UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA

GESIEL ALISSON MARTINHO

O ENSINO DE EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES PARA COMPREENSÃO DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Belo Horizonte
2020

GESIEL ALISSON MARTINHO

O ENSINO DE EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES PARA COMPREENSÃO DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação e Docência da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação e Docência.

Área de concentração: Educação
Linha de pesquisa: Educação Matemática
Orientador: Prof. Dr. Diogo Alves de Faria Reis

Belo Horizonte
2020

Ficha catalográfica elaborada pela biblioteca
da Faculdade de Educação/UFMG

M385e Martinho, Gesiel Alisson, 1985-
T O ensino de equivalência de frações para compreensão das operações de adição e subtração [manuscrito] / Gesiel Alisson Martinho. - Belo Horizonte, 2020.
277 f. : enc, il.

Dissertação -- (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.
Orientador: Diogo Alves de Faria Reis.
Bibliografia: f. 178-181.
Anexos: f. 263-277.
Apêndices: f. 182-262.

1. Educação -- Teses. 2. Matemática (Ensino fundamental) -- Estudo e ensino -- Teses. 3. Matemática (Ensino fundamental) -- Métodos de ensino -- Teses. 4. Frações -- Estudo e ensino (Ensino fundamental) -- Teses. 5. Jogos em educação matematica -- Teses.
I. Título. II. Reis, Diogo Alves de Faria. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.

CDD- 372.7

Catalogação da Fonte : Biblioteca da FaE/UFMG (Setor de referência)
Bibliotecário: Ivanir Fernandes Leandro CRB: MG-002576/O

Título em inglês: The teaching of fraction equivalence for understanding addition and subtraction operations

Keywords: Equivalent fractions. Fraction comparison. Addition and subtraction of fractions. Teaching aids. Mathematics education.

Linha de pesquisa: Educação Matemática

Titulação: Mestre em Educação e Docência

Banca examinadora: Prof. Dr. Diogo Alves de Faria Reis (Orientador)
Profª. Dra. Ana Rafaela Correia Ferreira
Profª. Dra. Denise Alves de Araújo

Data da defesa: 04/03/2020

Programa de pós-graduação: Educação e Docência

E-mail: gesielalisson@yahoo.com.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA/MP

UFMG

ATA DA DEFESA DA DISSERTAÇÃO DO ALUNO
GESIEL ALISSON MARTINHO

Realizou-se no dia 04 de março de 2020, às 14:00 horas, Sala 4108, Faculdade de Educação, da Universidade Federal de Minas Gerais, a 253ª defesa de dissertação intitulada *O ENSINO DE EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES PARA UMA MELHOR COMPREENSÃO DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO*, apresentada por GESIEL ALISSON MARTINHO, número de registro 2018665183, graduado no curso de MATEMÁTICA, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA, à seguinte Comissão Examinadora: Prof. Diogo Alves de Faria Reis - Orientador (Universidade Federal de Minas Gerais), Profa. Ana Rafaela Correia Ferreira (Universidade Federal de Minas Gerais), Profa. Denise Alves de Araujo (Universidade Federal de Minas Gerais).

A Comissão considerou a dissertação:

(X) Aprovada
( ) Reprovada
( ) Aprovada com indicação de correções

A Banca sugeriu e o candidato acatou a mudança do título da dissertação para:

O ensino de equivalência de frações para compreensão das operações de adição e subtração

Finalizados os trabalhos, lavrei a presente ata que, lida e aprovada, vai assinada por mim e pelos membros da Comissão.
Belo Horizonte, 04 de março de 2020.

Prof. Diogo Alves de Faria Reis (Doutor)

Ana Rafaela Correia Ferreira

Profa. Ana Rafaela Correia Ferreira (Doutora)

Denise Alves de Araujo

Profa. Denise Alves de Araujo (Doutora)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado forças, saúde e coragem para não desistir, e ânimo e perseverança para ir até o fim.

Aos meus pais, **José Maria** e **Gisléia Luciene,** por acreditarem em mim sempre, pela presença constante, por me ensinarem a lutar pelos meus sonhos e ideais, pela compreensão e amor dedicado.

Aos meus irmãos, **Gizelle**, **Jefferson** e **Geisilane**, pelo apoio e motivação.

Ao meu sobrinho **Rafael** que, mesmo com 11 anos, muitas vezes me trouxe palavras de conforto acompanhadas de um belo sorriso e abraço. Obrigado por ser esse sobrinho maravilhoso!

Ao **Helber**, pelo apoio em todas as decisões, pelas palavras de conforto, por ouvir os meus desabafos e por ser parceiro, amigo, esposo e companheiro em todos os momentos.

A todos os meus amigos, pela compreensão, entendendo a minha ausência em determinadas ocasiões.

À **Maria Vitória** (**Maviih**), ao **Hebert Vinícius** e **Ismar** por sempre torcerem por mim. Muito obrigado pela consideração e carinho dedicados a mim.

Aos meus colegas de trabalho, em especial, **Cirlene** e **Mariana,** que me incentivaram desde o início. Se não fosse o incentivo de vocês, talvez eu não estaria escrevendo esse agradecimento hoje. Serei sempre grato a vocês.

Não poderei deixar de agradecer às minhas amigas **Vanessa, Adriana, Alcimara** e **Paula** que, também, sempre estiveram ao meu lado, incentivando-me com palavras de conforto e pelas boas risadas juntos.

Ao professor **Avani,** por ter cedido suas aulas para a realização desta pesquisa.

Aos **Estudantes** participantes desta pesquisa, pela contribuição, colaboração e entusiasmos.

Às minhas colegas de mestrado, em especial, **Cristalina, Amanda** e **Lucinéia**, que, nesse período do mestrado, além de parceiras, foram grandes “psicólogas”. Obrigado por me ouvir e por não ter deixado eu desistir.

Não poderia deixar de agradecer à **Petrina** e ao **Felipe**. Dois parceiros que me ajudaram muito nessa caminhada. Obrigado, Petrina, por ter me ajudado no projeto de seleção e pelos conselhos. Obrigado, Felipe, pelas dicas e por ser essa pessoa amável que é. Serei sempre grato a vocês.

Ao **João Bezerra,** grande amigo e tio de coração que a vida me presenteou. Obrigado pelo carinho, consideração e por fazer o designer do nosso Recurso Educacional.

Aos amigos **Juliana Cardoso** e **João Engracio**, que, mesmo de longe, contribuíram para aumentar minha confiança nos momentos da qualificação e defesa. Obrigado pelo carinho.

A todos os **Professores** do mestrado que contribuíram para o meu crescimento.

À banca de qualificação e defesa, **Ana Rafaela, Denise, Maria Cristina** e **Samira,** pelas contribuições que tornaram possível a finalização deste trabalho.

Ao **Diogo,** por me ensinar, orientar e ter ajudado na idealização e concretização desta dissertação. Obrigado por acreditar em mim e por ter me ajudado a tornar realidade o meu sonho.

Meu muito obrigado a todos e todas!!!

Nossa vida é uma constante viagem, do nascimento à morte. A paisagem muda, as pessoas mudam, as necessidades se transformam, mas o trem segue adiante. A vida é o trem, não a estação.

Paulo Coelho

RESUMO

Este trabalho objetivou investigar como a ideia de equivalência de frações, com o apoio de materiais manipuláveis, pode contribuir para a compreensão das operações de adição e subtração, em estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II. Assim, elaboramos uma sequência didática com nove tarefas que abordou os temas, “equivalência de frações, comparação de fração e operação de adição e subtração de frações”. A sequência didática foi aplicada a estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II de uma escola da Rede Estadual de Minas Gerais localizada em Belo Horizonte. Para a realização das tarefas, desenvolvemos 13 aulas de 50 minutos e, como material didático manipulável, utilizamos o “kit de frações no quadriculado e as tiras de frações”. Além disso, em uma das tarefas, utilizamos o jogo “Papa Todas de Frações” de Smole et. al (2007). Em relação à análise dos dados, consideramos os seguintes aspectos: contribuição e limitações dos materiais manipuláveis utilizados; aspectos atitudinais dos estudantes durante a realização das tarefas; habilidades relativas à comparação e a equivalência de frações, percebidas durante as tarefas; alguns aspectos da adição e subtração na perspectiva de equivalência de frações. Assim, foi possível constatar que o material manipulável utilizado ajudou a maioria dos estudantes a compreender e se apropriar dos conceitos matemáticos desenvolvidos. Foi possível notar também que a maioria dos estudantes compreendeu o processo de equivalência de frações e relacionou esse processo com às operações de adição e subtração. Podemos indicar, com base na pesquisa, a importância de se valorizar o conceito de equivalência de frações para a compreensão dessas operações.

Palavras-chave: Frações equivalentes. Comparação de Frações. Adição e Subtração de Frações. Material Didático Manipulável. Educação Matemática.

ABSTRACT

This study aimed to investigate how the idea of fraction equivalence, with the support of manipulable materials, can contribute to understanding of the operations of addition and subtraction, in students of the 7th grade of Elementary School II. Thus, we prepared a didactic sequence with nine tasks that addressed the themes, "fraction equivalence, fraction comparison, and addition and subtraction of fractions". The didactic sequence was used with 7th graders of Elementary School II from a state school located in Belo Horizonte in the state of Minas Gerais. To teach students to perform the tasks, we planned thirteen 50-minute classes, and used the "fraction kit in the grid and the fraction strips" as teaching aids. In addition, in one of the tasks, we used the fraction game *Papa Todas* by Smole et. al (2007). Regarding data analysis, we considered the following aspects: contribution and limitations of teaching aids used; students attitudinal aspects during the tasks; skills related to the comparison and equivalence of fractions perceived during the tasks; and some aspects of addition and subtraction from the perspective of fraction equivalence. Thus, it was found that the teaching aids helped most students to understand and build the mathematical concepts developed. It was also possible to observe that most students understood the fraction equivalence process and associated this process to addition and subtraction operations. Based on the research, we can say that it is important to value the concept of equivalence of fractions to understand these operations.

Keywords: Equivalent fractions. Fraction comparison. Addition and subtraction of fractions. Teaching aids. Mathematics education.

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC:	Base Nacional Comum Curricular
CBC:	Currículo Básico Comum
Coep:	Comitê de Ética em Pesquisa
MMC:	Mínimo Múltiplo Comum
PCN:	Parâmetro Curricular Nacional
Siena:	Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem
TCLE:	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda. (Paulo Freire)

Natural de Belo Horizonte, Minas Gerais, e terceiro filho em uma família de três irmãos, a influência dos meus pais, em minha vida estudantil, sempre foi muito notável. Apesar de eles não terem concluído o Ensino Fundamental, sempre se esforçaram para que os filhos tivessem uma formação educacional. Minha mãe, mesmo com suas dificuldades, auxiliava-nos nos deveres de casa, da melhor forma possível, e procurava sempre estar presente em nossa vida escolar. Dessa forma, desde cedo, aprendi que o estudo era importante e poderia ser uma boa ferramenta para as conquistas da vida. Foi a melhor herança que meus pais puderam me dar.

Durante o Ensino Fundamental e Médio, sempre demonstrei um interesse maior pela Matemática. Fazia as atividades das outras disciplinas, mas, as de Matemática esforçava-me mais para aprender. Assim, sempre tinha um retorno positivo por meio das avaliações e dos professores da disciplina. Devido a minha facilidade em compreender melhor a matemática, no Ensino Médio, formava grupos de estudos, com meus colegas, para estudarmos em épocas de provas. Gostava muito de solucionar as dúvidas apresentadas por eles, sentindo-me um professor. Esse grupo de estudo foi um grande aprendizado, pois, ao solucionar as dúvidas dos meus colegas, eu, também, aprendia cada vez mais.

Conclui o Ensino Médio em 2003. Devido às minhas condições financeiras, demorei para me ingressar no ensino superior. Resolvi trabalhar para ter a minha independência e, também, ajudar meus pais, mas sempre tive interesse em retornar aos estudos. Então, no 1º semestre de 2008, ingressei no cursinho preparatório para o vestibular. Prestei o vestibular no Centro Universitário de Belo Horizonte (UNI-BH), no primeiro semestre, e iniciei a graduação, nessa instituição, no semestre seguinte. Optei pela Matemática, pois tinha a certeza de que queria me tornar um professor.

A cada semestre da graduação, intensificava a convicção de que havia acertado na escolha do meu curso universitário, que concluí em julho de 2012. Foi uma grande conquista, pois, mesmo diante de muitas dificuldades, consegui realizar o sonho de me tornar professor. No mesmo ano, participei de um processo de designação para trabalhar na Rede Estadual de Ensino de Minas Gerais. Iniciei na Escola Estadual Madre Carmelita, localizada em Belo Horizonte na região da Pampulha, com os estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Foi um contrato de apenas 22 dias. Ao término desse contrato, em outubro, participei de outra designação na Escola Estadual Agnelo Correa Viana, localizada na região de Venda Nova, para trabalhar com turmas de 7º e 9º ano, finalizando o 4º bimestre nessa escola. Apesar de ter sido um contrato de pouco tempo, foi possível adquirir uma experiência como regente de turma nessas escolas.

Em 2013, comecei a trabalhar na Escola Estadual Menino Jesus de Praga, com os estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental. Nos anos de 2014 e 2015, trabalhei com os estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Em 2015, fui nomeado no estado de Minas Gerais e lotado nessa mesma escola, que representou um novo desafio e uma nova etapa da minha vida profissional. A realidade dessa Instituição de ensino é completamente diferente da experiência prévia que tive na área de educação. Antes de trabalhar em escola pública, tive experiência em uma escola particular como estagiário, auxiliar de classe e orientador educacional, na qual aspectos como contexto social, perfil socioeconômico dos estudantes e disponibilidade de recurso didático da escola, eram bastante distintos da Escola onde me efetivei.

A Escola está situada em uma área de risco, onde, além dos problemas de aprendizagem, é necessário saber lidar com questões como: tráfico de drogas, conflitos entre gangues e outros. As vivências nessa Escola me proporcionaram um grande aprendizado, pois era desafiado, constantemente, a despertar, em meus alunos, o interesse em aprender e, ao mesmo tempo, demonstrar que a educação é um meio que poderá mudar a realidade do entorno da escola.

Como professor de matemática, tenho observado que os estudantes dessa Escola, turmas com as quais trabalhei (8º, 1º, 2º e 3º anos), apresentavam muita dificuldade e receio quando se deparavam com exercícios que envolviam frações. Ao abordar esse conteúdo em sala de aula, percebia que os estudantes a consideravam impossível de ser compreendida, pois, muitas vezes, eles nem tentavam resolver o exercício e já afirmavam não saber ou não serem capazes e costumavam apresentar questionamentos como: "tem que tirar o MMC[1]?", "não sei fazer isso!", "é muito difícil esse exercício!", entre outros.

Segundo Campos e Rodrigues (2007), a vivência na sala de aula revela que mesmo os estudantes do Ensino Médio ou Superior enfrentam dificuldades com relação às frações e desconhecem aspectos triviais sobre esse conceito, o que acarreta um grande prejuízo à aquisição de novas competências matemáticas.

Mediante minha experiência, nota-se, então, que esse, talvez, seja um dos conteúdos menos consolidados por esses estudantes. Dificuldades em operações básicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão de frações, acumulam-se durante o Ensino Fundamental, e é

[1] MMC é a sigla de mínimo múltiplo comum que é utilizado em vários conteúdos de matemática. Nesse contexto, é um dos métodos para operar com números racionais.

bastante comum encontrar estudantes no terceiro ano do Ensino Médio, nessa Escola, que não consolidaram as habilidades mínimas necessárias nesse assunto.

Trabalhei com todas as séries, do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, o que muito enriquece a minha prática docente. Assim, tive e ainda tenho alunos nas mais diferentes situações, que classifico como: os "desmotivados" com o aprendizado de matemática; os "excluídos" pelas didáticas do ensino de matemática; os "apavorados" com o professor ou a aula de matemática; os muitos "reprovados" pela matemática escolar e, evidentemente, também, os "apaixonados" pela matemática. Uma realidade desafiadora que pretendo contribuir para não mais engrossar a ala dos desmotivados, dos amedrontados, dos excluídos da aprendizagem e do conhecimento matemático escolar.

De acordo com Nunes (2003), estudos sobre as dificuldades no ensino de fração não são efetuados somente no Brasil. A autora relata que, em estudos internacionais, os resultados não são tão diferentes, já que as dificuldades são comuns. Afirma que "todo mundo pode aprender frações e todo mundo gosta de aprender frações, quando pode utilizar seu próprio raciocínio" (NUNES, 2003, p. 10). Baseado nessa afirmativa e na minha prática docente, sempre questionei sobre o porquê de tantos obstáculos no processo de ensino/aprendizagem. Entender o porquê de tantos embaraços e encontrar caminhos para melhor abordar tais problemas com o ensino de fração, sempre foi o meu desafio.

Considerando a minha experiência vivida em sala de aula, tenho alguns questionamentos: Ao ensinar equivalência de frações com materiais manipulativos, para a compreensão das operações de adição e subtração de fração, o professor terá um retorno mais positivo por parte dos estudantes? Com base no procedimento de equivalência de frações, os estudantes compreenderão melhor as propriedades de adição e subtração? Qual a contribuição do material manipulativo para a aprendizagem do conceito de frações?

Os percalços cotidianos, o distanciamento entre ser professor na Educação Básica, e ser professor-pesquisador na Educação Básica não favoreceram para que meus questionamentos fossem, cientificamente, abordados.

Assim, por meio do programa de mestrado profissional da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), surgiu a oportunidade para transformar, em trabalho de pesquisa, minhas indagações, experiência profissional e questionamentos sobre o ensino de frações, especificamente o ensino de equivalência de frações para a compreensão das operações de adição e subtração, oportunizando-me aprofundar meu conhecimento sobre o assunto, aperfeiçoar minha prática profissional e, possivelmente, colaborar para a formação continuada de professores de Matemática.

O objetivo central do nosso[2] trabalho visa a investigar como a ideia de equivalência de frações, com o apoio de materiais manipuláveis, pode contribuir para a compreensão das operações de adição e subtração, em estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II, e, especificamente: Investigar a compreensão dos estudantes sobre o conceito, a relação parte-todo e as representações pictóricas e imagéticas das frações; Investigar os modos pelos quais os estudantes compreendem o processo de equivalência de frações e sua relação com as operações de adição e subtração envolvendo esse tipo de número e; Verificar as limitações e possiblidades da utilização de materiais didáticos (kit de frações e tiras) no processo de aprendizagem de frações e suas operações de adição e subtração.

Dessa forma, elaboramos uma sequência didática, composta por 9 tarefas que abordaram os tópicos: Equivalência de frações, comparação de fração e operação de adição e subtração de frações. As tarefas foram aplicadas a estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II de uma escola da Rede Estadual localizada em Belo Horizonte. Para a realização das tarefas, utilizamos 13 aulas de 50 minutos e, como material didático manipulável, o kit de frações no quadriculado e as tiras de frações. Além disso, utilizamos, em uma das tarefas, o jogo Papa Todas de Frações de Smole et. al (2007).

Como desdobramento da pesquisa, foi elaborado este trabalho que se organiza em quatro partes, distribuídas da seguinte forma: “Considerações Teóricas Iniciais”, dividida em três seções: na primeira, apresentamos algumas discussões referentes ao ensino e à aprendizagem de frações e os principais conceitos e significados de fração: Número, Relação parte-todo, medida, quociente, operador multiplicativo e razão. Na segunda seção, estabelecemos algumas discussões relacionadas ao ensino de comparação e equivalência de frações, e, na terceira e última seção, desenvolvemos algumas perspectivas para o ensino de frações, em que apresentamos algumas dificuldades dos estudantes relacionadas a esse conteúdo.

“Materiais Didáticos Manipuláveis” dividimos em duas seções. Primeiramente definimos o que são materiais didáticos manipuláveis, de acordo com Lorenzato (2006), Souza e Oliveira (2010) e Reys (1971). Após a definição, na primeira seção, discutimos sobre a importância da utilização desses materiais manipuláveis para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, em que destacamos algumas oportunidades que o professor e o estudante têm ao explorar esses materiais e, também, a importância de um bom planejamento ao optar por essa metodologia. Finalizamos com a segunda seção, discutindo sobre a importância da utilização desses materiais para o processo de ensino e aprendizagem de frações.

---

[2] Neste texto, o uso da primeira pessoa do singular refere-se ao autor do texto; o uso da primeira pessoa do plural, ao autor e ao professor orientador da pesquisa.

Em “Percursos Metodológicos”, apresentamos a metodologia da pesquisa, no qual descrevemos: a modalidade escolhida; o contexto e os sujeitos da investigação; encontros com os sujeitos; o kit de frações no quadriculado e as tiras de frações e a apresentação das tarefas.

Na parte “Análise dos dados”, descrevemos como ocorreu a aplicação das 9 tarefas, destacando e efetuando comentários de algumas situações vivenciadas durante a pesquisa, que possibilitaram, aos estudantes, a compreensão mais razoável de equivalência de frações, comparação de frações e adição e subtração de frações e, também, algumas dificuldades apresentadas por eles.

Por fim, finalizamos o nosso trabalho elaborando algumas considerações sobre a nossa experiência vivida na pesquisa; relacionadas às tarefas aplicadas e ao material didático manipulável utilizado.

2 CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS INICIAIS

Apresentamos os principais conceitos e significados relacionados à fração: número, relação parte-todo, medida, quociente, operador multiplicativo e razão. Em seguida, estabelecemos algumas discussões relacionadas ao ensino de comparação e equivalência de frações; finalizamos colocando algumas perspectivas para o ensino de frações e, também, algumas dificuldades dos estudantes relacionadas a esse conteúdo.

2.1 O ensino e a aprendizagem de frações

O processo de ensino e aprendizagem de frações, de acordo com Maranhão e Igliori (2003), tem sido alvo de várias pesquisas da Educação Matemática. Os autores relatam que "as implicações da não acessibilidade de um aluno ao conceito de número racional podem acarretar graves prejuízos à aprendizagem dos diversos ramos da matemática" (p. 57). Acreditamos que as implicações da não compreensão do conceito pelo estudante são prejuízos ao longo de sua vida acadêmica. Ou seja, se o estudante não tem uma clareza dos conceitos fundamentais/básicos de frações, terá, então, dificuldades à compreensão de novos conceitos matemáticos.

O ensino de frações é cercado por dificuldades, tais como, a rejeição dos estudantes por acreditarem que fração é um "bicho de 7 cabeças"; o despreparo do professor para lidar com o tema, pouco abordado em sua formação; e, muitas vezes, a forma como o assunto é abordado em livros didáticos. A falta de recursos didáticos pode prejudicar ainda mais esse processo. Para Loyola (2013), de fato, esse assunto tem orientado muitos educadores a pesquisarem o tema, sem que seja apontado um caminho conclusivo.

Moreira e David (2007) afirmam que:

> Ao longo do processo de formação matemática do professor, o conjunto dos racionais é visto como um objeto extremamente simples, enquanto as pesquisas mostram que, em termos da prática docente, a sua construção pode ser considerada uma das mais complexas operações da Matemática escolar (p. 59-60).

Assim, muitas vezes, o docente, ao abordoar frações em sala de aula, não está preparado para enfrentar as dificuldades apresentadas pelos estudantes, pois, no processo de sua formação, esse tema pode ter sido considerado simples de se ensinar, porém, não é um tema cujo aprendizado seja simples ou trivial.

Quando o ensino de frações é iniciado – no 4º ano –, Pelissaro (2011) relata que os estudantes até compreendem, pois conseguem associar com os números naturais que estão mais familiarizados, geralmente utilizam, como recurso, a ideia de divisão. A autora exemplifica que, o professor, ao trabalhar com fração, inicialmente, poderá levar uma pizza e dividi-la na metade, na quarta parte e, por fim, na quantidade de estudantes da turma. Com base nisso, questiona os estudantes, perguntando que parte da pizza cada um comeu, como eram as partes e, assim, constrói o conceito parte-todo.

Para Garcez (2013), ensinar frações envolve diversos desafios e um deles é o conceito de medida, já que os números naturais com os quais os estudantes estão habituados são bastante intuitivos e concretos e, por isso, não oferecem os mesmos desafios dos números racionais. Outro desafio, para o ensino e a aprendizagem de frações, é a sua própria escrita. Não é tão trivial a associação de uma quantidade a dois números (inteiros) “separados” por um pequeno traço e escritos na vertical.

Assim, Behr (1983), ressalta que,

> A ênfase exagerada nos procedimentos e algoritmos, para operar com os números racionais, tem sido apontada como um dos principais motivos das dificuldades das crianças em aprenderem e aplicarem os conceitos de números racionais (BEHR, 1983, p.60, *apud* DAVID e FONSECA, 1997).

Nesse sentido, Garcez (2013) relata que alguns professores, ao tentar facilitar o entendimento por parte dos estudantes, acabam limitando o ensino de frações à memorização de regras, alcançando justamente o contrário do pretendido, comprometendo a compreensão do tema. Ao optar pelo ensino por meio de regras, ainda, conforme o autor, o professor impede o estudante de vivenciar várias etapas – como a experimentação, a manipulação de materiais didáticos, a formulação e a verificação de conjecturas em um ambiente em que o professor e estudante discutem sobre o assunto abordado – que são importantes e conduzem à compreensão do conceito.

Desse modo, no âmbito da Educação Matemática, observamos a importância de serem utilizadas metodologias diferenciadas que possibilitem um melhor aprendizado por parte dos estudantes. Umas das metodologias que os autores: Bordin (2011), Vale e Barbosa (2014), Santos (2014), Lorenzato (2006), Matos e Serrazina (1996), Smole e Diniz (2016) entre outros, defendem e, também, corroboramos é a utilização de materiais manipulativos e jogos para esse ensino. Entendemos que, para haver um aprendizado utilizando essa metodologia, o material não poderá ter apenas uma função ilustrativa ou tornar um mero brinquedo na mão do estudante, pois, conforme enfatiza Santos (2014), não podemos afirmar que é possível contextualizar os conhecimentos matemáticos apenas por meio do material didático manipulável.

Assim, utilizando dessa metodologia, é necessário que o professor prepare bem sua aula, deixe esclarecidos todos os objetivos e, além disso, para obter uma aprendizagem significativa, o estudante precisa ser participativo – mais autônomo – tornando-se, assim, o principal ator de sua aprendizagem. Dessa forma, recomendamos que o professor utilize materiais didáticos manipuláveis e oriente atividades de modo participativo na sala de aula.

Para Santos (2014), o ensino de maneira lúdica parece ser bem aceito pelos estudantes, principalmente quando sentem que o professor se empenhou para preparar uma aula que condiz com a realidade deles, com o objetivo de aproximar os dois mundos: a matemática e a diversão pedagógica, importando-se, realmente, com o aprendizado individual.

No entanto, esse tipo de ensino requer, dos professores, uma dedicação maior na preparação das aulas, introduzindo novas formas de abordagem do conteúdo direcionadas a um melhor aprendizado pelos estudantes. Isso significa tempo de planejamento e formação na jornada de trabalho.

Retornando ao contexto do conceito fração, precisamos salientar constantemente a importância do conteúdo para o dia a dia de qualquer pessoa. Entendemos que não é algo simples, mas, conforme ressalta Monteiro (2013), utilizar situações do cotidiano permite que os estudantes reconheçam a Matemática no mundo que os cerca, e a tarefa do professor é auxiliá-los na construção do conceito matemático.

Monteiro (2013) destaca, ainda, que, essa relação com situações vivenciadas pelos estudantes pode auxiliar na construção dos significados das frações, nos seus diferentes sentidos. São significados que Nunes et. al (2003), David e Fonseca (1997), Araújo e Rezende (2014) e Monteiro (2013) abordam sob os seguintes pontos de vista: Número, relação parte-todo, medida, quociente, operador multiplicativo e razão. De acordo com esses autores, tais significados, quando adequadamente abordados, contribuem para uma aprendizagem mais significativa desse conceito.

A seguir, procuramos apresentar a ideia desses significados na perspectiva dos autores citados.

Número

Uma fração $\frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$, pode assumir o significado de número e ser posicionada em uma reta numérica, pois, de acordo com Nunes et. al (2003, p. 128), "frações, como os inteiros, são números que não precisam, necessariamente, referir-se a quantidades específicas". Assim, há duas formas de se representar as frações: ordinária e decimal. Para as autoras, essa abordagem quase não é utilizada pelos livros didáticos e, consequentemente, não é trabalhada em sala de aula, o que prejudica a organização do conceito, pois o estudante tende a não identificar a fração como um número.

Um exemplo muito comum utilizado em livros didáticos, em que a fração é trabalhada sem um referente específico, é: represente o número $\frac{3}{4}$ na forma decimal.

Relação parte-todo

Essa ideia é a representação de um todo dividido em *n* partes iguais, em que cada parte poderá ser representada por $\frac{1}{n}$, na qual o denominador representa a quantidade de vezes que o todo foi dividido e o numerador, a quantidade de partes que foram consideradas, portanto, um procedimento de dupla contagem.

Podemos exemplificar a ideia acima da seguinte forma: Uma barra de chocolate foi dividida em 6 partes iguais. Rebeca comeu 4 dessas partes. Que fração representa o que Rebeca comeu?

Como podemos observar, o todo é a barra de chocolate que foi dividida em 6 partes iguais (denominador) e 4 dessas partes foram tomadas (numerador). Assim, podemos dizer que Rebeca comeu $\frac{4}{6}$ do chocolate.

De acordo com Nunes et. al (2003), essa ideia é muito abordada pelos livros didáticos e muitas vezes, é utilizada como uma estratégia para a introdução do conteúdo fração. No entanto, David e Fonseca (1997) enfatizam que os "modelos de comparação parte-todo (numa região geométrica, num conjunto discreto ou na reta numérica) estão associados a uma *operação de medição.*" (p. 62). Dessa forma, o número de partes em que o inteiro foi dividido torna-se *subunidades* do inteiro. Isto é, dividindo o inteiro em partes iguais, verificamos:

> quantas dessas partes – que passam a funcionar como subunidades – caberão naquilo que se quer medir. Neste sentido, ficará assim definida a função dos termos da fração: o denominador indicará *qual a subunidade* do inteiro que se estará, e o numerador expressará a *medida* nessa subunidade (*quantas* vezes a subunidade cabe naquilo que se está medindo. (DAVID E FONSECA, 1997, p. 63).

Podemos exemplificar a situação acima da seguinte forma: Juliana fez 5 litros de suco de laranja para levar a um piquenique. Pretende colocar esse suco em garrafas de 2 litros. Quantas garrafas ela precisará?

Para responder a esse problema, em geral, falamos "duas e meia". Nesse caso, a subunidade "meia garrafa" está sendo usada para medir aquela parte do suco que não caberia uma garrafa inteira. Para expressar em forma de fração, a resposta seria $\frac{5}{2}$, isto é, "cinco meias-garrafas".

Medida

Para Araújo e Rezende (2014), a fração pode ser representada como medida por meio da comparação entre duas grandezas e se referir a quantidades discretas ou contínuas. Como exemplo, o cálculo de probabilidade de ocorrência de um evento, obtido por meio da razão entre o número de casos prováveis e o número de casos possíveis que possam ocorrer. Com isso, a chance desse evento ocorrer varia de 0 a 1, e é, na maioria das vezes, representada por uma fração. O conceito de porcentagem também pode ser empregado para conceituar a fração como medida.

Um exemplo prático para essa situação é: Em uma urna há 30 bolas; 10 amarelas, 10 azuis e 10 vermelhas. Qual a chance de se tirar, dessa urna, uma bola azul?

Quociente

A fração como quociente, de acordo com David e Fonseca (1997), ocorre ao utilizar a fração associada à ideia de partilha. Isto é, esse significado é empregado quando a divisão é a melhor maneira de se resolver o problema. Para isso, existem duas variáveis que devem ser consideradas, o numerador e o denominador, visto que o resultado da fração representa o quociente desses dois números. Assim, têm-se a situação em que $\frac{m}{n}$, com m e n inteiros, sendo $n \neq 0$, na qual quer se representar a divisão $m \div n$.

Um exemplo dessa representação seria: Existem 2 chocolates que devem ser divididos entre 5 pessoas. Quanto cada pessoa irá receber? Nesse caso, o estudante deve reconhecer que o quociente 2 ÷ 5 ou a fração $\frac{2}{5}$ representa a quantidade de chocolates que cada pessoa receberá. Isto é, o estudante pode apresentar como resposta 0,4 ou $\frac{2}{5}$ de chocolates para cada pessoa. Porém, de acordo com David e Fonseca (1997), os estudantes apresentam dificuldades em perceber que a fração $\frac{2}{5}$ é um número, e, com isso, acaba não aceitando como resposta a uma operação. Dessa forma, de acordo com as autoras, cabe ao professor fazer as devidas intervenções e mostrar que ambas as respostas estão corretas.

Operador multiplicativo

David e Fonseca (1997, p. 69) afirmam que "interpretar o número racional como operador consiste em atribuir-lhe um papel de *transformação*: ele representaria uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor neste processo." Isto é, a fração atua como um fator transformador de um número, ao ser multiplicado por "a" e, em seguida, dividido por "n", da fração representada por $\frac{m}{n}$, sendo m e n número inteiros e $n \neq 0$. (ARAÚJO E REZENDE, 2014).

De acordo com David e Fonseca (1997), em um conjunto contínuo, a fração como operador demonstra uma combinação de ampliação-redução. Se a fração $\frac{m}{n}$, sendo m e n números inteiros, e $n \neq 0$, age sobre um segmento de reta, por exemplo, o comprimento dessa reta é ampliado "m" vezes e, depois, reduzido por um fator "n".

As autoras afirmam que, no caso de trabalharmos com um conjunto discreto, a interpretação da fração torna-se igual a um multiplicador-divisor. Exemplificando, um conjunto de "a" elementos é transformado por uma fração $\frac{m}{n}$, sendo m e n número inteiros, e $n \neq 0$, primeiro em um conjunto com $m * a$ elementos e este é, posteriormente, reduzido à $\frac{m*a}{n}$.

Monteiro (2013) apresenta o seguinte exemplo: Existem 36 alunos de uma classe e deve ser aplicado o operador $\frac{2}{3}$ (dois terços) para obter-se o resultado. Logo, os estudantes devem multiplicar o número total de alunos da classe por 2 e, logo em seguida, dividir por 3 ou dividir o número total de alunos por 3 e, em seguida, multiplicar por 2 para encontrarem um estado final de 24 alunos.

Razão

Para David e Fonseca (1997, p.66), "a fração, quando associada a uma razão, expressa um *índice comparativo"*. Por intermédio desse significado, são abrangidos os conceitos de escala e proporção. Dessa forma, a razão realiza a comparação, enquanto a proporção faz a igualdade.

Assim, sabendo-se que existem duas grandezas *m* e *n,* a razão entre *m* e *n,* com $n \neq 0$, é o quociente entre *m* e *n: m* ÷ *n* ou $\frac{m}{n}$.

Um exemplo prático e bastante utilizado nas salas de aula é: *A distância entre duas cidades em um mapa de escala 1 : 600000 é de 8,5 cm. Qual a distância real entre essas duas cidades?*

A escala de 1 : 600000 significa que cada 1 cm no mapa representa 600000 cm (6 km) na realidade, ou ainda, um comprimento representado no mapa é $\frac{1}{600000}$ do comprimento real. Assim, 8,5 cm equivale a 51 km, ou seja, a distância real entre essas duas cidades é de 51 km.

Esses significados de frações, de acordo com os autores citados nessa seção, são os mais comuns no ambiente escolar. Entretanto, os livros didáticos, muitas vezes, deixam de abordar alguns desses significados, priorizando outros. Como exemplo, Lima (2014) cita os significados número e quociente como um dos poucos abordados. Assim, o planejamento de aula do professor, que desconhece o significado ou por falta de material didático que possa auxiliá-lo, não aborda esses significados, prejudicando o estudante.

Ressaltamos que, nesta pesquisa, entre os significados de frações, apropriamo-nos do significado parte-todo, para o desenvolvimento da nossa sequência didática, por ser o mais utilizado pelos professores e livros didáticos, conforme relata Nunes et. al (2003). No entanto, ressaltamos que é importante trabalhar com todos os diferentes significados que uma fração apresenta, para uma melhor compreensão do conteúdo fração.

2. 2 Comparação e equivalência de frações

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, – o ensino de frações inicia-se no 4º ano do Ensino Fundamental. Esse primeiro contato dos estudantes, com frações, tem como objetivo fazê-los reconhecer as frações unitárias – $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$ – como unidades de medidas menores do que uma unidade. (BRASIL, 2016).

No 5° ano, o ensino de frações deve ser desenvolvido de forma que os estudantes sejam capazes de identificar e representar frações, associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo; identificar frações equivalentes; comparar e ordenar números racionais positivos. No 6º ano, as definições de frações são retomadas, estudando-se as quatro operações: Adição, subtração, multiplicação e divisão. (BRASIL, 2016).

Assim, nos três primeiros anos do Ensino Fundamental I, os estudantes lidam com o conceito de números naturais, suas propriedades e os aplicam nas operações matemáticas básicas. Com isso, quando se deparam com as frações, no 4º ano, precisam fazer algumas rupturas dentro do conjunto dos números naturais. No entanto, de acordo com Monteiro (2013), muitos não conseguem e são prejudicados nos anos seguintes, apresentando dificuldades com as ideias básicas de frações, por exemplo, alguns significados: quociente, parte-todo e razão. Como consequência, o estudante, ao se deparar com a comparação e equivalência de frações, também irá apresentar dificuldades, "resultado de deficiência do entendimento das ideias básicas de Frações" (Ibid., p. 137).

Dessa forma, Monteiro (2013) afirma que a principal dificuldade dos estudantes – com o conteúdo comparação e equivalência de frações – está no fato de tratarem o numerador e o denominador da fração como se fossem dois números naturais independentes, consequência da não compreensão das ideias básicas de frações.

Segundo Monteiro (2013), a comparação de fração também trabalha com a ideia de ordem, porém, a compreensão de ordenação é outra dificuldade apresentada pelos estudantes. Nesse sentido, Quaresma e Ponte (2012) relatam que essa dificuldade está no fato de que, "nos números racionais não existe uma relação ordinal óbvia que permita ordená-los de forma simples." (p. 44). Com isso, é muito comum o estudante, quando se depara com $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, por exemplo, no primeiro momento, fazer a comparação como efetuam no conjunto dos naturais.

Nesse sentido, Merlini (2005) explica que, dentro do conjunto dos números naturais, a ideia desenvolvida é a de que os números são construídos segundo uma ordem, na qual o sucessor de um número é ele próprio acrescido de uma unidade. No entanto, os números podem ser dispostos segundo uma ordenação constante. Com isso, essa ideia precisa ser rompida, pois, ao comparar dois números naturais dizemos que, por exemplo, $3 < 4$. Já na comparação de duas frações, dizemos que $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$. E essa relação para o estudante pode ser contraditória.

Nessa direção, Patrono e Ferreira (2011) relatam que, quando as frações e a comparação entre elas aparecem como um novo conceito, o estudante precisa modificar ou relacionar esse conceito conforme os conhecimentos prévios que já domina para que ele possa apropriar-se do novo conceito. Desse modo, quando o professor pergunta, qual é o maior: $\frac{2}{9}$ ou $\frac{5}{9}$, a iniciativa do estudante é comparar o tamanho do número: 5 > 2. Assim, quando ele tem contato com esse novo conteúdo, recorre às ideias, anteriormente, conhecidas e, como são frações de mesmo denominador, a comparação é realizada pelo número de partes (5 contra 2). Depois, esse novo conceito é agrupado e, imediatamente, é feita a associação.

Nesse caso, percebe-se que, intuitivamente, o estudante consegue saber qual fração é maior justamente pelo maior número presente no numerador. Assim, ele consegue perceber que mais partes, com relação ao todo presente no denominador, significam uma fração maior.

As autoras reforçam, ainda, que, quando se tem frações com numeradores iguais, o estudante tende a pensar no mesmo raciocínio e no caso de, por exemplo, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$, achar que a maior é a que tem o denominador maior, pois 5 > 4. Acreditamos que uma forma de mostrar que isso não se aplica nesse caso é utilizar materiais manipulativos, como o kit de frações utilizado nesta pesquisa, em que, o estudante terá a oportunidade de visualizar a situação e refletir sobre ela, descobrindo novas maneiras de mudar o método aprendido anteriormente para a compreensão do novo conceito.

Para Patrono e Ferreira (2011), o objetivo será alcançado e proveitoso quando o professor tiver capacidade de realizar as comparações sem precisar usar, obrigatoriamente, o material manipulativo.

De acordo com Nunes (2003), fazer comparação de frações parece ser algo muito simples de se ensinar. Por outro lado, as frações nos enganam quando se faz uma comparação determinando a maior, somente, com base no numerador ou denominador. É importante esclarecer e mostrar para os estudantes que esse procedimento nem sempre funciona.

Para tanto, mais uma vez, reforçamos que o uso de materiais manipulativos no ensino de matemática é opção excelente para o desenvolvimento do aprendizado do estudante nesse contexto. Assim, conforme explica Patrono e Ferreira (2011), por meio de recursos em que o estudante visualiza as partes fracionárias, ele percebe que $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{5}$, porque o inteiro está dividido em um número menor de pedaços, isto é, quanto mais dividido for o inteiro, menores serão as partes. Ressaltamos que essa ideia não é natural e precisa ser construída.

Uma forma diferente das duas anteriores, em que os métodos de comparação não podem ser utilizados rapidamente, observando denominadores e numeradores, é quando as frações – a serem comparadas – não têm nem os numeradores e nem os denominadores iguais. Dessa forma, Patrono e Ferreira (2011) explicam que um novo método terá que ser criado, possibilitando, ao estudante, perceber que só será possível compará-las se as frações tiverem o mesmo numerador ou denominador.

Com isso, ainda de acordo com as autoras, o estudante, apenas observando as representações fracionárias $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{7}$, por exemplo, pode ter dificuldade em encontrar qual é a maior, necessitando, em um primeiro momento, do uso dos recursos manipulativos.

Entretanto, é importante que o estudante consiga resolver mesmo sem o uso de materiais manipulativos ou desenhos. Nesse sentido, Patrono e Ferreira (2011) ressaltam que, nesse instante, é essencial a participação do professor para elaborar questões que ajudem na comparação, propiciando que o estudante pense na equivalência de frações como uma forma de resolvê-la. Caso haja a compreensão, a ideia de equivalência será utilizada para conseguir frações com o mesmo numerador ou denominador. Com base nela, verifica-se qual tem maior número de partes ou a que está dividida em menos partes.

As autoras relatam que, quando o estudante compreende a comparação de frações, ele faz a coordenação da compreensão antiga e da nova, isto é, ativa ideias já desenvolvidas para a comparação dos números, mudando-os e concretizando novos conceitos.

Segundo Post et al. (1986, *apud* QUARESMA E PONTE, 2012), muitas vezes, o estudante, ao se deparar com exercícios de comparação de frações, utiliza de diversas estratégias espontâneas informais para chegar a uma solução. Assim, os autores citam três dessas estratégias que detalhamos a seguir.

Umas das estratégias é o *pensamento residual* que, segundo os autores, refere-se à quantidade necessária para se construir o todo. Exemplificando, na comparação entre as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$, os estudantes podem perceber que, na primeira, falta $\frac{1}{4}$ para completar o todo (o valor residual) enquanto, na segunda, só falta $\frac{1}{6}$, e concluir, então, que $\frac{5}{6} > \frac{3}{4}$.

Outra estratégia é a *utilização* de *pontos de referência.* Essa estratégia, de acordo com os autores, "envolve a comparação de duas frações utilizando uma terceira como referência, muita das vezes $\frac{1}{2}$ e às vezes 1." (Ibid., p. 45). Utilizando as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{7}$ como exemplo, o estudante, ao utilizar essa estratégia, dirá que $\frac{5}{7}$ é maior do que $\frac{2}{5}$, porque a primeira fração é maior do que a metade, e a segunda, é menor do que a metade.

A terceira estratégia é o *pensamento diferencial.* Utilizando essa estratégia, os estudantes afirmam, por exemplo, que $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$ são equivalentes, porque ambas exigem apenas uma parte para formar o todo. Em uma situação como essa, os estudantes focam na diferença entra 4 e 3 e entre 6 e 5, mas deixam de considerar o tamanho real da fração. Para os autores, essa forma de pensar é característica dos números naturais que, normalmente, conduz os estudantes a resultados incorretos.

Os autores ressaltam, ainda, que os estudantes que utilizam o pensamento residual e pontos de referência são, geralmente, mais assertivos do que os que usam o pensamento diferencial.

Segundo Monteiro (2013), para fazer a comparação de frações, os estudantes precisam utilizar seus conhecimentos sobre o significado das frações e a ideia de frações equivalentes, pois, quando se quer comparar duas frações e determinar qual é a maior, menor ou igual que a outra, uma das aplicações da ideia de frações equivalentes se manifesta. Por exemplo, para comparar $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$, há frações equivalentes a essas, com denominador 24, $\frac{18}{24}$ e $\frac{30}{24}$, e assim, verificamos que $\frac{5}{6}$ é maior. No entanto, o autor ressalta que esse procedimento, geralmente, não é muito significativo para os estudantes. Assim, acreditamos que utilizar materiais manipuláveis é uma das alternativas para que a compreensão do conteúdo seja mais significativa, pois proporciona a reflexão por parte dos estudantes.

Garcez (2013) afirma que a importância do conceito de equivalência "pode ser vista na sua utilização para se comparar e ordenar frações, e também para realizar operações." (p. 62-63). Compreender frações equivalentes à uma fração determinada, em alguns casos, de acordo com o autor, é a solução na resolução de vários problemas. Assim, o autor destaca três pontos que acredita serem fundamentais para o entendimento do conceito de equivalência, tanto para os estudantes quanto para os professores. Eles são:

> 1. Compreender que duas frações são equivalentes quando representam a mesma quantidade, isto é, se forem o mesmo número.
> 2. Compreender que ao se multiplicar e/ou dividir os termos da fração por um mesmo número, diferente de zero, podemos encontrar uma fração equivalente a inicial.
> 3. Compreender a propriedade principal que nos leva a reconhecer se as duas frações são equivalentes. (GARCEZ, 2013, p.63).

Assim como o autor, acreditamos que esses três pontos bem trabalhados – assuntos como comparação e operações de adição e subtração de frações – proporcionam, aos estudantes, mais chances para compreender e consolidar o conteúdo.

Evidentemente que aprender sobre a comparação e equivalência de frações requer tempo, dedicação e desenvolvimento do pensamento, pela extensão do conteúdo que demanda uma capacidade de abstração.

Nesse sentido, Nunes (2003) ressalta que o professor deve encaminhar a comparação e equivalência de frações de uma maneira conceitual e não como um conjunto de regras, pois os estudantes precisam entender o motivo de aprenderem o conteúdo e saberem em que aplicar, e como está relacionado com os contextos escolares. Compreendemos que não é uma tarefa fácil, mas, assim como a autora, acreditamos que, só assim, os estudantes aprenderão de forma mais significativa, e não ficarão, somente, memorizando regras e algoritmos.

2.3 Algumas perspectivas para o ensino de frações

Já se pode observar nas escolas que o processo de ensino e aprendizagem está em constante mudança a fim de ser diversificado, com apresentação de metodologias e mecanismos que proporcionem maior participação do estudante para a construção do seu próprio conhecimento. Assim, de acordo com Monteiro (2013), é de suma importância o reconhecimento e a individualidade de cada estudante, para que, assim, possam ser oferecidas condições adequadas de ensino compreendendo a diferença de cada indivíduo e maximizando o processo de ensino e aprendizagem.

Pesquisas realizadas por Magina e Campos (2008), Merlini (2005), Monteiro (2013) e Nunes e Bryant (1997) apontam que a aprendizagem de frações é um dos conteúdos que os estudantes apresentam bastantes dificuldades, e uma delas está relacionada ao conceito e aos diversos significados de frações.

Monteiro (2013), por exemplo, destaca que o estudo de frações não é absorvido pelos estudantes, pois, mesmo iniciando seu estudo nas séries iniciais, quando estão nos anos finais do Ensino Fundamental, ainda não compreendem corretamente os significados associados e os procedimentos de cálculos envolvendo frações.

Nessa direção, Nunes e Bryant (1997) apontam que uma possível explicação para a dificuldade de aprendizagem tenha ligação com a ruptura da noção de números naturais que os estudantes têm. Com isso, é importante a compreensão das frações e sua amplitude, primeiramente, pelo professor, ao reconhecer a individualidade de aprendizado de cada estudante, a fim de que esse estudante possa compreender o conteúdo das frações e conseguir aplicar.

Monteiro (2013) ressalta que, a passagem da compreensão dos números naturais para as frações pode ser visualizada como uma das dificuldades iniciais para o processo de ensino e aprendizagem, contudo, muitos estudantes conseguem compreender essa ruptura, mas, ainda assim, não alcançam êxito quanto ao aprendizado e externalização das frações quando se deparam com exercícios de aplicação do conteúdo.

Ao pensar em frações como números naturais, os estudantes enfrentam vários obstáculos, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais[3] - PCN (BRAISIL, 1998):

- ✓ Um deles está ligado ao fato de que cada número racional pode ser representado por diferentes (e diversas) escritas fracionárias; por exemplo: $\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{4}{20}$ e $\frac{8}{40}$. Como podemos observar, um mesmo número é representado por várias formas;
- ✓ outro possível, está relacionado à comparação entre frações. No conjunto dos números naturais, estão acostumados com a relação $5 > 3$. Já no conjunto dos números racionais, terão que fazer uma relação que pode parecer contraditória, por exemplo, $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$;
- ✓ ao multiplicar um número natural por outro natural (diferente de 0 ou 1), espera-se encontrar, como resultado, um número maior que ambos. Porém, ao multiplicar, por exemplo, 5 por $\frac{1}{2}$, acham estranho quando constatam que o resultado é menor do que 5;
- ✓ na sequência dos números naturais, é possível falar o antecessor e o sucessor de um determinado número. Já com as frações isso não é possível, pois, entre duas frações, é sempre possível encontrar outra.

Para Monteiro (2013, p. 111), "a simples 'transferência' das propriedades ou características de um tipo de número para outro pode tornar-se um 'problema' no processo de aprendizagem das Frações". Assim, uma forma de estimular o aprendizado de frações é mostrar, aos estudantes, esse conteúdo em vários contextos. Um exemplo é trabalhar com atividades

[3] Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal com o objetivo principal de orientar os educadores por meio da normatização de alguns fatores fundamentais concernentes a cada disciplina. Esses parâmetros abrangem tanto a rede pública, como a rede privada de ensino. Embora não sejam obrigatórios, os PCN servem como norteadores para professores, coordenadores e diretores, que podem adaptá-los às peculiaridades locais. Ressaltamos que existem documentos mais atuais como a BNCC, porém os PCN, ainda, são usados por professores como consulta para elaboração de planejamentos.

parecidas que estão acostumados a realizar com os números naturais, como somar, ordenar e dividir.

Além das possíveis dificuldades citadas acima, Merlini (2005) destaca que, normalmente, os estudantes não compreendem que uma fração pode ter o numerador maior do que o denominador, por ainda se reportarem ao significado parte-todo. Isto é, para eles, a fração tem que ser uma representação menor que a unidade.

Para a Merlini (2005), Nunes (2003), Monteiro (2013) e outros autores, o significado parte-todo é trabalhado para iniciar com o conceito fração e, geralmente, é mais explorado, pelos professores, o conceito com quantidade contínua em que o todo é dividido em partes iguais. Neste caso, o numerador será sempre menor do que o denominador. Assim, Merlini (2005, p. 189) enfatiza que, "esse procedimento pode, muitas vezes, não dar a chance do aluno perceber as frações impróprias (numerador maior que denominador)."

Magina e Campos (2008) apontam que alguns estudantes até aprendem a manipulação dos números racionais, mas não em razão da sua correta compreensão acerca do seu conceito. Com isso, Nunes e Bryant (1997) evidenciam que, por vezes, o estudante demonstra que aprendeu uma aplicação superficial do conteúdo, mas sem entender seu conceito. Ainda apontam que:

> Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não a têm. Elas usam os termos fracionários certos; falam sobre frações coerentemente, resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba (NUNES; BRYANT, 1997, p. 191).

Autores, como os citados nessa seção, abordam pesquisas com a temática acerca da dificuldade do ensino e aprendizagem de frações, buscando avaliar os principais pontos de dificuldade e de erros cometidos pelos estudantes quando devem aplicar o aprendizado de frações em exercícios que envolvam o conteúdo, como equivalência, comparação, adição e subtração de frações.

Na pesquisa de Monteiro (2013), foi realizado um experimento, com testes adaptativos implementados no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (Siena), com 19 estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II. Por meio dessa pesquisa, foi possível apresentar as principais dificuldades relacionadas ao conteúdo de fração. Uma delas é que, "o entendimento da fração como número é imprescindível para que o aluno inicie a compreensão de equivalência e posteriormente realize os algoritmos das operações corretamente." (Ibid., p. 101).

Para o autor, a equivalência de frações foi um dos conceitos que os estudantes, participantes de sua pesquisa, apresentaram grandes dificuldades iniciais. Infere, ainda, que essa dificuldade, talvez, resulte da falta de compreensão de alguns significados das frações. Outra dificuldade apresentada pelos estudantes – quanto à aplicação do conteúdo de frações – é a similaridade da simbologia entre os números fracionários com os números naturais, apenas na diferenciação de um traço entre os números para as frações.

De acordo com Monteiro (2013), a vivência com o entendimento acerca dos números naturais direciona os estudantes a compreenderem as frações como "um conjunto de dois números naturais separados por um traço" (Ibid., 2013, p. 54), induzindo-os a utilizarem o conhecimento aplicado dos números naturais para as frações, denominado, por alguns autores da literatura vertente, como "efeito de distração dos números naturais". Outra similaridade consiste pela nomenclatura, muito semelhante à dos números ordinais, o que, talvez, confunda os estudantes e conduza-os ao erro.

Monteiro (2013) mostra, em sua pesquisa, a confirmação de algumas das principais evidências da dificuldade de ensino e aprendizagem do conteúdo de frações. Primeiramente, apresenta alguns dos erros mais comuns dos estudantes, por exemplo, quanto à equivalência de frações, adição e subtração de frações. Valioso ressaltar alguns dos exemplos citados pelo autor, tais como:

Figura 1: Exemplo de erros dos estudantes com exercício de equivalência de frações

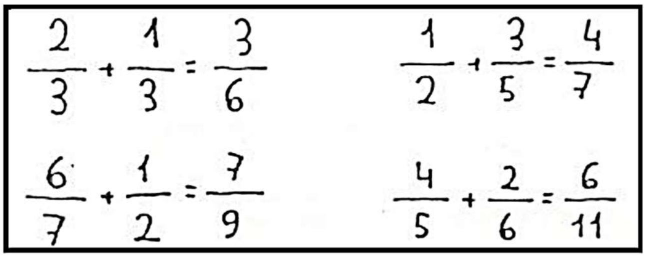
$$\frac{2}{5} = \frac{8}{11} = \frac{14}{17}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988 apud MONTEIRO, 2013)

Segundo Monteiro (2013), o exemplo acima mostra uma situação em que "a Fração é considerada como um par de números naturais que não estão relacionados entre si" (Ibid., 2013, p. 54). Para o autor, a resposta apresentada pelo estudante demonstra o reconhecimento de um modelo aditivo "em que os numeradores (somam seis) se estendem aos denominadores" (p. 54).

A figura, a seguir, apresenta um exemplo de erro comum na adição de frações, sendo:

Figura 2: Erro de estudantes para a adição de frações

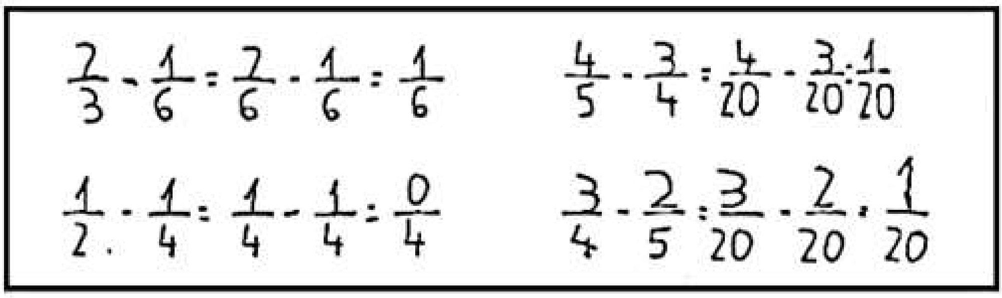


Fonte: Llinares e Sánchez (1988 apud MONTEIRO, 2013)

As respostas acima mostram que um dos erros mais comuns de serem encontrados é a soma dos numeradores e denominadores de forma independente. Quando se menciona a subtração de frações, também é possível encontrar erros semelhantes aos supracitados. Monteiro (2013) aponta como causa que “o erro pode estar presente na semelhança entre as Frações e os Números Naturais levando ao uso de procedimentos aditivos com os Naturais” (p. 55), ou seja, tratam o numerador e o denominador da fração de forma independente como se fosse dois números naturais isolados.

De acordo com Monteiro (2013), o exemplo a seguir mostra um dos erros que, também, é considerado bastante comum entre os estudantes.

Figura 3: Erro de estudantes para a subtração de frações



Fonte: Llinares e Sánchez (1988 apud MONTEIRO, 2013)

Para Llinares e Sánchez (1988 *apud* MONTEIRO, 2013), provavelmente, para esse estudante, foi ensinado a regra para reduzir as frações a um denominador comum utilizando o método do mínimo múltiplo comum (MMC). Dessa forma, o estudante faz o cálculo corretamente do MMC, porém não altera os numeradores. Há indicativos de que esse estudante pode ter se esquecido de algum passo do algoritmo ensinado. Para os autores, esse tipo de erro, talvez, seja devido a uma rápida introdução ao cálculo algorítmico, com isso, o estudante modificou o manuseio dos passos do algoritmo em algo sem sentido. Assim, não faz associação com a ideia de equivalência de frações.

Um dos fatores, mencionado por Garcez (2013), que está relacionado à dificuldade dos estudantes em trabalhar com frações, é a utilização precoce de regras e algoritmos. Nesse sentido, Lopes (2008, p. 4) ressalta que, "a prescrição de regras e macetes para realizar operações" é um problema grave que pode prejudicar o aprendizado do estudante.

Merlini (2005) buscou elucidar o conceito de fração e seus diferentes significados para estudantes da 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental, atual 6º e 7º anos. A autora buscou apresentar estratégias utilizadas pelos estudantes quanto a problemas que abordem o conceito de fração em seus cinco significados: *número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo*. O foco da pesquisa foi elaborar um mapeamento referente a quais estratégias mais utilizadas pelos estudantes, ao que resultou em nove estratégias distribuídas conforme os cinco significados do conceito de frações.

A primeira estratégia apresentada foi a *estratégia parte-parte*. Os estudantes adotantes dessa estratégia desprezavam o todo, fazendo a contagem das partes, mas sem considerar o todo, tanto com quantidades discretas como em quantidades contínuas. Outra estratégia utilizada pelos estudantes foi a *inversão do numerador pelo denominador*, aplicando, no momento das resoluções, a inversão das posições do numerador pelo denominador, o que pode significar a lacuna de distinção que os estudantes fazem da relação entre numerador e denominador. Quanto ao significado de quociente abordado nas questões, foi apresentada também a estratégia *quociente remete para o parte-todo*. Essa estratégia foi notada pelo desprezo dos estudantes das duas grandes envolvidas nas operações, considerando apenas uma das apresentadas. Essa estratégia também aponta uma das dificuldades de aprendizagem dos estudantes quanto a reconhecerem o significado parte-todo, que é o significado base para o conceito de frações (MERLINI, 2005).

Quanto ao significado *número icônico*, a estratégia *interpretação da fração literalmente,* apresenta o erro dos estudantes ao interpretarem a fração de forma literal. Ao visualizarem $\frac{1}{2}$, os estudantes observam como um inteiro e metade do inteiro, e não um meio, com ligação direta ao *número icônico*. A estratégia *desprezo de conservação da área*, com ligação ao significado *parte-todo de quantidade contínua icônica*, os estudantes que utilizaram essa estratégia não consideraram a conservação da área, sendo a título de exemplificação, a não percepção dos estudantes quanto ao fator que a parte destacada da figura representava duas das partes que foram divididas na figura de representação. Outra estratégia ligada ao significado *parte-todo* foi a denominada como *estratégia denominador maior que numerador*, com a inversão do numerador pelo denominador, pois os estudantes entenderam que o numerador não pode ser maior que o denominador (MERLINI, 2005).

Por fim, Merlini (2005), ainda, apontou algumas estratégias ligadas à incapacidade de aplicação correta dos significados do conceito de frações nas situações-problemas apresentadas. Uma delas foi a *estratégia utilização de dados do problema*, com elaboração equivocada das respostas elaboradas, contando com dados apresentados no enunciado ou como parte da resposta da questão. Já a *estratégia de números sobrepostos* evidenciou que os estudantes tratam as frações como dois números naturais, distintos, e que sua diferença é a separação pelo traço. Ainda mostrou a *estratégia utilização de operação* com a apresentação do erro do estudante no anseio por apresentar a resposta, utilizando algum tipo de operação matemática entre o numerador e denominador.

Essas estratégias apresentaram alguns dos principais erros cometidos pelos estudantes quanto à aprendizagem do conceito de frações, pois foram demonstradas várias situações-problemas e identificados os principais erros atrelados ao conceito de frações.

Merlini (2005) enfatiza que as diferentes estratégias de resolução, efetuadas pelos estudantes para um mesmo significado, provavelmente se relacionam à forma como é ensinado o conceito fração nas escolas. Normalmente, alguns livros didáticos enfatizam alguns significados, por exemplo, parte-todo e operador multiplicativo e, como consequência, em detrimento de outros, o estudante é prejudicado e induzido a não construção do conhecimento desse conceito.

A seguir, discutiremos sobre a importância da utilização de materiais didáticos manipuláveis para o ensino e a aprendizagem de frações.

3 MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS

Nessa seção, definimos o que são materiais didáticos manipuláveis de acordo com Lorenzato (2006), Souza e Oliveira (2010) e Reys (1971), a importância desses materiais para o Ensino e a Aprendizagem dos estudantes, o Ensino de Matemática e o Ensino de Frações. Vários autores apresentam a definição de materiais manipuláveis, porém, apresentaremos, nessa seção, três definições, e a que irá conduzir nossas discussões é a de Lorenzato.

Lorenzato (2006, p. 18) define materiais didáticos manipuláveis como "qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem." Nesse sentido, uma calculadora, um quebra-cabeça e um jogo podem ser considerados materiais didáticos manipuláveis se o professor os utilizar como recurso didático para ensino e a aprendizagem.

Para Souza e Oliveira (2010, p. 2), materiais manipuláveis são "objetos, desenvolvidos e/ou criados para trabalhar com conceitos matemáticos de forma que venha a facilitar a compreensão e o desenvolvimento do aluno." Acrescenta ainda que são materiais que podem ser criados/produzidos pelo estudante com a orientação do professor ou pelo próprio professor.

