

Deborah Sampaio Antunes de Oliveira

**Efeitos de simetrias da equação de Lindblad no  
transporte quântico**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Emmanuel Araújo Pereira  
Coorientador: Prof. Dr. Humberto César Fernandes Lemos

Belo Horizonte

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

O48e Oliveira, Deborah Sampaio Antunes de.  
Efeitos de simetrias da equação de Lindblad no transporte quântico / Deborah Sampaio Antunes de Oliveira. – 2020.  
114f., enc. : il.

Orientador: Emmanuel Araújo Pereira.  
Coorientador: Humberto César Fernandes Lemos.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,  
Departamento de Física.  
Bibliografia: f. 91-93.

1. Sistemas quânticos. 2. Retificação. 3. Calor-Condução.  
4. Termodinâmica.

I. Título. II. Pereira, Emmanuel Araújo. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 530.145 (043)



Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Caixa Postal 702  
30.123-970 Belo Horizonte - MG - Brasil

Telefone (xx) (31) 3499 5637  
(xx) (31) 3499 5633  
Fax (xx) (31) 3499 5688  
(xx) (31) 3499 5600  
e-mail pgfisica@fisica.ufmg.br

**ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 639ª DISSERTAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DEFENDIDA POR DEBORAH SAMPAIO ANTUNES DE OLIVEIRA**, orientada pelo professor Emmanuel Araújo Pereira e coorientada pelo professor Humberto César Fernandes Lemos para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA**. Às 09:00 horas de treze de março de 2020, na sala 4129 do Departamento de Física da UFMG, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Emmanuel Araújo Pereira** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Humberto César Fernandes Lemos** (Coorientador - Departamento de Estatística, Física e Matemática/UFSJ), **Antônio Sérgio Teixeira Pires** (Departamento de Física/UFMG) e **Lucas Lages Wardil** (Departamento de Física/UFMG) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo a bacharel **DEBORAH SAMPAIO ANTUNES DE OLIVEIRA** à arguição de seu trabalho de dissertação, que recebeu o título de **“Efeitos de simetrias da equação de Lindblad no transporte quântico”**. Às 14:00 horas do mesmo dia a candidata fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação da candidata.

Belo Horizonte, 13 de março de 2020.

Prof. Emmanuel Araújo Pereira  
Orientador da estudante  
Departamento de Física/UFMG

Prof. Humberto César Fernandes Lemos  
Coorientador da estudante  
Departamento de Estatística, Física e Matemática/UFSJ

Prof. Antônio Sérgio Teixeira Pires  
Departamento de Física/UFMG

Prof. Lucas Lages Wardil  
Departamento de Física/UFMG

Candidata

Deborah Sampaio A. de Oliveira



# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais Sandra e Tadeu pelo amor, carinho e incentivo que me deram durante toda a minha vida.

Aos meus irmãos Victor, Micael e Driella pelo apoio e confiança.

Ao meu orientador Prof. Emmanuel pela sua amizade e seu auxílio durante a elaboração dessa dissertação.

Ao meu coorientador Prof. Humberto por toda a ajuda.

Aos amigos e professores da UFMG que direta ou indiretamente me ensinaram muitas lições e fizeram meus dias melhores.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.



*“Nobody ever figures out what life is all about, and it doesn’t matter.  
Explore the world. Nearly everything is really interesting if you go into it deeply enough.”  
(Richard P. Feynman)*





# Resumo

O entendimento de sistemas quânticos fora do equilíbrio e, mais especificamente, de propriedades de suas correntes de energia e spin possui não só um grande interesse teórico mas também tecnológico. Nesta dissertação, deixaremos mais claro a importância dessa área ao estudarmos certos modelos que apesar de simples já apresentam a ocorrência de fenômenos interessantes. Estudou-se cadeias unidimensionais de spins do modelo de Heisenberg e do modelo XXZ com uma estrutura graduada e que estão acopladas a reservatórios que tendem a fixar os spins das bordas em determinadas direções (“target polarization”). A retificação de corrente de spin e de energia e o recém descoberto fenômeno “one-way street” [1] foram analisados tendo em vista as condições necessárias para seu surgimento e manutenção. Este último, que consiste na não alteração do sentido da corrente de energia ao invertermos os banhos de lugar, pode inicialmente parecer levar a uma violação da segunda lei da termodinâmica mas esse não é o caso pois a corrente de energia consiste não apenas de uma contribuição devido ao calor mas também uma devido ao trabalho [2–4] o que nos leva a um paralelo com o emergente campo de estudo da termodinâmica quântica que também foi discutido brevemente. Em particular, o uso de simetrias da equação de Lindblad foi feito na dedução da existência desses fenômenos o que permitiu que os resultados encontrados fossem independentes do regime de transporte e do tamanho da cadeia. Além disso, outros fenômenos interessantes já descritos na literatura encontrados através dessa abordagem também foram apresentados. Por último, como um resultado original da autora, com um artigo publicado na EPL (Europhysics Letters), foi estendida a existência do fenômeno one-way street para banhos mais gerais (mas ainda do tipo “target polarization”) com pares de polarizações que incluem direções com ângulos arbitrários de um lado em relação a uma direção fixa do outro.

**Palavras-chave:** sistemas quânticos abertos, equação de Lindblad, cadeia XXZ, modelo de Heisenberg, retificação, fenômeno one-way street, termodinâmica quântica, calor quântico, trabalho quântico.



# Abstract

The understanding of non equilibrium quantum systems and, more specifically, of properties of their energy and spin currents has not only a great theoretical interest but also a technological one. In this dissertation, we will clarify the importance of this area by studying certain models that, although simple, already present the occurrence of interesting phenomena. We studied one-dimensional spin chains from the Heisenberg model and XXZ model with a graded structure that are coupled with reservoirs that tend to fix the edge spins in certain directions (target polarization). The rectification of the energy and spin currents and the recent discovered “one-way street” phenomenon [1] were analyzed in view of the conditions necessary for its emergence and maintenance. The latter, which consists in the absence of change of direction of the energy current when the baths are inverted, can initially seem to lead to a violation of the second law of thermodynamics but this is not the case because the energy current consists not only of a contribution due to heat but also one due to work [2–4] this leads us to a parallel with the emergent field of study of quantum thermodynamics that also was discussed briefly. In particular, the use of symmetries of the Lindblad equation was made in the deduction of the existence of those phenomena which allowed that the results found were independent of the transport regime and the size of the chain. Moreover, other interesting phenomena already described in the literature found through this approach were also presented. Finally, as an original result from the author, with a paper published in EPL (Europhysics Letters), the one-way street phenomenon has been extended to more general baths (but still target polarization) with pair of polarization that include directions with arbitrary angles on one side relative to a fixed direction on the other.

**Keywords:** open quantum systems, Lindblad equation, XXZ chain, Heisenberg model, rectification, one-way street phenomenon, quantum thermodynamics, quantum heat, quantum work.



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS</b>	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>Equação de Lindblad</b>	<b>23</b>
2.1.1	Protocolo de interações repetidas	25
<b>2.2</b>	<b>Heisenberg Graded</b>	<b>26</b>
2.2.1	Corrente de Energia	26
2.2.2	Corrente de Spin	28
<b>2.3</b>	<b>Cadeia XXZ Graded</b>	<b>30</b>
<b>2.4</b>	<b>Dissipadores do tipo Target Polarization</b>	<b>31</b>
<b>3</b>	<b>RETIFICAÇÃO E FENÔMENO ONE-WAY STREET</b>	<b>33</b>
<b>3.1</b>	<b>Retificação de corrente de energia e magnetização</b>	<b>33</b>
<b>3.2</b>	<b>Simetrias da equação de Lindblad</b>	<b>34</b>
<b>3.3</b>	<b>Fenômeno One-way street para a corrente de energia</b>	<b>35</b>
<b>3.4</b>	<b>Calor e Trabalho</b>	<b>38</b>
<b>4</b>	<b>PROPRIEDADES DE CADEIAS XXZ</b>	<b>41</b>
<b>4.1</b>	<b>Corrente de Energia</b>	<b>41</b>
<b>4.2</b>	<b>Corrente de magnetização</b>	<b>44</b>
<b>4.3</b>	<b>Retificação nula quando Delta é nulo</b>	<b>50</b>
<b>5</b>	<b>GENERALIZAÇÃO DO FENÔMENO ONE-WAY STREET PARA OUTROS DISSIPADORES</b>	<b>55</b>
<b>5.1</b>	<b>Forma Geral de Matriz Unitária 2x2</b>	<b>58</b>
<b>5.2</b>	<b>X-XY</b>	<b>59</b>
<b>5.3</b>	<b>X-Y ortogonal</b>	<b>65</b>
<b>5.4</b>	<b>Y-YZ</b>	<b>68</b>
<b>5.5</b>	<b>Y-Z ortogonal</b>	<b>74</b>
<b>5.6</b>	<b>Z-XZ</b>	<b>77</b>
<b>5.7</b>	<b>X-Z ortogonal</b>	<b>82</b>
<b>5.8</b>	<b>Unicidade do NESS</b>	<b>85</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>89</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>91</b>

<b>APÊNDICES</b>	<b>95</b>
<b>APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO DE LINDBLAD ATRAVÉS DO PROTOCOLO DE INTERAÇÕES REPE- TIDAS . . . . .</b>	<b>97</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>107</b>
<b>ANEXO A – ARTIGO: ONE-WAY STREET FOR THE ENERGY CURRENT: A UBIQUITOUS PHENOMENON IN BOUN- DARY DRIVEN QUANTUM SPIN CHAINS . . . . .</b>	<b>109</b>

# 1 Introdução

A ideia de energia é uma das mais fundamentais da ciência. Descrever um sistema a partir de uma grandeza que muda de forma mas é conservada revolucionou a maneira de explicar fenômenos naturais e facilitou a abordagem na resolução de problemas. Como exemplo das diversas formas de energia estudadas temos: potencial, cinética, química, térmica, entre outras.

Com respeito a isso, a teoria termodinâmica, que começou por volta do século XIX, foi desenvolvida com o foco na descrição de formas de energias como calor e trabalho. Além disso, ela se preocupa com a relação entre conceitos como temperatura, pressão, magnetização, volume, entre outros, de um sistema a partir de suas interações com um ambiente e de suas propriedades intrínsecas. A abordagem dessa teoria permitiu entendermos certos fenômenos em larga escala que resultam de um grande número de entidades sem a necessidade de entender o comportamento de cada uma delas separadamente. Apesar de isso levar a uma perda de informação em nível de detalhes, o escopo da teoria se torna bastante geral. Como exemplo mais típico de sistema estudado em termodinâmica temos o de um gás ideal dentro de um reservatório em que geralmente é observado o que ocorre com as grandezas citadas anteriormente ao deixarmos uma delas fixa. A partir desse exemplo, podemos ficar convencidos de que a divisão entre sistema de interesse e ambiente é também um importante aspecto a ser considerado na medida em que a imposição da fronteira nos permite entender até que ponto certos fenômenos são intrínsecos ao sistema e até que ponto eles dependem de fatores externos. A teoria se mostrou um grande sucesso, não só em termos teóricos, mas também práticos, pois foi um passo crucial na construção de máquinas térmicas a vapor que revolucionaram a forma de trabalho na sociedade e, em consequência, todas as outras esferas sociais.

Apesar disso, alguns físicos da época resolveram ir além das explicações gerais da termodinâmica. Com os trabalhos principalmente de Gibbs, Maxwell e Boltzmann começamos a entender melhor as suposições necessárias a serem feitas sobre a estrutura microscópica dos sistemas e com isso derivar as leis da termodinâmica por princípios probabilísticos. A teoria desenvolvida, denominada mecânica estatística, se mostrou de enorme sucesso, ainda assim ela possui um alcance de aplicação limitado: só é válida para sistemas em equilíbrio, ou seja, que não mudam suas propriedades macroscópicas com o tempo.

Infelizmente, ainda não existe uma estrutura teórica completa que descreva sistema fora do equilíbrio em termos gerais. Com isso, até hoje ainda são estudados fenômenos particulares com a esperança de que levem a generalizações. Um importante problema em

relação a esses sistemas, é o de derivar a lei fenomenológica de Fourier (que descreve a condução macroscópica de calor) a partir de mecanismos microscópicos e este é um dos grande problemas em aberto em Física na atualidade [5]. Certamente ele será beneficiado com o aprofundamento e possível construção de uma estrutura teórica completa para sistemas fora do equilíbrio. O estudo desses sistemas é uma área de pesquisa de muito interesse na atualidade, não apenas devido às motivações teóricas anteriores, mas também porque a criação e aperfeiçoamento de diversas tecnologias dependem de fenômenos fora do equilíbrio. Mais importante ainda, com o atual ambiente de miniaturização de tecnologias, a extensão desse estudo para sistemas quânticos se mostra indispensável.

Brevemente introduzindo, podemos dizer que a mecânica quântica é uma teoria geral que visa explicar fenômenos em todas as escalas mas que é de maior importância em escala muito pequena onde os fenômenos são distintivos da teoria [6]. Um estado quântico é uma entidade matemática que descreve o sistema estudado a partir da qual podemos calcular a probabilidade de certas variáveis dinâmicas (energia, momento, etc...) desse sistema terem certos valores medidos. A evolução temporal desses estados é dada pela equação de Schrödinger, em que  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  representa o estado quântico do sistema e entre colchetes temos o operador Hamiltoniano com um potencial  $V(\mathbf{r}, t)$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right] \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

ou mais geralmente pela equação de von Neumann se estamos considerando um ensemble de estados com uma adicional incerteza clássica:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] \quad (1.2)$$

em que  $H$  é o operador Hamiltoniano e  $\rho$  é o chamado operador densidade do sistema e descreve os estados quânticos possíveis do ensemble.

Esta teoria é a responsável pela grande revolução tecnológica trazida com o desenvolvimento dos computadores e promete ainda mais inovações com o conceito de computadores quânticos, isto é, computadores que fazem uso de fenômenos inteiramente quânticos (como o emaranhamento quântico, quando é possível descrever o estado geral de um sistema composto mas não o estado de cada ente independente). Mesmo com todo seu êxito na descrição de uma grande variedade de fenômenos ela ainda possui certas restrições. Talvez a restrição principal da teoria é o fato de ela descrever fenômenos em que não há perda de informação. Com isso, fenômenos fora do equilíbrio não fazem parte de seu escopo pois, pela própria definição, há perda de informação do sistema estudado para o ambiente e assim devemos buscar uma outra abordagem teórica para descrever tais fenômenos.

A teoria de sistemas quânticos abertos, ou seja, sistemas quânticos de interesse acoplados a um ambiente (reservatório), oferece uma estrutura a partir da qual podemos



estudar sistemas fora do equilíbrio em escala quântica já que o último pode ser visto como um caso particular do primeiro. Isso é devido ao fato de que em sistemas fora do equilíbrio estamos interessados em grandezas como correntes (de spin, energia, etc) e para isso é necessário que tenhamos um gradiente de uma grandeza potencial o que pode ser realizado através da imposição de dois ou mais reservatórios interagindo com o sistema. Por outro lado, o crescente e facilitado uso e manipulação de átomos frios [7, 8] é um dos principais fatores que ajudam na realização de experimentos na escala quântica em que são estudados sistemas fora do equilíbrio e por isso o entendimento teórico desses sistemas está sendo crucial como guia na escolha de novos experimentos que já são permitidos. Como um exemplo bastante geral de aplicações tecnológicas para esses sistemas temos o desenvolvimento de estrutura análogas aos componentes eletrônicos das tecnologias atuais como diodos, transistores e outros, mas com o uso de correntes de calor ao invés de corrente de elétrons [9]. Ao estudo e manipulação de correntes de calor foi dado o nome fonônica em analogia ao nome eletrônica. Em particular, é desejável que tenhamos um dispositivo, um diodo térmico [10], em que a corrente de calor possua um sentido preferencial, isto é, ao invertermos os banhos frio e quente de lugar o fluxo de calor não só muda de direção mas também de valor. A esse fenômeno damos o nome de retificação térmica. Uma das possíveis aplicações do uso de diodos térmicos seria, por exemplo, na reutilização da energia perdida em forma de calor nos dispositivos eletrônicos atuais já que o diodo poderia impedir que ela fosse descartada no ambiente e redirecionaria essa energia para ser usada de outra forma dentro do próprio dispositivo.

Matematicamente, para descrevermos sistemas quânticos abertos precisamos de uma estrutura diferente da usada para estudar sistemas fechados, isto é, a equação de Schrödinger e sua generalização como equação de Von Neumann não são mais válidas. Isso ocorre por que estas equações descrevem evoluções unitárias dos sistemas o que significa que não há perda de informação durante a evolução, mas para o caso de sistemas abertos a informação é perdida para o ambiente (que não é considerado como de interesse) e devemos encontrar uma forma de descrever essa perda em termos matemáticos. Como já foi dito, sistemas quânticos fora do equilíbrio são um caso particular de sistemas quânticos abertos, ou seja, sistemas quânticos de interesse acoplados a reservatórios. O estado estacionário de não equilíbrio (NESS) de alguns desses sistemas é descrito pelo ponto fixo da equação de Lindblad que tem a forma geral:

$$\dot{\rho}(t) = -i[H, \rho] + \sum_k \gamma_k (A_k \rho A_k^\dagger - \frac{1}{2} A_k^\dagger A_k \rho - \frac{1}{2} \rho A_k A_k^\dagger) \quad (1.3)$$

em que consideramos  $\hbar = 1$ ,  $A_k$  são os operadores de Lindblad que descrevem o ambiente e  $\gamma_k$  são as funções relacionadas ao acoplamento ao ambiente.

Essa equação descreve evoluções não unitárias de sistemas quânticos mas ela não é a mais geral possível. Na realidade, não há ainda uma equação geral que descreva todos os tipos de sistemas quânticos abertos permitidos pela definição. Por isso, ainda são necessárias

certas restrições nos tipos de sistemas analisados. No caso da equação de Lindblad temos como premissa principal a condição de Markov, ou seja, o sistema não possui “memória” e seu estado atual depende apenas do estado anterior (esse conceito é mais complexo de se entender em termos quânticos). Os operadores de Lindblad representam a parte não unitária da equação e fisicamente estão relacionados à decoerência ou à presença de banhos térmicos ou outros reservatórios que podem, por exemplo, fixar alguma grandeza do sistema no qual eles estão em contato. Um detalhe importante é o de que a forma dos operadores de Lindblad dependem de como a equação foi derivada. A equação de Lindblad do tipo “boundary-driven”, isto é, com reservatórios na borda que são os responsáveis pela origem da dinâmica é derivada usando-se o denominado “protocolo de interações repetidas” [11]. Esse protocolo parte de uma forma discreta da equação e representa um processo físico onde há a evolução de um acoplamento não passivo do sistema com o banho. Essa não passividade acaba por se tornar importante quando se tenta especificar quais as contribuições de energia (trabalho ou calor) do banho ao sistema [2].

Um modelo que apresenta retificação e que também possui interesse teórico é o de cadeia de spin XXZ unidimensional. Nele, o Hamiltoniano é:

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} [\alpha(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) + \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z] + \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i^z \quad (1.4)$$

e representa as interações de troca entre primeiros vizinhos com a constante de acoplamento idêntica para as direções X e Y e diferente para a direção Z. Além disso, o último termo da equação acima representa a interação dos spins com um campo magnético externo  $h_i$ . A retificação requer que haja uma certa assimetria no sistema e isso é geralmente feito colocando uma estrutura graduada no parâmetro  $\Delta$  (por exemplo,  $\Delta_{1,2} \leq \Delta_{2,3} \leq \Delta_{3,4} \leq \dots$ ). Mas essa condição não é suficiente para assegurar a existência de retificação. Na realidade, ainda não se sabe exatamente quais as condições necessárias e suficientes para a ocorrência de retificação. O estudo de retificação térmica para o caso clássico também já foi aprofundado e é atualmente de grande interesse [10, 12–16].

Para obtermos propriedades gerais do estado estacionário de não equilíbrio podemos fazer uso de simetrias da equação de Lindblad ao invés de resolver analiticamente (ou numericamente) as equações acima [17]. Denotando o lado direito da equação de Lindblad como  $\mathcal{L}[\rho]$ , dizemos que ela é invariante sob uma transformação unitária  $U$  caso  $\mathcal{L}[U\rho U^\dagger] = U\mathcal{L}[\rho]U^\dagger$ . Desse modo,  $U\rho(t)U^\dagger$  é uma nova solução da equação de Lindblad. Caso fique demonstrado que o estado estacionário de não equilíbrio (NESS) seja único, então obtemos:

$$\rho_{NESS} = U\rho_{NESS}U^\dagger \quad (1.5)$$

esse fato pode levar a diversas conclusões gerais em relação aos observáveis do sistema estudado. Esse uso de simetrias se mostra um atalho bastante útil principalmente na determinação da existência ou não de retificação nos modelos. Um resultado interessante

---

obtido com esse método foi o de que na ausência de campo magnético externo, a corrente de energia não muda se invertermos os banhos de lugar. A esse fenômeno foi dado o nome fenômeno “one-way street” [1]. Inicialmente, podemos pensar que isso leva a violação da segunda lei da termodinâmica, mas é importante ressaltar que esse não é caso pois a corrente de energia é composta por uma contribuição em forma de calor e outra em forma de trabalho [3]. Com isso, voltamos a descrição termodinâmica mas agora em escala quântica.

Essa nova área de pesquisa, que foi denominada termodinâmica quântica, promete diversas aplicações tecnológicas [18] assim como foi o caso para seu análogo clássico. A presença do fenômeno inteiramente quântico de emaranhamento é um fator extra que diferencia os fenômenos clássicos dos quânticos, abrindo a oportunidade de sua exploração na construção de máquinas térmicas quânticas. Na realidade, a relação entre termodinâmica e informação na escala quântica já está sendo estudada com um exemplo muito importante de trabalho [19–23] em que uma aparente violação da segunda lei da termodinâmica foi resolvida ao se mostrar a transformação de entropia em um quantificador de emaranhamento.

Tendo em vista as motivações apresentadas acima, neste trabalho visamos investigar melhor o fenômeno one-way street e o uso de simetrias em sistemas quânticos abertos. Estaremos interessados em cadeias de spin unidimensionais com uma estrutura graduada, com presença ou não de campo magnético externo e com reservatórios atuando nas bordas do tipo “target polarization”, ou seja, reservatórios que tentam fixar os spins da borda em certa direção a partir de interação com ele. A definição e entendimento de todos esses conceitos ficarão claros no desenvolvimento deste trabalho. O restante da dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 2 explicamos os conceitos relacionados a sistemas quânticos abertos que serão necessários no resto do trabalho, além de apresentarmos os modelos de cadeias de spin a serem estudados, os modelos de Heisenberg e XXZ. No capítulo 3 é dada ênfase ao fenômeno de retificação térmica e one-way street além de também ser explicitado o papel fundamental de se dividir a corrente de energia em contribuições de calor e trabalho. No capítulo 4 são apresentados diversos resultados interessantes da literatura que foram encontrados usando-se simetrias da equação de Lindblad. Já no capítulo 5 temos a generalização do fenômeno one-way street para vários outros banhos do tipo “target-polarization” o que resultou na publicação de um artigo na EPL (Europhysics Letters) que está anexado no final dessa dissertação. Por fim, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões obtidas assim como sugestões de futuras pesquisas que poderão se beneficiar dos resultados obtidos no presente trabalho. Uma forma de se chegar na equação de Lindblad é apresentada no apêndice A com uso do chamado protocolo de interações repetidas.



## 2 Sistemas Quânticos Abertos

A definição de sistemas quânticos abertos é direta e abrangente: são sistemas quânticos de interesse acoplados a um outro, denominado ambiente, em que a interação entre eles é significativa, mas a descrição deste último é feita apenas de forma efetiva. Por ter uma definição tão geral, a abordagem para se estudar a dinâmica desses sistemas pode ser bem diferente dependendo da área de interesse [24] (óptica, informação quântica, matéria condensada, etc.). A partir dessa generalidade também já podemos concluir a importância do seu estudo mas, na realidade, esse estudo é ainda mais relevante por estar relacionado a questões de natureza fundamental para a mecânica quântica.

Geralmente, o que estabelecemos como ambiente é um reservatório (banho) térmico ou magnético que pode ter um número finito ou infinito de graus de liberdade. Entretanto, devido à complexidade e ao tamanho dos banhos normalmente usados, o objetivo principal da teoria de sistemas quânticos abertos se torna o de encontrar uma descrição também efetiva da dinâmica, ou seja, da matriz densidade do sistema de interesse e de seus observáveis, já que uma descrição exata seria muito difícil ou até impossível. Neste trabalho, focaremos em observáveis relacionados a fenômenos de transporte quântico como correntes de energia (separadas em calor e trabalho) e correntes de magnetização.

O sistema como um todo é considerado fechado e portanto evolui unitariamente. Na Figura 1 representamos essa situação. No caso de termos um sistema total de dimensão finita, podemos escrever o Hamiltoniano total  $H$  como uma soma dos Hamiltonianos desacoplados do sistema de interesse  $H_S$ , do ambiente  $H_A$  e mais um termo de interação  $H_I$ :

$$H = H_S \otimes \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_S \otimes H_A + H_I \quad (2.1)$$



Figura 1 – Divisão entre sistema de interesse S e ambiente A em que a interação entre eles está representada pela seta azul e explicitamos que o sistema como um todo é considerado fechado.

Podemos também escrever a matriz densidade total inicial como o produto tensorial entre a do sistema e a do ambiente caso consideremos que correlações iniciais entre eles não existam. Com isso, usando os mesmos subscritos:

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_A(0) \quad (2.2)$$

e o estado evoluído após um tempo  $t$  será então dado por:

$$\rho(t) = U\rho(0)U^\dagger \quad (2.3)$$

em que  $U = e^{-iHt}$  é o operador unitário de evolução temporal e estaremos considerando  $\hbar = 1$ . Caso queiramos apenas informação sobre o estado do sistema, nós somamos sobre os graus de liberdade do ambiente e isso é feito através do traço parcial:

$$\rho_S(t) = \text{tr}_A[U(\rho_S(0) \otimes \rho_A(0))U^\dagger] \quad (2.4)$$

em que  $\rho_S(t)$  é chamada matriz densidade reduzida do sistema. O objetivo então se torna encontrar uma equação de movimento que simbolize essa evolução. Na maioria dos casos, uma descrição precisa dessa evolução é impossível e portanto são feitas diversas aproximações até se chegar numa equação de movimento que seja satisfatória o suficiente dependendo do propósito em vista.

Na prática, todo sistema quântico é aberto e sua descrição com o uso da equação de Schrödinger será sempre uma idealização. Este é o caso não apenas por que é impossível termos um total isolamento dos sistemas mas, mais importante ainda, é devido ao fato de que a própria descrição da evolução do sistema que está sendo estudado requer que sejam feitas medições nele e isso é um processo exterior que inevitavelmente afeta seu estado quântico. Com isso, percebemos que entender melhor esses sistemas pode nos ajudar a esclarecer questões envolvendo o “Problema da Medição”, ou seja, como o “colapso” da função de onda ocorre ao ser feita uma medição e, sem dúvidas, este é um dos problemas mais elementares de mecânica quântica ainda sem resposta satisfatória. Outra área de pesquisa que é elementar e será beneficiada com um melhor entendimento desses sistemas é a da transição entre o mundo clássico e o quântico. Isso é verdadeiro porque a descrição idealizada através da equação de Schrödinger se torna rapidamente ineficiente com a expansão do sistema.

Para esclarecer melhor o que queremos dizer com medição, explicitamos o efeito da mediação de um observável  $A$  no estado do sistema num dado instante:

$$\rho_d = \frac{P_A(E)\rho_a P_A(E)}{\text{tr}(P_A(E)\rho_a P_A(E))} \quad (2.5)$$

em que  $\rho_d$  denota o estado depois da medida,  $\rho_a$  denota o estado antes e  $P_A(E)$  é um operador de medida projetiva do observável  $A$  onde  $E$  é o conjunto de Borel (aqueles em que podemos associar uma medida nos reais) em que a medição de fato foi encontrada.

Isso é um postulado da teoria que indica que além da medida mudar o estado do sistema, essa mudança ocorre de forma probabilística o que torna o problema de descrever seus efeitos ainda mais difícil.

Além do interesse teórico discutido acima, esses sistemas possuem ainda uma grande e diversa possibilidade de uso na criação de novas tecnologias. Como exemplo mais significativo, podemos citar o do possível uso na resolução do problema da decoerência na construção de computadores quânticos. Devido ao fato já mencionado de que é impossível isolar por completo um sistema quântico, estados quânticos fabricados com o intuito de serem feitas operações lógicas com eles possuem um tempo de vida tão curto que se torna inviável que essas operações sejam feitas de forma ou numa quantidade significativa. É provável que, modelando melhor o ambiente e sua interação com o sistema, estaremos mais aptos a combater a decoerência causada pelo ambiente no sentido de fazer com que ela seja reduzida e se torne controlável.

Finalmente, há ainda outros dois problemas que estão relacionados entre si, de interesse também fundamental em física que podem ser beneficiados pelo estudo de sistemas quânticos abertos. O primeiro é o da dedução da equação de Fourier e suas condições de aplicabilidade a partir de uma descrição microscópica do sistema, e o segundo é o do estabelecimento de um “framework” universal para descrevermos sistemas quânticos e clássicos fora do equilíbrio, assim como temos um muito bem estabelecido (em termos de ensembles ou equivalentes), com postulados e leis, para o caso de sistemas em equilíbrio. Resolver esses problemas poderá avançar nosso conhecimento em Física de uma forma comparável ao da revolução trazida pelo estabelecimento da mecânica estatística de equilíbrio como uma área de conhecimento por si, elevando a mecânica estatística fora do equilíbrio ao mesmo status.

## 2.1 Equação de Lindblad

Uma das formas de classificarmos um sistema quântico é em relação a quanto de efeito sua “memória” possui no seu presente estado. Classicamente, dizemos que sistemas onde esse efeito é de curto alcance são markovianos e onde o contrário ocorre, não-markovianos. Infelizmente, em mecânica quântica, definir fisicamente e em consequência matematicamente conceitos similares não é uma tarefa tão direta como pode-se inicialmente pensar. É a já citada perturbação causada por medições um dos motivos que torna nossa tarefa mais complicada. Podemos resumir essa dificuldade na seguinte frase: “Em mecânica quântica, ausência de medição não é equivalente a uma medição onde não se sabe o resultado”. Como consequência, há várias definições de processos markovianos quânticos sendo usadas e abaixo apresentarei a mais aceita delas.

A equação de Lindblad é a mais geral possível para a descrição de sistemas quânticos

abertos markovianos. Nesse caso, o que é entendido por sistemas markovianos é que as correlações quânticas, ou seja, relações estatísticas lineares entre observáveis ou estados (por exemplo, emaranhamento) vivem por um período de tempo curto o suficiente. Isso pode ser realizado de várias formas e na próxima sessão será apresentado uma delas. De qualquer modo, a equação para o qual seremos levados é a chamada equação de Lindblad que é:

$$\frac{d\rho_S(t)}{dt} = -i[H_S(t), \rho_S(t)] + \sum_k \gamma_k \left( V_k(t)\rho_S(t)V_k^\dagger(t) - \frac{1}{2}\{V_k^\dagger(t)V_k(t), \rho_S(t)\} \right) \quad (2.6)$$

em que  $\gamma_k \geq 0$  são as denominadas constantes de decaimento,  $V_k(t)$  são os chamados operadores de Lindblad,  $\rho_S(t)$  é a matriz densidade reduzida do sistema,  $H_S(t)$  é o Hamiltoniano do sistema, e estamos considerando unidades em que  $\hbar = 1$ . Através de exemplos nos próximos capítulos entenderemos melhor o papel dessas quantidades e como modelá-las dado um sistema físico.

Assim, vemos que a equação de Lindblad é a equação de Von Neumann para a evolução unitária de matrizes densidades mas com um termo adicional que é comumente chamado de dissipador. Este termo, em palavras gerais, modela o decaimento de correlações entre sistema e ambiente com o passar do tempo. No estudo de sistemas quânticos fora do equilíbrio, que é o foco deste trabalho, o mais interessante é sabermos a forma de  $\rho_S(t)$  no limite de  $t$  tendendo a infinito onde as propriedades macroscópicas do sistema não variam mais (estacionário) mas ainda podem existir correntes não nulas (não equilíbrio). A existência e unicidade desse estado, denominado “estado estacionário de não equilíbrio” e simbolizado por  $\rho_{NESS}$  é algo que deve ser entendido em detalhes para cada tipo de sistema considerado.

