

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Escola de Engenharia**  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica**

Luíza Sernizon Guimarães

**BALANCEAMENTO JUST-IN-TIME DE SISTEMAS MAX-PLUS LINEARES COM  
RESTRICÇÕES: APLICAÇÃO À LINHA DE MONTAGEM**

Belo Horizonte  
2020

Luíza Sernizon Guimarães

**BALANCEAMENTO JUST-IN-TIME DE SISTEMAS MAX-PLUS LINEARES COM  
RESTRICÇÕES: APLICAÇÃO À LINHA DE MONTAGEM**

**Versão Final**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como parte final dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Andrey Maia

Belo Horizonte  
2020

G963b

Guimarães, Luíza Sernizon.

Balanceamento just-in-time de sistemas max-plus lineares com restrições [recurso eletrônico] : aplicação à linha de montagem / Luíza Sernizon Guimarães. – 2020.

1 recurso online (101 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Carlos Andrey Maia.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 99-101.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Redes de petri - Teses. 3. Teoria dos grafos - Teses. 4. Álgebra - Métodos gráficos- Teses. I. Maia, Carlos Andrey. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621.3(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**ATA DA 1171ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO  
DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO da aluna **Luíza Sernizon Guimarães** - registro de matrícula de número 2018685966. Às 14:00 horas do dia 19 do mês de fevereiro de 2020, reuniu-se na Escola de Engenharia da UFMG a Comissão Examinadora da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO para julgar, em exame final, o trabalho intitulado "**Balanceamento Just-in-time de Sistemas Max-plus Lineares Com Restrições: Aplicação A Linha de Montagens**" da Área de Concentração em Sinais e Sistemas, Linha de Pesquisa Controle, Automação e Robótica. O Prof. Carlos Andrey Maia, orientador da aluna, abriu a sessão apresentando os membros da Comissão e, dando continuidade aos trabalhos, informou aos presentes que, de acordo com o Regulamento do Programa no seu Art. 8.16, será considerado APROVADO na defesa da Dissertação de Mestrado o candidato que obtiver a aprovação unânime dos membros da Comissão Examinadora. Em seguida deu início à apresentação do trabalho pela Candidata. Ao final da apresentação seguiu-se a arguição da candidata pelos examinadores. Logo após o término da arguição a Comissão Examinadora se reuniu, sem a presença da Candidata e do público, e elegeu o Prof. Carlos Andrey Maia para presidir a fase de avaliação do trabalho, constituída de deliberação individual de APROVAÇÃO ou de REPROVAÇÃO e expedição do resultado final. As deliberações individuais de cada membro da Comissão Examinadora foram as seguintes:

Membro da Comissão Examinadora	Instituição de Origem	Deliberação	Assinatura
Prof. Dr. Carlos Andrey Maia - Orientador	DEE (UFMG)	Aprovado	
Prof. Dr. Rodney Rezende Saldanha	DEE (UFMG)	Aprovado	
Profa. Dra. Patrícia Nascimento Pena	DELT (UFMG)	Aprovado	
Prof. Dr. Vinícius Mariano Gonçalves	DEE (UFMG)	Aprovado	

Tendo como base as deliberações dos membros da Comissão-Examinadora a Dissertação de Mestrado foi aprovada. O resultado final de aprovação foi comunicado publicamente à Candidata pelo Presidente da Comissão, ressaltando que a obtenção do Grau de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA fica condicionada à entrega do TEXTO FINAL da Dissertação de Mestrado. A Candidata terá um prazo máximo de 30 (trinta) dias, a partir desta data, para fazer as CORREÇÕES DE FORMA e entregar o texto final da Dissertação de Mestrado na secretaria do PPGEE/UFMG. As correções de forma exigidas pelos membros da Comissão Examinadora deverão ser registradas em um exemplar do texto da Dissertação de Mestrado, cuja verificação ficará sob a responsabilidade do Presidente da Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada pelo Presidente da Comissão Examinadora. Belo Horizonte, 19 de fevereiro de 2020.

ASSINATURA DO PRESIDENTE DA COMISSÃO EXAMINADORA

*Aos meus pais André e Adriana.*



---

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, André e Adriana, por serem os meus maiores estimuladores e por darem tanto valor às minhas conquistas.

As minhas irmãs, Nathalia e Gabriella, por compartilharem tudo nessa vida comigo e por serem meu principal refúgio.

À minha sobrinha Manuella por me trazer tanta felicidade.

Aos meus avôs, Antônio, Vera e Maria, por serem minhas inspirações de vida.

Ao meu orientador Professor Doutor Carlos Andrey Maia, por todo o apoio, conhecimento e principalmente pela confiança depositada em mim, foi um prazer trabalhar com uma das referências da área.

Ao programa de pós-graduação em Engenharia Elétrica da UFMG, a todos os professores das disciplinas que participei, que com suas qualificações de excelência contribuíram para o meu crescimento profissional e pessoal. A FAPEMIG pelo auxílio financeiro concedido durante o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os amigos da sala de mestrado, que agregaram tanto conhecimento mesmo em áreas diferentes e divertiram o meu cotidiano. Em especial ao Nayron, ao Hélio e ao meu irmão Higor, que partilha comigo dessa caminhada na engenharia desde o início.

Agradeço as minhas amigas Eduarda, Beatriz, Maria Cecilia e Laura, por estarem sempre comigo, serei eternamente grata!

E, finalmente, a Deus, por me possibilitar concluir mais um ciclo que sempre almejei.





---

# Resumo

Sistemas a Eventos Discretos Temporizados sujeitos a fenômenos de sincronização e de atraso podem ser modelados por uma subclasse de Rede de Petri denominada Grafos de Eventos Temporizados, cuja dinâmica pode ser descrita de forma linear pela álgebra Max-Plus. Esta dissertação trata-se sobre o controle via realimentação de estados de tais sistemas. Para tal, duas metodologias de controle são desenvolvidas a partir das propriedades algébricas dos sistemas modelados. A primeira propõe a síntese de controladores que respeitem as restrições impostas ao funcionamento dos sistemas, além de não permitir a formação de estoques no interior da planta. Também é abordado como encontrar deterministicamente, por uma equação, um controlador que permite o atraso máximo das entradas das peças nos sistemas. Visando solucionar os problemas de controle, alguns conceitos da álgebra Max-Plus, como a teoria de residuação e a teoria dos semimódulos são utilizados. A segunda metodologia propõe o projeto de controladores que devem respeitar as restrições impostas ao sistema e permitir o funcionamento em um contexto de gestão *just-in-time* com máxima taxa de produção, uma vez que a política *just-in-time* é uma política de controle que visa a não formação de estoques nos sistemas. Isso pode ser feito por meio do atraso máximo possível das datas de entradas do sistema, sem alterar a sua taxa de produção. Esta metodologia é baseada no algoritmo alternante, na teoria de semimódulos e em conceitos espectrais de matrizes como autovalor e  $\lambda$ -super-autovetor. O pacote computacional Scicoslab pode ser utilizado para a extração de informações dos sistemas, como a taxa máxima de produção e o tempo de produção de determinada peça, além de permitir a simulação de sistemas, possibilitando a síntese de controladores. As metodologias propostas são aplicadas em exemplos numéricos para demonstração de sua eficácia.

**Palavras-chave:** Sistemas a Eventos Discretos; Álgebra Max-Plus; Grafo de Eventos Temporizados; Controle *just-in-time*,  $\lambda$ -super-autovetor.



---

# Abstract

Discrete Events Systems Timed subjected to synchronization and delay phenomena can be modeled by a subclass of Petri nets named Timed Event Graphs, whose dynamics can be described linearly by Max-Plus algebra. This dissertation deals with the state feedback control of such systems. To this end, two control methodologies are developed based on algebraic properties of the modeled systems. The first one proposes the synthesis of controllers that respect the restrictions imposed on the systems, besides not allowing the formation of stocks inside the plant. It is also addressed how to find deterministically, by a equation, a controller that allows the maximum delay of part entries in the system. In order to solve control problems, some concepts of Max-Plus algebra, such as Residual Theory and Semimodule Theory are used. The second methodology proposes the controllers design that must respect the constraints imposed on the system and allow the system to function in a just-in-time management context, with maximum production rate, remembering that the just-in-time policy is a control policy, that aims not to build up inventories in the systems. This is done by delaying system entry dates as much as possible without changing their production rate. This methodology is based on the Alternating Algorithm, Semimodule Theory and spectral matrix concepts such as eigenvalue and  $\lambda$ -super-eigenvector. The computational package Scicoslab is used for extracting information from systems, such as the maximum production rate and the production time of a particular piece. Also, it allows the systems simulation, providing the synthesis of controllers. The proposed methods are used in numerical examples to demonstrate their effectiveness.

**Keywords:** Discrete event systems; Max-plus algebra; Timed event graphs; Feedback control; Modeling system, Just-in-time control,  $\lambda$ -super-eigenvector.



---

## Lista de ilustrações

Figura 1 – Sistema de transporte de mercadorias. . . . .	30
Figura 2 – Modelagem via rede de Petri de uma linha de transporte simples. . . .	32
Figura 3 – Marcação inicial da rede Petri de uma linha de transporte simples. . .	32
Figura 4 – Modelagem via GET de uma linha de transporte simples. . . . .	36
Figura 5 – Rede de Petri. . . . .	46
Figura 6 – Grafo referente ao sistema . . . . .	47
Figura 7 – Grafo de Evento Temporizado em malha aberta. . . . .	54
Figura 8 – Grafo de Evento Temporizado em malha fechada. . . . .	55
Figura 9 – Linha de montagem serial. . . . .	69
Figura 10 – Linha de montagem serial controlada por $F_{PM}$ . . . . .	72
Figura 11 – Linha de montagem serial controlada por $F_{PM}^{max}$ . . . . .	72
Figura 12 – Linha de montagem serial controlada por $F_{SM}$ . . . . .	74
Figura 13 – Linha de montagem serial controlada por $F_1, F_2$ e $F_3$ . . . . .	75
Figura 14 – Sistema de manufatura retirado do trabalho de Maia, Andrade e Har- doun (2011). . . . .	78
Figura 15 – Sistema de máquinas com múltiplas entradas paralelas controlado por $F_{PM}$ . . . . .	81
Figura 16 – Sistema de máquinas com múltiplas entradas paralelas controlado por $F_{PM}^{max}$ . . . . .	82
Figura 17 – Sistema de máquinas com múltiplas entradas paralelas controlado por $F_{SM}$ . . . . .	83
Figura 18 – Sistema de máquinas com múltiplas entradas paralelas controlado por $F_1$ e $F_2$ . . . . .	84
Figura 19 – Sistema de manufatura híbrido. . . . .	87
Figura 20 – Sistema de manufatura híbrido controlado por $F_{PM}$ . . . . .	90
Figura 21 – Sistema de manufatura híbrido controlado por $F_{PM}^{max}$ . . . . .	91
Figura 22 – Sistema de manufatura híbrido controlado por $F_{SM}$ . . . . .	92
Figura 23 – Sistema de manufatura híbrido controlado por $F_1, F_2, F_3$ e $F_4$ . . . . .	93



---

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Sequência de disparos do sistema de máquinas seriais em malha aberta.	76
Tabela 2 – Sequência de disparos do sistema de máquinas seriais controlado por $F_{PM}$ e $F_{PM}^{max}$ .	76
Tabela 3 – Sequência de disparos do sistema de máquinas seriais controlado por $F_{SM}$ .	76
Tabela 4 – Sequência de disparos do sistema de máquinas com múltiplas entradas em malha aberta.	85
Tabela 5 – Sequência de disparos do sistema de máquinas com múltiplas entradas controlado por $F_{PM}$ e $F_{PM}^{max}$ .	85
Tabela 6 – Sequência de disparos do sistema de máquinas com múltiplas entradas controlado por $F_{SM}$ .	86
Tabela 7 – Sequência de disparos do sistema híbrido em malha aberta.	94
Tabela 8 – Sequência de disparos do sistema híbrido controlado via $F_{PM}$ e $F_{PM}^{max}$ .	94
Tabela 9 – Sequência de disparos do sistema híbrido controlado via $F_{SM}$ .	95





---

## Lista de símbolos

$*$	Operação de estrela de Kleene.
$\cup$	União.
$\exists$	Existe.
$\forall$	Para todo.
$\frac{1}{\lambda}$	Taxa de produção do sistema.
$\in$	Pertence.
$\lambda$	Autovalor.
$\wp$	Residuação à esquerda.
$\mathcal{D}$	Conjunto com duas operações bases $(\oplus, \otimes)$ .
$ \rho _l$	Comprimento do caminho.
$ \rho _w$	Peso do caminho.
$\neq$	Diferente.
$\Rightarrow$	Implica.
$\phi$	Residuação à direita.
$\Sigma$	Somatório.
$\ominus$	Residuação dual.
$E$	Matriz de restrições.
$f$	Função de transição dos estados.
$F_{PM}$	Matriz de controle resultante do Primeiro Método.

$F_{PM}^{max}$	Matriz de controle resultante do Primeiro Método aplicando a política <i>just-in-time</i> .
$F_{SM}$	Matriz de controle resultante do Segundo Método.
$Im$	Imagem da matriz.
$k$	Número de disparo da transição.
$T$	Conjunto de transições.
$u(k)$	Função de datadores associado às entradas.
$v$	Autovetor.
$w$	Função de ponderação dos arcos.
$x(k)$	Função de datadores associado às transições internas.
$y(k)$	Função de datadores associado às saídas.
$+$	Tradicional soma.
$-$	Tradicional subtração.
$\wedge$	Maior limite inferior da matriz.
$\infty$	Infinito.
$\mathbb{Z}$	Relativo aos números inteiros.
$\mathbb{Z}_{max}$	Max-Plus Álgebra.
$\oplus$	Adição Max-Plus.
$\otimes$	Multiplicação Max-Plus.
$\preceq$	Menor ou igual.
$\succeq$	Maior ou igual.
$\top$	Elemento superior na álgebra Max-Plus.
$\varepsilon$	Elemento neutro da adição na álgebra Max-Plus.
$\wedge$	Operador de mínimo.
$A^T$	Transposta de A.
$e$	Elemento neutro da multiplicação na álgebra Max-Plus.
$I$	Matriz identidade na álgebra Max-Plus.
$P$	Conjunto de lugares.





---

## Lista de siglas

**GET** Grafos de Eventos Temporizados

**SDVC** Sistemas Dinâmicos a Variável Contínua

**SED** Sistemas Dinâmicos a Eventos Discretos



---

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>1.1</b>	<b>Apresentação . . . . .</b>	<b>23</b>
<b>1.2</b>	<b>Revisão da Literatura . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>1.3</b>	<b>Objetivos . . . . .</b>	<b>26</b>
1.3.1	Objetivo Geral . . . . .	26
1.3.2	Objetivos Específicos . . . . .	26
<b>1.4</b>	<b>Organização da dissertação . . . . .</b>	<b>27</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS PRELIMINARES . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>2.1</b>	<b>Sistemas a Eventos Discretos . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>2.2</b>	<b>Redes de Petri . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>2.3</b>	<b>Redes de Petri temporizadas . . . . .</b>	<b>35</b>
2.3.1	Rede de Petri P-temporizada . . . . .	35
2.3.2	Rede de Petri T-temporizada . . . . .	35
<b>2.4</b>	<b>Grafos de Eventos Temporizados . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>2.5</b>	<b>Álgebra Max-Plus . . . . .</b>	<b>37</b>
2.5.1	Conceitos e Definições . . . . .	37
2.5.2	Propriedades algébricas da álgebra Max-plus . . . . .	38
2.5.3	Vetores e matrizes na álgebra Max-Plus . . . . .	41
2.5.4	Teoria da residuação . . . . .	43
<b>2.6</b>	<b>Teoria de Grafos . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>2.7</b>	<b>Sistemas dinâmicos em Max-Plus . . . . .</b>	<b>50</b>
2.7.1	Conexão da álgebra Max-plus com Grafos de Eventos Temporizados (GET) . . . . .	50
<b>2.8</b>	<b>Teoria de semimódulo . . . . .</b>	<b>52</b>
2.8.1	Resolução da Equação $A \otimes x = B \otimes y$ . . . . .	53
<b>2.9</b>	<b>Controle na álgebra Max-Plus . . . . .</b>	<b>53</b>

<b>3</b>	<b>METODOLOGIA . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>3.1</b>	<b>Descrição do problema . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>3.2</b>	<b>Primeiro método . . . . .</b>	<b>60</b>
<b>3.3</b>	<b>Segundo método . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICO . . . . .</b>	<b>69</b>
<b>4.1</b>	<b>Máquinas seriais . . . . .</b>	<b>69</b>
4.1.1	Resultados - Primeiro método . . . . .	71
4.1.2	Resultados - Segundo método . . . . .	73
4.1.3	Comparação entre métodos . . . . .	75
<b>4.2</b>	<b>Máquinas com múltiplas entradas paralelas . . . . .</b>	<b>78</b>
4.2.1	Resultados - Primeiro método . . . . .	80
4.2.2	Resultados - Segundo método . . . . .	82
4.2.3	Comparação entre métodos . . . . .	85
<b>4.3</b>	<b>Sistema de manufatura híbrido . . . . .</b>	<b>87</b>
4.3.1	Resultados - Primeiro método . . . . .	89
4.3.2	Resultados - Segundo método . . . . .	90
4.3.3	Comparação entre os métodos . . . . .	94
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>97</b>
5.0.1	Trabalhos futuros . . . . .	98
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>99</b>



---

# Introdução

## 1.1 Apresentação

Os modernos sistemas automatizados de manufatura são constituídos por múltiplos subsistemas como, por exemplo, as etapas de fabricação, montagem, transporte e armazenagem. Dentre essas, a etapa de montagem apresenta um papel fundamental para alcançar a combinação de dois fatores desejados em todos os sistemas: a redução do tempo de produção e a fabricação de uma maior quantidade de produtos. Dessa forma, para se obter o máximo lucro associado ao menor custo, o controle e o planejamento da produção dos sistemas são almejados.

Uma maneira de sintetizar controlador é por meio de simulador. Esse ferramental também é utilizado para descrever e analisar o comportamento de um sistema real, além de extrair informações a respeito da dinâmica e do desempenho do sistema (BANKS, 1999).

O primeiro passo para a simulação é a modelagem do sistema. Essa etapa consiste em encontrar a representação de um sistema com a maior fidelidade possível. O tipo de modelagem é escolhido de acordo com a classificação do sistema, que pode ser distinguido como Sistemas Dinâmicos a Variável Contínua (SDVC) ou Sistemas Dinâmicos a Eventos Discretos (SED), de acordo com a natureza de suas variáveis.

Os SDVC possuem sua dinâmica dirigida pelo tempo e são representados por variáveis contínuas, como posição, temperatura, velocidade. Esses sistemas são baseados em um ferramental matemático consolidado, nomeado como equações a diferenças lineares ou equações diferenciais. Porém, sistemas que possuem suas dinâmicas dirigidas por eventos, como as indústrias de montagem, não são bem representados por SDVC. Os eventos possuem a capacidade de alterar o estado do sistema e são caracterizados por não estarem associados ao tempo, por essa razão, são classificados como discretos. A inserção de matéria-prima no sistema, a inicialização de operação de uma máquina, a finalização de um atendimento ao cliente são exemplos de eventos (CASSANDRAS; LAFORTUNE, 2008). O sistema que possui a dinâmica associada a eventos é classificado como SED.

Os modelos mais utilizados para tratar de SED são Redes de Petri com e sem temporização, Grafos de Eventos temporizados, Cadeias de Markov, Teoria das Filas, Álgebra de Processos, Álgebra Max-Plus, Teoria de Linguagens e Autômatos (CASSANDRAS; LAFORTUNE, 2008).

Uma vez modelado o sistema, podemos impor objetivos de controle e sintetizar um controlador que atenda a todas as especificações desejadas. Dentre os tipos de modelagens citadas, os GET em conjunto com a álgebra Max-Plus se sobressaem por serem dotados de procedimentos de sínteses de controladores. Esses modelos têm provido forte contribuição ao desenvolvimento da teoria de controle de sistemas automatizados de montagens. O GET é um subtipo de rede de Petri temporizado que possibilita compreender o comportamento do sistema, cuja dinâmica pode ser descrita por meio de equações recursivas da álgebra Max-Plus. Essa álgebra fundamenta-se nos operadores  $\oplus$ ,  $\otimes$  e na Teoria de Residuação, o que torna possível representar a dinâmica de uma planta a partir de equações lineares, possibilitando a análise do sistema e a projeção de controlador (PAULA; SANTOS, 2008).

Os controladores possuem grande importância nas soluções de problemas de conflitos e de sincronizações de sistemas. Os sistemas de manufatura oferecem exemplos desses dois aspectos. Uma situação de conflito fica evidente, por exemplo, quando duas peças devem ser processadas na mesma máquina, devendo haver uma decisão sobre qual delas será processada em primeiro lugar. Já a sincronização é observada em uma situação de montagem, na qual uma peça depende de duas ou mais partes, cujo processamento, por sua vez, obedeça restrições do mesmo tipo. Nesse caso, obviamente a parte com processamento mais tardio determinará o início da montagem da peça final (HARDOUIN et al., 2005).

É importante ressaltar que as abordagens em Max-Plus possuem limitações associadas a problemas de conflitos e, portanto, são aplicadas apenas em sistemas sujeitos a fenômenos de sincronização e de atraso de tempo.

Um sistema controlado pode ser estruturado em malha aberta ou fechada. O primeiro é indicado para sistemas que possuem entradas conhecidas e que não estão sujeitos a distúrbios no decorrer do tempo. Para sistemas suscetíveis à perturbações, é indicado o controle em malha fechada, pois essa estrutura possibilita que as saídas sejam relativamente mais insensíveis a distúrbios externos e as variações internas dos parâmetros dos sistemas.

É usual que empresas desejem que os seus sistemas trabalhem com a máxima capacidade de produção e, portanto, funcionem como se suas entradas possuíssem um número ilimitado de matérias-primas. Para tal, é necessário que os recursos estejam aptos a serem inseridos no sistema no momento exato em que puderem ser processados. Essa política de administração é denominada *just-in-time*, cujo o objetivo é reduzir a quantidade de produtos em estoques e custos, sem afetar a demanda da produção. Para se empregar tal

política é necessário o planejamento de um calendário de produção, de armazenamento, de compras e de transporte, com o propósito de que nenhuma atividade seja executada antes do tempo exato. Uma empresa que adota essa política de administração possui maior nível de desempenho em relação ao custo, prazo, qualidade, confiabilidade e, conseqüentemente, maior competitividade entre suas concorrentes.

## 1.2 Revisão da Literatura

Existem na literatura alguns trabalhos relacionados ao controle de sistemas que são modelados por GET e utilizam do ferramental da álgebra Max-Plus para descrição do seu comportamento. Esses trabalhos possuem em comum o fato dos sistemas modelados via SED possuírem fenômenos de sincronização e atraso de tempo.

Dias (2014) propõe dois métodos de controle para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas, modelados via GET e representados por equações recursivas da álgebra Max-Plus. O primeiro apresenta como calcular os parâmetros de um controlador de realimentação para controlar o fluxo de entrada, que deve ser atrasado ao máximo e deve também limitar o número de fichas nos estados acrescentados tanto quanto possível. Enquanto o segundo método visa solucionar o problema de sincronização dos disparos entre as transições internas do sistema, por meio de equações compostas por parâmetros como o tempo de atraso e a taxa de alimentação do sistema. Embora essa metodologia proporcione o atraso na inserção de peças no processo, também ocorre a alteração na taxa de produção do sistema.

Hardouin et al. (2005) busca o controle "ótimo" para sistemas, para isso o controlador deve atrasar a admissão de peças e evitar a formação de estoques no interior da planta, sem alterar a taxa de produção do sistema. A aplicação da política *just-in-time* é feita por meio de diversas estratégias de controle embasadas na abordagem por modelo de referência.

No estudo de Silva (2016), restrições gerais sobre as entradas são apresentadas de forma convexa usando a álgebra Max-Plus, além do desenvolvimento de dois métodos de controle. A primeira metodologia apresentada possui como política de gestão *just-in-time* em malha aberta, que pode ser aplicada tanto em horizonte finito quanto em horizonte infinito, visando a economia de recursos e o controle ótimo. A solução ótima é dada deterministicamente por uma equação. O segundo método propõe o emprego da política de gestão *just-in-time* por meio da realimentação de estados, baseado no algoritmo alternante modificado.

Na pesquisa realizada por Katz (2007), a teoria de semimódulo (A;B)-invariantes é utilizada para resolver os problemas de sincronização de trens. Se existe um semimódulo, esse é encontrado pelo método proposto e a partir disso é calculado o controle por realimentação que garanta que as restrições sejam respeitadas. Por meio da álgebra Max-Plus

é definido a tabela de horários entre as partidas dos trens.

