

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**Humberto Alves da Silveira Monteiro**

**UMA NOVA ABORDAGEM PARA ANÁLISE ESTÁTICA EM DUAS  
ESCALAS: MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS/  
ESTENDIDOS, ESTRATÉGIA GLOBAL-LOCAL E MODELOS DE  
DEGRADAÇÃO ELÁSTICA NO ESTUDO DE MEIOS NÃO LINEARES,  
PARCIALMENTE FRÁGEIS E HETEROGÊNEOS**

Belo Horizonte  
2021

Humberto Alves da Silveira Monteiro

**UMA NOVA ABORDAGEM PARA ANÁLISE ESTÁTICA EM DUAS  
ESCALAS: MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS/  
ESTENDIDOS, ESTRATÉGIA GLOBAL-LOCAL E MODELOS DE  
DEGRADAÇÃO ELÁSTICA NO ESTUDO DE MEIOS NÃO LINEARES,  
PARCIALMENTE FRÁGEIS E HETEROGÊNEOS**

**Versão final**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira

Belo Horizonte

2021

M775n

Monteiro, Humberto Alves da Silveira.

Uma nova abordagem para análise estática em duas escalas [recurso eletrônico] : método dos elementos finitos generalizados/estendidos, estratégia global-local e modelos de degradação elástica no estudo de meios não lineares, parcialmente frágeis e heterogêneos / Humberto Alves da Silveira Monteiro. - 2021.

1 recurso online (xl, 378 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Roque Luiz da Silva Pitangueira.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 360-378.

Bibliografia: f. 338-359.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Análise estática - Teses.  
3. Análise funcional não-linear - Teses. 4. Método dos elementos finitos - Teses. I. Pitangueira, Roque Luiz da Silva. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"UMA NOVA ABORDAGEM PARA ANÁLISE ESTÁTICA EM DUAS ESCALAS: MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS/ESTENDIDOS, ESTRATÉGIA GLOBAL-LOCAL E MODELOS DE DEGRADAÇÃO ELÁSTICA NO ESTUDO DE MEIOS NÃO LINEARES, PARCIALMENTE FRÁGEIS E HETEROGÊNEOS"**

Humberto Alves da Silveira Monteiro

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Doutor em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira - DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Samuel Silva Penna - DEES - UFMG

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros - DEES - UFMG

Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado - UFPR

Prof. Dr. Raul Rosas e Silva - PUC - RIO

Belo Horizonte, 20 de janeiro de 2021



Documento assinado eletronicamente por **Felício Bruzzi Barros, Membro**, em 20/01/2021, às 19:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Samuel Silva Penna, Professor do Magistério Superior**, em 20/01/2021, às 19:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Roberto Dalledone Machado, Usuário Externo**, em 25/01/2021, às 10:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Raul Rosas e Silva, Usuário Externo**, em 26/01/2021, às 07:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Roque Luiz da Silva Pitanguera, Presidente de comissão**, em 28/01/2021, às 17:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0519815** e o código CRC **E7D986B8**.

*“... o trabalho superior que há para o ser humano é o da razão, que se resume precisamente na contínua limitação do infinito, no fracionamento do infinito em convenientes, fáceis e digeríveis porções, em diferenciais.”*  
*(Yevgeny Zamyatin)*

# Índice

Índice	ii
Agradecimentos	vii
Resumo	ix
Abstract	x
Lista de Figuras	xxii
Lista de Tabelas	xxiv
Lista de Algoritmos	xxvi
Lista de Configurações Experimentais	xxviii
Lista de Abreviaturas e Siglas	xxix
Lista de Símbolos	xxxii
Lista de Publicações	xxxviii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 A Tese . . . . .	5
1.1.1 Problema, Hipóteses e Objetivos . . . . .	6
1.1.2 Organização do Texto . . . . .	8
1.1.3 Notação . . . . .	9
<b>2 Referencial Teórico</b>	<b>11</b>
2.1 Notas sobre a Micromecânica do Contínuo . . . . .	11
2.1.1 Material Heterogêneo . . . . .	12
2.1.2 Elemento de Volume Representativo . . . . .	12
2.1.3 Homogeneização e Propriedades Efetivas . . . . .	13
2.2 Notas sobre a Mecânica do Dano . . . . .	15
2.2.1 Definição Elementar de Dano . . . . .	16
2.2.2 Representação Mecânica do Dano . . . . .	16
2.2.3 Não Localidade do Dano . . . . .	19
2.2.4 Modelos de Degradação Elástica . . . . .	20

2.3	Notas sobre a Mecânica da Fratura de Meios Parcialmente Frágeis . . . . .	22
2.3.1	Descrição Básica . . . . .	22
2.3.2	Localização de Deformações . . . . .	24
2.3.3	Efeito de Tamanho . . . . .	25
2.3.4	EVR, Homogeneização e Materiais Parcialmente Frágeis . . . . .	26
2.4	Notas sobre o Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendidos . . . . .	28
2.4.1	Histórico e Contextualização . . . . .	28
2.4.2	Formulação . . . . .	29
2.5	Notas sobre Metodologias Global-Local . . . . .	30
2.5.1	Global-Local e Multiescala . . . . .	31
2.5.2	MEFG-GL . . . . .	34
2.6	Notas sobre a Análise Não Linear . . . . .	36
2.6.1	Os Conceitos de Derivada Direcional e Linearização . . . . .	37
2.6.2	Solução de Equações Algébricas Não Lineares . . . . .	39
2.7	Notas sobre a Plataforma de Desenvolvimento Empregada . . . . .	43
2.7.1	Visão Geral do Núcleo Numérico . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Estado da Arte</b> . . . . .	<b>49</b>
3.1	Evolução dos Estudos de Fratura de Meios Parcialmente Frágeis . . . . .	50
3.1.1	Inclusão de Heterogeneidade . . . . .	54
3.2	Evolução dos Estudos do Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendidos . . . . .	56
3.3	Evolução da Modelagem Multiescala . . . . .	58
3.3.1	Primeiros Modelos . . . . .	59
3.3.1.1	Navier e Cauchy . . . . .	59
3.3.1.2	Poisson, Mossotti e Clausius . . . . .	59
3.3.1.3	Maxwell e Lord Rayleigh . . . . .	60
3.3.1.4	Voigt e Reuss . . . . .	60
3.3.1.5	Einstein . . . . .	60
3.3.2	Décadas de 1950 e 1960 . . . . .	61
3.3.3	Décadas de 1970 e 1980 . . . . .	62
3.3.4	A partir de 1990 . . . . .	63
3.4	Taxonomia de Modelos Multiescala . . . . .	69
3.4.1	Feyel (2003) . . . . .	69
3.4.2	Michopoulos et al. (2005) . . . . .	69
3.4.3	De Borst et al. (2006) . . . . .	71
3.4.4	Gravemeier et al. (2007) . . . . .	72
3.4.5	E et al. (2007) . . . . .	74
3.5	Modelos Multiescala para Materiais Parcialmente Frágeis . . . . .	75
3.6	Cenário Nacional . . . . .	77
3.7	Síntese . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Materiais e Métodos</b> . . . . .	<b>85</b>
4.1	Uma Nova Estratégia para Análise Fisicamente Não Linear de Meios Parcialmente Frágeis em Problemas da Mecânica do Dano Contínuo . . . . .	86
4.1.1	Fundamentos Teóricos . . . . .	86

4.1.1.1	Definições Preliminares . . . . .	86
4.1.1.2	Descrição da Estratégia . . . . .	92
4.1.1.3	Formulação do MEFG-GL-NL Aplicada à Elasticidade . . . . .	97
4.1.1.4	Discretização das Equações de Equilíbrio . . . . .	100
4.1.2	Aspectos Complementares . . . . .	101
4.1.2.1	Processo Incremental-Iterativo . . . . .	101
4.1.2.2	Equações Discretas Adicionais . . . . .	103
4.1.2.3	Manifestação da Não Linearidade em Problemas de De- gradação Elástica . . . . .	105
4.1.2.4	Mapeamento de Pontos Materiais . . . . .	106
4.1.2.5	Mecanismo de Homogeneização/Ponderação do <i>Upscaling</i> . . . . .	107
4.1.3	Representação Material . . . . .	110
4.1.4	Síntese . . . . .	111
4.2	Premissas, Arquitetura e Funcionamento do Núcleo Numérico Implemen- tado: Quesitos Computacionais e Fundamentos Acessórios . . . . .	113
4.2.1	Condução da Simulação . . . . .	114
4.2.2	Especialização para Análise Global-Local/Duas Escalas . . . . .	117
4.2.2.1	Gerente da Simulação . . . . .	118
4.2.2.2	Gerente de Dados . . . . .	125
4.2.2.3	Configuradores . . . . .	131
4.2.2.4	Solucionadores e Acessórios . . . . .	133
4.2.3	Tratamento da Heterogeneidade . . . . .	139
4.2.3.1	Estrutura Submacroscópica de Materiais Particulados . . . . .	140
4.2.3.2	Metadado Numérico-Geométrico . . . . .	142
4.2.3.3	Administração do Metadado . . . . .	144
4.2.3.4	Tratamento Numérico do Metadado . . . . .	148
4.2.4	Síntese . . . . .	159
4.3	Plano de Experimentos Numéricos . . . . .	160
4.3.1	Tratamento da Heterogeneidade . . . . .	163
4.3.2	Verificação e Validação do MEFG-GL-NL . . . . .	165
4.3.3	Estudos de Caso . . . . .	169
4.3.4	Síntese . . . . .	170
<b>5</b>	<b>Resultados e Discussão</b> . . . . .	<b>172</b>
5.1	Geração e Alocação de Partículas de Mesoestrutura . . . . .	172
5.1.1	Exame 1: Influência do Fator de Distribuição na Alocação . . . . .	173
5.1.2	Exame 2: Influência da Fração de Partículas na Alocação . . . . .	177
5.1.3	Exame 3: Influência da Distribuição Granulométrica na Geração e na Alocação . . . . .	180
5.1.4	Exame 4: Influência dos Parâmetros das Partículas na Geração . . . . .	183
5.1.5	Síntese . . . . .	184
5.2	Tratamento do Metadado Numérico-Geométrico de Mesoestrutura . . . . .	186
5.2.1	Exame 1: Avaliação do Tratamento Não Conforme . . . . .	187
5.2.2	Exame 2*: Avaliação do Tratamento Conforme . . . . .	189
5.2.3	Síntese . . . . .	191
5.3	Verificação e Validação do MEFG-GL-NL . . . . .	191

5.3.1	Experimentos AL-HM-1E/AL-HT-1E: Tração Direta . . . . .	191
5.3.1.1	Exame 1: Avaliação Geral do Modelo Morfológico Adotado	193
5.3.1.2	Exame 2: Influência da Fração de Heterogeneidade no Comportamento Estrutural do Modelo . . . . .	198
5.3.2	Experimentos AL-HM-2E/AL-HT-2E: Problema da Inclusão . . . . .	206
5.3.2.1	Exame 1: Solução do MEFGL × Solução Analítica . . . . .	209
5.3.2.2	Exame 2: Influência do Refinamento Local . . . . .	209
5.3.2.3	Exame 3: Influência do Número de Nós Globais Enrique- cidos e do Tamanho da Escala Local . . . . .	212
5.3.2.4	Exame 4: Solução do MEFGL <i>vs.</i> Solução Numérica de Referência Refinada . . . . .	216
5.3.2.5	Exame 5: Explorando os Limites da Técnica Multiescala . . . . .	218
5.3.3	Experimentos ANL-HM-1E/ANL-HT-1E: Flexão em 3 pontos . . . . .	224
5.3.3.1	Exame 1: Avaliação do Caráter Contingente da Resposta Estrutural do Sólido Heterogêneo. . . . .	229
5.3.3.2	Exame 2: Avaliação da Influência da Fração de Heteroge- neidades na Resposta Estrutural. . . . .	241
5.3.3.3	Exame 3: Avaliação do Impacto do Refinamento de Malha	253
5.3.3.4	Exame 4: Avaliação do Impacto do Acréscimo de Nova Fase na Eficiência Numérica . . . . .	261
5.3.4	Experimentos ANL-HM-2E/ANL-HT-2E: Flexão em 3 pontos . . . . .	266
5.3.4.1	Exame 1: Avaliação da Estratégia Não Linear em Duas Escala com Meio Homogêneo . . . . .	272
5.3.4.2	Exame 2: Avaliação da Estratégia Não Linear com Meio (Local) Heterogêneo e <i>Upscaling</i> Cinemático . . . . .	274
5.3.4.3	Exame 3: Avaliação da Estratégia Não Linear com Meio (Local) Heterogêneo e <i>Upscaling</i> Cinemático-Material . . . . .	278
5.3.4.4	Exame 4: Avaliação da Estratégia Não Linear com Meio (Local) Heterogêneo e <i>Upscaling</i> Cinemático-Constitutivo e Comparativo dos Mecanismos . . . . .	281
5.3.4.5	Exame 5: Avaliação do Estado de Deformação Local . . . . .	284
5.3.5	Síntese . . . . .	289
5.4	Estudos de Caso . . . . .	291
5.4.1	<b>Petersson (1989)</b> . . . . .	292
5.4.1.1	Exame 1: Avaliação do Número de Nós Globais Enriquecidos	295
5.4.1.2	Exame 2: Avaliação do Tamanho do Problema Local . . . . .	300
5.4.1.3	Exame 3: Avaliação do Refinamento Global . . . . .	301
5.4.1.4	Exame 4: Avaliação do Refinamento Local . . . . .	303
5.4.1.5	Exame 5: Avaliação da Heterogeneidade . . . . .	305
5.4.2	<b>Winkler et al. (2004)</b> . . . . .	311
5.4.2.1	Exame: Regularização de Trajetória . . . . .	312
5.4.3	Síntese . . . . .	314
<b>6</b>	<b>Conclusões e Considerações Finais</b>	<b>316</b>
6.1	Sobre a Pergunta Primeva da Pesquisa, suas Hipóteses e os Objetivos Al- cançados . . . . .	319

6.2	Sobre o MEFGL e seu Desempenho . . . . .	321
6.3	Sobre o Enriquecimento Global-Local, Integração e sua Relação com a PU . . . . .	322
6.4	Sobre a Utilização do MEFGL com Enriquecimento Global-Local em Análises Fisicamente Não Lineares . . . . .	323
6.5	Sobre os Mecanismos de <i>Upscaling</i> e a Ponderação Ascendente . . . . .	325
6.6	Sobre as Condições de Contorno Locais . . . . .	327
6.7	Sobre as Vantagens e Desvantagens do MEFGL-NL . . . . .	327
6.8	Sobre o Modelo Computacional de Heterogeneidade e Análises Correlatas . . . . .	330
6.9	Sobre a Implementação . . . . .	331
6.10	Sobre Trabalhos Futuros . . . . .	334
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>338</b>
 <b>Apêndices</b>		 <b>361</b>
<b>A Resolução do Sistemas de Equações no MEFGL</b>		<b>362</b>
<b>B Imposição de Condições de Contorno no Domínio Local</b>		<b>364</b>
<b>C <i>Design Patterns</i> Empregadas</b>		<b>366</b>
C.1	Design Orientado à Interfaces . . . . .	366
C.2	Padrão <i>Strategy</i> . . . . .	368
C.3	Padrão <i>Mediator</i> . . . . .	373

# Agradecimentos

Em geral, agradecimentos em dissertações costumam soar-me tépidos e *pro forma* e fatalmente este que aqui segue acabará por se mostrar igualmente insuficiente (e talvez até injusto), visto que a ajuda daqueles que estiveram em contato comigo durante todo esse processo é merecedora de um agradecimento que mal caberia em todas as páginas deste texto.

Não somente, a defesa desta obra ocorre em um momento muito delicado de nossa história recente, em meio a, dentre outras coisas, uma pandemia que trouxe perdas irreparáveis (não somente à sociedade, de um modo geral, mas pessoais inclusive), de modo que o sentimento generalizado é um tanto avesso à certa felicidade que se exige em escritos dessa natureza.

De toda sorte, pessoas especiais que serão sempre lembradas merecem sabê-lo e minha gratidão deve ficar registrada.

À minha família, agradeço todo o incentivo e suporte durante esta caminhada. Obrigado mãe e pai por toda a ternura e pela valorização incondicional da minha educação, que se materializa mais uma vez nesse novo grau alcançado. Minha irmã, agradeço-lhe pelos ensinamentos, generosidade, afeto e exemplo de resiliência às adversidades. Sem dúvida alguma, sem vocês nada seria possível em minha vida. À Sara, minha eterna companheira, agradeço todo o amor, carinho, compreensão e amizade; por me tornar uma pessoa melhor, com uma visão de mundo mais crítica e contundente, renovando-me a cada dia, você me ajudou a chegar até aqui. Uma menção especial adicional à Luciana e à Sara pela ajuda na revisão de parte do texto.

Ao Prof. Roque Pitangueira, mestre e amigo, cuja influência fez com que eu enxergasse além do horizonte posto pela engenharia e voltasse meus olhos para muito do que eu havia esquecido, agradeço a confiança e o apoio. A jornada enfrentada a seu lado e a certeza de que “só a arte salva” certamente me tornam uma pessoa diferente. Que possamos seguir em contato nesses caminhos sinuosos da ciência e da educação!

Às colegas Larissa Novelli e Gabriela Fonseca (e vice-versa), meu profundo agradecimento pelo trabalho desenvolvido, pelo auxílio na pesquisa e por toda a produção acadêmica derivada. Graças à inteligência e competência de vocês foi possível desenvolver esse

projeto.

Aos colegas Guilherme Botelho e Marcella Andrade agradeço pelas discussões pontuais que permitiram com que ideias novas surgissem e se consolidassem.

Ao Prof. Felício Barros, o grande idealizador, de fato, das iniciativas do MEFG no grupo de pesquisa, cuja influência permitiu com que a proposta desta investigação se consolidasse, agradeço a confiança e otimismo com este trabalho, bem como a avaliação imparcial da tese.

Ao Prof. Samuel Penna, sem o qual o estudo da não linearidade teria sido muito mais difícil, agradeço a paciência, e a disponibilidade.

Meus agradecimentos ao Prof. Raul Rosas e Silva, que com muito respeito e gentileza concedeu uma avaliação elogiosa à tese e um olhar didático-pedagógico diferenciado ao processo de defesa de um trabalho dessa natureza.

Ao Prof. Roberto Dalledone Machado, que com rigor exemplar se dispôs a estudar essa obra e avaliá-la, agradeço os apontamentos importantes e relevantes para a consolidação do texto final e idealização de pesquisas futuras.

Agradeço igualmente à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas e aos demais professores do programa que com muita diligência trabalham para formar especialistas, mestres e doutores (tarefa árdua, demorada e com muitos contra-tempos) e tornar o PROPEEs relevante no mundo acadêmico.

À secretaria da pós-graduação e demais funcionários do departamento, nas figuras de Juliana, Patrícia e Inês, meu muito obrigado pelo trabalho, presteza e por sempre estarem disponíveis para ajudar o corpo discente.

Meus agradecimentos aos demais colegas e professores do projeto INSANE que zelam por uma convivência de muito respeito e tranquilidade e constroem um ambiente amistoso para se trabalhar.

Finalmente, agradeço também à UFMG, às agências de fomento CAPES, CNPq e Fapemig, e demais instituições públicas associadas à educação, ciência e tecnologia do Brasil por tornarem possível o desenvolvimento de pesquisas no país e contribuírem para a construção de uma ciência verdadeiramente nacional e uma educação de qualidade.

# Resumo

Em análise de estruturas é comum a adoção de modelos de escala única, representativa do nível macroscópico ou estrutural, em que a resposta global do domínio estudado é costumeiramente desejada. Nesses modelos, o meio é considerado homogêneo e busca-se utilizar relações constitutivas fenomenológicas que reflitam devidamente o comportamento de escalas subjacentes. Contudo, a rigor, todo material é heterogêneo em alguma escala de comprimento suficientemente pequena e no caso de meios parcialmente frágeis, é exatamente a natureza não homogênea do contínuo que responde por muitos dos fenômenos captados em nível estrutural, sobretudo pelo proeminente comportamento mecânico não linear. Assim, a investigação do material em diferentes escalas de observação é fundamental para uma modelagem do meio um tanto mais fiel a suas características. Nesse sentido, o presente trabalho propõe uma nova estratégia não linear associada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendidos com enriquecimento Global-Local para a simulação, em duas escalas, do comportamento de estruturas com meios parcialmente frágeis e explicitamente heterogêneos. Através de um esquema incremental-iterativo modificado, problemas de valor de contorno representativos dos níveis global (macroescala) e local (mesoescala), fracamente acoplados, são solucionados concorrentemente. Composições materiais distintas são propostas nas duas escalas e técnicas adequadas de comunicação descendente e ascendente entre os modelos são investigadas. Com a aplicação do método, foi possível capturar o comportamento da escala refinada, bem como seu efeito no problema global. A estratégia desenvolvida no âmbito dessa pesquisa funciona não somente como um mecanismo versátil de refinamento que permite o tradicional acoplamento de malhas não conformes, em uma lógica híbrida de refinamento *hp*, mas também, é capaz de introduzir no modelo numérico, em escala local, variadas características e modificações sem grande comprometimento das hipóteses globais/estruturais.

**Palavras-chave:** **Análise Não Linear, Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendidos, Meios Parcialmente Frágeis, Global-Local, Análise Multi-escala, Heterogeneidade.**

# Abstract

In structural analysis it is usual to adopt single-scale models, representing the structural or macroscopic level, in which one would investigate the overall behaviour of the studied domain. In those models, the material is homogeneous, and it is necessary to use some appropriate phenomenological constitutive relations to reflect the behavior of the underlying scales. However, all the materials are heterogeneous in some small length scale and with quasi-brittle media, it is that inhomogeneous nature of the continuum that accounts for many of the phenomena captured in structural level, notably the prominent nonlinear mechanical behavior. Thus, examine the material in different length scales is critical to its proper modeling. In this sense, this work proposes a new nonlinear strategy associated to the Generalized/Extended Finite Element Method with Global-Local enrichment for modeling heterogeneous quasi-brittle structures in two scales by a modified incremental-iterative scheme, in which global (macroscale) and local (mesoscale) boundary value problems, in weak coupling, are concurrently solved. Different material compositions were prescribed in each scale and proper descending and ascending communication techniques were investigated. The proposed method could capture the fine-scale behavior, and its effect on the structural problem. The strategy developed here works not only as a traditional and versatile refinement mechanism that allows coupling of non-conforming meshes, in a hybrid *hp* refinement fashion, but also, it can introduce in the numerical model, through the local scale, several characteristics or modifications without major compromise of global/structural hypotheses.

**Keywords:** Nonlinear Analysis; Generalized/Extended Finite Element Method, Quasi-Brittle Media, Global-Local, Multiscale Analysis, Heterogeneity.

# Lista de Figuras

2.1	Esquema ilustrativo do processo de homogeneização (Zohdi e Wriggers, 2010).	15
2.2	Representação do dano em uma barra tracionada pela redução da área efetiva. Adaptado de Murakami (2012)..	17
2.3	Componentes da ponderação não local: domínio de influência e função de ponderação. Adaptado de Souza (2016).	19
2.4	Resposta gráfica Tensão $\times$ Deslocamento típica para materiais parcialmente frágeis (Shah et al., 1995).	24
2.5	Zona de processo de fratura (ZPF). Adaptado de Anderson (2005).	24
2.6	Efeito de Tamanho – Curva Tensão Nominal $\times$ Deslocamento (Bažant e Planas, 1998). $t$ , $d$ : tensão e deslocamento; $G$ , $P$ : estrutura grande e estrutura pequena; $LIM$ , $FAIL$ : valor limite e na falha.	26
2.7	<i>Framework</i> de enriquecimento do MEFGL.	30
2.8	Exemplos de abordagens global-local segundo Noor (1986).	32
2.9	Etapas de análise do MEFGL.	35
2.10	Fontes de não linearidade na mecânica estrutural.	36
2.11	Trajetórias típicas e pontos limites. Adaptado de (Pitangueira, 1998).	38
2.12	Derivada direcional (Bonet e Wood, 1997).	39
2.13	Representação gráfica do algoritmo 2.1. Adaptado de Yang e Kuo (1994); Fuina (2004).	44
2.14	<i>Kernel</i> do sistema INSANE.	45
2.15	Visão geral da classe <i>Persistence</i> .	46
2.16	Visão geral da classe <i>Assembler</i> .	47
2.17	Visão geral da classe <i>Solution</i> .	48
2.18	Visão geral da classe <i>Model</i> .	48

3.1	Tratamentos numéricos para a heterogeneidade. (a) Conforme; (b) Não conforme monofásico; (c) Não conforme <i>level-set</i> ; (d) Não conforme probabilístico – modelo de degeneração randômica; (e) Não conforme multifásico; (f) Redes randômicas. Adaptado de <a href="#">Bohm (2016)</a> . . . . .	55
3.2	Alguns dos modelos multiescala desenvolvidos na primeira e segunda décadas dos anos 2000. <i>Com aplicação a materiais parcialmente frágeis</i> . . . . .	84
4.1	Obstáculos da perspectiva convencional de integração. <i>Em uma análise fisicamente não linear, na qual há evolução de um parâmetro histórico, de um modo completamente irregular e distribuído, o uso direto e unívoco da discretização local possui limitações conceituais</i> . . . . .	91
4.2	Premissas fundamentais da estratégia MEEG-GL-NL. . . . .	92
4.3	Mecanismos de comunicação ascendente: <i>upscalings</i> cinemático (4.3a), cinemático-material (4.3b) e cinemático-constitutivo (4.3c). ■: nó enriquecido; ×: pto. de integração global; ●: pto. de integração local; ●: inclusão; ○, s: domínio de homogeneização. . . . .	95
4.4	Esquematização do processo de solução do MEEG-GL-NL. . . . .	96
4.5	Influência da degradação material na análise não linear. . . . .	106
4.6	Mapeamento de pontos de integração. . . . .	107
4.7	Procedimento de ponderação/média da grandeza local. Malha global (⊞); PIG (×); PIL (●); dimensão característica (○, ○); EFL (■, ■); Heterogeneidade (●). <i>Com a premissa de obtenção da informação local via ponderação no entorno do PIG, métodos consideravelmente distintos podem ser empregados no nível inferior, como métodos sem malha ou um modelo ainda “mais discreto” como o de redes, sem a necessidade de consideração de hipóteses adicionais (ou com pouca intervenção)</i> . . . . .	109
4.8	Síntese esquemática da metodologia. . . . .	112
4.9	Dinâmica de uma simulação com a nova proposta. . . . .	121
4.10	Dinâmica linearizada de um simulador global-local deste trabalho. . . . .	122
4.11	Implementação da estrutura principal – Pacote <code>simulationmanager</code> . . . . .	123
4.12	Implementação dos gerentes global-local – Pacote <code>globallocalsm</code> . . . . .	126
4.13	Implementação dos gerentes de dados – Pacote <code>datamanager</code> . . . . .	128
4.14	Implementação dos configuradores – Pacote <code>setuper</code> . . . . .	131
4.15	Distribuição granulométrica típica – Curva de Füller com $DMC = 37.5mm$ , $n = 0.5$ ; Série normal. Adaptado de <a href="#">Häfner et al. (2006)</a> ; <a href="#">Wriggers e Moftah (2006)</a> . . . . .	141

4.16	Conformação das partículas previstas. (a) <b>SphericalParticle</b> – Posição: $\mathbf{P}(x, y, z)$ e Dimensão Característica: raio $r$ . (b) <b>IrregularParticle</b> – Posição $\mathbf{P}(x, y, z)$ ; Dimensão Característica Média: raio da circunferência circunscrita $r$ ; Parâmetros de Irregularidade: $\delta r^i$ , fuga do raio médio, $\delta\Theta^i$ , incremento do ângulo central a partir do datum. . . . .	145
4.17	Implementação da heterogeneidade – pacote <b>Particles</b> . . . . .	145
4.18	Processo de geração e alocação de partículas – <i>take-and-place</i> . . . . .	148
4.19	Fluxo sintético do tratamento numérico da heterogeneidade . . . . .	151
5.1	Variação do fator de distribuição $\chi$ – Inspeção visual. . . . .	174
5.2	Influência de $\chi$ no número de partículas geradas ( $N$ ), na razão de alocação ( $\rho$ ) e no tempo de alocação ( $t$ ). . . . .	175
5.3	Variação da fração de partículas $\Delta$ – Inspeção visual. . . . .	178
5.4	Influência de $\chi$ no número de partículas geradas ( $N$ ), na razão de alocação ( $\rho$ ) e no tempo de alocação ( $t$ ). . . . .	179
5.5	Variação da distribuição granulométrica – Inspeção visual. . . . .	181
5.6	Influência da distribuição granulométrica no tempo ( $t$ ) e na razão de alocação ( $\rho$ ). . . . .	182
5.7	Saída simplificada do gerente de partículas. (a) Indicação do número de partículas, da razão de alocação $\rho$ , da duração do processo (em $ms$ ), da posição $\mathbf{P}(x, y)$ e dimensão caracterísitca da partícula $r$ . (b) Indicação do número de partículas, da razão de alocação $\rho$ , da duração do processo (em $ms$ ) e da posição $\mathbf{P}(x, y)$ de seus vértices, em que $p_i(x, y)^1 \equiv p_i(x, y)^{ULTIMO}$ . . . . .	185
5.8	Tratamento do metadado numérico-geométrico: avaliação da malha no modelo morfológico proposto. Malhas regulares com elementos quadrilaterais (5.8b, 5.8c e 5.8d) e malhas não regulares com elementos triangulares (5.8e, 5.8f e 5.8g). . . . .	188
5.9	Tratamento do metadado numérico-geométrico: inspeção visual do tratamento conforme. Diferentes distribuições (5.8b, 5.8c e 5.8d). . . . .	190
5.10	Malha de elementos finitos e solução de referência (AL-HM-1E). . . . .	194
5.11	AL-HM(T)-1E – Tração direta – Exemplo 1: morfologia (5.11a), deslocamento na direção $x$ (5.11b), deformação na direção $x$ (5.11c) e tensões na direção $x$ (5.11d). . . . .	195
5.12	AL-HM(T)-1E – Tração direta – Exemplo 2: morfologia (5.12a), deslocamento na direção $x$ (5.12b), deformação na direção $x$ (5.12c) e tensão na direção $x$ (5.12d). . . . .	196

5.13	AL-HM(T)-1E – Tração direta – Exemplo 3: morfologia (5.13a), deslocamento na direção $x$ (5.13b), deformação na direção $x$ (5.13c) e tensão na direção $x$ (5.13d). . . . .	197
5.14	AL-HT-1E – Tração direta: box-plot dos deslocamentos máximos para cada fração de heterogeneidade (exame 2). Resposta gráfica e algumas estatísticas descritivas simples. . . . .	199
5.15	AL-HT-1E – Tração direta: box-plot das deformações (5.15a, 5.15b) e tensões (5.15c, 5.15d) mínimas e máximas para cada fração de heterogeneidade (exame 2). Resposta gráfica e algumas estatísticas descritivas simples. . . . .	200
5.16	AL-HT-1E – Tração direta: componentes de deslocamento, deformação e tensão no plano e na direção $x$ para $\Delta = 0.10$ (caso 2). Colunas 1 a 4: <i>distribuição, <math>dx</math>, <math>\varepsilon_{xx}</math> e <math>\sigma_{xx}</math></i> ; linhas: realizações 1 a 5. . . . .	201
5.17	AL-HT-1E – Tração direta: componentes de deslocamento, deformação e tensão no plano e na direção $x$ para $\Delta = 0.20$ (caso 2). Colunas 1 a 4: <i>distribuição, <math>dx</math>, <math>\varepsilon_{xx}</math> e <math>\sigma_{xx}</math></i> ; linhas: realizações 1 a 5. . . . .	202
5.18	AL-HT-1E – Tração direta: componentes de deslocamento, deformação e tensão no plano e na direção $x$ para $\Delta = 0.40$ (caso 2). Colunas 1 a 4: <i>distribuição, <math>dx</math>, <math>\varepsilon_{xx}</math> e <math>\sigma_{xx}</math></i> ; linhas: realizações 1 a 5. . . . .	203
5.19	AL-HT-1E – Tração direta: destaque das zonas de deformação normal máxima e indicação de uma potencial seção crítica (caso 2). Colunas 1 a 3: $\Delta$ ; linhas: realizações 1 a 5.  zonas de concentração de deformações máximas; --- seção crítica. . . . .	205
5.20	AL-HM/HT-2E – Problema da Inclusão: solução analítica vs. solução do MEFG-GL (exame 1). Tensões ( <i>hard inclusion</i> , 5.20a, e <i>soft inclusion</i> , 5.20c) e erro percentual no domínio $Erro = 100 - \sigma_{rr}^{ANALITICO} / \sigma_{rr}^{MEFG-GL}$ ( <i>hard inclusion</i> , 5.20b, e <i>soft inclusion</i> , 5.20d). . . . .	210
5.21	AL-HM/HT-2E – Problema da Inclusão: impacto do refinamento local (exame 2). Malha local L1 – $GI \div 2$ (5.21a), malha local L2 – $GI \div 4$ (5.21b), malha local L3 – $GI \div 6$ (5.21c), malha local L4 – $GI \div 8$ (5.21d); perfil de tensões (5.21e); erro percentual de cada variante ao longo da abscissa (5.21f); box-plot do erro de percentual para cada variante local (5.21g). . . . .	211

5.22 AL-HM/HT-2E – Problema da Inclusão: impacto do número de nós enriquecidos (exame 3). Detalhe dos nós globais enriquecidos (5.22a, L1 [⊙], L2 [⊙, ⊙], L3 [⊙, ⊙, ⊙]); erro percentual de cada variante ao longo da abscissa (5.22c); box-plot do erro de percentual para cada variante local (5.22d). . . . . 213

5.23 AL-HM/HT-2E – Problema da Inclusão: impacto do tamanho do problema local (exame 3). Nós enriquecidos (5.23a); modelos locais L1 –  $4a \times 4a$  (5.23b), L2 –  $6a \times 6a$  (5.23c), L3 –  $8a \times 8a$  (5.23d), perfil de tensões (5.23e); erro percentual de cada variante ao longo da abscissa (5.23f); box-plot do erro de percentual para cada variante local (5.23g). . . . . 215

5.24 AL-HM/HT-2E – Modelo homogêneo: verificação do impacto isolado do enriquecimento (exame 3). Variação do refinamento local (5.24a e 5.24a, L1 –  $GI \div 2$ , L2 –  $GI \div 4$ , L3 –  $GI \div 6$ , L4 –  $GI \div 8$ ); variação do número de nós enriquecidos (5.24c e 5.24d, L1 – 9 nós, L2 – 25 nós, L3 – 49 nós). . . . 217

5.25 AL-HM/HT-2E – Problema da Inclusão – *hard inclusion* (exame 4): solução numérica de referência (5.25a, 5.25b, 5.25c); prob. global inicial não enriquecido (GI, 5.25d, 5.25e, 5.25f), prob. global enriquecido (GE, 5.25g, 5.25h, 5.25i); deformada (5.26j,  $3 \times 10^3 : 1$ ). . . . . 219

5.26 AL-HM/HT-2E – Problema da Inclusão – *soft inclusion* (exame 4): solução numérica de referência (5.26a, 5.26b, 5.26c); prob. global inicial não enriquecido (GI, 5.26d, 5.26e, 5.26f), prob. global enriquecido (GE, 5.26g, 5.26h, 5.26i); deformada (5.26j,  $3 \times 10^3 : 1$ ). . . . . 220

5.27 Limites da técnica multiescala: modelagem indireta de furo. Componentes cartesianas de deslocamento  $d_x$  (5.27a) e tensão  $\sigma$  (5.27b e 5.27c, equivalentes a  $\sigma_{rr}$  para pares  $(r, \theta)$  específicos); deformada (5.27d). . . . . 221

5.28 Limites da técnica multiescala: modelagem indireta de furo. Tensões em  $\theta = 0$  (5.28a) e  $\theta = \pi/2$  (5.28c) e erro no domínio ( $\sigma_{rr}^{ANALITICO} / \sigma_{rr}^{MEFG-GL}$ , 5.28b e 5.28d). . . . . 223

5.29 Limites da técnica multiescala: modelagem indireta de micro-inclusões múltiplas ( $\Delta = 0.20$ ). Distribuição localizada das inclusões (5.29a); componentes em  $x$  das deformações e tensões globais (5.29b e 5.29c); tratamento numérico do metadado geométrico (5.29d) e componentes em  $x$  das deformações e tensões locais (5.29e e 5.29f). . . . . 224

5.30	Limites da técnica multiescala: modelagem indireta de micro-inclusões múltiplas ( $\Delta = 0.40$ ). Distribuição localizada das inclusões (5.29a); componentes em $x$ das deformações e tensões globais (5.29b e 5.29c); tratamento numérico do metadado geométrico (5.29d) e componentes em $x$ das deformações e tensões locais (5.29e e 5.29f). . . . .	225
5.31	Representação operacional simplificada da estratégia utilizada para configurar o modelo numérico com o metadado da distribuição de inclusões. . .	231
5.32	ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: impacto do acréscimo de $\approx 10\%$ de heterogeneidade no meio (exame 1). Dist. de heterogeneidade (5.32a, 5.32b, 5.32c, 5.32d); trajetórias de equilíbrio (5.32e) e desvios em módulo para o homogêneo (5.32f) de cada realização; trajetória de equilíbrio média (5.32g) e desvio médio em módulo (5.32h). Realizações (1 a 4), Média (Mean), Homogêneo (HM). . .	233
5.33	ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: impacto do acréscimo de $\approx 20\%$ de heterogeneidade no meio (exame 1). Dist. de heterogeneidade (5.33a, 5.33b, 5.33c, 5.33d); trajetórias de equilíbrio (5.33e) e desvios em módulo para o homogêneo (5.33f) de cada realização; trajetória de equilíbrio média (5.33g) e desvio médio em módulo (5.33h). Realizações (1 a 4), Média (Mean), Homogêneo (HM). . .	235
5.34	ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: impacto do acréscimo de $\approx 40\%$ de heterogeneidade no meio (exame 1). Dist. de heterogeneidade (5.34a, 5.34b, 5.34c, 5.34d); trajetórias de equilíbrio (5.34e) e desvios em módulo para o homogêneo (5.34f) de cada realização; trajetória de equilíbrio média (5.34g) e desvio médio em módulo (5.34h). Realizações (1 a 4), Média (Mean), Homogêneo (HM). . .	239
5.35	ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: comparativo de todas as trajetórias de equilíbrio obtidas ( $\sim \Delta$ - $Y$ , $\Delta$ : fração e $Y$ : realização) (exame 1). . . . .	240
5.36	ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: distribuições ensaiadas (exame 2). $\Delta \approx 0.05$ (5.36a), $\Delta \approx 0.10$ (5.36b), $\Delta \approx 0.20$ (5.36c) e $\Delta \approx 0.40$ (5.36d). ■ Heterogeneidade, ■ Matriz. . . . .	242

- 5.37 ANL-HM-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998)  
Modificado: solução da viga homogênea (caso 2). Deslocamentos (5.37a, 5.37b, 5.37c), deformações (5.37d, 5.37e, 5.37f), tensões (5.37g, 5.37h, 5.37i) e dano na primeira direção principal (5.37j, 5.37k, 5.37l). Coluna 1: passo 60; coluna 2: passo 150; coluna 3: passo 225. . . . . 243
- 5.38 ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998)  
Modificado: impacto da variação da fração de heterogeneidade;  $\Delta \approx 0.05$  (caso 2). Deslocamentos (5.38a, 5.38b, 5.38c), deformações (5.38d, 5.38e, 5.38f), tensões (5.38g, 5.38h, 5.38i), dano na primeira direção principal (5.38j, 5.38k, 5.38l) e deformada (5.38m, 5.38n, 5.38o, 300:1). Coluna 1: passo 60; coluna 2: passo 150; coluna 3: passo 225. . . . . 244
- 5.39 ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998)  
Modificado: impacto da variação da fração de heterogeneidade;  $\Delta \approx 0.10$  (caso 2). Deslocamentos (5.39a, 5.39b, 5.39c), deformações (5.39d, 5.39e, 5.39f), tensões (5.39g, 5.39h, 5.39i), dano na primeira direção principal (5.39j, 5.39k, 5.39l) e deformada (5.39m, 5.39n, 5.39o, 300:1). Coluna 1: passo 60; coluna 2: passo 150; coluna 3: passo 225. . . . . 245
- 5.40 ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998)  
Modificado: impacto da variação da fração de heterogeneidade;  $\Delta \approx 0.20$  (caso 2). Deslocamentos (5.40a, 5.40b, 5.40c), deformações (5.40d, 5.40e, 5.40f), tensões (5.40g, 5.40h, 5.40i), dano na primeira direção principal (5.40j, 5.40k, 5.40l) e deformada (5.40m, 5.40n, 5.40o, 300:1). Coluna 1: passo 60; coluna 2: passo 150; coluna 3: passo 225. . . . . 246
- 5.41 ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998)  
Modificado: impacto da variação da fração de heterogeneidade;  $\Delta \approx 0.40$  (caso 2). Deslocamentos (5.41a, 5.41b, 5.41c), deformações (5.41d, 5.41e, 5.41f), tensões (5.41g, 5.41h, 5.41i), dano na primeira direção principal (5.41j, 5.41k, 5.41l) e deformada (5.41m, 5.41n, 5.41o, 300:1). Coluna 1: passo 60; coluna 2: passo 150; coluna 3: passo 225. . . . . 247
- 5.42 ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998)  
Modificado: propagação da banda de fissuração (caso 2). Dano (descontínuo) na primeira direção principal de cada proporção de heterogeneidade (linhas) nos passos 60, 150 e 225 (colunas). . . . . 250

- 5.43 ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998)  
Modificado: tensão equivalente de Von Mises ( $\sigma_{VM}$ ) para cada proporção de heterogeneidade (linhas) nos passos 60, 150 e 300 (colunas) (caso 2). . . . . 251
- 5.44 ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998)  
Modificado: comportamento estrutural médio para cada fração de heterogeneidade (caso 2). Trajetórias médias (5.44a), desvios médios em módulo (5.44b), distribuição do desvio (5.44c), trajetória de equilíbrio híbrida (5.44d). 252
- 5.45 ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998)  
Modificado: propagação da banda de fissuração ao longo da evolução do carregamento e tensões de von Mises ao final da análise (caso 3). Colunas 1 a 3: passos 60, 150 e 225; coluna 4: tensão de von Mises; linhas: variante homogênea e versões heterogêneas. . . . . 255
- 5.46 ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998)  
Modificado: avaliação do impacto da malha em uma análise com heterogeneidade; comparativo entre malhas 5.4c e 5.4d (caso 3). Colunas 1 e 2: dano; colunas 3 e 4: tensões; linhas: variante homogênea e versões heterogêneas. . . . . 257
- 5.47 ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998)  
Modificado: impacto do refinamento de malha em simulações com heterogeneidade (caso 3). Inclusões (5.47a a 5.47d), trajetórias via malha refinada (5.47e) e comparativo entre malha refinada e malha grosseira para mesmas composições internas. . . . . 258
- 5.48 Retas de regressão  $|d_y^{96} - d_y^{24}| = a \times k + b$  (ou  $y = ax + b$ ) para ajuste dos deslocamentos das trajetórias. . . . . 261
- 5.49 ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998)  
Modificado: avaliação do impacto do refinamento e proposta de correção exógena, *a posteriori*, de trajetórias de equilíbrio.  $\Delta \approx 0.05$  (5.49a) a  $\Delta \approx 0.40$  (5.49d). *24el* e *96el*: trajetórias dos modelos com 24 e 96 elementos; *96el – FC*: correção no fator de carga através da razão de pico ( $\Lambda$ ); *96el – FC&DY*: correção no fator de carga (via  $\Lambda$ ) e nos deslocamentos (via regressão empírica). . . . . 262
- 5.50 ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: perfil das iterações para realizações distintas (exame 4). Colunas: realizações; linhas:  $\Delta$ ; linha tracejada: média. . . . . 263

5.51	ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: perfil das iterações médias para casos distintos de $\Delta$ (caso 4). Iterações da variante homogênea (5.44a), iterações médias de cada uma das realizações HT (5.51b). . . . .	265
5.52	ANL-HM-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: estratégia não linear em duas escalas com meio homogêneo (caso 1). Trajetórias de equilíbrio de soluções de referência em escala única (REF-GR e REF-RFN) e do modelo global local (MEFG-GL-NL) (5.44a), desvios entre o MEFG-GL-NL e as soluções de referência (5.52b). . . . .	273
5.53	ANL-HM-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: perfis das iterações para variantes de referência grosseira e refinada (REF-GR e REF-RFN, respectivamente) e global-local (MEFG- GL-NL) (exame 1). . . . .	274
5.54	ANL-HM-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: comparação entre MEFG-GL-NL e solução de referência com mesmo grau de refinamento global (caso 1). Deformações (5.54a–5.54c; 5.54d–5.54f) e dano (5.54g–5.54i–5.54j–5.54l) nos passo 90, 142 e 170 (co- lunas, da esquerda para direita). . . . .	275
5.55	AL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Mo- dificado: avaliação do <i>upscaling</i> cinemático (caso 2). Domínios locais $\Omega^L$ ( $\Delta \approx 0.10\Omega^L$ , 5.55a; $\Delta \approx 0.20\Omega^L$ , 5.55b; $\Delta \approx 0.40\Omega^L$ , 5.55c); trajetórias de equilíbrio isoladas (5.55d); comparativo com fases primárias distintas (5.55e); comparativo HT×HM (5.55f). . . . .	277
5.56	ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Mo- dificado: avaliação do <i>upscaling</i> cinemático-material (caso 3). Trajetórias de equilíbrio do modelo global-local para diferentes $\Delta$ s. (5.56a), desvios entre o MEFG-GL-NL e as soluções de referência (5.56b). . . . .	279
5.57	ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Mo- dificado: avaliação do <i>upscaling</i> cinemático-material (caso 3). Trajetórias de equilíbrio global-local e versões homogêneas (GL-HT×HM, 5.57a); va- riantes HT de duas escalas e uma escala com malha grosseira (GL-2E×1E- GR, 5.57b); variantes HT de duas escalas e uma escala com malha refi- nada (GL-2E×1E-RFN, 5.57c); e comparação entre <i>upscaling</i> cinemático e cinemático-material (UP-C×UP-C-M, 5.57d). . . . .	280

5.58 ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: avaliação do <i>upscaling</i> cinemático-constitutivo (caso 4). Trajetórias de equilíbrio para diferentes $\Delta$ e $s = 30$ (5.58a); comparativo entre os mecanismos de comunicação ascendente (5.58a). . . . .	282
5.59 ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: comparação entre os mecanismos de <i>upscaling</i> no passo 150; $\Delta \approx 0.20$ . Deformações (5.59a-5.59c) e dano (5.59d-5.59f). Colunas: <i>upscaling</i> (UP-C, UP-C-M, UP-C-C, da esq. p/ dir.) . . . . .	283
5.60 ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: evoluções do estado de deformação e dano nos passos 90, 120, 150 e 230; $\Delta \approx 0.40$ ; UP-C. Deformações (5.60a-5.60d) e dano (5.60e-5.60h). Colunas: passos. . . . .	285
5.61 ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: comparação entre os domínios global e local no passo 150; $\Delta \approx 0.40$ ; UP-C. Deformações (5.61a e 5.61b) e dano (5.61c e 5.61d). Colunas: modelos global e local, da esq. p/ dir. . . . .	286
5.62 ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: evoluções do estado de deformação e dano nos passos 90, 150, 170 e 230; $\Delta \approx 0.40$ ; UP-C-C. Deformações (5.62a-5.62d) e dano (5.62e-5.62h). Colunas: passos. . . . .	287
5.63 ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: comparação entre os domínios global e local no passo 150; $\Delta \approx 0.40$ ; UP-C-C. Deformações (5.63a e 5.63b) e dano (5.63c e 5.63d). Colunas: modelos global e local, da esq. p/ dir. . . . .	288
5.64 Informação adicional do primeiro <i>template</i> global (variável 1: nós enriquecidos). . . . .	295
5.65 Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – Petersson (1989): trajetórias de equilíbrio (variável 1 (a)). . . . .	296
5.66 Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – Petersson (1989): desvios de cada modelo para os limites inferior e superior da faixa experimental (caso 1). $\Lambda^{INF}$ (5.66a, 5.66c); $\Lambda^{SUP}$ (5.66b, 5.66d); marcação do pico (linha vertical); $\Lambda = 0$ (linha horizontal). . . . .	297
5.67 Informação adicional do segundo <i>template</i> global (variável 1: nós enriquecidos). . . . .	298

5.68	Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – <a href="#">Petersson (1989)</a> : trajetórias de equilíbrio (variável 1 (b)). . . . .	298
5.69	Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – <a href="#">Petersson (1989)</a> : desvios de cada modelo para os limites inferior e superior da faixa experimental (global 2). $\Lambda^{INF}$ (5.69a, 5.69c); $\Lambda^{SUP}$ (5.69b, 5.69d); marcação do pico (linha vertical); $\Lambda = 0$ (linha horizontal). . . . .	299
5.70	Evolução do dano; momento em que a variável de dano transpassa a franja de enriquecimento da classe 1.1 (b) ( <a href="#">Monteiro et al., 2020</a> ; <a href="#">Novelli, 2019</a> ). . . . .	300
5.71	Estudo de caso – Tamanhos de problemas locais (variável 2). . . . .	301
5.72	Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – <a href="#">Petersson (1989)</a> : trajetórias de equilíbrio (variável 2). . . . .	302
5.73	Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – <a href="#">Petersson (1989)</a> : trajetórias de equilíbrio (variável 3). . . . .	302
5.74	Informação adicional para os testes da variável 4 (refinamento local). . . . .	303
5.75	Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – <a href="#">Petersson (1989)</a> : trajetórias de equilíbrio (variável 4). . . . .	304
5.76	Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – <a href="#">Petersson (1989)</a> : desvios de cada modelo para os limites inferior e superior da faixa experimental. $\Lambda^{INF}$ (5.76a, 5.76c); $\Lambda^{SUP}$ (5.76b, 5.76d); marcação do pico (linha vertical); $\Lambda = 0$ (linha horizontal). . . . .	305
5.77	Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – <a href="#">Petersson (1989)</a> : trajetórias de equilíbrio (variável 5). . . . .	307
5.78	Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – <a href="#">Petersson (1989)</a> : padrão dos desvios entre o modelo GL e os limites inferior e superior da faixa experimental (caso 5). $\Lambda^{INF}$ (5.78a); $\Lambda^{SUP}$ (5.78b). . . . .	308
5.79	Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – <a href="#">Petersson (1989)</a> : trajetórias de equilíbrio de modelos com $\Delta \approx 40$ e propriedades elásticas locais distintas (variável 5). . . . .	308
5.80	Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – <a href="#">Petersson (1989)</a> : resultado da análise estrutural no pico (passo 74); $\Delta \approx 0.20$ ; UP-C-C. Flecha (5.80a), deformação equivalente (5.80b) e dano (5.80c). . . . .	309
5.81	Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – <a href="#">Petersson (1989)</a> : resultado da análise estrutural no pico (passo 74); $\Delta \approx 0.20$ ; UP-C-C. Deformações (5.81a, 5.81c e 5.81e); tensões (5.81b, 5.81d e 5.81f). . . . .	310

5.82	Estudo de Caso – Winkler et al. (2004) – Painel em L: comparativo trajetórias de equilíbrio de um modelo GL homogêneo (GL-HM) e um modelo heterogêneo consolidado (GL-HT-UPCC).	313
5.83	Estudo de caso – Painel em L – Winkler et al. (2004): evolução do dano (passos 50, 100 e 150). GL-HM (5.83a, 5.83b) e 5.83c) e GL-HT-UPCC $\Delta = 0.40$ (5.83d, 5.83e) e 5.83f).	313
B.1	Transferência de condições de contorno de Dirichlet no domínio $\Gamma^L \setminus \Gamma^L \cap \Gamma^G$ (Alves, 2012).	365
C.1	Exemplo de interfaces, funções e módulos (Pugh, 2006).	367
C.2	Cartão IRI (Pugh, 2006).	368
C.3	Cartão IRI do exemplo (Pugh, 2006).	369
C.4	Padrão <i>Strategy</i> (Gamma et al., 1994).	370
C.5	Exemplo de uso do padrão <i>Strategy</i> (Gamma et al., 1994).	371
C.6	Comunicação ponto-a-ponto entre dois objetos (Kuchana, 2004).	373
C.7	Comunicação ponto-a-ponto entre múltiplos objetos (Kuchana, 2004).	374
C.8	Comunicação no padrão <i>Mediator</i> (Kuchana, 2004).	374
C.9	Padrão <i>Mediator</i> (Gamma et al., 1994).	374
C.10	Exemplo de uso do padrão <i>Mediator</i> (Gamma et al., 1994).	376
C.11	Exemplo de interação entre objetos no padrão <i>Mediator</i> (Gamma et al., 1994).	376
C.12	Exemplo de um mediador (Gamma et al., 1994).	377

# Lista de Tabelas

3.1	Matriz para classificação de métodos multiescala. Adaptado de De Borst et al. (2006).	72
3.2	Matriz para classificação de métodos multiescala. Adaptado de Gravemeier et al. (2007).	74
4.1	Matriz de classificação da metodologia de acordo com De Borst et al. (2006).	87
4.2	Matriz de classificação da metodologia de acordo com Gravemeier et al. (2007).	87
4.3	Classificação consolidada da metodologia.	88
4.4	Resumo dos simuladores global-local disponíveis.	125
4.5	Resumo dos tratamentos numéricos para heterogeneidade previstos.	158
4.6	Síntese dos experimentos numéricos.	171
5.1	Influência dos parâmetros de irregularidade ( $\delta r, \delta \theta$ ) na conformação das partículas.	184
5.2	Variação $\Delta \approx 0.10$ – medidas de tendência central: deslocamento do ponto de aplicação da carga $\mathbf{P}$ ( $d_y^{\mathbf{P}}$ ) e fator de carga ( $\lambda$ ).	234
5.3	Variação $\Delta \approx 0.20$ – medidas de tendência central: deslocamento do ponto de aplicação da carga $\mathbf{P}$ ( $d_y^{\mathbf{P}}$ ) e fator de carga ( $\lambda$ ).	237
5.4	Variação $\Delta \approx 0.40$ – medidas de tendência central: deslocamento do ponto de aplicação da carga $\mathbf{P}$ ( $d_y^{\mathbf{P}}$ ) e fator de carga ( $\lambda$ ).	238
5.5	Impacto da variação de $\Delta$ no comportamento estrutural de vigas em flexão: tensões de von Mises máximas absolutas em cada variante de análise.	249
5.6	Impacto da variação de $\Delta$ e do refinamento no comportamento estrutural de vigas em flexão: tensões de von Mises máximas absolutas em cada variante de análise.	256
5.7	Fatores de carga máximos ( $\lambda$ ) para cada refinamento de malha (24 e 96) e grupo $\Delta$ .	259

5.8	Medidas de tendência central das iterações de cada fração de inclusão ( $\Delta \approx 0.10$ , $\Delta \approx 0.20$ , $\Delta \approx 0.40$ ). . . . .	263
5.9	ANL-HM-2E – Resumo do processo iterativo. Graus de liberdade globais, número de iterações, máximos e médias. . . . .	273
5.10	Modelo de matriz de avaliação. . . . .	314
5.11	Matriz de avaliação da estratégia. . . . .	314
6.1	Modelo de matriz de avaliação (expandida). . . . .	328
6.2	Matriz adicional de avaliação da estratégia. . . . .	328
C.1	Exemplos de interfaces (Pugh, 2006). . . . .	369
C.2	Exemplos de estratégias (Gamma et al., 1994). . . . .	371

# Lista de Algoritmos

2.1	Algoritmo genérico de solução incremental-iterativa de sistema de equações não lineares. Adaptado de <a href="#">Bonet e Wood (1997)</a> ; <a href="#">Kim (2015)</a> ; <a href="#">Zienkiewicz e Taylor (2000)</a> . . . . .	43
4.1	Algoritmo MEFG-GL-NL. . . . .	104
4.2	Mapeamento dos pontos de integração. . . . .	128
4.3	Ponto em polígono via Ray Casting. Adaptado de <a href="#">Heckbert (1994)</a> . . . . .	129
4.4	Mapeamento inverso. Adaptado de <a href="#">Elwi e Hruday (1989)</a> . . . . .	129
4.5	Preenchimento de estrutura de divisão planar a partir de uma estrutura de dados típica de um modelo discreto. . . . .	130
4.6	Ponderação de grandeza interna entre dois modelos. . . . .	133
4.7	Operação geral simplificada de configuração de um problema global numa abordagem MEFG-GL/MEFG-GL-NL – <code>setUpGlobalProblem()</code> + <code>setUpEnrichedGlobalProblem()</code> . . . . .	134
4.8	Operação geral simplificada de construção de um problema local numa abordagem MEFG-GL/MEFG-GL-NL – <code>buildLocalProblem()</code> . . . . .	135
4.9	Operação geral simplificada de configuração de um problema local numa abordagem MEFG-GL/MEFG-GL-NL – <code>setUpLocalProblem()</code> . . . . .	136
4.10	Geração de partículas poligonais irregulares. . . . .	144
4.11	<i>Take-and-Place</i> default. . . . .	149
4.12	Procedimento geral para cálculo de áreas de polígonos. . . . .	150
4.13	Procedimento para determinação de sobreposição de partículas. . . . .	150
4.14	Tratamento conforme para a heterogeneidade – <code>ConformMeshTreatTypeSetuper</code> . . . . .	152
4.15	Tratamento não conforme monofásico para a heterogeneidade – <code>NonConformMeshSingleElementPhaseTreatTypeSetuper</code> . . . . .	154
4.16	Tratamento não conforme multifásico para a heterogeneidade – <code>NonConformMeshMultiPhaseElementTreatTypeSetuper</code> . . . . .	155

4.17 Tratamento não conforme multifásico para a heterogeneidade – modelo de degeneração randômica – <code>RandomDegenerationTreatTypeSetuper</code> . . . . .	156
A.1 Algoritmo para solução de sistemas do MEFG ( <a href="#">Santos et al., 2010</a> ). . . . .	363