Segundo Reys (1971, *apud* MATOS e SERRAZINA, 1996, p. 193), materiais manipuláveis são "objectos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar." Ou seja, pode ser qualquer objeto do nosso dia a dia ou objetos utilizados pelos estudantes para formarem/representarem alguma ideia.

Mediante as definições acima, acreditamos que todo objeto que utilizamos para a formação de ideias e o aprendizado de um estudante pode ser considerado como um material didático manipulável. Assim explanaremos a importância do uso desses materiais para o processo de ensino e aprendizagem.

3.1 A importância do uso de materiais didáticos manipuláveis para o processo de ensino e aprendizagem

Utilizar materiais didáticos para o processo de ensino e aprendizagem não é algo tão simples como pode parecer ser. Nacarato (2005, p. 4) ressalta que "o uso não apropriado ou, ainda, pouco exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem." Desse modo, podemos inferir que não basta o professor ter um bom material manipulável como recurso didático, pois, mais importante do que isso é saber utilizá-lo corretamente para o aprendizado do estudante.

De acordo com Lorenzato (2006, p. 3), “um dos elementos que dificulta a aprendizagem com base em materiais manipuláveis diz respeito a sua não relação com os conceitos que estão sendo trabalhados.” Nesse sentido, Smole e Diniz (2016, p. 11) enfatizam: “nada valem materiais didáticos na sala de aula se eles não estiverem atrelados a objetivos bem claros e se seu uso ficar restrito apenas à manipulação ou ao manuseio que o aluno quiser fazer dele.”

Assim, compreendemos ser de suma importância que o professor observe e adeque os objetivos, os materiais, o tempo, a preparação prévia dos estudantes para que o material a ser trabalhado esteja em consonância com os conteúdos e intenções desejados. Caso contrário, o material poderá tornar-se um brinquedo, nas mãos do estudante, cuja utilização não promoverá reflexão nem o desenvolvimento de conceitos.

Vale e Barbosa (2014, p. 7) relatam que:

> não é o material em si que é importante, mas as transformações realizadas sobre ele. É através de uma série contínua de tentativas efetuadas sobre o material que os alunos descobrem relações e propriedades, facilitando o salto do concreto para o abstrato.

Por esse motivo, a importância de o material estar sempre em diálogo com o conteúdo. Com isso, acreditamos que a utilização de materiais manipuláveis pode tornar-se significativa no ensino caso o professor seja um efetivo mediador das atividades. Entretanto, para isso, Smole e Diniz (2016, p. 14) destacam que “as atividades devem conter boas perguntas, ou seja, devem constituir boas situações problemas que permitam ao aluno ter seu olhar orientado para os objetivos a que o material se propõe.” Ou seja, não basta entregar o material ao estudante sem que as atividades estejam atreladas ao conteúdo, pois, dependendo da metodologia utilizada pelo professor, o estudante poderá aprender ou não o conteúdo que se pretende ensinar.

Nessa direção, analisando a importância do uso de materiais manipuláveis para o Ensino de Matemática, Vale e Barbosa (2014, p. 6) afirmam: “Em um ensino que utilize materiais manipuláveis, as atitudes dos estudantes face à Matemática melhoram e, de modo geral, a compreensão dos conceitos matemáticos aumenta.” Acreditamos que essa melhoria poderá ocorrer se o professor estiver seguro da utilização do material e conseguir mostrar, aos estudantes, a relação que o material tem com o conteúdo. Além disso, ao utilizar materiais manipuláveis, é necessário que o professor esteja atento a intervir, no momento certo, sem induzir o estudante a uma conclusão. Ou seja, é necessário questionar e provocar, pois, assim, os estudantes têm a oportunidade de formular hipóteses e concluírem. Caso não sejam feitas as intervenções adequadas, talvez, impossibilite melhoria no aprendizado do estudante.

De acordo com Sarmento (2010), uma tarefa de sala de aula, em que os estudantes têm a oportunidade de utilizar de materiais manipuláveis, promove um sucesso no aprendizado, pois existe a possibilidade de os estudantes desenvolverem ações que construam um saber consistente e significativo. Esse autor destaca algumas vantagens na aprendizagem dos estudantes quando utilizam de materiais manipuláveis nas aulas de Matemática:

> a) Propicia um ambiente favorável à aprendizagem, pois desperta a curiosidade das crianças e aproveita seu potencial lúdico; b) Possibilita o desenvolvimento da percepção dos alunos por meio das interações realizadas com os colegas e com o professor; c) Contribui com a descoberta (redescoberta) das relações matemáticas subjacente em cada material; d) É motivador, pois dar um sentido para o ensino da matemática. O conteúdo passa a ter um significado especial; e) Facilita a internalização das relações percebidas (SARMENTO, 2010, p.4).

Assim, acreditamos que a utilização de materiais manipuláveis para o Ensino de Matemática propicie, ao estudante, a formulação de conceitos e a relação desses conceitos com os aprendidos anteriormente e, também, a utilização de experiências do seu dia a dia, porém, segundo Nacarato (2005, p. 3),

> Muitas vezes os professores utilizam os materiais para introduzir uma noção, mas, uma vez chegando a ela (cálculo, propriedade, algoritmo), já não interessa o contexto no qual o material foi utilizado e passa-se a trabalhar apenas no nível abstrato.

Nessa perspectiva, Bordin (2011, p. 20) aponta que:

> O aluno, após manusear várias vezes os objetos e concluir as relações necessárias entre o que estava sendo mostrado com o material e o conteúdo matemático propriamente dito, deve sentir-se seguro para abrir mão desse suporte para seu crescimento e, então, optar por trabalhar sem esse auxílio.

Com isso, compreendemos que o uso inadequado do material manipulável, para o Ensino de Matemática, não oferece a garantia de um aprendizado. Além disso, o professor precisa estar atento, antes de desprezar o material, se o estudante conseguiu perceber a relação entre o material e o conteúdo, e se já está preparado para deixar esse suporte para, então, trabalhar de forma abstrata. Caso o material seja retirado do estudante, sem que ele esteja seguro, talvez se perca todo o processo realizado pelo professor.

Como observamos, os materiais manipuláveis têm seus pontos positivos e negativos, ou seja, contribuem ou não para a aprendizagem matemática, depende muito da forma como o professor trabalhará. Para que o material didático não seja utilizado de maneira equivocada, Silva e Scarpa (2007) destacam que é fundamental o professor – antes de levar o material manipulável ou jogos para sala de aula – efetuar um planejamento do que pretende trabalhar, pois, utilizar esses recursos didáticos, sem que os objetivos estejam nítidos e bem definidos, não garante a aprendizagem dos estudantes.

É imprescindível citar os jogos como recursos didáticos para o Ensino de Matemática, pois, de acordo com Silva e Scarpa (2007, p. 246), “os jogos podem ser um excelente meio para a compreensão e o desenvolvimento cognitivo”. Nesse sentido, Smole et. al (2007) destacam que o professor, ao utilizar jogos nas aulas de Matemática, possibilita, nos estudantes, mudanças significativas, pois o jogo favorece a mudança dos modelos tradicionais pré-estabelecidos pelos livros didáticos e modelos de ensino.

Assim, acreditamos que utilizar jogos para o Ensino e a aprendizagem de Matemática oportuniza, ao professor, inovar suas aulas e despertar, nos estudantes, o interesse em aprender. Nesse sentido, Silva e Scarpa (2007, p. 246) afirmam:

> Os jogos [...] podem ser utilizados em todas as fases da aprendizagem, ou seja, podem ser oferecidos como auxiliar da compreensão de um conceito ou então para promover a fixação do mesmo. Um jogo poderá substituir com vantagens as inúmeras listas de exercícios; por exemplo, um bingo de tabuadas poderá motivar o aluno a memorizá-las e um dominó de expressões poderá, de forma mais agradável, substituir uma lista de exercícios.

Para isso, compreendemos que é necessário o planejamento adequado das aulas, e que o professor relacione o jogo com o conteúdo que pretende ensinar, ou seja, tenha os objetivos bem determinados, pois o estudante com o jogo em mãos, mas sem saber qual a relação dele com o conteúdo, não será beneficiado em sua aprendizagem..

Nesse sentido, Smole et. al (2007, p. 11) relatam que:

> O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, que estão estreitamente relacionadas ao chamado raciocínio lógico.

Entendemos que utilizarmos materiais manipuláveis ou jogos, nas aulas de matemática, não bastam para ensinar os conceitos matemáticos, mas acreditamos que seja um grande passo para uma melhor compreensão dos estudantes sobre esses conceitos.

3.2 A importância da utilização dos materiais didáticos manipuláveis para o ensino de frações

Vários autores, como os citados neste capítulo, preocupados com o ensino de Matemática, estudam alguns conceitos matemáticos, como geometria, números inteiros e frações, buscando analisar o desempenho dos estudantes que exploraram esses conteúdos utilizando materiais manipuláveis ou jogos.

Vale e Barbosa (2015, p. 4) pesquisaram a utilização de materiais manipuláveis para aprender e ensinar geometria. Segundo as autoras, “a geometria é um tema matemático no qual os estudantes apresentam dificuldades, e onde evidenciam fracos resultados, quer em provas nacionais quer internacionais.”

Bordin (2011), preocupada com o ensino e a aprendizagem das operações com números inteiros, elaborou um estudo com estudantes do 7º ano. Seu objetivo foi analisar como o uso de jogos pedagógicos e materiais manipuláveis contribui para a compreensão das operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação de números inteiros.

Santos (2014), em sua pesquisa, verificou as contribuições do uso de materiais didáticos manipuláveis no ensino e aprendizagem das frações, em que fez um comparativo entre duas metodologias: aula expositiva e aula com materiais manipuláveis. Segundo a autora, na aula que utilizou materiais manipuláveis, os estudantes apresentaram um melhor aprendizado.

Em nossa pesquisa, temos como objetivo investigar como a ideia de equivalência de frações, com o apoio de materiais manipuláveis, pode contribuir para a compreensão das operações de adição e subtração em estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II. Assim, buscamos respaldos em alguns autores.

Segundo Santos (2014, p. 22), “o conceito de números fracionários é bastante complexo e difícil de ser abstraído, havendo a necessidade de o aluno manipular materiais didáticos para facilitar o entendimento.” Em consonância com essa autora, acreditamos que o estudante, ao utilizar materiais manipuláveis para aprender fração, terá a oportunidade de construir conceitos, compreender regras e, além disso, perceber a aplicação desse conteúdo em algumas situações do seu dia a dia.

Conforme relata Scolaro (2008, p. 4), “o uso destes objetos reais, nomeados de materiais didáticos manipuláveis, que leva o aluno a tocar, sentir, manipular e movimentar, acabam por tornarem-se representação de uma idéia”. Ou seja, podemos considerar que a manipulação desses materiais proporciona, ao estudante, a materialização de ideias que, algumas vezes, eles têm acesso apenas por meio de teorias, excessivamente, abstratas.

Uma das dificuldades no ensino de frações, de acordo com Santos (2014), é a pouca aplicabilidade do conteúdo nas situações práticas dos estudantes. Nessa direção, Bigode (2014, p. 38) afirma:

> Com o rápido desenvolvimento e a popularização das tecnologias digitais, o uso de frações no dia a dia está se tornando cada vez mais raro. Calculadoras, computadores, balanças digitais, painéis de automóveis e máquinas em geral usam a notação decimal para expressar números e medidas que não são inteiros, conhecidos como "números quebrados".

Nesse sentido, o referido autor afirma que o ensino de frações está se tornando cada vez mais difícil para o professor ensinar, pois as frações, diante do exposto pelo autor, perdem valor utilitário nas atividades cotidianas e profissionais, mas, por outro lado, esse ensino continua tendo relevância nos currículos de Matemática.

Compreendemos que essa não é uma situação fácil de se resolver, mas, assim como, Santos (2014), Scolaro (2008), Soares e Silva (2018) e outros autores já citados neste capítulo, acreditamos que uma metodologia possível de ser utilizada pelo professor, para ensinar esse conteúdo, é o uso de materiais manipuláveis, pois esse recurso didático possibilita auxiliar os estudantes no entendimento desse conceito matemático, ou seja, facilitando, talvez, esse ensino. Conforme relata Scolaro (2008), com base na visualização, os estudantes têm a oportunidade de ir mais além e compreender melhor o conteúdo, nesse caso, fração, ou seja, há a possiblidade de eles perceberem algumas aplicações do conteúdo em situações, por eles, vivenciadas fora da sala de aula.

Para Soares e Silva (2018, p. 5),

> considerando as dificuldades dos alunos em relação ao conceito fração, no que tange a assimilação e abstração, a utilização de materiais manipulativos tem se constituído como uma relevante forma de ensino em Matemática que pode contribuir para a compreensão desse conteúdo ao possibilitar uma maior interação dos educandos com o assunto e permitir a visualização dos conceitos que, várias vezes, não ficam claros na exposição do professor em sala de aula.

Entendemos que os benefícios e as contribuições que o uso do material manipulável oferece aos estudantes não estão nos materiais em si, mas nas ações que esses materiais podem proporcionar, como a concretização de seus pensamentos que favorece elaborar hipóteses e estratégias mais consistentes para uma melhor compreensão do conceito.

Assim, acreditamos que a utilização de materiais manipuláveis para ensinar frações tende a beneficiar tanto o estudante quanto o professor. Nessa direção, Soares e Silva (2018) relatam que, para o estudante, o material manipulável possibilita aguçar a sua curiosidade e despertar um interesse maior pelo conteúdo, além de essa interação com o material promover a criatividade e melhorar seu raciocínio rumo à aprendizagem.

Pensando no professor, Vale e Barbosa (2014, p. 7) mencionam que “há vantagens para os professores quando lhes são dadas oportunidades para explorar uma variedade de estratégias de ensino e recurso didático”, pois, o professor tem a oportunidade de aprender mais.

Em uma aula em que o professor utilize de materiais didáticos como recurso, é possível surgir várias perguntas por parte dos estudantes; perguntas que, às vezes, são surpresas, perguntas inesperadas, que conduzem o professor, cada vez mais, a reflexões, resultando, assim, em um grande aprendizado em relação ao modo como os estudantes aprendem Matemática, pois, cada aula terá novidades diferentes a serem estudadas e pensadas.

4 PERCURSOS METODOLÓGICOS

Nesta seção, descreveremos a modalidade da pesquisa escolhida; o contexto e os sujeitos da investigação; encontros com os sujeitos; o kit de frações no quadriculado e as tiras de frações e a apresentação das tarefas.

4.1 Modalidade da pesquisa

A pesquisa tem como objetivo geral investigar como a ideia de equivalência de frações, com o apoio de materiais manipuláveis, pode contribuir para a compreensão das operações de adição e subtração em estudante do 7º ano do Ensino Fundamental II, sob uma abordagem qualitativa de pesquisa em educação.

Creswel (2007) define algumas características de uma pesquisa qualitativa:

> O pesquisador qualitativo sempre vai ao local onde está o participante para conduzir a pesquisa. Isso permite ao pesquisador desenvolver um nível de detalhes sobre a pessoa ou local e está altamente envolvido nas experiências reais dos participantes. [...] A pesquisa qualitativa é fundamentalmente interpretativa. Isso significa que o pesquisador faz uma interação dos dados. Isso inclui o desenvolvimento da descrição de uma pessoa ou de um cenário, análise de dados para identificar temas ou categorias e, finalmente, fazer uma interpretação ou tirar conclusões sobre seu significado, pessoal e teoricamente, mencionando as lições aprendidas e oferecendo mais perguntas a serem feitas (CRESWEL, 2007, p. 186).

Com isso, acreditamos que o ambiente natural é a fonte direta de dados, o pesquisador, o principal instrumento, e os dados coletados são, predominantemente, descritivos. Além disso, Ludke e André (1986, p.12) destacam que, em uma pesquisa qualitativa, "a preocupação com o processo é muito maior do que com o produto", ou seja, o interesse do pesquisador, ao estudar seu problema de pesquisa, é verificar como ele se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações do dia a dia. Outro aspecto que os autores destacam é que a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.

Com base nas informações acima e com os objetivos específicos de: Investigar a compreensão dos estudantes sobre o conceito, a relação parte-todo e as representações pictóricas e imagéticas das frações; Investigar os modos pelos quais os estudantes compreendem o processo de equivalência de frações e sua relação com as operações de adição e subtração envolvendo esse tipo de número e; Verificar as limitações e possiblidades da utilização de materiais didáticos (kit de frações e tiras) no processo de aprendizagem de frações e suas operações de adição e subtração, – partimos para a pesquisa de campo. Nela, foram realizadas tarefas sobre comparação de frações, equivalência de frações, adição e subtração de frações, um jogo e observação com base na interação do grupo de estudantes. Além da observação das tarefas, foi possível compreender e interpretar determinados comportamentos dos estudantes, tais como, ouvir as opiniões e expectativas e, por fim, analisar as dificuldades e facilidades apresentadas durante as atividades e jogo. Ou seja, não houve o intuito de obter números como resultados – obter dados quantitativos –, mas *insights* por parte dos estudantes, que, muitas vezes, foram imprevisíveis e puderam indicar o caminho para a tomada de decisão sobre o problema de pesquisa.

Para a coleta de dados, foram utilizados como instrumentos: (a) registro em vídeo para análise da interação, facilidades, dificuldades e comentários dos estudantes em duas aulas; (b) tarefas que foram recolhidas ao final de cada aula contendo as respostas dos estudantes; (c) diário de campo baseado no registro escrito e (d) gravador de áudio por meio do celular.

A gravação do vídeo ocorreu em apenas duas aulas, segunda e sexta aula, com a ajuda de uma professora que trabalhava com o pesquisador no turno da manhã. Devido sua disponibilidade, não foi possível fazer a gravação de vídeo de todas as aulas. Já a gravação dos áudios foi efetuada pelo pesquisador, em todas as aulas, porém, não foi uma gravação contínua, pois tinha apenas um aparelho. Com isso, optamos em gravar, apenas, algumas discussões que percebíamos durante as tarefas e quando o pesquisador questionava os estudantes. Por fim, o diário de campo, também, foi registrado pelo pesquisador todos os dias após o término de cada aula.

4.2 O contexto e os sujeitos da investigação

A pesquisa foi desenvolvida na Escola Estadual Menino Jesus de Praga, localizada no bairro Lagoa, Belo Horizonte, Minas Gerais, com os estudantes da turma 721, 7º ano do Ensino Fundamental II. Essa turma era formada por 38 estudantes: 26 meninas e 12 meninos.

A escola tinha quatro turmas de 7º ano, porém, a pesquisa foi aplicada em apenas uma delas devido ao pouco tempo para a realização da pesquisa. A opção pela turma 721 foi decidida pelo professor regente de Matemática, que, conhecendo os estudantes, informou que era uma sala cheia e agitada, mas com estudantes questionadores.

A opção por uma turma de 7º ano ocorreu com base no tema da pesquisa: **O ensino de equivalência de frações para compreensão das operações de adição e subtração**. Entendemos que esse é um conteúdo que os estudantes já estudaram nos anos anteriores (4º, 5º e 6º ano), mas nosso objetivo foi trabalhar com os estudantes que já tiveram contato com o conteúdo fração.

A seguir, apresentamos o planejamento, conteúdo de frações, dos professores que trabalhavam com os estudantes do 5º, 6º e 7º ano nessa escola.

Quadro 1: Distribuição do conteúdo fração de acordo com o planejamento dos professores

Ano	Conteúdo
5º	Fração: representação, leitura e escrita; Reta numérica; Comparação de frações; Operação com frações: adição, subtração, multiplicação e divisão; Fração imprópria, própria ou aparente, número misto; Frações equivalentes; Porcentagem; Noção de probabilidade.
6º	A ideia de número fracionário; Leitura de frações; Comparação de frações com o inteiro; Número misto; Frações equivalentes; Simplificação de frações; Comparação de frações; Fração de uma quantidade; Operação com frações: Adição subtração, multiplicação e divisão; Potenciação e raiz quadrada de frações; Expressões numéricas envolvendo frações.
7º	Representação dos números racionais na reta numérica; Módulo de um número racional; Oposto de um número racional; Comparação de números racionais; Adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais na forma decimal e fracionária; Potenciação e raiz quadrada de números racionais na forma decimal e fracionária; Expressões numéricas envolvendo números racionais.

Fonte: Acervo do autor

O planejamento anual dos professores é baseado no Currículo Básico Comum (CBC) do Ensino Fundamental II da Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. O CBC constitui-se na proposta curricular desenvolvida, no ano de 2005, pela Secretaria de Educação do Estado de Minas Gerais direcionada às escolas da rede pública mineira. De acordo com esse documento, o conteúdo de frações é efetuado, de forma introdutória, no 6º ano, e, no 7º, 8º e 9º ano, é recomendado que o professor aprofunde o conteúdo.

Vale destacar que o período em que aplicamos a pesquisa, os estudantes ainda não tinham estudado o conteúdo fração com o professor da turma, mas estudaram no ano anterior. Além disso, de acordo com o planejamento do professor e conversa sobre sua metodologia de ensino, ele afirmou que não costuma trabalhar com jogos e ou utilizar de recursos didáticos em suas aulas, usa mais o livro didático, escolhido pela escola, e exercícios que, normalmente, escreve no quadro ou imprime. Já o professor do ano anterior, que ministrou aula para a turma pesquisada, de acordo com o seu planejamento de aula, os estudantes estudaram o conteúdo fração no 3º bimestre, entre agosto e outubro de 2018, e, normalmente, ele trabalha com atividades em grupos, jogos matemáticos e utiliza de recursos didáticos quando necessário.

A Escola possui dois turnos – manhã e tarde – e tem turmas do 5º ano do Ensino Fundamental I ao 3º ano do Ensino Médio distribuídas conforme os quadros 2 e 3 a seguir.

Quadro 2: Distribuição das turmas turno da manhã

Turno da manhã: 7hs às 11h30min		
Turmas	Quantidade de turmas	Quantidade de aulas semanais
8º Ano EF II	1	5 aulas de 50 minutos
9º Ano EF II	3	5 aulas de 50 minutos
1º Ano EM	5	4 aulas de 50 minutos
2º Ano EM	4	4 aulas de 50 minutos
3º Ano EM	3	4 aulas de 50 minutos

Fonte: Elaborado pelo autor. ago. 2019

Quadro 3: Distribuição das turmas turno da tarde

Turno da manhã: 13hs às 17h30min		
Turmas	Quantidade de turmas	Quantidade de aulas semanais
5º Ano EF I	2	5 aulas de 50 minutos
6º Ano EF II	5	5 aulas de 50 minutos
7º Ano EF II	4	5 aulas de 50 minutos
8º Ano EF II	3	5 aulas de 50 minutos
9º Ano EF II	1	5 aulas de 50 minutos
1º Ano EM	1	4 aulas de 50 minutos
2º Ano EM	1	4 aulas de 50 minutos

Fonte: Elaborado pelo autor. ago. 2019

As turmas são formadas, pela direção, todo final de ano, e o número de turmas é variável de acordo com a quantidade de estudantes.

Segundo a direção, a escola tem cerca de 90% dos professores efetivos e, entre eles, há professores graduados, especialistas, mestres e doutores. Vale ressaltar que não averiguamos quantos são especialistas, mestres e doutores.

O planejamento das aulas, normalmente, é efetuado em fevereiro, antes de se iniciar o período letivo dos estudantes, quando, os professores se reúnem, por área, e discutem, juntos, a forma como distribuirão os conteúdos de acordo com o CBC e o livro didático.

No planejamento dos professores, alguns trabalhos são comuns a todos os professores, ou seja, projetos que são realizados coletivamente e há a necessidade da participação e colaboração de toda a escola. Alguns projetos mudam de um ano para o outro, mas, normalmente, a escola sempre trabalha com: Feira de Ciências, Feira literária, Virada da Educação e *English and Music Projecto*. Esses projetos são realizados durante um bimestre, definidos em reunião, e depois apresentados para toda a escola e, às vezes, para a comunidade.

A escolha por essa Escola foi definida devido à sua estrutura, direção, professor regente da turma e pelo fato de eu ser professor efetivo neste estabelecimento de ensino quando a pesquisa foi realizada. Por fazer parte do grupo discente da Escola, também seria um fator positivo para fazer negociações caso fossem necessárias. Um exemplo disso foi o fato de que, na primeira aula, os 50 minutos previstos não terem sido suficientes. Com isso, foi possível negociar, com a professora do horário seguinte, a cessão de alguns minutos da aula que ela ministraria, para concluir a tarefa com os estudantes. Com o apoio dos professores, supervisão e direção, foi possível realizar a pesquisa da forma que era esperada.

4.3 Encontro com os sujeitos

Nesta seção, apresentamos como foi realizada a reunião com o diretor, professor, conversa com os estudantes e a entrega do Termo de Consentimento Livre Esclarecido – TCLE –, requerido pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade (Coep/UFMG).

O TCLE é o documento para a análise ética de um projeto de pesquisa, ou seja, é o documento que garante, ao participante da pesquisa, o respeito aos seus direitos. Vale destacar que, nesta pesquisa, preservamos os nomes dos estudantes participantes e utilizamos nomes fictícios escolhidos por eles.

A seguir, apresentamos um quadro com um panorama de como iremos descrever esta seção.

Quadro 4: Encontro com os sujeitos

Data	Ação	Objetivos
21/02/2019	Reunião com o Diretor, Professor e entrega do TCLE – Anexo A e B	Informar e esclarecer a proposta da pesquisa.
22/02/2019	Conversa com os estudantes sobre a pesquisa e entrega do TCLE – Anexo C e D	Informar e esclarecer a proposta da pesquisa.
26/02/2019	Apresentação das tarefas para o professor	Apresentar as tarefas que seriam trabalhadas e receber sugestões dele.

Fonte: Elaborado pelo autor abr. 2019

Como eu fazia parte do corpo docente da Escola, e o professor da turma atua como vice-diretor, no período da manhã, reunimo-nos no dia 21 de fevereiro de 2019, no meu horário vago, para conversarmos sobre a pesquisa. O objetivo foi deixar esclarecido, ao professor e à direção, o que pretendíamos com a pesquisa, qual o tipo de colaboração que seria necessária no decorrer da aplicação e entregar o TCLE requerido pelo Coep.

Após essa primeira conversa e a entrega do TCLE, marquei com o professor para conversarmos com a turma sobre a pesquisa e entregar, aos estudantes, o TCLE para os pais assinarem.

O primeiro contato com os estudantes ocorreu no dia seguinte – 22 de fevereiro de 2019 – e foi um encontro positivo, pois fui bem recebido por todos. Apresentei-me informando que era o professor da Escola no turno da manhã, e que faria uma pesquisa com eles. Achei importante informar que era o professor da Escola, para reduzir o receio dos pais em assinar o TCLE.

Falei sobre o tema da pesquisa, objetivo e como iríamos trabalhar. Informei que seria muito importante a participação e colaboração de cada um deles para a realização das tarefas. A maioria dos estudantes demonstrou interesse pela pesquisa. Houve, nesse primeiro momento, várias perguntas, tais como:

> Professor, por que é preciso fazer essa pesquisa?
> Professor, para que fazer pesquisa?
> Sou obrigado a assinar esse termo?
> Essa pesquisa é para ajudar quem tem dificuldade em Matemática?
> Por que escolheu só nossa turma? (nota do diário de campo de 22 fev. 2019)

Na medida do possível, fui respondendo cada dúvida que surgiu. Nesse primeiro contato, pude constatar o que o professor havia me dito: Era, realmente, uma turma que gostava de fazer questionamentos.

Após todos os esclarecimentos, recolhi o TCLE assinado por eles, mas sete estudantes optaram por não assinar, alegando que não iriam participar da pesquisa porque não valeria ponto na matéria. Expliquei que o objetivo da pesquisa não era fazer esse tipo de avaliação, mas que respeitava a decisão deles.

A pesquisa seria iniciada no dia 11 de março de 2019, ou seja, depois do Carnaval, conforme acordado com os estudantes, que, no decorrer da semana – entre os dias 25 de fevereiro e 1º de março – deveriam entregar, ao professor deles, o TCLE assinado pelos pais, condição indispensável para eu iniciar a pesquisa.

Não foi realizada uma reunião com os pais, para explicar sobre a pesquisa e o documento, mas esclareci, para os estudantes e direção, que estávamos à disposição para solucionar qualquer dúvida que surgisse.

No dia 26 de fevereiro, em reunião com o professor da turma, apresentei as tarefas que havia preparado para trabalhar com os estudantes. O objetivo foi mostrar a ele o que pretendia com cada uma delas. Além disso, desejava saber qual a opinião dele em relação à metodologia sugerida por mim. Comentei sobre o objetivo da pesquisa, informei a importância da colaboração dele e me coloquei à disposição para ouvi-lo, caso tivesse alguma sugestão em relação às tarefas. Porém, ele optou por não fazer nenhuma sugestão. Mesmo assim, enviei todas as tarefas por e-mail para ele analisar com mais tempo.

No decorrer de nossa conversa, houve questionamentos por parte do professor de que era uma metodologia muito boa e interessante, mas, infelizmente, muitos professores não estavam preparados ou sem disponibilidade para realizar e se dedicarem a esse trabalho, conforme a realidade de professores que trabalham em dois turnos. Por fim, ele falou: “Nós, professores, damos aula como aprendemos na faculdade. Infelizmente essa é a nossa realidade” (nota do diário de campo de 26 fev. 2019).

Em parte, concordei, pois muitas vezes, nós, professores, acomodamo-nos com o que aprendemos na graduação e, quando é para efetuar alguma mudança em relação ao ensino, temos certa resistência, pois iremos sair da nossa zona de conforto. Por outro lado, se queremos fazer um ensino diferente, precisamos nos dedicar à profissão, buscar especialização e estar sempre dispostos a aprender mais e fazer melhor; ou seja, é necessário que pratiquemos o autodesenvolvimento sempre. E um dos objetivos do Promestre é que elaboremos um recurso educativo, ou seja, um material didático para auxiliar os professores que buscam inovar as suas aulas.

Após a entrega do termo do Coep, dos 38 estudantes, 21 entregaram o termo assinado pelos pais, 10 deixaram de entregar e sete optaram por não participar da pesquisa. Dessa forma, no dia 11 de março, no meu segundo contato com a turma, eu e o professor decidimos separar os estudantes e aplicar a pesquisa somente com os que entregaram o termo assinado.

Todas as aulas foram realizadas no laboratório de ciências, pois não havia sala de aula disponível. Além disso, a opção por esse espaço foi devido à localização ao lado da sala de origem dos estudantes, não causando tanto tumulto nos corredores e atrapalhando outras salas ao se deslocarem. Optamos por esse ambiente, também, por ser amplo, arejado, agradável e conter duas mesas grandes com 18 lugares cada, permitindo boa acomodação aos estudantes.

Figura 4: Imagem da sala de ciência

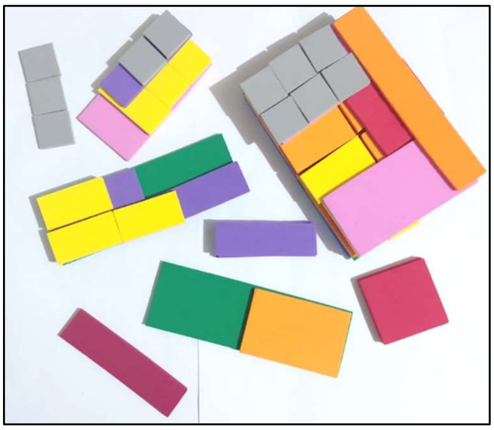
Fonte: Acervo do autor

4.4 O kit de frações no quadriculado e as tiras de frações

Nesta seção, faremos a apresentação do kit de frações no quadriculado, das tiras de frações e exemplificaremos como utilizar o material, a fim de inspirar os professores que, assim, desejem trabalhar.

O kit de frações no quadriculado é de autoria da Professora Marli Esteves Guimarães, fundadora da MMP Materiais Pedagógicos[4]. O Material é formado por peças retangulares e suas respectivas divisões em diversas cores e direções. Por ser quadriculado, algumas divisões podem ser feitas em dois sentidos, por isso, temos duas representações de meios, quartos e sextos, mas apenas uma representação de terços, oitavos, doze avos e vinte e quatro avos. O kit contém 72 peças em EVA, das quais serão ilustradas a seguir.

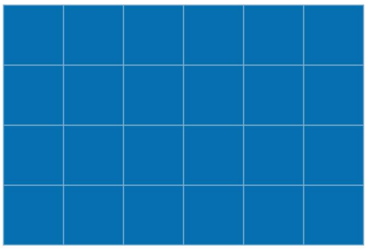
Figura 5: Kit de frações no quadriculado



Fonte: Acervo do autor

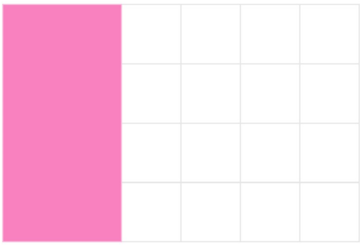
[4]A MMP Materiais Pedagógicos é uma fábrica direcionada a materiais pedagógicos de matemática, localizada na Vila Pires, Santo André, São Paulo. Acesso pelo site: https://mmpmateriaispedagogicos.com.br/.

1 placa quadriculada (6x4) com 24 quadradinhos – Azul – A peça representa 1 inteiro

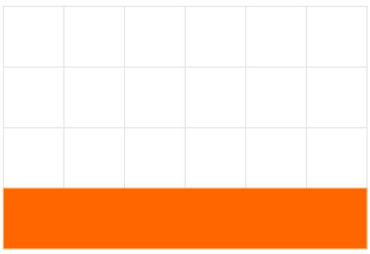


2 peças (3x4) e 2 peças (2x6) – Verde – Cada peça representa $\frac{1}{2}$

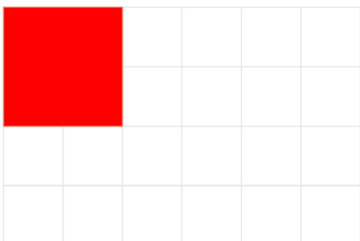
3 peças (2x4) – Rosa – Cada peça representa $\frac{1}{3}$

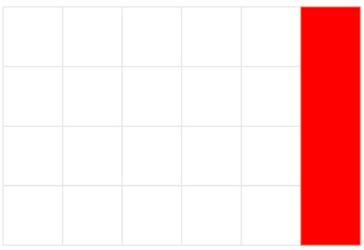


4 peças (3x2) e 4 peças (1x6) – Laranja – Cada peça representa $\frac{1}{4}$

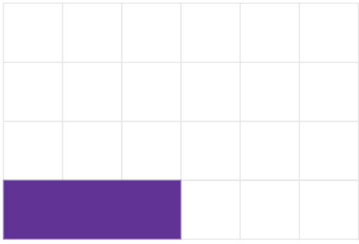


6 peças (2x2) e 6 peças (1x4) – Vermelho – Cada peça representa $\frac{1}{6}$

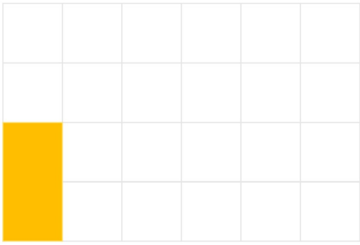




8 peças (1x3) – Lilás – Cada peça representa $\frac{1}{8}$



12 peças (1x2) – Amarelo – Cada peça representa $\frac{1}{12}$



24 peças (1x1) – Cinza – Cada peça representa $\frac{1}{24}$

O kit pode ser adquirido na MMP Materiais Pedagógicos, onde fizemos a aquisição do material para a pesquisa. É um material de boa qualidade com longa duração, dependendo dos cuidados do usuário.

Caso o (a) professor (a) tenha interesse em construir as peças com os estudantes, é uma ótima oportunidade para desenvolver uma familiaridade com o material. É muito fácil, porém, ao fazer essa escolha, o (a) professor (a) precisa estar ciente de que necessitará de tempo para a construção. Acreditamos que duas aulas de 50 minutos serão o suficiente para fazer a reprodução do material com os estudantes e, além disso, é necessário ter alguns cuidados no momento da reprodução, como cortes irregulares, pois poderão gerar resultados indesejáveis no momento de fazer a troca das peças.

A seguir, citaremos algumas recomendações, caso o professor opte em fazer a construção do material, e o molde para reprodução está disponível no apêndice H.

<u>Recomendamos</u>

- ✓ Utilizar papel cartão;
- ✓ Folha couchê com gramatura de 300g;
- ✓ EVA;
- ✓ Precisão na hora dos cortes das peças, pois cortes irregulares poderão atrapalhar no momento de fazer a sobreposição das peças.
- ✓ Cobrir as peças com papel adesivo contact, pois trará uma durabilidade maior para o material.

<u>Não recomendamos</u>

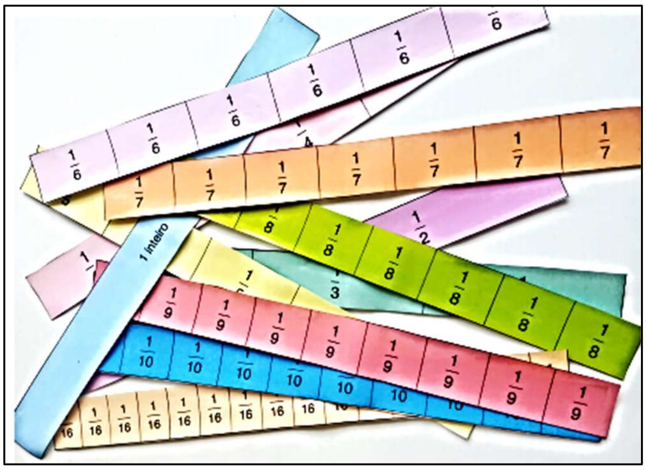
- ✓ Um material frágil, por exemplo: folha de papel A4 comum, folha de revistas, cartolina e similares.
- ✓ Material com gramatura muito pesada, como: Papelão paraná, PVC, madeira e similares, pois são materiais que, para fazer o corte, é necessário utilizar estiletes ou similares.

Com base nos moldes, é possível fazer a reprodução de todas as peças do kit. Não é necessário seguir, rigorosamente, as cores originais do kit, porém, é fundamental que toda a turma esteja trabalhando com as mesmas cores.

Para a utilização do material, é interessante que cada estudante tenha o seu kit para manuseá-lo, entretanto, entendemos que o custo pode ser alto. Com isso, sugerimos um kit para, no máximo, dois estudantes trabalharem juntos, pois, mais do que dois, pode dificultar a exploração do material. Para a nossa pesquisa, cada dupla de estudantes recebeu um kit e foi possível fazer um bom trabalho.

As tiras de frações fizemos inspirados na tabela de tiras de frações do jogo Papa Todas de frações.

Figura 6: Tiras de frações



Fonte: Acervo do autor

É um material de baixo custo e fácil de ser reproduzido. Recomendamos a impressão do material em folha A4 ou A3 e, após a impressão, cobrir com adesivo contact para ter uma durabilidade maior.

Para a nossa pesquisa, fizemos a impressão colorida em folha A3 e papel comum. Após a impressão, cobrimos a folha com adesivo contact e, em seguida, recortamos as tiras. Não recomendamos a impressão em papel com gramaturas muito pesadas porque pode ser ruim para fazer a dobra do material quando necessário. Além disso, recomendamos que cada estudante ou uma dupla de estudantes tenha um conjunto de tiras de frações. O molde para impressão encontra-se no anexo G.

A seguir, apresentamos alguns exemplos sobre a utilização desses materiais.

Frações equivalentes

Para trabalhar com frações equivalentes, há várias possibilidades de explorar o material. Apresentaremos, a seguir, uma sugestão:

- ✓ Pegue uma peça laranja, por exemplo, e solicite que o estudante encontre peças no kit que possa sobrepor toda a peça escolhida. É interessante que o estudante faça todas as trocas possíveis. Em seguida, pergunte qual a representação fracionária da peça escolhida por você e das peças que foram trocadas pelo estudante. Depois, peça que anote em seu caderno as frações encontradas e faça discussões sobre essas frações.
- ✓ O que podemos dizer sobre essas frações?

- ✓ $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$ representam a mesma parte do todo? Se sim, o que podemos concluir sobre essas duas frações?
- ✓ E as outras frações encontradas, também representam a mesma parte do todo?
- ✓ O que podemos concluir sobre essas frações?

Utilizando as tiras de frações é possível fazer os mesmos questionamentos, porém, mudando apenas a primeira sugestão, conforme a seguir:

- ✓ Pegue a tira de frações que representa terços, por exemplo, e solicite que o estudante encontre outras tiras que, ao juntar suas partes, fique do mesmo tamanho da parte que representa um terço. É interessante que o estudante faça todas as possibilidades possíveis. Em seguida, pergunte qual a representação fracionária das partes das tiras encontradas por eles que tiveram o mesmo tamanho da parte que representava um terço. Depois, peça que anotem no caderno as frações encontradas e façam discussões sobre essas frações.

Nas discussões, tente orientar o estudante a perceber que essas frações, encontradas por ele, são frações equivalentes. E, por fim, cheguem à conclusão de que frações equivalentes são frações que representam a mesma parte do todo.

Comparação de frações

Para trabalhar a comparação de frações, o estudante precisa pegar as peças ou tiras correspondentes às frações dadas, comparando apenas o tamanho das peças do kit ou tiras de frações, para verificar qual é maior ou menor. No entanto, é interessante ir além. A seguir, sugerimos como trabalhar comparação de frações, utilizando o kit e as tiras de frações.

- ✓ Inicialmente, peça que o estudante faça a comparação de frações com numeradores iguais, por exemplo, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{4}$.
- ✓ Depois, troque. Trabalhe com frações que têm denominadores iguais, por exemplo, $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{4}$ ou $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{6}$.

Após ter feito algumas comparações, estimule o estudante a perceber que, para comparar duas frações, por exemplo, se ela possui o numerador igual, para saber qual é a maior basta verificar em quantas partes essa fração foi dividida, ou seja, analisar o denominador da fração. Quanto menos partes a fração for dividida, maior é a fração, ou seja, quanto menor for o número que representa o denominador da fração, significa que essa fração é a maior.

Para isso, poderão ser feitos os questionamentos a seguir:

- ✓ A peça ou tira que representa $\frac{1}{2}$ foi dividida em quantas partes? E a que representa $\frac{1}{3}$, foi dividida em quantas partes? Qual dessas peças é a maior ou menor? Ou qual parte da tira é a maior ou menor?
- ✓ A peça ou tira que representa $\frac{2}{3}$ foi dividida em quantas partes? E a que representa $\frac{2}{4}$, foi dividida em quantas partes? Qual dessas peças é a maior ou menor? Ou qual parte da tira é a maior ou menor?
- ✓ Então, o que podemos concluir quando duas frações têm o mesmo numerador?
- ✓ Sugerimos efetuar, pelo menos, quatro exemplos de cada tipo de frações.

Analogamente, essa discussão pode ser realizada para frações que têm o denominador igual. E para frações com numeradores e denominadores diferentes, pode ser utilizada a sugestão dos questionamentos de frações equivalentes.

Adição e subtração de frações

O procedimento para trabalhar adição e subtração de frações é parecido, então, se achar interessante, é possível trabalhar com as duas operações ao mesmo tempo. Porém, sugerimos iniciar frações com denominadores iguais para depois trabalhar frações com denominadores diferentes.

A seguir, indicaremos uma sugestão de como trabalhar com essas operações:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=$$

- ✓ Peça aos estudantes que efetuem a soma das frações sem utilizar o kit ou as tiras.

- ✓ Após efetuarem a soma, solicite que peguem as peças ou tiras de frações correspondentes às duas frações.
- ✓ Em seguida, que juntem essas peças ou partes da tira, e pergunte-lhes qual o total de peças ou partes da tira que ficaram.
- ✓ Faça a comparação do resultado que fizeram antes e depois do material.

É interessante efetuar alguns questionamentos, tais como:

- ✓ Pegue a(s) peça(s) do kit que representa a fração $\frac{1}{4}$. Ou, pegue a tira e dobre a (s) parte(s) que representa(m) a fração $\frac{1}{4}$.
- ✓ Agora pegue a(s) peça(s) que representa(m) a fração $\frac{2}{4}$. Ou, pegue a tira e dobre a(s) parte(s) que representa(m) a fração $\frac{2}{4}$.
- ✓ Se juntarmos todas essas peças, com quantas peças vamos ficar? Ou, se juntarmos todas as partes das tiras, com quantas partes vamos ficar?
- ✓ Qual a representação fracionária de todas essas peças ou partes da tira juntas?
- ✓ Então, podemos concluir que $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}$ é igual a?

Faça a comparação do resultado encontrado antes de utilizar o kit ou as tiras de frações com o resultado encontrado após os questionamentos. Caso haja resultados diferentes, questione os estudantes o porquê do resultado e instigue-os a perceber que, para fazer a soma ou subtração de frações com denominadores iguais, basta conservar o denominador das frações e somar os numeradores.

De forma análoga, essa discussão pode ser realizada com a subtração de frações que têm denominadores iguais.

Para fazer a soma com denominadores diferentes, apresentamos o exemplo a seguir:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$$

- ✓ Peça aos estudantes que efetuem a soma das frações sem utilizar o kit.

- ✓ Após obterem a soma, solicite que peguem as peças correspondentes às duas frações. Ou, então, que peguem as tiras que representam meios e terços e dobrem as partes correspondentes às duas frações.
- ✓ Em seguida, devem encontrar peças no kit que sobrepõem às frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, desde que sejam da mesma cor. Ou, então, partes de outras tiras que sejam do mesmo tamanho das partes que representam $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$.
- ✓ Solicite que juntem todas as peças, novas, encontradas, e pergunte qual a representação fracionária do total das peças. Ou, então, juntem todas as partes, novas, encontradas, e pergunte qual a representação fracionária do total de partes.
- ✓ Faça a comparação do resultado que efetuaram antes e depois do kit.

É interessante efetuar alguns questionamentos, como:

- ✓ Peguem as peças que representem as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. Ou, peguem as tiras que irão representar as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. Quantas partes da tira que representam $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$ iremos utilizar?
- ✓ Vamos juntar essas duas peças? Se juntarmos essas peças, ficarei com quantas peças?
- ✓ Duas peças verdes? Duas peças rosas?
- ✓ Se eu não posso juntar peças com cores diferentes, por que eu não posso falar que uma peça verde e uma rosa são iguais a uma única peça verde ou a uma única peça rosa? O que é preciso fazer para unir essas duas peças?
- ✓ Vamos tentar encontrar peças da mesma cor, no kit, que sobrepõem a essas duas peças?

Ou...

- ✓ Vamos juntar essas partes da tira? Se juntarmos essas partes, ficarei com quantas partes?
- ✓ Duas partes de um meio? Duas partes de um terço?

- ✓ Se eu não posso juntar essas partes, porque possuem tamanhos diferentes, então, o que é preciso fazer para unir essas duas partes?
- ✓ Vamos encontrar tiras que têm a quantidade de partes do mesmo tamanho dessas duas partes juntas?

Nesse momento, faça o estudante perceber que, para juntar as duas peças ou as duas partes das tiras, é necessário encontrar a fração equivalente das duas frações, ou seja, igualar suas partes, fazer com que as duas frações tenham o mesmo denominador. Após encontrarem as frações equivalentes, pergunte:

- ✓ Agora que temos todas as peças da mesma cor, podemos juntar todas?
- ✓ Por que foi preciso fazer a troca das peças?
- ✓ Qual a nova representação fracionária de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$?
- ✓ O que podemos dizer dessas novas frações encontradas em relação às frações dadas?
- ✓ Qual a representação fracionária de todas essas peças juntas?

Ou...

- ✓ Agora que temos todas as partes das tiras iguais, podemos juntá-las?
- ✓ Por que é preciso que as partes das tiras fiquem iguais?
- ✓ Qual a nova representação fracionária de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$?
- ✓ O que podemos dizer dessas novas frações encontradas em relação às frações dadas?
- ✓ Qual a representação fracionária de todas essas partes da tira juntas?

Faça a comparação do resultado encontrado, antes de utilizar o kit ou a tira de frações, com o resultado encontrado após os questionamentos. Caso haja resultados diferentes, questione os estudantes o porquê do resultado e incite-os a perceber que, para efetuar a soma ou subtração de frações com denominadores diferentes, primeiramente, é preciso encontrar a fração equivalente às frações dadas, de forma que essas frações equivalentes tenham o mesmo denominador, para depois efetuar a somas das frações.

De forma análoga, essa discussão pode ser realizada com a subtração de frações que têm denominadores diferentes.

Para as sugestões de discussões que foram dadas, não recomendamos utilizar os dois materiais ao mesmo tempo. Faça a discussão utilizando um e, depois, faça a troca para conhecerem o outro. Após o reconhecimento dos dois materiais, o professor pode entregar os dois e deixar o estudante escolher o que melhor se identificar.

A seguir, apresentaremos as nove tarefas que trabalhamos em nossa pesquisa, e, em todas, foi possível utilizar o kit de frações no quadriculado como material didático.

4.5 Apresentação das tarefas

Como a pesquisa foi realizada com estudantes do 7º ano, para a elaboração das tarefas, partimos do pressuposto de que eles já tinham uma construção formada sobre o conceito fração. Assim, os tópicos abordados nas tarefas foram equivalência de fração. Vale destacar que as tarefas foram elaboradas ao longo de 2018, e finalizamos em fevereiro de 2019.

Para a pesquisa de campo, foram realizadas 13 aulas de 50 minutos e utilizado, como material didático, o kit de frações no quadriculado e tiras de frações. Os kits foram levados prontos para uso, pois sua construção exige muito cuidado e tempo. A existência de cortes incorretos poderia gerar resultados indesejáveis no momento da comparação de frações.

A seguir, apresentamos um quadro com a apresentação de cada uma das tarefas: Dia da aplicação, número de aulas utilizadas, título das tarefas e os objetivos.

Quadro 5: Apresentação das tarefas

Data	Nº aulas	Título das tarefas	Objetivos
11/03/2019	2	Tarefa 1: Conhecimentos prévios – Apêndice A	Investigar qual o entendimento e percepção dos estudantes sobre o conceito de frações.
13/03/2019	2	Tarefa 2: Manipulação do kit de frações no quadriculado – Apêndice B	Reconhecer o kit de frações no quadriculado.
15/03/2019	2	Tarefa 3: Comparação de frações – Apêndice C	Comparar frações com denominadores iguais e diferentes.
18/03/2019	1	Tarefa 4: Equivalência de frações – Apêndice D	Compreender o conceito de equivalência de frações.
20/03/2019	2	Tarefa 5: Equivalência de frações – Apêndice E	Compreender o conceito de equivalência de frações.
25/03/2019	1	Tarefa 6: Jogo Papa todas de frações – Anexo E	Compreender o conceito de fração; comparar frações com diferentes denominadores; ter noção de equivalência de frações; fazer a leitura e a representação de frações.
27/03/2019	1	Tarefa 7: Exploração do jogo papa todas de frações – Anexo F	Resolver problemas que envolvem: Comparação e equivalência de frações.
01/04/2019	1	Tarefa 8: Adição de frações – Apêndice F	Somar frações com diferentes denominadores.
03/04/2019	1	Tarefa 9 Subtração de frações – Apêndice G	Subtrair frações com diferentes denominadores.

Fonte: Elaborado pelo autor, abr. 2019

Serão descritas as nove tarefas a seguir.

Tarefa 1: Conhecimentos prévios

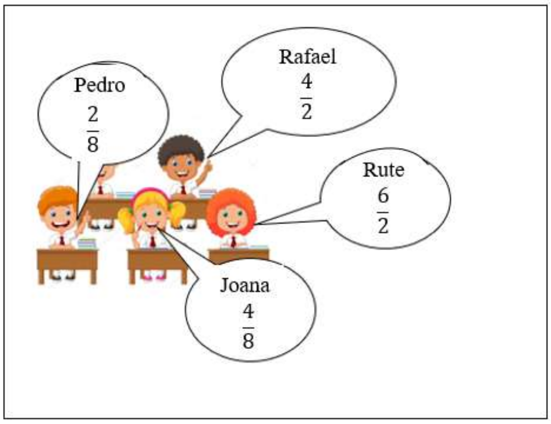
Essa tarefa foi elaborada com o intuito de fazer uma ambientação com a turma, conhecê-los melhor, verificar qual o entendimento e a percepção que os estudantes tinham sobre o conceito e as operações de adição e subtração de frações. Buscamos analisar o nível de conhecimento dos estudantes sobre frações equivalentes, representação fracionária com base em um dado problema, comparação de frações com denominadores iguais e diferentes e, por fim, soma e subtração de frações com denominadores iguais e diferentes.

Para isso, elaboramos uma tarefa com sete questões, três objetivas e quatro discursivas, que apresentamos a seguir.

Questão 1

1) A professora Ana Paula escreveu no quadro uma fração, conforme a ilustração abaixo.

Em seguida, pediu que Rafael, Joana, Rute e Pedro falassem uma fração que fosse equivalente à fração escrita por ela no quadro.



Marque com um "X" qual dos alunos respondeu corretamente.

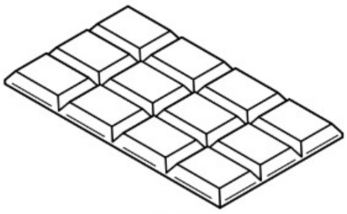
a) Joana b) Pedro c) Rafael d) Rute

Justifique sua resposta.

Essa questão aborda a ideia de equivalência de frações e teve como objetivo verificar se os estudantes conheciam esse procedimento. Esperávamos que os estudantes fossem capazes de identificar, entre as opções de resposta, a fração equivalente à fração dada. No nosso ponto de vista, trata-se de uma questão de pouca dificuldade.

Questão 2

Luiz ganhou uma barra de chocolate da sua mãe, conforme a figura a seguir.



No mesmo dia, comeu três "quadradinhos" dessa barra. No dia seguinte, comeu mais cinco "quadradinhos" da mesma barra.

a) Qual a representação fracionária do número de quadradinhos que Luiz comeu no primeiro dia?
b) Qual a representação fracionária do número de quadradinhos que Luiz comeu no segundo dia?
c) Que fração representa o total de "quadradinhos" que Luiz comeu?

O objetivo dessa questão foi verificar se os estudantes eram capazes de interpretar um dado problema, fazer a representação fracionária solicitada e, por fim, somar frações com denominadores iguais. A questão aborda o significado parte-todo com quantidade contínua e representa uma situação estática, ou seja, um chocolate já dividido em 12 partes iguais, em que 3 dessas partes foram consumidas no primeiro dia e 5, no segundo dia.

Questão 3

Na sala de Pedro, haverá eleição para representante da turma. Do total de alunos, $\frac{2}{5}$ vão votar em Aline, $\frac{2}{10}$ vão votar em Ramon, e o restante da turma está indeciso.

a) Se do total de alunos, $\frac{2}{5}$ vão votar em Aline e $\frac{2}{10}$ vão votar em Ramon, quem está ganhando a eleição até o momento? Justifique como chegou a sua conclusão.

b) Qual a fração que representa o total de alunos que já decidiram seu voto?

A questão foi elaborada com o intuito de verificar se os estudantes eram capazes de fazer a comparação de frações e, além disso, somar frações com denominadores diferentes. A questão apresenta dois itens. No item "a", os estudantes deveriam fazer a comparação das frações, $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{10}$, e, no item "b", deveriam efetuar a soma dessas duas frações.

Questão 4

Guilherme tem que praticar piano durante $\frac{3}{4}$ de hora todos os dias. Hoje, já praticou $\frac{1}{4}$ de hora. Que fração de uma hora ele ainda tem que praticar?

Com o objetivo de verificar se os estudantes sabiam fazer a subtração de frações com denominadores iguais, elaboramos esta questão baseada em uma das questões do *Khan Academy*[5]. É uma questão que consideramos ser de nível fácil para estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II, pois trata-se da soma de frações com denominadores iguais.

Questão 5

Elisângela precisa fazer um bolo para a festa de aniversário de sua filha Ana Clara. Na receita, dizia que ela precisaria de $\frac{3}{4}$ de xícara de leite. Porém, ao pegar o leite na geladeira percebeu que tinha apenas $\frac{1}{2}$ de xícara de leite. Que fração de xícara de leite falta para Elisângela fazer esse bolo? Explique qual foi sua estratégia para resolver esse problema.

Assim como a questão de número 4, essa questão, também, foi inspirada em uma questão do *Khan Academy.* O objetivo dessa questão foi verificar se os estudantes eram capazes de ler e interpretar um dado problema, e, além disso, efetuar a subtração de frações com denominadores diferentes.

Questão 6

O professor Avani escreveu a expressão $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ no quadro e pediu que seus alunos resolvessem. Quem terminasse de resolver primeiro ganharia um chocolate. Arthur resolveu a questão, corretamente, com menos de dois minutos. Qual foi o resultado encontrado por Arthur?

a) $\frac{5}{6}$	c) $\frac{2}{6}$
b) $\frac{2}{5}$	d) $\frac{1}{5}$

Justifique sua resposta.

Essa questão foi elaborada para verificar se os estudantes eram capazes de fazer a soma de frações com denominadores diferentes.

---

5 O *khan Academy* é uma Organização não Governamental (ONG) educacional criada e sustentada por Sal Khan. Sua missão é oferecer uma educação gratuita e de alta qualidade para todos, em qualquer lugar. O site para acessar o *Khan Academy* está disponível em: https://pt.khanacademy.org/. Acesso em 24 set 2018.

Questão 7

Qual das alternativas abaixo representa o resultado da expressão $\frac{2}{5} - \frac{1}{10}$:

a) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{9}{10}$ d) $\frac{9}{5}$

Justifique sua resposta.

Essa questão teve como objetivo verificar se os estudantes sabiam fazer a subtração de frações com denominadores diferentes. Entendemos que a questão de número 5, também, tem o mesmo objetivo, porém, para essa questão, não fizemos uma contextualização.

Como podemos observar, para essa questão, optamos por fazer duas alternativas com denominador 10 e duas com denominador 5, mas uma resposta que poderia aparecer nessa questão, caso não fosse de múltipla escolha, seria $\frac{1}{5}$, pois o estudante poderia fazer a subtração do numerador com numerador e denominador com denominador.

Tarefa 2: Manipulação do kit de frações no quadriculado

Elaborada para que os estudantes pudessem reconhecer o material manipulativo que seria utilizado nas aulas seguintes. No primeiro contato com o kit, pensamos em deixar os estudantes livres, por aproximadamente cinco minutos, para fazer o reconhecimento das peças. Em seguida, a exploração das peças seria efetuada de forma direcionada por um modelo de questionamentos que está descrito a seguir.

- Se vocês estiverem com uma peça que representa $\frac{1}{2}$, é possível trocá-la por outra peça? (lembrando-se de que, para a troca, as peças precisam sobrepor à peça de $\frac{1}{2}$).
- Se é possível fazer a troca, as peças trocadas são todas da mesma cor?
- Qual a fração que as peças trocadas representam?
- Poderia ser outro tipo de peça? Se sim, qual a fração que essa peça representa?
- O que podemos concluir a respeito da peça de $\frac{1}{2}$ com as outras que foram trocadas?

O objetivo foi, com base nesses questionamentos, a exploração do kit de frações e, também, mostrar, aos estudantes, que uma fração pode ser representada de várias formas.

Para fazer o registro dos questionamentos, elaboramos quatro quadros. No primeiro, os estudantes deveriam escrever a representação fracionária de cada uma das peças do kit. Denominamos esse quadro como questão 1.

Questão 1

Complete o quadro abaixo com a representação fracionária de **cada uma das peças** do kit de frações no quadriculado.

Quadro para registro	
Peças	**Representação fracionária em relação à peça azul**
Uma peça azul	**Um inteiro = 1**
Uma peça verde	
Uma peça rosa	
Uma peça laranja	
Uma peça vermelha	
Uma peça roxa	
Uma peça amarela	
Uma peça cinza	

Fonte: Elaborado pelo autor – jan. 2019

Os quadros seguintes deveriam fazer a troca das peças solicitadas, desde que representassem a mesma parte do todo. Registrar a quantidade de peças que foram necessárias para fazer a troca e escrever a representação fracionária das peças utilizadas na troca. Denominamos esses quadros como questão 2.

Questão 2

Complete os quadros abaixo de acordo com cada uma das informações.

- ✓ **Uma peça verde é possível ser trocada por qual outra peça? Analise as possibilidades, lembrando-se de que é necessário sobrepor uma peça à outra para fazer a troca.**

Peças	Azul	Rosa	Laranja	Vermelho	Roxo	Amarelo	Cinza
Quantidade necessária para troca							
Representação fracionária do total de peças trocadas							

Fonte: Elaborado pelo autor – jan. 2019

✓ **Uma peça rosa é possível ser trocada por qual outra peça? Analise as possibilidades, lembrando-se de que é necessário sobrepor uma peça à outra para fazer a troca.**

Peças	Azul	Verde	Laranja	Vermelho	Roxo	Amarelo	Cinza
Quantidade necessária para troca							
Representação fracionária do total de peças trocadas							

Fonte: Elaborado pelo autor – jan. 2019

✓ **Uma peça vermelha é possível ser trocada por qual outra peça? Analise as possibilidades, lembrando-se de que é necessário sobrepor uma peça à outra para fazer a troca.**

Peças	Azul	Verde	Rosa	Laranja	Roxo	Amarelo	Cinza
Quantidade necessária para troca							
Representação fracionária do total de peças trocadas							

Fonte: Elaborado pelo autor – jan. 2019

A terceira questão foi elaborada com o intuito de mostrar, aos estudantes, que as peças trocadas representam a mesma parte do todo, que fizessem a comparação das frações escritas após a troca e, por fim, concluírem que essas frações são equivalentes.

Questão 3

Como observamos, podemos escolher uma peça e efetuar sua troca por outras peças, desde que uma sobreponha a outra. Por que podemos fazer esse tipo de troca? Explique.

Os questionamentos e as questões elaboradas para essa tarefa foram inspirados no livreto que acompanha o kit de frações no quadriculado, de autoria da Professora Marli Esteves Guimarães.

Tarefa 3: Comparação de frações

Para a elaboração dessa tarefa, havíamos desenvolvido, como primeira versão, questões muito diretas, por exemplo:

Utilizando o kit de frações no quadriculado e pegando as peças correspondentes, ache qual fração é maior: $\frac{1}{2}$ *ou* $\frac{1}{3}$*?*

Porém, analisando melhor as questões, concluímos que questões como essas talvez não apresentassem elementos suficientes, pois os estudantes pegariam as peças correspondentes a cada fração e fariam a comparação de seus tamanhos, ou seja, não teríamos muito o que falar sobre as questões. Em vista disto, elaboramos três questões em forma de problema para trabalharmos comparação entre frações.

O objetivo dessa tarefa foi trabalhar com os estudantes comparação de frações com numeradores e denominadores iguais e diferentes.

Questão 1

Juliana e Rebeca ganharam um armário de sua mãe para guardar material escolar. O armário tem duas portas de mesmo tamanho, conforme a figura abaixo.

