 0$ para o qual o problema (4) possui pelo menos duas soluções positivas se $\lambda \in (0, \Lambda)$; pelo menos uma solução se $\lambda = \Lambda$; e nenhuma solução positiva se $\lambda > \Lambda$.

Este trabalho deu origem a uma preocupação crescente sobre a multiplicidade de soluções de problemas semilineares elípticos do tipo

$$-\Delta u = \mu |u|^{q-2} u + g(u) \quad \text{em} \quad \Omega$$

no caso em que g é assintoticamente linear e assimétrica, ou seja, g satisfaz uma condição do tipo Ambrosetti-Prodi dada por

$$g_- = \lim_{t \to -\infty} \frac{g(t)}{t} < \lambda_k < g_+ = \lim_{t \to +\infty} \frac{g(t)}{t},$$

sendo λ_k um autovalor do operador laplaciano. Este problema foi abordado, entre outros (veja[27, 66]), por Paiva e Massa [36] e Paiva e Presoto [37].

Em [36], estudaram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= -\lambda|u|^{q-2}u + au + g(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave com $1 < q < 2$, $\lambda > 0$, $a \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$, com $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ denotando a sequência de autovalores do operador $(-\Delta)$ no espaço $H_0^1(\Omega)$ e em que a não-linearidade g, entre outras condições, possui crescimento tipo polinomial. Nesse trabalho, foi provada a existência de um valor $\Lambda > 0$ para o qual o problema (5) possui pelo menos três soluções se $\lambda \in (0, \Lambda)$, uma delas sendo positiva e outra negativa.

Em [37], os autores estudaram o problema (5) com não-linearidade do tipo $g(t) = (t^+)^{p-1}$, com $2 < p \leq \dfrac{N+2}{N-2}$ e $N > 2$. Utilizando a técnica das autofunções aproximadas, os autores também encontraram pelo menos três soluções, uma delas sendo positiva e outra negativa.

Miyagaki, Montreanu e Pereira [65], utilizando argumentos distintos de [37], estudaram o problema (5) envolvendo o operador fracionário e não-linearidade do tipo $g(t) = (t^+)^{2_s^*-1}$.

O problema (3) pode ser visto como uma versão não-local da equação elíptica semilinear [36] e como uma extensão do problema estudado em [65].

Equações elípticas com não-linearidades côncavas da forma $-\lambda|u|^{q-2}u$, $1 < q < 2$, para $\lambda < 0$ e g possuindo crescimento polinomial foram estudados por vários autores para o operador laplaciano (veja [4], [5], [31], [79] e suas referências). Também, estudos relacionados ao problema (5) foram realizados para equações elípticas envolvendo tanto o operador laplaciano fracionário (veja [10], [13], [14], [18], [65] e suas referências) como o operador p-laplaciano fracionário (veja [15], [53], [54], [67], [29] e suas referências).

Com respeito ao crescimento exponencial da não-linearidade em problemas do tipo (3) no caso limite $N = sp$, Bahrouni [9] abordou o problema não-local com não-linearidade exponencial subcrítica h

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = -|u|^{p-2}u + f(u) + h(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado suave, $0 < s < 1$ e $p \geq 2$, $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Neste trabalho, o autor encontrou uma solução não-trivial. Para isso provou uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser utilizada em espaços fracionários. Mais precisamente, se $0 < s < 1$ e $p \geq 2$ são tais que $N = sp$, provou que existem constantes positivas $\alpha_{s,N}^* = \alpha(s, N)$ e $H_\alpha > 0$ tais que

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}\right) \mathrm{d}x \leq H_\alpha, \tag{6}$$

para todo $u \in X_p^s$ com $\|u\|_{X_p^s} \leq 1$ e para todo $0 \leq \alpha < \alpha_{s,N}^*$.

No caso particular em que $sp = N$ e $p = 2$, temos $N = 1$ (pois $0 < s < 1$) e consequentemente $s = 1/2$. Neste caso, denotamos

$$X := X_2^{1/2} = \{u \in W^{1/2,2}(\mathbb{R}) : u = 0 \text{ em } \mathbb{R} \setminus (0,1)\}.$$

Takahashi [88] estudou a desigualdade de Trudinger-Moser em espaços fracionários $W^{1/2,2}(\mathbb{R})$, mostrando a existência de $K > 0$ tal que

$$\sup_{u \in X, \|u\|_X \leq 1} \int_0^1 \exp\left(\alpha|u|^2\right) \mathrm{d}x \leq K, \quad \text{para } \alpha \leq \pi \tag{7}$$

Se $\alpha > \pi$, então essa constante K não existe, isto é, o lado esquerdo da desigualdade é infinito

A desigualdade (7) permite a obtenção de resultados de imersão, que são fundamentais para as técnicas variacionais utilizadas no espaço X_p^s. Assim, as desigualdades (6) e (7) desempenham um papel crucial no estudo de problemas que envolvem não-linearidades com crescimento exponencial subcrítico ou crítico no sentido Trudinger-Moser.

Brezis e Merle [21] tem um papel pioneiro no estudo de problemas envolvendo crescimento exponencial. Várias hipóteses diferentes foram feitas para permitir a obtenção de existência e multiplicidade de soluções em problemas desse tipo (consulte [41], [42] e [90]).

Problemas com o p-laplaciano fracionário tem sido objeto de muitos estudos. Por exemplo, Iannizzoto e Squassina [55] mostraram a existência e multiplicidade de soluções para o problema:

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u &= f(u) \quad \text{em } (0,1), \\ u &= 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}\setminus(0,1), \end{cases} \tag{8}$$

a não-linearidade f tendo crescimento exponencial e, embora não explicitamente informado, satisfazendo a condição de Ambrosetti e Rabinowitz (AR) (veja [42, p.142]). Isto é, existem $\mu > p$ e $R > 0$ tais que

$$0 < \mu F(t) \leq f(t)t, \ \text{ para todo } |t| \geq R, \ \text{ sendo } F(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

Neste caso,

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{F(t)}{|t|^p} = +\infty \tag{9}$$

é uma consequência de (AR).

Em geral, a condição (AR) garante a limitação de sequências de Palais-Smale. Nos últimos anos, muitos autores tentaram estudar problemas sem a condição (AR), aceitando (9) como válido e adicionando hipóteses (veja [25], [60], [71], [72], [73] [84] e suas referências). Na maioria dos casos, nessas hipóteses adicionais existem exigências de monotonicidade para $F(x,t)$ ou $\frac{f(x,t)}{t}$, ou então alguma propriedade de convexidade para a função $tf(x,t) - 2F(x,t)$.

Trabalhos envolvendo o operador laplaciano e operador N-laplaciano com não-linearidades com crescimento exponencial e sem usar a condição (AR) podem ser encontrados em Nguyen e Gouzhen [69] e Liu e Wang [70], respectivamente.

Recentemente, Ruichang [82], provou a existência de uma solução não-trivial para o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u &= f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{10}$$

onde, dentre outras condições para a não-linearidade f não usa a condição (AR), possui crescimento exponencial e verifica (9).

Motivados pelos artigos de Iannizzoto e Squassina [55], Ruichang [82], Paiva e Massa [36] e Paiva e Presoto [37], neste trabalho obtemos resultados de existência e multiplicidade de soluções para a equação (3). Mais precisamente, como nos artigos de Paiva e Massa [36] e Paiva e Presoto [37], conseguimos provar a existência de pelo menos três soluções não-triviais para (3).

Considerando o problema (5), notamos que em [36, 37] um resultado de minimização local para funcionais definidas em espaços de Sobolev H^1 e com não-linearidades com crescimento polinomial é de suma importância para verificar a geometria do Teorema do Passo da Montanha, o que permite a obtenção de uma solução positiva e outra negativa. (Uma terceira solução é obtida ao aplicar o Teorema de Linking).

Resultados de minimização local para funcionais definidas em espaços de Sobolev fracionario X_2^s foram obtido por Barrios, Colorado, De Pablo e Sanchez [14] e Iannizzoto , Mosconi e Squassina [57]. Mais precisamente, seja $\Phi : X_2^s \to \mathbb{R}$ o funcional em $C^1(X_2^s, \mathbb{R})$ definido por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{X_2^s}^2 - \int_\Omega G(u)\mathrm{d}x,$$

com $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)ds$ e $g \in C(\Omega)$ satisfazendo a condição de crescimento

$$|g(t)| \leq C(1 + |t|^{q-1}), \;\; \text{para algum } \; 1 \leq q \leq 2_s^* \; \text{ e } \; C > 0.$$

Foi mostrado que, se a função nula for um mínimo local de Φ na topologia $C^0_\delta(\overline{\Omega})$, então ela será um mínimo local de Φ na topologia X^s_2.

No Capítulo 2 estudaremos o problema (2). Naquele capítulo, seguindo as idéias de Barrios, Colorado, De Pablo e Sanchez [14] e Iannizzoto, Mosconi e Squassina [57], demonstraremos um resultado de minimização local para funcionais definidos em espaços de Sobolev fracionário X^s_p, a não-linearidade f tendo crescimento polinomial. Esse resultado generaliza o resultado de de minimização local obtidos em Barrios, Colorado, De Pablo e Sanchez [14] e Iannizzoto , Mosconi e Squassina [57]. Como antes, esse resultado é fundamental para provar a geometria do Teorema do Passo da Montanha e obtenção de uma solução positiva e outra negativa.

Esse resultado, contudo, é insuficiente para o estudo de problemas envolvendo o operador p-laplaciano fracionário e não-linearidade f do tipo exponencial. Adaptando ideias feitas expostas em Barrios, Colorado, De Pablo e Sanchez [14], Iannizzoto, Mosconi e Squassina [57] e Giacomoni, Prashanth e Sreenadh [50], provamos um resultado de minimização local para funcionais definidas em espaços de Sobolev fracionário X^s_p, a não-linearidade f tendo crescimento exponencial.

Mais especificamente, seja $\Phi : X^s_p \to \mathbb{R}$ o funcional $C^1(X^s_p, \mathbb{R})$ definido por

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p_{X^s_p} - \int_\Omega G(u)\mathrm{d}x,$$

com $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)ds$. Suponha que g satisfaça uma das condições

(i) Para todo $\alpha > 0$,

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|g(t)|}{\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}})} = 0,$$

(ii) existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|g(t)|}{\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}})} = \begin{cases} \infty, & \text{se} \quad 0 < \alpha < \alpha_0 \\ 0, & \text{se} \quad \alpha > \alpha_0. \end{cases}$$

Provamos que, se a função nula dor um mínimo local de Φ na topologia $C_\delta^0(\overline{\Omega})$, então ela é um mínimo local de Φ na topologia X_p^s.

Esse resultado é a principal contribuição desta tese. Fora seu interesse intrínseco, ele complementa o resultado de minimização local obtido no capítulo 2.

A seguir apresentaremos um panorama geral dos resultados apresentados neste trabalho. e, para facilitar a leitura, vamos repetir os problemas e os enunciados dos teoremas no inicio de cada capítulo.

No Capítulo 1 estudamos a existência e multiplicidade de soluções fracas para o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u &= -\lambda|u|^{q-2}u + a|u|^{p-2}u + f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{11}$$

sendo $(-\Delta)_p^s$ o operador p-laplaciano fracionário, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, suave, com $1 < q < 2 \le p$, $0 < s < 1$, $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}$, e a não- linearidade f tem crescimento exponencial subcrítico ou crítico no sentido Trudinger-Moser e satisfaz as seguintes condições:

$(f_{1,p})$ $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$ e $F(t) \ge 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

$(f_{3,p})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t} = 0$;

$(f_{5,p})$ $\dfrac{f(t)}{|t|^{p-2}t}$ é crescente se $t > 0$, e decrescente se $t < 0$.

$(f_{6,p})$ Para cada $(u_n) \subset X_p^s$, se

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{em } X_p^s, \\ f(u_n) \to f(u), & \text{em } L^1(\Omega), \end{cases}$$

então $F(u_n) \to F(u)$ em $L^1(\Omega)$.

$(f_{7,p})$ Existem $r > p$ e $C_r > 0$ tais que $F(t) \geq \dfrac{C_r}{r}|t|^r$, para todo $t \in \mathbb{R}$, com

$$C_r > \frac{1}{C}\left[2\frac{N}{s}\left(\frac{\alpha_0}{\alpha^*_{s,N}}\right)^{\frac{N-s}{s}}\frac{(r-p)}{pr}\right]^{\frac{r-p}{p}},$$

onde C (encontrada em (1.107)) e $\alpha^*_{s,N}$ são constantes positivas (veja a Proposição A.9.

Observação 0.1 *A condição $(f_{7,p})$ implica a condição*

$(f_{4,p})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty}\frac{F(t)}{|t|^p} = +\infty$, *sendo* $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds.$

Antes de enunciar nossos resultados principais apresentamos uma decomposição adequada em soma direta do espaço X_p^s. Para tal decomposição seguimos a ideias de [3] definindo

$$\lambda^* = \inf\left\{\|u\|^p_{X_p^s} \ :\ u \in W \ \text{ e } \ \|u\|^p_{L^p(\Omega)} = 1\right\},$$

sendo

$$W = \{u \in X_p^s \ :\ \langle A(\varphi_1), u\rangle = 0\}$$

e o operador não linear $A : X_p^s \to (X_s^p)^*$ sendo definido, para todo $u, v \in X_p^s$, por

$$\langle A(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Provamos que

$$X_p^s = W \oplus \operatorname{span}\{\varphi_1\},$$

φ_1 denotando a autofunção positiva e normalizada associada ao primeiro autovalor λ_1 do operador $(-\Delta)_p^s$ no espaço X_p^s, com $\lambda_1 < \lambda^*$ (veja Apêndice A).

Os principais resultados do Capítulo 1 são:

Teorema 0.2 *Seja* $\Phi : X_p^s \to \mathbb{R}$ *o funcional* $C^1(X_p^s, \mathbb{R})$ *definido por*

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s}^p - \int_\Omega G(u)\mathrm{d}x,$$

com $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)ds$*. Suponha que* g *satisfaça uma das condições abaixo*

(i) *Para todo* $\alpha > 0$,

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|g(t)|}{\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}})} = 0,$$

(ii) *existe* $\alpha_0 > 0$ *tal que*

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|g(t)|}{\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}})} = \begin{cases} \infty, & se \quad 0 < \alpha < \alpha_0 \\ 0, & se \quad \alpha > \alpha_0. \end{cases}$$

Seja 0 *um mínimo local de* Φ *na topologia* $C_\delta^0(\overline{\Omega})$*, isto é, existe* $r_1 > 0$ *tal que*

$$\Phi(0) \leq \Phi(z),\ \forall\ z \in X_p^s \cap C_\delta^0(\overline{\Omega}),\ \|z\|_{0,\delta} \leq r_1.$$

Então 0 *é um mínimo local de* Φ *na topologia* X_p^s*, isto é, existe* $r_2 > 0$ *tal que*

$$\Phi(0) \leq \Phi(z),\ \forall\ z \in X_p^s,\ \|z\|_{X_p^s} \leq r_2.$$

Teorema 0.3 (caso subcrítico) *Suponha que* $\lambda_1 \leq a < \lambda^*$ *e que* f *possua crescimento exponencial subcrítico e satisfaça as condições* $(f_{1,p})$, $(f_{3,p})$ *e* $(f_{4,p})$*, então para* λ *suficientemente pequeno, o problema* (11) *possui pelo menos três soluções não-triviais. Além disso, adicionanando a hipótese de* f *ser ímpar obtemos que o problema* (11) *possui infinitas soluções.*

Teorema 0.4 (caso crítico) *Suponha que* $\lambda_1 \leq a < \lambda^*$ *e que a não-linearidade* f *possua um crescimento exponencial crítico e satisfaça as condições* $(f_{1,p}), (f_{3,p})$ *e* $(f_{5,p}) - (f_{7,p})$*, então para* λ *suficientemente pequeno, o problema* (11) *possui pelo menos três soluções não-triviais.*

Para a prova dos Teoremas (0.3) e (0.4) utilizamos métodos minimax em combinação com uma desigualdade de Trudinger-Moser adequada (no caso, a estimativa (6)) para o espaço de Sobolev fracionário X_p^s. Mais precisamente, usamos o Teorema do Passo da Montanha para obter uma solução negativa e uma positiva. Para encontrar uma terceira solução não-trivial do problema (11) aplicamos o Teorema de Linking.

Observações:

(1) O problema (11) foi abordado em Ruichang [82] no caso $a = 0$ e $\lambda = 0$. Porém, para o problema com crescimento crítico, no lugar da hipótese $(f_{7,p})$ do Teorema 0.4, foi assumida a condição:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)\exp\left(-\alpha_0|t|^{\frac{N}{N-s}}\right)t \geq \beta > 0. \tag{12}$$

Por sua vez, em Anouar [9] foi provado a existência de solução fraca para o problema (11) no caso em que $a = -1$ e, ao invés do termo $-\lambda|u|^{q-2}u$ foi considerada uma função $h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e uma não-linearidade f possuindo crescimento exponencial subcrítico.

(2) Os Teoremas 0.3 e 0.4 generalizam, respectivamente, os Teoremas 1.3 e 1.5 de [82], uma vez que consideramos o caso $\lambda \neq 0$ e $a \neq 0$. Além disso, a hipótese $(f_{7,p})$ é menos restritiva que a condição (12). Também é importante notar que o Teorema 0.3 complementa o resultado principal de [9].

(3) Optamos por utilizar a desigualdade de Trudinger-Moser no espaço X_p^s como no artigo [9] (onde o autor considera o caso $p \geq 2$). Não poderíamos utilizar a versão dada em [82] pois este assume a igualdade $H^{s,p} = W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, sendo o espaço $H^{s,p} = \left\{u \in L^p(\mathbb{R}^N) : (-\Delta)^{s/2}u \in L^p(\mathbb{R}^N)\right\}$ para qualquer $p > 1$, mas sabemos que a igualdade entre aqueles espaços só é verdadeira quando $p = 2$.

Finalizando o Capítulo, estudamos ainda a equação (11) no caso em que $N = 1$,

$s = 1/2$ e $p = 2$, ou seja,

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u &= -\lambda|u|^{q-2}u + au + f(u) \quad \text{em } (0,1), \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \text{em } \mathbb{R}\setminus(0,1), \end{cases} \tag{13}$$

sendo $(-\Delta)^{1/2}$ o operador 1/2-laplaciano fracionário, $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $1 < q < 2$ e a não-linearidade f tendo crescimento exponencial subcrítico ou crítico no sentido Trudinger-Moser. Além disso, supomos também as seguintes condições sobre f:

(f_1) $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ e $F(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

(f_3) $\lim\limits_{|t|\to 0} \dfrac{|f(t)|}{|t|} = 0$;

(f_4) $\lim\limits_{|t|\to\infty} \dfrac{F(t)}{t^2} = +\infty$, sendo $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$;

(f_5) $\frac{f(t)}{t}$ é crescente se $t > 0$, e decrescente se $t < 0$;

(f_6) Para cada $(u_n) \subset X$, se

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{em } X, \\ f(u_n) \to f(u), & \text{em } L^1(0,1), \end{cases}$$

então $F(u_n) \to F(u)$ em $L^1(0,1)$;

(f_7) Existem $r > 2$ e $C_r > 0$ tais que

$$F(t) \geq \frac{C_r}{r}|t|^r, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

com $C_r > \dfrac{1}{C}\left[4\left(\dfrac{\alpha_0}{\pi}\right)\dfrac{(r-2)}{2r}\right]^{\frac{r-2}{2}}$, onde a constante $C > 0$ é obtida em (B.55) (ver Apêndice B).

Lembramos que $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ denota uma sequência de autovalores do operador $(-\Delta)^{1/2}$ no espaço X, escolhida de acordo com o exposto no Apêndice A.

Os principais resultados deste capítulo são enunciados como segue:

Teorema 0.5 (caso subcrítico) *Suponha que* $\lambda_k \leq a < \lambda_{k+1}$ *para algum* $k \in \mathbb{N}\,(k \geq 1)$ *e que* f *possua crescimento exponencial subcrítico e satisfaça as condições* (f_1), (f_3) *e* (f_4)*. Então para* λ *suficientemente pequeno, o problema (13) possui pelo menos três soluções não-triviais. Além disso, se* f *for ímpar,* (13)) *possui infinitas soluções.*

Teorema 0.6 (caso crítico) *Suponha que* $\lambda_k \leq a < \lambda_{k+1}$ *para algum* $k \in \mathbb{N}$ *e que* f *tenha crescimento exponencial crítico e satisfaça as condições* $(f_1), (f_3)$ $(f_5) - (f_7)$*. Então para* λ *suficientemente pequeno, o problema (13) possui pelo menos três soluções não-triviais.*

A prova destes resultados segue argumentos similares aos do Capítulo 1.

Observações

(1) Problemas elípticos envolvendo o operador laplaciano e crescimento exponencial no sentido de Trudinger-Moser em domínios limitados de $\mathbb{R}^2$ foram abordados em [1], [2], [21], [35] [90] para o caso $\lambda = 0$ e $a = 0$. Já os problemas para o 1/2-laplaciano com crescimento exponencial em termos da desigualdade de Trudinger-Moser em domínios limitados de $\mathbb{R}$, foram estudados em [51], [55], [59], considerando o caso $\lambda = 0$ e $a = 0$. Em [51], os autores estudaram um problema com uma não-linearidade particular no caso quando $\lambda = \lambda(x)$ muda de sinal.

(2) O estudo dos resultados deste capítulo foi motivado pelos trabalhos [36], [55] e pelo artigo de Zhang e Shen [91], onde eles provaram a limitação da sequência (PS), sem usar a condição (AR).

(3) Os resultados deste capítulo generalizam os resultados principais de [51] e [55] no sentido em que consideramos o caso $\lambda \neq 0$ e $a \neq 0$. Além disso, nossos resultados complementam [51] e [55], pois, em nosso caso, $\lambda = \lambda(x)$ não muda de sinal e as não-linearidades de [51] e [55] satisfazem a condição (AR) que é mais restritiva que a nossa hipótese (f_4).

No Capítulo 2 estudamos a existência e multiplicidade de soluções fracas para problema:

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u &= -\lambda|u|^{q-2}u + a|u|^{p-2}u + b(u^+)^{p_s^*-1} \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{14}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $\lambda > 0$, $1 < q < p$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $u^+ = \max\{0, u\}$, $u^- = \min\{0, u\}$ (Note que neste caso $u = u^+ + u^-$ e $|u| = u^+ - u^-$) e $p_s^* = pN/(N - sp)$ é o exponente crítico fracionário de Sobolev. Observe que a não-linearidade crítica em nosso problema (14) é assimétrica sendo expressa através da parte positiva u^+ da função u. Iniciando com o artigo seminal de Ambrosetti e Prodi [6], problemas elípticos com valor na fronteira e não-linearidades assimétricas, foram estudados amplamente em [16], [34], [37] e [61]. Em particular, em [11], [23], [38], [43], e [92] obtiveram resultados de existência e multiplicidade para problemas semilineares do tipo Ambrosetti-Prodi com não-linearidades críticas usando métodos variacionais. Em [37], os autores mostraram que o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)u &= -\lambda|u|^{q-2}u + au + b(u^+)^{p-1} \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{em } \mathbb{R} \setminus \Omega, \end{cases} \tag{15}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $\lambda > 0$, $1 < q < 2 < p \leq 2^* := \frac{2N}{N-2}$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, possui três soluções não-triviais via o método das autofunções aproximadas. Como as equações (14) e (15) possuem um termo sublinear $|u|^{q-2}u$ e um termo superlinear (crítico) $(u^+)^{p_s^*-1}$, elas pertencem à classe de problemas com não-linearidade especifica do tipo sublinear-superlinear, cujo estudo começou com Ambrosetti-Brezis-Cerami [5]. O problema (15) envolvendo o operador laplaciano fracionário foi estudado em [65], os autores mostraram um resultado de multiplicidade de soluções. No caso de problemas com o operador p-laplaciano fracionário, resultados recentes foram obtidos, citamos [54], [62] e [68].

Neste capítulo usamos a mesma decomposição do espaço e notações do capítulo anterior, isto é, $X_p^s = W \oplus \text{span}\{\varphi_1\}$ e $\lambda^* = \inf\left\{\|u\|^p_{X_p^s} \ : \ u \in W \ \text{ e } \ \|u\|^p_{L^p(\Omega)} = 1\right\}$.

Motivado pelos trabalhos [37], [42] e por um recente trabalho devido a Miyagaki, Motreanu e Pereira [65], nós obtemos o seguinte resultado:

Teorema 0.7 *Suponha* $1 < q < p$, $\lambda_1 < a < \lambda^*$ *e* $b > 0$.

(i) Se $N > sp^2$ *e* $1 < p \leq \dfrac{2N}{N+s}$, *então para* λ *suficientemente pequeno, o problema* (14) *possui pelo menos três soluções não-triviais.*

(ii) Se $N > sp((p-1)^2 + p)$ *e* $p > \dfrac{2N}{N+s}$, *então para* λ *suficientemente pequeno, o problema* (14) *possui pelo menos três soluções não-triviais.*

A prova deste resultado segue argumentos similares aos feitos em [65] que são distintos aos usados em [37], pois o operador fracionário impossibilita o uso das autofunções aproximadas. No entanto, como nosso problema (14) envolve o operador p-laplaciano fracionário e uma não-linearidade com crescimento polinomial crítico, surgiram novas dificuldades, como por exemplo a adaptação do resultado de minimização local para o nosso problema (14) com crescimento polinomial semelhante ao do capítulo anterior. Além disso, uma outra dificuldade dos problemas críticos que envolvem o p laplaciano fracionário, é a falta de uma fórmula explícita para os minimizadores de

$$S_s = \inf\left\{\frac{\|u\|^p_{X_p^s}}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^{p_s^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p_s^*}}} \ ; \ u \in X_p^s, u \neq 0\right\}.$$

S_s é a melhor constante de Sobolev da imersão $X_p^s \hookrightarrow L^{p_s^*}(\Omega)$, que muitas vezes é uma ferramenta essencial para lidar com as estimativas que tratam com a compacidade do funcional associado ao problema. Essa dificuldade foi superada em [30] e [67] pelo comportamento assintótico ideal dos minimizadores, obtido recentemente em [17]. Usando o mesmo comportamento assintótico ideal do minimizador de S_s, estabelecemos um intervalo de compacidade adequada para o funcional associado a nosso problema.

Consideração final: Considerando o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u &= -\lambda|u|^{q-2}u + a|u|^{p-2}u + f(u^+) & \text{em } \Omega, \\ u &= 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

onde f possui crescimento exponencial (subcrítico ou crítico no sentido Trudinger-Moser) e satisfaz as condições no capítulo 1, podemos obter uma solução positiva como no capítulo 1 e uma solução negativa seguindo as ideias do Capítulo 2.

Capítulo 1

Problema não-linear envolvendo o p-laplaciano fracionário com crescimento exponencial sem a condição de Ambrosetti-Rabinowitz

Neste capítulo estamos interessados em provar a existência e multiplicidade de soluções para o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u &= -\lambda|u|^{q-2}u + a|u|^{p-2}u + f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $0 < s < 1 < q < 2 \leq p$ e com não-linearidade f com crescimento exponencial subcrítico ou crítico no sentido de Trudinger-Moser. Note que $u \equiv 0$ é uma solução trivial do problema (1.1).

Além disso estudamos o caso particular em que $sp = N = 1$, $p = 2$ e $s = 1/2$, isto é, estudamos o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u &= -\lambda|u|^{q-2}u + au + f(u) & \text{em } (0,1), \\ u &= 0 & \text{em } \mathbb{R}\setminus(0,1), \end{cases} \tag{1.2}$$

correspondente ao caso crítico $N = sp$ e $p = 2$ (já que $0 < s < 1$).

O espaço de funções no qual esperamos encontrar soluções para o problema (1.1) é o espaço de Sobolev fracionário

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty \right\}.$$

Como estas soluções devem ser nulas fora de Ω é natural que consideremos como espaço ambiente o subconjunto $X_p^s \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$X_p^s = \left\{ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) : u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega \right\}.$$

Nossa proposta de trabalho consiste na utilização das seguintes hipóteses sobre a não-linearidade f, com crescimento exponencial subcrítico:

$(f_{1,p})$ $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ e $F(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, sendo $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$;

$(f_{2,p})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(t)|}{\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}})} = 0$, para todo $\alpha > 0$;

$(f_{3,p})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t} = 0$;

$(f_{4,p})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{F(t)}{|t|^p} = +\infty$.

No caso crítico, no sentido de Trudinger-Moser, substituímos a condição $(f_{2,p})$, pela condição

$(f'_{2,p})$ existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(t)|}{\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}})} = \begin{cases} \infty, & \text{se} \quad 0 < \alpha < \alpha_0 \\ 0, & \text{se} \quad \alpha > \alpha_0. \end{cases}$$

Além disso, mantemos as condições $(f_{1,p})$ e $(f_{3,p})$, mas acrescentamos as seguintes condições:

$(f_{5,p})$ $\dfrac{f(t)}{|t|^{p-2}t}$ é crescente se $t > 0$, e decrescente se $t < 0$;

$(f_{6,p})$ Para cada $(u_n) \subset X_p^s$, se

$$\begin{cases} u_n & \rightharpoonup & u, & \text{em} & X_p^s, \\ f(u_n) & \to & f(u), & \text{em} & L^1(\Omega), \end{cases}$$

então $F(u_n) \to F(u)$ em $L^1(\Omega)$;

$(f_{7,p})$ Existem $r > p$ e $C_r > 0$ tais que $F(t) \geq \dfrac{C_r}{r}|t|^r$, para todo $t \in \mathbb{R}$, em que

$$C_r > \left[2\frac{N}{s}\left(\frac{\alpha_0}{\alpha^*_{s,N}}\right)^{\frac{N-s}{s}} \frac{(r-p)}{pr}\right]^{\frac{r-p}{p}} \frac{1}{C},$$

em que a constante $C > 0$ será obtida em (1.107) e $\alpha^*_{s,N}$ foi definida na Proposição A.9.

Observação 1.1

(1) *A condição $(f_{6,p})$ foi usada em [69], [70] e [82] para $u = 0$.*

(2) *A condição $(f_{7,p})$ implica a condição $(f_{4,p})$.*

Observação 1.2 *Exemplos de não-linearidade*

(1) *Um protótipo de não-linearidade que satisfaz as hipóteses $(f_{1,p}) - (f_{4,p})$ é $f(t) = |t|^{p-2}t\log(1 + |t|)$, uma função que não satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz (AR).*

(2) *Um exemplo de não-linearidade que satisfaz as hipóteses* $(f_{1,p})$*,* $(f'_{2,p})$*,* $(f_{3,p})$ *e* $(f_{5,p}) - (f_{7,p})$ *é uma função do tipo:*

$$f(t) = \begin{cases} \sigma t^{r-1} + C_r t^{r-1}, & se\ 0 \leq t \leq (p-1)^{\frac{N-s}{N}}, \\ t^{\frac{N}{N-s}} \exp\left(t^{\frac{N}{N-s}} - (p-1)\right) + C_r t^{r-1} & \\ +\sigma(p-1)^{\frac{N-s}{N}(r-1)} - (p-1)^{\frac{s}{N}}, & se\ t > (p-1)^{\frac{N-s}{N}}, \end{cases}$$

com $0 < \sigma < 1$ *e* $f(t) = -f(-t)$*, se* $t < 0$*.*

Seja

$$\lambda^* = \inf\left\{ \|u\|^p_{X^s_p} \ :\ u \in W \ \text{ e } \ \|u\|^p_{L^p(\Omega)} = 1 \right\},$$

em que

$$W = \left\{ u \in X^s_p \ :\ \langle A(\varphi_1), u\rangle = 0 \right\}$$

com o operador não-linear $A : X^s_p \to (X^p_s)^*$ sendo definido para todo $u, v \in X^s_p$ por

$$\langle A(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.3}$$

Vamos provar que $X^s_p = W \oplus \operatorname{span}\{\varphi_1\}$ se $\lambda_1 < \lambda^*$, em que φ_1 é a autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 do operador $(-\Delta)^s_p$ no espaço X^s_p, positiva e normalizada, veja o Apêndice A.

O resultado central deste capítulo é o de minimização local, que será apresentado na Seção 1.2. Ele desempenhará um papel fundamental para a obtenção dos seguintes resultados principais:

Teorema 1.3 (caso subcrítico) *Suponha que* $\lambda_1 \leq a < \lambda^*$ *e que* f *satisfaça as condições* $(f_{1,p})$*,* $(f_{2,p})$*,* $(f_{3,p})$ *e* $(f_{4,p})$*. Então, para* λ *suficientemente pequeno, o problema (1.1) possui pelo menos três soluções não-triviais. Adicionalmente, se* f *for ímpar, o problema (1.1) possui infinitas soluções.*

Teorema 1.4 (caso crítico) *Suponha que* $\lambda_1 \leq a < \lambda^*$ *e que* f *satisfaça as condições* $(f_{1,p})(f'_{2,p}), (f_{3,p})$ *e* $(f_{5,p}) - (f_{7,p})$*. Então, para* λ *suficientemente pequeno, o* *problema* (1.1) *possui pelo menos três soluções não-triviais.*

Considerando a sequência de autovalores $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ do operador $(-\Delta)^{1/2}$ em $X_2^{1/2}$, demonstraremos

Teorema 1.5 (caso subcrítico) *Suponha que* $\lambda_k \leq a < \lambda_{k+1}$ *para algum* $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$ *e que* f *satisfaça as condições* $(f_{1,2})$, $(f_{2,2})$, $(f_{3,2})$ *e* $(f_{4,2})$. *Então, para* λ *suficientemente pequeno, o problema* (1.2) *possui pelo menos três soluções não-triviais. Se* f *for ímpar, então o problema* (1.2) *possui infinitas soluções.*

Teorema 1.6 (caso crítico) *Suponha que* $\lambda_k \leq a < \lambda_{k+1}$ *para algum* $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$ *e que a não-linearidade* f *satisfaça as condições* $(f_{1,2}), (f'_{2,2}), (f_{3,2})$ *e* $(f_{5,2})-(f_{7,2})$. *Então, para* λ *suficientemente pequeno, o problema* (1.2) *possui pelo menos três soluções não-triviais.*

1.1 Preliminares

Nesta seção apresentamos algumas definições e resultados que serão utilizados no decorrer deste capítulo.

1.1.1 Formulação variacional

Definição 1.7 *Dizemos que* $u \in X_s^p$ *é uma solução fraca de* (1.1) *se*

$$\langle A(u), v\rangle = -\lambda \int_\Omega |u|^{q-2}uv\mathrm{d}x + a\int_\Omega |u|^{p-2}uv\mathrm{d}x + \int_\Omega f(u)v\mathrm{d}x,$$

para todo $v \in X_p^s$, o operador não-linear $A : X_p^s \to (X_s^p)^*$ sendo definido, para todo $u, v \in X_p^s$, por (1.3).

No caso $sp = N = 1$, $p = 2$ e $s = 1/2$, temos que o operador dado em (1.3) define um produto interno no espaço $X_2^{1/2}$, que denotaremos por $\langle A(u), v\rangle = \langle u, v\rangle_{X_2^{1/2}}$. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 1.8 *Dizemos que $u \in X_2^{1/2}$ é solução fraca do problema* (1.2) *se*

$$\langle u, v\rangle_{X_2^{1/2}} = -\lambda \int_0^1 |u|^{q-2}uv\mathrm{d}x + a\int_0^1 uv\mathrm{d}x + \int_0^1 f(u)v\mathrm{d}x, \quad \textit{para todo } \ v \in X_2^{1/2}.$$

1.1.2 Algumas propriedades do subespaço X_p^s

Iniciamos esta subseção relembrando a definição do espaço de Sobolev fracionário

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty \right\},$$

da seminorma de Gagliardo

$$[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right)^{1/p}$$

e da norma natural de $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$:

$$\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} := \left(\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + [u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \right)^{1/p}, \tag{1.4}$$

norma que faz de $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ um espaço de Banach.

Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira regular e $0 < s < 1 < p$, a única função constante em

$$X_p^s = \left\{ u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) : u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \right\}$$

é a função nula. Note que X_p^s é um subespaço de $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.

O próximo resultado, encontrado em Di Nezza, Palatucci e Valdinoci [44, Teorema 7.1], é uma versão da Desigualdade de Poincaré para o espaço X_p^s. Definimos

$$\lambda_1 = \inf \left\{ [u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} : u \in X_p^s \text{ e } \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1 \right\}.$$

Proposição 1.9 *λ_1 é atingido e é positivo. Consequentemente*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \lambda_1^{-1/p}[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}, \quad \textit{para todo } u \in X_p^s.$$

Decorre então da Proposição 1.9:

Proposição 1.10 *$[u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$ define uma norma no espaço X_p^s, equivalente à norma $\|\cdot\|_{X_p^s}$.*

Assim, vamos considerar $\|\cdot\|_{X_p^s} = [\cdot]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)}$ como a norma em X_p^s. A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [56, p.4].

Proposição 1.11 *$(X_p^s, \|\cdot\|_{X_p^s})$ é um espaço de Banach uniformemente convexo.*

Como pode ser visto em [44, Teorema 6.5, 7.1], também vale:

Proposição 1.12 *O espaço X_p^s está imerso continuamente em $L^r(\Omega)$ para todo $1 \leq r \leq \infty$ e compactamente em $L^r(\Omega)$ para todo $1 \leq r < \infty$.*

No caso particular $p = 2, s = 1/2$ e $N = 1$ denotaremos $W^{1/2,2}(\mathbb{R}) := H^{1/2}(\mathbb{R})$ e $X_2^{1/2} := X$. Ou seja,

$$H^{1/2}(\mathbb{R}) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty \right\},$$

$$X = \{u \in H^{1/2}(\mathbb{R}) : u = 0 \text{ em } \mathbb{R} \setminus (0, 1)\},$$

com $H^{1/2}(\mathbb{R})$ considerado com a norma

$$\|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} := \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + [u]_{H^{1/2}(\mathbb{R})}^2 \right)^{1/2}, \tag{1.5}$$

em que

$$[u]_{H^{1/2}(\mathbb{R})} := \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right)^{1/2}$$

é a seminorma de Gagliardo. Com essa norma, $H^{1/2}(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert.

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [55, Proposição 2.3]:

Lema 1.13 *A aplicação* $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$\langle u, v \rangle_X = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

define um produto interno em X *que o torna um espaço de Hilbert.*

1.2 Resultados válidos para os casos subcrítico e crítico

Sejam $p > 1$ e $0 < s < 1$. Definimos o funcional $I_{\lambda,p} : X_p^s \to \mathbb{R}$ por

$$I_{\lambda,p}(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p_{X_p^s} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x.$$

No caso em que $p = 2$, $s = 1/2$ e $N = 1$ denotaremos $I_\lambda = I_{\lambda,p}$.

O seguinte resultado imediato será útil para a multiplicidade de soluções.

Lema 1.14 *Se a não-linearidade* f *for ímpar, então o funcional* $I_{\lambda,p}$ *é par.*

1.2.1 Limitação das sequências (PS) associadas aos funcionais $I_{\lambda,p}$

Relembramos que uma sequência $(u_n) \subset X_p^s$ é de Palais-Smale (que abreviaremos simplesmente por (PS)) para $I_{\lambda,p}$ se satisfizer

(i) $I_{\lambda,p}(u_n)$ é limitada;

(ii) $I'_{\lambda,p}(u_n) \to 0$ no dual de X_p^s quando $n \to \infty$.

Seguindo as ideias de Zhang e Shen [91, Lema 2], mostraremos que cada sequência (PS) para o funcional $I_{\lambda,p}$ é limitada.

Lema 1.15 (Casos subcrítico e crítico) *Suponha que f satisfaça $(f_{1,p})$, $(f_{2,p})$ (ou $(f'_{2,p})$ e $(f_{4,p})$). Então cada sequência (PS) para $I_{\lambda,p}$ é limitada.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset X_p^s$ uma sequência (PS) para $I_{\lambda,p}$. Então,

$$\frac{1}{p}\|u_n\|_{X_p^s}^p + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u_n|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(u_n)\mathrm{d}x \to c \tag{1.6}$$

e para todo $\varphi \in X_p^s$, verifica

$$\langle A(u_n), \varphi\rangle + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n\varphi \mathrm{d}x - a\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n\varphi \mathrm{d}x - \int_\Omega f(u_n)\varphi \mathrm{d}x = o(1)\|\varphi\|_{X_p^s}. \tag{1.7}$$

Inicialmente mostraremos, por contradição, que (u_n) é limitada em X_p^s. Para isso, suponha que $\|u_n\|_{X_p^s} \to \infty$ quando $n \to \infty$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos excluir os termos em que $\|u_n\|_{X_p^s} = 0$ e definir a sequência $v_n \subset X_p^s$ por

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{X_p^s}}.$$

Como v_n é limitada em X_p^s, podemos supor que, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v$ em X_p^s e $v_n \to v$ em $L^r(0,1)$, para todo $r \geq 1$ e $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p. em Ω.

Se v não for a função nula, o conjunto $\Theta = \{x \in \Omega \ : \ v(x) \neq 0\}$ tem medida de Lebesgue positiva e

$$|u_n(x)| = |v_n(x)|\|u_n(x)\|_X \to \infty \quad \text{para todo } x \in \Theta,$$

pois estamos supondo $\|u_n\|_{X_p^s} \to \infty$.

Uma vez que

$$\frac{F(u_n(x))}{\|u_n\|_{X_p^s}^p} = \frac{F(u_n(x))}{|u_n|^p}v_n^p,$$

decorre da condição (f_4) que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{F(u_n(x))}{|u_n|^p}|v_n|^p = \liminf_{n\to\infty} \frac{F(u_n(x))}{\|u_n\|^p_{X^s_p}} = \infty, \quad \text{para todo } x \in \Theta.$$

Assim, o Lema de Fatou implica que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \int_{v\neq 0} \frac{F(u_n(x))}{\|u_n\|^p_{X^s_p}} = \limsup_{n\to\infty} \int_{v\neq 0} \frac{F(u_n(x))}{|u_n|^p}|v_n|^p \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{v\neq 0} \frac{F(u_n(x))}{|u_n|^p}|v_n|^p \\ \geq \int_{v\neq 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{F(u_n(x))}{|u_n|^p}|v_n|^p.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{v\neq 0} \frac{F(u_n(x))}{\|u_n\|^p_{X^s_p}} = \infty. \tag{1.8}$$

Por outro lado, de (1.6) obtemos que

$$c + o(1) = I_\lambda(u_n) = \frac{1}{p}\|u_n\|^p_{X^s_p} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u_n|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(u_n)\mathrm{d}x.$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} - \frac{c+o(1)}{\|u_n\|^p_{X^s_p}} &= \int_\Omega \frac{F(u_n(x))}{\|u_n\|^p_{X^s_p}}\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q\|u_n\|^p_{X^s_p}}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x + \frac{a}{p\|u_n\|^p_{X^s_p}}\int_0^1 |u_n|^p \mathrm{d}x \\ &\geq \int_\Omega \frac{F(u_n(x))}{\|u_n\|^p_{X^s_p}}\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q\|u_n\|^p_{X^s_p}}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Decorre da imersão contínua de X^s_p em $L^q(\Omega)$ - veja a Proposição A.34 - a existência de $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} - \frac{c+o(1)}{\|u_n\|^p_{X^s_p}} &\geq \int_\Omega \frac{F(u_n(x))}{\|u_n\|^p_{X^s_p}}\mathrm{d}x - \frac{\lambda C}{q\|u_n\|^p_{X^s_p}}\|u_n\|^q_{X^s_p} \\ &= \int_\Omega \frac{F(u_n(x))}{\|u_n\|^p_{X^s_p}}\mathrm{d}x - \frac{\lambda C}{q\|u_n\|^{p-q}_{X^s_p}}.\end{aligned}$$

Logo, a condição $(f_{1,p})$ implica que

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}-\frac{c+o(1)}{\|u_n\|_{X_p^s}^p} &\geq \left(\int_{v\neq 0}+\int_{v=0}\right)\frac{F(u_n(x))}{|u_n|^p}|v_n|^p\mathrm{d}x-\frac{\lambda C}{q\|u_n\|_{X_p^s}^{p-q}}.\\ &\geq \int_{v\neq 0}\frac{F(u_n(x))}{|u_n|^p}|v_n|^p\mathrm{d}x-\frac{\lambda C}{q\|u_n\|_{X_p^s}^{p-q}}.\end{aligned}$$

Como $1<q<p$, temos

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{v\neq 0}\frac{F(u_n(x))}{\|u_n\|_{X_p^s}^p}\leq\frac{1}{p}$$

o que é contradiz (1.8).

Suponhamos agora $v=0$. Dividindo (1.7) por $\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}$ obtemos,

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{A(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}},\varphi\right\rangle+\lambda\int_\Omega|u_n|^{q-2}\frac{u_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\varphi\mathrm{d}x-a\int_\Omega|u_n|^{p-2}\frac{u_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\varphi\mathrm{d}x\\ -\int_\Omega\frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\varphi\mathrm{d}x=o(1)\frac{\|\varphi\|_{X_p^s}}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}},\ \forall\,\varphi\in X_p^s.\end{aligned}$$

Note que $\langle\frac{A(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}},\varphi\rangle=\langle A(v_n),\varphi\rangle$, de modo que temos, para todo $\varphi\in X_p^s$,

$$\begin{aligned}\langle A(v_n),\varphi\rangle+\frac{\lambda}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-q}}\int_\Omega|v_n|^{q-2}v_n\varphi\mathrm{d}x-a\int_\Omega|v_n|^{p-2}v_n\varphi\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\varphi\mathrm{d}x\\ =o(1)\frac{\|\varphi\|_{X_p^s}}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Como $v_n\to v$ em $L^q(\Omega)$, decorre do Teorema A.37 a existência de $h\in L^q(\Omega)$ e de uma subsequência de (v_n), que ainda denotaremos simplesmente por (v_n), tal que $|v_n|\leq h$ q.t.p. em Ω. Então, para cada $\varphi\in X_p^s$, decorre que

$$||v_n|^{q-2}v_n\varphi|=||v_n|^{q-1}\varphi|\leq h^{q-1}|\varphi|,\ \text{q.t.p. em }\Omega.$$

A desigualdade de Hölder então implica que

$$\int_\Omega |h^{q-1}|\varphi||\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |h|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_\Omega |\varphi|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

a última desigualdade sendo consequência da Proposição 1.12 e de $h \in L^q(\Omega)$. Portanto,

$$h^{q-1}|\varphi| \in L^1(\Omega), \ \ \forall\, \varphi \in X_p^s.$$

De $v_n \to v$ q.t.p. em Ω concluímos que $|v_n|^{q-2}v_n\varphi \to |v_n|^{q-2}v_n\varphi$ q.t.p. em Ω. Logo, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.36) garante que

$$\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n\varphi \to \int_\Omega |v|^{q-2}v\varphi, \ \ \forall\, \varphi \in X_p^s. \tag{1.10}$$

Analogamente,

$$\int_\Omega |v_n|^{p-2}v_n\varphi \to \int_\Omega |v|^{p-2}v\varphi, \ \ \forall\, \varphi \in X_p^s. \tag{1.11}$$

Como $v_n \rightharpoonup v$, aplicando o Lema A.52, obtemos

$$\langle A(v_n), \varphi\rangle \to \langle A(v), \varphi\rangle, \ \ \text{para todo } \varphi \in X_p^s. \tag{1.12}$$

De (1.9) (1.10), (1.11),(1.12) e do fato que $v_n \rightharpoonup v$ em X_p^s, lembrando que $v = 0$, obtemos

$$\int_\Omega \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\varphi \mathrm{d}x \to 0, \ \ \forall\, \varphi \in X_p^s.$$

Logo, existe $C > 0$ tal que

$$\left|\int_\Omega \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\varphi\right| \leq C, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \ \forall\, \varphi \in X_p^s. \tag{1.13}$$

Uma vez que

$$\left|\int_\Omega \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} \frac{\varphi}{\|\varphi\|_{X_p^s}}\right| \leq C, \quad \forall\, \varphi \in X_p^s,$$

temos

$$\left|\int_\Omega \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} \varphi\right| \leq C\|\varphi\|_{X_p^s}, \quad \forall\, \varphi \in X_p^s.$$

Definindo, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n(\varphi) = \int_\Omega \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} \varphi \mathrm{d}x,$$

temos que $\{T_n\}$ é uma família de funcionais lineares limitados. Além disso, (1.13) implica que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n(\varphi)| < C,\, \forall \varphi \in X_p^s.$$

Decorre então do Princípio de Limitação Uniforme (Lemma A.44) que $\sup_{n\in N}\{\|T_n\|\} < \infty$, sendo $\|T_n\|$ a norma de $T_n(\varphi)$ definida em X_p^s. Ou seja,

$$\|T_n\| \leq K,\, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.14}$$

Uma vez que $X_p^s \subset L^r(\Omega)$, aplicando o Teorema de Hahn-Banach concluímos a existência de um funcional linear contínuo $\widehat{T_n}$ definido en $L^r(\Omega)$ tal que

$$\widehat{T_n}(\varphi) = T_n(\varphi), \quad \text{ e } \quad \|\widehat{T_n}\|_{(L^r(\Omega))'} = \|T_n\|\,; \quad \forall \varphi \in X_p^s. \tag{1.15}$$

Assim, aplicando o Teorema da Representação de Riesz (Teorema A.38) para $L^r(\Omega)$ e $L^{r'}(\Omega)$, com $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'} = 1$, concluímos a existência de funções $h_n \in L^{r'}(\Omega)$ tais que

$$\widehat{T_n}(\varphi) = \int_0^1 h_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\; \forall \varphi \in L^r(\Omega), \tag{1.16a}$$

$$\|\widehat{T_n}\|_{(L^r(\Omega))'} = \|h_n\|_{L^{r'}(\Omega)}. \tag{1.16b}$$

Decorre de (1.15) e (1.16a) que

$$\int_\Omega h_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\varphi \mathrm{d}x,\ \forall \varphi \in X,$$

isto é,

$$\int_\Omega \left(h_n(x) - \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0,\ \forall \varphi \in X_p^s. \tag{1.17}$$

De acordo com o Lema A.16, para $\alpha > 0$ (no caso crítico tomar $\alpha > \alpha_0$) existe $C > 0$ tal que

$$|f(u_n)| \leq C \exp\left(\alpha |u_n|^{\frac{N}{N-s}}\right).$$

Logo,

$$\int_\Omega \left|\frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\right|^{r'} \leq \frac{C^{r'}}{\|u_n\|_{X_p^s}^{r'(p-1)}} \int_\Omega \exp\left(\alpha r' |u_n|^{\frac{N}{N-s}}\right).$$

Decorre então da Proposição A.11 que

$$\int_\Omega \left|\frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\right|^{r'} \mathrm{d}x < \infty,$$

isto é,

$$\frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} \in L^{r'}(\Omega).$$

Como $h_n \in L^{r'}(\Omega)$, concluímos que

$$\left(h_n - \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\right) \in L^{r'}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega).$$

Portanto, aplicando o Lema de Du Bois-Reymond (Lema A.45) a (1.17) vem

$$h_n(x) = \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_X^{p-1}} \text{ q.t.p. para } x \in \Omega. \tag{1.18}$$

Decorre então de (1.15), (1.14) e (1.16b) que

$$\|h_n\|_{L^{r'}(\Omega)} = \|\widehat{T_n}\|_{(L^r(\Omega))^*} = \|T_n\| \leq K. \tag{1.19}$$

Mas então a desigualdade de Hölder, (1.18) e (1.19) implicam que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_X^{p-1}} v_n\right| &\leq \left\|\frac{f(u_n)}{\|u_n\|_X^{p-1}}\right\|_{L^{r'}(\Omega)} \|v_n\|_{L^r(\Omega)} \\ &= \|h_n\|_{L^{r'}(\Omega)} \|v_n\|_{L^r(\Omega)} \\ &\leq K\|v_n\|_{L^r(\Omega)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\left|\int_\Omega \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} v_n\right| \leq K\|v_n\|_{L^r(\Omega)}.$$

Como $v_n \to 0$ em $L^r(\Omega)$, concluímos que

$$\int_\Omega \frac{f(u_n)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} v_n \to 0. \tag{1.20}$$

Mas então

$$
\begin{aligned}
\|v_n\|^p_{X^s_p} &= \langle A(v_n), v_n\rangle + \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}\frac{u_n}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x - a\int_\Omega |u_n|^{p-2}\frac{u_n}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x\\
&= -\int_\Omega \frac{f(u_n)}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}\frac{u_n}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x + a\int_\Omega |u_n|^{p-2}\frac{u_n}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x\\
&\quad + \int_\Omega \frac{f(u_n)}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}\left[\langle A(u_n), v_n\rangle + \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_nv_n\mathrm{d}x - a\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_nv_n\mathrm{d}x\right.\\
&\quad \left. - \int_\Omega f(u_n)v_n\mathrm{d}x\right] - \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}\frac{u_n}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x + a\int_\Omega |u_n|^{p-2}\frac{u_n}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x\\
&\quad + \int_\Omega \frac{f(u_n)}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\|u_n\|_{X^s_p}}\langle I'_{\lambda,p}(u_n), v_n\rangle - \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}\frac{u_n}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x + a\int_\Omega |u_n|^{p-2}\frac{u_n}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x\\
&\quad + \int_\Omega \frac{f(u_n)}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\|v_n\|^p_{X^s_p} &= \frac{1}{\|u_n\|_{X^s_p}}\langle I'_{\lambda,p}(u_n), v_n\rangle - \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}\frac{u_n}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x + a\int_\Omega |u_n|^{p-2}\frac{u_n}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x\\
&\quad + \int_\Omega \frac{f(u_n)}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
\|v_n\|^p_{X^s_p} &= \frac{1}{\|u_n\|_{X^s_p}}\langle I'_{\lambda,p}(u_n), v_n\rangle - \frac{\lambda}{\|u_n\|^{p-q}_{X^s_p}}\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n\mathrm{d}x + a\int_\Omega |v_n|^{p-2}v_n\mathrm{d}x\\
&\quad + \int_\Omega \frac{f(u_n)}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}v_n\mathrm{d}x. \qquad (1.21)
\end{aligned}
$$

De (1.20), (1.21), $I'_{\lambda,p}(u_n) \to 0$ e $v_n \rightharpoonup 0$ em X^s_p, obtemos que $v_n \to 0$ em X^s_p. Isto é uma contradição, pois $\|v_n\|_{X^s_p} = 1$. Portanto (u_n) é limitada em X^s_p. ■

Como consequência do Lema 1.15 obtemos a limitação de sequência (PS) do funcional I_λ, associado ao problema (1.2).

Lema 1.16 (Casos subcrítico e crítico) *Suponha que f satisfaça $(f_{1,2})$, $(f_{2,2})$ (ou $(f'_{2,2})$ e $(f_{4,2})$). Então cada sequência (PS) de I_λ é limitada.*

Também definimos a parte positiva do funcional $I_{\lambda,p}$, que nos permitirá encontrar soluções positivas para o problema com não-linearidade f com crescimento exponencial subcrítico ou crítico no sentido Trudinger-Moser.

Considere o funcional:

$$I^+_{\lambda,p} : X^s_p \to \mathbb{R}$$

$$I^+_{\lambda,p}(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u^+|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(u^+)\mathrm{d}x.$$

Pelo mesmo argumento utilizado no Lema A.56, o funcional $I^+_{\lambda,p}$ é de classe $C^1(X^s_p, \mathbb{R})$ e para todo $u, h \in X^s_p$,

$$\begin{aligned} \langle (I^+_{\lambda,p})'(u), h\rangle =& \langle A(u), h\rangle + \lambda\int_\Omega |u^+|^{q-1} h\mathrm{d}x - a\int_\Omega |u^+|^{p-1} h\mathrm{d}x \\ & - \int_\Omega f(u^+)h\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Note que encontrar um ponto crítico para o funcional $I^+_{\lambda,p}$ equivale a encontrar uma função $u \in X^s_p$ que satisfaz a equação:

$$\langle A(u), h\rangle + \lambda\int_\Omega |u^+|^{q-1} h\mathrm{d}x - a\int_\Omega |u^+|^{p-1} h\mathrm{d}x - \int_\Omega f(u^+)h\mathrm{d}x = 0, \ \forall\, h \in X^s_p,$$

ou seja, temos uma solução fraca para a equação :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_p u = -\lambda|u^+|^{q-1} + a|u^+|^{p-1} + f(u^+) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}\setminus\Omega, \end{cases} \tag{1.23}$$

em que $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < p$ e $u^+ = \max\{u, 0\}$.

Note que, se u for um ponto crítico de $I^+_{\lambda,p}$, então $\langle (I^+_{\lambda,p})'(u), h\rangle = 0,\ \forall\ h \in X^s_p$. Em particular, para $h = u^-$, assim aplicando o Lema A.23, temos

$$0 = \langle (I^+_{\lambda,p})'(u), u^-\rangle = \langle A(u), u^-\rangle \geq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u^-(x) - u^-(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \|u^-\|^p$$

e consequentemente, $u^- = 0$. Portanto, o ponto crítico u de $I^+_{\lambda,p}$ satisfaz $u = u^+ \geq 0$, ou seja, é uma função não negativa de X^s_p.

Aplicando o mesmo raciocínio utilizado na demonstração do Lema 1.15, obtemos

Lema 1.17 *Suponha que f satisfaça $(f_{1,p})$, $(f_{2,p})$, $(f_{3,p})$ e $(f_{4,p})$. Então cada sequência (PS) de $I^+_{\lambda,p}$ é limitada.*

Agora vamos considerar a parte negativa do funcional $I_{\lambda,p}$, o que nos possibilitará encontrar soluções negativas para o problema com não-linearidade f com crescimento exponencial subcrítico ou crítico. Para isso, definimos

$$I^-_{\lambda,p} : X^s_p \to \mathbb{R}$$
$$I^-_{\lambda,p}(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^-|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u^-|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(u^-)\mathrm{d}x.$$

Pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, o funcional $I^-_{\lambda,p}$ é de classe $C^1(X^s_p, \mathbb{R})$ e para todo $u, h \in X^s_p$ verifica

$$\begin{aligned}\langle (I^-_{\lambda,p})'(u), h\rangle =& \langle A(u), h\rangle + \lambda\int_\Omega |u^-|^{q-1} h \mathrm{d}x - a\int_\Omega |u^-|^{p-1} h\mathrm{d}x \\ &- \int_\Omega f(u^-) h\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Como antes, encontrar um ponto crítico para o funcional $I^-_{\lambda,p}$ equivale a encontrar uma função $u \in X^s_p$ que satisfaz a equação:

$$\langle A(u), h\rangle + \lambda\int_\Omega |u^-|^{q-1} h\mathrm{d}x - a\int_\Omega |u^-|^{p-1} h\mathrm{d}x - \int_\Omega f(u^-) h\mathrm{d}x = 0,\ \forall\ h \in X^s_p,$$

ou seja, temos uma solução fraca para a equação:

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = -\lambda |u^-|^{q-1} + a|u^-|^{p-1} + f(u^-) \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R} \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.25}$$

em que $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < p$ e $u^- = \max\{u, 0\}$.

Se u for um ponto crítico de $I_{\lambda,p}^-$, então $\langle (I_{\lambda,p}^-)'(u), h \rangle = 0, \ \forall\, h \in X_p^s$. Em particular, para $h = u^+$. Aplicando o Lema A.23, temos

$$0 = \langle (I_{\lambda,p}^-)'(u), u^+ \rangle = \langle A(u), u^+ \rangle \geq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u^+(x) - u^+(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \|u^+\|^p.$$

Logo, $u^+ = 0$ e o ponto crítico u de $I_{\lambda,p}^-$ satisfaz $u = u^- \leq 0$, ou seja, é uma função não positiva de X_p^s.

Como no Lema 1.17, temos que toda sequência (PS) do funcional $I_{\lambda,p}^-$ associado ao problema (1.25) é limitada.

1.3 Minimização em C_δ^0 versus minimização em X_p^s para crescimento exponencial

Nossos resultados principais são a contrapartida não local do resultado principal de De Paiva e Massa [36]. Neste artigo eles aplicam um resultado de minimização local na topologia C^1 para funcionais associados a problemas com não-linearidade com crescimento polinomial (veja também Brezis e Nirenberg [22]).

Assim, inspirados nas ideias contidas nos artigos [14], [50] e [57], provaremos um resultado de minimização local para funcionais associados a problemas com não-linearidade com crescimento exponencial. Este resultado foi fundamental para provar que $I_{\lambda,p}$ satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Iniciamos demonstrando um resultado de regularidade que será útil na prova de nosso resultado de minimização.

Proposição 1.18 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado suave e* f *uma função satisfazendo* $(f_{2,p})$ *ou* $(f'_{2,p})$. *Seja* $(v_\epsilon)_{\epsilon\in(0,1)} \subseteq X_p^s$ *uma família de soluções do problema*

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u &= \left(\dfrac{1}{1-\xi_\epsilon}\right) f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.26}$$

com $\xi_\epsilon \leq 0$ *e* $\|v_\epsilon\|_{X_p^s} \leq 1$, *para todo* $\epsilon \in (0,1)$. *Então* $\sup\limits_{\epsilon\in(0,1)} \|v_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$.

Demonstração: Definimos, para $k > 0$,

$$T_k(s) = \begin{cases} s+k, & \text{se} \quad s \leq -k, \\ 0, & \text{se} \quad -k < s < k, \\ s-k, & \text{se} \quad s \geq k \end{cases}$$

e

$$\Omega_k = \{x \in \Omega \, : \, |v_\epsilon(x)| \geq k\}.$$

Observe que $T_k(v_\epsilon) \in X_p^s$, já que T_k é Lipschitz e, portanto

$$\begin{aligned} \|T_k(v_\epsilon)\|_{X_p^s}^p = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|T_k(v_\epsilon(x)) - T_k(v_\epsilon(y))|^p}{|x-y|^p} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &\leq C^p \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)|^p}{|x-y|^p} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= C^p \|v_\epsilon\|_{X_p^s}^p < \infty. \end{aligned}$$

Tomando $T_k(v_\epsilon)$ como função teste em (1.26), como $\xi_\epsilon \leq 0$, temos

$$\begin{aligned} \langle A(v_\epsilon), T_k(v_\epsilon)\rangle &= \left(\frac{1}{1-\xi_\epsilon}\right) \int_\Omega f(v_\epsilon) T_k(v_\epsilon) \mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Omega |f(v_\epsilon)||T_k(v_\epsilon)| \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Afirmamos que

$$\langle A(v_\epsilon), T_k(v_\epsilon)\rangle_{X_p^s} \leq C \left(\int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^r \mathrm{d}x\right)^{1/r} |\Omega_k|^{p/r}. \tag{1.28}$$

Suponhamos que f possua crescimento subcrítico, isto é, satisfaça $(f_{2,p})$.

Aplicando o Lema A.16 para $0 < \alpha < \alpha^*_{s,N}$, obtemos a existência de $C_1 > 0$ tal que

$$\int_\Omega |f(v_\epsilon)||T_k(v_\epsilon)|\mathrm{d}x \leq C_1 \int_\Omega \exp(\alpha|v_\epsilon|^{\frac{N}{N-s}})|T_k(v_\epsilon)|\mathrm{d}x. \tag{1.29}$$

Como $0 < \alpha < \alpha^*_{s,N}$, podemos fixar $\theta > 1$ de modo que ainda se tenha $0 < \theta\alpha < \alpha^*_{s,N}$. Logo, aplicando a desigualdade de Hölder generalizada no lado direito de (1.29) com $\eta = \dfrac{p+1}{\theta - 1}$ e $r = \theta\eta$, temos

$$\int_\Omega |f(v_\epsilon)||T_k(v_\epsilon)|\mathrm{d}x \leq C_1 \left(\int_\Omega \exp(\theta\alpha|v_\epsilon|^{\frac{N}{N-s}})\right)^{1/\theta} \left(\int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^r \mathrm{d}x\right)^{1/r} |\Omega_k|^{(r-1-\eta)/r}.$$

Mas, uma vez que $\|v_\epsilon\|_{X^s_p} \leq 1$, aplicando a Proposição A.9 podemos encontrar $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |f(v_\epsilon)||T_k(v_\epsilon)|\mathrm{d}x \leq C \left(\int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^r \mathrm{d}x\right)^{1/r} |\Omega_k|^{(r-1-\eta)/r},$$

provando o afirmado.

A demonstração no caso em que f possui crescimento crítico, isto é, satisfaz $(f'_{2,p})$, é completamente análoga.

Por outro lado, denotando $E = \langle A(v_\epsilon), T_k(v_\epsilon)\rangle_{X^s_p}$, temos

$$\begin{aligned}
E =& \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y))(T_K(v_\epsilon)(x) - T_K(v_\epsilon)(y))}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=& \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{v_\epsilon(x)\leq -k} \frac{|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y))(T_k(v_\epsilon)(x) - T_k(v_\epsilon)(y))}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{|v_\epsilon(x)|<k} \frac{|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y))(T_k(v_\epsilon)(x) - T_k(v_\epsilon)(y))}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{v_\epsilon(x)\geq k} \frac{|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y))(T_k(v_\epsilon)(x) - T_k(v_\epsilon)(y))}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Vamos denotar

$$E_1 = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{v_\epsilon(x) \leq -k} \frac{|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y))(T_k(v_\epsilon)(x) - T_k(v_\epsilon)(y))}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y,$$
$$E_2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{|v_\epsilon(x)| < k} \frac{|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y))(T_k(v_\epsilon)(x) - T_k(v_\epsilon)(y))}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y,$$
$$E_3 = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{v_\epsilon(x) \geq k} \frac{|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y))(T_k(v_\epsilon)(x) - T_k(v_\epsilon)(y))}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y.$$

de modo que

$$\langle A(v_\epsilon), T_k(v_\epsilon) \rangle_{X_p^s} = E_1 + E_2 + E_3. \tag{1.30}$$

Consideremos E_1. Da definição de T_k temos

$$\begin{aligned} E_1 = & \int_{v_\epsilon(y) \leq -k} \left[\int_{v_\epsilon(x) \leq -k} \frac{|T_k(v_\epsilon)(x) - T_k(v_\epsilon)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \\ & + \int_{|v_\epsilon(y)| < k} \int_{v_\epsilon(x) \leq -k} \frac{|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y))(v_\epsilon(x) + k)}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ & + \int_{v_\epsilon(y) \geq k} \int_{v_\epsilon(x) \leq -k} \frac{|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y))((v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y) + 2k)}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Vamos denotar

$$A = \int_{|v_\epsilon(y)| < k} \int_{v_\epsilon(x) \leq -k} \frac{|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y))(v_\epsilon(x) + k)}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

e

$$B = \int_{v_\epsilon(y) \geq k} \int_{v_\epsilon(x) \leq -k} \frac{|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y))((v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y) + 2k)}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

de modo que

$$E_1 = \int\limits_{v_\epsilon(y) \leq -k} \int\limits_{v_\epsilon(x) \leq -k} \frac{|T_k(v_\epsilon)(x) - T_k(v_\epsilon)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + A + B. \tag{1.31}$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
A &= \int\limits_{|v_\epsilon(y)|<k} \int\limits_{v_\epsilon(x)\leq -k} \frac{|v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y))(v_\epsilon(x)+k)}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{|v_\epsilon(y)|<k} \int\limits_{v_\epsilon(x)\leq -k} \frac{|v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(y)-v_\epsilon(x))(-v_\epsilon(x)-k)}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{|v_\epsilon(y)|<k} \int\limits_{v_\epsilon(x)\leq -k} \frac{|v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)|^{p-1}|v_\epsilon(x)+k|}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
A = \int\limits_{|v_\epsilon(y)|<k} \int\limits_{v_\epsilon(x)\leq -k} \frac{|v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)|^{p-1}|v_\epsilon(x)+k|}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.32}
$$

Como $v_\epsilon(x) \leq -k$ e $-k < v_\epsilon(y) < k$, temos $v_\epsilon(y) - v_\epsilon(x) > -v_\epsilon(x) - k \geq 0$ e consequentemente $|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)| > |v_\epsilon(x) + k|$. Portanto,

$$
|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)|^{p-1} > |v_\epsilon(x) + k|^{p-1}. \tag{1.33}
$$

De (1.32) e (1.33) segue-se que

$$
\begin{aligned}
A &> \int\limits_{|v_\epsilon(y)|<k} \int_{v_\epsilon(x)\leq -k} \frac{|v_\epsilon(x)+k|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{|v_\epsilon(y)|<k} \left[\int_{v_\epsilon(x)\leq -k} \frac{|v_\epsilon(x)+k-T_k(v_\epsilon)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_{|v_\epsilon(y)|<k} \left[\int_{v_\epsilon(x)\leq -k} \frac{|T_k(v_\epsilon)(x)-T_k(v_\epsilon)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

o que nos permite concluir que

$$
A > \int\limits_{|v_\epsilon(y)|<k} \left[\int\limits_{v_\epsilon(x)\leq -k} \frac{|T_k(v_\epsilon)(x)-T_k(v_\epsilon)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y. \tag{1.34}
$$

Observe também que

$$
\begin{aligned}
B &= \int_{v_\epsilon(y)\geq k}\int_{v_\epsilon(x)\leq -k}\frac{|v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y))(v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)+2k)}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_{v_\epsilon(y)\geq k}\int_{v_\epsilon(x)\leq -k}\frac{|v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(y)-v_\epsilon(x))(-v_\epsilon(x)+v_\epsilon(y)-2k)}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_{v_\epsilon(y)\geq k}\int_{v_\epsilon(x)\leq -k}\frac{|v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)|^{p-2}(v_\epsilon(y)-v_\epsilon(x))(-v_\epsilon(x)-k+v_\epsilon(y)-k)}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_{v_\epsilon(y)\geq k}\int_{v_\epsilon(x)\leq -k}\frac{|v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)|^{p-1}|v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)+2k|}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

de maneira que

$$
B = \int_{v_\epsilon(y)\geq k}\int_{v_\epsilon(x)\leq -k}\frac{|v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)|^{p-1}|v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)+2k|}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.35}
$$

Como $v_\epsilon(x)\leq -k$ e $v_\epsilon(y)\geq k$, temos $v_\epsilon(y)-v_\epsilon(x)\geq v_\epsilon(y)-v_\epsilon(x)-2k\geq 0$. Consequentemente, $|v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)|\geq |v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)+2k|$, o que implica que

$$
|v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)|^{p-1}\geq |v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)+2k|^{p-1}. \tag{1.36}
$$

De (1.35) e (1.36) decorre que

$$
\begin{aligned}
B &\geq \int_{v_\epsilon(y)\geq k}\int_{v_\epsilon(x)\leq -k}\frac{|v_\epsilon(x)-v_\epsilon(y)+2k|^{p}}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_{v_\epsilon(y)\geq k}\int_{v_\epsilon(x)\leq -k}\frac{|v_\epsilon(x)+k-(v_\epsilon(y)-k)|^{p}}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_{v_\epsilon(y)\geq k}\left[\int_{v_\epsilon(x)\leq -k}\frac{|T_k(v_\epsilon)(x)-T_k(v_\epsilon)(y)|^{p}}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

o que nos permite concluir que

$$
B \geq \int_{v_\epsilon(y)\geq k}\left[\int_{v_\epsilon(x)\leq -k}\frac{|T_k(v_\epsilon)(x)-T_k(v_\epsilon)(y)|^{p}}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y. \tag{1.37}
$$

Logo, de (1.31), (1.34) e (1.37) deduzimos que

$$
\begin{aligned}
E_1 \geq & \int_{v_\epsilon(y)\leq -k} \left[\int_{v_\epsilon(x)\leq -k} \frac{|T_k(v_\epsilon)(x)-T_k(v_\epsilon)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
& + \int_{|v_\epsilon(y)|<k} \left[\int_{v_\epsilon(x)\leq -k} \frac{|T_k(v_\epsilon)(x)-T_k(v_\epsilon)(x)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
& + \int_{v_\epsilon(y)\geq k} \left[\int_{v_\epsilon(x)\leq -k} \frac{|T_k(v_\epsilon)(x)-T_k(v_\epsilon)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
= & \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{v_\epsilon(x)\leq -k} \frac{|T_k(v_\epsilon)(x)-T_k(v_\epsilon)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y. \qquad (1.38)
\end{aligned}
$$

Analogamente, obtemos

$$
E_2 \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{|v_\epsilon(x)|<k} \frac{|T_k(v_\epsilon)(x)-T_k(v_\epsilon)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y. \qquad (1.39)
$$

e

$$
E_3 \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{v_\epsilon(x)\geq k} \frac{|T_k(v_\epsilon)(x)-T_k(v_\epsilon)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y. \qquad (1.40)
$$

Somando as expressões (1.38), (1.39) e (1.40), obtemos

$$
E_1+E_2+E_3 \geq \int\limits_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|T_k(v_\epsilon)(x)-T_k(v_\epsilon)(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
$$

Ou seja, (1.30) implica que

$$
\langle A(v_\epsilon), T_k(v_\epsilon)\rangle \geq \|T_k(v_\epsilon)\|^p_{X^s_p}. \qquad (1.41)
$$

A imersão contínua $X^s_p \hookrightarrow L^r(\Omega)$ (veja a Proposição A.34) nos dá

$$
\langle A(v_\epsilon), T_k(v_\epsilon)\rangle \geq \|T_k(v_\epsilon)\|^p_{X^s_p} \geq C_1 \left(\int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^r \mathrm{d}x\right)^{p/r}.
$$

Portanto,

$$C_1 \left(\int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^r \mathrm{d}x \right)^{p/r} \leq \langle A(v_\epsilon), T_k(v_\epsilon) \rangle. \tag{1.42}$$

Logo, de (1.28)) e (1.42) concluímos a existência de $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^r \mathrm{d}x \leq C |\Omega_k|^{p/(p-1)}. \tag{1.43}$$

Mas $|T_k(s)| = (|s| - k)(1 - \chi_{[-k,k]}(s))$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Logo, para $0 < k < h$, obtemos que $\Omega_h \subset \Omega_k$. Então,

$$\int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^r \mathrm{d}x = \int_{\Omega_k} (|v_\epsilon| - k)^r \geq \int_{\Omega_h} (|v_\epsilon| - k)^r \geq (h - k)^r |\Omega_h|. \tag{1.44}$$

Definindo

$$\phi(k) = |\Omega_k|, \qquad \text{para } k > 0,$$

de (1.43) e (1.44) concluímos que, para $0 < k < h$,

$$\phi(h) \leq C(h - k)^{-r} \phi(k)^{p/(p-1)}. \tag{1.45}$$

Seja $d = 2^p C^{1/r} |\Omega|^{1/(p-1)r}$. Definindo a sequência (k_n) por $k_0 = 0$ e $k_n = k_{n-1} + \dfrac{d}{2^n}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ de (1.45) obtemos, por indução,

$$\phi(k_n) \leq \frac{\phi(0)}{2^{nr(p-1)}}, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\lim_{n \to \infty} \phi(k_n) = 0. \tag{1.46}$$

Uma vez que $k_n = d \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue-se

$$k_n < d \;\text{ para todo }\; n \in \mathbb{N}.$$

Logo, como ϕ é não-crescente, temos

$$\phi(k_n) \geq \phi(d).$$

De (1.46) concluímos que

$$\phi(d) = 0,$$

mostrando que Ω_d tem medida nula. Consequentemente,

$$|v_\epsilon(x)| \leq d \quad \text{q.t.p.} \quad \text{em } \Omega, \ \text{para todo } \epsilon \in (0,1).$$

Logo,

$$\|v_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq d \ \text{ para todo } \ \epsilon \in (0,1)$$

e, portanto, $\sup\limits_{\epsilon \in (0,1)} \|v_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$. ■

Relembramos as definições dos espaços normados $C^0_\delta(\overline{\Omega})$ e $C^{0,\alpha}_\delta(\overline{\Omega})$. Para isto definimos $\delta : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^+$ por $\delta(x) = \text{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, para $x \in \overline{\Omega}$. Para $0 < \alpha < 1$, definimos

$$C^0_\delta(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^0(\overline{\Omega}) \ : \ \frac{u}{\delta^s} \ \text{ tem uma extensão contínua em } \overline{\Omega} \right\},$$

$$C^{0,\alpha}_\delta(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^0(\overline{\Omega}) \ : \ \frac{u}{\delta^s} \ \text{ tem uma extensão } \alpha\text{-Hölder contínua em } \overline{\Omega} \right\}$$

com normas

$$\|u\|_{0,\delta} = \left\| \frac{u}{\delta^s} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$$

e

$$\|u\|_{\alpha,\delta} = \|u\|_{0,\delta} + \sup_{x,y \in \overline{\Omega},\, x \neq y.} \frac{|u(x)/\delta(x)^s - u(y)/\delta(y)^s|}{|x-y|^\alpha},$$

respectivamente.