# Lista de Configurações Experimentais

5.1	Configuração experimental – Geração e alocação de partículas. . . . .	173
5.2	Configuração experimental – AL-HM/HT-1E – Ensaio de tração direta. Fase 1: matriz, fase 2: partículas. <i>*Exame distintos usaram dimensões características distintas dentro do intervalo indicado.</i> . . . . .	192
5.3	Configuração experimental – AL-HM/HT-2E – Problema da Inclusão (Mal e Singh, 1991). Arranjo nuclear do experimento: parâmetros básicos , geometria (5.3b), malha de referência (5.3c) e <i>templates</i> global (5.3d) e local (5.3e, GI÷4). Inclusão  ; problemas Locais  ; variedades de nós globais enriquecidos L1  , L2  , L3  . . . . .	207
5.4	Configuração Experimental – ANL-HM/HT-1E – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado, ensaio de flexão simples em 3 pts. Parâmetros de entrada (mod. fiss. dist. c/ lei bilinear, controle de trajetória, CDC e fração de heterogeneidade; 5.4a); geometria (5.4b); malhas (5.4c, 5.4d). . . . .	227
5.5	Configuração Experimental 1 – ANL-HM/HT-2E – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado, ensaio de flexão simples em 3 pts. Parâmetros de entrada (mod. fiss. dist. c/ lei bilinear, controle de trajetória (desloc. generalizado), CDC e fração de heterogeneidade ( $\Delta$ com base no volume do domínio local); 5.4a); geometria (5.4b); malhas de referência (5.4c, 5.4d); malhas global e local (5.5e). . . . .	267
5.6	Configuração Experimental 2 – ANL-HM/HT-2E – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado, ensaio de flexão simples em 3 pts. Parâmetros de entrada (dano orto. c/ lei linear, controle de trajetória (desloc. generalizado), CDC e fração de heterogeneidade ( $\Delta$ com base no volume do domínio local)). Malhas equivalentes às do <i>set-up</i> 5.5. . . . .	268

5.7	Configuração Experimental – Estudo de Caso – <a href="#">Petersson (1989)</a> , ensaio de flexão em 3 pts. Parâmetros de entrada (mod. fiss. dist. c/ leis de Carreira e Chu, controle de trajetória (desloc. generalizado), CDC e fração de heterogeneidade ( $\Delta$ com base no volume do domínio local); 5.7a); geometria (5.7b); malhas de referência (5.7c, 5.7d, 5.7e). . . . .	294
5.8	Configuração Experimental 2 – Estudo de Caso – <a href="#">Petersson (1989)</a> , ensaio de flexão simples em 3 pts. Parâmetros de entrada (dano iso. c/ lei exp., controle de trajetória (desloc. generalizado), CDC e fração de heterogeneidade ( $\Delta$ com base no volume do domínio local)). Malhas equivalentes às do <i>set-up</i> 5.7. . . . .	306
5.9	Configuração Experimental – Estudo de Caso – <a href="#">Winkler et al. (2004)</a> , painel em L. Parâmetros de entrada (mod. dano vol. c/ dano exponencial, controle de trajetória (desloc. generalizado), CDC e fração de heterogeneidade ( $\Delta$ com base no volume do domínio local); 5.9a); geometria (5.9b); malhas de referência (5.9c, 5.9d 5.9e). . . . .	311

# Lista de Abreviaturas e Siglas

ANL	Análise Não Linear
ANL-HM(HT)	Análise Não Linear (com Descrição Material) Homogênea(Heterogênea)
ANL-HM(HT)-1E(2E)	Análise Não Linear (com Descrição Material) Homogênea (Heterogênea) em Uma(Duas) Escala(s)
ANL-HT	Análise Não Linear (com Descrição Material) Heterogênea
CDC	Condição(ões) de Contorno
DMC ou DC	Dimensão/Diâmetro (Máxima(o)) Característica(o)
EF	Elemento(s) Finito(s)
EPT/D	Estado Plano de Tensão/Deformação
EVR	Elemento de Volume Representativo
EXP	Experimental
$FE2$ ou $FE^2$	Método dos Elementos Finitos Multinível
GDL	Grau(s) de Liberdade
GL (G, L)	Global-local (ou Global e Local isoladamente)
GLDM	<i>GlobalLocalDataManager</i>
GLSM	<i>GlobalLocalSimulationManager</i>
HEDS	<i>Half Edge Data Structure</i>
HM	Homogêneo(a)
HT	Heterogêneo(a)

INSANE *Interactive Structural ANalysis Environment*

MAX Máximo

MIN Mínimo

MEC Método dos Elementos de Contorno

MEF Método dos Elementos Finitos

MEFG/GFEM Método dos Elementos Finitos Generalizados

MEFG-GL Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local

MEFG-GL-NL Estratégia Não Linear com o Método dos Elementos Finitos Generalizados e Enriquecimento Global-Local

MEFG/XFEM Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendidos

MPU Método da Partição da Unidade

MPa Mega Pascal

MSM Métodos Sem Malha

MS Multiescala

PDM *ParticleDataManager*

PG e PL Problema Global e Problema Local

PI (G/L) Ponto de Integração (Global/Local)

PM Ponto Material

PTV Princípio dos Trabalhos Virtuais

PU Partição da Unidade

PVC Problema de Valor de Contorno

REF(-GR/-RFN) Solução de Referência (Grosseira/Refinada)

RHS *Right-hand side vector*

RL	<i>Random-Lattice</i>
SGFEM	<i>Stable Generalized Finite Element Method</i>
SM	<i>SimulationManager</i>
TOT	Total
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UML	<i>Unified Modeling Language</i>
UP-C	<i>Upscaling</i> Cinemático
UP-C-M	<i>Upscaling</i> Cinemático-Material
UP-C-C	<i>Upscaling</i> Cinemático-Constitutivo
V&V	Verificação e Validação
XML	<i>Extensible Markup Language</i>

# Lista de Símbolos

## Capítulo 2 Referencial Teórico

$\bar{T}_{ijkl}$	Tensor de quarta ordem ou superior
$\bar{t}_{ijk}$	Tensor de terceira ordem
$\bar{t}_{ij}$ ou $\tau_{ij}$	Tensor de segunda ordem
$t_i$	Vetor
$t$	Escalar
$[T]$	Matriz
$\{t\}$	Vetor
$\langle \star \rangle$	Média volumétrica
$\Omega$	Domínio/Volume (geral)
$\varepsilon_{ij}$	Tensor de deformações
$\sigma_{ij}$	Tensor de tensões
$D$	Variável de dano
$\delta A^D$	Área de microfissuras e vazios
$\delta F$	Força externa
$\tilde{\sigma}$	Tensão efetiva
$E_0$	Módulo de elasticidade inicial
$E, G, K$	Módulos de elasticidade, cisalhamento e volume

$\tilde{\varepsilon}$	Deformação equivalente
$\alpha(x)$	Função de ponderação não-local
$V(x)$	Volume de ponderação
$\bar{E}_{ijkl}^T$	Operador (rigidez) tangente
$\bar{E}_{ijkl}^S$	Operador (rigidez) secante
$\star$	Variação instantânea de $\star$
$\bar{m}_{mij}$	Direção de evolução das deformações de degradação
$\bar{n}_{ghl}$	Direção de evolução do carregamento
$\bar{H}_{gm}$	Tensor dos módulos pós-críticos
$\bar{M}_{mijhl}$	Variação do tensor de rigidez relativamente às variáveis de dano
$\bar{\mathcal{M}}_{m\star}$	Direção da taxa de mudança das variáveis de dano
$\bar{F}_g$	Funções de carregamento
$\bar{p}_n$	Conjunto de variáveis internas no domínio das deformações
$\mathcal{D}_\star$	Conjunto de variáveis de dano
$\delta_{ij}$	Delta de Kroenecker
$\kappa$	Variável histórica
$\mathbf{x}$	Vetor de posição ou vetor de incógnitas
$\omega_j$	Nuvem
$x_j$	Pontos nodais
$N_j$	Funções de forma
$B_j$	Derivativos da função de forma
$n$	Número de pontos nodais
$\mathfrak{J}_j$	Conjunto de funções linearmente independentes
$\mathcal{I}_j$	Conjunto de funções de enriquecimento

$L_{ji}$	Funções de aproximação locais
$\phi_{ji}(x)$	Funções de forma do MEF <sub>G</sub>
$\tilde{u}$	Aproximação do MEF <sub>G</sub>
$u_j$	Parâmetro nodal associado ao MEF
$b_{ji}$	Parâmetro nodal associado ao MEF <sub>G</sub>
$\tilde{u}^L$	Solução local
$\mathbf{f}(\mathbf{u}), \mathbf{g}(\mathbf{u})$	Funções vetoriais qualquer
$\mathcal{O}(u)$	Ordem de $u$
$\mathcal{U}, \mathcal{W}, \dots$	Espaço vetorial
$D\mathbf{g}(\mathbf{x})[\mathbf{u}]$	Derivada de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ na direção de $\mathbf{u}$
$\Psi(\mathbf{x})$	Sistema de equações
$\Phi$	Vetor de constantes (“forças”)
$\Lambda$	Resíduos
$\lambda$	Fator incremental
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez incremental (jacobiano)
$\mathbf{K}^S$	Matriz de rigidez incremental secante
$\mathbf{c}$	Vetor de constantes de restrições
$\chi$	Constante
$h$	Parâmetro incremental
$\epsilon$	Tolerância

## Capítulo 4

### Materiais e Métodos

$\bar{\Omega}$	Domínio (geral)
$\Gamma$	Fronteira (geral)
$\Omega^G$	Domínio (global)
$\Gamma^G$	Fronteira (global)
$\Omega^L$	Domínio (local)
$\Gamma^L$	Fronteira (local)
$\Gamma^{G,U}$	Fronteira global onde estão aplicadas condições de contorno de Dirichlet
$\Gamma^{G,T}$	Fronteira global onde estão aplicadas condições de contorno de Neumann
$\Gamma^L \setminus \Gamma^L \cap \Gamma^G$	Fronteira global sobre interseção
$\sigma_{ij}$	Tensor de tensões
$\bar{E}_{ijkl}$	Tensor constitutivo
$\hat{u}_i$	Deslocamento prescrito
$\hat{t}_i$	Carregamento prescrito
$n_i$	Vetor unitário normal
$\beta_i$	Forças de corpo
$u_i^G$	Solução do problema global
$v_i$	Função teste
$\mathcal{H}$	Espaço de Hilbert
$\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$	Forma bilinear
$\mathcal{F}(\cdot)$	Forma linear
$\mathcal{U}, \mathcal{V}$	Espaços de funções/funções teste

$\xi_i$	Coordenadas naturais
$J$	Jacobiano
$\mu, \nu$	Valores arbitrários de interpolação
$\bigcup_e$	<i>Assembling</i>
$\varrho$	Parâmetro de penalidade
$u_i^L$	Solução encontrada no problema local
$[K]_{n-1}^k$	Matriz de rigidez incremental na iteração $n - 1$ do passo $k$
$\{\delta u\}_n^k$	Vetor de deslocamentos incrementais da iteração $n$ do passo $k$
$\delta \lambda_n^k$	Incremento do fator de cargas na iteração $n$ do passo $k$
$\{p\}$	Vetor de cargas de referência
$\{q\}_{n-1}^k$	Vetor de forças residuais da iteração $n - 1$ do passo $k$
$\Delta$	Fração de partículas
$\chi$	Fator de distribuição de partículas
$\phi$	Dimensão característica da partícula
$\zeta(\phi, \dots)$	Distribuição granulométrica
$\mathbf{x}$	Ponto/vetor de coordenada
$r, \delta r$	Raio/variação do raio da partícula
$\theta, \delta \theta$	Ângulo/variação do ângulo do vértice da partícula
$M^I = \{L^J, \dots\}$	Instância computacional $I$ com listas $L$ de objetos $J$ (p.ex., $M$ representa um modelo e $L$ , listas de nós, elementos, etc.)
$e_1, e_2, \dots$	Elementos finitos de uma lista
$n_1, n_2, \dots$	Nós de um elemento
$a_i, sm_j, v_k, f_l$	Aresta, semi-aresta, vértice, face

## Capítulo 5

### Resultados

$\Delta$	Fração de partículas
$\chi$	Fator de distribuição de partículas
$\phi$	Dimensão característica da partícula
$t$	Tempo
$\zeta(\phi, \dots)$	Distribuição granulométrica
$\rho/N$	Rendimento de partículas (empacotamento/número de part.)
$d_*$	Componente de deslocamentos na direção *
$\sigma_*$	Componente de tensões na direção *
$\varepsilon_*$	Componente de deformações na direção *
$D_*$	Variável de dano na direção principal *
$E, E_0$	Módulo de elasticidade (inicial)
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\theta$	Ângulo/coordenada esférica
$E_2$	Módulo de elasticidade em <i>softening</i>
$f_{c,t}$	Resistência à compressão/tração
$\varepsilon_{c,t}$	Limites de deformação à compressão/tração
$g_f$	Energia de fratura
$\lambda$	Fator de carga
$k_{0,f}$	Limites de deformação de lei inelástica linear
$h^*$	Tamanho do elemento finito * (global ou local, em geral)
$h, w$	Altura e largura
$\alpha, \beta, \kappa$	Parâmetros de lei inelástica exponencial

# Lista de Publicações

MONTEIRO, H. A. S.; NOVELLI, L.; FONSECA, G. M.; PITANGUEIRA, R. L. S.; BARROS, F. B. A new approach for physically nonlinear analysis of continuum damage mechanics problems using the generalized/extended finite element method with global-local enrichment. **Engineering Analysis with Boundary Elements**. v. 113. p. 277–295. Abril 2020.

NOVELLI, L.; OLIVEIRA, T. H.; MONTEIRO, H. A. S.; FONSECA, G. M.; PITANGUEIRA, R. L. S.; BARROS, FELÍCIO BRUZZI. Stable Generalized/eXtended Finite Element Method with global-local enrichment for material nonlinear analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. Volume 372, Dezembro 2020.

FONSECA, G. M.; OLIVEIRA, T. H.; MONTEIRO, H. A. S.; NOVELLI, L.; PITANGUEIRA, R. L. S.; BARROS, FELÍCIO BRUZZI. 2-D Crack Propagation Analysis using Stable Generalized Finite Element Method with Global-Local Enrichments. **Engineering Analysis with Boundary Elements**. Volume 118, Setembro 2020, p. 70-83.

NOVELLI, L.; MONTEIRO, H. A. S.; FONSECA, G. M.; PITANGUEIRA, R. L. S.; BARROS, F. B. Comparison of Generalized/eXtended Finite Element Methods for Quasi-Brittle Media Cracking Problems. In: XLI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2020, Online. **Proceedings of the XLI Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. Online: Associação Brasileira de Métodos Computacionais em Engenharia, 2020.

MONTEIRO, H. A. S.; FONSECA, G. M.; NOVELLI, L.; PITANGUEIRA, R. L. S.; BARROS, F. B. Análisis global-local de medios lineales utilizando el método de elementos finitos generalizados. **Mecánica Computacional**, Santa Fé - Argentina, v. XXXVI, n. 29, p. 1359–1368, 2018.

MONTEIRO, H. A. S.; PITANGUEIRA, R. L. S. An overview of the numerical modeling and computer programming disciplines of an undergraduate civil engineering course and the Insane project experience. **Mecánica Computacional**,

Santa Fé - Argentina, v. XXXVI, n. 22, p. 1039–1048, 2018.

FIORESI, L. A. F.; PITANGUEIRA, R. L. S.; MONTEIRO, H. A. S. Strain localization analysis in material nonlinear models. **Mecânica Computacional**, Santa Fé - Argentina, v. XXXVI, n. 32, p. 1527–1536, 2018.

MONTEIRO, H. A. S.; BOTELHO, G., PITANGUEIRA, R. L. S.; PEIXOTO, R., BARROS, F. B. Steady state heat conduction modelling by the generalized finite element method. In: ENCIT – BRAZILIAN CONGRESS OF THERMAL ANALYSIS AND ENGINEERING, 17th, 2018, Águas de Lindóia-SP. **Proceedings of the 17th Brazilian Congress of Thermal Analysis and Engineering**. Águas de Lindóia: Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas, 2018. p. 1–12.

BOTELHO, G. G.; MONTEIRO, H. A. S.; PEIXOTO, R. G.; PITANGUEIRA, R. L. S. Object oriented framework for multiphysics analysis. In: CILAMCE – IBERO-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, XXXIX, 2018, Paris/ Compiègne-França. **Proceedings of the XXXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. Paris/Compiègne: Adnan Ibrahimbegovic and Paulo de Mattos Pimenta (Eds.), 2018. p. 233–236.

NOVELLI, L.; MONTEIRO, H. A. S.; FONSECA, G. M.; PITANGUEIRA, R. L. S.; BARROS, F. B. Processo incremental-iterativo para análise fisicamente não linear de estruturas via método dos elementos finitos generalizados. In: SIMMEC – SIMPÓSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, XIII, 2018, Vitória-ES. **Anais do XIII Simpósio de Mecânica Computacional**. Vitória: Associação Brasileira de Métodos Computacionais em Engenharia, 2018. p. 1–15.

FONSECA, G. M.; MONTEIRO, H. A. S.; NOVELLI, L.; BARROS, F. B.; PITANGUEIRA, R. L. S. Método dos elementos finitos generalizados aplicado a problemas da mecânica da fratura linear elástica. In: SIMMEC – SIMPÓSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, XIII, 2018, Vitória-ES. **Anais do XIII Simpósio de Mecânica Computacional**. Vitória: Associação Brasileira de Métodos Computacionais em Engenharia, 2018. p. 1–15.

ANDRADE, M. P.; MONTEIRO, H. A. S.; PITANGUEIRA, R. L. S. Estratégias computacionais para introdução de heterogeneidade material em modelos do método dos elementos finitos. In: SIMMEC – SIMPÓSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, XIII, 2018, Vitória-ES. **Anais do XIII Simpósio de Mecânica Computacional**. Vitória: Associação Brasileira de Métodos Computacionais em Engenharia, 2018. p. 1–14.

MONTEIRO, H. A. S.; PITANGUEIRA, R. L. S.; BARROS, F. B. Multiscale strategy for the analysis of softening media using the generalized finite element

method. In: CILAMCE – IBERO-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, XXXVIII, 2017, Florianópolis-SC. **Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Florianópolis: Associação Brasileira de Métodos Computacionais em Engenharia, 2017. p. 1–20.

MONTEIRO, H. A. S.; PITANGUEIRA, R. L. S.; BARROS, F. B. Proposta Teórica para Modelagem em Duas Escalas de Meios Parcialmente Frágeis Heterogêneos Utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados. In: SIMMEC – SIMPÓSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, XII, 2016, Diamantina-MG. **Anais do XII Simpósio de Mecânica Computacional**. Diamantina: Associação Brasileira de Métodos Computacionais em Engenharia, 2016. p. 583–590.

# Capítulo 1

## Introdução

“Frequentemente é perguntado a um analista teórico ou computacional: ‘Os resultados teóricos e computacionais obtidos foram comparados com experimentos?’. Já a mecânica computacional e teórica que se dedica à ligação microescala-macroescala põe a questão reversa: ‘Os resultados experimentais foram comparados à análise computacional e à teoria?’. Sob o risco de fechar com uma nota controversa, não é equivocado pensar isso, em muitas situações, métodos computacionais são talvez mais preditivos que experimentos. Além disso, o contínuo crescimento do poder computacional irá forçar cada vez mais as pesquisas em direção a confiabilidade das simulações numéricas, empregando-se modelos micro-macro não fenomenológicos. Para a pesquisa moderna, as análises computacional, teórica e experimental devem ser simbióticas e interativas.” (Zohdi e Wriggers, 2010).<sup>1</sup>

Assim T. I. Zohdi e P. Wriggers fecham sua obra *An Introduction to Computational Micromechanics*. Contrariamente a eles, contudo, introduz-se este trabalho com o respectivo comentário, sem dúvida polêmico, mas muito relevante e reproduzido aqui em tradução livre.

Inegavelmente, presencia-se ano após ano o avanço progressivo da computação, seja no âmbito do poderio de processamento e armazenamento, seja no avanço das ferramentas de modelagem ou no aprimoramento da capacidade de troca de informações e conhecimento. A ciência hoje está fortemente vinculada à informática e, em razão de sua natureza, a

---

<sup>1</sup>“It is frequently asked of a theoretical or computational analyst: ‘Have the theoretical and computational results been compared to experiments?’ Computational and theoretical micro-macro mechanics open the reverse question: ‘Have the experimental results been compared to computations and theory?’ At the risk of closing on a controversial note, it is not unfair to think that, in many situations, computational methods are perhaps more predictive than experiments. Furthermore, the continual rise in computational power will only push research more towards reliance on numerical simulations, employing nonphenomenological micro-macro models. For successful modern research, computations, theory and experiments should be symbiotic and interactive.”

Engenharia (ou as Ciências Exatas, de modo mais amplo) compartilha(m) ainda mais fortemente essa ligação.

Nesse contexto, a simulação e a análise numéricas de fenômenos ou processos físicos ganham destaque. Durante longo período, a academia se dedicou exclusivamente à elaboração de novas teorias, formulações e soluções analíticas para diversos problemas, que embora sejam as bases de muito do que se pratica hoje por grande parte dos pesquisadores, possuíam à época limitações de aplicabilidade evidentes. Com o advento da computação, o universo de possibilidades de estudo e desenvolvimento acadêmico da área se expandem consideravelmente, sendo possível a elaboração de modelos maiores, com menos simplificações e fisicamente mais compatíveis, além de capacitar os envolvidos a testar e validar muitas das teorias já postuladas e conhecer os limites de cada uma delas.

A modelagem multiescala, por sua vez, é um dos conteúdos pertinentes a essa observação. Como será visto no Capítulo 3, o estudo de materiais em diferentes escalas com a preocupação de se investigar sua resposta global através de sua constituição interna se estende desde o século XIX. Atualmente, em virtude de maior poder computacional, é muito fértil o campo da análise numérica das múltiplas escalas de um meio, sendo possível a proposição e a avaliação de diferentes modelos micromecânicos (muito ou pouco complexos) em paralelo com a obtenção de resultados com representatividades de distintas qualidades.

Assim, convalidando [Zohdi e Wriggers \(2010\)](#), pode-se imaginar que o futuro estágio científico convirja para uma proeminência ainda maior de experimentos numéricos, sobretudo em domínios que impõem maiores dificuldades e imprecisões aos ensaios laboratoriais. No que diz respeito a materiais parcialmente frágeis heterogêneos, como o concreto e os geomateriais, o estudo experimental-laboratorial costuma apresentar grandes limitações, pois além de muitas fontes de incertezas circunvirem os experimentos (pensando no concreto, por exemplo, enumeram-se: variação na qualidade das matérias-primas, imprecisão na preparação de determinado traço, moldagem de corpos-de-prova, aferição dos equipamentos utilizados no procedimento, experiência do responsável pelo experimento etc.), existem complicações operacionais nos ensaios (por exemplo, em razão do elevado peso específico do material, há uma limitação clara nos tamanhos de corpos-de-prova possíveis de serem ensaiados). Desse modo, a simulação computacional emerge como uma ferramenta muito poderosa para investigação desse tipo de meio.

Aos meios formados por constituintes dissimilares distinguíveis em determinada escala de comprimento, pequena por definição, dá-se o nome de heterogêneos, não homogêneos, micro-estruturados ou complexos. Exemplos comuns são: compósitos, concreto, policristais, polímeros, sólidos celulares, tecidos biológicos, madeiras, solos, argilas, espumas, entre outros. Em razão da natureza de seu fraturamento, alguns desses meios podem ser classificados como parcialmente frágeis (Bohm, 2016; Fuina et al., 2010).

Essa característica é descrita por um moderado encruamento (*strain hardening*) anteriormente à obtenção de uma tensão resistente última, sofrendo amolecimento progressivo (*tension softening*) após o referido pico. Ou seja, antes de uma tensão limite, o acúmulo de deformações é seguido por acréscimo de tensões. Contrariamente, alcançado-se a tensão máxima, nota-se redução das tensões absorvidas com o aumento das deformações. Este comportamento, marcadamente não linear, tem relação direta com aspectos micromecânicos do material, sendo a heterogeneidade um dos fatores preponderantes na manifestação dessa característica (Karihaloo, 2010).

De um modo geral, no estudo do comportamento de materiais e estruturas, foca-se principalmente na utilização de modelos de uma escala, comumente em nível macroscópico. Nesses modelos, utilizam-se equações constitutivas, geralmente de escopo fenomenológico, que refletem o comportamento de escalas mais refinadas subjacentes. Como alternativa ao uso de relações constitutivas em escala única (macroscópica), a modelagem multiescala pode ser adotada para captura dos fenômenos físicos relevantes de diferentes níveis de observação. Essa abordagem não elimina o uso de equações constitutivas fenomenológicas em escalas inferiores, exceto quando esta é de nível atômico. Permite, com efeito, que sejam reduzidas algumas das incertezas incorporadas em muitos dos modelos constitutivos de uma escala (Zienkiewicz et al., 2006).

Na modelagem de materiais em Mecânica Computacional, a utilização de métodos numéricos é notoriamente uma das principais ferramentas, sendo o Método dos Elementos Finitos (MEF) o mais difundido. Mais recentemente, o Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendidos (referido nesse trabalho, por simplicidade, como Método dos Elementos Finitos Generalizados e abreviado como MEFG unicamente) vem sendo desenvolvido em diversos trabalhos científicos para estudo de variados problemas da Mecânica dos Sólidos, com destaque para aqueles de fratura. Nesse método, enriquece-se o espaço de aproximação original de um elemento finito através de funções especiais, de modo a

captar fenômenos específicos.

Atualmente, usa-se o MEFG em problemas de múltiplas escalas de análise, em que deseja-se investigar o comportamento de domínios locais (refinados) que apresentem singularidades ou alguma outra peculiaridade, bem como estudar os domínios globais (grosseiros) associados. Nesse contexto, surge o Método dos Elementos Generalizados com enriquecimento Global-Local (MEFG-GL), que utiliza funções de enriquecimento oriundas de uma composição híbrida da estratégia tradicional de análise global-local com o MEFG.

O desenvolvimento de estudos sobre materiais com estrutura hierárquica permite a ampliação do conhecimento de meios com propriedades especiais específicas para uso em diversas aplicações da engenharia, em virtude do entendimento do comportamento individual dos seus componentes, da interação entre eles e da sua manifestação global.

Nesse sentido, o presente trabalho adota o MEFG-GL para modelagem de materiais parcialmente frágeis com introdução da heterogeneidade, e portanto, seguindo um enfoque de múltiplas escalas, marcadamente de duas: uma macroscópica ou estrutural e outra mesoscópica (é comum, contudo, o uso do termo microscópico para representação do nível imediatamente inferior ao macro). Para isso, foi utilizado o sistema computacional *INSANE – INteractive Structural ANalysis Environment* ([INSANE Lab, n.a.](#)), um *software* livre desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais e escrito em linguagem Java. Este ambiente é composto por aplicações gráficas interativas de pré- e pós-processamento que atuam em conjunto com um núcleo numérico que dispõe de vários recursos para solução de diversos problemas estruturais.

Preliminarmente, de modo a antecipar o que será exposto adiante, sobretudo na seção de resultados (capítulo 5), aponta-se que as estratégias desenvolvidas no trabalho aqui apresentado foram concebidas originalmente e testadas no âmbito de (especialmente):

- Problemas bidimensionais;
- Estado Plano (de tensão, prioritariamente);
- Regimes estático e de não linearidade material;
- Estruturas de concreto (representativas de meios com fraturamento semi-frágil);
- Modelos estruturais experimentais típicos;

- Modelagem explícita da heterogeneidade do material;
- Uso exclusivo de um único nível de enriquecimento da PU (aquele da estratégia GL proposta);

Embora haja um natural fechamento de escopo, acredita-se que há generalidade suficiente nos pressupostos apresentados para aplicação dos mecanismos indicados em outros cenários.

## 1.1 A Tese

Conforme apontado anteriormente, neste trabalho propõe-se a tarefa de exploração de um microcosmo da análise numérica aliada à engenharia, que embora relevante, apresenta-se ainda um tanto restrito. À parte a vastidão de teorias, obras e aplicações em variados campos do conhecimento, seja da matemática aplicada em si, seja da engenharia em específico (ver Capítulo 3), a modelagem multiescala aliada ao método numérico particular aqui empregado (MEFG, Capítulo 2) e aplicada à mecânica dos sólidos com degradação elástica ainda foi pouco explorada e, até a presente época e ao conhecimento do autor e seu grupo de pesquisa, inexistente ou se restringe à pouquíssimas fontes, sobretudo do próprio grupo. Assim, desenvolveu-se no âmbito desta investigação uma nova estratégia não linear, abreviada aqui por MEFG-GL-NL, que leva em consideração dois modelos (ou escalas) diferentes e busca generalizar ao máximo a definição da escala refinada, ao considerar total independência (inclusive de integração numérica) de cada modelo. A técnica construída na implantação do projeto atrelado a essa tese é inédita e distinta de estratégias clássicas (Duarte e Babuška, 2005; Duarte e Kim, 2008; Kim et al., 2009), como será apontado no Capítulo 4. De tal sorte que da jornada aqui retratada espera-se modestamente a indicação de caminhos potencialmente favoráveis dentro do domínio estudado e, na mesma medida (ou talvez até mais), o assomo de pretensas rotas adversas ou mesmo desvantajosas. Assim, pretendeu-se ocupar diligentemente espaços de relevância temática local/institucional, nacional e internacional.

Nessa breve seção, apresentam-se de um modo um pouco mais protocolar o problema de pesquisa (ou os problemas, de maneira mais precisa, porém menos formal), as hipóteses que levaram ao desenvolvimento do trabalho e alguns de seus objetivos. Além disso, são feitas rápidas descrições da organização do texto e das notações matemáticas

prioritariamente empregadas, de modo a orientar o leitor desta obra.

### 1.1.1 Problema, Hipóteses e Objetivos

Há na essência deste trabalho dois componentes teóricos principais: um elemento físico, que subjaz todas as análises aqui desenvolvidas, e se relaciona a um comportamento real e possível de sólidos; e um elemento numérico-computacional, que se relaciona à simulação da física estudada através de uma base matemática, e que em certa medida é o foco principal da pesquisa. Fundamentalmente, a pesquisa adiante se enquadra num enfoque quantitativo, com alcances descritivo e correlacional (Sampieri et al., 2013). Assim e hierarquicamente, poderia-se pontuar que o problema físico primevo ao qual essa tese tenta responder seria: qual o comportamento estrutural de materiais parcialmente frágeis, como o concreto? Essa pergunta, contudo, é muito ampla e vem sendo respondida (ou ao menos encarada) de diferentes formas ao longo da história da ciência e talvez seja a essência de muito do que se pesquisa no âmbito da engenharia de estruturas, sendo o trabalho de toda uma vida de um grande número de pesquisadores e engenheiros e um campo de investigação ainda vasto e de muitas possibilidades. Aprofundando-se um pouco mais a avaliação, chega-se a indagações mais específicas, de caráter numérico-computacional, ou seja: qual é o comportamento numérico de estruturas de materiais parcialmente frágeis? Qual o desempenho de novas técnicas numéricas na simulação do comportamento estrutural de meios parcialmente frágeis e quais as alternativas? Qual o comportamento de análises fisicamente não lineares através de métodos específicos, como o MEEG? Como tal método funciona com um determinado tipo de enriquecimento sob as contingências do meio físico escolhido? Essas técnicas conseguem amenizar alguns dos problemas intrínsecos à base matemática da solução, possibilitando certa regularização? Dessa maneira, portanto, considerando-se o duplo viés da presente pesquisa, pode-se definir como problema central da tese a seguinte questão:

- Qual o desempenho/viabilidade do método dos elementos finitos generalizados com enriquecimento global-local (numa estratégia de duas escalas, portanto) na simulação de problemas de elasticidade não lineares com meios parcialmente frágeis e heterogêneos?

Ou seja, a aplicação de técnicas numéricas e estratégias computacionais específicas, e ainda não (ou pouco) desenvolvidas na literatura da área de concentração do trabalho, no

estudo de um problema físico complexo e relevante no domínio da engenharia, averiguando-se potencialidades e limitações dos mecanismos propostos. Esse questionamento principal nos leva a algumas hipóteses importantes que conduziram a pesquisa, a saber:

- Através de uma abordagem numérica do tipo MEFGL-NL é possível reproduzir numericamente o comportamento de estruturas de concreto;
- O MEFGL-NL pondera um melhor custo-benefício através de um refinamento híbrido *hp*;
- Com o MEFGL é possível incorporar em escala global efeitos de uma mesoescala heterogênea;
- A relação entre as escalas global e local (pode) regulariza(r) a análise não linear material.

Com isso e formalmente, surge como objetivo geral da tese:

- Modelar numericamente materiais parcialmente frágeis através de estratégia multiescala que possibilite a incorporação da heterogeneidade do meio localmente, de modo restrito, e permita a captura (e eventual regularização, se possível) dos diversos fenômenos (numéricos, máxime) evidenciados por materiais que manifestem *softening*, tais como localização e efeito de tamanho.

Com aplicação do MEFGL aproveitam-se, assim, quesitos instituídos pelo *framework* da partição da unidade como instrumentos para a interligação entre as escalas. Pretendeu-se circunvir algumas das simplificações inerentes de modelagens de escala única (estrutural) e avaliar direta ou indiretamente os mecanismos responsáveis pelo comportamento frágil do meio, através de um modelo morfológico mesoscópico detalhado.

Embora haja aqui uma temática medular, que encabeça, inclusive, este texto em seu título, no desenvolvimento deste trabalho diferentes etapas foram superadas e testes em outras cearas foram executados. Assim, tendo sido o trabalho incrementalmente desenvolvido, os experimentos numéricos propostos apresentaram resultados parciais que levaram a debates adicionais e foram fundamentais para certas decisões metodológicas. A questão da inserção de uma fase secundária num modelo numérico, por exemplo, foi explorada com certa frequência no trabalho. Portanto, naturalmente há algumas nuances nesta pesquisa.

## 1.1.2 Organização do Texto

Seguindo este capítulo introdutório, tem-se no Capítulo 2 fundamentos teóricos pertinentes ao trabalho apresentado. No Capítulo 3, registra-se uma revisão da literatura; dentre os vários trabalhos referenciados que englobam desde estudos específicos de materiais parcialmente frágeis a um diagnóstico do cenário nacional, há um apanhado histórico, no qual são referenciadas algumas obras associadas ao componente multiescala. No Capítulo 4, a metodologia da pesquisa é apresentada, formalizando-se a nova estratégia de solução de análises não lineares de problemas com degradação elástica via MEEG-GL, a organização do núcleo numérico desenvolvido e o plano experimental. Já no Capítulo 5, resultados das diversas simulações propostas são registrados. Finalmente, no Capítulo 6, encerra-se o trabalho com algumas conclusões e considerações finais. Adicionalmente, nas seções que seguem o corpo principal do texto, há apêndices com conteúdos de suporte.

Houve uma grande preocupação com a edição desta obra, sobretudo com aspectos de forma e composição gráfica. Nesse sentido, buscou-se padronizar todos os componentes visuais e explorar plotagens aprimoradas, construindo itens com alta qualidade e alta resolução. Raramente o leitor encontrará figuras, tabelas ou gráficos isolados, mas sim composições com variados elementos diagramáticos, a grande maioria envolvida em comparações que se julgaram pertinentes, quando não, essenciais. Tais arranjos resultaram em componentes relativamente grandes, que em muitos casos ocupam páginas inteiras. Sendo este texto produzido com auxílio de uma ferramenta de edição específica (TeX), que gerencia os ditos “objetos flutuantes” (ou *floats*) de maneira particular, com lógica antagônica à editores tradicionais do tipo WYSIWYG<sup>2</sup>, otimizando a legibilidade da redação e a disposição de cada item, haverá trechos do texto em que uma figura não estará imediatamente adjacente ao parágrafo que contém análise correlata. Embora esse quadro não seja em si um problema grave (na verdade, é muito comum na edição de artigos de muitos dos periódicos da área), ou expressamente proibido por normas, reconhece-se que para alguns essa característica seja inconveniente e afete a leitura. Em todo o caso, a redação concedida à esta obra procurou circunvir eventuais empecilhos de legibilidade, referenciando cuidadosamente cada elemento gráfico e legendando-os apropriadamente.

---

<sup>2</sup> *What You See Is What You Get*. Ferramentas de edição tradicionais cuja formatação é realizada pelo autor e vista em tempo real (ex.: MS Word, LibreWriter.)

Dada a intenção predominante de apresentação dos resultados em cenários comparativos, quase sempre em caráter qualitativo, ou seja, de observação da conformação espacial geral de uma grandeza em um determinado passo da análise, preocupou-se mais com a avaliação global das distribuições alcançadas e com os seus valores limites (mínimos e máximos), do que com valores precisos em pontos específicos. Assim, em alguns casos as escalas das isofoixas podem ser consideradas de tamanho reduzido por alguns leitores. Nesse sentido, os mapas de cores escolhidos para as soluções numéricas foram predominantemente do tipo “vermelho e azul (RnB)” para aprimorar a legibilidade. Considera-se que esse tipo de escala possua um apelo visual maior e conceda uma interpretação imediata da natureza dos esforços no domínio, quer dizer, estados de deformação/tensão de compressão são, em geral, azuis e os de tração, vermelhos, o que contribui para a interpretação das imagens. De qualquer maneira, tendo em vista que atualmente a circulação de documentos se dá de modo predominante e quase prioritário em formato digital (arquivos .pdf, em geral) – no programa de pós-graduação desta pesquisa, por exemplo, a regra já é a entrega do trabalho final em formato eletrônico –, a manipulação e leitura de todos os elementos gráficos se dá de maneira excelsa nessa plataforma, uma vez que as figuras inseridas são de alta resolução.

Ao fim e ao cabo, acredita-se que o resultado final do texto, sob critérios de forma pelo menos, foi satisfatório, e espera-se que ao leitor agrade.

### 1.1.3 Notação

Duas representações principais são usadas: a notação indicial, relativa à formulações variacionais e tensoriais no geral, e a notação matricial, para equações discretizadas e incrementais-iterativas. Tensores cartesianos são quase sempre representados por letras latinas com barra (por exemplo,  $\bar{E}_{ijkl}$ ) ou letras gregas (como,  $\sigma_{ij}$  e  $\epsilon_{ij}$ ), com um conjunto apropriado de índices escritos em letras latinas minúsculas quando necessário. Matrizes são denotadas por letras latinas maiúsculas entre colchetes ( $[E]$ ) e vetores, por letras latinas minúsculas entre chaves ( $\{p\}$ ). Notações usuais e consagradas do MEF são preservadas (p.ex., funções de forma  $[N]$  e rigidez  $[K]$ ), com índices nodais em letras latinas minúsculas, quando for o caso. Índices incrementais e iterativos são representados por sobrescritos ( $k$ ) e subscritos ( $n$ ), respectivamente. Escalares estão registrados em letras latinas ou gregas

minúsculas ( $b$  ou  $\beta$ ). Rótulos para variáveis são fornecidos com sobrescritos em letras latinas maiúsculas (por exemplo,  $N^{MEF}$ ). Em alguns momentos, uma representação vetorial com letras em negrito ( $\mathbf{x}$ ) é dada para algumas variáveis, como vetores de coordenadas, e uma representação em letras latinas caligráficas ( $\mathcal{E}$ ) é aplicada em formulações funcionais, para maior clareza. Todo termo é oportunamente explicado ao surgir. Outros índices e notações que apareçam são convenientemente esclarecidos. Operações matemáticas básicas, como multiplicação, contrações indiciais etc., são implicitamente representadas e consideram-se os símbolos matemáticos empregados auto-explicativos. Em algoritmos, adotam-se termos tradicionais de pseudo-linguagem de programação, operadores matemáticos padrão e anotação do tipo `caixa_baixa_com_sublinha()` para indicar funções representativas de operações acessórias.

Houve uma subdivisão formal dos componentes de cada experimento numérico apresentado que se refletiu no léxico do texto, de tal modo que, sobretudo na seção de resultados, há a seguinte hierarquia:

- Experimento numérico: ensaio apreendido de referência bibliográfica representado por uma (ou mais) configuração(ões) experimental(is) (*set-up*);
- Exame: teste individual da relação entre variável dependente e variável(is) independente(s) dentro de um experimento;
- Classe: variação interna de um exame com um grupo com características específicas;
- Variável: grandeza medida e manipulada em exames dentro de um experimento.

# Capítulo 2

## Referencial Teórico

Neste capítulo, apresentam-se conceitos e formulações importantes para melhor entendimento do que se constrói ao longo do texto. Relativamente ao componente físico do estudo proposto, registram-se, de início, alguns elementos básicos da micromecânica do contínuo que são considerados relevantes (seção 2.1). Na sequência, na seção 2.2, apontam-se fundamentos da mecânica do dano (contínuo) com um enfoque mais generalizado. Na seção 2.3, conceituam-se princípios da mecânica da fratura, com ênfase em materiais (parcialmente) frágeis e essencialmente no principal meio arquetípico dessa classe, o concreto. Concernente à base teórica dos domínios numérico e matemático do trabalho, exhibe-se na seção 2.4 o método dos elementos finitos generalizados e em 2.5 sua associação à metodologia global-local. Na seção 2.6, apresentam-se noções de análise não linear de estruturas. Finalmente, na seção 2.7 a plataforma de desenvolvimento usada nessa obra é sumariamente descrita. Restringe-se aqui aos tópicos que são utilizados direta ou indiretamente na metodologia pretendida ou que sejam referenciados de maneira mais ostensiva no texto desta tese. Evidentemente, considerando a natural contenção no escopo de dissertações como esta, não há a intenção de esgotamento dos conteúdos, o que se busca é a construção de um panorama simbólico, logo no início da redação, para o leitor percorrer esta produção de maneira mais fluida. Informações complementares são fixadas nos apêndices.

### 2.1 Notas sobre a Micromecânica do Contínuo

Tendo em vista que o domínio da micromecânica é uma das bases para o estudo dos efeitos da constituição interna dos materiais na resposta global de estruturas, sendo importante na evolução dos trabalhos na área da modelagem multiescala, expõem-se alguns

conceitos básicos pertinentes.

### 2.1.1 Material Heterogêneo

Materiais heterogêneos são aqueles formados por constituintes dissimilares, distinguíveis em determinada escala de comprimento, pequena por definição (Bohm, 2016). Geralmente, são formados por dois ou mais materiais distintos que ocupam regiões de dimensões suficientemente grandes para consideração de meio contínuo em seu interior (Hashin, 1983).

Aos diversos constituintes de um meio heterogêneo dá-se o nome de fases. Os modelos micromecânicos mais comuns são baseados em arranjos (ou misturas) do tipo matriz-heterogeneidade, herdando definições e componentes dos trabalhos de Eshelby (1957, 1959), Hill (1963, 1965, 1972), entre outros. Nesses modelos, consideram-se heterogeneidades ou partículas dispersas em um meio sólido elástico, a matriz. Segundo Hashin (1983), este tipos de compósitos são chamados de particulados.

### 2.1.2 Elemento de Volume Representativo

Hill (1963) define o elemento de volume representativo como uma amostra estruturalmente característica de toda a mistura, na média, e que contenha uma quantidade suficiente de inclusões, de modo que as propriedades materiais globais aparentes sejam independentes de condições de contorno macroscopicamente uniformes (ou seja, que variam segundo um comprimento de onda menor que as dimensões da amostra e que possuam, portanto, efeitos pouco significativos em regiões distantes do contorno).

De acordo com Hashin (1983) e Markov (1999), o EVR é um domínio suficientemente pequeno para ser considerado como um ponto em nível macroscópico, mas grande o suficiente para conter as heterogeneidades consideradas. Simbolicamente, esta relação é definida por Hashin (1983) como o Princípio MMM (ou Princípio da Separação de Escalas):  $MICRO \ll MINI \ll MACRO$ , em que micro define as dimensões das heterogeneidades, macro representa as dimensões do compósito e mini (também referenciado como meso (Bohm, 2016; Gitman et al., 2004)) remete-se à escala de comprimento do EVR (Bohm, 2016). Ou seja, o elemento de volume representativo pode ser interpretado como o *ponto material* do meio contínuo, uma das noções fundamentais da mecânica do contínuo. Segundo Markov (1999), a principal diferença reside no tamanho concedido às

não homogeneidades: na interpretação da Micromecânica, o tamanho dessas entidades é regulado pelas dimensões de inclusões ou dos monocristais; já para a mecânica do contínuo estas dimensões fazem referência às escalas moleculares ou atômicas.

Hashin (1983) estabelece que o conceito do elemento de volume representativo está ligado à noção de homogeneidade estatística. Para as ambições deste trabalho, relaciona-se esta característica à equivalência de todas as propriedades geométricas globais (frações volumétricas, por exemplo) nos diferentes EVR's, independentemente de suas posições, bem como que os campos internos (deformação, tensão etc.) em diferentes EVR's sejam estatisticamente indistinguíveis.

Stroeven et al. (2004) apresentam variadas definições de EVR que vão desde a abstração de um célula imaginária representativa da heterogeneidade sob determinada probabilidade, à noção da menor porção de matéria para qual o módulo de elasticidade (ou as propriedades materiais, sendo menos literal na tradução) global(is)/macroscópico(as) são suficientemente precisos(as) para a representação de um comportamento constitutivo médio, passando ainda por formalismos de ordem matemática que estabelecem uma infinitude no tamanho do EVR frente aos seus elementos sub-macroscópicos.

Seguindo algumas das referências presentes em Stroeven et al. (2004), Gitman et al. (2004) compendiam diversas definições para o elemento de volume representativo que reunidas resumem o EVR como uma representação do meio a ser utilizada para determinação das propriedades efetivas de um modelo macroscópico homogeneizado e cujas as dimensões são suficientemente pequenas, comparadas ao corpo macroscópico, e grandes o suficiente comparativamente ao nível microscópico. Este EVR deve conter informações suficientes sobre a microestrutura e ser uma boa representação de contínuo.

### 2.1.3 Homogeneização e Propriedades Efetivas

Conforme será visto no Capítulo 2, é antiga a noção de homogeneização como estratégia para obtenção de um meio (heterogêneo) regularizado que se comporta de modo equivalente a um material homogêneo com propriedades efetivas. Segundo Zohdi e Wriggers (2010), a abordagem usual da homogeneização consiste em determinar uma relação constitutiva entre médias, vinculando médias volumétricas de variáveis de campo. Na micromecânica, essa média volumétrica é processada em uma amostra representativa do

material, o EVR, após a devida resolução de problemas de valor de contorno para obtenção dos campos internos. Estes procedimentos de regularização são referenciados como homogeneização, teorias de campos médios, teorias das propriedades efetivas etc.

Gitman et al. (2008) definem homogeneização simplesmente como um processo no qual converte-se um meio contínuo heterogêneo (em uma determinada escala de comprimento) em um meio contínuo homogêneo (em um nível sobrejacente), valendo-se essencialmente do processo de média. Este procedimento garante a consistência necessária para que a macroescala seja retratada como homogênea paralelamente a descrição heterogênea da escala imediatamente subjacente.

A média volumétrica de uma variável qualquer  $f$  sobre um volume  $\Omega$  é dada por (Bohm, 2016):

$$\langle f \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f \, d\Omega \quad (2.1)$$

Relativamente à elasticidade, tem-se que os tensores de deformação e tensão homogeneizados são dados pelas equações 2.2 e 2.3, respectivamente (Hashin, 1983; Markov, 1999; Zohdi e Wriggers, 2010; Bohm, 2016):

$$\langle \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \, d\Omega(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

$$\langle \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \, d\Omega(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

em que  $\mathbf{x}$  se refere às coordenadas globais (macroscópicas) do corpo, nas quais variam as quantias “contínuas” como deformações e tensões (e outras, como temperatura, fluxos etc.) e  $\mathbf{x}$  são as coordenadas locais dos volumes analisados, características da escala inferior (microscópica). Assim, a representação  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  indica que o campo de deformações (e demais variáveis físicas, por analogia) depende(m) tanto da macroescala, quanto da microescala.

Desse modo, as relações entre tensões e deformações macroscópicas são conferidas por (Hashin, 1983; Markov, 1999; Zohdi e Wriggers, 2010; Bohm, 2016):

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \bar{E}_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (2.4)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \bar{C}_{ijkl}^* \langle \sigma_{kl} \rangle \quad (2.5)$$

em que  $\bar{E}_{ijkl}^*$  e  $\bar{C}_{ijkl}^*$  são tensores de rigidez e flexibilidade efetivos (*effective elasticity and compliance tensors*), respectivamente. De acordo com Hashin (1983), estes tensores definem as relações entre as variáveis de campo quando a variação destas é estatisticamente homogênea.

Tal como Zohdi e Wriggers (2010), ressalta-se que as quantias definidas como efetivas não são propriedades materiais explícitas, mas sim, relações entre médias. Um termo mais apropriado seria propriedades aparentes. Igualmente aos autores, o termo efetivo será mantido em conformidade com sua ampla utilização na literatura.

A figura 2.1 representa esquematicamente o processo de homogeneização.

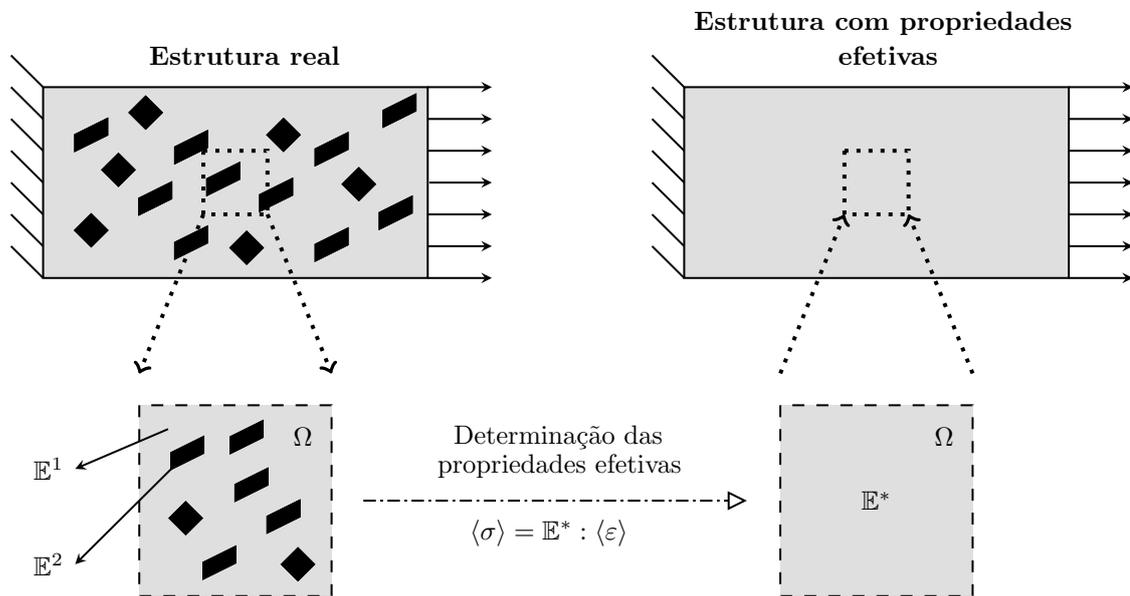


Figura 2.1: Esquema ilustrativo do processo de homogeneização (Zohdi e Wriggers, 2010).

## 2.2 Notas sobre a Mecânica do Dano

Apresentam-se nesta seção fundamentos da mecânica do dano, com destaque para a formulação da estrutura teórica unificada para modelos constitutivos proposta por Penna (2011), aplicável a modelos de degradação elástica, componentes das aplicações na tese. Penna (2011) expande o conteúdo concebido por Carol et al. (1994), fornecendo um estrutura capaz de descrever, além dos modelos de degradação elástica, modelos elastoplásticos, ambos considerando isotropia, ortotropia ou anisotropia, bem como uma ou mais funções de carregamento (critério de evolução do processo de degradação, segundo o autor).

### 2.2.1 Definição Elementar de Dano

O processo de fraturamento de um material engloba diferentes escalas. Do ponto de vista microscópico, esse fenômeno pode ser caracterizado pela nucleação de microcavidades ou microtrincas, em razão do rompimento de ligações interatômicas ou intermoleculares. Em escala mesoscópica, têm-se a nucleação, o crescimento e coalescência das microcavidades. Já macroscopicamente, observam-se o surgimento e a propagação de trincas devido à evolução dos processos das escalas subjacentes. Define-se como **dano**, portanto, o fenômeno no qual desenvolvem-se esses microdefeitos no meio, em diferentes escalas (micro, meso e macroscópicas), em conjunto com a resultante deterioração das propriedades mecânicas do material. Dessa forma, a mecânica do Dano (Contínuo) é a teoria que se dedica à análise da evolução dos processos de danificação e fraturamento de materiais à luz da mecânica do contínuo, focando, sobretudo, nos processos concentrados nas escalas meso e macroscópicas (Murakami, 2012).

Segundo Murakami (2012), o estado termodinâmico de um ponto pertencente a um contínuo pode ser descrito por variáveis de estado no respectivo ponto. Nesse contexto, o estado de dano desse ponto é um estado interno do material e, relativamente à mecânica do processo, pode ser representado por uma variável interna (uma variável de dano). Dessa forma, um problema de mecânica do dano pode ser apropriadamente estudado conforme (1) a representação adequada do estado de dano por uma **variável de dano**, seguida pela (2) formulação de uma equação que governa o desenvolvimento da variável interna, isto é, uma **equação de evolução do dano** e da (3) formulação de uma equação que descreva o comportamento mecânico do meio, ou seja, uma **relação constitutiva**. Finalmente, (4) solucionam-se **problemas de valor de contorno (ou inicial)** com as respectivas equações.

Dentre os efeitos do dano, Lemaitre e Desmorat (2005) destacam a redução do módulo de elasticidade, da tensão de escoamento, da dureza, da densidade e da velocidade de propagação de ondas no meio danificado. Contrariamente, o dano aumenta a resistência elétrica e a taxa de deformação por fluência do material.

### 2.2.2 Representação Mecânica do Dano

Lemaitre e Desmorat (2005) definem fisicamente a variável de dano como sendo a densidade de área de microfissuras e microvazios (cuja área é dada por  $\delta A^D$ ) que interceptam

uma determinada seção transversal  $\delta A$  de um EVR, num plano com normal  $\mathbf{n}$ , ou seja:

$$D_{(\mathbf{n})} = \frac{\delta A^D}{\delta A} \quad (2.6)$$

Dessa forma, pode-se definir como área efetiva, aquela área que sustenta as tensões internas, segundo:

$$\delta \tilde{A} = \delta A - \delta A^D = (1 - D)\delta A \quad (2.7)$$

Com a redução da área, as tensões induzidas por uma mesma força externa também se alteram. Assim, a tensão efetiva é dada por:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\delta F}{\delta \tilde{A}} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (2.8)$$

A figura 2.2, ilustra as definições anteriores. A partir delas, pode-se inferir que uma barra com seção  $\delta A$  submetida a uma força externa  $\delta F$  é **mecanicamente equivalente** a uma barra não danificada de seção transversal  $\delta \tilde{A}$  sob ação da mesma força  $\delta F$ , e com tensões internas  $\tilde{\sigma}$  (Murakami, 2012).

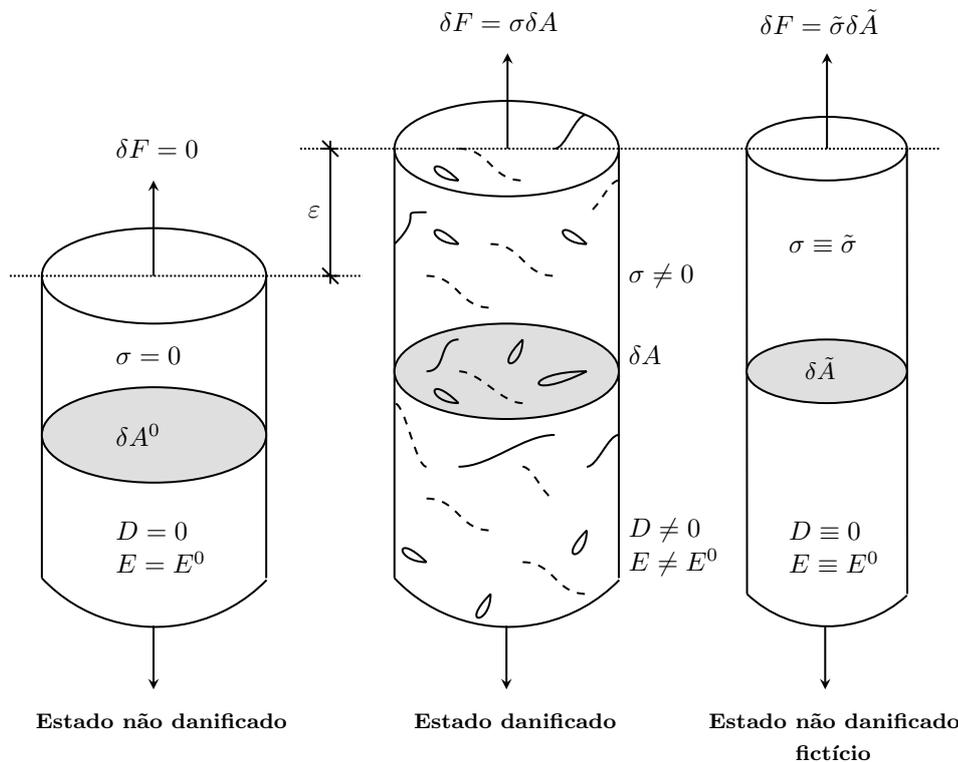


Figura 2.2: Representação do dano em uma barra tracionada pela redução da área efetiva. Adaptado de Murakami (2012)..

Murakami (2012) define formalmente equivalência mecânica a partir das seguintes hipóteses:

1. **Equivalência de deformações:** a equação constitutiva inelástica para o material danificado é a mesma do material íntegro, substituindo-se somente  $\sigma$  por  $\tilde{\sigma}$ .
2. **Equivalência de energias de deformação:** as energias de deformação (complementar e padrão) são dadas pelas correspondentes funções para o estado não danificado, substituindo-se  $\sigma$  pela tensão efetiva.
3. **Equivalência da energia total:** o comportamento mecânico de um material num estado danificado é derivado dos potenciais de estado e dissipação do material equivalente na configuração não danificada fictícia, substituindo-se as variáveis de estado pelas respectivas grandezas de estado efetivas.

Equivalência mecânica e tensão efetiva são conceitos importantes da teoria do dano e são ilustrados na figura 2.2. Define-se o estado em que se consideram grandezas efetivas como estado não danificado fictício. Tensão efetiva por sua vez representa não somente a redução de área devido à evolução do dano, mas também inclui os efeitos de concentração de tensão no contorno de vazios, bem como a coalescência destes (Murakami, 2012).