O autor Andrade (2008) destaca que os sistemas modelados via GET são controlados de forma que suas evoluções ocorram sem a violação das restrições temporais impostas. As condições para garantir a existência e o cálculos dos controladores são apresentadas. O método proposto é aplicado em um sistema de tráfego para demonstração de sua eficácia.

Gonçalves, Maia e Hardouin (2017) demonstraram como encontrar controladores em malha fechada usando algoritmos pseudo-polinomiais eficientes, para sistemas modelados via GET e descritos pela álgebra Max-Plus. Os sistemas a serem controlados podem possuir restrições de tempo em estado estacionário, sendo necessário que o controlador solucione os problemas de regulação Max-Plus. Embora existam trabalhos na literatura que demonstrem como projetar controladores para sistemas que possuem restrições, esse artigo se diferencia dos demais por abordar a robustez do controlador. Esse deve possibilitar a condução do sistema de uma condição inicial arbitrária para a especificação desejada e, em seguida, mantê-lo dentro deste conjunto. Foi apresentada uma condição necessária para resolver os problemas de regulação e, além disso, mostrando que essa condição é suficiente para uma classe grande de problemas.

Brunsch, Raisch e Hardouin (2012) desenvolveram uma metodologia para sintetizar controladores que atrasem as entradas de peça, para contornar problemas inesperados no sistemas em operações cíclicas. Os modelos considerados são HST (*high-throughput screening*) e o controle é feito por realimentação dos estados.

Boimond e Ferrier (1996) tratam da projeção de controladores que utilizam saídas pré-definidas, dividindo o controle em um bloco de previsão e um de inversão (obtido por meio da residuação), alterando a entrada para cada demanda.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo desta dissertação é desenvolver novas metodologias para projeto de controladores. Os métodos propostos referem-se a problemas de otimização, pois almeja-se encontrar o controle ideal, com um objetivo e algumas restrições, que podem ser classificadas como não convexas na álgebra convencional. Deseja-se que os controladores adotem estratégias de gerenciamento em que a taxa de produção seja decidida de acordo com a demanda requerida.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

- Desenvolver uma metodologia para síntese de controladores de um sistema que possua uma condição inicial factível, a fim de não permitir o acúmulo de peças no interior do sistema e que respeite as suas restrições operacionais;

- Desenvolver uma nova metodologia para síntese de controladores, de forma a evitar perdas no processo produtivo, garantindo a não alteração da taxa de produção do sistema, para isso é aplicada a política de administração *just-in-time*;
- Projetar controladores para sistemas numéricos com a finalidade de empregar as técnicas propostas;
- Empregar as técnicas de causalização existentes para validação.

## 1.4 Organização da dissertação

A presente dissertação está organizada em:

- **Conceitos preliminares:** São apresentados os conceitos fundamentais relativos à teoria de SED e a álgebra Max-Plus para o desenvolvimento da metodologia de controle proposta.
- **Metodologia:** São propostas técnicas para encontrar controladores que possuem a política administrativa *just-in-time*, cuja função é garantir a não formação de estoque, de forma a manter a taxa de produção do sistema quando esse possui uma entrada ilimitada de recursos.
- **Resultados numéricos:** Para maior clareza do assunto, as metodologias propostas foram empregadas em exemplos numéricos e, dessa forma, é possível constatar as vantagens de se obter um controlador que adota a política *just-in-time*.
- **Conclusões:** Apresenta as conclusões do presente trabalho, além de indicações para trabalho futuros.



---

## Conceitos preliminares

Neste capítulo são apresentados os principais conceitos de SED para a compreensão desta dissertação. O capítulo está estruturado da seguinte forma: Na seção 2.1 são introduzidos os fundamentos da teoria de SED e são feitas as ilustrações desses conceitos por meio de exemplos; na seção 2.2 são apresentados os conceitos relacionados às redes de Petri, além de sua representação via equações; na seção 2.3 são apresentadas as redes de Petri temporizadas; na seção 2.4 os Grafos de Eventos Temporizados e a forma de representá-los via equações são introduzidos; na seção 2.5 é apresentada a álgebra Max-Plus, em conjunto com as suas propriedades, a sua representação matricial e a teoria da residuação; na seção 2.6 é feito o estudo de grafos associados a matrizes e os principais conceitos relacionados à teoria espectral das matrizes; na seção 2.7 é demonstrado como representar sistemas dinâmicos via álgebra Max-Plus; na seção 2.8 é apresentada a teoria de semimódulos e por fim, a seção 2.9 trata da descrição dos comportamentos dos sistemas controlados.

### 2.1 Sistemas a Eventos Discretos

Segundo Cury (2001), Sistemas a Eventos Discretos são sistemas dinâmicos que evoluem de acordo com a ocorrência de eventos físicos, em intervalos de tempo em geral irregulares e desconhecidos. Enquanto, para Moraes e Castrucci (2001), SED são sistemas que respondem a eventos discretos externos e internos com sinais também discretos, de acordo com rígidas regras de causa e efeito ou com regras estatísticas.

A dinâmica de SED se dá por meio da recepção de estímulos, denominados eventos. Os eventos são caracterizados por serem instantâneos e por possuírem a capacidade de alterar o estado do sistema, independente da evolução do tempo. Esses eventos podem ser, por exemplo, o início ou término de uma tarefa, o envio de uma mensagem, o acionamento de um botão, o recebimento de dados, a chegada de uma peça, entre outros.

**Definição 1.** *Os Sistemas a Eventos Discretos são sistemas dinâmicos que evoluem de*

acordo com a ocorrência abrupta de eventos, em intervalos de tempo em geral irregulares e desconhecidos (CASSANDRAS; LAFORTUNE, 2008).

A modelagem de SED pode ser feita por meio das Redes de Petri, Grafos de Eventos Temporizados, Autômatos, Cadeias de Markov, Redes de Filas, Álgebra Max-Plus, entre outros (CASSANDRAS; LAFORTUNE, 2008). Neste trabalho os sistemas são modelados via GET, uma subclasse de rede de Petri, que é utilizada quando existe o interesse em analisar o desempenho do sistema, em conjunto com a álgebra Max-Plus.

Diversos sistemas presentes no cotidiano podem ser classificados como SED, como, por exemplo, os sistemas de filas, de manufatura, de tráfego e de comunicação. O Exemplo 2.1 ilustra um tipo de Sistema a Eventos Discretos.

**Exemplo 2.1:** A Figura 1 apresenta um sistema de transporte de mercadorias, feito por meio de caminhões. O sistema pode ter diversos caminhões disponíveis para transporte no mesmo instante de tempo, mas o transporte só pode ser feito por apenas um caminhão a cada ciclo.

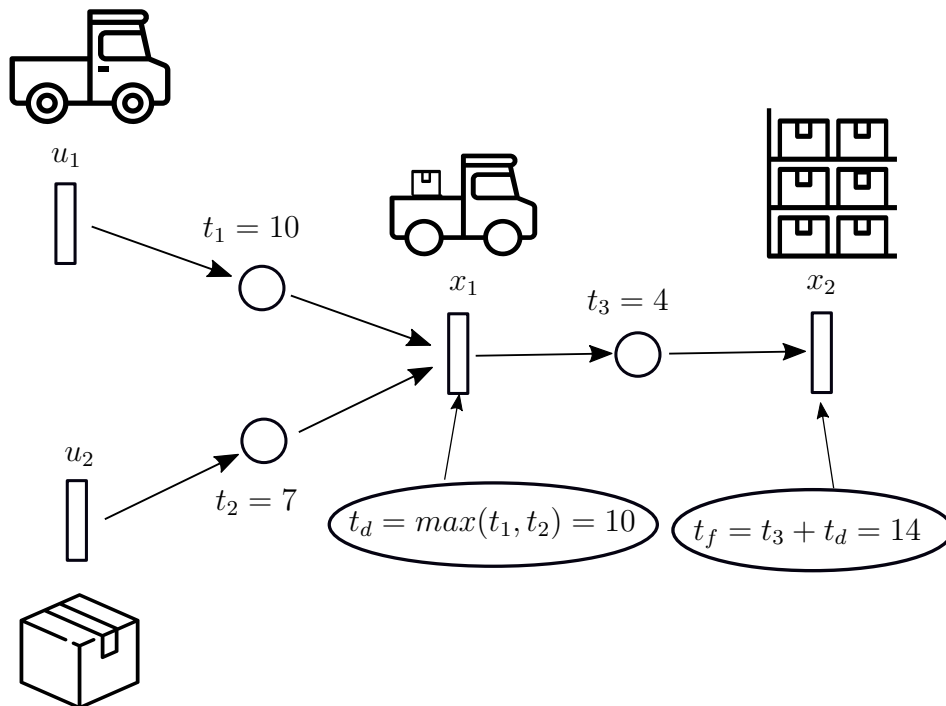


Figura 1 – Sistema de transporte de mercadorias.

As mudanças de estados desse sistema ocorrem apenas em pontos discretos e são associadas a eventos. É possível considerar quatro eventos nesse sistema:

- $u_1$  : o caminhão está disponível para o transporte.
- $u_2$  : a mercadoria está finalizada e apta para o transporte.
- $x_1$ : o transporte inicia.



□  $x_2$ : o serviço é completado e a mercadoria é depositada no estoque.

Ao analisarmos a Figura 1, podemos observar que uma mercadoria é finalizada e está liberada para ser deslocada no tempo  $t_2$  e o caminhão que tem capacidade para suportar apenas uma mercadoria por vez, está disponível no tempo  $t_1$ . Para que o caminhão possa iniciar o transporte da mercadoria é necessário que ela já esteja finalizada e o caminhão esteja no local de transporte, então o deslocamento inicia em  $t_d$ . O caminhão percorre o trajeto até o estoque de mercadorias em  $t_3$  unidades de tempo e o processo é finalizado em  $t_f$  unidades de tempo.

## 2.2 Redes de Petri

As redes de Petri são grafos bipartidos com dois tipos de nós, os lugares e as transições, que são vinculados por meio dos arcos.

Os lugares são representados graficamente como círculos e denotam a execução de atividades ou a disponibilidade de recursos, onde cada recurso tem uma capacidade finita. As transições, simbolizadas como barras, representam eventos que alteram o estado do sistema modelado. Os arcos são representados por setas, sendo que os arcos de entrada são orientados de lugares para transições, enquanto os arcos de saída são orientados de transições para lugares (MAIONE; MANGINI; OTTOMANELLI, 2016).

**Definição 2.** (*Grafo da rede de Petri*) A rede de Petri é um grafo ponderado bipartido  $(P, T, A, \omega)$ , sendo  $P$  um conjunto finito de lugares,  $T$  um conjunto finito de transições;  $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  o conjunto de arcos das transições para os lugares e dos lugares para as transições;  $\omega$  é a função dos pesos dos arcos (BACCELLI et al., 1992).

**Definição 3.** (*Entradas e saídas*) O conjunto de lugares da transição  $t_j$  de uma rede de Petri é representado por  $I(t_j)$ . Analogamente, o conjunto de saídas da transição  $t_j$  é representado por  $O(t_j)$  (BACCELLI et al., 1992).

Para ilustrar os conceitos estudados, o Exemplo 2.1 será retomado diversas vezes no decorrer deste capítulo.

**Exemplo 2.2:** A Figura 2 apresenta a modelagem via rede de Petri do sistema representado pela Figura 1. O conjunto de lugares dessa rede é definido por  $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$  e o conjunto de transições é representado por  $T = \{u_1, u_2, x_1, x_2, y\}$ , sendo as transições de entrada  $I(t_j) = \{u_1, u_2\}$  e a transição de saída  $O(t_j) = \{y\}$ . O conjunto de arcos é dado por  $A = \{(u_1, p_1), (u_2, p_2), (p_1, x_1), (p_2, x_1), (x_1, p_4), (p_4, x_2), (x_2, p_3), (p_3, x_1), (x_2, p_5), (p_5, y)\}$  e o conjunto dos pesos dos arco é representado por  $w(u_1, p_1) = 1, w(u_2, p_2) = 1, w(p_1, x_1) = 1, w(p_2, x_1) = 1, w(x_1, p_4) = 1, w(p_4, x_2) = 1, w(x_2, p_3) = 1, w(p_3, x_1) = 1, w(x_2, p_5) = 1, w(p_5, y) = 1$ .

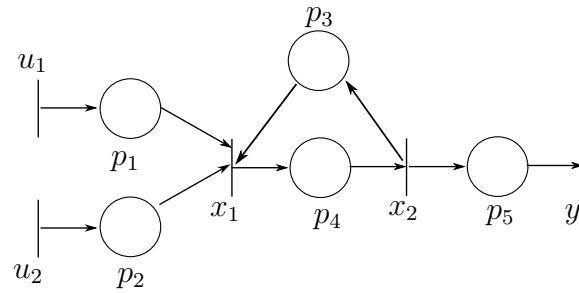


Figura 2 – Modelagem via rede de Petri de uma linha de transporte simples.

As fichas ou *tokens* são mecanismos para verificar se as condições para a ocorrência de eventos são satisfeitas. As fichas são a marcação de uma rede e são representadas como pontos pretos depositados nos lugares.

**Definição 4.** (*Rede de Petri Marcada*). Uma rede de Petri marcada é um conjunto  $(P, T, A, \omega, x_p)$  no qual  $(P, T, A, \omega)$  é uma rede de Petri e  $x_p$  uma marcação do conjunto de lugares  $P$ . Sendo a marcação de uma rede de Petri representada pelo vetor linha  $x = [x_p(p_1), x_p(p_2), \dots, x_p(p_n)] \in \mathbb{N}^n$  (CASSANDRAS; LAFORTUNE, 2008).

A Figura 3 representa uma rede de Petri com uma marcação inicial dada por  $x = [0, 0, 1, 0, 0]$ .

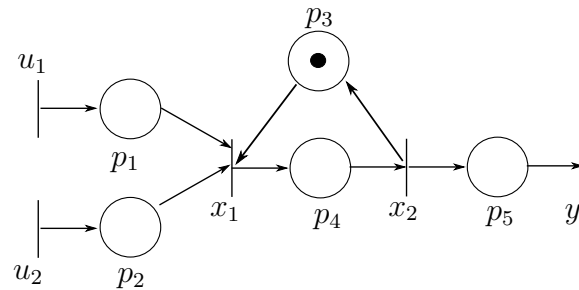


Figura 3 – Marcação inicial da rede Petri de uma linha de transporte simples.

A evolução dinâmica de uma rede de Petri é definida por meio dos disparos das transições. Para que a transição possa disparar, o número de fichas presente no lugar que a precede deve ser maior ou igual ao peso do arco que a conecta a um lugar.

**Definição 5.** (*Transição habilitada*). Uma transição  $t_j \in T$  em uma rede de Petri está habilitada se  $x(p_i) \geq w(p_i; t_j)$  para todo  $p_i \in I(t_j)$ , sendo  $I(t_j)$  o conjunto de lugares conectados à transição  $t_j$  por meio de arcos. (CASSANDRAS; LAFORTUNE, 2008)

Se considerarmos o estado inicial da Figura 3, apenas as transições  $u_1$  e  $u_2$  estão habilitadas.

A transição de uma rede de Petri quando disparada consome uma ficha de cada um dos seus lugares de entrada e produz uma ficha em cada um dos seus lugares de saídas, sendo a quantidade de fichas consumidas e produzidas determinada a partir dos pesos

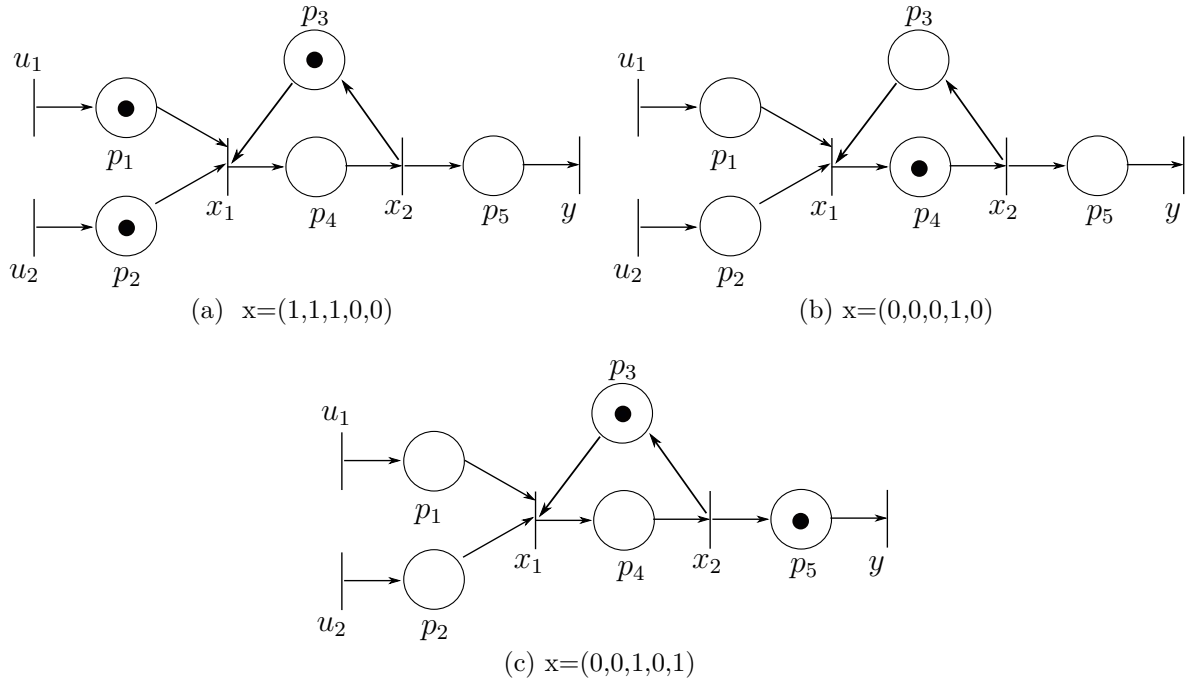
dos arcos. O comportamento da rede de Petri é não-determinístico, ou seja, múltiplas transições podem ser disparadas no mesmo instante de tempo.

**Definição 6.** (*Dinâmica da Rede de Petri*): A função de transição de estados  $f : \mathcal{N}^n \times T \rightarrow \mathcal{N}^n$  de uma rede de Petri  $(P, T, A, \omega, x_p)$  é definida para a transição  $t_j \in T$  se e somente se

$$x(p_i) \succeq \omega(p_i; t_j), \quad (1)$$

para todo  $p_i \in I(t_j)$ .

Para ilustrar um processo envolvendo disparos de transições e mudanças de estados, consideremos a dinâmica representada pelas Figuras 4a, 4b e 4c. Como as transições  $u_1$  e  $u_2$  não possuem condições para acontecer, essas estão sempre aptas para disparo. A Figura 4a apresenta os estados resultantes após os disparos das transições de entradas. Nesse novo estado, apenas a transição  $x_1$  está habilitada. Quando  $x_1$  é disparada uma ficha é consumida dos lugares  $p_1, p_2$  e  $p_3$ , e ocorre o depósito de uma ficha em  $p_4$ , como pode ser visto pela Figura 4b. Agora a transição  $x_2$  está habilitada e quando ocorre o seu disparo, uma ficha é depositada nos lugares  $p_3$  e  $p_5$ , conforme apresentado na Figura 4c.



A representação de rede de Petri em conjuntos e mapeamentos pode ser uma convenção complicada. Para solucionar esse problema, a representação matricial pode nos fornecer uma forma mais conveniente para trabalharmos com as redes.

A matriz de incidência  $A$  apresenta informações a respeito dos arcos da rede de Petri, essa é composta pela soma da matriz que contém os arcos que saem dos lugares para as

transições ( $A^+$ ), e da matriz composta pelos arcos que saem das transições para os lugares ( $A^-$ ), em cada caso com os respectivos pesos. E, conseqüentemente, são determinados os números de fichas acrescentados e removidos quando as transições disparam.

**Definição 7.** (*Matriz de incidência*): A matriz de incidência  $A$  de uma rede de Petri é uma matriz  $m \times n$  cujo elemento  $a_{ij}$  é dado por  $a_{ij} = w(t_i, p_j) - w(p_i, t_j)$ .

O preenchimento da matriz de incidência é feito de acordo com a estrutura do sistema, caso não existam arcos vinculando os componentes do sistema, a matriz será preenchida por 0. Por exemplo, a composição a matriz de incidência referente a rede de Petri da Figura 3 é representada abaixo. Podemos observar por essa Figura que não há conexão entre os componentes  $u_1$  e  $p_2$ , dessa maneira, o peso da posição  $a_{12}$  de  $A$  será igual a 0.

$$A^+ = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$A = A^+ + A^- = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

As equações de estados das redes de Petri permitem obter o próximo estado à partir do estado atual, considerando que a transição esteja habilitada. Essas equações nos permite analisar a rede de Petri e descrevê-la.

O novo estado ( $x'$ ) é obtido pela Equação (2), cujas variáveis são o vetor do estado atual do sistema ( $x$ ), o vetor que representa quais transições estão habilitadas ( $u$ ) e a matriz de incidência ( $A$ ), composta pelo comportamento dos arcos.

$$x' = x + uA. \quad (2)$$

Para exemplificar uma aplicação da Equação (2), consideremos como condição inicial o sistema representado pela Figura 4b e a transição  $x_2$  disparada. Assim, obtemos:

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De acordo com o que já era esperado, é possível concluir que o estado encontrado por  $x'$  é o mesmo estado representado pela Figura 4c.

## 2.3 Redes de Petri temporizadas

Os modelos de rede de Petri podem possuir temporizações associadas às transições ou aos lugares, sendo denominados como rede de Petri T-temporizada ou rede de Petri P-temporizada.

### 2.3.1 Rede de Petri P-temporizada

As redes de Petri P-temporizada possuem tempos associados aos seus lugares. Quando uma ficha é depositada em um lugar temporizado, essa se torna indisponível para habilitar a transição seguinte até a finalização do tempo mínimo que a ficha deve permanecer no respectivo lugar, após o término desse tempo a ficha se torna apta para habilitar transições (CASSANDRAS; LAFORTUNE, 2008).

**Definição 8.** (*Rede de Petri P-temporizada*) Uma rede de Petri P-temporizada é uma dupla  $(R; D)$  sendo  $R$  a rede de Petri e  $D$  uma função que associa a cada lugar  $p_i \in P$  um número real não negativo, sendo  $D(p_i) = d_i$  o valor de tempo associado ao lugar (WANG; WU, 1998).

### 2.3.2 Rede de Petri T-temporizada

As redes de Petri T-temporizadas apresentam tempos relacionados às suas transições. Quando uma transição é temporizada e está habilitada, o seu disparo só poderá acontecer depois de finalizado o tempo a essa associado. Se uma transição não possui temporização, o disparo ocorrerá instantaneamente após sua habilitação (CASSANDRAS; LAFORTUNE, 2008).

**Definição 9.** (*Rede de Petri T-temporizada*) Uma rede de Petri T-temporizada é uma dupla  $(R; D)$  sendo  $R$  a rede de Petri e  $D$  uma função que associa a cada transição  $t_i \in T$  um número real não negativo, sendo  $D(t_i) = d_i$  o valor de tempo associado a transição (WANG; WU, 1998).

## 2.4 Grafos de Eventos Temporizados

Os GET são uma subclasse das redes de Petri, que possuem apenas um arco de entrada e um arco de saída associados aos lugares. Portanto, fenômenos de concorrência por fichas não podem ocorrer. Apesar dessa subclasse não permitir modelar conflitos, sua capacidade de modelar fenômenos de sincronização e de atraso, a torna muito utilizada.

**Definição 10.** (*Grafos de Eventos Temporizados*) Um Grafo de Evento Temporizado é um tipo de rede de Petri temporizado no qual cada lugar possui apenas uma transição de entrada e uma de saída e pode possuir tempo associado aos lugares (BACCELLI et al., 1992).

Os sistemas modelados via GET podem ser descritos por datadores, que são equações indicadoras das sequências de datas de disparos de cada transição da rede. Para tal, todas as transições  $x_i$ ,  $u_i$  e  $y_i$  possuem como respectivas variáveis  $x_i(k)$ ,  $u_i(k)$  e  $y_i(k)$ , que representam os instantes nos quais ocorrem os  $k$  – ésimos disparos das transições. O comportamento dinâmico do sistema pode ser descrito utilizando apenas duas operações da álgebra convencional, a maximização e a adição.

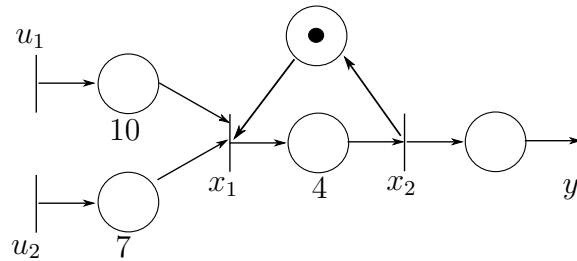


Figura 4 – Modelagem via GET de uma linha de transporte simples.