No que segue enunciamos e demonstramos o resultado de minimização local:

Teorema 1.19 *Seja $\Phi : X_p^s \to \mathbb{R}$ o funcional $C^1(X_p^s, \mathbb{R})$ definido por*

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s}^p - \int_\Omega G(u)\mathrm{d}x,$$

com $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$. Suponha que g satisfaça $(f_{2,p})$ ou $(f_{2,p}')$. Seja 0 um mínimo local de Φ na topologia $C_\delta^0(\overline{\Omega})$, isto é, existe $r_1 > 0$ tal que

$$\Phi(0) \leq \Phi(z),\ \forall\, z \in X_p^s \cap C_\delta^0(\overline{\Omega}),\ \|z\|_{0,\delta} \leq r_1. \tag{1.47}$$

Então 0 é um mínimo local de Φ na topologia X_p^s, isto é, existe $r_2 > 0$ tal que

$$\Phi(0) \leq \Phi(z),\ \forall\, z \in X_p^s,\ \|z\|_{X_p^s} \leq r_2.$$

Demonstração: Para $0 < \epsilon < 1$, seja $B_\epsilon[0] = \{z \in X_p^s \ : \ \|z\|_{X_p^s} \leq \epsilon\}$. Vamos mostrar o resultado por contradição. Vamos supor que, para cada $\epsilon > 0$, exista $u_\epsilon \in B_\epsilon[0]$ tal que

$$\Phi(u_\epsilon) < \Phi(0). \tag{1.48}$$

Afirmação: $\Phi : B_\epsilon[0] \to \mathbb{R}$ é fracamente semicontínua inferiormente, para todo $0 < \epsilon < 1$.

De fato, seja $(u_n) \subseteq B_\epsilon[0]$ e $u_0 \in B_\epsilon[0]$ tais que $u_n \rightharpoonup u_0$. Provaremos que $\liminf\limits_{n\to\infty} \Phi(u_n) \geq \Phi(u_0)$. Como $u_n \rightharpoonup u_0$, temos

$$\begin{cases} u_n \to u \text{ em } L^p(\Omega) \text{ para todo } p \geq 1 \text{ e} \\ u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases} \tag{1.49}$$

Se f satisfizer $(f_{2,p})$, isto é, se f possuir crescimento subcrítico, pelo Lema A.17, para $0 < \alpha < \alpha_{s,N}^*$ existe $C > 0$ tal que

$$|G(t)| \leq C|t| + \exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{1.50}$$

Logo,

$$\int_\Omega |G(u_n)|\mathrm{d}x \leq C\int_\Omega |u_n|\mathrm{d}x + \int_\Omega \exp(\alpha|u_n|^{\frac{N}{N-s}})\mathrm{d}x.$$

Decorre então de (1.49) e da Proposição A.11 que

$$G(u_n) \in L^1(\Omega). \tag{1.51}$$

Analogamente podemos mostrar

$$G(u_0) \in L^1(\Omega). \tag{1.52}$$

De (1.50) segue-se que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |G(u_n)u_n|\mathrm{d}x \leq& \int_\Omega (C|u_n| + \exp(\alpha|u_n|^{\frac{N}{N-s}}))|u_n|\mathrm{d}x\\ =&C\int_\Omega |u_n|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega \exp(\alpha|u_n|^{\frac{N}{N-s}})|u_n|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Então

$$\int_\Omega |G(u_n)u_n|\mathrm{d}x \leq C\int_\Omega |u_n|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega \exp(\alpha|u_n|^{\frac{N}{N-s}})|u_n|\mathrm{d}x. \tag{1.53}$$

Como $0 < \alpha < \alpha^*_{s,N}$, podemos fixar $r > 1$ de modo que ainda se tenha $0 < r\alpha < \alpha^*_{s,N}$. Aplicando a desigualdade de Hölder em (1.53), com r e r' conjugados temos

$$\int_\Omega |G(u_n)u_n|\mathrm{d}x \leq C\int_\Omega |u_n|^2\mathrm{d}x + \left(\int_\Omega \exp(\alpha r|u_n|^{\frac{N}{N-s}})\mathrm{d}x\right)^{1/r}\left(\int_\Omega |u_n|^{r'}\mathrm{d}x\right)^{1/r'}. \tag{1.54}$$

De (1.49) e da Proposição A.9 temos a existência de $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |G(u_n)u_n|\mathrm{d}x \leq C. \tag{1.55}$$

Portanto, de (1.49), (1.51), (1.52), (1.55) e do Lema A.46, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega G(u_n)\mathrm{d}x = \int_\Omega G(u_0)\mathrm{d}x. \tag{1.56}$$

Mas então (1.56) implica que

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\Phi(u_n) =&\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{X^s_p} - \int_\Omega G(u_n)\mathrm{d}x\right)\\
\geq&\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{X^s_p}\right) + \liminf_{n\to\infty}\left(-\int_\Omega G(u_n)\mathrm{d}x\right)\\
\geq&\frac{1}{p}\|u_0\|^p_{X^s_p} - \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega G(u_n)\mathrm{d}x\\
\geq&\frac{1}{p}\|u_0\|^p_{X^s_p} - \int_\Omega G(u_0)\mathrm{d}x\\
=&\Phi(u_0).
\end{aligned}$$

Isso prova nossa afirmação no caso em que $(f_{2,p})$ é satisfeita.

O caso em que f satisfaz $(f'_{2,p})$, ou seja, em que f possui crescimento crítico é análogo. Isso finaliza a demonstração de nossa afirmação.

Continuando com nossa demonstração, como $B_\epsilon[0]$ é um espaço topológico fracamente compacto, o Teorema A.47 garante a existência de $v_\epsilon \in B_\epsilon[0]$ tal que $\inf\limits_{u\in B_\epsilon[0]}\Phi(u) = \Phi(v_\epsilon)$. Logo, decorre de (1.48) que

$$\Phi(v_\epsilon) = \inf_{u\in B_\epsilon[0]}\Phi(u) \leq \Phi(u_\epsilon) < \Phi(0), \quad \text{para todo } 0<\epsilon<1.$$

Queremos provar que

$$v_\epsilon \to 0 \quad \text{em} \quad C^0_\delta(\overline{\Omega}) \quad \text{quando} \quad \epsilon\to 0, \tag{1.57}$$

pois isso implicaria que, para $r_1>0$, existiria $z\in C^0_\delta(\overline{\Omega})$, com $\|z\|_{0,\delta}<r_1$, tal que $\Phi(z)<\Phi(0)$ (mais precisamente, $z=v_\epsilon$ para algum ϵ), contradizendo a hipótese

(1.47).

Afirmamos que, para todo $\epsilon \in (0,1)$, existe $\xi_\epsilon \leq 0$ tal que, para todo $\phi \in X_p^s$, vale

$$\langle \Phi'(v_\epsilon), \phi\rangle = \xi_\epsilon \langle v_\epsilon, \phi\rangle. \tag{1.58}$$

De fato, se $v_\epsilon \in B_\epsilon(0)$, então v_ϵ é um mínimo local de Φ em X_p^s e, portanto, um ponto crítico. Assim (1.58) é satisfeita para $\xi_\epsilon = 0$. Por outro lado, se $v_\epsilon \in \partial B_\epsilon[0]$, então $\|u\|_{X_p^s} = \epsilon$ e consequentemente $F(u) = \|u\|_{X_p^s}^p/p - \epsilon^p/p = 0$. Se $M = \{u \in X_p^s \ : \ F(u) = 0\}$, então v_ϵ minimiza Φ restrito ao conjunto M. Assim podemos encontrar o multiplicador de Lagrange $\xi_\epsilon \in \mathbb{R}$ satisfazendo (1.58). como

$$\begin{aligned}\langle \Phi'(v_\epsilon), -v_\epsilon\rangle =& \lim_{r\to 0}\frac{\Phi(v_\epsilon + r(-v_\epsilon)) - \Phi(v_\epsilon)}{r}\\ =& \lim_{r\to 0}\frac{\Phi((1-r)v_\epsilon) - \Phi(v_\epsilon)}{r},\end{aligned}$$

para $r > 0$ suficientemente pequeno, temos $(1-r)v_\epsilon \in B_\epsilon(0)$ e, consequentemente, como v_ϵ é um minimo de Φ em $B_\epsilon[0]$, segue-se que

$$\langle \Phi'(v_\epsilon), -v_\epsilon\rangle \geq 0,$$

ou seja,

$$\langle \Phi'(v_\epsilon), v_\epsilon\rangle \leq 0,$$

o que nos permite concluir que

$$\xi_\epsilon = \frac{\langle \Phi'(v_\epsilon), v_\epsilon\rangle}{\|v_\epsilon\|_{X_p^s}^2} \leq 0. \tag{1.59}$$

Mas (1.58) garante a existência de v_ϵ satisfazendo

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s v_\epsilon = \left(\dfrac{1}{1-\xi_\epsilon}\right) g(v_\epsilon) =: g^\epsilon(v_\epsilon) & \text{em } \ \Omega,\\[2ex] v_\epsilon = 0 & \text{em } \ \mathbb{R}\backslash\Omega,\end{cases}$$

Dado $\|v_\epsilon\|_{X_p^s} \leq \epsilon < 1$, a Proposição 1.18 implica a existência de uma constante $C_1 > 0$, independente de ϵ, tal que

$$\|v_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1. \tag{1.60}$$

Como consequência desta última desigualdade, de (1.59) e do Lema A.16, podemos afirmar que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|g^\epsilon(v_\epsilon)\|_{L^\infty(0,1)} \leq C_2. \tag{1.61}$$

De fato, de (1.60) decorre que

$$\exp(|v_\epsilon(x)|) \leq \exp(C_1) \ \text{ q.t.p. em } \Omega \ \text{ e para todo } \ \epsilon > 0.$$

Logo, para $\alpha > 0$ (no caso crítico usar $\alpha > \alpha_0$), o Lema A.16 assegura que existe $C_3 > 0$ tal que

$$|g^\epsilon(v_\epsilon)(x)| \leq |g(v_\epsilon)(x)| \leq C_3 \exp(\alpha |v_\epsilon|^2) \leq C_3 \exp(\alpha C_1), \quad \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Assim, para $C_2 = C_3 \exp(\alpha C_1) > 0$ temos

$$|g^\epsilon(v_\epsilon)(x)| \leq C_2 \quad \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

provando (1.61).

Decorre então do Teorema A.53 que $\|v_\epsilon\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} \leq C_3$, para $0 < \beta \leq s$ e para alguma constante C_3 independente de ϵ.

Denotando $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) = C^\beta(\overline{\Omega})$, temos que existe $M > 0$ tal que $\|v_\epsilon\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} \leq M$, isto é,

$$\|v_\epsilon\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} = \|v_\epsilon\|_{C(\overline{\Omega})} + \max_{x \in \overline{\Omega}} [v_\epsilon]_{C^\beta(\Omega)} < M.$$

Logo,

$$|v_\epsilon(x)| < M \ \text{ para todo } \ x \in \Omega \ \text{ e para todo } \epsilon \in (0,1),$$

implicando que a sequência v_ϵ é uniformemente limitada e

$$|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)| \leq M|x-y|^\beta \ \text{ para todo } \ x \in \Omega \ \text{ e para todo } \epsilon \in (0,1),$$

isto é, a sequência v_ϵ é uniformemente eqüicontínua. Assim, de acordo com o Teorema de Arzelá-Ascoli, existe uma subsequência, que continuaremos denotando por v_ϵ, tal que $v_\epsilon \to 0$ uniformemente quando $\epsilon \to 0$. Uma vez que $v_\epsilon \to 0$ em X_p^s quando $\epsilon \to 0$, passando para uma subsequência, podemos supor $v_\epsilon \to 0$ q.t.p. em Ω. Daí deduzimos que $v_\epsilon \to 0$, uniformemente em $\overline{\Omega}$. Mas, aplicando o Teorema A.54 obtemos, para uma constante adequada C,

$$\|v_\epsilon\|_{0,\delta} = \left\| \frac{v_\epsilon}{\delta^s} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \sup_{x \in (0,1)} |g^\epsilon(v_\epsilon(x))|.$$

Daí podemos concluir a validade de (1.57).

Observação 1.20 *Uma consequência deste resultado é que, se* 0 *for mínimo local estrito na topologia* $C_\delta^0(\overline{\Omega})$*, então* 0 *também é um mínimo local estrito na topologia* X_p^s.

No caso particular quando $p = 2$, $s = 1/2$ e $N = 1$, temos os seguintes resultados:

Proposição 1.21 *Seja* $(v_\epsilon)_{\epsilon \in (0,1)} \subseteq X$ *uma família de soluções para*

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2} u = \left(\dfrac{1}{1-\xi_\epsilon} \right) f(u) & \text{em } (0,1), \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R} \setminus (0,1), \end{cases} \tag{1.62}$$

com $\xi_\epsilon \leq 0$, $\|v_\epsilon\|_X \leq 1$, *para todo* $\epsilon \in (0,1)$ *e com* f *satisfazendo uma das condições*

$(f_{2,2})$ *Para todo* $\alpha > 0$,

$$\lim_{|t| \to \infty} \frac{|f(t)|}{\exp(\alpha t^2)} = 0;$$

$(f'_{2,2})$ *existe* $\alpha_0 > 0$ *tal que*

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(t)|}{\exp(\alpha t^2)} = \begin{cases} \infty, & se \quad 0 < \alpha < \alpha_0 \\ 0, & se \quad \alpha > \alpha_0. \end{cases}$$

Então $\sup\limits_{\epsilon\in(0,1)} \|v_\epsilon\|_{L^\infty} < \infty$.

A demonstração segue o mesmo raciocínio daquela da Proposição 1.15. Observe que, neste caso, a prova da estimativa (1.41) é mais simples:

$$\begin{aligned} \langle v_\epsilon, T_k(v_\epsilon)\rangle_X &= \langle v_\epsilon \pm k, T_k(v_\epsilon)\rangle_X \mp \langle k, T_k(v_\epsilon)\rangle_X \\ &= \langle T_k(v_\epsilon), T_k(v_\epsilon)\rangle_X \mp 0 \\ &= \|T_k(v_\epsilon)\|_X^2. \end{aligned}$$

Teorema 1.22 *Seja* $\Phi : X \to \mathbb{R}$ *um funcional de* $C^1(X, \mathbb{R})$ *definido por*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_0^1 G(u)\mathrm{d}x,$$

com $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$ *e* g *satisfazendo* $(f_{2,2})$ *ou* $(f'_{2,2})$. *Seja* 0 *é um mínimo local de* Φ *na topologia* $C^0_\delta([0,1])$, *isto é, existe* $r_1 > 0$ *tal que*

$$\Phi(0) \le \Phi(z),\ \forall\ z \in X \cap C^0_\delta([0,1]),\ \|z\|_{0,\delta} \le r_1,$$

então 0 *é um mínimo local de* Φ *na topologia* X, *isto é, existe* $r_2 > 0$ *tal que*

$$\Phi(0) \le \Phi(z),\ \forall\ z \in X,\ \|z\|_X \le r_2.$$

1.4 Soluções para o problema subcrítico

Nesta seção tratamos, via métodos minimax, da existência e da multiplicidade de solução para o problema (1.1) no caso em que f possui crescimento subcrítico. Para isso, utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha (veja o Teorema A.49) e o Teorema de Linking (veja o Teorema A.51).

Posteriormente, adicionando a hipótese de f ser ímpar e aplicando uma versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha (veja o Teorema A.50) obtemos a multiplicidade de solução para o problema.

Tornando mais precisa a nossa proposta de trabalho, estudamos a existência e multiplicidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = -\lambda|u|^{q-2}u + a|u|^{p-2}u + f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.63}$$

em que $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}^+$ e $1 < q < p$ com não-linearidade f com crescimento exponencial subcrítico no sentido Trudinger-Moser.

Vamos supor que a não-linearidade f satisfaça:

$(f_{1,p})$ $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$ e $F(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, sendo $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$;

$(f_{2,p})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(t)|}{\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}})} = 0$, para todo $\alpha > 0$;

$(f_{3,p})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t} = 0$;

$(f_{4,p})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{F(t)}{|t|^p} = +\infty$.

Lembramos que soluções fracas do problema (1.63) correspondem aos pontos críticos do funcional $I_{\lambda,p} : X_p^s \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_{\lambda,p}(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s}^p + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q\mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x - \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x.$$

Vamos provar o seguinte resultado:

Teorema 1.23 *Suponha que f satisfaça as condições $(f_{1,p})$, $(f_{2,p})$, $(f_{3,p})$ $(f_{4,p})$, e que $\lambda_1 \leq a < \lambda^*$. Então, para λ suficientemente pequeno, o problema (1.63) possui pelo menos três soluções não-triviais. Se f for ímpar, então o problema (1.63) possui infinitas soluções.*

A prova desse Teorema será dividida em 4 subseções:

Na primeira subseção, usaremos o Teorema do Passo da Montanha para obter pelo menos uma solução positiva. De forma análoga, na segunda subseção, obtemos pelo menos uma solução negativa. Na terceira subseção obtemos uma terceira solução via Teorema de Linking. Finalmente na quarta seção demonstramos o resultado principal, isto é, o Teorema 1.23.

Mostraremos que o funcional $I^+_{\lambda,p}$ associado ao problema (1.23) satisfaz a condição (PS) em todos os níveis, para todo $\lambda > 0$.

1.4.1 Solução positiva para o funcional $I_{\lambda,p}$

Lema 1.24 *Suponha que f satisfaça $(f_{1,p})$, $(f_{2,p})$, $(f_{3,p})$ e $(f_{4,p})$. Então o funcional $I^+_{\lambda,p}$ satisfaz a condição (PS) em todos os níveis, para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset X^s_p$ uma sequência (PS) de $I_{\lambda,p}$, isto é, uma sequência $(u_n) \subset X^s_p$ que satisfaz $I^+_{\lambda,p}(u_n) \to c$ e $(I^+_{\lambda,p})'(u_n) \to 0$ no dual de X^s_p quando $n \to \infty$.

Pelo Lema 1.17, existe $M > 0$ tal que $\|u_n\|_{X^s_p} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, existe $u_0 \in X^s_p$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em X^s_p. Logo, podemos supor que

$$u_n \to u_0 \quad \text{em} \quad L^r(\Omega) \quad \text{com } r \geq 1 \quad \text{e} \quad u_n(x) \to u_0(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega. \tag{1.64}$$

Decorre da desigualdade de Hölder que

$$\left| \int_\Omega |u_n^+|^{q-2} u_n^+ (u_n - u_0) \right| \leq \left(\int_\Omega |u_n^+|^q \mathrm{d}x \right)^{(q-1)/q} \left(\int_\Omega |u_n - u_0|^q \mathrm{d}x \right)^{1/q}.$$

Portanto, (1.64) implica que

$$\int_\Omega |u_n^+|^{q-2}u_n^+(u_n - u_0) \to 0. \tag{1.65}$$

Analogamente

$$\int_\Omega |u_n^+|^{p-2}u_n^+(u_n - u_0) \to 0. \tag{1.66}$$

Note que

$$u_n - u_0 \rightharpoonup 0, \quad \text{então} \quad \langle (I_{\lambda,p}^+)'(u_n), u_n - u_0\rangle \to 0 \tag{1.67}$$

Por outro lado, de (1.64), (1.65), (1.66) e (1.67), temos

$$\begin{aligned}
\langle A(u_n), u_n - u_0\rangle =& \langle (I_{\lambda,p}^+)'(u_n), u_n - u_0\rangle - \lambda \int_\Omega |u_n^+|^{q-2}u_n^+(u_n - u_0) \\
&+ a \int_\Omega |u_n^+|^{p-2}u_n^+(u_n - u_0) + \int_\Omega f(u_n^+)(u_n - u_0) \\
=& \int_\Omega f(u_n^+)(u_n - u_0) + o(1).
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando o Lema A.16, tomando $0 < \alpha < \dfrac{\alpha_{s,N}^*}{rM^{\frac{N}{N-s}}}$, temos que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\langle A(u_n), u_n - u_0\rangle &\leq \int_\Omega |f(u_n^+)||u_n - u_0| + o(1) \\
&\leq C \int_\Omega \exp(\alpha |u_n|^{\frac{N}{N-s}})|u_n - u_0| + o(1)
\end{aligned}$$

Logo, decorre da desigualdade de Hölder que

$$
\begin{aligned}
&\langle A(u_n), u_n - u\rangle \\
&= C\left(\int_\Omega \exp(r\alpha|u_n|^{\frac{N}{N-s}})\right)^{1/r}\left(\int_\Omega |u_n-u_0|^{r/(r-1)}\right)^{(r-1)/r} + o(1) \\
&= C\left(\int_\Omega \exp\left(r\alpha|u_n|^{\frac{N}{N-s}}\frac{\|u_n\|_{X_p^s}^{\frac{N}{N-s}}}{\|u_n\|_{X_p^s}^{\frac{N}{N-s}}}\right)\right)^{1/r}\left(\int_\Omega |u_n-u_0|^{r/(r-1)}\right)^{(r-1)/r} + o(1) \\
&\leq C\left(\int_0^1 \exp\left(r\alpha M^{\frac{N}{N-s}}\left|\frac{u_n}{\|u_n\|_{X_p^s}}\right|^{\frac{N}{N-s}}\right)\right)^{1/r}\left(\int_\Omega |u_n-u_0|^{r/(r-1)}\right)^{(r-1)/r} + o(1).
\end{aligned}
$$

Note que a última desigualdade é consequência de (u_n) ser limitada em X_p^s. Por outro lado, pela escolha de α, temos que $0 < r\alpha M^{\frac{N}{N-s}} < \alpha^*_{s,N}$. Decorre então da Proposição A.9 a existência de uma constante $C_1 > 0$ verificando

$$
\langle A(u_n), u_n - u_0\rangle \leq CC_1\left(\int_\Omega |u_n-u_0|^{r/(r-1)}\right)^{(r-1)/r} + o(1).
$$

De (1.64) implica que

$$
\langle A(u_n), u_n - u_0\rangle \to 0
$$

Logo, pelo Lema A.58, concluímos que $u_n \to u_0 \quad \text{em} \quad X_p^s$. ■

Agora mostraremos alguns resultados que serão úteis para se obter as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Para isso, para cada $u \in X_p^s$, sejam

$$
\begin{aligned}
J_{\lambda,p}(u) &:= I_{\lambda,p}(u) - \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s}^p \\
&= \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned} J^+_{\lambda,p}(u) &:= I^+_{\lambda,p}(u) - \frac{1}{p}\|u\|^p_{X^s_p} \\ &= \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u^+|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(u^+)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Lema 1.25 (Casos subcrítico e crítico) *Suponhamos $(f_{3,p})$ e $a > 0$. Então a solução trivial $u = 0$ é um minimizador local estrito de $J^+_{\lambda,p}$, para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.19, basta mostrar que $u = 0$ é um mínimo local estrito de $J^+_{\lambda,p}$ na topologia $C^0_\delta(\overline{\Omega})$. Pela condição $(f_{3,p})$, aplicando L'Hôpital obtemos que

$$\lim_{|t|\to 0} \frac{F(t)}{|t|^p} = 0.$$

Logo, para $\epsilon = 1$, existe $\omega > 0$ tal que

$$|F(t)| < |t|^p, \quad \text{para todo} \quad 0 < |t| \leq \omega.$$

Agora, para cada $u \in (C^0_\delta(\overline{\Omega}) \cap X^s_p) \setminus \{0\}$, com $\|u\|_{0,\delta} \leq 1$ e, consequentemente, $0 < |u^+| < \omega$ (pois $|u^+| \leq M\|u\|_{0,\delta}$, para algum $M > 0$), vale

$$\begin{aligned} J^+_{\lambda,p}(u) &= \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u^+|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega |u^+|^p \mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x - \left(\frac{a}{p} + 1\right)\int_\Omega |u^+|^p \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1.68}$$

Como $\|u\|_{0,\delta} = \|u/\delta^s\|_{L^\infty(\Omega)}$,

$$|u^+| \leq |u| \leq k_1\|u\|_{0,\delta} \text{ para algum } k_1 > 0.$$

Como $1 < q < p$, resulta que $|u^+|^{p-q} \leq (k_1)^{p-q}\|u\|_{0,\delta}^{p-q}$ e, consequentemente,

$$\int_\Omega |u^+|^p \mathrm{d}x \leq (k_1)^{p-q}\|u\|_{0,\delta}^{p-q} \int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x.$$

Desta última desigualdade, como $\frac{a}{p} + 1 > 0$, podemos concluir que

$$-\left(\frac{a}{p}+1\right)\int_\Omega |u^+|^p \mathrm{d}x \geq -\left(\frac{a}{p}+1\right)(k_1)^{p-q}\|u\|_{0,\delta}^{p-q}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x. \tag{1.69}$$

Decorre então (1.68) e (1.69) que

$$\begin{aligned} J^+_{\lambda,p}(u) \geq & \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x - \left(\frac{a}{p}+1\right)(k_1)^{p-q}\|u\|_{0,\delta}^{p-q}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x \\ = & \left[\frac{\lambda}{q} - \left(\frac{a}{p}+1\right)(k_1)^{p-q}\|u\|_{0,\delta}^{p-q}\right]\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Seja

$$R = \frac{(\lambda/q)^{1/(p-q)}}{k_1\left(\frac{a}{p}+1\right)^{1/(p-q)}}.$$

Se $\|u\|_{0,\delta} < R$, então

$$\frac{\lambda}{q} - \left(\frac{a}{p}+1\right)(k_1)^{p-q}\|u\|_{0,\delta}^{p-q} > 0, \ \forall \ \|u\|_{0,\delta} < R. \tag{1.71}$$

Como $\|u\|_{0,\delta} > 0$ (pois $u \in (C^0_\delta(\overline{\Omega}) \cap X^s_p) \setminus \{0\}$), concluímos de (1.70) e (1.71) que

$$J^+_{\lambda,p}(u) > 0 = J^+_{\lambda,p}(0), \ \forall \ 0 < \|u\|_{0,\delta} < R.$$

Portanto, $u = 0$ é um mínimo local estrito de $J^+_{\lambda,p}$ na topologia $C^0_\delta(\overline{\Omega})$. ∎

Observação 1.26 *O Lema anterior é válido se trocamos o funcional $J^+_{\lambda,p}$ por $J_{\lambda,p}$.*

Lema 1.27 (Casos subcrítico e crítico) *Suponha que f satisfaça $(f_{4,p})$ e $a >$*

0. *Então, fixado* Λ, *existe* $t_0 = t_0(\Lambda)$ *tal que*

$$I^+_{\lambda,p}(t\varphi_1) < 0,$$

para todo $t \geq t_0$ *e* $0 < \lambda < \Lambda$.

Demonstração: Para $t > 0$, aplicando o Lema A.19 para $M > \dfrac{\lambda_1}{p}$ obtemos

$$\begin{aligned} I^+_{\lambda,p}(t\varphi_1) &\leq \frac{|t|^p}{p}\|\varphi_1\|^p_X + \frac{|t|^q\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - \int_\Omega F(t\varphi_1)\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{|t|^p}{p}\|\varphi_1\|^p_X + \frac{|t|^q\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - \int_\Omega (M|t|^p|\varphi_1|^p + C_M)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Lembrando que φ_1 é a autofunção positiva associada a λ_1 com $\|\varphi_1\|_{L^p(\Omega)} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} I^+_{\lambda,p}(t\varphi_1) &\leq \frac{\lambda_1|t|^p}{p}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x + \frac{|t|^q\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - M|t|^p\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x + C_M|\Omega| \\ &= t^p\left[\frac{\lambda}{q}\frac{1}{t^{p-q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x + \frac{1}{t^p}C_M|\Omega| - \left(M - \frac{\lambda_1}{p}\right)\right]. \end{aligned} \tag{1.72}$$

Fixando $\Lambda > 0$, como $M > \frac{\lambda_1}{p}$, $t > 0$, $1 < q < p$ e $\varphi_1 > 0$ em Ω, podemos escolher $t_0 = t_0(\Lambda) > 0$ tal que

$$\frac{\Lambda}{q}\frac{1}{t_0^{p-q}}\int_\Omega \varphi_1^q \mathrm{d}x + \frac{C_M}{t_0^p}|\Omega| - \left(M - \frac{\lambda_1}{p}\right) < 0.$$

Para $t \geq t_0$ e $\lambda < \Lambda$ temos que

$$\frac{\lambda}{q}\frac{1}{t^{p-q}}\int_\Omega \varphi_1^q \mathrm{d}x + \frac{C_M}{t^p}|\Omega| - \left(M - \frac{\lambda_1}{p}\right) \leq \frac{\Lambda}{q}\frac{1}{t_0^{p-q}}\int_\Omega \varphi_1^q \mathrm{d}x + \frac{C_M}{t_0^p}|\Omega| - \left(M - \frac{\lambda_1}{p}\right) < 0.$$

Destas últimas desigualdades e de (1.72) decorre que $I^+_{\lambda,p}(t\varphi_1) < 0$, para todo $t \geq t_0$, e $\lambda < \Lambda$. ■

Agora estamos em condições de obter uma solução positiva aplicando o Teorema do Passo da Montanha.

Proposição 1.28 *Suponha que f satisfaça as condições $(f_{1,p})$, $(f_{2,p})$, $(f_{3,p})$ $(f_{4,p})$ e $a > 0$. Então o problema (1.63) possui pelo menos uma solução positiva, para todo λ como no Lema 1.27.*

Demonstração: Já vimos, no Lema 1.24 (que considera apenas o caso subcrítico), que o funcional $I^+_{\lambda,p}$ satisfaz a condição (PS) em todos os níveis, para todo $\lambda > 0$. Além disso, como $I^+_{\lambda,p}(0) = 0$, então basta provar as seguintes condições geométricas:

(a) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I^+_{\lambda,p}\Big|_{\partial B_\rho} > \alpha$ e

(b) existe um elemento $e \in X^s_p \backslash \overline{B_\rho}$ tal que $I^+_{\lambda,p}(e) < 0$.

A afirmativa (a) decorre do Lema 1.25, pois existe $R > 0$ tal que

$$I^+_{\lambda,p}(u) > \frac{1}{p}\|u\|^p_{X^s_p}, \ \forall \ 0 < \|u\|_{X^s_p} < R. \tag{1.73}$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{p}\|u\|^p_{X^s_p}$, obtemos que existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I^+_{\lambda,p}(u) > \alpha$, $\forall \ \|u\|_{X^s_p} = \rho$.

O Lema 1.27 garante a existência de $e = t_0\varphi_1 \in X^s_p$, com $t_0 > 0$, tal que $I^+_{\lambda,p}(e) < 0 = I^+_{\lambda,p}(0)$, para todo $\lambda > 0$ obtido no Lema 1.27. Aplicando este fato, decorre de (1.73) que $0 < \rho < R$. Portanto, podemos deduzir que $\|e\| > \rho$, isto é, $e \in X^s_p \backslash \overline{B_\rho}$. Assim, existe $e \in X^s_p \backslash \overline{B_\rho}$ tal que $I^+_{\lambda,p}(e) < 0$.

Logo, pelo teorema do Passo da Montanha, $I^+_{\lambda,p}$ possui um valor crítico $C^+_\lambda \geq \alpha$, com

$$C^+_\lambda = \inf_{g \in \Gamma^+} \max_{u \in g([0,1])} I^+_{\lambda,p}(u),$$

sendo $\Gamma^+ = \{g \in C([0,1], X^s_p) \ ; \ g(0) = 0 \ , \ g(1) = t_0\varphi_1\}$. ■

1.4.2 Solução negativa para o funcional $I_{\lambda,p}$

A condição de Palais-Smale é obtida no seguinte resultado, cuja demonstração é análoga àquela do Lema 1.24.

Lema 1.29 *Suponha que f satisfaça $(f_{1,p})$, $(f_{2,p})$ e $(f_{4,p})$. Então o funcional $I^{-}_{\lambda,p}$ satisfaz a condição (PS) em todos os níveis para todo $\lambda > 0$.*

Para cada $u \in X^s_p$ definimos

$$\begin{aligned} J^{-}_{\lambda,p}(u) &:= I^{-}_{\lambda,p}(u) - \frac{1}{p}\|u\|^p_{X^s_p} \\ &= \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^-|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u^-|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(u^-)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Temos então o seguinte resultado, cuja demonstração é análoga àquela do Lema 1.25:

Lema 1.30 *Suponhamos $(f_{3,p})$ e $a > 0$. Então a solução trivial $u = 0$ é um minimizador local estrito de $J^{-}_{\lambda,p}$, para todo $\lambda > 0$.*

A demonstração do próximo resultado é análoga àquela do Lema 1.27.

Lema 1.31 (Casos subcrítico e crítico) *Suponha que f satisfaça $(f_{4,P})$ e que $a > 0$. Então, fixando $\Lambda > 0$, existe $t_0 = t_0(\Lambda) > 0$ tal que*

$$I^{-}_{\lambda,p}(-t\varphi_1) < 0,$$

para todo $t \geq t_0$ e $0 < \lambda < \Lambda$.

Agora garantimos a existência de solução negativa. A prova deste resultado é análoga à da Proposição 1.28.

Proposição 1.32 *Suponha que f satisfaça as condições $(f_{1,p})$, $(f_{2,p})$, $(f_{3,p})$ $(f_{4,p})$ e que $a > 0$. Então o problema (1.63) possui pelo menos uma solução negativa, para todo λ obtido no Lema 1.31.*

1.4.3 Solução via o Teorema de Linking

A ferramenta variacional que utilizaremos nessa subseção é o Teorema de Linking. O principal resultado que vamos obter é

Proposição 1.33 *Suponha que as condições* $(f_{1,p}) - (f_{4,p})$ *sejam verificadas. Se* $\lambda_1 \leq a < \lambda^*$ *então, para* λ *suficientemente pequeno, o problema* (1.63) *possui pelo menos uma solução não-trivial,distinta das soluções positiva e negativa já encontradas.*

No próximo resultado mostramos que, no caso subcrítico, o funcional $I_{\lambda,p}$ satisfaz a condição (PS) em todos os níveis para todo $\lambda > 0$. Sua demonstração é análoga àquela do Lema 1.24.

Lema 1.34 *Suponha que* f *satisfaça* $(f_{1,p})$, $(f_{2,p})$, $(f_{3,p})$ *e* $(f_{4,p})$. *Então o funcional* $I_{\lambda,p}$ *satisfaz a condição (PS) em todos os níveis para todo* $\lambda > 0$.

Para obter a geometria do Teorema de Linking precisamos de uma decomposição de soma direta adequada do espaço X_p^s. Para tal decomposição seguimos as ideias de [3]. No que segue, definimos

$$\lambda^* = \inf\left\{\|u\|_{X_p^s}^p \ : \ u \in W \ \text{ e } \ \|u\|_{L^p(\Omega)}^p = 1\right\}, \tag{1.74}$$

em que

$$W = \left\{u \in X_p^s \ : \ \langle A(\varphi_1), u\rangle = 0\right\},$$

com φ_1 denotando a primeira autofunção, positiva e normalizada, do operador $(-\Delta)_p^s$, veja o Apêndice A. Faremos uso da seguinte decomposição do espaço X_p^s.

Proposição 1.35 $X_p^s = W \oplus \text{span}\{\varphi_1\}$.

Demonstração: Denote $W = (A(\varphi_1))^{-1}(\{0\})$. Lembrando que $A(\varphi_1) \in (X_p^s)^*$, temos W é fechado em X_p^s. Agora provaremos que $W \cap \text{span}\{\varphi_1\} = \{0\}$. Para isso, seja $u \in W \cap \text{span}\{\varphi_1\}$, então $u \in W \ \text{ e } \ u = t\varphi_1, \ \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$. Logo $\langle A(\varphi_1), t\varphi_1\rangle = 0$, isto é, $t\|\varphi_1\|_{X_p^s}^p = 0$. Portanto $t = 0$ e consequentemente $u = 0$, mostrando nossa afirmação. Finalmente,temos $X_p^s = W + \text{span}\{\varphi_1\}$, pois

$$u = \left(u - \frac{\langle A(\varphi_1), u\rangle}{\|\varphi_1\|_{X_p^s}^p}\varphi_1\right) + \frac{\langle A(\varphi_1), u\rangle}{\|\varphi_1\|_{X_p^s}^p}\varphi_1.$$

Como $\left(u - \frac{\langle A(\varphi_1),u\rangle}{\|\varphi_1\|^p_{X^s_p}}\varphi_1\right) \in W$, temos o afirmado. ■

Seguindo as ideias de [3] mostraremos o próximo resultado.

Proposição 1.36 $\lambda_1 < \lambda^*$.

Demonstração: Da inclusão

$$\left\{\|u\|^p_{X^s_p} \ : \ u \in W \ \text{ e } \ \|u\|^p_{L^p(\Omega)} = 1\right\} \subset \left\{\|u\|^p_{X^s_p} \ : \ \|u\|^p_{L^p(\Omega)} = 1\right\},$$

podemos obter a desigualdade

$$\lambda_1 = \inf\left\{\|u\|^p_{X^s_p} \ : \ \|u\|^p_{L^p(\Omega)} = 1\right\} \leq \inf\left\{\|u\|^p_{X^s_p} \ : \ u \in W \ \text{ e } \ \|u\|^p_{L^p(\Omega)} = 1\right\} = \lambda^*.$$

Suponha, por contradição, $\lambda_1 = \lambda^* = \lambda$. Pela definição de λ^*, existe uma sequência (u_n) em W tal que

$$\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)} = 1 \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty}\|u_n\|^p_{X^s_p} = \lambda^* = \lambda_1 = \lambda.$$

Logo (u_n) é limitada em X^s_p. Portanto, existe $u \in X^s_p$ e uma subsequência (que ainda denotaremos por (u_n)) tal que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ X^s_p, \\ u_n \to u \text{ em } \ L^q(\Omega), \ \text{ para todo } q \geq 1 \text{ e} \\ u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases}$$

Observe

$$\lambda_1 \leq \|u\|^p_{X^s_p} \leq \liminf_{k\to\infty}\|u_k\|^p = \liminf_{k\to\infty}\lambda_k = \lambda_1.$$

Da observação A.65 segue-se

$$u = t\varphi_1, \qquad \text{para} \qquad t \neq 0. \tag{1.75}$$

Por outro lado da convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$, obtemos $\langle A(\varphi_1), u_n\rangle \to \langle A(\varphi_1), u\rangle$. Como $\langle A(\varphi_1), u_n\rangle = 0$ (pois $(u_n \subset W)$). Temos $\langle A(\varphi_1), u\rangle = 0$. Usando (1.75) concluímos $t\|\varphi_1\|^p_{X^s_p} = 0$, consequentemente $t = 0$, isso contradiz (1.75). ■

Os próximos resultados serão úteis para mostrar as condições geométricas do Teorema de Linking.

Lema 1.37 *Seja $a < \lambda^*$. Então, existem β, $\rho > 0$ tais que $I_{\lambda,p}(u) \geq \beta$ sempre que $u \in W$ e $\|u\|_{X^s_p} = \rho$.*

Demonstração: Fixe $\theta > p$ e $0 < \alpha < \alpha^*_{s,N}$. Pelo Lema A.18 existem $0 \leq \mu < \lambda^* - a$ e $C > 0$ satisfazendo

$$F(t) \leq \frac{\mu}{p} t^P + C\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}})|t|^\theta, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo, para cada $u \in W$ com $\|u\|_{X^s_p} \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,p}(u) &\geq \frac{\|u\|^p_{X^s_p}}{p} - \frac{a}{p}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega \left[\frac{\mu|u|^p}{p} + C\exp(\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}})|u|^\theta\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{\|u\|^p_{X^s_p}}{p} - \left(\frac{a}{2} + \frac{\mu}{2}\right)\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x - C\int_\Omega \exp(\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}})|u|^\theta \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Agora, da definição de λ^* decorre que

$$I_{\lambda,p}(u) \geq \frac{\|u\|^p_{X^s_p}}{p} - (a+\mu)\frac{\|u\|^p_{X^s_p}}{p\lambda^*} - C\int_\Omega \exp(\alpha u^2)|u|^\theta \mathrm{d}x. \tag{1.76}$$

Além disso, como $0 < \alpha < \alpha^*_{s,N}$, podemos fixar $r > 1$ de modo que ainda se tenha $0 < r\alpha < \alpha^*_{s,N}$. Aplicando a Desigualdade de Hölder em (1.76), com r e r'

conjugados, temos

$$I_{\lambda,p}(u) \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{a+\mu}{p\lambda^*}\right)\|u\|^p_{X^s_p} - C\left(\int_\Omega \exp(\alpha r|u|^{\frac{N}{N-s}})\mathrm{d}x\right)^{1/r}\left(\int_\Omega |u|^{\theta r'}\mathrm{d}x\right)^{1/r'}$$
$$= \frac{1}{p}\left(1 - \frac{a+\mu}{\lambda^*}\right)\|u\|^p_{X^s_p} - C\left(\int_\Omega \exp(\alpha r|u|^{\frac{N}{N-s}})\mathrm{d}x\right)^{1/r}\|u\|^\theta_{L^{r'\theta}(\Omega)}.$$

Mas, como $\|u\|_{X^s_p} \leq 1$, aplicando a Proposição A.9 e o fato de X^s_p estar imerso continuamente em $L^{r'q}(\Omega)$ (veja a Proposição 1.12), podemos encontrar $C_1 > 0$ tal que

$$I_{\lambda,p}(u) \geq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{a+\mu}{\lambda^*}\right)\|u\|^2_{X^s_p} - C_1\|u\|^\theta_{X^s_p}.$$

Uma vez $\theta > p$ e $1 - \dfrac{a+\mu}{\lambda^*} > 0$, podemos escolher $\rho > 0$, suficientemente pequeno, com $\|u\|_{X^s_p} = \rho$, tal que

$$I_{\lambda,p}(u) \geq \rho^p\left\{\frac{1}{p}\left(1 - \frac{a+\mu}{\lambda^*}\right) - C_1\rho^{\theta-p}\right\} > 0.$$

Portanto, para todo $u \in W$ com $\|u\| = \rho$, temos que $I(u) \geq \beta$, com $\beta = \rho^p\left\{\dfrac{1}{p}\left(1 - \dfrac{a+\mu}{\lambda^*}\right) - C_1\rho^{\theta-p}\right\}$. Assim temos a prova do Lema. ■

Lema 1.38 *Suponha que $(f_{4,p})$ seja válida. Se $Y \subset X^s_p$ for um subespaço vetorial com* $\dim Y < \infty$*, então*

$$\lim_{u\in Y, \|u\|_{X^s_p}\to\infty} I_{\lambda,p}(u) = -\infty.$$

Demonstração: Seja $u \in Y$. Como todas as normas em Y são equivalentes (pois a dimensão de Y é finita), podemos encontrar $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ de modo que

$$\|u\|^p_{X^s_p} \leq C_1\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \ \text{ e } \ \|u\|^q_{L^q(\Omega)} \leq C_2\|u\|^q_{X^s_p} \tag{1.77}$$

Logo, pelo Lema A.19 para $M > C_1\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{\lambda C_2}{q}\right)$, temos

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,p}(u) &\leq \frac{\|u\|^p_{X^s_p}}{p}+\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x-\int_\Omega (M|u|^p-C_M)\mathrm{d}x\\
&\leq \frac{\|u\|^p_{X^s_p}}{p}+\frac{\lambda}{q}\|u\|^q_{L^q(\Omega)}-M\|u\|^p_{L^p(\Omega)}+C_M|\Omega|.
\end{aligned}
$$

Decorre então de (1.77) que

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,p}(u) &\leq \frac{\|u\|^p_{X^s_p}}{p}+\frac{\lambda C_2}{q}\|u\|^p_{X^s_p}-\frac{M}{C_1}\|u\|^p_{X^s_p}+C_M|\Omega|\\
&= \|u\|^p_{X^s_p}\left(\frac{1}{p}+\frac{\lambda C_2}{q}-\frac{M}{C_1}\right)+C_M|\Omega|.
\end{aligned}
\tag{1.78}
$$

Da escolha de M e de (1.78)), conluímos que

$$
\lim_{u\in Y,\|u\|_{X^s_p}\to\infty} I_{\lambda,p}(u)=-\infty. \tag{1.79}
$$

Isso prova o Lema. ■

O próximo resultado será útil para controlar os níveis mini-max das soluções positiva e negativa e, assim, obter uma terceira solução.

Lema 1.39 *Suponha que* $(f_{4,p})$ *seja válida e que* $\lambda_1 \leq a < \lambda^*$. *Então existe* $\eta = \eta(\lambda) > 0$ *tal que*

$$
I_{\lambda,p}(u)\leq \eta(\lambda) \quad \textit{e} \quad \lim_{\lambda\to 0}\eta(\lambda)=0, \quad \textit{para todo}\;\; u\in \operatorname{span}\{\varphi_1\}.
$$

Demonstração: Como $u \in \operatorname{span}\{\varphi_1\}$,vale

$$
I_{\lambda,p}(u)\leq \left(\frac{\lambda_1-a}{p}\right)\int_\Omega u^p\mathrm{d}x+\frac{\lambda}{q}\|u\|^q_{L^q(\Omega)}-\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x.
$$

Mas $\lambda_1 \leq a < \lambda^*$ implica que

$$I_{\lambda,p}(u) \leq \frac{\lambda}{q}\|u\|_{L^q(\Omega)}^q - \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x.$$

Agora pela imersão contínua de Sobolev existe $K_q > 0$ tal que

$$I_{\lambda,p}(u) \leq \frac{\lambda}{q}K_q\|u\|_{X_p^s}^q - \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x. \tag{1.80}$$

Do (1.80) e dp Lema A.19 decorre que

$$\begin{aligned} I_{\lambda,p}(u) &\leq \frac{\lambda K_q}{q}\|u\|_{X_p^s}^q - M\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + C_M \\ &\leq \frac{\lambda K_q}{q}\|u\|_{X_p^s}^q - MK_2\|u\|_{X_p^s}^p + C_M. \end{aligned} \tag{1.81}$$

Uma vez $1 < q < p$, obtemos

$$\lim_{u \in \mathrm{span}\{\varphi_1\}, \|u\|_{X_p^s} \to \infty} I_{\lambda,p}(u) = -\infty.$$

Logo, existe $R > 0$ tal que

$$I_{\lambda,p}(u) < 0 \quad \text{para todo} \;\; u \in \mathrm{span}\{\varphi_1\}, \;\|u\|_{X_p^s} > R. \tag{1.82}$$

Se $u \in \mathrm{span}\{\varphi_1\}$ com $\|u\|_{X_p^s} \leq R$, decorre de (1.80) que

$$0 \leq I_{\lambda,p}(u) \leq \frac{\lambda}{q}K_q\|u\|_{X_p^s}^q - \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x \leq \frac{\lambda}{q}K_qR^q - \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x.$$

A condição $F(t) \geq 0, \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}$ nos permite concluir que

$$I_{\lambda,p}(u) \leq \frac{\lambda}{q}K_qR^q \quad \text{para todo} \;\; u \in \mathrm{span}\{\varphi_1\}, \;\|u\|_{X_p^s} \leq R. \tag{1.83}$$

Tomando $\eta(\lambda) = \dfrac{\lambda}{q} K_q R^q$, segue-se de (1.82) e (1.83) que

$$I_{\lambda,p}(u) \leq \eta(\lambda), \quad \text{para todo} \quad u \in \operatorname{span}\{\varphi_1\}, \ \text{ com } \lim_{\lambda \to 0} \eta(\lambda) = 0.$$

Isso prova o Lema. ■

Agora estamos em condições de provar o resultado principal desta subseção.

Proposição 1.40 *Suponha que as condições $(f_{1,p}) - (f_{4,p})$ sejam verificadas. Se $\lambda_1 \leq a < \lambda^*$ então, para λ suficientemente pequeno, o problema (1.63) possui pelo menos uma solução não-trivial, distinta das soluções positiva e negativa já encontradas.*

Demonstração: Para obter essa solução, precisamos verificar que as condições do Teorema de Linking são satisfeitas. De acordo com o Lema 1.35, temos $X_p^s = W \oplus \operatorname{span}\{\varphi_1\}$. De acordo com o Lema 1.34, o funcional $I_{\lambda,p}$ satisfaz a condição Palais-Smale em todos os níveis, para todo $\lambda > 0$. Além disso, devemos ter

(a) existem constantes $\rho, \beta > 0$ tais que $I_{\lambda,p}\Big|_{\partial B_\rho \cap W} \geq \beta$ e

(b) existem um elemento $e \in (\partial B_1) \cap W$, constantes $R > \rho$ e $\alpha > 0$ tais que $I_{\lambda,p}\Big|_{\partial Q} < \alpha < \beta$, com $Q = (B_R \cap \operatorname{span}\{\varphi_1\}) \oplus (0, Re)$.

Assim, o teorema de Linking garante que $I_{\lambda,p}$ possui um valor crítico $C \geq \beta$ caracterizado por

$$C = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in Q} I_{\lambda,p}(\gamma(u))$$

em que $\Gamma = \{\gamma \in C(\overline{Q}, E) \ ; \ \gamma = I_d \ \text{ em } \ \partial Q\}$.

A condição (a) resulta diretamente do Lema 1.37.

Para verificarmos (b), tome $\varphi \in W$ (fixo) tal que $\|\varphi\|_{X_p^s} = 1$. De acordo com o Lema 1.38, existe $\overline{R} > 0$ tal que

$$I_{\lambda,p}(u) < 0 \quad \text{para todo } u \in \operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi\}, \ \|u\|_{X_p^s} \geq \overline{R}. \tag{1.84}$$

Como $\rho\varphi \in \text{span}\{\varphi_1, \varphi\}$ e $\|\rho\varphi\|_{X_p^s} = \rho$,decorre de (a) que

$$I_{\lambda,p}(\rho\varphi) \geq \beta > 0.$$

Assim, (1.84)) implica $\overline{R} > \rho$.

Consideremos então

$$Q = \{u \ : \ u = w + t\varphi, \ w \in \text{span}\{\varphi_1\} \cap B_{\overline{R}}, \ 0 \leq t \leq \overline{R}\}$$

e particionemos a fronteira $\partial Q = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{3} \Gamma_i$:

(1) $\Gamma_1 = \overline{B_{\overline{R}}(0)} \cap \text{span}\{\varphi_1\}$,

(2) $\Gamma_2 = \{u \in X_p^s : u = w + \overline{R}\varphi, w \in B_{\overline{R}}(0) \cap \text{span}\{\varphi_1\}\}$,

(3) $\Gamma_3 = \{u \in X_p^s : u = w + r\varphi, \ w \in \text{span}\{\varphi_1\}, \ \|w\|_{X_p^s} = \overline{R}, \ \text{ e } \ 0 \leq r \leq \overline{R}\}$.

Mostraremos que, em cada Γ_i, vale $I_{\lambda,p}\Big|_{\Gamma_i} \leq \eta(\lambda)$, para $i = 1, 2, 3$.

Tome $u \in \Gamma_1 \subset \text{span}\{\varphi_1\}$. Logo, do Lema 1.39 obtemos

$$I_{\lambda,p}(u) \leq \eta(\lambda), \ \forall \ u \in \Gamma_1 \ \text{ e } \ \lim_{\lambda \to 0} \eta(\lambda) = 0.$$

Assim, tomando $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, $I_{\lambda,p}(u) \leq \eta(\lambda) < \beta$.

Se $u \in \Gamma_2$ ou $u \in \Gamma_3$, então temos uma consequência imediata de (1.84), pois sempre podemos escolher um $\overline{R} > 0$ suficientemente grande tal que $\|u\|_{X_p^s} \geq \overline{R}$, para $u \in \Gamma_2$ ou $u \in \Gamma_3$.

Assim, para todo $u \in \partial Q$, existe λ^* tal que

$$I_{\lambda,p}(u) \leq \eta(\lambda) < \beta, \ \forall \ \lambda \leq \lambda^*$$

e podemos tomar $\alpha_\lambda = \eta(\lambda)$ tal que, para qualquer $\lambda \leq \lambda^*$,

$$I_{\lambda,p}(u) \leq \eta(\lambda) < \alpha, \ \forall\, u \in \partial Q.$$

Então, pelo Teorema de Linking, existe $u_\lambda \in X_p^s$ solução fraca do problema (1.63)) tal que

$$0 < \eta(\lambda) < \beta \leq I_{\lambda,p}(u_\lambda) = C_\lambda.$$

Note que u_λ é não nula, pois $I_{\lambda,p}(0) = 0$.

Provaremos posteriormente que u_λ é diferente das soluções positiva e negativa já encontradas. $\blacksquare$

1.4.4 Demonstração do Teorema 1.23:

Demonstração: Para demonstrar a primeira parte de Teorema 1.23, basta mostrar que u_λ é distinto dos pontos críticos encontrados para os funcionais $I_{\lambda,p}^+$ e $I_{\lambda,p}^-$ para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

Para isso, seja $g_0^+ : [0,1] \to X_p^s$ dado por $g_0^+(t) = t(t_0\varphi_1)$, para t_0 obtido no Lema 1.27. Logo,

$$g_0^+ \in \Gamma^+ = \{g \in C([0,1], X_p^s) \ \ ; \ \ g(0) = 0 \ , \ g(1) = t_0\varphi_1\}.$$

Como $g_0^+(t) \in \mathrm{span}\{\varphi_1\}$ para todo $t \in [0,1]$, decorre do Lema 1.39 que

$$I_{\lambda,p}^+(g_0^+(t)) = I_{\lambda,p}(g_0^+(t)) \leq \eta(\lambda), \ \text{ para todo } t \in [0,1]. \tag{1.85}$$

Analogamente, aplicando o Lema 1.31, podemos definir $g_0^- \in \Gamma^-$ satisfazendo uma propriedade análoga à estimativa (1.85). Portanto, existe $\lambda_0 > 0$

$$C_\lambda^+ \leq \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,p}^+(g_0^+(t)) \leq \eta(\lambda) < \alpha \leq I_{\lambda,p}(u_\lambda) \ \text{ para todo } \ 0 < \lambda \leq \lambda_0.$$

e

$$C_\lambda^- \leq \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda,p}^-(g_0^-(t)) \leq \eta(\lambda) < \alpha \leq I_{\lambda,p}(u_\lambda), \quad \text{para todo } 0 < \lambda \leq \lambda_0.$$

Portanto, para λ fixo suficientemente pequeno, o problema (1.63) possui pelo menos três soluções não triviais, provando assim, a primeira parte do Teorema 1.23.

Se f for ímpar, o Lema 1.14 garante que $I_{\lambda,p}$ é par.

Agora provaremos a segunda parte, isto é, que o problema (1.63) possui infinitas soluções.

Considere Y um subespaço de dimensão finita em X_p^s. Então o subespaço Y é complementado (veja o [19], p. 38), isto é, existe um subespaço fechado Z de X_p^s tal que $X_p^s = Y \oplus Z$.

Mostraremos que existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I_{\lambda,p}\Big|_{\partial B_\rho \cap Z} > \alpha$.

De fato, como feito na prova da Proposição 1.28 (ou 1.32), existem uma bola $B_\rho(0) \subset X_p^s$ e $\alpha > 0$ tais que

$$I_{\lambda,p}\Big|_{\partial B_\rho(0)} > \alpha.$$

Assim, para $u \in \partial B_\rho(0) \cap Z$ $(\subset Z)$, obtemos $I(u) > \alpha$, mostrando assim, o item (1) do Teorema A.50.

Para provar o item (2), notamos que, como consequência do Lema 1.38, para cada Y de dimensão finita, podemos encontrar $R = R(Y) > 0$ tal que

$$I_{\lambda,p}(u) < 0, \quad \text{sempre que } \ u \in Y \ \text{ e } \|u\|_{X_p^s} > R(Y).$$

Portanto, pelo Teorema A.50, o problema (1.63) possui uma infinidades de soluções não-triviais. ■

1.5 Soluções para o problema crítico

Neste seção, mostraremos um resultado de existência de soluções para o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = -\lambda|u|^{q-2}u + a|u|^{p-2}u + f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.86}$$

no caso em que $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < p$ e com a não-linearidade f tendo crescimento exponencial crítico no sentido Trudinger-Moser.

Nossa principal referência nesta seção é o artigo de Iannizzotto e Squassina [55], no qual uma solução não-trivial foi obtida.

Aqui, vamos supor que a não-linearidade f satisfaça:

$(f_{1,p})$ $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ e $F(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

$(f'_{2,p})$ existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(t)|}{\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}})} = \begin{cases} \infty, & \text{se } 0 < \alpha < \alpha_0 \\ 0, & \text{se } \alpha > \alpha_0; \end{cases}$$

$(f_{3,p})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to 0} \frac{|f(t)|}{|t|^{p-2}t} = 0$;

$(f_{5,p})$ $\dfrac{f(t)}{|t|^{p-2}t}$ é crescente se $t > 0$, e decrescente se $t < 0$;

$(f_{6,p})$ Para cada $(u_n) \subset X_p^s$, se

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{em } X_p^s \\ f(u_n) \to f(u), & \text{em } L^1(\Omega), \end{cases}$$

então $F(u_n) \to F(u)$ em $L^1(\Omega)$;

$(f_{7,p})$ Existem $r > p$ e C_r tais que

$$F(t) \geq \frac{C_r}{r}|t|^{r-1}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

com

$$C_r > \left[2\frac{N}{s}\left(\frac{\alpha_0}{\alpha^*_{s,N}}\right)^{\frac{N-s}{s}}\frac{(r-p)}{pr}\right]^{\frac{r-p}{p}}\frac{1}{C},$$

com $C > 0$ dado em (1.107) .

Observação 1.41 *A condição* $(f_{7,p})$ *implica a condição*

$$(f_{4,p})\ \lim_{|t|\to\infty}\frac{F(t)}{|t|^p} = +\infty, \quad \textit{sendo}\ \ F(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s.$$

O principal resultado deste capítulo é:

Teorema 1.42 *Suponha que* f *satisfaça as condições* $(f_1), (f'_{2,p}), (f_{3,p})$ *e* $(f_{5,p}) - (f_{7,p})$*, e que* $\lambda_1 \leq a < \lambda^*$*. Então, para* λ *suficientemente pequeno, o problema* (1.86) *possui pelo menos três soluções não-triviais.*

A prova desse Teorema será dividida em 4 subseções:

Na primeira subseção, usaremos o Teorema do Passo da Montanha para obter pelo menos uma solução positiva e, de forma análoga, na segunda subseção obteremos pelo menos uma solução negativa. Na terceira subseção aplicaremos o Teorema de Linking para obter uma terceira solução. Finalmente na quarta subseção demonstramos o resultado principal, isto é, o Teorema 1.42.

1.5.1 Solução positiva para o funcional $I_{\lambda,p}$

Como já mencionamos, provaremos que a condição de Palais-Smale é satisfeita apenas para níveis em um certo intervalo. É importante ressaltar que, no caso exponencial crítico, o Lema A.16 é valido somente para $\alpha > \alpha_0$, isto é, para todo $\alpha > \alpha_0$ existe $C > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq C\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}), \quad \text{para todo}\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Note também que o Lema A.17 é valido somente para $\alpha > \alpha_0$.

Lema 1.43 *Suponha que f satisfaça as hipóteses desta seção. Então o funcional*

$$I_{\lambda,p}(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p_{X^s_p} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x,$$

satisfaz a condição (PS) em qualquer nível $c < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}$

Demonstração: Seja $c < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}$ e suponha que (u_n) seja uma sequência (PS) em X^s_p

O Lema 1.15 garante que (u_n) é limitada em X^s_p. Assim, a menos de subsequência, podemos supor

$$\begin{cases} \|u_n\|_{X^s_p} \leq K, \\ u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } X^s_p, \\ u_n \to u \text{ em } L^q(\Omega) \text{ para todo } q \geq 1 \text{ e} \\ u_n(x) \to u(x) \text{ quase sempre em } \Omega. \end{cases}$$

Como $\lambda > 0$, $(\|I'_{\lambda,p}(u_n)\|_{(X^s_p)^*})$ e $(I_{\lambda,p}(u_n))$ são sequências limitadas em $\mathbb{R}$. Logo,

$$\int_\Omega f(u_n)u_n \mathrm{d}x \leq \|u_n\|^p_{X^s_p} + \lambda\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x + a\int_\Omega |u_n|^p \mathrm{d}x + \|I'_{\lambda,p}(u_n)\|\|u_n\|_{X^s_p} \leq C_1$$
$$\int_\Omega F(u_n)\mathrm{d}x \leq \frac{\|u_n\|^p_{X^s_p}}{p} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x + \frac{a}{p}\int_\Omega |u_n|^p \mathrm{d}x + |I_{\lambda,p}(u_n)| \leq C_2.$$

Tendo em vista o Lema A.22, podemos encontrar uma constante $C > 0$ verificando

$$\max\left\{\|u_n\|^2_{X^s_p}, \int_\Omega f(u_n)u_n \mathrm{d}x, \int_\Omega F(u_n)\mathrm{d}x\right\} \leq C. \tag{1.87}$$

Pelo Lema A.16 e pela Proposição A.11 também temos que

$$\int_\Omega |f(u)|\mathrm{d}x \leq C_2\int_\Omega \exp\left(\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}\right)\mathrm{d}x < \infty$$

e

$$\int_{\Omega} |f(u_n)|\mathrm{d}x \leq C_3 \int_{\Omega} \exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-s}}\right) \mathrm{d}x < \infty,$$

ou seja, $f(u_n), f(u)$ estão em $L^1(\Omega)$. Então como $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$ e $\int_{\Omega} f(u_n)u_n \mathrm{d}x \leq C$, do Lema A.46 concluímos que

$$f(u_n) \to f(u) \text{ em } L^1(\Omega). \tag{1.88}$$

Logo de (1.88) e de $(f_{6,p})$ obtemos

$$F(u_n) \to F(u) \;\text{ em }\; L^1(\Omega). \tag{1.89}$$

Assim,

$$\frac{\|u_n\|^p_{X^s_p}}{p} \to c - \frac{\lambda}{q}\int_{\Omega} |u|^q \mathrm{d}x + \frac{a}{p}\int_{\Omega} |u|^p \mathrm{d}x + \int_{\Omega} F(u)\mathrm{d}x. \tag{1.90}$$

Como $I'_{\lambda}(u_n) \to 0$ em $(X^s_p)^*$ e (u_n) é limitada em X^s_p, decorre de (1.90) que

$$\int_{\Omega} f(u_n)u_n \mathrm{d}x \to pc + \lambda\left(1 - \frac{p}{q}\right)\int_{\Omega} |u|^q \mathrm{d}x + p\int_{\Omega} F(u)\mathrm{d}x. \tag{1.91}$$

De acordo com o Lema A.22 temos

$$\int_{\Omega} f(u_n)u_n \mathrm{d}x - p\int_{\Omega} F(u_n)\mathrm{d}x \geq 0.$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ na expressão acima, de (1.91) obtemos

$$pc \geq \lambda\left(\frac{p}{q} - 1\right)\int_{\Omega} |u|^q, \tag{1.92}$$

o que implica $c \geq 0$, pois $1 < q < p$. Assim, o nível mini-max é não negativo.

Agora, vejamos que $\langle I'_{\lambda,p}(u), v\rangle = 0$ para todo $v \in X^s_p$, ou seja, o limite fraco u da sequência (PS) é uma solução para o problema em questão.

Primeiro, considere $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Note que, quando $n \to +\infty$, temos

$$\left| \int_\Omega f(u_n)v - \int_\Omega f(u)v\mathrm{d}x \right| \leq \|f(u_n) - f(u)\|_{L^1(\Omega)} \|v\|_\infty \to 0. \tag{1.93}$$

Como $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$, decorre do Teorema A.37 a existência de uma subsequência de (u_n), ainda denotada por (u_n), e $h \in L^q(\Omega)$ tais que $|u_n| \leq h$ q.t.p. em Ω. Então, para cada $v \in X_p^s$, temos

$$||u_n|^{q-2}u_n v| = |u_n|^{q-1}|v| \leq h^{q-1}|v|, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Assim, a desigualdade de Hölder, a Proposição 1.12 e $h \in L^q(\Omega)$ implicam que

$$\int_\Omega |h^{q-1}|v||\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |h|^q \mathrm{d}x \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_\Omega |v|^q \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Portanto,

$$h^{q-1}|v| \in L^1(\Omega) \;\; \forall\, v \in X_p^s.$$

De $u_n \to u$ q.t.p. em Ω podemos concluir que $|u_n|^{q-2}u_n v \to |u_n|^{q-2}u_n v$ q.t.p. em Ω. Logo, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja o Teorema A.36) garante que

$$\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n v \to \int_\Omega |u|^{q-2}uv, \;\; \forall\, v \in X_p^s. \tag{1.94}$$

Analogamente, podemos obter

$$\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n v \to \int_\Omega |u|^{p-2}uv, \;\; \forall\, v \in X_p^s. \tag{1.95}$$

e, como $I'_{\lambda,p}(u_n) \to 0$,

$$0 \leq |\langle I'_{\lambda,p}(u_n), v\rangle| \leq \|I'_{\lambda,p}(u_n)\| \|v\|_{X_p^s} \to 0, \;\; \text{quando} \;\; n \to \infty.$$

Assim,

$$\langle I'_{\lambda,p}(u_n), v\rangle \to 0, \quad \text{para todo } v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.96}$$

Aplicando o Lema A.52, temos

$$\langle A(u_n), v\rangle \to \langle A(u), v\rangle, \quad \text{para todo } v \in X_p^s. \tag{1.97}$$

Combinando (1.93), (1.94), (1.95), (1.96) e (1.97) concluímos que

$$\begin{aligned}\langle I'_{\lambda,p}(u), v\rangle &= \lim_{n\to\infty}\left(\langle A(u_n), v\rangle + \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n v\mathrm{d}x - a\int_\Omega u_n v\mathrm{d}x - \int_\Omega f(u_n)v\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\langle I'_{\lambda,p}(u_n), v\rangle = 0.\end{aligned}$$

Logo, $\langle I'_{\lambda,p}(u), v\rangle = 0$, para toda $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em X_p^s, o mesmo resultado vale para todo $v \in X_p^s$.

Aplicando o Lema A.22, temos então

$$\begin{aligned}I_{\lambda,p}(u) &\geq \frac{1}{p}\left(\|u\|^p_{X_p^s} + \frac{p\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q - a\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x - \int_\Omega f(u)u\mathrm{d}x\right)\\ &> \frac{1}{p}\left(\|u\|^p_{X_p^s} + \lambda\int_\Omega |u|^q - a\int_\Omega |u|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega f(u)u\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{p}\langle I'_{\lambda,p}(u), u\rangle = 0\end{aligned}$$

Logo $I_{\lambda,p}(u) > 0$. Se $u = 0$, então $I_{\lambda,p}(u) = 0$.

Como temos (1.92) e $1 < q < p$, concluímos que o nível mini-max c é estritamente positivo e $u \neq 0$.

Agora, mostraremos que $u_n \to u$ forte em X_p^s.

Para isso é suficientemente provar que $I_{\lambda,p}(u) = c$, isto é, $\|u_n\|_{X_p^s} \to \|u\|_{X_p^s}$, pois (1.90)) garante que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|u_n\|^p_{X_p^s}}{p} = I_{\lambda,p}(u) - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q + \frac{a}{p}\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x + \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x = \frac{\|u\|^p_{X_p^s}}{p}.$$

Assim, tendo $u_n \rightharpoonup u$ em X_p^s e $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{X_p^s} = \|u\|_{X_p^s}$, o fato de X_p^s ser um espaço de Banach uniformemente convexo nos permite concluir que $u_n \to u$ em X_p^s.

Para provar $I_{\lambda,p}(u) = c$, notamos que a Proposição A.35 e (1.89) implicam que

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,p}(u) &\leq \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\|u_n\|_{X_p^s}^p\right) + \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q - \frac{a}{p}\int_\Omega |u_n|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(u_n)\mathrm{d}x\right)\\
&\leq \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\|u_n\|_{X_p^s}^p + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q - \frac{a}{p}\int_\Omega |u_n|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(u_n)\mathrm{d}x\right)\\
&= \liminf_{n\to\infty} I_{\lambda,p}(u_n) = c.
\end{aligned}$$

Vamos agora supor, por contradição, que $I_{\lambda,p}(u) < c$. Então (1.90) implicaria

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{X_p^s}^p &= p\left(c - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q + \frac{a}{p}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x + \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\right)\\
&> p\left(I_{\lambda,p}(u) - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q + \frac{a}{p}\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\right)\\
&= \|u\|_{X_p^s}^p. \qquad (1.98)
\end{aligned}$$

Definamos então $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{X_p^s}}$ e $v = \dfrac{u}{c_0}$, sendo

$$c_0 = \left(pc - \frac{p\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q + a\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x + p\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\right)^{-1/p} > 0.$$

Como $\|v_n\|_{X_p^s} = 1$, a estimativa (1.98) implica que

$$\|v\|_{X_p^s} = \frac{\|u\|_{X_p^s}}{c_0} < \frac{\|u\|_{X_p^s}}{\|u\|_{X_p^s}} = 1.$$

Assim, $0 < \|v\|_{X_p^s} < 1$.

Uma vez que $\dfrac{u_n}{\|u_n\|_{X_p^s}} \rightharpoonup \dfrac{u}{c_0}$ em X_p^s, decorre de (1.98) que, para todo $h \in (X_p^s)^*$, vale

$$h(v_n) = h\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_{X_p^s}}\right) \to h\left(\frac{u}{c_0}\right) = h(v),$$

e portanto, $v_n \rightharpoonup v$ em X_p^s.