Ainda que não precisemos da forma explícita do estado estacionário para as considerações dos próximos capítulos, vamos mostrar brevemente como podemos calculá-lo. Se escrevermos o lado direito da equação de Lindblad como  $\mathcal{L}[\rho]$  o estado estacionário de não equilíbrio satisfaz:

$$\mathcal{L}[\rho_{NESS}] = 0 \quad (2.7)$$

e assim queremos determinar o núcleo do operador  $\mathcal{L}$ . Isso pode ser feito através de um processo chamado “vectorization”, em que são empilhadas as colunas de uma matriz tal que seja formado um vetor da seguinte forma:

$$vec \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Pode ser demonstrado que para matrizes quadradas  $A, B, C$  quaisquer temos:

$$vec(ABC) = (C^T \otimes A)vecB \quad (2.9)$$



em que o produto tensorial de matrizes é dado por:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Cada termo da equação de Lindblad pode ser transformado de uma das seguintes três formas:

$$\begin{aligned} \text{vec}(A\rho C) &= C^T \otimes \text{Avec}(\rho) \\ \text{vec}(A\rho) &= \text{vec}(A\rho I) = I^T \otimes \text{Avec}(\rho) \\ \text{vec}(\rho A) &= \text{vec}(I\rho A) = A^T \otimes \text{Ivec}(\rho) \end{aligned} \quad (2.11)$$

logo, a equação fica:

$$\frac{d\text{vec}(\rho)}{dt} = W\text{vec}(\rho) \quad (2.12)$$

e o problema de encontrar o estado estacionário se torna:

$$W\text{vec}(\rho_{NESS}) = 0 \quad (2.13)$$

em que  $W$  é simplesmente uma matriz, isto é, um problema conceitualmente simples de álgebra linear. Computacionalmente, entretanto, devido a natureza exponencial da complexidade de sistemas quânticos o problema se torna rapidamente impraticável de ser resolvido nos computadores atuais, requerendo simplificações.

Como última observação, é importante deixarmos claro que no cenário de todos os sistemas quânticos abertos possíveis (markovianos ou não, entre outras classificações) a equação de Lindblad possui um escopo de aplicação limitado e que encontrar uma equação que seja, de fato, geral na descrição desses sistemas é um dos grande problemas em abertos na área [25].

### 2.1.1 Protocolo de interações repetidas

Há diversas formas de deduzirmos a equação de Lindblad dada a condição de sistemas markovianos apresentada na seção anterior. Por exemplo, podemos traduzir essa condição em termos de operadores quânticos e termos uma dedução inteiramente matemática com o uso de mapas completamente positivos ou ainda podemos ter uma dedução microscópica com suposições físicas mas que é perturbativa. Uma dedução que é física mas que não é perturbativa é dada pelo chamado “Protocolo de Interações Repetidas”. Ainda que esse protocolo também necessite de certas aproximações, há duas principais vantagens nessa abordagem. A primeira é que não requer conceitos muito intrincados para entender seu processo (no caso inteiramente matemático precisaríamos de um pouco mais de esforço nesse sentido) e em segundo lugar, e talvez mais importante, é que ele é realizável experimentalmente. A equação de Lindblad deduzida dessa forma é comumente chamada

de “boundary-drive”, ou seja, dirigida pelas bordas, e com a descrição do protocolo a seguir ficará mais claro o porquê deste nome ser adequado.

Tendo em vista os tipos de sistemas que estaremos interessados nessa dissertação, o protocolo consistirá no seguinte processo: consideraremos um sistema quântico  $H_S$  acoplado a dois banhos  $H_L$  e  $H_R$  e intervalos de tempos de medida  $\tau$ . Inicialmente, no tempo  $t = 0$  e no começo de cada intervalo, o sistema estará desacoplado dos banhos:

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_A(0) \quad (2.14)$$

daí, acoplamos os banhos e deixamos tudo evoluir por um tempo  $\tau$ . Após isso, tomamos o traço parcial sobre os banhos e acoplamos o sistema novamente a dois novos banhos até o final do segundo intervalo de tempo. Repetimos esse procedimento indefinidamente. No final, tomamos o limite  $\tau \rightarrow 0$ . Em outras palavras, deixamos o sistema interagir com o banho num intervalo curto de tempo, descartamos o banho usado e introduzimos um novo para interagir com o sistema no mesmo intervalo de tempo, fazendo esse processo indefinidamente. Percebemos que a condição de Markov é realizada quando descartamos os banhos e fazemos o limite de intervalo de tempo tendendo a zero e portanto é como se a memória do sistema fosse atualizada a cada iteração. No apêndice A estão feitas as contas de forma detalhada para a dedução da equação de Lindblad segundo este protocolo.

## 2.2 Heisenberg Graded

Além do hamiltoniano da cadeia XXZ, também é de grande interesse teórico o estudo do Hamiltoniano do modelo de Heisenberg isotrópico (XXX). No capítulo 5 veremos mais de uma situação onde ele será usado. O Hamiltoniano para o caso “graded” é dado abaixo:

$$H = \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k (\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z) \quad (2.15)$$

### 2.2.1 Corrente de Energia

As correntes são as quantidades de maior interesse quando estamos estudando fenômenos de transporte em sistemas fora do equilíbrio. Abaixo, vamos deduzir por primeiros princípios uma forma fechada para o operador corrente de energia do modelo de Heisenberg graduado e na próxima subseção será feito o mesmo para a corrente de spin. Escrevemos:

$$H = \sum_{k=1}^{N-1} \epsilon_{k,k+1} \quad (2.16)$$

em que:

$$\epsilon_{k,k+1} = \alpha_k (\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z) \quad (2.17)$$

representa a energia da interação entre o spin  $k$  e  $k + 1$ .

Definimos, pela equação de continuidade, o fluxo de energia  $J_k^E$  do spin  $k$  para o spin  $k + 1$ :

$$\frac{d}{dt}\langle\epsilon_{k,k+1}\rangle = \langle J_k^E \rangle - \langle J_{k+1}^E \rangle \quad (2.18)$$

calculando:

$$\frac{d}{dt}\langle\epsilon_{i,i+1}\rangle = \frac{d}{dt}(Tr(\rho\epsilon_{i,i+1})) = Tr\left(\frac{d}{dt}(\rho\epsilon_{i,i+1})\right) \quad (2.19)$$

Como estamos interessados no fluxo no estado estacionário basta que o calculemos para um spin no meio da cadeia pois nessa situação o fluxo local em cada spin é o mesmo. Com isso, para  $1 < i < N$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\epsilon_{i,i+1}\rangle &= -iTr([H, \rho]\epsilon_{i,i+1}) \\ &= -iTr(H\rho\epsilon_{i,i+1} - \rho H\epsilon_{i,i+1}) \\ &= -iTr[\rho(\epsilon_{i,i+1}H - H\epsilon_{i,i+1})] \\ &= -iTr(\rho[\epsilon_{i,i+1}, H]) = i\langle[H, \epsilon_{i,i+1}]\rangle \\ &= i\langle\left[\sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k(\sigma_k^x\sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y\sigma_{k+1}^y + \sigma_k^z\sigma_{k+1}^z), \right. \\ &\quad \left. \alpha_i(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z\sigma_{i+1}^z)\right]\rangle \end{aligned} \quad (2.20)$$

em que foi usada a equação de Lindblad para substituir a derivada e não consideramos o dissipador já que ele atua nas bordas, e na terceira igualdade foi usado o fato de o traço ser invariante por permutações cíclicas.

Quando  $k \neq i - 1, i$  ou  $i + 1$  o comutador é nulo, assim:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\epsilon_{i,i+1}\rangle &= i\langle[\epsilon_{i-1,i}, \epsilon_{i,i+1}] + [\epsilon_{i,i+1}, \epsilon_{i,i+1}] + [\epsilon_{i+1,i+2}, \epsilon_{i,i+1}]\rangle \\ &= i\langle[\epsilon_{i-1,i}, \epsilon_{i,i+1}] - i\langle[\epsilon_{i,i+1}, \epsilon_{i+1,i+2}]\rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

Logo, pela definição teremos:

$$\langle J_i^E \rangle = i\langle[\epsilon_{i-1,i}, \epsilon_{i,i+1}]\rangle \quad (2.22)$$

para  $1 < i < N$ .

Calculando:

$$\begin{aligned} \langle J_i^E \rangle &= i\langle[\alpha_{i-1}(\sigma_{i-1}^x\sigma_i^x + \sigma_{i-1}^y\sigma_i^y + \sigma_{i-1}^z\sigma_i^z), \\ &\quad \alpha_i(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z\sigma_{i+1}^z)]\rangle \end{aligned} \quad (2.23)$$

daí:

$$\begin{aligned}
\langle J_i^E \rangle = & i \langle \alpha_{i-1} \alpha_i (\sigma_{i-1}^x \sigma_i^x \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_{i-1}^x \sigma_i^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y \\
& + \sigma_{i-1}^x \sigma_i^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \sigma_{i-1}^y \sigma_i^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_{i-1}^y \sigma_i^y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y \\
& + \sigma_{i-1}^y \sigma_i^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \sigma_{i-1}^z \sigma_i^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_{i-1}^z \sigma_i^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y \\
& + \sigma_{i-1}^z \sigma_i^z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - \sigma_{i-1}^x \sigma_i^x \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y \\
& - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y \\
& - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y - \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \\
& - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) \rangle
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Usando:

$$\begin{aligned}
\sigma^x \sigma^y &= -\sigma^y \sigma^x = i\sigma^z \\
\sigma^y \sigma^z &= -\sigma^z \sigma^y = i\sigma^x \\
\sigma^z \sigma^x &= -\sigma^x \sigma^z = i\sigma^y
\end{aligned} \tag{2.25}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle J_i^E \rangle = & i \alpha_{i-1} \alpha_i \langle i \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y - i \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \\
& - i \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + i \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + i \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x \\
& - i \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - i \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x + i \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x \\
& + i \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y - i \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - i \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \\
& + i \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \rangle
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
\langle J_i^E \rangle = & \alpha_{i-1} \alpha_i \langle -\sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y + \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \\
& + \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x \\
& + \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y + \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x \\
& - \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y + \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y + \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \\
& - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \rangle
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Logo:

$$\boxed{
\begin{aligned}
\langle J_i^E \rangle = & 2\alpha_{i-1} \alpha_i \langle \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z + \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x \\
& + \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y \\
& - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x \rangle
\end{aligned}
} \tag{2.28}$$

é a corrente de energia do modelo.

## 2.2.2 Corrente de Spin

Como a interação de troca entre spins vizinhos afeta a direção desses spins de forma a eles estarem no mesmo sentido ou contrário ao de seus vizinhos, em um certo

instante, é como se tivéssemos “ondas de spins” acontecendo em várias direções e o efeito geral delas é dado pela quantidade denominada corrente de spin.

Vamos considerar um spin no meio da cadeia:  $1 < i < N$ . A equação abaixo define o fluxo de magnetização médio do spin  $i$  para o spin  $i + 1$  denotado  $J_i^M$ :

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma_i^z\rangle = \langle J_{i-1}^M\rangle - \langle J_i^M\rangle \quad (2.29)$$

Novamente, como estaremos interessados no fluxo no estado estacionário, onde o fluxo em cada spin é o mesmo, basta que o calculemos para um spin no meio da cadeia. Calculando o lado esquerdo obtemos:

$$\frac{d\langle\sigma_i^z\rangle}{dt} = \frac{d}{dt}(\text{Tr}(\rho\sigma_i^z)) = \text{Tr}\left(\frac{d\rho}{dt}\sigma_i^z\right) = -i\text{Tr}([H, \rho]\sigma_i^z) + \text{Tr}(D(\rho)\sigma_i^z) \quad (2.30)$$

em que o último termo é nulo. Assim:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\sigma_i^z\rangle &= -i\text{Tr}([H, \rho]\sigma_i^z) \\ &= -i\text{Tr}(H\rho\sigma_i^z - \rho H\sigma_i^z) \\ &= -i\text{Tr}[\rho(\sigma_i^z H - H\sigma_i^z)] \\ &= -i\text{Tr}(\rho[\sigma_i^z, H]) \\ &= i\langle[H, \sigma_i^z]\rangle \\ &= i\langle\left[\sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k(\sigma_k^x\sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y\sigma_{k+1}^y + \sigma_k^z\sigma_{k+1}^z), \sigma_i^z\right]\rangle \end{aligned} \quad (2.31)$$

Quando  $k \neq i, i - 1$  o comutador é nulo e assim sobram os termos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\sigma_i^z\rangle &= i\{\alpha_{i-1}\langle[\sigma_{i-1}^x\sigma_i^x + \sigma_{i-1}^y\sigma_i^y + \sigma_{i-1}^z\sigma_i^z, \sigma_i^z]\rangle \\ &\quad + \alpha_i\langle[\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z\sigma_{i+1}^z, \sigma_i^z]\rangle\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

daí:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\sigma_i^z\rangle &= i\{\alpha_{i-1}\langle\sigma_{i-1}^x\sigma_i^x\sigma_i^z + \sigma_{i-1}^y\sigma_i^y\sigma_i^z + \sigma_{i-1}^z\sigma_i^z\sigma_i^z \\ &\quad - \sigma_{i-1}^x\sigma_i^z\sigma_i^x - \sigma_{i-1}^y\sigma_i^z\sigma_i^y - \sigma_{i-1}^z\sigma_i^z\sigma_i^z\rangle \\ &\quad + \alpha_i\langle\sigma_i^x\sigma_i^z\sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y\sigma_i^z\sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z \\ &\quad - \sigma_i^z\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x - \sigma_i^z\sigma_i^y\sigma_{i+1}^y - \sigma_i^z\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z\rangle\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Usando 2.25 obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\sigma_i^z\rangle &= i\{\alpha_{i-1}\langle -i\sigma_{i-1}^x\sigma_i^y + i\sigma_{i-1}^y\sigma_i^x \\ &\quad - i\sigma_{i-1}^x\sigma_i^y + i\sigma_{i-1}^y\sigma_i^x\rangle \\ &\quad + \alpha_i\langle -i\sigma_i^y\sigma_{i+1}^x + i\sigma_i^x\sigma_{i+1}^y \\ &\quad - i\sigma_i^y\sigma_{i+1}^x + i\sigma_i^x\sigma_{i+1}^y\rangle\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

e assim:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \sigma_i^z \rangle &= \alpha_{i-1} \langle \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \\ &\quad + \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \rangle \\ &\quad - \alpha_i \langle -\sigma_i^y \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y \\ &\quad - \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y \rangle \end{aligned} \quad (2.35)$$

Logo, pela definição de  $\langle J_i^M \rangle$  da equação 2.29 teremos:

$$\boxed{\langle J_i^M \rangle = 2\alpha_i \langle \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x \rangle} \quad (2.36)$$

## 2.3 Cadeia XXZ Graded

O estudo de cadeias de spin unidimensionais, isto é, spins arranjados em uma linha interagindo entre si por interação de troca, é um dos protótipos mais usados para se entender sistemas quânticos abertos devido a sua relativa simplicidade. O Hamiltoniano mais geral possível para essas cadeias seria:

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} \{ \alpha_{i,i+1} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \beta_{i,i+1} \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta_{i,i+1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \} + \sum_{i=1}^N B_i \sigma_i^z \quad (2.37)$$

em que  $\sigma$  representam as matrizes de Pauli para entes de spin  $\frac{1}{2}$ ,  $\alpha, \beta, \Delta$  são as constantes que dão a intensidade da interação de troca e  $B_i$  é o campo magnético. Vemos que estamos considerando que a interação de troca pode ter intensidades diferentes para cada par de spins e ainda que elas não são necessariamente iguais nas três direções espaciais. Outra observação é que também permitimos a presença de um campo magnético externo interagindo com os spins da cadeia. Nos capítulos 3 e 4 apresentaremos algumas situações em que a presença ou ausência do campo afeta de forma significativa o comportamento qualitativo do sistema.

Entretanto, o modelo de cadeia de spin que é mais utilizado é o famoso modelo XXZ. Isso ocorre por que sua homogeneidade quanto as interações de troca o torna um modelo simples de ser estudado mas ao mesmo tempo a anisotropia introduzida no eixo  $Z$  acaba por o tornar interessante o suficiente. Seu Hamiltoniano é:

$$H = \sum_{k=1}^{N-1} \{ \alpha (\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y) + \Delta \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z \} \quad (2.38)$$

Para os fenômenos que serão estudados nos próximos capítulos, só é interessante considerarmos o caso “graded”, ou seja, há uma inhomogeneidade em  $\Delta$  e além disso, ela é gradual:

$$H = \sum_{k=1}^{N-1} \{ \alpha (\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y) + \Delta_k \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z \} \quad (2.39)$$

por exemplo, podemos fazer  $\Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \dots$  ou o inverso. Apesar de parecer um modelo muito restrito e até artificial (que só poderia ser criado em laboratório), sistemas que podem ser modelados dessa forma são abundantes na natureza e já foram feitos estudos dedicados a estudar suas propriedades com focos em diversas áreas do conhecimento [26] além de já ter sido construído um retificador térmico (capítulo 3) com uma estrutura graduada [27]. Sua utilidade será também reforçada com os fenômenos estudados nos próximos capítulos.

## 2.4 Dissipadores do tipo Target Polarization

Neste trabalho, devido ao nosso foco em fenômenos de transporte quântico, estaremos interessados somente em dissipadores (banhos térmicos) que atuam nas bordas das cadeias (“boundary driven”). Mais especificamente, os dissipadores considerados serão ainda os chamados “target polarization”, e isso significa que a interação deles com a cadeia é realizada como se eles fossem spin extras nas bordas que tentarão induzir os últimos spins da cadeia na mesma direção. Na Figura 2 temos um exemplo deste tipo de banho. Matematicamente, isto é realizado através de operadores da seguinte forma:

$$\begin{aligned} K_{\pm}^L &= \sqrt{\gamma(1 \pm f)} \left( \frac{\sigma_1^x \pm i\sigma_1^y}{2} \right) \\ K_{\pm}^R &= \sqrt{\gamma(1 \mp f)} \left( \frac{\sigma_N^x \mp i\sigma_N^y}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

nesse caso estamos tentando fixar os spins das bordas direita e esquerda nas direções Z positiva e Z negativa, respectivamente. A constante  $\gamma > 0$  nos dá a força do acoplamento, e a constante  $f \in [0, 1]$  chamada “driving-strength” nos dá em que sentido os spins tendem a se alinhar. Nos próximos capítulos encontramos diversos outros exemplos de dissipadores desse tipo. A dedução dessa expressão para o dissipador é também realizada através do uso do protocolo de interações repetidas e está no Apêndice A.



Figura 2 – Banhos do tipo “target polarization”. Em particular estamos representando banhos que tendem a polarizar os spins da borda em sentidos contrários na mesma direção (digamos Z).





## 3 Retificação e fenômeno One-Way Street

É dito que uma corrente apresenta retificação quando a sua intensidade depende do seu sentido. Seja  $J$  uma corrente e  $f$  um parâmetro que muda de sinal para a corrente no sentido contrário. Uma das formas de quantificar a retificação é usando a grandeza abaixo:

$$R = \frac{J(f) + J(-f)}{J(f) - J(-f)} \quad (3.1)$$

denominada coeficiente de retificação.

Essa grandeza é apropriada porque quando há retificação, ou seja,  $J(-f) \neq -J(f)$ , ela é não nula e quando não há retificação ela é nula. Mas é importante ressaltar que há outras maneiras igualmente válidas de quantificar a retificação em um sistema [28]. Na figura 3 mostramos esquematicamente o fenômeno de retificação da corrente de energia para os sistemas em que estamos interessado.

O fenômeno da retificação térmica, ou seja, quando a corrente considerada é a de calor é de grande interesse atual devido à possibilidade de criação de diodos térmicos [10]. A criação de análogos térmicos para componentes elétricos é uma área de pesquisa bastante ativa, denominada fonônica [9], e com promessas de redução do gasto de energia futura.

### 3.1 Retificação de corrente de energia e magnetização

Obviamente, uma das condições necessárias para se ter o fenômeno da retificação é que seu sistema seja assimétrico, mas essa condição não é suficiente. No caso de sistemas clássicos, por exemplo, é necessário ainda que as interações consideradas sejam anarmônicas [15]. Para o caso quântico, foram feitas analogias em que o modelo  $XX$  é considerado harmônico por só conter termos quadráticos em seu Hamiltoniano, enquanto  $XXZ$  é considerado anarmônico por ter termos quárticos e foi, de fato, encontrado que a retificação de energia só ocorre no segundo caso. Entretanto, essa analogia não é completamente válida já que também há retificação em modelos quadráticos simples, como o modelo quântico de Ising, desde que haja interação entre o primeiro e o último spin [29].

Vamos focar nossa análise no estudo de cadeias  $XXZ$ . A partir dos estudos já feitos para essas cadeias, foi deduzido que além da estrutura interna da cadeia e da dos banhos, a presença ou ausência de um campo magnético externo e também sua natureza afeta a existência de retificação. Além disso, afeta diferentemente para o fluxo de energia e magnetização.

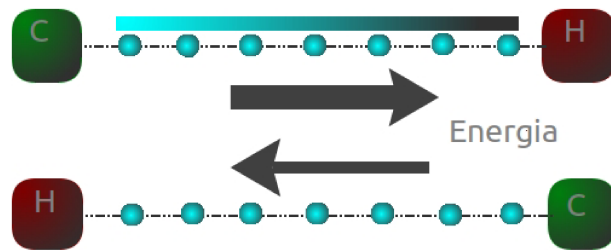


Figura 3 – Retificação da corrente de energia. Os banhos frios (C) e quentes (H) estão acoplados nas bordas da cadeia de spins (esferas azuis). A largura das setas representa a magnitude do fluxo de energia para as cadeias correspondentes e o gradiente em azul representa a assimetria gradual da cadeia.

### 3.2 Simetrias da equação de Lindblad

Uma maneira de encontrar propriedades das correntes é com o uso de simetrias da equação de Lindblad [17]. Considerando novamente essa equação:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] + \sum_k \gamma_k (A_k \rho A_k - \frac{1}{2} A_k^\dagger A_k \rho - \frac{1}{2} \rho A_k A_k^\dagger) \quad (3.2)$$

onde consideramos  $\hbar = 1$ . Nesse caso os dissipadores de Lindblad são dados por  $A_k$  e as funções relacionadas ao acoplamento ao ambiente por  $\gamma_k$ .

Denotando o lado direito como  $\mathcal{L}[\rho]$ , dizemos que a equação é invariante sob uma transformação linear unitária  $U$  se  $U\mathcal{L}[\rho]U^\dagger = \mathcal{L}[U\rho U^\dagger]$  e com isso teremos que  $\tilde{\rho} = U\rho U^\dagger$  é uma nova solução da equação de Lindblad. Caso a solução para o estado estacionário seja única, as duas soluções vão convergir para tempos longos e poderemos escrever:

$$\rho_{NESS} = U\rho_{NESS}U^\dagger \quad (3.3)$$

Além disso, o valor médio de grandezas calculadas no estado estacionário também terá certas propriedades. Pela equação anterior podemos representar o valor médio de uma grandeza  $G$  desse sistema como  $\langle G \rangle = Tr(GU\rho_{NESS}U^\dagger)$  no estado estacionário, e usando o fato de que o traço é cíclico obtemos:

$$\langle G \rangle = Tr(GU\rho_{NESS}U^\dagger) = Tr(U^\dagger GU\rho_{NESS}) = \langle U^\dagger GU \rangle \quad (3.4)$$

Em particular, se  $G$  muda de sinal sob a ação do operador unitário, então:

$$\langle G \rangle = \langle U^\dagger GU \rangle \Rightarrow \langle G \rangle = -\langle G \rangle \Rightarrow \langle G \rangle = 0 \quad (3.5)$$

No próximo capítulo mostraremos o uso dessa propriedade para concluir que em cadeias XXZ homogêneas a média da corrente de energia é nula.

Podemos também fazer o uso de um operador unitário tal que sejam mudados certos parâmetros desejados na equação de Lindblad. Com isso,  $\rho_{NESS}$  com os novos parâmetros

é o mesmo que  $\rho_{NESS}$  com os parâmetros originais mas transformada por  $U$  ( $U\rho U^\dagger$ ). Nesse caso, usando a equação 3.4 podemos escrever para o valor médio de grandezas no estado estacionário:

$$\langle G \rangle_{nv} = \langle U^\dagger G U \rangle_{vp} \quad (3.6)$$

onde “nv” significa novos parâmetros e “vp” significa velhos parâmetros. E essa mudança de rótulo ocorre por que as matrizes densidades para as quais as médias são tomadas sobre são soluções da eq. de Lindblad com significados (parâmetros) diferentes.

Na seção seguinte vamos descrever um fenômeno interessante que foi descoberto (com o uso de simetrias) ocorrer em cadeias de spin XXZ graded com certos pares de banhos específicos [1]. No capítulo 5, vamos generalizar esse fenômeno para outros pares de banhos usando simetrias da equação de Lindblad mas com a posição relativa dos banhos na cadeia como o único parâmetro que muda.

O que as simetrias fazem em essência é anular certas funções de correlação entre membros da matriz densidade o que em consequência restringe a forma dos observáveis e da própria matriz densidade. Uma importante observação a ser feita é a de que, devido a sua generalidade, ao estudarmos sistemas em termos dessas simetrias, os resultados encontrados não dependem nem do tamanho da cadeia e nem do regime de transporte.

### 3.3 Fenômeno One-way street para a corrente de energia

Vamos estudar neste capítulo o Hamiltoniano da cadeia XXZ graded com um campo homogêneo na direção z:

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} \{ \alpha (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) + \Delta_{i,i+1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \} + \sum_{i=1}^N B_i \sigma_i^z \quad (3.7)$$

em que  $B_i$  representa o campo magnético em cada spin. Essa cadeia será estudada no contexto em que ela está entre dois banhos magnéticos de tal forma que no estado estacionário tenha a possibilidade de haver correntes não nulas de energia e magnetização no sistema. Modelamos o efeito do banho no sistema a partir da parte dissipadora da equação de Lindblad  $D(\rho)$ :

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] + D(\rho) \quad (3.8)$$

em que:

$$D(\rho) = D_L(\rho) + D_R(\rho) \quad (3.9)$$

representando os banhos da direita e esquerda. Em detalhes:

$$D_{L,R}(\rho) = \sum_{s=\pm} L_s \rho L_s^\dagger - \frac{1}{2} \{ L_s^\dagger L_s, \rho \} \quad (3.10)$$

Primeiramente, vamos considerar que os banhos tendem a fixar os spins da bordas na direção  $Z$  nos sentidos positivos e negativos. Para o caso de  $D_L$  temos:

$$L_{\pm} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}}(1 \pm f_L)\sigma_1^{\pm} \quad (3.11)$$

em que os operadores de criação e aniquilação são na direção  $Z$ . Similarmente, para  $D_R$  teremos a mesma expressão mas com  $f_R$  no lugar de  $f_L$  e  $\sigma_N^{\pm}$  no lugar de  $\sigma_1^{\pm}$ . A dedução dessas formas para os dissipadores são feitas no apêndice A.

Com o uso de simetrias da equação de Lindblad, vamos deduzir propriedades gerais das correntes de energia e magnetização. Mais especificamente, vamos descobrir que a corrente de magnetização não é retificada e a corrente de energia terá uma direção preferencial, isto é, ela não dependerá da posição dos banhos no final da cadeia. Denominaremos esse fenômeno de “one-way street”. Na figura 4 abaixo ilustramos esse fenômeno.

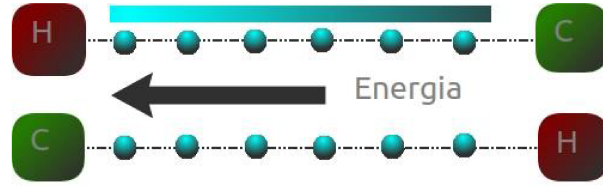


Figura 4 – Fenômeno one-way street. Diferentemente da figura anterior, nesse caso a mesma seta representa o fluxo de energia para as duas configurações da cadeia, isto é, o fluxo não muda nem de sentido nem de magnitude ao invertermos os banhos.

A dedução da forma da corrente de spin e da de energia é análoga para o caso do modelo de Heisenberg (XXX) feita no capítulo anterior. As formas finais do valor médio delas estão dadas abaixo.

Corrente de spin:

$$\langle J_j \rangle = 2\alpha \langle \sigma_j^x \sigma_{j+1}^y + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^x \rangle \quad (3.12)$$

Corrente de energia:

$$\begin{aligned} \langle F_j \rangle &= \langle F_j^{XXZ} \rangle + \langle F_j^B \rangle \\ &= 2\alpha \langle \alpha(\sigma_{j-1} \sigma_j \sigma_{j+1} - \sigma_{j-1} \sigma_j \sigma_{j+1}) \\ &\quad + \Delta_{j-1,j}(\sigma_{j-1} \sigma_j \sigma_{j+1} - \sigma_{j-1} \sigma_j \sigma_{j+1}) \\ &\quad + \Delta_{j,j+1}(\sigma_{j-1} \sigma_j \sigma_{j+1} - \sigma_{j-1} \sigma_j \sigma_{j+1}) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} B_j \langle J_{j-1} + J_j \rangle \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que ela foi dividida em duas partes: na primeira há a contribuição apenas devido às interações da cadeia, e na segunda apenas a do campo magnético.

É importante notar que o caso em que temos os banhos tendendo a alinhar os spins nas bordas na direção  $Z$  no sentido positivo e negativo, já sabemos que essas grandezas calculadas são não nulas para a situação graded. Deduzimos isso devido as contas em [30], onde foram calculados analiticamente e numericamente para cadeia de tamanho pequeno (três spins) com o seguinte resultado no estado estacionário:

$$\langle F \rangle = Bf \left( \frac{912}{969 + 48\Delta^2} \right) + f^2 \delta \left( \frac{32(20224\Delta^4 + 64256\Delta^2 - 1083)}{(51 + 16\Delta^2)(323 + 16\Delta^2)^2} \right) + \mathcal{O}(f^2) \quad (3.14)$$

em que  $f_L = -f_R = f$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\Delta_{1,2} = \Delta - \delta$ ,  $\Delta_{2,3} = \Delta + \delta$  e  $B_i = B$ . Vemos que, em geral, mesmo quando o campo magnético é nulo, a corrente de energia não é e mais ainda, quando analisamos a expressão completa vemos que para  $B = 0$  a corrente é uma função par de  $f$  e, portanto, não muda de direção ao mudarmos o sinal de  $f$ .

Esse fenômeno será generalizado no capítulo 5 onde veremos que para diversos outros dissipadores ele também ocorre. Tendo estabelecido isso, poderemos afirmar que este é um fenômeno que está relacionado com a cadeia de spin em si, ou seja, é característico do modelo XXZ graded (e também do XXX graded como veremos).

Com dissipadores boundary-driven que fixam os spin nas bordas na direção  $Z$  positiva e negativa temos:

$$\begin{aligned} f_L &= \langle \sigma_0^z \rangle \\ f_R &= \langle \sigma_{N+1}^z \rangle \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que:

$$f = f_L = -f_R \quad (3.16)$$

Inverter banhos significa então  $f$  mudar de sinal. Usando as ideias de simetrias da seção anterior, um operador unitário  $U$  que faz essa troca de sinais no dissipador é:

$$U = \sigma_1^x \otimes \sigma_2^x \otimes \dots \otimes \sigma_N^x \quad (3.17)$$

isso significa que  $H$  não varia ao operarmos  $U$  nele o que pode ser visto facilmente se considerarmos as identidades:

$$\begin{aligned} \sigma^x \sigma^x \sigma^x &= \sigma^x \\ \sigma^x \sigma^y \sigma^x &= -\sigma^y \\ \sigma^x \sigma^z \sigma^x &= -\sigma^z \end{aligned} \quad (3.18)$$

Assim, se  $\rho$  é a solução da LME com  $f$  então  $U\rho U^\dagger$  é a solução com  $-f$ . Usando  $U^\dagger F_j^{XXZ} U = F_j^{XXZ}$  temos:  $\langle F_j^{XXZ}(f) \rangle = \langle F_j^{XXZ}(-f) \rangle$  isso significa que a corrente de energia não muda de sinal ao invertermos os banhos, e esse é o denominado fenômeno one-way street. Observamos que na equação 3.14 já poderíamos concluir isso pelo fato

da corrente ser uma função par do parâmetro  $f$  (mesmo em ordem superiores, isso fica demonstrado na referência) quando o campo magnético externo é nulo.

Podemos concluir então que para a cadeia não homogênea, quando houver corrente de energia, ela deverá ser determinada por alguma estrutura na cadeia. Entretanto, ainda há a possibilidade que a direção da corrente (que não foi calculada) dependa do PAR de banhos mas não da posição relativa entre eles, e isso poderá ser investigado em trabalhos futuros.

Já para o fluxo de magnetização:

$$U^\dagger J_j U = -J_j \quad (3.19)$$

e assim:

$$\begin{aligned} \langle J_j \rangle &= \text{tr}(\rho J_j) = -\text{tr}(\rho U^\dagger J_j U) \\ &= -\text{tr}(U \rho U^\dagger J_j) = -\text{tr}[\rho(-f) J_j] \end{aligned} \quad (3.20)$$

isto é:

$$\langle J_j(f) \rangle = -\langle J_j(-f) \rangle \quad (3.21)$$

ou seja, não apresenta retificação.

Com a presença de um campo magnético externo o fenômeno one-way street some, mas ainda temos a retificação de energia já que [30]:

$$\langle F_j \rangle = \langle F_j^{XXZ} \rangle + B \langle J_j \rangle \quad (3.22)$$

é a soma de um função par de  $f$  com uma que é ímpar, e que, a não ser que seja nula, não é uma função par de  $f$ .