A Figura 4 modela fielmente por meio de um GET o sistema descrito pelo Exemplo 2.1. As transições de entrada  $u_1$  e  $u_2$  não possuem condições iniciais, o que acarreta na possibilidade de disparos infinitos. A transição de saída  $y$  não possui lugares associados após sua habilitação. As transições  $x_1$  e  $x_2$  são denominadas transições internas do sistema, por estarem vinculadas tanto a lugares de entradas, como de saída.

As Equações (3) e (4) representam o sistema modelado pela Figura 4.

$$x_1(k) = \max(u_1(k) + 10, u_2(k) + 7, x_2(k - 1)). \quad (3)$$

$$x_2(k) = 4 + x_1(k). \quad (4)$$

Onde  $\max(a, b)$  retorna o maior número entre  $a$  e  $b$ .

Por meio dessas equações podemos observar o comportamento do sistema. Por exemplo, a Equação (3) fornece o tempo para iniciar o transporte das caixas pelo caminhão (habilitação da transição  $x_1(k)$ ) e esse é dado pelo processo mais demorado entre a chegada do caminhão para o seu carregamento (referente a transição  $u_1(k)$ ) e a finalização da fabricação da mercadoria (referente a transição  $u_2(k)$ ).

O operador máximo está relacionado a sincronização dos processos e o operador soma está relacionado com o tempo de processamento dos variados processos. Os sistemas que são modelados por meio de GET podem ser representados por equações da álgebra Max-

Plus, possibilitando obter as vantagens dessa modelagem em questão ao controle e análise dos sistemas, esse assunto será melhor abordado na seção 2.5.

## 2.5 Álgebra Max-Plus

### 2.5.1 Conceitos e Definições

A álgebra Max-Plus também denominada como álgebra de dióide ou álgebra tropical é uma estrutura algébrica constituída por duas operações básicas, a multiplicação e a adição, representadas respectivamente por  $\otimes$  e  $\oplus$ . Porém, o significado dessas operações não são os mesmos utilizados pela álgebra convencional, o que torna possível representar pela álgebra Max-Plus as dinâmicas de sistemas que possuem aplicações não lineares na álgebra convencional.

Muitos conceitos da álgebra Max-Plus são análogas a álgebra convencional, como o teorema de autovalor, a solução de equações lineares, entre outros. Esses conceitos são de grande valia para o desenvolvimento deste trabalho.

Essa álgebra possui aplicações práticas em diversas situações, como sincronização de sistemas de transportes, controle de sistemas, agendamento de tarefas, sistemas de processamentos paralelos, fabricação de peças, entre outros.

O símbolo  $\oplus$  representa o máximo e o símbolo  $\otimes$  representa a soma da álgebra convencional. Portanto,

$$a \oplus b = \max(a, b) \quad (5)$$

$$a \otimes b = a + b \quad (6)$$

Assim como na álgebra convencional, o símbolo  $\otimes$  pode ser omitido e os elementos neutros são definidos como  $\varepsilon = -\infty$  e  $e = 0$ .

**Exemplo 2.3:**

$$7 \oplus 5 = \max(7, 5) = 7.$$

$$7 \otimes 5 = 7 + 5 = 12.$$

$$7 \otimes \varepsilon = 7 + (-\infty) = -\infty = \varepsilon.$$

$$7 \oplus e = \max(7, 0) = 7.$$

Uma maneira de descrever a mudança de um sistema ao longo do tempo é por meio de relações de recorrência. Essas equações relacionam o estado atual de um modelo com seus estados anteriores, fornecendo os diferentes estados de um sistema modelado à medida que esses mudam com o tempo.

Em sua forma mais básica, a evolução do sistema é descrita por meio da Equação (7).

$$A \otimes x(k) = x(k+1). \quad (7)$$

Onde  $x(k)$  representa o estado do sistema no momento  $k$ . Assim, o sistema depende inteiramente da configuração do modelo em  $A$  e da sua condição inicial,  $x(0)$ .

**Exemplo 2.4:** Para ilustrar como é feita a descrição do comportamento de um sistema via álgebra Max-Plus, consideremos o GET da Figura 4, oriundo do Exemplo 2.1. A representação desse sistema em Max-Plus é dada pelas Equações (8) e (9)

$$x_1(k) = 10 \otimes u_1(k) \oplus 7 \otimes u_2(k) \oplus x_2(k-1). \quad (8)$$

$$x_2(k) = 4 \otimes x_1(k). \quad (9)$$

Ao substituir o valor dado pela Equação (8) na Equação (9) obtemos o sistema de equações:

$$x_1(k) = 10 \otimes u_1(k) \oplus 7 \otimes u_2(k) \oplus x_2(k-1). \quad (10)$$

$$x_2(k) = 14 \otimes u_1(k) \oplus 11 \otimes u_2(k) \oplus 4 \otimes x_2(k-1). \quad (11)$$

Realocando as equações no formato de espaço de estados, que será abordado no tópico 2.7, obtemos uma nova representação, sendo essa:

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 14 & 11 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}.$$

É importante ressaltar que os tempos de disparos para todos os  $k$  que dispararam anteriormente a  $k = 0$  é igual a  $-\infty$ .

## 2.5.2 Propriedades algébricas da álgebra Max-plus

Os dióides são estruturas algébricas caracterizadas como semi-aneis idempotentes, por possuírem todas as propriedades de um anel, com exceção a de elemento inverso aditivo.

**Definição 11.** (*Dióide*) é uma estrutura algébrica representada por um conjunto  $\mathcal{D}$  com duas operações bases  $(\oplus, \otimes)$ , além de obedecer os axiomas citados abaixo (HEIDERGOTT; OLSDER; WOUDE, 2006).

**Axioma 1.** (*Associatividade da adição*):

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{D}.$$



**Axioma 2.** (Comutatividade da adição):

$$a \oplus b = b \oplus a \quad \forall a, b \in \mathcal{D}.$$

**Axioma 3.** (Associatividade da multiplicação):

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{D}.$$

**Axioma 4.** (Distributividade da multiplicação em relação à adição):

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c), \quad \forall a, b, c \in \mathcal{D}.$$

$$(b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a).$$

**Axioma 5.** (Existência do elemento nulo na adição):

$$a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a \quad \forall a \in \mathcal{D}.$$

**Axioma 6.** (Absorção pelo elemento neutro da multiplicação):

$$\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon \quad \forall a \in \mathcal{D}.$$

**Axioma 7.** (Existência de elemento identidade da multiplicação):

$$a \otimes e = e \otimes a = a \quad \forall a \in \mathcal{D}.$$

**Axioma 8.** (Idempotência da adição):

$$a \oplus a = a \quad \forall a \in \mathcal{D}.$$

O resultado de uma potenciação é obtido de acordo com a propriedade associativa da álgebra Max-Plus, sendo escrito como:

$$a^{\otimes n} = \underbrace{a \otimes a \otimes \dots \otimes a}_{n \text{ vezes}} = n \times a$$

**Exemplo 2.5:** O cálculo de dez elevado a terceira potência é igual:

$$10^{\otimes 3} = 3 \times 10 = 30$$

Além das propriedades algébricas, os elementos dos dióides possuem relações, ou seja, ligações entre os elementos de seus conjuntos. Essas relações são de extrema importância em muitos contextos como, por exemplo, para comparar elementos, ordená-los, entre outros.

**Definição 12.** (Mapeamento isotônico) Um mapeamento  $f$  de um conjunto ordenado  $D$  em um conjunto ordenado  $C$  é isotônico, tal que respeite,

$$a \succeq b \implies f(a) \succeq f(b) \quad \forall a, b \in \mathcal{D}.$$

No contexto algébrico Max-Plus é possível comparar os elementos de um dióide por esses possuírem um mapeamento isotônico, o que permite comparar:

$$a \succeq b \iff a \oplus b = a \quad \forall a, b \in \mathcal{D}.$$

**Exemplo 2.6:** Pela álgebra convencional, ao compararmos a desigualdade  $10 \succeq 3$  observamos que a ordem não é preservada, por meio de :

$$\begin{aligned} 10 &\succeq 3. \\ (-1) \times 10 &\preceq (-1) \times 3. \\ -10 &\preceq -3. \end{aligned}$$

Ao contrário do que observamos no contexto da álgebra Max-Plus, considerando a mesma desigualdade, obtemos:

$$\begin{aligned} 10 &\succeq 3. \\ (-1) \otimes 10 &\succeq (-1) \otimes 3. \\ (-1 + 10) &\succeq (-1 + 3). \\ 9 &\succeq 2. \end{aligned}$$

Para que a operação  $\succeq$  possua uma relação de ordem, ela necessita atender as características descritas pela Definição 14. Os conceitos seguintes foram extraídos do trabalho de Rosen (2009).

**Definição 13.** (*Relação*) Uma relação é um conjunto de pares ordenados.

**Definição 14.** (*Relação de ordem parcial*) Dado um conjunto  $\mathcal{D}$  uma relação possui ordem parcial se essa for reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

□ Uma relação  $R$  é dita reflexiva sobre um conjunto  $\mathcal{D}$  se:

$$\forall a, (a, a) \in R.$$

No contexto da álgebra Max-Plus:

$$a \oplus a = a \implies a \succeq a.$$

□ Uma relação  $R$  é dita anti-simétrica sobre um conjunto  $\mathcal{D}$  se:

$$\forall a \forall b ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \rightarrow (a = b).$$

No contexto da álgebra Max-Plus:

$$\left. \begin{aligned} a \succeq b &\implies a = a \oplus b \\ b \succeq a &\implies b = b \oplus a \end{aligned} \right\} \implies a = a \oplus b = b \oplus a = b.$$

□ Uma relação  $R$  é dita transitiva sobre um conjunto  $\mathcal{D}$  se:

$$\forall a \forall b \forall c \ ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R.$$

No contexto da álgebra da Max-Plus:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} a \succeq b \\ b \succeq c \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = a \oplus b \\ b = b \oplus c \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \oplus c = a \oplus b \oplus c \\ a = a \oplus b \\ b = b \oplus c \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \oplus c = a \oplus b \\ a = a \oplus b \end{array} \right\} \Rightarrow \{a = a \oplus c\} \Rightarrow \{a \succeq c\}. \end{aligned}$$

No contexto da álgebra Max-Plus a relação de ordem é possível de ser encontrada com a soma:

$$a \succeq b \implies a \oplus c \succeq b \oplus c, \quad \forall c \in \mathcal{D}.$$

E com a multiplicação:

$$a \succeq b \implies ac \succeq bc, \quad \forall c \in \mathcal{D}.$$

Uma importante operação definida em dióides é denominada Estrela de Kleene, calculada por  $a^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} a^i$ , com  $a^i = a \otimes a^{(i-1)}$  e  $a^0 = e$ . A operação Estrela de Kleene é de suma importância para encontrar a solução da equação implícita  $x = ax \oplus b$ , que será melhor abordada no tópico 2.7.

### 2.5.3 Vetores e matrizes na álgebra Max-Plus

A álgebra Max-Plus também possui representação no formato matricial. Uma matriz quadrada, constituída por apenas números inteiros ou  $\varepsilon$ , é dada por  $\mathbb{Z}_{max}^{n \times n} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\})^{n \times n}$ . Sendo  $n$  um número natural positivo.

Assim, a soma de duas matrizes  $A$  e  $B \in \mathbb{Z}_{max}^{n \times n}$  é calculada por:

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij}). \quad (12)$$

**Exemplo 2.7:** Dado as matrizes  $A, B \in \mathbb{Z}_{max}^{2 \times 2}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

A soma das matrizes é dada por:

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 11 & 16 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \oplus 9 & 8 \oplus 4 \\ 11 \oplus 3 & 16 \oplus 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}.$$

E o produto matricial de duas matrizes  $A$  e  $B \in \mathbb{Z}_{max}^{n \times n}$  é dado por:

$$[A \otimes B]_{ij} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes b_{jk} = \max_{j \in I} (a_{ij} + b_{jk}). \quad (13)$$

**Exemplo 2.8:** O produto matricial das matrizes  $A$  e  $B$  é dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 11 & 16 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (3 \otimes 9) \oplus (8 \otimes 3) & (3 \otimes 4) \oplus (8 \otimes 1) \\ (11 \otimes 9) \oplus (16 \otimes 3) & (11 \otimes 4) \oplus (16 \otimes 1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 12 \oplus 11 & 7 \oplus 9 \\ 20 \oplus 19 & 15 \oplus 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 20 & 17 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Outra operação possível é a multiplicação de uma matriz por um escalar, que obedece a relação:

$$[r \otimes A]_{ij} = r \otimes a_{ij}. \quad (14)$$

Considerando  $r \in \mathbb{Z}_{max}$  e  $A \in \mathbb{Z}_{max}^{n \times n}$ .

**Exemplo 2.9:** A multiplicação da matriz  $A$  pelo escalar 2 é igual a :

$$2 \otimes \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 11 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 13 & 18 \end{bmatrix}.$$

O conjunto  $\mathbb{Z}_{max}^{n \times n}$  contém matrizes identidade para multiplicação e para adição, dadas por:

1. Matriz identidade aditiva em  $\mathbb{Z}_{max}^{n \times n}$ :
 
$$\begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

2. Matriz identidade multiplicativa em  $\mathbb{Z}_{max}^{n \times n}$ :
 
$$\begin{bmatrix} e & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \cdots & e \end{bmatrix}.$$

Assim como na álgebra convencional é possível utilizar os operadores simultaneamente.

**Exemplo 2.10:** Considerando  $\mathbb{Z}_{max}^{n \times n}$ , temos :

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 11 & 16 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \otimes e) \oplus (8 \otimes 8) \\ (11 \otimes e) \oplus (16 \otimes 8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \oplus 16 \\ 11 \oplus 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 24 \end{bmatrix} = 16 \otimes \begin{bmatrix} e \\ 8 \end{bmatrix}.$$

O escalar 16 é o autovalor da matriz  $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$  e o vetor  $\begin{bmatrix} e \\ 8 \end{bmatrix}$  é o autovetor da matriz. Nos tópicos seguintes a explicação completa e formal de autovalores e autovetores será fornecida.

### 2.5.4 Teoria da residuação

Na álgebra Max-Plus a operação  $\oplus$  não possui elemento inverso, o que dificulta a encontrar soluções para equações como:  $Ax = b$  ou  $Ax \preceq b$ . Essa situação é exemplificada ao observamos que a soma  $a \oplus b = a \oplus c$  não implica  $b = c$ .

**Exemplo 2.11:** Em  $\mathbb{Z}_{max}$ , se considerarmos  $a = 10$ ,  $b = 3$  e  $c = 4$ ,

$$10 \oplus 3 = \max\{10, 3\} = 10.$$

$$10 \oplus 4 = \max\{10, 4\} = 10.$$

E portanto,

$$3 \neq 4.$$

A teoria da residuação possibilita a inversão de mapeamentos isotônicos e a encontrar soluções para conjuntos que podem ser parcialmente ordenados (GOMES; MAIA, 2015).

A teoria da residuação permite encontrar a máxima sub-solução para desigualdades da forma  $f(x) \preceq b$ . As definições abaixo foram obtidas de (BACCELLI et al., 1992), (MAIA, 2003) e (BLYTH; JANOWITZ, 2014).

**Definição 15.** (Resíduo, mapeamento residuável) Considerando  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$  conjuntos ordenados, um mapeamento isotônico  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  é residuável se para todo  $y \in \mathcal{C}$  existe uma máxima sub-solução para  $f(x) \preceq y$ , essa é representada por  $f^\sharp(y)$ . O mapeamento  $f^\sharp(y)$  é denominado resíduo de  $f$ .

**Teorema 1.** (Residuação) Sejam  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$  conjuntos ordenados, então o mapeamento isotônico  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  é residuável, se  $f^\sharp$  é o único mapeamento isotônico tal que:

$$(f \circ f^\sharp)(y) \preceq y \quad e \quad (f^\sharp \circ f)(x) \succeq x. \quad (15)$$

$$f(\varepsilon) = \varepsilon. \quad (16)$$

**Teorema 2.** (*Residuação para Dióides completos*): Considerando os dióides completos  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$ , o mapeamento  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  é residuável se para todo o subconjunto  $X$  de  $\mathcal{D}$ , existe:

$$f \left( \bigoplus_{x \in X} x \right) = \bigoplus_{x \in X} f(x). \quad (17)$$

Se o dióide  $\mathcal{D}$  é completo, os resíduos dos mapeamentos  $L_a : x \rightarrow a \otimes x$  e  $R_a : x \rightarrow x \otimes a$ , são representados respectivamente por:  $L_a^\# = a \wp x$  e  $R_a^\# = x \phi a$ . O símbolo  $\wp$  é o símbolo da residuação à esquerda e o símbolo  $\phi$  é o símbolo da residuação à direita.

Para casos particulares, os símbolos de residuação à esquerda e à direita representam a subtração na álgebra convencional, ou seja, as soluções são encontradas por meio da operação:  $L_a^\# = R_a^\# = x - a$ .

Para dióides matriciais completos, as operações  $L_a(X) = A \otimes X$  e  $R_a(X) = X \otimes A$  possuem como resíduos as Equações (18) e (19), respectivamente.

$$(L_a^\#)_{ij} = (A \wp X)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n a_{il} \wp x_{lj}. \quad (18)$$

$$(R_a^\#)_{ij} = (X \phi A)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n x_{li} \phi a_{lj}. \quad (19)$$

No qual as linhas, as colunas e as dimensões das matrizes  $L_a^\#$  e  $R_a^\#$  são representadas, respectivamente, por  $i$ ,  $j$  e  $n$ .

**Exemplo 2.12:** Dadas as matrizes  $A, B \in \mathbb{Z}_{max}^{2 \times 2}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pela teoria da residuação, a maior solução de  $X$  dado que  $A \otimes X \preceq B$  é encontrada por:

$$\begin{aligned} X = A \wp B &= \begin{bmatrix} (b_{11} - a_{11}) \wedge (b_{21} - a_{21}) & (b_{12} - a_{11}) \wedge (b_{22} - a_{21}) \\ (b_{11} - a_{12}) \wedge (b_{21} - a_{22}) & (b_{12} - a_{12}) \wedge (b_{22} - a_{22}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (9 - 3) \wedge (3 - 11) & (4 - 3) \wedge (1 - 11) \\ (9 - 8) \wedge (3 - 16) & (4 - 8) \wedge (1 - 16) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (6) \wedge (-8) & (1) \wedge (-10) \\ (1) \wedge (-13) & (-4) \wedge (-15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -10 \\ -13 & -15 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

E a maior solução para  $X \otimes A \preceq B$  é dada por:

$$X = B \phi A = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Pela teoria da residuação dual podemos encontrar as menores super-soluções para equações no formato  $f(x) \succeq b$ .

**Definição 16.** (*Resíduo dual , mapeamento residuável dual*) Considerando  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$  conjuntos ordenados, um mapeamento isotônico  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  é dualmente residuável se para todo  $y \in \mathcal{C}$  existe uma menor super-solução para a inequação  $f(x) \succeq y$ , essa é representada por  $f^b(y)$ . O mapeamento  $f^b(y)$  é denominado resíduo de  $f$ .

**Teorema 3.** (*Residuação dual*) Sejam  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$  conjuntos ordenados, então o mapeamento isotônico  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  é dualmente residuável, se  $f^b$  é o único mapeamento isotônico tal que:

$$f \circ f^b(y) \succeq y \quad e \quad f^b \circ f(x) \preceq x. \quad (20)$$

**Teorema 4.** (*Residuação dual para Dióides completos*) Considerando os dióides completos  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$ , o mapeamento  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  é dualmente residuável se para todo o subconjunto  $X$  de  $\mathcal{D}$ , existe:

$$f \left( \bigwedge_{x \in X} x \right) = \bigwedge_{x \in X} f(x). \quad (21)$$

$$f(\top) = \top. \quad (22)$$

Aonde  $\bigwedge$  é o operador de limite inferior e  $\top$  é o elemento de limite superior (elemento infinito na álgebra convencional).

Se o dióide  $\mathcal{D}$  é completo, para o mapeamento  $T_a(x) = x \oplus a$ , o resíduo dual é denotado por  $T_a^b = x \ominus a$ . Sendo  $\ominus$  o símbolo da residuação dual (BLYTH; JANOWITZ, 2014).

Para casos particulares, o resíduo do mapeamento  $T_a^b$  é dado por:

$$T_a^b = x \ominus a = \begin{cases} x, & \text{se } x \succ a, \\ \varepsilon, & \text{se } x \preceq a. \end{cases} \quad (23)$$

Para dióides matriciais completos, as operações  $T_a^b(X) = X \oplus A$  possuem como resíduos das matrizes

$$(T_a^b)_{ij} = (X \ominus A)_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \text{se } x_{ij} \succ a_{ij}, \\ \varepsilon, & \text{se } x_{ij} \preceq a_{ij}. \end{cases} \quad (24)$$

**Exemplo 2.13:** Dado as matrizes  $A, B \in \mathbb{Z}_{max}^{2 \times 2}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pela residuação dual, a menor solução para  $X$  dado que  $X \oplus A \succeq B$  é igual a:

$$X = B \ominus A = \begin{bmatrix} b_{11} \succ a_{11} & b_{12} \preceq a_{12} \\ b_{21} \preceq a_{21} & b_{22} \preceq a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \succ 3 & 4 \preceq 8 \\ 3 \preceq 11 & 1 \preceq 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

## 2.6 Teoria de Grafos

Grafos são um conjunto de nós conectados por meio de arcos e podem possuir pesos associados. A matriz  $A_{ij}$  associada ao grafo é denominada matriz de incidência, com nós  $i$  e  $j$ , conectados por arcos  $(i, j)$  e com peso  $w(i, j)$ .

**Definição 17.** (*Grafo Dirigido*) O grafo dirigido é um par  $(V, \varepsilon)$ , sendo  $V$  um conjunto de nós de  $G$  e  $\varepsilon \subset V \times V$  representa um conjunto de pares de nós, denominados arcos de  $G$  (BACCELLI et al., 1992).

**Exemplo 2.14:** A Figura (5) representa um sistema modelado por Grafos de Eventos Temporizados.

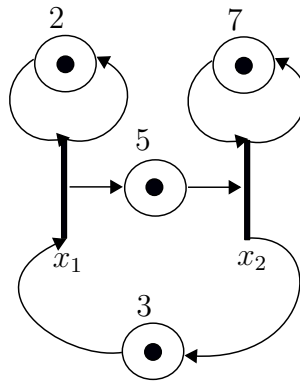


Figura 5 – Rede de Petri.

As equações recursivas que representam a Figura (5) são:

$$x_1(k) = 2x_1(k-1) \oplus 3x_2(k-1)$$

$$x_2(k) = 5x_1(k-1) \oplus 7x_2(k-1)$$

Realocando as equações acima no formato  $x(k) = Ax(k-1)$ , temos que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}}_{x(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}}_A \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{bmatrix}}_{x(k-1)}$$

A matriz de incidência ( $A$ ) representa o relacionamento entre os nós de um grafo, por exemplo, a célula  $a_{11}$  da matriz contém o comprimento do caminho que liga o nó  $x_1$  a ele mesmo, enquanto a célula  $a_{12}$  contém o comprimento do caminho que liga o nó  $x_1$  ao nó  $x_2$ . A representação da matriz  $A$  por meio de grafos é dada pela Figura (6). A representação do grafo utilizando diferentes cores foi feita apenas como um artifício didático.



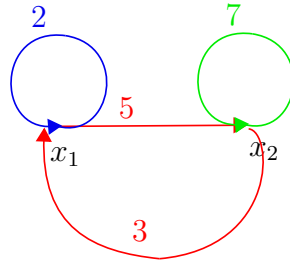


Figura 6 – Grafo referente ao sistema .

Os grafos que possuem mais de um arco conectando os mesmos dois nós são classificados como multigrafos. Um arco  $(i, j)$  possui um nó  $i$  origem ou nó inicial e um nó  $j$  final ou também denominado destino, sendo os arcos  $(i, j)$  representados por "flechas", enquanto os nós são desenhados como pontos. Alguns conceitos de fundamental importância a respeito de grafos são apresentados a seguir.

**Definição 18.** (*Caminho, circuito, laço, comprimento*) Um **caminho**  $\rho$  é uma sequência de nós  $(i_1, i_2, \dots, i_p), p > 1$ , de modo que  $i_j \in \pi(i_{j+1}, j = 1, \dots, p - 1)$  pertença ao conjunto de nós. O nó  $i_1$  representa o nó inicial e o nó  $i_p$  representa o nó final do caminho. O caminho também pode ser definido como um conjunto de arcos sequenciados que conectam uma sequência de nós. O **circuito** é determinado como um caminho que possui o mesmo nó como inicial e final. O **laço** é um circuito  $(i, i)$ , composto por um único nó, sendo esse o nó inicial e o nó final. O **comprimento** de um caminho ou circuito é igual à soma dos comprimentos dos arcos que compõem esse caminho. Os comprimentos dos arcos podem ser considerados iguais a 1, a menos que especificados de outra forma (BACCELLI et al., 1992) .