Como $c < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}$, podemos encontrar $r > 1$, próximo de 1, e $\alpha_0 < \alpha < \alpha^*_{s,N}$, próximo de α_0, tais que

$$1 < r^{\frac{N-s}{s}} < \frac{\frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha}\right)^{\frac{N-s}{s}}}{c},$$

isto é,

$$pr^{\frac{N-s}{s}}\alpha^{\frac{N-s}{s}} < \frac{\left(\alpha^*_{s,N}\right)^{\frac{N-s}{s}}}{c},$$

Como $I_{\lambda,p}(u) > 0$, obtemos

$$pr^{\frac{N-s}{s}}\alpha^{\frac{N-s}{s}} < \frac{\left(\alpha^*_{s,N}\right)^{\frac{N-s}{s}}}{c - I_{\lambda,p}(u)}. \tag{1.99}$$

Consequentemente, decorre de (1.98) que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} r^{\frac{N-s}{s}}\alpha^{\frac{N-s}{s}}\|u_n\|^p_{X^s_p} &= r^{\frac{N-s}{s}}\alpha^{\frac{N-s}{s}}c_0^p \\ &< \left(\alpha^*_{s,N}\right)^{\frac{N-s}{s}}\left(\frac{c_0^p}{p(c - I_{\lambda,p}(u))}\right). \end{aligned} \tag{1.100}$$

Afirmamos agora que

$$\frac{c_0^p}{p(c - I_{\lambda)}(u)} = \frac{1}{1 - \|v\|^p_{X^s_p}}. \tag{1.101}$$

Com efeito, note que

$$\frac{1}{1 - \|v\|^p_{X^s_p}} = \frac{1}{1 - \frac{\|u\|^p_{X^s_p}}{c_0^p}} = \frac{c_0^p}{c_0^p - \|u\|^p_{X^s_p}}.$$

Por outro lado,

$$\frac{c_0}{p} = c - I_{\lambda,p}(u) + \frac{\|u\|^p_{X^s_p}}{p}.$$

Logo,

$$\frac{1}{1-\|v\|^p_{X^s_p}} = \frac{c_0^p}{c_0^p - \|u\|^p_{X^s_p}} = \frac{c_0^p}{p(c - I_{\lambda,p}(u))},$$

provando o afirmado.

Decorre então de (1.100) e (1.101)) que

$$b = \lim_{n\to\infty} r^{\frac{N-s}{s}} \alpha^{\frac{N-s}{s}} \|u_n\|^p_{X^s_p} < \frac{\left(\alpha^*_{s,N}\right)^{\frac{N-s}{s}}}{1-\|v\|^p_{X^s_p}}.$$

Então, escolha $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que

$$r\alpha \|u_n\|^{\frac{N}{N-s}}_{X^s_p} < \epsilon + b < \frac{\alpha^*_{s,N}}{(1-\|v\|^p_{X^s_p})^{\frac{s}{N-s}}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Consequentemente, podemos encontrar $1 < \mu < \frac{1}{(1-\|v\|^p_{X^s_p})^{\frac{s}{N-s}}}$ e $0 < \gamma < \alpha^*_{s,N}$ verificando

$$r\alpha \|u_n\|^{\frac{N}{N-s}}_{X^s_p} < \gamma\mu < \frac{\alpha^*_{s,N}}{(1-\|v\|^p_{X^s_p})^{\frac{s}{N-s}}}.$$

Além disso, de acordo com o Lema A.16, vale

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(u_n)|^r \mathrm{d}x &\le C \int_\Omega \exp(r\alpha |u_n|^{\frac{N}{N-s}}) \mathrm{d}x \\
&= C \int_\Omega \exp\left(r\alpha \|u_n\|^{\frac{N}{N-s}}_{X^s_p} \left| \frac{u_n}{\|u_n\|_{X^s_p}} \right|^{\frac{N}{N-s}} \right) \mathrm{d}x \\
&\le C \int_\Omega \exp\left(\gamma\mu |v_n|^{\frac{N}{N-s}}\right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Mas, como já provado, (v_n) é uma sequência em X^s_p com $\|v_n\|_{X^s_p} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $v_n \rightharpoonup v$ em X^s_p e $0 < \|v\|_{X^s_p} < 1$. Uma vez que $0 < \gamma < \alpha^*_{s,N}$ e $1 < \mu < \frac{1}{(1-\|v\|^p_{X^s_p})^{\frac{s}{N-s}}}$, estamos sob as hipóteses da Proposição A.15, que garante que a sequência $\left(\exp\left(\gamma|v_n|^{\frac{N}{N-s}}\right)\right)$ é limitada em $L^{\mu}(\Omega)$. Assim existe $K > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |f(u_n)|^r \mathrm{d}x \leq K,$$

isto é, $(f(u_n))$ é limitada em $L^r(\Omega)$ para algum $r > 1$.

Pelo Lema A.41, temos $f(u_n) \rightharpoonup f(u)$ em $L^r(0,1)$ e, como $u_n \to u$ em $L^{r'}(0,1)$, a Definição A.40 e a estimativa

$$\left|\int_{\Omega} f(u_n)u_n \mathrm{d}x - \int_{\Omega} f(u)u \mathrm{d}x\right| \leq \|f(u_n)\|_r \|u_n - u\|_{r'} + \left|\int_{\Omega} (f(u_n) - f(u))u \mathrm{d}x\right|,$$

implicam que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f(u_n)u_n \mathrm{d}x = \int_{\Omega} f(u)u \mathrm{d}x. \tag{1.102}$$

Uma vez que $I'_{\lambda,p}(u_n) \to 0$ em $(X_p^s)^*$ e (u_n) é limitada em X_p^s, decorre de (1.102) que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^p_{X_p^s} &= \lim_{n\to\infty} \left(\langle I'_{\lambda,p}(u_n), u_n\rangle - \frac{\lambda}{q}\int_{\Omega} |u_n|^q + a\int_{\Omega} |u_n|^p \mathrm{d}x + \int_{\Omega} f(u_n)u_n \mathrm{d}x \right) \\
&= -\frac{\lambda}{q}\int_{\Omega} |u|^q + a\int_{\Omega} |u|^p \mathrm{d}x + \int_{\Omega} f(u)u \mathrm{d}x \\
&= \|u\|^p_{X_p^s} - \langle I'_{\lambda,p}(u), u\rangle = \|u\|^p_{X_p^s}.
\end{aligned}$$

Isso contradiz (1.98). Portanto, $I_{\lambda,p}(u) = c$. ■

Observação 1.44 *O Lema anterior continua válido se trocarmos o funcional* $I_{\lambda,p}$ *por* $I^+_{\lambda,p}$ *ou* I^-_{λ}.

Proposição 1.45 *Suponha que* f *satisfaça as condições* $(f_{1,p}), (f'_{2,p}), (f_{3,p}) - (f_{7,p})$ *e que* $a \geq \lambda_1$. *Então o problema* (1.86) *possui pelo menos uma solução positiva, para todo* λ *suficientemente pequeno.*

Demonstração: Análogo ao que foi feito no caso subcrítico, apresentado na Seção 1.4, o funcional $I^+_{\lambda,p}$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha.

Mostraremos que o funcional $I^+_{\lambda,p}$ satisfaz a condição (PS) no nível C^+_λ definido por

$$C^+_\lambda = \inf_{g\in\Gamma^+} \max_{u\in g([0,1])} I^+_{\lambda,p}(u),$$

em que $\Gamma^+ = \{g \in C([0,1], X^s_p) \ ; \ g(0) = 0 \ , \ g(1) = t_0\varphi_1\}$ e t_0 foi obtido no Lema 1.27.

Inicialmente, note que

$$\max_{t\in[0,1]} I^+_{\lambda,p}(g(t)) \geq I^+_{\lambda,p}(g(0)) = I^+_{\lambda,p}(0) = 0, \ \forall \ g \in \Gamma^+.$$

Logo, $\max\limits_{t\in[0,1]} I^+_{\lambda,p}(g(t)) \geq 0, \ \ \forall g \in \Gamma^+$, Consequentemente,

$$0 \leq \inf_{g\in\Gamma^+} \max_{u\in g([0,1])} I^+_{\lambda,p}(u) = C^+_\lambda < \infty.$$

Seguindo os mesmos passos utilizados na demonstração do Lema 1.43, obtemos que $I^+_{\lambda,p}$ satisfaz a condição (PS) no nível $c < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}$, para todo $\lambda > 0$.

Agora mostraremos que $C^+_\lambda < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}$, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

De fato, defina $g^+_0 : [0,1] \to X^s_p$ dado por $g^+_0(t) = t(t_0\varphi_1)$. Temos $g^+_0 \in \Gamma^+$ e sua imagem está contida em span$\{\varphi_1\}$. Do Lema 1.39 obtemos

$$C^+_\lambda \leq I^+_{\lambda,p}(g^+_0) < \eta(\lambda) < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}},$$

para λ suficientemente pequeno.

Finalmente, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, o Teorema de Passo da Montanha garante a existência de $u \neq 0$ em X^s_p tal que $I^-_{\lambda,p}(u) = C^+_\lambda$ e $(I^+_{\lambda,p})'(u) = 0$, isto é, u é um ponto crítico de $I^+_{\lambda,p}$ e, portanto, uma solução positiva para o problema (1.86). ■

1.5.2 Solução negativa para o funcional $I_{\lambda,p}$

A demonstração do próximo resultado é análoga àquela da Proposição 1.45. Para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, o Teorema de Passo da Montanha garante a existência de $u \neq 0$ em X_p^s tal que $I_{\lambda,p}^-(u) = C_\lambda^- \leq I_{\lambda,p}^-(g_0^-) < \eta(\lambda)$, para λ suficientemente pequeno e $(I_{\lambda,p}^-)'(u) = 0$.

Proposição 1.46 *Suponha que f satisfaça as condições $(f_{1,p}), (f'_{2,p}), (f_{3,p}) - (f_{7,p})$ e $a \geq \lambda_1$. Então o problema (1.86)) possui pelo menos uma solução negativa, para todo λ suficientemente pequeno.*

1.5.3 Solução via o Teorema de Linking

Proposição 1.47 *Se valem $(f_{1,p}), (f'_{2,p}), (f_{3,p}) - (f_{7,p})$ e se $\lambda_1 \leq a < \lambda^*$ então, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, o problema (1.86) possui pelo menos uma solução não-trivial, distinta das soluções positiva e negativa já encontradas.*

Demonstração: Vamos obter uma ponto crítico $u \in X_p^s$ do funcional $I_{\lambda,p} : X_p^s \to \mathbb{R}$. Para isso, utilizaremos o Teorema de Linking com a condição $(P.S)_{C_\lambda}$ (veja o Teorema A.51) com $C_\lambda < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha_{s,N}^*}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}$, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

De acordo com os Lemas 1.37 e 1.38, o funcional $I_{\lambda,p}$ satisfaz a geometria exigida pelo Teorema de Linking.

Continuaremos a utilizar as notações da Seção 1.4, com $Q = (B_R \cap \operatorname{span}\{\varphi_1\}) \oplus ([0, R\varphi])$, para $\varphi \in W$. Basta então provar que

(iii) $\sup_{u \in Q} I_{\lambda,p}(u) < \dfrac{s}{N}\left(\dfrac{\alpha_{s,N}^*}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}.$

Mostraremos que, sob a hipótese $(f_{7,p})$, temos

$$\max_{u \in \overline{Q}} I_{\lambda,p}(u) < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha_{s,N}^*}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}, \tag{1.103}$$

para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. Para isso, escrevemos o funcional $I_{\lambda,p}$ na forma

$$I_{\lambda,p}(u) = J(u) + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x,$$

sendo

$$J(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p_{X^s_p} - \frac{a}{p}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x.$$

Para provar (iii) é suficiente verificar que

$$\sup_{u\in\overline{Q}} J(u) < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}. \tag{1.104}$$

De fato, daí decorre que

$$\frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}} - \sup_{u\in\overline{Q}} J(u) > 0.$$

Portanto, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, vale

$$\frac{\lambda}{q}\sup_{u\in\overline{Q}} |u|^q_{L^q(\Omega)} < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}} - \sup_{u\in\overline{Q}} J(u),$$

isto é,

$$\sup_{u\in\overline{Q}} I_{\lambda,p}(u) \le \sup_{u\in\overline{Q}} J(u) + \frac{\lambda}{q}\sup_{u\in\overline{Q}} |u|^q_{L^q(\Omega)} < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}},$$

para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. Isto mostra (iii).

Vamos então provar (1.104). Então iniciamos a prova mostrando que

$$\sup_{u\in\overline{Q}} J(u) < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}.$$

Seja $\mathbb{F} = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi\}$, para $\varphi \in W$ tal que $\overline{Q} \subset \mathbb{F}$. Como $\mathbb{F}$ é um subespaço vetorial obtemos que

$$\sup_{u\in\overline{Q}} J(u) \leq \max_{u\in\mathbb{F}} J(u) = \max_{u\in\mathbb{F},t\neq 0} J\left(|t|\frac{u}{|t|}\right) = \max_{u\in\mathbb{F},t>0} J(tu) \leq \max_{u\in\mathbb{F},t\geq 0} J(tu). \quad (1.105)$$

Seja $u \in \mathbb{F}$ e $t \geq 0$. Temos

$$\begin{aligned} J(tu) &= \frac{t^p}{p}\|u\|^p_{X^s_p} - \frac{a}{p}t^p \int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(tu)\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{t^p}{p}\|u\|^p_{X^s_p} - \int_\Omega F(tu)\mathrm{d}x. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Defina $\eta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\eta(t) = \frac{t^p}{p}\|u\|^p_{X^s_p} - \int_\Omega F(tu)\mathrm{d}x.$$

Pela hipótese $(f_{7,p})$ e do fato que no espaço de dimensão finita $\mathbb{F}$ as normas são equivalentes, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega F(tu)\mathrm{d}x \geq \frac{C_r}{r}\int_\Omega t^r|u|^r \mathrm{d}x = \frac{C_r}{r}t^r\|u\|^r_{L^r(\Omega)} \geq C\frac{C_r}{r}t^r\|u\|^r_{X^s_p}. \quad (1.107)$$

Daí

$$\eta(t) \leq \frac{t^p}{p}\|u\|^p_{X^s_p} - C\frac{C_r}{r}t^r\|u\|^r_{X^s_p} \leq \max_{t\geq 0}\left(\frac{t^p}{p}\|u\|^p_{X^s_p} - C\frac{C_r}{r}t^r\|u\|^r_{X^s_p}\right). \quad (1.108)$$

Considerando $g(t) = \dfrac{t^p}{p}\|u\|^p_{X^s_p} - C\dfrac{C_r}{r}\|u\|^r_{X^s_p}t^r$, vamos obter $\max\limits_{t\geq 0} g(t)$. Observe que,

$$g'(t) = t^{p-1}\|u\|^p_X - CC_r\|u\|^r_{X^s_p}t^{r-1}.$$

Logo, $g'(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0$ ou $t = \left(\frac{\|u\|^{p-r}_{X^s_p}}{CC_r}\right)^{\frac{1}{r-p}}$.

Por outro lado,

$$g''(t) = (p-1)t^{p-2}\|u\|^p_X - CC_r(r-1)\|u\|^r_{X^s_p}t^{r-2}.$$

Então, para $t = \left(\dfrac{\|u\|_{X_p^s}^{p-r}}{CC_r}\right)^{\frac{1}{r-p}}$, note que

$$
\begin{aligned}
g''\left(\left(\frac{\|u\|_{X}^{p-r}}{CC_r}\right)^{\frac{1}{r-p}}\right) =&(p-1)\|u\|_{X_p^s}^{p}\left[\frac{\|u\|_{X_p^s}^{p-r}}{CC_r}\right]^{\frac{p-2}{r-p}} - CC_r(r-1)\|u\|_{X_p^s}^{r}\left[\frac{\|u\|_{X_p^s}^{p-r}}{CC_r}\right]^{\frac{r-2}{r-p}}\\
=&\|u\|_{X_p^s}^{2}\frac{1}{(CC_r)^{\frac{p-2}{r-p}}}(p-r)\\
<&0,
\end{aligned}
$$

pois $r > p$. Logo, g assume máximo global em $t = \left(\dfrac{\|u\|_{X}^{p-r}}{CC_r}\right)^{\frac{1}{r-p}}$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
g\left(\left(\frac{\|u\|_{X}^{p-r}}{CC_r}\right)^{\frac{1}{r-p}}\right) =&\frac{1}{p}\left[\left(\frac{\|u\|_{X}^{p-r}}{CC_r}\right)^{\frac{1}{r-p}}\right]^{p}\|u\|_{X}^{p} - CC_r\|u\|_{X}^{r}\left[\left(\frac{\|u\|_{X}^{p-r}}{CC_r}\right)^{\frac{1}{r-p}}\right]^{r}\\
=&\frac{1}{p}\left(\frac{1}{CC_r}\right)^{\frac{p}{r-p}} - \frac{1}{r}\left(\frac{1}{CC_r}\right)^{\frac{p}{r-p}},\\
=&\left(\frac{1}{CC_r}\right)^{\frac{p}{r-p}}\left(\frac{r-p}{pr}\right).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\max_{t\geq 0} g(t) = \left(\frac{1}{CC_r}\right)^{\frac{p}{r-p}}\left(\frac{r-p}{pr}\right) > 0.
$$

Decorre da hipótese $(f_{7,p})$ que

$$
\begin{aligned}
\max_{t\geq 0} g(t) = &\left(\frac{1}{CC_r}\right)^{\frac{p}{r-p}}\left(\frac{r-p}{pr}\right)\\
&< \frac{1}{2}\frac{s}{N}\left(\frac{\alpha_{s,N}^{*}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}\left(\frac{pr}{r-p}\right)\left(\frac{r-p}{pr}\right)\\
&=\frac{1}{2}\frac{s}{N}\left(\frac{\alpha_{s,N}^{*}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, de (1.108) decorre que $\eta(t) < \frac{1}{2}\frac{s}{N}\left(\frac{\alpha_{s,N}^{*}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}$. Assim, (1.106) implica que

$$\max_{u\in\mathbb{F},\, t\geq 0} J(tu) \leq \max_{t\geq 0} \eta(t) \leq \frac{1}{2}\frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}} < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}.$$

Portanto, de 1.105 deduzimos que

$$\sup_{u\in\overline{Q}} J(u) < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}.$$

Observação 1.48 *Agora estamos em condições de mostrar que, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, o funcional $I_{\lambda,p}$ satisfaz a condição (PS) no nível*

$$C_\lambda = \inf_{h\in\Gamma}\sup_{u\in\overline{Q}} I_{\lambda,p}(h(u)), \quad \textit{em que } \Gamma = \{h \in C(\overline{Q}, X^s_p)\ ;\ h = id \textit{ em } \partial Q\}.$$

De fato, de (1.103) obtemos

$$\sup_{u\in\overline{Q}} I_{\lambda,p}(u) < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}, \quad \textit{para } \lambda > 0 \textit{ suficientemente pequeno}.$$

Assim, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno

$$\inf_{h\in\Gamma}\sup_{u\in\overline{Q}} I_{\lambda,p}(h(u)) \leq \sup_{u\in\overline{Q}} I_{\lambda,p}(u) < \frac{s}{N}\left(\frac{\alpha^*_{s,N}}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-s}{s}}.$$

Portanto, para $\lambda > 0$ sufcientemente pequeno, o Lema 1.43 garante que $I_{\lambda,p}$ satisfaz a condição $(P.S)_{C_\lambda}$.

Logo, tomando $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, pelo Teorema de Linking com a condição $(P.S)_C$ (veja o Teorema A.51) obtemos que $C_\lambda = \inf_{h\in\Gamma}\sup_{u\in\overline{Q}} I_{\lambda,p}(h(u))$ é um valor crítico do funcional $I_{\lambda,p}$ com $C_\lambda \geq \beta$, isto é, existe $u_\lambda \in X^s_p$ solução fraca do problema (1.86) tal que $0 < \beta \leq I_{\lambda,p}(u_\lambda)$. Logo u_λ é não nula, pois $I_{\lambda,p}(0) = 0$. Mostraremos posteriormente que essa solução u_λ é diferente das soluções positiva e negativa já obtidas. ∎

1.5.4 Demonstração do Teorema 1.42:

Demonstração: Agora mostraremos que u_λ é distinto dos demais pontos críticos encontrados para os funcionais $I^+_{\lambda,p}$ e $I^-_{\lambda,p}$.

De fato, analogamente como foi feito na prova do Teorema 1.23, segue do Lema 1.39, que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, obtemos que $0 < C^+_\lambda, C^-_\lambda < \eta(\lambda) < \beta \leq C_\lambda$. Portanto, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, o problema (1.86) possui pelo menos três soluções não-triviais. ■

1.6 Problema não-linear envolvendo o 1/2-laplaciano fracionário com crescimento exponencial sem a condição de Ambrosetti-Rabinowitz

Nesta seção, estamos interessados em provar a existência e multiplicidade de soluções para o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u = -\lambda|u|^{q-2}u + au + f(u) & \text{em } (0,1), \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}\setminus(0,1), \end{cases} \tag{1.109}$$

em que $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $1 < q < 2$ e com não-linearidade f com crescimento exponencial subcrítico e crítico no sentido Trudinger-Moser. Lembramos que denotamos $X := X_2^{1/2}$.

Nossa proposta de trabalho consiste na utilização das seguintes hipóteses, sobre a não-linearidade f, com crescimento exponencial subcrítico:

$(f_{1,2})$ $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ e $F(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, sendo $F(t) := \displaystyle\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$;

$(f_{2,2})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(t)|}{\exp(\alpha t^2)} = 0$, para todo $\alpha > 0$;

$(f_{3,2})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to 0}\frac{|f(t)|}{|t|}=0;$

$(f_{4,2})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty}\frac{F(t)}{t^2}=+\infty.$

E, no caso crítico no sentido Trudinger-Moser, nós substituímos a condição $(f_{2,2})$ pela seguinte condição

$(f'_{2,2})$ existe $\alpha_0>0$ tal que

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{|f(t)|}{\exp(\alpha t^2)}=\begin{cases}\infty, & \text{se} \quad 0<\alpha<\alpha_0\\ 0, & \text{se} \quad \alpha>\alpha_0.\end{cases}$$

Além disso, mantemos as condições $(f_{1,2})$, $(f_{3,2})$ e incluímos as seguintes condições

$(f_{5,2})$

$$\frac{f(t)}{t} \text{ é crescente em } (0,+\infty), \quad \text{e decrescente em} \quad (-\infty,0);$$

$(f_{6,2})$ para cada $(u_n)\subset X$, se

$$\begin{cases} u_n\rightharpoonup u, & \text{em} \quad X,\\ f(u_n)\to f(u), & \text{em} \quad L^1(0,1),\end{cases}$$

então $F(u_n)\to F(u)$ em $L^1(0,1)$.

$(f_{7,2})$ existem $r>2$ e $C_r>0$ tais que

$$F(t)\geq\frac{C_r}{r}|t|^r, \quad \text{para todo} \quad t\in\mathbb{R},$$

com $C_r>\dfrac{1}{C}\left[4\left(\dfrac{\alpha_0}{\pi}\right)\dfrac{(r-2)}{2r}\right]^{\frac{r-2}{2}}$, para uma constante $C>0$.

Consideramos a sequência de autovalores $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ do operador $(-\Delta)^{1/2}$ no espaço X. Os principais resultados desta seção são:

Teorema 1.49 (caso subcrítico) *Suponha que* $\lambda_k \leq a < \lambda_{k+1}$ *para algum* $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$ *e que* f *satisfaça as condições* $(f_{1,2})$, $(f_{2,2})$, $(f_{3,2})$ *e* $(f_{4,2})$. *Então, para* λ *suficientemente pequeno, o problema* (1.109) *possui pelo menos três soluções não-triviais. Se* f *for ímpar, então o problema* (1.109) *possui infinitas soluções.*

Teorema 1.50 (caso crítico) *Suponha que* $\lambda_k \leq a < \lambda_{k+1}$ *para algum* $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$ *e que a não-linearidade* f *satisfaça as condições* $(f_{1,2}), (f'_{2,2}), (f_{3,2})$ *e* $(f_{5,2}) - (f_{7,2})$. *Então para* λ *suficientemente pequeno, o problema* (1.109) *possui pelo menos três soluções não-triviais.*

As demonstrações dos Teoremas 1.49 e 1.50 seguem basicamente os mesmos argumentos desenvolvidos nas demonstrações dos Teoremas 1.3 e 1.4 respectivamente, com a diferença que, neste caso, para encontrar a terceira solução aplicamos também o Teorema de Linking, mas usando a decomposição do espaço X dada por

$$X = V_k \oplus W_k,$$

em que $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$ está fixo e $V_k = \text{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ é o espaço gerado pelas autofunções do operador fracionário $(-\Delta)^{1/2}$ (escolhidos de acordo com o exposto no Apêndice A) correspondentes aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, e $W_k = V_k^{\perp}$.

Capítulo 2

Problema não linear envolvendo o operador p-laplaciano fracionário

Neste capítulo estamos interessados em provar, via métodos de minimax, a existência e multiplicidade de soluções para o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u &= -\lambda|u|^{q-2}u + a|u|^{p-2}u + b(u^+)^{p_s^*-1} \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $\lambda > 0$, $1 < q < p$, $a > 0$, $b > 0$, $u^+ = \max\{0, u\}$, $u^- = \min\{0, u\}$ (note que neste caso $u = u^+ + u^-$ e $|u| = u^+ - u^-$) e $p_s^* = \dfrac{pN}{N - sp}$ é o exponente crítico fracionário de Sobolev. Estudamos o problema (2.1) seguindo as mesmas ideias feitas no artigo submetido [65]. O espaço de funções no qual esperamos encontrar soluções para o problema (2.1), é o espaço de Sobolev fracionário

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty \right\}.$$

Como estas soluções devem ser nulas fora de Ω é natural que consideremos como espaço ambiente o subconjunto $X_p^s \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$X_p^s = \{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) : u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega)\}.$$

Seja λ^* definido em (1.74), o principal resultado deste capítulo é

Teorema 2.1 *Suponha* $\lambda_1 < a < \lambda^*$, $1 < q < p$, $\lambda > 0$ *e* $b > 0$.

(i) *Se* $N > sp^2$ *e* $1 < p \leq \dfrac{2N}{N+s}$, *então para* λ *suficientemente pequeno, o problema* (2.1) *possui pelo menos três soluções não triviais.*

(ii) *Se* $N > sp((p-1)^2 + p)$ *e* $p > \dfrac{2N}{N+s}$, *então para* λ *suficientemente pequeno, o problema* (2.1) *possui pelo menos três soluções não triviais.*

Observação 2.2 *No teorema enunciado acima, apenas consideramos dois casos das seis posibilidades:*

$$(a)\ 1 < p \leq \frac{2N}{N+s} \quad e \quad \begin{cases} (1) & N > sp^2, \\ (2) & N = sp^2, \\ (3) & sp < N < sp^2. \end{cases}$$

$$(b)\ \left[p > \frac{2N}{N+s} \quad e \quad N > sp\big((p-1)^2 + p\big)\right] \quad e \quad \begin{cases} (1) & N > sp^2, \\ (2) & N = sp^2, \\ (3) & sp < N < sp^2. \end{cases}$$

Destes seis casos, vamos considerar os itens $(a) - (1)$, *como nosso primeiro caso, e os itens* $(b) - (1)$, *como nosso segundo caso. Não vamos considerar os outros itens, pois não existem* $N \geq 1$, $0 < s < 1$ *e* $p > 1$ *que verificam os itens* $(a) - (2)$, $(a) - (3)$, $(b) - (2)$ e $(b) - (3)$, respectivamente. Veja a observação A.26 do Apêndice A.

A prova desse Teorema será dividida em cinco seções:

Na primeira seção, apresentamos a formulação variacional do problema (2.1) e a regularidade do funcional associado ao dito problema e demonstramos resultados que serão usados ao longo do capítulo. Na segunda seção, usaremos o Teorema do Passo da Montanha para obter pelo menos uma solução positiva. De forma análoga, na terceira seção, obtemos pelo menos uma solução negativa. Na quarta seção obtemos uma terceira solução via Teorema de Linking. Finalmente na quinta seção demonstramos o resultado principal, isto é, o Teorema 2.1.

2.1 Resultados válidos para nosso problema

Apresentamos algumas definições e resultados que serão usados no desenvolvimento deste trabalho.

2.1.1 Formulação variacional do problema (2.1)

Definição 2.3 *Dizemos que $u \in X_p^s$ é solução fraca de* (2.1) *se*

$$\langle A(u), v\rangle = -\lambda \int_\Omega |u|^{q-2} u v \mathrm{d}x + a \int_\Omega |u|^{p-2} u v \mathrm{d}x + b \int_\Omega (u^+)^{p_s^*-1} v \mathrm{d}x,$$

para todo $v \in X_p^s$.

2.1.2 Regularidade do funcional

Usando o Teorema A.58 do Apêndice A obtemos o próximo resultado que mostra que os pontos críticos do funcional $I_{\lambda,s} : X_p^s \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_{\lambda,s}(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s}^p + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x - \frac{b}{p_s^*}\int_\Omega (u^+)^{p_s^*} \mathrm{d}x \tag{2.2}$$

correspondem as soluções fracas do problema (2.1).

Lema 2.4 *O funcional $I_{\lambda,s}$ esta bem definida e é de classe $C^1(X_p^s, \mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet é dada por:*

$$\langle I'_{\lambda,s}(u), h\rangle = \langle A(u), h\rangle + \lambda \int_\Omega |u|^{q-2} u h \mathrm{d}x - a \int_\Omega |u|^{p-2} u h \mathrm{d}x - b \int_\Omega (u^+)^{p_s^*-1} h \mathrm{d}x,$$

para todo $u, h \in X_p^s$.

2.1.3 Limitação da sequência (PS) associada ao funcional $I_{\lambda,s}$

No seguinte lema mostraremos que cada sequência (PS) de $I_{\lambda,s}$ associado ao problema (2.1) é limitada.

Lema 2.5 *Sejam $\lambda_1 < a$, $1 < q < p$ e $\lambda > 0$, então cada sequência (PS) de $I_{\lambda,s}$ é limitada.*

Demonstração: Por hipótese $(u_n) \subset X_p^s$ satisfaz as condições abaixo

$$|I_{\lambda,s}(u_n)| = \left| \frac{1}{p}\|u_n\|_{X_p^s}^p \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u_n|^p \mathrm{d}x - \frac{b}{p_s^*}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x \right| \leq M, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &|\langle I'_{\lambda,s}(u_n), h\rangle| \\ &= \left| \langle A(u_n), h\rangle + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n h \mathrm{d}x - a\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n h\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}h\mathrm{d}x \right| \\ &\leq \epsilon_n \|h\|_{X_p^s}, \text{ para todo } h \in X_p^s, \text{ com } \epsilon_n \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \end{aligned} \tag{2.4}$$

De (2.3), (2.4) e $\left| I_{\lambda,s}(u_n) - \frac{1}{p}\langle I'(u_n), u_n\rangle \right| \leq |I_{\lambda,s}(u_n)| + \left| \frac{1}{p}\langle I'(u_n), u_n\rangle \right|$ (desigualdade triangular), obtemos

$$\begin{aligned} &M + \epsilon_n \|u_n\|_{X_p^s} \\ &\geq \left| \frac{1}{p}\|u_n\|^p \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q\mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u_n|^p \mathrm{d}x - \frac{b}{p_s^*}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{p}\left(\langle A(u_n), u_n\rangle + \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n^2 \mathrm{d}x - a\int_\Omega |u_n|^p\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}u_n \mathrm{d}x \right) \right| \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$
\begin{aligned}
& M+\epsilon_n\|u_n\|_{X_p^s} \\
& \geq \quad \left|\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q\mathrm{d}x-\frac{b}{p_s^*}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u_n|^q\mathrm{d}x+\frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}u_n\mathrm{d}x\right| \\
& = \quad \left|\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q\mathrm{d}x-\frac{b}{p_s^*}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{p}\int_\Omega |u_n|^q\mathrm{d}x+\frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}(u_n^++u_n^-)\mathrm{d}x\right| \\
& = \quad \left|\left(\frac{\lambda}{q}-\frac{\lambda}{p}\right)\int_\Omega |u_n|^q\mathrm{d}x+\left(\frac{b}{p}-\frac{b}{p_s^*}\right)\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x\right|.
\end{aligned}
$$

Como $\lambda>0$, $b>0$ e $1<q<p$, segue que

$$M+\epsilon_n\|u_n\|_{X_p^s}\geq \left(\frac{b}{p}-\frac{b}{p_s^*}\right)\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x.$$

Como $p_s^*>p$ e $b>0$, obtemos

$$M\left(\frac{b}{p}-\frac{b}{p_s^*}\right)^{-1}+\epsilon_n\left(\frac{b}{p}-\frac{b}{p_s^*}\right)^{-1}\|u_n\|_{X_p^s}\geq \int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x.$$

Sem perda de generalidade, podemos considerar M em vez de $M\left(\frac{b}{p}-\frac{b}{p_s^*}\right)^{-1}$ e ϵ_n em vez de $\epsilon_n\left(\frac{b}{p}-\frac{b}{p_s^*}\right)^{-1}$, logo

$$M+\epsilon_n\|u_n\|_{X_p^s}\geq \int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
& \langle I'_{\lambda,s}(u_n),u_n^+\rangle \\
& = \quad \langle A(u_n),u_n^+\rangle+\lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_nu_n^+\mathrm{d}x-a\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_nu_n^+\mathrm{d}x-b\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}u_n^+\mathrm{d}x \\
& = \quad \langle A(u_n),u_n^+\rangle+\lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}(u_n^++u_n^-)u_n^+\mathrm{d}x-a\int_\Omega |u_n|^{p-2}(u_n^++u_n^-)u_n^+\mathrm{d}x \\
& \quad\; -b\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Usando os fatos $|u_n| = u_n^+ - u_n^-$ e $(u_n^+)^2 = (u_n^+)^{q-2}(u_n^+)^{4-q}$, temos

$$\begin{aligned}
&\langle I'_{\lambda,s}(u_n), u_n^+\rangle \\
&= \langle A(u_n), u_n^+\rangle + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2}(u_n^+)^2 \mathrm{d}x - a\int_\Omega |u_n|^{p-2}(u_n^+)^2\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x \\
&= \langle A(u_n), u_n^+\rangle + \lambda \int_\Omega (u_n^+ - u_n^-)^{q-2}(u_n^+)^{q-2}(u_n^+)^{4-q}\mathrm{d}x \\
&\quad -a\int_\Omega (u_n^+ - u_n^-)^{p-2}(u_n^+)^{p-2}(u_n^+)^{4-p}\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Assim, como $\lambda > 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\langle I'_{\lambda,s}(u_n), u_n^+\rangle &= \langle A(u_n), u_n^+\rangle + \lambda\int_\Omega (u_n^+)^q\mathrm{d}x - a\int_\Omega (u_n^+)^p\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x \\
&\geq \langle A(u_n), u_n^+\rangle - a\int_\Omega (u_n^+)^p\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Daí concluímos que

$$\langle A(u_n), u_n^+\rangle \leq a\int_\Omega (u_n^+)^p\mathrm{d}x + b\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x + \langle I'_{\lambda,s}(u_n), u_n^+\rangle.$$

Usando este fato e o Lema A.23 (ver Apêndice A), obtemos que

$$\|u_n^+\|^p_{X_p^s} \leq a\int_\Omega (u_n^+)^p\mathrm{d}x + b\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x + |\langle I'_{\lambda,s}(u_n), u_n^+\rangle|.$$

Como $p_s^* > p$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é aberto e limitado, temos $L^{p_s^*} \hookrightarrow L^p$. Assim, existe $T > 0$ tal que $\int_\Omega (u_n^+)^p\mathrm{d}x \leq T^p\left(\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p_s^*}}$. Agora pela desigualdade de Young , temos que $T^p\left(\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p_s^*}} \leq \left(\frac{p_s^* - p}{p_s^*}\right)(T^p)^{\frac{p_s^*}{p_s^*-p}} + \frac{p}{p_s^*}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x$, então

$$\int_\Omega (u_n^+)^p\mathrm{d}x \leq \left(\frac{p_s^* - p}{p_s^*}\right)(T^p)^{\frac{p_s^*}{p_s^*-p}} + \frac{p}{p_s^*}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x.$$

Daí

$$\|u_n^+\|_{X_p^s}^p \leq a\left(\frac{p_s^*-p}{p_s^*}\right)(T^p)^{\frac{p_s^*}{p_s^*-p}} + \frac{ap}{p_s^*}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x + b\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x + |\langle I'_{\lambda,s}(u_n), u_n^+\rangle|.$$

Sem perda da generalidade consideremos M em vez de $a\left(\frac{p_s^*-p}{p_s^*}\right)(T^p)^{\frac{p_s^*}{p_s^*-p}}$, logo

$$\|u_n^+\|_{X_p^s}^p \leq \left(\frac{ap}{p_s^*}+b\right)\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x + |\langle I'_{\lambda,s}(u_n), u_n^+\rangle| + M.$$

Portanto, segue que :

$$\|u_n^+\|_{X_p^s}^p \leq C\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x + |\langle I'_{\lambda,s}(u_n), u_n^+\rangle| + M, \text{ sendo } C \text{ é uma constante positiva.}$$

Agora, substuindo (2.4) e (2.5) na desigualdade acima, obtemos:

$$\|u_n^+\|_{X_p^s}^p \leq C(M + \epsilon_n\|u_n\|_{X_p^s}) + \epsilon_n\|u_n^+\|_{X_p^s} + M. \tag{2.6}$$

Como ϵ_n é limitada, existe uma constante positiva K tal que

$$\|u_n^+\|_{X_p^s}^p \leq K\|u_n\|_{X_p^s} + K\|u_n^+\|_{X_p^s} + M. \tag{2.7}$$

Mostraremos que (u_n) é limitada em X_p^s. Antes disso, primeiro mostraremos que (u_n^+) é limitada em X_p^s.

De fato, suponha por absurdo que $\|u_n^+\|_{X_p^s} \to \infty$. Por (2.7) e pela desigualdade triangular $\|u_n\|_{X_p^s} = \|u_n^+ + u_n^-\|_{X_p^s} \leq \|u_n^+\|_{X_p^s} + \|u_n^-\|_{X_p^s}$, segue que

$$\|u_n^+\|_{X_p^s}^p \leq K(\|u_n^+\|_{X_p^s} + \|u_n^-\|_{X_p^s}) + K\|u_n^+\|_{X_p^s} + M.$$

Assim,

$$\|u_n^+\|_{X_p^s}\left(\|u_n^+\|_{X_p^s}^{p-1} - 2K\right) \leq K\|u_n^-\|_{X_p^s} + M.$$

Isto significa que como $\|u_n^+\|_{X_p^s} \to \infty$ quando $n \to \infty$, então

$$\|u_n^-\|_{X_p^s} \to \infty \text{ quando } n \to \infty.$$

Além disso, pelo Lema A.23 (ver Apêndice A) temos

$$\|u_n\|_{X_p^s}^p = \langle A(u_n), u_n\rangle = \langle A(u_n), u_n^+\rangle + \langle A(u_n), u_n^-\rangle \geq \|u_n^+\|_{X_p^s}^p + \|u_n^-\|_{X_p^s}^p. \tag{2.8}$$

Logo podemos deduzir que

$$\|u_n\|_{X_p^s} \to \infty \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.9}$$

Agora, defina $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{X_p^s}}$. Como (v_n) é limitada em X_p^s, então existe uma subsequência (v_{n_j}) de (v_n) e $v \in X_p^s$ tais que $v_{n_j} \rightharpoonup v$ em X_p^s e $v_{n_j} \to v$ q.t.p em Ω. Sem perda de generalidade, podemos trocar (v_{n_j}) por (v_n), donde $v_n \rightharpoonup v$ em X_p^s e $v_n \to v,$ q.t.p. em Ω. Pela Proposição A.34 (ver Apêndice A),

$$v_n \to v \quad \text{em} \quad L^r,\ 1 \leq r < p_s^* \qquad \text{e} \qquad v_n \to v,\ \text{q.t.p em } \Omega. \tag{2.10}$$

Por outro lado, segue de (2.7) e novamente pela desigualdade triangular que

$$\begin{aligned}
\|u_n^+\|_{X_p^s}^p &\leq K\|u_n\|_{X_p^s} + K\|u_n^+\|_{X_p^s} + M \\
&\leq K(\|u_n^+\|_{X_p^s} + \|u_n^-\|_{X_p^s}) + K\|u_n^+\|_{X_p^s} + M \\
&= 2K\|u_n^+\|_{X_p^s} + K\|u_n^-\|_{X_p^s} + M.
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por $\|u_n^+\|_{X_p^s}^p$, segue

$$1 \leq \frac{2K}{\|u_n^+\|_{X_p^s}^{p-1}} + \frac{K\|u_n^-\|_{X_p^s}}{\|u_n^+\|_{X_p^s}^p} + \frac{M}{\|u_n^+\|_{X_p^s}^p}. \tag{2.11}$$

Como $\|u_n^+\| \to \infty$ e $p > q > 1$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2K}{\|u_n^+\|_{X_p^s}^{p-1}} + \frac{M}{\|u_n^+\|_{X_p^s}^{p}} < \frac{7}{8}, \ \forall\, n \geq n_0.$$

Assim, por (2.11),

$$1 \leq \frac{K\|u_n^-\|_{X_p^s}}{\|u_n^+\|_{X_p^s}^{p}} + \frac{7}{8}, \ \forall\, n \geq n_0.$$

e, consequentemente,

$$\frac{1}{8K} \leq \frac{\|u_n^-\|_{X_p^s}}{\|u_n^+\|_{X_p^s}^{p}}, \ \forall\, n \geq n_0.$$

Tomando $\delta = \dfrac{1}{8K}$, observanos que

$$\|u_n^-\|_{X_p^s} \geq \delta \|u_n^+\|_{X_p^s}^{p}, \ \forall\, n \geq n_0. \tag{2.12}$$

Desse modo, elevando ambos os lados ao expoente p, segue que

$$\|u_n^-\|_{X}^{p} \geq \delta^p \|u_n^+\|_{X_p^s}^{p^2}, \ \forall\, n \geq n_0.$$

Usando o Lema A.23 (ver Apêndice A) e algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\|u_n\|_{X_p^s} = (\langle A(u_n), u_n\rangle)^{\frac{1}{p}} \geq (\|u_n^-\|_{X_p^s}^{p} + \|u_n^+\|_{X_p^s}^{p})^{\frac{1}{p}} \geq (\|u_n^+\|_{X_p^s}^{p} + \delta^p \|u_n^+\|_{X_p^s}^{p^2})^{\frac{1}{p}}, \ \forall\, n \geq n_0.$$

Portanto, segue que $\dfrac{\|u_n^+\|_{X_p^s}}{(\|u_n^+\|_{X_p^s}^{p} + \delta^p \|u_n^+\|_{X_p^s}^{p^2})^{\frac{1}{p}}} \geq \dfrac{\|u_n^+\|}{\|u_n\|}$, $\forall\, n \geq n_0$, ou seja

$$\frac{\|u_n^+\|_{X_p^s}}{(\|u_n^+\|_{X_p^s}^{2} + \delta^p \|u_n^+\|_{X_p^s}^{p^2})^{\frac{1}{p}}} \geq \|v_n^+\|_{X_p^s} \geq 0, \ \forall\, n \geq n_0. \tag{2.13}$$

Como $0 \leq \|v_n^+\|_{X_p^s} \leq \frac{1}{\delta \|u_n^+\|_{X_p^s}^{p}} \to 0$, pois $\|u_n^+\|_{X_p^s} \to +\infty$ e $p > 1$, então $v_n^+ \to 0$ em

X_p^s, quando $n \to \infty$ e segue da Proposição A.34 (ver Apêndice A)

$$v_n^+ \to 0 \text{ em } L^p(\Omega), \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.14}$$

Lembrando que $v_n \to v$ em $L^p(\Omega)$ e $v_n^+ = \max\{0, v_n\} = \dfrac{v_n + |v_n|}{2}$, então $v_n^+ \to v^+$ em $L^p(\Omega)$. Portanto decorre de (2.14) que, $v^+ = 0$ em $L^p(\Omega)$ e como $v = v^+ + v^-$, segue que

$$v = v^- = \min\{0, v\} = \frac{v - |v|}{2} \leq 0. \tag{2.15}$$

isto é,

$$v \leq 0. \tag{2.16}$$

Além disso, usando (2.8) segue que

$$\|v_n^-\|_{X_p^s} = \frac{\|u_n^-\|_{X_p^s}}{\|u_n\|_{X_p^s}} \leq \frac{\|u_n^-\|_{X_p^s}}{(\|u_n^+\|_p^p + \|u_n^-\|_{X_p^s}^p)^{\frac{1}{p}}}.$$

Logo,

$$\|v_n^-\|_{X_p^s} = \frac{\|u_n^-\|_{X_p^s}}{(\|u_n^+\|_{X_p^s}^p + \|u_n^-\|_{X_p^s}^p)^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{\|u_n^-\|_{X_p^s}}{(\|u_n^-\|_{X_p^s}^p)^{\frac{1}{p}}}.$$

Assim, podemos concluir que

$$\|v_n^-\|_{X_p^s} \leq 1. \tag{2.17}$$

Pela seguinte desigualdade encontrada em [86, p.122].

$$||b|^p - |a|^p - |b-a|^p| \leq K_p \left(|b-a|^{p-1}|a| + |a|^{p-1}|b-a|\right), \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}, \text{ e } \forall\, p > 1$$

para alguma constante K_p que depende de p. Temos para $b = \|u_n^+\|_{X_p^s} + \|u_n^-\|_{X_p^s}$ e

$a = \|u_n^+\|_{X_p^s}$

$$\begin{aligned}\|u_n\|_{X_p^s}^p &\leq (\|u_n^+\|_{X_p^s} + \|u_n^-\|_{X_p^s})^p \\ &\leq \|u_n^+\|_{X_p^s}^p + \|u_n^-\|_{X_p^s}^p + K_p\left(\|u_n^-\|_{X_p^s}^{p-1}\|u_n^+\|_{X_p^s} + \|u_n^+\|_{X_p^s}^{p-1}\|u_n^-\|_{X_p^s}\right).\end{aligned}$$

Agora por (2.12),

$$\|u_n\|_{X_p^s}^p \leq \frac{1}{\delta}\|u_n^-\|_{X_p^s} + \|u_n^-\|_{X_p^s}^p + K_p\|u_n^-\|_{X_p^s}^{p-1+\frac{1}{p}}\frac{1}{\delta^p} + K_p\frac{1}{\delta^{\frac{p-1}{p}}}\|u_n^-\|_{X_p^s}^{2-\frac{1}{p}}.$$

Por conseguinte

$$\frac{\|u_n^-\|_{X_p^s}^p}{\frac{1}{\delta}\|u_n^-\|_{X_p^s} + \|u_n^-\|_{X_p^s}^p + K_p\|u_n^-\|_{X_p^s}^{p-1+\frac{1}{p}}\frac{1}{\delta^p} + K_p\frac{1}{\delta^{\frac{p-1}{p}}}\|u_n^-\|_{X_p^s}^{2-\frac{1}{p}}} \leq \frac{\|u_n^-\|_{X_p^s}^p}{\|u_n\|_{X_p^s}^p}.$$

Logo, nós concluímos que

$$\frac{\|u_n^-\|_{X_p^s}^p}{\frac{1}{\delta}\|u_n^-\|_{X_p^s} + \|u_n^-\|_{X_p^s}^p + K_p\|u_n^-\|_{X_p^s}^{p-1+\frac{1}{p}}\frac{1}{\delta^p} + K_p\frac{1}{\delta^{\frac{p-1}{p}}}\|u_n^-\|_{X_p^s}^{2-\frac{1}{p}}} \leq \|v_n^-\|^p.$$

Portanto, por (2.17), vale a seguinte estimativa para $\|v_n^-\|$:

$$\frac{\|u_n^-\|_{X_p^s}^p}{\|u_n^-\|_{X_p^s}^p\left(\frac{1}{\delta}\frac{1}{\|u_n^-\|_{X_p^s}^{p-1}} + 1 + K_p\|u_n^-\|_{X_p^s}^{-1+\frac{1}{p}}\frac{1}{\delta^p} + K_p\frac{1}{\delta^{\frac{p-1}{p}}}\|u_n^-\|_{X_p^s}^{2-\frac{1}{p}-p}\right)} \leq \|v_n^-\|_{X_p^s}^p \leq 1.$$

Como $p > 1$, $-1+\dfrac{1}{p} < 0$, $2-\dfrac{1}{p}-p = -\dfrac{(p-1)^2}{p} < 0$ e $\|u_n^-\|_{X_p^s} \to \infty$, quando $n \to \infty$ podemos deduzir que

$$\|v_n^-\|_{X_p^s} \to 1, \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.18}$$

Por outro lado, como $u_n^- \leq 0$, segue que

$$
\begin{aligned}
|\langle I'_{\lambda,s}(u_n), u_n^-\rangle| =& \left|\langle A(u_n), u_n^-\rangle + \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}(-u_n^-)^2 \mathrm{d}x - a\int_\Omega |u_n|^{p-2}(-u_n^-)^2\mathrm{d}x\right| \\
=& \left|\langle A(u_n), u_n^-\rangle + \lambda\int_\Omega (u_n^+ - u_n^-)^{q-2}(-u_n^-)^{q-2}(-u_n^-)^{4-q}\mathrm{d}x\right. \\
& \left. - a\int_\Omega (u_n^+ - u_n^-)^{p-2}(-u_n^-)^{p-2}(-u_n^-)^{4-p}\mathrm{d}x\right| \\
=& \left|\langle A(u_n), u_n^-\rangle + \lambda\int_\Omega |u_n^-|^q \mathrm{d}x - a\int_\Omega |u_n^-|^p\mathrm{d}x\right|.
\end{aligned}
$$

Logo, pela desigualdade em (2.4), tem-se

$$
\left|\frac{\langle A(u_n), u_n^-\rangle}{\|u_n^-\|^p_{X_p^s}} + \lambda\frac{\|u_n^-\|^q_{L^q(\Omega)}}{\|u_n^-\|^p_{X_p^s}} - a\frac{\|u_n^-\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u_n^-\|^2}\right| \leq \epsilon_n\frac{1}{\|u_n^-\|^p}. \tag{2.19}
$$

Usando o Lema A.23 (ver Apêndice A) e a propriedade do operador não linear A

$$
\|u_n^-\|^p_{X_p^s} \leq \langle A(u_n), u_n^-\rangle \leq |\langle A(u_n), u_n^-\rangle| \leq \|u_n\|^{p-1}_{X_p^s}\|u_n^-\|_{X_p^s}.
$$

Portanto,

$$
1 \leq \frac{\langle A(u_n), u_n^-\rangle}{\|u_n\|^p_{X_p^s}} \leq \left(\frac{1}{\left\|\frac{u_n^-}{\|u_n\|_{X_p^s}}\right\|}\right)^{p-1} = \left(\frac{1}{\|v_n^-\|}\right)^{p-1}.
$$

Daí, de (2.18) tem-se

$$
\frac{\langle A(u_n), u_n^-\rangle}{\|u_n^-\|^p_{X_p^s}} \to 1 \tag{2.20}
$$

Lembrando que $\epsilon_n \to 0$, usando (2.19) e (2.20) concluímos que

$$
-\frac{\lambda\|u_n^-\|^q_{L^q(\Omega)}}{\|u_n^-\|^p_{X_p^s}} + \frac{a\|u_n^-\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u_n^-\|^p_{X_p^s}} \to 1, \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.21}
$$

Note agora que podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
-\frac{\lambda\|u_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q}{\|u_n^-\|_{X_p^s}^p} + \frac{a\|u_n^-\|_{L^p(\Omega)}^p}{\|u_n^-\|_{X_p^s}^p} &= -\frac{\lambda\|u_n\|_{X_p^s}^p}{\|u_n^-\|_{X_p^s}^p}\frac{\|u_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q}{\|u_n\|_{X_p^s}^p} + \frac{a\|u_n\|_{X_p^s}^p}{\|u_n^-\|_{X_p^s}^p}\frac{\|u_n^-\|_{L^p(\Omega)}^p}{\|u_n\|_{X_p^s}^p} \\
&= -\frac{\lambda}{\|v_n^-\|_{X_p^s}^p}\frac{\|u_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q}{\|u_n\|_{X_p^s}^p} + \frac{a}{\|v_n^-\|_{X_p^s}^p}\|v_n^-\|_{L^p(\Omega)}^p.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
-\frac{\lambda\|u_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q}{\|u_n^-\|_{X_p^s}^p} + \frac{a\|u_n^-\|_{L^p(\Omega)}^p}{\|u_n^-\|_{X_p^s}^p} = \frac{1}{\|v_n^-\|_{X_p^s}^p}\left(-\lambda\frac{\|u_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q}{\|u_n\|_{X_p^s}^p} + a\|v_n^-\|_{L^p(\Omega)}^p\right). \tag{2.22}
$$

Assim, como $v_n \to v$ em L^r para todo $1 \leq r < p_s^*$ e $1 < q < p < p_s^*$, então $v_n \to v$ em $L^q(\Omega)$. Logo, a sequência (v_n) é limitada em $L^q(\Omega)$ e portanto (v_n^-) é limitada em $L^q(\Omega)$. Como $\|u_n\| \to \infty$, usando a limitação de (v_n^-) temos que

$$
-\lambda\frac{\|u_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q}{\|u_n\|_{X_p^s}^p} = \frac{-\lambda}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-q}}\|v_n^-\|_{L^q(\Omega)}^q \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.23}
$$

Então, por (2.18), (2.21), (2.23) em (2.22), podemos concluir que

$$
a\|v_n^-\|_{L^p(\Omega)}^p \to 1, \text{ quando } n \to \infty,
$$

e assim,

$$
\|v_n^-\|_{L^p(\Omega)} \to \frac{1}{a^{\frac{1}{p}}}, \text{ quando } n \to \infty.
$$

Logo

$$
\|v^-\|_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{a^{\frac{1}{p}}} \quad \text{em} \ L^p(\Omega)
$$

e consequentemente de (2.15), temos

$$
\|v\|_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{a^{\frac{1}{p}}} \neq 0. \tag{2.24}
$$

Agora, tomando $h=\varphi_1$ em (2.4) segue-se,

$$\begin{aligned}\epsilon_n\|\varphi_1\|_{X_p^s} = \bigg|&\langle A(u_n),\varphi_1\rangle + \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n\varphi_1 \mathrm{d}x - a\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n\varphi_1\mathrm{d}x\\ &-b\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}\varphi_1\mathrm{d}x\bigg|.\end{aligned}$$

Dividindo por $\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}o(1)\frac{\|\varphi_1\|_{X_p^s}}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} =&\langle A(u_n), \frac{\varphi_1}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\rangle + \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}\frac{u_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\varphi_1\mathrm{d}x\\ &- a\int_\Omega |u_n|^{p-2}\frac{u_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\varphi_1\mathrm{d}x - b\int_\Omega \frac{(u_n^+)^{p_s^*-1}}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\varphi_1\mathrm{d}x. \qquad (2.25)\end{aligned}$$

Note que $\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1} = \|u_n\|_{X_p^s}^{p-2}\|u_n\|_{X_p^s}$ e consequentemente

$$\begin{aligned}\langle A(u_n), \frac{\varphi_1}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))\left(\frac{\varphi_1(x)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} - \frac{\varphi_1(y)}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\right)}{|x-y|^{N+sp}}\\ &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{\left|\frac{u_n(x)}{\|u_n\|} - \frac{u_n(y)}{\|u_n\|_{X_p^s}}\right|^{p-2}\left(\frac{u_n(x)}{\|u_n\|_{X_p^s}} - \frac{u_n(y)}{\|u_n\|_{X_p^s}}\right)(\varphi_1(x)-\varphi_1(y))}{|x-y|^{N+sp}}\\ &= \langle A(v_n),\varphi_1\rangle.\end{aligned}$$

Reescrevendo o segundo e terceiro termo da expressão do lado direito de (2.25) segue

$$\begin{aligned}o(1)\frac{\|\varphi_1\|_{X_p^s}}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} =&\langle A(v_n),\varphi_1\rangle + \frac{\lambda}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-q}}\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1\mathrm{d}x - a\int_\Omega |v_n|^{p-2}v_n\varphi_1\mathrm{d}x\\ &- b\int_\Omega \frac{(u_n^+)^{p_s^*-1}}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\varphi_1\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Como φ_1 é autofunção associada ao autovalor λ_1, vemos que

$$\frac{\epsilon_n\|\varphi_1\|}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}} \geq \left|(\lambda_1 - a)\int_\Omega |v_n|^{p-2}v_n\varphi_1 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{\|u_n\|^{p-q}_{X^s_p}}\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1\mathrm{d}x \right.$$
$$\left. - \frac{b}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}\varphi_1\mathrm{d}x\right|$$

Usando o fato que $\epsilon_n \to 0$ e $\dfrac{1}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}} \to 0$, quando $n \to \infty$, temos

$$(\lambda_1 - a)\int_\Omega |v_n|^{p-2}v_n\varphi_1\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{\|u_n\|^{p-q}_{X^s_p}}\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1\mathrm{d}x - \frac{b}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}\varphi_1\mathrm{d}x \to 0. \tag{2.26}$$

Vamos mostrar que os dois últimos termos do limite acima tendem a zero, quando n tende ao infinito.

Afirmação 1) $\dfrac{\lambda}{\|u_n\|^{p-q}_{X^s_p}}\displaystyle\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1\mathrm{d}x \to 0,$ quando $n \to \infty$.

De fato, basta provar que $\displaystyle\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1$ é limitada. Note que $\left|\displaystyle\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1\mathrm{d}x\right| = \left|\displaystyle\int_{\overline{\Omega}} |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1\mathrm{d}x\right| \leq \displaystyle\int_{\overline{\Omega}} |\ v_n|^{q-1}|\varphi_1|\mathrm{d}x.$

Além disso, como φ_1 é regular e $\overline{\Omega}$ é compacto, temos que existe $M_1 > 0$ tal que $|\varphi_1(x)| \leq M_1,\ \forall\, x \in \overline{\Omega}$. Deste modo,

$$\left|\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{\overline{\Omega}} |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1\mathrm{d}x\right| \leq M_1\int_{\overline{\Omega}} |v_n|^{q-1}\mathrm{d}x.$$

Agora usando a desigualdade de Hölder na última integral,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n\varphi_1\mathrm{d}x\right| &\leq M_1\||v_n|^{q-1}\|_{L^{\frac{1}{q-1}}(\Omega)}\|1\|_{L^{\frac{1}{2-q}}(\Omega)}\\ &= M_1\left(\int_{\overline{\Omega}} |v_n|\mathrm{d}x\right)^{q-1}|\mathrm{med}(\overline{\Omega})|^{2-q}.\end{aligned}$$

Assim, a prova da afirmação segue-se de $v_n \to v$ em L^1 e $\overline{\Omega}$ é compacto.

Afirmação 2) $\dfrac{b}{\|u_n\|^{p-1}_{X^s_p}}\displaystyle\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}\varphi_1\mathrm{d}x \to 0$ quando $n \to \infty$.

De fato, de forma similar ao procedimento da afirmação 1), como φ_1 é limitada podemos obter que

$$\left|\frac{b}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}\varphi_1 \mathrm{d}x\right| \leq \frac{M_1 b}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}\mathrm{d}x. \tag{2.27}$$

Por outro lado, decorre de (2.5) que

$$\frac{1}{\|u_n\|_{X_p^s}^{\frac{p_s^*(p-1)}{p_s^*-1}}}\int_\Omega (u^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x \leq \frac{M_1}{\|u_n\|_{X_p^s}^{\frac{p_s^*(p-1)}{p_s^*-1}}} + \frac{\epsilon_n\|u_n\|_{X_p^s}}{\|u_n\|_{X_p^s}^{\frac{p_s^*(p-1)}{p_s^*-1}}}.$$

Logo, obtemos

$$\int_\Omega \left[\frac{(u^+)^{p_s^*-1}}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\right]^{\frac{p_s^*}{p_s^*-1}} \mathrm{d}x \leq \frac{M_1}{\|u_n\|_{X_p^s}^{\frac{p_s^*}{p_s^*-1}}} + \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{\frac{1}{p_s^*-1}}},$$

pois $\dfrac{p_s^*(p-1)}{p_s^*-1} - 1 > \dfrac{1}{p_s^*-1}$ e $\|u_n\|_{X_p^s} > 1$.

Lembrando que $p_s^* > p > q > 1$ e $\|u_n\|_{X_p^s} \to \infty$, se conclui que

$$\frac{(u_n^+)^{p_s^*-1}}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} \to 0 \text{ em } L^{\frac{p_s^*}{p_s^*-1}}(\Omega).$$

Daí, pela proposição A.34 (ver Apêndice A)

$$\frac{(u_n^+)^{p_s^*-1}}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} \to 0 \text{ em } L^1(\Omega),$$

isto é,

$$\frac{1}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}\mathrm{d}x \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Agora, como em (2.27), M_1 e b são constantes positivas, podemos concluir que

$$\frac{b}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}\varphi_1 \mathrm{d}x \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Afirmação 3) $\displaystyle\int_\Omega |v_n|^{p-2}v_n\varphi_1 \mathrm{d}x \to \int_\Omega |v|^{p-2}v\varphi_1 \mathrm{d}x$, quando $n \to \infty$.
De fato, Como $v_n \to v$ em $L^p(\Omega)$, segue pelo Teorema A.37 (ver Apêndice A) , existe uma subsequência de (v_n) ainda denotada por (v_n) e $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|v_n| \leq h$, q.t.p em Ω, então

$$||v_n|^{p-2}v_n\varphi_1| = |v_n|^{p-1}|\varphi_1| \leq h^{p-1}|\varphi_1|, \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Agora, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega |h^{p-1}|\varphi_1||\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |h|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

em que a última desigualdade decorre da Proposição A.34 (ver Apêndice A) e do fato que $h \in L^p(\Omega)$. Portanto,

$$h^{p-1}|\varphi_1| \in L^1(\Omega).$$

Também podemos concluir de $v_n \to v$ q.t.p em Ω que $|v_n|^{p-2}v_n\varphi_1 \to |v|^{p-2}v\varphi_1$ q.t.p em Ω. Logo, o Teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver Teorema A.36, Apêndice A) garante que

$$\int_\Omega |v_n|^{p-2}v_n\varphi_1 \to \int_\Omega |v|^{p-2}v\varphi_1.$$

Agora, mostraremos que o limite fraco v da sequência (v_n) é nulo.

De fato, por (2.26) e pelas afirmações 1), 2) e 3) podemos deduzir que

$$(\lambda_1 - a)\int_\Omega |v|^{p-2}v\varphi_1 \mathrm{d}x = 0.$$

Pela hipótese $\lambda_1 < a$, segue que $\displaystyle\int_\Omega |v|^{p-2}(-v)\varphi_1 \mathrm{d}x = 0$. Assim, $|v|^{p-1}\varphi_1 = 0$ q.t.p em Ω (pois, por (2.16), $-v \geq 0$.)

Usando o fato que $\varphi_1 > 0$ em Ω é autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1, obtemos $v = 0$ q.t.p. em Ω, o que é um absurdo, pois por (2.24), $v \neq 0$. Portanto (u_n^+) é, de fato, limitada em X_p^s.

Voltando ao nosso objetivo, agora mostraremos que a sucessão (u_n) é limitada em X_p^s. Suponha por absurdo que $\|u_n\|_{X_p^s} \to \infty$. Pela Proposição A.34 (ver Apêndice A) existe $k > 0$ tal que $\|u_n^+\|_{L^{p_s^*}(\Omega)} \leq k\|u_n^+\|_{X_p^s}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\|u_n^+\|_{L^{p_s^*}(\Omega)} \leq Ck$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (pois como foi provado acima (u_n^+) é limitada em X_p^s). Isto significa que $\displaystyle\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x < (Ck)^{p_s^*}$, portanto

$$\frac{1}{\|u_n\|_{X_p^s}^p}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.28}$$

Por outro lado, tomando $h = v_n$ em (2.4), obtemos

$$\left|\langle A(u_n), v_n\rangle + \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_nv_n\mathrm{d}x - a\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_nv_n\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}v_n\mathrm{d}x\right| \leq \epsilon_n.$$

Pela definição de $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{X_p^s}}$, dividindo a desigualdade acima por $\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} \geq &\left|\langle A(u_n), \frac{v_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\rangle + \lambda\int_\Omega \frac{|u_n|^{q-2}u_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}v_n\mathrm{d}x - a\int_\Omega \frac{|u_n|^{p-2}u_nv_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\mathrm{d}x\right.\\ &\left. - \frac{b}{\|u_n\|_{X_p^s}^p}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

Note que $\langle A(u_n), \dfrac{v_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\rangle = \langle A(v_n), v_n\rangle = \|v_n\|_{X_p^s}^p = 1$ e reescrevendo o segundo e terceiro termos da expressão do lado dereito segue

$$\left|1 + \frac{\lambda}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-q}}\int_\Omega |v_n|^q\mathrm{d}x - a\int_\Omega |v_n|^p\mathrm{d}x - \frac{b}{\|u_n\|_{X_p^s}^p}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} \tag{2.29}$$

e, consequentemente,

$$\left|1+\frac{\lambda}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-q}}\|v_n\|_{L^q(\Omega)}^q - a\|v_n\|_{L^p(\Omega)}^p - \frac{b}{\|u_n\|_{X_p^s}^p}\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}.$$

Sabemos que (v_n) é limitada em L^q para $1 < q < p < p_s^*$ e $\|u_n\|_{X_p^s} \to \infty$, quando $n \to \infty$, assim por (2.28) e pela estimativa acima, decorre que

$$a\|v_n\|_{L^p(\Omega)}^p \to 1, \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.30}$$

Agora, lembrando que $v_n \to v$ em $L^r(\Omega)$, para todo $1 \leq r < p_s^*$; em particular, $v_n \to v$ em L^p, usando (2.30), obtemos que

$$v \neq 0. \tag{2.31}$$

Note que em (2.24), mostramos também que $v \neq 0$, mas neste caso estamos com hipóteses distintas do caso em que provamos que $v \neq 0$ em (2.24).

Mostraremos agora que $v \leq 0$ em Ω.

De fato, como (u_n^+) é limitada em X_p^s, podemos afirmar que $v_n^+ \to 0$ em X_p^s, quando $n \to \infty$, sendo $v_n^+ = \dfrac{u_n^+}{\|u_n\|_{X_p^s}}$. Segue-se da Proposição A.34 (ver Apêndice A) que $v_n^+ \to 0$, em $L^p(\Omega)$, $v_n^+ \to 0$, q.t.p em Ω, quando $n \to \infty$. Da desigualdade $v_n = v_n^+ + v_n^- \leq v_n^+$ resulta que

$$v \leq 0, \text{ q.t.p em } \Omega. \tag{2.32}$$

Por outro lado, o resultado obtido em (2.4) nos dá que cada $h \in X_p^s$ verifica a estimativa

$$\left|\langle A(u_n), h\rangle + \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n h\mathrm{d}x - a\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n h\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}h\mathrm{d}x\right| \leq \epsilon_n\|h\|_{X_p^s}.$$

Dividindo esta desigualdade por $\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}$ segue que

$$\frac{\epsilon_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\|h\|_{X_p^s} \geq \left| \langle A(u_n), \frac{h}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} \rangle + \lambda \int_\Omega \frac{|u_n|^{q-2}u_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} h\mathrm{d}x - a\int_\Omega \frac{|u_n|^{p-2}u_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} h\mathrm{d}x \right.$$
$$\left. - b\int_\Omega \frac{(u_n^+)^{p_s^*-1}}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} h\mathrm{d}x \right|.$$

Agora, usando a definição de $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{X_p^s}}$, obtemos

$$\frac{\epsilon_n}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}}\|h\|_{X_p^s} \geq \left| \langle A(v_n), h \rangle + \frac{\lambda}{\|u\|_{X_p^s}^{p-q}} \int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n h\mathrm{d}x - a\int_\Omega |v_n|^{p-2}v_n h\mathrm{d}x \right.$$
$$\left. - b\int_\Omega \frac{(u_n^+)^{p_s^*-1}}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} h\mathrm{d}x \right|. \tag{2.33}$$

Usando o Lema A.52 (ver Apêndice A), temos

$$\langle A(v_n), h \rangle \to \langle A(v), h \rangle, \quad \text{para todo } h \in X_p^s. \tag{2.34}$$

Repetindo os mesmos argumentos feitos nas afirmações 1), 2) e 3) temos $\dfrac{\lambda}{\|u\|_{X_p^s}^{p-q}} \displaystyle\int_\Omega |v_n|^{q-2}v_n h\mathrm{d}x \to 0$, $b\displaystyle\int_\Omega \frac{(u_n^+)^{p_s^*-1}}{\|u_n\|_{X_p^s}^{p-1}} h\mathrm{d}x \to 0$ e $\displaystyle\int_\Omega |v_n|^{p-2}v_n h \to \int_\Omega |v|^{p-2}vh$, quando $n \to \infty$, para todo $h \in X_p^s$. Portanto, por (2.34) e (2.33)

$$\langle A(v), h \rangle = a\int_\Omega |v|^{p-2}vh\mathrm{d}x, \text{ para todo } h \in X_s^p.$$

Agora, tomando $h = \varphi_1$, integrando por partes e usando que φ_1 é autofunção associada ao autovalor λ_1, obtemos

$$(\lambda_1 - a)\int_\Omega |v|^{p-2}v\varphi_1\mathrm{d}x = 0.$$

Pela hipótese, $\lambda_1 < a$ e por (2.32), conclui-se $|v|^{p-1}v\varphi_1 = 0$ q.t.p. em Ω. Assim usando o fato que $\varphi_1 > 0$ em Ω, podemos deduzir que $v = 0$ q.t.p. em Ω, o que é um absurdo, pois por (2.31) $v \neq 0$. Portanto a sequência (u_n) é limitada. ■

2.1.4 Compacidade do funcional $I_{\lambda,s}$

A maior dificuldade aqui é que o funcional $I_{\lambda,s}$ definido acima, não satisfaz a condição $(P.S)$ em todos os níveis, devido a falta de compacidade da imersão de X em $L^{p_s^*}$. Este problema é resolvido utilizando a técnica desenvolvida por Brézis-Nirenberg [20], mostrando que a compacidade ocorre abaixo de um certo nível que será obtido no próximo lema desse capítulo.

Assim, seja

$$S_s = \inf \left\{ \frac{\|u\|^p_{X_p^s}}{\left(\int_\Omega |u|^{p_s^*} \mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{p_s^*}}} \; ; \; u \in X_p^s, u \neq 0 \right\}.$$

S_s é a melhor constante de Sobolev da imersão $X_p^s \hookrightarrow L^{p_s^*}(\Omega)$.

Lema 2.6 *Seja $\lambda_1 < a$, para cada $\lambda > 0$, o funcional $I_{\lambda,s}$ satisfaz a condição Palais Smale para todo nível*

$$C < \frac{s}{N} b^{\frac{sp-N}{sp}} S_s^{\frac{N}{sp}}.$$

Demonstração: Seja $(u_n) \subset X_p^s$ uma sequência que satisfaça $I_{\lambda,s}(u_n) \to C$ e $|\langle I'_{\lambda,s}(u_n), v\rangle| \leq \epsilon_n \|v\|_{X_p^s}$, $\forall\, v \in X_p^s$ com $\epsilon_n \to 0$, quando $n \to \infty$.

Pelo Lema 2.5, temos que (u_n) é limitada em X_p^s, assim, existe uma subsequência, ainda denotada por (u_n) e existe $u \in X_p^s$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em X_p^s. Logo, pela Proposição A.34 (ver Apêndice A) podemos deduzir que $u_n \to u$ em L^r, $\forall\, 1 \leq r < p^*$ e $u_n \to u$ q.t.p. em Ω. Vê-se facilmente que como $1 < q < p < p_s^*$, então

$$u_n \to u \text{ em } L^q(\Omega) \;\text{ e }\; u_n \to u \text{ em } L^p(\Omega). \tag{2.35}$$

Também, pela Proposição A.34 (ver Apêndice A) existe uma constante $K > 0$ tal que $\|u_n^+\|_{L^{p_s^*}(\Omega)} \leq K\|u_n^+\|_{X_p^s}$. Note que

$$\|u^+\|_{X_p^s} = \left\|\frac{u+|u|}{2}\right\|_{X_p^s} \leq \frac{\|u\|_{X_p^s} + \||u|\|_{X_p^s}}{2} \leq \|u\|_{X_p^s},$$

então

$$\|u_n^+\|_{L^{p_s^*}(\Omega)} \leq K\|u_n\|_{X_p^s}.$$

Assim, lembrando que (u_n) é limitada em X_p^s, segue que

$$(u_n^+) \text{ é limitada em } L^{p_s^*}(\Omega). \tag{2.36}$$

Por outro lado, pela hipótese $\langle I'_{\lambda,s}(u_n), v\rangle \to 0,$ quando $n \to \infty$, $\forall\, v \in X_p^s$. Assim, se $v \in X_p^s$, então

$$\langle A(u_n), v\rangle + \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n v\mathrm{d}x - a\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n v\mathrm{d}x - b\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1}v\mathrm{d}x \to 0, \tag{2.37}$$

quando $n \to \infty$.