O espaço que ficou para Juliana estava dividido em 4 partes iguais, e ela poderia utilizar **apenas** duas dessas partes. Rebeca ficou com o outro espaço que estava dividido em 3 partes iguais, e, também, poderia utilizar **somente** duas dessas partes. Quem ficou com o menor espaço? Explique como você chegou a essa conclusão.

Essa questão teve como objetivo trabalhar a comparação de frações com numeradores iguais e denominadores diferentes. É uma questão que o estudante tem a possibilidade de ir para a abstração. Por esse motivo, optamos em deixar os armários sem as divisões, que o problema descreve, para que o estudante pudesse fazer essa abstração. Esperávamos que os estudantes fossem capazes de perceber que, quanto mais partes o todo for dividido, menor são suas partes, e quanto menos partes o todo for dividido, maior são as partes desse todo.

Questão 2

Frederico e Gustavo ganharam de seus pais um kit de frações no quadriculado e estavam brincando de fazer comparação de frações. Em um primeiro momento, Frederico disse:

− A representação fracionária das peças que peguei é $\frac{3}{8}$.

Gustavo pegou suas peças e disse:

−A representação fracionária das minhas peças é $\frac{5}{8}$.

Qual das duas frações é maior? Justifique seu raciocínio.

A questão de número 2 foi elaborada com o intuito de discutir com os estudantes que, se duas frações têm o mesmo denominador, para fazer a comparação, basta comparar as partes tomadas, ou seja, verificar qual o numerador tem o maior valor absoluto.

Questão 3

Se a representação fracionária das peças de Frederico fosse $\frac{1}{4}$ e a de Gustavo fosse $\frac{1}{8}$, qual teria uma representação fracionária maior? Como você chegou a essa conclusão? Explique.

O objetivo dessa questão foi o mesmo da questão de número 1: fazer a comparação de duas frações que têm o mesmo numerador. Para isso, esperávamos que os estudantes concluíssem que, para comparar duas frações de mesmo numerador, bastava verificar qual o denominador tem o maior valor absoluto, a fim de constatar que essa é a menor fração, ou qual denominador tem o menor valor absoluto para constatar que essa é a maior fração.

Tarefas 4 e 5: Equivalência de frações

Pensando em questões que fizessem a exploração de equivalência de frações, no primeiro momento, optamos em utilizar as sugeridas no livreto que acompanha o kit de frações no quadriculado. Porém, poderíamos ter o mesmo problema da primeira versão da tarefa 3.

Por esse motivo, de agosto de 2018 a janeiro de 2019, elaboramos alguns problemas para, depois, selecionar quais seriam utilizados na pesquisa. Foi possível elaborar nove questões, das quais selecionamos seis: três para cada tarefa. Resolvemos trabalhar com três questões em cada uma das tarefas, para não cansar os estudantes e, além disso, estávamos pensando em utilizar uma aula de 50 minutos para cada tarefa.

Questão 1 – tarefa 4

Vamos fazer algumas trocas? Registre cada um dos fatos abaixo:

Obs.: *Pode haver mais de uma maneira de recobrir a peça solicitada. Portanto, escreva todas as formas possíveis que vocês conseguirem encontrar.*

- Pegue 1 peça rosa. De quantas maneiras, usando uma só cor, podemos recobrir essa peça?

Escreva a representação fracionária de cada uma das trocas efetuadas por você.

- Pegue 1 peça laranja. De quantas maneiras, usando uma só cor, podemos recobrir essa peça?

Escreva a representação fracionária de cada uma das trocas efetuadas por você.

A questão de número 1 fizemos com inspiração nas sugestões do livreto que acompanha o kit de frações no quadriculado. Essa questão teve como objetivo mostrar, aos estudantes, que uma fração pode ser representada de várias formas. Com o apoio do kit de frações no quadriculado, esperávamos que os estudantes tivessem essa compreensão com mais facilidade.

Questão 2 – tarefa 4

Vimos que o nosso kit de frações no quadriculado tem limitações, ou seja, não contém todas as representações fracionárias possíveis. Como você faria para representar $\frac{1}{5}$ de formas diferentes? Faça a representação de, pelo menos, três formas diferentes.

Essa questão elaboramos com o intuito de mostrar, aos estudantes, que podemos utilizar qualquer material didático manipulável para resolver determinada situação em matemática, mas esse material, em determinado momento, vai apresentar alguma limitação. E o kit de frações não é uma exceção, também, tem suas limitações. Como o kit não tem peças que representam a fração de $\frac{1}{5}$, nosso objetivo foi, após a discussão da questão 1, verificar se os estudantes seriam capazes de fazer a representação dessa fração de outras maneiras, porém, sem a utilização do material.

Questão 3 – tarefa 4

Gustavo e Frederico estavam brincando de fazer comparações de frações com o kit de frações no quadriculado que ganharam de seus pais. No decorrer da brincadeira, Gustavo perguntou a Frederico:

Frederico ficou na dúvida e não soube responder a Gustavo.
Como você faria para ajudar Gustavo e Frederico a identificarem qual das duas frações é maior?

Pensando em explorar mais a ideia de o estudante escrever frações equivalentes utilizando de outras estratégias, sem usar o kit de frações, elaboramos essa questão. O estudante precisava fazer a comparação das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$, porém, como o kit não tem peças que representam quintos, ele deveria encontrar frações equivalentes à essas duas frações de forma que os numeradores ou denominadores fossem iguais para efetuar a comparação. Além dessa opção, poderia aparecer outra estratégia, feita pelo estudante, para a comparação. A ideia dessa questão foi direcionar o estudante à abstração para resolver esse tipo de questão.

Questão 1 – tarefa 5

Vimos que é possível representar uma fração de várias formas diferentes. Utilizando o kit de frações no quadriculado, faça, pelo menos, cinco representações diferentes de $\frac{1}{2}$.

Como as tarefas que exploram equivalência de frações foram divididas em duas, a ideia de iniciar a aula com essa questão foi verificar se os estudantes compreenderam as discussões efetuadas na aula anterior. Para isso, esperávamos que os estudantes fossem capazes de representar a fração $\frac{1}{2}$ de cinco formas diferentes, utilizando o kit como recurso ou não.

Questão 2 – tarefa 5

Veja esse meme retirado da internet que apresenta uma possível dieta:

Fonte: imagem da internet

a) Vamos considerar que essas pizzas têm todas o mesmo tamanho. Ao deixar de comer seis fatias de pizza e comer somente três fatias, conforme mostra a figura acima, essa pessoa comerá menos pizza do que antes? Explique o que pensou.
b) Represente as duas pizzas inteiras na forma de fração.
c) Suponhamos que essa pessoa coma duas fatias da pizza que está dividida em 6 pedaços. Represente a fração correspondente da pizza que essa pessoa comeu.
d) Se essa mesma pessoa comer apenas uma fatia da pizza que foi dividida em 3 pedaços, que fração de pizza ela comeu?
e) A que conclusão podemos chegar a respeito das frações representadas nas letras "c" e "d"? Justifique sua resposta.

Essa questão surgiu depois que recebi uma mensagem com a imagem da pizza, conforme na questão acima, pelo celular. Estava elaborando questões para a pesquisa e ao analisar a imagem resolvi abordá-la em uma questão e com base na nela, elaboramos cinco itens: o item "a" expõe a ideia de que um todo pode ser dividido em várias partes e, se tomarmos todas elas, nesse caso, comer todas as fatias de pizza, seja ela dividida em terços ou sextos, o todo não altera o seu tamanho. Esperávamos que os estudantes compreendessem que $\frac{6}{6}$ e $\frac{3}{3}$ são frações equivalentes.

O item "b" elaboramos na expectativa de que os estudantes fossem capazes de fazer a representação fracionária das duas pizzas inteiras, ou seja $\frac{6}{6}$ e $\frac{3}{3}$. Já, nos itens "c" e "d", esperávamos que os estudantes fizessem a representação fracionária apenas das fatias de pizzas que foram comidas, ou seja, para o item "c", esperávamos que os estudantes representassem $\frac{2}{6}$, e , para o item "d", eles representassem $\frac{1}{3}$.

Por fim, no item “e”, os estudantes deveriam fazer a comparação das frações que foram representadas nos itens “c” e “d”, ou seja, concluir que são frações equivalentes, mas, para isso, os estudantes provavelmente, efetuariam a representação desses itens corretamente, pois, caso contrário, poderia haver outras discussões.

Questão 3 – tarefa 5

João e Elisabete estavam jogando um jogo de videogame. Para vencer o jogo, era necessário tentar capturar todo o tesouro disponível. João conseguiu capturar $\frac{1}{3}$ do tesouro, e Elisabete, $\frac{5}{9}$ do tesouro. a) Quem capturou mais tesouro até o momento? b) Juntos, que fração do tesouro João e Elisabete capturaram?

Para finalizar a tarefa de equivalência de frações, elaboramos essa questão, inspirados em uma das questões do *khan Academy.* Essa questão foi dividida em dois itens, “a” e “b”, e teve como objetivo trabalhar a comparação e a adição de frações com numeradores e denominadores diferentes. Esperávamos que os estudantes fossem capazes de perceber que, para fazer a comparação das duas frações, seria necessário igualar os numeradores ou denominadores das duas frações, mas poderia, no decorrer da discussão, aparecer outra forma de comparação por parte dos estudantes. Contudo, almejávamos que os estudantes concluíssem que $\frac{5}{9}$ é maior do que $\frac{1}{3}$. O item “b” foi elaborado com o intuito de mostrar, aos estudantes, que, para fazer a soma de uma fração com denominadores diferentes, era necessário igualar as partes das frações e, para isso, esperávamos que utilizassem o procedimento de equivalência de frações.

Tarefa 6: Jogo Papa todas de frações

Durante a reestruturação do projeto de pesquisa, percebi que o jogo, apresentado a mim, por colegas do Promestre, poderia contribuir para o trabalho. Por isso, optamos em utilizá-lo como uma das tarefas.

O Jogo é de autoria de Kátia Stocco Smole, Ignez Maria Diniz e Patrícia Cândido[6], e teve como objetivo auxiliar os estudantes a compreender o conceito de frações; comparar frações com diferentes denominadores; ter noção de equivalência de frações; fazer leitura e representação de frações. A seguir, apresentamos a metodologia do jogo.

<u>Tempo estimado</u>: 50 minutos

<u>Recurso necessário</u>: Um baralho de frações com 32 cartas e uma tabela com tiras de frações.

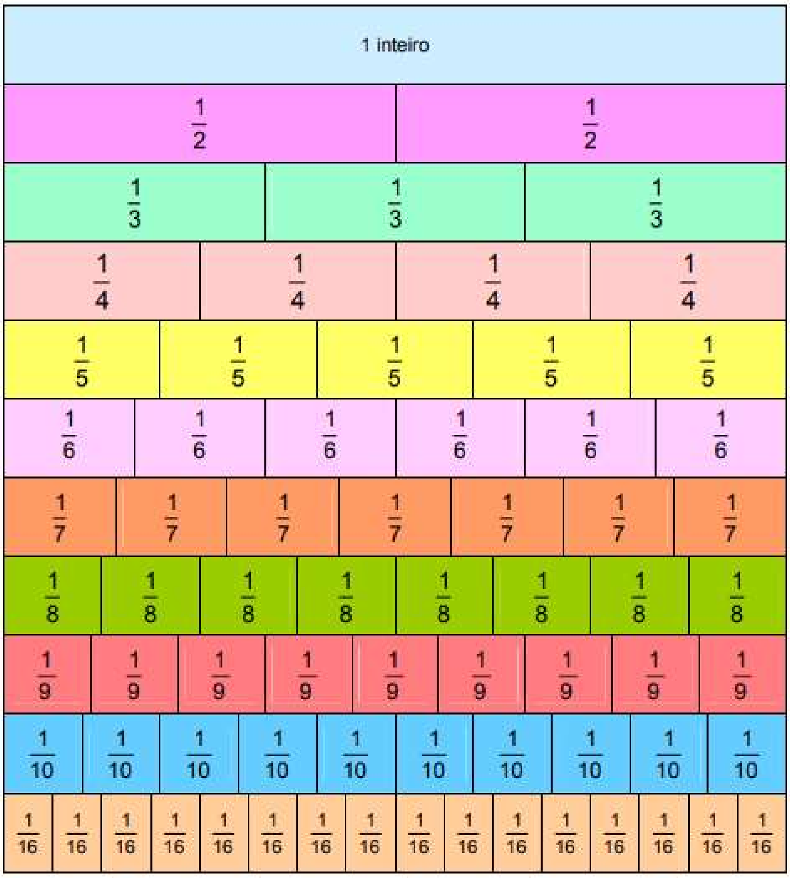
<u>Metodologia</u>: Organizar os alunos em grupos de três a quatro alunos (não sugerimos duplas porque o jogo perde o sentido de desafio).

<u>Orientação quanto às regras:</u>

- Todas as cartas do baralho serão distribuídas entre os jogadores, que não veem suas cartas. Cada jogador coloca suas cartas em uma pilha com os números virados para baixo, como suporte ao jogo.
- A tabela com as tiras de frações é colocada no centro da mesa, de modo que todos a vejam.
- Os jogadores combinam, entre si, um sinal ou uma palavra. Dado o sinal, todos os jogadores viram a carta de cima de sua pilha ao mesmo tempo e comparam as frações. O jogador que tiver a carta representando a maior fração vence a rodada e fica com todas as cartas, ou seja, "papa-todas".
- As cartas que o jogador ganha em uma rodada não podem ser utilizadas nas rodadas seguintes.
- A tabela de tiras de frações pode ser usada, se necessário, para que as comparações sejam feitas, como suporte ao jogo.
- Se houver duas cartas de mesmo valor, todas as cartas ficam na mesa e, na próxima rodada, o jogador com a maior carta "papa-todas", inclusive aquelas que ficaram na mesa.
- O jogo termina quando as cartas acabarem.
- O jogador com o maior número de cartas vence o jogo.

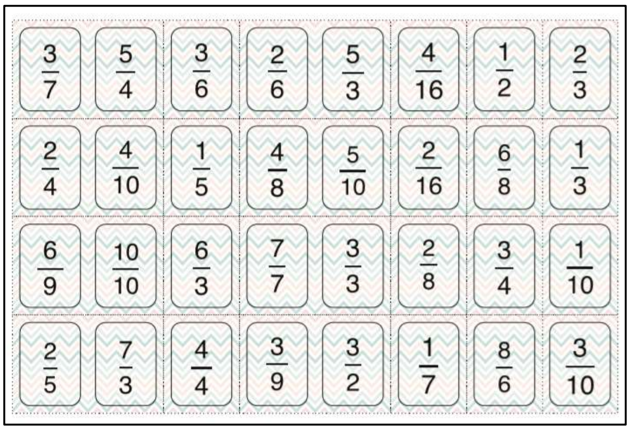
[6] O jogo com as regras, peças e tabela de tiras pode ser encontrado no *Cadernos de Mathema Volume 1*, ou pelo endereço: https://imesmatematica.files.wordpress.com/2012/02/jogos-com-frac3a7c3b5es.pdf. Acesso em: 20 ago. 2018

Figura 7: Tabela de tiras de frações



Fonte: Adaptado de Smole et. al (2007)

Figura 8: Cartas do jogo Papa Todas de Frações



Fonte: Adaptado de Smole et. al (2007)

O objetivo dessa tarefa foi trabalhar com os estudantes a comparação, equivalência, representação e leitura de uma forma mais divertida. Esperávamos que, nessa tarefa, os estudantes fossem capazes de perceber uma fração equivalente; que, quando a fração tem o numerador maior do que o denominador, ela é maior do que um inteiro; fazer comparação de frações com diferentes denominadores e fazer a leitura e a representação de frações.

Tarefa 7: Exploração do jogo Papa todas de frações

Para a tarefa 7, selecionamos três questões sugeridas pelas autoras do jogo para fazer a exploração. O objetivo das questões foi verificar se os estudantes, após o jogo, compreenderam a proposta e, também, auxiliá-los a compreender o conceito de fração, comparar frações com diferentes denominadores, ter noção de equivalência de frações e efetuar a resolução de problemas que envolvam frações.

Questão 1

Helena tirou $\frac{1}{2}$, Ellen tirou $\frac{4}{8}$, Pedro tirou $\frac{7}{7}$ e Aline ganhou a partida. Qual carta ela pode ter tirado?

(Procure observar que há aqui um problema com mais de uma solução possível).

Essa questão foi selecionada, por nós, porque é uma questão com mais de uma solução, ou seja, o intuito foi verificar o que os estudantes responderam e, em seguida, discutir todas as soluções que surgiram durante a aula. Esperávamos que os estudantes percebessem que a fração $\frac{7}{7}$ representa um inteiro, e que as outras duas cartas são menores do que um inteiro. Ou seja, para encontrar uma carta maior do que a de Pedro a fração deve ter o numerador maior do que o denominador.

Questão 2

Durante o jogo, os alunos organizaram uma tabela com as frações que cada um tirou.

Jogador	**1ª rodada**	**2ª rodada**	**3ª rodada**	**4ª rodada**
Júlia	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{7}{3}$
Paulo	$\frac{10}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{10}$
Luís	$\frac{4}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{9}$
Bia	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{2}$

Observando a tabela acima, responda:

a) Quem ganhou o jogo após quatro rodadas?

b) Quais as cartas que contêm frações equivalentes a 1 inteiro?

c) E maiores do que 1 inteiro?

O objetivo dessa questão foi explorar comparação de frações com diferentes denominadores, equivalência de frações e reconhecer frações maior do que um inteiro.

Questão 3

Em uma rodada, Paulo, Ana e Renato tiraram as seguintes cartas: $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$ e $\frac{3}{6}$. Eles começaram a discutir sobre quem conseguiu a maior carta. Se você estivesse presente nessa discussão, como os ajudaria a tomar a melhor decisão sobre qual das três cartas tem a maior fração representada?

Para finalizar essa tarefa, encerramos comentando sobre frações equivalentes, ou seja, os estudantes deveriam ser capazes de perceber que as três frações são equivalentes, ou seja, representam a mesma parte do todo.

Tarefas 8 e 9: Adição e subtração de frações

As tarefas 8 e 9 foram elaboradas com base no jogo "Papa Todas de Frações". Elaboramos uma questão para cada tarefa, em que os estudantes deveriam efetuar a soma e subtração de frações com base em um problema dado. O objetivo dessas tarefas foi investigar se os estudantes compreenderam o processo de equivalência de frações e relacionaram esse processo para efetuar as operações de adição e subtração.

Questão 1 – tarefa 8

A professora de Júlio, Paulo, Rafael e Bruna propôs uma pequena mudança na regra do jogo "Papa Todas de Frações".
Ela distribuiu quatro cartas para cada um deles e, com as cartas viradas sobre a mesa, solicitou que escolhessem duas cartas. Após a escolha, pediu que somassem as duas cartas e dissessem o resultado. Quem obtivesse o maior resultado ficaria com todas as cartas. Abaixo, está a tabela com as cartas que Júlio, Paulo, Rafael e Bruna escolheram para efetuarem a soma.
Faça a soma das duas cartas de cada jogador.

Nome	Carta 1	Carta 2	Soma
Júlio	$\frac{6}{3}$	$\frac{3}{6}$	
Paulo	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{8}$	
Rafael	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{5}$	
Bruna	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{6}$	

Fonte: Elaborado pelo autor – maio. 2018

Quem ganhou essa rodada?

Questão 1 – tarefa 9

A professora de Júlio, Paulo, Rafael e Bruna, após ter mudado a regra do jogo "Papa Todas de Frações", resolveu desafiar seus alunos mais uma vez, porém, utilizando outra regra.

A nova regra seria: Escolher duas cartas e subtrair a de maior valor pela a de menor valor. Quem obtivesse o maior resultado ganharia todas as cartas.

Abaixo, está a tabela com as cartas que Júlio, Paulo, Rafael e Bruna escolheram para efetuarem a subtração. Faça a subtração das duas cartas de cada jogador.

Nome	Carta 1	Carta 2	Diferença
Júlio	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{6}$	
Paulo	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{9}$	
Rafael	$\frac{7}{3}$	$\frac{3}{9}$	
Bruna	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{8}$	

Fonte: Elaborado pelo autor - maio. 2018

Quem ganhou essa rodada?

5 ANÁLISE

Neste capítulo, descreveremos como ocorreu a aplicação das nove tarefas, destacando e comentando algumas situações vivenciadas durante a pesquisa, aquelas que possibilitaram os estudantes a compreenderem um pouco melhor equivalência de frações, comparação de frações e adição e subtração de frações.

Junto a descrição das aulas, faremos nossas considerações, analisando os seguintes aspectos:

- Contribuição e limitações dos materiais manipuláveis (kit de frações no quadriculado, Tiras de frações e o jogo Papa Todas de frações);
- Aspectos atitudinais dos estudantes durante a realização das tarefas;
- Habilidades relativas à comparação e à equivalência de frações, percebidas durante as tarefas;
- Alguns aspectos da adição e subtração na perspectiva de equivalência de frações.

Vale ressaltar que, possivelmente, não encontraremos todos esses aspectos ao mesmo tempo em todas as tarefas, pois cada uma tem objetivos diferentes.

5.1 Tarefa 1: Conhecimentos prévios

11 de março de 2019

A aula aconteceu no 1º horário e, por ter sido o primeiro encontro, foi necessário convidar os estudantes que entregaram o TCLE que me acompanhassem até o laboratório de ciências para iniciarmos a aula. Devido a esse contratempo, uma aula de 50 minutos não foi suficiente para a realização da tarefa, mas conversei com a professora do 2º horário – professora de Português – e ela autorizou que os estudantes continuassem comigo até finalizarem. Nesse dia, um estudante faltou e, por isso, a tarefa foi aplicada para 20 estudantes.

O objetivo da aula foi conhecer os estudantes, analisar seus conhecimentos prévios sobre frações, em específico: representação, comparação, equivalência, adição e subtração de frações. Após essa aula, depois de ter analisado a tarefa 1, eu poderia seguir com as tarefas seguintes, aproveitando, ao máximo, os conhecimentos prévios desses estudantes. Para fazer essa análise, foi efetuada uma tarefa com 7 questões, das quais 3 eram de múltipla escolha e 4, discursivas.

As questões tinham como objetivos: reconhecer frações equivalentes; representar frações; comparar frações; somar e subtrair frações com denominadores iguais e diferentes.

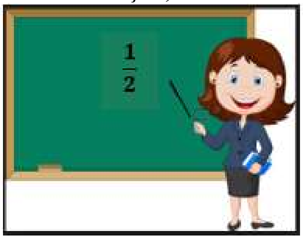
Após organizar todos os estudantes em seus lugares, expliquei, novamente, qual era o objetivo da pesquisa e que, naquela aula, eu queria constatar o que sabiam a respeito de frações. Foi enfatizada a necessidade de colaboração de todos, que foram orientados a escrever tudo que acreditassem ser correto, para eles, em cada questão. Não precisavam se preocupar com o certo ou errado, pois o objetivo não era avaliá-los com notas como estavam acostumados. Além disso, informei que não faria muitas intervenções, mas estaria disponível para solucionar dúvidas, caso precisassem de algo. Tudo explicado e entendido por eles, entreguei, para cada um, a tarefa do dia, e isso gerou uma visível agitação e empolgação. No momento da resolução, uma aluna disse:

> **Estudante:** Nossa! Não lembro de mais nada. Vou chegar em casa e estudar isso tudo aqui, porque eu esqueci tudo. (nota do diário de campo 11.mar.2019).

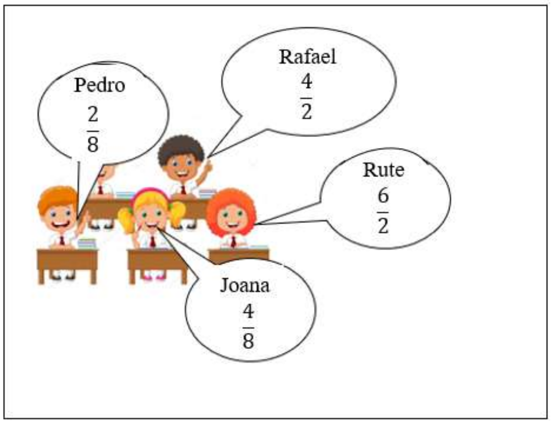
De início, estavam todos quietos e sem conversar, porém, depois de certo tempo, alguns estudantes começaram a discutir as questões entre eles e, em seguida, uma estudante me pergunta a respeito da questão de número 1:

Figura 9: Questão 1– Tarefa 1

A professora Ana Paula escreveu no quadro uma fração, conforme a ilustração abaixo.



Em seguida, pediu que Rafael, Joana, Rute e Pedro falassem uma fração que fosse equivalente à fração escrita por ela no quadro.



Marque com um "X" qual dos alunos respondeu corretamente.

b) Joana b) Pedro c) Rafael d) Rute

Justifique sua resposta.

Fonte: Elaborado pelo autor

> **Estudante**: Professor, o que é fração equivalente?
> **Pesquisador**: O que você acha que seria uma fração equivalente?
> **Estudante**: Não sei, mas acho que é uma fração que é parecida com a outra.
> **Pesquisador**: Será que seria isso mesmo? Como assim, uma fração é parecida com a outra?
> **Estudante**: Ah! Não sei te explicar, mas vou tentar colocar aqui e te mostrar depois.
> **Pesquisador**: Ok. (trecho de transcrição da gravação em áudio 11 mar. 2019)

Figura 10: Resposta da Estudante

Eu acho que Rafael foi o que fez certo, pois mudou apenas o numerados, e conservou o denominador. E mutiplicou os dois

Fonte: Acervo do autor

Como meu objetivo, nesse primeiro momento, não era fazer intervenções, deixei que a estudante resolvesse a questão para, depois, analisar. Entretanto, de acordo com sua resposta, podemos perceber que ela tinha uma noção do significado da palavra "fração equivalente", porém, não sabia como fazer a representação matematicamente. Conforme sua resposta, acreditamos que ela, ao ler $\frac{1}{2}$, pode ter pensado na ideia de metade e, com isso, para ela, $\frac{4}{2}$ continua com a ideia de metade, isto é, o 4 está sendo dividido por 2.

No decorrer dessa tarefa, houve comentários bastante interessantes a respeito da questão número 1, conforme a descrição a seguir[7].

> **Agatha**: Aqui é um dobro. O "tudo"[8] aqui pra mim é o 2.
> **Alice**: Sim, mas nenhuma "questão"[9] aqui está batendo com a do quadro! Por exemplo, aqui tá pedindo assim oh... Eu não tô entendendo o que é fração equivalente eu esqueci!
> **Estudante**: Equivalente é tipo assim, você tem que simplificar.
> **Agatha**: Sim, mas o 1 não tem jeito de simplificar! Não tem como simplificar o 1.
> **Estudante**: Então é pra mais.
> **Alice**: Gente, eu coloquei Joana, porque eu coloquei o máximo do numerador e denominador. Por causa que pode aumentar o numerador e o denominador. Eu acho!
> **Agatha**: Pera ai! Agora que a Alice falou que tem que aumentar, eu acho que entendi aqui. Tipo assim: Eu acho que inverte os dois e depois multiplica os dois por 2.
> **Alice**: Professor! Olha, faça o favor!
> **Pesquisador**: Oi.
> **Alice**: Eu acho que é Joana, porque como está querendo a equivalente, a "questão" que está batendo com o quadro é Joana, porque 4 á o máximo do numerador e 8 é o máximo do denominador.
> **Agatha**: Não, espera aí. Professor, ela falou que fração equivalente tem que simplificar, mas aqui não tem como simplificar 1. Então, aqui oh, eu acho que inverte o 2 e 1, aí multiplica por 2. Tipo: 2 x 2 dá 4 e 2 x 1 dá 2. Aí, aqui o do Rafael dá $\frac{4}{2}$.
> **Pesquisador**: Mas por que você acha que tem que inverter?
> **Alice**: Porque o numerador não é o suficiente pra bater com as outras "questões".
> **Agatha**: É por isso. (trecho de transcrição da gravação em áudio 11 mar. 2019)

De acordo com a descrição acima, podemos observar que os estudantes apresentam dificuldades sobre o significado de frações equivalentes. Exemplo disso é quando a aluna diz ter esquecido o que é uma fração equivalente, e a outra responde que fração equivalente é quando simplificamos a fração. Ao fazer a simplificação de uma fração, também é uma forma de encontrar frações equivalentes, porém, explicar para o estudante que basta simplificar a fração ou multiplicar o numerador e o denominador da fração por um número qualquer que encontramos a fração equivalente, não faz muito sentido para ele. Nesse sentido, Monteiro (2013) diz:

> a equivalência de Frações deve ser explorada de modo a favorecer a compreensão do aluno, por ser um conceito que ele utiliza ao longo do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, por isso a sua abordagem deve exigir a reflexão dos alunos em lugar de receitas prontas, sem significado (p. 26).

---

[7] Na descrição do áudio, foi possível identificar apenas duas estudantes, porque, no momento do áudio, uma cita o nome da outra, porém, utilizei o nome fictício escolhido por elas.
[8] Quando a estudante diz "tudo", está se referindo ao "todo" de uma fração.
[9] Quando a estudante diz "questão", está se referindo às opções de respostas da questão.

Nessa direção, David e Fonseca (1997) relatam que:

> A ênfase exagerada nos procedimentos e algoritmos, para operar com os números racionais, tem sido apontada como um dos principais motivos das dificuldades das crianças em aprenderem e aplicarem os conceitos de números racionais (DAVID; FONSECA, 1997 p. 60).

Assim como os autores, também acreditamos que mecanizar o procedimento e focar em algoritmos, não é a melhor forma para que os estudantes aprendem um determinado conceito, pois a mecanização e a memorização de regras podem ser prejudiciais para a aprendizagem.

Como observamos, os estudantes, para tentar chegar a uma conclusão, estavam olhando as alternativas tentando encontrar alguma fundamentação matemática através de cálculo ou regras, mas não tinham certeza, em nenhum momento, sobre o que estavam fazendo. Podemos exemplificar essa situação, quando a estudante diz:

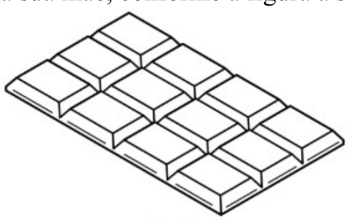
> **Alice**: Eu acho que é Joana, porque como está querendo a equivalente, a “questão” que está batendo com o quadro é Joana, porque 4 á o máximo do numerador e 8 é o máximo do denominador. (trecho de transcrição da gravação em áudio 11 mar. 2019)

A estudante conseguiu acertar a questão, porém, ao ser questionada sobre o que seria o “máximo” do numerador e o “máximo” do denominador, justificou que, diante das alternativas, a que tinha o maior valor no numerador e denominador era a fração de Joana. Acertou a questão, porém, não soube justificar utilizando conceitos matemáticos sobre o assunto.

Seguindo, houve também uma situação em que uma estudante me perguntou a respeito da questão número 2.

Figura 11: Questão 2– Tarefa 1

Luiz ganhou uma barra de chocolate da sua mãe, conforme a figura a seguir.



No mesmo dia, comeu três “quadradinhos" dessa barra. No dia seguinte, comeu mais cinco “quadradinhos” da mesma barra.

a) Qual a representação fracionária do número de quadradinhos que Luiz comeu no primeiro dia?
b) Qual a representação fracionária do número de quadradinhos que Luiz comeu no segundo dia?
c) Que fração representa o total de “quadradinhos” que Luiz comeu?

Fonte: Elaborado pelo autor

> **Estudante**: Professor, para representar três partes da barra de chocolate, o denominador seria 1 por que é o todo ou eu conto todos os quadradinhos?
> **Pesquisador**: O que você acha? Em uma fração, o que o denominador representa?
> **Estudante**: Não sei, professor; essa é minha dúvida. Por exemplo, se fossem duas barras, eu somaria por "dentro" da barra porque, tipo, aqui dentro tem 12, aí eu ia fazer 12 mais 12, ou seja, duas barras, aí eu tenho que somar que no caso aqui é 24 ou se teria que somar, tipo, uma barra mais uma que seria 2 e não 24? Eu não sei qual das duas que eu tenho que fazer. (trecho de transcrição da gravação em áudio 11 mar. 2019).

De início, eu fiquei em dúvida sobre o que ela estava chamando de "somar por dentro", mas, depois de me explicar, entendi que cada quadradinho da barra de chocolate, ela estava entendendo como se fosse um todo e não parte do todo. Pedi que ela refletisse sobre o que estava falando, e pensar o que seria realmente o todo do chocolate. Por fim, ao fazer a discussão com as colegas que estavam ao seu redor, ela concluiu que cada quadradinho representava a parte do todo, ou seja, da barra de chocolate. É possível perceber, nessa estudante, uma dificuldade na compreensão do significado parte-todo.

Na questão número 3, os estudantes apresentaram dificuldades para fazer a comparação das frações.

Figura 12: Questão 3 – Tarefa 1

Na sala de Pedro, haverá eleição para representante da turma. Do total de alunos, $\frac{2}{5}$ vão votar em Aline, $\frac{2}{10}$ vão votar em Ramon, e o restante da turma está indeciso.

a) Se, do total de alunos, $\frac{2}{5}$ vão votar em Aline, e $\frac{2}{10}$ vão votar em Ramon, quem está ganhando a eleição até o momento? Justifique como chegou a sua conclusão.
b) Qual a fração que representa o total de alunos que já decidiram seu voto?

Fonte: Elaborado pelo autor

Nosso objetivo era que os estudantes fizessem a comparação das duas frações, mas, ao observar algumas respostas, percebemos que a maioria deles estava associando o denominador das frações como a quantidade total de alunos. Em momento algum a questão se referiu à quantidade total de alunos. A seguir, apresentamos algumas das respostas efetuada por eles[10].

> **Talita**: "Ramom, porque o denominador é maior."
> **Bial**: "Aline, porque ramon falta dez e aline e 5."
> **Patrícia**: "Aline, porque de cinco pessoas 2 vão votar em Aline e de 10 vão votar somente 2. Então a diferença é de 5 pessoas."
> **Taís**: "Ramon. Porque de 10 das votaram em ramon."

[10] Optamos por digitar as respostas porque algumas estavam com a escrita muito clara e ao escanear ficou com a resolução muito ruim. Ao digitar mantivemos a forma como o(a) estudante grafou sua resposta.

> **Agatha**: "Ramon, pois $\frac{2}{5}$ vão votar em aline e $\frac{2}{10}$ em Ramon. O denominador dos alunos que vão votar em Ramon é maior do que os de Aline."
> **Sofia**: "Os dois estão empate, pois o total de alunos são diferentes mas quem votou neles foi na mesma quantidade."
> **Alice**: "Eu não entendi nenhuma, pois não sei o total de aluno, como posso saber o total de aluno e o total de votos [...]. o $\frac{2 \Rightarrow \text{é o total de alunos?}}{5 \quad \Rightarrow \text{é o total de votos?}}$ como posso saber?"
> **Kauan**: "Ramon. Porque o denominador é maior."
> **Viviane**: "Ramon, porque no total de 10 alunos 2 votar em Alice e o resto voto no Ramon." (respostas por escrito dos estudantes em 11 mar. 2019).

Observando as respostas acima, percebemos que os estudantes apresentaram dificuldades para fazer a comparação das frações. Alguns fizeram a comparação apenas entre o denominador da fração para concluir qual a maior fração, como por exemplo, Talita e Kauan. Outros utilizaram a ideia de proporção, como Viviane e Patrícia e outros não entenderam o problema, como Alice.

Acreditamos que os estudantes estão acostumados fazer a comparação 10 > 5 dentro do conjunto dos números naturais e, quando se deparam com frações, por exemplo $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{10}$, para fazer a comparação, utilizam da mesma relação. Nesse sentido, Merlini (2005) ressalta que, normalmente, o estudante transfere as ideias construídas dos números naturais para frações e que, em algumas situações, também, pode referir-se à fração não como um número, mas como números sobrepostos. Assim, acreditamos que, para os estudantes escreverem $\frac{2}{5} > \frac{2}{10}$, parece contraditório a eles.

Para que o estudante faça a comparação de frações, de acordo com Monteiro (2013), é preciso utilizar os seus conhecimentos sobre o significado das frações e a ideia de frações equivalentes, porque uma das aplicações da ideia de Frações equivalentes se manifesta quando queremos comparar duas Frações e determinar se uma é menor, igual ou maior que outra.

Como nessa primeira aula foi aplicada apenas a tarefa 1, após ter finalizado o 1º horário, os estudantes que concluíram foram liberados para assistir à aula da professora do 2º horário.

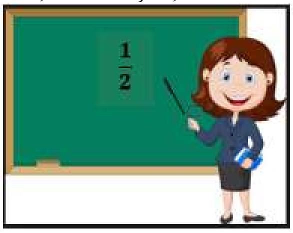
A seguir, analisaremos cada uma das questões dessa tarefa, pois o objetivo foi averiguar os conhecimentos prévios dos estudantes antes de dar início às outras tarefas.

Análise da tarefa 1

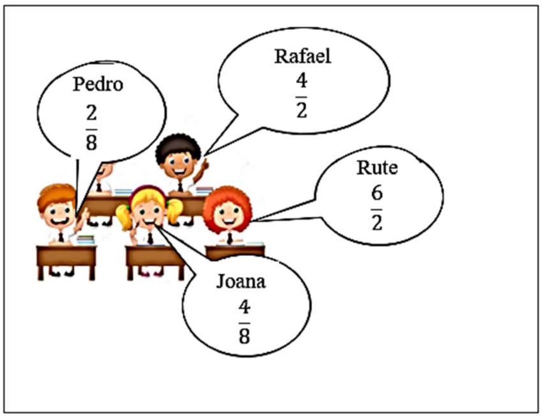
Questão 1

A questão 1 teve como objetivo verificar se os estudantes tinham um conhecimento sobre o conceito de equivalência de frações. Com isso, eles deveriam ser capazes de identificar, entre as opções de resposta, a fração equivalente à fração dada.

A professora Ana Paula escreveu, no quadro, uma fração, conforme a ilustração abaixo.



Em seguida, pediu que Rafael, Joana, Rute e Pedro falassem uma fração que fosse equivalente à fração escrita por ela no quadro.



Marque com um "X" qual dos alunos respondeu corretamente.

c) Joana b) Pedro c) Rafael d) Rute

Justifique sua resposta.

No quadro[11] a seguir, descreveremos a nossa estratégia de correção para essa questão.

[11] Para cada questão fizemos um quadro de estratégia de correção para orientar a compreensão das respostas dadas pelos estudantes.

Quadro 6: Estratégia de correção da tarefa 1 – Questão 1

Opção de respostas	Estratégia de correção
$\frac{4}{8}$	Considerada como correta.
$\frac{2}{8}$	Considerada como uma alternativa aleatória.
$\frac{4}{2}$	O estudante faz a inversão do numerador com o denominador. Além disso, pode ter pensado na ideia de metade, pois a fração dada representava um meio. Isto é, o estudante fez a interpretação da fração literalmente.
$\frac{6}{2}$	O estudante fez a interpretação da fração literalmente. Ao ler $\frac{1}{2}$, interpretou como “metade”.
Justificativa	Foi considerada como correta a resposta que continha um pensamento algébrico coerente, justificativa com cálculo ou com uma explicação dentro do contexto. Foi considerada como incorreta a resposta que não tinha um cálculo algébrico coerente ou uma explicação sem nexo.

Fonte: Elaborado pelo autor. jun. 2019

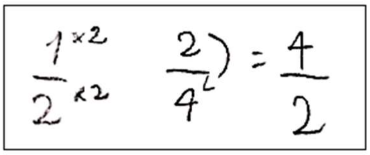
Tabela 1: Resultados – Tarefa 1: Questão 1

Questão	Alternativas	Total de estudantes
1	a) 4/8	4
	b) 2/8	5
	c) 4/2	11
	d) 6/2	–
Justificativa	Correta	1
	Inversão do numerador com o denominador	4
	Incorreta	12
	Sem justificativa	3

Fonte: Elaborado pelo autor. jun. 2019

Conforme podemos observar acima, apenas 4 dos estudantes acertaram a questão, e, entre os que acertaram, apenas 1 fez uma justificativa considerada como correta. Além disso, 11 dos estudantes marcaram o item “c”, ou seja, provavelmente, pensaram corretamente, porém, fizeram a inversão entre numerador e denominador. Além disso, utilizaram uma das estratégias identificadas por Merlini (2005, p. 208), “estratégia interpretação da fração literalmente”, isto é, o estudante pode ter lido a fração $\frac{1}{2}$ e ter associado com a ideia de metade, e como $\frac{4}{2}$, também, pode significar a metade de 4, o estudante provavelmente, efetuou essa relação.

Figura 13: Resposta de um estudante


$\frac{1^{\times 2}}{2^{\times 2}}$ $\frac{2}{4^{2}}) = \frac{4}{2}$

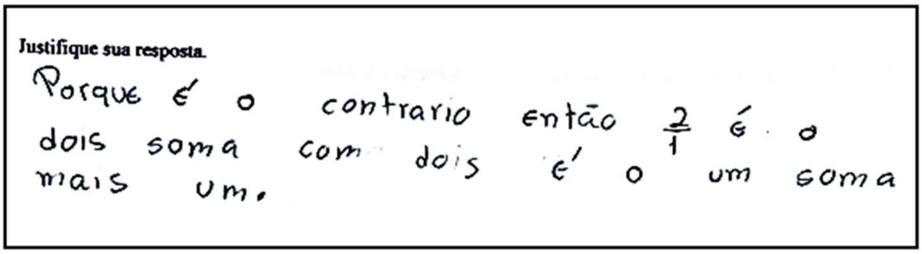
Fonte: Acervo do autor

Conforme podemos observar na imagem, é provável que o estudante compreenda a necessidade de realizar a multiplicação das partes no numerador e no denominador. Porém, a ideia de metade prevalece, favorecendo que o numerador e denominador sejam invertidos.

De acordo com os dados acima, podemos observar que esse tipo de erro, como do item “c”, foi muito comum entre os estudantes e creditamos que essa dificuldade pode relacionar-se ao entendimento das ideias básicas de frações. Outra possível causa, talvez seja o fato de os estudantes tratarem numerador e denominador de forma independente, como se fossem dois números naturais distintos e que estão sobrepostos, apenas separados por um traço.

A seguir, selecionamos duas justificativas efetuadas pelos estudantes e uma das falas de uma estudante na hora da realização da tarefa, que reforçam a ideia acima.

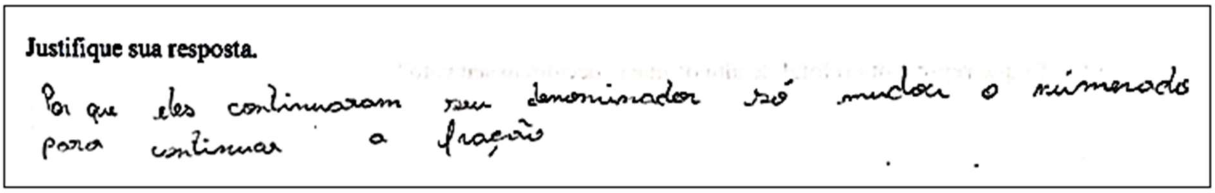
Figura 14: Resposta de um estudante


Justifique sua resposta.
Porque é o contrario então $\frac{2}{1}$ é o
dois soma com dois é o um soma
mais um.

Fonte: Acervo do autor

A estudante, conforme podemos observar, primeiro fez a inversão entre numerador e denominador e, em seguida, a soma do numerador por um número e o denominador por outro número, ou seja, tratou o numerador e o denominador de forma independente.

Figura 15: Resposta de uma estudante


Justifique sua resposta.
Por que eles continuaram seu denominador só mudou o numerado
para continuar a fração

Fonte: Acervo do autor

Essa estudante justificou que manteve o denominador e mudou apenas o numerador para continuar com a fração. Acreditamos que, quando ela diz, “continuar a fração”, provavelmente pense em manter com a ideia de metade do número, pois, ao ler $\frac{1}{2}$ (um meio), a estudante pode ter interpretado como “um e meio” (1 inteiro e metade do inteiro). Assim, encontrando como resultado $\frac{4}{2}$, para essa estudante, a ideia de metade continuará a mesma se fizesse dessa forma.

No decorrer da aula, questionei uma estudante o porquê ela havia escolhido $\frac{4}{2}$ como resposta, e ela me disse:

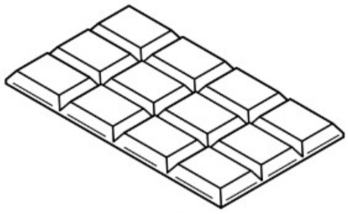
> **Estudante**: Professor, se eu inverter a fração colocando $\frac{2}{1}$, posso multiplicar o numerador e o denominador por 2 que encontro a fração equivalente, pois uma é o dobro da outra. (trecho de transcrição da gravação em áudio 11 mar. 2019)

Podemos inferir que ela pensa em fração da mesma forma que pensa em números naturais, ou seja, utiliza as mesmas propriedades dos números naturais na fração, tratando numerador e denominador como se fossem dois números naturais separados por um traço.

Questão 2

O objetivo desta questão foi verificar se os estudantes eram capazes de interpretar um dado problema, fazer a representação fracionária solicitada e, por fim, somar frações com denominadores iguais. A questão aborda o significado parte-todo com quantidade contínua e representa uma situação estática, ou seja, um chocolate já dividido em 12 partes iguais, em que 3 dessas partes foram consumidas no primeiro dia, e 5 no segundo dia.

Luiz ganhou uma barra de chocolate da sua mãe, conforme a figura a seguir.



No mesmo dia, comeu três “quadradinhos" dessa barra. No dia seguinte, comeu mais cinco “quadradinhos” da mesma barra.

a) Qual a representação fracionária do número de quadradinhos que Luiz comeu no primeiro dia?
b) Qual a representação fracionária do número de quadradinhos que Luiz comeu no segundo dia?
c) Que fração representa o total de “quadradinhos” que Luiz comeu?

Para a questão, temos as possíveis respostas:

Quadro 7: Estratégia de correção da tarefa 1 – Questão 2

Possíveis respostas letra "a"	Estratégia de correção
$\frac{3}{12}$	Três partes para um total de 12 quadradinhos. Considerada como correta.
$\frac{12}{3}$	O estudante compreende, mas fez a inversão entre numerador e denominador.
$\frac{3}{9}$ ou $\frac{9}{3}$	O estudante faz a contagem das partes sem relacionar com o todo (relação parte-parte), ou seja, parte comida em relação as que restaram.
Possíveis respostas letra "b"	**Estratégia de correção**
$\frac{5}{12}$	Cinco partes para um total de 12 quadradinhos. Considerada como correta.
$\frac{12}{5}$	O estudante compreende, mas fez a inversão entre numerador e denominador.
$\frac{5}{7}$ ou $\frac{7}{5}$	O estudante faz a contagem das partes sem relacionar com o todo (relação parte-parte), ou seja, parte comida em relação as que restaram.
Possíveis respostas letra "c"	**Estratégia de correção**
$\frac{3}{12}+\frac{5}{12}=\frac{8}{12}$	O estudante realizou corretamente a operação.
$\frac{3}{12}+\frac{5}{12}=\frac{8}{24}$	O estudante somou o numerador e o denominador de forma independente.

Fonte: Elaborado pelo autor. jun. 2019

Tabela 2: Resultados – Tarefa 1: Questão 2

Questão 2	Resposta esperada	Inversão do numerador pelo denominador	Pensou no significado parte-parte	Resposta considerada errada
a)	14	1	1	4
b)	14	1	-	5
c)	11	1	-	8

Fonte: Elaborado pelo autor. jun. 2019

Conforme observamos acima, 14 estudantes conseguiram fazer a representação fracionária corretamente da letra *a* e *b*. Além disso, 11 realizaram corretamente a operação.

De acordo com Nunes e Bryant (1997), Merlini (2005) e Monteiro (2013), o significado parte-todo com quantidade contínua é muito utilizado pelos livros didáticos, e é, também, normalmente como o professor dá ênfase em sala de aula, para introduzir o conceito de fração. Assim, acreditamos que esse pode ter sido um fator positivo para essa questão. Com isso, acreditamos que o significado parte-todo com quantidade contínua, os estudantes apresentam certa facilidade para resolver o problema.

Questão 3

Essa questão teve como objetivo investigar se os estudantes eram capazes de comparar e somar frações com denominadores diferentes.

Na sala de Pedro, haverá eleição para representante da turma. Do total de alunos, $\frac{2}{5}$ vão votar em Aline, $\frac{2}{10}$ vão votar em Ramon, e o restante da turma está indeciso.

a) Se, do total de alunos, $\frac{2}{5}$ vão votar em Aline e $\frac{2}{10}$ vão votar em Ramon, quem está ganhando a eleição até o momento? Justifique como chegou a sua conclusão.

b) Qual a fração que representa o total de alunos que já decidiram seu voto?

Para essa questão, temos as possíveis respostas:

Quadro 8: Estratégia de correção da tarefa 1: Questão 3

Possíveis respostas item "a"	**Estratégia de correção**
Aline = $\frac{2}{5}$	Considerada como resposta correta, ou seja, o estudante faz a comparação de frações corretamente.
Ramon = $\frac{2}{10}$	Considerada como incorreta, pois o estudante utilizou a propriedade dos números naturais para fazer a comparação, ou seja, considerou 10 > 5 e concluiu que Ramon estava ganhando a eleição.
Possíveis respostas item "b"	**Estratégia de correção**
$\frac{6}{10}$ ou $\frac{3}{15}$	Considerada como resposta correta, ou seja, o estudante realiza a soma de frações com denominadores diferentes.
$\frac{4}{15}$	Considerada como resposta incorreta, pois o estudante fez a soma do numerador e denominador de forma independente como se fossem dois números isolados.
$\frac{2}{15}$	Considerada como resposta incorreta, pois o estudante conservou o numerador e fez a soma do denominador

Fonte: Elaborado pelo autor. jun. 2019

Tabela 3: Resultados – Tarefa 1: Questão 3a

Questão 3a	Resposta correta	Resposta incorreta	Não soube responder
Total de estudantes	7	12	1

Fonte: Elaborado pelo auto., jun. 2019

De acordo com os resultados acima, acreditamos que, na compreensão dos números $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{10}$, os estudantes referem que $\frac{2}{10}$ é maior do que $\frac{2}{5}$, precisamente porque 10 é maior do que 5.

E esse tipo de erro é um indicador de que a representação fracionária ainda não está compreendida para o estudante.

Nesse sentido, Merlini (2005) ressalta que, a relação inversa que a fração apresenta quando os numeradores são iguais, quanto maior o denominador menor a fração, poderá originar o fator complexidade para a resposta do estudante. Isto é, O invariante Ordem da fração, por ser diferente do conjunto dos números naturais, poderá ser a grande dificuldade de o estudante perceber e aceitar que $\frac{2}{5}$ é maior do que $\frac{2}{10}$, pois, no conjunto dos números naturais, 10 é maior do que 5. Assim, inferirmos que uma possível explicação para essa dificuldade pode ter relação com a ruptura da noção de números naturais que os estudantes têm.

Tabela 4: Resultados – Tarefa 1: Questão 3b

Questão 3b	Resposta correta	Somou o numerador e o denominador	Conservou o numerador e somou o denominador	Não soube responder ou colocou resposta aleatória
Total de estudantes	0	10	3	7

Fonte: Elaborado pelo autor. jun. 2019

No item *b,* os estudantes deveriam fazer a soma das duas frações dadas no problema. Conforme observamos, 10 estudantes fizeram a soma do numerador com numerador e denominador com o denominador, de forma isolada. Nessa direção, Monteiro (2013) aponta, como uma das causas, que “o erro pode estar presente na semelhança entre as Frações e os Números Naturais (levando ao uso de procedimentos aditivos com os Naturais), pois a criança pode estar confundindo com o algoritmo da multiplicação e mesclando ambos” (p. 55). Como os estudantes já viram fração no ano anterior (6º ano), provavelmente, eles fizeram essa relação.

Questões 4, 5 e 7

As questões 4, 5 e 7 tinham como objetivo verificar se os estudantes eram capazes de realizar a subtração de frações com denominadores iguais e diferentes. Nas questões 4 e 5, os estudantes deveriam ler o problema e identificar a necessidade de efetuar a subtração de frações. Na questão número 7, foi apresentada uma expressão sem problematização.

A seguir, apresentaremos as possíveis respostas de cada uma das questões e as respostas dadas pelos estudantes.

A questão número 4 tinha a seguinte problematização:

Guilherme tem que praticar piano durante $\frac{3}{4}$ de hora todos os dias. Hoje, já praticou $\frac{1}{4}$ de hora. Que fração de uma hora ele ainda tem que praticar?

Quadro 9: Estratégia de correção da tarefa 1: Questão 4

Possíveis respostas questão 4	**Estratégia de correção**
$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$	Considerada como correta, ou seja, o estudante realiza a subtração de frações, com denominadores iguais, corretamente.
$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}$	Considerada como incorreta, o estudante conserva o denominador, mas ao invés de subtrair, somou as duas frações.
$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{8}$	Considerada como incorreta, pois o estudante, ao invés de subtrair, somou as duas frações. Além disso, fez a soma do numerador e denominador de forma independente.

Fonte: Elaborado pelo autor. jun. 2019

Tabela 5: Resultados – Tarefa 1: Questão 4

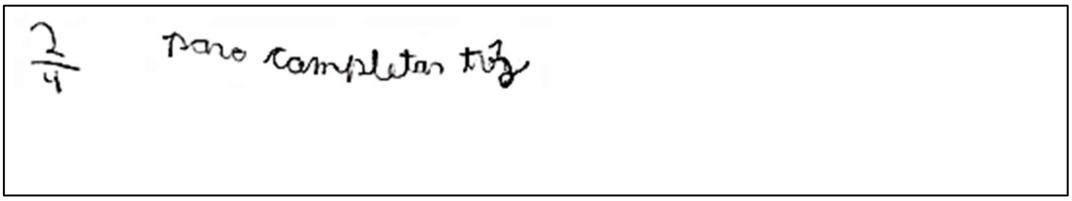
Questão 4	Resposta correta	Somou o numerador e o denominador	Somou o numerador e o denominador de forma independente
Total de estudantes	17	1	2

Fonte: Elaborado pelo autor. jun. 2019

Conforme podemos observar, 17 estudantes foram capazes de fazer a subtração de frações com denominadores iguais, o que constatamos que não apresentaram dificuldades com esse tipo de operação. Porém, Nunes e Bryant (1997) destacam que o estudante pode mostrar que aprendeu uma aplicação superficial do conteúdo, mas sem entender seu conceito. Ressaltam, ainda, que “as crianças usam os termos fracionais certos; elas falam sobre frações coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam.” (ibid. p. 191).

Assim, selecionamos duas justificativas efetuadas pelos estudantes, que podem demonstrar o que Nunes e Bryant (1997) afirmam:

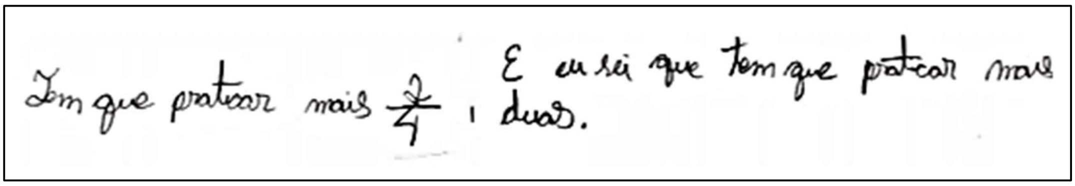
Figura 16: Resposta de um estudante



$\frac{2}{4}$ para completar trez

Fonte: Acervo do autor

Figura 17: Resposta de uma estudante



Tem que praticar mais $\frac{2}{4}$, E eu sei que tem que praticar mais duas.

Fonte: Acervo do autor

Na primeira justificativa (figura 16) o estudante afirma que falta $\frac{2}{4}$ para completar três, ou seja, pode ser que ele desconsiderou o denominador e considerou apenas o numerador efetuando 3 – 1 = 2, concluindo que faltava $\frac{2}{4}$ para completar 3. Já a segunda estudante (figura 17) justifica que ela sabe que é preciso praticar mais duas, mas, também, não elabora uma justificativa convincente.

Esses dois estudantes, possivelmente, deduziram para concluírem. Acertaram a resposta do problema, mas isso não significa que eles compreendem o conceito de frações.

A questão de número 5 apresentou a seguinte problematização:

Elisângela precisa fazer um bolo para a festa de aniversário de sua filha Ana Clara. Na receita, dizia que ela precisaria de $\frac{3}{4}$ de xícara de leite. Porém, ao pegar o leite na geladeira percebeu que tinha apenas $\frac{1}{2}$ de xícara de leite. Que fração de xícara de leite falta para Elisângela fazer esse bolo? Explique qual foi sua estratégia para resolver esse problema.

Quadro 10: Estratégia de correção da tarefa 1: Questão 5

Possíveis respostas questão 5	Estratégia de correção
$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	Considerada como correta, ou seja, o estudante foi capaz de realizar a subtração de frações, com denominadores diferentes, corretamente.
$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$	Considerada como incorreta, pois o estudante subtraiu o numerador e o denominador de forma independente.
$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6}$	Considerada como incorreta, o estudante ao invés de subtrair, somou as duas frações. Além disso, fez a soma do numerador e denominador de forma independente.

Fonte: Elaborado pelo autor. jun. 2019

Tabela 6: Resultados – Tarefa 1: Questão 5

Questão 5	Resposta correta	Subtraiu o numerador e o denominador	Somou o numerador e o denominador	Não soube responder ou colocou resposta aleatória
Total de estudantes	0	17	1	2

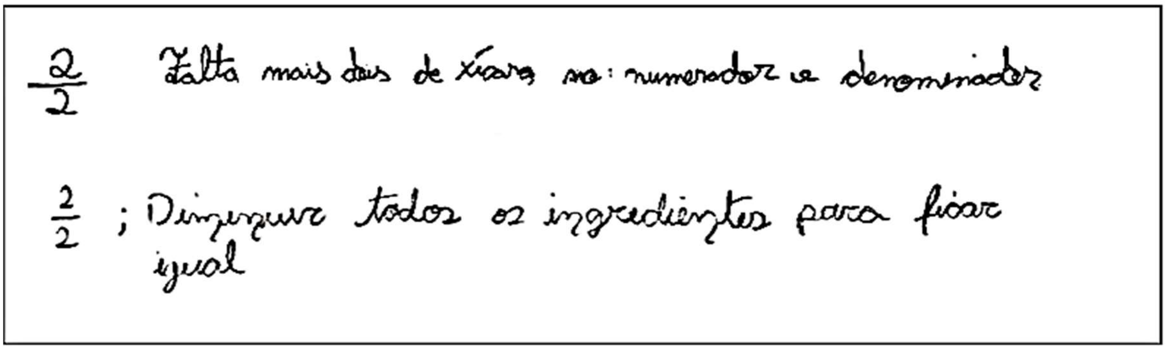
Fonte: Elaborado pelo autor. jun. 2019

Observando os resultados acima, 17 estudantes efetuaram a subtração entre o numerador com numerador e denominador com denominador, como se fossem números independentes um do outro.

Assim, o resultado acima faz-nos supor que os estudantes apresentam dificuldades nessa operação. Como já citado, uma possível causa dessa dificuldade, possivelmente, se relaciona ao não entendimento de alguns conceitos básicos de fração, por exemplo, não sabem distinguir a diferença entre o numerador e o denominador, não compreendem o que representa o numerador e o denominador de uma fração, entre outros.

Para reforçar o que estamos inferindo acima, selecionamos duas justificativas elaboradas pelos estudantes.

Figura 18: Respostas de duas estudantes



Fonte: Acervo do autor

De acordo com as justificativas acima, podemos inferir que as estudantes não compreendem o significado do numerador e denominador de uma fração, pois observamos, que elas trabalharam com o numerador e denominador como se fossem dois números isolados, ou seja, fizeram a subtração do numerador com numerador e denominador com denominador. Além disso, provavelmente, não compreendem o significado parte-todo. Esse tipo de justificativa, nessa questão, foi recorrente entre os estudantes.

A questão número 7 não apresentou uma problematização. O objetivo foi fazer a comparação do resultado dessa questão com as que havia uma problematização, pois, de acordo com Monteiro (2013), uma das dificuldades dos estudantes pode se relacionar à interpretação do problema. Assim, elaboramos a questão a seguir.

> Qual das alternativas abaixo representa o resultado da expressão $\frac{2}{5} - \frac{1}{10}$?
>
> a) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{3}{5}$
>
> b) $\frac{9}{10}$ d) $\frac{9}{5}$
>
> Justifique sua resposta.

Quadro 11: Estratégia de correção da tarefa 1: Questão 7

Possíveis respostas questão 7	Estratégia de correção
$\frac{3}{10}$	Considerada como correta, ou seja, o estudante foi capaz de realizar a subtração de frações com denominadores diferentes, corretamente.
$\frac{9}{10}$	Considerada como incorreta. Alternativa aleatória
$\frac{3}{5}$	Considerada como incorreta. O estudante fez a adição do numerador com numerador e, em seguida, a subtração do denominador com o denominador.
$\frac{9}{5}$	Resposta incorreta. Alternativa aleatória.

Fonte: Elaborado pelo autor. jun. 2019

Tabela 7: Resultados – Tarefa 1: Questão 7

Questão	Alternativas	Total de estudantes
7	a) 3/10	5
	b) 9/10	–
	c) 3/5	11
	d) 9/5	2
	Não marcou nenhuma alternativa	2
Justificativa	Correta	3
	Somou o numerador com numerador e subtraiu denominador com denominador	6
	Incorreta, sem raciocínio matemático	8
	Sem justificativa	3

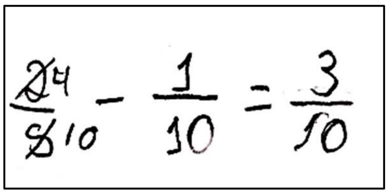
Fonte: Elaborado pelo autor. jun. 2019

Conforme observamos, não colocamos como opção de resposta, $\frac{1}{5}$, pois, de acordo com os dados já apresentados, podemos inferir que a maioria dos estudantes poderia marcar essa opção como fizeram para responder a questão 5, subtrair o numerador com numerador e denominador com denominador, como se fossem dois números independentes.

Assim, 11 estudantes optaram pela alternativa $\frac{3}{5}$, por isso, acreditamos que, para eles, é uma alternativa que fazia mais sentido diante das outras, ou seja, somar o numerador com numerador e subtrair o denominador com denominador.

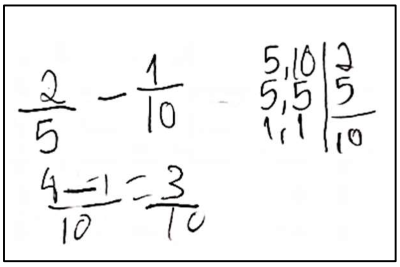
Dos 5 estudantes que responderam corretamente, apenas 2 apresentaram a justificativa correta. A estratégia usada pelas estudantes foi conforme figura a seguir.

