

**DOIS RESULTADOS EM BILHARES EM  
SUPERFÍCIES COM CURVATURA CONSTANTE**

CLÁUDIA PIRES FERREIRA

DOIS RESULTADOS EM BILHARES EM  
SUPERFÍCIES COM CURVATURA CONSTANTE

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

ORIENTADORA: SÔNIA PINTO DE CARVALHO  
COORIENTADORA: SYLVIE MARIE OLIFFSON KAMPHORST LEAL DA  
SILVA

Belo Horizonte

Agosto de 2020

Ferreira, Cláudia Pires.

F383d      Dois resultados em bilhares em superfícies com curvatura constante [manuscrito] / Cláudia Pires Ferreira. - 2020.  
viii, 89 f. il.

Orientadora: Sônia Pinto de Carvalho.

Corientadora: Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da Silva  
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais,  
Instituto de Ciências Exatas, Departamento Matemática.

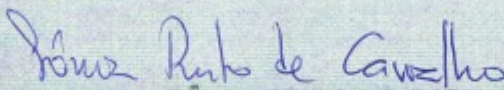
Referências: f.86-89

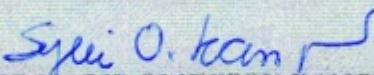
1. Matemática – Teses. 2. Superfícies de curvatura constante – Teses. 3. Liapunov, Funções de – Teses. I. Carvalho, Sônia Pinto de. II. Silva, Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da. III. Universidade Federal de Minas Gerais; Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.

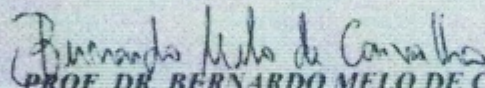
CDU 51(043)

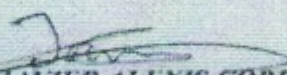
ATA DA CENTÉSIMA QUINQUASÉSIMA PRIMEIRA DEFESA DE TESE DA ALUNA CLAUDIA PIRES FERREIRA, REGULARMENTE MATRICULADA NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 19 DE AGOSTO DE 2020.

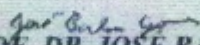
Aos dezoito dias do mês de agosto de 2020, às 11h15, em reunião pública virtual google meet pelo link <https://meet.google.com/pmt-xefm-wfq> (conforme mensagem eletrônica da Pró-Reitoria de Pós-Graduação de 26/03/2020, com orientações para a atividade de defesa de tese durante a vigência da Portaria n° 1819), reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese do aluno **Claudia Pires Ferreira**, intitulada: "*Dois resultados em bilhares em superfícies com curvatura constante*", requisito final para obtenção do Grau de doutor em Matemática. Aberto a sessão, a Senhora Presidente da Comissão, Profa. Sônia Pinto de Carvalho, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da aluna. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente, sem a presença da aluna, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a aluna foi considerada aprovada sem ressalvas e por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pela Senhora Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, a Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 19 de agosto de 2020.


  
**PROFA. DRA. SÔNIA PINTO DE CARVALHO**  
Orientadora (UFMG)

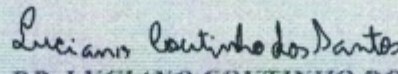
  
**PROFA. DRA. SYLVIE MARIE OLIFFSON KAMPHORST LEAL DA SILVA**  
Coorientadora (UFMG)


  
**PROF. DR. BERNARDO MELO DE CARVALHO**  
Examinador (UFMG)

  
**PROF. DR. JAVIER ALEXIS CORREA MAYOBRE**  
Examinador (UFMG)

  
**PROF. DR. JOSÉ BARBOSA GOMES**  
Examinador (UFJF)

  
**PROFA. DRA. KARINA DANIELA MARÍN**  
Examinadora (UFMG)

  
**PROF. DR. LUCIANO COUTINHO DOS SANTOS**  
Examinador (CEFET MG)

  
**PROF. DR. RAFAEL RAMIREZ-ROS**  
Examinador (UPC Barcelona)

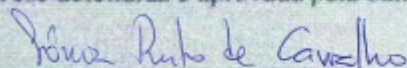


FOLHA DE APROVAÇÃO

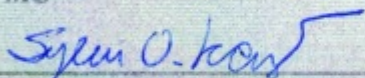
*Dois resultados em bilhares em superfícies com  
curvatura constante*

**CLAUDIA PIRES FERREIRA**

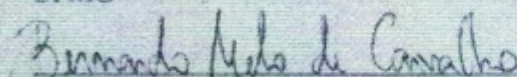
Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por



Profa. Sônia Pinto de Carvalho  
UFMG



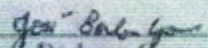
Profa. Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da Silva  
UFMG



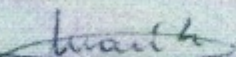
Prof. Bernardo Melo de Carvalho  
UFMG



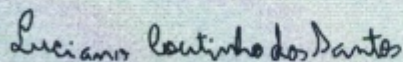
Prof. Javier Alexis Correa Mayobre  
UFMG



Prof. José Barbosa Gomes  
UFJF



Profa. Karina Daniela Marin  
UFMG



Prof. Luciano Coutinho dos Santos  
CEFET MG



Prof. Rafael Ramirez-Ros  
UPC Barcelona

Belo Horizonte, 19 de agosto de 2020.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus e Nossa Senhora Aparecida por ter me dado força, saúde e permitido que eu concluísse com sucesso essa tese.

À Sônia e à Sylvie por ter me orientado, pela paciência e dedicação ao longo desses anos (quase 10 anos ao todo!). Agradeço muito a vocês duas pelas palavras de motivação e apoio quando eu estava desanimada, pelas chamadas de atenção quando eu desfocava e tantas outras conversas que me trouxeram até aqui. Levarei seus ensinamentos sempre comigo.

Ao Álvaro, companheiro de todas horas, por ter me dado força, apoio, paciência e carinho quando eu precisava. Se eu fosse enumerar todos os motivos que tenho para agradecê-lo faltaria espaço.

Aos meus pais e aos meus irmãos pela paciência com minha ausência nesses anos de estudo e incentivos a continuar.

À todos os professores que contribuíram para a minha formação. Em especial aos do Departamento de Matemática da UFMG.

Aos colegas da pós-graduação que transformaram as horas de estudos em momentos agradáveis e aos colegas do EAD, em especial a Juniele e o Danilo, que fizeram minhas tardes mais alegres e motivadoras.

Ao grupo das "Melhores pessoas" pelas alegrias, pelos momentos que foram meus psicólogos, pelo incentivo e pelos vários encontros que tornou essa fase muito mais leve.

Ao Cássio, Rafael e Túlio pelas ajudas com a matemática e com a programação.

À Andréa e à Kelli pela ajuda com a burocracia e paciência mesmo quando o pedido era feito em cima da hora ou até mesmo atrasado.

Aos membros da banca examinadora que mesmo com todo o trabalho que tem que desempenhar nas suas universidades aceitaram ler essa tese e por suas contribuições que enriqueceram ainda mais o trabalho desenvolvido.

À todos aqueles que me ajudaram ao longo dessa jornada meus sinceros agradecimentos, em especial, à Denise e família que tonaram possível e que me ensinaram a dar os primeiros passos na UFMG.

Às agências de financiamento, CNPQ e CAPES, pelo suporte financeiro.

# Resumo

Neste trabalho estendemos alguns resultados sobre bilhares planos ao plano hiperbólico e a um hemisfério da esfera.

Na primeira parte consideramos o bilhar definido na região delimitada por uma curva fechada e geodesicamente estritamente convexa. Estudando a entropia polinomial desses bilhares provamos que a aplicação do bilhar circular tem entropia polinomial igual a 1, enquanto que os outros bilhares têm entropia polinomial  $\geq 2$ . Em particular, provamos que o bilhar elíptico e não circular tem entropia polinomial igual a 2. As principais ferramentas utilizadas foram a integrabilidade dos bilhares circulares e elípticos em superfícies com curvatura constante, a propriedade Twist destes bilhares e uma generalização das técnicas aplicadas por Marco [27] para calcular entropia polinomial.

Na segunda parte do trabalho, consideramos bilhares em mesas tipo estádios focalizadores e mostramos que, quando as partes focalizadoras são ligadas por segmentos geodésicos suficientemente longos, a aplicação de bilhar tem expoente de Lyapunov positivo em quase todo ponto. As principais ferramentas utilizadas foram uma versão do Teorema de Wojtkowski [40] do método dos campos de cones e uma generalização da construção dos campos de cones apresentadas por Donnay [14]. Finalizamos esta parte estudando o bilhar no estádio circular no planohiperbólico.

**Palavras-chave:** bilhares convexos, superfícies com curvatura constante, expoente de Lyapunov, entropia polinomial.



# Abstract

In this work we extend some results about plane billiards to the hyperbolic plane and to a hemisphere of the sphere.

First we consider billiards defined in the region bounded by a closed and geodesically strictly convex curve. Studying the polynomial entropy of these billiards we prove that the circular billiard map has polynomial entropy equal to 1, while other billiards have polynomial entropy  $\geq 2$ . In particular, we prove that the elliptical billiard has polynomial entropy equal to 2. The main tools used were the integrability of circular and elliptical billiards on surfaces with constant curvature, the Twist property of those billiard maps and a generalization of the techniques applied by Marco [27] to calculate polynomial entropy.

In the second part of the work, we consider stadium-like billiard tables and show that, when the focusing parts are connected by sufficiently long geodesic segments, the billiard map has a positive Lyapunov exponent almost everywhere. The main tools used were a Wojtkowski's version [40] of the cone field method and a generalization of the construction of the cone fields presented by Donnay [14]. We finish this part by studying the circular stadium billiard in the hyperbolic plane.

**Palavras-chave:** convex billiards, surface of constant curvature, Lyapunov exponent, polynomial entropy.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>6</b>
1.1 Modelos Geométricos . . . . .	6
1.1.1 Plano Hiperbólico . . . . .	6
1.1.2 Esfera . . . . .	15
1.2 Expoente de Lyapunov e Campo de Cones . . . . .	18
1.3 Entropias . . . . .	22
1.3.1 Entropia Métrica . . . . .	22
1.3.2 Entropia Topológica . . . . .	23
1.3.3 Entropia Polinomial . . . . .	25
1.4 Índice de Morse . . . . .	26
1.5 Sistemas Hamiltonianos . . . . .	27
1.5.1 Teorema de Moser . . . . .	29
1.5.2 Sistema Bott-integrável . . . . .	30
<b>2 Bilhares</b>	<b>36</b>
2.1 Bilhares em ovais . . . . .	36
2.1.1 Resultados gerais sobre bilhares . . . . .	38
2.1.2 Bilhares Especiais . . . . .	41
2.2 Bilhares em curvas $C^q$ por partes . . . . .	46
<b>3 Entropia polinomial do bilhar em ovais</b>	<b>50</b>
3.1 Prova do Teorema 1 . . . . .	51
3.2 Prova do Teorema 2 . . . . .	57
<b>4 Bilhares tipo estádio com expoentes de Lyapunov positivos</b>	<b>62</b>
4.1 Focalização por campos de Jacobi . . . . .	67
4.2 Campo de cones . . . . .	71

4.3	Bilhar no Estádio Circular . . . . .	75
4.3.1	Bilhar Circular . . . . .	76
4.3.2	Bilhar no Estádio Circular . . . . .	79
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>86</b>

# Introdução

O problema clássico do bilhar no plano foi definido, originalmente, por Birkhoff [4], no início do século XX. Em linhas gerais, podemos descrevê-lo da seguinte maneira: consideremos uma partícula pontual movendo-se em linha reta no interior de uma região compacta  $Q \subset \mathbb{R}^2$  e sofrendo reflexões elásticas ao chocar-se com o bordo  $\Gamma$  de  $Q$ . Dado um ponto de impacto e a direção de saída desse ponto, como podemos prever e compreender a dinâmica do movimento dessa partícula no interior dessa curva?

Suponhamos que  $\Gamma$  esteja parametrizada pelo parâmetro comprimento de arco  $s$ ,  $0 \leq s < L$ , e denotemos por  $\psi$ ,  $0 < \psi < \pi$ , o ângulo entre o vetor tangente à curva  $\Gamma$  no ponto de impacto e o vetor velocidade da partícula nesse mesmo ponto. Como, por hipótese, as reflexões nos pontos de impacto são elásticas, segue que em cada uma delas vale a lei do espelho, isto é, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Se  $s_1$  representa um ponto de impacto e  $\psi_1$  a direção de saída dele, então a aplicação

$$F : [0, L) \times (0, \pi) \rightarrow [0, L) \times (0, \pi)$$

que associa  $(s_1, \psi_1)$  ao próximo ponto de impacto e à próxima direção de saída,  $(s_2, \psi_2)$ , modela o problema do bilhar no plano Euclidiano, que denotaremos por  $\mathbb{E}^2$ .

O comportamento dinâmico desse sistema depende fortemente do formato da curva  $\Gamma$ . Dois exemplos clássicos de bilhares no plano Euclidiano que exibem comportamentos dinâmicos completamente distintos são o bilhar no círculo e o bilhar no estádio circular: o primeiro deles é totalmente integrável, enquanto o segundo é completamente caótico.

Podemos estender o problema do bilhar para subconjuntos compactos sobre superfícies  $S$  de curvatura constante. De forma análoga ao caso planar, supomos que uma partícula se move na região limitada por uma curva fechada  $\Gamma \subset S$ , seguindo trajetórias geodésicas e sofrendo reflexões elásticas ao colidir com o bordo dessa região. Quando comparado como o caso planar, bilhares sobre superfícies de curvatura constante é um tema pouco explorado na literatura.

A. Veselov [38] publicou, em 1991, um dos primeiros resultados sobre bilhares



sobre as superfícies da esfera  $\mathbb{S}^2$  e do plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ . De modo geral, ele estudou o problema do bilhar para domínios limitados por cônicas, mostrando, por exemplo, que o bilhar circular e o bilhar elíptico são integráveis. Apresentou também algumas propriedades desses bilhares como existência de cáusticas.

Órbitas periódicas também foram estudadas dentro desse contexto da teoria de Sistemas Dinâmicos. Em particular, para bilhares sobre superfícies de curvatura constante, V. Blumen, K. Y. Kim, J. Nance e V. Zharnitsky, em 2012, [5] provaram que, em  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{H}^2$ , para bilhares com bordo geodesicamente estritamente convexo, o conjunto das órbitas 3-periódicas tem medida nula.

M. Bialy [3], em 2013, provou que o único bilhar convexo sem pontos conjugados sobre o hemisfério superior  $\mathbb{S}_+^2$  ou sobre  $\mathbb{H}^2$  é o bilhar circular. Como consequência desse resultados, ele estabeleceu que se uma aplicação do bilhar sobre um curva  $\gamma$  contida em  $\mathbb{S}_+^2$  ou  $\mathbb{H}^2$  for totalmente integrável, então  $\gamma$  é um círculo geodésico.

S. Pinto-de-Carvalho e L. Coutinho dos Santos em [15] e [16] fizeram o estudo do problema do bilhar em ovais no hemisfério superior  $\mathbb{S}_+^2$  e no plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  estabelecendo, para esses dois casos, propriedades similares às propriedades já estabelecidas para o caso planar. Nesse trabalho, os autores mostraram, dentre outras afirmações, que a aplicação de bilhar nessas superfícies é um difeomorfismo conservativo do tipo Twist.

A seguir descrevemos como contribuimos com a teoria já desenvolvida para bilhares em superfícies de curvatura constante e para isso descrevemos o problema do bilhar abordado, estabelecendo algumas notações, definições e convenções.

Denotaremos por  $S$  um das superfícies: o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  ou o hemisfério superior da esfera unitária  $\mathbb{S}_+^2$ . Seja  $\Gamma$  uma curva simples e fechada suave por partes contida em  $S$  e vamos supor que cada parte dessa curva seja pelo menos  $C^3$ , geodesicamente convexa e em alguns casos com curvatura geodésica estritamente positiva. Sendo  $S$  uma superfície completa e  $\Gamma(s_0)$  em  $\Gamma$  e um vetor  $\vec{v}_0$  unitário em  $T_{\Gamma(s_0)}S$  apontando para dentro da região limitada por  $\Gamma$ , existe uma única geodésica  $\gamma$  que parte de  $\gamma(s_0)$  tem  $\vec{v}_0$  como vetor tangente. Sendo  $\Gamma$  uma curva fechada, a geodésica  $\gamma$  interceptará  $\Gamma$  em um novo ponto  $\Gamma(s_1)$  que é único pela convexidade geodésica de  $\Gamma$ . Sejam  $0 < \psi_0 < \pi$  o ângulo do vetor tangente  $\gamma'(s_0)$  ao vetor  $\vec{v}_0$  e  $0 < \psi_1 < \pi$  o ângulo entre o vetor tangente  $\Gamma'(s_1)$  e o vetor tangente à geodésica  $\gamma$  em  $\gamma(s_1)$ , denotado por  $\gamma'(s_1)$ . Dizemos que  $s_0$  e  $\psi_0$  são, respectivamente, ponto de saída e ângulo de saída e dizemos que  $\psi_1$  é o ângulo de batida (ou ângulo de incidência) da partícula em  $\Gamma(s_1)$ . Definimos a trajetória da partícula após a reflexão como sendo a geodésica que parte de  $\gamma(s_1)$  na direção dada pelo vetor  $\vec{v}_1$  que é a reflexão de  $\gamma'(s_1)$  pelo vetor tangente  $\Gamma'(s_1)$ . Assim, por construção, temos que o ângulo de  $\Gamma'(s_1)$  a  $\vec{v}_1$ , dito ângulo de reflexão, é  $\psi_1$ . Como

no caso do plano Euclidiano, ao excluirmos os pontos de  $\Gamma$  onde a tangente  $\Gamma'(s)$  não existe, temos definida a aplicação do bilhar sobre superfícies de curvatura constante

$$F : [0, L) \times (0, \pi) \rightarrow [0, L) \times (0, \pi)$$

$$F(s_0, \psi_0) \mapsto (s_1, \psi_1).$$

Iniciamos nossos estudos com o objetivo de responder a seguinte questão:

*É possível encontrar alguma característica, propriedade ou resultado provado anteriormente sobre bilhares no plano Euclidiano o qual ao estendermos para bilhares em superfícies de curvatura constante essas características, propriedades ou resultados se diferem?*

Como essa pergunta é muito ampla matematicamente, começamos por observar que Birkhoff provou que o bilhar circular no plano Euclidiano é integrável. Foi provado em [38] que o bilhar num círculo geodésico é integrável em  $\mathbb{H}^2$  e  $\mathbb{S}^2$ . Para esses bilhares, o espaço de fase é folheado por retas horizontais invariantes, com isso o expoente de Lyapunov e a entropia topológica são ambos nulos. Birkhoff também provou que o bilhar numa elipse em  $\mathbb{E}^2$  é integrável e Veselov [38] apresentou uma prova de que o bilhar elíptico em  $\mathbb{H}^2$  e  $\mathbb{S}^2$  também é integrável.

Em seguida, foi provado, por Bunimovich em [10], que o bilhar no estádio circular, em  $\mathbb{E}^2$ , apresenta expoente de Lyapunov positivo  $\lambda_+(s, \psi)$  em quase todo ponto  $(s, \psi)$ . Sendo  $h$  o valor do comprimento dos segmentos que conectam os semicírculos e considerando  $h \rightarrow \infty$ , obtém-se  $\lambda_+(s, \psi) \rightarrow 0$  em quase todo ponto  $(s, \psi)$ , como mostra Chernov [11] e Wojtkowski [41]. Ao estendermos esse resultado para  $\mathbb{H}^2$ , obtemos uma certa diferença. O bilhar no estádio circular no plano hiperbólico possui expoente de Lyapunov positivo em quase todo ponto, mas ao considerarmos  $h \rightarrow \infty$  obtemos  $\lambda_+(s, \psi)$  não converge a zero em quase todo ponto  $(s, \psi)$ .

O bilhar no estádio circular no plano Euclidiano é um caso particular dos bilhares estudados por Donnay [14], em que a fronteira do bilhar é uma curva fechada formada pela união de arcos focalizadores e por segmentos de retas suficientemente longos. Esse tipo de fronteira foi introduzido por Wojtkowski e estudado por autores como Bunimovich [10], o próprio Wojtkowski [40] e, como já mencionado, por Donnay [14], em que cada autor apresenta condições para que o bilhar possua expoente de Lyapunov positivo em quase todo ponto. Estendemos o seguinte resultado do Donnay [14] para o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ .

*Qualquer região convexa  $Q$  cuja fronteira consiste da união de arcos focalizadores e por segmentos que são suficientemente longos irá produzir um bilhar que tem expoente de Lyapunov positivo em quase todo ponto.*

Em [19], Gutkins e Smilansky, apresentam um critério de hiperbolicidade para bilhar em superfícies de curvatura constante e mencionam que esse critério pode ser fortalecido empregando campos de cones invariantes. Eles destacam também que acreditam que os resultados do Donnay [14] podem ser estendidos para o bilhar em superfícies com curvatura constante.

Para estendermos o resultado do Donnay [14] para o plano hiperbólico adaptamos os conceitos de arcos focalizadores, adaptamos os campos de Jacobi para definir focalização e também usamos a estratégia de Wojtkowski [41] sobre campos de cones para garantir expoentes de Lyapunov positivos.

Sendo o expoente de Lyapunov de um sistema dinâmico uma quantidade que caracteriza a taxa de separação de trajetórias que começam próximas, nos trouxe a ideia de que se observássemos bilhares com entropia topológica nula poderíamos obter uma resposta para a nossa pergunta inicial. Nesse sentido começamos a estudar entropia polinomial de aplicações de bilhares. Como veremos, se a entropia topológica de uma aplicação for positiva, então a entropia polinomial será infinita. Isso nos restringe a estudar bilhares cuja fronteira possui curvatura geodésica estritamente positiva.

Em [26], Marco introduziu o conceito de entropia polinomial que detecta o crescimento polinomial da taxa do número de órbitas distinguíveis nas iteradas. Posteriormente, Marco [27] provou, em  $\mathbb{E}^2$ , que o bilhar circular tem entropia polinomial igual a 1 e provou que o bilhar em outras regiões dadas por curvas ovais tem entropia polinomial maior ou igual a 2. Em particular, o bilhar elíptico possui entropia polinomial 2.

Estendemos esses resultados para o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  e para a esfera  $\mathbb{S}^2$ .

*A única aplicação de bilhar tal que a entropia polinomial é igual a 1 é do bilhar circular. Nos outros casos, a entropia polinomial da aplicação do bilhar é maior ou igual a 2. Em particular, a entropia polinomial do bilhar na elipse é igual a 2.*

As técnicas e ideias que serão utilizadas baseiam-se em adaptações das estratégias usadas nos artigos [27] e [26].

A tese está organizada em quatro capítulos. No primeiro, intitulado "Preliminares", apresentamos na seção 1 o modelo da folha superior do hiperboloide  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  para o plano hiperbólico e o modelo da esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,

destacando as geodésicas, a métrica e propriedades que serão necessárias para nosso estudo. Nas demais seções deste capítulo apresentamos definições e teoremas de sistemas dinâmicos que faremos uso no desenvolvimento de nosso trabalho.

No segundo capítulo, "Bilhares", retomamos todo o estudo realizado em [15] focando, em particular, nas versões análogas aos resultados clássicos para o problema do bilhar em ovais no plano euclidiano e na última seção abordamos bilhares com fronteira  $C^q$  por partes.

No terceiro capítulo, intitulado "Entropia polinomial do bilhar em ovais", usamos de modo expressivo as preliminares apresentadas nos capítulos anteriores sobre  $\mathbb{H}^2$  e  $\mathbb{S}^2$  para demonstrarmos os seguintes resultados:

**Teorema 1.** *A única mesa de bilhar tal que a entropia polinomial da aplicação de bilhar associada é igual a um é o círculo geodésico. Nos outros caso temos  $h_{pol}(F) \geq 2$ .*

**Teorema 2.** *A entropia polinomial da aplicação do bilhar elíptico é igual a 2.*

No último capítulo, "Bilhares tipo estádio com expoentes de Lyapunov positivos", demonstramos, para o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ , que ao construirmos fronteiras de bilhares por conectar arcos convexos por segmentos geodésicos, esse bilhar possui expoentes de Lyapunov positivos em quase todo ponto.

**Teorema 3.** *Qualquer região convexa  $Q$  cuja fronteira consiste de arcos focalizadores conectados por segmentos que são suficientemente longos irá produzir um bilhar que tem expoente de Lyapunov positivo em quase todo ponto.*

Para finalizar o capítulo, apresentamos o exemplo do estádio circular em  $\mathbb{H}^2$ , o qual possui expoente de Lyapunov positivo. Analisamos, também, o comportamento dos expoentes de Lyapunov quando consideramos o comprimento dos segmentos geodésicos que conectam os semicírculos tendendo ao infinito. Em seguida apresentamos as referências bibliográficas.



# Capítulo 1

## Preliminares

Nosso objetivo nesse capítulo é listar assuntos pertinentes e apresentar os principais resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho. Abordaremos, com terminologias e notações gerais, os seguintes assuntos: Modelos geométricos do plano hiperbólico e da esfera, expoente de Lyapunov, entropias, índice de Morse e sistemas hamiltonianos.

### 1.1 Modelos Geométricos

Nessa seção apresentamos resultados sobre a geometria de uma superfície  $S$  completa de curvatura constante  $K$ . Sabemos que ser completa e de curvatura gaussiana constante implica que  $S$  é isométrica ao plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  se  $K = -1$  e  $S$  é isométrica à esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  se  $K = 1$ . Uma prova desse fato pode ser encontrada em [12].

#### 1.1.1 Plano Hiperbólico

Existem 4 modelos mais comuns para a geometria hiperbólica: o modelo de Klein, o disco de Poincaré, o modelo do semiplano de Poincaré e o modelo do hiperboloide ou de Lorentz. Esses modelos definem um plano hiperbólico que satisfaz os axiomas da geometria hiperbólica. A respeito dos seus nomes, os 3 primeiros mencionados acima foram introduzidos como modelos do espaço hiperbólico por Beltrami e não por Poincaré ou Klein. Todos esses modelos podem ser estendidos para dimensões maiores, mas aqui usaremos o bidimensional.

O modelo de Klein é também conhecido como o modelo do disco projetivo ou modelo do disco de Klein. Para o caso bidimensional, esse modelo usa o interior de um círculo unitário para o plano hiperbólico e as cordas desse círculo i.e. segmentos que vão

de um ponto no bordo à outro ponto do bordo são as retas hiperbólicas. Esse modelo tem a vantagem que as retas coincidem com o conceito de reta do plano Euclidiano, mas tem a desvantagem que os ângulos estão distorcidos (a aplicação não é conforme) e os círculos não são representados por círculos do plano Euclidiano  $\mathbb{E}^2$ .

O modelo do disco de Poincaré, também conhecido como modelo do disco conforme, também usa o interior do círculo unitário, mas as retas são representadas por arcos de círculos que são ortogonais à fronteira do círculo e pelos diâmetros. Esse modelo preserva ângulos que são conformes. Os círculos inteiramente dentro do disco permanecem círculos, embora o centro euclidiano do círculo esteja mais próximo do centro do disco do que o centro hiperbólico do círculo. Horocírculos são círculos dentro do disco que são tangentes ao bordo do círculo, menos o ponto de contato. Hipercírculos são cordas abertas e arcos circulares dentro do disco que terminam no círculo limite com ângulos não ortogonais.

O modelo do semiplano de Poincaré usa metade do plano Euclidiano, limitado por uma reta  $r$  do plano para ser um modelo do plano hiperbólico. Essa reta  $r$  não está inclusa no modelo e geralmente é a reta  $y = 0$ . As retas hiperbólicas são ou semicírculos ortogonais à  $r$  ou semirretas perpendiculares à reta  $r$ . Esse modelo preserva ângulos e então é conforme.

O modelo do hiperboloide usa um hiperboloide de revolução bidimensional mergulhado no espaço de Minkowski tridimensional. Esse modelo é geralmente creditado a Poincaré, mas Reynolds [34] diz que Wilhelm Killing usou esse modelo em 1885. Vamos adotar esse modelo em nosso trabalho e por isso o detalharemos a seguir.

Todos os modelos essencialmente descrevem a mesma estrutura. A diferença entre eles é que eles representam diferentes cartas coordenadas que estabelecem o mesmo espaço métrico, chamado plano hiperbólico. Como esses 4 modelos descrevem o mesmo espaço métrico, cada um pode ser transformado em um outro. Não detalharemos essas transformações por não ser o foco de nosso trabalho.

Como já mencionado, o modelo do plano hiperbólico que será objeto de trabalho aqui é o modelo do hiperboloide e está baseado, principalmente, em [34]. Para isso vamos denotar por  $\mathbb{M}^3$  o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$  munido com a forma quadrática  $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Chamamos de *espaço de Minkowski* o espaço  $\mathbb{R}^3$  com essa métrica.

Sendo  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  vetores em  $\mathbb{R}^3$ , o produto interno é dado por

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \frac{1}{2}q(\vec{v} + \vec{u}) - q(\vec{v}) - q(\vec{u}),$$

ou seja,

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = v_1 u_1 + v_2 u_2 - v_3 u_3.$$

Esse produto é conhecido como métrica de Lorentz, possuindo as seguintes propriedades: bilinear, simétrico e não-degenerado (se  $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$ , para todo  $\vec{u}$ , então  $\vec{v} = 0$ ). Classificamos os vetores em  $\mathbb{M}^3$  por:

1. *Tipo espaço*: se  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ;
2. *Tipo tempo*: se  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ;
3. *Tipo luz*: se  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ .

Vamos denotar por  $\mathbb{H}^2$  o subconjunto dos vetores  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  em  $\mathbb{M}^3$  satisfazendo  $q(\vec{v}) = -1$  e  $z > 0$  com a métrica induzida de  $\mathbb{M}^3$ . Graficamente,  $\mathbb{H}^2$  corresponde à folha do hiperboloide de duas folhas dada por  $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ .

A aplicação

$$\chi(\rho, \theta) = (\sinh \rho \cos \theta, \sinh \rho \sin \theta, \cosh \rho)$$

com  $\rho > 0$  e  $0 < \theta < 2\pi$ , torna  $\mathbb{H}^2$  uma superfície de  $\mathbb{M}^3$  com a primeira forma fundamental

$$I(\vec{v}) = a^2 + \sinh^2 \rho b^2,$$

onde  $\vec{v} = a\chi_\rho + b\chi_\theta$  é um vetor no plano tangente à  $\mathbb{H}^2$  em  $\chi(\rho, \theta)$  e  $\chi_\rho, \chi_\theta$  são as direções principais no plano tangente.

Podemos observar que os vetores tangentes à  $\mathbb{H}^2$  em um ponto  $P$  são os vetores  $\vec{v} \in \mathbb{E}^3$  que satisfazem  $\langle \vec{v}, p \rangle = 0$  e são vetores do tipo espaço, ou seja, possui a primeira forma fundamental  $I(\cdot)$  positiva.

Em [34], Reynolds apresenta a definição de geodésicas em  $\mathbb{H}^2$  e algumas de suas propriedades. Além disso, apresentou a definição de ângulos em  $\mathbb{H}^2$ , como vemos a seguir.

