

Hugo Nogueira

**Estudo dos mecanismos de troca de calor e dos efeitos
da resolução numérica em simulações de convecção
turbulenta**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Gustavo Guerrero

Belo Horizonte

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

N778e Nogueira, Hugo Demattos.
Estudo dos mecanismos de troca de calor e dos efeitos da resolução numérica em simulações de convecção turbulenta. – 2020.
80f., enc. : il.

Orientador: Gustavo Andres Guerrero Eraso.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.
Bibliografia: f. 77-80.

1. Convecção. 2. Calor. 3. Viscosidade.
I. Título. II. Eraso, Gustavo Andres Guerrero. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 536.2 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

A presente dissertação, intitulada “**Estudo dos mecanismos de troca de calor e dos efeitos da resolução numérica em simulações de convecção turbulenta**” de autoria de **HUGO DEMATTOS NOGUEIRA**, submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA** em 04 de agosto de 2020.

Belo Horizonte, 04 de agosto de 2020.

Prof. Gustavo Andres Guerrero Eraso

Orientador do estudante

Departamento de Física/UFMG

Prof. Ronald Dickman

Departamento de Física/UFMG

Prof. Érico Luiz Rempel

Instituto Tecnológico de Aeronáutica



Documento assinado eletronicamente por **Erico Luiz Rempel, Usuário Externo**, em 05/08/2020, às 10:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Andres Guerrero Eraso, Professor do Magistério Superior**, em 05/08/2020, às 16:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ronald Dickman, Professor do Magistério Superior**, em 05/08/2020, às 17:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0203930** e o código CRC **E4A16794**.

Agradecimentos

Aos meus pais e meus irmãos, por tudo.

Ao meu orientador Gustavo Guerrero, pela incansável orientação e pela inspiração de fazer ciência.

A todos do Laboratório de Astrofísica, por terem me acolhido de forma tão carinhosa.

A todos os membros da minha família, que sempre me apoiaram.

A todos os meus amigos, pelos bons e maus momentos.

A todos os funcionários e professores do departamento de física.

To Piotr K. Smolarkiewicz for the Skype calls explaining the code EULAG. Also to Alexander Kosovichev for the computer time which was essential for this work.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

*I ain't no physicist, but I knows what matters.
(Popeye the Sailor)*

Resumo

Convecção é um mecanismo de transporte de energia presente em inúmeras situações na natureza, notoriamente na atmosfera terrestre e no terço exterior do raio solar, influenciando questões diversas como o clima e evolução estelar. Não existe uma teoria analítica dependente do tempo capaz de descrever completamente as propriedades da convecção, e experimentos de laboratório permitem estudar uma região limitada do espaço de parâmetros, portanto, torna-se necessário o estudo deste fenômeno a partir de simulações numéricas.

Entretanto, ainda existem várias questões associadas à simulação de sistemas convectivos na presença de turbulência. Uma delas refere-se ao mecanismo de troca de calor. A maioria das simulações de convecção turbulenta usa um mecanismo de condução de calor. Contudo, o tempo de relaxação destas simulações é muito longo, levando vários autores a usarem um valor artificialmente alto do coeficiente de condução de calor. Uma maneira de contornar este problema é substituir a condução de calor por um mecanismo de forçamento e dissipação de energia.

Outra questão refere-se à discretização numérica do domínio computacional e ao tempo de integração necessário para atingir o estado final do sistema. Caso a discretização seja muito fina, características do fluxo em escalas cada vez menores seriam resolvidas, mas o tempo de integração numérica das equações de Navier-Stokes seria muito longo, impossibilitando a obtenção de soluções numéricas em tempo hábil. Por outro lado, uma discretização muito grosseira perderia detalhes importantes do movimento do fluido e também não seria muito útil.

Neste trabalho apresentamos simulações ILES (*implicit large eddy simulation*) bidimensionais de convecção estratificada usando várias resoluções e os dois mecanismos de troca de calor. Nossos objetivos são comparar estes dois métodos, assim como estudar a convergência das simulações para diferentes resoluções. O forçamento e dissipação acelera o tempo de relaxação, permitindo de forma eficiente o uso de resoluções mais altas que usando a condução de calor. Desta forma podemos estudar como as menores estruturas resolvidas por simulações de alta resolução contribuem para a solução geral. Descobrimos que, enquanto a viscosidade efetiva decresce com a resolução numérica, a partir de uma resolução de 512^2 pontos de grade, algumas grandezas físicas convergem para os mesmos valores e perfis verticais. Da mesma forma, a viscosidade turbulenta mostra uma convergência assintótica com o aumento do número de pontos de grade.

Palavras-chave: Convecção turbulenta, Estratificação de densidade, Aproximação anelástica, Troca de calor, *Implicit large eddy simulation*, Viscosidade efetiva

Abstract

Convection is a heat transport mechanism observed in several instances in nature, especially on Earth's atmosphere and on the outer third of the Sun's radius, playing a role in matters such as climate and stellar evolution. An analytical time dependent theory capable of completely describing the properties of convection does not yet exist, and laboratory experiments allow the probing of a limited region of parameter space. Therefore, the investigation of this phenomenon with numerical simulations is paramount.

There exist several issues associated with the simulation of turbulent convective systems. One of these issues regards the heat exchange mechanism. Most of the simulations of turbulent convection use a heat conduction mechanism. However, the relaxation time of these simulations is long, prompting several authors to use an artificially high value of the heat conduction coefficient. A way around this problem is to replace the heat conduction by an energy forcing-dissipation mechanism.

Another issue refers to the numerical discretization of the computational domain and the integration time needed to reach the final state of the system. If the discretization is excessively fine, the code is able to capture small scale features of the flow, however, the time needed to numerically integrate the Navier-Stokes equations would be too long, precluding timely attainment of solutions. On the other hand, a very coarse discretization would miss important details of the flow and would not be useful either.

On this work we present two-dimensional ILES (implicit large-eddy simulation) simulations of stratified convection using several numerical resolutions and two heat exchange mechanisms. Our goals are to compare both heat exchange mechanisms and study convergence of simulations for different resolutions. The forcing-dissipation mechanism reduces the relaxation time, allowing for efficient use of higher resolutions than the heat conduction. Therefore, we can study how the smallest structures resolved by high resolution simulations contribute to the general solution. We found that, while the effective viscosity decreases with the numerical resolution, from a certain resolution of approximately 512^2 grid points, some physical quantities converge to the same values and vertical profiles. Likewise, the turbulent viscosity converges asymptotically with the increase of grid points.

Keywords: Turbulent Convection, Density stratification, Anelastic approximation, Implicit large eddy simulation, Effective viscosity

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	ARCABOUÇO TEÓRICO	17
2.1	Convecção	17
2.1.1	Atmosferas estável e instável	17
2.1.2	Temperatura potencial	20
2.2	Equações de Navier-Stokes	21
2.2.1	Equação de conservação de massa	21
2.2.2	Equação de momento	21
2.3	Aproximação anelástica	23
2.4	Forma alternativa das Equações da Navier-Stokes	24
2.4.1	Equação de momento	25
2.4.2	Equação de energia	27
2.5	Modelagem matemática dos mecanismos de troca de calor	28
2.6	Número de Rayleigh - Análise de estabilidade	29
2.7	Escalas de energia	32
3	MODELOS NUMÉRICOS	34
3.1	Equações	34
3.2	EULAG-MHD	35
3.2.1	MPDATA	35
3.2.2	Solucionador elíptico	37
3.2.2.1	Funcional de energia	38
3.2.2.2	Erro residual	38
3.2.2.3	Algoritmo	39
3.3	Domínio	40
3.4	Condições iniciais e de contorno	40
3.5	Estado ambiente	42
3.6	Perfil do coeficiente de condução de calor	43
3.7	Conversão entre unidades de código e unidades físicas	44
3.8	Recursos computacionais	44
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	45
4.1	Comparação entre mecanismos de troca de calor	45
4.1.1	Tempo de relaxação	46
4.1.2	Movimentos convectivos	47

4.1.3	Espectros de potência	50
4.2	Análise da convergência numérica de simulações usando forçamento e dissipação	52
4.2.1	Velocidades e perturbações de temperatura potencial	52
4.2.2	Espectros de potência	55
4.2.3	Viscosidade efetiva	57
4.2.4	Viscosidade turbulenta	61
5	OSCILAÇÕES QUASE-BIENAIIS	64
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	68
	Referências	72

1 Introdução

Convecção é um mecanismo de transporte de energia que ocorre em várias situações na natureza. No Planeta Terra, convecção ocorre na troposfera, camada inferior da atmosfera, influenciando diversos aspectos do clima, como por exemplo a formação de nuvens (Barry et al. 2002). Convecção também ocorre nos oceanos e no interior terrestre (Glatzmaier 2013).

Em astrofísica, a convecção é um fenômeno de extrema importância, já que atua na transferência do calor produzido nos núcleos das estrelas através de reações nucleares. Devido à alta densidade do interior estelar, o transporte de energia por convecção pode ser mais eficiente que a condução térmica e a radiação (Kippenhahn et al. 1990). Considerando o Sol, convecção ocorre no terço exterior do raio solar e transporta para a superfície nesta camada quase a totalidade da energia gerada por reações nucleares no núcleo (Elliott & Smolarkiewicz , 2002). A Figura 1 mostra uma imagem em alta resolução da superfície do Sol tirada pelo telescópio solar Daniel K. Inouye, onde podemos ver os grânulos formados pela convecção. O fluido sobe nas regiões mais claras transportando energia para a superfície e desce pelas zonas escuras.

Entender melhor como funciona a convecção turbulenta em estrelas é importante para entender o dínamo estelar, que é um mecanismo que gera e mantém campos magnéticos

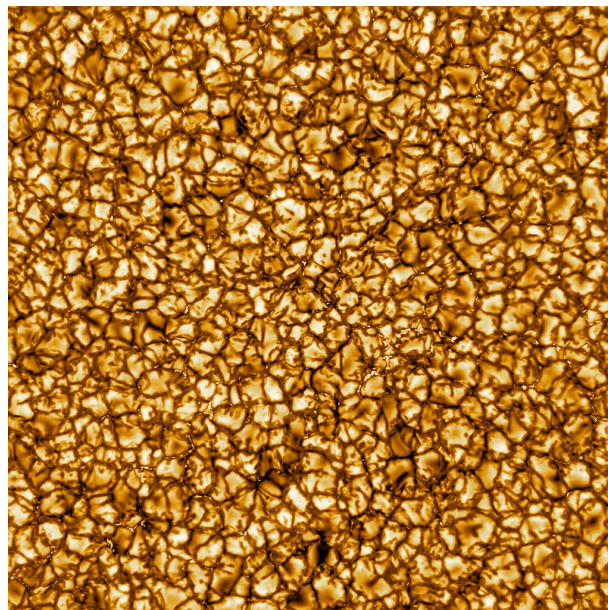


Figura 1 – Imagem de alta resolução da superfície solar tirado pelo telescópio Daniel K. Inouye no comprimento de onda $789nm$. Fonte: National Science Foundation. Disponível em https://nsf.gov/news/news_images.jsp?cntn_id=299908&org=NSF. Acesso em 06/08/2020.

de objetos astronômicos. Acredita-se que a convecção é necessária para que aconteça o dínamo, e de acordo com simulações de magnetohidrodinâmica, a atividade magnética depende dos movimentos turbulentos na zona convectiva, ver e.g., (Guerrero et al. 2016a). Assim sendo, a confiabilidade das simulações de dínamo vai depender de quão realista é a convecção que o gera¹.

Para calcular a quantidade de calor transportada por convecção, pode-se usar a teoria do comprimento de mistura (MLT na sigla em inglês), que é uma teoria fenomenológica, independente do tempo e que desconsidera rotação e magnetização do fluido (Kippenhahn et al. 1990). Além disso, ela possui algumas constantes arbitrárias que devem ser escolhidas para cada problema. Apesar de ser amplamente usada e apresentar bons resultados em alguns casos, existem outros onde o caráter atemporal da teoria é insatisfatório, por exemplo em estrelas pulsantes (Carroll & Ostlie 1996).

A convecção, sendo um fenômeno hidrodinâmico, é regida pelas equações de Navier-Stokes. Devido à dificuldade de resolução analítica deste conjunto de equações, notadamente na presença de turbulência, ainda não existe uma teoria dependente do tempo que descreva completamente a convecção, o que justifica o estudo deste fenômeno a partir de simulações numéricas.

Uma das formas de caracterizar o escoamento de um fluido é usando o número de Reynolds, definido como:

$$\text{Re} = \frac{uL}{\nu} \quad (1.1)$$

onde u é a magnitude da velocidade, L é um comprimento característico e ν é a viscosidade cinemática do fluido, equivalente à viscosidade dinâmica, μ , dividida pela densidade do fluido. O número de Reynolds é uma ferramenta útil para classificar e unificar diferentes padrões de fluxo geometricamente semelhantes. Para números de Reynolds baixos, o escoamento é laminar, porém, ao aumentar o número de Reynolds, o fluxo se torna turbulento (Choudhuri 1998). Fluxo laminar é quando o fluido se move em lâminas ou camadas que deslizam umas sobre as outras. Este tipo de escoamento é instável em situações envolvendo baixas viscosidades, altas velocidades ou grandes comprimentos característicos e se torna turbulento. Por sua vez, fluxo turbulento é quando partículas de fluido se movem de maneira irregular, aumentando a troca de momento entre diferentes partes do fluxo ² (Streeter & Wylie 1975).

¹ Para simular o dínamo estelar são necessárias simulações tridimensionais, e neste trabalho fazemos apenas simulações bidimensionais. Entretanto as simulações aqui apresentadas poderão contribuir com o entendimento da convecção turbulenta, o que pode levar a aprimoramentos das simulações do dínamo em três dimensões.

² Uma maneira de entender a diferença entre fluxos laminar e turbulento é através do experimento de Reynolds, onde um corante é injetado dentro de um tubo no qual o fluxo pode ser laminar ou turbulento dependendo dos parâmetros físicos do experimento. Veja por exemplo <https://www.youtube.com/watch?v=y0WRJtXvpSo>. Acesso em 11/08/2020.

O número de Reynolds típico na zona convectiva do Sol é da ordem de 10^{10} , o que significa que o fluxo é turbulento. Existem várias dificuldades associadas à simulação de sistemas fluidodinâmicos turbulentos. A discretização, que consiste na divisão do domínio espacial e temporal do problema em pequenos intervalos ou células, possibilitando a integração numérica das equações de Navier-Stokes, deve ser fina o suficiente para abranger as menores escalas de movimento, conhecidas como escalas de dissipação. A razão entre as menores e as maiores escalas de movimento é proporcional a $Re^{-3/4}$ (Pope 2000), o que implica que o número de células necessário para resolver as menores escalas é proporcional a $Re^{9/4}$ em três dimensões. Para números de Reynolds como o da zona convectiva solar não existe no presente poder computacional para tal simulação (Strugarek et al. 2016).

Um outro problema recorrente em simulações hidrodinâmicas e magnetohidrodinâmicas é a existência de um valor mínimo para o coeficiente de condução de calor devido a instabilidades numéricas, aqui denominado por κ , e a escala de tempo de difusão de calor. A escala de tempo de difusão de calor, que é o tempo característico para que a temperatura do sistema se equalize caso haja somente transmissão de calor por condução ou radiação é geralmente chamada de escala de tempo de Kelvin-Helmholtz. A longa duração desta escala de tempo dificulta a relaxação térmica de simulações de convecção, fazendo com que muitos autores aumentem os valores de κ artificialmente, e.g. Featherstone & Hindman (2016). Em vários casos, o valor mínimo usado para κ é ordens de grandeza superior aos valores moleculares preditos para as zonas convectivas de estrelas (Browning et al. 2004).

Uma maneira de resolver esta questão é modelar a condução de calor usando um mecanismo de forçamento e dissipação, como foi proposto em Held & Suarez (1994) e utilizado em Guerrero et al. (2016a); Strugarek et al. (2016), entre outros. O mecanismo de forçamento e dissipação, que chamaremos simplesmente de forçamento, permite flutuações da temperatura potencial ao redor de um estado médio que se assume que se manterá em equilíbrio por uma longa escala temporal. Estas perturbações são subsequentemente amortecidas numa escala de tempo predeterminada. Trabalhos anteriores encontraram que este mecanismo diminui os longos tempos de relaxação da difusão térmica, permitindo que as simulações convirjam muito mais rapidamente para um estado estacionário, assim como também simplifica as condições de contorno do modelo numérico.

Existem também questões relacionadas à variação da resolução. Talvez a principal delas corresponda à validade física das soluções obtidas. Não se sabe quão fina deve ser a discretização para que as soluções numéricas estejam corretas. Outro problema é o aumento desproporcional do esforço computacional quando a discretização espacial é aumentada. Quando uma discretização espacial mais fina é usada, o passo temporal deve ser reduzido de forma a evitar instabilidades numéricas (Press et al. 1988). Deste modo, o tempo computacional cresce de maneira sobrelinear com a resolução espacial.

Neste trabalho abordaremos estas questões realizando simulações hidrodinâmicas de

convecção em um domínio bidimensional retangular. Mesmo que um domínio tridimensional seja necessário para capturar todos os aspectos relevantes da convecção turbulenta, um domínio bidimensional já é suficiente para a realização da convecção (Chan et al. 1982). Além disso, o uso de um domínio bidimensional permite alcançar resoluções mais altas, possibilitando um estudo mais completo da influência da resolução espacial, o que não seria possível em simulações tridimensionais.

Não incluiremos termos viscosos explícitos na equação de momento nem usaremos um método SGS (*sub-grid scale*) para dissipar momento. Portanto, as simulações serão do tipo ILES (*implicit large-eddy simulation*), onde o erro de truncamento do código atua como uma viscosidade efetiva, dissipando momento, e esperamos que a viscosidade efetiva varie com a resolução numérica empregada.

Existem vários trabalhos na literatura sobre simulações de convecção em duas dimensões. Em muitos casos analisa-se o problema de Rayleigh-Bénard na aproximação de Boussinesq, onde a densidade é aproximada como constante em todo o domínio, exceto por pequenas variações causadas por diferenças de temperatura (DeLuca et al. 1990; Zhang et al. 2017; Zhu et al. 2018). Para que as simulações se assemelhem mais às zonas convectivas de estrelas e da atmosfera terrestre, onde a densidade varia significativamente com a altura, faremos simulações de convecção estratificadas. Existe um grande número de trabalhos investigando simulações de convecção estratificadas em três dimensões, englobando convecção estelar, e.g., Brandenburg et al. (2005); Elliott & Smolarkiewicz (2002); Featherstone & Hindman (2016); Guerrero et al. (2016a,b); Kitiashvili et al. (2016), atmosférica, nos oceanos e interior do planeta Terra, e.g., Ganot et al. (2014); Peña-Ortiz et al. (2019) e inclusive simulações que estudam convecção estratificada em duas dimensões, e.g., Chen & Glatzmaier (2005).

O objetivo principal deste trabalho é entender como simulações de convecção se comportam quando a troca de calor é modelada de duas formas diferentes, uma usando condução de calor e a outra usando forçamento. Para tal, resolvemos as equações de Navier-Stokes numericamente escrevendo a equação de energia de duas maneiras diferentes. Para cada mecanismo de troca de calor, testamos várias resoluções, comparando grandezas físicas, principalmente velocidades, perturbações de temperatura, fluxos de calor e espectros. Para tal usamos o código EULAG-MHD (Prusa et al. 2008), que é um código já estabelecido para simulações hidrodinâmicas e magnetohidrodinâmicas, podendo ser utilizado de forma paralela em supercomputadores.

O segundo objetivo deste trabalho é investigar a influência da discretização do domínio nos resultados de simulações numéricas de convecção. Para estudar como a discretização afeta os resultados, faremos simulações com diversas resoluções, variando desde uma discretização grosseira até a máxima discretização que foi possível alcançar dados os recursos computacionais disponíveis. Usaremos um método baseado em conservação de

energia para calcular a viscosidade efetiva, e também calcularemos a viscosidade turbulenta.

Este trabalho é dividido como se segue. Na Capítulo 2 deduzimos as equações de Navier-Stokes, primeiro em sua forma mais tradicional e depois na forma que usaremos nas simulações. Além disso apresentamos outros conceitos teóricos relevantes para os próximos capítulos. No Capítulo 3 apresentamos os modelos numéricos usados nas simulações. No Capítulo 4 apresentamos e analisamos os resultados das simulações numéricas.

2 Arcabouço teórico

2.1 Convecção

Convecção é um mecanismo de transporte de energia que ocorre em fluidos sob a ação da gravidade. Podemos entender o mecanismo da convecção examinando a Figura 2. Nesta figura está representado um fluido contido em uma caixa onde todas as fronteiras são impermeáveis e, além disso, as paredes laterais da caixa estão isoladas termicamente. A parede superior da caixa está a uma temperatura mais baixa do que a parede inferior e a gravidade atua para baixo na direção vertical.

Devido à condutividade térmica, partes do fluido em contato com a parede inferior se aquecem, expandindo-se e ficando menos densas que o restante do fluido. Então estas parcelas de fluido menos densas são deslocadas para cima por empuxo. Da mesma maneira, parcelas de fluido em contato com a superfície superior perdem calor, ficando mais densas e sendo deslocadas para baixo.

Estes movimentos de partes do fluido com densidades diferentes dos seus arredores criam células ¹ de convecção. Como as parcelas de fluido que sobem têm temperatura superior aos seus arredores e as que descem têm temperatura inferior, então existe um fluxo de calor líquido para cima.

2.1.1 Atmosferas estável e instável

Em muitos casos, inclusive neste trabalho, estamos interessados em estudar convecção em atmosferas ou meios estratificados, ou seja, meios em que a densidade do fluido varia com a altura. Na natureza, praticamente todos os meios onde a convecção é observada são estratificados, incluindo atmosferas planetárias, zonas convectivas estelares e oceanos.

Meios onde energia é transportada por convecção são chamados de atmosferas instáveis, e meios onde a energia é transportada completamente por radiação são chamados de atmosferas estáveis ou radiativas.

Para a análise que se segue consideramos que a pressão de parcelas de fluido que se deslocam para cima ou para baixo da sua posição original se equaliza instantaneamente com a pressão na nova posição. Em outras palavras, independente de como o fluido está se movendo a pressão é sempre função somente da coordenada na direção vertical z , e nunca da posição horizontal ou do tempo. Também assumimos que as parcelas de fluido

¹ Neste trabalho usamos a palavra célula para nos referirmos tanto a células de convecção quanto a discretização do domínio em células para resolução numérica das equações de Navier-Stokes. O significado sempre pode ser entendido pelo contexto.