### 3.4 Calor e Trabalho

Inicialmente, pode parecer que o fenômeno one-way street viola a Segunda Lei da Termodinâmica, já que o fluxo de energia também flui do reservatório de menor temperatura para o de maior temperatura. Mas não há essa violação pois o fluxo de energia no sistema nesse caso não consiste apenas de energia em forma de calor mas também em forma de trabalho. Como já foi demonstrado em [2], o acoplamento desses sistemas “boundary driven” com os banhos não é passivo, ou seja, é necessário que seja realizado trabalho para que ele aconteça.

Para o caso em que deduzíssemos a equação de Lindblad num limite onde o acoplamento é fraco e feito de forma passiva com o ambiente, teríamos a seguinte definição válida para a energia interna do sistema:

$$U(t) := \text{tr}[H_S(t) \rho_S(t)] \quad (3.23)$$

Pela Primeira Lei da Termodinâmica, a taxa de variação da energia interna é dividida em duas partes: potência e fluxo de calor. Abaixo, temos a expressão para cada uma delas:

Trabalho:

$$\dot{W}(t) := Tr[\dot{H}_s(t)\rho_s(t)] \quad (3.24)$$

Calor devido a cada banho:

$$\dot{Q}_r(t) := Tr[H_s(t)D_r(\rho_s(t))] \quad (3.25)$$

O que é importante de ser observado é: no caso de estarmos estudando o sistema no estado estacionário onde a matriz densidade já deixou de depender do tempo, a existência ou não de corrente de trabalho está inteiramente condicionada à dependência ou não do Hamiltoniano do sistema com o tempo.

No caso da equação de Lindblad e os operadores de Lindblad serem deduzidos a partir do protocolo de interações repetidas, as expressões para corrente de calor e potência mudam. Isso é muito importante, pois significa que a forma dessas grandezas termodinâmicas não dependem apenas do conhecimento da forma da equação de Lindblad mas também dos detalhes do acoplamento com o ambiente e do ambiente em si.

A própria natureza do processo realizado no protocolo de interações repetidas (Apêndice A) faz com que exista um trabalho sendo feito no sistema. Este fato, juntamente com a ausência da restrição para acoplamento fraco entre outras aproximações faz com que, no final, obtenhamos uma expressão para o trabalho feito no sistema da seguinte forma:

$$W(t) = \int_0^t dt' Tr[\rho_{tot}(t')(\dot{H}_s(t') + \dot{V}(t'))] \quad (3.26)$$

Nessa expressão, é fácil ver o motivo pelo qual o trabalho não é necessariamente nulo. O que acontece é que  $V(t)$  MUDA ao serem feitas as trocas de banhos (em um instante ela existe, deixa de existir brevemente e volta a existir, isso ocorrendo indefinidamente). Logo,  $\dot{V}(t) \neq 0$  e assim, mesmo na situação onde  $H_S(t)$  não dependa do tempo (e portanto  $\dot{H}_s(t)$  seria nulo),  $\dot{W}(t)$  ainda é não nulo. E isso não aconteceria caso estivéssemos usando a equação 3.24, ou seja, considerando o acoplamento como passivo.





## 4 Propriedades de Cadeias XXZ

Tendo em mente a completude deste trabalho vamos mostrar resultados conhecidos na literatura em que foi feito o uso de simetrias da equação de Lindblad na dedução de propriedades não triviais de certos sistemas quânticos. Especificamente, neste capítulo faremos o uso novamente da cadeia XXZ unidimensional. Estaremos interessados na cadeia homogênea na ausência de campo externo cujo Hamiltoniano é:

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{N-1} \alpha \{ \sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + \Delta \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z \} \quad (4.1)$$

onde por simplicidade consideraremos  $\alpha = 1$ .

O argumento para a unicidade do NESS para cada sistema considerado neste capítulo será dado na última seção do capítulo 5.

### 4.1 Corrente de Energia

Uma propriedade que é de crucial importância para o estudo dessa cadeia é o fato do valor médio da corrente de energia ser nula no estado estacionário de não equilíbrio para um caso particular de banhos [17]. Isso significa que podemos ligar ou desligar a corrente de energia com a escolha do banho. No caso, ela terá um valor nulo se os banhos forem da forma:

$$\begin{aligned} L_L^\pm &= \sqrt{\gamma(1 \pm f)} \sigma_1^\pm \\ L_R^\pm &= \sqrt{\gamma(1 \mp f)} \sigma_N^\pm \end{aligned} \quad (4.2)$$

ou seja, banhos que tentam fixar a polarização dos spins das bordas na direção  $Z$  como já vistos anteriormente.

A dedução dessa propriedade é feita mais facilmente usando-se simetrias. Para isso, vamos demonstrar o seguinte resultado:

$$\Omega_x R \mathcal{L}[\rho] R \Omega_x = \mathcal{L}[\Omega_x R \rho R \Omega_x] \quad (4.3)$$

em que:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \dots \otimes \sigma_x \\ R(A \otimes B \otimes \dots \otimes Z) &= (Z \otimes \dots \otimes B \otimes A) R \end{aligned} \quad (4.4)$$

isto é,  $\Omega_x$  aplica o operador de Pauli da direção  $X$  em todos os spins da cadeia e  $R$  reflete operadores aplicados na cadeia em torno do centro dela.

Além disso, mostraremos que:

$$\Omega_x R J_n^E R \Omega_x = -J_n^E \quad (4.5)$$

Desse modo, a partir das observações na seção 3.2 concluímos que  $\langle J_n^E \rangle = 0$  no estado estacionário caso ele seja único. Veremos que essa conclusão não será válida para o caso graded devido ao efeito diferente que o operador  $R$  teria.

Pela equação de Lindblad:

$$\Omega_x R \mathcal{L}[\rho] R \Omega_x = -i \Omega_x R [H, \rho] R \Omega_x + \Omega_x R D(\rho) R \Omega_x \quad (4.6)$$

e para satisfazer a equação 4.3 devemos chegar em:

$$\Omega_x R \mathcal{L}[\rho] R \Omega_x = -i [H, \Omega_x R \rho R \Omega_x] + D(\Omega_x R \rho R \Omega_x) \quad (4.7)$$

Primeiro, considerando apenas a parte do Hamiltoniano, temos:

$$\begin{aligned} -i \Omega_x R [H, \rho] R \Omega_x &= -i \Omega_x R H \rho R \Omega_x + i \Omega_x R \rho H R \Omega_x \\ &= -i \Omega_x R H I \rho R \Omega_x + i \Omega_x R \rho I H R \Omega_x \\ &= -i \Omega_x R H R \Omega_x \Omega_x R \rho R \Omega_x + i \Omega_x R \rho R \Omega_x \Omega_x R H R \Omega_x \\ &= -i [\Omega_x R H R \Omega_x, \Omega_x R \rho R \Omega_x] \end{aligned} \quad (4.8)$$

em que substituímos  $I$  por  $R \Omega_x \Omega_x R$ , pois  $\Omega_x$  é sua própria inversa assim como  $R$ . Queremos:

$$= -i [H, \Omega_x R \rho R \Omega_x] \quad (4.9)$$

logo, basta que tenhamos:

$$\Omega_x R H R \Omega_x = H \quad (4.10)$$

O operador  $R$  refletirá o par de banhos no qual os sigmas estão atuando em cada termo da soma em torno do meio da cadeia. Como a soma é sobre todos os pares possíveis e ainda os operadores de cada termo do par são os mesmos, o efeito de  $R$  é apenas trocar de ordem os termos da soma, ou seja, não há efeito pois a soma é comutativa. É exatamente nessa parte em que o argumento para o caso graded falha pois quando os termos em  $Z$  trocam de ordem na soma, os  $\Delta_i$  continuam no mesmo lugar e portanto o Hamiltoniano se modifica. Quanto ao operador  $\Omega_x$ , a partir das identidades abaixo:

$$\begin{aligned} \sigma^x \sigma^x \sigma^x &= \sigma^x \\ \sigma^x \sigma^y \sigma^x &= -\sigma^y \\ \sigma^x \sigma^z \sigma^x &= -\sigma^z \end{aligned} \quad (4.11)$$

obtemos facilmente o resultado pois os termos com  $\sigma_x$  não são modificados e como os termos com  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  aparecem em pares, eles ganharão dois sinais de menos e assim também não mudam.

Já para o dissipador, que pode ser expandido como:

$$\begin{aligned}
D(\rho) = & \gamma \{ (1+f)[2\sigma_1^+ \rho \sigma_1^- - (\sigma_1^- \sigma_1^+ \rho + \rho \sigma_1^- \sigma_1^+)] \\
& + (1-f)[2\sigma_1^- \rho \sigma_1^+ - (\sigma_1^+ \sigma_1^- \rho + \rho \sigma_1^+ \sigma_1^-)] \\
& + (1-f)[2\sigma_N^+ \rho \sigma_N^- - (\sigma_N^- \sigma_N^+ \rho + \rho \sigma_N^- \sigma_N^+)] \\
& + (1+f)[2\sigma_N^- \rho \sigma_N^+ - (\sigma_N^+ \sigma_N^- \rho + \rho \sigma_N^+ \sigma_N^-)] \}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

primeiro, vemos que  $R$  irá trocar de lugar os  $\sigma_1$  com os  $\sigma_N$  e além disso, pela equação 4.11,  $\Omega_x$  trocará os  $\sigma^+$  com os  $\sigma^-$ . O efeito total das duas operações será portanto nulo nos operador  $\sigma$  (apenas trocando os termos da soma de lugar) e portanto obtemos:

$$\begin{aligned}
\Omega_x R D(\rho) R \Omega_x = & \gamma \{ (1+f)[2\sigma_N^- \Omega_x R \rho R \Omega_x \sigma_N^+ - (\sigma_N^+ \sigma_N^- \Omega_x R \rho R \Omega_x + \Omega_x R \rho R \Omega_x \sigma_N^+ \sigma_N^-)] \\
& + (1-f)[2\sigma_N^+ \Omega_x R \rho R \Omega_x \sigma_N^- - (\sigma_N^- \sigma_N^+ \Omega_x R \rho R \Omega_x + \Omega_x R \rho R \Omega_x \sigma_N^- \sigma_N^+)] \\
& + (1-f)[2\sigma_1^- \Omega_x R \rho R \Omega_x \sigma_1^+ - (\sigma_1^+ \sigma_1^- \Omega_x R \rho R \Omega_x + \Omega_x R \rho R \Omega_x \sigma_1^+ \sigma_1^-)] \\
& + (1+f)[2\sigma_1^+ \Omega_x R \rho R \Omega_x \sigma_1^- - (\sigma_1^- \sigma_1^+ \Omega_x R \rho R \Omega_x + \Omega_x R \rho R \Omega_x \sigma_1^- \sigma_1^+)] \} \\
= & D(\Omega_x R \rho R \Omega_x)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

como queríamos.

Para a corrente de energia, cuja expressão é:

$$\begin{aligned}
J_n^E = & -2\alpha(\sigma_{n-1}^x \sigma_n^z \sigma_{n+1}^y - \sigma_{n-1}^y \sigma_n^z \sigma_{n+1}^x) \\
& + 2\Delta[\sigma_{n-1}^x \sigma_n^y \sigma_{n+1}^z - \sigma_{n-1}^y \sigma_n^x \sigma_{n+1}^z \\
& + \sigma_{n-1}^z \sigma_n^x \sigma_{n+1}^y - \sigma_{n-1}^z \sigma_n^y \sigma_{n+1}^x]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

temos que dividir entre casos. Caso  $N$  seja ímpar, escolhemos  $n$  como o spin no meio da cadeia e com isso obtemos:

$$\begin{aligned}
R J_n^E R = & -2\alpha(\sigma_{n-1}^y \sigma_n^z \sigma_{n+1}^x - \sigma_{n-1}^x \sigma_n^z \sigma_{n+1}^y) \\
& + 2\Delta[\sigma_{n-1}^z \sigma_n^y \sigma_{n+1}^x - \sigma_{n-1}^z \sigma_n^x \sigma_{n+1}^y \\
& + \sigma_{n-1}^y \sigma_n^x \sigma_{n+1}^z - \sigma_{n-1}^x \sigma_n^y \sigma_{n+1}^z] \\
= & -J_n^E
\end{aligned} \tag{4.15}$$

mas agora,  $\Omega_x$ , pelas identidades anteriores, não causará nenhum efeito na corrente pois a única coisa que acontece é cada termo ganhar dois sinais negativos. Com isso, temos o resultado desejado.

Para  $N$  par escolhemos  $n = \frac{N}{2}$  e assim do lado direito de  $n$  e seus 2 vizinhos teremos  $\frac{N-3}{2} + 1$  identidades e do esquerdo  $\frac{N-3}{2}$  logo, usando  $R$  essa situação é invertida e desse modo o spin  $n$  “pula” para  $n + 1$  e os vizinhos são invertidos, ou seja, no estado estacionário:

$$R J_n^E R = -J_{n+1}^E = -J_n^E \tag{4.16}$$

como, novamente,  $\Omega_x$  não tem efeito nessa expressão finalizamos a demonstração.

## 4.2 Corrente de magnetização

Um fenômeno também muito interessante que ocorre na cadeia XXZ homogênea mas agora com os seguintes banhos:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \sqrt{\frac{1-k}{2}}(\sigma_1^z + i\sigma_1^x) \\
W_2 &= \sqrt{\frac{1+k}{2}}(\sigma_1^z - i\sigma_1^x) \\
V_1 &= \sqrt{\frac{1-k}{2}}(\sigma_N^y + i\sigma_N^z) \\
V_2 &= \sqrt{\frac{1+k}{2}}(\sigma_N^y - i\sigma_N^z)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

(isto é, estamos tentando fixar os spins das bordas nas direções X e Y) é o da alternância do sinal da corrente de magnetização com a paridade da cadeia que foi demonstrado por V.Popkov em [31]. A dedução desse fato será feita com o uso de diferentes conjuntos de simetrias para o caso em que a cadeia possua um número par de spins e um número ímpar de spins.

A equação de Lindblad será escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i[H, \rho] + \Gamma(D_L(\rho) + D_R(\rho)) \tag{4.18}$$

em que:

$$D_L(\rho) = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \{\rho, W_m^\dagger W_m\} + \sum_{m=1}^2 W_m \rho W_m^\dagger \tag{4.19}$$

e analogamente para  $D_R(\rho)$  mas com V substituindo W. A grandeza  $\Gamma$  nos dá a força do acoplamento e  $k$  nos dá o driving strenght, ou seja, o gradiente de polarização entre o primeiro e último spin.

Novamente, a expressão para a corrente de spin é:

$$j_n = 2(\sigma_n^x \sigma_{n+1}^y - \sigma_n^y \sigma_{n+1}^x) \tag{4.20}$$

e para a de energia:

$$\begin{aligned}
J_n^E &= -2(\sigma_{n-1}^x \sigma_n^z \sigma_{n+1}^y - \sigma_{n-1}^y \sigma_n^z \sigma_{n+1}^x) \\
&+ \Delta[2(\sigma_{n-1}^x \sigma_n^y \sigma_{n+1}^z - \sigma_{n-1}^y \sigma_n^x \sigma_{n+1}^z) \\
&+ 2(\sigma_{n-1}^z \sigma_n^x \sigma_{n+1}^y - \sigma_{n-1}^z \sigma_n^y \sigma_{n+1}^x)]
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Para a demonstração, as seguintes transformações serão usadas:

$$\begin{aligned}
U &= U^\dagger = \prod_{n=1,3,\dots} \sigma_n^z \\
\Sigma_y &= \Sigma_y^\dagger = \prod_n \sigma_n^y
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Denotando a matriz densidade na base em que  $\sigma^z$  é diagonal e no estado estacionário como  $\rho(N, \Delta)$  e considerando a unicidade do estado estacionário, iremos demonstrar que:

$$\rho(N, -\Delta) = U\rho^*(N, \Delta)U \quad (4.23)$$

para o caso onde  $N$  é PAR. No final veremos a que conclusão sobre a corrente de spin isso nos irá levar.

Isso significa que queremos demonstrar então que:

$$U\mathcal{L}[\Delta, \rho]^*U = \mathcal{L}[-\Delta, U\rho^*U] \quad (4.24)$$

Considerando primeiramente apenas a parte do Hamiltoniano e usando que:

$$\begin{aligned} \sigma^x &= \sigma^{x*} \\ \sigma^y &= -\sigma^{y*} \\ \sigma^z &= \sigma^{z*} \end{aligned} \quad (4.25)$$

obtemos:

$$H = H^* \quad (4.26)$$

e assim:

$$\begin{aligned} \{-i[H(\alpha, \Delta), \rho]\}^* &= iH^*\rho^* - i\rho^*H^* \\ &= -i\{(-H)\rho^* - \rho^*(-H)\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

logo:

$$\{-i[H(\alpha, \Delta), \rho]\}^* = -i[H(-\alpha, -\Delta), \rho^*] \quad (4.28)$$

Agora, aplicando o operador  $U$ , nós obtemos:

$$\begin{aligned} U\{-i[H(\alpha, \Delta), \rho]\}^*U &= -iUH(-\alpha, -\Delta)UU\rho^*U + iU\rho^*UUH(-\alpha, -\Delta)U \\ &= -iH(\alpha, -\Delta)U\rho^*U + iU\rho^*UH(\alpha, -\Delta) \\ &= -i[H(\alpha, -\Delta), U\rho^*U] \end{aligned} \quad (4.29)$$

pois pelas propriedades de matrizes de Pauli abaixo:

$$\begin{aligned} \sigma^z\sigma^x\sigma^z &= -\sigma^x \\ \sigma^z\sigma^y\sigma^z &= -\sigma^y \\ \sigma^z\sigma^z\sigma^z &= \sigma^z \end{aligned} \quad (4.30)$$

a ação de  $U$  faz com que os termos com  $\sigma_z$  fiquem inalterados e os outros termos ganhem apenas um sinal negativo devido a presença de apenas um spin ímpar com operador de Pauli no termo, ou seja,  $\alpha$  muda de sinal.

Já para o dissipador, podemos expandi-lo e obteremos:

$$\begin{aligned}
D(\rho) = & -4\rho + \{ki\rho\sigma_1^z\sigma_1^x + ki\sigma_1^z\sigma_1^x\rho \\
& + \sigma_1^z\rho\sigma_1^z + \sigma_1^x\rho\sigma_1^x - ki\sigma_1^x\rho\sigma_1^z + ki\sigma_1^z\rho\sigma_1^x \\
& - ki\rho\sigma_N^y\sigma_N^z - ki\sigma_N^y\sigma_N^z\rho + \sigma_N^y\rho\sigma_N^y + \sigma_N^z\rho\sigma_N^z \\
& + ki\sigma_N^z\rho\sigma_N^y - ki\sigma_N^y\rho\sigma_N^z\}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

usando 4.25 e conjugando:

$$\begin{aligned}
D(\rho)^* = & -4\rho^* - ki\rho^*\sigma_1^z\sigma_1^x - ki\sigma_1^z\sigma_1^x\rho^* + \sigma_1^z\rho^*\sigma_1^z \\
& + \sigma_1^x\rho^*\sigma_1^x + ki\sigma_1^x\rho^*\sigma_1^z - ki\sigma_1^z\rho^*\sigma_1^x - ki\rho^*\sigma_N^y\sigma_N^z \\
& - ki\sigma_N^y\sigma_N^z\rho^* + \sigma_N^y\rho^*\sigma_N^y + \sigma_N^z\rho^*\sigma_N^z + ki\sigma_N^z\rho^*\sigma_N^y \\
& - ki\sigma_N^y\rho^*\sigma_N^z
\end{aligned} \tag{4.32}$$

agora, aplicando  $U$  e usando 4.30:

$$\begin{aligned}
UD(\rho)^*U = & -4U\rho^*U + kiU\rho^*U\sigma_1^z\sigma_1^x + ki\sigma_1^z\sigma_1^xU\rho^*U + \sigma_1^zU\rho^*U\sigma_1^z \\
& + \sigma_1^xU\rho^*U\sigma_1^x - ki\sigma_1^xU\rho^*U\sigma_1^z + ki\sigma_1^zU\rho^*U\sigma_1^x - kiU\rho^*U\sigma_N^y\sigma_N^z \\
& - ki\sigma_N^y\sigma_N^zU\rho^*U + \sigma_N^yU\rho^*U\sigma_N^y + \sigma_N^zU\rho^*U\sigma_N^z + ki\sigma_N^zU\rho^*U\sigma_N^y \\
& - ki\sigma_N^yU\rho^*U\sigma_N^z = D(U\rho^*U)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

como queríamos demonstrar.

Para  $N$  ÍMPAR, temos um resultado similar mas com:

$$\rho(N, -\Delta) = \Sigma_y U \rho^*(N, \Delta) U \Sigma_y \tag{4.34}$$

O efeito de  $U$  na parte do Hamiltoniano é o mesmo:

$$U\{-i[H, \rho]\}^*U = -i[H(-\Delta), U\rho^*U] \tag{4.35}$$

Mas, usando:

$$\begin{aligned}
\sigma^x\sigma^y & = -\sigma^y\sigma^x \\
\sigma^y\sigma^z & = -\sigma^z\sigma^y \\
\sigma^y\sigma^y & = I
\end{aligned} \tag{4.36}$$

obteremos:

$$\Sigma_y U\{-i[H, \rho]\}^*U\Sigma_y = -i[H(-\Delta), \Sigma_y U\rho^*U\Sigma_y] \tag{4.37}$$

pois  $H$  não se alterará.

Para o caso do dissipador temos que lembrar que  $N$  agora é ímpar e portanto o resultado anterior não vale já que a aplicação de  $U$  no  $N$ -ésimo spin agora possui efeito.

Calculando:

$$\begin{aligned}
UD(\rho)^*U &= -4U\rho^*U + kiU\rho^*U\sigma_1^z\sigma_1^x + ki\sigma_1^z\sigma_1^xU\rho^*U + \sigma_1^zU\rho^*U\sigma_1^z \\
&+ \sigma_1^xU\rho^*U\sigma_1^x - ki\sigma_1^xU\rho^*U\sigma_1^z + ki\sigma_1^zU\rho^*U\sigma_1^x \\
&+ kiU\rho^*U\sigma_N^y\sigma_N^z + ki\sigma_N^y\sigma_N^zU\rho^*U + \sigma_N^yU\rho^*U\sigma_N^y + \sigma_N^zU\rho^*U\sigma_N^z \\
&- ki\sigma_N^zU\rho^*U\sigma_N^y + ki\sigma_N^yU\rho^*U\sigma_N^z
\end{aligned} \tag{4.38}$$

e com isso:

$$\begin{aligned}
\Sigma_y UD(\rho)^*U\Sigma_y &= -4\Sigma_yU\rho^*U\Sigma_y + ki\Sigma_yU\rho^*U\Sigma_y\sigma_1^z\sigma_1^x + ki\sigma_1^z\sigma_1^x\Sigma_yU\rho^*U\Sigma_y \\
&+ \sigma_1^z\Sigma_yU\rho^*U\Sigma_y\sigma_1^z + \sigma_1^x\Sigma_yU\rho^*U\Sigma_y\sigma_1^x - ki\sigma_1^x\Sigma_yU\rho^*U\Sigma_y\sigma_1^z \\
&+ ki\sigma_1^z\Sigma_yU\rho^*U\Sigma_y\sigma_1^x - ki\Sigma_yU\rho^*U\Sigma_y\sigma_N^y\sigma_N^z - ki\sigma_N^y\sigma_N^z\Sigma_yU\rho^*U\Sigma_y \\
&+ \sigma_N^y\Sigma_yU\rho^*U\Sigma_y\sigma_N^y + \sigma_N^z\Sigma_yU\rho^*U\Sigma_y\sigma_N^z + ki\sigma_N^z\Sigma_yU\rho^*U\Sigma_y\sigma_N^y \\
&- ki\sigma_N^y\Sigma_yU\rho^*U\Sigma_y\sigma_N^z \\
&= D(\Sigma_yU\rho^*U\Sigma_y)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

como queríamos demonstrar.

Com isso, podemos demonstrar o resultado principal. Usando o anterior resultado para  $N$  par na corrente de spin obtemos:

$$\begin{aligned}
j(-\Delta) &= tr(j_n\rho(N, -\Delta)) \\
&= tr(j_nU\rho^*(N, \Delta)U) \\
&= tr(Uj_n^*U\rho^*(N, \Delta)) \\
&= tr(Uj_n^*U\rho(N, \Delta))^* \\
&= tr(U(-j_n)U\rho(N, \Delta)) \\
&= tr(j_n\rho(N, \Delta)) = j(\Delta)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

em que na penúltima igualdade nós usamos o fato de  $j$  ser um observável e também:

$$\begin{aligned}
j_n^* &= 2(\sigma_n^x(-\sigma_{n+1}^y) - (-\sigma_n^y)\sigma_{n+1}^x) \\
&= -2(\sigma_n^x\sigma_{n+1}^y - \sigma_n^y\sigma_{n+1}^x) = -j_n
\end{aligned} \tag{4.41}$$

e na última igualdade usamos:

$$\begin{aligned}
Uj_nU &= 2[\sigma_n^z\sigma_n^x\sigma_n^z\sigma_{n+1}^y - \sigma_n^z\sigma_n^y\sigma_n^z\sigma_{n+1}^x] \\
&= -2(\sigma_n^x\sigma_{n+1}^y - \sigma_n^y\sigma_{n+1}^x) = -j_n
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Já para o caso ímpar, também usando as duas equações anteriores:

$$\begin{aligned}
j(-\Delta) &= \text{tr}[j_n \rho(N, -\Delta)] \\
&= \text{tr}[j_n \Sigma_y U \rho^*(N, \Delta) U \Sigma_y] \\
&= \text{tr}[U \Sigma_y j_n \Sigma_y U \rho^*(N, \Delta)] \\
&= \text{tr}[U(-j_n) U \rho^*(N, \Delta)] \\
&= \text{tr}[j_n^{**} \rho^*(N, \Delta)] \\
&= \text{tr}[j_n^* \rho(N, \Delta)]^* \\
&= \text{tr}[j_n^* \rho(N, \Delta)] \\
&= -\text{tr}[j_n \rho(N, \Delta)] \\
&= -j(\Delta)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

em que na quarta igualdade usamos que:

$$\begin{aligned}
\Sigma_y j_n \Sigma_y &= 2[\sigma_n^y \sigma_n^x \sigma_n^y (\sigma_{n+1}^y)^3 - (\sigma_n^y)^3 \sigma_{n+1}^y \sigma_{n+1}^x \sigma_{n+1}^y] \\
&= -2(\sigma_n^x \sigma_{n+1}^y - \sigma_n^y \sigma_{n+1}^x) \\
&= -j_n
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Com isso, concluímos que a paridade da corrente spin em relação a  $\Delta$  depende da paridade do tamanho da cadeia e além disso, a corrente muda de sinal com esse tamanho. Observamos que esse fato invalida a possibilidade de um transporte balístico já que quando  $N$  tende a infinito não mais diferenciamos par e ímpar e assim o seguinte limite é verdadeiro:

$$j \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0 \tag{4.45}$$

para qualquer valor de  $\Delta$  e  $\Gamma$ . Essa observação é importante por que para outros tipos de banhos nesse mesmo modelo já foi mostrado a possibilidade de transporte balístico [32].

Podemos nos perguntar também qual seria a dependência da corrente de energia com o parâmetro  $\Delta$ . Para  $N$  PAR, usando os resultados anteriores, temos:

$$\begin{aligned}
J^E(-\Delta) &= \text{tr}(\hat{J}^E(-\Delta) \rho(N, -\Delta)) \\
&= \text{tr}(\hat{J}^E(-\Delta) U \rho^*(N, \Delta) U) \\
&= \text{tr}(U \hat{J}^E(-\Delta) U \rho^*(N, \Delta)) \\
&= \text{tr}(U^{**} \hat{J}^{E**}(-\Delta) U^{**} \rho^*(N, \Delta)) \\
&= \text{tr}(U \hat{J}^{E*}(-\Delta) U \rho(N, \Delta))^* \\
&= \text{tr}(U \hat{J}^{E*}(-\Delta) U \rho(N, \Delta))
\end{aligned} \tag{4.46}$$

em que na última igualdade, o complexo conjugado sumiu pois  $\hat{J}^E$  é um observável.



Lembrando:

$$\begin{aligned}\sigma^{x*} &= \sigma^x \\ \sigma^{y*} &= -\sigma^y \\ \sigma^{z*} &= \sigma^z\end{aligned}\tag{4.47}$$

temos:

$$\hat{J}^{E*} = -\hat{J}^E\tag{4.48}$$

Também temos:

$$U\hat{J}^E(-\Delta)U = \hat{J}^E(\Delta)\tag{4.49}$$

Logo:

$$J^E(-\Delta) = -J^E(\Delta)\tag{4.50}$$

isto é, a corrente de energia para N par é uma função ímpar do parâmetro Delta.

Calculando agora para N ímpar:

$$\begin{aligned}J^E(-\Delta) &= tr(\hat{J}^E(-\Delta)\rho(N, -\Delta)) \\ &= tr(\hat{J}^E(-\Delta)\Sigma_y U \rho^*(N, \Delta) U \Sigma_y) \\ &= tr(U \Sigma_y \hat{J}^E(-\Delta) \Sigma_y U \rho^*(N, \Delta))\end{aligned}\tag{4.51}$$

onde:

$$\Sigma_y \hat{J}^E(-\Delta) \Sigma_y = \hat{J}^E(-\Delta)\tag{4.52}$$

Assim, usando a equação anterior e a equação 4.49, obtemos:

$$\begin{aligned}J^E(-\Delta) &= tr(\hat{J}^E(\Delta)\rho^*(N, \Delta)) \\ &= tr(\hat{J}^{E**}(\Delta)\rho^*(N, \Delta)) \\ &= tr(\hat{J}^E * (\Delta)\rho(N, \Delta))* \\ &= tr(\hat{J}^{E*}(\Delta)\rho(N, \Delta)) \\ &= -tr(\hat{J}^E(\Delta)\rho(N, \Delta))\end{aligned}\tag{4.53}$$

Logo:

$$J^E(-\Delta) = -J^E(\Delta)\tag{4.54}$$

ou seja, novamente a corrente de energia é uma função ímpar do parâmetro Delta.

Concluimos com isso que quando  $\Delta = 0$  a corrente de energia se anula e que apesar da paridade ser a mesma para N par ou ímpar as correntes ainda podem ser diferentes requerendo mais cálculos para se deduzir isso.

### 4.3 Retificação nula quando Delta é nulo

Um último fenômeno que é também muito interessante e que já foi citado no capítulo anterior é o da ausência de retificação de corrente de magnetização nesse modelo quando  $\Delta = 0$  que foi demonstrado por Gabriel T. Landi et al. em [28]. Relembrando, a definição de coeficiente de retificação usada foi:

$$R = \frac{J(f) + J(-f)}{J(f) - J(-f)} \quad (4.55)$$

Como já discutido, é necessário que tenhamos uma assimetria no sistema para ter a possibilidade de retificação. Vamos introduzir essa assimetria no nosso sistema a partir de um campo magnético não homogêneo aplicado na direção  $Z$  em cada spin. Logo, o Hamiltoniano considerado será:

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} \{\alpha(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) + \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z\} + \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i^z \quad (4.56)$$

Novamente, estaremos considerando banhos nas bordas que tendem a alinhar os spins antiparalelamente na direção  $Z$ , como na equação 4.2. Se expandirmos o dissipador, encontramos:

$$\begin{aligned} D(\rho) = & \gamma \{ (1 + f_L) [2\sigma_1^+ \rho \sigma_1^- - (\sigma_1^- \sigma_1^+ \rho + \rho \sigma_1^- \sigma_1^+)] \\ & + (1 - f_L) [2\sigma_1^- \rho \sigma_1^+ - (\sigma_1^+ \sigma_1^- \rho + \rho \sigma_1^+ \sigma_1^-)] \\ & + (1 + f_R) [2\sigma_N^+ \rho \sigma_N^- - (\sigma_N^- \sigma_N^+ \rho + \rho \sigma_N^- \sigma_N^+)] \\ & + (1 - f_R) [2\sigma_N^- \rho \sigma_N^+ - (\sigma_N^+ \sigma_N^- \rho + \rho \sigma_N^+ \sigma_N^-)] \} \end{aligned} \quad (4.57)$$

e também, a corrente de magnetização é dada por:

$$J_k = 2\alpha(\sigma_k^x \sigma_{k+1}^y + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^x) \quad (4.58)$$

Assumiremos que o acoplamento é simétrico:

$$f_L = f = -f_R \quad (4.59)$$

com isso, a inversão dos banhos é dada pela inversão do sinal de  $f$ .

Para simplificarmos ainda mais, vamos considerar que os valores  $h_i$  estão interpolados entre  $h$  e  $-h$ . Logo, para mostrarmos o que queremos, basta que mostremos que:

$$J(\alpha, \Delta, h, f) = -J(\alpha, -\Delta, h, -f) \quad (4.60)$$

pois assim quando  $\Delta = 0$  obtemos:

$$J(\alpha, 0, h, f) = -J(\alpha, 0, h, -f) \quad (4.61)$$

e substituindo em 4.55 temos  $R(\Delta = 0) = 0$ . Essa demonstração será, novamente, feita com o uso de simetrias. Seguindo os mesmos raciocínios anteriormente usados vamos demonstrar separadamente as simetrias para o Hamiltoniano e para o dissipador.