Figura 19: Resposta de uma estudante



Fonte: Acervo do autor

Figura 20: Resposta de uma estudante



Fonte: Acervo do autor

Observamos que a estudante da figura 19 para realizar a operação, utilizou, como recurso, o procedimento de equivalência de frações. Já a estudante da figura 20 recorreu ao MMC. Ambas utilizaram estratégias diferentes, porém, defendemos, em nosso trabalho, o uso da equivalência de frações.

O método MMC também é uma forma de encontrar frações equivalentes para resolver determinada operação no conjunto dos números racionais, porém, é um método que, de acordo com Garcez (2013), o professor, tentando facilitar o entendimento do estudante, limita à memorização de regras, o que, muitas vezes, pode prejudicar a compreensão do estudante sobre o assunto. Exemplo disso é quando a estudante diz:

> **Estudante**: Professor, tira uma dúvida aqui? Depois que eu tiro o MMC eu divido pelo debaixo e multiplico pelo de cima? Esqueci como faz.
> **Pesquisador**: Não sei. Por que você acha que deve ser feito dessa forma?
> **Estudante**: Ah, professor! Eu acho que deve ser assim.
> **Pesquisador**: Mas por quê?
> **Estudante**: Não sei explicar professor! Vou fazer assim tá? (trecho de transcrição da gravação em áudio 11mar. 2019)

Como observamos, a estudante demonstrou saber utilizar o procedimento, mas não soube explicar o porquê fazia daquela forma, "dividir pelo debaixo e multiplicar pelo de cima", quando foi questionada. Nesse sentido, assim como Garcez (2013), acreditamos que "mecanizar o procedimento pode parecer o caminho mais prático e rápido, mas nem todo atalho é viável, podendo trazer prejuízo à aprendizagem do aluno." (p. 25).

Retomando às alternativas, os estudantes que optaram por $\frac{3}{5}$, as justificativas foram parecidas, para eles deveríamos somar o numerador com numerador e subtrair o denominador com denominador, conforme a imagem a seguir.

Figura 21: Resposta de um estudante

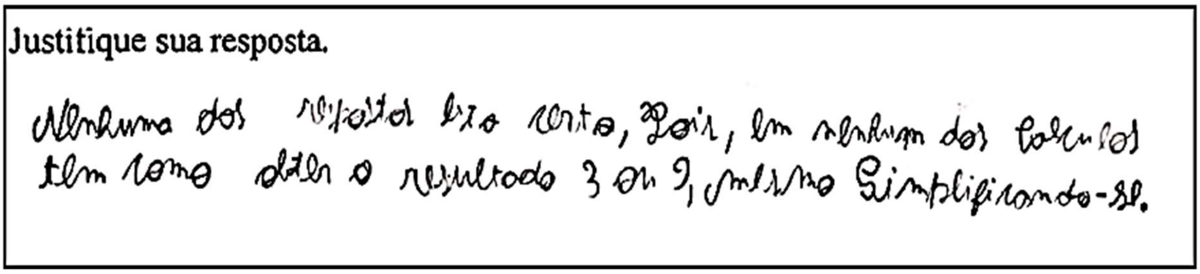

Justifique sua resposta.
Porque emcima é soma é embaixo é subtra
çãoo
Página | 3

Fonte: Acervo do autor

Conforme relatamos e de acordo com a justificava do estudante, os que optaram por essa alternativa, provavelmente analisaram as alternativas e foram por eliminação, tentando encontrar uma alternativa que, talvez, fizesse mais sentido para eles, como explicado no quadro 11.

Por fim, os estudantes que optaram por não marcar nenhuma alternativa, acreditamos que estavam esperando, como resultado, $\frac{1}{5}$. Como não havia essa opção, justificaram que não encontraram resposta.

Figura 22: Resposta de um estudante


Justifique sua resposta.

Nenhuma dos respostas são certo, pois, em nenhum dos calculos tem como obter o resultado 3 ou 9, mesmo simplificando-se.

Fonte: Acervo do autor

Os 8 estudantes que fizeram a justificativa sem utilizar o raciocínio matemático demonstram uma insegurança em sua resposta, "*não sei se tá certo, mas acho que é isso*", ou seja, podemos inferir que marcaram uma alternativa para não deixar a questão sem fazer.

Essa questão mostrou que os estudantes apresentam dificuldades quando se trata de fazer a subtração de frações com denominadores diferentes.

Questão 6

A questão 6 teve como objetivo verificar se os estudantes eram capazes de fazer a soma de frações com denominadores diferentes. Para isso, fizemos a contextualização a seguir:

O professor Avani escreveu a expressão $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ no quadro e pediu que seus alunos resolvessem. Quem terminasse de resolver primeiro, ganharia um chocolate. Arthur resolveu a questão, corretamente, com menos de dois minutos. Qual foi o resultado encontrado por Arthur?

a) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{2}{6}$

b) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{5}$

Justifique sua resposta.

Quadro 12: Estratégia de correção: Tarefa 1: Questão 6

Possíveis respostas	Estratégia de correção
$\frac{5}{6}$	Considerada como correta, ou seja, o estudante realiza a adição de frações, com denominadores diferentes, corretamente.
$\frac{2}{5}$	Considerada como incorreta. O estudante fez a soma do numerador com numerador e denominador com denominador de forma independente.
$\frac{2}{6}$	Considerada como incorreta. O estudante somou o numerador e multiplicou o denominador. Trabalhou com os números de forma independente.
$\frac{1}{5}$	Considerada como incorreta. O estudante conservou o numerador e somou o denominador. Trabalhou com os números de forma independente.

Fonte: Elaborado pelo autor. jun. 2019

Tabela 8: Resultados – Tarefa 1: Questão 6

Questão	Alternativas	Total de estudantes
6	a) 5/6	2
	b) 2/5	11
	c) 2/6	2
	d) 1/5	5
Justificativa	Correta	2
	Somou o numerador com numerador e denominador com denominador	8
	Somou o numerador e multiplicou o denominador	3
	Conservou o numerador e somou o denominador	2
	Sem raciocínio matemático	3
	Em branco	2

Fonte: Elaborado pelo autor. jun. 2019

De acordo com os resultados acima, podemos concluir que os estudantes veem fração como dois números inteiros separados por um traço, pois efetuam a operação tratando o numerador e o denominador de forma independente. Esse tipo de erro, também, foi apontado nos estudos de Monteiro (2013) e Merlini (2005).

Uma das estratégias identificadas por Melini (2005, p. 209), a "*estratégia utilização de operação",* pode justificar essa dificuldade dos estudantes, em que, no anseio de apresentar uma resposta, utilizam algum tipo de operação matemática entre o numerador e denominador. Para a autora, os principais erros cometidos por esses estudantes estão atrelados ao não entendimento do significado da ideia de fração.

5.2 Tarefa 2: Manipulação do kit de frações no quadriculado

13 de março de 2019

Organizei, com antecedência, a sala onde aplicávamos a pesquisa, registrando, na lousa, os quadros que os estudantes iriam preencher no momento da discussão da manipulação do kit de frações no quadriculado.

Nessa aula, uma professora do turno da manhã ofereceu-se para efetuar a filmagem. Após tudo organizado, às 14h40 os estudantes começaram a chegar na sala para iniciarmos a tarefa do dia. Utilizamos, nesse dia, duas aulas de 50 minutos, e estavam presentes os 20 estudantes da aula anterior, 16 meninas e 4 meninos. De início, ficaram meio receosos por conta da professora com a câmera, mas, depois de alguns minutos, acostumaram-se.

Essa tarefa – manipulação do kit – teve como objetivo propiciar, aos estudantes, reconhecerem as peças do kit de frações no quadriculado, e efetuarem algumas manipulações para comparar e encontrar frações equivalentes. Era muito importante esse reconhecimento, pois, nas próximas tarefas, utilizariam o kit como recurso didático.

Com todos os estudantes em sala, solicitei que se organizassem em dupla e se assentassem de frente para o outro, facilitando a divisão do kit e o debate a respeito da tarefa. De acordo com Bordin (2011), quando se trabalha com materiais manipuláveis, a disposição dos estudantes, em grupos ou duplas, é um diferencial para o aprendizado, porque, ao conversar e trocar ideias sobre o que estão observando, a construção do conhecimento torna-se mais palpável e menos abstrata.

Assim, após a organização das duplas, entreguei uma folha com a tarefa para cada estudante e um kit para cada dupla. No início, ficaram todos empolgados com o kit e já queriam abrir a embalagem para ver o que tinha dentro. Todos com o material em mãos, dei início à aula.

Inicialmente, os estudantes manipularam o kit, sem a minha intervenção, para verificarem as peças que faziam parte do material. Após esse momento, pedi que separassem as peças do kit por cores, pois seria muito importante que eles soubessem a quantidade de peças que cada cor tinha. Em seguida, separaram as peças e alguns estudantes anotaram o total de peças que havia de cada cor. Após esse primeiro reconhecimento, informei que a peça azul seria o nosso inteiro, ou seja, todos os questionamentos que faríamos seriam em relação à peça azul. Tudo esclarecido, dei início aos questionamentos.

Solicitei que pegassem uma peça verde, pois iria dar um exemplo de como iriam preencher o primeiro quadro. Quando todos já estavam com uma peça verde na mão, eu disse:

> **Pesquisador**: Essa peça verde foi dividida em quantas partes?
> **Estudantes**: Duas partes.
> **Pesquisador**: O que aconteceu com o nosso inteiro então?
> **Estudantes**: Foi dividido ao meio.
> **Pesquisador**: Se essa peça foi dividida em duas partes, e se eu pegar apenas uma peça verde, qual a fração que ela irá representar?
> **Agatha**: Um dobro.
> **Pesquisador**: Um dobro?
> **Estudantes**: Não, será um meio.
> **Pesquisador**: Muito bem. E se pegarmos apenas uma peça rosa, qual a fração que ela representaria?
> **Taís**: Três terços.
> **Pesquisador**: Três terços, todos concordam? (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Houve um silencio.

> **Pesquisador**: Se eu pegar uma peça rosa, você está usando apenas uma, correto?
> **Taís**: Correto.
> **Pesquisador**: Então isso quer dizer que você está usando uma parte de quantos?
> **Estudantes**: Uma parte de três.
> **Pesquisador**: Então qual a fração que essa peça representa?
> **Estudantes**: Um terço.
> **Pesquisador**: Isso aí. Ficou claro agora? Então vamos fazer esse mesmo procedimento com todas as outras cores. Vocês irão pegar somente uma peça de cada cor e escrever, no quadro, a representação fracionária de cada uma. Ok? (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Figura 23: Questão 1: Tarefa 2

Complete o quadro abaixo com a representação fracionária de **cada uma das peças** do kit de frações no quadriculado.

Quadro para registro	
Peças	**Representação fracionária em relação à peça azul**
Uma peça azul	**Um inteiro = 1**
Uma peça verde	
Uma peça rosa	
Uma peça laranja	
Uma peça vermelha	
Uma peça roxa	
Uma peça amarela	
Uma peça cinza	

Fonte: Elaborado pelo autor. jan. 2019

Esse início da atividade foi bem tranquilo, pois os estudantes conseguiram entender que o inteiro foi dividido em várias partes diferentes, por exemplo, 2, 3, 4 e 6. Também conseguiram fazer a representação fracionária de cada uma delas com facilidade.

Apesar da facilidade para responderem essa questão, entendemos que isso não quer dizer que os estudantes dominam o conteúdo fração, pois, conforme Nunes e Bryant (1997) relatam, muitas vezes, o estudante aparenta ter uma compreensão completa das frações, mas ainda não tem. No entanto, acreditamos que a forma como foi conduzida a discussão, para o preenchimento do quadro, oportunizou que os estudantes se posicionassem sobre o que pensavam enquanto manipulavam o material.

Nesse sentido, Smole e Diniz (2016) afirmam que os estudantes, ao verbalizarem entre si, enquanto manipulam o material didático, naturalmente, a linguagem matemática também se desenvolve. Isto é, o estudante tem a oportunidade de refletir sobre as situações expostas por seus colegas, e, assim, estabelecer uma negociação entre diferentes significados de uma mesma noção. As autoras reforçam ainda que, "o processo de negociação solicita a linguagem e os termos matemáticos apresentados pelo material" (Ibid., p. 13).

Um exemplo é quando a estudante diz que uma peça verde representava "um dobro". Ou seja, provavelmente, ao expressar "um dobro", estava pensando em um meio, pois a peça estava dividida em duas partes iguais, mas não conhecia ou esqueceu a forma "correta" de falar. No entanto, ao ser questionada, se realmente a peça representava "um dobro", os outros estudantes informaram que o "correto" seria um meio. Assim, podemos inferir que, nesse momento, a estudante teve a oportunidade de refletir sobre o que havia dito.

Após todos preencherem o quadro, retomei a questão número 2 da tarefa 1, pois houve dúvidas se a barra de chocolate representava o todo ou os quadradinhos da barra que representavam o todo.

> **Pesquisador**: Na aula anterior, houve uma dúvida em relação à barra de chocolate. Uma aluna disse que não sabia se a barra representava o todo ou se cada quadradinho representava o todo. O que vocês me dizem? Nessa questão, a barra representa o quê? (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

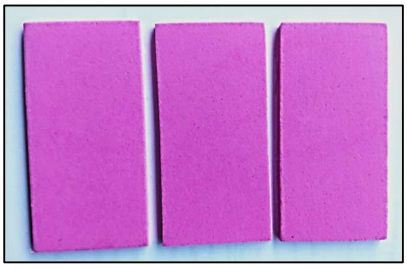
Os estudantes ficaram em silêncio por um tempo, mas, depois, um deles respondeu:

> **Pietro**: Ela representa o todo. Seria como se fosse essa peça azul. E os quadradinhos seriam as partes que ela foi dividida.
> **Pesquisador**: Muito bom. Todos concordam com o colega?
> **Estudantes**: Sim. (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Nesse momento, podemos perceber que o estudante foi capaz de fazer um comparativo do material manipulável com a barra de chocolate do exercício para expor seu raciocínio, ou seja, utilizou o material como base para a compreensão do conteúdo. Ao pensar assim, de acordo com Scolaro (2008), o estudante demonstra ter um envolvimento maior na sua aprendizagem, propiciando desenvolver diversas capacidades e atitudes, bem como a compreensão dos conceitos e ideias matemáticas.

Assim, aproveitei a resposta do Pietro e escrevi duas frações no quadro, $\frac{2}{5}$ e $\frac{2}{10}$, e retomei uma dúvida da aula anterior a respeito do denominador de uma fração. Perguntei o que o 5 e o 10 representavam. Alguns estudantes ficaram em dúvida e outros responderam que representa o todo. Então, solicitei que pegassem uma peça rosa do kit, e disse: Essa peça rosa, se eu pegar apenas uma, qual fração ela representa?

Figura 24: Peças rosas do kit de frações

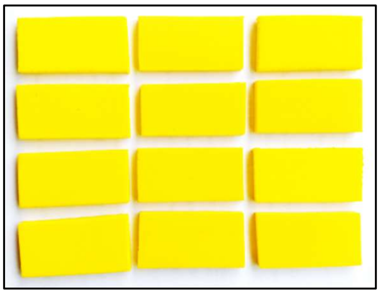


Fonte: Acervo do autor

Todos disseram com facilidade que representava $\frac{1}{3}$. Então questionei o porquê ela representava um terço. A maioria dos estudantes respondeu que era um terço porque a peça rosa foi dividida em três partes iguais e foi retirada somente uma.

Então, continuei com os questionamentos: se eu pegar duas peças amarelas, qual seria a representação fracionária dela?

Figura 25: Peças amarelas do kit de frações



Fonte: Acervo do autor

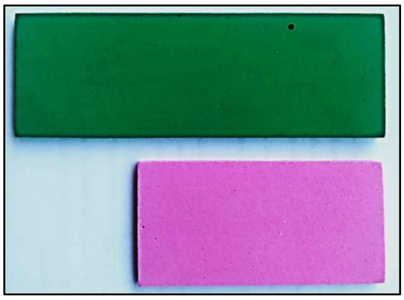
Alguns estudantes tiveram dúvidas. Uns disseram que era dois quartos e outros, um oitavo, mas percebi que eles já estavam meio cansados, pois não estão acostumados com atividades em que o professor questiona a todo momento, então, começaram a dar respostas aleatórias. Com muita insistência, responderam que as duas peças amarelas representavam dois doze avos, porque ela havia sido dividida em doze partes iguais e eu estava utilizando apenas duas.

Após esses questionamentos, perguntei novamente: Então, podemos concluir o quê sobre o denominador de uma fração? O que ele representa? Finalmente, responderam que o denominador de uma fração representava as partes em que o inteiro foi dividido. Após essa conclusão, perguntei sobre as frações que eu escrevera no quadro: Então o 5 representa o quê? E o 10? A maioria respondeu que o 5 representava o inteiro dividido em cinco partes iguais, e o 10, em dez partes iguais.

Aproveitei o ensejo da discussão e perguntei sobre a questão 3 da tarefa 1. Questionei qual fração seria maior. No primeiro momento, todos responderam que $\frac{2}{10}$ era maior. Perguntei se tinham certeza, mas todos ficaram na dúvida e criou-se um silêncio. Então, solicitei que pegassem uma peça verde e uma rosa. Perguntei qual era maior, a verde ou a rosa. Todos, sem exceção, responderam, com convicção, que a verde era maior. Pedi que comparassem a peça laranja com a rosa. Responderam que a rosa era maior.

Fechando essa discussão, perguntei: A peça verde é maior do que a rosa, sabem por quê? Todos conseguiram responder que a verde era maior porque foi dividida em duas partes, e a rosa, em três, ou seja, as partes da verde eram maiores do que a rosa.

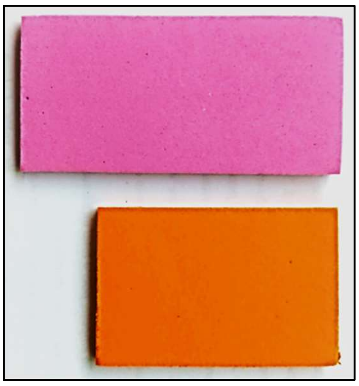
Figura 26: Comparando peças do kit



Fonte: Acervo do autor

Dei outro exemplo com a peça rosa. Por que a peça rosa é maior do que a peça laranja? Rapidamente, uma estudante falou.

Figura 27: Comparando peças do kit



Fonte: Acervo do autor

> **Estudante**: Nossa professor! Agora que consegui ver. Quanto mais você divide o inteiro, menor ficam as partes. Então, para eu comparar essas duas frações eu só preciso olhar em quantas partes o inteiro foi dividido para saber qual é a maior. (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Após essa conclusão, os outros estudantes começaram a perceber que, realmente, fazia sentido o que ela estava falando. Para que a situação acima ficasse mais esclarecida, desenhei, no quadro, duas barras de mesmo tamanho. Dividi uma em cinco partes e outra em dez partes. Dessa forma, ficou bem visível, para todos, a conclusão da estudante.

Conforme observamos, após algumas tentativas e demonstrações para comparar duas frações, os estudantes, aos poucos, foram compreendendo. Com isso, assim como Scolaro (2008), cremos que o material didático, quando manuseado pelo estudante, funciona como um instrumento de investigação, exploração e descoberta. A autora ressalta ainda que o uso de material manipulável é um suporte para uma aprendizagem matemática mais sólida.

Nessa direção, acreditamos que o estudante, em contato direto com o material, tem a oportunidade de envolver-se em diversas situações, em que aprende a agir, comunicar, raciocinar, resolver problemas e, até mesmo, fazer generalizações. Exemplo disso, é quando a estudante, ao fazer as comparações, utilizando o kit, foi capaz de perceber que quanto mais partes dividimos o inteiro, menores ficam as suas partes. Como entramos nessa discussão para fazer a comparação de duas frações com numeradores iguais, concluímos, então, após a fala da estudante, que, para comparar duas frações com numeradores iguais, basta verificar em quantas partes o inteiro foi dividido, ou seja, analisar o denominador da fração para saber qual é a maior ou menor.

Assim, voltei às frações escritas no quadro, e disse: Então, qual das duas frações é a maior? Todos conseguiram responder que $\frac{2}{5}$ era maior do que $\frac{2}{10}$. Foi possível concluir que, na questão 3 da tarefa 1, Aline estava ganhando a votação. Houve murmúrios de alguns alunos, dizendo:

> **Estudantes**: Nossa! Errei essa questão.
> **Estudantes**: Agora que entendi. (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

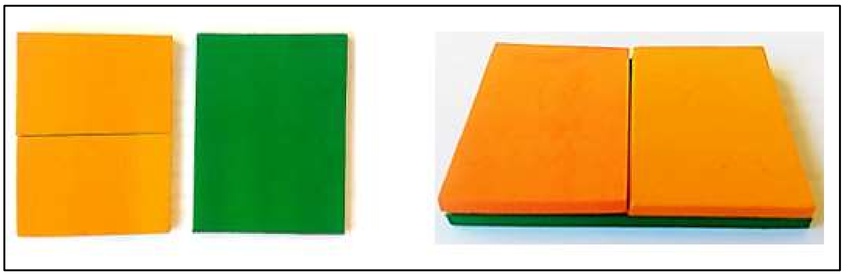
De acordo com o que averiguamos, da tarefa 1, 12 estudantes colocaram que $\frac{2}{10}$ era maior do que $\frac{2}{5}$ e, com as justificativas muito parecidas, de que 10 era maior do que 5. Ou seja, a maioria dos estudantes, ao fazer a comparação das duas frações, tratou o numerador e o denominador de forma independente, como se fossem dois números isolados. Porém, nas discussões, os próprios estudantes descobriram que a forma como pensaram não era a mais adequada para este assunto – fração.

Por fim, pedi que registrassem a definição que, em uma fração com numerador igual, quanto maior o denominador, menor é a fração, e quanto menor o denominador, maior é a fração.

Depois de ter preenchido o primeiro quadro e efetuadas as discussões acima, pedi que virassem a folha a fim de que preenchermos os outros três quadros que estavam faltando. Muitos já começaram a conversar e perder um pouco o foco do que estávamos fazendo. Acredito que já estavam cansados, mas, mesmo assim, insisti e solicitei que preenchessem os quadros.

Nesta questão, nosso objetivo era fazer a troca de algumas peças e que os estudantes percebessem que as peças trocadas representavam a mesma parte do todo. Isto é, a representação fracionária das peças trocadas com a peça referência é equivalente. Por exemplo: Uma peça verde pode ser trocada por duas peças laranja.

Figura 28: Troca de peças para achar a fração equivalente



Fonte: Acervo do autor

A representação fracionária de uma peça verde é $\frac{1}{2}$, e de duas peças laranja é $\frac{2}{4}$. Com isso, podemos concluir que $\frac{1}{2}$ é equivalente a $\frac{2}{4}$, pois representam a mesma parte do todo.

A seguir, apresentamos um dos três quadros que os estudantes deveriam preencher.

Figura 29: Questão 2: Tarefa 2

Complete os quadros abaixo de acordo com cada uma das informações.

✓ **Uma peça verde é possível ser trocada por qual outra peça? Analise as possibilidades, lembrando-se de que é necessário sobrepor uma peça à outra para fazer a troca.**

Peças	Azul	Rosa	Laranja	Vermelho	Roxo	Amarelo	Cinza
Quantidade necessária para troca							
Representação fracionária do total de peças trocadas							

Fonte: Elaborado pelo autor. jan. 2019

Como na questão 1, instruí sobre o preenchimento dos quadros da questão 2. Solicitei que pegassem uma peça verde. Perguntei, em seguida, se eu poderia trocar essa peça verde por outra peça, desde que as peças trocadas sobrepusessem à peça verde. Muitos conseguiram fazer essa primeira troca. Por exemplo, alguns estudantes falaram que poderia ser trocada por 2 peças laranja (como no exemplo da figura 28). Em seguida, perguntei: Qual seria a representação fracionária dessas duas peças laranjas? Houve dúvidas para fazer a representação fracionária, demoraram para perceber que 2 peças laranjas representavam $\frac{2}{4}$.

Como a discussão do primeiro quadro com as questões da tarefa 1 se prolongou, o tempo da aula já estava acabando, estávamos no 3º horário e em seguida seria o recreio. Com isso, muitos estudantes já estavam desanimados e não prestavam mais atenção ao que ocorria. Alguns conversavam entre eles, outros, começaram a fazer casinha com o kit de frações. Percebi que, para alguns estudantes, o material já estava se tornando um brinquedo, e não um recurso para executar a tarefa. Decidi encerrar a aula e retomar depois do recreio.

Voltando do recreio, retomamos a tarefa. Antes, conversei com eles sobre a seriedade do trabalho, solicitando a colaboração de todos para que efetuassem as atividades como deveriam.

Após se acomodarem em seus lugares, iniciei novamente o preenchimento dos outros três quadros. Porém, fizemos juntos, pois muitos estavam com dúvida, e alguns não fizeram porque não conseguiram compreender e desistiram no meio do caminho. Solicitei que pegassem uma peça verde e perguntei:

> **Pesquisador**: Essa peça verde, eu consigo trocar por outra peça? Qual? Quantas peças de mesma cor vocês utilizaram para fazer a troca? É possível trocar por outra peça? Qual a representação fracionária das peças que foram trocadas? (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Dessa forma, foi possível fazer o preenchimento de todos os quadros e, finalmente, eles conseguiram entender o que realmente era para ser efetuado na questão. Com os quadros preenchidos, seguimos para a última questão, cujo objetivo era possibilitar, aos estudantes, perceberem que a representação fracionária das peças trocadas representava frações equivalentes.

Figura 30: Questão 3: Tarefa 2

3) Como observamos, podemos escolher uma peça e efetuar sua troca por outras peças, desde que uma sobreponha a outra. Por que podemos fazer esse tipo de troca? Explique.

Fonte: Elaborado pelo autor. jan. 2019

Lemos a questão juntos e, em seguida, questionei por que podíamos, por exemplo, trocar uma peça verde por 2 peças laranjas, ou 3 vermelhas, ou 4 roxas e, assim, sucessivamente.

Figura 31: Troca de peças para achar a fração equivalente

Fonte: Acervo do autor

No início, houve um silêncio, mas um estudante levantou a mão e disse:

> **Estudante**: Podemos trocar porque ela preenche toda a peça verde.
> **Pesquisador**: Ok. Mas isso quer dizer o quê?
> **Estudante**: Quer dizer que ela representa a mesma parte do verde, porém, precisa de mais peças, porque foi dividida em mais partes.
> **Pesquisador**: Todos concordam com ele?
> **Alice**: Sim, professor, porque se a peça cobre a verde toda, ela representa a mesma parte do verde. Por exemplo, se eu pegar essas peças vermelhas, eu consigo colocar três delas no verde. Vai cobrir a peça verde toda, essas três peças. (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Conforme podemos observar, até o presente momento, os estudantes perceberam que, se uma peça sobrepõe a outra, ela representava a mesma parte do todo. Porém, quando pedi que fizessem a comparação das frações, tiveram dúvidas.

> **Pesquisador**: Então, se podemos fazer essas trocas, o que vocês me dizem a respeito da fração: $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$? (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Os estudantes ficaram parados por algum tempo, mas, depois, começaram a falar:

> **Estudantes**: Uma é o dobro da outra.
> **Estudantes**: São múltiplas uma da outra.
> **Estudantes**: São divisíveis.
> **Estudantes**: Multiplicou um e dois por 4. (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Por fim, após algumas discussões, pedindo que trocassem algumas peças, eles foram percebendo que, se foi possível fazer a troca das peças, também podíamos dizer que $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$ representavam a mesma parte do todo.

Então, perguntei:

> **Pesquisador**: Na aula anterior, uma aluna me perguntou o que era fração equivalente e me falou mais ou menos o que achava. Quem foi a aluna?
> **Alice**: Eu?
> **Pesquisador**: O que você havia me falado?
> **Alice**: Eu disse que era fração parecida, até escrevi na minha avaliação.
> **Pesquisador**: Todos concordam que uma fração equivalente é uma fração parecida?
> **Estudantes**: Eu acho que sim.
> **Pesquisador**: Mas o que quer dizer frações parecidas?
> **Pietro**: Quer dizer que ela representa a mesma parte do todo. Foi o que fizemos com as peças.

> **Pesquisador**: Muito bom. Todos compreendem, que uma fração equivalente, é o tipo de fração que representa a mesma parte do todo?
> **Estudantes**: Sim. (trecho de transcrição da gravação em vídeo 13 mar. 2019)

Já estávamos quase terminando a aula quando chegamos a essa conclusão: que, se duas frações representam a mesma parte do todo, são chamadas de frações equivalentes. Em seguida, solicitei que os estudantes fizessem o registro no caderno do que seria uma fração equivalente e que respondessem à questão 3 com base nas discussões que efetuamos.

Conforme observamos, os estudantes, ao manipular o kit de frações, puderam expor seus pensamentos, experimentar hipóteses e fazer generalizações. Dessa forma, em consonância com Smole e Diniz (2016), acreditamos que a utilização de materiais manipuláveis possibilita que os estudantes aprofundem e ampliem os significados que constroem mediante sua participação nas atividades de aprendizagem. As autoras relatam ainda que "são os processos de pensamento do aluno que permitem a mediação entre os procedimentos didáticos e os resultados da aprendizagem" (Ibid., p. 12). Isto é, o estudante é o verdadeiro agente e responsável último por seu próprio processo de aprendizagem.

5.3 Tarefa 3: Comparação de frações

15 de março de 2019

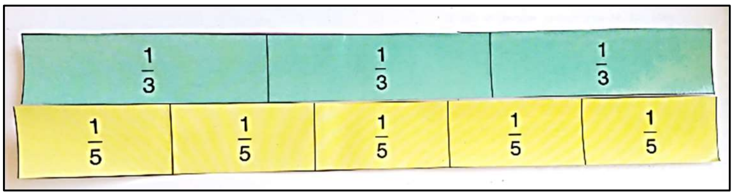
Nessa aula, não utilizei, como recurso, a filmagem, pois a professora que me ajudaria não pôde comparecer. Assim, utilizei apenas o celular para gravar algumas discussões.

O objetivo da tarefa foi trabalhar comparação de frações com numeradores e denominadores iguais, e numeradores e denominadores diferentes. Como recurso, utilizamos o kit de frações no quadriculado e as tiras de frações.

No 1º momento, foi distribuído, para cada estudante, um conjunto de tiras de frações e um kit de frações no quadriculado para cada dupla. Em seguida, informei que nossa aula seria para discutir um pouco sobre comparação de frações. Perguntei se sabiam o que era fazer uma comparação de frações e uma estudante respondeu que comparar duas frações seria comparar as semelhanças ou diferenças que cada uma tem. Em seguida, expliquei como iriam utilizar as tiras, pois não conheciam o material.

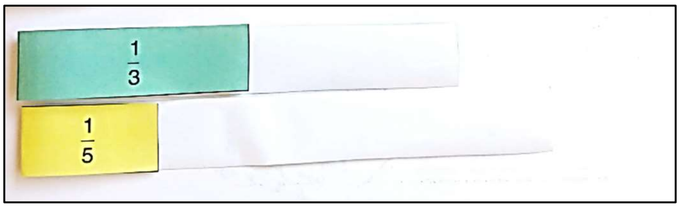
Para a explicação de como utilizar as tiras, escrevi, no quadro, duas frações, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$, e solicitei que me informassem qual das duas era maior. Informei que deveriam pegar a tira que estava dividia em três partes e a outra que estava dividida em cinco partes para efetuarem a comparação. Sem muito esforço, todos souberam responder.

Figura 32: Comparando frações com tiras de frações



Fonte: Acervo do autor

Figura 33: Comparando frações com tiras de frações



Fonte: Acervo do autor

Conforme podemos observar, os estudantes deveriam pegar as duas tiras correspondentes às frações informadas e, em seguida, fazer a comparação. Poderiam posicionar as tiras conforme figura (32) ou figura (33) para compararem. Esse foi um exemplo simples e sem desafios, pois a ideia era mostrar, aos estudantes, como iriam trabalhar com o material.

Aproveitando a situação, voltei um pouco ao assunto que discutimos na aula anterior a respeito de duas frações com numeradores iguais e, também, com denominadores iguais. Escrevi, no quadro, mais duas frações, $\frac{2}{6}$ e $\frac{2}{5}$, e perguntei: Sem utilizar o material, vocês saberiam me responder qual das duas frações é maior? Para minha surpresa a maioria dos estudantes respondeu que $\frac{2}{5}$ era maior do que $\frac{2}{6}$. Perguntei o porquê e me responderam que $\frac{2}{5}$ era maior, porque foi dividido em menos partes, ou seja, suas partes eram maiores do que $\frac{2}{6}$. Conseguiram lembrar da discussão da nossa última aula, que, para comparar duas frações com numeradores iguais, deveriam fazer a comparação dos denominadores. Quanto mais partes dividimos o todo, menor é a fração que representa as partes, e quanto menos partes dividimos o todo, maior é a fração que representa as partes.

Para instigá-los ainda mais perguntei: E se fosse, $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{8}$? Qual seria a maior?

> **Pietro**: $\frac{5}{8}$ é maior.
> **Pesquisador**: Por quê?
> **Pietro**: Porque as partes foram divididas iguais e 5 é maior do que 3.
> **Pesquisador**: E o que quer dizer o 3 e o 5?
> **Estudantes**: Quer dizer que você está usando 3 de 8 e 5 de 8.
> **Pesquisador**: Muito bom. Então qual a conclusão que podemos chegar se uma fração tem denominadores iguais? Como podemos compará-las?
> **Estudantes**: É só você olhar qual o maior numerador. (trecho de transcrição da gravação em áudio 15 mar. 2019)

Após essa discussão, reforcei com eles que se uma fração tem numeradores iguais, precisamos verificar as partes, ou seja, quanto mais elas forem divididas, menor é a fração. E se os denominadores são iguais, precisamos verificar o numerador, ou seja, quantas partes foram tomadas, pois quanto mais partes tomadas, maior é a fração.

As conclusões acima foram discutidas e percebidas pelos próprios estudantes, na tarefa 2, depois de efetuarem algumas experimentações com o kit de frações, averiguação de hipóteses e testado as hipóteses. Caso contrário, não é interessante o professor chegar em sala de aula e apresentar essa definição para os estudantes, pois, assim como Garcez (2013), defendemos que não é relevante trabalhar por meio de regras ou macetes, uma vez que, dessa forma, o professor pode ignorar várias etapas da aprendizagem,

> como a experimentação, a manipulação de materiais concretos, a formulação e a verificação de conjecturas num ambiente em que o professor e aluno passam a discutir sobre o assunto abordado, que são importantes e conduzem à compreensão do conceito (Ibid., p. 10).

Assim, em consonância com Garcez (2013), acreditamos que o estudante oportunizado a experimentar, manipular materiais didáticos, formular e verificar suas hipóteses, terá uma compreensão melhor sobre o conceito trabalhado.

Após a discussão acima, li um problema e solicitei que fizessem a comparação utilizando as tiras ou o kit de frações no quadriculado.

> **Pesquisador**: Vou ler um problema e vocês irão utilizar a tira ou o kit de frações para tentar resolver, ok? Prestem atenção na leitura. Patrícia e Lucas fizeram uma prova de Matemática que continha 12 questões. Patrícia acertou $\frac{3}{4}$ das questões e Lucas acertou $\frac{6}{8}$. Quem acertou mais questões nessa prova? (trecho de transcrição da gravação em áudio 15 mar. 2019)

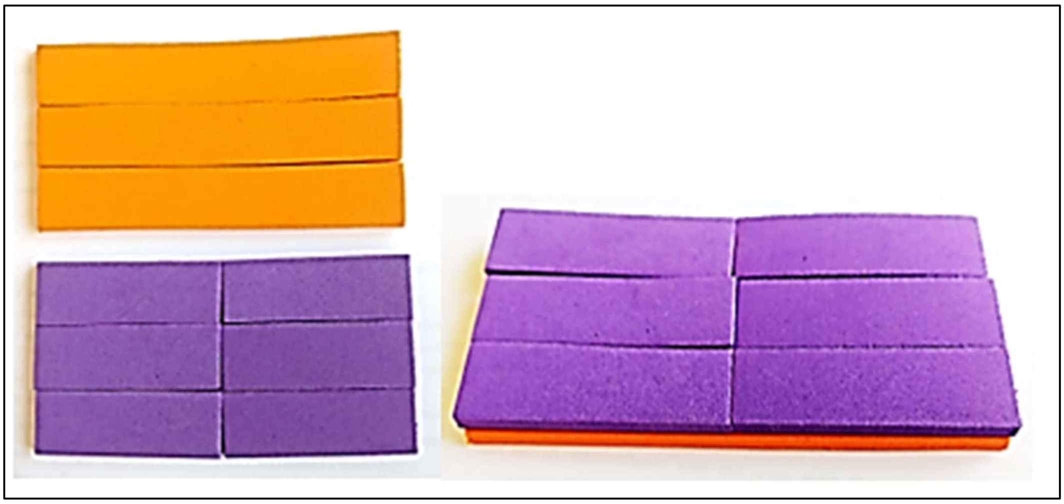
Esse é um tipo de problema que os estudantes poderiam utilizar de duas opções para concluírem: poderiam fazer a comparação das duas frações ou utilizar o significado operador.

Por impulso, a maioria falou que Lucas havia acertado mais questões, pois 8 era maior do que 4. Como não pensaram um pouco para responder, pedi que utilizassem o material que estava com eles – o kit de frações e as tiras de frações – e efetuassem a comparação. E, para reforçar o que o numerador e o denominador de uma fração representam, perguntei:

> **Pesquisador**: O que quer dizer mesmo o denominador de uma fração?
> **Estudante**: O todo.
> **Pesquisador**: O todo? Todos concordam?
> **Pietro**: Representa quantas partes o inteiro foi dividido.
> **Pesquisador**: Isso mesmo. O denominador de uma fração representa as partes que o todo foi dividido. Já discutimos isso antes, não esqueçam essa informação. E o numerador, o que ele representa mesmo?
> **Estudantes**: Quantas partes estamos usando.
> **Pesquisador**: Muito bom. Então qual peça do kit ou tira devemos pegar para representar $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$? (trecho de transcrição da gravação em áudio 15 mar. 2019)

Houve um silêncio rápido, mas, logo em seguida, alguns responderam que, para representar $\frac{3}{4}$, usariam três peças laranjas, e $\frac{6}{8}$, seis peças roxas. Em seguida, pedi que sobrepusessem as peças e me dissessem o que estavam observando. Rapidamente responderam que tinham o mesmo tamanho, ou seja, as frações eram equivalentes, representavam a mesma parte do todo.

Figura 34: Comparando frações com o kit de frações



Fonte: Acervo do autor

De acordo com Garcez (2013), muitas vezes o professor, ao tratar o tópico de comparação de frações, utiliza como referência a forma como os livros didáticos apresentam esse assunto, isto é, tratam o conteúdo apenas como uma sequência mecânica, reduzindo as frações envolvidas a um denominador comum, sem explicitar, ao estudante, que, para tal procedimento, é utilizado o conceito de frações equivalentes. Por exemplo, para comparar $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$, primeiro, reduz-se a um denominador comum:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$$

Assim, é possível afirmar que $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ são equivalentes, porém, dessa forma, faz algum sentido para o estudante? Julgamos que não, pois, assim como Garcez (2013), acreditamos que a utilização prematura de regras no ensino de frações pode ser um fator que atrasa a compreensão dos estudantes sobre o assunto.

Por esse motivo, resolvemos efetuar a comparação das frações utilizando o kit de frações no quadriculado, para que os estudantes pudessem visualizar e concluir que, quando uma fração representa a mesma parte do todo, essas são denominadas de frações equivalentes. Além disso, cremos que a visualização que o kit de frações proporciona, facilita a integração do conteúdo.

Seguindo, reforcei novamente com os estudantes o que era uma fração equivalente e entreguei a tarefa do dia. A tarefa tinha 3 questões, das quais deveriam efetuar: (a) comparação de frações com numerador igual e denominador diferente e (b) comparação de fração com denominador igual e numerador diferente.

Solicitei que resolvessem a questão número 1 e não fiz intervenções no 1º momento.

Figura 35: Questão 1: Tarefa 3

Juliana e Rebeca ganharam um armário de sua mãe para guardar material escolar. O armário tem duas portas de mesmo tamanho, conforme a figura abaixo.

O espaço que ficou para Juliana estava dividido em 4 partes iguais, e ela poderia utilizar **apenas** duas dessas partes. Rebeca ficou com o outro espaço que estava dividido em 3 partes iguais, e, também, poderia utilizar **somente** duas dessas partes. Quem ficou com o menor espaço? Explique como você chegou a essa conclusão.

Fonte: Acervo do autor

Após ter constatado que todos haviam terminado, dei início aos questionamentos:

> **Pesquisador**: Então, qual das duas meninas ficou com o menor espaço? (trecho de transcrição da gravação em áudio 15 mar. 2019)

Todos estudantes começaram a falar ao mesmo tempo. Pedi que respondesse um de cada vez, pois seria difícil entender o que estavam falando.

> **Pesquisador**: Repete o que você falou.
> **Alice**: Eu falei assim, que acho que a Juliana tá com o espaço menor, porque a Rebeca tem três prateleiras, só que o espaço dela é maior já que é três e o espaço é maior. E já o dá Juliana tem quatro, só que menorzinha e só podia usar dois.
> **Pesquisador**: Então você acha que a que está dividida em três está com o espaço maior?
> **Alice**: Sim.
> **Pesquisador**: Ok. E você?
> **Agatha**: Eu acho que foi a Rebeca, porque está dividida em menos partes.
> **Pesquisador**: Então você acha que o espaço de Rebeca é menor. Você falou Juliana, e ela, Rebeca. Todos concordam que Juliana tem o espaço menor?
> **Estudantes**: Siiiimm.
> **Agatha**: Eu não. (trecho de transcrição da gravação em áudio 15 mar. 2019)

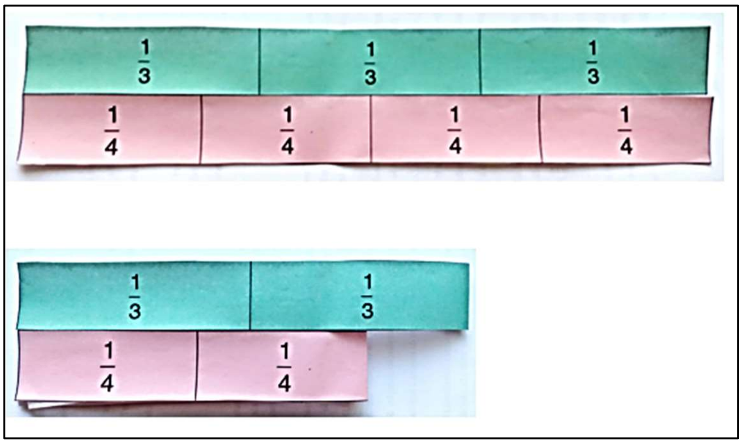
Conforme podemos observar, Alice conseguiu perceber que o menor espaço era o que estava dividido em 4 partes iguais. Já Agatha, assimilou que a parte do armário que foi dividida em 3 partes é a menor.

Como Agatha ficou com dúvida, fui até o quadro e escrevi as duas frações que representavam as partes do armário de cada menina, $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{4}$. Após escrever as frações, voltei o que havíamos discutido no início da aula.

> **Pesquisador**: Essas duas frações representam o espaço de cada uma. O espaço da Juliana foi dividido em quantas partes?
> **Estudantes**: Quatro.
> **Pesquisador**: Qual peça do kit ou tira vocês usariam para representar as partes de Juliana? (trecho de transcrição da gravação em áudio 15 mar. 2019)

Uma estudante pegou a tira de frações e me mostrou a representação das duas frações acima, concluindo que Juliana ficou com o menor espaço.

Figura 36: Representação da estudante

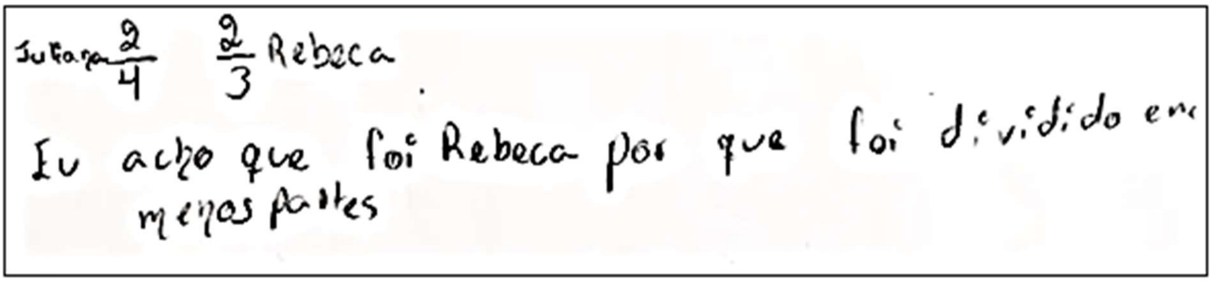


Fonte: Acervo do autor

Mostrei a todos a conclusão da estudante e, mais uma vez, informei como fazer a comparação de duas frações com numerador igual e, para reforçar, fizemos mais umas três comparações, com numeradores diferentes de 2, utilizando o kit de frações. Pedi que não apagassem o que escreveram, porque queria ver a resposta de cada um antes da discussão.

De acordo com Patrono e Ferreira (2011), quando as frações têm numeradores iguais, por exemplo $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{4}$, a tendência é que o estudante faça 4 > 3, pois está acostumado a fazer esse tipo de comparação com os números naturais, ou seja, são modelos já construídos no conjunto dos números naturais, por esse estudante, para a compreensão de propriedades. Com isso, ao se deparar com frações, a tendência é tentar incorporar ao mesmo modelo e responder que $\frac{2}{4}$ é maior, porque 4 é maior do que 3. Nesse sentido, uma estudante fez a seguinte justificativa:

Figura 37: Respostas de uma estudante



Fonte: Acerto do autor

Acreditamos que a estudante, ao dizer que Rebeca ficou com a menor parte porque foi dividido em menos partes, provavelmente, fez uma associação com o que já aprendera no conjunto dos números naturais, isto é, 4 é maior do que 3. Com isso, como se trata de frações com numeradores iguais, a comparação foi efetuada observando-se a quantidade de partes expressa pelos denominadores.

Em uma situação como essa, de acordo com Patrono e Ferreira (2011), utilizar materiais manipulativos é uma estratégia benéfica, pois o estudante tem a oportunidade de pensar sobre a nova situação e procurar caminhos para ampliar o seu conhecimento.

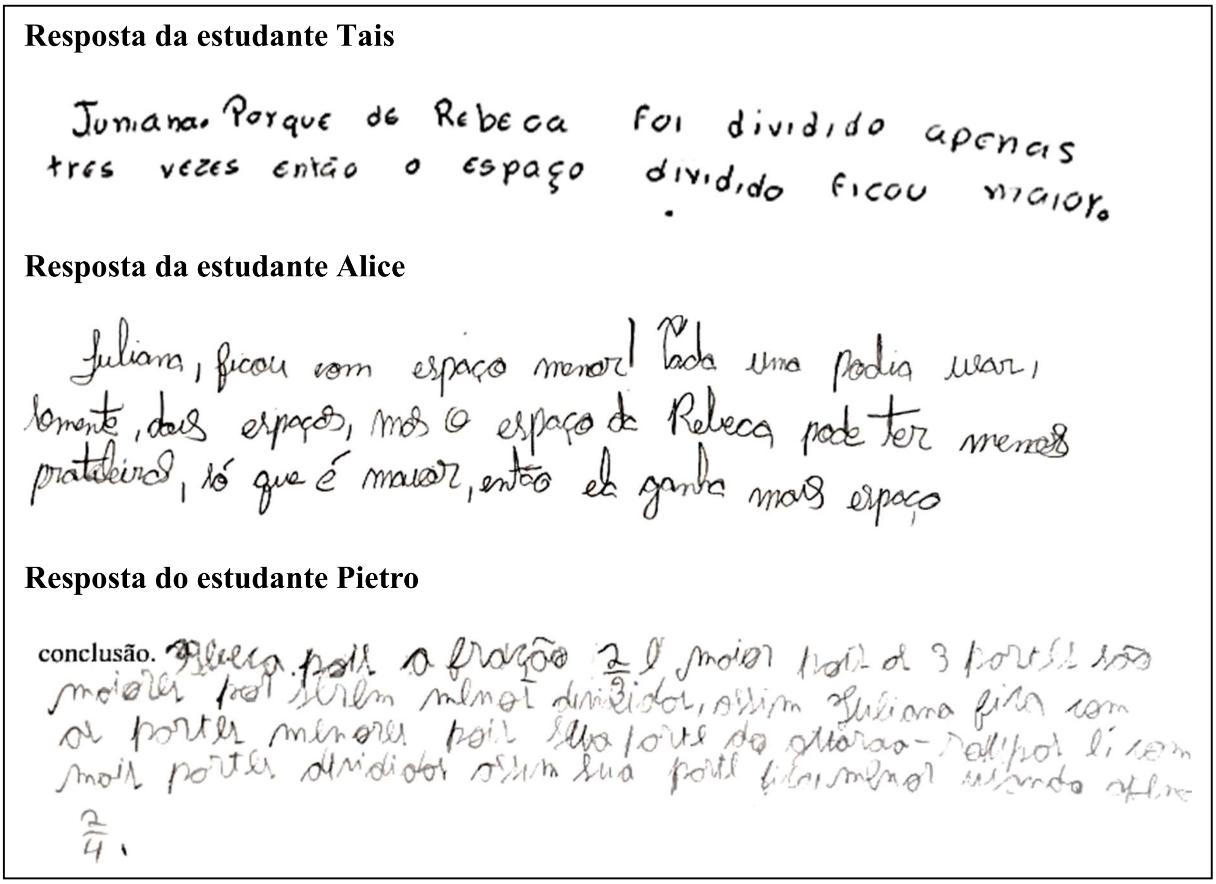
Nessa perspectiva, o professor precisa assumir o papel de mediador, elaborando questionamentos, provocações e instigando os estudantes a observar, com atenção, as relações estabelecidas entre as frações representadas. Assim como as autoras, cremos que é, durante essa busca, que, também, acontecem as abstrações reflexivas ou reflexionantes.[12]

Exemplificando, os estudantes, ao manipular o kit de frações, tiveram a possibilidade de perceber que $\frac{2}{3}$ é maior do que $\frac{2}{4}$. Quando solicitei que analisassem outras frações com numeradores diferentes de 2, esses estudantes puderam perceber, sem minha interferência, que

[12] A abstração reflexionante é a retirada, pelo sujeito, das qualidades da coordenação de suas ações. É um processo que procede das ações ou operações dos sujeitos, remetendo para um plano superior o que foi retirado de um nível inferior de atividade. A partir disto leva para composições novas e generalizadoras. [...] a abstração "reflexionante" [...] apóia-se sobre as coordenações das ações do sujeito, podendo estas coordenações, e o próprio processo reflexionante, permanecerem inconscientes, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações variadas (PIAGET, 1995, p. 274).

$\frac{2}{3}$ é maior do que $\frac{2}{4}$ porque foi dividido em menos partes, ou seja, quanto mais partes dividirmos o inteiro, menor será cada parte. Essa situação, podemos comprovar em suas justificativas:

Figura 38: Respostas de três estudantes[13]



Fonte: Acerto do autor

De acordo com as justificativas dos estudantes, inferimos que eles compreenderam que, para comparar frações com numeradores iguais, precisamos analisar seu denominador, ou seja, quanto maior o denominador, menor é a fração, e quanto menor o denominador, maior é a fração.

Nessa direção, Patrono e Ferreira (2011) relatam que os desconfortos provocados pela constatação que $\frac{2}{3}$ é maior – com base em manipulações, observações e análise – as abstrações

[13] Transcrevemos, a seguir, a resposta do estudante Pietro para uma melhor compreensão, pois sua letra está um pouco ilegível e a imagem não ficou boa.
Pietro*: "Rebeca, pois a fração $\frac{2}{3}$ é maior, pois as 3 partes são maiores por serem menos divididas, assim juliana fica com as partes menores, pois sua parte do guarda-roupa é com mais partes divididas. Assim sua parte fica menor usando apenas $\frac{2}{4}$."*

reflexivas são niveladas e o aprendizado anterior é ampliado. Isto é, o aprendizado anterior obtido por meio da análise de 4 > 3 (quantidade de partes), agora, é obtido pela análise da quantidade de divisões e, no caso, mais divisões representam tamanho menor.

Dando sequência, solicitei que os estudantes fizessem a questão número 2. Tinha como objetivo fazer comparação de frações com denominadores iguais. Como na questão número 1, deixei que resolvessem sem que eu fizesse intervenções, pois, depois, faríamos as discussões.

Figura 39: Questão 2: Tarefa 3

Frederico e Gustavo ganharam, de seus pais, um kit de frações no quadriculado e estavam brincando de fazer comparação de frações. Em um primeiro momento, Frederico disse: − A representação fracionária das peças que peguei é $\frac{3}{8}$. Gustavo pegou suas peças e disse: −A representação fracionária das minhas peças é $\frac{5}{8}$. Qual das duas frações é maior? Justifique seu raciocínio.

Fonte: Acervo do autor

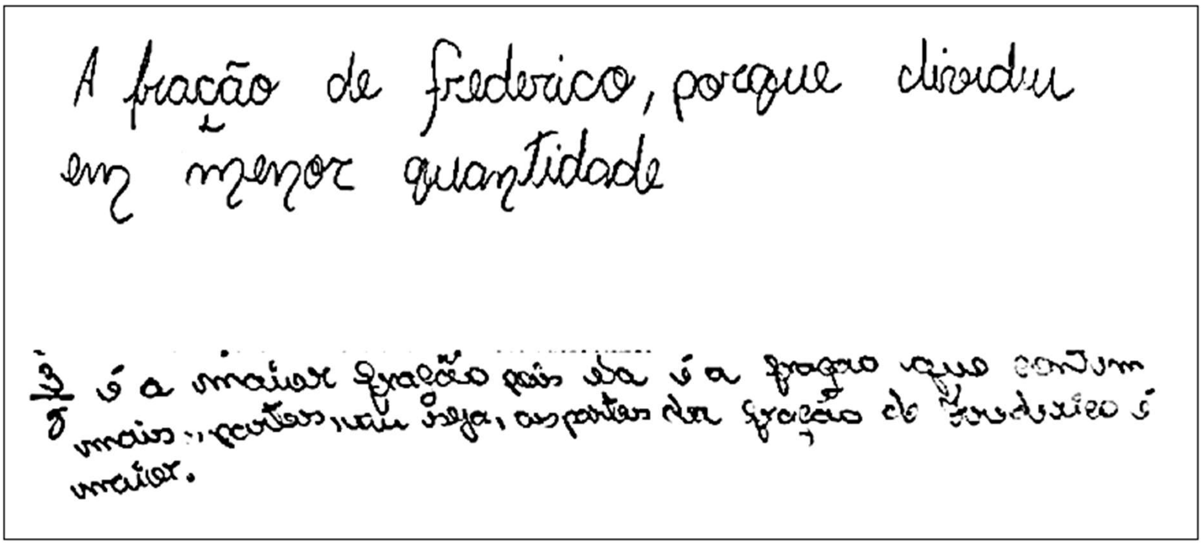
Percebi que um grupo de estudantes discutia a questão, então, pedi licença e coloquei o celular, entre elas, para gravar suas discussões.

De acordo com suas discussões, elas estavam em dúvida sobre qual fração era a maior, $\frac{3}{8}$ ou $\frac{5}{8}$. Em certo momento, elas raciocinavam afirmando que $\frac{3}{8}$ era maior, porque de 8 tirando 3, restavam 5, e de 8 tirando 5 restavam 3. Ou seja, como, na subtração, 5 é maior do que 3, concluíram que $\frac{3}{8}$ era maior do que $\frac{5}{8}$.

Ainda que, no início da aula, eu tenha discutido sobre comparação de frações com denominadores iguais, percebi que alguns estudantes apresentavam dificuldades quando a situação de comparação era mostrada em forma de problema, pois já tínhamos abordado isso em outros momentos.

Ao analisar as respostas, apenas um estudante respondeu de forma coerente, e os demais utilizaram a mesma ideia para justificar, conforme a seguir.

Figura 40: Respostas de dois estudantes



A fração de Frederico, porque dividiu em menor quantidade

$\frac{3}{8}$ é a maior fração pois ela é a fração que contém mais partes, ou seja, as partes da fração de Frederico é maior.

Fonte: Acervo do autor

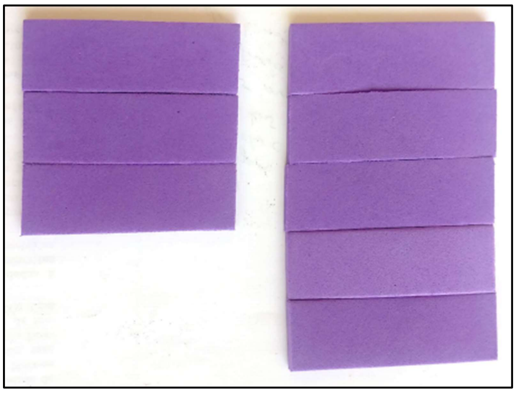
De acordo com as respostas acima, acreditamos que os estudantes, ao escreverem, “dividiu em menor quantidade” ou “contém mais partes”, pensaram dois fatores para essas justificativas: O primeiro, é que o estudante, ao comparar $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{8}$, provavelmente, utilizou a ideia de comparação de frações com numeradores iguais. Isto é, deduziu que o numerador 3 dividiu o inteiro em três partes, e o numerador 5 dividiu o inteiro em 5 partes. Como na comparação de frações com numeradores iguais, quanto menos partes o todo for dividido, maior é a fração, o estudante pode ter feito essa relação. O segundo, é que o estudante utilizou a ideia subtrativa, ou seja, ao fazer $8 - 3 = 5$ e $8 - 5 = 3$, deduziu que o resultado obtido significava a quantidade de partes tomadas, nesse caso Frederico tomou 5 partes e Gustavo tomou 3 partes. Com isso, concluiu que a fração de Frederico é a maior, pois $5 > 3$.

Normalmente, na comparação de frações com denominadores iguais, de acordo com Patrono e Ferreira (2011), a tendência é que os estudantes façam a comparação entre os numeradores, neste caso $5 > 3$. Assim, o aprendizado que o estudante assimilou para comparar números naturais é o “tamanho” do número ($5 > 3$). Com isso, ao se deparar com a comparação de frações, a tendência é buscar semelhanças no que já aprendeu para compreender a nova situação. Como são frações de mesma unidade, a comparação é efetuada pela quantidade de partes ($5 > 3$). Logo, essa ideia pode ser integrada ao seu conhecimento e, nesse caso, a compreensão se manifestar de imediato.

Nesse sentido, após todos terem feito a questão e registrado na folha, fizemos a discussão juntos para que os estudantes pudessem compreender e mostrar o porquê $\frac{5}{8}$ é maior do que $\frac{3}{8}$. Utilizamos o nosso material didático, o kit de frações no quadriculado, para fazer a discussão.

> **Pesquisador**: Vamos fazer essa comparação utilizando o kit de frações? Acho que com o material pode ficar mais claro para vocês como comparar frações com denominadores iguais. Qual peça do kit representa as frações do problema?
> **Estudantes**: A roxa.
> **Pesquisador**: Por que a roxa?
> **Estudante**: Porque ela foi dividida em oito partes.
> **Pesquisador**: Ok. Para a fração $\frac{3}{8}$, quantas peças irei utilizar?
> **Estudantes**: Três.
> **Pesquisador**: E para a fração $\frac{5}{8}$, quantas peças irei utilizar?
> **Estudantes**: Cinco. (trecho de transcrição da gravação em áudio 15 mar. 2019)

Figura 41: Comparando frações com denominador igual



Fonte: Acervo do autor

> **Pesquisador**: Então, o que podemos concluir?
> **Pietro**: Que a fração que utilizamos cinco peças roxas é a maior. Tem mais peças.
> **Pesquisador**: Todos concordam?
> **Alice:** Uai, professor! Então, eu tenho que olhar o numerador maior?
> **Pesquisador:** O que você acha? Como fazemos para comparar frações com denominadores iguais, meninos?
> **Sofia:** Precisamos olhar as partes.
> **Pesquisador:** Que partes?
> **Sofia:** As partes que você usou. Tipo, a fração $\frac{3}{8}$ eu usei três partes e a fração $\frac{5}{8}$ eu usei cinco partes. Então a de cinco é maior.
> **Alice:** Ah professor, agora entendi! Então se o denominador é igual, é só eu olhar qual o maior numerador.
> **Pesquisador:** Isso mesmo. Todos conseguiram compreender?
> **Estudantes:** Sim.
> **Pesquisador:** Então como fazemos para comparar frações com denominadores iguais?
> **Estudantes:** Precisamos olhar o numerador. (trecho de transcrição da gravação em áudio 15 mar. 2019)

Após a discussão acima, concluímos juntos que $\frac{5}{8}$ é maior do que $\frac{3}{8}$, pois, de oito partes, Gustavo utilizou 5, e Fabrício, 3. Para reforçar, escrevi, no quadro, as frações, $\frac{5}{6}$ e $\frac{3}{6}$; $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{12}$ e $\frac{8}{12}$, e solicitei que os estudantes fizessem a comparação para verificar se, realmente, conseguiram compreender nossa discussão.

Acreditamos que, após essa discussão, os estudantes conseguiram compreender melhor como fazer a comparação de frações com denominadores iguais, pois, ao perguntar, por exemplo, qual era a maior fração $\frac{5}{6}$ ou $\frac{3}{6}$, todos responderam que $\frac{5}{6}$ era a maior porque o 5 é maior do que o 3.

Em seguida, iniciamos a discussão da questão 3. O objetivo era que os estudantes conseguissem fazer comparação de frações com denominador diferente e numerador igual.

Figura 42: Questão 3: Tarefa 3

Se a representação fracionária das peças de Frederico fosse $\frac{1}{4}$ e a de Gustavo fosse $\frac{1}{8}$, qual teria uma representação fracionária maior? Como você chegou a essa conclusão? Explique.

Fonte: Acervo do autor

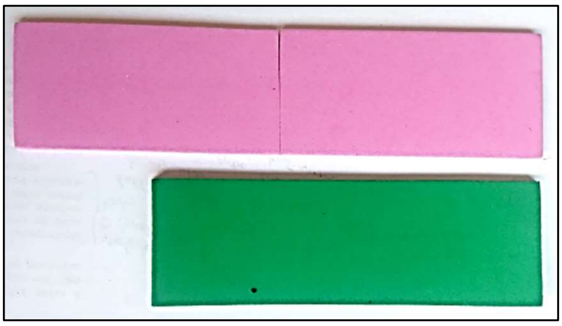
Como fizemos várias discussões anteriores a respeito de como comparar frações com numerador igual, essa questão a maioria conseguiu identificar que $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{8}$. Mesmo assim, reforcei com eles que, para comparar duas frações com numerador igual e denominador diferente, precisamos verificar as partes, ou seja, quantas partes o todo foi dividido. Quanto mais partes o todo for dividido, menor é a fração.