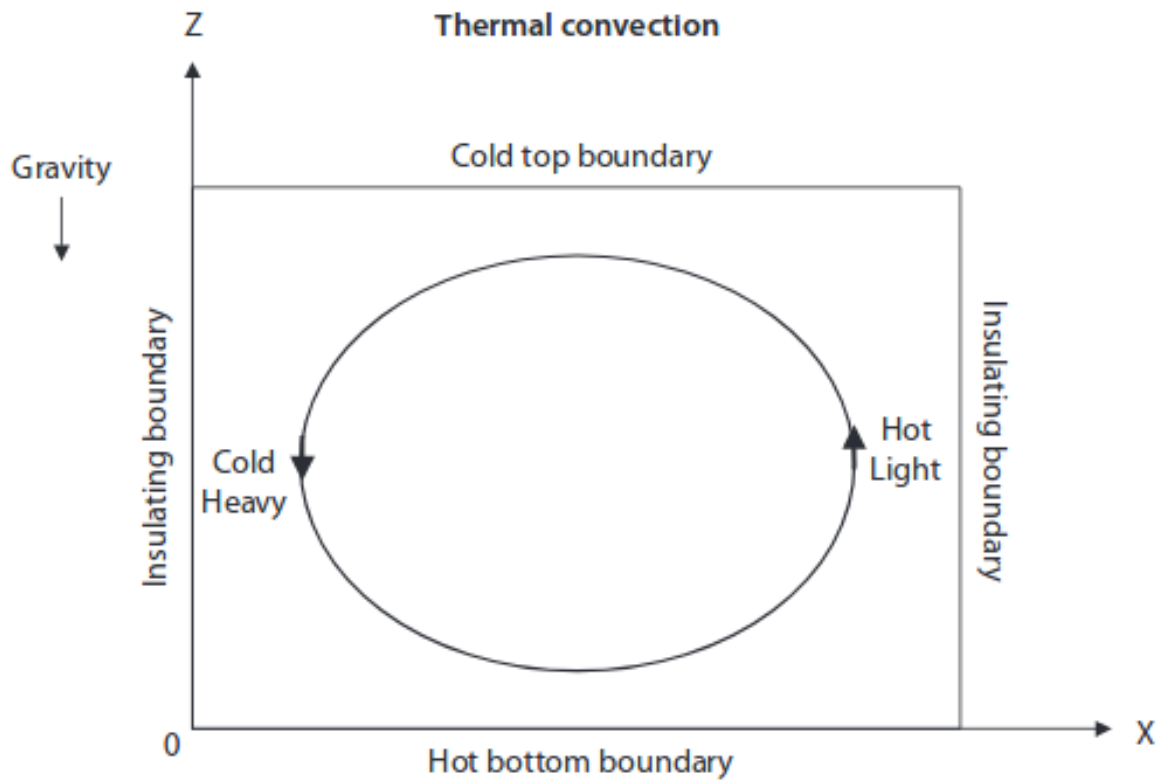


Figura 2 – Célula de convecção - Adaptada de Glatzmaier (2013).

Thermal convection in an unstable (superadiabatic) atmosphere

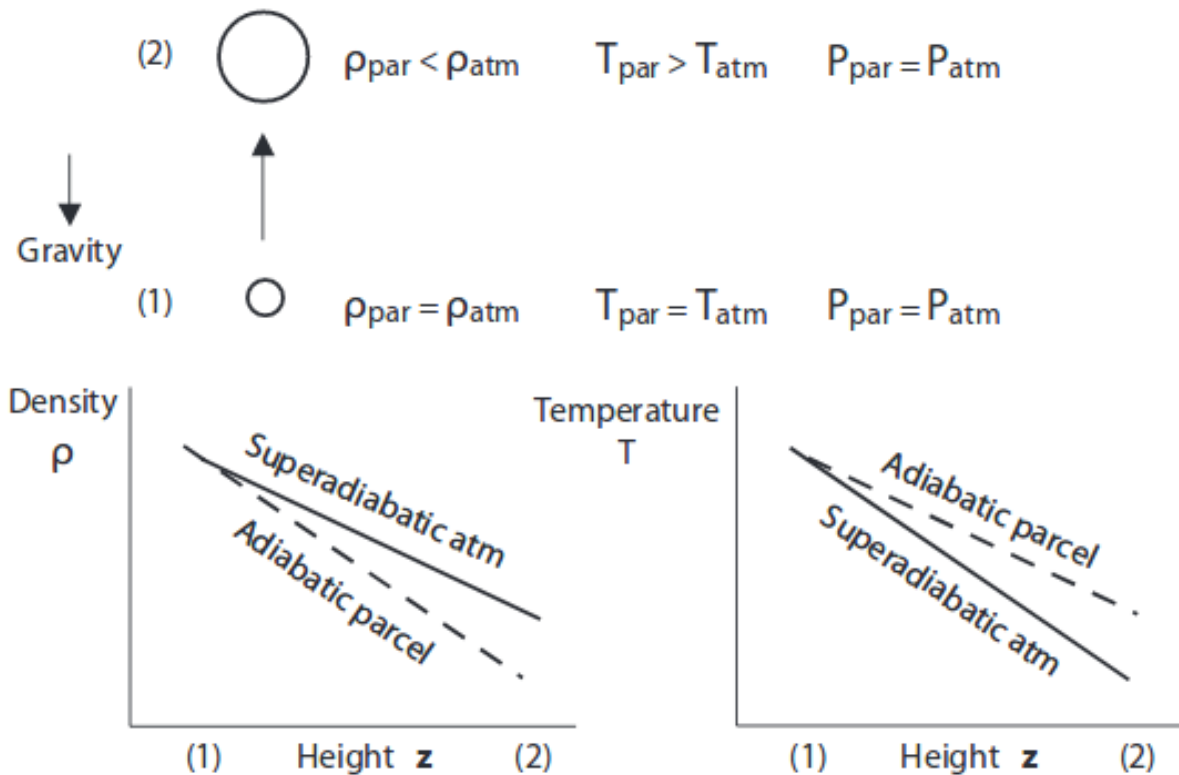


Figura 3 – Atmosfera instável - Adaptada de Glatzmaier (2013).

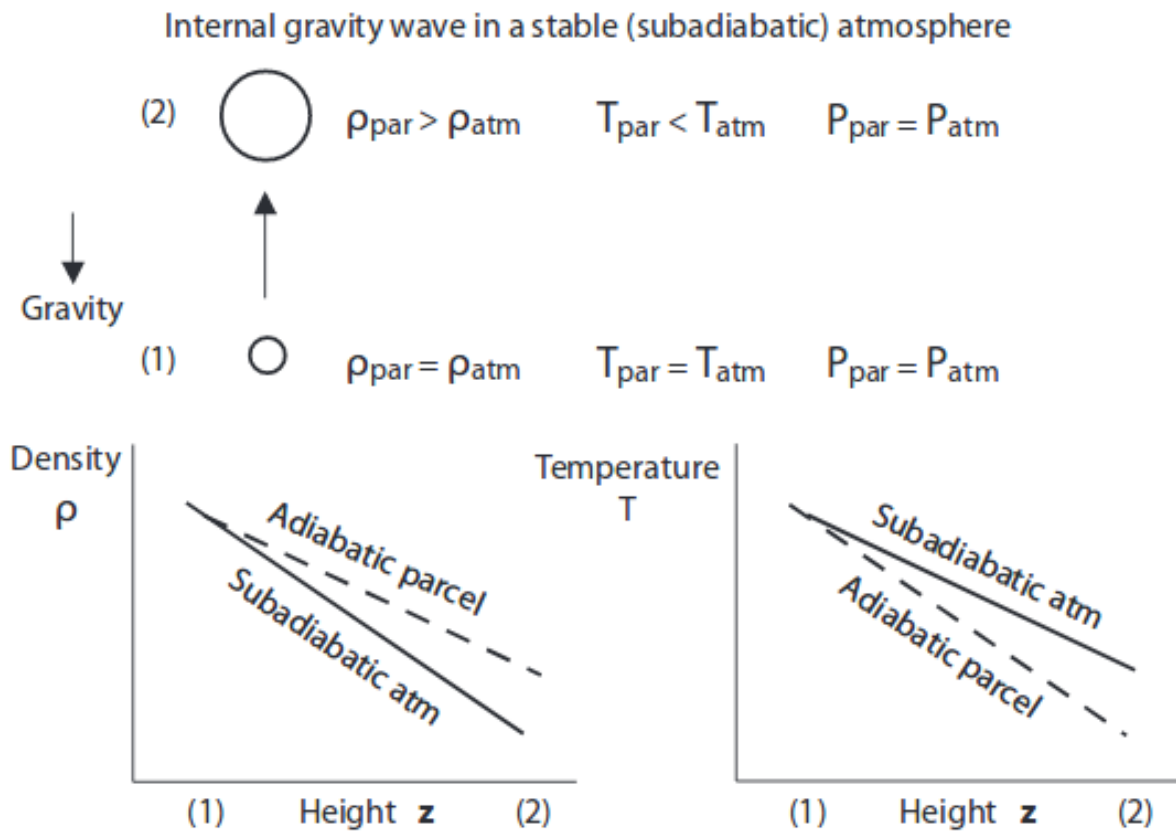


Figura 4 – Atmosfera estável - Adaptada de Glatzmaier (2013).

se deslocam por uma parte significativa do domínio de forma adiabática antes de se dissolverem.

Em uma atmosfera instável, também chamada de atmosfera superadiabática, parcelas de fluido adiabáticas que se deslocam para cima estão mais quentes e portanto menos densas que os arredores, como pode ser visto na Figura 3. Conseqüentemente, essas parcelas de fluido menos densas continuarão subindo até se dissolverem no meio, transportando calor para cima.

Em uma atmosfera estável, como na Figura 4, também conhecida como atmosfera subadiabática, parcelas de fluido que se deslocam para cima estão com temperatura inferior aos seus arredores, portanto mais densas. Ao invés de continuar subindo, o empuxo faz com que estas parcelas de fluido retornem ao seu ponto de partida. Por inércia, elas continuam descendo, alcançando uma região onde a temperatura dos arredores é inferior à temperatura do fluido deslocado, onde agora o empuxo faz uma força para cima sobre o fluido deslocado. Esta alternância na direção da força sobre parcelas adiabáticas faz com que elas oscilem até que se dissolvam nos arredores. Este fenômeno é conhecido como ondas de gravidade.

Comparando as Figuras 3 e 4 podemos concluir para uma atmosfera instável (onde

acontece convecção) que

$$\frac{\partial T_p}{\partial z} > \frac{\partial T_a}{\partial z}. \quad (2.1)$$

Similarmente para uma atmosfera estável

$$\frac{\partial T_p}{\partial z} < \frac{\partial T_a}{\partial z}, \quad (2.2)$$

onde os subscritos p e a se referem respectivamente a parcelas de fluido e atmosfera.

Podemos escrever fórmulas similares para a densidade, porém não para a pressão, já que assumimos que ela varia igualmente em função da altura para os arredores e para parcelas de fluido deslocadas.

As Equações (2.1) e (2.2) são bastante intuitivas, porém não muito úteis na prática. Na Subseção 2.1.2 introduziremos uma forma mais prática de avaliar se uma atmosfera estratificada é estável ou instável à convecção.

2.1.2 Temperatura potencial

A temperatura potencial é definida como a temperatura que uma parcela de fluido teria se fosse deslocada adiabaticamente para uma pressão de referência p_0 . Matematicamente, definimos a temperatura potencial Θ como

$$\Theta = T \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/c_p}, \quad (2.3)$$

onde T é a temperatura, p é a pressão, p_0 é uma pressão constante de referência, R é a constante universal dos gases e c_p é o calor específico a pressão constante.

Existe uma relação entre quantidades infinitesimais de temperatura potencial Θ e de entropia específica, s , dada por (Cossette et al. 2017)

$$ds = c_p d(\ln \Theta). \quad (2.4)$$

Neste trabalho usaremos Θ ao invés de T , o que é equivalente a usar a entropia como variável de estado.

Podemos facilmente verificar se uma atmosfera é instável à convecção se estivermos usando Θ como variável de estado. De acordo com Gill (2016), temos que

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} < 0, \quad (2.5)$$

para uma atmosfera superadiabática (instável).

2.2 Equações de Navier-Stokes

Convecção é um fenômeno hidrodinâmico, portanto regido pelas Equações de Navier-Stokes, que são compostas pelas equações de conservação de massa, momento e energia. Nesta seção deduziremos as equações de conservação de massa e momento partindo de princípios físicos fundamentais. As deduções que serão apresentadas são baseadas em Chandrasekhar (2013). A equação de energia será deduzida na Subseção 2.4.2.

2.2.1 Equação de conservação de massa

Para deduzir a equação de conservação de massa consideramos um volume arbitrário V delimitado por uma superfície imaginária S . Consideramos também que a taxa de variação de massa de fluido contida no volume fixo V é dada pelo fluxo de $\rho\mathbf{u}$ através da superfície S . A expressão matemática desta afirmação é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.6)$$

onde ρ é a densidade do fluido, dV é o elemento infinitesimal de volume, \mathbf{u} é o campo de velocidades e $d\mathbf{S}$ é o vetor de área apontando para fora na direção normal à superfície S . O sinal menos do lado direito significa que um fluxo positivo (para fora da superfície S) faz com que a massa de fluido contida em V diminua.

Passando a derivada temporal para dentro da integral e usando o teorema de Gauss no lado direito da Equação (2.6) temos

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) dV. \quad (2.7)$$

Como o volume V é arbitrário, para que a Equação (2.7) seja verdadeira os integrandos devem ser iguais:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho\mathbf{u}). \quad (2.8)$$

Esta é a equação de conservação de massa, também chamada de equação de continuidade. Para o caso especial de um fluido incompressível, onde a densidade não varia nem com o tempo nem com a posição, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.9)$$

Neste caso é dito que o campo de velocidades é solenoidal.

2.2.2 Equação de momento

Para deduzir a equação de momento (ou equações de movimento) é preciso saber a tensão P_{ij} atuando na direção de x_j por unidade de área em um elemento de superfície

perpendicular a x_i . Usaremos notação indicial, onde $x_i (i = 1, 2, 3)$ denota a posição e também adotaremos a convenção de soma sobre índices repetidos.

A tensão é relacionada à taxa de aumento de deformação no fluido, que é dada por

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.10)$$

Assumimos que P_{ij} e e_{ij} são relacionados linearmente:

$$P_{ij} = \omega_{ij} + q_{ij;kl} e_{kl}, \quad (2.11)$$

onde ω_{ij} é um tensor simétrico para o qual P_{ij} tende no caso em que $e_{ij} = 0$ e $q_{ij;kl}$ é um tensor de 4ª ordem. Caso o fluido seja isotrópico, a forma da Equação (2.11) deve ser invariante a rotações e translações do sistema de coordenadas. Consequentemente, os tensores ω_{ij} e $q_{ij;kl}$ devem ser isotrópicos:

$$\omega_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (2.12)$$

e

$$q_{ij;kl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (2.13)$$

onde p , λ e μ são funções escalares da posição x_i e δ_{ij} é o delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$). Substituindo as Equações (2.12) e (2.13) na Equação (2.11), temos

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + [\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})] e_{kl}. \quad (2.14)$$

Somando sobre índices repetidos obtemos

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij} e_{kk}. \quad (2.15)$$

No caso em que a pressão é isotrópica e atua sobre x_i temos

$$P_{ii} = -3p + 2\mu e_{ii} + 3\lambda e_{kk}. \quad (2.16)$$

Os fatores 3 surgem quando somamos sobre índices repetidos nas funções delta. Definimos p como a pressão isotrópica sobre x_i quando não há deformações no fluido. Deste modo, a soma dos dois últimos dois termos do lado direito de (2.16) devem se anular e podemos escrever λ em função de μ :

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu, \quad (2.17)$$

logo,

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij}e_{kk}. \quad (2.18)$$

A função μ é o coeficiente de viscosidade, que pode depender da posição. Os termos proporcionais a μ na Equação (2.18) definem a tensão devido à viscosidade:

$$p_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}. \quad (2.19)$$

Para um fluido incompressível e usando a Equação (2.9)² o tensor da viscosidade é simplesmente

$$p_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.20)$$

Podemos escrever as equações de movimento em termos de P_{ij} como

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho X_i + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2.21)$$

onde X_i é a componente i de qualquer força que esteja agindo no fluido.

Substituindo P_{ij} na Equação (2.21) temos

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]. \quad (2.22)$$

Para um fluido incompressível com μ constante temos

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i. \quad (2.23)$$

Esta é a forma original das equações de Navier-Stokes. A Equação (2.23) também pode ser escrita na forma vetorial como

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.24)$$

onde $d/dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$ são as velocidades em cada direção, $\nu \equiv \mu/\rho$ e substituímos a força externa genérica \mathbf{X} pela gravidade \mathbf{g} , que é a única força externa que consideramos. Note que em simulações com rotação deve-se considerar também a força de Coriolis, $2\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}$, onde $\boldsymbol{\Omega}$ é a velocidade angular do sistema de coordenadas.

2.3 Aproximação anelástica

Uma aproximação comumente feita nas equações de Navier-Stokes para o problema da convecção é a aproximação de Boussinesq. Nesta aproximação a dimensão vertical da

² Em notação indicial a Equação (2.9) tem a forma $\partial u_i / \partial x_i = 0$.

convecção é considerada pequena o suficiente para que possamos considerar que a densidade é constante em todo o domínio, exceto por pequenas variações causadas por diferenças de temperatura que são necessárias para que exista convecção. Ou seja, a densidade não varia devido ao peso da camada de fluido. Entretanto, existem situações onde a extensão vertical da zona convectiva é grande, causando uma variação significativa da densidade.

Para essas situações podemos utilizar a aproximação anelástica, como proposto por Ogura & Phillips (1962). A aproximação anelástica pressupõe alguns requisitos básicos. Um deles é de que a temperatura potencial Θ é aproximadamente constante na zona convectiva. Como uma pequena variação de Θ já é suficiente para que exista convecção, esta aproximação é válida.

A segunda aproximação e principal motivo pelo qual esta aproximação é utilizada em simulações é que ondas sonoras não são relevantes para o problema em questão e podemos desconsiderá-las, já que elas requerem um passo temporal muito pequeno durante a integração numérica (Ogura & Phillips 1962).

Em Ogura & Phillips (1962), a aproximação anelástica é deduzida expressando-se todas as variáveis dependentes (velocidade, pressão e temperatura potencial) em séries de potência em um parâmetro arbitrário ϵ e considerando que os termos de ordem zero em ϵ têm magnitude perto da unidade e que o parâmetro ϵ é pequeno. Desta maneira pode-se mostrar que a equação de continuidade que filtra ondas sonoras mas preserva os efeitos da estratificação é

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.25)$$

Note que a diferença da Equação (2.25) para a Equação (2.9) é que a densidade não pode ser tirada da integral na Equação (2.25), ou seja, o fluxo de massa é solenoidal. Neste trabalho escrevemos a Equação (2.25) como

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0, \quad (2.26)$$

onde o subíndice 0 denota estado isentrópico, que é um estado de referência que será usado nas simulações. Apesar de variar no espaço, ρ_0 é constante no tempo.

2.4 Forma alternativa das Equações da Navier-Stokes

Na Seção 2.2 deduzimos as equações de Navier-Stokes em sua forma mais tradicional. Entretanto, para realizar as simulações numéricas usaremos as equações de Navier-Stokes em uma forma diferente, na qual se resolve a equação de energia em termos de perturbações de Θ . Nesta seção deduziremos esta equação.

2.4.1 Equação de momento

Partimos da Equação (2.24) e consideramos $\nu = 0$, pois como se verá mais para frente realizamos somente simulações invíscidas. Assim, a Equação (2.24) se torna

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}. \quad (2.27)$$

No caso hidrostático, em que não há movimento, (2.27) resulta em

$$\nabla p = \rho \mathbf{g}. \quad (2.28)$$

Como a pressão varia somente na direção vertical z e $\mathbf{g} = -g\hat{z}$, onde \hat{z} é o vetor unitário na direção z temos que

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (2.29)$$

Esta condição é conhecida como equilíbrio hidrostático. Escrevemos as grandezas termodinâmicas como a soma de um estado de referência hidrostático, ρ_0 , p_0 e T_0 , que depende somente da coordenada vertical e com perturbações (que dependem das coordenadas espaciais e do tempo) ρ' , p' e T' ao redor deste estado:

$$\rho' = \rho - \rho_0, \quad (2.30)$$

$$p' = p - p_0 \quad (2.31)$$

e

$$T' = T - T_0. \quad (2.32)$$

Temos então para a Equação (2.29)

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial(p_0 + p')}{\partial z} - g. \quad (2.33)$$

Atuando com a derivada no lado direito:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial p_0}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial p'}{\partial z} - g. \quad (2.34)$$

Como o estado de referência foi escolhido como sendo hidrostático, a Equação (2.29) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g. \quad (2.35)$$

Substituindo (2.35) em (2.34):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g &= -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\rho_0 g}{\rho_0 + \rho'} - g \\ &= -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial p'}{\partial z} + \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 + \rho'} - 1 \right) g. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Neste momento precisamos assumir que a magnitude das perturbações em torno do estado de referência são muito menores do que a magnitude das grandezas do estado de referência, ou seja, $\rho'/\rho_0 \ll 1$. Assim sendo, podemos simplificar a Equação (2.36) para

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \approx -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_0} g. \quad (2.37)$$

Manipulando a derivada do lado direito da Equação (2.37) temos que

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \approx -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p'}{\rho_0} \right) - \frac{p'}{\rho_0} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) - \frac{\rho'}{\rho_0} g. \quad (2.38)$$

Usaremos agora a equação de estado linearizada ³ para o estado de referência

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{p_0} - \frac{\Theta'}{\Theta_0} \quad (2.39)$$

e a derivada da equação de estado ⁴

$$\frac{1}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} - \frac{1}{\Theta_0} \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z}. \quad (2.40)$$

Substituindo Equações (2.39) e (2.40) na Equação (2.38) obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g &\approx -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p'}{\rho_0} \right) + \frac{p'}{\rho_0} \left(\frac{1}{\Theta_0} \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} - \frac{1}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) + \left(\frac{\Theta'}{\Theta_0} - \frac{p'}{p_0} \right) g \\ &\approx -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p'}{\rho_0} \right) + \frac{p'}{\rho_0} \left(\frac{1}{\Theta_0} \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} \right) + \frac{\Theta'}{\Theta_0} g. \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde usamos a Equação (2.29) na última passagem.

Pode-se mostrar que o segundo termo do lado direito da Equação (2.41) pode ser desprezado caso as velocidades com que o fluido se move sejam muito menores do que a velocidade do som no meio e caso Θ_0 varie lentamente com a altura. Desta maneira obtemos a expressão da aproximação anelástica de Lips-Hemler:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \approx -\frac{\partial}{\partial z} \frac{p'}{\rho_0} + g \frac{\Theta'}{\Theta_0}. \quad (2.42)$$

³ Esta equação pode ser obtida a partir da equação de estado para um gás ideal $p = \rho RT$ usando a definição de temperatura potencial $\Theta = T(p/p_0)^{(R/c_p)}$, perturbando p , ρ e Θ ao redor do estado de referência e desprezando produtos entre grandezas perturbadas.

⁴ Esta equação também pode ser obtida a partir da equação de estado para um gás ideal em função da temperatura potencial, $p = \rho R \Theta (p_0/p)^{R/c_p}$, fazendo $p \rightarrow p_0$, $\rho \rightarrow \rho_0$ e $\Theta \rightarrow \Theta_0$, tomando o logaritmo natural dos dois lados e derivando em relação à z .

A Equação (2.42) quando substituída na Equação (2.27) resulta em

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \pi' - \mathbf{g} \frac{\Theta'}{\Theta_0} \quad (2.43)$$

onde $\pi' \equiv p'/\rho_0$ é a perturbação de pressão normalizada pela densidade. A Equação (2.43) será usada nas simulações.

