

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

Juliano dos Santos Becho

**Método dos Elementos Finitos Posicional em análise viscoelástica:
Elementos de pórtico com cinemática de Reissner**

2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

"MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL EM ANÁLISE VISCOELÁSTICA: ELEMENTOS DE PÓRTICO COM CINEMÁTICA DE REISSNER "

Juliano dos Santos Becho

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Doutor em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Greco - DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Estevam Barbosa de Las Casas - DEES - UFMG

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros - DEES - UFMG

Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel - UFRN

Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado - UFPR

Belo Horizonte, 10 de novembro de 2020



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Greco, Professor do Magistério Superior**, em 10/11/2020, às 13:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Felicio Bruzzi Barros, Membro de comissão**, em 10/11/2020, às 13:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Estevam Barbosa de Las Casas, Diretor(a)**, em 17/11/2020, às 14:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Roberto Dalledone Machado, Usuário Externo**, em 18/11/2020, às 10:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Daniel Nelson Maciel, Usuário Externo**, em 26/11/2020, às 14:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0336724** e o código CRC **24A7C665**.

B391m

Becho, Juliano dos Santos.

Método dos elementos finitos posicional em análise viscoelástica
[recurso eletrônico] : elementos de pórtico com cinemática de Reissner /
Juliano dos Santos Becho. - 2020.

1 recurso online (xvii, 221 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Marcelo Greco.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais,
Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 218-221.

Bibliografia: f. 210-217.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Viscoelasticidade - Teses.
3. Método dos elementos finitos - Teses. I. Greco, Marcelo. II.
Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)

AGRADECIMENTOS

A Deus pelas oportunidades.

Aos meus queridos pais Mario e Rita, pela segurança, confiança e incentivo.

Aos meus estimados irmãos Aline e Jacyr, pelo companheirismo.

À minha amada esposa Pollyanna, pelo amor, cumplicidade e apoio.

Aos bons amigos feitos no DEES pela convivência.

Ao Professor Marcelo Greco, pela orientação e paciência ao longo desses anos.

Aos membros da banca de avaliação, professores Estevam Barbosa de Las Casas, Felício Bruzzi Barros, Daniel Nelson Maciel e Roberto Dalledone Machado, pelas valiosas contribuições para melhoria da tese. Em especial ao Professor Daniel Nelson Maciel, pelo compartilhamento do código computacional referente à cinemática de Reissner.

Aos professores e funcionários do DEES e do PROPEEs, pela excelência nos serviços prestados.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro concedido por meio da bolsa de estudos.

“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar.

Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota”.

(Madre Teresa de Calcutá)

RESUMO

Apresenta-se o desenvolvimento de uma formulação numérica capaz de descrever o comportamento mecânico viscoelástico em elementos de pórtico plano, considerando-se os efeitos do cisalhamento. O desenvolvimento se baseia na formulação posicional do Método dos Elementos Finitos, a qual é fundamentada em conceitos variacionais do Princípio da Mínima Energia Potencial Total. Desenvolvida para analisar problemas com não linearidades físicas e geométricas, a formulação adotada considera as posições nodais, ao invés dos deslocamentos nodais, em relação a um sistema de referência Lagrangiano Total, para descrever a cinemática dos elementos finitos. No presente estudo a não linearidade física considerada refere-se à descrição do comportamento viscoelástico. A qual é avaliada através da adoção de relações tensão-deformação adequadas à resposta do material e deduzidas a partir de modelos reológicos. A fim de considerar os efeitos do cisalhamento no comportamento viscoelástico, de uma forma original, são adotados elementos de pórtico plano com cinemática de Reissner. Essa abordagem proporciona o desacoplamento entre o giro das seções transversais e os deslocamentos. Adicionalmente, para avaliar a contribuição do comportamento viscoelástico ao longo da altura e em função do nível de tensão, é adotada uma abordagem de parametrização da altura que possibilita considerar a seção transversal como laminada. Utilizando-se a formulação desenvolvida é apresentada uma análise paramétrica a fim de avaliar a consistência e a sensibilidade da formulação. A partir desta análise é possível concluir que os resultados obtidos estão de acordo com a teoria da viscoelasticidade e com o comportamento esperado para os modelos reológicos adotados. Na sequência, a formulação desenvolvida é utilizada em alguns exemplos e aplicações práticas. Os resultados numéricos obtidos são, então, comparados aos resultados analíticos e experimentais disponíveis na literatura. A partir dos resultados obtidos é possível observar que, adotando-se a cinemática de Reissner, as deformações e os deslocamentos devido ao comportamento viscoelástico podem ser significativamente maiores em relação aos obtidos adotando-se a cinemática de Bernoulli-Euler. Além disso, é possível verificar uma melhor adequação dos resultados numéricos em relação aos resultados experimentais quando se adota a cinemática de Reissner. Dessa forma, é possível observar que a utilização da cinemática de Reissner na formulação desenvolvida permite avaliar os efeitos do cisalhamento no comportamento viscoelástico e que tais efeitos podem ser significativos e não devem ser negligenciados sem uma prévia avaliação.

Palavras-chaves: Viscoelasticidade, Método dos Elementos Finitos Posicional, Cinemática de Reissner, Modelos Reológicos, Fluência.

ABSTRACT

This research presents the development of a numerical formulation capable of describing creep viscoelastic mechanical behavior of frame elements accounting shear effects. It is based on the positional formulation of the Finite Element method, which is grounded on the variational concepts of the Minimum Total Potential Energy Principle. Developed to analyze problems with physical and geometrical nonlinearities, the adopted formulation considers the position of the nodes instead of nodal displacements in relation to a Total Lagrangian reference system to describe the kinematics of the finite elements. In the present study, the physical nonlinearity is related to the description of viscoelastic behavior by adopting stress-strain relations that are adequate to the response of the material and inferred based on rheological models. In order to consider the shear effects on viscoelastic mechanical behavior, frame elements with Reissner kinematics are adopted in developing the formulation. This consideration enables the decoupling between the rotation of cross sections and the displacements. Additionally, to enable the assessment of the contribution of the viscoelastic behavior along the height and depending on the stress level, a height parameterization approach is adopted that makes it possible to consider the cross section as laminated. A parametric analysis is presented in order to assess the consistency and sensitivity of the developed formulation. Based on this analysis, it is possible to observe that the obtained results are in agreement with the theory of viscoelasticity and with the expected behavior of the adopted rheological models. Next, the developed formulation is used in some examples and practical applications. The obtained numerical results are then compared to the analytical and experimental results that are available in the literature. Based on the produced results, it is possible to observe that, by adopting Reissner kinematics, the strains and displacements due viscoelastic behavior can be significantly greater compared to those obtained by adopting the Bernoulli-Euler kinematics. Furthermore, it is possible to verify an improvement in adapting the numerical results in relation to the experimental results when Reissner kinematics is adopted. Thus, it is possible to observe that the use of Reissner kinematics in the developed formulation allows to evaluate the shear effects on viscoelastic behavior and that these effects can be significant and should not be neglected without prior evaluation.

Keywords: *Viscoelasticity, Positional Finite Element Method, Reissner kinematics, Rheological Model, Creep.*

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS.....	i
RESUMO	ii
<i>ABSTRACT</i>	iii
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS	xiv
1. Introdução	1
1.1 Objetivo.....	5
1.2 Justificativa	6
1.3 Metodologia e organização do texto	7
2. Revisão bibliográfica.....	10
2.1 Comportamento viscoelástico	10
2.2 Método dos Elementos Finitos Posicional	25
3. Formulação posicional geral	36
3.1 Função mudança de configuração	37
3.2 Tensor gradiente de deformação	38
3.3 Medida de deformação	42
3.4 Energia de deformação.....	47
3.5 Princípio da Mínima Energia Potencial Total	53
4. Modelos e relações reológicas.....	60
4.1 Considerações gerais	61
4.2 Modelo de Kelvin-Voigt	64
4.2.1 Fluência no modelo de Kelvin-Voigt	66
4.2.2 Relaxação no modelo de Kelvin-Voigt	69
4.3 Modelo de Boltzmann	69
4.3.1 Fluência no modelo de Boltzmann.....	72
4.3.2 Relaxação no modelo de Boltzmann	75
4.4 Modelo de Zener	77
4.4.1 Fluência no modelo de Zener	80
4.4.2 Relaxação no modelo de Zener	82
5. Formulação posicional para elementos de pórtico com cinemática de Reissner.....	86
5.1 Mapeamento e discretização do domínio	87

5.2	Tensor gradiente de deformação	92
5.3	Medida de deformação	93
5.4	Energia de deformação	96
5.4.1	Energia de deformação para o modelo de Kelvin-Voigt	98
5.4.2	Energia de deformação para o modelo de Boltzmann	99
5.4.3	Energia de deformação para o modelo de Zener	100
5.5	Procedimentos numéricos adicionais	102
5.5.1	Procedimentos para avaliação das taxas de deformação e tensão	102
5.5.2	Procedimentos para consideração de seções transversais laminadas	104
5.5.3	Procedimento para evitar divergência em função do passo de tempo adotado	108
6.	Formulação posicional para elementos de pórtico com cinemática de Bernoulli-Euler	122
6.1	Mapeamento	123
6.2	Medida de deformação	127
6.3	Energia de deformação	129
6.3.1	Energia de deformação para o modelo de Kelvin-Voigt	131
6.3.2	Energia de deformação para o modelo de Boltzmann	132
6.3.3	Energia de deformação para o modelo de Zener	133
7.	Análises, exemplos e aplicações	135
7.1	Análise da influência dos parâmetros	135
7.1.1	Influência do módulo de elasticidade E_1	137
7.1.2	Influência do módulo de elasticidade E_2	139
7.1.3	Influência do módulo de viscosidade η	141
7.1.4	Influência do coeficiente de Poisson ν	144
7.1.5	Comparação entre os modelos reológicos e correlação entre seus parâmetros	146
7.1.6	Influência do número de pontos de Gauss ao longo do comprimento	151
7.1.7	Influência do número de pontos de Gauss ao longo da altura	153
7.1.8	Influência do número de elementos finitos (discretização espacial)	154
7.1.9	Influência do passo de tempo adotado (discretização temporal)	155
7.2	Exemplos gerais	157
7.2.1	Vigas curtas sob flexão de três pontos	157
7.2.2	Barra tracionada	163
7.2.3	Viga em balanço	166
7.2.4	Viga biapoiada com força uniformemente distribuída	168
7.2.5	Vaso de pressão cilíndrico	170
7.3	Aplicações práticas e exemplos de calibração	174
7.3.1	Exemplo de calibração com base em ensaios de fluência à tração	174

7.3.1.1	Técnica de ajuste dos parâmetros.....	176
7.3.1.2	Metodologia de calibração da formulação	180
7.3.1.3	Ensaio de fluência à tração de longa duração.....	184
7.3.1.4	Teste de fluência à tração em dois níveis de tensão	189
7.3.2	Painel sanduiche.....	191
7.3.3	Pórtico plano constituído por material polimérico reforçado com fibra de vidro	196
7.3.4	Viga constituída por material polimérico reforçado com fibra de vidro	202
8.	Considerações finais.....	206
8.1	Conclusões	206
8.2	Sugestões para trabalhos futuros	209
	REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS	210
	APÊNDICE – Deformação não linear de engenharia	218

LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1: Resposta mecânica de materiais sólidos ao longo do tempo	11
Figura 2-2: (a) Fenômeno de fluência; (b) Fenômeno de relaxação.....	12
Figura 2-3: Estágios do fenômeno de fluência	13
Figura 3-1: Mudança de configuração de um corpo deformável.....	38
Figura 3-2: Mapeamento das configurações indeformada e deformada.....	41
Figura 3-3: Estiramento de um elemento de linha.....	43
Figura 3-4: Distorção entre dois elementos de linha	45
Figura 3-5: Esquema representativo do processo iterativo do Método de Newton-Raphson (controle de força).....	57
Figura 3-6: Algoritmo referente ao Método dos Elementos Finitos Posicional.....	58
Figura 4-1: Curva de deformação ao longo do tempo	61
Figura 4-2: (a) Elemento elástico; (b) Elemento viscoso	61
Figura 4-3: Modelo generalizado de Maxwell (Argyris <i>et al.</i> , 1991).....	64
Figura 4-4: Modelo generalizado de Kelvin-Voigt (Argyris <i>et al.</i> , 1991)	64
Figura 4-5: Modelo reológico de Kelvin-Voigt.....	65
Figura 4-6: Representação da fluência pelo modelo reológico de Kelvin-Voigt	67
Figura 4-7: Representação da relaxação pelo modelo reológico de Kelvin-Voigt.....	69
Figura 4-8: Modelo reológico de Boltzmann	70
Figura 4-9: Representação da fluência pelo modelo reológico de Boltzmann	74
Figura 4-10: Representação da relaxação pelo modelo reológico de Boltzmann.....	76
Figura 4-11: Modelo reológico de Zener.....	78
Figura 4-12: Representação da fluência pelo modelo reológico de Zener	81
Figura 4-13: Representação da relaxação pelo modelo reológico de Zener.....	84
Figura 5-1: Parametrização da geometria de um elemento de pórtico plano com cinemática de Reissner.....	87
Figura 5-2: Direções de deformação na transformação da configuração indeformada para a configuração deformada com auxílio do espaço adimensional	94
Figura 5-3: Interpretação esquemática dos modelos desacoplados	102
Figura 5-4: Malha de integração bidimensional	104
Figura 5-5: Seção transversal laminada.....	107

Figura 5-6: Barra tracionada.....	109
Figura 5-7: Evolução do vetor de correção das posições nodais e do vetor dos resíduos para $\Delta t = 12$ s	111
Figura 5-8: Evolução do vetor de correção das posições nodais e do vetor dos resíduos para $\Delta t = 11$ s	111
Figura 5-9: Evolução do vetor de correção das posições nodais e do vetor dos resíduos para $\Delta t = 10$ s	111
Figura 5-10: Evolução do vetor de correção das posições nodais e do vetor dos resíduos para $\Delta t = 9$ s	111
Figura 5-11: Processo iterativo no gráfico Posição x Tempo.....	112
Figura 5-12: Processo iterativo no gráfico Força x Posição	113
Figura 5-13: Relação entre passo de tempo, tempo de retardo e deformação possível.....	116
Figura 5-14: Processo iterativo para o caso de $\Delta t > t\varepsilon$	117
Figura 5-15: Processo iterativo para o caso de $\Delta t < t\varepsilon$	117
Figura 5-16: Procedimento simplificado para evitar o problema de divergência no processo iterativo	120
Figura 5-17: Processo iterativo no gráfico Força externa x Posição	121
Figura 6-1: Parametrização da geometria de um elemento de pórtico plano com cinemática de Bernoulli-Euler	123
Figura 6-2: Parametrização da medida de deformação	127
Figura 7-1: Barra tracionada.....	136
Figura 7-2: Viga biapoiada com força vertical centrada	136
Figura 7-3: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_1	137
Figura 7-4: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_1	137
Figura 7-5: (a) Deslocamento axial absoluto e (b) deslocamento axial relativo da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_1	138
Figura 7-6: (a) Deslocamento transversal absoluto e (b) deslocamento transversal relativo no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_1	138
Figura 7-7: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_2	139

Figura 7-8: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_2	139
Figura 7-9: (a) Deslocamento axial absoluto e (b) deslocamento axial relativo da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_2	140
Figura 7-10: (a) Deslocamento transversal absoluto e (b) deslocamento transversal relativo no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_2	140
Figura 7-11: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do módulo de viscosidade η	141
Figura 7-12: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do módulo de viscosidade η	142
Figura 7-13: (a) Deslocamento axial absoluto e (b) deslocamento axial relativo da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do módulo de viscosidade η	142
Figura 7-14: (a) Deslocamento transversal absoluto e (b) deslocamento transversal relativo no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do módulo de viscosidade η	142
Figura 7-15: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do coeficiente de Poisson ν	144
Figura 7-16: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do coeficiente de Poisson ν	144
Figura 7-17: (a) Deslocamento transversal absoluto e (b) deslocamento transversal relativo no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do coeficiente de Poisson ν	145
Figura 7-18: Respostas dos diferentes modelos para o caso da barra tracionada.....	147
Figura 7-19: Respostas dos diferentes modelos para o caso da viga biapoiada	147
Figura 7-20: Correlação entre os parâmetros dos diferentes modelos adotados	151
Figura 7-21: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do número de pontos de Gauss ao longo do comprimento dos elementos	152
Figura 7-22: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do número de pontos de Gauss ao longo do comprimento dos elementos	152

Figura 7-23: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do número de pontos de Gauss ao longo da altura dos elementos.....	153
Figura 7-24: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do número de pontos de Gauss ao longo da altura dos elementos.....	153
Figura 7-25: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do número de elementos	154
Figura 7-26: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do número elementos	155
Figura 7-27: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do passo de tempo adotado	156
Figura 7-28: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do passo de tempo adotado	156
Figura 7-29: Viga biapoiada com força centrada	158
Figura 7-30: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função da relação altura/vão, utilizando-se duas cinemáticas distintas	159
Figura 7-31: Aumento percentual nos deslocamentos devido aos efeitos do cisalhamento em função da relação altura/vão	161
Figura 7-32: Aumento percentual nos deslocamentos devido aos efeitos do comportamento viscoelástico em função da relação altura/vão e em diferentes instantes de tempo	161
Figura 7-33: Aumento percentual nos deslocamentos devido aos efeitos simultâneos do cisalhamento e do comportamento viscoelástico em função da relação altura/vão e em diferentes instantes de tempo	162
Figura 7-34: Barra tracionada.....	163
Figura 7-35: Deslocamentos axiais ao longo do tempo em função do passo de tempo e considerando-se o modelo reológico de Kelvin-Voigt	164
Figura 7-36: Deslocamentos axiais ao longo do tempo em função do passo de tempo e considerando-se o modelo reológico de Boltzmann.....	165
Figura 7-37: Processos de deformação e recuperação respectivamente com os modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann.....	166
Figura 7-38: Viga em balanço	166
Figura 7-39: Deslocamentos verticais da extremidade livre em processo de deformação e recuperação respectivamente com os modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann	167

Figura 7-40: Viga biapoiada.....	168
Figura 7-41: Deslocamentos verticais no meio do vão com os modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann.....	170
Figura 7-42: Cilindro sob pressão interna uniforme.....	171
Figura 7-43: Discretização da geometria em elementos de placa (Mesquita e Coda, 2002)..	172
Figura 7-44: Discretização da geometria em elementos de pórtico.....	172
Figura 7-45: Deslocamento radial ao longo do tempo considerando-se o modelo se Kelvin-Voigt	173
Figura 7-46: Deslocamento radial ao longo do tempo considerando-se o modelo Boltzmann	173
Figura 7-47: Corpo de prova de PEAD, dimensões em [mm] (Liu, 2007)	174
Figura 7-48: Resultados de ensaios de fluência à tração em corpos de prova de PEAD (adaptado de Liu, 2007).....	175
Figura 7-49: Resultados numéricos ajustados e resultados experimentais dos ensaios de fluência à tração do PEAD	179
Figura 7-50: Curva referente ao módulo de elasticidade E_1 em função do nível de tensão ...	181
Figura 7-51: Curva referente ao módulo de elasticidade E_2 em função do nível de tensão ...	181
Figura 7-52: Curva referente ao módulo de viscosidade η em função do nível de tensão	181
Figura 7-53: Resultados numéricos calibrados, resultados numéricos ajustados e resultados experimentais dos ensaios de fluência à tração do PEAD	182
Figura 7-54: Resultados numéricos calibrados e resultados experimentais de ensaios de fluência à tração do PEAD	183
Figura 7-55: Resultados numéricos calibrados e resultados experimentais do ensaio de fluência à tração de 7 dias sob tensão de 6,89 MPa.....	184
Figura 7-56: Resultados numéricos calibrados, resultados numéricos ajustados e resultados experimentais do ensaio de fluência à tração de 7 dias sob tensão de 6,89 MPa	185
Figura 7-57: Resultados referentes a 1 dia de ensaio	187
Figura 7-58: Resultados referentes a 7 dias de ensaio.....	188
Figura 7-59: Resultados numéricos calibrados, resultados numéricos ajustados, previsão pela Lei de Findley e resultados experimentais do ensaio de fluência à tração de 7 dias sob tensão de 6,89 MPa	189
Figura 7-60: Resultados numéricos calibrados e resultados experimentais do teste de fluência à tração com dois níveis de tensão (5,25 MPa e 8,31 MPa).....	190

Figura 7-61: Resultados numéricos calibrados e resultados experimentais do teste de fluência à tração com dois níveis de tensão (10,59 MPa e 5,35 MPa).....	191
Figura 7-62: Características geométricas do painel sanduiche.....	192
Figura 7-63: Resultados numéricos e resultados experimentais referentes à flecha total no meio do vão ao longo do tempo.....	194
Figura 7-64: Resultados numéricos e resultados experimentais referentes à contribuição da fluência para a flecha no meio do vão ao longo do tempo	194
Figura 7-65: Características geométricas do pórtico plano	196
Figura 7-66: Interpretação esquemática dos modelos desacoplados	198
Figura 7-67: Resultados experimentais de deformação axial ao longo do tempo	199
Figura 7-68: Resultados experimentais de deformação por cisalhamento ao longo do tempo	199
Figura 7-69: Resultados numéricos, resultados analíticos e resultados experimentais referentes à flecha no meio do vão do pórtico plano ao longo do tempo	200
Figura 7-70: Perfil estrutural real submetido ao teste de fluência à flexão de quatro pontos (Sá, 2007).....	202
Figura 7-71: Características geométricas do perfil estrutural analisado.....	202
Figura 7-72: Resultados experimentais referentes às deformações axiais máximas do perfil estrutural	203
Figura 7-73: Resultados numéricos calibrados, resultados numéricos ajustados e resultados experimentais referentes à flecha no meio do vão	204

LISTA DE TABELAS

Tabela 5-1: Resultados do processo iterativo para barra tracionada com passo de tempo igual a 12 s e com base na Equação (5-113).....	118
Tabela 5-2: Evolução do vetor de correção das posições nodais no processo iterativo sem utilizar o fator de retardo	118
Tabela 5-3: Evolução do vetor de correção das posições nodais no processo iterativo utilizando-se o fator de retardo	119
Tabela 7-1: Resultados obtidos na análise viscoelástica da viga biapoiada com duas cinemáticas distintas e variando-se a relação altura/vão	160
Tabela 7-2: Resultados analíticos de flecha instantânea e flecha final.....	160
Tabela 7-3: Resultados do ensaio de fluência à tração para o nível de tensão igual a 7,71 MPa	178
Tabela 7-4: Parâmetros do modelo de Boltzmann obtidos pela técnica de ajuste.....	179
Tabela 7-5: Parâmetros do modelo de Boltzmann obtidos pela técnica de ajuste para tensão de 6,89 MPa.....	185
Tabela 7-6: Resultados referentes à contribuição da fluência para a flecha no meio do vão .	195
Tabela 7-7: Resultados de flecha instantânea, flecha final e contribuição da fluência para a flecha no meio do vão.....	201
Tabela 7-8: Resultados de flecha instantânea, flecha final e contribuição da fluência para a flecha no meio do vão.....	204

LISTA DE SÍMBOLOS

A	–	Área da seção transversal
a_0	–	Parâmetro do material dependente da tensão
a_1	–	Parâmetro do material dependente da tensão
a_2	–	Parâmetro do material dependente da tensão
a_σ	–	Parâmetro do material dependente da tensão
α_λ	–	Coefficiente de viscosidade associado ao primeiro parâmetro de Lamé
α_μ	–	Coefficiente de viscosidade associado ao segundo parâmetro de Lamé
b	–	Base (largura da lâmina)
c	–	Parâmetro definido pelas posições nodais; Localização do centroide
C_{ijkl}	–	Tensor constitutivo
\bar{C}_{ijkl}	–	Tensor constitutivo modificado
d	–	Parâmetro definido pelas posições nodais
ds	–	Comprimento de uma fibra arbitrária do corpo na configuração indeformada
dS	–	Comprimento de uma fibra arbitrária do corpo na configuração deformada
D	–	Função de relaxação
D_{ijkl}	–	Matriz viscosa
\bar{D}_{ijkl}	–	Matriz viscosa modificada
D_0	–	Função de relaxação instantânea
D_t	–	Função de relaxação transiente
δ_{ij}	–	Operador Delta de Kronecker
e	–	Parâmetro definido pelas posições nodais
E	–	Módulo de elasticidade longitudinal
E_1	–	Módulo de elasticidade longitudinal da mola em série
E_2	–	Módulo de elasticidade longitudinal da mola em paralelo
E_{eq}	–	Módulo de elasticidade longitudinal equivalente
ε_0	–	Deformação inicial prescrita
ε_∞	–	Deformação final
$\varepsilon(t)$	–	Deformação total por fluência dependente do tempo
ε'_0	–	Deformação elástica inicial dependente da tensão e da temperatura
ε'_t	–	Função de fluência dependente da tensão e da temperatura
ε	–	Tensor de deformações; Campo das deformações; Deformação total

ε_I	–	Primeiro invariante do tensor de deformações
ε_{II}	–	Segundo invariante do tensor de deformações
$\tilde{\varepsilon}$	–	Deformação normal longitudinal na linha centroidal
$\dot{\varepsilon}$	–	Taxa de deformação; Tensor das taxa de deformação
ε_h	–	Solução da equação diferencial homogênea em termos de deformação
ε_p	–	Solução da equação diferencial em termos de deformação
ε_v	–	Contribuição da fluência para a deformação
η	–	Módulo de viscosidade
f	–	Parâmetro definido pelas posições nodais
f	–	Função mudança de configuração
f_ε	–	Fator de retardo
F_i	–	Forças externas aplicadas
F_{ij}	–	Componente do tensor gradiente de deformação
F	–	Tensor gradiente de deformação
F_T	–	Fator de transformação
ϕ_n	–	Função de forma do nó n
G	–	Módulo de elasticidade transversal
G_1	–	Módulo de elasticidade transversal da mola em série
G_2	–	Módulo de elasticidade transversal da mola em paralelo
g_q	–	Componente do vetor dos resíduos
$g_{q,r}$	–	Componente da Matriz Hessiana
γ	–	Distorção angular
h	–	Altura da seção transversal do elemento estrutural; Espessura do tubo
I	–	Momento de inércia da seção transversal
J	–	Função de fluência; Jacobiano
J_0	–	Função de fluência independente do tempo
J_t	–	Função de fluência dependente do tempo
$1/r$	–	Curvatura
k	–	Parâmetro do material; Coeficiente de cisalhamento
L	–	Comprimento do componente estrutural
l_0	–	Comprimento inicial
$\tilde{\lambda}$	–	Estiramento na linha centroidal
λ	–	Estiramento; Primeiro parâmetro de Lamé
μ	–	Segundo parâmetro de Lamé
$\bar{\lambda}$	–	Primeiro parâmetro de Lamé modificado

$\bar{\mu}$	–	Segundo parâmetro de Lamé modificado
m	–	Vetor unitário; Parâmetro representativo da viscoelasticidade do material
M	–	Vetor unitário
\vec{N}	–	Versor na configuração deformada
\vec{n}	–	Versor na configuração indeformada
n	–	Constante do material independente da tensão; Identificação do nó
n	–	Parâmetro representativo da viscoelasticidade do material
ν	–	Coefficiente de Poisson
ω	–	Domínio na configuração indeformada
Ω	–	Domínio na configuração deformada
p	–	Ponto na configuração indeformada
P	–	Ponto na configuração deformada
\tilde{p}	–	Ponto sobre a linha centroidal na configuração indeformada
\tilde{P}	–	Ponto sobre a linha centroidal na configuração deformada
P	–	Energia potencial das forças externas
Π	–	Energia potencial total
Q_n	–	Propriedades do material dependentes do tempo, da temperatura e do nível de tensão
ξ	–	Variável adimensional auxiliar na parametrização
R_n	–	Propriedades do material dependentes do tempo, da temperatura e do nível de tensão
σ	–	Campo das tensões normais longitudinais; Tensão total
σ_0	–	Tensão inicial prescrita
σ_∞	–	Tensão final
$\dot{\sigma}$	–	Taxa de tensão
$ \sigma $	–	Valor absoluto do nível de tensão normal longitudinal
σ_h	–	Solução da equação diferencial homogênea em termos de tensão
σ_p	–	Solução da equação diferencial em termos de tensão
t	–	Tempo após o carregamento
t_ε	–	Tempo de retardo
t_σ	–	Tempo de relaxação
Δt	–	Intervalo de tempo (passo de tempo)
τ	–	Variável auxiliar de tempo
θ	–	Giro da seção transversal na configuração indeformada
Θ	–	Gira da seção transversal na configuração deformada
θ_n	–	Parâmetro nodal do nó n na configuração indeformada
Θ_n	–	Parâmetro nodal do nó n na configuração deformada
u	–	Energia de deformação específica

$U_{,q}$	–	Primeira derivada da energia de deformação total
$U_{,qr}$	–	Segunda derivada da energia de deformação total
U	–	Energia de deformação total
x	–	Coordenadas na configuração indeformada
X	–	Coordenadas na configuração deformada
\tilde{x}	–	Coordenada na linha centroidal na configuração indeformada
\tilde{X}	–	Coordenada na linha centroidal na configuração deformada
X	–	Vetor de posições atuais
dx	–	Seguimento infinitesimal de linha na configuração indeformada
dX	–	Seguimento infinitesimal de linha na configuração deformada
ΔX	–	Vetor de correção das posições nodais
ΔX_r	–	Componente do vetor de correção das posições nodais
$\ \Delta X\ $	–	Norma euclidiana do vetor de correção das posições nodais
X_n	–	Parâmetro nodal do nó n
y	–	Coordenadas na configuração indeformada
Y	–	Coordenadas na configuração deformada
\tilde{y}	–	Coordenada na linha centroidal na configuração indeformada
\tilde{Y}	–	Coordenada na linha centroidal na configuração deformada
Y_n	–	Parâmetro nodal do nó n
z	–	Coordenada auxiliar ortogonal a linha centroidal do elemento finito
w	–	Deslocamento vertical (flecha) no meio do vão

1

INTRODUÇÃO

A constante busca por soluções de engenharia, mais especificamente no âmbito da engenharia de estruturas, que apresentem desempenho eficiente (estrutura com boa relação resistência/peso, que seja previsível e segura e com custo econômico adequado), reforça a importância de estudos relacionados ao conhecimento dos diferentes comportamentos dos materiais estruturais e às simulações mais precisas de componentes e sistemas estruturais em condições de serviço variadas e constituídos por materiais diversos. Dentro desta concepção, muitos estudos estão relacionados à modelagem do comportamento de materiais não convencionais e às análises mais complexas e realistas de estruturas e componentes estruturais nas mais diversas áreas como infraestrutura, construção civil, indústria mecânica, indústria aeroespacial, entre outras. No entanto, essas análises mais complexas apresentam soluções analíticas restritas, sendo muitas vezes necessário recorrer aos métodos numéricos, como as diferentes formulações encontradas na literatura baseadas no Método dos Elementos Finitos (MEF).

Os métodos numéricos se desenvolveram e se diversificaram de uma forma acelerada devido à popularização e aos constantes desenvolvimentos dos recursos computacionais, sendo atualmente muito requisitados em projetos e estudos nas mais diversas áreas do conhecimento. Entretanto, apesar do avanço e da capacidade dos métodos numéricos em simular comportamentos complexos das estruturas, em análises mais realistas e de utilidade prática de engenharia os resultados numéricos perdem expressividade se as propriedades físicas dos materiais constituintes não forem bem determinadas e as expressões que regem as respostas às solicitações não refletirem de forma satisfatória os comportamentos esperados. Por esse motivo, ensaios adequados devem ser realizados, levando-se em consideração o comportamento esperado e as aplicações e limitações de cada material, a fim de se obter resultados experimentais representativos e confiáveis. De forma análoga, os resultados experimentais são menos expressivos se os métodos numéricos não forem capazes de reproduzir de forma

satisfatória as diferentes complexidades dos sistemas estruturais e dos comportamentos mecânicos. Essa interdependência expõe a importância não só do desenvolvimento de estudos que levam em consideração os aspectos numéricos ou de estudos que levam em consideração os aspectos experimentais, mas, a importância da interação entre eles. Sendo o avanço científico nessas áreas resultado de um processo interativo e iterativo, em que os procedimentos e tipos de ensaio são desenvolvidos e aprimorados a partir de resultados numéricos e os métodos numéricos são desenvolvidos e aprimorados a partir de resultados experimentais.

Os avanços científicos advindos dos estudos numéricos e experimentais possibilitam previsões mais confiáveis do comportamento mecânico das estruturas constituídas por diferentes tipos de materiais em condições de serviço mais gerais e severas, proporcionando o maior aproveitamento de suas propriedades e funcionalidades. No entanto, muitas das aproximações e hipóteses da teoria linear deixam de ser válidas, sendo necessário recorrer às análises que levam em consideração os comportamentos não lineares e que representam com maior fidelidade a resposta mecânica dos materiais e das estruturas.

Dentre os comportamentos não lineares aos quais uma estrutura quase-estática está submetida destacam-se as não linearidades geométricas relacionadas ao equilíbrio na posição deformada e as não linearidades físicas representadas pelas relações constitutivas ou reológicas. As relações constitutivas ou reológicas são expressas por equações tensão-deformação que podem incluir a dependência de variáveis específicas, como tempo, temperatura, umidade, pressão, entre outras. Essas relações possibilitam a obtenção da resposta localizada em um ponto material contido no meio em termos de deformação (expressa pelo tensor de deformações) devido a uma solicitação localizada em termos de tensão (expressa pelo tensor de tensões), e vice-versa. Conhecendo-se essas relações para cada ponto que compõe o meio é possível avaliar o comportamento do componente estrutural ou do sistema estrutural como um todo, em geral, associando-se essas relações a modelos constitutivos a fim de considerar a resposta mecânica em diferentes processos como carregamentos e descarregamentos e considerar diferentes efeitos como dano e envelhecimento.

De uma forma idealizada, as relações constitutivas ou reológicas descrevem basicamente a interdependência entre as tensões e as deformações por meio da consideração de efeitos associados aos comportamentos mecânicos elástico, plástico e viscoso. Em geral, os materiais reais apresentam comportamentos mecânicos intermediários envolvendo efeitos simultâneos entre dois ou três desses, como os comportamentos viscoelástico, elastoplástico, viscoplástico

e viscoelastoplástico (Meyers e Chawla, 2009; Findley *et al.*, 1989). Além disso, os comportamentos dos materiais ainda podem ser caracterizados levando-se em consideração a capacidade dos materiais se deformarem até apresentar falha. Neste sentido os comportamentos dos materiais podem ser caracterizados como dúcteis ou frágeis (lineares ou não lineares).

Dentre os materiais não convencionais utilizados em elementos estruturais abordados em recentes estudos se destacam os materiais poliméricos e os materiais compostos com matriz polimérica, principalmente por apresentarem boa relação resistência/peso em comparação aos materiais estruturais convencionais. Contudo, dependendo de suas propriedades e dos níveis de tensão aos quais estão submetidos, esses materiais apresentam comportamento mecânico viscoelástico ou viscoelastoplástico não linear, em que os parâmetros do material não são considerados constantes e podem variar com tempo, temperatura, tensão, deformação e/ou outras grandezas de estado físico. Esses comportamentos caracterizam-se principalmente pela dependência do tempo nas respostas às solicitações externas e são descritos pela combinação do comportamento viscoso, típico de materiais fluidos, com o comportamento elástico e/ou plástico, típico dos materiais sólidos (Findley *et al.*, 1989). Assim, muitos trabalhos estão relacionados ao estudo e modelagem do comportamento desses materiais, como exemplos podem ser citados os trabalhos de Godat *et al.* (2013), Kästner *et al.* (2012), Sá *et al.* (2011a) e Kühl *et al.* (2016).

Segundo Findley *et al.* (1989), Meyers e Chawla (2009) e Finnie e Heller (1959) os estudos sobre viscoelasticidade em materiais sólidos têm sido desenvolvidos há aproximadamente dois séculos, sendo seus primeiros experimentos desenvolvidos e publicados em 1834 pelo engenheiro francês Louis Joseph Vicat (Vicat, 1834). Além disso, as pesquisas e avanços nessa área se intensificaram no último século com o desenvolvimento e aprimoramento de tecnologias e aplicações práticas nas quais os comportamentos viscoelástico e viscoelastoplástico são mais acentuados, como a própria utilização de materiais poliméricos e materiais compostos em elementos estruturais e a exposição de elementos estruturais a condições de serviço mais severas, principalmente em relação a temperaturas elevadas, como nas turbinas a gás, reatores nucleares, processos de fabricação de molas, situações de incêndio e indústrias químicas e petroquímicas.

No presente estudo o interesse restringe-se ao comportamento mecânico viscoelástico não linear de materiais sólidos, o qual pode ser caracterizado por dois fenômenos principais. O primeiro descreve a variação da deformação de um material sólido ao longo do tempo quando

submetido a um estado de tensão constante, conhecido como fenômeno de fluência. O segundo descreve a variação da tensão ao longo do tempo quando submetido a um estado de deformação constante, conhecido como fenômeno de relaxação (Marques e Creus, 2012; Christensen, 2003; Findley *et al.*, 1989).

O fenômeno de fluência apresenta considerável relevância em materiais vítreos ou amorfos, em geral materiais poliméricos e materiais compostos, principalmente com matrizes poliméricas (Meyers e Chawla, 2009; Argyris *et al.*, 1991; Scott *et al.*, 1995), sendo esse, também, um fenômeno relevante no estudo de estruturas de madeira. Em longos períodos de tempo sujeitos à tensão constante, esses materiais chegam a apresentar deformações adicionais superiores a um quarto da deformação elástica, podendo causar falha estrutural ou até rompimento do material sob ação de campos de tensões consideravelmente inferiores à tensão limite do material (Findley, 1987; Sá *et al.*, 2011a; Youssef, 2010). No entanto, até os materiais com estrutura química cristalina, como particularmente os metais, podem apresentar um comportamento de fluência relevante sob temperaturas superiores a um terço de sua temperatura de fusão. Dessa forma, um número considerável de falhas a altas temperaturas pode ser atribuído à viscosidade do material, tornando também importante o estudo da fluência em componentes mecânicos e estruturais metálicos submetidos a temperaturas elevadas (Finnie e Heller, 1959; Yao *et al.*, 2007; Kassner e Pérez-Prado, 2004). Para o caso de materiais cerâmicos a fluência pode se tornar relevante sob temperaturas superiores a metade de sua temperatura de fusão (Meyers e Chawla, 2009), sendo importante avaliar a situação de serviço desses materiais em sistemas de isolamento e retenção de calor, como em alto-fornos.

O fenômeno de relaxação, por sua vez, é particularmente importante no caso de problemas envolvendo estruturas constituídas por membranas, cabos de aço, estais, cordas e uniões por pressão, nas quais é comum o estado de deformação constante. Um caso particular e de fundamental importância em aplicações na construção civil é o de estruturas de concreto protendido. Nesse caso o cabo de aço tracionado está submetido ao fenômeno de relaxação e o concreto comprimido está submetido ao fenômeno de fluência. Como caso comum em aplicações na indústria mecânica, pode-se citar as uniões parafusadas entre peças poliméricas. Nesse caso, a pressão de contato oriunda da união parafusada entre as peças, típico estado de deformação constante, experimenta um alívio gradativo devido ao fenômeno de relaxação. Tal fato pode originar problemas de vibrações e ruídos, além, de possíveis sobrecargas em componentes estruturais e nos próprios parafusos utilizados na união.

1.1 Objetivo

Dentro deste contexto, o presente estudo tem como objetivo apresentar o desenvolvimento de uma formulação numérica, baseada no Método dos Elementos Finitos Posicional, capaz de descrever o comportamento mecânico viscoelástico em estruturas discretizadas por elementos de pórtico plano, considerando-se os efeitos do cisalhamento. Para tal, os relevantes efeitos do cisalhamento no comportamento viscoelástico, assim como é observado por referências citadas ao longo do texto, são levados em consideração de forma original pela utilização de elementos com cinemática de Reissner. O comportamento viscoelástico é avaliado por meio de relações tensão-deformação obtidas a partir de modelos reológicos que levam em consideração a variável tempo, assim como em estudos disponíveis na literatura e citados ao longo do texto.

Além disso, os seguintes objetivos específicos são considerados ao longo do desenvolvimento da formulação e das análises realizadas:

- 1) Implementar computacionalmente as formulações desenvolvidas adotando-se elementos de pórtico plano com as cinemáticas de Bernoulli-Euler e de Reissner, com base no Método dos Elementos Finitos Posicional e considerando-se o comportamento mecânico viscoelástico.
- 2) Apresentar as relações tensão-deformação para materiais isotrópicos considerando-se diferentes modelos reológicos tipicamente utilizados para avaliação da resposta viscoelástica em materiais sólidos.
- 3) Desenvolver uma técnica de ajuste dos parâmetros dos modelos reológicos e uma metodologia de calibração da formulação com base em resultados experimentais de ensaios de fluência à tração.
- 4) Realizar uma análise paramétrica utilizando-se a formulação posicional particularizada para elementos de pórtico plano com a cinemática de Reissner, a fim de se avaliar a influência dos parâmetros físicos e numéricos na descrição do comportamento viscoelástico.
- 5) Avaliar comparativamente os resultados obtidos com a formulação posicional adotando-se elementos de pórtico plano com as cinemáticas de Bernoulli-Euler e de Reissner, identificando-se os efeitos do cisalhamento no comportamento viscoelástico.

1.2 Justificativa

Apresentada originalmente em Coda (2003) e Coda e Greco (2004), a formulação posicional do Método dos Elementos Finitos, denominada neste estudo de Método dos Elementos Finitos Posicional, apesar de relativamente recente, tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores, principalmente devido a sua capacidade de aplicação a análises não lineares, como é descrito na seção 2.2. da revisão bibliográfica. Em Rabelo (2015) e Rabelo *et al.* (2018) essa formulação é desenvolvida e implementada para análise de treliças espaciais com não linearidades geométricas e físicas. Nesses trabalhos, a formulação é particularizada para descrição do comportamento viscoelástico, sendo a contribuição deste comportamento introduzida a partir da relação reológica obtida do Modelo de Zener. Em Becho *et al.* (2015) e Becho (2016) essa formulação é desenvolvida e implementada para análise de estruturas reticuladas planas discretizadas por elementos de pórtico. Nesses trabalhos, a formulação é particularizada para descrição do comportamento viscoelástico em vigas e estruturas de pórtico plano, considerando-se a cinemática de Bernoulli-Euler e a relação reológica obtida do Modelo de Zener. No entanto, em Becho (2016) são observadas diferenças entre os resultados numéricos obtidos pela formulação desenvolvida e os resultados experimentais apresentados na literatura científica, sendo essas diferenças atribuídas, entre outros fatores, a não consideração dos efeitos do cisalhamento na deformação viscoelástica. Diferentes estudos experimentais reforçam essa afirmação, demonstrando que os efeitos do cisalhamento na deformação viscoelástica não podem ser negligenciados, dependendo das características físicas do material, das características geométricas do elemento estrutural e das condições de serviço impostas, como pode ser observado nos trabalhos de Bank e Mosallam (1992), Mottram (1993), Abdel-Magid *et al.* (2003), Shao e Shanmugam (2004), Sá *et al.* (2011a) e Sá *et al.* (2011b), os quais são brevemente descritos na seção 2.1 da revisão bibliográfica.

Com base nestas colocações e no objetivo proposto, o presente estudo é apresentado como uma contribuição para o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos Posicional, como detalhado na seção 2.2 da revisão bibliográfica, fornecendo subsídio e encorajando o prosseguimento de pesquisas na área e incentivando a utilização do método como uma alternativa em relação às consolidadas formulações do Método dos Elementos Finitos, principalmente em análises de problemas envolvendo não linearidades. Além disso, os desenvolvimentos contidos no presente estudo e os resultados obtidos são apresentados como contribuição para ampliar o entendimento em relação à descrição numérica do comportamento

viscoelástico e de seus efeitos em componentes e sistemas estruturais. Adicionalmente, são destacados aspectos relacionados aos procedimentos necessários à sua implementação computacional, para que pesquisadores na área possam confrontar com os desafios enfrentados em suas respectivas formulações e implementações.

1.3 Metodologia e organização do texto

Para alcançar o objetivo proposto neste estudo e apresentar de forma organizada os desenvolvimentos e resultados da pesquisa, as seguintes etapas são seguidas:

- 1) Revisão bibliográfica a respeito do Método dos Elementos Finitos Posicional e da Teoria da Viscoelasticidade. Apresentada no Capítulo 2, esta etapa tem como objetivo embasar e situar o estudo nos respectivos temas, identificando e justificando sua relevância e contribuição científica.
- 2) Desenvolvimento da formulação geral do Método dos Elementos Finitos Posicional, reproduzindo procedimentos apresentados nos trabalhos de Greco (2004) e Maciel (2008). Apresentada no Capítulo 3, esta etapa tem como objetivo proporcionar o entendimento da base da formulação posicional e a identificação dos pontos passíveis de particularização para descrição dos comportamentos mecânicos de interesse e para consideração dos elementos finitos e das cinemáticas de interesse.
- 3) Desenvolvimento das relações tensão-deformação com base em modelos reológicos tipicamente utilizados para avaliação da resposta viscoelástica em materiais sólidos. Apresentada no Capítulo 4, esta etapa tem como objetivo o desenvolvimento das relações tensão-deformação dependentes do tempo necessárias à particularização da formulação para descrição do comportamento mecânico viscoelástico, além, de proporcionar o entendimento dos modelos reológicos e suas características.
- 4) Desenvolvimento da formulação, com base no Método dos Elementos Finitos Posicional, capaz de descrever o comportamento mecânico viscoelástico em elementos de pórtico plano com cinemática de Reissner. Apresentada no Capítulo 5, esta etapa tem como objetivo introduzir o comportamento viscoelástico na formulação posicional, através das relações reológicas obtidas no Capítulo 4, considerando-se os efeitos do cisalhamento por meio do desacoplamento entre o giro da seção transversal e os deslocamentos. A formulação é desenvolvida com base no trabalho de Maciel (2008) e

nos procedimentos apresentados no Capítulo 3. Adicionalmente, a fim de possibilitar a introdução do comportamento viscoelástico não só em relação à contribuição deste na linha centroidal, mas em relação à contribuição ao longo da altura da seção transversal, é adotada uma abordagem de parametrização da altura que possibilita considerar a seção transversal como laminada. Além disso, são apresentados procedimentos necessários a implementação numérica, como os procedimentos para consideração da seção laminada, procedimentos para avaliação das taxas de deformação e tensão e procedimentos para evitar um problema específico de divergência no processo iterativo.

- 5) Desenvolvimento da formulação, com base no Método dos Elementos Finitos Posicional, capaz de descrever o comportamento mecânico viscoelástico em elementos de pórtico plano com cinemática de Bernoulli-Euler. Apresentada no Capítulo 6, esta etapa tem como objetivo introduzir o comportamento viscoelástico na formulação posicional, através das relações reológicas obtidas no Capítulo 4, sem considerar os efeitos do cisalhamento. Dessa forma, através de códigos, de autoria própria, implementados computacionalmente, com base na formulação considerando-se a cinemática de Reissner e com base na formulação considerando-se a cinemática de Bernoulli-Euler, é possível avaliar os efeitos do cisalhamento no comportamento viscoelástico. A formulação desenvolvida nesta etapa tem como base o trabalho de Greco (2004) e os procedimentos apresentados no Capítulo 3.
- 6) Desenvolvimento de análises paramétricas, simulação de estruturas simples para comparação com resultados obtidos na literatura e apresentação de aplicações. Apresentada no Capítulo 7, esta etapa tem como objetivo analisar a influência das propriedades físicas e dos parâmetros numéricos, nos resultados obtidos utilizando-se códigos implementados computacionalmente com base nos desenvolvimentos apresentados nos Capítulos 5 e 6. Além disso, são apresentados exemplos e aplicações para possibilitar a avaliação e análise dos efeitos do cisalhamento no comportamento viscoelástico e demonstrar a capacidade da formulação desenvolvida. Nas aplicações realizadas é utilizada uma técnica simples de identificação dos parâmetros. A partir dessa técnica é apresentada, adicionalmente, uma metodologia de calibração da formulação a partir de resultados de ensaios de fluência à tração e de curvas de ajuste obtidas pelo Método dos Mínimos Quadrados.

7) Por fim, no Capítulo 8 são apresentadas as conclusões acerca dos desenvolvimentos apresentados e dos resultados obtidos, destacando-se aspectos importantes à contribuição para o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos Posicional e ao entendimento sobre a descrição do comportamento viscoelástico. Além disso, são apresentadas sugestões para trabalhos futuros e prosseguimento das pesquisas na área.

2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são apresentadas algumas referências bibliográficas relevantes da área e que foram consultadas durante a pesquisa de doutorado. São apresentados conceitos e teorias encontradas nessas referências e que são importantes para o entendimento dos métodos e procedimentos adotados ao longo do estudo. No entanto, não se pretende com esta revisão apresentar todas as aplicações e pesquisas desenvolvidas na área. Dessa forma, são englobados apenas os artigos mais recentes e considerados relevantes ao escopo do estudo, dentre os artigos consultados, abordando-se dois temas principais: Comportamento viscoelástico e Método dos Elementos Finitos Posicional.

2.1 Comportamento viscoelástico

A obtenção da resposta de um componente estrutural sob diferentes condições de tensão ou deformação e condições ambientais requer a definição de diferentes variáveis relacionadas através de equações fundamentais de equilíbrio, de compatibilidade cinemática e constitutivas ou reológicas, além, de um conjunto de condições iniciais e de contorno. As equações reológicas, especificamente, fornecem as relações entre tensão, deformação e tempo através de expressões matemáticas que incluem constantes como propriedades do material e condições ambientais (como temperatura, pressão e umidade). Essas equações possibilitam a descrição do comportamento mecânico dos elementos estruturais ao longo do tempo (Findley *et al.*, 1989).

Segundo Findley *et al.* (1989), de uma forma idealizada, os materiais sólidos dúcteis (capazes de apresentar considerável deformação antes da falha) apresentam principalmente três tipos de comportamento mecânico, que são: elástico, plástico e viscoelástico. No comportamento elástico o material apresenta resposta elástica instantânea (independente do tempo) seguindo, por exemplo, a lei de Hooke no caso linear. Nesse caso o elemento estrutural recupera sua forma original quando descarregado. Se a tensão atuante no material for suficientemente grande, acima do limite elástico, este passa a apresentar comportamento

plástico e parte da deformação observada não é mais recuperada após o descarregamento do elemento estrutural, apresentando uma deformação permanente residual. No caso do comportamento viscoelástico o material sólido apresenta, quando solicitado pela ação de um conjunto de forças, uma resposta elástica instantânea e uma resposta elástica adicional dependente do tempo, lenta e amortecida (com taxa decrescente de deformação). Nesse caso, no descarregamento, se for dado um tempo suficientemente grande, o elemento estrutural recupera sua configuração original de forma lenta e amortecida. Esse comportamento viscoelástico pode ser linear ou não linear em relação à tensão. No comportamento linear, a resposta do material apresenta uma dependência apenas em relação ao tempo. Para materiais cuja resposta à solicitação apresenta dependência em relação ao tempo e ao nível de tensão, o comportamento é denominado não linear. Esses três comportamentos podem ser ilustrados como na Figura 2-1, em que o carregamento ocorre em um tempo $t = t_0$ e o descarregamento ocorre em um tempo $t = t_1$.

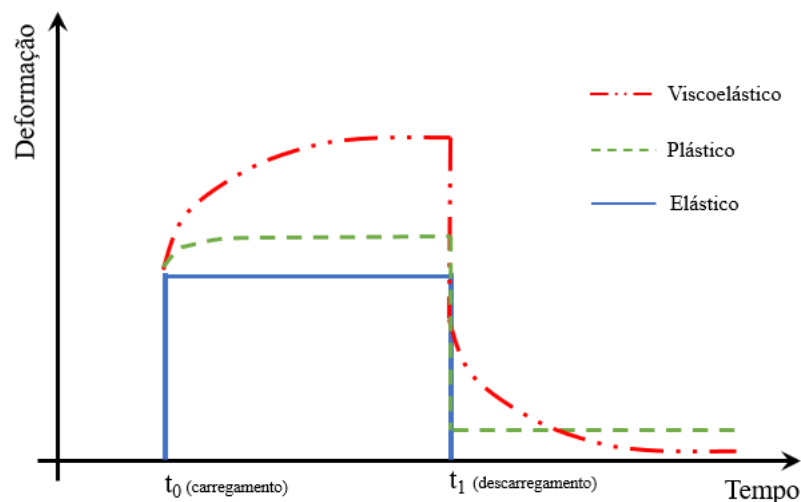


Figura 2-1: Resposta mecânica de materiais sólidos ao longo do tempo

Vale observar que, dependendo das propriedades do material e do nível de tensão, os materiais sólidos podem apresentar comportamento viscoelastoplástico não linear. Nesse comportamento parte da deformação obtida na fase de evolução amortecida da deformação pode ser atribuída à plastificação do material. Nesse caso, no descarregamento, se for dado tempo suficientemente grande, o material recupera parte da deformação total mantendo uma deformação permanente residual. No entanto, no presente estudo esses efeitos de plastificação na deformação dos elementos estruturais não são considerados, sendo estes tratados como constituídos por materiais viscoelásticos não lineares.

O comportamento viscoelástico pode ser estudado principalmente por meio da análise de dois fenômenos básicos: fluência e relaxação. O primeiro se refere à deformação lenta e amortecida do material sob um estado de tensão constante, como ilustrado na Figura 2-2(a). O segundo se refere à redução gradativa (alívio) do estado de tensão que o material está submetido devido a um estado de deformação prescrito, como ilustrado na Figura 2-2(b) (Argyris *et al.*, 1991; Youssef, 2010; Sá, 2007).

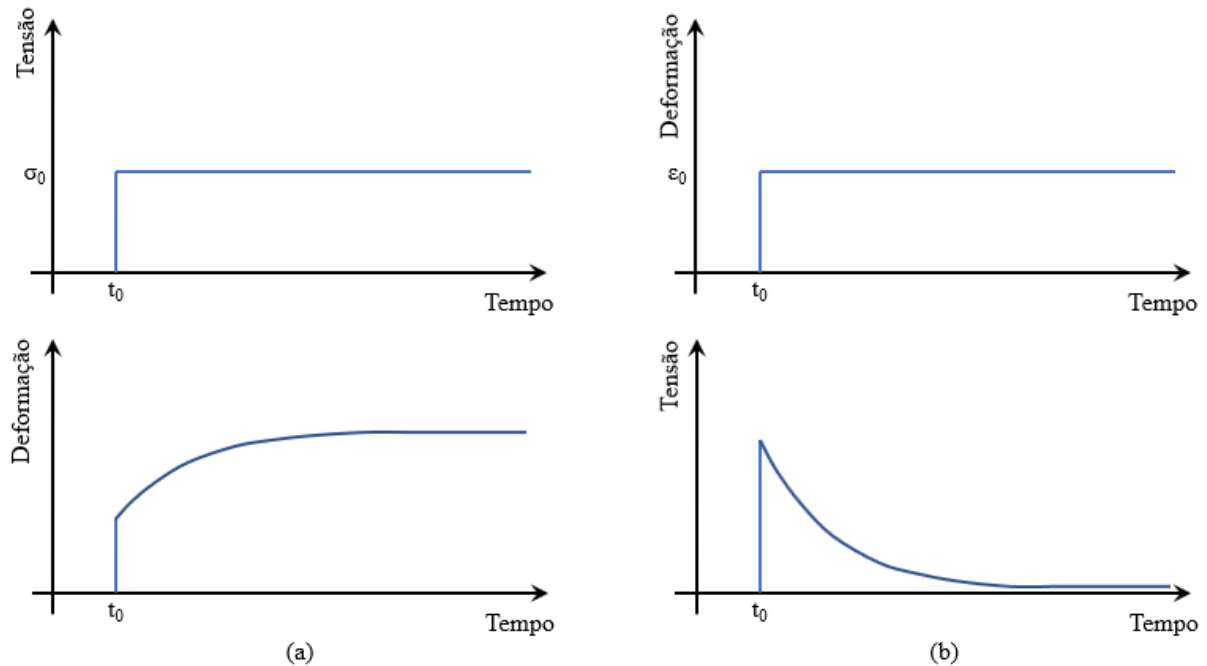


Figura 2-2: (a) Fenômeno de fluência; (b) Fenômeno de relaxação

Segundo Yao *et al.* (2007), Youssef (2010) e Findley *et al.* (1989), o fenômeno de fluência pode ser descrito através de um diagrama de deformação por tempo dividido em três estágios distintos, como ilustrado na Figura 2-3. No primeiro estágio há uma redução na taxa de deformação, chamado de fluência primária. Isso ocorre em função de um aumento da resistência à fluência provocado, por exemplo, pelo encruamento ou pelo intertravamento entre cadeias poliméricas. No segundo estágio a deformação é mantida a uma taxa de deformação constante, podendo inclusive ser nula, chamado de fluência secundária. No terceiro e último estágio, o qual pode não ocorrer dependendo do tipo de material e do nível de tensão aplicado e/ou da temperatura, a deformação aumenta a uma taxa de deformação crescente, chamado de fluência terciária. Nesse último estágio, tem início processos internos de falha, dependendo das características do material constituinte, podendo-se citar o rompimento de ligações moleculares, o deslizamento entre cadeias poliméricas, a separação de contornos de grãos e a formação e propagação de trincas, conduzindo a uma redução localizada de área efetiva no

componente estrutural e a um conseqüente aumento na taxa de deformação. Esse diagrama foi proposto originalmente em Thurston (1895).

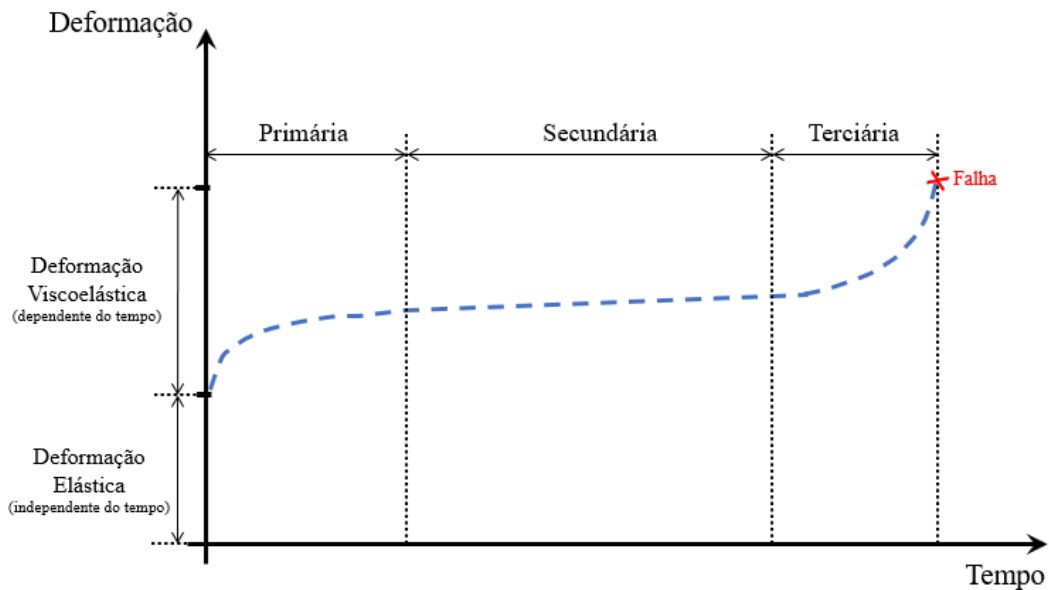


Figura 2-3: Estágios do fenômeno de fluência

As propriedades viscoelásticas de um material podem ser determinadas tanto por ensaios de fluência quanto por ensaios de relaxação. No entanto, por apresentar procedimentos de ensaio e de medição dos resultados mais simples, grande parte das pesquisas envolvendo a caracterização do comportamento viscoelástico se referem ao estudo do fenômeno de fluência. Dessa forma, algumas equações analíticas e métodos de análise foram propostos para descrever esse comportamento baseado em ensaios de fluência.

Em geral, o fenômeno de fluência pode ser descrito por expressões que apresentam a seguinte forma:

$$\varepsilon(t, \sigma, T) = \sigma J(t, \sigma, T) \quad (2-1)$$

em que σ representa a tensão aplicada, $\varepsilon(t, \sigma, T)$ representa a deformação por fluência em função do tempo, da tensão e da temperatura e $J(t, \sigma, T)$ representa a fluência específica (ou função de fluência).

O fenômeno de relaxação pode ser descrito por expressões que apresentam a seguinte forma:

$$\sigma(t, \varepsilon, T) = \varepsilon D(t, \varepsilon, T) \quad (2-2)$$

em que ε representa a deformação imposta, $\sigma(t, \sigma, T)$ represente a tensão por relaxação em função do tempo, da deformação e da temperatura e $D(t, \sigma, T)$ representa a relaxação específica (ou função de relaxação).

Segundo Marques e Creus (2012), Christensen (2003) e Findley *et al.* (1989), três das principais abordagens adotadas na literatura para modelar esse fenômeno são as formas empíricas, representadas principalmente pela Lei de Potência de Findley, a forma integral e a forma diferencial.

A Lei de Potência de Findley foi obtida de forma empírica e pode ser expressa por (Findley, 1987; Scott *et al.*, 1995):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon'_0 + \varepsilon'_t t^n \quad (2-3)$$

em que $\varepsilon(t)$ representa a deformação total por fluência dependente do tempo, ε'_0 representa a deformação elástica inicial dependente da tensão e da temperatura, ε'_t representa uma função de fluência dependente da tensão e da temperatura, n representa a constante do material independente da tensão e t representa o tempo após o carregamento. Vale ressaltar que a Lei de Potência é utilizada com frequência e apresenta resultados satisfatórios na previsão do comportamento de fluência de materiais poliméricos e materiais compostos com matriz polimérica (Sá, 2007).

Podem ser citadas, ainda, outras equações empíricas utilizadas nas descrições do comportamento de fluência e adotadas em normas de ensaio de fluência e modelos de viscoelasticidade, como a Equação de Norton e a Equação de Nadai, representadas respectivamente por:

$$\dot{\varepsilon} = k\sigma^p \quad (2-4)$$

$$\dot{\varepsilon} = D \sinh \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad (2-5)$$

em que σ representa a tensão aplicada, $\dot{\varepsilon}$ representa a taxa de deformação por fluência. Os demais parâmetros são propriedades do material determinadas em função da temperatura e das condições de serviço.

A forma integral de representação do comportamento viscoelástico é a forma mais utilizada na literatura. Nessa forma de representação a deformação pode ser obtida em termos das tensões atuantes pela seguinte relação integral no tempo:

$$\varepsilon(t) = J_0\sigma + \int_0^t J_t(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2-6)$$

em que σ representa a tensão aplicada, τ representa uma variável auxiliar de tempo, t representa um intervalo de tempo após o carregamento, J_0 representa a função de fluência independente do tempo e $J_t(t)$ representa a função de fluência dependente do tempo. Essas funções são independentes da tensão em materiais viscoelásticos lineares e podem ser determinadas a partir dos resultados do ciclo de fluência e recuperação sob tensão constante. Para materiais viscoelásticos não lineares, essas funções são dependentes do nível de tensão.

Analogamente, a forma integral pode ser expressa estabelecendo-se uma relação integral no tempo entre tensão e deformação, em que as tensões atuantes podem ser obtidas em termos das deformações impostas, sendo representada pela seguinte equação integral:

$$\sigma(t) = D_0\varepsilon + \int_0^t D_t(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2-7)$$

em que ε representa a deformação imposta, τ representa uma variável auxiliar de tempo, t representa um intervalo de tempo após o carregamento, D_0 representa a função de relaxação independente do tempo e $D_t(t)$ representa a função de relaxação dependente do tempo.

A forma integral para o caso de viscoelasticidade não linear é apresentada em algumas referências (Schapery, 1969; Scott *et al.*, 1995) pela Equação Integral de Schapery, a qual foi deduzida de conceitos de irreversibilidades termodinâmicas e, para o caso de carregamento uniaxial em condições isotérmicas, pode ser expressa por:

$$\varepsilon(t) = a_0 D_0 \sigma + a_1 \int_0^t D_t(\psi - \psi') \frac{da_2 \sigma}{d\tau} d\tau \quad (2-8)$$

em que D_0 é a função de fluência instantânea, D_t é a função de fluência transiente, τ representa uma variável auxiliar de tempo, t representa um intervalo de tempo após o carregamento, $\psi = \int_0^t \frac{dt}{a_\sigma}$ e $\psi' = \int_0^\tau \frac{d\tau}{a_\sigma}$. Os parâmetros a_0 , a_1 , a_2 e a_σ são característicos do material e dependentes da tensão. D_0 e D_t podem ser determinadas de testes de fluência sob pequenas

tensões aplicadas, quando o material exibe comportamento viscoelástico linear. As propriedades não lineares do material dependentes da tensão (a_0 , a_1 , a_2 e a_σ) podem ser determinadas de resultados de ciclos de fluência e recuperação sob tensão constante em vários níveis de tensão.

A determinação do comportamento viscoelástico por meio dessas equações integrais apresentadas requer a determinação de funções de fluência e de parâmetros do material que aproximam os resultados ao comportamento viscoelástico experimental. Nesses casos, geralmente são utilizadas funções exponenciais ou funções obtidas de modelos reológicos baseadas em series de Prony.

A terceira forma utilizada para descrever o comportamento viscoelástico é denominada forma diferencial, podendo ser expressa por:

$$\sigma + R_1 \frac{d\sigma}{dt} + \dots + R_n \frac{d^n \sigma}{dt^n} = Q_0 \varepsilon + Q_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + \dots + Q_n \frac{d^n \varepsilon}{dt^n} \quad (2-9)$$

em que os parâmetros R_n e Q_n representam as propriedades do material dependentes do tempo, da temperatura e do nível de tensão. Esses parâmetros podem ser determinados a partir de modelos reológicos que representam o comportamento do material ao longo do tempo, sendo as equações determinadas dessa forma denominadas equações fenomenológicas. Esses modelos reológicos são interpretações físicas do formalismo matemático descrito por equações diferenciais como a Equação (2-9). As relações reológicas obtidas a partir desses modelos diferem das relações constitutivas por considerarem a variável tempo.

Os modelos reológicos representativos dos comportamentos mecânicos são compostos por elementos elásticos (molas), elementos viscosos (amortecedores), elementos plásticos (atrito entre sólidos) ou associações de dois ou mais desses elementos. Esses elementos podem ser lineares ou não e podem ser associados de tal forma que o comportamento físico descrito reflita o comportamento mecânico do material, tanto para as deformações em termos das tensões e dos parâmetros do material quanto para as tensões em termos das deformações e dos parâmetros do material. Dessa forma, as equações transientes que relacionam tensão e deformação (relações reológicas) para um determinado material podem ser representadas por expressões como a Equação (2-9). (Findley *et al.*, 1989; Argyris *et al.*, 1991; Mesquita, 2002).

Os comportamentos mecânicos idealizados típicos de materiais sólidos dúcteis (elástico, elastoplástico, viscoelástico, entre outros) podem ser representados por modelos reológicos que aproximam de forma satisfatória a resposta obtida aos resultados experimentais. Além disso, mais de um modelo reológico pode ser capaz de representar um mesmo comportamento dependendo dos parâmetros adotados em seus elementos e da associação entre esses elementos. Dessa forma, no capítulo 4 são apresentados alguns conceitos fundamentais sobre os modelos reológicos e, também, são apresentados e analisados três modelos básicos comumente utilizados na literatura para descrição do comportamento viscoelástico, os quais são implementados nas formulações desenvolvidas neste estudo.

A análise do comportamento viscoelástico a partir da forma diferencial, ou seja, a determinação da deformação quando a tensão é conhecida, ou vice-versa, requer a integração no tempo de equações diferenciais semelhantes à Equação (2-9), obtidas a partir de modelos reológicos adequados, em que a ordem da equação geralmente corresponde ao número de elementos viscosos (amortecedores) do modelo (Argyris *et al.*, 1991). Porém, normalmente a integração da Equação (2-9) é complexa e, dessa forma, é necessário dividir em modelos mais simples e proceder com a soma das deformações em cada modelo para obtenção da deformação total ou utilizar métodos numéricos adequados, como pode ser observado nos trabalhos destacados a seguir.

Em Argyris *et al.* (1991), são apresentados dois procedimentos de integração a partir da definição de incrementos de deformação viscoelástica. O procedimento de determinação do incremento de deformação viscoelástica a partir das tensões é denominado Método da Fluência. O procedimento de determinação dos incrementos de deformação viscoelástica a partir das deformações totais é denominado Método da Relaxação. Em Argyris *et al.* (1992), os autores tratam do modelamento reológico e da análise numérica de estruturas de membranas viscoelásticas, feitas com malha de Policloreto de Vinila (PVC), utilizando-se o Modelo de Boltzmann para deduzir a equação reológica e o Método da Fluência para avaliar a integração numérica. Os autores concluem com esses dois trabalhos que os procedimentos apresentados em Argyris *et al.* (1991) e aplicados para análise de membranas em Argyris *et al.* (1992) são capazes de representar o comportamento viscoelástico do material constituinte da membrana. É observado, nestes trabalhos, que os resultados numéricos obtidos apresentam boa concordância com os resultados experimentais ao longo de toda a análise no tempo para níveis mais baixos de tensão. Para níveis de tensão mais altos, os resultados numéricos também são

satisfatórios, porém, apresentam melhores concordâncias com os resultados experimentais referentes aos instantes finais da análise.

Jurkieweiz *et al.* (1999) apresentam um método incremental baseado no Método dos Elementos Finitos utilizando séries de Dirichlet para expressar a relação reológica dos materiais e descrever o comportamento viscoelástico linear de estruturas compostas baseado no Princípio da Superposição de Boltzmann. Esse método foi utilizado para simular uma viga de concreto protendido, ensaiada previamente durante um período de fluência de cinco anos, e uma torre de resfriamento constituída por placas de concreto reforçadas. Os autores concluem que o método e os procedimentos adotados são capazes de prever o comportamento de elementos estruturais mistos ao longo do tempo em condições de serviço com aceitável precisão. As diferenças observadas entre os resultados numéricos e os resultados experimentais, na ordem de 15%, são atribuídas à análise baseada na teoria da viscoelasticidade linear. Jurkieweiz *et al.* (2005) utilizam o mesmo método para a descrição da deformação e da distribuição de tensão axial ao longo do tempo em uma viga composta de aço e concreto considerando-se o deslizamento na interface aço-concreto e o comportamento viscoelástico linear do concreto. Pelos resultados obtidos são reforçadas as conclusões apresentadas em Jurkieweiz *et al.* (1999) e acrescentado que os efeitos do deslizamento na interface aço-concreto são relevantes na análise ao longo de tempo. Dessa forma, os resultados numéricos obtidos apresentam maiores concordâncias em relação aos resultados experimentais quando comparados aos resultados em que o deslizamento é desprezado.

Mesquita e Coda (2003) apresentam uma formulação tridimensional do Método dos Elementos de Contorno simplificado, sem utilizar células internas, para a análise de corpos viscoelásticos baseado nas relações reológicas diferenciais obtidas por modelos reológicos. Os autores comparam os resultados de deslocamento (em função do tempo) obtidos utilizando-se os modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann. A partir dos resultados numéricos obtidos, utilizando-se a formulação proposta, é possível verificar as diferenças nas respostas instantâneas características de cada um dos dois modelos utilizados e que estes resultados estão de acordo com os resultados analíticos apresentados. Os autores concluem que a principal vantagem da abordagem proposta está relacionada à avaliação das integrais apenas nos contornos do problema.

Semptikovski e Muñoz-Rojas (2013) propõem uma formulação do Método dos Elementos Finitos utilizando-se um elemento de viga simplificado. Este elemento possui apenas graus de

liberdade de translação, sendo a rigidez à flexão introduzida através de molas de rotação entre dois elementos de barra geometricamente não-lineares adjacentes. Nesse trabalho o comportamento viscoelástico linear em elementos constituídos de Polietileno de Alta Densidade (PEAD) é considerado a partir do modelo reológico generalizado de Maxwell, com base no trabalho desenvolvido em Kaliske e Rothert (1997). No caso elástico e de pequenos deslocamentos, para a simulação de uma viga biapoiada utilizando-se o elemento simplificado proposto, são obtidos erros da ordem de 0,5% em relação à linha elástica analítica. Para a viga em balanço os erros não excedem 1,0%. Considerando-se grandes deslocamentos, também se verifica uma concordância satisfatória dos resultados. No caso viscoelástico linear, os resultados são obtidos através da análise transiente de uma viga biapoiada e de uma viga engastada, sendo esses resultados comparados com os resultados apresentados pelo software comercial Msc Marc[®]. Os erros relativos ao software Msc Marc[®] para a viga biapoiada são menores do que 0,3%. Para a viga em balanço os erros são da ordem de 0,25%.

Panagiotopoulos *et al.* (2014) comparam os resultados de deformação ao longo do tempo em estruturas submetidas a carregamentos quase-estáticos. Os resultados são obtidos utilizando-se a formulação do Método dos Elementos de Contorno baseado na discretização implícita no tempo (denominado Método de Rothe) considerando-se diferentes modelos reológicos para obtenção das equações reológicas. A formulação utilizada é semelhante à apresentada por Mesquita e Coda (2003). São utilizados os modelos de Hooke, Kelvin-Voigt e Boltzmann, para sólidos, que representam respectivamente os comportamentos elástico instantâneo, elástico amortecido e viscoelástico, além dos modelos de Maxwell, Jeffreys e Burgers, para fluidos. Os autores concluem que a abordagem proposta fornece resultados com satisfatória concordância com os resultados analíticos esperados para o modelo de Kelvin-Voigt e, a partir da implementação dos diferentes modelos reológicos, é possível verificar a aplicabilidade da formulação para descrição de diferentes comportamentos tanto sólidos quanto fluidos, considerando-se a contribuição viscosa.

Em Oliveira e Leonel (2017), é desenvolvida uma formulação baseada no Método dos Elementos de Contorno para analisar a propagação de trincas em estruturas viscoelásticas. Para introdução do comportamento viscoelástico, o trabalho considera três modelos distintos, o de Maxwell, o de Kelvin-Voigt e o de Boltzmann. O trabalho apresenta a análise de uma chapa tracionada e com trinca interna, uma viga sob flexão de três pontos e com entalhe central e um painel não homogêneo e com entalhe em três posições distintas. Com os resultados obtidos os autores concluem que a formulação é robusta, possibilitando a análise da propagação de trinca

em diferentes situações e considerando-se diferentes modelos para descrição do comportamento viscoelástico. Além disso, os resultados obtidos apresentam satisfatória concordância com os resultados analíticos e com os resultados experimentais encontrados na literatura.

Os interesses de parte dos recentes estudos relacionados aos comportamentos viscoelástico e viscoelastoplástico têm se concentrado, também, no desenvolvimento de formulações numéricas que adotam equações fenomenológicas, baseadas em modelos reológicos, para representação da relação entre tensões, deformações e tempo, e em técnicas de ajuste dos parâmetros desses modelos para descrição do comportamento em materiais específicos, como destacado nos trabalhos a seguir.

Chung e Buist (2012) descrevem a dedução de um novo modelo reológico generalizado através da adoção de componentes não lineares. O modelo apresentado é capaz de descrever fenômenos viscoelásticos não lineares em uma forma diferencial compacta e que pode ser reduzido ao modelo padrão de sólido linear se forem utilizados componentes lineares. Esse modelo é utilizado para simular o carregamento cíclico na membrana de estômago de mamíferos e tecidos musculares cardíacos a partir da adoção de equações exponenciais de ajuste dos parâmetros do modelo. A partir dos resultados numéricos obtidos é possível observar uma satisfatória concordância em relação aos resultados experimentais, apresentados e obtidos na literatura, confirmando a adequação da abordagem proposta à análise de estruturas biomecânicas, que apresentam acentuado comportamento viscoelástico.