A aula já estava terminando e os estudantes começaram a ficar agitados, mas, para finalizar, escrevi mais duas frações no quadro, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, e solicitei me dissessem qual delas era a maior. Algumas estudantes falaram que elas eram iguais, pois 2 - 1 = 1 e 3 – 2 = 1.

De acordo com Post et al. (1986, *apud* QUARESMA; PONTE, 2012, p. 45), “os alunos usam diversas estratégias espontâneas informais na resolução de tarefas de comparação de fracções”, e uma dessas estratégias é a que as estudantes acima utilizaram “pensamento diferencial”. Isto é, conforme o exemplo acima, os estudantes afirmam que $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ são equivalentes, porque ambos exigem apenas uma parte para formar o todo. Nesse caso, os autores relatam que os estudantes focam na diferença entre 2 e 1 e entre 3 e 2, mas não consideram o tamanho real da fração. Nesse sentido, os autores afirmam que “esta é uma forma de pensar característica dos números naturais que conduz geralmente a resultados incorretos.” (Ibid., p. 45).

Para que os estudantes pudessem fazer a comparação e compreendessem melhor como comparar frações com numeradores e denominadores diferentes, recorremos, mais uma vez, ao kit de frações. Pedi que pegassem as peças do kit que representavam as frações para fazermos a comparação. Com a utilização das peças, foi possível perceber que $\frac{2}{3}$ é maior do que $\frac{1}{2}$.

Figura 43: Comparando frações com numerador e denominador diferentes



Fonte: Acervo do autor

Entendemos que o estudante, ao visualizar as peças, identificou qual é a maior ou menor fração. Porém, esse tipo de comparação não faz muito sentido para ele, pois, se perguntar o porquê $\frac{2}{3}$ é maior do que $\frac{1}{2}$, provavelmente, vai responder que, juntando as peças, a que representa a fração $\frac{2}{3}$ é maior.

Então, perguntei a eles: E se não tivéssemos o kit de frações e nem as tiras para fazermos essa comparação, o que teríamos que fazer? Os estudantes ficaram calados. Aproveitei a situação e falei novamente sobre frações equivalentes, informando que, se é possível escrever uma fração de várias formas, como vimos na tarefa 2, poderíamos pegar essas frações e tentar escrevê-las com o mesmo denominador para fazermos a comparação, já que sabíamos fazer comparação de frações com denominadores iguais.

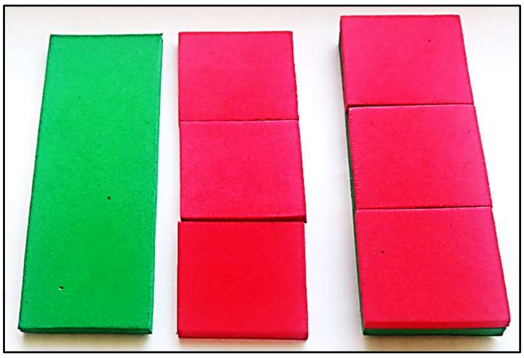
Escrevi no quadro, $\frac{1}{2}$ e pedi para falar uma fração equivalente a ela.

Estudantes: $\frac{2}{4}$
Pesquisador: Por que $\frac{2}{4}$?
Pietro: Porque as duas tem o mesmo tamanho.
Pesquisador: Ou seja, as duas representam a mesma parte do todo. Tem outra fração que pode ser equivalente?
Estudante: $\frac{4}{8}$.
Pesquisador: Por que $\frac{4}{8}$?
Estudante: Porque 2 x 2 = 4 e 2 x 4 = 8. (trecho de transcrição da gravação em áudio 15 mar. 2019)

Quando a estudante falou que, se multiplicássemos o numerador por 2 e denominador por 2, teríamos frações equivalentes, rapidamente, apareceram várias frações equivalentes a $\frac{1}{2}$, tais como, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32} \ldots$. Então, chegamos à conclusão de que se multiplicarmos o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número, teríamos uma fração equivalente à fração dada. Com isso, perguntei:

Pesquisador: Podemos multiplicar, então, o numerador e o denominador por outro número que não seja 2?
Estudantes: Podemos.
Pesquisador: Por quê?
Agatha: Porque também vamos encontrar frações equivalentes. Por exemplo, se eu multiplicar o 1 e o 2 por 3, vou ter $\frac{3}{6}$.
Pesquisador: Verdade isso, meninos? Todos concordam? Como posso ter certeza que $\frac{3}{6}$ é equivalente a $\frac{1}{2}$?
Pietro: Professor, se eu pegar o kit aqui, e colocar essas três peças vermelhas em cima do verde, vai ter o mesmo tamanho. Então, eu posso falar que $\frac{3}{6}$ tem a mesma quantidade de $\frac{1}{2}$. São equivalentes sim. (trecho de transcrição da gravação em áudio 15 mar. 2019)

Figura 44: Representação do estudante



Fonte: Acervo do autor

> **Pesquisador**: Muito bom! Então podemos concluir que, se multiplicarmos o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número, como nos exemplos que fizemos, encontramos frações equivalentes. Certo? (trecho de transcrição da gravação em áudio 15 mar. 2019)

Dadas as considerações até aqui sobre a utilização do material manipulável e a forma como o estudante utilizou para justificar sua afirmação, assim como Smole (1996), acreditamos que:

> os materiais didáticos podem ser úteis se provocarem a reflexão por parte das crianças de modo que elas possam criar significados para ações que realizam com eles. Como afirma Carraher (1988), não é o uso específico do material com os alunos o mais importante para a construção do conhecimento matemático, mas a conjunção entre o significado que a situação na qual ele aparece tem para a criança, as suas ações sobre o material e as reflexões que faz sobre tais ações. (p. 172).

Assim, consideramos que, por meio do kit de frações, o estudante pôde fazer uma reflexão sobre o que era discutido e, com base na visualização, conseguiu sustentar, de forma coerente, sua afirmação. Além disso, acreditamos que essa reflexão, possivelmente, direcionou o estudante a uma compreensão melhor sobre o assunto.

Após a conclusão acima, retomei às frações anteriores, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, e solicitei que escrevessem uma fração equivalente das duas, de forma que tivessem o mesmo denominador. Não demorou muito e conseguiram encontrar as frações $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{6}$. Então falei:

> **Pesquisador**: Agora que encontramos as frações, $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{6}$, e sabemos que elas são equivalentes a $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, ficou mais fácil para fazermos a comparação das duas. Então qual é a maior?
> **Estudantes**: $\frac{4}{6}$.
> **Pesquisador**: Por quê?
> **Estudantes**: Porque o numerador dela é 4 e da outra é 3, e 4 é maior do que 3. (trecho de transcrição da gravação em áudio 15 mar. 2019)

Conforme podemos observar, os estudantes parecem ter compreendido como fazer a comparação de frações com numeradores e denominadores iguais e diferentes. Para constatar, antes de encerrar a aula, escrevi no quadro as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$, e pedi que fizessem a comparação e respondessem qual das duas era a maior. Os estudantes não tiveram dificuldades, pois, rapidamente, conseguiram responder que $\frac{8}{12}$ e $\frac{3}{12}$ eram as frações equivalentes às duas frações dadas, e, com isso, $\frac{8}{12}$ era maior do que $\frac{3}{12}$, pois 8 é maior do que 3. Assim, $\frac{2}{3}$ é maior do que $\frac{1}{4}$.

Finalizamos a aula concluindo que, se duas frações têm numeradores e denominadores diferentes, para fazermos a comparação, tínhamos como opção encontrar a fração equivalente às frações dadas para depois fazermos a comparação.

5.4 Tarefa 4: Equivalência de frações

18 de março de 2019

Essa aula teve como objetivo explorar equivalência de frações. Apesar de ter discutido sobre equivalência nas aulas anteriores, foi uma discussão mais superficial; essa aula foi específica para esse assunto. Nesse dia, compareceram todos os participantes da pesquisa pela primeira vez, 17 meninas e 4 meninos.

Iniciei a aula comentando brevemente sobre o que já havíamos discutido. Falei sobre comparação de frações e como fazíamos para comparar frações com numeradores iguais e denominadores iguais. Nesse momento, os estudantes conseguiram responder sem dificuldades.

Após comentar sobre a comparação de frações, escrevi no quadro a fração $\frac{1}{3}$ e pedi que os estudantes falassem algumas frações equivalentes a ela. Uma estudante falou de imediato $\frac{2}{6}$. Perguntei o porquê essa fração era equivalente à fração dada. Ela disse que havia multiplicado o numerador e o denominador por 2. Questionei como ela tinha certeza que essa fração era equivalente a $\frac{1}{3}$. Ela não soube responder, mas disse que se multiplicasse o numerador e o denominador pelo mesmo número a fração seria equivalente.

Pelo que podemos observar, parece que essa estudante, compreendeu que se multiplicarmos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, encontramos uma fração equivalente à fração dada. Porém, inferimos que o conceito de fração equivalente para ela ainda não estava consolidado, pois, ao ser questionada sobre o porquê as frações eram equivalentes, não soube responder, mas recorreu a regras para justificar.

Garcez (2013) relata que uma maneira de poder ajudar os estudantes a construir uma compreensão de frações equivalentes é mostrar a ele que uma mesma fração pode ter representações diferentes. Porém, o professor, antes de estabelecer qualquer tipo de regra, o ideal é explorar, por meio de várias tarefas, a construção do conceito.

Além disso, o autor defende que a utilização de materiais manipuláveis para a construção do conhecimento é uma opção, pois os estudantes, ao elaborar uma hipótese, poder testá-la e visualizar com base no material manipulável, podem entender a resolução. É evidente que, para isso, o professor precisar estar atento a todo o momento para intervir no momento certo.

Assim, para tentar ajudar a estudante, e saber o que os demais pensavam a respeito, perguntei:

> **Pesquisador**: Alguém sabe me dizer o porquê $\frac{2}{6}$ é equivalente a $\frac{1}{3}$?
> **Estudantes**: É só multiplicar professor, igual a Ana Carolina fez.
> **Pesquisador**: Ok, mas quem garante que elas são equivalentes? (trecho de transcrição da gravação em áudio 18 mar. 2019)

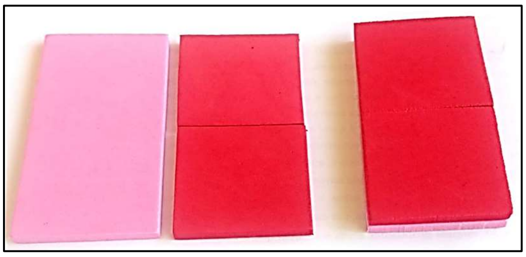
Conforme observamos, os estudantes estavam com a mesma ideia da Ana Carolina. A forma como faziam para encontrar a fração equivalente não consideramos errada, porém, não basta o estudante saber regras ou macetes, antes disso, é interessante que a construção do conceito seja trabalhada.

Após meu questionamento, houve um silêncio e os estudantes não souberam responder à pergunta. Efetuamos essa discussão nas aulas anteriores, eles conseguiam escrever frações equivalentes, mas, ao serem questionados nessa aula, não souberam explicar o porquê podiam fazer tal afirmação.

Com isso, recorremos ao nosso kit de frações para tentar mostrar, aos estudantes, por que a fração $\frac{1}{3}$ era equivalente à fração $\frac{2}{6}$, pois acreditamos que o material manipulável proporciona um significado melhor para a compreensão do conteúdo.

> **Pesquisador**: Peguem a peça do kit de frações que representa a fração $\frac{1}{3}$. Todos pegaram?
> **Estudantes**: Sim
> **Pesquisador**: Qual a cor da peça?
> **Estudantes**: Rosa.
> **Pesquisador**: Agora peguem a peça que representa a fração $\frac{2}{6}$. Todos pegaram?
> **Estudantes**: Sim, são duas peças vermelhas.
> **Pesquisador**: Muito bom. Agora peguem essas duas peças vermelhas e sobreponham à peça rosa. (trecho de transcrição da gravação em áudio 18 mar. 2019)

Figura 45: Representação dos estudantes



Fonte: Acervo do autor

> **Pesquisador**: O que vocês podem me dizer?
> **Estudantes**: Elas têm o mesmo tamanho.
> **Pesquisador**: Então, o que podemos afirmar?
> **Ana Carolina**: Elas são equivalentes.
> **Pesquisador**: Sim, são equivalentes. Então o que podemos dizer sobre uma fração equivalente?
> **Pietro**: Que elas representam a mesma quantidade da outra fração.
> **Pesquisador**: Isso mesmo! Podemos concluir, então, que uma fração equivalente é o tipo de fração que representa a mesma parte do todo. Entendido? Não vamos esquecer isso, ok? (trecho de transcrição da gravação em áudio 18 mar. 2019)

Acreditamos que a forma como conduzimos a discussão favoreceu para que os estudantes conseguissem ter uma noção melhor sobre o procedimento de multiplicarmos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número para encontramos frações equivalentes. Entendemos que, ao fazer dessa forma, não quer dizer que todos os estudantes compreenderam o significado de frações equivalentes, mas acreditamos que é um dos caminhos para que possam conduzir ao aprendizado.

Dando sequência, demos início à primeira questão da tarefa do dia, que foi entregue para cada estudante no início da aula.

Figura 46: Questão 1: Tarefa 4

Vamos fazer algumas trocas? Registre cada um dos fatos abaixo:
Obs.: *Pode haver mais de uma maneira de recobrir a peça solicitada. Portanto, escreva todas as formas possíveis que vocês conseguirem encontrar.*

- Pegue 1 peça rosa. De quantas maneiras, usando uma só cor, podemos recobrir essa peça?

Escreva a representação fracionária de cada uma das trocas efetuadas por você.

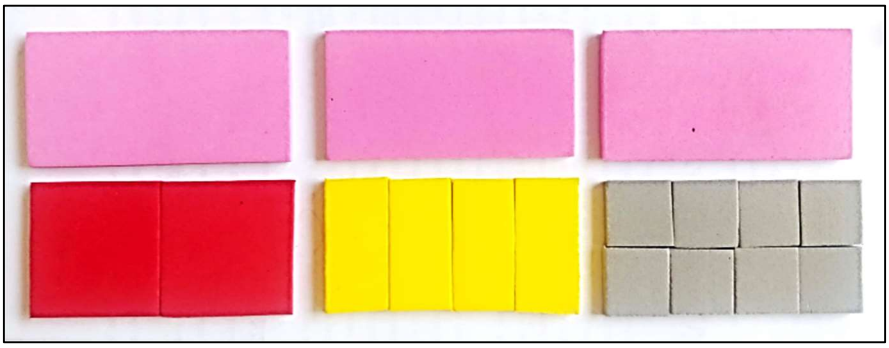
- Pegue 1 peça laranja. De quantas maneiras, usando uma só cor, podemos recobrir essa peça?

Escreva a representação fracionária de cada uma das trocas efetuadas por você.

Fonte: Elaborado pelo autor

Essa questão apresentava mais ou menos a mesma dinâmica da segunda aula. Os estudantes deveriam fazer as possíveis trocas das peças rosas e laranjas e, em seguida, escrever a representação fracionária de cada troca como no exemplo a seguir: A peça rosa pode ser trocada por duas peças vermelhas, quatro peças amarelas e 8 peças cinzas. Os estudantes deveriam escrever que, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{8}{24}$.

Figura 47: Encontrando frações equivalentes



Fonte: Acervo do autor

Essa questão todos os estudantes conseguiram fazer sem apresentar dificuldades. Acreditamos que, como fizemos algumas discussões parecidas com essa questão, então, não foi muita novidade para eles. Além disso, provavelmente, já estavam mais familiarizados com o material.

A questão 2 os estudantes deveriam escrever a fração $\frac{1}{5}$ de três formas distintas.

Figura 48: Questão 2: Tarefa 4

Vimos que o nosso kit de frações no quadriculado tem limitações, ou seja, não contém todas as representações fracionárias possíveis. Como você faria para representar $\frac{1}{5}$ de formas diferentes? Faça a representação de, pelo menos, três formas diferentes.

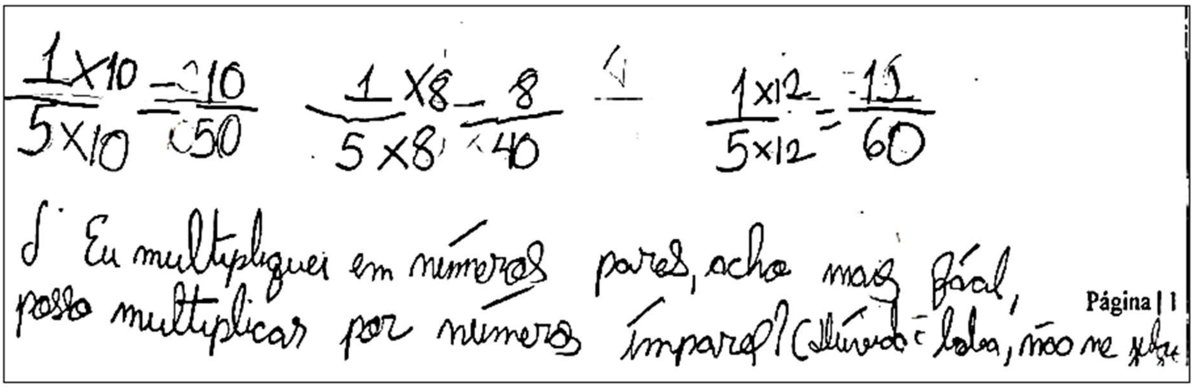
Fonte: Elaborado pelo autor

Escolhemos essa fração porque o kit de fração não tem peças que representam quintos, ou seja, essa é uma das limitações do material didático, assim, os estudantes deveriam utilizar-se de outras estratégias para resolver a questão.

Assim, como os estudantes fizeram várias manipulações com o kit de frações e algumas discussões sobre o assunto, a intenção era observar que tipo de estratégias utilizariam.

Analisando as respostas dos estudantes, todos conseguiram resolver a questão e a justificativa foi a mesma, multiplicar o numerador e o denominador pelo mesmo número para encontrar a fração equivalente. Como discutimos, várias vezes, nas tarefas anteriores, sobre como encontrar uma fração equivalente, e os próprios estudantes chegaram a essa conclusão, consideramos que os estudantes compreenderam como encontrar uma fração equivalente, porém, uma resposta nos chamou a atenção, conforme a seguir.

Figura 49: Resposta de uma estudante



Fonte: Acervo do autor

Para essa estudante, se multiplicarmos o numerador e o denominador de uma fração por um número par, encontraremos a fração equivalente, porém, ela não tinha certeza que, se fizéssemos a mesma coisa utilizando números ímpares, encontraríamos frações equivalentes. Acreditamos que, para essa estudante, o conceito de frações equivalentes ainda não ficou esclarecido.

Na questão de número 3, os estudantes deveriam fazer a comparação de duas frações, $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$, mas, para isso, antes de fazer a comparação, deveriam achar a fração equivalente a essas frações.

Figura 50: Questão 3: Tarefa 4

Gustavo e Frederico estavam brincando de fazer comparações de frações com o kit de frações no quadriculado que ganharam de seus pais. No decorrer da brincadeira, Gustavo perguntou a Frederico:

Frederico ficou na dúvida e não soube responder a Gustavo.
Como você faria para ajudar Gustavo e Frederico a identificarem qual das duas frações é maior?

Fonte: Elabora pelo autor

Antes de fazer a comparação das duas frações, efetuei alguns exemplos, no quadro de frações, com numeradores e denominadores iguais, tais como: $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{6}$ e $\frac{4}{6}$. Os estudantes não tiveram dificuldades para fazer as comparações, pois era algo que estávamos falando a todo o momento. Entretanto, ao perguntar, qual das duas frações, $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$, era a maior, alguns responderam que $\frac{1}{3}$ era maior porque foi dividida em menos partes, ou seja, estavam fazendo a comparação como se estivessem fazendo a comparação de frações com numerador igual.

Entendemos que para alguns estudantes, mesmo tendo demostrado, com o kit de frações, que para comparar frações com numeradores iguais deveríamos verificar o denominador, e para comparar frações com denominadores iguais deveríamos verificar o numerador da fração, ainda assim, não fazia sentido para eles. Prova disso, foi quando perguntei qual fração era a maior, $\frac{2}{5}$ ou $\frac{1}{3}$, e utilizaram como justificativa a ideia de frações com numeradores iguais.

Acreditamos que, para esses estudantes, as demonstrações efetuadas com o kit de frações podem não ter sido o suficiente e, com isso, preocuparam-se em memorizar somente a ideia de como comparar frações. Nesse sentido, concordamos com Nunes (2003), quando afirma que essa estratégia de memorização, para a aprendizagem, com o tempo o estudante esquece e, se não esquece do modo de efetuar a conta, esquece o porquê de utilizar tal procedimento memorizado. Assim, acreditamos que essa foi a estratégia utilizada por esses estudantes que, ao comparar $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$, utilizaram a ideia da comparação de frações com numeradores iguais e concluíram que $\frac{1}{3}$ é a maior fração.

Para uma melhor compreensão das respostas dos estudantes, elaboramos a tabela a seguir.

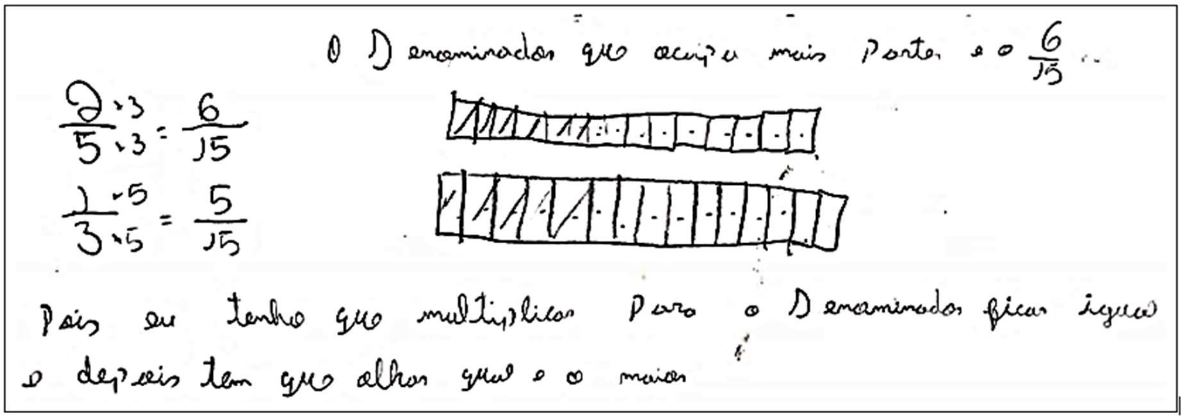
Tabela 9: Resultados – Tarefa 4: Questão 3

Questão 3	Utilizou, como estratégia, a equivalência, e justificou de forma correta	Utilizou, como estratégia, a equivalência de frações, porém errou a comparação	Justificou que 1/3 é maior por ter sido dividido em menos partes	Justificativa sem raciocínio matemático	Em branco
Total de estudantes	12	2	3	3	1

Fonte: Elaborado pelo autor. set. 2019

Conforme podemos observar, a maioria dos estudantes foi capaz de resolver a questão, utilizando, como estratégia, a equivalência de frações para, depois, efetuarem a comparação. Desses 12 estudantes, uma resposta nos chamou a atenção, pois a estudante utilizou, como estratégia, além da equivalência, o desenho (estratégia pictórica).

Figura 51: Resposta de uma estudante



Fonte: Acervo do autor

A estudante, após encontrar as frações equivalentes das duas frações com partes iguais, no caso, 15 partes, recorreu ao desenho para verificar qual era a maior. Com isso, concluiu que $\frac{6}{15}$ é maior do que $\frac{5}{15}$, porém, em sua justificativa confundiu o numerador com o denominador ao dizer que $\frac{6}{15}$ era maior porque o "denominador que ocupa mais partes é o $\frac{6}{15}$". Ou seja, essa estudante compreendeu como fazer comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes, mesmo de forma pictórica, mas não se pode afirmar, precisamente, que ela compreende o que é o numerador e o denominador de uma fração.

Para finalizar a aula, expliquei que, no caso de frações como essas, antes de fazer a comparação, deveríamos primeiro encontrar as frações equivalentes a elas de forma que o denominador ou o numerador das duas frações ficassem iguais, visto que, dessa forma, facilitaria efetuar a comparação, pois essas eram estratégias que já discutimos. Informei, também, que existem outras formas de fazer comparação de frações, mas, como nosso objetivo é trabalhar com equivalência de frações, utilizaríamos desse recurso para fazer as comparações.

5.5 Tarefa 5: Equivalência de frações

20 de março de 2019

Nessa aula, demos sequência ao assunto equivalência de frações. Compareceram 3 meninos e 13 meninas, e utilizamos duas aulas de 50 minutos.

Iniciei a aula abordando a questão 3 da aula anterior, pois alguns responderam que $\frac{1}{3}$ é maior do que $\frac{2}{5}$.

Figura 52: Questão 3: Tarefa

Gustavo e Frederico estavam brincando de fazer comparações de frações com o kit de frações no quadriculado que ganharam de seus pais. No decorrer da brincadeira, Gustavo perguntou a Frederico:

Frederico ficou na dúvida e não soube responder a Gustavo.
Como você faria para ajudar Gustavo e Frederico a identificarem qual das duas frações é maior?

Fonte: Elaborado pelo autor

Já tínhamos efetuado essa discussão, mas achei interessante reforçar que esse tipo de fração – frações com numeradores e denominadores diferentes –, de acordo com o que já estudamos, deveríamos encontrar a fração equivalente para, depois, fazermos a comparação. Novamente, ao perguntar qual delas era a fração maior, ainda assim, alguns estudantes responderam que $\frac{1}{3}$ é maior do que $\frac{2}{5}$, porque foi dividido em menos partes.

Por mais que discutimos sobre como fazer comparação de frações, nas aulas anteriores, e utilizamos o kit de frações para que pudessem visualizar e compreender melhor a ideia, alguns estudantes ainda apresentavam dificuldades e demonstravam não ter compreendido.

Com isso, para mostrar que a estratégia que estavam utilizando, para comparar $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$, não funcionava, recorri às tiras de frações para que visualizassem e compreendessem melhor a situação. Fizemos um exemplo simples, para, depois, voltar à questão.

Pesquisador: Meninos, vamos pegar as tiras de frações e fazer a comparação de $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{6}$, mas, antes disso, digam-me: Qual é a maior?
Estudantes: $\frac{1}{4}$ é maior.
Pesquisador: Por quê?
Estudante: Porque foi dividido em menos partes.
Pesquisador: Todos concordam? Será que é isso mesmo? (trecho de transcrição da gravação em áudio 20 mar. 2019)

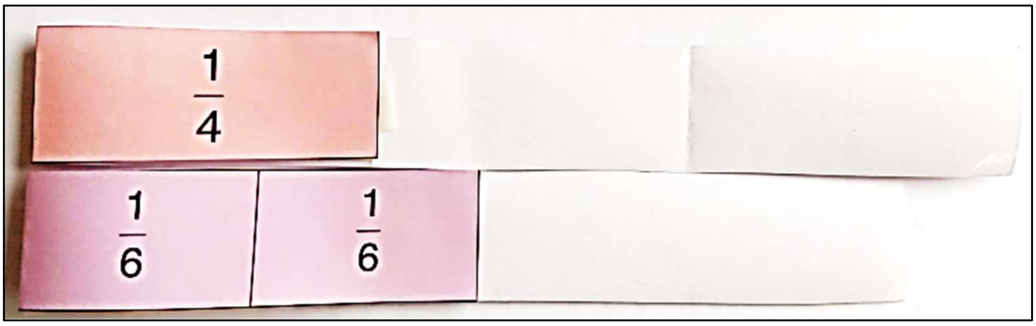
Houve um silêncio.

Conforme observamos, alguns estudantes ainda estavam utilizando a ideia de comparar frações com numeradores iguais, o que nos convence de que, para esses estudantes, fazer a comparação de frações ainda não ficou esclarecido. Pode ser pelo fato da não compreensão do conteúdo ou por não compreenderem o significado de fração.

Retomando, perguntei:

Pesquisador: Vamos pegar as tiras que representam quartos e sextos. Todos pegaram?
Estudantes: Sim.
Pesquisador: Observando essas tiras, qual está dividida em menos partes?
Sofia: A que está dividida em 4 partes.
Pesquisador: Muito bom. E a que está dividida em mais partes?
Estudantes: A que está dividida em 6 partes.
Pesquisador: Ok. Para representar $\frac{1}{4}$, quantas partes iremos utilizar da tira?
Pietro: Só uma, professor.
Pesquisador: Por que só uma?
Pietro: Porque o numerador da fração é 1 e ele representa quantas partes estamos utilizando.
Pesquisador: Muito bom, Pietro. Todos compreenderam?
Estudantes: Sim.
Pesquisador: Então quantas partes, da tira, vamos utilizar para representar $\frac{2}{6}$.
Estudantes: Duas partes. (trecho de transcrição da gravação em áudio 20 mar. 2019)

Figura 53: Representação dos estudantes



Fonte: Acervo do autor

> **Pesquisador**: Comparando essas partes tomadas, qual é a maior?
> **Estudantes**: $\frac{2}{6}$.
> **Pesquisador**: Todos conseguem visualizar que $\frac{2}{6}$ é maior do que $\frac{1}{4}$?
> **Estudantes**: Sim.
> **Pesquisador**: Mas vocês me falaram que $\frac{1}{4}$ era maior porque foi dividido em menos partes. Conseguem compreender que a estratégia utilizada não funciona para frações com numeradores e denominadores diferentes? (trecho de transcrição da gravação em áudio 20 mar. 2019)

Houve um silêncio.

> **Pesquisador**: Então, como fazemos a comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes?
> **Pietro**: Precisamos encontrar frações equivalentes, igual fizemos na aula passada.
> **Pesquisador**: Muito bom. Bem lembrado, Pietro. (trecho de transcrição da gravação em áudio 20 mar. 2019)

Conforme observamos, com base em um exemplo simples, foi possível mostrar, aos estudantes, que a estratégia utilizada não funcionava. Assim, como Jesus (2013), acreditamos que é possível favorecer que o estudante compreenda, partindo de exemplos simples. A autora ressalta ainda que, com base na manipulação de materiais didáticos, observação e a experimentação conduzidas pelo professor, os estudantes são capazes de construírem regras e compreenderem melhor o conteúdo.

Após a discussão acima, e concluindo que, para comparar frações com numeradores e denominadores diferentes, precisamos encontrar frações equivalentes para igualar o denominador ou numerador, solicitei que os estudantes me dissessem uma fração equivalente a $\frac{1}{3}$ e, depois, uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$, de forma que o denominador delas ficassem iguais. Neste momento, algumas estudantes responderam que para $\frac{1}{3}$, eu deveria multiplicar o numerador e o denominador por 5 e para $\frac{2}{5}$, eu deveria multiplicar o numerador e o denominador por 3. Escrevi a sugestão e perguntei: Agora que as frações estão com o denominador igual, qual é a maior? Todos conseguiram responder que $\frac{6}{15}$ é maior do que $\frac{5}{15}$, pois 6 é maior do que 5, ou seja, foram tomadas mais partes do todo.

Após essa comparação, pedi que igualassem o numerador das duas frações para efetuarem a comparação. Também não tiveram dificuldades, pois sugeriram multiplicar o numerador e o denominador de $\frac{1}{3}$ por 2. Feito isso, fizemos a comparação de $\frac{2}{6}$ e $\frac{2}{5}$ e constatamos que $\frac{2}{5}$ é maior do que $\frac{1}{3}$. Com isso, inferimos que os estudantes parecem ter compreendido como fazer a comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes com base na equivalência de frações.

Depois, iniciamos a tarefa do dia. Eram três questões, das quais, a primeira os estudantes deveriam representar $\frac{1}{2}$ de 5 formas distintas; a segunda questão, deveriam fazer representação fracionária e comparar frações equivalentes; e a terceira, comparar e somar frações com numeradores e denominadores iguais.

Figura 54: Questão 1: Tarefa 5

Vimos que é possível representar uma fração de várias formas diferentes. Utilizando o kit de frações no quadriculado, faça, pelo menos, cinco representações diferentes de $\frac{1}{2}$.

Fonte: Elaborado pelo autor

Como efetuamos várias discussões parecidas com a primeira questão, todos os estudantes não apresentaram dificuldades em respondê-la. No início, só tiveram uma dúvida sobre como representar a fração de formas diferentes. Como a maioria teve dúvida na interpretação da questão, acreditamos que essa questão pode ser reformulada, pois, ao esclarecer que era para escrever frações equivalentes a $\frac{1}{2}$, todos conseguiram compreender e responder a questão sem minha intervenção e sem a utilização do kit de frações. Dessa forma, acreditamos que os estudantes começaram a compreender melhor o assunto e sentirem-se seguros em dispensarem o material.

A questão 2, a maioria, também, conseguiu responder sem minha orientação. Após responderem, discutimos juntos. Porém, ao verificar as questões, depois de recolhida a tarefa, percebemos que o item “b”, 6 fizeram confusão quando efetuaram a representação da fração.

Figura 55: Questão 2: Tarefa 5

Veja esse meme retirado da internet que apresenta uma possível dieta:

Fonte: imagem da internet

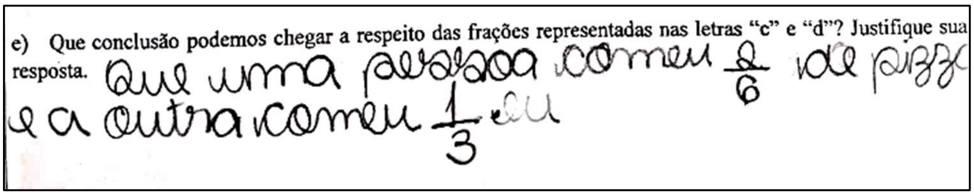
a) Vamos considerar que essas pizzas têm todas o mesmo tamanho. Ao deixar de comer seis fatias de pizza e comer somente três fatias, conforme mostra a figura acima, essa pessoa comerá menos pizza do que antes? Explique o que pensou.
b) Represente as duas pizzas inteiras na forma de fração.
c) Suponhamos que essa pessoa coma duas fatias da pizza que está dividida em 6 pedaços. Represente a fração correspondente da pizza que essa pessoa comeu.
d) Se essa mesma pessoa comer apenas uma fatia da pizza que foi dividida em 3 pedaços, que fração de pizza ela comeu?
e) A que conclusão podemos chegar a respeito das frações representadas nas letras "c" e "d"? Justifique sua resposta.

Fonte: Elaborado pelo autor

Alguns estudantes, ao fazer a representação das duas pizzas inteiras na forma de fração, em vez de ter representado $\frac{6}{6}$ e $\frac{3}{3}$, fizeram $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{3}$. Ou seja, representaram apenas uma fatia da pizza. O restante dos estudantes efetuou a representação da forma que era o esperado.

Os itens "c" e "d", provavelmente, não foram compreendidos por três estudantes, pois efetuaram representações de forma errônea. Além disso, no item "e", não souberam elaborar uma justificativa coerente, conforme a figura a seguir.

Figura 56: Resposta de uma estudante


e) Que conclusão podemos chegar a respeito das frações representadas nas letras "c" e "d"? Justifique sua resposta. Que uma pessoa comeu $\frac{2}{6}$ de pizz
e a outra comeu $\frac{1}{3}$ eu

Fonte: Acervo do autor

Conforme observamos, a estudante parece não ter compreendido o conceito de frações equivalentes, pois, ao fazer a comparação das duas frações, não soube justificar que as duas frações representavam a mesma quantidade de pizza, ou seja, são equivalentes. Para essa estudante, inferimos que compreende fazer representação de frações, mas apresenta dificuldades em comparação e equivalência de frações.

Por fim, na terceira questão, alguns estudantes tiveram dificuldades para responder o item “b”, pois essa foi a primeira questão de adição de frações, depois da tarefa 1.

Figura 57: Questão 3: Tarefa 5

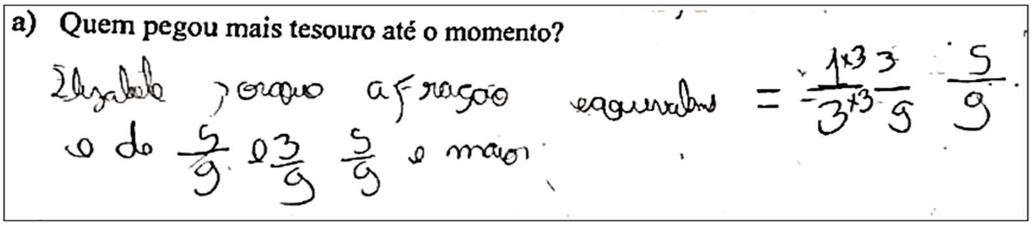
João e Elisabete estavam jogando um jogo de videogame. Para vencer o jogo, era necessário tentar capturar todo o tesouro disponível. João conseguiu capturar $\frac{1}{3}$ do tesouro, e Elisabete, $\frac{5}{9}$ do tesouro.

a) Quem capturou mais tesouro até o momento?
b) Juntos, que fração do tesouro João e Elisabete capturaram?

Fonte: Elaborado pelo autor

No item “a”, a maioria dos estudantes conseguiu fazer a comparação das duas frações, utilizando de equivalência de frações, conforme a imagem a seguir.

Figura 58: Resposta de uma estudante

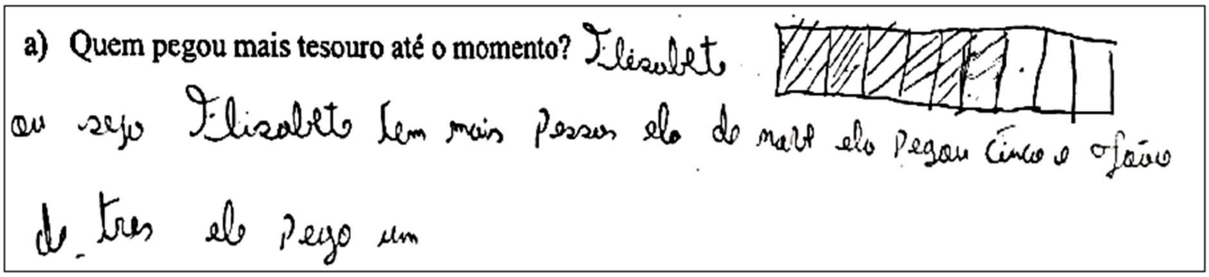

a) Quem pegou mais tesouro até o momento?
Elizabete porque a fração equivalente $= \frac{1 \times 3}{3 \times 3} \frac{3}{9}$ $\frac{5}{9}$
o do $\frac{5}{9}$ e $\frac{3}{9}$ $\frac{5}{9}$ é maior

Fonte: Acervo do autor

Conforme observamos, a estudante concluiu que Elizabete pegou mais tesouro, porque, ao fazer a comparação das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{9}$, constatou que $\frac{5}{9}$ é maior do que $\frac{1}{3}$. Como a maioria utilizou dessa mesma estratégia para justificar, julgamos que, para esses estudantes, a compreensão do significado de equivalência de frações estava mais esclarecida.

Apenas uma aluna utilizou de outra estratégia, conforme a figura a seguir.

Figura 59: Resposta de uma estudante



Fonte: Acervo do autor

A estudante justificou que Elizabete estava com mais tesouro, porque, de 9, ela pegou 5, e João, de 3, pegou 1. Acreditamos que, ao efetuar dessa forma, a estudante concluiu que Elisabete estava com mais tesouros, por dois fatores: primeiro, porque 5 partes tomadas é maior do que 1 parte tomada, porém, desconsiderou o todo e, como não foi informado, no problema, o total do tesouro, essa não é a melhor estratégia para a solução desse problema.

O segundo fator, a estudante pode ter utilizado a estratégia "pensamento residual", definida por Post et al. (1986, *apud* QUARESMA; PONTE, p. 45). De acordo com os autores, essa estratégia se refere à quantidade necessária para se construir o todo. Assim, na comparação entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{9}$, a estudante pode ter percebido que, na primeira fração, faltam $\frac{2}{3}$ para completar o todo (o valor residual), enquanto, na segunda fração, faltam $\frac{4}{9}$. Como 2 está mais "próximo" de 3, e 4 mais "distante" de 9, concluiu que $\frac{2}{3} > \frac{4}{9}$. Assim, pode afirmar que $\frac{5}{9} > \frac{1}{3}$.

No item "b", de início, a maioria dos estudantes somaram o numerador com numerador e denominador com denominador, encontrando, como resultado, $\frac{6}{12}$. Esse tipo de erro é muito comum entre os estudantes de acordo com Monteiro (2013) e Lopes (2008). De acordo com Lopes (2008), esse tipo de erro "trata-se de um fenômeno conhecido como "sobregeneralização"[14] de regras aprendidas para adição nos conjuntos dos naturais ou inteiros." (p. 10). Isto é, os estudantes, ao efetuarem a soma de frações, adicionam ou multiplicam, separadamente, numeradores e denominadores, sem buscar um denominador comum para as frações.

Seguindo, apenas uma estudante efetuou a soma das frações da forma que era o esperado, conforme a imagem a seguir.

---

[14] O conceito de sobregeneralização é tratado por Helena Noronha Cury, em seu livro Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. – 2. ed. – Belo Horizonte: Autêntica. 2013.

Figura 60: Resposta de Ana Carolina

$$\frac{1\times 3}{3\times 3} = \frac{3}{9} + \frac{5}{9} = \frac{8}{9}$$

Fonte: Acervo do autor

Para instigá-la, perguntei o que ela havia pensado e me respondeu que multiplicou o numerador e o denominador da fração $\frac{1}{3}$ por 3 para achar a fração equivalente com denominador 9, para, depois, somar com $\frac{5}{9}$. Então, questionei o porquê ela havia feito dessa forma, mas ela não soube responder. Afirmou que sabia que precisava igualar o denominador das frações, mas não sabia explicar o motivo.

Conforme observamos, na resposta da estudante, apesar de não saber explicar o porquê igualamos as partes das frações para, depois, somá-las, parece que ela compreende como fazer a operação de adição de frações com denominadores diferentes e, também, a ideia de equivalência de frações.

Para esclarecer à estudante e aos demais, escrevi no quadro $\frac{2}{4} + \frac{1}{4}$ e perguntei qual era o resultado. Todos disseram que era $\frac{3}{8}$, exceto Ana Carolina. Então, pedi que pegassem, no kit de frações, as peças que representavam as frações acima e perguntei:

> **Pesquisador**: Todos estão com as peças?
> **Estudantes**: Sim.
> **Pesquisador**: Então, vamos lá. Para essa primeira fração, eu tenho quantas peças?
> **Estudantes**: Duas.
> **Pesquisador**: Duas de quantas?
> **Estudantes**: Duas de quatro.
> **Pesquisador**: E para a segunda?
> **Estudantes**: Uma.
> **Pesquisador**: Uma de quantas?
> **Estudantes**: Uma de quatro.
> **Pesquisador**: Então, se eu juntar essas peças, eu fico com quantas?
> **Estudantes**: Três.
> **Pesquisador**: Três de quantas?
> **Estudantes**: Três de quatro.
> **Pesquisador**: Qual é a representação fracionária?
> **Estudantes**: $\frac{3}{4}$. (trecho de transcrição da gravação em áudio 20 mar. 2019)

Após chegarmos ao resultado, um estudante me perguntou se a fração que tem o denominador igual eu deveria somar apenas o numerador. Respondi que sim, mas questionei o porquê não somamos o denominador. Ele não soube responder, então questionei os demais estudantes.

> **Pesquisador**: Por que não somamos o denominador dessa fração?
> **Ana Carolina**: Porque as partes continuam a mesma.
> **Pesquisador**: Isso mesmo. (trecho de transcrição da gravação em áudio 20 mar. 2019)

Para reforçar o que a estudante afirmou, solicitei que pegassem as três peças que tiveram como resultado da fração e mostrei que, ao juntá-las, estávamos utilizando três das quatro que tínhamos, ou seja, a quantidade de partes que o todo foi dividido continuou a mesma.

Consideramos que, ao explicar a situação acima, utilizando o kit de frações, os estudantes compreenderam melhor que, para somar frações com denominadores iguais, somamos apenas os numeradores das frações, pois, assim, como Santos (2014), Vale e Barbosa (2015) entre outros autores, acreditamos que o material manipulável permite a visualização daquilo que o estudante vê apenas na teoria.

Entendida a situação acima, para reforçar, mostrei outro exemplo, porém, frações com denominadores diferentes. Escrevi no quadro $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ e solicitei que os estudantes pegassem as peças do kit que representavam as frações.

> **Pesquisador**: Vamos pegar, no kit de frações, as peças que representam essas frações, ok? Qual peça representa a fração $\frac{1}{4}$?
> **Estudantes**: A laranja.
> **Pesquisador**: Muito bom. E a que representa $\frac{1}{2}$?
> **Estudantes**: A verde.
> **Pesquisador**: Então, se juntarmos essas duas peças, qual seria o resultado? (trecho de transcrição da gravação em áudio 20 mar. 2019)

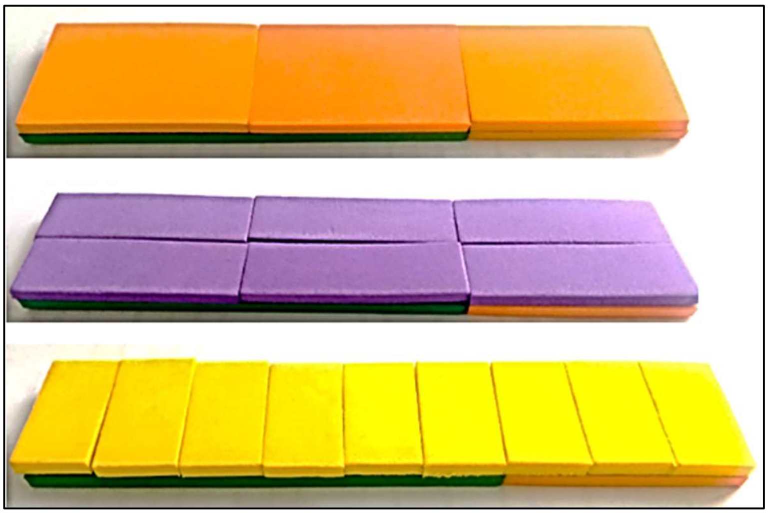
Nesse momento, os estudantes tiveram dificuldades para responder à pergunta. Compreendemos que o primeiro exemplo foi mais fácil, porque as peças eram da mesma cor, bastava contar quantas tinham, porém, nesse exemplo, depararam-se com peças de cores diferentes e, por isso, tiveram dificuldades de responder. Para tentar ajudá-los, falei:

Pesquisador: No primeiro exemplo, nós juntamos as peças e contamos quantas tinham. Não podemos fazer da mesma forma?
Pietro: Não, professor! Aqui é diferente, as partes não são iguais.
Pesquisador: Ok. Se eu juntar as duas peças, eu não posso falar que estou com duas verdes?
Estudantes: Não.
Pesquisador: Então posso dizer que fico com duas laranjas?
Ana Carolina: Não, professor, as peças são diferentes. Não dá para juntar.
Pesquisador: Então, como faço para juntar essas peças? (trecho de transcrição da gravação em áudio 20 mar. 2019)

Houve um silêncio.

Como a aula já estava quase terminando, e os estudantes, um pouco agitados, informei que, para juntar as duas peças, teríamos que encontrar peças de mesma cor, no kit, que sobreponham às duas peças juntas, pois, assim, estaríamos igualando as partes das frações. Então, pedi que fizessem dessa forma e me dissessem o que encontrariam. Tivemos, como respostas, 3 peças laranjas, 6 peças roxas e 9 peças amarelas.

Figura 61: Representação dos estudantes



Fonte: Acervo do autor

Tendo essas opções, perguntei:

Pesquisador: Muito bom. Qual a representação fracionária das peças laranjas?
Estudantes: $\frac{3}{4}$.
Pesquisador: E a representação fracionária das peças roxas?
Estudantes: $\frac{6}{8}$.
Pesquisador: E a representação fracionária das peças amarelas?
Estudantes: $\frac{9}{12}$. (trecho de transcrição da gravação em áudio 20 mar. 2019)

Conforme observamos, os estudantes, foram capazes de fazer a troca das peças e a representação fracionária das peças trocadas. Para verificar se compreenderam a discussão, perguntei qual o resultado de $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$. Nesse momento, alguns tiveram dúvidas, mas a maioria respondeu que poderia ser $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ ou $\frac{9}{12}$. Ao questionar por que os três resultados eram válidos, um estudante informou que as três frações representavam a mesma parte do todo e citou, como exemplo, a forma como fizeram a troca das peças. Diante da justificativa do estudante, inferimos que ele compreendeu o significado de frações equivalentes.

Para encerrar a aula e verificar se os estudantes compreenderam a discussão, perguntei:

> **Pesquisador**: Para finalizar, como fazemos a soma de frações com denominadores diferentes?
> **Estudantes**: Temos que igualar as partes para depois fazer a soma dos numeradores.
> (trecho de transcrição da gravação em áudio 20 mar. 2019)

Como observamos, parece que os estudantes entenderam como fazer a soma de frações com denominadores diferentes, porém, não podemos afirmar precisamente, que a compreensão foi de todos, pois alguns, ainda, demonstravam ter dúvidas.

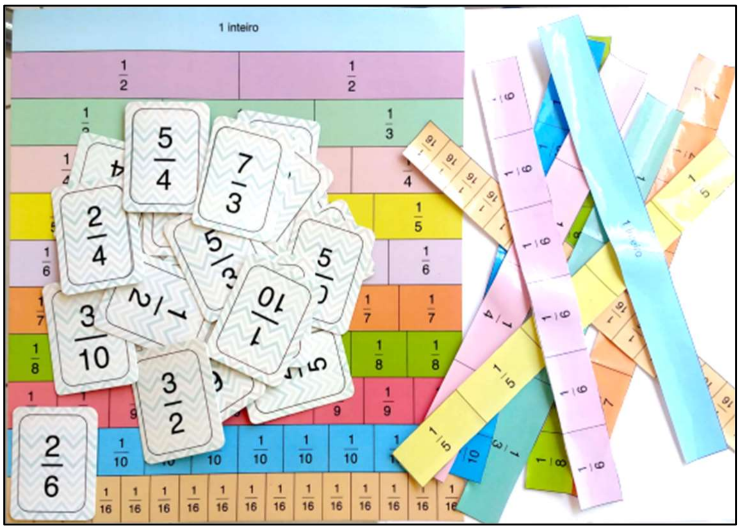
Ao encerrar a aula, reforcei com os estudantes que, para somar ou subtrair duas frações com denominadores diferentes, é necessário encontrar a fração equivalente às frações dadas, de forma que tenham denominadores iguais, ou seja, precisamos igualar as partes para, depois, somarmos o numerador.

5.6 Tarefa 6: Jogo Papa todas de frações

25 de março de 2019

Essa aula teve como objetivo auxiliar os estudantes a compreenderem o conceito de fração, comparar frações com diferentes numeradores e denominadores, obter noção de equivalência de frações e efetuar leitura e representação de frações. Para isso, utilizamos, como recurso, um baralho com 32 cartas, um tabuleiro e tiras de frações.

Figura 62: Tabuleiro, cartas e tiras do jogo Papa todas de frações



Fonte: Acervo do autor

Optamos em realizar uma tarefa com jogo por acreditarmos que a utilização de jogos, nas aulas de Matemática, pode implicar uma mudança significativa nos processos de ensino e aprendizagem. Concordamos com Santos (2014) quando relata que o jogo pode proporcionar, aos estudantes, um momento de diversão e interação entre estudante-estudante e professor-estudante. Porém, ressaltamos que, no momento do jogo, não podemos deixar os estudantes confundirem a aula com um passatempo ou apenas um momento de diversão, mas induzi-los a perceber que, por meio do jogo, podem produzir conhecimentos. Para isso, o professor precisa estar sempre atento, intervindo quando necessário.

Iniciei a aula solicitando, aos estudantes, que formassem grupos com 4 pessoas. Estavam presentes 21 estudantes, assim, foram formados 4 grupos com 4 integrantes, e 1 grupo com 5. Para esse grupo, com 5 estudantes, pedi que tirassem duas cartas do baralho, pois, assim, cada uma receberia quantidades iguais de cartas, neste caso, seis.

Após formados os grupos e entregue o material para cada um deles, expliquei a regra do jogo, porém, no início, estavam distraídos com o material. Então, solicitei a atenção, pois, no momento que o jogo se iniciasse, não podíamos mudar as regras. Consegui a atenção de todos e, então, falei sobre as regras:

- Todas as cartas do baralho serão distribuídas entre os jogadores, que não veem suas cartas. Cada jogador coloca suas cartas em uma pilha com os números virados para baixo, como suporte ao jogo. Como temos 32 cartas, e temos grupos com 4 estudantes, cada um receberá 8 cartas. O grupo com 5 estudantes, como tiramos 2 cartas, cada um receberá 6 cartas.

- A tabela com as tiras de frações será colocada no centro da mesa, de modo que todos a vejam.
- Os jogadores combinam, entre si, um sinal ou uma palavra para descartar a carta escolhida. Dando o sinal, todos, ao mesmo tempo, revelarão sua carta colocando-a sobre a mesa e, depois, farão a comparação das frações. O jogador que tiver a carta representando a maior fração vence a rodada e fica com todas as cartas, ou seja, "papa-todas".
- As cartas que o jogador ganha em uma rodada não podem ser utilizadas nas rodadas seguintes.
- O tabuleiro de tiras de frações e as tiras de frações podem ser usadas, se necessário, para que as comparações sejam feitas, como suporte ao jogo.
- Se houver duas ou mais cartas de mesmo valor, todas as cartas ficam na mesa e, na próxima rodada, o jogador com a maior carta "papa-todas", inclusive, aquelas que ficaram na mesa.
- O jogo termina quando as cartas acabarem.
- O jogador com o maior número de cartas vence o jogo.

Após as discussões e solucionadas as dúvidas, entreguei uma folha de ofício para cada um dos estudantes registrarem suas estratégias – esse material foi recolhido no final da aula para análise do que efetuaram – e, em seguida, iniciamos o jogo. Vale ressaltar que essa aula também foi filmada pela professora que fez a filmagem da segunda aula.
Informei que a primeira partida era para conhecer o jogo e verificar se surgia alguma dúvida, mas que, na segunda, já estava valendo o brinde.

Como não conheciam o jogo, houve muita dúvida no início, tais como: Alguns estudantes estavam utilizando as cartas que ganhavam em cada rodada; tiveram dúvidas para fazer a comparação das quatro cartas jogadas por eles; frações do tipo $\frac{3}{3}$ e $\frac{4}{4}$ alguns acharam que $\frac{3}{3}$ era maior por estar dividido em três partes, entre outras.

Figura 63: Estudantes jogando

Fonte: Acervo do autor

Observando alguns grupos e efetuando questionamentos, percebi que uma estudante teria dito que a rodada tinha empatado, mas, ao verificar as cartas, constatei que ela estava enganada. Perguntei por que ela achava que houve empate. As cartas eram $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{3}$. A estudante disse que as duas eram iguais porque o resultado da diferença entre elas era 2, ou seja, estava fazendo 3 – 1 = 2, e 5 – 3 = 2, chegando à conclusão de que as duas cartas eram iguais.

Assim como aconteceu na tarefa 3, essa estudante, também, estava utilizando uma das estratégias definida por Post et al. (1986, *apud* QUARESMA; PONTE, 2012), "pensamento diferencial". Isto é, a estudante, possivelmente, considerou que as frações são equivalentes, porque uma exige duas partes para formar o todo e a outra tem duas partes que ultrapassam o todo. Assim, de acordo com os autores, a tendência é que os estudantes foquem na diferença entre 3 e 1 e entre 5 e 3, e desconsiderem o tamanho real da fração. Em consonância com os autores, acreditamos que esse é um tipo de pensamento que, normalmente, conduz o estudante ao erro.

Após a primeira partida, os estudantes já estavam mais atentos. Além disso, pedi que fizessem um quadro para registrarem cada rodada, conforme a seguir.

Quadro 13: Modelo para registros das partidas do jogo

Nome	1ª Rodada	2ª Rodada	3ª Rodada	4ª Rodada	5ª Rodada	6ª Rodada	7ª Rodada	8ª Rodada

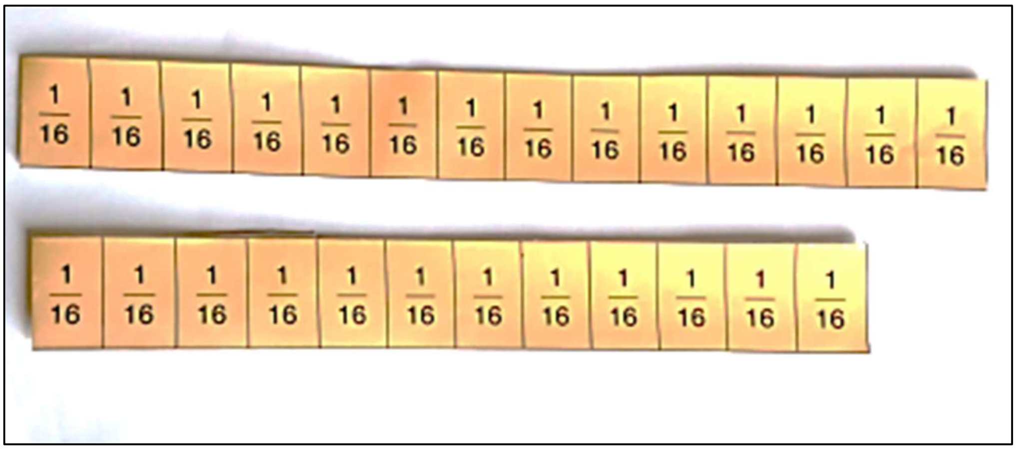
Fonte: Elaborado pelo autor

Acreditamos que, se esse quadro fosse levado pronto para os estudantes preencherem, teria sido possível fazer o registro das três partidas. Como não havia um modelo padrão, no início, estavam anotando as frações de forma muito aleatória; por isso, desenhei o quadro acima na lousa e pedi que todos fizessem igual, e que, em cada rodada, circulassem a maior fração. Dessa forma, foi possível ver os registros mais nitidamente e verificar se estavam fazendo a comparação corretamente.

Nessa aula, percebemos que os estudantes estavam empolgados com o jogo e acreditamos que o objetivo foi alcançado, pois havia uma concentração e interação entre eles que foi perceptível. Houve vários momentos que notamos um estudante corrigindo o outro, como a seguir.

> **Agatha**: $\frac{2}{16}$ é maior do que $\frac{4}{16}$.
> **Beatriz**: Claro que não, 4 é maior do que 2.
> **Agatha**: Mas se olharmos a tira, dá pra ver que $\frac{2}{16}$ é maior.
> **Beatriz**: Você está olhando errado. Não é assim que olha.
> **Agatha**: Professor, faça o favor.
> **Pesquisador**: Oi, o que está acontecendo?
> **Agatha**: Olha aqui. Ela está falando que $\frac{4}{16}$ é maior do que $\frac{2}{16}$. Eu entendi que é porque 4 é maior do que 2 e as partes são iguais. Mas olhando na tira, $\frac{2}{16}$ é maior.
> **Pesquisador**: Vamos ver se é mesmo? Me mostra como você está fazendo. (trecho de transcrição da gravação em áudio 25 mar. 2019)

Figura 64: Representação da estudante



Fonte: Acervo do autor

> **Pesquisador**: Ok. Me fale qual a representação fracionária da primeira tira?
> **Agatha**: $\frac{2}{16}$.
> **Pesquisador**: Tem certeza? Da forma como está me mostrando, quantas partes do 16 você está utilizando?
> **Agatha**: 14.
> **Pesquisador**: Então, essas partes representam $\frac{2}{16}$?
> **Agatha**: Não. Representa $\frac{14}{16}$.
> **Beatriz**: Eu te falei. Falei que estava olhando errado.
> **Agatha**: Ah, professor! Eu achei que olhava assim. Agora eu entendi. (trecho de transcrição da gravação em vídeo 25 mar. 2019)

Conforme observamos, a estudante, ao dizer que entendeu que $\frac{4}{16}$ é maior do que $\frac{2}{16}$, porque 4 é maior do que 2, evidencia-nos que ela compreende fazer a comparação de frações com denominadores iguais, porém, ao utilizar o material (tiras de frações) de forma errônea, estabeleceu uma contradição com o que aprendeu anteriormente. Por isso, é preciso estar sempre atento se a utilização do material é feita de forma correta pelos estudantes, senão, ele pode ter um efeito contrário.

Como utilizamos apenas uma aula de 50 minutos, foi possível fazer apenas 3 partidas do jogo e, analisando o registro dos estudantes, percebemos que a maioria compreendeu a proposta, demonstrando ter compreendido como se faz a comparação de frações e a identificação de frações equivalentes.

5.7 Tarefa 7: Exploração do jogo "Papa Todas de Frações"

27 de março de 2019

A aula foi sobre a exploração do jogo "Papa Todas de Frações" e teve como objetivo verificar se os estudantes conseguiram compreender a proposta do jogo e, também, explorar comparação e equivalência de frações.

Nesse dia, compareceram 4 meninos e 13 meninas e nos foi disponibilizada, apenas, uma aula de 50 minutos. Assim, trabalhamos com três questões, conforme a seguir.

Figura 65: Questões 1, 2 e 3: Tarefa 7

1) Helena tirou $\frac{1}{2}$, Ellen tirou $\frac{4}{8}$, Pedro tirou $\frac{7}{7}$ e Aline ganhou a partida. Qual carta ela pode ter tirado? *(Procure observar que há, aqui, um problema com mais de uma solução possível).*

2) Durante o jogo, os alunos organizaram uma tabela com as frações que cada um tirou.

Jogador	**1ª rodada**	**2ª rodada**	**3ª rodada**	**4ª rodada**
Júlia	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{7}{3}$
Paulo	$\frac{10}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{10}$
Luís	$\frac{4}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{9}$
Bia	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{2}$

Observando a tabela acima, responda:

a) Quem ganhou o jogo após quatro rodadas?
b) Quais as cartas que contêm frações equivalentes a 1 inteiro?
c) E maiores do que 1 inteiro?

3) Em uma rodada, Paulo, Ana e Renato tiraram as seguintes cartas: $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$ e $\frac{3}{6}$. Eles começaram a discutir sobre quem conseguiu a maior carta. Se você estivesse presente nessa discussão, como os ajudaria a tomar a melhor decisão sobre qual das três cartas tem a maior fração representada?

Fonte: Adaptado de Smole et. al (2007)

Como já discutimos bastante nas aulas anteriores a respeito de comparação e equivalência de frações, resolvi não intervir enquanto resolviam; no entanto, informei que, se houvesse dúvidas, deveriam me chamar para esclarecê-las e, além disso, deveriam discutir as questões com o grupo que formaram.