Uma outra forma de se representar o dano é através da variação do módulo de elasticidade do material, uma vez que o surgimento de microvazios e microfissuras reduz a rigidez do meio. Nesse contexto, considerando as configurações danificada e não danificada fictícia em conjunto com o princípio de equivalência mecânica, supõe-se que as deformações nos dois estados devam ser iguais, de tal forma que:

$$\tilde{\sigma} = E^0 \epsilon \text{ e } \sigma = E(D) \epsilon \Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E(D)} = \frac{\tilde{\sigma}}{E^0} \quad (2.9)$$

em que  $E^0$  e  $E(D)$  são os módulos de elasticidade do material no estado inicial não danificado e no estado danificado após o carregamento, respectivamente. Assim, pode-se representar a tensão efetiva em relação à variação do módulo de elasticidade segundo:

$$\tilde{\sigma} = \frac{E^0}{E(D)} \sigma \quad (2.10)$$

Em consequência de 2.8 e 2.10, define-se a variável de dano em função da degradação do módulo de elasticidade do material conforme:

$$E(D) = (1 - D)E^0 \Rightarrow D = 1 - \frac{E(D)}{E^0} \quad (2.11)$$

### 2.2.3 Não Localidade do Dano

Há ainda uma perspectiva típica em estudos teóricos e numéricos de materiais parcialmente frágeis que utiliza o conceito de “não localidade” do dano (Bažant, 1991; Jirásek, 2004). Na teoria não local<sup>1</sup>, a danificação de um material é interpretada como um fenômeno difuso, distribuído na vizinhança do ponto material, de modo que o comportamento de um ponto é influenciado pelo seu entorno. Em sua formulação, a variável de controle passa a ser uma média ponderada dos valores dentro de um domínio de influência, isto é (Souza, 2016):

$$\tilde{\varepsilon}^{NL} = \frac{1}{V(\mathbf{x})} \int_V \alpha(\mathbf{s} - \mathbf{x}) \tilde{\varepsilon} dV, \quad (2.12)$$

em que  $\tilde{\varepsilon}^{NL}$  é a variável não local;  $\tilde{\varepsilon}$ , a variável local;  $V(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(\mathbf{s} - \mathbf{x}) dV$  é o volume da função de densidade de probabilidade dentro da dimensão característica utilizada na ponderação;  $\mathbf{x}$  representa o ponto do modelo e  $\mathbf{s}$ , as coordenadas dentro do domínio de influência  $V$ . A figura 2.3 ilustra a essência da teoria.

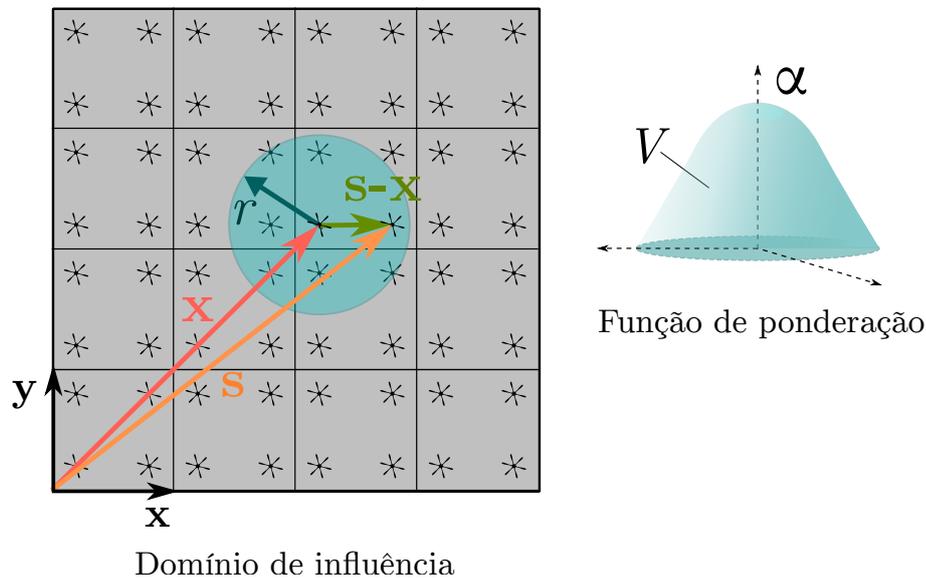


Figura 2.3: Componentes da ponderação não local: domínio de influência e função de ponderação. Adaptado de Souza (2016).

<sup>1</sup>Não há qualquer relação entre o termo “local” da estratégia “global-local” e o termo “local” da “teoria não local”. Infelizmente, por coincidência apenas, as duas expressões são utilizadas em contextos distintos. Assim, o problema local do GL não guarda relação direta com o componente “não local” da teoria de dano.

## 2.2.4 Modelos de Degradação Elástica

Em modelos de degradação elástica, a rigidez (ou flexibilidade) do material varia ao longo da análise, assumindo valores distintos no decorrer do processo de carregamento. Nesses modelos, adotam-se carregamento e descarregamento secantes, que são processados, portanto, a valores constantes de rigidez. Esta rigidez, por sua vez, é associada ao valor da variável histórica (maior valor de deformação alcançada no carregamento, p.ex.), sendo possível o material recuperar integralmente toda a deformação no descarregamento, contudo, apresentando dano permanente irreversível (Carol et al., 1994; Penna, 2011).

De acordo com Carol et al. (1994), a principal característica dos modelos de degradação elástica é a existência de uma relação total entre tensões e deformações, ou seja:

$$\sigma_{ij} = \bar{E}_{ijhl}^S \varepsilon_{hl}, \quad (2.13)$$

em que  $\bar{E}_{ijhl}^S$  é um operador constitutivo secante,  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões e  $\varepsilon_{hl}$ , o tensor de deformações.

Pode-se determinar operadores tangentes para o cômputo dos campos de tensão no meio ao longo do incremento de carga. A variação instantânea da relação anterior fornece o tensor constitutivo tangente, isto é:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \bar{E}_{ijhl}^T \dot{\varepsilon}_{hl}, \quad (2.14)$$

em que  $(\dot{\star})$  representa uma derivada com relação a um pseudo-tempo e  $\bar{E}_{ijhl}^T$  é o tensor tangente, dado por:

$$\bar{E}_{ijhl}^T = \bar{E}_{ijhl}^S + \frac{1}{\bar{H}_{gm}} \bar{m}_{mij} \bar{n}_{ghl}. \quad (2.15)$$

Em 2.15, cabe determinar tensores que indiquem as direções de propagação da degradação ( $\bar{m}_{mij}$ ), as direções de evolução das funções de carregamento ( $\bar{n}_{ghl}$ ) e os módulos pós-críticos (módulos de *hardening/softening*,  $\bar{H}_{gm}$ ).

Sendo as funções de carregamento representadas por  $\bar{F}_g(\bar{\varepsilon}, \bar{p})$ , em que  $\bar{p}$  representa um conjunto de variáveis internas do modelo no domínio das deformações, pode-se definir a direção de evolução do carregamento pelo gradiente da função de carregamento com relação às componentes de deformação, ou seja:

$$\bar{n}_{ghl} = \left. \frac{\partial \bar{F}_g}{\partial \bar{\varepsilon}_{hl}} \right|_{\bar{p}}. \quad (2.16)$$

Já o tensor das direções de evolução das deformações de degradação é dado por:

$$\bar{m}_{mij} = \bar{M}_{mijhl} \bar{\varepsilon}_{hl}, \quad (2.17)$$

em que  $\bar{M}_{mijhl}$  define a variação do tensor de rigidez relativamente às variáveis de dano. Esse operador é obtido segundo a regra da degradação generalizada (Carol et al., 1994; Penna, 2011) conforme:

$$\bar{M}_{mijhl} = \frac{\partial \bar{E}_{ijhl}^S}{\partial \bar{\mathcal{D}}_*} \bar{\mathcal{M}}_{m*}, \quad (2.18)$$

em que  $\bar{\mathcal{D}}_*$  representa um conjunto de variáveis de dano, cuja ordem depende da natureza do problema (podendo ser escalar, vetor, tensor de segunda ordem etc.);  $\bar{\mathcal{M}}_{m*}$  define a direção da taxa de mudança das variáveis de dano; e  $*$  representa um conjunto de índices apropriados para uma operação de contração compatível.

Finalmente, define-se o tensor dos módulos pós-críticos como sendo o gradiente das funções de carregamento com respeito às variáveis internas, ou seja:

$$\bar{H}_{gm} = - \left. \frac{\partial \bar{F}_g}{\partial \bar{p}_m} \right|_{\bar{\varepsilon}}. \quad (2.19)$$

Exemplificando, de acordo com De Borst e Gutiérrez (1999) e De Borst et al. (2012), um modelo de degradação baseado em dano isotrópico pode ser representado como:

$$\sigma_{ij} = [(1 - D_1)G(\delta_{ik}\delta_{ji} + \delta_{il}\delta_{jk} - 2/3\delta_{ij}\delta_{kl}) + (1 - D_2)K\delta_{ij}\delta_{kl}]\varepsilon_{kl}, \quad (2.20)$$

equação que pode ser escrita como  $\sigma_{ij} = (1 - D)\bar{E}_{ijkl}^S\varepsilon_{kl}$ , caso se assuma que os módulos de cisalhamento  $G$  e de volume  $K$  se degradam da mesma maneira, sendo  $D_1, D_2$  e  $D$  variáveis escalares de dano, de modo que para um modelo desse tipo  $\bar{\mathcal{D}}_* = D$

Em modelos dessa natureza, a função de carregamento pode ser escrita – simplificando-se a notação indicial – segundo:

$$\bar{F}(\tilde{\varepsilon}, \kappa) = \tilde{\varepsilon} - \kappa, \quad (2.21)$$

devendo obedecer as seguintes condições de carregamento/descarregamento (De Borst e Gutiérrez, 1999):

$$\bar{F} \leq 0, \quad \dot{\kappa} \geq 0, \quad \bar{F}\dot{\kappa} = 0. \quad (2.22)$$

em que  $\tilde{\varepsilon}$  é uma variável interna representativa de uma deformação equivalente, neste caso e em geral, e  $\kappa$  é uma variável histórica do modelo.

Diversas formulações constitutivas e medidas de deformação equivalente existem na literatura, das quais apontam-se resumidamente: Mazars (1984); Mazars e Pijaudier-Cabot (1989), Mazars e Lemaitre (1984), Simo e Ju (1987), Jirásek (2004), Pijaudier-Cabot et al. (1999).

Seguindo o trabalho de Carol et al. (1994), o modelo de dano escalar isotrópico de Mazars e Lemaitre (1984), cuja função de carregamento é da forma 2.21 e a deformação equivalente é dada por  $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$ , tem como gradientes/regras de fluxo  $\bar{n}_{kl} = \varepsilon_{kl}/\varepsilon$ ,  $\bar{m}_{ij} = -\bar{E}_{ijkl}^0\varepsilon_{kl} = -\sigma_{ij}^0$ ,  $\bar{H} = \partial\kappa/\partial D$ . De modo que o operador tangente é da forma:

$$\bar{E}_{ijkl}^T = (1 - D)\bar{E}_{ijkl}^0 - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}\partial\kappa/\partial D}\sigma_{ij}^0\varepsilon_{kl}, \quad (2.23)$$

Para detalhamento do presente cenário de modelagem constitutiva baseada na mecânica do dano contínuo, recomenda-se a consulta às obras destacadas, tendo como guia, por exemplo, o livro de De Borst et al. (2012).

Em seus trabalhos, sob o olhar da proposta teórica apresentada por Carol et al. (1994), Penna (2011) e Gori et al. (2017) apresentam alguns modelos constitutivos baseados em dano presentes na literatura e um *framework* computacional para modelos constitutivos – presente no núcleo numérico do sistema INSANE –, flexível e geral o suficiente para implementação de diversos modelos de degradação.

## 2.3 Notas sobre a Mecânica da Fratura de Meios Parcialmente Frágeis

Aborda-se nesta seção o processo de fraturamento de meios parcialmente frágeis, utilizando-se fundamentalmente o concreto para a presente discussão, uma vez que este material reflete maior interesse tecnológico na engenharia de estruturas. Esta opção, contudo, não implica em perda de generalidade, sendo os itens aqui retratados válidos para o entendimento do comportamento de outros materiais dessa classe. Será descrito o comportamento geral do referido material, ressaltando-se os mecanismos de não linearidade do meio, bem como registrados alguns dos principais fenômenos manifestados pelo concreto.

### 2.3.1 Descrição Básica

O concreto, assim como outros meios parcialmente frágeis, como alguns materiais geológicos (rochas, por exemplo), é composto por muitas fissuras e defeitos internos. O

processo de falha de estruturas de concreto é governado pela iniciação e crescimento desses defeitos durante o processo de carregamento, num mecanismo marcado pela propagação estável de grandes zonas de fissuração e pela formação de grandes trincas anteriormente à carga limite da estrutura (Shah et al., 1995; Bazant e Planas, 1998).

A figura 2.4 ilustra a resposta gráfica típica do concreto em um ensaio de tração. Materiais parcialmente frágeis apresentam uma perda progressiva de rigidez a medida que os deslocamentos evoluem, após uma tensão limite. Este comportamento é conhecido como amolecimento (*(strain) softening*). A relação tensão–deslocamento para o concreto pode ser dividida em quatro estágios (ver figura 2.4). A primeira fase, anteriormente ao ponto A (aproximadamente 30% da carga de pico), é marcada por uma fissuração desprezível. No segundo estágio, do ponto A ao ponto B (cerca de 80% da carga limite), trincas internas aleatoriamente distribuídas se iniciam e propagam ao longo do domínio. Já no terceiro estágio, do ponto B ao ponto C (carga máxima), as fissuras internas começam a se unir, formando uma trinca principal que se propaga com o acréscimo de carga externa. Até o pico, a propagação de trincas é estável, ou seja, há crescimento de trinca com aumento de carga. Por fim, inicia-se a quarta etapa, após a carga de pico. A trinca principal continua propagando-se, embora neste momento, a carga absorvida diminua. Paralelamente, as deformações de tração do material na banda de dano localizado aumentam e se observa descarregamento nas outras regiões do material (Shah et al., 1995).

De acordo com Shah et al. (1995), o processo de fissuração do concreto é influenciado consideravelmente pela Zona de Processo de Fratura (ZPF) – figura 2.5, uma região inelástica em torno da ponta de trinca que possui basicamente um tamanho constante, independentemente do tamanho da trinca. Nesta região, diversos mecanismos de tenacidade à fratura existem (tais como microfissuras, deflexão de trinca, costura de trinca por agregado, existência de vazios na ponta de trinca, efeito de engrenagem) e são responsáveis pela evolução dos processos não lineares do material. Contrariamente ao escoamento, um mecanismo primário, os componentes de tenacidade de meios parcialmente frágeis são mais complexos e contribuem para que a zona inelástica seja maior que aquela verificada em metais.

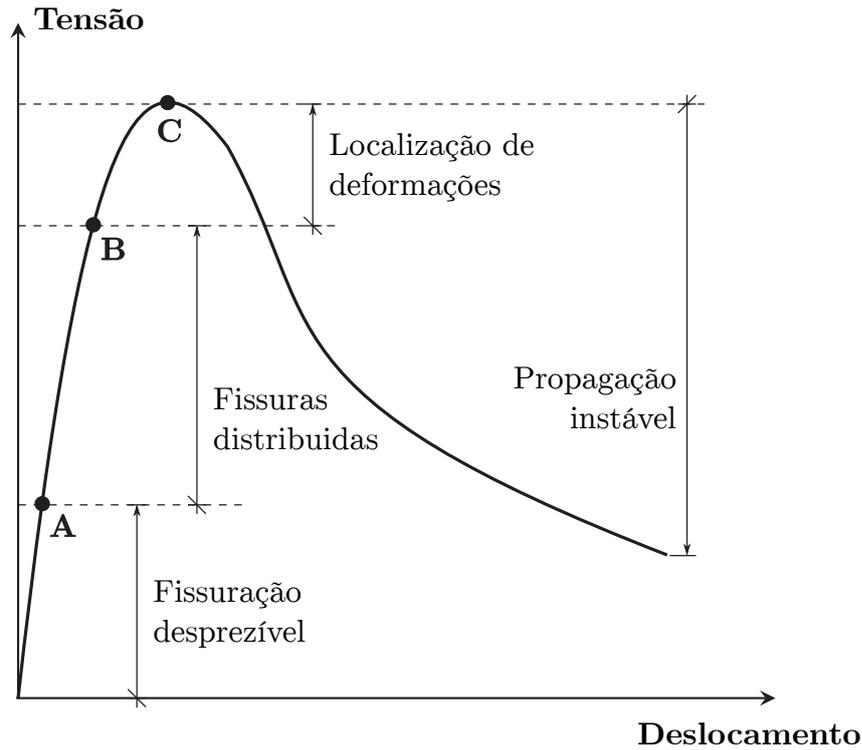


Figura 2.4: Resposta gráfica Tensão  $\times$  Deslocamento típica para materiais parcialmente frágeis (Shah et al., 1995).

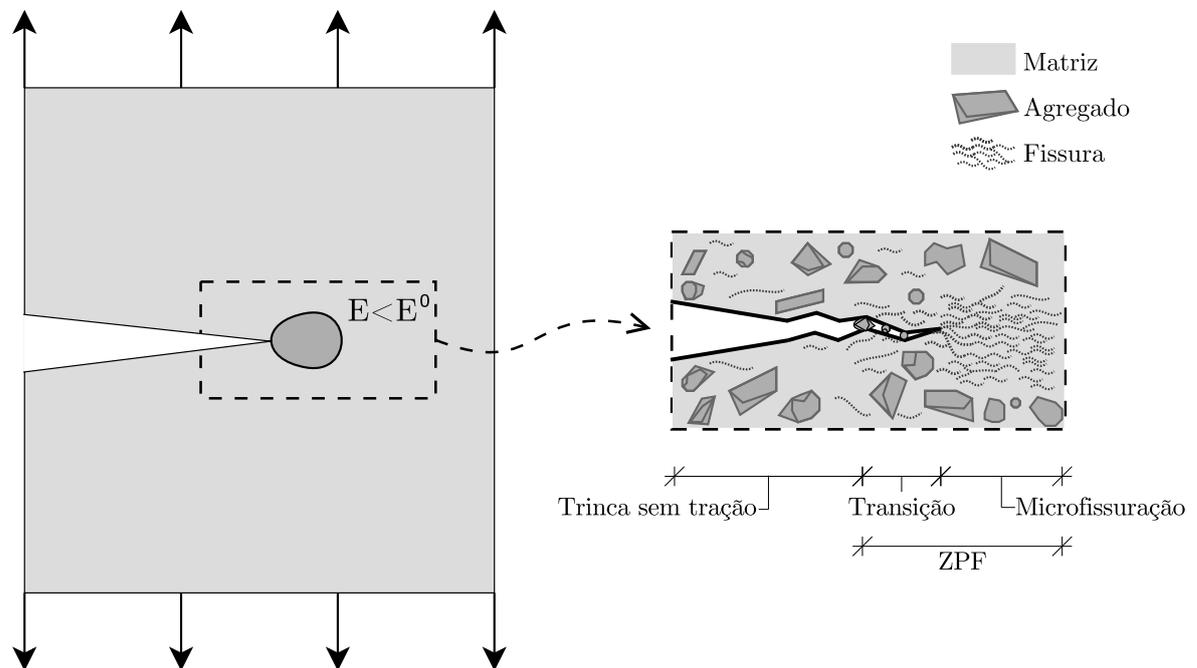


Figura 2.5: Zona de processo de fratura (ZPF). Adaptado de Anderson (2005).

### 2.3.2 Localização de Deformações

O comportamento de fratura do concreto depende de como e quando as fissuras internas se iniciarão e propagarão. Neste contexto, um fenômeno importante é a localização

de deformações (ou localização de dano) (Shah et al., 1995). No processo de localização de deformações, as fissuras internas que se desenvolviam aleatoriamente ao longo do domínio, passam a se **localizar** em uma determinada região da estrutura, conectando-se e formando uma trinca principal maior. Nesse contexto, a região em que houve concentração das deformações passa a controlar o comportamento global da estrutura, podendo haver descarregamento nas outras regiões do domínio (Shah et al., 1995; Bažant e Planas, 1998).

### 2.3.3 Efeito de Tamanho

Abordagens tradicionais baseadas na Resistência dos Materiais, predições através de limites plásticos ou qualquer outra teoria determinística na qual o critério de falha de um material seja expresso em termos de tensões e/ou deformações não apresentam efeito de tamanho. Estes tratamentos são comprovadamente inadequados para o estudo e projeto de estruturas de concreto (ou outro meio parcialmente frágil), uma vez que neste material a resistência à fratura é dependente do tamanho. Tal característica é reflexo do protagonismo de fissuração subcrítica nas deformações não lineares do material, frente a mecanismos de plasticidade (Anderson, 2005; Bažant e Planas, 1998).

Segundo Bažant e Planas (1998), o efeito de tamanho na resistência estrutural é a diferença existente entre a capacidade de carga real de uma estrutura e a resistência prevista por qualquer teoria baseada em tensões ou deformações críticas. De um modo geral, observa-se que estruturas geometricamente similares de tamanhos distintos absorvem diferentes tensões nominais sob influência de determinadas condições de contorno fixas. Tal fenômeno, pode ser observado na figura 2.6.

Outro aspecto levantado por Bažant e Planas (1998) é o efeito de tamanho na ductilidade estrutural (figura 2.6). Numa curva Tensão Nominal  $\times$  Deslocamento, o ponto que expressa a falha da estrutura é caracterizado pela tangente  $-C^S$ . Quanto maior a estrutura, mais próximo ao pico se processará a falha.

Diversas são as fontes e explicações para o efeito de tamanho, e maiores detalhes podem ser vistos em Bažant e Planas (1998). Destacam-se aqui a explicação estatística e a explicação mecânica. A primeira, inicialmente estudada por Weibull, é causada pela aleatoriedade das propriedades do material e de sua resistência. Em estruturas maiores, maior é a probabilidade de existirem regiões com menor resistência, de modo que estes

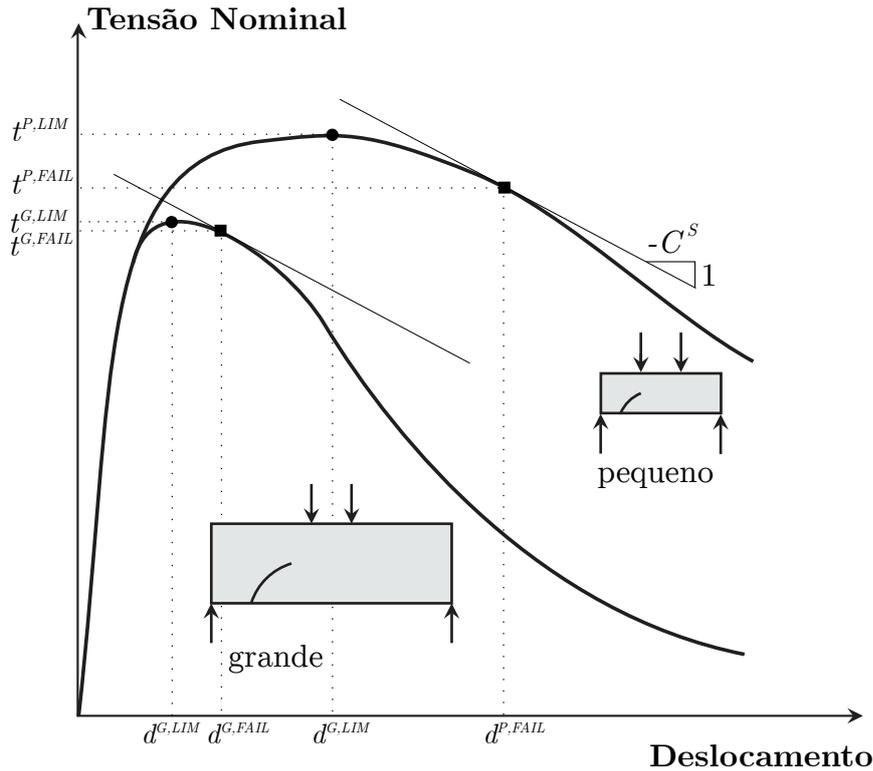


Figura 2.6: Efeito de Tamanho – Curva Tensão Nominal  $\times$  Deslocamento (Bažant e Planas, 1998).  $t$ ,  $d$ : tensão e deslocamento;  $G$ ,  $P$ : estrutura grande e estrutura pequena;  $LIM$ ,  $FAIL$ : valor limite e na falha.

espécimes desenvolvem menor tensão nominal. Já a explicação da mecânica da fratura baseia-se na liberação de energia armazenada pela estrutura ao longo do carregamento na frente de trinca ao longo da propagação.

### 2.3.4 EVR, Homogeneização e Materiais Parcialmente Frágeis

Afinal, dado o comportamento anterior, há sentido em se estabelecer o conceito de EVR e procedimentos de homogeneização pura, sobretudo os mais tradicionais, de degeneração da escala sub-macroscópica num ponto, ou abordagens assintóticas, quando nos referimos a materiais parcialmente frágeis, ao concreto? Há sentido em se pensar o EVR tal como ele se caracteriza na grande maioria dos trabalhos, como um domínio finito e infinitesimalmente pequeno se comparado às dimensões de um sólido real? Uma vez que há efeito de tamanho, e, portanto, diferentes tamanhos de EVR levariam a distintas repostas, seria o EVR de materiais parcialmente frágeis uma propriedade intrínseca e unicamente estatística do meio? Para uma parcela hegemônica da produção científica na área, o conceito de EVR da Micromecânica é herdado sem maiores problemas ou questionamentos

em estudos de materiais com *softening*. No próximo capítulo (3), serão apresentadas algumas abordagens clássicas para modelagem numérica de materiais heterogêneos, com parte aplicada à compósitos particulados frágeis. Lança-se aqui uma contenda que será abordada ao longo deste trabalho e melhor explorada, sob o ponto de vista do autor, nas conclusões do texto, sobretudo. Por ora, apontam-se algumas referências, e introduzem-se indagações, voltando as atenções para o concreto.

Segundo Bažant e Oh (1983), um elemento representativo de concreto é um volume cuja seção transversal deve ser idealmente muito maior que as inomogeneidades, pelo menos algumas vezes maior que a dimensão máxima característica do agregado (partícula). Segundo os autores, esse tamanho é igual à largura efetiva ótima da banda de fissuração do material, equivalente ao tamanho de EVR proveniente das abordagens estatísticas clássicas da Micromecânica (vide seção 2.1) e da ordem de três vezes o tamanho máximo dos agregados.

Embora haja uma definição de EVR aderente à realidade do meio material aqui estudado, com lastro em certas características intrínsecas de uma dispersão particulada, como o concreto, um resultado importante obtido por Gitman et al. (2004, 2007, 2008) aponta para a inexistência de um EVR em regime de *softening*. Ou seja, em um regime típico de não linearidade física em materiais particulados e parcialmente frágeis, como aqueles que se pretendeu investigar, não há estatisticamente como se determinar um domínio representativo único. Tal elemento deve ser, em última instância, toda a estrutura. O referido resultado e a interpretação que segue são adotados neste texto e vão ao encontro de fenômenos particulares do concreto, como o efeito de tamanho.

Apesar da potencial inexistência de um EVR típico, tal qual definido na seção 2.1, conceitos de homogeneização (Hill (1963); Hashin e Shtrikman (1963); Torquato (2002); Gitman et al. (2007); Wriggers e Moftah (2006); Zohdi e Wriggers (2010); Stroeven et al. (2004), entre outros) seguem válidos, uma vez que tendem a ter um mero caráter de equivalência energética entre domínios heterogêneos e homogêneos sob variações cinemáticas, ou um viés variacional, que a princípio não impõe restrição de validade de ordem estatística, ainda que essa possa existir.

## 2.4 Notas sobre o Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendidos

Uma breve introdução ao MEFG é apresentada nesta seção. Expõe-se o cenário em que se desenvolveu o método e registra-se sua formulação.

### 2.4.1 Histórico e Contextualização

O Método dos Elementos Finitos Generalizados é um método numérico relativamente recente, desenvolvido em meados da década de 1990. Remete-se originariamente, segundo Duarte et al. (2000), aos trabalhos de Babuška et al. (1994), nomeado por Método dos Elementos Finitos Especiais, e Melenk e Babuška (1996), referenciado como Método da Partição da Unidade (MPU), desenvolvidos paralelamente aos trabalhos de métodos sem malha (mais especificamente, Método das Nuvens *hp*) de Duarte (1995) e Duarte e Oden (1996a,b). De acordo com Barros (2002), seu emprego sob sua denominação atual surge em Melenk (1995).

Através do uso de conceitos de seus métodos precursores, o MEFG aplica estratégias dos métodos sem malha dentro do Método dos Elementos Finitos (MEF), permitindo uma maior flexibilidade na resolução numérica de problemas de valor de contorno, sendo eficiente, por exemplo, naqueles que possuam singularidade no campo de tensões, e viabilizando a introdução de diferentes especializações de implementação (Barros, 2002). Além disso, por possuir o MEF clássico como uma de suas bases, o MEFG pode se utilizar de toda a infraestrutura e algoritmos já desenvolvidos para aquele método (Duarte et al., 2000).

Ressalta-se que a estratégia de enriquecimento extrínseco do MEFG, descrita na seção 2.4.2, é similar àquela utilizada por outro método numérico, o dos Elementos Finitos Estendidos (do inglês, *Extended Finite Element Method – XFEM*), desenvolvido inicialmente em Belytschko e Black (1999) e Moës et al. (1999) para estudo de propagação de trincas. Segundo Fries e Belytschko (2010), a distinção de nomenclatura entre MPU, MEFG e XFEM tornou-se muito confusa, e na prática, os métodos podem ser considerados idênticos.

## 2.4.2 Formulação

Inicialmente, define-se o conceito de **partição da unidade (PU)**, um aspecto chave associado ao MEFG. Fundamentalmente, uma PU é um conjunto de funções cujo os valores somam a unidade em cada um dos pontos  $\mathbf{x}$  de um domínio  $\Omega$  (Duarte et al., 2000). De acordo com Barros (2002), esta propriedade é fundamental para garantia da convergência da aproximação a medida que novos pontos sejam acrescentados no domínio.

A estratégia do MEFG consiste na utilização das **funções de forma do MEF como PU**, aliada à expansão do espaço de aproximação tradicional deste método, através de um novo conjunto de funções linearmente independentes  $\mathfrak{J}_j$  (**funções de aproximação local**), equação (2.24), que multiplique as funções de base  $N_j^{MEF}$  de cada nó  $x_j$ . Aos conjuntos de elementos finitos concorrentes nos pontos nodais  $x_j$ , dá-se o nome de **nuvem ou suporte**  $\omega_j$  da PU definida (Barros, 2002; Duarte et al., 2000).

$$\mathfrak{J}_j = \{1, L_{j1}(\mathbf{x}), L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq}(\mathbf{x})\} = \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q \quad (2.24)$$

Assim, as **funções de forma do MEFG**  $N_{ji}^{MEFG}$  são obtidas da seguinte maneira:

$$\{N_{ji}^{MEFG}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q = N_j^{MEF}(\mathbf{x}) \times \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q \quad (2.25)$$

podendo as funções de aproximação local  $\{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q$  serem polinomiais ou não, dependendo do problema que está sendo resolvido (Alves, 2012).

Finalmente, a construção de uma aproximação global genérica é dada pela equação 2.26, a seguir (Barros, 2002):

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j^{MEF}(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=1}^q L_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\} \quad (2.26)$$

em que  $u_j$  e  $b_{ji}$  são parâmetros nodais associados a  $N_j^{MEF}(\mathbf{x})$  e  $N_j^{MEF}(\mathbf{x})L_{ji}(\mathbf{x})$ , respectivamente, ou em outras palavras, às aproximações de MEF e MEFG (Alves, 2012).

A figura 2.7 ilustra o processo de construção das funções aproximadoras do MEFG para um domínio bidimensional composto por uma malha de elementos finitos quadrilaterais definida a partir de um conjunto de  $n$  nós  $\{\mathbf{x}_j\}_{i=1}^n$ . Na figura, identificam-se o suporte  $\omega_j$  – figura 2.7a – da partição da unidade – figura 2.7b, bem como as funções aproximadoras local e global – figuras 2.7c e 2.7d, respectivamente.

De acordo com Duarte et al. (2000), a estratégia de enriquecimento do MEFG pode gerar conjuntos de funções linearmente dependentes que, segundo Barros (2002), são produzidos quando se enriquece uma PU polinomial com monômios, gerando uma matriz de

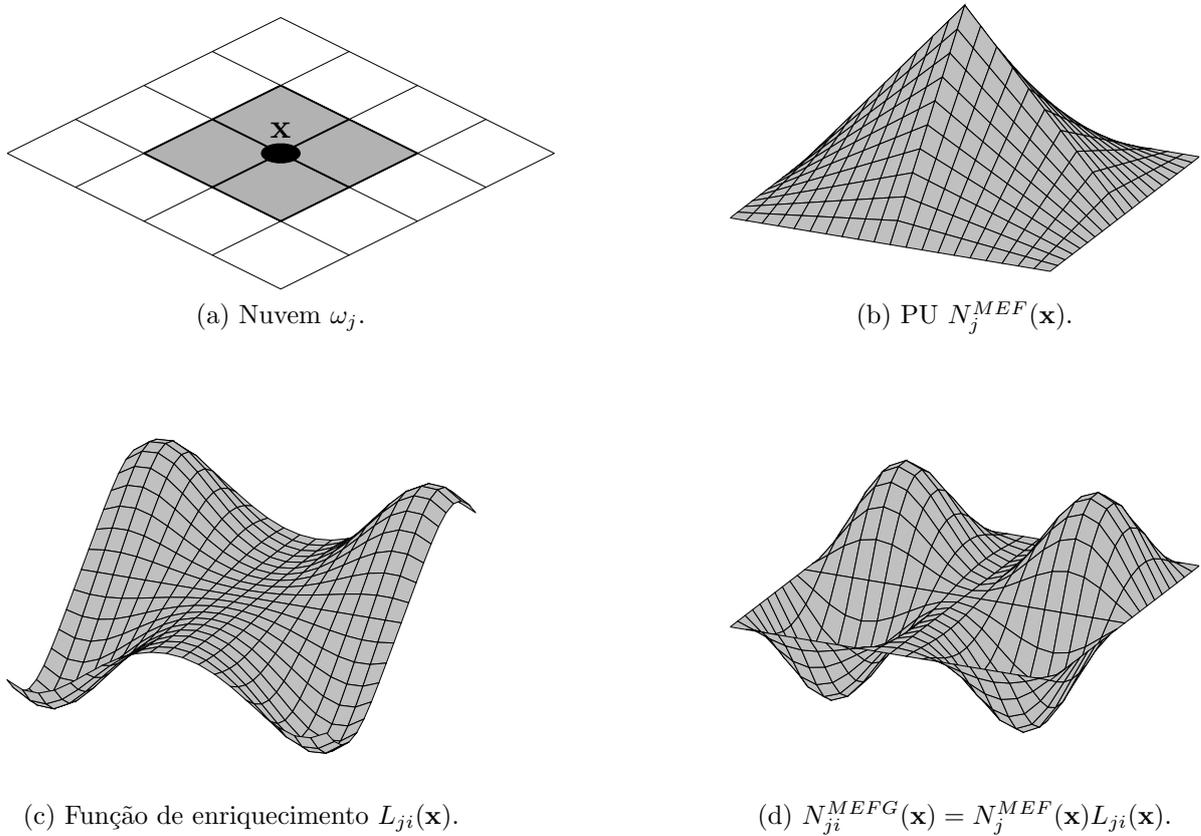


Figura 2.7: *Framework* de enriquecimento do MEF.

rigidez positiva semi-definida. Para resolução do sistema de equações, um procedimento iterativo adequado pode ser visto em [Strouboulis et al. \(2001\)](#) e [Barros \(2002\)](#).

A obtenção da solução de um sistema do MEFG pode ser vista no apêndice [A](#).

## 2.5 Notas sobre Metodologias Global-Local

Um método global-local (GL) é uma técnica híbrida de modelagem ou análise, que consiste no uso de algumas estratégias computacionais para resolução de problemas complexos. Sua aplicação foi impulsionada pela demanda de problemas com não linearidades física e geométrica ([Noor, 1986](#)).

De início, a abordagem global-local surge da análise de painéis de material compósito ([Noor, 1986](#); [Ransom e N. F. Knight, 1989](#)), sendo definida por [Ransom e N. F. Knight \(1989\)](#) como um procedimento para determinação de estados de tensão locais detalhados em regiões específicas de uma estrutura, utilizando informações globais obtidas de maneira

independente.

O termo global-local possui uma miríade de definições, podendo variar com o nível de análise e entre um analista e outro. Um analista pode considerar toda a estrutura de uma aeronave como seu modelo global, e uma seção da fuselagem como modelo local. Em outra instância, a fuselagem ou asa se tornam o modelo global, e um painel enrijecido, o modelo local. Ou de outra maneira, pode-se utilizar a Teoria Clássica de Laminados para representar o modelo global, enquanto que o modelo local é analisado por teorias da Micromecânica Clássica (Ransom e N. F. Knight, 1989).

De acordo com Noor (1986), são quatro as estratégias principais de uma análise global-local:

1. **Técnica de *zooming***: Resolução de um problema global com malha grosseira, seguido da análise de um problema local isolado com malha refinada, utilizando a resposta global de forças e deslocamentos como condições de contorno do novo problema.
2. **Aplicação simultânea de duas técnicas de discretização**: Utilização de diferentes métodos discretos para resolução dos problemas global e local. Por exemplo, uso de elementos finitos para análise do problema global e elementos de contorno para resolução do problema local.
3. **Métodos de redução**: Aplicação sucessiva de diferentes métodos discretos e formulações variacionais, com intuito de reduzir o número de graus de liberdade do problema.
4. **Hierarquização de modelos matemáticos**: Utilização de diferentes modelos de análise (Teoria de Placas, Teoria Clássica de Vigas, Teoria de Viga de Parede Fina etc.) ao longo do domínio, de acordo com a especificidade e natureza do problema local que se deseja analisar.

### 2.5.1 Global-Local e Multiescala

Dada a generalidade das definições acima, que vão desde a caracterização de dois (ou mais) **níveis diferentes de refinamento** da solução à **alteração das hipóteses**

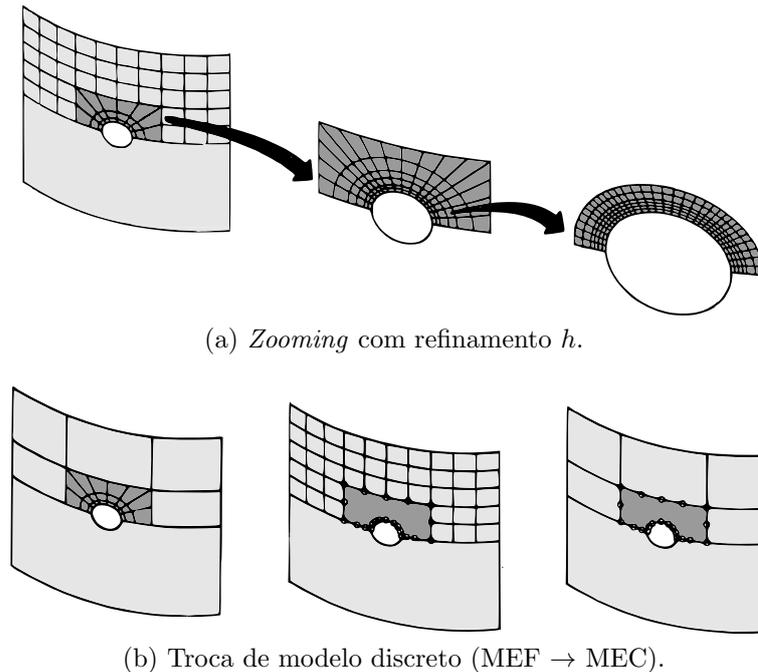


Figura 2.8: Exemplos de abordagens global-local segundo [Noor \(1986\)](#).

físicas e/ou matemáticas do modelo local, aqui se indica uma inerente similaridade entre estratégias global-local e estratégias multiescala (MS), sabendo-se que essa afirmação é, contudo, controversa para muitos pesquisadores, que diferenciam as abordagens. Sob um primeiro olhar, pode-se considerar que estratégias GL sejam de mão única (global  $\rightarrow$  local), não assegurando *obrigatoriamente* a comunicação inversa (local  $\rightarrow$  global), ao passa que abordagens MS necessariamente facultam um acesso bidirecional. De qualquer maneira, ao menos por um ponto de vista **funcional** ou **propositivo**, grande parte das teorias e referências que tratam do componente multiescala (e de métodos GL) se debruçam na resolução de problemas em que simultaneamente haja níveis de detalhamento (matemático, físico, geométrico, ou qualquer outro tipo) distintos, usando formalismos igualmente diferentes (uns com um caráter matemático mais robusto, outros inclinados a um estudo mais empírico de alternativas computacionais de processamento), mas sendo comum a sobreposição e até mesmo equivalência de muitas abordagens generalistas difundidas na literatura especializada ([Abdulle e Nonnenmacher, 2009](#); [E e Engquist, 2003](#); [Efendiev e Hou, 2008](#); [Efendiev et al., 2014](#); [Perić et al., 2010](#); [Duarte e Babuška, 2005](#); [Kim et al., 2009](#); [Plews e Duarte, 2014](#)). De tal sorte que para este autor não é absurda a comparação, aceitando-se a confluência dos conceitos. De qualquer maneira, há no âmbito desse trabalho a adoção de uma interpretação que, embora admita o paralelo entre GL e MS, diferencia levemente os conceitos anteriores. Na presente pesquisa, GL se associa

à técnica numérico-computacional que opera por detrás da simulação de um problema físico que, por sua vez, possui um comportamento que pode se relacionar a mais de uma **escala de observação da matéria**; unindo-se os conceitos viabilizaria-se uma solução mais detalhada. Ou seja, considera-se aqui que ao se introduzir a heterogeneidade material (uma nova escala do meio) num processo de solução em dois níveis de refinamento (global e local) – respeitando-se obviamente as adaptações necessárias –, incorpora-se na simulação o caráter MS. Em certa medida, portanto, e dado o apelo necessariamente físico/material concedido à interpretação da questão de escala, considera-se que abordagens GL talvez sejam mais gerais que técnicas MS, que para o horizonte deste trabalho aludem resumidamente a refinamento e à substância/constituição, respectivamente.

Nesse sentido, aponta-se a seguinte classificação (Zienkiewicz et al., 2006), baseada em alguns critérios específicos como a determinação do *nível* em que se estuda a matéria, a *escala* de comprimento associada, o *domínio científico* que se dedica à modelagem de problemas do respectivo nível, os *objetos* de análise dos estudos e finalmente, a *natureza da predição* alcançada. Ressalta-se que a tese (e sua revisão da literatura, Capítulo 3), portanto, se enquadra(m) nos itens 4 e 5.

1. *Nível de observação*: Quantum; *Escala de comprimento*:  $10^{-12}$ ; *Domínio científico*: Química Computacional; *Objetos de manipulação*: Núcleos, composição molecular; *Natureza da predição*: Qualitativa.
2. *Nível de observação*: Nano; *Escala de comprimento*:  $10^{-9}$ ; *Domínio científico*: Mecânica dos Materiais Computacional; *Objetos de manipulação*: Interações moleculares, fragmentos moleculares; *Natureza da predição*: Qualitativa.
3. *Nível de observação*: Micro; *Escala de comprimento*:  $10^{-6}$ ; *Domínio científico*: Mecânica dos Materiais Computacional; *Objetos de manipulação*: Interações entre superfícies, orientação, anisotropia, cristais, peso molecular, volumes livres; *Natureza da predição*: Qualitativa, Quantitativa.
4. *Nível de observação*: Meso; *Escala de comprimento*:  $10^{-3}$ ; *Domínios científicos*: Mecânica Computacional, Mecânica dos Materiais Computacional; *Objetos de manipulação*: Constituintes diferentes, fases diferentes, dano; *Natureza da predição*: Quantitativa.

5. *Nível de observação*: Macro; *Escala de comprimento*:  $10^0$ ; *Domínios científicos*: Mecânica Computacional, Mecânica Estrutural; *Objeto de manipulação*: Estruturas compostas; *Natureza da predição*: Quantitativa.

## 2.5.2 MEFG-GL

A utilização da metodologia global-local no MEFG consiste em uma aplicação da técnica de *zooming*, na qual a solução de um problema local isolado é usada para gerar numericamente o enriquecimento do espaço de aproximação global através do *framework* da partição da unidade; a essa associação deu-se o nome de Métodos dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento Global-Local (MEFG-GL). Contrariamente a aplicação clássica em MEF, a **interação local  $\rightarrow$  global é possível** quando utiliza-se o MEFG, sendo alternativa para o aprimoramento da solução global (Duarte e Kim, 2008).

Conforme mencionado na seção 2.4.2, as funções de enriquecimento são tais que descrevam de maneira adequada o fenômeno local. Contudo, nem sempre há o conhecimento prévio desse comportamento, sobretudo em problemas tridimensionais. Assim a estratégia global-local constitui uma alternativa poderosa para obtenção de funções de aproximação que captem propriamente as características locais para determinação de uma resposta global enriquecida acurada. Problemas que envolvam regiões de singularidade, com múltiplas fraturas ou cuja a modelagem pode ser onerosa, especialmente aqueles não lineares, são aplicações do MEFG-GL (Duarte e Kim, 2008; Kim et al., 2010).

As três etapas fundamentais do processo de resolução de um problema do MEFG-GL são (figura 2.9):

1. Inicialmente, resolve-se um problema global modelado com uma malha grosseira.
2. Em seguida, com a região de interesse e os nós a serem enriquecidos identificados, soluciona-se um (ou mais) problema(s) local(is), utilizando-se a solução da primeira etapa como condição de contorno.
3. Finalmente, na terceira etapa enriquece-se o problema global, o qual é novamente processado.

Uma vez conhecida a solução da primeira etapa, a resolução do Problema Local é independente, e assim, diversos domínios locais podem ser definidos, respeitando-se as

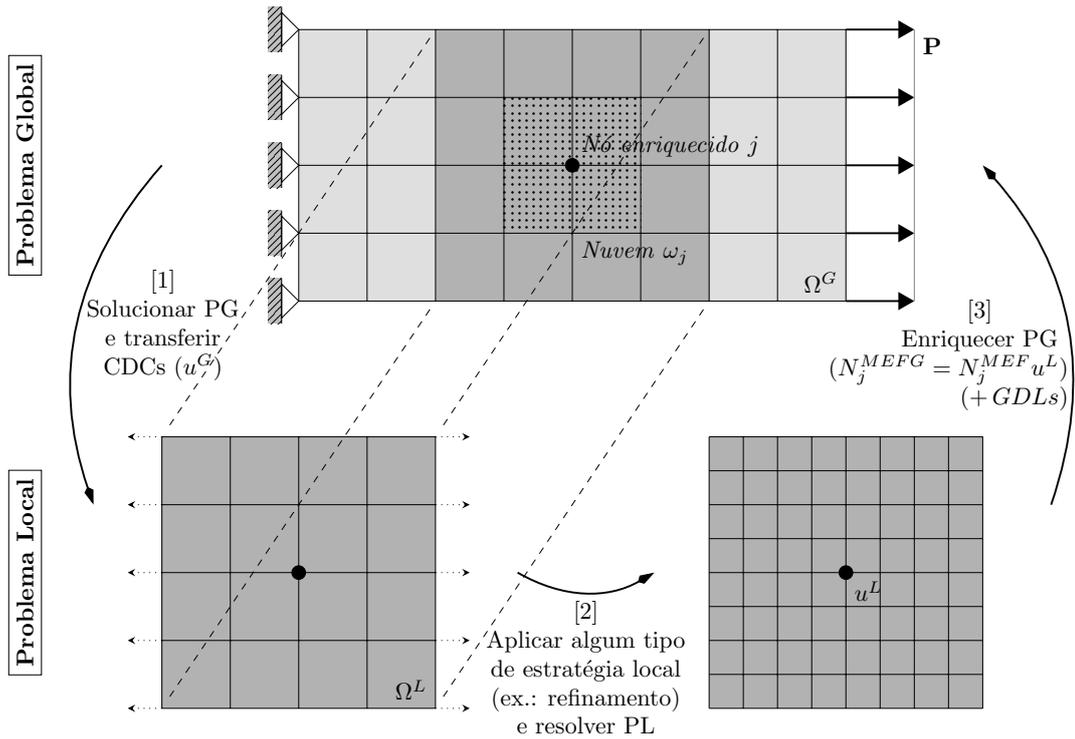


Figura 2.9: Etapas de análise do MEFGL.

prerrogativas do MEFGL (a nuvem de um nó enriquecido deve estar contida no domínio local). Desse modo, a paralelização da solução é uma das potencialidades do MEFGL. Essa aplicação otimiza a resolução de problemas complexos, sobretudo aqueles não lineares (Alves, 2012; Kim et al., 2010).

A nova função de aproximação, já com a função global-local, é dada pela equação 2.27 (Alves, 2012), a seguir:

$$N_j^{MEFG} = N_j^{MEF} u^L \quad (2.27)$$

em que  $u^L$  é a solução do Problema local.

Em Duarte e Kim (2008) e Kim et al. (2010) a formulação dos problemas local e global enriquecido é apresentada para problemas de elasticidade linear, juntamente com exemplos numéricos e análises sobre a interferência da solução global inicial na resposta local, transmissão de condições de contorno, tamanho do domínio local, convergência e desempenho computacional. Kim et al. (2010) apresentam a paralelização do processo de solução de problemas locais e propõem tratamento específico para a adequada definição e discretização desses domínios, apontando técnicas particulares num regime de integração aninhada.

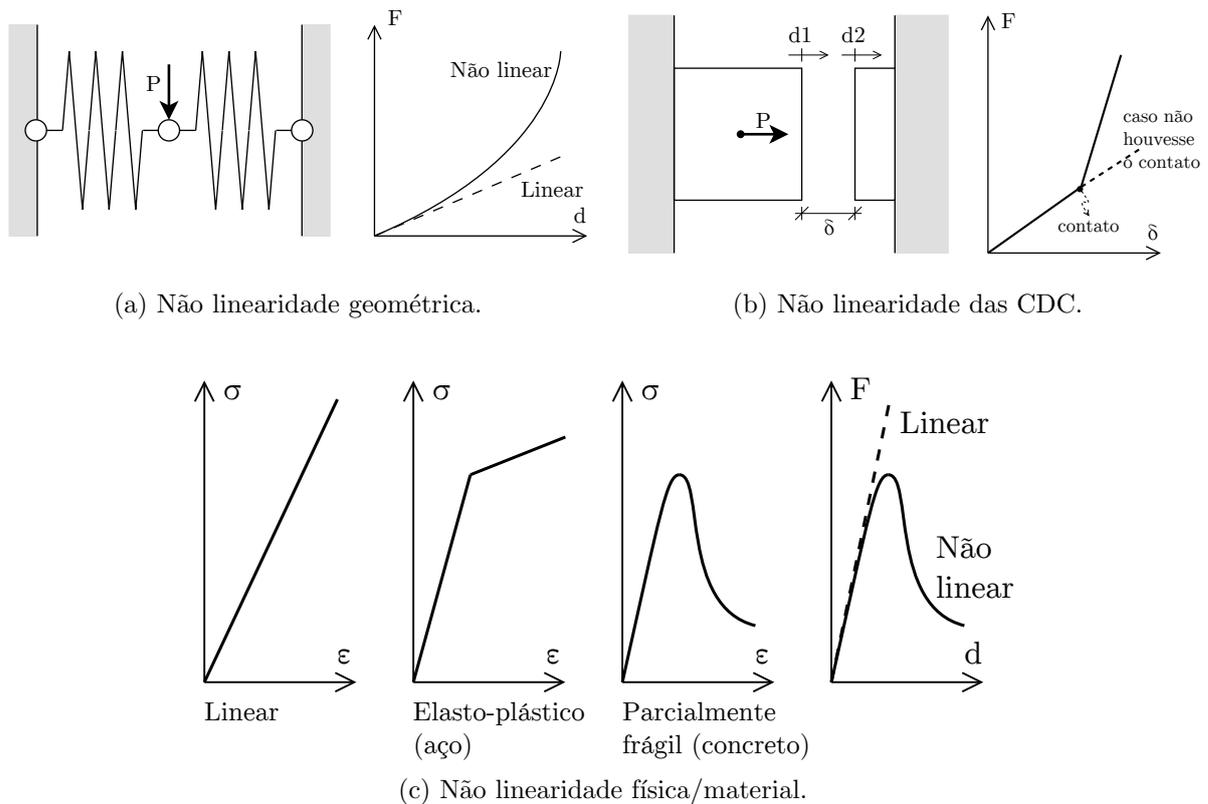


Figura 2.10: Fontes de não linearidade na mecânica estrutural.

Uma leitura breve sobre a imposição de condições de contorno no problema local pode ser vista no apêndice B.

## 2.6 Notas sobre a Análise Não Linear

A análise não linear de estruturas é aplicada a problemas em que a rigidez do modelo depende do campo de deslocamentos da estrutura em estudo, podendo a natureza dessa relação ser de três origens principais: geométrica, física ou de condições de contorno. O problema é dito geometricamente não linear quando um estado de deslocamentos excessivos afeta a rigidez da estrutura, sem que haja influência no material ou sem que existam necessariamente grandes deformações. Quando o comportamento do material é dependente do estado de deformação a que é submetido, e portanto, a relação tensão-deformação do meio é não linear, define-se o problema como fisicamente não linear. Adicionalmente, quando as restrições se alteram com a evolução do estado de deformação, tipicamente em problemas de contato, diz-se que a não linearidade é proveniente das condições de contorno (Fuina, 2004; Wriggers, 2008). A figura 2.10 ilustra cada um dos casos.

Segundo [Fuina \(2004\)](#), para a solução de um problema estrutural não linear são utilizados procedimentos denominados de métodos de obtenção de trajetórias de equilíbrio ou métodos de controle de análise não linear, nos quais realiza-se um processo incremental-iterativo controlando-se uma ou mais variáveis do problema. Assim, passos incrementais sucessivos de uma determinada variável do problema (por exemplo, cargas ou deslocamentos), intermediados por iterações sequenciais, são aplicados para a obtenção de uma resposta gráfica no espaço parâmetro de carga  $\times$  deslocamento.

Essas trajetórias representam a resposta estrutural do modelo analisado. Cada passo configura o cálculo de um estado de equilíbrio representado pela determinação de uma carga absorvida pela estrutura (ou fator de carga associado) e pelo respectivo deslocamento de um ponto avaliado.

A figura [2.11](#) ilustra com um pouco mais de detalhes algumas trajetórias de equilíbrio típicas para problemas fisicamente não lineares. Os pontos  $A$  e  $C$  localizam-se nos regimes de *hardening* (ou linear, dependendo do estágio de deformação) e *softening*, respectivamente. Merecem destaque dois pontos importantes,  $B$  e  $D$ , denominados de pontos limites de carga e de deslocamento (*snap-back*), respectivamente. É importante que, dentro das características do problema analisado, o método de controle utilizado seja capaz de captar pontos limites ([Pitangueira, 1998](#); [Fuina, 2004](#)).

Basicamente, do ponto de vista matemático, uma análise não linear requer a solução de um sistema de  $m + 1$  equações para obtenção de  $m + 1$  parâmetros do respectivo sistema. Em análise de estruturas, essas equações representam  $m$  condições de equilíbrio impostas e uma condição de restrição necessárias para aquisição de  $m$  componentes de deslocamentos e um fator de carga correspondente ([Yang e Kuo, 1994](#)). Especifica-se a seguir uma formulação genérica característica de problemas não lineares ([Zienkiewicz e Taylor, 2000](#); [Bonet e Wood, 1997](#); [Kim, 2015](#)).

### 2.6.1 Os Conceitos de Derivada Direcional e Linearização

Intrinsecamente ligados à solução de problemas não lineares estão duas ideias importantes: a de derivada direcional e a de linearização ([Gurtin, 1981](#); [Bonet e Wood, 1997](#)).

Abandonando brevemente o padrão de anotações matemáticas empregado como regra neste texto e introduzindo uma notação vetorial direta, dizemos que uma função  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  se aproxima de zero mais rápido que  $\mathbf{u}$  quando

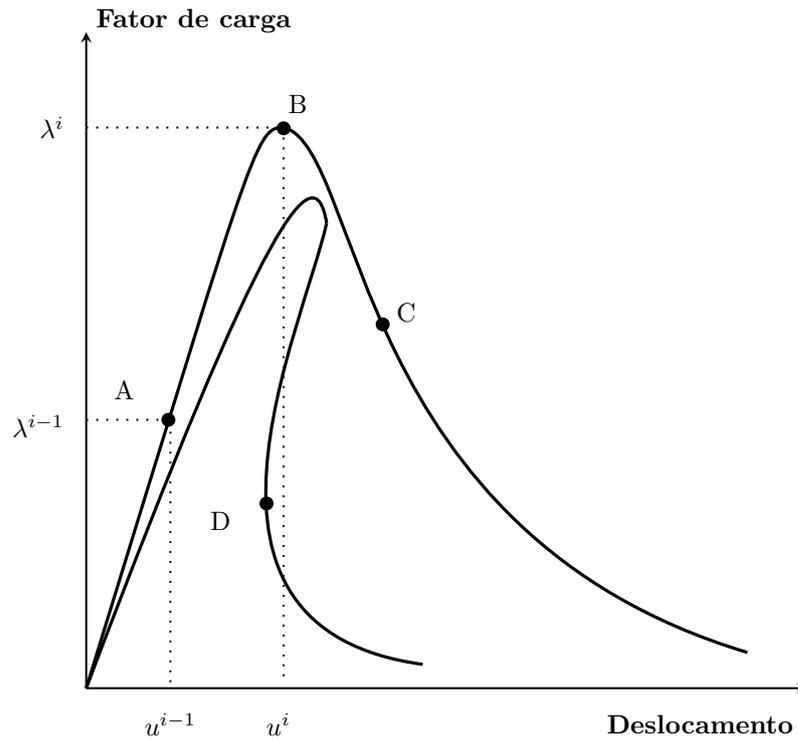


Figura 2.11: Trajetórias típicas e pontos limites. Adaptado de (Pitangueira, 1998).

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathcal{O}(\mathbf{u}), \text{ se } \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{u})\|}{\|\mathbf{u}\|} = 0.$$

Seguindo, seja  $\mathbf{g}(\mathbf{u})$  uma função escalar, vetorial ou tensorial tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}) + \mathcal{O}(\mathbf{u}) \text{ ou}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathcal{O}(\mathbf{u}),$$

então a derivada de  $\mathbf{g}(t)$  em  $t$ , caso exista, é dada por

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{g}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [\mathbf{g}(t + \alpha) - \mathbf{g}(t)] = \mathbf{0} \text{ ou}$$

$$\mathbf{g}(t + \alpha) = \mathbf{g}(t) + \alpha \dot{\mathbf{g}}(t) + \mathcal{O}(\alpha)$$

Como  $\alpha \dot{\mathbf{g}}(t)$  é linear em  $\alpha$ ,  $\mathbf{g}(t + \alpha) - \mathbf{g}(t)$  é igual a um termo linear em  $\alpha$  mais outro termo que tende a zero mais rapidamente que  $\alpha$ . Nesse sentido, Gurtin (1981) define derivada como sendo a função linear de mapeamento que aproxima  $\mathbf{g}(t + \alpha) - \mathbf{g}(t)$  para um  $\alpha$  pequeno.