Liu *et al.* (2008) propõem uma formulação baseada em equações integrais para descrição do comportamento viscoelástico não linear do polietileno de alta densidade (PEAD) em aplicações estruturais. O comportamento viscoelástico é considerado adotando-se o modelo generalizado de Kelvin- Voigt e os respectivos parâmetros são obtidos por uma metodologia baseada em interpolação linear. Os resultados numéricos obtidos para a solitação axial de corpos de prova de PEAD são comparados aos resultados experimentais, desenvolvidos pelos próprios autores, comprovando-se a adequação da abordagem proposta para representação do comportamento viscoelástico do respectivo material.

Em Kühl *et al.* (2016), uma formulação semelhante à apresentada em Liu *et al.* (2008) é desenvolvida para descrição do comportamento viscoelastoplástico do PEAD. Para a parte viscoelástica da deformação, é adotado o modelo reológico generalizado de Kelvin-Voigt e, para a parte viscoplástica, é adotada a equação de Zapas-Crissman. Nesse caso os parâmetros

viscoelásticos são obtidos por um ajuste de curva baseado no método de otimização por nuvem de partículas, enquanto os parâmetros viscoplásticos são obtidos por uma regressão linear do método dos mínimos quadrados. Os resultados numéricos obtidos para a solitação axial de corpos de prova de PEAD são comparados aos resultados experimentais, desenvolvidos pelos próprios autores. A partir dos resultados obtidos é possível verificar a capacidade de representação do comportamento viscoelastoplástico através de uma eficiente proposta de determinação dos parâmetros do material de forma otimizada, obtendo-se melhor concordância entre os resultados numéricos e os resultados experimentais em comparação com os resultados apresentados em Liu *et al.* (2008).

Carniel *et al.* (2015) apresentam uma formulação do Método dos Elementos Finitos para análise de treliças espaciais com comportamento viscoelastoplástico incluindo degradação mecânica unidimensional. O modelo reológico generalizado de Kelvin-Voigt é adotado para descrição do comportamento viscoelástico, enquanto o comportamento viscoplástico é considerado a partir da equação de Perzyna e a degradação do material é considerada a partir do modelo de dano de Lemaitre. Os parâmetros do material são obtidos por um ajuste de curva baseado no método de otimização por nuvem de partículas, assim como apresentado em Kühl *et al.* (2016). A abordagem proposta é utilizada na descrição do comportamento viscoelastoplástico de treliças constituídas de PEAD e que apresentam comportamento de “*snap-through*”, em que são verificadas não linearidades geométricas significativas. A abordagem proposta é capaz de representar o comportamento de degradação do material de forma satisfatória quando comparado aos resultados experimentais apresentados. A partir dos resultados numéricos obtidos para as treliças analisadas é possível verificar que o amortecimento estrutural, devido à degradação do material viscoelastoplástico, é significativamente mais pronunciado em relação ao material viscoelastoplástico sem degradação, assim como o amortecimento estrutural do material viscoelastoplástico é significativamente mais pronunciado em relação ao material puramente viscoelástico, proporcionando resultados mais realistas.

Estudos recentes em viscoelasticidade apresentam ainda desenvolvimentos referentes à utilização de derivadas fracionárias na obtenção de modelos reológicos mais simples e com maior precisão na representação do comportamento complexo de materiais reais, como materiais compostos, materiais poliméricos, tecidos biológicos, entre outros (Bahraini *et al.*, 2013; Shen *et al.*, 2013; Pérez Zerpa *et al.*, 2015; Costa-Haveroth *et al.*, 2015).

Alguns estudos, assim como os destacados a seguir, se concentram principalmente na análise do comportamento mecânico viscoelástico a partir de resultados experimentais em perfis estruturais reais ou em corpos de prova, em diferentes estados de tensão e carregamento. Além disso, os resultados experimentais são normalmente comparados com resultados obtidos a partir de modelos analíticos ou numéricos de fluência.

Em Bank e Mosallam (1992), é feita uma investigação experimental e analítica da fluência em longa duração de uma estrutura de pórtico plano composta por uma viga e duas colunas. O pórtico apresentado é construído inteiramente de componentes pultrudados de plástico vinil éster reforçado com fibra de vidro. Os resultados experimentais referentes aos deslocamentos verticais no meio do vão são comparados aos resultados analíticos considerando-se tanto a teoria de vigas de Bernoulli-Euler quanto a teoria de vigas de Timoshenko. A partir dos resultados obtidos no trabalho é possível verificar que as mudanças nas magnitudes dos módulos representativos das propriedades do material dependentes do tempo não podem ser negligenciadas no projeto de estruturas pultrudadas de material polimérico reforçado com fibra de vidro. A partir dos resultados experimentais e das análises teóricas do pórtico, os autores concluem que as grandes diferenças entre as predições da teoria de vigas com deformações por cisalhamento (teoria de Timoshenko) e as predições da teoria clássica de vigas (teoria de Bernoulli-Euler) indicam que os efeitos do cisalhamento não podem ser negligenciados nas análises de estruturas pultrudadas de plástico reforçado com fibra de vidro.

Em Mottram (1993), é feito um estudo das propriedades de rigidez estrutural em longa duração e em curta duração de vigas pultrudadas de material polimérico reforçado com fibra de vidro sob flexão de três pontos. Embora os testes de fluência tenham sido conduzidos por apenas 24 horas, de acordo com o autor, o comportamento de fluência foi similar ao obtido por Bank e Mosallam (1992). Expressões para os módulos viscoelásticos dependentes do tempo são obtidas baseando-se na Lei de Potência Findley. Esses módulos são, então, utilizados na teoria de vigas de Timoshenko para estimar o deslocamento vertical por fluência durante o tempo utilizando-se dados obtidos de testes de longa duração acelerados.

Dutta e Hui (2000) realizam um estudo em relação ao comportamento de fluência à tração e à compressão de materiais compostos de poliéster reforçados com fibra de vidro em diferentes níveis de sollicitação e diferentes níveis de temperatura. Para tanto, é utilizada a Lei de Potência de Findley para ajustar os dados experimentais, em que o Princípio de Superposição Tempo-Temperatura-Tensão permite prever o tempo até a falha. A partir dos resultados apresentados é

possível verificar que o comportamento estrutural do poliéster reforçado com fibra de vidro não é simétrico em relação ao nível de tensão, ou seja, o material não apresenta as mesmas propriedades mecânicas tanto no comportamento de fluência à tração quanto à compressão. Além disso, os autores concluem que a Lei de Potência de Findley pode ser utilizada com precisão satisfatória na predição do comportamento de fluência à tração ou à compressão em longo prazo utilizando-se o Princípio de Superposição Tempo-Temperatura-Tensão.

Abdel-Magid *et al.* (2003) realizam um estudo das propriedades do comportamento de fluência e de ruptura por fluência em longa duração sob flexão de dois tipos de compostos de material polimérico reforçado com fibra de vidro (poliuretano e epóxi). Os testes são realizados sob flexão de três pontos a temperatura ambiente e a temperatura de 50°C. Com os resultados obtidos, os autores avaliam e apresentam os efeitos do cisalhamento e da rigidez da interface fibra/matriz na rigidez à fluência e à ruptura.

Em Shao e Shanmugam (2004), é feito um dos primeiros estudos para incluir a influência do efeito da viscosidade devido à deformação por cisalhamento na predição dos deslocamentos em longa duração. Os autores utilizam a Lei de Potência de Findley em termos de deflexão para investigar o comportamento de fluência à flexão em compostos pultrudados. Nesse trabalho, dois painéis feitos de poliéster reforçados por fibra de vidro E são testados sob flexão de três pontos. Três parâmetros de resposta são monitorados para avaliar o fenômeno de fluência (deslocamentos, tensão axial e tensão de cisalhamento). Para predição da resposta são utilizados a Lei de Potência de Findley e a teoria de vigas de Timoshenko. Como resultado dos estudos, foi possível avaliar a importância da contribuição da fluência por cisalhamento na deflexão dos painéis em longa duração.

Sá *et al.* (2011a) realizam uma investigação experimental de fluência sob flexão em vigas de material pultrudado constituído de poliéster reforçado com fibra de vidro. Nos ensaios são utilizadas duas escalas diferentes de corpos de prova: uma viga de perfil I e corpos de prova retirados do perfil. A primeira parte do procedimento experimental tem como objetivo avaliar as propriedades estáticas do material independentes do tempo através de testes mecânicos de tração, compressão e flexão nos corpos de prova e no perfil. Na segunda parte do procedimento experimental, testes de fluência à flexão são realizados nos corpos de prova e no perfil sendo os níveis de solicitação definidos com base nos valores de tensão última determinados na primeira parte do experimento. Os resultados se baseiam na medição dos valores de flecha (deslocamento vertical máximo da viga) no meio do vão e dos valores de deformação axial. Em

relação à flecha viscoelástica da viga de perfil I, são obtidos aumentos de 4%, 8% e 12%, respectivamente, no final do primeiro dia, da primeira semana e do primeiro mês, obtendo-se um aumento máximo de 15% ao final dos testes de fluência, depois de 1600 horas. Os resultados obtidos por ambas as escalas de teste foram consistentes, sugerindo-se que é possível utilizar os resultados obtidos para materiais pultrudados feitos de poliéster reforçado com fibra de vidro em escala reduzida na predição das deformações por fluência de perfis estruturais constituídos por esse mesmo material. Em Sá *et al.* (2011b), esses resultados experimentais são comparados aos resultados das previsões utilizando-se o modelo reológico de Bruger-Kelvin, série de Prony-Dirichlet e a Lei de Potência de Findley. Além disso, os resultados experimentais são utilizados para descrever o comportamento em longa duração a partir do Princípio da Superposição Tempo-Temperatura-Tensão, para uma tensão de referência de 20% da tensão última do material. Os autores concluem que os resultados experimentais obtidos para fluência de materiais pultrudados feitos de poliéster reforçado com fibra de vidro podem ser representados com satisfatória precisão, principalmente para níveis de tensão inferiores a 40% da tensão última do material, utilizando-se os três modelos de previsão. No entanto, essa concordância entre os resultados é observada apenas dentro do período de tempo adotado experimentalmente e considerado no ajuste dos parâmetros dos modelos. Visto que, na predição do comportamento de fluência além do tempo ensaiado, são observadas divergências consideráveis entre os resultados obtidos.

Na literatura, são encontrados ainda trabalhos dedicados ao desenvolvimento de revisões técnicas e bibliográficas em relação ao comportamento viscoelástico com foco em diferentes conceitos e materiais. A seguir são apresentados dois trabalhos distintos que se dedicam a este escopo.

Em Scott *et al.* (1995), é apresentada uma revisão da literatura técnica relacionada ao comportamento viscoelástico em materiais compostos poliméricos reforçados com fibra. A revisão se dedica principalmente à exposição da utilização da Lei de Potência de Findley, do Princípio da Superposição de Boltzmann e da Equação Integral de Schapery no modelamento e previsão de fluência a partir de resultados experimentais. O trabalho inclui ainda a avaliação das relações das teorias da viscoelasticidade linear e não linear, a revisão de técnicas de caracterização acelerada, a avaliação dos efeitos da umidade e da temperatura sobre o comportamento de fluência em materiais compostos e a interação entre o comportamento de fluência e o comportamento de fadiga.

Em Yao *et al.* (2007), é feita uma revisão das teorias relacionadas ao fenômeno de fluência com ênfase especial em materiais metálicos sob estados de tensão multiaxiais. São apresentadas teorias baseadas em fenômenos microscópicos como nucleação e crescimento de vazios na interface entre os grãos da estrutura. São apresentadas também teorias baseadas na plasticidade clássica e na mecânica do dano contínuo para descrever os mecanismos de falha por fluência multiaxial, estabelecer os critérios de projeto e prever a vida útil desses em altas temperaturas.

Como pode ser observado pelos trabalhos citados, os estudos em relação ao comportamento viscoelástico e em sua descrição numérica perduram e são encontrados nas mais diversas áreas. Isso se deve à relevância do referido comportamento mecânico e aos avanços tecnológicos em relação à utilização de materiais não convencionais, principalmente materiais poliméricos e compostos com matriz polimérica, além, do interesse em simulações de comportamentos biomecânicos e em análises de materiais em condições de serviço mais severas. Dessa forma, entende-se que o presente estudo está situado em um tema recorrente e de interesse de pesquisadores em diferentes áreas.

2.2 Método dos Elementos Finitos Posicional

Apresentada originalmente em Coda (2003) e Coda e Greco (2004), a formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos, denominada neste estudo Método dos Elementos Finitos Posicional, é um método numérico baseado em conceitos variacionais do Princípio da Mínima Energia Potencial Total. Desenvolvida inicialmente para analisar estruturas reticuladas planas de natureza não linear geométrica com carregamento estático e conservativo, nessa formulação as variáveis principais adotadas são as posições nodais da estrutura. Essas são avaliadas em relação a um sistema de coordenadas fixo no espaço para descrever a cinemática dos elementos finitos (descrição Lagrangiana Total). A formulação parte de um funcional de energia (que transforma um campo vetorial de posições em um campo escalar de energia) e, através da aplicação do Princípio da Mínima Energia Potencial Total, obtém-se uma equação não linear de equilíbrio em função das posições nodais e forças aplicadas para cada elemento finito. Assim, a formulação posicional se difere da formulação convencional do Método dos Elementos Finitos que considera uma abordagem baseada em equilíbrio de quantidades vetoriais e adota os deslocamentos nodais como variáveis principais, utilizando-se como referência inicialmente sistemas de coordenadas locais e posteriormente um sistema de coordenadas global, necessitando de uma matriz de transformação de coordenadas.

Os autores precursores da formulação posicional destacam como uma das principais vantagens a simplicidade da formulação, em relação à formulação convencional, baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), e à formulação co-rotacional. Isso se deve às derivadas e expressões mais simples, oriundas do conceito de equilíbrio de energia, que são desenvolvidas durante a formulação, como é apresentado no capítulo 3. Tal fato resulta em menores quantidades de operações necessárias e acarreta maior rapidez nos cálculos e no tempo de processamento dos códigos implementados. Além disso, na formulação posicional, não há necessidade de transformações entre sistemas de coordenadas, utilizando-se um sistema global único, visto que as operações são realizadas em termos de escalares de energia e posição, ao contrário da formulação convencional em que as operações são realizadas em termos de vetores de força e de deslocamento. Outra vantagem destacada pelos autores que utilizam a formulação posicional é o fato desta ser originalmente não linear geométrica. Isso se deve ao processo iterativo necessário à resolução do sistema de equações, o qual é inerentemente não linear em relação às posições nodais, possibilitando uma implementação simples de códigos para análise de problemas envolvendo grandes deformações e grandes deslocamentos. No entanto, a formulação requer desenvolvimentos específicos para cada modelo constitutivo implementado, em que as contribuições linear e não linear são desenvolvidas simultaneamente, exigindo o recomeço de todo o desenvolvimento para implementação de novos modelos e dificultando o reaproveitamento dos códigos implementados computacionalmente. Ao contrário, para as formulações convencional e co-rotacional são observadas, respectivamente, a separação entre as contribuições linear e não linear e a separação entre os movimentos de corpo rígido e as deformações, sendo possível implementar novos modelos reaproveitando parte considerável do código referente a contribuição linear ou ao movimento de corpo rígido.

Apesar de relativamente recente, essa formulação posicional tem sido objeto de estudo de número considerável de pesquisadores, como observado nos trabalhos destacados a seguir, principalmente devido a sua capacidade de aplicação a análises não lineares. No capítulo 3 do presente estudo, são apresentados alguns procedimentos e um equacionamento geral do Método dos Elementos Finitos Posicional. Nos capítulos 5 e 6 são desenvolvidas as particularizações da formulação para os tipos de elementos finitos e cinemáticas de interesse e os diferentes comportamentos mecânicos considerados.

No trabalho inicial, desenvolvido em Coda (2003), são apresentados exemplos simples com não linearidades geométricas e com soluções analíticas disponíveis na literatura. As comparações dos resultados numéricos e analíticos são utilizadas para comprovar a precisão da

formulação, obtendo-se conformidade entre esses resultados. Em Coda e Greco (2004), a formulação posicional é consolidada e estendida para aplicação de controle de deslocamentos (prescrição de posição). Assim, duas estruturas que apresentam comportamento de “*snap-through*” são analisadas pela formulação e os resultados obtidos para as posições de equilíbrio são comparados com os resultados do software ADINA[®] com o objetivo de comprovar a aplicação. Nesses dois trabalhos citados, a formulação desenvolvida é restrita a materiais com comportamento elástico e é considerada a hipótese de vigas de Bernoulli-Euler. Os resultados numéricos obtidos pela formulação apresentam satisfatória concordância em relação aos resultados obtidos pelo software ADINA[®], comprovando a capacidade de representação da acentuada não linearidade geométrica descrita pelo “*snap-through*” utilizando-se o método de controle por prescrição de posição.

Greco (2004) e Greco e Coda (2006) desenvolvem a formulação posicional não linear para o caso de problemas dinâmicos utilizando-se um algoritmo da família de integradores temporais de Newmark. Essa formulação é aplicada inicialmente à análise de mecanismos flexíveis. Greco (2004) estende ainda a formulação à análise de problemas de impacto bidirecional entre duas estruturas reticuladas ou entre uma estrutura reticulada e um anteparo rígido utilizando-se um algoritmo, desenvolvido em Greco *et al.* (2004), de identificação da ocorrência do contato. As concordâncias satisfatórias apresentadas entre os resultados numéricos obtidos, os resultados presentes na literatura e os resultados analíticos comprovam a capacidade da formulação desenvolvida na representação de problemas dinâmicos e de problemas de impacto bidirecional. Além disso, Greco (2004) redefine a formulação posicional não linear a fim de considerar efeitos elastoplásticos em estruturas reticuladas planas, ampliando dessa forma o campo de aplicação da formulação para casos que abordam não linearidades geométricas, não linearidades físicas e não linearidades de contato/impacto. Em todos os casos são consideradas medidas de deformação de engenharia.

Em Maciel *et al.* (2004) e Maciel (2008), a formulação posicional do Método dos Elementos Finitos é desenvolvida de forma original para análise estática de pórticos planos com não linearidades geométricas considerando-se a cinemática de Reissner. Em Maciel *et al.* (2004), comparados os resultados obtidos considerando-se a cinemática de Reissner e a cinemática de Bernoulli-Euler, a partir de soluções analíticas, comprovando-se a influência da deformação por cisalhamento nos problemas analisados. Trabalho semelhante é desenvolvido em Maciel e Coda (2008) incluindo a comparação com os resultados numéricos obtidos a partir da formulação posicional desenvolvida em Greco (2004) para análise estática de pórticos planos

considerando-se a cinemática de Bernoulli-Euler, confirmando-se os resultados obtidos em Maciel *et al.* (2004). Maciel (2008) estende a formulação posicional para análise dinâmica de pórticos planos considerando-se a cinemática de Reissner. Com a abordagem proposta as rotações dos nós são avaliadas de forma independente, dando-lhes tratamento e aproximação iguais às posições nodais. Dessa forma, a implementação é consideravelmente mais simples, em relação à formulação com cinemática de Bernoulli-Euler, e de filosofia análoga às adotadas nas cinemáticas dos elementos de casca e sólido. Sendo possível observar ainda a facilidade de se aumentar o polinômio de aproximação dos parâmetros dos elementos finitos. Maciel (2008) desenvolve, ainda, a formulação posicional para análise estática e dinâmica de sólidos tridimensionais, adotando-se aproximação cúbica de variáveis com elementos finitos tetraédricos de 20 nós. Os problemas dinâmicos foram analisados adotando-se o algoritmo clássico de integração temporal de Newmark. O trabalho de Maciel (2008) apresenta, também, uma análise do impacto entre estruturas tridimensionais e anteparos rígidos, complementando o estudo sobre impacto utilizando-se o Método dos Elementos Finitos Posicional, iniciado por Greco (2004). Posteriormente, em Maciel (2015), uma formulação semelhante à apresentada em Maciel (2008) é desenvolvida para análise estática de elementos tridimensionais considerando-se a não linearidade física do material a partir do critério de Drucker-Prager para plastificação.

Em Greco *et al.* (2006), a formulação posicional não linear é desenvolvida para a análise de treliças espaciais com não linearidades geométricas e físicas considerando-se uma medida de deformação de engenharia. Nesse trabalho é considerado um comportamento mecânico elastoplástico bilinear. Dois exemplos com soluções analíticas obtidas na literatura, um apresentando severo comportamento não linear geométrico e outro apresentando comportamento elastoplástico, são utilizados para validar a formulação. Os resultados obtidos apresentam satisfatória concordância. Além disso, exemplos clássicos, como uma cúpula treliçada, são analisados e seus resultados comparados aos do software ANSYS®, comprovando-se a precisão da formulação. Em Greco e Ferreira (2009), a formulação é estendida de forma bem sucedida para a análise de treliças espaciais e *tensegrities* com não linearidades físicas e geométricas considerando-se uma medida de deformação logarítmica, apresentando satisfatória concordância entre os resultados numéricos obtidos e os resultados presentes na literatura. Adicionalmente, Greco e Da Costa (2012) fazem uma comparação entre as formulações desenvolvidas em Greco *et al.* (2006) e Greco e Ferreira (2009) que utilizam, respectivamente, a medida de deformação de engenharia e a medida de deformação logarítmica.

Os autores chegam à conclusão de que a formulação posicional não linear geométrica para análise de treliças espaciais é invariante em relação à medida de deformação considerada.

Em Greco e Venturini (2006), a formulação desenvolvida para análise de treliças espaciais é utilizada para estudar a estabilidade e o comportamento pós-crítico de estruturas treliçadas, considerando-se não linearidades geométricas e comportamento elástico. Nesse trabalho, a identificação dos pontos críticos é realizada de uma forma indireta através da análise da singularidade da matriz Hessiana. Os autores concluem que, de uma forma simples e com menor esforço computacional, a formulação fornece informações sobre os limites de estabilidade de estruturas estáticas com satisfatória precisão quando comparado às soluções analíticas e numéricas presentes na literatura.

Em Marques (2006), a formulação posicional é desenvolvida para análise não linear geométrica estática e dinâmica de sólidos bidimensionais, mais especificamente considerando-se elementos planos de chapa. Os problemas dinâmicos avaliados adotando-se o algoritmo clássico de integração temporal de Newmark. O trabalho apresenta uma análise do impacto entre sólidos bidimensionais e anteparos rígidos, complementando o estudo sobre impacto utilizando-se o Método dos Elementos Finitos Posicional, iniciado por Greco (2004). Os resultados numéricos obtidos apresentam satisfatória concordância com os resultados analíticos e os resultados obtidos na literatura.

Em Coda e Paccola (2007), a formulação posicional não linear geométrica é desenvolvida de forma bem sucedida para análise estática de placas com espessura constante. Posteriormente, em Coda e Paccola (2008), a formulação é estendida para considerar uma espessura linearmente variável, utilizando-se a relação constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff para cascas com cinemática de Reissner com enriquecimento transversal. Em ambos os casos são considerados materiais elásticos com carregamentos estáticos e conservativos.

Em Pascon (2008), a formulação posicional para análise não linear geométrica de cascas é utilizada para implementação e estudo de modelos constitutivos hiperelásticos não lineares, homogêneos e isotrópicos. Neste caso, é utilizado um elemento finito de casca com dez nós, sete parâmetros por nó e variação linear da deformação ao longo da espessura. Os modelos implementados são o neo-Hookeano, o de Mooney-Rivlin, o de Yeoh, o de Hartmann-Neff e o de Bechir-Boufala-Chevalier. Modelos esses que são comumente utilizados na análise de polímeros naturais. O autor conclui que na tração uniaxial homogênea, utilizando-se os modelos

de Yeoh, de Hartmann-Neff e de Bechir-Boufala-Chevalier, são obtidos resultados com satisfatória conformidade em relação aos dados experimentais da literatura científica. Mostrou também que, utilizando-se os modelos neo-Hookeano e de Mooney-Rivlin os resultados são adequados apenas para pequenas e médias deformações. No caso da compressão uniaxial, os cinco modelos implementados são considerados adequados para todos os níveis de deformação.

Em Carrazedo (2009), a formulação posicional é utilizada para estudar problemas de impacto bidimensional considerando-se transferência de calor e seus efeitos. Assim, são consideradas estruturas em situações não-isotérmicas, incluindo a geração de calor decorrente da taxa de deformação da estrutura. São apresentados os conceitos necessários para a completa descrição do comportamento de sólidos termo-elastoplásticos, baseados nas leis da termodinâmica e nos princípios da elasticidade e da plasticidade. Estes conceitos são então utilizados para o desenvolvimento de um código computacional para analisar estruturas com comportamento termo-elástico e termo-plástico. Diversos exemplos são analisados e comparados com resultados analíticos e resultados obtidos na literatura, comprovando a precisão e validando a formulação desenvolvida. Com os resultados obtidos o autor questiona a validade da teoria atual da termo-elasticidade, visto que o termo de geração de calor elástico surge em decorrência da consideração de que a entropia pode decrescer.

Em Reis (2012), é desenvolvido um código computacional adaptando-se a formulação posicional não linear geométrica para analisar estruturas reticuladas bidimensionais estáticas com ligações semirrígidas. Para tanto, as ligações são consideradas como rótulas elásticas e elastoplásticas. Os resultados numéricos obtidos apresentam satisfatória concordância com os resultados analíticos e os resultados disponíveis na literatura.

Em Pascon (2012), a formulação posicional não linear geométrica para análise de sólidos tridimensionais é utilizada para implementação de modelos constitutivos elásticos e elastoplásticos para materiais com gradação funcional, a qual é definida como a variação gradual (contínua e suave) das propriedades constitutivas do material. Nesse trabalho são adotados elementos tetraédricos e hexagonais com a ordem de aproximação polinomial desejada. Duas formulações elastoplásticas são utilizadas: a de Green-Naghdi, na qual a deformação é decomposta de forma aditiva; e a hiperelastoplástica, em que o gradiente é decomposto de forma multiplicativa.

Em Greco *et al.* (2012), é feita uma comparação entre a formulação posicional do Método dos Elementos Finitos e a formulação co-rotacional para análise não linear geométrica de treliças espaciais, considerando seus aspectos de estabilidade estrutural. A primeira formulação utiliza posições nodais ao invés dos deslocamentos nodais para descrever a cinemática dos elementos finitos, sendo as deformações calculadas diretamente do conceito posicional proposto, utilizando-se um sistema de coordenadas cartesiano fixo no espaço. A segunda formulação é baseada na separação explícita entre o movimento de corpo rígido e o movimento devido à deformação. Essa separação permite a representação das não linearidades devido ao movimento de corpo rígido. Os autores concluem que, em termos gerais, a formulação posicional é consideravelmente mais simples do que a formulação co-rotacional. Assim, a avaliação numérica pela formulação posicional pode ser potencialmente mais rápida que a avaliação numérica pela formulação co-rotacional, sendo apropriada para análises de estruturas complexas que apresentem operações com matrizes de grandes dimensões. Por outro lado, no caso da formulação co-rotacional, o reaproveitamento do código computacional para formulações de outras leis constitutivas é uma evidente vantagem. Para deduzir uma formulação numérica para novos materiais ou fenômenos utilizando-se o conceito posicional, novos termos precisam ser incluídos no funcional de energia potencial total, acarretando um considerável aumento nos desenvolvimentos algébricos.

Em Greco *et al.* (2013), a formulação posicional não linear é aplicada à análise dinâmica de estruturas *tensegrity*, utilizando-se o algoritmo implícito de integração α -HHT e o algoritmo explícito de diferenças centrais. Os autores concluem com os resultados obtidos que a abordagem proposta é adequada à análise dinâmica de estruturas *tensegrity*, obtendo-se respostas com características mais estáveis, com amortecimentos numéricos pequenos em módulo, em relação às respostas obtidas utilizando-se o algoritmo clássico de Newmark.

Em Greco *et al.* (2011) e Oliveira (2012), a formulação posicional desenvolvida para análise dinâmica é utilizada para estudar problemas de massas móveis em cabos. Pelos resultados obtidos, os autores concluem que a formulação proposta é adequada para descrever o comportamento de qualquer ponto localizado em um cabo devido à influência de uma massa móvel com velocidade constante. Além disso, é verificado que o comportamento não linear geométrico para velocidades mais baixas é preponderante em relação aos efeitos inerciais, sendo o comportamento do cabo mais estável para problemas com velocidades mais altas de deslocamento da massa móvel. Oliveira (2012) verifica ainda as influências dos valores da massa e sua velocidade, assim como a influência de duas massas móveis e da velocidade

variável da massa móvel, no comportamento do cabo. O autor conclui que há uma tendência de enrijecimento do cabo com o aumento da velocidade da massa móvel. Além disso, o autor conclui que o valor da massa é significativo no comportamento dinâmico do cabo ou da viga principalmente para baixas velocidades. Adicionalmente, Oliveira (2012) aplica a formulação posicional à análise de uma viga com massa móvel, verificando a influência da velocidade, das condições de apoio e do comportamento elastoplástico. Ao contrário do que se observa para o caso de cabos, o autor conclui que, para o caso de vigas, é observado um aumento nos deslocamentos devido ao aumento da velocidade da massa móvel. Além disso, é observado que a análise elastoplástica realizada permite obter os resultados esperados pela literatura, em que o comportamento elastoplástico isotrópico é descrito mesmo utilizando-se uma medida de deformação de engenharia, usualmente considerada para problemas lineares. Em Oliveira e Greco (2014), a formulação posicional é desenvolvida e aplicada à análise dinâmica de vigas laminadas elastoplásticas com massas móveis. Essa configuração laminada permite analisar casos práticos de vigas compostas por dois ou mais materiais diferentes, vigas de material composto com camadas de fibras em direções diferentes e, também, vigas de seções homogêneas de geometria complexa, como uma seção de trilho de linha férrea.

Em Lacerda *et al.* (2014), a formulação posicional não linear para análise de treliças espaciais é utilizada para implementação de dois métodos de controle diferentes no método iterativo de Newton-Raphson. Os dois métodos implementados são baseados no método do comprimento de arco, e são conhecidos como método de Riks e método de Crisfield. Os métodos de comprimento de arco são técnicas comumente utilizadas na análise não linear para solução de trajetórias de equilíbrio, pontos de bifurcação e pontos limites relacionados aos fenômenos de *snap-through* e *snap-back*. A formulação é utilizada na análise de diferentes problemas não lineares que apresentam fenômenos de *snap-through* e *snap-back* fornecendo resultados de trajetórias de equilíbrio em conformidade com os resultados disponíveis na literatura científica. Lacerda (2014) aprofunda o estudo iniciado em Lacerda *et al.* (2014), analisando problemas de instabilidade estrutural de bifurcação de resposta, *snap-through* e *snap-back* utilizando-se diferentes métodos de controle, adotados para traçar trajetórias de equilíbrio, e utilizando-se as medidas de deformação de engenharia, logarítmica e de Green. Os métodos de controle implementados são os de incremento de posição, incremento de força e comprimento de arco. O trabalho apresenta ainda um algoritmo do método do comprimento de arco baseado no algoritmo de Riks-Wempner.

Em Rabelo *et al.* (2014), a formulação posicional não linear desenvolvida para análise de treliças espaciais com não linearidades geométricas e físicas é particularizada para descrição do comportamento viscoelástico, sendo a contribuição deste comportamento introduzida a partir da relação reológica obtida do modelo de Kelvin-Voigt. O trabalho inclui ainda a análise numérica da estrutura de uma mísula treliçada de torre de linha de transmissão constituída de material polimérico reforçado com fibra de vidro. Os autores concluem que a formulação é capaz de representar o comportamento esperado para o modelo reológico de Kelvin-Voigt como um fenômeno de fluência adicional ao comportamento elástico instantâneo em estruturas de treliça sujeitas a esforços axiais. Posteriormente, em Rabelo (2015) uma formulação semelhante é desenvolvida e implementada considerando-se a relação reológica obtida do Modelo de Zener.

Em Becho *et al.* (2015), a formulação posicional não linear desenvolvida para análise de estruturas reticuladas planas discretizadas em elementos de pórtico é particularizada para descrição do comportamento viscoelástico em vigas e estruturas de pórtico plano, considerando-se a cinemática de Bernoulli-Euler. Nesse caso, a contribuição do comportamento viscoelástico é introduzida a partir da relação reológica obtida do modelo padrão de sólido (modelo de Zener) e considerada apenas em relação às deformações da linha centroidal dos elementos finitos. Na sequência, em Becho (2016), uma formulação semelhante é desenvolvida, porém, nesse caso a contribuição do comportamento viscoelástico é considerada em relação às deformações ao longo da altura do elemento finito por meio de uma malha de integração numérica bidimensional. Os autores concluem que, diferentemente de Rabelo *et al.* (2014), a formulação é capaz de representar o comportamento esperado para o modelo reológico de Zener como um fenômeno de fluência que inclui tanto o comportamento elástico instantâneo quanto o comportamento elástico amortecido dependente do tempo em vigas e estruturas de pórtico plano sujeitas a esforços axiais e de flexão.

Em Becho *et al.* (2016), uma formulação semelhante a apresentada em Rabelo (2015) é desenvolvida para descrever o comportamento mecânico viscoelástico em barras submetidas à tração, considerando-se o modelo reológico de Zener. Essa formulação é então empregada para a simulação de testes de carregamento-descarregamento de barras constituídas de Polietileno de Alta Densidade. Posteriormente, em Becho *et al.* (2017), a mesma formulação é utilizada para implementação de quatro modelos reológicos diferentes capazes de descrever o comportamento viscoelástico. Os modelos implementados são os de Maxwell, Kelvin-Voigt, Boltzmann e Zener. Nesse trabalho são analisadas estruturas com não linearidades geométricas

acentuadas obtendo-se resultados satisfatórios e de acordo com o esperado pela Teoria da Viscoelasticidade.

Em Cavalcante *et al.* (2017), a formulação posicional é estendida para a análise de problemas dinâmicos e de contato/impacto em treliças espaciais. A formulação desenvolvida é semelhante à apresentada em Greco (2004) para análise de contato/impacto em pórticos planos. Nesse trabalho são comparados os resultados das implementações de diferentes algoritmos de integração temporal. Os algoritmos implementados são Wilson- θ , Houbolt, Newmark modificado, Diferenças Centrais, Souza e Moura e Chung e Lee. Os autores concluem que a formulação é simples e eficiente para os problemas analisados e, a partir dos resultados obtidos, concluem ainda que os algoritmos de integração temporal de Newmark, Diferenças Centrais, Souza e Moura e Chung e Lee são adequados para a análise de problemas de contato/impacto, enquanto, os algoritmos de Wilson- θ e Houbolt não apresentaram resultados satisfatórios.

Em Pascon e Coda (2017), a formulação posicional não linear geométrica é desenvolvida para análise estática de elementos tridimensionais considerando-se o modelo constitutivo hiperelástico neo-Hookeano em associação com o modelo reológico de Zener para descrição do comportamento viscoelástico. Nesse trabalho é adotado como método de integração temporal o método implícito de Euler. Apesar de serem adotados modelos unidimensionais, a formulação apresenta resultados de acordo com o esperado pela Teoria da Viscoelasticidade. Além disso, pelos resultados obtidos, os autores concluem que a formulação desenvolvida é capaz de representar os fenômenos de fluência e relaxação, observados em materiais poliméricos, de forma satisfatória.

Em Rabelo *et al.* (2018), a formulação posicional não linear, desenvolvida em Rabelo (2015), para análise de treliças espaciais com comportamento viscoelástico, é consolidada. Neste trabalho, os autores avaliam a influência das propriedades viscoelásticas, do modelo de Zener, no comportamento de uma treliça de duas barras com acentuada não linearidade geométrica. Os autores concluem que a redução do módulo de viscosidade propicia a ocorrência do snap-through com valores de módulo de elasticidade superiores aos que seriam necessários para a ocorrência desse fenômeno quando se considera o comportamento elástico. Além disso, com a redução do módulo de viscosidade o snap-through pode ocorrer de forma prematura na escala de tempo. O trabalho inclui ainda a análise numérica da estrutura de uma mísula treliçada de torre de linha de transmissão constituída de material polimérico reforçado com fibra de vidro.

Para tal, a formulação é calibrada de forma bem sucedida a partir de ensaios de fluência à tração disponíveis na literatura.

Em Fernandes *et al.* (2018), a formulação posicional não linear é desenvolvida para análise dinâmica de estruturas discretizadas por elementos de pórtico com ligações viscoelásticas. A formulação desenvolvida é baseada nos trabalhos de Greco (2004) e Vasconcellos (2018), sendo a modelagem das ligações viscoelásticas desenvolvida a partir de relações reológicas deduzidas do modelo de Kelvin-Voigt. No trabalho é apresentada uma análise completa do comportamento dinâmico de um arco senoidal que apresenta comportamento de snap-through. Na análise apresentada são avaliadas as influências dos diferentes parâmetros e os resultados obtidos apresentam satisfatória concordância com os resultados disponíveis na literatura.

Como pode ser observado pelos trabalhos citados, o desenvolvimento e a aplicação do Método dos Elementos Finitos Posicional tem sido objeto de estudo de um número considerável de pesquisadores, apesar de ser uma formulação relativamente recente. Isso se deve à sua reconhecida aplicabilidade à análise de problemas não lineares, aliado à sua simplicidade de desenvolvimento algébrico e implementação computacional. É importante mencionar que o próprio avanço nos estudos e aplicações das diferentes formulações do MEF, abre espaço e incentivam pesquisadores de diferentes áreas em desenvolver e utilizar métodos e formulações alternativas. Dessa forma, entende-se que o presente estudo está situado em um tema relativamente recente e que tem despertado o interesse de um número considerável de pesquisadores.

3

FORMULAÇÃO POSICIONAL GERAL

Apresentado originalmente em Coda (2003) e Coda e Greco (2004), o Método dos Elementos Finitos Posicional é baseado em conceitos variacionais do Princípio da Mínima Energia Potencial Total. Nessa formulação as variáveis principais adotadas são as posições nodais da estrutura em relação a um sistema de coordenadas fixo no espaço (descrição Lagrangiana Total). Essas variáveis são utilizadas como parâmetros para descrever a cinemática dos elementos finitos e, a partir destas, é possível obter o campo de deformações e o campo de tensões.

Neste capítulo a formulação é descrita de uma forma geral, caso tridimensional não linear geométrico, sem levar em consideração as particularidades da cinemática do elemento finito e do comportamento mecânico. A partir da formulação geral desenvolvida é possível, posteriormente, particularizar a formulação para o elemento finito considerado e para diferentes comportamentos mecânicos característicos do material constituinte.

Inicialmente é definida a função mudança de configuração, responsável pelo mapeamento dos elementos finitos. Na sequência são apresentados o tensor gradiente de deformação (responsável pela determinação do movimento relativo entre os pontos constituintes dos elementos finitos), a medida de deformação em termos do tensor gradiente de deformação e a energia de deformação total em termos da medida de deformação (utilizada no Princípio da Mínima Energia Potencial Total). Por fim é desenvolvido e apresentado o Princípio da Mínima Energia Potencial Total, responsável pela determinação das configurações de equilíbrio dos elementos finitos, que é a base da formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional.

3.1 Função mudança de configuração

Como descrito em Mal e Singh (1991), o tratamento matemático da mecânica dos sólidos se baseia na suposição de uma porção material distribuída em um domínio denominado contínuo. Sendo que, em cada instante de tempo, todos os pontos dentro do domínio são ocupados por um elemento infinitesimal de volume denominado partícula material ou ponto material. Os movimentos de um corpo deformável podem, então, ser determinados pelos movimentos dos pontos materiais e as mudanças de forma deste corpo podem ser determinadas a partir dos movimentos relativos entre os pontos materiais que o compõem. Dessa forma, para estudar o comportamento mecânico de um corpo deformável é necessário descrever o movimento de seus pontos materiais, o que pode ser feito matematicamente através da função mudança de configuração.

A função mudança de configuração (representada por f) é definida como a função que relaciona as coordenadas de um ponto material do corpo no estado deformado, em um determinado instante de tempo t , com as correspondentes coordenadas do ponto material do corpo no estado indeformado, em um instante inicial t_0 . Assim, como apresentado na Figura 3-1, considerando-se um corpo deformável, domínio Ω na configuração deformada (configuração corrente), um ponto P pertencente ao domínio e identificado por um conjunto de coordenadas $X(X_1; X_2; X_3)$, em um espaço euclidiano, pode ser relacionado ao ponto p pertencente ao domínio ω e identificado por um conjunto de coordenadas $x(x_1; x_2; x_3)$, na configuração indeformada (configuração inicial), por meio da função mudança de configuração expressa indicialmente por:

$$X_i = f_i(x, t) \quad (3-1)$$

em que i , de acordo com a notação indicial, assume valores inteiros de 1 a 3, sendo este o índice representativo das direções X_1 , X_2 e X_3 . Essa mesma notação é adotada para os índices i e j ao longo de todo o texto.

Considerando-se ainda que f é uma função bijetora, ou seja, todo ponto P , pertencente a Ω , pode ser relacionado a apenas um único ponto p , pertencente a ω , e vice-versa (denominado mapeamento injetivo), a relação inversa pode ser expressa por:

$$x_i = f_i^{-1}(X, t) \quad (3-2)$$

A função mudança de configuração é responsável, então, por mapear as mudanças de posições dos pontos, possibilitando a obtenção da configuração deformada de um corpo em termos das posições dos pontos na configuração indeformada do corpo. Nesse caso, a configuração indeformada é escolhida como a configuração de referência (denominado referencial Lagrangiano). Considerando-se este referencial adotado ao longo de toda a análise de mudança de configuração, a descrição da mudança de configuração é dita Lagrangiana Total (Mal e Singh, 1991).

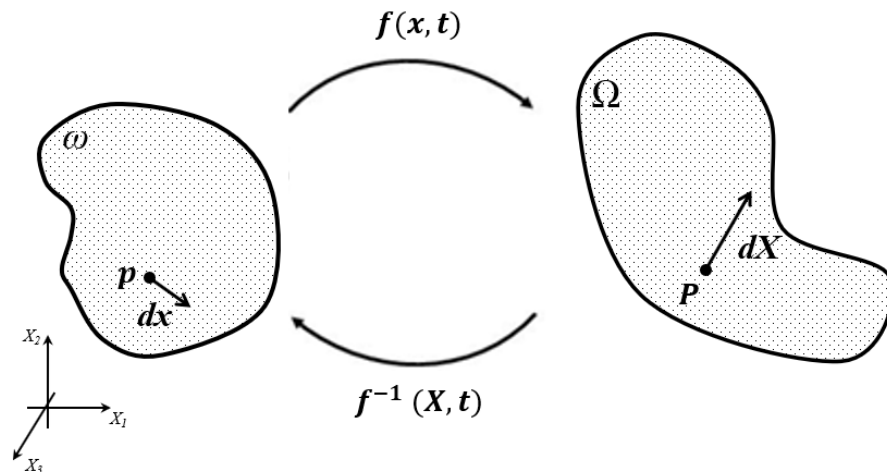


Figura 3-1: Mudança de configuração de um corpo deformável

3.2 Tensor gradiente de deformação

Para entender e quantificar a mudança de configuração de um corpo é necessário avaliar não apenas a mudança de posição de cada ponto, mas, também, a mudança de forma em sua vizinhança, ou seja, a relação entre a mudança de posição de cada ponto com a mudança de posição dos pontos em sua vizinhança. Dessa forma, os movimentos relativos entre cada ponto e os pontos em sua vizinhança possibilitam a caracterização da deformação do corpo nos respectivos pontos.

Avaliando-se a mudança de configuração na vizinhança de um ponto com coordenadas $x(x_1; x_2; x_3)$, na configuração de referência indeformada, a diferença de posição entre o ponto e um ponto de sua vizinhança, na configuração deformada, pode ser expressa por:

$$\Delta X_i = f_i(x + \Delta x, t) - f_i(x, t) \quad (3-3)$$

em que Δx representa uma pequena variação nas coordenadas do ponto na configuração indeformada.

Escrevendo-se uma aproximação, em termos de série de Taylor em torno da posição x , tem-se:

$$\Delta X_i = \left[f_i(x, t) + \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x_j} \Delta x_j + (O^2) \right] - f_i(x, t) \quad (3-4)$$

em que (O^2) representa os termos de ordem superior e $\partial f_i(x, t)/\partial x_j$ representa o gradiente de deformação avaliado na posição x .

No limite, ou seja, se o módulo do vetor Δx tender a zero (infinitesimal), tem-se:

$$dX_i = \frac{\partial f_i(x, t)}{\partial x_j} dx_j \quad (3-5)$$

De forma simplificada, pode-se escrever como:

$$dX_i = f_{i,j} dx_j \quad (3-6)$$

em que $f_{i,j}$ representa o tensor gradiente de deformação, o qual, como pode ser observado pela Equação (3-6) e pela Figura 3-1, relaciona um seguimento infinitesimal de linha dx , em torno do ponto de coordenadas x na configuração indeformada, com o respectivo seguimento infinitesimal de linha dX , em torno do ponto de coordenadas X na configuração deformada.

Representando-se o tensor gradiente de deformação por F_{ij} , pode-se escrever:

$$F_{ij} = f_{i,j} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad (3-7)$$

De forma expandida, tem-se:

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

Logo:

$$dX_i = F_{ij} dx_j \quad (3-9)$$

De forma tensorial, tem-se:

$$dX = F dx \quad (3-10)$$

Assim como destacado em Maciel (2008), é importante notar que dx é uma porção fixa, definida pelo lugar geométrico dos pontos do corpo na configuração indeformada e dX é definido pelo novo lugar geométrico desses pontos, na configuração deformada, após sofrer a transformação descrita por F . Isso significa que, para a mudança de configuração ser fisicamente possível, para todo dx diferente de zero, dX (ou $F dx$) deve ser diferente de zero. Dessa forma, é fisicamente impossível que haja aniquilação do material e, para tanto, o tensor F deve ser não singular, ou seja:

$$J = |F| \neq 0 \quad (3-11)$$

em que J é denominado jacobiano da mudança de configuração do corpo dado pelo determinante do tensor gradiente de deformação ($|F|$). Dessa forma, o tensor F possui inversa, expressa por:

$$(F_{ij})^{-1} = \frac{\partial f_j^{-1}(x, t)}{\partial x_i} \quad (3-12)$$

A fim de possibilitar a discretização do domínio e posterior utilização dos conceitos de função mudança de configuração e tensor gradiente de deformação no Método dos Elementos Finitos Posicional, estes devem ser expressos em termos dos parâmetros nodais e das funções de forma, como é apresentado no capítulo 5. Para tal, é necessário parametrizar a geometria com base na configuração auxiliar em um espaço adimensional, como apresentado na Figura 3-2, para um elemento tridimensional.

Assim, considerando-se a Figura 3-2, pode-se obter dois mapeamentos 0f e 1f , referentes às transformações da configuração auxiliar para a configuração indeformada e da configuração auxiliar para a configuração deformada, respectivamente, de forma que as coordenadas sejam mapeadas por:

$$x_i = {}^0f_i(\xi, t) \quad (3-13)$$

$$X_i = {}^1f_i(\xi, t) \quad (3-14)$$

em que os sobrescritos 0 e 1 identificam, respectivamente, os mapeamentos da configuração auxiliar para a configuração indeformada e da configuração auxiliar para a configuração deformada.

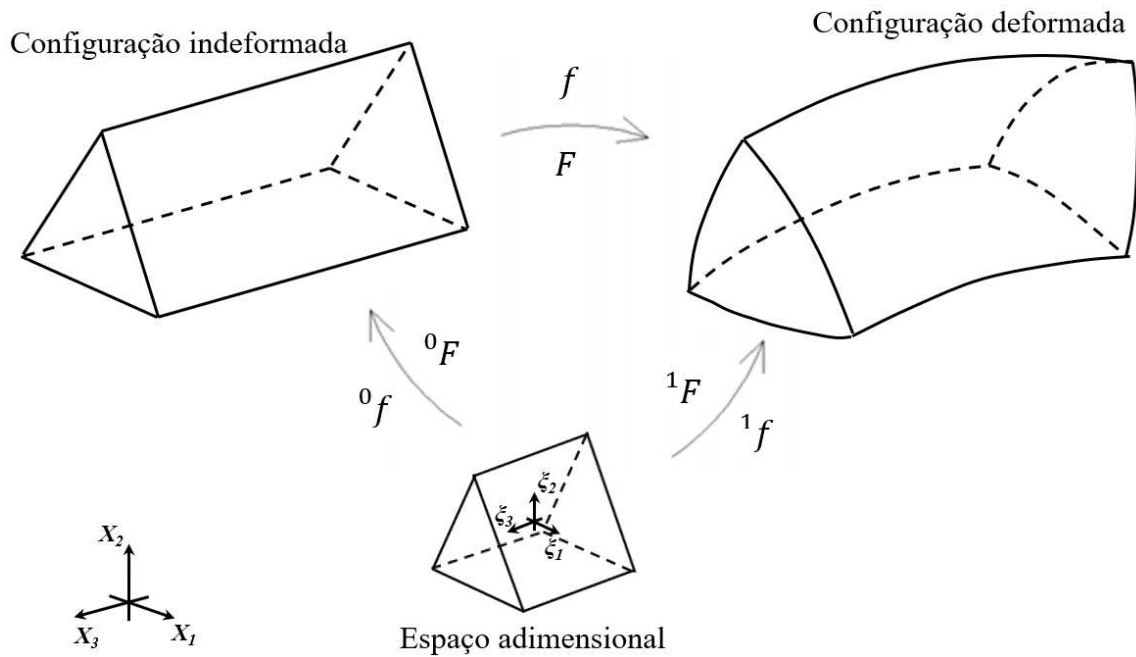


Figura 3-2: Mapeamento das configurações indeformada e deformada

Dessa forma, utilizando-se as funções mudança de configuração parametrizadas, determinadas pelas Equações (3-13) e (3-14), os tensores gradiente de deformação, para os mapeamentos das configurações indeformada e deformada, apresentados na Figura 3-2, podem ser expressos respectivamente, por:

$${}^0F_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^0f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial {}^0f_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial {}^0f_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial {}^0f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial {}^0f_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial {}^0f_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial {}^0f_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial {}^0f_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial {}^0f_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

$${}^1F_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^1f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial {}^1f_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial {}^1f_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial {}^1f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial {}^1f_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial {}^1f_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial {}^1f_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial {}^1f_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial {}^1f_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

Por fim, a transformação da configuração indeformada para a configuração deformada pode ser avaliada de forma total utilizando-se a função mudança de configuração total f e o tensor gradiente de deformação total F , em termos das coordenadas nodais adimensionais, definidos, respectivamente, como:

$$f = {}^1f ({}^0f)^{-1} \quad (3-17)$$

$$F = {}^1F ({}^0F)^{-1} \quad (3-18)$$

3.3 Medida de deformação

A partir da avaliação da mudança de posição de cada ponto material e da relação entre a mudança de posição destes com a mudança de posição dos pontos materiais em sua vizinhança, é possível caracterizar uma medida de deformação para mensurar a mudança de forma nos respectivos pontos. Assim, nesta seção é obtida e apresentada uma medida de deformação em termos do tensor gradiente de deformação.

Segundo Ogden (1984), para quantificar a mudança de configuração de um corpo, a princípio, qualquer medida de deformação pode ser adotada desde que seja objetiva, isto é, forneça valores nulos para movimentos de corpo rígido e forneça os mesmos valores para referenciais distintos. Dessa forma, a medida de deformação adotada neste estudo é a de engenharia, assim como adotado nos trabalhos de Greco (2004) e Maciel (2008). Essa medida de deformação é utilizada para obtenção da energia de deformação total, como é apresentado na seção 3.4. A medida de deformação de engenharia é bastante intuitiva, pois possui significado físico aparente, sendo relacionada com o estiramento de uma fibra durante a mudança de configuração de um corpo. Além disso, segundo Crisfield (1991), utilizar uma medida de deformação de engenharia não significa necessariamente trabalhar em regime de pequenas deformações. Pode-se considerar grandes deformações, desde que a medida de deformação seja objetiva e possa ser calibrada para o modelo de material considerado. No Apêndice é apresentado um desenvolvimento para demonstrar que a medida de deformação de engenharia adotada no presente estudo e desenvolvida no presente item é adequada para trabalhar em regime de grandes deformações e, por isso, denominada deformação não linear de engenharia em Greco (2004) e Maciel (2008).

O desenvolvimento para obtenção da medida de deformação de engenharia apresentado nesta seção é reproduzido com base no trabalho de Maciel (2008), de acordo com os procedimentos descritos a seguir.

De acordo com a Figura 3-3, pode se considerar m como um o versor na configuração indeformada e M o respectivo versor na configuração deformada, ambos ao longo dos seguimentos dx e dX , respectivamente, em que:

$$dx = m |dx| \quad (3-19)$$

$$dX = M |dX| \quad (3-20)$$

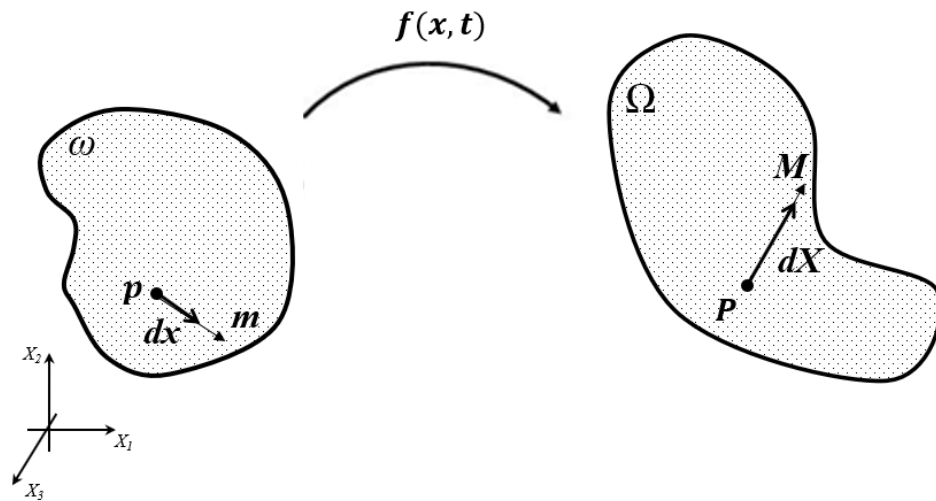


Figura 3-3: Estiramento de um elemento de linha

Substituindo-se as Equações (3-19) e (3-20) na Equação (3-10), tem-se:

$$M |dX| = F m |dx| \quad (3-21)$$

Multiplicando-se por $M|dX|$, tem-se:

$$|dX|^2 = m^T (F^T F m) |dx|^2 \quad (3-22)$$

Manipulando-se os termos, tem-se:

$$\frac{|dX|}{|dx|} = (m^T (F^T F m))^{1/2} = \lambda_m \quad (3-23)$$

em que λ_m representa a relação entre o comprimento deformado do seguimento dX e o comprimento indeformado do seguimento dx , denominado estiramento do elemento de linha dx na direção m .

Considerando-se a medida de deformação normal de engenharia ε_{mm} definida em Ogden (1984), em termos do tensor gradiente de deformação F e da direção m , tem-se:

$$\varepsilon_{mm} = \frac{|dX| - |dx|}{|dx|} = \frac{|dX|}{|dx|} - 1 = \lambda_m - 1 = (m^T (F^T F m))^{1/2} - 1 \quad (3-24)$$

Assim, considerando-se a Equação (3-24), é possível determinar a deformação normal, em uma direção qualquer, avaliando-se o tensor gradiente de deformação e adotando-se uma direção m de interesse. Por exemplo, para a deformação normal na direção x_1 , representada por ε_{11} , adota-se $m^T = [1 \ 0 \ 0]$, para a deformação normal na direção x_2 , representada por ε_{22} , adota-se $m^T = [0 \ 1 \ 0]$ e, finalmente, para a deformação normal na direção x_3 , representada por ε_{33} , adota-se $m^T = [0 \ 0 \ 1]$. Dessa forma, essas deformações podem ser expressas por:

$$\varepsilon_{11} = \lambda_{11} - 1 = (F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2)^{1/2} - 1 \quad (3-25)$$

$$\varepsilon_{22} = \lambda_{22} - 1 = (F_{12}^2 + F_{22}^2 + F_{32}^2)^{1/2} - 1 \quad (3-26)$$

$$\varepsilon_{33} = \lambda_{33} - 1 = (F_{13}^2 + F_{23}^2 + F_{33}^2)^{1/2} - 1 \quad (3-27)$$

Em relação às deformações por cisalhamento, estas são relacionadas às variações dos ângulos, ou distorções angulares, entre dois seguimentos com origem comum quando o corpo passa da configuração indeformada para a configuração deformada. Sendo, no presente estudo, as deformações normais e por cisalhamento consideradas desacopladas, conforme comportamento característico de materiais isotrópicos. Assim, a partir da Figura 3-4, considerando-se os seguimentos dx e dx' , respectivamente nas direções dos versores m e m' na configuração indeformada, e os seguimentos dX e dX' , respectivamente nas direções dos versores M e M' na configuração deformada, a distorção angular pode ser expressa por:

$$\gamma = \theta - \Theta \quad (3-28)$$

em que θ representa o ângulo entre os seguimentos na configuração indeformada e Θ representa o ângulo entre os seguimentos na configuração deformada.

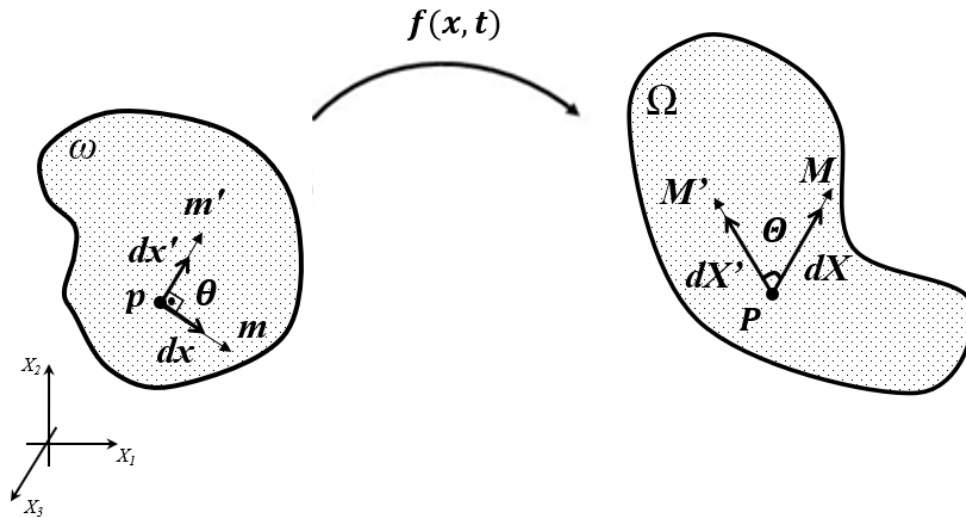


Figura 3-4: Distorção entre dois elementos de linha

A partir da Figura 3-4, os ângulos θ e Θ podem ser determinados, respectivamente, por

$$\theta = \arccos(m^T m') \quad (3-29)$$

$$\Theta = \arccos(M^T M') \quad (3-30)$$

Considerando-se as Equações (3-21) e (3-23), têm-se:

$$M = \frac{F m}{\lambda_m} \quad (3-31)$$

$$M' = \frac{F m'}{\lambda_{m'}} \quad (3-32)$$

Logo, o ângulo Θ , após a deformação, pode ser determinado por:

$$\Theta = \arccos\left(\frac{m \cdot (F^T F m')}{\lambda_m \lambda_{m'}}\right) \quad (3-33)$$

Dessa forma, considerando-se as Equações (3-28) e (3-33) e considerando-se θ na configuração indeformada igual a $\pi/2$ (direções inicialmente ortogonais), é possível determinar a medida de deformação por cisalhamento em função da distorção angular, em termos do tensor gradiente de deformação F e das direções de referência m e m' , expressa por:

$$\varepsilon_{mm'} = \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{m^T (F^T F m')}{\lambda_m \lambda_{m'}} \right) \right] \quad (3-34)$$

Assim, considerando-se as três direções ortogonais e a Equação (3-34), a deformação por cisalhamento em relação às direções x_1 e x_2 ($m = [1 \ 0 \ 0]$ e $m' = [0 \ 1 \ 0]$), representada por ε_{12} , a deformação por cisalhamento em relação às direções x_1 e x_3 ($m = [1 \ 0 \ 0]$ e $m' = [0 \ 0 \ 1]$), representada por ε_{13} , e a deformação por cisalhamento em relação às direções x_2 e x_3 ($m = [0 \ 1 \ 0]$ e $m' = [0 \ 0 \ 1]$), representada por ε_{23} , podem ser expressas por:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{F_{11}F_{12} + F_{21}F_{22} + F_{31}F_{32}}{(F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2)^{1/2} (F_{12}^2 + F_{22}^2 + F_{32}^2)^{1/2}} \right) \right] \quad (3-35)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\gamma_{13}}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{F_{11}F_{13} + F_{21}F_{23} + F_{31}F_{33}}{(F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2)^{1/2} (F_{13}^2 + F_{23}^2 + F_{33}^2)^{1/2}} \right) \right] \quad (3-36)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\gamma_{23}}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{F_{12}F_{13} + F_{22}F_{23} + F_{32}F_{33}}{(F_{12}^2 + F_{22}^2 + F_{32}^2)^{1/2} (F_{13}^2 + F_{23}^2 + F_{33}^2)^{1/2}} \right) \right] \quad (3-37)$$

Finalmente, utilizando-se as Equações (3-25) a (3-27) e (3-35) a (3-37) que foram desenvolvidas em termos do tensor gradiente de deformação, o tensor de deformações para um espaço tridimensional, composto por seis componentes independentes, três deformações normais e três deformações por cisalhamento, pode ser representado por:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

Lembrando-se que, o tensor de tensões para um espaço tridimensional, composto por seis componentes independentes, três tensões normais e três tensões de cisalhamento, pode ser obtido utilizando-se adequadas relações tensão-deformação e representado por:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

3.4 Energia de deformação

A energia de deformação total de um corpo submetido a um estado de tensão está relacionada com a energia responsável pela mudança de configuração relativa entre seus pontos internos, ou seja, a energia armazenada sob forma de deformação no corpo.

Em geral, a energia de deformação total U pode ser definida pela integral da energia de deformação específica u em um volume de referência inicial V , expressa por:

$$U = \int_V u dV \quad (3-40)$$

Sabendo-se que a energia de deformação específica poder ser definida pela área compreendida no gráfico tensão-deformação, tem-se:

$$U = \int_V \int_{\varepsilon} \sigma d\varepsilon dV \quad (3-41)$$

em que σ representa o tensor das tensões em termos do tensor das deformações ε , de acordo com a relação constitutiva ou reológica do material. Dessa forma, é possível obter a energia de deformação, contanto que a relação tensão-deformação seja conhecida.

Segundo Munaier Neto (1998), a parcela da tensão associada ao comportamento elástico pode ser avaliada pelo estado de deformação por meio de um potencial termodinâmico. Para o caso de materiais isotrópicos, com desacoplamento entre os efeitos dos esforços normais e os efeitos dos esforços cisalhantes, este potencial pode ser expresso pela combinação linear entre o quadrado do primeiro invariante e o segundo invariante do tensor de deformações, dado por:

$$\psi(\varepsilon) = \frac{1}{2\rho} (\lambda \varepsilon_I^2 + 4 \mu \varepsilon_{II}) \quad (3-42)$$

em que ρ representa a massa específica do material, λ e μ representam, respectivamente, o primeiro e o segundo parâmetro de Lamé e ε_I e ε_{II} representam o primeiro e o segundo invariante do tensor de deformações, que podem ser determinados respectivamente por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3-43)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3-44)$$

$$\varepsilon_I = \text{tr}(\varepsilon) \quad (3-45)$$

$$\varepsilon_{II} = \frac{\text{tr}(\varepsilon^2)}{2} \quad (3-46)$$

em que ν representa o coeficiente de Poisson, E representa o módulo de elasticidade longitudinal e $\text{tr}(\cdot)$ representa o traço do tensor.

Dessa forma, a partir do potencial termodinâmico, a parcela do tensor de tensões referente ao comportamento elástico pode ser obtida por:

$$\sigma^e = \rho \frac{\partial \psi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \lambda \text{tr}(\varepsilon) + 2 \mu \varepsilon \quad (3-47)$$

De forma indicial, tem-se:

$$\sigma_{ij}^e = (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})) \varepsilon_{kl} \quad (3-48)$$

em que δ_{ij} representa o operador delta de Kronecker.

O tensor de tensões pode ser expresso ainda por:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3-49)$$

em que C_{ijkl} é denominado tensor constitutivo elástico, podendo ser expresso por:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3-50)$$

Neste caso, o tensor constitutivo é considerado independente das deformações. Em geral, para materiais com comportamentos como o plástico e o hiperelástico, as relações tensão-deformação são mais complexas, podendo o potencial termodinâmico conter mais termos e o tensor constitutivo ser dependente da deformação.

De forma expandida o tensor constitutivo, para o caso de materiais elásticos e isotrópicos, pode ser expresso por:

$$C = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & \lambda & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \quad (3-51)$$

Na notação de Voigt o tensor constitutivo pode ser expresso pela seguinte matriz constitutiva elástica:

$$C = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

Finalmente, a relação tensão-deformação dada pela Equação (3-49) pode ser expressa na notação de Voigt por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^e \\ \sigma_{22}^e \\ \sigma_{33}^e \\ \sigma_{23}^e \\ \sigma_{13}^e \\ \sigma_{12}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3-53)$$

Procedendo-se com a operação matricial apresentada na Equação (3-53) é possível obter as expressões que fornecem cada componente de tensão em termos das componentes de deformação. Considerando-se, então, o caso de estado plano de tensão, ou seja, $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ e escrevendo-se ε_{33} em termos de ε_{11} e ε_{22} , é possível obter a relação tensão-deformação para o estado plano de tensão expressa na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^e \\ \sigma_{22}^e \\ \sigma_{12}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} & \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} & 0 \\ \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} & \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

De forma análoga, invertendo-se a relação tensão-deformação descrita pela Equação (3-53) e procedendo-se com a operação matricial resultante é possível obter as expressões que fornecem cada componente de deformação em termos das componentes de tensão. Considerando-se, então, o caso de estado plano de deformação, ou seja, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ e escrevendo-se σ_{33} em termos de σ_{11} e σ_{22} , é possível obter a relação tensão-deformação para o estado plano de deformação expressa na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^e \\ \sigma_{22}^e \\ \sigma_{12}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3-55)$$

Para o caso unidimensional e com efeitos do cisalhamento, em que são desconsiderados os acoplamentos entre quaisquer tensões e deformações em direções distintas, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^e \\ \sigma_{12}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (3-56)$$

Por fim, para o caso unidimensional sem os efeitos do cisalhamento, tem-se:

$$\sigma_{11}^e = E \varepsilon_{11} \quad (3-57)$$

Dessa forma, para o caso elástico, utilizando-se a Equação (3-41) e adotando-se a relação tensão-deformação adequada para o tipo de problema analisado e para o tipo de elemento finito considerado, como as relações expressas pelas Equações (3-53) a (3-57), obtidas a partir da Equação (3-49), é possível determinar a energia de deformação envolvida no processo de mudança de configuração do corpo. Em seguida, com a energia de deformação determinada é possível aplicar o Princípio da Mínima Energia Potencial Total que é a base do Método dos Elementos Finitos Posicional.

De forma análoga ao que foi apresentado para o comportamento elástico, segundo Munaiar Neto (1998), a parcela da tensão associada ao comportamento viscoso pode ser avaliada pela matriz que contém as taxas de deformação por meio de um potencial de dissipação. Para o caso isotrópico, com desacoplamento entre os efeitos dos esforços normais e os efeitos dos esforços cisalhantes, este potencial pode ser expresso pela combinação linear entre o quadrado do primeiro invariante e o segundo invariante da matriz das taxas de deformação, dado por:

$$\varphi(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2} (\lambda \alpha_\lambda \dot{\varepsilon}_I^2 + 4 \mu \alpha_\mu \dot{\varepsilon}_{II}) \quad (3-58)$$

em que α_λ e α_μ representam os coeficientes de viscosidade associados aos respectivos parâmetros de Lamé e $\dot{\epsilon}_I$ e $\dot{\epsilon}_{II}$ representam o primeiro e o segundo invariantes do tensor das taxas de deformação, que podem ser determinados respectivamente por:

$$\dot{\epsilon}_I = tr(\dot{\epsilon}) \quad (3-59)$$

$$\dot{\epsilon}_{II} = \frac{tr(\dot{\epsilon}^2)}{2} \quad (3-60)$$

Dessa forma, a partir do potencial de dissipação, a parcela do tensor de tensões associada ao comportamento viscoso pode ser obtida por:

$$\sigma^v = \frac{\partial \varphi(\dot{\epsilon})}{\partial \dot{\epsilon}} = \lambda \alpha_\lambda tr(\dot{\epsilon}) + 2 \mu \alpha_\mu \dot{\epsilon} \quad (3-61)$$

De forma indicial, tem-se:

$$\sigma_{ij}^v = (\lambda \alpha_\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \alpha_\mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})) \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3-62)$$

O tensor de tensões pode ser expresso ainda por:

$$\sigma_{ij}^v = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3-63)$$

em que D_{ijkl} é denominada matriz viscosa, podendo ser expressa por:

$$D_{ijkl} = \lambda \alpha_\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \alpha_\mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3-64)$$

De forma expandida a matriz viscosa pode ser expressa por:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda \alpha_\lambda + 2\mu \alpha_\mu & 0 & 0 & 0 & \mu \alpha_\mu & 0 & 0 & 0 & \mu \alpha_\mu \\ 0 & \lambda \alpha_\lambda & 0 & \mu \alpha_\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \alpha_\lambda & 0 & 0 & 0 & \mu \alpha_\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu \alpha_\mu & 0 & \lambda \alpha_\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu \alpha_\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda \alpha_\lambda + 2\mu \alpha_\mu & 0 & 0 & 0 & \mu \alpha_\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \alpha_\lambda & 0 & \mu \alpha_\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \alpha_\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda \alpha_\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \alpha_\mu & 0 & \lambda \alpha_\lambda & 0 \\ \mu \alpha_\mu & 0 & 0 & 0 & \mu \alpha_\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda \alpha_\lambda + 2\mu \alpha_\mu \end{bmatrix} \quad (3-65)$$

Na notação de Voigt a matriz viscosa pode ser expressa por:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_\lambda + 2\mu\alpha_\mu & \lambda\alpha_\lambda & \lambda\alpha_\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\alpha_\lambda & \lambda\alpha_\lambda + 2\mu\alpha_\mu & \lambda\alpha_\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\alpha_\lambda & \lambda\alpha_\lambda & \lambda\alpha_\lambda + 2\mu\alpha_\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu\alpha_\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu\alpha_\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu\alpha_\mu \end{bmatrix} \quad (3-66)$$

Finalmente, a relação tensão-deformação dada pela Equação (3-63) pode ser expressa na notação de Voigt por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^v \\ \sigma_{22}^v \\ \sigma_{33}^v \\ \sigma_{23}^v \\ \sigma_{13}^v \\ \sigma_{12}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_\lambda + 2\mu\alpha_\mu & \lambda\alpha_\lambda & \lambda\alpha_\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\alpha_\lambda & \lambda\alpha_\lambda + 2\mu\alpha_\mu & \lambda\alpha_\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\alpha_\lambda & \lambda\alpha_\lambda & \lambda\alpha_\lambda + 2\mu\alpha_\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu\alpha_\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu\alpha_\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu\alpha_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{33} \\ \dot{\epsilon}_{23} \\ \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (3-67)$$

De forma análoga ao apresentado no caso elástico, procedendo-se com a operação matricial apresentada na Equação (3-67) é possível obter as expressões que fornecem cada componente de tensão em termos das componentes de taxa de deformação. Considerando-se, então, o caso de estado plano de tensão, ou seja, $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ e escrevendo-se $\dot{\epsilon}_{33}$ em termos de $\dot{\epsilon}_{11}$ e $\dot{\epsilon}_{22}$, é possível obter a relação tensão-deformação para o estado plano de tensão expressa na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^v \\ \sigma_{22}^v \\ \sigma_{12}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4\mu\alpha_\mu(\lambda\alpha_\lambda + \mu\alpha_\mu)}{\lambda\alpha_\lambda + 2\mu\alpha_\mu} & \frac{2\lambda\alpha_\lambda\mu\alpha_\mu}{\lambda\alpha_\lambda + 2\mu\alpha_\mu} & 0 \\ \frac{2\lambda\alpha_\lambda\mu\alpha_\mu}{\lambda\alpha_\lambda + 2\mu\alpha_\mu} & \frac{4\mu\alpha_\mu(\lambda\alpha_\lambda + \mu\alpha_\mu)}{\lambda\alpha_\lambda + 2\mu\alpha_\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu\alpha_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (3-68)$$

De forma análoga, invertendo-se a relação tensão-deformação descrita pela Equação (3-67) e procedendo-se com a operação matricial resultante é possível obter as expressões que fornecem cada componente de taxa de deformação em termos das componentes de tensão. Considerando-se, então, o caso de estado plano de deformação, ou seja, $\epsilon_{33} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0$ e escrevendo-se σ_{33} em termos de σ_{11} e σ_{22} , é possível obter a relação tensão-deformação para o estado plano de deformação expressa na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^v \\ \sigma_{22}^v \\ \sigma_{12}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_\lambda + 2\mu\alpha_\mu & \lambda\alpha_\lambda & 0 \\ \lambda\alpha_\lambda & \lambda\alpha_\lambda + 2\mu\alpha_\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu\alpha_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (3-69)$$

Para o caso unidimensional e com efeitos do cisalhamento, em que são desconsiderados os acoplamentos entre quaisquer tensões e deformações em direções distintas, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^v \\ \sigma_{12}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \alpha_\mu & 0 \\ 0 & 2\mu \alpha_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (3-70)$$

Por fim, para o caso unidimensional sem efeitos do cisalhamento, tem-se:

$$\sigma_{11}^v = E \alpha_\mu \dot{\epsilon}_{11} \quad (3-71)$$

Dessa forma, para o caso viscoso, utilizando-se a Equação (3-41) e adotando-se a relação tensão-deformação adequada para o tipo de problema analisado e para o tipo de elemento finito considerado, como as relações expressas pelas Equações (3-67) a (3-71), obtidas a partir da Equação (3-63), é possível determinar a energia de deformação envolvida no processo de mudança de configuração do corpo. Em seguida, com a energia de deformação determinada é possível aplicar o Princípio da Mínima Energia Potencial Total que é a base do Método dos Elementos Finitos Posicional.

Finalmente, para o caso do comportamento viscoelástico as relações tensão-deformação, deduzidas dos modelos reológicos, são compostas por combinações adequadas envolvendo a parcela elástica, expressa pela Equação (3-49), e a parcela viscosa, expressa pela Equação (3-63). Tais relações, denominadas relações reológicas, são devidamente apresentadas no Capítulo 4.

3.5 Princípio da Mínima Energia Potencial Total

De uma forma geral, a formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional, baseada em princípios de equilíbrio de energia, pode ser demonstrada partindo-se do funcional da energia potencial total de uma estrutura solicitada por forças externas generalizadas. Para o caso de um sistema estrutural quase-estático e conservativo, assim como apresentado em Pascon (2008), o funcional da energia potencial total (Π) pode ser determinado pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais e expresso por:

$$\Pi = U + P \quad (3-72)$$

em que U representa a energia de deformação total, como apresentado no item 3.4, e P representa a energia potencial das forças externas generalizadas expressa por:

$$P = - \sum_{q=1}^{ngl} F_q X_q \quad (3-73)$$

em que os graus de liberdade são representados por X_q e os respectivos carregamentos equivalentes em cada grau de liberdade são representados por F_q , sendo ngl o número de graus de liberdade.