A primeira simetria usada será:

$$U = \prod_{i=1,3,\dots} \sigma_i^z = U^\dagger \quad (4.62)$$

O efeito no Hamiltoniano é:

$$UH(\alpha, \Delta, h)U^\dagger = H(-\alpha, \Delta, h) \quad (4.63)$$

o que pode facilmente ser visto usando:

$$\begin{aligned} \sigma^z \sigma^z &= I \\ \sigma^z \sigma^x &= -\sigma^x \sigma^z \\ \sigma^z \sigma^y &= -\sigma^y \sigma^z \end{aligned} \quad (4.64)$$

já que em cada termo da soma  $U$  só será aplicado em um operador, o sinal menos continua nos termos com  $\alpha$ .

Já para o dissipador, teremos que:

$$UD(\rho)U^\dagger = D(U\rho U^\dagger) \quad (4.65)$$

se usarmos:

$$\begin{aligned} \sigma^z \sigma^z &= I \\ \sigma^z \sigma^+ &= -\sigma^+ \sigma^z \\ \sigma^z \sigma^- &= -\sigma^- \sigma^z \end{aligned} \quad (4.66)$$

concluimos que cada termo ganha dois sinais negativos e daí segue:

$$UD(\rho)U^\dagger = D(U\rho U^\dagger) \quad (4.67)$$

Com esses dois resultados, nós concluimos que:

$$\rho(-\alpha, \Delta, h, f) = U\rho(\alpha, \Delta, h, f)U^\dagger \quad (4.68)$$

No fluxo de magnetização, o efeito é:

$$\begin{aligned} \langle J(-\alpha, \Delta, h, f) \rangle &= \text{tr}[J(-\alpha)\rho(-\alpha, \Delta, h, f)] \\ &= \text{tr}[J(-\alpha)U\rho(\alpha, \Delta, h, f)U^\dagger] \\ &= \text{tr}[U^\dagger J(-\alpha)U\rho(\alpha, \Delta, h, f)] \end{aligned} \quad (4.69)$$

em que na penúltima igualdade usamos a eq. 4.68. mas usando eq. 4.64 temos:

$$U^\dagger J(-\alpha)U = J(\alpha) \quad (4.70)$$

logo:

$$\begin{aligned}\langle J(-\alpha, \Delta, h, f) \rangle &= \text{tr}[J(\alpha)\rho(\alpha, \Delta, h, f)] \\ &= \langle J(\alpha, \Delta, h, f) \rangle\end{aligned}\quad (4.71)$$

A segunda transformação usada é:

$$V = \prod_{i=1}^N \sigma_i^x = V^\dagger \quad (4.72)$$

Vamos mostrar que:

$$VH(\alpha, \Delta, h)V^\dagger = H(\alpha, \Delta, -h) \quad (4.73)$$

usando a segunda igualdade em 4.64 e ainda:

$$\begin{aligned}\sigma^x \sigma^x &= I \\ \sigma^x \sigma^y &= -\sigma^y \sigma^x\end{aligned}\quad (4.74)$$

obteremos que apenas o termo do campo magnético recebe um sinal de menos enquanto os outros recebem dois ou nenhum e portanto o resultado segue.

Já para o dissipador teremos:

$$VD(\rho, f)V^\dagger = D(V\rho V^\dagger, -f) \quad (4.75)$$

se usarmos nesse caso que:

$$\begin{aligned}\sigma^x \sigma^+ &= \sigma^- \sigma^x \\ \sigma^x \sigma^- &= \sigma^+ \sigma^x\end{aligned}\quad (4.76)$$

vemos que  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$  trocam de posição no dissipador e isso é equivalente a trocar o sinal de  $f$ .

Concluimos então que:

$$\rho(\alpha, \Delta, -h, -f) = V\rho(\alpha, \Delta, h, f)V^\dagger \quad (4.77)$$

novamente, usando 4.76 obtemos:

$$VJ(\alpha)V^\dagger = -J(\alpha) \quad (4.78)$$

Logo:

$$\begin{aligned}\langle J(\alpha, \Delta, h, f) \rangle &= \text{tr}[J(\alpha)\rho(\alpha, \Delta, h, f)] \\ &= \text{tr}[J(\alpha)V^\dagger\rho(\alpha, \Delta, -h, -f)V] \\ &= \text{tr}[VJ(\alpha)V^\dagger\rho(\alpha, \Delta, -h, -f)] \\ &= \text{tr}[-J(\alpha)\rho(\alpha, \Delta, -h, -f)] \\ &= -\langle J(\alpha, \Delta, -h, -f) \rangle\end{aligned}\quad (4.79)$$

em que na segunda igualdade usamos a eq. 4.77 e na penúltima a eq. 4.76.

A terceira e última simetria usada é a conjugação complexa. Mostraremos que:

$$\{-i[H(\alpha, \Delta, h), \rho]\}^* = -i[H(-\alpha, -\Delta, -h), \rho^*] \quad (4.80)$$

basta que usemos:

$$\begin{aligned} \sigma_x^* &= \sigma^x \\ \sigma_y^* &= -\sigma^y \\ \sigma_z^* &= \sigma^z \end{aligned} \quad (4.81)$$

pois assim:

$$\begin{aligned} \{-i[H(\alpha, \Delta, h), \rho]\}^* &= i\{H\rho^* - \rho^*H\} \\ &= -i\{(-H)\rho^* - \rho^*(-H)\} \\ &= -i[H(-\alpha, -\Delta, -h), \rho^*] \end{aligned} \quad (4.82)$$

Para o dissipador, temos:

$$D(\rho)^* = D(\rho^*) \quad (4.83)$$

para isso, basta que usemos:

$$\begin{aligned} \sigma^{+*} &= \sigma^+ \\ \sigma^{-*} &= \sigma^- \end{aligned} \quad (4.84)$$

pois assim a expressão continua a mesma apenas com  $\rho$  conjugado. Assim:

$$\rho^*(\alpha, \Delta, h, f) = \rho(-\alpha, -\Delta, -h, f) \quad (4.85)$$

Logo, usando as equações 4.68,4.77,4.85 nesta ordem, obtemos:

$$\begin{aligned} VU\rho(\alpha, \Delta, h, f)U^\dagger V^\dagger &= V\rho(-\alpha, \Delta, h, f)V^\dagger \\ &= \rho(-\alpha, \Delta, -h, -f) \\ &= \rho^*(\alpha, -\Delta, h, -f) \end{aligned} \quad (4.86)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \langle J(\alpha, \Delta, h, f) \rangle &= \text{tr}[J(\alpha)\rho(\alpha, \Delta, h, f)] \\ &= \text{tr}[U^\dagger V^\dagger J(\alpha)VU\rho(\alpha, \Delta, h, f)] \\ &= \text{tr}[J(\alpha)VU\rho(\alpha, \Delta, h, f)U^\dagger V^\dagger] \\ &= \text{tr}[J(\alpha)^{**}\rho^*(\alpha, -\Delta, h, -f)] \\ &= \text{tr}[J(\alpha)^*\rho(\alpha, -\Delta, h, -f)]^* \\ &= \text{tr}[-J(\alpha)\rho(\alpha, -\Delta, h, -f)] \\ &= -\langle J(\alpha, -\Delta, h, -f) \rangle \end{aligned} \quad (4.87)$$

como queríamos demonstrar, em que na penúltima igualdade usamos:

$$\begin{aligned} J(\alpha)^* &= 2\alpha \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= 2\alpha \left[ - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= -J(\alpha) \end{aligned} \tag{4.88}$$

## 5 Generalização do fenômeno one-way street para outros dissipadores

Neste capítulo, serão feitas contas que demonstram que o fenômeno one-way street que foi apresentado no capítulo 3 também é válido para formas mais gerais dos banhos. No caso, ainda estaremos restringidos a banhos do tipo “target polarization” (estudado no final do capítulo 2) em que agora os spins da borda tendem a direções dadas por um ângulo  $\theta$  entre elas mas restritas a algum dos planos XZ, XY ou YZ.

Começaremos com uma forma geral  $A$  de uma matriz unitária  $2 \times 2$  deduzida na primeira seção deste capítulo e com isso construiremos o operador unitário:

$$U = A \otimes A \otimes \dots \otimes A \quad (5.1)$$

que atua em todos os spins da cadeia.

Como condição para construção desses operadores, isto é, o de que eles tenham o efeito de trocar os banhos de lugar na equação de Lindblad, usamos:

$$\mathcal{D}_{inv.baths}(U\rho U^\dagger) = U\mathcal{D}U^\dagger \quad (5.2)$$

em que  $\mathcal{D}$  é o dissipador.

Logo, se  $\rho$  é uma solução da equação de Lindblad então  $U\rho U^\dagger$  é a solução correspondente com os banhos trocados. Desse modo, para termos o fenômeno one-way street então basta que encontremos  $U^\dagger \hat{J}^E U = \hat{J}^E$  para todos os pares de banhos desse capítulo.

Lembramos que a partir das contas no capítulo 3 devemos ainda ter o Hamiltoniano invariante sob a transformação unitária que representa a troca de banhos, isto é:

$$U H U^\dagger = H \quad (5.3)$$

Com a intenção de facilitar referências futuras, apresentamos a seguir um resumo desse do que será visto nesse capítulo com os operadores de Lindblad representando os pares de banhos considerados, o Hamiltoniano usado e a matriz unitária de troca de banhos correspondente.

- Polarização em X à esquerda e em um ângulo  $\theta$  no plano XY à direita:

$$\begin{aligned} K_+^L &= \sqrt{\gamma(1+f)} \left( \frac{\sigma_1^y + i\sigma_1^z}{2} \right) \\ K_-^L &= \sqrt{\gamma(1-f)} \left( \frac{\sigma_1^y - i\sigma_1^z}{2} \right) \\ K_+^R &= \sqrt{\gamma(1-f)} \left( \frac{\cos\theta\sigma_N^x + \text{sen}\theta\sigma_N^y + i\sigma_N^z}{2} \right) \\ K_-^R &= \sqrt{\gamma(1+f)} \left( \frac{\cos\theta\sigma_N^x + \text{sen}\theta\sigma_N^y - i\sigma_N^z}{2} \right) \end{aligned}$$

Hamiltoniano: XXZ graded. Matriz de troca de banhos:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -e^{i\theta}(1-i) & 0 \end{pmatrix}$$

- Polarização em Y à esquerda e em um ângulo  $\theta$  no plano XZ à direita:

$$\begin{aligned} K_+^L &= \sqrt{\gamma(1+f)} \left( \frac{\sigma_1^z + i\sigma_1^x}{2} \right) \\ K_-^L &= \sqrt{\gamma(1-f)} \left( \frac{\sigma_1^z - i\sigma_1^x}{2} \right) \\ K_+^R &= \sqrt{\gamma(1-f)} \left( \frac{\cos\theta\sigma_N^y + \text{sen}\theta\sigma_N^z + i\sigma_N^x}{2} \right) \\ K_-^R &= \sqrt{\gamma(1+f)} \left( \frac{\cos\theta\sigma_N^y + \text{sen}\theta\sigma_N^z - i\sigma_N^x}{2} \right) \end{aligned}$$

Hamiltoniano: XXX graded. Matriz de troca de banhos:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\sqrt{1+\text{sen}\theta} & \sqrt{1-\text{sen}\theta} \\ -\sqrt{1-\text{sen}\theta} & -i\sqrt{1+\text{sen}\theta} \end{pmatrix}$$

- Polarização em Z à esquerda e em um ângulo  $\theta$  no plano XZ à direita:

$$\begin{aligned} K_+^L &= \sqrt{\gamma(1+f)} \left( \frac{\sigma_1^x + i\sigma_1^y}{2} \right) \\ K_-^L &= \sqrt{\gamma(1-f)} \left( \frac{\sigma_1^x - i\sigma_1^y}{2} \right) \\ K_+^R &= \sqrt{\gamma(1-f)} \left( \frac{\cos\theta\sigma_N^x + \text{sen}\theta\sigma_N^z + i\sigma_N^y}{2} \right) \\ K_-^R &= \sqrt{\gamma(1+f)} \left( \frac{\cos\theta\sigma_N^x + \text{sen}\theta\sigma_N^z - i\sigma_N^y}{2} \right) \end{aligned}$$

Hamiltoniano: XXX graded. Matriz de troca de banhos:

$$A = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\cos\theta} & \sqrt{1+\cos\theta} \\ \sqrt{1+\cos\theta} & -\sqrt{1-\cos\theta} \end{pmatrix}$$



- Trocar polarizações ortogonais na direção X de um lado com as de Y do outro, e as de Z entre si:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \alpha(\sigma_1^x + i\sigma_1^y) & L_3 &= \beta(\sigma_N^x + i\sigma_N^y) \\
L_2 &= \beta(\sigma_1^x - i\sigma_1^y) & L_4 &= \alpha(\sigma_N^x - i\sigma_N^y) \\
V_1 &= p(\sigma_1^y + i\sigma_1^z) & V_3 &= v(\sigma_N^y + i\sigma_N^z) \\
V_2 &= q(\sigma_1^y - i\sigma_1^z) & V_4 &= u(\sigma_N^y - i\sigma_N^z) \\
W_1 &= u(\sigma_1^z + i\sigma_1^x) & W_3 &= q(\sigma_N^z + i\sigma_N^x) \\
W_2 &= v(\sigma_1^z - i\sigma_1^x) & W_4 &= p(\sigma_N^z - i\sigma_N^x)
\end{aligned}$$

Hamiltoniano: XXZ graded. Matriz de troca de banhos:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1+i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma^x - \sigma^y)$$

- Trocar polarizações ortogonais na direção Y de um lado com as de Z do outro, e as de X entre si:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \alpha(\sigma_1^x + i\sigma_1^y) & L_3 &= v(\sigma_N^x + i\sigma_N^y) \\
L_2 &= \beta(\sigma_1^x - i\sigma_1^y) & L_4 &= u(\sigma_N^x - i\sigma_N^y) \\
V_1 &= p(\sigma_1^y + i\sigma_1^z) & V_3 &= q(\sigma_N^y + i\sigma_N^z) \\
V_2 &= q(\sigma_1^y - i\sigma_1^z) & V_4 &= p(\sigma_N^y - i\sigma_N^z) \\
W_1 &= u(\sigma_1^z + i\sigma_1^x) & W_3 &= \beta(\sigma_N^z + i\sigma_N^x) \\
W_2 &= v(\sigma_1^z - i\sigma_1^x) & W_4 &= \alpha(\sigma_N^z - i\sigma_N^x)
\end{aligned}$$

Hamiltoniano: XXX graded. Matriz de troca de banhos:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma^z - \sigma^y)$$

- Trocar polarizações ortogonais na direção X de um lado com as de Z do outro, e as de Y entre si:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \alpha(\sigma_1^x + i\sigma_1^y) & L_3 &= q(\sigma_N^x + i\sigma_N^y) \\
L_2 &= \beta(\sigma_1^x - i\sigma_1^y) & L_4 &= p(\sigma_N^x - i\sigma_N^y) \\
V_1 &= p(\sigma_1^y + i\sigma_1^z) & V_3 &= \beta(\sigma_N^y + i\sigma_N^z) \\
V_2 &= q(\sigma_1^y - i\sigma_1^z) & V_4 &= \alpha(\sigma_N^y - i\sigma_N^z) \\
W_1 &= u(\sigma_1^z + i\sigma_1^x) & W_3 &= v(\sigma_N^z + i\sigma_N^x) \\
W_2 &= v(\sigma_1^z - i\sigma_1^x) & W_4 &= u(\sigma_N^z - i\sigma_N^x)
\end{aligned}$$

Hamiltoniano: XXX graded. Matriz de troca de banhos:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma^x - \sigma^z)$$

## 5.1 Forma Geral de Matriz Unitária 2x2

Antes de mostrarmos com quais outros dissipadores também foi encontrada a presença do fenômeno one-way street vamos explicitar a forma geral de uma matriz unitária  $2 \times 2$ . Especificamente, vamos demonstrar que ela possui a seguinte forma:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -e^{i\varphi}b^* & e^{i\varphi}a^* \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

em que  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$  e  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

Começando com uma matriz complexa  $2 \times 2$  qualquer:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

com  $a, b, c$  e  $d \in \mathbb{C}$ .

Pela definição de matriz unitária devemos ter  $A^{-1} = A^\dagger$ , ou seja:

$$AA^\dagger = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} aa^* + bb^* = 1 & (5.7a) \\ a^*c + b^*d = 0 & (5.7b) \\ cc^* + dd^* = 1 & (5.7c) \end{cases}$$

e também:

$$A^\dagger A = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} aa^* + cc^* = 1 & (5.9a) \\ a^*b + c^*d = 0 & (5.9b) \\ bb^* + dd^* = 1 & (5.9c) \end{cases}$$

De 5.7a e 5.9a temos:

$$cc^* = bb^* \quad (5.10)$$

De 5.7a e 5.9c temos:

$$dd^* = aa^* \quad (5.11)$$

Com essas duas últimas igualdades em vista, há apenas 3 situações distintas que podem ocorrer:

Se  $d = c = 0$  teríamos de 5.7c que  $0 = 1$ , logo isso não é possível.

Se  $d = 0$  e  $c \neq 0$  teremos de 5.7c e de 5.10:

$$cc^* = 1 = bb^* \quad (5.12)$$

e desse modo:

$$\frac{b}{c^*} \frac{b^*}{c} = 1 \quad (5.13)$$

Assim, podemos denotar  $-e^{i\varphi} := \frac{b}{c^*}$  com  $\varphi \in \mathbb{R}$  pois pela equação anterior  $\frac{b}{c^*}$  é um número complexo de módulo 1. Logo, por 5.13 obtemos:

$$c = -e^{i\varphi} b^* \quad (5.14)$$

e assim a matriz  $A$  fica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -e^{i\varphi} b^* & 0 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

que é da forma desejada.

Se  $d \neq 0$  e  $c \neq 0$  obtemos de 5.11:

$$\frac{a}{d^*} \frac{a^*}{d} = 1 \quad (5.16)$$

Pelo mesmo argumento anterior, podemos renomear  $e^{i\varphi} := \frac{a}{d^*}$ . De 5.9b obtemos:

$$c^* = -\frac{a^* b}{d} = -e^{-i\varphi} b \Rightarrow c = -e^{i\varphi} b^* \quad (5.17)$$

em que  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Também temos:

$$d = -\frac{a^* b}{c^*} = -a^* (-e^{i\varphi}) \Rightarrow d = e^{i\varphi} a^* \quad (5.18)$$

como queríamos demonstrar.

Também será útil explicitar uma forma para matrizes  $2 \times 2$  pertencentes a  $SU(2)$ , ou seja, matrizes unitárias com determinante 1. Nesse caso, basta fazermos  $\varphi = 0$  pois observamos que o determinante da matriz  $U$  é  $e^{i\varphi}$ .

## 5.2 X-XY

Considere a situação em que do lado esquerdo tentamos fixar o spin da borda na direção  $X$  e do lado direito tentamos fixá-lo no plano  $XY$  em um ângulo  $\theta$  em relação ao eixo  $Y$ . Nesse caso, os op. de Lindblad serão:

$$K_+^L = \sqrt{\gamma(1+f)} \left( \frac{\sigma_1^y + i\sigma_1^z}{2} \right) \quad (5.19)$$

$$K_-^L = \sqrt{\gamma(1-f)} \left( \frac{\sigma_1^y - i\sigma_1^z}{2} \right) \quad (5.20)$$

$$K_+^R = \sqrt{\gamma(1-f)} \left( \frac{\cos \theta \sigma_N^x + \text{sen } \theta \sigma_N^y + i\sigma_N^z}{2} \right) \quad (5.21)$$

$$K_-^R = \sqrt{\gamma(1+f)} \left( \frac{\cos \theta \sigma_N^x + \text{sen } \theta \sigma_N^y - i\sigma_N^z}{2} \right) \quad (5.22)$$

em que  $\gamma$  é a constante de acoplamento e  $f$  é o “driving-strength”.

Para a troca de banhos, devemos encontrar um operador unitário  $U = A \otimes A \otimes \dots \otimes A$  em que:

$$A(\sigma^y + i\sigma^z)A^\dagger = \cos \theta \sigma^x + \sin \theta \sigma^y - i\sigma^z \quad (5.23)$$

$$A(\sigma^y - i\sigma^z)A^\dagger = \cos \theta \sigma^x + \sin \theta \sigma^y + i\sigma^z \quad (5.24)$$

$$A(\cos \theta \sigma^x + \sin \theta \sigma^y + i\sigma^z)A^\dagger = \sigma^y - i\sigma^z \quad (5.25)$$

$$A(\cos \theta \sigma^x + \sin \theta \sigma^y - i\sigma^z)A^\dagger = \sigma^y + i\sigma^z \quad (5.26)$$

podendo ainda ter fatores de  $-1$ ,  $i$  ou  $-i$  do lado direito pois eles se cancelam nos dissipadores.

Observando essas condições vemos que é suficiente encontrarmos uma matriz unitária  $A$  tal que a operação  $A \cdot A^\dagger$  transforme:

$$\begin{aligned} \sigma^y &\xrightarrow{(1)} \cos \theta \sigma^x + \sin \theta \sigma^y \xrightarrow{(2)} \sigma^y \\ \sigma^z &\xrightarrow{(3)} -\sigma^z \end{aligned}$$

Calculando (3) :

$$\begin{aligned} A\sigma^z A^\dagger &= \begin{pmatrix} a & b \\ -e^{i\varphi}b^* & e^{i\varphi}a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ -e^{i\varphi}b^* & -e^{i\varphi}a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & -e^{-i\varphi}b \\ b^* & e^{-i\varphi}a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |a|^2 - |b|^2 & -e^{-i\varphi}ab - e^{-i\varphi}ab \\ -e^{i\varphi}b^*a^* - e^{i\varphi}b^*a^* & |b|^2 - |a|^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Queremos:

$$A\sigma^z A^\dagger = -\sigma^z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

Isso implica que  $|b|^2 - |a|^2 = 1$  mas já sabemos que  $|b|^2 + |a|^2 = 1$ , logo  $|a|^2 = 0$  e assim  $a = 0$  e  $|b|^2 = 1$ . Substituindo isso na equação 5.27 obtemos o desejado.

Explicitamente, a matriz  $A$  tem a forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -e^{i\varphi}b^* & 0 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Para encontrarmos os possíveis valores para  $b$  vamos usar a condição (1):

$$\begin{aligned}
 A\sigma^y A^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ -e^{i\varphi}b^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} A^\dagger \\
 &= \begin{pmatrix} ib & 0 \\ 0 & ie^{i\varphi}b^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\varphi}b \\ b^* & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\varphi}b^2 \\ ie^{i\varphi}b^{*2} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Queremos:

$$A\sigma^y A^\dagger = \cos\theta\sigma^x + \sin\theta\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

Escolheremos  $\varphi = \theta$  e então para obtermos o desejado devemos ter  $-ib^2 = 1$ . Para que isso ocorra, basta fazermos  $b = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$  pois assim:

$$b^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+i+i-1}{2} = i = \frac{1}{-i} \tag{5.32}$$

Logo:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -e^{i\theta}(1-i) & 0 \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

é a matriz unitária desejada.

Com isso, a condição (2) também será satisfeita:

$$\begin{aligned}
 A(\cos\theta\sigma^x + \sin\theta\sigma^y)A^\dagger &= \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -e^{i\theta}(1-i) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} A^\dagger \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\theta}(1+i) & 0 \\ 0 & -(1-i) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\theta}(1+i) \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -(1+i)(1+i) \\ -(1-i)(1-i) & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = \sigma^y
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

O Hamiltoniano usado nesse caso será o de uma cadeia XXZ graded:

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) + \Delta_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \tag{5.35}$$

Antes de descobrirmos como o operador  $U$  age em  $H$ , vamos ver como  $A$  age em  $\sigma^x$ :

$$\begin{aligned}
A\sigma^x A^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -e^{i\theta}(1-i) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A^\dagger \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & -e^{i\theta}(1-i) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\theta}(1+i) \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\theta}(1+i)^2 \\ -e^{i\theta}(1-i)^2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2i(\cos\theta - i\sin\theta) \\ 2i(\cos\theta + i\sin\theta) & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Logo:

$$A\sigma^x A^\dagger = -\sin\theta\sigma^x + \cos\theta\sigma^y \tag{5.37}$$

Usando 5.28, 5.31 e 5.37 obtemos:

$$\begin{aligned}
UHU^\dagger &= \sum_{i=1}^{N-1} \alpha (A\sigma_i^x A^\dagger A\sigma_{i+1}^x A^\dagger + A\sigma_i^y A^\dagger A\sigma_{i+1}^y A^\dagger) \\
&\quad + \Delta_i A\sigma_i^z A^\dagger A\sigma_{i+1}^z A^\dagger \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} \alpha [(-\sin\theta\sigma_i^x + \cos\theta\sigma_i^y)(-\sin\theta\sigma_{i+1}^x + \cos\theta\sigma_{i+1}^y) \\
&\quad + (\cos\theta\sigma_i^x + \sin\theta\sigma_i^y)(\cos\theta\sigma_{i+1}^x + \sin\theta\sigma_{i+1}^y)] + \Delta_i (-\sigma_i^z)(-\sigma_{i+1}^z) \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} \alpha [\sin^2\theta\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x - \sin\theta\cos\theta\sigma_i^x\sigma_{i+1}^y - \sin\theta\cos\theta\sigma_i^y\sigma_{i+1}^x \\
&\quad + \cos^2\theta\sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + \cos^2\theta\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \sin\theta\cos\theta\sigma_i^x\sigma_{i+1}^y \\
&\quad + \sin\theta\cos\theta\sigma_i^y\sigma_{i+1}^x + \sin^2\theta\sigma_i^y\sigma_{i+1}^y] + \Delta_i\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} \alpha (\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^y) + \Delta_i\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Assim:

$$UHU^\dagger = H \tag{5.39}$$

Antes de avaliar o efeito de  $U$  nas correntes, vamos calcular:

$$\begin{aligned}
A^\dagger\sigma^x A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -(e^{-i\theta})(1+i) \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(e^{-i\theta})(1+i) & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -(e^{i\theta})(1-i) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2i(e^{-i\theta}) \\ 2i(e^{i\theta}) & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\sin\theta\sigma^x + \cos\theta\sigma^y
\end{aligned} \tag{5.40}$$

e também:

$$\begin{aligned}
A^\dagger \sigma^y A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -(e^{-i\theta})(1+i) \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} A \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i(e^{-i\theta})(1+i) & 0 \\ 0 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -(e^{i\theta})(1-i) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i(e^{-i\theta})(1+i)^2 \\ (e^{i\theta})(1+i)(1-i) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \cos \theta \sigma^x + \sin \theta \sigma^y
\end{aligned} \tag{5.41}$$

E além disso:

$$\begin{aligned}
A^\dagger \sigma^z A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -(\cos \theta - i \sin \theta)(1+i) \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (\cos \theta - i \sin \theta)(1+i) \\ 1-i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -(\cos \theta + i \sin \theta)(1-i) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(1+i)(1-i) & 0 \\ 0 & (1-i)(1+i) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1+i-i-1 & 0 \\ 0 & 1-i+i+1 \end{pmatrix} \\
&= -\sigma^z
\end{aligned} \tag{5.42}$$

O operador corrente de energia é:

$$\begin{aligned}
\hat{J}^E &= 2\alpha [\alpha (\sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x - \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y) \\
&\quad + \Delta_{i-1} (\sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \\
&\quad + \Delta_i (\sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z)]
\end{aligned} \tag{5.43}$$

vejamos qual o resultado da ação de  $U$  nesse operador:

$$\begin{aligned}
U^\dagger \hat{J}^E U &= 2\alpha \{ \alpha [(\cos \theta \sigma_{i-1}^x + \sin \theta \sigma_{i-1}^y)(-\sigma_i^z)(-\sin \theta \sigma_{i+1}^x + \cos \theta \sigma_{i+1}^y) \\
&\quad - (-\sin \theta \sigma_{i-1}^x + \cos \theta \sigma_{i-1}^y)(-\sigma_i^z)(\cos \theta \sigma_{i+1}^x + \sin \theta \sigma_{i+1}^y)] \\
&\quad + \Delta_{i-1} [(-\sigma_{i-1}^z)(-\sin \theta \sigma_i^x + \cos \theta \sigma_i^y)(\cos \theta \sigma_{i+1}^x + \sin \theta \sigma_{i+1}^y) \\
&\quad - (-\sigma_{i-1}^z)(\cos \theta \sigma_i^x + \sin \theta \sigma_i^y)(-\sin \theta \sigma_{i+1}^x + \cos \theta \sigma_{i+1}^y)] \\
&\quad + \Delta_i [(-\sin \theta \sigma_{i-1}^x + \cos \theta \sigma_{i-1}^y)(\cos \theta \sigma_i^x + \sin \theta \sigma_i^y)(-\sigma_{i+1}^z) \\
&\quad - (\cos \theta \sigma_{i-1}^x + \sin \theta \sigma_{i-1}^y)(-\sin \theta \sigma_i^x + \cos \theta \sigma_i^y)(-\sigma_{i+1}^z)] \}
\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
U^\dagger \hat{J}^E U &= 2\alpha \{ \alpha [ \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x - \cos^2 \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y + \text{sen}^2 \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x \\
&\quad - \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y - \text{sen}^2 \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y + \cos^2 \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x \\
&\quad - \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y - \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x ] \\
&\quad + \Delta_{i-1} [ \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \text{sen}^2 \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \cos^2 \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x \\
&\quad - \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y - \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \cos^2 \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y \\
&\quad - \text{sen}^2 \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x + \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y ] \\
&\quad + \Delta_i [ \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z + \text{sen}^2 \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z - \cos^2 \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \\
&\quad - \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z + \cos^2 \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \\
&\quad - \text{sen}^2 \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z + \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z ] \}
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Após cancelar vários termos obtemos:

$$\begin{aligned}
U^\dagger \hat{J}^E U &= 2\alpha [ \alpha ( \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x - \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y ) \\
&\quad + \Delta_{i-1} ( \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x ) \\
&\quad + \Delta_i ( \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z ) ]
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Logo:

$$U^\dagger \hat{J}^E U = \hat{J}^E \tag{5.47}$$

e assim obtemos novamente o **fenômeno one-way street**.

Corrente de spin:

$$\hat{J}^M = 2\alpha ( \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x ) \tag{5.48}$$

operando com  $U$ :

$$\begin{aligned}
U^\dagger \hat{J}^M U &= 2\alpha [ A^\dagger \sigma_i^x A A^\dagger \sigma_{i+1}^y A - A^\dagger \sigma_i^y A A^\dagger \sigma_{i+1}^x A ] \\
&= 2\alpha [ ( -\text{sen } \theta \sigma_i^x + \cos \theta \sigma_i^y ) ( \cos \theta \sigma_{i+1}^x + \text{sen } \theta \sigma_{i+1}^y ) \\
&\quad - ( \cos \theta \sigma_i^x + \text{sen } \theta \sigma_i^y ) ( -\text{sen } \theta \sigma_{i+1}^x + \cos \theta \sigma_{i+1}^y ) ] \\
&= 2\alpha [ -\text{sen } \theta \cos \theta \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \text{sen}^2 \theta \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y + \cos^2 \theta \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x \\
&\quad + \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \cos^2 \theta \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y \\
&\quad + \text{sen}^2 \theta \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x - \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y ] \\
&= 2\alpha ( \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x - \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y )
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Logo:

$$U^\dagger \hat{J}^M U = -\hat{J}^M \tag{5.50}$$

ou seja, não há retificação de corrente de spin.



### 5.3 X-Y ortogonal

Nesse caso consideraremos o conjunto de operadores de Lindblad abaixo:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \alpha(\sigma_1^x + i\sigma_1^y) \\
L_2 &= \beta(\sigma_1^x - i\sigma_1^y) \\
V_1 &= p(\sigma_1^y + i\sigma_1^z) \\
V_2 &= q(\sigma_1^y - i\sigma_1^z) \\
W_1 &= u(\sigma_1^z + i\sigma_1^x) \\
W_2 &= v(\sigma_1^z - i\sigma_1^x)
\end{aligned} \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned}
L_3 &= \beta(\sigma_N^x + i\sigma_N^y) \\
L_4 &= \alpha(\sigma_N^x - i\sigma_N^y) \\
V_3 &= v(\sigma_N^y + i\sigma_N^z) \\
V_4 &= u(\sigma_N^y - i\sigma_N^z) \\
W_3 &= q(\sigma_N^z + i\sigma_N^x) \\
W_4 &= p(\sigma_N^z - i\sigma_N^x)
\end{aligned} \tag{5.52}$$

A troca de banhos será representada por um operador unitário  $U = A \otimes A \otimes \dots \otimes A$  tal que:

$$\begin{aligned}
(I) A\sigma^x A^\dagger &= -\sigma^y \\
(II) A\sigma^y A^\dagger &= -\sigma^x \\
(III) A\sigma^z A^\dagger &= -\sigma^z
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Pois teremos:

$$\begin{aligned}
L_1 &\rightarrow -iL_4 \\
L_2 &\rightarrow iL_3 \\
V_1 &\rightarrow -iW_4 \\
V_2 &\rightarrow iW_3 \\
W_1 &\rightarrow -iV_4 \\
W_2 &\rightarrow iV_3 \\
L_3 &\rightarrow -iL_2 \\
L_4 &\rightarrow iL_1 \\
V_3 &\rightarrow -iW_2 \\
V_4 &\rightarrow iW_1 \\
W_3 &\rightarrow -iV_2 \\
W_4 &\rightarrow iV_1
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Vamos usar a forma geral de uma matriz  $A \in SU(2)$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_r + ia_i & b_r + ib_i \\ -b_r + ib_i & a_r - ia_i \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

em que  $a_r, a_i, b_r$  e  $b_i \in \mathbb{R}$  e  $a_r^2 + a_i^2 + b_r^2 + b_i^2 = 1$ .