2.4.2 Equação de energia

Para completar o sistema de equações da hidrodinâmica precisamos ainda da equação de energia. Para deduzir a forma desta equação usada nas simulações seguiremos Cossette et al. (2017). Começaremos com a equação de energia escrita da seguinte maneira:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\Theta_0}{\rho_0 T_0} \left[\nabla \cdot \left(\kappa_r \rho_0 \nabla \left(\frac{T_0}{\Theta_0} \Theta \right) \right) + \nabla \cdot \left(\kappa \rho_0 \frac{T_0}{\Theta_0} \nabla \Theta \right) \right] \quad (2.44)$$

onde T é a temperatura e κ_r e κ são as constantes de condução radiativa e condução térmica, respectivamente. Esta equação pode ser deduzida do princípio termodinâmico $T ds/dt = S_Q$ que relaciona a evolução da entropia específica à fonte de calor por unidade de massa, S_Q , devido à radiação e condução de calor, usando a definição da temperatura potencial em função da entropia $ds = c_p d(\ln \Theta)$ assim como a expressão advinda da aproximação anelástica $T/T_0 \approx \Theta/\Theta_0$.

Multiplicando os dois lados da Equação (2.44) por ρ_0 e usando a equação de continuidade (2.26) temos que

$$\frac{\partial \rho_0 \Theta}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_0 \mathbf{u} \Theta = \frac{\Theta_0}{T_0} \left[\nabla \cdot \left(\kappa_r \rho_0 \nabla \left(\frac{T_0}{\Theta_0} \Theta \right) \right) + \nabla \cdot \left(\kappa \rho_0 \frac{T_0}{\Theta_0} \nabla \Theta \right) \right]. \quad (2.45)$$

Fazemos agora uma média sobre a direção horizontal na Equação (2.45). Assumimos que a média foi feita considerando um longo período de tempo, de forma que temos um estado estacionário médio. Denotando médias horizontais por $\langle \cdot \rangle$ temos

$$\frac{d}{dz} \rho_0 \langle u_z \Theta \rangle = \frac{\Theta_0}{T_0} \left[\frac{d}{dz} \left(\kappa_r \rho_0 \frac{d T_0}{dz} \frac{d \langle \Theta \rangle}{dz} \right) + \frac{d}{dz} \left(\kappa \rho_0 \frac{T_0}{\Theta_0} \frac{d \langle \Theta \rangle}{dz} \right) \right] \quad (2.46)$$

onde u_z é a componente vertical da velocidade. Como tomamos médias sobre as direções horizontais, as derivadas nestas direções se anulam, e, como assumimos um estado estacionário, a derivada temporal também se anula. Escrevemos u_z e Θ no lado esquerdo da Equação (2.46) como a soma de um estado médio com uma perturbação, $u_z = \langle u_z \rangle + u'_z$ e $\Theta = \langle \Theta \rangle + \Theta'$, e associamos a $\langle \Theta \rangle$ um estado ambiente Θ_a . Desta maneira ficamos com

$$\frac{d}{dz} \rho_0 \langle u_z \rangle \Theta_a = \frac{\Theta_0}{T_0} \left[\frac{d}{dz} \left(\kappa_r \rho_0 \frac{d T_0}{dz} \frac{d \Theta_a}{dz} \right) + \frac{d}{dz} \left(\kappa \rho_0 \frac{T_0}{\Theta_0} \frac{d \Theta_a}{dz} \right) \right] + \mathcal{H}^*, \quad (2.47)$$

onde $\mathcal{H}^* = -d/dz (\rho_0 \langle u'_z \Theta' \rangle)$ é identificado como uma fonte de calor. Podemos achar o valor de $\langle u_z \rangle$ aplicando uma média horizontal na equação de conservação de massa (2.26), que resulta em $d/dz (\rho_0 \langle u_z \rangle) = 0$, o que implica que $\langle u_z \rangle = 0 \forall z$, desde que as fronteiras em z sejam impermeáveis. Conseqüentemente, os dois lados da Equação (2.47) valem zero. Como $\langle u_z \rangle = 0$, então $u'_z = u_z$ e não usaremos mais a notação u'_z .

Dividindo a Equação (2.47) por ρ_0 e a subtraindo de (2.44) chegamos em

$$\frac{d\Theta'}{dt} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \Theta_a + \frac{1}{\rho_0} \mathcal{H}(\Theta') - \alpha \Theta'. \quad (2.48)$$

Neste último passo modelamos $\mathcal{H}^* = -d/dz (\rho_0 \langle u_z \Theta' \rangle)$ como um forçamento na forma de um resfriamento Newtoniano $-\alpha \Theta'$, onde $\tau_\alpha = \alpha^{-1}$ é a escala de tempo. O termo entre colchetes na Equação (2.47) (e o fator Θ_0/T_0) foram representados por $\mathcal{H}(\Theta')$.

2.5 Modelagem matemática dos mecanismos de troca de calor

Neste trabalho examinaremos como simulações numéricas de convecção se comportam quando reescrevemos a Equação (2.48) de duas formas diferentes, utilizando em cada uma das formas um dos dois mecanismos de troca de calor, condução térmica (ou de radiação) e forçamento e dissipação. Algumas vezes nos referiremos à condução de calor como condução e forçamento e dissipação como forçamento.

A condução é o segundo termo do lado direito da Equação (2.48):

$$\mathcal{H}(\Theta') = \frac{\Theta_0}{T_0} \left[\nabla \cdot \left(\kappa_r \rho_0 \nabla \left(\frac{T_0}{\Theta_0} \Theta' \right) \right) + \nabla \cdot \left(\kappa \rho_0 \frac{T_0}{\Theta_0} \nabla \Theta' \right) \right]. \quad (2.49)$$

O lado direito da Equação (2.49) é composto por dois termos com estrutura bastante semelhante, nos quais o calor trocado é proporcional aos gradientes de temperatura e de temperatura potencial, respectivamente. O primeiro é responsável pela transferência radiativa, que é aproximada como uma condutividade térmica. Esta aproximação pode ser feita sempre que o livre caminho médio dos fótons for muito menor do que as dimensões típicas do problema. O segundo termo é a condutividade térmica propriamente dita.

Quando modelamos a troca de energia usando condução, o termo de forçamento, $-\alpha \Theta'$ não é usado. Por sua vez, quando modelamos a troca de energia usando forçamento, não utilizamos o termo de condução, Equação 2.49. As equações completas utilizadas nas simulações são mostradas na Seção 3.1. Existem na literatura trabalhos que utilizam simultaneamente os mecanismos de condução e forçamento, e.g., Cossette et al. (2017). Neste trabalho não utilizamos os dois simultaneamente para que fosse possível estudar como cada mecanismo de troca influencia nas simulações de convecção.

A condução de calor é um fenômeno que acontece predominantemente nas pequenas escalas do problema em questão. Para melhor entender esta afirmação podemos substituir

Θ' na Equação (2.48) pelos seus modos de Fourier, $a(\mathbf{x}, t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, onde a é o coeficiente de cada modo de Fourier e \mathbf{k} é o vetor de onda. Como, de acordo com a Equação (2.48), devemos derivar cada modo de Fourier duas vezes em relação às coordenadas espaciais, temos que

$$\mathcal{H}(\Theta') \propto |\mathbf{k}|^2. \quad (2.50)$$

Ou seja, a condução é mais acentuada nos grandes números de onda ou nas pequenas escalas. O forçamento, por outro lado, foi escolhido de forma a modelar o termo $\mathcal{H}^* = -d/dz(\rho_0\langle u_z\Theta'\rangle)$, que tem um efeito global no balanceamento das perturbações de temperatura potencial. Por esta razão o substituímos pelo termo $-\alpha\Theta'$, que amortece flutuações de temperatura potencial em todas as escalas espaciais.

Além de agirem em diferenças escalas, a condução e o forçamento também agem de formas diferentes na convecção. Como a temperatura na fronteira inferior do domínio é mais alta que a temperatura na fronteira superior, a condução age no sentido de transmitir calor da base para o topo do domínio, competindo com a convecção. Quanto mais intensa a condução, menos intensa é a convecção, desde que os outros parâmetros do sistema se mantenham inalterados.

Já o esquema de forçamento utiliza um termo na forma de um resfriamento Newtoniano, que relaxa perturbações de temperatura potencial ao redor do estado ambiente em uma escala de tempo $1/\alpha$. Nesta configuração, enquanto a convecção faz o perfil de temperatura tender a um perfil isentrópico, o forçamento leva o sistema para o perfil de temperatura do estado ambiente, levemente superadiabático. Quanto maior o tempo característico de forçamento, $1/\alpha$, ou seja menos intenso for o forçamento, mais intensa é a convecção. Isto pode ser visto deduzindo-se um número de Rayleigh para o sistema utilizando forçamento, o que será feito na próxima seção.

2.6 Número de Rayleigh - Análise de estabilidade

O número de Rayleigh é uma grandeza adimensional obtida por meio de uma análise de estabilidade das equações de Navier-Stokes. Ele indica se pequenos deslocamentos causados pelo empuxo serão amortecidos por forças viscosas e dissipativas, dando origem a um sistema estável, ou se estes deslocamentos crescerão arbitrariamente, dando origem a um sistema instável à convecção. Nesta seção fazemos uma análise de estabilidade considerando que o forçamento e dissipação é o único mecanismo de troca calor presente, já que a análise de estabilidade para a formulação com condução de calor pode ser facilmente encontrada na literatura (Chandrasekhar 2013; Choudhuri 1998). Devemos adicionar um termo viscoso à equação de momento (2.43) por motivos que ficarão claros ao fim desta seção. Além do mais, por simplicidade, consideraremos a aproximação de Bousinesq, onde a densidade é

aproximadamente constante em todo o domínio, diferentemente da aproximação anelástica, onde a densidade varia com a altura. Assim, a análise de estabilidade será baseada nas equações que se seguem:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{d\Theta'}{dt} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \Theta_a - \alpha \Theta' \quad (2.51)$$

e

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla \pi' - \mathbf{g} \frac{\Theta'}{\Theta_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.52)$$

O princípio da análise de estabilidade é relativamente simples (Chandrasekhar 2013). Substituiremos as grandezas u_z e Θ' pelos seus modos de Fourier:

$$u_z = W(z) \exp(\sigma t + ik_x x + ik_y y) \quad (2.53)$$

e

$$\Theta' = \phi(z) \exp(\sigma t + ik_x x + ik_y y) \quad (2.54)$$

onde k_x e k_y são os números de onda nas direções horizontais x e y , respectivamente.

Assumimos que σ é um número real. Caso σ nas Equações (2.53) e (2.54) seja um número negativo, as perturbações decairão exponencialmente, e o sistema será estável à convecção. Por outro lado, caso σ seja um número positivo, as perturbações crescerão exponencialmente, e o sistema será instável à convecção. Como desejamos achar o conjunto de pontos no espaço de parâmetros ⁵ em que o sistema está na iminência de desenvolver uma instabilidade, fazemos $\sigma = 0$.

Iniciamos a análise linearizando as Equações (2.51) e (2.52), tomando o rotacional nos dois lados da Equação (2.52) e usando a identidade $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ no termo do lado esquerdo e no último termo do lado direito junto com a Equação (2.9). Usamos também o fato de que o rotacional de um gradiente é zero. Considerando somente a direção z temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_z = \frac{g}{\Theta_0} \left(\frac{\partial^2 \Theta'}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \Theta'}{\partial^2 y} \right) + \nu \nabla^4 u_z. \quad (2.55)$$

Substituindo as Equações (2.53) e (2.54) na Equação (2.55) com $\sigma = 0$ chegamos

⁵ A expressão "conjunto de pontos no espaço de parâmetros" significa o conjunto de valores específicos de grandezas físicas, por exemplo, um ponto no espaço de parâmetros corresponde a um valor específico da aceleração da gravidade, um valor específico do tempo característico do forçamento e assim por diante.

em

$$\frac{g}{\Theta_0} \phi k^2 + \nu \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 W = 0 \quad (2.56)$$

onde $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Reescrevemos o termo $\mathbf{u} \cdot \nabla \Theta_a$ (da Equação (2.51)) como $u_z \beta$, onde $\beta = \partial \Theta_a / \partial z$, já que o estado ambiente não tem derivadas nas direções horizontais. Substituindo os modos de Fourier (2.53) e (2.54) com $\sigma = 0$ na versão linearizada da Equação (2.51) obtemos

$$W\beta + \alpha\phi = 0 \rightarrow \phi = -\frac{1}{\alpha}\beta W. \quad (2.57)$$

Usando a Equação (2.57) na Equação (2.56) temos que

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 W = \frac{g}{\Theta_0 \nu \alpha} \beta k^2 W. \quad (2.58)$$

Agora definimos variáveis adimensionais $z \rightarrow z'd$ e $k \rightarrow k'/d$. Substituindo estas novas variáveis na Equação (2.58) chegamos em

$$\left(\frac{d^2}{dz'^2} - k'^2 \right)^2 W = \frac{gd^2}{\Theta_0 \nu \alpha} \beta k'^2 W. \quad (2.59)$$

Definimos

$$\text{Ra} = \frac{gd^2 \beta}{\Theta_0 \nu \alpha} \quad (2.60)$$

como o número de Rayleigh apropriado para este sistema de equações. Como a velocidade u_z deve se anular para $z' = 0$ e $z' = 1$ (lembre-se de que z' vai de 0 até 1), propomos a seguinte solução para a Equação (2.59):

$$W = W_0 \text{sen}(n\pi z') \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.61)$$

onde W_0 é uma constante e n é um número inteiro, implicando em

$$\text{Ra} = \frac{(n^2 \pi^2 + k'^2)^2}{k'^2}. \quad (2.62)$$

O mínimo da Equação (2.62) ocorrerá para $n = 1$:

$$\text{Ra} = \frac{(\pi^2 + k'^2)^2}{k'^2}, \quad (2.63)$$

que tem como valor mínimo (ou crítico) $\text{Ra}_c = 4\pi^2 = 39.478$ para $k' = \pi$.

Isto significa que as perturbações que se desenvolverão na estabilidade marginal terão número de onda $k' = \pi$. Voltando com as variáveis dimensionais e sabendo que

$|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda associado ao número de onda k , temos que o comprimento de onda em que as perturbações se desenvolverão primeiro vale $2d$. Caso $\nu = 0$ não seria possível realizar esta análise. Mesmo que simularemos sistemas sem viscosidade, podemos pensar que ν usado nesta análise corresponde ao valor da viscosidade efetiva dada pelo método numérico. Esta viscosidade é estimada na Subseção 4.2.3.

2.7 Escalas de energia

Para entender como um fluxo turbulento depende das escalas espaciais ou de comprimento, enxergamos a turbulência como formada por turbilhões ou *eddies*, que constituem o fluxo e onde o fluido se desloca de forma aproximadamente coesa. Quando nos referimos a uma determinada escala de comprimento estamos nos referindo aos turbilhões de tamanho correspondente. Os turbilhões variam desde a escala de injeção, que é da ordem de tamanho do domínio, até a escala dissipativa, que é a escala na qual energia é dissipada do sistema pela viscosidade. Os maiores turbilhões são instáveis e se quebram em turbilhões menores, que por sua vez se quebram em turbilhões menores ainda. Este processo, conhecido como cascadeamento de energia, continua até que os turbilhões tenham tamanhos comparáveis à ordem de grandeza da escala dissipativa e a energia cinética seja dissipada pela viscosidade. A escala de injeção depende fortemente das condições de contorno e é a escala na qual a energia entra no sistema, não sendo afetada pela viscosidade e pela taxa de dissipação de energia.

A escala dissipativa é a menor escala do fluxo. De acordo com a primeira hipótese de similaridade de Kolmogorov (Pope 2000), em um fluido turbulento com número de Reynolds suficientemente alto, a estatística dos movimentos de pequena escala tem uma forma universal determinada unicamente pela viscosidade e pela taxa de dissipação de energia.

De acordo com a segunda hipótese de similaridade de Kolmogorov, existe uma escala intermediária, chamada de escala inercial, que é grande o suficiente para não ser afetada pela viscosidade e depende unicamente da taxa de dissipação de energia, também de forma universal. Definindo o número de onda k como $2\pi/l$, onde l é uma escala de tamanho, pode-se mostrar que, na escala inercial, a dependência da energia cinética com o número de onda é (Kolmogorov 1941)

$$E(k) \propto k^{-5/3}, \quad (2.64)$$

onde $E(k)$ é a energia cinética no espaço espectral associada aos turbilhões de tamanho $2\pi/k$. Nos referiremos a este escalamento como K41.

Na Figura 5 mostramos um espectro de potência genérico de um fluido turbulento. Podemos perceber a escala de injeção de energia na parte esquerda do gráfico, a escala

inercial nos números de onda intermediários e a escala de dissipação nas menores escalas espaciais.

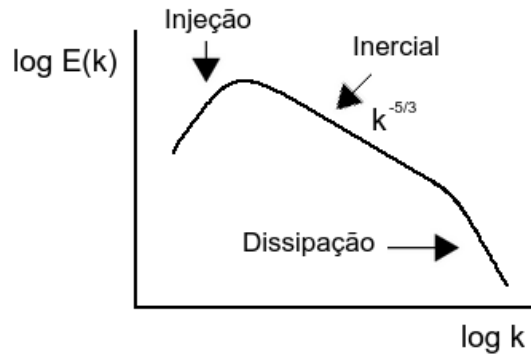


Figura 5 – Espectro de potência típico para um fluxo turbulento.

A hipótese de Kolmogorov se aplica quando a turbulência é homogênea e isotrópica. Porém, na presença de forças de empuxo, a escala inercial do espectro de velocidades não segue mais a lei de $-5/3$ de Kolmogorov. Neste caso, parte da energia cinética é transformada em energia potencial gravitacional, e a escala inercial segue o chamado escalamento de Bolgiano-Obukhov (Bolgiano Jr 1959; Obukhov 1962). De acordo com esta teoria, a dependência da energia cinética com o número de onda k é dada por

$$E(k) \propto k^{-11/5}. \quad (2.65)$$

Nos referiremos a este escalamento como BO. O escalamento $K41 \propto k^{-5/3}$ se aplica também ao espectro de potência da entropia (ou de temperatura potencial). Segundo o escalamento de Bolgiano-Obukhov para o espectro de potência de perturbações de temperatura potencial, o decaimento na escala inercial é dado por

$$E^\Theta(k) \propto k^{-7/5}. \quad (2.66)$$

3 Modelos numéricos

Neste capítulo descreveremos as simulações computacionais realizadas neste trabalho, especificando as equações, o código usado, incluindo seus métodos numéricos e as configurações de cada simulação.

3.1 Equações

Para as simulações usando condução de calor usamos as seguintes equações

$$\nabla \cdot \rho_a \mathbf{u} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla\pi' - \mathbf{g} \frac{\Theta'}{\Theta_a}, \quad (3.2)$$

$$\frac{d\Theta'}{dt} = -\mathbf{u} \cdot \nabla\Theta_a + \frac{\Theta_a}{\rho_a T_a} \left[\nabla \cdot \left(\kappa \frac{\rho_a T_a}{\Theta_a} \nabla\Theta' \right) \right], \quad (3.3)$$

onde o significado de cada símbolo já foi especificado no Capítulo 2. Por simplicidade, usamos na Equação (3.3) apenas o segundo termo do lado direito da Equação (2.49), que é o termo responsável pela condutividade térmica.

Para as simulações usando forçamento e dissipação utilizamos as seguintes equações:

$$\nabla \cdot \rho_0 \mathbf{u} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla\pi' - \mathbf{g} \frac{\Theta'}{\Theta_0}, \quad (3.5)$$

$$\frac{d\Theta'}{dt} = -\mathbf{u} \cdot \nabla\Theta_a - \alpha\Theta'. \quad (3.6)$$

Note que nas equações para a condução de calor usamos sempre o estado ambiente como estado de referência, enquanto nas equações para o forçamento e dissipação usamos o estado isentrópico como estado de referência nas equações de conservação de massa e de momento e usamos o estado ambiente como estado de referência na equação de energia. Em trabalhos sobre convecção turbulenta encontrados na literatura onde a troca de calor é modelada apenas como uma difusão térmica, geralmente um estado de referência é usado para todas as grandezas (Elliott & Smolarkiewicz, 2002; Featherstone & Hindman 2016; Hotta et al. 2015). As equações usadas nestes trabalhos não são idênticas às aqui citadas, porém todos usam uma formulação com um único estado de referência para estudar convecção, geralmente com a presença de campos magnéticos. Em alguns trabalhos que

usam forçamento e dissipação, dois estados de referência diferentes são usados (Cossette et al. 2017; Strugarek et al. 2016).

3.2 EULAG-MHD

Para integrar as equações de Navier-Stokes numericamente usamos o código EULAG-MHD (Prusa et al. 2008), que é uma ferramenta computacional para resolver problemas hidrodinâmicos e magnetohidrodinâmicos. Este código também é comumente usado em problemas meteorológicos (Guerrero et al. 2019). Usando volumes finitos, o código realiza a advecção de grandezas físicas utilizando o método MPDATA, que será descrito em mais detalhes na Subseção 3.2.1. Outro aspecto interessante deste código é o solucionador de equações elípticas. Na Subseção 3.2.2 apresentamos uma versão didática simplificada deste algoritmo.

O MPDATA apresenta bom desempenho na modelagem implícita da viscosidade de *eddy*. Desta forma, contribuições de pequena escala são consideradas de forma implícita. Simulações com esta formulação são conhecidas como *implicit large-eddy simulation* (ILES) (Hu & Adams 2011). Além do mais, EULAG apresenta bom desempenho e escalabilidade quando usado de forma paralelizada (Prusa et al. 2008).

3.2.1 MPDATA

Um problema comum em simulações hidrodinâmicas é o erro de truncamento, devido ao tamanho finito da discretização usada para aproximar derivadas (Press et al. 1988). Uma maneira de diminuir o erro de truncamento é usando um algoritmo chamado MPDATA (*multidimensional positive defined advection transport algorithm*). Além de diminuir este erro, o algoritmo preserva o sinal de grandezas físicas estritamente positivas (ou negativas), garante a estabilidade do código com o mínimo de viscosidade e difusividade numérica e evita oscilações espúrias enquanto realiza a advecção de grandezas físicas.