Aplicando-se os princípios da abordagem variacional, para obter a configuração de equilíbrio, a qual corresponde ao valor mínimo (ou máximo) do funcional da energia potencial total, a primeira variação da Equação (3-72) deve ser nula (Dym e Shames, 2013), ou seja:

$$\delta^{(1)}\Pi = 0 \quad (3-74)$$

Avaliando-se a variação em relação aos graus de liberdade, que são representados pelos parâmetros nodais no Método dos Elementos Finitos Posicional, tem-se:

$$\delta^{(1)}\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial X_q} \delta X_q = 0 \quad (3-75)$$

Visto que δX_q representa uma variação arbitrária nos graus de liberdade, tem-se o seguinte sistema com o número de equações igual ao número de graus de liberdade:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_q} = \frac{\partial U}{\partial X_q} + \frac{\partial P}{\partial X_q} = 0 \quad (\text{onde } q = 1, 2, \dots, ngl) \quad (3-76)$$

o qual representa o Princípio da Mínima Energia Potencial Total, sendo ngl o número de graus de liberdade. Conceitualmente, antes da discretização, a estrutura possui infinitos graus de liberdade e, conseqüentemente, o sistema expresso pela Equação (3-76) possui infinitas equações. Após a discretização, no Método dos Elementos Finitos Posicional, o número de graus de liberdade se reduz ao número de parâmetros nodais, como é apresentado no capítulo 5, tornando possível a resolução do sistema de equações.

O Princípio da Mínima Energia Potencial Total determina que, dentre todas as configurações possíveis para um sistema constituído por um corpo deformável com forças

atuantes, aquela correspondente ao valor estacionário (mínimo ou máximo) da energia potencial total (Π) é a configuração equilibrada (Crisfield, 1991; Biot, 1965). Dessa forma, o equilíbrio da estrutura ocorrerá quando a derivada parcial da energia potencial total, em relação aos graus de liberdade (parâmetros nodais), for nula, ou seja, quando a variação da energia potencial total for nula, como expresso pela Equação (3-76). A garantia da aplicação desse princípio fornecer o valor mínimo da energia potencial total pode ser baseada na avaliação da derivada segunda do funcional (ou a partir da segunda variação do funcional) ou a partir da própria avaliação da natureza do equilíbrio estável dos problemas estruturais tratados, com base em suas características geométricas e nas condições de contorno (Utku *et al.*, 1991; Felton e Nelson, 1997).

A partir das Equações (3-41) e (3-49), no caso discretizado, é possível observar que a relação entre a energia de deformação total e as posições nodais (parâmetros nodais generalizados), contidos na definição da medida de deformação, é não linear. Dessa forma, pode-se inferir que a Equação (3-76) representa um sistema de equações não linear. Nesse caso, este sistema precisa ser resolvido utilizando-se um método de resolução de sistema de equações adequado. A partir deste, é possível determinar a posição de equilíbrio de uma estrutura submetida a um carregamento específico e, em seguida, definir as deformações e as tensões as quais seus componentes estão submetidos.

Neste estudo, o sistema de equações não linear é resolvido utilizando-se o método iterativo de Newton-Raphson, brevemente descrito a seguir, considerando-se a estrutura discretizada pelas posições nodais (parâmetros nodais generalizados).

Reescrevendo a Equação (3-76) de uma forma compacta, tem-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_q} = g_q(X) = 0 \quad (3-77)$$

Expandindo-se em série de Taylor, truncando nos termos lineares, tem-se:

$$g_q(X) \cong g_q(X) + g_{q,rr}(X)\Delta X_r \cong 0 \quad (\text{onde } q \text{ e } r = 1, 2, \dots, ngl) \quad (3-78)$$

em que ngl representa o número de graus de liberdade, X representa o vetor das posições nodais (visto como solução aproximada), $g_q(X)$ representa os termos do vetor dos resíduos, $g_{q,rr}(X)$

representa os termos da matriz Hessiana e ΔX_r representa os termos do vetor de correção das posições nodais. Sendo $g_q(X)$ e $g_{q,rr}(X)$ avaliados respectivamente por:

$$g_q(X) = U_{,q} - F_q \quad (3-79)$$

$$g_{q,rr}(X) = U_{,qr} \quad (3-80)$$

Finalmente, a resolução do sistema não linear, dado pela Equação (3-76), pode ser realizada pelo método iterativo de Newton-Raphson, descrito de forma resumida como na Figura 3-5 e conforme os procedimentos a seguir:

- (1) Assume-se X como a configuração indeformada x ;
- (2) Calcula-se os termos do vetor dos resíduos $g_q(X)$ a partir da Equação (3-79);
- (3) Calcula-se os termos da matriz Hessiana $g_{q,rr}(X)$ a partir da Equação (3-80);
- (4) Determina-se os termos do vetor de correção das posições nodais ΔX_r , resolvendo-se o sistema descrito pela Equação (3-78);
- (5) É verificado se o vetor de correção das posições nodais ΔX satisfaz o critério de convergência adotado, havendo duas possibilidades a saber:
 - (5.1) Caso o vetor de correção das posições nodais ΔX não satisfaça o critério de convergência adotado, é realizado um novo passo iterativo retornando-se ao procedimento (2), sendo o vetor das posições nodais atualizado a partir do vetor de correção das posições nodais ($X = X + \Delta X$);
 - (5.2) Caso o vetor de correção das posições nodais ΔX satisfaça o critério de convergência adotado, o processo iterativo é encerrado, sendo a posição de equilíbrio deformada da estrutura determinada e representada pelo vetor das posições nodais X .

O critério de convergência adotado neste estudo é dado pela seguinte expressão:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|x\|} \leq tol \quad (3-81)$$

em que $\|*\|$ representa a norma euclidiana e tol representa a tolerância considerada em cada problema.

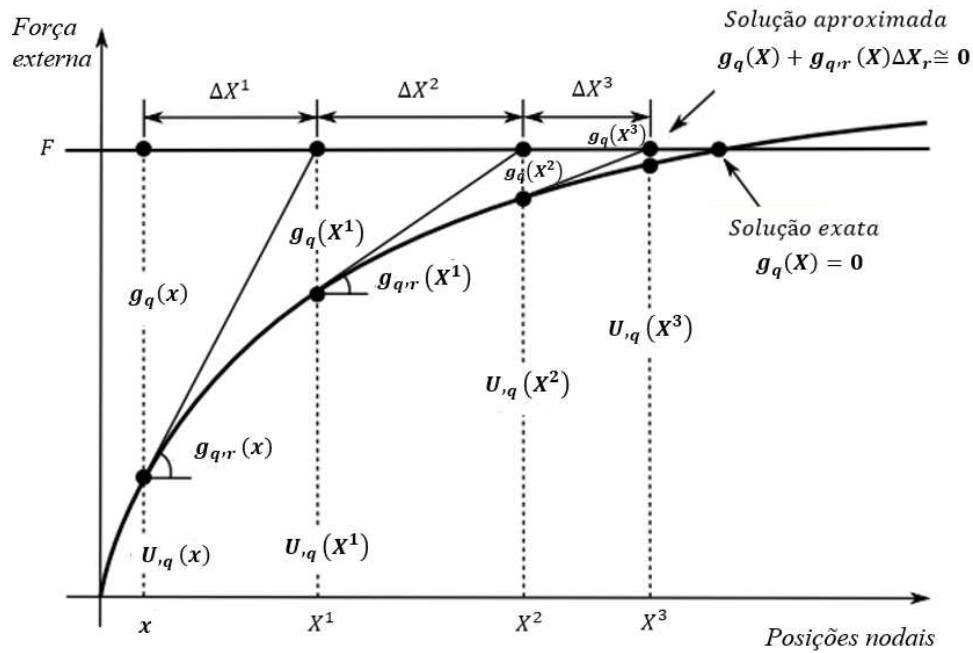


Figura 3-5: Esquema representativo do processo iterativo do Método de Newton-Raphson (controle de força)

A partir da formulação básica desenvolvida para o Princípio da Mínima Energia Potencial Total e para o Método de Newton-Raphson é possível obter a posição de equilíbrio de um sistema estrutural quase-estático e conservativo submetido a um estado de carregamento determinado. Para tanto, é necessário particularizar a formulação para levar em consideração a cinemática do elemento finito implementado e o comportamento mecânico de interesse.

A particularização da formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional se resume em determinar a energia de deformação total U e suas derivadas $U_{,q}$ e $U_{,qr}$ em relação às posições nodais (parâmetros nodais generalizados), presentes nas Equações (3-79) e (3-80). A energia de deformação total deve, então, ser descrita em função das relações tensão-deformação (característica do material adotado) e da medida de deformação, sendo esta descrita em função da cinemática do elemento finito considerado, expressa em termos das funções de forma e das posições nodais.

No presente estudo os resultados apresentados em exemplos e análises são obtidos a partir de simulações numéricas utilizando-se a formulação desenvolvida e implementada computacionalmente em códigos de autoria própria. Os códigos foram escritos em linguagem Fortran 90 e as simulações foram realizadas utilizando-se um microcomputador equipado com um processador Intel® Core™ i7-3630QM de 2,4 GHz, memória RAM de 6 GB e sistema operacional Windows 10 64-bits. Um algoritmo simplificado referente formulação implementada é apresentado em pseudocódigo na Figura 3-6.

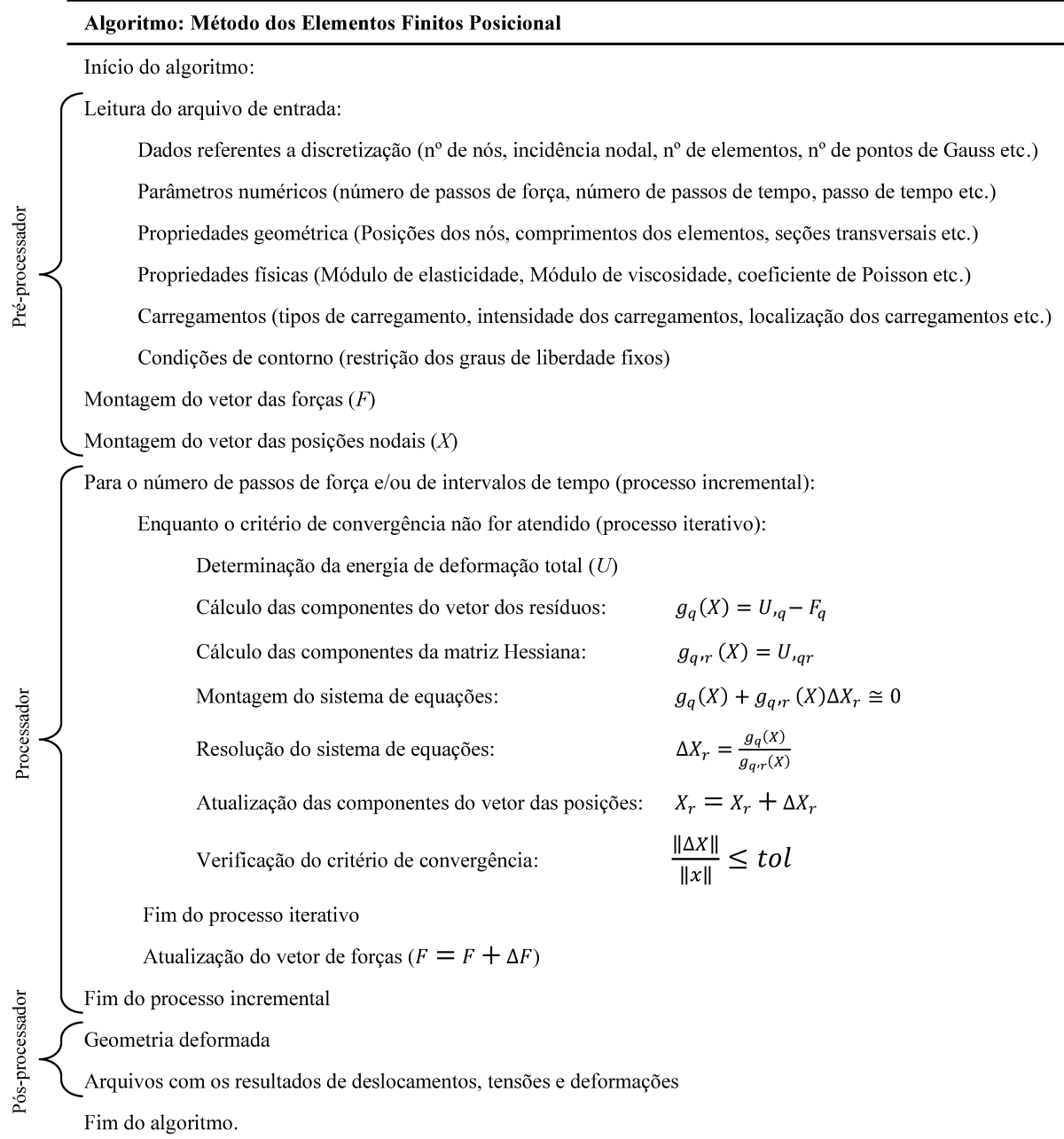


Figura 3-6: Algoritmo referente ao Método dos Elementos Finitos Posicional

A partir da Figura 3-6, pode ser verificado que o algoritmo implementado se divide em três etapas principais. A primeira etapa (pré-processador) é referente à entrada de dados, montagem do vetor das forças e montagem do vetor das posições nodais iniciais. Essa entrada de dados consiste em um arquivo de texto, no qual se determinam os dados da geometria e discretização da estrutura, as propriedades físicas e geométricas dos elementos, as condições de contorno e de carregamento, o número de passos de carga, o número de intervalos de tempo e a tolerância de cálculo.

A segunda etapa (processador) consiste no processo iterativo do método de Newton-Raphson. Nesse processo, a cada iteração, inicialmente é determinada a energia de deformação total, na sequência são calculadas as componentes do vetor dos resíduos e as componentes da matriz Hessiana. Com essas componentes é possível montar um sistema de equações linearmente independentes, o qual é resolvido por eliminação Gaussiana. A resolução desse sistema fornece as componentes do vetor de correção das posições nodais. Essas componentes são, então, utilizadas para atualizar o vetor das posições nodais. A iteração se encerra com o cálculo da razão entre a norma euclidiana do vetor de correção das posições nodais e a norma euclidiana do vetor das posições nodais iniciais e com a comparação desta razão com a tolerância de cálculo adotada. Caso essa razão seja maior que a tolerância de cálculo, o fluxo do algoritmo entra em uma nova iteração em busca de um novo conjunto de posições nodais que forneçam a mínima energia potencial total, caso contrário, o vetor de posições nodais é determinado e o processo iterativo é interrompido.

Essa segunda etapa é repetida a cada passo de força e/ou a cada intervalo de tempo. Caso seja de interesse na análise, é possível, por exemplo, descarregar a estrutura em determinado intervalo de tempo para verificar o processo de recuperação da deformação, ou realizar o carregamento por passos incrementais atualizando o vetor de forças. Após a execução de todos os passos de força e/ou todos os intervalos de tempo o algoritmo passa para a terceira etapa.

A terceira etapa (pós-processador) consiste na determinação da geometria deformada e no cálculo dos deslocamentos, das tensões e das deformações, a partir das posições nodais, e na geração dos arquivos de saída com os resultados obtidos. Na sequência, o algoritmo é encerrado.

4

MODELOS E RELAÇÕES REOLÓGICAS

Um dos pontos fundamentais na análise do comportamento mecânico de um componente estrutural é a adoção de relações constitutivas ou reológicas que descrevam de forma apropriada as relações entre as tensões, as deformações e as propriedades do material. As relações reológicas se diferem das relações constitutivas por considerarem a variável tempo, sendo estas apropriadas à descrição numérica do comportamento de materiais viscoelásticos. Dessa forma, assim como nos trabalhos de Panagiotopoulos *et al.* (2014), Carniel *et al.* (2015) e Pascon e Coda (2017), neste estudo as relações capazes de descrever o comportamento de um componente estrutural constituído por material viscoelástico são deduzidas a partir de modelos reológicos. A escolha dos modelos reológicos adequados, neste estudo, se baseia no comportamento esperado para o fenômeno de fluência em materiais sólidos.

Neste capítulo são, então, apresentadas as relações tensão-deformação para três diferentes modelos reológicos capazes de representar o comportamento viscoelástico em materiais sólidos. Estes modelos são compostos por elementos elásticos (molas) e elementos viscosos (amortecedores). A partir da associação entre estes elementos são obtidas as relações tensão-deformação características de cada modelo. Os três modelos reológicos apresentados e posteriormente implementados na formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional são o Modelo de Kelvin-Voigt, o Modelo de Boltzmann e o Modelo de Zener.

As relações reológicas apresentadas para cada modelo podem ser utilizadas em associação com a medida de deformação considerada e a cinemática do elemento finito adotado para obtenção da energia de deformação total. Dessa forma, utilizando-se o Método dos Elementos Finitos Posicional é possível analisar sistemas estruturais constituídos por materiais que apresentem comportamento viscoelástico.

4.1 Considerações gerais

Para materiais viscoelásticos submetidos a carregamentos estáticos e constantes (caracterizando-se o fenômeno de fluência), de uma forma geral, espera-se que estes apresentem uma deformação elástica instantânea e uma deformação elástica amortecida adicional (deformação viscoelástica) ao longo do tempo, apresentando uma deformação total superior à obtida pela Teoria da Elasticidade, como esboçado na Figura 4-1.

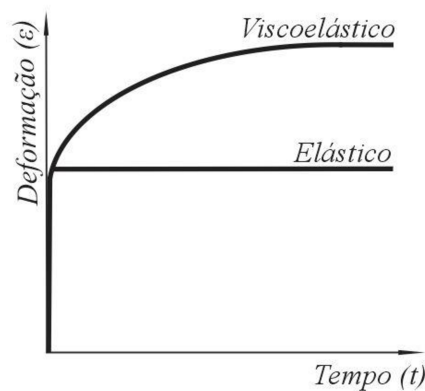


Figura 4-1: Curva de deformação ao longo do tempo

Este comportamento viscoelástico pode ser representado por modelos que associam elementos elásticos e viscosos. Esses elementos podem ser representados como na Figura 4-2, sendo as relações entre as tensões e as deformações expressas, na forma unidimensional, respectivamente para o elemento elástico e para o elemento viscoso (Findley *et al.*, 1989; Argyris *et al.*, 1991; Mesquita, 2002), por:

$$\sigma^e = E\varepsilon \quad (4-1)$$

$$\sigma^v = \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \eta \dot{\varepsilon} \quad (4-2)$$

em que, os parâmetros E e η representam as propriedades do material denominadas, respectivamente, como módulo de elasticidade longitudinal e módulo de viscosidade.

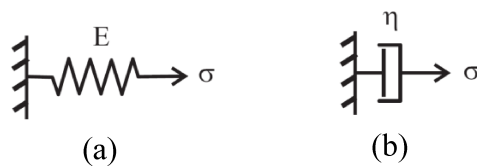


Figura 4-2: (a) Elemento elástico; (b) Elemento viscoso

Em uma representação tensorial, considerando as três direções e seus acoplamentos, assim como apresentado no item 3.4, as Equações (4-1) e (4-2) podem ser reescritas como:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4-3)$$

$$\sigma_{ij}^v = D_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (4-4)$$

Reescrevendo os tensores C e D na notação de Voigt, para o caso isotrópico, com desacoplamento entre os efeitos dos esforços normais e os efeitos dos esforços cisalhantes, tem-se:

$$C = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_\lambda + 2\mu\alpha_\mu & \lambda\alpha_\lambda & \lambda\alpha_\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\alpha_\lambda & \lambda\alpha_\lambda + 2\mu\alpha_\mu & \lambda\alpha_\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda\alpha_\lambda & \lambda\alpha_\lambda & \lambda\alpha_\lambda + 2\mu\alpha_\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu\alpha_\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu\alpha_\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu\alpha_\mu \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

Considerando-se o primeiro e o segundo parâmetros de Lamé, contidos nas componentes dos tensores C e D , expressos respectivamente por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (4-7)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4-8)$$

e considerando-se os coeficientes de viscosidade α_λ e α_μ iguais ($\alpha_\lambda = \alpha_\mu = \alpha$), de forma análoga aos trabalhos de Mesquita (2002) e Oliveira (2017), as relações tensão-deformação podem se reescritas, respectivamente para os modelos elástico e viscoso, como:

$$\sigma_{ij}^e = E\bar{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4-9)$$

$$\sigma_{ij}^v = E\alpha\bar{C}_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} \quad (4-10)$$

em que:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} & \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\bar{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{\mu} \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

sendo $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$ os parâmetros de Lamé modificados e expressos por:

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (4-12)$$

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2(1 + \nu)} \quad (4-13)$$

Visto que, assim como observado por Oliveira (2017), o módulo de viscosidade pode ser expresso por:

$$\eta = E\alpha \quad (4-14)$$

a relação tensão-deformação para o modelo viscoso pode ser expressa por:

$$\sigma_{ij}^v = \eta\bar{C}_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} \quad (4-15)$$

Finalmente, as relações tensão-deformação deduzidas de cada modelo reológico são compostas pela adequada combinação entre as relações apresentadas nas Equações (4-9) e (4-15), como é apresentado nos itens 4.2, 4.3 e 4.4.

De uma forma geral, os modelos reológicos utilizados para representação dos comportamentos mecânicos dos materiais viscoelásticos podem ser derivados dos modelos generalizados de Maxwell e de Kelvin-Voigt, ilustrados pelas Figuras 4-3 e 4-4, dependendo da definição dos parâmetros envolvidos (Findley *et al.*, 1989; Argyris *et al.*, 1991).

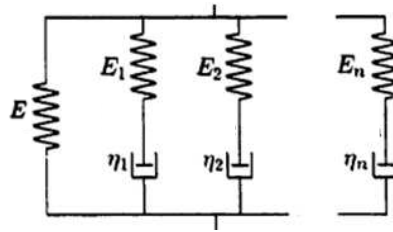


Figura 4-3: Modelo generalizado de Maxwell (Argyris *et al.*, 1991)

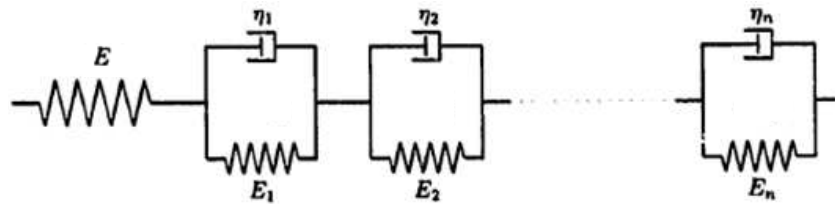


Figura 4-4: Modelo generalizado de Kelvin-Voigt (Argyris *et al.*, 1991)

Em Findley *et al.* (1989), Mesquita (2002) e Marques e Creus (2012) podem ser consultados alguns modelos reológicos que são utilizados para descrição dos comportamentos mecânicos de materiais viscoelásticos, assim como suas respectivas relações reológicas. Três dos modelos mais simples e frequentemente utilizados na literatura para representação do comportamento viscoelástico em materiais sólidos são o Modelo de Kelvin-Voigt, o Modelo de Boltzmann e o Modelo de Zener. Estes modelos podem ser derivados dos modelos generalizados de Maxwell e de Kelvin-Voigt.

Nos itens 4.2, 4.3 e 4.4 deste capítulo são apresentados cada um destes três modelos assim como suas respectivas relações reológicas. Para todos os quatro modelos apresentados, σ e ε representam, respectivamente, o par energético conjugado tensão e deformação de engenharia e $\dot{\sigma}$ e $\dot{\varepsilon}$ representam, respectivamente, as taxas de tensão e de deformação ao longo do tempo. Além disso, os parâmetros E , E_1 , E_2 e η representam as propriedades mecânicas dos materiais.

4.2 Modelo de Kelvin-Voigt

O modelo reológico de Kelvin-Voigt pode ser idealizado pela associação em paralelo entre uma mola (elemento elástico) e um amortecedor (elemento viscoso), como apresentado na Figura 4-5. Este modelo não é capaz de descrever um comportamento elástico instantâneo, descrevendo apenas um comportamento elástico amortecido (comportamento viscoelástico) com taxa de deformação decrescente ao longo do tempo, típico de materiais sólidos. Dessa forma, para um período de tempo suficientemente grande, a deformação elástica amortecida

tende para a resposta de deformação elástica instantânea prevista por um modelo elástico linear com o mesmo módulo de elasticidade.

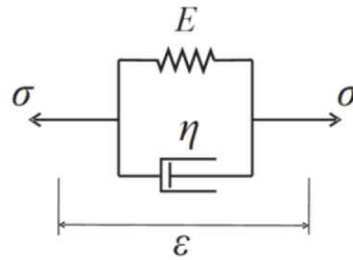


Figura 4-5: Modelo reológico de Kelvin-Voigt

A partir da Figura 4-5, é importante observar que o parâmetro E determina a tendência de deformação total, após um período de tempo suficientemente grande, e representa o módulo de elasticidade do material no comportamento elástico amortecido. Além disso, o parâmetro η representa o módulo de viscosidade do material, que determina a taxa de deformação ao longo do tempo e proporciona um comportamento amortecido ao material.

A relação reológica pode ser obtida considerando-se que a deformação total do modelo é igual a deformação em cada elemento e que a tensão total no modelo pode ser dada pela soma da tensão no elemento elástico com a tensão no elemento viscoso, expressas, respectivamente, por:

$$\epsilon = \epsilon^{(e)} = \epsilon^{(v)} \quad (4-16)$$

$$\sigma = \sigma^{(e)} + \sigma^{(v)} \quad (4-17)$$

em que os sobrescritos “(e)” e “(v)” se referem, respectivamente, aos elementos elástico e viscoso.

A partir da Equação (4-17) e considerando-se as relações entre as tensões e as deformações no elemento elástico e no elemento viscoso, expressas respectivamente pelas Equações (4-9) e (4-15), tem-se:

$$\sigma_{ij} = E\bar{C}_{ijkl}\epsilon_{kl} + \eta\bar{C}_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} \quad (4-18)$$

que representa a relação reológica do Modelo de Kelvin-Voigt.

Para ilustrar melhor o comportamento mecânico deste modelo, nos dois subitens seguintes são apresentadas as respostas referentes aos fenômenos de fluência e relaxação, sendo dada uma atenção especial ao tempo de retardo, o qual tem influência significativa na implementação numérica da formulação desenvolvida, como é observado no Capítulo 5.

4.2.1 Fluência no modelo de Kelvin-Voigt

O fenômeno de fluência em determinado modelo se refere à evolução gradativa do estado de deformação ao longo do tempo, quando solicitado por um estado de tensão constante. A fim de evitar o envolvimento de outros efeitos, o fenômeno de fluência pode ser melhor observado considerando-se o caso de tração simples e utilizando-se um modelo uniaxial. Dessa forma, a partir da Equação (4-18), a relação reológica para o modelo de Kelvin-Voigt pode ser expressa por:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (4-19)$$

Considerando-se a tensão constante $\sigma = \sigma_0$, a Equação (4-19) pode ser reescrita como:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E}{\eta}\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} \quad (4-20)$$

a qual representa a equação diferencial não homogênea que rege o comportamento de fluência.

A solução da equação diferencial, expressa pela Equação (4-20), pode ser obtida pela combinação linear entre a solução da respectiva equação homogênea (ε_h) e a solução particular (ε_p), expressa por:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_h + \varepsilon_p \quad (4-21)$$

sendo a solução da equação homogênea e a solução particular expressas respectivamente por:

$$\varepsilon_h = A e^{-\frac{E}{\eta}t} \quad (4-22)$$

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_0}{E} \quad (4-23)$$

em que A representa uma constante a ser determinada e t representa a variável tempo.

Logo a Equação (4-21) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon(t) = A e^{\frac{-E}{\eta} t} + \frac{\sigma_0}{E} \quad (4-24)$$

Considerando-se como condição inicial o comportamento mecânico esperado para o modelo em um tempo $t = 0$, tem-se:

$$\varepsilon(0) = A + \frac{\sigma_0}{E} = 0 \quad (4-25)$$

Dessa forma, a solução da Equação (4-20), que representa a equação diferencial que rege o comportamento de fluência do modelo de Kelvin-Voigt, pode ser expressa por:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{\frac{-E}{\eta} t} \right) \quad (4-26)$$

Derivando-se a Equação (4-26) em relação ao tempo tem-se a taxa de deformação do modelo de Kelvin-Voigt expressa por:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} e^{\frac{-E}{\eta} t} \quad (4-27)$$

A partir das Equações (4-26) e (4-27) é possível descrever o perfil de evolução da deformação ao longo do tempo para o modelo de Kelvin-Voigt, sob estado de tensão constante, como apresentado na Figura 4-6. A partir da Equação (4-26), é possível avaliar que a deformação varia ao longo do tempo, apresentando deformação inicial nula e tendendo a σ_0/E para um tempo suficientemente grande. A partir da Equação (4-27), é possível observar que a taxa de deformação varia ao longo do tempo de forma decrescente, sendo a taxa de deformação inicial igual σ_0/η e tendendo a zero para um tempo suficientemente grande.

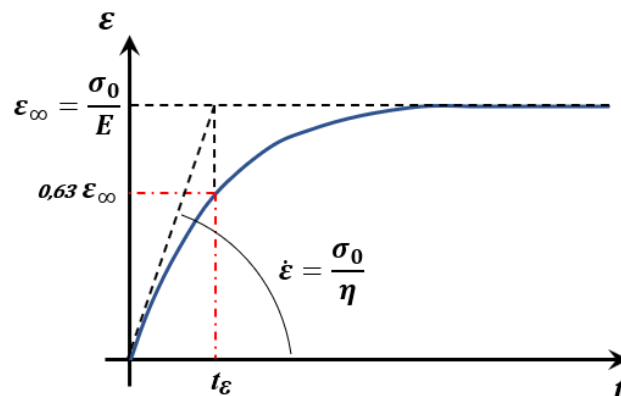


Figura 4-6: Representação da fluência pelo modelo reológico de Kelvin-Voigt

Como ilustrado na Figura 4-6, se o modelo apresentasse uma taxa de deformação constante e igual a taxa de deformação inicial, a deformação do modelo seria igual a deformação máxima com um tempo denominado tempo de retardo e representado por t_ε . Dessa forma, analisando-se a Figura 4-6, o tempo de retardo para o modelo de Kelvin-Voigt pode ser definido como:

$$t_\varepsilon = \frac{\eta}{E} \quad (4-28)$$

Segundo Findley *et al.* (1989), o tempo de retardo é uma propriedade física dos materiais e está relacionado com a taxa de deformação inicial obtida em um ensaio de fluência. O tempo de retardo é definido, então, como o tempo necessário para a deformação, sob um estado de tensão constante, ser igual ao valor máximo, ou seja, cessar o processo de fluência, caso a taxa de deformação se mantivesse constante e igual ao valor inicial. Segundo Marques e Creus (2012), o tempo de retardo representa uma característica da taxa do processo de fluência, quanto menor o seu valor, mais rápido o processo de fluência ocorre e o material é dito menos viscoso. O tempo de retardo fornece uma estimativa do tempo requerido para o processo de fluência se aproximar da conclusão.

A maior parte do processo de fluência ocorre dentro do tempo de retardo. No entanto, ao contrário do que é considerado em sua definição, para um tempo decorrido igual ao tempo de retardo, a deformação ainda não será igual à deformação máxima. Isso porque a taxa de deformação é decrescente, de acordo com a Equação (4-27). Além disso, a partir das Equações (4-26) e (4-28), é possível observar que, para um tempo t igual ao tempo de retardo, tem-se:

$$\varepsilon(t_\varepsilon) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cong 0.632 \frac{\sigma_0}{E} \cong 0.632 \varepsilon_\infty \quad (4-29)$$

ou seja, decorrido o tempo de retardo, a deformação é aproximadamente igual a 63,2% da deformação máxima por fluência do modelo de Kelvin-Voigt, sendo ε_∞ a deformação máxima obtida para um tempo suficientemente grande.

O tempo de retardo é importante no presente estudo pois, assim como é apresentado no item 5.5.3 do Capítulo 5, este é utilizado no controle do quanto, fisicamente, o modelo é capaz de se deformar em um determinado intervalo de tempo. Evitando-se assim problemas de divergência no método iterativo adotado na implementação computacional.

4.2.2 Relaxação no modelo de Kelvin-Voigt

O fenômeno de relaxação em determinado modelo se refere à redução gradativa do estado de tensão (alívio de tensão) ao longo do tempo, quando um estado de deformação constante é imposto. De forma análoga ao desenvolvido no subitem 4.2.1, a fim de evitar o envolvimento de outros efeitos, o fenômeno de relaxação pode ser melhor observado considerando-se o caso de deformação axial e utilizando-se um modelo uniaxial. Dessa forma, a partir da Equação (4-19) e considerando-se a deformação constante $\varepsilon = \varepsilon_0$, tem-se:

$$\sigma = E\varepsilon_0 \quad (4-30)$$

A partir da Equação (4-30), pode-se concluir que a tensão, assim como a deformação, permanece constante, ou seja, não há alívio de tensão ao longo do tempo, conforme apresentado na Figura 4-7. Dessa forma, o modelo de Kelvin-Voigt não é capaz de reproduzir o fenômeno de relaxação.

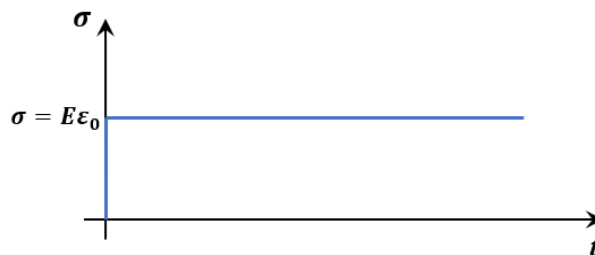


Figura 4-7: Representação da relaxação pelo modelo reológico de Kelvin-Voigt

4.3 Modelo de Boltzmann

O modelo reológico de Boltzmann pode ser idealizado pela associação em série entre uma mola (elemento elástico) e um Modelo de Kelvin-Voigt (uma mola em paralelo com um amortecedor), como apresentado na Figura 4-8. Este modelo é capaz de descrever um comportamento elástico instantâneo seguido por um comportamento elástico amortecido (comportamento viscoelástico) com taxa de deformação decrescente, típico de materiais sólidos. Para um período de tempo suficientemente grande, a deformação viscoelástica total tende para a resposta de deformação elástica instantânea prevista por um modelo elástico linear com módulo de elasticidade equivalente ao da associação em série de dois elementos elásticos com módulos de elasticidade respectivamente iguais a E_1 e E_2 .

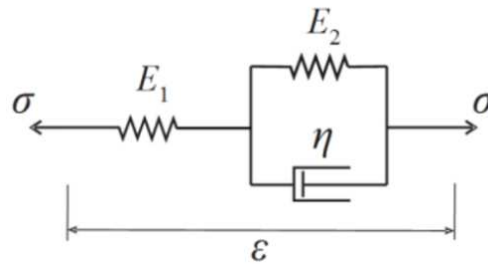


Figura 4-8: Modelo reológico de Boltzmann

A partir da Figura 4-8, é importante observar que o parâmetro E_1 determina a deformação elástica instantânea e representa o módulo de elasticidade do material. Enquanto, o módulo de elasticidade equivalente à associação em série entre os parâmetros E_1 e E_2 determina a deformação total ao longo do tempo e representa o módulo de elasticidade do material no comportamento viscoelástico. Além disso, o parâmetro η representa o módulo de viscosidade do material, que determina a taxa de deformação ao longo do tempo e proporciona um comportamento amortecido ao material.

A relação reológica pode ser obtida considerando-se que a tensão total no modelo é igual a tensão no elemento elástico ou a tensão no modelo de Kelvin-Voigt e que a deformação total do modelo pode ser dada pela soma da deformação do elemento elástico com a deformação do modelo de Kelvin-Voigt, expressas, respectivamente, por:

$$\sigma = \sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} \quad (4-31)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} \quad (4-32)$$

em que os sobrescritos “(1)” e “(2)” se referem ao elemento elástico isolado e ao modelo de Kelvin-Voigt, respectivamente.

É importante observar, ainda, que as relações entre as tensões e as deformações em cada um dos elementos do modelo de Boltzmann podem ser definidas, respectivamente, por:

$$\sigma = E_1 \varepsilon^{(1)} \quad (4-33)$$

$$\sigma^{(2e)} = E_2 \varepsilon^{(2)} \quad (4-34)$$

$$\sigma^{(2)} = \sigma^{(2e)} + \sigma^{(2v)} \quad (4-35)$$

$$\sigma^{(2v)} = \eta \dot{\varepsilon}^{(2)} \quad (4-36)$$

em que os sobrescritos “(2e)” e “(2v)” se referem, respectivamente, aos elementos elástico e viscoso do modelo de Kelvin-Voigt.

Dessa forma, substituindo-se na Equação (4-32) as relações apresentadas nas Equações (4-33) e (4-34) e considerando-se as relações entre as tensões e as deformações no elemento elástico e no elemento viscoso, expressas respectivamente pelas Equações (4-9) e (4-15), tem-se:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{E_1} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} \sigma_{ij} + \frac{1}{E_2} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} \sigma_{ij}^{(2e)} \quad (4-37)$$

Considerando-se as Equações (4-31) e (4-35), a Equação (4-37) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{E_1} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} \sigma_{ij} + \frac{1}{E_2} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} (\sigma_{ij} - \eta \bar{C}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^{(2v)}) \quad (4-38)$$

Rearranjando-se os termos da Equação (4-38), tem-se:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} \sigma_{ij} - \frac{\eta}{E_2} \dot{\varepsilon}_{kl}^{(2v)} \quad (4-39)$$

Derivando-se a Equação (4-32) em relação ao tempo e substituindo-se na Equação (4-39), tem-se:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\eta}{E_2} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^{(1)}) \quad (4-40)$$

Derivando-se a Equação (4-33) em relação ao tempo e substituindo-se na Equação (4-40), considerando-se as propriedades do material invariantes com o tempo, tem-se:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\eta}{E_2} \dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{\eta}{E_1 E_2} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} \dot{\sigma}_{ij} \quad (4-41)$$

Rearranjando-se os termos e isolando-se a tensão total σ_{ij} , a Equação (4-41) pode ser reescrita como:

$$(\bar{C}_{ijkl})^{-1} \sigma_{ij} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} \dot{\sigma}_{ij} \quad (4-42)$$

Finalmente, multiplicando-se os dois lados da Equação (4-42) por \bar{C}_{ijkl} , tem-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \bar{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \bar{C}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{ij} \quad (4-43)$$

que representa a relação reológica do Modelo de Boltzmann.

Para ilustrar melhor o comportamento mecânico deste modelo, nos dois subitens seguintes são apresentadas as respostas referentes aos fenômenos de fluência e relaxação. Além disso, assim como no desenvolvimento para o modelo de Kelvin-Voigt, é apresentado o tempo de retardo para o modelo de Boltzmann, o qual tem influência significativa na implementação numérica da formulação desenvolvida, como é observado no Capítulo 5.

4.3.1 Fluência no modelo de Boltzmann

A partir da Equação (4-43), a relação reológica para o modelo de Boltzmann unidimensional pode ser expressa por:

$$\sigma = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma} \quad (4-44)$$

Considerando-se a tensão constante $\sigma = \sigma_0$, a Equação (4-44) pode ser reescrita como:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_2}{\eta} \varepsilon = \frac{E_1 + E_2}{E_2 E_1} \sigma_0 \quad (4-45)$$

a qual representa a equação diferencial não homogênea que rege o comportamento de fluência.

A solução da equação diferencial, expressa pela Equação (4-45), pode ser obtida pela combinação linear entre a solução da respectiva equação homogênea (ε_h) e a solução particular (ε_p), expressa por:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_h + \varepsilon_p \quad (4-46)$$

sendo a solução da equação homogênea e a solução particular expressas respectivamente por:

$$\varepsilon_h = A e^{\frac{-E_2}{\eta} t} \quad (4-47)$$

$$\varepsilon_p = \frac{E_1 + E_2}{E_2 E_1} \sigma_0 \quad (4-48)$$

em que A representa uma constante a ser determinada e t representa a variável tempo.

Logo a Equação (4-46) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon(t) = A e^{\frac{-E_2}{\eta} t} + \frac{E_1 + E_2}{E_2 E_1} \sigma_0 \quad (4-49)$$

Considerando-se como condição inicial o comportamento mecânico esperado para o modelo em um tempo $t = 0$, tem-se:

$$\varepsilon(0) = A + \frac{E_1 + E_2}{E_2 E_1} \sigma_0 = \frac{\sigma_0}{E_1} \quad (4-50)$$

Dessa forma, a solução da Equação (4-45), que representa a equação diferencial que rege o comportamento de fluência do modelo de Boltzmann, pode ser expressa por:

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\sigma_0}{E_1} - \frac{E_1 + E_2}{E_2 E_1} \sigma_0 \right) e^{\frac{-E_2}{\eta} t} + \frac{E_1 + E_2}{E_2 E_1} \sigma_0 \quad (4-51)$$

Derivando-se a Equação (4-51) em relação ao tempo tem-se a taxa de deformação do modelo de Boltzmann expressa por:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} e^{\frac{-E_2}{\eta} t} = \frac{E_1}{\eta} \varepsilon_0 e^{\frac{-E_2}{\eta} t} \quad (4-52)$$

A partir das Equações (4-51) e (4-52) é possível descrever o perfil de evolução da deformação ao longo do tempo para o modelo de Boltzmann, sob estado de tensão constante, como apresentado na Figura 4-9. A partir da Equação (4-51), é possível avaliar que a deformação varia ao longo do tempo, apresentando deformação inicial igual a σ_0/E_1 e tendendo a $\sigma_0(E_1 + E_2)/E_2 E_1$ para um tempo suficientemente grande. A partir da Equação (4-52), é possível observar que a taxa de deformação varia ao longo do tempo de forma decrescente, sendo a taxa de deformação inicial igual a σ_0/η e tendendo a zero para um tempo suficientemente grande.

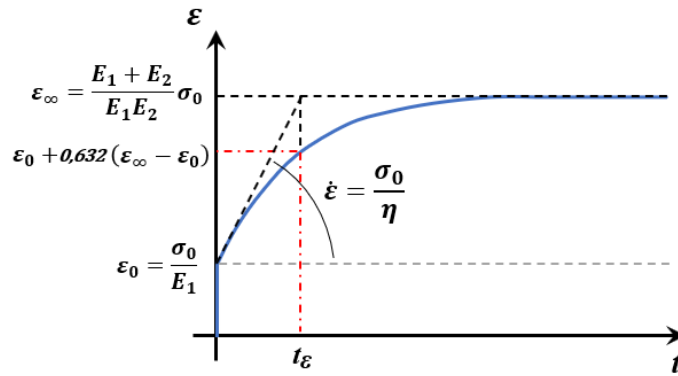


Figura 4-9: Representação da fluência pelo modelo reológico de Boltzmann

Como ilustrado na Figura 4-9, se o modelo apresentasse uma taxa de deformação constante e igual a taxa de deformação inicial, a deformação do modelo seria igual a deformação máxima com um tempo denominado tempo de retardo e representado por t_ε . Dessa forma, analisando-se a Figura 4-9, o tempo de retardo para o modelo de Boltzmann pode ser definido como:

$$t_\varepsilon = \frac{\eta}{E_2} \quad (4-53)$$

Assim como desenvolvido para o modelo de Kelvin-Voigt, a partir das Equações (4-51) e (4-53), é possível observar que, para um tempo t igual ao tempo de retardo, tem-se:

$$\varepsilon(t_\varepsilon) = \left(\frac{\sigma_0}{E_1} - \frac{E_1 + E_2}{E_2 E_1} \sigma_0 \right) \frac{1}{e} + \frac{E_1 + E_2}{E_2 E_1} \sigma_0 \cong \frac{\sigma_0}{E_1} + 0.632 \left(\frac{E_1 + E_2}{E_2 E_1} \sigma_0 - \frac{\sigma_0}{E_1} \right) \quad (4-54)$$

Considerando-se apenas a deformação por fluência, ou seja, descontando-se a deformação elástica inicial, a Equação (4-54) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon(t_\varepsilon) - \varepsilon_0 \cong 0.632(\varepsilon_\infty - \varepsilon_0) \quad (4-55)$$

ou seja, decorrido o tempo de retardo, a deformação por fluência (descontando-se a deformação elástica inicial) é aproximadamente igual a 63,2% da deformação máxima por fluência do modelo de Boltzmann, sendo ε_∞ a deformação máxima obtida para um tempo suficientemente grande e ε_0 a deformação elástica inicial. Este resultado é análogo ao obtido para o modelo de Kelvin-Voigt.

4.3.2 Relaxação no modelo de Boltzmann

De forma análoga ao desenvolvido no subitem 4.3.1, a partir da Equação (4-44) e considerando-se a deformação constante $\varepsilon = \varepsilon_0$, tem-se:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma = \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon_0 \quad (4-56)$$

a qual representa a equação diferencial não homogênea que rege o comportamento de relaxação.

A solução da equação diferencial, expressa pela Equação (4-56), pode ser obtida pela combinação linear entre a solução da respectiva equação homogênea (σ_h) e a solução particular (σ_p), expressa por:

$$\sigma(t) = \sigma_h + \sigma_p \quad (4-57)$$

sendo a solução da equação homogênea e a solução particular expressas respectivamente por:

$$\sigma_h = A e^{-\frac{(E_1+E_2)}{\eta} t} \quad (4-58)$$

$$\sigma_p = \frac{E_2 E_1}{E_1 + E_2} \varepsilon_0 \quad (4-59)$$

em que A representa uma constante a ser determinada e t representa a variável tempo.

Logo a Equação (4-57) pode ser reescrita como:

$$\sigma(t) = A e^{-\frac{(E_1+E_2)}{\eta} t} + \frac{E_2 E_1}{E_1 + E_2} \varepsilon_0 \quad (4-60)$$

Considerando-se como condição inicial o comportamento mecânico esperado para o modelo em um tempo $t = 0$, tem-se:

$$\sigma(0) = A + \frac{E_2 E_1}{E_1 + E_2} \varepsilon_0 = E_1 \varepsilon_0 \quad (4-61)$$

Dessa forma, a solução da Equação (4-56), que representa a equação diferencial que rege o comportamento de relaxação do modelo de Boltzmann, pode ser expressa por:

$$\sigma(t) = \left(E_1 \varepsilon_0 - \frac{E_2 E_1}{E_1 + E_2} \varepsilon_0 \right) e^{-\frac{(E_1 + E_2)}{\eta} t} + \frac{E_2 E_1}{E_1 + E_2} \varepsilon_0 \quad (4-62)$$

Derivando-se a Equação (4-62) em relação ao tempo tem-se a taxa de tensão do modelo de Boltzmann expressa por:

$$\dot{\sigma}(t) = -\frac{E_1^2 \varepsilon_0}{\eta} e^{-\frac{(E_1 + E_2)}{\eta} t} = -\frac{E_1 \sigma_0}{\eta} e^{-\frac{(E_1 + E_2)}{\eta} t} \quad (4-63)$$

A partir das Equações (4-62) e (4-63) é possível descrever o perfil de evolução da tensão ao longo do tempo para o modelo de Boltzmann, sob estado de deformação constante, como apresentado na Figura 4-10. A partir da Equação (4-62), é possível avaliar que a tensão varia ao longo do tempo, apresentando tensão inicial igual a $E_1 \varepsilon_0$ e tendendo a $\varepsilon_0 E_2 E_1 / (E_1 + E_2)$ para um tempo suficientemente grande. A partir da Equação (4-63), é possível observar que o módulo da taxa de tensão varia ao longo do tempo de forma decrescente, sendo o módulo da taxa de tensão inicial igual a $E_1^2 \varepsilon_0 / \eta$ e tendendo a zero para um tempo suficientemente grande.

Como ilustrado na Figura 4-10, se o modelo apresentasse uma taxa de tensão constante e igual a taxa de tensão inicial, a tensão atuante no modelo seria mínima com um tempo denominado tempo de relaxação e representado por t_σ . Dessa forma, analisando-se a Figura 4-10, o tempo de relaxação para o modelo de Boltzmann pode ser definido como:

$$t_\sigma = \frac{\eta}{E_1 + E_2} \quad (4-64)$$

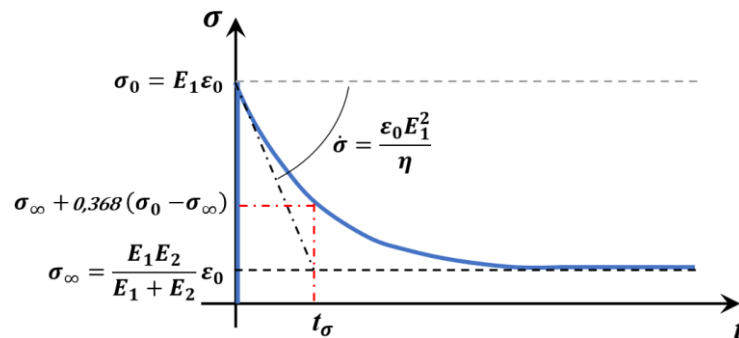


Figura 4-10: Representação da relaxação pelo modelo reológico de Boltzmann

O tempo de relaxação é análogo ao tempo de retardo, sendo considerado uma propriedade física do material que fornece uma estimativa do tempo requerido para o fenômeno de relaxação se aproximar da conclusão. Segundo Findley *et al.* (1989), o tempo de relaxação é definido

como o tempo requerido para a tensão atingir seu valor mínimo, ou seja, cessar o processo de relaxação, caso a taxa de tensão se mantivesse constante e igual ao valor inicial.

A partir das Equações (4-62) e (4-64), é possível observar que, para um tempo t igual ao tempo de relaxação, tem-se:

$$\sigma(t_\sigma) = \left(E_1 \varepsilon_0 - \frac{E_2 E_1}{E_1 + E_2} \varepsilon_0 \right) \frac{1}{e} + \frac{E_2 E_1}{E_1 + E_2} \varepsilon_0 \cong \sigma_\infty + 0.368(\sigma_0 - \sigma_\infty) \quad (4-65)$$

em que σ_∞ representa a tensão mínima obtida para um tempo suficientemente grande e σ_0 representa a tensão inicial.

Considerando-se apenas o alívio de tensão por relaxação, ou seja, descontando-se a tensão final obtida para um tempo suficientemente grande, a Equação (4-65) pode ser reescrita como:

$$\sigma(t_\sigma) - \sigma_\infty \cong 0.368(\sigma_0 - \sigma_\infty) \quad (4-66)$$

ou seja, decorrido o tempo de relaxação, o nível de tensão (descontando-se a tensão final) é aproximadamente igual a 36,8% da diferença entre a tensão máxima e a tensão mínima por relaxação do modelo de Boltzmann. Isso significa que, decorrido o tempo de relaxação, o nível de tensão experimenta um alívio (redução) de aproximadamente 63,2% em relação à relaxação total.

4.4 Modelo de Zener

O modelo de Zener pode ser idealizado pela associação em paralelo entre uma mola (elemento elástico) e um modelo de Maxwell (uma mola em série com um amortecedor), como apresentado na Figura 4-11. O modelo de Maxwell é típico para representação da resposta mecânica de materiais fluidos e, por isso, não é apresentado neste estudo, seu comportamento e características podem ser conferidos em Marques e Creus (2012).

Semelhante ao modelo de Boltzmann, o modelo de Zener é capaz de descrever um comportamento elástico instantâneo seguido por um comportamento elástico amortecido (comportamento viscoelástico) com taxa de deformação decrescente, típico de materiais sólidos. Para um período de tempo suficientemente grande, a deformação viscoelástica total tende para a resposta de deformação elástica instantânea prevista por um modelo elástico linear com módulo de elasticidade igual E_2 .

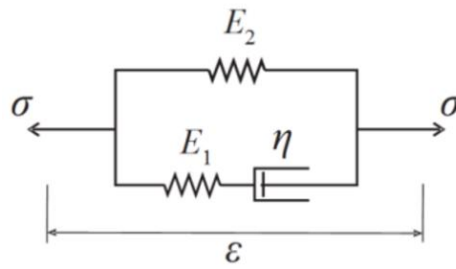


Figura 4-11: Modelo reológico de Zener

A partir da Figura 4-11, é importante observar que os parâmetros E_1 e E_2 determinam o comportamento elástico instantâneo e a soma destes (associação em paralelo entre duas molas) representa o módulo de elasticidade do material. Enquanto, o parâmetro E_2 determina a tendência de deformação total (soma da deformação elástica instantânea com a deformação viscoelástica) após um período de tempo suficientemente grande e representa o módulo de elasticidade do material no comportamento viscoelástico. Além disso, o parâmetro η representa o módulo de viscosidade do material, que determina a taxa de deformação ao longo do tempo e proporciona um comportamento amortecido ao material.

A relação reológica pode ser obtida considerando-se que a tensão total e a deformação total no modelo podem ser determinadas, respectivamente, por:

$$\sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} \quad (4-67)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = \varepsilon^{(1e)} + \varepsilon^{(1v)} \quad (4-68)$$

em que os sobrescritos “(1)” e “(2)” se referem ao modelo de Maxwell e ao elemento elástico isolado, respectivamente. Os sobrescritos “(1e)” e “(1v)” se referem, respectivamente, aos elementos elástico e viscoso do modelo de Maxwell.

É importante observar, ainda, que as relações entre as tensões e as deformações em cada um dos elementos do modelo de Zener podem ser definidas, respectivamente, por:

$$\sigma^{(2)} = E_2 \varepsilon \quad (4-69)$$

$$\sigma^{(1)} = \sigma^{(1e)} = \sigma^{(1v)} \quad (4-70)$$

$$\sigma^{(1e)} = E_1 \varepsilon^{(1e)} \quad (4-71)$$

$$\sigma^{(1v)} = \eta \dot{\varepsilon}^{(1v)} \quad (4-72)$$

Dessa forma, derivando-se as Equações (4-68) e (4-71) em relação ao tempo, considerando-se as propriedades do material invariantes com o tempo, utilizando-se a Equação (4-72) e considerando-se as relações entre as tensões e as deformações no elemento elástico e no elemento viscoso, expressas respectivamente pelas Equações (4-9) e (4-15), tem-se:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{1}{E_1} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} \dot{\sigma}_{ij}^{(1e)} + \frac{1}{\eta} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} \sigma_{ij}^{(1v)} \quad (4-73)$$

que representa a taxa de deformação total do modelo de Zener.

Substituindo-se a Equação (4-69) na Equação (4-67), rearranjando-se e substituindo-se na Equação (4-73), tem-se:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{1}{E_1} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} \dot{\sigma}_{ij}^{(1e)} + \frac{1}{\eta} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} (\sigma_{ij} - E_2 \bar{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}) \quad (4-74)$$

Novamente, substituindo-se a Equação (4-69) na Equação (4-67), derivando-se em relação ao tempo, considerando-se as propriedades do material invariantes com o tempo, e substituindo-se na Equação (4-74), tem-se:

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{1}{E_1} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} (\dot{\sigma}_{ij} - E_2 \bar{C}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}) + \frac{1}{\eta} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} (\sigma_{ij} - E_2 \bar{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}) \quad (4-75)$$

Rearranjando-se os termos e isolando-se a tensão total σ_{ij} , a Equação (4-75) pode ser reescrita como:

$$(\bar{C}_{ijkl})^{-1} \sigma_{ij} = E_2 \varepsilon_{kl} + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\eta}{E_1} (\bar{C}_{ijkl})^{-1} \dot{\sigma}_{ij} \quad (4-76)$$

Finalmente, multiplicando-se os dois lados da Equação (4-76) por \bar{C}_{ijkl} , tem-se:

$$\sigma_{ij} = E_2 \bar{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \bar{C}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{ij} \quad (4-77)$$

que representa a relação reológica do Modelo de Zener.

Para ilustrar melhor o comportamento mecânico deste modelo, nos dois subitens seguintes são apresentadas as respostas referentes aos fenômenos de fluência e relaxação. Além disso, assim como no desenvolvimento para os modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann, é apresentado o tempo de retardo para o modelo de Zener, o qual tem influência significativa na implementação numérica da formulação desenvolvida, como é observado no Capítulo 5.

4.4.1 Fluência no modelo de Zener

A partir da Equação (4-77), a relação reológica para o modelo de Zener unidimensional pode ser expressa por:

$$\sigma = E_2 \varepsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \dot{\varepsilon} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma} \quad (4-78)$$

Considerando-se a tensão constante $\sigma = \sigma_0$, a Equação (4-78) pode ser reescrita como:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} \varepsilon = \frac{E_1}{\eta(E_1 + E_2)} \sigma_0 \quad (4-79)$$

a qual representa a equação diferencial não homogênea que rege o comportamento de fluência.

A solução da equação diferencial, expressa pela Equação (4-79), pode ser obtida pela combinação linear entre a solução da respectiva equação homogênea (ε_h) e a solução particular (ε_p), expressa por:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_h + \varepsilon_p \quad (4-80)$$

sendo a solução da equação homogênea e a solução particular expressas respectivamente por:

$$\varepsilon_h = A e^{\frac{-E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} \quad (4-81)$$

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_0}{E_2} \quad (4-82)$$

em que A representa uma constante a ser determinada e t representa a variável tempo.

Logo a Equação (4-80) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon(t) = A e^{\frac{-E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} + \frac{\sigma_0}{E_2} \quad (4-83)$$

Considerando-se como condição inicial o comportamento mecânico esperado para o modelo em um tempo $t = 0$, tem-se:

$$\varepsilon(0) = A + \frac{\sigma_0}{E_2} = \frac{\sigma_0}{E_1 + E_2} \quad (4-84)$$

Dessa forma, a solução da Equação (4-79), que representa a equação diferencial que rege o comportamento de fluência do modelo de Zener, pode ser expressa por:

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\sigma_0}{E_1 + E_2} - \frac{\sigma_0}{E_2} \right) e^{\frac{-E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} + \frac{\sigma_0}{E_2} \quad (4-85)$$

Derivando-se a Equação (4-85) em relação ao tempo tem-se a taxa de deformação do modelo de Zener expressa por:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{E_1^2 \sigma_0}{\eta(E_1 + E_2)^2} e^{\frac{-E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} = \frac{E_1^2}{\eta(E_1 + E_2)} \varepsilon_0 e^{\frac{-E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} t} \quad (4-86)$$

A partir das Equações (4-85) e (4-86) é possível descrever o perfil de evolução da deformação ao longo do tempo para o modelo de Zener, sob estado de tensão constante, como apresentado na Figura 4-12.

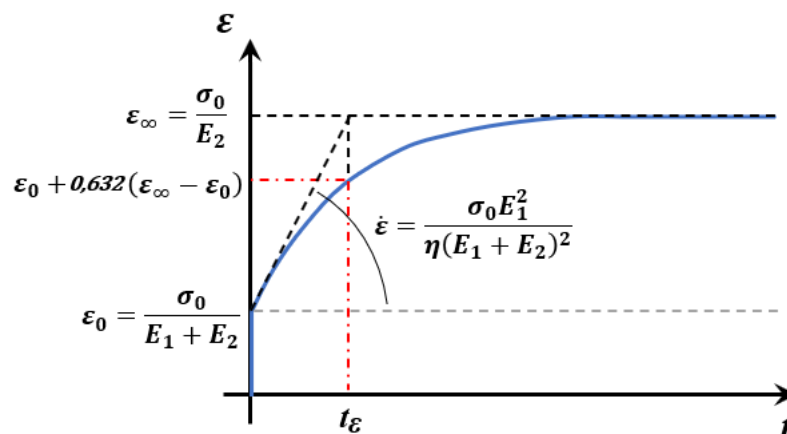


Figura 4-12: Representação da fluência pelo modelo reológico de Zener

A partir da Equação (4-85), é possível avaliar que a deformação varia ao longo do tempo, apresentando deformação inicial igual a $\sigma_0 / (E_1 + E_2)$ e tendendo a σ_0 / E_2 para um tempo

suficientemente grande. A partir da Equação (4-86), é possível observar que a taxa de deformação varia ao longo do tempo de forma decrescente, sendo a taxa de deformação inicial igual a $(E_1^2 \sigma_0) / (\eta(E_1 + E_2)^2)$ e tendendo a zero para um tempo suficientemente grande.

Como ilustrado na Figura 4-12, se o modelo apresentasse uma taxa de deformação constante e igual a taxa de deformação inicial, a deformação do modelo seria igual a deformação máxima com um tempo denominado tempo de retardo e representado por t_ε . Dessa forma, analisando-se a Figura 4-12, o tempo de retardo para o modelo de Zener pode ser definido como:

$$t_\varepsilon = \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1 E_2} \quad (4-87)$$

Assim como desenvolvido para o modelo de Boltzmann, a partir das Equações (4-85) e (4-87), é possível observar que, para um tempo t igual ao tempo de retardo, tem-se:

$$\varepsilon(t_\varepsilon) = \left(\frac{\sigma_0}{E_1 + E_2} - \frac{\sigma_0}{E_2} \right) \frac{1}{e} + \frac{\sigma_0}{E_2} \cong \frac{\sigma_0}{E_1 + E_2} + 0.632 \left(\frac{\sigma_0}{E_2} - \frac{\sigma_0}{E_1 + E_2} \right) \quad (4-88)$$

Considerando-se apenas a deformação por fluência, ou seja, descontando-se a deformação elástica inicial, a Equação (4-88) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon(t_\varepsilon) - \varepsilon_0 \cong 0.632(\varepsilon_\infty - \varepsilon_0) \quad (4-89)$$

ou seja, decorrido o tempo de retardo, a deformação por fluência (descontando-se a deformação elástica inicial) é aproximadamente igual a 63,2% da deformação máxima por fluência do modelo de Zener, sendo ε_∞ a deformação máxima obtida para um tempo suficientemente grande e ε_0 a deformação elástica inicial. Este resultado é análogo aos obtidos para os modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann.

4.4.2 Relaxação no modelo de Zener

De forma análoga ao desenvolvido no subitem 4.4.1, a partir da Equação (4-78) e considerando-se a deformação constante $\varepsilon = \varepsilon_0$, tem-se:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1}{\eta} \sigma = \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon_0 \quad (4-90)$$

a qual representa a equação diferencial não homogênea que rege o comportamento de relaxação.

A solução da equação diferencial, expressa pela Equação (4-90), pode ser obtida pela combinação linear entre a solução da respectiva equação homogênea (σ_h) e a solução particular (σ_p), expressa por:

$$\sigma(t) = \sigma_h + \sigma_p \quad (4-91)$$

sendo a solução da equação homogênea e a solução particular expressas respectivamente por:

$$\sigma_h = A e^{\frac{-E_1}{\eta} t} \quad (4-92)$$

$$\sigma_p = E_2 \varepsilon_0 \quad (4-93)$$

em que A representa uma constante a ser determinada e t representa a variável tempo.

Logo a Equação (4-91) pode ser reescrita como:

$$\sigma(t) = A e^{\frac{-E_1}{\eta} t} + E_2 \varepsilon_0 \quad (4-94)$$

Considerando-se como condição inicial o comportamento mecânico esperado para o modelo em um tempo $t = 0$, tem-se:

$$\sigma(0) = A + E_2 \varepsilon_0 = (E_1 + E_2) \varepsilon_0 \quad (4-95)$$

Dessa forma, a solução da Equação (4-90), que representa a equação diferencial que rege o comportamento de relaxação do modelo de Zener, pode ser expressa por:

$$\sigma(t) = ((E_1 + E_2) \varepsilon_0 - E_2 \varepsilon_0) e^{\frac{-E_1}{\eta} t} + E_2 \varepsilon_0 \quad (4-96)$$

Derivando-se a Equação (4-96) em relação ao tempo tem-se a taxa de tensão do modelo de Zener expressa por:

$$\dot{\sigma}(t) = -\frac{E_1^2 \varepsilon_0}{\eta} e^{\frac{-E_1}{\eta} t} \quad (4-97)$$

A partir das Equações (4-96) e (4-97) é possível descrever o perfil de evolução da tensão ao longo do tempo para o modelo de Zener, sob estado de deformação constante, como

apresentado na Figura 4-13. A partir da Equação (4-96), é possível avaliar que a tensão varia ao longo do tempo, apresentando tensão inicial igual a $(E_1 + E_2)\varepsilon_0$ e tendendo a $E_2\varepsilon_0$ para um tempo suficientemente grande. A partir da Equação (4-97), é possível observar que o módulo da taxa de tensão varia ao longo do tempo de forma decrescente, sendo o módulo da taxa de tensão inicial igual a $E_1^2\varepsilon_0/\eta$ e tendendo a zero para um tempo suficientemente grande.

Como ilustrado na Figura 4-13, se o modelo apresentasse uma taxa de tensão constante e igual a taxa de tensão inicial, a tensão atuante no modelo seria mínima com um tempo denominado tempo de relaxação e representado por t_σ . Dessa forma, analisando-se a Figura 4-13, o tempo de relaxação para o modelo de Zener pode ser definido como:

$$t_\sigma = \frac{\eta}{E_1} \quad (4-98)$$

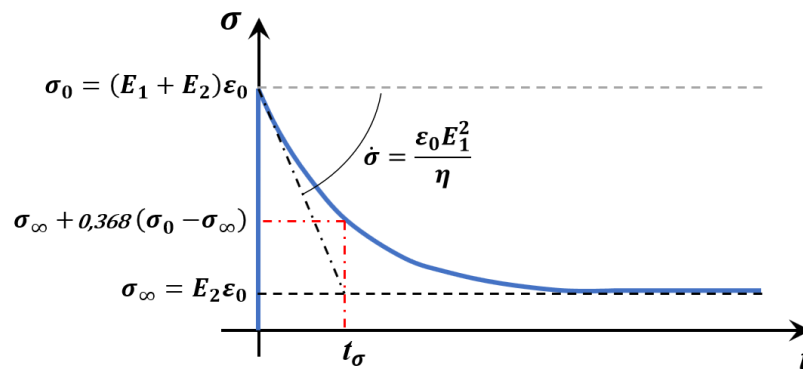


Figura 4-13: Representação da relaxação pelo modelo reológico de Zener

De forma análoga a apresentada para o modelo de Boltzmann, a partir das Equações (4-96) e (4-98), é possível observar que, para um tempo t igual ao tempo de relaxação, tem-se:

$$\sigma(t_\sigma) = \left((E_1 + E_2)\varepsilon_0 - E_2\varepsilon_0 \right) \frac{1}{e} + E_2\varepsilon_0 \cong \sigma_\infty + 0.368(\sigma_0 - \sigma_\infty) \quad (4-99)$$

em que σ_∞ representa a tensão mínima obtida para um tempo suficientemente grande e σ_0 representa a tensão inicial.

Considerando-se apenas o alívio de tensão por relaxação, ou seja, descontando-se a tensão final obtida para um tempo suficientemente grande, a Equação (4-99) pode ser reescrita como:

$$\sigma(t_\sigma) - \sigma_\infty \cong 0.368(\sigma_0 - \sigma_\infty) \quad (4-100)$$

ou seja, decorrido o tempo de relaxação, o nível de tensão (descontando-se a tensão final) é aproximadamente igual a 36,8% da diferença entre a tensão máxima e a tensão mínima por relaxação do modelo de Zener. Isso significa que, decorrido o tempo de relaxação, o nível de tensão experimenta um alívio (redução) de aproximadamente 63,2% em relação à relaxação total. Este resultado é análogo ao obtido para o modelo de Boltzmann.

5

FORMULAÇÃO POSICIONAL PARA ELEMENTOS DE PÓRTICO COM CINEMÁTICA DE REISSNER

Partindo-se da formulação geral descrita no capítulo 3 e das relações reológicas obtidas no capítulo 4, é possível utilizar a formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional para analisar um determinado sistema estrutural, com geometria e material constituinte bem definidos. Para tanto, é necessário particularizar o mapeamento da geometria, o tensor gradiente de deformação, a medida de deformação e a energia de deformação total de forma adequada ao elemento finito considerado e ao comportamento mecânico de interesse. Neste estudo, assim como já destacado, o elemento finito adotado é o de pórtico plano com cinemática de Reissner, sendo considerado o comportamento mecânico viscoelástico.

Os procedimentos adotados no desenvolvimento apresentado neste capítulo são baseados no trabalho de Maciel (2008), no qual é apresentada a formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional considerando-se a cinemática de Reissner. A adoção de tal cinemática permite levar em consideração os efeitos do cisalhamento na deformação. Para tanto, o giro da seção transversal é considerado desacoplado dos deslocamentos ou das posições que descrevem a linha centroidal, comportando-se como um parâmetro independente, ou seja, a seção transversal inicialmente plana permanece plana após a deformação, porém não necessariamente ortogonal à linha centroidal do elemento. A escolha de tal cinemática no presente estudo se deve à relevância dos efeitos do cisalhamento à descrição do comportamento viscoelástico, assim como é destacado nos trabalhos de Bank e Mosallam (1992), Mottram (1993), Abdel-Magid *et al.* (2003), Shao e Shanmugam (2004), Sá *et al.* (2011a), Sá *et al.* (2011b) e assim como é observado nos exemplos e aplicações apresentadas neste estudo.

5.1 Mapeamento e discretização do domínio

Para se particularizar a energia de deformação total é necessário entender a cinemática do elemento finito considerado e a relação desta com a medida de deformação adotada. Assim, nesta formulação cada elemento finito de pórtico plano tem sua geometria mapeada pela parametrização ao longo do comprimento e da altura em função, respectivamente, das variáveis adimensionais ξ_1 e ξ_2 , conforme ilustrado na Figura 5-1.

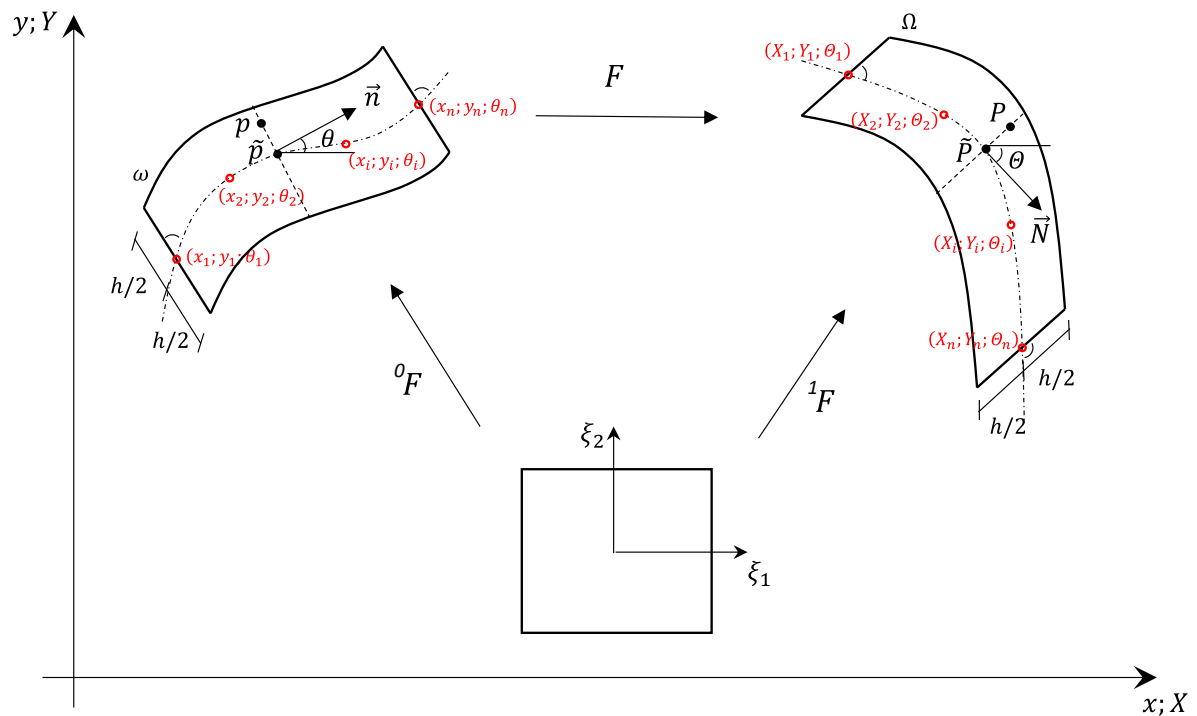


Figura 5-1: Parametrização da geometria de um elemento de pórtico plano com cinemática de Reissner

Portanto, na configuração indeformada, um ponto genérico $p(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2))$, pertencente a uma seção transversal do elemento, localizada em ξ_1 pela configuração auxiliar parametrizada, pode ser mapeado a partir da localização e da inclinação da respectiva seção transversal, como apresentado na Figura 5-1. De forma análoga, esse mesmo ponto na configuração deformada, representado por $P(X(\xi_1, \xi_2), Y(\xi_1, \xi_2))$, pode ser mapeado a partir da localização e da inclinação da respectiva seção transversal após a mudança de configuração do elemento. Dessa forma, para as configurações indeformada e deformada, respectivamente, têm-se as seguintes expressões para o mapeamento de um ponto genérico em função das variáveis adimensionais e da inclinação da seção transversal:

$$p(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) = \tilde{p}(x(\xi_1), y(\xi_1)) + \frac{h}{2} \xi_2 \vec{n}(\xi_1) \quad (5-1)$$

$$P(X(\xi_1, \xi_2), Y(\xi_1, \xi_2)) = \tilde{P}(X(\xi_1), Y(\xi_1)) + \frac{h}{2} \xi_2 \vec{N}(\xi_1) \quad (5-2)$$

em que \tilde{p} e \tilde{P} representam os pontos que localizam as seções transversais do elemento finito, ou seja, representam os pontos de interseção entre o plano da seção transversal, localizado em ξ_1 pela configuração auxiliar parametrizada, e a linha centroidal do elemento finito, nas configurações indeformada e deformada, respectivamente. O parâmetro h representa a altura da seção transversal do elemento e \vec{n} e \vec{N} representam os versores que definem as inclinações das seções transversais, respectivamente, nas configurações indeformada e deformada.

Assim como apresentado na Figura 5-1, as inclinações das seções transversais, nas configurações indeformada e deformada, podem ser determinadas pelas direções dos versores \vec{n} e \vec{N} , expressos por:

$$\vec{n}(\xi_1) = (\text{sen}(\theta(\xi_1)), \text{cos}(\theta(\xi_1))) \quad (5-3)$$

$$\vec{N}(\xi_1) = (\text{sen}(\theta(\xi_1)), \text{cos}(\theta(\xi_1))) \quad (5-4)$$

em que θ e θ representam os ângulos entre as seções transversais e o eixo horizontal.

Dessa forma, as coordenadas x e y de um ponto genérico p , na configuração indeformada, podem ser expressas, respectivamente, por:

$$x(\xi_1, \xi_2) = \tilde{x}(\xi_1) - \frac{h}{2} \xi_2 \text{sen}(\theta(\xi_1)) \quad (5-5)$$

$$y(\xi_1, \xi_2) = \tilde{y}(\xi_1) + \frac{h}{2} \xi_2 \text{cos}(\theta(\xi_1)) \quad (5-6)$$

em que \tilde{x} e \tilde{y} representam as coordenadas do ponto de interseção da respectiva seção transversal com a linha centroidal.

De forma análoga, as coordenadas X e Y do ponto genérico P , na configuração deformada, podem ser expressas, respectivamente, por:

$$X(\xi_1, \xi_2) = \tilde{X}(\xi_1) - \frac{h}{2} \xi_2 \text{sen}(\theta(\xi_1)) \quad (5-7)$$

$$Y(\xi_1, \xi_2) = \tilde{Y}(\xi_1) + \frac{h}{2} \xi_2 \cos(\theta(\xi_1)) \quad (5-8)$$

em que \tilde{X} e \tilde{Y} representam as coordenadas do ponto de interseção da respectiva seção transversal com a linha centroidal.

A fim de possibilitar a análise pelo Método dos Elementos Finitos Posicional é necessário discretizar o domínio, ou seja, deixá-lo em função de parâmetros discretos. No presente caso, os parâmetros considerados são as posições nodais (parâmetros nodais generalizados, visto que o giro da seção transversal também é considerado um parâmetro nodal independente), por esse motivo a formulação é dita posicional.