Calculando  $(I)$ :

$$\begin{aligned} A\sigma^x A^\dagger &= \begin{pmatrix} a_r + ia_i & b_r + ib_i \\ -b_r + ib_i & a_r - ia_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} b_r + ib_i & a_r + ia_i \\ a_r - ia_i & -b_r + ib_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r - ia_i & -b_r - ib_i \\ b_r - ib_i & a_r + ia_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.56)$$

em que:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2(a_r b_r + a_i b_i) \\ c_{12} &= a_r^2 + b_i^2 - a_i^2 - b_r^2 + 2(a_i a_r - b_i b_r)i \\ c_{21} &= a_r^2 + b_i^2 - a_i^2 - b_r^2 + 2(b_i b_r - a_i a_r)i \\ c_{22} &= -2(a_r b_r + a_i b_i) \end{aligned} \quad (5.57)$$

queremos:

$$A\sigma^x A^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

com isso, devemos ter:

$$\begin{aligned} a_r b_r + a_i b_i &= 0 \\ a_r^2 - a_i^2 + b_i^2 - b_r^2 &= 0 \\ a_i a_r - b_i b_r &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Pela condição  $(III)$ :

$$\begin{aligned} A\sigma^z A^\dagger &= \begin{pmatrix} a_r + ia_i & b_r + ib_i \\ -b_r + ib_i & a_r - ia_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} a_r + ia_i & -b_r - ib_i \\ -b_r + ib_i & -a_r + ia_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r - ia_i & -b_r - ib_i \\ b_r - ib_i & a_r + ia_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.60)$$

em que:

$$\begin{aligned} d_{11} &= a_r^2 + a_i^2 - b_r^2 - b_i^2 \\ d_{12} &= -a_r b_r - ia_r b_i - ia_i b_r + a_i b_i - a_r b_r - ia_i b_r - ib_i a_r - b_i a_i \\ d_{21} &= -b_r a_r + ib_r a_i + ib_i a_r + b_i a_i - a_r b_r + ia_r b_i + ia_i b_r + a_i b_i \\ d_{22} &= b_r^2 + b_i^2 - a_r^2 - a_i^2 \end{aligned} \quad (5.61)$$

queremos:

$$A\sigma^z A^\dagger = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

e assim devemos ter:

$$\begin{aligned} a_r^2 + a_i^2 - b_r^2 - b_i^2 &= -1 \\ b_i a_i - a_r b_r &= 0 \\ b_i a_r + a_i b_r &= 0 \end{aligned} \quad (5.63)$$

Por inspeção, vemos que:

$$\begin{aligned} a_r &= 0 = a_i \\ b_r &= -\frac{1}{\sqrt{2}} = -b_i \end{aligned} \quad (5.64)$$

satisfazem as equações 5.59 e 5.63.

Logo:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1+i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

é a matriz unitária procurada.

Verificando a condição (II):

$$\begin{aligned} A\sigma^y A^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1+i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ -1-i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i-1 & 0 \\ 0 & -i+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ -1-i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -\sigma^x \end{aligned} \quad (5.66)$$

O Hamiltoniano para esse caso é o da cadeia XXZ graded:

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} = \alpha(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) + \Delta_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \quad (5.67)$$

Nesse caso, a corrente de energia é dada por:

$$\begin{aligned} \hat{J}^E &= 2\alpha[\alpha(\sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x - \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y) \\ &\quad + \Delta_{i-1}(\sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \\ &\quad + \Delta_i(\sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z)] \end{aligned} \quad (5.68)$$

Aplicando  $U$ , e usando que  $A^\dagger = -A$  implica que:

$$\begin{aligned} A^\dagger \sigma^x A &= -\sigma^y \\ A^\dagger \sigma^y A &= -\sigma^x \\ A^\dagger \sigma^z A &= -\sigma^z \end{aligned} \quad (5.69)$$

teremos:

$$\begin{aligned}
U^\dagger \hat{J}^E U &= -2\alpha[\alpha(\sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x) \\
&\quad + \Delta_{i-1}(\sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y) \\
&\quad + \Delta_i(\sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z - \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z)] \\
&= 2\alpha[\alpha(\sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x - \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y) \\
&\quad + \Delta_{i-1}(\sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \\
&\quad + \Delta_i(\sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z)]
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Logo:

$$U^\dagger \hat{J}^E U = \hat{J}^E \tag{5.71}$$

ou seja, novamente temos o **fenômeno one-way street**.

Para a corrente de spin:

$$\hat{J}^M = 2\alpha(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \tag{5.72}$$

Calculamos:

$$\begin{aligned}
U^\dagger \hat{J}^M U &= 2\alpha(\sigma_i^y \sigma_{i+1}^x - \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y) \\
&= -2\alpha(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \\
&= -\hat{J}^M
\end{aligned} \tag{5.73}$$

ou seja, não há retificação.

## 5.4 Y-YZ

Vamos considerar agora banhos em que do lado esquerdo tentamos fixar o último spin na direção  $Y$  e do lado direito no plano  $YZ$  com um ângulo  $\theta$  em relação ao eixo  $Z$ . Desse modo, temos:

$$\begin{aligned}
K_+^L &= \sqrt{\gamma(1+f)} \left( \frac{\sigma_1^z + i\sigma_1^x}{2} \right) \\
K_-^L &= \sqrt{\gamma(1-f)} \left( \frac{\sigma_1^z - i\sigma_1^x}{2} \right) \\
K_+^R &= \sqrt{\gamma(1-f)} \left( \frac{\cos \theta \sigma_N^y + \text{sen } \theta \sigma_N^z + i\sigma_N^x}{2} \right) \\
K_-^R &= \sqrt{\gamma(1+f)} \left( \frac{\cos \theta \sigma_N^y + \text{sen } \theta \sigma_N^z - i\sigma_N^x}{2} \right)
\end{aligned} \tag{5.74}$$

Para a troca de banhos basta que  $A \cdot A^\dagger$  transforme:

$$\begin{aligned}
\sigma^z &\xrightarrow{(1)} \cos \theta \sigma^y + \text{sen } \theta \sigma^z \xrightarrow{(2)} \sigma^z \\
\sigma^x &\xrightarrow{(3)} -\sigma^x
\end{aligned}$$

Usaremos a forma mais restrita de uma matriz unitária pertencente a  $SU(2)$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_r + ia_i & b_r + ib_i \\ -b_r + ib_i & a_r - ia_i \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

em que  $a_r^2 + a_i^2 + b_r^2 + b_i^2 = 1$

Começando com a condição (3):

$$A\sigma^x A^\dagger = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad (5.76)$$

queremos:

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

Como já calculado anteriormente:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2(a_r b_r + a_i b_i) \\ c_{12} &= a_r^2 + b_i^2 - a_i^2 - b_r^2 + 2(a_i a_r - b_i b_r)i \\ c_{21} &= a_r^2 + b_i^2 - a_i^2 - b_r^2 + 2(b_i b_r - a_i a_r)i \\ c_{22} &= -2(a_r b_r + a_i b_i) \end{aligned} \quad (5.78)$$

então devemos ter:

$$\begin{aligned} a_r b_r &= -a_i b_i \\ a_r a_i &= b_r b_i \\ a_r^2 + b_i^2 - a_i^2 - b_r^2 &= -1 \\ a_r^2 + b_i^2 + a_i^2 + b_r^2 &= 1 \end{aligned} \quad (5.79)$$

Se escolhermos  $a_r = b_i = 0$  as duas primeiras condições acima ficam satisfeitas e ficamos com:

$$A = \begin{pmatrix} ia_i & b_r \\ -b_r & -ia_i \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

em que  $a_i^2 + b_r^2 = 1$ .

Com a condição (1) devemos ter:

$$A\sigma^z A^\dagger = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

queremos:

$$= \begin{pmatrix} \sen \theta & -i \cos \theta \\ i \cos \theta & -\sen \theta \end{pmatrix} \quad (5.82)$$

como também já calculado anteriormente:

$$\begin{aligned} d_{11} &= a_i^2 - b_r^2 \\ d_{12} &= -2ia_ib_r \\ d_{21} &= 2ia_ib_r \\ d_{22} &= b_r^2 - a_i^2 \end{aligned} \quad (5.83)$$

assim:

$$\begin{aligned} a_i^2 - b_r^2 &= \text{sen } \theta \\ a_ib_r &= \frac{\cos \theta}{2} \end{aligned} \quad (5.84)$$

Escolhemos então:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\sqrt{1 + \text{sen } \theta}}{\sqrt{2}} \\ b_r &= \frac{\sqrt{1 - \text{sen } \theta}}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (5.85)$$

pois assim:

$$a_ib_r = \frac{\cos \theta}{2} = \frac{|\cos \theta|}{2} \quad (5.86)$$

quando  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  que são os ângulos em que estamos interessados. E também:

$$\begin{aligned} a_i^2 + b_r^2 &= \frac{1 + \text{sen } \theta + 1 - \text{sen } \theta}{2} = 1 \\ a_i^2 - b_r^2 &= \frac{1 + \text{sen } \theta - 1 + \text{sen } \theta}{2} = \text{sen } \theta \end{aligned} \quad (5.87)$$

Logo a forma final de  $A$  é:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\sqrt{1 + \text{sen } \theta} & \sqrt{1 - \text{sen } \theta} \\ -\sqrt{1 - \text{sen } \theta} & -i\sqrt{1 + \text{sen } \theta} \end{pmatrix} \quad (5.88)$$

Por fim, checando que a condição (2) também é válida:

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} \text{sen } \theta & -i \cos \theta \\ i \cos \theta & -\text{sen } \theta \end{pmatrix} A^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\sqrt{1 + \text{sen } \theta} & \sqrt{1 - \text{sen } \theta} \\ -\sqrt{1 - \text{sen } \theta} & -i\sqrt{1 + \text{sen } \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{sen } \theta & -i \cos \theta \\ i \cos \theta & -\text{sen } \theta \end{pmatrix} A^\dagger \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \text{sen } \theta \sqrt{1 + \text{sen } \theta} + i \cos \theta \sqrt{1 - \text{sen } \theta} & \cos \theta \sqrt{1 + \text{sen } \theta} - \text{sen } \theta \sqrt{1 - \text{sen } \theta} \\ -\text{sen } \theta \sqrt{1 - \text{sen } \theta} + \cos \theta \sqrt{1 + \text{sen } \theta} & i \cos \theta \sqrt{1 - \text{sen } \theta} + i \text{sen } \theta \sqrt{1 + \text{sen } \theta} \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} -i\sqrt{1 + \text{sen } \theta} & -\sqrt{1 - \text{sen } \theta} \\ \sqrt{1 - \text{sen } \theta} & i\sqrt{1 + \text{sen } \theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.89)$$

queremos:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= 1 \\
 e_{12} &= 0 \\
 e_{21} &= 0 \\
 e_{22} &= -1
 \end{aligned}
 \tag{5.90}$$

E temos:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{\text{sen } \theta(1 + \text{sen } \theta) + \cos \theta \cos \theta + \cos \theta \cos \theta - \text{sen } \theta(1 - \text{sen } \theta)}{2} \\
 &= \frac{2 \text{sen }^2 \theta + 2 \cos^2 \theta}{2} = 1 \\
 e_{12} &= \frac{-i \text{sen } \theta \cos \theta - i \cos \theta(1 - \text{sen } \theta) + i \cos \theta(1 + \text{sen } \theta) - i \text{sen } \theta \cos \theta}{2} \\
 &= \frac{-i \text{sen } \theta \cos \theta + i \cos \theta \text{sen } \theta + i \cos \theta \text{sen } \theta - i \text{sen } \theta \cos \theta}{2} = 0 \\
 e_{21} &= \frac{i \text{sen } \theta \cos \theta - i \cos \theta(1 + \text{sen } \theta) + i \cos \theta(1 - \text{sen } \theta) + i \text{sen } \theta \cos \theta}{2} \\
 &= 0 \\
 e_{22} &= \frac{\text{sen } \theta(1 - \text{sen } \theta) - \cos \theta \cos \theta - \cos \theta \cos \theta - \text{sen } \theta(1 + \text{sen } \theta)}{2} \\
 &= \frac{-2 \text{sen }^2 \theta - 2 \cos^2 \theta}{2} = -1
 \end{aligned}
 \tag{5.91}$$

logo a matriz que encontramos é a procurada.

Já sabemos que:

$$\begin{aligned}
 A\sigma^x A^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 A\sigma^z A^\dagger &= \begin{pmatrix} \text{sen } \theta & -i \cos \theta \\ -i \cos \theta & -\text{sen } \theta \end{pmatrix} \\
 &= \cos \theta \sigma^y + \text{sen } \theta \sigma^z
 \end{aligned}
 \tag{5.92}$$

Calculando:

$$\begin{aligned}
 A\sigma^y A^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\sqrt{1 + \text{sen } \theta} & \sqrt{1 - \text{sen } \theta} \\ -\sqrt{1 - \text{sen } \theta} & -i\sqrt{1 + \text{sen } \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} A^\dagger \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\sqrt{1 - \text{sen } \theta} & \sqrt{1 + \text{sen } \theta} \\ \sqrt{1 + \text{sen } \theta} & i\sqrt{1 - \text{sen } \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sqrt{1 + \text{sen } \theta} & -\sqrt{1 - \text{sen } \theta} \\ \sqrt{1 - \text{sen } \theta} & i\sqrt{1 + \text{sen } \theta} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta & -i(1 - \text{sen } \theta) + i(1 + \text{sen } \theta) \\ -i(1 + \text{sen } \theta) + i(1 - \text{sen } \theta) & -2 \cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & i \text{sen } \theta \\ -i \text{sen } \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \cos \theta \sigma^z - \text{sen } \theta \sigma^y
 \end{aligned}
 \tag{5.93}$$

O Hamiltoniano a ser considerado é o do modelo de Heisenberg graded. Assim:

$$AHA^\dagger = A \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) \right\} A^\dagger \quad (5.94)$$

Vamos demonstrar que ele é invariante sob a ação de  $A$ . Temos:

$$\begin{aligned} AHA^\dagger &= \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \{ (-\sigma_i^x)(-\sigma_{i+1}^x) + (\cos \theta \sigma_i^z - \text{sen } \theta \sigma_i^y)(\cos \theta \sigma_{i+1}^z - \text{sen } \theta \sigma_{i+1}^y) \\ &\quad + (\cos \theta \sigma_i^y + \text{sen } \theta \sigma_i^z)(\cos \theta \sigma_{i+1}^y + \text{sen } \theta \sigma_{i+1}^z) \} \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \{ \sigma_i^x \sigma_i^x + \cos^2 \theta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - \cos \theta \text{sen } \theta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y \\ &\quad - \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z + \text{sen}^2 \theta \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \cos^2 \theta \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y \\ &\quad + \cos \theta \text{sen } \theta \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z + \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_i^z \sigma_i^y + \text{sen}^2 \theta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \} \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \{ \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y \} = H \end{aligned} \quad (5.95)$$

como esperávamos.

Considerando o fato que  $A^\dagger = -A$  então:

$$A\sigma^x A^\dagger = (-A)^\dagger \sigma^x (-A) = A^\dagger \sigma^x A \quad (5.96)$$

e o mesmo é válido para  $\sigma^y$  e  $\sigma^z$ .

Agora, vejamos como a corrente de magnetização fica sob a transformação:

$$\begin{aligned} A\hat{J}^M A^\dagger &= A \{ 2\alpha_i (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \} A^\dagger \\ &= 2\alpha_i \{ (-\sigma_i^x)(\cos \theta \sigma_{i+1}^z - \text{sen } \theta \sigma_{i+1}^y) \\ &\quad - (\cos \theta \sigma_i^z - \text{sen } \theta \sigma_i^y)(-\sigma_{i+1}^x) \} \\ &= 2\alpha_i \{ -\cos \theta \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z + \text{sen } \theta \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y \\ &\quad + \cos \theta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x - \text{sen } \theta \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x \} \\ &= \text{sen } \theta \hat{J}^M + \cos \theta (\sigma_i^z \sigma_{i+1}^x - \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z) \end{aligned} \quad (5.97)$$

ou seja, é como se ela tivesse uma contribuição na direção original  $Z$  e estivesse sendo projetada na direção  $Y$  também. Por fim, vamos demonstrar que o fenômeno one-way street também é válido. Temos:

$$\begin{aligned} A\hat{J}^E A^\dagger &= A \{ (\sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z + \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x \\ &\quad + \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y \\ &\quad - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) \} A^\dagger \end{aligned} \quad (5.98)$$



Calculando:

$$\begin{aligned}
A\hat{J}^E A^\dagger &= 2\alpha_{i-1}\alpha_i\{(-\sigma_{i-1}^x)(\cos\theta\sigma_i^z - \text{sen}\theta\sigma_i^y)(\cos\theta\sigma_{i+1}^y + \text{sen}\theta\sigma_{i+1}^z) \\
&+ (\cos\theta\sigma_{i-1}^z - \text{sen}\theta\sigma_{i-1}^y)(\cos\theta\sigma_i^y + \text{sen}\theta\sigma_i^z)(-\sigma_{i+1}^x) \\
&+ (\cos\theta\sigma_{i-1}^y + \text{sen}\theta\sigma_i^z)(-\sigma_i^x)(\cos\theta\sigma_{i+1}^z - \text{sen}\theta\sigma_{i+1}^y) \\
&- (-\sigma_{i-1}^x)(\cos\theta\sigma_i^y + \text{sen}\theta\sigma_i^z)(\cos\theta\sigma_{i+1}^z - \text{sen}\theta\sigma_{i+1}^y) \\
&- (\cos\theta\sigma_{i-1}^z - \text{sen}\theta\sigma_{i-1}^y)(-\sigma_i^x)(\cos\theta\sigma_{i+1}^y + \text{sen}\theta\sigma_{i+1}^z) \\
&- (\cos\theta\sigma_{i-1}^y + \text{sen}\theta\sigma_{i-1}^z)(\cos\theta\sigma_i^z - \text{sen}\theta\sigma_i^y)(-\sigma_{i+1}^x)\}
\end{aligned} \tag{5.99}$$

daí:

$$\begin{aligned}
A\hat{J}^E A^\dagger &= 2\alpha_{i-1}\alpha_i\{-\cos^2\theta\sigma_{i-1}^x\sigma_i^z\sigma_{i+1}^y - \cos\theta\text{sen}\theta\sigma_{i+1}^x\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z \\
&+ \text{sen}\theta\cos\theta\sigma_{i-1}^x\sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + \text{sen}^2\theta\sigma_{i-1}^x\sigma_i^y\sigma_{i+1}^z \\
&- \cos^2\theta\sigma_{i-1}^z\sigma_i^y\sigma_{i+1}^x - \cos\theta\text{sen}\theta\sigma_{i-1}^z\sigma_i^z\sigma_{i+1}^x \\
&+ \text{sen}\theta\cos\theta\sigma_{i-1}^y\sigma_i^y\sigma_{i+1}^x + \text{sen}^2\theta\sigma_{i-1}^y\sigma_i^z\sigma_{i+1}^x \\
&- \cos^2\theta\sigma_{i-1}^y\sigma_i^x\sigma_{i+1}^z - \text{sen}\theta\cos\theta\sigma_{i-1}^z\sigma_i^x\sigma_{i+1}^z \\
&+ \cos\theta\text{sen}\theta\sigma_{i-1}^y\sigma_i^x\sigma_{i+1}^y + \text{sen}^2\theta\sigma_{i-1}^z\sigma_i^x\sigma_{i+1}^y \\
&+ \cos^2\theta\sigma_{i-1}^x\sigma_i^y\sigma_{i+1}^z - \cos\theta\text{sen}\theta\sigma_{i-1}^x\sigma_i^y\sigma_{i+1}^y \\
&+ \text{sen}\theta\cos\theta\sigma_{i-1}^x\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z - \text{sen}^2\theta\sigma_{i-1}^x\sigma_i^z\sigma_{i+1}^y \\
&+ \cos^2\theta\sigma_{i-1}^z\sigma_i^x\sigma_{i+1}^y + \cos\theta\text{sen}\theta\sigma_{i-1}^z\sigma_i^x\sigma_{i+1}^z \\
&- \text{sen}\theta\cos\theta\sigma_{i-1}^y\sigma_i^x\sigma_{i+1}^y - \text{sen}^2\theta\sigma_{i-1}^y\sigma_i^x\sigma_{i+1}^z \\
&+ \cos^2\theta\sigma_{i-1}^y\sigma_i^z\sigma_{i+1}^x - \cos\theta\text{sen}\theta\sigma_{i-1}^y\sigma_i^y\sigma_{i+1}^x \\
&+ \text{sen}\theta\cos\theta\sigma_{i-1}^z\sigma_i^z\sigma_{i+1}^x - \text{sen}^2\theta\sigma_{i-1}^z\sigma_i^y\sigma_{i+1}^x\}
\end{aligned} \tag{5.100}$$

Com isso:

$$\begin{aligned}
A\hat{J}^E A^\dagger &= 2\alpha_{i-1}\alpha_i\{-\sigma_{i-1}^x\sigma_i^z\sigma_{i+1}^y + \sigma_{i-1}^x\sigma_i^y\sigma_{i+1}^z \\
&- \sigma_{i-1}^z\sigma_i^y\sigma_{i+1}^x + \sigma_{i-1}^y\sigma_i^z\sigma_{i+1}^x \\
&- \sigma_{i-1}^y\sigma_i^x\sigma_{i+1}^z + \sigma_{i-1}^z\sigma_i^x\sigma_{i+1}^y\}
\end{aligned} \tag{5.101}$$

Assim:

$$U^\dagger \hat{J}^E U = \hat{J}^E \tag{5.102}$$

como queríamos demonstrar.

## 5.5 Y-Z ortogonal

Nesse caso os operadores de Lindblad do lado direito são:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \alpha(\sigma_1^x + i\sigma_1^y) \\
L_2 &= \beta(\sigma_1^x - i\sigma_1^y) \\
V_1 &= p(\sigma_1^y + i\sigma_1^z) \\
V_2 &= q(\sigma_1^y - i\sigma_1^z) \\
W_1 &= u(\sigma_1^z + i\sigma_1^x) \\
W_2 &= v(\sigma_1^z - i\sigma_1^x)
\end{aligned} \tag{5.103}$$

e do lado esquerdo:

$$\begin{aligned}
L_3 &= v(\sigma_N^x + i\sigma_N^y) \\
L_4 &= u(\sigma_N^x - i\sigma_N^y) \\
V_3 &= q(\sigma_N^y + i\sigma_N^z) \\
V_4 &= p(\sigma_N^y - i\sigma_N^z) \\
W_3 &= \beta(\sigma_N^z + i\sigma_N^x) \\
W_4 &= \alpha(\sigma_N^z - i\sigma_N^x)
\end{aligned} \tag{5.104}$$

ou seja, a constante de acoplamento na direção  $Y$  de um lado é a de  $Z$  (e o contrário) e a de  $X$  não muda. Nas três direções a constante de acoplamento que de um lado representa operador criação, do outro representa aniquilação.

Para a troca de banhos, basta que encontremos um operador unitário  $A$  tal que:

$$\begin{aligned}
(I) A\sigma^x A^\dagger &= -\sigma^x \Leftrightarrow -\sigma^x = A^\dagger \sigma^x A \\
(II) A\sigma^y A^\dagger &= -\sigma^z \Leftrightarrow -\sigma^y = A^\dagger \sigma^z A \\
(III) A\sigma^z A^\dagger &= -\sigma^y \Leftrightarrow -\sigma^z = A^\dagger \sigma^y A
\end{aligned} \tag{5.105}$$

Pois assim:

$$\begin{aligned}
L_1 &\rightarrow -iW_4 \\
L_2 &\rightarrow iW_3 \\
V_1 &\rightarrow -iV_4 \\
V_2 &\rightarrow iV_3 \\
W_1 &\rightarrow -iL_4 \\
W_2 &\rightarrow iL_3
\end{aligned} \tag{5.106}$$

e também:

$$\begin{aligned}
L_3 &\rightarrow -iW_2 \\
L_4 &\rightarrow iW_1 \\
V_3 &\rightarrow -iV_3 \\
V_4 &\rightarrow iV_3 \\
W_3 &\rightarrow -iL_2 \\
W_2 &\rightarrow iL_3
\end{aligned} \tag{5.107}$$

e com isso o dissipador fica:

$$A\mathcal{L}(\rho)A^\dagger = \mathcal{L}(\rho, \text{banhostrocados}) \tag{5.108}$$

Nesse caso será suficiente usarmos a forma geral de um op. unitário em  $SU(2)$  que é:

$$A = \begin{pmatrix} a_r + ia_i & b_r + ib_i \\ -b_r + ib_i & a_r - ia_i \end{pmatrix} \tag{5.109}$$

em que  $a_r, a_i, b_r$  e  $b_i \in \mathbb{R}$  e  $a_r^2 + a_i^2 + b_r^2 + b_i^2 = 1$ .

Calculando  $(I)$ :

$$\begin{aligned}
A\sigma^x A^\dagger &= \begin{pmatrix} a_r + ia_i & b_r + ib_i \\ -b_r + ib_i & a_r - ia_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} b_r + ib_i & a_r + ia_i \\ a_r - ia_i & -b_r + ib_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r - ia_i & -b_r - ib_i \\ b_r - ib_i & a_r + ia_i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.110}$$

em que:

$$\begin{aligned}
z_{11} &= b_r a_r - ib_r a_i + ib_i a_r + b_i a_i + b_r a_r - ia_r b_i + ib_r a_i + a_i b_i \\
z_{12} &= -b_r^2 - ib_i b_r - ib_i b_r + b_i^2 + a_r^2 + ia_i a_r + ia_i a_r - a_i^2 \\
z_{21} &= a_r^2 - ia_r a_i - ia_i a_r - a_i^2 - b_r^2 + ib_i b_r + ib_i b_r + b_i^2 \\
z_{22} &= -a_r b_r - ib_i a_r + ib_r a_i - a_i b_i - b_r a_r - ia_i b_r + ib_i a_r - a_i b_i
\end{aligned} \tag{5.111}$$

Queremos:

$$A\sigma^x A^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.112}$$

Logo:

$$a_i b_i + a_r b_r = 0 \tag{5.113}$$

$$a_r^2 - a_i^2 + b_i^2 - b_r^2 = -1 \tag{5.114}$$

$$b_i b_r = a_i a_r \quad (5.115)$$

Também temos de (II):

$$\begin{aligned} A\sigma^y A^\dagger &= \begin{pmatrix} a_r + ia_i & b_r + ib_i \\ -b_r + ib_i & a_r - ia_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ i & 0 \end{pmatrix} A^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} -b_i + ib_r & a_i - ia_r \\ a_i + ia_r & b_i + ib_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r - ia_i & -b_r - ib_i \\ b_r - ib_i & a_r + ia_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.116)$$

Queremos:

$$A\sigma^y A^\dagger = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.117)$$

Assim:

$$a_i b_r - a_r b_i = -\frac{1}{2} \quad (5.118)$$

$$a_i a_r = -b_i b_r \quad (5.119)$$

$$a_r^2 - a_i^2 + b_r^2 - b_i^2 = 0 \quad (5.120)$$

Temos que 5.115 e 5.119  $\Rightarrow a_i a_r = 0 = b_i b_r$ . Escolheremos  $a_r = b_i = 0$  e com isso as eq 5.114 e 5.120 nos darão:

$$a_i^2 = b_r^2 = -(-1 + b_r^2) \Rightarrow -2a_i^2 = -1 \Rightarrow a_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.121)$$

e substituindo em 5.118 obtemos:

$$b_r = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.122)$$

Finalmente, obtemos que A tem a forma:

$$\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}} \quad (5.123)$$

Verificando (III):

$$A\sigma^z A^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \quad (5.124)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \quad (5.125)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma^y \quad (5.126)$$

como desejado.

Vamos usar o Hamiltoniano do modelo de Heisenberg graded:

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) \quad (5.127)$$

Observe que a aplicação de  $U$  em  $H$  irá apenas mudar  $z$  e  $y$  de lugar e assim:

$$UHU^\dagger = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) = H \quad (5.128)$$

Usando as relações *I,II* e *III* concluímos que para a corrente de magnetização:

$$U^\dagger \hat{J}^M U = 2\alpha_i (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^z - \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x) \quad (5.129)$$

o que pode ser interpretado como uma corrente na direção  $Y$ .

Já para a corrente de energia obtemos que:

$$\begin{aligned} U^\dagger \hat{J}^E U &= 2\alpha_{i-1} \alpha_i (-\sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x \\ &\quad - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z + \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \\ &\quad + \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y + \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x) \end{aligned} \quad (5.130)$$

Desse modo:

$$U^\dagger \hat{J}^E U = \hat{J}^E \quad (5.131)$$

ou seja, o fenômeno one way-street é novamente encontrado.

## 5.6 Z-XZ

Vamos considerar agora o caso em que queremos fixar um spin à esquerda no eixo  $Z$  e a direita em um ângulo  $\theta$  com o eixo  $Z$  no plano  $XZ$ . Nesse caso, os operadores de Lindblad são:

$$\begin{aligned} K_+^L &= \sqrt{\gamma(1+f)} \left( \frac{\sigma_1^x + i\sigma_1^y}{2} \right) \\ K_-^L &= \sqrt{\gamma(1-f)} \left( \frac{\sigma_1^x - i\sigma_1^y}{2} \right) \\ K_+^R &= \sqrt{\gamma(1-f)} \left( \frac{\cos \theta \sigma_N^x + \text{sen } \theta \sigma_N^z + i\sigma_N^y}{2} \right) \\ K_-^R &= \sqrt{\gamma(1+f)} \left( \frac{\cos \theta \sigma_N^x + \text{sen } \theta \sigma_N^z - i\sigma_N^y}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.132)$$

Para encontrarmos um operador unitário que representa a troca de banhos, vamos nos restringir a operadores em  $SU(2)$  que possuem a forma geral abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} a_r + ia_i & b_r + ib_i \\ -b_r + ib_i & a_r - ia_i \end{pmatrix} \quad (5.133)$$

em que  $a_r, a_i, b_r$  e  $b_i \in \mathbb{R}$  e  $a_r^2 + a_i^2 + b_r^2 + b_i^2 = 1$ .

Para a troca de banhos, o operador unitário  $A$  deverá satisfazer:

$$\begin{aligned} (I) A\sigma^+ A^\dagger &= \cos\theta\sigma^x + \text{sen}\theta\sigma^z - i\sigma^y \\ (II) A\sigma^- A^\dagger &= \cos\theta\sigma^x + \text{sen}\theta\sigma^z + i\sigma^y \\ (III) A(\cos\theta\sigma^x + \text{sen}\theta\sigma^z + i\sigma^y)A^\dagger &= \sigma^- \\ (IV) A(\cos\theta\sigma^x + \text{sen}\theta\sigma^z - i\sigma^y)A^\dagger &= \sigma^+ \end{aligned} \quad (5.134)$$

Calculando (I) :

$$A\sigma^+ A^\dagger = \begin{pmatrix} (a_r + ia_i)(b_r - ib_i) & (a_r + ia_i)^2 \\ (-b_r + ib_i)(b_r - ib_i) & (-b_r + ib_i)(a_r + ia_i) \end{pmatrix} \quad (5.135)$$

queremos:

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{sen}\theta & \cos\theta - 1 \\ \cos\theta + 1 & -\text{sen}\theta \end{pmatrix} \quad (5.136)$$

Com isso:

$$\begin{aligned} a_r b_r + a_i b_i &= \frac{\text{sen}\theta}{2} \\ a_i b_r - a_r b_i &= 0 \\ a_r^2 - a_i^2 &= (\cos\theta - 1)/2 \in [-1, 0] \\ 2a_i a_r &= 0 \Rightarrow a_r = 0 \\ b_i^2 - b_r^2 &= (\cos\theta + 1)/2 \\ b_i b_r + b_r b_i &= 0 \\ -b_i a_i - b_r a_r &= -\frac{\text{sen}\theta}{2} \\ b_i a_r - b_r a_i &= 0 \end{aligned} \quad (5.137)$$

usando que  $a_r = 0$  teremos:

$$\begin{aligned} a_i b_i &= \frac{\text{sen}\theta}{2} \Rightarrow a_i, b_i \neq 0 \\ a_i b_r &= 0 \Rightarrow b_r = 0 \end{aligned} \quad (5.138)$$

logo:

$$\begin{aligned} a_i &= \pm \frac{\sqrt{1 - \cos\theta}}{\sqrt{2}} \\ b_i &= \pm \frac{\sqrt{1 + \cos\theta}}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (5.139)$$

escolheremos o sinal +.