Formalizando, sejam  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{W}$  espaços vetoriais normados e finitos,  $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}$  e  $\mathbf{g} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{W}$ , dizemos que  $\mathbf{g}$  é diferenciável em  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$  se

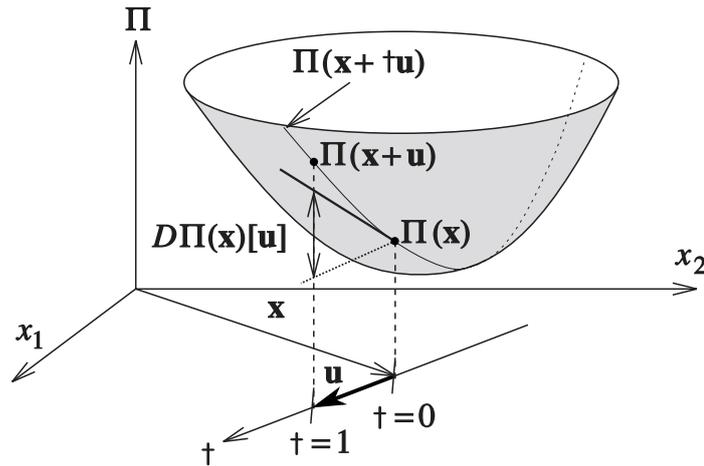


Figura 2.12: Derivada direcional (Bonet e Wood, 1997).

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

é uma função linear em  $\mathbf{u}$  somada a um termo que se aproxima de  $\mathbf{u}$  mais rapidamente.

Ou seja, existe uma transformação linear  $D\mathbf{g}(\mathbf{x}) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$  tal que

$$\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + D\mathbf{g}(\mathbf{x})[\mathbf{u}] + \mathcal{O}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}. \quad (2.28)$$

em que, para cada  $\mathbf{u}$ ,

$$D\mathbf{g}(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{u}\alpha) - \mathbf{g}(\mathbf{x})] = \left. \frac{d}{d\alpha} \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{u}\alpha) \right|_{\alpha=0}$$

é a derivada (direcional) de  $\mathbf{g}$  em  $\mathbf{x}$  na direção de  $\mathbf{u}$ . Dizemos nessa situação que a função foi *linearizada* com respeito ao incremento  $\mathbf{u}$  (Bonet e Wood, 1997; Gurtin, 1981). A figura 2.12 ilustra o conceito.

## 2.6.2 Solução de Equações Algébricas Não Lineares

Considere o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \vdots \\ \psi_m(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{bmatrix} = \lambda\Phi - \Lambda(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

Conforme dito anteriormente, existem técnicas específicas para se resolver equações não lineares dessa natureza. De um modo bastante geral, são empregados processos iterativos, comumente generalizados sob o rótulo de métodos de Newton-Raphson. Dada uma estimativa da solução  $\mathbf{x}_n$  em uma iteração  $n$ , um novo valor  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \delta\mathbf{u}$  é obtido em termos do incremento  $\delta\mathbf{u}$  através de uma aproximação linear, a saber (Bonet e Wood, 1997; Zienkiewicz e Taylor, 2000):

$$\Psi(\mathbf{x}_{n+1}) \approx \Psi(\mathbf{x}_n) + D\Psi(\mathbf{x}_n)[\delta\mathbf{u}] = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

A derivada direcional da linearização anterior é obtida segundo:

$$\begin{aligned} D\Psi(\mathbf{x}_n)[\delta\mathbf{u}] &= \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \Psi(\mathbf{x}_n + \alpha\delta\mathbf{u}) \\ &= \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \begin{bmatrix} \psi_1(x_1 + \alpha\delta u_1, x_2 + \alpha\delta u_2, \dots, x_m + \alpha\delta u_m) \\ \vdots \\ \psi_m(x_1 + \alpha\delta u_1, x_2 + \alpha\delta u_2, \dots, x_m + \alpha\delta u_m) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{K}\delta\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.31)$$

em que  $\mathbf{K}$  é dito(a) operador (ou matriz) tangente (ou jacobiana) na iteração  $n$ , comumente conhecida também como matriz de rigidez (tangente) em mecânica das estruturas (Bonet e Wood, 1997; Kim, 2015), e dada por:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_n) = [K_{ij}(\mathbf{x}_n)] = \left[ \left. \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_n} \right] \quad (2.32)$$

Substituindo Eq. 2.32 em Eq. 2.30 e rearranjando-se, temos:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_n)\delta\mathbf{u}_n = -\Psi(\mathbf{x}_n), \quad (2.33)$$

equação que é resolvida para o incremento  $\delta\mathbf{u}_n$ . A partir da solução anterior, atualizam-se os valores das variáveis do sistema, e uma nova solução aproximada é buscada

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \delta\mathbf{u}_n. \quad (2.34)$$

Via de regra, como se vê, a solução encontrada não satisfará exatamente o sistema de equações não lineares e um resíduo (ou força desbalanceada, num jargão estrutural)

existirá. Caso o resíduo seja inferior a uma determinada tolerância, a solução  $\mathbf{x}_{n+1}$  pode ser aceita e o processo iterativo é interrompido; do contrário, itera-se até o resíduo atingir a precisão prescrita ou um número limite de repetições ter sido alcançado (Kim, 2015). Tipicamente, critérios de convergência podem ser indicados genericamente sob a forma (Zienkiewicz e Taylor, 2000):

$$\|\Psi(\mathbf{x}_{n+1})\| \leq \epsilon \|\Phi\|_{n+1}. \quad (2.35)$$

Como linearizar equações não lineares e, sobretudo, como solucionar iterativamente sistemas compostos por expressões desse tipo é uma tarefa complexa e com vasta bibliografia especializada (Yang e Shieh (1990); Yang e Kuo (1994); De Borst et al. (2012); Zienkiewicz e Taylor (2000); Wriggers (2008); Bonet e Wood (1997); Kim (2015); Pitanguiera (1998); Fuina (2004), dentre outras obras).

O ponto chave de uma análise não linear, e onde residem as diferenças entre os métodos iterativos, é a determinação do incremento que será dado no processo incremental-iterativo, que de maneira genérica pode ser chamado de “fator de carga”. Este parâmetro está vinculado à algum tipo de equação de restrição adicional que garanta a solução do sistema de equações (N+1)-dimensional. Baseando-se em Yang e Kuo (1994) e preservando-se as notações dessa seção, esse fator (em uma iteração  $n$ ) é genericamente dado por:

$$\lambda_n = \frac{h_n - \mathbf{c}^\top \delta \mathbf{x}_n^\Phi}{\mathbf{c}^\top \delta \mathbf{x}_n^A + \chi} \quad (2.36)$$

em que  $h_n$  é um parâmetro incremental típico de cada estratégia iterativa (tendo, portanto, significados físicos distintos);  $\mathbf{c}$  é um *array* de constantes de restrição;  $\chi$  é uma constante associada ao incremento; e  $\delta \mathbf{x}^\alpha$  são vetores com as incógnitas do sistema de equações associadas ao vetor *rhs* típico (*right-hand side vector*) e ao resíduo.

Dentre as várias estratégias presentes na literatura e com aplicação a problemas mecânicos, Yang e Kuo (1994) apontam:

- Controle de carga (Newton-Raphson padrão; ver Yang e Kuo (1994)):  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ ;  $\chi = 1$ ;  $h_1 = \text{constante prescrita}$ ;  $h_n|_{n \geq 2} = 0$ .
- Controle de deslocamentos (trabalhado inicialmente por Argyris (1965), Zienkiewicz (1971) e Batoz e Dhett (1979), conforme indicam Yang e Kuo (1994)):  $\mathbf{c} =$

$\{0 \cdots 0 1 0 \cdots 0\}$  (apenas o grau de liberdade controlado é não nulo);  $\chi = 0$ ;  $h_1 =$  deslocamento prescrito no GDL controlado;  $h_n|_{n \geq 2} = 0$ .

- Controle de comprimento de arco (dentre as variações destacam-se, p.ex., as alternativas de [Riks \(1979\)](#) e [Crisfield \(1981\)](#)):  $\mathbf{c} = \delta \mathbf{x}_1$ ;  $\chi = \lambda_1$ ;  $h_1 = l^2$  ( $l$  é um comprimento de arco prescrito);  $h_n|_{n \geq 2} = 0$ .
- Controle de trabalho (formulado pelo criador da técnica em [Yang e Shieh \(1990\)](#) e [Yang e Kuo \(1994\)](#)):  $\mathbf{c} = \lambda_1 \Phi$ ;  $\chi = 0$ ;  $h_1 =$  incremento de trabalho prescrito;  $h_n|_{n \geq 2} = 0$ .
- Controle de deslocamentos generalizados ([Yang e Shieh \(1990\)](#)):  $\mathbf{c} = \lambda_1 \delta \mathbf{x}_1^{\Phi^{k-1}}$ , em que  $\lambda_1$  é prescrito;  $\chi = 0$ ;  $h_n$  é um deslocamento generalizado calculado no processo, com  $h_1 \neq 0$  e  $h_n|_{n \geq 2} = 0$ .

Segundo [De Borst et al. \(2012\)](#) e [Wriggers \(2008\)](#), para problemas em que haja dependência de caminho devido à natureza material do sólido, os ditos métodos *path-following*, como aqueles baseados em comprimento de arco ou mesmo generalizações do controle de deslocamentos, são as alternativas com melhor desempenho. Para detalhes sobre cada estratégia brevemente indicada, recomenda-se a consulta às obras referenciadas.

Neste trabalho, além do conceito da matriz tangente, talvez a formulação mais nuclear no presente contexto e de desprendimento mais imediato, trabalha-se também com a ideia de aproximação secante. Uma vez que a determinação da matriz tangente é custosa (sendo rigoroso: pois envolve uma derivação direta a cada iteração), pode-se utilizar como alternativa um processo incremental secante com vistas a reduzir uma parte desse dispêndio computacional. Embora o emprego direto de uma matriz tangente garanta uma taxa de convergência mais alta, o uso da alternativa secante preserva um índice de convergência razoável. Como regra, algoritmos não-lineares iteram até o resíduo “desaparecer” (ou atingir a precisão buscada), o que significa que o sistema de equações não lineares é satisfeito dentro da faixa imposta pela tolerância prescrita. Dessa maneira, contanto que os incrementos sejam na direção certa, independentemente da estratégia, o algoritmo eventualmente convergirá para a solução correta após executar mais iterações, contudo ([Kim, 2015](#)).

Na alternativa apresentada, a matriz de rigidez tangente é aproximada usando-se a direção secante entre duas soluções consecutivas. Seguindo-se [Zienkiewicz e Taylor \(2000\)](#),

uma vez que a primeira iteração foi definida, ou seja,

$$\delta \mathbf{u}_1^k = (\mathbf{K})^{-1} \Psi_1^{k+1},$$

a inclinação secante pode ser obtida conforme:

$$\delta \mathbf{u}_1^k = (\mathbf{K}_2^S)^{-1} (\Psi_1^{k+1} - \Psi_2^{k+1}), \quad (2.37)$$

relação esta que pode ser utilizada para obtenção de  $\mathbf{x}_2^k$  usando-se

$$\delta \mathbf{u}_2^k = (\mathbf{K}_2^S)^{-1} \Psi_2^{k+1}. \quad (2.38)$$

Genericamente, podemos escrever para uma iteração  $n$ :

$$\delta \mathbf{u}_{n-1} = (\mathbf{K}_n^S)^{-1} (\Psi_{n-1} - \Psi_n), \quad (2.39)$$

O algoritmo 2.1 e a figura 2.13 resumem o funcionamento de um processo incremental-iterativo clássico baseado em Newton-Raphson.

```

entrada: geometria, propriedades materiais, parâmetros de solução.
1 inicialize  $\Phi = \mathbf{0}$ ,  $\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ ,  $k^{MAX}$ ,  $\epsilon$ 
2 para  $k \in \{1, \dots, k^{MAX}\}$  faça
3   encontre  $\lambda(k)$ 
4    $\Phi \leftarrow \Phi + \lambda \tilde{\Phi}$ 
5   enquanto  $\|\Psi\|/\|\Phi\| > \epsilon$  faça
6     encontre  $\mathbf{K}$ 
7     resolva  $\mathbf{K} \delta \mathbf{u} = -\Psi(\mathbf{x})$ 
8      $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}$ 
9     encontre  $\Lambda(\mathbf{x})$ 
10     $\Psi \leftarrow \Phi - \Lambda$ 
11     $k \leftarrow k + 1$ 

```

Algoritmo 2.1: Algoritmo genérico de solução incremental-iterativa de sistema de equações não lineares. Adaptado de [Bonet e Wood \(1997\)](#); [Kim \(2015\)](#); [Zienkiewicz e Taylor \(2000\)](#).

## 2.7 Notas sobre a Plataforma de Desenvolvimento Empregada

Nesta seção é apresentado de maneira muito superficial o sistema INSANE. Tenta-se cumprir aqui o simples papel de apresentar ao leitor não pertencente ao grupo de pesquisa,

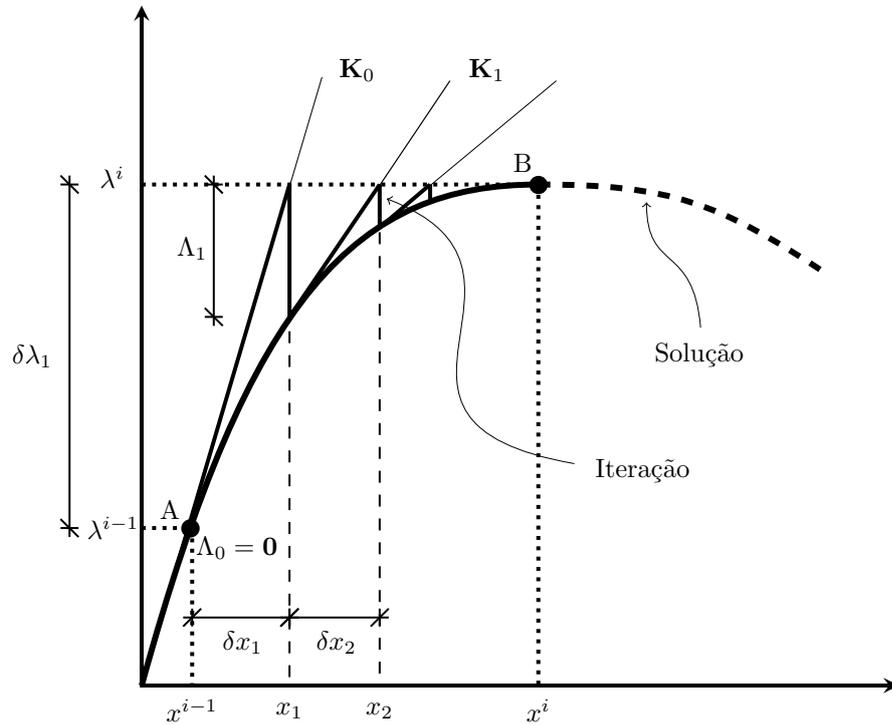


Figura 2.13: Representação gráfica do algoritmo 2.1. Adaptado de Yang e Kuo (1994); Fuina (2004).

ou não familiarizado como o *software*, algumas nomenclaturas e conceitos que surgirão no texto em algum momento.

O INSANE é um *software* livre desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais, implementado em linguagem Java, e que utiliza, por conseguinte, programação orientada a objetos. Sua concepção preconiza a máxima segmentação do programa, de modo a tornar os diversos ramos do sistema independentes o suficiente para facilitar a expansão e manutenção do código.

O programa é composto fundamentalmente por três aplicações principais: pré-processador, processador e pós-processador. Pré- e pós-processadores são aplicações gráficas interativas responsáveis pela construção dos diversos modelos discretos de problemas estruturais e visualização dos resultados, respectivamente. Já o processador compõe o núcleo numérico do sistema e se encarrega, portanto, da condução das análises, valendo-se de diferentes métodos numéricos e estratégias de resolução.

Em virtude da natureza do trabalho proposto, enfoque será concedido à apresentação daquilo que aqui se chama de *kernel* (ou núcleo – numérico –) do software, mesmo esta, concisamente encaminhada, com o simples objetivo de posicionar o leitor quanto à organização do sistema a ser utilizado na tese. Quando pertinente, serão evidenciados alguns

atributos e/ou métodos específicos nos diagramas UML (*Unified Modeling Language*) apresentados. Ressalta-se que as características exibidas não são todas aquelas constantes em cada classe, mas somente algumas convenientemente selecionadas como forma de reforçar as funcionalidades e a composição das diversas classes apresentadas. Outras informações e maiores detalhes sobre a descrição do sistema, funcionalidades extras e potencialidades podem ser encontrados nas diversas produções do grupo de pesquisa, como, p.ex., [Fonseca \(2008\)](#), [Penna \(2011\)](#).

### 2.7.1 Visão Geral do Núcleo Numérico

O núcleo numérico do INSANE (figura 2.14) é composto por interfaces, classes abstratas e suas respectivas especializações e se organiza simplificadamente conforme as relações entre as interfaces `Assembler` e `Persistence` e as classes abstratas `Model` e `Solution`.

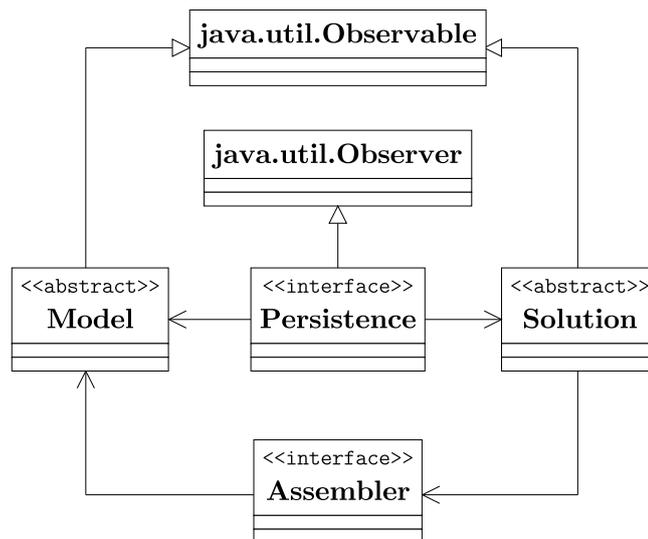


Figura 2.14: *Kernel* do sistema INSANE.

`Model` contém os dados do modelo discreto analisado e fornece à `Assembler` as informações necessárias para montagem do sistema (linear ou não linear) genericamente representado pela equação 2.40. Este sistema é resolvido por `Solution`, através de distintas estratégias.

$$[A] \{\ddot{x}\} + [B] \{\dot{x}\} + [C] \{x\} = \{d\} \quad (2.40)$$

Na equação 2.40,  $\{x\}$  é o vetor de variáveis de estado do problema;  $\{\dot{x}\}$  e  $\{\ddot{x}\}$  são os vetores da primeira e segunda derivadas temporais das variáveis de estado;  $[A]$ ,  $[B]$  e  $[C]$  são as matrizes dos coeficientes do sistema e  $\{d\}$  é o vetor com os termos independentes.

Tanto `Model`, como `Solution` se comunicam com `Persistence`, responsável pela preservação e continuação dos dados de entrada e saída para outras aplicações. Esta persistência é realizada através de arquivos XML (*Extensible Markup Language*), e a figura 2.15 ilustra a implementação da referida interface.

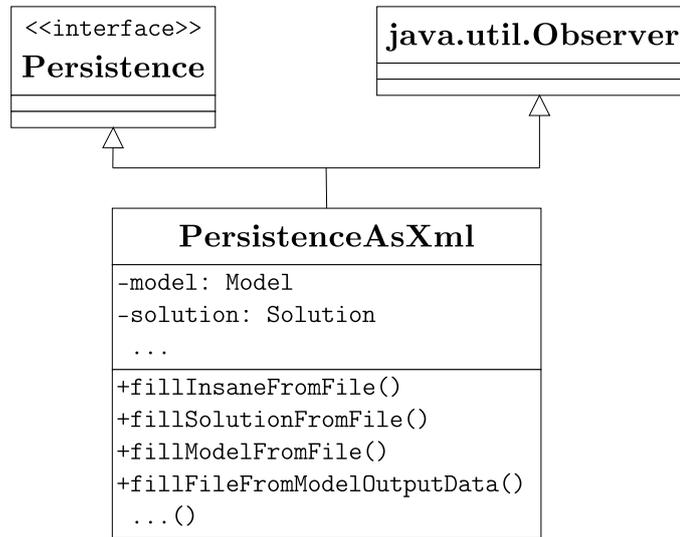


Figura 2.15: Visão geral da classe `Persistence`.

Para a consistência na comunicação entre os objetos de `Persistence`, `Model` e `Solution`, utiliza-se o padrão de projeto *Observador-Observado*. Qualquer alteração nos objetos observados (que estendam `java.util.Observable`) é apropriadamente notificada ao objeto observador (que implementa `java.util.Observer`), através de um mecanismo de propagação de mudanças proporcionado pelo padrão utilizado.

- `Model`: representa o modelo discreto analisado e define, assim, métodos essenciais a cada implementação de modelo específico (figura 2.18). As classes que implementam `Model` possuem diversos atributos que descrevem as características fundamentais de cada modelo discreto.

Um objeto `FemModel` possui listas de nós, elementos, funções de forma, materiais, modelos constitutivos, carregamentos, degenerações e modelos de análise. Além disso, conta com instâncias de `ProblemDriver`, classe que armazena informações relativas ao tipo de problema que o elemento modela, comunicando a `Assembler` quais as parcelas de cada elemento na equação do modelo. Já uma instância de `GfemModel` possui além dos atributos e métodos da classe da qual descende, listas particulares relativas ao processo de enriquecimento do elemento finito.

- **Assembler**: estabelece os métodos necessários para montagem das matrizes e vetores indicados na equação 2.40 e cada método numérico possui sua respectiva implementação.

No caso do MEF, tem-se a classe **FemAssembler**, que possui como atributo importante um objeto do tipo **Model**. Para o MEEG, por sua vez, há a classe **GfemAssembler**, herdeira direta do *assembler* do MEF tradicional.

A figura 2.16 ilustra métodos que merecem destaque em uma análise estática, como **getC()**, responsável pela obtenção da matriz de rigidez, **getX()**, que retorna o vetor das variáveis de estado e **getN()** e **getE()**, responsáveis por fornecer os vetores de cargas nodais e de cargas nodais equivalentes, respectivamente. Em uma análise não linear, as classes anteriormente destacadas também obtêm as parcelas incrementais de cada matriz e vetor; **getIncrementalC()**, por exemplo, retorna o operador tangente do processo incremental-iterativo.

- **Solution**: Montadas as parcelas do sistema 2.40, a solução do mesmo é desenvolvida pelas classes herdeiras de **Solution** (figura 2.17), existindo solucionadores específicos para diferentes tipos de problema.

Há possibilidade de resoluções de problemas elásticos lineares (**SteadyState**), não lineares dinâmicos ou estáticos (**DynamicEquilibriumPath** e **StaticEquilibriumPath**), caracterizados pela obtenção de trajetórias de equilíbrio, análise modal (**Modal Vibration**), entre outros.

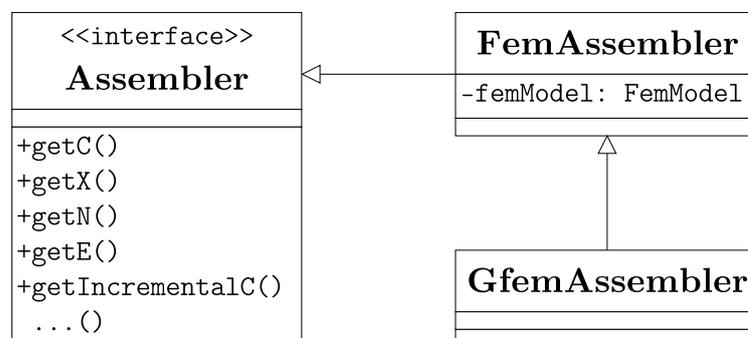


Figura 2.16: Visão geral da classe **Assembler**.

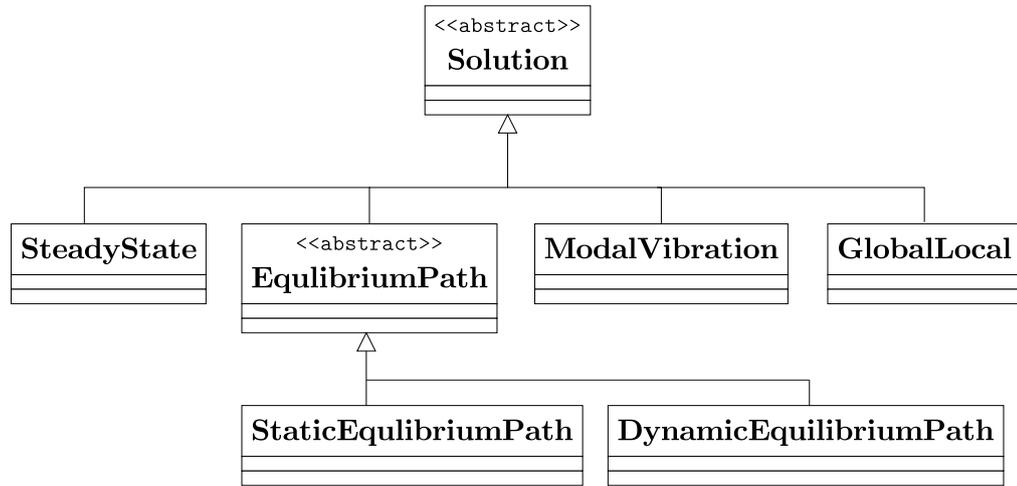


Figura 2.17: Visão geral da classe Solution.

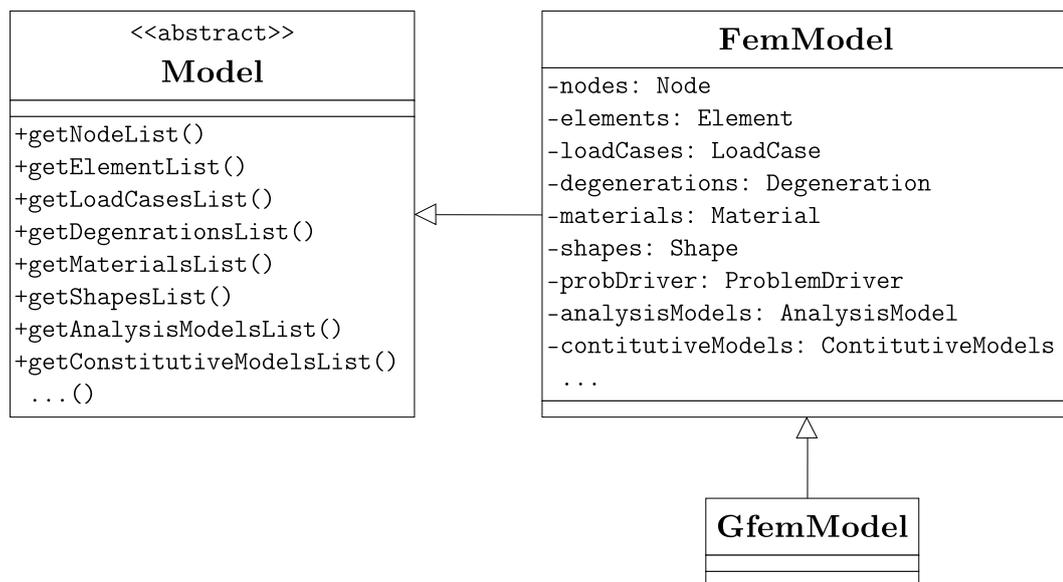


Figura 2.18: Visão geral da classe Model.

# Capítulo 3

## Estado da Arte

No presente capítulo, registra-se uma revisão bibliográfica de trabalhos desenvolvidos no campo da análise multiescala que tratam de meios contínuos em todos os níveis escolhidos, foco do trabalho. Optou-se pela seleção de publicações que descrevam métodos ou estratégias com maior apelo físico, ou seja, que a interpretação dada ao problema de múltiplas escalas tenha relação com os diferentes níveis de observação (e escalas de comprimento) físicos(as) da matéria, conforme apontado anteriormente.

Além disso, relevam-se algumas publicações dedicadas ao estudo da fratura de meios parcialmente frágeis e de fenômenos importantes manifestados por estes materiais, com destaque para obras voltadas à avaliação do efeito de tamanho e de sua relação com a heterogeneidade do meio. De maneira sintética, compilam-se apenas obras representativas de marcos na evolução dos estudos.

Como forma de otimizar a leitura e o entendimento, faz-se a seguinte divisão em seções: inicialmente, apresenta-se na seção seção 3.1, apresenta-se o avanço dos estudos sobre fratura quasi-frágil; enfoque será dado ao concreto, considerado aqui o arquétipo de material parcialmente frágil e que desperta maior interesse acadêmico e tecnológico na engenharia de estruturas. Em seguida, 3.3 uma contextualização histórica dos avanços da investigação das múltiplas escalas dos materiais, com descrição de publicações estudadas, de modo a posicionar as diversas tendências de pesquisa originadas ao longo do tempo, bem como ressaltar a relevância do tema. Na seção 3.4, algumas tentativas de classificação dos métodos multiescala colhidas na literatura são registradas para fornecimento de um panorama comparativo entre as diferentes práticas existentes. Na seção 3.5, evidenciam-se alguns métodos especificamente utilizados para modelagem de materiais parcialmente frágeis ou que tenham o potencial para tal. Finalmente, na seção 3.6, descreve-se o

cenário acadêmico nacional do presente contexto. Optou-se por uma seção específica para apresentação da produção científica do país, de maneira a situar esta pesquisa em âmbito nacional e ressaltar tanto a relevância, quanto a originalidade do tema e das estratégias aplicadas.

Como será visto neste capítulo, é vasto o campo de publicações relacionadas à modelagem multiescala, de tal sorte que a eventual omissão de alguma obra não diminui a sua importância na área ou relevância para o trabalho proposto. Buscou-se selecionar aquelas com maior destaque na literatura e maior compatibilidade ao tema e aos objetivos da tese.

### 3.1 Evolução dos Estudos de Fratura de Meios Parcialmente Frágeis

Faz-se aqui um breve apanhado histórico dos estudos do fraturamento de meios parcialmente frágeis. Conforme mencionado, atenção será dada a obras consideradas como marcos, ou representativas de algumas das tendências acadêmicas ao longo da história. A compilação apresentada aqui não intenciona esgotar o assunto, longe disso; o que se pretende é conceder uma maior coesão à revisão bibliográfica do projeto, fornecendo um panorama tanto dos estudos mais diretamente vinculados à modelagem multiescala (tema considerado núcleo do trabalho proposto e registrado na seção 3.3), quanto da mecânica da fratura de meios parcialmente frágeis, particularmente aqueles referentes ao material concreto.

No início da década de 1960, estreia a aplicação da Mecânica da Fratura ao estudo do fraturamento do concreto para o entendimento do processo de falha desse material. Em 1961, Kaplan (1961) desenvolveu trabalho pioneiro no estudo do concreto. O autor apresentou uma adaptação da teoria de Griffith (1921), propondo dois métodos para determinação da taxa de consumo da energia de deformação durante o processo de propagação de fissuras, o Método Analítico e o Método Experimental Direto. No primeiro, um fórmula para a taxa de variação da energia de deformação foi desenvolvida para vigas em flexão. No segundo, realizou-se um ajuste da relação entre a flexibilidade à carga de ruptura e o tamanho de trinca aos dados experimentais de ensaios de flexão.

Anos mais tarde, Kani (1967) preocupou-se com o efeito de tamanho em estruturas de concreto. Através de ensaios de flexão em quatro pontos em estruturas de concreto armado, Kani analisa a influência do tamanho na resistência ao cisalhamento da peça,

indicando redução da segurança com o aumento das dimensões da estrutura.

Em 1968, [Rashid \(1968\)](#) apresentou um dos primeiros modelos para representação da fissuração do concreto em um código computacional de elementos finitos. Na obra, faz-se uma análise de vasos de pressão de concreto protendido, na qual há a consideração de trincas paralelas distribuídas no domínio do elemento finito. A proposta trata a influência da trinca de modo contínuo, modificando o comportamento constitutivo do elemento finito de isotrópico para ortotrópico ao zerar a rigidez na direção normal à trinca, após um limite de resistência ser alcançado.

A partir da década de 1970, modelos teóricos, de caracteres analíticos ou numéricos, são desenvolvidos para análise do fraturamento de materiais como o concreto. Obras dedicadas a modelagem constitutiva do concreto ganham força e surgem estudos sobre fenômenos importantes manifestados por este tipo de material, como o efeito de tamanho.

Destaca-se, de início, o trabalho de [Hillerborg et al. \(1976\)](#). Os autores propuseram uma análise via Método dos Elementos Finitos que introduziu a Mecânica da Fratura na modelagem do concreto ao considerar uma redistribuição gradual de tensões na trinca após sua abertura (caracterizada pela resistência a tração do material). O amolecimento (*softening*) do concreto é descrito por uma lei linear que incorpora a energia absorvida por unidade de área fissurada. Segundo [Pitangueira \(1998\)](#), nessa obra incorporam-se pela primeira vez critérios para formação e acompanhamento do crescimento estável de fissuras.

No mesmo ano, [Bažant \(1976\)](#) apresentou um estudo teórico sobre a ocorrência de *softening* em estruturas de concreto. Investigou o fenômeno através de critérios de estabilidade, utilizando um modelo uniaxial simples em que se considera uma banda de localização. Concluiu que o (*strain*) *softening* ocorre em virtude do caráter heterogêneo do meio e que a falha se desenvolve em virtude da localização de deformações no material, na qual a energia de deformação armazenada na estrutura é transferida para um pequena região de amolecimento, muitas vezes maior que o tamanho dos agregados no concreto.

Anos mais tarde, [Bažant e Oh \(1983\)](#) formalizam o modelo de fissuração distribuída para tratamento da fratura do concreto. Derivam relações baseadas em flexibilidade (*compliance*), considerando a energia de fratura, a resistência à tração e a largura da banda de fissuração na formulação, esta interpretada pelos autores como a extensão da zona de

processo de fratura. Realizam análises em um número considerável de experimentos anteriores à publicação, não somente verificando a aderência da teoria não linear proposta, mas também observando o efeito de tamanho nos dados experimentais coletados.

No ano seguinte, [Bažant \(1984\)](#) apresenta estudo aprofundado sobre o efeito de tamanho, com destaque para o concreto. Nesse trabalho, o autor compara as respostas ao referido fenômeno fornecidas por teorias determinísticas de critérios de resistência e pela mecânica da fratura elástica linear e propõe um comportamento distinto para materiais que possuem uma região de microfissuração adjacente à frente de trinca, que suaviza a propagação. Bažant fornece uma fórmula para representação do efeito de tamanho na tensão nominal de estruturas frágeis heterogêneas e conclui que, para estruturas pequenas relativamente ao tamanho do agregado, o comportamento se aproxima ao descrito por critérios de resistência; já para estruturas grandes, a equação de Bažant se aproxima assintoticamente para o efeito de tamanho previsto pela MFEL.

Contemporaneamente ao trabalho de Bažant, [Van Mier \(1984\)](#) publica obra com estudo experimental do regime de *softening* de estruturas de concreto submetidas a diferentes condições de carregamento com o intuito de construir uma base comparativa aos diversos modelos constitutivos e numéricos que surgiam à época.

Ainda na década de 1980, [Carpinteri \(1982, 1989\)](#) aplica conceitos da mecânica da fratura ao comportamento do concreto, conceitos esses que segundo o autor vinham sendo muito questionados quando das publicações. Aspectos como efeito de tamanho e *softening* são abordados e considerações relevantes sobre a aplicabilidade da MFEL a estruturas de concreto são postas.

Em sua tese, [Rots \(1988\)](#) apresenta um dos primeiros estudos numérico-computacionais de maior impacto sobre o fraturamento do concreto. Trabalhando extensivamente com conceitos de fissuração, fratura e a incorporação do comportamento de um material como o concreto simples em um modelo de elementos finitos, o autor propõe diferentes análises fisicamente não lineares em exemplos aplicados (com complexidade considerável para a época) e conclusões relevantes sobre o funcionamento de modelos de fissuração distribuída são apresentadas.

Segundo [Penna \(2011\)](#), em paralelo ao desenvolvimento de modelos de fissuração, a mecânica do dano passa a ser empregada na modelagem de materiais parcialmente frágeis, destacando-se os modelos baseados em medidas de deformação equivalente. Neste

contexto, o trabalho de Mazars (1984) se sobressai, marcando uma tendência amplamente utilizada até o momento. Mazars desenvolveu o modelo de dano escalar, no qual o dano é representado por uma variável escalar, representativa da deformação equivalente, e vinculada às deformações principais positivas do domínio.

Outra forma de modelar o comportamento de meios granulares foi proposta por Bažant et al. (1990), como extensão do modelo de Burt e Dougill (1977). Diferentemente do trabalho de Burt e Dougill (1977), que simplesmente considera uma rede de elementos de treliça, com distintas resistências axiais, gerados a partir de um conjunto de pontos aleatoriamente criados, o modelo de Bažant et al. (1990) incorpora a granulometria do meio, considera as partículas elásticas e modela o comportamento da matriz através de uma relação tensão–deformação bilinear nos elementos de treliça representativos da interação entre as partículas.

Em meados dos anos 1990, Carol et al. (1994) publicam um estudo importante. Na obra, a partir de uma notação e um viés apreendido da teoria da plasticidade, os autores formulam modelos de degradação elástica, típicos de simulações cujo o meio é parcialmente frágil, sob uma base unificada e consideravelmente geral, na qual todos os gradientes fundamentais para a análise numérica são apresentados de maneira compacta e direta. No mesmo ano, Bažant (1994) fundamenta uma teoria não local, cuja formulação é implementada para regularizar modelos numéricos com degradação elástica, teoria essa aprofundada por Jirásek (2004), que apresenta maneiras de se operacionalizar os conceitos discutidos.

Ainda nesse período, Shah et al. (1995) oferece um texto base de referência para o estudo dos fenômenos de fraturamento do concreto, apresentado experimentos e discussões pertinentes no âmbito dos materiais parcialmente frágeis. Complementando esse debate, os esforços de Bažant e Planas (1998) resultam num livro denso, com uma revisão extensa e detalhada dos diversos tipos de modelos para simulação e investigação do concreto (e materiais similares), levando em consideração o efeito de tamanho, dentre outras características.

De Borst e Gutiérrez (1999) apresentaram na virada do século um *framework* para modelos de dano e fratura que inclui efeito de tamanho. Modelos constitutivos diversos são formulados sob a perspectiva da mecânica do dano contínuo, e soluções simplificadas para modelos como o de fissuração distribuída são fornecidas pelos autores.

Anos mais tarde, Penna (2011) faz uso das diretrizes de Carol et al. (1994) e De Borst e

Gutiérrez (1999), consolidando um arcabouço teórico e computacional de grande volume, através do qual consegue comparar diversas formulações constitutivas para materiais com degradação elástica, empregando leis inelásticas variadas e modelos constitutivos bastante particulares.

A investigação do fraturamento de meios parcialmente frágeis e de fenômenos associados ao comportamento de meios que manifestam *softening* tem suas bases em fundamentos teóricos antigos. Apesar disso, pode-se considerar que os esforços notadamente voltados para a investigação desses materiais, sobretudo o concreto, são relativamente recentes (a partir da década de 1960), haja vista as publicações com maior destaque no meio acadêmico. Nota-se, inicialmente, uma inclinação para a realização de ensaios laboratoriais como ferramenta para desenvolvimento de estudos sobre o comportamento do concreto. A partir de meados da década de 1970, e sobretudo a partir dos anos 1980, surge uma tendência de proposição de modelos teóricos, sobretudo numéricos, para a simulação do comportamento do material, tendência essa que se consolidou nos tempos atuais. Revisões mais extensas e aprofundadas sobre a mecânica da fratura e a modelagem constitutiva do concreto podem ser encontradas em Pitangueira (1998), Santos (2015), Penna (2011) e Bažant e Planas (1998).

### 3.1.1 Inclusão de Heterogeneidade

A representação de níveis internos da matéria em modelos numéricos congêneres do MEF aplicados ao estudo de estruturas compostas por materiais particulados vem sendo trabalhada, sobretudo, dos anos 1990 até os presentes dias, ou seja, são utilizações relativamente recentes na ciência. Exemplificam-se adiante algumas perspectivas utilizadas para se incluir heterogeneidade em modelos discretos, com destaque para obras associadas ao estudo do concreto.

Em geral, tratamentos numéricos de mesoestruturas assumem dois tipos de características básicas em modelos do MEF: conformidade entre malha e contornos internos, sendo a malha, portanto, completamente alinhada ao traçado das inclusões; ou não conformidade, em que se sobrepõem as partículas ao *grid* de elementos finitos. Adaptando-se a divisão de Bohm (2016), pode-se classificar as abordagens para incorporação de heterogeneidade segundo a figura 3.1:

Nessa linha, no início da década de 1990, Schlangen e van Mier (1992) constroem

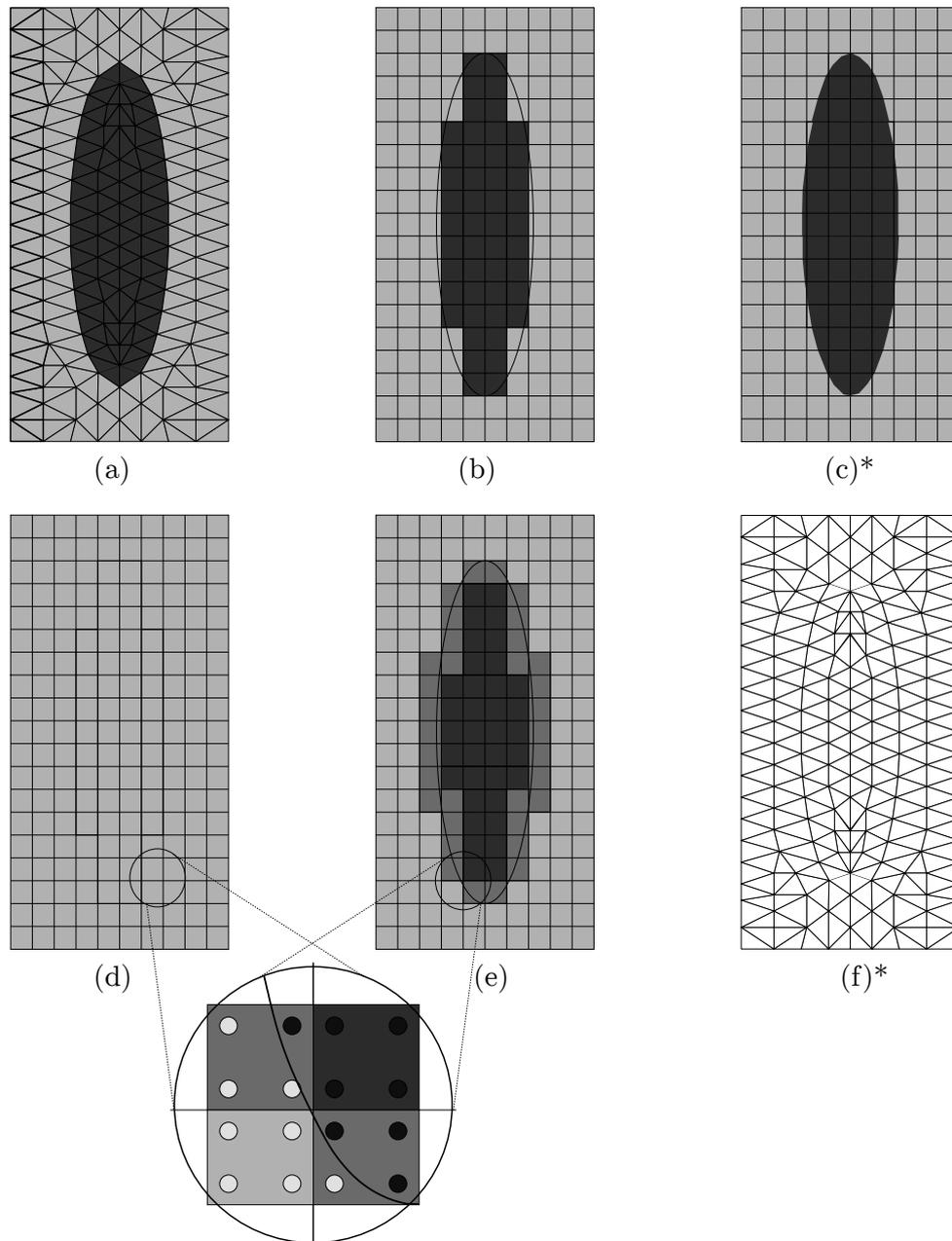


Figura 3.1: Tratamentos numéricos para a heterogeneidade. (a) Conforme; (b) Não conforme monofásico; (c) Não conforme *level-set*; (d) Não conforme probabilístico – modelo de degeneração randômica; (e) Não conforme multifásico; (f) Redes randômicas. Adaptado de [Bohm \(2016\)](#).

um modelo de redes compostas por elementos de pórtico (com nós completamente rígidos, portanto) sobre os quais uma mesoestrutura particulada é sobreposta. Essa escala interior é obtida de acordo com [Bažant et al. \(1990\)](#), que conforme já apontado, apresentam um algoritmo para construir distribuições de partículas.

[Pitangueira \(1998\)](#), por sua vez, fornece uma abordagem probabilística simplificada capaz de introduzir num modelo do MEF, de maneira imediata e concisa, diferentes fases

de um meio, permitindo ainda, combiná-las através de um índice que alinha parâmetros materiais e do modelo numérico em si.

Em dois volumes, Wang et al. (1999a,b) divulgam um estudo numérico com modelagem mesoestrutural direta de domínios de concreto simples, com agregados britados e elementos de interface, fornecendo ainda algoritmos para geração e alocação de partículas em problemas planos.

De maneira quase idêntica a Wang et al. (1999a,b), na década seguinte, Wriggers e Moftah (2006) modelam elementos de volume representativos tridimensionais de concreto, com descrição da morfologia através de partículas esféricas, para obtenção de propriedades constitutivas efetivas do material.

Anos mais tarde, Häfner et al. (2006) fornecem um procedimento algorítmico mais complexo e completo, que permite a geração de partículas com formatos distintos e em três dimensões. Elipsóides com e sem distorções, e portanto, mais ou menos ovais, são alcançados, assim como morfologias com partículas mais anguladas.

## 3.2 Evolução dos Estudos do Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendidos

Conforme apontado no referencial teórico, o MEFEG e seu irmão gêmeo XFEM surgem em meados da década de 1990, frutos de trabalhos equivalentes de dois grupos de pesquisa principais, respectivamente: o da Universidade do Texas (Austin), encabeçado pelos professores J. T. Oden e Ivo Babuška, e o da Universidade Northwestern, comandado pelo professor Ted Belytschko. Primeiramente Babuška et al. (1994), e em seguida Melenk (1995); Melenk e Babuška (1996), apresentam já em 1994-95 os fundamentos da estratégia de enriquecimento da partição da unidade, consolidada em Babuška e Melenk (1997). Em paralelo, Duarte (1995); Duarte e Oden (1996a,b) publicam técnica similar no contexto dos métodos sem malha. Ainda que em Melenk (1995) haja a primeira menção ao método dos elementos generalizados (vide Barros (2002)), oficialmente, contudo, Strouboulis et al. (2000) lançam o MEFEG com seu nome atual em periódico internacional de grande circulação. Na mesma época, Belytschko e Black (1999) forneceram uma das primeiras aplicações da estratégia de enriquecimento para modelagem da propagação de trincas, sob o rótulo de finitos estendidos. Com diferentes nomes no decorrer dos primeiros anos de exploração da técnica de enriquecimento, MEFEG e XFEM são reconhecidos em

definitivo como equivalentes em [Belytschko et al. \(2009\)](#).

As primeiras aplicações de MEF<sub>G</sub> e XFEM foram relativamente distintas, isto é, enquanto a linha do MEF<sub>G</sub> trazia aplicações com o uso de enriquecimento polinomial e, portanto, estratégias de refinamento  $p$ , o XFEM era aplicado na descrição de descontinuidades, sobretudo propagação de trincas ([Belytschko et al., 2009](#)). Essa distinção foi durante boa parte da história dos métodos a grande diferença conceitual, que se reflete na bibliografia da área até hoje. Ainda, a literatura revela que a escola europeia se inclina mais à terminologia do XFEM, enquanto que nas escolas norte-americana e brasileira a circulação do MEF<sub>G</sub> tem considerável relevância. Adiante, destacam-se algumas obras consideradas aqui como ilustrativas das tendências da área.

Lançadas as bases por [Babuška et al. \(1994\)](#); [Babuška e Melenk \(1997\)](#), [Melenk \(1995\)](#) e [Duarte e Oden \(1996b\)](#), [Strouboulis et al. \(2001\)](#), num artigo com mais de cem páginas, apresentaram potencialidades do MEF<sub>G</sub>. Através de exemplos bidimensionais e utilizando um algoritmo especial de integração, os autores avaliaram diferentes modelos e já propuseram aqui a geração de funções de enriquecimento numéricas.

De modo análogo, porém sintético, [Duarte et al. \(2000\)](#) apresentam o MEF<sub>G</sub> aplicado a análise de um componente estrutural tridimensional. Funções de forma polinomiais e que incorporam soluções analíticas singulares são registradas e o desempenho do método é comparado com aquele de um modelo com finitos tradicional.

[Moës et al. \(1999\)](#) estudaram a propagação de trincas em regime linear e elástico utilizando funções de enriquecimento singulares de ponta de trinca, bem como funções de descontinuidade forte, apresentando exemplos em modo I e modo misto. Na mesma linha, [Duarte \(2001\)](#) utilizam-se do *framework* de enriquecimento da PU para modelar trincas em domínios tridimensionais. Pouco tempo depois, [Sukumar et al. \(2001\)](#) e [Moës et al. \(2003\)](#) utilizam funções de descontinuidade fraca para modelar furos e interfaces entre materiais de mesoestruturas particuladas.

[Barros \(2002\)](#) apresenta uma das primeiras aplicações do MEF<sub>G</sub> a problemas com não linearidade material. Utilizando modelos de degradação elástica, malhas grosseiras e enriquecimento polinomial, o autor avalia o desempenho do método em análises estruturais típicas e propõe ainda o uso de um estimador de erro para análises com adaptatividade.

Ainda nos 2000, dois livros são escritos por [Mohammadi \(2008\)](#) e [Khoei \(2015\)](#) com fundamentos e aplicações do XFEM, constituindo-se em duas das poucas obras completas

nesse formato disponíveis na literatura da área.

Partindo de um mecanismo de análise já conhecido na indústria (Noor, 1986), Duarte e Babuška (2005) e Duarte e Kim (2008) publicaram no início da década passada uma nova estratégia de enriquecimento numérico baseada na análise de domínios acessórios extraídos de um problema estrutural global. Essa estratégia é trabalhada nos anos que seguem por Kim et al. (2009) e Kim e Duarte (2009) em problemas da mecânica da fratura linear e não linear, sendo explorada em problemas de propagação de trincas e plasticidade por Gupta et al. (2013) e Kim e Duarte (2015).

Na mesma época, Babuška e Banerjee (2012) forneceram uma alternativa para aprimoramento do enriquecimento. A técnica batizada como estável, retoma propriedades importantes da partição da unidade e estabiliza a análise numérica, sendo aplicada a casos críticos do MEEG por Fonseca et al. (2020) e Novelli et al. (2020).

### 3.3 Evolução da Modelagem Multiescala

O estudo de meios heterogêneos não é algo inédito e vem se desenvolvendo de maneira intermitente ao longo dos dois últimos séculos, pelo menos, sob os mais diferentes enfoques e contextos que compartilham, na sua grande maioria, de uma base teórica dita *micro-mecânica*. Nesse cenário, pode-se identificar quatro períodos distintos na evolução da pesquisa dos materiais heterogêneos, destacando-se aqui os vieses mais fortemente ligados às estratégias multiescala mais difundidas.

O primeiro momento é caracterizado por uma noção intuitiva de homogeneização. A partir de uma suavização dos efeitos das heterogeneidades definiria-se a “verdadeira” resposta do meio, ou seja, as propriedades médias de um meio homogêneo equivalente (Markov, 1999). O segundo período (décadas de 1950 e 1960) é marcado pelo desenvolvimento de soluções analíticas de problemas geometricamente simples para obtenção de propriedades efetivas. No terceiro período (décadas de 1970 e 1980), emerge a formalização da Teoria da Homogeneização, junto à Análise Assintótica, contribuindo fortemente para o domínio da Micromecânica do Contínuo dedicado ao estudo de materiais com microestrutura periódica e que passa a ser amplamente utilizado para desenvolvimento de modelos multiescala anos mais tarde. No quarto período que transcorre pelos últimos 30 anos, aproximadamente, há um apelo computacional muito forte, com desenvolvimento

de estratégias multiescala diversas e no qual se concentra o maior número de obras particularmente voltadas para o estudo de materiais.

No que segue, conforme especificado no introito deste capítulo, registram-se alguns dos trabalhos avaliados na revisão da literatura.

### 3.3.1 Primeiros Modelos

Markov (1999) e Zohdi e Wriggers (2010) fazem uma breve apresentação da história da Micromecânica do Contínuo, destacando os esforços mais antigos despendidos nesse campo, e apresentados aqui de maneira ainda mais sucinta. Nesse primeiro momento da história, pouca atenção foi dada à Mecânica dos Sólidos, havendo maior interesse por fenômenos relacionados ao Magnetismo, Transporte e à Teoria das Soluções.

#### 3.3.1.1 Navier e Cauchy

Pode-se atribuir a Navier e Cauchy uma das primeiras interpretações de homogenização inclinadas à mecânica, em 1827. Partindo do conceito newtoniano de matéria (um conjunto de moléculas interagindo por meio de forças), Navier e Cauchy transformaram um modelo discreto primário em uma abstração contínua, atribuindo cada uma das ditas moléculas a um ponto material do contínuo resultante, com as forças de interação dependendo da posição de equilíbrio do ponto. Ou seja, do ponto de vista macroscópico o contínuo elástico estudado se comportaria da mesma maneira que o modelo discreto microscópico.

#### 3.3.1.2 Poisson, Mossotti e Clausius

Em 1824, Poisson estabeleceu a Teoria do Magnetismo Induzido através da análise de um sistema composto por pequenas partículas condutoras distribuídas em uma matriz não condutora, lançando as bases do modelo de dispersão de esferas e elipses, muito estudado anos após em problemas de elasticidade.

Mossotti, por sua vez, expandiu as análises de Poisson em meados do século XIX, aprimorando a conexão entre as micro e macropropriedades da dispersão. Basicamente, o que Mossotti propôs foi a remoção de uma região do material ao redor de um ponto, de modo a avaliar a força elétrica que o meio fora da área removida exerce no ponto observado.

Em 1879, Clausius reconstrói a abordagem de Mossotti. Após a remoção das moléculas, substitui-se o restante do material por um meio com propriedades dielétricas efetivas. Surge aqui, a noção de meios com propriedades efetivas, muito explorada por Eshelby (1957, 1959), Hill (1963, 1965, 1972) e Budiansky (1965) no estudo de sólidos heterogêneos – extremamente referenciados nos trabalhos que envolvem análise multiescala em elasticidade.

### 3.3.1.3 Maxwell e Lord Rayleigh

Maxwell e Rayleigh trabalharam com fenômenos de transporte em materiais constituídos por uma matriz ocupada por uma distribuição de partículas. Em 1891, Maxwell enfrentou, sob a égide do conceito de homogeneização, o problema da predição do comportamento global de uma dispersão de esferas numa matriz com condutividade distinta, substituindo as heterogeneidades por um material homogêneo (que perturbaria da mesma maneira que as esferas o campo escalar em que estavam inseridos). Em 1892, Rayleigh expande as análises de Maxwell para outros tipos de constituição interna, considerando não somente esferas, mas também cilindros, bem como uma organização periódica destas não homogeneidades.

### 3.3.1.4 Voigt e Reuss

A primeira análise de propriedades mecânicas efetivas de materiais heterogêneos é creditada a Voigt, em 1889. Em seu estudo, Voigt assume que o campo de deformações é uniforme ao longo de uma mistura, obtendo-se assim, uma média volumétrica das rigidezes das fases como (macro)propriedade efetiva, conforme interpreta Hill (1963). O estudo de Voigt é complementado anos depois por Reuss, em 1929. Em sua análise, Reuss assume que o campo de tensões em um policristal é uniforme, obtendo-se assim uma média volumétrica de flexibilidades (Hill, 1963). Os resultados encontrados por Voigt e Reuss constituem limites superior e inferior para propriedades elásticas de sólidos, respectivamente. Hill (1963, 1965, 1972) e outros pesquisadores expandem as análises de determinação de limites para propriedades de meios elásticos, como será exposto posteriormente.

### 3.3.1.5 Einstein

No início do século XX, Einstein resolve o problema de suspensões diluídas (interações entre partículas podem ser ignoradas) para movimentos lentos. Sabendo a viscosidade de

um líquido newtoniano e a fração volumétrica das moléculas em suspensão, que deixavam o referido líquido mais viscoso, Einstein obteve uma fórmula para determinação da viscosidade efetiva (macroscópica ou global) do meio.

### 3.3.2 Décadas de 1950 e 1960

A partir da década de 1950, começam a surgir publicações mais especificamente voltadas para elasticidade. Nesse momento, as obras são direcionadas à obtenção analítica de respostas efetivas (equações fechadas ou limites para certas propriedades) em problemas de pequeno porte, mas não menos complexos.

Eshelby (1957) obtém soluções analíticas para problemas relacionados a sólidos elásticos e isotrópicos em que existam inclusões (regiões no interior de um meio que possuem as mesmas propriedades elásticas do material em seu entorno) ou não homogeneidades/heterogeneidades (regiões que possuem constantes elásticas diferentes do meio no entorno), com destaque para aquelas de forma elíptica. Eshelby prova que para obtenção de várias das respostas aos problemas por ele propostos, é necessário somente o conhecimento do campo de deformações no interior do elipsóide considerado. Dois problemas centrais são colocados por Eshelby: o problema de transformação (*transformation problem*) e o problema da não homogeneidade (*inhomogeneity problem*). O problema de transformação, central na análise proposta pelo autor, consiste num encadeamento lógico de operações definidas por Eshelby como de *corte e solda*, que se caracterizam por suposições e definições simples.

Em publicação posterior, Eshelby (1959) resolve com mais detalhes um problema análogo de determinação do campo de deformações (de modo geral *elastic field*, segundo o autor) fora de uma inclusão/não homogeneidade elipsoidal, podendo este campo ser descrito em termos do potencial harmônico de um sólido elíptico.

Hill (1963) desenvolve alguns princípios teóricos para análise de meios constituídos por duas fases isotrópicas firmemente unidas e de concentrações quaisquer. Assim, avalia-se uma mistura resultante do tipo heterogeneidades-matriz (ou fase 1 imersa em uma matriz formada pela fase 2). Como os módulos de elasticidades das fases são distintos, os campos de tensão e deformação ao longo da mistura são microscopicamente heterogêneos. Propõe-se, portanto, a determinação das propriedades elásticas globais ou macroscópicas, e não a

solução do estado de tensão microscópico detalhado. Nesse contexto, Hill (1963) dedica-se à obtenção de limites para constantes elásticas e à análise comparativa das expressões obtidas com os limites de Voigt, Reuss e Hashin-Shtrikman.