**Lema 1.1.**

1. *As geodésicas de  $\mathbb{H}^2$  são curvas obtidas pela interseção de  $\mathbb{H}^2$  por plano de  $\mathbb{R}^3$  que passam pela origem;*
2. *Dados um ponto  $A \in \mathbb{H}^2$  e um vetor  $T$  tangente unitário a  $\mathbb{H}^2$  em  $A$ , a geodésica  $\gamma(t)$  que passa por  $A$  na direção  $T$  possui equação*

$$\gamma(t) = A \cosh t + T \sinh t;$$

3. A distância geodésica  $g(A, B)$  é

$$\cosh g(A, B) = -\langle A, B \rangle.$$

**Definição 1.2.** Dados dois vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  unitários tangentes a  $\mathbb{H}^2$  em um ponto  $P \in \mathbb{H}^2$  qualquer, o ângulo  $\angle(\vec{v}, \vec{u})$  é dado por

$$\cos \angle(\vec{v}, \vec{u}) = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle.$$

**Proposição 1.3.** Considere um triângulo geodésico em  $\mathbb{H}^2$  com vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  medindo respectivamente  $c$ ,  $a$  e  $b$ . Denotando por  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  os ângulos dos respectivos vértices. Temos as relações:

- Lei dos cossenos 1

$$\cos \hat{A} = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c};$$

- Lei dos cossenos 2

$$\cosh a = \frac{\cos \hat{B} \cos \hat{C} - \cos \hat{A}}{\sin \hat{B} \sin \hat{C}};$$

- Lei dos senos

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sinh a} = \frac{\sin \hat{B}}{\sinh b} = \frac{\sin \hat{C}}{\sinh c}.$$

### 1.1.1.1 Curvas em $\mathbb{H}^2$

Agora falaremos um pouco sobre curvas  $\mathbb{H}^2$  e nos basearemos em [31] e [37].

**Definição 1.4.** Uma curva parametrizada em  $\mathbb{H}^2$  é uma aplicação  $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{M}^3$  de classe  $C^q$ ,  $q \geq 0$  satisfazendo

$$\langle \Gamma(t), \Gamma(t) \rangle = -1$$

e será dada por

$$\Gamma(t) := \chi(\rho(t), \theta(t)),$$

onde  $\rho(t)$  e  $\theta(t)$  são funções diferenciáveis de classe  $C^q$ .

**Definição 1.5.** Uma curva em  $\mathbb{H}^2$  é dita parametrizada pelo comprimento de arco,  $s$ , se  $\langle \Gamma'(s), \Gamma'(s) \rangle = 1$ , onde  $\Gamma'(s)$  é o vetor tangente a  $\Gamma$  em  $s$  e  $'$  é a derivada em  $s$ .

Se  $\Gamma$  está parametrizada pelo comprimento de arco, temos  $\langle \frac{D\Gamma'(s)}{ds}(s), \Gamma'(s) \rangle = 0$ , onde  $\frac{D}{ds}$  é a derivada covariante em  $\mathbb{H}^2$ . Dessa forma, obtemos que  $\frac{D\Gamma'(s)}{ds} = \kappa(s)\vec{N}(s)$ ,



onde  $\vec{N}(s) = \Gamma(s) \wedge \Gamma'(s)$  é o vetor normal unitário de  $\Gamma$  em  $s$  e  $\kappa$  é a curvatura geodésica. Logo

$$\kappa(s) = \left\langle \frac{D\Gamma'}{ds}(s), \Gamma(s) \wedge \Gamma'(s) \right\rangle.$$

Aqui  $\wedge$  denota o produto exterior em  $\mathbb{M}^3$ .

A definição de curva convexa para o plano hiperbólico pode ser encontrada em [36] e em [8] obtemos uma condição suficiente para que curvas simples fechadas sejam geodesicamente estritamente convexas.

**Definição 1.6.** *Uma curva regular  $\Gamma$  no plano hiperbólico é dita geodesicamente estritamente convexa se qualquer geodésica tangente a  $\Gamma$  a intercepta em no máximo um ponto.*

**Proposição 1.7.** *Uma curva regular  $\Gamma$  simples e fechada cuja curvatura geodésica é positiva em todo ponto é geodesicamente estritamente convexa.*

### 1.1.1.2 Círculos em $\mathbb{H}^2$

**Definição 1.8.** *Definimos como círculo em  $\mathbb{H}^2$  o conjunto dos pontos em  $\mathbb{H}^2$  cuja distância geodésica de um ponto fixo  $O$  é uma constante  $\rho$ .*

De modo equivalente, os círculos em  $\mathbb{H}^2$  são curvas  $C$  em  $\mathbb{H}^2$  que são interseções de  $\mathbb{H}^2$  com planos de  $\mathbb{M}^3$  que não contém a origem.

Esses planos possuem equação da forma

$$\langle \vec{v}, P \rangle = v_1x_1 + v_2x_2 - v_3x_3 = -k$$

para  $\vec{v} \in \mathbb{M}^3$  fixado e  $k$  real, ambos não nulos.

Existem 3 casos:

- i)  $q(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ : chamamos  $C$  de círculo com centro em  $\vec{v}$  e raio  $\rho = \text{arccosh}k$ . Em  $\mathbb{M}^3$ ,  $C$  é uma elipse ou um círculo.
- ii)  $q(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ : chamamos  $C$  de curva equidistante e é dada pelo conjunto de pontos de  $\mathbb{H}^2$  que estão a uma distância geodésica constante de uma geodésica fixa. Em  $\mathbb{M}^3$ ,  $C$  é uma hipérbole.
- iii)  $q(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ : chamamos  $C$  de horocírculos e podem ser representados por planos cuja normal se encontra sobre o cone assintótico à  $\mathbb{H}^2$ . Em  $\mathbb{M}^3$ ,  $C$  é uma parábola.

A propriedade a seguir, que segue como um corolário do teorema 27.19 de [28], é de certa importância pois permite a construção do conceito de círculo osculador em  $\mathbb{H}^2$ .

**Propriedade 1.9.** *Por três pontos não colineares do plano hiperbólico passa um, e somente um, círculo em  $\mathbb{H}^2$ , sendo esse círculo um dos casos citados acima.*

Considerando um círculo em  $\mathbb{H}^2$  com  $q(\vec{v}) < 0$  e raio  $\rho$ , o comprimento de sua circunferência é dada por

$$L(\rho) = 2\pi \sinh \rho$$

e sua área é dada por

$$A(\rho) = 2\pi(\cosh \rho - 1),$$

como pode ser visto em [9]. Por simetria, um círculo de raio  $\rho$  tem curvatura geodésica constante dada por alguma função  $\kappa(\rho)$ . O teorema de Gauss Bonnet afirma que:

**Teorema 1.10** (Teorema de Gauss Bonnet). *Seja  $M$  uma variedade bidimensional e  $Q$  uma subvariedade de  $M$  bidimensional com fronteira  $\partial Q$ . Então*

$$\int_Q K \cdot dA + \int_{\partial Q} \kappa \cdot ds = 2\pi\chi(Q),$$

onde  $K$  é a curvatura gaussiana em  $M$ ,  $\kappa$  é a curvatura geodésica de  $\partial Q$  e  $\chi(Q)$  é a característica de Euler de  $M$ .

Aplicando o teorema de Gauss Bonnet ao círculo de raio  $\rho$  em  $\mathbb{H}^2$ , temos

$$-1 \cdot A(\rho) + L(\rho) \cdot \kappa(\rho) = 2\pi \cdot 1.$$

Logo,

$$\kappa(\rho) = \frac{\cosh \rho}{\sinh \rho} = \frac{1}{\tanh \rho}.$$

Portanto  $\kappa$  decresce monotonicamente em  $\rho$  com  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \kappa(\rho) = 1$ . Por isso, um horocírculo pode ser considerado um círculo de raio infinito e podemos mostrar que possui curvatura geodésica constante igual a 1.

Diferente do plano euclidiano, no plano hiperbólico os círculos com curvatura geodésica menor que 1 não são fechados. Por esse motivo, vamos considerar nos próximos capítulos como círculos apenas os círculos com curvatura geodésica constante maior que 1, por serem fechados.

### 1.1.1.3 Elipses em $\mathbb{H}^2$

A definição clássica de elipse é o conjunto dos pontos no plano hiperbólico tais que a soma das distâncias geodésicas a dois pontos dados é constante. A esses dois pontos damos o nome de focos da elipse.

A. Veselov [38] define uma elipse, em algum sistema de coordenadas ortogonal em  $\mathbb{H}^2$ , pela equação

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} = 0, \quad (1.1)$$

onde  $c > b \geq a > 0$ .

*Observação 1.11.* A elipse, como definida por Veselov, é representada geometricamente pela interseção de um cone elíptico com o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ .

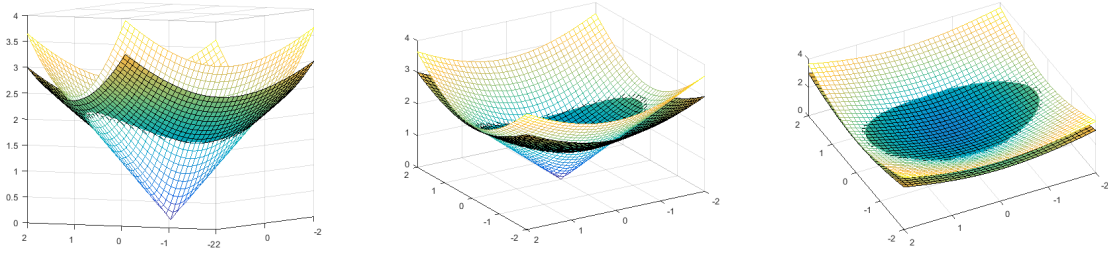


Figura 1.1: Elipse  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 0$

**Proposição 1.12.** *As definições acima são equivalentes.*

*Demonstração.* Sejam  $F_1 = (0, \sinh(\alpha), \cosh(\alpha))$  e  $F_2 = (0, \sinh(\alpha), -\cosh(\alpha))$ , com  $\alpha > 0$ , dois pontos no plano hiperbólico. Seja  $P = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{H}^2$ .

Considere  $2\theta \leq 2\alpha$  a constante tal que  $|PF_1| + |PF_2| = 2\theta$ , onde  $|\cdot|$  denota a distância geodésica em  $\mathbb{H}^2$ .

Temos

$$|PF_1| = \cosh^{-1}\langle P, F_1 \rangle$$

e

$$|PF_2| = \cosh^{-1}\langle P, F_2 \rangle.$$

Então existe  $\tau$  tal que

$$\theta + \tau = \cosh^{-1}(-\cosh(\alpha)\bar{z} + \sinh(\alpha)\bar{y})$$

$$\theta - \tau = \cosh^{-1}(\cosh(\alpha)\bar{z} + \sinh(\alpha)\bar{y}),$$

de onde

$$\cosh(\theta \pm \tau) = \mp \cosh(\alpha)\bar{z} + \sinh(\alpha)\bar{y}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\cosh \theta \cosh \tau &= \sinh(\alpha)\bar{y} \\ \sinh \theta \sinh \tau &= -\cosh(\alpha)\bar{z}\end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$\left(\frac{\sinh(\alpha)}{\cosh \theta}\right)^2 - \left(\frac{\cosh(\alpha)}{\sinh \theta}\right)^2 = \cosh^2 \tau - \sinh^2 \tau = 1.$$

Usando identidades trigonométricas,

$$\tanh^2 \theta \bar{y}^2 - \frac{1}{\tanh^2 \alpha} \bar{z}^2 = \frac{\sinh^2 \theta}{\sinh^2 \alpha} = \frac{\left(\frac{1}{\operatorname{csch}^2 \theta}\right)^2}{\left(\frac{1}{\operatorname{csch}^2 \alpha}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\coth^2 \theta - 1}}{\frac{1}{\coth^2 \alpha - 1}}.$$

Definindo  $A = \tanh \alpha$  e  $D = \tanh \theta$ , podemos simplificar a equação acima obtendo

$$D^2 \bar{y}^2 - \frac{\bar{z}^2}{A^2} = -\frac{\frac{1}{A^2} - 1}{\frac{1}{D^2} - 1}.$$

Observem que  $\frac{\frac{1}{A^2} - 1}{\frac{1}{D^2} - 1} > 0$  já que  $A < 1$  e  $D < 1$ . Como  $P \in \mathbb{H}^2$ ,  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - \bar{z}^2 = -1$ , logo

$$D^2 \bar{y}^2 - \frac{\bar{x}^2}{A^2} = \frac{\frac{1}{A^2} - 1}{\frac{1}{D^2} - 1} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - \bar{z}^2).$$

Segue que

$$\bar{x}^2 \left( \frac{1}{A^2} - \frac{\frac{1}{A^2} - 1}{\frac{1}{D^2} - 1} \right) + \bar{y}^2 \left( D^2 + \frac{\frac{1}{A^2} - 1}{\frac{1}{D^2} - 1} \right) + \bar{z}^2 \left( \frac{\frac{1}{A^2} - 1}{\frac{1}{D^2} - 1} \right) = 0$$

é a equação de uma elipse em  $\mathbb{H}^2$  segundo a definição de Veselov [38].

Usando essa equação da elipse e a fórmula para os focos, vamos mostrar que os focos valem  $(0, \sinh(\alpha), \pm \cosh(\alpha))$ .

Tomando  $c = \frac{1}{\left(\frac{1}{A^2} + \frac{\frac{1}{A^2} - 1}{D^2 - 1}\right)}$ ,  $b = \frac{1}{\left(D^2 + \frac{\frac{1}{A^2} - 1}{D^2 - 1}\right)}$  e  $a = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{A^2} - 1}{D^2 - 1}\right)}$ , obtemos  $c = \frac{\cosh^2 \alpha - 1}{\cosh^2 \theta + \cosh^2 \alpha - 1}$ ,  $b = \frac{\cosh^2 \theta (\cosh^2 \alpha - 1)}{(\cosh^2 \theta - 1)(\cosh^2 \theta + \cosh^2 \alpha - 1)}$  e  $a = \frac{\cosh^2 \alpha - 1}{\cosh^2 \theta - 1}$ .

Após simplificações obtemos,

$$\sqrt{\frac{c-a}{c-b}} = \cosh \alpha;$$

$$\sqrt{\frac{b-a}{c-b}} = \sqrt{\cosh^2 \alpha - 1} = \sinh \alpha.$$

Portanto,  $F_1 = (0, \sinh(\alpha), \cosh(\alpha))$  e  $F_2 = (0, \sinh(\alpha), -\cosh(\alpha))$ .  $\square$

Concluimos que ao trabalharmos com elipses podemos fazer uso das duas definições de acordo com a melhor aplicação.

No modelo de Klein, com as coordenadas  $\xi_1 = \frac{x}{z}$  e  $\xi_2 = \frac{y}{z}$ , a elipse tem a equação usual

$$\frac{\xi_1^2}{\delta_1} + \frac{\xi_2^2}{\delta_2} = 1,$$

para  $\delta_1 = \frac{a}{c}$  e  $\delta_2 = \frac{b}{c}$ .

Uma família de cônicas confocais à elipse  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} = 0$  é expressa por

$$\frac{x^2}{a-\alpha} + \frac{y^2}{b-\alpha} - \frac{z^2}{c-\alpha} = 0. \quad (1.2)$$

Os focos correspondente ao caso degenerado,  $\alpha = a$ , são dados por

$$F_{\pm} = \left( 0, \pm \sqrt{\frac{b-a}{c-b}}, \sqrt{\frac{c-a}{c-b}} \right). \quad (1.3)$$

No modelo de Klein, as cônica confocais são determinadas por

$$\frac{\xi_1^2}{\frac{b-\alpha}{c-\alpha}} + \frac{\xi_2^2}{\frac{a-\alpha}{c-\alpha}} = 1,$$

para  $\alpha = 0$ , temos a elipse inicial. Observemos que essas curvas são as elipses e hipérbolas euclidianas usuais. (Observemos que não podemos aplicar a definição de confocais do plano euclidiano nessas equações.)

Para um ponto  $(x, y, z) \in \mathbb{H}^2$  existem exatamente duas seções cônicas passando por  $(x, y, z)$ , pois como podemos ver a equação (1.2) tem duas raízes que satisfazem  $\alpha_2 < a < \alpha_1 < b$ . Essa família é ortogonal com respeito à métrica de Lobachevsky (mas não na métrica euclidiana), como mostra o resultado abaixo de Veselov [38].

**Proposição 1.13.** *As curvas confocais (1.2) passando pelo ponto  $(x, y, z) \in \mathbb{H}^2$  :  $xyz \neq 0$ , são ortogonais com respeito à métrica de  $\mathbb{H}^2$ .*

Esse resultado é um análogo ao caso euclidiano, onde as cônicas confocais de uma elipse são elipses e hipérbolas que se interceptam fazendo um ângulo de 90 graus.

### 1.1.2 Esfera

A geometria esférica é uma geometria da superfície bidimensional de uma esfera, modelo mais simples da geometria elíptica, na qual dada uma reta  $r$  e um ponto  $P$  fora de  $r$ , não existe nenhuma reta paralela a  $r$  passando por  $P$ , em contraste com a geometria hiperbólica, na qual dada uma reta  $r$  e um ponto  $P$  fora de  $r$ , existem infinitas retas paralela a  $r$  passando por  $P$ .

De modo análogo ao modelo do plano hiperbólico, vamos descrever o modelo da esfera concentrando nas propriedades geométricas e diferenciais de curvas.

Consideramos o espaço real  $\mathbb{R}^3$  munido com a métrica Euclidiana, que também denotaremos por  $\langle, \rangle$ . Denotamos por  $\mathbb{S}^2$  o subconjunto dos vetores  $V = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  em  $\mathbb{R}^3$  satisfazendo  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

A aplicação

$$\chi(\rho, \theta) = (\sin \rho \cos \theta, \sin \rho \sin \theta, \cos \rho)$$

com  $0 < \rho < \pi$  e  $0 < \theta < 2\pi$ , torna  $\mathbb{S}^2$  uma superfície de  $\mathbb{R}^3$  com a primeira forma fundamental

$$I(\vec{v}) = a^2 + \sin^2 \rho b^2,$$

onde  $\vec{v} = a\chi_\rho + b\chi_\theta$  é um vetor no plano tangente à  $\mathbb{S}^2$  em  $\chi(\rho, \theta)$  e  $\chi_\rho, \chi_\theta$  são as direções principais no plano tangente.

Sem risco de confusão podemos escrever  $\langle, \rangle$  para denotar a métrica induzida em  $\mathbb{S}^2$ .

O seguinte resultado nos permite entendermos as geodésicas de  $\mathbb{S}^2$  e algumas propriedades. Além disso, podemos entendermos os ângulos em  $\mathbb{S}^2$ .

#### Lema 1.14.

1. *As geodésicas de  $\mathbb{S}^2$  são os círculos máximos, curvas obtidas pela interseção de  $\mathbb{S}^2$  por planos de  $\mathbb{R}^3$  que passam pela origem;*
2. *Dados um ponto  $A \in \mathbb{S}^2$  e um vetor  $T$  tangente unitário a  $\mathbb{S}^2$  em  $A$ , a geodésica  $\gamma(t)$  que passa por  $A$  na direção  $T$  possui equação*

$$\gamma(t) = A \cos t + T \sin t;$$

3. A distância geodésica  $g(A, B)$  é

$$\cos g(A, B) = \langle A, B \rangle.$$

**Definição 1.15.** Dados dois vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  tangentes a  $\mathbb{S}^2$  em um ponto  $P \in \mathbb{S}^2$  qualquer, o ângulo  $\angle(\vec{v}, \vec{u})$  é dado por

$$\cos \angle(\vec{v}, \vec{u}) = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle.$$

**Proposição 1.16.** Considere um triângulo geodésico em  $\mathbb{S}^2$  com vértices  $A, B$  e  $C$ , os lados  $AB, BC$  e  $CA$  medindo respectivamente  $a, b$  e  $c$ . Denotando por  $\hat{A}, \hat{B}$  e  $\hat{C}$  os ângulos dos respectivos vértices. Temos as relações:

- Lei dos cossenos 1

$$\cos \hat{A} = \frac{\cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c};$$

- Lei dos cossenos 2

$$\cos a = \frac{\cos \hat{B} \cos \hat{C} - \cos \hat{A}}{\sin \hat{B} \sin \hat{C}};$$

- Lei dos senos

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin c}.$$

### 1.1.2.1 Curvas em $\mathbb{S}^2$

Agora falaremos um pouco sobre curvas  $\mathbb{S}^2$  e nos basearemos em [13].

**Definição 1.17.** Uma curva parametrizada em  $\mathbb{S}^2$  é uma aplicação  $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^q$ ,  $q \geq 0$  satisfazendo

$$\langle \Gamma(t), \Gamma(t) \rangle = 1$$

e será dada por

$$\Gamma(t) := \chi(\rho(t), \theta(t)),$$

onde  $\rho(t)$  e  $\theta(t)$  são funções diferenciáveis de classe  $C^q$ .

**Definição 1.18.** Uma curva em  $\mathbb{S}^2$  é dita parametrizada pelo comprimento de arco,  $s$ , se  $\langle \Gamma'(s), \Gamma'(s) \rangle = 1$ , onde  $\Gamma'(s)$  é o vetor tangente a  $\Gamma$  em  $s$  e  $'$  é a derivada em  $s$ .

Se  $\Gamma$  está parametrizada pelo comprimento de arco, temos  $\langle \frac{D\Gamma'(s)}{ds}(s), \Gamma'(s) \rangle = 0$ , onde  $\frac{D}{ds}$  é a derivada covariante em  $\mathbb{H}^2$ . Dessa forma, obtemos que  $\frac{D\Gamma'(s)}{ds} = \kappa(s)\vec{N}(s)$ , onde  $\vec{N}(s) = \Gamma(s) \times \Gamma'(s)$  é o vetor normal unitário de  $\Gamma$  em  $s$  e  $\kappa$  é a curvatura geodésica. Logo

$$\kappa(s) = \left\langle \frac{D\Gamma'}{ds}(s), \Gamma(s) \times \Gamma'(s) \right\rangle.$$

A definição de curva convexa para a superfície esférica pode ser encontrada em [36] e obtemos uma condição suficiente para que curvas simples fechadas sejam geodesicamente estritamente convexas.

**Definição 1.19.** *Uma curva regular  $\Gamma$  na esfera é dita geodesicamente estritamente convexa se qualquer geodésica tangente a  $\Gamma$  a intercepta em no máximo um ponto.*

Lembrando que as geodésicas de  $\mathbb{S}^2$  são círculos máximos, segue da definição que a curva  $\Gamma$  deve estar contida em um hemisfério.

**Proposição 1.20.** *Uma curva regular  $\Gamma$  simples e fechada cuja curvatura geodésica é positiva em todo ponto é geodesicamente estritamente convexa.*

### 1.1.2.2 Círculos em $\mathbb{S}^2$

**Definição 1.21.** *Definimos como círculo geodésico em  $\mathbb{S}^2$  o conjunto dos pontos cuja distância geodésica à um ponto fixo  $O$  é uma constante  $r$ .*

De modo equivalente, os círculos geodésicos em  $\mathbb{S}^2$  são curvas  $C$  em  $\mathbb{S}^2$  que são interseções de  $\mathbb{S}^2$  com planos de  $\mathbb{R}^3$  que não contém a origem.

Por simetria, o círculo geodésico de raio  $r$  tem curvatura geodésica constante dada por uma função  $\kappa(r) = 1/r$ .

### 1.1.2.3 Elipses em $\mathbb{S}^2$

A definição clássica de elipse é o conjunto dos pontos na esfera tais que a soma das distâncias geodésicas à dois pontos dados é constante. A esses dois pontos damos o nome de focos da elipse.

A. Veselov [38] define uma elipse, em algum sistema de coordenadas ortogonal em  $\mathbb{S}^2$ , pela equação

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0, \quad (1.4)$$

onde  $c > b > 0 > a$ .

*Observação 1.22.* A elipse, como definida por Veselov, é representada geometricamente pela interseção de um cone elíptico com  $\mathbb{S}^2$ .

De modo análogo à elipse em  $\mathbb{H}^2$ , provamos que as duas definições são equivalentes.

Uma família de cônicas confocais à elipse  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0$  é expressa por

$$\frac{x^2}{a - \alpha} + \frac{y^2}{b - \alpha} + \frac{z^2}{c - \alpha} = 0. \quad (1.5)$$



Os focos correspondentes ao caso degenerado,  $\alpha = a$ , são dados por

$$F_{\pm} = \left( 0, \pm\sqrt{\frac{b-a}{c-b}}, \pm\sqrt{\frac{c-a}{c-b}} \right). \quad (1.6)$$

Para um ponto  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$  existem exatamente duas seções cônicas passando por  $(x, y, z)$ , pois como podemos ver a equação (1.5) tem duas raízes que satisfazem  $\alpha_2 < a < \alpha_1 < b$ . Essa família é ortogonal com respeito à métrica esférica (mas não na métrica euclidiana), como mostra o resultado de Veselov [38].

**Proposição 1.23.** *As curvas confocais (1.5) passando pelo ponto  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : xyz \neq 0$ , são ortogonais com respeito à métrica de  $\mathbb{S}^2$ .*

Esse resultado é um análogo ao caso euclidiano, onde as cônicas confocais de uma elipse são elipses e hipérbolas que se interceptam fazendo um ângulo de 90 graus.

## 1.2 Expoente de Lyapunov e Campo de Cones

Nesta seção vamos definir, de modo geral, o conceito de expoente de Lyapunov e de campos de cones os quais baseiam-se, em sua maior parte, em [25], [39], [40] e [41]. Esses conceitos serão usados no capítulo 4.

Seja  $\tilde{M}$  uma variedade Riemanniana, compacta, suave, de dimensão  $n$ , onde está definida uma medida  $\mu$ , absolutamente contínua em relação à medida induzida pela métrica riemanniana. Sejam  $M_0 \subset \tilde{M}$  tal que  $\mu(M_0) = 0$ ,  $M = \tilde{M} \setminus M_0$  e  $F : M \rightarrow M$  a restrição de um difeomorfismo de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , definido em um aberto de  $\tilde{M}$ , que preserva a medida  $\mu$ .

$(M, F, \mu)$  define um sistema dinâmico discreto, com medida  $\mu$ . A órbita de um ponto  $x \in M$  por  $F$  é o conjunto

$$\mathcal{O}_x := \{F^n(x); n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, F^{-1}(x), x, F(x), \dots\}.$$

Vamos enunciar o teorema a seguir para um caso mais geral onde  $F$  não necessariamente é inversível.

**Teorema 1.24** (Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets). *Sejam  $(M, F, \mu)$  como definido acima e  $DF(x) : T_x M \rightarrow T_{F(x)} M$  a aplicação derivada em  $x$ . Se*

$$\int_M \log^+ \|DF\| d\mu < \infty,$$

para  $\mu$ -quase todo  $x \in M$  existe um número inteiro positivo  $k = k(x)$  e existem números reais  $\lambda_1(x) > \dots > \lambda_k(x)$  e uma filtração

$$\mathbb{R}^d = V_x^1 > \dots > V_x^k > V_x^{k+1} = \{0\}$$

tal que, para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$  e para  $\mu$ -quase todo  $x \in M$ ,

1.  $k(F(x)) = k(x)$  e  $\lambda_i(F(x)) = \lambda_i(x)$  e  $DF(x) \cdot V_x^i = V_{F(x)}^i$ ;
2.  $\lim_n \frac{1}{n} \log \|DF^n(x) \cdot v\| = \lambda_i(x)$  para todo  $v \in V_x^i \setminus V_x^{i+1}$ ;
3.  $\lim_n \log |\det DF^n(x)| = \sum_{i=1}^k d_i(x) \lambda_i(x)$ , onde  $d_i(x) = \dim V_x^i - \dim V_x^{i+1}$ .

Além disso, os números  $k(x)$  e  $\lambda_1(x), \dots, \lambda_k(x)$  e os subespaços  $V_x^1, \dots, V_x^k$  dependem mensuravelmente do ponto  $x$ .

**Definição 1.25.** Os números  $\lambda_i(x)$  são chamados expoentes de Lyapunov relativos a  $F$  no ponto  $x$ .

Os expoentes de Lyapunov satisfazem  $\lambda_1 = \lambda_{\max}$  e  $\lambda_k = \lambda_{\min}$ , por isso os chamamos de *expoentes de Lyapunov extremais* no ponto  $x$ . Cada  $d_i(x)$  é chamado *multiplicidade* do expoente de Lyapunov  $\lambda_i(x)$ .

Quando  $F$  é invertível, podemos obter uma conclusão mais forte.

**Teorema 1.26** (Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets II). *Acrescentando as hipóteses  $F$  é invertível e*

$$\log^+ \|DF^{-1}\| < \infty,$$

*obtemos uma decomposição*

$$\mathbb{R}^d = E_x^1 \oplus \dots \oplus E_x^k,$$

tal que, para todo  $i = 1, \dots, k$ ,

1.  $DT(x) \cdot E_x^i = E_{f(x)}^i$  e  $V_x^i = V_x^{i+1} \oplus E_x^i$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|DF^n(x) \cdot v\| = \lambda_i(x)$  para todo  $v \in E_x^i$  diferente de zero;
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log |\det DF^n(x)| = \sum_{i=1}^k d_i(x) \lambda_i(x)$ , onde  $d_i(x) = \dim E_x^i$ .

Em particular,  $\dim E_x^i = \dim V_x^i - \dim V_x^{i+1}$ .

Há também uma versão desse teorema para variedades bidimensionais e sua demonstração pode ser encontrada em [33].

**Teorema 1.27** (Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets para superfícies). *Sejam  $F : M \rightarrow M$  um difeomorfismo  $C^1$  de uma superfície compacta e  $\mu$  ergódica com respeito a  $F$ . Então, ou*

*i) existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $v \in T_x M$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|DF^n(x) \cdot v\| = \lambda$ , para  $\mu$ -quase todo  $x \in M$ ,*

*ou*

*(ii) existem  $\lambda_1 > \lambda_2$  e uma decomposição mensurável  $T_x M = E_x^1 \oplus E_x^2$  tal que, para  $v \in E_x^1$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|DF^n(x) \cdot v\| = \lambda_1$$

*e, para  $v \in E_x^2$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|DF^n(x) \cdot v\| = \lambda_2,$$

*para  $\mu$ -quase todo  $x \in M$*

O expoente de Lyapunov é uma grandeza que mede como evolui a distância entre pontos consecutivos de trajetórias com condições iniciais arbitrariamente próximas. De certa maneira, podemos dizer que se  $x_0 \in M$  e  $v \in T_{x_0} M$  são tais que  $\lambda_{\max}(x_0) > 0$  e  $x_1$  é um ponto próximo de  $x_0$ , então as órbitas de  $x_0$  e  $x_1$  não permanecem próximas à medida que  $F$  é aplicada. Além disto, a imagem de  $v$  é "rebaixada" sobre o espaço  $E_{F^l(x)}^1$  para  $l$  suficientemente grande.

Nesse sentido, podemos definir o que chamamos de campos de cone mensurável.

**Definição 1.28.**  $\{C(x); x \in M\}$  é um campo de cones mensurável definido em  $TM$  para

$$C(x) = \{\alpha_1 e_1(x) + \dots + \alpha_n e_n(x); \alpha_i \geq 0 \forall i \text{ ou } \alpha_i \leq 0 \forall i\} \subset T_x M,$$

onde, para cada  $x$ ,  $B(x) = \{e_1(x), \dots, e_n(x)\}$  é uma base de  $T_x M$  e as funções  $x \mapsto e_i(x)$  são mensuráveis para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Um cone  $C(x)$ , para  $x \in M$ , sob a ação de  $DF(x)$  pode ser:

- *invariante por  $F$* : se  $DF(x) \cdot (C(x)) \subset C(F(x))$ , para  $\mu$ -quase todo  $x \in M$ ;
- *estritamente invariante por  $F$* : se for invariante por  $F$  e se  $\partial(DF(x) \cdot (C(x))) \subset \text{Int}(C(F(x)))$ , para  $\mu$ -quase todo  $x \in M$ ;
- *estritamente invariante por  $F$  no futuro*: se for invariante por  $F$  e, em  $\mu$ -quase todo  $x \in M$ , existir  $N(x) \in \mathbb{N}$  tal que  $\partial(DF^{N(x)}(x) \cdot (C(x))) \subset \text{Int}(C(F^{N(x)}(x)))$ .