Usando essas escolhas em  $a_i b_i = \frac{\text{sen } \theta}{2}$  obteremos:

$$\frac{\sqrt{1 - \cos \theta} \sqrt{1 + \cos \theta}}{2} = \frac{|\text{sen } \theta|}{2} \quad (5.140)$$

que é igual a  $\frac{\text{sen } \theta}{2}$  se  $\text{sen } \theta > 0$  e assim só consideramos  $\theta$  nessa situação.

Assim, a matriz A é:

$$A = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \cos \theta} & \sqrt{1 + \cos \theta} \\ \sqrt{1 + \cos \theta} & -\sqrt{1 - \cos \theta} \end{pmatrix} \quad (5.141)$$

Verificando que é consistente (II):

$$\begin{aligned} A\sigma^- A^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \cos \theta} & \sqrt{1 + \cos \theta} \\ \sqrt{1 + \cos \theta} & -\sqrt{1 - \cos \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \cos \theta} & \sqrt{1 + \cos \theta} \\ \sqrt{1 + \cos \theta} & -\sqrt{1 - \cos \theta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \cos \theta} & 0 \\ -\sqrt{1 - \cos \theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \cos \theta} & \sqrt{1 + \cos \theta} \\ \sqrt{1 + \cos \theta} & -\sqrt{1 - \cos \theta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{sen } \theta & \cos \theta + 1 \\ \cos \theta - 1 & -\text{sen } \theta \end{pmatrix} = \cos \theta \sigma^x + \text{sen } \theta \sigma^z + i\sigma^y \end{aligned} \quad (5.142)$$

Para a condição (III), observa-se que  $A = -A^\dagger = -A^{-1}$  daí, de (II):

$$\begin{aligned} A\sigma^- A^\dagger &= \cos \theta \sigma^x + \text{sen } \theta \sigma^z + i\sigma^y \\ \Rightarrow AA\sigma^- A^\dagger A^\dagger &= A(\cos \theta \sigma^x + \text{sen } \theta \sigma^z + i\sigma^y)A^\dagger \\ \Rightarrow \sigma^- &= A(\cos \theta \sigma^x + \text{sen } \theta \sigma^z + i\sigma^y)A^\dagger \end{aligned} \quad (5.143)$$

e (IV) é análogo.

Vejamos como o operador  $U = A \otimes A \otimes \dots \otimes A$  age no Hamiltoniano do modelo de Heisenberg graded:

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) \quad (5.144)$$

Temos:

$$\begin{aligned} U\sigma_i^x U^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \cos \theta} & \sqrt{1 + \cos \theta} \\ \sqrt{1 + \cos \theta} & -\sqrt{1 - \cos \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \cos \theta} & \sqrt{1 + \cos \theta} \\ \sqrt{1 + \cos \theta} & -\sqrt{1 - \cos \theta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \cos \theta} & \sqrt{1 - \cos \theta} \\ -\sqrt{1 - \cos \theta} & \sqrt{1 + \cos \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \cos \theta} & \sqrt{1 + \cos \theta} \\ \sqrt{1 + \cos \theta} & -\sqrt{1 - \cos \theta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \text{sen } \theta & 1 + \cos \theta - 1 + \cos \theta \\ -1 + \cos \theta + 1 + \cos \theta & -2 \text{sen } \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{sen } \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\text{sen } \theta \end{pmatrix} \\ &= \cos \theta \sigma_i^x + \text{sen } \theta \sigma_i^z \end{aligned} \quad (5.145)$$

também:

$$\begin{aligned}
U\sigma_i^y U^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\cos\theta} & \sqrt{1+\cos\theta} \\ \sqrt{1+\cos\theta} & -\sqrt{1-\cos\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\cos\theta} & \sqrt{1+\cos\theta} \\ \sqrt{1+\cos\theta} & -\sqrt{1-\cos\theta} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\sqrt{1+\cos\theta} & -i\sqrt{1-\cos\theta} \\ -i\sqrt{1-\cos\theta} & -\sqrt{1+\cos\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\cos\theta} & \sqrt{1+\cos\theta} \\ \sqrt{1+\cos\theta} & -\sqrt{1-\cos\theta} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i(2+\cos\theta-\cos\theta) \\ -i(2+\cos\theta-\cos\theta) & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_i^y
\end{aligned} \tag{5.146}$$

e ainda:

$$\begin{aligned}
U\sigma_i^z U^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\cos\theta} & \sqrt{1+\cos\theta} \\ \sqrt{1+\cos\theta} & -\sqrt{1-\cos\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\cos\theta} & \sqrt{1+\cos\theta} \\ \sqrt{1+\cos\theta} & -\sqrt{1-\cos\theta} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\cos\theta} & -\sqrt{1+\cos\theta} \\ \sqrt{1+\cos\theta} & \sqrt{1-\cos\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\cos\theta} & \sqrt{1+\cos\theta} \\ \sqrt{1+\cos\theta} & -\sqrt{1-\cos\theta} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-\cos\theta-1-\cos\theta & 2\sin\theta \\ 2\sin\theta & 1+\cos\theta-1+\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \sin\theta\sigma_i^x - \cos\theta\sigma_i^z
\end{aligned} \tag{5.147}$$

Calculando, usando os resultados anteriores:

$$\begin{aligned}
UHU^\dagger &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i [(\cos\theta\sigma_i^x + \sin\theta\sigma_i^z)(\cos\theta\sigma_{i+1}^x + \sin\theta\sigma_{i+1}^z) \\
&\quad + (-\sigma_i^y)(-\sigma_{i+1}^y) + (\sin\theta\sigma_i^x - \cos\theta\sigma_i^z)(\sin\theta\sigma_{i+1}^x - \cos\theta\sigma_{i+1}^z)] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i [\cos^2\theta\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \cos\theta\sin\theta\sigma_i^x\sigma_{i+1}^z \\
&\quad + \sin\theta\cos\theta\sigma_i^z\sigma_{i+1}^x + \sin^2\theta\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z \\
&\quad + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + \sin^2\theta\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x - \sin\theta\cos\theta\sigma_i^x\sigma_{i+1}^z \\
&\quad - \cos\theta\sin\theta\sigma_i^z\sigma_{i+1}^x + \cos^2\theta\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i (\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z\sigma_{i+1}^z) \\
&= H
\end{aligned} \tag{5.148}$$

ou seja,  $H$  é invariante sob a ação desse operador.



Para a corrente de spin  $\hat{J}^M = \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x$ :

$$\begin{aligned}
U^\dagger \hat{J}^M U &= (\cos \theta \sigma_i^x + \text{sen } \theta \sigma_i^z)(-\sigma_{i+1}^y) \\
&\quad - (-\sigma_i^y)(\cos \theta \sigma_{i+1}^x + \text{sen } \theta \sigma_{i+1}^z) \\
&= -\cos \theta \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \text{sen } \theta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y \\
&\quad + \cos \theta \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x + \text{sen } \theta \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \\
&= -\cos \theta \hat{J}^M + \text{sen } \theta (\sigma_i^y \sigma_{i+1}^z - \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y)
\end{aligned} \tag{5.149}$$

Para  $\theta = 0$ :

$$U^\dagger \hat{J}^M U = -\hat{J}^M \tag{5.150}$$

ou seja, não há retificação como já sabíamos.

A corrente de energia para o caso Heisenberg graded é:

$$\begin{aligned}
\hat{J}^E &= 2\alpha_{i-1}\alpha_i(\sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x - \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y) \\
&\quad + \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \\
&\quad + \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x)
\end{aligned} \tag{5.151}$$

sob a ação desse operador unitário:

$$\begin{aligned}
U^\dagger \hat{J}^E U &= 2\alpha_{i-1}\alpha_i [(-\sigma_{i-1}^y)(\text{sen } \theta \sigma_i^x - \cos \theta \sigma_i^z)(\cos \theta \sigma_{i+1}^x + \text{sen } \theta \sigma_{i+1}^z) \\
&\quad - (\cos \theta \sigma_{i-1}^x + \text{sen } \theta \sigma_{i-1}^z)(\text{sen } \theta \sigma_i^x - \cos \theta \sigma_i^z)(-\sigma_{i+1}^y) \\
&\quad + (\text{sen } \theta \sigma_{i-1}^x - \cos \theta \sigma_{i-1}^z)(\cos \theta \sigma_i^x + \text{sen } \theta \sigma_i^z)(-\sigma_{i+1}^y) \\
&\quad - (-\sigma_{i-1}^y)(\cos \theta \sigma_i^x + \text{sen } \theta \sigma_i^z)(\text{sen } \theta \sigma_{i+1}^x - \cos \theta \sigma_{i+1}^z) \\
&\quad + (\cos \theta \sigma_{i-1}^x + \text{sen } \theta \sigma_{i-1}^z)(-\sigma_i^y)(\text{sen } \theta \sigma_{i+1}^x - \cos \theta \sigma_{i+1}^z) \\
&\quad - (\text{sen } \theta \sigma_{i-1}^x - \cos \theta \sigma_{i-1}^z)(-\sigma_i^y)(\cos \theta \sigma_{i+1}^x + \text{sen } \theta \sigma_{i+1}^z)] \\
&= 2\alpha_{i-1}\alpha_i [(-\text{sen } \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x + \cos \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z)(\cos \theta \sigma_{i+1}^x + \text{sen } \theta \sigma_{i+1}^z) \\
&\quad - (\cos \theta \sigma_{i-1}^x + \text{sen } \theta \sigma_{i-1}^z)(-\text{sen } \theta \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y + \cos \theta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y) \\
&\quad + (\text{sen } \theta \sigma_{i-1}^x + \cos \theta \sigma_{i-1}^z)(-\cos \theta \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \text{sen } \theta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y) \\
&\quad + (\cos \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x + \text{sen } \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z)(\text{sen } \theta \sigma_{i+1}^x - \cos \theta \sigma_{i+1}^z) \\
&\quad + (\cos \theta \sigma_{i-1}^x + \text{sen } \theta \sigma_{i-1}^z)(-\text{sen } \theta \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x + \cos \theta \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z) \\
&\quad + (\text{sen } \theta \sigma_{i-1}^x - \cos \theta \sigma_{i-1}^z)(\cos \theta \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x + \text{sen } \theta \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z)]
\end{aligned} \tag{5.152}$$

$$\begin{aligned}
U^\dagger \hat{J}^E U &= 2\alpha_{i-1}\alpha_i[-\text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \text{sen }^2 \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \\
&+ \cos^2 \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x + \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \\
&+ \cos \theta \text{sen } \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \cos^2 \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y \\
&+ \text{sen }^2 \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y \\
&- \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \text{sen }^2 \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y \\
&+ \cos^2 \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y + \cos \theta \text{sen } \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y \\
&+ \cos \theta \text{sen } \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x - \cos^2 \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \\
&+ \text{sen }^2 \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x - \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \\
&- \cos \theta \text{sen } \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x + \cos^2 \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \\
&- \text{sen }^2 \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x + \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \\
&+ \text{sen } \theta \cos \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x + \text{sen }^2 \theta \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \\
&- \cos^2 \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x - \cos \theta \text{sen } \theta \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z]
\end{aligned} \tag{5.153}$$

assim, usando  $\cos^2 x + \text{sen }^2 x = 1$  obtemos:

$$\begin{aligned}
U^\dagger \hat{J}^E U &= \frac{1}{2}[-\sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z + \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x \\
&- \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y + \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y \\
&+ \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x] \\
&= \frac{1}{2}[\sigma_{i-1}^y \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x - \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y \\
&+ \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y - \sigma_y^{i-1} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \\
&+ \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x] = \hat{J}^E
\end{aligned} \tag{5.154}$$

Assim:

$$\boxed{U^\dagger \hat{J}^E U = \hat{J}^E} \tag{5.155}$$

mais uma vez temos o **fenômeno one-way street**.

## 5.7 X-Z ortogonal

Nesse caso os operadores de Lindblad do lado direito são:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \alpha(\sigma_1^x + i\sigma_1^y) \\
L_2 &= \beta(\sigma_1^x - i\sigma_1^y) \\
V_1 &= p(\sigma_1^y + i\sigma_1^z) \\
V_2 &= q(\sigma_1^y - i\sigma_1^z) \\
W_1 &= u(\sigma_1^z + i\sigma_1^x) \\
W_2 &= v(\sigma_1^z - i\sigma_1^x)
\end{aligned} \tag{5.156}$$

e do lado esquerdo:

$$\begin{aligned}
L_3 &= q(\sigma_N^x + i\sigma_N^y) \\
L_4 &= p(\sigma_N^x - i\sigma_N^y) \\
V_3 &= \beta(\sigma_N^y + i\sigma_N^z) \\
V_4 &= \alpha(\sigma_N^y - i\sigma_N^z) \\
W_3 &= v(\sigma_N^z + i\sigma_N^x) \\
W_4 &= u(\sigma_N^z - i\sigma_N^x)
\end{aligned} \tag{5.157}$$

ou seja, a constante de acoplamento na direção  $X$  de um lado é a de  $Z$  (e o contrário) e a de  $Y$  não muda. Nas três direções a constante de acoplamento que de um lado representa operador criação, do outro representa aniquilação.

Para a troca de banhos, basta que encontremos um operador unitário  $A$  tal que:

$$\begin{aligned}
(I) A\sigma^y A^\dagger &= -\sigma^y \Leftrightarrow -\sigma^y = A^\dagger \sigma^y A \\
(II) A\sigma^x A^\dagger &= -\sigma^z \Leftrightarrow -\sigma^x = A^\dagger \sigma^z A \\
(III) A\sigma^z A^\dagger &= -\sigma^x \Leftrightarrow -\sigma^z = A^\dagger \sigma^x A
\end{aligned} \tag{5.158}$$

Pois assim:

$$\begin{aligned}
L_1 &\rightarrow -iV_4 \\
L_2 &\rightarrow iV_3 \\
V_1 &\rightarrow -iL_4 \\
V_2 &\rightarrow iL_3 \\
W_1 &\rightarrow -iW_4 \\
W_2 &\rightarrow iW_3
\end{aligned} \tag{5.159}$$

e também:

$$\begin{aligned}
L_3 &\rightarrow -iV_2 \\
L_4 &\rightarrow iV_1 \\
V_3 &\rightarrow -iL_3 \\
V_4 &\rightarrow iL_3 \\
W_3 &\rightarrow -iW_2 \\
W_2 &\rightarrow iW_3
\end{aligned} \tag{5.160}$$

e com isso o dissipador fica:

$$A\mathcal{L}(\rho)A^\dagger = \mathcal{L}(\rho, \text{banhostrocados}) \tag{5.161}$$

Em analogia aos dois resultados anteriores, vamos conjecturar que a forma da matriz  $A$  é:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix} \quad (5.162)$$

O raciocínio usado foi o seguinte, a parte de uma constante: nos casos anteriores, em que primeiro fazemos a troca de banhos entre operadores na direção  $X$  e  $Y$ , a matriz da transformação era  $i$  vezes a matriz de Pauli de  $X$  mais  $-i$  vezes a matriz de Pauli de  $Y$  e, similarmente, para a troca entre  $Z$  e  $Y$  a matriz da transformação era  $i$  vezes a matriz de Pauli de  $Z$  mais  $-i$  vezes a matriz de Pauli de  $Y$ . No presente caso será  $-i$  vezes a matriz de Pauli de  $Z$  mais  $i$  vezes a matriz de Pauli de  $X$ . A semelhança entre os casos é o fato de uma das direções serem multiplicadas por  $i$  e a outra por  $-i$ .

Verificando nossa conjectura, começando pela condição (I):

$$\begin{aligned} A\sigma^y A^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ -i & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ -i & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i-i & i+1 \\ -i-i & -i+i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma^y \end{aligned} \quad (5.163)$$

Para a condição (II) obtemos:

$$\begin{aligned} A\sigma^x A^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ -i & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ -i & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1-1 & 1-1 \\ -1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = -\sigma^z \end{aligned} \quad (5.164)$$

Finalmente, para a condição (III) temos:

$$\begin{aligned} A\sigma^z A^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ -i & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & -i \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ -i & -i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-1 & -1-1 \\ -1-1 & 1-1 \end{pmatrix} = -\sigma^x \end{aligned} \quad (5.165)$$

Vamos usar o Hamiltoniano do modelo de Heisenberg graded:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) \quad (5.166)$$

Observe que a aplicação de  $U$  em  $H$  irá apenas mudar  $Z$  e  $X$  de lugar e assim:

$$UHU^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i (\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x) = H \quad (5.167)$$

Usando as relações *I,II* e *III* concluímos que para a corrente de magnetização:

$$U^\dagger \hat{J}^M U = 2\alpha_i (\sigma_i^z \sigma_{i+1}^y - \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z) \quad (5.168)$$

o que pode ser interpretado como uma corrente na direção  $X$ .

Já para a corrente de energia:

$$\begin{aligned} \hat{J}^E &= 2\alpha_{i-1}\alpha_i (\sigma_{i-1}^x \sigma_i^y + \sigma_{i+1}^z \\ &\quad + \sigma_{i-1}^y \sigma_i^z + \sigma_{i+1}^x \\ &\quad + \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x + \sigma_{i+1}^y \\ &\quad - \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z + \sigma_{i+1}^y \\ &\quad - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x + \sigma_{i+1}^z \\ &\quad - \sigma_{i-1}^z \sigma_i^y + \sigma_{i+1}^x) \end{aligned} \quad (5.169)$$

obtemos que:

$$\begin{aligned} U^\dagger \hat{J}^E U &= 2\alpha_{i-1}\alpha_i (-\sigma_{i-1}^z \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x - \sigma_{i-1}^y \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \\ &\quad - \sigma_{i-1}^x \sigma_i^z \sigma_{i+1}^y + \sigma_{i-1}^z \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y \\ &\quad + \sigma_{i-1}^z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^x + \sigma_{i-1}^x \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z) \end{aligned} \quad (5.170)$$

Logo:

$$U^\dagger \hat{J}^E U = \hat{J}^E \quad (5.171)$$

ou seja, o **fenômeno one-way street** é por última vez verificado.

## 5.8 Unicidade do NESS

Para que possamos afirmar que o estado estacionário encontrado com o uso de simetrias é o estado estacionário dos novos parâmetros precisamos que ele seja único.

O NESS será único se o conjunto de operadores de Lindblad junto com o Hamiltoniano gerar a álgebra de Pauli [33, 34].

Em cada caso das seções anteriores, ou os op. de Lindblad incluem operadores  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$  de um dos lados do sistema, ou  $\Pi^+ = \frac{\sigma^y + i\sigma^z}{2}$  e  $\Pi^- = \frac{\sigma^y - i\sigma^z}{2}$ , ou ainda  $\Gamma^+ = \frac{\sigma^z + i\sigma^x}{2}$  e

$\Gamma^- = \frac{\sigma^z - i\sigma^x}{2}$  de um dos lados do sistema. Mas o segundo caso se reduz ao primeiro através das relações:

$$\begin{aligned} [\Pi^+, \Pi^-] &= \sigma^x \\ \Pi^+ + \Pi^- &= \sigma^y \\ (\Pi^+ - \Pi^-)(-i) &= \sigma^z \end{aligned} \quad (5.172)$$

e também, o terceiro caso se reduz ao primeiro por:

$$\begin{aligned} -i[\Gamma^+, \Gamma^-] &= \sigma^y \\ \Gamma^+ + \Gamma^- &= \sigma^z \\ (\Gamma^+ - \Gamma^-)(-i) &= \sigma^x \end{aligned} \quad (5.173)$$

Vamos mostrar que ter  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$  de um dos lados do sistema é suficiente para gerar toda a álgebra de Pauli e portanto os sistemas tratados nesse trabalho todos possuem um estado estacionário único. Para isso, vamos provar que vale as relações de recorrência abaixo entre os spins da cadeia:

$$\begin{aligned} \sigma_2^+ &= \frac{1}{4}\sigma_1^z[\sigma_1^+, [H, \sigma_1^z]] \\ \sigma_j^+ &= -\sigma_{j-2}^+ - \frac{1}{2}\sigma_{j-1}^z[\sigma_{j-1}^-, \sigma_{j-1}^+ H \sigma_{j-1}^+] \end{aligned} \quad (5.174)$$

para  $j = 3, 4, \dots, n$  e seus complexos conjugados:

$$\begin{aligned} \sigma_2^- &= \frac{1}{4}[\sigma_1^-, [H, \sigma_1^z]]\sigma_1^z \\ \sigma_j^- &= -\sigma_{j-2}^- + \frac{1}{2}[\sigma_{j-1}^+, \sigma_{j-1}^- H \sigma_{j-1}^-]\sigma_{j-1}^z \end{aligned} \quad (5.175)$$

onde  $[\sigma^+, \sigma^-] = \sigma^z$ .

Com isso teremos gerado o conjunto  $\{\sigma_j^+, \sigma_j^-; j = 1, \dots, n\}$  que gera a álgebra de Pauli.

Primeiramente vamos reescrever o Hamiltoniano para a cadeia XXZ da seguinte forma:

$$H = \sum_{j=1}^{n-1} (2\sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + 2\sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ + \Delta \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z) \quad (5.176)$$

vamos perceber pelas contas abaixo que as constantes  $\alpha$  e  $\Delta$  não terão importância e mais ainda, a diferenciação entre  $\Delta_i$  e  $\Delta_{i+1}$  também não será importante e assim as conclusões valem para o modelo graded além do de Heisenberg também, sendo ele graded ou não.

Calculando:

$$\begin{aligned} [H, \sigma_1^z] &= 2[\sigma_1^+ \sigma_2^-, \sigma_1^z] + 2[\sigma_1^- \sigma_2^+, \sigma_1^z] \\ &= 2[\sigma_1^+, \sigma_1^z]\sigma_2^- + 2[\sigma_1^-, \sigma_1^z]\sigma_2^+ \\ &= -4\sigma_1^+ \sigma_2^- + 4\sigma_1^- \sigma_2^+ \end{aligned} \quad (5.177)$$

com isso:

$$\begin{aligned} [\sigma_1^+, [H, \sigma_1^z]] &= -4[\sigma_1^+, \sigma_1^+ \sigma_2^-] + 4[\sigma_1^+, \sigma_1^- \sigma_2^+] \\ &= 4[\sigma_1^+, \sigma_1^-] \sigma_2^+ \\ &= 4\sigma_1^z \sigma_2^+ \end{aligned} \quad (5.178)$$

assim:

$$\frac{1}{4}\sigma_1^z[\sigma_1^+, [H, \sigma_1^z]] = \frac{1}{4}\sigma_1^z 4\sigma_1^z \sigma_2^+ = \sigma_2^+ \quad (5.179)$$

como queríamos.

E também, calculando:

$$\begin{aligned} \sigma_{j-1}^+ H \sigma_{j-1}^+ &= \sigma_{j-1}^+ \left( \sum_{k=1}^{N-1} 2\sigma_k^+ \sigma_{k+1}^- + 2\sigma_k^- \sigma_{k+1}^+ + \Delta \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z \right) \sigma_{j-1}^+ \\ &= \left( 0 + 2 \frac{I + \sigma_{j-1}^z}{2} \sigma_j^+ + \Delta (-\sigma_{j-1}^+) \sigma_j^z \right)_{k=j-1} \sigma_{j-1}^+ \\ &+ \sigma_{j-1}^+ \left( 2\sigma_{j-2}^+ \frac{I - \sigma_{j-1}^z}{2} + 0 + \Delta \sigma_{j-2}^z \sigma_{j-1}^+ \right)_{k+1=j-1} \\ &= (I + \sigma_{j-1}^z) \sigma_j^+ \sigma_{j-1}^+ - \Delta \sigma_{j-1}^+ \sigma_j^z \sigma_{j-1}^+ \\ &+ \sigma_{j-1}^+ \sigma_{j-2}^+ (I - \sigma_{j-1}^z) + \Delta \sigma_{j-1}^+ \sigma_{j-2}^z \sigma_{j-1}^+ \\ &= (I + \sigma_{j-1}^z) \sigma_{j-1}^+ \sigma_j^+ + \sigma_{j-2}^+ \sigma_{j-1}^+ (I - \sigma_{j-1}^z) \\ &= \sigma_{j-1}^+ \sigma_j^+ + \sigma_{j-1}^+ \sigma_j^+ + \sigma_{j-2}^+ \sigma_{j-1}^+ - \sigma_{j-2}^+ (-\sigma_{j-1}^+) \\ &= 2\sigma_{j-2}^+ \sigma_{j-1}^+ + 2\sigma_{j-1}^+ \sigma_j^+ \end{aligned} \quad (5.180)$$

em que os termos com  $\Delta$  sumiram por que  $\sigma^{+2} = 0$ . Assim:

$$\begin{aligned} [\sigma_{j-1}^-, \sigma_{j-1}^+ H \sigma_{j-1}^+] &= 2[\sigma_{j-1}^-, \sigma_{j-2}^+ \sigma_{j-1}^+] + 2[\sigma_{j-1}^-, \sigma_{j-1}^+ \sigma_j^+] \\ &= 2\sigma_{j-2}^+ (-\sigma_{j-1}^z) + 2(-\sigma_{j-1}^z \sigma_j^+) \\ &= -2(\sigma_{j-2}^+ \sigma_{j-1}^z + \sigma_{j-1}^z \sigma_j^+) \end{aligned} \quad (5.181)$$

logo:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\sigma_{j-1}^z [\sigma_{j-1}^-, \sigma_{j-1}^+ H \sigma_{j-1}^+] &= -\frac{1}{2}\sigma_{j-1}^z (-2)(\sigma_{j-2}^+ \sigma_{j-1}^z + \sigma_{j-1}^z \sigma_j^+) \\ &= \sigma_{j-2}^+ + \sigma_j^+ \end{aligned} \quad (5.182)$$

como desejado.

Quanto a adjunta de cada equação temos:

$$\begin{aligned} \sigma_2^- &= (\sigma_2^+)^{\dagger} = \left( \frac{1}{4}\sigma_1^z [\sigma_1^+, [H, \sigma_1^z]] \right) \\ &= \frac{1}{4} [\sigma_1^+, [H, \sigma_1^z]]^{\dagger} \sigma_1^z = \frac{1}{4} (-) [\sigma_1^-, [H, \sigma_1^z]^{\dagger}] \sigma_1^z \\ &= \frac{1}{4} (-) [\sigma_1^-, (-) [H, \sigma_1^z]] \sigma_1^z = \frac{1}{4} [\sigma_1^-, [H, \sigma_1^z]] \sigma_1^z \end{aligned} \quad (5.183)$$

em que na terceira e quarta igualdade usamos a identidade baixo para operadores  $A$  e  $B$  quaisquer:

$$[A, B]^\dagger = (AB - BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger] = -[A^\dagger, B^\dagger] \quad (5.184)$$

Por fim, usando a equação acima na terceira igualdade abaixo, também temos:

$$\begin{aligned} \sigma_j^- &= (\sigma_j^+)^\dagger = (-\sigma_{j-2}^+ - \frac{1}{2}\sigma_{j-1}^z[\sigma_{j-1}^-, \sigma_{j-1}^+ H \sigma_{j-1}^+])^\dagger \\ &= -\sigma_{j-2}^- - \frac{1}{2}[\sigma_{j-1}^-, \sigma_{j-1}^+ H \sigma_{j-1}^+]^\dagger \sigma_{j-1}^z \\ &= -\sigma_{j-2}^- - \frac{1}{2}(-)[\sigma_{j-1}^+, \sigma_{j-1}^- H \sigma_{j-1}^-] \sigma_{j-1}^z \\ &= -\sigma_{j-2}^- + \frac{1}{2}[\sigma_{j-1}^+, \sigma_{j-1}^- H \sigma_{j-1}^-] \sigma_{j-1}^z \end{aligned} \quad (5.185)$$

e com isso, terminamos a demonstração.



## 6 Conclusões

Nesta dissertação foi possível entender melhor diversos aspectos de sistemas quânticos abertos. Foi dado ênfase aos fenômenos de transporte em sistemas quânticos fora do equilíbrio ao estudarmos o comportamento de correntes de energia (calor e trabalho) e spin enquanto são variadas certas propriedades do sistema tendo em visto o fenômeno de retificação e o fenômeno one-way street. A abordagem usada foi em termos de simetrias da equação de Lindblad em contraste ao método analítico que é o mais comumente usado para tratar esses modelos. Este último apesar de exato tem a desvantagem de se tornar exponencialmente complexo com o aumento do número de spins na cadeia. Mesmo que o uso de simetrias não permita que tenhamos uma forma explícita da matriz densidade do sistema de interesse, nessa abordagem mais geral há a vantagem de que os fenômenos deduzidos valem independentemente do regime de transporte e do tamanho da cadeia. O objetivo principal do trabalho foi o de confirmar a existência do fenômeno way-street para banhos mais gerais do tipo “target polarization” e isso foi feito em um bom grau de generalização no capítulo 5.

Inicialmente, no capítulo 2, definimos os termos de interesse assim como explicitamos as condições de validade dos modelos e equações a serem estudados. Começamos dizendo o que são sistemas quânticos abertos e também discutimos o que o conceito de perda de memória (markovianicidade) pode significar no contexto quântico. Introduzimos a equação para sistemas quânticos abertos markovianos, a chamada equação de Lindblad e realçamos que a equação de Lindblad a ser usada foi derivada a partir do chamado protocolo de interações repetidas que leva a um acoplamento não passivo do sistema com o banho. O modelo da cadeia XXZ graded foi apresentado assim como a forma final da expressão para sua correntes de energia e magnetização. Já para o modelo de Heisenberg graded foram feitos explicitamente os cálculos que levam as expressões dessas correntes com o uso da equação de continuidade. Na última seção desse capítulo introduziu-se o tipo de dissipador que seria de interesse no capítulos posteriores, isto é, um dissipador que tem como função tender a alinhar os spins da borda da cadeia em uma dada direção.

No capítulo 3, apresentamos o fenômeno de retificação e também de um análogo mas que em certo sentido é ainda mais forte: fenômeno one-way street. Esse fenômeno foi descoberto com o uso das chamadas simetrias da equação de Lindblad, ou seja, o uso de transformações unitárias que deixa a equação invariante (ou mude certos parâmetros como, no caso, a posição dos banhos) e que a partir da unicidade do NESS permite afirmar que o sistema se comporta da mesma forma no estado estacionário após o uso da transformação. O que esse fenômeno descreve é o fato de a corrente de energia possuir uma direção preferencial que não se altera com a troca de banhos. Por causa do acoplamento ativo que

o sistema tem com o banho, discutido no capítulo anterior, a importância de separar a corrente de energia em uma contribuição devido ao calor e outra devido ao trabalho para os modelos estudados foi também enfatizada na última seção desse capítulo.

Após isso, no capítulo 4 foram discutidos ainda outros fenômenos interessantes descobertos com o uso de simetrias. Na primeira seção foi demonstrado o fato de a corrente de energia ser nula no estado estacionário de não equilíbrio para o modelo XXZ homogêneo e apontado o fato de que esse não é o caso para o caso graded já que já existem resultados exatos confirmando isso. A alternância de sinal de correntes de spin com o tamanho do sistema para essas mesmas cadeias mas restrito a banhos que fixam o spin de um lado na direção X e do outro na direção Y foi discutida na segunda seção. Já na última seção foi apresentada uma derivação do fato da ausência de retificação de corrente de magnetização nesse mesmo modelo quando o parâmetro delta é nulo.

Por fim, no capítulo 5, o fenômeno one-way street que havia sido descoberto apenas para dois tipos específicos de banhos térmicos foi generalizado e mostrado válido para banhos mais gerais. Isso foi feito ao se encontrar uma transformação unitária que estivesse relacionada com a troca de banhos do sistema dado as formas particulares dos banhos. Além disso, também há uma discussão sobre a unicidade do estado estacionário de não equilíbrio para estes sistemas que é um ponto muito importante para a validade dos argumentos feitos baseados em simetria.

Reconhecemos que o resultado do capítulo 5 sugere a existência de uma forma fechada para as matrizes de trocas de banhos que abranja todas as configurações possíveis de pares de banhos de spins pertencentes a um mesmo plano (XY, XZ e YZ). A procura dessas matrizes não teve um resultado bem sucedido, possivelmente devido a limitação de tempo, mas é uma possível continuação deste trabalho. Quanto a outros trabalhos futuros relacionados, podemos dizer que há ainda várias perguntas a serem respondidas: Em qual sentido exatamente a corrente de energia flui? De que maneira esse sentido depende da estrutura gradual? Este sentido não depende da posição relativa dos banhos, mas ele depende do par de banhos? Qual o papel do emaranhamento nesse fenômeno? Com a resposta para essas perguntas e ainda outras que surgirão melhoraremos cada vez mais nosso entendimento desses sistemas quânticos. Esperamos que as discussões e cálculos feitos nessa dissertação tenham servido como ajuda nesse sentido.