No mesmo ano, Hashin e Shtrikman (1963) apresentam princípios variacionais para derivação de limites superior e inferior das constantes materiais de meios definidos como quasi-isotrópicos e quasi-homogêneos com fases de geometrias arbitrárias. Para proporções volumétricas baixas de heterogeneidades dispersas em uma matriz, os limites calculados são suficientemente próximos para fornecer boas estimativas de coeficientes efetivos.

Budiansky (1965) realiza um tipo de análise autoconsistente (*self-consistent method*) para predição dos módulos de elasticidade e cisalhamento de materiais compósitos multifásicos formados por diferentes fases isotrópicas, elásticas e de formato esférico. Estas fases devem estar distribuídas de tal forma que o meio possa ser considerado homogêneo e isotrópico em nível macroscópico. Através de duas expressões compactas dependentes da concentração de cada uma das fases, de suas constantes elásticas e do coeficiente de Poisson efetivo do material homogêneo (dependência esta, que faz com que as duas expressões devam ser resolvidas simultaneamente), determinam-se os módulos de elasticidade e cisalhamento macroscópicos desejados.

### 3.3.3 Décadas de 1970 e 1980

A partir de 1970 formaliza-se matematicamente a Teoria da Homogeneização para meios periódicos. Segundo Terada e Kikuchi (2001), o primeiro uso do termo homogeneização é atribuído a Babuška (1976). Esta teoria demonstra como equações diferenciais que regem determinado problema de valor de contorno se comportam (assintoticamente) quando um parâmetro  $\epsilon$ , que caracteriza os operadores diferenciais, tende a zero (Terada e Kikuchi, 2001). Fundamentalmente, do ponto de vista físico, considera-se que um meio micro-heterogêneo se comporta da mesma maneira que os seus constituintes, mas com constantes materiais distintas – efetivas – e se estabelece, assim, uma relação entre a composição do material e o seu comportamento estrutural (Markov, 1999; Zohdi e Wriggers, 2010).

Com respeito à formulação da homogeneização de meios periódicos, Bensoussan et al. (1978) e Sanchez-Palencia (1980) estão entre as principais obras citadas. Nelas há detalhamento rigoroso dos fundamentos de Análise Assintótica, bem como de sua interface

com a Teoria da Homogeneização. Para uma revisão mais breve, [Sanchez-Palencia \(1986\)](#) registra definições importantes, apresentando também as perspectivas da área.

[Hashin \(1983\)](#), por sua vez, realizou uma revisão sobre o estudo de materiais compósitos sob o olhar da mecânica aplicada. Avaliou diversos temas relacionados à análise de materiais compósitos, tais como: elasticidade, viscoelasticidade, expansão térmica, resistência, entre outros. Ademais, revisou trabalhos anteriores, como aqueles da década de 1960, reiterando que grande parte dos problemas que são colocados na pesquisa acadêmica de materiais compósitos e que requerem soluções analíticas são de grande dificuldade, de modo que muitos resultados obtidos são de caráter semi-empírico.

[Devries et al. \(1989\)](#) fornecem dois exemplos de investigação da evolução de dano em compósitos. O primeiro trabalha a evolução do dano por ruptura de fibras em um compósito unidirecional. Para isso, constroem um modelo de dano dependente do nível microscópico, fazendo uso de homogeneização assintótica. O segundo investiga efeitos no contorno de materiais estratificados. Nesse caso, como a solução não é satisfatória próximo ao contorno, substitui-se a exigência clássica de periodicidade por uma condição de periodicidade paralela ao contorno.

Outra importante contribuição nesse período foi o trabalho de [Hill \(1972\)](#), que expandindo alguns conceitos previamente expostos por ele ([Hill, 1963](#)), define o dito Princípio de Hill da macro-homogeneidade que preconiza a equivalência energética entre as escalas microscópica e macroscópica.

### 3.3.4 A partir de 1990

A partir da década de 1990, a modelagem multiescala fortalece-se consideravelmente no meio acadêmico e diversos trabalhos passam a ser publicados. Provavelmente, em função da popularização dos computadores pessoais, de tamanho reduzido, com processadores e memórias mais eficientes, e a maior facilidade de acesso à máquinas e operação dos novos sistemas, muitos modelos mais robustos são implementados. Contudo, o poderio operacional é só um gatilho do processo; o mais importante é o interesse latente de grande parte dos especialistas em simulação numérica de tentar modelar a fundo a composição dos materiais e compreender o comportamento de determinado tipo de meio.

Assim, tem-se desde de 1990 uma tendência forte de proposição de métodos cada vez

mais adequados e/ou complexos, e não estritamente do ponto de vista de suas bases matemáticas ou computacionais, mas sim da representação do caráter físico do problema subjacente. Atualmente, busca-se descrever com menos simplificações os problemas numéricos, aproximando-os mais fortemente do comportamento físico real.

Uma das primeiras considerações da Teoria da Homogeneização em um programa computacional para solução numérica do comportamento de materiais é feita por [Guedes e Kikuchi \(1990\)](#). Nesse trabalho, implementa-se o método dos elementos finitos para resolução de problemas em materiais compósitos elásticos, com vazios ou inclusões periódicos, bem como aqueles reforçados por fibras, nos quais se pode processar o deslizamento entre fibra e matriz sob ação de tensões tangenciais. Estuda-se a precisão do MEF na determinação de propriedades efetivas do meio macroscópico e como aprimorá-la. Além disso, há a preocupação de avaliar a aplicabilidade do uso da homogeneização para análise de tensões em materiais compósitos.

No mesmo ano, [Tvergaard \(1990\)](#) realizou uma análise numérica de ligas de alumínio reforçadas com fibras curtas. Neste estudo, utilizou-se uma célula unitária representativa, na qual as fibras foram consideradas alinhadas, com disposição periódica, rígidas ou elásticas. Apresenta-se ainda uma comparação com avaliação experimental de ligas de alumínio com partículas de carvão de silício, inferindo-se que, embora bastante simplificado e aplicável principalmente para materiais em que o método de processamento (por exemplo, moldagem por extrusão ou injeção) promova alinhamento de fibras, o modelo apresenta boas respostas.

Em [Könke \(1995\)](#), avalia-se a evolução de dano em metais submetidos a regime de grandes deslocamentos e grandes deformações. Nesse estudo, o dano microscópico é definido pelo modelo de Cocks/Ashby para crescimento de vazios em materiais isotrópicos, dúcteis e em condições isotérmicas. Nesse modelo, microvazios esféricos se originam no contorno de grãos, inclusões ou segregações e crescem devido a deformações inelásticas da matriz. Atingida uma fração volumétrica de vazios crítica, propaga-se uma trinca macroscópica. Para isso, um algoritmo do tipo “delete e preencha” (*delete-and-fill*) é utilizado, no qual há constante remalhamento do modelo.

Já [Pegon e Anthoine \(1997\)](#) fornecem estratégias numéricas para análise fisicamente não linear de painéis de alvenaria, adotando um modelo de dano contínuo com regularização não local e teoria da homogeneização para meios periódicos. Para tanto, estudam

uma célula unitária sob ação de um estado de tensões principais qualquer obtido através da escolha adequada da disposição da alvenaria frente aos eixos principais. Desse modo, demonstram a viabilidade da obtenção de uma resposta (homogeneizada) macroscópica não linear, através do conhecimento das propriedades individuais dos constituintes desses painéis. Indicam que uma análise em estado plano de deformações generalizadas (no qual a deformação fora do plano não é nula, mas sim dada por uma deformação constante superimposta) é mais adequada que a hipótese (natural) de estado plano de tensões. Além disso, sugerem que as juntas de argamassa contribuem consideravelmente para a resposta global não linear, não devendo ser ignoradas.

No fim da década de 1990, [Smit et al. \(1998\)](#) desenvolvem um método multiescala baseado em homogeneização capaz de descrever grandes deformações e viscoelasticidade em ambos os níveis micro e macroscópicos. A microestrutura é modelada por um elemento de volume representativo (EVR) com periodicidade local. Este método é baseado num algoritmo multinível para o método dos elementos finitos (*multi-level finite element method*) – também referenciado como  $FE^2$  ou  $FE2$  ([Feyel, 2003](#)) – em que a relação tensão-deformação (ou constitutiva) macroscópica é baseada na resposta microscópica dos EVR's centrados em cada um dos pontos de integração dos elementos finitos da malha macroscópica. A transição micro-macro considera que os campos globais são obtidos através do cálculo das médias volumétricas dos respectivos campos microscópicos sobre o EVR. Posteriormente, [Özdemir et al. \(2007\)](#), aplicam o *framework* computacional de [Smit et al. \(1998\)](#) em problemas de condução de calor em sólidos heterogêneos (espuma e refratário) com anisotropia térmica.

Na virada do século, [Kouznetsova et al. \(2001\)](#) analisaram o comportamento de materiais com inclusões pouco rígidas (modeladas como vazios) em regime de grandes deformações. Além de estudos exclusivamente processados no EVR, foram feitas análises de flexão pura fazendo uso de um algoritmo multinível para o MEF ([Smit et al., 1998](#)), considerando tanto microestrutura regular, quanto randômica.

Em [Kouznetsova et al. \(2004b\)](#) encontra-se um aprimoramento da implementação do respectivo método computacional capaz de captar os fenômenos de localização e efeito de tamanho em nível macroscópico. Para tanto, incorpora-se adequadamente uma formulação do segundo gradiente (ou gradiente de segunda ordem; equivalente ao gradiente do

gradiente de deformação clássico de contínuos simples) na descrição cinemática do macro-modelo. Desse modo, tem-se um problema macroscópico representado por um contínuo de alta ordem e um problema microscópico modelado por um contínuo convencional, que fornece para o domínio global as informações constitutivas necessárias.

Similarmente, Feyel (2003) propõe o uso do  $FE^2$  para obter a relação constitutiva macroscópica de um contínuo generalizado de Cosserat a partir do cômputo da resposta da célula microscópica (EVR). Ou seja, a integração das equações constitutivas macroscópicas é substituída por uma avaliação via elementos finitos de um problema microscópico externo em cada ponto de integração, não sendo necessárias as diversas constantes materiais exigidas para os tensores constitutivos de um contínuo de Cosserat.

Já em Kouznetsova et al. (2004a), o efeito do tamanho do EVR no método de homogeneização de segunda ordem é investigado. Demonstra-se que o tamanho do EVR pode estar relacionado ao comprimento de escala (ou comprimento estrutural) do contínuo macroscópico de alta ordem.

Terada e Kikuchi (2001) apresentam uma formulação variacional geral para problemas de duas escalas, posicionando-se sobre critérios de convergência. Aplicam a formulação a alguns problemas clássicos, como estática e contato em elasticidade linear e elastoplasticidade, fornecendo as equações principais de cada um dos cenários sob a estruturação idealizada. Além disso, registram estratégias computacionais para obtenção da solução dos domínios macro e microscópicos, dependentes um do outro. Tais algoritmos envolvem esquemas incrementais-iterativos para determinação dos operadores tangentes e campos internos nos modelos global e local.

Matsui et al. (2004) implementam a formulação de Terada e Kikuchi (2001) em um código de elementos finitos multinível (nomeado por eles de método de análise de duas escalas ou global-local) para realizar testes de viabilidade e eficiência dos resultados da homogeneização. Particularmente, tratam de problemas elastoplásticos em que investigam a influência da perda de homogeneidade da macroestrutura durante a deformação e o impacto do uso da homogeneização nos resultados obtidos (viabilidade). Avaliam também o custo computacional, principalmente o balanço do tempo de processamento (eficiência). Concluem que os erros do processo não linear, para os exemplos estudados, são advindos fundamentalmente da discretização do MEF, não havendo grande influência da homogeneização. Ao final, alegam que o tempo de processamento é devido, quase que

inteiramente, à resolução dos problemas microscópicos, existindo necessidade de grande armazenamento de dados (histórico de deformações dos pontos).

Posteriormente, [Wu et al. \(2012\)](#) investigam o uso de teorias de dano para materiais dúcteis, na análise multiescala de compósitos reforçados com fibras. Utilizam para isso, uma extensão do método de homogeneização por campos médios (*mean-field homogenization approach*) para captar a evolução do dano na matriz do material em nível microscópico e obter as propriedades efetivas desses compósitos. De modo a evitar que localização de dano seja induzida na matriz, faz-se uso de uma formulação de gradientes avançados, particularmente, gradientes não locais.

[Plews e Duarte \(2014\)](#) desenvolvem a solução de problemas de transferência de calor, adotando-se a representação clara de duas escalas de observação e utilizando o MEEG com estratégia Global-Local como técnica para o estabelecimento de uma ponte entre o domínios micro e macroscópicos.

Algumas tentativas de generalização e unificação de técnicas multiescala foram desenvolvidas nos últimos anos. [Hughes et al. \(1998\)](#) apresenta o Método Multiescala Variacional (*Variational Multiscale Method*), uma formulação geral que possibilita levar em consideração mais de dois níveis de observação. Este método depende igualmente do processamento de cada uma das escalas (genericamente, grosseira e refinada), sendo elas intrinsecamente ligadas, ou seja, a solução da escala fina é conduzida pela solução da escala grosseira, bem como a escala grosseira depende da solução da escala fina. De um modo geral, métodos descendentes da proposta de [Hughes et al. \(1998\)](#) tem aplicação predominante em problemas de fluidos.

De maneira análoga, porém ligeiramente mais simples e ilustrativa, [Perić et al. \(2010\)](#) e [Blanco et al. \(2014\)](#) propõem uma unificação variacional para tratar problemas de duas escalas. Em [Perić et al. \(2010\)](#) há a descrição de um método multiescala baseado em homogeneização idealizado para análise de material com comportamento não linear sob regime de pequenas deformações. A formulação proposta culmina em uma estruturação genérica suficiente para ser implementada numericamente pelo MEF, permitindo a construção de um algoritmo que acopla as diferentes escalas. Para validar a implementação, realizam-se duas simulações, a primeira de uma célula quadrada composta por uma matriz elastoplástica perfurada (vazios randomicamente inseridos) e a segunda, uma análise

multiescala completa de um chapa perfurada, também elastoplástica. Como base comparativa, utilizam-se os resultados de uma simulação numérica direta, com discretização integral da microestrutura.

Blanco et al. (2014) expandem as definições de Perić et al. (2010), construindo o que qualificam como uma teoria geral unificada de métodos multiescala baseados no EVR. Esta formulação é alicerçada em três princípios fundamentais, a saber: admissibilidade cinemática, que trata da definição da cinemática de cada uma das escalas e de como elas estão conectadas; dualidade, na qual forças (externas) generalizadas e tensões (internas) generalizadas admissíveis são univocamente definidas como conjugados energéticos (duais) das variáveis cinemáticas escolhidas para descrever o sistema; e finalmente, o Princípio do Trabalho Virtual Multiescala, que nada mais é que uma formulação variacional do princípio de Hill-Mandel. Apresentam diversas especializações da proposta, de modo a ressaltar as aplicações possíveis do conjunto teórico, das quais destacam-se: o equacionamento de problemas de Mecânica dos Sólidos com consideração de efeito dinâmico, o modelo unidimensional, o modelo constitutivo de alta ordem e o modelo de trincas coesivas e localização (este publicado por Sánchez et al. (2013) sob denominação de Modelo Multiescala Orientado à Falha).

Outra formulação de caráter geral foi proposta por E e Engquist (2003); E et al. (2007). O Método Multiescala Heterogêneo (*Heterogeneous Multiscale Method*) considera problemas em duas escalas e possui aplicabilidade em distintos domínios de análise, englobando problemas de sólidos e fluidos. A denominação “heterogêneo” advém da admissibilidade dessa diversidade entre as diferentes escalas, que podem ser tratadas com modelos distintos, por exemplo Dinâmica Molecular na microescala e Mecânica do Contínuo na macro. Em seu trabalho, os autores especificam, dentre outros fatores, como é feita a transição entre as escalas, definindo operadores de compressão (*compression operators*) e reconstrução (*reconstruction operators*) responsáveis pela transmissão de informações nos sentidos macro-micro e micro-macro, respectivamente. O MMH tem como objetivo determinar variáveis macroscópicas através do uso de dados microscópicos. Estas informações da escala mais interna são obtidas através da solução de um problema associado a microescala. Abdulle e Nonnenmacher (2009) apresentam uma implementação simples do MMH para Elementos Finitos e solucionam alguns problemas bi e tridimensionais.

## 3.4 Taxonomia de Modelos Multiescala

Tendo em vista a diversidade de métodos multiescala existentes, procede o intento de nomeá-los frente a uma base comum. Existem algumas tentativas de taxonomia na literatura que não são unívocas e divergem entre si em alguns aspectos, de tal maneira que há referências que qualificam métodos equivalentes (ou até iguais) de maneiras distintas.

### 3.4.1 Feyel (2003)

Feyel (2003) classifica as estratégias multiescala em dois grandes grupos: métodos **sequenciais** e métodos **integrados**. Abordagens sequenciais são aquelas nas quais o comportamento macroscópico de um meio é obtido através de uma análise microscópica mais detalhada isolada (Tvergaard, 1990). Já estratégias integradas são aquelas em que há a computação simultânea de dados macro e microscópicos, havendo uma interação entre as escalas em tempo de processamento; exemplos seriam os métodos baseados em análise de EVR e com homogeneização (Smit et al. (1998), Coenen et al. (2013), Ghosh et al. (1995), Kouznetsova et al. (2001)).

A classificação de Feyel é um tanto restrita e considera um universo relativamente estreito de abordagens, o que talvez se justifique pela difusão ou variabilidade um pouco mais contida de trabalhos do tema à época da publicação.

### 3.4.2 Michopoulos et al. (2005)

Michopoulos et al. (2005) focam na classificação de métodos idealizados para conexão entre modelos discretos e contínuos. Contudo, conforme especificado pelos autores, esse tipo de relação engloba muitos dos problemas e situações envolvidos na ligação contínuo-contínuo, de tal modo que a classificação proposta pode ser estendida para outras abordagens multiescala.

Analogamente a Feyel (2003), para Michopoulos et al. (2005) existem duas categorias, podendo-se dividir as diferentes estratégias em métodos dos tipos **passagem de informação** (*information-passing methods*) ou **concorrentes** (*concurrent methods*).

Em métodos de passagem de informação, conhecidos também por sequenciais (*sequential*), em série (*serial*) ou de passagem de parâmetros (*parameter passing*), as soluções obtidas na escala refinada são utilizadas para obter certas variáveis (como as de estado) no domínio sobrejacente e, em geral, a modelagem do nível inferior exige um modelo

mais refinado e computacionalmente mais complexo. Em problemas não lineares, os modelos refinado e grosseiro têm um acoplamento bidirecional ou em mão dupla (*two-way coupling*), ou seja, a informação é continuamente compartilhada entre as escalas. Para Michopoulos et al. (2005), estratégias baseadas em homogeneização, como aquelas registradas em Smit et al. (1998), Coenen et al. (2013), Ghosh et al. (1995), Kouznetsova et al. (2001), Kouznetsova et al. (2004b,a), Özdemir et al. (2007, 2008), Bosco et al. (2015), Pellegrino et al. (1999), seriam alguns exemplos. Alguns métodos gerais e suas derivações também se enquadrariam nessa classificação (Hughes et al., 1998; E et al., 2007; Abdulle e Nonnenmacher, 2009; Perić et al., 2010; Blanco et al., 2014; Sánchez et al., 2013).

Já nos métodos concorrentes, também denominados por métodos embutidos (*embedded*), integrados (*integrated*) ou *hand-shaking* (“de mãos dadas”, em tradução livre), a solução das diferentes escalas deve ser realizada simultaneamente em diferentes partes do domínio. Nesses tipos de métodos, as escalas estão integradas, seja através da coexistência entre os domínios refinados e grosseiros ou pela superposição dos referidos domínios e respectivas soluções. Lloberas-Valls et al. (2008, 2010, 2012) apresentam o que poderia ser classificado como concorrente segundo Michopoulos et al. (2005). No método da decomposição de domínio, há um proeminente acoplamento entre as diferentes sub-regiões definidas, bem como uma superposição das soluções de uma escala mais refinada com a de uma grosseira.

Tal como em Feyel (2003), cabe ressaltar que a divisão feita aqui é um tanto vaga em excesso, dada a miríade de abordagens hoje existentes, e, em certa medida, com categorias quase intrinsecamente conflitantes. Nesse mérito, aponta-se que não são raros os casos em que ocorram passagem de informação e concorrência de processamento de modelos (com acoplamentos mais ou menos fortes), de tal sorte que a divisão entre *information-passing* e métodos concorrentes é nublada, considerando-se mais clara essa separação nos exemplos fornecidos nos parágrafos anteriores. Michopoulos e colaboradores possuem uma taxonomia que em certa medida está em ligeiro desacordo com a classificação do autor anterior. O rótulo *integrado* (*embedded*, *integrated*) para Michopoulos et al. (2005) é diferente da interpretação de Feyel (2003), por exemplo. Inclina-se aqui, contudo, à linha de Michopoulos et al. (2005), por considerá-la minimamente mais abrangente.

### 3.4.3 De Borst et al. (2006)

De Borst et al. (2006) apresentam um panorama dos métodos multiescala à época da publicação, com maior enfoque em problemas da Mecânica dos Fluidos. Neste trabalho, os autores sugerem uma matriz de classificação de métodos multiescala através de quatro critérios fundamentais, a saber: as propriedades do problema físico subjacente; o processamento da escala espacial; o processamento da escala temporal e as propriedades do *solver*. Através da proposição de um encadeamento de perguntas simples, De Borst et al. (2006) constroem uma orientação básica para qualificação de distintas estratégias, sob a ótica dos critérios anteriores.

Relativamente às **propriedades do problema físico subjacente**, questões como: “O problema deve ser descrito por equações distintas para as diferentes escalas, ou somente uma única equação é suficiente para todas as escalas relevantes?”; “Quantas escalas devem ser consideradas?”; “O quão acopladas estão essas escalas?”; “Há algum tipo de periodicidade na microescala?” e “A solução da escala refinada é necessária localmente ou globalmente?”, são pertinentes a serem feitas para classificação e seleção do modelo.

Já para o **processamento espacial**, indaga-se: “Qual o tipo de discretização adotada: grosseira à refinada, refinada à grosseira ou os domínios estão separados?”; “Como a escala refinada está representada?”; “Como são tratadas as continuidades interelementos nas diferentes escalas?”; “Quais são as hipóteses para o contorno em cada escala?”; “Como é feita a troca de informações entre as escalas?”.

Com relação ao **processamento temporal**, De Borst et al. (2006) propõem a distinção entre as diferentes técnicas em concorrentes ou bidirecionalmente acopladas (*two-way coupled*) e sequenciais ou em série. Outro questionamento procedente para a classificação quanto às escalas temporais é referente à adoção (ou não) de mesma estratégia multiescala para processamento espacial e temporal.

Finalmente, para as **propriedades do *solver*** requiere-se verificar se o solucionador do sistema de equações lineares resultante do processo de discretização está ou não acoplado à estratégia multiescala adotada, o que em geral não se verifica, e, principalmente se o processo de solução é paralelizável ou não.

Com esses questionamentos e avaliações, De Borst et al. (2006) estruturam uma matriz taxonômica, conforme tabela 3.1.

Tabela 3.1: Matriz para classificação de métodos multiescala. Adaptado de [De Borst et al. \(2006\)](#).

<i>Processamento da escala espacial</i>			
<b>Metodologia de discretização</b>	Grosseira à refinada	Refinada à grosseira	Domínios separados
<b>Representação das escalas</b>	Duas escalas	Duas escalas ou mais	
<b>Continuidade</b>	<b>Macro:</b>	Contínuo	Descontínuo
	<b>Micro:</b>	Contínuo	Descontínuo
<b>Condições de contorno da escala refinada</b>	Nenhuma hipótese	Dirichlet	Periódica etc.
<b>Comunicação entre escalas</b>	Projeção variacional	Multiplicador de Lagrange	Acopl. nó a nó etc.
<i>Processamento da escala temporal</i>			
<b>Acoplamento temporal</b>	Concorrente, bidirecional	Sequencial, em série	
<b>Acoplamento espaço-tempo</b>	Framework único	Frameworks distintos	
<b>Tamanho do incremento de tempo</b>	Passo constante	Subiteração	

Exemplificando a concepção de [De Borst et al. \(2006\)](#), um método de elementos finitos multinível, como [Kouznetsova et al. \(2001\)](#), poderia ser classificado com os seguintes parâmetros: *Discretização*: grosseira à refinada (com somente avaliação microscópica local); *Representação*: duas escalas; *Continuidade*: Macro – Contínuo, Micro – Contínuo; *Condições de contorno na microescala*: periódicas; *Comunicação entre as escalas*: Localização/Homogeneização. Como não há diferentes escalas de tempo, a classificação temporal não se aplica.

Interessante ressaltar a diferença de tratamento dos termos *concorrente* e *sequencial*, que nessa classificação têm relação com o processamento temporal.

#### 3.4.4 [Gravemeier et al. \(2007\)](#)

[Gravemeier et al. \(2007\)](#) apresentam uma breve revisão de trabalhos voltados para classificação de modelos multiescala, registrando também uma divisão própria e a descrição de dois métodos que consideram uma generalização, o método multiescala variacional

(Hughes et al., 1998) e o método multiescala heterogêneo (E et al., 2007). À luz da conceituação e da discussão expostas na publicação, Gravemeier et al. (2007) enumeram e classificam alguns métodos multiescala, grande parte deles considerando regime atômico.

O agrupamento adotado por Gravemeier et al. (2007) é baseado na área de aplicação do método, possuindo um caráter mais amplo. Há assim três grupos de concentração: **métodos multiescala em Mecânica dos Sólidos**, **métodos multiescala em Mecânica dos Fluidos** e **métodos mais gerais**. No último ramo se encontram as propostas de Hughes et al. (1998) e E et al. (2007). Complementando a separação anterior, e analogamente a De Borst et al. (2006), Gravemeier et al. (2007) discutem alguns critérios elementares para avaliação de diferentes métodos, como as **características multiescala dos problemas físicos**, o **processamento espacial** e o **processamento temporal**.

Com respeito às características multiescala dos problemas físicos subjacentes, propõem a análise de aspectos como: nível (se as escalas são contínuas ou atômicas, por exemplo), acoplamento (uni- ou bidirecional), consideração de estrutura periódica (muito comum em métodos que se valem de homogeneização) e influência da escala refinada (se há influência na escala global ou se ela é exclusivamente local).

Quanto ao processamento espacial, Gravemeier et al. (2007) avaliam que, em geral, a discretização espacial se estende por todo domínio global, sendo as diferenças entre os modelos vinculada ao método numérico utilizado para resolução dessa escala. Já para uma segunda escala mais interna, notam-se diferentes estratégias, podendo existir tratamentos desde abordagens de dinâmica-molecular até adoção de regimes contínuos.

Finalmente, o processamento temporal é superficialmente tratado. Considerações como o tipo de acoplamento entre as escalas, o tipo de *framework* multiescala utilizado para as escalas de espaço e tempo (se iguais ou distintos) e o método incremental para os domínios grosseiro e refinado (se ambos utilizam o mesmo incremento de tempo ou não) são levantadas.

Após o fornecimento dos critérios de classificação, Gravemeier et al. (2007) fornecem uma matriz taxonômica similar à tabela 3.1 e registrada na tabela 3.2

Tabela 3.2: Matriz para classificação de métodos multiescala. Adaptado de [Gravemeier et al. \(2007\)](#).

<i>Problema físico subjacente</i>			
Níveis	1	2	3
Acomplamento	Unidirecional	Bidirecional	
Estrutura periódica na escala refinada?	Sim	Não	
Influência da escala refinada?	local	global	
<i>Processamento da escala espacial</i>			
Método da primeira escala	Elementos finitos	Volumes finitos	etc.
Método da segunda escala	Dinâmica molecular	Elementos finitos	etc.
Terceira escala?	Quantum	etc.	
Separação de escalas	Contínuo-Atômico	Contínuo-Contínuo	etc.
Passagem de informação	Sistema acoplado	Cond. de contorno	etc.
Hipóteses na escala refinada?	Sim	Não	
<i>Processamento da escala temporal</i>			
Método espaço-tempo?	Sim	Não	
Incremento de tempo da escala refinada?	Igual	Diferente	

### 3.4.5 [E et al. \(2007\)](#)

[E et al. \(2007\)](#)<sup>1</sup> propõem uma classificação de métodos multiescala através da identificação de características fundamentais do problema modelado. Nesse sentido, sugerem as seguintes categorias:

**Tipo A:** engloba problemas que contêm defeitos isolados ou singularidades (trincas, deslocamentos, entre outros), nos quais o modelo microscópico é necessário somente em regiões restritas do domínio global, próximo às áreas com comportamento não suave. Desse modo, o acoplamento macro-micro é localizado.

**Tipo B:** compila problemas que requerem modelagem constitutiva. Proeminente exemplo são os problemas de homogeneização, nos quais a resposta constitutiva é obtida através da análise de um problema microscópico subjacente.

**Tipo C:** relaciona-se a problemas que apresentam atributos de ambos os tipos A e B.

**Tipo D:** vinculada a problemas que apresentam algum tipo de autossimilaridade nas

<sup>1</sup>Embora pareça um erro ortográfico ou de referência para um lusófono, o sobrenome do Prof. Weinan E, da Universidade de Princeton, é relativamente comum na China e remete-se à dinastia Song. Mais em [en.wikipedia.org/wiki/E\\_\(surname\)](http://en.wikipedia.org/wiki/E_(surname)).

escalas, como fractais.

### 3.5 Modelos Multiescala para Materiais Parcialmente Frágeis

Avaliando-se o cenário da análise multiescala nota-se que maioria dos modelos é usada para composições que respeitam a separação de escalas, no estudo de materiais elastoplásticos ou elásticos lineares, ou que apresentem *hardening* de um modo geral; nesse sentido, quase sempre metais e compósitos regulares.

Zaoui (2002) faz uma breve recapitulação de conceitos da Micromecânica Clássica, compendiando definições importantes como o critério de separação de escalas, homogeneização, estimadores de módulos efetivos e limites, além de fornecer um introito à Micromecânica Não Linear. Questões apontadas por Zaoui (2002) como abertas à época de sua publicação, em especial o tratamento de materiais que apresentam evolução de dano e análise de fratura, ainda continuam a intrigar a comunidade científica.

Nesse contexto, Lloberas-Valls et al. (2008) e Lloberas-Valls et al. (2014) apresentam um modelo definido como multiescala de acoplamento forte (*strong coupling multiscale technique*), no qual as escalas superior e inferior são mantidas acopladas ao longo da análise. Consiste em atribuir a cada macroelemento finito um domínio (meso)microscópico e realizar a troca de informações entre eles, ao invés de utilizar os pontos de integração, conforme os métodos do tipo  $FE^2$ . A estratégia multiescala empregada nos trabalhos é chamada de técnica de decomposição de domínios (*domain decomposition technique*), na qual a estrutura é decomposta em vários domínios não superpostos, considerando um refinamento onde necessário.

Paralelamente, Nguyen et al. (2009) apresentam um modelo de dano em duas escalas para concreto, no qual a microestrutura do material é obtida através de simulação numérica da hidratação do cimento (*numerical cement hydration simulation*), com o dano de cada uma das fases dado por um modelo isotrópico não local.

Gitman et al. (2004) e Nguyen et al. (2010) discorrem sobre o elemento de volume representativo em materiais parcialmente frágeis. Gitman et al. (2004) realizam uma análise estatística de EVR's de tamanhos distintos e concluem que não é possível determinar tal elemento para regime de *softening*. Contrariamente, Nguyen et al. (2010) comprova a

existência do elemento de volume representativo para o referido material. Propõem, contudo, que em modelos nos quais se utiliza homogeneização, a mesma leve em consideração o volume da zona não danificada para determinação de tensões e deformações macroscópicas, ao invés da técnica tradicional de obtenção de médias que utiliza integralmente o microdomínio.

Em [Gitman et al. \(2008\)](#) há a formulação do Modelo Multiescala de Volumes Acoplados (*Coupled-volume Mult-scale Model*), um modelo hierárquico para resolução de problemas de duas escalas em regimes elásticos e inelásticos, no qual eliminam-se (ou amenizam-se) os efeitos de dependência de malha, característicos de regimes de *softening*. O modelo é indicado para estudo de meios em que o princípio da separação de escalas não é verificado, como os parcialmente frágeis. Essencialmente, o método abandona a prática comumente empregada de se conectar domínios micro/mesoscópicos a pontos materiais macroscópicos (pontos de integração dos elementos do nível mais externo), substituindo-a pela ideia de se estabelecer uma conexão entre um parâmetro do modelo (tamanho do micro/mesodomínio) com um parâmetro numérico (tamanho da malha macroscópica). Diversos testes são realizados, de modo a avaliar o comportamento global de um modelo unidimensional simples, idealizado como uma região com um pequeno defeito, quando da variação dos parâmetros representativos dos dois níveis.

Ao final da década de 2000, [Könke et al. \(2010\)](#) desenvolveram um modelo adaptativo com microestrutura detalhada para análise da evolução de dano em materiais frágeis (concreto) e dúcteis (aço). Para a definição das heterogeneidades do concreto, utilizaram uma curva granulométrica de agregados e, através de um algoritmo do tipo “pegue e coloque” (*take-and-place*), montaram o modelo microestrutural com um considerável grau de precisão. O evolução do dano foi tomada como parâmetro para construção dos domínios locais e disparador da troca entre modelos macro e microscópicos.

[Sánchez et al. \(2013\)](#) apresentam uma estratégia denominada de formulação variacional multiescala orientada à falha, capaz de capturar fenômenos de nucleação e propagação de bandas de localização de deformações, características de meios com comportamento de *softening*. Nesta obra, estabelece-se um arcabouço teórico consistente e com um caráter geral a ser utilizado na definição de operadores e procedimentos para transição entre escalas (definidas como macro e microscópica). Mais especificamente ao modelo proposto para tratamento de *softening* em meios heterogêneos, o trabalho propõe estratégias para

captura do processo de localização de deformações na microescala e manifestação desse fenômeno em escala macroscópica, através da nucleação e propagação de trincas coesivas. De modo a garantir a existência de EVR's fisicamente admissíveis, os autores propõem a aplicação de condições de contorno específicas no domínio microscópico.

Ampliando um pouco a extensão do domínio multiescala, referencia-se o trabalho de [Bažant et al. \(1990\)](#). No início dos anos de 1990, os autores propuseram um modelo para análise de falha de materiais compostos por agregados frágeis, que embora não seja explicitamente classificado como multiescala, apresenta componentes suficientes para justificar sua inclusão no presente cenário. Ao representar a heterogeneidade do material através de partículas aleatoriamente distribuídas no meio, o Modelo de Partículas/Redes Randômicas (*Random Particle/Lattice Model*) introduz uma nova escala de observação no problema. Seguindo essa abordagem, [Grassl e Bažant \(2009\)](#) apresentam uma modelagem do efeito de tamanho no concreto, utilizando-se modelo de redes, no qual o comportamento mecânico do meio é idealizado por barras de treliça ou molas que suportam carregamento axial. Similarmente, [Cusatis et al. \(2003a,b\)](#) avaliam a evolução de dano em concreto através da referida idealização. Neste modelo, contudo, consegue-se descrever respostas uni, bi e triaxial na compressão, *softening* e localização de deformações, além de fissuração por tração.

### 3.6 Cenário Nacional

Nesta seção, serão apresentados alguns trabalhos desenvolvidos no país manifestamente dedicados à análise multiescala ou que tratem explicitamente da inclusão da heterogeneidade de materiais na modelagem computacional, com destaque para aqueles que versem sobre meios parcialmente frágeis e sobre fenômenos importantes manifestados por estes materiais, como o efeito de tamanho. Ainda, enumeram-se trabalhos relacionados ao MEFM. O apanhado intenciona mostrar ao leitor algumas das tendências seguidas no Brasil, possibilitando o posicionamento da presente proposta no cenário nacional.

[Souza \(2005\)](#) desenvolveu um modelo multiescala para análises de materiais compósitos viscoelásticos com evolução de dano. Nesse trabalho, analisam-se misturas asfálticas do tipo Areia Asfalto Usinada a Quente através da consideração de duas escalas, uma macroscópica homogênea, e uma microscópica heterogênea, constituída por agregados pétreos elásticos distribuídos em uma matriz viscoelástica, representativa de um ligante

asfáltico misturado com agregados finos. No modelo elaborado por Souza (2005), que segue os padrões de estratégias baseadas em algoritmo multinível do MEF e homogeneização computacional, o dano manifestado globalmente é reflexo da propagação de trincas e deformações permanentes na escala local.

Em 2011, Quintela (2011) utilizou a homogeneização assintótica para obtenção de tensores constitutivos efetivos para distintas morfologias de materiais micro-heterogêneos através da análise de diferentes EVR's. Para isso, implementou algoritmos sequenciais e paralelos para avaliar a viabilidade do método, sua adequação frente a resultados de outras obras e o desempenho das estratégias implementadas. Vargas (2016), por sua vez, utiliza algumas das ferramentas computacionais registradas em Quintela (2011) para obter propriedades elásticas efetivas do esmalte dentário humano.

No ano seguinte, Teixeira (2012) apresentou uma modelagem do concreto com inclusão da heterogeneidade do meio. Considerou o material como bifásico, composto por agregados graúdos rígidos imersos em uma matriz com progressão de dano. No trabalho, o autor analisa pequenos domínios bi e tridimensionais, definidos por ele como elementos de volume representativo, sob compressão axial. Modelos com uma única heterogeneidade, em diferentes posições, e outros com maior número de agregados aleatoriamente dispersos foram analisados, via Método de Galerkin Livre de Elementos, para obtenção de propriedades efetivas do concreto, oportunamente comparadas com limites micromecânicos analíticos clássicos. Na mesma época, Alves (2012); Alves et al. (2013) publicavam um *framework* computacional para a implementação do MEFG, bem como estudos avaliando o desempenho do método com distintas técnicas de enriquecimento.

Prado (2013) utiliza metodologias analíticas e computacional para prever propriedades efetivas de meios heterogêneos. Nessa obra, são avaliados compósitos bilaminados e através de dois métodos de homogeneização distintos, o autor obtém resultados analíticos utilizados como base comparativa às respostas numéricas alcançadas através de simulações via MEF de domínios representativos desenvolvidas por ele.

Silva (2014), por sua vez, utiliza o método de homogeneização assintótica para avaliação de propriedades eletromecânicas efetivas de ossos. Considera o material composto por uma matriz piezoelétrica linear e transversalmente isotrópica, na qual há uma distribuição periódica de furos circulares unidirecionais, e utiliza um método de variáveis complexas

com expansão em séries para resolução dos problemas da escala microscópica. Os resultados obtidos são comparados aos de um método clássico de estimação de coeficientes efetivos e apresentam boa concordância, segundo o autor.

No mesmo ano, [Rodriguez \(2014\)](#) apresentou uma modelagem multiescala bidimensional do processo de fraturamento de materiais policristalinos, sob ação de cargas dinâmicas. São consideradas duas escalas, uma microscópica, na qual são modelados os grãos do metal, e outra nanoscópica, na qual é predito o comportamento interatômico. Adotam-se zonas coesivas no entorno de grãos, cujo processo de falha manifestado microscopicamente é reflexo do potencial atômico nas interfaces. Através de um processo de homogeneização, o gradiente de deformações microscópico é calculado, tendo como base as deformações das ligações interatômicas. A obra apresenta a modelagem de dois metais distintos, cobre e zinco, com distribuição de grãos com orientações aleatórias, e consegue avaliar a propagação de trincas em diferentes regiões dos volumes representativos analisados.

No ano seguinte, [Rodrigues \(2015\)](#) registrou uma estratégia multiescala, dita concorrente, segundo o autor, para modelagem de estruturas de concreto com inclusão da heterogeneidade do meio. Em seu trabalho, o autor utiliza um processo adaptativo, no qual um modelo mesoscópico do concreto detalhado é ativado em regiões do domínio na eminência de comportamento não linear. Neste modelo, há distinção de três fases, matriz e agregado graúdo, ambos lineares e elásticos, e zona de transição interfacial, representada por elementos finitos de alta relação de aspecto, com modelos constitutivos de dano. A transição entre as malhas representativas da macro e mesoescalas é feita através de elementos finitos especiais não conformes. No trabalho, diferentes experimentos numéricos são realizados, podendo-se constatar a descrição da evolução do processo de fissuração do material. Utilizando abordagem concorrente semelhante, [Bitencourt \(2015\)](#) propõe um método para análise de materiais cimentícios reforçados com fibras. Nessa obra, as fibras são modeladas como elementos de treliça elastoplásticos e acopladas nos elementos finitos do domínio através de um procedimento específico, regido por um modelo constitutivo apropriado para descrever a relação entre as tensões de aderência e o deslizamento relativo matriz-fibra. Duas abordagens distintas são utilizadas para descrever o comportamento da matriz, uma contínua e outra descontínua, equivalente à adotada por [Rodrigues \(2015\)](#).

Fernandes et al. (2015) analisam o comportamento de placas elastoplásticas com diferentes microestruturas (material uniforme, com inclusões elásticas, perfeitamente elastoplásticas ou vazios). Para tanto, utilizam como estratégia multiescala o *framework* de homogeneização computacional em conjunto com um acoplamento entre MEC e MEF. Para a resolução do problema macroscópico o Método dos Elementos de Contorno é adotado; já para o equilíbrio interno no EVR's, aplica-se o Método dos Elementos Finitos.

Já em 2016, Rodríguez (2016) registrou uma modelagem multiescala do processo de falha em compósitos laminados via MEC. Este trabalho contempla um modelo anisotrópico tridimensional, com soluções fundamentais obtidas através de séries de Fourier. Para incorporação de integrais de domínio, técnicas apropriadas foram implementadas. Ganhos de performance são introduzidos através de estratégia especial para montagem das matrizes do MEC. Na análise do processo de falha, adota-se um modelo multiescala de zonas coesivas, conforme Rodriguez (2014).

Relativamente à avaliação de fenômenos específicos de meios quasi-frágeis, Pitangueira (1998) apresentou, no final da década de 1990, um estudo sobre o efeito de tamanho em estruturas de concreto e sua relação com a heterogeneidade do meio. São compiladas evidências experimentais do referido fenômeno e apresentados alguns dos modelos analíticos e numéricos disponíveis à época para tratar a heterogeneidade do material. Em seu trabalho, sob a luz da simplicidade operacional do MEF, o autor propõe um modelo original e igualmente acessível para introdução da não homogeneidade do meio na simulação computacional do concreto. Através da distribuição aleatória das propriedades materiais de distintas fases entre os pontos de integração da malha de elementos finitos, incorpora-se a heterogeneidade no modelo. Finalmente, com a proposição do índice de heterogeneidade, o autor é capaz de combinar as propriedades constitutivas locais e globais, utilizando fórmulas simples, e captar o efeito de tamanho.

Santos (2015) desenvolveu um amplo estudo experimental em peças de concreto para captura do efeito de tamanho e avaliação de sua relação com a composição do meio. Nesse trabalho, utilizaram-se como técnicas experimentais a correlação por imagem digital e a emissão acústica. Diversos ensaios foram executados, levando em consideração a variação dos agregados, fator água-cimento e classe de resistência do concreto. São propostas conclusões a respeito da influência do tamanho dos corpos-de-prova na obtenção das propriedades medidas, da ação da microestrutura no comportamento estrutural e análise da

zona de processo de fratura, dentre outras.

Já Cayro (2016) apresenta um estudo sobre efeito de escala em estruturas de materiais parcialmente frágeis sob fadiga. A partir de um modelo coesivo com consideração de carregamento cíclico, o autor avalia as potencialidades de sua implementação em relação a outros trabalhos disponíveis na literatura.

No mesmo ano, Birck (2016) divulgou um estudo da evolução do dano em materiais parcialmente frágeis através de um modelo de barras. Nesse trabalho, adota-se um modelo constitutivo de dano bilinear e a aleatoriedade das propriedades do meio heterogêneo é considerada a partir de uma distribuição estatística da energia específica de fratura ao longo do domínio. Experimentos numéricos são realizados para simular ensaios de emissão acústica e avaliar a aderência do modelo proposto a resultados coletados na literatura.

No início dos anos 2000, Barros (2002) e Barros et al. (2004) apresentam estudo pioneiro do método dos elementos finitos no cenário nacional, em que o MEFM é aplicado a análises com não linearidade material com e sem adaptatividade na distribuição do enriquecimento polinomial.

Técnicas diversas de enriquecimento, com destaque para o polinomial, o de trinca e o global-local foram trabalhadas por Alves (2012), fazendo uso de um *framework* para modelos do MEFM divulgado posteriormente em Alves et al. (2013). Valendo-se de parte dessa implementação, Silva (2016) utilizou o MEFM para estudar a propagação de trincas em estruturas compostas por materiais parcialmente frágeis, e em análises estáticas não lineares, portanto. Esse tipo de análise foi explorada por Wolenski et al. (2018), que aplicaram o MEFM com enriquecimento polinomial e um modelo constitutivo de microplanos para o estudo de estruturas de concreto.

Malekan, Barros, e Pitangueira (2018) e Malekan, Silva, Barros, Pitangueira, e Penna (2018) trabalharam com a análise estática de trincas em domínios planos e lineares utilizando o MEFM com enriquecimento global-local. Nestes, o domínio local é fixo e prescrito e funções de enriquecimento singulares, representativas de soluções de ponta de trinca, foram também exploradas.

Por sua vez, Oliveira et al. (2019) avançam no uso do MEFM em problemas da mecânica da fratura linear elástica, aplicando a versão estável do método (SGFEM) em problemas de estado plano. Técnicas de estabilização do MEFM foram também exploradas por Sato (2017) e Weinhardt et al. (2018), respectivamente, para avaliação de painéis

bidimensionais com elementos finitos generalizados de alta ordem e análise dinâmica de barras com seção variável. Análise dinâmica essa trabalhada por [Debella et al. \(2019\)](#) em problemas estruturais de treliças em regime transiente utilizando um esquema particular para obtenção das respostas ao longo do tempo e por [Shang et al. \(2017\)](#), que estudaram vibração livre em modelos do MEFG com distorção de malha e em estado plano de tensão.

Aprimorando os estudos de duas escalas e estabilidade com o MEFG, [Fonseca \(2019\)](#); [Fonseca et al. \(2020\)](#) analisaram a propagação de trincas em problemas bidimensionais com automatização do processo de geração e evolução espacial do problema local. Técnica essa também explorada por [Monteiro et al. \(2020\)](#) e [Novelli et al. \(2020\)](#) na análise fisicamente não linear de estruturas com degradação elástica. Nestes dois últimos, são utilizados mecanismos de comunicação ascendente e descendente diferentes daqueles tradicionalmente vistos na literatura da área.

### 3.7 Síntese

De maneira resumida, ilustra-se a seguir a revisão bibliográfica apresentada, construindo-se uma breve linha do tempo.

- < 1950:

- Primeiras abstrações;
- Mecânica do contínuo com Navier e Cauchy (idealização de um contínuo homogêneo);
- Surgimento da noção de propriedades efetivas;
- Destaque para aplicações ao magnetismo;
- Mecânica da fratura com [Griffith \(1921\)](#).

- 1950 e 1960:

- Soluções fechadas para cálculo de propriedades efetivas com [Eshelby \(1957\)](#) e [Hill \(1963\)](#), principalmente;
- Primeiros modelos teórico-numéricos para o concreto, como p. ex., [Kaplan \(1961\)](#) e [Rashid \(1968\)](#);

- Cabe lembrar, mesmo que não tenha sido abordado no panorama do estado da arte apresentado, por contenção de escopo, que é na década de 1950 que se inicia efetivamente o método dos elementos finitos. Embora já em 1943 Courant tenha apresentado algo que se assemelhasse ao MEF atual, é em 1952 que os trabalhos daquilo que viria a ser chamado de método dos elementos finitos (mais precisamente, em 1960) se iniciam (mais em [Clough \(1990\)](#); [Cook et al. \(2002\)](#); [Teixeira-Dias et al. \(2010\)](#)).

- **1970 e 1980:**

- Modelo de trinca coesiva ([Hillerborg et al. \(1976\)](#));
- Modelos de fissuração distribuída ([Bažant e Oh \(1983\)](#) entre outros);
- Modelos de dano escalar ([Mazars \(1984\)](#), [Mazars e Lemaitre \(1984\)](#) entre outros);
- Surgimento dos primeiros modelos numéricos mais complexos (utilizando o MEF em códigos computacionais um pouco mais robustos), para o estudo do comportamento mecânico de estruturas de concreto ([Rots \(1988\)](#) entre outros);
- Amadurecimento de técnicas de homogeneização ([Babuška \(1976\)](#) entre outros);
- Surgimento de estratégias global-local ([Noor \(1986\)](#)).

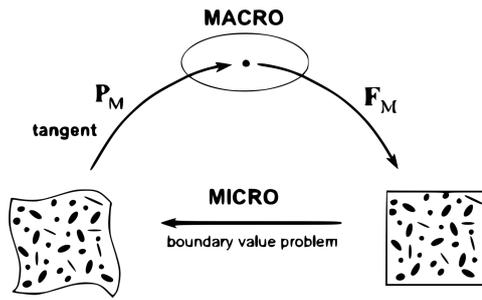
- **1990:**

- Surgimento do MEEG/XFEM ([Strouboulis et al. \(2001, 2000\)](#), [Belytschko e Black \(1999\)](#));
- Surgimento de técnicas numéricas multiescala mais complexas utilizando conceitos de homogeneização e EVR ([Smit et al. \(1998\)](#) entre outros).

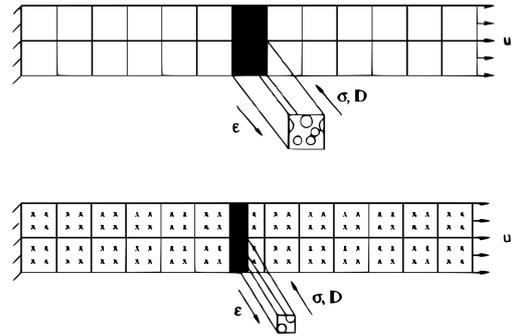
- **2000+:**

- Amadurecimento do MEEG/XFEM ([Duarte e Kim \(2008\)](#), [Dolbow et al. \(2000\)](#), [Fries e Belytschko \(2010\)](#), [Kim et al. \(2010\)](#) entre outros);
- Aparecimento do enriquecimento global-local ([Duarte e Babuška \(2005\)](#));
- Aplicações diversas do MEEG em mecânica da fratura linear, análise fisicamente não linear, dinâmica etc.

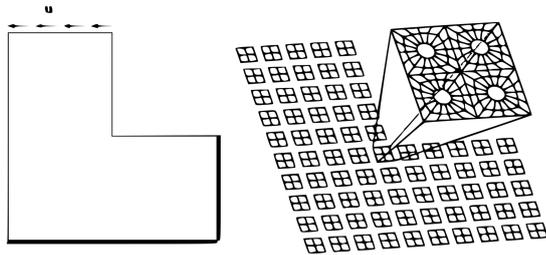
- Amadurecimento de técnicas multiescala tradicionais (Kouznetsova et al. (2001) entre outros);
- Surgimento de abordagens alternativas (Gitman et al. (2008), Lloberas-Valls et al. (2014), Rodrigues et al. (2016), Könke et al. (2010) entre outros)



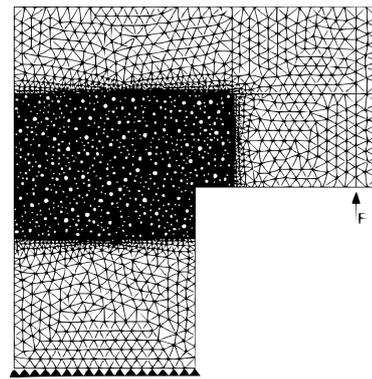
(a) Kouznetsova et al. (2010).



(b) Gitman et al. (2008).



(c) Lloberas-Valls et al. (2012).



(d) Rodrigues (2015).

Figura 3.2: Alguns dos modelos multiescala desenvolvidos na primeira e segunda décadas dos anos 2000. Com aplicação a materiais parcialmente frágeis.

# Capítulo 4

## Materiais e Métodos

Neste capítulo, materiais e métodos são apresentados. Preliminarmente, pode-se delimitar sucintamente o desenvolvimento desse trabalho em algumas etapas temáticas:

- Gênese da estratégia numérica;
- Consolidação teórica da abordagem;
- Projeto do *kernel* do novo sistema;
- Implementação;
- Experimentação;
- Síntese.

Seguindo as concepções abstratas e algorítmicas iniciais da combinação MEFG e GL em uma cadeia incremental-iterativa, formalizou-se a estratégia aqui definida, construindo-se o núcleo numérico para desenvolvimento de simulações dentro do escopo material da pesquisa. Sequencialmente, através de um conjunto de experimentos numérico-computacionais, buscou-se verificar e validar a técnica e a implementação executada. Finalmente, da análise dos expedientes empregados e resultados obtidos, seguiu-se à síntese da pesquisa, procurando-se apontar características e conclusões que se julgaram relevantes.

Assim, no texto que segue, descreve-se de maneira aprofundada o novo mecanismo desenvolvido no âmbito dessa pesquisa para análise não linear de sólidos com falha parcialmente frágil. Elementos teóricos da formulação do método numérico usado, aplicado a problemas de elasticidade com degradação elástica, são registrados. Definições e hipóteses fundamentais assumidas para o desenvolvimento da técnica são pontuadas e explicadas oportunamente. Destacam-se aspectos operacionais, explicando-se adequadamente

os estágios da análise e a arquitetura da implementação computacional. Adicionalmente, classifica-se a técnica multiescala sob o amparo da taxonomia do Capítulo 2. Todas as observações aqui levam em consideração uma interpretação física da formulação matemática; portanto, as variáveis e equações, assim como algumas nomenclaturas, têm um significativo lastro na mecânica estrutural. Definições, proposições e observações são destacadas convenientemente.

## 4.1 Uma Nova Estratégia para Análise Fisicamente Não Linear de Meios Parcialmente Frágeis em Problemas da Mecânica do Dano Contínuo

Nesta seção, formaliza-se a estratégia desenvolvida no âmbito dessa pesquisa para análise de problemas mecânicos estáticos, elásticos e em regime de não linearidade material, fazendo uso do MEFG e do enriquecimento GL (MEFG-GL-NL). O foco da presente seção são os componentes numérico-matemáticos básicos da abordagem proposta que têm fundamentalmente relação com o MEFG em particular. Assim, definições teóricas e aspectos operacionais mínimos são registrados na sequência.

### 4.1.1 Fundamentos Teóricos

Detalham-se aqui axiomas centrais na concepção da técnica, as características gerais do método e a formulação dos problemas global e local em problemas de elasticidade.

#### 4.1.1.1 Definições Preliminares

A associação da metodologia global-local ao MEFG é proposta como uma maneira de modelar problemas em duas escalas, uma grossa (e não linear) – global – e uma refinada (e linear) – local. A estratégia apresentada aqui foi construída para estudar problemas da estática das estruturas, com meios quasi-frágeis, usando modelos constitutivos de degradação elástica, lastreados na Mecânica do Dano, em ambas as escalas e uma adaptação de estratégias incrementais-iterativas tradicionais usadas na aquisição de trajetórias de equilíbrio (curvas carga  $\times$  deslocamento). A esse conjunto de artifícios e aplicações chama-se aqui, abreviadamente, MEFG-GL-NL.

Baseando-se em [Michopoulos et al. \(2005\)](#), a estratégia desta pesquisa poderia ser classificada como um tipo de *information-passing method*. De acordo com a taxonomia

de [E et al. \(2007\)](#), a presente abordagem se enquadraria nas metodologias de Tipo C. Utilizando-se as matrizes de classificação de [De Borst et al. \(2006\)](#) e [Gravemeier et al. \(2007\)](#) (relevando-se escalas temporais), pode-se categorizar a abordagem conforme apontado nas tabelas 4.1 e 4.2, respectivamente.

Tabela 4.1: Matriz de classificação da metodologia de acordo com [De Borst et al. \(2006\)](#).

Variável	Classificação
Metodologia de discretização	Grosseira à refinada
Representação das escalas	Duas escalas (MEFG/MEFG ou MEFG/outro método)*
Continuidade	Ambas escalas contínuas**
Condições de contorno da escala refinada	Dirichlet
Comunicação entre escalas	Condições de contorno, enriquecimento, mapeamento do estado constitutivo

\*Apesar de ser possível usar diferentes modelos discretos, este trabalho emprega MEFG em ambas as escalas;

\*\*Apesar de ser possível usar modelos descontínuos (ex.: *Random Lattice*), aqui consideram-se contínuas as escalas.

Tabela 4.2: Matriz de classificação da metodologia de acordo com [Gravemeier et al. \(2007\)](#).

Variável	Classificação
Níveis	Dois
Acoplamento	Bidirecional
Estrutura periódica na escala refinada?	Não necessariamente
Influência da escala refinada	Global
Método da primeira escala	MEFG
Método da segunda escala	MEFG/Qualquer*
Separação de escalas	Contínuo-Contínuo**
Passagem de informação	Condições de contorno, enriquecimento, mapeamento do estado constitutivo
Hipóteses na escala refinada?	Sim (introdução heterogeneidade, p.ex.)

\*Apesar de ser possível usar diferentes modelos discretos, este trabalho emprega MEFG em ambas as escalas;

\*\*Apesar de ser possível usar modelos descontínuos (ex.: *Random Lattice*), aqui consideram-se contínuas as escalas.

Unindo-se as bases anteriores, com adaptações pertinentes, pode-se rotular o MEFG-GL-NL de acordo com o painel consolidado da tabela 4.3.

Tabela 4.3: Classificação consolidada da metodologia.

Variável	Classificação
Abreviatura	MEFG-GL-NL
Rótulo ou variante	<i>Information-passing</i> do Tipo C
Níveis e representação das escalas	Dois; MEFG/MEFG ou MEFG/outro método
Rótulos dos níveis	Global e local ou macro e meso
Separação de escalas e continuidade	Contínuo-Contínuo
Metodologia de discretização	Grosseira à refinada
Influência da escala refinada	Global
Comunicação	Bidirecional
Condições de contorno da escala refinada	Dirichlet
Passagem de informação	Condições de contorno, enriquecimento, mapeamento do estado constitutivo
Considera estrutura periódica na escala refinada?	Não necessariamente
Admite hipóteses diferentes na escala refinada?	Sim

Afora a utilização fulcral que permeia a pesquisa, uma das aplicações imediatas da metodologia é seu uso como uma técnica híbrida *hp* de refinamento de malha. Usando a estrutura da partição da unidade com enriquecimento nodal, ela pode introduzir na escala global (estrutural) – o problema que é, de fato, o alvo do analista – um aprimoramento no cálculo das aproximações, através da incorporação da solução de uma escala refinada subjacente.