Foi entregue a tarefa, as tiras de frações para cada estudante, um baralho do jogo para cada grupo e, em seguida, solicitei que iniciassem a tarefa. Enquanto faziam, eu circulava entre os grupos para ouvir as discussões. No início, ficaram concentrados, lendo as questões e sem muita discussão, mas não demorou para iniciarem discussão entre eles.

Percebi que um grupo de estudantes discutia sobre como achar uma fração maior do que $\frac{7}{7}$, pois a tira que representava essa fração era um inteiro.

Merlini (2005) ressalta que o significado parte-todo, normalmente, é trabalhado para iniciar o conceito de frações com quantidades contínuas, isto é, um todo é dividido em partes iguais, ou seja, o numerador sempre será menor do que o denominador. Assim, esse procedimento, às vezes, não possibilita o estudante a perceber as frações impróprias.

Assim, estamos de acordo com Melini (2005), pois, para essas estudantes, não era possível encontrar uma fração maior do que $\frac{7}{7}$. Ao serem questionadas sobre a impossibilidade que afirmavam de existir uma fração maior do que um inteiro, elas falaram que a tira só representava um inteiro.

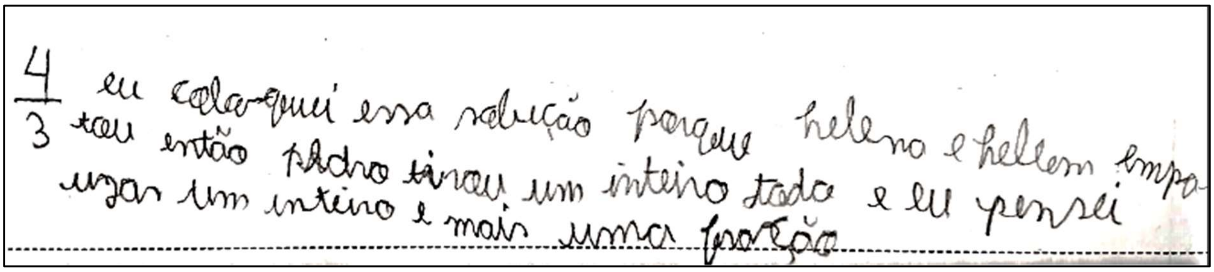
Para mostrar, às estudantes, que era possível encontrar uma fração maior, falei:

> **Pesquisador**: E se pegaremos duas tiras que têm a mesma divisão das partes e juntar, o que me diz?
> **Ires**: Ah professor! Então se eu posso juntar as duas tiras eu vou ter uma fração maior?
> **Pesquisador**: Será? Me dê um exemplo.
> **Ires**: Se eu pegar uma tira que está dividida em nove partes e pegar outra tira igual e usar só uma parte dela, por exemplo, ela já vai ser maior do que o inteiro.
> **Pesquisador**: Isso mesmo. Você viu que podemos escrever uma fração maior do que um inteiro?
> **Ires**: Sim. Agora entendi.
> **Pesquisador**: Qual é a representação fracionária dessa fração que deu como exemplo?
> **Ires**: $\frac{10}{9}$.
> **Pesquisador**: Muito bom. (trecho de transcrição da gravação em áudio 27 mar. 2019)

Conforme o diálogo acima, podemos inferir que a estudante parece não ter tido dificuldades em compreender como encontrar frações maiores do que um inteiro. Acreditamos que, com base na demonstração efetuada com as tiras de frações, ela teve a oportunidade de visualizar e compreender melhor a situação.

Essa não foi a dúvida somente dessa estudante, pois, percebi que outros grupos discutiam sobre isso, e eu ia esclarecendo. Os estudantes, na medida do possível, foram compreendendo melhor. Não podemos dizer que a compreensão foi de todos os estudantes, mas a maioria foi capaz de fazer uma justificativa considerada coerente, para a questão número 1, conforme a seguir.

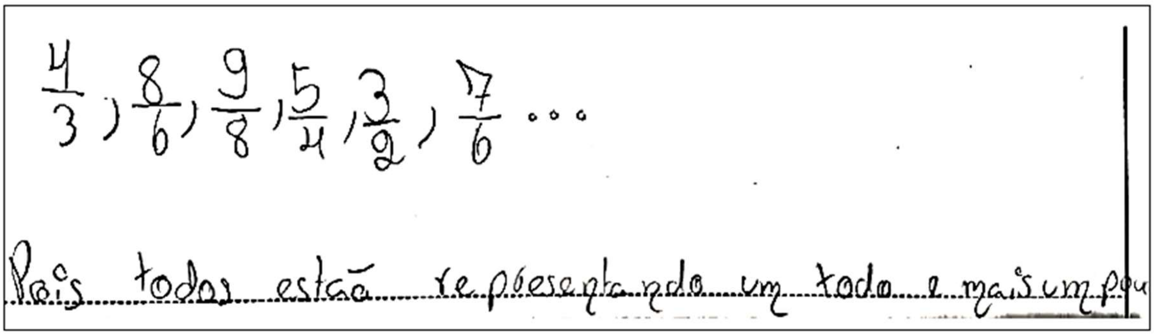
Figura 66: Resposta de um estudante



$\frac{4}{3}$ eu colaquei essa solução porque heleno e hellem empa
tou então pedro tirou um inteiro toda e eu pensei
uzar um intiro e mais uma fração

Fonte: Acervo do autor

Figura 67: Resposta de um estudante



$\frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{6} \ldots$

Pois todos estaã representando um todo e mais um pou

Fonte: Acervo do autor

De acordo com as respostas acima, inferimos que houve uma compreensão por parte desses estudantes, porém, há evidências de que apresentam dificuldades no uso correto da linguagem matemática, por exemplo, quando escrevem: *"[...] um inteiro e mais uma fração." "[...] um todo e mais um pouco".* No entanto, suas justificativas evidenciam que houve a compreensão da questão.

Além disso, vale destacar que o estudante da figura (66), também, sabe identificar uma fração equivalente, pois percebeu que Helena e Ellen empataram ao tirarem as cartas $\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{8}$.

Na questão número 2, os estudantes deveriam comparar quatro frações, em cada rodada, e identificar qual era a maior, para saber quem foi o ganhador da rodada.

Figura 68: Questão 2: Tarefa 7

Durante o jogo, os alunos organizaram uma tabela com as frações que cada um tirou.

Jogador	**1ª rodada**	**2ª rodada**	**3ª rodada**	**4ª rodada**
Júlia	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{7}{3}$
Paulo	$\frac{10}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{10}$
Luís	$\frac{4}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{9}$
Bia	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{2}$

Observando a tabela acima, responda:

a) Quem ganhou o jogo após quatro rodadas?
b) Quais as cartas que contêm frações equivalentes a 1 inteiro?
c) E maiores do que 1 inteiro?

Fonte: Adaptado de Smole et. al (2007)

Na primeira rodada, houve um empate entre Paulo e Luís, pois, de acordo com a questão, eles tiraram $\frac{10}{10}$ e $\frac{4}{4}$. Porém, algumas estudantes estavam concluindo que $\frac{4}{4}$ era maior porque as partes eram maiores do que as partes da fração $\frac{10}{10}$.

Efetuamos a discussão sobre como fazer a comparação de frações nas tarefas anteriores, os estudantes encontraram algumas estratégias de comparação, mas parece que, para essas estudantes, ainda não ficou esclarecido, pois estavam comparando as duas frações, utilizando a estratégia para comparar frações com numeradores iguais.

Entendemos que há tantos detalhes no ensino de frações que, muitas vezes, podem confundir a cabeça dos estudantes. Nesse sentido, Monteiro (2013) ressalta que “com tantos detalhes, torna-se difícil considerar esse conteúdo adequado ou acessível para a faixa etária” desses estudantes (p. 25).

Ainda, de acordo com Monteiro (2013), as estratégias, técnicas ou regras definidas pelo professor ou até mesmo pelos estudantes, podem até ser dominadas por alguns, mas, na maioria das vezes, as ideias não são, totalmente, compreendidas. Assim, inferimos que essas estudantes sabem utilizar de regras e técnicas para fazer a comparação, mas ainda não têm um entendimento nítido dos conceitos e das propriedades para comparar frações.

Seguindo, percebi que um grupo de estudantes tinha a mesma dúvida, se quem ganhara a partida era Paulo ou Luís. Dirigi-me ao grupo para tentar entender o que estava pensando e utilizei, como estratégia, uma barra de chocolate para exemplificar a situação.

Estudante: Eu estou marcando em cada rodada quem que ganhou.
Pesquisador: Certo.
Estudante: Só que nessa aqui eu estou em dúvida se quem ganhou foi o Paulo ou o Luís, porque tem dez e dez, quatro e quatro. Esse aqui de quatro, tem o espaço maior e o de dez tem o espaço menor. Então quem ganhou foi o Luís?
Pesquisador: Imaginem que vocês três, por exemplo, têm uma barra de chocolate do mesmo tamanho. Se Alice dividir a barra dela em 4 pedaços, Sofia divide a dela em 3 pedaços e Letícia divide a dela em 7 pedaços, e todas vocês comerem todos os pedaços, quem comeu mais chocolate?
Estudantes: Ninguém. Todas comemos a mesma coisa.
Pesquisador: Mas por quê? Se Sofia dividiu em 3 pedaços, as partes dela foram maiores do que a de vocês duas. Por que ela não comeu mais do que vocês?
Sofia: Não, professor! Mas o tamanho das barras é igual e comemos tudo.
Pesquisador: Então, por que Luís ganhou a partida?
Estudantes: Hum! Agora entendi. Teve um empate, porque as duas frações representam o inteiro. (trecho de transcrição da gravação em áudio 27 mar. 2019)

De acordo com o diálogo acima, parece que as estudantes conseguiram compreender e ter uma ideia melhor sobre a situação. Ressaltamos que essa foi uma dúvida muito comum entre os estudantes, e percebemos é que estavam mais preocupados com o tamanho em que as partes foram divididas do que com a representatividade das duas frações. Ou seja, estavam com dificuldades de perceber que as duas frações eram equivalentes, representavam o mesmo todo.

Após a solução dessa dúvida, os estudantes não demonstraram dificuldades nas outras rodadas, pois, na segunda, as frações tinham o mesmo numerador na terceira e quarta rodada, as frações maiores eram frações impróprias. Como efetuáramos a discussão da questão número 1, parece que a maioria dos estudantes compreendeu que, quando a fração tem o numerador maior do que o denominador, sua representatividade é maior do que um inteiro.

Em outro grupo, percebi que uma estudante circulara as frações maiores de cada rodada. Resolvi questioná-la a respeito da 4ª rodada, a fim de saber o que estava pensando para fazer a comparação.

Pesquisador: Por que você está falando que $\frac{7}{3}$ é maior do que todas essas outras frações? ($\frac{7}{3}, \frac{4}{10}, \frac{3}{9}, \frac{3}{2}$). Como você chegou a essa conclusão? O que você fez?
Ires: Não professor! Essa aqui eu tenho que refazer, porque eu estava fazendo errado.
Pesquisador: Vamos pensar nela já que você marcou. O que você fez para marcá-la? Você usou as tiras?
Ires: Anran.
Pesquisador: O que você pensou?
Ires: Ela é maior!
Pesquisador: Mas, por quê?
Ires: $\frac{7}{3}$ eu usei três tiras de 3. Duas inteiras e depois eu usei só um pedaço.
Pesquisador: Hum.
Ires: Aí a de $\frac{4}{10}$, eu só vou usar quatro partes de 10.
Pesquisador: Hum.

> **Ires**: A de $\frac{3}{9}$, eu só vou usar três partes da de 9.
> **Pesquisador**: Certo.
> **Ires**: E essa aqui, a de três de dois ($\frac{3}{2}$), eu vou usar uma tira de dois e mais outro pedaço da tira de um de dois.
> **Pesquisador**: Aí você concluiu, que $\frac{7}{3}$ é a maior?
> **Ires**: Unrun.
> **Pesquisador**: Perfeito seu raciocínio. Muito bom. (trecho de transcrição da gravação em áudio 27 mar. 2019)

A estudante, no início, demonstrou-se insegura, mas, com insistência, ela foi se posicionando e demonstrou ter compreendido como se faz a comparação de frações. Vale destacar que a tira de frações, como apoio para que a estudante pudesse visualizar o que estava pensando, ajudou para a construção do conhecimento dessa estudante.

Na questão número 3, os estudantes deveriam fazer a comparação de três frações equivalentes, conforme a seguir.

Figura 69: Questão 3: Tarefa 7

Em uma rodada, Paulo, Ana e Renato tiraram as seguintes cartas: $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$ e $\frac{3}{6}$. Eles começaram a discutir sobre quem conseguiu a maior carta. Se você estivesse presente nessa discussão, como os ajudaria a tomar a melhor decisão sobre qual das três cartas tem a maior fração representada?

Fonte: Adaptado de Smole et. al (2007)

A maioria dos estudantes conseguiu perceber que essas frações eram equivalentes, no entanto, 5 justificaram que $\frac{1}{2}$ é a maior, porque estavam com a ideia de que foi dividido em menos partes. Assim, inferimos que, para esses estudantes, a compreensão desse conceito ainda não estava esclarecida.

Para ajudá-los a entender a questão, escrevi as três frações no quadro e perguntei, à turma, qual a estratégia que usariam para identificar qual das três era a maior. Uma estudante sugeriu achar a fração equivalente, pois, assim conseguiríamos fazer a comparação. Sugeriu, como exemplo, multiplicar $\frac{1}{2}$ por 4 para encontrar $\frac{4}{8}$ e, depois, multiplicar $\frac{1}{2}$ por 3 para encontrar $\frac{3}{6}$. Questionei o que faríamos para comparar $\frac{4}{8}$ com $\frac{3}{6}$. A maioria respondeu que deveríamos multiplicar o numerador e o denominador da primeira por 3 e da segunda por 4, assim encontraríamos a fração equivalente $\frac{12}{24}$.

Como observamos, o conceito de frações equivalentes parece ter sido compreendido pela maioria dos estudantes. Compreendemos que, mesmo utilizando muito, nas tarefas anteriores, o kit de frações para demonstrar o porquê podemos usar essa estratégia, possivelmente, para alguns estudantes, a ideia de frações equivalentes ainda não tenha ficado esclarecida. Pois, muitas vezes, conforme Nunes (2003) relata, o estudante demonstra ter entendido o conteúdo, isto é, faz cálculos corretos, fala sobre frações coerentemente, usa termos fracionais corretos, mas, ainda assim, provavelmente, alguns aspectos importantes, para uma compreensão melhor, são despercebidos. Ou seja, os estudantes utilizam a estratégia correta, acertam os cálculos e a questão, mas a compreensão do conceito pode não ter sido consolidada por todos.

5.8 Tarefa 8: Adição de frações

01 de abril de 2019

Nessa aula, nosso objetivo foi trabalhar com adição de frações. Estavam presentes 4 meninos e 13 meninas e, para iniciar a aula, escrevi, no quadro, a soma, $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$, e perguntei qual era o resultado. De imediato, todos os estudantes responderam que o resultado era $\frac{6}{6}$; foi uma resposta muito automática.

De acordo com Monteiro (2013) e Merlini (2005), esse tipo de erro é muito comum entre os estudantes, ou seja, tratam o numerador e o denominador das frações como se fossem dois números naturais independentes. Para Merlini (2005), o conhecimento que os estudantes têm sobre o conjunto dos números naturais é um dos fatores que pode conduzir à crença de que a adição de frações segue uma ideia semelhante à dos números naturais, isto é, basta somar os numeradores e denominadores das frações envolvidos na operação.

Seguindo, uma estudante levantou a mão e disse que estava errado. Questionei o porquê e ela disse que, como os denominadores das frações são iguais, devemos somar apenas o numerador, ou seja, o resultado correto seria $\frac{6}{3}$. Novamente, questionei:

> **Pesquisador**: No início, alguns disseram que o resultado seria $\frac{6}{6}$ e, agora, temos a alternativa, $\frac{6}{3}$. Qual das duas está correta?
> **Estudantes**: $\frac{6}{3}$

Pesquisador: Por que $\frac{6}{3}$ é o correto? Alguém sabe me responder?
Ana Carolina: Como as partes são iguais, então somamos apenas o numerador.
Pesquisador: Boa resposta. Vamos relembrar por que somamos apenas o numerador? (trecho de transcrição da gravação em áudio 01 abr. 2019)

Para reforçar o que a estudante afirmou, escrevi, no quadro, as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$, e, em seguida, pedi que todos pegassem a peça do kit de frações que representava a fração $\frac{2}{3}$. Sem dificuldades, todos pegaram duas peças rosas para representar a primeira fração, logo após, pedi que pegassem a peça que representava $\frac{1}{3}$. Após todos estarem com as peças em mãos, perguntei:

Pesquisador: As peças são da mesma cor?
Estudantes: Sim.
Pesquisador: Então, se eu juntar todas, posso dizer que estou com quantas peças rosas?
Estudantes: Três peças rosas.
Pesquisador: Muito bom. Qual a representação fracionária dessas três peças?
Estudantes: $\frac{3}{3}$. (trecho de transcrição da gravação em áudio 01 abr. 2019)

Dessa forma, foi possível mostrar a todos que a afirmação da estudante estava correta. Informei que, como as partes eram iguais, era só juntá-las. Assim, concluímos que, para somar duas frações com denominadores iguais, devemos conservar o denominador e somar o numerador, pois, ao "juntar" as duas frações, não alteramos suas partes. Vale lembrar que já havíamos efetuado esse tipo de discussão na tarefa 5.

Em seguida, escrevi outra soma no quadro, $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$, e perguntei:

Pesquisador: Qual seria o resultado dessa operação?
Alice: Vai dar dois... Ah não! Agora os denominadores não são iguais. Agora são duas peças diferentes.
Pietro: Tem que achar a equivalente.
Pesquisador: Por que eu preciso achar a fração equivalente?
Pietro: Para conseguir somar.
Pesquisador: Por quê? Eu não posso somar elas do jeito que estão?
Estudantes: Não.
Pesquisador: Por que não?
Alice: Porque os denominadores estão diferentes.
Pesquisador: Ok. Pietro disse que, por terem denominadores diferentes, temos que achar a fração equivalente. Por que fazemos esse procedimento?
Pietro: Para poder igualar o denominador.
Pesquisador: E quando eu igualo o denominador eu estou fazendo o quê?
Ana Carolina: Está igualando as partes.
Pesquisador: Muito bom! (trecho de transcrição da gravação em áudio 01 abr. 2019)

Conforme observamos, os estudantes lembraram da nossa discussão na tarefa 5, e parecem ter compreendido que, para somar frações com denominadores diferentes, deveríamos, primeiramente, igualar as partes para, depois, somar os numeradores.

Em nossas discussões, procuramos sempre utilizar o kit de frações ou a tira de frações para os estudantes visualizarem o que faziam e compreenderem melhor o conceito. Nesse sentido, assim como Nacarato (2005), acreditamos que a visualização pode ser considerada como uma forma de pensar e, também, ajudar o estudante a transformar conceitos abstratos em imagens reais ou, mentalmente, visíveis.

Exemplificando a ideia acima, quando a estudante Alice diz: "*Agora são duas peças diferentes.*" Ou seja, ela associou essa atividade com o que discutimos anteriormente. No entanto, nesse caso, as peças tinham cores diferentes, ou seja, não podíamos fazer a junção dessas peças sem, antes, fazer a troca para que todas tivessem a mesma cor (igualar as partes). Ao dizer, aos estudantes, que devemos encontrar a fração equivalente, para igualar as partes, talvez não faça sentido para ele, mas, demonstrando de uma forma visual, possivelmente a compreensão se estabelece mais nítida e palpável.

Assim, solicitei que os estudantes pegassem as peças do kit que representavam as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$.

> **Pesquisador**: Se eu juntar essas duas peças, rosa e verde, eu posso falar que tenho duas verdes?
> **Estudantes**: Não.
> **Pesquisador**: Duas rosas?
> **Estudantes**: Não.
> **Pesquisador**: Por que eu não posso falar?
> **Alice**: Porque são partes diferentes.
> **Pesquisador**: Muito bom. Então para eu somar essas duas frações, o que preciso fazer com as partes?
> **Estudantes**: Precisa igualar.
> **Pesquisador**: Ok. Sem fazer conta, vocês terão que juntar essas duas peças, verde e rosa, e encontrar peças no kit que sobreponham a essas duas peças, desde que as peças que serão sobrepostas sejam da mesma cor, ok? (trecho de transcrição da gravação em áudio 01 abr. 2019)

Os estudantes não apresentaram dificuldades para efetuar o que foi proposto. Encontramos como resultado $\frac{5}{6}$, representado por 5 peças vermelhas; $\frac{10}{12}$, representado por 10 peças amarelas; e $\frac{20}{24}$ representado por 20 peças cinzas.

Escrevi as três frações no quadro e perguntei se poderíamos afirmar que todas são iguais, ou seja, representavam o mesmo valor. Uma estudante disse que sim, pois todas representavam a mesma parte do todo, porém, estavam divididas em partes diferentes. Para essa estudante, inferimos que o conceito de equivalência de frações parecia esclarecido, pois não demonstrou insegurança no momento de afirmar que todas as frações tinham a mesma representatividade e, além disso, fez uma justificativa coerente.

Após a conclusão da estudante, confirmei sua afirmação e expliquei que, ao fazermos as trocas das peças para que todas ficassem com a mesma cor, estávamos igualando as partes das frações, ou seja, era o mesmo que encontrar frações equivalentes.

Após a explicação, solicitei que fizessem a soma das frações $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$, sem a utilização do material, pois queria verificar qual raciocínio utilizariam.

> **Pesquisador**: Como fazemos para somar essas duas frações se não tivéssemos o kit?
> **Estudantes**: Temos que fazer a fração equivalente. (trecho de transcrição da gravação em áudio 01 abr. 2019)

Todos sugeriram multiplicarmos o numerador e o denominador da fração $\frac{2}{3}$ por 2, e de $\frac{1}{2}$ por 3. Após o resultado, reforcei, novamente, que, para somarmos duas frações com denominadores diferentes, primeiramente, deveríamos encontrar a fração equivalente às duas frações, de forma que as partes ficassem iguais, para, depois, somarmos os numeradores.

Vale ressaltar que essas discussões já foram realizadas nas tarefas anteriores, e acreditamos que a maioria dos estudantes compreendeu o conceito. Em vista disso, assim como Garcez (2013), entendemos que limitar o ensino de frações a regras, pode prejudicar os estudantes na compreensão do conteúdo. Por exemplo, para somar $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$, afirmar, aos estudantes, que precisam reduzir as frações a um denominador comum (multiplicar o numerador e o denominador da fração $\frac{2}{3}$ por 2 e de $\frac{1}{2}$ por 3), sem explicar que, para fazer tal procedimento, estão utilizando o conceito de frações equivalentes, pode ser que não faça nenhum sentido para eles.

Com isso, em consonância com Jesus (2013), consideramos que é possível favorecer a compreensão aos estudantes, partindo de exemplos e demonstrações simples, ao mesmo tempo que eles mesmo constroem suas regras, por meio de experimentos, manipulação e observações conduzidas pelo professor.

Após as discussões e solucionadas as dúvidas dos estudantes, entreguei a tarefa do dia, um problema relacionado ao jogo "Papa Todas de Frações", conforme a seguir.

Figura 70: Questão 1: Tarefa 8

A professora de Júlio, Paulo, Rafael e Bruna propôs uma pequena mudança na regra do jogo "Papa Todas de Frações".

Ela distribuiu quatro cartas para cada um deles e com as cartas viradas sobre a mesa, solicitou que escolhessem duas cartas. Após a escolha, pediu que somassem as duas cartas e dissessem o resultado. Quem obtivesse o maior resultado ficaria com todas as cartas. Abaixo, está a tabela com as cartas que Júlio, Paulo, Rafael e Bruna escolheram para efetuarem a soma.
Faça a soma das duas cartas de cada jogador.

Nome	Carta 1	Carta 2	Soma
Júlio	$\frac{6}{3}$	$\frac{3}{6}$	
Paulo	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{8}$	
Rafael	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{5}$	
Bruna	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{6}$	

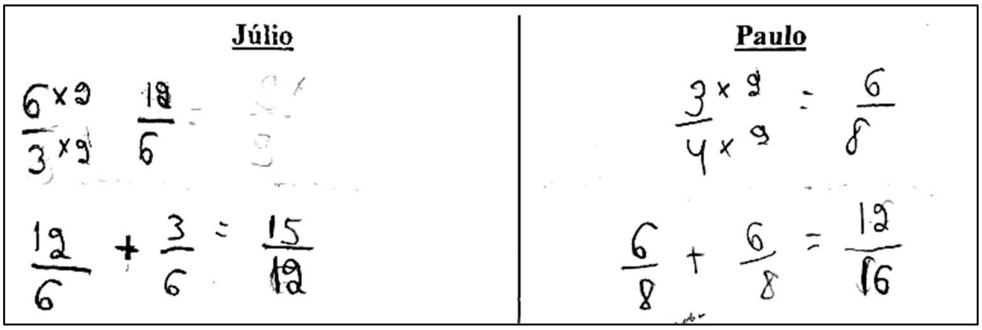
Quem ganhou essa rodada?

Fonte: Elaborado pelo autor, maio 2018

O objetivo dessa tarefa foi verificar se os estudantes, com base nas discussões efetuadas nas tarefas anteriores, teriam destreza para efetuar a somas das frações, carta 1 e carta 2 de cada aluno do problema, e a comparação dos quatro resultados encontrados por eles.

Ao analisar o registro dos estudantes, apenas três demonstraram não ter compreendido. Entre eles, um utilizou o procedimento da equivalência corretamente, porém, somou o numerador com numerador, e denominador com denominador, conforme a seguir.

Figura 71: Resposta de um estudante



Fonte: Acervo do autor

De acordo com o registro acima, o estudante evidencia ter compreendido que, para efetuar a soma de frações com denominadores diferentes, primeiramente, precisamos igualar as partes das frações, isto é, reduzir a um denominador comum. Porém, ao fazer a soma das frações, tratou o numerador e o denominador como se fossem dois números naturais independentes um do outro.

Nesse sentido, Monteiro (2013) ressalta que esse é um tipo de erro muito comum na operação de adição de frações, que consiste na soma independente dos numeradores e denominadores. Para o autor, a origem desse erro "pode estar na similaridade de notações que existem entre as Frações e os Números Naturais (levando ao uso de procedimentos aditivos com os Naturais)" (Ibid., p. 55).

Melini (2005) define a estratégia utilizada por esse estudante como "Números sobrepostos" (p. 198), isto é, o estudante trata a fração como dois números, naturais e distintos, que estão sobrepostos e apenas separados por um traço.

Assim, para esse estudante, inferimos que, talvez, ainda, falte a compreensão de alguns conceitos básicos de frações, por exemplo, o significado parte-todo, pois, conforme podemos observar, desprezou o todo envolvido.

Os demais estudantes fizeram corretamente a soma das frações e utilizaram o procedimento da equivalência de frações para efetuar a operação. Ou seja, parecem ter compreendido o processo de equivalência de frações e a sua relação com a operação de adição de frações.

5.9 Tarefa 9: Subtração de frações

03 de abril de 2019

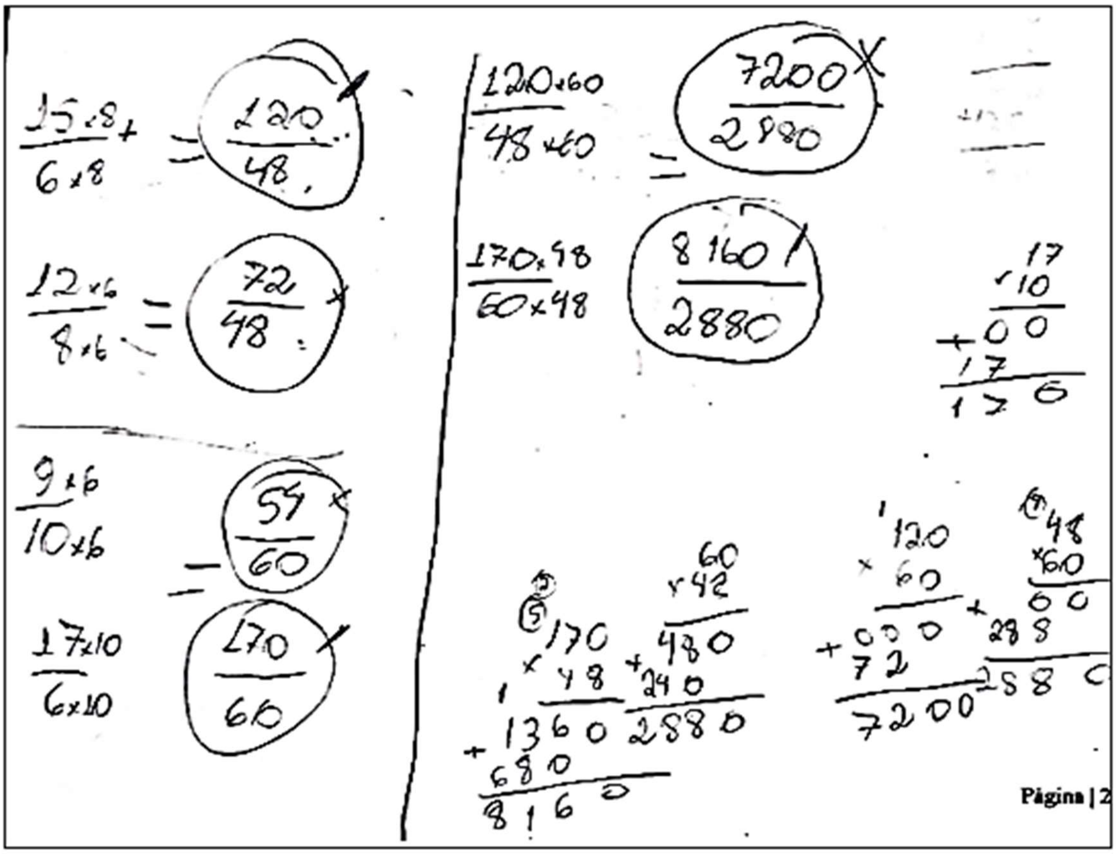
Nessa aula, tivemos como objetivo trabalhar a subtração de frações, verificar se os estudantes compreenderam o processo de equivalência de frações e relacionar esse processo para fazer essa operação. Nesse dia, compareceram 4 meninos e 13 meninas.

Como a aula anterior foi sobre a adição de frações e o procedimento para subtração é semelhante, optamos por não fazer intervenção quando os estudantes estivessem efetuando a tarefa.

Iniciei comentando a resposta dos dois estudantes da aula anterior, pois achamos interessante iniciar dessa forma, para mostrá-los o raciocínio que cada um utilizou. Além disso, mostrar que, na Matemática, podemos ir por vários caminhos para chegarmos a uma mesma conclusão.

Contextualizando, de acordo com a nossa análise da aula anterior, a maioria dos estudantes demonstrou facilidade para efetuar a operação de adição de frações, porém, no momento de fazer a comparação das frações, encontradas por eles, tiveram dificuldades, devido aos denominadores maiores. Como nosso objetivo central era verificar se os estudantes compreenderam o processo de equivalência de frações e relacionar esse processo para fazer a operação de adição de frações, informei que não precisariam se preocupar em fazer a comparação. Porém, ao analisarmos a tarefa, observamos que dois estudantes fizeram a comparação das frações conforme a seguir.

Figura 72: Resposta de uma estudante



Fonte: Acervo do autor

Conforme observamos, a estudante optou em comparar as frações $\frac{15}{6}$ e $\frac{12}{8}$. Igualou as partes e constatou que $\frac{15}{6}$ é maior. Em seguida, comparou $\frac{9}{10}$ e $\frac{17}{6}$, igualou as partes e constatou que $\frac{17}{6}$ é maior. Por fim, fez a comparação de $\frac{120}{48}$ e $\frac{170}{60}$, igualou as partes e verificou que $\frac{170}{60}$ é maior, e concluiu que Bruna ganhou a partida.

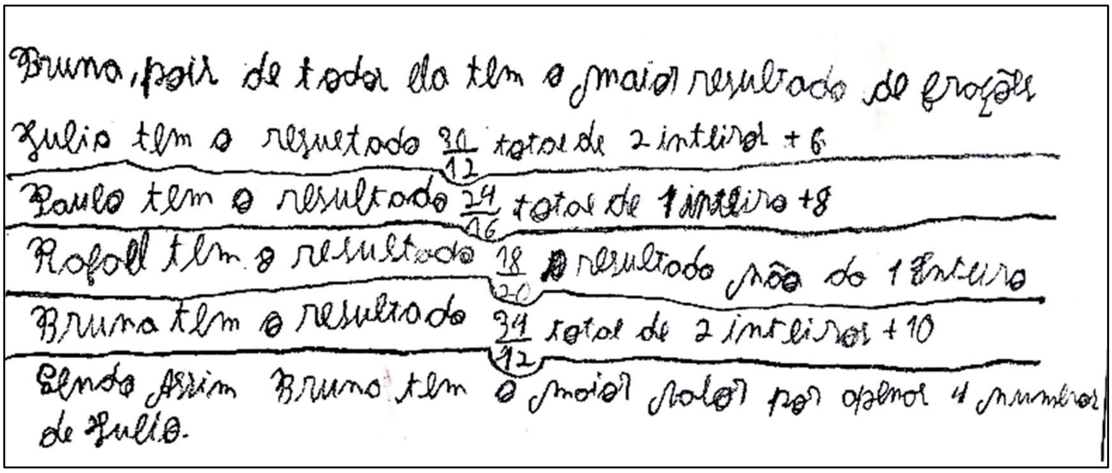
Assim, há evidências de que essa estudante compreendeu o processo de equivalência de frações e soube relacionar esse processo para fazer a comparação das frações. Porém, ao utilizar de algoritmos para justificar seu raciocínio, provavelmente, a compreensão do conceito não esteja totalmente esclarecida, pois, apesar de várias demonstrações, com o kit e as tiras de frações, é possível que o estudante memorize apenas a regra, nesse caso, multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo mesmo número para encontrar a fração equivalente, por parecer ser mais prático, não é dada a importância para o processo em si.

Nessa direção, Garcez (2013) ressalta que a memorização de regras, muitas vezes, resulta na preferência de alguns estudantes que evitam os desafios e as dificuldades inerentes ao processo de aprendizagem. “De igual modo, muitos professores, esquivando-se da árdua tarefa de mostrar o porquê, incentivam a memorização e a aplicação dos algoritmos” (Ibid., p. 27).

Posto isso, destacamos, mais uma vez, que valorizar a memorização e a aplicação de regras para a compreensão de um determinado conceito matemático, talvez, não seja a melhor opção, pelo contrário, pode ser um grande obstáculo para a aprendizagem do estudante.

Dando sequência, o estudante, a seguir, apresentou a seguinte justificativa.

Figura 73: Resposta de um estudante



Fonte: Acervo do autor

O estudante encontrou, como resultado, as frações $\frac{30}{12}$, $\frac{24}{16}$, $\frac{18}{20}$ e $\frac{34}{12}$. A estratégia utilizada por ele foi: Verificou, primeiramente, quantos inteiros cada fração tinha; a primeira, constatou que tinha 2 inteiros, mais 6 partes de 12; a segunda, um inteiro, mais 8 partes de 16; a terceira, não completa um inteiro; e a última, 2 inteiros, mais 10 partes de 12. Com isso, concluiu que $\frac{34}{12}$ é a maior fração e que Bruna ganhou a partida. A forma como o estudante efetuou sua justificativa, convence-nos de que, para ele, o conceito de frações está esclarecido. Utilizou, como estratégia, a ideia de frações mistas para verificar qual era a maior. Efetuou uma demonstração simples, de forma coerente e sem recorrer a nenhum algoritmo, demonstrando ter compreendido o processo. Porém, quando escreve, “sendo assim Bruna tem o maior valor por apenas 4 números de Júlio.”, há indicativos de que, ao fazer a comparação das partes, desprezou o todo envolvido e considerou apenas o numerador. Ainda assim, inferimos que esse estudante mostra compreender o conceito de frações.

Retomando, apresentei essas duas justificativas para os estudantes, antes de iniciar a tarefa do dia, expliquei o raciocínio de cada um e, depois, entreguei a tarefa do dia.

Figura 74: Questão 1: Tarefa 9

A professora de Júlio, Paulo, Rafael e Bruna, após ter mudado a regra do jogo “Papa Todas de Frações”, resolveu desafiar seus alunos mais uma vez, porém, utilizando outra regra.
A nova regra seria: Escolher duas cartas e subtrair a de maior valor pela a de menor valor. Quem obtivesse o maior resultado ganharia todas as cartas.
Abaixo, está a tabela com as cartas que Júlio, Paulo, Rafael e Bruna escolheram para efetuarem a subtração. Faça a subtração das duas cartas de cada jogador.

Nome	Carta 1	Carta 2	Diferença
Júlio	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{6}$	
Paulo	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{9}$	
Rafael	$\frac{7}{3}$	$\frac{3}{9}$	
Bruna	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{8}$	

Quem ganhou essa rodada?

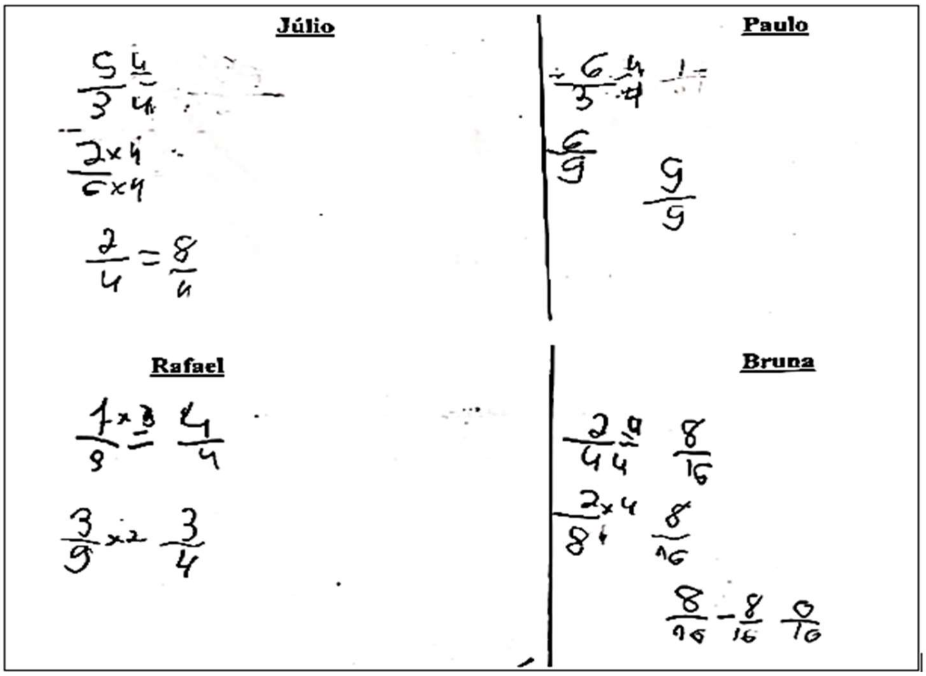
Fonte: Elaborado pelo autor, maio 2018

Como na tarefa 8, a maioria dos estudantes não demonstrou dificuldades, pois pareciam ter compreendido que, para efetuar a subtração de frações com denominadores diferentes, deveriam, primeiramente, encontrar a fração equivalente, igualando as partes, e, depois, subtrair o numerador dessa fração.

Como na aula anterior, também, não exigi que os estudantes fizessem a comparação das quatro frações encontradas por eles, pois o objetivo maior da tarefa foi verificar se houve a compreensão do processo de equivalência de frações para relacioná-lo à operação de subtração de frações.

De acordo com os registros dos estudantes, apenas um parece não ter compreendido, conforme a seguir:

Figura 75: Resposta de um estudante



Fonte: Acervo do autor

Acreditamos que esse estudante, para não deixar a questão em branco, tentou efetuar algum tipo de cálculo, porém, demonstra não compreender o que efetuou. Em alguns cálculos esforça-se para utilizar a ideia de equivalência de frações, por exemplo, quando efetua: $\frac{2\times4}{6\times4}$; $\frac{6\times4}{3\times4}$; $\frac{2\times4}{4\times4}$ e $\frac{2\times4}{8\times4}$, mas não consegue concluir o seu raciocínio. Há indicativos de que esse estudante não compreende o conceito de frações.

Por ser uma tarefa parecida com a anterior, o que mudamos foi apenas o tipo de operação, os estudantes apresentaram um bom desempenho nessa aula e cremos que nosso objetivo foi alcançado. Isto é, os estudantes demonstraram compreender o procedimento de equivalência de frações e souberam relacionar esse procedimento com a operação de subtração de frações.

6 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Iniciamos nossa pesquisa delimitando, primeiramente, o ano em que desejávamos trabalhar. Como professor do Ensino Médio, sentia-me muito incomodado quando apresentava algum exercício que envolvia frações, e percebia que a maioria dos estudantes apresentava bastante dificuldade em realizá-lo. Com isso, muitos deixavam de realizar as atividades por não sentirem-se capazes e, outros, muitas vezes, tentavam utilizar algum tipo de regras ou macetes, mas mostravam não compreender o que estavam fazendo.

O incômodo maior era observar que os estudantes do Ensino Médio não sabiam resolver uma operação de adição e subtração de frações, conhecimento considerado básico por nós, professores, nessa etapa do ensino. No entanto, compreendemos que o conceito de frações não é tão simples de ser abstraído e compreendido pelos estudantes, pois exige algumas rupturas com o conjunto dos números naturais e inteiros. Como exemplo, podemos citar a situação de quanto maior o denominador, menores serão as partes, e o número fracionário torna-se menor. Além disso, relacionar esse conteúdo com a realidade dos estudantes, também, não é tarefa simples.

Assim, decidimos abordar o assunto no Ensino Fundamental II e trabalhar com turmas do 7º ano, por acreditarmos que, sendo esse conteúdo abordado nos 5º e 6º anos, eles já estariam aptos a participar da pesquisa, com certo conhecimento e, assim, favorecer-nos avaliar o que, e como eles compreendiam o assunto.

Nosso propósito foi pensar o problema de aprendizagem, apresentado nesta pesquisa, por meio da ideia de equivalência de frações. Convencidos de que se os estudantes compreendessem o procedimento de equivalência de frações, demonstrariam maior destreza quando realizassem as operações de adição e subtração, delimitamos nosso tema em "**o ensino de equivalência de frações para compreensão das operações de adição e subtração**". Para tanto, consideramos, não só a importância do conteúdo em toda a Matemática escolar, como a experiência negativa que muitos estudantes têm sobre o assunto. Além disso, apostamos na utilização de materiais didáticos manipuláveis para esse ensino.

Com isso, tivemos como objetivo geral investigar como a ideia de equivalência de frações, com o apoio de materiais manipuláveis, pode contribuir para a compreensão das operações de adição e subtração em estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II. E como objetivos específicos, procuramos:

- Investigar a compreensão dos estudantes sobre o conceito, a relação parte-todo e as representações pictóricas e imagéticas das frações;
- Investigar os modos pelos quais os estudantes compreendem o processo de equivalência de frações e sua relação com as operações de adição e subtração envolvendo esse tipo de número e;
- Verificar as limitações e possiblidades da utilização de materiais didáticos (kit de frações e tiras) no processo de aprendizagem de frações e suas operações de adição e subtração.

Desde então, pesquisamos sobre o tema e por trabalhos que discutissem sobre o assunto e que contribuíssem para a reflexão dos nossos questionamentos: Ao ensinar equivalência de frações com materiais manipulativos, para a compreensão das operações de adição e subtração de fração, o professor terá um retorno mais positivo por parte dos estudantes? Com base no procedimento equivalência de frações, os estudantes compreenderão melhor as propriedades de adição e subtração de frações? Qual a contribuição do material manipulativo para a aprendizagem do conceito de frações?

Na busca por respostas aos nossos questionamentos e com a intenção de atingirmos os objetivos desta pesquisa, elaboramos nove tarefas que tratavam dos seguintes assuntos: equivalência, comparação, adição e subtração de frações.

Na primeira tarefa, ficaram evidentes as dificuldades dos estudantes sobre os conteúdos selecionados. Demonstraram não compreender o que representa o numerador e o denominador das frações; trataram o numerador e o denominador das frações como se fossem dois números isolados separados por um traço; apresentaram dificuldades com o significado parte-todo; tiveram dificuldades na hora de comparar, somar e subtrair frações com denominadores diferentes e identificar uma fração equivalente.

Acreditamos que a ampliação de conceitos dos Números Naturais para as frações seja uma das dificuldades iniciais no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, percebemos que muitos estudantes já conseguem compreender essa ruptura, mas ainda não conseguiram êxito quando precisam utilizar o aprendizado já adquirido, em relação aos conceitos fracionários, ao se depararem com exercícios de aplicação do conteúdo.

Foi importante a aplicação dessa tarefa porque tivemos a oportunidade de conhecer e ter noção da visão dos estudantes sobre o conteúdo fração. Com base nessa tarefa, foi possível efetuar a aplicação das outras, aproveitando os conhecimentos prévios desses estudantes.

Para a segunda tarefa, elaboramos questões a fim de que os estudantes explorassem o kit de frações no quadriculado e introduzir a ideia de comparação e equivalência de frações. O kit de frações foi uma novidade que, de acordo com nossa percepção, despertou a curiosidade e o interesse da maioria.

Com relação à utilização do kit de frações no quadriculado, entendemos que todo o material manipulável tem suas fragilidades e limitações, e não é o material, em si, que promoverá o aprendizado para o estudante, pois depende muito da forma como o professor conduz a tarefa. Nesse sentido, concordamos com Vale e Barbosa (2015), quando ressaltam que é de suma importância o professor ter conhecimento sobre o potencial – fragilidades e limitações – do material manipulável antes de propor sua utilização na sala de aula. Pois, dessa forma, é possível "desenvolver tarefas matematicamente ricas e desafiantes para a sua utilização, de acordo com os objetivos pretendidos" (ibid., p. 7- 8).

Assim, acreditamos que, da forma como conduzimos a nossa tarefa, os estudantes tiveram a oportunidade de pensar, argumentar, criar hipóteses e fazer generalizações. Além disso, cremos que os estudantes só aprendem a pensar, por si próprios, se tiverem a oportunidade de explicar e expor suas ideias em sala de aula, ao professor e aos seus pares. E esse foi o nosso intuito, ou seja, não apresentar respostas prontas para os estudantes, mas propiciar que se comunicassem com os seus pares, confrontando com opiniões diferentes da sua e posicionando-se para perceber o que não entendeu. Dessa forma, procuramos criar um ambiente no qual pudessem refletir e, possivelmente, aprender por meio dos experimentos efetuados com o kit de frações no quadriculado.

Vale destacar, que o material é um bom modelo para o estudante fazer a associação quando trabalhamos com o conjunto contínuo, porque é possível transferir para o material uma relação com as frações concretas, ou seja, ele permite visualizar, imaginar, conectar situações que estão relacionadas a esse conjunto. Porém, com o contexto discreto é necessário um salto maior. O estudante até pode utilizar o material para comparar frações para saber qual é a maior, como na questão 3 da tarefa 1, mas acreditamos que o contexto do conjunto discreto não fica claro, isto é, existem limitações.

Na terceira tarefa, trabalhamos com a ideia de comparação de frações e, com base nela, percebemos que os estudantes estavam mais envolvidos, pois habituavam-se com o pesquisador e com o método de questionamentos frequentes. Houve algumas dúvidas, no início, com relação à comparação de frações, mas a forma como conduzimos a tarefa nos pareceu adequada.

Com relação à comparação de frações, apesar de já termos discutido nas aulas anteriores, percebemos que, em algumas situações, os estudantes apresentaram dificuldades, o que nos convence de que essas dificuldades estão na incompreensão de alguns conceitos básicos de frações, como compreender que: A fração é um número; uma fração não são dois números naturais divididos por um traço; uma fração é a representação de uma ou mais partes de algo que foi dividido em partes iguais e entre outros.

Ressaltamos que, para comparar frações, o conceito de equivalência de frações precisa estar esclarecido para o estudante, pois consideramos que compreender equivalência de frações, em alguns casos, é o caminho para a resolução de alguns problemas. Nesse sentido, não é interessante trabalhar com regras ou macetes para tentar "facilitar" o entendimento dos estudantes, visto que uma abordagem dessa forma pode prejudicar a compreensão do conceito. Para isso, sugerimos a utilização de materiais manipuláveis, pois, com base na visualização e experimentação, o estudante tem a oportunidade de refletir, organizar suas ideias, testar suas hipóteses e fazer algumas generalizações.

Na quarta e quinta tarefas, procuramos reforçar a ideia de equivalência de frações, uma vez que nosso objetivo futuro era verificar se os estudantes saberiam relacionar o procedimento equivalência de frações para fazer as operações de adição e subtração de frações.

Foi possível observar que grande parte dos estudantes demonstrou compreender o procedimento de equivalência de frações. Observamos, também, que, apesar de algumas dificuldades apresentadas pelos estudantes, houve uma participação considerável e significativas vantagens na utilização dos materiais manipuláveis, o que contribuiu para a aquisição de conceitos matemáticos, muitos deles em processo de revisão e compreendidos somente nessas aulas.

Houve momentos nessas tarefas em que o objetivo era verificar se os estudantes seriam capazes de resolver algumas questões sem a utilização do material manipulável. Acreditamos que, quando os estudantes dispensam o material e trabalham de forma mais abstrata, há um salto para a aprendizagem.

De acordo com a nossa análise, foi possível constatar que a maioria dos estudantes foi capaz de resolver as questões. No entanto, vale ressaltar que, cada estudante, de acordo com o seu ritmo de aprendizagem, é que perceberá o momento oportuno para abandonar os materiais e começar a trabalhar de uma maneira mais abstrata: um dos objetivos do ensino de matemática.

Os estudantes demonstraram mais segurança em relação ao conteúdo, comparação e equivalência de frações, e mais familiarizados com o kit e as tiras de frações. Com a utilização desses materiais, percebemos que os estudantes tiveram uma visão mais positiva de frações e, com base nas manipulações, experimentos e descobertas, realizadas por meio do material, ficavam mais atentos e conscientes das suas próprias capacidades e conhecimentos.

Intentando mostrar aos estudantes que podemos aprender frações de uma maneira menos teórica, trabalhamos na sexta tarefa com o jogo “Papa Todas de Frações”. Nosso objetivo foi reforçar os conteúdos comparação e equivalência de frações. Como efetuamos várias discussões, nas tarefas anteriores, sobre esse conteúdo, percebemos que os estudantes demonstraram segurança quando realizaram as comparações das frações. Foi notória a participação de todos e, apesar das dificuldades iniciais, demonstraram muito interesse na busca pelo conhecimento. Além disso, com o jogo, tiveram a oportunidade de criar estratégias, fazer reflexões, criar suposições, tomar decisões, argumentar e organizar ideias. São situações que, de acordo com Smole (2016), estão, estreitamente, relacionadas ao, assim chamado, raciocínio lógico, que possibilita conduzir os estudantes ao aprendizado.

Para a sétima tarefa, buscamos questões que pudessem fazer a exploração do jogo “Papa Todas de Frações” e, também, verificar se os estudantes compreenderam a proposta do jogo e o conteúdo comparação e equivalência de frações.

Assim, podemos afirmar que, com relação ao conteúdo comparação e equivalência de frações, os estudantes nos deram um retorno bastante positivo, pois mostraram-se seguros ao expor e apresentar suas ideias. Com isso, podemos dizer que a maioria foi capaz de compreender o assunto trabalhado.

Percebemos que, ao propor o uso de materiais manipuláveis e o jogo, conseguimos despertar, nos estudantes, a curiosidade e o interesse em aprender, pois, a cada aula com a turma, era perceptível a participação, o interesse, a vontade de aprender e entender o que faziam. Com isso, inferimos que, disponibilizar diferentes recursos para a sala de aula, possibilita despertar o interesse dos estudantes na busca pelo conhecimento.

Com a oitava e nona tarefa, trabalhamos com as operações de adição e subtração de frações. Elaboramos essas tarefas com base no jogo “Papa Todas as Frações” e, também, com o intuito de investigar se os estudantes saberiam relacionar o processo de equivalência de frações para efetuar as operações de adição e subtração de frações. De acordo com nossa análise, constatamos que os estudantes apresentaram um bom desempenho. Isto é, foi possível notar que a maioria compreendeu o processo de equivalência de frações e, também, relacionar esse processo com as operações de adição e subtração. Assim, constatamos a importância de se trabalhar bem o conceito de equivalência de frações, pois ele reflete nessas operações.

Fazendo um comparativo da primeira até a última tarefa, percebemos que houve um amadurecimento considerável por parte dos estudantes em relação às ideias apresentadas, e notamos que a maioria demonstrou compreender o assunto abordado.

Neste trabalho, também, foi possível constatar que o material manipulável utilizado – kit de frações no quadriculado e tiras de frações – ajudou a maioria dos estudantes a compreender e se apropriar dos conceitos matemáticos desenvolvidos. Gradativamente, conseguiram estabelecer uma relação entre as peças e as tarefas propostas, o que os levou a abstrair as operações de adição e subtração de frações. Para a ocorrência da construção desse conhecimento, foi necessário fazer as devidas intervenções e criar questionamentos pertinentes que estimulassem a curiosidade dos estudantes, a fim de que eles formulassem hipóteses e conclusões a respeito do conceito trabalhado.

Utilizar o kit e as tiras de frações para o ensino e a aprendizagem proporcionou, aos estudantes, uma compreensão melhor sobre o assunto abordado com base na visualização do conceito e algumas aplicações que, muitas vezes, os estudantes só veem na teoria. No entanto, reforçamos mais uma vez que todo material manipulável tem suas limitações. Houve situações, por exemplo, que os estudantes concluíram que se multiplicarmos o numerador e o denominador de uma fração encontramos frações equivalentes e para comprovar utilizaram o material. Porém, inferimos que utilizando apenas o material, não é possível afirmar que ao fazer esse procedimento vai funcionar para todas as frações, ou seja, é outra limitação. Para o estudante entender, realmente esse processo, será necessário o raciocínio algébrico. Com o material é possível visualizar, mas não provar que funciona para todas as frações.

Para as tarefas 8 e 9, sugerimos que seja aplicado o jogo "Papa Todas de frações", efetuando a modificação das regras, como fizemos no enunciado da questão. Assim, os estudantes terão mais oportunidade de interagir e dialogar entre seus pares, incitando-os a pensar, tirar conclusões e encontrar resultados que possam ser debatidos antes de um parecer final. Além disso, a tarefa será mais desafiadora e possibilitará conduzir o estudante a uma melhor compreensão sobre o assunto.

Vale destacar que, para esta pesquisa, trabalhamos com um grupo reduzido de estudantes e num ambiente mais favorável do que a sala de aula. Consideramos que esse fator foi um diferencial para a nossa pesquisa, pois possibilitou uma interação melhor entre aluno/aluno e pesquisador/aluno.

Finalizamos este estudo ressaltando a compreensão da necessidade de se unir saberes acadêmicos com a prática docente. Entendemos que nós, professores, precisamos refletir sobre a nossa prática, muitas das vezes adiada em função da concorrência de tempo com as rotinas do dia a dia. Durante o mestrado foi possível fazer essas reflexões através das trocas de experiências com os meus pares e professores do programa. Concluo o Mestrado com maior maturidade profissional e acadêmica, adquirida a partir da convivência com professores do programa, colegas de trabalho e de mestrado, além, é claro, dos estudantes e das diversas leituras que precisei fazer para escrever esta dissertação.

Como forma de se materializar o entusiasmo decorrente das experiências vividas, assim como compartilhar o conhecimento adquirido ao longo da pesquisa, apresentamos o nosso Recurso Educativo (Apêndice I) que contém a sequência didática trabalhada com os estudantes, com algumas dicas e sugestões que acreditamos contribuir para o trabalho do professor. Junto a ela, apresentamos o kit de frações no quadriculado e o passo a passo para a sua construção.

Com o intuito de termos colaborado para a construção do conhecimento, em relação a um conteúdo tão complexo como o das frações, esperamos que a metodologia utilizada nesta pesquisa, assim como o recurso educativo, possa ser um instrumento que colabore para a prática docente.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Aparecida de; REZENDE, Veridiana. **Os cinco significados de fração e o software JCLIC**: relato de uma proposta com alunos de 6º ano. In: XII EPREM - Encontro Paranaense de Educação Matemática, 12 p. Campo Mourão, 2014.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática:** soluções para dez desafios do professor: 4.º e 5.º ano do Ensino Fundamental. 1.ª ed. São Paulo: Ática, 2014. p. 38 – 47.

BORDIN, Laura Moreira. **Os materiais manipuláveis e os jogos pedagógicos como facilitadores do processo de ensino e aprendizagem das operações com números inteiros**. 2011. 102 p. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática), Centro Universitário Franciscano, Rio Grande do Sul: Santa Maria, 2011. Disponível em: <http://tede.universidadefranciscana.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/375>. Acesso em: 24 set. 2018.

BRASIL. MEC/ SEF. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 20 abr. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta preliminar. Brasília: MEC, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: abr. 2019.

CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; RODRIGUES, Wilson Roberto. A idéia de unidade na construção do conceito do número racional. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Universidade Federal de Santa Cataria, UFSC/MTM/PPGECT, Florianópolis, SC, v2. 4, p. 68-93, 2007. Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12992/www.ufsc.br>. Acesso em: 23 maio, 2018.

CRESWEL, John. W. **Projeto de pesquisa:** método qualitativo, quantitativo e misto. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007. 248 p.

DAVID, Maria Manuela Martins Soares; FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis. **Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária**. Belo Horizonte, Presença Pedagógica, v.3, n.14, mar/abr. 1997. p. 60 – 71.

GARCEZ, Wagner Rohr. **Tópicos sobre o ensino de frações**: Equivalência. [dissertação] Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/wagner_rohr_garcez.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2018.

JESUS, Amanda Botega Masson de. **Uma proposta de ensino de frações voltada para a construção do conhecimento.** 2013. 71 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Lavras, Lavras-MG, 2013. Disponível em: <http://repositorio.ufla.br/jspui/handle/1/4097>. Acesso em: 23 abr. 2018.

LIMA, Rafael Pontes. **O ensino e a aprendizagem significativa das operações com frações:** Sequência didática e o uso de tecnologias digitais para alunos do Ensino Fundamental II / Rafael Pontes Lima; Orientador Pedro Franco de Sá. ___ Belém: [s.n.], 2014. 232f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2014.

LOPES, Antônio José. O que os nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**, Rio Claro, ano 21, n.31, p. 1-22, 2008.

LORENZATO, Sérgio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. *In*: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

LOYOLA, Sandro da Costa. **Tópicos sobre o ensino de frações:** Unidade. [dissertação] Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=49559>. Acesso em: 23 maio 2018.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Elisa Dalmazo Afonso de. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986. 128 p.

MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia. A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. **Bolema,** Rio Claro: IGCE–Unesp (SP), Ano 21, n. 31, p. 23-40, 2008.

MARANHÃO, Maria Cristina Souza de Albuquerque; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. Registro de representação e os números racionais. *In*: MACHADO, S. D A. (org.) **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Ed. Papirus, p. 57 – 70. Campinas, SP, 2003.

MATOS, José Manuel; SERRAZINA, Maria de Lurdes. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996, 304p.

MERLINI, Vera Lucia. **O conceito de fração em seus diferentes significados:** um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MONTEIRO, Alexandre Branco. **Estudos de recuperação do conteúdo de frações com o uso de tecnologias da informação e comunicação**. 218 p. Dissertação (Pós-Graduação), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2013.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti.; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **A Formação Matemática do Professor:** licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 116 p.

NACARATO, Adair Mendes. Eu Trabalho primeiro no concreto. Revista de Educação Matemática. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM)**. Ano 9, n.9-10, (2004- 2005), p.1-6.

NUNES, Teresinha; BRYANT, Peter. **Criança fazendo matemática.** Porto Alegre; Artes Médicas, 1997. 244 p.

NUNES, Terezinha. Criança pode aprender frações. E gosta! In: GROSSI, Ester Pilar (org.). **Por que ainda há quem não aprende**? A teoria. Petrópolis, RJ: Vozes, 2003. 204 p.

NUNES, Terezinha.; BRYANT, Peter; Pretzlik, U.; Hurry, J. (2003). **The effect of situations on children's understanding of fractions**. Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford, june.

PATRONO, Rosângela Milagres.; FERREIRA, Ana Cristina. **Uma proposta para o ensino de frações no 6º ano do Ensino Fundamental.** Produto Educacional desenvolvido a partir da pesquisa realizada no Mestrado Profissional em Educação Matemática. Ouro Preto, MG. 2011.

PELISSARO, Simone. **Ensino de frações: novas abordagens.** Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de título de Especialista em Matemática, Mídias Digitais e Didática. Vila Flores, RS. 2011.

QUARESMA, Marisa; PONTE, João Pedro da. Compreensão dos números racionais, comparação e ordenação: O caso de Leonor. **Interacções**. Lisboa. vol. 8 n. 20 (2012): Desafios no Ensino e na Aprendizagem da Matemática. p. 37-69. 2012.

SANTOS, Maria José Batista de Souza. **O ensino e a aprendizagem de frações utilizando materiais manipuláveis concretos.** 2014. 45 p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

SARMENTO, Alan Kardec Carvalho. **A Utilização dos Materiais Manipulativos nas Aulas de Matemática**. VI Encontro de Pesquisa em Educação da UFPI. Teresina, PI, p. 1-12, 2010.

SCOLARO, Maria Angela. **O uso dos Materiais Didáticos Manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática.** 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1666-8.pdf>. Acesso em: 27 ago. 2019.

SILVA, Maria José de Castro; SCARPA, Rosilene Cristina. **O ensino da matemática e a utilização de materiais concretos para a sua aprendizagem**. 2007. Disponível em: <https://repositorio.pgsskroton.com.br/bitstream/123456789/1314/1/Artigo%2033.pdf>. Acesso em: 27 ago. 2019.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco. **A Matemática na Educação Infantil. A teoria das inteligências múltiplas na prática escolar.** Porto Alegre, Editora Artes Médicas: 1996. 206 p.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; CÂNDIDO, Patrícia. **Jogos de Matemática de 1º a 5º ano**. Porto Alegre, Série Cadernos do Mathema - Ensino Fundamental, Artmed, 2007. 144 p.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Materiais manipulativos para o ensino de frações e números decimais**. Coleção Mathemoteca; v. 3. Porto Alegre: Penso, 2016. 160 p.

SOARES, João Paulo Vasconcelos; SILVA, Paulo Vilhena da. **Discos de frações**: Um material manipulativo para o ensino de frações na educação básica. VII Encontro Nacional das Licenciaturas, ENALIC. Fortaleza, CE. 2018. Disponível em: <http://uece.br/eventos/enalic/>. Acesso em: 28 ago. 2019.

SOUZA, Giselle Costa de; OLIVEIRA, José Damião Souza de. **O uso de materiais manipuláveis e jogos no ensino de Matemática**. 2010. Disponível em: <http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T11_CC468.pdf>. Acesso em: 26 ago. 2019.