**Exemplo 2.15:** A Figura (6) apresenta 2 nós, representados por  $x_1$  e  $x_2$ . Essa Figura contém três circuitos, representados pelas cores vermelha, azul e verde. O circuito vermelho possui comprimento igual a 8, dado pela soma do arco que conecta  $x_1$  a  $x_2$  com o comprimento do arco que conecta  $x_2$  a  $x_1$ , portanto,  $5 + 3 = 8$ . Os outros dois circuitos deste sistema são classificados como laços por serem compostos por apenas um nó, sendo o comprimento do laço azul igual a 2 e o comprimento do laço verde igual a 7.

**Definição 19.** (*Grafo fortemente conexo*) O Grafo fortemente conexo existe se para todas as conexões entre os nós,  $i$  e  $j \in G(A)$ , existe um caminho de  $i$  para  $j$  (BACCELLI et al., 1992).

**Exemplo 2.16:** O grafo referente a Figura (6) é classificado como fortemente conexo, pois existe um caminho de qualquer nó para qualquer nó.

A partir do conceito de grafo fortemente conexo pode-se concluir que um nó isolado sempre será fortemente conexo.

Como já foi apresentado, matrizes podem representar os grafos de forma análoga ao que ocorre com as matrizes de incidência de rede de Petri. A relação entre grafos e matrizes possibilita a interpretação de resultados matemáticos. Além de possibilitar a solução de diversos problemas, por meio dos teoremas e conceitos desenvolvidos a partir dessa relação, sendo os principais conceitos para compreensão deste trabalho:

**Definição 20.** (*Matriz irredutível*) Uma matriz é irredutível se o grafo de precedência é fortemente conexo, ou seja, possui uma matriz  $A$  fortemente conectada (BACCELLI et al., 1992).

**Exemplo 2.17:** A matriz  $A$  que representa a Figura (6) é classificada como irredutível, visto que todas as células que a constitui são preenchidas.

**Definição 21.** (*Ciclo médio*) O peso médio de um caminho é encontrado pela soma dos pesos dos arcos individuais do caminho, dividido pelo comprimento do caminho. Se o caminho é denominado  $\rho$ , então o peso médio é dado por  $|\rho|_w/|\rho|_l$ . Caso o caminho seja um circuito, o seu peso médio também é denominado como ciclo médio (BACCELLI et al., 1992).

**Exemplo 2.18:** O ciclo médio dos caminhos que constituem a Figura (6) é dado por:

$$\square \rho_{azul} = |\rho|_w/|\rho|_l = \frac{2}{1} = 2$$

$$\square \rho_{verde} = |\rho|_w/|\rho|_l = \frac{7}{1} = 7$$

$$\square \rho_{vermelho} = |\rho|_w/|\rho|_l = \frac{5+3}{2} = 4$$

O ciclo médio é um conceito muito importante para operações que envolvem o operador Estrela de Kleene aplicado a matrizes. Como já foi supracitado, essa operação representa o conjunto de todas as cadeias de tamanho  $i$ . A convergência e, portanto, a obtenção de uma única matriz que represente esse conjunto só ocorre quando pelo menos um dos ciclos médios que compõem a matriz seja não positivo, ou seja,  $\rho(A) \preceq 0$ .

**Exemplo 2.19:** A matriz  $A$  que representa o sistema da Figura (5) não converge quando aplicada a operação de Estrela de Kleene, pois de acordo com o exemplo 2.18 todos os ciclos encontrados são maiores que 0.

**Definição 22.** (*Máximo Ciclo Médio*) O máximo ciclo médio é calculada sobre todos os circuitos no gráfico, ou seja, é o máximo entre todas as médias dos ciclo (GOMES; MAIA, 2015).

**Exemplo 2.20:** O máximo ciclo médio da Figura (6) é igual a 7.

O máximo ciclo médio de um sistema é igual ao seu autovalor.

Autovalores e autovetores associados podem nos ajudar a responder algumas perguntas interessantes, por exemplo, como podemos iniciar uma rede de montagem industrial para que ela produza de maneira estável e previsível.

**Exemplo 2.21:** Retomando a equação originada pelo Exemplo 2.4, se fixarmos  $x(0) = [e, 4]^T$ , sendo  $A \otimes x(0) = x(1)$ , temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e \\ 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \\ &= 4 \otimes \begin{bmatrix} e \\ 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Além disso, nós temos  $A \otimes x(1) = x(2)$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix} = \\ &= 4 \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos observar que o comportamento do sistema sempre depende do escalar 4, ou seja,

$$x(k+1) = A \otimes x(k) = 4 \otimes x(k).$$

Assim, a qualquer momento  $k$ , o nó  $i$  pode iniciar seu  $k$ -ésimo processo 4 unidades após o  $(k-1)$ th processo. Em termos mais gerais,

$$A \otimes x(k) = \lambda \oplus x(k) = x(k+1). \quad (25)$$

Em contrapartida ao considerarmos o mesmo sistema se fixarmos  $x(0) = \begin{bmatrix} e \\ 7 \end{bmatrix}$ , sendo  $A \otimes x(0) = x(1)$ , obtemos :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Por meio do valor inicial  $x(0) = \begin{bmatrix} e \\ 7 \end{bmatrix}$  não conseguimos obter uma relação, na qual possamos descobrir os estados futuros do sistema.

Podemos concluir que é possível estabelecer uma técnica sistemática que forneça comportamento discreto do sistema, à medida que ele evolui. No entanto, essa técnica não possui aplicação se escolhermos nossa condição inicial de forma que o sistema evolua de maneira instável e até imprevisível. Portanto, para admitirmos uma condição inicial ideal que garanta a evolução do sistema de modo estável é necessário encontrar o seu autovalor e o seu autovetor.

**Definição 23.** (*Autovalor e Autovetor*) Seja  $A \in \mathbb{Z}_{max}^{n \times n}$ . Se  $\lambda \in \mathbb{Z}_{max}$  e  $v \in \mathbb{Z}_{max}^n$  de modo que  $v$  tenha pelo menos uma entrada finita e

$$A \otimes v = \lambda \otimes v,$$

sendo  $\lambda$  o autovalor de  $A$  associado ao autovetor  $v$ .

Qualquer matriz irredutível  $A \in \mathbb{Z}_{max}^{n \times n}$  possui apenas um autovalor. Esse autovalor, denotado  $\lambda(A) \in \mathbb{Z}_{max}$ , é um número finito igual ao peso médio máximo dos circuitos.

## 2.7 Sistemas dinâmicos em Max-Plus

### 2.7.1 Conexão da álgebra Max-plus com GET

Os sistemas modelados por GET podem ser representados em espaço de estados. As equações lineares dispostas em espaço de estados são utilizadas para representar os diferentes estados de um sistema modelado, por meio da relação do estado atual de um modelo com seus estados anteriores.

As Equações (26) e (27) representam as equações em espaço de estado.

$$x(k) = A \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k), \quad (26)$$

$$y(k) = C \otimes x(k), \quad (27)$$

no qual o vetor de entrada  $u(k)$  não possui nós predecessores e o vetor de saída  $y(k)$  não contém nós sucessores. Os componentes de  $x$  são referentes aos nós internos da  $k^{th}$  data, pois possuem nós sucessores e antecessores. As matrizes  $A, B, C$  são matrizes com as características dos sistemas e possuem dimensões apropriadas.

Também é comum encontrar equações que descrevem a dinâmica de um sistema no formato apresentado por (28).

$$x(k) = A_0 \otimes x(k) \oplus A_1 \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k), \quad (28)$$

no qual  $A_0, A_1$  e  $B$  são matrizes características dos sistemas. A Equação (28) é chamada de equação implícita por apresentar  $x(k)$  em ambos os lados. De acordo com a Definição 22 é possível reescrever essas equações somente quando o máximo dos ciclos médios de  $A_0$  é negativo, quando reescritas, elas são equivalentes à (29).

$$x(k) = A_0^* A_1 \otimes x(k-1) \oplus A_0^* B \otimes u(k). \quad (29)$$

A matriz  $A$  é igual a  $A_0^* A_1$  e a matriz  $B$  do sistema é igual a  $A_0^* B$ .

**Definição 24.** *Se existem apenas circuitos com pesos não positivos no grafo  $G(A)$ , existe uma solução  $x = A^*b$  para  $x = Ax \oplus b$ . Se os pesos dos circuitos são negativos, a solução é única (BACCELLI et al., 1992).*

Isso é observado pois, se  $x = A^*b$  é a solução, então é obtido:

$$A(A^*b) \oplus b = (e \oplus AA^*)b = A^*b.$$

Para maior compreensão de como (29) é obtida, é necessário reescrevê-la como:

$$x(k) = A_0x(k) \oplus W.$$

Aonde  $W = A_1 \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k)$ , supondo que  $x(k)$  é a solução, então:

$$\begin{aligned} x(k) &= A_0x(k) \oplus W, \\ x(k) &= A_0(A_0x(k) \oplus W) \oplus W, \\ x(k) &= A_0^2x(k) \oplus A_0W \oplus W, \\ &\vdots \\ x(k) &= A_0^l x(k) \oplus A_0^{(l-1)}W \oplus A_0^{(l-2)}W \oplus \dots \oplus W. \end{aligned} \quad (30)$$

Considerando que todos os circuitos do grafo possuem pesos não positivos, a solução para a Equação (30) é dada por:

$$x(k) = A_0^*W. \quad (31)$$

Substituindo  $W$  na Equação (31), obtemos:

$$x(k) = A_0^* \otimes A_1 \otimes x(k-1) \oplus A_0^* \otimes B \otimes u(k). \quad (32)$$

**Exemplo 2.22:** As Equações (8) e (9), referentes à Figura 4, podem ser reescritas no formato de equações de estado, sendo obtido:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}}_{x(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon \end{bmatrix}}_{A_0} \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}}_{x(k)} \oplus \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}}_{A_1} \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{bmatrix}}_{x(k-1)} \oplus \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 7 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}}_B \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}}_{u(k)}$$

Ao substituir os valores de  $A = A_0^* \otimes A_1$  e  $B = A_0^* \otimes B$ , é obtido:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}}_{x(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & 4 \end{bmatrix}}_A \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{bmatrix}}_{x(k-1)} \oplus \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 14 & 11 \end{bmatrix}}_B \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}}_{u(k)}$$

À partir desse resultado é possível extrair informações à respeito do comportamento do sistema, por exemplo, se simularmos que as entradas iniciais são:

$$u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

Obtemos o comportamento das transições internas:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad x(1) = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad x(2) = \begin{bmatrix} 18 \\ 24 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

E conseqüentemente, o comportamento das respectivas saídas:

$$y(0) = 14, \quad y(1) = 18, \quad y(2) = 24, \quad \dots$$

Com esses resultados, é possível fazer uma análise detalhada dos sistemas modelados pelas equações de estado. Podemos extrair informações como o tempo que uma peça será produzida, a taxa de produção do sistema, a data de disparo inicial do sistema, entre outras.

## 2.8 Teoria de semimódulo

Um semimódulo é equivalente ao conceito de espaço vetorial em uma configuração de semianel da teoria clássica de sistemas. Para introduzir a definição de semimódulo, primeiro consideremos a definição de "monóides".

**Definição 25.** (*Monóide*) Seja  $\mathcal{M}$  um conjunto,  $\hat{\otimes}$  uma operação em  $\mathcal{M}$  e  $\varepsilon_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$  o elemento neutro  $\forall x \in \mathcal{M} : \varepsilon_{\mathcal{M}} \hat{\otimes} x = x \wedge x \hat{\otimes} \varepsilon_{\mathcal{M}} = x$ . Então existe um elemento neutro para o par  $(\mathcal{M}, \hat{\otimes})$ , esse par é denominado monóide. E se o operador  $\hat{\otimes}$  é comutativo, o monóide também é comutativo.

**Definição 26.** (*Semimódulo*) Os semimódulos são definidos como um semianel  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes, \varepsilon_s, e)$  assim como um monóide comutativo  $(\mathcal{M}, \hat{\otimes})$ , com elemento neutro  $\varepsilon_{\mathcal{M}}$  e mapeado como  $(\mathcal{D} \times \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M})$  isso é  $(\lambda, v) \mapsto \lambda.v$  (COHEN; GAUBERT; QUADRAT, 2004).

1.  $(\lambda \otimes \mu).v = \lambda.(\mu.v)$ .
2.  $\lambda(u \hat{\oplus} v) = \lambda u \hat{\oplus} \lambda v$ .
3.  $(\lambda \hat{\oplus} \mu).v = \lambda.v \hat{\oplus} \mu.v$ .
4.  $\varepsilon_s.v = \varepsilon_{\mathcal{M}}$ .
5.  $\lambda.\varepsilon_{\mathcal{M}} = \varepsilon_{\mathcal{M}}$ .
6.  $e.v = v$ .

Para todos  $u, v \in \mathcal{M}$  e  $\lambda, \mu \in \mathcal{D}$ .

Nesse contexto, é possível demonstrar que o conjunto das soluções das equações no formato  $A \otimes x = B \otimes y$  baseado no dióide  $\mathbb{Z}_{max}$ , pode ser caracterizado como semimódulo

finitamente gerado e esse conjunto de soluções pode ser expresso como a imagem da matriz pertencente a  $\mathbb{Z}_{max}$  (BUTKOVIC; HEGEDŰS, 1984), (MAIA, 2003).

### 2.8.1 Resolução da Equação $A \otimes x = B \otimes y$

Um resultado importante para o desenvolvimento deste trabalho diz respeito as soluções de equações no formato  $A \otimes x = B \otimes y$ , no qual  $A$  e  $B \in \mathbb{Z}_{max}^{m \times n}$  e  $x$  e  $y \in \mathbb{Z}_{max}^n$ . Como já foi supracitado, todas as soluções dessa equação pertencem a um semimódulo finitamente gerado, fornecido pelas colunas de uma matriz.

Esse semimódulo pode ser computado utilizando o algoritmo proposto por Cuninghame-Green e Butkovic (2003) que possibilita encontrar, caso exista, uma solução em um número finito de interações. Para que ocorra a convergência desse algoritmo é necessário que as matrizes  $A$  e  $B$  sejam  $G$ -*astic*.

**Definição 27.** (Matriz  $G$ -*astic*) Uma matriz é caracterizada com  $G$ -*astic* se essa possui ao menos um elemento finito em todas as linhas que a constituem.

O pseudo-algoritmo representado por Algorithm 1 que apresenta como solução a matriz  $Z$ .

---

#### Algorithm 1 Algoritmo Alternante

---

```

1: function X=ALTERN(A,B,x0)
2:    $r \leftarrow 0$ 
3:    $x(0) \leftarrow x_0$ 
4:    $y(r) \leftarrow B \oslash (Ax(r))$ 
5:    $x(r+1) \leftarrow A \oslash (By(r)) \wedge x(0)$ 
6:   while  $Ax(r+1) \neq By(r)$  do
7:      $r \leftarrow r+1$ 
8:      $y(r) \leftarrow B \oslash (Ax(r))$ .
9:      $x(r+1) \leftarrow A \oslash (By(r))$ 
10:  close;
11:  end while
12: end function

```

---

## 2.9 Controle na álgebra Max-Plus

Um sistema de controle pode ser definido como um conjunto de componentes que possuem como objetivo regular ou comandar outro sistema ou ele próprio e pode ser estruturado em malha aberta ou fechada (OGATA; SEVERO, 1998).

Os sistemas controlados em malha aberta não sofrem ação de correção dos sinais de saídas, nessa estrutura de controle as entradas de referência são condições pré-fixadas. Apesar desses sistemas serem mais fáceis para construir e não apresentarem problemas

de estabilidade, os ocasionais distúrbios nesses sistemas podem proporcionar erros e, conseqüentemente, os valores de saídas podem apresentar diferenças em relação aos padrões pré-determinados.

Os sistemas de controle em malha fechada contêm elementos de correção que proporcionam a combinação dos valores reais com os valores desejados. Se a saída observada não estiver conforme desejada, a entrada de controle é alterada por meio da realimentação. Essa mudança é feita de acordo com a variação na informação fornecida pelo sistema (OGATA; SEVERO, 1998). Por exemplo, em um sistema de fabricação, se uma máquina tiver capacidade unitária, o *feedback* é importante para informar ao sistema quando a máquina está ociosa.

A principal vantagem de um sistema controlado por realimentação é a garantia de estabilidade. Essa característica não é assegurada em sistemas em malha aberta, por exemplo, ao analisarmos o tempo de processamento no lugar  $P_2$  referente à Figura 7, observamos que o tempo é igual a 2 unidades de tempo, enquanto o tempo para processar uma peça em  $P_5$  é de 4 unidades de tempo, o que nos permite concluir que o tempo para finalização da tarefa em  $P_2$  é mais rápido que o de  $P_5$ . Esse fato faz com que o número de fichas no lugar  $P_4$  aumente ilimitadamente, pois uma peça pode ser inserida em  $P_4$  a cada duas unidades de tempo e uma peça deixa  $P_4$  após pelo menos quatro unidades de tempo.

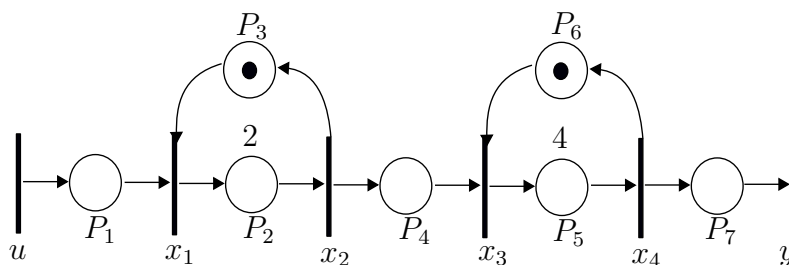


Figura 7 – Grafo de Evento Temporizado em malha aberta.

Já o aspecto de estabilidade é característico dos sistemas controlados por realimentação. Se considerarmos o mesmo sistema representado pela Figura 7, mas agora acrescido de um estado de controle temporizado, obtemos o sistema em malha fechada representado pela Figura 8. Por meio dessa Figura é possível notar que a ficha só será inserida no sistema pelo lugar  $P_8$  após pelo menos quatro unidades de tempo. De acordo com essa estrutura, também podemos garantir que não existe a possibilidade de acúmulo de peças no lugar  $P_4$ .

O controlador pode almejar vários objetivos, entretanto, no contexto do desenvolvimento deste trabalho de mestrado o interesse é projetar uma lei de controle no formato  $u(k) = Fx(k - 1)$  para sistemas que atendam a determinadas restrições operacionais. Se assegurando que a lei de controle seja aplicável para qualquer condição inicial. Em outras



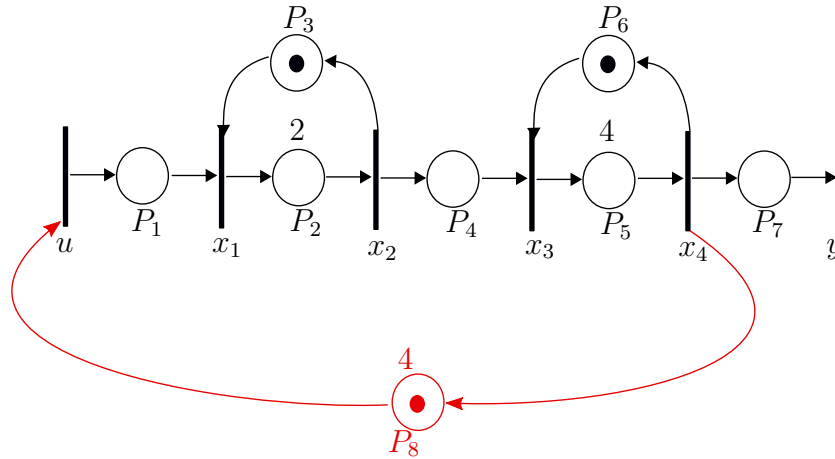


Figura 8 – Grafo de Evento Temporizado em malha fechada.

palavras, o problema de controle pode ser resolvido encontrando uma lei de controle com realimentação, tal que:

$$x(k) = (A \oplus BF)x(k-1) \quad \forall k > 0.$$

Além da garantia de atender as restrições, é almejado que o sistema em malha fechada mantenha a taxa de produção referente à malha aberta. Por exemplo, o autovalor da Figura 8 é  $\lambda = 4$ , isso significa que uma peça só será produzida após 4 unidades de tempo que o processo de fabricação da peça anterior foi finalizado. Uma forma do controlador assegurar isso é por meio da aplicação da política de gestão *just-in-time*.

O *just-in-time* é uma política administrativa, na qual as especificações de demanda de produção são atendidas sem a formação de estoques desnecessários no interior da planta fabril, ou seja, é almejada a entrega do produto no exato momento demandado. Uma forma de se aplicar essa política de controle é garantindo a maximização das datas de admissões de peças assegurando que a saída do sistema respeite a uma dada referência, sem alterar a sua taxa de produção (SILVA; MAIA, 2016).

A política *just-in-time* garante que a matéria-prima seja inserida no local de entrada somente no momento em que puder ser processada. Isso possibilita determinar a sincronização desejada do sistema, por meio do planejamento dos materiais comprados, dos níveis apropriados de estoque, dos prazos de entrega, da programação das atividades de produção. Essas atividades afetam o nível de desempenho do sistema em termos de custo, qualidade, prazo, confiabilidade, e conseqüentemente a competitividade entre empresas.

Para que o controlador ocasione o retardo das chegadas das peças, os lugares acrescentados podem possuir tempo de espera. Também é necessário definir outras variáveis, como a quantidade de fichas dos sistemas realimentados, sendo um dos principais desafios do presente trabalho encontrar o tempo mínimo de espera ideal entre as trocas de fichas, permitindo o uso racional do processo produtivo e evitando perdas.



---

## Metodologia

O presente capítulo descreve os métodos de controle propostos como resultados deste trabalho, no qual os sistemas são modelados via GET e possuem suas dinâmicas descritas a partir de equações recursivas provenientes da álgebra Max-Plus.

O primeiro método tem por objetivo proporcionar o projeto de controladores que garantam o não acúmulo de peças nos sistemas e que não permitam violações nas restrições operacionais impostas. Uma determinada demanda de referência, uma dinâmica de sistema desejada ou limitações do sistema, são tipos de restrições. Uma situação em que se almeja a finalização do processo de uma máquina antes do início da tarefa de outra máquina, exemplifica uma restrição de dinâmica desejada. Uma regra que estabelece que diferentes máquinas terminem os respectivos processos no mesmo instante de tempo, é outro exemplo de restrição.

O primeiro método também apresenta como calcular deterministicamente, a partir da matriz de controle ( $F_{PM}$ ), uma matriz constituída por elementos maiores ou iguais à  $F_{PM}$ . A matriz encontrada proporciona maior atraso nas datas de entradas das matérias-primas. O contexto desse atraso é explicado pela política de gestão *just-in-time*.

O segundo método define como sintetizar controladores que respeitem a política administrativa *just-in-time*. Esses controladores além de garantir que as peças não se acumulem, devem determinar que as matérias-primas sejam solicitadas somente quando as máquinas estiverem disponíveis para processá-las. Para isso, o controlador deve atrasar ao máximo à inserção de recurso no sistema, assegurando que o instante em que a peça é finalizada não se altere, além de garantir que as restrições operacionais sejam atendidas.

A formulação do controlador é baseada em problemas de otimização, portanto, é desejável maximizar uma função de interesse. Para este trabalho, é desejável adiar o máximo possível as datas de entrada, a fim de evitar a geração de estoque, sujeita a algumas restrições operacionais.

Em ambos os métodos as condições para a existência de matrizes de controle são discutidas e as matrizes máximas de realimentação, que garantem que os sistemas respeitem as datas dos prazos são encontradas. Se a matriz resultante for não causal, são apresentadas

técnicas de causalização para a obtenção de uma matriz causal equivalente.

A ferramenta computacional utilizada para simular os sistemas foi o pacote computacional gratuito Scicoslab <sup>1</sup>.

### 3.1 Descrição do problema

Nesta subseção é explicado como foi feita a modelagem dos sistemas, de acordo com as metodologias propostas neste trabalho. Inicialmente, foi necessário definir os pressupostos adotados para a modelagem via GET, sendo esses:

- Existem três tipos de lugares nos sistemas modelados, referentes às máquinas, os status das máquinas e os estoques internos dos sistemas.
- Os sistemas devem possuir ao menos uma entrada.
- Os sistemas devem possuir ao menos uma transição interna.

O estado de um sistema é descrito por meio de um sistema de equações. Neste trabalho, utilizou-se da representação por equações de espaço de estados, uma forma prática e compacta de modelar matematicamente um sistema físico com múltiplas entradas e saídas. Nas equações de estados as entradas, as saídas e os estados internos são representados na forma matricial.