Dessa forma, procedendo-se com uma discretização do domínio, o mapeamento das coordenadas dos pontos pertencentes ao mesmo, tanto na configuração indeformada, quanto na configuração deformada, podem ser reescritos em termos dos parâmetros nodais e das funções de forma. Para tal, é considerada a parametrização da geometria com base na configuração auxiliar adimensional, como apresentado na Figura 5-1.

Na Figura 5-1, ω representa o domínio de um elemento, com um determinado número de nós, na configuração indeformada e Ω representa o domínio do mesmo elemento na configuração deformada. Dessa forma, x_n , y_n e θ_n representam os parâmetros nodais do nó n na configuração indeformada e X_n , Y_n e Θ_n representam os parâmetros nodais do nó n na configuração deformada. Lembrando-se que, x , y , X e Y representam as coordenadas e θ e Θ representam o giro da seção transversal em relação a horizontal.

Dessa forma, em termos dos parâmetros nodais e das funções de forma (adequadas à aproximação polinomial considerada), a partir da configuração auxiliar parametrizada, as coordenadas e o giro de um ponto qualquer pertencente à linha centroidal do elemento finito podem ser expressas, respectivamente, na configuração indeformada e na configuração deformada, por:

$$\tilde{x}(\xi_1) = \sum_{n=1}^{n^\circ \text{ de nós}} \phi_n(\xi_1) x_n \quad (5-9)$$

$$\tilde{y}(\xi_1) = \sum_{n=1}^{n^\circ \text{ de nós}} \phi_n(\xi_1) y_n \quad (5-10)$$

$$\theta(\xi_1) = \sum_{n=1}^{n^\circ \text{ de nós}} \phi_n(\xi_1)\theta_n \quad (5-11)$$

$$\tilde{X}(\xi_1) = \sum_{n=1}^{n^\circ \text{ de nós}} \phi_n(\xi_1)X_n \quad (5-12)$$

$$\tilde{Y}(\xi_1) = \sum_{n=1}^{n^\circ \text{ de nós}} \phi_n(\xi_1)Y_n \quad (5-13)$$

$$\theta(\xi_1) = \sum_{n=1}^{n^\circ \text{ de nós}} \phi_n(\xi_1)\theta_n \quad (5-14)$$

em que $\phi_n(\xi_1)$ representa as funções de forma em termos da coordenada adimensional ξ_1 . Estas são determinadas por funções aproximadoras da família de polinômios de Lagrange, em que a ordem dos polinômios é igual ao número total de nós do elemento finito menos uma unidade. Neste trabalho, é adotado como padrão o elemento finito de pórtico com quatro nós e, conseqüentemente, é considerada a aproximação polinomial de ordem 3 (cúbica). Portanto, a partir da interpolação polinomial de Lagrange, expressa por:

$$\phi_j(\xi_1) = \prod_{i=0; j \neq i}^n \frac{\xi_1 - \xi_{1i}}{\xi_{1j} - \xi_{1i}} \quad (5-15)$$

as funções de forma, para um elemento de quatro nós, podem ser expressas por:

$$\phi_1(\xi_1) = \frac{9}{16} (1 - \xi_1)(\xi_1 + 1/3)(\xi_1 - 1/3) \quad (5-16)$$

$$\phi_2(\xi_1) = \frac{27}{16} (1 + \xi_1)(\xi_1 - 1/3)(\xi_1 - 1) \quad (5-17)$$

$$\phi_3(\xi_1) = \frac{27}{16} (1 - \xi_1)(\xi_1 + 1/3)(\xi_1 + 1) \quad (5-18)$$

$$\phi_4(\xi_1) = \frac{9}{16} (1 + \xi_1)(\xi_1 + 1/3)(\xi_1 - 1/3) \quad (5-19)$$

Apesar dos subscritos n nas Equações (5-9) a (5-14) não representarem índices relacionados a composição tensorial, a propriedade de somatório da notação indicial é adotada para simplificação das expressões que são obtidas nos próximos itens. Dessa forma, as Equações (5-9) a (5-14) podem ser reescritas como:

$$\tilde{x}(\xi_1) = \phi_n(\xi_1)x_n \quad (5-20)$$

$$\tilde{y}(\xi_1) = \phi_n(\xi_1)y_n \quad (5-21)$$

$$\theta(\xi_1) = \phi_n(\xi_1)\theta_n \quad (5-22)$$

$$\tilde{X}(\xi_1) = \phi_n(\xi_1)X_n \quad (5-23)$$

$$\tilde{Y}(\xi_1) = \phi_n(\xi_1)Y_n \quad (5-24)$$

$$\theta(\xi_1) = \phi_n(\xi_1)\theta_n \quad (5-25)$$

Portanto, os mapeamentos das coordenadas nas configurações deformada e indeformada, em termos das funções de forma e dos parâmetros nodais, podem ser expressos por:

$$x(\xi_1, \xi_2) = \phi_n(\xi_1)x_n - \frac{h}{2}\xi_2 \text{sen}(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-26)$$

$$y(\xi_1, \xi_2) = \phi_n(\xi_1)y_n + \frac{h}{2}\xi_2 \text{cos}(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-27)$$

$$X(\xi_1, \xi_2) = \phi_n(\xi_1)X_n - \frac{h}{2}\xi_2 \text{sen}(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-28)$$

$$Y(\xi_1, \xi_2) = \phi_n(\xi_1)Y_n + \frac{h}{2}\xi_2 \text{cos}(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-29)$$

os quais são utilizados na obtenção dos tensores gradiente de deformação e das medidas de deformação.

Por fim, é possível observar, a partir das Equações (5-22) e (5-25), que na cinemática de Reissner, o giro de uma seção transversal é aproximado de forma independente, assim como para os demais parâmetros nodais. Dessa forma, as seções transversais não permanecem necessariamente perpendiculares ao eixo centroidal. Essa consideração diferencia a cinemática de Reissner das cinemáticas de Bernoulli-Euler e de Timoshenko. Visto que, na cinemática de

Bernoulli-Euler, o giro de uma seção transversal não é considerado de forma independente, sendo obtido a partir da tangente à curva que descreve a linha centroidal. Nesse caso é mantida a perpendicularidade entre as seções transversais e o eixo centroidal. Já na cinemática de Timoshenko, o giro de uma seção transversal não é considerado totalmente independente, sendo determinado a partir da adição de uma correção ao giro obtido a partir da tangente à curva que descreve a linha centroidal. Nesse caso, assim como na cinemática de Reissner, as seções transversais não permanecem necessariamente perpendiculares ao eixo centroidal. Além disso, é importante destacar que as três cinemáticas consideram que as seções transversais permanecem planas.

5.2 Tensor gradiente de deformação

A partir do mapeamento da geometria apresentado no item 5.1 é possível descrever a medida de deformação para o elemento finito considerado. Para tanto, é necessário obter o tensor gradiente de deformação, o qual descreve as relações entre as transformações das coordenadas dos pontos de um domínio quando este passa da configuração indeformada para a configuração deformada.

Dessa forma, particularizando-se para o caso de um elemento de pórtico plano com cinemática de Reissner, com base no que é apresentado no item 3.2, os tensores gradiente de deformação podem ser expressos, respectivamente, para as transformações da configuração auxiliar adimensional para a configuração indeformada e da configuração auxiliar adimensional para a configuração deformada, por:

$${}^0F_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0F_{11} & {}^0F_{12} \\ {}^0F_{21} & {}^0F_{22} \end{bmatrix} \quad (5-30)$$

$${}^1F_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial Y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1F_{11} & {}^1F_{12} \\ {}^1F_{21} & {}^1F_{22} \end{bmatrix} \quad (5-31)$$

em que, os sobrescritos 0 e 1 identificam, respectivamente, as transformações da configuração auxiliar para a configuração indeformada e da configuração auxiliar para a configuração deformada.

Finalmente, utilizando-se os tensores 0F e 1F , dados pelas Equações (5-30) e (5-31), o tensor gradiente de deformação que descreve a transformação da configuração indeformada para a configuração deformada pode ser expresso por:

$$F = {}^1F ({}^0F)^{-1} \quad (5-32)$$

A partir das Equações (5-26) a (5-29) e avaliando-se as derivadas, os componentes dos tensores podem ser expressos, em termos das funções de forma e dos parâmetros nodais, por:

$${}^0F_{11} = \frac{d\phi_n(\xi_1)}{d\xi_1} x_n - \frac{h}{2} \xi_2 \frac{d\phi_n(\xi_1)}{d\xi_1} \theta_n \cos(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-33)$$

$${}^0F_{12} = -\frac{h}{2} \text{sen}(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-34)$$

$${}^0F_{21} = \frac{d\phi_n(\xi_1)}{d\xi_1} y_n - \frac{h}{2} \xi_2 \frac{d\phi_n(\xi_1)}{d\xi_1} \theta_n \text{sen}(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-35)$$

$${}^0F_{22} = \frac{h}{2} \cos(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-36)$$

$${}^1F_{11} = \frac{d\phi_n(\xi_1)}{d\xi_1} X_n - \frac{h}{2} \xi_2 \frac{d\phi_n(\xi_1)}{d\xi_1} \theta_n \cos(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-37)$$

$${}^1F_{12} = -\frac{h}{2} \text{sen}(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-38)$$

$${}^1F_{21} = \frac{d\phi_n(\xi_1)}{d\xi_1} Y_n - \frac{h}{2} \xi_2 \frac{d\phi_n(\xi_1)}{d\xi_1} \theta_n \text{sen}(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-39)$$

$${}^1F_{22} = \frac{h}{2} \cos(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-40)$$

em que os subscritos n assumem valores de 1 a 4 (número de nós do elemento finito considerado neste estudo) e respeitam a propriedade de somatório da notação indicial.

5.3 Medida de deformação

A partir do mapeamento da geometria apresentado no item 5.1 e do tensor gradiente de deformação apresentado no item 5.2 é possível descrever a medida de deformação, conforme

apresentado no item 3.3, de forma particularizada para o elemento finito de pórtico plano com cinemática de Reissner. Para tanto, pode-se utilizar a configuração auxiliar parametrizada para acompanhar as alterações geométricas em direções de interesse e entre direções de interesse quando ocorre a transformação da configuração indeformada para a configuração deformada, conforme apresentado na Figura 5-2.

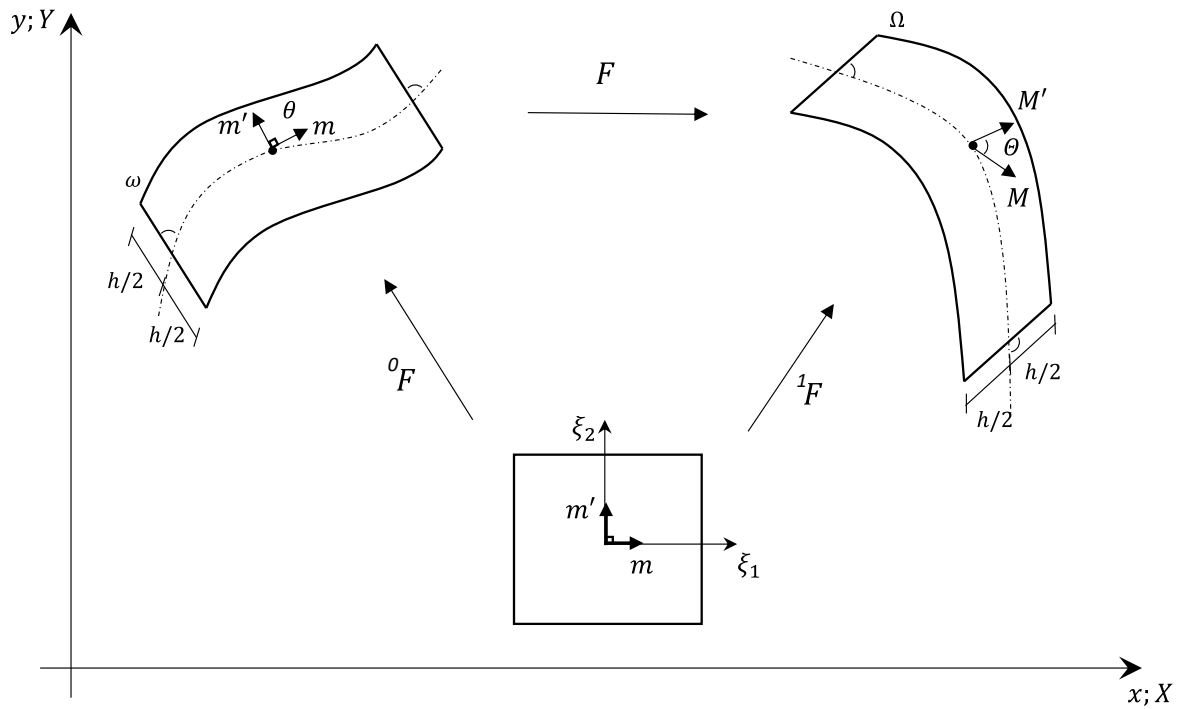


Figura 5-2: Direções de deformação na transformação da configuração indeformada para a configuração deformada com auxílio do espaço adimensional

Conforme a Figura 5-2, as direções normal (ξ_1) e tangencial (ξ_2) à seção transversal na configuração auxiliar podem ser representadas, respectivamente, por $m = [1 \ 0]$ e $m' = [0 \ 1]$. Assim, a partir da Equação (3-23), os estiramentos na direção normal (longitudinal) ${}^0\lambda_{11}$ e ${}^1\lambda_{11}$, respectivamente, para a transformação da configuração auxiliar para a configuração indeformada (sobrescrito 0) e para a transformação da configuração auxiliar para a configuração deformada (sobrescrito 1), podem ser expressos por:

$${}^0\lambda_{11} = \left| {}^0F \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{({}^0F_{11})^2 + ({}^0F_{21})^2} \quad (5-41)$$

$${}^1\lambda_{11} = \left| {}^1F \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{({}^1F_{11})^2 + ({}^1F_{21})^2} \quad (5-42)$$

Dessa forma, os ângulos entre as direções m e m' e M e M' , respectivamente, na configuração indeformada e na configuração deformada, a partir da Equação (3-33), podem ser expressos por:

$$\theta = \arccos\left(\frac{[1 \ 0][{}^0F^T \ {}^0F] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{{}^0\lambda_{11} \ {}^0\lambda_{22}}\right) = \arccos\left(\frac{{}^0F_{11} \ {}^0F_{12} + {}^0F_{21} \ {}^0F_{22}}{\sqrt{({}^0F_{11})^2 + ({}^0F_{21})^2}}\right) \quad (5-43)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{[1 \ 0][{}^1F^T \ {}^1F] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{{}^1\lambda_{11} \ {}^1\lambda_{22}}\right) = \arccos\left(\frac{{}^1F_{11} \ {}^1F_{12} + {}^1F_{21} \ {}^1F_{22}}{\sqrt{({}^1F_{11})^2 + ({}^1F_{21})^2}}\right) \quad (5-44)$$

em que:

$${}^0\lambda_{22} = 1 \quad (5-45)$$

$${}^1\lambda_{22} = 1 \quad (5-46)$$

ou seja, as expressões são válidas considerando-se que a direção de ξ_2 em relação a configuração auxiliar adimensional é indeformável, não havendo variações nas dimensões do plano da seção transversal. Essa consideração é consistente com a adoção de elementos finitos unidimensionais.

Considerando-se, ainda, os elementos inicialmente retilíneos na configuração indeformada, ou seja, os ângulos θ entre as seções transversais e o eixo centroidal são iguais a $\pi/2$, a distorção angular pode ser expressa por:

$$\gamma_{12} = \theta - \Theta = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{{}^1F_{11} \ {}^1F_{12} + {}^1F_{21} \ {}^1F_{22}}{\sqrt{({}^1F_{11})^2 + ({}^1F_{21})^2}}\right) \quad (5-47)$$

Finalmente, as deformações normais e por cisalhamento podem ser expressas por:

$$\varepsilon_{11} = \lambda_{11} - 1 = \frac{{}^1\lambda_{11}}{{}^0\lambda_{11}} - 1 = \frac{\sqrt{({}^1F_{11})^2 + ({}^1F_{21})^2}}{\sqrt{({}^0F_{11})^2 + ({}^0F_{21})^2}} - 1 \quad (5-48)$$

$$\varepsilon_{22} = \lambda_{22} - 1 = \frac{{}^1\lambda_{22}}{{}^0\lambda_{22}} - 1 = 0 \quad (5-49)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{{}^1F_{11} {}^1F_{12} + {}^1F_{21} {}^1F_{22}}{\sqrt{({}^1F_{11})^2 + ({}^1F_{21})^2}} \right) \right] \quad (5-50)$$

sendo os termos das Equações (5-48) e (5-50) obtidos pelas Equações (5-33) a (5-40), as quais são expressas em termos das funções de forma e dos parâmetros nodais.

5.4 Energia de deformação

Como apresentado no item 3.4 a energia de deformação total de um sistema estrutural pode ser expressa pela Equação (3-41), na qual, adotando-se uma relação tensão-deformação apropriada (relação constitutiva ou reológica) para o tipo de elemento finito adotado e para o material constituinte, é possível descrever a resposta mecânica do sistema estrutural.

Dessa forma, a partir da Equação (3-41) e adotando-se as relações reológicas desenvolvidas no capítulo 4, é possível particularizar o Método dos Elementos Finitos Posicional para descrição do comportamento viscoelástico característico de cada modelo. Para tanto, deve-se determinar a primeira e a segunda derivada da energia de deformação total, como descrito no item 3.5, a fim de possibilitar a aplicação do Princípio da Mínima Energia Potencial Total e do método iterativo de Newton-Raphson.

No presente estudo, o comportamento mecânico de interesse é o viscoelástico, no qual, as relações tensão-deformação podem ser obtidas por adequadas combinações entre as parcelas elástica e viscosa. Assim como é apresentado no item 3.4, essas parcelas elástica e viscosa podem ser expressas de uma forma geral, respectivamente, por:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5-51)$$

$$\sigma_{ij}^v = D_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (5-52)$$

Considerando-se materiais isotrópicos e com desacoplamento entre os efeitos dos esforços normais e os efeitos dos esforços cisalhantes, assim como é desenvolvido no item 4.1, as respectivas parcelas elástica e viscosa podem ser reescritas como:

$$\sigma_{ij}^e = E \bar{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5-53)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta \bar{C}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (5-54)$$

em que, na notação de Voigt, tem-se:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} & \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\bar{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{\mu} \end{bmatrix} \quad (5-55)$$

sendo $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$ os parâmetros de Lamé modificados e expressos por:

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (5-56)$$

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2(1 + \nu)} \quad (5-57)$$

No presente estudo, o elemento finito utilizado é o de pórtico plano com cinemática de Reissner, sendo um elemento unidimensional, mas que considera os efeitos do cisalhamento. Dessa forma, assim como desenvolvido no item 3.4, as relações tensão-deformação, respectivamente para as parcelas elástica e viscosa, podem ser expressas matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^e \\ \sigma_{12}^e \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\bar{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (5-58)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^v \\ \sigma_{12}^v \end{bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\bar{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (5-59)$$

A partir das parcelas elástica e viscosa, descritas pelas Equações (5-58) e (5-59), a relação tensão-deformação adequada para o comportamento mecânico de interesse pode ser obtida. Em seguida, substituindo-se essa relação tensão-deformação na Equação (3-41), é possível obter a energia de deformação, a qual é utilizada no Princípio da Mínima Energia Potencial Total, sendo as medidas de deformação obtidas conforme apresentado no item 5.3. Para o caso elástico, por exemplo, em que a relação tensão-deformação é dada apenas pela parcela elástica, expressa pela Equação (5-58), a energia de deformação pode ser expressa por:

$$U = \int_V \int_{\varepsilon} (E\varepsilon_{11} + 2E\bar{\mu}\varepsilon_{12}) d\varepsilon dV \quad (5-60)$$

De forma análoga, para o comportamento viscoelástico, a energia de deformação pode ser obtida considerando-se as relações tensão-deformação deduzidas para cada modelo reológico apresentado no capítulo 4. Dessa forma, nos itens 5.4.1, 5.4.2 e 5.4.3 são expostas a relação tensão-deformação e a energia de deformação para cada um dos três modelos reológicos adotados neste estudo, particularizando-se para o elemento de pórtico plano com cinemática de Reissner.

5.4.1 Energia de deformação para o modelo de Kelvin-Voigt

A relação reológica para o modelo de Kelvin-Voigt pode ser expressa de forma geral conforme a Equação (4-18). Particularizando-se para o elemento finito de pórtico plano com cinemática de Reissner, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\bar{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\bar{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (5-61)$$

Dessa forma, a energia de deformação pode ser expressa por:

$$U = \int_V \left[\int_{\varepsilon} (E\varepsilon_{11} + \eta\dot{\varepsilon}_{11}) d\varepsilon + \int_{\varepsilon} (2E\bar{\mu}\varepsilon_{12} + 2\eta\bar{\mu}\dot{\varepsilon}_{12}) d\varepsilon \right] dV \quad (5-62)$$

Realizando-se uma troca de variáveis com base na regra da cadeia, dada por:

$$d\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{dX_q} dX_q = \varepsilon_{,q} dX_q \quad (5-63)$$

a energia de deformação pode ser reescrita como:

$$U = \int_V \left[\int_X (E\varepsilon_{11} + \eta\dot{\varepsilon}_{11})\varepsilon_{11,q} dX + \int_X (2E\bar{\mu}\varepsilon_{12} + 2\eta\bar{\mu}\dot{\varepsilon}_{12})\varepsilon_{12,q} dX \right] dV \quad (5-64)$$

Dessa forma, a primeira e a segunda derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais podem ser expressas por:

$$U_{,q} = \int_V [(E\varepsilon_{11} + \eta\dot{\varepsilon}_{11})\varepsilon_{11,q} + (2E\bar{\mu}\varepsilon_{12} + 2\eta\bar{\mu}\dot{\varepsilon}_{12})\varepsilon_{12,q}] dV \quad (5-65)$$

$$U_{,qr} = \int_V \left[(E\varepsilon_{11,r} + \eta\dot{\varepsilon}_{11,r})\varepsilon_{11,q} + (E\varepsilon_{11} + \eta\dot{\varepsilon}_{11})\varepsilon_{11,qr} + \right. \\ \left. + (2E\bar{\mu}\varepsilon_{12,r} + 2\eta\bar{\mu}\dot{\varepsilon}_{12,r})\varepsilon_{12,q} + (2E\bar{\mu}\varepsilon_{12} + 2\eta\bar{\mu}\dot{\varepsilon}_{12})\varepsilon_{12,qr} \right] dV \quad (5-66)$$

Considerando-se a primeira e a segunda derivadas da energia de deformação, descritas pelas Equações (5-65) e (5-66), é possível realizar os procedimentos do Método de Newton-Raphson e aplicar o Princípio da Mínima Energia Potencial Total para se obter as posições de equilíbrio do sistema estrutural, assim como apresentado no item 3.5, de forma particularizada para elementos de pórtico plano com cinemática de Reissner e comportamento viscoelástico característico do modelo de Kelvin-Voigt.

5.4.2 Energia de deformação para o modelo de Boltzmann

A relação reológica para o modelo de Boltzmann pode ser expressa de forma geral conforme a Equação (4-43). Particularizando-se para o elemento finito de pórtico plano com cinemática de Reissner, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\bar{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\bar{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{bmatrix} \quad (5-67)$$

Dessa forma, a energia de deformação pode ser expressa por:

$$U = \int_V \left[\int_{\varepsilon} \left(\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_{11} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{11} \right) d\varepsilon + \right. \\ \left. + \int_{\varepsilon} \left(2 \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \bar{\mu} \varepsilon_{12} + 2 \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \bar{\mu} \dot{\varepsilon}_{12} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{12} \right) d\varepsilon \right] dV \quad (5-68)$$

Realizando-se a troca de variáveis apresentada na Equação (5-63), a energia de deformação pode ser reescrita como:

$$U = \int_V \left[\int_X \left(\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_{11} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{11} \right) \varepsilon_{11,q} dX + \right. \\ \left. + \int_X \left(2 \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \bar{\mu} \varepsilon_{12} + 2 \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \bar{\mu} \dot{\varepsilon}_{12} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{12} \right) \varepsilon_{12,q} dX \right] dV \quad (5-69)$$

Dessa forma, a primeira e a segunda derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais podem ser expressas por:

$$U_{,q} = \int_V \left[\left(\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_{11} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{11} \right) \varepsilon_{11,q} + \right. \\ \left. + \left(2 \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \bar{\mu} \varepsilon_{12} + 2 \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \bar{\mu} \dot{\varepsilon}_{12} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{12} \right) \varepsilon_{12,q} \right] dV \quad (5-70)$$

$$U_{,qr} = \int_V \left[\left(\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_{11,r} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}_{11,r} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{11,r} \right) \varepsilon_{11,q} + \right. \\ + \left(\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_{11} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{11} \right) \varepsilon_{11,qr} + \\ + \left(2 \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \bar{\mu} \varepsilon_{12,r} + 2 \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \bar{\mu} \dot{\varepsilon}_{12,r} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{12,r} \right) \varepsilon_{12,q} + \\ \left. + \left(2 \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \bar{\mu} \varepsilon_{12} + 2 \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \bar{\mu} \dot{\varepsilon}_{12} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{12} \right) \varepsilon_{12,qr} \right] dV \quad (5-71)$$

Considerando-se a primeira e a segunda derivadas da energia de deformação, descritas pelas Equações (5-70) e (5-71), é possível realizar os procedimentos do Método de Newton-Raphson e aplicar o Princípio da Mínima Energia Potencial Total para se obter as posições de equilíbrio do sistema estrutural, assim como apresentado no item 3.5, de forma particularizada para elementos de pórtico plano com cinemática de Reissner e comportamento viscoelástico característico do modelo de Boltzmann.

5.4.3 Energia de deformação para o modelo de Zener

A relação reológica para o modelo de Zener pode ser expressa de forma geral conforme a Equação (4-77). Particularizando-se para o elemento finito de pórtico plano com cinemática de Reissner, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = E_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\bar{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\bar{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} - \frac{\eta}{E_1} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{bmatrix} \quad (5-72)$$

Dessa forma, a energia de deformação pode ser expressa por:

$$U = \int_V \left[\int_{\varepsilon} \left(E_2 \varepsilon_{11} + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{11} \right) d\varepsilon + \right. \\ \left. + \int_{\varepsilon} \left(2E_2 \bar{\mu} \varepsilon_{12} + 2 \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \bar{\mu} \dot{\varepsilon}_{12} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{12} \right) d\varepsilon \right] dV \quad (5-73)$$

Realizando-se a troca de variáveis apresentada na Equação (5-63), a energia de deformação pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
U = \int_V \left[\int_X \left(E_2 \varepsilon_{11} + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{11} \right) \varepsilon_{11,q} dX_q + \right. \\
\left. + \int_X \left(2E_2 \bar{\mu} \varepsilon_{12} + 2 \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \bar{\mu} \dot{\varepsilon}_{12} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{12} \right) \varepsilon_{12,q} dX_q \right] dV
\end{aligned} \tag{5-74}$$

Dessa forma, a primeira e a segunda derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais podem ser expressas por:

$$\begin{aligned}
U_{,q} = \int_V \left[\left(E_2 \varepsilon_{11} + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{11} \right) \varepsilon_{11,q} + \right. \\
\left. + \left(2E_2 \bar{\mu} \varepsilon_{12} + 2 \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \bar{\mu} \dot{\varepsilon}_{12} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{12} \right) \varepsilon_{12,q} \right] dV
\end{aligned} \tag{5-75}$$

$$\begin{aligned}
U_{,qr} = \int_V \left[\left(E_2 \varepsilon_{11,r} + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \dot{\varepsilon}_{11,r} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{11,r} \right) \varepsilon_{11,q} + \right. \\
+ \left(E_2 \varepsilon_{11} + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{11} \right) \varepsilon_{11,qr} + \\
+ \left(2E_2 \bar{\mu} \varepsilon_{12,r} + 2 \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \bar{\mu} \dot{\varepsilon}_{12,r} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{12,r} \right) \varepsilon_{12,q} + \\
\left. + \left(2E_2 \bar{\mu} \varepsilon_{12} + 2 \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \bar{\mu} \dot{\varepsilon}_{12} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{12} \right) \varepsilon_{12,qr} \right] dV
\end{aligned} \tag{5-76}$$

Considerando-se a primeira e a segunda derivadas da energia de deformação, descritas pelas Equações (5-75) e (5-76), é possível realizar os procedimentos do Método de Newton-Raphson e aplicar o Princípio da Mínima Energia Potencial Total para se obter as posições de equilíbrio do sistema estrutural, assim como apresentado no item 3.5, de forma particularizada para elementos de pórtico plano com cinemática de Reissner e comportamento viscoelástico característico do modelo de Zener.

A partir das Equações (5-62), (5-68) e (5-73), é possível observar que as energias de deformação para os modelos adotados são expressas por duas parcelas desacopladas, uma devido aos efeitos do esforço normal e outra devido aos efeitos do esforço cisalhante. Dessa forma, tem-se uma interpretação esquemática para a adoção de modelos desacoplados para cada um dos efeitos, assim como apresentado na Figura 5-3.

Na Figura 5-3, são considerados dois modelos de Zener, um para os efeitos do esforço normal e outro para os efeitos do esforço cisalhante. De forma análoga pode se obter a interpretação esquemática para os demais modelos apresentados, sendo possível, inclusive,

considerar a combinação de modelos distintos, um para os efeitos do esforço normal e outro para os efeitos do esforço cisalhante.

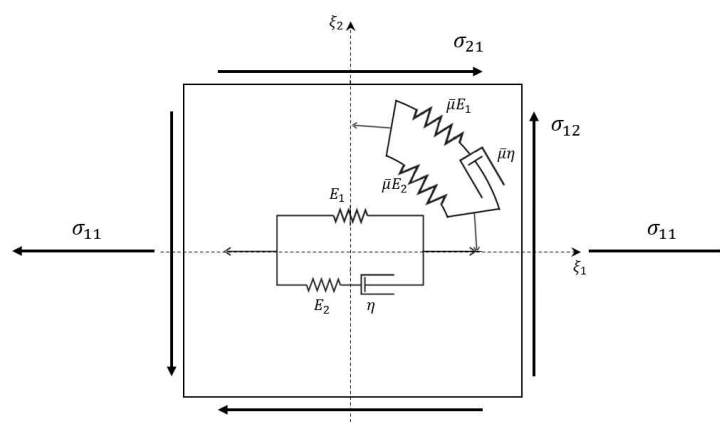


Figura 5-3: Interpretação esquemática dos modelos desacoplados

5.5 Procedimentos numéricos adicionais

A partir dos desenvolvimentos apresentados nos itens 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4, referentes à particularização da formulação Posicional para elementos de pórtico plano com cinemática de Reissner e comportamento viscoelástico, e a partir dos procedimentos apresentados no item 3.5, referentes a aplicação do Princípio da Mínima Energia Potencial Total e do Método de Newton-Raphson, é possível analisar sistemas estruturais específicos utilizando-se o Método dos Elementos Finitos Posicional. Para tanto, é necessário introduzir alguns procedimentos numéricos adicionais devido às características do comportamento viscoelástico e para possibilitar a aplicação de uma metodologia de calibração em função de ensaios de fluência à tração. Tal metodologia de calibração é apresentada no capítulo 7, referente às análises, exemplos e aplicações.

5.5.1 Procedimentos para avaliação das taxas de deformação e tensão

Devido ao comportamento viscoelástico característico dos modelos apresentados, as relações tensão-deformação, expressas pelas Equações (5-61), (5-67) e (5-72), apresentam dependência do tempo, assim como as energias de deformação e suas derivadas, deduzidas a partir destas. Essa dependência do tempo é representada pelas taxas de deformação e pelas taxas de tensão. Dessa forma, um procedimento adequado é necessário para avaliá-las ao longo do tempo.

No presente estudo, essa avaliação é realizada por meio do Método das Diferenças Finitas Regressiva, ou seja, as taxas são avaliadas pela diferença entre o valor da grandeza no instante atual e o valor da grandeza no instante anterior dividido pelo próprio passo de tempo. Dessa forma, a taxa de deformação e a taxa de tensão podem ser expressas, respectivamente, por:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^s - \varepsilon^{s-1}}{\Delta t} \quad (5-77)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\sigma^s - \sigma^{s-1}}{\Delta t} \quad (5-78)$$

em que os sobrescritos s e $s - 1$ representam, respectivamente, os instantes atual e anterior, enquanto Δt representa o passo de tempo. Sendo o passo de tempo uma variável de entrada do código implementado computacionalmente e escolhida de forma adequada ao problema analisado e à unidade de tempo considerada.

Dessa forma, por exemplo, a relação tensão-deformação do modelo de Kelvin-Voigt pode ser reescrita como:

$$\sigma_{ij}^s = E\bar{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}^s + \eta\bar{C}_{ijkl}\frac{\varepsilon_{kl}^s - \varepsilon_{kl}^{s-1}}{\Delta t} \quad (5-79)$$

Enquanto, a respectiva energia de deformação, considerando-se elementos de pórtico com cinemática de Reissner, pode ser reescrita como:

$$U^s = \int_V \left[\int_{\varepsilon} \left(E\varepsilon_{11}^s + \eta\frac{\varepsilon_{11}^s - \varepsilon_{11}^{s-1}}{\Delta t} \right) d\varepsilon + \int_{\varepsilon} \left(2E\bar{\mu}\varepsilon_{12}^s + 2\eta\bar{\mu}\frac{\varepsilon_{12}^s - \varepsilon_{12}^{s-1}}{\Delta t} \right) d\varepsilon \right] dV \quad (5-80)$$

De forma análoga podem ser obtidas as discretizações temporais para os demais modelos reológicos apresentados.

Em relação a abordagem adotada para avaliação das taxas de deformação e de tensão, é importante observar que o presente estudo se diferencia dos trabalhos apresentados em Becho (2016) e Rabelo *et al.* (2018). Em tais trabalhos, essas avaliações são realizadas após a aplicação da regra da cadeia, em que as taxas de deformação e tensão são expressas, respectivamente, por:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dX_q} \frac{dX_q}{dt} = \varepsilon_{,q} \dot{X}_q \quad (5-81)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{dX_q} \frac{dX_q}{dt} = \sigma_{,q} \dot{X}_q \quad (5-82)$$

em que \dot{X} representa a taxa de posição, sendo está avaliada por diferenças finitas, expressa por:

$$\dot{X}_q = \frac{X_q^s - X_q^{s-1}}{\Delta t} \quad (5-83)$$

A partir da Equação (5-83), é possível observar que na avaliação da taxa de posição são computados os efeitos do movimento de corpo rígido. Dessa forma, tal abordagem pode ser utilizada para analisar o comportamento mecânico de elementos finitos de treliça, contanto que se avalie a taxa de posição relativa axial entre os nós do elemento, como é apresentado em Rabelo *et al.* (2018). Entretanto, para o caso de elementos de pórtico, como no presente estudo, a segregação do movimento de corpo rígido não é simples, sendo adequado adotar as Equações (5-77) e (5-78), referentes às taxas de deformação e tensão.

5.5.2 Procedimentos para consideração de seções transversais laminadas

Em geral, assim como é destacado em diferentes trabalhos encontrado na literatura (Liu *et al.* (2008), Sá *et al.* (2011a) e Kühn *et al.* (2016)), o comportamento viscoelástico é não linear em relação ao nível de tensão. Dessa forma, considerando-se uma malha de integração bidimensional, em função das coordenadas adimensionais ξ_1 e ξ_2 , como apresentado na Figura 5-4, é possível avaliar os parâmetros em cada ponto e, conseqüentemente, considerar a contribuição do comportamento viscoelástico de forma distinta ao longo da altura da seção transversal e ao longo do comprimento do elemento em função do nível de tensão atuante nos respectivos pontos.

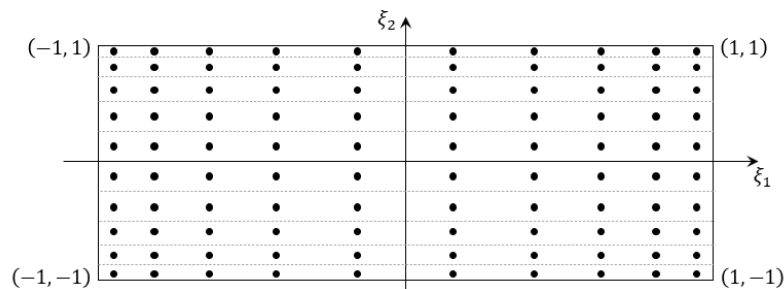


Figura 5-4: Malha de integração bidimensional

No presente estudo, tanto ao longo do comprimento quanto ao longo da altura, as posições ξ_1 e ξ_2 , na configuração adimensional, são determinadas por pontos de Gauss-Legendre. Além disso, como padrão, para analisar os exemplos e aplicações, são adotados dez pontos de Gauss ao longo da altura e dez pontos de Gauss ao longo do comprimento. Nos casos em que este padrão não é respeitado, o número de pontos de Gauss é claramente informado.

Nessa abordagem as seções transversais são idealizadas como constituídas por lâminas. Dessa forma, além de possibilitar a avaliação da contribuição de cada ponto para o comportamento viscoelástico, é possível considerar elementos constituídos por lâminas de materiais e propriedades distintas, como em materiais compostos, e elementos com geometria de seção transversal não retangular, como em perfis estruturais. Cada uma dessas lâminas idealizadas, com centroide localizado em um ponto de Gauss ξ_2 ao longo da altura, fica submetida exclusivamente à tração ou à compressão, dependendo da localização em relação à linha centroidal. Adotando-se essa abordagem, o comportamento de fluência à flexão do elemento estrutural pode ser obtido pela associação da contribuição do comportamento de fluência à tração ou à compressão de cada barra idealizada.

A fim de viabilizar a idealização de seções laminadas, o código implementado computacionalmente deve ser capaz de identificar a posição da linha centroidal (linha neutra) em função da geometria da seção transversal e das propriedades físicas das lâminas. Para tal, no presente estudo, é considerada uma técnica simples de homogeneização da seção transversal, a mesma encontrada em livros de resistência dos materiais, como em Greco e Maciel (2016). Além disso, é introduzida uma variável auxiliar para localizar o centroide da seção transversal em relação ao ponto médio da seção.

Inicialmente, a fim de implementar tais procedimentos, para cada seção transversal identificada pelo ponto de Gauss ξ_1 , as propriedades dos materiais (módulos de elasticidade e de viscosidade) são avaliadas ao longo da altura, ou seja, em cada ponto de Gauss ξ_2 , em função do nível de tensão. Essa avaliação é feita a cada iteração do processo de Newton-Raphson. Dessa forma, essas propriedades em cada ponto de Gauss podem ser expressas por:

$$E(\xi_1, \xi_2) = E(\sigma(\xi_1, \xi_2)) \quad (5-84)$$

$$\eta(\xi_1, \xi_2) = \eta(\sigma(\xi_1, \xi_2)) \quad (5-85)$$

em que as funções para avaliação das propriedades físicas em termos do nível de tensão são definidas pela metodologia de calibração apresentada no capítulo 7.

Em seguida, cada seção transversal constituída por lâminas com propriedades distintas é homogeneizada e, então, considerada como constituída por um único material, porém, com sua geometria modificada por fatores de transformação, denominada seção transformada. Esses fatores de transformação são expressos por:

$$F_T(\xi_1, \xi_2) = \frac{E_{eq}(\xi_1, \xi_2)}{E_{eq_referência}} \quad (5-86)$$

em que F_T representa o fator de transformação, E_{eq} representa o módulo de elasticidade equivalente avaliado em cada ponto de Gauss e $E_{eq_referência}$ representa o módulo de elasticidade equivalente da lâmina de referência. Como padrão, no presente estudo, a lâmina de referência é a lâmina inferior identificada pelo primeiro ponto de Gauss na altura. Além disso, é necessário destacar que o módulo de elasticidade equivalente é calculado de forma distinta para cada modelo, em função do tipo de associação entre as molas presentes no mesmo. Por exemplo, para o modelo de Boltzmann, em que as molas são associadas em série, o módulo de elasticidade equivalente em cada ponto de Gauss é expresso por:

$$E_{eq}(\xi_1, \xi_2) = \frac{E_1(\xi_1, \xi_2) E_2(\xi_1, \xi_2)}{E_1(\xi_1, \xi_2) + E_2(\xi_1, \xi_2)} \quad (5-87)$$

Os fatores de transformação são utilizados para modificar a geometria da seção transversal homogeneizada de forma a manter sua rigidez à flexão original. Dessa forma, a dimensão da largura de cada lâmina, localizada pelos pontos de Gauss ξ_1 e ξ_2 , é modificada conforme a seguinte expressão:

$$b(\xi_1, \xi_2) = F_T(\xi_1, \xi_2) b_0(\xi_1, \xi_2) \quad (5-88)$$

em que b representa a largura modificada da lâmina e b_0 representa sua largura original.

Para a geometria da seção transformada, no caso de seção não homogênea, ou para uma seção homogênea, porém, não simétrica, em que o centroide não está localizado no ponto médio da altura da seção, é necessário determinar a nova localização do centroide. Essa nova localização do centroide pode ser dada em termos da variável adimensional ξ_2 , a qual tem origem no ponto médio em relação à altura da seção transversal e seu eixo está contido ao longo

da altura da seção. Dessa forma, em relação ao ponto médio da seção transversal o centroide pode ser localizado pela seguinte expressão:

$$c(\xi_1) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{\xi_2}} \left[\left(\frac{h}{2} \xi_2(i) \right) \left(b(\xi_1, \xi_2(i)) h \frac{w_2(i)}{\sum_{i=1}^{n_{\xi_2}} w_2(i)} \right) \right]}{\sum_{i=1}^{n_{\xi_2}} \left[b(\xi_1, \xi_2(i)) h \frac{w_2(i)}{\sum_{i=1}^{n_{\xi_2}} w_2(i)} \right]} \quad (5-89)$$

em que $c(\xi_1)$ representa a localização do centroide em relação ao ponto médio da seção transversal localizada pelo ponto de Gauss ξ_1 , n_{ξ_2} representa o número total de pontos de Gauss ao longo da altura, $\xi_2(i)$ representa o conjunto de pontos de Gauss ao longo da altura e localiza cada lâmina, $w_2(i)$ representa o conjunto de pesos respectivos a cada ponto de Gauss, de acordo com a quadratura de Gauss-Legendre, b representa a largura de cada lâmina e h representa a altura da seção transversal. É importante observar que o produto entre a altura total (h) e a razão de determinado peso ($w_2(i)$) pela soma dos pesos ($\sum_{i=1}^{n_{\xi_2}} w_2(i)$) representa a espessura da lâmina localizada pelo ponto de Gauss $\xi_2(i)$, ou seja, representa a altura de influência de determinado ponto de Gauss.

Dessa forma, assim como apresentado na Figura 5-5, as localizações dos pontos de Gauss ao longo da altura de uma seção transversal, nas configurações indeformada e deformada, podem ser expressas em relação à localização do novo centroide por meio de uma variável auxiliar z dada por:

$$z(\xi_2) = \frac{h}{2} \xi_2 - c(\xi_1) \quad (5-90)$$

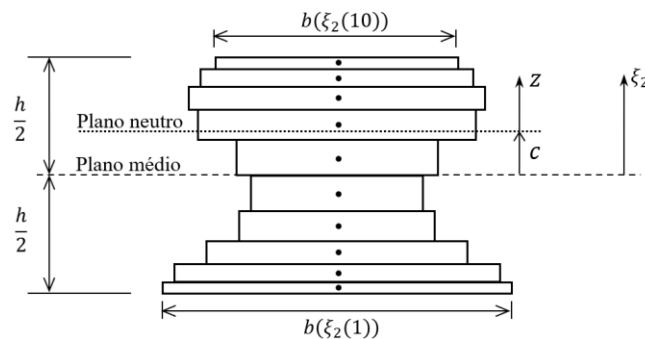


Figura 5-5: Seção transversal laminada

Portanto, os mapeamentos das coordenadas nas configurações deformada e indeformada, apresentados no item 5.1, podem ser reescritos, para a consideração de seções laminadas, como:

$$x(\xi_1, \xi_2) = \phi_n(\xi_1)x_n - \left(\frac{h}{2}\xi_2 - c(\xi_1)\right) \text{sen}(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-91)$$

$$y(\xi_1, \xi_2) = \phi_n(\xi_1)y_n + \left(\frac{h}{2}\xi_2 - c(\xi_1)\right) \text{cos}(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-92)$$

$$X(\xi_1, \xi_2) = \phi_n(\xi_1)X_n - \left(\frac{h}{2}\xi_2 - c(\xi_1)\right) \text{sen}(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-93)$$

$$Y(\xi_1, \xi_2) = \phi_n(\xi_1)Y_n + \left(\frac{h}{2}\xi_2 - c(\xi_1)\right) \text{cos}(\phi_n(\xi_1)\theta_n) \quad (5-94)$$

os quais são utilizados na obtenção dos tensores gradiente de deformação e das medidas de deformação.

Por fim, é importante observar que, a partir dessa metodologia, ao se realizar a integração numérica ao longo da altura, para cada ponto de Gauss tem-se uma respectiva largura de seção transversal a ser considerada em função da geometria transformada.

5.5.3 Procedimento para evitar divergência em função do passo de tempo adotado

No presente item, é apresentada uma proposta de solução para um problema de divergência no processo iterativo encontrado em análises de estruturas utilizando-se o código computacional implementado com base nos procedimentos apresentados neste estudo. Tal problema de divergência se refere ao afastamento das posições nodais em relação às posições de equilíbrio ao longo do processo iterativo, quando são adotados passos de tempo menores ou iguais ao tempo de retardo característico do modelo reológico utilizado. Acredita-se que possivelmente este problema seja encontrado em formulações não lineares que adotem abordagens semelhantes às apresentadas neste estudo.

Para explicitar o problema encontrado e a solução proposta, são apresentados alguns resultados da análise numérica de uma barra sob tração, apresentada na Figura 5-6. O comprimento L da barra analisada é igual a 1,0 m, a altura h da seção transversal é igual a 0,1 m e largura b é igual a 0,1 m. O modelo reológico utilizado para descrever o comportamento viscoelástico é o de Kelvin-Voigt com módulo de elasticidade E igual a 100 GPa e módulo de viscosidade η igual a 1000 GPa·s. A solicitação corresponde a uma força P de tração igual a

1000 MN aplicada na extremidade livre da barra, sendo a outra extremidade da barra considerada fixa. Para avaliar a evolução do processo iterativo no comportamento viscoelástico foram adotados quatro valores distintos de passo de tempo, 9 s, 10 s, 11 s e 12 s. Os resultados obtidos se baseiam na avaliação da posição de equilíbrio do nó localizado na extremidade livre da barra, considerando-se a origem do sistema de referência na extremidade fixa.

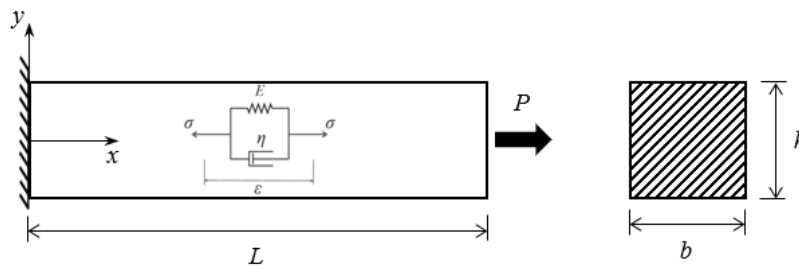


Figura 5-6: Barra tracionada

A barra é analisada pelo Método dos Elementos Finitos Posicional, o qual, de uma forma simplificada, se resume em resolver o sistema obtido pela aplicação do Princípio da Mínima Energia Potencial Total. Tal sistema pode ser expresso, assim como apresentado no item 3.5, por:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_q} = \frac{\partial U}{\partial X_q} + \frac{\partial P}{\partial X_q} = 0 \quad (5-95)$$

A resolução desse sistema é realizada, no presente estudo, pelo Método de Newton-Raphson que, assim como apresentado no item 3.5, pode ser expresso por:

$$g_q(X) \cong g_q(X) + g_{q,r}(X)\Delta X_r \cong 0 \quad (5-96)$$

no qual é necessário, para obtenção das componentes do vetor de correção das posições nodais ΔX_r em cada iteração, avaliar as componentes do vetor dos resíduos e as componentes da matriz hessiana.

Dessa forma, para ilustrar a influência do passo de tempo no processo iterativo, nas Figuras 5-7 a 5-10 são apresentadas a evolução do vetor dos resíduos $g_q(X)$ e a evolução do vetor de correção das posições nodais ΔX_r , considerando-se apenas as componentes referentes ao nó da extremidade livre. São apresentadas as vinte primeiras iterações do primeiro passo, respectivamente para os quatro valores de passo de tempo adotados. A evolução da matriz

Hessiana $g_{q,rr}(X)$ não é apresentada por esta se manter constante e igual a 10000 MN/m nesta análise.

A fim de analisar os resultados apresentados nas Figuras 5-7 a 5-10, é importante lembrar que, pela Equação (4-28) apresentada no item 4.2.1, o tempo de retardo para o modelo de Kelvin-Voigt pode ser expresso por:

$$t_\varepsilon = \frac{\eta}{E} = \frac{1000 \text{ GPa} \cdot \text{s}}{100 \text{ GPa}} = 10 \text{ s} \quad (5-97)$$

Portanto, a partir das Figuras 5-7 a 5-10 é possível observar que a convergência da evolução do processo iterativo apresenta uma dependência em relação ao valor do passo de tempo adotado e do tempo de retardo característico do modelo. Além disso, com base no tempo de retardo obtido na Equação (5-97), é possível observar que, adotando-se passos de tempo superiores ao tempo de retardo, o processo iterativo converge, apresentando redução gradativa da componente do vetor dos resíduos e do vetor de correção das posições nodais, como pode ser verificado nas Figuras 5-7 e 5-8. Adotando-se um passo de tempo igual ao tempo de retardo, o processo iterativo não converge, alternando entre os mesmos valores de componente do vetor dos resíduos e do vetor de correção das posições nodais. Nesse caso, a mesma correção obtida na primeira iteração é obtida na segunda iteração, porém com sinal trocado, ou seja, na segunda iteração retorna-se para a posição inicial. Esse processo se repete sucessivamente como pode ser verificado na Figura 5-9. Finalmente, adotando-se passos de tempo inferiores ao tempo de retardo, o processo iterativo diverge, apresentando aumento gradativo da componente do vetor dos resíduos e do vetor de correção das posições nodais, como pode ser verificado na Figura 5-10. Estes mesmos comportamentos foram observados para passos de tempo superiores e inferiores aos apresentados nesta análise e para os demais modelos reológicos considerados no presente estudo e seus respectivos tempos de retardo.

Essa relação entre o valor do passo de tempo considerado e a evolução do processo iterativo pode ser observada, também, através de gráficos de posição por tempo e gráficos de força por posição. Dessa forma, na Figura 5-11 são plotadas as posições da extremidade livre durante as quatro primeiras iterações do processo de busca pela posição de equilíbrio no primeiro passo de tempo, para os quatro valores de passo de tempo adotados. Já na Figura 5-12 as mesmas posições são plotadas em gráficos de força por posição.

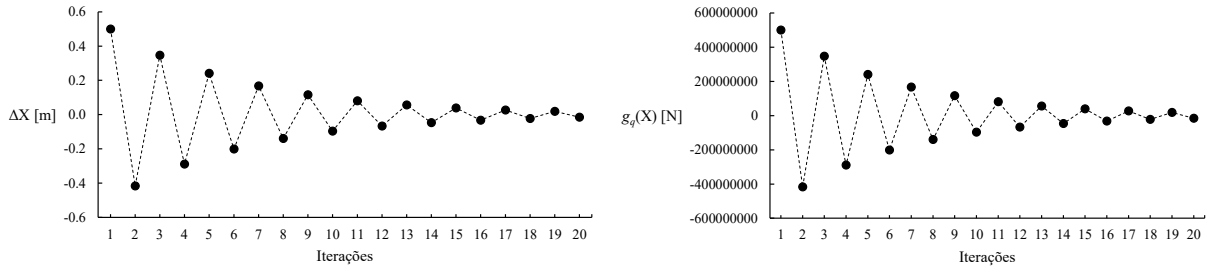


Figura 5-7: Evolução do vetor de correção das posições nodais e do vetor dos resíduos para $\Delta t = 12$ s

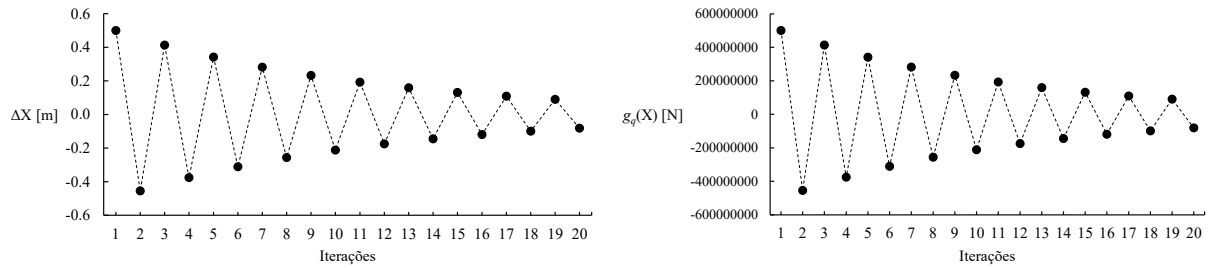


Figura 5-8: Evolução do vetor de correção das posições nodais e do vetor dos resíduos para $\Delta t = 11$ s

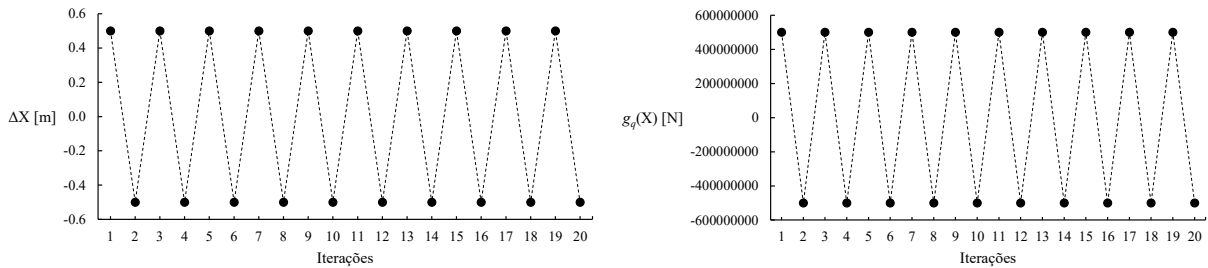


Figura 5-9: Evolução do vetor de correção das posições nodais e do vetor dos resíduos para $\Delta t = 10$ s

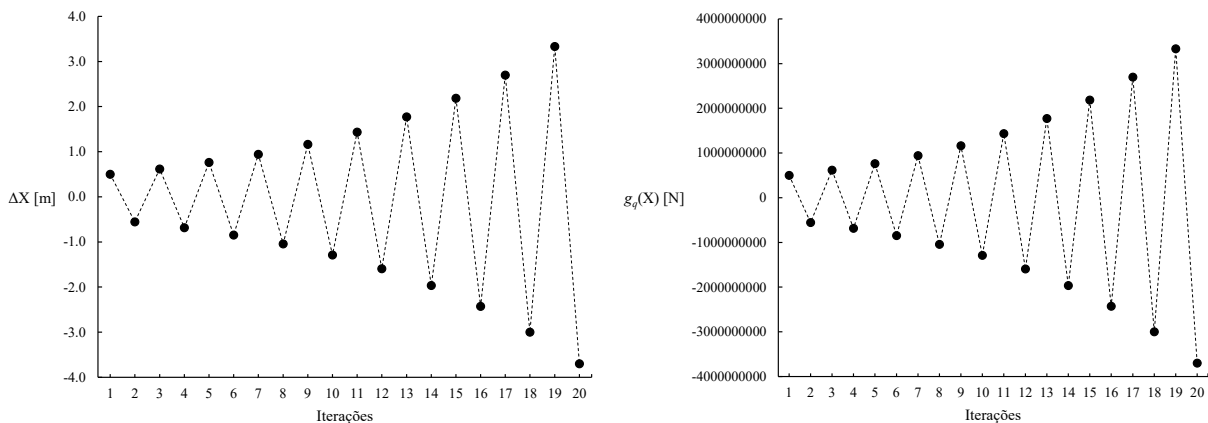


Figura 5-10: Evolução do vetor de correção das posições nodais e do vetor dos resíduos para $\Delta t = 9$ s

Adicionalmente, nos gráficos apresentados na Figura 5-11 são plotadas as posições de equilíbrio obtidas no final do processo iterativo do primeiro passo, respectivamente para cada valor de passo de tempo adotado. Tais posições de equilíbrio só são possíveis de se obter, para passos de tempo inferiores ao tempo de retardo, quando o problema de divergência é corrigido.

Além disso, são plotadas as respostas analíticas de posição ao longo do tempo, obtidas a partir da Equação (4-26), apresentada no item 4.2.1.

Pelas Figuras 5-11 e 5-12, é possível perceber que, adotando-se passos de tempo superiores ao tempo de retardo, as posições do nó da extremidade livre apresentam uma tendência de convergência ao longo do processo iterativo, se aproximando da posição de equilíbrio para o primeiro passo de tempo. Adotando-se um passo de tempo igual ao tempo de retardo, as posições permanecem oscilando entre os mesmos valores em torno da posição de equilíbrio. Finalmente, adotando-se passos de tempo inferiores ao tempo de retardo, as posições apresentam uma tendência de divergência ao longo do processo iterativo, se afastando da posição de equilíbrio. Além disso, é possível observar que, quanto menor o passo de tempo, mais próxima a posição de equilíbrio está da resposta analítica. Isso se deve ao fato de que, quanto menor o passo de tempo, mais refinada é a discretização temporal. Tal comportamento é observado de forma mais clara no Capítulo 7, referente às análises, exemplos e aplicações.

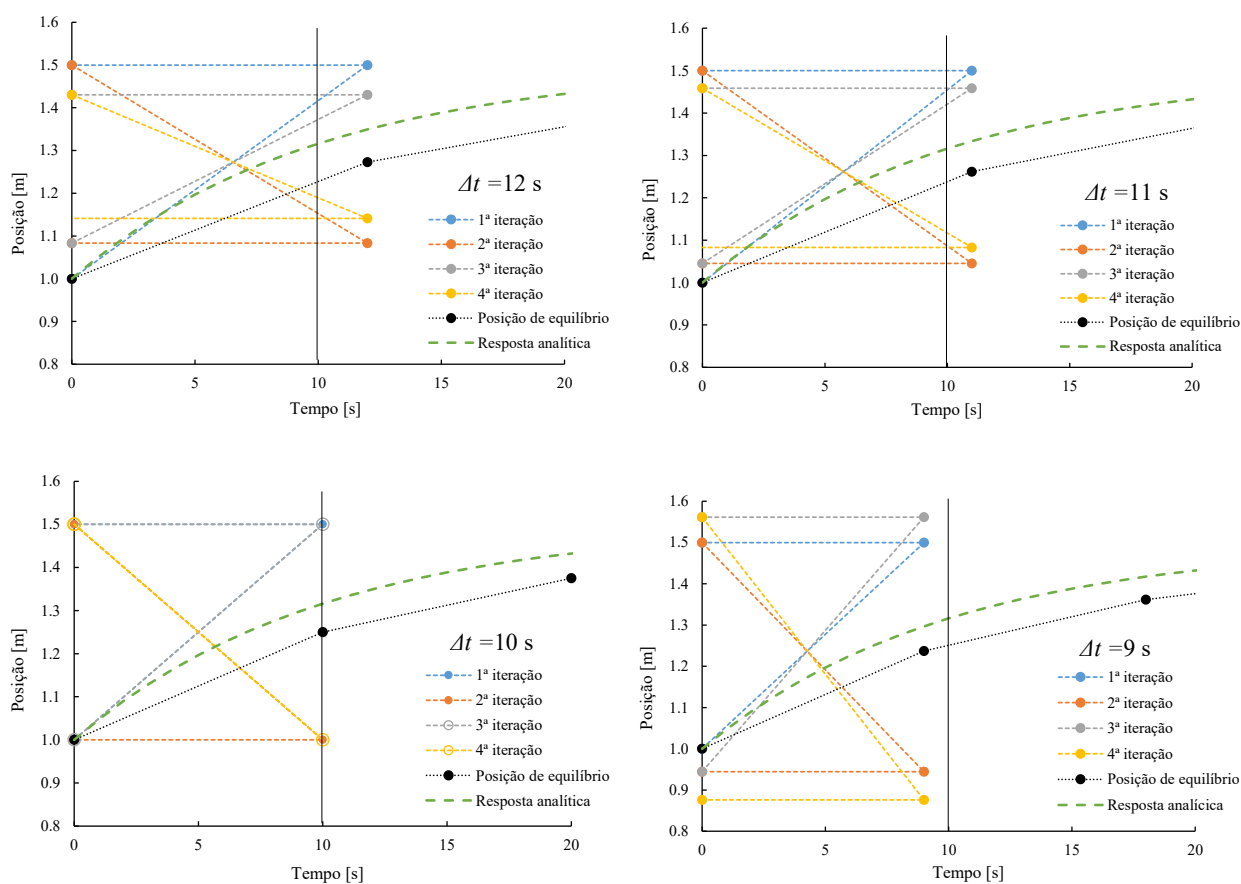


Figura 5-11: Processo iterativo no gráfico Posição x Tempo

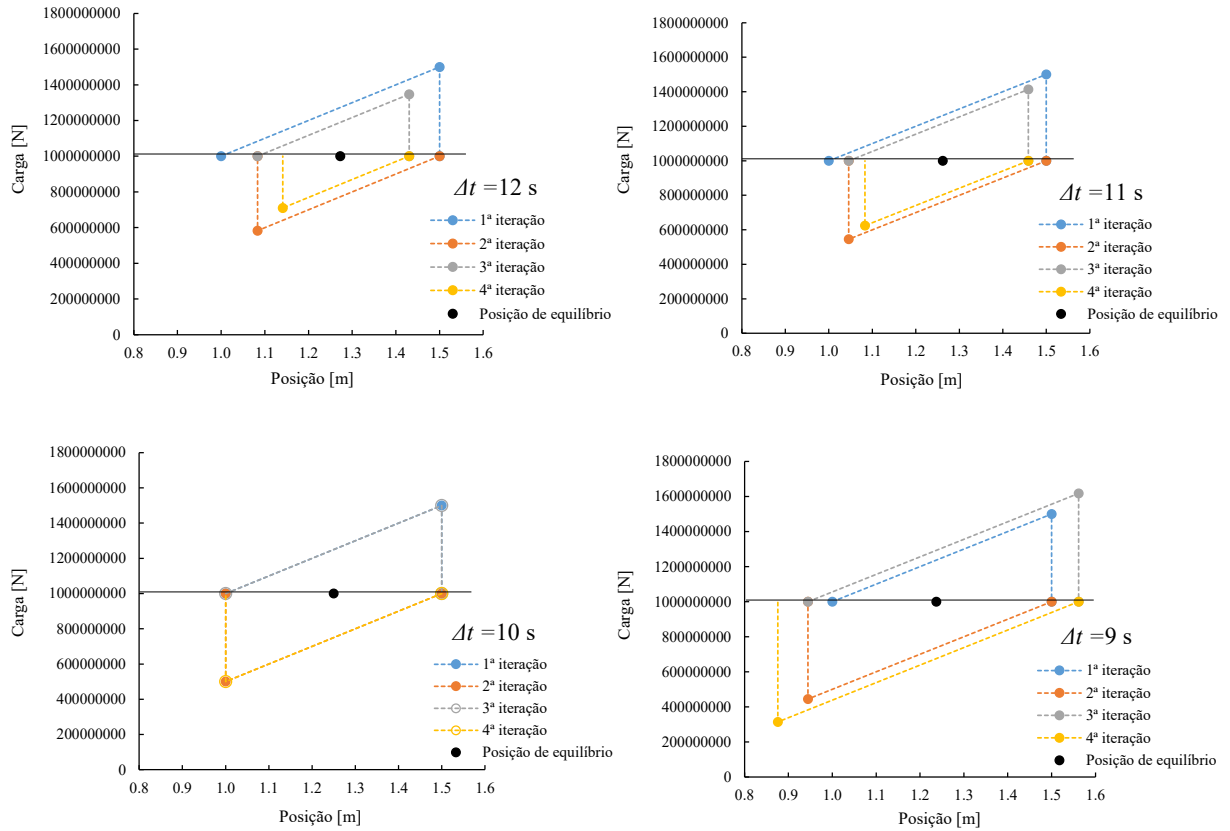


Figura 5-12: Processo iterativo no gráfico Força x Posição

Para elucidar como o problema de divergência pode ser corrigido, retorna-se à equação referente a resolução do sistema pelo método iterativo de Newton-Raphson, expressa por:

$$g_q(X) \cong g_q(X) + g_{q,r}(X)\Delta X_r \cong 0 \quad (5-98)$$

na qual deve-se avaliar o vetor dos resíduos e a matriz hessiana conforme as respectivas expressões:

$$g_q(X) = U_{,q} - F_q \quad (5-99)$$

$$g_{q,r}(X) = U_{,qr} \quad (5-100)$$

para tanto, como pode ser observado, é necessário obter a energia de deformação e suas derivadas primeira e segunda.

Dessa forma, considerando-se o caso da barra tracionada, em que não há efeitos do cisalhamento, e adotando-se o modelo de Kelvin-Voigt, com base no desenvolvimento

apresentado no item 5.4.1, a energia de deformação e suas derivadas primeira e segunda podem ser expressas, respectivamente, por:

$$U = \int_V \int_X (E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon})\varepsilon_{,q} dX dV \quad (5-101)$$

$$U_{,q} = \int_V (E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon})\varepsilon_{,q} dV \quad (5-102)$$

$$U_{,qr} = \int_V [(E\varepsilon_{,rr} + \eta\dot{\varepsilon}_{,rr})\varepsilon_{,q} + (E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon})\varepsilon_{,qr}] dV \quad (5-103)$$

Enquanto o termo F_q , referente à força aplicada, pode ser expresso por:

$$F_q = \int_A \sigma_0 dA = \int_A E\varepsilon_\infty dA \quad (5-104)$$

em que ε_∞ representa a deformação viscoelástica final.

Portanto, a Equação (5-98) pode ser reescrita como:

$$\Delta X_r = \frac{\int_A E\varepsilon_\infty dA - \int_V (E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon})\varepsilon_{,q} dV}{\int_V [(E\varepsilon_{,rr} + \eta\dot{\varepsilon}_{,rr})\varepsilon_{,q} + (E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon})\varepsilon_{,qr}] dV} \quad (5-105)$$

a qual define o vetor de correções das posições nodais para atualização da configuração deformada da estrutura em cada iteração do Método de Newton-Rapshon.

Dividindo-se o numerador e o denominador pelo módulo de elasticidade, tem-se:

$$\Delta X_r = \frac{\int_A \varepsilon_\infty dA - \int_V \left(\varepsilon + \frac{\eta}{E}\dot{\varepsilon}\right)\varepsilon_{,q} dV}{\int_V \left[\left(\varepsilon_{,rr} + \frac{\eta}{E}\dot{\varepsilon}_{,rr}\right)\varepsilon_{,q} + \left(\varepsilon + \frac{\eta}{E}\dot{\varepsilon}\right)\varepsilon_{,qr}\right] dV} \quad (5-106)$$

Lembrando-se que o tempo de retardo para o modelo de Kelvin-Voigt pode ser definido como:

$$t_\varepsilon = \frac{\eta}{E} \quad (5-107)$$

a Equação (5-106), pode ser reescrita como:

$$\Delta X_r = \frac{\int_A \varepsilon_\infty dA - \int_V (\varepsilon + t_\varepsilon \dot{\varepsilon}) \varepsilon_{,q} dV}{\int_V [(\varepsilon_{,rr} + t_\varepsilon \dot{\varepsilon}_{,rr}) \varepsilon_{,q} + (\varepsilon + t_\varepsilon \dot{\varepsilon}) \varepsilon_{,qr}] dV} \quad (5-108)$$

Avaliando-se a taxa de deformação por diferenças finitas, tem-se:

$$\Delta X_r = \frac{\int_A \varepsilon_\infty dA - \int_V \left(\varepsilon^S + t_\varepsilon \frac{\varepsilon^S - \varepsilon^{S-1}}{\Delta t} \right) \varepsilon_{,q}^S dV}{\int_V \left[\left(\varepsilon_{,rr}^S + t_\varepsilon \frac{\varepsilon_{,rr}^S - \varepsilon_{,rr}^{S-1}}{\Delta t} \right) \varepsilon_{,q}^S + \left(\varepsilon^S + t_\varepsilon \frac{\varepsilon^S - \varepsilon^{S-1}}{\Delta t} \right) \varepsilon_{,qr}^S \right] dV} \quad (5-109)$$

Considerando-se que o passo de tempo Δt pode ser expresso como uma fração do tempo de retardo, ou seja:

$$\Delta t = f_\varepsilon t_\varepsilon \quad (5-110)$$

em que f_ε é denominado, neste estudo, fator de retardo, e respeita a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \text{para } \Delta t < t_\varepsilon &\rightarrow f_\varepsilon < 1 \\ \text{para } \Delta t = t_\varepsilon &\rightarrow f_\varepsilon = 1 \\ \text{para } \Delta t > t_\varepsilon &\rightarrow f_\varepsilon > 1 \end{aligned} \quad (5-111)$$

Substituindo-se Δt por $f_\varepsilon t_\varepsilon$, a Equação (5-109) pode ser reescrita como:

$$\Delta X_r = \frac{\int_A \varepsilon_\infty dA - \frac{1}{f_\varepsilon} \int_V (f_\varepsilon \varepsilon^S + \varepsilon^S - \varepsilon^{S-1}) \varepsilon_{,q}^S dV}{\int_V \left[\left(\varepsilon_{,rr}^S + \frac{1}{f_\varepsilon} (\varepsilon_{,rr}^S - \varepsilon_{,rr}^{S-1}) \right) \varepsilon_{,q}^S + \left(\varepsilon^S + \frac{1}{f_\varepsilon} (\varepsilon^S - \varepsilon^{S-1}) \right) \varepsilon_{,qr}^S \right] dV} \quad (5-112)$$

Considerando-se as propriedades geométricas da barra tracionada, apresentada na Figura 5-6, em que a área é expressa por $A = bh$, o volume é expresso por $V = bhL$, a derivada primeira da deformação é expressa por $\varepsilon_{,q} = 1/L$ e a derivada segunda da deformação é expressa por $\varepsilon_{,qr} = 0$, a Equação (5-112) pode ser reescrita, após a avaliação das integrais, como:

$$\Delta X_r = \varepsilon_\infty - \frac{1}{f_\varepsilon} (f_\varepsilon \varepsilon^S + \varepsilon^S - \varepsilon^{S-1}) \quad (5-113)$$

Na primeira iteração $\varepsilon^S = \varepsilon^{S-1} = 0$, dessa forma, analisando-se a Equação (5-113) e a Figura 5-13, é possível observar que, dentro de um intervalo de tempo (passo de tempo adotado) maior que o tempo de retardo, a deformação ε_∞ é um resultado possível, considerando-se a taxa

de deformação do modelo constante ao longo de um passo de tempo. Dessa forma, para um passo de tempo maior que o tempo de retardo, a Equação (5-112) fornece um vetor de correção das posições nodais (ΔX) compatível com uma deformação possível (ε_∞). Por outro lado, dentro de um intervalo de tempo (passo de tempo adotado) menor que o tempo de retardo, a deformação ε_∞ não é um resultado possível. Sendo, neste caso, possível um resultado de deformação inferior e igual $f_\varepsilon \varepsilon_\infty$, como pode ser observado na Figura 5-13. Portanto, para um passo de tempo menor que o tempo de retardo, a Equação (5-112) fornece um vetor de correção das posições nodais incompatível com uma deformação possível. Porém, multiplicando-se os dois lados da Equação (5-113) pelo fator de retardo (f_ε), obtém-se um vetor de correção das posições nodais ($f_\varepsilon \Delta X$) compatível com uma deformação possível ($f_\varepsilon \varepsilon_\infty$).

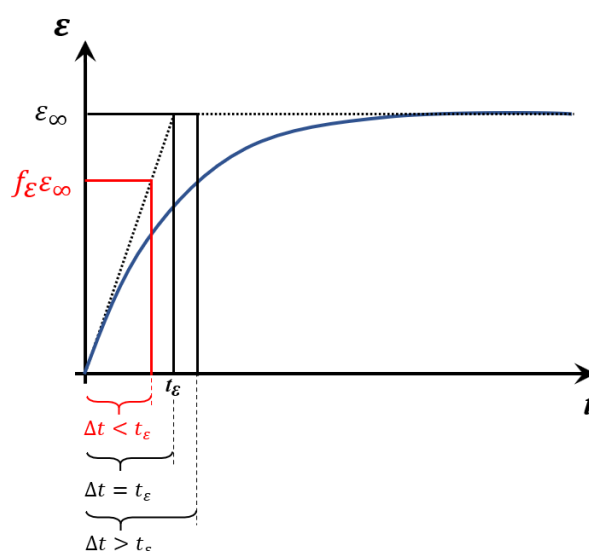


Figura 5-13: Relação entre passo de tempo, tempo de retardo e deformação possível

A partir dessa análise, é possível observar que o processo iterativo deve ser realizado de duas formas. A primeira refere-se aos casos em que o passo de tempo é superior ao tempo de retardo e o vetor de correção das posições nodais não precisa ser ponderado pelo fator de retardo, como apresentado na Figura 5-14. A segunda refere-se aos casos em que o passo de tempo é inferior ao tempo de retardo e o vetor de correção das posições nodais precisa ser ponderado pelo fator de retardo, como apresentado na Figura 5-15, para evitar o problema de divergência.

Numericamente, para o caso em estudo, adotando-se o passo de tempo igual a 12 s e utilizando-se a Equação (5-113), é possível acompanhar os resultados das variáveis ao longo do processo iterativo, como apresentados na Tabela 5-1. Analogamente, pode-se obter os

resultados ao longo processo iterativo para os demais passos de tempo adotados nesta análise. Dessa forma, nas Tabelas 5-2 e 5-3 são apresentados os valores da evolução da componente do vetor de correção das posições nodais ao longo das dez primeiras iterações para os passos de tempo de 11 s, 10 s e 9 s. Na obtenção dos resultados da Tabela 5-2 não é considerado o procedimento de ponderação do vetor de correção das posições nodais, enquanto, na obtenção dos resultados da Tabela 5-3 esse procedimento é considerado.