# Referências

- [1] Pereira, Emmanuel: *Rectification and one-way street for the energy current in boundary-driven asymmetric quantum spin chains*. Physical Review E, 95(3):030104, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 9, 11, 19 e 35.
- [2] Barra, Felipe: *The thermodynamic cost of driving quantum systems by their boundaries*. Scientific reports, 5:14873, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 9, 11, 18 e 38.
- [3] Pereira, Emmanuel: *Heat, work, and energy currents in the boundary-driven  $X X Z$  spin chain*. Physical Review E, 97(2):022115, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 9, 11 e 19.
- [4] De Chiara, Gabriele, Landi, Gabriel, Hewgill, Adam, Reid, Brendan, Ferraro, Alessandro, Roncaglia, Augusto J e Antezza, Mauro: *Reconciliation of quantum local master equations with thermodynamics*. New Journal of Physics, 20(11):113024, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 11.
- [5] Bonetto, Federico, Lebowitz, Joel L e Rey-Bellet, Luc: *Fourier's law: a challenge to theorists*. Em *Mathematical physics 2000*, páginas 128–150. World Scientific, 2000. Citado na página 16.
- [6] Ballentine, Leslie E: *Quantum mechanics: a modern development*. World Scientific Publishing Company, 1998. Citado na página 16.
- [7] Duan, L M, Demler, E e Lukin, Mikhail D: *Controlling spin exchange interactions of ultracold atoms in optical lattices*. Physical review letters, 91(9):090402, 2003. Citado na página 17.
- [8] Nguyen, Thanh Long, Raimond, Jean Michel, Sayrin, Clément, Cortinas, Rodrigo, Cantat-Moltrecht, Tigrane, Assemat, Frédéric, Dotsenko, Igor, Gleyzes, Sébastien, Haroche, Serge, Roux, Guillaume *et al.*: *Towards quantum simulation with circular Rydberg atoms*. Physical Review X, 8(1):011032, 2018. Citado na página 17.
- [9] Li, Nianbei, Ren, Jie, Wang, Lei, Zhang, Gang, Hänggi, Peter e Li, Baowen: *Colloquium: Phononics: Manipulating heat flow with electronic analogs and beyond*. Reviews of Modern Physics, 84(3):1045, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 33.
- [10] Terraneo, M, Peyrard, M e Casati, G: *Controlling the energy flow in nonlinear lattices: a model for a thermal rectifier*. Physical review letters, 88(9):094302, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 33.

- 
- [11] Strasberg, Philipp, Schaller, Gernot, Brandes, Tobias e Esposito, Massimiliano: *Quantum and information thermodynamics: a unifying framework based on repeated interactions*. Physical Review X, 7(2):021003, 2017. Citado na página 18.
- [12] Li, Baowen, Wang, Lei e Casati, Giulio: *Thermal diode: Rectification of heat flux*. Physical review letters, 93(18):184301, 2004. Citado na página 18.
- [13] Zhu, Shi Liang, Fu, Hao, Wu, C J, Zhang, S C e Duan, L M: *Spin Hall effects for cold atoms in a light-induced gauge potential*. Physical review letters, 97(24):240401, 2006. Citado na página 18.
- [14] Pereira, Emmanuel: *Graded anharmonic crystals as genuine thermal diodes: Analytical description of rectification and negative differential thermal resistance*. Physical Review E, 82(4):040101, 2010. Citado na página 18.
- [15] Pereira, Emmanuel: *Sufficient conditions for thermal rectification in general graded materials*. Physical Review E, 83(3):031106, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 33.
- [16] Wang, Jiao, Pereira, Emmanuel e Casati, Giulio: *Thermal rectification in graded materials*. Physical Review E, 86(1):010101, 2012. Citado na página 18.
- [17] Popkov, Vladislav e Livi, Roberto: *Manipulating energy and spin currents in non-equilibrium systems of interacting qubits*. New Journal of Physics, 15(2):023030, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 18, 34 e 41.
- [18] *The Quantum Thermodynamics Revolution*. <https://www.quantamagazine.org/the-quantum-thermodynamics-revolution-20170502/>, Accessed: 2020-02-02. Citado na página 19.
- [19] Micadei, Kaonan, Peterson, John PS, Souza, Alexandre M, Sarthour, Roberto S, Oliveira, Ivan S, Landi, Gabriel T, Batalhão, Tiago B, Serra, Roberto M e Lutz, Eric: *Reversing the direction of heat flow using quantum correlations*. Nature communications, 10(1):2456, 2019. Citado na página 19.
- [20] Partovi, M Hossein: *Entanglement versus Stosszahlansatz: Disappearance of the thermodynamic arrow in a high-correlation environment*. Physical Review E, 77(2):021110, 2008. Citado na página 19.
- [21] Jevtic, Sania, Jennings, David e Rudolph, Terry: *Maximally and minimally correlated states attainable within a closed evolving system*. Physical review letters, 108(11):110403, 2012. Citado na página 19.
- [22] Jennings, David e Rudolph, Terry: *Entanglement and the thermodynamic arrow of time*. Physical Review E, 81(6):061130, 2010. Citado na página 19.

- [23] Bera, Manabendra N, Riera, Arnau, Lewenstein, Maciej e Winter, Andreas: *Generalized laws of thermodynamics in the presence of correlations*. Nature communications, 8(1):1–6, 2017. Citado na página 19.
- [24] Rivas, Angel e Huelga, Susana F: *Open quantum systems*, volume 13. Springer, 2012. Citado na página 21.
- [25] Breuer, Heinz Peter, Petruccione, Francesco *et al.*: *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002. Citado na página 25.
- [26] Huang, JP e Yu, KW: *Enhanced nonlinear optical responses of materials: composite effects*. Physics Reports, 431(3):87–172, 2006. Citado na página 31.
- [27] Chang, Chih Wei, Okawa, D, Majumdar, A e Zettl, A: *Solid-state thermal rectifier*. Science, 314(5802):1121–1124, 2006. Citado na página 31.
- [28] Landi, Gabriel T, Novais, E, Oliveira, Mário J de e Karevski, Dragi: *Flux rectification in the quantum  $XXZ$  chain*. Physical Review E, 90(4):042142, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 50.
- [29] Pereira, Emmanuel: *Perfect thermal rectification in a many-body quantum Ising model*. Physical Review E, 99(3):032116, 2019. Citado na página 33.
- [30] Schuab, Lucas, Pereira, Emmanuel e Landi, Gabriel T: *Energy rectification in quantum graded spin chains: Analysis of the  $XXZ$  model*. Physical Review E, 94(4):042122, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.
- [31] Popkov, V: *Alternation of sign of magnetization current in driven  $XXZ$  chains with twisted  $XY$  boundary gradients*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2012(12):P12015, 2012. Citado na página 44.
- [32] Prosen, Tomaž: *Open  $XXZ$  Spin Chain: Nonequilibrium Steady State and a Strict Bound on Ballistic Transport*. Physical review letters, 106(21):217206, 2011. Citado na página 48.
- [33] Evans, David E: *Irreducible quantum dynamical semigroups*. Preprint series: Pure mathematics <http://urn.nb.no/URN:NBN:no-8076>, 1976. Citado na página 85.
- [34] Prosen, Tomaž: *Comments on a boundary-driven open  $XXZ$  chain: asymmetric driving and uniqueness of steady states*. Physica Scripta, 86(5):058511, 2012. Citado na página 85.



# Apêndices





# APÊNDICE A – Derivação da Equação de Lindblad através do Protocolo de Interações Repetidas

Uma das formas mais usadas para se derivar a equação de Lindblad é a chamada “derivação microscópica” que é uma abordagem perturbativa em que é feito o uso de diversas suposições físicas além de várias aproximações matemáticas. Uma maneira alternativa e mais direta de se chegar na mesma equação é com o uso do chamado “Protocolo de Interações Repetidas”. Um significativo número de pesquisadores usam a equação de Lindblad derivada dessa forma e como vimos no capítulo 3 a maneira como se chega na equação de Lindblad é de crucial importância no cálculo de grandezas (como calor e trabalho) do sistema sendo estudado. Por esses motivos e pelo fato de nossos resultados anteriores terem sido encontrados a partir do uso desse protocolo ressaltamos sua importância neste apêndice.

Em resumo, o processo feito é o seguinte: acoplamos nosso sistema de interesse a um par de banhos e deixamos o sistema total evoluir por um período de tempo  $\tau$ , após isso, “jogamos fora os banhos” (tomando o traço parcial em relação a eles) e acoplamos o sistema de interesse a um novo mas idêntico par de banhos. Novamente, deixamos o sistema total evoluir pelo mesmo intervalo de tempo anterior e repetimos este processo indefinidamente. Ao final, tomamos o limite de  $\tau \rightarrow 0$  e com isso chegaremos a equação de Lindblad. Um importante detalhe desse processo é que em cada começo de intervalo o sistema e o banho estão desacoplados e assim:

$$\rho_{tot}(m\tau) = \rho_L(m\tau) \otimes \rho_S(m\tau) \otimes \rho_R(m\tau) \quad (\text{A.1})$$

em que  $\rho_S$  representa o sistema,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , e  $\rho_{L,R}$  os banhos esquerdo e direito respectivamente.

Escrevemos o Hamiltoniano dos banhos como:

$$H_r = \sum_n H_r^n \quad (\text{A.2})$$

em que  $r = L$  ou  $R$  e  $H^n$  age no intervalo de tempo  $[(n-1)\tau, n\tau)$ . Usamos essa mesma ideia de separar o Hamiltoniano em termos que agem em intervalos de tempos distintos mas agora para a interação sistema-banhos:

$$V(t) = \sum_n V^n \quad (\text{A.3})$$

com  $V^n = \gamma(V_L^n + V_R^n)$ , ou seja, separamos em uma contribuição do banho esquerdo e outra do banho direito.

A matriz densidade que representa o estado dos banhos será escrita como  $\rho_E = \otimes_i \rho_i$  em que cada termo do produto tensorial representa o estado no começo de um intervalo e tomamos:

$$\rho_i = \omega_{\beta_L}(H_L^i) \otimes \omega_{\beta_R}(H_R^i) \quad (\text{A.4})$$

em que, com  $r = L, R$ :

$$\omega_{\beta_r} = \frac{e^{-\beta_r H_r}}{Z_r} \quad (\text{A.5})$$

isto é, quando dizemos que tomamos um banho novo estamos nos referindo a um banho em que o estado é o estado de equilíbrio de Gibbs com inverso da temperatura  $\beta_{L,R}$ .

A partir das definições acima e da descrição do processo, no fim do passo  $n$  temos:

$$\rho_S(n\tau) = \text{Tr}_n[U_n\{\rho_S((n-1)\tau) \otimes \rho_n\}U_n^\dagger] \quad (\text{A.6})$$

em que  $\text{Tr}_n$  é o traço sobre a  $n$ -ésima cópia dos banhos e  $U_n$  é a evolução temporal do sistema total que é fechado e é dada por:

$$U_n = \exp[-i\tau(H_S + H_L^n + H_R^n + V^n)] \quad (\text{A.7})$$

em que  $H$  é o Hamiltoniano do sistema e estamos considerando  $\hbar = 1$ .

Como estivemos interessados apenas em cadeias de spins durante este trabalho, vamos usar o Hamiltoniano desse modelo para derivar a equação de Lindblad. Em particular, usaremos:

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} \{\alpha(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) + \Delta_{i,i+1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z\} + \sum_{i=1}^N B_i \sigma_i^z \quad (\text{A.8})$$

ou seja, o modelo XXZ graded com um campo magnético externo no eixo Z.

O Hamiltoniano do banho é:

$$H_L = B_L \sigma_L^z \quad (\text{A.9})$$

e o mesmo para o banho da direita (R). Já o da interação sistema-banhos é no lado esquerdo:

$$V_L = \sigma_L^x \sigma_1^x + \sigma_L^y \sigma_1^y \quad (\text{A.10})$$

e no lado direito:

$$V_R = \sigma_N^x \sigma_R^x + \sigma_N^y \sigma_R^y \quad (\text{A.11})$$

observe que não há um termo com  $\sigma_z$  e isso será importante na simplificação dos cálculos subsequentes.

Desse modo, o Hamiltoniano total é dado por:

$$H_T = H + B_L \sigma_L^z + B_R \sigma_R^z + V_L + V_R \quad (\text{A.12})$$

Se escrevermos  $\rho_L \otimes \rho_S((n-1)\tau) \otimes \rho_R = \rho_{tot}$ , então podemos escrever:

$$\begin{aligned} \rho_S(n\tau) &= Tr_n[U_n\{\rho_L \otimes \rho_S((n-1)\tau) \otimes \rho_R\}U_n^\dagger] \\ &= Tr_n\{e^{-iH_T\tau} \rho_{tot} e^{iH_T\tau}\} \\ &= Tr_n\{\rho_{tot} - i\tau[H_T, \rho_{tot}] - \frac{\tau^2}{2}[H_T, [H_T, \rho_{tot}]] + \dots\} \end{aligned} \quad (A.13)$$

em que na última igualdade foi usada a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff para A e B operadores e x um parâmetro:

$$e^{xA} B e^{-xA} = B + [B, A]x + [A, [A, B]]\frac{x^2}{2} + [A, [A, [A, B]]]\frac{x^3}{6} + \dots \quad (A.14)$$

Vamos analisar cada um dos três termos da equação A.13 separadamente. Sejam as seguinte bases ortonormais para os espaços de Hilbert do banho esquerdo, direito e da cadeia respectivamente:

$$\begin{aligned} \{|a_m\rangle\} &\in \mathcal{H}_L \\ \{|b_m\rangle\} &\in \mathcal{H}_R \\ \{|c_m\rangle\} &\in \mathcal{H} \end{aligned} \quad (A.15)$$

Daqui para frente, vamos omitir o sinal do produto tensorial. Com isso, o primeiro termo ficará:

$$\begin{aligned} Tr_n(\rho_{tot}) &= Tr_n[\rho_L \rho_S((n-1)\tau) \rho_R] \\ &= \sum_{i,j} \langle a_i b_j | \rho_L \rho_S((n-1)\tau) \rho_R | a_i b_j \rangle \\ &= \left( \sum_i \langle a_i | \rho_L | a_i \rangle \right) \rho_S((n-1)\tau) \left( \sum_j \langle b_j | \rho_R | b_j \rangle \right) \\ &= \rho_S((n-1)\tau) \end{aligned} \quad (A.16)$$

já que estamos usando matrizes densidades e portanto seus traços são 1.

Denotando  $\rho_S(m\tau) = \rho_m$  para  $m = 1, 2, 3, \dots$ , para o segundo termo, temos ao substituir a forma do Hamiltoniano total:

$$Tr_n([H_T, \rho_{tot}]) = \sum_{i,j} \langle a_i b_j | [H + B_L \sigma_L^z + B_R \sigma_R^z + V_L + V_R, \rho_L \rho_{n-1} \rho_R] | a_i b_j \rangle \quad (A.17)$$

pela linearidade do traço temos:

$$\begin{aligned} Tr_n([H_T, \rho_{tot}]) &= \sum_{i,j} \langle a_i b_j | H \rho_L \rho_{n-1} \rho_R - \rho_L \rho_{n-1} \rho_R H | a_i b_j \rangle \\ &\quad + B_L \sum_{i,j} \langle a_i b_j | \sigma_L^z \rho_L \rho_{n-1} \rho_R - \rho_L \rho_{n-1} \rho_R \sigma_L^z | a_i b_j \rangle \\ &\quad + B_R \sum_{i,j} \langle a_i b_j | \sigma_R^z \rho_L \rho_{n-1} \rho_R - \rho_L \rho_{n-1} \rho_R \sigma_R^z | a_i b_j \rangle \\ &\quad + \sum_{i,j} \langle a_i b_j | (V_L + V_R) \rho_L \rho_{n-1} \rho_R - \rho_L \rho_{n-1} \rho_R (V_L + V_R) | a_i b_j \rangle \end{aligned} \quad (A.18)$$

daí:

$$\begin{aligned}
Tr_n([H_T, \rho_{tot}]) &= HTr_L(\rho_L)\rho_{n-1}Tr_R(\rho_R) - Tr_L(\rho_L)\rho_{n-1}Tr_R(\rho_R)H \\
&+ B_L\{Tr_L(\sigma_L^z\rho_L)\rho_{n-1}Tr_R(\rho_R) - Tr_L(\rho_L\rho_{n-1}Tr_R(\rho_R)\sigma_L^z)\} \\
&+ B_R\{Tr_R(\sigma_R^zTr_L(\rho_L)\rho_{n-1}\rho_r) - Tr_L(\rho_L)\rho_{n-1}Tr_R(\rho_R\sigma_R^z)\} \\
&+ \gamma\{Tr_n[(\sigma_L^x\sigma_1^x + \sigma_L^y\sigma_1^y)\rho_L\rho_{n-1}\rho_R - \rho_L\rho_{n-1}\rho_R(\sigma_L^x\sigma_1^x + \sigma_L^y\sigma_1^y)] \\
&+ Tr_n[(\sigma_N^x\sigma_R^x + \sigma_N^y\sigma_R^y)\rho_L\rho_{n-1}\rho_R - \rho_L\rho_{n-1}\rho_R(\sigma_N^x\sigma_{N+1}^x + \sigma_N^y\sigma_{N+1}^y)]\}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Usando que o traço das matrizes densidade é igual a 1, obtemos:

$$\begin{aligned}
Tr_n([H_T, \rho_{tot}]) &= [H, \rho_{n-1}] + B_LTr_L([\sigma_L^z, \rho_L\rho_{n-1}]) + B_RTr_R([\sigma_R^z, \rho_{n-1}\rho_R]) \\
&+ \gamma\{Tr_L([\sigma_0^x\sigma_1^x, \rho_L\rho_{n-1}] + [\sigma_0^y\sigma_1^y, \rho_L\rho_{n-1}]) + Tr_R([\sigma_N^x\sigma_{N+1}^x, \rho_L\rho_{n-1}] \\
&+ [\sigma_N\sigma_{N+1}^y, \rho_L\rho_{n-1}])\}
\end{aligned} \tag{A.20}$$

com isso:

$$\begin{aligned}
Tr_n([H_T, \rho_{tot}]) &= [H, \rho_{n-1}] + \gamma\{Tr_L([\sigma_L^x\sigma_1^x, \rho_L\rho_{n-1}]) + Tr_L([\sigma_L^y\sigma_1^y, \rho_L\rho_{n-1}])\} \\
&+ \gamma\{Tr_R([\sigma_N^x\sigma_R^x, \rho_{n-1}\rho_R]) + Tr_R([\sigma_N^y\sigma_R^y, \rho_{n-1}\rho_R])\}
\end{aligned} \tag{A.21}$$

e como o traço dos comutadores são nulos, obtemos:

$$Tr_n([H_T, \rho_{tot}]) = [H, \rho_{n-1}] \tag{A.22}$$

Por fim, o terceiro termo ficará:

$$Tr_n([H_T, [H_T, \rho_{tot}]]) = Tr_n([V_L, [V_L, \rho_{tot}]]) + Tr_n([V_R, [V_R, \rho_{tot}]]) \tag{A.23}$$

pois os outros termos são nulos.

Logo:

$$\rho_n = \rho_{n-1} - i\tau[H, \rho_{n-1}] - \frac{\tau^2}{2}\{Tr_n([V_L, [V_L, \rho_{tot}]]) + Tr_n([V_R, [V_R, \rho_{tot}]])\} \tag{A.24}$$

A aproximação que precisamos fazer e que gera certa discussão é a de fazer com que a interação entre o sistema e o banho decaia com o tempo de tal maneira que a interação se torne finita quando fizermos  $\tau \rightarrow 0$ . Isso será alcançado se reescrevermos:

$$V_L = \sqrt{\frac{\gamma}{\tau}}(\sigma_L^x\sigma_1^x + \sigma_L^y\sigma_1^y) \tag{A.25}$$

e o mesmo para  $V_R$ .

Com isso, definimos o que chamaremos de dissipadores da equação de Lindblad:

$$\begin{aligned}
Tr_n\left(\frac{-\tau^2}{2}[V_L, [V_L, \rho_{tot}]]\right) &=: \tau\mathcal{D}_L(\rho_n) \\
Tr_n\left(\frac{-\tau^2}{2}[V_R, [V_R, \rho_{tot}]]\right) &=: \tau\mathcal{D}_R(\rho_n)
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Dessa forma nós obtemos:

$$\rho_S(n\tau) = \rho_S((n-1)\tau) - i\tau[H, \rho_S((n-1)\tau)] + \tau\mathcal{D}_L(\rho_S((n-1)\tau)) + \tau\mathcal{D}_R(\rho_S((n-1)\tau)) + \mathcal{O}(\tau) \quad (\text{A.27})$$

em que enfatizamos que no último termo estamos descartando termos também com expoentes fracionários entre 1 e 2. Assim:

$$\frac{d\rho_S}{dt} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\rho_S(n\tau) - \rho_S((n-1)\tau)}{\tau} = -i[H, \rho_S] + \mathcal{D}_L(\rho_S) + \mathcal{D}_R(\rho_S) \quad (\text{A.28})$$

que é a equação de Lindblad.

Para encontrarmos a forma explícita dos dissipadores, observamos que devemos antes ter uma forma explícita da matriz densidade. Sabemos que a matriz identidade e as matrizes de Pauli formam uma base para o espaço de matrizes  $2 \times 2$  com entradas complexas. Desse modo, podemos escrever uma matriz densidade qualquer como:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \quad (\text{A.29})$$

em que  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  é um vetor de números reais e  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  é um “vetor” de matrizes de Pauli. Em detalhes:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & 1 - a_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Por definição, temos que:

$$\langle \vec{\sigma} \rangle = Tr(\rho \vec{\sigma}) \quad (\text{A.31})$$

e calculando obtemos:

$$\begin{aligned} \rho \vec{\sigma} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & 1 - a_3 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} a_1 - ia_2 & 1 + a_3 \\ 1 - a_3 & a_1 + ia_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 + ia_1 & -i - ia_3 \\ i - ia_3 & a_2 - ia_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 + a_3 & ia_2 - a_1 \\ a_1 + ia_2 & a_3 - 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

tomando o traço:

$$Tr(\rho \vec{\sigma}) = \frac{1}{2}(2a_1, 2a_2, 2a_3) = \vec{a} \quad (\text{A.33})$$

Vamos querer encontrar uma forma diagonal para a matriz densidade. Para isso, vamos encontrar seus autovalores:

$$\begin{vmatrix} \frac{1+a_3}{2} - \lambda & \frac{a_1-ia_2}{2} \\ \frac{a_1+ia_2}{2} & \frac{1-a_3}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.34})$$

calculando:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1+a_3}{2} - \lambda \right) \left( \frac{1-a_3}{2} - \lambda \right) - \left( \frac{a_1-ia_2}{2} \right) \left( \frac{a_1+ia_2}{2} \right) = 0 \\
 & \frac{1}{4} - \frac{a_3^2}{4} - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda a_3}{2} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda a_3}{2} + \lambda^2 - \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_2^2}{4} = 0 \\
 & \lambda^2 - \lambda - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{4} + \frac{1}{4} = 0 \\
 & \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{2}
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

logo os autovalores são:

$$\begin{aligned}
 \lambda_+ &= \frac{1 + |\vec{a}|}{2} \\
 \lambda_- &= \frac{1 - |\vec{a}|}{2}
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

Podemos escolher um sistema de referencial em que apenas a componente Z de  $\vec{a}$  é não nula e assim:

$$\rho_L = \frac{1+f_L}{2} |z_+\rangle \langle z_+| + \frac{1-f_L}{2} |z_-\rangle \langle z_-| \tag{A.37}$$

em que  $|\vec{a}| = a_z = f_L = \langle \sigma_L^z \rangle$ . E similarmente:

$$\rho_R = \frac{1+f_R}{2} |z_+\rangle \langle z_+| + \frac{1-f_R}{2} |z_-\rangle \langle z_-| \tag{A.38}$$

com  $f_L = \langle \sigma_L^z \rangle$

Por último, demonstraremos que caso façamos o scaling  $\gamma \rightarrow \frac{\Gamma}{4}$  os dissipadores possuirão a forma:

$$\mathcal{D}_{L,R} = \sum_{k=\pm} L_k \rho_S L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{L_k^\dagger L_k, \rho_S\} \tag{A.39}$$

em que, para o lado esquerdo por exemplo:

$$L_\pm = \sqrt{\frac{\Gamma}{4}} (1 \pm f_L) \sigma_1^\pm \tag{A.40}$$

e já para o lado direito trocamos  $\sigma_1^\pm, f_L \rightarrow \sigma_N^\pm, f_R$ .

Vamos fazer a demonstração apenas para o lado esquerdo já que para o lado direito as contas são análogas. Começando com a expressão:

$$\mathcal{D}_L(\rho_n) = -\frac{\tau}{2} Tr_n([V_L, [V_L, \rho_{tot}]]) \tag{A.41}$$

calculamos:

$$Tr_n([V_L, [V_L, \rho_{tot}]]) = Tr_n(V_L^2 \rho_{tot} - 2V_L \rho_{tot} V_L + \rho_{tot} V_L^2) \tag{A.42}$$

Usando a equação A.25 e a decomposição de  $\rho_{tot}$  obtemos:

$$\begin{aligned}
 Tr_n([V_L, [V_L, \rho_{tot}]]) &= \frac{\gamma}{\tau} Tr_n[(\sigma_L^x \sigma_1^x + \sigma_L^y \sigma_1^y)(\sigma_L^x \sigma_1^x + \sigma_L^y \sigma_1^y) \rho_L \rho \rho_R \\
 &\quad - 2(\sigma_L^x \sigma_1^x + \sigma_L^y \sigma_1^y) \rho_L \rho \rho_R (\sigma_L^x \sigma_1^x + \sigma_L^y \sigma_1^y) \\
 &\quad + \rho_L \rho \rho_R (\sigma_L^x \sigma_1^x + \sigma_L^y \sigma_1^y) (\sigma_L^x \sigma_1^x + \sigma_L^y \sigma_1^y)]
 \end{aligned} \tag{A.43}$$

em que estamos denotando a matriz densidade do sistema por  $\rho$ . Expandindo e colocando os operadores no produto tensorial implícito:

$$\begin{aligned}
Tr_n([V_L, [V_L, \rho_{tot}]]) &= \frac{\gamma}{\tau} Tr_n[(\sigma_L^x)^2 \rho_L (\sigma_1^x)^2 \rho \rho_R + \sigma_L^x \sigma_L^y \rho_L \sigma_1^x \sigma_1^y \rho \rho_R \\
&\quad + \sigma_L^y \sigma_L^x \rho_L \sigma_1^y \sigma_1^x \rho \rho_R + (\sigma_L^y)^2 \rho_L (\sigma_1^y)^2 \rho \rho_R \\
&\quad - 2(\sigma_L^x \rho_L \sigma_L^x \sigma_1^x \rho \sigma_1^x \rho_R + \sigma_L^x \rho_L \sigma_L^y \sigma_1^x \rho \sigma_1^y \rho_R \\
&\quad + \sigma_L^y \rho_L \sigma_L^x \sigma_1^y \rho \sigma_1^x \rho_R + \sigma_L^y \rho_L \sigma_L^y \sigma_1^y \rho \sigma_1^y \rho_R) \\
&\quad + \rho_L (\sigma_L^x)^2 \rho (\sigma_1^x)^2 \rho_R + \rho_L \sigma_L^x \sigma_L^y \rho \sigma_1^x \sigma_1^y \rho_R \\
&\quad + \rho_L \sigma_L^y \sigma_L^x \rho \sigma_1^y \sigma_1^x \rho_R + \rho_L (\sigma_L^y)^2 \rho (\sigma_1^y)^2 \rho_R]
\end{aligned} \tag{A.44}$$

Agora, calculando o traço usando as bases já definidas em A.15, temos:

$$\begin{aligned}
Tr_n([V_L, [V_L, \rho_{tot}]]) &= \frac{\gamma}{\tau} \sum_{i,j} [\langle a_i | (\sigma_L^x)^2 \rho_L | a_i \rangle (\sigma_1^x)^2 \rho \langle b_j | \rho_R | b_j \rangle \\
&\quad + \langle a_i | \sigma_L^x \sigma_L^y \rho_L | a_i \rangle \sigma_1^x \sigma_1^y \rho \langle b_j | \rho_R | b_j \rangle \\
&\quad + \langle a_i | \sigma_L^y \sigma_L^x \rho_L | a_i \rangle \sigma_1^y \sigma_1^x \rho \langle b_j | \rho_R | b_j \rangle + \langle a_i | (\sigma_L^y)^2 \rho_L | a_i \rangle (\sigma_1^y)^2 \rho \langle b_j | \rho_R | b_j \rangle \\
&\quad - 2(\langle a_i | \sigma_L^x \rho_L \sigma_L^x | a_i \rangle \sigma_1^x \rho \sigma_1^x \langle b_j | \rho_R | b_j \rangle + \langle a_i | \sigma_L^x \rho_L \sigma_L^y | a_i \rangle \sigma_1^x \rho \sigma_1^y \langle b_j | \rho_R | b_j \rangle \\
&\quad + \langle a_i | \sigma_L^y \rho_L \sigma_L^x | a_i \rangle \sigma_1^y \rho \sigma_1^x \langle b_j | \rho_R | b_j \rangle + \langle a_i | \sigma_L^y \rho_L \sigma_L^y | a_i \rangle \sigma_1^y \rho \sigma_1^y \langle b_j | \rho_R | b_j \rangle) \\
&\quad + \langle a_i | \rho_L (\sigma_L^x)^2 | a_i \rangle \rho (\sigma_1^x)^2 \langle b_j | \rho_R | b_j \rangle + \langle a_i | \rho_L \sigma_L^x \sigma_L^y | a_i \rangle \rho \sigma_1^x \sigma_1^y \langle b_j | \rho_R | b_j \rangle \\
&\quad + \langle a_i | \rho_L \sigma_L^y \sigma_L^x | a_i \rangle \rho \sigma_1^y \sigma_1^x \langle b_j | \rho_R | b_j \rangle + \langle a_i | \rho_L (\sigma_L^y)^2 | a_i \rangle \rho (\sigma_1^y)^2 \langle b_j | \rho_R | b_j \rangle]
\end{aligned} \tag{A.45}$$

Usando  $\sum_j \langle b_j | \rho_R | b_j \rangle = 1$ , e que o traço é cíclico, podemos reescrever colocando os operadores de Pauli a esquerda de  $\rho_L$  e juntando os termos:

$$\begin{aligned}
Tr_n([V_L, [V_L, \rho_{tot}]]) &= \frac{\gamma}{\tau} \{ Tr_L((\sigma_L^x)^2 \rho_L) [(\sigma_1^x)^2 \rho + \rho (\sigma_1^x)^2 - 2\sigma_1^x \rho \sigma_1^x] \\
&\quad + Tr_L(\sigma_L^x \sigma_L^y \rho_L) [\sigma_1^x \sigma_1^y \rho + \rho \sigma_1^x \sigma_1^y - 2\sigma_1^y \rho \sigma_1^x] \\
&\quad + Tr_L(\sigma_L^y \sigma_L^x \rho_L) [\sigma_1^y \sigma_1^x \rho + \rho \sigma_1^y \sigma_1^x - 2\sigma_1^x \rho \sigma_1^y] \\
&\quad + Tr_L((\sigma_L^y)^2 \rho_L) [(\sigma_1^y)^2 \rho + \rho (\sigma_1^y)^2 - 2\sigma_1^y \rho \sigma_1^y] \}
\end{aligned} \tag{A.46}$$

em que  $Tr_L$  denota o traço em relação ao banho esquerdo. Usando as seguintes propriedades de matrizes de Pauli:

$$\begin{aligned}
(\sigma^x)^2 &= (\sigma^y)^2 = I \\
\sigma^x \sigma^y &= -\sigma^y \sigma^x
\end{aligned} \tag{A.47}$$

temos:

$$\begin{aligned}
Tr_n([V_L, [V_L, \rho_{tot}]]) &= \frac{\gamma}{\tau} \{ Tr_L(\rho_L) [2\rho - 2\sigma_1^x \rho \sigma_1^x] \\
&\quad + Tr_L(\sigma_L^x \sigma_L^y \rho_L) [2\sigma_1^x \sigma_1^y \rho + 2\rho \sigma_1^x \sigma_1^y - 2\sigma_1^y \rho \sigma_1^x + 2\sigma_1^x \rho \sigma_1^y] \\
&\quad + Tr_L(\rho_L) [2\rho - 2\sigma_1^y \rho \sigma_1^y] \}
\end{aligned} \tag{A.48}$$

Substituindo  $Tr_L(\rho_L) = 1$  e que  $\sigma^x \sigma^y = i\sigma^z$ , obtemos:

$$Tr_n([V_L, [V_L, \rho_{tot}]]) = \frac{\gamma}{\tau} \{4\rho - 2\sigma_1^x \rho \sigma_1^x - 2\sigma_1^y \rho \sigma_1^y + 2i Tr_L(\sigma_L^z \rho_L) [\sigma_1^x \sigma_1^y \rho + \rho \sigma_1^x \sigma_1^y - \sigma_1^y \rho \sigma_1^x + \sigma_1^x \rho \sigma_1^y]\} \quad (\text{A.49})$$

vamos calcular separadamente  $Tr_L(\sigma_L^z \rho_L)$  usando a forma explícita da matriz densidade  $\rho_L$  dada pela equação A.37 e usando a base de autovetores  $|z_{\pm}\rangle$  dos operadores de Pauli na direção  $Z$ :

$$\begin{aligned} Tr_L(\sigma_L^z \rho_L) &= Tr_L \left\{ \sigma_L^z \left[ \frac{1+f_L}{2} |z_+\rangle \langle z_+| + \frac{1-f_L}{2} |z_-\rangle \langle z_-| \right] \right\} \\ &= \langle z_+ | \sigma_L^z \left[ \frac{1+f_L}{2} |z_+\rangle \langle z_+| + \frac{1-f_L}{2} |z_-\rangle \langle z_-| \right] |z_+\rangle \\ &\quad + \langle z_- | \sigma_L^z \left[ \frac{1+f_L}{2} |z_+\rangle \langle z_+| + \frac{1-f_L}{2} |z_-\rangle \langle z_-| \right] |z_-\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

usando que  $\sigma^z = \pm |z_{\pm}\rangle$ :

$$\begin{aligned} Tr_L(\sigma_L^z \rho_L) &= Tr_L \left\{ \left[ \frac{1+f_L}{2} |z_+\rangle \langle z_+| + \frac{1-f_L}{2} |z_-\rangle \langle z_-| \right] \right\} \\ &= \langle z_+ | \left[ \frac{1+f_L}{2} |z_+\rangle \langle z_+| + \frac{1-f_L}{2} |z_-\rangle \langle z_-| \right] |z_+\rangle \\ &\quad + \langle z_- | \left[ \frac{1+f_L}{2} |z_+\rangle \langle z_+| + \frac{1-f_L}{2} |z_-\rangle \langle z_-| \right] |z_-\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

e a partir da ortonormalidade da base obtemos:

$$Tr_L(\sigma_L^z \rho_L) = \frac{1+f_L}{2} - \frac{1-f_L}{2} = f_L \quad (\text{A.52})$$

substituindo na expressão de  $Tr_L(\rho_L) = 1$  :

$$\begin{aligned} Tr_n([V_L, [V_L, \rho_{tot}]]) &= \frac{\gamma}{\tau} \{4\rho - 2\sigma_1^x \rho \sigma_1^x - 2\sigma_1^y \rho \sigma_1^y \\ &\quad + 2if_L [\sigma_1^x \sigma_1^y \rho + \rho \sigma_1^x \sigma_1^y - \sigma_1^y \rho \sigma_1^x + \sigma_1^x \rho \sigma_1^y]\} \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Logo, substituindo em A.41:

$$\mathcal{D}_L(\rho_n) = \gamma [-2\rho + \sigma_1^x \rho \sigma_1^x + \sigma_1^y \rho \sigma_1^y - if_L (\sigma_1^x \sigma_1^y \rho + \rho \sigma_1^x \sigma_1^y - \sigma_1^y \rho \sigma_1^x + \sigma_1^x \rho \sigma_1^y)] \quad (\text{A.54})$$

Se quisermos escrever em termos dos operadores criação e destruição  $\sigma^{\pm} = \frac{\sigma^x \pm i\sigma^y}{2}$  pode ser demonstrado que encontraremos:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_L(\rho) &= \gamma \{ (1+f_L) [2\sigma_1^+ \rho \sigma_1^- - (\sigma_1^- \sigma_1^+ \rho + \rho \sigma_1^- \sigma_1^+)] \\ &\quad + (1-f_L) [2\sigma_1^- \rho \sigma_1^+ - (\sigma_1^+ \sigma_1^- \rho + \rho \sigma_1^+ \sigma_1^-)] \} \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$



juntando com o dissipador da direita, obtemos finalmente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\rho) &= \mathcal{D}_L(\rho) + \mathcal{D}_R(\rho) \\
&= \gamma\{(1 + f_L)[2\sigma_1^+ \rho \sigma_1^- - (\sigma_1^- \sigma_1^+ \rho + \rho \sigma_1^- \sigma_1^+)] \\
&\quad + (1 - f_L)[2\sigma_1^- \rho \sigma_1^+ - (\sigma_1^+ \sigma_1^- \rho + \rho \sigma_1^+ \sigma_1^-)] \\
&\quad + (1 + f_R)[2\sigma_N^+ \rho \sigma_N^- - (\sigma_N^- \sigma_N^+ \rho + \rho \sigma_N^- \sigma_N^+)] \\
&\quad + (1 - f_R)[2\sigma_N^- \rho \sigma_N^+ - (\sigma_N^+ \sigma_N^- \rho + \rho \sigma_N^+ \sigma_N^-)]\}
\end{aligned} \tag{A.56}$$

Fazendo o scaling de  $\gamma$  e expandindo a expressão A.39 com A.40 obtemos a mesma expressão acima. Como queríamos demonstrar.