Utilizando o conceito de campo de cones, o teorema a seguir de Wojtkowski [40] nos fornece condições para que o expoente de Lyapunov maximal seja positivo.

**Teorema 1.29** (Teorema de Wojtkowski I). *Sejam  $(M, F, \mu)$  um espaço mensurável e  $F : M \rightarrow M$  um difeomorfismo que preserva a medida  $\mu$  tal que*

$$\int_M \log^+ \|DF\| d\mu < \infty.$$

*Se existe um campo de cones que é estritamente invariante por  $F$  no futuro, então o expoente de Lyapunov maximal*

$$\lambda_{\max}(x) = \lim_l \frac{1}{l} \log \|DF^l(x)\|$$

*é positivo em  $\mu$ -quase todo  $x \in M$ .*

Um campo de cones  $\{C(x); x \in M\}$  está definido a partir de um referencial móvel  $B(x)$  no fibrado tangente  $TM$ . Denotamos por  $(a_{ij}(x))$  a matriz de  $DF(x)$  nesse referencial móvel.

Dizer que o cone  $C(x)$  é invariante por  $F$  é equivalente a dizer que  $a_{ij}(x) \geq 0$ , para todo  $i, j$ , ou que  $a_{ij}(x) \leq 0$ , para todo  $i, j$ . De fato, basta aplicar  $DF(x)$  aos vetores de  $B(x)$  e a combinações lineares do tipo  $e_i(x) + \lambda e_j(x)$  e usar a propriedade de  $C(x)$  ser invariante.

Se  $C(x)$  é estritamente invariante por  $F$  então  $a_{ij}(x) > 0$ , para todo  $i, j$ , ou  $a_{ij}(x) < 0$ , para todo  $i, j$ . A preservação de  $\mu$  por  $F$  implica que  $|\det DF(x)| = 1$ .

Desse modo, podemos enunciar o teorema de Wojtkowski da forma abaixo.

**Teorema 1.30** (Teorema de Wojtkowski II). *Sejam  $(M, F, \mu)$  um espaço mensurável e  $F : M \rightarrow M$  um difeomorfismo que preserva a medida  $\mu$  tal que*

$$\int_M \log^+ \|DF\| d\mu < \infty.$$

*Suponhamos que*

- *as entradas da matriz  $DF(x)$  num referencial móvel  $B(x)$  sejam todas não-negativas (não-positivas) em  $\mu$ -quase todo  $x \in M$ ;*
- *em  $\mu$ -quase todo  $x \in M$  exista  $N(x) \in \mathbb{N}$  tal que as entradas de  $DF^{N(x)}(x)$  sejam positivas (negativas) em  $B(x)$ .*

*Então o expoente de Lyapunov maximal*

$$\lambda_{\max}(x) = \lim_l \frac{1}{l} \log \|DF^l(x)\|$$

*é positivo em  $\mu$ -quase todo  $x \in M$ .*

Notemos que a diferença entre as duas versões do teorema de Wojtkowski está na definição de campo de cones invariante, sendo as duas formas de definir equivalentes.

## 1.3 Entropias

Nesta seção introduziremos a noção de entropia e as principais referências são os livros [21] e [39]. Duas entropias, mais comumente estudadas são: a entropia topológica e a entropia métrica. Enquanto essas diferem para a maioria das aplicações, o Princípio Variacional relaciona as duas. Além dessas duas, vamos definir também o conceito de entropia polinomial que foi definida mais recentemente por Marco [26] e será fortemente utilizada no capítulo 3.

### 1.3.1 Entropia Métrica

Seja  $(M, \mathcal{B}, \mu)$  um espaço de medida e seja  $F : M \rightarrow M$  uma transformação preservando medida. Para definir a entropia métrica de  $F$ , precisamos primeiro desenvolver o conceito de partição.

Seja  $\{A_n\}$  uma partição finita de  $M$  tal que:

1. para cada  $i$ ,  $A_i$  é mensurável e  $\mu(A_i) > 0$ ;
2.  $\mu(\cup_i A_i) = 1$ ;
3. para cada  $i \neq j$ ,  $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ .

**Definição 1.31.** *Seja  $\alpha = \{A_n\}$  uma partição satisfazendo 1, 2 e 3. Definimos a entropia de  $\alpha$  por*

$$h(\alpha) = - \sum_i \mu(A_i) \log \mu(A_i).$$

Um trabalho axiomático que mostra por que essa quantidade concorda com o conceito probabilístico de entropia pode ser encontrada no livro de Khinchin [22].

Para duas partições  $\alpha, \beta$  deste tipo, defina sua junção por:

$$\alpha \vee \beta = \{A_i \cap B_j : A_i \in \alpha, B_j \in \beta\}$$

Estamos interessados em como  $F$  age em membros de uma partição. Em particular, queremos entender o comportamento de  $\alpha \vee F^{-1}(\alpha)$ . Indutivamente define

$$\alpha^n = \vee_{i=0}^{n-1} F^{-i}(\alpha) = \alpha^{n-1} \vee F^{-1}(\alpha^{n-1}).$$

**Definição 1.32.** *A entropia de uma partição  $\alpha$  relativa a  $F$  é*

$$h(F, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(\alpha^n).$$

Para mostrar que o limite anterior existe observemos que  $\{h(\alpha^i)\}_{i=0}^{\infty}$  é subaditiva, ou seja,  $h(\alpha^{i+j}) \leq h(\alpha^i) + h(\alpha^j)$ . Agora temos todas as ferramentas para definir a entropia métrica.

**Definição 1.33.** *A entropia métrica é definida por*

$$h_\mu(F) = \sup_{\alpha} h(F, \alpha) = \sup_{\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{n} \left( \sum_{A_j \in \vee_{i=0}^{n-1} F^{-i}(\alpha)} \mu(A_j) \log \mu(A_j) \right) \right].$$

Agora que a entropia métrica foi definida, daremos uma descrição intuitiva. Podemos considerar o ato de particionar o espaço como equivalente a executar um experimento. Nesta experiência, determinamos apenas qual membro da partição o resultado está. Ao juntar as imagens inversas, replicamos experimentos passados; quanto mais experimentos, mais sabemos sobre a órbita da partícula. A entropia da partição relativa a  $F$  examina o comportamento limitante de previsão da órbita da partícula com base em  $n$  experimentos anteriores. Finalmente, a entropia de uma transformação  $h_\mu$ , examina todas as formas possíveis de construir um experimento (partição) para um determinado sistema.

### 1.3.2 Entropia Topológica

Seja  $(M, d)$  um espaço métrico compacto e seja  $F : M \rightarrow M$  uma aplicação contínua. Para cada inteiro  $n \geq 1$  definimos a métrica dinâmica por

$$d_n^F(x, y) = \max_{0 \leq k \leq n-1} d(F^k(x), F^k(y)).$$

Podemos mostrar que  $d_n^F$  define a mesma topologia em  $M$ . Sendo  $(M, d_n^F)$  um espaço compacto, para todo  $\varepsilon > 0$ , podemos cobrir  $M$  com finitas bolas  $B_n(x, \varepsilon)$  de raio  $\varepsilon$  para  $d_n^F$ . Seja  $G_n^F(\varepsilon)$  o número mínimo de bolas para tal cobertura. Então a entropia

topológica de  $F$  é

$$h_{top}(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log G_n^F(\varepsilon).$$

A entropia topológica detecta a taxa de crescimento exponencial do número mínimo de condições iniciais que são necessárias para seguir as  $n$  primeiras iteradas de qualquer ponto do espaço com uma precisão de  $\varepsilon$ . Podemos dizer que a entropia topológica é uma maneira de medir a taxa de complexidade de um sistema dinâmico, que se traduz como a imprevisibilidade da evolução do sistema. Neste contexto, um sistema pode ser dito caótico se sua entropia topológica é positiva.

O princípio variacional relaciona a entropia métrica com a entropia topológica.

**Teorema 1.34** (Princípio variacional).  $h_{top}(F) \geq h_\mu(F)$  para toda  $\mu$ . Além disso,  $h_{top}(F) = \sup_\mu h_\mu(F)$ .

A Desigualdade de Ruelle é um importante resultado em Teoria Ergódica para sistemas dinâmicos suaves por relacionar dois conceitos fundamentais: entropia métrica e expoente de Lyapunov. Esse teorema foi apresentado em [35]. Para isso vamos considerar  $M$  uma variedade compacta e  $F$  um difeomorfismo  $C^1$  e  $\mu$  uma medida invariante por  $F$ .

**Teorema 1.35** (Desigualdade de Ruelle). *A entropia métrica é limitada superiormente pela soma dos expoentes de Lyapunov positivos:*

$$h_\mu(F) \leq \int \sum_{\lambda_j(x) > 0} \lambda_j(x) d_j(x) d\mu(x),$$

onde  $\lambda_j(x)$  são os expoentes de Lyapunov positivos e  $d_j(x)$  é a multiplicidade de  $\lambda_j(x)$ .

Uma importante consequência da Desigualdade de Ruelle é que qualquer difeomorfismo  $C^1$  com entropia topológica positiva tem uma medida invariante por  $F$  com pelo menos um expoente de Lyapunov positivo.

De forma natural surge a questão sobre o caso da igualdade e a Fórmula de Pesin responde esse questionamento. Para isso, precisamos acrescentar hipóteses. Esse resultado foi mostrado em [32].

**Teorema 1.36** (Fórmula de Pesin). *Seja  $F : M \rightarrow M$  um difeomorfismo  $C^{1+\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , com  $M$  uma variedade compacta e  $\mu$  uma medida invariante por  $F$  absolutamente contínua, então*

$$h_\mu(F) = \int \sum_{\lambda_j(x) > 0} \lambda_j(x) d_j(x) d\mu(x).$$

### 1.3.3 Entropia Polinomial

Nessa subseção vamos introduzir a entropia polinomial e descrever brevemente suas principais propriedades. Para isso vamos considerar  $(M, d)$  um espaço métrico junto com uma aplicação contínua  $F : M \rightarrow M$  e denotaremos por  $d_n^F$  a métrica dinâmica associada com  $F$  como definida para entropia topológica.

Todas essas métricas são equivalentes e definem a topologia inicial em  $M$ . Em particular,  $(M, d_n^F)$  é compacto. Para  $\varepsilon > 0$ ,  $M$  pode ser coberto para um número finito de bolas de raios  $\varepsilon$  para  $d_n^F$ . Seja  $G_n^F(\varepsilon)$  o número mínimo de bolas da tal cobertura.

**Definição 1.37.** *A entropia polinomial  $h_{pol}$  de  $F$  é definida como*

$$h_{pol}(F) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf \left\{ \sigma \geq 0 \mid \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\sigma} G_n^F(\varepsilon) = 0 \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log G_n^F(\varepsilon)}{\log n}$$

Assim como a entropia topológica, a entropia polinomial não depende da escolha da métrica topologicamente invariante em  $M$ .

Como consequência imediata da definição temos a seguinte observação.

*Observação 1.38.* Quando  $h_{top}(F) > 0$ , então a entropia polinomial é infinita.

Além disso, segue abaixo algumas propriedades básicas da entropia polinomial, cujas demonstrações podem ser vista em [26].

**Propriedade 1.39.**

1. Se  $A \subset M$  é invariante sob  $F$ , então  $h_{pol}(F|_A) \leq h_{pol}(F)$ .
2. Se  $(Y, d')$  é outro espaço métrico compacto e se  $G : Y \rightarrow M$  é um fator contínuo de  $F$ , isto é, se existe uma aplicação contínua sobrejetiva  $l : M \rightarrow M'$  tal que  $l \circ F = G \circ l$ , então  $h_{pol}(G) \leq h_{pol}(F)$ .
3. Se  $A = \cup_{i=1}^n A_i$  onde  $A_i$  é invariante sob  $F$ , então  $h_{pol}(F|_A) = \max_i(h_{pol}(F|_{A_i}))$ .

De modo similar, podemos definir entropia polinomial para fluxos. Considere um fluxo contínuo  $\phi := (\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  em um espaço métrico completo  $(M, d)$ , satisfazendo  $\phi^0 = Id$  e  $\phi^s \circ \phi^t = \phi^{s+t}$ . Para  $t \geq 1$ , definimos a família contínua de distâncias dinâmicas

$$d_t^\phi(x, y) = \sup_{0 \leq \tau \leq t-1} d(F^\tau(x), F^\tau(y)),$$

que define a mesma topologia em  $M$ . Observamos que  $d_t^\phi \geq d_{t'}^\phi$  para  $t \geq t' \geq 1$ .



**Definição 1.40.** A entropia polinomial  $h_{pol}(\phi)$  do fluxo  $\phi$  é definida como

$$h_{pol}(\phi) = \sup_{\varepsilon > 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log G_t^\phi(\varepsilon)}{\log t} = \inf \left\{ \sigma \geq 0 \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\sigma} G_t^\phi(\varepsilon) = 0 \right\},$$

onde  $G_t^\phi(\varepsilon)$  é o número mínimo de bolas de raio  $\varepsilon$  de  $d_t^\phi$  em uma cobertura de  $M$ .

A prova da observação abaixo pode ser encontrada em [26].

*Observação 1.41.*  $h_{pol}(\phi^1) = h_{pol}(\phi)$

## 1.4 Índice de Morse

A Teoria de Morse, seguindo J. Milnor [29], pode ser chamada de teoria dos pontos críticos. Podemos recorrer a topologia do espaço para entender os pontos críticos de uma função suave na variedade. Temos também a Teoria de Morse-Bott, onde consideramos funções suaves em uma variedade cujo conjunto crítico é uma subvariedade fechada.

Seja  $M$  uma variedade mergulhada em  $\mathbb{R}^3$  e  $f \in C^\infty(M)$ . O conjunto dos pontos críticos de  $f$  é o conjunto de todos os pontos  $p \in M$ , tais que no sistema de coordenadas locais  $x_1, x_2, x_3$  todas as primeiras derivadas parciais se anulam:

$$\frac{df}{dx_1}(p) = \frac{df}{dx_2}(p) = \frac{df}{dx_3}(p) = 0.$$

Podemos observar que isso não depende da escolha de coordenadas locais. Um ponto crítico é chamado não degenerado se, e somente se, a Hessiana de  $f$  em  $p$

$$Hess(p) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right]$$

é invertível. As funções com pontos críticos não degenerados são chamadas funções de Morse.

Definimos o *índice de Morse* para cada ponto crítico não degenerado  $p$  da função como sendo a dimensão dos auto-espacos negativos da Hessiana de  $f$  no ponto  $p$ :

$$\lambda(p) := \text{Dim Eig}^- Hess(p).$$

Podemos calcular o índice de Morse  $\lambda$  de outra forma. Existe um sistema de coordenadas locais  $(y_1, y_2, y_3)$  em uma vizinhança  $U$  de  $p$  com  $y_i(p) = 0$  para todo

$i \in \{1, \dots, n\}$ . Assim, para todo  $q \in U$ ,

$$f(q) = f(p) - (y_1(q))^2 - \dots - (y_\lambda(q))^2 + (y_{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (y_n(q))^2.$$

Essa última formulação é importante do ponto de vista teórico, mas não é muito útil quando desejamos fazer cálculos.

## 1.5 Sistemas Hamiltonianos

Nesta seção vamos relembrar algumas definições de sistemas Hamiltonianos que serão usadas nas duas subseções onde apresentamos o Teorema de Moser e definimos o conceito de sistema Hamiltoniano Bott-integrável.

**Definição 1.42.** *Uma função real  $H(x, y)$  definida no espaço de fase  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  é chamada uma função Hamiltoniana. As equações diferenciais ordinárias*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = H_y(x, y)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -H_x(x, y)$$

são chamadas equações Hamiltonianas associadas à  $H$  ou sistema Hamiltoniano. A variável  $t \in \mathbb{R}$  representa o tempo.

Para  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , um sistema Hamiltoniano e a condição inicial  $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$  definem um problema de valor inicial.

Associada às equações Hamiltonianas, temos a função

$$(x, y) \mapsto ((x, y), (H_y(x, y), -H_x(x, y))).$$

Essa função define um campo vetorial Hamiltoniano. A primeira componente especifica o ponto base e a segunda o vetor no ponto base. Definimos esse campo por

$$X_H(x, y) = (H_y(x, y), -H_x(x, y)).$$

Podemos escrever  $X_H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}$  e denotando  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , obtemos  $X_H = J(\text{grad}H)(x, y)$ .

Seja  $t \mapsto (x(t), y(t))$  uma curva solução das equações Hamiltonianas. Em cada instante  $t$ , o vetor tangente a essa curva é dado por

$$(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) = ((x, y), (H_y(x, y), -H_x(x, y))).$$

Em resumo, a cada sistema Hamiltoniano corresponde um campo vetorial e todo vetor tangente a uma curva solução é dado por um vetor do campo vetorial.

O conjunto das soluções das equações Hamiltonianas  $\dot{x} = H_y$ ,  $\dot{y} = -H_x$  define um grupo  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  da seguinte forma: para  $\zeta \in \mathbb{R}^2$ , seja  $t \mapsto (x(t), y(t))$  a solução das equações Hamiltonianas tal que  $(x(0), y(0)) = \zeta$ . Definimos

$$\phi(t, \zeta) = (x(t), y(t)).$$

Podemos verificar as seguintes propriedades:

- $\phi(s + t, \zeta) = \phi(t, \phi(s, \zeta))$ , para todo  $s, t \in \mathbb{R}$ ;
- se  $t = 0$ ,  $\zeta \mapsto \phi(0, \zeta)$  é a transformação identidade;
- a aplicação  $\zeta \mapsto \phi(-t, \zeta)$  é a inversa de  $\zeta \mapsto \phi(t, \zeta)$ .

Usualmente denota-se  $t \mapsto \phi_t(\zeta)$  o fluxo associado à função Hamiltoniana.

Seja  $t \mapsto (x(t), y(t))$  a solução do problema de valor inicial do sistema Hamiltoniano. O número

$$e(t) = H(x(t), y(t))$$

é chamado *energia* do sistema ao longo da solução no instante  $t$ . Para todo  $t$ , temos  $e(t) = e(t_0)$ , ou seja, conservação de energia.

**Definição 1.43.** Uma função real  $H(x, y, t)$  definida no espaço de fases  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  é chamada *função Hamiltoniana que depende do tempo*.

Se a Hamiltoniana  $H$  não depende do tempo, ou seja,  $H = H(x, y)$ , dizemos que o sistema Hamiltoniano é *autônomo*. Se a Hamiltoniana  $H$  depende do tempo, ou seja,  $H = H(x, y, t)$ , dizemos que o sistema Hamiltoniano é *não-autônomo*.

Nesse último caso, temos, para cada  $t$ , um campo vetorial Hamiltoniano  $X_H(x, y) = (H_y(x, y, t), -H_x(x, y, t))$ , ou seja, o campo vetorial depende do tempo. Além disso, o número  $e(t) = H(x(t), y(t), t)$  é chamado *energia* do sistema ao longo da solução no instante  $t$ . Em sistemas não-autônomos, a energia não é conservada, mas  $\frac{de}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial t}(x(t), y(t), t)$  (variação de energia), para os valores de  $t$  em que a solução do sistema Hamiltoniano está definida.

### 1.5.1 Teorema de Moser

O objetivo dessa subseção é apresentar o Teorema de Moser que garante, sob algumas condições, a existência de uma função Hamiltoniana.

Para isso vamos considerar um difeomorfismo  $C^\infty$  de um anel  $A = \mathbb{T} \times [a', a'']$ , com  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , em sua imagem no  $\mathbb{R}^2$ , sendo o anel obtido por identificar os pontos  $(x, y)$  e  $(x', y')$  para os quais  $x' - x$  é um número inteiro. O difeomorfismo levantado  $\mathcal{F} : (x, y) \rightarrow (x_1, y_1)$  é dado por

$$x_1 = f(x, y) \text{ e } y_1 = g(x, y),$$

onde  $f, g \in C^\infty(A)$  e

- (i)  $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 1$ ;
- (ii)  $f(x + 1, y) = f(x, y) + 1$ ,  $g(x + 1, y) = g(x, y)$ ;
- (iii)  $g(x, y) - y = 0$  para  $y = a'$  e  $y = a''$ ;
- (iv)  $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ .

Podemos observar que tais aplicações são simpléticas exatas, isto é, satisfazem  $\oint (y_1 dx_1 - y dx) = 0$  para qualquer curva  $y = u(x)$ ,  $u(x + 1) = u(x) + 1$ . O difeomorfismo  $\mathcal{F}$  é dito uma aplicação monótona Twist se  $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ . Nessas condições Moser [30] prova o seguinte teorema:

**Teorema 1.44** (Teorema de Moser). *Dado uma aplicação  $\mathcal{F}$  monótona Twist  $C^\infty$  com as propriedades acima, existe uma função Hamiltoniana  $H = H(t, x, y) \in C^\infty(\mathbb{R} \times)$  com*

- a)  $H(t + 1, x, y) = H(t, x, y) = H(t, x + 1, y)$ ;
- b)  $H_x(t, x, y) = 0$  para  $y = a'$  e  $y = a''$  (as fronteiras são invariantes sob o fluxo);
- c)  $H_{yy} > 0$  (condição de Legendre);

e tal que a aplicação  $\mathcal{F}_t$  de valores iniciais  $(x_0, y_0)$  das soluções de

$$\dot{x} = H_y(t, x, y), \quad \dot{y} = H_x(t, x, y)$$

para os valores  $(x(t), y(t))$  coincide com a aplicação  $\mathcal{F}$  para  $t = 1$ .

Este teorema pode ser generalizado para aplicações  $C^q$ . Não vamos demonstrá-lo, mas vale ressaltar que sua demonstração deriva do teorema 1.45. Para isso, representamos  $\mathcal{F}$  em termos de uma função geradora  $h = h(x, x_1) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ : resolvendo  $x_1 = f(x, y)$  para  $y$ , podemos escrever  $\mathcal{F}$  na forma

$$y = -h_x(x, x_1) \quad y_1 = h_{x_1}(x, x_1)$$

onde  $-h_x(x, \cdot)$  é a inversa de  $f(x, \cdot)$ , portanto também é monótona e sobrejetiva.

**Teorema 1.45.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma aplicação monótona Twist de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  dada por uma função geradora  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , satisfazendo*

1. para  $\delta > 0$  constante fixada,  $\delta \leq -h_{xx_1} \leq \delta^{-1}$ ;
2.  $h(x + 1, x_1 + 1) = h(x, x_1)$ .

Então existe uma função Hamiltoniana  $H = H(t, x, y) \in C^\infty([0, 1] \times \mathbb{R}^2)$  com as seguintes propriedades:

- a)  $H(t, x, y) = H(t, x + 1, y)$ ;
- b)  $0 < \delta \leq H_{yy} \leq \delta^{-1}$ ;

e a aplicação  $\mathcal{F}_t$  de valores iniciais  $(x_0, y_0)$  das soluções de

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = H_x$$

para os valores  $(x(t), y(t))$  coincide com a aplicação  $\mathcal{F}$  para  $t = 1$ .

## 1.5.2 Sistema Bott-integrável

A seguir vamos definir o que é um sistema Bott-integrável e o conceito de um sistema Bott-integrável dinamicamente coerente.

Consideremos uma variedade simplética  $(M, \omega)$ , com  $M$  4-dimensional, e uma função Hamiltoniana  $\mathcal{H} : M \rightarrow \mathbb{R}$ , com um campo vetorial  $X_{\mathcal{H}}$  associado e um fluxo Hamiltoniano  $\phi_{\mathcal{H}}$  associado. Fixemos uma componente conexa de um nível de energia compacto não-degenerado  $\mathbf{E}$  de  $\mathcal{H}$ , então  $\mathbf{E}$  é uma subvariedade tridimensional orientável conexa de  $M$ . Vamos considerar a restrição do campo vetorial e do fluxo à  $\mathbf{E}$  e ainda denotá-los por  $X_{\mathcal{H}}$  e  $\phi_{\mathcal{H}}$ . Como  $\mathbf{E}$  é compacto,  $\phi_{\mathcal{H}}$  é completo.

Uma integral primeira  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  do campo vetorial  $X_{\mathcal{H}}$  é dita ser não-degenerada no sentido de Bott em  $\mathbf{E}$  se os pontos críticos de  $f = F|_{\mathbf{E}}$  formam uma

subvariedade não-degenerada de  $\mathbf{E}$  de codimensão  $\geq 1$ . Não-degenerada significa que a matriz Hessiana de  $f$  é não-degenerada nos subespaços transversais dessas subvariedades.

Um sistema Bott-integrável é uma tripla  $(\mathbf{E}, \phi_{\mathcal{H}}, f)$ , onde  $\mathbf{E}$  é um nível de energia regular de um Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  em  $M$  e  $f$  é não-degenerada no sentido de Bott em  $\mathbf{E}$ . Em [17], Fomenko apresenta o seguinte lema de classificação das subvariedades críticas de integrais de Bott.

**Lema 1.46.** *As subvariedades críticas conexas de uma integral de Bott em  $\mathbf{E}$  são ou círculos, ou toro bidimensional ou garrafa de Klein.*

Se  $f$  é uma integral de Bott do sistema, então sua subvariedade admite um campo vetorial tangente não-degenerado que é a restrição do campo à subvariedade e sua característica de Euler é igual a zero. Consequentemente, é ou círculo, ou toro ou garrafa de Klein.

Um círculo crítico  $\mathbf{C}$  é uma órbita periódica do fluxo de  $\phi_{\mathcal{H}}$ . O índice de Morse de  $\mathbf{C}$  é o número (constante) de autovalores negativos da restrição de matriz Hessiana de  $f$  à um plano transversal a  $\mathbb{R}X_{\mathcal{H}}(x)$ , para  $x \in \mathbf{C}$ .

**Definição 1.47.** *Seja  $(\mathbf{E}, \phi_{\mathcal{H}}, f)$  um sistema Bott-integrável. Então  $(\mathbf{E}, \phi_{\mathcal{H}}, f)$  é dito ser dinamicamente coerente se os círculos críticos  $\mathbf{C}$  são ou órbitas periódicas elípticas ou órbitas periódicas hiperbólicas do fluxo  $\phi_{\mathcal{H}}$ .*

Observamos aqui que a noção de dinamicamente coerente comumente usada para sistemas dinâmicos não uniformemente hiperbólicos é diferente da usada aqui.

Podemos resumir o que vimos até agora no seguinte resultado:

**Teorema 1.48.** *A tripla  $(\mathbf{E}, \phi_{\mathcal{H}}, f)$  é um sistema Bott-integrável dinamicamente coerente que não admite toro crítico ou garrafa de Klein. Além disso,*

- *as órbitas elípticas são círculos com índice de Morse 0 ou 2;*
- *as órbitas hiperbólicas são círculos com índice de Morse 1.*

Na definição a seguir precisamos do conceito de valência de um vértice que é o número de "arestas" incidentes no vértice, com arestas que retornam ao mesmo vértice (loops) contados duas vezes.

**Definição 1.49.** *Um policírculo é um gráfico planar de quarta valência cujos vértices são pontos críticos de índice de Morse 1 de  $\mathcal{H}$  e cujas arestas são órbitas homoclínicas ou heteroclínicas do campo vetorial Hamiltoniano.*

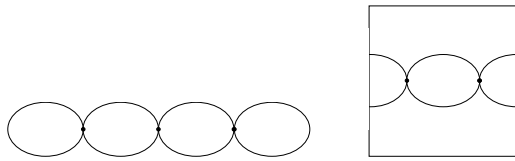


Figura 1.2: Exemplos de policírculos

Os pontos críticos de índice de Morse 0 ou 2 para  $\mathcal{H}$  são isolados, já os pontos críticos de índice de Morse 1 pertencem a policírculos.

Todos os círculos críticos contidos em um policírculo são homotópicos e têm índice de Morse 1.

**Definição 1.50.** *Quando um policírculo contém apenas um círculo crítico, dizemos que esse policírculo é um nível  $\infty$ .*

Seguiremos Labrousse e Marco [23], para definir um policírculo simples. Primeiramente, precisamos do conceito de policírculo continuável.

Vamos denotar por  $\mathcal{D}(\delta)$  o quociente da variedade  $P(\delta) = (\mathbb{R} \times ]-\delta, \delta[) \times (]-\delta, \delta[^2)$ , dotada com a estrutura simplética produto, pela ação  $\mathbb{Z} \times P(\delta) \rightarrow P(\delta)$  definido por

$$(m, (x, I, p, q)) \mapsto (x + m, I, p, q),$$

então  $\mathcal{D}(\delta) = (\mathbb{T} \times ]-\delta, \delta[) \times (]-\delta, \delta[^2)$ , dotado com estrutura usual. Denotamos por  $\widehat{\mathcal{D}}(\delta)$ , versão de  $\mathcal{D}(\delta)$ , onde o quociente de  $P(\delta)$  pela ação  $\mathbb{Z} \times P(\delta) \rightarrow P(\delta)$  é definido por

$$(m, (x, I, p, q)) \mapsto (x + m, I, (-1)^m p, (-1)^m q).$$

**Proposição 1.51.** *Seja  $\mathcal{P}$  um policírculo em  $\mathbf{E}$  e seja  $\mathbf{C}$  uma componente crítica de  $\mathcal{P}$ . Então existe uma vizinhança  $U$  de  $\mathbf{C}$  em  $M$  e um difeomorfismo simplético  $\Phi$  de  $U$  em  $\mathcal{D}(\delta)$  (caso orientável) e  $\widehat{\mathcal{D}}(\delta)$  (caso não-orientável) tal que, denotando por  $(F, I, q, p)$  as componentes de  $\Phi$ , as seguintes propriedades valem:*

- $\mathcal{H}$  e  $F_i$  apenas dependem de  $I$  e  $J := qp$ ,
- $\mathbf{C}$  é definida pela equação  $I = 0$  e  $(p, q) = (0, 0)$ ,

junto com as relações independentes

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} \neq 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} \neq 0, \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} \\ \frac{\partial F}{\partial I} & \frac{\partial F}{\partial J} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Além disso, se  $T$  é o período da órbita periódica  $\mathbf{C}$ , os autovalores de  $D\phi_{\mathcal{H}}^T$  são  $1$ ,  $e^{2\pi\alpha}$  e  $e^{-2\pi\alpha}$  no caso onde  $\mathcal{P}$  é orientável e  $1$ ,  $-e^{2\pi\alpha}$  e  $-e^{-2\pi\alpha}$  no caso onde  $\mathcal{P}$  é não-orientável, em que  $\alpha = \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial I}\right)^{-1}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial J}\Big|_{I=J=0}$ .

Uma demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [7]. Podemos observar que nos casos orientável e não-orientável as órbitas de  $\mathbf{C}$  são hiperbólicas se, e somente se,  $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial J}\Big|_{I=J=0} = 0$ . Um nível  $\infty$  pode ser orientável ou não orientável de acordo com a orientabilidade do diagrama de separatriz da órbita periódica nele contida.

Da notação da proposição acima, dizemos que  $U$  é uma vizinhança normalizadora de  $\mathbf{C}$ . Relativo às coordenadas,  $\mathcal{P} \cap U$  admite a equação (local)  $F \in \mathbb{T}$ ,  $I = 0$ ,  $J = 0$ . Como consequência, se  $\mathcal{P}$  é orientável (como uma subvariedade estratificada de  $\mathbf{E}$ ), então cada órbita crítica contida em  $\mathcal{P}$  é orientável segundo a proposição acima.