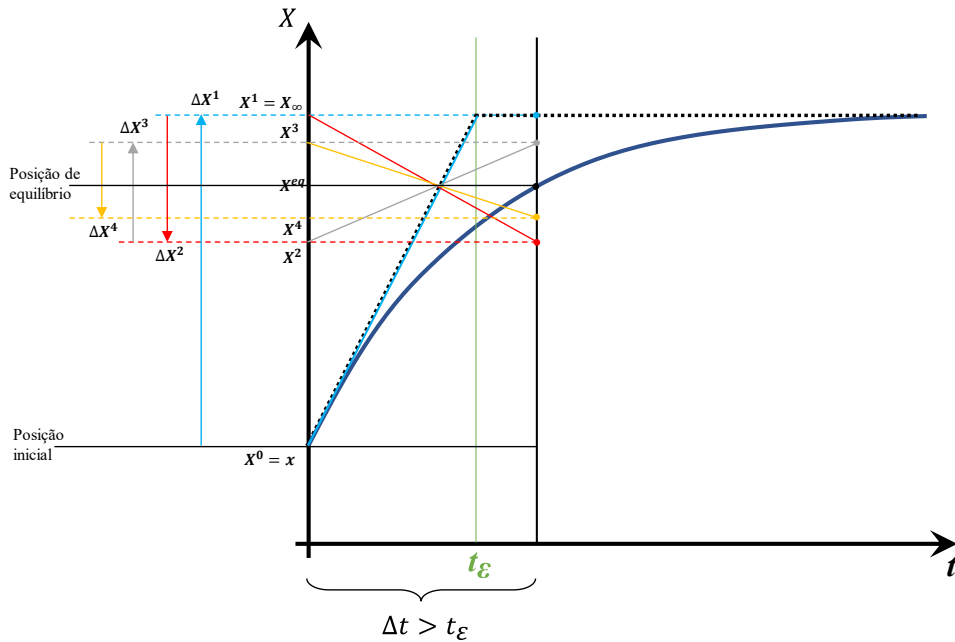


Figura 5-14: Processo iterativo para o caso de $\Delta t > t_\epsilon$

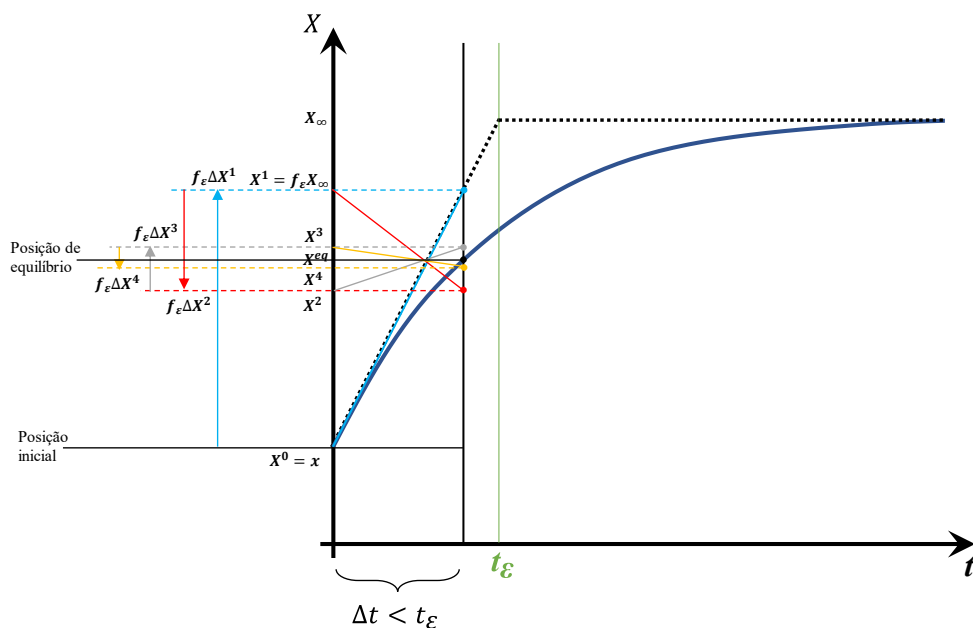


Figura 5-15: Processo iterativo para o caso de $\Delta t < t_\epsilon$

Tabela 5-1: Resultados do processo iterativo para barra tracionada com passo de tempo igual a 12 s e com base na Equação (5-113)

Passo	Iteração	ε_∞	ε^s	ε^{s-1}	$\Delta X [m]$
1	1	0,5	0	0	0,5
1	2	0,5	0,500000	0	-0,416667
1	3	0,5	0,083333	0	0,347222
1	4	0,5	0,430555	0	-0,289350
1	5	0,5	0,141205	0	0,241125
1	6	0,5	0,382330	0	-0,200940
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	105	0,5	0,272728	0	-1,00E-08
1	106	0,5	0,272728	0	8,40E-09
2	1	0,5	0,272728	0,272728	0,227272
2	2	0,5	0,500000	0,272728	-0,189395
2	3	0,5	0,310605	0,272728	0,157828
2	4	0,5	0,468434	0,272728	-0,131525
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2	102	0,5	0,396694	0,272728	-4,00E-08
2	103	0,5	0,396694	0,272728	5,10E-09
3	1	0,5	0,396694	0,396694	0,103306
3	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabela 5-2: Evolução do vetor de correção das posições nodais no processo iterativo sem utilizar o fator de retardo

Iteração	$\Delta X [m]$		
	$\Delta t = 11 s$	$\Delta t = 10 s$	$\Delta t = 9 s$
1	0,50000	0,50000	0,50000
2	-0,45454	-0,50000	-0,55555
3	0,41322	0,50000	0,61728
4	-0,37566	-0,50000	-0,68587
5	0,34150	0,50000	0,76207
6	-0,31056	-0,50000	-0,84676
7	0,28223	0,50000	0,94083
8	-0,25657	-0,50000	-1,04538
9	0,23325	0,50000	1,16152
10	-0,21204	-0,50000	-1,29059
⋮	⋮	⋮	⋮

Tabela 5-3: Evolução do vetor de correção das posições nodais no processo iterativo utilizando-se o fator de retardo

Iteração	$f_{\varepsilon}\Delta X$ [m]		
	$\Delta t = 11$ s	$\Delta t = 10$ s	$\Delta t = 9$ s
1	0,55000	0,50000	0,45000
2	-0,60500	-0,50000	-0,40500
3	0,66550	0,50000	0,36450
4	-0,73205	-0,50000	-0,32805
5	0,80526	0,50000	0,29525
6	-0,88578	-0,50000	-0,26572
7	0,97436	0,50000	0,23915
8	-1,07180	-0,50000	-0,21524
9	1,17897	0,50000	0,19371
10	-1,29687	-0,50000	-0,17434
⋮	⋮	⋮	⋮

Nas Tabelas 5-2 e 5-3, as colunas em azul destacam os processos iterativos que apresentam convergência, as colunas em amarelo destacam os processos iterativos que não apresentam convergência e as colunas em vermelho destacam os processos iterativos que apresentam divergência. Dessa forma, é possível perceber que, adotando-se o passo de tempo superior ao tempo de retardo, o processo iterativo apresenta convergência utilizando-se a Equação (5-113) sem a ponderação do vetor de correção das posições nodais. Por outro lado, adotando-se o passo de tempo inferior ao tempo de retardo, o processo iterativo apresenta convergência utilizando-se a ponderação apresentada. Esses mesmos comportamentos são obtidos com passos de tempo superiores ou inferiores aos adotados. Além disso, é possível observar que adotando-se o passo de tempo igual ao tempo de retardo, o fator de retardo é igual a 1. Neste caso, não se observa convergência tanto adotando a ponderação quanto sem adotar a ponderação do vetor de correção das posições nodais. Esse comportamento é atribuído ao fato de o passo de tempo igual ao tempo de retardo estar no limite entre o comportamento de convergência e o comportamento de divergência. A convergência neste caso é garantida considerando-se o fator de retardo f_{ε} igual a 1 menos um resíduo (por exemplo $f_{\varepsilon} = 1 - 1 \cdot 10^{-8}$).

Com base no que foi exposto, tem-se o seguinte procedimento para evitar o problema de divergência no processo iterativo:

$$\begin{aligned}
 \text{Se } \Delta t < t_\varepsilon &\rightarrow f_\varepsilon = \Delta t/t_\varepsilon ; \\
 \text{Se } \Delta t = t_\varepsilon &\rightarrow f_\varepsilon = 1 - 1 \cdot 10^{-8} ; \\
 \text{Se } \Delta t > t_\varepsilon &\rightarrow f_\varepsilon = 1 ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow g_q(X) = U_{,q} - F_q \\
 &g_{q,rr}(X) = U_{,qr} \\
 &\Delta X = -\frac{g_q(X)}{g_{q,rr}(X)} \\
 &\text{Verificação do critério de convergência} \\
 &X = X + f_\varepsilon \Delta X
 \end{aligned}$$

Figura 5-16: Procedimento simplificado para evitar o problema de divergência no processo iterativo

Por fim, é importante destacar que o fator de retardo é um valor limite, podendo ser adotado um valor menor ou igual à razão entre o passo de tempo e o tempo de retardo ($\Delta t/t_\varepsilon$) e podendo assumir valor máximo igual a 1 (caso em que $\Delta t > t_\varepsilon$). A utilização do fator de retardo reduz o vetor de correção das posições nodais como um todo, mas não altera a natureza de seus componentes e nem a proporção entre seus componentes. Dessa forma, o fator de retardo não interfere nos resultados de posição de equilíbrio em si, mas sim no processo iterativo, garantindo a convergência do mesmo. Isso pode ser verificado pela igualdade dos resultados obtidos quando se utiliza um fator de retardo menor do que o calculado pela razão entre o passo de tempo e o tempo de retardo. Neste caso, as posições de equilíbrio no final de cada passo não se alteram, entretanto é requerido um número maior de iterações, visto que, quanto menor o fator de retardo, menor é a parcela do vetor de correção das posições nodais que está sendo considerada a cada iteração. Portanto, o fator de retardo não altera os resultados, apenas garante a convergência reduzindo a marcha do processo iterativo e, conseqüentemente, aumentando o número de iterações. De forma análoga, para o caso do passo de tempo maior que o tempo de retardo ($\Delta t > t_\varepsilon$), no qual não é necessário utilizar o fator de retardo, é possível utilizar um fator de retardo inferior a 1, obtendo-se os mesmos resultados, porém com um número maior de iterações.

Adicionalmente, a partir da Figura 5-12, a interpretação geométrica do processo iterativo do Método de Newton-Raphson para o comportamento viscoelástico de um modelo que apresenta deformação elástica instantânea, como o modelo de Boltzmann, pode ser ilustrada como apresentado na Figura 5-17.

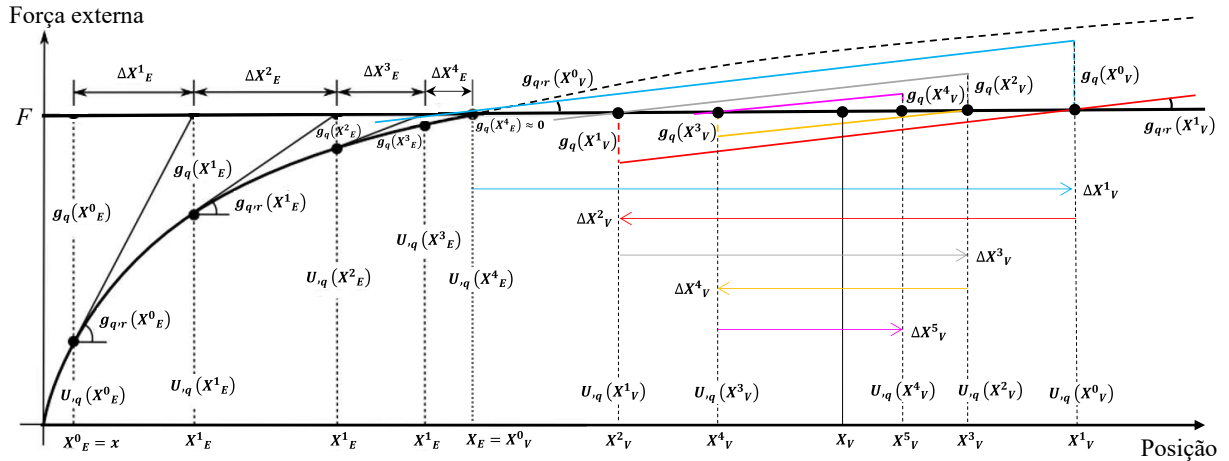


Figura 5-17: Processo iterativo no gráfico Força externa x Posição

Os desenvolvimentos e os resultados apresentados neste item se baseiam na análise de uma barra tracionada com comportamento viscoelástico descrito pelo modelo de Kelvin-Voigt. Essa é uma opção didática, mas, de forma análoga, pode-se desenvolver para os demais modelos reológicos e para análises envolvendo esforços de flexão e cisalhamento, porém, é requerido considerável esforço algébrico devido aos termos e efeitos adicionais, dificultando a exposição do problema da divergência.

O procedimento para evitar a divergência no processo iterativo, descrito na Figura 5-16, é utilizado para obtenção dos resultados apresentados no Capítulo 7, referente às análises, exemplos e aplicações, comprovando-se sua validade e consistência.

6

FORMULAÇÃO POSICIONAL PARA ELEMENTOS DE PÓRTICO COM CINEMÁTICA DE BERNOULLI-EULER

Para fins de comparação e avaliação dos resultados obtidos utilizando-se a formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional com elementos de pórtico com cinemática de Reissner e comportamento viscoelástico, neste capítulo é apresentada a formulação adotando-se a cinemática de Bernoulli-Euler. Nessa formulação é utilizada a mesma técnica para resolução do sistema de equações obtido pelo Princípio da Mínima Energia Potencial Total, como apresentado no item 3.5. Para tanto, é necessário particularizar a medida de deformação e a energia de deformação de forma adequada à cinemática do elemento finito adotado e ao comportamento mecânico considerado.

A adoção da cinemática de Bernoulli-Euler não leva em consideração as deformações provocadas pelo cisalhamento. Nesse caso, o giro da seção transversal é considerado um parâmetro dependente das posições da linha centroidal, sendo obtido pela primeira derivada da função que determina as posições verticais em relação às posições horizontais, ou seja, a seção transversal plana permanece plana e ortogonal à linha centroidal do elemento após a deformação. Dessa forma, comparando-se com os resultados obtidos utilizando-se a cinemática de Reissner, é possível avaliar a contribuição dos efeitos do cisalhamento no comportamento viscoelástico, como é apresentado no Capítulo 7, referente às análises, exemplos e aplicações.

Os procedimentos adotados no desenvolvimento apresentado neste capítulo são baseados nos trabalhos de Greco (2004) e Becho (2016). Em Greco (2004) é apresentada a formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional para análise não linear de pórticos planos considerando-se a cinemática de Bernoulli-Euler. Posteriormente, em Becho (2016) a mesma formulação é utilizada para análise de elementos de pórtico plano adotando-se o modelo de Zener para consideração do comportamento viscoelástico.

6.1 Mapeamento

Para se particularizar a energia de deformação total é necessário entender a cinemática do elemento finito considerado e a relação desta com a medida de deformação adotada. Assim, nesta formulação cada elemento finito de pórtico tem sua geometria mapeada pela parametrização ao longo do comprimento e da altura em função, respectivamente, das variáveis adimensionais ξ_1 (variando de 0 a 1) e ξ_2 (variando de -1 a 1), conforme ilustrado na Figura 6-1.

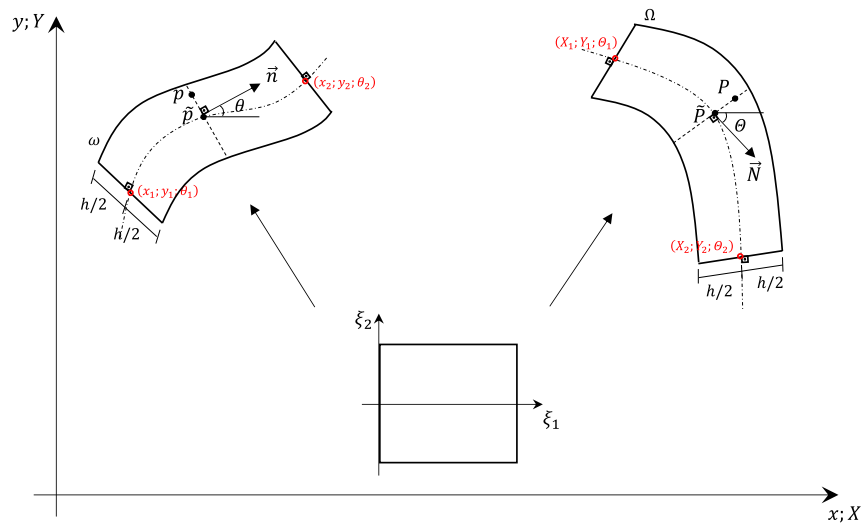


Figura 6-1: Parametrização da geometria de um elemento de pórtico plano com cinemática de Bernoulli-Euler

Portanto, na configuração indeformada, um ponto genérico $p(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2))$, pertencente a uma seção transversal do elemento, localizada em ξ_1 pela configuração auxiliar parametrizada, pode ser mapeado a partir da localização e da inclinação da respectiva seção transversal, como apresentado na Figura 6-1. De forma análoga, esse mesmo ponto na configuração deformada, representado por $P(X(\xi_1, \xi_2), Y(\xi_1, \xi_2))$, pode ser mapeado a partir da localização e da inclinação da respectiva seção transversal após a mudança de configuração do elemento. Dessa forma, para as configurações indeformada e deformada, respectivamente, têm-se as seguintes expressões para o mapeamento de um ponto genérico em função das variáveis adimensionais e da inclinação da seção transversal:

$$p(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) = \tilde{p}(x(\xi_1), y(\xi_1)) + \frac{h}{2} \xi_2 \vec{n}(\xi_1) \quad (6-1)$$

$$P(X(\xi_1, \xi_2), Y(\xi_1, \xi_2)) = \tilde{P}(X(\xi_1), Y(\xi_1)) + \frac{h}{2} \xi_2 \vec{N}(\xi_1) \quad (6-2)$$

em que \tilde{p} e \tilde{P} representam os pontos que localizam as seções transversais do elemento finito, ou seja, representam os pontos de interseção entre o plano da seção transversal, localizado em ξ_1 pela configuração auxiliar parametrizada, e a linha centroidal do elemento finito, nas configurações indeformada e deformada, respectivamente. O parâmetro h representa a altura da seção transversal do elemento e \vec{n} e \vec{N} representam os versores que definem as inclinações das seções transversais, respectivamente, nas configurações indeformada e deformada.

Assim como apresentado na Figura 6-1, as inclinações das seções transversais, nas configurações indeformada e deformada, podem ser determinadas pelas direções dos versores \vec{n} e \vec{N} , expressos por:

$$\vec{n}(\xi_1) = (\text{sen}(\theta(\xi_1)), \text{cos}(\theta(\xi_1))) \quad (6-3)$$

$$\vec{N}(\xi_1) = (\text{sen}(\theta(\xi_1)), \text{cos}(\theta(\xi_1))) \quad (6-4)$$

em que θ e θ representam os ângulos entre as seções transversais e o eixo horizontal.

Dessa forma, as coordenadas x e y de um ponto genérico p , na configuração indeformada, podem ser expressas, respectivamente, por:

$$x(\xi_1, \xi_2) = \tilde{x}(\xi_1) - \frac{h}{2}\xi_2 \text{sen}(\theta(\xi_1)) \quad (6-5)$$

$$y(\xi_1, \xi_2) = \tilde{y}(\xi_1) + \frac{h}{2}\xi_2 \text{cos}(\theta(\xi_1)) \quad (6-6)$$

em que \tilde{x} e \tilde{y} representam as coordenadas do ponto de interseção da respectiva seção transversal com a linha centroidal.

De forma análoga, as coordenadas X e Y do ponto genérico P , na configuração deformada, podem ser expressas, respectivamente, por:

$$X(\xi_1, \xi_2) = \tilde{X}(\xi_1) - \frac{h}{2}\xi_2 \text{sen}(\theta(\xi_1)) \quad (6-7)$$

$$Y(\xi_1, \xi_2) = \tilde{Y}(\xi_1) + \frac{h}{2}\xi_2 \text{cos}(\theta(\xi_1)) \quad (6-8)$$

em que \tilde{X} e \tilde{Y} representam as coordenadas do ponto de interseção da respectiva seção transversal com a linha centroidal.

A fim de possibilitar a análise pelo Método dos Elementos Finitos Posicional é necessário discretizar o domínio, ou seja, deixá-lo em função de parâmetros discretos. No presente caso os parâmetros considerados são as posições nodais, sendo o giro da seção transversal um parâmetro nodal dependente das posições nodais (coordenadas nodais).

A partir desta etapa a formulação se diferencia de forma considerável em relação ao que foi apresentado no Capítulo 5, referente ao desenvolvimento da formulação adotando-se elementos finitos com cinemática de Reissner. Neste caso, são mantidos e reproduzidos os procedimentos de particularização da formulação apresentados em Greco (2004) e Becho (2016).

Nessa formulação são considerados elementos finitos de dois nós. Dessa forma, procedendo-se com a discretização do domínio, o mapeamento das coordenadas dos pontos pertencentes ao mesmo, tanto na configuração indeformada, quanto na configuração deformada, podem ser reescritos em termos das posições desses dois nós e de funções que relacionam estes nós com as variáveis adimensionais. Para tal, é considerada a parametrização da geometria com base na configuração auxiliar adimensional, como apresentado na Figura 6-1.

Na Figura 6-1, ω representa o domínio de um elemento com dois nós, na configuração indeformada e Ω representa o domínio do mesmo elemento na configuração deformada. Dessa forma, x_1 , y_1 e θ_1 representam os parâmetros nodais do nó 1 na configuração indeformada e x_2 , y_2 e θ_2 representam os parâmetros nodais do nó 2 na configuração indeformada, enquanto, X_1 , Y_1 e Θ_1 representam os parâmetros nodais do nó 1 na configuração deformada e X_2 , Y_2 e Θ_2 representam os parâmetros nodais do nó 2 na configuração deformada. Lembrando-se que, x , y , X e Y representam as coordenadas e θ e Θ representam o giro da seção transversal em relação a horizontal.

Visto que, para o caso plano de um elemento de pórtico com dois nós, é possível descrever a geometria que representa a linha centroidal por uma relação linear entre ξ_1 e o eixo X e uma relação cúbica entre ξ_1 e o eixo Y , as coordenadas de um ponto \tilde{P} podem ser obtidas, respectivamente, por:

$$\tilde{X}(\xi_1) = X_1 + (X_2 - X_1)\xi_1 \quad (6-9)$$

$$\tilde{Y}(\xi_1) = c \xi_1^3 + d \xi_1^2 + e \xi_1 + f \quad (6-10)$$

em que os termos c , d , e e f podem ser determinados a partir das condições de contorno do elemento na configuração auxiliar parametrizada conforme as seguintes equações:

$$\tilde{Y}(\xi_1 = 0) = f = Y_1 \quad (6-11)$$

$$\left. \frac{d\tilde{Y}}{d\xi_1} \right|_{\xi_1=0} = e = \left. \frac{d\tilde{Y}}{d\tilde{X}} \frac{d\tilde{X}}{d\xi_1} \right|_{\xi_1=0} = \operatorname{tg}(\theta_1) (X_2 - X_1) \quad (6-12)$$

$$\left. \frac{d\tilde{Y}}{d\xi_1} \right|_{\xi_1=1} = 3c + 2d + e = \left. \frac{d\tilde{Y}}{d\tilde{X}} \frac{d\tilde{X}}{d\xi_1} \right|_{\xi_1=1} = \operatorname{tg}(\theta_2) (X_2 - X_1) \quad (6-13)$$

$$\tilde{Y}(\xi_1 = 1) = c + d + \operatorname{tg}(\theta_1) (X_2 - X_1) + Y_1 = Y_2 \quad (6-14)$$

A partir das Equações (6-13) e (6-14), têm-se ainda:

$$c = (\operatorname{tg}(\theta_2) + \operatorname{tg}(\theta_1))(X_2 - X_1) - 2(Y_2 - Y_1) \quad (6-15)$$

$$d = 3(Y_2 - Y_1) - (\operatorname{tg}(\theta_2) + 2 \operatorname{tg}(\theta_1))(X_2 - X_1) \quad (6-16)$$

É importante observar que, considerando-se a cinemática de Bernoulli-Euler, em que a seção transversal plana permanece plana e ortogonal à linha centroidal do elemento após a deformação, o giro da seção transversal, representado por $\theta(\xi_1)$, pode ser obtido pela derivada da função das posições verticais em relação as posições horizontais, podendo ser representada de forma parametrizada por:

$$\theta(\xi_1) = \operatorname{arctg} \left(\frac{d\tilde{Y}}{d\tilde{X}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{d\tilde{Y}}{d\xi_1} \frac{d\xi_1}{d\tilde{X}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{3c \xi_1^2 + 2d \xi_1 + e}{X_2 - X_1} \right) \quad (6-17)$$

em que o giro da seção transversal nos nós pode ser obtido avaliando-se a equação nas posições parametrizadas ξ_1 adequadas para cada nó.

Os parâmetros nodais, presentes nas Equações (6-9) a (6-17), são referentes à configuração deformada. As mesmas equações são válidas para a configuração indeformada, bastando substituir os parâmetros nodais X_1 , X_2 , Y_1 , Y_2 , θ_1 e θ_2 pelos respectivos parâmetros nodais x_1 ,

x_2, y_1, y_2, θ_1 e θ_2 . Dessa forma, pode se obter, também, as coordenadas $\tilde{x}(\xi_1)$, $\tilde{y}(\xi_1)$ e o giro $\theta(\xi_1)$.

Por fim, considerando-se as Equações (6-9) a (6-17), os mapeamentos das coordenadas nas configurações deformada e indeformada podem ser completamente descritos em termos das variáveis adimensionais e dos parâmetros nodais utilizando-se as Equações (6-5) a (6-8). Além disso, é importante observar que, no desenvolvimento desta formulação com cinemática de Bernoulli-Euler, apesar de ser adotado um elemento de pórtico com dois nós, é considerada uma aproximação cúbica na discretização, como exposto na Equação (6-10). Portanto, em termos do grau de aproximação considerado, esta formulação é equivalente à desenvolvida no Capítulo 5, na qual são considerados elementos de pórtico com quatro nós e funções aproximadoras por interpolação polinomial de Lagrange.

6.2 Medida de deformação

A partir do mapeamento da geometria apresentado no item 6.1, considerando-se a cinemática de Bernoulli-Euler, é possível descrever a medida de deformação para o elemento finito considerado. Para tanto, inicialmente, considera-se uma fibra infinitesimal qualquer de comprimento $d\xi_1$ na configuração auxiliar adimensional, paralela à linha centroidal, como apresentado na Figura 6-2. Quando o elemento passa da configuração auxiliar para as configurações indeformada e deformada, o comprimento da fibra se altera passando a ser definido, respectivamente, pelos comprimentos ds e dS .

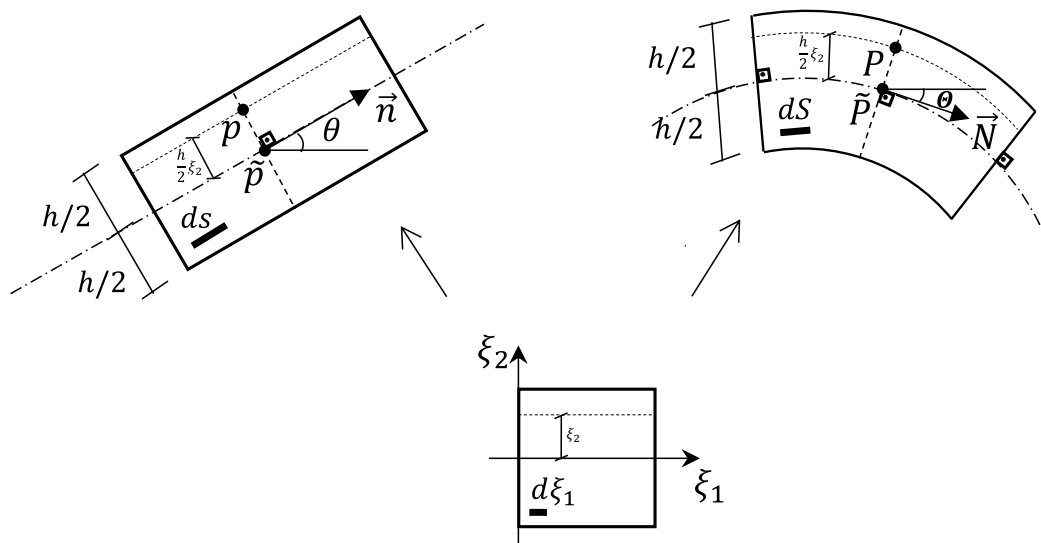


Figura 6-2: Parametrização da medida de deformação

Considerando-se um elemento finito inicialmente retilíneo na posição indeformada, os estiramentos referentes as transformações da configuração auxiliar adimensional para as configurações indeformada (sobrescrito 0) e deformada (sobrescrito 1), de uma fibra sobre a linha centroidal, podem ser determinados, respectivamente, por:

$${}^0\tilde{\lambda} = \frac{ds}{d\xi_1} = \sqrt{\left(\frac{d\tilde{x}}{d\xi_1}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{y}}{d\xi_1}\right)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = l_0 \quad (6-18)$$

$${}^1\tilde{\lambda} = \frac{dS}{d\xi_1} = \sqrt{\left(\frac{d\tilde{X}}{d\xi_1}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{Y}}{d\xi_1}\right)^2} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (3c\xi_1^2 + 2d\xi_1 + e)^2} \quad (6-19)$$

Observando-se que o estiramento na linha centroidal referente a transformação da configuração indeformada para a configuração deformada pode ser obtido pela razão entre os estiramentos referentes às transformações da configuração auxiliar adimensional para as configurações indeformada e deformada, expressa por:

$$\tilde{\lambda} = \frac{{}^1\tilde{\lambda}}{{}^0\tilde{\lambda}} \quad (6-20)$$

a medida de deformação normal de engenharia na linha centroidal pode ser expressa por:

$$\tilde{\varepsilon}_{11} = \tilde{\lambda} - 1 = \frac{1}{l_0} \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (3c\xi_1^2 + 2d\xi_1 + e)^2} - 1 \quad (6-21)$$

Para uma fibra qualquer do elemento finito, de acordo com a cinemática de Bernoulli-Euler, a deformação longitudinal pode ser descrita em função da deformação e da curvatura da fibra sobre a linha centroidal conforme a seguinte expressão:

$$\varepsilon_{11} = \tilde{\varepsilon}_{11} - \frac{h}{2} \xi_2 \frac{1}{r} \quad (6-22)$$

em que $1/r$ representa a curvatura da linha centroidal, determinada por:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{dX}{d\xi_1} \frac{d^2Y}{d\xi_1^2} - \frac{d^2X}{d\xi_1^2} \frac{dY}{d\xi_1}}{\left(\sqrt{\left(\frac{dX}{d\xi_1}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\xi_1}\right)^2}\right)^3} = \frac{(X_2 - X_1)^2(6c\xi_1 + 2d)}{\left(\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (3c\xi_1^2 + 2d\xi_1 + e)^2}\right)^3} \quad (6-23)$$

A partir das Equações (6-21), (6-22) e (6-23), pode-se definir a deformação normal de uma fibra qualquer, em função das coordenadas adimensionais ξ_1 e ξ_2 e dos parâmetros nodais X_1 , Y_1 , θ_1 , X_2 , Y_2 e θ_2 .

6.3 Energia de deformação

A partir da medida de deformação desenvolvida no item 6.2, é possível determinar a energia de deformação total, que leva em consideração a cinemática de Bernoulli-Euler. Essa energia de deformação total é requerida na aplicação do Princípio da Mínima Energia Potencial Total, a qual é responsável pela determinação das configurações de equilíbrio dos elementos finitos e é a base da formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional.

Com base no desenvolvimento apresentado no item 3.4, a energia de deformação total pode ser expressa pela Equação (3-41), na qual, adotando-se uma relação tensão-deformação apropriada (relação constitutiva ou reológica) para o tipo de elemento finito adotado e para o material constituinte, é possível descrever a resposta mecânica do sistema estrutural.

Dessa forma, a partir da Equação (3-41) e adotando-se as relações reológicas desenvolvidas no capítulo 4, é possível particularizar o Método dos Elementos Finitos Posicional para descrição do comportamento viscoelástico característico de cada modelo. Para tanto, deve-se determinar a primeira e a segunda derivada da energia de deformação total, como descrito no item 3.5, a fim de possibilitar a aplicação do Princípio da Mínima Energia Potencial Total e do método iterativo de Newton-Raphson.

No presente estudo, o comportamento mecânico de interesse é o viscoelástico, no qual, as relações tensão-deformação podem ser obtidas por adequadas combinações entre as parcelas elástica e viscosa. Assim como é apresentado no item 3.4, essas parcelas elástica e viscosa podem ser expressas de uma forma geral, respectivamente, por:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (6-24)$$

$$\sigma_{ij}^v = D_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (6-25)$$

Considerando-se materiais isotrópicos, com desacoplamento entre os efeitos dos esforços normais e os efeitos dos esforços cisalhantes, assim como é desenvolvido no item 4.1, as respectivas parcelas elástica e viscosa podem ser reescritas como:

$$\sigma_{ij}^e = E \bar{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (6-26)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta \bar{C}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (6-27)$$

em que, na notação de Voigt, tem-se:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} & \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\bar{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{\mu} \end{bmatrix} \quad (6-28)$$

sendo $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$ os parâmetros de Lamé modificados e expressos por:

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (6-29)$$

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2(1 + \nu)} \quad (6-30)$$

Nesse capítulo, o elemento finito utilizado é o de pórtico plano com cinemática de Bernoulli-Euler, sendo um elemento unidimensional que considera apenas os efeitos dos esforços normais. Dessa forma, assim como desenvolvido no item 3.4, as relações tensão-deformação, respectivamente para as parcelas elástica e viscosa, podem ser expressas por:

$$\sigma_{11}^e = E \varepsilon_{11} \quad (6-31)$$

$$\sigma_{11}^v = \eta \dot{\varepsilon}_{11} \quad (6-32)$$

A partir das parcelas elástica e viscosa, descritas pelas Equações (6-31) e (6-32), a relação tensão-deformação adequada para o comportamento mecânico de interesse pode ser obtida. Em seguida, substituindo-se essa relação tensão-deformação na Equação (3-41), é possível obter a energia de deformação, a qual é utilizada no Princípio da Mínima Energia Potencial Total, sendo as medidas de deformação obtidas conforme apresentado no item 6.2. Para o caso elástico, por exemplo, em que a relação tensão-deformação é dada apenas pela parcela elástica, dada pela Equação (6-31), a energia de deformação pode ser expressa por:

$$U = \int_V \int_{\varepsilon} E \varepsilon_{11} d\varepsilon dV \quad (6-33)$$

De forma análoga, para o comportamento viscoelástico, a energia de deformação pode ser obtida considerando-se as relações tensão-deformação deduzidas para cada modelo reológico apresentado no capítulo 4. Dessa forma, nos itens 6.3.1, 6.3.2 e 6.3.3 são expostas a relação tensão-deformação e a energia de deformação para cada um dos três modelos reológicos adotados neste estudo, particularizando-se para o elemento de pórtico plano com cinemática de Bernoulli-Euler.

Por fim, a partir dos desenvolvimentos apresentados nos itens 6.1, 6.2 e 6.3, referentes à particularização da formulação Posicional para elementos de pórtico plano com cinemática de Bernoulli-Euler e comportamento viscoelástico, e a partir dos procedimentos apresentados no item 3.5, referentes a aplicação do Princípio da Mínima Energia Potencial Total e do Método de Newton-Raphson, é possível analisar sistemas estruturais específicos utilizando-se o Método dos Elementos Finitos Posicional. Para tanto, é necessário introduzir alguns procedimentos numéricos adicionais devido às características do comportamento viscoelástico. Tais procedimentos são descritos nos itens 5.5.1, 5.5.2 e 5.5.3, para implementação da formulação posicional com cinemática de Reissner e são os mesmos adotados para implementação da formulação com cinemática de Bernoulli-Euler. Dessa forma, esses procedimentos não são detalhados neste capítulo. Nesses três itens citados, são detalhados procedimentos para avaliação das taxas de deformação e tensão, procedimentos para consideração de seções transversais laminadas e procedimentos para evitar a divergência ao longo do processo iterativo em função do passo de tempo adotado.

6.3.1 Energia de deformação para o modelo de Kelvin-Voigt

A relação reológica para o modelo de Kelvin-Voigt pode ser expressa de forma geral conforme a Equação (4-18). Particularizando-se para o elemento finito de pórtico plano com cinemática de Bernoulli-Euler, tem-se:

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} + \eta \dot{\varepsilon}_{11} \quad (6-34)$$

Dessa forma, a energia de deformação pode ser expressa por:

$$U = \int_V \int_{\varepsilon} (E\varepsilon_{11} + \eta\dot{\varepsilon}_{11}) d\varepsilon dV \quad (6-35)$$

Realizando-se uma troca de variáveis com base na regra da cadeia, dada por:

$$d\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{dX_q} dX_q = \varepsilon_{,q} dX_q \quad (6-36)$$

a energia de deformação pode ser reescrita como:

$$U = \int_V \int_X (E\varepsilon_{11} + \eta\dot{\varepsilon}_{11}) \varepsilon_{11,q} dX dV \quad (6-37)$$

Dessa forma, a primeira e a segunda derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais podem ser expressas por:

$$U_{,q} = \int_V (E\varepsilon_{11} + \eta\dot{\varepsilon}_{11}) \varepsilon_{11,q} dV \quad (6-38)$$

$$U_{,qr} = \int_V [(E\varepsilon_{11,rr} + \eta\dot{\varepsilon}_{11,rr}) \varepsilon_{11,q} + (E\varepsilon_{11} + \eta\dot{\varepsilon}_{11}) \varepsilon_{11,qr}] dV \quad (6-39)$$

Considerando-se a primeira e a segunda derivadas da energia de deformação, descritas pelas Equações (6-38) e (6-39), é possível realizar os procedimentos do Método de Newton-Raphson e aplicar o Princípio da Mínima Energia Potencial Total para se obter as posições de equilíbrio do sistema estrutural, assim como apresentado no item 3.5, de forma particularizada para elementos de pórtico plano com cinemática de Bernoulli-Euler e comportamento viscoelástico característico do modelo de Kelvin-Voigt.

6.3.2 Energia de deformação para o modelo de Boltzmann

A relação reológica para o modelo de Boltzmann pode ser expressa de forma geral conforme a Equação (4-43). Particularizando-se para o elemento finito de pórtico plano com cinemática de Bernoulli-Euler, tem-se:

$$\sigma = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_{11} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{11} \quad (6-40)$$

Dessa forma, a energia de deformação pode ser expressa por:

$$U = \int_V \int_{\varepsilon} \left(\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_{11} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{11} \right) d\varepsilon dV \quad (6-41)$$

Realizando-se a troca de variáveis apresentada na Equação (6-36), a energia de deformação pode ser reescrita como:

$$U = \int_V \int_X \left(\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_{11} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{11} \right) \varepsilon_{11,q} dX dV \quad (6-42)$$

Dessa forma, a primeira e a segunda derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais podem ser expressas por:

$$U_{,q} = \int_V \left(\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_{11} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{11} \right) \varepsilon_{11,q} dV \quad (6-43)$$

$$U_{,qr} = \int_V \left[\left(\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_{11,r} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}_{11,r} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{11,r} \right) \varepsilon_{11,q} + \left(\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_{11} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{11} \right) \varepsilon_{11,qr} \right] dV \quad (6-44)$$

Considerando-se a primeira e a segunda derivadas da energia de deformação, descritas pelas Equações (6-43) e (6-44), é possível realizar os procedimentos do Método de Newton-Raphson e aplicar o Princípio da Mínima Energia Potencial Total para se obter as posições de equilíbrio do sistema estrutural, assim como apresentado no item 3.5, de forma particularizada para elementos de pórtico plano com cinemática de Bernoulli-Euler e comportamento viscoelástico característico do modelo de Boltzmann.

6.3.3 Energia de deformação para o modelo de Zener

A relação reológica para o modelo de Zener pode ser expressa de forma geral conforme a Equação (4-77). Particularizando-se para o elemento finito de pórtico plano com cinemática de Bernoulli-Euler, tem-se:

$$\sigma_{11} = E_2 \varepsilon_{11} + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{11} \quad (6-45)$$

Dessa forma, a energia de deformação pode ser expressa por:

$$U = \int_V \int_{\varepsilon} \left(E_2 \varepsilon_{11} + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{11} \right) d\varepsilon dV \quad (6-46)$$

Realizando-se a troca de variáveis apresentada na Equação (6-36), a energia de deformação pode ser reescrita como:

$$U = \int_V \int_X \left(E_2 \varepsilon_{11} + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{11} \right) \varepsilon_{11,q} dX_q dV \quad (6-47)$$

Dessa forma, a primeira e a segunda derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais podem ser expressas por:

$$U_{,q} = \int_V \left(E_2 \varepsilon_{11} + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{11} \right) \varepsilon_{11,q} dV \quad (6-48)$$

$$U_{,qr} = \int_V \left[\left(E_2 \varepsilon_{11,r} + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \dot{\varepsilon}_{11,r} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{11,r} \right) \varepsilon_{11,q} + \left(E_2 \varepsilon_{11} + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_1} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1} \dot{\sigma}_{11} \right) \varepsilon_{11,qr} \right] dV \quad (6-49)$$

Considerando-se a primeira e a segunda derivadas da energia de deformação, descritas pelas Equações (6-48) e (6-49), é possível realizar os procedimentos do Método de Newton-Raphson e aplicar o Princípio da Mínima Energia Potencial Total para se obter as posições de equilíbrio do sistema estrutural, assim como apresentado no item 3.5, de forma particularizada para elementos de pórtico plano com cinemática de Bernoulli-Euler e comportamento viscoelástico característico do modelo de Zener.

7

ANÁLISES, EXEMPLOS E APLICAÇÕES

Neste capítulo são apresentadas as análises, exemplos e aplicações a fim de demonstrar a consistência da formulação desenvolvida com base na cinemática de Reissner e sua capacidade de descrição do comportamento viscoelástico. Inicialmente é apresentado um conjunto de análises avaliando-se a influência dos diferentes parâmetros físicos e numéricos envolvidos na formulação. Além disso, é realizada uma análise comparando-se os três diferentes modelos reológicos adotados no presente estudo, apresentando-se as correlações entre os parâmetros envolvidos nos diferentes modelos. Na sequência, são apresentados alguns exemplos a fim de verificar a consistência da formulação comparando-se os resultados obtidos com a cinemática de Reissner, os resultados obtidos com a cinemática de Bernoulli-Euler e resultados analíticos e numéricos disponíveis na literatura. Por fim, são apresentadas algumas aplicações práticas em que os resultados numéricos obtidos são comparados aos resultados experimentais disponíveis na literatura. Adicionalmente, para possibilitar as aplicações, é apresentada uma técnica de identificação dos parâmetros físicos dos materiais e uma metodologia de calibração desses parâmetros a partir de resultados de ensaios de fluência à tração disponíveis na literatura.

7.1 Análise da influência dos parâmetros

Como primeira parte da avaliação da consistência da formulação, são apresentadas neste item análises das influências dos parâmetros envolvidos na formulação. Inicialmente são apresentadas as análises das influências dos parâmetros que representam as propriedades físicas dos materiais na resposta viscoelástica. Adicionalmente é apresentada uma comparação entre os três modelos reológicos adotados, correlacionando-se os parâmetros destes modelos. Na sequência são apresentadas as análises das influências dos parâmetros numéricos referentes às discretizações espacial e temporal.

Para obtenção dos resultados apresentados neste item, são consideradas as simulações numéricas de dois casos básicos utilizando-se a formulação posicional com cinemática de

Reissner. Os casos considerados consistem em uma barra tracionada, com força aplicada em uma extremidade e a outra extremidade fixa, e uma viga biapoiada, com força vertical centrada, como apresentado nas Figuras 7-1 e 7-2.

A barra apresentada na Figura 7-1 possui comprimento (L) igual a 2 m e seção transversal quadrada com altura e largura iguais a 0,01 m. A força (p) aplicada na extremidade livre tem intensidade de 100 kN. As análises da barra se baseiam nos resultados de deslocamento axial da extremidade livre ao longo do tempo.



Figura 7-1: Barra tracionada

A viga apresentada na Figura 7-2 possui vão livre (L) igual a 2 m e seção transversal retangular com altura igual a 0,40 m e largura igual a 0,01 m. A valor da altura da seção transversal (20% da medida do vão) se justifica para aumentar a influência dos efeitos do cisalhamento. Por fim, a força vertical (p) aplicada no meio do vão tem intensidade de 1000 kN. As análises da viga se baseiam nos resultados de deslocamento transversal (flecha) no meio do vão ao longo do tempo.

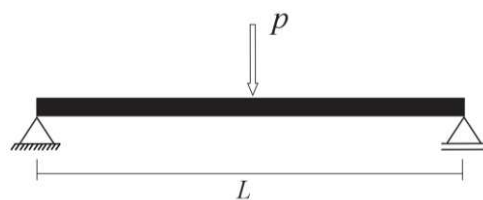


Figura 7-2: Viga biapoiada com força vertical centrada

Em ambos os casos são consideradas a discretização em dez elementos finitos, a adoção de dez pontos de Gauss ao longo da altura e ao longo do comprimento e a discretização temporal em dez passos de tempo iguais a 10 s, a menos nos casos em que tais valores sejam claramente alterados. Além disso, o modelo reológico considerado inicialmente é o de Boltzmann com módulo de elasticidade E_1 igual a 100 GPa, módulo de elasticidade E_2 igual a 100 GPa, módulo de viscosidade η igual a 1000 GPa·s e coeficiente de Poisson ν igual a 0,3, a menos nos casos em que tais valores, ou o modelo, sejam claramente alterados. Por fim, é importante destacar que a força aplicada é considerada atuante desde o primeiro passo de tempo, sem a consideração

de efeitos inerciais, e que a tolerância de cálculo adotada é de $1 \cdot 10^{-8}$ (absoluta em termos de variação das posições nodais).

7.1.1 Influência do módulo de elasticidade E_1

Esta análise se refere à avaliação da influência do módulo de elasticidade E_1 do modelo de Boltzmann, sendo os demais parâmetros mantidos conforme descrito no item 7.1. Para tanto, são avaliados os resultados obtidos considerando-se o módulo de elasticidade E_1 igual a 50 GPa, 75 GPa, 100 GPa, 125 GPa, 150 GPa e 200 GPa. Dessa forma, na Figura 7-3 são apresentados os resultados de deslocamento axial ao longo do tempo da extremidade livre da barra, apresentada na Figura 7-1, e na Figura 7-4 são apresentados os resultados de deslocamento transversal (flecha) ao longo do tempo no meio do vão da viga, apresentada na Figura 7-2.

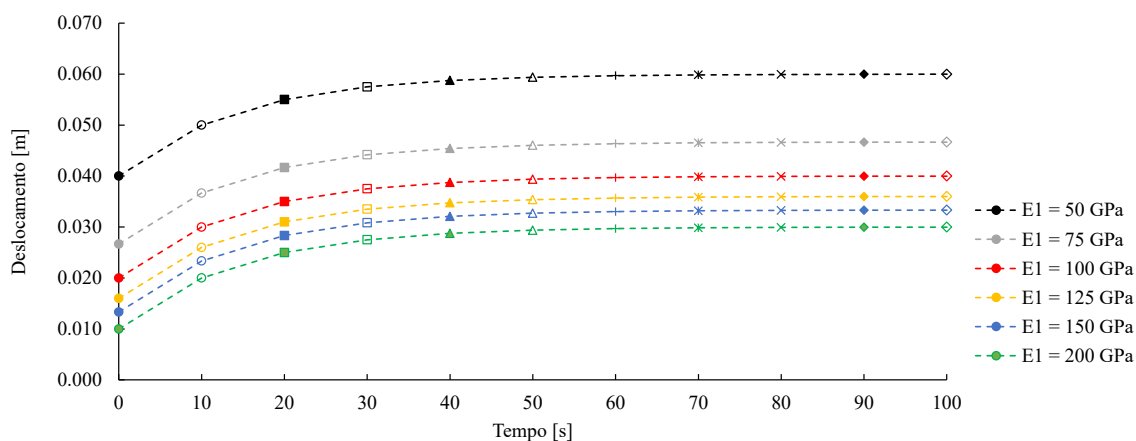


Figura 7-3: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_1

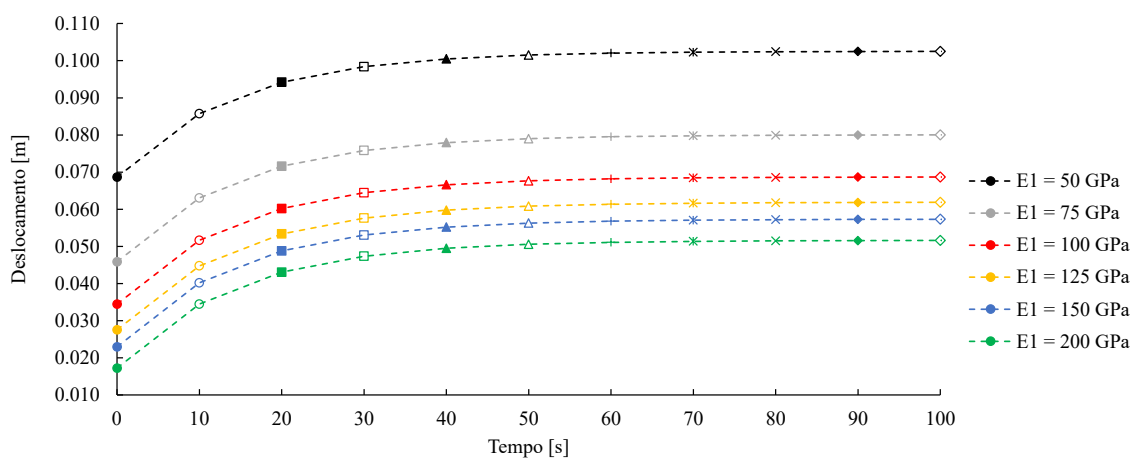


Figura 7-4: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_1

A partir dos resultados apresentados nas Figuras 7-3 e 7-4, é possível observar que o modelo de Boltzmann apresenta uma relação não linear entre os deslocamentos e o módulo de elasticidade E_I . Essa relação pode ser observada de forma mais clara a partir dos gráficos de sensibilidade apresentados na Figura 7-5, para a barra tracionada, e na Figura 7-6, para a viga biapoiada.

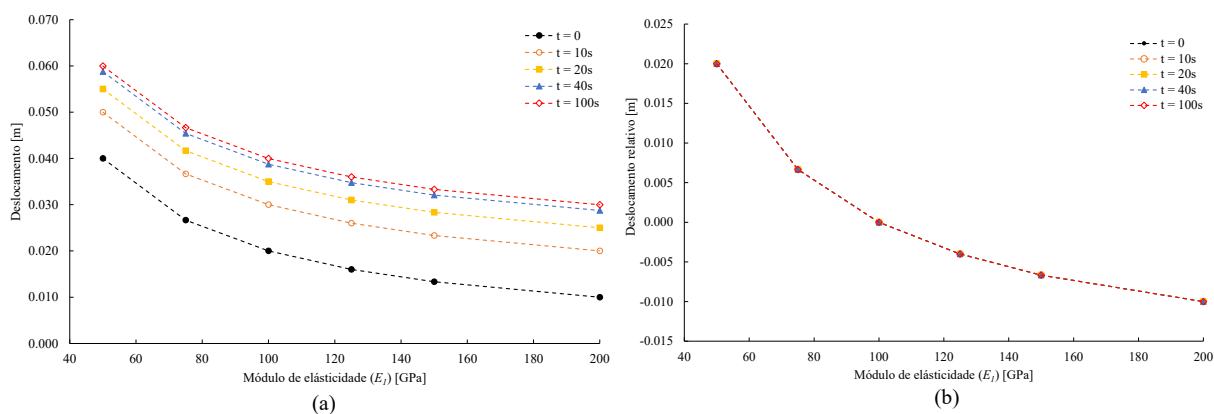


Figura 7-5: (a) Deslocamento axial absoluto e (b) deslocamento axial relativo da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_I

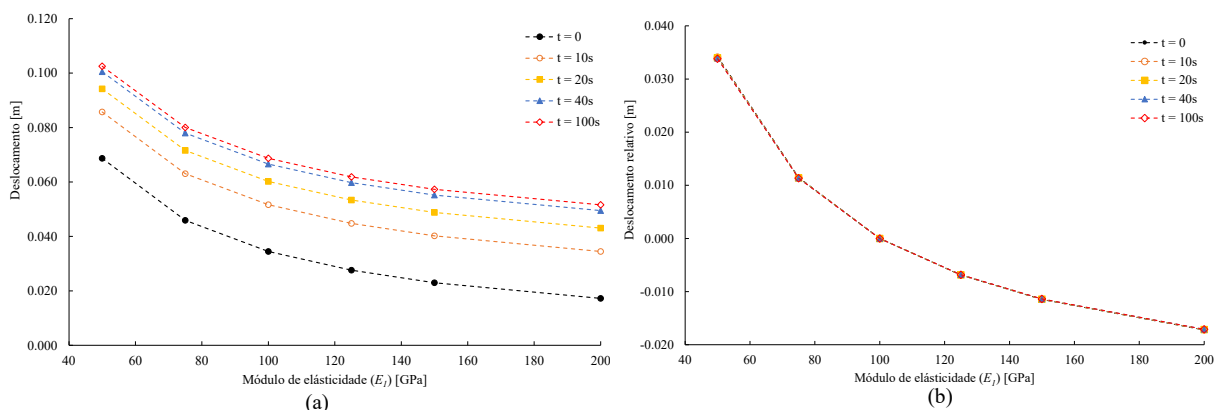


Figura 7-6: (a) Deslocamento transversal absoluto e (b) deslocamento transversal relativo no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_I

A partir dos gráficos de sensibilidade, apresentados nas Figuras 7-5 (a) e 7-6 (a), é possível observar que a redução do módulo de elasticidade E_I resulta em uma elevação nos deslocamentos, para todos os instantes de tempo. Além disso, é possível perceber que os deslocamentos elásticos instantâneos são afetados da mesma forma que os deslocamentos viscoelásticos ao longo do tempo. Esse resultado é consistente, visto que a resposta elástica instantânea do modelo de Boltzmann é definida pelo módulo de elasticidade E_I , como apresentado no item 4.3. Por fim, utilizando-se como referência os deslocamentos obtidos com módulo de elasticidade E_I igual a 100 GPa, é possível observar que os deslocamentos relativos são os mesmos em todos os instantes de tempo, como apresentado nas Figuras 7-5 (b) e 7-6 (b),

ou seja, as alterações nesse parâmetro afetam da mesma forma os resultados em todos os instantes de tempo.

7.1.2 Influência do módulo de elasticidade E_2

Esta análise se refere à avaliação da influência do módulo de elasticidade E_2 do modelo de Boltzmann, sendo os demais parâmetros mantidos conforme descrito no item 7.1. Para tanto, são avaliados os resultados obtidos considerando-se o módulo de elasticidade E_2 igual a 50 GPa, 75 GPa, 100 GPa, 125 GPa, 150 GPa e 200 GPa. Dessa forma, na Figura 7-7 são apresentados os resultados de deslocamento axial ao longo do tempo da extremidade livre da barra, apresentada na Figura 7-1, e na Figura 7-8 são apresentados os resultados de deslocamento transversal (flecha) ao longo do tempo no meio do vão da viga, apresentada na Figura 7-2.

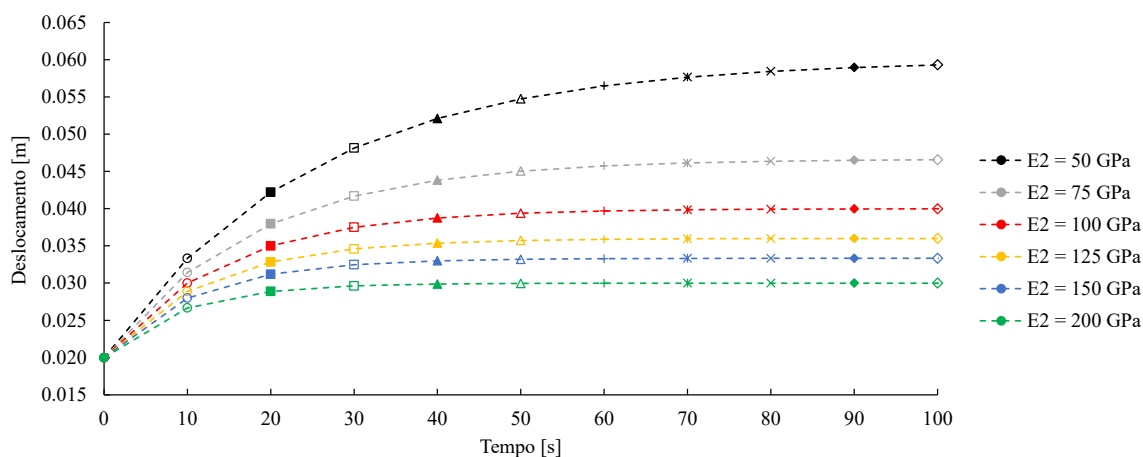


Figura 7-7: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_2

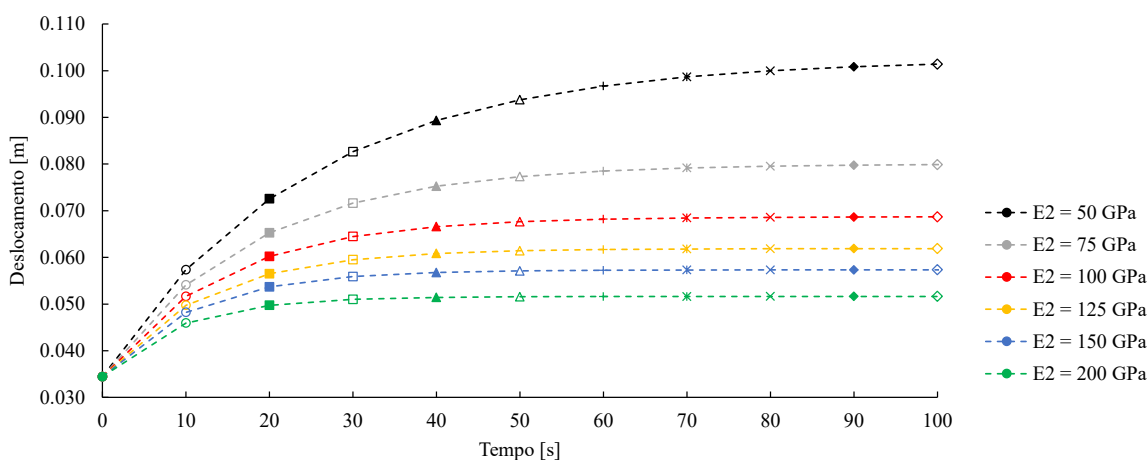


Figura 7-8: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_2

A partir dos resultados apresentados nas Figuras 7-7 e 7-8, é possível observar que o modelo de Boltzmann apresenta uma relação não linear entre os deslocamentos e o módulo de elasticidade E_2 . Essa relação pode ser observada de forma mais clara a partir dos gráficos de sensibilidade apresentados na Figura 7-9, para a barra tracionada, e na Figura 7-10, para a viga biapoiada.

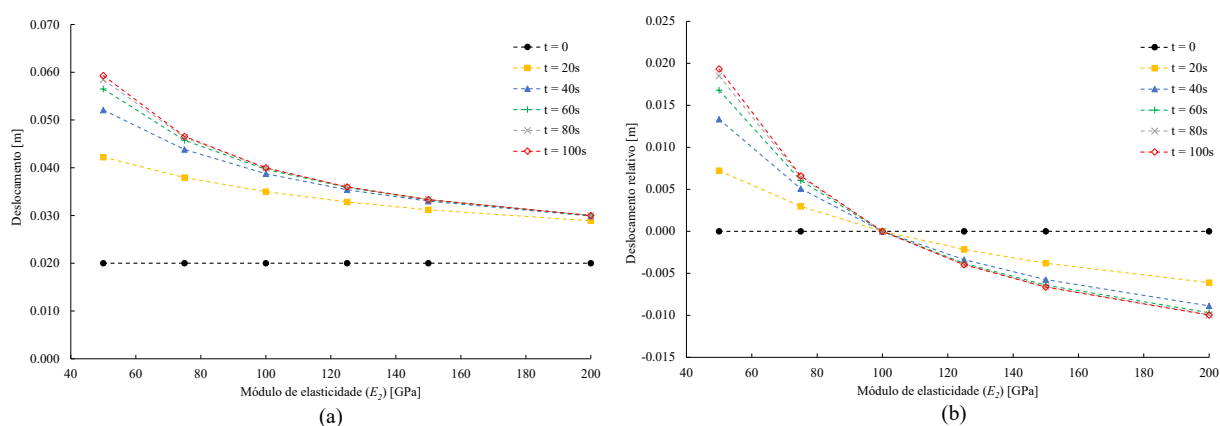


Figura 7-9: (a) Deslocamento axial absoluto e (b) deslocamento axial relativo da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_2

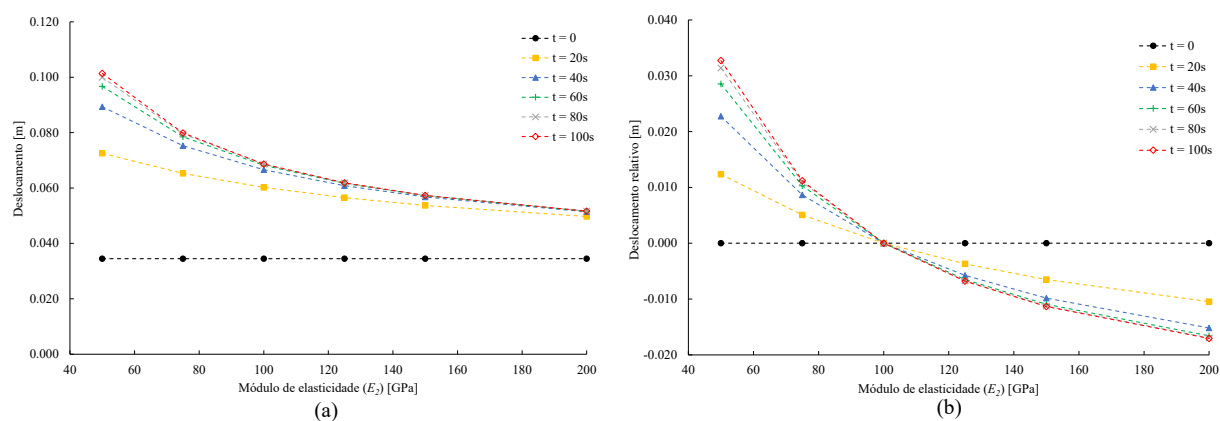


Figura 7-10: (a) Deslocamento transversal absoluto e (b) deslocamento transversal relativo no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do módulo de elasticidade E_2

A partir dos gráficos de sensibilidade, apresentados nas Figuras 7-9 (a) e 7-10 (a), é possível observar que a redução do módulo de elasticidade E_2 resulta em uma elevação nos deslocamentos viscoelásticos, para todos os instantes de tempo, entretanto, de forma distinta em cada instante de tempo. Além disso, é possível perceber que os deslocamentos elásticos instantâneos não são afetados pelas alterações no módulo de elasticidade E_2 . Esse resultado é consistente, visto que a resposta elástica instantânea do modelo de Boltzmann é definida apenas pelo módulo de elasticidade E_1 , como apresentado no item 4.3. Por fim, utilizando-se como referência os deslocamentos obtidos com módulo de elasticidade E_2 igual a 100 GPa, é possível

observar que, além dos deslocamentos relativos serem distintos em cada instantes de tempo, esses são menos pronunciados nos instantes de tempo iniciais e mais pronunciados nos instantes de tempo finais, como apresentado nas Figuras 7-9 (b) e 7-10 (b). Pode-se observar, também, que os deslocamentos viscoelásticos finais (em $t = 100$ s), obtidos com as alterações no módulo de elasticidade E_2 , são os exatamente os mesmos obtidos com as mesmas alterações no módulo de elasticidade E_1 . Esse resultado é consistente, visto que a resposta viscoelástica para um tempo suficientemente grande (deslocamento viscoelástico final) do modelo de Boltzmann é definida pela associação em série entre a mola com módulo de elasticidade E_1 e a mola com módulo de elasticidade E_2 , como apresentado no item 4.3.

7.1.3 Influência do módulo de viscosidade η

Esta análise se refere à avaliação da influência do módulo de viscosidade η do modelo de Boltzmann, sendo os demais parâmetros mantidos conforme descrito no item 7.1. Para tanto, são avaliados os resultados obtidos considerando-se o módulo de viscosidade η igual a 500 GPa·s, 750 GPa·s, 1000 GPa·s, 1250 GPa·s, 1500 GPa·s e 2000 GPa·s. Dessa forma, na Figura 7-11 são apresentados os resultados de deslocamento axial ao longo do tempo da extremidade livre da barra, apresentada na Figura 7-1, e na Figura 7-12 são apresentados os resultados de deslocamento transversal (flecha) ao longo do tempo no meio do vão da viga, apresentada na Figura 7-2.

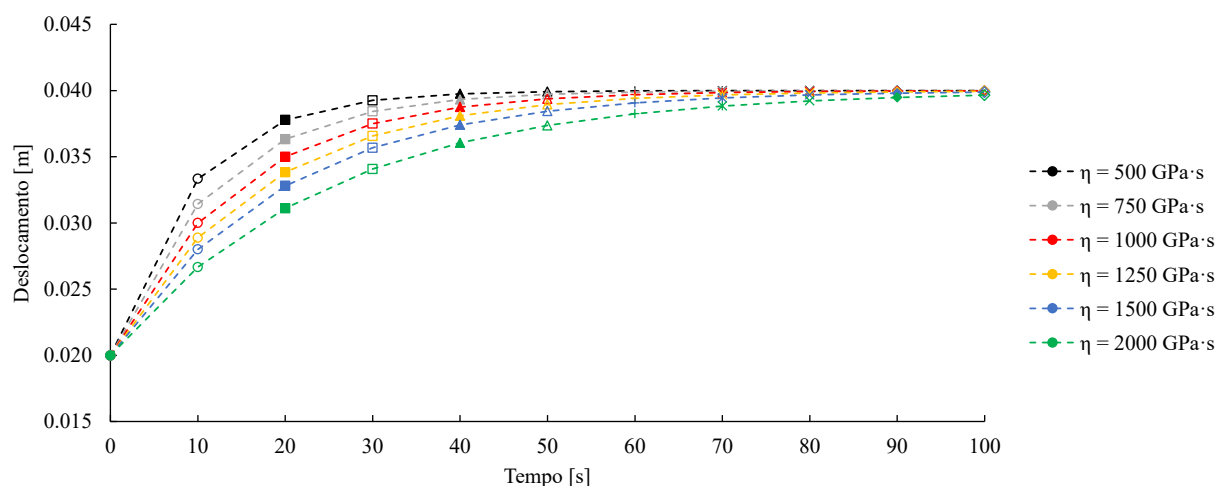


Figura 7-11: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do módulo de viscosidade η

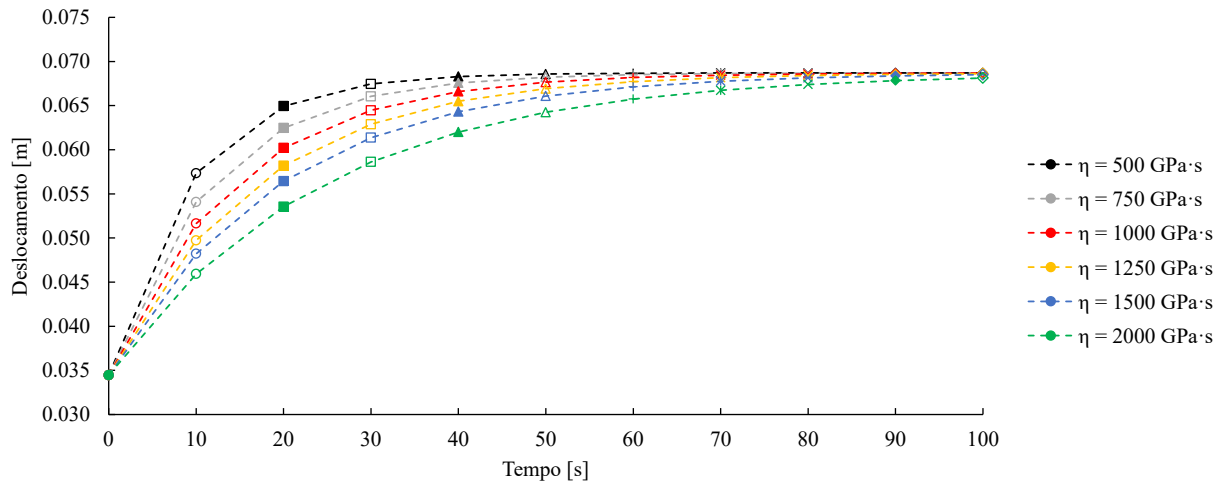


Figura 7-12: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do módulo de viscosidade η

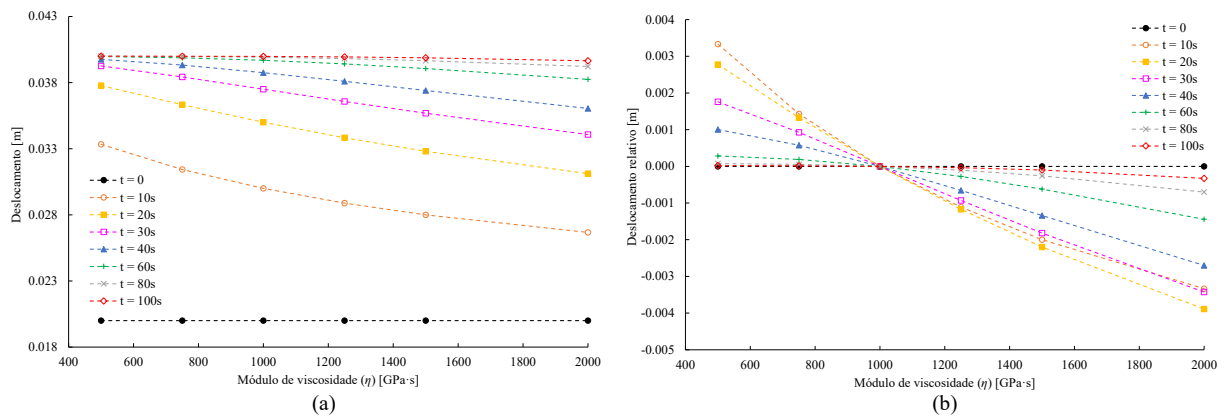


Figura 7-13: (a) Deslocamento axial absoluto e (b) deslocamento axial relativo da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do módulo de viscosidade η

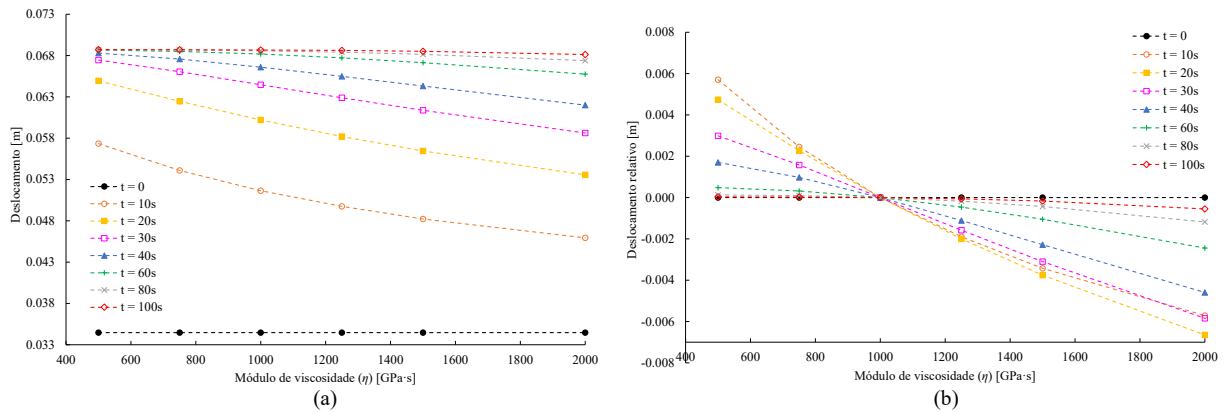


Figura 7-14: (a) Deslocamento transversal absoluto e (b) deslocamento transversal relativo no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do módulo de viscosidade η

A partir dos resultados apresentados nas Figuras 7-11 a 7-14, é possível observar que o modelo de Boltzmann apresenta uma relação não linear entre os deslocamentos e o módulo de viscosidade η . Essa relação pode ser observada de forma mais clara a partir dos gráficos de sensibilidade apresentados na Figura 7-13, para a barra tracionada, e na Figura 7-14, para a viga biapoiada.

A partir dos gráficos de sensibilidade, apresentados nas Figuras 7-13 (a) e 7-14 (a), é possível observar que a redução do módulo de viscosidade η resulta em uma elevação nos deslocamentos para os instantes de tempo intermediários. Essa redução resulta em materiais menos viscosos, ou seja, materiais que apresentam menor resistência a evolução dos deslocamentos ao longo do tempo. Além disso, é possível perceber que os deslocamentos elásticos instantâneos e os deslocamentos viscoelásticos finais não são afetados pelas alterações no módulo de viscosidade η . Esse resultado é consistente, visto que a resposta elástica instantânea do modelo de Boltzmann é definida apenas pelo módulo de elasticidade E_1 e a resposta viscoelástica final é definida pela associação em série entre a mola com módulo de elasticidade E_1 e mola com módulo de elasticidade E_2 , como apresentado no item 4.3.

Alterações no módulo de viscosidade η interferem na taxa de evolução dos deslocamentos, ou seja, alteram o perfil de evolução, caracterizando o comportamento amortecido. Entretanto, essas alterações não modificam os valores de deslocamento instantâneo e final (para um período de tempo suficientemente grande). Utilizando-se como referência os deslocamentos obtidos com módulo de viscosidade η igual a 1000 GPa·s, é possível observar que, se considerado um período de tempo suficientemente grande, os deslocamentos relativos instantâneos e os deslocamentos relativos finais são nulos, como apresentado nas Figuras 7-13 (b) e 7-14 (b). Além disso, é possível observar que para os instantes iniciais as alterações no módulo de viscosidade η resultam em variações mais acentuadas dos deslocamentos, enquanto, para os instantes finais essas variações são mais suaves. Por fim, é possível observar que os perfis dessas variações apresentam curvatura com concavidade voltada para cima nos instantes iniciais da análise e curvatura com concavidade voltada para baixo nos instantes finais da análise, como destacado pelas curvas para $t = 10$ s e para $t = 60$ s nas Figuras 7-13 (b) e 7-14 (b). Esse comportamento revela uma tendência de suavização da variação dos deslocamentos iniciais da análise com o aumento do módulo de viscosidade η e uma tendência de suavização da variação dos deslocamentos finais da análise com a redução desse mesmo parâmetro.

7.1.4 Influência do coeficiente de Poisson ν

Esta análise se refere à avaliação da influência do coeficiente de Poisson ν do modelo de Boltzmann, sendo os demais parâmetros mantidos conforme descrito no item 7.1. Para tanto, são avaliados os resultados obtidos considerando-se o coeficiente de Poisson ν igual a 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5. Dessa forma, na Figura 7-15 são apresentados os resultados de deslocamento axial da extremidade livre da barra, apresentada na Figura 7-1, ao longo do tempo, e na Figura 7-16 são apresentados os resultados de deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga, apresentada na Figura 7-2, ao longo do tempo.