Nos basearemos em Smolarkiewicz (2006) para apresentar a ideia básica deste algoritmo em uma dimensão. Assumimos um fluxo solenoidal estacionário e consideramos a equação de advecção

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(u\Psi) \quad (3.7)$$

onde $u = \text{const}$ é a velocidade do fluxo e Ψ é um campo escalar não negativo. Integrar esta equação numericamente significa achar o valor de Ψ no passo temporal $t = n + 1$ em função dos valores já conhecidos no passo temporal $t = n$. Para isso usamos a seguinte aproximação para Ψ no passo temporal $t = n + 1$ em função das grandezas já conhecidas

no passo temporal $t = n$,

$$\Psi_i^{n+1} = \Psi_i^n - [F(\Psi_i^n, \Psi_{i+1}^n, U_{i+1/2}) - F(\Psi_{i-1}^n, \Psi_i^n, U_{i-1/2})] \quad (3.8)$$

onde os sobreíndices indicam o passo temporal correspondente à cada grandeza física e os subíndices indicam a posição espacial. A função de fluxo F é definida em termos do número local de Courant, U , por

$$F(\Psi_L, \Psi_R, U) \equiv [U]^+ \Psi_L + [U]^- \Psi_R \quad (3.9)$$

onde

$$U \equiv \frac{u\delta t}{\delta x}; [U]^+ \equiv 0.5(U + |U|); [U]^- \equiv 0.5(U - |U|). \quad (3.10)$$

Índices inteiros e semi-inteiros correspondem, respectivamente, aos centros e às bordas das células e $[U]^+$ e $[U]^-$ são respectivamente as partes não-negativas e não-positivas do número de Courant. Para calcular o erro de truncamento expandimos todas as variáveis dependentes em série de Taylor até segunda ordem em δx e δt e usamos a Equação 3.7 para substituir as derivadas temporais por derivadas espaciais. Fazendo-se esta expansão, temos que o esquema representado por (3.8) pode ser aproximado pela equação de difusão-advecção

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(u\Psi) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-K \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (3.11)$$

onde

$$K = \frac{(\delta x)^2}{2\delta t} (|U| - U^2). \quad (3.12)$$

A Equação (3.11) difere da equação que governa o sistema, Equação (3.7), pelo segundo termo do lado direito, que tem a forma de um fluxo difusivo. Para compensar este termo, criamos um fluxo advectivo oposto ao fluxo $-K\partial\psi\partial x$

$$u_d \Psi \equiv -K \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.13)$$

Usamos as Equações (3.12) e (3.13) para obter

$$u_d \equiv -\frac{(\delta x)^2}{2\delta t} (|U| - U^2) \frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.14)$$

Para compensar o erro de primeira ordem que surge durante a integração numérica de Ψ^{n+1} , utilizamos o mesmo esquema que usamos para integrar a Equação (3.7), dado pelas Equações (3.8) a (3.10), porém com a velocidade $\tilde{u} = -u_d$ ao invés de u e com o valor de Ψ^{n+1} no lugar de Ψ^n . O resultado desta nova integração será o valor de Ψ^{n+1} livre

do erro de primeira ordem. Para que o algoritmo seja estável, basta garantir que $|U| \leq 1$ e usar uma aproximação adequada para $\frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ em (3.14), como por exemplo

$$\frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \approx \frac{2}{\delta x} \frac{\Psi_{i+1}^{n+1} - \Psi_i^{n+1}}{\Psi_{i+1}^{n+1} + \Psi_i^{n+1} + \epsilon}, \quad (3.15)$$

onde $\epsilon > 0$.

3.2.2 Solucionador elíptico

Um outro aspecto interessante do EULAG-MHD é a maneira como as perturbações de pressão são encontradas de modo que $\rho \mathbf{u}$ tenha divergência nula, Equações (3.1) ou (3.4), tal como requerido pela aproximação anelástica. Através de manipulações algébricas usando as Equações (3.1) e (3.2), como detalhado em Prusa et al. (2008), é possível mostrar que a seguinte equação deve ser resolvida numericamente para evoluir as perturbações de pressão

$$\left\{ \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot \rho [\tilde{\mathbf{u}} - (\mathbf{I} - 0.5 \Delta t \mathbf{R})^{-1} (\nabla \pi')] \right\}_i = 0 \quad (3.16)$$

onde a única variável é a perturbação de pressão, π' , já que esta equação é deduzida considerando os valores das velocidades no passo temporal anterior já realizado e $\mathbf{R} = \mathbf{g}_{2\Theta_0} \frac{\Delta t}{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta_a$. Caso o forçamento esteja sendo usado como mecanismo de troca de calor, os subíndices a do estado ambiente são substituídos pelos subíndices 0. Dadas as condições de contorno adequadas, o problema de valor de contorno resultante é resolvido usando um algoritmo conhecido como GCR (*generalized conjugate residual*).

Descreveremos os princípios básicos deste algoritmo de acordo com Smolarkiewicz & Margolin (2000). Começamos reescrevendo a Equação (3.16) de forma simbólica como

$$\mathcal{L}(\phi) - R = 0 \quad (3.17)$$

onde $\phi \equiv \pi'$, $\mathcal{L} \equiv \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot \rho (\mathbf{I} - 0.5 \Delta t \mathbf{R})^{-1} (\nabla \pi)$ e $R \equiv \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot \rho \tilde{\mathbf{u}}$ são definidos de forma que as Equações (3.16) e (3.17) sejam equivalentes.

Como estratégia para resolver a Equação (3.17) adicionamos uma derivada de ϕ em relação a um pseudotempo τ

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \mathcal{L}(\phi) - R. \quad (3.18)$$

Chamamos a solução exata de (3.17) de $\bar{\phi}$. Para que as Equações (3.17) e (3.18) sejam consistentes devemos ter que $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \tau} = 0$. Definindo o erro na solução como $e \equiv \phi - \bar{\phi}$,

subtraindo $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \tau}$ do lado esquerdo de (3.18), sabendo que $R = \mathcal{L}(\bar{\phi})$ e assumindo que \mathcal{L} é linear implica em

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} = \mathcal{L}(e). \quad (3.19)$$

Multiplicando os dois lados de (3.19) por e e integrando sobre todo o domínio temos que

$$\frac{\partial \langle e^2 \rangle}{\partial \tau} = 2 \langle e \mathcal{L}(e) \rangle, \quad (3.20)$$

onde $\langle \cdot \rangle$ significa integral sobre todo o domínio. Supomos que o operador \mathcal{L} seja definido negativo ou dissipativo, ou seja, $\forall e \neq 0 \langle e \mathcal{L}(e) \rangle < 0$. Deste modo, se discretizarmos o problema modificado (3.18) em intervalos de pseudotempo $\Delta \tau$ e integrarmos em relação a τ , então uma estimativa inicial para a solução ϕ^0 convergirá para $\bar{\phi}$ quando $\tau \rightarrow \infty$, já que a Equação (3.20) significa que o erro e tende para zero à medida que o pseudotempo τ tende para infinito.

Discretizando (3.18) em pseudotempo com incrementos $\Delta t = \beta$ e usando diferenças finitas progressivas para $\partial \phi / \partial \tau$ obtemos o esquema de difusão de Richardson,

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \beta(\mathcal{L}(\phi^n) - R). \quad (3.21)$$

3.2.2.1 Funcional de energia

Para desenvolver um algoritmo que utiliza (3.21) para achar ϕ usaremos o seguinte funcional, geralmente conhecido como funcional de energia:

$$\mathcal{J}(\phi) \equiv -\frac{1}{2} \langle \phi \mathcal{L}(\phi) \rangle + \langle \phi R \rangle. \quad (3.22)$$

Usando a definição do erro e e substituindo R por $\mathcal{L}(\bar{\phi})$ temos

$$\mathcal{J}(\phi) \equiv -\frac{1}{2} \langle e \mathcal{L}(e) \rangle + \mathcal{J}(\bar{\phi}) + \frac{1}{2} [\langle \phi \mathcal{L}(\bar{\phi}) \rangle - \langle \bar{\phi} \mathcal{L}(\phi) \rangle]. \quad (3.23)$$

onde $\mathcal{J}(\bar{\phi})$ é definido de maneira análoga à $\mathcal{J}(\phi)$, Equação 3.22, porém substituindo ϕ por $\bar{\phi}$.

Caso o operador \mathcal{L} seja autoadjunto, ou seja, $\langle \xi \mathcal{L}(\phi) \rangle = \langle \phi \mathcal{L}(\xi) \rangle$, onde ξ é uma função arbitrária, o terceiro termo do lado direito de (3.23) desaparece, e como \mathcal{L} é definido negativo, $\mathcal{J}(\phi) > \mathcal{J}(\bar{\phi}) \forall \phi$, ou seja, a solução exata $\bar{\phi}$ minimiza o funcional (3.22).

3.2.2.2 Erro residual

Definimos o erro residual como

$$r \equiv \mathcal{L}(\phi) - R. \quad (3.24)$$

A linearidade de \mathcal{L} em conjunto com a relação $R = \mathcal{L}(\bar{\phi})$ implicam que

$$r = \mathcal{L}(e), \quad (3.25)$$

Consequentemente podemos reescrever (3.18) como

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = r. \quad (3.26)$$

Usando (3.26) é possível obter uma equação como (3.20) para o erro residual que prova que $r \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow \infty$.

3.2.2.3 Algoritmo

Usando os mesmos argumentos usados para converter (3.18) em (3.19) e (3.26), (3.21) implica em

$$e^{n+1} = e^n + \beta \mathcal{L}(e^n), \quad (3.27)$$

e

$$r^{n+1} = r^n + \beta \mathcal{L}(r^n). \quad (3.28)$$

Para \mathcal{L} auto adjunto, (3.23) implica em

$$\mathcal{J}(e) = -\frac{1}{2} \langle e \mathcal{L}(e) \rangle = -\frac{1}{2} \langle er \rangle. \quad (3.29)$$

Como a solução exata minimiza $\mathcal{J}(e)$, podemos melhorar a convergência de (3.21) escolhendo β que minimize $-\langle e^{n+1} r^{n+1} \rangle$, o que faz com que $\mathcal{J}(e)$ seja o menor possível no passo temporal $n + 1$, acelerando a convergência do algoritmo. Tomando o produto entre os lados direitos de (3.27) e (3.28), integrando sobre todo o domínio e exigindo que a derivada em relação a β seja nula, temos

$$\langle r^n r^n \rangle + \langle e^n \mathcal{L}(r^n) \rangle + 2\beta \langle r^n \mathcal{L}(r^n) \rangle = 0, \quad (3.30)$$

onde usamos a Equação 3.25 para substituir $\mathcal{L}(e)$ por r .

Como o erro e não pode ser calculado até que se conheça $\bar{\phi}$, e como \mathcal{L} é assumido como autoadjunto, podemos usar que

$$\langle e^n \mathcal{L}(r^n) \rangle = \langle r^n \mathcal{L}(e^n) \rangle = \langle r^n r^n \rangle. \quad (3.31)$$

Deste modo (3.30) implica em

$$\beta = -\frac{\langle r^n r^n \rangle}{\langle r^n \mathcal{L}(r^n) \rangle}. \quad (3.32)$$

Podemos então enunciar um algoritmo elementar baseado no esquema de Richardson (Smolarkiewicz & Margolin 2000):

- Para qualquer estimativa inicial de ϕ^0 , faça $r^0 = \mathcal{L}(\phi^0) - R$ e itere:

$$\begin{aligned} & - \beta = -\frac{\langle r^n r^n \rangle}{\langle r^n \mathcal{L}(r^n) \rangle}, \\ & - \phi^{n+1} = \phi^n + \beta \mathcal{L}(r^n), \\ & - r^{n+1} = r^n + \beta \mathcal{L}(r^n), \\ & - Termine se $|r^{n+1}| \leq \epsilon$. \end{aligned}$$

Como definimos $\phi \equiv \pi'$, então o algoritmo que enunciamos acha π' que satisfaz a Equação (3.16).

3.3 Domínio

Em todas as simulações, independentemente da resolução e do mecanismo de troca de calor utilizado, usaremos um domínio retangular bidimensional tal como mostrado na Figura 6. A coordenada horizontal x vai de 0 a 2.5, enquanto a coordenada vertical z vai de 0 a 1.2 em unidades de código (veja Seção 3.7). Escolhemos um domínio não quadrado para que a zona convectiva não seja dominada por apenas um rolo convectivo. O domínio possui uma zona central instável à convecção (ou convectiva) e duas zonas estáveis à convecção no topo e na base (veja a Seção 3.5 para entender como estas zonas foram implementadas). A importância destas zonas estáveis é fazer com que a convecção não seja limitada nas fronteiras por chapas rígidas. Além do mais, esta configuração faz com que as simulações se aproximem da situação de interiores estelares, onde a convecção acontece sobre a zona radiativa, que é uma camada de fluido estável. Também diminuem a influência das condições de contorno sobre a velocidade e sobre as perturbações de temperatura potencial, já que o fluido é desacelerado gradualmente antes de chegar à fronteira e a energia que gera a convecção vem do estado ambiente e não, por exemplo, de um gradiente de temperatura imposto na fronteira.

3.4 Condições iniciais e de contorno

As condições iniciais para as simulações que usam os dois mecanismos de troca de calor são pequenas perturbações aleatórias de temperatura potencial e velocidades nulas em todo o domínio.

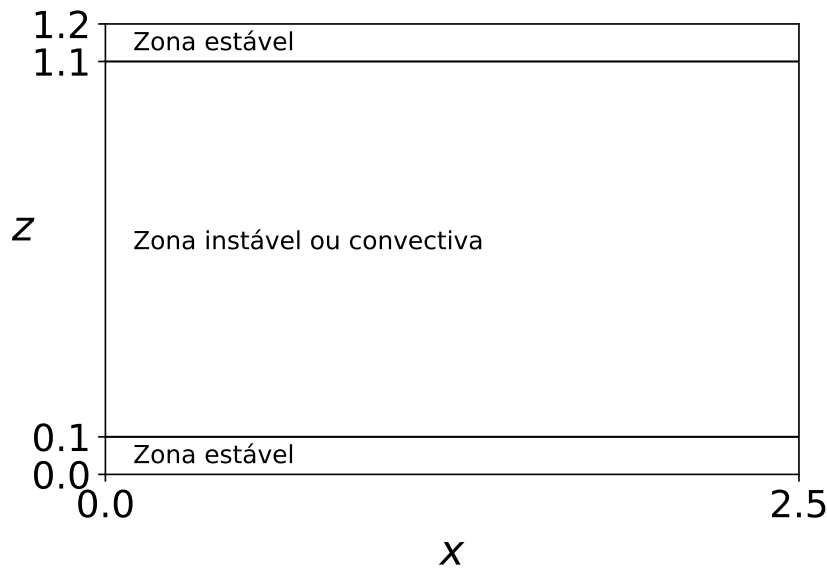


Figura 6 – Domínio computacional das simulações.

As condições de contorno para as velocidades também são iguais para os dois mecanismos de troca. As fronteiras inferior e superior são impermeáveis, ou seja

$$u_z(z = 0) = u_z(z = 1.2) = 0, \quad (3.33)$$

e livres de tensão, logo,

$$\left. \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=1.2} = 0. \quad (3.34)$$

Para as simulações usando condução de calor implementamos derivadas em z nulas de perturbações de temperatura potencial na fronteira inferior

$$\left. \frac{\partial \Theta'}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (3.35)$$

e perturbações de temperatura potencial nulas na fronteira superior

$$\Theta'(z = 1.2) = 0. \quad (3.36)$$

Para as simulações utilizando forçamento e dissipação implementamos perturbações de temperatura potencial nulas nas fronteiras inferior e superior ¹

$$\Theta'(z = 0) = \Theta'(z = 1.2) = 0. \quad (3.37)$$

¹ Idealmente as condições de contorno para as simulações utilizando condução e forçamento deveriam ser iguais. Entretanto realizamos uma simulação teste utilizando forçamento com as mesmas condições de contorno dadas pelas Equações 3.35 e 3.36 e não obtivemos diferenças perceptíveis. Outro ponto a ser considerado é que as zonas estáveis diminuem a influência das condições de contorno na convecção.

As condições de contorno nas fronteiras laterais são periódicas para todas as variáveis e para os dois mecanismos de troca de calor.

3.5 Estado ambiente

Na Subseção 2.4.2 o estado ambiente Θ_a foi apresentado como médias horizontais e temporais de um sistema conhecido em equilíbrio hidrostático. Neste trabalho obtemos o estado ambiente por meio de polítropas, como feito por exemplo em Cossette et al. (2017); Hotta et al. (2012). Assumimos que o estado ambiente se encontra em equilíbrio hidrostático, logo, considerando um estado politrópico é possível encontrar as seguintes equações,

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{g}{R(m+1)}, \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\rho}{T} \left(\frac{g}{R} - \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (3.39)$$

onde $m = m(z)$ é o índice politrópico e R é a constante do gases.

Para $m \leq 1.5$ a atmosfera é instável, e para $m > 1.5$ a atmosfera é estável.

Assumimos que m tem um valor constante em cada camada do sistema, o que pode ser representado pela seguinte função,

$$\begin{aligned} m(z) = & m_e \\ & - \frac{1}{2}(m_e - m_c) \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{z - z_1}{w} \right) \right] \\ & - \frac{1}{2}(m_c - m_e) \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{z - z_2}{w} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde $m_e = 3.0$, $m_c = 1.4995$, são os valores do índice politrópico nas camadas estáveis e convectiva, respectivamente, $\operatorname{erf}(x)$ é a função de erro de Gauss, definida como $\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt$, $z_1 = 0.1$ e $z_2 = 1.1$ são as posições das interfaces inferior e superior entre as zonas estáveis e a zona instável e $w = 0.01$ é um parâmetro que define a largura de transição entre os diferentes valores do índice politrópico $m(z)$. O valor de m_c muito próximo de 1.5 é condizente com zonas convectivas de interiores estelares, que geralmente são levemente superadiabáticas (Carroll & Ostlie 1996).

As Equações (3.38), (3.39) e (3.40) são integradas numericamente. Os perfis resultantes de Θ_a , ρ_a e p_a são mostrados na Figura 7.

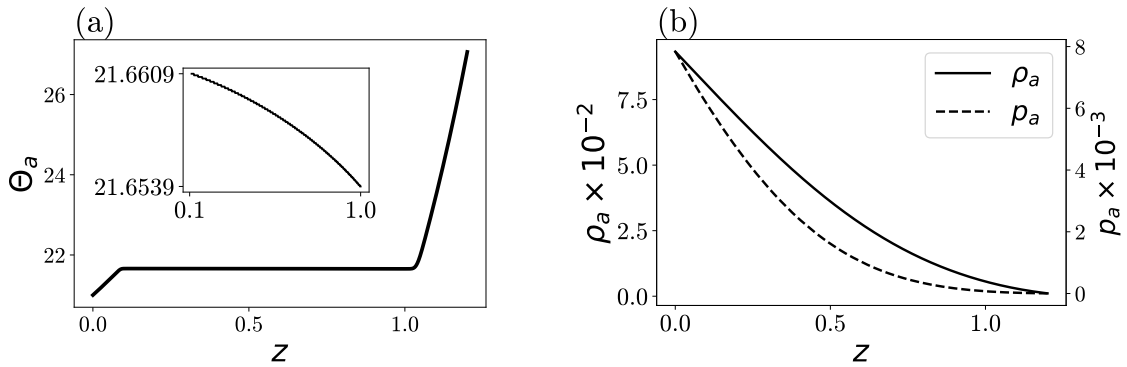


Figura 7 – (a) Perfil vertical do estado ambiente de temperatura potencial, Θ_a . O inserto mostra Θ_a para $0.1 < z < 1.0$, correspondente à zona convectiva. (b) Perfil vertical dos estados ambientes de densidade (linha contínua), ρ_a , e pressão (linha tracejada), p_a .

3.6 Perfil do coeficiente de condução de calor

O coeficiente de condução de calor foi escolhido o maior possível de forma a acelerar a relaxação térmica das simulações, mas não tão alto que todo o calor fosse transportado por condução, suprimindo a convecção. Esta escolha foi feita usando tentativa e erro e só reportamos as simulações onde a convecção acontece. Uma vez escolhido κ para a zona convectiva, o valor de κ para as zonas estáveis é dado pela relação (Ziegler & Rüdiger 2003)

$$\frac{\kappa_e}{\kappa_c} = \frac{m_e + 1}{m_c + 1}, \quad (3.41)$$

onde κ_e é o coeficiente de condução para as zonas estáveis e κ_c é o coeficiente de condução para as zonas convectivas. Consequentemente, $\kappa_e/\kappa_c = 1.6$, e quando nos referirmos ao valor de κ usado em alguma simulação estaremos nos referindo ao κ_c . A Equação 3.41 foi deduzida de modo a garantir a continuidade das variáveis do estado ambiente nas interfaces entre as zonas estáveis e instável. O perfil que escolhemos para κ é o seguinte

$$\begin{aligned} \kappa(z) = & \kappa_e \\ & - \frac{1}{2}(\kappa_e - \kappa_c) \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{z - z_1}{w} \right) \right] \\ & - \frac{1}{2}(\kappa_c - \kappa_e) \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{z - z_2}{w} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde z , z_1 , z_2 e w já foram definidos após a Equação (3.40).

A rotina para a resolução das equações já estava implementada no código e o trabalho de desenvolvimento numérico correspondeu à implementação do modelo físico em duas dimensões assim como do estado ambiente.

3.7 Conversão entre unidades de código e unidades físicas

Todas as grandezas físicas apresentadas neste trabalho estão em unidades de código. No entanto é possível aplicar os resultados obtidos nas simulações em diferentes situações observadas na natureza fazendo uma transformação para unidades físicas. Para isto devemos escolher valores de referência para um certo conjunto de grandezas. Existem várias maneiras pelas quais podemos fazer esta escolha. Por exemplo, podemos escolher como grandezas de referência um comprimento, L_0 , a aceleração da gravidade, g_0 , e a massa, m_0 . A conversão de, por exemplo, comprimento, tempo e densidade para unidades físicas se dá por

$$L_f = L_0 L_c, \quad (3.43)$$

$$t_f = \left(\frac{L_0}{g_0} \right)^{1/2} t_c, \quad (3.44)$$

$$\rho_f = \frac{m_0}{L_0^3} \rho_c. \quad (3.45)$$

onde subíndice f indica unidades físicas, subíndice c indica unidades de código e subíndice 0 indica grandezas de referência.

A temperatura potencial foi implementada no código em unidades absolutas (Kelvin) e não precisa ser convertida.

Geralmente escolhemos as unidades de referência com base em valores típicos do problema que estamos tentando resolver. Por exemplo, se nosso interesse fosse simular uma pequena parte da zona convectiva do Sol, poderíamos tomar os valores característicos $L_0 = 10$ Mm, $g_0 = 274$ m/s² e $\rho_0 = 150$ k/m³.

3.8 Recursos computacionais

Apesar de bidimensionais, simulações de convecção estratificada de alta resolução consomem uma grande quantidade de recursos computacionais, o que significa que mesmo executando simulações em paralelo o tempo gasto para atingir relaxação térmica é alto.

As simulações que utilizam condução de calor com 128 células em cada direção e as simulações que utilizam forçamento e dissipação com até 256 células em cada direção foram executadas de forma serial (usando somente um núcleo). A simulação que utiliza condução de calor com 512 células em cada direção foi executada em 64 núcleos simultaneamente. As simulações com forçamento com 512, 768, 1024 e 2048 células em cada direção foram executadas respectivamente em 8, 32, 64 e 64 núcleos simultaneamente.

4 Resultados e discussões

Neste capítulo descreveremos os resultados das simulações. Dividiremos este capítulo em duas seções. Na Seção 4.1 faremos a comparação entre os resultados de simulações utilizando os dois mecanismos de troca de calor. Na Seção 4.2 faremos a análise da convergência numérica de simulações utilizando o forçamento e dissipação.

4.1 Comparação entre mecanismos de troca de calor

Mostramos na Tabela 1 o título de cada simulação, o número de células usadas em cada direção, o coeficiente de condução de calor para simulações que usam condução, o tempo característico de forçamento para simulações que usam forçamento, o passo temporal e a média quadrática das velocidades na zona convectiva. Chamamos as simulações usando condução de HC seguido pelo número de células em cada direção e por uma letra, no caso de simulações com mesma resolução e valores de κ diferentes. Chamamos as simulações usando forçamento de FD seguindo pelo número de células em cada direção.