Parte importante da abordagem proposta nesta pesquisa é a concepção de um mecanismo GL (ou MS) com independência de escalas. Embora haja aqui algumas premissas fundamentais ou mesmos limites teóricos, e que tenham sido feitas certas escolhas (Tabela 4.1 e Capítulo 5), há na estrutura implementada a previsão de recursos bastante gerais, prescientes potenciais contingências, abalizada em abstrações e pressupostos que se julgam coesos. Nesse sentido, três são os pontos principais que nortearam o engendramento da técnica:

- **Acoplamento fraco:** a interação macro  $\rightarrow$  meso se dá por imposição de condições de contorno via penalidade. Dessa maneira, não há preocupações formais maiores

que não a transmissão de deslocamentos ao longo da interface entre domínios global e local;

- **Independência de integração:** tradicionalmente, as pesquisas do MEFG-GL utilizam-se de um expediente que aqui é classificado como “integração aninhada”, uma estratégia que amarra as discretizações local e global. Nas obras mais relevantes na linha (Duarte e Babuška (2005); Kim et al. (2009); Kim e Duarte (2009); Kim et al. (2010); Kim e Duarte (2015); Gupta et al. (2012, 2013), entre outras), cada elemento finito generalizado local está univocamente inserido no interior de um elemento finito generalizado global, que é integrado, por sua vez, utilizando-se dos seus elementos filhos como espécies de células de integração. Para problemas mais convencionais, lineares, não há impedimento tácito, pelo contrário, é natural pensar que o uso de células aprimora a integração numérica (dado o maior número de pontos para a tarefa). Contudo, considera-se que há, por um lado, uma potencial incongruência conceitual no uso de quadraturas muito dissemelhantes nos dois níveis (e até impedimento no caso de métodos consideravelmente distintos), e, por outro lado, uma violação da condição básica de análises não lineares (fisicamente, sobretudo), qual seja, a manutenção posicional de um ponto material. Além disso, em problemas com evolução espacial do problema local, esse aninhamento se complica consideravelmente ou mesmo se interdita. Nesse sentido, a consideração de uma escala global estacionária ponto-a-ponto e sem aninhamento, que extrai certas condições dos domínios locais através de um mapeamento de informações, se mostra mais versátil e consistente. A figura 4.1 ilustra o antagonismo entre as abordagens, salientando obstáculos da perspectiva convencional. O não aninhamento de modelos locais no modelo global, e o não emprego, portanto, de integração numérica do macrodomínio utilizando a discretização do mesodomínio são hipóteses importantes. Diferentemente da abordagem MEFG-GL original, considerou-se como pressuposto teórico fundamental para a construção de uma estratégia verdadeiramente desacoplada (ou, mais rigorosamente, fracamente acoplada) a compulsoriedade de desvinculação das integrações das formas fracas dos problemas global e local. Reiterando, dada a necessidade, em análise não linear de problemas com danificação progressiva do meio, de se investigar continuamente a evolução de variáveis históricas do ponto material (PM), é imperativo que os diversos PMs globais (ou seus

correspondentes numéricos, os pontos de integração (PI)) sejam monitorados sistematicamente ao longo de toda a análise, de tal sorte que os PM/PI do modelo global, instância que comanda o espectro não linear da análise, não podem ser alterados durante a simulação. Considera-se teoricamente inconsistente com a realidade material do estudo o não desacoplamento de integrações, uma vez que ele necessariamente levaria a uma alteração posicional do PM/PI, ainda que somente no gatilho da análise. Similarmente, em situações em que se acolha que o problema local surja e/ou avance (especialmente, máxime) em tempo de processamento, uma questão dialética se impõe, isto é, dado que a escala local não existiria quando do início da análise, como fazer com que o problema global (aquele que comanda o processo) se utilize das características do nível subjacente para ser numericamente trabalhado? Isto significaria o conhecimento prévio do modelo local, quer dizer, do conjunto de suas hipóteses fundamentais e da sua discretização – malha esta já univocamente embutida nos elementos globais –, um pressuposto de caráter limitante, absolutamente condicionado ao MEEG e que requereria um domínio anterior do experimento realizado. Mais ainda, considera-se igualmente incongruente o uso de pontos de quadraturas locais muito distintas das de um elemento finito global para o cômputo das aproximações no macrodomínio. Em situações nas quais as quadraturas local e global são bastante discordes (como no caso de elementos triangulares na escala refinada e elementos quadrilaterais na escala grossa, ou no uso de formulações discretas diferentes em nível local – como métodos sem malha, ou elementos de contorno –, com células de integração mais *sui generis*, e dissimilares, portanto, de um elemento finito generalizado), julga-se pouco ortodoxo o uso da discretização local para integração global, ainda que do ponto de vista computacional isso seja possível e certa precisão numérica possa ser alcançada. De mais a mais, não parece prudente deixar que uma instância derivada – isto é, que um modelo acessório (local) – regule o processamento do modelo principal (global), mas sim o inverso.

- **Independência de hipóteses:** do acoplamento fraco e autonomia de solução das formas fracas global e local, admite-se de imediato a possibilidade de discretizações distintas nas duas escalas, remetendo-se não somente a refinamento de malha com manutenção de um mesmo método numérico, mas também à possibilidade de troca de formulação numérica de um nível para o outro.

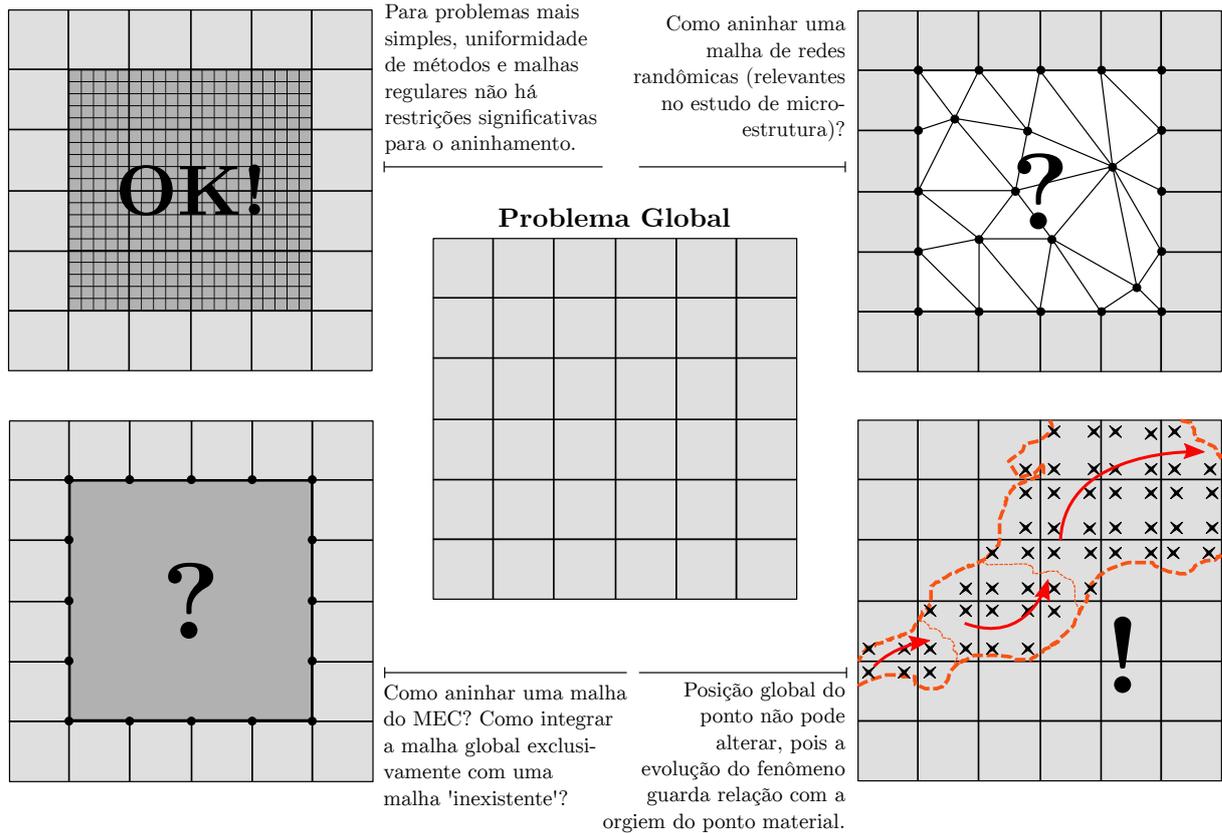


Figura 4.1: Obstáculos da perspectiva convencional de integração. *Em uma análise fisicamente não linear, na qual há evolução de um parâmetro histórico, de um modo completamente irregular e distribuído, o uso direto e unívoco da discretização local possui limitações conceituais.*

Dessa maneira, computacionalmente viabilizou-se uma estratégia com potencial flexibilidade suficiente para realização de simulações em que coabitem, de maneira concisa e fundamentada, modelos dessemelhantes. De tal sorte que se previu a possibilidade de análises em que seja possível a utilização de um método de enriquecimento de PU globalmente (no presente caso, MEF<sub>G</sub>) e, além de um refinamento de malha com manutenção de elementos finitos (EF), a aplicação de elementos de contorno (MEC) ou formulação sem malha (MSM) ou até mesmo outra variante no problema local. Surgem como alternativas igualmente possíveis, embora vinculantes, as trocas de hipóteses cinemáticas, constitutivas ou materiais em escala local, introduzindo no problema subjacente outras características que ensejem um enriquecimento da descrição do comportamento local, tais como heterogeneidades, contínuos melhorados (micromórficos), modelos descontínuos (p.ex., *random lattice models*, RL) ou outras alternativas. Não somente, a estratégia consolidada visa também o cumprimento de quesito formal de separação de escalas (ver capítulo 2), isto é,

que o ferramental permita uma análise estrutural em que o domínio global tenha um comportamento mais homogêneo, enquanto que a escala local, uma resposta mais heterogênea. A Figura 4.2 ilustra as premissas teóricas fundamentais da estratégia.

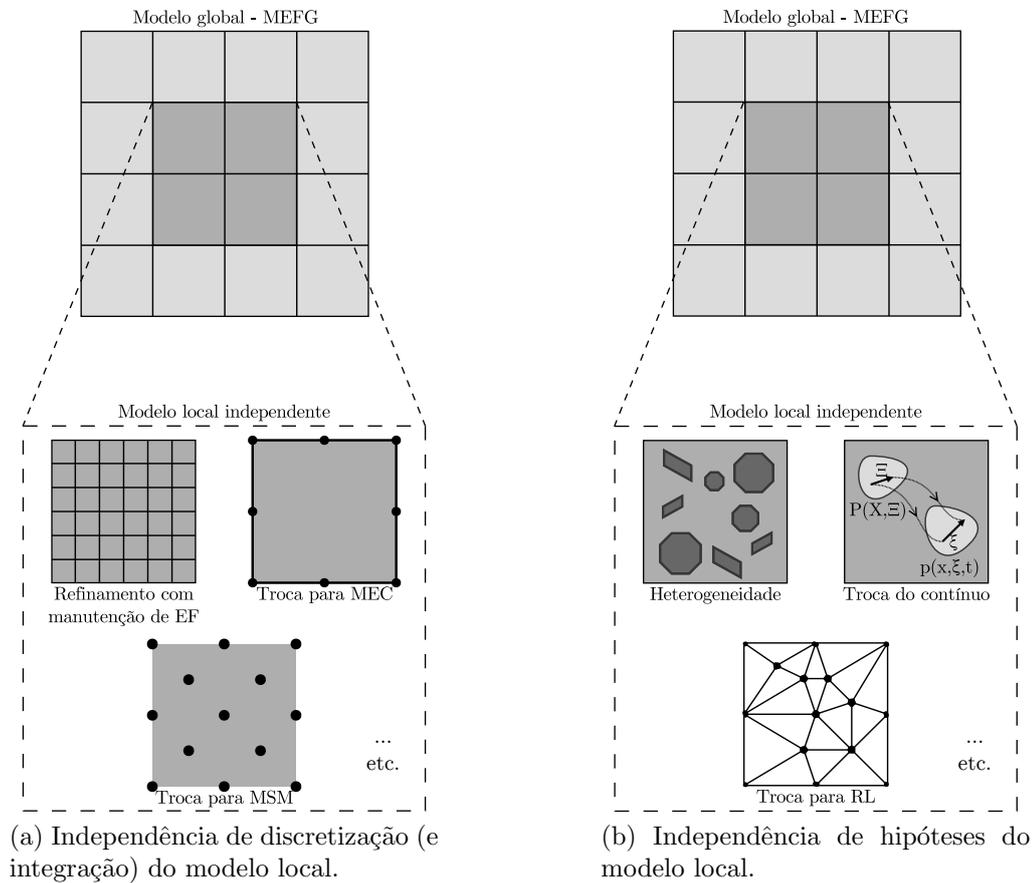


Figura 4.2: Premissas fundamentais da estratégia MEFG-GL-NL.

#### 4.1.1.2 Descrição da Estratégia

Congruente com a seção 2.5 e a formulação subsequente 4.1.1.3, reitera-se que o MEFG-GL-NL é estruturado em dois níveis, global e local, e ordenado em três etapas apartadas em que se processam mecanismos particulares, a saber:

##### 4.1.1.2.1 Etapa 1

Este estágio refere-se à solução do domínio da escala global (que pode estar relacionado a espaços enriquecidos ou não enriquecidos) usando uma malha grosseira. Define-se nesta etapa o que daqui em diante será referido como **downscaling**. O processo de downscaling é caracterizado pela transmissão de informações da escala global para a escala local. Esse mecanismo é baseado em dois componentes principais: um fraco acoplamento entre os

domínios global e local por meio do Método da Penalidade (outras alternativas poderiam ser utilizadas, como multiplicadores Lagrange, mas Penalidade foi escolhida por uma questão de simplicidade) e um mapeamento de pontos materiais entre escalas (consulte seção 4.1.2). A passagem de informações se baseia na transmissão de condições de contorno (CDCs) do problema global (PG) para o problema local (PL), através da integração de variáveis de estado ao longo da fronteira do domínio local e na avaliação do estado constitutivo do modelo local, mapeando-se os pontos de integração entre malhas local e global.

#### 4.1.1.2.2 Etapa 2

Concluída a fase 1, a solução do problema local começa. O modelo é construído em tempo de processamento automaticamente: dada uma janela de localização prescrita (que determina a região onde o domínio local se encontra), um modelo local é extraído do domínio global e refinado por um algoritmo de malhamento padrão (portanto, um refinamento do tipo  $h$ ). Em seguida, as CDCs são aplicadas, as variáveis constitutivas dos pontos materiais locais já mapeados são atualizadas e o problema local é resolvido linearmente (uma etapa de carga total), com uma aproximação secante, ao final de cada passo incremental convergido. Nessa etapa introduz-se na análise as hipóteses locais, que conforme registrado anteriormente, podem ser de diferentes naturezas, guardadas as devidas adaptações.

Dentro do escopo desta pesquisa, são dois os tipos de análises locais: aquelas com meio homogêneo e aquelas com meio heterogêneo. Nestas últimas, através do uso de um modelo mesomecânico morfológico mais detalhado, investiga-se se o modelo numérico herda o componente físico-material do meio. Em ambas, congruente com as escolhas básicas do trabalho, o MEFG é mantido em nível local.

#### 4.1.1.2.3 Etapa 3

Na terceira etapa, define-se o que aqui é chamado de *upscaling*. Nesse mecanismo, informações da escala local são enviadas para a escala global, destacando-se três expedientes principais:

- *Upscaling* cinemático: envio exclusivo das funções de enriquecimento no processo de comunicação ascendente (local→global), ou seja, basicamente o domínio refinado

remete à escala global a solução local (deslocamentos) e graus de liberdade, razão pela qual o mecanismo é rotulado como cinemático.

- *Upscaling* cinemático-material: além das funções de enriquecimento (deslocamentos locais) e GDL, as propriedades elásticas ( $E, \nu, \dots$ ) das fases materiais locais são mapeadas com seus valores absolutos ao domínio global, isto é, os pontos materiais globais sobre regiões com problemas locais ativados recebem as propriedades da respectiva fase local sobre a qual o ponto recai.
- *Upscaling* cinemático-constitutivo: similarmente à perspectiva anterior, neste mecanismo, além das variáveis de estado locais (que compõem as funções de enriquecimento padrão do MEEG), uma informação adicional é enviada, qual seja, uma variável histórica representativa de uma deformação equivalente homogeneizada. Essa grandeza é calculada para cada ponto de integração global com base num volume elementar de dimensão característica  $s$  centrado no referido ponto e utilizando as variáveis internas do domínio local acessório, no qual uma descrição material bifásica distinta, porém alusiva da mistura global, é empregada. A homogeneização garante, em teoria, que o contínuo heterogêneo, que descreve a mesoescala, seja traduzido para um contínuo homogêneo, característico da escala macroscópica (Gitman et al., 2008). Este mecanismo é utilizado para obtenção da resposta constitutiva global do material, nas regiões em que seja ativada a análise mesoscópica. Através da execução de uma média volumétrica/espacial nos volumes de integração (volumes pertinentes a cada ponto de integração macroscópico mapeado para o domínio local), obtém-se os campos internos (deformações e tensões) do meio material. O enriquecimento do nó global é extraído nesta etapa. Este procedimento prevê que não somente a aproximação da PU global seja melhorada, havendo um aprimoramento da cinemática do problema, como também que uma comunicação simplificada entre as escalas ocorra, ou seja, que a mesoescala transmita grande parte de seus efeitos à macroescala, basicamente, através do envio de informações a um nó global.

A figura 4.3 ilustra as premissas anteriores.

É importante notar que, de acordo com as diretrizes da análise não linear proposta, o problema global enriquecido de uma passo incremental  $k$  é o problema global inicial do passo  $k + 1$ . Em contraste com Duarte e Kim (2008); Kim et al. (2009, 2010, 2012); Alves

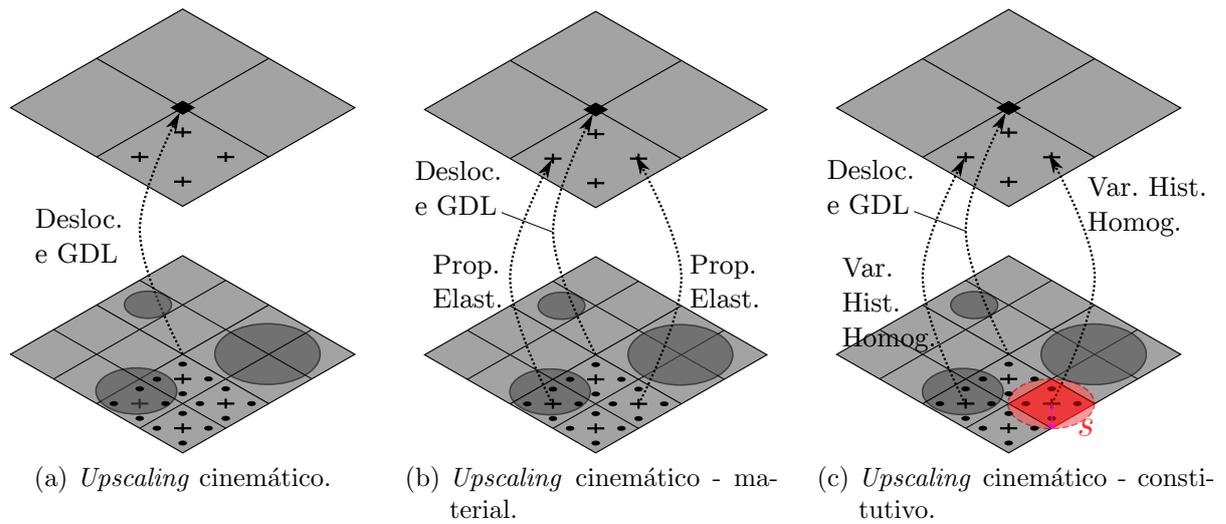


Figura 4.3: Mecanismos de comunicação ascendente: *upscalings* cinemático (4.3a), cinemático-material (4.3b) e cinemático-constitutivo (4.3c). ■: nó enriquecido; ×: pto. de integração global; ●: pto. de integração local; ●: inclusão; ○, s: domínio de homogeneização.

(2012), a integração numérica do problema global é realizada em uma malha fixa, não se usando, portanto, a estratégia de aninhamento de elementos locais dentro da malha global (consulte 4.1.2). Para aumentar a precisão da integração gaussiana do espaço enriquecido, o número de pontos de integração da malha global pode ser aumentado. Nesta obra, dobra-se a quadratura original, isto é, se a função de forma do elemento pode ser integrada em teoria com  $2 \times 2$  pontos de integração, utilizam-se  $4 \times 4$  pontos.

Adiciona-se que, de um ponto de vista semântico, dentro do entendimento que se concede aqui ao mecanismo do MEFGL, o termo *enriquecimento* pode ganhar tons um pouco mais vistosos: há uma relação direta e intrínseca ao processo formal de enriquecimento nodal da PU, conforme dito, mas há também uma referência a um processo de melhoramento da descrição física ou numérica do problema em nível local. Ou seja, enriquece-se não somente os nós da PU com graus de liberdade adicionais e funções apropriadas, mas também incorpora-se no modelo global original certas características extras que podem fazer com que o modelo numérico herde com mais vigor a física que subjaz o problema estudado. Desse modo, diferencia-se aqui dois enriquecimentos como forma de simplificação e clareza de terminologias: o enriquecimento *stricto*, originário e tradicional do MEFGL, e o enriquecimento *lato*, um tanto mais amplo, que engloba todos os melhoramentos (ou mais precisamente, tentativas de aprimoramento) e mecanismos relativos ao problema local e sua comunicação com o domínio global, incluindo o enriquecimento

nodal.

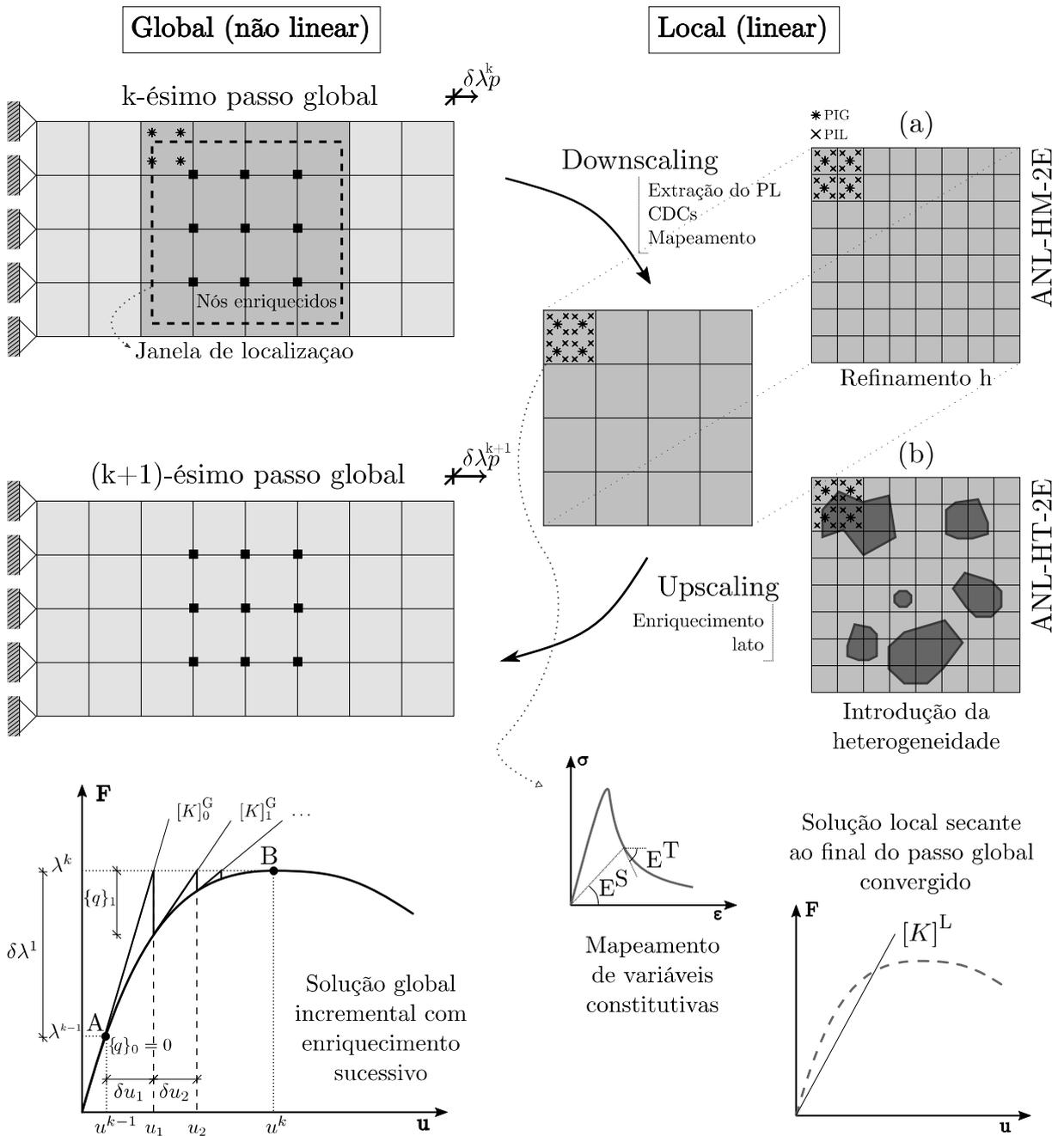


Figura 4.4: Esquemática do processo de solução do MEFG-GL-NL.

A Figura 4.4 ilustra o processo de solução do MEFG-GL-NL, apontando cada um dos mecanismos registrados anteriormente. Extraída uma região para construção de um PL, transferem-se CDCs e mapeiam-se pontos de integração entre escalas (PIG e PIL, pontos globais e locais, respectivamente), definindo-se adequadamente as variáveis constitutivas correntes. No PL, dois tratamentos são explorados aqui: o primeiro, o simples refinamento de malha com manutenção de meio homogêneo (Local (a), ANL-HM-2E; Figura 4.4), e

o segundo, refinamento com introdução de heterogeneidade material (Local (b), ANL-HT-2E; Figura 4.4). O espectro não linear da análise é comandado pelo macrodomínio estrutural, enquanto em nível local o problema é solucionado linearmente uma vez a cada passo global convergido, enriquecendo-se o PG do passo seguinte.

#### 4.1.1.3 Formulação do MEEG-GL-NL Aplicada à Elasticidade

Considerando um problema estático genérico da mecânica das estruturas e elasticidade tridimensional, tem-se:

##### 4.1.1.3.1 Problema de valor de contorno (PVC) a ser modelado: forma forte.

Seja  $\bar{\Omega}^G = \Omega^G \cup \Gamma^G$  um domínio em  $\mathbb{R}^3$ , cujo contorno pode ser dividido segundo  $\Gamma^G = \Gamma^{G,D} \cup \Gamma^{G,N}$ , com  $\Gamma^{G,D} \cap \Gamma^{G,N} = \emptyset$ , em que  $G$  faz referência ao problema global,  $D$  se relaciona com CDC essenciais e  $N$ , com CDC naturais, temos:

$$\sigma_{ij,j} + \beta_i = 0, \quad \text{em } \Omega^G; \quad (4.1)$$

$$u_i = \hat{u}_i, \quad \text{em } \Gamma^{G,D}; \quad (4.2)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \hat{t}_i, \quad \text{em } \Gamma^{G,N}; \quad (4.3)$$

$$\sigma_{ij} = \bar{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (4.4)$$

em que  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões, função de  $u_i$  e mapeado de  $\varepsilon_{kl}$  através de  $\bar{E}_{ijkl}$ ,  $\beta_i$  são forças de corpo (por unidade de volume),  $n_j$  é o vetor normal à superfície  $\Gamma^{G,N}$  e  $\hat{u}_i$  e  $\hat{t}_i$  são condições de contorno prescritas.

##### 4.1.1.3.2 Forma fraca do problema global.

Para a obtenção da forma fraca do PVC em questão, diversas estratégias podem ser adotadas. Via de regra, em mecânica das estruturas, utiliza-se o *Princípio dos Trabalhos Virtuais* (PTV) (Lanczos, 1952). Aqui será adotada, por mero intento de estabelecer uma maior coesão/continuidade entre as notações e um relativo formalismo maior, uma abordagem de cunho funcional mais tradicional. Técnicas para obtenção de formas fracas são encontradas em diversas publicações (Babuška e Szabó, 1991; Oden e Reddy, 1976; Oden e Demkowicz, 2010; Washizu, 1975).

Multiplicando-se Eq. 4.1 por funções de teste  $v_i^G$ , integrando-se em  $\Omega^G$  e considerando-se que os campos fazem referência a um passo  $k$ , para efeito de simples indicação do

processo incremental, têm-se:

$$\int_{\Omega^G} -\sigma_{ij,j}(u_i^{G^k})v_i^{G^k} d\Omega = \int_{\Omega^G} \beta_i v_i^{G^k} d\Omega \quad (4.5)$$

Pela regra da cadeia podemos escrever (omitindo-se alguns rótulos por simplicidade):

$$(\sigma_{ij}v_i) = \sigma_{ij,j}v_i + \sigma_{ij}v_{i,j},$$

que reorganizada fornece:

$$-\sigma_{ij,j}v_i = \sigma_{ij}v_{i,j} - (\sigma_{ij}v_i)_{,j}.$$

Retornando-se em Eq. 4.5 e substituindo-se a relação anterior, obtemos:

$$\int_{\Omega^G} (\sigma_{ij}v_{i,j}) d\Omega - \int_{\Omega^G} (\sigma_{ij}v_i)_{,j} d\Omega = \int_{\Omega^G} \beta_i v_i d\Omega. \quad (4.6)$$

Pelo teorema da divergência e da definição  $\Gamma = \Gamma^{G,D} \cup \Gamma^{G,N}$ , pode-se escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^G} (\sigma_{ij}v_i)_{,j} d\Omega &= \int_{\Gamma^G} \sigma_{ij}n_j v_i d\Gamma, \text{ e} \\ \int_{\Gamma^G} \sigma_{ij}n_j v_i d\Gamma &= \int_{\Gamma^{G,D}} \sigma_{ij}n_j v_i d\Gamma + \int_{\Gamma^{G,N}} \sigma_{ij}n_j v_i d\Gamma, \end{aligned}$$

que podem ser substituídas em Eq. 4.6, resultando

$$\int_{\Omega^G} \sigma_{ij}v_{i,j} d\Omega - \int_{\Gamma^{G,N}} \sigma_{ij}n_j v_i d\Gamma - \int_{\Gamma^{G,D}} \sigma_{ij}n_j v_i d\Gamma = \int_{\Omega^G} \beta_i v_i d\Omega. \quad (4.7)$$

Avaliando-se as condições de contorno na equação 4.7, temos que  $\int_{\Gamma^{G,N}} \sigma_{ij}n_j v_i d\Gamma = \int_{\Gamma^{G,N}} \hat{t}_i v_i d\Gamma$ , em  $\Gamma^{G,N}$ . Como  $v_i \rightarrow 0$  em  $\Gamma^{G,D}$  e como já sabemos a resposta em  $\Gamma^{G,D}$  ( $u_i = \hat{u}_i$ ), não há a necessidade de se testar a integral em  $\Gamma^{G,D}$ . Assim, a forma fraca do problema é dada por

$$\int_{\Omega^G} \sigma_{ij}(u_i^{G^k})v_{i,j}^{G^k} d\Omega = \int_{\Omega^G} \beta_i v_i^{G^k} d\Omega + \int_{\Gamma^{G,N}} \hat{t}_i v_i^{G^k} d\Gamma. \quad (4.8)$$

Como  $\sigma_{ij}$  é simétrico,  $\sigma_{ij}v_{i,j} = \sigma_{ij}(\frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}))$ . Sabendo-se que  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$ , pode-se reescrever a Eq. 4.8 de modo análogo ao PTV:

$$\int_{\Omega^G} \sigma_{ij}(u_i^{G^k})\varepsilon_{ij}(v_i^{G^k}) d\Omega = \int_{\Omega^G} \beta_i v_i^{G^k} d\Omega + \int_{\Gamma^{G,N}} \hat{t}_i v_i^{G^k} d\Gamma. \quad (4.9)$$

Finalmente, sendo  $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear em  $\mathcal{H}^1(\Omega^G) \times \mathcal{H}^1(\Omega^G)$  e  $\mathcal{F}(\cdot)$ , uma forma linear em  $\mathcal{H}^1(\Omega^G)$ , em que  $\mathcal{H}^1(\Omega^G)$  é um espaço de Hilbert (de regularidade apropriada; aqui, exigindo-se primeiras derivadas apenas) que contém funções  $\mathcal{L}^2(\Omega^G)$  – funções quadrado integráveis – com primeiras derivadas em  $\mathcal{L}^2(\Omega^G)$ , lê-se a formulação fraca segundo:

Encontre  $u_i^{G^k} \in \mathcal{U}^G(\Omega^G) = \left\{ u_i^{G^k} \in \mathcal{H}^1(\Omega^G) : \kappa u_i|_{\Gamma^{G,D}} = \hat{u} \right\}$ , tal que  $\mathcal{B}(u_i^{G^k}, v_i^{G^k}) = \mathcal{F}(v_i^{G^k})$ , para todo  $v_i^{G^k} \in \mathcal{V}^G(\Omega^G) = \left\{ v_i^{G^k} \in \mathcal{H}^1(\Omega^G) : \kappa v_i|_{\Gamma^{G,D}} = 0 \right\}$ , em que

$$\mathcal{B}(u_i^{G^k}, v_i^{G^k}) = \int_{\Omega^G} \bar{E}_{ijkl}^k u_{l,m}^{G^k} v_{i,j}^{G^k} d\Omega, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{F}(v_i^{G^k}) = \int_{\Omega^G} \beta_i v_i^{G^k} d\Omega + \int_{\Gamma^{G,N}} \hat{t}_i v_i^{G^k} d\Gamma. \quad (4.11)$$

#### 4.1.1.3.3 Forma fraca do problema local.

Analogamente ao problema global, pode-se construir uma equação integral para o domínio local. Seja  $\bar{\Omega}^L = \Omega^L \cup \Gamma^L$  um domínio em  $\mathbb{R}^3$ , tal que  $\bar{\Omega}^L \subset \bar{\Omega}^G$ . Admitindo-se aqui neste trabalho que este problema é de Dirichlet, há a necessidade de se prescrever deslocamentos no contorno desse domínio. Assim, considerando-se as superfícies básicas no contorno de  $\bar{\Omega}^L$  como sendo: (1) a interseção entre  $\Gamma^L$  e  $\Gamma^{G,D}$ , onde se aplica de maneira exata  $\hat{u}_i$ , (2) a interseção entre  $\Gamma^L$  e  $\Gamma^{G,N}$ , na qual se aplica  $\hat{t}_i$  e (3) a interface interna entre os dois domínios, para a qual se transferem os deslocamentos provenientes do problema global, ou mais precisamente, a solução global  $u_i^G$ . Assim, similarmente à Eq. 4.9, a forma fraca do problema local é dada por

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^L} \sigma_{ij}(u_i^{L^k}) v_{i,j}^{L^k} d\Omega + \varrho \int_{\Gamma^L \setminus (\Gamma^L \cap \Gamma^{G,N})} u_i^{L^k} v_i^{L^k} d\Gamma = \int_{\Omega^L} \beta_i v_i^{L^k} d\Omega + \int_{\Gamma^L \cap \Gamma^{G,N}} \hat{t}_i v_i^{L^k} d\Gamma \\ + \int_{\Gamma^L \cap \Gamma^{G,D}} v_i^{L^k} \hat{u}_i d\Gamma + \varrho \int_{\Gamma^L \setminus (\Gamma^L \cap \Gamma^G)} u_i^{G^k} v_i^{L^k} d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dada a natureza de  $\Gamma^L \setminus (\Gamma^L \cap \Gamma^{G,D})$  e  $\Gamma^L \setminus (\Gamma^L \cap \Gamma^{G,N})$ , suas extensões em comparação com  $\Gamma^L \setminus (\Gamma^L \cap \Gamma^G)$ , e as condições de contorno em cada superfície, os efeitos de  $\hat{u}_i$  e  $\hat{t}_i$  podem não ser tão significativos quanto os deslocamentos na interface entre os domínios no interior de  $\bar{\Omega}^G$ , de tal sorte que, em geral,  $\bar{\Omega}^L$  costuma estar completamente (ou grande parte) aninhado em  $\bar{\Omega}^G$ , não tocando  $\Gamma^G$ . Dessa maneira, esse trabalho utilizou em muitos casos a seguinte simplificação:

$$\int_{\Omega^L} \sigma_{ij}(u_i^{L^k}) v_{i,j}^{L^k} d\Omega + \varrho \int_{\Gamma^L \setminus (\Gamma^L \cap \Gamma^G)} u_i^{L^k} v_i^{L^k} d\Gamma = \int_{\Omega^L} \beta_i v_i^{L^k} d\Omega + \varrho \int_{\Gamma^L \setminus (\Gamma^L \cap \Gamma^G)} u_i^{G^k} v_i^{L^k} d\Gamma. \quad (4.13)$$

Assim, o problema local pode ser enunciado da seguinte maneira:

Encontre  $u_i^{L^k} \in \mathcal{U}^L(\Omega^L) \subset \mathcal{H}^1(\Omega^L)$ , tal que  $\mathcal{B}(u_i^{G^k}, v_i^{G^k}) = \mathcal{F}(v_i^{G^k})$ , para todo  $v_i^{L^k} \in \mathcal{V}^L(\Omega^L)$ , em que

$$\mathcal{B}(u_i^{L^k}, v_i^{L^k}) = \int_{\Omega^L} \bar{E}_{ijklm}^k u_{l,m}^{L^k} v_{i,j}^{L^k} d\Omega + \varrho \int_{\Gamma^L \setminus (\Gamma^L \cap \Gamma^G)} u_i^{L^k} v_i^{L^k} d\Gamma, \quad (4.14)$$

$$\mathcal{F}(v_i^{L^k}) = \int_{\Omega^L} \beta_i v_i^{L^k} d\Omega + \varrho \int_{\Gamma^L \setminus (\Gamma^L \cap \Gamma^G)} u_i^{G^k} v_i^{L^k} d\Gamma. \quad (4.15)$$

É comum que na equação de equilíbrio 4.1 forças de corpo sejam desprezadas. Assim, neste trabalho, nas equações de cada problema  $\beta_i = 0$ .

#### 4.1.1.4 Discretização das Equações de Equilíbrio

Munidos das equações de equilíbrio em suas formas integrais (e contínuas), podemos discretizar cada uma delas seguindo os princípios de Galerkin (Hughes, 1987), ou seja, construir subespaços de aproximação finitos  $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$  nos quais buscaremos aproximações  $u_i^{\alpha, h^k}$  (projeções ortogonais) das funções  $u_i^\alpha$ ,  $\alpha = G, L$ , ao longo do processo incremental  $k$ . Considerando, portanto, que se os referidos subespaços finitos  $\mathcal{U}^h$  e  $\mathcal{V}^h$  têm como funções de base respectivamente  $\phi^\alpha$  e  $\varphi^\alpha$ , pode-se escrever:

$$u_j^{\alpha, k} \approx u_j^{\alpha, h^k} = \sum_{j=1}^n \phi_j^{\alpha, k} \mu_j^{\alpha, k} \quad (4.16)$$

$$v_j^{\alpha, k} \approx v_j^{\alpha, h^k} = \sum_{j=1}^n \varphi_j^{\alpha, k} \nu_j^{\alpha, k} \quad (4.17)$$

em que  $\mu_j^\alpha$  são parâmetros a se determinar e  $\nu_j^\alpha$  são valores arbitrários.

No Método de Galerkin as funções de base (ou de forma) originais são usadas como funções peso, de tal sorte que  $\varphi^\alpha = \phi^\alpha$  (Zienkiewicz e Taylor, 2000), e por simplicidade considera-se, em geral,  $\mathcal{U}^h = \mathcal{V}^h$  (Oden e Reddy, 1976).

Neste trabalho, as funções  $\phi^\alpha = \{\phi_1^\alpha \cdots \phi_m^\alpha\}$  são as funções de forma do MEEG ( $N^{MEFG}$ ) – seção 2.4 –. Para  $\alpha = G$ , ou seja, para o problema global, essa base se associa a espaços enriquecidos com estratégia global-local ( $\mathcal{U}^{ENR}$ ) e a espaços não enriquecidos, particularmente neste caso, à partição da unidade do FEM tradicional ( $\mathcal{U}^{FEM}$ ) ou seja,  $\mathcal{U}^{G, h} = \mathcal{U}^{FEM} + \mathcal{U}^{ENR}$ . Já para  $\alpha = L$ , em geral, buscam-se aqui funções no espaço da PU. Desse modo, para um subdomínio  $\Omega^e \subset \bar{\Omega}^\alpha$ :

$$u_j^{\alpha, h} = \sum_{j=1}^n N_j^{MEF} a_j + \sum_{j=1}^n N_j^{MEF} \sum_{i=1}^{n^{ENR}} L_{ji} b_{ji} \equiv [N^{MEFG}] \{\mu^{\alpha, h}\} \quad (4.18)$$

em que

$$\{\mu^{\alpha,h}\}^\top := \begin{bmatrix} a_1 & b_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_n & b_{n1} & \cdots & b_{nn^{ENR}}, \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$[N^{MEFG}] := \begin{bmatrix} N_1^{MEF} & L_{11}N_1^{MEF} & \cdots & L_{1i}N_1^{MEF} & \cdots & N_n^{MEF} & L_{n1}N_n^{MEF} & \cdots & L_{nn^{ENR}}N_n^{MEF} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Portanto, com base na formulação da seção anterior, os problemas a serem resolvidos assumem a seguinte forma (tratamento similar a outros casos pode ser encontrado em [Oden e Reddy \(1976\)](#) e [Barros \(2002\)](#)):

Encontre  $u_i^{\alpha,h^k} \in \mathcal{U}^h(\Omega^\alpha)$  tal que  $\mathcal{B}(u_i^{\alpha,h^k}, v_i^{\alpha,h^k}) = \mathcal{F}(v_i^{\alpha,h^k})$ , para todo  $v_i^{\alpha,h^k} \in \mathcal{U}^h(\Omega^\alpha)$ , em que

$$\mathcal{B}\left(\bigcup_e [N^{MEFG}]^k \{\mu^{\alpha,h}\}^k, \bigcup_e [N^{MEFG}]^k \{\nu^{\alpha,h}\}^k\right) = \mathcal{F}\left(\bigcup_e [N^{MEFG}]^k \{\nu^{\alpha,h}\}^k\right) \quad (4.21)$$

representa a aproximação do PVC original, sendo  $\bigcup_e$  indicativo da assemblagem das parcelas elementares  $e$  e  $\{\nu^{\alpha,h}\}^\top = [c_1 \ d_{11} \ \cdots \ d_{1i} \ \cdots \ c_n \ d_{n1} \ \cdots \ d_{nn^{ENR}}]$ .

## 4.1.2 Aspectos Complementares

A sistematização de aspectos operacionais relevantes é realizada na sequência. Considera-se como propriedades e mecanismos importantes de serem ressaltados o processo algorítmico que comanda a estratégia numérica não linear, mecânicas internas do processo de solução, sobretudo *downscaling* e *upscaling*, e equações discretas acessórias.

Retomando as noções genéricas previamente expostas no referencial teórico e aliando-as à formulação anterior acima, estreita-se aqui o nexo da matemática subjacente ao estudo detalhando-se o funcionamento do processo incremental-iterativo deste trabalho em específico. Apesar de parcela importante das equações de um método baseado no conceito de elementos finitos ser de amplo conhecimento da comunidade especializada, aqui optou-se por certa prolixidade por razões de unidade textual e completude.

### 4.1.2.1 Processo Incremental-Iterativo

Trazendo as equações de equilíbrio do tipo [4.8/4.9/4.13](#) ao formato [2.33](#), chegamos em uma expressão representativa da condição de equilíbrio incremental correspondente à

iteração  $n$  do passo  $k$ , dada pela equação 4.22, a seguir:

$$[K]_{n-1}^k \{\delta u\}_n^k = \delta \lambda_n^k \{p\} + \{q\}_{n-1}^k, \quad (4.22)$$

em que:

$[K]_{n-1}^k$  é a matriz de rigidez incremental na iteração  $n - 1$  do passo  $k$ , função do campo de deslocamentos  $\{u\}_{n-1}^k$ ;

$\{\delta u\}_n^k$  é o vetor de deslocamentos incrementais da iteração  $n$  do passo  $k$ ;

$\delta \lambda_n^k$  é o incremento do fator de cargas na iteração  $n$  do passo  $k$ ;

$\{p\}$  é o vetor de cargas de referência;

$\{q\}_{n-1}^k$  é o vetor de forças residuais da iteração  $n - 1$  do passo  $k$ .

Todas as expressões a seguir são relativas a um determinado passo  $k$  fixo. Assim, para maior clareza, este índice será omitido, a menos nos casos em que haja a necessidade de expressá-lo.

Determina-se, inicialmente, um valor para o incremento de carga  $\delta \lambda_n$  em função do parâmetro de controle. A partir dessa definição, obtém-se o incremento de deslocamentos  $\{\delta u\}_n$ , que pode ser decomposto em duas parcelas: uma associada à carga de referência  $\{\delta u^P\}_n$  e outra associada à carga residual ou desbalanceada  $\{\delta u^Q\}_n$ , segundo a seguinte expressão – equação 4.23:

$$\{\delta u\}_n = \delta \lambda_n \{\delta u^P\}_n + \{\delta u^Q\}_n \quad (4.23)$$

de modo que

$$[K]_{n-1} \{\delta u^P\}_n = \{p\} \quad (4.24)$$

e

$$[K]_{n-1} \{\delta u^Q\}_n = \{q\}_{n-1}. \quad (4.25)$$

Concluída a iteração, verifica-se a convergência segundo critérios de forças ou deslocamentos, conforme equação 4.26:

$$\epsilon \geq \frac{\|\{q\}\|}{\|\{\lambda p\}\|_n} \quad \text{or} \quad \epsilon \geq \frac{\|\{\delta u\}\|}{\|\{u\}\|_n} \quad (4.26)$$

em que  $\epsilon$  equivale a uma tolerância compatível.

Não atingida a convergência, calcula-se o valor de um novo incremento  $\delta \lambda_n$  através de uma equação de restrição dependente do método de controle.

As variáveis do problema são atualizadas segundo as equações 4.27 e 4.28:

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \delta\lambda_n, \quad (4.27)$$

$$\{u\}_n = \{u\}_{n-1} + \{\delta u\}_n. \quad (4.28)$$

Já o vetor de cargas residuais é obtido através da equação 4.29, a seguir. Ressalta-se que na primeira iteração de cada passo  $\{q\}_{n-1} \equiv \{q\}_0 = \{0\}$ , ou seja, não existem cargas desbalanceadas e há, portanto, equilíbrio.

$$\{q\}_n = \lambda_n \{p\} - \{f\}_n \quad (4.29)$$

em que  $\{f\}_n$  é o vetor de forças devidas às tensões internas ao final da iteração  $n$ .

Na figura 4.1, registra-se o diagrama de atividades do algoritmo genérico do MEFGL-NL. A etapa dependente de técnicas de controle de trajetórias é abordada com mais detalhe por Yang e Kuo (1994), De Borst et al. (2012) e Pitangueira (1998).

#### 4.1.2.2 Equações Discretas Adicionais

Já de posse da formalização anterior, podemos agora retornar às Eqs. 4.8, 4.9, 4.13, 4.22 e escrever de um modo mais palatável e computacionalmente aderente, para um subdomínio elementar  $\Omega^{\alpha,e}$ , escolhido como o global por padrão e generalidade ( $\alpha = G$ ;  $\Omega^{G,e} \equiv \Omega^e$  no que segue), as seguintes relações em um passo  $k$ :

##### 4.1.2.2.1 Aproximação para $u_i^h$ e $v_i^h$

$$\{u^h\} = [N^{MEFG}]\{\mu\}, \quad (4.30)$$

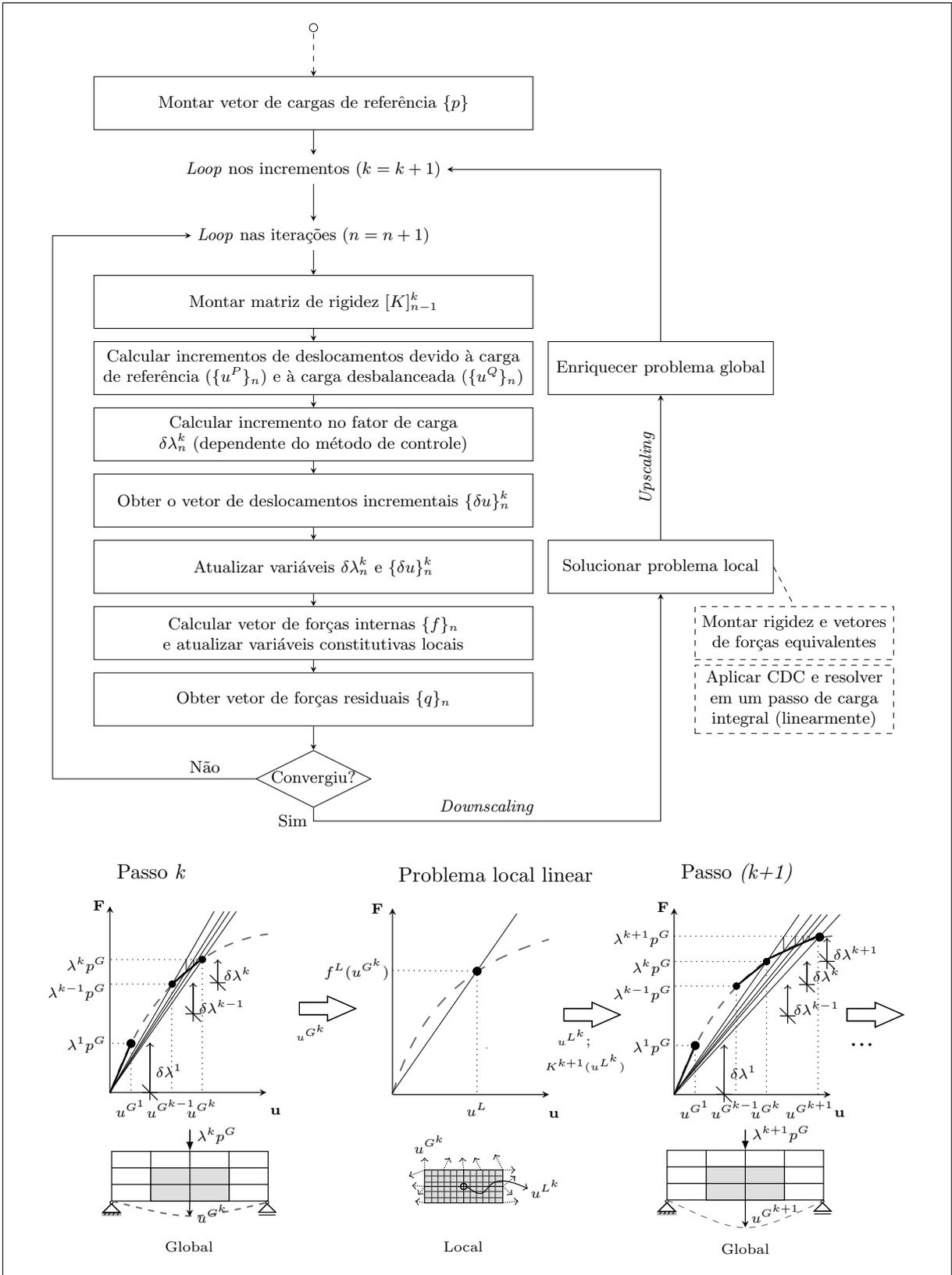
$$\{v^h\} = [N^{MEFG}]\{\nu\}. \quad (4.31)$$

##### 4.1.2.2.2 Aproximação para $u_{i,j}^h$ e $v_{i,j}^h$

$$\{u^h\} = [B^{MEFG}]\{\mu\}, \quad (4.32)$$

$$\{v^h\} = [B^{MEFG}]\{\nu\}, \quad (4.33)$$

$$B_{ij}^{MEFG} = N_{i,j}^{MEFG} \equiv \frac{\partial N_i}{\partial x_j}. \quad (4.34)$$



Algoritmo 4.1: Algoritmo MEFGL-NL.

#### 4.1.2.2.3 Parcelas da Equação de Equilíbrio

$$[K]_{n-1}^k := \int_{\Omega^e} [B^{MEFG}]^\top [\bar{E}] [B^{MEFG}] d\Omega, \quad (4.35)$$

$$\{p\} := \int_{\Omega^e} [N^{MEFG}]^\top \{\beta\} d\Omega + \int_{\Gamma^{e,N}} [N^{MEFG}]^\top \{\bar{t}\} d\Gamma, \quad (4.36)$$

$$\{q\}_n := \lambda_n \{p\} - \int_{\Omega^e} [B^{MEFG}]^\top [\sigma] d\Omega. \quad (4.37)$$

#### 4.1.2.2.4 Integrais Numéricas

Uma das características fundamentais de métodos numéricos baseados na (ou similares à) abstração de elementos finitos é a formulação paramétrica, talvez a particularidade que tenha concedido a essas técnicas seu grande sucesso. Tal abordagem considera que cada subdomínio elementar  $\Omega^e$  em  $x_i$  é parametrizado num espaço normalizado de base  $\xi_i$ , de maneira a se conceder generalidade e certa imutabilidade a formulação nuclear das funções de forma. Além disso, o cálculo das expressões anteriores é facilitado. Computacionalmente, essas integrais são calculadas utilizando-se técnicas de integração numérica com quadraturas específicas (Cook et al., 2002; Zienkiewicz e Taylor, 2000; Hughes, 1987). Aqui empregou-se a abordagem mais tradicional em MEF com quadraturas de Gauss tradicionais.

Sem o propósito de formalizar a teoria contida nessa mecânica, enuncia-se a seguir apenas uma das expressões anteriores em seu formato numérico, de maneira meramente ilustrativa.

$$[K(\xi_i^{G,L})] = \sum_i [B^{MEFG}(\xi_i^{G,L})]^\top [\bar{E}] [B^{MEFG}(\xi_i^{G,L})] |J(\xi_i^{G,L})| w_{\xi_i^{G,L}}, \quad (4.38)$$

$\xi_i^{G,L}$  representa um conjunto de coordenadas naturais (globais ou locais), aludindo a um ponto de integração,  $J$  é a transformação jacobiana entre  $\xi_i$  e  $x_i$  e  $w_\xi$  o peso.

#### 4.1.2.3 Manifestação da Não Linearidade em Problemas de Degradação Elástica

A figura 4.5 sumariza a influência da degradação material na análise não linear aqui estudada; as equações discretas anteriormente apresentadas compõem o esquema ilustrado. Como se pode ver, existem basicamente duas portas de entrada para o comportamento material não linear no modelo numérico:

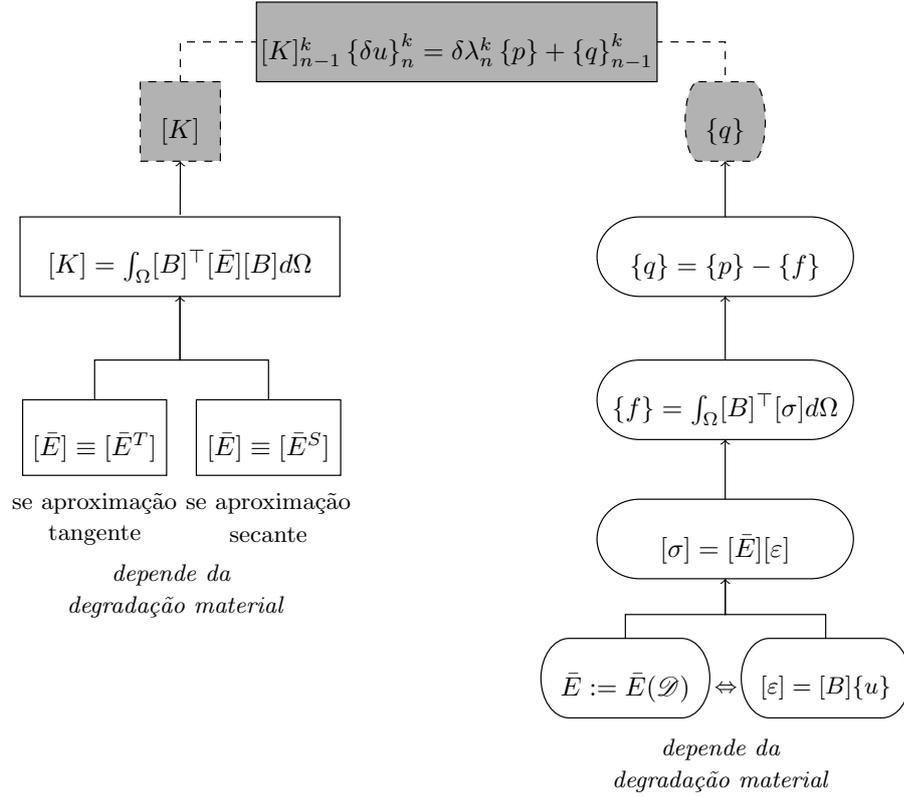


Figura 4.5: Influência da degradação material na análise não linear.

- A matriz de rigidez, que pode ser tangente, de fato, ou secante, a depender de como se opte construir os operadores constitutivos que estabelecem as relações entre os campos materiais internos do modelo;
- O vetor de forças internas, cujo cômputo depende do campo de tensões, mapeado do campo de deformações via operador linear constitutivo.

#### 4.1.2.4 Mapeamento de Pontos Materiais

O MEFGL-NL se baseia na independência da malha global para a integração numérica, ou seja, não há aninhamento de malha ou integração em supostas células (em contraste com Duarte e Kim (2008); Kim et al. (2009, 2010)). Portanto, tendo Eq. 4.38 em mente, para calcular-se cada equação discreta é necessário executar um mapeamento específico dos pontos de integração, no qual o modelo global obterá os enriquecimentos dos pontos materiais e o modelo local receberá o estado constitutivo local atualizado. Para fazer isso, o ponto de integração de uma escala precisa ser mapeado do seu conjunto de coordenadas naturais atual ( $\xi_i^{G,L}$ ) para um grupo de coordenadas físicas ( $x_i$ ), que serão finalmente traduzidas para um novo conjunto de coordenadas naturais dentro da outra

escala  $(\xi_i^{L,G})$ , sendo a qualidade da integração no espaço de aproximação enriquecido regulada pelo número de pontos de integração globais. A figura 4.6 ilustra o esquema de mapeamento. O número de pontos de integração é meramente qualitativo.