Agora vamos calcular o limite de cada parcela e mostrar que u é solução fraca do problema

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = -\lambda|u|^{q-2}u + a|u|^{p-2}u + b(u^+)^{p_s^*-1}\,, & \text{em } \Omega, \\ u = 0\,, \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{2.38}$$

De fato, como $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$, segue pelo Teorema A.37 (ver Apêndice A), existe uma subsequência de (u_n) ainda denotada por (u_n) e $h \in L^q(\Omega)$ tal que $|u_n| \leq h$, q.t.p em Ω, então para cada $v \in X_p^s$ decorre que

$$||u_n|^{q-2}u_n v| = |u_n|^{q-1}|v| \leq h^{q-1}|v|, \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Agora, pela desiguadade de Hölder,

$$\int_\Omega |h^{q-1}|v||\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |h|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_\Omega |v|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

em que a última desigualdade segue-se da Proposição A.34 (ver Apêndice A) e do fato que $h \in L^q(\Omega)$. Portanto,

$$h^{q-1}|v| \in L^1(\Omega) \;\; \forall\, v \in X_p^s.$$

Também podemos concluir de $u_n \to u$ q.t.p em Ω que $|u_n|^{q-2}u_n v \to |u_n|^{q-2}u_n v$ q.t.p em Ω. Logo, o Teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver Teorema A.36 (ver Apêndice A) garante que

$$\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n v \to \int_\Omega |u|^{q-2}uv, \;\; \forall\, v \in X_p^s. \tag{2.39}$$

Analogamente podemos obter que

$$\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n v \to \int_\Omega |u|^{p-2}uv, \;\; \forall\, v \in X_p^s. \tag{2.40}$$

Usando Lema A.52 (ver Apêndice A), segue que

$$\langle A(u_n), v\rangle \to \langle A(u), v\rangle, \;\; \text{para todo } v \in X_p^s. \tag{2.41}$$

Finalmente, por (2.36), a sequência $((u_n^+)^{p_s^*-1})$ é limitada em $L^{\frac{p_s^*}{p_s^*-1}}(\Omega)$. Notando também que $(u_n^+)^{p_s^*-1} \to (u^+)^{p_s^*-1}$ q.t.p em Ω, pelo Lema de Brézis-Lieb (ver Lema A.41 Apêndice A)) obtemos que

$$(u_n^+)^{p_s^*-1} \rightharpoonup (u^+)^{p_s^*-1}, \;\text{em } L^{\frac{p_s^*}{p_s^*-1}}(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1} v \mathrm{d}x \to \int_\Omega (u^+)^{p_s^*-1} v \mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in L^{p_s^*},$$

em particular

$$\int_\Omega (u_n^+)^{p_s^*-1} v \mathrm{d}x \to \int_\Omega (u^+)^{p_s^*-1} v \mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in X_p^s. \tag{2.42}$$

Substituindo (2.39), (2.40), (2.41), (2.42) em (2.37), obtemos

$$\langle A(u), v\rangle + \lambda \int_\Omega |u|^{q-2} uv \mathrm{d}x - a \int_\Omega |u|^{p-2} uv \mathrm{d}x - b \int_\Omega (u^+)^{p_s^*-1} v \mathrm{d}x = 0, \ \forall\, v \in X_p^s.$$

Isto mostra que u é solução fraca para o problema (2.38) .

Tomando $v = u$, na igualdade acima, segue que

$$\|u\|_{X_p^s}^p + \lambda \int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - a \int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x - b \int_\Omega (u^+)^{p_s^*} \mathrm{d}x = 0,$$

isto é,

$$\langle I'_{\lambda,s}(u), u\rangle = 0. \tag{2.43}$$

Assim, por (2.43), vemos que

$$I_{\lambda,s}(u) = I_{\lambda,s}(u) - \frac{1}{p}\langle I'_{\lambda,s}(u), u\rangle.$$

Por outro lado, temos que

$$I_{\lambda,s}(u) - \frac{1}{p}\langle I'_{\lambda,s}(u), u\rangle = \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{\lambda}{p}\right) \|u\|_{L^q(\Omega)}^q + \left(\frac{b}{p} - \frac{b}{p_s^*}\right) \|u^+\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*},$$

em que $1 < q < p < p_s^*$ e $b > 0$. Portanto,

$$I_{\lambda,s}(u) = \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{\lambda}{p}\right) \|u\|_{L^q(\Omega)}^q + \left(\frac{b}{p} - \frac{b}{p_s^*}\right) \|u^+\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*} \geq 0. \tag{2.44}$$

Como sabíamos que $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$, $1 \leq r < p_s^*$, segue que $u_n^+ \to u^+$ em

$L^r(\Omega)$, $1 \leq r < p_s^*$, daí resulta que (u_n^+) é limitada em $L^r(\Omega)$, para $1 \leq r < p_s^*$. Por (2.36), (u_n^+) é limitada em $L^{p_s^*}$, consequentemente

$$(u_n^+) \text{ é uma sequência limitada em } L^r(\Omega), \text{ para } 1 \leq r \leq p_s^*.$$

Além disso, como $u_n \to u$, q.t.p em Ω, então $u_n^+ \to u^+$, q.t.p em Ω. Logo pelo Lema Brézis-Lieb (ver Lema A.43 Apêndice A)), temos que

$$\lim_{n\to\infty} (\|u_n^+\|_{L^r(\Omega)}^r - \|(u-u_n)^+\|_{L^r(\Omega)}^r) = \|u^+\|_{L^r(\Omega)}^r, \text{ para } 1 \leq r \leq p_s^*. \tag{2.45}$$

Note que, por (2.35), temos que $v_n \to 0$ em $L^p(\Omega)$ e assim,

$$\lim_{n\to\infty} (\|v_n\|_{L^p(\Omega)}^p + \|u\|_{L^p(\Omega)}^p) = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \text{ e } \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^p(\Omega)}^p = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} (\|v_n\|_{L^p(\Omega)}^p + \|u\|_{L^p(\Omega)}^p) = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^p(\Omega)}^p. \tag{2.46}$$

De modo análogo, por (2.35), $v_n \to 0$ em $L^q(\Omega)$ e consequentemente

$$\lim_{n\to\infty} (\|v_n\|_{L^q(\Omega)}^q + \|u\|_{L^q(\Omega)}^q) = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^q(\Omega)}^q. \tag{2.47}$$

Note que

$$\left\| \frac{u_n(x) - u_n(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \right\|_{L^p(R^{2N})}^p = \|u_n\|_{X_p^s}^p \quad ((u_n) \text{ é limitado em } X_p^s),$$

$$\left\| \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \right\|_{L^p(R^{2N})}^p = \|u\|_{X_p^s}^p,$$

$$\left\| \frac{u_n(x) - u_n(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} - \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \right\|_{L^p(R^{2N})}^p = \|u_n - u\|_{X_p^s}^p = \|v_n\|_{X_p^s}^p.$$

Pelo Lema Brézis-Lieb (ver Lema A.42 Apêndice A))

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left\|\frac{u_n(x)-u_n(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}\right\|^p_{L^p(R^{2N})}-\left\|\frac{u_n(x)-u_n(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}-\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}\right\|^p_{L^p(R^{2N})}\right]$$
$$=\left\|\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}\right\|^p_{L^p(R^{2N})},$$

e assim, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|v_n\|^p_{X^s_p}+\|u\|^p_{X^s_p}\right)=\lim_{n\to\infty}\|u_n\|^p_{X^s_p}. \tag{2.48}$$

Novamente, como (u_n) é limitada em X^s_p, então existe $M>0$ tal que $\|u_n\|_{X^s_p}<M$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Deste modo, a sequência $(\|u_n\|_{X^s_p})$ dos números reais é limitada e portanto, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$\text{existe}\lim_{n\to\infty}\|u_n\|^p_{X^s_p}. \tag{2.49}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}I_{\lambda,s}(u)+I_{\lambda,s}(v_n)=&\frac{1}{p}\|u\|^p_{X^s_p}+\frac{\lambda}{q}\|u\|^q_{L^q(\Omega)}-\frac{a}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)}-\frac{b}{p^*_s}\|u^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\\&+\frac{1}{p}\|v_n\|^p_{X^s_p}+\frac{\lambda}{q}\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}-\frac{a}{p}\|v_n\|^p_{L^p(\Omega)}-\frac{b}{p^*_s}\|v_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\begin{aligned}I_{\lambda,s}(u)+I_{\lambda,s}(v_n)=&\left(\frac{1}{p}\|u\|^p_{X^s_p}+\frac{1}{p}\|v_n\|^p_{X^s_p}\right)+\frac{\lambda}{q}\left(\|u\|^q_{L^q(\Omega)}+\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}\right)\\&-\frac{a}{p}\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)}+\|v_n\|^p_{L^p(\Omega)}\right)-\frac{b}{p^*_s}\left(\|u^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}+\|v_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Portanto, por (2.54), (2.46), (2.47) e (2.48), obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(I_{\lambda,s}(u)+I_{\lambda,s}(v_n)\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{X^s_p}+\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda}{q}\left(\|u\|^q_{L^q(\Omega)}+\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}\right)\\ &\quad-\lim_{n\to\infty}\frac{a}{p}\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)}+\|v_n\|^p_{L^p(\Omega)}\right)\\ &\quad-\lim_{n\to\infty}\frac{b}{p^*_s}\left(\|u^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}+\|v_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\right).\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{X^s_p}+\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda}{q}\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}\\ &\quad-\lim_{n\to\infty}\frac{a}{p}\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)}-\lim_{n\to\infty}\frac{b}{p^*_s}\|u_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\|u_n\|^p_{X^s_p}+\frac{\lambda}{q}\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}-\frac{a}{p}\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)}-\frac{b}{p^*_s}\|u_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}I_{\lambda,s}(u_n).\end{aligned}$$

Agora, lembrando que (u_n) é uma sequência tal que $\lim\limits_{n\to\infty}I_{\lambda,s}(u_n)=C$, concluímos

$$\lim_{n\to\infty}\left(I_{\lambda,s}(u)+I_{\lambda,s}(v_n)\right)=C. \tag{2.50}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\|v_n\|^p_{X^s_p}+\lambda\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|v_n\|^p_{L^p(\Omega)}-b\|v_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\|v_n\|^p_{X^s_p}+\lambda\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^p_{L^p(\Omega)}-b\lim_{n\to\infty}\|v_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\|v_n\|^p_{X^s_p}+\lambda\lim_{n\to\infty}\left(\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}-\|u\|^q_{L^q(\Omega)}\right)-a\lim_{n\to\infty}\left(\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)}-\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)\\ &\quad-b\lim_{n\to\infty}\left(\|u_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}-\|u^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\Bigg[\|v_n\|^p_{X^s_p}+\lambda\left(\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}-\|u\|^q_{L^q(\Omega)}\right)-a\left(\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)}-\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)\\ &\quad-b\left(\|u_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}-\|u^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\|v_n\|^p_{X^s_p}+\lambda\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|v_n\|^p_{L^p(\Omega)}-b\|v_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\right)\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\Bigg[\|v_n\|^p_{X^s_p}+\lambda\left(\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}-\|u\|^q_{L^q(\Omega)}\right)-a\left(\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)}-\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)\\
&\qquad-b\left(\|u_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}-\|u^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

De (2.48) temos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\|v_n\|^p_{X^s_p}+\lambda\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|v_n\|^p_{L^p(\Omega)}-b\|v_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\Bigg[\|u_n\|^p_{X^s_p}-\|u\|^p_{X^s_p}+\lambda\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}-\lambda\|u\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)}+a\|u\|^p_{L^p(\Omega)}\\
&\quad-b\|u_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}+b\|u^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\Bigg]\\
&=\lim_{n\to\infty}\Bigg[\left(\|u_n\|^p_{X^s_p}+\lambda\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)}-b\|u_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\right)\\
&\quad-\left(\|u\|^p_{X^s_p}+\lambda\|u\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|u\|^p_{L^p(\Omega)}-b\|u^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a expressão da derivada do funcional (para $v=u_n$ e $v=u$),

$$\langle I'_{\lambda,s}(u_n),u_n\rangle=\|u_n\|^p_{X^s_p}+\lambda\|u_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|u_n\|^p_{L^p(\Omega)}-b\|u_n\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\quad\text{e}$$

$$\langle I'_{\lambda,s}(u),u\rangle)=\|u\|^p_{X^s_p}+\lambda\|u\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|u\|^p_{L^p(\Omega)}-b\|u^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)},$$

resultando que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\|v_n\|^p_{X^s_p}+\lambda\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)}-a\|v_n\|^p_{L^p(\Omega)}-b\|v_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\right)\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\Big(\langle I'_{\lambda,s}(u_n),u_n\rangle-\langle I'_{\lambda,s}(u),u\rangle\Big).
\end{aligned}$$

Sabemos, por (2.43), que $\langle I'_{\lambda,s}(u), u\rangle = 0$, em consequência, vale a equação

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|v_n\|^p_{X^s_p} + \lambda\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)} - a\|v_n\|^p_{L^p(\Omega)} - b\|v_n^+\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)}\right) = \lim_{n\to\infty}\langle I'_{\lambda,s}(u_n), u_n\rangle.$$

Agora, como $I'_{\lambda,s}(u_n) \to 0$ no dual de X^s_p e (u_n) é limitada em X^s_p, temos que $\langle I'_{\lambda,s}(u_n), u_n\rangle \to 0$ e consequentemente

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|v_n\|^p_{X^s_p} + \lambda\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)} - a\|v_n\|^p_{L^p(\Omega)} - b\|v_n^+\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)}\right) = 0.$$

Portanto, por (2.35), temos que $v_n \to 0$ em $L^q(\Omega)$ e $v_n \to 0$ em $L^p(\Omega)$, assim, segue do limite acima que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|v_n\|^p_{X^s_p} - b\|v_n^+\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)}\right) = 0. \tag{2.51}$$

Por outro lado, nós temos que denotando $v_n = u - u_n$ e colocando $r = p_s^*$ na equação (2.45), segue que,

$$\lim_{n\to\infty}(\|u^+\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} - \|u_n^+\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} + \|v_n^+\|^{p_s^*}_{L^{p^*}(\Omega)}) = 0. \tag{2.52}$$

Novamente lembrando de (2.36) que (u_n^+) é limitada em $L^{p_s^*}(\Omega)$, existe $M > 0$ tal que $\|u_n^+\|_{L^{p_s^*}} \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo a sequência $(\|u_n^+\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)})$ de números reais é limitada, então ao passar a uma subsequência se necessário, temos que

$$\text{existe} \lim_{n\to\infty}\|u_n^+\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)}. \tag{2.53}$$

De (2.52) e (2.53), tem-se

$$\lim_{n\to\infty}(\|u^+\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} + \|v_n^+\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)}) = \lim_{n\to\infty}\|u_n^+\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)}. \tag{2.54}$$

Note que, por (2.54), existe $\lim_{n\to\infty}\|v_n^+\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)}$, então por (2.51), existe $\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^p_{X^s_p}$.

Denotamos por

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^p_{X^s_p} = d \geq 0.$$

Assim, podemos ter duas situações

$$d > 0 \ \text{ ou } \ d = 0.$$

Inicialmente vamos supor $d > 0$, ou seja (v_n) não converge a zero em X^s_p.

Por (2.51), como $b > 0$, resulta que $\lim_{n\to\infty} \|v_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)} = db^{-1}$, isto mostra que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n^+\|^p_{L^{p^*_s}(\Omega)} = (db^{-1})^{\frac{p}{p^*_s}}. \tag{2.55}$$

Como $S_s = \inf \left\{ \dfrac{\|u\|^p_{X^s_p}}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^{p^*_s} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p^*_s}}} \ ; \ u \in X^s_p, \ u \neq 0 \right\}$, então

$$\|v_n^+\|^p_{X^s_p} \geq S_s \|v_n^+\|^p_{L^{p^*_s}(\Omega)}.$$

Note que $\|v_n^+\|_{X^s_p} = \left\| \dfrac{v_n + |v_n|}{2} \right\|_{X^s_p} \leq \dfrac{\|v_n\|_{X^s_p} + \||v_n|\|_{X^s_p}}{2} \leq \|v_n\|_{X^s_p}$, então

$$\|v_n\|^p_{X^s_p} \geq S_s \|v_n^+\|^p_{L^{p^*_s}(\Omega)}.$$

Passando ao limite esta última desigualdade, por (2.55), vemos que

$$d \geq S_s (db^{-1})^{\frac{p}{p^*_s}}.$$

Logo, como $d > 0$, segue que $d^{1-\frac{p}{p^*_s}} \geq S_s . b^{\frac{-p}{p^*_s}}$ e consequentemente

$$\frac{d}{N} \geq \frac{b^{\frac{sp-N}{sp}} S_s^{\frac{N}{sp}}}{N}. \tag{2.56}$$

Notando de (2.44), $I_{\lambda,s}(u) \geq 0$, segue que $I_{\lambda,s}(u) + I_{\lambda,s}(v_n) \geq I_{\lambda,s}(v_n)$ e portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\Big(I_{\lambda,s}(u)+I_{\lambda,s}(v_n)\Big) \geq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\|v_n\|^p_{X^s_p} + \frac{\lambda}{q}\|v_n\|^q_{L^q(\Omega)} - \frac{a}{p}\|v_n\|^p_{L^p(\Omega)} - \frac{b}{p^*_s}\|v_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}\right).$$

Como $v_n \to 0$ em $L^q(\Omega)$ e $v_n \to 0$ em $L^p(\Omega)$ (por (2.35)) e $\lim\limits_{n\to\infty}(I_{\lambda,s}(u)+I_{\lambda,s}(v_n)) = C$ (por (2.50)), temos que

$$C \geq \frac{1}{p}\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^p_{X^s_p} - \frac{b}{p^*_s}\lim_{n\to\infty}\|v_n^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}.$$

Assim, por (2.55), segue que

$$C \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*_s}\right)d.$$

Por outro lado, $\dfrac{s}{N} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^*_s}$, assim, podemos reescrever a estimativa acima, na forma

$$\frac{C}{s} \geq \frac{d}{N}. \tag{2.57}$$

Assim, por (2.56), (2.57) e pela hipótese do lema, obtemos que

$$\frac{b^{\frac{sp-N}{sp}}S_s^{\frac{N}{sp}}}{N} \leq \frac{d}{N} \leq \frac{C}{s} < \frac{b^{\frac{sp-N}{sp}}S_s^{\frac{N}{sp}}}{N},$$

isto é uma **contradição,** portanto podemos concluir que $d = 0$. Finalmente como $d = \lim\limits_{n\to\infty}\|v_n\|^p_{X^s_p}$, então $\lim\limits_{n\to\infty}\|v_n\|_{X^s_p} = 0$, isto é, $v_n = u_n - u$ converge a zero em X^s_p e consequentemente (u_n) converge a u em X^s_p. Assim, temos que existe uma subsequência de (u_n) tal que converge em X^s_p. ■

2.1.5 Minimização em C^0_δ versus minimização em X^s_p para crescimento polinomial

Devido ao fato de estamos estudando um problema envolvendo o operador p-laplaciano fracionário com não linearidade do tipo polinomial, nesta subseção demonstraremos um resultado de minimização local para funcionais definidas em espaços de Sobolev fracionário X_p^s e que tem crescimento polinomial seguindo as idéias feitas em [14], [50] e [57]. Esse resultado é mais geral do que os demais encontrados em [14] e [57] no sentido de que iremos considerar $p > 1$. Além disso, será de suma importância para demonstarmos uma das condições da geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Começamos demonstrando um resultado de regularidade seguindo a técnica usada na demonstração da proposição 1.18, que será útil para provar nosso resultado de minimização.

Proposição 2.7 *Suponha que* $|f(t)| \leq C(1 + |t|^{q-1})$*, para algum* $1 \leq q \leq p_s^*$*, e* $C > 0$*. Seja* $(v_\epsilon)_{\epsilon\in(0,1)} \subseteq X_p^s$ *uma família limitada em* X_p^s *de soluções para*

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u &= \left(\dfrac{1}{1-\xi_\epsilon}\right) f(u) \quad em \ \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad em \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2.58}$$

com $\xi_\epsilon \leq 0$*. Então* $\sup\limits_{\epsilon\in(0,1)} \|v_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$*.*

Demonstração: Definimos, para $k > 0$

$$T_k(s) = \begin{cases} s + k, & \text{se} \quad s \leq -k, \\ 0, & \text{se} \quad -k < s < k, \\ s - k, & \text{se} \quad s \geq k \end{cases}$$

e seja

$$\Omega_k = \{x \in \Omega \,:\, |v_\epsilon(x)| \geq k\}.$$

Observe que $T_k(v_\epsilon) \in X_p^s$, já que T_k é Lipschitz e, portanto

$$\begin{aligned}\|T_k(v_\epsilon)\|_{X_p^s}^p &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|T_k(v_\epsilon(x)) - T_k(v_\epsilon(y))|^p}{|x-y|^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\leq C^p \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)|^p}{|x-y|^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= C^p\|v_\epsilon\|_{X_p^s}^p < \infty.\end{aligned}$$

Agora tomando $T_k(v_\epsilon)$ como uma função de teste em (2.58) e usando que $\xi_\epsilon \leq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle A(v_\epsilon), T_k(v_\epsilon)\rangle &= \left(\frac{1}{1-\xi_\epsilon}\right)\int_\Omega f(v_\epsilon)T_k(v_\epsilon)\mathrm{d}x\\ &\leq \int_\Omega |f(v_\epsilon)||T_k(v_\epsilon)|\mathrm{d}x\\ &\leq \int_\Omega C(1+|v_\epsilon|^{p_s^*-1})|T_k(v_\epsilon)|\mathrm{d}x\\ &= \int_{\Omega_k} C|T_k(v_\epsilon)|\mathrm{d}x + C\int_{\Omega_k}|v_\epsilon|^{p_s^*-1}|T_k(v_\epsilon)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Logo,

Aplicando a desigualdade de Hölder generalizada em cada termo da expressão no lado direito para os coeficientes $1 < \theta_3 < \theta_2 < p$, $p < \dfrac{\theta_2}{\theta_3} + 1$ e $(p_s^* - 1)\theta_1 < p_s^*$ tal que $\dfrac{1}{\theta_1} + \dfrac{1}{\theta_2} + \dfrac{1}{\theta_3} = 1$, temos que

$$\begin{aligned}\langle A(v_\epsilon), T_k(v_\epsilon)\rangle_X \leq &\left[\int_\Omega (C)^{\theta_1}\mathrm{d}x\right]^{1/\theta_1}\left(\int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^{\theta_2}\mathrm{d}x\right)^{1/\theta_2}|\Omega_k|^{1/\theta_3}\\ &+\left[\int_\Omega |v_\epsilon|^{(p_s^*-1)\theta_1}\mathrm{d}x\right]^{1/\theta_1}\left(\int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^{\theta_2}\mathrm{d}x\right)^{1/\theta_2}|\Omega_k|^{1/\theta_3}.\end{aligned}$$

Usando o fato que $(v_\epsilon)_{\epsilon\in(0,1)}$ é uma família de funções limitada em X_p^s, pela Proposição A.34 (ver Apêndice A) podemos encontrar uma constante positiva ainda denotada por $C > 0$ tal que

$$\langle A(v_\epsilon), T_k(v_\epsilon)\rangle_{X_p^s} \leq C\left(\int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^{\theta_2}\mathrm{d}x\right)^{1/\theta_2} |\Omega_k|^{1/\theta_3}. \tag{2.59}$$

Por outro lado, seguindo o mesmo mesmo raciocínio da Proposição 1.18, segue que

$$\langle A(v_\epsilon), T_k(v_\epsilon)\rangle \geq \|T_k(v_\epsilon)\|_{X_p^s}^p.$$

Logo, usando o fato da imersão contínua $X_p^s \hookrightarrow L^{\theta_2}(\Omega)$. segue que

$$\begin{aligned}\langle A(v_\epsilon), T_k(v_\epsilon)\rangle &\geq \|T_k(v_\epsilon)\|_{X_p^s}^p \\ &\geq C_1\left(\int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^{\theta_2}\mathrm{d}x\right)^{p/\theta_2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$C_1\left(\int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^{\theta_2}\mathrm{d}x\right)^{p/\theta_2} \leq \langle A(v_\epsilon), T_k(v_\epsilon)\rangle. \tag{2.60}$$

Logo, de (2.59) e (2.60) temos que existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^{\theta_2}\mathrm{d}x \leq C|\Omega_k|^{\theta_2/\theta_3(p-1)}. \tag{2.61}$$

Note que do fato $p < \dfrac{\theta_2}{\theta_3} + 1$ obtemos que $\theta_2 - \theta_3(p-1) > 0$. Logo podemos definir

$$\beta = \frac{\theta_2}{\theta_2 - \theta_3(p-1)} > 1.$$

Como

$$\frac{\theta_2}{\theta_3(p-1)} = \frac{\dfrac{\theta_2}{\theta_2 - \theta_3(p-1)}}{\dfrac{\theta_2}{\theta_2 - \theta_3(p-1)} - 1}.$$

Podemos escrever

$$\frac{\theta_2}{\theta_3(p-1)} = \frac{\beta}{\beta - 1}$$

e conseqüentemente de (2.61) segue-se

$$\int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^{\theta_2}\mathrm{d}x \leq C|\Omega_k|^{\beta/\beta-1}. \tag{2.62}$$

Como $|T_k(s)| = (|s|-k)(1-\chi_{[-k,k]}(s))$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Logo, para $0<k<h$, obtemos que $\Omega_h \subset \Omega_k$. Então

$$\begin{aligned}\int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^{\theta_2}\mathrm{d}x =& \int_{\Omega_k} (|v_\epsilon|-k)^{\theta_2}\mathrm{d}x\\ \geq& \int_{\Omega_h} (|v_\epsilon|-k)^{\theta_2}\mathrm{d}x\\ \geq&(h-k)^{\theta_2}|\Omega_h|.\end{aligned}$$

Portanto

$$(h-k)^{\theta_2}|\Omega_h| \leq \int_\Omega |T_k(v_\epsilon)|^{\theta_2}\mathrm{d}x. \tag{2.63}$$

Definindo

$$\phi(k) = |\Omega_k|, \qquad \text{para } k>0.$$

De (2.62) e (2.63) segue-se para todo $0<k<h$

$$\phi(h) \leq C(h-k)^{-\theta_2}\phi(k)^{\beta/(\beta-1)}. \tag{2.64}$$

Seja $d = 2^\beta C^{1/\theta_2}|\Omega|^{1/(p-1)\theta_2}$. Definindo a sequência (k_n) com $k_0 = 0$ e $k_n = k_{n-1}+\dfrac{d}{2^n}$ para $n = 1,2,3,\ldots$ Logo de (2.64) obtemos por indução

$$0 \leq \phi(k_n) \leq \frac{\phi(0)}{2^{nr(\beta-1)}}, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\lim_{n\to\infty}\phi(k_n) = 0. \tag{2.65}$$

Agora reescrevendo $k_n = d\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue-se

$$k_n < d \;\text{ para todo }\; n \in \mathbb{N}.$$

Logo, do fato que ϕ é não crescente, temos

$$\phi(k_n) \geq \phi(d).$$

Portanto de (2.65) segue-se e consequentemente

$$\phi(d) = 0,$$

assim Ω_d tem medida nula. Portanto

$$|v_\epsilon(x)| \leq d \quad \text{q.t.p} \;\; \text{em } \Omega, \;\; \text{para todo } \epsilon \in (0,1).$$

Logo,

$$\|v_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq d \;\text{ para todo }\; \epsilon \in (0,1).$$

Concluindo $\sup\limits_{\epsilon \in (0,1)} \|v_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$. ∎

Antes de demonstrar um resultado de minimização, seguindo as ideias de [13], [50] e [56] lembraremos os seguintes espaços normados $C^0_\delta(\overline{\Omega})$ e $C^{0,\alpha}_\delta(\overline{\Omega})$. Para isto definimos $\delta : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^+$ por $\delta(x) = dist(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, com $x \in \overline{\Omega}$. Para $0 < \alpha < 1$.

$$C^0_\delta(\overline{\Omega}) = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) \;:\; \frac{u}{\delta^s} \text{ tem uma extensão contínua em } \overline{\Omega}\}$$

$$C^{0,\alpha}_\delta(\overline{\Omega}) = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) \;:\; \frac{u}{\delta^s} \text{ tem uma extensão } \alpha - \text{Hölder contínua em } \overline{\Omega}\},$$

com normas

$$\|u\|_{0,\delta} = \left\|\frac{u}{\delta^s}\right\|_{L^\infty(\Omega)}$$

e

$$\|u\|_{\alpha,\delta} = \|u\|_{0,\delta} + \sup_{x,y\in\overline{\Omega},\, x\neq y.} \frac{|u(x)/\delta(x)^s - u(y)/\delta(y)^s|}{|x-y|^\alpha}$$

respectivamente.

Teorema 2.8 *Seja $\Phi : X_p^s \to \mathbb{R}$ um funcional de $C^1(X_p^s, \mathbb{R})$ definida por*

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s}^p - \int_\Omega G(u)\mathrm{d}x,$$

com $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$ e $g \in C(\Omega)$ satisfazendo a condição de crescimento

$$|g(t)| \leq C(1 + |t|^{q-1}), \ \textit{ para algum } 1 \leq q \leq p_s^* \ \textit{ e } C > 0. \tag{2.66}$$

Seja 0 é um mínimo local de Φ na topologia $C_\delta^0(\overline{\Omega})$, isto é, existe $r_1 > 0$ tal que

$$\Phi(0) \leq \Phi(z), \ \forall\, z \in X_p^s \cap C_\delta^0(\overline{\Omega}), \ \|z\|_{0,\delta} \leq r_1, \tag{2.67}$$

então 0 é um mínimo local de Φ na topologia X_p^s, isto é, existe $r_2 > 0$ tal que

$$\Phi(0) \leq \Phi(z), \ \forall\, z \in X_p^s, \ \|z\|_{X_p^s} \leq r_2.$$

Demonstração: Notamos que $\Phi(0) = 0$, por isso a nossa hipótese é reformula como

$$0 = \Phi(0) \leq \Phi(z), \ \forall\, z \in X_p^s \cap C_\delta^0(\overline{\Omega}), \ \|z\|_{0,\delta} \leq r_1, \tag{2.68}$$

Consideramos separadamente os casos subcrítico e crítico.

Caso Subcrítico: $q < p_s^*$.

Seja $0 < \epsilon < 1$, $B_\epsilon[0] = \{z \in X_p^s \ : \ \|z\|_{X_p^s} \leq \epsilon\}$. Vamos mostrar por contradição. Vamos supor que para cada $\epsilon > 0$ tenhamos que existe $u_\epsilon \in B_\epsilon[0]$ tal que

$$\Phi(u_\epsilon) < \Phi(0). \tag{2.69}$$

Por (2.66) e a imersão compacta $X_p^s \hookrightarrow L^q(\Omega)$, o funcional Φ é fracamente semicontínuo inferiormente em X_p^s. Agora, como $B_\epsilon[0]$ é um espaço topológico fracamente compacto, então pelo Teorema A.47 (ver Apêndice A) obtemos que existe $v_\epsilon \in B_\epsilon[0]$ tal que $\inf\limits_{u \in B_\epsilon[0]} \Phi(u) = \Phi(v_\epsilon)$. Logo de (2.69) temos

$$\Phi(v_\epsilon) = \inf_{u \in B_\epsilon[0]} \Phi(u) \leq \Phi(u_\epsilon) < \Phi(0), \quad \text{para todo } 0 < \epsilon < 1.$$

Queremos provar que

$$v_\epsilon \to 0 \quad \text{em} \quad C_\delta^0(\overline{\Omega}) \quad \text{quando} \quad \epsilon \to 0, \tag{2.70}$$

pois, isso implicaria que para $r_1 > 0$, existe um $z \in C_\delta^0(\overline{\Omega})$, com $\|z\|_{0,\delta} < r_1$ tal que $\Phi(z) < \Phi(0)$ (de fato, $z = v_\epsilon$ para algum ϵ), contradizendo a hipótese (2.68). Afirmamos que, para todo $\epsilon \in (0,1)$, existe $\xi_\epsilon \leq 0$ tal que para todo $\phi \in X_p^s$.

$$\langle \Phi'(v_\epsilon), \phi \rangle = \xi_\epsilon \langle A(v_\epsilon), \phi \rangle. \tag{2.71}$$

De fato, se $v_\epsilon \in B_\epsilon(0)$, então v_ϵ é um mínimo local de Φ em X_p^s, portanto um ponto crítico, assim (2.71) é verificado com $\xi_\epsilon = 0$. Se $v_\epsilon \in \partial B_\epsilon[0]$, então v_ϵ minimiza Φ restrito ao conjunto

$$\left\{ u \in X_p^s \ : \ \frac{\|u\|_{X_p^s}^p}{p} = \frac{\epsilon^p}{p} \right\},$$

assim podemos encontrar o multiplicador de Lagrange $\xi_\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que (2.71) verifica. Agora

$$\begin{aligned}\langle \Phi'(v_\epsilon), -v_\epsilon \rangle =& \lim_{r \to 0} \frac{\Phi(v_\epsilon + r(-v_\epsilon)) - \Phi(v_\epsilon)}{r} \\ =& \lim_{r \to 0} \frac{\Phi((1-r)v_\epsilon) - \Phi(v_\epsilon)}{r}.\end{aligned}$$

Logo, para $r > 0$ suficientemente pequeno temos $(1-r)v_\epsilon \in B_\epsilon(0)$ e consequentemente do fato que v_ϵ é um mínimo de Φ em $B_\epsilon[0]$, segue que

$$\langle \Phi'(v_\epsilon), -v_\epsilon \rangle \geq 0,$$

ou seja

$$\langle \Phi'(v_\epsilon), v_\epsilon \rangle \leq 0.$$

Portanto

$$\xi_\epsilon = \frac{\langle \Phi'(v_\epsilon), v_\epsilon \rangle}{\|v_\epsilon\|^p_{X^s_p}} \leq 0. \tag{2.72}$$

Por (2.71), obtemos v_ϵ satisfazendo

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_p v_\epsilon = \left(\dfrac{1}{1-\xi_\epsilon} \right) g(v_\epsilon) =: g^\epsilon(v_\epsilon) & \text{em } \ \Omega, \\ v_\epsilon = 0 & \text{em } \ \mathbb{R} \backslash \Omega, \end{cases}$$

Dado $\|v_\epsilon\|_{X^s_p} \leq \epsilon < 1$, pela Proposição 2.7 existe uma constante $C_1 > 0$ independente de ϵ tal que $\|v_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1$. Agora, usando esta última desigualdade, (2.72) e (2.66), obtemos existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|g^\epsilon(v_\epsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_2. \tag{2.73}$$

Portanto, por Teorema A.53 (ver Apéndice A) temos que $\|v_\epsilon\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} \leq C_3$, com $0 < \beta \leq s$ e alguma constante C_3 independente de ϵ. Usando a seguinte notação $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) = C^\beta(\overline{\Omega})$, temos que existe $M > 0$ tal que $\|v_\epsilon\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} \leq M$, isto é,

$$\|v_\epsilon\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} = \|v_\epsilon\|_{C(\overline{\Omega})} + \max_{x \in \overline{\Omega}} [v_\epsilon]_{C^\beta(\Omega)} < M.$$

Logo,

$$|v_\epsilon(x)| < M \ \text{ para todo } \ x \in \Omega \ \text{ e para todo } \epsilon \in (0,1),$$

o que implica que a seqüência v_ϵ é uniformemente limitada, e

$$|v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)| \leq M|x-y|^\beta \text{ para todo } x \in \Omega \text{ e para todo } \epsilon \in (0,1),$$

o que implica que a sequência v_ϵ é uniformemente eqüicontínua. Pelo teorema de Arzelá-Ascoli existe uma subsequência, que denotamos por v_ϵ, tal que v_ϵ converge uniformemente em $\overline{\Omega}$, quando $\epsilon \to 0$. Desde que $v_\epsilon \to 0$, em X_p^s, quando $\epsilon \to 0$. passando para uma subsequência, podemos assumir $v_\epsilon \to 0$ q.t.p em Ω. então deduzimos $v_\epsilon \to 0$, uniformemente em $\overline{\Omega}$. Também, por Teorema A.54 (ver Apéndice A) temos que obtemos, para uma constante adequada C,

$$\|v_\epsilon\|_{0,\delta} = \left\| \frac{v_\epsilon}{\delta^s} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \sup_{x\in\Omega} |g^\epsilon(v_\epsilon(x))|.$$

Dado que o último termo tende a zero quando $\epsilon \to 0$, (2.70) está provado.

Caso crítico: $q = p_s^*$.

Mais uma vez argumentamos por contradição, Vamos supor que para cada $\epsilon > 0$ tenhamos que existe $w_\epsilon \in B_\epsilon[0]$ tal que

$$\Phi(w_\epsilon) < \Phi(0). \tag{2.74}$$

Para cada $k > 0$ definimos $g_k, G_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definindo para todo $s \in \mathbb{R}$

$$g_k(s) = g(t_k(s)) \text{ e } G_k(t) = \int_0^t g_k(s)\mathrm{d}s,$$

em que

$$t_k(s) = \begin{cases} -k, & \text{se } s \leq -k \\ s, & \text{se } -k < s < k \\ k, & \text{se } s \geq k. \end{cases}$$

Assim, definimos os funcionais $\Phi_k \in C^1(X_p^s, \mathbb{R})$ dado por $u \in X_p^s$

$$\Phi_k(u) = \frac{\|u\|_{X_p^s}^p}{p} - \int_\Omega G_k(t)dt.$$

Pelo teorema da convergência dominada, para todo $u \in X_p^s$ temos $\Phi_k(u) \to \Phi(u)$, quando $k \to \infty$. Então, para todo $\epsilon \in (0,1)$ podemos encontrar $k_\epsilon \geq 1$ tal que $\Phi_{k_\epsilon}(w_\epsilon) < \Phi(0)$. Desde que para cada $k > 0$, g_k tem crescimento subcrítico, assim para todo $\epsilon \in (0,1)$, existe $u_\epsilon \in B_\epsilon[0]$ tal que

$$\Phi_{k_\epsilon}(u_\epsilon) = \inf_{u \in B_\epsilon[0]} \Phi_{k_\epsilon}(u) \leq \Phi_{k_\epsilon}(w_\epsilon) < \Phi(0).$$

Como no caso anterior, para todo $\epsilon \in (0,1)$ encontramos $\xi_\epsilon \leq 0$ tal que u_ϵ é uma solução fraca de

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \left(\dfrac{1}{1-\xi_\epsilon}\right) g_{k_\epsilon}(u) =: g_{k_\epsilon}^\epsilon(u) & \text{em } \Omega, \\ v_\epsilon = 0 & \text{em } \mathbb{R}\backslash\Omega. \end{cases}$$

Note que

$$|g_{k_\epsilon}(s)| = |g(t_{k_\epsilon}(s))| \leq C(1 + |t_{k_\epsilon}(s)|^{q-1}) = \begin{cases} C(1 + |k_\epsilon|^{q-1}), & \text{se } |s| \geq k_\epsilon, \\ C(1 + |s|^{q-1}), & \text{se } |s| < k_\epsilon. \end{cases}$$

Agora usando o fato que $k_\epsilon > 0$,

$$|g_{k_\epsilon}(s)| \leq \begin{cases} C(1 + |s|^{q-1}), & \text{se } |s| \geq k_\epsilon, \\ C(1 + |s|^{q-1}), & \text{se } |s| < k_\epsilon. \end{cases}$$

Logo,

$$|g_{k_\epsilon}(s)| \leq C(1 + |s|^{q-1}), \text{ para } q = p_s^* \text{ e } C > 0.$$

Como $\|u_\epsilon\|_{X_p^s} \leq \epsilon < 1$, temos que u_ϵ é limitada em X_p^s. Assim, estamos nas condições da Proposição 2.58 e com isto obtemos que existe $C_2 > 0$ satisfazendo

$$\|g^{\epsilon}_{k_\epsilon}(u_\epsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_2.$$

Portanto, por Teorema A.53 (ver Apéndice A) temos que $\|u_\epsilon\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} \leq C_3$, com $0 < \beta \leq s$ e alguma constante C_3 independente de ϵ. Lembrando que $C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) = C^{\beta}(\overline{\Omega})$, temos que existe $M > 0$ tal que $\|u_\epsilon\|_{C^{\beta}(\overline{\Omega})} \leq M$, isto é,

$$\|u_\epsilon\|_{C^{\beta}(\overline{\Omega})} = \|u_\epsilon\|_{C(\overline{\Omega})} + \max_{x\in\overline{\Omega}} [u_\epsilon]_{C^{\beta}(\Omega)} < M.$$

Logo,

$$|u_\epsilon(x)| < M \;\text{ para todo }\; x \in \Omega \;\text{ e para todo } \epsilon \in (0,1).$$

Portanto a seqüência v_ϵ é uniformemente limitada, e

$$|u_\epsilon(x) - u_\epsilon(y)| \leq M|x-y|^{\beta} \;\text{ para todo }\; x \in \Omega \;\text{ e para todo } \epsilon \in (0,1),$$

o que implica que a sequência v_ϵ é uniformemente eqüicontínua. Pelo teorema de Arzelá-Ascoli existe uma subsequência, que denotamos por u_ϵ, tal que u_ϵ converge uniformemente em $\overline{\Omega}$, quando $\epsilon \to 0$. Desde que $u_\epsilon \to 0$, em X^s_p, quando $\epsilon \to 0$. passando a uma subsequência, podemos assumir $u_\epsilon \to 0$ q.t.p em Ω. Então deduzimos que $u_\epsilon \to 0$ uniformemente em $\overline{\Omega}$. Também, por Teorema A.54 (ver Apéndice A), obtemos, para uma constante adequada C,

$$\|u_\epsilon\|_{0,\delta} = \left\|\frac{u_\epsilon}{\delta^s}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \sup_{x\in\Omega} |g^{\epsilon}_{k_\epsilon}(u_\epsilon(x))|.$$

Dado que o último tende a zero quando $\epsilon \to 0$, (2.70) está provado. ■

Uma consequência deste resultado, é que um míníimo local estrito na topologia $C^0_\delta(\overline{\Omega})$ é também um mínimo local estrita na topologia de X^s_p.

Corolário 2.9 *Seja* $\Phi : X_p^s \to \mathbb{R}$ *um funcional de* $C^1(X_p^s, \mathbb{R})$ *definida por*

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s}^p - \int_\Omega G(u)\mathrm{d}x,$$

com $G(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$ *e* $g \in C(\Omega)$ *satisfazendo a condição de crescimento*

$$|g(t)| \leq C(1 + |t|^{q-1}), \ \ \textit{para algum} \ 1 \leq q \leq p_s^* \ \textit{e} \ C > 0. \tag{2.75}$$

Seja 0 *é um mínimo local estrita de* Φ *na topologia* $C_\delta^0(\overline{\Omega})$*, isto é, existe* $r_1 > 0$ *tal que*

$$\Phi(0) < \Phi(z), \ \forall\, z \in X_p^s \cap C_\delta^0(\overline{\Omega}), \ 0 < \|z\|_{0,\delta} \leq r_1, \tag{2.76}$$

então 0 *é um mínimo local estrita de* Φ *na topologia de* X_p^s*, isto é, existe* $r_2 > 0$ *tal que*

$$\Phi(0) < \Phi(z), \ \forall\, z \in X_p^s, \ 0 < \|z\|_{X_p^s} \leq r_2.$$

Demonstração: Seguir as mesmas ideias do Teorema 2.8. ∎

2.2 Solução positiva do funcional $I_{\lambda,s}$

Nesta seção, definiremos a parte positiva do funcional $I_{\lambda,s}$ para encontrarmos soluções positivas. Considere o funcional:

$$I_{\lambda,s}^+ : X_p^s \to \mathbb{R}$$

$$I_{\lambda,s}^+(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s}^p + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q\mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u^+|^p\mathrm{d}x - \frac{b}{p_s^*}\int_\Omega (u^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x.$$

Pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, o funcional $I^{+}_{\lambda,s}$ é de classe $C^1(X^s_p, \mathbb{R})$ e para todo $u, h \in X^s_p$,

$$\begin{aligned}\langle (I^{+}_{\lambda,s})'(u), h\rangle =& \langle A(u), h\rangle + \lambda \int_\Omega |u^+|^{q-1} h \mathrm{d}x - a \int_\Omega |u^+|^{p-1} h \mathrm{d}x \\ & - \frac{b}{p^*_s} \int_\Omega (u^+)^{p^*_s - 1} h \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Note que, encontrar um ponto crítico para o funcional $I^{+}_{\lambda,s}$ equivale a encontrar uma função $u \in X^s_p$ que satisfaz a equação:

$$\langle A(u), h\rangle + \lambda \int_\Omega |u^+|^{q-1} h \mathrm{d}x - a \int_\Omega |u^+|^{p-1} h \mathrm{d}x - \int_\Omega (u^+)^{p^*_s - 1} h \mathrm{d}x = 0, \ \forall\, h \in X^s_p,$$

ou seja, obter uma solução fraca para a equação :

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_p u = -\lambda |u^+|^{q-1} + a|u^+|^{p-1} + (u^+)^{p^*_s - 1} & \text{em } \ \Omega, \\ u = 0 \quad \text{em } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2.78}$$

em que $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < p$ e $u^+ = \max\{u, 0\}$.
Se u for um ponto crítico de $I^{+}_{\lambda,s}$, então $\langle (I^{+}_{\lambda,s})'(u), h\rangle = 0$, $\forall\, h \in X^s_p$, em particular para $h = u^-$, usando o Lema A.23 (ver Apêndice A), temos

$$0 = \langle (I^{+}_{\lambda,s})'(u), u^-\rangle = \langle A(u), u^-\rangle \geq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u^-(x) - u^-(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \|u^-\|^p_{X^s_p}$$

e consequentemente, $u^- = 0$. Portanto, o ponto crítico u de $I^{+}_{\lambda,s}$ satisfaz $u = u^+ \geq 0$, ou seja, é uma função não negativa de X^s_p.

2.2.0.1 Compacidade do funcional $I^{+}_{\lambda,s}$

Lema 2.10 *Seja $\lambda_1 < a$, então $I^{+}_{\lambda,s}$ satisfaz a condição Palais Smale para todo nível*

$$C < \frac{s}{N} b^{\frac{sp-N}{sp}} S_s^{\frac{N}{sp}}, \ \textit{para cada } \lambda > 0.$$

Demonstração: Usar um raciocínio análogo como foi feito na demonstração do

Teorema 2.6. ■

2.2.0.2 Geometria do Teorema do Passo da Montanha do funcional $I^+_{\lambda,s}$

Agora mostraremos alguns resultados que serão úteis para se obter as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Para isso, para cada $u \in X^s_p$, seja

$$\begin{aligned} J_{\lambda,s}(u) &:= I_{\lambda,s}(u) - \frac{1}{p}\|u\|^p_{X^s_p} \\ &= \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x - \frac{b}{p^*_s}\int_\Omega |u^+|^{p^*_s}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Lema 2.11 *Sejam $0 < a$ e $1 < q < p$, então a solução trivial $u = 0$ é um minimizador local estrito de $J^+_{\lambda,s}$, para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Pelo Corolário 2.9, basta mostrar que $u = 0$ é um mínimo local estrito de $I^+_{\lambda,s}$ na topologia $C^0_\delta(\overline{\Omega})$. Seja $u \in C^0_\delta(\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned} J^+_{\lambda,s}(u) &:= I^+_{\lambda,s}(u) - \frac{1}{p}\|u\|^p_{X^s_p} \\ &= \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u^+|^p \mathrm{d}x - \frac{b}{p^*_s}\int_\Omega |u^+|^{p^*_s}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Usando $\|u\|_{0,\delta} = \|u/\delta^s\|_{L^\infty(\Omega)}$, sendo $\delta : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^+$ definido por $\delta(x) = dist(x, \mathbb{R}^n \backslash \Omega)$, obtemos

$$|u^+(x)| \le |u(x)| \le k_1\|u\|_{0,\delta} \text{ para algum } k_1 > 0.$$

como $1 < q < p$ resulta que $(u^+)^{p-q} \le \|u\|^{p-q}_{0,\delta}$ e consequentemente para alguma constante $C_1 > 0$,

$$\int_\Omega |u^+|^p \mathrm{d}x \le C_1\|u\|^{p-q}_{0,\delta}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x.$$

Desta última desigualdade e do fato que $a > 0$, podemos concluir que

$$-\frac{a}{p}\int_\Omega (u^+)^p \mathrm{d}x \ge -\frac{aC_1}{p}\|u\|^{p-q}_{0,\delta}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x. \tag{2.80}$$

Analogamente, obtemos

$$-\frac{b}{p}\int_\Omega (u^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x \geq -\frac{bC_2}{p_s^*}\|u\|_{0,\delta}^{p_s^*-q}\int_\Omega |u^+|^q\mathrm{d}x, \tag{2.81}$$

para alguma constante $C_2 > 0$. De (2.79), (2.80) e (2.81), segue-se

$$\begin{aligned} J_{\lambda,s}^+(u) &\geq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q\mathrm{d}x - \frac{aC_1}{p}\|u\|_{0,\delta}^{p-q}\int_\Omega |u^+|^q\mathrm{d}x - \frac{bC_2}{p_s^*}\|u\|_{0,\delta}^{p_s^*-q}\int_\Omega |u^+|^q\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{aC_1}{p}\|u\|_{0,\delta}^{p-q} - \frac{bC_2}{p_s^*}\|u\|_{0,\delta}^{p_s^*-q}\right)\int_\Omega |u^+|^q\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.82}$$

Agora, seja $R = \min\left\{\left(\frac{p\lambda}{q(aC_1+bC_2)}\right)^{\frac{1}{p-q}}, \left(\frac{p_s^*\lambda}{q(aC_1+bC_2)}\right)^{\frac{1}{p_s^*-q}}\right\}$.
Se $\|u\|_{0,\delta} < R$, então

$$\|u\|_{0,\delta} < \left(\frac{p\lambda}{q(aC_1+bC_2)}\right)^{\frac{1}{p-q}} \quad \text{e} \quad \|u\|_{0,\delta} < \left(\frac{p_s^*\lambda}{q(aC_1+bC_2)}\right)^{\frac{1}{p_s^*-q}}$$

e consequentemente

$$\frac{aC_1}{p}\|u\|_{0,\delta}^{p-q} < \frac{aC_1\lambda}{q(aC_1+bC_2)} \quad \text{e} \quad \frac{bC_2}{p_s^*}\|u\|_{0,\delta}^{p_s^*-q} < \frac{bC_2\lambda}{q(aC_1+bC_2)}.$$

Somando estas útimas desigualdades, temos $\frac{aC_1}{p}\|u\|_{0,\delta}^{p-q} + \frac{bC_2}{p_s^*}\|u\|_{0,\delta}^{p_s^*-q} < \frac{\lambda}{q}$, ou seja:

$$\frac{\lambda}{q} - \frac{aC_1}{p}\|u\|_{C^1}^{p-q} - \frac{bC_2}{p_s^*}\|u\|_{0,\delta}^{p_s^*-q} > 0, \ \forall \ 0 < \|u\|_{0,\delta} < R. \tag{2.83}$$

Finalmente (2.82) e (2.83) implicam que

$$J_{\lambda,s}^+(u) > 0 = J_{\lambda,s}^+(0), \ \forall \ 0 < \|u\|_{0,\delta} < R.$$

Portanto, concluímos que $u = 0$ é um mínimo local de $J_{\lambda,s}^+$ na topologia $C_\delta^0(\overline{\Omega})$. ■

Lema 2.12 *Sejam,* $\lambda_1 < a$ $1 < q < p$, *e* $b > 0$, *então fixando* $\Lambda > 0$ *existe*

$t_0 = t_0(\Lambda) > 0$ tal que

$$I^+_{\lambda,s}(t\varphi_1) < 0,$$

para todo $t \geq t_0$ e $\lambda < \Lambda$.

Demonstração: Para $t > 0$, segue que :

$$\begin{aligned} I^+_{\lambda,s}(t\varphi_1) &= \frac{\|t\varphi_1\|^p_{X^s_p}}{p} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |(t\varphi_1)^+|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |(t\varphi_1)^+|^p \mathrm{d}x - \frac{b}{p^*_s}\int_\Omega ((t\varphi_1)^+)^{p^*_s}\mathrm{d}x \\ &= \frac{|t|^p}{p}\|\varphi_1\|^p_{X^s_p} + \frac{|t|^q\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - \frac{a|t|^p}{p}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x - \frac{b|t|^{p^*_s}}{p^*_s}\int_\Omega |\varphi_1|^{p^*_s}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Lembrando que φ_1 é a autofunção positiva associado ao λ_1, obtemos

$$\begin{aligned} I^+_{\lambda,s}(t\varphi_1) &= \frac{\lambda_1|t|^p}{p}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x + \frac{|t|^q\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - \frac{a|t|^p}{p}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x - \frac{b|t|^{p^*_s}}{p^*_s}\int_\Omega |\varphi_1|^{p^*_s}\mathrm{d}x \\ &= \frac{t^p}{p}(\lambda_1 - a)\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x + \frac{t^q\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - \frac{bt^{p^*_s}}{p^*_s}\int_\Omega |\varphi_1|^{p^*_s}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Logo, para todo $t > 0$

$$I^+_{\lambda,s}(t\varphi_1) = t^{p^*_s}\left[\frac{(\lambda_1 - a)}{p}\frac{1}{t^{p^*_s - p}}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\frac{1}{t^{p^*_s - q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - \frac{b}{p^*_s}\int_\Omega |\varphi_1|^{p^*_s}\mathrm{d}x\right]. \tag{2.84}$$

Agora fixando $\Lambda > 0$, segue dos fatos $\lambda_1 < a$, $1 < q < p < p^*_s$, e $\varphi_1 > 0$ em Ω podemos escolher $t_0 = t_0(\Lambda) > 0$ tal que

$$\frac{(\lambda_1 - a)}{p}\frac{1}{t_0^{p^*_s - p}}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x + \frac{\Lambda}{q}\frac{1}{t_0^{p^*_s - q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - \frac{b}{p^*_s}\int_\Omega |\varphi_1|^{p^*_s}\mathrm{d}x < 0.$$

Se $t \geq t_0$ e $\lambda < \Lambda$, nós temos que

$$\begin{aligned} &\frac{(\lambda_1 - a)}{p}\frac{1}{t^{p^*_s - p}}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\frac{1}{t^{p^*_s - q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - \frac{b}{p^*_s}\int_\Omega |\varphi_1|^{p^*_s}\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{(\lambda_1 - a)}{p}\frac{1}{t_0^{p^*_s - p}}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x + \frac{\Lambda}{q}\frac{1}{t_0^{p^*_s - q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - \frac{b}{p^*_s}\int_\Omega |\varphi_1|^{p^*_s}\mathrm{d}x \\ &< 0. \end{aligned}$$

Destas desigualdades e por (2.84), segue $I^+_{\lambda,s}(t\varphi_1) < 0,$ para todo $t \geq t_0$ e $\lambda < \Lambda.$

■

2.2.0.3 Solução positiva via o Teorema do Passo da Montanha

Proposição 2.13 *Suponha que* $\lambda > 0$, $1 < q < p$, $\lambda_1 < a$ *e* $b > 0$. *Então existe* $\lambda_0 > 0$ *tal que, se*

$$0 < \lambda < \lambda_0, \tag{2.85}$$

então o problema (2.1) possui pelo menos uma solução positiva.

Demonstração: Note que toda solução fraca não negativa para o problema (2.1) satisfaz a equação:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s_p u = -\lambda |u^+|^{q-1} + a|u^+|^{p-1} + (u^+)^{p^*_s - 1} \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2.86}$$

em que $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < p$ e $u^+ = \max\{u, 0\}$.

Agora, encontrar uma solução fraca para o problema (2.86) é equivalente a encontrar um ponto crítico do funcional

$$I^+_{\lambda,s} : X^s_p \to \mathbb{R}$$

$$I^+_{\lambda,s}(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p_{X^s_p} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega (u^+)^p \mathrm{d}x - \frac{b}{p^*_s}\int_\Omega (u^+)^{p^*_s}\mathrm{d}x.$$

Nosso objetivo é mostrar que $I^+_{\lambda,s}$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, como $I^+_{\lambda,s}(0) = 0$, então começamos por provar as seguintes condições geométricas:

(a) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I^+_{\lambda,p}\Big|_{\partial B_\rho} > \alpha$ e

(b) existe um elemento $e \in X^s_p \backslash \overline{B_\rho}$ tal que $I^+_{\lambda,s}(e) < 0$.

Prova do item (a): Lembrando que pelo Lema 2.11, temos que existe $R > 0$ tal que

$$I^+_{\lambda,s}(u) > \frac{1}{p}\|u\|^p_{X^s_p}, \ \forall \ 0 < \|u\|_{X^s_p} < R. \tag{2.87}$$

Tomando $\alpha = \dfrac{1}{p}\|u\|^p_{X^s_p}$, obtemos que existem $\rho, \alpha > 0$ tais que

$$I^+_{\lambda,s}(u) > \alpha, \ \forall \ \|u\|_{X^s_p} = \rho,$$

provando assim, o item (a).

Prova do item (b): Fixando $\Lambda > 0$, pelo Lema 2.12, temos que existe $e = t_0\varphi_1 \in X^s_p$ com $t_0 = t_0(\Lambda) > 0$ tal que $I^+_{\lambda,s}(e) < 0 = I^+_{\lambda,s}(0)$, para todo $\Lambda > \lambda > 0$. Usando esta última desigualdade e por (2.87), segue que $\|e\| \geq R > \rho$. Portanto, podemos deduzir que $\|e\| > \rho$, isto é, $e \in X^s_p \backslash \overline{B_\rho}$. Assim, existe $e \in X^s_p \backslash \overline{B_\rho}$ tal que $I^+_{\lambda,s}(e) < 0$. Isto prova o item (b).

Agora, mostraremos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que si $0 < \lambda < \lambda_0$, então que o funcional $I^+_{\lambda,s}$ satisfaz a condição (PS), no nível C^+_λ definido por

$$C^+_\lambda = \inf_{g \in \Gamma^+} \max_{u \in g([0,1])} I^+_{\lambda,s}(u),$$

sendo $\Gamma^+ = \{g \in C([0,1], X^s_p) \ ; \ g(0) = 0 \ , \ g(1) = t_0\varphi_1\}$ e com t_0 obtido no Lema 2.12. De fato, inicialmente note que

$$0 \leq \inf_{g \in \Gamma^+} \max_{u \in g([0,1])} I^+_{\lambda,s}(u) = C^+_\lambda < \infty.$$

defina $g_0 : [0,1] \to X^s_p$ dado por $g_0(t) = t(t_0\varphi_1)$. Segue que $g_0 \in \Gamma^+$ e além disso, para $\lambda > 0$

$$I^+_{\lambda,s}(g_0(t)) = \frac{1}{p}\|tt_0\varphi_1\|^p_{X^s_p} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |(tt_0\varphi_1)^+|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |(tt_0\varphi_1)^+|^p \mathrm{d}x - \frac{b}{p^*_s}\int_\Omega \left[(tt_0\varphi_1)^+\right]^{p^*_s} \mathrm{d}x.$$

Como φ_1 é a autofunção positiva associado ao autovalor λ_1, temos

$$\begin{aligned} I^+_{\lambda,s}(g_0(t)) &= \frac{(tt_0)^p\lambda_1}{p}\int_\Omega \varphi_1^p \mathrm{d}x + \frac{\lambda(tt_0)^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q \mathrm{d}x - \frac{a(tt_0)^p}{p}\int_\Omega \varphi_1^p \mathrm{d}x - \frac{b(tt_0)^{p_s^*}}{p_s^*}\int_\Omega \varphi_1^{p_s^*} \mathrm{d}x \\ &= \frac{(tt_0)^p(\lambda_1 - a)}{p}\int_\Omega \varphi_1^p \mathrm{d}x + \frac{\lambda(tt_0)^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q \mathrm{d}x - \frac{b(tt_0)^{p_s^*}}{p_s^*}\int_\Omega \varphi_1^{p_s^*} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

As condições $\lambda_1 < a <, b > 0$, $t_0 > 0$ e $0 \leq t \leq 1$ resultam que

$$I^+_{\lambda,s}(g_0(t)) \leq \frac{\lambda t_0^q}{q}|\varphi_1|^q_{L^q(\Omega)}, \text{ para todo } 0 \leq t \leq 1.$$

Como conseqüência da estimativa acima, concluímos

$$\max_{u\in g_0([0,1])} I^+_{\lambda,s}(u) = \max_{t\in[0,1]} I^+_{\lambda,s}(g_0(t)) \leq \frac{\lambda t_0^q}{q}|\varphi_1|^q_{L^q(\Omega)}.$$

Agora, observando que

$$\inf_{g\in\Gamma^+}\max_{u\in g([0,1])} I^+_{\lambda,s}(u) \leq \max_{u\in g_0([0,1])} I^+_{\lambda,s}(u) = \max_{t\in[0,1]} I^+_{\lambda,s}(g_0(t)),$$

obtemos

$$\inf_{g\in\Gamma^+}\max_{u\in g([0,1])} I^+_{\lambda,s}(u) \leq \frac{\lambda t_0^q}{q}|\varphi_1|^q_q,$$

isto é,

$$0 \leq C^+_\lambda \leq \frac{\lambda t_0^q}{q}|\varphi_1|^q_q, \quad \text{para todo } \lambda > 0. \tag{2.88}$$

Portanto existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$C^+_\lambda < \frac{s}{N} b^{\frac{sp-N}{sp}} S_s^{\frac{N}{sp}}, \text{ para todo } 0 < \lambda < \lambda_0 < \Lambda \quad (\Lambda \text{ obtido no Lema 2.12}).$$

Logo, pelo Lema 2.10 o funcional $I^+_{\lambda,s}$ satisfaz a condição (PS) no nível

$$C^+_\lambda < \frac{s}{N} b^{\frac{sp-N}{sp}} S_s^{\frac{N}{sp}}, \text{ para todo } 0 < \lambda < \lambda_0.$$

Portanto, o Teorema A.49 de Passo da Montanha (ver Apêndice A) garante que existe $u \neq 0$ em X_p^s tal que $I_{\lambda,s}^+(u) = C_\lambda^+$ e $(I_{\lambda,s}^+)'(u) = 0$, isto é, u é um ponto crítico de $I_{\lambda,s}^+$ e consequentemente, uma solução positiva para o problema (2.1). ■

2.3 Solução negativa do funcional $I_{\lambda,s}$

Nesta seção, definiremos a parte negativa do funcional $I_{\lambda,s}$ para encontrarmos soluções negativas para o problema

$$I_{\lambda,s}^- : X_p^s \to \mathbb{R}$$
$$I_{\lambda,s}^-(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^-|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u^-|^p \mathrm{d}x.$$

Pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, o funcional $I_{\lambda,s}^-$ é de classe $C^1(X_p^s, \mathbb{R})$ e

$$\langle (I_{\lambda,s}^-)'(u), h\rangle = \langle A(u), h\rangle + \lambda \int_\Omega |u^-|^{q-1} h \mathrm{d}x - a\int_\Omega |u^-|^{p-1} h \mathrm{d}x, \ \forall\, u, h \in X_p^s. \tag{2.89}$$

Note que, encontrar um ponto crítico para o funcional $I_{\lambda,s}^-$ equivale a encontrar uma função $u \in X_p^s$ que satisfaz a equação:

$$\langle A(u), h\rangle + \lambda \int_\Omega |u^-|^{q-1} h \mathrm{d}x - a\int_\Omega |u^-|^{p-1} h \mathrm{d}x = 0, \ \forall\, h \in X_p^s,$$

ou seja, obtem-se uma solução fraca para a equação :

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = -\lambda|u^-|^{q-1} + a|u^-|^{p-1} \quad \text{em} \ \ \Omega, \\ u = 0 \qquad \text{em} \ \ \mathbb{R}\setminus\Omega, \end{cases} \tag{2.90}$$

em que $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < p$ e $u^- = \max\{u, 0\}$.

Se u for um ponto crítico de $I_{\lambda,s}^-$, então $\langle (I_{\lambda,s}^-)'(u), h\rangle = 0$, $\forall\, h \in X_p^s$, em particular para $h = u^+$, assim usando o Lema A.23 (ver Apêndice A), temos

$$0 = \langle (I^-_{\lambda,s})'(u), u^+\rangle = \langle A(u), u^+\rangle \geq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u^+(x) - u^+(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \|u^+\|^p_{X^s_p}$$

e consequentemente, $u^+ = 0$. Portanto, o ponto crítico u de $I^-_{\lambda,s}$ satisfaz $u = u^- \leq 0$, ou seja, é uma função não positiva de X^s_p.

2.3.0.1 Geometria do Teorema do Passo da Montanha do funcional $I^-_{\lambda,s}$

Agora mostraremos alguns resultados que serão úteis para se obter as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Para isso seja $u \in X^s_p$,

$$\begin{aligned} J^-_{\lambda,s}(u) &:= I^-_{\lambda,s}(u) - \frac{1}{p}\|u\|^p_{X^s_p} \\ &= \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^-|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u^-|^p \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.91}$$

Lema 2.14 *Sejam $0 < a$ e $1 < q < p$, então a solução trivial $u = 0$ é um minimizador local estrito de $J^-_{\lambda,s}$, para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Pelo Corolário 2.9, basta mostrar que $u = 0$ é um mínimo local estrita de $J^-_{\lambda,s}$ na topologia $C^0_\delta(\overline{\Omega})$. Seja $u \in C^0_\delta(\overline{\Omega})\backslash\{0\}$, usando $\|u\|_{0,\delta} = \|u/\delta^s\|_{L^\infty(\Omega)}$, com $\delta : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^+$ definido por $\delta(x) = dist(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, obtemos

$$|u^-| \leq |u| \leq k_1\|u\|_{0,\delta} \text{ para algum } k_1 > 0.$$

como $1 < q < p$ resulta que $(u^-)^{p-q} \leq \|u\|^{p-q}_{0,\delta}$ e consequentemente

$$\int_\Omega |u^-|^p \mathrm{d}x \leq \|u\|^{p-q}_{0,\delta} \int_\Omega |u^-|^q \mathrm{d}x.$$

Desta última desigualdade e do fato que $a > 0$, podemos concluir que

$$-\frac{a}{p}\int_{\Omega}(u^{-})^{p}\mathrm{d}x \geq -\frac{a}{p}\|u\|_{0,\delta}^{p-q}\int_{\Omega}|u^{-}|^{q}\mathrm{d}x. \tag{2.92}$$

De (2.91) e (2.92), segue-se

$$\begin{aligned} J_{\lambda,s}^{-}(u) &> \frac{\lambda}{q}\int_{\Omega}|u^{+}|^{q}\mathrm{d}x - \frac{a}{p}\|u\|_{0,\delta}^{p-q}\int_{\Omega}|u^{-}|^{q}\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{a}{p}\|u\|_{0,\delta}^{p-q}\right)\int_{\Omega}|u^{-}|^{q}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Agora, fixando $\lambda > 0$, seja $R = \frac{\lambda}{q}\frac{p}{a}$, assim se $\|u\|_{0,\delta} < R$, então

$$\frac{a}{p}\|u\|_{0,\delta}^{p-q} < \frac{\lambda}{q},$$

ou seja,

$$\frac{\lambda}{q} - \frac{a}{p}\|u\|_{0,\delta}^{p-q} > 0, \ \forall \ 0 < \|u\|_{0,\delta} < R. \tag{2.94}$$

Finalmente (2.93) e (2.94) implicam que

$$J_{\lambda,s}^{-}(u) > 0 = J_{\lambda,s}^{-}(0), \ \forall \ 0 < \|u\|_{0,\delta} < R$$

e assim, concluímos que $u = 0$ é um mínimo local de $J_{\lambda,s}^{-}$ na topologia $C_{\delta}^{0}(\overline{\Omega})$. ■

O seguinte lema será utilizado para provar uma das condições geométricas exigidas pelo Teorema do Passo da Montanha.

Lema 2.15 *Sejam $a > \lambda_1$, $1 < q < p$ e $b > 0$, então fixando $\Lambda > 0$ existe $t_0' = t_0'(\Lambda) > 0$ tal que*

$$I_{\lambda,s}^{-}(-t\varphi_1) < 0,$$

para todo $t \geq t_0'$ e $\lambda < \Lambda$.

Demonstração: Para $t > 0$, segue que :

$$\begin{aligned} I^{-}_{\lambda,s}(-t\varphi_1) &= \frac{\| - t\varphi_1\|^p_{X^s_p}}{p} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |(-t\varphi_1)^{-}|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |(-t\varphi_1)^{-}|^p \mathrm{d}x \\ &= \frac{|t|^p}{p}\|\varphi_1\|^p_{X^s_p} + \frac{|t|^q\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - \frac{a|t|^p}{p}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Lembrando que φ_1 é a autofunção positiva associado ao λ_1, obtemos

$$\begin{aligned} I^{-}_{\lambda,s}(-t\varphi_1) &= \frac{\lambda_1|t|^p}{p}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x + \frac{|t|^q\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - \frac{a|t|^p}{p}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x \\ &= \frac{t^p}{p}(\lambda_1 - a)\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x + \frac{t^q\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Logo, para todo $t > 0$

$$I^{-}_{\lambda,s}(-t\varphi_1) = t^p\left[\frac{(\lambda_1 - a)}{p}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\frac{1}{t^{p-q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x\right]. \tag{2.95}$$

Agora fixando $\Lambda > 0$, segue dos fatos $\lambda_1 < a$, $1 < q < p$ e $\varphi_1 > 0$ em Ω, podemos escolher $t'_0 = t'_0(\Lambda) > 0$ tal que

$$\frac{(\lambda_1 - a)}{p}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x + \frac{\Lambda}{q}\frac{1}{t_0^{p-q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x < 0.$$

Se $t \geq t'_0$ e $0 < \lambda < \Lambda$, nós temos que

$$\frac{(\lambda_1 - a)}{p}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\frac{1}{t^{p-q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x \leq \frac{(\lambda_1 - a)}{p}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x + \frac{\Lambda}{q}\frac{1}{t_0^{p-q}}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x < 0$$

Logo, por (2.95), segue que $I^{-}_{\lambda,s}(-t\varphi_1) < 0$, para todo $t \geq t'_0$, e $\lambda < \Lambda$. ■

2.3.0.2 Solução negativa via o Teorema do Passo da Montanha

Proposição 2.16 *Suponha que* $\lambda > 0$, $1 < q < p$, $\lambda_1 < a$ *e* $b > 0$. *Então o problema* (2.1) *possui pelo menos uma solução negativa para* $0 < \lambda < \Lambda$, *sendo* Λ *a constante fixada no Lema* 2.15.

Demonstração: Note que toda solução fraca não positiva para o problema (2.1) satisfaz a equação:

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = -\lambda|u^-|^{q-1} + a|u^-|^{p-1} \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2.96}$$

em que $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $1 < q < p$ e $u^- = \min\{u, 0\}$.
Agora, encontrar uma solução fraca para o problema (2.96) é equivalente a encontrar um ponto crítico do funcional

$$I_{\lambda,s}^- : X_p^s \to \mathbb{R}$$

$$I_{\lambda,s}^-(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s}^p + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^-|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega (u^-)^p \mathrm{d}x.$$

Nosso objetivo é mostrar que $I_{\lambda,s}^-$ satisfaça as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, como $I_{\lambda,s}^-(0) = 0$, então começamos por provar as seguintes condições geométricas:

(a) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I_{\lambda,p}^-\Big|_{\partial B_\rho} > \alpha$ e

(b) existe um elemento $e \in X_p^s \backslash \overline{B_\rho}$ tal que $I_{\lambda,s}^-(e) < 0$.

Prova do item (a): Lembrando que pelo Lema 2.14 temos que existe $R > 0$ tal que

$$I_{\lambda,s}^-(u) > \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s}^p, \ \forall \ 0 < \|u\|_{X_p^s} < R. \tag{2.97}$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s}^p$, existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que

$$I_{\lambda,s}^-(u) > \alpha, \ \forall \ \|u\|_{X_p^s} = \rho,$$

provando assim, o item (a).

Prova do item (b): Fixando $\lambda > 0$, pelo Lema 2.15, temos que existe $e = t_0'\varphi_1 \in X_p^s$ com $t_0' = t_0'(\Lambda) > 0$ tal que $I_{\lambda,s}^-(e) < 0 = I_{\lambda,s}^-(0)$, para todo $\Lambda > \lambda > 0$.

Usando esta última desigualdade e por (2.97) segue-se $\|e\| \geq R > \rho$. Portanto, podemos deduzir que $\|e\| > \rho$, isto é, $e \in X_p^s \backslash \overline{B_\rho}$. Assim, existe $e \in X_p^s \backslash \overline{B_\rho}$ tal que $I_{\lambda,s}^+(e) < 0$. Isto prova o item (b).

Observação 2.17 *Note que neste caso, o funcional $I_{\lambda,s}^-$ satisfaz a condição Palais Smale (ou condição (PS)) em todos os níveis para todo $\lambda > 0$, devido ao fato de que a não-linearidade da equação diferencial (2.96) não possui potência crítica fracionária.*

Portanto, o Teorema A.49 de Passo da Montanha (ver Apêndice A) garante que existe $u \neq 0$ em X_p^s tal que $I_{\lambda,s}^-(u) = C_\lambda^-$ e $(I_{\lambda,s}^-)'(u) = 0$, isto é, u é um ponto crítico de $I_{\lambda,s}^-$ e consequentemente, uma solução negativa para o problema (2.1). Neste caso, de forma análoga ao que fizemos em (2.88), também obtemos a seguinte desigualdade que será útil para controlar os níveis minimax.

$$0 \leq C_\lambda^- \leq \frac{\lambda(t_0')^q}{q}|\varphi_1|_q^q, \quad \text{para todo } \lambda > 0. \tag{2.98}$$

■

2.4 Solução via o Teorema de Linking

A ferramenta variacional dessa seção que utilizaremos é o Teorema de Linking (ver Apêndice A, Teorema A.51). Seja λ^* uma constante definida em (1.74)

Nosso principal resultado é

Proposição 2.18 *Suponha que $\lambda_1 < a < \lambda^*$, $1 < q < p$, $\lambda > 0$ e $b > 0$.*

(i) Se $N > sp^2$ e $1 < p \leq \dfrac{2N}{N+s}$, então para λ suficientemente pequeno, o problema (2.1) possui pelo menos uma solução não trivial.