Título	N	κ	$1/\alpha$	Δt	$\langle u_{rms} \rangle$
HC128	128	1.875×10^{-8}	-	2.0×10^{-3}	7.62468×10^{-3}
HC128b	128	6.250×10^{-9}	-	2.0×10^{-3}	5.23004×10^{-3}
HC512	512	2.500×10^{-9}	-	1.5×10^{-4}	7.11088×10^{-3}
FD128	128	-	5×10^2	3.0×10^{-2}	1.14733×10^{-2}
FD512	512	-	5×10^2	2.5×10^{-3}	1.24367×10^{-2}

Tabela 1 – Nome, resolução, N ; coeficiente de condução de calor na zona convectiva para simulações HC, κ ; tempo característico de forçamento para simulações FD, $1/\alpha$; passo temporal, Δt ; usados nas simulações simulações e a velocidade média quadrática, $\langle u_{rms} \rangle$ na região convectiva ($0.15 \leq z \leq 1.05$).

Nesta seção faremos a comparação entre resultados de simulações de convecção obtidas usando condução de calor e forçamento e dissipação como mecanismos de troca de calor. Primeiramente descrevemos a diferença entre os tempos de relaxação entre os dois tipos de simulações. Em seguida apresentamos análises sobre as velocidades dos movimentos convectivos, as perturbações de temperatura potencial, os fluxos de calor e os espectros de potência de velocidades e perturbações de temperatura potencial. Estas análises são importantes porque nos permitem fazer comparações entre os dois tipos de simulações, testando se o FD, uma modelagem alternativa, produz resultados semelhantes à já estabelecida e comumente usada condução térmica, HC.

4.1.1 Tempo de relaxação

Todos os dados obtidos das simulações foram extraídos depois que um estado estatisticamente estacionário é atingido, ou seja, depois que as médias de todas as grandezas físicas passam a oscilar ao redor de determinados valores com amplitude limitada. A Figura 8 compara as diferenças nos tempos de relaxação das perturbações de temperatura potencial, Θ' , entre as simulações HC128, HC128b e FD128. Na figura, $\overline{\Theta'_{rms}}$ denota a média *rms* em todo o domínio computacional das perturbações de temperatura potencial em um determinado instante de tempo. A notação $\overline{\Theta'_{rms}} \times 10^3$ significa que os valores mostrados no eixo vertical estão multiplicados por 10^3 , ou seja, $\overline{\Theta'_{rms}}$ é da ordem de 10^{-3} . Esta notação é usada em todo o texto. Para analisar a relaxação consideramos a temperatura potencial porque esta é a grandeza física que mais demora a atingir um estado estacionário. Apesar de termos encontrados regimes diferentes, pode-se notar claramente que o tempo de convergência para as simulações FD é várias vezes menor do que para as simulações HC.

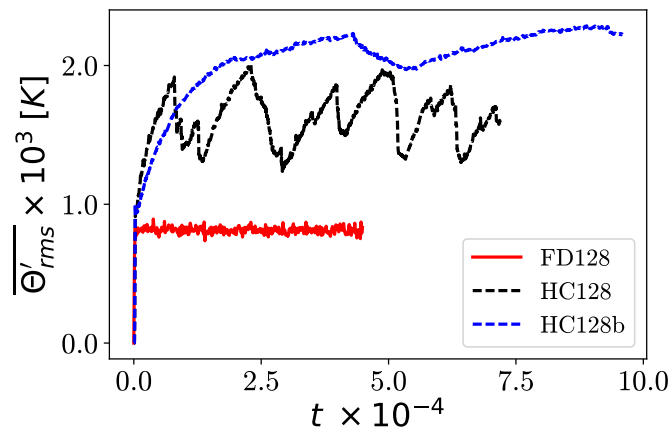


Figura 8 – Evolução do valor médio quadrático de perturbações de temperatura potencial como função do tempo para simulações usando condução e forçamento.

Além desta diferença no tempo de convergência, existe ainda um limite no passo temporal imposto pela condição CFL advindo da diferenciação de segunda ordem nas simulações HC. Também existe uma limitação no passo temporal para as simulações FD devido às velocidades, mas a limitação no passo temporal devido à condução térmica mostrou-se muito mais severa. O maior tempo de convergência combinado com o menor passo temporal das simulações HC resultou em um tempo muito maior de execução dessas simulações do que as simulações FD. A simulação HC128b mostrada na Figura 8 rodou por aproximadamente 30 vezes mais iterações temporais do que a simulação FD128.

Como as simulações que usam forçamento requerem uma quantidade de tempo de execução significativamente menor do que as simulações que usam condução, fomos capazes de alcançar resoluções mais altas para as simulações FD. Isto permitiu usar este mecanismo de troca de calor para realizar uma análise da convergência numérica em

simulações de convecção. Esta análise é apresentada na Seção 4.2, e não foram encontradas na literatura referências a alguma análise semelhante.

O valor médio das perturbações de temperatura potencial no estado estacionário é diferente entre os dois tipos de mecanismos de transferência de calor. No entanto, esta grandeza é da ordem de 10^{-3} , o que é muito pequeno comparado a valores típicos da temperatura potencial do estado ambiente, são da ordem de 10^1 . Entretanto, para melhorar a concordância entre os dois mecanismos de troca poderíamos testar valores diferentes do tempo característico de forçamento, $1/\alpha$.

4.1.2 Movimentos convectivos

Na Figura 9 mostramos mapas de contorno da velocidade vertical para simulações características dos modelos HC (painéis superiores) e FD (painéis inferiores). Em todos os mapas de contorno da Figura 9 notamos grandes células convectivas que se estendem por quase toda a extensão vertical da zona instável. A quantidade de células parece não depender nem do mecanismo de transferência de calor empregado nem da resolução, e sim da geometria do problema. Entretanto, quando aumentamos a resolução notamos um aumento no número de pequenas estruturas convectivas, e o fluxo parece se tornar mais turbulento. Como esperado, não existem movimentos convectivos nas regiões estáveis em cima e em baixo da camada convectiva.

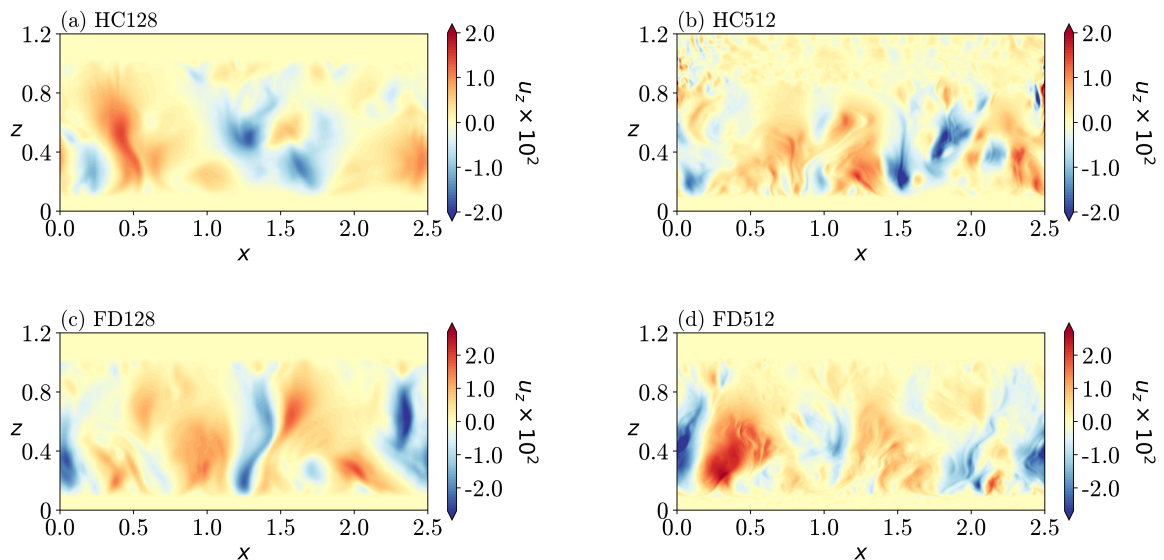


Figura 9 – Mapas de contorno da velocidade vertical para simulações utilizando HC (em cima) e FD (embaixo) com resoluções numéricas de 128 células (esquerda) e 512 (direita). O nome de cada simulação é indicado no título de cada imagem.

Na Figura 10 mostramos mapas de contorno das perturbações de temperatura potencial, Θ' , de simulações usando ambos mecanismos de troca de calor superimpostos com linhas de corrente que descrevem a direção do campo de velocidades, \mathbf{u} . Esta é uma

grandeza relevante para as simulações, pois a convecção é causada por forças de empuxo que atuam em bolhas que adquirem valores de Θ' diferentes dos valores na sua vizinhança. Percebemos que os valores de Θ' são positivos nas partes superiores das zonas convectivas e negativos nas partes inferiores. Isto acontece porque bolhas convectivas quentes se deslocam para cima, se dissolvendo preferencialmente na parte superior da zona convectiva elevando os valores de Θ' nesta região. O inverso acontece com bolhas convectivas de material mais frio (Θ' negativo), que resultam em valores negativos de Θ' na metade inferior da zona convectiva. Este fenômeno é condizente com a tendência da convecção de manter um perfil de temperatura total, Θ , próximo ao isentrópico, já que o estado ambiente Θ_a tem inclinação negativa em relação à coordenada z , e $\Theta = \Theta_a + \Theta'$.

A Figura 10 mostra que, para uma determinada resolução numérica, simulações que utilizam forçamento resolvem melhor as estruturas do movimento turbulento do que simulações que utilizam condução. Na simulação FD128, podemos notar ondas de gravidade nas zonas estáveis, enquanto estas ondas não estão presentes na simulação HC128. Além das ondas de gravidade, a simulação HC128 mostra uma distribuição praticamente homogênea de Θ' , enquanto a simulação FD128 apresenta detalhes como redemoinhos e filamentos de fluido com variações rápidas no valor de Θ' .

Na simulação HC512 também é possível ver filamentos de fluido com temperatura potencial diferente dos arredores, porém os filamentos e redemoinhos são mais largos e menos evidentes que na simulação FD512.

Como há uma interface entre regiões de fluido se movendo com velocidades diferentes, observamos a instabilidade de Kelvin-Helmholtz (Choudhuri 1998), que forma redemoinhos. Para que a instabilidade de Kelvin-Helmholtz se desenvolva, é necessário que exista cisalhamento na interface do filamento ou bolha com o resto do fluido no seu entorno. Como o cisalhamento é um efeito resultante da viscosidade, estes redemoinhos servem como um indicação de que existe viscosidade numérica no sistema.

A Figura 11(a) mostra as médias horizontais e temporais da velocidade quadrática média, $u_{rms} = \sqrt{u_x^2 + u_z^2}$, em função da coordenada z . Podemos notar que os perfis verticais de velocidade u_{rms} das simulações HC128 e FD128 são qualitativamente semelhantes. A maior diferença se observa na amplitude, sendo que as simulações FD alcançam, no geral, uma maior amplitude. Entretanto, quando comparamos os perfis de u_{rms} das simulações com resolução numérica de 128 células em cada direção com os perfis desta mesma grandeza das simulações usando 512 células, percebemos que o máximo de u_{rms} se desloca da metade superior para a metade inferior da zona convectiva quando a resolução aumenta.

A Figura 11(b) mostra as médias horizontais e temporais da velocidade vertical quadrática média, $u_{z\ rms}$, em função da coordenada z . Notamos que a amplitude de $u_{z\ rms}$ para as simulações usando forçamento é maior do que a amplitude de $u_{z\ rms}$ para as simulações usando condução. Apesar desta diferença de amplitude, os perfis de $u_{z\ rms}$ para

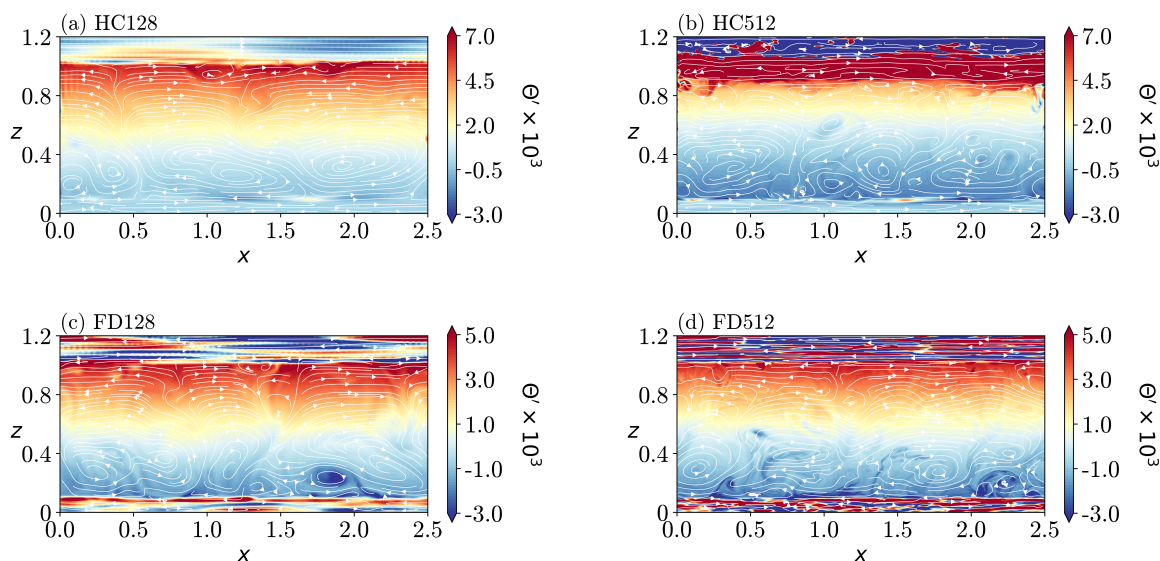


Figura 10 – Similar a Figura 9 para perturbações de temperatura potencial Θ' . Níveis em vermelho indicam valores positivos de Θ' e níveis em azul indicam valores negativos de Θ' . As linhas de corrente indicam a direção do fluxo.

os diferentes mecanismos de troca de calor são qualitativamente semelhantes, tendo o máximo em $x \approx 0.4$ para todas as simulações. A posição deste máximo parece não variar significativamente com a resolução.

Na Figura 11(c) mostramos as médias horizontais e temporais da velocidade horizontal quadrática média, $u_x rms$, em função da coordenada z . Além da diferença de amplitude entre diferentes mecanismos de calor já observada nos perfis de u_{rms} e $u_z rms$, percebemos que quando a resolução é aumentada, $u_x rms$ adquire um perfil mais plano ao longo da zona convectiva. Este e outros efeitos no fluxo turbulento da resolução são analisados na Subseção 4.2.1.

Finalmente, na Figura 11(d) é mostrado o perfil vertical do fluxo de calor convectivo, $\mathcal{F}_{conv} = \langle \rho_a u_z c_p T' \rangle$, onde $\langle \cdot \rangle$ corresponde à média horizontal e temporal, c_p é o calor específico a pressão constante e T' representa as perturbações de temperatura, relacionadas às perturbações de temperatura potencial Θ' pela equação de estado na aproximação anelástica, $T' = T_a \Theta' / \Theta_a$.

O máximo de \mathcal{F}_{conv} para as simulações FD está localizado aproximadamente em $x \approx 0.4$, coincidindo com o máximo de $u_z rms$ mostrado na Figura 11(b). Isto é coerente, dado que a velocidade vertical é responsável pelo transporte de bolhas convectivas. Entretanto, o pico de \mathcal{F}_{conv} para as simulações HC está na parte inferior da zona convectiva. Talvez esta diferença seja resultado do valor constante de κ na zona convectiva. Algumas simulações utilizam um perfil de κ proporcional a $\rho_a^{-1/2}$, e.g. Brun et al. (2004). Isto faz com que o calor transmitido por condução seja menor nas partes mais inferiores do domínio, aumentando o fluxo convectivo nesta região.

Outro aspecto a ser analisado é o fato de que \mathcal{F}_{conv} é negativo na interface entre as zonas estável inferior e instável. Este resultado também foi encontrado por Brun et al. (2017) para simulações tridimensionais de envelopes convectivos estelares. O autor credita este fluxo negativo à inversão da correlação entre temperatura e velocidade quando plumas convectivas descendentes passam da região superadiabática para a subadiabática.

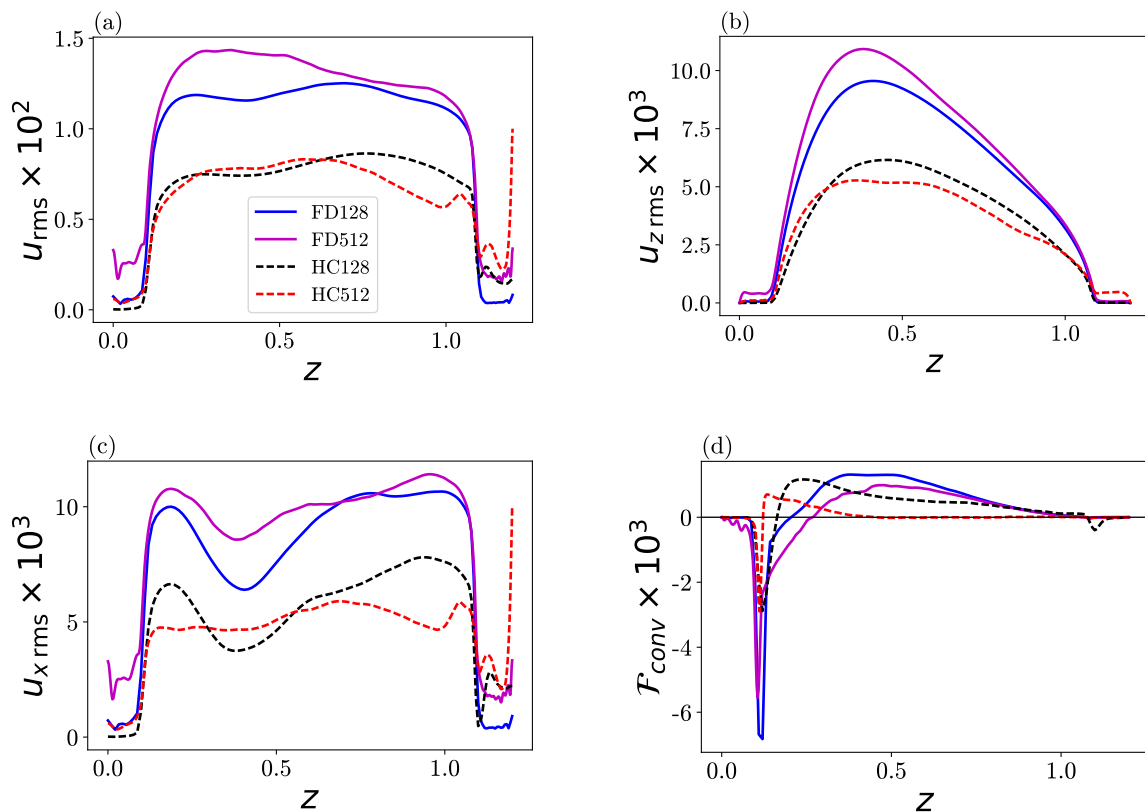


Figura 11 – Perfis verticais dos valores médios quadráticos das velocidades (a) total, (b) vertical e (c) horizontal e (d) fluxo de calor convectivo. As linhas tracejadas e contínuas representam resultados de simulações HC e FD, respectivamente. Cores diferentes representam simulações com diferentes resoluções, tal como indicado na legenda do painel (a).

4.1.3 Espectros de potência

Nesta seção estudamos as propriedades espectrais dos movimentos do fluido na zona convectiva usando a transformada discreta de Fourier. Definimos a energia cinética em função do número de onda, k , como (Chen & Glatzmaier 2005):

$$\tilde{E}(k) = \frac{1}{2N_z} \sum_z \tilde{u}(k, z)^* \tilde{u}(k, z), \quad (4.1)$$

onde k é o número de onda, N_z é o número de células na direção z , $\tilde{\cdot}$, representa as grandezas no espaço de Fourier e $*$ significa complexo conjugado.

Computamos o espectro na direção x para cada valor de z e depois fazemos a média na direção vertical. Como as ondas de gravidade presentes nas zonas estáveis poderiam contaminar o espectro, para fazer este cálculo consideramos somente a região $0.15 < z < 1.05$.

O espectro de potência para as perturbações de temperatura potencial é definido de forma completamente análoga ao espectro de potência de velocidades simplesmente substituindo $\tilde{u}(k, z)$ por $\tilde{\Theta}'(k, z)$ na Equação (4.1), resultando em

$$\tilde{E}^{\Theta'}(k) = \frac{1}{2N_z} \sum_z \tilde{\Theta}'(k, z) * \tilde{\Theta}'(k, z). \quad (4.2)$$

Na Figura 12(a) mostramos os espectros de potência de velocidade compensados pelos escalamentos dados pelas Equações (2.64) e (2.65), de Kolmogorov (K41) e Bolgiano-Obukhov (BO), para simulações HC (linhas tracejadas) e FD (linhas contínuas) com 512 células.

Para compensar os espectros multiplicamos a energia pelo inverso da função de escalamento. O objetivo desta compensação é facilitar a visualização dos espectros na escala inercial. Caso a escala inercial tenha a inclinação predita pelo escalamento, então esta parte do espectro compensado ficará horizontal.

A Figura 12(a) mostra que os resultados de ambas as simulações apresentam escalas de injeção, inerciais e dissipativas. A escala inercial da simulação HC parece concordar com o escalamento de Bolgiano-Obukhov ao invés do escalamento de Kolmogorov. Isto faz sentido, já que o empuxo atua no sistema. A simulação FD também apresenta escala inercial, no entanto, o espectro de potência de velocidade decai mais rapidamente com o número de onda do que a simulação HC. Quanto às escalas dissipativas (maiores valores de k), o espectro da simulação HC512 decai mais lentamente do que o mesmo da simulação FD512 e mostra acumulação de energia nas pequenas escalas.

Na Figura 12(b) mostramos os espectros de potência de perturbações de temperatura potencial compensados pelo escalamento de Bolgiano-Obukhov ($\propto k^{7/5}$) para as simulações HC512 e FD512. Este resultado sugere que o espectro de potência de Θ' no intervalo inercial da simulação HC512 decai como predito pelo escalamento de Bolgiano-Obukhov, enquanto esta grandeza física decai mais rapidamente entre as diferentes escalas na simulação FD512. Observamos também que o espectro para a simulação FD512 decai muito mais rapidamente na zona dissipativa do que o espectro da simulação HC512. O espectro da simulação HC512 é decrescente para $k > 10^2$ e parece crescer nesta região devido à compensação, já que esta grandeza decai mais lentamente que $k^{7/5}$ para $k > 10^2$.

É esperado que as escalas inerciais das simulações FD diverjam dos escalamentos de BO e K41 porque o forçamento atua retirando energia em todas as escalas, enquanto a condução de calor atua predominantemente nas menores escalas. Isto faz com que os

espectros de potência das simulações FD tenham um decaimento mais inclinado na escala inercial que as simulações HC.