Os sistemas modelados pela álgebra Max-Plus podem ser representados como:

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k). \quad (33)$$

Sendo  $x(k) \in (\mathbb{Z})^n$  o vetor dos tempos de disparos dos eventos dos estados internos pela  $k$ -ésima vez e  $u(k) \in (\mathbb{Z})^p$  o vetor dos tempos de disparos das entradas. As matrizes  $A \in \mathbb{Z}_{max}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{Z}_{max}^{n \times p}$ , possuem  $n$  estados internos e  $p$  entradas (BACCELLI et al., 1992).

Os sistemas podem ser descritos por equações implícitas como apresentado em (34).

$$x(k) = A_0x(k) \oplus A_1x(k-1) \oplus B_0u(k). \quad (34)$$

A Equação (34) pode ser reescrita como (35), caso o máximo dos ciclos médios de  $A_0$  seja não positivo.

$$x(k) = A_0^*A_1x(k-1) \oplus A_0^*B_0u(k). \quad (35)$$

<sup>1</sup> ScicosLab é um pacote gratuito de código aberto proporcionando um ambiente multi-plataforma para computação científica. É baseado no *software* Scilab, além de possuir a modelagem e Scicos ferramenta de simulação e várias outras ferramentas, como as utilizadas pela álgebra Max-Plus. O Scicoslab pode ser obtido pelo site <http://www.scicoslab.org/> e sua última versão é a 4.4.2, disponível desde outubro de 2015.

Ao comparar a Equação (35) com a Equação (33), podemos observar que a matriz  $A_0^*A_1$  se equivale a  $A$ , enquanto a matriz  $A_0^*B_0$  é análoga a  $B$ .

Um dos objetivos do controlador, caso o sistema esteja submetido à restrições operacionais, é garantir que:

$$Ex(k) \preceq x(k) \Leftrightarrow E^*x = x \Leftrightarrow x \in \text{Im}E^*. \quad (36)$$

Sendo a matriz de restrição  $E \in \mathbb{Z}_{max}^{n \times n}$ , com  $n$  estados internos.

**Demonstração:** A forma de garantir que os sistemas estão sendo controlados, sem violar às restrições impostas é satisfazendo a Equação (36), que é encontrada à partir dos trabalhos de Baccelli et al. (1992) e Maia, Andrade e Hardouin (2011). Desenvolvendo as desigualdades que originam (36) obtemos:

$$\begin{aligned} E.Ex(k) &\preceq Ex(k) \preceq x(k), \\ E^3x(k) &\preceq \dots \preceq x(k), \\ x(k) \oplus Ex(k) \oplus E^2x(k) \oplus \dots \oplus E^nx(k) \oplus \dots &\preceq x(k) \oplus x(k) \oplus \dots, \\ (I \oplus E \oplus E^2 \dots)x(k) &\preceq x(k), \\ E^*x(k) &\preceq x(k). \end{aligned}$$

Como,

$$I \preceq E^* \Rightarrow Ix(k) \preceq E^*x(k) \Rightarrow x(k) \preceq E^*x(k).$$

Portanto, obtemos:

$$E^*x(k) = x(k). \quad (37)$$

A matriz que contém todas as restrições impostas ao sistema é representada por (38).

$$E' = E \oplus A_0. \quad (38)$$

**Demonstração:** A Equação (38) fornece as restrições impostas ao sistema, essa é obtida à partir das Equações (34) e (36). A Equação (34) indica que o evento  $x(k)$  só poderá ocorrer após todos os outros eventos que contenham  $x(k)$  finalizarem, o que acarreta em:

$$A_0x(k) \preceq x(k).$$

E como já foi demonstrado, a Equação (36) é igual a:

$$Ex(k) \preceq x(k).$$

Então é possível observar:

$$\begin{aligned} A_0x(k) \oplus Ex(k) &\preceq x(k), \\ (A_0 \oplus E)x(k) &\preceq x(k). \\ E' &= E \oplus A_0. \end{aligned}$$

## 3.2 Primeiro método

De acordo com a modelagem via GET os lugares iniciais sem condições prévias definidas representam entradas com estoques infinitos de fichas prontas para serem consumidas, o que fisicamente é impossível. Isso implicaria também em problemas como a admissão de peças descontroladamente e a grande probabilidade de ultrapassar a capacidade do sistema. O controle dos sistemas são desejados nessas situações, para estabilizá-los e os torná-los factíveis. O controle feito por meio de acréscimo de estados temporizados é conhecido como realimentação ou *feedbacks*.

O primeiro método descreve como projetar controladores que garantam o não acúmulo de peças no interior dos sistemas, obedecendo as restrições impostas. Para isso, é necessário encontrar uma lei de controle definida pela Equação (39).

$$u(k) = F_{PM}x(k-1), \quad (39)$$

dado  $F_{PM} \in \mathbb{Z}_{max}^{p \times n}$ .

Após a obtenção das matrizes que modelam os sistemas e das restrições impostas, o possível controlador é calculado pelo algoritmo alternante. Como explicado previamente, esse algoritmo permite encontrar soluções para equações dispostas no formato  $A \otimes X = B \otimes Y$ .

De acordo com o algebrismo explicado no método proposto por Maia, Andrade e Hardouin (2011), a Equação (40) é equivalente a  $A \otimes X = B \otimes Y$ , sendo possível encontrar a solução dessa equação por meio do algoritmo alternante.

$$B \otimes Z = E^* \otimes Y, \quad (40)$$

sendo  $B$  a matriz das entradas do sistema,  $E$  a matriz de restrições e  $Z$  uma matriz randômica inicial. A matriz  $Z$  encontrada como solução desse algoritmo é a própria matriz de controle, caso essa matriz seja constituída de apenas elementos positivos.

Caso a matriz encontrada por meio do algoritmo alternante possua elementos negativos, ela é classificada como não causal. A implementação desse tipo de matriz é impossível, visto que seria necessário o conhecimento de valores que só serão determinados no futuro. Para ilustrar essa situação, consideremos a lei de controle  $u(k) = (-5)x(k)$ , adotando o estado  $x(k)$  e a entrada de controle  $u(k)$  como escalares. É possível notar por meio dessa equação que a entrada  $u$  nunca será disparada, visto que seria necessário que  $u$  disparasse 5 unidades de tempo antes do disparo de  $x$  pela  $k$ -ésima vez. Ou seja, seria necessário que  $u$  previsse em qual tempo ocorrerá o disparo de  $x$ , para que assim ele pudesse disparar.

Para contornar a impossibilidade de implementação das matrizes não causais, são adotadas técnicas de causalização. Essas fornecem a partir de uma matriz não causal uma matriz equivalente causal, constituída apenas por elementos não negativos.

A primeira técnica estudada neste trabalho foi a de paralelismo, que consiste em multiplicar a matriz não causal pelo módulo do menor valor encontrado entre as células que a constituem, de forma a aumentar todos os valores dos componentes da matriz e assim torná-la causal.

Após a obtenção da matriz  $F_{PM}$  causalizada, a otimização do sistema ocorre por meio da obtenção de uma nova matriz de controle ( $F_{PM}^{max}$ ) que adote a política *just-in-time*. Para isso, a matriz  $F_{PM}$  que satisfaz a condição de restrição  $E^*x(k) = x$  sofre um aumento em seus valores constituintes. De acordo com o trabalho de Maia, Andrade e Hardouin (2011) uma matriz que satisfaz as condições de restrições é obtida a partir do sistema de equações:

$$\begin{cases} x(k) = (A \oplus BF_{SM})x(k-1), \\ E^*x(k) = x(k). \end{cases} \quad (41)$$

Substituindo a primeira equação do sistema (41) na segunda, obtemos:

$$E^*(A \oplus BF_{PM})x(k-1) = (A \oplus BF_{PM})x(k-1). \quad (42)$$

Substituindo  $k = 1$  em

$$E^*(A \oplus BF_{PM})x(0) = (A \oplus BF_{PM})x(0). \quad (43)$$

Considerando  $x(0) = E^*v$ , obtemos:

$$E^*(A \oplus BF_{PM})E^*v = (A \oplus BF_{PM})E^*v \Rightarrow E^*(A \oplus BF_{PM})E^* = (A \oplus BF_{PM})E^*. \quad (44)$$

Portanto, uma matriz de controle que satisfaz as condições de restrições é igual a:

$$E^* \otimes (A \oplus B \otimes F_{PM}^{max}) \otimes E^* = (A \oplus B \otimes F_{PM}) \otimes E^*. \quad (45)$$

De acordo com o trabalho de Maia, Andrade e Hardouin (2011) a inequação  $A \preceq B \otimes F_{PM}^{max}$  é sempre verdadeira, logo temos que:

$$E^* \otimes (B \otimes F_{PM}^{max}) \otimes E^* = (A \oplus B \otimes F_{PM}) \otimes E^*.$$

E portanto, uma matriz  $F_{PM}^{max}$  com valores constituintes maiores do que  $F$  é encontrada por meio da Equação (46).

$$F_{PM}^{max} = E^* \otimes B \otimes (A \oplus B \otimes F_{PM}) \otimes E^*. \quad (46)$$

A solução da Equação (46) é particularmente interessante, pois garante um atraso na admissão das peças nas máquinas, quando comparada a matriz de controle  $F_{PM}$ , sem violar as restrições impostas.

### 3.3 Segundo método

O principal objetivo dessa metodologia é encontrar uma matriz que controle sistemas com restrições de funcionamento e adote a política de administração *just-in-time*. Para isso, o controlador deve maximizar as datas de entrada do sistema, sem afetar a taxa de produção do sistema.

Embora a política *just-in-time* já tenha sido abordada no método anterior, manter a demanda pré-estabelecida pela taxa de produção do sistema não era um requisito. Pois o primeiro método expõe como encontrar uma matriz de controle  $F_{PM}$ , que respeite as restrições e não permita o acúmulo de peças no interior do sistema, além de apresentar como projetar uma matriz  $F_{PM}^{max}$  que atrase a inserção das peças no sistema, mas sem garantia que a taxa de produção seja mantida. Diferentemente do método proposto nesta seção, no qual o principal objetivo é sintetizar um  $F_{SM}$  que atrase as entradas, mas sem alterar o disparo da transição final do sistema, portanto, mantendo a sua taxa de produção.

A matriz de controle calculada a partir da presente metodologia deve:

- Garantir a taxa ótima do sistema original em malha aberta.
- Ser a máxima matriz possível, portanto, provocar atrasos na inserção de matéria-prima no sistema, sem afetar a entrega.
- Satisfazer as condições de restrições.

A síntese de controladores que obedeçam aos tópicos anteriores é feita a partir de etapas que serão melhor explanadas a seguir.

A taxa ótima de produção de peças é garantida quando o autovalor do sistema original em malha aberta não é alterado ao controlar o sistema. Para assegurar a taxa ótima do sistema é necessário encontrar um vetor  $v$  tal que,

$$(A \oplus BF_{SM})v \preceq \lambda v$$

.

O vetor  $v$  que inicializa o sistema deve atender as restrições impostas, uma forma de garantir o atendimento às restrições é utilizado o  $\lambda$ -super-autovetor.

**Definição 28.** ( *$\lambda$ -Super-autovetor*): Um  $\lambda$ -super-autovetor associado a um determinado valor  $\lambda$  é definido como todo  $v$  tal que  $Av \preceq \lambda v$ . Podemos ver que o conjunto de todos os vetores  $\lambda$ -super-autovetor da matriz  $A \in \mathbb{Z}_{max}^{n \times n}$  pode ser caracterizado por um semimódulo. Esse semimódulo é igual a  $V(A \oplus \lambda I; \lambda)$ , uma vez que  $Av \preceq \lambda v$  é equivalente a  $(A \oplus \lambda I)v = \lambda v$  MAIA et al. (2011).

O  $\lambda$ -super-autovetor para essa metodologia é encontrado a partir do sistema de equações:



$$\begin{cases} Av' \preceq \lambda v' \\ E^* v' = v' \end{cases} \Rightarrow AE^* v' \preceq \lambda E^* v' \Rightarrow (A \oplus \lambda I)E^* v' = \lambda E^* v'.$$

**Proposição 1.** *Dado um sistema, o  $\lambda$ -super-autovetor é oriundo da equação:*

$$(AE^* \oplus \lambda E^*)v = \lambda E^* v. \quad (47)$$

**Demonstração:** *A Equação (47) pode ser solucionada por meio do algoritmo alternante por poder ser disposta no formato da equação  $A \otimes X = B \otimes Y$ , pois:*

$$(AE^* \oplus \lambda E^*)v = \lambda E^* v,$$

$$\tilde{A}v = \tilde{B}v,$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} \\ I \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ I \end{bmatrix} v.$$

Para obtenção da máxima matriz de controle possível, e portanto, o atendimento ao segundo tópico proposto por essa metodologia é necessário encontrar o comportamento máximo da matriz de transição  $A$ , por meio da Equação:

$$A^{max} = (\lambda \otimes v)\phi v, \quad (48)$$

sendo  $A^{max} \succeq A$ .

Após garantir a taxa ótima sistema e a matriz máxima possível é necessário assegurar que a matriz de controle satisfaça as restrições impostas. Como demonstrado pelo trabalho de Maia, Andrade e Hardouin (2011), a matriz de controle que atende as restrições é obtida a partir do sistema de equações:

$$\begin{cases} x(k) = (A \oplus BF_{SM})x(k-1), \\ E^* x(k) = x(k). \end{cases} \quad (49)$$

Como já supracitado, esse sistema resulta na Equação:

$$E^* \otimes (A \oplus B \otimes F_{SM}) \otimes E^* = (A \oplus B \otimes F_{SM}) \otimes E^*, \quad (50)$$

A matriz máxima de controle  $F_{SM}$  que adota a política *just-in-time*, garantindo a taxa ótima do sistema e satisfazendo as restrições impostas sempre irá existir se  $BF_{SM} = A^{max}$ .

**Proposição 2.** *A matriz de feedback  $F_{SM}$  sempre existirá se  $\exists F_{SM} \mid BF_{SM} = (\lambda v)\phi v = A^{max}$ .*

**Demonstração:** *A partir de*

$$(A \oplus BF_{SM})v \preceq \lambda v,$$

*vemos que*

$$(A \oplus BF_{SM}) \preceq (\lambda v)\phi v.$$

*Então, se existir um  $F_{SM}$  tal que  $A \oplus BF_{SM} = A^{max}$  e  $E^*(A \oplus BF_{SM})E^* = (A \oplus BF_{SM}) \otimes E^*$ , o problema está resolvido. Isso pode ser garantido ao substituirmos a relação  $BF_{SM} = A^{max}$  em  $A \oplus BF_{SM} = A^{max}$  obtendo*

$$A \oplus BF_{SM} = A \oplus A^{max} = A^{max},$$

*pois  $A^{max} \succeq A$ . Em contrapartida, ao substituirmos a relação  $A^{max} = BF_{SM}$  em  $E^*(A \oplus BF_{SM})E^* = (A \oplus BF_{SM}) \otimes E^*$ , é obtido:*

$$E^*(A \oplus BF_{SM})E^* = E^*(A^{max})E^* = A^{max}E^*.$$

A partir da Proposição 2 e da Equação (50), a matriz máxima  $F_{SM}$  é calculada por:

$$F_{SM} = E^*B\phi(A^{max}E^*)\phi E^*. \quad (51)$$

Para sistemas controlados pela matriz  $F_{SM}$  é possível observar que  $A^{max} = E^*A^{max}E^*$ .

**Proposição 3.** *A Equação*

$$A^{max} = E^*A^{max}E^*, \quad (52)$$

*é sempre verdadeira .*

**Demonstração:** *Ao substituir a relação,*

$$v = E^*v$$

*na equação*

$$A^{max}v = \lambda v$$

*obtemos*

$$A^{max}E^*v = \lambda v,$$

*sendo  $A^{max}$  a maior solução de  $A^{max}v = \lambda v$ , a Equação*

$$A^{max} \succeq A^{max}E^* \Leftrightarrow A^{max} = A^{max}E^*, \quad (53)$$

*é uma solução. Em contrapartida, pré-multiplicando a equação  $A^{max}v = \lambda v$  por  $E^*$ , obtemos:*

$$E^*A^{max}v = \lambda E^*v = \lambda v.$$

Logo, a Equação

$$A^{max} \succeq E^* A^{max} \Leftrightarrow A^{max} = E^* A^{max}, \quad (54)$$

também é uma solução. Podemos relacionar as Equações (53) e (54) se multiplicarmos a Equação (53) por  $E^*$  pela esquerda, obtendo:

$$E^* A^{max} = E^* A^{max} E^*. \quad (55)$$

E em seguida ao substituirmos o valor da Equação (55) na Equação (54), obtemos:

$$A^{max} = E^* A^{max} E^*.$$

Conforme já foi explanado na seção anterior, caso a matriz  $F_{SM}$  encontrada seja não causal é necessário aplicar uma das técnicas de causalização. Para essa metodologia são utilizadas as causalizações desenvolvidas por Maia, Hardouin e Cury (2013) e por Souza (2018).

A técnica desenvolvida por Maia, Hardouin e Cury (2013) torna possível encontrar uma matriz correspondente causal, se a matriz resultante da operação  $(A \oplus BF_{nc})$  é irredutível e se essa possui um autovalor maior que 0.

A lei de controle quando não implementável é definida pela Equação (56).

$$u_{nc}(k) = F_{nc}x(k-1). \quad (56)$$

Ao substituirmos a Equação (56) no modelo matemático da planta, dado por  $x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k)$ , representado pela Equação (33), obtemos a Equação (57).

$$x(k) = (A \oplus BF_{nc})x(k-1). \quad (57)$$

Como a matriz  $F_{nc}$  é não causal, o sistema não é controlado com base em informações atrasadas de apenas *uma* unidade. A técnica então possibilita encontrar um controlador que seja implementável, por meio da predição de informações de estados. Em um primeiro momento, ela prediz o valor do estado  $x(k-1)$ , sendo obtido:

$$x(k-1) = (A \oplus BF_{nc})x(k-2) \quad (58)$$

Logo substituindo o valor do estado  $x(k-1)$  na Equação (56), obtemos a lei de controle:

$$u(k) = F_{nc}(A \oplus BF_{nc})x(k-2). \quad (59)$$

Se o resultado de  $F_{nc}(A \oplus BF_{nc})$  for uma matriz causal, essa é considerada nossa matriz de controle e sua lei de controle é realizável, com base na informação de estado atrasada de *duas* unidades. Entretanto, caso o resultado nos provenha uma matriz não causal, a técnica realiza a predição para o estado  $x(k-2)$ . Assim, obtemos:

$$x(k-2) = (A \oplus BF_{nc})x(k-3). \quad (60)$$

E a nova lei de controle é proveniente da substituição da Equação (60) na Equação (59), resultando em:

$$u(k) = F_{nc}(A \oplus BF_{nc})(A \oplus BF_{nc})x(k-3). \quad (61)$$

Se a matriz resultante for causal, o controlador é implementável a partir de informações de estado atrasado de *três* eventos. Mas, se ainda assim à matriz resultante contiver elementos negativos em sua composição, o procedimento é repetido até que se encontre uma matriz de implementação factível. Portanto, o procedimento generalizado proposto por Maia, Hardouin e Cury (2013) é dado pela Equação (62).

$$u_{nc} = F_{nc}(A \oplus BF_{nc})^{m-1}x(k-m) \quad \forall k \succeq m. \quad (62)$$

A técnica de causalização proposta por Souza (2018) também utiliza de predição das informações dos estados, mas ela evita a predição de informações desnecessárias, pois essa detêm de menos eventos para convergir ao conjunto desejado. Para isso, primeiramente é feita a divisão da matriz  $F$  em sua parte causal  $[F]_c$  e sua parte não-causal  $[F]_n$ , conforme descrito pela Equação (63).

$$u(k) = [F]_cx(k-1) \oplus [F]_nx(k-1). \quad (63)$$

O procedimento consiste em implementar apenas a parte não causal da matriz até que essa seja constituída apenas pelo elemento  $\varepsilon$ , para isso consideramos:

$$\begin{aligned} x(k-1) &= (A \oplus BF)x(k-2). \\ &= \\ x(k-1) &= Mx(k-2). \end{aligned} \quad (64)$$

O próximo passo é a substituição da Equação (64) na parte não causal da Equação (63), originando a Equação (65).

$$u(k) = [F]_cx(k-1) \oplus ([F]_nM)x(k-2). \quad (65)$$

A lei de controle se torna implementável caso a matriz resultante  $([F]_nM)$  seja constituída apenas por  $\varepsilon$ , caso contrário, ocorre novamente a separação entre a parte causal e a parte não causal da Equação (65), resultando na Equação (66).

$$u(k) = [F]_cx(k-1) \oplus ([F]_nM)_cx(k-2) \oplus ([F]_nM)_nx(k-2). \quad (66)$$

A partir disso é substituído a equação referente a informação de estado  $x(k-2) = Mx(k-3)$  no termo não causal  $[(F]_nM)_nx(k-2)$ . E assim todo o processo é repetido. A lei de controle resultante é apresentada pela Equação (67).

$$u(k) = \bigoplus_{i=0}^s F_i x(k-1), \quad (67)$$

com  $F_i$  causais e um  $s$  finito, em que:

$$F_0 = [F]_c,$$

$$F_1 = [([F]_n M)]_c,$$

$$F_2 = [([([F]_n M)]_n M)]_c,$$

...

Assim, o controlador se torna implementável a partir de alguma das técnicas de causalização apresentadas.

A utilização de diferentes técnicas de causalizações foi feita para suas validações, por utilizar de informações mais recentes para controlar o sistema a técnica proposta por Souza (2018) tende a ser mais robusta quando comparada com a técnica proposta por Maia, Hardouin e Cury (2013), o que será observado no decorrer do próximo capítulo.



## Resultados numéricos

Nesta seção os métodos propostos são empregados em sistemas com organizações operacionais diferentes, para ilustrar a aplicabilidade das metodologias.

### 4.1 Máquinas seriais

O GET da Figura 9 representa a modelagem de um sistema de linha de montagem, conhecido como Sistema Tandem. Esse sistema dispõe de três máquinas  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ , nas quais as entradas  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  representam a admissão de peças, que só serão inseridas no sistema quando as máquinas estiverem aptas para processá-las. A máquina 1 depende de um menor tempo para finalização de sua tarefa quando comparada com o tempo de execução da máquina 2, que por sua vez possui o processo mais lento em relação à última máquina. O sistema produz um único tipo de produto. Para esse sistema os tempos adotados são  $t_1 = 5$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 15$ ,  $t_4 = 2$  e  $t_5 = 8$ .

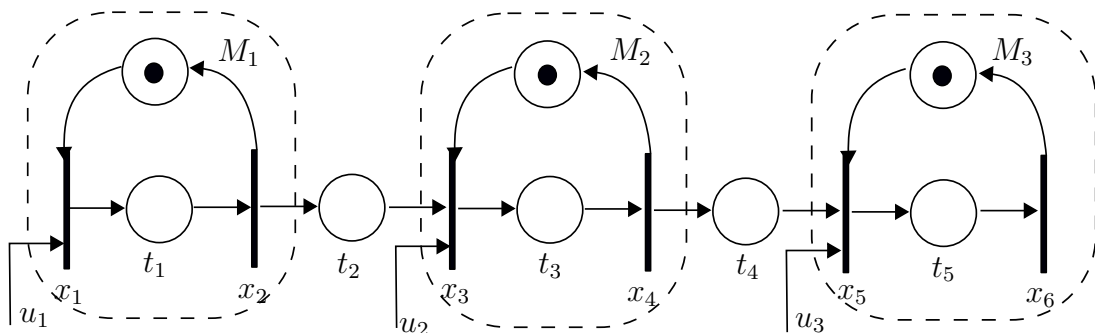


Figura 9 – Linha de montagem serial.