(ii) Se $N > sp((p-1)^2 + p)$ e $p > \dfrac{2N}{N+s}$, então para λ suficientemente pequeno, o problema (2.1) possui pelo menos uma solução não trivial.

2.4.1 Minimizadores para a desigualdade de Sobolev

Os seguintes resultados podem ser encontrados em [67]. Seja

$$S_s = \inf \left\{ \frac{\|u\|^p_{X^s_p}}{\left(\int_\Omega |u|^{p^*_s} \mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{p^*_s}}} \ ; \ u \in X^s_p, u \neq 0 \right\}. \tag{2.99}$$

S_s é a melhor constante de Sobolev da imersão $X^s_p \hookrightarrow L^{p^*_s}(\Omega)$, que é positivo pela desigualdade fracionária de Sobolev. Devido a falta de uma fórmula explícita para um minimizador para S_s nós trabalhamos com certas estimativas assintóticas para minimizadores recentemente obtidos em [17]. Nós temos a seguinte proposição que pode ser encontrada em [17], em relação ao problema de minimização (2.99).

Proposição 2.19 *Sejam* $1 < p < \infty$*,* $s \in (0,1)$*,* $N > sp$ *e* S_s *como* (2.99)*. Então*

(i) *Existe um minimizador para* S_s*;*

(ii) *Para cada minimizador* U*, existe* $x_0 \in \mathbb{R}$ *e uma função monótona de sinal constante* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $U(x) = u(|x - x_0|)$*;*

(iii) *Para cada minimizador* U*, existe* λ_U *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(U(x) - U(y))^{p-1}(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda_U \int_{\mathbb{R}^{2N}} U^{p^*_s - 1} v \mathrm{d}x \ \forall\, v \in X^s_p.$$

A seguir, vamos fixar um minimizador decrescente não negativo radialmente simétrico $U = U(r)$ para S_s. Multiplicando U por uma constante positiva, se necessário, podemos supor que

$$(-\Delta)^s_p U = U^{p^*_s - 1}. \tag{2.100}$$

Testando esta equação com U e usando (2.99) mostra que

$$\|U\|^p_{X^s_p} = \|U\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\mathbb{R}^N)} = S_s^{N/sp}. \tag{2.101}$$

Para qualquer $\varepsilon > 0$, as funções

$$U_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^{(N-sp)/p}} U\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \tag{2.102}$$

formam uma família de minimizadores para S_s satisfazendo (2.100) e (2.101), então após de uma mudança de variável podemos supor que $U(0) = 1$. Daqui em diante, U indicará um minimizador normalizado (em relação a múltiplas constantes e a mudança de variável). Na ausência de uma fórmula explícita para U, usaremos as seguintes estimativas assintóticas demonstrada em [67] e [17].

Lema 2.20 *Existem $c_1, c_2 > 0$ e $\theta > 1$ tal que para cada $r \geq 1$,*

$$\frac{c_1}{r^{(N-sp)/(p-1)}} \leq U(r) \leq \frac{c_2}{r^{(N-sp)/(p-1)}}$$

e

$$\frac{U(\theta r)}{U(r)} \leq \frac{1}{2}.$$

2.4.2 Geometria do Teorema de Linking

Nesta seção, nós começamos fazendo uma escolha de uma decomposição do espaço X_p^s que será utilizada no problema . Assim, pela Proposição 1.35 podemos obter a seguinte decomposição

$$X_p^s = \text{span}\{\varphi_1\} \oplus W, \tag{2.103}$$

em que span$\{\varphi_1\}$ é o espaço gerado pela autofunção do operador fracionário $(-\Delta)_p^s$ correspondente ao autovalor λ_1 e

$$W = \{u \in X_p^s \ : \ \langle A(\varphi_1), u\rangle = 0\},$$

com

$$\langle A(\varphi_1), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\varphi_1(x) - \varphi_1(y)|^{p-2}(\varphi_1(x) - \varphi_1(y))(u(x) - u(y))}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Denote por P_-^s e P_+^s as projeções do espaço X_p^s em span$\{\varphi_1\}$ e W, respectivamente. Nesta seção, suponha que $0 < s < 1$, $N > sp$, $\lambda > 0$, $\lambda_1 < a < \lambda^*$ e $b > 0$.

A proposição a seguir nos dá uma das condições da geometria do Teorema de Linking.

Proposição 2.21 *Seja $a < \lambda^*$. Então, existem α, $\rho > 0$ tais que $I_{\lambda,s}(u) \geq \alpha$ sempre que $u \in W$ e $\|u\| = \rho$.*

Demonstração: Seja $u \in W$, lembrando que $\lambda > 0$ e $q > 0$, tem-se

$$I_{\lambda,s}(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s}^p - \frac{a}{p}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x - \frac{b}{p_s^*}\int_\Omega |u^+|^{p_s^*}\mathrm{d}x. \tag{2.104}$$

Agora, pela caracterização de $\lambda^* = \inf\limits_{u \in W} \dfrac{\|u\|_{X_p^s}^p}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x}$, obtemos

$$\lambda^* \leq \frac{\|u\|_{X_p^s}^p}{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p}.$$

Logo, usando a desigualdade anterior e o fato que $a > 0$, segue que

$$-\frac{a}{p}\int_\Omega u^p \mathrm{d}x \geq -\frac{a}{p\lambda^*}\|u\|_{X_p^s}^p. \tag{2.105}$$

Agora, como $|u| \geq u^+$, então $|u|^{p_s^*} \geq (u^+)^{p_s^*}$, e consequentemente,

$$-\frac{b}{p_s^*}\int_\Omega (u^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x \geq -\frac{b}{p_s^*}\int_\Omega |u|^{p_s^*}\mathrm{d}x. \tag{2.106}$$

Por outro lado, como $X_p^s \hookrightarrow L^r$, para todo $r \in [p, p_s^*]$, existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{L^{p_s^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{X_p^s}$. Logo,

$$-\frac{b}{p_s^*}\int_\Omega |u|^{p_s^*}\mathrm{d}x \geq -\frac{bC^{p_s^*}}{p_s^*}\|u\|_{X_p^s}^{p_s^*}. \tag{2.107}$$

Assim, por (2.106) e (2.107), obtemos

$$-\frac{b}{p_s^*}\int_\Omega (u^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x \geq -\frac{bC^{p_s^*}}{p_s^*}\|u\|_{X_p^s}^{p_s^*}. \tag{2.108}$$

Substituindo (2.105), (2.108) em (2.104), obtemos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,s}(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s}^p - \frac{a}{p\lambda^*}\|u\|_{X_p^s}^p - \frac{bC^{p_s^*}}{p_s^*}\|u\|_{X_p^s}^{p_s^*} \\ &= \frac{1}{p}\left(1-\frac{a}{\lambda^*}\right)\|u\|_{X_p^s}^p - \frac{bC^{p_s^*}}{p_s^*}\|u\|_{X_p^s}^{p_s^*}. \end{aligned}$$

Agora, como $a < \lambda^*$ e definindo $A = \dfrac{1}{p}\left(1-\dfrac{a}{\lambda^*}\right) > 0$ e $B = \dfrac{bC^{p_s^*}}{p_s^*} > 0$, segue que

$$I_{\lambda,s}(u) \geq \|u\|_{X_p^s}^p(A - B\|u\|_{X_p^s}^{p_s^*-p}).$$

Assim, se $\|u\|_{X_p^s} = \rho$ for suficientemente pequeno $\left(0 < \rho < \left(\dfrac{A}{B}\right)^{\frac{1}{p_s^*-p}}\right)$, temos que

$$I_{\lambda,s}(u) \geq \rho^p(A - B\rho^{p_s^*-p}) = \alpha > 0.$$

Portanto, existem $0 < \rho < \left(\dfrac{A}{B}\right)^{\frac{1}{p_s^*-p}}$ e $\alpha = \rho^p(A - B\rho^{p_s^*-p})$ tais que $I_{\lambda,s}(u) \geq \alpha$ sempre que $u \in W$ e $\|u\|_{X_p^s} = \rho$. ■

Para aplicar o Teorema de Linking (ver Apêndice A, Teorema A.51) em relação à decomposição (2.103) é necessário construir um vetor $e \in W$ com as propriedades declaradas no teorema. Para conseguir isso, contamos com a família de funções $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ introduzidas em (2.102). Sem perda de generalidade, supomos que $0 \in \Omega$. Como em [29], para cada $\varepsilon, \delta > 0$, seja

$$m_{\varepsilon,\delta} = \frac{U_\varepsilon(\delta)}{U_\varepsilon(\delta) - U_\varepsilon(\theta\delta)},$$

e defina

$$g_{\varepsilon,\delta}(t) := \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 \leq t \leq U_\varepsilon(\theta\delta), \\ m^p_{\varepsilon,\delta}(t - U_\varepsilon(\theta\delta)), & \text{se} \quad U_\varepsilon(\theta\delta) \leq t \leq U_\varepsilon(\delta), \\ t - U_\varepsilon(\delta)(m^{p-1}_{\varepsilon,\delta} - 1), & \text{se} \quad t \geq U_\varepsilon(\delta), \end{cases}$$

Assim como

$$\begin{aligned} G_{\varepsilon,\delta}(t) &:= \int_0^t (g'_{\varepsilon,\delta}(\tau))^{\frac{1}{p}} d\tau \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 \leq t \leq U_\varepsilon(\theta\delta), \\ m_{\varepsilon,\delta}(t - U_\varepsilon(\theta\delta)), & \text{se} \quad U_\varepsilon(\theta\delta) \leq t \leq U_\varepsilon(\delta), \\ t, & \text{se} \quad t \geq U_\varepsilon(\delta). \end{cases} \end{aligned} \tag{2.109}$$

As funções $g_{\varepsilon,\delta}$ e $G_{\varepsilon,\delta}$ são não decrescentes e absolutamente contínuas. Considere a função não-crescente radialmente simétrica,

$$u_{\varepsilon,\delta}(r) = G_{\varepsilon,\delta}(U_\varepsilon(r))$$

que satisfaz

$$u_{\varepsilon,\delta}(r) = \begin{cases} U_\varepsilon(r), & \text{se} \quad r \leq \delta, \\ 0, & \text{se} \quad r \geq \theta\delta. \end{cases} \tag{2.110}$$

Por [7, p.17], U_ε é não crescente radialmente simétrico, para qualquer $\delta \leq r \leq \theta\delta$ obtemos

$$0 \leq m_{\varepsilon,\delta}\big(U_\varepsilon(r) - U_\varepsilon(\theta\delta)\big) = U_\varepsilon(\delta)\left[\frac{U_\varepsilon(r) - U_\varepsilon(\theta\delta)}{U_\varepsilon(\delta) - U_\varepsilon(\theta\delta)}\right] \leq U_\varepsilon(\delta).$$

Logo, de (2.109) e (2.110) segue que

$$u_{\varepsilon,\delta}(r) \leq \begin{cases} U_\varepsilon(r), & \text{se} \quad r < \theta\delta, \\ 0, & \text{se} \quad r \geq \theta\delta. \end{cases} \tag{2.111}$$

Tomamos

$$e_{\varepsilon,\delta} = P_+^s u_{\varepsilon,\delta} \in W, \tag{2.112}$$

que é uma função contínua porque $e_{\varepsilon,\delta} = u_{\varepsilon,\delta} - P_-^s u_{\varepsilon,\delta}$, $P_-^s u_{\varepsilon,\delta} \in \operatorname{span}\{\varphi_1\}$ e como mostrado em [17] nós sabemos que $U \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C^0(\mathbb{R}^N)$.

2.4.2.1 Estimativas

No que segue mostraremos algumas estimativas que serão úteis em nosso trabalho. Para $0 < \varepsilon \leq 2\delta < \theta^{-1}\delta_\Omega$, em que θ é dado no Lema 2.20 e $\delta_\Omega := dist(0, \partial\Omega)$. Pelo Lema A.27 do Apêndice A obtemos o seguinte resultado para $\beta = 1$

$$\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)} \leq \begin{cases} C_1 \varepsilon^{\frac{N}{p}} |\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|, & \text{se} \quad p = \frac{2N}{N+s} \\ C_1 \varepsilon^{N - \frac{N-sp}{p}}, & \text{se} \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s}, \\ C_1 \delta^{N - \frac{N-sp}{p-1}} \varepsilon^{\frac{N-sp}{p(p-1)}}, & \text{se} \quad p > \frac{2N}{N+s}. \end{cases} \tag{2.113}$$

Além disso, como $(p_s^* - 1)\dfrac{p}{p-1} > p_s^*$, segue do Lema A.27 do Apêndice A (para $\beta = p_s^* - 1$), que

$$\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*-1}(\Omega)}^{p_s^*-1} \leq C_{p_s^*-1} \varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}, \tag{2.114}$$

em que $C_1 > 0$ e $C_{p_s^*-1} > 0$ são constantes. Usando argumentos como em [26], podemos encontrar as seguintes estimativas.

Estimativas para $\|P_-^s u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(\Omega)}$:

Escrevemos $P_-^s u_{\varepsilon,\delta} = \alpha\varphi_1$ (pois $P_-^s u_{\varepsilon,\delta} \in \operatorname{span}\{\varphi_1\}$). Logo, como $P_+^s u_{\varepsilon,\delta} \in W$, temos

$$\alpha = \langle A(\varphi_1), P_-^s u_{\varepsilon,\delta}\rangle = \langle A(\varphi_1), u_{\varepsilon,\delta} - P_+^s u_{\varepsilon,\delta}\rangle = \langle A(\varphi_1), u_{\varepsilon,\delta}\rangle,$$

e consequentemente

$$P_-^s u_{\varepsilon,\delta} = \langle A(\varphi_1), u_{\varepsilon,\delta}\rangle\varphi_1.$$

Então, pela definição do operador A

$$|P_-^s u_{\varepsilon,\delta}| \leq \|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)} |\langle A(\varphi_1), u_{\varepsilon,\delta}\rangle| \leq \|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\varphi_1|^{p-1} |u_{\varepsilon,\delta}| \mathrm{d}x$$
$$\leq \|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)}^p \|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Usando (2.113)

$$\|P_-^s u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \begin{cases} \|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)}^p C_1 \varepsilon^{\frac{N}{p}} |\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|, & \text{se} \quad p = \frac{2N}{N+s} \\ \|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)}^p C_1 \varepsilon^{N - \frac{N-sp}{p}}, & \text{se} \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s}, \\ \|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)}^p C_1 \delta^{N - \frac{N-sp}{p-1}} \varepsilon^{\frac{N-sp}{p(p-1)}}, & \text{se} \quad p > \frac{2N}{N+s}. \end{cases} \tag{2.115}$$

Estimativas para $\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)}$:

$$\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)} = \|P_+^s u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_{\varepsilon,\delta} - P_-^s u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)} + \|P_-^s u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)}.$$

Usando que as normas $\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ são equivalentes no espaço de dimensão finita span$\{\varphi_1\}$, (note que $P_-^s u_{\varepsilon,\delta} \in \text{span}\{\varphi_1\}$), segue de (2.113) e (2.115) que

$$\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)} \leq \begin{cases} C_0 \varepsilon^{\frac{N}{p}} |\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|, & \text{se} \quad p = \frac{2N}{N+s} \\ C_0 \varepsilon^{N - \frac{N-sp}{p}}, & \text{se} \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s}, \\ C_0 \delta^{N - \frac{N-sp}{p-1}} \varepsilon^{\frac{N-sp}{p(p-1)}}, & \text{se} \quad p > \frac{2N}{N+s}, \end{cases} \tag{2.116}$$

em que $C_0 > 0$ é constante.

Estimativas para $\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p$:

$$\begin{aligned} \|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p &= \|P_+^s u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &\leq \|u_{\varepsilon,\delta} - P_-^s u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &\leq (\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)} + \|P_-^s u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)})^p \\ &\leq 2^p (\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p + \|P_-^s u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p). \end{aligned}$$

Agora supondo que $N > sp^2$ e usando que as normas $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ são equivalentes no espaço de dimensão finita span$\{\varphi_1\}$, (note que $P^s_- u_{\varepsilon,\delta} \in$ span$\{\varphi_1\}$,), segue de [7, Lema 2.4], (2.115), $N > sp$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Big|\log(\dfrac{\varepsilon}{\delta})\Big| = +\infty$ e $\dfrac{N-sp}{p-1} > sp$, que

$$\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \begin{cases} K_1\varepsilon^{sp}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|^p, & \text{se} \quad p = \frac{2N}{N+s} \ \text{ e } \ N > sp^2 \\ K_1\varepsilon^{sp}, & \text{se} \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s} \ \text{ e } \ N > sp^2 \\ K_1\varepsilon^{sp}, & \text{se} \quad p > \frac{2N}{N+s} \ \text{ e } \ N > sp^2, \end{cases} \tag{2.117}$$

em que $K_1 > 0$ é constante.

Estimativas para $\|e_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*-1}_{L^{p_s^*-1}(\Omega)}$:

Analogamente como no caso anterior,

$$\|e_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*-1}_{L^{p_s^*-1}(\Omega)} \leq 2^{p_s^*-1}(\|u_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*-1}_{L^{p_s^*-1}(\Omega)} + \|P^s_- u_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*-1}_{L^{p_s^*-1}(\Omega)}).$$

Usando que as normas $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{L^{p_s^*-1}(\Omega)}$ são equivalentes no espaço de dimensão finita span$\{\varphi_1\}$, (note que $P^s_- u_{\varepsilon,\delta} \in$ span$\{\varphi_1\}$,), segue de (2.114), (2.115), $(p_s^*-1)\dfrac{N}{p} > N - \dfrac{N}{p} = \dfrac{N-sp}{p}$, $\left(\text{pois } p = \dfrac{2N}{N+s}\right)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Big|\log(\dfrac{\varepsilon}{\delta})\Big| = +\infty$ e $(p_s^* - 1)\left(\dfrac{N-sp}{p(p-1)}\right) > \dfrac{N-sp}{p}$, que

$$\|e_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*-1}_{L^{p_s^*-1}(\Omega)} \leq \begin{cases} K_2\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|^{p_s^*-1}, & \text{se} \quad p = \frac{2N}{N+s}, \\ K_2\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}, & \text{se} \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s}, \\ K_2\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}, & \text{se} \quad p > \frac{2N}{N+s}, \end{cases} \tag{2.118}$$

em que $K_2 > 0$ é constante.

Estimativas para $\left|\displaystyle\int_\Omega \left(|e_{\varepsilon,\delta}|^{p_s^*} - |u_{\varepsilon,\delta}|^{p_s^*}\right)\mathbf{d}x\right|$:

Seguindo as mesmas ideias de [26, p.286], obtemos

$$\left|\int_\Omega \left(|e_{\varepsilon,\delta}|^{p_s^*} - |u_{\varepsilon,\delta}|^{p_s^*}\right)\mathrm{d}x\right| \leq C\|u_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*-1}_{L^{p_s^*-1}(\Omega)}\|P^s_- u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(\Omega)} + C\|P^s_- u_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*}_{L^p(\Omega)}.$$

Usando que as normas $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{L^{p_s^*-1}(\Omega)}$ são equivalentes no espaço de dimensão finita span$\{\varphi_1\}$, (note que $P_-^s u_{\varepsilon,\delta} \in \operatorname{span}\{\varphi_1\}$,), segue de (2.114), (2.115), $\dfrac{N-sp}{p} + \dfrac{N}{p} = \dfrac{2N-sp}{p} = N \left(\text{pois } p = \dfrac{2N}{N+s}\right)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|\log(\dfrac{\varepsilon}{\delta})\right| = +\infty$, $p_s^*\left(\dfrac{N-sp}{p(p-1)}\right) > \dfrac{N-sp}{p-1} = \dfrac{N-sp}{p} + \dfrac{N-sp}{p(p-1)}$, e $\dfrac{N-sp}{p}p_s^* = N$ que

$$\left|\int_\Omega |e_{\varepsilon,\delta}|^{p_s^*}\mathrm{d}x - \int_\Omega |u_{\varepsilon,\delta}|^{p_s^*}\mathrm{d}x\right| \le \begin{cases} K_3\varepsilon^N|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|^{p_s^*}, & \text{se} \quad p = \frac{2N}{N+s}, \\ K_3\varepsilon^N + K_3\varepsilon^{N(p_s^*-1)}, & \text{se} \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s}, \\ K_3\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}}, & \text{se} \quad p > \frac{2N}{N+s}, \end{cases} \tag{2.119}$$

em que $K_3 > 0$ é constante.

Um fato essencial que será empregado é que para $K > 0$ (fixo) existem $\varepsilon(K) > 0$ e $\sigma > 0$ tais que

$$B_\sigma(0) \subset \{x \in \Omega \,:\, e_{\varepsilon,\delta}(x) > K\} := \Omega_{\varepsilon,K} \quad \text{sempre que} \;\; 0 < \varepsilon \le \varepsilon(K). \tag{2.120}$$

De fato, pela definição de $u_{\varepsilon,\delta}$ e Lema 2.20, temos

$$\begin{aligned} e_{\varepsilon,\delta}(0) &= u_{\varepsilon,\delta}(0) - P_-^s u_{\varepsilon,\delta}(0) \\ &= U_\varepsilon(0) - P_-^s u_{\varepsilon,\delta}(0) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{(N-sp)/p}} - P_-^s u_{\varepsilon,\delta}(0) \\ &\ge \frac{1}{\varepsilon^{(N-sp)/p}} - \|P_-^s u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

De (2.115), obtemos

$$e_{\varepsilon,\delta}(0) \ge \frac{1}{\varepsilon^{(N-sp)/p}} - \|P_-^s u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(\Omega)} \to +\infty, \tag{2.121}$$

quando $\varepsilon \to 0$, porque $N > sp$, o qual estabelece a afirmação (2.120) pois para $K > 0$, existe $\varepsilon(K) > 0$ tal que $e_{\varepsilon,\delta}(0) > K$, para todo $0 < \varepsilon \le \varepsilon(K)$, e consequentemente pela continuidade de $e_{\varepsilon,\delta}$ existe $\sigma > 0$ tal que $B_\sigma(0) \subset \{x \in \Omega \,:\, e_{\varepsilon,\delta}(x) > K\}$.

Portanto, por [33, Lema 2.4] e usando (2.119) temos a seguinte estimativa

$$\left|\int_{\Omega_{\varepsilon,K}} |e_{\varepsilon,\delta}|^{p_s^*}\mathrm{d}x - \int_{\Omega} |u_{\varepsilon,\delta}|^{p_s^*}\mathrm{d}x\right| \leq \begin{cases} K_4\varepsilon^N|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|^{p_s^*}, & \text{se} \quad p = \frac{2N}{N+s}, \\ K_4\varepsilon^N + K_4\varepsilon^{N(p_s^*-1)}, & \text{se} \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s}, \\ K_4\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}}, & \text{se} \quad p > \frac{2N}{N+s}, \end{cases} \tag{2.122}$$

em que $K_4 > 0$ é constante. Em particular (2.120) verifica para um $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$e_{\varepsilon,\delta} \neq 0 \quad \text{para todo} \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \tag{2.123}$$

Devido a (2.123), podemos escolher $e = e_{\varepsilon,\delta}$ no Teorema de Linking (ver Apêndice A, Teorema A.51). Sejam $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $R_1, R_2 > 0$ e a função $e_{\varepsilon,\delta}$ definida em (2.112), assim introduzimos o seguinte conjunto

$$Q_{\varepsilon,R_1,R_2} := \{u \in X_p^s \,:\, u = u_1 + re_{\varepsilon,\delta},\, u_1 \in (\mathrm{span}\{\varphi_1\}) \cap \overline{B}_{R_1}(0),\, 0 \leq r \leq R_2\}. \tag{2.124}$$

Por (2.123), a construção em (2.124) é significativa. Denote por $\partial Q_{\varepsilon,R_1,R_2}$ a fronteira (relativa) de Q_{ε,R_1,R_2} no espaço de dimensão finita $\mathrm{span}\{\varphi_1\} \oplus \mathbb{R}e_{\varepsilon,\delta}$. O resultado abaixo é fundamental para a existência de uma terceira solução não trivial para o problema (2.1). No que segue, o símbolo $O(\varepsilon^\omega)$ para algum $\omega \geq 0$ designa uma função satisfazendo $|O(\varepsilon^\omega)| \leq C\varepsilon^\omega$ para algum $C > 0$ independente de $\varepsilon > 0$. Tal símbolo nem sempre é positivo.

Proposição 2.22 *Existem $R_1 > 0$ e $R_2 > 0$ suficientemente grandes tais que*

$$I_{\lambda,s}(u) \leq \frac{\lambda}{q}\int_{\Omega} |u|^q \mathrm{d}x,\ \forall\, u \in \partial Q_{\varepsilon,R_1,R_2}, \tag{2.125}$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e para todo $\lambda > 0$.

Demonstração: Nós dividimos a fronteira $\partial Q_{\varepsilon,R_1,R_2}$ em três partes:

$$\partial Q_{\varepsilon,R_1,R_2} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \tag{2.126}$$

com

$$\Gamma_1 = B_{R_1} \cap \operatorname{span}\{\varphi_1\}, \tag{2.127}$$

$$\Gamma_2 = \{u \in X_p^s \,:\, u = u_1 + re_{\varepsilon,\delta},\ u_1 \in \operatorname{span}\{\varphi_1\},\ \|u_1\|_{X_p^s} = R_1,\ 0 \le r \le R_2\}, \tag{2.128}$$

$$\Gamma_3 = \{u \in X_p^s \,:\, u = u_1 + R_2 e_{\varepsilon,\delta},\ u_1 \in \operatorname{span}\{\varphi_1\},\ \|u_1\|_{X_p^s} \le R_1\}. \tag{2.129}$$

Na demonstração usamos a seguinte desigualdade encontrada em [67, p.17]: dado $k > 1$, $p > 1$ e $p - 1 < \tau < p$ existe uma constante $C(k,\tau) > 0$ tal que

$$|a+b|^p \le k|a|^p + |b|^p + C|a|^{p-\tau}|b|^\tau,\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}. \tag{2.130}$$

Aplicando a desigualdade de Young com expoentes $\dfrac{p}{\tau} > 1$ e $\dfrac{p}{p-\tau} > 1$ em (2.130), obtemos que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|a+b|^p \le C_1|a|^p + C_2|b|^p,\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}. \tag{2.131}$$

De fato,

$$C|a|^{p-\tau}|b|^q \le \frac{(p-\tau)C}{p}|a|^p + \frac{\tau C}{p}|b|^p.$$

De (2.130) segue a afirmação (2.131).

Agora, para $a = \|re_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}$, $b = \|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}$ em (2.130), temos

$$\begin{aligned}
\|u_1\|^p_{L^p(\Omega)} &= \| - re_{\varepsilon,\delta} + (u_1 + re_{\varepsilon,\delta})\|^p_{L^p(\Omega)} \\
&\le \big(\|re_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)} + \|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}\big)^p \\
&\le k\|re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} + C\|re_{\varepsilon,\delta}\|^{p-\tau}_{L^p(\Omega)}\|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^\tau_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Logo pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
\|u_1\|^p_{L^p(\Omega)} \le & k\|re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} \\
& + C\|re_{\varepsilon,\delta}\|^{p-\tau}_{L^p(\Omega)}\big(\|u_1\|_{L^p(\Omega)} + \|re_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}\big)^\tau.
\end{aligned} \tag{2.132}$$

(Primeiro caso). $0 < \tau \leq 1$: Do Lema A.12 segue-se

$$
\begin{aligned}
\|u_1\|^p_{L^p(\Omega)} \leq & k\|re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} \\
& + C\|re_{\varepsilon,\delta}\|^{p-\tau}_{L^p(\Omega)}\|u_1\|^\tau_{L^p(\Omega)} + C\|re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} \\
= & (k + C)\|re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} + C\|re_{\varepsilon,\delta}\|^{p-\tau}_{L^p(\Omega)}\|u_1\|^\tau_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.133}
$$

(Segundo caso). $\tau > 1$: Pelas estimativa (2.131) e (2.132)

$$
\begin{aligned}
\|u_1\|^p_{L^p(\Omega)} \leq & k\|re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} \\
& + C\|re_{\varepsilon,\delta}\|^{p-\tau}_{L^p(\Omega)}\|u_1\|^\tau_{L^p(\Omega)} \\
= & (k + C)\|re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} + C\|re_{\varepsilon,\delta}\|^{p-\tau}_{L^p(\Omega)}\|u_1\|^\tau_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.134}
$$

Concluindo por (2.133) e (2.134) que para todo $p-1 < \tau < p$ é verificado a seguinte estimativa

$$
\|u_1\|^p_{L^p(\Omega)} \leq (k + C)\|re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} + C\|re_{\varepsilon,\delta}\|^{p-\tau}_{L^p(\Omega)}\|u_1\|^\tau_{L^p(\Omega)}.
$$

Usando que as normas $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{X^s_p}$ são equivalentes no espaço de dimensão finita span$\{\varphi_1\}$, (note que $u_1 \in$ span$\{\varphi_1\}$), obtemos

$$
-\|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} \leq -\|u_1\|^p_{L^p(\Omega)} + (k + C)r^p\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} + Cr^{p-\tau}\|e_{\varepsilon,\delta}\|^{p-\tau}_{L^p(\Omega)}\|u_1\|^\tau_{X^s_p}. \tag{2.135}
$$

Por outro lado, usando (2.130) com $b = \|u_1\|_{X^s_p}$ e $a = \|re_{\varepsilon,\delta}\|$,

$$
\begin{aligned}
\|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X^s_p} \leq & \left(\|u_1\|_{X^s_p} + \|re_{\varepsilon,\delta}\|_{X^s_p}\right)^p \\
& \leq k'r^p\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X^s_p} + \|u_1\|^p_{X^s_p} + C'r^{p-\tau}\|e_{\varepsilon,\delta}\|^{p-\tau}_{X^s_p}\|u_1\|^\tau_{X^s_p}.
\end{aligned}
$$

Usando que as normas $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{X_p^s}$ são equivalentes no espaço de dimensão finita span$\{\varphi_1, e_{\varepsilon,\delta}\}$, temos

$$\|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}^p \leq \|u_1\|_{X_p^s}^p + k'r^p\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p + C'r^{p-\tau}\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^{p-\tau}\|u_1\|_{X_p^s}^{\tau}. \tag{2.136}$$

Portanto de (2.135) e (2.136), segue que existe uma constante $C_* > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}^p - \frac{a}{p}\|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{p}\|u_1\|_{X_p^s}^p - \frac{a}{p}\|u_1\|_{L^p(\Omega)}^p + C_*r^p\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p \\ + C_*r^{p-\tau}\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^{p-\tau}\|u_1\|_{X_p^s}^{\tau}.\end{aligned} \tag{2.137}$$

Discutimos separadamente o comportamento do funcional $I_{\lambda,s}$ em cada parte da fronteira de Q_{δ,R_1,R_2} em (2.126).

(i) $u \in \Gamma_1$: Por (2.127), temos que $u \in$ span$\{\varphi_1\}$. Escrevendo $u = \alpha\varphi_1$, como φ_1 satisfaz $\|\varphi_1\|_{X_p^s}^p = \lambda_1 \displaystyle\int_\Omega |\varphi_1|^p$, temos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,s}(u) &= \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s}^p + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x - \frac{b}{p_s^*}\int_\Omega (u^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s}^p + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x \\ &= \frac{|t|^p}{p}\|\varphi_1\|_{X_p^s}^p + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x - \frac{a|t|^p}{p}\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x \\ &= \frac{|t|^p}{p}(\lambda_1 - a)\int_\Omega |\varphi_1|^p \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |\varphi_1|^q \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Agora usando o fato que $\lambda_1 < a$, concluímos

$$I_{\lambda,s}(u) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x, \,\forall\, u \in \Gamma_1.$$

(ii) $u \in \Gamma_2$: Por (2.128) escrevemos $u = u_1 + re_{\varepsilon,\delta}$ com $u_1 \in$ span$\{\varphi_1\}$ e $\|u_1\|_{X_p^s} = R_1$. Como o operador projação P_+^s é linear e limitado (ver [19, p.38]) no espaço X_p^s, segue-se que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s} = \|P_+^s u_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s} \leq C_1 \|u_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}.$$

Logo, pelo Lema A.28 do Apêndice A, existe $C > 0$ tal que para qualquer $0 < \varepsilon \leq \min\left\{\delta/2, \varepsilon_0\right\} = \widehat{\varepsilon_0}$.

$$\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}^p \leq C_1^p \|u_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}^p \leq C_1^p S_s^{N/sp} + C_1^p C \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{(N-sp)/(p-1)}. \tag{2.138}$$

Assim, $\eta := \sup\limits_{0<\varepsilon\leq\widehat{\varepsilon_0}} \|e_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}$ é finito. A fim de cumprir com a condição $R_2\|e_{\epsilon,\delta}\| > \rho$ no Teorema de Linking (ver Apêndice A, Teorema A.51) para ε suficientemente pequeno ($\leq \widehat{\varepsilon_0}$) que serão fixados mais adiante, e $\delta < \dfrac{\theta^{-1}\delta_\Omega}{2}$ (ver seção 2.4.2.1) para $\rho > 0$ dada na Proposição 2.21. Consequentemente

$$R_2\eta \geq R_2\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s} > \rho.$$

Logo $\dfrac{\rho}{\eta}$ é uma cota inferior do admissível R_2. Seja $r_0 = \max\{\rho/\eta, 1\}$. Em nossa análise, distinguimos dois casos.

Primeiro caso: $0 \leq r \leq r_0$.

Pela desigualdade (2.137), usando que as normas $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{X_p^s}$ são equialentes no espaço de dimensão finita $\mathrm{span}\{\varphi_1, e_{\varepsilon,\delta}\}$, e $u_1 \in \mathrm{span}\{\varphi_1\}$.

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,s}(u) =& \frac{1}{p}\|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X^s_p} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u_1 + re_{\varepsilon,\delta}|^p \mathrm{d}x - \frac{b}{p^*_s}\int_\Omega (u^+)^{p^*_s}\mathrm{d}x \\
\leq& \frac{1}{p}\|u_1\|^p_{X^s_p} - \frac{a}{p}\|u_1\|^p_{L^p(\Omega)} + C_* r^p \|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} + C_* r^{p-\tau}\|e_{\varepsilon,\delta}\|^{p-\tau}_{L^p(\Omega)}\|u_1\|^\tau_{X^s_p} \\
&+ \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x \\
\leq& \frac{1}{p}\left(1 - \frac{a}{\lambda_1}\right)\|u_1\|^p_{X^s_p} + C_* r^p\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X^s_p} + C_* r^{p-\tau}\|e_{\varepsilon,\delta}\|^{p-\tau}_{X^s_p}\|u_1\|^\tau_{X^s_p} \\
&+ \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x \\
\leq& \frac{1}{p}\left(1 - \frac{a}{\lambda_1}\right) R_1^p + C_* r_0^p \eta^p + C_* r_0^{p-\tau}\eta^{p-\tau}R_1^\tau + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Tomando $R_1 > 0$ suficientemente grande, chegamos à conclusão que $I_\lambda(u) \leq \dfrac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x$, pois $\lambda_1 < a$ e $\tau < p$.

Segundo caso: $r > r_0$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $R_1 \geq 1$. Denote

$$K(R_1) := \frac{1}{r_0}\sup\left\{\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} \,:\, u_1 \in \mathrm{span}\{\varphi_1\},\ \|u_1\|_{X^s_p} = R_1\right\} \in [c_0 R_1, c_1 R_1], \tag{2.139}$$

com constantes $c_0 > 0$ e $c_1 > 0$, pois, o espaço $\mathrm{span}\{\varphi_1\}$ de dimensão finita.

Nós introduzimos o conjunto aberto

$$\Omega_{\varepsilon,\delta} = \{x \in \Omega \,:\, e_{\varepsilon,\delta}(x) > K(R_1)\}. \tag{2.140}$$

De (2.121) notamos que

$$e_{\varepsilon,\delta}(0) \geq \varepsilon^{-\frac{N-sp}{p}} - \|P^s_- u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(\Omega)} \to +\infty,$$

quando $\varepsilon \to 0$, O qual garante que $0 \in \Omega_{\varepsilon,\delta}$ sempre que $\varepsilon \in (0, \widehat{\varepsilon_0}]$, com $\varepsilon_0 > 0$.

Note que, se $x \in \Omega_{\varepsilon,\delta}$, $r > r_0$ e por $u_1 \in \operatorname{span}\{\varphi_1\}$ com $\|u_1\|_{X_p^s} = R_1$, obtemos

$$e_{\varepsilon,\delta}(x) > K(R_1) \geq \frac{1}{r_0}\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} \geq \frac{1}{r}|u_1(x)| \geq -\frac{u_1(x)}{r}, \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Logo,

$$e_{\varepsilon,\delta}(x) + \frac{u_1(x)}{r} > 0 \tag{2.141}$$

para todo $x \in \Omega_{\varepsilon,\delta}$, $r > r_0$ e $u_1 \in \operatorname{span}\{\varphi_1\}$ com $\|u_1\|_{X_p^s} = R_1$.

Escolhendo $R_2 = 2R_1$. Pela desigualdade (2.137), usando que as normas $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{X_p^s}$ são equialentes no espaço de dimensão finita $\operatorname{span}\{\varphi_1, e_{\varepsilon,\delta}\}$, $u_1 \in \operatorname{span}\{\varphi_1\}$ e (2.138) com uma constante $C_0 > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,s}(u) =& \frac{1}{p}\|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}^p + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u_1 + re_{\varepsilon,\delta}|^p \mathrm{d}x - \frac{b}{p_s^*}\int_\Omega (u^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x \\
\leq& \frac{1}{p}\|u_1\|_{X_p^s}^p - \frac{a}{p}\|u_1\|_{L^p(\Omega)}^p + C_* r^p \|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p + C_* r^{p-\tau}\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^{p-\tau}\|u_1\|_{X_p^s}^\tau \\
&+ \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{b}{p_s^*} r^{p_s^*}\int_{\Omega_{\varepsilon,\delta}} \left(\frac{u_1}{r} + e_{\varepsilon,\delta}\right)^{p_s^*} \\
\leq& \frac{1}{p}\left(1 - \frac{a}{\lambda_1}\right)\|u_1\|_{X_p^s}^p + C_* r^p \|e_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}^p + C_* R_2^{p-\tau}\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^{p-\tau} R_1^\tau \\
&+ \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{b}{p_s^*} r^{p_s^*}\int_{\Omega_{\varepsilon,\delta}} \left(\frac{u_1}{r} + e_{\varepsilon,\delta}\right)^{p_s^*} \\
\leq& \frac{1}{p}\left(1 - \frac{a}{\lambda_1}\right) R_1^p + C_* r^p\left(C_1^p S_s^{N/sp} + C_0\right) + 2^{p-\tau} C_* R_1^p \|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^{p-\tau} \\
&- \frac{b}{p_s^*} r^{p_s^*}\int_{\Omega_{\varepsilon,\delta}} \left(\frac{u_1}{r} + e_{\varepsilon,\delta}\right)^{p_s^*} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Agora pelo Lema A.25 (ver Apêndice A) para $u = \dfrac{u_1}{r}$, $v = e_{\varepsilon,\delta}$ e $\omega = \Omega_{\varepsilon,\delta}$, temos

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,s}(u) \leq & \frac{1}{p}\left(1-\frac{a}{\lambda_1}\right) R_1^p + C_* r^p \big(C_1^p S_s^{N/sp} + C_0\big) + 2^{p-\tau} C_* R_1^p \|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^{p-\tau} \\
& - \frac{b}{p_s^*} r^{p_s^*} \left[\int_{\Omega_{\varepsilon,\delta}} \left|\frac{u_1}{r}\right|^{p_s^*} + \int_{\Omega_{\varepsilon,\delta}} |e_{\varepsilon,\delta}|^{p_s^*} \right. \\
& \left. - C\left(\int_{\Omega_{\varepsilon,\delta}} \left|\frac{u_1}{r}\right|^{p_s^*-1} |e_{\varepsilon,\delta}| \mathrm{d}x + \int_{\Omega_{\varepsilon,\delta}} \left|\frac{u_1}{r}\right| |e_{\varepsilon,\delta}|^{p_s^*-1} \mathrm{d}x \right) \right] \\
& + \frac{\lambda}{q} \int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

com uma constante $C > 0$. Lembrando que $r > r_0$ e por (2.140) segue que

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,s}(u) \leq & \frac{1}{p}\left(1-\frac{a}{\lambda_1}\right) R_1^p + C_* r^p \big(C_1^p S_s^{N/sp} + C_0\big) + 2^{p-\tau} C_* R_1^p \|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^{p-\tau} \\
& - \frac{b}{p_s^*} r^{p_s^*} \left[\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*}(\Omega_{\varepsilon,\delta})}^{p_s^*} - C_2 \left(\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega_{\varepsilon,\delta})} R_1^{p_s^*-1} + \|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*-1}(\Omega_{\varepsilon,\delta})}^{p_s^*-1} R_1 \right) \right] \\
& + \frac{\lambda}{q} \int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x \\
\leq & \frac{1}{p}\left(1-\frac{a}{\lambda_1}\right) R_1^p + C_* r^p \big(C_1^p S_s^{N/sp} + C_0\big) + 2^{p-\tau} C_* R_1^p \|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^{p-\tau} \\
& - \frac{b}{p_s^*} r^{p_s^*} \left[\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*}(\Omega_{\varepsilon,\delta})}^{p_s^*} - C_2 \left(\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)} R_1^{p_s^*-1} + \|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*-1}(\Omega)}^{p_s^*-1} R_1 \right) \right] \\
& + \frac{\lambda}{q} \int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

com uma constante $C_2 > 0$.

Estudaremos o caso $p > \dfrac{2N}{N+s}$ e $N > sp^2$ (os seguintes casos são análogos a este) (a) $1 < p < \dfrac{2N}{N+s}$ e $N > sp^2$, $\quad (b)$ $p = \dfrac{2N}{N+s}$ e $N > sp^2$. Usando as estimativas (2.116), (2.117), (2.118) e (2.122)

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,s}(u) \leq \frac{1}{p}&\left[\left(1-\frac{a}{\lambda_1}\right)+2^{p-\tau}C_*\varepsilon^{s(p-\tau)}\right]R_1^p+C_*r^p\big(C_1^pS_s^{N/sp}+C_0\big)\\
&-\frac{b}{p_s^*}r^{p_s^*}\left[\int_\Omega |u_{\varepsilon,\delta}|^{p_s^*}\mathrm{d}x+O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}})-C_2\left(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p(p-1)}}R_1^{p_s^*-1}+\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}R_1\right)\right]\\
&+\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Pelo [7, Lema 2.3], segue que

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,s}(u) \leq \frac{1}{p}&\left[\left(1-\frac{a}{\lambda_1}\right)+2^{p-\tau}C_*\varepsilon^{s(p-\tau)}\right]R_1^p+C_*r^p\big(C_1^pS_s^{N/sp}+C_0\big)\\
&-\frac{b}{p_s^*}r^{p_s^*}\left[S_s^{N/sp}+O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}})-C_2\varepsilon^{\frac{N-sp}{p(p-1)}}R_1^{p_s^*-1}-C_2\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}R_1\right]\\
&+\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Considerar $R_1=\varepsilon^{-\gamma}$, tal que $0<\gamma<\min\left\{\dfrac{N-sp}{p(p-1)(p_s^*-1)},\dfrac{N-sp}{p}\right\}$. Então

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,s}(u) \leq \frac{1}{p}&\left[\left(1-\frac{a}{\lambda_1}\right)+2^{p-\tau}C_*\varepsilon^{s(p-\tau)}\right]R_1^p+C_*r^p\big(C_1^pS_s^{N/sp}+C_0\big)\\
&-\frac{b}{p_s^*}r^{p_s^*}\left[S_s^{N/sp}+O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}})-C_2\varepsilon^{\frac{N-sp}{p(p-1)}-\gamma p_s^*-1}-C_2\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}-\gamma}\right]\\
&+\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Sejam $A=\left(1-\dfrac{a}{\lambda_1}\right)+2^{p-\tau}C_*\varepsilon^{s(p-\tau)}$, $B=C_*p\big(C_1^pS_s^{N/sp}+C_0\big)$ e $C=bS_s^{N/sp}+O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}})-bC_2\varepsilon^{\frac{N-sp}{p(p-1)}-\gamma p_s^*-1}-bC_2\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}-\gamma}$. Agora, como $\lambda_1<a$ e $0<\tau<p$, podemos escolher $0<\varepsilon<\varepsilon_1<\widehat{\varepsilon_0}$ tal que $A<0$ e $C>0$. Logo,

$$
I_{\lambda,s}(u)\leq \frac{A}{p}R_1^p+\frac{B}{p}r^p-\frac{C}{p_s^*}r^{p_s^*}+\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q\mathrm{d}x.
$$

Aplicando o Lema A.24 (ver Apêncice A) para a função $h(r)=\dfrac{B}{p}r^p-\dfrac{C}{p_s^*}r^{p_s^*}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,s}(u) \leq \frac{A}{p}R_1^p + \frac{1}{N}\left(\frac{C_* p\big(C_1^p S_s^{N/sp}+C_0\big)}{bS_s^{N/sp}+O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}})-bC_2\varepsilon^{\frac{N-sp}{p(p-1)}-\gamma p_s^*-1}-bC_2\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}-\gamma}}\right)\\
+\frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Portanto como $A<0$, devido ao fato de que $0<\varepsilon<\widehat{\varepsilon_1}<\varepsilon_0$ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno e $R_1>0$ (devido a condição $R=\varepsilon^{-\gamma}$) pode ser tomado arbitrariamente grande, segue a conclusão para $u\in\Gamma_2$.

(iii) $u\in\Gamma_3$: Ele pode ser expresso por (2.129) como $u=u_1+R_2e_{\varepsilon,\delta}$ com $u_1\in\operatorname{span}\{\varphi_1\}$ e $\|u_1\|_{X_p^s}\leq R_1$. Lembrando que $R_2=2R_1$. Pela desigualdade (2.137), usando que as normas $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{X_p^s}$ são equivalentes no espaço de dimensão finita $\operatorname{span}\{\varphi_1, e_{\varepsilon,\delta}\}$, (note $u_1\in\operatorname{span}\{\varphi_1\}$), $\lambda_1<a$ e (2.138) com uma constante $C_0>0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,s}(u) =& \frac{1}{p}\|u_1+R_2e_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}^p+\frac{\lambda}{q}\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x-\frac{a}{p}\int_\Omega|u_1+R_2e_{\varepsilon,\delta}|^p\mathrm{d}x-\frac{b}{p_s^*}\int_\Omega(u^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x\\
\leq& \frac{1}{p}\|u_1\|_{X_p^s}^p-\frac{a}{p}\|u_1\|_{L^p(\Omega)}^p+C_*R_2^p\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p+C_*R_2^{p-\tau}\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^{p-\tau}\|u_1\|_{X_p^s}^\tau\\
&+\frac{\lambda}{q}\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x-\frac{b}{p_s^*}R_2^{p_s^*}\int_\Omega\left(\left(\frac{u_1}{R_2}+e_{\varepsilon,\delta}\right)^+\right)^{p_s^*}\\
\leq& \frac{1}{p}\left(1-\frac{a}{\lambda_1}\right)\|u_1\|_{X_p^s}^p+C_*R_2^p\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}^p+C_*R_2^{p-\tau}\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}^{p-\tau}R_1^\tau\\
&+\frac{\lambda}{q}\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x-\frac{b}{p_s^*}R_2^{p_s^*}\int_\Omega\left(\left(\frac{u_1}{R_2}+e_{\varepsilon,\delta}\right)^+\right)^{p_s^*}\\
\leq& C_*R_2^p\big(C_1^pS_s^{N/sp}+C_0\big)+\frac{C_*}{2^\tau}R_2^p\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}^{p-\tau}-\frac{b}{p_s^*}R_2^{p_s^*}\int_\Omega\left(\left(\frac{u_1}{R_2}+e_{\varepsilon,\delta}\right)^+\right)^{p_s^*}\\
&+\frac{\lambda}{q}\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Por (2.138), temos que $\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}$ é limitada e consequentêmente

$$I_{\lambda,s}(u) \leq \left[C_*\left(C_1^p S_s^{N/sp} + C_0\right) + \frac{C_* C_2}{2^\tau}\right] R_2^p - \frac{b}{p_s^*} R_2^{p_s^*} \int_\Omega \left(\left(\frac{u_1}{R_2} + e_{\varepsilon,\delta}\right)^+\right)^{p_s^*} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x. \tag{2.142}$$

Tendo em conta que o espaço span$\{\varphi_1\}$ é finito dimensional, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_3 \|u_1\|_{X_p^s} \leq C_3 R_1, \text{ para todo } u_1 \in \text{span}\{\varphi_1\} \text{ com } \|u_1\|_{X_p^s} \leq R_1. \tag{2.143}$$

De (2.120) é evidente que

$$\Omega'_\varepsilon := \left\{x \in \Omega \,:\, e_{\varepsilon,\delta}(x) > \frac{C_3}{2} + 1\right\} \supset \{x \in \Omega \,:\, e_{\varepsilon,\delta}(x) > C_3 + 1\} := D_\varepsilon \tag{2.144}$$

com a medida de Lebesgue $|D_\varepsilon| > 0$ desde que $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, isto é, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Para cada $x \in \Omega'$, por (2.141), (2.144) e $R_2 = 2R_1$ encontramos

$$\frac{u_1(x)}{R_2} + e_{\varepsilon,\delta}(x) > \frac{u_1(x)}{R_2} + \frac{C_3}{2} + 1 = \frac{u_1(x)}{R_2} + \frac{C_3 R_1}{R_2} + 1 \geq \frac{u_1(x)}{R_2} + \frac{\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)}}{R_2} + 1 \geq 1. \tag{2.145}$$

Substituindo (2.144) e (2.145) em (2.142)

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,s}(u) \leq & \left[C_*\big(C_1^p S_s^{N/sp} + C_0\big) + \frac{C_*C_2}{2^\tau}\right] R_2^p - \frac{b}{p_s^*} R_2^{p_s^*} \int_\Omega \left(\left(\frac{u_1}{R_2} + e_{\varepsilon,\delta}\right)^+\right)^{p_s^*} \\
& + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x \\
& \left[C_*\big(C_1^p S_s^{N/sp} + C_0\big) + \frac{C_*C_2}{2^\tau}\right] R_2^p - \frac{b}{p_s^*} R_2^{p_s^*} \int_{\Omega'_\varepsilon} \left(\frac{u_1}{R_2} + e_{\varepsilon,\delta}\right)^{p_s^*} \\
& + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x \\
& \left[C_*\big(C_1^p S_s^{N/sp} + C_0\big) + \frac{C_*C_2}{2^\tau}\right] R_2^p - \frac{b}{p_s^*} R_2^{p_s^*} |D_\varepsilon| + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x, \quad (2.146)
\end{aligned}
$$

para todo $u \in \Gamma_3$. A partir de (2.146) chegamos à conclusão da proposição para R_2 suficientemente grande. Isso completa a prova. ■

Observação 2.23 *Vale a pena notar que R_1, R_2 e ε na Proposição 2.22 são independentes de λ.*

2.4.3 Nível Mini-max

Sejam $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $R_1, R_2 > 0$ suficientemente grandes em conformidade com as proposições 2.21 e 2.22, nesta subseção nós nos concentraremos no conjunto Q_{ε,R_1,R_2} construído em (2.124). Nosso propósito na presente subseção, é mostrar que podemos manter os valores do funcional $I_{\lambda,s}$ restrito ao conjunto Q_{ε,R_1,R_2}, abaixo do nível admissível para a condição (PS) dado no Lema 2.6. A idéia é levar $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ tão pequenos quanto necessário. O lema abaixo é o principal passo nessa direção.

Lema 2.24 *Suponha que $N > sp$. Se $\varepsilon > 0$ for suficientemente pequeno, então a* *seguinte estimativa é verificada.*

$$I_{\lambda,s}(u) \leq \frac{s}{N}\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{N-sp}{sp}}\left(\frac{\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X^s_p} - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^{p^*_s}(\Omega)}}\right)^{\frac{N}{sp}} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x$$
$$+\begin{cases} K_0\varepsilon^{s(p-1)}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|^{p^*_s}, & se \quad p = \frac{2N}{N+s} \ e \ N > sp^2 \\ K_0\varepsilon^{s(p-1)}, & se \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s} \ e \ N > sp^2 \\ K_0\varepsilon^{s(p-1)} + K_0\varepsilon^s, & se \quad p > \frac{2N}{N+s} \ e \ N > sp^2, \end{cases} \tag{2.147}$$

para todo $u \in Q_{\varepsilon,R_1,R_2}$*, com uma constante* $K_0 > 0$ *independente de* ε*.*

Demonstração: Seja $u = u_1 + rQ_{\varepsilon,R_1,R_2}$ com $u_1 \in \mathrm{span}\{\varphi_1\}$, $\|u_1\|_{X^s_p} \leq R_1$ e $0 \leq r \leq R_2$. Na demonstração usamos a seguinte desigualdade encontrada em [86, p.122]:

$$||b|^p - |a|^p - |b-a|^p| \leq K_p\left(|b-a|^{p-1}|a| + |a|^{p-1}|b-a|\right) \tag{2.148}$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $p > 1$ e para alguma constante $K_p > 0$ que depende de p. Agora para $a = u_1(x)$, $b = u_1(x) + re_{\varepsilon,\delta}(x)$ em (2.148), temos

$$\begin{aligned} -|u_1(x) + re_{\varepsilon,\delta}(x)|^p \leq & -|u_1(x)|^p - |re_{\varepsilon,\delta}(x)|^p \\ & + K_p\big(|re_{\varepsilon,\delta}(x)|^{p-1}|u_1(x)| + |u_1(x)|^{p-1}|re_{\varepsilon,\delta}(x)|\big). \end{aligned}$$

Pela estimativa acima e pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p}\int_\Omega |u_1(x) + re_{\varepsilon,\delta}(x)|^p \mathrm{d}x \leq & -\frac{1}{p}\int_\Omega |u_1(x)|^p \mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_\Omega |re_{\varepsilon,\delta}(x)|^p \mathrm{d}x \\ & + \frac{K_p}{p}\int_\Omega |re_{\varepsilon,\delta}(x)|^{p-1}|u_1(x)|\mathrm{d}x \\ & + \frac{K_p}{p}\int_\Omega |u_1(x)|^{p-1}|re_{\varepsilon,\delta}(x)|\mathrm{d}x \\ \leq & -\frac{1}{p}\|u_1\|^p_{L^p(\Omega)} - \frac{1}{p}\|re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{K_p}{p}\|re_{\varepsilon,\delta}\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|u_1\|_{L^p(\Omega)} \\ & + \frac{K_p}{p}\|u_1\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|re_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

Portanto, como as normas $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{X_p^s}$ são equivalentes no espaço de dimensão finita span$\{\varphi_1, e_{\varepsilon,\delta}\}$, omitindo a constante de equivalência, nós obtemos

$$\begin{aligned}-\frac{1}{p}\|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} \le &-\frac{1}{p}\|u_1\|^p_{L^p(\Omega)} - \frac{r^p}{p}\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{K_p}{p}R_2^{p-1}\|e_{\varepsilon,\delta}\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|u_1\|_{X_p^s}\\ &+ \frac{K_pR_2}{p}\|u_1\|^{p-1}_{X_p^s}\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}. \qquad (2.149)\end{aligned}$$

Por outro lado, usando (2.148) com $a = \|u_1\|_{X_p^s}$ e $b = \|u_1\|_{X_p^s} + \|re_{\varepsilon,\delta}\|$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X_p^s} \le &\frac{1}{p}\big(\|u_1\|_{X_p^s} + \|re_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}\big)^p\\ \le &\frac{1}{p}\|u_1\|^p_{X_p^s} + \frac{r^p}{p}\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X_p^s} + \frac{K_p'}{p}\|re_{\varepsilon,\delta}\|^{p-1}_{X_p^s}\|u_1\|_{X_p^s}\\ &+ \frac{K_p'}{p}\|u_1\|^{p-1}_{X_p^s}\|re_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}.\end{aligned}$$

Novamente como as normas $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{X_p^s}$ são equivalentes no espaço de dimensão finita span$\{\varphi_1, e_{\varepsilon,\delta}\}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X_p^s} \le &\frac{1}{p}\|u_1\|^p_{X_p^s} + \frac{r^p}{p}\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X_p^s} + \frac{K_p'R_2^{p-1}}{p}\|e_{\varepsilon,\delta}\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|u_1\|_{X_p^s}\\ &+ \frac{K_p'R}{p}\|u_1\|^{p-1}_{X_p^s}\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}. \qquad (2.150)\end{aligned}$$

Portanto, de (2.149) e (2.150), segue que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X_p^s} - \frac{a}{p}\|u_1 + re_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} \le &\frac{1}{p}\left(\|u_1\|^p_{X_p^s} - a\|u_1\|^p_{L^p(\Omega)}\right)\\ &+ \frac{r^p}{p}\left(\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X_p^s} - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)}\right)\\ &+ CR_2^{p-1}\|e_{\varepsilon,\delta}\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|u_1\|_{X_p^s}\\ &+ CR_2\|u_1\|^{p-1}_{X_p^s}\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}. \qquad (2.151)\end{aligned}$$

De (2.137), $u_1 \in \operatorname{span}\{\varphi_1\}$ com $\|u_1\|_{X_p^s} \leq R_1$, $\lambda_1 < a$ e pela definição do funcional $I_{\lambda,s}$,

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,s}(u) \leq & \frac{1}{p}\big(\|u_1\|_{X_p^s}^p - a\|u_1\|_{L^p(\Omega)}^p\big) + \frac{r^p}{p}\left(\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}^p - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p\right) \\
& + CR_1R_2^{p-1}\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} + CR_1^{p-1}R_2\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)} - \frac{b}{p_s^*}\int_\Omega (u^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x \\
& + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x \\
= & \frac{1}{p}\left(1 - \frac{a}{\lambda_1}\right)\|u_1\|_{X_p^s}^p + \frac{r^p}{p}\left(\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}^p - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p\right) \\
& + CR_1R_2^{p-1}\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} + CR_1^{p-1}R_2\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)} - \frac{b}{p_s^*}\int_\Omega (u^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x \\
& + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x \\
\leq & \frac{r^p}{p}\left(\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}^p - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p\right) + CR_1R_2^{p-1}\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} + CR_1^{p-1}R_2\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)} \\
& - \frac{b}{p_s^*}\int_\Omega (u^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x. \qquad (2.152)
\end{aligned}
$$

Das estimativas (2.117), para uma constante $C' > 0$, temos

$$
\begin{aligned}
& CR_1R_2^{p-1}\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} + CR_1^{p-1}R_2\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)} \\
& \leq \begin{cases} C'\varepsilon^{s(p-1)}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|^{p-1} + C'\varepsilon^s|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|, & \text{se} \quad p = \frac{2N}{N+s} \ \text{ e } \ N > sp^2 \\ C'\varepsilon^{s(p-1)} + C'\varepsilon^s, & \text{se} \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s} \ \text{ e } \ N > sp^2 \\ C'\varepsilon^{s(p-1)} + C'\varepsilon^s, & \text{se} \quad p > \frac{2N}{N+s} \ \text{ e } \ N > sp^2, \end{cases} \\
& \leq \begin{cases} 2C'\varepsilon^{s(p-1)}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|, & \text{se} \quad p = \frac{2N}{N+s} \ \text{ e } \ N > sp^2 \\ 2C'\varepsilon^{s(p-1)}, & \text{se} \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s} \ \text{ e } \ N > sp^2 \\ C'\varepsilon^{s(p-1)} + C'\varepsilon^s, & \text{se} \quad p > \frac{2N}{N+s} \ \text{ e } \ N > sp^2. \end{cases} \qquad (2.153)
\end{aligned}
$$

De (2.152) e (2.153), obtemos

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,s}(u) \leq & \frac{r^p}{p}\left(\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X^s_p} - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)}\right) - \frac{b}{p^*_s}\int_\Omega (u^+)^{p^*_s}\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q\mathrm{d}x \\
& + \begin{cases} 2C'\varepsilon^{s(p-1)}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|, & \text{se} \quad p = \frac{2N}{N+s} \text{ e } N > sp^2 \\ 2C'\varepsilon^{s(p-1)}, & \text{se} \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s} \text{ e } N > sp^2 \\ C'\varepsilon^{s(p-1)} + C'\varepsilon^s, & \text{se} \quad p > \frac{2N}{N+s} \text{ e } N > sp^2. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.154}
$$

Para estimar o termo $-b/p^*_s\|u^+\|^{p^*_s}_{L^{p^*_s}(\Omega)}$ é conveniente expressar $u \in Q_{\varepsilon,R_1,R_2}$ como

$$
u = \widetilde{u_1} + re_{\varepsilon,\delta}, \;\; \text{para} \;\; \widetilde{u_1} = u_1 - rP^s_- u_{\varepsilon,\delta}, \tag{2.155}
$$

pois $u = u_1 + re_{\varepsilon,\delta} = u_1 + rP^s_+ u_{\varepsilon,\delta} = u_1 + r(u_1 - P^s_- u_{\varepsilon,\delta}) = u_{\varepsilon,\delta} - rP^s_- u_{\varepsilon,\delta} + ru_{\varepsilon,\delta}$. Então (2.155), a continuidade absoluta da função Lipschitz contínua

$$
t \to \left(\left(tu_1(x) + re_{\varepsilon,\delta}(x)\right)^+\right)
$$

em $[0,1]$ com $x \in \Omega$ (fixado) e $u_{\varepsilon,\delta} \geq 0$, temos

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega \left(\left(\widetilde{u_1} + ru_{\varepsilon,\delta}\right)^+\right)^{p^*_s}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left((\widetilde{u_1})^+\right)^{p^*_s}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(ru_{\varepsilon,\delta}\right)^{p^*_s}\mathrm{d}x \\
= & \int_\Omega\int_0^1 \frac{d}{dt}\left[\left((t\widetilde{u_1} + ru_{\varepsilon,\delta})^+\right)^{p^*_s} - \left((t\widetilde{u_1})^+\right)^{p^*_s}\right] dt\mathrm{d}x \\
= & \; p^*_s\int_\Omega\int_0^1 \left[\left((t\widetilde{u_1} + ru_{\varepsilon,\delta})^+\right)^{p^*_s-1}\frac{d}{dt}\left((t\widetilde{u_1} + ru_{\varepsilon,\delta})^+\right) - \left((t\widetilde{u_1})^+\right)^{p^*_s-1}\widetilde{u_1}\right] dt\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema de Fubini (ver Teorema A.39, Apêndice A) em $\Omega\times(0,1)$ e a expressão da derivada em t

$$
\frac{d}{dt}\left((t\widetilde{u_1}(x) + ru_{\varepsilon,\delta}(x))^+\right) = \begin{cases} \widetilde{u_1}(x), & \text{se} \quad t\widetilde{u_1}(x) + ru_{\varepsilon,\delta} > 0, \\ 0, & \text{se} \quad t\widetilde{u_1}(x) + ru_{\varepsilon,\delta} < 0. \end{cases}
$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\left(\widetilde{u_1} + ru_{\varepsilon,\delta}\right)^+\right)^{p_s^*} \mathrm{d}x - \int_\Omega \left((\widetilde{u_1})^+\right)^{p_s^*} \mathrm{d}x - \int_\Omega \left(ru_{\varepsilon,\delta}\right)^{p_s^*} \mathrm{d}x \\
&= \; p_s^* \int_0^1 \int_\Omega \left[\left((t\widetilde{u_1} + ru_{\varepsilon,\delta})^+\right)^{p_s^*-1} - \left((t\widetilde{u_1})^+\right)^{p_s^*-1}\right] \widetilde{u_1} \mathrm{d}x dt. \qquad (2.156)
\end{aligned}
$$

Pelo teorema do valor médio aplicado à função $\xi \to \xi^{p_s^*-1}$ em $(0,\infty)$, a última igualdade em (2.156) assume a forma

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\left(\widetilde{u_1} + ru_{\varepsilon,\delta}\right)^+\right)^{p_s^*} \mathrm{d}x - \int_\Omega \left((\widetilde{u_1})^+\right)^{p_s^*} \mathrm{d}x - \int_\Omega \left(ru_{\varepsilon,\delta}\right)^{p_s^*} \mathrm{d}x \\
&= \; p_s^*(p_s^*-1) \int_0^1 \int_\Omega \left\{ t\widetilde{u_1}^+(x) + \theta(t,x)\left[(t\widetilde{u_1}(x) + ru_{\varepsilon,\delta}(x))^+ - t(\widetilde{u_1})^+(x)\right] \right\}^{p_s^*-2} \\
&\times \; \left[\left(t\widetilde{u_1} + ru_{\varepsilon,\delta}(x)\right)^+ - t\widetilde{u_1}^+(x)\right] \widetilde{u_1}(x) \mathrm{d}x dt, \qquad (2.157)
\end{aligned}
$$

com $\theta(x,t) \in (0,1)$. Note que

$$
\begin{aligned}
&\left| t\widetilde{u_1}^+(x) + \theta(t,x)\left[(t\widetilde{u_1}(x) + ru_{\varepsilon,\delta}(x))^+ - t(\widetilde{u_1})^+(x)\right] \right| \\
&\leq \; \max\left\{ t(\widetilde{u_1})^+(x),\, (t\widetilde{u_1}(x) + ru_{\varepsilon,\delta}(x))^+ \right\} \\
&\leq \; t\widetilde{u_1}^+(x) + ru_{\varepsilon,\delta}(x).
\end{aligned}
$$

Tendo em conta que a função $\xi \to \xi^+$ sob $\mathbb{R}$ é uma contração, também temos

$$
\left| (t\widetilde{u_1}(x) + ru_{\varepsilon,\delta}(x))^+ - t\widetilde{u_1}^+(x) \right| \leq ru_{\varepsilon,\delta}(x).
$$

Consequentemente, (2.157) implica

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \left((\widetilde{u_1} + ru_{\varepsilon,\delta})^+\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left((\widetilde{u_1})^+\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(ru_{\varepsilon,\delta}\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x \right| \\
\leq\ & p_s^*(p_s^*-1)\int_0^1 \int_\Omega \left(t\widetilde{u_1}^+(x) + ru_{\varepsilon,\delta}(x)\right)^{p_s^*-2} ru_{\varepsilon,\delta}(x)|\widetilde{u_1}(x)|\mathrm{d}x dt \\
\leq\ & p_s^*(p_s^*-1)2^{p_s^*-1}\int_0^1 \int_\Omega \left((t\widetilde{u_1}^+(x))^{p_s^*-2} + (ru_{\varepsilon,\delta}(x))^{p_s^*-2}\right) ru_{\varepsilon,\delta}(x)|\widetilde{u_1}(x)|\mathrm{d}x dt \\
=\ & p_s^*(p_s^*-1)2^{p_s^*-1}\int_0^1 t^{p_s^*-2}dt \int_\Omega \left[(\widetilde{u_1}^+(x))^{p_s^*-2} ru_{\varepsilon,\delta}(x) + (ru_{\varepsilon,\delta}(x))^{p_s^*-1}\right]|\widetilde{u_1}(x)|\mathrm{d}x dt \\
=\ & C_1 \int_\Omega \left[(\widetilde{u_1}^+(x))^{p_s^*-2} ru_{\varepsilon,\delta}(x) + (ru_{\varepsilon,\delta}(x))^{p_s^*-1}\right]|\widetilde{u_1}(x)|\mathrm{d}x dt,
\end{aligned}
$$

em que $C_1 = p_s^*(p_s^*-1)2^{p_s^*-1}$. Agora usando que $|\widetilde{u_1}| = \widetilde{u_1}^+ - \widetilde{u_1}^-$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \left((\widetilde{u_1} + ru_{\varepsilon,\delta})^+\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left((\widetilde{u_1})^+\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(ru_{\varepsilon,\delta}\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x \right| \\
\leq\ & C \int_\Omega \left[(\widetilde{u_1}^+(x))^{p_s^*-1} ru_{\varepsilon,\delta}(x) + (ru_{\varepsilon,\delta}(x))^{p_s^*-1}|\widetilde{u_1}(x)|\right]\mathrm{d}x. \qquad (2.158)
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Hölder, pela equivalência das normas no espaço de dimensão finita span$\{\varphi_1\}$ (note que $\widetilde{u_1} \in$ span$\{\varphi_1\}$, pois $\widetilde{u_1} = u_1 - P_-^s u_{\varepsilon,\delta}$ e u_1, $P_-^s u_{\varepsilon,\delta} \in$ span$\{\varphi_1\}$) e pela limitação uniforme de $\widetilde{u_1}$ $\big($isto é, devido a (2.115), temos $\|\widetilde{u_1}\|_\infty \leq \|u_1\|_\infty + r\|P_-^s u_{\varepsilon,\delta}\|_\infty \leq c_0\|u_1\|_X + R_2 c_1 \leq c_0 R_1 + c_1 R_2$ $\big)$, obtemos de (2.158),

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega \left((\widetilde{u_1} + ru_{\varepsilon,\delta})^+\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left((\widetilde{u_1})^+\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(ru_{\varepsilon,\delta}\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x \right| \\
\leq\ & C\left(r\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)}\|\widetilde{u_1}^+\|_{L^\infty(\Omega)}^{p_s^*-1} + \|\widetilde{u_1}\|_{L^\infty(\Omega)}\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*-1}(\Omega)}^{p_s^*-1} r^{p_s^*-1}\right) \\
\leq\ & C_2\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)}\|\widetilde{u_1}^+\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*-1} + C_2\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*-1}(\Omega)}^{p_s^*-1} \\
=\ & \frac{p_s^*}{(p_s^*-1)p}\left(\frac{C_2(p_s^*-1)p}{p_s^*}\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)}\right)\|\widetilde{u_1}^+\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*-1} + C_2\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*-1}(\Omega)}^{p_s^*-1}.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Young para os expoentes $p_1 = \dfrac{p_s^*}{p_s^*-1}$ e $p_2 = p_s^*$,

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \left((\widetilde{u}_1 + ru_{\varepsilon,\delta})^+\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left((\widetilde{u}_1)^+\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(ru_{\varepsilon,\delta}\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{p_s^*}{(p_s^*-1)p}\left[\frac{1}{p_s^*}\left(\frac{C_2(p_s^*-1)p}{p_s^*}\right)^{p_s^*}\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)}^{p_s^*} + \frac{p_s^*-1}{p_s^*}\|\widetilde{u}_1{}^+\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*}\right] \\
&+ C_2\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*-1}(\Omega)}^{p_s^*-1} \\
&= \frac{1}{(p_s^*-1)p}\left(\frac{C_2(p_s^*-1)p}{p_s^*}\right)^{p_s^*}\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)}^{p_s^*} + \frac{1}{p}\|\widetilde{u}_1{}^+\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*} + C_2\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*-1}(\Omega)}^{p_s^*-1} \\
&= C_3\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^1(\Omega)}^{p_s^*} + \frac{1}{p}\|\widetilde{u}_1{}^+\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*} + C_2\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*-1}(\Omega)}^{p_s^*-1},
\end{aligned}
$$

em que $C_3 = \dfrac{1}{(p_s^*-1)p}\left(\dfrac{C_2(p_s^*-1)p}{p_s^*}\right)^{p_s^*}$. Das estimativas (2.113) e (2.114),

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \left((\widetilde{u}_1 + ru_{\varepsilon,\delta})^+\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left((\widetilde{u}_1)^+\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(ru_{\varepsilon,\delta}\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{1}{p}\|\widetilde{u}_1{}^+\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*-1} + C_2C_{p_s^*-1}\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}} \\
&+ \begin{cases} C_3C_4\varepsilon^{\frac{N}{p-1}}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|^{p_s^*}, & \text{se} \quad p = \frac{2N}{N+s} \\ C_3C_4\varepsilon^{N(p_s^*-1)}, & \text{se} \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s}, \\ C_3C_4\varepsilon^{\frac{N}{p-1}}, & \text{se} \quad p > \frac{2N}{N+s}, \end{cases},
\end{aligned}
$$

em que $C_4 > 0, C_{p_s^*} > 0$ são constantes. Logo como $\dfrac{N}{p-1} > \dfrac{N-sp}{p}$, temos

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \left((\widetilde{u}_1 + ru_{\varepsilon,\delta})^+\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left((\widetilde{u}_1)^+\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x - \int_\Omega \left(ru_{\varepsilon,\delta}\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{1}{p}\|\widetilde{u}_1{}^+\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*} + \begin{cases} C_5\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|^{p_s^*}, & \text{se} \quad p = \frac{2N}{N+s}, \\ C_2C_{p_s^*-1}\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}} + C_3C_4\varepsilon^{N(p_s^*-1)}, & \text{se} \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s}. \\ C_5\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}, & \text{se} \quad p > \frac{2N}{N+s}, \end{cases}
\end{aligned}
$$

Lembrando que $\left(\widetilde{u_1}+ru_{\varepsilon,\delta}\right)^+ := u^+$, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega (u^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x \leq& \left(\frac{1}{p}-1\right)\|\widetilde{u_1}^+\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} - \int_\Omega \left(ru_{\varepsilon,\delta}\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x \\
&+\begin{cases} C_5\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|^{p_s^*}, & \text{se} \quad p=\frac{2N}{N+s},\\ C_2C_{p_s^*-1}\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}+C_3C_4\varepsilon^{N(p_s^*-1)}, & \text{se} \quad 1<p<\frac{2N}{N+s},\\ C_5\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}, & \text{se} \quad p>\frac{2N}{N+s}.\end{cases}\\
\leq& -\int_\Omega \left(ru_{\varepsilon,\delta}\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x \\
&+\begin{cases} C_5\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|^{p_s^*}, & \text{se} \quad p=\frac{2N}{N+s},\\ C_2C_{p_s^*-1}\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}+C_3C_4\varepsilon^{N(p_s^*-1)}, & \text{se} \quad 1<p<\frac{2N}{N+s},\\ C_5\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}, & \text{se} \quad p>\frac{2N}{N+s}.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Portanto existe uma constante $C_6>0$ tal que

$$
\begin{aligned}
-\frac{b}{p_s^*}\int_\Omega (u^+)^{p_s^*}\mathrm{d}x \leq& -\frac{br^{p_s^*}}{p_s^*}\int_\Omega \left(u_{\varepsilon,\delta}\right)^{p_s^*}\mathrm{d}x \\
&+\begin{cases} C_6\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|^{p_s^*}, & \text{se} \quad p=\frac{2N}{N+s},\\ C_6\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}+C_6\varepsilon^{N(p_s^*-1)}, & \text{se} \quad 1<p<\frac{2N}{N+s},\\ C_6\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}, & \text{se} \quad p>\frac{2N}{N+s}.\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.159}
$$

De (2.154) e (2.159), existe uma constante $K_0>0$ tal que

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,s}(u) \leq& \frac{r^p}{p}\left(\|e_{\varepsilon,\delta}\|_X^p - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)}\right) - \frac{br^{p_s^*}}{p_s^*}\int_\Omega |u_{\varepsilon,\delta}|^{p_s^*}\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q\mathrm{d}x \\
&+\begin{cases} K_0\varepsilon^{s(p-1)}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|^{p_s^*}, & \text{se} \quad p=\frac{2N}{N+s} \text{ e } N>sp^2\\ K_0\varepsilon^{s(p-1)}, & \text{se} \quad 1<p<\frac{2N}{N+s} \text{ e } N>sp^2\\ K_0\varepsilon^{s(p-1)}+K_0\varepsilon^{s}, & \text{se} \quad p>\frac{2N}{N+s} \text{ e } N>sp^2.\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.160}
$$

Pelo Lema A.24 (ver Apêndice A) a função $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dada por

$$
f(t)=\frac{t^p}{p}\left(\|e_{\varepsilon,\delta}\|_X^p - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)}\right) - \frac{bt^{p_s^*}}{p_s^*}\|u_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)},
$$

admite o ponto de máximo

$$t_M := \left(\frac{\|e_{\varepsilon,\delta}\|_X^p - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p}{b\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^{p_s^*}} \right)^{\frac{1}{p_s^*-p}},$$

com o máximo valor

$$f(t_M) = \frac{s}{N}\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{N-sp}{sp}} \left(\frac{\|e_{\varepsilon,\delta}\|_X^p - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p}{b\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*}(\Omega)}^p} \right)^{\frac{N}{sp}}.$$

Então de (2.160) resulta a validade de (2.147), que completa a prova. ■

A estimativa abaixo nos diz que sobre certas condições, o nível mini-max do funcional $I_{\lambda,s}$ sobre Q_{ε,R_1,R_2} está abaixo da constante $\frac{s}{N}b^{\frac{sp-N}{sp}}S_s^{\frac{N}{sp}}$, mais precisamente temos o seguinte Lema:

Lema 2.25 *Suponha* $N > sp^2$ *e* $1 < p \le \frac{2N}{N+s}$. *Então a seguinte estimativa é verificada*

$$c_s := \inf_{h\in\Gamma}\sup_{u\in Q_{\varepsilon,R_1,R_2}} I_{\lambda,s}(h(u)) < \frac{s}{N}b^{\frac{sp-N}{sp}}S_s^{\frac{N}{sp}}, \tag{2.161}$$

em que

$$\Gamma = \left\{ h \in C(Q_{\varepsilon,R_1,R_2}, X) \ : \ h = id \ em \ \partial Q_{\varepsilon,R_1,R_2} \right\}$$

se $\varepsilon > 0$ *e* $\lambda > 0$ *forem suficientemente pequenos.*

Além disso, se $N > sp\big((p-1)^2 + p\big)$ *e* $p > \frac{2N}{N+s}$, *a estimativa* (2.161) *é satisfeita desde que* $\varepsilon > 0$ *e* $\lambda > 0$ *são suficientemente pequenos.*

Demonstração: Note que $h = id_{Q_{\varepsilon,R_1,R_2}} \in \Gamma$, assim pela definição de c_s em (2.161), temos que

$$c_s \le \max_{u\in Q_{\varepsilon,R_1,R_2}} I_{\lambda,s}(u).$$

Portanto, para provar a desigualdade estrita (2.161) é suficiente mostrar que

$$I_{\lambda,s}(u) < \frac{s}{N}b^{\frac{sp-N}{sp}}S_s^{\frac{N}{sp}}, \ \forall\, u \in Q_{\varepsilon,R_1,R_2}. \tag{2.162}$$

Usando a desigualdade (2.131) para $a = u_{\varepsilon,\delta} - P_{-}u_{\varepsilon,\delta} = e_{\varepsilon,\delta}$ e $b = P_{+}^{s}u_{\varepsilon,\delta}$, existe uma constante $c_0 > 0$ tal que

$$|u_{\varepsilon,\delta}|^p \leq c_0|e_{\varepsilon,\delta}|^p + c_0|P_{-}^{s}u_{\varepsilon,\delta}|^p.$$

Logo,

$$\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p \geq \frac{1}{c_0}\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p - \|P_{-}^{s}u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p. \tag{2.163}$$

Como $N > sp^2$, segue-se pelo Lema A.28 item 2 (ver Apêncice A) temos que existe $c_2 > 0$ constante tal que

$$\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p \geq c_2\varepsilon^{sp}. \tag{2.164}$$

De (2.115) e pelas normas $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ equivalentes no espaço de dimensão finita span$\{\varphi_1, e_{\varepsilon,\delta}\}$, existe uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$\|P_{-}^{s}u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \begin{cases} c_1\varepsilon^N|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|^p, & \text{se} \quad p = \frac{2N}{N+s} \\ c_1\varepsilon^{N(p-1)+sp}, & \text{se} \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s}, \\ c_1\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}}, & \text{se} \quad p > \frac{2N}{N+s}, \end{cases} \tag{2.165}$$

Agora de (2.164) e (2.165) em (2.163), segue que

$$\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{L^p(\Omega)}^p \geq \frac{c_2}{c_0}\varepsilon^{sp} - \begin{cases} c_1\varepsilon^N|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|^p, & \text{se} \quad p = \frac{2N}{N+s} \text{ e } N > sp^2, \\ c_1\varepsilon^{N(p-1)+sp}, & \text{se} \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s} \text{ e } N > sp^2, \\ c_1\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}}, & \text{se} \quad p > \frac{2N}{N+s} \text{ e } N > sp^2. \end{cases} \tag{2.166}$$

Por outro lado, pelo Lema A.29 (ver Apêncice A),

$$\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^{p_s^*}}^{p_s^*} \geq S_s^{\frac{N}{sp}} + O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}}). \tag{2.167}$$

Notando que $\|u\|_X^p = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left\|\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N/p+s}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^{2\mathbb{N}})}^p$, e seguindo as mesmas ideias de [26, p.286], e usando que $P^{-}u_{\varepsilon,\delta}$ pertence ao subespaço de dimensão finita, e portanto as suas normas são equivalentes obtemos que existe uma constante $c_3 > 0$ tal que

$$\left| \|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X^s_p} - \|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X^s_p} \right| \leq c_3 \|u_{\varepsilon,\delta}\|^{p-1}_{X^s_p} \|P^s_- u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(\Omega)} + c_3 \|P^s_- u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^\infty(\Omega)}.$$

A limitação de $u_{\varepsilon,\delta}$ em X^s_p (ver o Lema A.29 no Apêncice A) e (2.115), temos que existe $c_4 > 0$ constante tal que

$$\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X^s_p} \leq \|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X^s_p} + \begin{cases} c_4 \varepsilon^{\frac{N}{p}} |\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|, & \text{se} \quad p = \frac{2N}{N+s} \\ c_4 \varepsilon^{N - \frac{N-sp}{p}}, & \text{se} \quad 1 < p < \frac{2N}{N+s}, \\ c_4 \varepsilon^{\frac{N-sp}{p(p-1)}}, & \text{se} \quad p > \frac{2N}{N+s}. \end{cases} \tag{2.168}$$

Suponha que $N > sp^2$ e $1 < p \leq \dfrac{2N}{N+s}$.