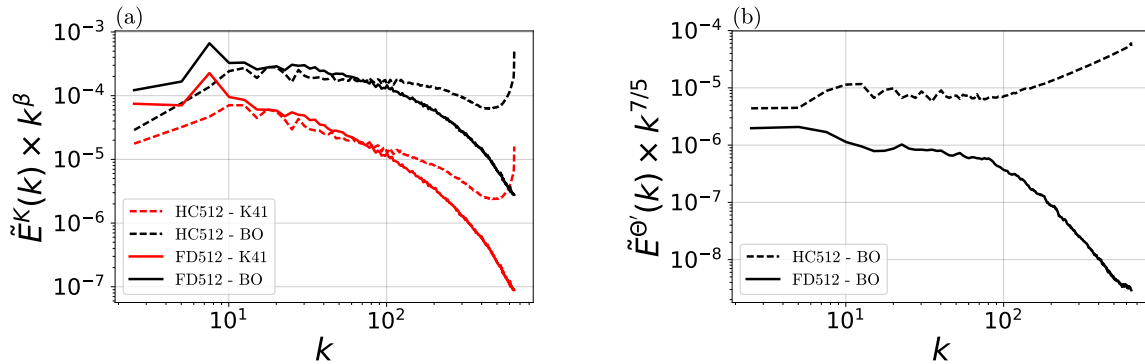


Figura 12 – (a) Espectro de potência de velocidades para as simulações HC512 (linhas tracejadas) e FD512 (linhas contínuas), compensados usando o escalamento KO, $\beta = 5/3$ (linhas vermelhas), e o escalamento BO, $\beta = 11/5$ (linhas pretas). (b) Espectro de potência de perturbações de temperatura potencial para as simulações HC512 (linha tracejada) e FD512 (linha contínua), compensados com o escalamento BO.

4.2 Análise da convergência numérica de simulações usando forçamento e dissipação

Nesta seção analisaremos os efeitos da resolução numérica nas simulações usando forçamento e dissipação como mecanismo de troca de calor. Nosso objetivo é determinar se há convergência numérica de quantidades físicas à medida que a resolução numérica das simulações é aumentada. Espera-se que quando o número de pontos de grade é aumentado além de um certo valor, valores médios de grandezas físicas continuem exibindo aproximadamente o mesmo valor ou perfil. Inicialmente, estudaremos as amplitudes e perfis de quantidades físicas resultantes das simulações FD com as mesmas configurações descritas no Capítulo 3, mas com resoluções de 32, 64, 128, 256, 512, 768, 1024 e 2048 células em cada direção. Os parâmetros iniciais tais como, resolução e passo temporal, assim como grandezas médias resultando das simulações apresentadas nesta seção estão resumidos na Tabela 2.

4.2.1 Velocidades e perturbações de temperatura potencial

Na Figura 13 apresentamos mapas de contorno da velocidade horizontal das simulações apresentadas na Tabela 2. Uma análise qualitativa indica que quanto maior a resolução, maior o número de turbilhões convectivos. Para simulações em alta resolução,

Simulação	N	$\Delta t \times 10^3$	$\langle u_{rms} \rangle \times 10^2$	$\nu_{eff} \times 10^5$	$Re_{eff} \times 10^{-3}$	$Ra_{eff} \times 10^{-5}$	ℓ	$\nu_t \times 10^3$
FD32	32	50	1.29	5.15	0.25	0.51	0.35	1.54
FD64	64	50	1.10	2.70	0.40	0.97	0.29	1.10
FD128	128	30	1.14	1.29	0.88	2.04	0.26	1.01
FD256	256	10	1.16	0.76	1.52	3.45	0.23	0.91
FD512	512	2.5	1.24	0.41	2.98	6.35	0.22	0.95
FD768	768	2.5	1.20	0.37	3.23	7.09	0.21	0.87
FD1024	1024	0.1	1.30	0.28	4.50	9.15	0.22	1.01
FD2048	2048	0.5	1.20	0.15	7.94	17.49	0.20	0.81

Tabela 2 – Parâmetros e resultados das simulações FD. As colunas apresentam a resolução, N; passo temporal, Δt ; velocidade quadrática média, $\langle u_{rms} \rangle$, onde os colchetes indicam média espacial e temporal; viscosidade efetiva, ν_{eff} ; número de Reynolds efetivo, Re_{eff} ; número de Rayleigh efetivo, Ra_{eff} ; comprimento de correlação, ℓ ; e viscosidade turbulenta, ν_t . Todos valores foram calculados na zona convectiva ($0.15 < z < 1.05$).

por exemplo FD2048, é possível perceber que o fluido se move na direção horizontal nas zonas estáveis.

Na Figura 14 mostramos mapas de contorno das perturbações de temperatura potencial, Θ' , superpostas com linhas de corrente que mostram a direção do fluxo. Quanto maior a resolução, mais detalhes do campo de temperatura são resolvidos, como por exemplo filamentos e pequenas estruturas com Θ' distinto dos arredores. O nível de detalhamento parece aumentar constantemente com a resolução. A partir de $N \gtrsim 128$ observamos a formação de ondas de gravidade nas zonas estáveis. Nestes diagramas podemos ver mais claramente o fluxo na direção horizontal, que surge espontaneamente nestas camadas.

Similar à Figura 11, a Figura 15(a) mostra o perfil vertical das médias horizontais e temporais dos valores quadráticos médios das velocidades u_{rms} . Notamos que a simulação de resolução mais baixa, FD32, tem um mínimo em aproximadamente $z \approx 0.4$ e um máximo na parte superior da zona convectiva. Devido à baixa resolução, u_{rms} para essa simulação apresenta uma variação brusca logo em cima deste pico. À medida que a resolução aumenta, a inclinação dos perfis de u_{rms} deixa de ser positiva e se torna negativa em relação a z . Os perfis de u_{rms} parecem convergir para valores de resolução $N \geq 512$.

A Figura 15(b) exhibe $u_{z rms}$ em função de z . Para todas as simulações, o formato de $u_{z rms}$ se mantém aproximadamente inalterado, com um máximo em $z \approx 0.4$. Entretanto, a amplitude de $u_{z rms}$ aumenta quando aumentamos a resolução.

Na Figura 15(c) são exibidos os perfis verticais de $u_{x rms}$. As simulações de baixa resolução, até aproximadamente $N \lesssim 128$, têm um mínimo na parte inferior do domínio em $z \approx 0.4$, concordando com os resultados de simulações de convecção turbulenta existentes na literatura (e.g., veja a Figura 2 de Hotta et al. (2012)). Entretanto, quando aumentamos a resolução, $u_{x rms}$ varia menos ao longo de z . Este aspecto das simulações

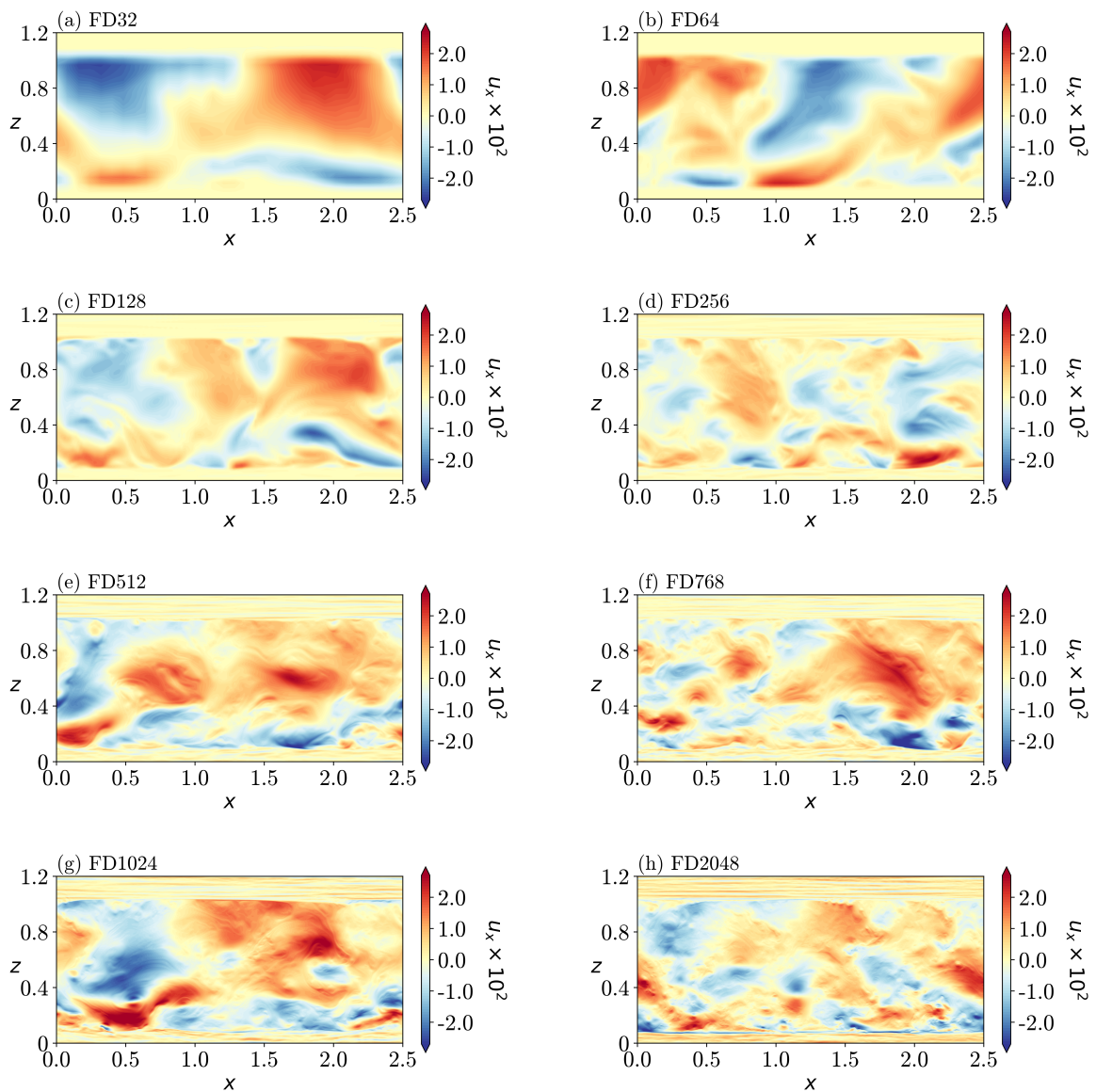


Figura 13 – Mapas de contorno das velocidades horizontais para simulações FD. Vermelho indica fluxo para a direita e azul indica fluxo para a esquerda.

pode ser entendido analisando-se a Figura 13. Na simulação FD32, Figura 13(a), dois grandes turbilhões convectivos dominam toda a zona convectiva, um turbilhão localizado na esquerda e o outro na direita do domínio. O tamanho da parte superior destes turbilhões é maior que o da parte inferior para garantir a conservação de massa, já que a densidade é maior na parte inferior. O mínimo da curva de u_x_{rms} aparece no nível vertical onde a velocidade horizontal muda de direção. À medida que a resolução aumenta, mais turbilhões se formam, e o tamanho dos turbilhões diminui gradualmente com a resolução. Como, para resoluções mais altas, existem vários turbilhões menores que invertem a direção de u_x_{rms} em diferentes alturas, então o mínimo desaparece e a curva de u_x_{rms} se torna mais plana.

Concluimos então que os padrões de movimento variam quando a resolução numérica é aumentada. Porém, a partir de aproximadamente 512 pontos de grade a distribuição das

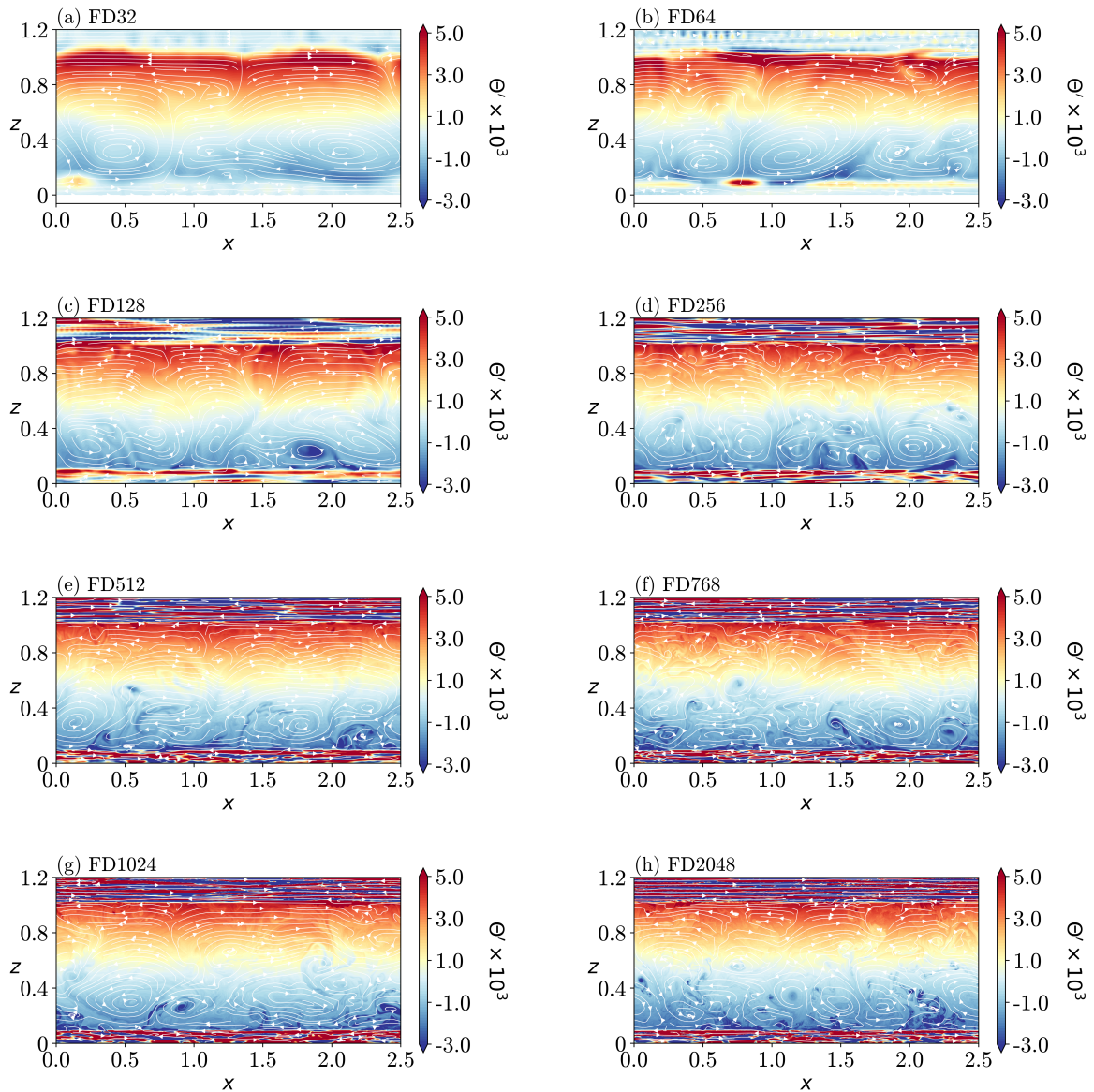


Figura 14 – Similar à Figura 10 para todo o conjunto de simulações FD com diferentes resoluções numéricas.

velocidades ao longo do eixo vertical se aproxima de um mesmo perfil. Para entender melhor como a resolução influencia nas velocidades e na temperatura potencial, analisaremos na próxima subseção os espectros de potência destas grandezas.

4.2.2 Espectros de potência

Quanto maior a resolução, mais uma simulação é capaz de resolver as pequenas escalas do sistema. Ao estudar os espectros de potência, desejamos saber se a capacidade de resolver escalas cada vez menores influencia a distribuição de energia nas escalas integral e inercial, que a princípio também são resolvidas pelas simulações de baixa resolução.

Na Figura 16(a) apresentamos o espectro de potência de velocidades. Excluindo-se

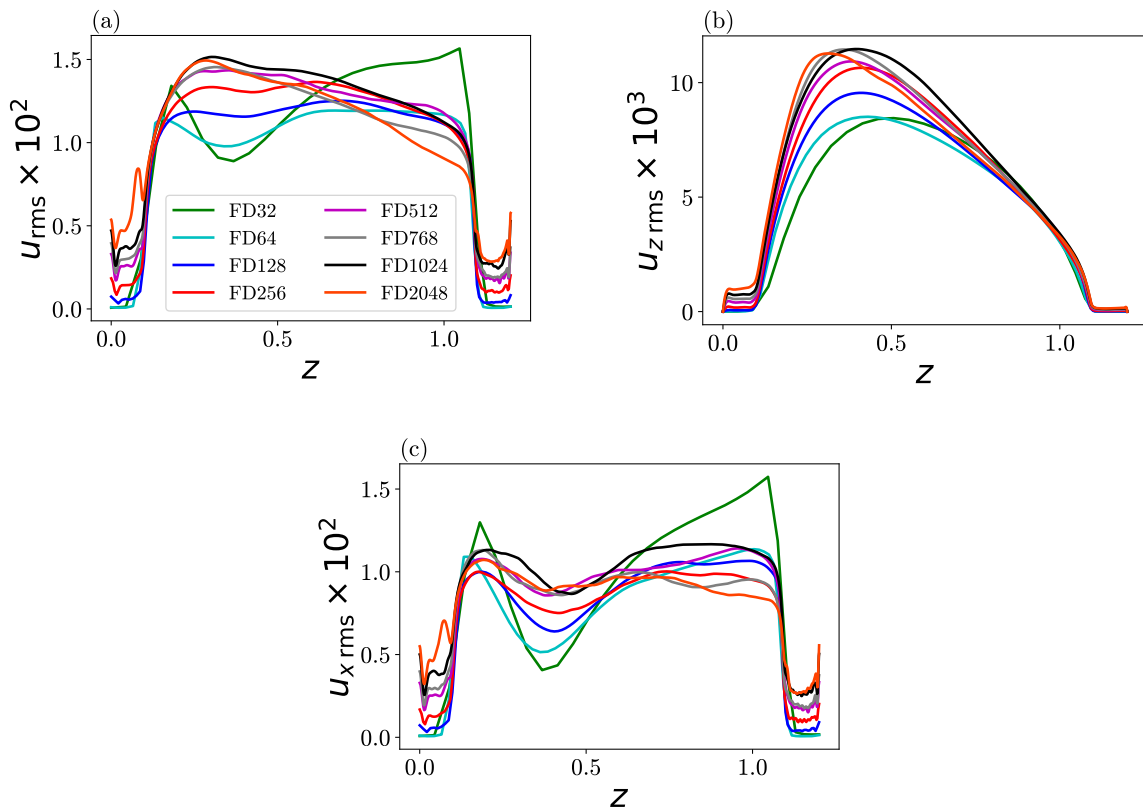


Figura 15 – Perfis verticais dos valores quadráticos médios das velocidades (a) totais, (b) verticais e (c) horizontais para simulações FD usando diferentes resoluções numéricas conforme a legenda apresentada no painel (a).

a simulação FD32, todas as simulações apresentam escalas de injeção semelhantes em $k \sim 10^1$ e escalas inerciais com inclinações semelhantes. O escalamento da energia com o número de onda é, como visto anteriormente, maior que o previsto pelos escalamentos de Kolmogorov ($E(k) \propto k^{-5/3}$) e Bolgiano-Obukhov ($E(k) \propto k^{-11/5}$). Este escalamento, contudo, se estende pela escala inercial e passa a decair mais rapidamente na escala dissipativa. O espectro de potência de perturbações de temperatura potencial segue um padrão semelhante ao do espectro de potência de velocidades, exceto pelo fato de que são necessárias resoluções numéricas $N \geq 512$ para que a convergência no escalamento de $E^{\Theta'}(k)$ seja observada. Em ambos os casos notamos que quando a resolução aumenta a escala inercial se estende por um intervalo maior de k . Este efeito se deve à diminuição da viscosidade efetiva. Na próxima seção usaremos esta diferença no fluxo de energia entre escalas para estimar a viscosidade efetiva presente nas simulações. Isto nos permitirá também estimar os números efetivos de Reynolds e de Rayleigh.

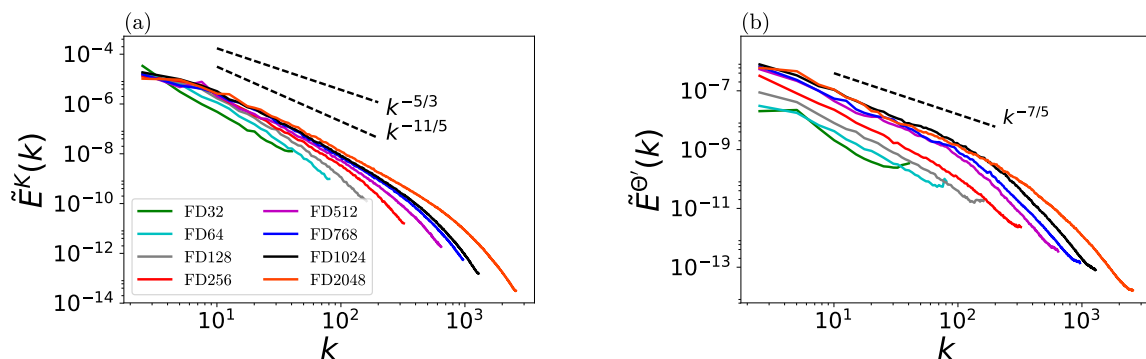


Figura 16 – Espectros de potência de (a) velocidades e (b) perturbações de temperatura potencial usando diferentes resoluções numéricas conforme a legenda apresentada no painel (a). As linhas tracejadas no painel (a) mostram os escalamentos de Kolmogorov ($E^K(k) \propto k^{-5/3}$) e de Bolgiano-Obukhov ($E^K(k) \propto k^{-11/5}$) e no painel (b) o escalamento de Bolgiano-Obukhov ($E^{\Theta}(k) \propto k^{-7/5}$).

4.2.3 Viscosidade efetiva

Como discutido anteriormente, para caracterizar o escoamento de um fluido e quantificar o grau de turbulência usamos o número de Reynolds, definido como

$$\text{Re} = \frac{uL}{\nu}, \quad (4.3)$$

Entretanto, como nosso modelo numérico não utiliza viscosidade física, para calcular esta grandeza precisamos de uma maneira de estimar a viscosidade efetiva ν_{eff} atuando no sistema. Nesta seção estimamos ν_{eff} para todo o conjunto de simulações FD. A viscosidade ν_{eff} se origina do erro de truncamento induzido pela discretização das equações de Navier-Stokes segundo o esquema MPDATA.

Nos últimos anos, a ideia de que a viscosidade efetiva introduzida pelo método numérico pode ser usada para modelar as escalas não resolvidas tem ganhado força (Schraner et al. 2015). Esta é a abordagem que adotamos em todo este trabalho, dado que não usamos nem viscosidade explícita nem um modelo de dissipação SGS (*sub-grid scale*). Esta abordagem é conhecida como ILES (*implicit large-eddy simulation*).

Existem várias técnicas reportadas na literatura para estimar a viscosidade efetiva uma vez que as equações de Navier-Stokes já tinham sido integradas numericamente. A maioria delas é feita com grandezas físicas representadas no espaço de Fourier, e.g., Zhou et al. (2014). Domaradzki et al. (2003) e Domaradzki & Radhakrishnan (2005) estimam a viscosidade efetiva para simulações feitas com códigos baseados em MPDATA.

Para estimar ν_{eff} , usamos o método descrito em Strugarek et al. (2016), onde a viscosidade efetiva é calculada com grandezas representadas no espaço espectral a partir do balanço energético entre os termos da equação de Navier-Stokes.