**Corolário 1.52.** *Seja  $\mathcal{P}$  um nível  $\infty$  (i.e, um policírculo que contém apenas um círculo crítico) e seja  $U$  uma vizinhança normalizadora para a órbita crítica  $\mathbf{C}$ . Então, se  $\mathcal{P}$  é orientável, o complemento  $\mathcal{P} \setminus U$  admite duas componentes conexas, enquanto, se  $\mathcal{P}$  é não-orientável, admite apenas uma componente conexa.*

Consideremos um policírculo orientável  $\mathcal{P}$  e seja  $\{\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_q\}$  conjunto de círculos críticos de  $\mathcal{P}$ . Denotamos por  $U_k$  uma vizinhança normalizadora para  $\mathbf{C}_k$  e por  $(F_k, I_k, q_k, p_k)$  as coordenadas correspondentes. O corolário abaixo é uma consequência imediata da proposição anterior.

**Corolário 1.53.** *Podemos escolher  $U_k$  de tal modo que para cada  $e \in \mathcal{H}(U_k)$ , as coordenadas  $(F_k, I_k, q_k, p_k)$  formam uma carta local para  $U_k \cap \mathcal{H}^{-1}(\{e\})$ .*

**Definição 1.54.** *Dizemos que um policírculo  $\mathcal{P}$  é continuável se existe  $\delta_0 > 0$  tal que para todo  $e \in ]e_0 - \delta_0, e_0 + \delta_0[ \subset \bigcap_{1 \leq k \leq q} \mathcal{H}(U_k)$ , as órbitas periódicas  $\mathbf{C}_{k,e}$ ,  $1 \leq k \leq q$  pertencem a um mesmo policírculo  $\mathcal{P}_e$ , que é difeomorfo a  $\mathcal{P}$ .*

Podemos concluir que a família de um parâmetro  $\mathcal{P}_e$  é uma deformação (diferenciável) de  $\mathcal{P}$ .

**Proposição 1.55.** *Um nível  $\infty$  orientável é continuável.*

**Definição 1.56.** *Um policírculo simples é um policírculo continuável que satisfaz às seguintes propriedades:*

1. *existe um subconjunto aberto  $\mathcal{O}$  em  $\mathbb{R}^2$ , uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{P}$ , saturada para  $F_i$  e um difeomorfismo*

$$\mathcal{B} : \mathbb{T} \times \mathcal{O} \times ]e_0 - \delta_0, e_0 + \delta_0[ \rightarrow \mathcal{U}$$



tal que

- a) a subvariedade  $V = \mathcal{B}^{-1}(\{0\} \times \mathcal{O} \times ]e_0 - \delta_0, e_0 + \delta_0[)$  é transversa a primeira integral  $F_i$ ,
- b) para todo  $e \in ]e_0 - \delta_0, e_0 + \delta_0[$ ,  $\mathcal{B}(\mathbb{T} \times \mathcal{O} \times \{e\}) \subset \mathcal{H}^{-1}(e)$ ,
- c) par todo  $(F, F', x, e) \in \mathbb{T}^2 \times \mathcal{O} \times ]e_0 - \delta_0, e_0 + \delta_0[$ ,

$$F_i(\mathcal{B}(F, x, e)) = F_i(\mathcal{B}(F', x, e))$$

- 2. existem duas funções  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{J}$  em  $\mathcal{U}$ , tal que podemos encontrar coordenadas  $(F_k, I_k, q_k, p_k)$  em uma vizinhança de  $U_k$  de cada  $\mathbf{C}_k$  tal que  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{J}$  coincidem com  $I_k$  e  $J_k$ .

**Proposição 1.57.** *Um nível  $\infty$  orientável é um policírculo simples.*

Uma demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [23].

O principal objetivo do artigo de Labrousse e Marco [23] é calcular a entropia polinomial de Sistemas Hamiltonianos.

**Teorema 1.58** (Labrousse and Marco (2014)). *Seja  $(\mathbf{E}, \phi_{\mathcal{H}}, f)$  um sistema Bott-integrável dinamicamente coerente que satisfaz as hipóteses*

(H1) *Considerando  $\mathbf{E} = \mathcal{H}^{-1}(\{e_0\})$ , para  $|e - e_0|$  suficientemente pequeno,  $F_i|_{\mathcal{H}^{-1}(\{e\})}$  também admite um toro crítico  $\mathcal{T}_e \subset \mathbf{E}$  que depende suavemente da energia  $e$ ;*

(H2) *Todo policírculo para  $f$  é um policírculo simples.*

Então

$$h_{pol}(\phi_{\mathcal{H}}) \in \{0, 1, 2\}.$$

Além disso,  $h_{pol}(\phi_{\mathcal{H}}) = 2$  se, e somente se,  $\phi_{\mathcal{H}}$  possui uma órbita hiperbólica.

A entropia polinomial discrimina sistemas com ou sem pontos hiperbólicos e isso também pode ser visto no Teorema 2 de Marco [26] que apresentamos abaixo.

**Teorema 1.59** (Marco (2013)). *Se  $\mathcal{H}$  não possui pontos críticos de índice de Morse 1, então  $h_{pol}(\phi_{\mathcal{H}}) \in \{0, 1\}$ . Se  $\mathcal{H}$  possui pelo menos um ponto crítico de índice de Morse 1, então  $h_{pol}(\phi_{\mathcal{H}}) = 2$ .*

Esse teorema produz condições topológicas na superfície e como consequência temos o seguinte resultado:

**Corolário 1.60.** *As únicas superfícies que admitem um fluxo Hamiltoniano cuja entropia polinomial é menor ou igual a 1 são os discos, os cilindros e as esferas. O único sistema cuja entropia polinomial se anula são as rotações rígidas.*

# Capítulo 2

## Bilhares

Nesse capítulo, apresentaremos a definição da aplicação bilhar em uma região apropriada  $Q$  contida na superfície  $S$  que representa a superfície  $\mathbb{H}^2$ , plano hiperbólico, ou a superfície  $\mathbb{S}^2$ , esfera. Veremos, conforme já foi estudado por S. Pinto-de-Carvalho e L. Coutinho dos Santos [16], que a aplicação bilhar em  $Q$  possui propriedades análogas às propriedades da aplicação bilhar no plano euclidiano.

Acrescentamos aqui uma nota de organização. Na seção 2.1, construiremos a aplicação do bilhar em uma oval em  $S$ , ou seja, a fronteira da mesa do bilhar é uma curva  $C^q$  com  $q \geq 2$ , simples, fechada, orientada positivamente e com curvatura geodésica positiva ( $\kappa > 0$ ). Também apresentaremos alguns dos principais resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes e detalharemos dois exemplos: o bilhar circular e o bilhar elíptico. Na seção 2.2, abordaremos os bilhares com fronteira  $C^q$  por partes,  $q \geq 2$ , e alguns resultados que serão necessários posteriormente.

### 2.1 Bilhares em ovais

O problema do bilhar é descrito pelo movimento de uma partícula sobre a superfície  $S$  seguindo uma trajetória geodésica com velocidade constante igual a um, no interior de uma região limitada, com bordo suave e sofrendo colisões elásticas com esse bordo.

Descreveremos a seguir como podemos traduzir esse problema para a linguagem matemática. Seja  $\Gamma = \partial Q \subset S$  uma curva de classe  $C^q$ , com  $q \geq 2$ , simples, fechada, orientada positivamente e com curvatura geodésica positiva,  $\kappa > 0$ , ou seja,  $\Gamma$  é uma oval em  $S$ . Denotamos por  $|\Gamma|$  o comprimento total da curva  $\Gamma$ . Suponhamos  $\Gamma$  parametrizada pelo comprimento de arco,  $\|\Gamma'(s)\| = 1$ , onde  $'$  denota a derivada em  $s$  e  $\|\cdot\|$  é a norma hiperbólica ou esférica. Denotaremos o ponto  $\Gamma(s)$  por  $s$ , sem risco de

confusão.

Sejam  $s_0$  um ponto de  $\Gamma$  e  $\vec{v}_0$  um vetor unitário em  $T_{s_0}S$  apontando para dentro da região limitada por  $\Gamma$ . Denotamos por  $\gamma$  a geodésica que parte de  $s_0$  na direção de  $\vec{v}_0$ . Sendo  $\Gamma$  uma curva fechada, a geodésica  $\gamma$  irá interceptar a curva  $\Gamma$  em um ponto que denotaremos por  $s_1$ . Sejam  $0 < \psi_0 < \pi$  o ângulo do vetor tangente  $\Gamma'(s_0)$  ao vetor  $\vec{v}_0$  e  $0 < \psi_1 < \pi$  o ângulo entre o vetor tangente  $\Gamma'(s_1)$  e o vetor tangente à geodésica  $\gamma$  em  $s_1$ . A trajetória da partícula após a reflexão será dada pela geodésica que parte de  $s_1$  na direção dada pelo vetor  $\vec{v}_1$ , que é a reflexão de  $\gamma'(s_1)$  pelo vetor tangente  $\Gamma'(s_1)$ .

Seja  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/|\Gamma|\mathbb{Z}$  e  $M = \mathbb{T} \times (0, \pi)$ . A aplicação do bilhar é dada por

$$\begin{aligned} F: M &\rightarrow M \\ (s_0, \psi_0) &\mapsto (s_1(s_0, \psi_0), \psi_1(s_0, \psi_0)), \end{aligned} \quad (2.1)$$

para  $s_0 \in \mathbb{T}$  e  $\psi_0 \in (0, \pi)$ .

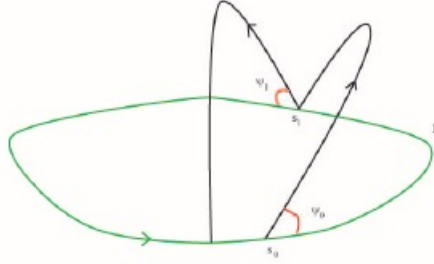


Figura 2.1: Aplicação do bilhar

O conjunto  $M$  é chamado *espaço de fase* do bilhar e o conjunto  $\{(s_0, \psi_0), (s_1, \psi_1), (s_2, \psi_2), \dots, (s_j, \psi_j), \dots\}$  é dito *órbita de bilhar* se  $(s_j, \psi_j) = F(s_{j-1}, \psi_{j-1})$  ou de modo equivalente  $(s_j, \psi_j) = F^j(s_0, \psi_0)$ . Denominamos *trajetória do bilhar* a poligonal na mesa cujos vértices são os  $s_j$  que definem a órbita.

Denotando por  $g$  a distância geodésica em  $S$  e sendo  $s_0$  e  $s_1$  dois pontos em  $\Gamma$ , temos

$$g(s_0, s_1) = \operatorname{arccosh}(-\langle \Gamma'(s_0), \Gamma'(s_1) \rangle), \text{ em } \mathbb{H}^2$$

$$g(s_0, s_1) = \operatorname{arccos}(\langle \Gamma'(s_0), \Gamma'(s_1) \rangle), \text{ em } \mathbb{S}^2$$

e podemos escrever  $\Gamma'(s_1) = \Gamma'(s_0) \cosh g(s_0, s_1) + \vec{U} \sinh g(s_0, s_1)$ , com  $\vec{U}$  vetor tangente unitário em  $T_{s_0}\mathbb{H}^2$  à geodésica orientada de  $s_0$  a  $s_1$ , escrevemos  $\Gamma(s_1) = \Gamma(s_0) \cos g(s_0, s_1) + \vec{U} \sin g(s_0, s_1)$ , com  $\vec{U}$  vetor tangente unitário em  $T_{s_0}\mathbb{S}^2$  à geodésica orientada de  $s_0$  a  $s_1$ .

Podemos aplicar o Princípio de Maupertuis ao nosso caso e uma prova desse fato pode ser encontrada em [15].

**Proposição 2.1** (Princípio de Maupertuis). *Sejam  $s_0, s_1$  e  $s_2$  pontos distintos em  $\Gamma$ . Denotemos por  $\psi_1$  o ângulo entre a geodésica de  $s_0$  a  $s_1$  e o vetor  $\Gamma'(s_1)$  em  $T_{s_1}S$  e  $\bar{\psi}_1$  o ângulo entre a geodésica de  $s_1$  a  $s_2$  e o vetor  $\Gamma'(s_1)$ . Seja  $W(s_1) = g(s_0, s_1) + g(s_1, s_2)$ . As afirmativas abaixo são equivalentes:*

1.  $s_1$  é ponto crítico de  $W$ ;
2.  $s_0, s_1$  e  $s_2$  correspondem a pontos em uma trajetória do bilhar, nessa ordem.

Concluimos do Princípio de Maupertuis que  $F(s_0, \psi_0) = (s_1, \psi_1)$  se, e somente se,

$$\frac{\partial g}{\partial s_0}(s_0, s_1) = -\cos \psi_0 \quad \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_0, s_1) = \cos \psi_1, \quad (2.2)$$

o que nos mostra que a distância geodésica  $g$  é uma função geradora para a aplicação do bilhar  $F$ .

### 2.1.1 Resultados gerais sobre bilhares

Consideremos  $\Gamma$  uma oval em  $S$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . O primeiro resultado que gostaríamos de destacar para a aplicação do bilhar é a propriedade twist, a qual definimos a seguir.

**Definição 2.2.** *Sejam  $F : S^1 \times I \rightarrow S^1 \times I$  função contínua, com  $I$  um intervalo aberto ou  $I = \mathbb{R}$ , e  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R} \times I$ . A função  $\mathcal{F}$  é dita levantamento de  $F$  se para todo  $(x, y) \in \mathbb{R} \times I$  vale a igualdade  $\sigma \circ \mathcal{F}(x, y) = F \circ \sigma(x, y)$  em que  $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$  é dada por  $\sigma(x, y) = (x \bmod 1, y)$ .*

**Definição 2.3.** *Um difeomorfismo (sobrejetivo)  $F$  é dito uma aplicação twist preservando área se:*

1.  $F$  preserva área;
2.  $F$  preserva a orientação;
3.  $F$  preserva os fins da fronteira;
4. se  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  é um levantamento  $F$  a  $\mathbb{R} \times I$  de  $S^1 \times I$ , então  $\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{F}_1(x, y) > 0$  (propriedade twist).

**Proposição 2.4.** *A aplicação do bilhar  $F$  em  $\Gamma$  é um difeomorfismo global de classe  $C^{q-1}$  no espaço de fase e possui a propriedade twist.*

Sendo a aplicação do bilhar  $F$  diferenciável, podemos calcular a derivada dessa aplicação.

**Proposição 2.5** (Coutinho dos Santos [15]). *Sejam  $F(s_1, \psi_1) = (s_2, \psi_2)$ ,  $g = g(s_1, s_2)$  a distância geodésica e  $\kappa_i$  a curvatura geodésica de  $\Gamma$  em  $s_i$ ,  $i = 1, 2$ . A derivada da aplicação do bilhar  $DF_{(s_1, \psi_1)}$  é dada em  $\mathbb{H}^2$  por*

$$\frac{1}{\sin \psi_2} \begin{pmatrix} \kappa_1 \sinh g - \cosh g \sin \psi_1 & \sinh g \\ \kappa_2(\kappa_1 \sinh g - \cosh g \sin \psi_1) + \sinh g \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \kappa_1 \cosh g \sin \psi_2 & \kappa_2 \sinh g - \cosh g \sin \psi_2 \end{pmatrix}.$$

e em  $\mathbb{S}^2$  por

$$\frac{1}{\sin \psi_2} \begin{pmatrix} \kappa_1 \sin g - \cos g \sin \psi_1 & \sin g \\ \kappa_2(\kappa_1 \sin g - \cos g \sin \psi_1) - \sin g \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \kappa_1 \cos g \sin \psi_2 & \kappa_2 \sin g - \cos g \sin \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Além disso, a aplicação do bilhar  $F$  preserva a medida  $\sin \psi d\psi ds$ .

Podemos fazer uma mudança de coordenada de  $\psi$  para  $y = \cos \psi$ . Com isso a aplicação do bilhar passa a ser dada por

$$\begin{aligned} F: M &\rightarrow M \\ (s_1, y_1) &\mapsto (s_2(s_1, y_1), y_2(s_1, y_1)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nessa nova coordenada, a função geradora  $g(s_1, s_2)$  e as equações 2.2, transformam-se em

$$\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = -y_1 \quad \frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2) = y_2. \quad (2.4)$$

Podemos observar que a aplicação do bilhar nas coordenadas  $(s, y)$  possui a propriedade twist e preserva a medida  $ds dy$ , ou seja, os bilhares em ovais são exemplo de aplicações twist que preservam área.

Como consequência, a matriz derivada do bilhar, agora obtida por

$$DF_{(s_1, y_1)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_2}{\partial s_1} & \frac{\partial s_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial s_1} & \frac{\partial y_2}{\partial y_1} \end{pmatrix}$$

passa a ser dada em  $\mathbb{H}^2$  por

$$\begin{pmatrix} \frac{\kappa_1 \sinh g - \cosh g \sin \psi_1}{\sin \psi_2} & -\frac{\sinh g}{\sin \psi_1 \sin \psi_2} \\ \kappa_2(-\kappa_1 \sinh g + \cosh g \sin \psi_1) - \sinh g \sin \psi_1 \sin \psi_2 + \kappa_1 \cosh g \sin \psi_2 & \frac{\kappa_2 \sinh g - \cosh g \sin \psi_2}{\sin \psi_1} \end{pmatrix}.$$

e em  $\mathbb{S}^2$

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{\kappa_1 \sin g - \cos g \sin \psi_1}{\sin \psi_2} & -\frac{\sin g}{\sin \psi_1 \sin \psi_2} \\ \kappa_2(-\kappa_1 \sin g + \cos g \sin \psi_1) + \sin g \sin \psi_1 \sin \psi_2 + \kappa_1 \cos g \sin \psi_2 & \frac{\kappa_2 \sin g - \cos g \sin \psi_2}{\sin \psi_1} \end{array} \right).$$

Apresentamos a seguir alguns resultados que surgem como consequência da propriedade twist e demonstrações gerais desses fatos podem ser obtidas em [21]. Para isso vamos apresentar algumas definições.

**Definição 2.6.** *O conjunto  $\{(s_0, \psi_0), (s_1, \psi_1), \dots, (s_n, \psi_n)\}$ , para  $n > 2$ , é dito um órbita periódica de período  $n$  se é um órbita do bilhar com  $F^n(s_0, \psi_0) = (s_n, \psi_n) = (s_0, \psi_0)$  e  $F^i(s_0, \psi_0) \neq (s_0, \psi_0)$  para  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Dado  $m$ ,  $0 < \frac{m}{n} < 1$  e  $m.d.c(m, n) = 1$ , dizemos que uma órbita é do tipo  $(m, n)$  se essa órbita tem período  $n$  e  $s_n = s_0 + 2m\pi$  quando  $s$  é tomado no recobrimento universal  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{T}$ .*

**Definição 2.7.** *Uma órbita  $(s_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  é dita uma órbita de Birkhoff se a sequência  $s_i$  preserva a ordem cíclica em  $\mathbb{T}$ . Dizemos que uma órbita é de Birkhoff do tipo  $(m, n)$  se é de Birkhoff e possui tipo  $(m, n)$ .*

A partir dessas definições podemos enunciar o teorema de Birkhoff que vale para bilhares em ovais em  $S$  uma vez que sua demonstração utiliza a propriedade twist.

**Teorema 2.8** (Teorema de Birkhoff). *Sejam  $F$  a aplicação do bilhar em uma oval  $C^q$ , com  $q \geq 2$ , e  $m < n$  inteiros positivos, com  $m$  e  $n$  primos entre si. Então existem pelo menos duas órbitas de Birkhoff do tipo  $(m, n)$ , isto é, duas órbitas de período  $n$  geometricamente distintas.*

**Definição 2.9.** *Sejam  $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  um homeomorfismo em  $\mathbb{T}$  que preserva orientação e  $\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento qualquer de  $h$ . Definimos o número de rotação  $\beta(h)$  de  $h$  por*

$$\beta(h) = \beta(\tilde{h}) = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\tilde{h}^n(x) - x}{n}.$$

Além disso, chamamos de intervalo de rotação de  $h$  ao conjunto dos limites  $\beta(h)$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $x$  pertence a um intervalo fechado.

**Definição 2.10.** *Seja  $f : \mathbb{T} \times I \rightarrow \mathbb{T} \times I$  um homeomorfismo, com  $I = (a, b)$  ou  $I = \mathbb{R}$ . Dizemos que uma curva  $\gamma$  invariante por  $f$  possui número de rotação  $\alpha$  se  $f$  restrita a  $\gamma$  possui número de rotação  $\alpha$ . Dizemos que a curva invariante é ressonante se  $\alpha$  é racional.*

Seja  $\beta$  o número de rotação de uma órbita de bilhar, então o intervalo de rotação é  $(0, 1)$ . Consideramos  $\mathcal{O}_\beta \subset M$  um conjunto fechado, invariante, minimal e ordenado e que se projeta injetivamente em  $\mathbb{T}$  com número de rotação  $\beta$ . Esse conjunto é não vazio para todo  $\beta \in (0, 1)$ .

**Definição 2.11.** *Uma curva rotacional invariante é uma curva contínua fechada e homotopicamente não trivial no espaço de fase  $M$ .*

**Definição 2.12.** *Um conjunto de Aubry-Mather em  $M$  é um conjunto invariante minimal (não possui subconjuntos próprios fechados) que se projeta injetivamente num conjunto de Cantor de  $\mathbb{T}$  que não é denso em aberto algum.*

**Teorema 2.13** (Classificação de Poincaré). *1. Se  $\beta$  é racional, então  $\mathcal{O}_\beta$  é uma curva rotacional invariante composta por órbitas periódicas ou que contém pontos não periódicos. Nesse último caso as órbitas dos pontos não periódicos formam conexões heteroclínicas às órbitas periódicas.*

*2. Se  $\beta$  é irracional, então  $\mathcal{O}_\beta$  é uma curva rotacional invariante sem pontos periódicos ou um conjunto de Aubry-Mather.*

Outro resultado importante da propriedade twist é apresentado a seguir.

**Teorema 2.14.** *Órbitas com fecho disjuntos possuem números de rotação distintos.*

*Observação 2.15.* Com isso, a aplicação do bilhar em uma oval tem no máximo uma curva rotacional invariante com número de rotação  $\beta$ . Além disso, se existir tal curva invariante,  $F$  não tem conjuntos de Aubry-Mather com número de rotação  $\beta$  fora dessa curva e portanto tem no máximo um conjunto de Aubry-Mather com número de rotação  $\beta$ .

Por fim, o teorema da curva invariante de Birkhoff é válido para bilhares em ovais em  $S$ .

**Teorema 2.16** (Birkhoff). *O bordo de uma faixa horizontal aberta composta por pontos não errantes é composto por duas curvas invariantes que são gráficos de funções Lipschitz.*

## 2.1.2 Bilhares Especiais

Abordaremos nessa seção dois bilhares que serão essenciais no capítulo 3, que são o bilhar circular e o bilhar elíptico.



### 2.1.2.1 Bilhar circular

Seja  $\Gamma$  um círculo em  $S$  de raio  $\rho$ . O espaço de fase  $M$  com coordenadas  $(s, \psi)$  é um cilindro cuja base é um círculo de comprimento  $2\pi \sinh \rho$ , se em  $\mathbb{H}^2$ , ou  $2\pi \sin \rho$ , se em  $\mathbb{S}^2$ , e cuja altura é  $\pi$ . A aplicação do bilhar  $F : M \rightarrow M$  age em  $\mathbb{H}^2$  por

$$F(s, \psi) = ((s + \alpha(\psi) \sinh \rho) \bmod (2\pi \sinh \rho), \psi),$$

com  $\cos \alpha(\psi) = \frac{\cosh^2 \rho - \tan^2 \psi}{\sinh^2 \rho + \sec^2 \psi}$  e em  $\mathbb{S}^2$  por

$$F(s, \psi) = ((s + \alpha(\psi) \sin \rho) \bmod (2\pi \sin \rho), \psi),$$

com  $\cos \alpha(\psi) = \frac{\cos^2 \rho - \tan^2 \psi}{-\sin^2 \rho + \sec^2 \psi}$ . Temos duas conclusões:

- O ângulo de reflexão  $\psi$  é preservado pela aplicação  $F$ , com isso cada curva  $\psi = \text{const.}$  é invariante por  $F$  e é um círculo paralelo à base do cilindro  $M$ .
- A aplicação  $F$  restrita a qualquer curva  $\psi = \text{const.}$  rotaciona essa curva por um ângulo constante  $\alpha = \alpha(\psi)$ . Assim,  $F$  age como uma rotação no círculo em cada curva invariante.

Todos os segmentos de uma trajetória do bilhar que começa com um ângulo  $\psi$  são tangentes a um círculo concêntrico à mesa do bilhar (veja a Figura 2.2).

Se o ângulo de rotação  $\alpha$  é um múltiplo racional de  $\pi$ , isto é, se  $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{m}{n}$ , com  $m, n \in \mathbb{Z}$ , então a aplicação  $F$  no círculo  $\psi = \text{const.}$  é periódica com período  $n$ . Além disso, cada ponto nesse círculo é periódico com o mesmo período.

Se o ângulo de rotação  $\alpha$  é irracional, isto é, se  $\alpha/\pi$  é um número irracional, então a rotação no círculo é ergódica e toda trajetória é densa e uniformemente distribuída no círculo. Nesse caso os segmentos de qualquer trajetória do bilhar preenche densamente um anel na mesa de bilhar.

Os segmentos de trajetórias focam no círculo interior, ou seja, os segmentos de trajetórias parecem densos próximo o círculo interior. Esse círculo interior é chamado de *cáustica*. Em geral, a cáustica para um bilhar é uma curva tal que se um segmento de uma trajetória do bilhar é tangente à curva, então todos os outros segmentos dessa trajetória do bilhar são tangente às caustica.

Sendo o espaço de fase  $M$  folheado por curvas invariantes  $\psi = \text{const.}$ , a aplicação  $F$  não é ergódica. Qualquer conjunto mensurável que é a união de curvas invariantes é invariante por  $F$ . A função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(s, \psi) = \psi$$

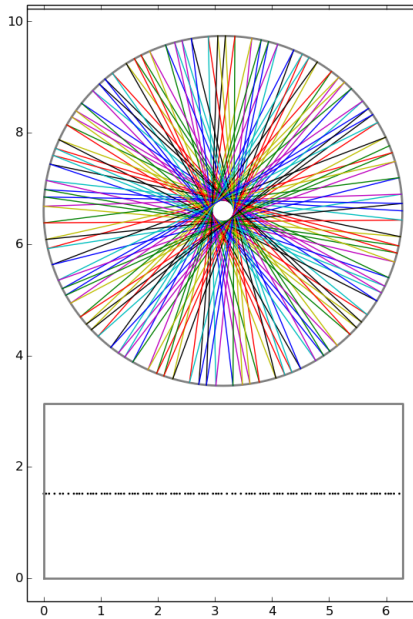


Figura 2.2: Uma trajetória do bilhar circular em  $\mathbb{H}^2$  e sua órbita no espaço de fase.

é uma função suave, não constante e invariante por  $F$ , isto é,  $f(F(s, \psi)) = f(s, \psi)$ , para todo  $(s, \psi) \in M$ , é outro modo de verificar a não-ergodicidade da aplicação  $F$ .

**Definição 2.17.** *Se  $F : M \rightarrow M$  admite uma função  $f$  suave e não constante invariante por  $F$ , então  $f$  é chamada a integral primeira e  $F$  é dita integrável.*

*Além disso, se o espaço de fase pode ser folheado por curvas invariantes que não são homotópicas a um ponto então dizemos que  $F$  é completamente integrável.*

Podemos observar que o bilhar circular é completamente integrável e podemos observar seu espaço de fase na Figura 2.3. A derivada da aplicação  $F$  se reduz, em  $\mathbb{H}^2$ , a

$$DF(s, \psi) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha'(\psi) \sinh \rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e se reduz, em  $\mathbb{S}^2$ , a

$$DF(s, \psi) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha'(\psi) \sin \rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cujos detalhes podem ser visto em [15]. Com um pouco mais de contas obtemos, em  $\mathbb{H}^2$ ,

$$DF^n(s, \psi) = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha'(\psi) \sinh \rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, em  $\mathbb{S}^2$ ,

$$DF^n(s, \psi) = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha'(\psi) \sin \rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o que implica que ambos os expoentes de Lyapunov são iguais a zero em todo ponto  $(s, \psi) \in M$ . Como consequência a entropia topológica e métrica da aplicação  $F$  também são nulas.

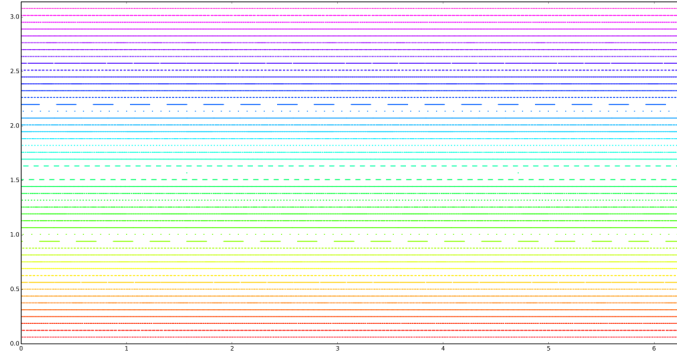


Figura 2.3: Espaço de fase do bilhar circular em  $\mathbb{H}^2$ .

Já observamos que o círculo é completamente integrável e que seu espaço de fase é folheado por curvas (retas) rotacionais invariantes. M. Bialy em [3] prova que essa propriedade é única para o bilhar circular ao provar os dois resultados abaixo.

**Teorema 2.18** (Bialy 2013). *Seja  $\Gamma$  um curva convexa, simples, fechada e com curvatura geodésica positiva pertencente ao plano hiperbólico ou a esfera. Se toda configuração de bilhar não tem pontos conjugados, então  $\Gamma$  é um círculo geodésico.*

**Corolário 2.19.** *Suponhamos que a aplicação do bilhar  $F$  é completamente integrável, isto é, através de todo ponto do cilindro do espaço de fase passa um curva contínua não homotópica a um ponto invariante por  $F$ , então  $\Gamma$  é um círculo geodésico.*

### 2.1.2.2 Bilhar elíptico

Consideremos agora uma elipse dada, em  $\mathbb{H}^2$ , por

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} = 0,$$

com  $c > b \geq a > 0$ , e, em  $\mathbb{S}^2$ , por

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0,$$

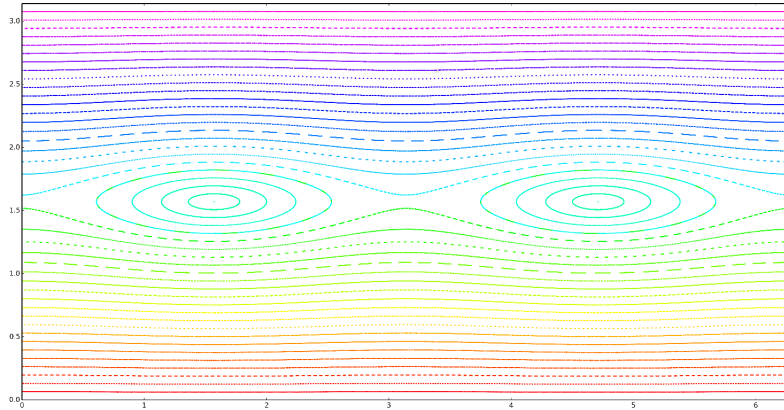


Figura 2.4: Espaço de fase do bilhar elíptico em  $\mathbb{H}^2$ .

com  $c > b > 0 > a$ . Denotamos por  $\Gamma$  a elipse, com isso o espaço de fase  $M$  é então um cilindro com base  $|\Gamma|$  (comprimento da elipse) e altura  $\pi$ .

Como visto nas seções 1.1.1.3 e 1.1.2.3, os focos  $F_+$  e  $F_-$  podem ser considerados sobre um eixo, uma vez que podemos usar um sistema ortogonal para descrever a elipse. Veselov [38] provou algumas propriedades importantes do bilhar elíptico no plano hiperbólico e na esfera. A primeira delas é que se uma trajetória do bilhar passa através de um foco, então irá refletir e passar através do outro foco e assim sucessivamente. Essas trajetórias que passam através dos focos são especiais pois geram uma curva fechada no espaço de fase na forma de  $\infty$ , como mostra a Figura 2.4.