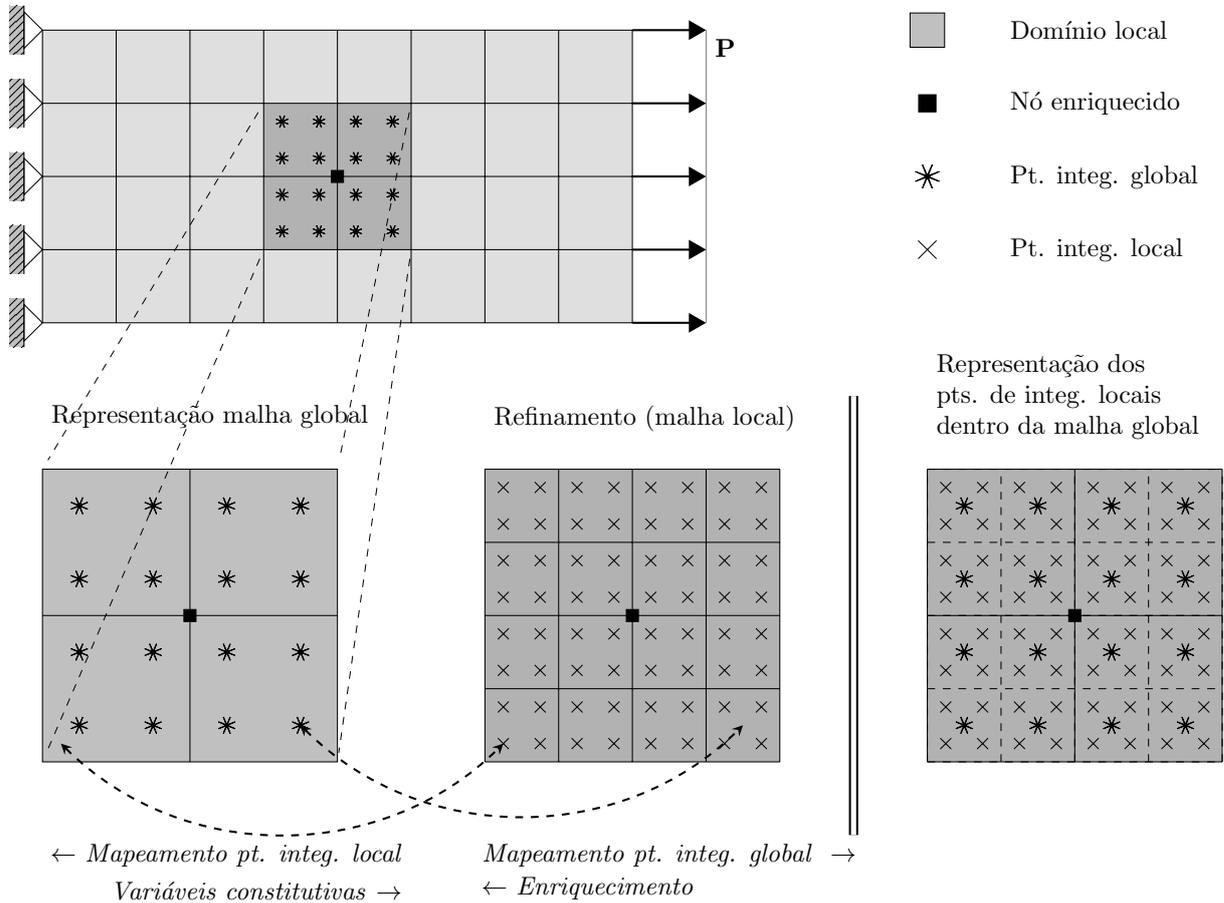


Figura 4.6: Mapeamento de pontos de integração.

#### 4.1.2.5 Mecanismo de Homogeneização/Ponderação do *Upscaling*

Como há na pesquisa uma tentativa de desvinculação das escalas, com a perspectiva de uso de métodos diferentes em cada nível ou outras mudanças de hipóteses, procurou-se construir um mecanismo adicional que potencialmente levasse em consideração não somente as funções de enriquecimento (que em última instância, em elasticidade, são os deslocamentos locais), mas alguma informação constitutiva do modelo submacroscópico. Há assim na estratégia um mecanismo de ponderação ou média que consiste na hibridização de duas técnicas tradicionais: o processo de homogeneização e a ponderação não local. Aqui, faz-se uma observação importante para a presente seção e assunto: o termo “local” é utilizado no contexto atual com um caráter distinto daquele do “global-local”, isto é, “local” adiante faz referência à localidade (ou não localidade) constitutiva, tendo sentido

no ponto material. Infelizmente, como já apontado em capítulo anterior, a “teoria não local do dano contínuo” e as “estratégias global-local”, embora compartilhem significantes homógrafos, aludem a coisas distintas. Assim, para mitigar a confusão, “local” do “global-local” será referido como (escala ou nível) “inferior”, “subjacente”, “submacroscópico”, etc.

Em homogeneização, como se viu rapidamente, há a busca de uma relação constitutiva entre médias de grandezas internas num *ponto material*. A ênfase é importante, isto é, tensão e deformação são medidas de sollicitação num ponto, de tal sorte que é comum em estratégias multiescala o uso de elementos de volume representativo como representações submacroscópicas de um ponto material do nível mais externo do sólido. Nessas técnicas, campos de deformação e tensão são homogeneizados no volume representativo e utilizados para compor uma relação constitutiva numérica e local do ponto material da macroescala.

Por sua vez, técnicas não locais partem da premissa que um fenômeno como o de dani-ficação de um material parcialmente frágil é de caráter distribuído, e que, portanto, zonas dentro de uma dimensão característica  $s$  interferem na resposta de um ponto material. Assim, uma ponderação de variáveis históricas dentro de um raio no entorno do ponto material é realizada, podendo essa ponderação se valer de distintas funções de distribuição espacial da grandeza avaliada.

Fundamentalmente, ambas as estratégias têm no seu cerne algo que poderia ser interpretado como o cálculo de uma média de grandezas derivadas para representação do comportamento local de um ponto material (ponto de integração, em síntese).

O processo de média aqui proposto é conceitualmente similar a essa última definição, ou seja, propõe-se que a variável histórica de um ponto de integração global (PIG) sobre regiões de modelo subjacente ativo seja obtida pela ponderação da respectiva grandeza daquele modelo no entorno do ponto global mapeado à escala inferior, utilizando-se uma função de ponderação constante. Nas aplicações aqui desenvolvidas utilizou-se como vizinhança do PIG os pontos de integração de um elemento finito subjacente (EFL) sobre o qual o ponto global recaísse, isto é, ao ser mapeado ao domínio inferior, extraiu-se o elemento finito correspondente e elencaram-se seus pontos de integração para a ponderação da variável histórica num volume representativo do PIG, que efetivamente é um volume unitário alusivo ao EFL. Portanto, a média aqui apontada é híbrida, pois utiliza como variável a ser ponderada uma grandeza típica de modelos não locais e uma função de distribuição constante, mas empregando um conjunto de pontos materiais de uma outra

escala e preservando uma maior localidade constitutiva do ponto material ao considerar o domínio de ponderação espacial um volume consideravelmente mais restrito no entorno do ponto de integração (características da homogeneização). Ou seja, retomando-se as notações do capítulo 2:

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}(\xi^G)) = \frac{1}{\Omega^L} \int_{\Omega^L} f \tilde{\varepsilon}((\xi^L)) d\Omega, \quad (4.39)$$

em que  $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}(\xi^G))$  é a variável histórica no ponto  $\mathbf{x}$ , função do PI global  $(\xi^G)$ ,  $\Omega^L(s)$  é uma dimensão característica de ponderação (dimensão unitária do elemento finito local na presente pesquisa),  $\tilde{\varepsilon}((\xi^L))$  é a variável histórica local nos PI local  $(\xi^L)$ , e  $f$ , uma função de ponderação unitária. A figura 4.7 apresenta o mecanismo proposto.

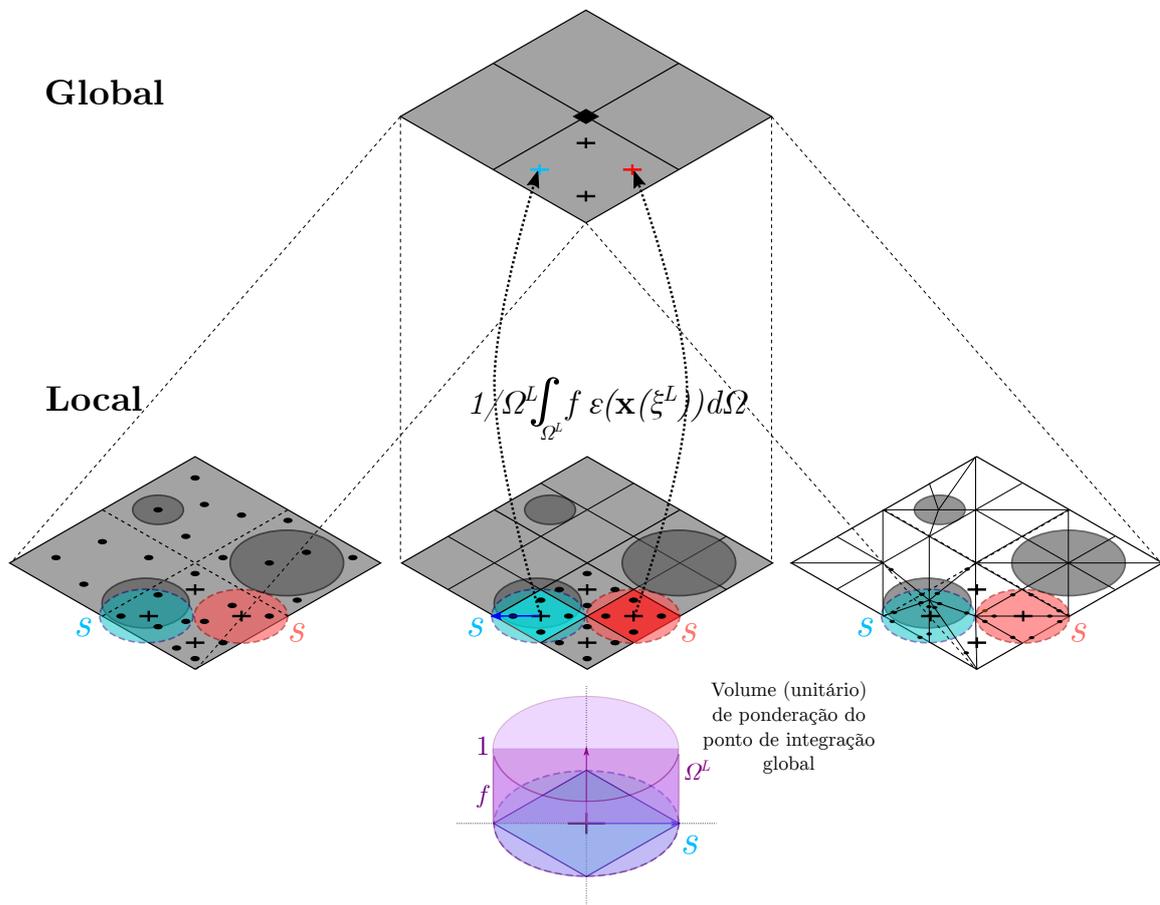


Figura 4.7: Procedimento de ponderação/média da grandeza local. Malha global ( $\boxplus$ ); PIG ( $\times$ ); PIL ( $\bullet$ ); dimensão característica ( $\circ$ ,  $\circ$ ); EFL ( $\blacksquare$ ,  $\blacksquare$ ); Heterogeneidade ( $\bullet$ ). Com a premissa de obtenção da informação local via ponderação no entorno do PIG, métodos consideravelmente distintos podem ser empregados no nível inferior, como métodos sem malha ou um modelo ainda “mais discreto” como o de redes, sem a necessidade de consideração de hipóteses adicionais (ou com pouca intervenção).

Mesmo sabendo-se que essa localidade é um dos fatores que culminam nos efeitos

deletérios dos modelos constitutivos empregados, considera-se que a média proposta, sendo inspirada em estratégias não locais, introduza um caráter ponderativo de dissipação de efeitos. Ainda assim, optou-se por uma relativa preservação dessa característica como forma de controle experimental, isto é, considerando-se que um dos objetivos da pesquisa é a investigação de uma potencial capacidade do MEFG-GL de mitigação de características espúrias em análises fisicamente não lineares, procurou-se isolar essa variável.

### 4.1.3 Representação Material

Na estratégia numérica aqui proposta, além da aplicação à problemas materialmente homogêneos, há a previsão de caracterização de um meio particulado. Nesse sentido, algumas hipóteses metodológicas foram assumidas para o estreitamento das possibilidades e escolha da abordagem ideal. “Ideal” aqui se relaciona, sobretudo, ao custo-benefício do caminho tomado, com respeito à complexidade operacional, complexidade computacional e demandas de tempo, processamento e memória, frente ao grau de verossimilhança da representação virtual da constituição interna do meio. Não somente, considera também as características da própria plataforma de desenvolvimento. Como poderá ser visto na seção seguinte, foram idealizados algumas alternativas para a tarefa (que se inspiram na literatura – capítulo 3), mas adiantam-se os princípios da escolha da perspectiva final incorporada à nova abordagem numérica apresentada aqui.

Ao apontar para questões como complexidade e requisitos de processamento, faz-se referência basicamente ao arbítrio de um recurso que seja (minimamente) rápido de ser executado (ou, em outra perspectiva, que ao menos não seja limitante), conceitualmente simples (embora aderente à complexidade do fenômeno) e de operacionalização acessível, sobretudo que possa aproveitar recursos do sistema empregado. Dessa maneira, cinco pressupostos vinculados à natureza de materiais particulados e à técnica numérico-computacional foram assumidos, a saber:

- Distribuição granulométrica contínua;
- Minimização da complexidade morfológica;
- Minimização da introdução potencial de variáveis extras no domínio numérico, que não a composição material (ou seja, não inserção de discretizações muito *sui generis*, enriquecimentos extras etc.);

- Maximização da uniformidade e regularidade da discretização;
- Aproveitamento de recurso gráfico do sistema INSANE, que permite a representação gráfica de uma malha com a identificação das diferentes fases, por meio da coloração dos elementos de uma malha de acordo com o material de seus pontos de integração (o elemento precisa ter uma única fase, portanto).

Essas hipóteses interferiam na escolha da representação física do material e da formulação de sua constituição granular (qual curva granulométrica empregar, p.ex.), bem como dirigiram a maneira como a informação material foi incorporada no modelo numérico (que mecanismo usar, que tipo de malha, p.ex.). Portanto, como será visto adiante, tendencialmente seguiu-se pela trilha menos restritiva da **não conformidade geométrica**, com **morfologias esferoidais**, e **granulometrias contínuas e bem graduadas em intervalos de tamanhos não tão amplos**.

Ainda, a representação matemática do comportamento constitutivo é dada através de modelos de degradação elástica, prioritariamente modelos de fissuração distribuída clássicos (preferencialmente com direção fixa) (Bažant e Oh, 1983; Pitangueira, 1998), com leis materiais tradicionais (Pitangueira (1998); Penna (2011); Carreira e Chu (1985, 1986); Hillerborg et al. (1976) etc.) ou modelos de dano típicos, marcadamente isotrópicos (Penna, 2011; Mazars, 1984; Mazars e Pijaudier-Cabot, 1989).

Estes pressupostos fundantes têm, portanto, a intenção de avançar conceitualmente o conhecimento de onde se insere a pesquisa, mas mantendo minimamente a natural simplicidade exigida em soluções de engenharia, não introduzindo variáveis em excesso na investigação numérica.

#### 4.1.4 Síntese

Recapitulando de maneira bastante resumida a seção, opta-se pelo reforço das hipóteses medulares assumidas no desenvolvimento da estratégia, em conformidade com os objetivos gerais da pesquisa. Portanto, podem ser elencados os seguintes pontos:

- O trabalho é, portanto, o estudo do comportamento numérico-computacional de estruturas de concreto (arqueticamente) em problemas estáticos e não lineares, representativos de aplicações de um método numérico específico aliado a uma metodologia de análise particular que herda componentes teórico-conceituais de construtos já estabelecidos – mas fazendo alterações em algumas hipóteses –, bem como

possibilita a composição de enriquecimentos numéricos e, potencialmente, uma regularização de fenômenos típicos de análises fisicamente não lineares, além da incorporação de características locais extras;

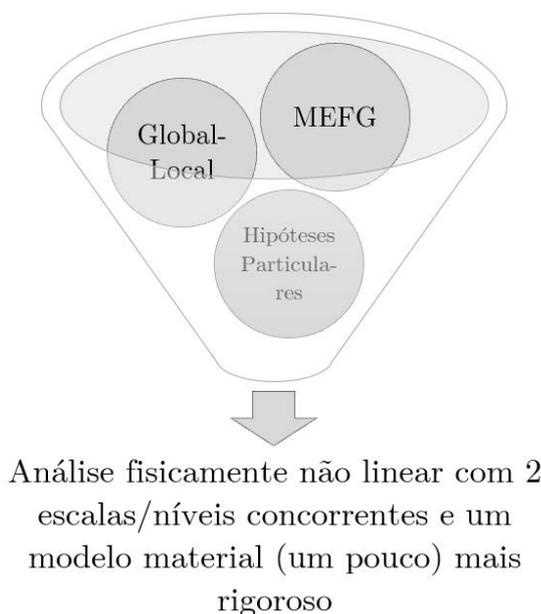


Figura 4.8: Síntese esquemática da metodologia.

- MEFG-GL-NL é a materialização da síntese anterior, isto é, a união do método dos elementos finitos generalizados/estendidos com a estratégia de enriquecimento global-local num mecanismo incremental-iterativo particular, utilizado na análise de problemas mecânicos com não linearidade material proveniente da danificação do meio;
- Três aspectos fundantes: acoplamento fraco, independência de integração (há, portanto, o mapeamento do estado de deformação entre as escalas) e independência de hipóteses dos modelos (garantida pelo desacoplamento e pelo mecanismo de comunicação ascendente);
- Comunicação descendente (*downscaling*): condições de contorno (deslocamentos) e estado de deformação;
- Comunicação ascendente (*upscaling*): cinemática exclusiva (somente funções de enriquecimento), cinemático-material (enriquecimento *stricto* e propriedades elásticas absolutas), cinemático-constitutiva (enriquecimento *stricto* e variável histórica ponderada);

- Representação material: modelos de degradação elástica clássicos e morfologia mesoestrutural simplificada.

## 4.2 Premissas, Arquitetura e Funcionamento do Núcleo Numérico Implementado: Quesitos Computacionais e Fundamentos Acessórios

A arquitetura do código desenvolvido no escopo deste projeto de pesquisa compõe quesitos metodológicos importantes. Dada a esfera em que se insere a tese, métodos numéricos em engenharia, e seu forte apelo computacional, grande parte do trabalho se inclina sobre a seara do “desenvolvimento” e da “programação”. Contrariamente a uma tendência relativamente dominante em dissertações e artigos dentro dos departamentos de engenharia (onde não exista prevalência de trabalhos numérico-computacionais) de omissão de quesitos algorítmicos, da implementação e do funcionamento do código, bem como das hipóteses e postulados computacionais que norteiam escolhas fundamentais, e seguindo uma tradição do grupo de pesquisa em que nasce esta obra, optou-se por ser o mais transparente possível e tentar traduzir em forma textual, com auxílio de diagramas e figuras, parte relevante do conteúdo produzido. Ressalva-se, contudo, um fator fundamental em desenvolvimento de softwares: a progressão do código é um fenômeno contínuo, não estacionário, que usualmente não se estaca no tempo, sobretudo dentro de grupos acadêmicos dinâmicos, de tal sorte que o conteúdo adiante é datado e versionado. Como forma de reduzir uma potencial (e natural) obsolescência do texto, concede-se maior atenção à descrição conceitual de cada constituinte e aos movimentos internos e relacionais de cada um deles. Nesse sentido, dada a conformação gráfica muito volumosa de diagramas UML, sobretudo aqueles alusivos a instâncias com um conjunto significativo de atributos e operações, optou-se por apresentar os diagramas de classes principais desta obra, apontando as variáveis e funções mais relevantes apenas; métodos e atributos acessórios ou menos contundentes na descrição das características essenciais de cada tipo de objeto foram omitidos sumariamente. Em alguns casos, os algoritmos apresentados serão abreviados, ou seja, haverá situações em que o leitor se deparará com a enunciação de uma ação no meio de um algoritmo sem o seu devido desmembramento em etapas. Há algumas operações complexas que fogem do objetivo deste trabalho, que não serão proceduralmente explicitadas (por exemplo, dada a complexidade e extensão dos algoritmos de geração de malha,

estes serão omitidos quando da descrição de funcionalidades de algumas das instâncias aqui implementadas). Assim, há uma natureza qualitativa e ilustrativa quanto ao detalhamento gráfico das instâncias cruciais do trabalho e de algumas de suas funcionalidades. Este fato, pelo menos ao olhar do autor, não comprometerá nem o entendimento global da arquitetura proposta, nem o aprendizado específico de algumas das rotinas concebidas; considera-se, com efeito, que um enfoque sintético, de cunho exploratório, seja de leitura mais agradável e potencialmente mais inteligível.

De início, parte basilar do estudo é descrita em detalhe, qual seja, o gerenciamento da simulação. Posteriormente, os mecanismos para tratamento da informação da heterogeneidade material são assinalados, apontando-se algumas das abstrações numérico-computacionais idealizadas para o enfrentamento da tarefa; tipicamente, foram estudados materiais bifásicos, compostos por uma matriz e um conjunto de partículas.

Quando pertinente, anotam-se fundamentos teóricos e técnicos acessórios para introdução de certos expedientes e esclarecimento de outros. Considerou-se mais elucidativo aclarar certas informações à medida que a implementação fosse apresentada. Importante apontar que o conteúdo apresentado tem uma inclinação para análises em dois níveis/escalas, tipicamente global-local e via MEFG, foco de tudo que se engendrou nessa pesquisa. Assim, embora todas as informações e explicações apresentadas sejam contextualizadas dentro de um panorama geral, cujos conceitos e postulados são abrangentes e superam em certa medida o caráter meramente global-local, servindo de base para outras interpretações e expansões da implementação (ou pelo menos tentando fazê-lo), há naturalmente um olhar voltado à especialização das ideias para o MEFG-GL/MEFG-GL-NL.

Salienta-se que esta seção, ainda que com apontamentos gerais, naturalmente tem seu escopo com maior inclinação aos usuários do sistema INSANE e ao grupo de pesquisa em que se insere.

Informações complementares sobre padrões de projeto empregados podem ser obtidas no apêndice C.

### 4.2.1 Condução da Simulação

No que segue, disserta-se sobre alguns dos eixos computacionais centrais das simulações aqui propostas, e, de início, é importante fazer alguns apontamentos para o leitor

compreender certas escolhas. Na resolução de um problema físico, com uso de uma metodologia numérica e através de uma plataforma computacional, (p.ex., em problemas do MEF/MEFG aplicados à mecânica dos sólidos), a implementação de um código nada mais é que a construção de instâncias que serão responsáveis por realizar um conjunto de operações ou cálculos em tempo de processamento. Notoriamente e em regra, o *pipeline* de um problema do MEF/MEFG engloba a entrada de dados (através de arquivos, por exemplo), a construção de um modelo discreto, aqui entendido como uma estrutura de dados singular, composta por diversos componentes particulares (como nós, elementos etc.), a consolidação de um sistema de equações, o qual é montado por entidades específicas e representado por matrizes e vetores, e a posterior execução da resolução. Finalizada a solução, os dados de saída são de alguma maneira preservados e pós-processados.

Sistemas orientados a objetos costumam preservar uma arquitetura consideravelmente granulada e as diversas instâncias, representadas por classes, tendem a encapsular funcionalidades específicas e inter-relações muito rígidas, que remontam, muitas das vezes, ao pressuposto inicial da criação da aplicação. Com isso, o crescimento do código tende a seguir caminhos preferenciais que são adjacentes ou completamente sequenciais às definições genéticas do sistema, sobretudo em projetos não necessariamente mantidos por especialistas em desenvolvimento de softwares (como em pesquisas em alguns ramos da Engenharia, tal qual o ambiente em que foi elaborado este trabalho). Além disso, há uma tendência em produzir-se conteúdo verboso, que exige transposição de uma grande quantidade de objetos para se fazer uma atividade relativamente simples, sendo muitas vezes de difícil desmembramento, ainda que concebido com esse intuito (Cassel, 2019; Suzdalnitski, 2019), ou, em alguns casos, soluções subdimensionadas que quebram pressupostos da *pattern* original ou que acabam por compactar excessivamente o código e destoam dos demais ramos do sistema. Nesse sentido, em certos cenários, a arquitetura original de um programa (sob esse paradigma, sobretudo) torna-se impeditiva para determinados empregos. Particularmente a um software do MEF/MEFG, é natural abstrair-se que um único modelo será resolvido por vez (o que é a regra na plataforma utilizada neste trabalho; cada `Solution` se relaciona com única e exclusivamente um `Model` em teoria) e que o fluxo dos processos é completamente sequencial, ou seja, há etapas de pré-processamento, processamento e pós-processamento estanques e bem delimitadas. Contudo, no caso da proposta desta pesquisa, há a resolução concomitante de dois modelos distintos: a escala

global e a escala local, que requerem ações tipicamente de pré-produção em tempo de execução (tratamento numérico da heterogeneidade, por exemplo) e demandam pontos de contato em diferentes momentos ao longo da análise. Este fato é por si só um impedimento fulcral, que erodiria consideravelmente o design original do sistema empregado, de modo que por opção deste pesquisador, obviamente, novas instâncias foram criadas de maneira a se preservar o *kernel* do sistema, não havendo aqui a pretensão de considerar as soluções idealizadas as únicas (ou até mesmo as melhores) possíveis, mas sim, alternativas apenas. Negrita-se que não há aqui qualquer juízo de valor negativo quanto à plataforma de desenvolvimento ou ao trabalho progressivo de todos os desenvolvedores que contribuíram substantivamente com as pesquisas de peso criadas no grupo de pesquisa, pelo contrário: não fosse a robustez do sistema, a presente pesquisa teria enfrentado maiores dificuldades. Os apontamentos aqui feitos são tão somente de caráter estritamente geral – i.e., focados em POO – e fundamentados em referências coletadas na área e na experiência particular do autor, reflexões essas que não procuram invalidar a orientação a objetos, apenas debater o tópico e fundamentar escolhas.

Voltando à seção 4.1.1, postulados fundamentais nessa pesquisa envolvem, além de uma relativa independência numérica entre níveis global e local (presente em algumas das aplicações do MEFG-GL na literatura e marcadamente uma autonomia no processamento, apenas), a necessidade de completa independência de hipóteses, ou seja, a possibilidade de troca de metodologia numérico-matemática, condições físicas etc. Para contornar aquilo que se considerou como limitações para as ambições da pesquisa (e do que dela se desdobra), um novo conjunto de instâncias foi projetado para generalizar uma simulação computacional de problemas do MEFG-GL/MEFG-GL-NL. Todo o processo foi compartimentalizado em etapas de pré-processamento, configuração, solução e pós-processamento, permeadas por funções de administração de dados e processos. Foram concebidos espaços que involucram os diferentes objetos que compõem os modelos, solucionadores e operações de controle do MEFG-GL/MEFG-GL-NL, de maneira que o núcleo numérico central original do sistema não ficasse (consideravelmente) comprometido e a flexibilidade na interpretação deste trabalho ao componente global-local pudesse ser mantida. Abordagem complementar, fruto de trabalho paralelo à esse, e que compartilha das discussões e ideias da presente obra, pode ser encontrada em [Botelho \(2019\)](#); da união futura da pesquisa em que se insere a referida dissertação com a aquela do presente texto, espera-se

consolidar um *framework* computacional para análises multiescala e multifísica (conforme brevemente apontado em co-autoria com Botelho et al. (2018)). Outras aplicações que seguiram do escopo da presente investigação, de suas idealizações e de sua implementação podem ser encontradas em Novelli (2019) e Fonseca (2019).

Como apontado na seção 2.7, os componentes fundamentais do *kernel* numérico do INSANE são dados por quatro abstrações principais: `Model`, `Assembler`, `Solution` e `Persistence`, que atuam de maneira sequencial no processo de solução de um problema. `Model` é, em suma, uma estrutura de dados representativa de um modelo discreto típico. `Assembler` é o agente responsável por montar o sistema de equações algébricas que subjaz qualquer modelo numérico análogo ao MEF. Por sua vez, `Solution` encapsula certas características e funcionalidades específicas de cada tipo de análise numérica possível e disponível no sistema (análise linear ou não linear, por exemplo) e, finalmente, `Persistence` lê arquivos de entrada e grava arquivos de saída.

Em resumo, compõem as novas abstrações implementadas as seguintes instâncias: `SimulationManager`, que administra a simulação, `DataManager`, que gerencia certos dados, e `Setuper`, que configura os modelos nas distintas etapas das soluções. O termo “modelo” será muitas vezes utilizado de maneira ampla (e não estritamente remetendo-se ao que alude a classe `Model`), referindo-se a todo o conjunto figurativo de conceitos numérico-matemáticos por detrás de um experimento numérico, bem como às classes associadas à avaliação da representação de um determinado problema (ou seja, `Model` + `Assembler` + `Solution`). A seguir, cada classe será apresentada em detalhe; maior enfoque será dado aos aspectos conceituais e utilitários de cada entidade, ainda que itens computacionais sejam apresentados.

## 4.2.2 Especialização para Análise Global-Local/Duas Escalas

Como já ressaltado, o foco deste trabalho é o estudo de sólidos parcialmente frágeis em dois níveis/escalas através do MEFG e de uma estratégia global-local. Nesse sentido e de modo espontâneo, a implementação nasceu e evoluiu de uma especialização para a aplicação desejada. Assim, embora o código seja de cunho generalista, há uma inerente inclinação de seus atributos e funções (e respectivas nomenclaturas) a alguns dos movimentos internos do componente GL, conforme indica a descrição a seguir.

#### 4.2.2.1 Gerente da Simulação

Agente medular no desenvolvimento do trabalho, a instância `SimulationManager` é responsável pelo gerenciamento de simulações que careçam de maior flexibilidade e fujam do fluxo padrão de solução numérico-computacional de um programa do MEF (ou correlatos), ou seja, entrada de dados, montagem do sistema de equações, solução e saída de dados, nessa ordem. Entende-se por simulação um experimento numérico autocontido, formado por fases não necessariamente herméticas ou seriadas, que reproduza virtualmente um dado problema (físico, no caso) e utilize de expedientes de ascendência matemática para construir representações analíticas e sintéticas de um modelo conceitual alusivo ao problema real. “Autocontido” e “não seriado” são aqui de grande significância. Conforme apontado anteriormente, em sistemas orientados a objetos e escritos em linguagem verbosa, como o Java (que requisita muito volume de trabalho para pequenas alterações), a depender da arquitetura original do software, há que se percorrer um grande volume de objetos, e em posições muito rígidas na linha condutora da execução, para se realizar tarefas de pequena dimensão, o que pode ser limitante para certos usos. Embora a arquitetura proposta aqui seja de cunho generalista (como a boa prática no desenvolvimento de softwares de média-grande escala com POO) e englobe uma grande variedade de aplicações e possibilidades, buscou-se a construção de artifícios que permitissem a produção mais independente de trabalhos científicos e a individualização de cada pesquisa acadêmica, de modo que implementações futuras no núcleo primevo (e mais consolidado) da plataforma de implementação não afetassem consideravelmente investigações já realizadas ou que intervenções mais drásticas como a presente proposta prejudicassem o núcleo do sistema (o que ocorre hoje no INSANE (Fonseca et al., 2018)). Tentou-se incorporar alguns aspectos mais maleáveis de outras modalidades de programação, como a Programação Orientada a Eventos (Garrido, 2001), que pleiteia um processamento relativamente mais dendrítico e recursivo, e a Programação Orientada a Interfaces (Varney, 2004; Pugh, 2006), que aspira uma implementação autocentrada, de cunho utilitário, levemente menos conceitual e mais funcional, utilizando-se como *design patterns* duas concepções principais: a *Mediator* (com toque de *Facade*) e a *Strategy* (Gamma et al., 1994; Kuchana, 2004). Com isso, assumiu-se como solução factível ao estado do código atual do INSANE a criação de um domínio no qual o pesquisador pudesse sintonizar de maneira mais fina sua simulação; esse domínio é o **gerente da simulação** (ou simulador – “*mediator*”),

uma instância que tem as funções de disparar as fases das análises, delegar tarefas para os demais objetos e estabelecer uma comunicação entre as diversas etapas de um experimento numérico. Funciona, pois, numa perspectiva (ao menos teórico-conceitual) de “servidor-cliente”, ou seja, contacta os diversos componentes da simulação, requisitando certos serviços ou viabilizando certas informações necessárias. Cada tipo de simulação (associada a uma natureza específica de experimento numérico e/ou método numérico) exige a criação de um `SimulationManager` e, a depender da necessidade, de um conjunto de configuradores (`Setuper` – “*strategies*”) próprios, isto é: uma análise global-local linear via MEFG requer o seu gestor da simulação e os configuradores de cada problema (global e local); uma análise fisicamente não linear via MEFG-GL-NL com meio heterogêneo possui seu gerente particular; o estudo da propagação de trincas com uma estratégia em dois níveis (GL) requer suas classes específicas e assim por diante. Praticamente sempre haverá um ambiente totalmente limpo e sem vícios (a não ser aqueles do próprio *kernel* do sistema), no qual o pesquisador/estudante poderá construir seu ambiente de testes com maior autonomia.

Ressalta-se que há quase que uma indissociável relação entre um grupo específico de gerentes e configuradores (`SimulationManager` + `Setuper(s)`) e um determinado método numérico (MEF, MEFG, MEC, MSM etc.); explica-se: partindo-se da interpretação dada a uma simulação computacional, percebe-se que a formulação numérica de um determinado conjunto `Model` + `Assembler` (+ `Solution`, de modo menos restritivo) é construída em cima de um dado arcabouço teórico, com seu conjunto particular de hipóteses e simplificações, que constitui o que foi designado genericamente em parágrafo anterior como “modelo”. Este modelo, via de regra, é diferente para cada método discreto, ou seja, um modelo do MEF é diferente (embora guardando semelhanças) daquele do MEFG, que é distinto da formulação do MEC, que por sua vez é consideravelmente dessemelhante a de um MSM; cada método numérico opera sob determinadas condicionantes e cada um deles requer (em tese e se necessário) configurações distintas. Assim, o que foi idealizado no escopo desta pesquisa originalmente, e o que vige na atual versão de sua implementação GL, é a consideração de que as instâncias computacionais operam no regime MEFG-MEFG (`gfemgfem`), ou seja, em qualquer nível das simulações há a previsão de uso do MEFG. Desse modo, cada `SimulationManager` e cada `Setuper` de uma análise global-local têm aqui uma relação com o método dos elementos finitos generalizados/estendidos. Essa

separação foi criada para efeito de organização e coesão teórica e tolera ampliação, melhoramento, alteração parcial ou revogação, podendo suas instâncias serem usadas mesmo na ausência do ordenamento em sub-pacotes originalmente dado.

Com as novas idealizações da implementação, há uma ligeira modificação no fluxo original do software utilizado. A figura 4.9 tenta ilustrar a dinâmica da simulação: o `SimulationManager`, como um grande diretor, de fato, tem acesso direto ao *kernel* principal do INSANE ou pode dialogar com algumas de suas principais instâncias. Na nova implementação, uma simulação é o processo de avaliação concorrente de  $y$  modelos,  $y \geq 1$ , cujas análises são divisíveis em  $x$  etapas,  $x = 1, 2, 3, \dots$ , guiadas por  $z$  solucionadores,  $z \leq y$ , e intercaladas por  $w$  configuradores,  $w \geq x$ , que podem conviver com  $q$  administradores extras de dados,  $q \geq 0$ ; todas as instâncias possuindo naturezas específicas e limites conceituais e práticos inerentes. Ou seja, para um determinado `Model`  $y$  corrente, associado a um `Assembler` e a um `Solution` (e obviamente a uma formulação numérica típica, como o MEFG), existe um conjunto de configuradores (`Setuper`) que ajustam ou preparam determinadas características necessárias à análise de uma etapa  $x$  de um problema segmentado em fases interconectadas, mas consideravelmente independentes. Gerentes de dados (`DataManager`) que manipulam estruturas de dados típicas de um modelo discreto e outros tipos de informações (como metadados de mesoestrutura) podem ser empregados.

Em linhas gerais, uma simulação global-local do MEFG tem a conformação indicada na figura 4.10. O pacote `simulationmanager` contém as implementações dos gerentes de cada simulação. Dentro do escopo desta pesquisa, foco foi dado a simulações global-local/multiescala, em dois níveis distintos e com modelos relativamente independentes. Apresenta-se, portanto, na figura 4.11 a organização do pacote idealizado, destacando-se alguns dos atributos e métodos principais da classe e a organização interna das instâncias secundárias. Além de pacotes que compõem as implementações dos gerentes da simulação (p.ex., `globallocalism`), há também aqueles dos configuradores (`setuper`) e dos administradores acessórios (`datamanager`), bem como objetos suplementares que regulam processos de automatização da análise (`adaptivity`); adiante, será aclarado cada um desses membros no contexto da análise global-local.

O pacote `globallocalism` contém os gestores de simulações global-local/multiescala trabalhados no âmbito da pesquisa. A seguir, cada classe será descrita sucintamente:

- `GlobalLocalSimulationManager` (GLSM): classe central dos gestores de simulações

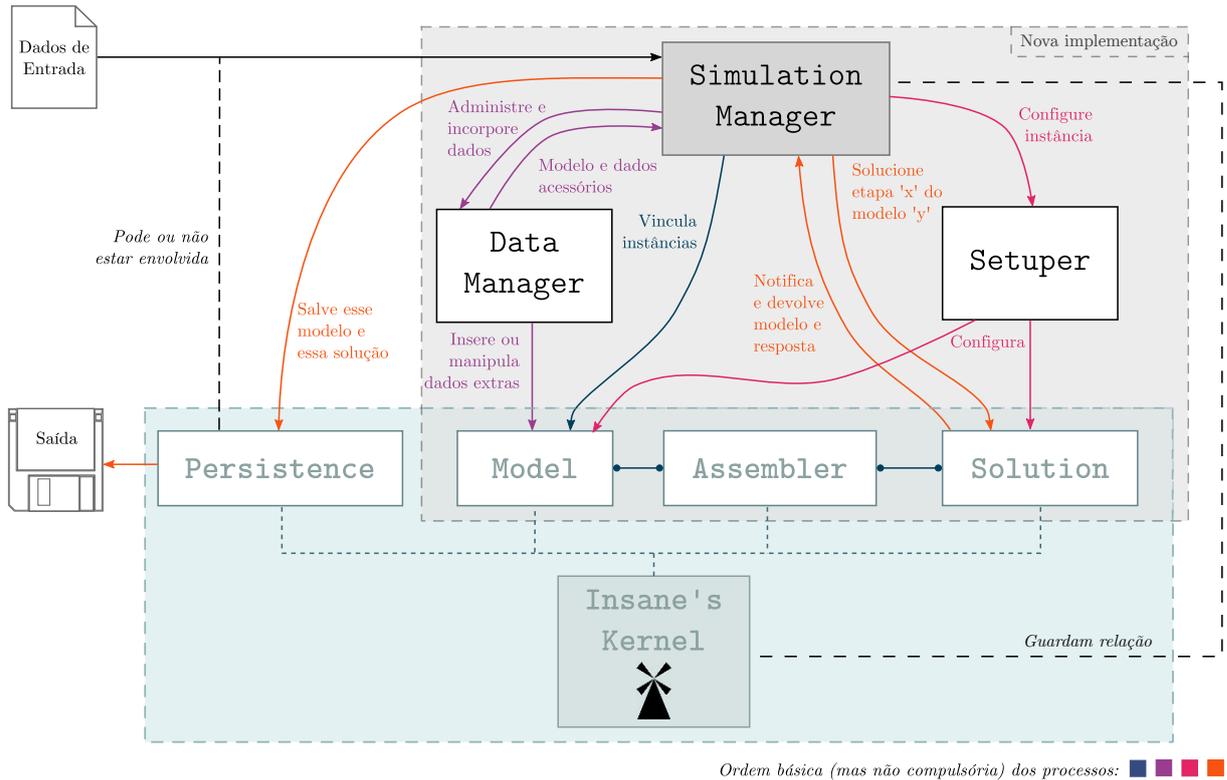


Figura 4.9: Dinâmica de uma simulação com a nova proposta.

global-local (com finitos generalizados notoriamente) que engloba os atributos e métodos principais. Além de um Model global, uma lista de Models locais, possui Assemblers e Solutions para cada nível, um GlobalLocalDataManager, que gerencia modelos discretos e estruturas de semi-arestas do malhamento automático em tempo de processamento, Setupers global e local, cujas funções pré-configuram as etapas do processo de solução, e um conjunto de métodos para organizar e requisitar a realização de cada fase. Aqui destacam-se genericamente os pares abstratos `setUpGlobalProblem()` e `solveGlobalProblem()`, `setUpLocalProblem()` e `solveLocalProblem()`, `setUpEnrichedGlobalProblem()` e `solveEnrichedGlobalProblem()` que requerem às instâncias descendentes a implementação de cada uma das etapas. Tal distribuição mostrou-se mais cognoscível, organizada e expansível que tentativas anteriores na plataforma de desenvolvimento: a cada nova aplicação para uma abordagem global-local nos moldes da que se encena aqui, o pesquisador precisa implementar um gerente geral, os métodos obrigatórios e algum configurador e/ou gerente de dados (se necessário). Assim, viabilizou-se, pelo menos em nível macrofuncional e de modo autoconsistente, a possibilidade de se usar outros modelos discretos em nível local, utilização de mais problemas locais (e de

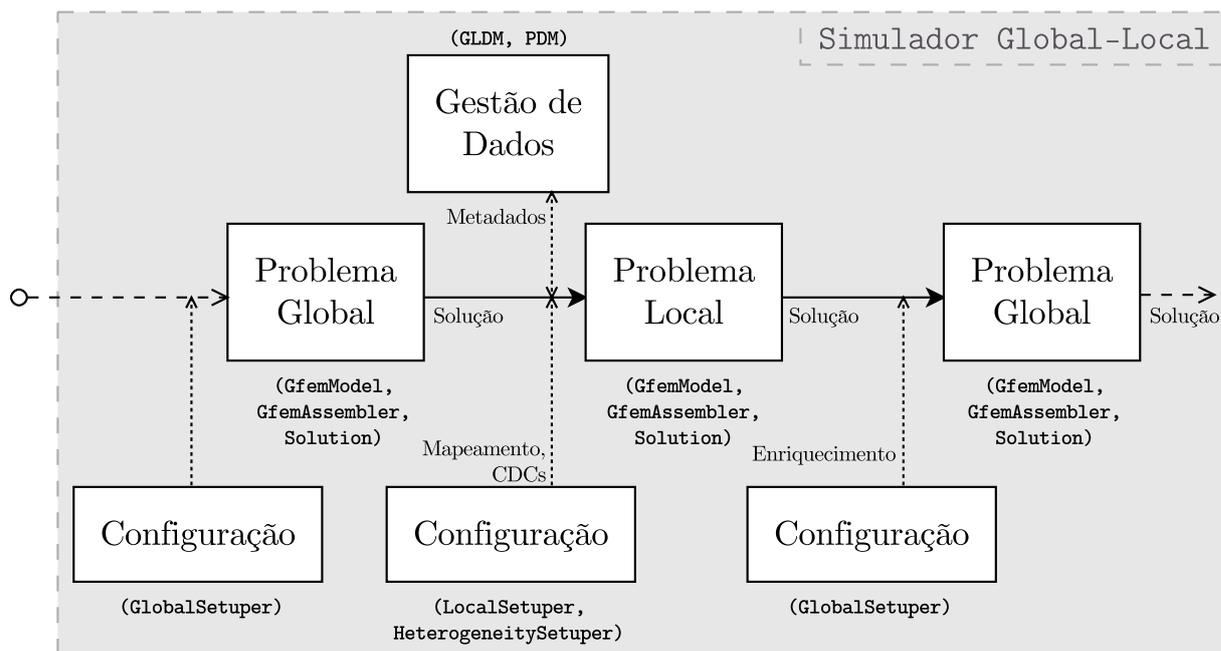


Figura 4.10: Dinâmica linearizada de um simulador global-local deste trabalho.

maneira clara), diferentes técnicas de integração (aninhada ou não aninhada, p.ex.) e, de grande importância, a automatização/adaptatividade da escala local, ou seja, o(s) modelo(s) local(is) pode(m) ser construído(s) em processamento, caminhar ao longo do domínio global e aumentar de tamanho no decorrer da análise. Além disso, a paralelização/“threadamento” de qualquer etapa da análise (geração dos domínios locais, malhamento, qualquer tipo de propagação – de trincas, p.ex. –, montagem de matrizes, solução de etapas etc.) se torna muito mais fácil de ser realizada.

- **GlobalLocalLinearSimulationManager (GLLSM)**: gestor de uma simulação global-local linear nos dois níveis, ou seja, em que não há nenhuma fonte de não linearidade (grandes deslocamentos, grandes deformações, degradação material, contato etc.). Possui todos os atributos gerais idealizados para um simulador global-local, isto é, modelos, *assemblers*, *setupers*, solucionadores e *data manager* global-local. Nos testes realizados no âmbito das investigações até a publicação deste texto, utilizou-se integração aninhada (linha mais tradicional no campo do MEFGL) nesta versão do gerente da simulação, por critérios de reprodução de resultados anteriores de [Alves \(2012\)](#); [Malekan, Silva, Barros, Pitangueira, e Penna \(2018\)](#); [Duarte e Kim \(2008\)](#).

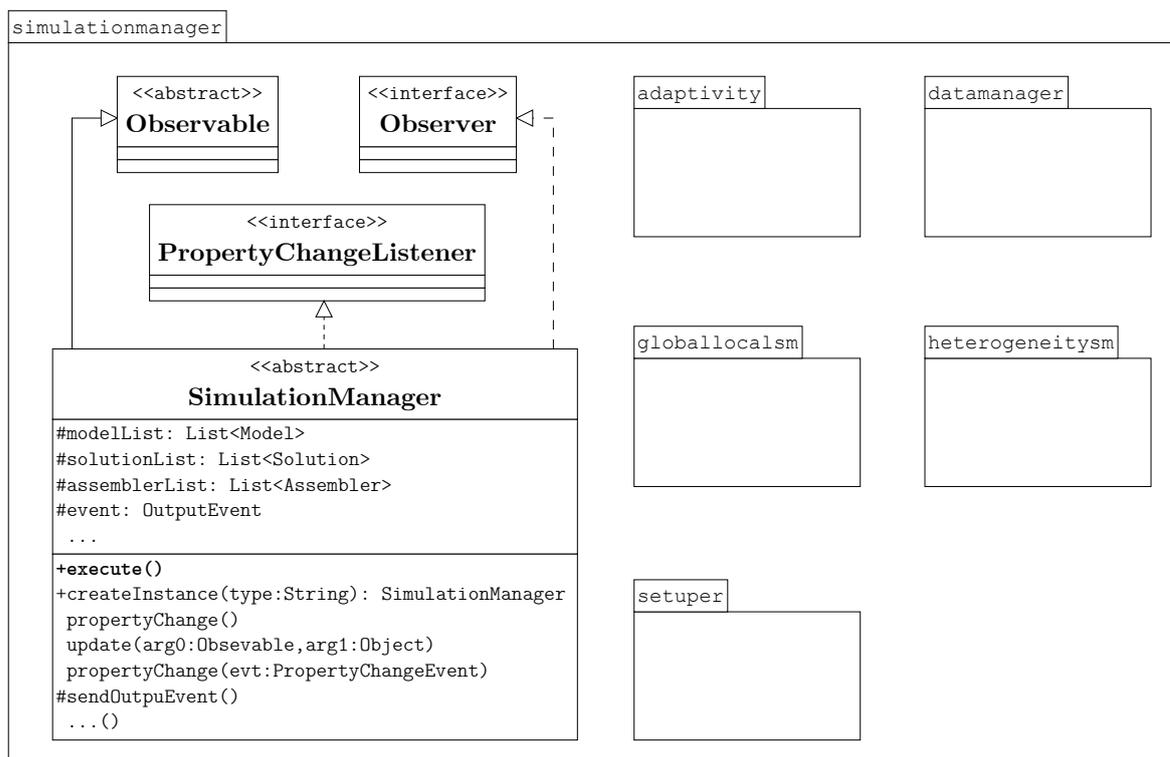


Figura 4.11: Implementação da estrutura principal – Pacote `simulationmanager`.

- `GlobalLocalLinearNotNestedIntegrationSimulationManager` (GLLNNISM): equivalente ao `GlobalLocalLinearSimulationManager`, mas utilizando o processo de integração idealizado nesta pesquisa. Simulador com caráter de teste a ser integrado com sua versão irmã em generalização subsequente.
- `GlobalLocalLinearWithCyclesSimulationManager` (GLLWCSM): generalização das simulações anteriores, a versão com ciclos opera segundo [Kim et al. \(2009\)](#); [Kim e Duarte \(2009\)](#), recursivamente, de modo a aprimorar progressivamente (em princípio) as condições de contorno do problema local, e por consequência, o enriquecimento global-local. Idealmente, esta é a versão linear única a ser mantida, uma vez que reproduz univocamente os simuladores precedentes para número de ciclos unitário.
- `GlobalLocalLinearWithHeterogeneitySimulationManager` (GLLWHSM): versão das classes lineares anteriores que permite a inclusão de heterogeneidades no domínio ou região que se desejar. Além de um *data manager* global-local, possui um gestor de partículas, instância responsável por administrar metadados de mesoestrutura (seção 4.2.3). Originalmente, foi concebido como simples etapa para atingir o objetivo

da tese, preconizando, assim, o problema local como o domínio para introdução de partículas. Embora encarado como condicionante acessória nesta obra, tem potencial para realizar experimentos mais densos e pode ser melhor explorado em estudos posteriores. [Monteiro et al. \(2018\)](#) apresentam uma aplicação.

- **GlobalLocalCrackPropagationSimulationManager (GLCPSM)**: guia de simulações MEFG-GL com propagação de trincas sob a égide da mecânica da fratura linear elástica. Permite a condução do crescimento de um domínio local com a evolução da trinca. Funcionamentos procedural e numérico semelhantes aos das versões sem evolução de falhas. Por razões de escopo, não foi alvo de investigação desta obra. Maiores detalhes no trabalho em co-autoria com [Fonseca et al. \(2020\)](#).
- **GlobalLocalPhysicallyNonlinearSimulationManager (GLPNLSM)**: este gerente é o responsável por conduzir uma simulação do que aqui foi resumidamente rotulado como MEFG-GL-NL, ou seja, uma análise com não linearidade material via finitos generalizados e enriquecimento global-local. É, portanto, o condutor de parte dos experimentos numéricos alvo desta tese, sendo mais extensivamente trabalhado que os anteriores. Neste simulador aplica-se a hipótese de desvinculação de quadraturas, com integração não aninhada, assegurando a consistência conceitual idealizada pelo autor. A seção [4.1.1.1](#) explora as características fundamentais de uma simulação do tipo. Exemplos semelhantes aos trabalhados aqui podem ser encontrados em [Novelli \(2019\)](#) e [Monteiro et al. \(2020\)](#).
- **GlobalLocalPhysicallyNonlinearWithHeterogSimulationManager (GLPNLWHSM)**: representa o estágio final da pesquisa, no qual processa-se uma análise fisicamente não linear com inclusão da heterogeneidade em escala local, numa dinâmica multi-escala considerada inédita. Possui atributos e movimentos internos semelhantes à versão homogênea, com considerações extras para avaliação de heterogeneidade de meios particulados.

A tabela [4.4](#) sintetiza as características gerais de cada simulador e suas aplicações. Foram elencados de maneira simplificada alguns indicadores como natureza do regime da simulação, consideração ou não de homogeneidade (inclusão de partículas), estratégia de integração, instâncias acessórias, entre outros.

Tabela 4.4: Resumo dos simuladores global-local disponíveis.

Caract.	SimulationManager						
	GLLSM	GLLNNISM	GLLWCSM	GLLWHSM	GLCPSM	GLPNLSM	GLPNLWHSM
Objetivo	<i>AL-HM-2E</i>	<i>AL-HM-2E</i>	<i>AL-HM-2E</i>	<i>AL-HT-2E</i>	<i>AL-CP-2E</i>	<i>ANL-HM-2E</i>	<i>ANL-HT-2E</i>
Natureza	<i>Est.</i>	<i>Est.</i>	<i>Est.</i>	<i>Est.</i>	<i>Quasi</i>	<i>Quasi</i>	<i>Quasi</i>
Linearidade	<i>L – L</i>	<i>L – L</i>	<i>L – L</i>	<i>L – L</i>	<i>L – L</i>	<i>NL – L</i>	<i>NL – L</i>
Homog.	<i>Sim</i>	<i>Sim</i>	<i>Não</i>	<i>Sim</i>	<i>Sim</i>	<i>Sim</i>	<i>Não</i>
Ciclos GL	1	1	<i>n</i>	<i>n</i>	<i>n</i>	<i>1/passos</i>	<i>1/passos</i>
Integração	<i>A</i>	<i>ÑA</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>ÑA</i>	<i>ÑA</i>
Escalas	2 ( <i>G&amp;L</i> )	2 ( <i>G&amp;L</i> )	2 ( <i>G&amp;L</i> )	2 ( <i>G&amp;L</i> )			
Setupers	<i>GS</i> e <i>LS</i>	<i>GS</i> e <i>LS</i>	<i>GS</i> e <i>LS</i>	<i>GS</i> , <i>LS</i> e <i>HS</i>	<i>GS</i> e <i>LS</i>	<i>GS</i> e <i>LS</i>	<i>GS</i> , <i>LS</i> e <i>HS</i>
Data Managers	<i>GLDM</i>	<i>GLDM</i>	<i>GLDM</i>	<i>GLDM</i> e <i>PDM</i>	<i>GLDM</i>	<i>GLDM</i>	<i>GLDM</i> e <i>PDM</i>

*Observação:* *A(N)L-HM(HT;CP)-2E*: análise (não) linear homogênea (heterogênea; com propagação de trinca) em duas escalas/níveis; *Est.*: regime estático; *Quasi*: regime quasi-estático; *L – L*: regime global linear e regime local linear; *NL – L*: regime global não linear/incremental e regime local linear/passos único; *A*: integração aninhada; *ÑA*: integração não aninhada; *G, L*: global e local; *GS*: **GlobalSetuper** (configurador do problema global); *LS*: **LocalSetuper** (configurador do problema local); *HS*: **HeterogeneitySetuper** (configurador da heterogeneidade – embute metadado no modelo numérico); *GLDM*: **GlobalLocalDataManager** (administrador de dados acessórios em uma análise GL); *PDM*: **ParticleDataManager** (administrador de partículas).

#### 4.2.2.2 Gerente de Dados

Outra premissa que compõe a implementação é a do **DataManager**, um gerente de dados que manipula estruturas de dados convencionais de modelos discretos e informações complementares necessárias para sintonização dos referidos modelos. Em simulações com um volume considerável de dados acessórios (dados topológicos secundários, dados de evolução de fenômenos, transformações geométricas localizadas, catalogação de pontos materiais, entre outros), que podem não ser necessariamente ligados àquilo que se tem como peças e operações fundamentais de um modelo numérico (nós, elementos, modelos constitutivos, solver etc.), julga-se necessária uma instância que implemente funções particulares capazes de justapor uma informação extra ao modelo, extrair dados adjacentes ou eventualmente até servir de repositório para parâmetros de entrada secundários.

O fluxo clássico de resolução de um problema do MEF/MEFG é, como já dito, sequencialmente formado por fases estanques de pré-processamento, solução e tratamento

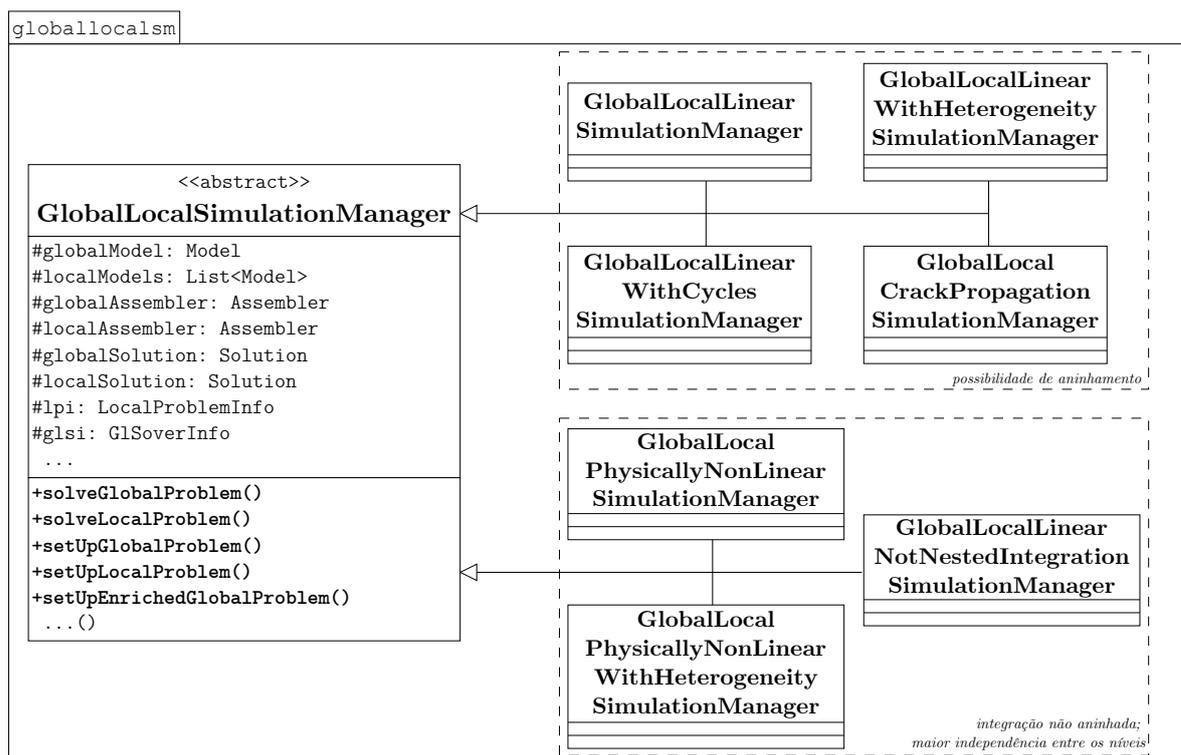


Figura 4.12: Implementação dos gerentes global-local – Pacote `globallocalism`.

da resposta, em que classicamente uma etapa de pré-processamento é composta pelo carregamento de dados em um ponto de entrada fixo (p.ex., leitura de arquivo texto e construção do modelo discreto com todas as informações básicas necessárias), sendo esse o princípio do sistema INSANE. Pode-se ponderar, contudo, que há certas aplicações que requisitam atividades tipicamente de pré-processamento (sintonização fina do modelo) em tempo de processamento/execução, após a etapa de carga de dados. Em situações como essa, pleiteia-se algum mecanismo que consiga furar a hermeticidade do fluxo default. Assim, guiados pela demanda de um pré-processamento de dados suplementares em tempo de execução da solução, surgiram objetos ditos **gerentes de dados**, que possibilitam não só manipulações características de pré-solução (quando não há, por exemplo, nenhum tipo de conta matemática, de fato), como podem encapsular outros atributos e métodos. Os `DataManagers` desta obra inspiram-se naqueles de análises não locais implementados no sistema INSANE (`ModelDataManager`), mas ampliam um pouco o universo conceitual da variedade de referência, que é utilizada com o intuito único de inventariar pontos de integração de um modelo do MEF para ponderação de deformações e incorporação de não localidade ao modelo numérico.