As equações recursivas foram obtidas por inspeção do GET representado pela Figura 9, de tal forma que:

$$x_1(k) = u_1(k) \oplus x_2(k - 1).$$

$$\begin{aligned}
x_2(k) &= 5x_1(k). \\
x_3(k) &= u_2(k) \oplus 2x_2(k) \oplus x_4(k-1). \\
x_4(k) &= 15x_3(k). \\
x_5(k) &= u_3(k) \oplus 2x_4(k) \oplus x_6(k-1). \\
x_6(k) &= 8x_5(k).
\end{aligned}$$

Para simplificação dos resultados, o controle foi realizado de acordo com a finalização das peças em cada máquina, portanto, as equações foram dispostas em função das transições  $x_2(k)$ ,  $x_4(k)$  e  $x_6(k)$ , resultando em:

$$\begin{aligned}
x_2(k) &= 5u_1(k) \oplus 5x_2(k-1). \\
x_4(k) &= 15u_2(k) \oplus 17x_2(k) \oplus 15x_4(k-1). \\
x_6(k) &= 8u_3(k) \oplus 10x_4(k) \oplus 8x_6(k-1).
\end{aligned}$$

Essas equações podem ser representadas por equações de estados, como já foi supracitado, resultando na Equação (34). A equação de estado que representa a Figura 9 é igual a:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_4(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix}}_{x(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 17 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 10 & \varepsilon \end{bmatrix}}_{A_0} \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_4(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix}}_{x(k)} \oplus \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 15 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 \end{bmatrix}}_{A_1} \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} x_2(k-1) \\ x_4(k-1) \\ x_6(k-1) \end{bmatrix}}_{x(k-1)} \oplus \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 15 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 8 \end{bmatrix}}_B \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \end{bmatrix}}_{u(k)}$$

Podemos observar que a matriz  $A_0$  não possui ciclos, visto que existe apenas uma aresta de comprimento 17 do nó  $x_4$  em direção ao nó  $x_2$  e outra aresta de peso 10, do nós  $x_3$  para o nó  $x_4$ . Portanto, como a matriz  $A_0$  possui apenas circuitos com pesos negativos, a equação pôde ser reescrita de acordo com a Equação (35), originando:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_4(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix}}_{x(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ 22 & 15 & \varepsilon \\ 32 & 25 & 8 \end{bmatrix}}_{A_0^*A_1} \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} x_2(k-1) \\ x_4(k-1) \\ x_6(k-1) \end{bmatrix}}_{x(k-1)} \oplus \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ 22 & 15 & \varepsilon \\ 32 & 25 & 8 \end{bmatrix}}_{A_0^*B_0} \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \end{bmatrix}}_{u(k)}$$

As restrições operacionais do sistema são:

1. O tempo de permanência nos estoques intermediários deve ser igual ou menor que 5 e 6 unidades de tempo, respectivamente,  $x_3(k) - x_2(k) \preceq t_2$  e  $x_5(k) - x_4(k) \preceq t_4$ .
2. O tempo máximo para execução de todas as atividades do processo, deve ser menor ou igual a 36 unidades de tempo, a equação  $x_6(k) - x_1(k) \preceq t_{16}$  representa essa restrição.



A matriz de restrição  $E'$  contém todas as restrições operacionais exigidas e é representada por:

$$E' = \begin{bmatrix} \varepsilon & -20 & -31 \\ 17 & \varepsilon & -14 \\ \varepsilon & 10 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

#### 4.1.1 Resultados - Primeiro método

Inicialmente utilizou-se da metodologia proposta pela Seção 3.2 para sintetizar um controlador que atenda às restrições impostas ao sistema. A partir desse resultado foi calculado um novo controlador que garantisse o maior atraso possível das datas de entrada no sistema.

Como proposto por Cuninghame-Green e Butkovic (2003) e utilizando a Equação (40) proposta por Maia, Andrade e Hardouin (2011), a solução obtida pelo algoritmo alternante nos fornece a matriz  $F_{PM}$ .

$$F_{PM} = \begin{bmatrix} 2 & e & 1 \\ e & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz resultante do algoritmo alternante possui em sua composição elementos negativos foi necessário causalizá-la, e para isso utilizou-se da relação de paralelismo, proposto por Katz (2007), resultando em:

$$F_{PM} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & e & 1 \end{bmatrix}.$$

A lei de controle para  $F_{PM}$  que garante que as peças não sejam injetadas no sistema desordenadamente, e portanto, não exceda a capacidade nos estoques internos do sistema, é dada por:

$$u(k) = F_{PM}x(k-1).$$

O sistema controlado por  $F_{PM}$  é representado pela Figura 10.

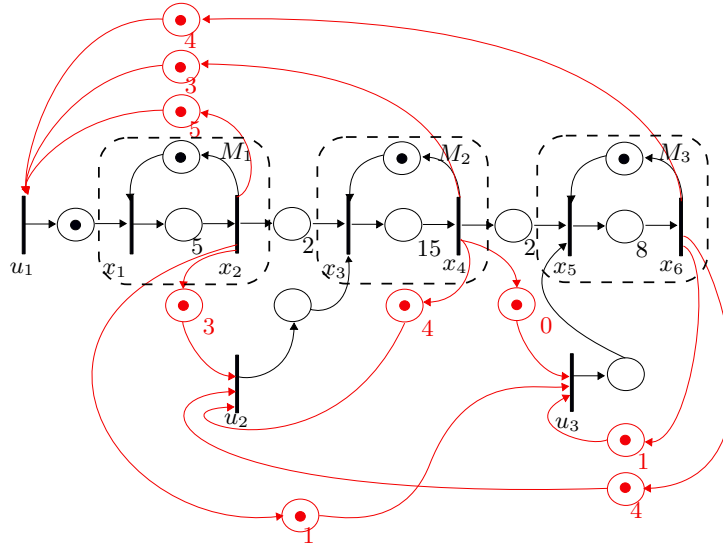


Figura 10 – Linha de montagem serial controlada por  $F_{PM}$ .

A partir da matriz de controle  $F_{PM}$  foi possível obter uma matriz de controle máxima que respeita a política *just-in-time*, por meio da Equação (46). Sendo o controlador obtido igual a:

$$F_{PM}^{max} = \begin{bmatrix} 31 & 14 & 4 \\ 38 & 21 & 11 \\ 55 & 38 & 28 \end{bmatrix}.$$

A lei de controle para  $F_{PM}^{max}$  que proporciona o atraso da inserção de matéria-prima no sistema é igual a:

$$u(k) = F_{PM}^{max} x(k-1).$$

O sistema controlado por  $F_{PM}^{max}$  é representado pela Figura 11.

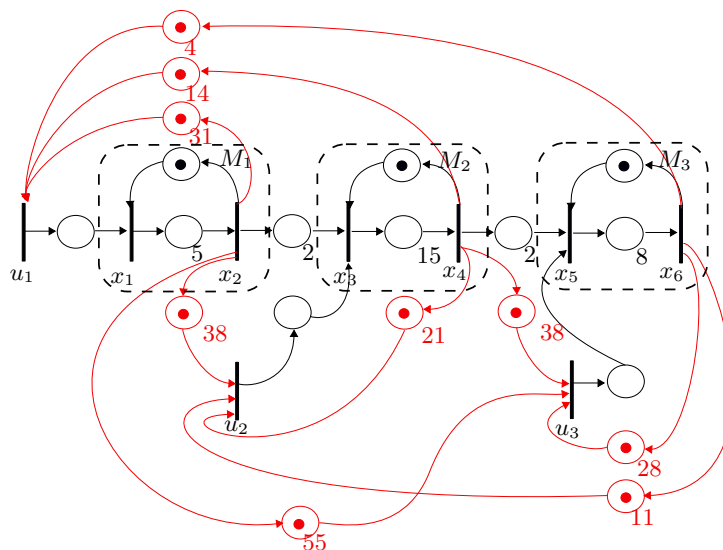


Figura 11 – Linha de montagem serial controlada por  $F_{PM}^{max}$ .

### 4.1.2 Resultados - Segundo método

Nesta seção utilizou-se da metodologia proposta pela Seção 3.3 para sintetizar um controlador que garanta o maior atraso possível das datas de entrada e que atenda as restrições operacionais. Além de manter a taxa de produção do sistema, e conseqüentemente, a data de finalização das peças.

A partir das matrizes que descrevem o sistema foi obtida a sua taxa de produção, ou seja, seu autovalor. Para este exemplo, o autovalor encontrado é igual a  $\lambda = 15$ . Portanto, uma peça tem sua confecção finalizada após 15 unidades de tempo em relação à última peça produzida pelo sistema. Para que o controlador conserve a taxa de produção do sistema, o valor de  $\lambda$ -super-autovetor calculado a partir do algoritmo alternante, é igual a:

$$v = \begin{bmatrix} 5 & 22 & 32 \end{bmatrix}.$$

O próximo passo após o cálculo do autovalor e do  $\lambda$ -super-autovetor foi encontrar a maior matriz de transição ( $A$ ) possível, com auxílio de (48). Essa é dada por:

$$A^{max} = \begin{bmatrix} 15 & -2 & -12 \\ 32 & 15 & 5 \\ 42 & 25 & 15 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz de controle que estabiliza o GET, sem diminuir a taxa de produção original e garantindo o maior atraso inicial das admissões do sistema, tanto quanto possível, é dada por:

$$F_{SM} = \begin{bmatrix} 10 & -7 & -17 \\ 17 & e & -10 \\ 34 & 17 & 7 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz resultante do algoritmo alternante possui elementos negativos foram utilizadas técnicas de causalização que fornecem uma matriz equivalente causal.

Pela técnica proposta por Maia, Hardouin e Cury (2013), a matriz de controle causalizada é igual a:

$$F_{SM} = \begin{bmatrix} 55 & 38 & 28 \\ 62 & 45 & 35 \\ 79 & 62 & 52 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar a matriz  $F_{SM}$  pela técnica proposta Maia, Hardouin e Cury (2013) foi feita a predição de dois estados, e portanto, a lei de controle que garante a estabilidade do sistema, deve possuir um atraso de 3 eventos, e conseqüentemente, todos os lugares acrescentados devem possuir 3 fichas. Essa lei é representada por:

$$u(k) = F_{SM}x(k-3).$$

O sistema controlado por  $F_{SM}$  é representado pela Figura 12.

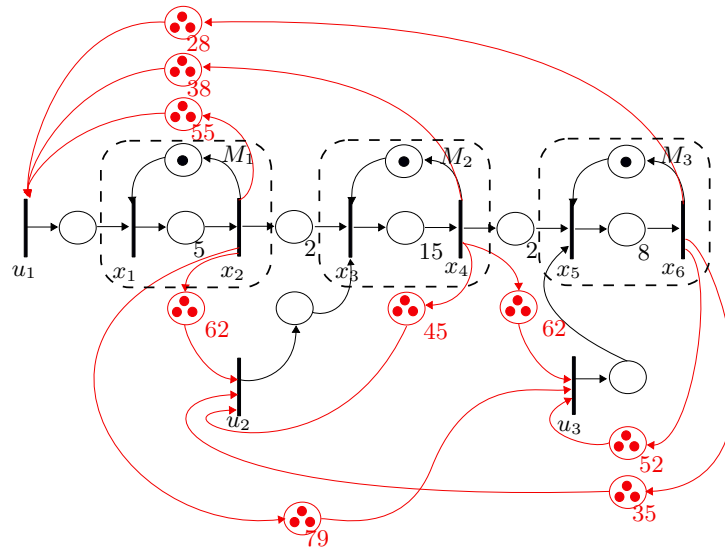


Figura 12 – Linha de montagem serial controlada por  $F_{SM}$ .

Em contrapartida, as matrizes que compõem a lei de controle fornecidas pela técnica de causalização desenvolvida por Souza (2018) são:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 10 & \varepsilon & \varepsilon \\ 17 & e & \varepsilon \\ 34 & 17 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 25 & 8 & \varepsilon \\ 32 & 15 & 5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 40 & 23 & 13 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

A lei de controle para esse sistema é representada por:

$$u(k) = F_1x(k-1) \oplus F_2x(k-2) \oplus F_3x(k-3).$$

Podemos concluir que o controlador utiliza-se de informações atrasadas de até 3 eventos, como representado pela Figura 13.

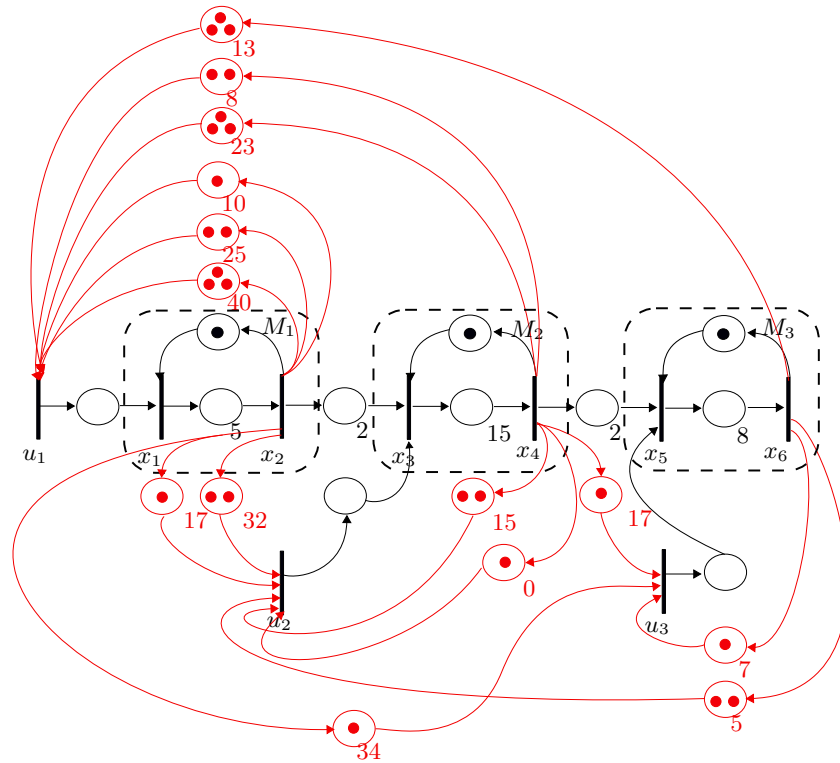


Figura 13 – Linha de montagem serial controlada por  $F_1, F_2$  e  $F_3$ .

Por utilizar de informações mais recentes para controlar o sistema, o que proporciona uma resposta mais rápida do controlador, a técnica proposta por Souza (2018) tende a ser mais robusta quando comparada com a técnica proposta por Maia, Hardouin e Cury (2013).

Ao multiplicar a matriz  $F_{SM}$  não causalizada, pela matriz de entrada, obtivemos:

$$B \otimes F_{SM} = \begin{bmatrix} 15 & -2 & -12 \\ 32 & 15 & 5 \\ 42 & 25 & 15 \end{bmatrix}.$$

Como proposto pelo método supracitado na Seção 3.3, ao compararmos a matriz  $A^{max}$  com a matriz resultante de  $B \otimes F_{SM}$  podemos observar que a Proposição 2 é atendida, uma vez que essa igualdade é satisfeita.

### 4.1.3 Comparação entre métodos

Nesta seção é apresentado o comportamento das primeiras sequências de disparos das transições obtidas por meio da simulação do sistema pelo pacote Scicoslab, sendo as tabelas desta seção compostas por colunas que representam as transições do sistema e por linhas que indicam a  $k$ -ésima peça.

Os tempos de acionamento das transições que compõem o sistema em malha aberta é indicado pela Tabela 1.

Tabela 1 – Sequência de disparos do sistema de máquinas seriais em malha aberta.

	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$	$x_5(k)$	$x_6(k)$
0	0	0	2	17	19	27
1	0	5	17	32	34	42
2	5	10	32	47	49	57
...	...	...	...	...	...	...
6	25	30	92	107	109	117

A Tabela 2 descreve o comportamento das primeiras sequências de disparos dos sistemas controlados por  $F_{PM}$  e  $F_{PM}^{max}$ .

Tabela 2 – Sequência de disparos do sistema de máquinas seriais controlado por  $F_{PM}$  e  $F_{PM}^{max}$ .

	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$	$x_5(k)$	$x_6(k)$
0	0	0	2	17	19	27
1	31	36	38	53	55	63
2	67	72	74	89	91	99
...	...	...	...	...	...	...
6	211	216	218	233	235	243

Enquanto o comportamento do sistema controlado pela matriz de controle  $F_{SM}$  é apresentado pela Tabela 3.

Tabela 3 – Sequência de disparos do sistema de máquinas seriais controlado por  $F_{SM}$ .

	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$	$x_5(k)$	$x_6(k)$
0	0	0	2	17	19	27
1	10	15	17	32	34	42
2	25	30	32	47	49	57
...	...	...	...	...	...	...
6	85	90	92	107	109	117

A primeira consideração a ser feita é a respeito das restrições, apenas o sistema não controlado as viola. Por exemplo, ao analisarmos o comportamento do sistema em malha aberta ao processar a terceira peça, portanto, considerando a quarta linha da Tabela 1, podemos observar que a restrição (2) é violada, pois  $x_6(k) - x_1(k) = 57 - 5 = 52$ , logo,  $36 \leq 52$ . Concluímos assim que a 3ª peça é retida por mais unidades de tempo do que o desejado.

Nos sistemas controlados todas as restrições são atendidas. Por exemplo, de acordo com a Tabela 2, a restrição (2) é satisfeita no processamento da 3ª peça, pois  $x_6(k) - x_1(k) = 99 - 67 = 32$ , e portanto,  $32 \leq 36$ . À obediência as restrições também pode ser

observada na Tabela 3, se analisarmos novamente o processamento da 3ª peça, obtemos  $x_6(k) - x_1(k) = 57 - 25 = 32$  e, portanto,  $32 \leq 36$ .

Outra consideração, é a respeito do escoamento natural da produção nos sistemas controlados por  $F_{PM}$  ou por  $F_{PM}^{max}$ . Isso pode ser verificado por meio da Tabela 2, ao observarmos que a 2ª peça é liberada da máquina 3 em 63 unidades de tempo, enquanto o processo de fabricação da 3ª peça só é inicializado em 67 unidade de tempo. Ao contrário do que é observado no sistema em malha aberta, por exemplo, a fabricação da 1ª peça é finalizada em 27 unidades de tempo, enquanto a 7ª peça é inserida na máquina 1 em 25 unidades de tempo. Portanto, podemos concluir que ocorre o acúmulo de 6 peças no interior do sistema até que a terceira máquina finalize o seu processo.

Também podemos comparar os sistemas por meio das suas taxas de produção. Embora o controle feito pelas matrizes  $F_{PM}$  ou  $F_{PM}^{max}$  não permitam o acúmulo de peças no interior do sistema, a taxa de produção desse sistema não é mantida, ocasionando assim atrasos nas entregas das peças. Em contrapartida, o sistema controlado por  $F_{SM}$  não permite o acúmulo de peças e atrasos nas entregas dos produtos.

Para exemplificar quando o sistema possui a sua taxa de produção mantida, podemos observar que todos os disparos da transição  $x_6(k)$  da Tabela 1 e 3 ocorrem no mesmo instante de tempo. Concluímos assim, que o sistema controlado por  $F_{SM}$  possui a maior taxa de produção admissível, sem causar atraso na finalização do produto. Isso também pode ser notado pela diferença de tempo entre as conclusões dos processos de dois produtos consecutivos, pois essa é igual ao autovalor do sistema,  $\lambda = 15$ . O que não podemos observar na Tabela 2, visto que esses possuem valores maiores que os tempos de disparos da transição  $x_6(k)$  em malha aberta. Embora ocorra o retardo da admissão de matérias-primas, também ocorre o atraso nas saídas dos produtos.

As entradas de controle considerando  $F_{PM}$ , são:

$$\begin{aligned} u(1) &= [31 \quad 31 \quad 28]^T, \\ u(2) &= [67 \quad 67 \quad 64]^T, \\ u(3) &= [103 \quad 103 \quad 100]^T. \end{aligned}$$

Em contrapartida, as entradas de controle considerando  $F_{PM}^{max}$  são:

$$\begin{aligned} u^{max}(1) &= [31 \quad 38 \quad 55]^T, \\ u^{max}(2) &= [67 \quad 74 \quad 91]^T, \\ u^{max}(3) &= [103 \quad 110 \quad 127]^T. \end{aligned}$$

Podemos observar que no sistema controlado por  $F_{PM}^{max}$ , as peças sofrem maiores atrasos em suas admissões quando comparadas com o controle feito por  $F_{PM}$ . Por exemplo, as datas de entrada de  $u^{max}(2)$  acontecem posteriormente às datas de  $u(2)$ . Como o

comportamento do sistema independe de qual matriz de controle é escolhida, podemos assegurar que as restrições são atendidas e não ocorre o acúmulo de peças no sistema.

As entradas do sistema considerando  $F_{SM}$  são:

$$\begin{aligned} u(1) &= [10 \ 17 \ 34]^T, \\ u(2) &= [25 \ 32 \ 49]^T, \\ u(3) &= [40 \ 47 \ 64]^T. \end{aligned}$$

Embora as entradas do sistema controlado por  $F_{SM}$  ocorram antes dos disparos das entradas de  $F_{PM}$ , elas garantem o maior atraso possível, sem alterar a taxa de produção do sistema.

## 4.2 Máquinas com múltiplas entradas paralelas

O sistema da Figura 14 foi retirado do trabalho Maia, Andrade e Hardouin (2011). Esse processo de produção possui três máquinas e foi modelada por meio de um GET. As entradas  $u_1$  e  $u_2$  representam as datas de admissões das peças no sistema e os tempos de transporte, para as respectivas entradas, são  $t_{u1}$  e  $t_{u2}$ ; a máquina  $M_1$  processa as peças em  $t_1$  unidades de tempo; Enquanto a máquina  $M_2$  processa as peças em  $t_2$  unidades de tempo. O tempo de transporte entre as máquinas  $M_1$  e  $M_3$  são  $t_{13}$  unidades de tempo e entre as máquinas  $M_2$  e  $M_3$  são  $t_{23}$  unidades de tempo. A máquina  $M_3$  processa as peças em  $t_3$  unidades de tempo. Os tempos escolhidos são:  $t_1 = 10, t_2 = 35, t_3 = 50, t_{13} = t_{23} = 2, t_{u1} = 6$  e  $t_{u2} = 12$ .

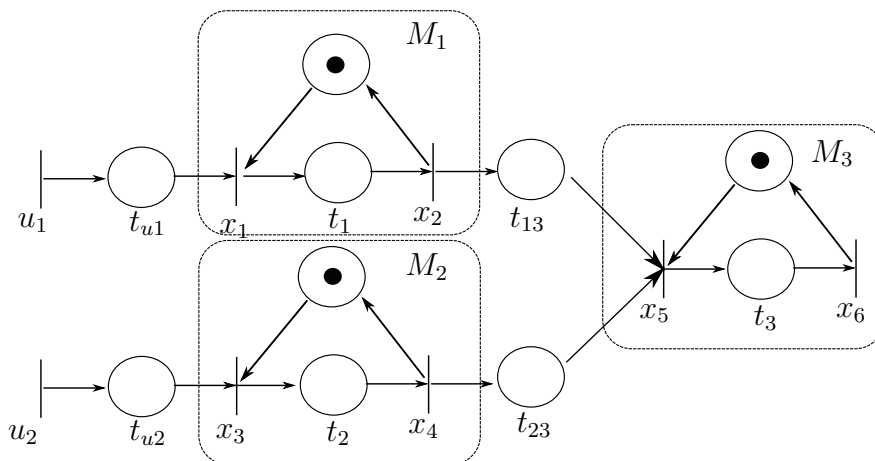


Figura 14 – Sistema de manufatura retirado do trabalho de Maia, Andrade e Hardouin (2011).

As equações que descrevem o sistema da Figura 14 são:

$$x_1(k) = 6u_1(k) \oplus x_2(k-1)$$



$$x_2(k) = 10x_1(k)$$

$$x_3(k) = 12u_2(k) \oplus x_4(k-1)$$

$$x_4(k) = 35x_3(k)$$

$$x_5(k) = 3x_2(k) \oplus 2x_4(k) \oplus x_6(k-1)$$

$$x_6(k) = 50x_5(k)$$

Ao reescrevermos as equações no formato de equações de estados, obtemos:

$$x(k) = A_0x(k) \oplus A_1x(k-1) \oplus B_0u(k).$$

Sendo as matrizes que as constituem:

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 35 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 50 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 12 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Como a matriz  $A_0$  possui apenas circuitos com não positivos, a equação pode ser reescrita como:

$$x(k) = A_0^*A_1x(k-1) \oplus A_0^*B_0u(k).$$

Sendo as matrizes que a compõe:

$$A = A_0^* A_1 = \begin{bmatrix} e & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 10 & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 35 & 35 & e & e \\ 12 & 12 & 37 & 37 & \varepsilon & \varepsilon \\ 62 & 62 & 87 & 87 & 50 & 50 \end{bmatrix}.$$

$$B = A_0^* B_0 = \begin{bmatrix} 6 & \varepsilon \\ 16 & \varepsilon \\ \varepsilon & 12 \\ \varepsilon & 47 \\ 18 & 49 \\ 68 & 99 \end{bmatrix}.$$

Para que o funcionamento desejável do sistema seja alcançado, suas restrições operacionais são:

- A diferença de datas em que as máquinas  $M_1$  e  $M_2$  entregam seus produtos devem ser a mesma, ou seja, não devem exceder 0 unidades de tempo, portanto,  $x_2(k) - x_4(k) \leq 0$  e  $x_2(k) - x_4(k) \geq 0$ ;
- O tempo de permanência dos materiais no sistema é limitado e igual a:  $x_6(k) - x_1(k) \leq 65$  e  $x_6(k) - x_3(k) \leq 90$ .