Agora, se uma trajetória cruza o segmento  $F_+F_-$  que une os focos, então reflete em  $\Gamma$  e cruza o segmento novamente. Essas trajetórias preenchem dois domínios no espaço de fase, limitados pela curva em forma de  $\infty$ , como podemos ver na Figura 2.4.

Por fim, as trajetórias restantes nunca cruzam o segmento  $F_+F_-$ , cruzando a reta que contém esse segmento alternando pela direita ou pela esquerda do segmento. Essas trajetórias preenchem dois domínios no espaço de fase, i.e. região dentro da curva em "forma de  $\infty$ ". Na Figura 2.5 podemos ver um exemplo de uma trajetória para cada um dos casos acima.

Toda trajetória do bilhar elíptico que não passa pelos focos tem uma cáustica. As trajetórias que cruzam o segmento  $F_+F_-$  têm cáusticas sendo uma hipérbole confocal, como vimos nas seções 1.1.1.3 e 1.1.2.3. Chamaremos tais cáusticas de *cáusticas hiperbólicas*. Para as outras trajetórias, as cáusticas são elipses confocais à elipse do bilhar e chamaremos de *cáusticas elípticas*.

As trajetórias tangentes a uma cáustica elíptica pertencem a uma curva no espaço de fase que é invariante por  $F$ , como podemos observar na terceira imagem da Figura 2.5. Já as trajetórias tangentes a uma cáustica hiperbólica pertencem a duas curvas

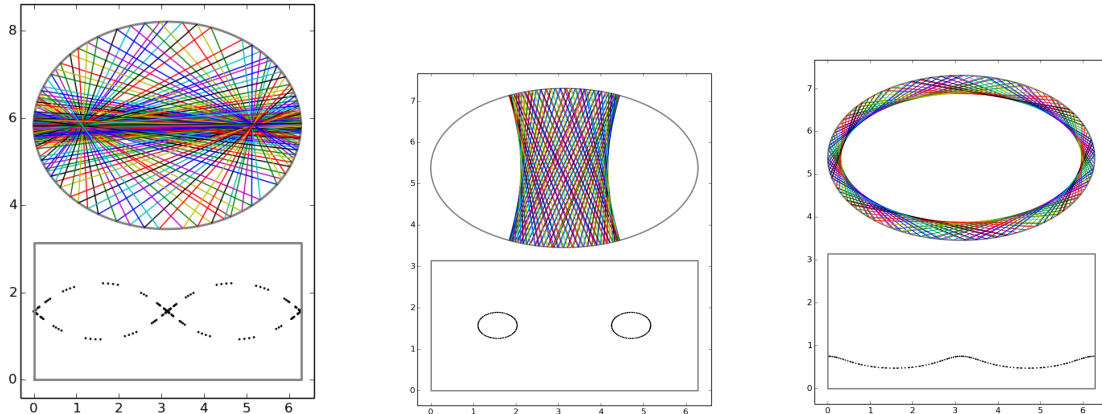


Figura 2.5: Exemplos de trajetórias do bilhar elíptico em  $\mathbb{H}^2$ .

fechadas no espaço de fase, sendo cada uma dentro de cada domínio gerado pela curva  $\infty$ . Cada uma dessas curvas fechadas é invariante por  $F^2$ . Com isso, o espaço de fase é folheado por curvas invariantes e assim o bilhar elíptico é integrável. Assim como o bilhar circular, o bilhar elíptico possui integral primeira como mostrado em [38]. Em particular, a entropia topológica da aplicação  $F$  é zero, assim como os expoentes de Lyapunov. Observamos que quando a entropia topológica é não nula, há a existência de horse-shoe [21].

A curva especial na forma de  $\infty$ , que separa as duas regiões com diferentes tipos de cáustica (elíptica e hiperbólica), é chamada *separatriz*. Essa separatriz também é invariante por  $F$ , mas não é uma rotação rígida do círculo.

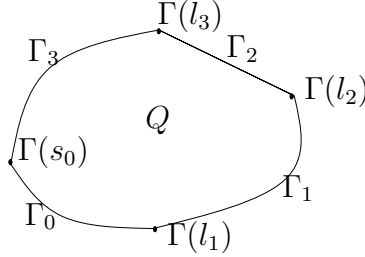
## 2.2 Bilhares em curvas $C^q$ por partes

Consideramos agora uma região  $Q \subset \mathbb{H}^2$  convexa cuja fronteira  $\Gamma$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, simples, fechada e  $C^q$  por partes, com  $q \geq 2$ , ou seja,

- $\Gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{H}^2$ , onde  $L$  é o comprimento de  $\Gamma$ ;
- $\Gamma(0) = \Gamma(L)$ ;
- $s \neq \bar{s}$ ,  $s$  e  $\bar{s} \in [0, L)$ , temos  $\Gamma(s) \neq \Gamma(\bar{s})$ ;
- existe uma partição  $0 = l_0 < l_1 < l_2 < \dots < l_k < l_{k+1} = L$  de  $[0, L]$  tal que  $\Gamma$  é  $C^q$ ,  $q \geq 2$ , em cada intervalo aberto  $(l_i, l_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ .

Chamamos os pontos  $\Gamma(l_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ , de pontos de cola ou vértices e os traços  $\Gamma([l_i, l_{i+1}])$  são chamados arcos de curvas e denotaremos por  $\Gamma_i = \Gamma([l_i, l_{i+1}])$ . Em relação à  $\Gamma_i$ , os pontos  $\Gamma(l_i)$  e  $\Gamma(l_{i+1})$  são chamados de extremos de  $\Gamma_i$ .

Portanto,  $\Gamma$  é a união de arcos de curvas  $\Gamma_i$ , onde cada  $\Gamma_i$  é  $C^q$ ,  $q \geq 2$ , exceto nos extremos.



Diremos que um arco de curva  $\Gamma_i$  é geodesicamente estritamente convexo quando  $\kappa(s) > 0$ , com  $s \in (l_i, l_{i+1})$ .

Vamos denotar por  $\Gamma^* = \{\Gamma(l_i), i = 0, 1, \dots, k\}$  o conjunto dos pontos de cola de  $\Gamma$ .

O problema do bilhar, assim como no caso de uma oval, é descrito pelo movimento de uma partícula sobre a superfície  $\mathbb{H}^2$  seguindo uma trajetória geodésica com velocidade constante igual a um, no interior da região  $Q$ , sofrendo colisões elásticas com esse bordo.

Para usar a lei de reflexão, precisamos do vetor tangente  $\Gamma'(s)$ , com  $s$  sendo o parâmetro comprimento de arco. Assim, não podemos aplicá-la nos pontos de  $\Gamma^*$ , onde tal vetor pode não existir. De forma mais precisa, podemos definir  $\Gamma'(s)$  pela continuidade nos pontos de  $\Gamma^*$ , mas isso daria dois vetores tangentes nos pontos de  $\Gamma^*$ . Por isso, adotamos que a reflexão não está definida em nenhum ponto de  $\Gamma^*$ . Sempre que o movimento da partícula bate em um ponto de  $\Gamma^*$ , este movimento para e deixa de existir. Ao conjunto  $\Gamma^*$ , damos o nome de *conjunto de singularidades da fronteira*.

De mesmo modo que em bilhares em ovais, introduzimos as coordenadas  $(s, \psi) \in M = \mathbb{T} \times (0, \pi)$ , com  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/|\Gamma|\mathbb{Z}$ , uma vez que a fronteira é uma curva fechada. Seja

$$M_0 = \{(s, \psi) | s \in \Gamma^*\}.$$

Assim, a aplicação do bilhar é dada por

$$F : M \setminus M_0 \rightarrow M \setminus M_0$$

$$(s_0, \psi_0) \mapsto (s_1, \psi_1).$$

**Proposição 2.20.** *Seja  $\Gamma$  a fronteira consistindo de curvas  $C^q$  por partes, com  $q \geq 2$ . Então a aplicação  $F$  é  $C^{q-1}$  em cada ponto  $(s, \psi) \in M \setminus M_0$  tal que  $F(s, \psi) \in M \setminus M_0$  e preserva a medida  $\sin \psi d\psi ds$ .*

Similarmente aos bilhares em ovais, a aplicação de bilhar  $F : M \setminus M_0 \rightarrow M \setminus M_0$  possui derivada  $DF_{(s_1, \psi_1)}$  dada por

$$\frac{1}{\sin \psi_2} \begin{pmatrix} \kappa_1 \sinh g - \cosh g \sin \psi_1 & \sinh g \\ \kappa_2(\kappa_1 \sinh g - \cosh g \sin \psi_1) + \sinh g \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \kappa_1 \cosh g \sin \psi_2 & \kappa_2 \sinh g - \cosh g \sin \psi_2 \end{pmatrix},$$

onde  $F(s_1, \psi_1) = (s_2, \psi_2)$ ,  $g = g(s_1, s_2)$  é a distância geodésica e  $\kappa_i$  é a curvatura geodésica de  $\Gamma$  em  $s_i$ . Como essa matriz é não singular e envolve a curvatura de  $\Gamma$ , a suavidade é  $C^{q-1}$ .

A aplicação  $F$  não está definida em  $(s, \psi)$  somente se a próxima reflexão ocorre em algum ponto de  $\Gamma^*$ , os pontos com essa propriedade pertencem a um união finita ou enumerável de curvas suaves em  $M$ . Portanto, os pontos de  $M$  cuja imagem sob  $F$ , para o futuro ou para o passado, bate no conjunto singular  $\Gamma^*$  pertence a uma união enumerável de curvas suaves em  $M$ , logo sua medida total é zero.

Mostramos a seguir que o teorema de Oseledet é aplicável ao bilhar. Com isso garantimos a existência dos Exponentes de Lyapunov para a aplicação do bilhar.

**Proposição 2.21.** *Se o valor absoluto da curvatura de  $\Gamma$  é uniformemente limitado, o teorema de Oseledet é aplicável ao bilhar, ou seja,*

$$\int_M \log^+ \|DF_{(s, \psi)}\| d\mu < \infty.$$

*Demonstração.* Sendo  $DF_{(s_1, \psi_1)}$  a derivada da aplicação do bilhar, obtemos que

$$\|DF_{(s_1, \psi_1)}\| \leq \frac{C}{\sin \psi_2},$$

onde  $C$  é uma constante que depende da curvatura e do diâmetro de  $\Gamma$ . Logo,

$$\log^+ \|DF_{(s_1, \psi_1)}\| \leq \log^+ C + \log^+ \frac{1}{\sin \psi_2} \leq |\log C| + |\log \sin \psi_2|.$$

Integrando a equação acima na probabilidade  $d\mu = \frac{1}{2|\Gamma|} \sin \psi ds d\psi$ , obtemos

$$\int_M \log^+ \|DF_{(s_1, \psi_1)}\| d\mu \leq \int_M |\log C| d\mu + \int_M |\log \sin \psi_2| d\mu.$$

$$\int_M \log^+ \|DF_{(s_1, \psi_1)}\| d\mu \leq |\log C| + \frac{1}{2|\Gamma|} \int |\log \sin \psi_2| \sin \psi ds d\psi.$$

Como  $F$  preserva essa medida,

$$\int_M \log^+ \|DF_{(s_1, \psi_1)}\| d\mu \leq |\log C| + \frac{1}{2|\Gamma|} \int |\log \sin \psi| \sin \psi ds d\psi.$$

Para finalizar, basta mostrar que  $\int |\log \sin \psi| \sin \psi ds d\psi$ .

$$\begin{aligned} \int |\log \sin \psi| \sin \psi ds d\psi &= \int_0^{|\Gamma|} \int_0^\pi |\log \sin \psi| \sin \psi ds d\psi \\ &= |\Gamma| (-(\cos \psi + 1) \log \sin \psi + \log(1 - \cos \psi) - \cos \psi) \Big|_0^\pi \\ &= |\Gamma| (2 - \log 4) < \infty. \end{aligned}$$

□



## Capítulo 3

# Entropia polinomial do bilhar em ovais

Nesse capítulo, nosso objeto de trabalho serão os bilhares no plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  e em um hemisfério da esfera  $\mathbb{S}^2$ . Com a finalidade de facilitar a escrita, utilizaremos o símbolo  $S$  para representar ambas superfícies. Como mencionado no capítulo de introdução, vamos seguir as técnicas e ferramentas apresentadas por Marco [27] para provar nossos resultados.

Seja  $\Gamma \subset S$  uma oval, isto é, uma curva de classe  $C^q$  com  $q \geq 2$ , simples, fechada, orientada positivamente e com curvatura geodésica positiva ( $\kappa > 0$ ). A aplicação do bilhar é definida por associar a cada ponto de impacto e direção do movimento o próximo impacto e direção. Com  $s$  sendo o parâmetro comprimento de arco e  $\psi \in (0, \pi)$  o ângulo de saída em  $s$ , a aplicação do bilhar é dada por

$$F: \mathbb{T} \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{T} \times (0, \pi) \\ (s_0, \psi_0) \mapsto (s_1, \psi_1).$$

Definindo  $\mathbf{A} = \mathbb{T} \times [0, \pi]$ ,  $\partial^- \mathbf{A} := \mathbb{T} \times \{0\}$  e  $\partial^+ \mathbf{A} := \mathbb{T} \times \{1\}$  e como a aplicação de bilhar  $F$  é um difeomorfismo  $C^{q-1}$  e admite um levantamento natural também será denotado por  $F$  para  $\mathbf{A}$  ao identificar  $\partial^- \mathbf{A}$  com  $\partial^+ \mathbf{A}$ . Com isso, a aplicação  $F$  preserva a medida  $\sin \psi ds d\psi$  e possui a propriedade twist, ou seja, desvia a vertical para a direita, no sentido que  $\frac{\partial s_1}{\partial \psi_0}(s_0, \psi_0) > 0$ , para todo  $(s_0, \psi_0) \in \mathbf{A}$ .

Estamos interessados em mesas de bilhares cujas aplicações de bilhares associadas minimizam a entropia polinomial. Vamos nos restringir às mesas de bilhares cujas fronteiras são curvas com curvatura estritamente positiva. Quando temos curvatura nula, a entropia topológica é positiva,  $h_{top}(F) > 0$ , e assim a entropia polinomial é infinita,  $h_{pol}(F) = \infty$ . Assim, para minimizar a entropia polinomial vamos trabalhar em bilhares que podem possuem entropia topológica nula. Mais precisamente, provare-

mos nesse capítulo os seguintes resultados, que são uma extensão para superfícies com curvatura constante dos resultados apresentados por Marco [27].

**Teorema 1.** *A única mesa de bilhar com curvatura estritamente positiva tal que a entropia polinomial da aplicação de bilhar associada é igual a um é o círculo geodésico. Nos outros casos temos  $h_{pol}(F) \geq 2$ .*

**Teorema 2.** *A entropia polinomial da aplicação do bilhar elíptico é igual a 2.*

Vamos dedicar as duas seções seguintes a demonstrar estes teoremas.

### 3.1 Prova do Teorema 1

Conforme visto no capítulo 1, os círculos geodésicos são ovais em  $\mathbb{S}^2$  com raio  $0 < \rho < \pi/2$  e em  $\mathbb{H}^2$  para qualquer raio  $\rho < \infty$ , ou seja,  $\kappa < 1$ . Vamos considerar um círculo geodésico de raio fixo  $\rho$  em  $S$ , orientado positivamente e parametrizado pelo comprimento de arco.

Considerando a trajetória de bilhar orientada de  $s_0$  para  $s_1$  e denotando por  $\alpha$  o ângulo central, vemos que o comprimento desse arco em termos do ângulo  $\alpha$ ,  $l(\alpha)$ , é dado por  $\alpha \sinh \rho$  em  $\mathbb{H}^2$  e por  $\alpha \sin \rho$  em  $\mathbb{S}^2$ . Assim,  $s_1 = s_0 + l(\alpha)$ .

Observando que vale a propriedade dos triângulos isósceles,  $\psi_0 = \psi_1 = \psi$ , veja Figura 3.1, e usando as leis de cossenos encontramos que

$$\cos \alpha = \begin{cases} \frac{\cosh^2 \rho - \tan^2 \psi}{\sinh^2 \rho + \sec^2 \psi} & \text{em } \mathbb{H}^2 \\ \frac{\cos^2 \rho - \tan^2 \psi}{-\sin^2 \rho + \sec^2 \psi} & \text{em } \mathbb{S}^2 \end{cases}$$

Com isso a aplicação do bilhar no círculo geodésico é dada por

$$F(s_0, \psi_0) = (s_0 + l \bmod(2\pi \sin \rho), \psi_0).$$

Lembremos que uma curva rotacional invariante é uma curva contínua fechada e homotopicamente não trivial no espaço de fase. Como o espaço de fase do bilhar circular é folheado por curvas rotacionais invariantes, aplicando o teorema 1.59 e seu corolário 1.60 concluímos que a entropia polinomial do bilhar circular é 1,  $h_{pol}(F) = 1$ .

Agora, aplicando o Teorema de Bialy 2.18, que nos garante que a única mesa tal que a aplicação de bilhar associada admite uma família de curvas rotacionais invariantes cuja união é o anel  $\mathbf{A}$  é o círculo geodésico, conseguimos a unicidade. Portanto, a única mesa de bilhar com curvatura estritamente positiva tal que a entropia polinomial da

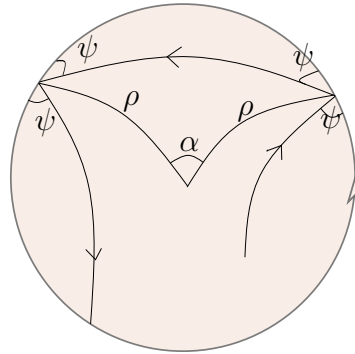
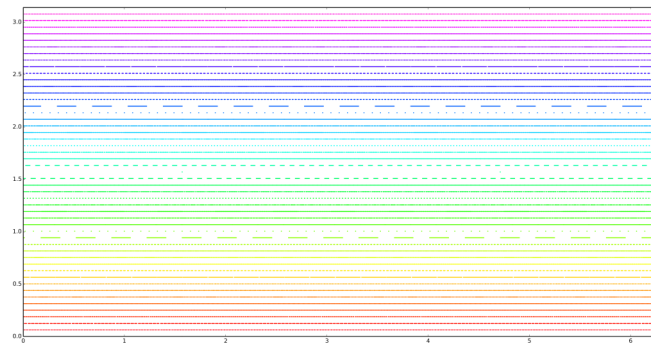


Figura 3.1: Bilhar no círculo geodésico

Figura 3.2: Espaço de fase de um bilhar circular em  $\mathbb{H}_+^2$ 

aplicação de bilhar é igual a um é o círculo geodésico. Concluí a primeira parte do Teorema 1.

Para provar a segunda parte do Teorema 1, usaremos o Teorema de Marco [27] sobre classificação de curvas rotacionais invariantes, cuja demonstração apresentamos a seguir.

**Teorema 3.1** (Marco (2017)). *Seja  $\varphi$  uma aplicação Twist preservando área em  $\mathbf{A}$  com intervalo de rotação  $I = [\beta(\partial^- \mathbf{A}), \beta(\partial^+ \mathbf{A})]$ . Uma e somente uma das seguintes possibilidades ocorrem:*

- *O anel  $\mathbf{A}$  é a união de curvas rotacionais invariantes para  $\varphi$ .*
- *Para cada  $\beta \in I$ , existe uma curva rotacional invariante com número de rotação  $\beta$  e  $\mathbf{A}$  não é a união de curvas rotacionais invariantes: nesse caso  $h_{pol}(\varphi) \geq 2$ .*

- Existe um  $\beta \in I$  tal que não existe curva rotacional invariante com número de rotação  $\beta$ : nesse caso  $h_{top}(\varphi) > 0$  e portanto  $h_{pol}(\varphi) = +\infty$

O terceiro item desse teorema uma consequência do seguinte resultado de Angenent [2].

**Teorema 3.2** (Angenent (1992)). *Seja  $\varphi$  um homeomorfismo Twist em  $\mathbb{T} \times [0, 1]$ , com intervalo de rotação  $I$ . Seja  $h_{top}(\varphi) = 0$  então para qualquer  $\beta \in I$ , existe uma curva rotacional invariante para  $\varphi$  com número de rotação  $\beta$ .*

*Demonstração.* (Teorema 3.1) Podemos nos restringir ao caso onde  $\varphi$  admite uma curva rotacional invariante com número de rotação  $\beta$  para qualquer  $\beta \in I$ . Com isso, vamos provar que se  $\mathbf{A}$  não é a união de curvas rotacionais invariantes, então  $h_{pol}(\varphi) \geq 2$ .

Dado um inteiro  $q \geq 1$ ,  $h_{pol}(\varphi) = h_{pol}(\varphi^q)$ . Vamos exibir um inteiro  $q$  para o qual será possível construir, para  $n$  suficientemente grande e  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, um subconjunto  $A_n(\varepsilon)$  de  $\mathbf{A}$  que será  $(n, \varepsilon)$ -separado para  $\phi = \varphi^q$ , isto é:

$$d_n^\phi(x, y) \geq \varepsilon, \quad \forall (x, y) \in A_n(\varepsilon)^2,$$

e vamos provar que

$$\#(A_n(\varepsilon)) \geq c(\varepsilon)n^2,$$

onde  $c(\varepsilon)$  depende de  $\varepsilon$ , mas não de  $n$ .

Lembremos que  $G_n^\phi(\varepsilon)$  é o número mínimo de bolas de raio  $\varepsilon$  para a métrica  $d_n^\phi$  em uma cobertura finita de  $\mathbf{A}$  e que  $h_{pol}(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log G_n^\phi(\varepsilon)}{\log n}$  (definição de entropia polinomial na página 25). Como

$$G_n(\varepsilon/2) \geq \#A_n(\varepsilon),$$

isso provará que

$$h_{pol}(\varphi) = h_{pol}(\phi) \geq 2.$$

Do Teorema de Birkhoff 2.16, sabemos que existe curva rotacional invariante e essa curva é o gráfico de uma aplicação Lipschitz  $\mathbb{T} \rightarrow [0, 1]$ . Seja  $\mathcal{C}$  o conjunto das curvas rotacionais invariantes para  $\varphi$ . Como a união de elementos de  $\mathcal{C}$  é um subconjunto compacto de  $\mathbf{A}$ , distinto de  $\mathbf{A}$ , podemos encontrar uma vizinhança  $B(x, \delta) \subset \text{Int}\mathbf{A}$  em seu complemento. Dado  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2 \in \mathcal{C}$ , com  $\Gamma_1 = \text{Graph } \eta_1$  e  $\Gamma_2 = \text{Graph } \eta_2$  tal que  $\eta_1 \leq \eta_2$ , isto é,  $\eta_1(s) \leq \eta_2(s)$  para  $s \in \mathbb{T}$ , então  $\beta(\Gamma_1) \leq \beta(\Gamma_2)$ . Além disso, se  $\eta_1 < \eta_2$  então  $\beta(\eta_1) < \beta(\eta_2)$ . Isso decorre do fato da aplicação  $\phi$  ser uma aplicação twist.

Dizemos que  $\Gamma = \text{Graph } \eta$  está acima de  $x = (s, \psi)$  quando  $\psi < \eta(s)$ , e que  $\Gamma$  está abaixo de  $x$  no caso oposto. O conjunto  $\mathcal{C}$  é a união de subconjuntos  $\mathcal{C}^+$  e  $\mathcal{C}^-$  formado por curvas rotacionais invariantes localizados acima e abaixo de  $x$  respectivamente. Podemos observar que  $\mathcal{C}^+$  e  $\mathcal{C}^-$  são subconjuntos compactos de  $\mathcal{C}$ .

Seja  $\beta^+$  o mínimo dos números de rotação dos elementos de  $\mathcal{C}^+$  e  $\beta^-$  o máximo dos números de rotação dos elementos de  $\mathcal{C}^-$ , e fixe  $\Gamma^\pm$  em  $\mathcal{C}^\pm$  tal que  $\beta(\Gamma^\pm) = \beta^\pm$ .

Suponhamos que  $\beta^+ < \beta^-$ , e tomemos  $\Gamma \in \mathcal{C}$  tal que  $\beta^+ < \beta(\Gamma) < \beta^-$  e  $\beta(\Gamma) \in \mathbb{Q}$ . Pela observação 2.15, dois elementos distintos de  $\mathcal{C}$  que intersectam um ao outro devem ter o mesmo número de rotação racional. Como uma consequência,  $\Gamma \cap \Gamma^- = \emptyset$  e  $\Gamma \cap \Gamma^+ = \emptyset$ . Portanto, por construção,  $\Gamma^+$  está localizado estritamente acima de  $\Gamma^-$ , então  $\beta^+ > \beta^-$  que é uma contradição, portanto  $\beta^+ \geq \beta^-$  e o intervalo de rotação  $I = [\beta(\partial^- \mathbf{A}), \beta^-] \cup [\beta^+, \beta(\partial^+ \mathbf{A})]$ . Consequentemente  $\beta^+ = \beta^-$  uma vez que a aplicação do número de rotação é sobrejetiva. Finalmente deduzimos que as curvas rotacionais (distintas)  $\Gamma^\pm$  se intersectam e assim  $\beta^+ = \beta^- \in \mathbb{Q}$ . Seja  $\beta^+ = \beta^- = p/q$  com  $p, q > 0$  inteiros primos entre si.

Seja  $\mathcal{C}(p/q) \subset \mathcal{C}$  o conjunto das curvas rotacionais invariantes com número de rotação  $p/q$ . Observemos que  $\mathcal{C}(p/q)$  é compacto e considere, para  $s \in \mathbb{T}$ :

$$\eta^\bullet(s) = \text{Max}\{\eta(s) \mid \text{Graph } \eta \in \mathcal{C}(p/q)\}, \quad \eta_\bullet(s) = \text{Min}\{\eta(s) \mid \text{Graph } \eta \in \mathcal{C}(p/q)\}.$$

Vamos provar que  $\Gamma^\bullet := \text{Graph } \eta^\bullet$  está em  $\mathcal{C}(p/q)$ . Primeiro notemos que se  $\eta_1, \dots, \eta_n$  são funções em  $\mathbb{T}$  tais que  $\text{Graph } \eta_k \in \mathcal{C}$ , então, pela invariância das componentes conexas do complemento de cada  $\text{Graph } \eta_k$ ,  $\max_{1 \leq k \leq n} \eta_k \in \mathcal{C}$ . Selecione um subconjunto denso enumerável de  $\mathbb{T}$ :  $D = \{s_n \mid n \geq 1\}$ . Vamos construir indutivamente uma sequência não decrescente  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (possivelmente finita) de funções em  $\mathbb{T}$  tais que  $\text{Graph } \eta_n \in \mathcal{C}$ , que converge para  $\eta^\bullet$ . Fixamos arbitrariamente  $\eta_0 \in \mathcal{C}(p/q)$  e assumimos que  $\eta_0, \dots, \eta_n$  são construídos de modo que  $\eta_{k+1} \geq \eta_k$  para  $0 \leq k \leq n-1$  e

$$\eta_k(s_l) \geq \eta^\bullet(s_l) - \frac{1}{k}, \quad 1 \leq l \leq k, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Para construir  $\eta_{n+1}$  fixemos  $n+1$  elementos  $\zeta_1, \dots, \zeta_{n+1}$  em  $\mathcal{C}(p/q)$  tal que

$$\zeta_l(s_l) \geq \eta^\bullet(s_l) - \frac{1}{n+1}, \quad 1 \leq l \leq n+1,$$

e consideramos

$$\eta_{n+1} = \max\{\zeta_1, \dots, \zeta_{n+1}, \eta_n\},$$

então a sequência  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é não decrescente e  $\eta_{n+1} \in \mathcal{C}(p/q)$ . Consideremos  $\bar{\eta} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n$ . Como  $\mathcal{C}$  é equicontínuo, o limite é uniforme e então  $\bar{\eta} \in \mathcal{C}(p/q)$ . Além disso, por construção  $\bar{\eta} = \eta^\bullet$  em  $D$  e  $\bar{\eta} \leq \eta^\bullet$ . Como  $D$  é denso e  $\eta^\bullet$  é semicontínuo inferiormente, isso prova que  $\eta^\bullet = \bar{\eta}$ , assim  $\eta^\bullet \in \mathcal{C}$ , que prova a afirmação. Similarmente, provamos que  $\Gamma_\bullet := \text{Graph } \eta_\bullet$  pertence a  $\mathcal{C}(p/q)$ .

Pelo Teorema de Classificação de Poincaré 2.13, as aplicações  $\varphi_{|\Gamma^\bullet}$  e  $\varphi_{|\Gamma_\bullet}$  admitem pontos  $q$ -periódicos. Existe pelo menos um ponto não periódico em  $\Gamma^\bullet \cup \Gamma_\bullet$ , caso contrário  $\Gamma^\bullet$  e  $\Gamma_\bullet$  poderiam ser conjuntos de Aubry-Mather com o mesmo número de rotação o que contradiz o teorema 2.14 e a observação 2.15. Suponha que  $\Gamma^\bullet$  admita um ponto não periódico, que portanto, é um ponto errante para  $\varphi_{|\Gamma^\bullet}$ , novamente pelo Teorema de classificação de Poincaré.

Tomemos uma sequência decrescente  $(\beta_k)_{k \geq 0}$  de números irracionais tal que  $\beta_k > p/q$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = p/q$ , e para cada  $k$  seja  $\Gamma_k = \text{Graph}(\eta_k) \in \mathcal{C}$  a única curva rotacional invariante em  $\mathcal{C}$  tal que  $\beta(\Gamma_k) = \beta_k$ , então  $\eta_k > \eta^\bullet$  para todo  $k$ . A sequência  $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é decrescente e, pela equicontinuidade, admite  $\eta^* = \text{Inf}_{k \in \mathbb{N}} \eta_k$  como seu limite uniforme. Seja  $\Gamma^* = \text{Graph } \eta^*$ , assim  $\beta(\Gamma^*) = p/q$  e além disso,  $\eta^* \geq \eta^\bullet$ . Isso prova que  $\Gamma^* = \Gamma^\bullet$  por construção. Portanto  $\Gamma^\bullet$  é acumulado por cima por curvas rotacionais de  $\mathcal{C}$  com números de rotação irracionais.