Caso 1: $N > sp^2$ e $p = \dfrac{2N}{N+s}$.

De (2.166), (2.167), (2.168) e pela estimativa dado no Lema A.29(ver Apêncice A), temos que

$$\begin{aligned} & \frac{\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X^s_p} - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^{p^*_s}(\Omega)}} \\ \leq \quad & \frac{S_s^{\frac{N}{sp}} + O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}}) + c_4 \varepsilon^{\frac{N}{p}} |\log(\frac{\varepsilon}{\delta})| - a\left(\dfrac{c_2}{c_0}\varepsilon^{sp} - c_1 \varepsilon^N |\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|\right)}{\left(S_s^{N/sp} + O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}} \\ \leq \quad & \frac{S_s^{\frac{N}{sp}} + O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}}) + \left(c_4 + ac_2\right) \varepsilon^{\frac{N}{p}} |\log(\frac{\varepsilon}{\delta})| - a\dfrac{c_2}{c_0}\varepsilon^{sp}}{\left(S_s^{N/sp} + O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}}. \end{aligned}$$

Logo, restando e somando a expressão $\left(1+S_s^{-\frac{N}{sp}}O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}S_s^{\frac{N}{sp}}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X_p^s}-a\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^{p_s^*}(\Omega)}}
&\le \frac{S_s^{\frac{N}{sp}}-\left(1+S_s^{-\frac{N}{sp}}O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}S_s^{\frac{N}{sp}}+\left(1+S_s^{-\frac{N}{sp}}O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}S_s^{\frac{N}{sp}}}{\left(S_s^{N/sp}+O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}}\\
&+\frac{O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}})+\left(c_4+ac_2\right)\varepsilon^{\frac{N}{p}}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|-a\dfrac{c_2}{c_0}\varepsilon^{sp}}{\left(S_s^{N/sp}+O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}}.
\end{aligned}$$

Colocando em evidência o termo $S_s^{\frac{N}{sp}}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X_p^s}-a\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^{p_s^*}(\Omega)}}
&\le \frac{S_s^{\frac{N}{sp}}\left[1-\left(1+S_s^{-\frac{N}{sp}}O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}\right]+\left(1+S_s^{-\frac{N}{sp}}O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}S_s^{\frac{N}{sp}}}{\left(S_s^{N/sp}+O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}}\\
&+\frac{O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}})+\left(c_4+ac_2\right)\varepsilon^{\frac{N}{p}}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|-a\dfrac{c_2}{c_0}\varepsilon^{sp}}{\left(S_s^{N/sp}+O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}}\\
&= \frac{S_s^{\frac{N}{sp}}\left[1-\left(1+S_s^{-\frac{N}{sp}}O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}\right]}{\left(S_s^{N/sp}+O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}}+S_s+\frac{O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}})+\left(c_4+ac_2\right)\varepsilon^{\frac{N}{p}}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|}{\left(S_s^{N/sp}+O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}}\\
&-\frac{a\dfrac{c_2}{c_0}\varepsilon^{sp}}{\left(S_s^{N/sp}+O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}}. \qquad (2.169)
\end{aligned}$$

Usando o teorema do valor médio para a função $f(t) = (1+t)^{\frac{N-sp}{N}}$, temos que

$$\left|f(0) - f\left(S_s^{\frac{-N}{sp}} O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)\right| = \left|\left(\frac{N-sp}{N}\right) f'(C) S_s^{-\frac{N}{sp}} O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right|,$$

em que $C \in \left(0, S_s^{-\frac{N}{sp}} O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)$ ou $C \in \left(S_s^{-\frac{N}{sp}} O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}}), 0\right)$. Logo,

$$\left|1 - \left(1 + S_s^{-\frac{N}{sp}} O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}\right| = O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}}). \tag{2.170}$$

De (2.170) em (2.169),

$$\begin{aligned}
&\frac{\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X_p^s} - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^{p_s^*}(\Omega)}} \\
\leq \quad & S_s + \frac{O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}}) + O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}}) + \left(c_4 + ac_2\right)\varepsilon^{\frac{N}{p}}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})| - a\frac{c_2}{c_0}\varepsilon^{sp}}{\left(S_s^{N/sp} + O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}} \\
= \quad & S_s + \frac{\varepsilon^{sp}\left[O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}-sp}) + O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}-sp}) + \left(c_4 + ac_2\right)\varepsilon^{\left(\frac{N}{p}-sp\right)}|\log(\frac{\varepsilon}{\delta})| - a\frac{c_2}{c_0}\right]}{\left(S_s^{N/sp} + O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}}.
\end{aligned}$$

Como $N > sp^2$ e $a > 0$ deduzimos que $\dfrac{N}{p-1} - sp > 0$, $\dfrac{N-sp}{p-1} - sp > 0$, $\dfrac{N}{p} - sp > 0$, e consequentemente

$$\frac{\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X} - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^{p_s^*}(\Omega)}} < S_s,$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Logo,

$$\frac{s}{N}\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{N-sp}{sp}} \left(\frac{\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X_p^s} - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^{p_s^*}(\Omega)}}\right)^{\frac{N}{sp}} < \frac{s}{N}\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{N-sp}{sp}} S_s^{\frac{N}{sp}},$$

Portanto, pela limitação do conjunto Q_{ε,R_1,R_2} em X_p^s e pelo Lema 2.24 (especificamente, de (2.147)) inferimos que (2.162) é verificado desde que ambos $\varepsilon > 0$ e

$\lambda > 0$ são suficientemente pequenos.

Caso 2: $N > sp^2$ e $1 < p < \dfrac{2N}{N+s}$.

Seguindo as mesmas ideias do **caso 1**, temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X^s_p} - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^{p^*_s}(\Omega)}} \\
\leq\ & S_s + \frac{O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}}) + O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}}) + c_4\varepsilon^{N-\frac{N-sp}{p}} - a\left(\dfrac{c_2}{c_0}\varepsilon^{sp} - c_1\varepsilon^{N(p-1)+sp}\right)}{\left(S_s^{N/sp} + O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}} \\
=\ & S_s + \frac{\varepsilon^{sp}\left[O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}-sp}) + O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}-sp}) + c_4\varepsilon^{\left(N-\frac{N-sp}{p}-sp\right)} - a\left(\dfrac{c_2}{c_0} - c_1\varepsilon^{N(p-1)}\right)\right]}{\left(S_s^{N/sp} + O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}}.
\end{aligned}
$$

Como $N > sp^2$, $N > sp$ e $a > 0$ deduzimos que $\dfrac{N}{p-1} - sp > 0$, $\dfrac{N-sp}{p-1} - sp > 0$, $N - \dfrac{N-sp}{p} - sp > 0$, e consequentemente

$$
\frac{\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X^s_p} - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^{p^*_s}(\Omega)}} < S_s,
$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Da mesma forma, como no **caso 1**, podemos concluir que (2.162) é verificado quando $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ são suficientemente pequenos, provando assim o primeiro resultado.

Agora, para finalizar a prova do Lema 2.25, provaremos o segundo resultado, assim suponha que $N > sp\big((p-1)^2 + p\big)$, e $p > \dfrac{2N}{N+s}$.

Prosseguindo o mesmo raciocínio como no **caso 1**, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X^s_p} - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^{p^*_s}(\Omega)}} \\
\leq \;& S_s + \frac{O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}}) + O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}}) + c_4\varepsilon^{\frac{N-sp}{p(p-1)}} - a\left(\dfrac{c_2}{c_0}\varepsilon^{sp} - c_1\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}}\right)}{\left(S_s^{N/sp} + O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}} \\
= \;& S_s + \frac{\varepsilon^{sp}\left[O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}-sp}) + O(\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}-sp}) + c_4\varepsilon^{\left(\frac{N-sp}{p(p-1)}-sp\right)} - a\left(\dfrac{c_2}{c_0} - c_1\varepsilon^{\frac{N-sp}{p-1}-sp}\right)\right]}{\left(S_s^{N/sp} + O(\varepsilon^{\frac{N}{p-1}})\right)^{\frac{N-sp}{N}}}.
\end{aligned}
$$

Como $N > sp\big((p-1)^2+p\big)$ e $a > 0$ deduzimos que $\dfrac{N}{p-1} - sp > 0$, $\dfrac{N-sp}{p-1} - sp > 0$, $\dfrac{N-sp}{p(p-1)} - sp > 0$, $N - \dfrac{N-sp}{p} - sp > 0$, e consequentemente

$$
\frac{\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{X^s_p} - a\|e_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^{p^*_s}(\Omega)}} < S_s,
$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Da mesma forma que no **caso 1**, podemos concluir que (2.162) é satisfeito quando $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ são suficientemente pequenos.

■

2.4.4 Solução via o Teorema de Linking

Proposição 2.26 *Suponha que $\lambda_1 < a < \lambda^*$, $1 < q < p$, $\lambda > 0$ e $b > 0$.*

(i) Se $N > sp^2$ e $1 < p \leq \dfrac{2N}{N+s}$ então, para λ suficientemente pequeno, o problema (2.1) possui pelo menos uma solução não trivial.

(ii) Se $N > sp((p-1)^2+p)$ e $p > \dfrac{2N}{N+s}$, então para λ suficientemente pequeno, o problema (2.1) possui pelo menos uma solução não trivial.

Demonstração: Provaremos o item (i), a prova do item (ii) é analoga. Vamos obter uma função $u \in X_p^s$ que seja um ponto crítico para o funcional

$$I_{\lambda,s} : X_p^s \to \mathbb{R}$$

$$I_{\lambda,s}(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{X_p^s} + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - \frac{a}{p}\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x - \frac{b}{p^*}\int_\Omega (u^+)^{p^*} \mathrm{d}x.$$

Para isso, utilizaremos o teorema de Linking com a condição $(P.S)_C$ (ver Teorema A.51, Apêndice A) com $C < \frac{s}{N} b^{\frac{sp-N}{sp}} S_s^{\frac{N}{sp}}$, sendo S_s a melhor constante de Sobolev da imersão $X_p^s \hookrightarrow L^{p_s^*}(\Omega)$. De fato, mostraremos a geometria exigida pelo teorema de Linking. Continuaremos a utilizar as mesmas notações da Seção 1.1, isto é, $X_p^s = \mathrm{span}\{\varphi_1\} \oplus W$, em que φ_1 é uma autofunção associada ao primeiro autovalor do operador $(-\Delta)_p^s$ no espaço X_p^s e $W = \{u \in X_p^s : \langle A(\varphi_1), u\rangle = 0\}$. Nosso objetivo é obter uma esfera $S_\rho = \partial B_\rho \cap W$ e um retângulo $Q_{\varepsilon,R_1,R_2} = \big(\overline{B}_{R_1} \cap \mathrm{span}\{\varphi_1\}\big) \oplus [0, R_2 e_{\varepsilon,\delta}]$, tais que:

(a) $I_{\lambda,s}\Big|_{S_\rho} \geq \alpha > 0,$

(b) $I_{\lambda,s}\Big|_{\partial Q_{\varepsilon,R_1,R_2}} < \beta < \alpha; \quad 0 < \rho < R_2\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}.$

Prova do item (a)**:** Pelo Lema 2.21, existe $\alpha > 0$ e $\rho > 0$ tal que $I_{\lambda,s}\Big|_{S_\rho} \geq \alpha$, provando assim, o item (a) da geometria de Linking.

Prova do item (b)**:** Pelo Lema 2.22, existem $R_1 > 0$ e $R_2 > 0$ $\big(0 < \rho < R_2\|e_{\varepsilon,\delta}\|_{X_p^s}\big)$ suficientemente grandes tais que

$$I_{\lambda,s}(u) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x, \ \forall\, u \in \partial Q_{\varepsilon,R_1,R_2}, \tag{2.171}$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e para todo $\lambda > 0$. Como as normas $\|.\|_{L^q(\Omega)}$ e $\|.\|_{X_p^s}$ no espaço de dimensão finita $\mathrm{span}\{\varphi_1, e_{\varepsilon,\delta}\}$ são normas equivalentes, então existe $K_0 > 0$ tal que $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq K_0\|u\|_{X_p^s}$, $\forall\, u \in \partial Q_{\varepsilon,R_1,R_2}$ e portanto, como Q_{ε,R_1,R_2} é limitada em X_p^s, existe $K_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq K_1, \ \forall\, u \in \partial Q_{\varepsilon,R_1,R_2}. \tag{2.172}$$

Portanto, por (2.171) , (2.172) e tomando $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, obtemos que existe $\beta > 0$ tal que

$$I_{\lambda,s}(u) < \beta < \alpha,$$

para todo $u \in \partial Q_{\varepsilon,R_1,R_2}$, com $Q_{\varepsilon,R_1,R_2} = \left(\overline{B}_{R_1} \cap \mathrm{span}\{\varphi_1\}\right) \oplus [0, R_2 e_{\varepsilon,\delta}]$. Por outro lado, Os Lemas 2.6 e 2.25 garantem que o $I_{\lambda,s}$ satisfaz a condição $(P.S)_{c_s}$, com

$$c_s = \inf_{h\in\Gamma} \sup_{u\in Q_{\varepsilon,R_1,R_2}} I_\lambda(h(u)) < \frac{s}{N} b^{\frac{sp-N}{sp}} S_s^{\frac{N}{sp}},$$

com $\Gamma = \{h \in C(Q_{\varepsilon,R_1,R_2}, X_p^s)\ ;\ h = id \text{ em } \partial Q_{\varepsilon,R_1,R_2}\}$. Para $\varepsilon > 0$ e $\lambda > 0$ suficientemente pequenos.

Portanto para $R_1 > 0$ e $R_2 > 0$ suficientemente grandes e $\lambda > 0$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequenos, temos pelo teorema de Linking com a condição $(P.S)_{c_s}$ que $c := c_s = \inf_{h\in\Gamma} \sup_{u\in Q_{\varepsilon,R_1,R_2}} I_{\lambda,s}(h(u))$ é um valor crítico do funcional $I_{\lambda,s}$ com $c \geq \alpha$, isto é, existe $u_3 \in X_p^s$ solução fraca para o problema (2.1) tal que $0 < \alpha \leq I_{\lambda,s}(u_3)$. Logo u_3 é não nula, pois $I_{\lambda,s}(0) = 0$. ■

2.5 Demonstração do Teorema 2.1:

Demonstração: O Teorema 2.13 fornece uma solução positiva $u_1 \in X_p^s$ do problema (2.1) para cada $\lambda > 0$ suficientemente pequeno (veja (2.85)) e o Teorema 2.16 fornece uma solução negativa $u_2 \in X_p^s$ para o problema (2.1) para cada $\lambda > 0$. Obviamente, essas duas soluções são distintas. Finalmente pela proposição 2.26 obtemos também uma solução $u_3 \in X_p^s$ para o problema (2.1). Resta mostrar que $u_3 \neq u_1$ e $u_3 \neq u_2$, resultando assim na existência de três soluções não triviais distintas. Isto será feito provando que $I_{\lambda,s}(u_3) \neq I_{\lambda,s}(u_1)$ e $I_{\lambda,s}(u_3) \neq I_{\lambda,s}(u_2)$ com qualquer $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. Usando que a solução u_1 é positiva, as definições dos valores minimax C_λ^+ e c_s em (2.88) e (2.161) respectivamente, em conjunto com a Proposição 2.21, nós temos

$$I_{\lambda,s}(u_1) = I^+_{\lambda,s}(u_1) = C^+_\lambda \leq \frac{\lambda t_0^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q \mathrm{d}x < \alpha \leq c_s = I_{\lambda,s}(u_3), \tag{2.173}$$

desde que $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno para satisfazer a desigualdade estrita em (2.173). Procedendo de forma análoga com a solução negativa u_2, encontramos a partir de (2.98) e da Proposição 2.21 que

$$I_{\lambda,s}(u_2) = I^-_{\lambda,s}(u_2) = C^-_\lambda \leq \frac{\lambda (t_0')^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q \mathrm{d}x < \alpha \leq c_s = I_{\lambda,s}(u_3), \tag{2.174}$$

desde que $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno para satisfazer a desigualdade estrita em (2.174). Isto conclui a prova do Teorema 2.1. ■

Observação 2.27 *De* (2.173) *e* (2.174)*, é claro que, se* $0 < \lambda < q\alpha / \int_\Omega \varphi^q \mathrm{d}x$*, as soluções* u_i*, com* $i = 1, 2, 3$*, obtidas no Teorema 2.1 são distintas, em que* $\alpha > 0$ *foi dada na Proposição 2.21 e não depende de* λ*.*

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Para tornar a leitura mais simples, apresentamos e daremos a prova de alguns resultados utilizados nos capítulos anteriores.

A.1 Operador p-laplaciano fracionário

Definição A.1 *Sejam $u \in C_0^\infty$ e $s \in (0,1)$. O operador p-laplaciano fracionário $(-\Delta)_p^s$ o qual, omitindo uma constante multiplicativa $C(N,s)$ é definido por*

$$
\begin{aligned}
(-\Delta)_p^s u(x) &:= P.V. \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}} dy \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}} dy,
\end{aligned}
$$

para $x \in \mathbb{R}^N$, onde P.V. é o valor principal da integral

Para o caso $p = 2$, temos a definição do operador laplaciano fracionário.

A.1.1 Operador laplaciano fracionário

Definição A.2 *Sejam $\varphi \in C_0^\infty$ e $s \in (0,1)$. O operador laplaciano fracionario $(-\Delta)^s$ é definido por*

$$(-\Delta)^s\varphi(x) := C(N,s)P.V.\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{N+2s}}dy = C(N,s)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{N+2s}}dy, \tag{A.1}$$

para $x \in \mathbb{R}^N$, onde P.V. é entendido como o valor principal da integral e

$$C(N,s) = \frac{4^s\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\pi^{\frac{N}{2}}\Gamma(-s)}. \tag{A.2}$$

Ao longo deste trabalho, evitamos escrever a constante $C(N,s)$ para facilitar os cálculos. Temos as seguintes observações:

(1) Fazendo uma mudança de variável (ver [44, Lema 3.1]), (A.1) resulta

$$(-\Delta)^s\varphi(x) := -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-2\varphi(x)}{|y|^{N+2s}}dy. \tag{A.3}$$

(2) Via transformada de Fourier, (A.1) é equivalente a (ver[44, Proposição 3.3])

$$\widehat{(-\Delta)^s}\varphi(\xi) = C|\xi|^{2s}\widehat{\varphi}(\xi), \text{ para } \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{A.4}$$

onde C é uma constante positiva que depende de N e s.

Lema A.3 *Para qualquer $\varphi \in C_0^\infty$ temos a estimativa*

$$|(-\Delta)^s\varphi(x)| \le C\frac{\|\varphi\|_{C^2(\mathbb{R}^N)}}{1+|x|^{N+2s}}, \quad \textit{com } x \in \mathbb{R}^N, \tag{A.5}$$

onde C é uma constante que depende do suporte de φ.

Demonstração: Ver [46, Lema 2.1]. ■

Definição A.4 *O espaço* $\mathcal{L}_s^1$ *consiste de todas as funções mensuráveis* $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|}{1+|x|^{N+2s}} dx < \infty. \tag{A.6}$$

Pela da desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|}{1+|x|^{N+2s}} dx \leq C\|u\|_{H^s}, \quad \forall u \in H^s, \tag{A.7}$$

com $C > 0$. Em outras palavras, o espaço de Sobolev fracionário

$$H^s(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy < \infty \right\}$$

H^s está imerso continuamente em $\mathcal{L}_s^1$.

Definição A.5 *Seja* $u \in H^s(\mathbb{R}^N), 0 < s < 1$. *Definimos* $(-\Delta)^s u$, *como uma distribuição, por*

$$\langle (-\Delta)^s u, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^N} u(x)(-\Delta)^s \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Da Observação (A.4), via transformada de Fourier para distribuições, a Definição A.5 é equivalente a

$$\widehat{(-\Delta)^s} u(\xi) := |\xi|^{2s} \widehat{u}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{A.8}$$

Antes de mostrar o próximo resultado, precisamos do seguinte lema,

Lema A.6 (A fórmula de multiplicação) *Para quaisquer* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, *então*

$$(i) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}\, \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\, \overline{\check{g}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\, \widehat{\overline{g}}(x) dx, \tag{A.9}$$

$$(ii) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \check{f}\, \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\, \overline{\widehat{g}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\, \check{\overline{g}}(x) dx. \tag{A.10}$$

Demonstração: Ver [64, Lema 2.7]. ■

Lembrando que o espaço $X = \Big\{ u \in H^s(\mathbb{R}) \,:\, u = 0 \text{ em } \mathbb{R} \setminus (0,1) \Big\}$. Obtemos o seguinte resultado

Proposição A.7 *Seja $u \in X$. Então:*

$$(i) \quad \|u\|_X = \|(-\Delta)^{1/4} u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{A.11}$$

$$(ii) \quad \langle u, v\rangle_X = \int_{\mathbb{R}} (-\Delta)^{1/2} u(x) v(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) (-\Delta)^{1/2} v(x) dx. \tag{A.12}$$

Demonstração: (i) Ver [44, Proposição 3.6].
(ii) De (A.11) segue que

$$\frac{1}{2}\|u\|_X^2 = \frac{1}{2}\|(-\Delta)^{1/4} u(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \text{ para todo } u \in X.$$

Derivando esta expressão no sentido de Gateux obtemos

$$\langle u, v\rangle_X = \int_{\mathbb{R}} (-\Delta)^{1/4} u(x) (-\Delta)^{1/4} v(x) dx.$$

Resulta de (A.8)

$$\langle u, v\rangle_X = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}(|x|^{1/2}\widehat{u}(x)) \mathcal{F}^{-1}(|x|^{1/2}\widehat{v}(x)) dx.$$

Da primeira igualdade de (A.10) temos,

$$\langle u, v\rangle_X = \int_{\mathbb{R}} |x|^{1/2}\widehat{u}(x)|x|^{1/2}\widehat{v}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (|x|\widehat{u}(x))\widehat{v}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (\widehat{-\Delta)^{1/2}} u(x)\widehat{v}(x) dx.$$

A prova segue da primeira igualdade de (A.9). ■

O espectro de $(-\Delta)^{1/2}$ em X consiste em uma sequência de autovalores $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ satisfazendo $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \cdots$, $\lambda_j \to \infty$, quando $j \to \infty$, onde cada autovalor λ_j é repetido com sua multiplicidade. Cada autofunção φ_j tem a regularidade $\varphi_j \in C^{0,\sigma}[0,1]$ para algum $\sigma \in (0,1)$. Para o resto do trabalho fixamos uma sequência $\{\varphi_j\}_{j\geq 1}$ de autofunções formando uma base ortonormal em $L^2(0,1)$

e uma base ortogonal em X. Além disso, podemos escolher $\varphi_1 > 0$.

Proposição A.8 *Definindo* $X = V_k \oplus W_k$ *onde* $V_k = span\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ *e* $W_k = V_k^{\perp}$, *para algum* $k \in \mathbb{N}$, *temos as seguintes estimativas:*

(*i*) $\|u\|_X^2 \leq \lambda_k \|u\|_{L^2(0,1)}^2 \ \forall\, u \in V_k$;

(*ii*) $\|u\|_X^2 \geq \lambda_{k+1} \|u\|_{L^2(0,1)}^2 \ \forall\, u \in W_k$.

Demonstração: Mostraremos o item (i). Seja $u \in V_k$, logo existem constantes reais $\xi_{i's}$ tais que $u = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i$. Logo da Proposição A.7 obtemos

$$
\begin{aligned}
\|u\|_X^2 &= \int_0^1 (-\Delta)^{1/2} u(x) u(x) dx \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i ((-\Delta)^{1/2} \varphi_i) \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i (\lambda_i \varphi_i) \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i \right) dx \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i^2 \varphi_i^2 dx.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\|u\|_X^2 &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i^2 \varphi_i^2 dx \\
&\leq \lambda_k \int_0^1 \sum_{i=1}^{k} \xi_i^2 \varphi_i^2 dx \\
&= \lambda_k \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i \varphi_i \right) dx \\
&= \lambda_k \int_0^1 u^2 dx \\
&= \lambda_k \|u\|_{L^2(0,1)}^2,
\end{aligned}
$$

isto termina a prova do item (i), de modo semelhante mostra-se o item (ii). ■

A.2 Uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser para os espaços X_p^s e X

Para uma prova da desigualdade do tipo Trudinger-Moser para o espaço X_p^s ver [9, Lema 2.5]. Bahrouni [9] provou uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser. Mais precisamente,

Proposição A.9 *Seja $0 < s < 1$ e $p \geq 2$ talque $N = sp$. Então existe $\alpha^*_{s,N} = \alpha(s,N)$ tal que para todo $0 \leq \alpha < \alpha^*_{s,N}$ existe $H_\alpha > 0$ tal que*

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}\right) dx \leq H_\alpha, \tag{A.13}$$

para todo $u \in X_p^s$ e $\|u\|_{X_p^s} \leq 1$.

Para o caso $p = 2$, $s = 1/2$ e $N = 1$, temos a seguinte desigualdade do tipo Trudinger-Moser para o espaço X.

Proposição A.10 *Existe $K > 0$ tal que*

$$\sup_{u \in X, \|u\|_X \leq 1} \int_0^1 \exp\left(\alpha|u|^2\right) dx \leq K, \quad \textit{para } \alpha \leq \pi.$$

A desigualdade é ótima para qualquer crescimento $\exp\left(\alpha|t|^2\right)$ com $\alpha > \pi$, o correspondente supremo é infinito.

Demonstração: Ver [88, Teorema 1] e [63, Proposição 1.1] ■

Proposição A.11 *Seja $\alpha > 0$. Então $\exp(\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}) \in L^1(\Omega)$ para todo $u \in X$.*

Demonstração: Considere $u \in X$ e $\epsilon > 0$. Como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em X (ver [47], Teorema 6), existe $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\|u-\phi\|_X < \epsilon$. Note que

$$\begin{aligned}
|u|^{\frac{N}{N-s}} &= |u-\phi+\phi|^{\frac{N}{N-s}} \\
&\leq (|u-\phi| + |\phi|)^{\frac{N}{N-s}} \\
&\leq 2^{\frac{N}{N-s}} \max\{|u-\phi|^{\frac{N}{N-s}}, |\phi|^{\frac{N}{N-s}}\} \\
&\leq 2^{\frac{N}{N-s}}(|u-\phi|^{\frac{N}{N-s}} + |\phi|^{\frac{N}{N-s}}),
\end{aligned}$$

daí, pela desigualdade de Young

$$\begin{aligned}
\exp(\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}) &\leq \exp(\alpha 2^{\frac{N}{N-s}}(|u-\phi|^{\frac{N}{N-s}} + |\phi|^{\frac{N}{N-s}})) \\
&= \exp(\alpha 2^{\frac{N}{N-s}}|u-\phi|^{\frac{N}{N-s}}) \exp(\alpha 2^{\frac{N}{N-s}}|\phi|^{\frac{N}{N-s}}) \\
&\leq \frac{s}{N}\exp\left(\alpha\frac{N}{s}2^{\frac{N}{N-s}}|u-\phi|^{\frac{N}{N-s}}\right) + \frac{N-s}{N}\exp\left(\alpha\frac{N}{N-s}2^{\frac{N}{N-s}}|\phi|^{\frac{N}{N-s}}\right),
\end{aligned}$$

disto segue-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \exp(\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}) \leq \frac{s}{N}\int_\Omega \exp\left(\alpha\frac{N}{s}2^{\frac{N}{N-s}}\|u-\phi\|_X^{\frac{N}{N-s}}\left|\frac{u-\phi}{\|u-\phi\|_X}\right|^{\frac{N}{N-s}}\right)dx \\
+ \frac{N-s}{N}\int_\Omega \exp\left(\alpha\frac{N}{N-s}2^{\frac{N}{N-s}}|\phi|^{\frac{N}{N-s}}\right)dx.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ de modo que $\alpha\dfrac{N}{s}2^{\frac{N}{N-s}}\epsilon^{\frac{N}{N-s}} \leq \alpha^*_{s,N}$, pela Proposição A.9 temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \exp(\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}) &\leq C + \frac{N-s}{N}\int_\Omega \exp\left(\alpha\frac{N}{N-s}2^{\frac{N}{N-s}}|\phi|^{\frac{N}{N-s}}\right)dx \\
&= C + \frac{N-s}{N}\int_{supp(\phi)} \exp\left(\alpha\frac{N}{N-s}2^{\frac{N}{N-s}}|\phi|^{\frac{N}{N-s}}\right)dx \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $\exp(\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}) \in L^1(\Omega)$ para todo $\alpha > 0$. ■

Lema A.12

$$(a+b)^p < a^p + b^p,$$

onde $a > 0$, $b > 0$ *e* $0 < p < 1$.

Demonstração: A função $f(t) = 1 + t^p - (1+t)^p$, para $t \geq 0$, se anula em $t = 0$ e tem derivada

$$f'(t) = pt^{p-1} - p(1+t)^{p-1} = pt^{p-1}\left[1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{p-1}\right] > 0 \ \text{ se } \ t > 0.$$

Então f é estritamente crescente e consequentemente

$$(1+t)^p < 1 + t^p, \ \text{ se } \ t > 0.$$

Substituindo $t = a/b$ na desigualdade verificada tem-se $(a+b)^p < a^p + b^p$. ■

Proposição A.13 *Seja* (u_n) *uma sequência que converge fortemente em* $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. *Então existe uma subsequência* (u_{n_k}) *de* (u_n) *e existe* v *em* $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ *satisfazzendo*

$$|u_{n_k}(x)| \leq v(x), \quad \textit{quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

Demonstração: Siga o mesmo raciocínio de [19, Teorema 4.9]). ■

Corolário A.14 *Seja* (u_n) *uma sequência que converge fortemente em* X_p^s. *Então existe uma subsequência* (u_{n_k}) *de* (u_n) *e existe* v *em* X_p^s *satisfazzendo*

$$|u_{n_k}(x)| \leq v(x), \quad \textit{quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

Demonstração: Segue da Proposição 1.10 e Proposição A.13 ■

Proposição A.15 *Se* (v_n) *é uma sequência em* X_p^s *com* $\|v_n\|_{X_p^s} = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $v_n \rightharpoonup v$ *em* X_p^s *e* $0 < \|v\| < 1$, *então para todo* $0 < \alpha < \alpha_{s,N}^*$ *e todo* $1 < r < \left(1 - \|v\|_{X_p^s}^{\frac{N}{s}}\right)^{\frac{-s}{N-s}}$ *a sequencia* $(\exp(\alpha|v_n|^{\frac{N}{N-s}}))$ *é limitada em* $L^r(\Omega)$.

Demonstração: Usaremos a seguinte desigualdade encontrada em [29, p. 3082]. Dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ constante tal que

$$\big||a+b|^p - |a|^p\big| \leq \varepsilon |a|^p + C_\varepsilon |b|^p, \quad \text{para } \ p > 1 \ \text{ e } \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Seja γ_1 e $\gamma_2 > 1$ tal que $\gamma_1 \alpha < \alpha^*_{s,N}$ e $\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2} = 1$. Fixando um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon < \frac{\alpha^*_{s,N} - \gamma_1 \alpha}{\gamma_1 \alpha}. \tag{A.14}$$

Agora para $a = v_n - v$ e $b = v$ pela desigualdade acima, temos

$$|v_n|^{\frac{N}{N-s}} = |(v_n - v) + v|^{\frac{N}{N-s}} \leq (1+\varepsilon)|v_n - v|^{\frac{N}{N-s}} + C_\varepsilon |v|^{\frac{N}{N-s}}.$$

Logo,

$$\exp\left(\alpha r |v_n|^{\frac{N}{N-s}}\right) \leq \exp\left(\alpha r (1+\varepsilon)|v_n - v|^{\frac{N}{N-s}}\right) \exp\left[\alpha r C_\varepsilon |v|^{\frac{N}{N-s}}\right].$$

Agora aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes γ_1 e $\gamma_2 > 1$

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha r |v_n|^{\frac{N}{N-s}}\right) \leq A_1^{\frac{1}{\gamma_1}} A_2^{\frac{1}{\gamma_2}}, \tag{A.15}$$

onde $A_1 = \displaystyle\int_\Omega \exp\left(\gamma_1 \alpha r (1+\varepsilon)|v_n - v|^{\frac{N}{N-s}}\right) dx$ e $A_2 = \displaystyle\int_\Omega \exp\left[\gamma_2 \alpha r C_\varepsilon |v|^{\frac{N}{N-s}}\right]$. Estimamos as duas integrais separadamente. Primeiro, notamos pela hipótese (v_n) é uma sequência limitada; além disso, do fato $v_n \rightharpoonup v$, temos que (v_n) converge em quase todo ponto para v. Então usando o Teorema de Brezis-Lieb (ver Apêndice

A, Teorema A.42).

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left\|\frac{v_n(x)-v_n(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}\right\|^p_{L^p(R^{2N})}-\left\|\frac{v_n(x)-v_n(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}-\frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}\right\|^p_{L^p(R^{2N})}\right]$$
$$=\left\|\frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}\right\|^p_{L^p(R^{2N})}.$$

Note que $\left\|\frac{v_n(x)-v_n(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}\right\|^p_{L^p(R^{2N})} = \|v_n\|^p_X$, $\left\|\frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}\right\|^p_{L^p(R^{2N})} = \|v\|^p_X$, $\left\|\frac{v_n(x)-v_n(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}-\frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}}\right\|^p_{L^p(R^{2N})} = \|v_n-v\|^p_X$. Portanto da hipotese $\|v_n\|_X = 1$, segue-se

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n-v\|^p_X = 1-\|v\|^p_X.$$

Logo lembrando que $p = \dfrac{N}{s}$,

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n-v\|_X^{\frac{N}{N-s}} = \left(1-\|v\|_X^{\frac{N}{s}}\right)^{\frac{s}{N-s}}.$$

Pela hipotese $\left(1-\|v\|_X^{\frac{N}{s}}\right)^{\frac{s}{N-s}} < \dfrac{1}{r}$, tem-se para n suficientemente grande

$$r < \frac{1}{\|v_n-v\|_X^{\frac{N}{N-s}}}.$$

Daí, por (A.14)

$$A_1 = \int_\Omega \exp\left(\gamma_1\alpha r(1+\varepsilon)|v_n-v|^{\frac{N}{N-s}}\right)dx \le \int_\Omega \exp\left(\gamma_1\alpha(1+\varepsilon)\left|\frac{v_n-v}{\|v_n-v\|_X}\right|^{\frac{N}{N-s}}\right)dx$$
$$\le K_{\gamma_1,\alpha}, \tag{A.16}$$

para alguma constante $K_{\gamma_1,\alpha,\varepsilon} > 0$.

Finalmente note pela proposição A.11, obtemos

$$A_2 < \infty. \tag{A.17}$$

De (A.15), (A.16) e (A.17) podemos concluir que a sequência $(\exp(\alpha|v_n|^{\frac{N}{N-s}}))$ é limitada em $L^r(\Omega)$. ■

Lema A.16 *Suponha que $(f_{2,p})$ é satisfeita. Então para todo $\alpha > 0$ existe $C > 0$ tal que*

$$|f(t)| \leq C\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}), \quad \textit{para todo} \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Imediato. ■

Lema A.17 *Suponha que $(f_{2,p})$ é satisfeita. Então para todo $\alpha > 0$, dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que*

$$|F(t)| \leq C_\epsilon|t| + \epsilon\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}), \quad \textit{para todo} \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Pela condição $(f_{2,p})$: $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(t)|}{\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}})} = 0$ e por L'Hôspital segue-se,

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{F(t)}{\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}})} = 0.$$

Logo dado $\epsilon > 0$, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$|F(t)| < \epsilon\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}), \;\; \text{para todo} \;\; |t| > |t_0|. \tag{A.18}$$

Usando L'Hôspital a função

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{F(t)}{t}, & \text{se} \quad t \neq 0, \\ \quad 0, & \text{se} \quad t = 0, \end{cases}$$

é contínua em $t = 0$ e consequentemente contínua no intervalo $[-|t_0|, |t_0|]$. Portanto existe $C_\epsilon > 0$, tal que

$$|F(t)| \leq C_\epsilon |t|, \quad \text{para todo} \quad t \in [-|t_0|, |t_0|]. \tag{A.19}$$

Portanto de (A.18) e (A.19) segue a prova do Lema. ■

Lema A.18 *Suponha que as hipóteses* $(f_{2,p})$ *e* $(f_{3,p})$ *são válidas. Dado* $q > \dfrac{N}{s}$, *para todo* $\alpha > 0$, *existe* $0 \leq \mu < \lambda_1 - a$ *e* $C > 0$ *tais que*

$$|F(t)| \leq \frac{\mu}{p}|t|^p + C\exp(\alpha |t|^{\frac{N}{N-s}})|t|^q, \quad \textit{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Pela condição (f_3) : $\displaystyle\lim_{|t|\to 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t} = 0$ e por L'Hôspital segue-se,

$$\lim_{|t|\to 0} \frac{F(t)}{|t|^p} = 0. \tag{A.20}$$

Logo dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|F(t)| < \epsilon |t|^p, \quad \text{para todo} \quad 0 < |t| \leq \delta.$$

Como $\lambda_1 - a > 0$, então podemos escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\epsilon < \frac{\lambda_1 - a}{p},$$

isso implica

$$|F(t)| < \frac{\lambda_1 - a}{p}|t|^p, \quad \text{para todo} \quad 0 < |t| \leq \delta,$$

equivalentemente

$$\frac{p|F(t)|}{|t|^p} < \lambda_1 - a, \quad \text{para todo} \quad 0 < |t| \leq \delta. \tag{A.21}$$

Por outro lado de (A.20), obtemos que a função

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{p|F(t)|}{|t|^p}, & \text{se} \quad t \neq 0, \\ \quad 0, & \text{se} \quad t = 0, \end{cases}$$

é contínua em $t = 0$ e consequentemente contínua no intervalo $[-\delta, \delta]$. Portanto $g(t)$ atinge seu máximo no intervalo $[-\delta, \delta]$, isto é, existe $t_0 \in [-\delta, \delta]$ tal que

$$g(t) \leq g(t_0); \;\; \forall t \in [-\delta, \delta]. \tag{A.22}$$

Como $\lambda_1 - a > 0$, segue de (A.21) que

$$0 = g(0) \leq g(t_0) < \lambda_1 - a.$$

Seja $\mu = g(t_0)$, então de (A.22) obtemos

$$|F(t)| \leq \frac{\mu |t|^p}{p}; \;\; \forall t \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\},$$

como $F(0) = 0$, temos que

$$|F(t)| \leq \frac{\mu |t|^p}{p}; \;\; \forall t \in [-\delta, \delta].$$

Assim existe $0 \leq \mu < \lambda_1 - a$ tal que

$$|F(t)| \leq \frac{\mu}{p} |t|^p; \;\; \forall |t| \leq \delta. \tag{A.23}$$

Agora, estimaremos $|F(t)|$ quando $|t| \geq \delta$. Mostraremos que

$$|F(t)| \leq C|t|^q \exp(\alpha |t|^{\frac{N}{N-s}}); \;\; \forall |t| \geq \delta.$$

Usando o Lema A.16, existe $C_1 > 0$ tal que, para todo $\alpha > 0$

$$|F(t)| \leq \int_0^t |f(\xi)|d\xi \leq C_1 \int_0^t \exp(\alpha|\xi|^{\frac{N}{N-s}})d\xi, \ \ \forall|t| \geq \delta.$$

Daí, segue que

$$|F(t)| \leq C_1 \int_0^t \exp(\alpha|\xi|^{\frac{N}{N-s}})d\xi \leq C_1 \exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}) \int_0^t ds \leq C_1|t| \exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}), \ \ \forall|t| \geq \delta.$$

Isto é,

$$|F(t)| \leq C_1|t| \exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}), \ \ \forall|t| \geq \delta. \tag{A.24}$$

Se $\delta \geq 1$, por (A.24) e usando o fato que $q > \dfrac{N}{s}$, obtemos

$$|F(t)| \leq C_1|t|^q \exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}), \ \ \forall|t| \geq \delta.$$

Suponha que δ seja suficientemente menor que 1 e seja $R_0 > 0$ suficientemente maior que 1. Novamente por Lema A.16 e usando que $q > \dfrac{N}{s}$, temos

$$|F(t)| \leq C_1|t|^q \exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}), \ \ \forall|t| \geq R_0.$$

Agora, basta estimar $|F(t)|$ nos intervalos $[\delta, R_0]$ e $[-R_0, -\delta]$. Note que sendo F contínua, então $\dfrac{|F(t)|}{\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}})|t|^q}$ é contínua, logo limitada no compacto $[\delta, R_0]$, assim, existe $C_2 > 0$ tal que

$$|F(t)| \leq C_2|t|^q \exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}), \ \ \forall t \in [\delta, R_0].$$

Analogamente, podemos obter uma constante $C_3 > 0$ com

$$|F(t)| \leq C_3|t|^q \exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}), \ \ \forall t \in [-\delta, -R_0].$$

Finalmente, considerando $C = \max\{C_1, C_2, C_3\}$ e usando (A.23), obtemos que

$$|F(t)| \leq \frac{\mu}{p}|t|^p + C|t|^q \exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-s}}), \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Isso completa a prova do Lema. ■

Lema A.19 *Suponha que f satisfaz $(f_{4,p})$, então dado $M > 0$, existe $C_M > 0$ tal que*

$$F(t) \geq M|t|^p - C_M, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: De $(f_{4,p})$, temos que dado $M > 0$, existe $t_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$F(t) \geq M|t|^p, \ \ \forall |t| \geq |t_1|. \tag{A.25}$$

Além disso como F é contínua no conjunto compacto $[-|t_1|, |t_1|]$, então existe $C > 0$ tal que $|F(t)| \leq C$, para todo $|t| \leq |t_1|$. Tomando $C_M = C + M|t_1|^p$, obtemos para todo $|t| \leq |t_1|$ que $F(t) \geq -C = M|t_1|^p - C_M \geq M|t|^p - C_M$. Portanto,

$$F(t) \geq M|t|^p - C_M, \ \ \forall |t| \leq |t_1|. \tag{A.26}$$

Concluindo de (A.25) e (A.26) que dado $M > 0$, existe $C_M > 0$ tal que

$$F(t) \geq M|t|^p - C_M, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

■

Lema A.20 *Suponha que f satisfaz (f_5), então existe $R > 0$ tal que $\Im(t)$ é crescente em $t \geq R$ e decrescente em $t \leq -R$, onde $\Im(t) = f(t)t - pF(t)$. Em particular, existe $C_1 > 0$ tal que*

$$\Im(t) \leq \Im(t) + C_1.$$

Para cada $0 \leq s \leq t$ ou $t \leq s \leq 0$.

Demonstração: Ver [87]. ■

Lema A.21 *Suponha que f satisfaz (f_5'), então $\Im(t)$ é crescente em $t > 0$ e decrescente em $t < 0$, onde $\Im(s) = f(t)t - pF(t)$.*

Demonstração: Analoga ao Lema A.20. ■

Lema A.22 *Suponha que f satisfaz $(f_{5,p})$, então $pF(t) \leq f(t)t$, para todo $t \neq 0$.*

Demonstração: seja $\Im(t) = f(t)t - pF(t)$, então para $t > 0$, temos do Lema A.21

$$\Im(t) \geq \Im(\epsilon), \quad \text{para} \quad t > \epsilon > 0$$

fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos

$$\Im(t) \geq 0, \quad \text{para} \quad t > 0.$$

Analogamente podemos obter $\Im(t) \geq 0, \quad \text{para} \quad t < 0$. Concluindo

$$\Im(t) \geq 0, \quad \text{para} \quad t \neq 0.$$

■

Lema A.23 *Sejam $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $p > 1$, então para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$ verifica*

(i) $|u^+(x) - u^+(y)|^p \leq |u(x) - u(y)|^{p-2}\big(u(x) - u(y)\big)\big(u^+(x) - u^+(y)\big)$,

(ii) $|u^-(x) - u^-(y)|^p \leq |u(x) - u(y)|^{p-2}\big(u(x) - u(y)\big)\big(u^-(x) - u^-(y)\big)$.

Demonstração: Provaremos o item(i). A prova do item(ii) é semelhante. Para verificar isso suponha que $u(x) \geq u(y)$. Não há perda de generalidade nisso, já que os papéis de x e y podem ser trocados. Assim, temos os seguintes casos $u(y) \leq u(x) \leq 0$, $0 \leq u(y) \leq u(x)$ e $u(y) \leq 0 \leq u(x)$. Note que nos casos $u(y) \leq u(x) \leq 0$ e $0 \leq u(y) \leq u(x)$ a desigualdade do item (i) verifica trivialmente. Portanto estudamos so o último caso, isto é, suponha que $u(y) \leq 0 \leq u(x)$. Então

$$u(x) - u(y) \geq u(x),$$

consequentemente

$$(u(x)-u(y))^{p-1}u(x) \geq (u(x))^p,$$

o que é equivalente ao item (i) desde que $u(y) \leq 0 \leq u(x)$. ■

Lema A.24 *Sejam $B>0$ e $C>0$ constantes positivas, então*

$$\max_{t\geq 0}\left(\frac{Bt^p}{p}-\frac{Ct^{p_s^*}}{p_s^*}\right)=\frac{1}{N}\left(\frac{B}{C^{\frac{p}{p_s^*}}}\right)^{\frac{N}{p}}.$$

Demonstração: Defina a função $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $f(t)=\dfrac{Bt^p}{p}-\dfrac{Ct^{p_s^*}}{p_s^*}$. O ponto crítico $t_0=\left(\dfrac{B}{C}\right)^{\frac{1}{p_s^*-p}}$ é ponto de máximo global para f e o valor máximo de f é

$$f(t_0)=\frac{1}{N}\left(\frac{B}{C^{\frac{p}{p_s^*}}}\right)^{\frac{N}{p}}.$$

■

Em nosso trabalho, precisamos de um resultado auxiliar que aparece em [33, Lema 2.5]) quando $s=1$ e $p=2$. A prova é similar para $s\in(0,1)$. $p>1$

Lema A.25 *Sejam $u,v\in L^r(\Omega)$ com $p\leq r\leq p_s^*$. Se $\omega\subset\Omega$ e $u+v>0$ em ω, então*

$$\left|\int_\omega (u+v)^r dx-\int_\omega |u|^r dx-\int_\omega |v|^r dx\right|\leq C\int_\omega \big(|u|^{r-1}|v|+|u||v|^{r-1}\big)dx.$$

Observação A.26 *Estudamos os seguintes casos:*

$$\text{(a)}\ \ 1<p\leq\frac{2N}{N+s}\quad e\quad \begin{cases}(1) & N>sp^2,\\ (2) & N=sp^2,\\ (3) & sp<N<sp^2.\end{cases}$$

$$\text{(b)}\ \ \left[p>\frac{2N}{N+s}\ \ e\ \ N>sp\big((p-1)^2+p\big)\right]\quad e\quad \begin{cases}(1) & N>sp^2,\\ (2) & N=sp^2,\\ (3) & sp<N<sp^2.\end{cases}$$

caso (i) Existem $N \geq 1$, $0 < s < 1$ e $p > 1$ que verificam $(a) - (1)$: De fato, existem $N \geq 1$ e $0 < s < 1$ tais que $(N - s)^2 > 0$ e consequentemente existe $p > 1$ tal que $1 < p \leq \dfrac{2N}{N + s} < \left(\dfrac{N}{s}\right)^{1/2}$. Assim existem $N \geq 1$, $0 < s < 1$ e $p > 1$ tais que que verificam $(a) - (1)$

caso (ii) Existem $N \geq 1$, $0 < s < 1$ e $p > 1$ que verificam $(b) - (1)$: De fato, para $p = 2$, bastará tomar $N > 6 > 6s$ e algum $0 < s < 1$. Agora suponha que $p \neq 2$. Logo existem $N \geq 1$ e $p > 1$ e $0 < s < 1$ tais que

$$\frac{N(p-2)}{p\big[(p-1)^3 - 1\big]} > s > 0. \tag{A.27}$$

Se $p > 2$, temos trivialmente $sp > N(2-p)$ e consequentemente $p > \dfrac{2N}{N + s}$. Agora, de (A.27) segue $N > sp((p-1)^2 + p)$. Assim existem $N \geq 1$, $0 < s < 1$ e $p > 1$ tais que que verificam (b) e (1). Se $p < 2$, então

$$\frac{p}{2-p} > p((p-1)^2 + p).$$

Logo existe $0 < s < 1$ tal que $\dfrac{1}{s} < \dfrac{1}{2-p} - ((p-1)^2 + p)$. Portanto existe $N > 1$ tal que $p((p-1)^2 + p) < \dfrac{N}{s} < \dfrac{p}{2-p}$. Assim existem $N \geq 1$, $0 < s < 1$ e $p > 1$ tais que que verificam $(b) - (1)$.

Nos demais casos temos que não existem $N \geq 1$, $0 < s < 1$ e $p > 1$ que verificam $(a) - (2)$, $(a) - (3)$, $(b) - (2)$ e $(b) - (3)$, respectivamente.

Lema A.27 *(Ver [29, Lema 2.11]) Para qualquer $\beta > 0$ e $0 < 2\varepsilon \leq \delta < \theta^{-1}dis(0, \partial\Omega)$, temos*

$$\|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^\beta(\Omega)} \leq \begin{cases} C_\beta \varepsilon^{N - \frac{N-ps}{p}\beta} |\log(\frac{\varepsilon}{\delta})|, & se \quad \beta = \frac{p_s^*}{p'} \\ C_\beta \varepsilon^{\frac{N-sp}{p(p-1)}\beta} \delta^{N - \frac{N-sp}{p-1}\beta}, & se \quad \beta < \frac{p_s^*}{p'}, \\ C_\beta \delta^{N - \frac{N-sp}{p}\beta}, & se \quad \beta > \frac{p_s^*}{p'}, \end{cases} \tag{A.28}$$

onde $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

Lema A.28 *(Ver [67, Lema 2.7]) Existe uma constante* $C = C(N, P, s) > 0$ *tal que para qualquer* $\varepsilon \leq \delta/2$,

(1) $\|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{W_0^{s,p}} \leq S^{N/sp} + C\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{(N-sp)/(p-1)}$.

(2) $\|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{L^p(\Omega)} \geq \begin{cases} \frac{1}{C}\varepsilon^{sp}\log\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right), & N = sp^2 \\ \frac{1}{C}\varepsilon^{sp}, & N > sp^2. \end{cases}$

(3) $\|u_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} \geq S^{N/sp} - C\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{N/(p-1)}$.

Lema A.29 *(Ver [7, Lema 2.3]) Existe* $C = C(N, p, s) > 0$ *tal que para qualquer* $\varepsilon \leq \varepsilon/\delta$ *as seguintes estimativas são válidas*

$$\|u_{\varepsilon,\delta}\|^p_{W_0^{s,p}} \leq S_*^{\frac{N}{p}} + C\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{N-sp}{p-1}} \qquad e \qquad \|u_{\varepsilon,\delta}\|^{p_s^*}_{L^{p_s^*}(\Omega)} \geq S_*^{\frac{N}{\gamma p}} - C\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{N}{p-1}},$$

onde S_* *é a melhor constante de Sobolev da imersão* $W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_s^*}(\Omega)$.

Lema A.30 *Seja* $K > 0$ *e* $\beta \in [0, (N - sp)/p)$ *constantes. Então, para cada* $\varepsilon > 0$, *a seguinte inclusão verifica*

$$D_\varepsilon := \left\{x \in \Omega \ : \ U_\varepsilon(x) > \frac{K}{\varepsilon^\beta}\right\} \supset B_{\rho(\varepsilon)}(0) \quad com \quad \rho(\varepsilon) = C(K)\varepsilon^{\frac{\beta(p-1)}{N-sp}+\frac{1}{p}},$$

onde $C(K)$ *é uma constante positiva que depende de* K. *Além disso, temos a seguinte estimativa*

$$\int_{D_\varepsilon} U_\varepsilon^{p_s^*}dx \geq \int_{B_{\rho(\varepsilon)}(0)} U_\varepsilon^{p_s^*} \geq S_s^{N/sp}.$$

Demonstração: Seja $x \in D_\varepsilon \setminus \{0\}$ com $0 < \varepsilon < |x|$. Então pelo Lema 2.20 existe $c_2 > 0$ tal que

$$\frac{1}{c_2}\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)^{\frac{N-sp}{p-1}} \leq \frac{1}{U\left(\dfrac{|x|}{\varepsilon}\right)} = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}U_\varepsilon(x)}.$$

Logo usando que $x \in D_\varepsilon$,

$$\frac{1}{c_2}\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)^{\frac{N-sp}{p-1}} < \frac{\varepsilon^{\beta-\frac{N-sp}{p}}}{K}.$$

Assim,

$$|x| < \left(\frac{c_2}{K}\right)^{\frac{p-1}{N-sp}} \varepsilon^{\frac{\beta(p-1)}{N-sp}+\frac{1}{p}}.$$

Seja $\tilde{C}(K) = \left(\frac{c_2}{K}\right)^{\frac{p-1}{N-sp}}$, então

$$|x| < \tilde{C}(K)\varepsilon^{\frac{\beta(p-1)}{N-sp}+\frac{1}{p}}, \quad \text{para todo } \; x \in D_\varepsilon \setminus \{0\}.$$

Portanto,

$$D_\varepsilon \subset B_{\tilde{\rho}(\varepsilon)}(0) \;\; \text{com} \;\; \tilde{\rho}(\varepsilon) = \tilde{C}(K)\varepsilon^{\frac{\beta(p-1)}{N-sp}+\frac{1}{p}}. \tag{A.29}$$

Por outro lado como $\beta \in [0,(N-sp)/p)$, temos $\dfrac{N-sp}{p}-\beta > 0$ e consequentemente para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno segue-se

$$\frac{1}{K} > \varepsilon^{\frac{N-sp}{p}-\beta}$$

Logo,

$$U_\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{N-sp}{p}}} > \frac{K}{\varepsilon^\beta},$$

isto é,

$$0 \in D_\varepsilon \tag{A.30}$$

De (A.29) e (A.30) podemos tomar uma constante $C(K) > 0$ suficientemente pequena (K muito grande) tal que

$$D_\varepsilon \supset B_{\rho(\varepsilon)}(0) \quad \text{com} \quad \rho(\varepsilon) = C(K)\varepsilon^{\frac{\beta(p-1)}{N-sp}+\frac{1}{p}}, \tag{A.31}$$

isto mostra uma parte do Lema. Agora usando (A.31) obtemos,

$$\begin{aligned}\int_{D_\varepsilon} U_\varepsilon^{p_s^*} dx &\geq \int_{B_{\rho(\varepsilon)}(0)} U_\varepsilon^{p_s^*} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} U_\varepsilon^{p_s^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\rho(\varepsilon)}(0)} U_\varepsilon^{p_s^*}(x) dx \\ &= S_s^{N/sp} - \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\rho(\varepsilon)}(0)} U_\varepsilon^{p_s^*}(x) dx,\end{aligned}$$

assim, para demonstrar a outra parte do lema, basta demonstrar a seguinte afirmação,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\rho(\varepsilon)}(0)} U_\varepsilon^{p_s^*}(x) dx = 0. \tag{A.32}$$

De fato, fazendo uma mudança de variável e usando o Lema 2.20 segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\rho(\varepsilon)}(0)} U_\varepsilon^{p_s^*}(x) dx &= N w_N \int_{\rho(\varepsilon)}^{+\infty} U_\varepsilon^{p_s^*}(r) r^{N-1} dr \\ &= N w_N \int_{\rho(\varepsilon)}^{+\infty} \left[\varepsilon^{-\frac{N-sp}{p}} U\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{Np}{N-sp}} r^{N-1} dr \\ &= N w_N \varepsilon^{-N} \int_{\rho(\varepsilon)}^{+\infty} \left[U\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{Np}{N-sp}} r^{N-1} dr \\ &\leq N w_N \varepsilon^{\frac{N}{p-1}} \int_{\rho(\varepsilon)}^{+\infty} r^{-\frac{N}{p-1}-1} dr,\end{aligned}$$

como $\displaystyle\int_{\rho(\varepsilon)}^{+\infty} r^{-\frac{N}{p-1}-1} dr = -\rho(\varepsilon)^{-\frac{N}{p-1}}$, temos por (A.31)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\rho(\varepsilon)}(0)} U_\varepsilon^{p_s^*}(x) dx &\leq -N w_N \varepsilon^{\frac{N}{p-1}} \rho(\varepsilon)^{-\frac{N}{p-1}} \\ &= -N w_N \varepsilon^{\left(\frac{\beta(p-1)}{N-sp} + \frac{1}{p} - 1\right)\left(-\frac{N}{p-1}\right)}.\end{aligned}$$

Agora observe que $\dfrac{\beta(p-1)}{N-sp} + \dfrac{1}{p} - 1 < 0$ (pois $\beta \in [0, (N-sp)/p)$. Portanto nós concluímos $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{\rho(\varepsilon)}(0)} U_\varepsilon^{p_s^*}(x) dx = 0.$ ■

A.3 Funcionais Diferenciáveis

A finalidade dessa seção é apresentar as definições da diferencial de Gateaux e Frechet e um resultado que será útil para mostrar que nosso funcional associado ao problema é classe C^1.

Definição A.31 *Seja $F : U \subset V \to \mathbb{R}$ uma função, onde U é um aberto em V. O limite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t}$$

se existir, será chamado derivada de Gateaux de F em u_0 na direção $h \in V$ e será denotada por $\langle F'(u_0), h \rangle$.

Definição A.32 *Diz-se que F é diferenciável em u_0 no sentido de Frechet ou Frechet diferenciável em u_0 se existir uma aplicação linear contínua $L : V \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(u_0 + h) - F(u_0) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Teorema A.33 *(Ver [89, Proposição 1.3]) Seja $\phi : E \to \mathbb{R}$ onde E é um subconjunto aberto de um espaço vetorial normado X. Se ϕ possui uma derivada de Gateaux contínua em E, então $\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$.*

Proposição A.34 *(ver [44, Teorema 6.7 e Corolario 7.2]) A imersão $X_p^s \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua para $q \in [1, p_s^*]$ e compacta para todo $q \in [1, p_s^*)$.*

A.4 Alguns resultados da Análise Funcional

Proposição A.35 *(Ver [19, Proposição 3.5]). Seja X um espaço de Banach e (x_n) uma sequência em X. Se (x_n) converge fracamente para $x \in X$, então $\|x_n\|_X$ é limitada e*

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|_X.$$

Teorema A.36 *(Ver [19, Teorema 4.2])[Teorema da convergência dominada de Lebesgue]. Sejam f_n uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$, satisfazendo :*

(a) $f_n \to f$ *q.t.p. em* Ω;

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx$$

Teorema A.37 *(Ver [19, Teorema 4.9]). Seja (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \to u$. Então existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e existe $h \in L^p(\Omega)$ tais que*

(i) $u_{n_k} \to u$, *q.t.p. em* Ω,

(ii) $|u_{n_k}| \leq h$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *e q.t.p em* Ω.

Teorema A.38 *(Ver [19, Teorema 4.11])[Teorema da representação de Riesz]. Sejam $p, p' > 1$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ e $\phi \in (L^p(\Omega))'$. Então existe uma única função $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega u f dx \qquad \textit{para todo } f \in L^p(\Omega),$$

além disso

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|\phi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Teorema A.39 *(Ver [19, Teorema 4.5])[Teorema de Fubini] Suponha que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então*

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y) dx dy = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} F(x,y) dx dy = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} F(x,y) dy dx.$$

Definição A.40 *(Ver [74, Definição 1.1.1]). Sejam $1 < p < \infty$ e $q = p/(p-1)$. Uma sequência $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ converge fracamente para $u \in L^p(\Omega)$, escrevemos*

$$u_n \rightharpoonup u, \quad \textit{em} \;\; L^p(\Omega),$$

quando
$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n v = \int_\Omega uv, \quad \textit{para toda} \;\; v \in L^q(\Omega).$$

Lema A.41 *(Ver [89, p. 22])[Brézis-Lieb, primera versão]. Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e seja $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Se*

(a) u_n *é limitada em* $L^p(\Omega)$;

(b) $u_n \to u$ *q.t.p. em* Ω.

Então
$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{em} \;\; L^p(\Omega).$$

Lema A.42 *(Ver [20, Teorema 1]) [Brézis-Lieb, segunda versão] Sejam $1 \leq p < \infty, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ e (f_n) uma sequência limitada de funções em $L^p(\Omega)$ que converge em quase todo ponto para f, então*
$$f \in L^p(\Omega) \quad e \quad \lim_{n\to\infty}(|f_n|_p^p - |f - f_n|_p^p) = |f|_p^p.$$

Lema A.43 *(Ver [20, Teorema 2]) [Brézis-Lieb, mais geral] Sejam $1 \leq p < \infty, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função contínua com $j(0) = 0$ que satisfaz a seguinte hipotese: Para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem duas funções contínuas, φ_ϵ e ψ_ϵ não negativas tais que*
$$|j(a+b) - j(a)| \leq \epsilon\varphi_\epsilon(a) + \psi_\epsilon(b), \quad \textit{para todo } a, b \in \mathbb{C}.$$

Seja $f_n = f + g_n$ uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$ tal que

(a) $g_n \to 0$ *q.t.p em* Ω.

(b) $j(f) \in L^1$.

(c) $\displaystyle\int_\Omega \varphi_\epsilon(g_n(x))dx \leq C < \infty$, *para alguma constante C, independente de ϵ e n.*

(d) $\displaystyle\int_{\Omega} \psi_{\epsilon}(f(x))dx < \infty$, *para todo* $\epsilon > 0$.

Então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int [j(f+g_n) - j(g_n) - j(f)]dx = 0$, *quando* $n \to \infty$

Teorema A.44 *(Ver [19, Teorema 2.2])[Banach-Steinhaus, Princípio de Limite Uniforme]. Seja* X *um espaço de Banach,* Y *um espaço vetorial normado e* Λ *uma família de operadores lineares contínuos de* X *a* Y*. Suponha que a família* Λ *seja "pontualmente limitada", ou seja,*

$$\sup_{L\in\Lambda}\{L(x)\} < \infty, \ \forall\, x \in X.$$

Então existe uma constante C *tal que*

$$\|L\| < C, \ \forall L \in \Lambda.$$

Lema A.45 *(Ver [32, Lema 1.7])[Du Bois Raymond] Sejam* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0 \ \ \textit{para todo} \ \ \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

então $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Lema A.46 *(Ver [35, Lema 2.1]) Seja* (u_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *convergindo para* u *em* $L^1(\Omega)$*. Suponha que* $f(u_n(x))$ *e* $f(u(x))$ *estão também em* $L^1(\Omega)$*. se*

$$\int_{\Omega} |f(u_n(x))u_n(x)dx| \leq C$$

então, $f(u_n)$ *converge para* $f(u)$ *em* $L^1(\Omega)$.

A.5 Resultados da Teoria dos Pontos Críticos

Teorema A.47 *(Ver [24, Teorema 1.1.1]) Sejam* X *um espaço topológico compacto e* $I : X \to \mathbb{R}$ *um funcional semicontínuo inferiormente. Então* I *é limitado* *inferiormente e existe um* $u_0 \in X$ *tal que*

$$I(u_0) = \min_{u \in X} I(u).$$

Teorema A.48 *(Ver [40, Teorema 5.10]) [Sobre a natureza de mínimos locais] Seja* $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *que satisfaz a condição de Palais-Smale (P.S). Suponha que* $u_0 \in X$ *é um mínimo local, isto é, existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $\Phi(u_0) \leq \Phi(u), \ \forall \ \|u - u_0\| \leq \epsilon$*. Então para qualquer* $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ *se obtem ou*

(i) existe $0 < \alpha < \epsilon_0$*, tal que* $\Phi(u_0) < \inf\{\Phi(u) \ : \ \|u - u_0\| = \alpha\}$ *ou*

(ii) para cada α *com* $0 < \alpha < \epsilon_0$*,* Φ *tem um mínimo local em um ponto* u_α *com* $\|u_\alpha - u_0\| = \alpha$ *e* $\Phi(u_\alpha) = \Phi(u_0)$*.*

Teorema A.49 *(Ver [89, Teorema 2.10]) Sejam* X *um espaço de Banach,* $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$*,* $e \in X$ *e* $\rho > 0$ *tais que* $\|e\| > \rho$ *e*

$$b = \inf_{\|u\| = \rho} \Phi(u) > \Phi(0) \geq \Phi(e).$$

Se Φ *satisfaz* $(P.S)_C$ *com*

$$C = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} \Phi(u),$$

$$\text{onde } \ \Gamma = \{g \in C([0,1], X) \ ; \ \ g(0) = 0 \ , \ g(1) = e\},$$

então C *é um valor crítico de* Φ*.*

Teorema A.50 *(Ver [81, Teorema 9.12]) Sejam* E *um espaço de Banach de dimensão infinita e* $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ *par, satisfazendo a condição* (PS)*. Suponha que* $\Phi(0) = 0$*. Se* $E = Y \oplus Z$*, onde* Y *tem dimensão finita, e*

(1) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ *tais que* $\Phi\Big|_{\partial B_\rho \cap Z} > \alpha$ *e*

(2) para cada subespaço $Y \subset E$ *com dim*$Y < \infty$ *existe un* $R = R(Y)$ *tal que* $\Phi < 0$ *sobre* $Y \setminus B_{R(Y)}$*.*

Então, Φ *possui uma sequência ilimitada de valores críticos.*

Teorema A.51 *(Ver [89, Teorema 2.12]) Seja E um espaço de Banach com $E = V \oplus W$, onde V é um espaço de dimensão finita, $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$, suponha que*

(a) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\Phi\Big|_{\partial B_\rho \cap W} \geq \alpha$ e

(b) existem $e \in (\partial B_1) \cap W$, $0 < \beta < \alpha$ e uma constante real $R > \rho$ tal que $\Phi\Big|_{\partial Q} < \beta$ onde $Q = (B_R \cap V) \oplus (0, Re)$.