Começamos considerando a equação de momento (Equação 3.5). Escrevemos a derivada Lagrangeana de forma explícita, transformamos as grandezas físicas relevantes para o espaço de Fourier e tomamos o produto escalar dos dois lados da equação com $\rho \mathbf{u}_k^*$, onde $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t, k, z)$, o subíndice k significa que a grandeza física esta representada no espaço de Fourier e $*$ denota complexo conjugado. Tomamos a média da equação resultante com respeito a t e z . Obtemos então a seguinte relação

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} = \mathcal{A}_k + \mathcal{P}_k + \mathcal{G}_k, \quad (4.4)$$

onde o termo da esquerda corresponde à variação temporal da densidade de energia cinética e é dado por

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2} \langle \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k^* \rangle, \quad (4.5)$$

onde $\langle \cdot \rangle$ denota médias em relação a t e z . Os termos do lado direito da Equação (4.4) correspondem, respectivamente, às taxas de variação de energia por advecção, pressão e potencial gravitacional, e são dados por

$$\mathcal{A}_k = -\langle \rho [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_k \cdot \mathbf{u}_k^* \rangle, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{P}_k = -\langle \rho (\nabla \pi')_k \cdot \mathbf{u}_k^* \rangle, \quad (4.7)$$

e

$$\mathcal{G}_k = -\left\langle \rho \mathbf{g} \left(\frac{\Theta'}{\Theta_0} \right)_k \cdot \mathbf{u}_k^* \right\rangle. \quad (4.8)$$

Supomos que a atuação da viscosidade efetiva no sistema pode ser estimada a partir do tensor de *stress* (último termo do lado direito da Equação (2.22) usando $\mu = \rho_a \nu$),

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\rho_a \nu \left(e - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}_i. \quad (4.9)$$

onde

$$e = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.10)$$

De acordo com a convenção da notação indicial, $x_1 = x$ e $x_2 = z$ e $\hat{\mathbf{e}}_i$ é o vetor unitário na direção x_i .

Definimos a taxa de dissipação de energia cinética devido à viscosidade efetiva tomando o produto interno da Equação (4.9) com \mathbf{u}_k^* , obtendo

$$\mathcal{D}_k = \left\langle \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\rho_a \nu \left(e - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}_i \right\}_k \cdot \mathbf{u}_k^* \right\rangle. \quad (4.11)$$

Como a viscosidade efetiva está atuando no sistema com $\nu = \nu_{eff}$, reescrevemos a Equação (4.4) de forma a considerá-la,

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial t} = \mathcal{A}_k + \mathcal{P}_k + \mathcal{G}_k + \mathcal{D}_k(\nu = \nu_{eff}). \quad (4.12)$$

Caso as médias da Equação (4.12) sejam tomadas sobre um longo período de tempo em um sistema em regime estatisticamente estacionário, então a variação da densidade de energia cinética (dada pelo lado esquerdo desta equação) deve tender a zero. Neste caso, temos

$$\mathcal{A}_k + \mathcal{P}_k + \mathcal{G}_k = -\mathcal{D}_k(\nu = \nu_{eff}). \quad (4.13)$$

Para obter a viscosidade efetiva, dividimos a Equação (4.13) pelo negativo da Equação (4.11) fazendo $\nu = 1$ e supondo ν_{eff} constante

$$\frac{\mathcal{A}_k + \mathcal{P}_k + \mathcal{G}_k}{-\mathcal{D}_k(\nu = 1)} = \frac{-\mathcal{D}_k(\nu = \nu_{eff})}{-\mathcal{D}_k(\nu = 1)} = \nu_{eff}. \quad (4.14)$$

Os termos do lado esquerdo da Equação (4.14) são conhecidos, logo os utilizamos para encontrar ν_{eff} . Os resultados deste cálculo para todas as simulações FD são mostrados na Figura 17 em função do número de onda. No gráfico também são mostradas barras de erro. O erro é dado por σ/\sqrt{n} , onde σ é o desvio padrão da grandeza estimada e n é o número de amostras usado para fazer a estimativa. Neste caso, cada amostra corresponde aos valores das grandezas físicas obtidas pelas simulações em um instante de tempo (n é o número de passos temporais depois que a simulação atingiu um estado estacionário).

A Figura 17 mostra que, quando aumentamos a resolução, a viscosidade efetiva diminui. De acordo com Pope (2000), a tensão induzida pela viscosidade efetiva é proporcional a h^p , onde h é o espaçamento da grade usada para discretizar o domínio e p é a ordem de precisão espacial do método numérico. Portanto este comportamento é esperado. Esta diminuição de ν_{eff} explica porque simulações com maior resolução parecem mais turbulentas, como na Figura 14, e explicam também porque o intervalo inercial nos espectros de potência, Figura 16, se estende por um intervalo maior de valores de k para grades mais finas.

Curvas de ν_{eff} em função de k também foram obtidas por Domaradzki & Radhakrishnan (2005), que usa um método diferente que o usado nesta dissertação para calcular ν_{eff} para simulações de turbulência homogênea. Na Figura 10 desta referência, os valores de ν_{eff} também atingem um mínimo para valores intermediários de k e então passam a crescer.

Para calcular o número de Reynolds precisamos de um único valor de ν_{eff} para cada simulação. Para tal, obtemos ν_{eff} pela razão do lado direito de (4.4) integrado sobre k com (4.11), também integrado sobre k . Mostramos o resultado na Figura 18, junto

com a lei de potência que melhor se ajusta aos dados. Calculamos o número de Reynolds efetivo usando $Re_{eff} = uL/\nu_{eff}$, onde $u = \langle u_{rms} \rangle$ e $L = 1$, correspondendo à extensão vertical da zona convectiva. Também computamos o número de Rayleigh efetivo deduzido na Seção 2.6. Mostramos os resultados na Tabela 2.

Zhou et al. (2014) estima Re_{eff} para simulações tridimensionais ILES de turbulência isotrópica forçada a partir de ν_{eff} . As resoluções usadas variam de 32^3 a 256^3 pontos de grade. Os valores de Re_{eff} variam de 3969 para a menor resolução até 50625 para a maior resolução. Estes valores são significativamente maiores que os valores que obtemos nesta dissertação, que variam de 2.5×10^2 para $N = 32$ até 7.9×10^3 para $N = 2048$. Esta diferença pode ser decorrente da dimensionalidade das simulações (tridimensional *versus* bidimensional).

Podemos também comparar os valores de Re_{eff} e Ra_{eff} aqui obtidos com valores de Re e Ra usando em simulações DNS (*direct numerical simulation*). Zhang et al. (2017) apresenta simulações DNS bidimensionais de convecção de Rayleigh-Bénard com resoluções variando de 129 a 2049 pontos de grade em cada direção. Para a resolução mais alta, o número de Reynolds utilizado, 9916, é maior do que Re_{eff} que encontramos para a simulação FD2048, 7.9×10^3 . Para as simulações com resolução $N < 2048$, os valores de Re_{eff} que encontramos são maiores que os usados por Zhang et al. (2017). Por outro lado, os valores de Ra usados por Zhang et al. (2017) são maiores do que os valores de Ra_{eff} que encontramos. Por exemplo, para a simulação FD2048, encontramos $Ra_{eff} = 1.7 \times 10^6$, enquanto Zhang et al. (2017) usa $Ra = 1 \times 10^{10}$.

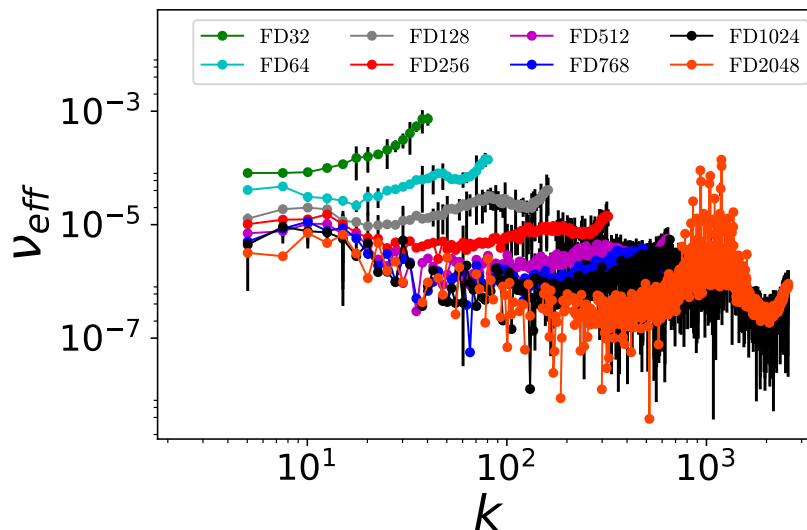


Figura 17 – Viscosidade efetiva em função do número de onda k para simulações FD. As linhas verticais pretas são barras de erros.

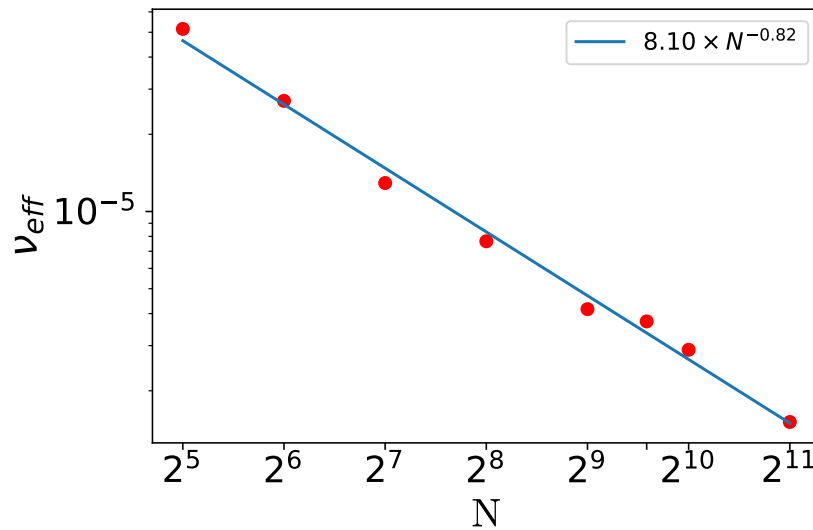


Figura 18 – Valor único de ν_{eff} para cada resolução. A linha azul mostra a lei de potência que melhor se ajusta aos dados.

4.2.4 Viscosidade turbulenta

As Figuras 15 e 16 sugerem que há algum tipo de convergência numérica nos resultados das simulações com $N \geq 512$. Esta convergência é necessária para garantir a validade dos resultados físicos em simulações de fenômenos turbulentos onde as pequenas escalas contribuem para o fluxo em grande escala, ou seja, onde existe um cascadeamento inverso de energia, como por exemplo nas oscilações quase-bienais na estratosfera terrestre. Um exemplo clássico dos efeitos coletivos da turbulência é a intensificação dos fenômenos dissipativos, que podem ser estudados utilizando as simulações deste trabalho através da estimativa da viscosidade turbulenta.

Elementos de fluido em um fluxo turbulento se movem aleatoriamente. Caso estes turbilhões tenham valores distintos de quantidades físicas, esperamos que este movimento aleatório intensifique os fenômenos de transporte de grandezas físicas, como por exemplo, transporte de momento entre elementos de fluido adjacentes se movendo com velocidades diferentes. Supomos que esta intensificação nos mecanismos de transporte dá origem à viscosidade turbulenta (Choudhuri 1998). Conseqüentemente, a turbulência faz com que a dissipação de momento seja aumentada.

Iniciamos a análise da viscosidade turbulenta calculando o comprimento de correlação da escala integral, ℓ . Esta escala corresponde ao comprimento dos movimentos que possuem maior energia e é estimada pela fórmula

$$\ell = \frac{\int \tilde{E}(k)/k dk}{\int \tilde{E}(k) dk}. \quad (4.15)$$

Calculamos a viscosidade turbulenta ν_t usando (Choudhuri 1998)

$$\nu_{turb} = \frac{1}{3} u_{rms}^2 \tau_{cor}, \quad (4.16)$$

onde τ_{cor} é o tempo de correlação, que assumimos que pode ser calculado usando-se ℓ e u_{rms} como

$$\tau_{cor} = \ell / u_{rms}. \quad (4.17)$$

Então a viscosidade turbulenta é dada por

$$\nu_{turb} = \frac{1}{3} \ell u_{rms}. \quad (4.18)$$

Na Figura 19(a), mostramos o comprimento de correlação ℓ para as simulações FD em função da resolução (eixo x inferior) e do número de Reynolds, Re_{eff} , estimado a partir da viscosidade efetiva (eixo x superior). O erro na estimativa de ℓ e ν_t é pequeno, por este motivo as barras de erro da Figura 19(a) e (b), calculadas da mesma maneira que as barras de erro da Figura 17, foram multiplicadas por um fator de 5. Podemos perceber que ℓ decresce para as simulações de baixa resolução, e parece se estabilizar a partir de $N = 256$, quando parece convergir assintoticamente a um determinado valor.

É instrutivo comparar este comportamento com a Figura 14, onde pode-se perceber que quando a resolução é aumentada, um número maior de turbilhões menores são criados devido à diminuição da viscosidade efetiva, porém, após um certo valor de N (acima de 256), qualitativamente observa-se que o tamanho dos turbilhões mais energéticos também se estabiliza, o que é consistente com um valor constante de ℓ .

Dada a relação linear entre ℓ e ν_t , na Figura 19(b) observamos aproximadamente o mesmo padrão da Figura 19(a), ν_t decai até aproximadamente $N = 2^8$ e depois parece oscilar ao redor de um limite assintótico a partir de aproximadamente $Re_{eff} = 1.5 \times 10^3$.

Podemos utilizar esta discussão para definir um critério que indique a convergência numérica de simulações. Como a viscosidade turbulenta é dominante, e como ela é definida pelo tamanho dos turbilhões, então faz sentido propor a hipótese de que há convergência quando o tamanho dos turbilhões se estabiliza. Neste caso esperamos que os resultados das simulações sejam independentes da resolução N . Para $N = 2^8$, onde supomos que ℓ e ν_t passam a oscilar aleatoriamente, o tamanho do passo espacial na direção vertical é aproximadamente 50 vezes menor que ℓ e ν_{eff} é aproximadamente 100 vezes menor que ν_t .

Na Figura 13(a), notamos que o fluxo parece apresentar uma viscosidade alta e um baixo grau de turbulência, o que nos levaria a crer que a viscosidade efetiva deve ser maior que a viscosidade turbulenta. Entretanto, os resultados que obtivemos para ν_{eff} e ν_t dizem o contrário. Isto pode ser causado por uma falha no cálculo tanto de ν_{eff} como no de ν_t . Acreditamos que o ponto mais frágil do método para encontrar ν_{eff} é a suposição

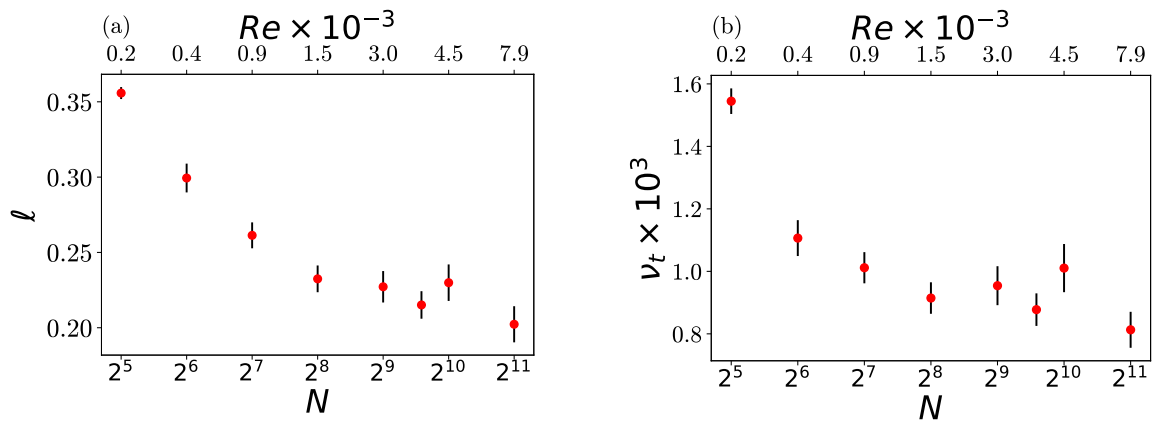


Figura 19 – (a) Comprimento de correlação, e (b) viscosidade turbulenta em função da resolução e do número de Reynolds para as simulações FD. Note que os eixos x de ambas imagens estão em escala logarítmica.

de que a dissipação efetiva se dá matematicamente como descrito pela Equação (4.11). Por sua vez, os pontos mais vulneráveis do cálculo de ν_t são a suposição de que o tempo de correlação é dado pela Equação (4.17) e também o fato da Equação (4.18) ter sido deduzida considerando-se problemas tridimensionais. Qualquer uma destas limitações pode ter super ou subestimado um dos dois tipos de viscosidade que calculamos.

5 Oscilações quase-bienais

Oscilações quase bienais (QBOs na sigla em inglês) são fluxos longitudinais médios oscilantes de grande escala que acontecem na região da estratosfera acima das zonas tropicais. Nesta região, o fluxo de grande escala se propaga ora para o leste, ora para o oeste. As QBOs são geradas na parte superior da estratosfera e se propagam lentamente para baixo. Estas oscilações têm um período de aproximadamente 28 meses. A frequência destas QBOs não é relacionada à frequência dos mecanismos que as excitam (Baldwin et al. 2001).

A Figura 20 mostra dados observacionais da média horizontal da velocidade azimutal nos anos 1990. O eixo horizontal corresponde ao tempo e o eixo vertical à pressão (inversamente proporcional à altura). A média horizontal da velocidade horizontal se alterna em períodos aproximadamente regulares. As QBOs têm um papel determinante no transporte de elementos químicos na atmosfera, e apesar de serem observadas somente nos trópicos, influenciam em aspectos do clima de todo o Planeta. Uma revisão completa de QBOs pode ser encontrada em Baldwin et al. (2001).

O primeiro modelo matemático que explica as QBOs é creditado a Lindzen & Holton (1968), e depois aprimorado por Holton & Lindzen (1972). Neste último, um modelo unidimensional onde os fluxos verticais de momento para leste e oeste são parametrizados usando aproximação WKB. O fluxo de momento para leste é modelado como uma onda mista de gravidade e de Rossby, já o fluxo para o oeste é modelado uma onda Kelvin. Também existem modelos matemáticos bidimensionais de QBOs, como por exemplo o de Dunkerton (1985) e Dunkerton (1997). Nestes modelos, também são usadas parametrizações

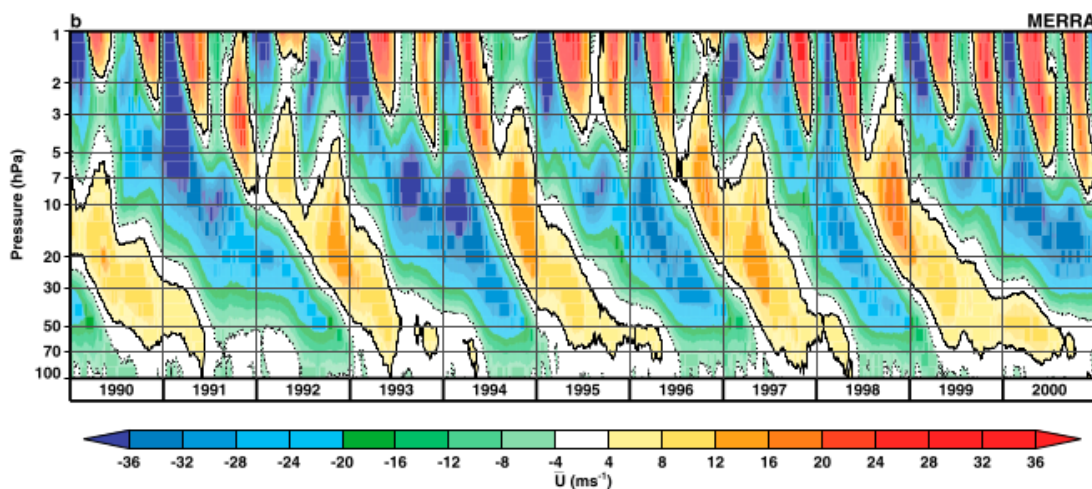


Figura 20 – Médias diárias e longitudinais da velocidade azimutal entre as latitudes $10^{\circ}S$ e $10^{\circ}N$ para os anos de 1990 a 2000. Figura adaptada de Coy et al. (2016).

de transporte de ondas equatoriais e gravitacionais.

Na literatura a modelagem das QBOs é feita através da parametrização das ondas de gravidade, ao invés da modelagem do processo que dá origem a estas ondas. Um dos processos que dá origem a ondas de gravidade é a convecção, como pode ser visto na Figura 14. Scaife et al. (2000) usa parametrizações de ondas de gravidade para obter QBOs realistas. Giorgetta et al. (2002), Giorgetta et al. (2006) e Kawatani et al. (2010) usam GCMs (*general circulation model*) com parametrizações de convecção e de fluxo de momento advindo de ondas de gravidade ou outros tipos de ondas, como Kelvin e Rossby, para obter QBOs.

Dado o bom desempenho do código EULAG quando consideramos o mecanismo de FD para produzir ondas de gravidade em zonas estáveis, mudamos ligeiramente nossa configuração para produzir oscilações da velocidade horizontal na zona estável como resultado da interação da região estável com as ondas de gravidade geradas pela convecção. Usamos as Equações (3.4), (3.5) e (3.6) para obter QBOs excitadas somente por convecção, sem qualquer tipo de parametrização de fluxo vertical de momento.

Utilizamos um domínio retangular bidimensional, onde a coordenada horizontal $0 \leq x \leq 1$ e a coordenada vertical $0 \leq z \leq 0.5$. O domínio tem uma zona convectiva em $0 \leq z \leq 0.25$ e uma zona estável em $0.25 < z \leq 0.5$. Para a zona convectiva utilizamos índice politrópico $m = 1.45$, e para a zona estável $m = 3$. Como nas simulações apresentadas nos capítulos anteriores, a transição entre zonas com diferentes índices politrópicos é feita usando uma função *erf*, dada pela Equação (3.40). A resolução utilizada é de 256 células na direção horizontal e 128 na direção vertical. Esta resolução produz um bom compromisso entre a resolução das escalas necessárias para modelar ondas de gravidade e o tempo de cômputo requerido para evoluir o sistema por tempo suficiente para observar o fenômeno. As condições iniciais são velocidades nulas em todo o domínio e pequenas perturbações aleatórias de Θ' .

Como não utilizamos parâmetros condizentes com os da atmosfera terrestre, não podemos comparar os resultados de simulações com observações. Portanto, o objetivo destas simulações é simplesmente mostrar que oscilações periódicas da velocidade horizontal média podem ser obtidas de simulações de convecção turbulenta sem nenhum tipo de parametrização de perturbações forçadas na equação de momento.

A Figura 21 representa a média horizontal da velocidade horizontal, \bar{u}_x . Vermelho significa fluxo para a direita e azul para a esquerda. O eixo vertical é a altura a partir do início da zona estável e o eixo horizontal é o tempo, contado a partir de quando oscilações periódicas de \bar{u}_x já tinham se formado. A zona convectiva não é mostrada na figura. Notamos que o período das oscilações é bastante regular e não parece depender da direção para a qual o fluxo médio está se deslocando.