Tomemos agora  $\phi = \varphi^q$ , assim  $\phi_{|\Gamma^\bullet}$  admite pontos fixos junto com os pontos errantes. Seja  $w$  um ponto (errante) em  $\Gamma^\bullet$  tal que  $d(\pi_s(\phi(w)), \pi_s(w))$  é maximal em  $\Gamma^\bullet$  e seja  $s_0 = \pi_{\mathbb{T}}(w)$  e  $s_1 = \pi_{\mathbb{T}}(\phi(w))$ . O ponto  $w$  está localizado dentro de um intervalo de  $\Gamma^\bullet$  limitado por dois pontos fixos consecutivos  $\alpha$  e  $\omega$  de  $\phi$  e é biassintótico a  $\alpha$  e  $\omega$ . Dado  $\beta^0 > p/q$  irracional e suficientemente pequeno, seja  $\Gamma^0 = \text{Graph } \eta^0$  a curva rotacional em  $\mathcal{C}$  com número de rotação  $\beta^0$  e seja  $S$  a faixa em  $\mathbf{A}$  limitada pelas curvas rotacionais  $\Gamma^\bullet$  e  $\Gamma^0$ . Fixemos  $\delta > 0$  suficientemente pequeno e seja  $R$  dado por

$$R : s_0 - \delta \leq s \leq s_1 + \delta, \quad \eta^\bullet(s) \leq \psi \leq \eta^0(s),$$

e consideremos

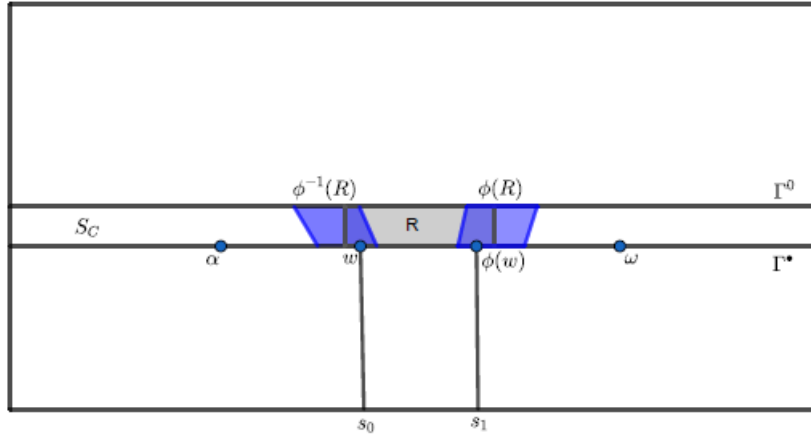
$$S_C = S \setminus (\phi^{-1}(R) \cup R \cup \phi(R)).$$

Podemos escolher  $\delta$  e  $\beta^0$  de modo que

$$\varepsilon = \text{Min}_{x \in R, y \in S_C} d(x, y) > 0. \quad (3.1)$$

Para  $m > m_0$  suficientemente grande, a faixa  $S$  contém a curva rotacional  $\Gamma_m$  de  $\mathcal{C}$  com número de rotação

$$\beta_m = \frac{p}{q} + \frac{1}{mq} = \frac{mp + 1}{mq}$$



Para  $\varphi$ , então o número de rotação relativo a  $\phi$  é  $p + 1/m$ . Portanto a curva rotacional anterior contém um ponto  $a_m$  de período  $m$  para  $\phi$  e os pontos da órbita de  $a_m$  sob  $\phi$  são ordenados no mesmo sentido que as órbitas de  $a_m$  sob a rotação de ângulo  $1/m$ . Podemos escolher  $\beta^0$  suficientemente pequeno, dependendo da escolha de  $\delta$ , tal que em vista da dinâmica em  $\Gamma^\bullet$  e pela continuidade, qualquer ponto em  $\Gamma_m$  admite uma iterada por  $\phi$  que pertence a  $R$ .

Vamos mostrar que a "sub-órbita"

$$O(a_m) = \{\phi^{2k}(a_m) | 0 \leq k \leq [m/2] - 1\}$$

dos pontos  $a_m$  é  $(n, \varepsilon)$ -separado para  $n \geq m$ . Para isso, seja  $x \neq y$  dois pontos de  $O(a_m)$  e observe que, invertendo  $x$  e  $y$  se necessário,  $y = \phi^k x$  para algum  $2 \leq k \leq m - 2$ . Além disso, existe um  $l \in \{0, \dots, m - 1\}$  tal que  $\phi^l(x) \in R$ . Portanto, como os pontos de  $O(a_m)$  estão ordenados do mesmo modo que a órbita sob a rotação de ângulo  $1/m$ :

$$\phi^l(y) = \phi^k(\phi^l(x)) \in S_C.$$

Como uma consequência  $d(\phi^l(x), \phi^l(y)) \geq \varepsilon$  por (3.1), logo  $d_n^\phi(x, y) \geq \varepsilon$  se  $n \geq m$  e finaliza a prova da afirmação.

Consideremos dois pontos  $a_m$  e  $a_{m'}$ , com  $m' \geq m_0 (\geq 3)$  e  $m - m' \geq 3$ . Vamos provar que a união  $O(a_m) \cup O(a_{m'})$  é  $(n, \varepsilon)$ -separado para  $\phi$  quando  $n \geq 2m$ . Como  $O(a_m)$  e  $O(a_{m'})$  são  $(n, \varepsilon)$ -separado para  $\phi$ , é suficiente provar que  $d_n^\phi(x, x') \geq \varepsilon$  para quaisquer dois pontos  $x \in O(a_m)$  e  $x' \in O(a_{m'})$ . Seja  $l \in \{0, \dots, m - 1\}$  tal que  $\phi^l(x) \in R$ .

- Se  $\phi^l(x') \in S_C$ , então  $d_{2m}^\phi(x, x') \geq d_l^\phi(x, x') \geq \varepsilon$ .
- Se  $\phi^l(x') \in \phi^j(R)$  com  $j \in \{-1, 0, 1\}$ , então  $\phi^{m'+l-j}(x') \in R$ . Além disso, como

$\phi^l(x)$  é periódico de período  $m$ , com iteradas sob  $\phi$  ordenadas da mesma forma que as iteradas sob a rotação de ângulo  $1/m$  e como  $2 \leq m' - j \leq m - 2$ , então  $\phi^{m'+l-j}(x) = \phi^{m'-j}(\phi^l(x)) \in S_C$ .

Portanto,  $O(a_m) \cup O(a_{m'})$  é  $(n, \varepsilon)$ -separado para  $\phi$  quando  $n \geq 2m$ .

Dado  $n \gg 2m_0$ , considere  $\nu = [n/2]$  e  $A_n(\varepsilon) = O(a_\nu) \cup O(a_{\nu-3}) \cup \dots \cup O(a_{\nu'})$  com  $2 + m_0 \geq \nu' \geq m_0$ . Da afirmativa anterior,  $A_n(\varepsilon)$  é  $(n, \varepsilon)$ -separado para  $\phi$ . Agora  $\#A_n(\varepsilon) \geq [\nu/2] + [(\nu-3)/2] + \dots + [\nu'/2] - \nu \geq cn^2$ , para  $c > 0$  uma constante adequada, quando  $n$  é suficientemente grande. Então  $h_{pol}(\phi) \geq 2$  e assim  $h_{pol}(\varphi) \geq 2$ , que finaliza o prova do teorema. □

Como as ovas tem curvatura estreitamente positiva e apenas o círculo geodésico é folheado por curvas rotacionais invariantes, a aplicação do bilhar em uma oval satisfaz a segunda possibilidade do teorema 3.1 e assim finalizamos a demonstração do Teorema 1.

## 3.2 Prova do Teorema 2

Fixemos uma elipse, com comprimento 1, de equação

$$\frac{x_1^2}{a} + \frac{x_2^2}{b} - \frac{x_0^2}{c} = 0, \text{ com } c > b \geq a > 0$$

no plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  e uma elipse, também de comprimento 1, de equação

$$\frac{x_1^2}{a} + \frac{x_2^2}{b} + \frac{x_0^2}{c} = 0, \text{ com } c > b > 0 \geq a$$

em um hemisfério da esfera  $\mathbb{S}^2$ . Seja  $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$  a aplicação do bilhar associada.

A prova do Teorema 2 é uma consequência do fato que  $F$  é conjugada a uma aplicação da seção de Poincaré de um sistema Hamiltoniano Bott integrável com uma órbita periódica.

A existência do Hamiltoniano é garantida pelo Teorema de Moser 1.44, mas para isso é preciso aplicar a seguinte mudança de coordenadas feita na equação 2.3 da seção 2.1.1

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \times [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{T} \times [-1, 1] \\ (s, \phi) &\mapsto (s, y = \cos \phi). \end{aligned}$$



e  $\mathcal{F}$  para expressar a aplicação do bilhar nas coordenadas  $(s, y = \cos \phi)$ . Lembremos que  $\mathcal{F}$  mantém a propriedade twist que inclina a vertical para a direita e agora preserva a forma simplética  $\omega = dy \wedge ds$ .

Dizer que uma aplicação é simplética exata é equivalente a requerer que esta aplicação preserve área e tenha fluxo zero, ou seja, preserve a fronteira de um anel (veja Golé [18]). Com essa definição  $\mathcal{F}$  é simplética exata. Vamos denotar por  $\bar{F} = \bar{F}(x, y)$  um levantamento de  $\mathcal{F}$  para  $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ . Usando o Teorema de Moser 1.44, existe um Hamiltoniano não autônomo  $C^\infty$

$$H = H(t, x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz:

- $H(t + 1, x, y) = H(t, x, y) = H(t, x + 1, y)$ ;
- $\partial_x H(t, x, y) = 0$  para  $y = -1, y = 1$  (invariância da fronteira)
- $\partial_{yy}^2 H > 0$  (condição de Legendre);

e tal que  $\bar{F}$  é a aplicação de Poincaré do sistema Hamiltoniano

$$\dot{x} = \partial_y H(t, x, y), \quad \dot{y} = -\partial_x H(t, x, y),$$

associado com a seção  $\Sigma = \{0\} \times \mathbb{R} \times [-1, 1]$ , em que o tempo de retorno para  $\Sigma$  é igual a 1. Vamos considerar  $\mathcal{H}$  a forma autônoma de  $H$  na variedade  $(\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{T} \times [-1, 1])$  ao adicionarmos a variável energia e tomar o quociente por  $\pi_{\mathbb{T}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$  do primeiro e terceiro fatores

$$\mathcal{H}(\tau, e, s, y) = e + H(t, x, y), \tag{3.2}$$

onde  $\tau = \pi_{\mathbb{T}}(t)$  e  $s = \pi_{\mathbb{T}}(x)$ . Assim, todos os níveis de energia de  $\mathcal{H}$  são difeomorfos a  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  e seus fluxos Hamiltonianos são conjugados.

O problema do bilhar na elipse em  $\mathbb{H}^2$  tem as seguintes integrais, como mostra Veselov [38],

$$F_j = \sum_{i \neq j} \frac{J_i J_j (x_i y_j - x_j y_i)^2}{a_j - a_i}, \quad j = 0, 1, 2,$$

onde  $J_0 = -1, J_1 = J_2 = 1, x_0 = z, x_1 = y, x_2 = x, a_0 = c, a_1 = b, a_2 = a$  e satisfaz a relação  $F_0 + F_1 + F_2 = 0$ . Já o problema na elipse em  $\mathbb{S}^2$  a integral é dada pela mesma expressão, mas com  $J_0 = J_1 = J_2 = 1$ . Portanto esse problema do bilhar elíptico é integrável.

Como uma consequência,  $\mathcal{H}$  admite uma integral primeira  $C^\infty f : (\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{T} \times [-1, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Da subseção 1.5.2, teorema 1.48, e dos resultados acima, segue o seguinte resultado.

Lembremos que círculo, toro e garrafa de Klein são variedades com característica de Euler zero.

**Proposição 3.3.** *Seja  $\mathcal{H} : (\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{T} \times [-1, 1])$  o Hamiltoniano definido anteriormente e fixemos  $\mathbf{E} = \mathcal{H}^{-1}(0)$ . Seja  $f_{\mathbf{E}}$  a restrição de  $f$  de  $\mathcal{H}$  à  $\mathbf{E}$  e seja  $\Phi$  a restrição de  $\phi_{\mathcal{H}}$  (fluxo Hamiltoniano associado à  $\mathcal{H}$ ). Então  $(\mathbf{E}, \Phi, f)$  é um sistema Bott-integrável dinamicamente coerente, que não admite toro ou garrafa de Klein críticos.*

Para calcular a entropia polinomial resta analisar as hipóteses (H1) e (H2) do teorema 1.58. Vamos enunciá-lo novamente.

**Teorema 1.58:** *Seja  $(\mathbf{E}, \phi_{\mathcal{H}}, f)$  um sistema Bott-integrável dinamicamente coerente que satisfaz as hipóteses:*

(H1) *Considerando  $\mathbf{E} = \mathcal{H}^{-1}(\{e_0\})$ , para  $|e - e_0|$  suficientemente pequeno,  $F_i|_{\mathcal{H}^{-1}(\{e\})}$  também admite um toro crítico  $\mathcal{T}_e \subset \mathbf{E}$  que depende suavemente da energia  $e$ ;*

(H2) *Todo policírculo para  $f$  é um policírculo simples.*

Então

$$h_{pol}(\phi_{\mathcal{H}}) \in \{0, 1, 2\}.$$

Além disso,  $h_{pol}(\phi_{\mathcal{H}}) = 2$  se, e somente se,  $\phi_{\mathcal{H}}$  possui uma órbita hiperbólica.

A primeira hipótese (H1) requer a continuidade de toros críticos, o que não é o caso, uma vez que nosso sistema possui apenas círculos críticos. A segunda hipótese (H2) requer a continuação do diagrama de separatrizes das órbitas periódicas hiperbólicas de  $(\mathbf{E}, \Phi)$  nas proximidades dos níveis de energia junto de algumas condições geométricas na vizinhança do diagrama continuado. Como nosso sistema é o espaço de fase do bilhar elíptico que apresenta um policírculo simples, a condição (H2) é satisfeita.

Vamos decompor a variedade  $\mathbf{E}$  em quatro subvariedades compactas invariantes com fronteiras:

- $\mathbf{E}_1^+$ ,  $\mathbf{E}_1^-$  são vizinhanças das componentes conexas de fronteira  $\partial\mathbf{E}$ , limitadas por essas componentes e pelos dois toros invariantes  $T^+$  e  $T^-$ ;
- $\mathbf{E}_2$  é a vizinhança das órbitas elípticas limitada por um toro invariante  $T$ ;
- $\mathbf{E}_3$  é o fecho do complemento de  $\mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2$  em  $\mathbf{E}$ .

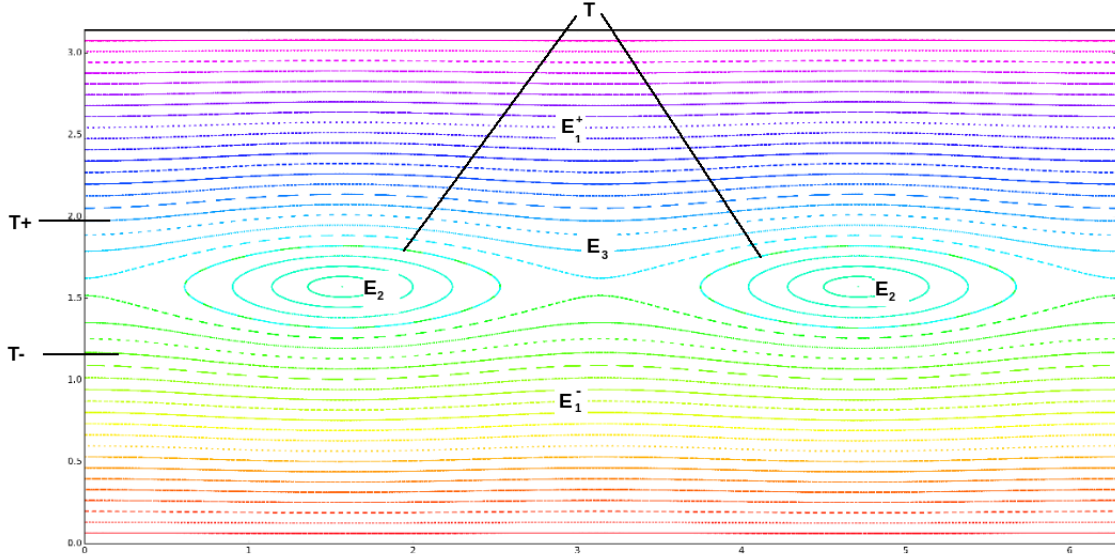


Figura 3.3: Interseções dos domínios com  $\tilde{\Sigma}$

Portanto  $\mathbf{E}_3$  é uma vizinhança do diagrama de separatriz da órbita hiperbólica. Mostramos na Figura 3.3 as interseções das fronteiras dos domínios com as seções  $\tilde{\Sigma} := \{\tau\} \cap \mathbf{E}$ , sendo  $\tau$  definido em (3.2). Do fato que os pontos elípticos são de período 2, então os toros  $T$  intersectam a seção duas vezes.

De acordo com os teoremas 1.58 e 1.59 podemos concluir que:

- $h_{pol}(\Phi|_{\mathbf{E}_1}) = 1$ ;
- $h_{pol}(\Phi|_{\mathbf{E}_2}) = 1$ ;
- $h_{pol}(\Phi|_{\mathbf{E}_3}) = 2$ .

Como uma consequência, da propriedade 1.39 da entropia polinomial, temos que

$$h_{pol}(\Phi) = \max_{i \in \{1,2,3\}} h_{pol}(\Phi|_{\mathbf{E}_i}) = 2.$$

Como  $\mathcal{F}$  e  $F$  são conjugadas, as entropias polinomiais coincidem. Portanto, para concluir a prova resta comparar a entropia polinomial do fluxo  $\Phi$  com a entropia polinomial de  $\mathcal{F}$ . Como o tempo de retorno à seção  $\tilde{\Sigma}$  é constante e igual a 1,  $\mathcal{F}$  coincide com a restrição da aplicação de tempo 1  $\Phi^1$  do fluxo  $\Phi$  ao subconjunto invariante  $\Sigma$ . Como uma consequência

$$h_{pol}(\mathcal{F}) \leq h_{pol}(\Phi^1) = h_{pol}(\Phi) = 2.$$

Além disso, do Teorema 1,  $h_{pol}(\mathcal{F}) = h_{pol}(F) \geq 2$ , então

$$h_{pol}(F) = 2,$$

concluindo a prova do Teorema 2.

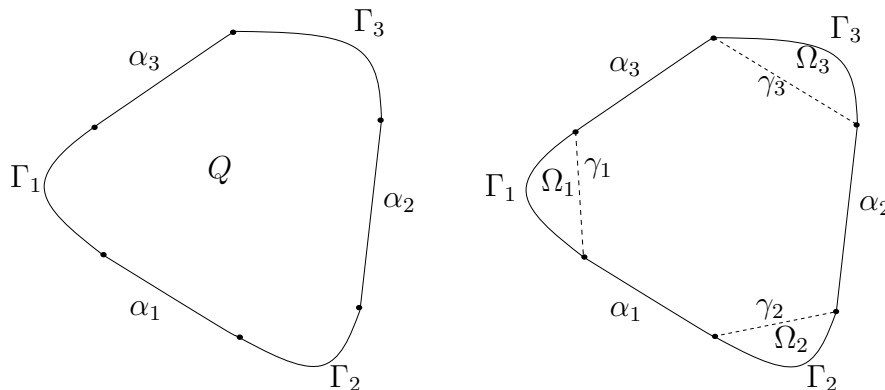
# Capítulo 4

## Bilhares tipo estádio com expoentes de Lyapunov positivos

Nesse capítulo vamos estudar bilhares, no plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ , com fronteira  $C^q$  por partes,  $q \geq 3$ , consistindo de arcos de curvas focalizadores e de segmentos geodésicos. Nosso objetivo é provar que a aplicação do bilhar nessa mesa de bilhar possui expoente de Lyapunov positivo quando consideramos esses segmentos geodésicos suficientemente longos. Para isso, as técnicas usadas para abordagem do problema baseiam-se no artigo do Donnay [14].

Consideramos  $Q \subset \mathbb{H}^2$  uma região convexa cuja fronteira  $\partial Q$  é uma curva simples, fechada,  $C^q$  por partes, com  $q \geq 3$ , e globalmente no máximo  $C^1$ . Vamos considerar  $q \geq 3$ , Halpern [20] construiu um exemplo de bilhar em que se a terceira derivada não é limitada, então a partícula pode sofrer infinitas colisões com a fronteira em um tempo finito.

A fronteira  $\partial Q$  é construída pela união finita de arcos de curvas  $\Gamma_i$ , como definidos na seção 2.2, e por segmentos geodésicos denotados por  $\alpha_i$ .



Seja  $\gamma_i$  o segmento da única geodésica conectando os dois extremos de  $\Gamma_i$  e deno-

temos por  $\Omega_i$  a região limitada por  $\Gamma_i \cup \gamma_i$ .

Consideramos em  $\partial Q$  a aplicação de bilhar definida como na seção 2.2. Usaremos o termo raio para expressar uma trajetória de bilhar e assim, diremos que uma raio está entrando em  $\Gamma_i$  quando o raio intersecta  $\gamma_i$  e posteriormente sofre uma colisão com  $\Gamma_i$ . Diremos que um raio está saindo de  $\Gamma_i$  quando, após colidir com  $\Gamma_i$ , o raio intersecta  $\gamma_i$ .

Para um raio entrando em  $\Gamma_i$ , chamamos de *família infinitesimal de raios paralelos* a um conjunto de raios entrando em  $\Gamma_i$  que são paralelos ao raio dado e estão a uma distância infinitesimal.

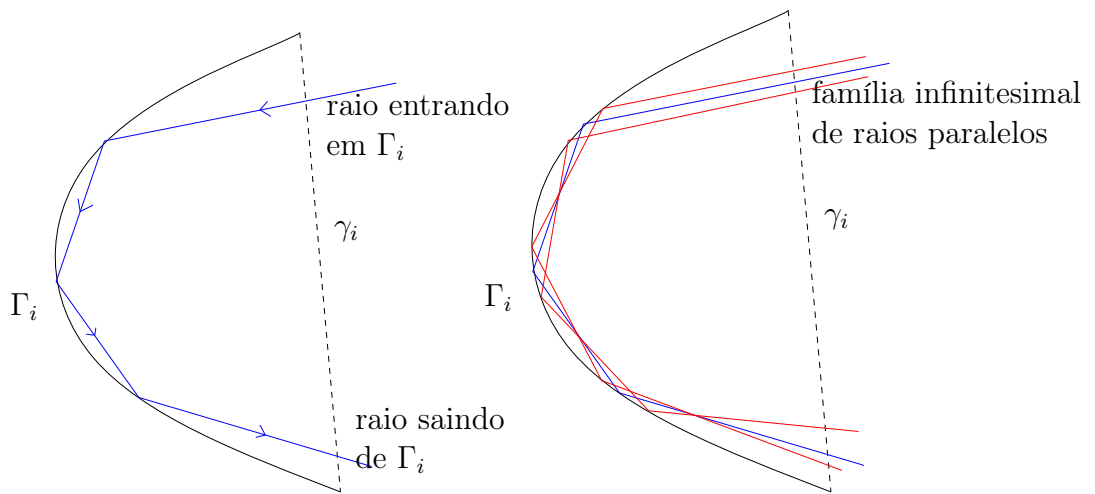


Figura 4.1: Raio entrando e saindo de  $\Gamma_i$  e família infinitesimal de raios paralelos.

Faremos algumas restrições sobre os arcos de curva  $\Gamma_i$  e sobre as famílias de raio paralelos que serão explicados em seguida:

1.  $\kappa(s) > 1$ , onde  $s$  é o parâmetro comprimento de arco;
2.  $\int_{\Gamma_i} \kappa(s) ds \leq \pi + \text{area}(\Omega_i)$ ;
3. as famílias de raios paralelos entrando em  $\Gamma_i$  colidem com  $\Gamma_i$  um número finito de vezes, focalizando (passando por um ponto focal) entre cada colisão com  $\Gamma_i$  e focalizando após colidir com  $\Gamma_i$  pela última vez.

A condição 1. nos permitirá construir um círculo osculador em todo ponto de  $\Gamma_i$ , exceto nos extremos de  $\Gamma_i$ . A condição 3. nos permitirá trabalhar sempre com uma família de raios que irão focalizar. Para entendermos a condição 2. vamos aplicar o teorema de Gauss-Bonnet sobre a região limitada por  $\Gamma_i \cup \gamma_i$ . Tomando  $\theta_1$  e  $\theta_2$  os

ângulos externos de  $\Gamma_i \cup \gamma_i$  e como  $\mathbb{H}^2$  tem curvatura gaussiana  $-1$ , então

$$\int \int_{\Omega_i} -1 dA + \int_{\Gamma_i \cup \gamma_i} \kappa(s) ds + (\theta_1 + \theta_2) = 2\pi.$$

Como  $\gamma_i$  tem curvatura geodésica nula,

$$\int_{\Gamma_i} \kappa(s) ds = 2\pi - (\theta_1 + \theta_2) + \text{area}(\Omega_i).$$

Portanto, a condição 2. nos restringe às curvas  $\Gamma_i$  tais que a soma ângulos externos de  $\Gamma_i \cup \gamma_i$  seja maior que  $\pi$  e isso implicará que os raios entrando em  $\Gamma_i$  sempre irão sair de  $\Gamma_i$ , como mostraremos no lema abaixo.

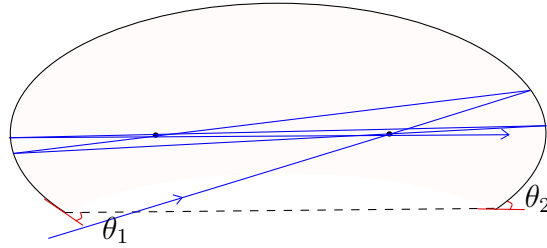


Figura 4.2: Exemplo de arco de curva com  $\theta_1 + \theta_2 < \pi$  e com raio que não sai do arco.

**Definição 4.1.** *Um arco de curva  $\Gamma_i$  que satisfaz*

1.  $\kappa(s) > 1$ , onde  $s$  é o parâmetro comprimento de arco;
2.  $\int_{\Gamma_i} \kappa(s) ds \leq \pi + \text{area}(\Omega_i)$ ;
3. *as famílias de raios paralelos entrando em  $\Gamma_i$  colidem com  $\Gamma_i$  um número finito de vezes, focalizando (passando por um ponto focal) entre cada colisão com  $\Gamma_i$  e focalizando após colidir com  $\Gamma_i$  pela última vez*

*é dito um arco focalizador. Além disso, chamaremos de tempo de focalização de um raio o tempo que a família de raios paralelos leva para focalizar após colidir com o arco focalizador pela última vez.*

No início do capítulo apresentamos a fronteira  $\partial Q$  como sendo globalmente no máximo  $C^1$  e isso se deve ao fato de que as fronteiras que são globalmente mais suaves que  $C^1$  possuem o problema de que se a curvatura geodésica decaí suavemente para

zero, então o tempo que uma família de raios paralelos leva para focalizar é ilimitado e não queremos trabalhar com essa situação (ver Chernov [11]).

Dada um arco focalizador  $\Gamma$  (omitiremos o índice  $i$  para reduzir a notação) parametrizado pelo comprimento de arco  $s \in [0, L)$ , seja  $\gamma$  a geodésica conectando os pontos extremos de  $\Gamma$ . Denotamos por  $F_\Gamma$  a aplicação do bilhar induzida em  $\Gamma \cup \gamma$  e por  $M_\Gamma$  o espaço de fase associado (lembrando que os pontos extremos não pertencem ao espaço de fase da aplicação do bilhar). Denotamos por  $S_\Gamma = \{(s, \psi) \in M_\Gamma\}$ . Dizemos que um ponto  $(s, \psi) \in S_\Gamma$  está entrando (saindo) em  $\Gamma$  se  $F_\Gamma^{-1}(s, \psi) \in \gamma$  ( $F_\Gamma(s, \psi) \in \gamma$ ) e definimos dois conjuntos abaixo:

$$S_\Gamma^- = \{(s, \psi) \in S_\Gamma \mid F_\Gamma^{-1}(s, \psi) \in \gamma\}$$

$$S_\Gamma^+ = \{(s, \psi) \in S_\Gamma \mid F_\Gamma(s, \psi) \in \gamma\}$$

**Lema 4.2.** *Seja  $\Gamma$  um arco focalizador. Então todos os pontos em  $S_\Gamma$ , exceto  $\{(0, \pi/2), (L, \pi/2)\}$  se são periódicos, irão sair de  $\Gamma$ .*

*Demonstração.* Vamos orientar  $\Gamma$  no plano hiperbólico de tal modo que  $\Gamma(0)$  esteja na origem (aqui consideramos a origem como sendo o ponto  $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ ) e  $\Gamma'(0)$  apontando para o eixo  $y$  positivo. Se a trajetória colide em um ponto onde o vetor normal a  $\Gamma$  (orientado de modo a apontar para dentro de  $Q$ ) tem a componente  $y$  positiva, então a componente  $y$  do vetor direção irá crescer após a colisão. A segunda restrição que adotamos sobre a curva  $\Gamma$  implica que o vetor normal a  $\Gamma$  tem uma componente  $y$  positiva em todo ponto  $\Gamma(s)$  com  $s \in (0, L)$ . Após sucessivas colisões, a componente  $y$  do vetor direção cresce monotonicamente. Como não temos pontos periódicos em  $\Gamma$  e as trajetórias não podem acumular, então elas sairão de  $\Gamma$ .  $\square$

Para  $(s, \psi) \in S_\Gamma$ , denotamos por  $n_\Gamma(s, \psi)$  o número de batidas que  $(s, \psi)$  faz com a fronteira antes de deixar  $\Gamma$ , isto é,

$$F_\Gamma^{n_\Gamma(s, \psi)}(s, \psi) \in S_\Gamma^+.$$

Se  $(s, \psi) \in S_\Gamma^+$ , então  $n_\Gamma(s, \psi) = 0$ .

Denotamos por  $\{X_s, X_\psi\}$  vetores tangentes associados a  $(s, \psi)$  no espaço de fase e seja  $\xi = s'X_s + \psi'X_\psi \in T_{(s, \psi)}M$  vetor tangente. Associamos à  $\xi$  a família infinitesimal de raios que gera  $\xi$ , isto é, a variação  $\eta_\xi(\sigma) = (s(\sigma), \psi(\sigma)) \approx (s + \sigma s', \psi + \sigma \psi')$  (aproximação linear), com  $\sigma \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  para o qual  $\eta_\xi(0) = (s, \psi)$ ,  $\eta'_\xi(0) = (s', \psi') = \xi$ .

**Definição 4.3.** *Dizemos que o vetor  $\xi$  focaliza se a família de raios associada focaliza em aproximação linear.*

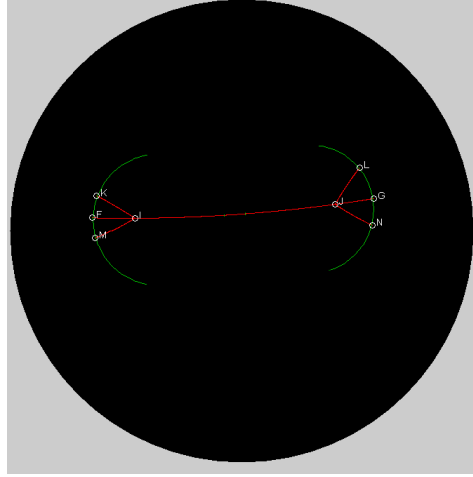


Sejam  $(s_1, \psi_1)$  e  $(s_2, \psi_2) = F(s_1, \psi_1)$  com pontos base nas componentes convexas da fronteira. Para  $\xi_1 \in T_{(s_1, \psi_1)}M$  e  $\bar{\xi} = \bar{s}'X_s + \bar{\psi}'X_\psi \in T_{(s_2, \psi_2)}M$  desejamos comparar a inclinação do vetor  $\xi = DF_{(s_1, \psi_1)}\xi_1 = s'X_s + \psi'X_\psi$  com a inclinação de  $\bar{\xi}$ .

Denotamos por  $g(s_1, s_2)$  o comprimento do segmento geodésico conectando  $s_1 \in \Gamma_1$  a  $s_2 \in \Gamma_2$ . Suponhamos que sob o fluxo geodésico o vetor  $\xi_1$  foca em um ponto nesse segmento a uma distância  $d_1(\xi_1)$  de  $s_1$ . Suponhamos também que, sob o fluxo para trás, o vetor  $\bar{\xi}$  foca a uma distância  $d_2(\bar{\xi}) > 0$  de  $s_2$ .