Se Φ satisfaz $(P.S)_C$ com

$$C = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} \Phi(\gamma(u)),$$

$$\text{onde } \Gamma = \{\gamma \in C(\overline{Q}, E) \ ; \ \gamma = I_d \ \text{ em } \partial Q\}.$$

Então Φ possui um valor crítico $C \geq \alpha$

Teorema A.52 *(Ver [80, Lema 2]) O funcional $J : W \to \mathbb{R}$ dado por $J(w) = \frac{1}{p}\|w\|_W^p$ é de classe $C^1(W, \mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet em $w \in W$ é dada por $\langle J'(w), v\rangle = \langle(-\Delta)_p^s w, v\rangle$, para toda $v \in W$. Além disso se $w_n \rightharpoonup w$ fracamente em W, então $\langle(-\Delta)_p^s w_n, \varphi\rangle \to \langle(-\Delta)_p^s w, \varphi\rangle$, para toda $\varphi \in W$, quando $n \to \infty$.*

Seja o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u &= f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad u &= 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{A.33}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N > 1)$ um domínio limitado suave, $s \in (0,1)$, $p > 1$ e $f \in L^\infty(\Omega)$.

Teorema A.53 *(Ver [58, Teorema 1.1]) Existe $\alpha \in (0, s]$ e $C_\Omega > 0$ dependendo apenas de N, p, s e Ω, tal que, para toda solução fraca de (A.33), $u \in C(\overline{\Omega})$ e*

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Teorema A.54 *(Ver [58, Teorema 4.4]) Seja $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ satisfazendo $\left|(-\Delta)_p^s u\right| \leq K$ fracamente em Ω para algum $K > 0$. Então*

$$|u| \leq (C_\Omega K)^{\frac{1}{p-1}} \delta^s \quad q.t.p \ \text{ em } \Omega,$$

para algum $C_\Omega = C(N, p, s, \Omega)$

A.6 Regularidade dos funcionais $I_{\lambda,p}$ e I_λ.

O próximo resultado mostra que os pontos críticos do funcional $I_{\lambda,p}$ correspondem as soluções fracas do Problema (1.1)

Observação A.55 *As hipóteses $(f_{1,p})$ e (f_2, p) (ou $(f'_{2,p})$) são utilizadas para garantir que o funcional $I_{\lambda,p}$ está bem definida e é de clase $C^1(X_p^s, \mathbb{R})$.*

Lema A.56 (Casos subcrítico e crítico) *Se f satisfaz $(f_{1,p})$ e $(f_{2,p})$ (ou $(f'_{2,p})$), então o funcional $I_{\lambda,p}$ esta bem definida e é de classe $C^1(X_p^s, \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por:*

$$\langle I'_{\lambda,p}(u), h\rangle = \langle A(u), h\rangle + \lambda \int_\Omega |u|^{q-2}uhdx - a\int_\Omega |u|^{p-2}uhdx - \int_\Omega f(u)hdx, \ \forall\, u, h \in X_p^s.$$

Demonstração: Tomamos $I_1, I_2, I_3 : X_p^s \to \mathbb{R}$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} I_1(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p_{X_p^s}, \\ I_2(u) &= \frac{1}{\gamma}\int_\Omega |u|^\gamma dx, \quad \text{para } 1 < \gamma \le p, \\ I_3(u) &= \int_\Omega F(u)dx, \end{aligned}$$

primeiro provaremos a boa definição de cada parcela do funcional $I_{\lambda,p}$. Com efeito, I_1 está bem definida, pois corresponde a norma do espaço X_p^s. Agora note que pela imersão, $X_p^s \hookrightarrow L^\gamma(\Omega)$, I_2 está bem definida. Finalmente já para mostrar que I_3 está bem definido, considere $u \in X_p^s$. Pelo Lema A.16 (ver Apêndice A) (aqui usamos a condição $(f_{2,p})$ (ou $(f'_{2,p})$), para alguma constante $C > 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |F(u)|dx &= \int_\Omega \left| \int_0^u f(t)dt \right| dx \\
&\leq \int_\Omega \left[\int_0^u |f(t)|dt \right] dx \\
&\leq C \int_\Omega \left[\int_0^u \exp(\alpha |t|^{\frac{N}{N-s}})dt \right] dx \\
&\leq C \int_\Omega \exp(\alpha |u|^{\frac{N}{N-s}}) \left[\int_0^u dt \right] dx \\
&\leq C \int_\Omega \exp(\alpha |u|^{\frac{N}{N-s}})|u|dx
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e a Proposição 1.9 (ver Apêndice A), segue-se que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |F(u)|dx &\leq C \left[\int_\Omega \exp\left(\frac{N}{N-s} \alpha |u|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \right]^{(N-s)/N} \|u\|_{L^p(\Omega)}^{s/N} \\
&\leq C \lambda_1^{-1/p} \|u\|_{X_p^s} \left[\int_\Omega \exp\left(\frac{N}{N-s} \alpha |u|^{\frac{N}{N-s}} \right) dx \right]^{(N-s)/N}.
\end{aligned}$$

Mas, a Proposição A.11 (ver Apêndice A) garante que $\exp\left(\frac{N}{N-s} \alpha |u|^{\frac{N}{N-s}} \right) \in L^1(\Omega)$, logo $\int_\Omega |F(u)|dx < \infty$. Portanto, o funcional $I_{\lambda,p}$ está bem definido.

Agora iremos provar que I_1, I_2 e I_3 são de classe $C^1(X_p^s, \mathbb{R})$.

Afirmação 1) I_1 é de classe $C^1(X_p^s, \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$\langle I_1'(u), h \rangle = \langle A(u), h \rangle.$$

De fato, isto segue de [80, Lema 2]

Afirmação 2) I_2 é de classe $C^1(X_p^s, \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$\langle I_1'(u), h \rangle = \int_\Omega |u|^{\gamma-2} u h dx.$$

De fato, isto segue do Teorema A.33 (ver Apêndice A) e pelo Teorema A.37 (ver

Apêndice A).

Afirmação 3) I_3 é de classe $C^1(X_p^s, \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$\langle I_3'(u), h\rangle = \int_\Omega f(u)h.$$

De fato, seja $u \in X_p^s$. Para cada $h \in X_p^s$ denotemos

$$r(h) = I_3(u+h) - I_3(u) - \int_\Omega f(u)hdx. \tag{A.34}$$

Mostraremos que $\lim\limits_{\|v\|_X \to 0} \dfrac{r(v)}{\|v\|_{X_p^s}} = 0$, ou equivalente, que $\lim\limits_{\|v_n\|_X \to 0} \dfrac{r(v_n)}{\|v_n\|_X} = 0$.

Defina $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, por $g(t) = F(u + tv_n)$. Note que g é derivável e pela regra da cadeia

$$g'(t) = f(u+tv_n)v_n.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue-se que

$$F(u+v_n) - F(u) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt.$$

Assim,

$$F(u+v_n) - F(u) = \int_0^1 f(u+tv_n)v_n.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
|r(v_n)| &= \left| I_3(u+v_n) - I_3(u) - \int_0^1 f(u)v_n dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega (F(u+v_n) - F(u))dx - \int_0^1 f(u)v_n dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega \int_0^1 f(u+tv_n)v_n dtdx - \int_0^1 f(u)v_n dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega \int_0^1 [f(u+tv_n) - f(u)]v_n dtdx \right|,
\end{aligned}$$

implicando que

$$|r(v_n)| = \left| \int_\Omega \int_0^1 [f(u + tv_n) - f(u)] v_n dt dx \right|. \tag{A.35}$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $g_n : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$, por

$$g_n(x,t) = \big[f\big(u(x) + tv_n(x)\big) - f(u(x))\big] v_n(x),$$

e que por simplicidade, a denotaremos por

$$g_n = [f(u + tv_n) - f(u)] v_n.$$

Vejamos que $g_n \in L^1(\Omega \times [0,1])$. De fato, pela desigualdade de Young

$$\begin{aligned} |g_n| &= |f(u + tv_n) - f(u)||v_n| \\ &\leq \frac{|f(u + tv_n) - f(u)|^2}{2} + \frac{|v_n|^2}{2}, \end{aligned}$$

mas,

$$|f(u + tv_n) - f(u)|^2 \leq (|f(u + tv_n)| + |f(u)|)^2$$

e como $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, para todo $a, b > 0$, temos que

$$(|f(u + tv_n)| + |f(u)|)^2 \leq 2[|f(u + tv_n)|^2 + |f(u)|^2],$$

logo,

$$|f(u + tv_n) - f(u)|^2 \leq 2[|f(u + tv_n)|^2 + |f(u)|^2].$$

Além disso, pelo Lema A.16 (ver Apêndice A) (aqui nós usamos a condição $(f_{2,p})$ (ou $(f'_{2,p})$) , podemos encontrar constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|f(u + tv_n)| \leq C_1 \exp\left(\alpha(|u| + t|v_n|)^{\frac{N}{N-s}}\right) \quad \text{e} \quad |f(u)| \leq C_2 \exp\left(\alpha u^{\frac{N}{N-s}}\right).$$

e desde que, para todo $t \in [0,1]$, temos $(|u|+t|v_n|)^{\frac{N}{N-s}} \leq (|u|+|v_n|)^{\frac{N}{N-s}}$. Então,

$$|f(u+tv_n)| \leq C_1 \exp\left(\alpha(|u|+|v_n|)^{\frac{N}{N-s}}\right) \quad \text{e} \quad |f(u)| \leq C_2 \exp\left(\alpha u^{\frac{N}{N-s}}\right).$$

Assim,

$$|f(u+tv_n)-f(u)|^2 \leq 2\left[C_3 \exp\left(2\alpha(|u|+|v_n|)^{\frac{N}{N-s}}\right) + C_4 \exp\left(2\alpha u^{\frac{N}{N-s}}\right)\right] \tag{A.36}$$

e consequentemente

$$|g_n| \leq C_3 \exp\left(2\alpha(|u|+|v_n|)^{\frac{N}{N-s}}\right) + C_4 \exp\left(2\alpha u^{\frac{N}{N-s}}\right) + \frac{|v_n|^2}{2}.$$

Uma vez que, a Proposição A.11 (ver Apêndice A) garante que $\exp\left(2\alpha(|u|+|v_n|)^{\frac{N}{N-s}}\right)$ e $\exp\left(2\alpha u^{\frac{N}{N-s}}\right))$ pertencem a $L^1(\Omega)$, e como $v_n \in L^2(\Omega)$, então

$$\int_{\Omega\times[0,1]} |g_n(x,t)|dxdt < \infty,$$

ou seja para cada $n \in \mathbb{N}$, g_n é integrável. Assim podemos usar o Teorema de Fubini Teorema A.39 (ver Apêndice A) em (A.35), para obter

$$|r(v_n)| = \left|\int_0^1 \int_\Omega [f(u+tv_n)-f(u)]v_n dxdt\right|.$$

Daí, aplicando a desigualdade de Hölder obtemos

$$|r(v_n)| \leq \int_0^1 \|f(u+tv_n)-f(u)\|_{L^2(\Omega)}\|v_n\|_{L^2(\Omega)}dt.$$

Uma vez que $X \hookrightarrow L^2(\Omega)$ continuamente, existe $C>0$ tal que

$$|r(v_n)| \leq C\|v_n\|_X \int_0^1 \|f(u+tv_n)-f(u)\|_{L^2(\Omega)}dt. \tag{A.37}$$

Por outro lado, como (v_n) converge fortemente em X, pelo Corolário A.14 ver

Apêndice A), a menos de subsequência, existe $w \in X$, verificando

$$|v_n(x)| \leq w(x), \quad \text{quase sempre em } \Omega,$$

dessa estimativa e por (A.36), obtemos

$$|f(u+tv_n) - f(u)|^2 \leq 2\Big[C_3 \exp\Big(2\alpha(|u|+|w|)^{\frac{N}{N-s}}\Big) + C_4 \exp\Big(2\alpha u^{\frac{N}{N-s}}\Big)\Big],$$

quase sempre em Ω. Denotemos

$$l := 2\Big[C_3 \exp\Big(2\alpha(|u|+|w_n|)^{\frac{N}{N-s}}\Big)) + C_4 \exp\Big(2\alpha u^{\frac{N}{N-s}}\Big)\Big].$$

Pela Proposição Proposição A.11 (ver Apêndice A), $l \in L^1(\Omega)$. Assim, provamos a existência de uma função $l \in L^1(\Omega)$, satisfazendo

$$|f(u(x)) + tv_n(x) - f((u(x)))|^2 \leq l(x), \text{ quase sempre em } \Omega. \tag{A.38}$$

Novamente, como $X_p^s \hookrightarrow L^2(\Omega)$ continuamente e o fato de $\|v_n\|_{X_p^s} \to 0$, nos fornece que para alguma constante $C > 0$ tal que

$$\|u + tv_n - u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|v_n\|_{X_p^s} \to 0,$$

ou seja, $u + tv_n \to u$ em $L^2(0,1)$. Então, a menos de subsequência,

$$u(x) + tv_n(x) \to u(x) \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Daí, usando a continuidade de f (condição $(f_{1,p})$), segue-se que

$$f(u(x) + tv_n(x)) \to f(u(x)), \quad \text{quase sempre em } \Omega,$$

resultando que,

$$|f(u(x)+tv_n(x))-f(u(x))|^2 \to 0, \quad \text{quase sempre em } \Omega. \tag{A.39}$$

Desde que valem (A.38) e (A.39), pelo Teorema da Conergência Dominada de Lebesgue Teorema A.36 (ver Apêndice A), concluímos que

$$\|f(u+tv_n)-f(u)\|_{L^2(\Omega)} \to 0. \tag{A.40}$$

Agora, por (A.37)

$$\frac{r(v_n)}{\|v_n\|_{X_p^s}} \leq C\int_0^1 \|f(u+tv_n)-f(u)\|_{L^2(\Omega)}dt,$$

daí, tomando o limite quando $\|v_n\|_{X_p^s} \to 0$, obtemos

$$\lim_{\|v_n\|_{X_p^s}\to 0} \frac{r(v_n)}{\|v_n\|_{X_p^s}} = 0.$$

Resta mostrar que $I_3'(u) : X_p^s \to \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo. A linearidade de I_3' resulta por propriedades de integrais. Vejamos sua limitação. Pela desigualdade de Hölder, temos

$$|\langle I_3'(u),h\rangle| = \left|\int_\Omega f(u)hdx\right| \leq \|f(u)\|_{L^2(\Omega)}\|h\|_{X_s^p}.$$

A Proposição A.11 (ver Apêndice A) garante que $\exp\left(2\alpha|u|^{\frac{N}{N-s}}\right) \in L^1(\Omega)$, então obtemos uma constante $C>0$, que depende de u, tal que

$$|\langle I_3',h\rangle| \leq C\|h\|_{X_p^s}, \quad \text{para todo } v \in X_p^s;$$

ou seja, $I_3'(u)$ é limitado. Portanto, I_3' é Frechét diferenciável e sua derivada é dada por $\langle I_3'(u),h\rangle = \displaystyle\int_\Omega f(u)hdx$.

Agora mostraremos que I_3 é contínua. Seja $(u_n) \subset X_p^s$ tal que $u_n \to u$ em X_p^s. Logo,

$$\begin{aligned}
\|I_3'(u_n) - I_3'(u)\|_{(X_p^s)^*} &= \sup_{h \in X_p^s,\, \|h\|_{X_p^s}=1} |\langle I_3'(u_n) - I_3'(u), h\rangle| \\
&= \sup_{h \in X_p^s,\, \|h\|_{X_p^s}=1} \left| \int_\Omega (f(u_n) - f(u))hdx \right| \\
&= \sup_{h \in X_p^s,\, \|h\|_{X_p^s}=1} \int_\Omega |f(u_n) - f(u)||h|dx,
\end{aligned}$$

Usando a adesigualdade de Hölder e a imersão contínua $X_p^s \hookrightarrow L^2(\Omega)$, para alguma constante $C > 0$, temos

$$\|I_3'(u_n) - I_3'(u)\|_{(X_p^s)^*} \leq \sup_{h \in X_p^s,\, \|h\|_{X_p^s}=1} \|f(u_n) - f(u)\|_{L^2(\Omega)} \|h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Como $u_n \to u$ em X_p^s, por um argumento analogo ao que usamos para provar (A.40), concluímos que

$$\|f(u_n) - f(u)\|_{L^2(\Omega)} \to 0,$$

o que mostra a continuidade de I_3'. Finalmente, unindo todas estas afirmações obtemos $I_{\lambda,p} \in C^1(X_p^s, \mathbb{R})$ e

$$\langle I_{\lambda,p}'(u), h\rangle = \langle A(u), h\rangle + \lambda \int_\Omega |u|^{q-2}uhdx - a\int_\Omega uhdx - \int_\Omega f(u)hdx, \ \forall u, h \in X_p^s.$$

■

Como caso particular do Lema A.56 temos o próximo resultado, que mostra que os pontos críticos do funcional I_λ correspondem as soluções fracas do problema (B.1).

Lema A.57 (Casos subcrítico e crítico) *Se f satisfaz (f_1) e (f_2) (ou (f_2')), então o funcional I_λ esta bem definida e é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ e sua derivada é* *dada por:*

$$\langle I'_\lambda(u), h\rangle = \langle u, h\rangle_X + \lambda \int_0^1 |u|^{q-2}uhdx - a\int_0^1 uhdx - \int_0^1 f(u)hdx,\ \forall\, u, h \in X.$$

A.7 Um princípio do mínimo

O espaço dual de $(X_p^s, \|.\|_{X_p^s})$ é denotado por $((X_p^s)^*, \|.\|_{(X_p^s)^*})$. Reformulamos variacionalmente o p-laplaciano fracionario como o operador não linear $A : X_p^s \to (X_p^s)^*$ definido, para todo $u, v \in X_p^s$, por

$$\langle A(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp}} dxdy. \tag{A.41}$$

O operador satisfaz, para todo $u, v \in X_p^s$,

$$\langle A(u), u\rangle = \|u\|_{X_p^s}^p \ \text{ e } |\langle A(u), v\rangle| \leq \|u\|_{X_p^s}^{p-1} \|v\|_{X_p^s}.$$

Lema A.58 *Se $u_n \rightharpoonup u$ em X_p^s e $\langle A(u_n), u_n - u\rangle \to 0$, então $u_n \to u$ em X_p^s.*

Demonstração: ver [77, Proposição 1.3.] ∎

Para a seguinte definição ver [39, p.5]. Dizemos que $u \in X_p^s$ é uma supersolução fraca para

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u &= 0 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{A.42}$$

Se $\langle A(u), v\rangle \geq 0$ para todo $v \in X_p^s$ e $v \geq 0$. Agora enunciaremos o princípio do mínimo para supersoluções fracas, cuja demonstração pode ser encontrada em [39, Teorema 2.10].

Teorema A.59 (Princípio do mínimo para supersoluções fracas) *Se u é uma supersolução fraca não negativa de (A.42) e $u \not\equiv 0$ em Ω, então $u > 0$ q.t.p em Ω.*

A.8 O primeiro autovalor

Os seguintes resultados podem ser encontrados em [39]. Seja o problema de autovalor não local e não linear

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u &= \lambda |u|^{p-2}u \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{A.43}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um dominio limitado suave, $0 < s < 1 < p < \infty$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Dizemos que uma função $u \in X_p^s$ é uma solução fraca de (A.43) se

$$\langle A(u), v \rangle = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2}uvdx, \quad \text{para todo } v \in X_p^s.$$

Neste contexto, dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor se existe uma solução fraca não trivial $u \in X_p^s$ de (A.43). A função u é a correspondente autofunção. Note que como consequência do Teorema A.59 (Princípio do mínimo para supersoluções fracas) temos

Lema A.60 *Se u é uma autofunção não negativa associada a λ, temos $u > 0$ q.t.p em Ω.*

Nosso objetivo será mostrar que o primeiro autovalor do problema (A.43)

$$\lambda_1 = \inf\{\|u\|_{X_p^s}^p : \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1\}$$

é simples e isolado.

Note que pela imersão $X_p^s \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para $p \geq 1$, λ_1 está bem definido. Além disso, a Proposição 1.9 (ver Apêndice A) garante que λ_1 é atingido.

Observação A.61 *Qualquer autofunção u construído na proposição 1.9 (ver Apêndice A) pode ser escolhida positiva.*

De fato, seja $u \in X_p^s$ tal que $\lambda_1 = \|u\|_{X_p^s}^p$ e $\|u\|_p = 1$. Como $||u(x)| - |u(y)|| \leq |u(x) - u(y)|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, então

$$\lambda_1 \leq \||u|\|_{X_p^s}^p \leq \|u\|_{X_p^s}^p = \lambda_1. \tag{A.44}$$

Agora pelo Teorema do multiplicador de Lagrange temos,

$$\langle A(|u|), \phi \rangle = \mu \int_\Omega ||u||^{p-2}|u|\phi dx, \quad \text{para todo } \phi \in X_p^s.$$

Tomando $\phi = |u|$ segue-se $\lambda_1 = \mu$ e consequentemente

$$\langle A(|u|), \phi \rangle = \lambda_1 \int_\Omega ||u||^{p-2}|u|\phi dx, \quad \text{para todo } \phi \in X_p^s,$$

isto é $|u|$ é autofunção associada a λ_1. Usando o Lema A.60 obtemos

$$|u| > 0 \ \text{ q.t.p } \quad \text{em } \ \Omega.$$

Deste fato e por (A.44) podemos concluir nossa observação.
Para provar que o primeiro autovalor λ_1 é simples precisamos da seguinte identidade do tipo Picone ver [8, Lema 6.2].

Lema A.62 *Seja $p \in (0, 1)$. Para $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $u \geq 0$ e $v > 0$, temos*

$$L(u, v) \geq 0 \quad em \ \ \Omega \times \Omega,$$

onde

$$L(u,v)(x,y) = |u(x)-u(y)|^p - |v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))\left(\frac{u^p(x)}{v^{p-1}(x)} - \frac{u^p(y)}{v^{p-1}(y)}\right).$$

A igualdade é verificada se e somente se $u = kv$ em Ω para alguma constante k.

Também precisamos que as autofunções sejam limitadas. Mas especificamente [8, Lema 6.2], isto é,

Lema A.63 *Se u é uma autofunção associada a λ, então $u \in L^\infty(\Omega)$.*

Teorema A.64 *Suponha que u é uma autofunção positiva correspondente a λ_1 (ver observação A.61). Então se $\lambda > 0$ é tal que existe uma autofunção não negativa v do problema (A.43) com autovalor λ, então $\lambda = \lambda_1$ e existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $v = ku$ q.t.p em Ω.*

Demonstração: Começamos lembrando da seguinte desigualdade ([49, p. 391])

$$||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y| \leq \begin{cases} C_P|x-y|(|x|+|y|)^{p-2}, & \text{se} \quad p \geq 2 \\ C_p|x-y|^{p-1}, & \text{se} \quad 1 \leq p \leq 2, \end{cases}, \tag{A.45}$$

que se verifica para $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Da definição de λ_1, segue-se $\lambda_1 \leq \lambda$. Por outro lado, pelo Lema A.60, $v > 0$ q.t.p em Ω. Seja $m \in \mathbb{N}$ e $v_m = v + \dfrac{1}{m}$. Primeiro provaremos que $w_m = \dfrac{u^p}{v_m^{p-1}} \in X_p^s$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Observe que $w_m = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e $w_m \in L^p(\Omega)$ pois $w_m \in L^\infty(\Omega)$, ver Lema A.63. Agora, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, temos

$$
\begin{aligned}
|w_m(x) - w_m(y)| &= \left| \frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} - \frac{u^p(y)}{v_m^{p-1}(y)} \right| \\
&= \left| \frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} - \frac{u^p(y)}{v_m^{p-1}(x)} + \frac{u^p(y)}{v_m^{p-1}(x)} + \frac{u^p(y)}{v_m^{p-1}(y)} \right| \\
&\le \frac{1}{|v_m(x)|^{p-1}} |u^p(x) - u^p(y)| + \frac{|u(y)|^p |v_m^{p-1}(y) - v_m^{p-1}(x)|}{v_m^{p-1}(x) v_m^{p-1}(y)} \\
&\le m^{p-1} |u^p(x) - u^p(y)| + \|u\|_\infty^p \frac{|v_m^{p-1}(y) - v_m^{p-1}(x)|}{v_m^{p-1}(x) v_m^{p-1}(y)}.
\end{aligned}
$$

Então

$$
|w_m(x) - w_m(y)| \le m^{p-1} |u^p(x) - u^p(y)| + \|u\|_\infty^p \frac{|v_m^{p-1}(y) - v_m^{p-1}(x)|}{v_m^{p-1}(x) v_m^{p-1}(y)}.
$$

Logo usando a desigualdade (A.45) segue-se

$$
\begin{aligned}
|w_m(x) - w_m(y)| &\le m^{p-1} |u^p(x) - u^p(y)| + \|u\|_\infty^p \frac{|v_m^{p-1}(y) - v_m^{p-1}(x)|}{v_m^{p-1}(x) v_m^{p-1}(y)} \\
&\le m^{p-1} C_p (u(x) - u(y))^{p-1} |u(x) - u(y)| \\
&\quad + \|u\|_\infty^p C_p' \frac{(v_m(y) - v_m(x))^{p-2} |v_m(y) - v_m(x)|}{v_m^{p-1}(x) v_m^{p-1}(y)} \\
&\le 2^{p-1} m^{p-1} C_p (u^{p-1}(x) - u^{p-1}(y)) |u(x) - u(y)| \\
&\quad + \|u\|_\infty^p C_p' 2^{p-2} \frac{(v_m^{p-2}(y) + v_m^{p-2}(x)) |v_m(y) - v_m(x)|}{v_m^{p-1}(x) v_m^{p-1}(y)} \\
&\le 2^p m^{p-1} C_p \|u\|_\infty^{p-1} |u(x) - u(y)| \\
&\quad + \|u\|_\infty^p C_p' 2^{p-2} \left(\frac{1}{v_m^{p-1}(x) v_m(y)} + \frac{1}{v_m(x) v_m^{p-1}(y)} \right) |v(y) - v(x)|.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
|w_m(x) - w_m(y)| &\leq 2^p m^{p-1} C_p \|u\|_\infty^{p-1} |u(x) - u(y)| \\
&\quad + \|u\|_\infty^p C_p' 2^{p-2} \left(\frac{1}{v_m^{p-1}(x) v_m(y)} + \frac{1}{v_m(x) v_m^{p-1}(y)} \right) |v(y) - v(x)| \\
&\leq C(m, p, \|u\|_\infty)(|u(x) - u(y)| + |v(y) - v(x)|).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|w_m(x) - w_m(y)|^p &\leq C^p(m, p, \|u\|_\infty)(|u(x) - u(y)| + |v(y) - v(x)|)^p \\
&\leq 2^p C^p(m, p, \|u\|_\infty)|u(x) - u(y)|^p + |v(y) - v(x)|^p,
\end{aligned}
$$

segue-se

$$
\int_\Omega \frac{|w_m(x) - w_m(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \leq 2^p C^p(m, p, \|u\|_\infty) \left(\int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} + \int_\Omega \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \right).
$$

Como $u, v \in X_p^s$ obtemos para cada $m \in \mathbb{N}$

$$
w_m \in X_p^s, \tag{A.46}
$$

isso mostra nossa afirmação.

Agora lembramos que $u, v \in X_p^s$, são autofunções do problema (A.43) com autovalores λ_1 e λ respectivamente. Então usando o Lema A.62, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \int_{\Omega\times\Omega} \frac{L(u,v_m)(x,y)}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
\leq & \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
& - \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_m(x)-v_m(y)|^{p-2}(v_m(x)-v_m(y))}{|x-y|^{N+sp}} \left(\frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} - \frac{u^p(y)}{v_m^{p-1}(y)} \right) dxdy \\
= & \int_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
& - \int_{\Omega} \frac{|v(x)-v(y)|^{p-2}(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+sp}} \left(\frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} - \frac{u^p(y)}{v_m^{p-1}(y)} \right) dxdy \\
= & \lambda_1 \int_{\Omega} |u(x)|^p dx - \lambda \int_{\Omega} v^{p-1}(x) \frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} dx \\
\leq & \lambda \int_{\Omega} |u(x)|^p dx - \lambda \int_{\Omega} v^{p-1}(x) \frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} dx,
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade usamos o fato $\lambda_1 \leq \lambda$. Portanto,

$$
0 \leq \int_{\Omega\times\Omega} \frac{L(u,v_m)(x,y)}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \leq \lambda \int_{\Omega} |u(x)|^p dx - \lambda \int_{\Omega} v^{p-1}(x) \frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} dx. \tag{A.47}
$$

Como

$$
|v^{p-1} w_m| = \left| \frac{v^{p-1}}{v_m^{p-1}} u^p \right| = \left| \frac{v}{v_m} \right|^{p-1} |u|^p \leq |u|^p, \text{ q.t.p em } \Omega.
$$

Agora, note que $u \in L^p(\Omega)$. Também podemos concluir de $v_m(x) \to v(x)$ q.t.p em Ω que $v^{p-1}(x)\dfrac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} \to v^{p-1}(x)\dfrac{u^p(x)}{v^{p-1}(x)} = u^p(x)$ q.t.p em Ω. Logo, o Teorema da convergência dominada de Lebesgue Teorema A.36 (ver Apêndice A)

$$
\int_{\Omega} v^{p-1}(x) \frac{u^p(x)}{v_m^{p-1}(x)} dx \to \int_{\Omega} u^p. \tag{A.48}
$$

Logo de (A.47) e (A.48)

$$
\lim_{m\to\infty} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{L(u,v_m)(x,y)}{|x-y|^{N+sp}} dxdy = 0.
$$

Segue-se pelo Lema de Fatou's

$$0 \leq \int_{\Omega\times\Omega} \frac{L(u,v)(x,y)}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \leq \liminf_{m\to\infty} \int_{\Omega\times\Omega} \frac{L(u,v_m)(x,y)}{|x-y|^{N+sp}}dxdy = 0.$$

Disso,

$$\int_{\Omega\times\Omega} \frac{L(u,v)(x,y)}{|x-y|^{N+sp}}dxdy = 0,$$

assim obtemos que

$$L(u,v)(x,y) = 0 \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Portanto pelo Lema A.62 concluimos $u = kv$ para alguma constante $k > 0$. ■

Observação A.65 *Como consequência do Teorema anterior, λ_1 é simples e existe uma única autofunção positiva $u \in X_p^s$ associada a λ_1 tal que $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$.*

Agora provaremos que λ_1 é isolado. Para isso primeiro provaremos que a medida de conjuntos nodais é limitada inferiormente.

Lema A.66 *Se u é uma autofunção associada a $\lambda > \lambda_1$, então*

$$\left(\frac{1}{C(|\lambda|+1)}\right)^{r/r-p} \leq |\Omega_{\pm}|,$$

onde $r \in (p, p_s^*)$, $C > 0$ é uma constante independente de λ, u e $|\Omega_{\pm}|$ é a medida de Lebesgue de $\Omega_{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ u(x) \neq 0\}$.

Demonstração: Pelo Teorema A.64 temos v^+ e v^- são funções não triviais. Nós provaremos então a desigualdade para $|\Omega_+|$, a prova da outra desigualdade é semelhante. Usando o Lema A.23 (ver Apêndice A) segue-se

$$|u^+(x) - u^+(y)|^p \leq |u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(u^+(x) - u^+(y)),$$

de onde se conclui que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u^+(x) - u^+(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(u^+(x) - u^+(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy,$$

isto é,

$$\|u^+\|_{X_p^s}^p \leq \langle A(u), u^+\rangle.$$

Logo, usando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
\|u^+\|_{X_p^s}^p &\leq \langle A(u), u^+\rangle \\
&= \lambda \int_\Omega (u^+)^p dx \\
&\leq |\lambda| \int_{\Omega_+} |u^+|^p dx \\
&\leq (|\lambda|+1)|\Omega_+|^{(r-p)/r}\|u^+\|_{L^r(\Omega)}^p. \qquad \text{(A.49)}
\end{aligned}$$

Então pela imersão contínua $X_p^s \hookrightarrow L^r(\Omega)$ e (A.49), segue a demonstração ■

Teorema A.67 *O primeiro autovalor λ_1 é isolado*

Demonstração: Pela definição λ_1 é isolado à esquerda. Para provar que λ_1 é isolado pela dereita, argumentamos por contradição. Suponha que existe uma sequência de autovalores (λ_k) tal que $\lambda_k \to \lambda_1$ quando $k \to \infty$. Seja u_k autofunção associada a λ_k com $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Então como

$$\langle A(u_k), \phi\rangle = \lambda_k \int_\Omega |u_k|^{p-2} u_k \phi dx, \quad \text{para todo } \phi \in X_p^s$$

Tomando $\phi = u_k$ obtemos

$$\|u_k\|_{X_p^s}^p = \lambda_k.$$

Agora de $\lambda_k \to \lambda_1$ segue-se que a sequência (u_k) é limitada em X_p^s. Logo, podemos extraer uma subsequência que ainda denotaremos por (u_k) tal que

$$\begin{cases}
u_k \rightharpoonup u \ \text{ em } \ X_p^s, \\
u_k \to u \text{ em } \ L^p(\Omega), \quad \text{para todo } p \geq 1 \text{ e} \\
u_k(x) \to u(x) \text{ quase sempre em } \Omega.
\end{cases}$$

Observe

$$\|u\|_{X_p^s}^p \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|^p = \liminf_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_1.$$

Como $\lambda_1 \leq \|u\|_{X_p^s}^p$, temos $\|u\|_{X_p^s}^p = \lambda_1$. Seguindo o mesmo raciocínio feito na observação A.61, temos

$$u > 0 \;\; \text{q.t.p em } \Omega. \tag{A.50}$$

Por outro lado do Lema A.66, obtemos

$$\left(\frac{1}{C(|\lambda_k|+1)}\right)^{r/r-p} \leq |\{x \in \mathbb{R}^N \;\; u_k(x) < 0\}|.$$

Usando o Teorema de Egorov's, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um subconjunto $U_\epsilon \subset \Omega$ tal que $|U_\epsilon| < \epsilon$ e $u_k \to u$ uniformemente em $\Omega \setminus U_\epsilon$. Obtemos,

$$\left(\frac{1}{C(|\lambda_1|+1|)}\right)^{r/(r-p)} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{C(|\lambda_k|+1|)}\right)^{r/(r-p)} \leq 0,$$

isto é uma contradição. ∎

Apêndice B

Problema não linear envolvendo 1/2-laplaciano fracionário com crescimento exponencial sem a condição de Ambrosetti-Rabinowitz

Neste capítulo, estamos interessados em provar a existência e multiplicidade de soluções para o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u = -\lambda|u|^{q-2}u + au + f(u) & \text{em } (0,1), \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}\setminus(0,1), \end{cases} \tag{B.1}$$

onde $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $1 < q < 2$ e com não linearidade f com crescimento exponencial subcrítico e crítico no sentido Trudinger-Moser. O espaço de funções onde esperamos encontrar soluções para o problema (B.1) é o espaço de Sobolev fracionário

$$H^{1/2}(\mathbb{R}) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^2}dxdy < \infty \right\}.$$

Como estas soluções devem ser nulas fora de intervalo $(0,1)$, é natural que consideremos como espaço ambiente o subconjunto $X \subset H^{1/2}(\mathbb{R})$ dado por

$$X = \{u \in H^{1/2}(\mathbb{R}) : u = 0 \text{ em } \mathbb{R} \setminus (0,1)\}.$$

Nossa proposta de trabalho consiste na utilização das seguintes hipóteses, sobre a não linearidade f, com crescimento exponencial subcrítico:

$(f_{1,2})$ $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ e $F(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, sendo $F(t) := \displaystyle\int_0^t f(s)ds$;

$(f_{2,2})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(t)|}{\exp(\alpha t^2)} = 0$, para todo $\alpha > 0$;

$(f_{3,2})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to 0} \frac{|f(t)|}{|t|} = 0$;

$(f_{4,2})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{F(t)}{t^2} = +\infty$.

E, no caso crítico no sentido Trudinger-Moser, nós substituímos a condição $(f_{2,2})$ pela seguinte condição

$(f'_{2,2})$ existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(t)|}{\exp(\alpha t^2)} = \begin{cases} \infty, & \text{se } \ 0 < \alpha < \alpha_0 \\ 0, & \text{se } \ \alpha > \alpha_0. \end{cases}$$

Além disso, mantemos as condições $(f_{1,2})$, $(f_{3,2})$ e incluímos as seguintes condições

$(f_{5,2})$

$$\frac{f(t)}{t} \text{ é crescente em } (0,+\infty), \quad \text{e decrescente em } \ (-\infty, 0);$$

$(f_{6,2})$ para cada $(u_n) \subset X$, se

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{em } \ X, \\ f(u_n) \to f(u), & \text{em } \ L^1(0,1), \end{cases}$$

então $F(u_n) \to F(u)$ em $L^1(0,1)$.

$(f_{7,2})$ existem $r > 2$ e $C_r > 0$ tais que

$$F(t) \geq \frac{C_r}{r}|t|^r, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

com $C_r > \dfrac{1}{C}\left[4\left(\dfrac{\alpha_0}{\pi}\right)\dfrac{(r-2)}{2r}\right]^{\frac{r-2}{2}}$, onde a constante $C > 0$ é obtida em (B.55).

Observação B.1

(1) *A condição* $(f_{7,2})$ *implica a condição* $(f_{4,2})$.

(2) *A condição* $(f_{6,2})$ *foi usada em [69], [70] e [82] para* $u = 0$.

(3) *Um protótipo de não linearidade que satisfaz as hipóteses* $(f_{1,2})-(f_{4,2})$ *é uma função do tipo* $f(t) = t\log(|t|+1)$ *e como mencionado na introdução* f *não satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz (AR). Note que* $u \equiv 0$ *é uma solução trivial do problema (B.1).*

(4) *Um exemplo de não linearidade que satisfaz as hipóteses* $(f_{1,2})$, $(f'_{2,2})$, $(f_{3,2})$ *e* $(f_{5,2})-(f_{7,2})$ *é uma função do tipo*

$$f(t) = \begin{cases} \sigma t^{r-1} + C_r t^{r-1}, & \textit{se } 0 \leq t \leq 1, \\ t\exp(t^2-1) + C_r t^{r-1} + \sigma 1 - 1, & \textit{se } t > 1. \end{cases}$$

com $\sigma \in (0,1)$ *e* $f(t) = -f(-t)$, *se* $t < 0$.

Vejamos agora os principais resultados deste capítulo, os quais para uma fácil referência dividiremos em dois casos:

Teorema B.2 (caso subcrítico) *Suponha que* $\lambda_k \leq a < \lambda_{k+1}$ *para algum* $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$ *e que* f *possua crescimento exponencial subcrítico e satisfaça as condições* $(f_{1,2})$, $(f_{3,2})$ *e* $(f_{4,2})$. *Então para* λ *suficientemente pequeno, o problema (B.1) possui* *pelo menos três soluções não triviais. Além disso, adicionanando a hipótese de f ser ímpar obtemos que o problema (B.1) possui infinitas soluções.*

Teorema B.3 (caso crítico) *Suponha que $\lambda_k \leq a < \lambda_{k+1}$ para algum $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$ e que f tenha crescimento exponencial crítico e satisfaça as condições $(f_{1,2}), (f_{3,2})$ e $(f_{5,2}) - (f_{7,2})$, então para λ suficientemente pequeno, o problema (B.1) possui pelo menos três soluções não triviais.*

B.1 Soluções para o problema subcrítico

Nesta seção tratamos, via métodos minimax, da existência e da multiplicidade de solução para o problema (B.1) no caso em que f possui crescimento subcrítico. Para isso, utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha e o Teorema de Linking. Posteriormente, adicionando a hipótese de f ser ímpar e aplicando uma versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha (ver Teorema A.50 no Apêndice A), foi possível obter a multiplicidade de solução para o problema. Tornando mais precisa a nossa proposta de trabalho, estudamos a existência e multiplicidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u = -\lambda|u|^{q-2}u + au + f(u) & \text{em } (0,1), \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R} \setminus (0,1), \end{cases} \tag{B.2}$$

onde $\lambda > 0$, $1 < q < 2$ e $a \in \mathbb{R}^+$ com não linearidade f com crescimento exponencial subcrítico no sentido Trudinger-Moser. Nossa proposta de trabalho consiste na utilização das seguintes hipóteses sobre a não linearidade f:

$(f_{1,2})$ $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$ e $F(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, sendo $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$;

$(f_{2,2})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(t)|}{\exp(\alpha t^2)} = 0$, para todo $\alpha > 0$;

$(f_{3,2})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to 0} \frac{|f(t)|}{|t|} = 0$;

$(f_{4,2})$ $\lim\limits_{|t|\to\infty} \dfrac{F(t)}{t^2} = +\infty.$

Lembramos que as soluções fracas do problema (B.2) correspondem aos pontos críticos do funcional $I_\lambda : X \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |u|^2 dx - \int_0^1 F(u)dx.$$

Aqui, temos como principal finalidade provar o seguinte resultado:

Teorema B.4 *Se f satisfaz as condições $(f_{1,2})$, $(f_{2,2})$, $(f_{3,2})$ $(f_{4,2})$, e $\lambda_k \leq a < \lambda_{k+1}$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então para λ suficientemente pequeno, o problema (B.2) possui pelo menos três soluções não triviais. Além disso, adicionando a hipótese de f ser ímpar obtemos que o problema (B.2) possui infinitas soluções.*

A prova desse Teorema será dividida em 4 subseções:

Na primeira subseção, usaremos o Teorema do Passo da Montanha para obter pelo menos uma solução positiva. De forma análoga, na segunda subseção, obtemos pelo menos uma solução negativa. Na terceira subseção obtemos uma terceira solução via Teorema de Linking. Finalmente na quarta seção demonstramos o resultado principal, isto é, o Teorema B.4.

B.1.1 Solução positiva para o funcional I_λ

Nesta subseção, definiremos a parte positiva do funcional I_λ para encontrarmos soluções positivas para o problema com não linearidade f com crescimento exponencial subcrítico.

Considere o funcional:

$$I_\lambda^+ : X \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda^+(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u^+|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |u^+|^2 dx - \int_0^1 F(u^+)dx.$$

Pelo mesmo argumento utilizado anteriormente no Lema A.57 o funcional I_λ^+ é de classe $C^1(X,\mathbb{R})$ e para todo $u,h\in X$, verifica

$$\langle (I_\lambda^+)'(u),h\rangle = \langle u,h\rangle_X + \lambda\int_0^1 |u^+|^{q-1}hdx - a\int_0^1 u^+hdx - \int_0^1 f(u^+)hdx. \quad \text{(B.3)}$$

Note que, encontrar um ponto crítico para o funcional I_λ^+ equivale a encontrar uma função $u\in X$ que satisfaz a equação:

$$\langle u,h\rangle_X + \lambda\int_0^1 |u^+|^{q-1}hdx - a\int_0^1 u^+hdx - \int_0^1 f(u^+)hdx = 0,\ \forall\, h\in X,$$

ou seja, obtem-se uma solução fraca para a equação :

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u = -\lambda|u^+|^{q-1} + au^+ + f(u^+) \quad \text{em } (0,1), \\ u=0 \qquad \text{em } \mathbb{R}\setminus(0,1), \end{cases} \quad \text{(B.4)}$$

onde $a\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}^+$, $1<q<2$ e $u^+=\max\{u,0\}$.
Se u é um ponto crítico de I_λ^+, então $\langle (I_\lambda^+)'(u),h\rangle = 0$, $\forall\, h\in X$, em particular para $h=u^-$, assim

$$0 = \langle (I_\lambda^+)'(u),u^-\rangle = \langle u,u^-\rangle_X = \langle u^+,u^-\rangle_X + \langle u^-,u^-\rangle_X \geq \langle u^-,u^-\rangle_X = \|u^-\|^2$$

e consequentemente, $u^-=0$. Portanto, o ponto crítico u de I_λ^+ satisfaz $u=u^+\geq 0$, ou seja, é uma função não negativa de X.

B.1.1.1 Limitação da sequência (PS) associado ao funcional I_λ^+

Mostraremos que toda sequência (PS) do funcional associada ao problema (B.4) é limitada, ou seja, temos o seguinte resultado.

Lema B.5 (Casos subcrítico e crítico) *Suponha que f satisfaça $(f_{1,2})$, $(f_{2,2})$ (ou $(f'_{2,2})$) e $(f_{4,2})$. Então cada sequência (PS) de I_λ^+ é limitada.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset X$ uma sequência de Palais Smale associada a I_λ^+. Então,

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_X^2 + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u_n^+|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |u_n^+|^2 dx - \int_0^1 F(u_n^+)dx \to c \tag{B.5}$$

e para todo $\varphi \in X$, temos

$$\langle u_n, \varphi\rangle_X + \lambda\int_0^1 |u_n^+|^{q-2}u_n^+\varphi dx - a\int_0^1 u_n^+\varphi dx - \int_0^1 f(u_n^+)\varphi dx = o(1). \tag{B.6}$$

Mostraremos por contradição, que (u_n) é limitada em X. Para isso suponha que $\|u_n\|_X \to \infty$ quando $n \to \infty$. Passando a uma subsequência se necessário, para excluir os possíveis termos onde $\|u_n\|_X = 0$, vamos definir a sequência $v_n \subset X$ por

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_X}.$$

Como v_n é limitada em X segue que, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v$ em X e $v_n \to v$ em $L^r(0,1)$, para todo $r \geq 1$ e $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p em $(0,1)$. Tomando $\varphi = u_n^- = \min\{0, u_n\}$ em (B.6),

$$0 \leq \|u_n^-\|_X^2 \leq \langle u_n^+, u_n^-\rangle_X + \|u_n^-\|_X^2 = o(1)\|u_n^-\|_X.$$

Logo, $0 \leq \|u_n^-\|_X \leq o(1)$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n^-\|_X = 0$. Então

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n^-\|_X = 0 \quad \text{onde} \quad v_n^- = \frac{u_n^-}{\|u_n\|_X}.$$

Consequentemente

$$v_n^- \rightharpoonup 0 \ \text{ em } X.$$

Daí,

$$v_n^- \to 0 \ \text{ em } L^r(0,1).$$

Portanto

$$v^- = 0 \text{ em } X.$$

Como $v = v^+ + v^-$, então

$$v = v^+ \text{ em } X. \tag{B.7}$$

Se v não é a função nula.

De (B.7) o conjunto $\Theta = \{x \in (0,1) \quad : \quad v^+(x) \neq 0\}$ tem medida de Lebesgue positiva e seguindo as mesmas ideias da Proposição 1.15 obtemos uma contradição.

Se v é a função nula.

Seguindo as mesmas ideias da Proposição 1.15 obtemos contradição. Portanto (u_n) é limitada em X. ■

B.1.1.2 Compacidade do funcional I_λ^+

Agora mostraremos que o funcional I_λ^+ associado ao problema (B.4) satisfaz a condição Palais-Smale (ou condição (PS)) em todos os níveis para todo $\lambda > 0$.

Lema B.6 *Suponha que f satisfaça $(f_{1,2})$, $(f_{2,2})$ e $(f_{4,2})$ então o funcional I_λ^+ satisfaz a condição Palais-Smale (ou condição (PS)) em todos os níveis para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset X$ uma sequência (PS) de I_λ, isto é, uma sequencia $(u_n) \subset X$ que satisfaz $I_\lambda^+(u_n) \to c$ e $(I_\lambda^+)'(u_n) \to 0$ no dual de X quando $n \to \infty$. Pelo Lema B.5, a sequência (u_n) é limitada em X, logo, existe $M > 0$ tal que $\|u_n\|_X \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto existe $u_0 \in X$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad X.$$

Pela imersão de Sobolev,

$$u_n \to u_0 \quad \text{em} \quad L^r(0,1) \quad \text{com } r \geq 1 \quad \text{e} \quad u_n(x) \to u_0(x) \quad \text{q.t.p em} \quad (0,1). \tag{B.8}$$

Pela desiguadade de Hölder,

$$\left|\int_0^1 |u_n^+|^{q-2}u_n^+(u_n-u_0)\right| \leq \left(\int_0^1 |u_n^+|^q dx\right)^{(q-1)/q} \left(\int_0^1 |u_n-u_0|^q dx\right)^{1/q}.$$

Portanto, de (B.8)

$$\int_0^1 |u_n^+|^{q-2}u_n^+(u_n-u_0) \to 0. \tag{B.9}$$

Note que, se

$$u_n - u_0 \rightharpoonup 0, \quad \text{então} \quad \langle (I_\lambda^+)'(u_n), u_n-u_0\rangle \to 0. \tag{B.10}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|u_n-u_0\|_X^2 =& \langle u_n-u_0, u_n-u_0\rangle_X \\
=& \langle u_n, u_n-u_0\rangle_X - \langle u_0, u_n-u_0\rangle_X
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|u_n-u_0\|_X^2 =& \langle u_n, u_n-u_0\rangle_X + \lambda\int_0^1 |u_n^+|^{q-2}u_n^+(u_n-u_0) - a\int_0^1 u_n^+(u_n-u_0) \\
&- \int_0^1 f(u_n^+)(u_n-u_0) - \lambda\int_0^1 |u_n^+|^{q-2}u_n^+(u_n-u_0) + a\int_0^1 u_n^+(u_n-u_0) \\
&+ \int_0^1 f(u_n^+)(u_n-u_0) - \langle u_0, u_n-u_0\rangle_X \\
=& \langle (I_\lambda^+)'(u_n), u_n-u_0\rangle - \lambda\int_0^1 |u_n^+|^{q-2}u_n^+(u_n-u_0) + a\int_0^1 u_n^+(u_n-u_0) \\
&+ \int_0^1 f(u_n^+)(u_n-u_0) - \langle u_0, u_n-u_0\rangle_X \\
=& \int_0^1 f(u_n^+)(u_n-u_0) + o(1).
\end{aligned}$$

Note que a última igualdade segue-se de (B.8), (B.9) e (B.10). Portanto, do Lema A.16 (ver Apêndice A), temos tomando $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2M^2}$, existe $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\|u_n - u_0\|_X^2 \leq & \int_0^1 |f(u_n^+)||u_n - u_0| + o(1) \\
\leq & \int_0^1 C\exp(\alpha(u_n^+)^2)|u_n - u_0| + o(1) \\
\leq & \int_0^1 C\exp(\alpha(u_n)^2)|u_n - u_0| + o(1) \\
= & C\int_0^1 \exp(\alpha u_n^2)|u_n - u_0| + o(1)
\end{aligned}
$$

Logo pela desigualdade de Hölder,

$$
\begin{aligned}
\|u_n - u_0\|_X^2 \leq & C\left(\int_0^1 \exp(2\alpha u_n^2)\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |u_n - u_0|^2\right)^{1/2} + o(1) \\
= & C\left(\int_0^1 \exp\left(2\alpha u_n^2 \frac{\|u_n\|_X^2}{\|u_n\|_X^2}\right)\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |u_n - u_0|^2\right)^{1/2} + o(1) \\
\leq & C\left(\int_0^1 \exp\left(2\alpha M^2\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_X}\right)^2\right)\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |u_n - u_0|^2\right)^{1/2} + o(1)
\end{aligned}
$$

Note que a última desigualdade segue-se do fato que (u_n) é limitada em X. Por outro lado, pela escolha de α, temos que $0 < 2\alpha M^2 < \pi$, então da Proposição A.10 (ver Apêndice A) obtemos uma constante $K > 0$, verificando

$$
\|u_n - u_0\|_X^2 \leq CK\left(\int_0^1 |u_n - u_0|^2\right)^{1/2} + o(1).
$$

De (B.8) implica que $u_n \to u_0 \quad \text{em} \quad X$ ■

B.1.1.3 Geometria do Teorema do Passo da Montanha do funcional I_λ^+

Agora mostraremos alguns resultados que serão úteis para se obter as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Para isso, para cada $u \in X_p^s$, sejam

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u) &:= I_\lambda(u) - \frac{1}{2}\|u\|_X^2 \\
&= \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |u|^2 dx - \int_0^1 F(u)dx.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_\lambda^+(u) &:= I_\lambda^+(u) - \frac{1}{2}\|u\|_X^2 \\
&= \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u^+|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |u^+|^2 dx - \int_0^1 F(u^+)dx.
\end{aligned}
$$

Lema B.7 (Casos subcrítico e crítico) *Sob as hipóteses* $(f_{3,2})$ *e* $a > 0$, *então a solução trivial* $u = 0$ *é um minimizador local estrito para* J_λ^+, *para todo* $\lambda > 0$.

Demonstração: Pelo Teorema 1.22, basta mostrar que $u = 0$ é um mínimo local estrita de I_λ^+ na topologia $C_\delta^0([0,1])$. Pela condição $(f_{3,2})$: $\lim\limits_{|t|\to 0} \dfrac{|f(t)|}{|t|} = 0$ e usando a regra de L'Hôpital segue-se,

$$
\lim_{|t|\to 0} \frac{F(t)}{t^2} = 0.
$$

Logo para $\epsilon = 1$, existe $\omega > 0$ tal que

$$
|F(t)| < t^2, \quad \text{para todo} \;\; 0 < |t| \leq \omega.
$$

Agora , para cada $u \in (C_\delta^0([0,1]) \cap X) \setminus \{0\}$, com $\|u\|_{0,\delta} \leq 1$ e, consequentemente, $0 < |u^+| < \omega$ (pois $|u^+| \leq M\|u\|_{0,\delta}$, para algum $M > 0$). Portanto

$$
\begin{aligned}
J_\lambda^+(u) &= \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u^+|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |u^+|^2 dx - \int_0^1 F(u^+)dx \\
&= \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u^+|^q dx - \Big(\frac{a}{2} + 1\Big)\int_0^1 |u^+|^2 dx
\end{aligned} \tag{B.11}
$$

Note que a desigualdade é estrita pois $u \neq 0$. Usando $\|u\|_{0,\delta} = \|u/\delta^s\|_\infty$, onde $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ definida por $\delta(x) = dist(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, obtemos

$$0 \leq u^+ \leq |u| \leq k_1\|u\|_{0,\delta} \text{ para algum } k_1 > 0.$$

Como $1 < q < 2$ resulta que $(u^+)^{2-q} \leq (k_1)^{2-q}\|u\|_{0,\delta}^{2-q}$ e, consequentemente,

$$\int_0^1 |u^+|^2 dx \leq (k_1)^{2-q}\|u\|_{0,\delta}^{2-q} \int_0^1 |u^+|^q dx.$$

Desta última desigualdade e do fato que $\frac{a}{2} + 1 > 0$ podemos concluir que

$$-\left(\frac{a}{2}+1\right)\int_0^1 (u^+)^2 dx \geq -\left(\frac{a}{2}+1\right)(k_1)^{2-q}\|u\|_{0,\delta}^{2-q}\int_0^1 |u^+|^q dx. \tag{B.12}$$

De (B.11) e (B.12), segue-se

$$\begin{aligned} J_\lambda^+(u) &\geq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q dx - \left(\frac{a}{2}+1\right)(k_1)^{2-q}\|u\|_{0,\delta}^{2-q}\int_0^1 |u^+|^q dx \\ &= \left(\frac{\lambda}{q} - \left(\frac{a}{2}+1\right)(k_1)^{2-q}\|u\|_{0,\delta}^{2-q}\right)\int_0^1 |u^+|^q dx \end{aligned} \tag{B.13}$$

Agora, seja $R = \dfrac{(\lambda/q)^{1/(2-q)}}{k_1\left(\frac{a}{2}+1\right)^{1/(2-q)}}$. Se $\|u\|_{0,\delta} < R$, então

$$\frac{\lambda}{q} - \left(\frac{a}{2}+1\right)(k_1)^{2-q}\|u\|_{0,\delta}^{2-q} > 0, \ \forall \ \|u\|_{0,\delta} < R. \tag{B.14}$$

Como $\|u\|_{0,\delta} > 0$ (pois $u \in (C_\delta^0([0,1]) \cap X) \setminus \{0\}$), temos finalmente de (B.13) e (B.14) que

$$J_\lambda^+(u) > 0 = J_\lambda^+(0), \ \forall \ 0 < \|u\|_{0,\delta} < R.$$

Portanto, concluímos que $u = 0$ é um mínimo local estrito de J_λ^+ na topologia $C_\delta^0([0,1])$. ■

Observação B.8 *O Lema anterior é válido se trocamos o funcional* J_λ^+ *por* J_λ.

Lema B.9 (Casos subcrítico e crítico) *Suponha que* f *satisfaz* $(f_{4,2})$ *e* $a > 0$, *então fixando* $\Lambda > 0$ *existe* $t_0 = t_0(\Lambda) > 0$ *tal que*

$$I_\lambda^+(t\varphi_1) < 0,$$

para todo $t \geq t_0$ *e* $0 < \lambda < \Lambda$.

Demonstração: Para $t > 0$ e usando o Lema A.19 (ver Apêndice A) para $M > \dfrac{\lambda_1}{2}$ segue que:

$$\begin{aligned} I_\lambda^+(t\varphi_1) &= \frac{\|t\varphi_1\|_X^2}{2} + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |(t\varphi_1)^+|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |(t\varphi_1)^+|^2 dx - \int_0^1 F((t\varphi_1)^+)dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|\varphi_1\|_X^2 + \frac{t^q\lambda}{q}\int_0^1 \varphi_1^q dx - \int_0^1 (Mt^2\varphi_1^2 - C_M)dx \end{aligned}$$

Lembrando que φ_1 é a autofunção positiva associado ao λ_1 e $\|\varphi_1\|_{L^2(0,1)} = 1$, obtemos para $t > 0$

$$\begin{aligned} I_\lambda^+(t\varphi_1) &\leq \frac{\lambda_1 t^2}{2}\int_0^1 \varphi_1^2 dx + \frac{t^q\lambda}{q}\int_0^1 \varphi_1^q dx - Mt^2\int_0^1 \varphi_1^2 dx + C_M \\ &= t^2\left[\frac{\lambda}{q}\frac{1}{t^{2-q}}\int_\Omega \varphi_1^q dx + \frac{C_M}{t^2} - \left(M - \frac{\lambda_1}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{B.15}$$

Agora fixando $\Lambda > 0$, segue dos fatos que $M > \dfrac{\lambda_1}{2}$, $t > 0$, $1 < q < 2$, e $\varphi_1 > 0$ em $(0,1)$ podemos escolher $t_0 = t_0(\Lambda) > 0$ tal que

$$\frac{\Lambda}{q}\frac{1}{t_0^{2-q}}\int_\Omega \varphi_1^q dx + \frac{C_M}{t_0^2} - \left(M - \frac{\lambda_1}{2}\right) < 0.$$

Se $t \geq t_0$ e $\lambda < \Lambda$, nós temos que

$$\frac{\lambda}{q}\frac{1}{t^{2-q}}\int_\Omega \varphi_1^q dx + \frac{C_M}{t^2} - \left(M - \frac{\lambda_1}{2}\right) \leq \frac{\Lambda}{q}\frac{1}{t_0^{2-q}}\int_\Omega \varphi_1^q dx + \frac{C_M}{t_0^2} - \left(M - \frac{\lambda_1}{2}\right) < 0.$$

Logo por (B.15), segue $I_\lambda^+(t\varphi_1) < 0$, para todo $t \geq t_0$, e $\lambda < \Lambda$. ■

B.1.1.4 Solução positiva via o Teorema do Passo da Montanha

Proposição B.10 *Se f satisfaz as condições $(f_{1,2})$, $(f_{2,2})$, $(f_{3,2})$ $(f_{4,2})$ e $a > 0$. Então O problema (B.2) possui pelo menos uma solução positiva, para todo λ obtido no Lema B.9.*

Demonstração: Note que toda solução fraca não negativa para o problema (B.2) satisfaz a equação:

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u = -\lambda|u^+|^{q-1} + au^+ + f(u^+) \quad \text{em } (0,1), \\ u = 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}\setminus(0,1), \end{cases} \tag{B.16}$$

onde $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < 2$ e $u^+ = \max\{u, 0\}$.
Agora, como na subseção B.1.1 , encontrar uma solução fraca para o problema (B.16) é equivalente a encontrar um ponto crítico do funcional

$$I_\lambda^+ : X \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda^+(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u^+|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 (u^+)^2 dx - \int_0^1 F(u^+)dx.$$

Observemos que, pelo Lema B.6 mostramos no caso subcrítico, o funcional I_λ^+ satisfaz a condição Palais Smale (ou condição (PS)) em todos os níveis para todo $\lambda > 0$. Além disso, como $I_\lambda^+(0) = 0$, então basta provar as seguintes condições geométricas:

(a) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I_\lambda^+\Big|_{\partial B_\rho} > \alpha$ e

(b) existe um elemento $e \in X\backslash\overline{B_\rho}$ tal que $I_\lambda^+(e) < 0$.

Prova do item (a): Lembrando que pelo Lema B.7 temos que existe $R > 0$ tal que

$$I_\lambda^+(u) > \frac{1}{2}\|u\|_X^2, \ \forall \ 0 < \|u\|_X < R. \tag{B.17}$$

Tomando $\alpha = \dfrac{1}{2}\|u\|_X^2$. Portanto, existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que

$$I_\lambda^+(u) > \alpha, \ \forall \ \|u\|_X = \rho,$$

provando assim, o item (a).

Prova do item (b): Pelo Lema B.9, temos que existe $e = t_0\varphi_1 \in X$ com $t_0 > 0$ tal que $I_\lambda^+(e) < 0 = I_\lambda^+(0)$, para todo $\lambda > 0$ obtido no Lema B.9. Usando está última desigualdade e por (B.17) segue-se $\|e\| \geq R > \rho$. Portanto, podemos deduzir que $\|e\| > \rho$, isto é, $e \in X \backslash \overline{B_\rho}$.

Assim, existe $e \in X \backslash \overline{B_\rho}$ tal que $I_\lambda^+(e) < 0$. Isto prova o item (b).

Logo, pelo teorema do Passo da Montanha, I_λ^+ possui um valor crítico $C_\lambda^+ \geq \alpha$, com

$$C_\lambda^+ = \inf_{g \in \Gamma^+} \max_{u \in g([0,1])} I_\lambda^+(u),$$

onde $\Gamma^+ = \{g \in C([0,1], X) \ \ ; \ \ g(0) = 0 \ , \ g(1) = t_0\varphi_1\}$. ■

B.1.2 Solução negativa para o funcional I_λ

Nesta subseção, definiremos a parte negativa do funcional I_λ para encontrarmos soluções negativas para o problema com não linearidade f com crescimento exponencial subcrítico.

Considere o funcional:

$$I_\lambda^- : X \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda^-(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u^-|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |u^-|^2 dx - \int_0^1 F(u^-)dx.$$

Pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, o funcional I_λ^- é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ e

$$\langle (I_\lambda^-)'(u), h\rangle = \langle u, h\rangle_X + \lambda\int_0^1 |u^-|^{q-1} h dx - a\int_0^1 u^- h dx - \int_0^1 f(u^-)h dx, \ \forall \ u, h \in X.$$

Note que, encontrar um ponto crítico para o funcional I_λ^- equivale a encontrar uma função $u \in X$ que satisfaz a equação:

$$\langle u, h\rangle_X + \lambda \int_0^1 |u^-|^{q-1}\varphi dx - a\int_0^1 u^-\varphi dx - \int_0^1 f(u^-)\varphi dx = 0, \ \forall \, \varphi \in X,$$

ou seja, a obter uma solução fraca para a equação :

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u = -\lambda|u^-|^{q-1} + au^- + f(u^-) \quad \text{em} \ \ (0,1), \\ u = 0 \qquad \text{em} \ \ \mathbb{R}\setminus(0,1), \end{cases} \tag{B.18}$$

onde $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < 2$ e $u^- = \min\{u, 0\}$.

Se u é um ponto crítico de I_λ^-, então $\langle (I_\lambda^-)'(u), h\rangle = 0$, $\forall \ h \in X$, em particular para $h = u^+$, assim

$$0 = \langle (I_\lambda^-)'(u), u^+\rangle = \langle u, u^+\rangle_X = \langle u^+, u^+\rangle_X + \langle u^-, u^+\rangle_X \geq \langle u^+, u^+\rangle_X = \|u^+\|^2$$

e consequentemente, $u^+ = 0$. Portanto, o ponto crítico u de I_λ^- satisfaz $u = u^- \leq 0$, ou seja, é uma função não positiva de X.

B.1.2.1 Limitação da sequência (PS) associado ao funcional I_λ^-

Analogamente como foi feito no Lema B.5 temos que para a parte negativa do funcional toda sequência (PS) é limitada, ou seja, temos o seguinte resultado.

Lema B.11 (Casos subcrítico e crítico) *Suponha que f satisfaça $(f_{1,2})$, $(f_{2,2})$, $(f_{3,2})$ e $(f_{4,2})$ então cada sequência (PS) de I_λ^- é limitada.*

Demonstração: Análogo ao que foi feito no Lema B.5. ■

B.1.2.2 Compacidade do funcional I_λ^-

A condição de Palais-Smale é obtida no seguinte Lema:

Lema B.12 *Suponha que f satisfaça $(f_{1,2})$, $(f_{2,2})$ e $(f_{4,2})$ então o funcional I_λ^- satisfaz a condição Palais-Smale (ou condição(PS)) em todos os níveis para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Análogo ao que foi feito no Lema B.6. ∎

B.1.2.3 Geometria do Teorema do Passo da Montanha do funcional I_λ^-

Agora mostraremos alguns resultados que serão útiles para se obter as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Para isso, para cada $u \in X_p^s$, seja

$$\begin{aligned} J_\lambda^-(u) &:= I_\lambda^-(u) - \frac{1}{2}\|u\|_X^2 \\ &= \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u^-|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |u^-|^2 dx - \int_0^1 F(u^-)dx. \end{aligned}$$

Lema B.13 (Casos subcrítico e crítico) *Sob as hipóteses $(f_{3,2})$ e $a > 0$, então a solução trivial $u = 0$ é um minimizador local estrito para J_λ^-, para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.22, basta mostrar que $u = 0$ é um mínimo local estrita de I_λ^+ na topologia $C_\delta^0([0,1])$. Pela condição $(f_{3,2})$: $\lim_{|t|\to 0} \frac{|f(t)|}{|t|} = 0$ e usando a regra de L'Hôspital segue-se,

$$\lim_{|t|\to 0} \frac{F(t)}{t^2} = 0.$$

Logo para $\epsilon = 1$, existe $\omega > 0$ tal que

$$|F(t)| < t^2, \quad \text{para todo } \ 0 < |t| \leq \omega.$$

Agora , para cada $u \in (C^0_\delta([0,1]) \cap X) \setminus \{0\}$, com $\|u\|_{0,\delta} \leq 1$ e consequentemente $0 < |u^-| < \omega$ (pois $|u^-| \leq M\|u\|_{0,\delta}$, para algum $M > 0$). Portanto

$$\begin{aligned} J^-_\lambda(u) &= \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u^-|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |u^-|^2 dx - \int_0^1 F(u^-)dx \\ &\geq \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u^-|^q dx - \left(\frac{a}{2}+1\right)\int_0^1 |u^-|^2 dx \end{aligned} \tag{B.19}$$

Usando $\|u\|_{0,\delta} = \|u/\delta^s\|_\infty$, onde $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ definida por $\delta(x) = dist(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, obtemos

$$0 \leq -u^- = |u^-| \leq |u| \leq k_1\|u\|_{0,\delta} \text{ para algum } k_1 > 0.$$

Como $1 < q < 2$ resulta que $|u^-|^{2-q} \leq (k_1)^{2-q}\|u\|^{2-q}_{0,\delta}$ e, consequentemente,

$$\int_0^1 |u^-|^2 dx \leq (k_1)^{2-q}\|u\|^{2-q}_{0,\delta}\int_0^1 |u^-|^q dx.$$

Desta última desigualdade e do fato que $\frac{a}{2}+1 > 0$ podemos concluir que

$$-\left(\frac{a}{2}+1\right)\int_0^1 (u^-)^2 dx \geq -\left(\frac{a}{2}+1\right)(k_1)^{2-q}\|u\|^{2-q}_{0,\delta}\int_0^1 |u^-|^q dx. \tag{B.20}$$

De (B.19) e (B.20), segue-se

$$\begin{aligned} J^-_\lambda(u) &\geq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^-|^q dx - \left(\frac{a}{2}+1\right)(k_1)^{2-q}\|u\|^{2-q}_{0,\delta}\int_0^1 |u^-|^q dx \\ &= \left[\frac{\lambda}{q} - \left(\frac{a}{2}+1\right)(k_1)^{2-q}\|u\|^{2-q}_{0,\delta}\right]\int_0^1 |u^-|^q dx \end{aligned} \tag{B.21}$$

Agora, seja $R = \dfrac{(\lambda/q)^{1/(2-q)}}{k_1\left(\frac{a}{2}+1\right)^{1/(2-q)}}$, assim se $\|u\|_{0,\delta} < R$, então

$$\frac{\lambda}{q} - \left(\frac{a}{2}+1\right)(k_1)^{2-q}\|u\|^{2-q}_{0,\delta} > 0,\ \forall\ \|u\|_{0,\delta} < R. \tag{B.22}$$

Como $\|u\|_{0,\delta} > 0$ (pois $u \in (C^0_\delta([0,1]) \cap X) \setminus \{0\}$), temos finalmente de (B.21) e (B.22) que

$$J^-_\lambda(u) > 0 = J^-_\lambda(0),\ \forall\, 0 < \|u\|_{0,\delta} < R.$$

Portanto, $u = 0$ é um mínimo local estrito de J^-_λ na topologia $C^0_\delta([0,1])$. ■

Observação B.14 *O Lema anterior é válido se trocamos o funcional J^-_λ por J_λ.*

Lema B.15 (Casos subcrítico e crítico) *Suponha que f satisfaz $(f_{4,2})$ e $a > 0$, então fixando $\Lambda > 0$ existe $t_0 = t_0(\Lambda) > 0$ tal que*

$$I^-_\lambda(-t\varphi_1) < 0,$$

para todo $t \geq t_0$ e $0 < \lambda < \Lambda$.

Demonstração: Para $t > 0$ e usando o Lema A.19 (ver Apêndice A) para $M > \dfrac{\lambda_1}{2}$ segue que:

$$\begin{aligned} I^-_\lambda(-t\varphi_1) &= \frac{\|t\varphi_1\|^2_X}{2} + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |(-t\varphi_1)^-|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |(-t\varphi_1)^-|^2 dx - \int_0^1 F((-t\varphi_1)^-)dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|\varphi_1\|^2_X + \frac{t^q\lambda}{q}\int_0^1 \varphi_1^q dx - \int_0^1 (Mt^2\varphi_1^2 - C_M)dx \end{aligned}$$

Lembrando que φ_1 é a autofunção positiva associado ao λ_1 e $\|u\|_{L^2(0,1)} = 1$, obtemos para $t > 0$,

$$\begin{aligned} I^-_\lambda(t\varphi_1) &\leq \frac{\lambda_1 t^2}{2}\int_0^1 \varphi_1^2 dx + \frac{t^q\lambda}{q}\int_0^1 \varphi_1^q dx - Mt^2\int_0^1 \varphi_1^2 dx + C_M \\ &= t^2\left[\frac{\lambda}{q}\frac{1}{t^{2-q}}\int_0^1 \varphi_1^q dx + \frac{C_M}{t^2} - \left(M - \frac{\lambda_1}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{B.23}$$

Agora fixando $\Lambda > 0$, Como $M > \dfrac{\lambda_1}{2}$, $t > 0$, $1 < q < 2$, e $\varphi_1 > 0$ em $(0,1)$ podemos escolher $t_0 = t_0(\Lambda) > 0$ tal que

$$\frac{\Lambda}{q}\frac{1}{t_0^{2-q}}\int_0^1 a\varphi_1^q dx + \frac{C_M}{t_0^2} - \left(M - \frac{\lambda_1}{2}\right) < 0.$$

Se $t \geq t_0$ e $\lambda < \Lambda$, nós temos que

$$\frac{\lambda}{q}\frac{1}{t^{2-q}}\int_0^1 \varphi_1^q dx + \frac{C_M}{t^2} - \left(M - \frac{\lambda_1}{2}\right) \leq \frac{\Lambda}{q}\frac{1}{t_0^{2-q}}\int_0^1 \varphi_1^q dx + \frac{C_M}{t_0^2} - \left(\frac{M-\lambda_1}{2}\right) < 0.$$

Logo por (B.23), segue $I_\lambda^-(t\varphi_1) < 0, \;$ para todo $\; t \geq t_0, \;$ e $\; \lambda < \Lambda$. ■

B.1.2.4 Solução negativa via o Teorema do Passo da Montanha

Proposição B.16 *Se f satisfaz as condições $(f_{1,2})$, $(f_{2,2})$, $(f_{3,2})$ $(f_{4,2})$ e $a > 0$. Então o problema (B.2) possui pelo menos uma solução negativa, para todo λ obtido no Lema B.15.*

Demonstração: Observemos que toda solução negativa para o problema (B.2) satisfaz a equação:

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u = -\lambda|u^-|^{q-1} + au^- + f(u^-) & \text{em } (0,1), \\ u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}\setminus(0,1), \end{cases} \tag{B.24}$$

no sentido fraco, onde $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < 2$ e $u^- = \min\{u, 0\}$. Lembrando pela subseção B.1.2, encontrar uma solução para o problema (B.24) é equivalente a encontrar um ponto crítico do funcional

$$I_\lambda^- : X \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda^-(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u^-|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |u^-|^2 dx - \int_0^1 F(u^-)dx.$$

Mostraremos que I_λ^- também satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha. Segue-se do Lema B.12, que no caso subcrítico o funcional I_λ^- satisfaz a condição de compacidade (PS) em todos os níveis, para todo $\lambda > 0$. Como $I_\lambda^-(0) = 0$, mostraremos então que o funcional satisfaz a geometria do Teorema do passo da Montanha.