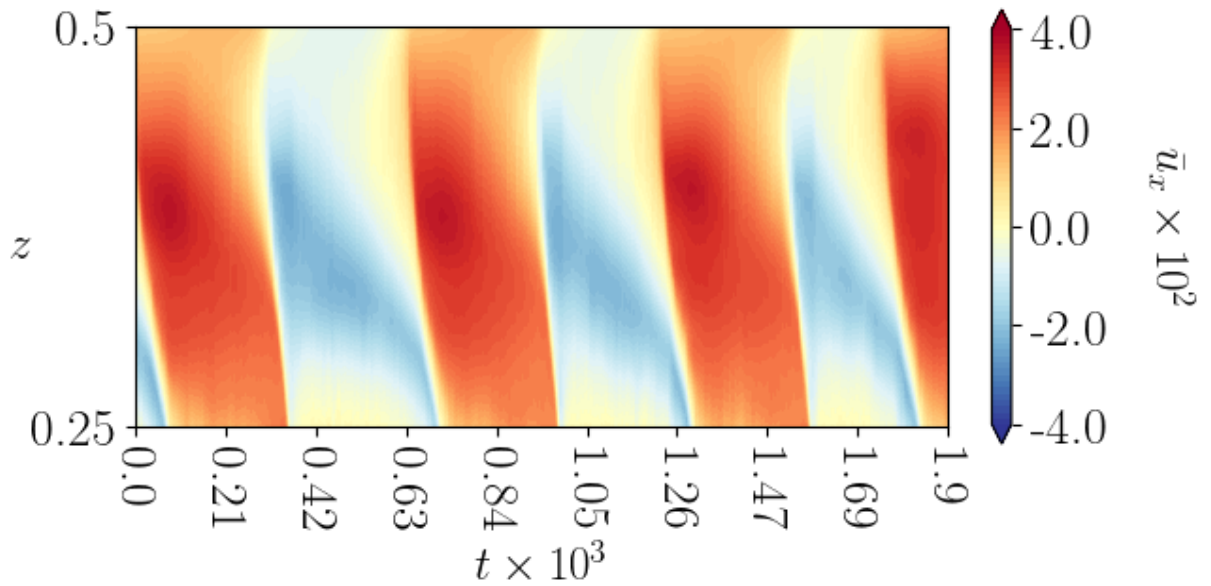


Figura 21 – Oscilações quase-bienais obtidas através de simulação.

As velocidades para a direita são mais intensas do que as velocidades para a esquerda. Este fato é surpreendente, dado que o sistema é simétrico em relação a uma reta vertical passando pelo valor médio de x . Nos modelos de QBOs, por exemplo em Holton & Lindzen (1972), os fluxos de momento para leste e para oeste são modelados de forma diferente, causando diferenças nas velocidades para leste e oeste. Esta diferença é uma consequência do movimento de rotação da Terra. Porém, mesmo sem a presença de nenhum tipo de anisotropia na direção horizontal, obtivemos magnitudes diferentes nas velocidades em direções horizontais diferentes.

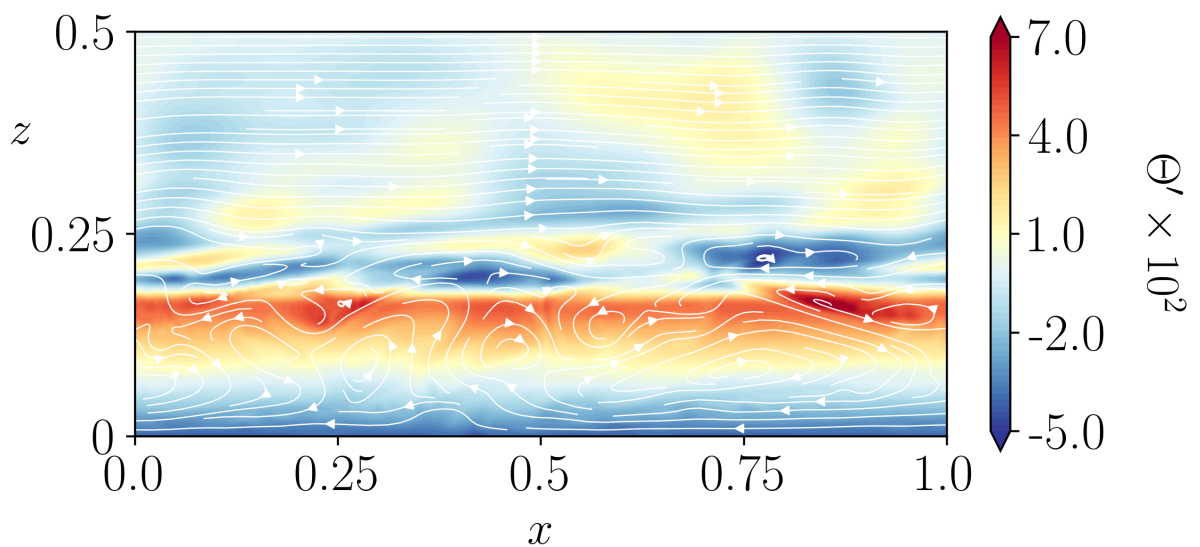


Figura 22 – Similar à Figura 10 em $t = 1.8971 \times 10^{-3}$.

Na Figura 22 mostramos um mapa de contorno das perturbações de temperatura

potencial Θ' superposto com linhas de corrente indicando a direção dos movimentos do fluido. A zona convectiva ocupa a parte inferior do domínio. A parte superior da figura mostra um momento em que a velocidade horizontal média é positiva. É notável como o fluxo nesta região do domínio, dominado pela velocidade horizontal, é coerente e pouco turbulento.

A simulação aqui apresentada não é realista por diversos motivos. Primeiramente, é usado um domínio bidimensional cartesiano, enquanto QBOs acontecem em uma casca esférica tridimensional em rotação. Os parâmetros de entrada do nosso modelo, que são perfis de densidade e temperatura, comprimentos e valor do tempo característico do forçamento foram escolhidos de forma completamente arbitrária. Entretanto, como foram usadas as equações de Navier-Stokes ao invés de um modelo matemático derivado especialmente para QBOs, são incluídos fenômenos que podem interferir nas QBOs, como turbulência e ondas de gravidade. Para que a influência da turbulência seja medida com precisão, é necessário obter QBOs de simulações tridimensionais usando o conjunto completo das equações de Navier-Stokes sem parametrizações artificiais de transporte de momento, e comparar com GCM que utilizam estas parametrizações. Como perspectiva de trabalho futuro, planejamos adequar nosso modelo a parâmetros atmosféricos (por exemplo fazendo com que a extensão horizontal do domínio computacional tenha o tamanho da circunferência terrestre no Equador) e comparar com modelos unidimensionais de QBOs, e.g., Holton & Lindzen (1972).

6 Conclusões e perspectivas

Uma questão presente em simulações hidrodinâmicas e magnetohidrodinâmicas é a discretização do domínio. Uma resolução muito alta faz com que as simulações tenham um grande custo computacional, tornando o seu uso inviável. Por outro lado, uma simulação com resolução muito baixa também não é muito útil, já que deixaria de capturar detalhes importantes do movimento do fluido.

Outra questão em corrente em simulações hidrodinâmicas, particularmente em simulações de zonas convectivas estratificadas, é a modelagem da difusão de energia. A forma canônica de modelar a troca de calor é usando condução térmica, onde o fluxo de calor é proporcional ao gradiente de temperatura do meio. Quando modelamos a difusão de energia desta maneira, devemos usar um valor mínimo para o coeficiente de condução para evitar instabilidades numéricas. Na maioria dos casos, este valor mínimo é ordens de grandeza maior que o valor previsto para a difusão no nível molecular, principalmente em regiões onde convecção acontece naturalmente como a atmosfera terrestre ou a zona convectiva do Sol (Browning et al. 2004).

Além do mais, mesmo que valores artificialmente altos sejam usados para o coeficiente de condução térmica, o tempo de relaxação térmico do sistema, que é o tempo gasto pelo sistema para encontrar um estado estacionário caso houvesse somente a condução térmica como mecanismo de transporte de calor, ainda é muito alto em comparação com as outras escalas de tempo envolvidas no sistema (Cossette et al. 2017). Isto faz com que as simulações que usam este tipo de transporte térmico demorem um longo tempo para relaxar.

Existe uma maneira de contornar este problema, que é implementando uma forma simplificada de transporte de calor onde um forçamento e dissipação relaxa o campo de temperatura a um perfil médio (que se assume constante na escala temporal de evolução do sistema). Chamamos este mecanismo de forçamento e dissipação, FD (Held & Suarez 1994). Para isso, escrevemos as equações de Navier-Stokes usando um estado ambiente, Θ_a , e uma perturbação de temperatura potencial, Θ' , em torno deste estado. A perturbação em torno de Θ_a se torna a nova variável, que deve ser encontrada integrando as equações de Navier-Stokes numericamente. Este mecanismo não requer um coeficiente de condução de calor, κ . Além de retirar a necessidade da especificação de um valor potencialmente não realista de κ , a limitação no passo temporal devido às segundas derivadas espaciais desaparece, permitindo o uso de passos temporais maiores que para o mecanismo de condução de calor.

Para entender melhor como o mecanismo de troca de calor e a resolução influenciam

em simulações de convecção estratificada, escrevemos as equações de Navier-Stokes usando os dois mecanismos de troca de calor, a condução térmica e o forçamento e dissipação. Para cada mecanismo, realizamos simulações bidimensionais usando várias resoluções.

Concluir se o forçamento é um bom substituto para a condução é complicado, já que devemos analisar os resultados de várias grandezas físicas diferentes. Por exemplo, os dois mecanismos de troca de calor apresentam contornos de velocidade vertical (Figura 9) semelhantes, já que o número de células convectivas não parece variar com o mecanismo de troca empregado.

Existem algumas diferenças quando consideramos os contornos de perturbações de temperatura potencial para cada um dos tipos de simulações, Figura 10. Os contornos para as simulações usando forçamento apresentam gradativamente mais detalhes à medida que aumentamos a resolução, enquanto os contornos de perturbações de temperatura potencial de simulações usando condução não mostram tantos detalhes, embora a intensidade das perturbações seja consistente entre as simulações.

Os perfis de u_{rms} , $u_z rms$ e $u_x rms$ em função da altura, mostrados na Figuras 11, são semelhantes, apresentando somente diferenças de amplitude. Os perfis de $u_z rms$ e $u_x rms$ concordam com os perfis desta mesma grandeza obtidos por Hotta et al. (2012) em simulações bidimensionais de convecção, o que valida nossos resultados para os dois mecanismos.

O resultado mais discrepante entre as simulações usando diferentes mecanismos de troca de calor foi o fluxo de calor convectivo, Figura 11(d). Os perfis desta grandeza diferem principalmente na posição do pico, que é localizado na base da zona convectiva para simulações usando condução e aproximadamente no meio para simulações utilizando forçamento. Entretanto, apesar desta diferença nos perfis do fluxo de calor convectivo, as amplitudes desta grandeza para cada tipo de simulação são semelhantes. O fluxo de calor convectivo apresenta uma região negativa. Apesar de contraintuitivo, isto concorda com o resultado obtido por Brun et al. (2017), que também obtém uma pequena região de fluxo convectivo na base no domínio, mesmo que para simulações tridimensionais esféricas.

Concluimos esta comparação analisando os espectros de potência (Figura 12) dos dois conjuntos de simulações, como a presença de escalas de injeção e inercial. A escala inercial das simulações HC decai como previsto pelo escalamento BO, como esperado para turbulência na presença de empuxo. A escala inercial das simulações FD decai mais rapidamente que o previsto pelo escalamento BO, mas isso era esperado, visto que o forçamento retira energia de todas as escalas, ao contrário da condução, que não é relevante na escala inercial.

O tempo de relaxação para as simulações que usam forçamento é várias vezes menor que para as simulações usando condução, como pode ser visto na Figura 8. Considerando-se

também que o forçamento permite um passo temporal maior do que a condução, somos capazes de realizar simulações deste tipo com maior resolução do que simulações que usam HC. Isto nos permitiu obter um campo de velocidades mais turbulento com número de Reynolds até 7.9×10^3 .

Outro ponto relevante das simulações que usam FD é que elas resolvem muito bem a dinâmica das zonas estáveis, como pode ser visto na Figura 14, onde pode-se observar ondas de gravidade. Estas ondas de gravidade podem produzir movimentos horizontais em grande escala, dando origem às oscilações quase-bienais, como observado na atmosfera terrestre (Baldwin et al. 2001). Conseguimos produzir oscilações da média horizontal da velocidade horizontal excitadas somente por convecção nestas zonas. Estas oscilações são semelhantes às oscilações quase-bienais que acontecem na atmosfera terrestre. Não achamos na literatura modelos que realizam oscilações quase-bienais excitadas somente por convecção.

Considerando todos estes aspectos, podemos afirmar que o forçamento é uma boa alternativa à condução.

A facilidade para atingir um estado estacionário usando FD nos permitiu fazer um estudo sistemático da convergência deste tipo de simulações quando a resolução numérica é variada. Aprendemos que quando a resolução é aumentada, determinadas grandezas físicas convergem para um certo perfil, como as velocidades (Figura 15) e os espectros de potência (Figura 16). Além do mais, a partir de um certo valor de resolução, aproximadamente 128^2 , começamos a ver fenômenos como ondas de gravidade e instabilidades de Kelvin-Helmholtz, Figura 14. Estas instabilidades existem mesmo em baixas resoluções, entretanto, em altas resoluções as observamos em mais detalhes.

Para investigar a origem da convergência numérica, calculamos as viscosidades efetiva e turbulenta. A viscosidade efetiva, Figura 17, mostrou ser uma função decrescente da resolução. A partir dela conseguimos estimar o número de Reynolds efetivo do sistema. A viscosidade turbulenta, Figura 19, parece inicialmente decrescer e então tender assintoticamente a um valor constante a partir de uma certa resolução. Observamos que grandezas físicas convergem quando a viscosidade efetiva é aproximadamente 100 vezes menor do que a turbulenta. Outra maneira de interpretar este resultado é comparando o comprimento de correlação com o espaçamento da grade usada para discretizar o domínio. Quando este espaçamento é aproximadamente 50 menor que o comprimento de correlação, também observamos convergência. Estas duas maneiras de analisar a convergência numérica são equivalentes, já que a viscosidade efetiva é relacionada com o espaçamento da grade e a viscosidade turbulenta é relacionada com o comprimento de correlação. Entretanto, para as simulações de baixa resolução, esperávamos que a viscosidade efetiva fosse maior que a viscosidade turbulenta, já que o fluxo parece pouco turbulento nestas simulações, por exemplo na Figura 13(a). Isto pode indicar que os valores de ν_{eff} encontrados foram

subestimados ou que os valores de ν_t foram superestimados.

Como perspectivas de trabalhos futuros, o próximo passo é realizar as mesmas simulações, porém em três dimensões. Como existem aspectos da turbulência que só podem ser capturados em três dimensões (Pope 2000), então, em princípio, poderiam-se obter resultados diferentes. Pode-se também fazer a comparação entre os mecanismos de troca de calor assim como de convergência numérica em simulações tridimensionais em coordenadas esféricas, aproximando assim o modelo a ambientes naturais onde convecção é observada.

Referências

- Baldwin, M., Gray, L., Dunkerton, T., et al. 2001, *Reviews of Geophysics*, 39, 179 Citado 2 vezes nas páginas 64 e 70.
- Barry, R., Chorley, R., Barry, R. G., et al. 2002, *Atmosphere, weather and climate* (Routledge) Citado na página 12.
- Bolgiano Jr, R. 1959, *Journal of Geophysical Research*, 64, 2226 Citado na página 33.
- Brandenburg, A., Chan, K. L., Nordlund, Å., & Stein, R. F. 2005, *Astronomische Nachrichten*, 326, 681 Citado na página 15.
- Browning, M. K., Brun, A. S., & Toomre, J. 2004, in *IAU Symposium*, Vol. 224, *The A-Star Puzzle*, ed. J. Zverko, J. Ziznovsky, S. J. Adelman, & W. W. Weiss, 149–154 Citado 2 vezes nas páginas 14 e 68.
- Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2004, *The Astrophysical Journal*, 614, 1073 Citado na página 49.
- Brun, A. S., Strugarek, A., Varela, J., et al. 2017, *The Astrophysical Journal*, 836, 192 Citado 2 vezes nas páginas 50 e 69.
- Carroll, B. W. & Ostlie, D. A. 1996, *An Introduction to Modern Astrophysics* Citado 2 vezes nas páginas 13 e 42.
- Chan, K. L., Sofia, S., & Wolff, C. L. 1982, , 263, 935 Citado na página 15.
- Chandrasekhar, S. 2013, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability* (Courier Corporation) Citado 3 vezes nas páginas 21, 29 e 30.
- Chen, Q. & Glatzmaier, G. A. 2005, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 99, 355 Citado 2 vezes nas páginas 15 e 50.
- Choudhuri, A. R. 1998, *The physics of fluids and plasmas : an introduction for astrophysicists /* Citado 5 vezes nas páginas 13, 29, 48, 61 e 62.
- Cossette, J.-F., Charbonneau, P., Smolarkiewicz, P. K., & Rast, M. P. 2017, *The Astrophysical Journal*, 841, 65 Citado 6 vezes nas páginas 20, 27, 28, 35, 42 e 68.
- Coy, L., Wargan, K., Molod, A. M., McCarty, W. R., & Pawson, S. 2016, *Journal of climate*, 29, 5339 Citado na página 64.
- DeLuca, E., Werne, J., Rosner, R., & Cattaneo, F. 1990, *Physical review letters*, 64, 2370 Citado na página 15.

- Domaradzki, J. A. & Radhakrishnan, S. 2005, *Fluid Dynamics Research*, 36, 385 Citado 2 vezes nas páginas 57 e 59.
- Domaradzki, J. A., Xiao, Z., & Smolarkiewicz, P. K. 2003, *Physics of Fluids*, 15, 3890 Citado na página 57.
- Dunkerton, T. J. 1985, *Journal of the atmospheric sciences*, 42, 1151 Citado na página 64.
- Dunkerton, T. J. 1997, *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 102, 26053 Citado na página 64.
- Elliott, J. R. & Smolarkiewicz, P. K. , 2002, *International journal for numerical methods in fluids*, 39, 855 Citado 2 vezes nas páginas 12 e 34.
- Elliott, J. R. & Smolarkiewicz, P. K. 2002, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39, 855 Citado na página 15.
- Featherstone, N. A. & Hindman, B. W. 2016, *The Astrophysical Journal*, 818, 32 Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 34.
- Ganot, Y., Dragila, M. I., & Weisbrod, N. 2014, *Agricultural and Forest Meteorology*, 184, 12 Citado na página 15.
- Gill, A. E. 2016, *Atmosphere—ocean dynamics* (Elsevier) Citado na página 20.
- Giorgetta, M., Manzini, E., Roeckner, E., Esch, M., & Bengtsson, L. 2006, *Journal of Climate*, 19, 3882 Citado na página 65.
- Giorgetta, M. A., Manzini, E., & Roeckner, E. 2002, *Geophysical Research Letters*, 29, 86 Citado na página 65.
- Glatzmaier, G. A. 2013, *Introduction to modeling convection in planets and stars: magnetic field, density stratification, rotation*, Vol. 24 (Princeton University Press) Citado 3 vezes nas páginas 12, 18 e 19.
- Guerrero, G., Del Sordo, F., Bonanno, A., & Smolarkiewicz, P. 2019, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 490, 4281 Citado na página 35.
- Guerrero, G., Smolarkiewicz, P. K., de Gouveia Dal Pino, E. M., Kosovichev, A. G., & Mansour, N. N. 2016a, , 819, 104 Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 15.
- Guerrero, G., Smolarkiewicz, P. K., de Gouveia Dal Pino, E. M., Kosovichev, A. G., & Mansour, N. N. 2016b, , 828, L3 Citado na página 15.
- Held, I. M. & Suarez, M. J. 1994, *Bulletin of the American Meteorological Society*, 75, 1825 Citado 2 vezes nas páginas 14 e 68.

- Holton, J. R. & Lindzen, R. S. 1972, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 29, 1076 Citado 3 vezes nas páginas 64, 66 e 67.
- Hotta, H., Rempel, M., & Yokoyama, T. 2015, *The Astrophysical Journal*, 798, 51 Citado na página 34.
- Hotta, H., Rempel, M., Yokoyama, T., Iida, Y., & Fan, Y. 2012, *Astronomy & Astrophysics*, 539, A30 Citado 3 vezes nas páginas 42, 53 e 69.
- Hu, X. & Adams, N. A. 2011, *Journal of Computational Physics*, 230, 7240 Citado na página 35.
- Kawatani, Y., Watanabe, S., Sato, K., et al. 2010, *Journal of the atmospheric sciences*, 67, 963 Citado na página 65.
- Kippenhahn, R., Weigert, A., & Weiss, A. 1990, *Stellar structure and evolution*, Vol. 192 (Springer) Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.
- Kitiashvili, I. N., Kosovichev, A. G., Mansour, N. N., & Wray, A. A. 2016, *The Astrophysical Journal Letters*, 821, L17 Citado na página 15.
- Kolmogorov, A. N. 1941, *Cr Acad. Sci. URSS*, 30, 301 Citado na página 32.
- Lindzen, R. S. & Holton, J. R. 1968, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 25, 1095 Citado na página 64.
- Obukhov, A. 1962, *Journal of Geophysical Research*, 67, 3011 Citado na página 33.
- Ogura, Y. & Phillips, N. A. 1962, *Journal of the atmospheric sciences*, 19, 173 Citado na página 24.
- Peña-Ortiz, C., Manzini, E., & Giorgetta, M. A. 2019, *Journal of Climate*, 32, 7453 Citado na página 15.
- Pope, S. B. 2000, *Turbulent Flows* (Cambridge University Press) Citado 4 vezes nas páginas 14, 32, 59 e 71.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1988, *Numerical recipes in C* (Cambridge University Press) Citado 2 vezes nas páginas 14 e 35.
- Prusa, J. M., Smolarkiewicz, P. K., & Wyszogrodzki, A. A. 2008, *Computers & Fluids*, 37, 1193 Citado 3 vezes nas páginas 15, 35 e 37.
- Scaife, A. A., Butchart, N., Warner, C. D., et al. 2000, *Geophysical Research Letters*, 27, 3481 Citado na página 65.

- Schranner, F. S., Domaradzki, J. A., Hickel, S., & Adams, N. A. 2015, *Computers & Fluids*, 114, 84 Citado na página 57.
- Smolarkiewicz, P. & Margolin, L. 2000, *Variational methods for elliptic problems in fluid models*, Tech. rep., Los Alamos National Lab., NM (US) Citado 2 vezes nas páginas 37 e 40.
- Smolarkiewicz, P. K. 2006, *International journal for numerical methods in fluids*, 50, 1123 Citado na página 35.
- Streeter, V. L. & Wylie, E. B. 1975, *Fluid mechanics* (McGraw-Hill) Citado na página 13.
- Strugarek, A., Beaudoin, P., Brun, A. S., et al. 2016, *Advances in Space Research*, 58, 1538 Citado 3 vezes nas páginas 14, 35 e 57.
- Zhang, Y., Huang, Y.-X., Jiang, N., et al. 2017, *Physical Review E*, 96, 023105 Citado 2 vezes nas páginas 15 e 60.
- Zhou, Y., Grinstein, F. F., Wachtor, A. J., & Haines, B. M. 2014, *Physical Review E*, 89, 013303 Citado 2 vezes nas páginas 57 e 60.
- Zhu, X., Mathai, V., Stevens, R. J., Verzicco, R., & Lohse, D. 2018, *Physical review letters*, 120, 144502 Citado na página 15.
- Ziegler, U. & Rüdiger, G. 2003, *Astronomy & Astrophysics*, 401, 433 Citado na página 43.