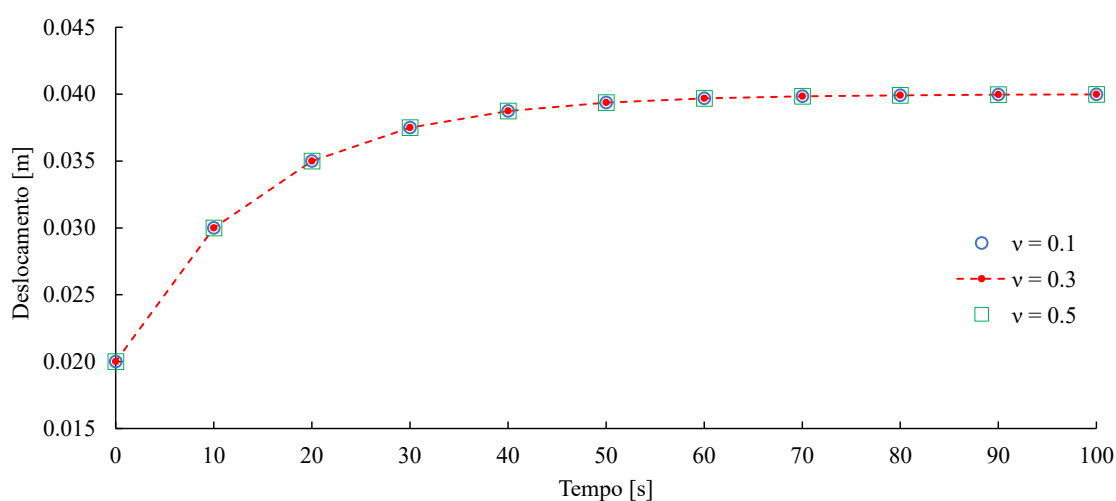


Figura 7-15: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do coeficiente de Poisson ν

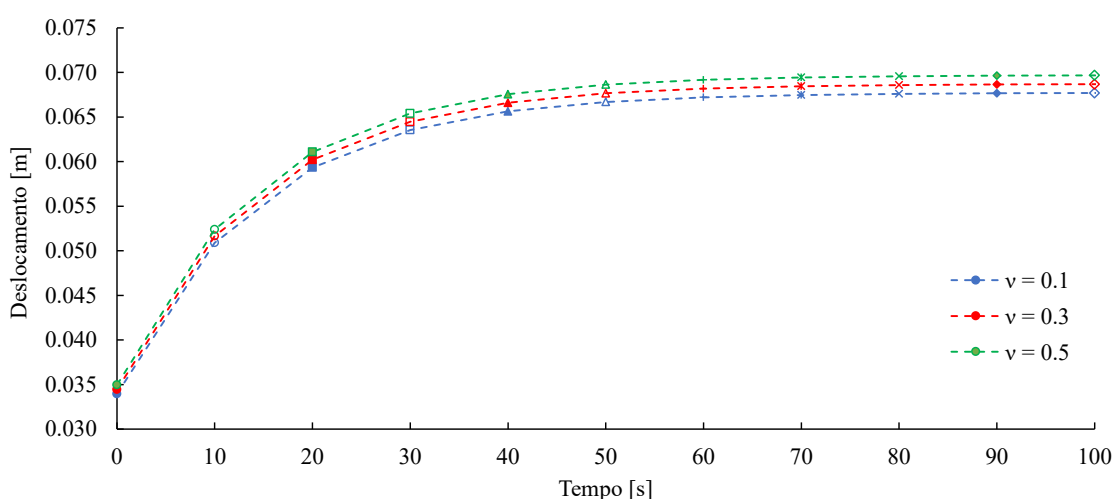


Figura 7-16: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do coeficiente de Poisson ν

A partir dos resultados apresentados na Figura 7-15, é possível observar que a variação no coeficiente de Poisson não interfere nos deslocamentos da barra tracionada. Esse resultado é consistente, visto que o coeficiente de Poisson, no presente estudo, está relacionado apenas aos efeitos do cisalhamento.

A partir dos resultados apresentados na Figura 7-16, é possível observar uma relação linear entre os deslocamentos e o coeficiente de Poisson ν , no caso da viga biapoiada. Essa relação pode ser observada de forma mais clara a partir dos gráficos de sensibilidade apresentados na Figura 7-17.

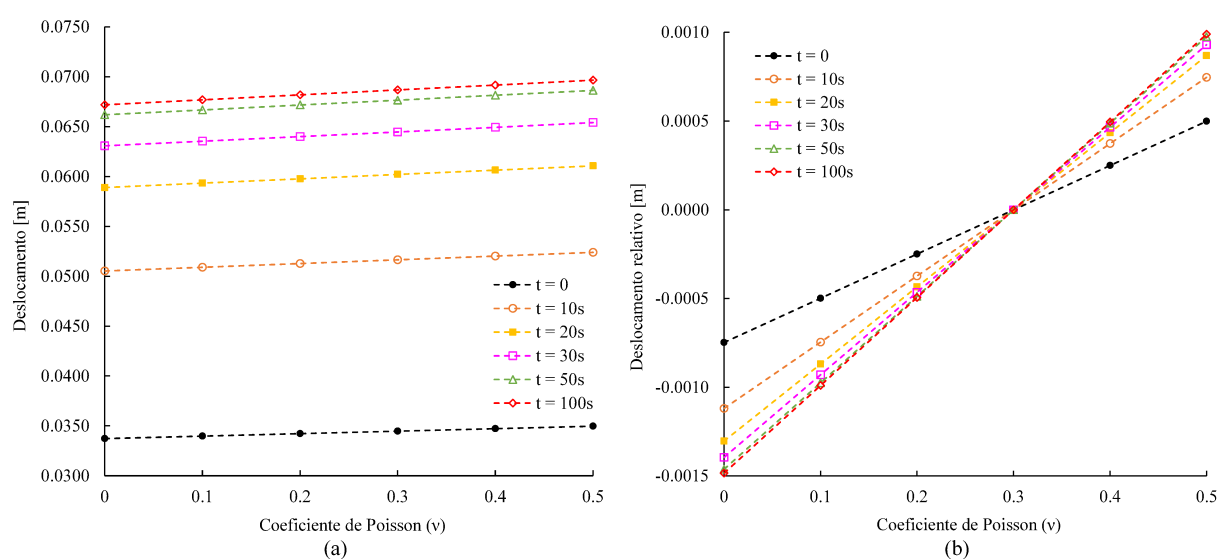


Figura 7-17: (a) Deslocamento transversal absoluto e (b) deslocamento transversal relativo no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do coeficiente de Poisson ν

A partir da Figura 7-17 (a), é possível observar que apesar da relação linear entre os deslocamentos e o coeficiente de Poisson, essa relação não é a mesma para todos os instantes de tempo. Portanto, utilizando-se como referência os deslocamentos obtidos com coeficiente de Poisson igual a 0,3, como apresentado na Figura 7-17 (b), é possível observar que os deslocamentos em cada instante de tempo variam linearmente com a variação do coeficiente de Poisson, porém, de forma mais acentuada nos instantes finais. Por fim, é importante observar que tanto os deslocamentos instantâneos quanto os deslocamentos ao longo do tempo variam com as alterações do coeficiente de Poisson e de formas distintas. Esse resultado explicita a capacidade da formulação desenvolvida em avaliar os efeitos do cisalhamento no comportamento viscoelástico.

Além disso, é importante notar que, apesar da inconsistência física na adoção de um coeficiente de Poisson igual a 0,5, não se observa uma inconsistência numérica. Este fato se

deve à consideração de elementos de pórtico unidimensionais com desacoplamento entre os efeitos do esforço normal e os efeitos do esforço cisalhante, em que as relações tensão-deformação são dadas por exemplo pelas Equações (5-61), (5-67) e (5-72). Portanto, o coeficiente de Poisson é considerado apenas para avaliar os parâmetros associados ao cisalhamento por meio do segundo parâmetro de Lamé, enquanto, o primeiro parâmetro de Lamé, utilizado normalmente na relação de isotropia, não é considerado na formulação desenvolvida.

7.1.5 Comparação entre os modelos reológicos e correlação entre seus parâmetros

As análises apresentadas nos subitens 7.1.1 a 7.1.4 podem ser desenvolvidas de forma análoga para os demais modelos adotados neste estudo. Entretanto, guardadas as devidas restrições e características de cada modelo, as relações entre os deslocamentos obtidos e as variações dos parâmetros envolvidos se manterão semelhantes. Inclusive, é possível obter correlações entre os parâmetros envolvidos em cada modelo de forma que ambos possam representar o comportamento de um mesmo material, como é demonstrado neste item. Os parâmetros dos diferentes modelos, apesar de apresentarem diferentes valores, mantêm o mesmo significado físico e, dessa forma, mantêm relações semelhantes às apresentadas nos subitens 7.1.1 a 7.1.4.

Considerando-se os casos da barra tracionada, apresentada na Figura 7-1, e da viga biapoiada, apresentada na Figura 7-2, é possível obter os resultados apresentados nas Figuras 7-18 e 7-19, adotando-se adequados parâmetros para os diferentes modelos reológicos. Como referência, são considerados os resultados de deslocamento obtidos adotando-se o modelo de Boltzmann, com módulo de elasticidade E_1 igual a 100 GPa, módulo de elasticidade E_2 igual a 100 GPa e módulo de viscosidade η igual a 1000 GPa·s. Os parâmetros dos demais modelos são determinados de forma a reproduzir o comportamento deste.

Inicialmente, como apresentado nas Figuras 7-18 e 7-19, utilizando-se o modelo de Boltzmann com os referidos parâmetros, é obtido um comportamento descrito por um deslocamento elástico instantâneo seguido por um deslocamento viscoelástico ao longo do tempo.

Na sequência, utilizando-se o modelo de Zener, considerando-se os mesmos parâmetros do modelo de Boltzmann ($E_1 = 100$ GPa, $E_2 = 100$ GPa e $\eta = 1000$ GPa·s), também é possível

obter um comportamento descrito por um deslocamento elástico instantâneo seguido por um deslocamento viscoelástico ao longo do tempo, porém, com valores numericamente diferentes aos do modelo de Boltzmann, como pode ser observado nas Figuras 7-18 e 7-19. Em relação a resposta elástica instantânea, a diferença se deve ao fato desta ser definida no modelo de Boltzmann pelo módulo de elasticidade E_1 , enquanto, no modelo de Zener esta é definida pela associação em paralelo entre os módulos de elasticidade E_1 e E_2 . Em relação a resposta viscoelástica final, a diferença se deve ao fato desta ser definida no modelo de Boltzmann pela associação em série entre os módulos de elasticidade E_1 e E_2 , enquanto, no modelo de Zener esta é definida pelo módulo de elasticidade E_2 .

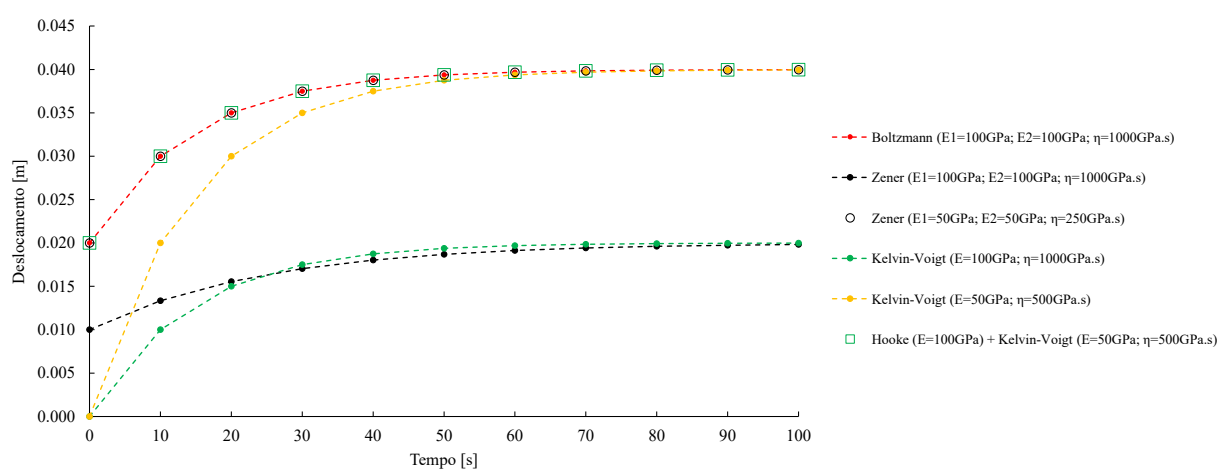


Figura 7-18: Respostas dos diferentes modelos para o caso da barra tracionada

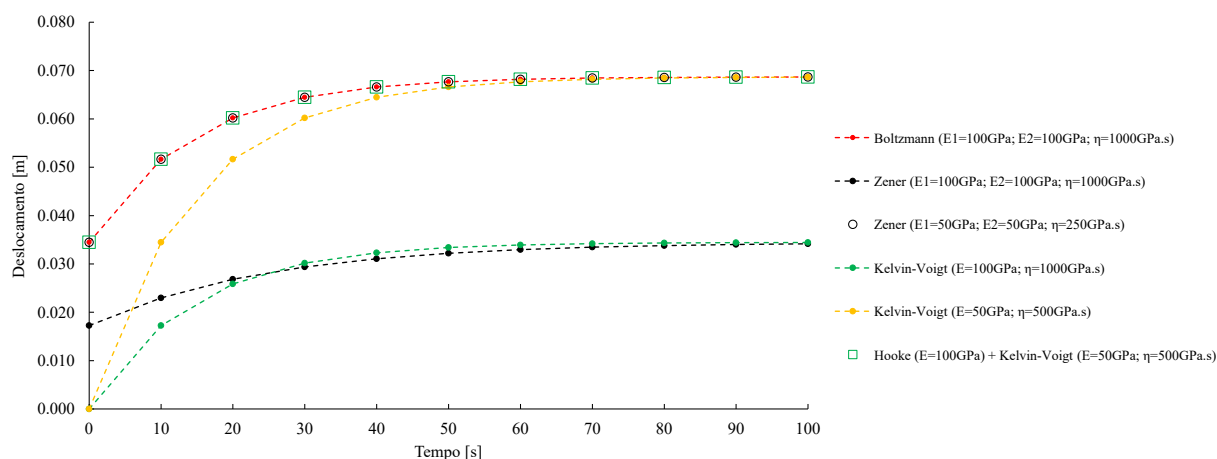


Figura 7-19: Respostas dos diferentes modelos para o caso da viga biapoada

Dessa forma, para compatibilizar os modelos, ou seja, para que ambos descrevam o mesmo comportamento numericamente, as relações entre os parâmetros devem ser estabelecidas. Para tanto, é necessário considerar as seguintes equações desenvolvidas no Capítulo 4:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E^K} \left(1 - e^{-\frac{E^K}{\eta^K} t} \right) \quad (7-1)$$

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\sigma_0}{E_1^B} - \frac{E_1^B + E_2^B}{E_2^B E_1^B} \sigma_0 \right) e^{-\frac{E_2^B}{\eta^B} t} + \frac{E_1^B + E_2^B}{E_2^B E_1^B} \sigma_0 \quad (7-2)$$

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{\sigma_0}{E_1^Z + E_2^Z} - \frac{\sigma_0}{E_2^Z} \right) e^{-\frac{E_1^Z E_2^Z}{\eta^Z (E_1^Z + E_2^Z)} t} + \frac{\sigma_0}{E_2^Z} \quad (7-3)$$

respectivamente, para os modelos de Kelvin-Voigt, de Boltzmann e de Zener, em que os sobrescritos K , B e Z se referem aos respectivos modelos.

A partir das Equações (7-2) e (7-3), para os modelos de Boltzmann e de Zener apresentarem os mesmos valores de resposta elástica instantânea (em $t = 0$) é necessário que a seguinte relação seja satisfeita:

$$E_1^B = E_1^Z + E_2^Z \quad (7-4)$$

De forma análoga, a partir das Equações (7-2) e (7-3), para os modelos de Boltzmann e de Zener apresentarem os mesmos valores de resposta viscoelástica final (em $t \rightarrow \infty$) é necessário que a seguinte relação seja satisfeita:

$$E_2^Z = \frac{E_1^B E_2^B}{E_1^B + E_2^B} \quad (7-5)$$

Por fim, a partir das Equações (7-2) e (7-3), para os modelos de Boltzmann e de Zener apresentarem a mesma taxa de variação ao longo do tempo é necessário que a seguinte relação seja satisfeita:

$$\frac{E_2^B}{\eta^B} = \frac{E_1^Z E_2^Z}{\eta^Z (E_1^Z + E_2^Z)} \quad (7-6)$$

Considerando-se as Equações (7-4) e (7-5), a Equação (7-6) pode ser reescrita como:

$$\eta^Z = \eta^B \frac{E_1^Z}{E_1^B + E_2^B} \quad (7-7)$$

A partir da Equação (7-5), considerando-se os parâmetros numéricos do modelo de Boltzmann, tem-se:

$$E_2^Z = \frac{E_1^B E_2^B}{E_1^B + E_2^B} = \frac{100 \text{ GPa} \cdot 100 \text{ GPa}}{100 \text{ GPa} + 100 \text{ GPa}} = 50 \text{ GPa} \quad (7-8)$$

A partir da Equação (7-4), considerando-se os parâmetros numéricos do modelo de Boltzmann e o resultado da Equação (7-8), tem-se:

$$E_1^Z = E_1^B - E_2^Z = 100 \text{ GPa} - 50 \text{ GPa} = 50 \text{ GPa} \quad (7-9)$$

Por fim, a partir da Equação (7-7), considerando-se os parâmetros numéricos do modelo de Boltzmann e o resultado da Equação (7-9), tem-se:

$$\eta^Z = \eta^B \frac{E_1^Z}{E_1^B + E_2^B} = 1000 \text{ GPa} \cdot \text{s} \frac{50 \text{ GPa}}{100 \text{ GPa} + 100 \text{ GPa}} = 250 \text{ GPa} \cdot \text{s} \quad (7-10)$$

A partir dos parâmetros calculados para o modelo de Zener é possível obter a resposta ao longo do tempo para os dois casos propostos, assim como apresentado nas Figuras 7-18 e 7-19. Como pode ser observado, essas respostas são idênticas às obtidas com o modelo de Boltzmann.

Considerando-se, agora, o modelo de Kelvin-Voigt com os mesmos parâmetros do modelo de Boltzmann ($E = 100 \text{ GPa}$ e $\eta = 1000 \text{ GPa} \cdot \text{s}$), tem-se as curvas apresentadas nas Figuras 7-18 e 7-19. Como pode ser observado, o modelo de Kelvin-Voigt não é capaz de representar uma resposta elástica instantânea, apenas uma resposta viscoelástica ao longo do tempo. Além disso, a resposta viscoelástica final também não é igual a obtida pelo modelo de Boltzmann.

A partir das Equações (7-1) e (7-2), é possível observar que para a resposta viscoelástica final (em $t \rightarrow \infty$) do modelo de Kelvin-Voigt ser igual a obtida pelo modelo de Boltzmann é necessário que a seguinte relação seja satisfeita:

$$E^K = \frac{E_1^B E_2^B}{E_1^B + E_2^B} \quad (7-11)$$

Dessa forma, considerando-se os parâmetros do modelo de Boltzmann, tem-se:

$$E^K = \frac{E_1^B E_2^B}{E_1^B + E_2^B} = \frac{100 \text{ GPa} \cdot 100 \text{ GPa}}{100 \text{ GPa} + 100 \text{ GPa}} = 50 \text{ GPa} \quad (7-12)$$

Por fim, a partir das Equações (7-1) e (7-2), para os modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann apresentarem a mesma taxa de variação ao longo do tempo é necessário que a seguinte relação seja satisfeita:

$$\frac{E_2^B}{\eta^B} = \frac{E^K}{\eta^K} \quad (7-13)$$

Dessa forma, considerando-se os parâmetros do modelo de Boltzmann e a resposta da Equação (7-12), tem-se:

$$\eta^K = \eta^B \frac{E^K}{E_2^B} = 1000 \text{ GPa} \cdot \text{s} \frac{50 \text{ GPa}}{100 \text{ GPa}} = 500 \text{ GPa} \quad (7-14)$$

Considerando-se, então, o modelo de Kelvin-Voigt com os parâmetros calculados ($E = 50 \text{ GPa}$ e $\eta = 500 \text{ GPa} \cdot \text{s}$), tem-se as curvas apresentadas nas Figuras 7-18 e 7-19. Como pode ser observado, o modelo de Kelvin-Voigt continua não sendo capaz de representar uma resposta elástica instantânea, apenas uma resposta viscoelástica ao longo do tempo. Porém, a resposta viscoelástica final é igual a obtida pelo modelo de Boltzmann.

Para introduzir uma resposta elástica instantânea ao modelo de Kelvin-Voigt uma estratégia de cálculo simples é adotada, como descrito a seguir. Inicialmente considera-se um modelo de Hooke (modelo elástico), com módulo de elasticidade adequado à resposta elástica instantânea requerida, sendo solicitado isoladamente. Em seguida, considera-se que, a partir da obtenção da resposta elástica instantânea o modelo de Kelvin-Voigt passa a ser solicitado isoladamente, com os parâmetros adequados à taxa de deformação e à resposta viscoelástica final requeridas. Dessa forma, para os dois casos analisados, pode-se utilizar um modelo de Hooke, com módulo de elasticidade E igual a 100 GPa , sendo solicitado isoladamente em $t = 0$ e um modelo de Kelvin-Voigt, com módulo de elasticidade E igual a 50 GPa e módulo de viscosidade η igual a $500 \text{ GPa} \cdot \text{s}$, sendo solicitado isoladamente em $t > 0$. Os resultados obtidos dessa forma são apresentados nas Figuras 7-18 e 7-19 e, como pode ser observado, são idênticos aos obtidos com os modelos de Boltzmann e de Zener.

Os desenvolvimentos e resultados apresentados neste item utilizam com referência o modelo de Boltzmann, ou seja, são apresentadas expressões para obtenção dos parâmetros dos modelos de Zener e de Kelvin-Voigt em termos dos parâmetros do modelo de Boltzmann. De forma análoga, podem ser desenvolvidas expressões de correlação entre os parâmetros

utilizando-se o modelo de Zener ou o modelo de Kelvin-Voigt como referência. Dessa forma, na Figura 7-20 é apresentado um quadro com as expressões de correlação entre os parâmetros dos diferentes modelos.

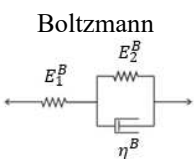
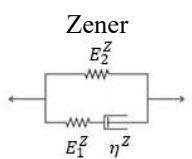
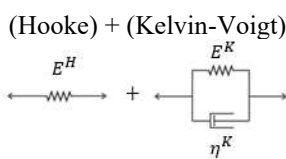
		Modelos reológicos de referência			
		Boltzmann 	Zener 	(Hooke) + (Kelvin-Voigt) 	
Parâmetros correlacionados	Boltzmann	E_1^B	E_1^B	$E_1^Z + E_2^Z$	E^H
		E_2^B	E_2^B	$\frac{(E_1^Z + E_2^Z)E_2^Z}{E_1^Z}$	$\frac{E^H E^K}{E^H - E^K}$
		η^B	η^B	$\frac{\eta^Z (E_1^Z + E_2^Z) E_2^B}{E_1^Z E_2^Z}$	$\eta^K \frac{E_2^B}{E^K}$
	Zener	E_1^Z	$E_1^B - E_2^Z$	E_1^Z	$E^H - E_2^Z$
		E_2^Z	$\frac{E_1^B E_2^B}{E_1^B + E_2^B}$	E_2^Z	E^K
		η^Z	$\eta^B \frac{E_1^Z}{E_1^B + E_2^B}$	η^B	$\frac{\eta^K E^H}{E_1^Z (E^K)^2}$
	(Hooke) + (Kelvin-Voigt)	E^H	E_1^B	$E_1^Z + E_2^Z$	E^H
		E^K	$\frac{E_1^B E_2^B}{E_1^B + E_2^B}$	E_2^Z	E^K
		η^K	$\eta^B \frac{E^K}{E_2^B}$	$\frac{\eta^Z (E_1^Z + E_2^Z) E^K}{E_1^Z E_2^Z}$	η^K

Figura 7-20: Correlação entre os parâmetros dos diferentes modelos adotados

7.1.6 Influência do número de pontos de Gauss ao longo do comprimento

Os resultados apresentados nos subitens 7.1.1 a 7.1.5 se referem às análises das influências dos parâmetros dos modelos reológicos, que representam as propriedades físicas dos materiais, no comportamento viscoelástico utilizando-se a formulação desenvolvida neste estudo. Nos subitens 7.1.6 a 7.1.9 são apresentadas as análises das influências dos parâmetros numéricos relacionados às discretizações espacial e temporal.

Esta primeira análise da influência dos parâmetros numéricos se refere à avaliação da influência do número de pontos de Gauss ao longo do comprimento dos elementos finitos, sendo os demais parâmetros mantidos conforme descrito no item 7.1. Para tanto, são avaliados os resultados obtidos considerando-se 2, 6, 10 e 18 pontos de Gauss ao longo do comprimento dos elementos finitos. Dessa forma, na Figura 7-21 são apresentados os resultados de deslocamento axial ao longo do tempo da extremidade livre da barra, apresentada na Figura 7-1, e na Figura 7-22 são apresentados os resultados de deslocamento transversal (flecha) ao longo do tempo no meio do vão da viga, apresentada na Figura 7-2.

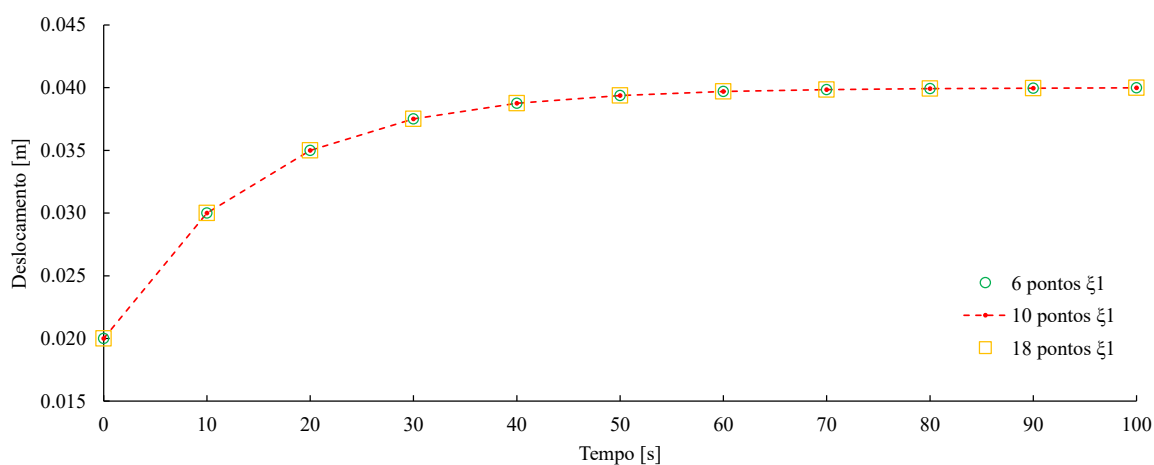


Figura 7-21: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do número de pontos de Gauss ao longo do comprimento dos elementos

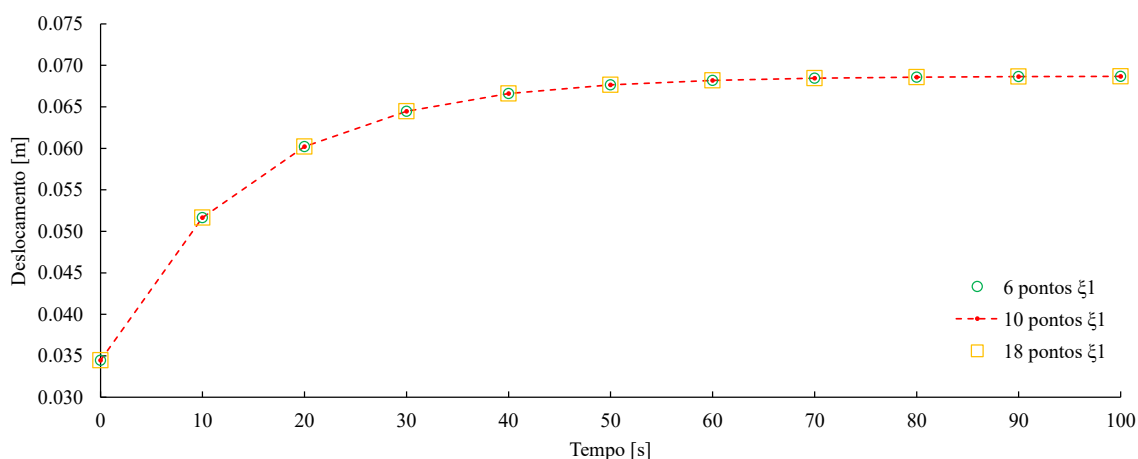


Figura 7-22: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do número de pontos de Gauss ao longo do comprimento dos elementos

A partir das Figuras 7-21 e 7-22 é possível observar que os resultados de deslocamento não apresentam dependência em relação ao número de pontos de Gauss ao longo do comprimento dos elementos finitos. Os resultados numéricos obtidos, tanto no caso da barra quanto no caso

da viga, são exatamente os mesmos para os diferentes números de pontos de Gauss adotados e apresentados. Entretanto, é importante acrescentar que adotando-se apenas 2 pontos de Gauss ao longo do comprimento não foi possível obter convergência no processo iterativo.

7.1.7 Influência do número de pontos de Gauss ao longo da altura

Esta análise se refere à avaliação da influência do número de pontos de Gauss ao longo da altura dos elementos finitos, sendo os demais parâmetros mantidos conforme descrito no item 7.1. Para tanto, são avaliados os resultados obtidos considerando-se 2, 6, 10 e 18 pontos de Gauss ao longo da altura dos elementos finitos. Dessa forma, na Figura 7-23 são apresentados os resultados de deslocamento axial ao longo do tempo da extremidade livre da barra, apresentada na Figura 7-1, e na Figura 7-24 são apresentados os resultados de deslocamento transversal (flecha) ao longo do tempo no meio do vão da viga, apresentada na Figura 7-2.

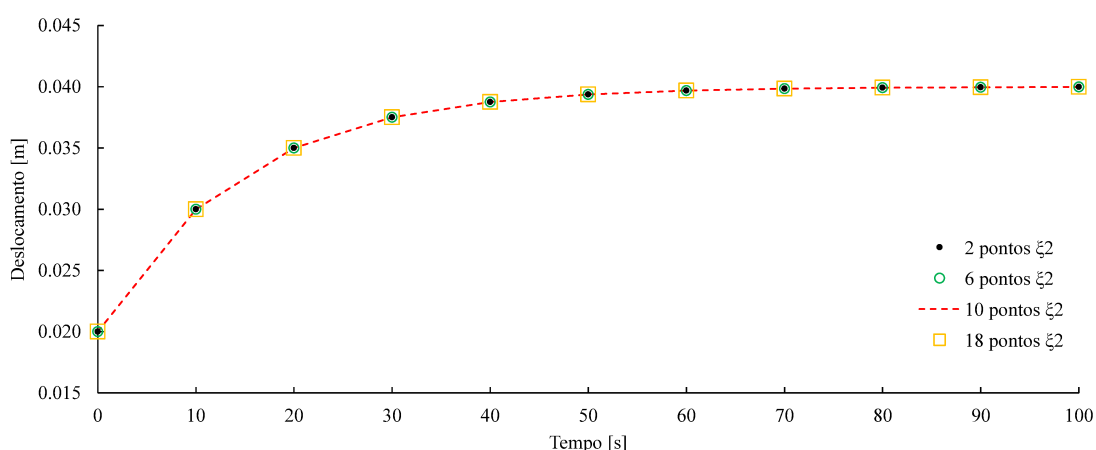


Figura 7-23: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do número de pontos de Gauss ao longo da altura dos elementos

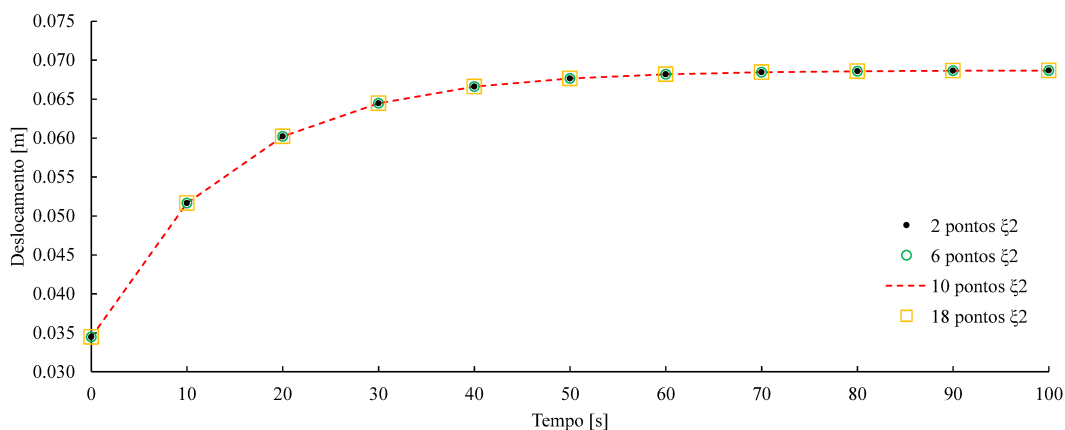


Figura 7-24: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do número de pontos de Gauss ao longo da altura dos elementos

A partir das Figuras 7-23 e 7-24 é possível observar que os resultados de deslocamento não apresentam dependência em relação ao número de pontos de Gauss ao longo da altura dos elementos finitos. Os resultados numéricos obtidos, tanto no caso da barra quanto no caso da viga, são exatamente os mesmos para os números de pontos de Gauss adotados e apresentados. Uma diferença sensível nos resultados numéricos, na ordem de 10^{-9} m, é observada adotando-se apenas 2 pontos de Gauss ao longo da altura. Essa diferença é inferior a tolerância de cálculo sendo, portanto, atribuída ao procedimento de verificação do critério de convergência. Entretanto, é importante destacar que, apesar dessa independência observada entre os resultados numéricos e o número de pontos de Gauss ao longo da altura dos elementos finitos, devido aos procedimentos para consideração de seções transversais laminadas, como apresentado no subitem 5.5.2, a adoção de um número maior de pontos de Gauss permite a avaliação dos parâmetros em pontos distintos ao longo da altura de uma forma mais precisa e possibilita a análise de seções transversais com geometrias mais complexas.

7.1.8 Influência do número de elementos finitos (discretização espacial)

Esta análise se refere à avaliação da influência da discretização espacial propriamente dita, sendo os demais parâmetros mantidos conforme descrito no item 7.1. Para tanto, são avaliados os resultados obtidos considerando-se 2, 10, 16 e 64 elementos finitos na discretização. Dessa forma, na Figura 7-25 são apresentados os resultados de deslocamento axial ao longo do tempo da extremidade livre da barra, apresentada na Figura 7-1, e na Figura 7-26 são apresentados os resultados de deslocamento transversal (flecha) ao longo do tempo no meio do vão da viga, apresentada na Figura 7-2.

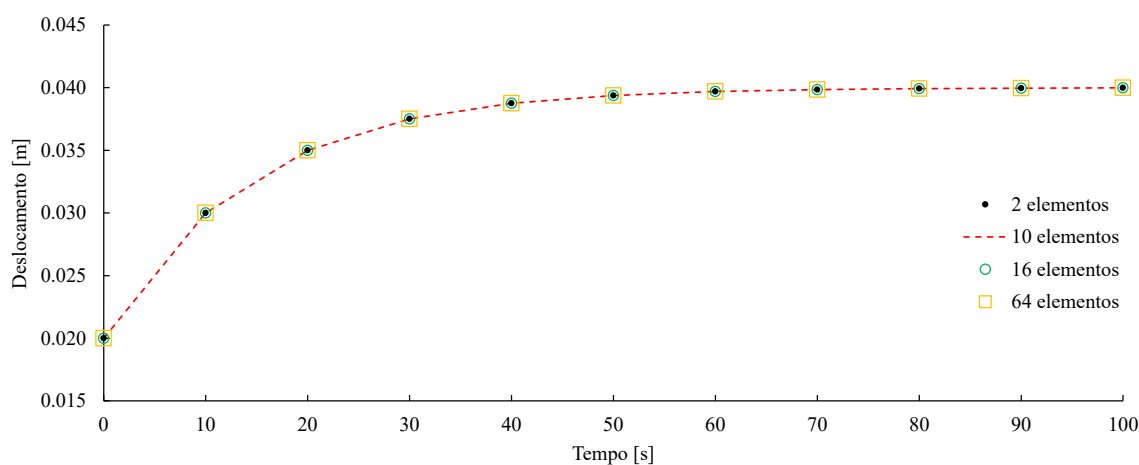


Figura 7-25: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do número de elementos

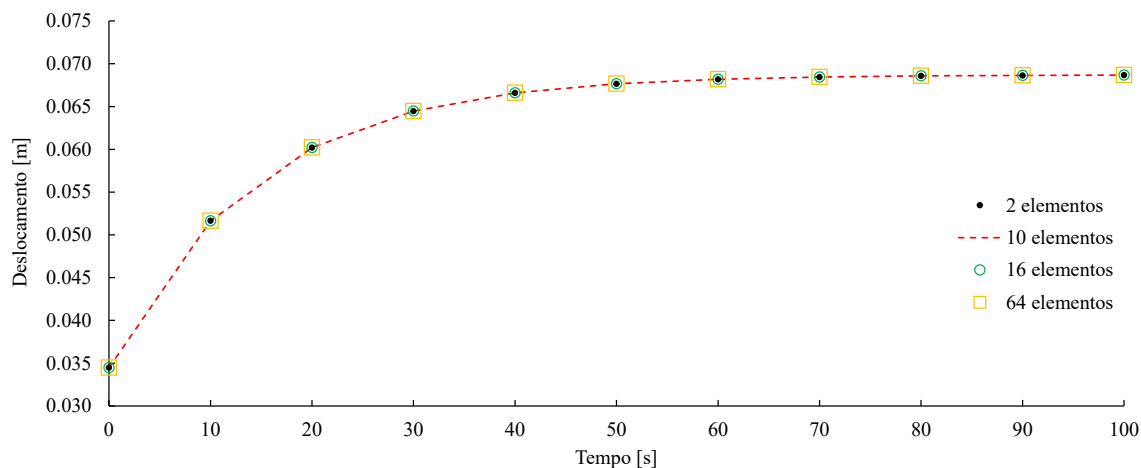


Figura 7-26: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do número de elementos

A partir das Figuras 7-25 e 7-26 é possível observar que, para os casos analisados, os resultados de deslocamento não apresentam dependência significativa em relação ao número de elementos finitos adotados na discretização. Os resultados numéricos obtidos no caso da barra tracionada são exatamente os mesmos para os diferentes números de elementos finitos adotados e apresentados. Entretanto, no caso da viga biapoiada é observada uma variação sensível nos resultados numéricos, com uma tendência de convergência com o aumento do número de elementos finitos. Entre os resultados numéricos com dois e dez elementos a diferença é da ordem de 10^{-5} m, entre os resultados numéricos com dez e dezesseis elementos a diferença é da ordem de 10^{-9} m e, finalmente, entre os resultados numéricos com dezesseis e sessenta e quatro elementos a diferença é da ordem de 10^{-10} m.

7.1.9 Influência do passo de tempo adotado (discretização temporal)

Esta última análise se refere à avaliação da influência da discretização temporal, sendo os demais parâmetros mantidos conforme descrito no item 7.1. Para tanto, são avaliados os resultados obtidos considerando-se passos de tempo iguais a 1 s, 5 s, 10 s, 15 s e 20 s. Dessa forma, na Figura 7-27 são apresentados os resultados de deslocamento axial ao longo do tempo da extremidade livre da barra, apresentada na Figura 7-1, e na Figura 7-28 são apresentados os resultados de deslocamento transversal (flecha) ao longo do tempo no meio do vão da viga, apresentada na Figura 7-2.

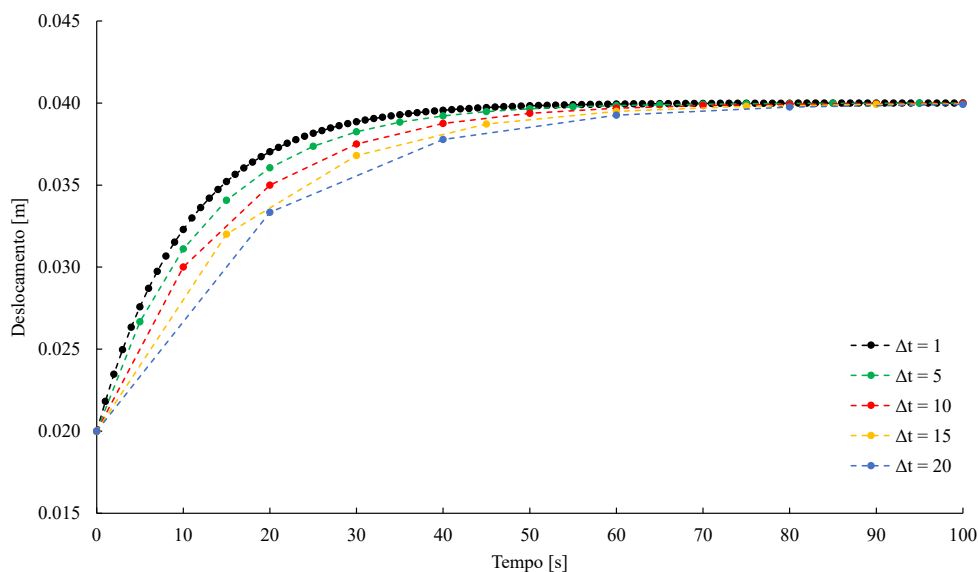


Figura 7-27: Deslocamento axial da extremidade livre da barra ao longo do tempo e em função do passo de tempo adotado

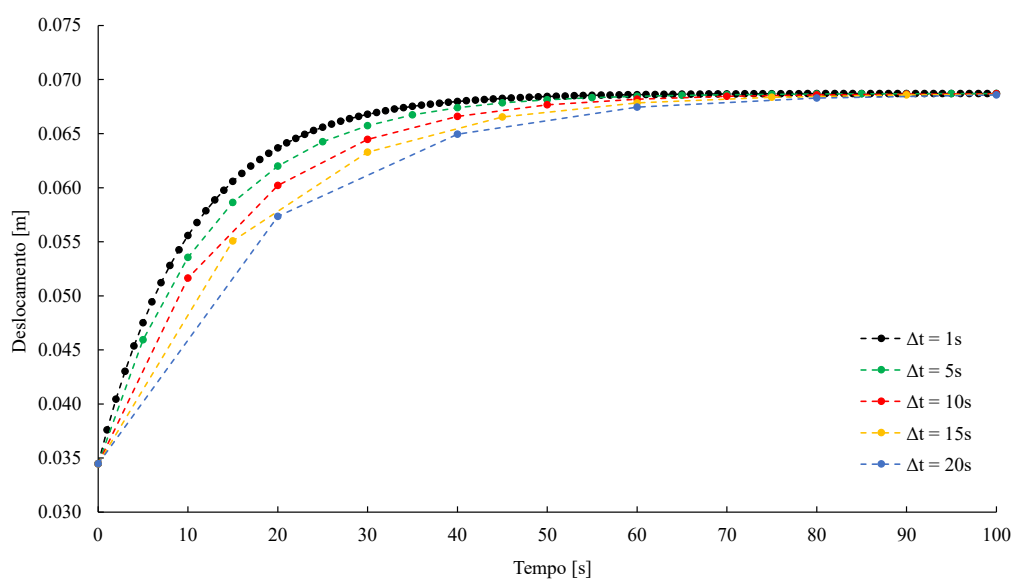


Figura 7-28: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função do passo de tempo adotado

A partir das Figuras 7-27 e 7-28 é possível observar uma dependência dos resultados de deslocamento em relação à discretização temporal. É possível observar, ainda, uma tendência de convergência dos resultados com o refinamento dessa discretização, ou seja, com a redução do passo de tempo e o aumento do número de passos de tempo em uma mesma análise. Esses resultados são consistentes com a abordagem adotada para avaliação das taxas de deformação, baseada no Método das Diferenças Finitas, e estão de acordo com os resultados obtidos em trabalhos de diferentes autores como em Mesquita (2002) e Oliveira (2017), que adotam abordagem semelhante.

Como pode ser observado nas Figuras 7-27 e 7-28, com o aumento do passo de tempo, a resposta elástica instantânea não se altera, assim como a resposta viscoelástica final, para um intervalo de tempo suficientemente grande. Entretanto, para instantes de tempo intermediários, com o aumento do passo de tempo, os resultados tendem a se afastar da resposta esperada. Apresentando, nos casos analisados, diferenças mais acentuadas nos instantes iniciais, abaixo de 50 s, e diferenças menos acentuadas nos instantes finais, acima de 50 s. Essa dependência observada entre os resultados de deslocamento e o passo de tempo revela uma questão de adequação dos parâmetros numéricos aos objetivos das análises. Dessa forma, quando o objetivo de uma análise é avaliar os resultados de deslocamento viscoelástico em períodos curtos de tempo, deve-se adotar passos de tempo menores, porém, a análise tende a apresentar um custo computacional maior devido à necessidade da utilização de um número maior de passos de tempo. No entanto, quando o objetivo de uma análise é avaliar os resultados de deslocamento em períodos longos de tempo, pode-se adotar passos de tempo maiores a fim de reduzir o custo computacional e, conseqüentemente, reduzir o tempo de processamento, com uma perda aceitável na precisão dos resultados. Por exemplo, para o caso da viga biapoiada com força vertical centrada, utilizando-se um código computacional desenvolvido em Fortran, adotando-se 200 passos de tempo iguais a 1 s o tempo de processamento é de aproximadamente 78 s, enquanto, adotando-se 10 passos de tempo iguais a 20 s o tempo de processamento é de aproximadamente 18 s.

7.2 Exemplos gerais

Como segunda parte da avaliação da consistência e capacidade da formulação desenvolvida, são apresentados neste item alguns exemplos a fim de comparar os resultados obtidos com a cinemática de Reissner, os resultados obtidos com a cinemática de Bernoulli-Euler e os resultados analíticos e numéricos disponíveis na literatura.

7.2.1 Vigas curtas sob flexão de três pontos

Neste subitem é analisada uma viga biapoiada com força vertical centrada, como apresentada na Figura 7-29, sendo consideradas diferentes medidas de altura da seção transversal. Dessa forma, comparando-se os resultados obtidos utilizando-se as formulações viscoelásticas desenvolvidas com base nas cinemáticas de Reissner e de Bernoulli-Euler, é possível avaliar os efeitos do cisalhamento e do comportamento viscoelástico.

A viga apresentada na Figura 7-29 possui vão livre (L) igual a 2 m e seção transversal retangular com largura (b) igual a 0,10 m. Quanto à altura (h) da seção transversal, com objetivo de avaliar os efeitos do cisalhamento, são considerados cinco casos com medidas respectivamente iguais a 0,10 m, 0,20 m, 0,30 m, 0,40 m e 0,50 m. Além disso, a fim de manter o mesmo nível de tensão máxima (150 MPa) em cada caso, são adotadas intensidades de força aplicada (P) respectivamente iguais a 50 kN, 200 kN, 450 kN, 800 kN e 1250 kN. Essa abordagem é adotada apenas para manter os resultados de deslocamento em uma mesma ordem de grandeza, sendo os demais resultados e análise apresentados em forma percentual.

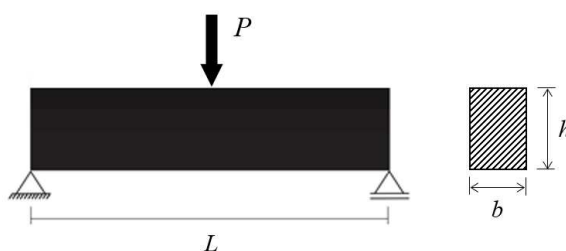


Figura 7-29: Viga biapoiada com força centrada

Em relação à discretização espacial, são adotados dez elementos finitos, com dez pontos de Gauss ao longo da altura e ao longo do comprimento. Em relação a discretização temporal, são adotados vinte passos de tempo iguais a 5 s. Além disso, o modelo reológico considerado para avaliação do comportamento viscoelástico é o de Boltzmann com módulo de elasticidade E_1 igual a 100 GPa, módulo de elasticidade E_2 igual a 400 GPa, módulo de viscosidade η igual a 5000 GPa·s e coeficiente de Poisson ν igual a 0,3. Por fim, é importante destacar que a força aplicada é considerada atuante desde o primeiro passo de tempo, sem a consideração de efeitos inerciais, e que a tolerância de cálculo adotada é de $1 \cdot 10^{-8}$ (absoluta em termos de variação das posições nodais).

Os resultados de deslocamento transversal (flecha) no meio do vão, ao longo do tempo, para cada um dos casos de altura da seção transversal e com cada uma das cinemáticas adotadas, são apresentados na Figura 7-30 e na Tabela 7-1. Adicionalmente, na Figura 7-30 e na Tabela 7-2 são apresentados os resultados analíticos. Tais resultados analíticos são obtidos a partir das equações sem a consideração dos efeitos do cisalhamento e com a consideração dos efeitos do cisalhamento expressas, respectivamente, por:

$$w(t) = \frac{P L^3}{4 b h^3} J(t) \quad (7-15)$$

$$w(t) = \frac{P L^3}{4 b h^3} \left[1 + 2 \frac{(1 + \nu)}{k} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] J(t) \quad (7-16)$$

em que w representa a flecha no meio do vão, k representa o fator de forma, determinado como $5/6$ para seções transversais retangulares, e $J(t)$ representa a função de fluência, expressa para o modelo de Boltzmann em série de Prony, assim como apresentado em Aköz e Kadioğlu (1999), por:

$$J(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2}{\eta} t} \right) \quad (7-17)$$

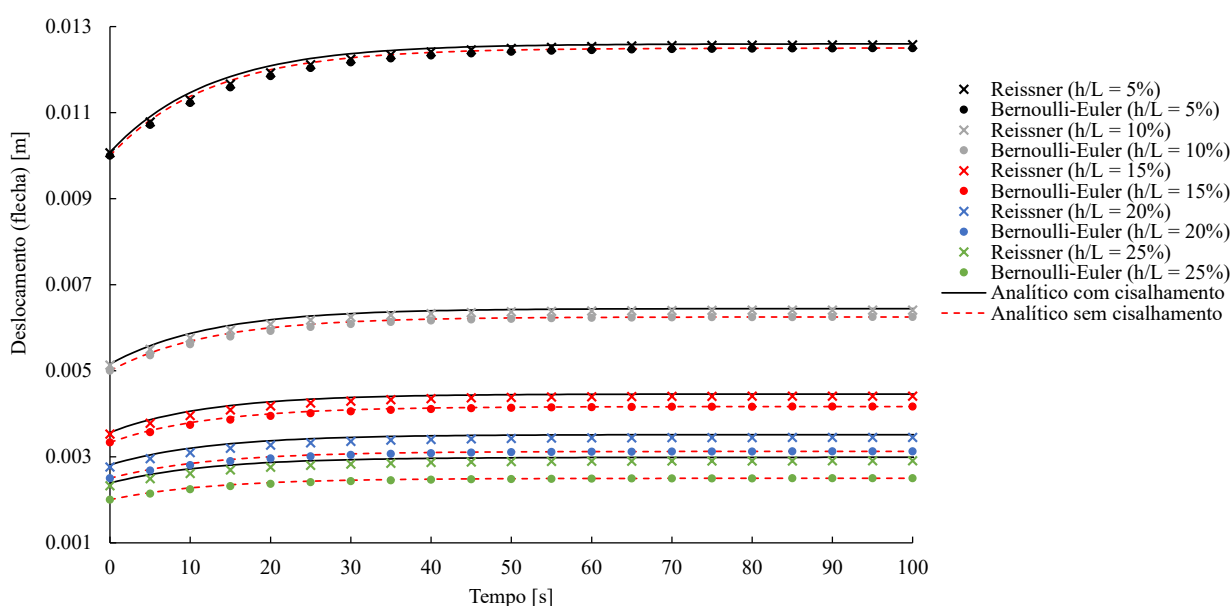


Figura 7-30: Deslocamento transversal (flecha) no meio do vão da viga ao longo do tempo e em função da relação altura/vão, utilizando-se duas cinemáticas distintas

A partir da Figura 7-30, comparando-se os respectivos resultados obtidos com as cinemáticas de Reissner e de Bernoulli-Euler, é possível observar que, assim como esperado, com o aumento da relação altura/vão os efeitos do cisalhamento são mais pronunciados, ou seja, a diferença entre os resultados com a cinemática de Reissner e os resultados com a cinemática de Bernoulli-Euler são maiores. Além disso, comparando-se os resultados numéricos e os resultados analíticos é possível observar uma concordância satisfatória entre os valores obtidos. Para o caso da cinemática de Bernoulli-Euler, é verificada uma diferença máxima entre os resultados numéricos e analíticos de flecha instantânea igual a 0.01 % e uma diferença máxima entre os resultados numéricos e analíticos de flecha final igual a 0.01 %. Para o caso da cinemática de Reissner, é verificada uma diferença máxima entre os resultados numéricos e

analíticos de flecha instantânea igual a 2,72 % e uma diferença máxima entre os resultados numéricos e analíticos de flecha final igual a 2,71 %. Quanto ao tempo de processamento, em média, cada uma das simulações durou aproximadamente 45 segundos. É importante destacar que não foi observado problema de travamento por cisalhamento (*shear-locking*), utilizando-se a formulação desenvolvida com a cinemática de Reissner.

Tabela 7-1: Resultados obtidos na análise viscoelástica da viga biapoiada com duas cinemáticas distintas e variando-se a relação altura/vão

Altura (<i>h</i>) [m]	Relação (<i>h/L</i>)	Força aplicada [kN]	Flecha elástica instantânea [mm]		Aumento relativo (1)	Flecha viscoelástica final [mm]		Aumento relativo (2)	Aumento relativo (3)	Aumento relativo (4)
			Bernoulli- Euler	Reissner		Bernoulli- Euler	Reissner			
0,10	5 %	50	9,9990	10,0640	0,65 %	12,4980	12,5792	0,65 %	25,00 %	25,81 %
0,20	10 %	200	4,9999	5,1299	2,60 %	6,2498	6,4122	2,60 %	25,00 %	28,25 %
0,30	15 %	450	3,3333	3,5283	5,85 %	4,1666	4,4103	5,85 %	25,00 %	32,31 %
0,40	20 %	800	2,5000	2,7600	10,40 %	3,1250	3,4500	10,40 %	25,00 %	38,00 %
0,50	25 %	1250	2,0000	2,3250	16,25 %	2,5000	2,9062	16,25 %	25,00 %	45,31 %

Aumento relativo (1): Aumento da flecha elástica instantânea (em $t = 0$) com a cinemática de Reissner em relação à cinemática de Bernoulli-Euler (efeitos do cisalhamento);

Aumento relativo (2): Aumento da flecha viscoelástica final (em $t = 100$ s) com a cinemática de Reissner em relação à cinemática de Bernoulli-Euler (efeitos do cisalhamento);

Aumento relativo (3): Aumento da flecha viscoelástica final (em $t = 100$ s) em relação à flecha elástica instantânea (em $t = 0$) com cada uma das cinemáticas (efeitos do comportamento viscoelástico);

Aumento relativo (4): Aumento da flecha viscoelástica final (em $t = 100$ s) com a cinemática de Reissner em relação à flecha elástica instantânea (em $t = 0$) com a cinemática de Bernoulli-Euler (efeitos simultâneos do cisalhamento e do comportamento viscoelástico).

Tabela 7-2: Resultados analíticos de flecha instantânea e flecha final

Altura (<i>h</i>) [m]	Relação (<i>h/L</i>)	Força aplicada [kN]	Flecha instantânea [mm]		Flecha final [mm]	
			Sem cisalhamento	Com cisalhamento	Sem cisalhamento	Com cisalhamento
0,10	5 %	50	10,0000	10,0780	12,4992	12,5967
0,20	10 %	200	5,0000	5,1560	6,2496	6,4446
0,30	15 %	450	3,3333	3,5673	4,1664	4,4589
0,40	20 %	800	2,5000	2,8120	3,1248	3,5148
0,50	25 %	1250	2,0000	2,3900	2,4998	2,9873

A partir dos resultados apresentados na Tabela 7-1, é possível observar que os efeitos do cisalhamento, ou seja, os efeitos da adoção da cinemática de Reissner em relação a adoção da cinemática de Bernoulli-Euler, são percentualmente iguais na flecha elástica instantânea e na flecha viscoelástica final e seguem a mesma tendência de aumento com o aumento da relação altura/vão. Esse mesmo comportamento é observado não só nos instantes de tempo inicial e final da análise, mas, em todos os instantes de tempo. Esses resultados permitem avaliar os

efeitos do cisalhamento para cada relação altura/vão, sendo interpretado graficamente como apresentado na Figura 7-31.

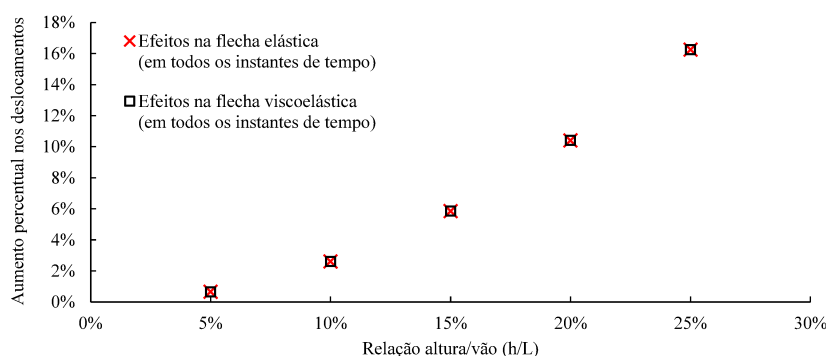


Figura 7-31: Aumento percentual nos deslocamentos devido aos efeitos do cisalhamento em função da relação altura/vão

Além disso, para cada relação altura/vão, avaliando-se o aumento percentual relativo entre a flecha viscoelástica final (em $t = 100$ s) e a flecha elástica instantânea (em $t = 0$) obtidas com a cinemática de Reissner, tem-se os resultados apresentados na penúltima coluna da Tabela 7-1. Esses resultados representam os efeitos do comportamento viscoelástico ao longo de toda a análise, para cada relação altura/vão e considerando-se a cinemática de Reissner. Dessa forma, é possível observar que, de forma percentual, os efeitos do comportamento viscoelástico isoladamente independem da relação altura/vão. Os mesmos resultados são obtidos avaliando-se o aumento percentual relativo entre a flecha viscoelástica final (em $t = 100$ s) e a flecha elástica instantânea (em $t = 0$) obtidas com a cinemática de Bernoulli-Euler. Resultados análogos podem ser obtidos considerando-se o aumento percentual relativo entre a flecha viscoelástica em qualquer instante de tempo e a flecha elástica instantânea (em $t = 0$), para cada uma das relações altura/vão e com cada uma das cinemáticas adotadas. Os resultados obtidos dessa forma permitem avaliar os efeitos do comportamento viscoelástico em qualquer instante de tempo e podem ser interpretados graficamente como apresentado na Figura 7-32.

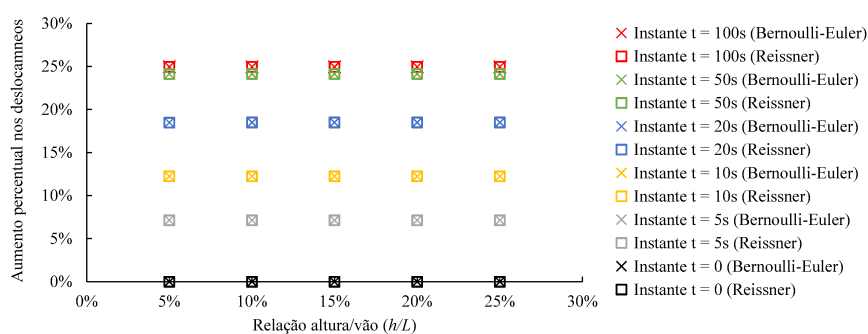


Figura 7-32: Aumento percentual nos deslocamentos devido aos efeitos do comportamento viscoelástico em função da relação altura/vão e em diferentes instantes de tempo

Por fim, avaliando-se o aumento percentual relativo entre a flecha viscoelástica final (em $t = 100$ s) obtida com a cinemática de Reissner e a flecha elástica instantânea (em $t = 0$) obtida com a cinemática de Bernoulli-Euler, tem-se os resultados apresentados na última coluna da Tabela 7-1. Esses resultados representam os efeitos simultâneos do cisalhamento e do comportamento viscoelástico. Resultados análogos podem ser obtidos considerando-se o aumento percentual relativo entre a flecha viscoelástica em qualquer instante de tempo, obtida com a cinemática de Reissner, e a flecha elástica instantânea, obtida pela cinemática de Bernoulli-Euler, para cada relação altura/vão. Os resultados obtidos dessa forma permitem avaliar os efeitos simultâneos do cisalhamento e do comportamento viscoelástico em qualquer instante de tempo e podem ser interpretados graficamente como apresentado na Figura 7-33.

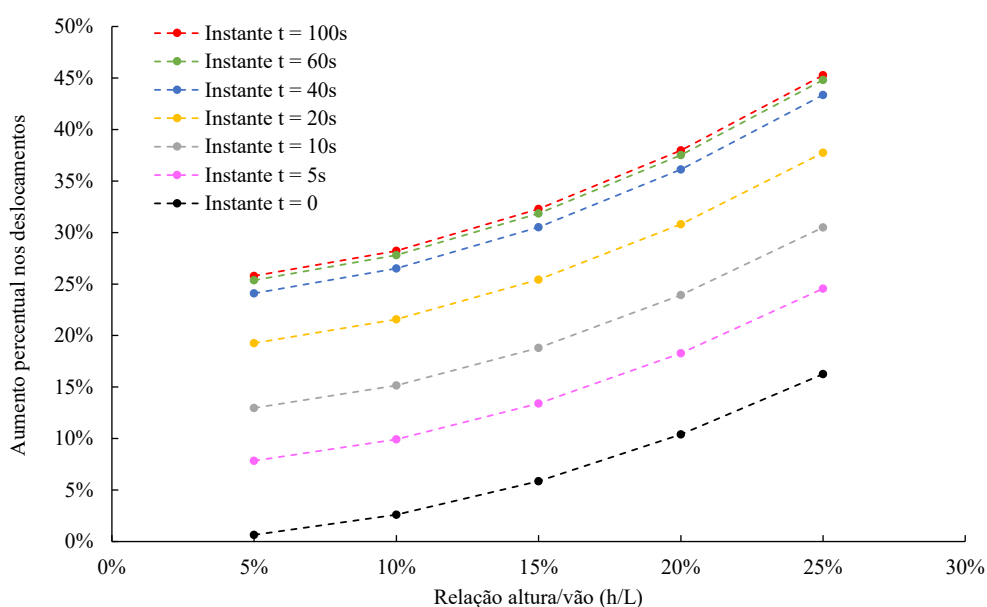


Figura 7-33: Aumento percentual nos deslocamentos devido aos efeitos simultâneos do cisalhamento e do comportamento viscoelástico em função da relação altura/vão e em diferentes instantes de tempo

A partir dos resultados obtidos neste subitem é possível observar a influência mais pronunciada dos efeitos do cisalhamento em vigas curtas, demonstrando a importância da adoção de uma cinemática que leve em consideração tais efeitos. Além disso, é possível observar que os efeitos simultâneos do cisalhamento e do comportamento viscoelásticos podem ser relevantes, dependendo das propriedades geométricas e físicas, e não devem ser negligenciados.

7.2.2 Barra tracionada

Neste subitem é analisado um exemplo clássico, utilizado para aferir modelos viscoelásticos por diferentes autores (Mesquita, 2002; Mesquita e Coda, 2007a e Oliveira, 2017) por se tratar de um típico caso de estado plano de tensão. O exemplo diz respeito à uma barra tracionada impedida de se deslocar horizontalmente em toda a face esquerda, impedida de se deslocar verticalmente em toda a face inferior e livre para se deslocar nas demais faces, sendo a força de tração aplicada na extremidade livre a direita, como apresentado na Figura 7-34.

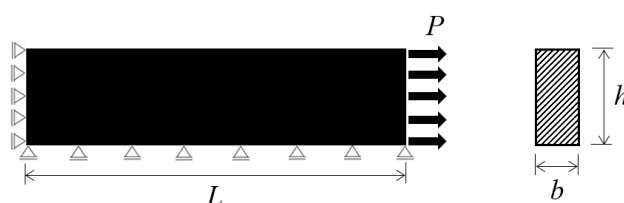


Figura 7-34: Barra tracionada

A barra apresentada na Figura 7-34 possui comprimento (L) igual a 800 mm e seção transversal retangular com altura (h) igual a 100 mm e largura (b) unitária. A intensidade da força aplicada (P) por unidade de área é igual $0,005 \text{ kN/mm}^2$.

Para descrição do comportamento viscoelástico são considerados dois casos. No primeiro é adotado o modelo reológico de Kelvin-Voigt com módulo de elasticidade E igual a $11,0 \text{ kN/mm}^2$ e módulo de viscosidade η igual a $500,0 \text{ kN/mm}^2 \cdot \text{dia}$. No segundo caso é adotado o modelo reológico de Boltzmann com módulo de elasticidade E_1 igual a $22,5757 \text{ kN/mm}^2$, módulo de elasticidade E_2 igual a $11,0 \text{ kN/mm}^2$ e módulo de viscosidade η igual a $500,0 \text{ kN/mm}^2 \cdot \text{dia}$. Esses modelos e parâmetros são adotados a fim de comparar os resultados obtidos com os resultados numéricos disponíveis na literatura (Mesquita e Coda, 2007a).

Em relação à discretização espacial, são adotados dez elementos finitos, com dez pontos de Gauss ao longo da altura e ao longo do comprimento. Em relação a discretização temporal, são adotados diferentes valores de passo de tempo, a saber, 1 dia, 5 dias, 10 dias, 25 dias e 50 dias. Esses diferentes valores de passo de tempo são adotados a fim de se avaliar a influência do refinamento da discretização temporal. Por fim, é importante destacar que a força aplicada é considerada atuante desde o primeiro passo de tempo, sem a consideração de efeitos inerciais, e que a tolerância de cálculo adotada é de $1 \cdot 10^{-8}$ (absoluta em termos de variação das posições nodais).

Os resultados obtidos, conforme os parâmetros geométricos, físicos e numéricos descritos, são apresentados na Figura 7-35, para o modelo de Kelvin-Voigt, e na Figura 7-36, para o modelo de Boltzmann. Esses resultados se referem aos deslocamentos axiais da extremidade livre da barra, na qual é aplicado o carregamento, e são obtidos tanto com a cinemática de Reissner quanto com a cinemática de Bernoulli-Euler, visto que não há efeitos do cisalhamento neste exemplo. Adicionalmente são apresentados os resultados obtidos em Mesquita e Coda (2007a) e os resultados analíticos.

Os resultados apresentados e disponíveis em Mesquita e Coda (2007a) são obtidos utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno a partir de uma malha bidimensional de 8x4 elementos com aproximação cúbica. No referido trabalho, a consideração do comportamento viscoelástico é realizada a partir de modelos reológicos e a integração temporal das taxas de deformação avaliadas pelo Método das Diferenças Finitas, de forma semelhante a abordagem desenvolvida no presente estudo. Em relação aos resultados analíticos, estes são obtidos utilizando-se as equações desenvolvidas no Capítulo 4. Tais equações são reproduzidas a seguir, respectivamente para os modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann:

$$\varepsilon(t) = \frac{P}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta} t} \right) \quad (7-18)$$

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{P}{E_1} - \frac{E_1 + E_2}{E_2 E_1} P \right) e^{-\frac{E_2}{\eta} t} + \frac{E_1 + E_2}{E_2 E_1} P \quad (7-19)$$

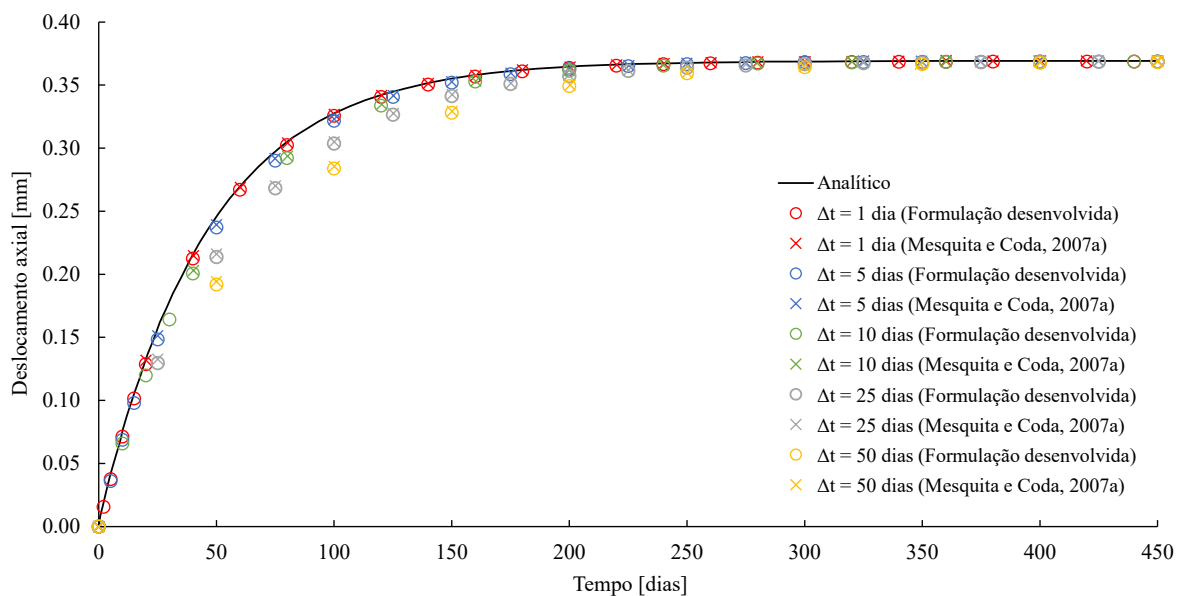


Figura 7-35: Deslocamentos axiais ao longo do tempo em função do passo de tempo e considerando-se o modelo reológico de Kelvin-Voigt

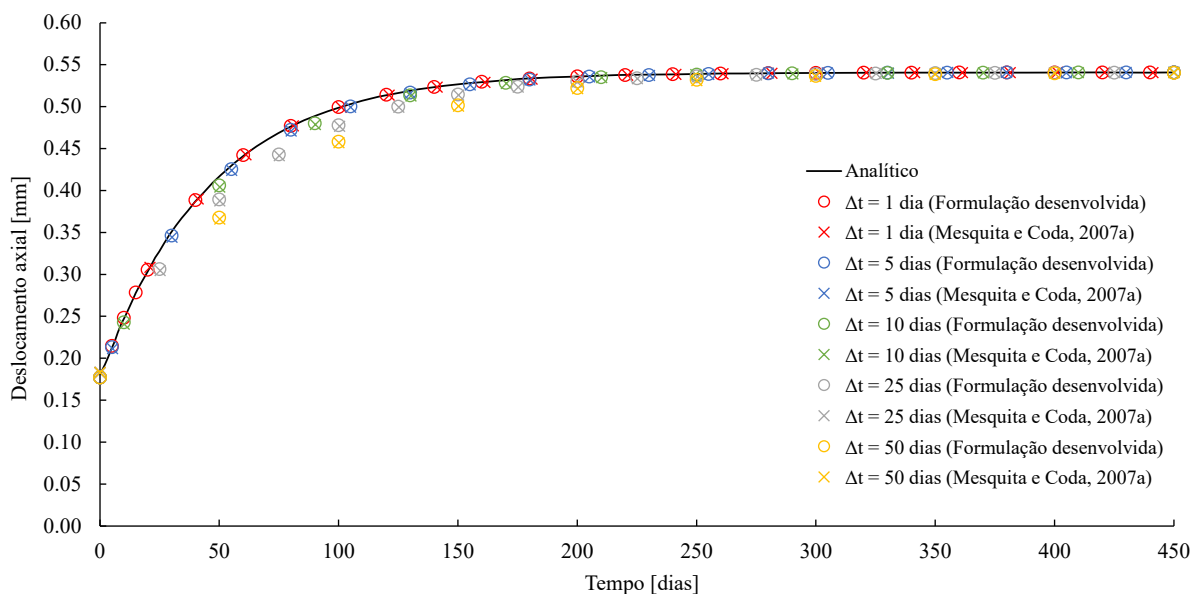


Figura 7-36: Deslocamentos axiais ao longo do tempo em função do passo de tempo e considerando-se o modelo reológico de Boltzmann

A partir da Figura 7-35, para o modelo de Kelvin-Voigt, e da Figura 7-36, para o modelo de Boltzmann, é possível observar que a redução no passo de tempo resulta na aproximação dos resultados numéricos em relação aos resultados analíticos, apresentando uma tendência de convergência dos resultados numéricos com o refinamento da discretização temporal. Entretanto, é possível perceber que os deslocamentos elásticos instantâneos e os deslocamentos viscoelásticos finais não se alteram, para um intervalo de tempo suficientemente grande. Reforça-se então a observação referente à adequação dos parâmetros numéricos aos objetivos das análises, assim como descrito no subitem 7.1.9. Além disso, esse comportamento observado está consistente e de acordo com os resultados disponíveis em Mesquita e Coda (2007a), obtidos utilizando-se uma formulação diferente da apresentada no presente estudo. Quanto aos tempos de processamento, as simulações duraram aproximadamente 120, 73, 27, 16 e 14 segundos, respectivamente para os passos de tempo de 1, 5, 10, 25 e 50 dias.

Por fim, conforme exposto em Mesquita e Coda (2007a), na Figura 7-37 são apresentados os resultados numéricos referentes aos processos de deformação e recuperação com os dois modelos. Neste caso, no instante de tempo igual a 200 dias a força (P) é zerada, sendo verificado o processo de recuperação dos deslocamentos viscoelásticos, considerando-se o passo de tempo igual a 1 dia. É importante destacar que tanto a aplicação da força quanto a retirada da mesma são realizadas de forma instantânea, respectivamente no início do primeiro passo e no início do passo 201, sem a consideração de efeitos inerciais. Quanto ao tempo de processamento as duas simulações duraram aproximadamente 125 segundos.

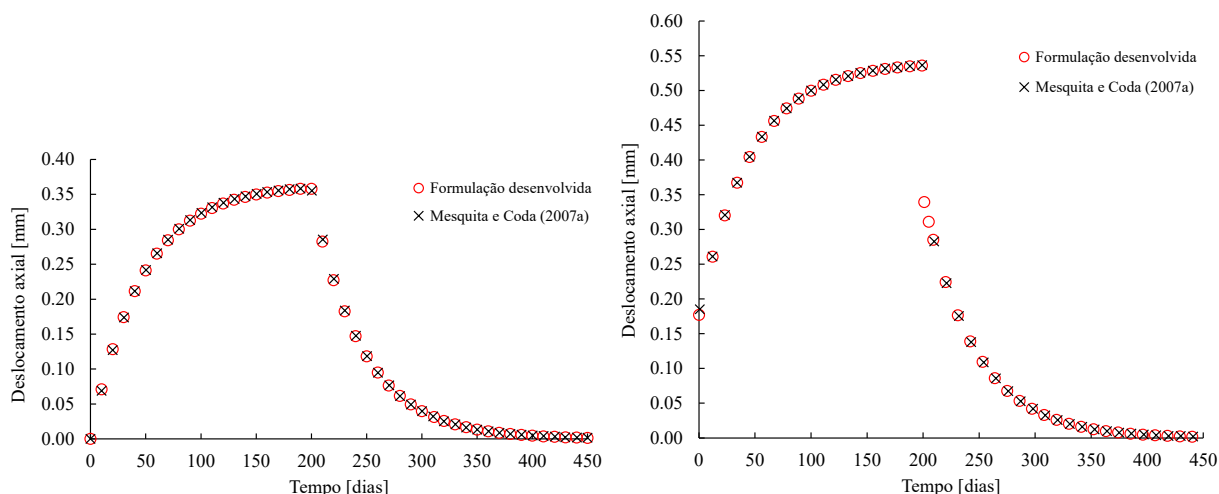


Figura 7-37: Processos de deformação e recuperação respectivamente com os modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann

A partir da Figura 7-37 é possível observar que os resultados obtidos com a formulação desenvolvida são consistentes, apresentando concordância com os resultados numéricos disponíveis na literatura, obtidos utilizando-se uma formulação diferente da apresentada no presente estudo.

7.2.3 Viga em balanço

Neste subitem é analisado o processo de deformação e recuperação de uma viga em balanço com força vertical na extremidade livre, como apresentado na Figura 7-38. Esse exemplo é apresentado a fim de demonstrar a consistência da formulação em descrever o comportamento viscoelástico, visto que é um problema com resultados numéricos disponíveis na literatura (Panagiotopoulos *et al.*, 2014).