(a) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I_\lambda^-\big|_{\partial B_\rho} > \alpha\;$ e

(b) existe um $e \in X\backslash\overline{B}_\rho$ tal que $I^-_\lambda(e) < 0$.

Prova do item (a): Usando o Lema B.13 temos que existe $R > 0$ tal que

$$I^-_\lambda(u) > \frac{1}{2}\|u\|^2_X,\ \forall\, 0 < \|u\|_X < R. \tag{B.25}$$

Tomando $\alpha = \dfrac{1}{2}\|u\|^2_X$, segue que existem $\rho, \alpha > 0$ tal que $\alpha < I^-_\lambda(u)$, $\forall\ \|u\|_X = \rho$.

Prova do item (b): Pelo Lema B.15, temos que existe $e = -t_0\varphi_1 \in X$ tal que $I^-_\lambda(e) < 0 = I^-_\lambda(0)$, para todo $\lambda > 0$ obtido no Lema B.15. Usando esta última desigualdade e por (B.17) segue-se $\|e\| \geq R > 0$. Assim, $\|e\| > \rho$, isto é, $e \in X\backslash\overline{B_\rho}$. Portanto, existe $e \in X\backslash\overline{B_\rho}$ tal que $I^-_\lambda(e) < 0$, isto conclui a prova do item (b).

Logo, pelo Teorema do Passo da Montanha, I^-_λ possui um valor crítico $C^-_\lambda \geq \alpha$, com

$$C^-_\lambda = \inf_{g\in\Gamma^-} \max_{u\in g([0,1])} I^-_\lambda(u),$$

onde $\Gamma^- = \{g \in C([0,1], X)\ ;\ g(0) = 0\,,\ g(1) = -t_0\varphi_1\}$. ■

B.1.3 Solução via o Teorema de Linking

A ferramenta variacional dessa subseção que utilizaremos é o teorema de Linking. Nosso principal resultado nesta subseção é

Proposição B.17 *Suponha que $\lambda_k \leq a < \lambda_{k+1}$, para algum $k \in \mathbb{N}\,(k \geq 1)$ e que f satisfaça as condições $(f_{1,2})$, $(f_{2,2})$, $(f_{3,2})$ e $(f_{4,2})$, então para λ suficientemente pequeno, o problema (B.2) possui pelo menos uma solução não trivial.*

B.1.3.1 Compacidade

No seguinte resultado mostraremos que, no caso subcrítico, o funcional I_λ satisfaz a condição Palais-Smale (ou condição(PS)) em todos os níveis para todo $\lambda > 0$.

Lema B.18 *Suponha que f satisfaça $(f_{1,2})$, $(f_{2,2})$, $(f_{3,2})$ e $(f_{4,2})$ então o funcional I_λ satisfaz a condição Palais-Smale (ou condição(PS)) em todos os níveis para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Analoga ao que foi feito na demonstração do Lema B.6 ■

B.1.3.2 Geometria do Teorema de Linking

Nesta seção, nós começamos fazendo uma escolha de uma decomposição do espaço X que será utilizada no problema tanto no caso com não linearidade f com crescimento exponencial subcrítico, quanto no caso crítico no sentido Trudinger-Moser..

Assim, tomando $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$ fixo seja $X = V_k \oplus W_k$, onde $V_k =< \varphi_1, \ldots, \varphi_k >$ é o espaço gerado pelas autofunções do operador fracionario $((-\Delta)^{1/2})$ correspondentes aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, e $W_k = V_k^\perp$. Os próximos lemas serão usados para mostrar as condições geométricas do Teorema de Linking.

Lema B.19 *Seja $a < \lambda_{k+1}$, para algum $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$. Então, existem β, $\rho > 0$ tais que $I_\lambda(u) \geq \beta$ sempre que $u \in W_k$ e $\|u\|_X = \rho$.*

Demonstração: Fixe $\theta > 2$ e $0 < \alpha < \pi$, então o Lema A.18 (ver Apêndice A) nos garante que existem $0 \leq \mu < \lambda_{k+1} - a$ e $C > 0$ satisfazendo

$$F(t) \leq \frac{\mu}{2}t^2 + C\exp(\alpha t^2)|t|^\theta, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo, para cada $u \in W_k = V_k^\perp$ com $\|u\|_X \leq 1$.

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \frac{\|u\|_X^2}{2} + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |u|^2 dx - \int_0^1 F(u)dx \\
&\geq \frac{\|u\|_X^2}{2} - \frac{a}{2}\int_0^1 |u|^2 dx - \int_0^1 \left[\frac{\mu|u|^2}{2} + C\exp(\alpha u^2)|u|^\theta\right] dx \\
&= \frac{\|u\|_X^2}{2} - \left(\frac{a}{2} + \frac{\mu}{2}\right)\int_0^1 |u|^2 dx - C\int_0^1 \exp(\alpha u^2)|u|^\theta dx.
\end{aligned}$$

Agora, pela caracterização de $\lambda_{k+1} = \inf\limits_{u\in W_k} \dfrac{\|u\|_X^2}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2 dx}$, obtemos

$$I_\lambda(u) \geq \frac{\|u\|_X^2}{2} - \frac{(a+\mu)}{2}\frac{\|u\|_X^2}{\lambda_{k+1}} - C\int_0^1 \exp(\alpha u^2)|u|^\theta dx. \tag{B.26}$$

Além disso, como $0 < \alpha < \pi$, podemos fixar $r > 1$ de modo que ainda se tenha $0 < r\alpha < \pi$. Aplicando a Desigualdade de Hölder em (B.26), com r e r' conjugados temos

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a+\mu}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|_X^2 - C\left(\int_0^1 \exp(\alpha r u^2)dx\right)^{1/r}\left(\int_0^1 |u|^{\theta r'}dx\right)^{1/r'} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a+\mu}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|_X^2 - C\left(\int_0^1 \exp(\alpha r u^2)dx\right)^{1/r}\|u\|^\theta_{L^{r'\theta}(0,1)}. \end{aligned}$$

Mas, como $\|u\|_X \leq 1$, usando a Proposição A.10 (ver Apêndice A) e o fato de que, pela Proposição 1.12 (ver Apêndice A) , X está imerso continuamente em $L^{r'\theta}(0,1)$, podemos encontrar $C_1 > 0$ tal que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a+\mu}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|_X^2 - C_1\|u\|_X^\theta.$$

Desde que $\theta > 2$ e $1 - \dfrac{a+\mu}{\lambda_{k+1}} > 0$, podemos escolher $\rho > 0$, suficientemente pequeno, com $\|u\|_X = \rho$, tal que

$$I(u) \geq \rho^2\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{a+\mu}{\lambda_{k+1}}\right) - C_1\rho^{\theta-2}\right\} > 0.$$

Portanto, para todo $u \in W_k$ com $\|u\|_X = \rho$, temos que $I(u) \geq \beta$, onde denotaremos $\beta = \rho^2\left\{\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{a+\mu}{\lambda_{k+1}}\right) - C_1\rho^{\theta-2}\right\}$. Assim concluímos a prova do Lema. ■

Lema B.20 *Suponha que* $(f_{4,2})$ *é valida. Se* $Y \subset X$ *é um subespaço vetorial com* $dim(Y) < \infty$, *então*

$$\lim_{u\in Y, \|u\|_X\to\infty} I_\lambda(u) = -\infty.$$

Demonstração: Seja $u \in Y$. Como a dimensão de Y é finita, e em um espaço de dimensão finita todas as normas são equivalentes, podemos encontrar $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ de modo que

$$\|u\|_X^2 \leq C_1 \|u\|_{L^2(0,1)}^2 \ \text{ e } \ \|u\|_{L^q(0,1)}^q \leq C_2 \|u\|_X^q \tag{B.27}$$

Aplicando o Lema A.19 (ver Apêndice A), para $M > C_1 \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\lambda C_2}{q} \right)$, existe $C_M > 0$ tal que

$$F(t) \geq Mt^2 - C_M, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |u|^2 dx - \int_0^1 F(u)dx \\ &\leq \frac{\|u\|_X^2}{2} + \frac{\lambda}{q}\|u\|_{L^q(0,1)}^q - M\|u\|_{L^2(0,1)}^2 + C_M. \end{aligned}$$

Segue de (B.27), para $\|u\|_X$ suficientemente grande, temos $\|u\|_X^q \leq \|u\|_X^2$ e consequentêmente

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \frac{\|u\|_X^2}{2} + \frac{\lambda C_2}{q}\|u\|_X^q - \frac{M}{C_1}\|u\|_X^2 + C_M \\ &\leq \frac{\|u\|_X^2}{2} + \frac{\lambda C_2}{q}\|u\|_X^2 - \frac{M}{C_1}\|u\|_X^2 + C_M \\ &= \|u\|_X^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda C_2}{q} - \frac{M}{C_1} \right) + C_M. \end{aligned} \tag{B.28}$$

Desde que $M > C_1 \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\lambda C_2}{q} \right)$ e usando (B.28), obtemos que

$$\lim_{u \in Y, \|u\|_X \to \infty} I(u) = -\infty. \tag{B.29}$$

■

B.1.3.3 Controle dos níveis Mini-max

O lema abaixo será útil para controlar os níveis mini-max das soluções positiva e negativa e assim, obter uma terceira solução.

Lema B.21 *Suponha que* $(f_{4,2})$ *seja válida e* $\lambda_k \leq a < \lambda_{k+1}$ *para algum* $k \geq 1$. *Então existe* $\eta = \eta(\lambda)$ *tal que*

$$I_\lambda(u) \leq \eta(\lambda) \quad e \quad \lim_{\lambda \to 0} \eta(\lambda) = 0, \quad \text{para todo} \;\; u \in V_k.$$

Demonstração: Para $u \in V_k$, usando a Proposição A.8 item (i) (ver Apêndice A). Temos,

$$I_\lambda(u) \leq \left(\frac{\lambda_k - a}{2}\right) \int_0^1 u^2 dx + \frac{\lambda}{q} \|u\|^q_{L^q(0,1)} - \int_0^1 F(u) dx,$$

Como $\lambda_k \leq a < \lambda_{k+1}$, obtemos

$$I_\lambda(u) \leq \frac{\lambda}{q} \|u\|^q_{L^q(0,1)} - \int_0^1 F(u) dx.$$

Agora, pela imersão contínua de Sobolev existe $K_q > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) \leq \frac{\lambda}{q} K_q \|u\|^q_X - \int_0^1 F(u) dx. \tag{B.30}$$

Do Lema A.19 (ver Apêndice A) e as normas em V_k são equivalentes, segue que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\leq \frac{\lambda K_q}{q} \|u\|^q_X - M \|u\|^2_{L^2(0,1)} + C_M \\ &\leq \frac{\lambda K_q}{q} \|u\|^q_X - M K_2 \|u\|^2_X + C_M. \end{aligned} \tag{B.31}$$

Desde que $1 < q < 2$, obtemos que

$$\lim_{u \in V_k, \|u\|_X \to \infty} I_\lambda(u) = -\infty.$$

Então existe $R > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) < 0 \quad \text{para todo} \quad u \in V_k \quad \text{com} \quad \|u\|_X > R. \tag{B.32}$$

Se $u \in V_k$ com $\|u\|_X \leq R$, obtemos de (B.30) que

$$I_\lambda(u) \leq \frac{\lambda}{q} K_q \|u\|_X^q - \int_0^1 F(u)dx \leq \frac{\lambda}{q} K_q R^q - \int_0^1 F(u)dx.$$

Da condição $(f_{1,2})$, temos

$$I_\lambda(u) \leq \frac{\lambda}{q} K_q R^q \quad \text{para todo} \quad u \in V_k \quad \text{com} \ \|u\|_X \leq R. \tag{B.33}$$

Tomando $\eta(\lambda) = \dfrac{\lambda}{q} K_q R^q$, segue de (B.32) e (B.33) que

$$I_\lambda(u) \leq \eta(\lambda), \quad \text{para todo} \quad u \in V_k, \quad \text{onde} \lim_{\lambda \to 0} \eta(\lambda) = 0.$$

Isso prova o Lema. ■

B.1.3.4 Solução via o Teorema de Linking

Proposição B.22 *Suponha $(f_{1,2})$ a $(f_{4,2})$ e que $\lambda_k \leq a < \lambda_{k+1}$ para algum $k \geq 1$. Então para λ suficientemente pequeno, o problema (B.2) possui pelo menos uma solução não trivial.*

Demonstração: Lembrando que as soluções fracas do problema (B.2) correspondem aos pontos críticos do funcional de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ (ver Lema A.57) dado por

$$I_\lambda : X \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \int_0^1 F(u)dx,$$

mostraremos que o funcional I_λ satisfaz as condições do Teorema de Linking, ou seja, I_λ satisfaz a condição Palais Smale (ou condição (PS)), o espaço X é Banach e pode ser decomposto na forma $X = V \oplus W$, onde V é um espaço de dimensão finita e o funcional I_λ satisfaz

(a) existem constantes $\rho, \beta > 0$ tais que $I_\lambda\Big|_{\partial B_\rho \cap W} \geq \beta$ e

(b) existe um elemento $e \in (\partial B_1) \cap W$, existem constantes reais $R > \rho$ e $\alpha > 0$ tais que $I_\lambda\Big|_{\partial Q} < \alpha < \beta$ onde $Q = (B_R \cap V) \oplus (0, Re)$.

Assim, o Teorema garante que I_λ possui um valor crítico $C \geq \beta$ caracterizado por

$$C = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in Q} I_\lambda(\gamma(u)),$$

$$\text{onde } \ \Gamma = \{\gamma \in C(\overline{Q}, E) \ \ ; \ \ \gamma = I_d \ \text{ em } \ \partial Q\}.$$

Sabemos que X é um espaço de Banach que se decompõe na forma $X = V_k \oplus W_k$, para algum $k \geq 1$, onde $V_k = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k\}$ é um espaço de dimensão finita e $W_k := \overline{V_k^{\perp}}^{\|\cdot\|_X}$

Além disso, pelo Lema B.18, temos que no caso subcrítico, o funcional I_λ satisfaz a condição Palais Smale em todos os níveis, para todo $\lambda > 0$. Assim, provaremos que o funcional I_λ satisfaz a geometria do Teorema de Linking, ou seja, as condições (a) e (b) informadas acima.

Prova do item(a): Resulta diretamente do Lema B.19.

Prova do item(b): Do Lemma B.20, existe $\overline{R} > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) < 0 \quad \text{para todo } u \in V_{k+1} \ \text{ com } \|u\|_X \geq \overline{R}. \tag{B.34}$$

Como $\rho\varphi_{k+1} \in V_{k+1} \cap W_k$ e $\|\rho\varphi_{k+1}\|_X = \rho$ (sem perder generalidade podemos considerar $\|\varphi_{k+1}\|_X = 1$), obtemos pelo item (a), $I_\lambda(\rho\varphi_{k+1}) \geq \beta > 0$. Logo de (B.34) segue $\overline{R} > \rho$. Definimos

$$Q = \{w \in X \ : \ w = u + r\varphi_{k+1}, \ u \in V_k \cap B_{\overline{R}}(0), \ 0 \leq r \leq \overline{R}\}.$$

Denotamos a fronteira de Q por $\partial Q = \bigcup_{i=1}^{3} \Gamma_i$, onde

(1) $\Gamma_1 = \overline{B_{\overline{R}}(0)} \cap V_k$,

(2) $\Gamma_2 = \{v \in X : v = u + \overline{R}\varphi_{k+1}, u \in B_{\overline{R}}(0) \cap V_k\}$,

(3) $\Gamma_3 = \{v \in X : v = u + r\varphi_{k+1}, u \in V_{k+1}, \|u\| = \overline{R}, 0 \leq r \leq \overline{R}\}$.

Mostraremos que em cada Γ_i, temos $I_\lambda\Big|_{\Gamma_i} \leq \alpha < \beta,$ onde β foi obtido no item (a).

Caso (1): Seja $u \in \Gamma_1 \subset V_k$. Logo, pelo Lema B.21, seque que

$$I_\lambda(u) \leq \eta(\lambda),\ \forall\ u \in \Gamma_1, \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda \to 0} \eta(\lambda) = 0.$$

Assim, tomando $\lambda > 0$ suficientemente pequeno

$$I_\lambda(u) \leq \eta(\lambda) < \beta.$$

Casos (2) e (3): Segue de (1.84), pois, $\|u + \overline{R}\varphi_{k+1}\| \geq \overline{R} > 0$ (segue do fato que $\langle u, \varphi_{k+1} \rangle_X = 0$), então $I_\lambda(u + \overline{R}\varphi_{k+1}) < 0$.

Assim, para todo $u \in \partial Q$, segue que existe λ^* tal que

$$I_\lambda(u) \leq \eta(\lambda) < \beta \ \text{ para todo } \ \lambda \leq \lambda^*.$$

Portanto podemos tomar $\alpha_\lambda = \eta(\lambda)$, para qualquer $\lambda \leq \lambda^*$.

$$I_\lambda(u) \leq \eta(\lambda),\ \forall\ u \in \partial Q.$$

Isto termina a prova o item (b).

Então pelo Teorema de Linking, I_λ possui um valor crítico $C_\lambda \geq \alpha$ caracterizado por

$$C_{\lambda^*} = \inf_{h\in\Gamma} \max_{u\in Q} I_{\lambda^*}(h(u)),$$

$$\text{onde } \Gamma = \{h \in C(\overline{Q}, X) \;\; ; \;\; h = I_d \;\text{ em }\; \partial Q\}.$$

Isto é, existe $u_\lambda \in X$ solução fraca de (B.2) tal que $0 < \eta(\lambda) < \beta \le I_\lambda(u_\lambda) = C_\lambda$. Note que u_λ é não nula, pois $I_\lambda(0) = 0$. ■

B.1.4 Demonstração do Teorema B.4:

Demonstração: Para demonstrar a primera parte de Teorema B.4, basta mostrar que u_λ é distinto dos pontos críticos encontrados para os funcionais I_λ^+ e I_λ^- para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. De fato, seja $g_0^+ : [0,1] \to X$ dado por $g_0^+(t) = t(t_0\varphi_1)$ onde t_0 foi obtido no Lema B.9. Logo,

$$g_0^+ \in \Gamma^+ = \{g \in C([0,1], X) \;\; ; \;\; g(0) = 0 \;,\; g(1) = t_0\varphi_1\}.$$

Como $g_0^+(t) \in V_k$ para todo $t \in [0,1]$, temos do Lema B.21 que

$$I_\lambda^+(g_0^+(t)) = I_\lambda(g_0^+(t)) \le \eta(\lambda), \;\text{ para todo } t \in [0,1]. \tag{B.35}$$

Analogamente, podemos definir $g_0^- \in \Gamma^-$(usando o Lema B.15) satisfazendo uma propriedade análoga à estimativa (B.35). Portanto, existe $\lambda_0 > 0$

$$C_\lambda^+ \le \max_{t\in[0,1]} I_\lambda^+(g_0^+(t)) \le \eta(\lambda) < \alpha \le I_\lambda(u_\lambda) \;\text{ para todo }\; 0 < \lambda \le \lambda_0.$$

e

$$C_\lambda^- \le \max_{t\in[0,1]} I_\lambda^-(g_0^-(t)) \le \eta(\lambda) < \alpha \le I_\lambda(u_\lambda), \;\text{ para todo }\; 0 < \lambda \le \lambda_0.$$

Portanto para λ fixo suficientemente pequeno, o problema (B.2) possui pelo menos três soluções não trivias, provando assim, a primeira parte do Teorema B.4.

Agora provaremos a segunda parte, isto é, que o problema (B.2) possui infinitas soluções se o funcional for par. Assim, supondo que o f é ímpar, pelo Lema 1.14, segue que I_λ é par.

Como X é um espaço de Hilbert, podemos escrever $X = Y \oplus Y^\perp$, onde Y é um subespaço de dimensão finita de X e Y é fechado em X.

Mostraremos que existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I_\lambda\Big|_{\partial B_\rho \cap Y^\perp} > \alpha$. De fato, analogamente, como foi feito na Proposição B.10 (ou B.16), existe uma bola $B_\rho(0) \subset X$ e existe $\alpha > 0$ tais que

$$I_\lambda\Big|_{\partial B_\rho(0)} > \alpha.$$

Assim, para $u \in \partial B_\rho(0) \cap Y^\perp$ ($\subset Y^\perp$), nós obtemos que $I(u) > \alpha$, mostrando assim, o item (1) do Teorema A.50 (ver Apêndice B). Para provar o item (2), segue do Lema B.20, que para cada Y de dimensão finita, podemos encontrar $R = R(Y) > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) < 0, \quad \text{sempre que} \;\; u \in Y \;\; \text{e} \; \|u\|_X > R(Y).$$

Portanto, pelo Teorema A.50 (ver Apêndice B) o problema (B.2) possui uma infinidades de soluções não triviais. ■

B.2 Soluções para o problema crítico

Nesta seção, mostraremos um resultado de existência de soluções para o seguinte problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2} u &= -\lambda |u|^{q-2} u + au + f(u) \quad \text{em } (0,1), \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \text{em } \mathbb{R} \setminus (0,1), \end{cases} \tag{B.36}$$

onde $\lambda > 0$, $1 < q < 2$ e $a \in \mathbb{R}^+$ com não linearidade f com crescimento exponencial crítico no sentido Trudinger-Moser. Assim, considere o funcional de

Euler-Lagrange

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |u|^2 dx - \int_0^1 F(u)dx.$$

Note que, pontos críticos de I_λ são soluções fracas para o problema (B.36). Neste caso, nossa principal referência é o artigo [55], onde os autores obtiveram uma solução não trivial. Aqui, a não linearidade f satisfaz, as seguintes hipóteses:

$(f_{1,2})$ $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ e $F(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, sendo $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$;

$(f'_{2,2})$ existe $0 < \alpha_0 < \pi$ tal que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(t)|}{\exp(\alpha t^2)} = \begin{cases} \infty, & \text{se} \quad 0 < \alpha < \alpha_0 \\ 0, & \text{se} \quad \alpha > \alpha_0, \end{cases}$$

$(f_{3,2})$ $\displaystyle\lim_{|t|\to 0} \frac{|f(t)|}{|t|} = 0$;

$(f_{5,2})$ $\dfrac{f(t)}{t}$ é crescente se $t > 0$ e decrescente se $t < 0$;

$(f_{6,2})$ Para cada $(u_n) \subset X$, se

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{em} \quad X \\ f(u_n) \to f(u), & \text{em} \quad L^1(0,1), \end{cases}$$

então $F(u_n) \to F(u)$ em $L^1(0,1)$;

$(f_{7,2})$ Existem $r > 2$ e $C_r > 0$ tais que

$$F(t) \geq \frac{C_r}{r}|t|^r, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R},$$

com $C_r > \dfrac{1}{C}\left[4\left(\dfrac{\alpha_0}{\pi}\right)\dfrac{(r-2)}{2r}\right]^{\frac{r-2}{2}}$, onde a constante $C > 0$ é obtida em (B.55).

Observação B.23 *A condição* $(f_{7,2})$ *implica a condição*

$$(f_{4,2}) \lim_{|t|\to\infty} \frac{F(t)}{|t|^2} = +\infty, \quad \textit{sendo} \ \ F(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

O principal resultado deste capítulo é:

Teorema B.24 *Suponha que* f *satisfaz as condições* $(f_{1,2}), (f'_{2,2}), (f_{3,2})$ *e* $(f_{5,2}) - (f_7)$, *e* $\lambda_k \leq a < \lambda_{k+1}$ *para algum* $k \in \mathbb{N}$ *(*$k \geq 1$*), então para* λ *suficientemente pequeno, o problema (B.36) possui pelo menos três soluções não triviais.*

A prova desse Teorema será dividida em 4 subseções:

Na primeira subseção, usaremos o Teorema do Passo da Montanha para obter pelo menos uma solução positiva. e de forma análoga, na segunda subseção, obtemos pelo menos uma solução negativa. Na terceira subseção obtemos uma terceira solução via Teorema de Linking. Finalmente na quarta subseção demonstramos o resultado principal, isto é, o Teorema B.24.

B.2.1 A condição de Palais-Smale

Como já mencionamos provaremos que a condição de Palais-Smale é satisfeita apenas para níveis em um certo intervalo. É importante ressaltar que no caso exponencial crítico, o Lema A.16 (ver Apêndice A) é válido somente para $\alpha > \alpha_0$, isto é, para todo $\alpha > \alpha_0$, existe $C > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq C\exp(\alpha t^2), \quad \text{para todo} \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Note também que o Lema A.17 (ver Apêndice A) é válido somente para $\alpha > \alpha_0$.

Lema B.25 *Seja* $\alpha_0 > 0$ *como em* $(f'_{2,2})$ *e suponha que* f *satisfaz as condições* $(f_{1,2}), (f'_{2,2}), (f_{3,2})$ *e* $(f_{5,2}) - (f_{7,2})$, *então o funcional*

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |u|^2 dx - \int_0^1 F(u)dx,$$

satisfaz a condição de Palais-Smale em qualquer nível $c < \dfrac{\pi}{2\alpha_0}$.

Demonstração: Seja $c < \dfrac{\pi}{2\alpha_0}$ e suponha (u_n) uma sequência em X, tal que

$$I_\lambda(u_n) \to c \ \text{ e } \ I'_\lambda(u_n) \to 0 \text{ em } X^*.$$

Pelo Lema 1.15, segue-se que (u_n) é limitada em X e a menos de subsequência,

$$\begin{cases} \|u_n\|_X \leq K, \\ u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } X, \\ u_n \to u; \ \text{em } L^q(0,1) \text{ para todo } q \geq 1 \text{ e} \\ u_n(x) \to u(x) \text{ quase sempre em } (0,1). \end{cases}$$

Além disso, como $\lambda > 0$ e $(\|I'_\lambda(u_n)\|)$, $(I_\lambda(u_n))$ são sequências limitadas em $\mathbb{R}$, daí, para constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, temos

$$\left|\int_0^1 f(u_n)u_n dx\right| \leq \|u_n\|_X^2 + \lambda\int_0^1 |u_n|^q + a\int_0^1 |u_n|^2 + \|I'_\lambda(u_n)\|\|u_n\|_X \leq C_1 \ \text{ e}$$

$$\left|\int_0^1 F(u_n)dx\right| \leq \frac{\|u_n\|_X^2}{2} + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u_n|^q + \frac{a}{2}\int_0^1 |u_n|^2 + |I_\lambda(u_n)| \leq C_2.$$

Mas, pelo Lema A.22 (ver Apêndice A), $\displaystyle\int_0^1 f(u_n)u_n dx, \int_0^1 F(u_n)dx \geq 0$. Logo, podemos encontrar uma constante $C > 0$ verificando

$$\sup\left\{\|u_n\|_X^2, \int_0^1 f(u_n)u_n dx, \int_0^1 F(u_n)dx\right\} \leq C. \tag{B.37}$$

Pelo Lema A.16 (ver Apêncice A) e pela Proposição A.11 (ver Apêncice A) também temos que

$$\int_0^1 |f(u)|dx \leq C_2\int_0^1 \exp(\alpha u^2)dx < \infty \ \text{ e } \ \int_0^1 |f(u_n)|dx \leq C_3\int_0^1 exp(\alpha u_n^2)dx < \infty,$$

ou seja, $f(u_n), f(u)$ estão em $L^1(0,1)$. Então como $u_n \to u$ em $L^1(0,1)$ e $\int_0^1 f(u_n)u_n dx \leq C$, pelo Lema A.46 (ver Apêncice B), concluímos que

$$f(u_n) \text{ converge para } f(u) \text{ em } L^1(0,1). \tag{B.38}$$

Logo, de (B.38) e usando a condição $(f_{6,2})$ obtemos que

$$F(u_n) \to F(u) \;\text{ em }\; L^1(0,1). \tag{B.39}$$

Assim,

$$\frac{\|u_n\|_X^2}{2} \to c - \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q + \frac{a}{2}\int_0^1 |u|^2 dx + \int_0^1 F(u)dx. \tag{B.40}$$

Como $I'_\lambda(u_n) \to 0$ em X^* e (u_n) é limitada em X, então por (B.40) temos

$$\int_0^1 f(u_n)u_n dx \to 2c + \lambda\left(1 - \frac{2}{q}\right)\int_0^1 |u|^q + 2\int_0^1 F(u)dx. \tag{B.41}$$

Mas pelo Lema A.22, temos $\int_0^1 f(u_n)u_n dx - 2\int_0^1 F(u_n)dx \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite quando $n \to \infty$ na expressão acima e usando (B.41)

$$2c \geq \lambda\left(\frac{2}{q} - 1\right)\int_0^1 |u|^q \tag{B.42}$$

o que implica $c \geq 0$ (pois $1 < q < 2$). Assim, o nível mini-max é não negativo.

Agora, vejamos que $\langle I'_\lambda(u), v\rangle = 0$, para toda $v \in X$, ou seja , o limite fraco u da sequência (PS) é uma solução para o problema em questão. Primeiro, considere $v \in C_0^\infty(0,1)$. Note que quando $n \to +\infty$,

$$\left|\int_0^1 f(u_n)v - \int_0^1 f(u)v dx\right| \leq \|f(u_n) - f(u)\|_{L^1(0,1)}\|v\|_\infty \to 0. \tag{B.43}$$

Como $u_n \to u$ em $L^q(0,1)$, segue pelo Teorema A.37 (ver Apêncice B), existe uma subsequência de (u_n) ainda denotada por (u_n) e $h \in L^q(0,1)$ tal que $|u_n| \leq h$, q.t.p em Ω. Então para cada $v \in X$ decorre que

$$||u_n|^{q-2}u_nv| = |u_n|^{q-1}|v| \leq h^{q-1}|v|, \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Agora, pela desiguadade de Hölder, Proposição 1.12 (ver Apêncice A) e do fato que $h \in L^q(0,1)$ segue

$$\int_0^1 |h^{q-1}|v||dx \leq \left(\int_0^1 |h|^q dx\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^1 |v|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Portanto,

$$h^{q-1}|v| \in L^1(0,1), \quad \forall\, v \in X.$$

Também podemos concluir de $u_n \to u$ q.t.p em Ω que $|u_n|^{q-2}u_nv \to |u_n|^{q-2}u_nv$ q.t.p em Ω. Logo, o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, Teorema A.36 (ver Apêncice B) garante que

$$\int_0^1 |u_n|^{q-2}u_nv \to \int_0^1 |u|^{q-2}uv, \quad \forall\, v \in X. \tag{B.44}$$

e como $I'_\lambda(u_n) \to 0$,

$$0 \leq |\langle I'_\lambda(u_n), v\rangle| \leq \|I'_\lambda(u_n)\|\|v\|_X \to 0, \quad \text{quando } \; n \to \infty, \quad \text{para cada } v \in X.$$

Assim,

$$\langle I'_\lambda(u_n), v\rangle \to 0, \quad \text{para todo } v \in C_0^\infty(0,1). \tag{B.45}$$

Combinando (B.43), (B.44) e (B.45) e o fato de $u_n \rightharpoonup u$ em X, temos

$$\begin{aligned}\langle I'_\lambda(u), v\rangle &= \lim_{n\to\infty}\left(\langle u_n, v\rangle_X + \lambda\int_0^1 |u_n|^{q-2}u_nv - b\int_0^1 u_nv - \int_0^1 f(u_n)vdx\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\langle I'_\lambda(u_n), v\rangle = 0.\end{aligned}$$

Logo, $\langle I'_\lambda(u), v\rangle = 0$, para toda $v \in C_0^\infty(0,1)$. Mas como $C_0^\infty(0,1)$ é denso em

$H^{1/2}(0,1)$, para cada $v \in X$, existe uma sequência (v_n) em $C_0^\infty(0,1)$ tal que $v_n \to v$ em X, então

$$\langle I'_\lambda(u), v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle I'_\lambda(u), v_n\rangle = 0$$

ou seja,

$$\langle I'_\lambda(u), v\rangle = 0, \quad \text{para todo } v \in X, \tag{B.46}$$

provando assim, a afirmação. Agora mostraremos que a solução u é não nula. Usando o Lema A.22 (ver Apêndice A) e (B.46), segue-se

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2}\left(\|u\|_X^2 + \frac{2\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q - a\int_0^1 |u|^2 dx - \int_0^1 f(u)u dx\right) \\ &> \frac{1}{2}\left(\|u\|_X^2 + \lambda\int_0^1 |u|^q - a\int_0^1 |u|^2 dx - \int_0^1 f(u)u dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\langle I'_\lambda(u), u\rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo $I_\lambda(u) > 0$. Se $u = 0$, então $I_\lambda(0) = 0$, contradizendo $I_\lambda(0) > 0$.

Afirmação: O nível mini-max c é estritamente positivo.

De fato, por (B.42) e $1 < q < 2$, obtemos $c > 0$. Concluindo

$$c > 0 \;\text{ e }\; u \neq 0.$$

Agora, mostraremos que $u_n \to u$ fortemente em X. Para isso é suficientemente provar que $I_\lambda(u) = c$, pois desta maneira teremos por (B.40) que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|_X^2}{2} = I_\lambda(u) - \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q + \frac{a}{2}\int_0^1 |u|^2 dx + \int_0^1 F(u) dx = \frac{\|u\|_X^2}{2},$$

ou seja, $\|u_n\|_X \to \|u\|_X$.

Assim, usando que $u_n \rightharpoonup u$ em X, $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_X = \|u\|_X$ e X é espaço de Hilbert podemos concluir que $u_n \to u$ em X. De fato, inicialmente, usando a proposição

A.33 (ver Apêncice B) e (B.39) observe que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\leq \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|u_n\|_X^2\right) + \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u_n|^q - \frac{a}{2}\int_0^1 |u_n|^2 dx - \int_0^1 F(u_n)dx\right) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|u_n\|_X^2 + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u_n|^q - \frac{a}{2}\int_0^1 |u_n|^2 dx - \int_0^1 F(u_n)dx\right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = c. \end{aligned}$$

Isto é, $I_\lambda(u) \leq c$. Vamos supor por contradição que ocorra $I_\lambda < c$. Então por (B.40)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\|u_n\|_X^2 &= 2\left(c - \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q + \frac{a}{2}\int_0^1 |u|^2 dx + \int_0^1 F(u)dx\right) \\ &> 2\left(I_\lambda(u) - \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q + \frac{a}{2}\int_0^1 |u|^2 dx + \int_0^1 F(u)dx\right) \\ &= \|u\|_X^2. \end{aligned} \tag{B.47}$$

Definamos $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_X}$ e $v = \dfrac{u}{c_0}$, onde

$$c_0 = \left(2c - \frac{2\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q + a\int_0^1 |u|^2 dx + 2\int_0^1 F(u)dx\right)^{-1/2} > 0.$$

Por $\|v_n\|_X = 1$, $u \neq 0$ e pela estimativa (B.47)

$$\|v\|_X = \frac{\|u\|_X}{c_0} < \frac{\|u\|_X}{\|u\|_X} = 1.$$

Assim, $0 < \|v\|_X < 1$. Lembrando que $\dfrac{u_n}{\|u_n\|_X} \rightharpoonup \dfrac{u}{c_0}$ em X, por (B.47) temos que para todo $h \in X^*$,

$$h(v_n) = h\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_X}\right) \to h\left(\frac{u}{c_0}\right) = h(v),$$

e portanto, $v_n \rightharpoonup v$ em X.

Uma vez que $c < \dfrac{\pi}{2\alpha_0}$, podemos encontrar $r > 1$, suficientemente próximo de 1 e $\alpha_0 < \alpha < \pi$, próximo de α_0, tais que $2\alpha_0 < 2\alpha r < \dfrac{\pi}{c}$ e como $0 < I_\lambda(u) < c$, obtemos que

$$2\alpha r < \frac{\pi}{c - I_\lambda(u)}. \tag{B.48}$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} r\alpha\|u_n\|_X^2 = r\alpha c_0^2 < \pi\left(\frac{c_0^2}{2(c - I_\lambda(u))}\right).$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} r\alpha\|u_n\|_X^2 < \pi\left(\frac{c_0^2}{2(c - I_\lambda(u))}\right). \tag{B.49}$$

Afirmação:

$$\frac{c_0^2}{2(c - I_\lambda(u))} = \frac{1}{1 - \|v\|_X^2}. \tag{B.50}$$

Com efeito, note que

$$\frac{1}{1 - \|v\|_X^2} = \frac{1}{1 - \dfrac{\|u\|_X^2}{c_0^2}} = \frac{c_0^2}{c_0^2 - \|u\|_X^2}.$$

Por outro lado,

$$\frac{c_0^2}{2} = c - I_\lambda(u) + \frac{\|u\|_X^2}{2},$$

logo,

$$\frac{1}{1 - \|v\|_X^2} = \frac{c_0^2}{c_0^2 - \|u\|_X^2} = \frac{c_0^2}{2(c - I_\lambda(u))}.$$

Concluindo assim a afirmação. De (B.49) e (B.50), nós obtemos

$$b := \lim_{n\to\infty} r\alpha\|u_n\|_X^2 < \frac{\pi}{1 - \|v\|_X^2}.$$

Então, escolha $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que,

$$r\alpha\|u_n\|_X^2 < \epsilon + b < \frac{\pi}{1 - \|v\|_X^2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Consequentemente, podemos encontrar p suficientemente próximo de $\dfrac{1}{1-\|v\|_X^2}$ tal que $1 < p < \dfrac{1}{1-\|v\|_X^2}$ e γ suficientemente próximo de π tal que $0 < \gamma < \pi$ verificando

$$r\alpha\|u_n\|_X^2 < \gamma p < \frac{\pi}{1-\|v\|_X^2}.$$

Além disso pelo Lema A.16 (ver Apendice A)

$$\int_0^1 |f(u_n)|^r dx \leq C\int_0^1 \exp(r\alpha u_n^2)dx = C\int_0^1 \exp\left(r\alpha\|u_n\|_X^2\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_X}\right)^2\right)dx$$
$$\leq C\int_0^1 \exp\left(p\gamma v_n^2\right)dx.$$

Mas, pelo que já foi provado, (v_n) é uma sequência em X com $\|v_n\|_X = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $v_n \rightharpoonup v$ em X e $0 < \|v\|_X < 1$. Desde que, $0 < \gamma < \pi$ e $1 < p < \frac{1}{1-\|v\|_X^2}$, estamos sob as hipóteses da proposição A.15 (ver Apêndice A), então a sequência $(\exp(\gamma v_n^2))$ é limitada em $L^p(0,1)$. Assim existe $K > 0$ tal que

$$\int_0^1 |f(u_n)|^r dx \leq K.$$

Isto é, $(f(u_n))$ é limitada em $L^r(0,1)$, para algum $r > 1$ e próximo de 1 escolhido anteriormente. Pelo Teorema A.41 (ver Apêncice B), temos que $f(u_n) \rightharpoonup f(u)$ em $L^r(0,1)$ e como $u_n \to u$ em $L^{r'}(0,1)$, pela definição A.40 (ver Apêncice B) e pela estimativa

$$\left|\int_0^1 f(u_n)u_n dx - \int_0^1 f(u)udx\right| \leq \|f(u_n)\|_r\|u_n - u\|_{r'} + \left|\int_0^1 (f(u_n) - f(u))udx\right|,$$

obtemos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(u_n)u_n dx = \int_0^1 f(u)udx. \tag{B.51}$$

Desde que, $I'_\lambda(u_n) \to 0$ em X^* e (u_n) é limitada em X, então por (B.51) temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_X^2 &= \lim_{n\to\infty}\left(\langle I'_\lambda(u_n),u_n\rangle - \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u_n|^q + a\int_0^1 |u_n|^2dx + \int_0^1 f(u_n)u_ndx\right)\\ &= -\frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q + a\int_0^1 |u|^2dx + \int_0^1 f(u)udx\\ &= \|u\|_X^2 - \langle I'_\lambda(u),u\rangle\end{aligned}$$

e consequentemente, por (B.46)

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_X^2 = \|u\|_X^2 - \langle I'_\lambda(u),u\rangle = \|u\|_X^2.$$

O que por (B.47) é uma contradição. Portanto, $I_\lambda(u) = c$. ■

Observação B.26 *O Lema anterior é válido se trocarmos o funcional I_λ por I_λ^+(ou I_λ^-).*

B.2.2 Solução positiva para o funcional I_λ

B.2.2.1 Solução positiva via o Teorema do Passo da Montanha

Proposição B.27 *Suponha que f satisfaz as condições $(f_{1,2}), (f'_{2,2}), (f_{3,2})$ e $(f_{5,2})-(f_{7,2})$ e $a > 0$. Então O problema (B.36) possui pelo menos uma solução positiva, para todo λ suficientemente pequeno.*

Demonstração: Análogo ao que foi feito no caso subcrítico (Seção B.1) o funcional I_λ^+ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha.

Agora, mostraremos que o funcional I_λ^+ satisfaz a condição (PS), para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno no nível C_λ^+ definido por $C_\lambda^+ = \inf_{g\in\Gamma^+}\max_{u\in g([0,1])} I_\lambda^+(u)$, onde $\Gamma^+ = \{g \in C([0,1],X) \;\; ; \;\; g(0) = 0 \; , \; g(1) = t_0\varphi_1\}$ e t_0 obtido no Lema B.9. Inicialmente, note que $\max_{t\in[0,1]} I_\lambda^+(g(t)) \geq I_\lambda^+(g(0)) = I_\lambda^+(0) = 0, \;\forall\; g \in \Gamma^+$. Logo,

$\max_{t\in[0,1]} I_\lambda^+(g(t)) \geq 0, \ \ \forall g \in \Gamma^+$ e consequentemente,

$$0 \leq \inf_{g\in\Gamma^+} \max_{u\in g([0,1])} I_\lambda^+(u) = C_\lambda^+ < \infty.$$

Seguindo os mesmos passos feitos no Lema B.25, obtemos que I_λ^+ satisfaz a condição Palais Smale no nível $c < \dfrac{\pi}{2\alpha_0}$ para todo $\lambda > 0$.

Agora mostraremos que $C_\lambda^+ < \dfrac{\pi}{2\alpha_0}$, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. De fato, defina $g_0^+ : [0,1] \to X$ dado por $g_0^+(t) = t(t_0\varphi_1)$. Segue que $g_0 \in \Gamma^+$ e além disso, como $g_0^+(t) \in V_k$, para todo $t \in [0,1]$, temos do Lema B.21 que

$$I_\lambda^+(g_0^+(t)) = I_\lambda(g_0^+(t)) \leq \eta(\lambda) < \frac{\pi}{2\alpha_0}, \ \forall\, t \in [0,1] \text{ e para } \lambda \text{ suficientemente pequeno.}$$

Portanto, $C_\lambda^+ \leq \max_{t\in[0,1]} I_\lambda^+(g(t)) \leq \eta(\lambda) < \dfrac{\pi}{2\alpha_0}$, para λ suficientemente pequeno. Finalmente, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, o Teorema de Passo da Montanha garante que existe $u \neq 0$ em X tal que $I_\lambda^+(u) = C_\lambda^+$ e $(I_\lambda^+)'(u) = 0$, isto é, u é um ponto crítico de I_λ^+ e portanto, uma solução positiva para o problema (B.36). ■

B.2.3 Solução negativa para o funcional I_λ

B.2.3.1 Solução negativa via o Teorema do Passo da Montanha

Proposição B.28 *Suponha que f satisfaz as condições $(f_{1,2}), (f_{2,2}'), (f_{3,2})$ e $(f_{5,2})-(f_{7,2})$ e $a > 0$. Então o problema (B.36) possui pelo menos uma solução negativa, para todo λ suficientemente pequeno.*

Demonstração: Análogo ao que foi feito na Proposição B.27. Para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, o Teorema de Passo da Montanha garante que existe $u \neq 0$ em X tal que $I_\lambda^-(u) = C_\lambda^- \leq I_\lambda^-(g_0^-) < \eta(\lambda)$, para λ suficientemente pequena e $(I_\lambda^-)'(u) = 0$, isto é, u é um ponto crítico de I_λ^- e portanto, uma solução negativa para o problema (B.36). ■

B.2.4 Solução via o Teorema de Linking

Proposição B.29 *Se valem* $(f_{1,2}), (f'_{2,2}), (f_{3,2})$ *e* $(f_{5,2}) - (f_{7,2})$ *e suponha* $\lambda_k \leq a < \lambda_{k+1}$ *para algum* $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$*. Então para* $\lambda > 0$ *suficientemente pequeno, o problema (B.36) possui pelo menos uma solução não trivial.*

Demonstração: Vamos obter uma função $u \in X$ que seja um ponto crítico para o funcional

$$I_\lambda : X \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q dx - \frac{a}{2}\int_0^1 |u|^2 dx - \int_0^1 F(u)dx.$$

Para isso, utilizaremos o teorema de Linking Teorema A.51 (ver Apêndice B) com a condição $(P.S)_{C_\lambda}$ com $C_\lambda < \dfrac{\pi}{2\alpha_0}$, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

Para garantirmos a existência desse ponto crítico (não nulo) para o funcional I_λ usaremos os Lemas B.19 e B.20 que garantem que o funcional I_λ satisfaz a geometria exigida pelo teorema de Linking. Continuaremos a utilizar as mesmas notações da seção B.1, isto é,

$X = V_k \oplus W_k$, onde $V_k = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_k \rangle$ e $W_k = V_k^\perp$. Nosso objetivo é obter uma esfera $S_\rho = \partial B_\rho \cap W_k$ e um retângulo $Q = (B_R \cap V_k) \oplus ([0, R\varphi_{k+1}])$ tais que:

(i) $I_\lambda\Big|_{S_\rho} \geq \beta > 0,$

(ii) $I_\lambda\Big|_{\partial Q} < \tau < \alpha; \quad 0 < \rho < R,$

(iii) $\sup\limits_{u \in \overline{Q}} I_\lambda(u) < \dfrac{\pi}{2\alpha_0}.$

Demonstração da Geometria de Linking

Prova do item (i): Seja α tal que $0 < \alpha_0 < \alpha < \pi$, analogamente ao que foi feito no Lema B.19, existe $\beta > 0$ e $\rho > 0$ tal que $I_\lambda\Big|_{S_\rho} \geq \beta$.

Prova do item (ii): A prova é igual ao que foi feito no caso subcrítico.

Prova do item (iii): Mostraremos que sob a hipótese $(f_{7,2})$, nós temos que

$$\max_{u \in \overline{Q}} I_\lambda(u) < \frac{\pi}{2\alpha_0}, \quad \text{para } \lambda > 0 \text{ suficientemente pequeno.} \tag{B.52}$$

Para isso, podemos escrever o funcional I_λ da seguinte forma

$$I_\lambda(u) = J(u) + \frac{\lambda}{q}\int_0^1 |u|^q dx, \text{ onde } J(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 - \frac{a}{2}\int_0^1 |u|^2 dx - \int_0^1 F(u)dx.$$

Para provar a nossa afirmação é suficiente provar que $\sup_{u\in\overline{Q}} J(u) < \dfrac{\pi}{2\alpha_0}$. De fato, suponha que

$$\sup_{u\in\overline{Q}} J(u) < \frac{\pi}{2\alpha_0}.$$

Então

$$\frac{\pi}{2\alpha_0} - \sup_{u\in\overline{Q}} J(u) > 0.$$

Portanto, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, obtemos

$$0 < \frac{\lambda}{q}\sup_{u\in\overline{Q}} \|u\|_{L^q(0,1)}^q < \frac{\pi}{2\alpha_0} - \sup_{u\in\overline{Q}} J(u),$$

isto é,

$$\sup_{u\in\overline{Q}} I_\lambda(u) \le \sup_{u\in\overline{Q}} J(u) + \frac{\lambda}{q}\sup_{u\in\overline{Q}} \|u\|_{L^q(0,1)}^q < \frac{\pi}{2\alpha_0},$$

para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, o que prova a nossa afirmação.

Então iniciamos a prova mostrando que

$$\sup_{u\in\overline{Q}} J(u) < \frac{\pi}{2\alpha_0}.$$

Seja $\mathbb{F} := V_{k+1} = \langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{k+1}\rangle$. Como $\overline{Q} \subset \mathbb{F}$ e $\mathbb{F}$ é um subespaço vetorial de dimensão finita, obtemos que, para todo $t \ge 0$ e todo $u \in \overline{Q}$.

$$\sup_{u\in\overline{Q}} J(u) \le \sup_{u\in\mathbb{F}} J(u) = \sup_{u\in\mathbb{F}, t\neq 0} J\left(|t|\frac{u}{|t|}\right) = \sup_{u\in\mathbb{F}, t>0} J(tu) \le \sup_{u\in\mathbb{F}, t\ge 0} J(tu). \quad \text{(B.53)}$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(tu) &= \frac{t^2}{2}\|u\|_X^2 - \frac{a}{2}t^2\int_0^1 |u|^2dx - \int_\Omega F(tu)dx \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|u\|_X^2 - \int_0^1 F(tu)dx, \quad \text{para todo } u \in F \text{ e } t \geq 0. \end{aligned} \tag{B.54}$$

Seja $\eta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dado por $\eta(t) = \dfrac{t^2}{2}\|u\|_X^2 - \displaystyle\int_0^1 F(tu)dx$. Pela hipótese (f_7) e do fato que no espaço de dimenão finita $\mathbb{F}$ as normas são equivalentes, isto é, existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega F(tu)dx \geq \frac{C_r}{r}\int_\Omega t^r|u|^r dx = \frac{C_r}{r}t^r\|u\|_{L^r(\Omega)}^r \geq C\frac{C_r}{r}t^r\|u\|_{X_p^s}^r. \tag{B.55}$$

Daí

$$\eta(t) \leq \frac{t^2}{2}\|u\|_X^2 - C\frac{C_r}{r}t^r\|u\|_X^r \leq \max_{t\geq 0}\left(\frac{t^2}{2}\|u\|_X^2 - C\frac{C_r}{r}t^r\|u\|_X^r\right). \tag{B.56}$$

Denotando por $g(t) := \dfrac{t^2}{2}\|u\|_X^2 - C\dfrac{C_r}{r}\|u\|_X^r t^r$, agora vamos obter $\max\limits_{t\geq 0} g(t)$. Observe que,

$$g'(t) = t\|u\|_X^2 - CC_r\|u\|_X^r t^{r-1}.$$

Logo, $g'(t) = 0$ se, e só se, $t = 0$ ou $t = \left(\dfrac{\|u\|_X^{2-r}}{CC_r}\right)^{\frac{1}{r-2}}$. Por outro lado,

$$g''(t) = \|u\|_X^2 - CC_r(r-1)\|u\|_X^r t^{r-2}.$$

Então, para $t = \left(\dfrac{\|u\|_X^{2-r}}{CC_r}\right)^{\frac{1}{r-2}}$, note que

$$g''\left\{\left(\frac{\|u\|_X^{2-r}}{CC_r}\right)^{\frac{1}{r-2}}\right\} = \|u\|_X^2 - (r-1)\|u\|_X^2 = \|u\|_X^2(2-r) < 0 \text{ (pois } r > 2).$$

Logo, g assume máximo global em $t = \left(\dfrac{\|u\|_X^{2-r}}{CC_r}\right)^{\frac{1}{r-2}}$. Assim,

$$\begin{aligned} g\left\{\left(\frac{\|u\|_X^{2-r}}{CC_r}\right)^{\frac{1}{r-2}}\right\} =& \frac{1}{2}\left(\frac{\|u\|_X^{2-r}}{CC_r}\right)^{\frac{2}{r-2}}\|u\|_X^2 - C\frac{C_r}{r}\|u\|_X^r\left(\frac{\|u\|_X^{2-r}}{CC_r}\right)^{\frac{r}{r-2}} \\ =& \left(\frac{1}{CC_r}\right)^{\frac{2}{r-2}}\left(\frac{r-2}{2r}\right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\max_{t\geq 0} g(t) = \left(\frac{1}{CC_r}\right)^{\frac{2}{r-2}}\left(\frac{r-2}{2r}\right) > 0.$$

Pela hipótese $(f_{7,2})$,

$$\begin{aligned} \max_{t\geq 0} g(t) &= \left(\frac{1}{CC_r}\right)^{\frac{2}{r-2}}\left(\frac{r-2}{2r}\right) \\ &< \left(\frac{1}{CC_r}\right)^{\frac{2}{r-2}}\left(\frac{r-2}{2r}\right)\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\left(\frac{2r}{r-2}\right)(CC_r)^{\frac{2}{r-2}} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\alpha_0}\right), \end{aligned}$$

Portanto de (B.56) e obtemos que $\eta(t) < \dfrac{\pi}{4\alpha_0}$, consequentemente

$$\max_{u\in\mathbb{F},\, t\geq 0} J(tu) \leq \max_{t\geq 0}\eta(t) \leq \frac{\pi}{4\alpha_0} < \frac{\pi}{2\alpha_0}.$$

Portanto de (B.53) segue-se

$$\sup_{u\in\overline{Q}} J(u) < \frac{\pi}{2\alpha_0}. \tag{B.57}$$

Finalizando a prova do item (iii).

Observação B.30 *Agora estamos aptos a mostrar que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, o funcional I_λ satisfaz a condição Palais-Smale no nível*

$$C_\lambda = \inf_{h\in\Gamma}\sup_{u\in\overline{Q}} I_\lambda(h(u)), \quad onde\ \ \Gamma = \{h \in C(\overline{Q}, X)\ ;\ h = id\ \ em\ \partial Q\}.$$

De fato, de (B.52), temos

$$\sup_{u\in\overline{Q}} I_\lambda(u) < \frac{\pi}{2\alpha_0}, \text{ para } \lambda > 0 \text{ suficientemente pequeno .}$$

Assim, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno

$$\inf_{h\in\Gamma}\sup_{u\in\overline{Q}} I_\lambda(h(u)) \le \sup_{u\in\overline{Q}} I_\lambda(u) < \frac{\pi}{2\alpha_0}.$$

Portanto, pelo Lema B.25 para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno I_λ satisfaz a condição Palais Smale $(P.S)_{C_\lambda}$, onde $C_\lambda = \inf_{h\in\Gamma}\sup_{u\in\overline{Q}} I_\lambda(h(u))$.

Logo, tomando $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, pelo Teorema de Linking com a condição $(P.S)_{C_\lambda}$ (ver Apêndice B, Teorema A.51) obtemos que $C_\lambda = \inf_{h\in\Gamma}\sup_{u\in\overline{Q}} I_\lambda(h(u))$ é um valor crítico do funcional I_λ com $C_\lambda \ge \beta$, isto é, existe $u_\lambda \in X$ solução fraca do problema B.36 tal que $0 < \beta \le I_\lambda(u_\lambda)$. Logo u_λ é não nula, pois $I_\lambda(0) = 0$. ■

B.2.5 Demonstração do Teorema B.24:

Agora mostraremos que u_λ é distinto dos demais pontos críticos encontrados para os funcionais I_λ^+ e I_λ^-.

De fato, analogamente como foi feito na prueva do Teorema B.4, segue do Lema B.21, que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, obtemos que $0 < C_\lambda^+, C_\lambda^- < \eta(\lambda) < \beta \le C_\lambda$. Portanto, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, o problema B.36 possui pelo menos três soluções não triviais.

Referências Bibliográficas

[1] ADIMURTHI, SRIKANTH, P. N., YADAVA, S. L. *Phenomena of critical exponent in* $\mathbb{R}^2$.Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 119 (1991), no. 1-2, 19-25.

[2] ADIMURTHI, YADAVA, S. L. *Multiplicity results for semilinear elliptic equations in a bounded domain of* $\mathbb{R}^2$ *involving critical exponents.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 17 (1990), no. 4, 481-504.

[3] ALVES, C. O., CARRIÃO, P. C., MIYAGAKI, O. H. *Nontrivial solutions of a class of quasilinear elliptic problems involving critical exponents.* Nonlinear equations: methods, models and applications (Bergamo, 2001), 225-238.

[4] AMBROSETTI, A., GARCIA, A., J. PERAL, I. *Existence and multiplicity results for some nonlinear elliptic equations: a survey.* Rend. Mat. Appl. (7)20 (2000), 167-198.

[5] AMBROSETTI, A., BREZIS, H., CERAMI, G. *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems.* J. Funct. Anal 122 (1994), 519-543.

[6] AMBROSETTI, A., PRODI, G. *On the inversion of some differentiable mappings with sin- gularities between Banach spaces.* Ann. Mat. Pura Appl. , 93(4), 231-246, 1972.

[7] AMBROSIO, V., ISERNIA, T. *On the multiplicity and concentration for p-fractional Schrödinger equations* , Appl. Math. Lett. 95 (2019), 13-22.

[8] AMGHIBECH, S. *On the discrete version of Picone's identity.* Discrete Appl. Math., 156(1) 2008, 1-10.

[9] ANOUAR, B. *Trudinger-Moser type inequality and existence of solution for perturbed non-local elliptic operators with exponential nonlinearity.* Commun. Pure Appl. Anal. 16 (2017), no. 1, 243-252.

[10] AUTUORI, G., PUCCI, P. *Elliptic problems involving the fractional Laplacian in* $\mathbb{R}^N$. J. Differential Equations 255 (2012), 2340-2362.

[11] AUBIN, T., WANG, W. Z. *Positive solutions of Ambrosetti-Prodi problems involving the critical Sobolev exponent.* Bull. Sci. Math., 125(4), 311-340, 2001.

[12] ARCOYA, D., VILLEGAS, S. *Nontrivial solutions for a Neumann problem with a nonlinear term asymptotically linear at* $-\infty$ *and superlinear at* $+\infty$, Math.Z. 219 (1995) 499-513.

[13] BARRIOS, B., COLORADO, E., SERVADEI, R., SORIA, F. *A critical fractional equation with concave-convex power nonlinearities*. Springer-NewYork. Math, 2010. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 32 (2015), no. 4, 875-900.

[14] BARRIOS, B., COLORADO, E., DE PABLO, A., SANCHEZ, U. *On some critical problems for the fractional Laplacian operator*. J. Differential Equations, 252 (2012), 6133-6162.

[15] BARTOLO, R., MOLICA, B., G. *Asymptotically linear fractional p-Laplacian equations*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 196 (2017), no. 2, 427?4.

[16] BERGER, M. S., PODOLAK, E. *On the solutions of a nonlinear Dirichlet problem.*Indiana Univ. Math. J., 24, 837-846, 1974/75.

[17] BRASCO, L., MOSCONI, S. SQUASSINA, M. *Optimal decay of extremal functions for the fractional Sobolev inequality.* Calc. Var. Partial Differential Equations 55 (2016), no. 2, Art. 23, 32 pp.

[18] BRÄNDLE, C.; COLORADO, E.; DE PABLO, A., SÁNCHEZ, U. *A concave-convex elliptic problem involving the fractional Laplacian.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 143 (2013), no. 1,39-71.

[19] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations.* Springer-NewYork. Math, 2010.

[20] BREZIS, H., LIEB, E. *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals.* Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), no. 3, 486-490.

[21] BREZIS H., MERLE, F. Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions. Comm. Partial Differential Equations.16 (1991), 1223-1253.

[22] BREZIS, H., NIRENBERG, L. *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci., Paris I 317 (1993) 465-472.

[23] CALANCHI, M., RUF, B. *Elliptic equations with one-sided critical growth.* Electron. J. Differential Equations, 520(1), 225-228, 2002.

[24] COSSIO J. *Introducción a la teoría de puntos críticos con aplicaciones a problemas elípticos semilineales*, Universidad de Colombia, sede Medellin, 2000.

[25] COSTA, D.G., MAGALHÃES, C.A. *Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity.* Nonlinear Anal. 23 (1994), 1401-1412.

[26] CHABROWSKI, J., YANG, J. *Existence theorems for the Schrödinger equation involving a critical Sobolev exponent.* Z. Angew. Math. Phys. 49 (1998), no. 2, 276-293.

[27] CHABROWSKI, J., YANG, J. *On the Neumann problem with combined nonlinearities*, Ann. Polon. Math. 85 (2005) 239-250.

[28] CHANG, X. *Multiplicity of solutions for semilinear elliptic problems with combined nonlinearities*, Commun. Contemp. Math. 13 (2011) 389-405.

[29] CHEN, W., MOSCONI, S., SQUASSINA, M. *Problems with critical Hardy nonlinearity.* J. Funct. Anal. 275 (2018), no. 11, 3065-3114.

[30] CHEN, W., MOSCONI, S., SQUASSINA, M. *Critical nonlocal systems with concave-convex powers.* Adv. Nonlinear Stud. 16 (2016), no. 4, 821-842.

[31] COLORADO, E., PERAL, I. *Semilinear elliptic problems with mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions.* J. Funct. Anal 199. no. 2(2003), 468-507.

[32] CAVALCANTI, M.M., CAVALCANTI, V. N.D. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev.* UEM/DMA, 2007.

[33] DE FIGUEIREDO, D.G., JIANFU, Y. *Critical superlinear Ambrosetti-Prodi problems.* Topol. Methods Nonlinear Anal. 14 (1999), no. 1, 59-80.

[34] DANCER, E.N. *On the ranges of certain weakly nonlinear elliptic partial differential equations.* J. Math. Pures Appl., 57(4), 351?366, 1978.

[35] DE FIGUEIREDO, D.G., MIYAGAKI, O.H., RUF, B. *Elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *with nonlinearities in the critical growth range.* Calc. Var. Partial Differ. Equ. 3(2), 139-153 (1995).

[36] DE PAIVA, F.O., MASSA, E. *Multiple solutions for some elliptic equations with a nonlinearity concave at the origin*, Nonlinear Anal. 66 (2007) 2940-2946.

[37] DE PAIVA, F.O., PRESOTO, A. E. *Semilinear elliptic problems with asymmetric nonlinearities.*J. Math. Anal. Appl. 409 (2014), no. 1, 254-262.

[38] DENG, Y. *On the superlinear Ambrosetti-Prodi problem involving critical Sobolev exponents.* Nonlinear Anal., 17(12), 1111-1124, 1991.

[39] DEL PEZZO, L., FERNÁNDEZ, B.J., LÓPEZ R.L. *An optimization problem for the first eigenvalue of p-fractional laplacian.* Math. Nachr. 291 (2018), no. 4, 632-651.

[40] DE FIGUEIREDO, D. G. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours.* Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81, Springer-Verlag, 1989.

[41] DE FIGUEIREDO, D.G., J.M.DE O., RUF, B. *On an inequality by N. Trudinger and J. Moser and related elliptic equations.* Commun. Pure Appl. Math. 55 (2002), 135-152.

[42] DE FIGUEIREDO, D. G, MIYAGAKI. O. H., RUF, B. *Elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *with nonlinearities in the critical growth range.* Calc. Var. Partial Differ. Equ. 3 (1995), 139-153.

[43] DE FIGUEIREDO, D. G., YANG. J. *Critical superlinear Ambrosetti-Prodi problems.* Topol. Methods Nonlinear Anal., 14(1), 59-80, 1999.

[44] DI NEZZA, E., PALATUCCI, G., VALDINOCI, E. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev Space.* Bull. Sci. Math. 136(2012), 521-573.

[45] Do Ó, J. M., MIYAGAKI, O. H., SQUASSINA, M. *Nonautonomous fractional problems with exponential growth.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 22 (2015), no. 5, 1395-1410.

[46] FALL M., WETH T.*Nonexistence results for a class of fractional elliptic boundary value problems*, preprint, arXiv:1201.4007v2.

[47] FISCELLA, A., SERVADEI, R., VALDINOCI, E. *Density properties for fractional Sobolev Spaces.* Annal. Acad. Scient. Fenn. Math. 40(2015), 235-253.

[48] FRANZINA, G., PALATUCCI, G. *Fractional p-eigenvalues.* Riv. Math. Univ. Parma (N.S.) 5 (2014), no. 2, 373-386. 35R11 (35B45 35P30).

[49] GARCÍA, A.J. P., PERAL, A.I., MANFREDI, J. J. *Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations.* Commun. Contemp. Math. 2 (2000), no. 3, 385-404.

[50] GIACOMONI, J., PRASHANTH, S., SREENADH, K. *$W^{1,N}$ versus C^1 local minimizers for elliptic functionals with critical growth in $\mathbb{R}^N$* . C. R. Math. Acad. Sci. Paris 347 (2009), no. 5-6, 255-260.

[51] GIACOMONI, J.,MISHRA, P.K, SREENADH, K. *Fractional elliptic equations with critical exponential nonlinearity.* Adv. Nonlinear Anal. 5 (2016), 57-74.

[52] GIACOMONI, J.,MISHRA, P.K, SREENADH, K. *Critical growth problem for* 1/2- *laplacian in* $\mathbb{R}$. Adv. Nonlinear Anal.5 (2016) 57-74.

[53] HUXIA,L., SHENGJUN, L.,He, WENFENG, H. *Non-Nehari manifold method for fractional p-Laplacian equation with a sign-changing nonlinearity.* J. Funct. Spaces 2018, Art. ID 7935706, 5 pp.

[54] HUANG, L., YANG, Y. *Asymmetric critical fractional p-Laplacian problems.* Electron. J. Differential Equations 2017, Paper No. 103, 12 pp.

[55] IANNIZZOTO, A., SQUASSINA, M. *1/2-Laplacian problem with exponential nonlinearity.* J. Math. Anal. Appl. 414 (2014) 372-385.

[56] IANNIZZOTO, A., SQUASSINA, M. *Weyl-type laws for fractional p-eigenvalue problems.* Anal. 88 (2014), no. 4, 233-245.

[57] IANNIZZOTO, A.,MOSCONI, S., SQUASSINA, M. *H^s versus C^0-weighted minimizers.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 22 (2015), no. 3, 477-497.

[58] IANNIZZOTO, A.,MOSCONI, S., SQUASSINA, M. *Global Hölder regularity for the fractional p-Laplacian.* Rev. Mat. Iberoam. 32 (2016), no. 4, 1353-1392.

[59] IULA, S., MAALAOUI, A., MARTINAZZI, L. *A fractional Moser-Trudinger type inequality in one dimension and its critical points*. Differential Integral Equations 29 (2016), no. 5-6, 455-492.

[60] JEANJEAN, L. *On the existence of bounded Palais-Smale sequences and applications to a Landesman-Lazer-type problem set on* $\mathbb{R}^N$. Proc. R. Soc. Edinb. 129 (1999), 787-809.

[61] JERRY, L., KAZDAN, F., WARNER, W. *Remarks on some quasilinear elliptic equations*. Comm. Pure Appl. Math., 28(5), 567-597, 1975.

[62] KHIDDI, M. *Multiple of solutions for nonlocal elliptic equations with critical exponent driven by the fractional p-Laplacian of order s.* Abstr. Appl. Anal. 2019, Art. ID 6091236, 6 pp.

[63] MARTINAZZI, L. *Fractional Adams-Moser-Trudinger type inequalities.* Nonlinear Anal. 127 (2015), 263-278.

[64] MINGFENG, Z. *The Fractional Sobolev Spaces and the Fractional Laplacians.* Lecture Notes, 2012.

[65] MIYAGAKI, O., MOTREANU, D., PEREIRA, F. *Multiple solutions for a fractional elliptic problem with critical growth*, preprint.

[66] MOTREANU, D., MOTREANU, V.V., PAPAGEORGIOU, N.S. *p-Laplacian equations with concave terms and asymmetric perturbations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 141 (2011) 171-192.

[67] MOSCONI, S., PERERA, K., SQUASSINA, M. ,YANG, Y. *The Brezis-Nirenberg problem for the fractional p-Laplacian.* Calc. Var. Partial Differential Equations 55 (2016), no. 4, Art. 105, 25 pp.

[68] MOUSOMI, B., DEBANGANA, M. *Sign changing solutions of p-fractional equations with concave-convex nonlinearities.* Topol. Methods Nonlinear Anal. 51 (2018), no. 2, 511?544.

[69] NGUYEN, L., GOUZHEN, L.*Elliptic equations and systems with subcritical and critical exponential growth without the Ambrosetti-Rabinowitz condition.* J. Geom. Anal. 24 (2014), no. 1, 118-143.

[70] NGUYEN, L., GOUZHEN, L.*N -Laplacian equations in RN with subcritical and critical growth without the Ambrosetti-Rabinowitz condition.* Adv. Nonlinear Stud. 13 (2013), no. 2, 289-308.

[71] LIU, Z.L., WANG, Z.Q. *On the Ambrosetti-Rabinowitz superlinear condition.* Adv. Nonlinear Stud. 4 (2004), 563-574.

[72] LI, G.B., ZHOU, H.S. *Asymptotically linear Dirichlet problem for the pLaplacian.* Nonlinear Anal. 43 (2001), 1043-1055.

[73] LIU, S.B., LI, S.J.: *Infinitely many solutions for a superlinear elliptic equation.* Acta. Math. Sin. 46 (2003), 625-630.

[74] LAWRENCE, C. E. *Weak convergence methods for nonlinear partial diferential equations.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[75] PAPAGEORGIOU, N.S., SMYRLIS, G. *A multiplicity theorem for Neumann problems with asymmetric nonlinearities.* Ann. Mat. Pura Appl. 189 (2010) 253-272.

[76] PARINI, E., BERNHARD, R. *On the Moser-Trudinger inequality in fractional Sobolev-Slobodeckij spaces.* J. Anal. Math. 138 (2019), no. 1, 281-300.

[77] PERERA, K., AGARWAL, R. P., O'REGAN, D. *Morse theoretic aspects of p-Laplacian operators.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 161. American Math- ematical Society, Providence (2010).

[78] PERERA, K. *Multiplicity results for some elliptical problems with concave nonlinearities*, J. Differential Equations 140 (1997) 133-141.

[79] PERERA, K. *Critical groups of pairs of critical points produced by linking subsets.* J. Differential Equations 140 no.1 (1997), 142-160.

[80] PUCCI, P., XIANG, M., ZHANG, B. *Multiple solutions for nonhomogeneous Schrödinger-Kirchhoff type equations involving the fractional p-Laplacian in* R^N. Calc. Var. Partial Differential Equations 54 (2015), no. 3, 2785-2806.

[81] RABINOWITZ, P. H. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations.* CBMS Reg. Conf. Ser. Math.vol. 65, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[82] RUICHANG, P. *Fractional p-Laplacian equations with subcritical and critical exponential growth without the Ambrosetti-Rabinowitz condition.* Mediterr. J. Math. 15 (2018), Art. 66, 15 pp.

[83] SAOUDI, K. $W^{s,p}$ *vs* C^1 *local minimizers for a critical functional related to fractional p-Laplacian.* Appl. Anal. 96 (2017), no. 9, 1586-1595

[84] SCHECHTER, M., ZOU, W.M. *Superlinear problems.* Pac. J. Math. 214 (2004), 145-160.

[85] SERRA, J., ROS-OTON, X. *The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: regularity up to the boundary*, J. Math. Pures Appl. (9) 101 (3) (2014) 275-302.

[86] STROOCK, D. W. *A concise introduction to the theory of integration.* Second edition. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994. 184 pp. ISBN: 0-8176-3759-1.

[87] SHIBO, L. *On superlinear problems without the Ambrosetti and Rabinowitz condition.* Nonlinear Anal. 73 (2010), no.3, 788-795.

[88] TAKAHASHI, F. *Critical and subcritical fractional Trudinger-Moser-type inequalities on* $\mathbb{R}$, Nonlinear Anal. 8 (2019), no. 1, 868-884.

[89] WILLEM, M. *Minimax Theorems: Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, vol. 24, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1996.

[90] YAN LI, Y., SHAFRIR, I. *Blow-up analysis for solutions of* $-\delta u = Ve^u$ *in dimension two.* Indiana Univ. Math. J. 43 (1994), 1255-1270.

[91] ZHANG, Y.M., D SHEN, Y.T. *Existence of solutions for elliptic equations without superquadraticity condition.* Front. Math. China 7, (2012) 587-595.

[92] ZHANG, Z., CALANCHI, M., RUF, B. *Elliptic equations in* R^2 *with one-sided exponential growth.* Commun. Contemp. Math., 6(6),947-971, 2004.