VALE, Isabel; BARBOSA, Ana. **Materiais manipuláveis para aprender e ensinar geometria.** Boletim Gepem: Rio de Janeiro, ano XXXVI, n. 65, p. 3-16, 2014.

APÊNDICE

Apêndice A – tarefa 1

Tema: Conhecimentos prévios

Tempo estimado: 1h40min

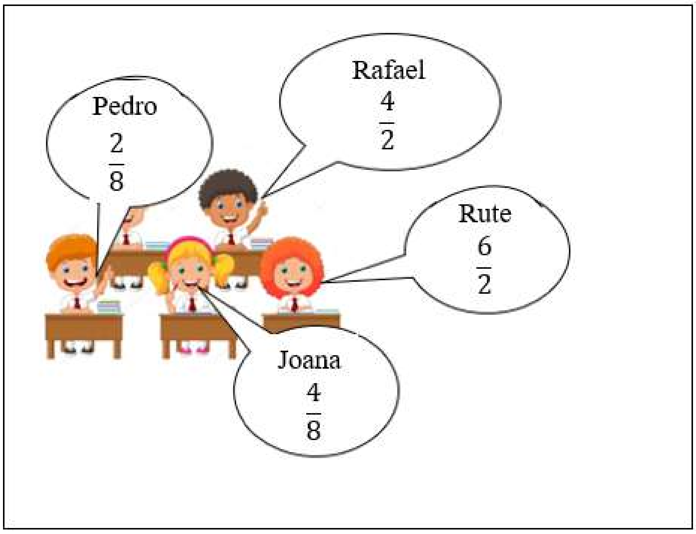
Objetivo: verificar qual o entendimento e a percepção que os estudantes tinham sobre o conceito e as operações de adição e subtração de frações

Metodologia: Entregar, aos estudantes, um questionário com 7 questões: 3 objetivas e 4 discursivas, com o objetivo de analisar o nível de conhecimento dos estudantes sobre frações equivalentes, representação fracionária com base em um dado problema, comparação de frações com denominadores iguais e diferentes e, por fim, soma e subtração de frações com denominadores iguais e diferentes. Não será realizada nenhuma intervenção da tarefa no momento da aplicação. Permitir que os estudantes discutam entre eles, e observar cada uma das discussões. Caso algum estudante faça perguntas, sempre fazer questionamentos do que ele perguntou.

Questões

1) A professora Ana Paula escreveu, no quadro, uma fração, conforme a ilustração abaixo.

Em seguida, pediu que Rafael, Joana, Rute e Pedro falassem uma fração que fosse equivalente à fração escrita por ela no quadro.

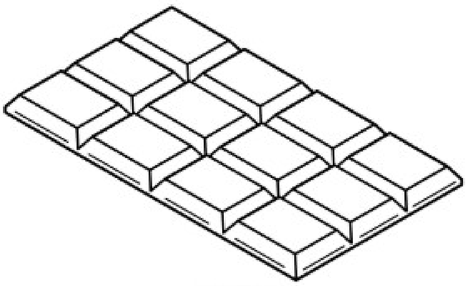


Marque com um "X" qual dos alunos respondeu corretamente:

a) Joana   b) Pedro   c) Rafael   d) Rute

Justifique sua resposta.

2) Luiz ganhou uma barra de chocolate da sua mãe, conforme a figura a seguir.



No mesmo dia, comeu três "quadradinhos" dessa barra. No dia seguinte, comeu mais cinco "quadradinhos" da mesma barra.

a) Qual a representação fracionária do número de quadradinhos que Luiz comeu no primeiro dia?
b) Qual a representação fracionária do número de quadradinhos que Luiz comeu no segundo dia?
c) Que fração representa o total de "quadradinhos" que Luiz comeu?

3) Na sala de Pedro, haverá eleição para representante da turma. Do total de alunos, $\frac{2}{5}$ vão votar em Aline, $\frac{2}{10}$ vão votar em Ramon, e o restante da turma está indeciso.

a) Se do total de alunos, $\frac{2}{5}$ vão votar em Aline e $\frac{2}{10}$ vão votar em Ramon, quem está ganhando a eleição até o momento? Justifique como chegou a sua conclusão.

b) Qual a fração que representa o total de alunos que já decidiram seu voto?

4) Guilherme tem que praticar piano durante $\frac{3}{4}$ de hora todos os dias. Hoje, já praticou $\frac{1}{4}$ de hora. Que fração de uma hora ele ainda tem que praticar?

5) Elisângela precisa fazer um bolo para a festa de aniversário de sua filha Ana Clara. Na receita, dizia que ela precisaria de $\frac{3}{4}$ de xícara de leite. Porém, ao pegar o leite na geladeira, percebeu que tinha apenas $\frac{1}{2}$ de xícara de leite. Que fração de xícara de leite falta para Elisângela fazer esse bolo? Explique qual foi sua estratégia para resolver esse problema.

6) O professor Avani escreveu a expressão $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ no quadro e pediu que seus alunos resolvessem. Quem terminasse de resolver primeiro ganharia um chocolate. Arthur resolveu a questão, corretamente, com menos de dois minutos. Qual foi o resultado encontrado por Arthur?

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{2}{6}$

d) $\frac{1}{5}$

Justifique sua resposta.

7) Qual das alternativas abaixo representa o resultado da expressão $\frac{2}{5} - \frac{1}{10}$?

a) $\frac{3}{10}$

b) $\frac{9}{10}$

c) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{9}{5}$

Justifique sua resposta.

Apêndice B – Tarefa 2

Tema: Manipulação do kit de frações no quadriculado

Tempo estimado: 1h40min

Objetivo: Reconhecer as peças do kit de frações no quadriculado; observar qual a percepção dos alunos sobre comparação de frações com base no material manipulativo e mostrar que uma fração pode ser representada de várias formas.

Metodologia: Entregar, para cada dupla de alunos, um kit de fração no quadriculado. O primeiro contato dos estudantes com o material tem, por finalidade, deixá-los "mais à vontade" durante uns 5 a 10 minutos, pois farão o reconhecimento das peças. Após o reconhecimento do material, efetuar alguns questionamentos, tais como: Se vocês estiverem com uma peça que representa $\frac{1}{2}$, é possível trocá-la por outra peça? (lembrando que, para a troca, as peças precisam sobrepor à peça de $\frac{1}{2}$). Se é possível fazer a troca, as peças trocadas são todas da mesma cor? Qual a fração que as peças trocadas representam? Poderia ser outro tipo de peça? Se sim, qual a fração que essa peça representa? O que podemos concluir a respeito da peça de $\frac{1}{2}$ com as outras que foram trocadas?

Em seguida, entregar, para os estudantes, a tarefa.

Questões

1) Complete a tabela abaixo com a representação fracionária de **cada uma das peças** do kit de frações no quadriculado.

Tabela para registro	
Peças	**Representação fracionária em relação à peça azul**
Uma peça azul	**Um inteiro = 1**
Uma peça verde	
Uma peça rosa	
Uma peça laranja	
Uma peça vermelha	
Uma peça roxa	
Uma peça amarela	
Uma peça cinza	

Fonte: Elaborado pelo autor. jan. 2019

2) Complete as tabelas abaixo de acordo com cada uma das informações.

✓ **Uma peça verde é possível ser trocada por qual outra peça? Analise as possibilidades, lembrando-se de que é necessário sobrepor uma peça à outra para fazer a troca.**

Peças	Azul	Rosa	Laranja	Vermelho	Roxo	Amarelo	Cinza
Quantidade necessária para troca							
Representação fracionária do total de peças trocadas							

Fonte: Elaborado pelo autor. jan. 2019

✓ **Uma peça rosa é possível ser trocada por qual outra peça? Analise as possibilidades, lembrando-se de que é necessário sobrepor uma peça à outra para fazer a troca.**

Peças	Azul	Verde	Laranja	Vermelho	Roxo	Amarelo	Cinza
Quantidade necessária para troca							
Representação fracionária do total de peças trocadas							

Fonte: Elaborado pelo autor, janeiro de 2019

✓ **Uma peça vermelha é possível ser trocada por qual outra peça? Analise as possibilidades, lembrando-se de que é necessário sobrepor uma peça à outra para fazer a troca.**

Peças	Azul	Verde	Rosa	Laranja	Roxo	Amarelo	Cinza
Quantidade necessária para troca							
Representação fracionária do total de peças trocadas							

Fonte: Elaborado pelo autor. jan. 2019

3) Como observamos, podemos escolher uma peça e efetuar sua troca por outras peças, desde que uma sobreponha a outra. Por que podemos fazer esse tipo de troca? Explique.

Apêndice C – Tarefa 3

<u>Tema</u>: Comparação de frações

<u>Tempo estimado</u>: 50 minutos

<u>Objetivo</u>: Comparar frações com denominadores iguais e diferentes com base e um dado problema.

<u>Metodologia</u>: Entregar, para cada dupla de estudantes, o kit de frações no quadriculado e as tiras de frações. No primeiro momento, solicitar que os estudantes resolvam a primeira questão e, em seguida, elaborar questionamentos para chegar à conclusão do problema. Fazer o mesmo com as outras questões. Ou, se preferir, deixar os estudantes resolverem todas as questões e, em seguida, efetuar uma discussão em conjunto.

Questões

Para resolver as atividades a seguir, utilize o kit de frações no quadriculado ou as tiras de frações, caso julgue necessário.

1) Juliana e Rebeca ganharam um armário de sua mãe para guardar material escolar. O armário tem duas portas de mesmo tamanho, conforme a figura abaixo.

O espaço que ficou para Juliana estava dividido em 4 partes iguais, e ela poderia utilizar **apenas** duas dessas partes. Rebeca ficou com o outro espaço que estava dividido em 3 partes iguais, e, também, poderia utilizar **somente** duas dessas partes. Quem ficou com o menor espaço? Explique como você chegou a essa conclusão.

2) Frederico e Gustavo ganharam, de seus pais, um kit de frações no quadriculado e estavam brincando de fazer comparação de frações. Em um primeiro momento, Frederico disse:

− A representação fracionária das peças que peguei é $\frac{3}{8}$.

Gustavo pegou suas peças e disse:

−A representação fracionária das minhas peças é $\frac{5}{8}$.

Qual das duas frações é maior? Justifique seu raciocínio.

3) Se a representação fracionária das peças de Frederico fosse $\frac{1}{4}$ e a de Gustavo fosse $\frac{1}{8}$, qual teria uma representação fracionária maior? Como você chegou a essa conclusão? Explique.

Apêndice D – Tarefa 4

Tema: Equivalência de frações

Tempo estimado: 1h40 min

Objetivo: Compreender e explorar o conceito de equivalência de frações

Metodologia: Entregar, para cada dupla de estudantes, o kit de frações no quadriculado e as tiras de frações. Em seguida, entregar a atividade para os estudantes e resolver a questão número um junto com eles. Na discussão, favorecer os estudantes concluírem que se uma peça sobrepõe a outra, ela representa a mesma parte do todo. Com isso, concluir, com os estudantes, que uma fração pode ser escrita de várias formas e que essas frações são denominadas de frações equivalentes. Em seguida, convidá-los a efetuarem as outras questões e, depois, discutirem em conjunto.

Questões

1) Vamos fazer algumas trocas? Registre cada um dos fatos abaixo:

Obs.: *Pode haver mais de uma maneira de recobrir a peça solicitada. Portanto, escreva todas as formas possíveis que vocês conseguirem encontrar.*

- Pegue 1 peça rosa. De quantas maneiras, usando uma só cor, podemos recobrir essa peça?

Escreva a representação fracionária de cada uma das trocas efetuada por você.

- Pegue 1 peça laranja. De quantas maneiras, usando uma só cor, podemos recobrir essa peça?

Escreva a representação fracionária de cada uma das trocas efetuada por você.

2) Vimos que o nosso kit de frações no quadriculado tem limitações, ou seja, não contém todas as representações fracionárias possíveis. Como você faria para representar $\frac{1}{5}$ de formas diferentes? Faça a representação de, pelo menos, três formas diferentes.

3) Gustavo e Frederico estavam brincando de fazer comparações de frações com o kit de frações no quadriculado que ganharam de seus pais. No decorrer da brincadeira, Gustavo perguntou a Frederico:

Frederico ficou na dúvida e não soube responder a Gustavo.

Como você faria para ajudar Gustavo e Frederico a identificarem qual das duas frações é maior?

Apêndice E – Tarefa 5

Tema: Equivalência de frações
Tempo estimado: 50 minutos

Objetivo: Compreender e explorar o conceito de equivalência de frações

Metodologia: Entregar, para cada dupla de estudantes, o kit de frações no quadriculado e as tiras de frações. Em seguida, entregar a tarefa e permitir que discutam entre eles para concluírem. Nesse momento, o professor deve mediar as discussões dos estudantes. Após todos resolverem as questões, estabelecer a discussão em conjunto e uma síntese de cada uma das questões.

Questões

1) Vimos que é possível representar uma fração de várias formas diferentes. Utilizando o kit de frações no quadriculado, faça, pelo menos, cinco representações diferentes de $\frac{1}{2}$.

2) Veja esse meme retirado da internet que apresenta uma possível dieta:

[15]Fonte: imagem da internet

a) Vamos considerar que essas pizzas têm todas o mesmo tamanho. Ao deixar de comer seis fatias de pizza e comer somente três fatias, conforme mostra a figura acima, essa pessoa comerá menos pizza do que antes? Explique o que pensou.
b) Represente as duas pizzas inteiras na forma de fração.
c) Suponhamos que essa pessoa coma duas fatias da pizza que está dividida em 6 pedaços. Represente a fração correspondente da pizza que essa pessoa comeu.
d) Se essa mesma pessoa comer apenas uma fatia da pizza que foi dividida em 3 pedaços, que fração de pizza ela comeu?
e) A que conclusão podemos chegar a respeito das frações representadas nas letras “c” e “d”? Justifique sua resposta.

3) João e Elisabete estavam jogando um jogo de videogame. Para vencer o jogo, era necessário tentar capturar todo o tesouro disponível. João conseguiu capturar $\frac{1}{3}$ do tesouro, e Elisabete, $\frac{5}{9}$ do tesouro.

a) Quem capturou mais tesouro até o momento?
b) Juntos, que fração do tesouro João e Elisabete capturaram?

[15] Imagem retirada do site: Disponível em: <https://pt.dopl3r.com/memes/engra%C3%A7ado/comecei-minha-dieta-antes-comia-6-pedacos-de-pizza-agora-como-so-3-dilminha/420880>. Acesso em 23 nov. 2018.

Apêndice F – tarefa 8

Tema: Adição de frações

Tempo estimado: 50 minutos

Objetivo: Somar frações com diferentes denominadores

Metodologia: Entregar, para cada dupla de estudantes, o kit de frações no quadriculado e as tiras de frações, caso necessitem de utilizá-los para efetuar as operações. Em seguida, entregar a tarefa para cada estudante e propor que resolvam sem a intervenção do professor, porém, sugerir que façam a discussão entre eles. Neste momento, o professor deve ser o mediador das discussões. Após todos resolverem a tarefa, discutir em conjunto.

Questão

1. A professora de Júlio, Paulo, Rafael e Bruna propôs uma pequena mudança na regra do jogo "Papa Todas de Frações".

Ela distribuiu quatro cartas para cada um deles e, com as cartas viradas sobre a mesa, solicitou que escolhessem duas cartas. Após a escolha, pediu que somassem as duas cartas e dissessem o resultado. Quem obtivesse o maior resultado ficaria com todas as cartas. Abaixo, está a tabela com as cartas que Júlio, Paulo, Rafael e Bruna escolheram para efetuarem a soma.
Faça a soma das duas cartas de cada jogador.

Nome	Carta 1	Carta 2	Soma
Júlio	$\frac{6}{3}$	$\frac{3}{6}$	
Paulo	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{8}$	
Rafael	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{5}$	
Bruna	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{6}$	

Fonte: Elaborado pelo autor. maio 2018

Quem ganhou essa rodada?

Apêndice G – Tarefa 9

Tema: Subtração de frações

Tempo estimado: 50 minutos

Objetivo: Subtrair frações com diferentes denominadores

Metodologia: Entregar, para cada dupla de estudantes, o kit de frações no quadriculado e as tiras de frações, caso necessitem de utilizá-los para efetuar as operações. Em seguida, entregar a atividade para cada estudante e propor que resolvam sem a intervenção do professor, porém, sugerir que estabeleçam a discussão entre eles. Nesse momento, o professor é o mediador das discussões entre eles. Após todos resolverem a atividade, estabelecer a discussão em conjunto.

Questão

1. A professora de Júlio, Paulo, Rafael e Bruna, após ter mudado a regra do jogo "Papa Todas de Frações", resolveu desafiar seus alunos mais uma vez, porém, utilizando outra regra.

A nova regra seria: Escolher duas cartas e subtrair a de maior valor pela a de menor valor. Quem obtivesse o maior resultado ganharia todas as cartas.

Abaixo, está a tabela com as cartas que Júlio, Paulo, Rafael e Bruna escolheram para efetuarem a subtração.

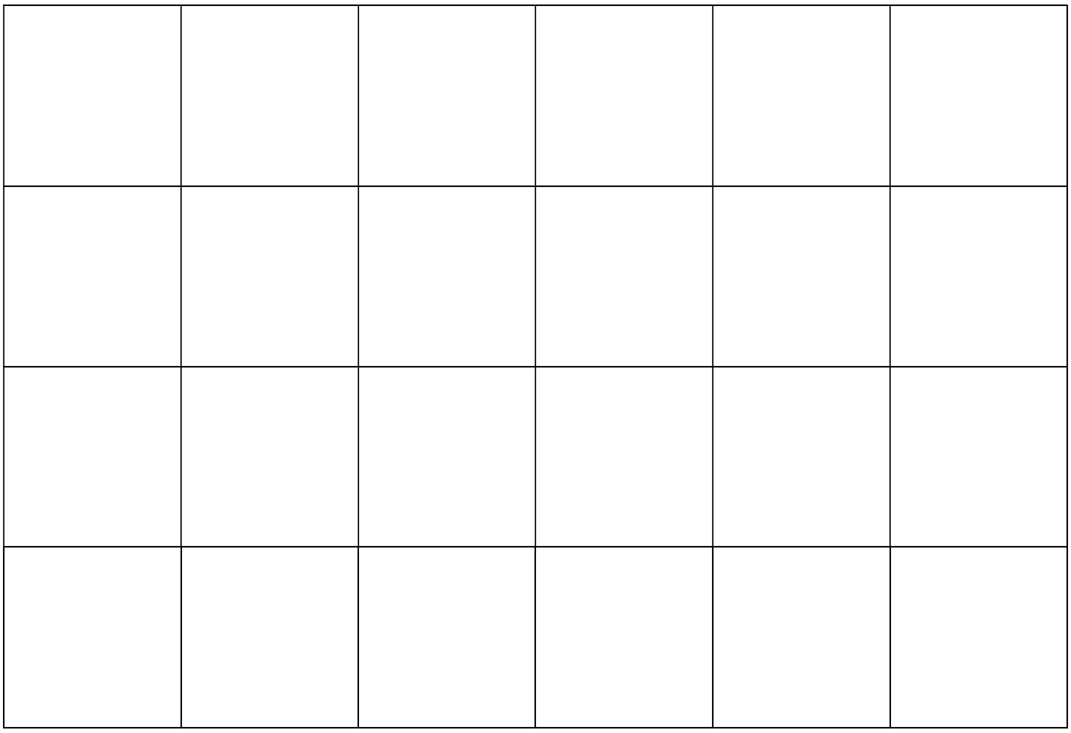
Faça a subtração das duas cartas de cada jogador.

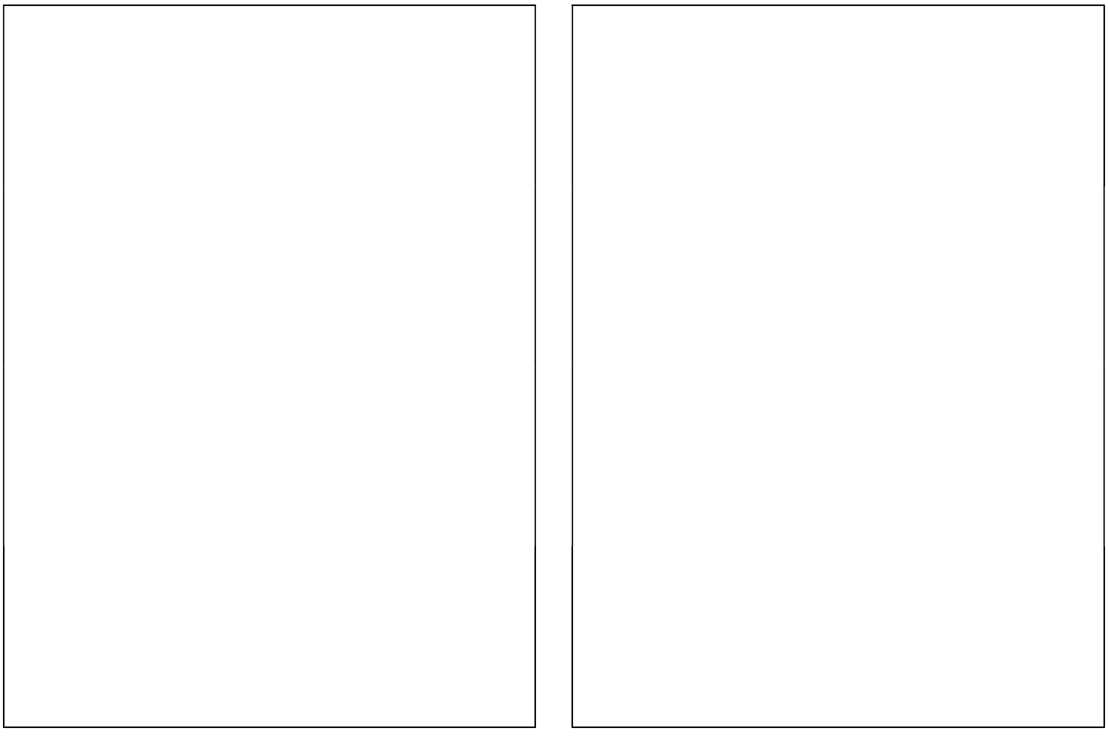
Nome	Carta 1	Carta 2	Diferença
Júlio	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{6}$	
Paulo	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{9}$	
Rafael	$\frac{7}{3}$	$\frac{3}{9}$	
Bruna	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{8}$	

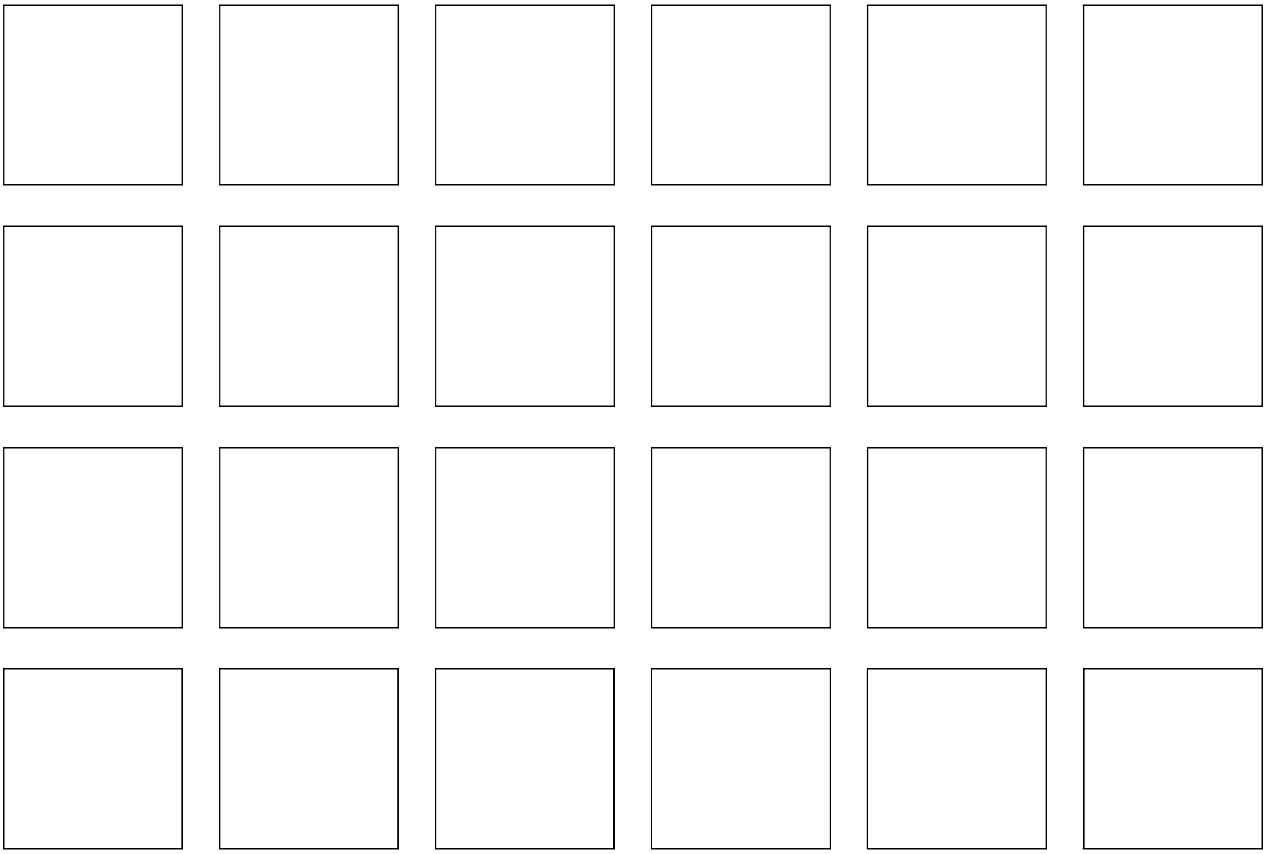
Fonte: Elaborado pelo autor. maio de 2018

Quem ganhou essa rodada?

Apêndice H – Molde das peças do kit de frações no quadriculado

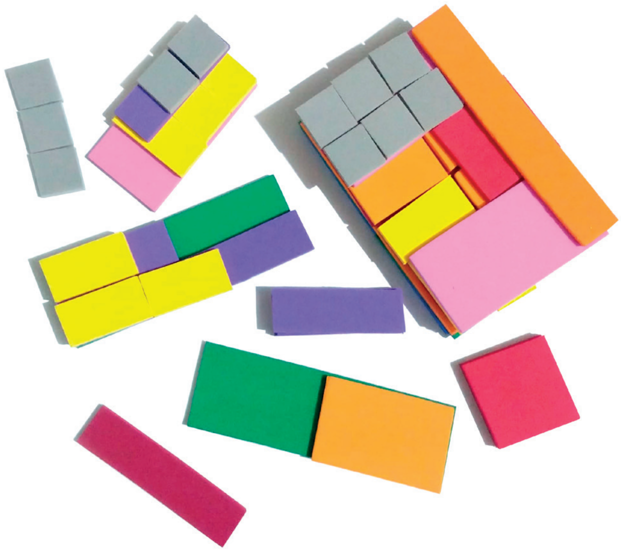






Apêndice I – Recurso Educativo

GESIEL ALISSON MARTINHO



KIT DE FRAÇÕES NO QUADRICULADO

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES

MATERIAL DE APOIO AO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA

UFMG
FaE Faculdade de Educação
PROMESTRE
MESTRADO PROFISSIONAL EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA

KIT DE FRAÇÕES NO QUADRICULADO

UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DE EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES

MATERIAL DE APOIO AO PROFESSOR QUE ENSINA MATEMÁTICA

Ficha Técnica

Reitoria da UFMG:
Sandra Goulart Almeida
Vice-reitor:
Alessandro Fernandes Moreira

Diretoria da FaE/UFMG:
Daisy Moreira Cunha
Vice-diretor:
Wagner Ahmad Auarek

Coordenação do Promestre – FaE/UFMG
Coordenadora:
Maria Amália de Almeida Cunha
Subcoordenadora:
Teresinha Fumi Kawasaki

Linha de Pesquisa: Educação Matemática

Autor:
Gesiel Alisson Martinho

Orientador:
Diogo Alves de Faria Reis

Designer:
João Bezerra

Revisão:
Fátima Soares Rodrigues

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Caros professores e professoras,

Como professor de matemática, tem sido possível observar que alguns estudantes apresentam muitas dificuldades e receio quando se deparam com exercícios que envolvem frações, especificamente, adição e subtração. Muitas vezes, eles nem tentam resolver o exercício e já afirmam não saber ou não ser capaz de realizá-lo. Uma frase recorrente e habitual de alguns estudantes é que não gostam de trabalhar com frações por ser muito difícil, pois nunca aprenderam direito. Percebe-se, então, que eles veem frações como algo impossível de ser dominado.

Muitas vezes, há uma preocupação nossa, de professores, em apresentar o conteúdo e cumprir com o planejamento elaborado, por nós, no início do ano. Dessa forma, ao tratar de um assunto tão delicado, neste caso, fração, ensinamos de forma muito rápida e não damos a atenção que o conteúdo merece e, frequentemente, acabamos focando mais em algoritmos e regras do que na exploração do conceito. Assim, nota-se que os estudantes estão cada vez mais ignorando esse conteúdo.

Pensando em melhorar minha prática, participei do processo seletivo do programa de pós-graduação da UFMG – Promestre – e meu desafio foi trabalhar com o ensino de equivalência de frações para compreensão das operações de adição e subtração.

De acordo com minha experiência em sala de aula, acredito que se, nós, professores, explorarmos mais equivalência de frações e, como recurso didático, utilizarmos de materiais manipuláveis, nossos alunos terão maior facilidade para fazer as operações de adição e subtração.

Em nossa[1] pesquisa, foi possível constatar que o kit de frações no quadriculado, a ser apresentado neste livro, ajudou a maioria dos estudantes a compreender e se apropriar dos conceitos matemáticos desenvolvidos. Além disso, notamos que os estudantes que compreenderam o processo de equivalência de frações tiveram maior facilidade para realizar as operações de adição e subtração, pois souberam relacionar esse processo com essas operações. Com isso, constatamos a importância de se trabalhar bem o conceito de equivalência de frações, pois ele se reflete nessas operações.

Nossa pesquisa teve, como foco, estudantes do 7º ano do ensino fundamental II, porém, a sequência didática, apresentada neste Recurso, pode ser adaptada para os demais anos. Com isso, convidamos vocês, professores e professoras, a ler a dissertação, pois, nela, apresentamos com mais detalhes nossa análise de dados e descrevemos o percurso da nossa pesquisa. Nas referências, indicaremos o caminho para ter acesso a nossa dissertação.

[1] Neste texto, o uso da primeira pessoa do singular refere-se ao autor do texto; o uso da primeira pessoa do plural, ao autor e ao professor orientador da pesquisa.

Esse livro está dividido em quatro tópicos. No primeiro, faremos uma breve discussão sobre o ensino e a aprendizagem de frações. Citaremos alguns autores que discutem sobre o assunto e relevam a importância de lidarmos com esse conteúdo cuidadosamente.

No segundo tópico, abordamos o uso de materiais manipuláveis no ensino de frações e, em seguida, apresentaremos o nosso kit de frações no quadriculado. Indicaremos onde o material pode ser encontrado, sugestões de como adaptá-lo e alguns cuidados caso o professor opte em fazer a montagem com os estudantes.

No terceiro tópico, será apresentada a nossa sequência didática utilizada em nossa pesquisa. Será informado o objetivo de cada tarefa, tempo de duração e sugestão de como aplicar.

Por fim, expressaremos algumas considerações baseadas em nossa experiência com a pesquisa.

Antecipamos nossos agradecimentos à atenção de todos e todas, na expectativa de que apreciem o nosso material, pois foi produzido e pensado com muito carinho a fim de inspirar professores e professoras que, assim, desejem trabalhar.

Boa leitura!!!

Com carinho, Gesiel Alisson Martinho

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES

O processo de ensino e aprendizagem de frações, de acordo com Maranhão e Igliori (2003), tem sido alvo de várias pesquisas da Educação Matemática. Os autores relatam que "as implicações da não acessibilidade de um aluno ao conceito de número racional podem acarretar graves prejuízos à aprendizagem dos diversos ramos da matemática." (p. 57). Acreditamos que as implicações da não compreensão do conceito pelo estudante são prejuízos ao longo de sua vida acadêmica. Ou seja, se o estudante não tem uma clareza dos conceitos fundamentais/básicos de frações, terá, então, dificuldades à compreensão de novos conceitos matemáticos.

O ensino de frações é cercado por dificuldades, tais como, a rejeição dos estudantes por acreditarem que fração é um "bicho de 7 cabeças"; o despreparo do professor para lidar com o tema, pouco abordado em sua formação; e, muitas vezes, a forma como o assunto é abordado em livros didáticos. A falta de recursos didáticos pode prejudicar ainda mais esse processo. Para Loyola (2013), de fato, esse assunto tem orientado muitos educadores a pesquisarem o tema, sem que seja apontado um caminho conclusivo.

Moreira e David (2007) afirmam que:

> *Ao longo do processo de formação matemática do professor, o conjunto dos racionais é visto como um objeto extremamente simples, enquanto as pesquisas mostram que, em termos da prática docente, a sua construção pode ser considerada uma das mais complexas operações da Matemática escolar (p. 59-60).*

Assim, muitas vezes, o docente, ao abordoar frações em sala de aula, não está preparado para enfrentar as dificuldades apresentadas pelos estudantes, pois, no processo de sua formação, esse tema pode ter sido considerado simples de se ensinar, porém, não é um tema cujo aprendizado seja simples ou trivial.

Quando o ensino de frações é iniciado – no 4º ano –, Pelissaro (2011) relata que os estudantes até compreendem, pois conseguem associar com os números naturais que estão mais familiarizados, geralmente utilizam, como recurso, a ideia de divisão. A autora exemplifica que, o professor, ao trabalhar com fração, inicialmente, poderá levar uma pizza e dividi-la na metade, na quarta parte e, por fim, na quantidade de estudantes da turma. Com base nisso, questiona os estudantes, perguntando que parte da pizza cada um comeu, como eram as partes e, assim, constrói o conceito parte-todo.

Para Garcez (2013), ensinar frações envolve diversos desafios e um deles é o conceito de medida, já que os números naturais com os quais os estudantes estão habituados são bastante intuitivos e concretos e, por isso, não oferecem os mesmos desafios dos números racionais. Outro desafio, para o ensino e a aprendizagem de frações, é a sua própria escrita. Não é tão trivial a associação de uma quantidade a dois números (inteiros) "separados" por um pequeno traço e escritos na vertical.

Assim, Behr (1983) ressalta que,

> *A ênfase exagerada nos procedimentos e algoritmos, para operar com os números racionais, tem sido apontada como um dos principais motivos das dificuldades das crianças em aprenderem e aplicarem os conceitos de números racionais (BEHR, 1983, p.60, apud DAVID e FONSECA, 1997).*

Nesse sentido, Garcez (2013) relata que alguns professores, ao tentar facilitar o entendimento por parte dos estudantes, acabam limitando o ensino de frações à memorização de regras, alcançando, justamente, o contrário do pretendido, comprometendo a compreensão do tema. Ao optar pelo ensino por meio de regras, ainda, conforme o autor, o professor impede o estudante de vivenciar várias etapas – como a experimentação, a manipulação de materiais didáticos, a formulação e a verificação de conjecturas em um ambiente em que o professor e estudante discutem sobre o assunto abordado – que são importantes e conduzem à compreensão do conceito.

Desse modo, no âmbito da educação matemática, observamos a importância de serem utilizadas metodologias diferenciadas que possibilitem um melhor aprendizado por parte dos estudantes. Umas das metodologias que os autores, Bordin (2011), Vale e Barbosa (2014), Santos (2014), Lorenzato (2006), Matos e Serrazina (1996), Smole e Diniz (2016) entre outros, defendem e, também, corroboramos é a utilização de materiais manipulativos e jogos para esse ensino. Entendemos que, para haver um aprendizado utilizando essa metodologia, o material não poderá ter apenas uma função ilustrativa ou tornar um mero brinquedo na mão do estudante, pois, conforme enfatiza Santos (2014), não podemos afirmar que é possível contextualizar os conhecimentos matemáticos apenas por meio do material didático manipulável.

Assim, utilizando dessa metodologia, é necessário que o professor prepare bem sua aula, deixe esclarecidos todos os objetivos e, além disso, para obter uma aprendizagem significativa, o estudante precisa ser participativo – mais autônomo – tornando-se, assim, o principal ator por sua aprendizagem. Dessa forma, recomendamos que o professor utilize materiais didáticos manipuláveis e oriente atividades de modo participativo na sala de aula.

Para Santos (2014), o ensino de maneira lúdica parece ser bem aceito pelos estudantes, principalmente quando sentem que o professor se empenhou para preparar uma aula que condiz com a realidade deles, com o objetivo de aproximar os dois mundos: a matemática e a diversão pedagógica, importando-se, realmente, com o aprendizado individual.

No entanto, esse tipo de ensino requer, dos professores, uma dedicação maior na preparação das aulas, introduzindo novas formas de abordagem do conteúdo direcionadas a um melhor aprendizado pelos estudantes. Isso significa tempo de planejamento e formação na jornada de trabalho.

O USO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DE FRAÇÕES

O QUE É UM MATERIAL MANIPULÁVEL?

Antes de fazer a apresentação do kit de frações no quadriculado, primeiramente faremos uma breve definição sobre o que é um material manipulável e o porquê utilizar em nossas aulas para ensinar fração.

Lorenzato (2006, p. 18) define materiais didáticos manipuláveis "como qualquer instrumento útil ao processo de ensino e aprendizagem". Neste sentido, uma calculadora, um quebra cabeça, um jogo, dentre outros materiais, podem ser considerados materiais didáticos manipuláveis se o professor os utilizar como recurso didático para o ensino e a aprendizagem.

Para o autor, não basta o professor ter um bom material manipulável como recurso didático, pois, mais importante que o material, é saber utilizá-lo corretamente para objetivar uma aprendizagem específica. Lorenzato (2006, p.3) ainda acrescenta que "um dos elementos que dificulta a aprendizagem com base em materiais manipuláveis diz respeito a sua não relação com os conceitos que estão sendo trabalhados". Baseando-nos nessa informação, podemos enfatizar a importância de o professor, antes de trabalhar com qualquer material manipulável, preparar com prudência sua aula e se certificar se, realmente, o material que deseja trabalhar vai ao encontro do conteúdo que se pretende ensinar.

Apesar de algumas dificuldades que o ensino de frações possa apresentar, acreditamos que, com a utilização de materiais manipuláveis, esse ensino possa facilitar o aprendizado dos estudantes. De acordo com Bordin (2011), a utilização de materiais manipuláveis pode se tornar significativa no ensino, caso o professor seja um efetivo mediador das atividades, ou seja, é necessário que os objetivos das atividades estejam bem definidos e esclarecidos antes da utilização do material manipulável, pois, caso contrário, o material poderá tornar-se um brinquedo cujo objetivo não tenha fundamento pedagógico, o que poderia fugir do escopo da aula. Esse autor ressalta que:

> *o material manipulável não pode ser visto apenas como um "brinquedo" ou "escada", adequados em determinados momentos do processo de ensino aprendizagem e passíveis de serem retirados pelo professor quando ele acha adequado. O aluno, após manusear várias vezes os objetos e concluir as relações necessárias entre o que estava sendo mostrado com o material e o conteúdo matemático propriamente dito, deve sentir-se seguro para abrir mão desse suporte para seu crescimento e, então, optar por trabalhar sem esse auxílio (BORDIN, 2011, p. 20).*

Nesse sentido, Nacarato (2005, p. 4) afirma que "o uso não apropriado ou, ainda, pouco exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem matemática". Desse modo, podemos inferir que o problema não está na utilização desses materiais, mas na maneira como eles são planejados e trabalhados.

Segundo Santos (2014, p. 22), “o conceito de números fracionários é bastante complexo e difícil de ser abstraído, havendo a necessidade de o aluno manipular materiais didáticos para facilitar o entendimento.” Em consonância com essa autora, acreditamos que o estudante, ao utilizar materiais manipuláveis para aprender fração, terá a oportunidade de construir conceitos, compreender regras e, além disso, perceber a aplicação desse conteúdo em algumas situações do seu dia a dia.

Conforme relata Scolaro (2008, p. 4), “o uso destes objetos reais, nomeados de materiais didáticos manipuláveis, que leva o aluno a tocar, sentir, manipular e movimentar, acabam por tornarem-se representação de uma idéia”. Ou seja, podemos considerar que a manipulação desses materiais proporciona, ao estudante, a materialização de ideias que, algumas vezes, eles têm acesso apenas por meio de teorias, excessivamente, abstratas.

Uma das dificuldades no ensino de frações, de acordo com Santos (2014), é a pouca aplicabilidade do conteúdo nas situações práticas dos estudantes. Nessa direção, Bigode (2014, p. 38) afirma:

> *Com o rápido desenvolvimento e a popularização das tecnologias digitais, o uso de frações no dia a dia está se tornando cada vez mais raro. Calculadoras, computadores, balanças digitais, painéis de automóveis e máquinas em geral usam a notação decimal para expressar números e medidas que não são inteiros, conhecidos como “números quebrados”.*

Nesse sentido, o referido autor afirma que o ensino de frações está se tornando cada vez mais difícil para o professor ensinar, pois as frações, diante do exposto pelo autor, perdem valor utilitário nas atividades cotidianas e profissionais, mas, por outro lado, esse ensino continua tendo relevância nos currículos de Matemática.

Compreendemos que essa não é uma situação fácil de se resolver, mas, assim como, Santos (2014), Scolaro (2008) e Soares e Silva (2018), acreditamos que uma metodologia possível de ser utilizada pelo professor, para ensinar esse conteúdo, é o uso de materiais manipuláveis, pois esse recurso didático possibilita auxiliar os estudantes no entendimento desse conceito matemático, ou seja, facilitando, talvez, esse ensino. Conforme relata Scolaro (2008), com base na visualização, os estudantes têm a oportunidade de ir mais além e compreender melhor o conteúdo, nesse caso, fração, ou seja, há a possibilidade de eles perceberem algumas aplicações do conteúdo em situações, por eles, vivenciadas fora da sala de aula.

Para Soares e Silva (2018, p. 5),

> *considerando as dificuldades dos alunos em relação ao conceito fração, no que tange a assimilação e abstração, a utilização de materiais manipulativos tem se constituído como uma relevante forma de ensino em Matemática que pode contribuir para a compreensão desse conteúdo ao possibilitar uma maior interação dos educandos com o assunto e permitir a visualização dos conceitos que, várias vezes, não ficam claros na exposição do professor em sala de aula.*

Entendemos que os benefícios e as contribuições que o uso do material manipulável oferece aos estudantes não estão nos materiais em si, mas nas ações que esses materiais podem proporcionar, como a concretização de seus pensamentos que favorece elaborar hipóteses e estratégias mais consistentes para uma melhor compreensão do conceito.

Assim, acreditamos que a utilização de materiais manipuláveis para ensinar frações tende a beneficiar tanto o estudante quanto o professor. Nessa direção, Soares e Silva (2018) relatam que, para o estudante, o material manipulável possibilita aguçar a sua curiosidade e despertar um interesse maior pelo conteúdo, além de essa interação com o material promover a criatividade e melhorar seu raciocínio rumo à aprendizagem.

Pensando no professor, Vale e Barbosa (2014, p. 7) mencionam que "há vantagens para os professores quando lhes são dadas oportunidades para explorar uma variedade de estratégias de ensino e recurso didático", pois, o professor tem a oportunidade de aprender mais. Em uma aula em que o professor utilize de materiais didáticos como recurso, é possível surgir várias perguntas por parte dos estudantes; perguntas que, às vezes, são surpresas, perguntas inesperadas, que conduzem o professor, cada vez mais, a reflexões, resultando, assim, em um grande aprendizado em relação ao modo como os estudantes aprendem Matemática, pois, cada aula terá novidades diferentes a serem estudadas e pensadas.

Assim, apresentamos, a seguir, o kit de frações no quadriculado, utilizado como recurso didático em nossa pesquisa, que pode auxiliar o estudante a melhor compreender esse conceito.

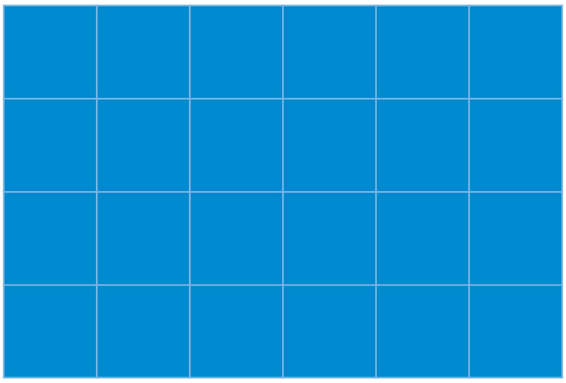
2.1 O KIT DE FRAÇÕES NO QUADRICULADO

O kit de frações no quadriculado, é de autoria da Professora Marli Esteves Guimarães, fundadora da MMP Materiais Pedagógicos[2]. O Material é formado por peças retangulares e suas respectivas divisões em diversas cores e direções. Por ser quadriculado, algumas divisões podem ser feitas em dois sentidos, por isso, temos duas representações de meios, quartos e sextos, mas apenas uma representação de terços, oitavos, doze avos e vinte e quatro avos. O kit contém 72 peças em EVA, das quais serão ilustradas a seguir.

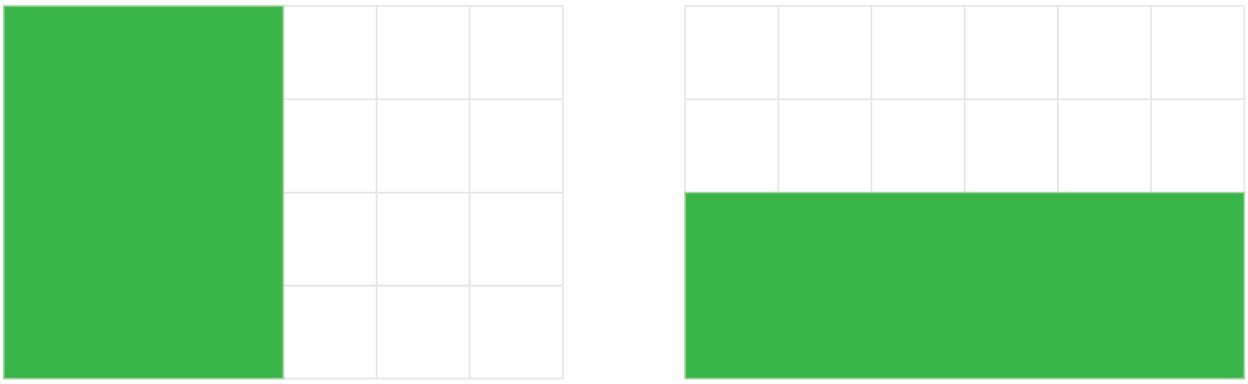
Figura 1: Kit de frações no quadriculado
Fonte: Acervo do autor

[2] A MMP Materiais Pedagógicos é uma fábrica direcionada a materiais pedagógicos de matemática, localizada na Vila Pires, Santo André, São Paulo. Acesso pelo site: https://mmpmateriaispedagogicos.com.br/.

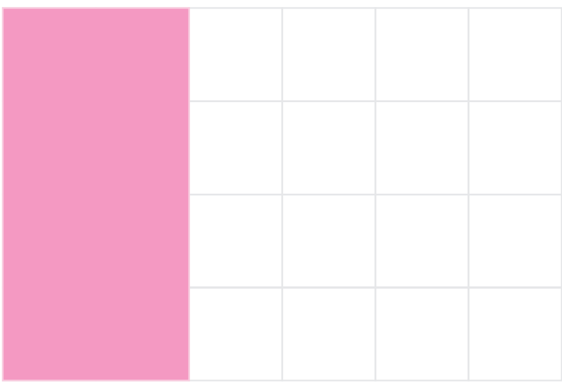
1 placa quadriculada (6x4) com 24 quadradinhos – Azul – A peça representa **1 inteiro**



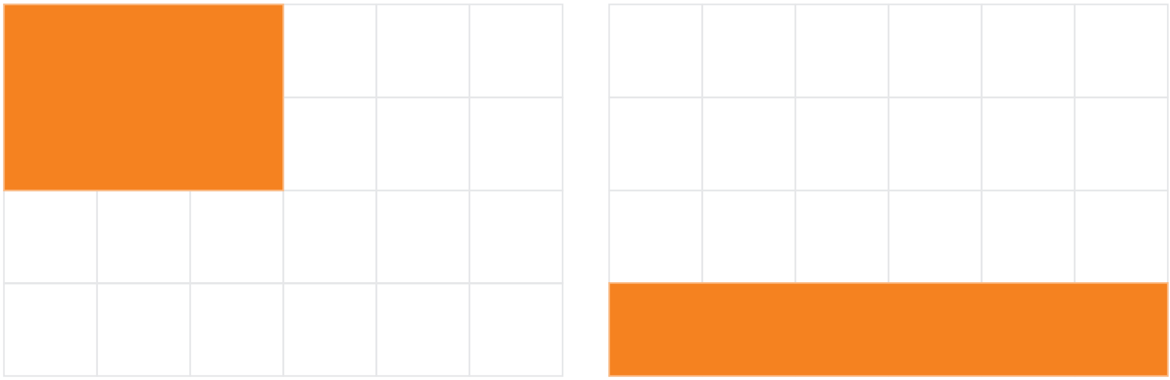
2 peças (3x4) e 2 peças (2x6) – Verde – Cada peça representa **½**



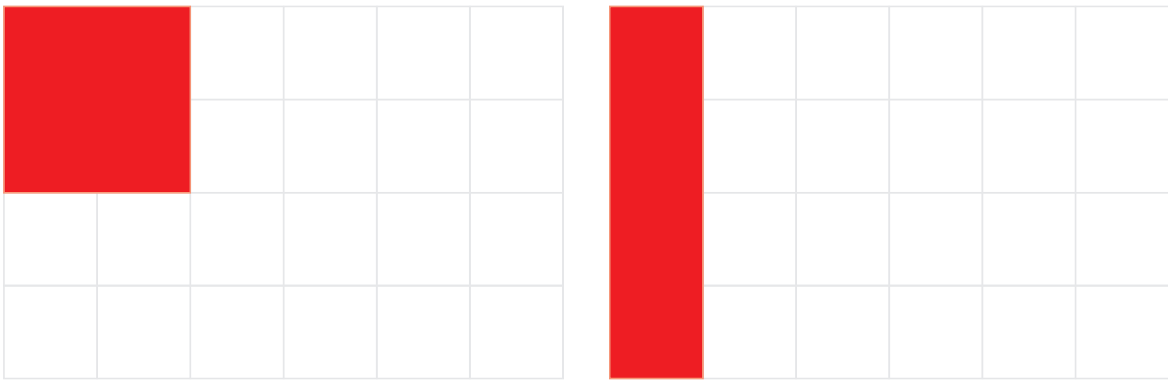
3 peças (2x4) – Rosa – Cada peça representa **⅓**



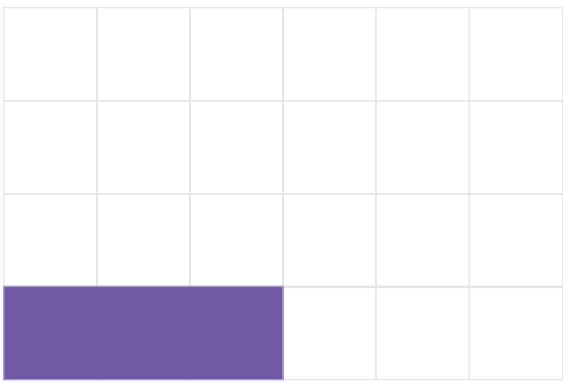
4 peças (3x2) e 4 peças (1x6) – Laranja – Cada peça representa $\frac{1}{4}$



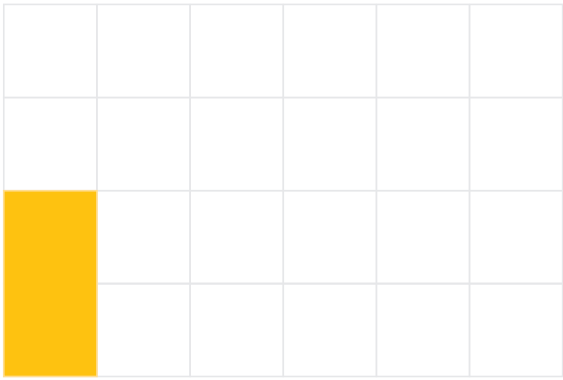
6 peças (2x2) e 6 peças (1x4) – Vermelho – Cada peça representa $\frac{1}{6}$



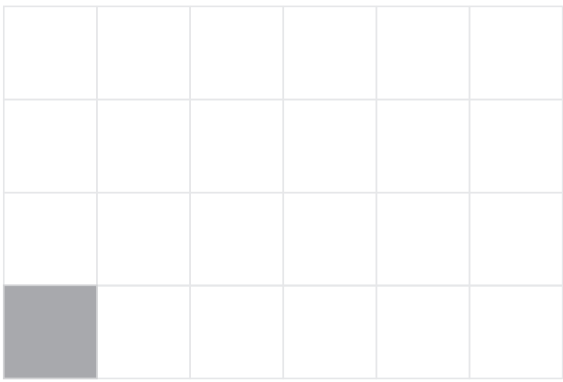
8 peças (1x3) – Lilás – Cada peça representa $\frac{1}{8}$



12 peças (1x2) – Amarelo – Cada peça representa $1/12$



24 peças (1x1) – Cinza – Cada peça representa $1/24$



O kit pode ser adquirido na MMP Materiais Pedagógicos, onde fizemos a aquisição do material para a pesquisa. É um material de boa qualidade com longa duração, dependendo dos cuidados do usuário.

Caso o (a) professor (a) tenha interesse em construir as peças com os estudantes, é uma ótima oportunidade para desenvolver uma familiaridade com o material. É muito fácil, porém, ao fazer essa escolha, o (a) professor (a) precisa estar ciente de que necessitará de tempo para a construção. Acreditamos que duas aulas de 50 minutos serão o suficiente para fazer a reprodução do material com os estudantes e, além disso, é necessário ter alguns cuidados no momento da reprodução, como cortes irregulares, pois poderão gerar resultados indesejáveis no momento de fazer a troca das peças.

A seguir, citaremos algumas recomendações, caso o (a) professor (a) opte em fazer a construção do material, e o molde para reprodução está disponível no apêndice A.

RECOMENDAMOS

- Utilizar papel cartão;
- Folha couchê com gramatura de 300g;
- EVA;
- Precisão na hora dos cortes das peças, pois cortes irregulares poderão atrapalhar no momento de fazer a sobreposição das peças.
- Cobrir as peças com papel adesivo contact, pois trará uma durabilidade maior para o material.

NÃO RECOMENDAMOS

- Um material frágil, por exemplo: folha de papel A4 comum, folha de revistas, cartolina e similares.
- Material com gramatura muito pesada, como: Papelão paraná, PVC, madeira e similares, pois são materiais que, para fazer o corte, é necessário utilizar estiletes ou similares.

Com base nos moldes que estão disponíveis no final deste livro, para impressão, é possível fazer a reprodução de todas as peças do kit. Não é necessário seguir, rigorosamente, as cores originais do kit, porém é fundamental que toda a turma esteja trabalhando com as mesmas cores.

Para a utilização do material, é interessante cada estudante ter o seu kit, para manuseá-lo, porém, entendemos que o custo pode ser alto. Com isso, sugerimos um kit para no máximo dois estudantes trabalharem juntos, pois, mais do que dois estudantes, pode dificultar a exploração do material. Para a nossa pesquisa, cada dupla de estudantes recebeu um kit e foi possível fazer um bom trabalho.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste tópico, apresentaremos as tarefas da pesquisa com sugestões de como aplicá-las. Vale ressaltar que todas as tarefas foram testadas, em nossa pesquisa, e foram efetuadas as modificações que consideramos necessárias após a realização da pesquisa.

Os conteúdos abordados são: equivalência de frações, comparação de frações e adição e subtração de fração.

3.1 TAREFA 1: MANIPULAÇÃO DO KIT DE FRAÇÕES NO QUADRICULADO

TEMPO ESTIMADO	Duas aulas de 50 minutos
OBJETIVO	• Reconhecer as peças do kit de frações no quadriculado • Representar uma fração de várias formas • Fazer comparação de frações
MATERIAL	Kit de frações no quadriculado

METODOLOGIA

Entregar, para cada estudante ou dupla de estudantes, um kit de frações no quadriculado. O primeiro contato dos estudantes com o material tem por finalidade deixá-los "mais à vontade" durante uns 5 a 10 minutos, pois farão o reconhecimento das peças.

No momento do reconhecimento das peças, solicite aos estudantes que anotem, no caderno, a representação fracionária de todas as peças e, após essa etapa, faça questionamentos, como:

- Se vocês estiverem com uma peça que representa $\frac{1}{2}$, é possível trocá-la por outra peça? (lembrando-se de que, para a troca, as peças precisam sobrepor à peça de $\frac{1}{2}$)
- Se é possível fazer a troca, as peças trocadas são todas da mesma cor?
- Qual a fração que as peças trocadas representam?
- Poderia ser outro tipo de peça? Se sim, qual a fração que essa peça representa?
- O que podemos concluir a respeito da peça $\frac{1}{2}$ com as outras que foram trocadas?

Faça esses questionamentos utilizando, como exemplo, outras frações.

A seguir, apresentamos três questões como sugestão para fazer as discussões acima.

> DICA: Caso opte por construir o kit junto com os estudantes, vá direto para os questionamentos.

QUESTÃO 1

Complete o quadro abaixo com a representação fracionária de cada uma das peças do kit de frações no quadriculado.

QUADRO PARA REGISTRO	
PEÇAS	REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA EM RELAÇÃO À PEÇA AZUL
Uma peça azul	Um inteiro = 1
Uma peça verde	
Uma peça rosa	
Uma peça laranja	
Uma peça vermelha	
Uma peça roxa	
Uma peça amarela	
Uma peça cinza	

Fonte: Elaborado pelo autor – jan. 2019

QUESTÃO 2

Complete os quadros abaixo de acordo com cada uma das informações.

Uma peça verde é possível ser trocada por qual outra peça? Analise as possibilidades, lembrando-se de que é necessário sobrepor uma peça à outra para fazer a troca.

Peças	Azul	Rosa	Laranja	Vermelho	Roxo	Amarelo	Cinza
Quantidade necessária para troca							
Representação fracionária do total de peças trocadas							

Fonte: Elaborado pelo autor – jan. 2019

Uma peça rosa é possível ser trocada por qual outra peça? Analise as possibilidades, lembrando-se de que é necessário sobrepor uma peça à outra para fazer a troca.

Peças	Azul	Verde	Laranja	Vermelho	Roxo	Amarelo	Cinza
Quantidade necessária para troca							
Representação fracionária do total de peças trocadas							

Fonte: Elaborado pelo autor – jan. 2019

Uma peça vermelha é possível ser trocada por qual outra peça? Analise as possibilidades, lembrando-se de que é necessário sobrepor uma peça à outra para fazer a troca.

Peças	Azul	Verde	Rosa	Laranja	Roxo	Amarelo	Cinza
Quantidade necessária para troca							
Representação fracionária do total de peças trocadas							

Fonte: Elaborado pelo autor – jan. 2019

DICA: Faça o preenchimento desses quadros junto com os estudantes, questionando-os o tempo todo. Se achar que esses três quadros não foram suficientes para a compreensão dos estudantes, utilize outras peças como exemplo.

QUESTÃO 3

Como observamos, podemos escolher uma peça e efetuar sua troca por outras peças, desde que uma sobreponha à outra. Por que podemos fazer esse tipo de troca? Explique.

> DICA: Oriente o estudante a perceber que é possível fazer esse tipo de troca porque as frações são equivalentes. Isto é, têm a mesma parte do todo envolvido.
>
> Faça demonstrações utilizando as peças do kit.

3.2 TAREFA 2: COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES

TEMPO ESTIMADO	Uma aula de 50 minutos
OBJETIVO	Comparar frações com denominadores iguais e diferentes
MATERIAL	Kit de frações no quadriculado

METODOLOGIA

Para trabalhar a comparação de frações, basta o estudante pegar as peças correspondentes à fração dada e fazer a comparação dessas peças para verificar qual é maior ou menor, porém, é interessante ir além. A seguir, sugerimos como trabalhar comparação de frações utilizando o kit.

- Inicialmente, peça que o aluno faça a comparação de frações com numeradores iguais, por exemplo $1/2$ e $1/3$ ou $2/3$ e $2/4$.
- Depois, trabalhe com frações que têm denominadores iguais, por exemplo, $1/4$ e $2/4$ ou $2/6$ e $3/6$.

Após ter efetuado algumas comparações, oriente o estudante a perceber que, ao comparar duas frações com numeradores iguais, para saber qual é a maior, basta verificar em quantas partes essa fração foi dividida, ou seja, analisar o denominador da fração. Quanto menos partes a fração for dividida, maior é a fração, ou seja, quanto menor for o número que representa o denominador da fração, significa que essa fração é a maior.

Faça questionamentos, como a seguir, para concluir a situação acima:

- A peça que representa $1/2$ foi dividida em quantas partes? E a que representa $1/3$, foi dividida em quantas partes? Qual dessas peças é a maior ou menor?
- A peça que representa $2/3$ foi dividida em quantas partes? E a que representa $2/4$, foi dividida em quantas partes? Qual dessas peças é a menor?
- Então, o que podemos concluir quando duas frações tem o mesmo numerador?

Analogamente, essa discussão pode ser efetuada para frações que têm o denominador igual.

A seguir, apresentamos três questões como sugestões para trabalhar a comparação de frações. Utilize uma aula para efetuar os questionamentos sugeridos acima, e outra aula para efetuar as questões abaixo.

QUESTÃO 1

Juliana e Rebeca ganharam um armário de sua mãe para guardar material escolar. O armário tem duas portas de mesmo tamanho, conforme a figura abaixo.

O espaço que ficou para Juliana estava dividido em 4 partes iguais, e ela poderia utilizar apenas duas dessas partes. Rebeca ficou com o outro espaço que estava dividido em 3 partes iguais, e, também, poderia utilizar somente duas dessas partes. Quem ficou com o menor espaço? Explique como você chegou a essa conclusão.

DICA: Oriente o estudante a perceber que quanto mais partes o todo for dividido, menores são as partes. Ou então, quanto menos partes o todo for dividido, maiores são as partes desse todo.

QUESTÃO 2

Frederico e Gustavo ganharam, de seus pais, um kit de frações no quadriculado e estavam brincando de fazer comparação de frações.

Qual das duas frações é maior? Justifique seu raciocínio.

> DICA: Oriente o estudante a perceber que para comparar frações com denominadores iguais, basta verificar a quantidade de partes tomadas. Isto é, quanto mais partes forem tomadas, maior é a fração.