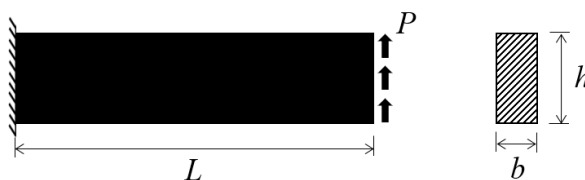


Figura 7-38: Viga em balanço

A viga apresentada na Figura 7-38 possui comprimento (L) igual a 800 mm e seção transversal retangular com altura (h) igual a 100 mm e largura (b) unitária. A intensidade da força (P) por unidade de área é igual $0,005 \text{ kN/mm}^2$, aplicada no instante $t = 0$ e mantida constante durante 453 dias. Em seguida a força é zerada e mantida dessa forma durante 267 dias, verificando-se o processo de recuperação dos deslocamentos viscoelásticos. É importante

destacar que tanto a aplicação da força quanto a retirada da mesma são realizadas de forma instantânea, sem a consideração de efeitos inerciais.

Para descrição do comportamento viscoelástico são considerados dois casos. No primeiro é adotado o modelo reológico de Kelvin-Voigt com módulo de elasticidade E igual a $11,0 \text{ kN/mm}^2$, módulo de viscosidade η igual a $500,0 \text{ kN/mm}^2 \cdot \text{dia}$ e coeficiente de Poisson ν igual a $0,3$. No segundo caso é adotado o modelo reológico de Boltzmann com módulo de elasticidade E_1 igual a $22,5757 \text{ kN/mm}^2$, módulo de elasticidade E_2 igual a $11,0 \text{ kN/mm}^2$, módulo de viscosidade η igual a $500,0 \text{ kN/mm}^2 \cdot \text{dia}$ e coeficiente de Poisson ν igual a $0,3$. Esses modelos e parâmetros são adotados a fim de comparar os resultados obtidos com os resultados numéricos disponíveis na literatura (Panagiotopoulos *et al.*, 2014).

Em relação à discretização espacial, são adotados dez elementos finitos, com dez pontos de Gauss ao longo da altura e ao longo do comprimento. Em relação à discretização temporal, são adotados 720 passos de tempo iguais a 1 dia. Por fim, é importante destacar que a tolerância de cálculo adotada é de $1 \cdot 10^{-8}$ (absoluta em termos de variação das posições nodais).

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 7-39. Esses resultados se referem aos deslocamentos verticais do ponto médio da extremidade livre da barra. Adicionalmente são apresentados os resultados disponíveis em Panagiotopoulos *et al.* (2014). Os resultados apresentados em Panagiotopoulos *et al.* (2014) obtidos com uma formulação análoga à apresentada em Mesquita e Coda (2007a).

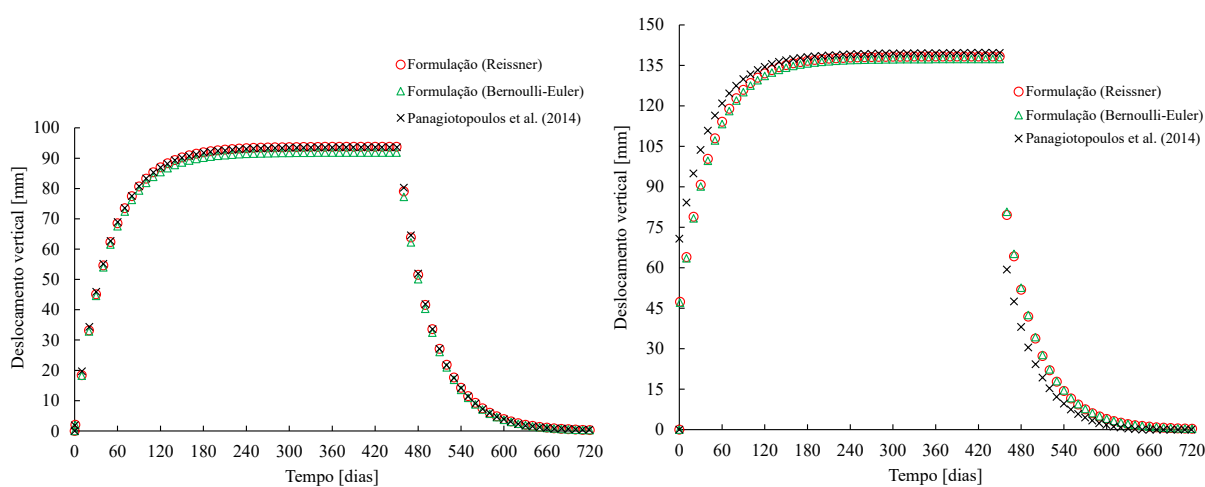


Figura 7-39: Deslocamentos verticais da extremidade livre em processo de deformação e recuperação respectivamente com os modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann

A partir da Figura 7-39 é possível observar a concordância entre os resultados numéricos obtidos e os resultados numéricos disponíveis na literatura. Além disso, é possível observar que adotando-se a cinemática de Reissner os deslocamentos são ligeiramente superiores aos obtidos adotando-se a cinemática de Bernoulli-Euler. Entretanto, essa diferença é pouco pronunciada devido a relação altura/vão da viga ser de apenas 12,5%. Quanto ao tempo de processamento, as simulações duraram aproximadamente 798 segundos. É importante destacar que não foi observado problema de travamento por cisalhamento (*shear-locking*), utilizando-se a formulação desenvolvida com a cinemática de Reissner.

7.2.4 Viga biapoçada com força uniformemente distribuída

Neste subitem é analisada uma viga biapoçada com força uniformemente distribuída, como apresentado na Figura 7-40. Esse exemplo é apresentado a fim de demonstrar a consistência da formulação em descrever o comportamento viscoelástico, visto que é um problema com resultado analítico simples e com resultados numéricos disponíveis na literatura (Aköz e Kadioğlu, 1999).

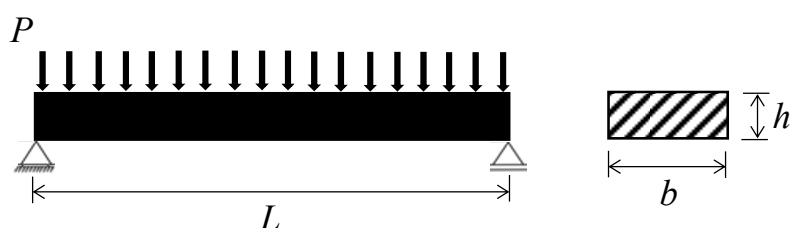


Figura 7-40: Viga biapoçada

A viga apresentada na Figura 7-40 possui comprimento (L) igual a 10 m, seção transversal retangular com altura (h) igual a 0,5 m e largura (b) igual a 2 m. A intensidade da força (P) por unidade de comprimento é igual 10 N/m.

Para descrição do comportamento viscoelástico são considerados dois casos. No primeiro é adotado o modelo reológico de Kelvin-Voigt com módulo de elasticidade E igual a 98,00 MN/m², módulo de viscosidade η igual a 27,44 MN/m²·s e coeficiente de Poisson ν igual a 0,3. No segundo caso é adotado o modelo reológico de Boltzmann com módulo de elasticidade E_1 igual a 98,00 MN/m², módulo de elasticidade E_2 igual a 2,45 MN/m² módulo de viscosidade η igual a 274,4 MN/m²·s e coeficiente de Poisson ν igual a 0,3. Esses modelos e parâmetros são adotados a fim de comparar os resultados obtidos com os resultados numéricos disponíveis na literatura (Aköz e Kadioğlu, 1999).

Em relação à discretização espacial, são adotados dez elementos finitos, com dez pontos de Gauss ao longo da altura e ao longo do comprimento. Em relação à discretização temporal, são adotados 2000 passos de tempo iguais a 0,01 s. Por fim, é importante destacar que a força aplicada é considerada atuante desde o primeiro passo de tempo, sem a consideração de efeitos inerciais, e que a tolerância de cálculo adotada é de $1 \cdot 10^{-8}$ (absoluta em termos de variação das posições nodais).

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 7-41. Esses resultados se referem aos deslocamentos verticais no meio do vão. Adicionalmente são apresentados os resultados numéricos disponíveis em Aköz e Kadioğlu (1999) e os resultados analíticos obtidos a partir da equação, apresentada em Chen (1995), com a consideração dos efeitos do cisalhamento, expressa por:

$$w(t) = \frac{5PL^4}{32bh^3} \left[1 + 1,6 \frac{(1+\nu)}{k} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] J(t) \quad (7-20)$$

em que w representa a flecha no meio do vão, k representa o fator de forma, determinado como 5/6 para seções transversais retangulares, e $J(t)$ representa a função de fluência, expressa em série de Prony, assim como apresentado em Aköz e Kadioğlu (1999), respectivamente para os modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann por:

$$J(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta} t} \right) \quad (7-21)$$

$$J(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2}{\eta} t} \right) \quad (7-22)$$

Na Figura 7-41 são apresentados apenas os resultados numéricos obtidos considerando-se a cinemática de Reissner, visto que, devido à baixa relação altura/vão (5%), as diferenças em relação aos resultados numéricos obtidos considerando-se a cinemática de Bernoulli-Euler não são significativas.

Em relação aos resultados numéricos apresentados e disponíveis em Aköz e Kadioğlu (1999) é importante destacar que estes são obtidos utilizando-se o Método dos Elementos Finitos considerando-se elementos de viga com cinemática de Timoshenko. No referido trabalho, a consideração do comportamento viscoelástico é realizada a partir de modelos

reológicos e as variáveis derivadas no tempo, expressas por taxas, são avaliadas utilizando-se o método das transformadas de Laplace-Carson.

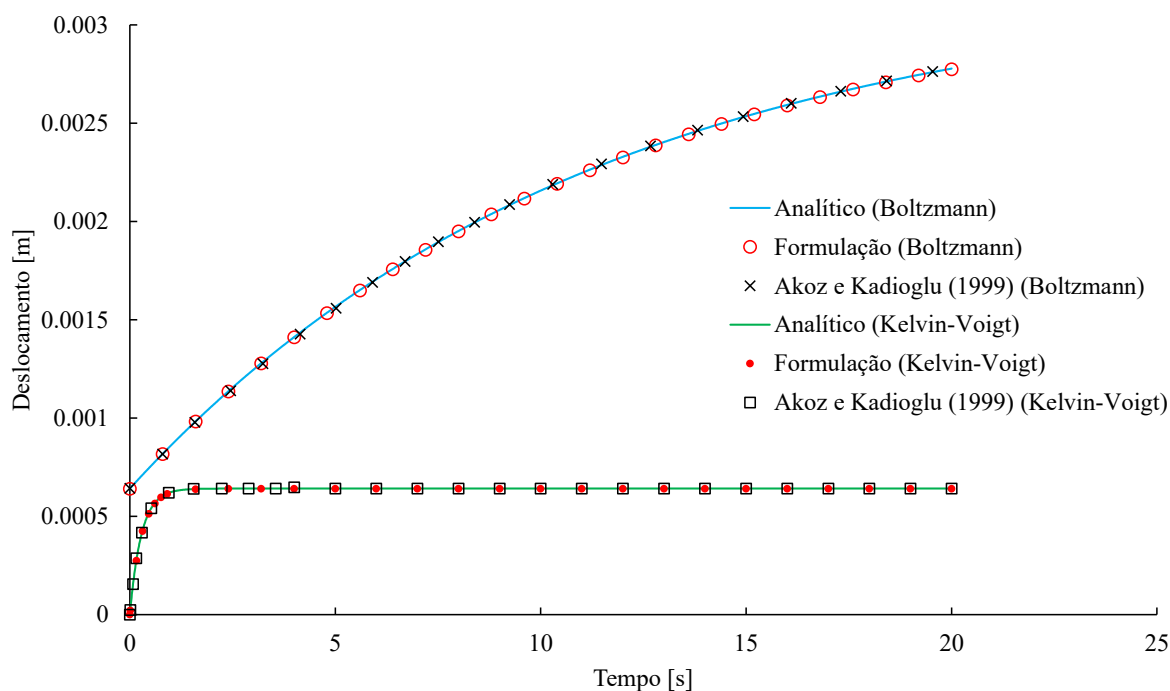


Figura 7-41: Deslocamentos verticais no meio do vão com os modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann

A partir da Figura 7-41 é possível observar a concordância entre os resultados numéricos obtidos e os resultados analíticos. Além disso, é possível observar a concordância em relação aos resultados numéricos disponíveis na literatura, obtidos utilizando-se uma formulação diferente da apresentada no presente estudo. Quanto ao tempo de processamento, as simulações duraram aproximadamente 847 segundos. É importante destacar que não foi observado problema de travamento por cisalhamento (*shear-locking*), utilizando-se a formulação desenvolvida com a cinemática de Reissner.

7.2.5 Vaso de pressão cilíndrico

Neste último subitem é analisado um cilindro sob pressão interna uniforme (vaso de pressão). Esse exemplo é apresentado a fim de demonstrar a consistência da formulação em descrever o comportamento viscoelástico, visto que é um problema com resultado analítico simples e com resultados numéricos disponíveis na literatura. A análise se refere a descrição da evolução dos deslocamentos radiais ao longo do tempo em um cilindro sob pressão interna uniforme e extremidades livres, como apresentado na Figura 7-42.

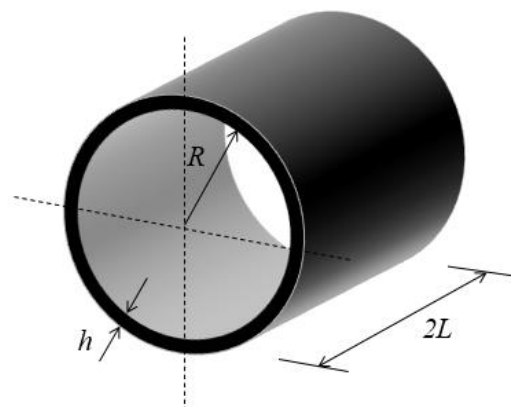


Figura 7-42: Cilindro sob pressão interna uniforme

O cilindro sob pressão interna uniforme apresentado na Figura 7-42 possui comprimento ($2L$) igual a 600 [u.c. (unidades de comprimento)], raio (R) igual a 300 [u.c.] e espessura (h) igual 30 [u.c.]. A intensidade da pressão interna (P) é igual 0,26 [u.f./u.c.² (unidade de força por unidade de comprimento ao quadrado)], considerada atuante desde o primeiro passo de tempo, sem a consideração de efeitos inerciais. Em relação a discretização temporal são considerados 200 passos de tempo iguais a 0,5 [u.t. (unidades de tempo)].

Para descrição do comportamento viscoelástico são considerados dois casos. No primeiro é adotado o modelo reológico de Kelvin-Voigt com módulo de elasticidade E igual a 200 [u.f./u.c.²] e módulo de viscosidade η igual a 2000 [u.f./u.c.²·u.t.]. No segundo caso é adotado o modelo reológico de Boltzmann com módulo de elasticidade E_1 igual a 300 [u.f./u.c.²], módulo de elasticidade E_2 igual a 200 [u.f./u.c.²] e módulo de viscosidade η igual a 2000,0 [u.f./u.c.²·u.t.]. Por fim, é importante destacar que a análise deste exemplo é realizada de forma adimensional a fim de manter a consistência com as referências bibliográficas (Mesquita e Coda, 2002 e Mesquita 2002) utilizadas para comparação dos resultados numéricos.

Os resultados numéricos disponíveis em Mesquita e Coda (2002) e em Mesquita (2002) são obtidos analisando-se 1/8 do cilindro, a partir das considerações referentes às simetrias, e utilizando-se o Método dos Elementos Finitos a partir de uma malha bidimensional de 10x10x2 totalizando-se 200 elementos de placa triangulares denominados FFDKT (*Free Formulation Discrete Kirchoff Triangle*), como apresentado na Figura 7-43. No trabalho de Mesquita e Coda (2002), a consideração do comportamento viscoelástico é realizada a partir do modelo reológico de Kelvin-Voigt e, no trabalho de Mesquita (2002), essa consideração é realizada a partir do modelo de Boltzmann.

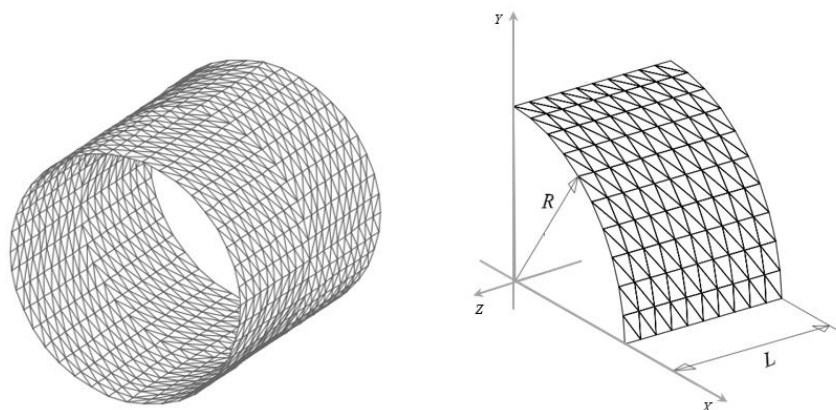


Figura 7-43: Discretização da geometria em elementos de placa (Mesquita e Coda, 2002)

No presente estudo a discretização espacial do cilindro é realizada por dez elementos finitos de pórtico plano, com dez pontos de Gauss ao longo da altura e ao longo do comprimento. Dessa forma, considerando-se as simetrias, o problema se resume à análise de um quarto de circunferência, como apresentado na Figura 7-44. Por fim, é importante destacar que a pressão aplicada é considerada atuante desde o primeiro passo de tempo, sem a consideração de efeitos inerciais, e que a tolerância de cálculo adotada é de $1 \cdot 10^{-8}$ (absoluta em termos de variação das posições nodais).

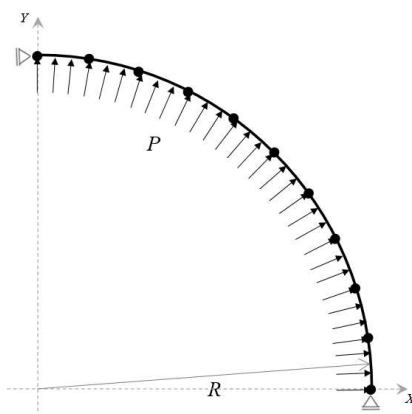


Figura 7-44: Discretização da geometria em elementos de pórtico

Os resultados obtidos, conforme os parâmetros geométricos, físicos e numéricos descritos, são apresentados na Figura 7-45, para o modelo de Kelvin-Voigt, e na Figura 7-46, para o modelo de Boltzmann. Esses resultados se referem aos deslocamentos radiais em qualquer ponto da superfície do cilindro e são obtidos tanto com a cinemática de Reissner quanto com a cinemática de Bernoulli-Euler, visto que não há efeitos do cisalhamento neste exemplo. Adicionalmente são apresentados os resultados numéricos obtidos em Mesquita e Coda (2002) e Mesquita (2002) e os resultados analíticos obtidos com o auxílio das equações desenvolvidas

no Capítulo 4. Esses resultados analíticos expressos para os modelos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann, respectivamente, por:

$$u_R(t) = \frac{PR^2}{Eh} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right) \quad (7-23)$$

$$u_R(t) = \frac{PR^2}{h} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2}{\eta}t} \right) \right) \quad (7-24)$$

em que u_R representa o deslocamento radial, P representa a pressão interna, R representa o raio do cilindro e h representa a espessura do cilindro.

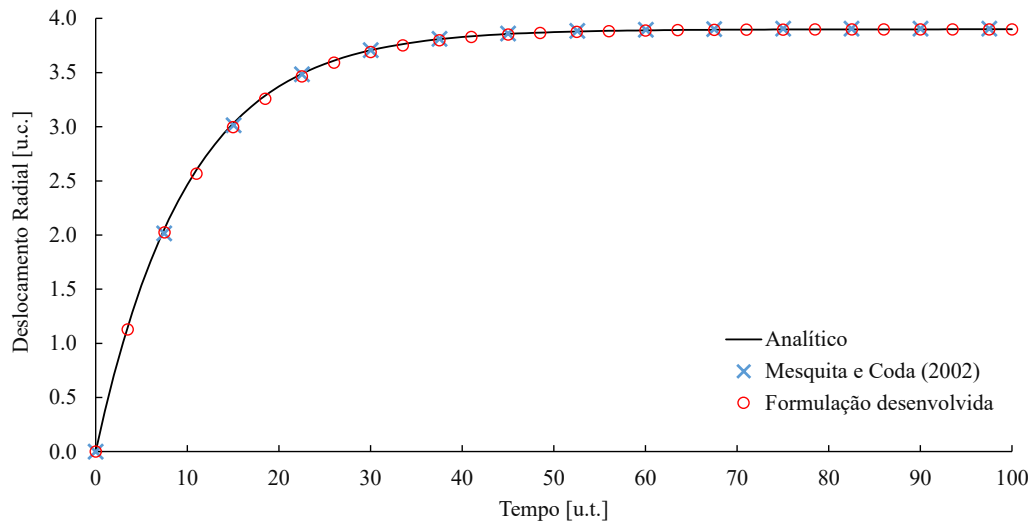


Figura 7-45: Deslocamento radial ao longo do tempo considerando-se o modelo se Kelvin-Voigt

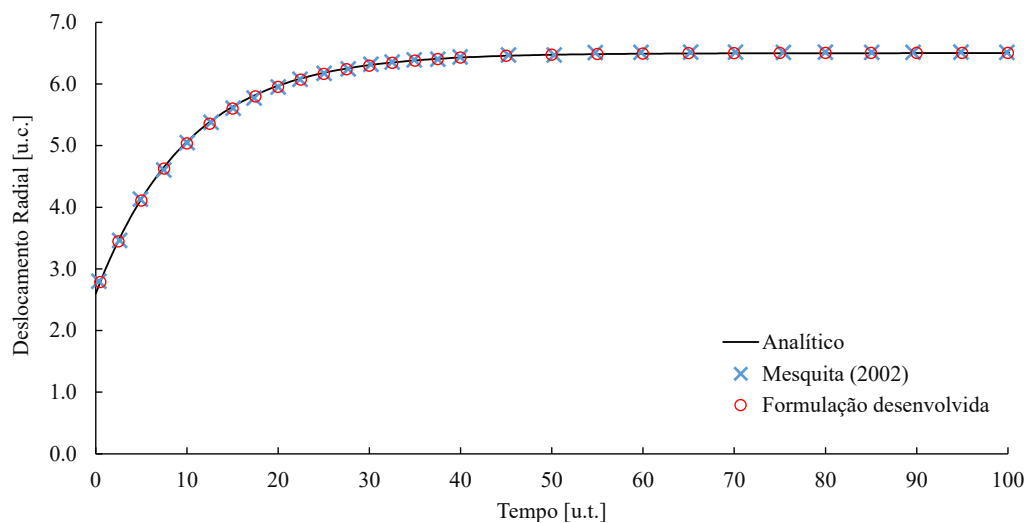


Figura 7-46: Deslocamento radial ao longo do tempo considerando-se o modelo Boltzmann

A partir da Figura 7-45, para o modelo de Kelvin-Voigt, e da Figura 7-46, para o modelo de Boltzmann, é possível observar que os resultados obtidos com a formulação desenvolvida são consistentes, apresentando concordância com os resultados analíticos e com os resultados numéricos disponíveis na literatura, obtidos utilizando-se uma formulação diferente da apresentada no presente estudo. Quanto ao tempo de processamento, as simulações duraram aproximadamente 10347 segundos.

7.3 Aplicações práticas e exemplos de calibração

Como terceira e última parte da avaliação da consistência e capacidade da formulação desenvolvida, são apresentados neste item algumas aplicações práticas em que os resultados numéricos obtidos são comparados aos resultados experimentais disponíveis na literatura. Adicionalmente, para possibilitar as aplicações, é apresentada uma técnica de ajuste dos parâmetros dos modelos reológicos e uma metodologia de calibração da formulação desenvolvida a partir de resultados de ensaios de fluência à tração disponíveis na literatura.

7.3.1 Exemplo de calibração com base em ensaios de fluência à tração

Este exemplo de calibração é baseado nos resultados experimentais apresentados em Liu (2007) e Liu *et al.* (2008). Esses resultados são obtidos de ensaios de fluência à tração em corpos de prova de Polietileno de Alta Densidade (PEAD), como apresentado na Figura 7-47. Detalhes sobre os procedimentos e sistemas utilizados nos ensaios podem ser conferidos em Liu (2007) e Liu *et al.* (2008).

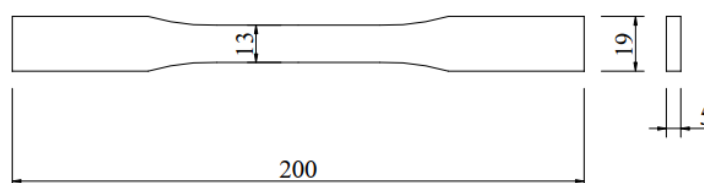


Figura 7-47: Corpo de prova de PEAD, dimensões em [mm] (Liu, 2007)

Na Figura 7-48, inicialmente, são apresentados alguns dos resultados experimentais obtidos em ensaios de fluência à tração em corpos de prova de PEAD, disponíveis em Liu *et al.* (2008), considerando-se cinco diferentes níveis de tensão (2,97 MPa, 5,97 MPa, 7,71 MPa, 10,31 MPa e 12,19 MPa). Estes resultados experimentais se referem aos registros das evoluções das deformações durante o ensaio de fluência de 1 dia ($\cong 87000$ s).

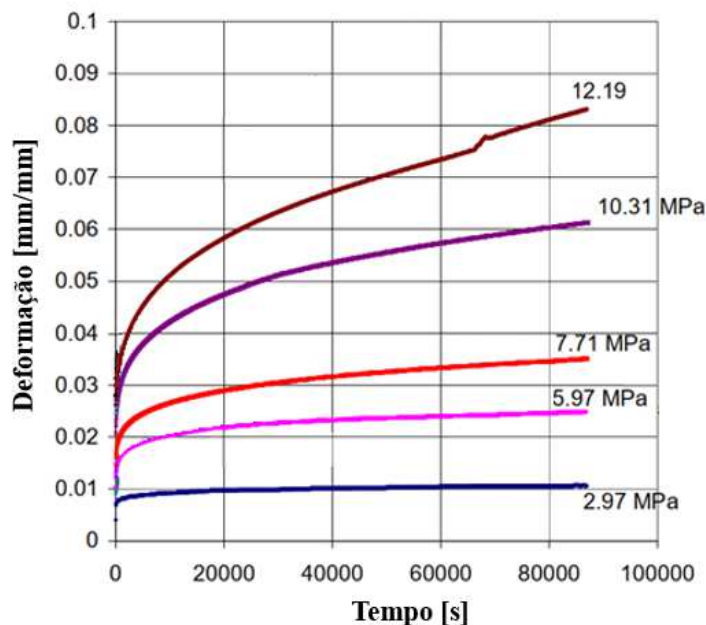


Figura 7-48: Resultados de ensaios de fluência à tração em corpos de prova de PEAD (adaptado de Liu, 2007)

A partir dos resultados experimentais apresentados na Figura 7-48, é possível utilizar uma técnica simples de ajuste para determinação dos parâmetros adequados aos modelos reológicos, a fim de se reproduzir numericamente os ensaios de fluência à tração com a formulação desenvolvida no presente estudo. Entretanto, como destacado pelos autores em Liu (2007) e Liu *et al.* (2008), o PEAD apresenta comportamento não linear em relação ao nível de tensão. Dessa forma, para se reproduzir numericamente os ensaios de fluência à tração em diferentes níveis de tensão é necessário utilizar uma metodologia de calibração da formulação desenvolvida. No presente estudo, esta metodologia de calibração é realizada com base nos parâmetros ajustados para cada nível de tensão ensaiado e utilizando-se o Método dos Mínimos Quadrados para obtenção de curvas de ajuste dos parâmetros. Por fim, a partir da calibração da formulação, é possível utilizá-la para realização de análises viscoelásticas de estruturas constituídas pelo referido material e submetidas a diferentes níveis de tensão.

Neste exemplo de calibração da formulação desenvolvida é adotado o modelo de Boltzmann para descrição do comportamento viscoelástico e, dessa forma, é apresentada uma técnica para ajuste do módulo de elasticidade E_1 , do módulo de elasticidade E_2 e do módulo de viscosidade η , a fim de possibilitar a reprodução numérica dos ensaios de fluência à tração em cada nível de tensão. A técnica de ajuste dos parâmetros utilizada é semelhante à apresentada em Sheno *et al.* (1997), sendo descrita a seguir.

7.3.1.1 Técnica de ajuste dos parâmetros

Para descrever a técnica de ajuste dos parâmetros do modelo de Boltzmann são utilizados como exemplo os resultados de deformação obtidos no ensaio de fluência à tração para o nível de tensão igual a 7,71 MPa, como apresentado na Figura 7-48 e reproduzido na Tabela 7-3.

O primeiro parâmetro a ser determinado nesta técnica é o módulo de elasticidade E_1 , referente à resposta elástica instantânea. Para tanto, de acordo com Cheng *et al.* (2011), a partir da deformação elástica instantânea, referente ao instante de tempo $t \cong 60$ s, o módulo de elasticidade E_1 pode ser determinado utilizando-se a relação tensão-deformação, como apresentado a seguir:

$$E_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_{t=60\text{ s}}} \quad (7-25)$$

Dessa forma, a partir da Equação (7-25) e considerando-se os resultados apresentados na Tabela 7-3, o módulo de elasticidade E_1 pode ser determinado por:

$$E_1 = \frac{7,71\text{ MPa}}{0,01483\text{ mm/mm}} = 519,89\text{ MPa} \quad (7-26)$$

Em relação ao módulo de elasticidade E_2 , este pode ser obtido a partir do módulo de elasticidade equivalente do respectivo modelo e da deformação total máxima, para um intervalo de tempo suficientemente grande. Considerando-se o modelo de Boltzmann, pode-se utilizar a seguinte relação tensão-deformação em termos do módulo de elasticidade equivalente e da deformação total máxima:

$$\sigma_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_{t \rightarrow \infty} \quad (7-27)$$

Reajustando-se os termos da Equação (7-27) e substituindo-se a relação $\sigma_0 = E_1 \varepsilon_{t=60\text{ s}}$, o módulo de elasticidade E_2 pode ser determinado pela seguinte expressão:

$$E_2 = \frac{\varepsilon_{t=60\text{ s}}}{\varepsilon_{t \rightarrow \infty}} \frac{E_1}{\left(1 - \frac{\varepsilon_{t=60\text{ s}}}{\varepsilon_{t \rightarrow \infty}}\right)} \quad (7-28)$$

Dessa forma, a partir da Equação (7-28) e considerando-se os resultados apresentados na Tabela 7-3, o módulo de elasticidade E_2 pode ser determinado por:

$$E_2 = \frac{0,01483 \text{ mm/mm}}{0,03512 \text{ mm/mm}} \frac{519,89 \text{ MPa}}{\left(1 - \frac{0,01483 \text{ mm/mm}}{0,03512 \text{ mm/mm}}\right)} = 379,93 \text{ MPa} \quad (7-29)$$

Por fim, para determinação do módulo de viscosidade η pode ser utilizado o conceito de tempo de retardo. Como descrito no subitem 4.3.1, o tempo de retardo no modelo de Boltzmann representa o tempo necessário para a deformação viscoelástica (deformação total em cada instante de tempo menos a deformação elástica instantânea) atingir aproximadamente 63,2 % da deformação viscoelástica final. Dessa forma, a partir da Tabela 7-3, o instante de tempo em que a deformação viscoelástica representa 63,2 % da deformação viscoelástica final pode ser determinado por interpolação linear a partir da seguinte expressão:

$$\frac{t_\varepsilon - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{0,632 - r_1}{r_2 - r_1} \quad (7-30)$$

em que t_ε representa o tempo de retardo, r_1 representa o primeiro retardo anterior ao retardo padrão de 63,2 %, r_2 representa o primeiro retardo posterior ao retardo padrão de 63,2 %, t_1 representa o instante de tempo referente ao retardo r_1 e t_2 representa o instante de tempo referente ao retardo r_2 . É importante destacar que o retardo r é definido como a porcentagem que a deformação viscoelástica em determinado instante de tempo representa em relação a deformação viscoelástica final, como apresentado na Tabela 7-3.

No presente caso, a partir da Equação (7-30) e considerando-se os dados apresentados na Tabela 7-3, o tempo de retardo pode ser obtido como:

$$\frac{t_\varepsilon - 12600 \text{ s}}{15050 \text{ s} - 12600 \text{ s}} = \frac{0,632 - 0,6151}{0,6422 - 0,6151} \quad \therefore \quad t_\varepsilon = 14128 \text{ s} \quad (7-31)$$

Assim como demonstrado no subitem 4.3.1 para o modelo de Boltzmann, é importante lembrar que o tempo de retardo pode ser determinado em termos dos parâmetros por:

$$t_\varepsilon = \frac{\eta}{E_2} \quad (7-32)$$

Dessa forma, o módulo de viscosidade η pode ser determinado por:

$$\eta = t_\varepsilon E_2 = 14128 \text{ s} \cdot 379,93 \text{ MPa} = 5367597,77 \text{ MPa} \cdot \text{s} \quad (7-33)$$

Tabela 7-3: Resultados do ensaio de fluência à tração para o nível de tensão igual a 7,71 MPa

Tempo [s]	Deformação total [mm/mm]	Deformação viscoelástica [mm/mm]	Retardo *
53	0,01483	0,00000	0
271	0,01815	0,00332	16,36 %
738	0,02022	0,00539	26,58 %
1790	0,02187	0,00704	34,71 %
3075	0,02328	0,00845	41,65 %
4769	0,02431	0,00948	46,73 %
6288	0,02511	0,01028	50,67 %
8158	0,02584	0,01101	54,27 %
10090	0,02657	0,01174	57,87 %
12600	0,02731	0,01248	61,51 %
15050	0,02786	0,01303	64,22 %
19140	0,02877	0,01394	68,71 %
23230	0,02950	0,01467	72,31 %
26850	0,02999	0,01516	74,72 %
30180	0,03048	0,01565	77,14 %
33340	0,03079	0,01596	78,66 %
37540	0,03134	0,01651	81,37 %
41750	0,03170	0,01687	83,15 %
46010	0,03219	0,01736	85,56 %
51330	0,03256	0,01773	87,38 %
56000	0,03292	0,01809	89,16 %
61900	0,03347	0,01864	91,87 %
66810	0,03366	0,01883	92,81 %
72180	0,03421	0,01938	95,52 %
77560	0,03445	0,01962	96,70 %
81940	0,03469	0,01986	97,88 %
87260	0,03512	0,02029	100 %

* A porcentagem que a deformação viscoelástica em determinado instante de tempo representa em relação a deformação viscoelástica final é definida como retardo (*r*).

A mesma técnica de ajuste dos parâmetros utilizada a partir dos resultados referentes ao nível de tensão igual 7,71 MPa, pode ser utilizada a partir dos resultados referentes aos demais níveis de tensão ensaiados. Os respectivos parâmetros obtidos dessa forma em cada nível de tensão ensaiado são apresentados na Tabela 7-4.

Tabela 7-4: Parâmetros do modelo de Boltzmann obtidos pela técnica de ajuste

Tensão [MPa]	E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	η [MPa·s]
2,97	650	485	1281393
5,97	580	413	2857591
7,71	520	380	5367598
10,31	500	253	4459492
12,19	470	213	5811549

A partir dos parâmetros obtidos pela técnica de ajuste apresentada e utilizando-se a formulação desenvolvida no presente estudo é possível reproduzir numericamente os ensaios de fluência à tração nos respectivos níveis de tensão. Esses resultados são apresentados na Figura 7-49. Adicionalmente, são apresentados os resultados experimentais disponíveis em Liu (2007).

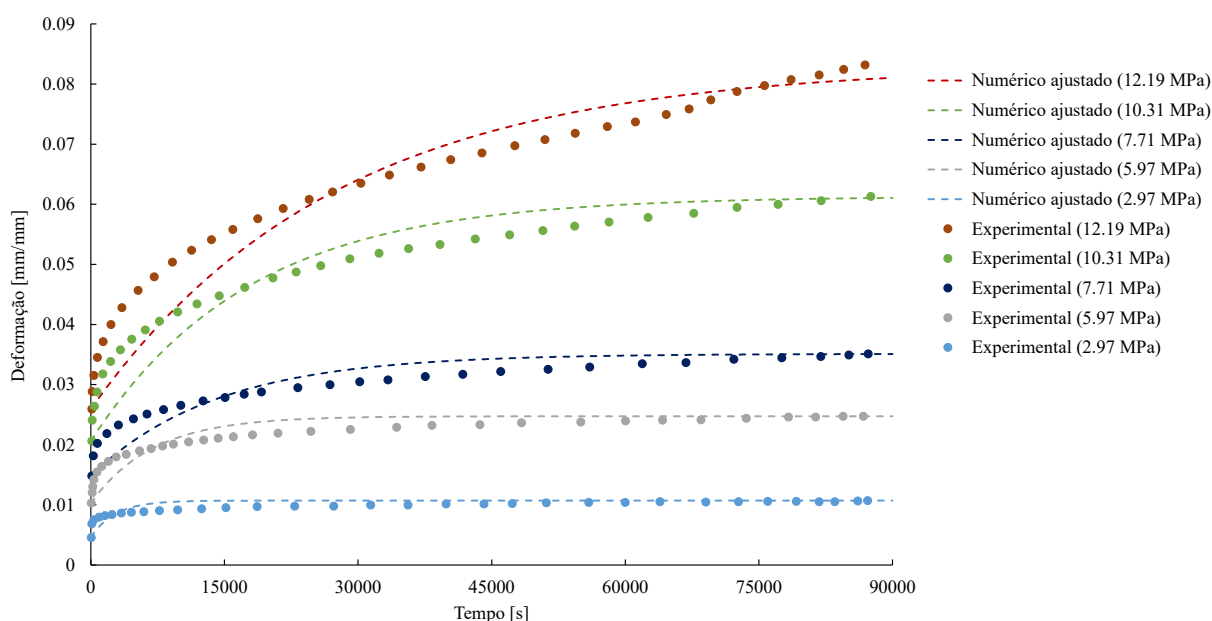


Figura 7-49: Resultados numéricos ajustados e resultados experimentais dos ensaios de fluência à tração do PEAD

A partir da Figura 7-49 é possível observar uma concordância satisfatória entre os resultados numéricos obtidos e os resultados experimentais disponíveis em Liu (2007) nos cinco níveis de tensão ensaiados, demonstrando a consistência da formulação desenvolvida e da técnica de ajuste dos parâmetros apresentada. Porém, é importante destacar que estes parâmetros ajustados são exclusivos para cada nível de tensão e não fornecem resultados consistentes para outros níveis de tensão.

Dessa forma, a fim de possibilitar a utilização da formulação desenvolvida na análise de estruturas submetidas a níveis de tensão diferentes dos adotados nos ensaios de fluência à tração é necessário calibrá-la com base nos resultados obtidos nos ensaios. Para tanto, é descrita a seguir uma metodologia de calibração.

7.3.1.2 Metodologia de calibração da formulação

A metodologia de calibração se baseia na obtenção de equações de ajuste dos parâmetros dos modelos reológicos em função do nível de tensão atuante e na implementação dessas equações na formulação desenvolvida no presente estudo. Visto que, na formulação desenvolvida, as seções transversais são consideradas laminadas, a partir da implementação dessas equações de ajuste é possível, a cada iteração do método de Newton-Raphson, avaliar os parâmetros dos modelos reológicos em função do nível de tensão atuante em cada lâmina (em cada ponto de Gauss), assim como apresentado no Capítulo 5.

As equações de ajuste são obtidas, no presente estudo, utilizando-se o Método dos Mínimos Quadrados, considerando-se os resultados obtidos com todos os níveis de tensão ensaiados em laboratório. Dessa forma, a partir dos parâmetros apresentados na Tabela 7-4, obtidos pela técnica de ajuste em cada nível de tensão, e utilizando-se o Método dos Mínimos Quadrados é possível obter equações de regressão que se ajustam aos resultados experimentais. Dessa forma, tem-se as seguintes equações de ajuste:

$$E_1(\sigma) = 753,34 \cdot 10^6 - 37,92 \cdot \sigma + 1,22 \cdot 10^{-6} \cdot \sigma^2 \quad (7-34)$$

$$E_2(\sigma) = 422,69 \cdot 10^6 + 47,04 \cdot \sigma - 10,24 \cdot 10^{-6} \cdot \sigma^2 + 0,41 \cdot 10^{-12} \cdot \sigma^3 \quad (7-35)$$

$$\eta(\sigma) = 327283,01 \cdot 10^6 + 463341,48 \cdot \sigma \quad (7-36)$$

As escolhas das equações de regressão apresentadas se basearam em uma avaliação qualitativa, devido ao reduzido número de parâmetros considerados e ao fato deste não ser o foco do presente estudo. Para uma escolha adequada das equações de regressão é necessário considerar uma avaliação quantitativa como, por exemplo, o coeficiente de determinação (R^2). As regressões obtidas e adotadas são interpretadas graficamente pelas curvas apresentadas nas Figuras 7-50, 7-51 e 7-52.

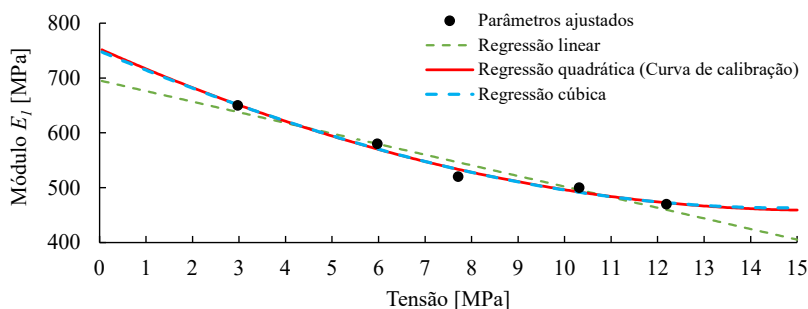


Figura 7-50: Curva referente ao módulo de elasticidade E_1 em função do nível de tensão

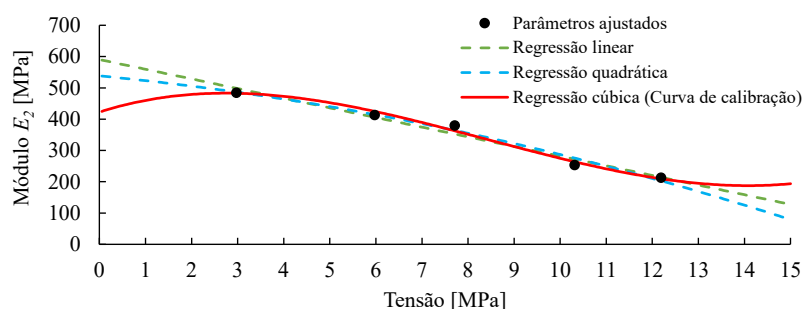


Figura 7-51: Curva referente ao módulo de elasticidade E_2 em função do nível de tensão

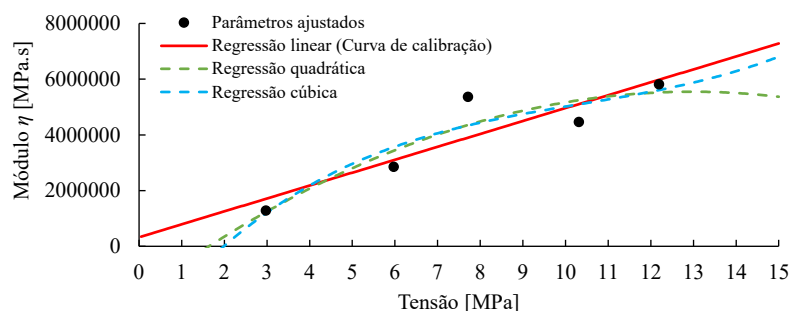


Figura 7-52: Curva referente ao módulo de viscosidade η em função do nível de tensão

Em relação ao módulo de elasticidade E_1 , foi considerada uma regressão quadrática. Como pode ser observado a partir da Figura 7-50, neste caso a regressão quadrática apresenta perfil similar à regressão cúbica e os valores da regressão linear se aproximam de valores nulos para níveis de tensão relativamente próximos ao maior nível de tensão ensaiado. Em relação ao módulo de elasticidade E_2 , foi considerada uma regressão cúbica. Como pode ser observado a partir da Figura 7-51, neste caso a regressão cúbica apresentou melhor concordância em relação aos parâmetros ajustados e as regressões linear e quadrática se aproximam de valores nulos para níveis de tensão relativamente próximos ao maior nível de tensão ensaiado. Por fim, em relação ao módulo de viscosidade η , foi considerada uma regressão linear. Como pode ser observado a partir da Figura 7-52, neste caso, apesar da regressão linear não apresentar a melhor

concordância em relação aos parâmetros ajustados, as regressões quadrática e cúbica atingem valores nulos para níveis de tensão relativamente próximos ao menor nível de tensão ensaiado.

As equações de ajuste, expressas pelas Equações (7-34), (7-35) e (7-36), são utilizadas para avaliação dos respectivos parâmetros na energia de deformação total expressa, por exemplo, para o modelo de Boltzmann, como:

$$U = \int_V \left[\int_X \left(\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_{11} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{11} \right) \varepsilon_{11,q} dX + \int_X \left(2 \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \bar{\mu} \varepsilon_{12} + 2 \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \bar{\mu} \dot{\varepsilon}_{12} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{12} \right) \varepsilon_{12,q} dX \right] dV \quad (7-37)$$

Dessa forma, a formulação desenvolvida, conforme apresentado no Capítulo 5, é dita calibrada para o material ensaiado. Utilizando-se a formulação calibrada é possível reproduzir numericamente os ensaios de fluência à tração nos respectivos níveis de tensão. Esses resultados são apresentados na Figura 7-53. Adicionalmente são apresentados os resultados numéricos obtidos com os ajustes específicos para cada nível de tensão e os resultados experimentais disponíveis em Liu (2007).

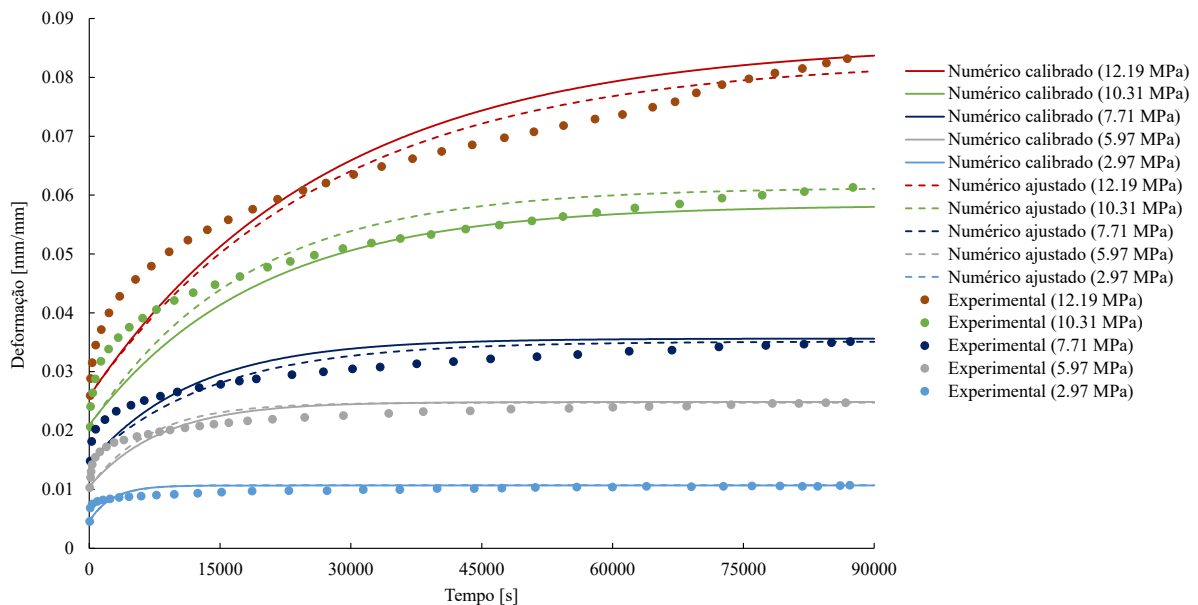


Figura 7-53: Resultados numéricos calibrados, resultados numéricos ajustados e resultados experimentais dos ensaios de fluência à tração do PEAD

A partir da Figura 7-53 é possível observar que os resultados numéricos obtidos utilizando-se a formulação calibrada apresentam concordância em relação aos resultados experimentais nos cinco níveis de tensão ensaiados. Estes resultados demonstram a consistência da formulação

desenvolvida e da metodologia de calibração apresentada. Para avaliar a qualidade da calibração, na Figura 7-54 são apresentados os resultados numéricos utilizando-se a formulação calibrada e os resultados experimentais para os ensaios de fluência à tração em três níveis de tensão distintos dos utilizados na metodologia de calibração.

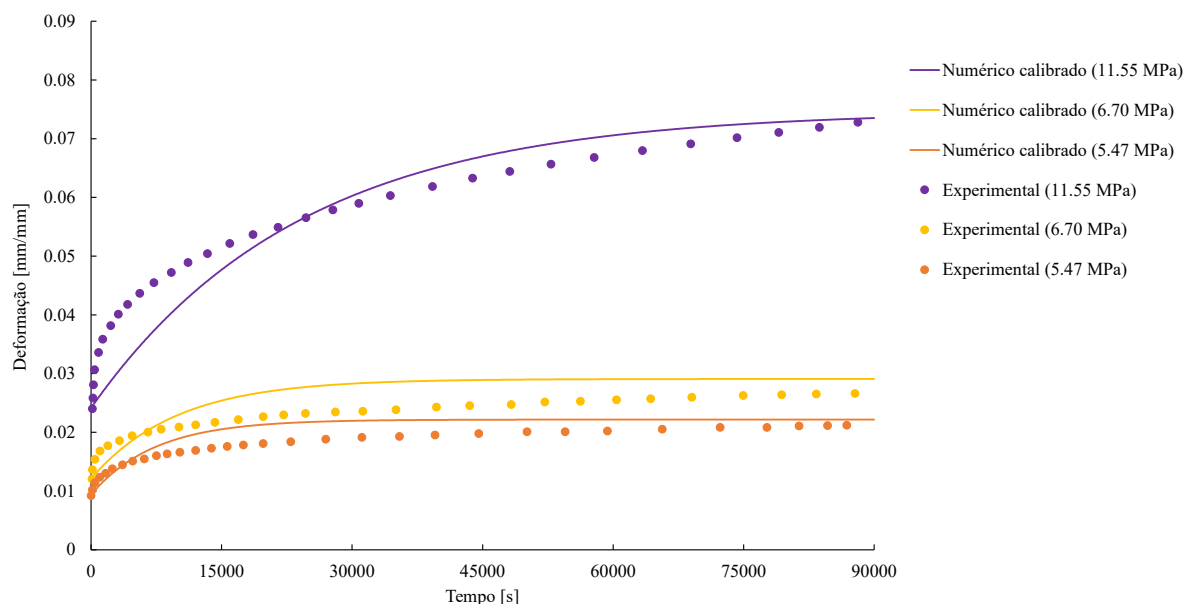


Figura 7-54: Resultados numéricos calibrados e resultados experimentais de ensaios de fluência à tração do PEAD

A partir da Figura 7-54 é possível observar que, utilizando-se a formulação calibrada, é possível reproduzir os resultados de ensaios de fluência à tração em níveis de tensão diferentes daqueles utilizados para obtenção das curvas de ajuste com concordância satisfatória. Esses resultados reforçam a consistência da formulação e da metodologia de calibração adotada. Dessa forma, entende-se que a formulação calibrada pode ser utilizada para análise viscoelástica de estruturas discretizadas por elementos de pórtico submetidas a diferentes solicitações, contanto que o nível de tensão fique dentro da faixa ensaiada, visto que não se pode garantir a extrapolação dos resultados. Tal condição pode ser melhorada aumentando-se a faixa de níveis de tensão ensaiados. Além disso, é necessário avaliar o comportamento do material e, conseqüentemente, das curvas de ajuste para tensões de compressão. Do contrário, pode-se considerar, de forma simplificada e como uma aproximação grosseira, que o material apresenta comportamento simétrico, ou seja, as mesmas equações de ajuste são utilizadas tanto para tensões de tração quanto de compressão, sendo considerado o módulo das tensões nas avaliações dos parâmetros do modelo. Dessa forma, é possível analisar elementos estruturais submetidos a diferentes solicitações e constituídos pelos materiais ensaiados.

Na sequência, são apresentadas algumas análises utilizando-se a formulação calibrada a fim de verificar a consistência da formulação desenvolvida e da metodologia de calibração apresentada.

7.3.1.3 Ensaio de fluência à tração de longa duração

Como primeira análise, é avaliada a capacidade da formulação calibrada em reproduzir os resultados dos ensaios de fluência à tração de longa duração. Para tanto, são comparados os resultados obtidos utilizando-se a formulação calibrada e os resultados experimentais disponíveis em Liu (2007), como apresentado na Figura 7-55. Nesta análise é considerada a atuação de uma tensão constante igual a 6,89 MPa ao longo de 7 dias ($\cong 600000$ s).

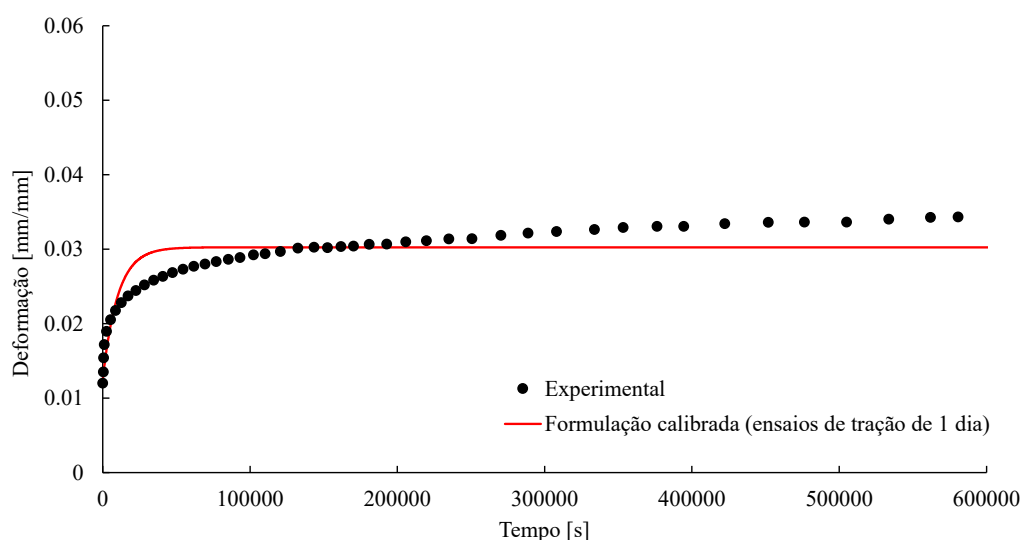


Figura 7-55: Resultados numéricos calibrados e resultados experimentais do ensaio de fluência à tração de 7 dias sob tensão de 6,89 MPa

A partir da Figura 7-55 é possível observar que a formulação calibrada a partir dos ensaios de fluência à tração de curta duração (1 dia) é capaz de reproduzir o ensaio de fluência à tração de longa duração com algumas divergências. A divergência mais relevante (por se tratar de uma subestimativa) está relacionada à previsão subestimada das deformações a partir de 200000 s ($\cong 2$ dias). Esta divergência nos resultados tem origem na utilização da técnica de ajuste dos parâmetros. Utilizando-se esta técnica para ajuste dos parâmetros a partir dos resultados de fluência à tração de curta duração é considerado que as deformações máximas por fluência $\varepsilon_{t \rightarrow \infty}$, nos respectivos níveis de tensão, são obtidas com 1 dia de ensaio. Essa consideração resulta em uma superestimativa do módulo de elasticidade E_2 e uma subestimativa do tempo de retardo. Portanto, para se obter as curvas de ajustes utilizadas na calibração é adequado que os

ensaios de fluência à tração sejam realizados ao longo de um período de tempo suficientemente grande, ou seja, é adequado que a deformação por fluência tenha atingido seu valor máximo ou esteja suficientemente próxima de seu valor máximo. A sensibilidade em relação à deformação máxima por fluência deve ser avaliada a partir de ensaios de fluência à tração em diferentes níveis de tensão e diferentes intervalos de tempo.

Para avaliar os efeitos da duração do ensaio de fluência na determinação dos parâmetros a partir da técnica de ajuste apresentada, a mesma é utilizada considerando-se os resultados experimentais do ensaio de longa duração truncados em 1 dia de ensaio e os resultados experimentais para o ensaio completo de 7 dias. Os parâmetros obtidos para os dois casos considerados são apresentados na Tabela 7-5 e os resultados obtidos utilizando-se a formulação ajustada adotando-se os respectivos parâmetros são apresentados na Figura 7-56.

Tabela 7-5: Parâmetros do modelo de Boltzmann obtidos pela técnica de ajuste para tensão de 6,89 MPa

Ensaio	E_1 [MPa]	E_2 [MPa]	η [MPa·s]
Curta duração (1 dia)	550	421	5430153
Longa duração (7 dias)	550	316	12779353

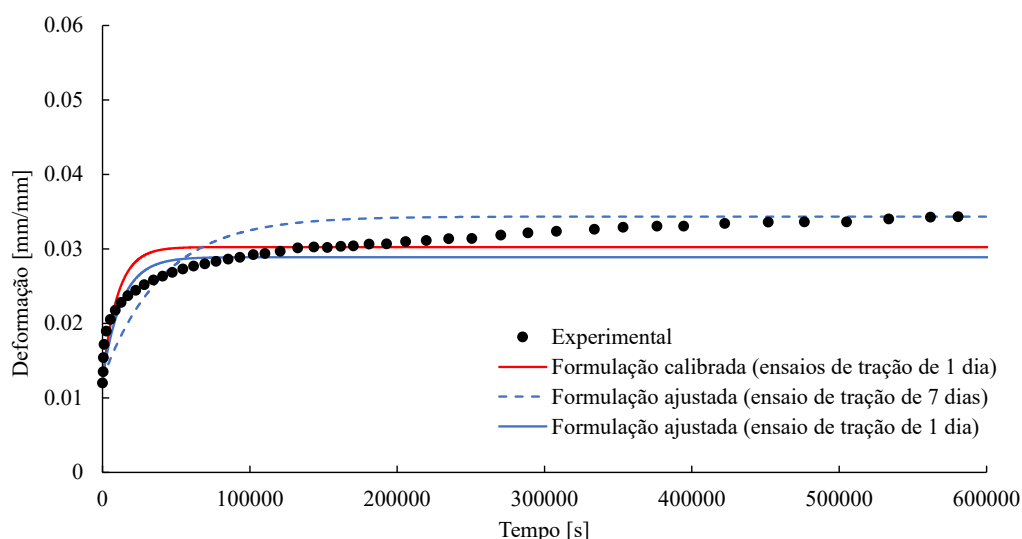


Figura 7-56: Resultados numéricos calibrados, resultados numéricos ajustados e resultados experimentais do ensaio de fluência à tração de 7 dias sob tensão de 6,89 MPa

A partir dos parâmetros apresentados na Tabela 7-5 e dos resultados apresentados na Figura 7-56 é possível observar que a duração do ensaio interfere na determinação dos parâmetros obtidos a partir da técnica de ajuste apresentada e, conseqüentemente, interfere nas equações

de ajuste utilizadas para calibração da formulação. É possível observar, também, que os resultados obtidos a partir da formulação ajustada, considerando-se o ensaio de longa duração, apresentam melhor concordância principalmente em relação aos resultados experimentais dos instantes finais do ensaio. Dessa forma, é possível inferir que a partir de ensaios de longa duração pode-se obter curvas de ajuste e, conseqüentemente, uma formulação calibrada mais adequada para análises de longa duração.

É importante observar que a interferência da duração dos ensaios de fluência não é uma exclusividade da formulação desenvolvida e da metodologia de calibração apresentada no presente estudo. Essa mesma interferência é observada em outras metodologias utilizadas para previsão do comportamento viscoelástico. Por exemplo, adotando-se a Lei de Potência de Findley (Findley *et al.*, 1989), a qual é frequentemente utilizada para avaliação do comportamento viscoelástico de fluência de materiais poliméricos, é possível observar de forma simples a interferência da duração dos ensaios na previsão do comportamento ao longo do tempo, como apresentado a seguir.

Assim como apresentado em Findley *et al.* (1989), a evolução das deformações ao longo do tempo, sob tensão constante, em materiais poliméricos pode ser descrita analiticamente por uma lei de potência, denominada Lei de Findley, expressa por:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + mt^n \quad (7-38)$$

em que ε representa a deformação total ao longo do tempo, ε_0 representa a deformação elástica instantânea e m e n são parâmetros representativos das propriedades viscoelásticas do material, determinados a partir de resultados experimentais.

Reajustando-se os termos, a Equação (7-38) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon(t) - \varepsilon_0 = mt^n \quad (7-39)$$

Lembrando-se que a deformação viscoelástica (ε_v) pode ser definida como a deformação total menos a deformação elástica instantânea e avaliando-se o logaritmo nos dois lados da Equação (7-39), tem-se:

$$\log(\varepsilon_v) = \log(m) + n \cdot \log(t) \quad (7-40)$$

Dessa forma, a partir da linearização dos resultados experimentais é possível, utilizando-se o Método dos Mínimos Quadrados, determinar os parâmetros m e n da Lei de Findley adequados ao material ensaiado. Para tanto, são considerados dois casos, o primeiro referente aos resultados experimentais truncados em 1 dia de ensaio e o segundo caso referente aos resultados experimentais para o ensaio completo de 7 dias.

Para o primeiro caso, considerando-se 1 dia de ensaio, os resultados experimentais podem ser representados graficamente como apresentado na Figura 7-57(a). Em termos do logaritmo da deformação viscoelástica e do logaritmo do tempo, os resultados experimentais podem ser representados graficamente como apresentado na Figura 7-57(b).

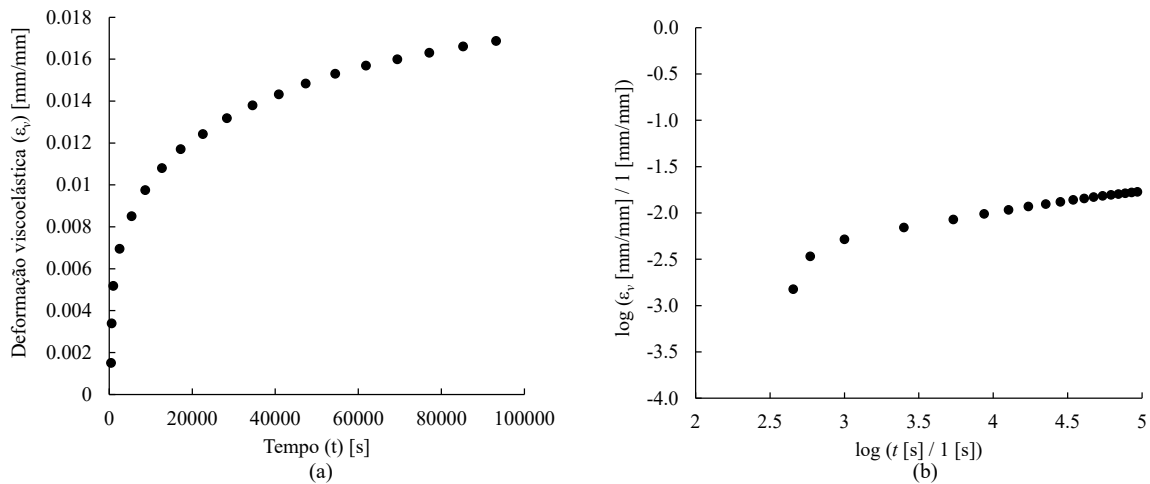


Figura 7-57: Resultados referentes a 1 dia de ensaio

A partir da Figura 7-57(b) e utilizando-se o Método dos Mínimos Quadrados, é possível obter a regressão linear expressa por:

$$\log(\epsilon_v) = -3,45531 + 0,34990 \cdot \log(t) \quad (7-41)$$

Dessa forma, comparando-se as Equações (7-40) e (7-41), os parâmetros m e n da Lei de Findley para o ensaio de 1 dia podem ser definidos como:

$$\log(m) = -3,45531 \quad \therefore \quad m = 0,0003505 \quad (7-42)$$

$$n = 0,3499 \quad (7-43)$$

Dessa forma a Lei de Findley para previsão do comportamento de fluência obtida a partir dos resultados de 1 dia de ensaio pode ser expressa por:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + 0,0003505t^{0,3499} \quad (7-44)$$

Para o segundo caso, considerando-se 7 dias de ensaio, os resultados experimentais podem ser representados graficamente como apresentado na Figura 7-58(a). Em termos do logaritmo da deformação viscoelástica e do logaritmo do tempo os resultados experimentais podem ser representados graficamente como apresentado na Figura 7-58(b).

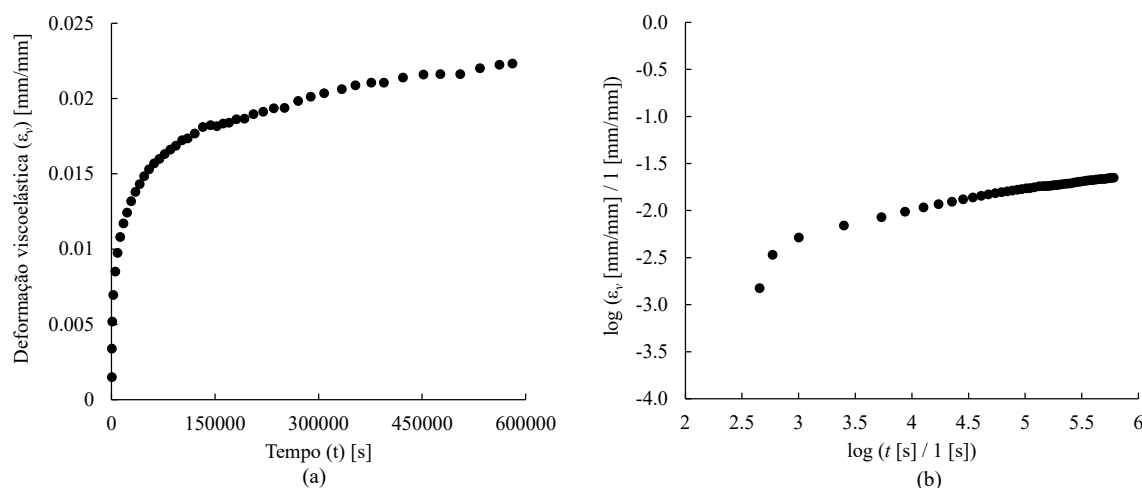


Figura 7-58: Resultados referentes a 7 dias de ensaio

A partir da Figura 7-58(b) e utilizando-se o Método dos Mínimos Quadrados é possível obter a regressão linear expressa por:

$$\log(\varepsilon_v) = -3,14031 + 0,26826 \cdot \log(t) \quad (7-45)$$

Dessa forma, comparando-se as Equações (7-40) e (7-45), os parâmetros m e n da Lei de Findley para o ensaio de 7 dia podem ser definidos como:

$$\log(m) = -3,14031 \quad \therefore \quad m = 0,0007239 \quad (7-46)$$

$$n = 0,26826 \quad (7-47)$$

Dessa forma a Lei de Findley para previsão do comportamento de fluência obtida a partir dos resultados de 7 dias de ensaio pode ser expressa por:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + 0,0007239t^{0,26826} \quad (7-48)$$

Por fim, utilizando-se as Equações (7-44) e (7-48) para previsão do comportamento de fluência de longa duração, é possível obter os resultados apresentados na Figura 7-59. Adicionalmente, na Figura 7-59, são apresentados os resultados obtidos utilizando-se a formulação calibrada, os resultados obtidos utilizando-se a formulação ajustada e os resultados experimentais para o ensaio de fluência de longa duração sob tensão de 6,89 MPa.

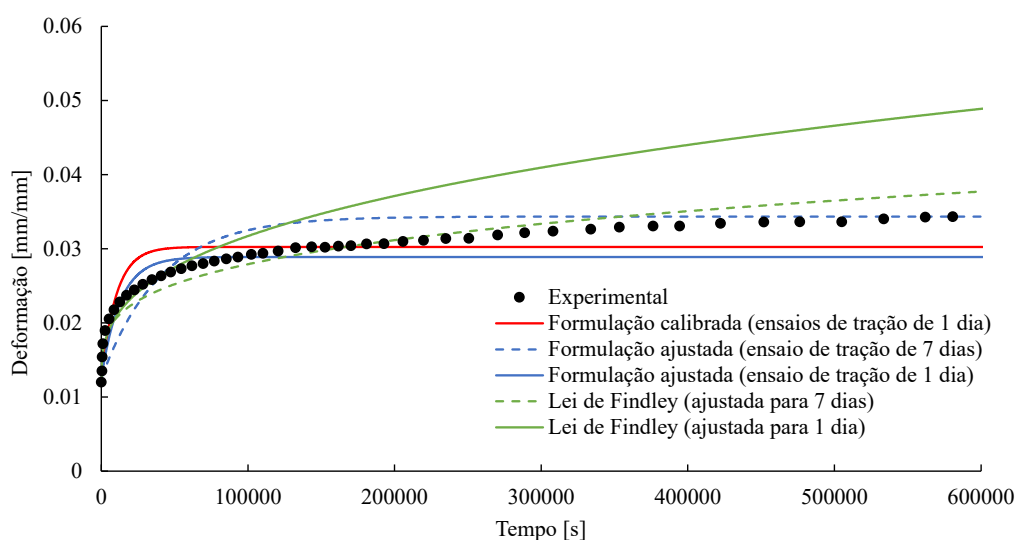


Figura 7-59: Resultados numéricos calibrados, resultados numéricos ajustados, previsão pela Lei de Findley e resultados experimentais do ensaio de fluência à tração de 7 dias sob tensão de 6,89 MPa

A partir da Figura 7-59 é possível verificar que, assim como observado para a formulação desenvolvida e para a metodologia de calibração apresentada, a previsão das deformações ao longo do tempo utilizando-se a Lei de Findley também sofre interferência em relação à duração dos ensaios considerados para ajuste dos parâmetros. Além disso, tendo-se disponíveis apenas resultados de ensaios de fluência de curta duração, a formulação calibrada fornece resultados com melhores concordâncias em relação aos resultados experimentais, em comparação com a previsão obtida pela Lei de Findley. Esses resultados reforçam a consistência da formulação desenvolvida e da metodologia de calibração apresentada.

7.3.1.4 Teste de fluência à tração em dois níveis de tensão

Nesta análise, é avaliada a capacidade da formulação calibrada em reproduzir os resultados de dois testes de fluência à tração com dois níveis de tensão em cada. Para tanto, são comparados os resultados obtidos utilizando-se a formulação calibrada e os resultados experimentais disponíveis em Liu (2007).

No primeiro teste de fluência à tração com dois níveis de tensão, inicialmente, é considerada a atuação de uma tensão igual a 5,25 MPa entre 0 e 11600 s. Em seguida, a tensão é alterada para 8,31 MPa, de forma instantânea, porém, sem gerar efeitos inerciais. Essa tensão é considerada, atuante entre 11600 s e 95000 s. Os resultados numéricos obtidos com a formulação calibrada e os resultados experimentais disponíveis em Liu (2007) são apresentados na Figura 7-60.

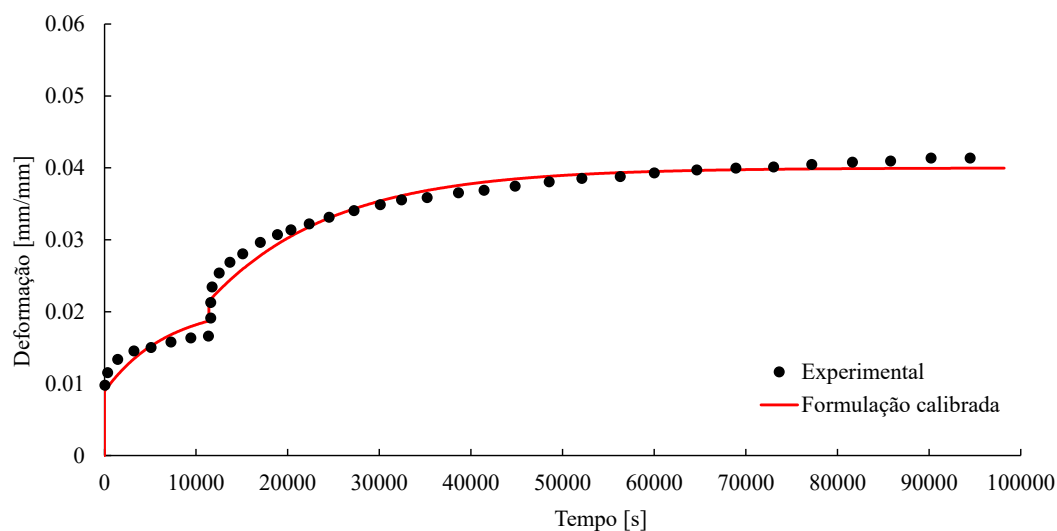


Figura 7-60: Resultados numéricos calibrados e resultados experimentais do teste de fluência à tração com dois níveis de tensão (5,25 MPa e 8,31 MPa)

A partir da Figura 7-60 é possível observar que os resultados numéricos apresentam uma satisfatória concordância com os resultados experimentais nos dois níveis de tensão aplicados. Esses resultados reforçam a consistência e capacidade da formulação desenvolvida no presente estudo e calibrada a partir de ensaios de fluência à tração.

No segundo teste de fluência à tração com dois níveis de tensão, inicialmente, é considerada a atuação de uma tensão igual a 10,59 MPa entre 0 e 18200 s. Em seguida a tensão é alterado para 5,35 MPa, de forma instantânea, porém, sem gerar efeitos inerciais. Essa tensão é considerada, atuante entre 18200 s e 100000 s. Os resultados numéricos obtidos com a formulação calibrada e os resultados experimentais disponíveis em Liu (2007) são apresentados na Figura 7-61.

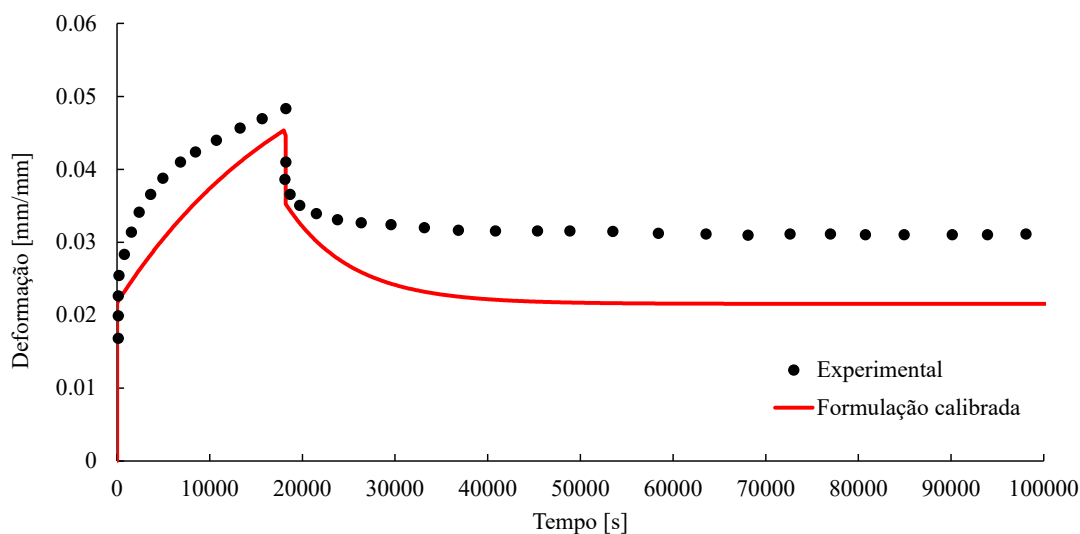


Figura 7-61: Resultados numéricos calibrados e resultados experimentais do teste de fluência à tração com dois níveis de tensão (10,59 MPa e 5,35 MPa)

A partir da Figura 7-61 é possível observar que os resultados numéricos apresentam um perfil de evolução semelhante ao obtido experimentalmente, entretanto, com diferenças significativas nos valores obtidos para as deformações ao longo do tempo. Em relação ao processo de deformação com a tensão inicial de 10,59 MPa, essa diferença é acentuada devido ao curto intervalo de tempo do teste. Caso o intervalo de tempo do teste sob a tensão de 10,59 MPa fosse estendido, os resultados numéricos se aproximariam dos resultados experimentais, como pode ser observado pela extensão das curvas que descrevem a evolução das deformações ao longo do tempo. Além disso, após a redução da tensão, em um processo de recuperação parcial, é possível observar que as diferenças entre os resultados numéricos e experimentais se acentuam. Parte dessas diferenças podem ser atribuídas à incapacidade da formulação desenvolvida no presente estudo em considerar os efeitos do comportamento viscoelastoplástico típico do PEAD, como destacado em Liu *et al.* (2008) e Kühl *et al.* (2016).