Essas restrições são dispostas em uma matriz ( $E_r$ ). A matriz de restrição resultante deve obedecer a inequação  $A_0 x(k) \leq x(k)$  e, portanto, são obtidas a partir de  $E' = E \oplus A_0$ . A matriz de restrições desse problema é dada por:

$$E' = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -65 \\ 10 & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -90 \\ \varepsilon & e & 35 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 50 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

#### 4.2.1 Resultados - Primeiro método

De acordo com o trabalho de Maia, Andrade e Hardouin (2011), a matriz de controle fornecida pelo algoritmo alternante é igual a:

$$F_{PM} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ -29 & -33 & -30 & -30 & -33 & -36 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz encontrada possui elementos negativos foi preciso causalizá-la pela relação de paralelismo, assim obtivemos:

$$F_{PM} = \begin{bmatrix} 38 & 34 & 37 & 37 & 34 & 31 \\ 7 & 3 & 6 & 6 & 3 & e \end{bmatrix}.$$

A lei de controle que garante a estabilidade do sistema, considerando esse sistema controlado por  $F_{PM}$ , é dada por:

$$u(k) = F_{PM}x(k-1).$$

O sistema controlado por  $F_{PM}$  é representado pela Figura 15.

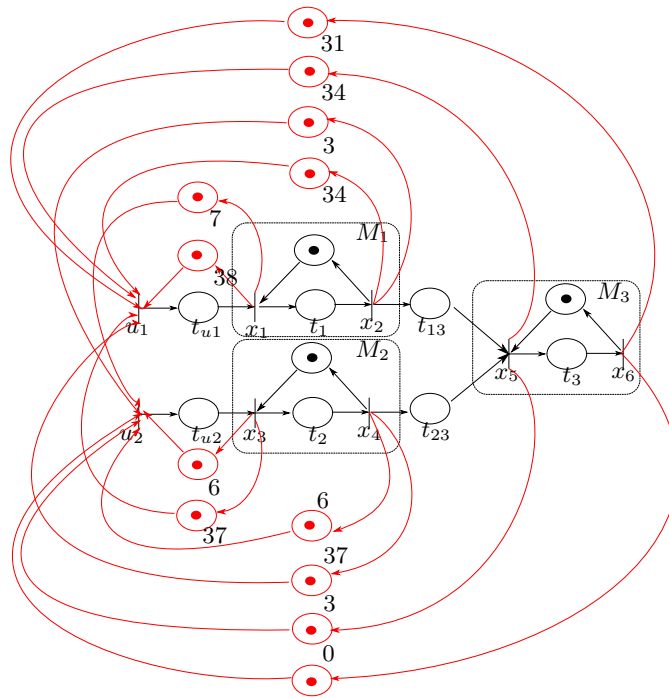


Figura 15 – Sistema de máquinas com múltiplas entradas paralelas controlado por  $F_{PM}$ .

Com o auxílio da Equação (46) uma matriz de controle máxima que respeita a política *just-in-time* foi encontrada, sendo essa:

$$F_{PM}^{max} = \begin{bmatrix} 93 & 83 & 118 & 83 & 81 & 31 \\ 62 & 52 & 87 & 52 & 50 & e \end{bmatrix}.$$

A lei de controle para  $F_{PM}^{max}$  é representada por:

$$u(k) = F_{PM}^{max}x(k-1).$$

O sistema controlado por  $F_{PM}^{max}$  é representado pela Figura 15.

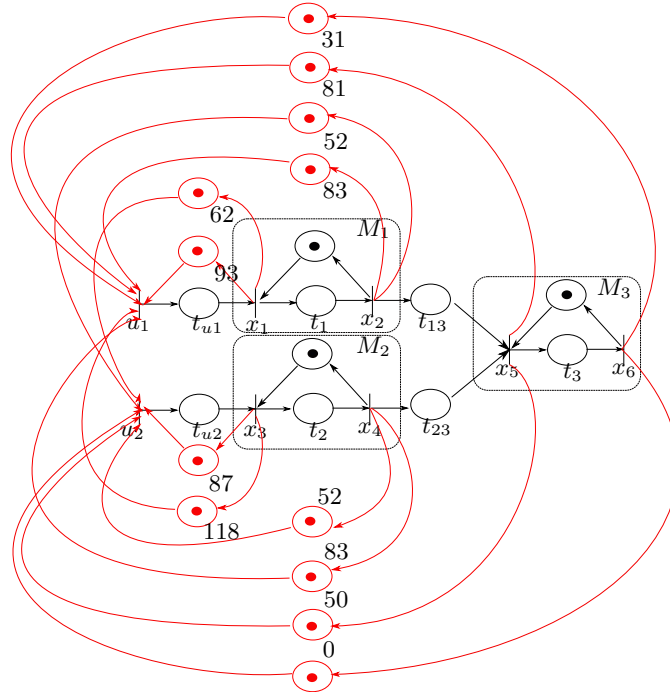


Figura 16 – Sistema de máquinas com múltiplas entradas paralelas controlado por  $F_{PM}^{max}$ .

#### 4.2.2 Resultados - Segundo método

Dadas as matrizes que descrevem o sistema, inicialmente foi calculado o menor intervalo entre duas saídas de peças consecutivas nesse sistema, sendo esse igual a  $\lambda = 50$ , e portanto, a taxa de produção do sistema é dada por  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{50}$ .

O próximo passo consistiu em encontrar o  $\lambda$ -super-autovetor por meio do algoritmo alternante, proposto por Cuninghame-Green e Butkovic (2003). Para isso as equações foram realocadas no formato  $A \otimes X = B \otimes Y$ , resultado em:

$$(AE^* \oplus \lambda E^*)v = \lambda E^*v.$$

O  $\lambda$ -super-autovetor encontrado é igual a:

$$v = [37 \ 47 \ 12 \ 47 \ 49 \ 99].$$

A partir dos valores obtidos do  $\lambda$ -super-autovetor e do autovalor foi calculado o valor máximo da matriz de transição ( $A$ ), resultando em:

$$A^{max} = \begin{bmatrix} 50 & 40 & 75 & 40 & 38 & -12 \\ 60 & 50 & 85 & 50 & 48 & -2 \\ 25 & 15 & 50 & 15 & 13 & -37 \\ 60 & 50 & 85 & 50 & 48 & -2 \\ 62 & 52 & 87 & 52 & 50 & e \\ 112 & 102 & 137 & 102 & 100 & 50 \end{bmatrix}.$$

A matriz de controle resultante que atrasa ao máximo a inserção de matéria-prima no sistema, sem diminuir a sua taxa de produção é igual a:

$$F_{SM} = \begin{bmatrix} 44 & 34 & 69 & 34 & 32 & -18 \\ 13 & 3 & 38 & 3 & 1 & -49 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz  $F_{SM}$  possui elementos negativos, foi necessário utilizar técnicas de causalização, para encontrar a matriz correspondente causal. Aplicando a técnica proposta por Maia, Hardouin e Cury (2013), obtivemos:

$$F_{SM} = \begin{bmatrix} 94 & 84 & 119 & 84 & 82 & 32 \\ 63 & 53 & 88 & 53 & 51 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz causalizada  $F_{SM}$  foi obtida por meio da predição de *um* estado de acordo com a técnica proposta por Maia, Hardouin e Cury (2013) e portanto, seus estados acrescentados para realimentar o sistema devem possuir duas fichas. A lei de controle resultante que utiliza de dois eventos passados é definida como:

$$u(k) = F_{SM}x(k-2).$$

O sistema controlado por  $F_{SM}$  é apresentado pela Figura 17.

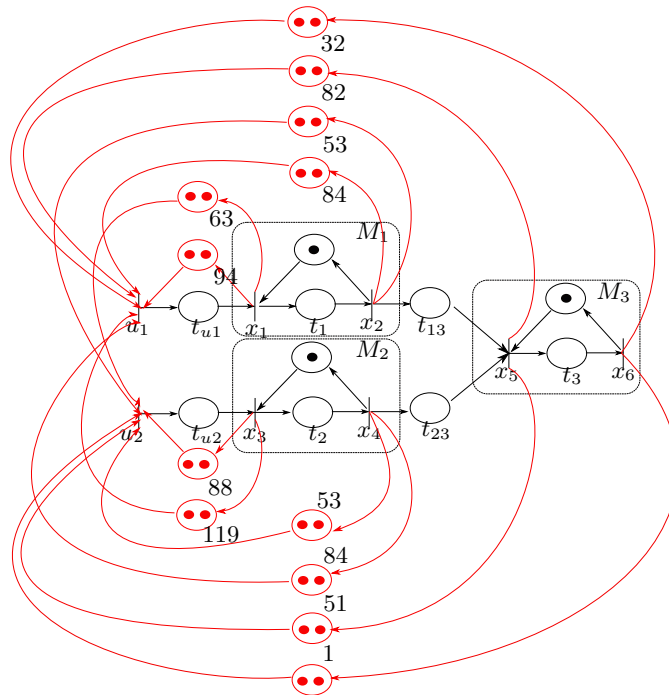


Figura 17 – Sistema de máquinas com múltiplas entradas paralelas controlado por  $F_{SM}$ .

A causalização do controlador utilizando a técnica desenvolvida por Souza (2018) retorna as matrizes de controle:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 44 & 34 & 69 & 34 & 32 & \varepsilon \\ 13 & 3 & 38 & 3 & 1 & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 94 & 84 & 119 & 84 & 82 & 32 \\ 63 & 53 & 88 & 53 & 51 & 1 \end{bmatrix}.$$

E sua lei de controle é determinada por:

$$u(k) = F_1 x(k-1) \oplus F_2 x(k-2).$$

O sistema controlado pelas matrizes  $F_1$  e  $F_2$  é representado pela Figura 18.

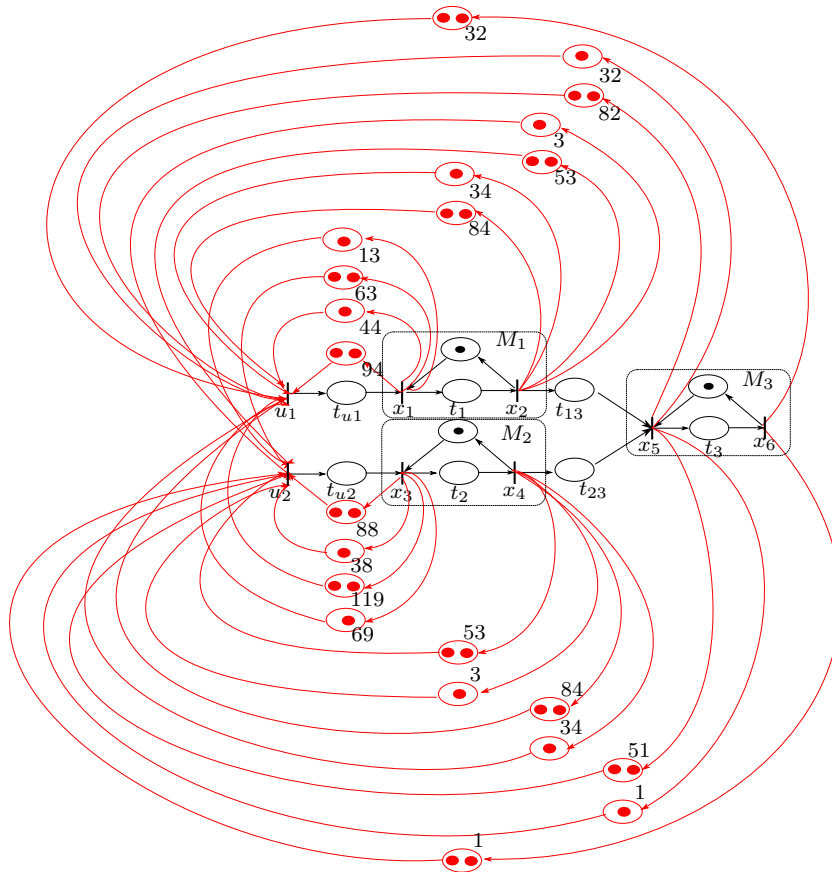


Figura 18 – Sistema de máquinas com múltiplas entradas paralelas controlado por  $F_1$  e  $F_2$ .

Por utilizar de informações mais recentes para controlar o sistema, o que proporciona uma resposta mais rápida do controlador, a técnica proposta por Souza (2018) tende a ser mais robusta quando comparada com a técnica proposta por Maia, Hardouin e Cury (2013).

Ao multiplicar a matriz de controle não causalizada  $F_{SM}$  pela matriz de entrada foi obtido:

$$B \otimes F_{SM} = \begin{bmatrix} 50 & 40 & 75 & 40 & 38 & -12 \\ 60 & 50 & 85 & 50 & 48 & -2 \\ 25 & 15 & 50 & 15 & 13 & -37 \\ 60 & 50 & 85 & 50 & 48 & -2 \\ 62 & 52 & 87 & 52 & 50 & e \\ 112 & 102 & 137 & 102 & 100 & 50 \end{bmatrix}.$$

Como proposto pelo método supracitado na seção 3, ao comparar a matriz  $A^{max}$  com a matriz resultante de  $B \otimes F_{SM}$  podemos observar que a Proposição 2 é atendida, uma vez que a igualdade é satisfeita.

### 4.2.3 Comparação entre métodos

Nesta seção é apresentado o comportamento das primeiras sequências de disparos das transições obtidas por meio da simulação do sistema pelo pacote Scicoslab, sendo as tabelas desta seção compostas por colunas que representam as transições do sistema e por linhas que indicam a  $k$ ésima peça.

O comportamento deste sistema antes de ser controlado, ou seja, com a matriz  $F$  nula e a inserção de matéria-prima no sistema de forma ilimitada e desordenada, fornecendo assim a maior taxa de produção possível, é dado pela Tabela 4.

Tabela 4 – Sequência de disparos do sistema de máquinas com múltiplas entradas em malha aberta.

	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$	$x_5(k)$	$x_6(k)$
0	22	35	0	35	37	87
1	35	45	35	70	87	137
2	45	55	70	105	137	187
3	55	65	105	140	187	237

A Tabela 5 descreve o comportamento das primeiras sequências de disparos dos sistemas controlados por  $F_{PM}$  e  $F_{PM}^{max}$ .

Tabela 5 – Sequência de disparos do sistema de máquinas com múltiplas entradas controlado por  $F_{PM}$  e  $F_{PM}^{max}$ .

	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$	$x_5(k)$	$x_6(k)$
0	22	35	0	35	37	87
1	124	134	99	134	136	186
2	223	233	198	233	235	285
3	322	332	297	332	334	384

O comportamento das primeiras sequências de disparos dos sistemas controlados por  $F_{SM}$  é dado pela Tabela 6.

Tabela 6 – Sequência de disparos do sistema de máquinas com múltiplas entradas controlado por  $F_{SM}$ .

	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$	$x_5(k)$	$x_6(k)$
0	22	35	0	35	37	87
1	72	85	50	85	87	137
2	125	135	100	135	137	187
3	175	185	150	185	187	237

É possível concluir facilmente observando a Tabela 4 que as restrições impostas são violadas, por exemplo, ao compararmos que os disparos de  $x_2$  e  $x_4$  não são iguais, retratamos a violação da primeira restrição, pois essa determina que os tempos de entregas dos produtos devem ser o mesmo. Em contrapartida, as restrições são atendidas nos sistemas controlados, o que pode ser constatado, pelos mesmos tempos de disparos de  $x_2$  e  $x_4$ .

Também observamos que os controladores  $F_{PM}$  e  $F_{PM}^{max}$  garantem o não acúmulo de peças no interior do sistema, de forma a atender as restrições impostas a esse, mas também é notado que a taxa de produção não é mantida. Ao compararmos as datas de saídas dos produtos pelas Tabelas 4 e 5, é possível notar que as datas de disparo da última transição no sistema em malha fechada ocorrem posteriormente às respectivas datas em relação ao sistema em malha aberta.

De acordo com os dados da Tabela 6, é possível notar que a diferença entre os disparos subsequentes é de 50 unidades de tempo, esse valor é o mesmo encontrado para o autovalor, o que nos permite concluir que o sistema está funcionando com sua maior taxa de produção possível. Além de ser possível analisar que as datas de saídas dos sistemas com malha aberta ou controlado por  $F_{SM}$  são iguais, ou seja, o controlador não causa atraso na entrega do produto.

As entradas de controle para o sistema controlado por  $F_{PM}^{max}$  ou  $F_{PM}$  são:

$$u(1) = [118 \quad 87]^T,$$

$$u(2) = [217 \quad 186]^T,$$

$$u(3) = [316 \quad 285]^T.$$

As entradas de controle para o sistema controlado por  $F_{SM}$  são:

$$u(1) = [69 \quad 38]^T,$$

$$u(2) = [119 \quad 88]^T,$$



$$u(3) = [169 \quad 138]^T.$$

Comparando as entradas dos sistemas controlados por diferentes matrizes, é possível constatar que a entrada do sistema controlado pela matriz  $F_{PM}^{max}$  é igual a  $F_{PM}$ , o que indica que a matriz de controle  $F_{PM}$  já atrasa ao máximo as entradas das peças no sistema. As entradas do sistema controlado por  $F_{SM}$  foram atrasadas tanto quanto possível, de forma a não afetar a sua taxa de produção.

### 4.3 Sistema de manufatura híbrido

O sistema apresentado pela Figura 19 possui múltiplas entradas paralelas associadas à máquinas seriais. O GET possui como entradas  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  e uma única saída  $y$ . O tempo de inserção das peças no processo é igual a  $t_{u1} = 3$ ,  $t_{u2} = 4$  e  $t_{u3} = 1$ . As máquinas internas possuem tempos diferentes de processamento, sendo  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 2$ ,  $t_4 = 5$ ,  $t_5 = 6$ ,  $t_6 = 4$ , além de lugares não temporizados.

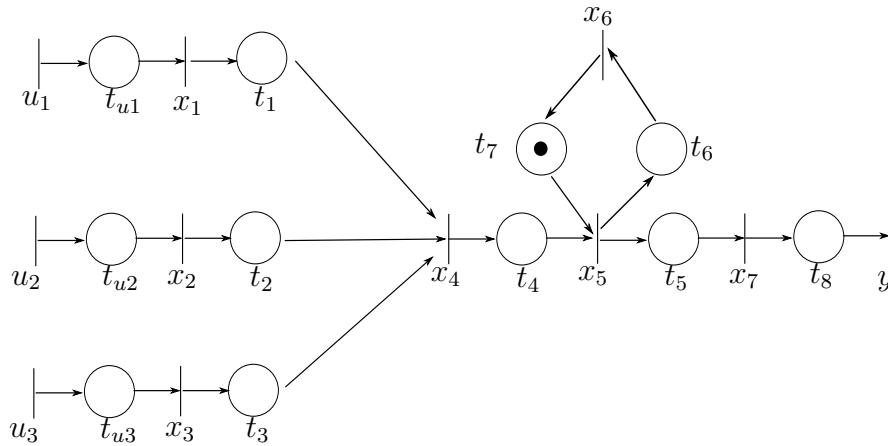


Figura 19 – Sistema de manufatura híbrido.

As equações recursivas que descrevem o sistema da Figura 19, são:

$$x_1(k) = 3u_1(k).$$

$$x_2(k) = 4u_2(k).$$

$$x_3(k) = 1u_3(k).$$

$$x_4(k) = 1x_1(k) \oplus 2x_2(k) \oplus 2x_3(k).$$

$$x_5(k) = 5x_4(k) \oplus x_6(k-1).$$

$$x_6(k) = 4x_5(k).$$

$$x_7(k) = 6x_5(k).$$

A modelagem Max-Plus desse GET é dada por:

$$x(k) = A_0x(k) \oplus A_1x(k-1) \oplus B_0u(k).$$

Sendo as matrizes que as constituem:

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Como a matriz  $A_0$  possui apenas circuitos com pesos negativos, a equação pode ser reescrita como:

$$x(k) = A_0^*A_1x(k-1) \oplus A_0^*B_0u(k).$$

E as matrizes que compõem a equação, são:

$$A = A_0^*A_1 = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 2 & 2 & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & 7 & 7 & 5 & e & e & \varepsilon \\ 10 & 11 & 11 & 9 & 4 & 4 & \varepsilon \\ 12 & 13 & 13 & 11 & 6 & 6 & e \end{bmatrix}.$$

$$B = A_0^* B_0 = \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 9 & 11 & 8 \\ 13 & 15 & 12 \\ 15 & 17 & 14 \end{bmatrix}.$$

O sistema possui como restrições operacionais:

- O tempo de processamento entre a saída da peça do sistema e o disparo da transição  $x_2(k)$  deve ser menor ou igual a 19 unidades de tempo,  $x_7 - x_2 \preceq 19$ ;
- As transições  $x_2$  e  $x_3$  devem ocorrer no mesmo instante de tempo, portanto, o tempo de permanência dos materiais no sistema é limitado e igual a:  $x_2(k) - x_3(k) \preceq 0$  e  $x_2(k) - x_3(k) \succeq 0$ .

Essas restrições são dispostas em uma matriz ( $E'$ ). Sendo essa representada por:

$$E' = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -19 \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 2 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

### 4.3.1 Resultados - Primeiro método

Obtidas as matrizes que representam o sistema, o próximo passo foi calcular a possível matriz de controle, de acordo com o método proposto na Seção 3.2. Sendo a matriz encontrada a partir do algoritmo alternante igual a:

$$F_{PM} = \begin{bmatrix} 2 & e & 1 & -5 & 1 & 1 & 3 \\ -5 & -6 & -5 & -5 & -3 & -4 & -5 \\ -2 & -3 & -2 & -2 & e & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

A necessidade de causalizar a matriz foi indicada por essa conter elementos negativos, e então a matriz equivalente proveniente da técnica de paralelismo obtida é igual a:

$$F_{PM} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & e & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 4 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

A lei de controle obtida por meio da matriz  $F_{PM}$ , é dada por:

$$u(k) = F_{PM}x(k-1).$$

O sistema controlado pela matriz  $F_{PM}$  é representado pela Figura 20.

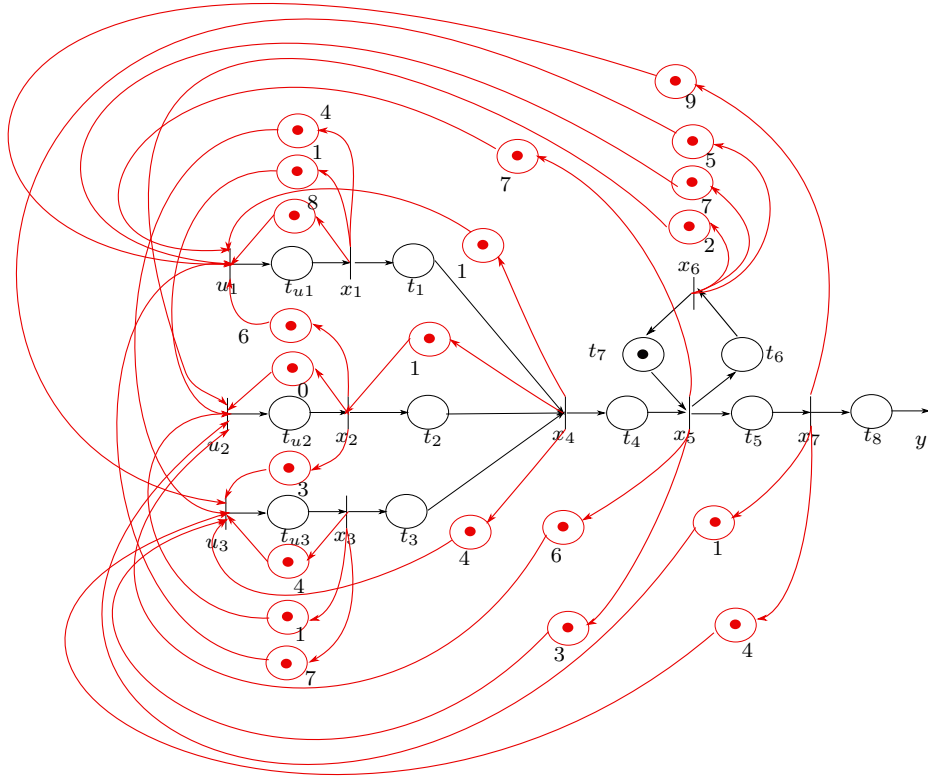


Figura 20 – Sistema de manufatura híbrido controlado por  $F_{PM}$ .

A partir da matriz  $F_{PM}$  foi calculada uma matriz com os componentes maiores ou iguais a  $F_{PM}$  sem alterar o comportamento do sistema, mas atrasando ao máximo as datas de entrada. Essa nova matriz de controle foi encontrada considerando a Equação (46) e a solução obtida é igual a:

$$F_{PM}^{max} = \begin{bmatrix} 21 & 22 & 22 & 20 & 15 & 7 & 9 \\ 13 & 14 & 14 & 12 & 7 & 2 & 1 \\ 16 & 17 & 17 & 15 & 10 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

A lei de controle para  $F_{PM}$  é dada por:

$$u(k) = F_{PM}^{max}x(k-1).$$

O sistema controlado pela matriz  $F_{PM}^{max}$  é representado pela Figura 21.

### 4.3.2 Resultados - Segundo método

Para aplicação do segundo método, proposto na Seção 3.3, foi necessário definir parâmetros como o autovalor, o  $\lambda$ -super-autovetor e o  $A^{max}$  que caracterizam o sistema.