QUESTÃO 3

Se a representação fracionária das peças de Frederico fosse $\frac{1}{4}$ e a do Gustavo fosse $\frac{1}{8}$, qual teria uma representação fracionária maior? Como você chegou a esta conclusão? Explique.

> DICA: Oriente o estudante a perceber que, para comparar frações com numeradores iguais, devemos verificar o denominador das frações. Isto é, quanto maior o denominador, menor é a fração.

3.3 TAREFA 3: EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES

TEMPO ESTIMADO	Duas aulas de 50 minutos
OBJETIVO	Identificar frações equivalentes
MATERIAL	Kit de frações no quadriculado

DEFINIÇÃO: Frações equivalentes são frações que representam a mesma parte de um todo.

METODOLOGIA

Para trabalhar com frações equivalentes, há várias possibilidades de explorar o material. Apresentamos, a seguir, nossa sugestão:

- Pegue uma peça laranja, por exemplo, e solicite que o (a) estudante encontre peças no kit que possa sobrepor à peça escolhida. Peça que ele (a) faça trocas, usando uma só cor, quando for possível.
- Pergunte qual a representação fracionária da peça escolhida por você, e das peças que foram trocadas pelo (a) estudante.
- Peça que o (a) estudante anote, em seu caderno, as frações encontradas e faça discussões sobre essas frações, por exemplo:
  - O que podemos dizer sobre essas frações?
  - $1/4$ e $2/8$ representam a mesma parte do todo? Se sim, o que podemos concluir sobre essas duas frações?
  - E as outras frações encontradas, também representam a mesma parte do todo?
  - O que podemos concluir sobre essas frações?

Nas discussões, oriente o (a) estudante a perceber que essas frações encontradas são frações equivalentes. E, por fim, concluam que frações equivalentes são frações que representam a mesma parte do todo.

A seguir, apresentamos, como sugestão, seis questões que possibilitam explorar a equivalência de frações. Sugerimos ainda que sejam trabalhadas três questões, no máximo, em uma aula de 50 minutos, pois, mais do que isso, a aula pode se tornar cansativa.

QUESTÃO 1

Vamos fazer algumas trocas? Registre cada um dos fatos abaixo:

Obs.: Pode haver mais de uma maneira de recobrir a peça solicitada.
Portanto, escreva todas as formas possíveis que vocês conseguirem encontrar.

- Pegue 1 peça rosa. De quantas maneiras, usando uma só cor, podemos recobrir essa peça?

Escreva a representação fracionária de cada uma das trocas efetuada por você.

- Pegue 1 peça laranja. De quantas maneiras, usando uma só cor, podemos recobrir essa peça?

Escreva a representação fracionária de cada uma das trocas efetuada por você.

QUESTÃO 2

Vimos que o nosso kit de frações no quadriculado tem limitações, ou seja, não contém todas as representações fracionárias possíveis. Como você faria para representar $\frac{1}{5}$ de formas diferentes? Faça a representação de, pelo menos, três formas diferentes.

QUESTÃO 3

Gustavo e Frederico estavam brincando de fazer comparações de frações com o kit de frações no quadriculado que ganharam de seus pais. No decorrer da brincadeira, Gustavo perguntou a Frederico:

Frederico ficou na dúvida e não soube responder a Gustavo.

Como você faria para ajudar Gustavo e Frederico a identificarem qual das duas frações é maior?

DICAS: As questões 2 e 3 possibilitam verificar se os estudantes são capazes de encontrar frações equivalentes sem a utilização do kit de frações. Isto é, se já conseguem perceber alguma relação para encontrar frações equivalentes.

Faça discussões utilizando as peças do kit de frações e oriente os estudantes a perceberem, por exemplo, que, se multiplicarem o numerador e o denominador da fração dada, pelo mesmo número, a fração encontrada é equivalente à fração dada.

OBS.: EM MOMENTO ALGUM INFORME ESSA RELAÇÃO AOS ESTUDANTES.

Além disso, na questão 3, o estudante precisa fazer a comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes. Utilizando o kit de frações, mostre que, para comparar frações com numeradores e denominadores diferentes, primeiramente precisamos igualar as partes das frações ou partes tomadas. Faça algumas discussões, conforme a seguir:

$$\frac{2}{3} \text{ e } \frac{1}{2}$$

- Pegue as peças que representam a fração 2/3. Qual a cor da peça?
- Pegue a peça que representa a fração 1/2. Qual a cor da peça?
- Qual é a maior?
- Se não tivesse o kit de frações, como faríamos essa comparação?
- Já sabemos fazer a comparação de frações com numeradores e denominadores iguais. Vamos igualar o numerador ou denominador dessas frações para fazermos a comparação?
- Qual a sugestão?

Neste momento, deixe os estudantes fazerem sugestões e, sempre que possível, direcione a discussão para toda a turma. Por fim, oriente-os a perceberem que, para comparar frações com numeradores e denominadores diferentes, uma das possibilidades é igualar suas partes ou partes tomadas.

QUESTÃO 4

Vimos que é possível representar uma fração de várias formas diferentes. Utilizando o kit de frações no quadriculado, faça, pelo menos, cinco representações diferentes de $\frac{1}{2}$.

QUESTÃO 5

Veja o exemplo que apresenta uma possível dieta.

Comecei a fazer um regime, comia 6 pedaços de pizza, agora como só 3

1. Vamos considerar que essas pizzas têm todas o mesmo tamanho. Ao deixar de comer seis fatias de pizza e comer somente três fatias, conforme mostra a figura acima, essa pessoa comerá menos pizza do que antes? Explique o que pensou.
2. Represente as duas pizzas inteiras na forma de fração.
3. Suponhamos que essa pessoa coma duas fatias da pizza que está dividida em 6 pedaços. Represente a fração correspondente da pizza que essa pessoa comeu.
4. Se essa mesma pessoa comer apenas uma fatia da pizza que foi dividida em 3 pedaços, que fração de pizza ela comeu?
5. A que conclusão podemos chegar a respeito das frações representadas nos itens (3) e (4)? Justifique sua resposta.

QUESTÃO 6

João e Elisabete estavam jogando um jogo de videogame. Para vencer o jogo, era necessário tentar capturar todo o tesouro disponível. João conseguiu capturar $\frac{1}{3}$ do tesouro, e Elisabete, $\frac{5}{9}$ do tesouro.

DICA: Reforce com os estudantes que, para comparar frações com numeradores e denominadores diferentes, primeiramente, precisamos igualar suas partes ou partes tomadas. Faça algumas discussões utilizando o kit de frações.

1. Quem capturou mais tesouro até o momento?
2. Juntos, que fração do tesouro, João e Elisabete capturaram?

DICAS: Neste momento mostre aos estudantes que, para somar frações com denominadores diferentes, primeiramente, precisamos igualar suas partes. Faça discussões como:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$$

- Pegue as peças que representam a fração 2/3. Qual a cor da peça?
- Pegue a peça que representa a fração 1/2. Qual a cor da peça?
- Se eu juntar as duas peças rosas e a peça verde, posso falar que tenho três peças rosas?
- Então, posso falar que tenho três peças verdes?
- Se não, o que preciso fazer para juntar essas peças?

Oriente o estudante a perceber que, para juntar todas as peças, elas precisam ter a mesma cor. Ou seja, é necessário igualar as partes das frações.

3.4 TAREFA 4: JOGO PAPA TODAS DE FRAÇÕES

TEMPO ESTIMADO	Duas aulas de 50 minutos
OBJETIVO	• Auxiliar os estudantes a compreender o conceito de frações • Comparar frações com diferentes denominadores • Ter noção de equivalência de frações • Fazer a leitura e a representação de frações
MATERIAL	• Um baralho de frações com 32 cartas • Uma tabela com tiras de frações

METODOLOGIA

Organizar os estudantes em grupos de três ou quatro, distrubuir as cartas igualmente para cada um, entregar uma tabela com tiras de frações e explicar a regra do jogo. As regras devem estar bem definidas antes de iniciar o jogo.

Orientações quanto às regras.

- Todas as cartas do baralho serão distribuídas entre os jogadores, que não veem suas cartas. Cada jogador coloca suas cartas em uma pilha com os números virados para baixo, como suporte ao jogo.
- A tabela com as tiras de frações é colocada no centro da mesa, de modo que todos a vejam.
- Os jogadores combinam, entre si, um sinal ou uma palavra. Dado o sinal, todos os jogadores viram a carta de cima de sua pilha ao mesmo tempo e comparam as frações. O jogador que tiver a carta representando a maior fração vence a rodada e fica com todas as cartas, ou seja, “papa-todas”.
- As cartas que o jogador ganha em uma rodada não podem ser utilizadas nas rodadas seguintes.
- A tabela de tiras de frações pode ser usada, se necessário, para que as comparações sejam feitas.
- Se houver duas cartas de mesmo valor, todas as cartas ficam na mesa e, na próxima rodada, o jogador com a maior carta “papa-todas”, inclusive aquelas que ficaram na mesa.
- O jogo termina quando as cartas acabarem.
- O jogador com o maior número de cartas vence o jogo.

Para acompanhar o que os estudantes estão fazendo e se estão fazendo as comparações corretamente, a seguir, apresentamos um quadro, como sugestão, para que os estudantes preencham durante o jogo. A cada rodada, peça que circulem a maior fração. As cartas e a tabela com tiras de frações encontram-se anexas.

Nome	RODADA							
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª

Fonte: Elaborado pelo autor – jan. 2019

INFORMAÇÕES: O jogo Papa Todas de Frações é de autoria de Kátia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz e Patrícia Cândido e encontra-se no livro Cadernos de Mathema Volume 1. Porto Alegre: Artmed, 2007.

As cartas e a tabela com tiras de frações estão disponíveis no Anexo A.

3.5 TAREFA 5: EXPLORAÇÃO DO JOGO PAPA TODAS DE FRAÇÕES

TEMPO ESTIMADO	Uma aula de 50 minutos
OBJETIVO	• Auxiliar os estudantes a compreender o conceito de frações • Comparar frações com diferentes denominadores • Ter noção de equivalência de frações • Efetuar a resolução de problemas que envolvam frações
MATERIAL	• Uma tabela com tiras de frações • Kit de frações no quadriculado

METODOLOGIA

Propor três problemas após o jogo “Papa Todas de frações”. Organizar a turma em grupos para que possam discutir os problemas propostos. Além disso, entregar o kit de frações no quadriculado e a tabela com as tiras de frações para que os estudantes os utilizem como recurso (caso tenham necessidade). É interessante que todos os problemas sejam questionados antes de uma conclusão final.

Em nossa pesquisa, utilizamos três problemas propostos pelas autoras do jogo, que apresentamos a seguir e, além disso, no Anexo B, sugerimos mais três questões elaboradas pelas autoras.

QUESTÃO 1

Helena tirou $\frac{1}{2}$, Ellen tirou $\frac{4}{8}$, Pedro tirou $\frac{7}{7}$ e Aline ganhou a partida. Qual a carta que ela pode ter tirado?

DICA: Observe que há aqui um problema com mais de uma solução possível.

Copie, no quadro, cada uma das soluções apresentadas pelos estudantes e oriente-os a compreender que uma fração é maior que um inteiro quando o numerador é maior do que o denominador.

QUESTÃO 2

Durante o jogo, os alunos organizaram uma tabela com as frações que cada um tirou.

Jogador	RODADA			
	1ª	2ª	3ª	4ª
Júlia	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{7}{3}$
Paulo	$\frac{10}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{10}$
Luis	$\frac{4}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{9}$
Bia	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{2}$

Observando a tabela acima, responda:

- Quem ganhou o jogo após quatro rodadas?
- Quais as cartas que contêm frações equivalentes a 1 inteiro?
- E maiores do que 1 inteiro?

QUESTÃO 3

Em uma rodada, Paulo, Ana e Renato tiraram as seguintes cartas: $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$ e $\frac{3}{6}$.

Eles começaram a discutir sobre quem conseguiu a maior carta. Se você estivesse presente nessa discussão, como os ajudaria a tomar a melhor decisão sobre qual das três cartas tem a maior fração representada?

3.6 TAREFA 6: ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

TEMPO ESTIMADO	Duas aulas de 50 minutos
OBJETIVO	• Somar frações com diferentes denominadores • Subtrair frações com diferentes denominadores
MATERIAL	Kit de frações no quadriculado

DICA: Recomenda-se fazer cada questão em uma aula diferente.

METODOLOGIA

Entregar, para cada dupla de estudantes, o kit de frações no quadriculado caso necessitem de utilizá-los para efetuar as operações. Em seguida, entregar a tarefa para cada estudante e propor que resolvam sem a intervenção do professor, porém, sugerir que discutam entre eles. Neste momento, o professor deve ser o mediador das discussões. Após todos resolverem a tarefa, discutir em conjunto.

QUESTÃO 1

A professora de Júlio, Paulo, Rafael e Bruna propôs uma pequena mudança na regra do jogo "Papa Todas de Frações".

Ela distribuiu quatro cartas para cada um deles e, com as cartas viradas sobre a mesa, solicitou que escolhessem duas cartas. Após a escolha, pediu que somassem as duas cartas e dissessem o resultado. Quem obtivesse o maior resultado ficaria com todas as cartas. Abaixo, está a tabela com as cartas que Júlio, Paulo, Rafael e Bruna escolheram para efetuarem a soma.

Faça a soma das duas cartas de cada jogador.

Nome	Carta 1	Carta 2	Soma
Júlio	$6/3$	$3/6$	
Paulo	$3/4$	$6/8$	
Rafael	$5/10$	$2/5$	
Bruna	$3/2$	$8/6$	

Fonte: Elaborado pelo autor – maio 2018

Quem ganhou essa rodada?

QUESTÃO 2

A professora de Júlio, Paulo, Rafael e Bruna, após ter mudado a regra do jogo “Papa Todas de Frações”, resolveu desafiar seus alunos mais uma vez, porém, utilizando outra regra.

A nova regra seria: Escolher duas cartas e subtrair a de maior valor pela a de menor valor. Quem obtivesse o maior resultado ganharia todas as cartas.

Abaixo, está a tabela com as cartas que Júlio, Paulo, Rafael e Bruna escolheram para efetuarem a subtração.

Faça a subtração das duas cartas de cada jogador.

Nome	Carta 1	Carta 2	Diferença
Júlio	$5/3$	$2/6$	
Paulo	$6/3$	$6/9$	
Rafael	$7/3$	$3/9$	
Bruna	$2/4$	$2/8$	

Fonte: Elaborado pelo autor – maio 2018

Quem ganhou essa rodada?

DICA: Para a tarefa 6, sugerimos que seja aplicado o jogo “Papa Todas de frações” realizando a modificação das regras como fizemos no enunciado das questões. Assim, os estudantes terão mais oportunidade de interagir e dialogar entre seus pares, a fim de que pensem, concluam e encontrem resultados que possam ser debatidos antes de um parecer final. Além disso, a tarefa será mais desafiadora e pode conduzir o estudante a uma compreensão melhor sobre o assunto.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Caro professor e professora, o objetivo principal deste Recurso Educacional foi apresentar, a vocês, a nossa sequência didática de acordo com a experiência vivida em nossa pesquisa. Esperamos que o material, apresentado neste Recurso, possa servir como mais uma alternativa de trabalho e contribuir para a sua prática docente.

Ressaltamos que a nossa pesquisa teve como objetivo central investigar como a ideia de equivalência de frações, com o apoio de materiais manipuláveis, pode contribuir para a compreensão das operações de adição e subtração, em estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II. E, de acordo com os nossos resultados, foi possível constatar que o kit de frações no quadriculado ajudou que a maioria dos estudantes compreendesse e se apropriasse dos conceitos matemáticos desenvolvidos. Gradativamente, esses estudantes conseguiram estabelecer uma relação entre as peças e as tarefas propostas, o que os instigou a abstrair as operações de adição e subtração de frações. Para a ocorrência da construção desse conhecimento, foi necessário fazer as devidas intervenções e criar questionamentos pertinentes que estimulassem a curiosidade dos estudantes, a fim de que eles formulassem hipóteses e conclusões a respeito do conceito trabalhado.

No entanto, compreendemos que todo o material manipulável tem suas fragilidades e limitações e não é o material em si que promoverá o aprendizado para o estudante, pois depende muito da forma como o professor ou professora conduz a tarefa. Nesse sentido, concordamos com Vale e Barbosa (2015) quando ressaltam que é de suma importância o professor ter conhecimento sobre o potencial – fragilidades e limitações – do material manipulável antes de introduzi-lo em sala de aula. Pois, dessa forma, é possível "desenvolver tarefas matematicamente ricas e desafiantes para a sua utilização, de acordo com os objetivos pretendidos" (ibid., p. 7- 8).

Reforçamos que não é o material em si que constrói o conhecimento, mas a ação dos estudantes sobre esse material. Além disso, é necessário atentar-se para efetuar as intervenções quando necessárias.

Assim, para a aplicação das tarefas, nossa orientação é de que, constantemente, você, professor ou professora, seja um (a) mediador (a) do conhecimento, questionando cada pensamento/ideia dos estudantes e solicitando sempre para que argumentem suas respostas antes de chegar a qualquer conclusão. As tarefas podem ser realizadas em grupos ou individualmente, porém acreditamos que, em grupos, há uma possiblidade maior de interação estudante/estudante, estudante/professor e professor/estudante. Entretanto, fica a critério de cada professor ou professora, a forma como irão aplicar as tarefas. Qualquer alteração ou adaptação pode ser efetuada livremente de acordo com a necessidade de cada turma.

Mais uma vez, convidamos a ler a nossa dissertação de mestrado, onde encontrará mais detalhes sobre as informações apresentadas neste Recurso. A indicação onde encontrá-la está em nossa referência. Agradecemos a sua leitura!!!

REFERÊNCIAS

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática:** soluções para dez desafios do professor: 4.º e 5.º ano do Ensino Fundamental. 1.ª ed. São Paulo: Ática, 2014. p. 38 – 47.

BORDIN, Laura Moreira. **Os materiais manipuláveis e os jogos pedagógicos como facilitadores do processo de ensino e aprendizagem das operações com números inteiros.** 2011. 102 p. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática), Centro Universitário Franciscano, Rio Grande do Sul: Santa Maria, 2011.

DAVID, Maria Manuela Martins Soares; FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis. **Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária.** Belo Horizonte, Presença Pedagógica, v.3, n.14, mar/abr. 1997. p. 60 – 71.

GARCEZ, Wagner Rohr. **Tópicos sobre o ensino de frações**: Equivalência. [dissertação] Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/wagner_rohr_garcez.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2018.

LORENZATO, Sérgio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

LOYOLA, Sandro da Costa. **Tópicos sobre o ensino de frações:** Unidade. [dissertação] Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=49559>. Acesso em: 23 maio 2018.

MARANHÃO, Maria Cristina Souza de Albuquerque; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. Registro de representação e os números racionais. In: MACHADO, S. D A. (org.) **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Ed. Papirus, p. 57 – 70. Campinas, SP, 2003.

MATOS, José Manuel; SERRAZINA, Maria de Lurdes. **Didáctica da Matemática.** Lisboa: Universidade Aberta, 1996, 304p.

MOREIRA, Plinio Cavalcanti.; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **A Formação Matemática do Professor:** licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 116 p.

NACARATO, Adair Mendes. Eu Trabalho primeiro no concreto. Revista de Educação Matemática. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM)**. Ano 9, n.9-10, (2004-2005), p.1-6.

PELISSARO, Simone. **Ensino de frações: novas abordagens.** Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de título de Especialista em Matemática, Mídias Digitais e Didática. Vila Flores, RS. 2011.

SANTOS, Maria José Batista de Souza. **O ensino e a aprendizagem de frações utilizando materiais manipuláveis concretos.** 2014. 45 p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

SCOLARO, Maria Angela. **O uso dos Materiais Didáticos Manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática.** 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1666-8.pdf>. Acesso em: 27 ago. 2019.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; CÂNDIDO, Patrícia. **Jogos de Matemática de 1º a 5º ano.** Porto Alegre, Série Cadernos do Mathema – Ensino Fundamental, Artmed, 2007. 144 p.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Materiais manipulativos para o ensino de frações e números decimais.** Coleção Mathemoteca; v. 3. Porto Alegre: Penso, 2016. 160 p.

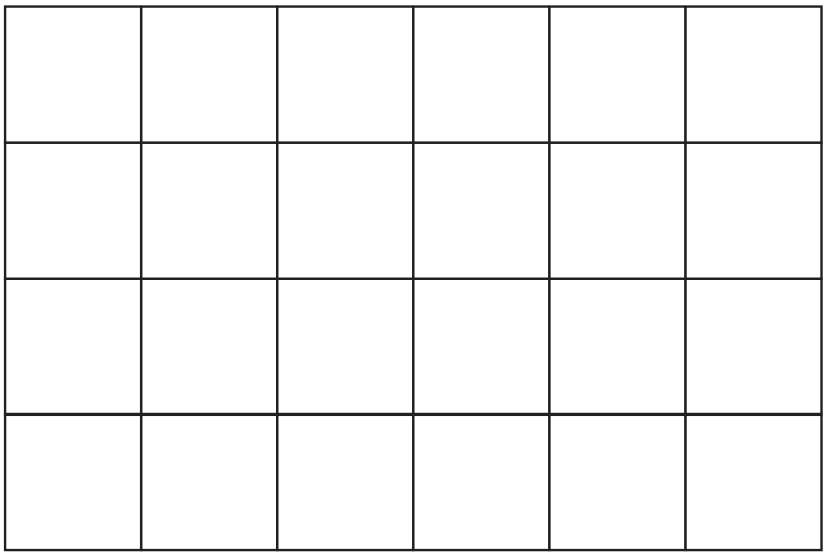
SOARES, João Paulo Vasconcelos; SILVA, Paulo Vilhena da. **Discos de frações**: Um material manipulativo para o ensino de frações na educação básica. VII Encontro Nacional das Licenciaturas, Enalic. Fortaleza, CE. 2018. Disponível em: <http://uece.br/eventos/enalic/>. Acesso em: 28 ago. 2019.

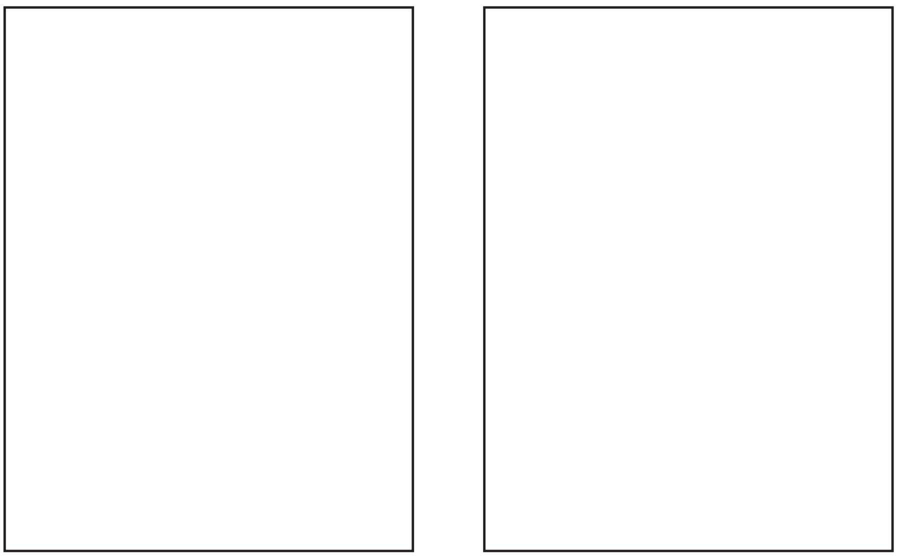
VALE, Isabel; BARBOSA, Ana. **Materiais manipuláveis para aprender e ensinar geometria.** Boletim Gepem: Rio de Janeiro, ano XXXVI, n. 65, p. 3-16, 2014.

Referência da dissertação de mestrado do autor deste material.

MARTINHO, Gesiel Alisson. **O ensino de equivalência de frações para compreensão das operações de adição e subtração.** 2020. 277 f. Dissertação (Mestrado em Educação e Docência) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2020.

APÊNDICE A: MOLDES DO KIT DE FRAÇÕES NO QUADRICULADO





APÊNDICE B: TAREFA 1:
MANIPULAÇÃO DO KIT DE FRAÇÕES NO QUADRICULADO

QUESTÃO 1

Complete a tabela abaixo com a representação fracionária de cada uma das peças do kit de frações no quadriculado.

QUADRO PARA REGISTRO	
PEÇAS	REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA EM RELAÇÃO À PEÇA AZUL
Uma peça azul	Um inteiro = 1
Uma peça verde	
Uma peça rosa	
Uma peça laranja	
Uma peça vermelha	
Uma peça roxa	
Uma peça amarela	
Uma peça cinza	

Fonte: Elaborado pelo autor – jan. 2019

QUESTÃO 2

Complete os quadros abaixo de acordo com cada uma das informações.

Uma peça verde é possível ser trocada por qual outra peça? Analise as possibilidades, lembrando-se de que é necessário sobrepor uma peça à outra para fazer a troca.

Peças	Azul	Rosa	Laranja	Vermelho	Roxo	Amarelo	Cinza
Quantidade necessária para troca							
Representação fracionária do total de peças trocadas							

Fonte: Elaborado pelo autor – jan. 2019

Uma peça rosa é possível ser trocada por qual outra peça? Analise as possibilidades, lembrando-se de que é necessário sobrepor uma peça à outra para fazer a troca.

Peças	Azul	Verde	Laranja	Vermelho	Roxo	Amarelo	Cinza
Quantidade necessária para troca							
Representação fracionária do total de peças trocadas							

Fonte: Elaborado pelo autor – jan. 2019

Uma peça vermelha é possível ser trocada por qual outra peça? Analise as possibilidades, lembrando-se de que é necessário sobrepor uma peça à outra para fazer a troca.

Peças	Azul	Verde	Rosa	Laranja	Roxo	Amarelo	Cinza
Quantidade necessária para troca							
Representação fracionária do total de peças trocadas							

Fonte: Elaborado pelo autor – jan. 2019

QUESTÃO 3

Como observamos, podemos escolher uma peça e efetuar sua troca por outras peças, desde que uma sobreponha à outra. Por que podemos fazer esse tipo de troca? Explique.

APÊNDICE C: TAREFA 2: COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES

QUESTÃO 1

Juliana e Rebeca ganharam um armário de sua mãe para guardar material escolar. O armário tem duas portas de mesmo tamanho, conforme a figura abaixo.

O espaço que ficou para Juliana estava dividido em 4 partes iguais, e ela poderia utilizar apenas duas dessas partes. Rebeca ficou com o outro espaço que estava dividido em 3 partes iguais, e, também, poderia utilizar somente duas dessas partes. Quem ficou com o menor espaço? Explique como você chegou a essa conclusão.

QUESTÃO 2

Frederico e Gustavo ganharam, de seus pais, um kit de frações no quadriculado e estavam brincando de fazer comparação de frações.

Qual das duas frações é maior? Justifique seu raciocínio.

QUESTÃO 3

Se a representação fracionária das peças de Frederico fosse $\frac{1}{4}$ e a do Gustavo fosse $\frac{1}{8}$, qual teria uma representação fracionária maior? Como você chegou a esta conclusão? Explique.

APÊNDICE D: TAREFA 3: EQUIVALÊNCIA DE FRAÇÕES

QUESTÃO 1

Vamos fazer algumas trocas? Registre cada um dos fatos abaixo:

Obs.: Pode haver mais de uma maneira de recobrir a peça solicitada.
Portanto, escreva todas as formas possíveis que vocês conseguirem encontrar.

- Pegue 1 peça rosa. De quantas maneiras, usando uma só cor, podemos recobrir essa peça?

Escreva a representação fracionária de cada uma das trocas efetuada por você.

- Pegue 1 peça laranja. De quantas maneiras, usando uma só cor, podemos recobrir essa peça?

Escreva a representação fracionária de cada uma das trocas efetuada por você.

QUESTÃO 2

Vimos que o nosso kit de frações no quadriculado tem limitações, ou seja, não contém todas as representações fracionárias possíveis. Como você faria para representar $\frac{1}{5}$ de formas diferentes? Faça a representação de, pelo menos, três formas diferentes.

QUESTÃO 3

Gustavo e Frederico estavam brincando de fazer comparações de frações com o kit de frações no quadriculado que ganharam de seus pais. No decorrer da brincadeira, Gustavo perguntou a Frederico:

Frederico ficou na dúvida e não soube responder a Gustavo.

Como você faria para ajudar Gustavo e Frederico a identificarem qual das duas frações é maior?

QUESTÃO 4

Vimos que é possível representar uma fração de várias formas diferentes. Utilizando o kit de frações no quadriculado, faça, pelo menos, cinco representações diferentes de $\frac{1}{2}$.

QUESTÃO 5

Veja o exemplo que apresenta uma possível dieta.

Comecei a fazer um regime, comia 6 pedaços de pizza, agora como só 3

1. Vamos considerar que essas pizzas têm todas o mesmo tamanho. Ao deixar de comer seis fatias de pizza e comer somente três fatias, conforme mostra a figura acima, essa pessoa comerá menos pizza do que antes? Explique o que pensou.
2. Represente as duas pizzas inteiras na forma de fração.
3. Suponhamos que essa pessoa coma duas fatias da pizza que está dividida em 6 pedaços. Represente a fração correspondente da pizza que essa pessoa comeu.
4. Se essa mesma pessoa comer apenas uma fatia da pizza que foi dividida em 3 pedaços, que fração de pizza ela comeu?
5. A que conclusão podemos chegar a respeito das frações representadas nas letras “c” e “d”? Justifique sua resposta.

APÊNDICE E: TAREFA 6: ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

QUESTÃO 1

A professora de Júlio, Paulo, Rafael e Bruna propôs uma pequena mudança na regra do jogo “Papa Todas de Frações”.

Ela distribuiu quatro cartas para cada um deles e, com as cartas viradas sobre a mesa, solicitou que escolhessem duas cartas. Após a escolha, pediu que somassem as duas cartas e dissessem o resultado. Quem obtivesse o maior resultado ficaria com todas as cartas. Abaixo, está a tabela com as cartas que Júlio, Paulo, Rafael e Bruna escolheram para efetuarem a soma.

Faça a soma das duas cartas de cada jogador.

Nome	Carta 1	Carta 2	Soma
Júlio	$6/3$	$3/6$	
Paulo	$3/4$	$6/8$	
Rafael	$5/10$	$2/5$	
Bruna	$3/2$	$8/6$	

Fonte: Elaborado pelo autor – maio 2018

Quem ganhou essa rodada?

QUESTÃO 2

A professora de Júlio, Paulo, Rafael e Bruna, após ter mudado a regra do jogo "Papa Todas de Frações", resolveu desafiar seus alunos mais uma vez, porém, utilizando outra regra.

A nova regra seria: Escolher duas cartas e subtrair a de maior valor pela a de menor valor. Quem obtivesse o maior resultado ganharia todas as cartas.

Abaixo, está a tabela com as cartas que Júlio, Paulo, Rafael e Bruna escolheram para efetuarem a subtração.

Faça a subtração das duas cartas de cada jogador.

Nome	Carta 1	Carta 2	Diferença
Júlio	$5/3$	$2/6$	
Paulo	$6/3$	$6/9$	
Rafael	$7/3$	$3/9$	
Bruna	$2/4$	$2/8$	

Fonte: Elaborado pelo autor – maio 2018

Quem ganhou essa rodada?

ANEXO

ANEXO A:
TABELA DE TIRAS DE FRAÇÕES E CARTAS DO JOGO PAPA TODAS DE FRAÇÕES

1 inteiro															
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$														
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$													
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$												
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$											
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$										
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$									
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$								
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$							
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$						
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{6}{9}$	$\frac{10}{10}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{3}{10}$

ANEXO B: TAREFA 5:
EXPLORAÇÃO DO JOGO PAPA TODAS DE FRAÇÕES

QUESTÃO 1

Helena tirou $\frac{1}{2}$, Ellen tirou $\frac{4}{8}$, Pedro tirou $\frac{7}{7}$ e Aline ganhou a partida. Qual a carta que ela pode ter tirado?

Procure observar que há, aqui, um problema com mais de uma solução possível.

QUESTÃO 2

Durante o jogo, os alunos organizaram uma tabela com as frações que cada um tirou.

Jogador	RODADA			
	1ª	2ª	3ª	4ª
Júlia	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{7}{3}$
Paulo	$\frac{10}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{10}$
Luis	$\frac{4}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{9}$
Bia	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{2}$

Observando a tabela acima, responda:

- Quem ganhou o jogo após quatro rodadas?
- Quais as cartas que contêm frações equivalentes a 1 inteiro?
- E maiores do que 1 inteiro?

QUESTÃO 3

Em uma rodada, Paulo, Ana e Renato tiraram as seguintes cartas: $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$ e $\frac{3}{6}$.

Eles começaram a discutir sobre quem conseguiu a maior carta. Se você estivesse presente nessa discussão, como os ajudaria a tomar a melhor decisão sobre qual das três cartas tem a maior fração representada?

QUESTÃO 4

Em uma rodada, Fabiana tirou $1/5$, Alisson tirou $4/8$, Olívia tirou e $3/3$ e Raquel $5/10$.

Quem ganhou o jogo? Explique seu raciocínio.

QUESTÃO 5

Em uma rodada, Juliano virou $2/4$, Flávia virou $4/8$, Beto virou e $3/6$ e Arthur virou $1/3$.

Quem venceu a partida? Explique seu raciocínio.

QUESTÃO 6

Use a tabela com as tiras de fração e compare as semelhanças e as diferenças entre os seguintes pares de fração:

$2/4$ e $4/2$, $3/5$ e $5/3$, $9/6$ e $6/9$

FRAÇÕES	SEMELHANÇAS		DIFERENÇAS	
$2/4$ e $4/2$				
$3/5$ e $5/3$				
$9/6$ e $6/9$				

O que podemos dizer quando o numerador de uma fração é maior do que o denominador?

Fonte: Adaptado de Smole et. al. 2007

ANEXO

Anexo A – Termo de Consentimento Livre Esclarecido/ Diretor – TCLE

Pedido de autorização para realização de pesquisa

À direção da Escola ____

Sr.(a) ____

Prezado(a) Senhor(a)

O professor orientador Dr. Diogo Alves de Faria Reis, CPF __________________, e professor mestrando Gesiel Alisson Martinho, CPF_________________, da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) convidam e propõem a sua participação na pesquisa intitulada: ____
___________________________________, nos espaços da Escola.

O objetivo principal da nossa pesquisa é investigar como a ideia de equivalência de frações, com o apoio de materiais manipuláveis, pode contribuir para a compreensão das operações de adição e subtração, em estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II. Acreditamos que, com base no ensino de equivalência de frações e com materiais manipulativos, os alunos poderão apresentar um melhor aprendizado nas operações de adição e subtração de frações.

Integramos a equipe de pesquisa formada por professores e estudantes de pós-graduação da Faculdade de Educação da UFMG, e nossa pesquisa se vincula à uma pesquisa coordenada pela professora Dra. Samira Zaidan, CPF______________, cujo título é "Docência e formação do professor que ensina Matemática", aprovada pela Coep com o parecer n. 2.993.984.

O objetivo desta pesquisa é compreender como o professor da escola básica percebe o conhecimento matemático em suas práticas, suas elaborações e suas dificuldades; tratar, de modo articulado, os conceitos matemáticos com os saberes da prática e da profissão; propor conteúdos e metodologias relevantes e, teoricamente, sustentados para avançar nas práticas de ensino de matemática na escola básica e na universidade; compreender e sistematizar práticas com o uso de tecnologias; dar atenção às linguagens e mediações na docência; averiguar e analisar os entendimentos que licenciados têm quando se tornam professores, como relacionam o conhecimento matemático acadêmico com o conhecimento escolar; discutir o currículo da escola básica e o da formação docente; elaborar materiais didáticos para o professor.

Nossa metodologia de pesquisa inclui a observação de aulas e, juntamente com o(a) professor(a), a elaboração e desenvolvimento de plano de aulas, em que pretendemos desenvolver inovações para equacionar dificuldades do ensino e aprendizagem.
Embora saibamos que o projeto poderá oferecer algum incômodo, por exemplo, a nossa movimentação nos espaços da Escola, estaremos atentos para colaborar com o funcionamento. Também nos comprometemos a respeitar a organização da Escola, suas normas e calendário.

Diante das normas do Comitê de Ética da Pesquisa da UFMG, informamos que os dados coletados serão confidenciais e utilizados, unicamente, para fins desta pesquisa, podendo ser divulgados em congressos, simpósios, seminários, revistas, livros e nas dissertações do(a)s pesquisadores(as). As informações e dados obtidos serão gravados e arquivados pelos pesquisadores durante cinco anos e, logo após o cumprimento do prazo, serão destruídos. Convidaremos professores e estudantes da Escola a participarem da pesquisa, de modo voluntário. A identidade dos participantes ficará preservada por meio do uso de um nome fictício, e nenhum deles terá custo com a pesquisa.

Apresentamos, aos participantes da pesquisa, o termo de autorização. Aos estudantes menores de idade, também solicitaremos a autorização dos pais. Caso algum estudante não possa ou não queira participar da pesquisa, seja em toda ela ou em parte, não serão realizadas gravações de vídeo, e consideraremos duas alternativas: a primeira, será formado grupo à parte dos alunos autorizados, em horário alternativo, de modo a não interferir no processo escolar; a segunda, será realizada a aula com apenas o registro manual do pesquisador e/ou gravação em áudio, não incluindo a participação do aluno que não quis participar e respeitando o seu espaço na sala de aula.

Nossas ações serão conversadas e realizadas em comum acordo com o(a)s professor(a)s em suas turmas. A participação de todos os convidados será voluntária, garantida a indenização por danos em decorrência da pesquisa que, porventura, ocorram, nos termos da Lei, e o ressarcimento das despesas, diretamente, decorrentes de sua participação na pesquisa.

Apenas com a autorização da direção da Escola, dos responsáveis e dos estudantes é que acontecerá a pesquisa, ressaltando que não haverá qualquer atividade proposta que extrapole as tarefas escolares comuns; a participação não envolverá gastos de qualquer natureza, pois os custos previstos são de responsabilidade do pesquisador. Propomo-nos a realizar todos os esforços possíveis para assegurar a naturalidade dos estudantes e minimizar possíveis riscos e desconfortos. Está garantida a indenização em casos de eventuais danos, comprovadamente, decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

Em qualquer momento, a Escola poderá solicitar esclarecimento sobre quaisquer aspectos desta pesquisa por meio do telefone (31) 3409 6202 – 99291 0830 ou pelo e-mail: samira@fae.ufmg.br.

Sentindo-se esclarecida em relação à proposta e concordando em autorizar a realização da pesquisa, peço-lhe a gentileza de assinar e rubricar as páginas (duas vias, uma das quais ficará com V. Sa. e a outra será arquivada pelos pesquisadores por cinco anos, de acordo com a Resolução 466/2012).

Desde já, agradecemos a sua colaboração.

____
Diogo Alves de Faria Reis – Pesquisador responsável / Orientador

____
Gesiel Alisson Martinho – Pesquisador Corresponsável / Mestrando

( ) Concordo e autorizo a realização da pesquisa nos termos propostos.

( ) Discordo e desautorizo a realização da pesquisa.

Diretor(a): ____

Belo Horizonte ______ de ________________ de 2019.

Anexo B – Termo de Consentimento Livre Esclarecimento/ Professor

Prezado(a) Professor(a)____

O professor orientador Dr. Diogo Alves de Faria Reis, CPF ___________________, e o professor mestrando Gesiel Alisson Martinho, CPF__________________, da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) convidam e propõem a sua participação na pesquisa intitulada: ____
____________________________________, nos espaços da Escola.
.
O objetivo principal da nossa pesquisa é investigar como a ideia de equivalência de frações, com o apoio de materiais manipuláveis, pode contribuir para a compreensão das operações de adição e subtração, em estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II. Acreditamos que, com base no ensino de equivalência de frações e com materiais manipulativos, os alunos poderão apresentar um melhor aprendizado nas operações de adição e subtração de frações.

Integramos a equipe de pesquisa formada por professores e estudantes de pós-graduação da Faculdade de Educação da UFMG, e nossa pesquisa se vincula à uma pesquisa coordenada pela professora Dra. Samira Zaidan, CPF__________, cujo título é “Docência e formação do professor que ensina Matemática”, aprovada pela Coep com o parecer n. 2.993.984.

O objetivo desta pesquisa é compreender como o professor da escola básica percebe o conhecimento matemático em suas práticas, suas elaborações e suas dificuldades; tratar, de modo articulado, os conceitos matemáticos com os saberes da prática e da profissão; propor conteúdos e metodologias relevantes e, teoricamente, sustentados para avançar nas práticas de ensino de matemática na escola básica e na universidade; compreender e sistematizar práticas com o uso de tecnologias; dar atenção às linguagens e mediações na docência; averiguar e analisar os entendimentos que licenciados têm quando se tornam professores, como relacionam o conhecimento matemático acadêmico com o conhecimento escolar; discutir o currículo da escola básica e o da formação docente; elaborar materiais didáticos para o professor.

Embora saibamos que o projeto poderá oferecer algum incômodo, por exemplo, a nossa ocupação de seu tempo, estaremos atentos à realização de um compartilhamento, de modo que, ao discutir sobre o ensino da Matemática, possamos também auxiliá-lo no melhoramento da prática, em reuniões em horários marcados por você, de modo a propiciar situações em que todos se sintam à vontade para se expressarem. Acreditamos ainda que nossa proposta de pesquisa poderá colaborar com sua própria ação na sala de aula, pois nos comprometemos a lhe apresentar todos os resultados, a respeitar as normas e calendário da Escola.

Diante das normas do Comitê de Ética da Pesquisa da UFMG, informamos que os dados coletados serão confidenciais e utilizados, unicamente, para fins desta pesquisa, podendo ser divulgados em congressos, simpósios, seminários, revistas, livros e nas dissertações do(a)s pesquisadores(as). As informações e dados obtidos serão gravados e arquivados pelos pesquisadores durante cinco anos e, logo após o cumprimento do prazo, serão destruídos. Sua identidade ficará preservada por meio do uso de um nome fictício e você não terá nenhum custo com a pesquisa.

Esclarecemos, ainda, que, a qualquer momento, você poderá pedir esclarecimento sobre ela e até mesmo se recusar a continuar participando. Informamos ainda que os seus alunos serão convidados a participar de modo voluntário e receberão termo de consentimento; em caso de menores, com termo dirigido também aos pais. Caso o(a) aluno(a) não possa ou não queira participar da pesquisa, seja em toda ela ou em parte, não serão realizadas gravações de vídeo e consideraremos duas alternativas: a primeira, será formado grupo à parte dos alunos autorizados, em horário alternativo, de modo a não interferir no processo escolar; a segunda, será realizada a aula com apenas o registro manual do pesquisador e/ou gravação em áudio, não incluindo a participação do aluno que não quis participar e respeitando o seu espaço na sala de aula. A participação de todos os convidados será voluntária, garantida a indenização por danos em decorrência da pesquisa que, porventura, ocorram, nos termos da Lei, e o ressarcimento das despesas, diretamente, decorrentes de sua participação na pesquisa.

Desde já, agradecemos a sua colaboração.

Caso você concorde em participar da pesquisa, pedimos que preencha o termo abaixo e assine este documento.

_______________________________	_______________________________
Diogo Alves de Faria Reis – Pesquisador responsável / Orientador	Gesiel Alisson Martinho – Pesquisador Corresponsável / Mestrando

Eu, ____,

RG ___________________________, declaro que fui consultado(a) pelos responsáveis pelo projeto de pesquisa, Diogo Alves de Faria Reis, e-mail: diogofaria.ufmg@gmail.com, telefone ________________ e Gesiel Alisson Martinho, e-mail: gesielalisson@yahoo.com.br, telefone ________________, e respondi positivamente à sua demanda de realizar a pesquisa nas minhas aulas e atividades didáticas. Entendi as informações fornecidas pelos pesquisadores e sinto-me esclarecido(a) para participar, com liberdade para manifestar minha adesão ou não ao projeto, sem qualquer prejuízo. Assim, concordo em participar da pesquisa, com meu consentimento livre e esclarecido.

Belo Horizonte, _________ de _________________________ de 2019.

____

Assinatura do(a) Professor(a)

O pesquisador me informou que o projeto foi encaminhado para o Comitê de Ética em Pesquisa – Coep da UFMG, vinculado à Pró-Reitoria de Pesquisa – PRPq, e que, em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos desta pesquisa, poderei consultar na Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha – Belo Horizonte – MG – CEP 31270-901 Unidade Administrativa II – 2° Andar – Sala: 2005. Telefone: (031) 3409-4592 – E-mail: coep@prpq.ufmg.br

PEDIMOS A SUA RUBRICA NA PRIMEIRA E SEGUNDA PÁGINA DESTE TERMO.

Anexo C – Termo de Consentimento Livre Esclarecimento/ Aluno (a)

Prezados alunos da turma _________ da Escola ____________________________.

Nome – ____

O professor orientador Dr. Diogo Alves de Faria Reis, CPF _____________, e professor mestrando Gesiel Alisson Martinho, CPF ________________, da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) convidam e propõem a sua participação na pesquisa intitulada: ____, nos espaços da Escola.

O objetivo principal da nossa pesquisa é investigar como a ideia de equivalência de frações, com o apoio de materiais manipuláveis, pode contribuir para a compreensão das operações de adição e subtração, em estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II. Acreditamos que, com base no ensino de equivalência de frações e com materiais manipulativos, os alunos poderão apresentar um melhor aprendizado nas operações de adição e subtração de frações.

Integramos a equipe de pesquisa formada por professores e estudantes de pós-graduação da Faculdade de Educação da UFMG, e nossa pesquisa se vincula à uma pesquisa coordenada pela professora Dra. Samira Zaidan, CPF_________________, cujo título é "Docência e formação do professor que ensina Matemática", aprovada pela Coep com o parecer n. 2.993.984.

O objetivo desta pesquisa é compreender como o professor da escola básica percebe o conhecimento matemático em suas práticas, suas elaborações e suas dificuldades; tratar, de modo articulado, os conceitos matemáticos com os saberes da prática e da profissão; propor conteúdos e metodologias relevantes e, teoricamente, sustentados para avançar nas práticas de ensino de matemática na escola básica e na universidade; compreender e sistematizar práticas com o uso de tecnologias; dar atenção às linguagens e mediações na docência; averiguar e analisar os entendimentos que licenciados têm quando se tornam professores, como relacionam o conhecimento matemático acadêmico com o conhecimento escolar; discutir o currículo da escola básica e o da formação docente; elaborar materiais didáticos para o professor.

Faremos observações de aulas e/ou participaremos, junto com o(a) professor(a), de aulas, previamente, elaboradas, visando à aprendizagem de conteúdos da Matemática. Poderemos filmar ou gravar em áudio estas aulas e esperamos que você possa participar naturalmente das aulas. Embora saibamos que o projeto poderá oferecer algum incômodo, por exemplo a sua inibição na aula, estaremos atentos para que todos fiquem à vontade ou mesmo para que não participe. Pensamos que nossa pesquisa possa apoiar a escola e o professor, e auxiliar o melhoramento do ensino da Matemática.

Diante das normas do Comitê de Ética da Pesquisa da UFMG, informamos que os dados coletados serão confidenciais e utilizados unicamente para fins desta pesquisa, podendo ser divulgadas em congressos, simpósios, seminários, revistas, livros e nas dissertações do(a)s pesquisadores(as). As informações e dados obtidos serão gravados e arquivados pelos pesquisadores durante cinco anos e, logo após o cumprimento do prazo, serão destruídos. Sua identidade ficará preservada por meio do uso de um nome fictício e você não terá nenhum custo com a pesquisa. Esclarecemos, ainda, que a qualquer momento você poderá conversar sobre a pesquisa, solicitar esclarecimentos sobre ela e até mesmo se recusar a continuar participando. Caso você não possa ou não queira participar da pesquisa, seja em toda ela ou em parte, não serão realizadas gravações de vídeo e consideraremos duas alternativas: a primeira, será formado grupo à parte dos alunos autorizados, em horário alternativo, de modo a não interferir no processo escolar; a segunda, será realizada a aula com apenas o registro manual do pesquisador e/ou gravação em áudio, não incluindo a sua participação e respeitando o seu espaço na sala de aula.

A participação de todos os convidados será voluntária, garantida a indenização por danos em decorrência da pesquisa que, porventura, ocorram, nos termos da Lei, e o ressarcimento das despesas, diretamente, decorrentes de sua participação na pesquisa.

Desde já, agradecemos a sua colaboração.

Caso você concorde em participar da pesquisa, pedimos que preencha o termo abaixo e assine este documento.

______________________________	______________________________
Diogo Alves de Faria Reis – Pesquisador responsável / Orientador	Gesiel Alisson Martinho – Pesquisador Corresponsável / Mestrando

Eu, ____,

RG __________________________, declaro que fui consultado(a) pelos responsáveis pelo projeto de pesquisa, Diogo Alves de Faria Reis, telefone________________ e Gesiel Alisson Martinho, telefone_________________, e aceito participar desta pesquisa. Entendi as informações fornecidas pelos pesquisadores e sinto-me esclarecido(a) para participar. Terei liberdade para manifestar minha adesão ou não ao projeto, sem qualquer prejuízo. Assim, dou meu consentimento livre e esclarecido.

Belo Horizonte, _________ de ________________________ de 2019.

____

Assinatura do(a) Aluno(a)

O pesquisador me informou que o projeto foi encaminhado para o Comitê de Ética em Pesquisa – Coep da UFMG, vinculado à Pró-Reitoria de Pesquisa – PRPq, e que, em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos desta pesquisa, poderei consultar na Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha – Belo Horizonte – MG – CEP 31270-901 Unidade Administrativa II – 2° Andar – Sala: 2005. Telefone: (031) 3409-4592 – E-mail: coep@prpq.ufmg.br.

PEDIMOS A SUA RUBRICA NA PRIMEIRA E SEGUNDA PÁGINA DESTE TERMO.

Anexo D – Termo de Consentimento Livre Esclarecimento/ Pais (a)

Prezados pais e/ou responsáveis pelo(a) aluno(a) ______________________________________ da turma_________ da Escola Estadual Menino Jesus de Praga.

O professor orientador Dr. Diogo Alves de Faria Reis, CPF _____________, e professor mestrando Gesiel Alisson Martinho, CPF ________________, da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) convidam e propõem a sua participação na pesquisa intitulada: ____, nos espaços da Escola.

O objetivo principal da nossa pesquisa é investigar como a ideia de equivalência de frações, com o apoio de materiais manipuláveis, pode contribuir para a compreensão das operações de adição e subtração, em estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II. Acreditamos que, com base no ensino de equivalência de frações e com materiais manipulativos, os alunos poderão apresentar um melhor aprendizado nas operações de adição e subtração de frações.

Integramos a equipe de pesquisa formada por professores e estudantes de pós-graduação da Faculdade de Educação da UFMG e nossa pesquisa se vincula à uma pesquisa coordenada pela professora Dra. Samira Zaidan, CPF__________, cujo título é “Docência e formação do professor que ensina Matemática”, aprovada pela Coep com o parecer n. 2.993.984.

O objetivo desta pesquisa é compreender como o professor da escola básica percebe o conhecimento matemático em suas práticas, suas elaborações e suas dificuldades; tratar de modo articulado os conceitos matemáticos com os saberes da prática e da profissão; propor conteúdos e metodologias relevantes e, teoricamente, sustentados para avançar nas práticas de ensino de matemática na escola básica e na universidade; compreender e sistematizar práticas com o uso de tecnologias; dar atenção às linguagens e mediações na docência; averiguar e analisar os entendimentos que licenciados têm quando se tornam professores, como relacionam o conhecimento matemático acadêmico com o conhecimento escolar; discutir o currículo da escola básica e o da formação docente; elaborar materiais didáticos para o professor.

Faremos observações de aulas e/ou participaremos, junto com o(a) professor(a), de aulas, previamente, elaboradas, visando à aprendizagem de conteúdos da Matemática. Poderemos filmar ou gravar, em áudio, estas aulas. Embora saibamos que o projeto poderá oferecer algum incômodo às crianças, por exemplo, a sua inibição na aula, estaremos atentos para que todos fiquem à vontade ou até para que não participe. Pensamos que nossa pesquisa possa apoiar a escola e o professor, e auxiliar o melhoramento do ensino da Matemática.

Diante das normas do Comitê de Ética da Pesquisa da UFMG, informamos que os dados coletados serão confidenciais e utilizados, unicamente, para fins desta pesquisa, podendo ser divulgados em congressos, simpósios, seminários, revistas, livros e nas dissertações do(a)s pesquisadores(as). As informações e dados obtidos serão gravados e arquivados pelos pesquisadores durante cinco anos e, logo após o cumprimento do prazo, serão destruídos. A identidade da criança ficará preservada por meio do uso de um nome fictício e você não terá nenhum custo com a pesquisa. Esclarecemos, ainda, que a qualquer momento você poderá conversar sobre a pesquisa, solicitar esclarecimentos sobre ela e até mesmo recusar a continuidade da participação da criança.

Caso você não possa ou não queira a participação de seu (sua) filho(a) na pesquisa, seja em toda ela ou em parte, não serão realizadas gravações de vídeo e consideraremos duas alternativas: a primeira, será formado grupo à parte dos alunos autorizados, em horário alternativo, de modo a não interferir no processo escolar; a segunda, será realizada a aula com apenas o registro manual do pesquisador e/ou gravação em áudio, não incluindo a participação do(a) seu (sua) filho (a) e respeitando o seu espaço na sala de aula.

A participação de todos os convidados será voluntária, garantida a indenização por danos em decorrência da pesquisa que, porventura, ocorram, nos termos da Lei, e o ressarcimento das despesas, diretamente, decorrentes de sua participação na pesquisa.

Desde já, agradecemos a sua colaboração.

Caso você concorde com a participação de seu (sua) filho(a) na pesquisa, pedimos que preencha o termo abaixo e assine este documento.

______________________________	______________________________
Diogo Alves de Faria Reis – Pesquisador responsável / Orientador	Gesiel Alisson Martinho – Pesquisador Corresponsável / Mestrando

Eu,____,

RG__________________________, declaro que fui consultado(a) pelos responsáveis pelo projeto de pesquisa, Diogo Alves de Faria Reis, e-mail: diogofaria.ufmg@gmail.com, telefone_________________, e Gesiel Alisson Martinho, e-mail: gesielalisson@yahoo.com.br, telefone_________________, e autorizo a participação do meu/minha filho(a) nesta pesquisa. e respondo, positivamente, à sua demanda de realizar a coleta de dados, conforme explicado acima. Terei liberdade para desistir do projeto a qualquer momento, sem qualquer prejuízo para mim ou meu (minha) filho (a). Entendi as informações fornecidas pelos pesquisadores, sinto-me esclarecido (a) para participar da pesquisa e/ou autorizar o (a) meu (minha) filho (a) a participar e registro meu consentimento livre e esclarecido.

Belo Horizonte, ______ de ________________________ de 2019.

____
Assinatura do(a) pai, mãe ou responsável pelo aluno(a)

O pesquisador me informou que o projeto foi encaminhado para o Comitê de Ética em Pesquisa – Coep da UFMG, vinculado à Pró-Reitoria de Pesquisa – PRPq, e que em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos desta pesquisa, poderei consultar na Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha – Belo Horizonte – MG – CEP 31270-901 Unidade Administrativa II – 2° Andar – Sala: 2005. Telefone: (031) 3409-4592 – E-mail: coep@prpq.ufmg.br.

PEDIMOS A SUA RUBRICA NA PRIMEIRA E SEGUNDA PÁGINA DESTE TERMO

Anexo E – Tarefa 6

Tema: Jogo “Papa todas de frações”

Tempo estimado: 50 minutos

Objetivo: Auxiliar os estudantes a compreender o conceito de fração, comparar frações com diferentes denominadores, ter noção de equivalência de frações e efetuar a leitura e a representação de frações.

Recurso necessário: Um baralho de frações com 32 cartas e uma tabela com tiras de frações.

Metodologia: Organizar os estudantes em grupos de três ou quatro, distribuir cartas igualmente para cada um, entregar a tabela com tiras de frações e explicar as regras do jogo. As regras devem estar bem definidas antes de iniciar o jogo. (não sugerimos duplas porque o jogo perde o sentido de desafio).

Orientação quanto às regras:

- Todas as cartas do baralho serão distribuídas entre os jogadores, que não veem suas cartas. Cada jogador coloca suas cartas em uma pilha com os números virados para baixo, como suporte ao jogo.
- A tabela com as tiras de frações é colocada no centro da mesa, de modo que todos a vejam.
- Os jogadores combinam, entre si, um sinal ou uma palavra. Dado o sinal, todos os jogadores viram a carta de cima de sua pilha ao mesmo tempo e comparam as frações. O jogador que tiver a carta representando a maior fração vence a rodada e fica com todas as cartas, ou seja, “papa-todas”.
- As cartas que o jogador ganha em uma rodada não podem ser utilizadas nas rodadas seguintes.
- A tabela de tiras de frações pode ser usada, se necessário, para que as comparações sejam feitas.
- Se houver duas cartas de mesmo valor, todas as cartas ficam na mesa e, na próxima rodada, o jogador com a maior carta “papa-todas”, inclusive aquelas que ficaram na mesa.

- O jogo termina quando as cartas acabarem.
- O jogador com o maior número de cartas vence o jogo.

Anexo F - Tarefa 7

Tema: Exploração do jogo "Papa todas de frações"

Tempo estimado: 50 minutos

Objetivo: Auxiliar os estudantes a compreender o conceito de fração, comparar frações com diferentes denominadores, ter noção de equivalência de frações e efetuar a resolução de problemas que envolvam frações.

Metodologia: Propor três problemas após o jogo "Papa todas de frações". Organizar a turma em grupos para que possam discutir os problemas propostos. Além disso, entregar o kit de frações no quadriculado e o tabuleiro do jogo para que os estudantes possam utilizá-los como recurso (caso tenham necessidade). É interessante que todos os problemas sejam questionados antes de um resultado final.

Questões

1) Helena tirou $\frac{1}{2}$, Ellen tirou $\frac{4}{8}$, Pedro tirou $\frac{7}{7}$ e Aline ganhou a partida. Qual carta ela pode ter tirado?

(Procure observar que há aqui, um problema com mais de uma solução possível).

2) Durante o jogo, os alunos organizaram uma tabela com as frações que cada um tirou.

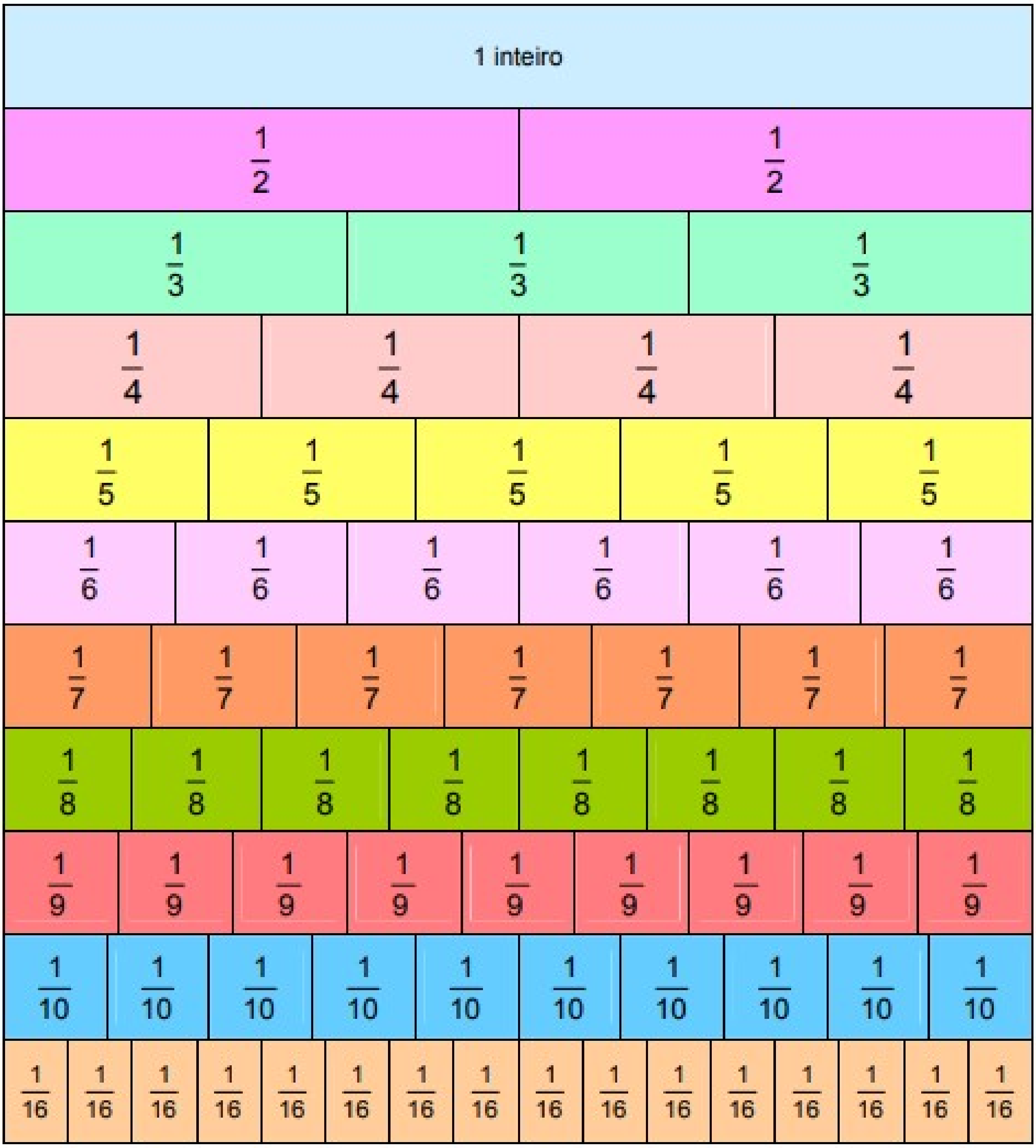
Jogador	**1ª rodada**	**2ª rodada**	**3ª rodada**	**4ª rodada**
Júlia	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{7}{3}$
Paulo	$\frac{10}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{10}$
Luís	$\frac{4}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{9}$
Bia	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{2}$

Observando a tabela acima, responda:

a) Quem ganhou o jogo após quatro rodadas?
b) Quais as cartas que contêm frações equivalentes a 1 inteiro?
c) E maiores do que 1 inteiro?

3) Em uma rodada, Paulo, Ana e Renato tiraram as seguintes cartas: $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$ e $\frac{3}{6}$. Eles começaram a discutir sobre quem conseguiu a maior carta. Se você estivesse presente nessa discussão, como os ajudaria a tomar a melhor decisão sobre qual das três cartas tem a maior fração representada?

Anexo G – Tabela de tiras de frações



Anexo H – Cartas do jogo Papa Todas de Frações