7.3.2 Painel sanduiche

Neste exemplo de aplicação da formulação desenvolvida é apresentada a análise de um painel sanduiche tipo ISOTHERM SC 80. O painel analisado é constituído por chapas finas de aço, nas faces superior e inferior, separadas por um núcleo de uretano de baixa densidade. Dessa forma, este exemplo tem como objetivo demonstrar a possibilidade de utilização da formulação desenvolvida na análise de componentes estruturais compostos por materiais com propriedades mecânicas muito diferentes entre si.

Nesta análise, o painel é considerado biapoiado e solicitado por uma força uniformemente distribuída em sua face superior, como apresentado na Figura 7-62. O comprimento L do painel é igual a 4000 mm, a largura b é igual a 1100 mm e altura h é igual a 81,02 mm. A espessura h_a das chapas de aço igual a 0,51 mm e a espessura h_u do núcleo de uretano igual 80,0 mm. A força Q uniformemente distribuída tem intensidade igual a 0,9196 N/mm, sendo referente ao peso próprio e a um carregamento externo.

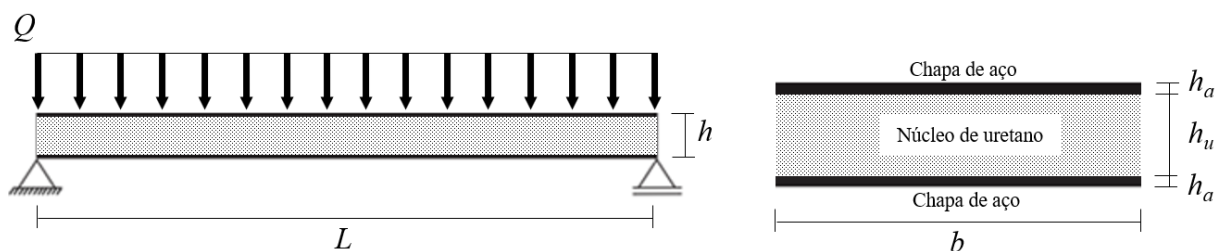


Figura 7-62: Características geométricas do painel sanduíche

Em relação à discretização espacial, são adotados 10 elementos finitos de 400 mm cada, com 10 pontos de Gauss ao longo do comprimento e 24 pontos Gauss ao longo da altura. A adoção de 24 pontos de Gauss ao longo da altura é necessária para adequar a seção laminada à distribuição dos materiais da seção transversal do perfil sanduíche. Por fim, em relação a discretização temporal são considerados 180 passos de tempo iguais a 6 h.

A análise deste painel sanduíche é apresentada em Rapp *et al.* (1999) e em Mesquita e Coda (2007b). Em Rapp *et al.* (1999) são obtidos os resultados experimentais referentes à fluência à flexão do painel sanduíche sob força vertical uniformemente distribuída. A partir dos resultados experimentais o autor determina, para o núcleo de uretano, o módulo de elasticidade transversal na fase elástica igual a 3,52 MPa, o módulo de elasticidade transversal na fase viscoelástica igual a 7,46 MPa e o módulo de viscosidade igual a 2311,68 MPa·h, considerando-se o módulo de elasticidade do aço igual a 210 GPa. A partir dos parâmetros determinados experimentalmente e considerando-se o coeficiente de Poisson igual a 0,4 (usualmente adotado para polímeros de baixa densidade), tem-se os seguintes parâmetros que caracterizam o núcleo de uretano: $E_1 = 9,856$ MPa, $E_2 = 20,888$ MPa e $\eta = 2311,68$ MPa·h.

Com base nos resultados obtidos em Rapp *et al.* (1999), Mesquita e Coda (2007b) realizam uma análise numérica do painel considerando-se uma formulação viscoelástica com acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos. Para tanto, são adotados 24 elementos finitos de pórtico (com cinemática de Bernoulli-Euler)

para discretização das chapas de aço e 26 elementos de contorno quadráticos para discretização do núcleo de uretano. Em relação a discretização temporal, os autores consideram 180 passos de tempo iguais a 6 h. A formulação desenvolvida em Mesquita e Coda (2007b) apresenta algumas semelhanças em relação a formulação desenvolvida no presente estudo. Em relação à descrição do comportamento viscoelástico, é considerado o modelo reológico de Boltzmann e em relação à avaliação das taxas de deformação é utilizado o Método das Diferenças Finitas. No referido trabalho, os autores consideram uma ligeira alteração nos parâmetros a fim de aproximar os resultados instantâneo e final de deslocamento vertical máximo (flecha no meio do vão) em relação aos resultados experimentais apresentados em Rapp *et al.* (1999). Dessa forma, os autores utilizam os seguintes parâmetros para caracterizar o núcleo de uretano: $E_1 = 9,388 \text{ MPa}$, $E_2 = 21,167 \text{ MPa}$ e $\eta = 2342,53 \text{ MPa}\cdot\text{h}$.

Assim como descrito nos referidos trabalhos, é importante destacar que apenas o núcleo de uretano é responsável pelo comportamento mecânico viscoelástico, visto que o aço não apresenta comportamento viscoelástico à temperatura ambiente. Dessa forma, devido a consideração da manutenção da planicidade da seção transversal nas cinemáticas adotadas no presente estudo, a fim de possibilitar a avaliação do comportamento viscoelástico do núcleo de uretano, é necessário atribuir às chapas de aço parâmetros viscoelásticos que acompanhem o comportamento descrito pelos parâmetros do núcleo de uretano. Para tanto, as mesmas proporções dos parâmetros E_2 e η em relação ao parâmetro E_1 do uretano, são mantidas para obtenção dos parâmetros E_2 e η do aço com parâmetro E_1 igual a 210,00 GPa. Essa abordagem permite considerar que as chapas e aço não restringem os deslocamentos por fluência devido ao comportamento viscoelástico do núcleo de uretano. Portanto, na análise numérica desenvolvida, quando se consideram os parâmetros determinados em Rapp *et al.* (1999), tem-se os seguintes parâmetros para o aço: $E_1 = 210,00 \text{ GPa}$, $E_2 = 445,00 \text{ GPa}$ e $\eta = 49248,26 \text{ GPa}\cdot\text{h}$. Quando se consideram os parâmetros determinados em Mesquita e Coda (2007b), tem-se os seguintes parâmetros para o aço: $E_1 = 210,00 \text{ GPa}$, $E_2 = 473,48 \text{ GPa}$ e $\eta = 52399,93 \text{ GPa}\cdot\text{h}$.

Os resultados numéricos referentes ao deslocamento vertical no meio do vão (flecha total) obtidos utilizando-se a formulação desenvolvida, considerando-se as cinemáticas de Bernoulli-Euler e de Reissner e adotando-se os parâmetros determinados em Rapp *et al.* (1999) e em Mesquita e Coda (2007b), são apresentados na Figura 7-63. Adicionalmente, são apresentados os resultados experimentais disponíveis em Rapp *et al.* (1999). Na Figura 7-64 são apresentados

os resultados referentes à contribuição da fluência para os deslocamentos verticais no meio do vão (flecha por fluência), assim como apresentado em Mesquita e Coda (2007b). Adicionalmente são apresentados os resultados numéricos disponíveis em Mesquita e Coda (2007b) e os resultados experimentais disponíveis em Rapp *et al.* (1999). Quanto ao tempo de processamento, as simulações duraram aproximadamente 203 segundos.

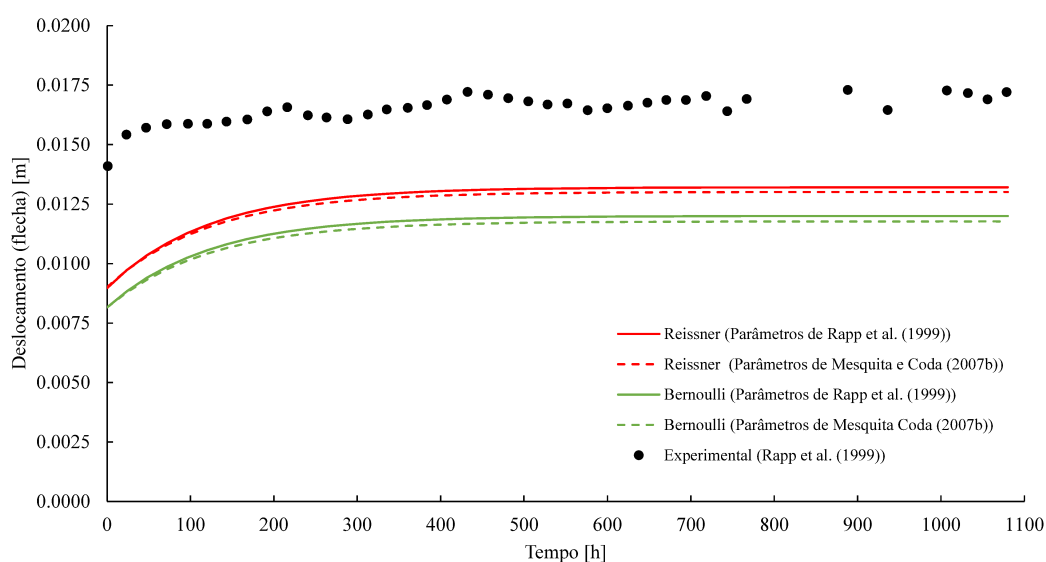


Figura 7-63: Resultados numéricos e resultados experimentais referentes à flecha total no meio do vão ao longo do tempo

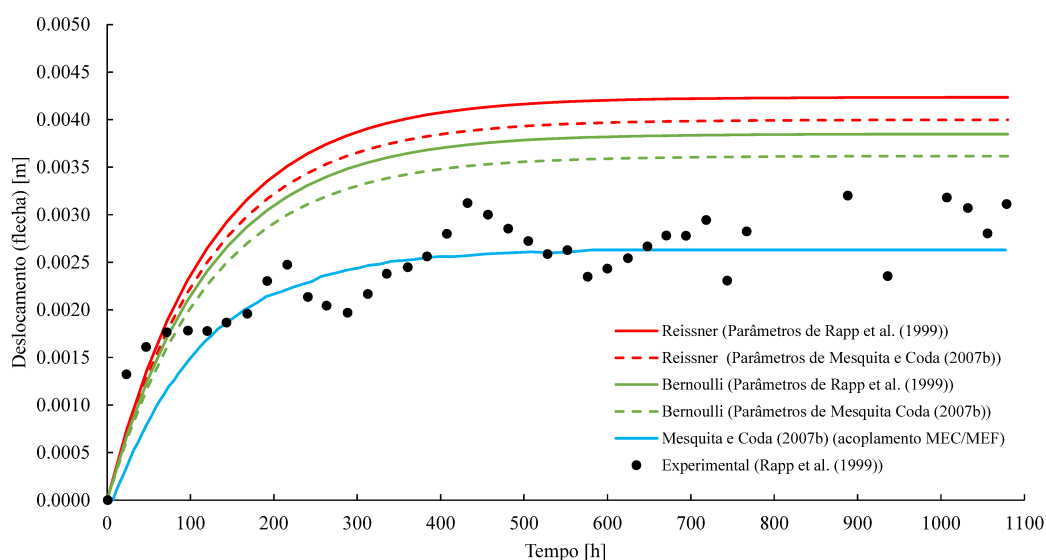


Figura 7-64: Resultados numéricos e resultados experimentais referentes à contribuição da fluência para a flecha no meio do vão ao longo do tempo

A partir dos resultados obtidos e apresentados na Figura 7-63, em relação ao deslocamento vertical no meio do vão (flecha total), é possível verificar um comportamento mais rígido na simulação do componente estrutural, para todos os casos considerados, em comparação com os

resultados obtidos experimentalmente. Parte deste comportamento e da acentuada diferença entre os resultados numéricos e experimentais pode ser atribuída à manutenção da planicidade da seção transversal, característica das duas cinemáticas adotadas na formulação desenvolvida no presente estudo.

Na Tabela 7-6 é apresentado um comparativo entre os principais resultados obtidos e expostos na Figura 7-64. A partir destes resultados obtidos em relação à contribuição da fluência para o deslocamento vertical no meio do vão (flecha por fluência) é possível verificar um comportamento menos rígido na simulação do componente estrutural, para todos os casos considerados, em comparação com os resultados obtidos experimentalmente e os resultados numéricos disponíveis em Mesquita e Coda (2007b).

Tabela 7-6: Resultados referentes à contribuição da fluência para a flecha no meio do vão

Modelo	Contribuição da fluência para a flecha final [mm]	Diferença relativa ao resultado experimental
Experimental (Rapp <i>et al.</i> , 1999)	3,112	-
MEC/MEF (Mesquita e Coda, 2007b)	2,630	-16%
Reissner (parâmetros de Rapp <i>et al.</i> (1999))	4,234	+36%
Reissner (parâmetros de Mesquita e Coda (2007b))	3,997	+28%
Bernoulli-Euler (parâmetros de Rapp <i>et al.</i> (1999))	3,848	+24%
Bernoulli-Euler (parâmetros de Mesquita e Coda (2007b))	3,616	+16%

Por fim, a partir da Figura 7-64 e da Tabela 7-6 é possível observar uma diferença considerável nos resultados obtido utilizando-se as cinemáticas de Bernoulli-Euler e de Reissner, sendo a contribuição dos efeitos do cisalhamento responsável por um aumento de 10% na flecha por fluência. Esses resultados reforçam a importância dos efeitos do cisalhamento para o comportamento viscoelástico, justificando-se a relevância da utilização de formulações que levem em consideração tais efeitos. Além disso, a partir das Figuras 7-63 e 7-64, pode-se observar que utilizando-se a formulação desenvolvida no presente estudo é possível analisar um componente estrutural composto por materiais com parâmetros físicos muito distintos, contanto que se faça uma consideração apropriada para levar em consideração a manutenção da planicidade da seção transversal.

7.3.3 Pórtico plano constituído por material polimérico reforçado com fibra de vidro

Neste exemplo de aplicação da formulação desenvolvida é apresentada a análise de um pórtico plano constituído por dois pilares e uma viga, ambos em perfis H pultrudados de viniléster reforçado com fibra de vidro. É importante observar que o material constituinte do pórtico não é isotrópico, podendo ser considerado como ortotrópico (Sá, 2007). Entretanto, a formulação apresentada no presente estudo é desenvolvida com base em potenciais e tensores constitutivos próprios para materiais isotrópicos e, conseqüentemente, adequada para análise de estruturas constituídas por materiais isotrópicos. Para contornar tal limitação, este exemplo tem como objetivo demonstrar a possibilidade de utilização da formulação desenvolvida na análise de estruturas constituídas por materiais ortotrópicos.

O pórtico analisado neste exemplo é apresentado na Figura 7-65, sendo sua análise experimental apresentada em Bank e Mosallam (1992) a partir de um teste de fluência de longa duração. As dimensões do pórtico, medidas a partir da linha média dos elementos, são dadas pela altura igual a 1,83 m e pela largura igual a 2,73 m, sendo as dimensões da seção transversal dos perfis dadas por 203 x 203 x 10 mm, como apresentado na Figura 7-65. Quanto ao carregamento, este consiste em duas forças verticais com intensidade igual a 7562 N, mantidas constantes durante 3500 h e aplicadas de forma simétrica na viga, a 0,91 m das ligações, como apresentado na Figura 7-65.

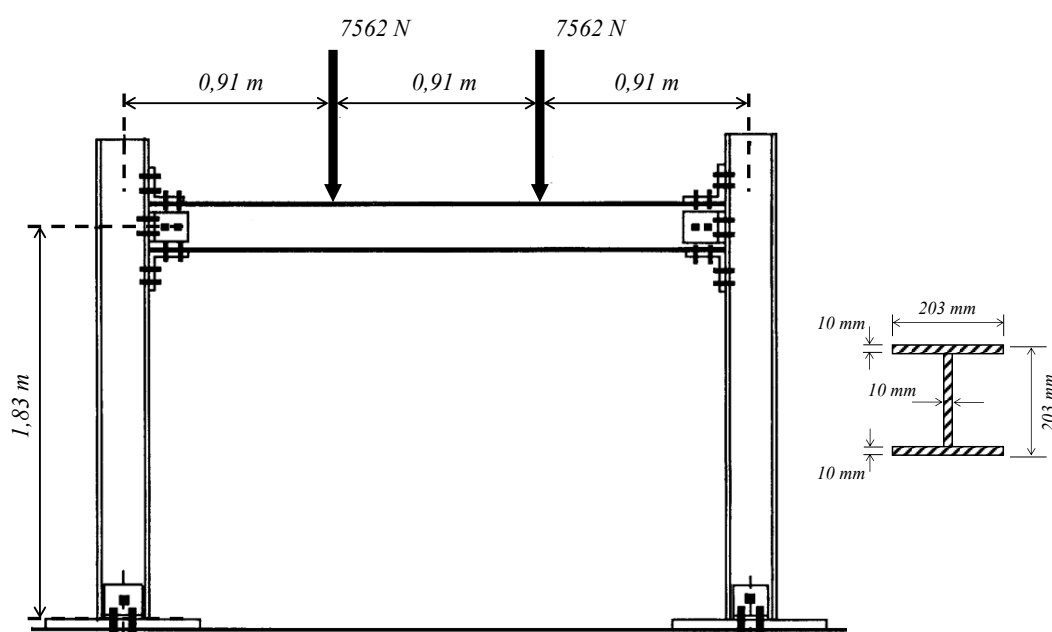


Figura 7-65: Características geométricas do pórtico plano

A partir da Figura 7-65, e como descrito em Bank e Mosallam (1992), pode-se destacar que as ligações entre a viga e os pilares são desenvolvidas, teoricamente, para serem consideradas como rígidas, enquanto as bases são desenvolvidas para serem consideradas como articuladas. Entretanto, assim como observado em Bank e Mosallam (1992), nos testes as ligações entre a viga e os pilares apresentaram flexibilidade acima do previsto, sendo estas consideradas como semi-rígidas. Portanto, são avaliados dois casos nas análises numéricas apresentadas no presente estudo. O primeiro considerando-se ligações rígidas e o segundo considerando-se ligações articuladas. É importante observar que, neste segundo caso, apesar do pórtico ser hipostático, na simulação não se observa instabilidade/colapso devido às simetrias do problema e à inexistência de forças horizontais.

A análise numérica do teste de fluência do pórtico apresentado em Bank e Mosallam (1992) é realizada utilizando-se a formulação desenvolvida no presente estudo, considerando-se as cinemáticas de Bernoulli-Euler e de Reissner. Para tanto, em relação à discretização espacial, são adotados 9 elementos finitos em cada pilar e 12 elementos finitos na viga, totalizando-se 30 elementos finitos. Em cada elemento finito são considerados 10 pontos de Gauss ao longo do comprimento e 30 pontos Gauss ao longo da altura. A adoção de 30 pontos de Gauss ao longo da altura é necessária para adequar a seção laminada à geometria da seção transversal do perfil estrutural. Por fim, em relação a discretização temporal são considerados 350 passos de tempo iguais a 10 h.

Na análise numérica, para descrição do comportamento viscoelástico, é adotado o modelo de Boltzmann. Dessa forma, é necessário determinar adequadamente os parâmetros envolvidos. Entretanto, o material constituinte da estrutura analisada não é isotrópico e, portanto, os parâmetros relacionados aos efeitos do cisalhamento não podem ser determinados por meio da relação resultante da isotropia e expressa pelo segundo parâmetro de Lamé (μ), assim como apresentado no desenvolvimento da formulação. Neste caso, a fim de possibilitar a análise de materiais ortotrópicos, utilizando-se a formulação desenvolvida, os parâmetros relacionados aos efeitos do cisalhamento devem ser obtidos a partir de resultados experimentais ou relações apropriadas e, posteriormente, inseridos nos pontos da formulação em que esses parâmetros relacionados aos efeitos do cisalhamento seriam avaliados com base no segundo parâmetro de Lamé (μ).

A partir desta consideração proposta, a adoção de modelos desacoplados para cada um dos efeitos pode ser interpretada esquematicamente como apresentado na Figura 7-66 e a expressão

da energia de deformação para o modelo de Boltzmann, apresentada no subitem 5.4.2, pode ser reescrita como:

$$U = \int_V \left[\int_X \left(\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_{11} + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{11} \right) \varepsilon_{11,q} dX + \right. \\ \left. + \int_X \left(2 \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \varepsilon_{12} + 2 \frac{\eta_G G_1}{G_1 + G_2} \dot{\varepsilon}_{12} - \frac{\eta_G}{G_1 + G_2} \dot{\sigma}_{12} \right) \varepsilon_{12,q} dX \right] dV \quad (7-49)$$

em que G_1 e G_2 representam os módulos de elasticidade transversais, respectivamente, na fase elástica e na fase viscoelástica e η_G representa o módulo de viscosidade, ambos relacionados aos efeitos do cisalhamento.

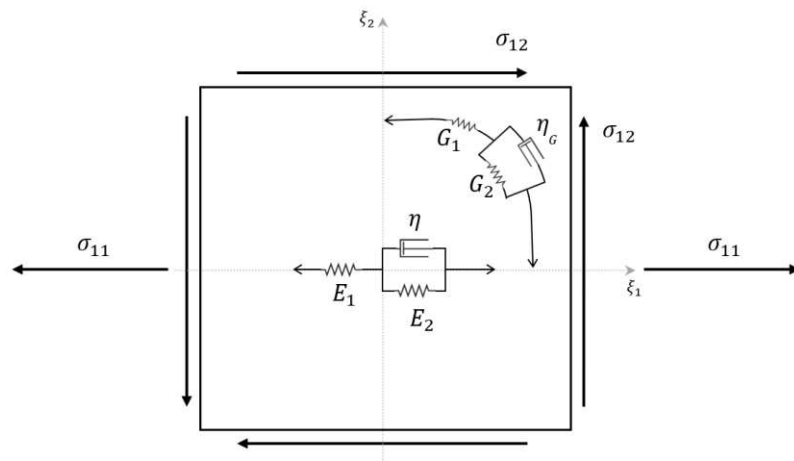


Figura 7-66: Interpretação esquemática dos modelos desacoplados

Portanto, a fim de realizar a análise numérica, é necessário, inicialmente, determinar os parâmetros dos modelos de Boltzmann. Para determinação dos parâmetros associado aos efeitos do esforço normal, são utilizados os resultados experimentais de deformação axial máxima no meio do vão, disponíveis em Bank e Mosallam (1992) e apresentados na Figura 7-67. Para determinação dos parâmetros associados aos efeitos do cisalhamento, são utilizados os resultados experimentais de deformação por cisalhamento na viga a 0,60 m da ligação, disponíveis em Bank e Mosallam (1992) e apresentados na Figura 7-68. Dessa forma, a partir destes resultados experimentais e utilizando-se a técnica de ajuste dos parâmetros, são obtidos os seguintes parâmetros que caracterizam o material constituinte e que foram adotados nas análises numéricas: $E_1 = 16,203$ GPa, $E_2 = 86,093$ GPa, $\eta = 125843,022$ GPa·h $G_1 = 3,716$ GPa, $G_2 = 13,001$ GPa e $\eta_G = 13901,783$ GPa·h.

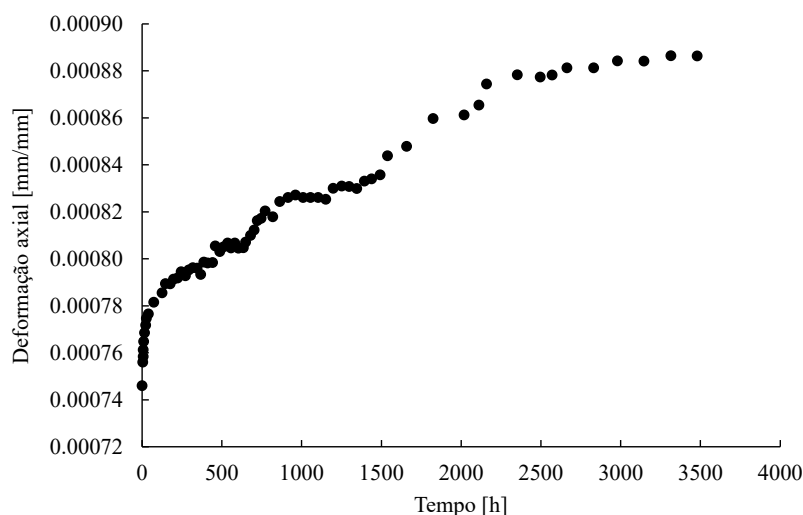


Figura 7-67: Resultados experimentais de deformação axial ao longo do tempo

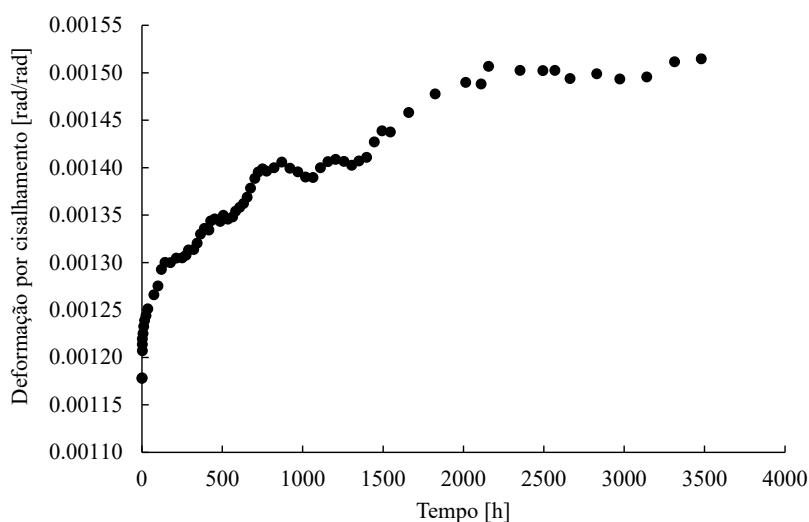


Figura 7-68: Resultados experimentais de deformação por cisalhamento ao longo do tempo

Os resultados numéricos referentes ao deslocamento vertical no meio do vão (flecha total), para os casos de ligações rígidas e articuladas, obtidos utilizando-se a formulação desenvolvida, considerando-se as cinemáticas de Bernoulli-Euler e de Reissner e adotando-se os parâmetros determinados pela técnica de ajuste dos parâmetros, são apresentados na Figura 7-69. Adicionalmente, são apresentados os resultados experimentais e os resultados analíticos disponíveis em Bank e Mosallam (1992). Na Tabela 7-7 é apresentado um comparativo entre os principais resultados obtidos e expostos na Figura 7-69. Quanto ao tempo de processamento, as simulações duraram aproximadamente 2285 segundos.

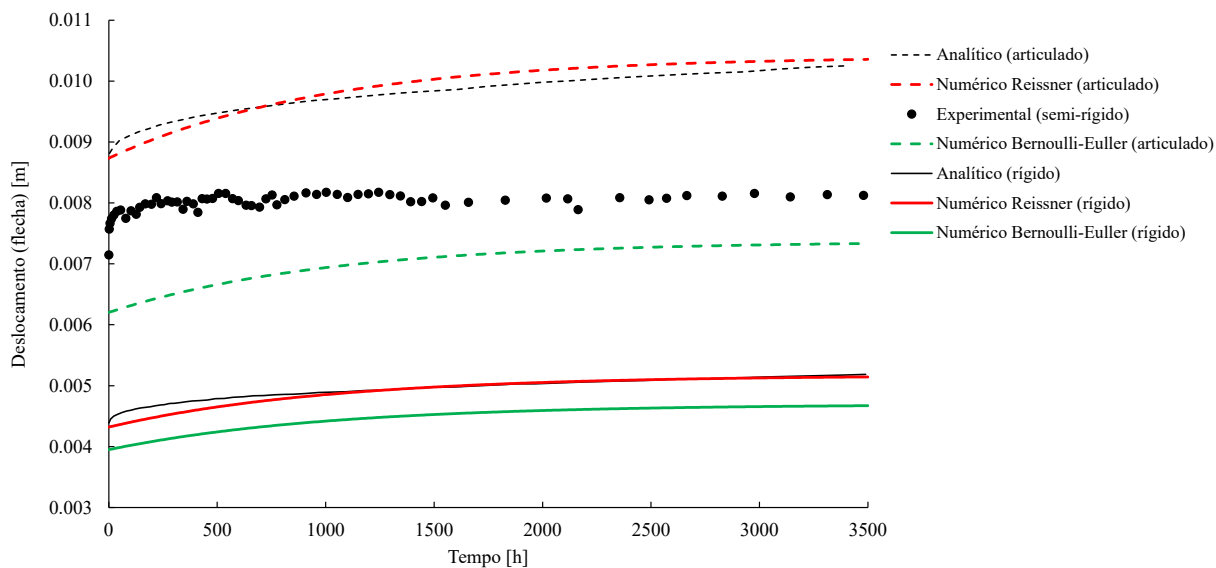


Figura 7-69: Resultados numéricos, resultados analíticos e resultados experimentais referentes à flecha no meio do vão do pórtico plano ao longo do tempo

Os resultados analíticos apresentados são obtidos em Bank e Mosallam (1992) utilizando-se as seguintes expressões, respectivamente, para o caso de ligações articuladas e para o caso de ligações rígidas:

$$w(t) = \frac{23}{1296} \left(\frac{P L^3}{I E(t)} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{P L}{k A G(t)} \right) \quad (7-50)$$

$$w(t) = \frac{5}{648} \left(\frac{P L^3}{I E(t)} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{P L}{k A G(t)} \right) \quad (7-51)$$

em que w representa a flecha ao longo do tempo, P representa as forças aplicadas, L representa o comprimento da viga, I representa o momento de inércia da seção transversal, A representa a área da seção transversal, k representa o coeficiente de cisalhamento, E representa o módulo de elasticidade longitudinal e G representa o módulo de elasticidade transversal. No referido trabalho os autores utilizam a Lei de Findley com base nos resultados experimentais de deformação para descrever o comportamento viscoelástico e deduzir expressões em termos de funções de potência para avaliar os módulos de elasticidade ao longo do tempo.

A partir da Figura 7-69, comparando-se com os resultados analíticos, é possível observar que os resultados experimentais são compatíveis com a consideração de ligações semi-rígidas, obtendo-se resposta intermediária entre as respectivas respostas para o caso de ligações rígidas e para o caso de ligações articuladas. Dessa forma, é possível verificar que os resultados

numéricos obtidos com a cinemática de Reissner são consistentes com esse comportamento obtido experimentalmente. Neste caso, considerando-se ligações rígidas é possível obter uma resposta numérica mais rígida do que a obtida experimentalmente, enquanto, considerando-se ligações articuladas é possível obter uma resposta numérica menos rígida do que a obtida experimentalmente. Além disso, a partir da Figura 7-69 e da Tabela 7-7, é possível observar a concordância entre os resultados numéricos obtidos com a cinemática de Reissner e os resultados analíticos. Por outro lado, com a cinemática de Bernoulli-Euler não é possível obter tais resultados. Neste caso, a resposta numérica obtida é mais rígida que a obtida experimentalmente tanto considerando-se ligações rígidas quanto considerando-se ligações articuladas. Dessa forma, é possível perceber a importância da consideração dos efeitos do cisalhamento para a análise do comportamento do pórtico como um todo.

Tabela 7-7: Resultados de flecha instantânea, flecha final e contribuição da fluência para a flecha no meio do vão

Modelo	Flecha elástica instantânea [mm]	Diferença relativa ao resultado experimental	Flecha viscoelástica final [mm]	Diferença relativa ao resultado experimental	Contribuição da fluência para a flecha final [mm]	Diferença relativa ao resultado experimental
Experimental (ligações semi-rígidas)	7,145	-	8,110	-	0,965	-
Analítico (ligações rígidas)	4,389	-39%	5,184	-36%	0,795	-18%
Analítico (ligações articuladas)	8,814	+23%	10,254	+26%	1,440	+49%
Reissner (ligações rígidas)	4,320	-40%	5,144	-37%	0,824	-15%
Reissner (ligações articuladas)	8,734	+22%	10,358	+28%	1,624	+68%
Bernoulli-Euler (ligações rígidas)	3,950	-45%	4,671	-42%	0,721	-25%
Bernoulli-Euler (ligações articuladas)	6,202	-13%	7,334	-10%	1,132	+17%

Por fim, comparando-se os resultados numéricos obtidos com a cinemática de Reissner e com a cinemática de Bernoulli-Euler, é possível observar que considerando-se os efeitos do cisalhamento há um aumento de 10 % nos deslocamentos verticais no meio do vão, considerando-se ligações rígidas, enquanto este aumento é de 41 % considerando-se ligações articuladas. Dessa forma, assim como destacado por Bank e Mosallam (1992), os efeitos do cisalhamento no comportamento viscoelástico de perfis estruturais pultrudados de material polimérico reforçado com fibra de vidro são relevantes e não podem ser negligenciados, justificando-se a importância da utilização de formulações que levem em consideração tais efeitos. Além disso, pelos resultados obtidos é possível verificar a capacidade da formulação

desenvolvida em descrever o comportamento viscoelástico de estruturas constituídas por materiais ortotrópicos, contanto que seja possível determinar os respectivos parâmetros relacionados aos efeitos do esforço normal e do cisalhamento.

7.3.4 Viga constituída por material polimérico reforçado com fibra de vidro

Neste último exemplo de aplicação da formulação desenvolvida é apresentada a análise numérica da fluência à flexão de quatro pontos de uma viga em perfil I pultrudado de poliéster reforçado com fibra de vidro. Assim como no caso do pórtico plano, o material da viga pode ser considerado como ortotrópico e as mesmas considerações devem ser feitas a fim de possibilitar a utilização da formulação desenvolvida no presente estudo. Os resultados numéricos obtidos são então comparados aos resultados experimentais referentes ao teste de fluência à flexão de quatro pontos, disponíveis em Sá (2007) e Sá *et al.* (2011a).

A estrutura analisada consiste em uma viga biapoiada com comprimento (L) igual a 1,8 m e seção transversal I com dimensões dadas por 150 x 75 x 8 mm. As forças verticais são aplicadas a 0,6 m dos apoios, com intensidade de 11,4 kN cada, e mantidas constantes durante 1600 h. Na Figura 7-70 é apresentado o perfil estrutural real e algumas características do ensaio realizado e na Figura 7-71 é apresentado um esquema representativo no qual é possível verificar as características geométricas, as condições de contorno e carregamento e as dimensões da seção transversal da viga analisada.



Figura 7-70: Perfil estrutural real submetido ao teste de fluência à flexão de quatro pontos (Sá, 2007)

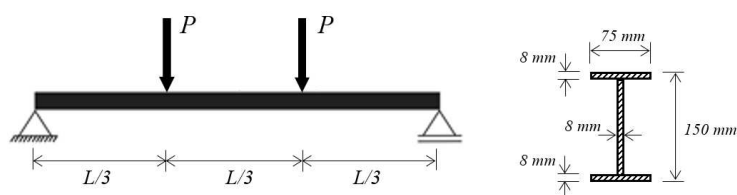


Figura 7-71: Características geométricas do perfil estrutural analisado

A análise numérica do teste de fluência da viga apresentada em Sá (2007) e Sá *et al.* (2011a) é realizada utilizando-se a formulação desenvolvida no presente estudo, considerando-se as cinemáticas de Bernoulli-Euler e de Reissner. Para tanto, em relação a discretização espacial, são adotados 12 elementos finitos de 0,15 m cada, com 10 pontos de Gauss ao longo do comprimento e 28 pontos Gauss ao longo da altura. A adoção de 28 pontos de Gauss ao longo da altura necessária para adequar a seção laminada à geometria da seção transversal do perfil estrutural. Por fim, em relação a discretização temporal, são considerados 320 passos de tempo iguais a 5 h.

Assim como na análise do pórtico plano, neste caso é adotado o modelo de Boltzmann para descrição do comportamento viscoelástico. Para determinação dos parâmetros associado aos efeitos do esforço normal, são utilizados os resultados experimentais de deformação axial máxima no meio do vão, disponíveis em Sá (2007) e Sá *et al.* (2011a) e apresentados na Figura 7-72. Em relação aos parâmetros associados aos efeitos do cisalhamento, diferentemente do desenvolvimento realizado no caso do pórtico plano, nos referidos trabalhos, não estão disponíveis os resultados de deformação por cisalhamento. Portanto, de uma forma simplificada, é adotada a razão entre o módulo de elasticidade longitudinal e o módulo de elasticidade transversal definido em Sá (2007) como grau de anisotropia e dado por $E/G = 7,2$. A partir dessa relação são estimados os parâmetros associados aos efeitos do cisalhamento em função dos parâmetros associados aos efeitos do esforço normal. Dessa forma, a partir dos resultados experimentais apresentados na Figura 7-72, utilizando-se a técnica de ajuste dos parâmetros e considerando-se a relação entre os parâmetros associados aos efeitos do cisalhamento e os parâmetros associados aos efeitos do esforço normal, são obtidos os seguintes parâmetros que caracterizam o material constituinte e que foram adotados nas análises numéricas: $E_1 = 28,87$ GPa, $E_2 = 190,23$ GPa, $\eta = 97430,51$ GPa·h, $G_1 = 4,01$ GPa, $G_2 = 26,42$ GPa e $\eta_G = 13532,02$ GPa·h.

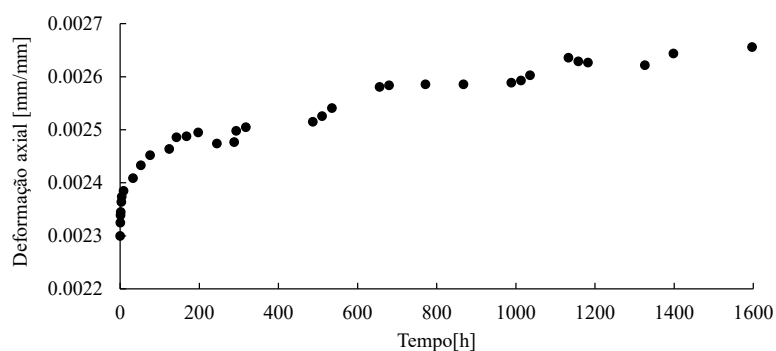


Figura 7-72: Resultados experimentais referentes às deformações axiais máximas do perfil estrutural

Os resultados numéricos, referentes ao deslocamento vertical no meio do vão (flecha total), obtidos utilizando-se a formulação desenvolvida, considerando-se as cinemáticas de Bernoulli-Euler e de Reissner, são apresentados na Figura 7-73. Adicionalmente, são apresentados os resultados experimentais disponíveis em Sá (2007) e Sá *et al.* (2011a). Na Tabela 7-8 é apresentado um comparativo entre os principais resultados obtidos e expostos na Figura 7-73. Quanto ao tempo de processamento, as simulações duraram aproximadamente 778 segundos.

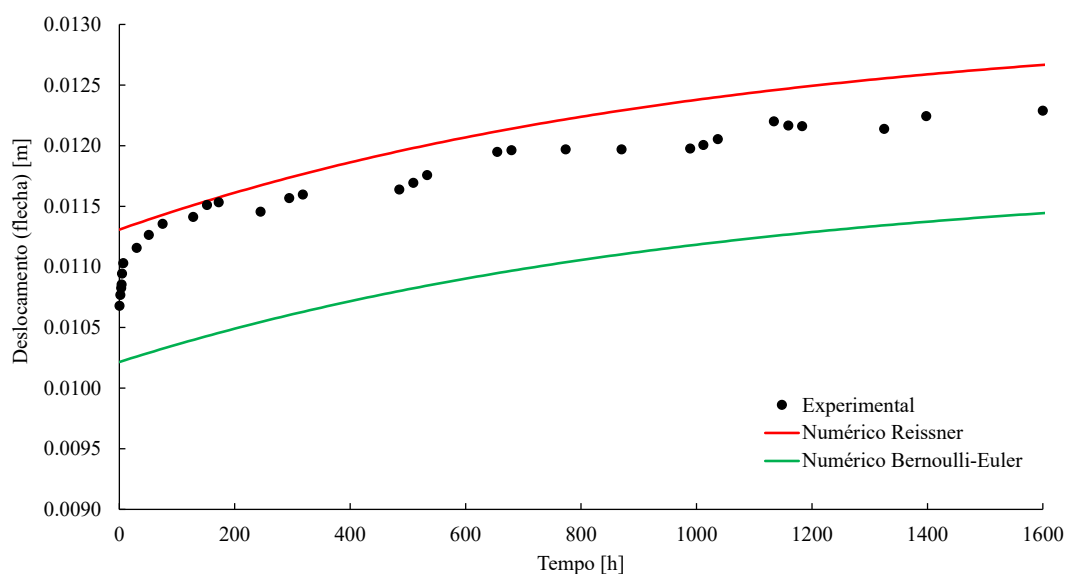


Figura 7-73: Resultados numéricos calibrados, resultados numéricos ajustados e resultados experimentais referentes à flecha no meio do vão

Tabela 7-8: Resultados de flecha instantânea, flecha final e contribuição da fluência para a flecha no meio do vão

Modelo	Flecha elástica instantânea [mm]	Diferença relativa ao resultado experimental	Flecha viscoelástica final [mm]	Diferença relativa ao resultado experimental	Contribuição da fluência para a flecha final [mm]	Diferença relativa ao resultado experimental
Experimental	10,680	-	12,290	-	1,610	-
Reissner	11,308	+5,88%	12,667	+3,08%	1,359	+15,59%
Bernoulli-Euler	10,216	-4,35%	11,444	-6,88%	1,228	-23,73%

Os resultados apresentados na Figura 7-73 e na Tabela 7-8 demonstram a capacidade de representação da formulação desenvolvida. As respostas numéricas obtidas apresentam perfis de evolução dos deslocamentos verticais no meio do vão consistentes com os resultados experimentais. Além disso, graficamente, a partir da Figura 7-73, é possível observar uma satisfatória concordância entre os resultados numéricos obtidos adotando-se a cinemática de Reissner e os resultados experimentais, o que pode ser confirmado pelos resultados

apresentados na Tabela 7-8. Por fim, comparando-se os resultados numéricos obtidos com a cinemática de Reissner e com a cinemática de Bernoulli-Euler, é possível observar que, neste caso, os efeitos do cisalhamento proporcionam um aumento de 10,69% nos deslocamentos verticais no meio do vão em todos os instantes de tempo. Dessa forma, assim como destacado por Bank e Mosallam (1992) e pelo próprio trabalho de Sá (2007), os efeitos do cisalhamento no comportamento viscoelástico de perfis estruturais pultrudados de material polimérico reforçado com fibra de vidro são relevantes e não podem ser negligenciados, justificando-se a importância da utilização de formulações que levem em consideração tais efeitos. Além disso, a partir dos resultados obtidos é possível verificar a capacidade da formulação desenvolvida em descrever o comportamento viscoelástico de estruturas constituídas por materiais ortotrópicos, contanto que seja possível determinar os respectivos parâmetros relacionados aos efeitos do esforço normal e do cisalhamento.

8

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo são apresentadas algumas conclusões e observações acerca das formulações desenvolvidas e dos resultados obtidos. Em seguida, são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros e para prosseguimento das pesquisas na área.

8.1 Conclusões

No presente estudo é desenvolvida uma formulação numérica, baseada no Método dos Elementos Finitos Posicional, para descrição do comportamento mecânico viscoelástico em estruturas discretizadas por elementos de pórtico plano, considerando-se os efeitos do cisalhamento. Para avaliação dos efeitos do comportamento viscoelástico são desenvolvidas relações tensão-deformação deduzidas com base em modelos reológicos. Essas relações são apresentadas inicialmente de uma forma geral e, na sequência, são particularizadas para elementos de pórtico plano considerando-se as parcelas referentes ao cisalhamento. Para avaliação numérica das contribuições dos efeitos do cisalhamento, os giros das seções transversais são parametrizados de forma independente utilizando-se a cinemática Reissner. Tal abordagem é considerada original para descrição do comportamento viscoelástico.

A partir dos desenvolvimentos apresentados e dos resultados obtidos, a formulação desenvolvida é considerada relativamente simples e capaz de considerar os relevantes efeitos do cisalhamento no comportamento viscoelástico. Esta simplicidade é atribuída às expressões compactas e obtidas de forma intuitiva com base em conceitos de energia e no comportamento físico dos modelos reológicos. A capacidade de consideração dos efeitos do cisalhamento é atribuída à concordância dos resultados numéricos obtidos em relação aos resultados analíticos e experimentais disponíveis na literatura.

Pode se destacar ainda que as relações tensão-deformação desenvolvidas e apresentadas de uma forma geral no Capítulo 4, para os modelos reológicos de Kelvin-Voigt, de Boltzmann e

de Zener, possibilitam não só a particularização para elementos unidimensionais, como apresentado no presente estudo, mas, a particularização para elementos planos e espaciais em futuros desenvolvimentos.

Portanto, os desenvolvimentos contidos no presente estudo e os resultados obtidos nas análises são apresentados como contribuição para o processo de desenvolvimento e pesquisa referente ao Método dos Elementos Finitos Posicional e para ampliação do entendimento a respeito da descrição numérica do comportamento viscoelástico e de seus efeitos em componentes e sistemas estruturais.

A partir dos resultados obtidos nas análises apresentadas no item 7.1, é possível observar que a formulação é consistente e foi implementada computacionalmente de forma bem sucedida. Tal conclusão se baseia nos resultados obtidos em conformidade com os resultados esperados conceitualmente e os resultados disponíveis na literatura, quando se variam os valores dos parâmetros representativos das propriedades físicas do material e os valores dos parâmetros representativos das discretizações espacial e temporal.

A partir dos resultados obtidos em exemplos e aplicações apresentadas nos itens 7.2 e 7.3, é possível observar a capacidade da formulação desenvolvida em descrever o comportamento viscoelástico considerando-se os efeitos do cisalhamento. Tal conclusão se baseia nas comparações entre os resultados obtidos adotando-se a cinemática de Reissner, os resultados obtidos adotando-se a cinemática de Bernoulli-Euler e os resultados analíticos e experimentais disponíveis na literatura. Nos casos analisados é possível observar uma contribuição significativa dos efeitos do cisalhamento tanto no comportamento elástico instantâneo quanto no comportamento viscoelástico ao longo do tempo, podendo-se verificar uma melhor adequação aos resultados experimentais quando estes efeitos são considerados.

Pode-se destacar ainda que a formulação desenvolvida no presente estudo é baseada em potenciais e tensores constitutivos próprios para materiais isotrópicos e, conseqüentemente, adequada para análise de estruturas constituídas por materiais isotrópicos. Entretanto, utilizando-se a formulação desenvolvida é possível analisar estruturas constituídas por materiais ortotrópicos, como realizado de forma bem sucedida nos subitens 7.3.3 e 7.3.4. Neste caso, os parâmetros relacionados aos efeitos do cisalhamento não podem ser determinados por meio da relação resultante da isotropia e expressa pelo segundo parâmetro de Lamé (μ). Estes parâmetros devem ser obtidos a partir de resultados experimentais ou relações apropriadas e,

posteriormente, inseridos nos pontos da formulação em que esses parâmetros seriam determinados pelo produto entre o segundo parâmetro de Lamé (μ) e os parâmetros relacionados aos efeitos do esforço normal, assim como apresentado nos subitens 7.3.3 e 7.3.4.

Como apresentado no subitem 5.5.2, a formulação é desenvolvida considerando-se a parametrização da altura da seção transversal. Tal abordagem proporciona a idealização da seção transversal como laminada, permitindo-se a avaliação da contribuição de cada lâmina para o comportamento viscoelástico, em função do nível de tensão atuante na mesma. O que permite propor uma metodologia de calibração com base em resultados simples de ensaios de fluência à tração e em uma técnica de ajuste dos parâmetros, como descrito no subitem 7.3.1. Essa idealização da seção transversal laminada permite ainda a análise de elementos estruturais com geometria de seção transversal complexa, como os perfis estruturais analisados nos subitens 7.3.3 e 7.3.4, e a análise de estruturas constituídas por materiais compostos por lâminas com propriedades físicas distintas, como o painel sanduiche analisado no subitem 7.3.2. Entretanto, neste último caso, devido às seções transversais permanecerem planas, característica das cinemáticas adotadas na formulação desenvolvida, considerações adicionais devem ser realizadas para impedir que os materiais que não apresentam comportamento viscoelástico restrinjam a evolução das deformações ao longo do tempo.

Além disso, é importante destacar que em grande parte das análises e exemplos apresentados é possível observar que a formulação é capaz de representar com maior eficácia, apresentando resultados mais próximos em relação aos resultados analíticos e experimentais, o comportamento viscoelástico real de longa duração. Tal fato está relacionado a adoção, no presente estudo, de modelos reológicos simples e de representação física limitada. Esta limitação pode ser contornada a partir da adoção de modelos reológicos mais complexos obtidos a partir dos modelos reológicos generalizadas de Maxwell e de Kelvin-Voigt e da adequada consideração do número de parâmetros necessários para a descrição completa do comportamento mecânico. Entretanto, tal procedimento acarreta uma maior complexidade das expressões obtidas e, conseqüentemente, dos procedimentos de implementação computacional requeridos, resultando, ainda, em parâmetros de interpretação menos intuitiva e de determinação consideravelmente mais complexa.

Por fim, a partir dos resultados obtidos é possível verificar a relevância dos efeitos do cisalhamento para o comportamento viscoelástico, justificando-se a importância da utilização de formulações que levam em consideração tais efeitos. Estes resultados estão de acordo com

diferentes estudos experimentais disponíveis na literatura, os quais reforçam que os efeitos do cisalhamento no comportamento viscoelástico não podem ser negligenciados, dependendo das características físicas do material, das características geométricas do elemento estrutural e das condições de serviço impostas, como pode ser observado nos trabalhos de Bank e Mosallam (1992), Mottram (1993), Abdel-Magid *et al.* (2003), Shao e Shanmugam (2004), Sá *et al.* (2011a) e Sá *et al.* (2011b).

8.2 Sugestões para trabalhos futuros

A partir da formulação desenvolvida, dos resultados obtidos e das limitações observadas, são apresentadas as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- 1) Realizar ensaios de fluência à tração e de fluência à flexão em materiais isotrópicos que apresentam comportamento viscoelástico relevante, a fim de avaliar a metodologia de calibração proposta.
- 2) Generalizar a formulação desenvolvida para análise de materiais ortotrópicos e materiais anisotrópicos, partindo-se de potenciais e tensores constitutivos adequados.
- 3) Desenvolver a formulação, baseada no Método dos Elementos Finitos Posicional, para descrição do comportamento viscoelástico utilizando-se elementos finitos planos e adotando-se as matrizes constitutiva e viscosa para os estados planos de tensão e de deformação apresentadas no item 3.4.
- 4) Desenvolver a formulação, baseada no Método dos Elementos Finitos Posicional, para descrição do comportamento viscoelástico utilizando-se elementos finitos de pórtico com cinemática de Reissner e considerando-se a perda da planicidade da seção transversal
- 5) Implementar modelos reológicos mais complexos, com base no modelo reológico generalizado de Kelvin-Voigt, para descrição do comportamento viscoelástico de forma mais precisa ao longo de todo o intervalo de tempo considerado. Adicionalmente, implementar uma técnica de determinação da quantidade de parâmetros e dos valores dos parâmetros adotados no modelo reológico generalizado de Kelvin-Voigt a fim de se obter os melhores ajustes entre os resultados numéricos e aos resultados experimentais, como o Método de Otimização por Nuvem de Partículas utilizado em Kühl *et al.* (2016).

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS

- ABDEL-MAGID, B.; LOPEZ-ANIDO, R.; SMITH, G.; TROFKA, S. Flexure creep properties of E-glass reinforced polymers. *Composite Structures*, v. 62, n. 3, p. 247-253, 2003.
- AKÖZ, Y; KADIOĞLU, F. The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic timoshenko beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 44, n. 12, p. 1909-1932, 1999.
- ARGYRIS, J.; DOLTSINIS, I. St.; DA SILVA, V. D. Constitutive modelling and computation of non-linear viscoelastic solids. Part I: Rheological models and numerical integration techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 88, n. 2, p. 135-163, 1991.
- ARGYRIS, J.; DOLTSINIS, I. St.; DA SILVA, V. D. Constitutive modelling and computation of non-linear viscoelastic solids. Part II: Application to orthotropic PVC-coated fabrics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 98, n. 2, p. 159-226, 1992.
- BAHRAINI, S. M. S.; EGHTEHAD, M.; FARID, M.; GHAVANLOO, E. Large deflection of viscoelastic beams using fractional derivative model. *Journal of Mechanical Science and Technology*, v. 27, n. 4, p. 1063-1070, 2013.
- BANK, L. C.; MOSALLAM, A. S. Creep and failure of a full-size fiber-reinforced plastic pultruded frame. *Composites Engineering*, v. 2, n. 3, p. 213-227, 1992.
- BATHE, K.J. *Finite element procedures*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- BECHO, J. S. *Formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos para descrição do comportamento mecânico viscoelástico de fluência em vigas e estruturas de pórtico*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2016.
- BECHO, J. S.; BARROS, F. B.; GRECO, M. Formulação posicional para descrição do comportamento mecânico de fluência em vigas e estruturas de pórtico. *Ciência & Engenharia*, v. 24, n. 1, p. 31-41, 2015.
- BECHO, J. S.; BARROS, F. B.; GRECO, M. Implementation of rheological models to describe the viscoelastic creep behavior based on the Positional Finite Element Method. In: *XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Florianópolis, Brazil, 2017.
- BECHO, J. S.; RABELO, J. M. G.; BARROS, F. B.; GRECO, M. Simulação numérica do comportamento mecânico viscoelástico de fluência em barras de PEAD utilizando a formulação posicional do MEF. In: *XII Simpósio de Mecânica Computacional*. Diamantina, Brazil, 2016.

- BIOT, M. A. *Mechanics of incremental deformations: theory of elasticity and viscoelasticity of initially stressed solids and fluids, including thermodynamic foundations and applications to finite strain*. John Wiley & Sons, New York, 1965.
- CARNIEL, T. A.; MUÑOZ-ROJAS, P. A.; VAZ, M. A viscoelastic viscoplastic constitutive model including mechanical degradation: Uniaxial transient finite element formulation at finite strains and application to space truss structures. *Applied Mathematical Modelling*, v. 39, n. 5, p. 1725-1739, 2015.
- CARRAZEDO, R. *Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- CAVALCANTE, J. P. B.; MACIEL, D. N.; GRECO, M. Impact response of flying objects modeled by Positional Finite Element Method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 18, n. 6, p. 1850076-1 – 1850076-18, 2017.
- CHEN, T. M. The hybrid Laplace transform/finite element method applied to the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, n. 3, p. 509-522, 1995.
- CHENG, J. J.; POLAK, M. A.; PENLIDIS, A. An alternative approach to estimating parameters in creep models of high-density polyethylene. *Polymer Engineering and Science*, v. 51, n. 7, p. 1227-1235, 2011.
- CHRISTENSEN, R. M. *Theory of viscoelasticity*. Dover Publications, New York, 2003.
- CHUNG, C. W.; BUIST, M. L. A novel nonlinear viscoelastic solid model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 13, n. 3, p. 1480-1488, 2012.
- CODA, H. B. An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description. In: *XVIII Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, São Paulo, Brazil, 2003.
- CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, n. 33, p. 3541-3557, 2004.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically nonlinear analysis of shells-curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, v. 40, n. 1, p. 185-200, 2007.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 5, n. 1, p. 205-223, 2008.
- COSTA-HAVEROTH, T. C.; MUÑOZ-ROJAS, P. A.; KÜHL, A.; SASSE, F. D. Modeling HDPE nonlinear viscoelastic behavior using fractional derivatives: parameters interpolation and economy schemes. In: *V International Symposium on Solid Mechanics*, Belo Horizonte, Brazil, 2015.

- CRISFIELD, M. A. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. v.1. John Wiley & Sons, England, 1991.
- DYM, C. L.; SHAMES, I. H. *Solid Mechanics: A variational approach*. Springer-Verlag, New York, 2013.
- DUTTA, P. K.; HUI, D. Creep rupture of a GFRP composite at elevated temperatures. *Computers & Structures*, v. 76, n. 1, p. 153-161, 2000.
- FELTON, L. P.; NELSON, R. B. *Matrix structural analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1997.
- FERNANDES, W. L.; VASCONCELLOS, D. B.; GRECO, M. Dynamic instability in shallow arches under transversal forces and plane frames with semirigid connections. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018.
- FINDLEY, W. N. 26-Year creep and recovery of poly (vinyl chloride) and polyethylene. *Polymer Engineering & Science*, v. 27, n. 8, p. 582-585, 1987.
- FINDLEY, W. N.; LAI, J. S.; ONARAN, K. *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials*. Dover Publications, New York, 1989.
- FINNIE, I.; HELLER W. R. *Creep of Engineering Materials*, McGraw-Hill, New York, 1959.
- GODAT, A.; LÉGERON, F.; GAGNÉ, V.; MARMION, B. Use of FRP pultruded members for electricity transmission towers. *Composite Structures*, v. 105, p. 408-421, 2013.
- GRECO, M. *Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2004.
- GRECO, M.; ANUNCIACÃO, A. C.; OLIVEIRA, F. M.; VECCI, M. A. M. Nonlinear analysis of sagged cables with moving masses, In: *XXI Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, Natal, Brazil, 2011.
- GRECO, M.; CODA, H. B. Positional fem formulation for flexible multi-body dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration*, v. 290, n. 3, p. 1141-1174, 2006.
- GRECO, M.; CODA H. B.; VENTURINI, W. S. An alternative contact/impact identification algorithm for 2d structural problems. *Computational Mechanics*, v. 34, n. 5, p. 410-422, 2004.
- GRECO, M.; DA COSTA, L. J. R. Discussion on “The logarithmic strain measure applied to the nonlinear positional formulation for space truss analysis” [Finite element in analysis and design 45 (2009) 632-639] and “Nonlinear positional formulation for space truss analysis” [Finite element in analysis and design 42 (2006) 1079-1086]. *Finite Element in Analysis and Design*, v.52, p.93-95, 2012.
- GRECO, M.; FERREIRA, I.P. Logarithmic strain measure applied do the nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite Element in Analysis and Design*, v.45, n. 10, p.632-639, 2009.

- GRECO, M.; FERREIRA, I. P.; BARROS, F. B. A classical time integration method applied for solution of nonlinear equations of a double-layer tensegrity. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 35, n. 1, p. 41-50, 2013.
- GRECO, M.; GESUALDO, F. A. R.; VENTURINI, W. S.; CODA, H. B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite Element in Analysis and Design*, v.42, n. 12, p.1079-1086, 2006.
- GRECO, M.; MACIEL, D. N. *Resistência dos materiais: uma abordagem sintética*. Elsevier, Rio de Janeiro, 2016.
- GRECO, M.; MENIN, R. C. G.; FERREIRA, I. P.; BARROS, F. B. Comparison between two geometrical nonlinear methods for truss analyses. *Structural Engineering and Mechanics*, v. 41, n. 6, p. 735-750, 2012.
- GRECO, M.; VENTURINI, W.S. Stability analysis of three-dimensional trusses, *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 3, 325-344, 2006.
- JURKIEWIEZ, B.; BUZON, S.; SIEFFERT, J. G. Incremental viscoelastic analysis of composite beams with partial interaction. *Computers & Structures*, v. 83, n. 21, p. 1780-1791, 2005.
- JURKIEWIEZ, B.; DESTREBECQ, J. F.; VERGNE, A. Incremental analysis of time-dependent effects in composite structures. *Computers & Structures*, v. 73, n. 1, p. 425-435, 1999.
- KALISKE, M.; ROTHERT, H. Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. *Computational Mechanics*, v. 19, n. 3, p. 228-239, 1997.
- KASSNER, M. E.; PÉREZ-PRADO, M. *Fundamentals of creep in metals and alloys*. Elsevier, New York, 2004.
- KÄSTNER, M.; OBST, M.; BRUMMUND, J.; THIELSCH, K.; ULBRICHT, V. Inelastic material behavior of polymers—experimental characterization, formulation and implementation of a material model. *Mechanics of Materials*, v. 52, p. 40-57, 2012.
- KÜHL, A.; MUÑOZ-ROJAS, P. A.; BARBIERI, R.; BENVENUTTI, I. J. A procedure for modeling the nonlinear viscoelastoplastic creep of HDPE at small strains. *Polymer Engineering and Science*, v. 57, n. 2, p. 144-152, 2016.
- LACERDA, E. G. M. *Análise não linear de treliças pelo Método dos Elementos Finitos Posicional*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil, 2014.
- LACERDA, E. G. M.; MACIEL, D. N.; SCUDELARI, A. C. Geometrically static analysis of trusses using the arc-length method and the positional formulation of Finite Element Method. In: *XXXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Fortaleza, Brazil, 2014.
- LIU, H. *Material modelling for structural analysis of polyethylene*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, University of Waterloo, Waterloo, Canadá, 2007.

- LIU, H.; POLAK, M.; PENLIDIS, A. A practical approach to modeling time-dependent nonlinear creep behavior of polyethylene for Structural applications. *Polymer Engineering and Science*, v. 48, n. 1, p. 159-167, 2008.
- LOGAN, D.L. *A first course in the finite element method*. 4^a edition, Thomson Learning, Platteville, 2007.
- MACIEL, D. N. *Análise de problemas elásticos não-lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2008.
- MACIEL, D. N. Geometric and material non-linear formulation for three-dimensional solids with the Positional Finite Element Method. In: *The Fifteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering*, Praga, República Tcheca, 2015.
- MACIEL, D. N.; CODA, H. B. Positional Finite Element Methodology for geometrically nonlinear analysis of 2D frames. *Minerva Pesquisa e Tecnologia*, v. 5, n. 1, p. 73-83, 2008.
- MACIEL, D. N.; GRECO, M.; CODA, H. B. Positional description for nonlinear 2D frames analysis by FEM with Reissner kinematics. In: *XXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Recife, Brazil, 2004.
- MAL, A. K.; SINGH, S. J. *Deformation of elastic solids*. Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- MARQUES, G. C. d. S. C. *Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2006.
- MARQUES, S. P. C.; CREUS, G. J. *Computational viscoelasticity*. Springer, Heidelberg, 2012.
- MESQUITA, A. D. *Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento MEC/MEF progressivo*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2002.
- MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. Alternative Kelvin viscoelastic procedure for finite elements. *Applied mathematical modelling*, v. 26, n. 4, p. 501-516, 2002.
- MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. A simple Kelvin and Boltzmann viscoelastic analysis of three-dimensional solids by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 27, n. 9, p. 885-895, 2003.
- MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. A boundary element methodology for viscoelastic analysis: Part I with cells. *Applied mathematical modelling*, v. 31, n. 6, p. 1149-1170, 2007a.
- MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. A boundary element methodology for viscoelastic analysis: Part II without cells. *Applied mathematical modelling*, v. 31, n. 6, p. 1171-1185, 2007b.
- MEYERS, M. A.; CHAWLA, K. K. *Mechanical behavior of materials*. Cambridge university press, Cambridge, 2009.

- MOTTRAM, J. T. Short- and long-term structural properties of pultruded beam assemblies fabricated using adhesive bonding. *Composite Structures*, v. 25, n. 1-4, p. 387-395, 1993.
- MUNAIAR NETO, J. *Um estudo da formulação de modelos constitutivos viscoelásticos e elasto-viscoplásticos e do emprego de algoritmos implícitos e explícitos para a sua integração numérica*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 1998.
- OGDEN, R. W. *Non-linear elastic deformation*. Ellis Horwood, Chichester, 1984.
- OLIVEIRA, F. M. *Análise dinâmica não linear de problemas envolvendo massas móveis aplicadas em cabos e elementos de viga*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2012.
- OLIVEIRA, F. M.; GRECO, M. Nonlinear dynamic analysis of beams with layered cross sections under moving masses. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 37, p. 451-462, 2014.
- OLIVEIRA, H. L. *Modelos numéricos aplicados à análise viscoelástica linear e à otimização topológica probabilística de estruturas bidimensionais*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2017.
- OLIVEIRA, H. L.; LEONEL, E. D. A BEM formulation applied in the mechanical material modelling of viscoelastic cracked structures. *International Journal of Advanced Structural Engineering*, v. 9, n. 1, p. 1-12, 2017.
- PANAGIOTOPOULOS, C. G.; MANTIČ, V.; ROUBÍČEK, T. A simple and efficient BEM implementation of quasistatic linear visco-elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, v. 51, n. 13, p. 2261-2271, 2014.
- PASCON, J. P. *Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2008.
- PASCON, J. P. *Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2012.
- PASCON, J. P.; CODA, H. B. Finite deformation analysis of visco-hyperelastic materials via solid tetrahedral finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 133, p. 25-41, 2017.
- PÉREZ ZERPA, J. M.; CANELAS, A.; SENSALÉ, B.; BIA SANTANA, D.; ARMENTANO, R. L. Modeling the arterial wall mechanics using a novel high-order viscoelastic fractional element. *Applied Mathematical Modelling*, v. 39, n. 16, p. 4767-4780, 2015.
- RABELO, J. M. G. *Formulação posicional não linear utilizando viscoelasticidade para análise de estrutura treliçadas*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2015.

- RABELO, J. M. G.; BECHO, J. S.; GRECO, M.; CIMINI, C. A. J. Formulação não linear posicional para a análise de materiais viscosos. In: *XXXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Fortaleza, Brazil, 2014.
- RABELO, J. M. G.; BECHO, J. S.; GRECO, M.; CIMINI, C. A. J. Modeling the creep behavior of GFRP truss structures with Positional Finite Element Method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 15, n. 2, 2018.
- RAPP, P.; KURZYKA, J.; SZOSTAK, W. The creep and relaxation in sandwich panels with the viscoelastic cores. *Light-weight Steel and Aluminium Structures*, p. 197-204, 1999.
- REIS, M. C. J. *Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando ligações semirrígidas elastoplásticas*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2012.
- SÁ, M. F. *Comportamento mecânico e estrutural de FRP. Elementos pultrudidos de GFRP*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2007.
- SÁ, M. F.; GOMES, A. M.; CORREIA, J. R.; SILVESTRE, N. Creep behavior of pultruded GFRP elements–Part 1: Literature review and experimental study. *Composite Structures*, v. 93, n. 10, p. 2450-2459, 2011a.
- SÁ, M. F.; GOMES, A. M.; CORREIA, J. R.; SILVESTRE, N. Creep behavior of pultruded GFRP elements–Part 2: Analytical study. *Composite Structures*, v. 93, n. 9, p. 2409-2418, 2011b.
- SCHAPERLY, R. A. On the characterization of nonlinear viscoelastic materials. *Polymer Engineering & Science*, v. 9, n. 4, p. 295-310, 1969.
- SCOTT, D. W.; LAI, J. S.; ZUREICK, A. Creep behavior of fiber-reinforced polymeric composites: a review of the technical literature. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, v. 14, n. 6, p. 588-617, 1995.
- SEMPTIKOVSKI, S. C.; MUÑOZ-ROJAS, P. A. A Geometrically Nonlinear Simplified Beam Element with Linear Viscoelastic Behaviour. In: *IV International Symposium on Solid Mechanics*, Porto Alegre, Brazil, 2013.
- SHAO, Y.; SHANMUGAM, J. Deflection creep of pultruded composite sheet piling. *Journal of composites for construction*, v. 8, n. 5, p. 471-479, 2004.
- SHEN, J. J.; LI, C. G.; WU, H. T.; KALANTARI, M. Fractional order viscoelasticity in characterization for atrial tissue. *Korea-Australia Rheology Journal*, v. 25, n. 2, p. 87-93, 2013.
- SHENOI, R. A.; ALLEN, H. G.; CLARK, S. D. Cyclic creep and creep-fatigue interaction in sandwich beams. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, v. 32, n. 1, 1-18, 1997.
- TRURSTON, R. H. *Materials of construction*. John Wiley, New York, 1895.

- UTKU, S.; NORRIS, C. H.; WILBUR, J. B. *Elementary structural analysis*. 4^a edition, McGraw-Hill, New York, 1991.
- VASCONCELLOS, D. B. *Análise de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações viscoelásticas pela formulação posicional do método dos elementos finitos*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2018.
- VICAT, L. T. Note sur l'allongement progressif du fil de fer soumis à diverses tensions. *Annales, Ponts et Chaussées, Mémoires et Docum*, v.7, 1834.
- YAO, H. T.; XUAN, F. Z.; WANG, Z.; TU, S. T. A review of creep analysis and design under multi-axial stress states. *Nuclear Engineering and Design*, v. 237, n. 18, p. 1969-1986, 2007.
- YOUSSEF, T. A. *Time-dependent behavior of fibre reinforced polymer (FRP) bars and FRP reinforced concrete beams under sustained load*. Ph.D. thesis, University of Sherbrooke, Sherbrooke, Canadá, 2010.

APÊNDICE – DEFORMAÇÃO NÃO LINEAR DE ENGENHARIA

Neste apêndice é apresentado um desenvolvimento para demonstrar que a medida de deformação de engenharia adotada no presente estudo e desenvolvida no item 3.3 é adequada para trabalhar em regime de grandes deformações e, por isso, denominada deformação não linear de engenharia em Greco (2004) e Maciel (2008).

Assim como apresentado no item 3.2, a mudança de configuração na vizinhança de um ponto material pode ser caracterizada pelo tensor gradiente de deformação (F), portanto, as medidas de deformação podem ser obtidas a partir de adequadas expressões em termos deste tensor gradiente de deformação, de forma que os movimentos de corpo rígido sejam desconsiderados.

Conforme apresentado em Maciel (2008), quando um corpo passa da configuração indeformada para a configuração deformada, a variação do comprimento de uma fibra pode ser expressa por:

$$|dX| - |dx| \tag{A-1}$$

em que dx representa o comprimento da fibra na configuração indeformada e dX representa o comprimento da fibra na configuração deformada.

Considerando-se que esta fibra, após a mudança de configuração, não apresenta variação de comprimento, tem-se:

$$|dX| - |dx| = 0 \tag{A-2}$$

Lembrando-se que, assim como apresentado no item 3.2, o mapeamento de uma fibra na configuração deformada pode ser expresso em termos da fibra na configuração indeformada e do tensor gradiente de deformação, tem-se:

$$dX = F dx \tag{A-3}$$

Multiplicando-se os dois lados da Equação (A-3) por dX , tem-se:

$$dX \cdot dX = (F dx) \cdot (F dx) \quad (\text{A-4})$$

$$|dX|^2 = dx^T (F^T F) dx \quad (\text{A-5})$$

Subtraindo-se $|dx|^2$ nos dois lados da Equação (A-5), tem-se:

$$|dX|^2 - |dx|^2 = dx \cdot (F^T F - I) dx \quad (\text{A-6})$$

em que I representa a matriz identidade.

A Equação (A-6) representa a diferença entre os quadrados dos comprimentos da fibra nas configurações indeformada e deformada. Dessa forma, para satisfazer a condição de indeformabilidade da fibra dx , dada pela Equação (A-2), é necessário e suficiente adotar a condição expressa por:

$$F^T F = I \quad (\text{A-7})$$

Neste caso, o tensor gradiente de deformação compreende apenas os movimentos de corpo rígido. Quando a condição expressa pela Equação (A-7) não é satisfeita, é dito que o corpo apresenta deformação, além dos movimentos de corpo rígido. Dessa forma, a medida de deformação pode ser determinada, desconsiderando-se os movimentos de corpo rígido, a partir de adequadas expressões com base no termo:

$$F^T F - I \quad (\text{A-8})$$

Como exemplo, pode ser citado o tensor de deformação de Green, expresso por:

$$E = \frac{1}{2} (F^T F - I) \quad (\text{A-9})$$

ou, ainda, o tensor de deformação de Almansi, expresso por:

$$e = \frac{1}{2} (I - B^T B) \quad (\text{A-10})$$

em que:

$$B = (F^{-1})^T \quad (\text{A-11})$$

Na literatura, normalmente, o tensor de deformação de Green é expresso em função dos deslocamentos, sendo o vetor dos deslocamentos definido como:

$$u_i = X_i - x_i \quad (\text{A-12})$$

Avaliando-se o gradiente da Equação (A-12), tem-se:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_i} - \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = F - I = H \quad (\text{A-13})$$

em que H representa o tensor gradiente de deslocamento.

Dessa forma, o tensor gradiente de deformação pode ser expresso por:

$$F = H + I \quad (\text{A-14})$$

O tensor de deformação de Green pode ser, então, reescrito como:

$$E = \frac{1}{2}(F^T F - I) = \frac{1}{2}(H + H^T + H^T H) \quad (\text{A-15})$$

A Equação (A-15) representa a relação “exata” entre o tensor de deformação e o tensor gradiente de deslocamento, sendo, dessa forma, considerada adequada para trabalhar em regime de grandes deslocamentos e grandes deformações, denominada elasticidade não linear (Mal e Singh, 1991).

Quando se considera o regime de pequenas deformações e pequenos deslocamentos, os deslocamentos u_i são quantidades relativamente pequenas, sendo o gradiente $u_{i,j}$ quantidades ainda menores e, conseqüentemente, podendo ser desconsiderados os termos de segunda ordem dados por $u_{i,j} u_{i,j}$. Dessa forma, os termos de segunda ordem na Equação (A-15) podem ser negligenciados, sendo o tensor de deformação expresso de forma simplificada, ou linearizada, por:

$$E = \frac{1}{2}(H + H^T) \quad (\text{A-16})$$

denominado tensor infinitesimal de deformação, utilizado na elasticidade linear.

Comparando-se o tensor de deformação de Green (dito exato), expresso pela Equação (A-15) e a medida de deformação de engenharia adotada no presente estudo, apresentada no item 3.3 e reescrita a seguir:

$$\varepsilon_{mm} = \frac{|dX| - |dx|}{|dx|} = \frac{|dX|}{|dx|} - 1 = \lambda_m - 1 = (m^T (F^T F m))^{1/2} - 1 \quad (\text{A-17})$$

em que m representa um versor unitário que indica a direção da deformação, pode-se perceber que o termo $F^T F$ é considerado de forma completa na medida de deformação de engenharia. Portanto, a medida de deformação de engenharia adotada no presente estudo considera os termos de ordem superior, sendo esta adequada para trabalhar em regime de grandes deformações e, por isso, denominada deformação não linear de engenharia em Greco (2004) e Maciel (2008).

Além disso, é importante destacar que no presente estudo é utilizado o Método de Newton-Raphson para a resolução do sistema não linear, obtido pela aplicação do Princípio da Mínima Energia Potencial Total. Tal método proporciona uma avaliação iterativa a fim de determinar o equilíbrio da estrutura na posição deformada a cada passo incremental (de força ou de tempo). Dessa forma, a cada iteração do método é avaliado o equilíbrio da estrutura na configuração deformada, caso o equilíbrio não seja satisfeito, é realizada uma nova iteração corrigindo-se a configuração deformada e reavaliando-se o equilíbrio da estrutura na nova configuração deformada. O processo iterativo é repetido até que se obtenha a posição deformada de equilíbrio da estrutura para o passo incremental considerado. Após a obtenção do equilíbrio, é realizado um novo passo incremental (de força ou de tempo), sendo o processo iterativo repetido, novamente, até se obter o equilíbrio para o passo considerado. Esse processo incremental iterativo é repetido até que todos os passos de força e/ou de tempo sejam considerados. Dessa forma, considera-se que a abordagem apresentada no presente estudo é capaz de trabalhar em regime de grandes deslocamentos e grandes deformações.