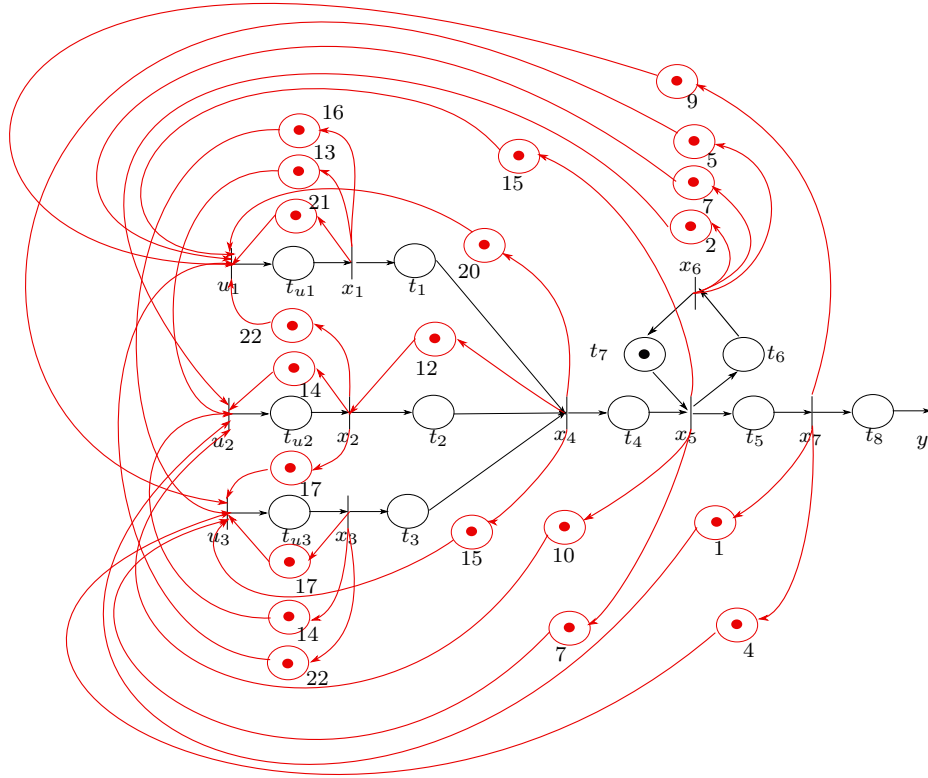


Figura 21 – Sistema de manufatura híbrido controlado por  $F_{PM}^{max}$ .

O autovalor obtido do sistema é igual a  $\lambda = 4$  e o seu  $\lambda$ -super-autovetor é igual a:

$$v = [e \ e \ e \ 2 \ 7 \ 11 \ 13].$$

A partir das informações obtidas e da Equação (48) de referência, a maior matriz de transição calculada é definida como:

$$A^{max} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 & -3 & -7 & -9 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & -3 & -7 & -9 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & -3 & -7 & -9 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & -1 & -5 & -7 \\ 11 & 11 & 11 & 9 & 4 & e & -2 \\ 15 & 15 & 15 & 13 & 8 & 4 & 2 \\ 17 & 17 & 17 & 15 & 10 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Considerando que a matriz de controle foi determinada a partir da Equação (51), sendo obtido:

$$F_{SM} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -6 & -10 & -12 \\ e & e & e & -2 & -7 & -11 & -13 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & -4 & -8 & -10 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar uma matriz equivalente a calculada, mas composta apenas por elementos não negativos, foi utilizado a técnica de causalização desenvolvida por Maia, Hardouin e Cury (2013), resultando no controlador:

$$F_{SM} = \begin{bmatrix} 29 & 29 & 29 & 27 & 22 & 18 & 16 \\ 28 & 28 & 28 & 26 & 21 & 17 & 15 \\ 31 & 31 & 31 & 29 & 24 & 20 & 18 \end{bmatrix}.$$

A lei de controle para  $F_{SM}$  possui um atraso de 4 eventos e é definida por:

$$u(k) = F_{SM}x(k-4).$$

O sistema controlado pela matriz  $F_{SM}$  é representado pela Figura 22.

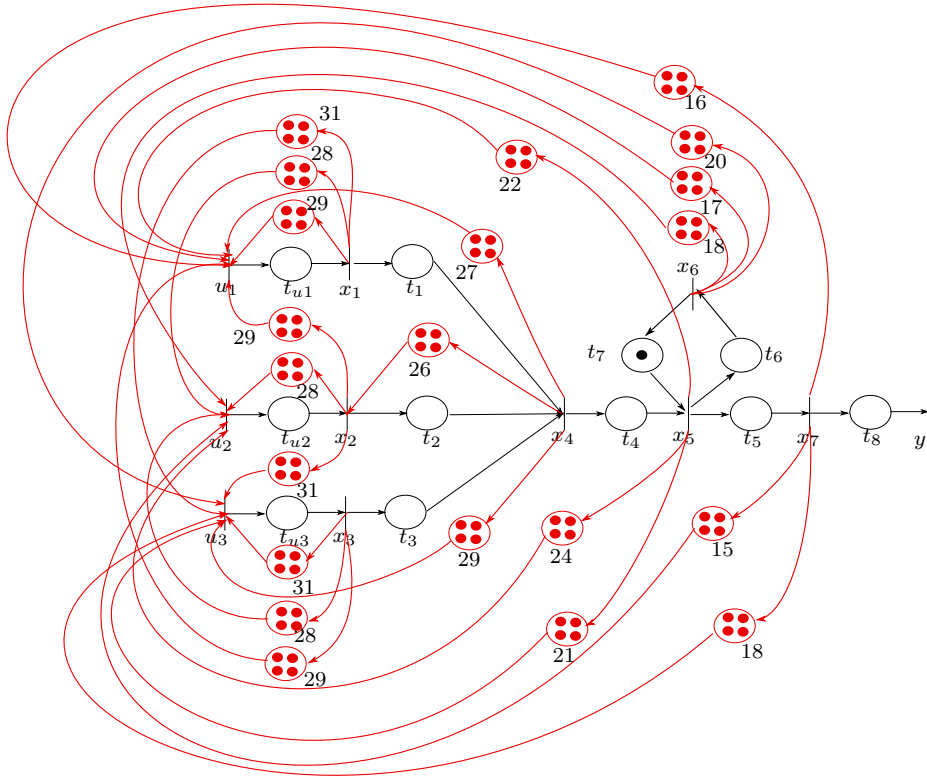


Figura 22 – Sistema de manufatura híbrido controlado por  $F_{SM}$ .

As matrizes de controle causalizadas a partir da técnica desenvolvida por Souza (2018) foram encontradas e são representadas por:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & e & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & 3 & 3 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & 4 & 4 & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & 7 & 7 & 5 & e & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 & 7 & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ 8 & 8 & 8 & 6 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 11 & 11 & 11 & 9 & 4 & e & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

$$F_4 = \begin{bmatrix} 13 & 13 & 13 & 11 & 6 & 2 & e \\ 12 & 12 & 12 & 10 & 5 & 1 & \varepsilon \\ 15 & 15 & 15 & 13 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

E sua respectiva lei de controle que garante a estabilização do sistema é igual a:

$$u(k) = F_1x(k-1) \oplus F_2x(k-2) \oplus F_3x(k-3) \oplus F_4x(k-4).$$

O sistema controlado pelas matrizes  $F_1, F_2, F_3$  e  $F_4$  é representado pela Figura 23.

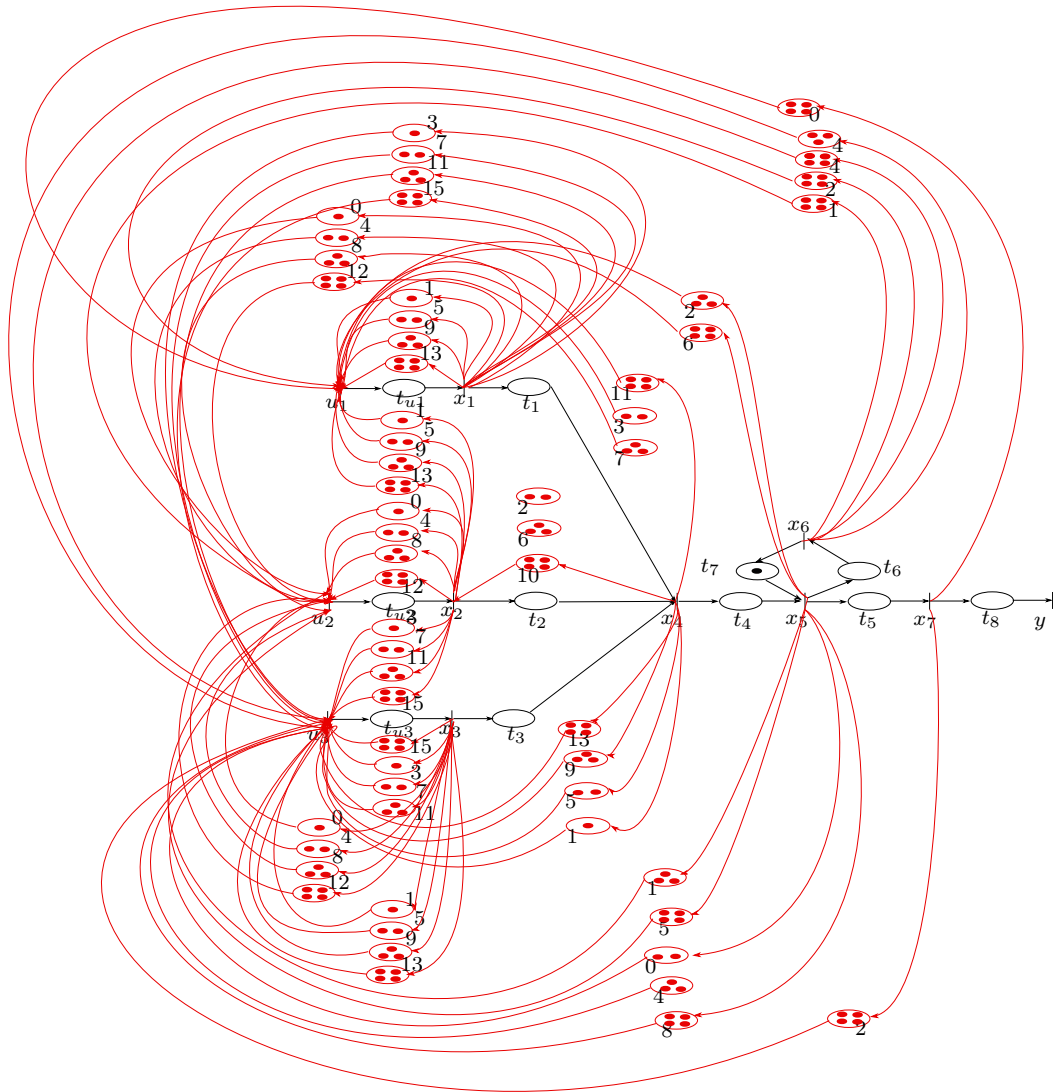


Figura 23 – Sistema de manufatura híbrido controlado por  $F_1, F_2, F_3$  e  $F_4$

Por utilizar de informações mais recentes para controlar o sistema, o que proporciona uma resposta mais rápida do controlador, a técnica proposta por Souza (2018) tende a ser mais robusta quando comparada com a técnica proposta por Maia, Hardouin e Cury (2013).

Podemos observar o cumprimento da Proposição 2, citada na Seção 3, visto que a igualdade  $A^{max} = B \otimes F_{SM}$  é satisfeita, uma vez que,

$$B \otimes F_{SM} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 & -3 & -7 & -9 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & -3 & -7 & -9 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & -3 & -7 & -9 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & -1 & -5 & -7 \\ 11 & 11 & 11 & 9 & 4 & e & -2 \\ 15 & 15 & 15 & 13 & 8 & 4 & 2 \\ 17 & 17 & 17 & 15 & 10 & 6 & 4 \end{bmatrix},$$

é igual à matriz  $A^{max}$  apresentada.

### 4.3.3 Comparação entre os métodos

O comportamento das primeiras sequências de disparos por meio do tempo de acionamento das transições que compõem o processo do sistema em malha aberta é demonstrado pela Tabela 7.

Tabela 7 – Sequência de disparos do sistema híbrido em malha aberta.

	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$	$x_5(k)$	$x_6(k)$	$x_7(k)$
0	0	0	0	2	7	11	13
1	3	4	1	2	11	15	17
2	6	8	2	6	15	19	21
3	9	12	3	10	19	23	25

O comportamento das primeiras sequências de disparos por meio do tempo de acionamento das transições que compõem o processo do sistema em malha fechada utilizando a matriz de controle  $F_{PM}$  ou  $F_{PM}^{max}$  é dado pela Tabela 8.

Tabela 8 – Sequência de disparos do sistema híbrido controlado via  $F_{PM}$  e  $F_{PM}^{max}$ .

	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$	$x_5(k)$	$x_6(k)$	$x_7(k)$
0	0	0	0	2	7	11	13
1	25	18	18	26	31	35	37
2	49	42	42	50	55	59	61
3	73	66	66	74	79	83	85

O comportamento das primeiras sequências de disparos por meio do tempo de acionamento das transições que compõem o processo do sistema em malha fechada utilizando a matriz de controle  $F_{SM}$  é apresentado pela Tabela 9.



Tabela 9 – Sequência de disparos do sistema híbrido controlado via  $F_{SM}$ .

	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$	$x_5(k)$	$x_6(k)$	$x_7(k)$
0	0	0	0	2	7	11	13
1	4	4	4	6	11	15	17
2	8	8	8	10	15	19	21
3	12	12	12	14	19	23	25

Podemos observar pela Tabela 7 que o sistema em malha aberta viola as restrições, e isso é facilmente comprovado ao observarmos que os tempos de disparos das transições  $x_2(k)$  e  $x_3(k)$  são diferentes. Em contrapartida, todas as restrições são atendidas nos sistemas controlados, isso é validado, por exemplo, ao observarmos que os tempos de disparos das transições  $x_2(k)$  e  $x_3(k)$  são equivalentes, de acordo com Tabelas 8 e 9.

É possível observar pela Tabela 8 que não ocorre o acúmulo de peças no interior do sistema, por exemplo, a primeira peça sai do sistema em 13 unidades de tempo, indicado quando a transição  $x_7(k)$  dispara, enquanto a segunda peça só é inserida no sistema em 25 unidade de tempo, quando  $x_1(k)$  é disparado. Embora a não formação de estoques seja garantida, esse sistema não mantém a taxa de produção quando comparado ao sistema em malha aberta. Ocorre o atraso das entradas de forma a não permitir formação de estoques, mas também ocorre o atraso da entrega dos recursos. Isso pode ser verificado ao compararmos o tempo que a transição  $x_7(k)$  dispara nas Tabelas 7 e 8.

Ao compararmos as Tabelas 7 e 9 podemos notar que a taxa de produção é mantida, visto que os tempos de disparo da transição  $x_7(k)$  são os mesmos. Além disso, como a taxa de produção do sistema é igual a 4, ou seja, a diferença entre a finalização de um processo da peça atual em relação a anterior é igual a 4 unidades, podemos observar que o sistema processa de acordo com o valor do seu  $\lambda$ , e portanto, de acordo com sua taxa máxima de produção. Também podemos observar que todas as entradas do sistema controlado por  $F_{SM}$  são atrasadas em relação ao sistema sem controle.

As entradas de controle para o sistema controlado por  $F_{PM}^{max}$  ou  $F_{PM}$  são:

$$u(1) = [22 \quad 14 \quad 17]^T,$$

$$u(2) = [46 \quad 38 \quad 41]^T,$$

$$u(3) = [70 \quad 62 \quad 65]^T.$$

As entradas de controle para o sistema controlado por  $F_{SM}$  são:

$$u(1) = [1 \quad 0 \quad 3]^T,$$

$$u(2) = [5 \quad 4 \quad 7]^T,$$

$$u(3) = [9 \quad 8 \quad 11]^T.$$

Comparando as entradas dos sistemas controlados por diferentes matrizes, é possível notar que a entrada do controle feito pela matriz  $F_{PM}^{max}$  é igual a  $F_{PM}$ , o que indica que a matriz de controle  $F_{PM}$  já está atrasando ao máximo as entradas das peças no sistema. Embora seja desejado o maior atraso possível das datas de admissão, apenas o controle feito por  $F_{SM}$  mantém a taxa de produção do sistema.

---

## Conclusões

Os Grafos de Evento Temporizados são ferramentas gráficas que tornam possível a modelagem de Sistemas a Eventos Discretos por possuírem em sua composição fenômenos de sincronização e de atraso. Esses sistemas também podem ser representados por meio de equações lineares utilizando a álgebra Max-Plus, cujos conceitos como, por exemplo, autovetor, autovalor e espaço de estado, são herdados da teoria clássica. Além de serem dotados por procedimentos de síntese de controladores.

A primeira contribuição deste trabalho consistiu no desenvolvimento da primeira metodologia. O primeiro método proposto proporciona como encontrar um controlador que não permita a formação de estoques no interior do sistema e que respeite as restrições impostas, e a partir desse controlador como calcular deterministicamente um novo controlador no contexto da política de gestão *just-in-time*. A partir da matriz de controle projetada foi possível calcular uma matriz maior ou igual à encontrada. O uso de uma matriz de controle com seus elementos máximos, proporciona o retardo da inserção de matéria-prima no sistema. A primeira metodologia não preocupa em manter a taxa de produção do sistema, para isso foi desenvolvida a segunda metodologia.

A segunda contribuição deste trabalho consistiu no desenvolvimento de uma metodologia para projetar controladores que adotem a política *just-in-time*, para sistemas que possuem objetivos de controle e restrições, sem atrasar a entrega das peças finalizadas. É possível determinar por meio dessa metodologia a data ideal de entrada das peças e a quantidade de recursos para que os sistemas operem sem estoques iniciais desnecessários, sem que a demanda total do sistema seja alterada.

Exemplos numéricos foram apresentados para analisar os métodos desenvolvidos e para observação de sua eficiência, o que permite concluir que o problema do controle foi formulado como um problema otimização, obtendo-se resultados satisfatórios.

No que diz respeito à modelagem dos sistemas apresentados pelos métodos, podemos concluir que os GET em conjunto com as equações recursivas Max-Plus são ferramentas apropriadas para análise de problemas de sistemas de manufatura. Essa forma de representação possibilita a definição do comportamento do sistema, proporcionando melhorias,

eliminação de desperdícios e reduções de custos.

Para implementação e simulação dos exemplos numéricos foi utilizado o pacote computacional Scicoslab, proveniente do *software* Scilab.

### 5.0.1 Trabalhos futuros

A partir da metodologia, dos resultados e da conclusão deste trabalho propomos os seguintes trabalhos futuros:

- ❑ Aplicação das metodologias desenvolvidas em sistemas físicos reais ou em protótipos, para observar a eficiência dos métodos e sua contribuição na aplicação prática.
- ❑ Implementação dos métodos desenvolvidos em ambientes estocásticos, ou seja, emprego das técnicas em sistemas com variáveis probabilísticas.
- ❑ Utilização das metodologias propostas para controlar outros tipos de sistemas, como sistemas de tráfegos, sistemas de transportes, entre outros.

---

## Referências

- ANDRADE, C. R. **Controle de sistemas max-plus lineares sujeitos a restrições no estado: aplicação a sistemas de transporte**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2008. PPGEE.
- BACCELLI, F. et al. **Synchronization and linearity: an algebra for discrete event systems**. New York: Wiley, 1992. ISBN 0 471 93609 X.
- BANKS, J. Introduction to simulation. In: IEEE. **WSC'99. 1999 Winter Simulation Conference Proceedings. Simulation - A Bridge to the Future (Cat. No. 99CH37038)**. Phoenix, 1999. v. 1, p. 7–13.
- BLYTH, T. S. T. S.; JANOWITZ, M. F. **Residuation theory**. Oxford: Elsevier, 2014. ISBN 9780080164083.
- BOIMOND, J.-L.; FERRIER, J.-L. Internal model control and max-algebra: Controller design. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 41, n. 3, p. 457–461, 1996.
- BRUNSCH, T.; RAISCH, J.; HARDOUIN, L. Modeling and control of high-throughput screening systems. **Control Engineering Practice**, Elsevier, v. 20, n. 1, p. 14–23, 2012.
- BUTKOVIC, P.; HEGEDÜS, G. An elimination method for finding all solutions of the system of linear equations over an extremal algebra. **Ekonomicko-matematicky Obzor**, v. 20, n. 2, p. 203–215, 1984.
- CASSANDRAS, C. G.; LAFORTUNE, S. **Introduction to Discrete Event Systems 2nd**. New York: Springer Science & Business Media, 2008. 800 p. ISBN 9780387333328.
- COHEN, G.; GAUBERT, S.; QUADRAT, J.-P. Duality and separation theorems in idempotent semimodules. **Linear Algebra and its Applications**, Elsevier, v. 379, p. 395–422, 2004.
- CUNINGHAME-GREEN, R. A.; BUTKOVIC, P. The equation  $a \otimes x = b \otimes y$  over  $(\max, +)$ . **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 293, n. 1, p. 3–12, 2003.
- CURY, J. E. R. Teoria de controle supervisorio de sistemas a eventos discretos. **V Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**, p. 26, 2001.

- DIAS, J. R. da S. **Métodos de controle de fluxo de entrada para sistemas modelados por grafos de eventos temporizados**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2014. PPGEE.
- GOMES, G.; MAIA, C. A. A multiobjective formulation for just-in-time control of constrained max-plus linear systems in infinite horizon. In: **IEEE. 2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)**. Osaka, 2015. p. 350–355.
- GONÇALVES, V. M.; MAIA, C. A.; HARDOUIN, L. On max-plus linear dynamical system theory: The regulation problem. **Automatica**, Elsevier, v. 75, p. 202–209, 2017.
- HARDOUIN, L. et al. Estratégias de controle por modelo de referência de sistemas a eventos discretos max-plus lineares. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, SciELO Brasil, v. 16, n. 3, p. 263–278, 2005.
- HEIDERGOTT, B.; OLSDER, G. J.; WOUDE, J. V. D. **Max Plus at work: modeling and analysis of synchronized systems: a course on Max-Plus algebra and its applications**. Princeton: Princeton University Press, 2006. ISBN 978-0691117638.
- KATZ, R. D. Max-plus  $(a, b)$ -invariant spaces and control of timed discrete-event systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 52, n. 2, p. 229–241, 2007.
- MAIA, C. A. **Identificação e controle de sistemas a eventos discretos na álgebra  $(\max, +)$** . Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2003. FEEC.
- MAIA, C. A.; ANDRADE, C. R.; HARDOUIN, L. On the control of max-plus linear system subject to state restriction. **Automatica**, Elsevier, v. 47, n. 5, p. 988–992, 2011.
- MAIA, C. A.; HARDOUIN, L.; CURY, J. E. Some results on the feedback control of max-plus linear systems under state constraints. In: **52nd IEEE Conference on Decision and Control**. Florence: IEEE, 2013. p. 6992–6997.
- MAIA, C. A. et al. A super-eigenvector approach to control constrained max-plus linear systems. In: **50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference**. Orlando: IEEE, 2011. p. 1136–1141.
- MAIONE, G.; MANGINI, A. M.; OTTOMANELLI, M. A generalized stochastic petri net approach for modeling activities of human operators in intermodal container terminals. **IEEE Transactions on Automation Science and Engineering**, IEEE, v. 13, n. 4, p. 1504–1516, 2016.
- MORAES, C. C. d.; CASTRUCCI, P. d. L. **Engenharia de automação industrial**. Rio de Janeiro: LTC: LTC Editora, 2001. 295 p. ISBN 9788521619765.
- OGATA, K.; SEVERO, B. **Engenharia de controle moderno 3ed**. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1998. ISBN 8570540744.
- PAULA, M. A. B. D.; SANTOS, E. A. P. Uma abordagem metodológica para o desenvolvimento de sistemas automatizados e integrados de manufatura. **Production**, SciELO Brasil, v. 18, n. 1, p. 8–25, 2008.
- ROSEN, K. H. **Matemática discreta e suas aplicações 6. ed**. São Paulo: McGraw-Hill, 2009. ISBN 9788577260362.

- SILVA, G. G. D.; MAIA, C. A. On just-in-time control of timed event graphs with input constraints: a semimodule approach. **Discrete Event Dynamic Systems**, Springer, v. 26, n. 2, p. 351–366, 2016.
- SILVA, G. G. da. **Optimal Control Synthesis for Max-Plus Linear Dynamical Systems**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2016. PPGEE.
- SOUZA, M. X. R. **Implementação de Técnicas de Controle Max-Plus em um Simulador Realista**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2018. PPGEE.
- WANG, L.-C.; WU, S.-Y. Modeling with colored timed object-oriented petri nets for automated manufacturing systems. **Computers & industrial engineering**, Elsevier, v. 34, n. 2, p. 463–480, 1998.