**Lema 4.4** (Lema da focalização). *Se  $g(s_1, s_2) > d_1(\xi_1) + d_2(\bar{\xi})$ , então*

$$\frac{\psi'}{s'} > \frac{\bar{\psi}'}{\bar{s}'}$$



*Demonstração.* Sejam

$$\eta(\sigma) = \left( s_2 + \sigma, \psi_2 + \frac{\psi'}{s'}\sigma \right),$$

$$\bar{\eta}(\sigma) = \left( s_2 + \sigma, \psi_2 + \frac{\bar{\psi}'}{\bar{s}'}\sigma \right)$$

as famílias correspondentes a  $\xi$  e  $\bar{\xi}$ . Construa a perpendicular a  $g(s_1, s_2)$  passando por  $s_2(\sigma)$ . Seja  $\alpha$  o ângulo entre a perpendicular e  $\Gamma'(s_2(\sigma))$ . Considere o triângulo  $T_2$  formado por  $s_2(\sigma)$ , a interseção da perpendicular com  $g(s_1, s_2)$  e o ponto de focalização a uma distância  $d_2(\bar{\xi}) > 0$  de  $s_2$  e também o triângulo  $T_1$  formado por  $s_2(\sigma)$ , a interseção da perpendicular com  $g(s_1, s_2)$  e o ponto de focalização a uma distância  $d_1(\xi)$  de  $s_2$ . Podemos observar que  $T_2$  está contido em  $T_1$ , logo o defeito  $\delta_2$  de  $T_2$  é maior que o defeito  $\delta_1$  de  $T_1$ . Sejam  $\beta_1$  e  $\beta_2$  os ângulos nos pontos de focalização de  $T_1$  e  $T_2$ ,

respectivamente. Com isso,

$$\frac{\pi}{2} + \beta_1 + \alpha + \delta_1 + \psi(\sigma) = \pi$$

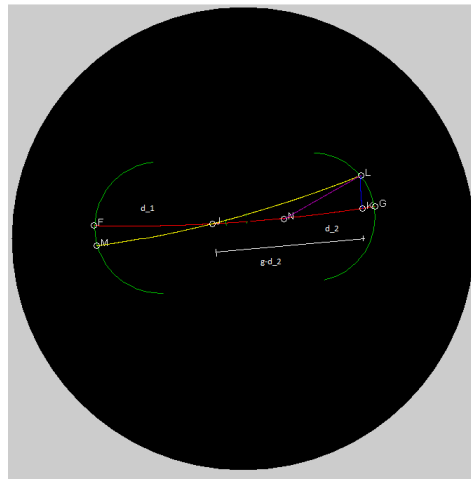
e

$$\frac{\pi}{2} + \beta_2 + \alpha + \delta_1 + \bar{\psi}(\sigma) = \pi.$$

Portanto,

$$\psi(\sigma) + \beta_1 + \delta_1 = \bar{\psi}(\sigma) + \beta_2 + \delta_2.$$

Como  $\delta_1 < \delta_2$ ,  $\psi(\sigma) + \beta_1 > \bar{\psi}(\sigma) + \beta_2$ . Logo,



$$\psi(\sigma) - \bar{\psi}(\sigma) > \beta_2 - \beta_1.$$

Aplicando a lei dos senos e a lei dos cossenos nos triângulos  $T_1$  e  $T_2$  obtemos que  $\beta_2 > \beta_1$ . Portanto, para  $\sigma$  dado, temos  $\psi(\sigma) > \bar{\psi}(\sigma)$ .  $\square$

## 4.1 Focalização por campos de Jacobi

Para  $Q \subset \mathbb{H}^2$ , o movimento de uma partícula seguindo uma trajetória de bilhar é dado ao longo de geodésicas. Seja  $\gamma(\epsilon, t)$  uma família a um parâmetro de geodésicas onde  $|\epsilon| < \epsilon_0$ ,  $-\infty < t < \infty$ .

O campo de Jacobi definido por

$$\mathbf{J}(t) = \frac{\partial \gamma(0, t)}{\partial \epsilon}$$

e satisfaz a equação de Jacobi

$$\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial t} \mathbf{J}(t) + R(\mathbf{J}(t), \gamma') \gamma' = 0,$$

onde  $\nabla$  denota a derivada covariante e  $R$  é o tensor curvatura. Estamos interessados na componente do campo de Jacobi que é perpendicular a  $\gamma'$ . Portanto, podemos expressá-lo por

$$\mathbf{J}(t) = J(t)\mathbf{n}(t),$$

onde  $J(t)$  é uma função escalar e  $\mathbf{n}(t)$  é o vetor unitário perpendicular a  $\gamma'$ . Como  $\mathbb{H}^2$  tem curvatura constante  $K = -1$ , obtemos

$$J''(t) - J(t) = 0. \tag{4.1}$$

De acordo o teorema de existência e unicidade de soluções para uma EDO, a solução da equação de Jacobi é unicamente determinada se duas condições iniciais  $J(0)$  e  $J'(0)$  são dadas. Resolvendo (4.1), obtemos

$$J(t) = J(0) \cosh(t) + J'(0) \sinh(t).$$

Podemos reescrever usando a matriz  $P(t)$ , que descreve o campo de Jacobi ao longo do tempo,

$$\begin{pmatrix} J(t) \\ J'(t) \end{pmatrix} = P(t) \begin{pmatrix} J(0) \\ J'(0) \end{pmatrix},$$

onde  $P(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$ .

Quando a trajetória de bilhar colide com a fronteira em  $x = (s, \psi)$ , o campo de Jacobi é transformado por uma aplicação linear  $R(x)$  que é uma reflexão

$$\begin{pmatrix} J_+ \\ J'_+ \end{pmatrix} = R(x) \begin{pmatrix} J_- \\ J'_- \end{pmatrix},$$

onde  $R(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2\kappa(s)}{\sin \psi} & -1 \end{pmatrix}$  e  $(J_-, J'_-)$  e  $(J_+, J'_+)$  denotam os valores do campo de Jacobi imediatamente antes e imediatamente depois da colisão com a fronteira. Vamos expressar esses valores logo a frente e veremos também que a matriz de reflexão está diretamente relacionada com a *fórmula do espelho* [42] e [6].

Seja  $q \in Q$  de modo que o raio passando por  $q$  colide com a fronteira em um ponto

$(s, \psi)$  e consideremos  $\bar{\xi} = (J(0), J'(0))$  no subespaço perpendicular ao espaço tangente em  $q$ . Ao vetor  $\bar{\xi}$  associamos uma variação  $\eta^\perp(\sigma)$ , no subespaço perpendicular ao espaço tangente em  $q$ , tal que  $\eta^\perp(0) = (J(0), J'(0))$ .

**Definição 4.5.** Um vetor  $\bar{\xi}$  focaliza quando seu campo de Jacobi associado satisfaz  $J(t) = 0$ . Dizemos que o vetor é convergente quando  $\frac{J'(t)}{J(t)} \leq 0$  e é divergente quando  $\frac{J'(t)}{J(t)} \geq 0$ .

Quando o raio colide com a fronteira em um ponto  $(s, \psi)$  com curvatura  $\kappa = \kappa(s)$ , a família de raios  $\eta^\perp(\sigma)$  irá colidir com a fronteira produzindo uma família de raios  $\eta(\sigma)$ , no espaço de fase, com  $\frac{d}{d\sigma} |_{\sigma=0} \eta(\sigma) = s'X_s + \psi'X_\psi$ .

Definindo  $u(t) = \frac{J'(t)}{J(t)}$ , então  $u$  satisfaz a equação

$$u'(t) = -K - u^2(t) = 1 - u^2(t). \quad (4.2)$$

De fato,  $u(t) = \frac{J'(0) \cosh(t) + J(0) \sinh(t)}{J(0) \cosh(t) + J'(0) \sinh(t)} \Rightarrow u'(t) = 1 - \left( \frac{J'(0) \cosh(t) + J(0) \sinh(t)}{J(0) \cosh(t) + J'(0) \sinh(t)} \right)^2$ .

Identificamos  $\pm\infty$  e consideramos  $u(t) = \infty$  quando  $J(t) = 0$ . Além disso, se  $u(0) < 0$ , i. e. está convergindo, então  $u$  decresce a  $-\infty$  em um tempo  $t$  tal que

$$\tanh t = \frac{1}{|u(0)|},$$

e esse tempo corresponde ao tempo de focalização da família de raio. Em um tempo adicional  $\tau$ , o valor de  $u$  decresce de  $+\infty$  a um valor finito (Figura 4.3).

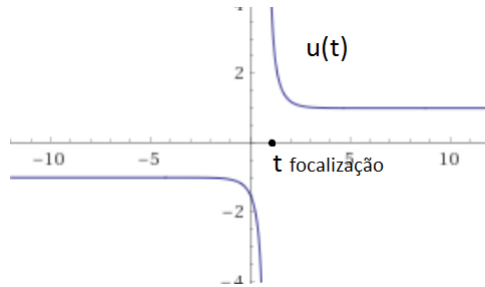


Figura 4.3: Tempo  $t$  em  $u(t)$  com  $\tanh t = \frac{1}{|u(0)|}$ .

Em [19], os irmãos Gutkin e Smilansky provaram que o  $\frac{1}{|u(0)|}$  satisfaz a mesma expressão que é conhecida para a geometria Euclidiana, ou seja,

$$\tanh t = \frac{1}{|u(0)|} = \frac{\sin \psi}{\kappa - \frac{\psi'}{s'}}.$$

Com isso podemos ver que os valores de  $u$  que corresponde aos tempos de focalização antes da colisão, denotado por  $u^-$ , e após a colisão, denotado por  $u^+$ , satisfazem a

equação do espelho

$$\begin{aligned} u^- &= \frac{\kappa - \frac{\psi'}{s'}}{\sin \psi} \\ u^+ &= -\frac{\kappa + \frac{\psi'}{s'}}{\sin \psi} \\ u^+ + u^- &= \frac{2\kappa}{\sin \psi}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Combinando (4.2) e (4.3), podemos definir  $u(t)$  para todo tempo  $t$ . Vamos chamar tal função de *solução de Riccati* baseada em  $x = (s, \psi)$  e vamos dizer que focaliza quando  $u(t) = -\infty$ . Denotamos por  $u(t; \bar{\xi})$  a solução de Riccati que em  $t = 0$  corresponde ao vetor  $\bar{\xi} \in T_q Q$ .

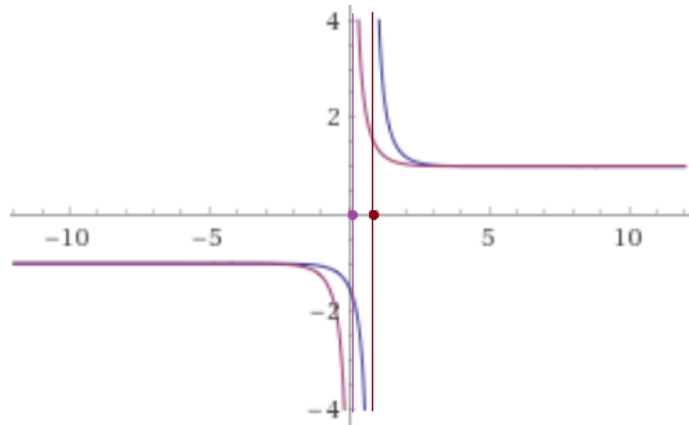
**Definição 4.6** (Tempo de focalização). *Denotamos por  $\tau^+(x; \bar{\xi})$ ,  $\tau^-(x; \bar{\xi})$  os tempos que a solução de Riccati  $u(t; \bar{\xi})$  focaliza em tempo para frente e para trás, i. e.*

$$u(\tau^+(x; \bar{\xi}); \bar{\xi}) = u(-\tau^-(x; \bar{\xi}); \bar{\xi}) = -\infty.$$

E denotamos por  $\tau_k^+(x; \bar{\xi})$  a  $k$ -ésima vez que a solução de Riccati focaliza.

Da propriedade de unicidade de soluções de equações diferenciais obtemos o seguinte resultado.

**Lema 4.7** (Propriedade de ordenação). *Sejam  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  soluções de Riccati baseadas na mesma trajetória. Suponha que  $u_2(0) \in (u_1(0), u_3(0))$ , onde tomamos a ordenação vinda do círculo que conseguimos por identificar  $\pm\infty$ . Então  $u_2(t) \in (u_1(t), u_3(t))$  para todo  $t$ .*



**Corolário 4.8.** *Sejam  $u_1$  e  $u_2$  soluções de Riccati baseada em  $x = (s, \psi)$ . Suponhamos que  $x$  colida com a fronteira nos tempos  $t_1$  e  $t_2$ . Suponhamos também que  $u_1^-(t_1) > u_2^-(t_2) \geq 0$  e que existe  $\tau \in (t_1, t_2]$  para o qual  $u_1(\tau) = -\infty$ . Então existe  $\tau^* \in (t_1, \tau)$  para o qual  $u_2(\tau^*) = -\infty$ .*

A aplicação do bilhar  $F^k(x)$  é a composição de aplicações twist [16], mas por si só não é uma aplicação twist. Se  $\Gamma$  é um arco focalizador, então  $F_\Gamma^k(x)$  será uma aplicação twist, como mostra a proposição a seguir.

**Proposição 4.9.** *Seja  $\Gamma$  um arco focalizador. Para  $k = 0, 1, \dots, n(s, \psi)$ , suponha que  $F_\Gamma^k(x) \in \text{Int}(S_\Gamma)$  e seja  $U(x)$  uma vizinhança de  $x$  tal que se  $w \in U(x)$ , então  $F_\Gamma^k(w) \in \text{Int}(S_\Gamma)$ . Então  $F_\Gamma^k|_{U(x)}$  é uma aplicação twist para  $k = 0, 1, \dots, n(x)$ , i.e. para  $w = x$  e  $s_k(s, \psi)$  o comprimento de arco de  $F_\Gamma^k(s, \psi)$ , temos  $\frac{ds_k}{d\psi} > 0$ .*

*Demonstração.* Para  $(s, \psi)$  focalizado por  $\Gamma$ , então afirmamos que  $DF_{(s, \psi)}^k X_\psi = (s'_k, \psi'_k)$ , com  $k = 1, 2, \dots, n(s, \psi)$ , satisfaz  $s'_k > 0$ , o que implica o resultado.

Denotamos por  $X_p^-$  variação paralela quando atinge  $(s, \psi)$  e seja  $u_p$  a solução de Riccati correspondente de modo que  $u_p^-(0) = 0$  e  $u_p^+(0) < 0$ . Entre os pontos  $F^k(s, \psi)$  e  $F^{k+1}(s, \psi)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n(s, \psi)$ , a variação focaliza, i.e. existe um  $\tau_{k+1} \in (t_k, t_{k+1})$  tal que  $u_p(\tau_{k+1}) = -\infty$ .

Seja  $u_\psi$  a solução de Riccati correspondente a  $X_\psi$  de modo que  $u_\psi^+(0) = \pm\infty$  e portanto  $0 < u_\psi^-(t_1) < u_p^-(t_1)$ . Pelo corolário 4.8,  $u_\psi$  focaliza entre  $(t_{k-1}, t_k)$ ,  $k = 2, 3, \dots, n(s, \psi)$ . Observando a curva  $F\eta(\sigma)$ , onde  $\eta(\sigma)$  é a curva que gera  $X_\psi$ , então  $s'_1 > 0$ . Se  $s'_k > 0$  e a variação  $u_\psi$  foca entre  $t_k$  e  $t_{k+1}$ , então observando primeira coordenada de  $F^{k+1}\eta(\sigma)$ , vemos que  $s'_{k+1} > 0$ .  $\square$

## 4.2 Campo de cones

Definindo um campo de cones  $\mathcal{K}(s, \psi) = \{(s', \psi') \in T_{(s, \psi)}M : s' \geq 0\}$  e como após  $n$  iteradas temos  $s'_k > 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , Percival and Mackay [24], mostraram que um vetor tangente a uma curva invariante através de  $(s, \psi)$  no espaço de fase está dentro de  $\cap_{k=0}^n DF^{-k}(\mathcal{K}(F^k(s, \psi)))$ .

Para um arco focalizador  $\Gamma$ , vimos que  $s'_k > 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , enquanto  $(s, \psi)$  continua colidindo com  $\Gamma$ . Então através de todo ponto  $(s, \psi) \in S_\Gamma$ , pode existir uma curva invariante: a interseção dos cones não é vazia. Essa interseção não vazia irá permitir a construção de cones  $\mathcal{C}(s, \psi)$  que precisamos para provar que os expoentes de Lyapunov são positivos.

Definimos um cone  $\bar{\mathcal{C}}(s, \psi)$  que consiste de todas as variações  $\xi$  que

(C.1) são divergentes ( $u^- \geq 0$ ) quando atingem  $F^k(s, \psi)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n(s, \psi)$ .

(C.2) são convergentes ( $u^+ \geq 0$ ) quando deixam  $F^k(s, \psi)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n(s, \psi)$ .

Observamos que uma variação satisfazendo as condições acima focalizam entre cada par de colisões com a fronteira  $\Gamma$ .

Tomemos

$$\mathcal{K}^+(s, \psi) = \{(s', \psi') \in T_{(s, \psi)}S : -\kappa(s) \leq \frac{\psi'}{s'} \leq +\kappa(s)\}. \quad (4.4)$$

Então o conjunto de variações satisfazendo ((C.1)) e ((C.2)) é dado por

$$\bar{\mathcal{C}}(s, \psi) = \bigcap_{k=0}^{n(s, \psi)} DF^{-k}(\mathcal{K}^+(F^k(s, \psi))). \quad (4.5)$$

**Proposição 4.10.** *Se  $(s, \psi)$  é focalizado por  $\Gamma$ , então o cone  $\bar{\mathcal{C}}(s, \psi)$  definido por (4.5) tem interior não vazio e é dado por*

$$\bar{\mathcal{C}}(s, \psi) = \{(s', \psi') \in T_{(s, \psi)}S : m(X_p^+) \leq \frac{\psi'}{s'} \leq \kappa(s)\}.$$

*Demonstração.* Se  $(s, \psi)$  é focalizado, então a variação paralela  $X_p^- \in T_{(s, \psi)}S_\Gamma$  satisfaz  $DF_{(s, \psi)}^k X_p^- \in \text{Int}(\mathcal{K}^+(F^k(s, \psi)))$ ,  $k = 1, 2, \dots, n(s, \psi)$ . Portanto existe uma vizinhança aberta ao redor de  $X_p^-$  com essa propriedade. Como  $X_p^-$  forma uma aresta do cone  $\mathcal{K}^+(s, \psi)$ ,  $\mathcal{C}(s, \psi)$  tem interior não vazio.

Seja  $X_p^+ \in T_{(s, \psi)}S_\Gamma$  uma variação que é paralela quando sai  $F^{n(s, \psi)}(s, \psi)$ , i. e.  $u^+(t_{n(s, \psi)}; X_p^+) = 0$ . Vejamos que  $X_p^+ \in \bar{\mathcal{C}}(s, \psi)$ . Isso segue do fato que a variação paralela chegando no ponto  $(s^*, \psi^*) = (s(F^{n(s, \psi)}(s, \psi)), \pi - \psi(F^{n(s, \psi)}(s, \psi)))$  é obtida pelo tempo reverso da variação  $DF^{n(s, \psi)} X_p^+$  e que o ponto  $(s^*, \psi^*)$  é focalizado por  $\Gamma$ .

A variação  $X_p^+$  é o caso limite das variações que estão convergindo depois de sair  $F^{n(s, \psi)}(s, \psi)$  e  $\tau_{n(s, \psi)}^+((s, \psi); X_p^+) = \infty$ . Se a variação paralela  $X_p^-$  em  $T_{(s, \psi)}S_\Gamma$  é focalizado por  $\Gamma$ , então  $\tau_{n(s, \psi)}^+((s, \psi); X_p^-)$  é finito. A propriedade de ordenação e (4.3) implicam que as inclinações dos vetores satisfazem  $m(X_p^+) < m(X_p^-) = \kappa(s)$ .  $\square$

Para qualquer  $m_l > m(X_p^+)$  escolhemos um cone  $\mathcal{C}((s, \psi), m_l) \subset \bar{\mathcal{C}}(s, \psi)$  tal que

$$\mathcal{C}((s, \psi), m_l) = \{(s', \psi') \in T_{(s, \psi)}S : m_l \leq \frac{\psi'}{s'} \leq \kappa(s)\}. \quad (4.6)$$

Denotamos por  $\xi_l$  a variação satisfazendo  $m(\xi_l) = m_l$ .

Dado um cone  $\mathcal{C}((s, \psi), m_l)$ , definimos o tempo de focalização para frente de  $(s, \psi)$  com respeito a  $\mathcal{C}$  usando a definição de tempo de focalização por

$$\tau_{\mathcal{C}}^+(s, \psi) = \sup_{\xi \in \mathcal{C}((s, \psi), m_l)} \tau_{n(s, \psi)}^+((s, \psi); \xi),$$

e o tempo de focalização para trás de  $(s, \psi)$  com respeito a  $\mathcal{C}$  por

$$\tau_{\mathcal{C}}^-(s, \psi) = \sup_{\xi \in \mathcal{C}((s, \psi), m_l)} \tau_{n(s, \psi)}^-((s, \psi); \xi),$$

Uma vez que temos  $\tau_{\mathcal{C}}^{\pm}(s, \psi)$  finito, podemos fazer os cones serem aplicados estritamente dentro de outro. Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  dois arcos focalizadores e sejam  $(s_1, \psi_1) \in S_{\Gamma_1}^+$  e  $(s_2, \psi_2) \in S_{\Gamma_2}^-$  seus respectivos arcos. Fazemos a escolha de cones  $\mathcal{C}_i((s_i, \psi_i), m_l(s_i, \psi_i)) \subset \bar{\mathcal{C}}_i(s_i, \psi_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

**Proposição 4.11.** *Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  arcos focalizadores de uma mesa de bilhar convexa  $\partial Q$ . Suponhamos que após sair de  $\Gamma_1$ ,  $(s_1, \psi_1)$  retorna a uma parte estritamente convexa de  $Q$  após um tempo  $L$  em um ponto  $(s_2, \psi_2)$ . Se*

$$L > \tau_{\mathcal{C}_1}^+(s_1, \psi_1) + \tau_{\mathcal{C}_2}^-(s_2, \psi_2),$$

então

$$DF^{n(s_1, \psi_1)+1}(\mathcal{C}_1(s_1, \psi_1)) \subset \text{Int}(\mathcal{C}_2(s_2, \psi_2)).$$

*Demonstração.* Vimos que, para todo  $\xi \in \mathcal{C}_1(s_1, \psi_1)$ ,

$$m(DF^{n(s_1, \psi_1)+1}\xi) \in (m(\xi_l(s_1, \psi_1)), k(s_2)).$$

Aplicando o lema da focalização 4.4 em  $L > \tau_{\mathcal{C}_1}^+(s_1, \psi_1) + \tau_{\mathcal{C}_2}^-(s_2, \psi_2)$ , implica que

$$m(DF^{n(s_1, \psi_1)+1}\xi) > m(\xi_l(s_2, \psi_2)).$$

Por outro lado, como  $X_p^- \in \mathcal{C}_2(s_2, \psi_2)$  nunca focaliza em um tempo para trás, i. e.  $\tau^-((s_2, \psi_2); X_p^-) = \infty$ , então temos que

$$m(DF^{n(s_1, \psi_1)+1}\xi) < k(s_2).$$

□

Sendo o valor de  $m_l$  decrescente, temos um cone maior  $\mathcal{C}(s, \psi)$  e então  $\tau_{\mathcal{C}}^-(s, \psi)$  decresce. Mas sendo o cone maior temos um impasse: agora é mais difícil para todos



os vetores em  $\mathcal{C}(s, \psi)$  entrar no próximo cone, já que  $\tau_{\mathcal{C}}^+(s, \psi)$  cresce. Para um arco focalizador, não é claro qual é a escolha ótima de  $\{m_l(s, \psi)\}$ .

Para definir um campo de cones para todo  $(s^*, \psi^*) \in S_{\Gamma}$ , empurramos para frente os cones definidos para  $(s, \psi) \in S_{\Gamma}^-$

$$\mathcal{C}(F^k(s, \psi)) = DF_{(s, \psi)}^k(\mathcal{C}(s, \psi)), \quad k = 1, 2, \dots, n(s, \psi). \quad (4.7)$$

**Teorema 4.12.** *Dado um arco focalizador  $\Gamma$ , existe uma escolha de campo de cones  $\{\mathcal{C}(s, \psi)\}$ ,  $(s, \psi) \in S_{\Gamma}^-$ , definido como em (4.6) e (4.7), tal que o tempo de focalização para frente e para trás do arco*

$$\tau_{\Gamma, \mathcal{C}}^+ = \sup_{(s, \psi) \in S_{\Gamma}^-} \tau_{\mathcal{C}}^+(s, \psi), \quad \tau_{\Gamma, \mathcal{C}}^- = \sup_{(s, \psi) \in S_{\Gamma}^-} \tau_{\mathcal{C}}^-(s, \psi)$$

são ambos finitos. Além disso, esses tempos de focalização variam continuamente com a curva  $\Gamma$ .

Definimos o tempo de focalização de  $\Gamma$  com respeito a um campo de cone  $\{\mathcal{C}(s, \psi)\}$  por

$$\tau_{\Gamma, \mathcal{C}} = \max\{\tau_{\Gamma, \mathcal{C}}^+, \tau_{\Gamma, \mathcal{C}}^-\}.$$

Combinando a proposição (4.11), o teorema (4.12) e o teorema de Wojtkowski (1.29) obtemos

**Corolário 4.13.** *Seja  $\partial Q$  uma fronteira convexa dada pela união de arcos focalizadores  $\{\Gamma_i\}_{i=1}^N$  e por segmentos geodésicos. Se existe uma escolha de campos de cones*

$$\{\mathcal{C}_i((s, \psi), m_l(s, \psi))\}, (s, \psi) \in S_{\Gamma_i}^-, \quad i = 1, \dots, N$$

tal que

$$\text{dist}(\Gamma_i, \Gamma_j) > \tau_{\Gamma_i, \mathcal{C}_i} + \tau_{\Gamma_j, \mathcal{C}_j}, \quad i \neq j,$$

então a aplicação do bilhar tem expoentes de Lyapunov positivos em quase todo ponto.

Este corolário prova o Teorema 3 apresentado na Introdução dessa tese. Para a demonstração do teorema (4.12) vamos provar o seguinte lema.

**Lema 4.14.** *Seja  $\Gamma$  uma curva convexa. Dado  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\Psi > 0$  tal que para todo  $(s, \psi) \in S_{\Gamma}^-$  com  $\psi \leq \Psi$  quando definimos  $\mathcal{C}((s, \psi), m_l(s, \psi))$  por  $m_l(s, \psi) = m(\xi_l)$  satisfazendo (C.1) e (C.2), então*

$$\max\{\tau_{\mathcal{C}}^+(s, \psi), \tau_{\mathcal{C}}^-(s, \psi)\} < \varepsilon.$$

O valor de  $\Psi$  varia continuamente com a curva.

*Demonstração.* Vamos analisar  $\tau_{n(s,\psi)}^+((s, \psi), \xi_l) = \tau^+(F^{n(s,\psi)}(s, \psi), DF^{n(s,\psi)}\xi_l)$  e  $\tau^-((s, \psi), \xi_l)$ . Das equações 4.3,

$$\tau_1^+((s^*, \psi^*), \xi) = \operatorname{arctanh} \left( \frac{\sin \psi}{\kappa + m(\xi)} \right), \text{ se } m(\xi) > -\kappa,$$

$$\tau^-((s^*, \psi^*), \xi) = \operatorname{arctanh} \left| \frac{\sin \psi}{\kappa - m(\xi)} \right|, \text{ se } m(\xi) < \kappa.$$

Os valores de  $|m(DF^k \xi_l)|$  e  $\psi(F^k(s, \psi))$ ,  $k = 0, 1, \dots, n(s, \psi)$  pode ser uniformemente próximo de zero pela escolha adequada de  $\Psi$ .  $\square$

*Demonstração.* (do Teorema 4.12) Dado  $\varepsilon > 0$ , o lema anterior mostra que existe  $\Psi > 0$  tal que para qualquer  $(s, \psi) \in S_\Gamma^-$  com  $\psi \in \{(0, \Psi] \cup [\pi - \Psi, \pi)\}$  existe uma escolha de campos de cones  $\{\mathcal{C}((s, \psi), m_l(s, \psi))\}$  para o qual

$$\sup_{(s,\psi)} \tau^-((s, \psi), \xi_l(s, \psi)) \leq \varepsilon,$$

$$\sup_{(s,\psi)} \tau_{n(s,\psi)}^+((s, \psi), \xi_l(s, \psi)) \leq \varepsilon.$$

Seja  $(s, \psi)$  satisfazendo  $\psi \in [\Psi, \pi - \Psi]$  e escolhamos  $m_l(s, \psi)$ . Para todo ponto vizinho  $w$  de  $(s, \psi)$ , vamos usar a mesma aresta inferior do cone, ou seja,  $m_l(w) = m_l(s, \psi)$ .

Como  $\tau^-((s, \psi), \xi_l(s, \psi))$  e  $\tau_k^+((s, \psi), \xi_l(s, \psi))$ ,  $k = 0, 1, \dots, n(s, \psi)$ , são finitos, variam continuamente com  $(s, \psi)$ . Então, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, existe um  $\delta(s, \psi)$  tal que para todo  $(s^*, \psi^*) \in \overline{B}((s, \psi), \delta(s, \psi)) = \{(s^*, \psi^*) \in S_\Gamma : |(s^*, \psi^*) - (s, \psi)| < \delta(s, \psi)\}$ ,

$$\tau^-((s^*, \psi^*), \xi_l(s, \psi)) \leq \tau^-((s, \psi), \xi_l(s, \psi)) + \varepsilon,$$

$$\tau_k^+((s^*, \psi^*), \xi_l(s, \psi)) \leq \tau_k^+((s, \psi), \xi_l(s, \psi)) + \varepsilon, \quad k = 0, 1, \dots, n(w),$$

onde  $n(w) \leq n(s, \psi)$ . Cobrindo o conjunto compacto  $\{(s, \psi) \in S_\Gamma^- : \psi \in [\Psi, \pi - \Psi]\}$  por uma união finita  $\cup_{i=1}^N \overline{B}((s_i, \psi_i), \delta(s_i, \psi_i))$ , obtemos o resultado.  $\square$

### 4.3 Biliar no Estádio Circular

Apresentamos nessa seção o exemplo do estádio circular. Nesse sentido, vamos mostrar, com uma prova geométrica, que o bilhar no estádio circular possui expoentes

de Lyapunov positivos em quase todo ponto. Essencialmente descrevemos os cones no espaço de fase e aplicamos o Teorema de Wojtkowski 1.29 que garante os expoentes positivos.

### 4.3.1 Bilhar Circular

Iniciamos apresentando o bilhar circular para entendermos a construção dos cones e verificamos que não podemos aplicar o Teorema de Wojtkowski 1.29.

Consideramos um bilhar em um círculo geodésico, no plano hiperbólico, de raio  $\rho$  e seja a aplicação do bilhar dada por

$$F(s, \psi) = ((s + \alpha(\psi) \sinh \rho) \bmod (2\pi \sinh \rho), \psi),$$

$$\text{com } \cos \alpha(\psi) = \frac{\cosh^2 \rho - \tan^2 \psi}{\sinh^2 \rho + \sec^2 \psi}.$$

Esse sistema é integrável [16], uma vez que  $\psi$  permanece constante ao longo de uma órbita. O espaço de fase decompõe em uma união de círculos invariantes dados por  $\psi = \text{constante}$ .

Definimos um campo de cones  $\{\mathcal{C}(s, \psi)\}$ ,  $(s, \psi) \in M$ , por

$$\mathcal{C}(s, \psi) = \{aX_s + bX_\psi : ab \geq 0\}. \quad (4.8)$$

A seguir apresentamos um teorema que faz uso das definições de campo de cones invariante e campo de cone estritamente invariante (ver página 20).