# Anexos



# ANEXO A – ARTIGO: One-way street for the energy current: A ubiquitous phenomenon in boundary driven quantum spin chains

A seguir está anexado o artigo que resume os resultados encontrados no capítulo 5 assim como expõe a sua conexão com pesquisas atuais e importância para futuros trabalhos. Este artigo foi publicado na EPL (Europhysics Letters).

# One-way street for the energy current: A ubiquitous phenomenon in boundary driven quantum spin chains

Deborah Oliveira,<sup>1</sup> Emmanuel Pereira,<sup>1,\*</sup> and Humberto C. F. Lemos<sup>2,†</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Física–Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, CP 702, 30.161-970 Belo Horizonte MG, Brazil*

<sup>2</sup>*Departamento de Estatística, Física e Matemática, CAP – Universidade Federal de São João del-Rei, 36.420-000, Ouro Branco, MG, Brazil*

Focusing on the description of nontrivial properties of the energy transport at quantum scale, we investigate asymmetrical quantum spin chains described by boundary-driven  $XXZ$  and  $XXX$  Heisenberg models. We search for symmetries properties of the Lindblad master equation related to the dynamics of the system in order to establish properties of the steady state. Under rather general assumptions for the target polarization at the boundaries, we show the occurrence of an effect related to (but stronger than) energy rectification, namely, the one-way street phenomenon, which is the existence of an unique way for the energy flow. Precisely, the energy current does not change in magnitude and direction as we invert the baths at the boundaries: its direction is completely determined by the asymmetry in the bulk of the chain. The results follow independent of the system size and of the transport regime. Our findings show the ubiquitous occurrence of the one-way street phenomenon for the energy flow in boundary-driven spin systems and, we believe, they shall be an useful contribution to the area devoted to the investigation and building of efficient quantum devices used to control and manipulate the energy current.

*Introduction:* Understanding the properties of the energy transport at quantum scale is a problem of considerable theoretical and experimental interest that is taking increasing attention in recent years.

The emerging field of quantum thermodynamics urges to the detailed theoretical study of the quantum transport properties, in particular, of the quantum energy currents. Moreover, the amazing on-going progress in experimental manipulations of small quantum systems makes mandatory the theoretical investigation of nonequilibrium features of quantum systems, in particular, their transport characteristics, directly related to the understanding of their behavior out of equilibrium.

Some specific problems of theoretical and experimental importance appear in this context, for example, the possibility of building quantum thermal rectifiers, i.e., the possibility of finding systems with a preferential direction for the energy flow. The thermal rectifier, or thermal diode, is a system in which the magnitude of the energy current changes as we invert the device between two baths. Its investigation is motivated by the success of its electronic analog, the electrical diode, which, together with transistor and other related nonlinear solid state devices, were responsible for the amazing development of modern electronics, with impact in our daily lives. In fact, the interest in energy rectification is an old problem: it appears already within the study of simpler classical models describing the heat conduction and many works are devoted to the theme [1–7].

In short, we stress, it is clear the general interest in the investigation of the energy transport, importantly in

the quantum scale. In particular, a recurrent problem is the search of conditions which allow an asymmetric transport, i.e., a preferential direction for the currents.

In the present work, we investigate the energy current in boundary-driven quantum spin Heisenberg ( $XXX$ ) and  $XXZ$  chains, the archetypal models of open quantum systems, and so, a problem with significance to several areas: nonequilibrium statistical physics, condensed matter, optics, cold atoms, quantum information, etc. [8]. As usual, we consider the dynamics given by a Lindblad master equation (LME). Under rather general assumptions for the target polarization at the boundaries, we show the existence of an intriguing one-way street phenomenon for the energy current, i.e., in asymmetric chains (e.g., graded systems) the direction of the energy current is completely determined by the asymmetry in the bulk of the system, precisely, the direction of the energy flow does not change as we invert the baths at the boundaries. It is important to recall that, in these boundary-driven quantum systems, the energy current involves heat and also power (work), and so, no thermodynamic inconsistency is present here [9–11]. More details are presented ahead. To establish our results we use symmetries of the density matrix, of the LME, and show the energy current properties in the steady state. That is, our strategy is inspired by the work of Popkov and Livi [12]. Our results are independent of the system size and of the existence of anomalous, normal or ballistic transport on the chain.

The existence of this one-way street phenomenon has been already shown for the simpler case of target  $\sigma^z$  polarization at the edges and another quite specific case [13]. Here, in the present work, we extend the existence of such phenomenon for rather general cases of boundary spin polarizations, proving that the phenomenon ubiquitously holds in boundary-driven quantum spin chains.

---

\*Electronic address: [emmanuel@fisica.ufmg.br](mailto:emmanuel@fisica.ufmg.br)

†Electronic address: [humbertolemos@ufsj.edu.br](mailto:humbertolemos@ufsj.edu.br)

It is important to emphasize that the existence of asymmetry in the bulk of the chain is not a guarantee for the presence of asymmetry in the energy flow. For example, for the case of classical chains of harmonic oscillators with self-consistent inner stochastic reservoirs, an effective model used to study heat conduction (Fourier's law holds in such model [14], a footprint of anharmonicity, since the law is absent in purely harmonic models [15]), it is rigorously proved that, for any asymmetric chain, there is no thermal rectification, i.e., there is no asymmetry in the magnitude of the heat flow as we invert the baths at the edges [16].

*Models and Currents:* Now we introduce the spin models. We assume, in what follows,  $\hbar = 1$ . We take quantum 1/2 spin chains and we first consider asymmetric  $XXZ$  models with Hamiltonians

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \alpha (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) + \Delta_{i,i+1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right\}, \quad (1)$$

where  $\sigma_i^\beta$  ( $\beta = x, y, z$ ) are the Pauli matrices. The anisotropy parameters  $\Delta_{i,i+1}$  are assumed to be asymmetrically distributed, for example, with a graded distribution:  $\Delta_{1,2} < \Delta_{2,3} < \dots < \Delta_{N-1,N}$ .

As usual, the dynamics of the system is given by Lindblad master equations (LME) for the density matrix

$$\frac{d\rho}{dt} = i[\rho, \mathcal{H}] + \mathcal{L}(\rho), \quad (2)$$

where the dissipator  $\mathcal{L}(\rho)$  is local here, and describes the coupling with the baths. It is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho) &= \mathcal{L}_L(\rho) + \mathcal{L}_R(\rho), \\ \mathcal{L}_{L,R}(\rho) &= \sum_{s=\pm} L_s \rho L_s^\dagger - \frac{1}{2} \{L_s^\dagger L_s, \rho\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$\{\cdot, \cdot\}$  above describes the anti-commutator. These models are recurrently studied: see, e.g., Ref.[17] and references therein. For  $\mathcal{L}_L$ , in the simpler case of a  $XXZ$  chain with target  $\sigma^z$  polarization at the edges, analyzed in Ref.[13] and several other works, we have

$$L_\pm = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} (1 \pm f_L) \sigma_1^\pm, \quad (4)$$

where  $\sigma_j^\pm$  are the spin creation and annihilation operators  $\sigma_j^\pm = (\sigma_j^x \pm i\sigma_j^y)/2$ ; and similarly for  $\mathcal{L}_R$ , but with  $\sigma_N^\pm$  and  $f_R$  replacing  $\sigma_1^\pm$  and  $f_L$ . In the previous expressions,  $\gamma$  denotes the coupling strength to the spin baths;  $f_L$  and  $f_R$  describe the driving strength, and they are related to the polarization of extra spin at the boundaries:

$$f_L = \langle \sigma_0^z \rangle, \quad f_R = \langle \sigma_{N+1}^z \rangle.$$

Ahead, we will investigate in details more general and intricate dissipators.

The expressions for the spin and energy currents can be obtained from the LME for the dynamics and a continuity

equation, as precisely described in Ref.[18]. We have, at site  $j$ , for the magnetization (spin) current

$$\langle J_j \rangle = 2\alpha \langle \sigma_j^x \sigma_{j+1}^y - \sigma_j^y \sigma_{j+1}^x \rangle. \quad (5)$$

If we add in the Hamiltonian (1) a term giving the interaction with an external magnetic field,

$$\sum_{j=1}^N B_j \sigma_j^z,$$

for the energy current we obtain (again, details in Ref.[18]),

$$\begin{aligned} \langle F_j \rangle &= \langle F_j^{XXZ} \rangle + \langle F_j^B \rangle, \\ \langle F_j^{XXZ} \rangle &= 2\alpha \langle \alpha (\sigma_{j-1}^y \sigma_j^z \sigma_{j+1}^x - \sigma_{j-1}^x \sigma_j^z \sigma_{j+1}^y) \\ &\quad + \Delta_{j-1,j} (\sigma_{j-1}^z \sigma_j^x \sigma_{j+1}^y - \sigma_{j-1}^z \sigma_j^y \sigma_{j+1}^x) \\ &\quad + \Delta_{j,j+1} (\sigma_{j-1}^x \sigma_j^y \sigma_{j+1}^z - \sigma_{j-1}^y \sigma_j^x \sigma_{j+1}^z) \rangle, \\ \langle F_j^B \rangle &= \frac{1}{2} B_j \langle J_{j-1} + J_j \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

We need to make an important remark now. In most of the studies of  $XXZ$  chains, the authors take homogeneous, symmetric chains. In such a case, considering the energy investigation, both direct computation or symmetry arguments lead to  $\langle F_j^{XXZ} \rangle = 0$  [12, 18]. Consequently, the remaining energy flow is proportional to the magnetization current, and it vanishes in the absence of an external magnetic field  $B = 0$ . But that is not the scenario for asymmetric chains. We give a concrete example. In a previous work [19], the density matrix is analytically computed for a small chain of three spins, and the spin and energy currents are precisely determined for the case of target  $\sigma^z$  polarizations, with  $f_L = f$  and  $f_R = -f$  at the edges. In particular, in the steady state, for  $\langle F \rangle \equiv \langle F_j \rangle$ , an exact, huge expression is determined for the three sites chain with  $\alpha = 1$ ,  $\Delta_{1,2} = \Delta - \delta$ ,  $\Delta_{2,3} = \Delta + \delta$ , and  $B_j = B$ . For simplicity and clearness, we write below the dominant terms considering an expansion in powers of  $f$ , the driving strength, and of  $\delta$ , the asymmetry parameter. We have

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= Bf \left( \frac{912}{969 + 48\Delta^2} \right) \\ &\quad + f^2 \delta \left( \frac{32(20224\Delta^4 + 64256\Delta^2 - 1083)}{(51 + 16\Delta^2)(323 + 16\Delta^2)^2} \right). \end{aligned}$$

From the expression above, we see that the energy current is nonvanishing even for  $B = 0$ , in clear contrast with the behavior present in symmetrical chains, which are usually investigated. Again, for  $B = 0$ , the value (direction and magnitude) of the energy current does not change as we invert the baths, i.e., as we change  $f$  by  $-f$  (it indeed follows, we stress, for the complete expression beyond  $\mathcal{O}(f^2)$  [19] - the complete current is an even function of  $f$ ). That is the one-way street phenomenon, directly computed in Ref.[19] and derived by symmetry arguments in Ref.[13].

Note that, here, we propose to show the general occurrence of such an effect, i.e., the occurrence of an energy current whose direction depends only on the asymmetry of the chain (it does not invert as we invert the baths at the boundaries of the chain), and such an effect is, say, stronger than the energy rectification, even the perfect rectification, that means current in one direction and absence of current as we invert the baths.

Another important remark is convenient here. In some works with boundary driven quantum systems, the energy current is wrongly taken as the heat current. In such a case, thermodynamic inconsistencies are claimed to occur, such as a heat flow from the colder to the hotter bath without other interventions [20]. But, in fact, as clearly explained in Ref.[9], besides heat we also have work in the boundary driven processes, and so, thermodynamic consistency is recovered. See also Ref.[10] for the related analysis in these  $XXZ$  chains, and Ref.[11] for general considerations (in particular, responding the false inconsistency raised in Ref.[20]).

*Results:* The present work is devoted to extend the one-way street phenomenon for the energy current to  $XXZ$  and  $XXX$  Heisenberg asymmetric chains with general polarization at the edges. In other words, here, after a considerable algebraic work, we show that such “strange” phenomenon is ubiquitous in boundary driven asymmetric quantum spin chains.

We proceed by taking the  $XXZ$  chain as given by Eqs.(1, 2, 3). We first consider the case in which one edge of the chain is target in a given polarization, say,  $\sigma^x$ , and the other edge involves a polarization with arbitrary twisting angle in the  $XY$  plane. Precisely, now we take the dissipators as

$$\begin{aligned} K_{\pm}^L &= \sqrt{\gamma(1 \pm f)} \left( \frac{\sigma_1^y \pm i\sigma_1^z}{2} \right), \\ K_{\pm}^R &= \sqrt{\gamma(1 \mp f)} \left( \frac{\cos(\theta)\sigma_N^x + \sin(\theta)\sigma_N^y \pm i\sigma_N^z}{2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

The Heisenberg ( $XXX$ ) version of such model is investigated in Refs.[21–23]. Our strategy here is to exploit the symmetries in the steady state of the LME in order to show that, if  $\rho$  is a steady state solution, then there exists a unitary transformation  $U$  such that  $U\rho U^\dagger$  is a solution of the steady state LME with inverted baths. Moreover, for the LME with inverted baths, the energy current in the absence of external magnetic field  $B$  is the same. In resume, we want to show for the heat current

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \langle F^{XXZ} \rangle \equiv \text{tr}(\rho F_j^{XXZ}) = \text{tr}(\rho U^{-1} F_j^{XXZ} U) \\ &= \text{tr}(U \rho U^{-1} F_j^{XXZ}) = \langle F^{XXZ} \rangle_{\text{inv.baths}}. \end{aligned} \quad (8)$$

We make an important statement here. By using the approach described in Ref.[24], we can prove the uniqueness for the steady state of all the LME treated in this present work. Thus, if  $\rho$  is the steady distribution of the initial system, then  $U\rho U^{-1}$  is the unique steady distribution of the system with inverted baths. Another

important remark: for the studies of symmetries in the LME, our operator  $U$  is indeed the tensorial product over all  $N$  sites of  $2 \times 2$  unitary transformations (they are the same transformation, but each one acts on one site)

$$U = u \otimes u \otimes \dots \otimes u. \quad (9)$$

For more details about the desired transformation  $U$ , we note that, in the steady state the LME reads

$$0 = -i[\mathcal{H}, \rho] + \mathcal{L}(\rho).$$

Hence, we must find  $U$  such that

$$\mathcal{H} = U\mathcal{H}U^\dagger, \quad \mathcal{L}_{\text{inv.baths}}(U\rho U^\dagger) = U\mathcal{L}U^\dagger. \quad (10)$$

Similarly results with the change  $U \leftrightarrow U^\dagger$  (e.g.,  $\mathcal{H} = U^\dagger\mathcal{H}U$ ). I.e., for this first case, we need to present  $U$  unitary such that (discarding the change  $1 \leftrightarrow N$ )

$$UK_{\pm}^{L,R}U^\dagger = K_{\mp}^{R,L}.$$

To find this desired  $U$ , or each  $u$ , we start from a general representation for an unitary matrix  $u$

$$u \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ -e^{i\varphi}b^* & e^{i\varphi}a^* \end{pmatrix},$$

where  $a$  and  $b$  are complex numbers;  $a^*$  is the complex conjugated;  $\varphi$  is real; and  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Then, we investigate if it is possible to describe  $U$  which inverts the baths and that satisfies all the previous relations described above. Of course, we do not present the algebraic manipulations carried out to find the desired  $U$ . But the reader can check *a posteriori* that the desired relations follow with the presented  $U$ .

For the first case in which the dissipators are given by  $K_{\pm}^{R,L}$ , i.e., for the case of one edge of the chain with a  $\sigma^x$  polarization, and the other edge with a polarization in a arbitrary direction in the  $XY$  plane, after a tedious algebraic work we find  $u$  as given by

$$u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ -e^{i\theta}(1-i) & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

For emphasis, we repeat that, with such a matrix, it follows  $U^{(1)}F^{XXZ}U^{(1)\dagger} = F^{XXZ}$ , that is, the energy current is the same as we invert the baths. As a further observation, we note that

$$u^{(1)}\sigma^x u^{(1)\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta - i\cos\theta \\ -\sin\theta + i\cos\theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$u^{(1)}\sigma^y u^{(1)\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta - i\sin\theta \\ \cos\theta + i\sin\theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$u^{(1)}\sigma^z u^{(1)\dagger} = -\sigma^z.$$

Although we have awkward spin transformations, it still follows that  $U^{(1)}\mathcal{H}U^{(1)\dagger} = \mathcal{H}$  as well.



In the next step, we consider a general case of LME involving several dissipators:  $L_1, L_2, V_1, V_2, W_1, W_2$  acting on the first site, and  $L_3, L_4, V_3, V_4, W_3, W_4$  acting on the site  $N$ . Precisely,

$$\begin{aligned} L_1 &= \alpha(\sigma_1^x + i\sigma_1^y), & L_3 &= \beta(\sigma_N^x + i\sigma_N^y), \\ L_2 &= \beta(\sigma_1^x - i\sigma_1^y), & L_4 &= \alpha(\sigma_N^x - i\sigma_N^y), \\ V_1 &= p(\sigma_1^y + i\sigma_1^z), & V_3 &= v(\sigma_N^y + i\sigma_N^z), \\ V_2 &= q(\sigma_1^y - i\sigma_1^z), & V_4 &= u(\sigma_N^y - i\sigma_N^z), \\ W_1 &= u(\sigma_1^z + i\sigma_1^x), & W_3 &= q(\sigma_N^z + i\sigma_N^x), \\ W_2 &= v(\sigma_1^z - i\sigma_1^x), & W_4 &= p(\sigma_N^z - i\sigma_N^x). \end{aligned} \quad (12)$$

The parameters  $\alpha, \beta, p, q, u, v$  above can be taken as nonnegative real numbers. Note that we have the same parameters acting both on first and last sites of the spin chain, but they are linked to different target polarization operators at each boundary. The operators  $L_k, V_k$ , and  $W_k$ , when taken alone, target polarization along the axes  $z, x$  and  $y$ , respectively.

Again, the procedure is the same, and we find  $U^{(2)}$  such that  $U^{(2)}\rho U^{(2)\dagger}$  satisfies the LME with inverted baths and  $U^{(2)}F^{XXZ}U^{(2)\dagger} = F^{XXZ}$ , i.e., the one-way street phenomenon holds. We obtain

$$u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1+i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Moreover, we have

$$\begin{aligned} u^{(2)}\sigma^x u^{(2)\dagger} &= -\sigma^y, & u^{(2)}\sigma^y u^{(2)\dagger} &= -\sigma^x, \\ u^{(2)}\sigma^z u^{(2)\dagger} &= -\sigma^z. \end{aligned}$$

We turn, now, to the investigation of asymmetric Heisenberg  $XXX$  models, i.e., we extend the asymmetry distribution also to the  $x$  and  $y$  coordinates. Precisely, we consider the Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z), \quad (14)$$

where  $\alpha_i$  is assumed to be asymmetrically distributed.

In this case, we need to rewrite the expressions for the currents. For the spin flow we have

$$\langle J_j \rangle = 2\alpha_j \langle \sigma_j^x \sigma_{j+1}^y - \sigma_j^y \sigma_{j+1}^x \rangle. \quad (15)$$

And, for the energy current, we obtain

$$\begin{aligned} \langle F_j^{XXZ} \rangle &= 2\alpha_{i-1}\alpha_i \langle (\sigma_{j-1}^y \sigma_j^z \sigma_{j+1}^x - \sigma_{j-1}^x \sigma_j^z \sigma_{j+1}^y) \\ &\quad + (\sigma_{j-1}^z \sigma_j^x \sigma_{j+1}^y - \sigma_{j-1}^y \sigma_j^x \sigma_{j+1}^z) \\ &\quad + (\sigma_{j-1}^x \sigma_j^y \sigma_{j+1}^z - \sigma_{j-1}^y \sigma_j^y \sigma_{j+1}^x) \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

In relation to the dissipators of the LME, we start again with one of the edges of the chain target in a given

polarization, say  $\sigma^z$ , and the other edge with an arbitrary polarization in the plane  $ZX$ .

$$\begin{aligned} D_{\pm}^L &= \sqrt{\gamma(1 \pm f)} \left( \frac{\sigma_1^x \pm i\sigma_1^y}{2} \right), \\ D_{\pm}^R &= \sqrt{\gamma(1 \mp f)} \left( \frac{\cos(\theta)\sigma_N^x + \sin(\theta)\sigma_N^z \pm i\sigma_N^y}{2} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Again, after considerable algebraic manipulations, we find the transformation  $U^{(3)}$  that inverts the baths and shows the one-way street phenomenon for the energy current. We have

$$u^{(3)} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \cos\theta} & \sqrt{1 + \cos\theta} \\ \sqrt{1 + \cos\theta} & -\sqrt{1 - \cos\theta} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

It is interesting to note the intricate transformation for the spin variables here,

$$u^{(3)}\sigma^x u^{(3)\dagger} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix},$$

$$u^{(3)}\sigma^y u^{(3)\dagger} = -\sigma^y,$$

$$u^{(3)}\sigma^z u^{(3)\dagger} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Anyway, as said, we still have  $U^{(3)}\mathcal{H}U^{(3)\dagger} = \mathcal{H}$ , and  $U^{(3)}FU^{(3)\dagger} = F$ .

Finally, we consider the case of several dissipators, which, alone, target polarization along the axes  $x, y$  and  $z$ . We take

$$\begin{aligned} L_1 &= \alpha(\sigma_1^x + i\sigma_1^y), & L_3 &= v(\sigma_N^x + i\sigma_N^y), \\ L_2 &= \beta(\sigma_1^x - i\sigma_1^y), & L_4 &= u(\sigma_N^x - i\sigma_N^y), \\ V_1 &= p(\sigma_1^y + i\sigma_1^z), & V_3 &= q(\sigma_N^y + i\sigma_N^z), \\ V_2 &= q(\sigma_1^y - i\sigma_1^z), & V_4 &= p(\sigma_N^y - i\sigma_N^z), \\ W_1 &= u(\sigma_1^z + i\sigma_1^x), & W_3 &= \beta(\sigma_N^z + i\sigma_N^x), \\ W_2 &= v(\sigma_1^z - i\sigma_1^x), & W_4 &= \alpha(\sigma_N^z - i\sigma_N^x), \end{aligned} \quad (19)$$

(note that they involve a combination different from the previous one in the  $XXZ$  case). Again, the parameters  $\alpha, \beta, p, q, u, v$  above can be taken as nonnegative real numbers.

The desired matrix changing the baths is now found as

$$u^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}. \quad (20)$$

For the spin transformations we get

$$\begin{aligned} u^{(4)}\sigma^x u^{(4)\dagger} &= -\sigma^x, & u^{(4)}\sigma^y u^{(4)\dagger} &= -\sigma^z \\ u^{(4)}\sigma^z u^{(4)\dagger} &= -\sigma^y. \end{aligned}$$

Once more, we have  $U^{(4)}\mathcal{H}U^{(4)\dagger} = \mathcal{H}$ , and  $U^{(4)}FU^{(4)\dagger} = F$ .

*Conclusion:* It is worth to recall that asymmetric systems, as considered in this work, are not only theoretical proposals. For example, there is a proliferation of graded materials in nature, i.e., inhomogeneous systems whose structure changes gradually in space, and they can be also manufactured. There is a great interest for such materials in many areas: optics, mechanical engineering, material science, etc. [25]. Moreover, a simple example of graded thermal rectifier has been already built: a carbon and boron nitride nanotube, inhomogeneously coated with heavy molecules [26].

We believe that we shall see experimental realizations of such asymmetrical  $XXZ$  and Heisenberg ( $XXX$ ) models soon. We recall that it has been already shown the possibility to engineer  $XXZ$  quantum spin Hamiltonians with different values for the inner parameters  $\alpha$  and  $\Delta$  [27, 28]. Moreover, Heisenberg ( $XXX$ ) and  $XXZ$  models appear related to recent experimental works with Rydberg atoms in optical traps [29, 30].

We show here that an interesting effect related to (but stronger than) rectification is of ubiquitous occurrence in boundary driven quantum spin systems with target polarization, the archetypal models of quantum spin nonequilibrium physics. In order to stress such a general-

ization of our results, a final technical comment is pertinent. Here, we show the one-way street phenomenon for a  $XXZ$  chain in which one edge of the chain is target in a given polarization, say,  $x$  direction, and the other edge involves a polarization with arbitrary twisting angle (described as  $\theta$  and taking any value) in the  $XY$  plane, for example. We also show the phenomenon for arbitrary choices of six operators, i.e., pairs of three kind of operators that, when taken alone, target polarization along the axes  $x$ ,  $y$  and  $z$  (one pair targets along  $x$ , the other  $y$ , etc.). That is why we repeatedly say that we are considering general polarizations. Our findings are not resumed as new examples of specific polarization involving quite specific angles or some specific axis. Similar results have been shown for the Heisenberg system.

We are confident that such results will stimulate more theoretical and experimental research on the theme of quantum transport.

**Acknowledgments:** This work was partially supported by CNPq (Brazil).

- 
- [1] N. Li, J. Ren, L. Wang, G. Zhang, P. Hänggi, and B. Li, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1045 (2012).
  - [2] M. Terraneo, M. Peyrard, and G. Casati, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 094302 (2002).
  - [3] B. Li, L. Wang, and G. Casati, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 184301 (2004).
  - [4] B. Hu, L. Yang, and Y. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 124302 (2006).
  - [5] E. Pereira, *Phys. Rev. E* **82**, 040101(R) (2010).
  - [6] E. Pereira, *Phys. Rev. E* **83**, 031106 (2011).
  - [7] J. Wang, E. Pereira, and G. Casati, *Phys. Rev. E* **86**, 010101 (R) (2012).
  - [8] H. P. Breuer and F. Petruccione, “The Theory of Open Quantum Systems” (Oxford University Press, Oxford, 2002).
  - [9] F. Barra, *Sci. Rep.* **5**, 14873 (2015).
  - [10] E. Pereira, *Phys. Rev. E* **97**, 022115 (2018).
  - [11] G. De Chiara, G. Landi, A. Hewgill, B. Reid, A. Ferraro, A. J. Roncaglia, and M. Antezza, *New J. Phys.* **20**, 113024 (2018).
  - [12] V. Popkov and R. Livi, *New J. Phys.* **15**, 023030 (2013).
  - [13] E. Pereira, *Phys. Rev. E* **95**, 030104 (R) (2017).
  - [14] F. Bonetto, J. L. Lebowitz, and J. Lukkarinen, *J. Stat. Phys.* **116**, 783 (2004).
  - [15] Z. Rieder, J. L. Lebowitz, and E. Lieb, *J. Math. Phys.* **8**, 1073 (1967).
  - [16] E. Pereira, H. C. F. Lemos, and R. R. Ávila, *Phys. Rev. E* **84**, 061135 (2011).
  - [17] T. Prosen, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 217206 (2011); M. Žnidarič, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 220601 (2011); D. Karevski et al., *Phys. Rev. Lett.* **110**, 047201 (2013).
  - [18] J. J. Mendoza-Arenas, S. Al-Assam, S. R. Clark, and D. Jaksch, *J. Stat. Mech.* **2013**, P07007 (2013).
  - [19] L. Schuab, E. Pereira, and G. T. Landi, *Phys. Rev. E* **94**, 042122 (2016).
  - [20] A. Levy, and R. Koloff, *EPL (Europhysics Letters)* **107**, 20004 (2014).
  - [21] V. Popkov, M. Salerno, and G. M. Schutz, *Phys. Rev. E* **85**, 031137 (2012).
  - [22] V. Popkov, D. Karevski, and G. M. Schutz, *Phys. Rev. E* **88**, 062118 (2013).
  - [23] G. T. Landi, and D. Karevski, *Phys. Rev. B* **91**, 174422 (2015).
  - [24] D. Evans, *Commun. Math. Phys.* **54**, 293 (1977); T. Prosen, *Physica Scripta* **86**, 058511 (2012).
  - [25] J. P. Huang, and K. W. Yu, *Phys Rep.* **431**, 87 (2006).
  - [26] C. W. Chang, D. Okawa, A. Majumdar, and A. Zettl, *Science* **314**, 1121 (2006).
  - [27] M. Endres, H. Bernien, A. Keesling, H. Levine, E. R. Anschuetz, A. Krajenbrink, C. Senko, V. Vuletic, M. Greiner, G. Markus and M. D. Lukin, *Science* **354**, 1024 (2016).
  - [28] D. Barredo, S. De Léséleuc, V. Lienhard, T. Lahaye, and A. Browaeys, *Science* **354**, 1021 (2016).
  - [29] L.-M. Duan, E. Demler, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 090402 (2003).
  - [30] T. L. Nguyen, J. M. Raimond, C. Sayrin, R. Cortiñas, T. Cantat-Moltrecht, F. Assemat, I. Dotsenko, S. Gleyzes, S. Haroche, G. Roux, Th. Jolicoeur, and M. Brune, *Phys. Rev. X* **8**, 011032 (2018).