**Teorema 4.15.** *Sob a aplicação do bilhar  $F$  no círculo geodésico, esse campo de cone é invariante, mas não estritamente invariante.*

*Demonstração.* No círculo geodésico vale  $\psi_1 = \psi_2 = \psi$  e  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ , com isso

$$\begin{aligned} DF_{(s_1, \psi_1)} \cdot X_\psi &= \frac{1}{\sin \psi} \begin{pmatrix} \kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi & \sinh g \\ \kappa(\kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi) + \sinh g \sin \psi \sin \psi - \kappa \cosh g \sin \psi & \kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin \psi} \begin{pmatrix} \sinh g \\ \kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podemos observar que  $\sinh g > 0$ . Queremos provar agora que  $\kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi > 0$ , ou seja,  $\tanh g > \frac{\sin \psi}{\kappa}$ . Usando a lei dos cossenos, temos que

$$\cosh \rho = \cosh g \cosh \rho - \sinh g \sinh \rho \cos(\pi/2 - \psi),$$

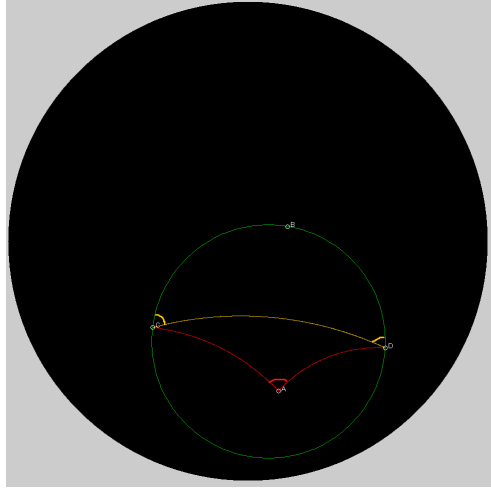


Figura 4.4: Site NonEuclid [1]

de onde obtemos que

$$\tanh \rho \sin \psi = \frac{1}{\tanh g} - \frac{1}{\sinh g} = \tanh g/2. \quad (4.9)$$

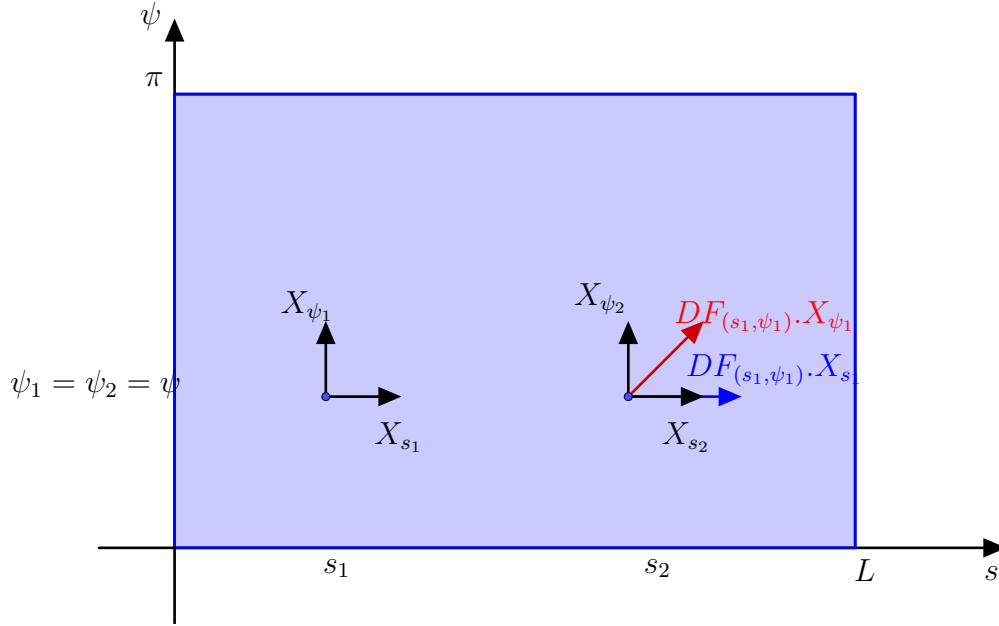
Em [9] vemos que no círculo geodésico de raio  $\rho$  a sua curvatura  $\kappa$  é dada por

$$\kappa = \frac{1}{\tanh \rho}. \quad (4.10)$$

Por (4.9) e (4.10), obtemos  $\tanh g > \tanh \rho \sin \psi$ .

Portanto

$$DF_{(s_1, \psi_1)} \cdot X_{\psi_1} \subset \text{Int}\mathcal{C}(F(s_1, \psi_1)) = \text{Int}\mathcal{C}(s_2, \psi_2) \quad (4.11)$$



Outro modo de obter (4.11) é observar que  $F$  é uma aplicação do twist.

Vale acrescentar uma observação interessante que, por (4.9),  $\tanh g/2 = \tanh \rho \sin \psi$ , resultado análogo ao caso euclidiano em que  $g/2 = \rho \sin \psi$ .

Vejamos agora que  $DF_{(s_1, \psi_1)} \cdot X_{s_1} \subset \partial \mathcal{C}(F(s_1, \psi_1)) = \partial \mathcal{C}(s_2, \psi_2)$ .

$$\begin{aligned} DF_{(s_1, \psi_1)} \cdot X_{s_1} &= \frac{1}{\sin \psi} \begin{pmatrix} \kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi & \sinh g \\ \kappa(\kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi) + \sinh g \sin \psi \sin \psi - \kappa \cosh g \sin \psi & \kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin \psi} \begin{pmatrix} \kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi \\ \kappa(\kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi) + \sinh g \sin \psi \sin \psi - \kappa \cosh g \sin \psi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Já analisamos que  $\kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi > 0$ . Agora,

$$\begin{aligned} \kappa(\kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi) + \sinh g \sin \psi \sin \psi - \kappa \cosh g \sin \psi &= 0 \\ \Leftrightarrow \tanh g - \frac{\sin \psi}{\kappa} - \frac{\sin \psi}{\kappa} + \tanh g \frac{\sin \psi}{\kappa} \frac{\sin \psi}{\kappa} &= 0 \\ \Leftrightarrow \tanh g - 2 \tanh \rho \sin \psi + \tanh g \tanh^2 \rho \sin^2 \psi &= 0 \\ \Leftrightarrow \tanh g - 2 \tanh g/2 + \tanh g \tanh^2 g/2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \tanh g = \frac{2 \tanh g/2}{1 + \tanh^2 g/2}. \end{aligned}$$

Podemos ver que a última igualdade é verdadeira por se tratar de uma identidade trigonométrica da geometria hiperbólica.

Portanto o vetor horizontal  $X_{s_1}$  permanece horizontal, ou seja, a tangente ao

círculo invariante no espaço de fase é enviado em uma tangente ao mesmo círculo invariante.

□

Para uma interpretação geométrica, seja

$$\eta(\sigma) = (s_1 + \sigma, \psi), \quad (4.12)$$

$\sigma \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  uma família de raios que gera  $X_{s_1}$ , ou seja,  $\eta(0) = (s_1, \psi_1)$  e  $\eta'(0) = X_{s_1}$ . Aplicando  $F$  a essa família, obtemos

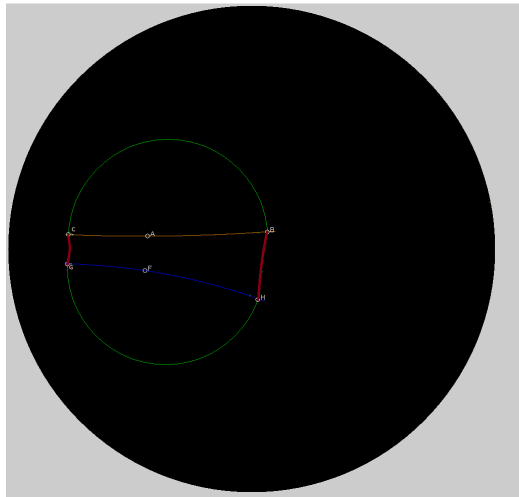
$$F(\eta(\sigma)) = (s_1 + \rho + \alpha(\psi) \sinh \sigma, \psi) = (s_2 + \sigma, \psi),$$

que corresponde a uma família que gera o vetor horizontal  $X_{s_2}$  em  $(s_2, \psi)$ .

Por simetria, a família  $\eta(\sigma)$  focaliza no ponto médio da trajetória, ou seja, a uma distância  $g/2$  de  $s_1$ , onde vale  $\tanh g/2 = \tanh \rho \sin \psi$ .

### 4.3.2 Bilhar no Estádio Circular

Para produzir expoente de Lyapunov positivo, precisamos encontrar um modo de "levantar" o vetor horizontal do cone. Isso é alcançado ao construir um estádio circular. Definimos um estádio circular como sendo a região limitada por conectarmos dois semicírculos de mesmo raio por segmentos geodésicos de mesmo comprimento.



A partir daqui,  $F : M \rightarrow M$  dada por  $F(s_1, \psi_1) = (s_2, \psi_2)$  representará a aplicação do bilhar no estádio circular e  $M$  seu espaço de fase. Para  $(s_i, \psi_i)$  definimos o campo de cones como anteriormente em (4.8).

**Proposição 4.16.** *Sob a aplicação  $F : M \rightarrow M$ , o campo de cones definido por (4.8) é estritamente invariante para o futuro em quase todo ponto.*

*Demonstração.* Vamos separar em casos iniciais.

- Ambos  $(s_1, \psi_1)$  e  $(s_2, \psi_2)$  pertencem a mesma componente circular;

Esse caso é idêntico ao caso do bilhar no círculo e já vimos que o campo de cones é invariante, mas não estritamente invariante.

- $(s_1, \psi_1)$  pertence a uma componente circular e  $(s_2, \psi_2)$  pertence a outra componente circular (ver figura 4.5);

Vamos mostrar que  $DF_{(s_1, \psi_1)} \cdot X_{s_1} \subset \text{Int}\mathcal{C}(F(s_1, \psi_1))$ . Por (4.12), a família que gera  $X_{s_1}$  irá focalizar para frente a uma distância  $d_1$  de  $\Gamma(s_1)$  ao longo da trajetória. Essa distância satisfaz, por (4.9),

$$\tanh d_1 = \tanh \rho \sin \psi_1.$$

De mesmo modo, a família que gera  $X_{s_2}$  irá focalizar para trás a uma distância  $d_2$  de  $\Gamma_2$  ao longo da trajetória e satisfaz

$$\tanh d_2 = \tanh \rho \sin \psi_2.$$

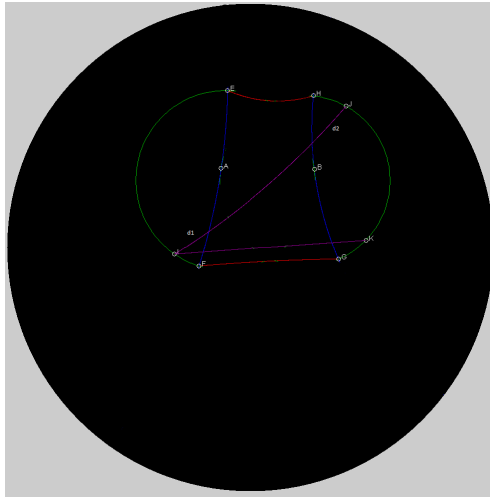


Figura 4.5: Segmento de trajetória indo de uma semicirculo a outro semicirculo.

Lembrando que agora  $\psi_1 \neq \psi_2$  e  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ , temos

$$DF_{(s_1, \psi_1)} \cdot X_{s_1} = \frac{1}{\sin \psi_2} \begin{pmatrix} \kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi_1 \\ \kappa(\kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi_1) + \sinh g \sin \psi_2 \sin \psi_1 - \kappa \cosh g \sin \psi_2 \end{pmatrix}$$

Novamente,  $\kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi_1 > 0$ , pois  $\tanh g > \tanh d_1 = \tanh \rho \sin \psi_1$ . Agora, temos

$$\begin{aligned} & \kappa(\kappa \sinh g - \cosh g \sin \psi_1) + \sinh g \sin \psi_2 \sin \psi_1 - \kappa \cosh g \sin \psi_2 > 0 \\ \Leftrightarrow & \tanh g - \tanh \rho \sin \psi_1 - \tanh \rho \sin \psi_2 + \tanh g \tanh \rho \sin \psi_1 \tanh \rho \sin \psi_2 > 0 \\ \Leftrightarrow & \tanh g - \tanh d_1 - \tanh d_2 + \tanh g \tanh d_1 \tanh d_2 > 0 \\ \Leftrightarrow & \tanh g > \frac{\tanh d_1 + \tanh d_2}{1 + \tanh d_1 \tanh d_2} = \tanh(d_1 + d_2) \end{aligned}$$

Vejamus  $g > d_1 + d_2$ . Vamos nos referenciar na Figura 4.6. Primeiro observamos que se os semicírculos estão afastados de tal modo que o segmento geodésico do estádio  $h$  seja maior que  $2\rho$ , ou seja, se consideramos os círculos completos que contêm os semicírculos, estes não se intersectam. Como a focalização ocorre dentro de cada círculo, temos que  $g > d_1 + d_2$ .

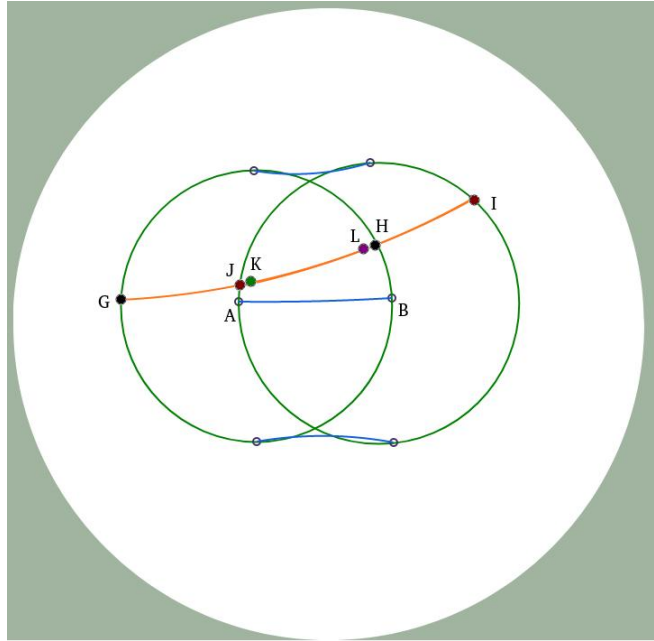


Figura 4.6: Distâncias de focalização no estádio circular.

Agora se os dois círculos se intersectam, seja  $G = \Gamma(s_1)$  ponto em um semicírculo e  $I = F(s_1, \psi_1) = (s_2, \psi_2)$  pertencente ao outro semicírculo. Ao considerarmos os círculos que contêm os semicírculos, obtemos os pontos  $H$  e  $J$  que são interseções do segmento de trajetória com os círculos. Uma família de raios que gera  $X_{s_1}$ , focaliza para frente em um ponto  $K$  de tal modo que  $K$  é ponto médio do segmento  $GH$ . Uma família que gera  $X_{s_2}$ , focaliza para trás em um ponto  $L$  que é ponto médio do segmento  $JI$ . Como os semicírculos estão afastados, ou seja,



os pontos  $A$  e  $B$  são distintos, o comprimento do segmento  $GI$  é maior que o comprimento dos segmentos  $GH$  e  $JI$ , i.e.,  $|GI| > |GH|$  e  $|GI| > |JI|$ . Sendo  $|GK| = \frac{1}{2}|GH|$  e  $|LI| = \frac{1}{2}|JI|$ , obtemos que  $|GI| > |GK| + |LI|$ . Lembrando que  $|GI| = g$ ,  $|GK| = d_1$  e  $|LI| = d_2$ , concluímos que  $g > d_1 + d_2$ .

- $(s_1, \psi_1)$  pertence a um semicírculo,  $(s_2, \psi_2)$  pertence a um segmento geodésico e  $(s_3, \psi_3)$  pertence ao outro semicírculo (ver figura 4.7);

Para descrever esse segmento de trajetória, efetuamos o produto de matrizes derivadas correspondente a cada uma das batidas, em que a matriz derivada da aplicação do bilhar indo de  $(s_1, \psi_1)$  para  $(s_2, \psi_2)$ , onde  $g_{12}$  representa a distância geodésica desse segmento de trajetória e  $k$  é a curvatura do semicírculo, é dada por:

$$DF_{(s_1, \psi_1)} = \frac{1}{\sin \psi_2} \begin{pmatrix} \kappa \sinh g_{12} - \cosh g_{12} \sin \psi_1 & \sinh g_{12} \\ \sinh g_{12} \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \kappa \cosh g_{12} \sin \psi_2 & -\cosh g_{12} \sin \psi_2 \end{pmatrix}.$$

E a matriz derivada da aplicação do bilhar indo de  $(s_2, \psi_2)$  para  $(s_3, \psi_3)$ , onde  $g_{23}$  representa a distância geodésica desse segmento de trajetória e  $k$  é a curvatura do semicírculo, é dada por:

$$DF_{(s_2, \psi_2)} = \frac{1}{\sin \psi_3} \begin{pmatrix} -\cosh g_{23} \sin \psi_2 & \sinh g_{23} \\ -\kappa \cosh g_{23} \sin \psi_2 + \sinh g_{23} \sin \psi_2 \sin \psi_3 & \kappa \sinh g_{23} - \cosh g_{23} \sin \psi_3 \end{pmatrix}$$

Efetuando o produto, obtemos  $DF_{(s_2, \psi_2)} \cdot DF_{(s_1, \psi_1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , em que

$$a_{11} = \frac{1}{\sin \psi_2 \sin \psi_3} [(-\cosh g_{23} \sin \psi_2)(\kappa \sinh g_{12} - \cosh g_{12} \sin \psi_1) +$$

$$(\sinh g_{23})(\sinh g_{12} \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \kappa \cosh g_{12} \sin \psi_2)]$$

$$a_{11} = -\frac{1}{\sin \psi_3} [\kappa \sinh(g_{12} + g_{23}) - \cosh(g_{12} + g_{23}) \sin \psi_1]$$

$$a_{12} = \frac{1}{\sin \psi_2 \sin \psi_3} [(-\cosh g_{23} \sin \psi_2)(\sinh g_{12}) + (\sinh g_{23})(-\cosh g_{12} \sin \psi_2)]$$

$$a_{12} = -\frac{1}{\sin \psi_3} [\sinh(g_{12} + g_{23})]$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= \frac{1}{\sin \psi_2 \sin \psi_3} [(-\kappa \cosh g_{23} \sin \psi_2 + \sinh g_{23} \sin \psi_2 \sin \psi_3)(\kappa \sinh g_{12} - \cosh g_{12} \sin \psi_1) + \\
&\quad (\kappa \sinh g_{23} - \cosh g_{23} \sin \psi_3)(\sinh g_{12} \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \kappa \cosh g_{12} \sin \psi_2)] \\
a_{21} &= -\frac{1}{\sin \psi_3} [\kappa(\kappa \sinh(g_{12} + g_{23}) - \cosh(g_{12} + g_{23}) \sin \psi_1) + \\
&\quad \sinh(g_{12} + g_{23}) \sin \psi_1 \sin \psi_3 - \kappa \cosh(g_{12} + g_{23}) \sin \psi_3] \\
a_{22} &= \frac{1}{\sin \psi_2 \sin \psi_3} [(-\kappa \cosh g_{23} \sin \psi_2 + \sinh g_{23} \sin \psi_2 \sin \psi_3)(\sinh g_{12}) + \\
&\quad (\kappa \sinh g_{23} - \cosh g_{23} \sin \psi_3)(-\cosh g_{12} \sin \psi_2)] \\
a_{22} &= -\frac{1}{\sin \psi_3} [\kappa \sinh(g_{12} + g_{23}) - \cosh(g_{12} + g_{23}) \sin \psi_3]
\end{aligned}$$

Observando as entradas da matriz resultante do produto, vemos que, a menos de um sinal, é igual a uma matriz derivada da aplicação de bilhar com um segmento de trajetória de comprimento  $g_{13} = g_{12} + g_{23}$  indo de  $(s_1, \psi_1)$  para  $(s_3, \psi_3)$ , colidindo em um segmento geodésico em  $(s_2, \psi_2)$ . Portanto, sob a imagem de  $DF_{(s_1, \psi_1)}^2 = DF_{(s_2, \psi_2)} \cdot DF_{(s_1, \psi_1)}$ , temos

$$DF_{(s_1, \psi_1)}^2 \cdot X_{s_1} \in \text{Int}\mathcal{C}(F^2(s_1, \psi_1)).$$

- $(s_1, \psi_1)$  pertence a um semicírculo,  $(s_i, \psi_i)$  pertence aos segmentos geodésicos, com  $1 < i \leq n$  e  $(s_n, \psi_n)$  pertence ao outro semicírculo;

De modo geral, uma trajetória entre  $(s_1, \psi_1)$  e  $(s_n, \psi_n)$ , com  $n - 2$  colisões nos segmentos geodésicos do estádio circular,  $DF_{(s_1, \psi_1)}^{n-1}$  é descrita por um produto de matrizes e, assim como o caso anterior, esse produto de matrizes resulta em uma matriz derivada de uma aplicação de bilhar entre  $(s_1, \psi_1)$  e  $(s_n, \psi_n)$  com comprimento de trajetória  $g_{1n} = g_{12} + g_{23} + \dots + g_{(n-1)n}$ . Além disso, essa matriz alterna de sinal de acordo com o número de colisões nos segmentos geodésicos do estádio. Assim,  $DF_{(s_1, \psi_1)}^{n-1} =$

$$\frac{(-1)^{n-2}}{\sin \psi_n} \begin{pmatrix} \kappa \sinh g_{1n} - \cosh g_{1n} \sin \psi_1 & \sinh g_{1n} \\ a_{21} & \kappa \sinh g_{1n} - \cosh g_{1n} \sin \psi_n \end{pmatrix}$$

com  $a_{21} = \kappa(\kappa \sinh g_{1n} - \cosh g_{1n} \sin \psi_1) + \sinh g_{1n} \sin \psi_1 \sin \psi_n - \kappa \cosh g_{1n} \sin \psi_n$ . O vetor  $DF_{(s_1, \psi_1)}^{n-1} \cdot X_{s_1}$  pode ter ambas coordenadas positivas ou ambas coordenadas positivas de acordo com o sinal da matriz derivada obtida pelo pro-

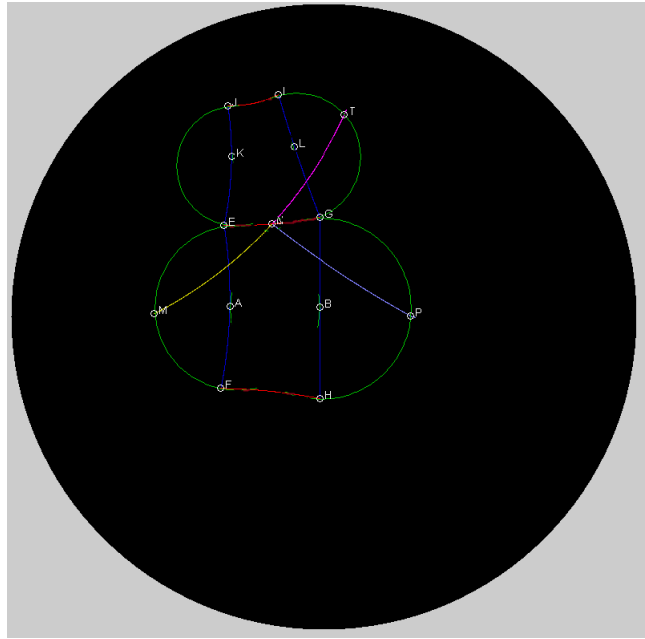


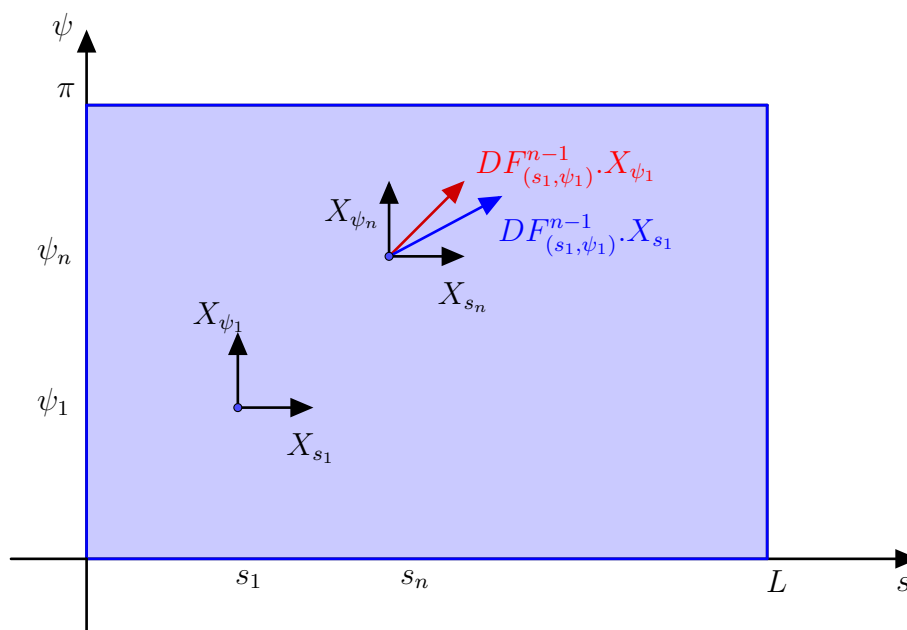
Figura 4.7: Segmentos de trajetória indo de um semicírculo a um segmento de geodésica e indo do segmento de geodésica ao outro semicírculo.

duto das matrizes. Mas  $-\mathcal{C} = \{a(-X_s) + b(X_\psi) : ab \geq 0\} = \mathcal{C}$  e assim  $DF_{(s_1, \psi_1)}^{n-1} \cdot X_{s_1} \in \mathcal{C}(F^{n-1}(s_1, \psi_1))$ .

Portanto, construímos um campo de cones mensurável e estritamente invariante por  $F$  no futuro para o bilhar no estádio circular.

Aplicando o teorema de Wojtkowski 1.30 obtemos:

**Corolário 4.17.** *A aplicação do bilhar no estádio circular em  $\mathbb{H}^2$  tem expoentes de expoente de Lyapunov positivo em quase todo ponto.*



□

# Referências Bibliográficas

- [1] <http://cs.unm.edu/joel/noneuclid>.
- [2] S. Angenent. A remark on the topological entropy and invariant circles of an area preserving twist map. *Proceedings IMA*, 44:6, 1992.
- [3] M. Bialy. Hopf rigidity for convex billiards on the hemisphere and hyperbolic plane. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - A*, 33(1078-0947\_2013\_9\_3903):3903–3913, 2013.
- [4] G. Birkhoff. *Dynamical Systems*. American Mathematical Society - Providence, Estados Unidos. American Mathematical Society, 1927.
- [5] V. Blumen, K. Kim, J. Nance, and V. Zharnitsky. Three-period orbits in billiards on the surfaces of constant curvature. *International Mathematics Research Notices*, 2012, 08 2011.
- [6] V. Blumen, K. Kim, J. Nance, and V. Zharnitsky. Three-period orbits in billiards on the surfaces of constant curvature. *International Mathematics Research Notices*, 2012, 08 2011.
- [7] A. Bolsinov, A. Borisov, and I. Mamaev. Topology and stability of integrable systems. *Nauk*, 652:71–132, 07 2010.
- [8] F. Brickell and C. C. Hsiung. The total absolute curvature of closed curves in riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 9(1):177–193, 1974.
- [9] M. Bridgeman. Average curvature of convex curves in  $h^2$ . *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126(1):221–224, 1998.
- [10] L. A. Bunimovich. Many-dimensional nowhere dispersing billiards with chaotic behavior. *Phys. D*, 33(1–3):58–64, Oct. 1988.
- [11] N. Chernov. Entropy, Lyapunov exponents, and mean free path for billiards. *Journal of Statistical Physics*, 88(1-2):1–29, July 1997.

- [12] M. do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Textos Universitarios: Ciências médicas. Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [13] M. do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Textos universitários. SBM, 2012.
- [14] V. J. Donnay. Using integrability to produce chaos: Billiards with positive entropy. *Communications in Mathematical Physics*, 141(2):225–257, Oct 1991.
- [15] L. C. dos Santos. *Bilhares em superfícies de curvatura constante*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2014.
- [16] L. C. dos Santos and S. P. de Carvalho. Periodic orbits of oval billiards on surfaces of constant curvature. *Dynamical Systems*, 32(2):283–294, 2017.
- [17] A. T. Fomenko. *Integrability and Nonintegrability in Geometry and Mechanics*, volume 31. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 11 1988.
- [18] C. Golé. *Symplectic Twist Maps: Global Variational Techniques*. Advanced Series in Nonlinear Dynamics: Vol 18, 11 2001.
- [19] B. Gutkin, U. Smilansky, and E. Gutkin. Hyperbolic billiards on surfaces of constant curvature. *Communications in Mathematical Physics*, 208:65–90, 01 1999.
- [20] B. Halpern. Strange billiard tables. *Amer. Math. Soc.*, 232:297–305, 1977.
- [21] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, pages 1–824. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1995.
- [22] A. I. Khinchin. The entropy concept in probability theory. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 8:3–20, 1953.
- [23] C. Labrousse and J.-P. Marco. Polynomial entropies for bott integrable hamiltonian systems. *Regular and Chaotic Dynamics*, 19:374–414, 05 2014.
- [24] R. S. MacKay and I. C. Percival. Converse kam: theory and practice. *Comm. Math. Phys.*, 98(4):469–512, 1985.
- [25] R. Manê. *Teoria Ergódica*. Projeto Euclides. IMPA, 1983.
- [26] J.-P. Marco. Polynomial Entropies and Integrable Hamiltonian Systems. *Regular and Chaotic Dynamical*, 18:623–655, 2013.

- [27] J.-P. Marco. Entropy of billiard maps and a dynamical version of the birkhoff conjecture. *Journal of Geometry and Physics*, 124, 11 2017.
- [28] G. Martin. *The foundations of geometry and the non-Euclidean plane*. Intext series in mathematics. Intext Educational Publishers, 1975.
- [29] J. Milnor. *Morse Theory*, volume 51. Princeton University Press, 1969.
- [30] J. Moser. Monotone twist mappings and the calculus of variations. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 6(3):401–413, 1986.
- [31] B. O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. ISSN. Elsevier Science, 1983.
- [32] J. B. Pesin. Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russ. Math. Surv.*, 32(4):55–114, 1977.
- [33] M. Pollicott. *Lectures on Ergodic Theory and Pesin Theory on Compact Manifolds*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1993.
- [34] W. F. Reynolds. Hyperbolic geometry on a hyperboloid. *The American Mathematical Monthly*, 100(5):442–455, 1993.
- [35] D. Ruelle. An inequality for the entropy of differentiable maps. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 1(9):83–87, 1978.
- [36] L. A. Santaló. Note on convex curves on the hyperbolic plane. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51:405–412, 06 1945.
- [37] H. Ugurlu and H. Kocayigit. The frenet and darboux instantaneous rotation vectors of curves on time-like surface. *Mathematical & Computational Applications*, 1, 12 1996.
- [38] A. P. Veselov. Confocal surfaces and integrable billiards on the sphere and in the Lobachevsky space. *Journal of Geometry and Physics*, 7(1):81–107, Jan 1990.
- [39] M. Viana and K. Oliveira. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. Coleção Fronteiras da Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.
- [40] M. Wojtkowski. Invariant families of cones and lyapunov exponents. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 5(1):145–161, 1985.

- [41] M. Wojtkowski. Principles for the design of billiards with nonvanishing lyapunov exponents. *Comm. Math. Phys.*, 105(3):391–414, 1986.
- [42] M. P. Wojtkowski. Two applications of jacobi fields to the billiard ball problem. *J. Differential Geom.*, 40(1):155–164, 1994.