Dois são os gerentes de dados trabalhados aqui:

- **GlobalLocalDataManager** (GLDM): o *data manager* global-local nasce com a incumbência de envolver os modelos global e locais e gerenciar a comunicação entre as duas escalas em nível de componentes dos modelos discretos (i.e., elementos, nós, nuvens, pontos de integração etc.), evoluindo paulatinamente para um repositório de dados de entrada e executor de operações topológicas de manipulação de estruturas de dados de semi-arestas (Mantyla, 1988) derivadas dos modelos discretos, úteis para a criação de problemas locais em tempo de processamento. Importante salientar que, na implementação computacional deste trabalho, todos os mecanismos que envolvem técnicas de malhamento, e, em menor medida, alguns dos métodos geométrico-computacionais usados, se valem de uma estrutura de dados dita de semi-arestas: uma estrutura de divisão planar de sólidos pautada por uma relação hierárquica entre unidades elementares de semi-arestas, arestas, laços, faces e sólido, com alguns recursos previamente implementados na plataforma de desenvolvimento utilizada (Penna, 2007). Nesse contexto, por exemplo, é o GLDM quem realiza o mapeamento dos pontos de integração entre as escalas em parceria com o configuradores específicos.
- **ParticleDataManager** (PDM): o administrador de partículas PDM, por sua vez, é responsável por produzir e armazenar um metadado numérico, alusivo a uma morfologia mesoestrutural de meios particulados, a ser incorporado em um modelo típico do MEF/MEFG através de configuradores específicos (na seção 4.2.3 disserta-se sobre a geração e alocação das heterogeneidades).

A figura 4.13 ilustra a organização do pacote que contém as classes anteriores. Destacam-se nos diagramas UML alguns atributos e métodos mais relevantes.

Destacada na figura 4.13 tem-se a operação de mapear pontos de integração entre as escalas. Essa função é executada segundo o algoritmo 4.2. A operação *se* da linha 8 é um procedimento geométrico do tipo *ponto-em-polígono* padrão (Heckbert, 1994), indicado no algoritmo 4.3, e a determinação das coordenadas naturais  $\xi_i^{(2)}$  (linha 9) é um processo iterativo (Elwi e Hruday, 1989), vide algoritmo 4.4. As outras rotinas são consideradas diretas e auto-explicativas.

Outra das funcionalidades nucleares indicadas no diagrama é o preenchimento de uma estrutura de semi-arestas (HEDS), que permite a realização de operações geométricas de

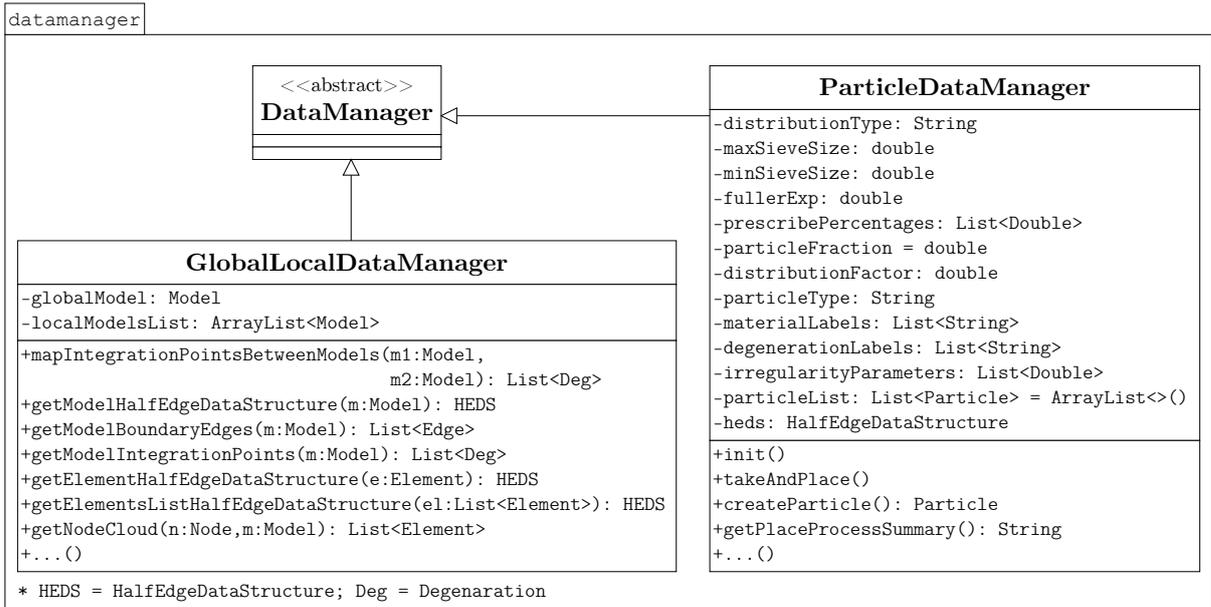
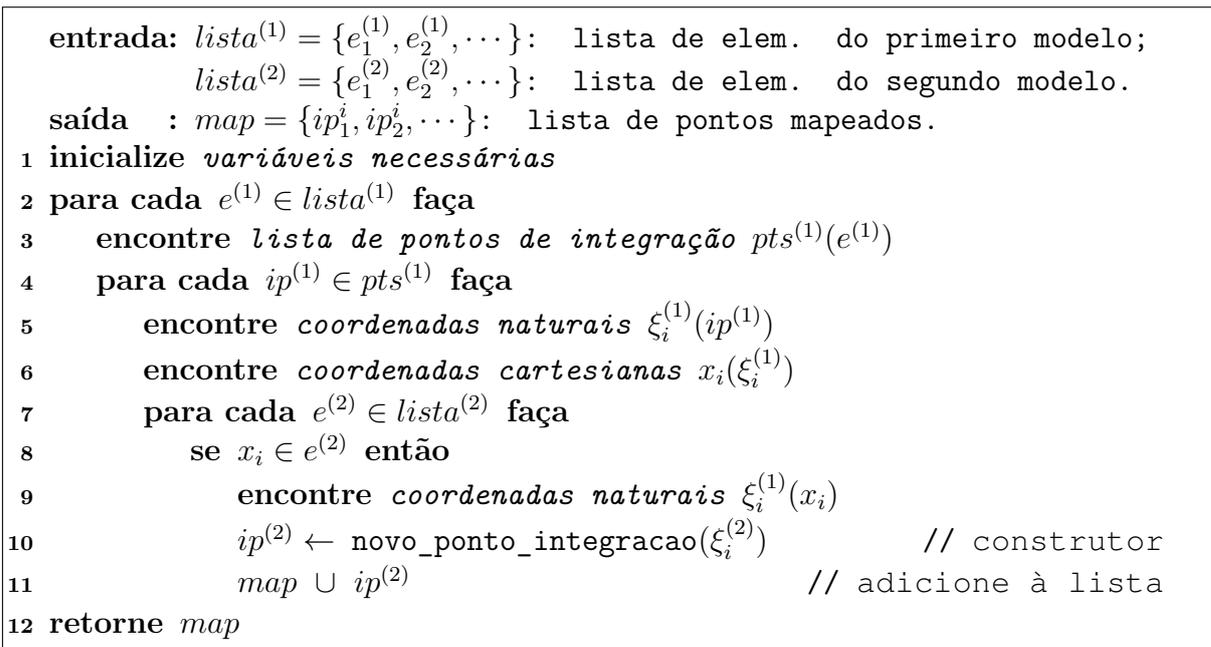


Figura 4.13: Implementação dos gerentes de dados – Pacote datamanager.



Algoritmo 4.2: Mapeamento dos pontos de integração.

modo mais consistente. Nesse sentido, considerando que a dinâmica de entrada de dados do sistema empregado nesta pesquisa não foi alterada, cabe ressaltar o processo de construção da referida estrutura acessória. No INSANE, assim como em boa parte dos programas de MEF não comerciais, empregados na academia, utilizam-se arquivos de entrada (de variadas extensões: .txt, .dat, .xml etc.) com a especificação direta da estrutura de dados de um modelo discreto típico, quer dizer, a descrição explícita de nós,

```

entrada:  $\Omega$ : um polígono com lado  $\Gamma$ ;
            $\mathbf{x}$ : um ponto.
saída :  $p \in \{\text{dentro}, \text{fora}\}$ : ponto está dentro ou fora,
           respectivamente.
1 inicialize contador
2 para cada  $\Gamma \in \Omega$  faça
   /* Atirar um raio no infinito com origem no ponto */
3 raio  $\leftarrow$  gerar_raio( $\mathbf{x}, \infty$ ) // função específica
4 se raio  $\cap \Gamma \neq \emptyset$  então
5     contador  $\leftarrow$  contador + 1
   /* Se número de interseções é ímpar, ponto está dentro */
6 se contador mod 2  $\neq$  0 então
7     retorne dentro
8 senão
9     retorne fora

```

Algoritmo 4.3: Ponto em polígono via Ray Casting. Adaptado de Heckbert (1994).

```

entrada:  $\mathbf{x}$ : ponto em coordenadas cartesianas;
           elemento: elemento finito;
            $\epsilon$ : tolerância;
            $m$ : número máximo de iterações.
saída :  $\xi$ : ponto em coordenadas naturais.
1 encontre coordenadas cartesianas nodais  $\mathbf{C}(\text{elemento})$ 
2 enquanto ( $j < m$ ) & ( $\|\delta\xi\|/\|\xi\| > \epsilon$ ) & ( $\|\delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\| > \epsilon$ ) faça
3     encontre funções de forma  $\mathbf{N}(\text{elemento})$ 
4      $\mathbf{B} \leftarrow \partial\mathbf{N}/\partial\mathbf{x}$ 
5      $\mathbf{T} \leftarrow \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ 
6     encontre coordenadas cartesianas (auxiliar)  $\delta\mathbf{x}^{AUX}(\xi)$ 
7      $\delta\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} - \delta\mathbf{x}^{AUX}$ 
8      $\delta\xi \leftarrow \mathbf{T}^{-\top} \delta\mathbf{x}$ 
9      $\xi \leftarrow \xi + \delta\xi$ 
10     $j \leftarrow j + 1$ 
11 retorne  $\xi$ 

```

Algoritmo 4.4: Mapeamento inverso. Adaptado de Elwi e Hrudney (1989).

elementos, materiais, cargas, entre outros. Essas informações não são, a princípio, noções topológico-geométricas, mas dados singulares de uma abstração de um dito modelo numérico. Portanto, no âmbito da plataforma de desenvolvimento utilizada e nesta pesquisa, foi preciso explicitar a transformação característica que se dá entre os dois referidos arcabouços. Impondo-se um certo preciosismo pedagógico, especifica-se proceduralmente a operação em domínios bidimensionais no algoritmo 4.5.

```

entrada:  $M$ : modelo discreto (estrutura de dados com listas de nós,
 $L_n^M = \{n_1, n_2, \dots\}$  e de elementos,  $L_e^M = \{e_1, e_2, \dots\}$ )
saída :  $HEDS$ : estrutura de dados de semi-arestas (com listas
de vértices  $L_v^{HEDS} = \{v_1, v_2, \dots\}$ ,
de arestas  $L_a^{HEDS} = \{a_1, a_2, \dots\}$ ,
de faces  $L_f^{HEDS} = \{f_1, f_2, \dots\}$ ).
1 inicialize estrutura de divisão planar  $HEDS$  e demais atributos
auxiliares
/* Preenchimento de lista de vértices */
2 para cada  $n_i \in L_n^M$  faça
3 encontre rótulo do nó  $id^{n_i}$ 
4 encontre coordenadas do nó  $p^{n_i}$ 
5  $v_i \leftarrow$  gerar_vertice( $id^{n_i}, p^{n_i}$ ) // construtor da instância
6  $L_v^{HEDS} \cup v_i$ 
/* Complementação das demais listas da HEDS a partir do
preenchimento de uma face; para cada "elemento finito" têm-se
uma face, com seus respectivos vértices, */
7 para cada  $e_i \in L_e^M$  faça
8 encontre incidência do elemento  $L_n^E = \{\dots, n_j, n_{j+1}, \dots\}$ 
9 para cada  $n_j \in L_n^E$  faça
10 encontre na lista de vértices  $L_v^{HEDS}$  aquele equivalente ao nó
corrente da incidência do elemento  $L_n^E$  ( $v_j \equiv n_j$ )
11  $L_v^{AUX} \cup v_j$  // lista auxiliar
12 encontre rótulo do elemento  $id^{e_i}$ 
13 inicialize um loop  $l_i(id^{e_i})$ 
14 para cada  $\{v_j, v_{j+1}\} \subset L_v^{AUX}$  faça
15  $a_k \leftarrow$  gerar_aresta( $v_j, v_{j+1}$ ) // construtor
16 se  $a_k \in L_a^{HEDS}$  então
/* Se aresta já se encontra na HEDS, edite sua
semi-aresta externa/esquerda */
17  $sa_k^{EXT} \leftarrow$  gerar_semi_aresta( $v_k, v_{k+1}, l_i, a_i$ ) // construtor
18 associe semi-aresta  $sa_k^{EXT}$  ao loop  $l_i$ 
19 associe semi-aresta  $sa_k^{EXT}$  à aresta  $a_k$ 
20 senão
/* Se aresta não se encontra na HEDS, edite sua
semi-aresta interna/direita e adicione aresta à lista
*/
21  $sa_k^{INT} \leftarrow$  gerar_semi_aresta( $v_k, v_{k+1}, l_i, a_i$ ) // construtor
22 associe semi-aresta  $sa_k^{INT}$  ao loop  $l_i$ 
23 associe semi-aresta  $sa_k^{INT}$  à aresta  $a_k$ 
24  $a_k \cup L_a^{HEDS}$ 
25  $f_i \leftarrow$  gerar_face( $id^{e_i}, l_i$ ) // construtor
26 associe face  $f_i$  ao loop  $l_i$ 
27  $f_i \cup L_f^{HEDS}$ 
28 retorne  $HEDS$ 

```

Algoritmo 4.5: Preenchimento de estrutura de divisão planar a partir de uma estrutura de dados típica de um modelo discreto.

### 4.2.2.3 Configuradores

No âmbito da simulação indicada na figura 4.10, há etapas classificadas como de configuração. Essas fases auxiliares são executadas por instâncias chamadas **Setupers**, ou configuradores. De maneira a dissolver ao máximo a execução das diversas etapas de uma simulação, idealizaram-se classes complementares cuja função é a de atribuir formas intermediárias ao modelo numérico, construindo estruturas de dados secundárias, traduzindo informações ou incorporando dados em tempo de processamento.

No caso da aplicação deste trabalho, análise global-local de sólidos, os configuradores GL são responsáveis por:

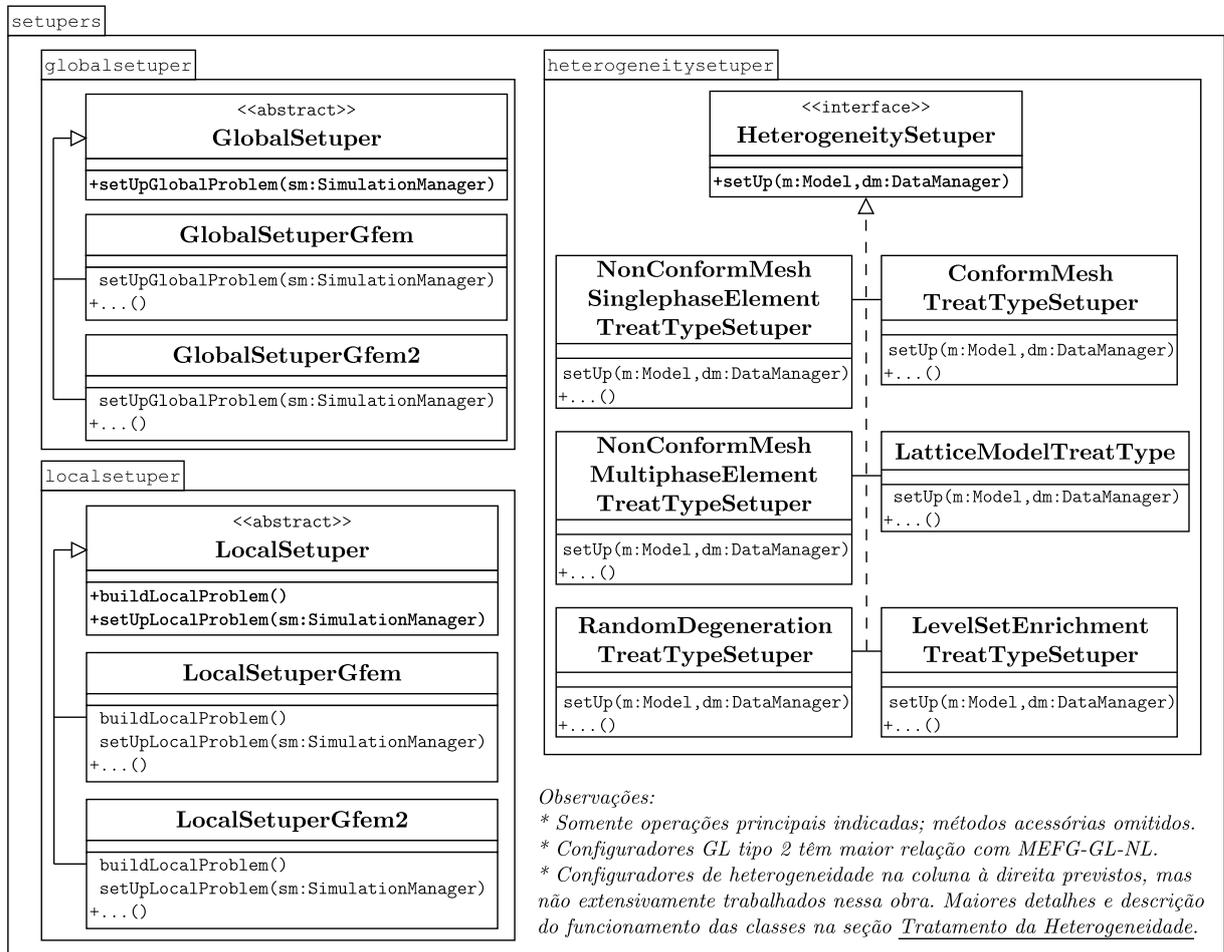


Figura 4.14: Implementação dos configuradores – Pacote **setuper**.

- Criar graus de liberdade;
- Injetar enriquecimentos;

- Convocar ou realizar mapeamentos de degenerações e estados constitutivos entre as escalas (ver seção seguinte e seção 4.1.2.4 para maiores detalhes);
- Disponibilizar vetores acessórios para a solução numérica (como vetores de variáveis de estado físicas quando do enriquecimento, ou equações nodais de g.d.l. incrementados num método de controle);
- Preencher *chaves* nos elementos finitos (no caso particular da estratégia tradicional de integração aninhada, existem chaves no EF a serem especificadas – maiores detalhes em [Alves \(2012\)](#));
- Construir o modelo numérico local (extrair o domínio local do problema global, processar a malha topologicamente e traduzí-la para uma estrutura de dados típica de um modelo discreto do sistema INSANE);
- Propagar trincas ou outro tipo de degradação (ou auxiliar o processo de evolução das mesmas);
- Promover e controlar o surgimento de domínio(s) local(is);
- Controlar o crescimento do(s) domínio(s) local(is), entre outros.

Nessa linha, portanto, podemos descrever resumidamente os configuradores global-local da seguinte forma:

- **GlobalSetuper (GS)**: abstração composta por duas operações principais, quais sejam, `setUpGlobalProblem()` e `setUpEnrichedGlobalProblem()` (este de menor relevância conceitual que o primeiro) – ver algoritmo 4.7. Tal como indicam seus nomes, são métodos responsáveis por guardar tarefas intermediárias de sintonização do problema global. Sua implementação no contexto do MEFG (`GlobalSetuperGfem`) engloba além das operações nucleares e genéricas, atividades como a criação de g.d.l., inserção de enriquecimentos, disparo do mapeamento de pontos de integração e ponderação 4.6.
- **LocalSetuper (LS)**: abstração composta pelas operações responsáveis por disparar a construção de um problema local e editá-lo conforme desejado ou preciso, a saber: `buildLocalProblem()`, que se relacione com mecanismos de construção de

domínios locais discretizados em processamento (algoritmo 4.8), e `setUpLocalProblem()`, que, a depender das hipóteses fundamentais da estratégia GL usada (técnica de integração, p.ex.), possuirá vieses um pouco diferentes (4.9). As variações `LocalSetupGfem` possuem geradores de malha, propagadores de trinca, entre outras funções.

```

entrada:  $lista^{(1)} = \{e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots\}$ : lista de elem. do primeiro modelo;
            $lista^{(2)} = \{e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \dots\}$ : lista de elem. do segundo modelo.
1 inicialize variáveis necessárias
2 para cada  $e^{(1)} \in lista^{(1)}$  faça
3   encontre lista de pontos de integração  $pts^{(1)}(e^{(1)})$ 
4   para cada  $ip_i^{(1)} \in pts^{(1)}$  faça
5     encontre coordenadas naturais  $\xi_i^{(1)}(ip^{(1)})$ 
6     encontre coordenadas cartesianas  $x_i(\xi_i^{(1)})$ 
7     para cada  $e^{(2)} \in lista^{(2)}$  faça
8       encontre dimensão característica  $\Omega^L$  de  $e^{(2)}$ ;
           $\Omega^L (s \approx r^{CIRCUNSCRITO})$ 
9       se  $x_i \in e^{(2)}$  então
10        para cada  $ip_j^{(2)} \in pts^{(2)}$  faça
11          encontre variável  $\varepsilon(ip^{(2)})_j$  e guarde
12           $\varepsilon(ip^{(1)})_i \leftarrow \sum 1/\Omega^L \varepsilon(ip^{(2)})_j$ 

```

Algoritmo 4.6: Ponderação de grandeza interna entre dois modelos.

Adicionalmente, existem classes destinadas ao tratamento numérico da heterogeneidade material. Esse tipo de configurador trabalha em conjunto com o gerente de partículas, embutindo num modelo discreto do MEF/MEFG os dados de modelos mesoestruturais de meio particulados. Na seção seguinte, amplia-se a discussão, e maiores detalhes são apresentados. Por ora, registra-se a organização básica dessas instâncias em conjunto com os *setups* GL (figura 4.14).

#### 4.2.2.4 Solucionadores e Acessórios

A estrutura geral implementada é composta ainda por classes adicionais usadas para operar certas tarefas ou para organizar algumas instâncias. Evidentemente, fora as abstrações fundamentais do sistema INSANE, há um conjunto significativo de outras classes basilares da plataforma de desenvolvimento (representativas de materiais, modelos constitutivos, constituintes básicos do modelo discreto etc.) em diálogo com este trabalho. Nesses pontos de contato, interações e dependências se deram de maneira simples, sem

```

entrada:  $M^G = \{L^N = \{n_1, n_2, \dots\}, L^E = \{e_1, e_2, \dots\}, \dots\}$ : um modelo
local (estrutura de dados composta por listas de nós,
elementos etc.);
 $W = \{\mathbf{P}, (m \times n), MI, MRI, \dots\}$ : janela de adaptatividade
com conjunto de informações de
modelo  $MI = \{\text{Material}, \text{ConstitutiveModel}, \dots\}$ ,
refinamento  $MRI = \{h, \dots\}$ ,
posição  $\mathbf{P}$ ,
dimensões  $(m \times n)$ .
1 pegue o modelo local  $M^G$ 
  /* Atribua valores  $\{V_1, V_2, \dots\}$  para as chaves  $\kappa_j$  dos mapas
   $\text{mapa}[\kappa, \nu](e)$  dos elementos */
2 para cada  $e_i \in L^E$  faça
3   para cada  $\kappa_j \in \text{mapa}[\kappa_j, \nu_j](e_i)$  faça  $\nu_j := \text{mapa}[\kappa_j, ] \leftarrow V_j$ 
4 acesse  $W := W(\mathbf{P}, m \times n)$ 
  /* Pegue os nós enriquecidos */
5 para cada  $e_i \in L^E$  faça
6   para cada  $n_j \in e_i$  faça
7     se  $n_j \in W(\mathbf{P}, m \times n)$  então // algoritmo 4.3
8        $L^{ENR} \cup n_j$ 
  /* Crie graus de liberdade e enriquecimento */
9 para cada  $n_j \in L^{ENR}$  faça
10  para cada  $x_i \in X = \{x_1, x_2\}$  faça
11    inicialize g.d.l.  $gl_i$ 
12    inicialize enriquecimento  $f(x_i)$ 

```

Algoritmo 4.7: Operação geral simplificada de configuração de um problema global numa abordagem MEFGL/MEFGL-NL – `setUpGlobalProblem()` + `setUpEnrichedGlobalProblem()`.

alterações na estrutura de dados original do programa (a menos que de fato fosse compulsórias e imperativas). Em geral, quando da necessidade de modificações em partes antigas do núcleo, procurou-se criar instâncias novas, descendentes, que pudessem facilitar a implementação distribuída da pesquisa e não alterar o que já existisse. De todo modo, há ainda componentes acessórios novos que serão apresentados a seguir, de maneira resumida. Essencialmente temos:

- `StaticEquilibriumPathGlobalLocal`: diferentemente do `Solution` tradicional do *kernel* da plataforma de desenvolvimento empregada, a versão global-local do `StaticEquilibriumPath` requisita configurações intermediárias para o gerente da simulação, que delega as tarefas pedidas. Comunica-se com a instância do algoritmo incremental-iterativo que realiza as operações matriciais das equações típicas de uma

```

entrada:  $M^G = \{L^N = \{n_1, n_2, \dots\}, L^E = \{e_1, e_2, \dots\}, \dots\}$ : um modelo
global (estrutura de dados composta por listas de nós,
elementos etc.);
 $W = \{\mathbf{P}, (m \times n), MI, MRI, \dots\}$ : janela de adaptatividade
com conjunto de informações de
modelo  $MI = \{\text{Material}, \text{ConstitutiveModel}, \dots\}$ ,
refinamento  $MRI = \{h, \dots\}$ ,
posição  $\mathbf{P}$ ,
dimensões  $(m \times n)$  etc.
saída :  $M^L$ : um modelo local
/* Posicione o PL */
1 inicialize propagação/evolução de fenômeno local
2 acesse  $W := W(\mathbf{P}, m \times n)$ 
3 para cada  $e_i \in L^E$  faça
4   para cada  $n_j \in e_i$  faça
5     se  $n_j \in W(\mathbf{P}, m \times n)$  então // algoritmo 4.3
6        $L^{AUX} \cup e_i$ 
/* Gerar half edge data structure (algoritmo 4.5)
 $HEDS(L^{AUX}) = \{v_k, a_s, f_p, \dots\}$ ,  $v_k$  vértices,  $a_s$  arestas,  $f_p$ 
faces etc. */
7  $HEDS(L^{AUX}) \leftarrow$  gerar_estrutura_de_semi_arestas
/* Inicie o malhamento via técnica escolhida (Mapeamento
Transfinito (Goncalves, 2004), p.ex.) */
8 inicialize instâncias extras para dado malhamento
9 para cada  $a_s \in HEDS(L^{AUX})$  faça
10   divida  $a_s$  em h partes
11 gere malha  $HEDS^{MESH}$ 
/* Traduza a malha para Model */
12 para cada  $v_j \in HEDS^{MESH}$  faça  $v_i \mapsto n_i; n_i \cup M^L$ 
13 para cada  $f_i \in HEDS^{MESH}$  faça  $f_i \mapsto e_i; e_1 \cup M^L$ 
14 atribua  $MI = \{\text{Material}, \text{ConstitutiveModel}, \dots\}$  a  $M^L$ 
15 retorne  $M^L$ 

```

Algoritmo 4.8: Operação geral simplificada de construção de um problema local numa abordagem MEFGL/MEFGGL-NL – buildLocalProblem().

```

entrada:  $M^L = \{L^N = \{n_1, n_2, \dots\}, L^E = \{e_1, e_2, \dots\}, \dots\}$ : um modelo
            local (estrutura de dados composta por listas de nós,
            elementos etc.);
             $GLI = \{CDC, \dots\}$ 
1 pegue o modelo local  $M^L$ 
   /* Atribua valores  $\{V_1, V_2, \dots\}$  para as chaves  $\kappa_j$  dos mapas
    $mapa[\kappa, \nu](e)$  dos elementos */
2 para cada  $e_i \in L^E$  faça
3   para cada  $\kappa_j \in mapa[\kappa_j, \nu_j](e_i)$  faça  $\nu_j := mapa[\kappa_j, ] \leftarrow V_j$ 
4 inicialize geração e alocação de heterogeneidades
5 traduza traduza metadado geométrico para dado numérico do modelo
   discreto
   /* Atribua CDC para cada aresta do elemento  $e_i = \Omega^{e_i} \cup \partial\Omega^{e_i}$  */
6 para cada  $e_i \in L^E$  faça
7   para cada  $a_s \in e_i$  faça
8     se  $a_s \in \partial\Omega^{e_i}$  então atribua CDC.

```

Algoritmo 4.9: Operação geral simplificada de configuração de um problema local numa abordagem MEFG-GL/MEFG-GL-NL – `setUpLocalProblem()`.

análise não linear do tipo, um código alusivo a um Newton-Raphson padrão. Na estrutura do INSANE, essa classe é um `Step`, cuja versão global-local implementada aqui é o `StandardNewtonRaphsonGlobalLocal`. Diferentemente da variante tradicional `StandarNewtonRaphson`, a opção GL requer a solução de dois modelos (pelo menos), um global, que comanda o espectro não linear da análise, e um local, cuja solução é usada para enriquecer o problema global. Na nova dinâmica submetida aqui, este `Step` necessita que um modelo local seja gerado em processamento, devidamente montado nos padrões do sistema, resolvido através de uma estratégia secante (`SteadyStateSecant`), e devolvido. Portanto, é uma nova instância que envia solicitações para o gerente da simulação, compelindo configurações acessórias.

- `StandardNewtonRapshonGlobalLocal`: instância do tipo `Step` que opera as contas necessárias de uma análise incremental-iterativa, porém dentro da lógica global-local. Diferentemente da abstração original do sistema INSANE, possui etapas de configuração intermediárias;
- `SteadyStateSecant`: instância que realiza uma solução linear (em um passo de carga único), com uma rigidez secante (ou seja, ao invés de chamar um método que monta um operador constitutivo sem consideração do estado de degradação, convoca o método que monta a rigidez utilizando a componente

incremental secante corrente).

- **LocalProblemInfo**: estrutura que reúne dados de entrada de problemas locais. É composta originalmente por **AdaptivityInfo**, **ModelInfo** e **CrackPropagationInfo**.
  - **AdaptivityInfo**: composta por parâmetros relacionados à automatização da geração de um problema local. Conta com um critério de adaptatividade (**AdaptivityCriterion**), previsto para generalizar o tipo de detecção de fenômeno evolutivo que dispara o problema local; uma janela de seleção (**Window**) de uma região a ser refinada; e um descritor do tipo de método de refinamento (**MeshRefinementInfo**);
    - \* **AdaptivityCriterion**: atributo previsto para identificação do tipo de critério de automação. Embora não usado nesta obra, antecipa-se essa generalização para implementação de uma completa adaptatividade do(s) problema(s) local(is), seja através de indicadores de tensões/deformações máximas, de localização, de estimadores de erro, ou qualquer outra estratégia; ou seja, dado um parâmetro evolutivo do modelo global, continuamente monitorado, pode-se ativar o surgimento de um problema local durante o processamento. Nesta pesquisa, prescreveu-se a região de extração do domínio local, que foi montado automaticamente durante a análise;
    - \* **Window**: abstração da janela de seleção/extração de um problema local, com atributos como altura, largura e posição (ponto central);
    - \* **MeshRefinementInfo**: estrutura de dados com parâmetros para refinamento de malha (o tipo de estratégia, o número de divisões no domínio extraído, tamanho do elemento etc.).
  - **ModelInfo**: encapsula dados essenciais para a construção de um modelo local genérico, a saber: modelo de análise (**AnalysisModel**), se estado plano de tensão, deformação etc.; um obtentor de matrizes com base no modelo de análise (**ProblemDriver**), objeto típico do INSANE que atua em conjunto com o **Assembler** tradicional de um método como o MEF); lista de materiais (**List<Material>**); modelo constitutivo (**ConstitutiveModel**); um rótulo (**String**); combinação de carga (**LoadCombination**), objeto compulsório para

- a execução de um modelo no INSANE, ainda que não necessário numa análise GL; lista de enriquecimentos (`ArrayList<EnrichmentType>`), caso haja o desejo de se incorporar outros enriquecimentos no domínio local; tipo de solucionador matricial local (`int`), número que identifica se decomposição de Crout, Cholesky, Gradientes Conjugados etc.;
- **CrackPropagationInfo**: repositório de informações para simulações com propagação de trinca, notoriamente aquelas baseadas na Mecânica da Fratura Linear Elástica. Resumidamente, por contenção de escopo, contém uma etiqueta representativa do tipo de descontinuidade, um rótulo para a descontinuidade e um conjunto de parâmetros para a propagação, tais como referências para localização do segmento de trinca inicial (ângulos e pontos), indicador do modo de fratura, incremento de trinca, entre outros.
  - **GLSolverInfo**: estrutura de dados com informações sobre o *solver* global-local, i.e., número de ciclos GL, parâmetros de penalidade, condições de contorno, entre outros que se julgarem pertinentes.
  - **GlobalLocalDegeneration**: abstração que simboliza um ponto de integração na dinâmica global-local com não aninhamento de malha. Tipicamente, um objeto do INSANE do tipo `Degeneration` encapsula, além de um mapa com diversas propriedades materiais, uma representação (**Representation**) num espaço parametrizado com coordenadas naturais, que é utilizada, p.ex., para cômputo de parcelas de operadores constitutivos. Desse modo, considerando que há no cerne da estratégia MEFGL-NL um mapeamento de pontos de quadraturas entre as escalas, criou-se um novo tipo de degeneração com duas representações, uma representação padrão, associada à escala de origem, e uma representação adicional, que encerra as características do ponto na outra escala, quando do mapeamento.
  - **EventNotifier**: simples invólucro com nomenclatura mais tangível e coerente da abstração Java nativa `PropertyChangeSupport`, que atua como notificador de eventos para classes que possuem um atributo do tipo.
  - *Compilado de eventos*: pares de eventos na lógica “*set-up-solve*” que servem na comunicação entre as classes gestoras e executoras, notadamente entre os configuradores, solucionadores e o `SimulationManager`. Implementações da abstração

Java nativa `PropertyChangeEvent`. Ex.: `SetUpLocalProblemEvent` e `SolveLocalProblemEvent`. Essas notificações são ouvidas por `PropertyChangeListeners`, os gestores da simulação. Há ainda eventos de pós-processamento (`OutputEvent`), que funcionam como envelopes de `Model` e `Solution` correntes a serem enviados para pós-processamento pelo núcleo do INSANE na lógica `Observer-Observable`.

- Intervenções pontuais em `HalfEdgeDataStructure` e `ComputationalGeometry`: como empregou-se estruturas de adjacências e operações geométricas para geração de modelos, classes e funções típicas de HEDS e geometria computacional foram implementadas ou aproveitadas. Maiores informações teóricas sobre problemas típicos nesse campo podem ser encontradas nos livros de [De Berg et al. \(2000\)](#) e [Mantyla \(1988\)](#) ou na dissertação de [Penna \(2007\)](#).

### 4.2.3 Tratamento da Heterogeneidade

Conforme se viu no capítulo 2.3, existem algumas alternativas, com variados níveis de complexidade, para introdução de heterogeneidade material num modelo numérico, mas que via de regra envolvem um quociente geométrico-computacional significativo e que costumam depender, a posteriori, de técnicas de malhamento.

Valendo-se da flexibilidade e potência alegórica da programação orientada a objetos em representar a realidade, implementou-se neste trabalho um *framework* para tratamento numérico de heterogeneidade material. Com foco direcionado para materiais tipicamente granulares, arquetipicamente representados pelo concreto nesta tese, construiu-se abstrações relativamente genéricas para a figuração de partículas no interior de uma matriz contínua de material distinto. Neste trabalho, previu-se a inclusão da heterogeneidade através da prescrição de uma distribuição granulométrica de grãos em conjunto com outros parâmetros e atenção é dada à análise de arranjos bidimensionais.

Ademais, foram implementados recursos responsáveis por gerenciar a produção das partículas e outros atrelados à associação dessas informações no cerne do modelo numérico. Aqui cabe diferenciar dois aspectos importantes para clareza: em sua essência, um modelo morfológico mesoscópico de um material particulado é um dado de caráter puramente geométrico, ou seja, a conformação de uma estrutura interna é, em última instância, uma composição mais ou menos ordenada de unidades topológicas elementares que seguem determinada regra de disposição, lastreada em leis físico-químicas, estatísticas, ou

mesmo arbitrárias. Isto é, não há (ou pelo menos não deveria haver) obrigatoriamente nenhum vínculo prévio entre essa conformação interna presumida – e computacionalmente traduzida através de um expediente figurado específico – e o modelo numérico-matemático discreto a ser usado para resolver um problema da mecânica dos sólidos em que coexistam mais de uma fase material. Nesse sentido, a tradução de um metadado geométrico em propriedades elásticas distintas nos pontos materiais de um modelo numérico do MEEG (ou similar) é um mecanismo isolado e particular que requisitou a construção de variados componentes, tanto para generalização, quanto para avaliação de potencialidades. Como se verá adiante, portanto, há procedimentos para a construção do que aqui se chama de mesoestrutura (da escala local) e artifícios para alocação de propriedades constitutivas no interior do modelo numérico, dada uma certa distribuição de partículas.

#### 4.2.3.1 Estrutura Submacroscópica de Materiais Particulados

Conforme já indicado anteriormente, há neste trabalho uma natural inclinação por representar materiais granulares com comportamento frágil utilizando-se o concreto, por razões tecnológicas e contingências evidentes da área em que a pesquisa se insere. Haverá, pois, nesta breve subseção uma referência explícita ao concreto como forma de enquadrar parte das hipóteses fundamentais sob as quais se ergue o tratamento da heterogeneidade nessa obra.

Em mecânica computacional, esses materiais particulados são representados como meios multifásicos em dada escala de comprimento. Macroscopicamente são considerados homogêneos e em escala mesoscópica, assume-se uma estrutura formada por partículas (agregados) dispersas em uma matriz. Mesmo sendo possível adentrar ainda mais na matéria, de um ponto de vista explicitamente morfológico, modelos mais detalhados são de menor aplicabilidade e com inerentes restrições operacionais em MEF (Wriggers e Moftah, 2006).

No concreto, os agregados ocupam taxas volumétricas da ordem de 60% a 80%. Como regra, esses componentes são divididos em miúdos e graúdos. Agregados miúdos são representados pela areia e brita passante na peneira de  $4.75\text{mm}$ . Já os agregados graúdos são aqueles cuja dimensão máxima característica é retida no limiar de  $4.75\text{mm}$  e, em geral, compõem cerca de 40–50% do volume de um sólido típico (ABNT NBR 7211, 2005; Wang et al., 1999a; Wriggers e Moftah, 2006). A morfologia dessas inclusões depende de seu tipo, variando de mais arredondadas à mais angulares, existindo algumas leis empíricas

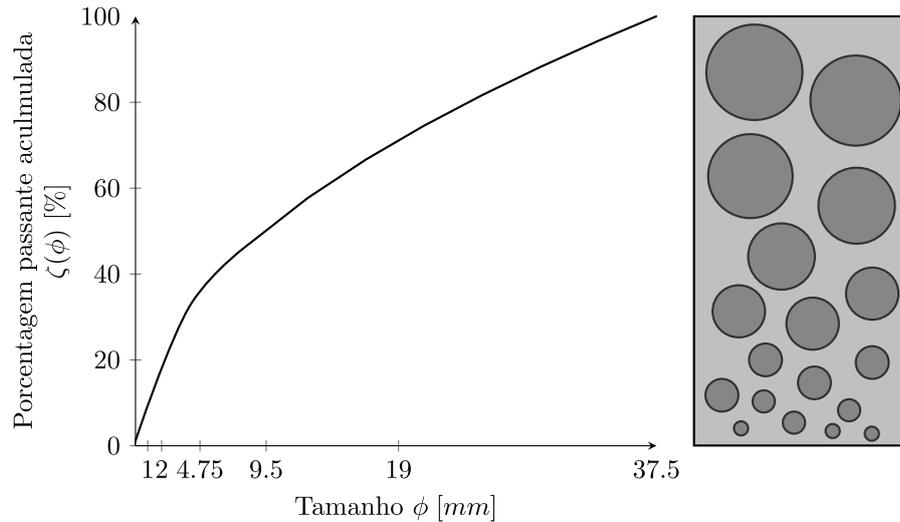


Figura 4.15: Distribuição granulométrica típica – Curva de Füller com  $DMC = 37.5mm$ ,  $n = 0.5$ ; Série normal. Adaptado de Häfner et al. (2006); Wriggers e Moftah (2006).

para descrição desse formato (Wang et al., 1999a; Wittmann et al., 1985).

A distribuição das partículas no interior da matriz é geralmente dada em termos de porcentagens acumuladas (em massa, por regra, ou volume) de material passante nas séries de peneiras normatizadas. A granulometria segue relações experimentais ou algébricas que permitem construir limites de gradação. A função contínua mais aceita é a chamada curva de Füller (figura 4.15), que possibilita um arranjo ótimo, com empacotamento mais próximo do ideal, o que numericamente é favorável, uma vez que curvas com gradação aberta podem dificultar a alocação das partículas no interior de uma região (Wang et al., 1999a; Wriggers e Moftah, 2006; Häfner et al., 2006).

Uma função de distribuição típica é da forma:

$$\zeta(\phi) = 100 \left( \frac{\phi}{\phi^{MAX}} \right)^n, \quad (4.40)$$

em que  $\zeta(\phi)$  é a porcentagem acumulada de material passante na peneira de diâmetro  $\phi$ ,  $\phi^{MAX}$  é o diâmetro (dimensão) máximo(a) característico(a) – DMC – do agregado (partícula) e  $n$  é um expoente empírico tal que  $0.45 < n < 0.70$ .

Para a geração e alocação de partículas na simulação computacional de materiais granulares bifásicos, utiliza-se de expedientes algorítmicos específicos, que serão descritos em seção subsequente. Esses processos se baseiam na escolha randômica de tamanhos de partículas a serem alocadas em dimensões elementares (volumes, áreas) entre intervalos

de gradação sucessivos de curvas de distribuição granulométricas prescritas (algébricas/-contínuas ou experimentais), com posterior posicionamento aleatório (mas restrito) da inclusão fabricada. A fração da dimensão total ocupada por partículas (p.ex., qual porcentagem do volume total é coberta pelas heterogeneidades) é regulada por um coeficiente fracionário/percentual típico. Essa dimensão elementar pode ser determinada segundo:

$$D([\phi_s, \phi_{s+1}]) = \frac{\zeta(\phi_s) - \zeta(\phi_{s+1})}{\zeta(\phi^{MAX}) - \zeta(\phi^{MIN})} \times \Delta \times D^{TOT} \quad (4.41)$$

em que  $D([\phi_s, \phi_{s+1}])$  representa a extensão do domínio original ocupada por um conjunto de partículas no intervalo de gradação especificado ( $[\phi_s, \phi_{s+1}]$ ), ou seja, entre os diâmetros característicos das peneiras com aberturas  $\phi_s$  e  $\phi_{s+1}$ ;  $\phi^{MIN}$  e  $\phi^{MAX}$  fazem referência aos limites inferior e superior de gradação, respectivamente;  $\Delta$  é o coeficiente que limita a fração de partículas (p.ex., 0.4, ou 40% de agregados); e  $D^{TOT}$  é a dimensão do domínio em que se distribuirão as partículas. Em exemplos tridimensionais, a extensão  $D$  toma dimensões de volume (Wriggers e Moftah, 2006; Häfner et al., 2006). Já em simulações em estado plano, nas quais uma das dimensões do modelo é rescindida,  $D$  tem caráter de área (Wang et al., 1999a)

#### 4.2.3.2 Metadado Numérico-Geométrico

Para representação computacional da heterogeneidade foi criado um conjunto de classes que encapsulam características e funcionalidades específicas daquilo que se considera uma partícula dispersa no interior de uma matriz. A generalização `Particle` possui como atributos um rótulo, uma dimensão característica (ABNT NBR 7211, 2005), uma posição, um formato e métricas associadas, tais como área e volume, prevendo-se ainda a possibilidade de armazenamento de um conjunto de propriedades materiais e comportamento constitutivo.

Com os olhos voltados para a simulação de estruturas de concreto e na esteira da ABNT NBR 7211 (2005), recorreu-se à mesma dinâmica normativa de determinação de distribuição granulométrica de agregados (partículas) através de ensaios de granulometria com distintas aberturas de peneiras. De tal forma que a geração de tamanhos de partículas nessa obra não é puramente ao acaso (embora randômica, como se verá), mas segue séries normal e intermediária de peneiras normalizadas. Para tanto, foram implementadas salvaguardas, materializadas na classe `Sieves`, que garantissem a aderência da distribuição

granulométrica aos diversos tamanhos previstos em norma.

Dois tipos de topologia foram considerados: partículas esféricas (`SphericalParticle`) e partículas poligonais, com número de arestas e níveis de irregularidade prescritíveis (`IrregularParticle`). Cada uma dessas partículas possui suas particularidades, a saber:

- `SphericalParticle`: possuem como dimensão característica seu raio e como componente topológico interno definidor de sua forma, um círculo (associado à classe utilitária `Circle`). Sendo de natureza mais elementar, necessitam basicamente da prescrição de um raio e de uma posição para serem instanciadas.
- `IrregularParticle`: são entidades ligeiramente mais complexas, formadas com base na combinação dois-a-dois de projeções de vértices perimétricos de uma circunferência circunscrita, obtidos a partir da variação incremental no ângulo central do polígono (aquele formado entre dois circunraios sucessivos). No algoritmo desenvolvido, a linha poligonal será necessariamente fechada e simples, mas não há nenhuma restrição de convexidade; ou seja, a depender dos parâmetros de irregularidade prescritos, pode-se alcançar polígonos côncavos. Esses parâmetros regulam a fuga perimetral dos vértices obtidos da divisão da circunferência circunscrita (se serão alocados mais para dentro ou para fora do círculo), bem como o número de lados resultante e a taxa de incremento do ângulo central. Com isso, distintas formas podem ser obtidas. Sua topologia é representada pela classe utilitária `IPolygon`. Existem leis morfológicas para descrição da forma de partículas dessa natureza em concreto ([Wittmann et al., 1985](#); [Wang et al., 1999a](#); [Häfner et al., 2006](#)). Neste trabalho, desenvolveu-se uma adaptação de caráter estocástico, com distorções angulares uniformes e variações radiais gaussianas, que não segue necessariamente funções com lastro experimental. O algoritmo [4.10](#) apresenta o mecanismo.

A figura [4.16](#) ilustra esquematicamente as partículas previstas, com destaque para os parâmetros de construção de partículas poligonais irregulares. Comumente, para parâmetros de entrada iguais, as partículas esféricas e poligonais possuirão áreas/volumes equivalentes, havendo, contudo, uma ligeira tendência das inclusões circulares possuírem dimensões um pouco maiores, dada a natureza randômica da distorção dos polígonos.

Na figura [4.17](#) são apresentadas as classes formadoras das instâncias representativas da

```

entrada:  $\phi$ : dimensão característica;
            $\mathbf{P}$ : posição;
            $\delta r_0$ : perturbação radial;
            $\delta \Theta_0$ : perturbação angular;
            $\eta$ : número de vértices.

saída :  $\Omega$ : partícula.
1  $\Theta^{MIN} \leftarrow (2\pi/\eta) - \delta \Theta_0$ 
2  $\Theta^{MAX} \leftarrow (2\pi/\eta) + \delta \Theta_0$ 
  /* Incrementos de ângulo com distribuição uniforme */
3 para cada  $i \in \{1, \dots, \eta\}$  faça
4   encontre número randômico  $c$ / distribuição uniforme  $n^U$ 
5    $\delta \Theta_i \leftarrow \Theta^{MIN} + (\Theta^{MAX} - \Theta^{MIN}) \times n^U$ 
  /* Normalizar */
6  $\delta \Theta \leftarrow [2\pi / (\sum \delta \Theta_i)] \delta \Theta$ 
  /* Perturbação nos raios com distribuição normal */
7 para cada  $i \in \{1, \dots, \eta\}$  faça
8   encontre número randômico  $c$ / distribuição uniforme  $n^G$ 
9    $r_i \leftarrow \phi + \delta r_i \times n^G$ 
10   $x_i \leftarrow P_x + r \times \cos(\delta \Theta_i)$ 
11   $y_i \leftarrow P_y + r \times \sin(\delta \Theta_i)$ 
12   $\Gamma \cup \{x_i, y_i\}$  // poligonal discretizada
13  $\Omega \leftarrow \text{gerar\_particula}(\mathbf{P}, \Gamma, \phi)$  // construtor da instância
14 retorne  $\Omega$ 

```

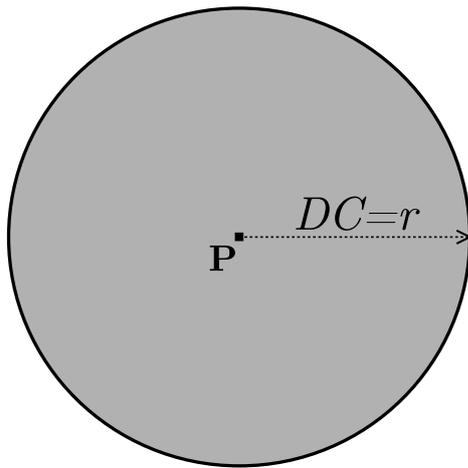
Algoritmo 4.10: Geração de partículas poligonais irregulares.

abstração computacional responsável por consubstanciar virtualmente morfologias particuladas de meios prioritariamente bifásicos. Nos diagramas UML destacam-se os atributos e métodos de cada classe.

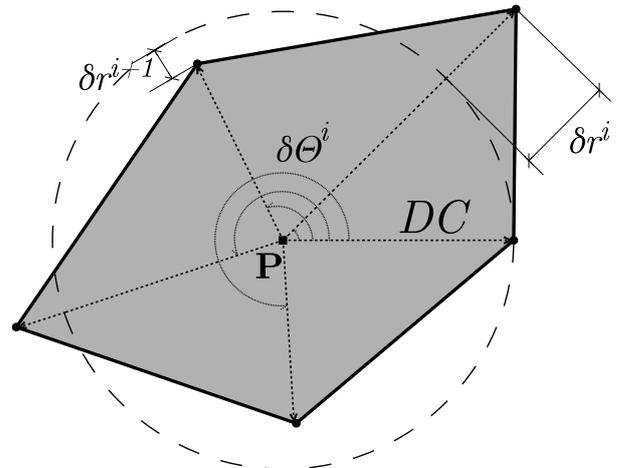
#### 4.2.3.3 Administração do Metadado

Para a geração e alocação de partículas num dado domínio, surge a necessidade de um recurso responsável por:

- Armazenar dados de entrada convenientes, tais como: distribuição granulométrica, coeficientes de funções de distribuição, parâmetros de irregularidades de partículas etc.;
- Gerenciar o processo de produção e alocação de partículas, bem como administrar a comunicação com todas as instâncias computacionais anexas. Nessa alçada, emerge um procedimento particular de uma categoria de algoritmos ditos *take-and-place* (“pegue e posicione”) (Bažant et al., 1990; Wang et al., 1999a,b; Wriggers e Mof-tah, 2006; Häfner et al., 2006) que é o cerne funcional da estrutura de dados aqui



(a) SphericalParticle.  
Posição:  $\mathbf{P}$ , Dim. Caract.:  $r$



(b) IrregularParticle.  
Posição:  $\mathbf{P}$ , Dim. Caract. Média:  $r$   
Parâm. Irreg.:  $\delta r^i, \delta \Theta^i$

Figura 4.16: Conformação das partículas previstas. (a) SphericalParticle – Posição:  $\mathbf{P}(x, y, z)$  e Dimensão Característica: raio  $r$ . (b) IrregularParticle – Posição  $\mathbf{P}(x, y, z)$ ; Dimensão Característica Média: raio da circunferência circunscrita  $r$ ; Parâmetros de Irregularidade:  $\delta r^i$ , fuga do raio médio,  $\delta \Theta^i$ , incremento do ângulo central a partir do datum.

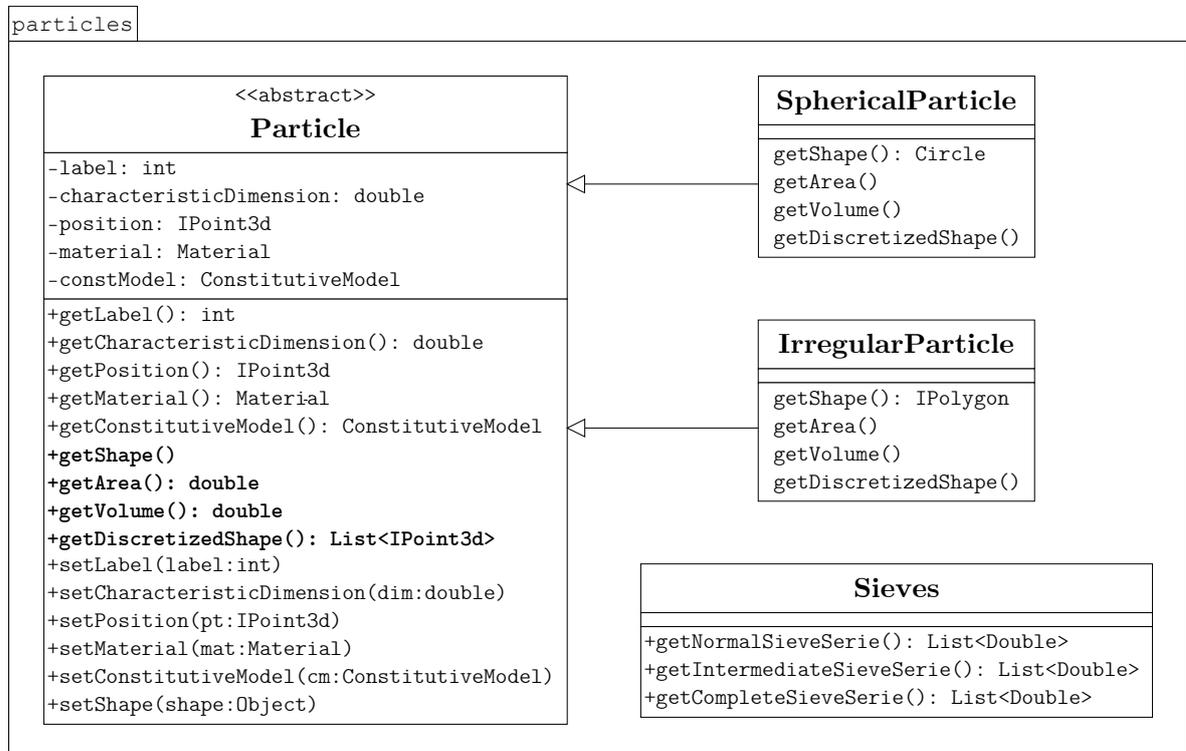


Figura 4.17: Implementação da heterogeneidade – pacote Particles.

implementada. De posse de certos parâmetros (como fração volumétrica e fator de distribuição), verifica-se a cada nova partícula gerada se essa respeita limites de distanciamento (com caráter empírico) e pode ser fixada dentro do domínio;

- Pós-processar alguma informação que se julgue necessária, como, por exemplo, a lista de partículas geradas e alocadas.

Nesse sentido, a classe `ParticleDataManager` foi implementada e atua como um gerente de dados de partículas, podendo ser acessada por instâncias superiores que necessitem de informações dessa natureza durante uma simulação de um modelo que considere incorporação de heterogeneidade (ver figura 4.13).

#### 4.2.3.3.1 *Take-and-Place*

Desenvolveu-se neste trabalho uma adaptação à linguagem Java de algoritmos *take-and-place* tradicionais (Bažant et al., 1990; Wang et al., 1999a,b; Wriggers e Moftah, 2006; Häfner et al., 2006). O gerador de partículas é baseado em – mas não restrito a – Wang et al. (1999a) e Wriggers e Moftah (2006). Nesse tipo de problema, há um esforço considerável para se lidar com os aspectos de geometria computacional e, em geral, não se busca a maneira perfeita ou mais detalhada de se descrever a morfologia interna, mas uma abordagem viável capaz de representar a heterogeneidade do material com menos programação e esforço computacional possíveis. Além disso, nesse tipo de algoritmo, a ordem de complexidade aumenta rapidamente à medida que o problema é resolvido, ou seja, ao passo que o número de partículas cresce, mais testes precisam ser realizados e mais poder de processamento é necessário na verificação de interseções.

O algoritmo usado pode ser classificado como um **método estocástico-heurístico**, isto é, de caráter aleatório e inquisitivo, no qual partículas com formas (e/ou tamanhos) aleatórias(os) e posições randômicas são colocadas individualmente dentro do domínio de análise e a cada partícula é atribuído um número de verificações para validar ou derrogar sua alocação. Nenhuma sobreposição é permitida, todas as partículas criadas devem estar completamente dentro do domínio e distâncias restritivas (“partícula–partícula” e “partícula–contorno”) devem ser respeitadas. Essas compensações são reguladas por um fator de distribuição ( $\chi$ ), uma heurística relacionada à dimensão característica das partículas, que é usado para aumentar o tamanho de uma partícula antes da execução da

verificação de sobreposição, salvaguardando o posicionamento correto da geometria. Embora seja um coeficiente numérico, o fator de distribuição tem um viés físico: considera-se que toda heterogeneidade deva ser envolta em uma quantidade mínima de matriz. Empiricamente, em espécimes de concreto, observa-se que a extensão da fase ligante ao redor de um agregado guarda uma relação de proporcionalidade com a dimensão deste (Wang et al., 1999a; Wriggers e Moftah, 2006), assim, é válida a construção de limites geométricos a partir do tamanho da partícula em processamento. Verificações “partícula-contorno” utilizam o diâmetro médio da própria partícula em análise, devendo a distância ser superior a  $\chi\phi$ ; testes de sobreposição “partícula-partícula” exigem que a distância entre os diâmetros médios seja superior a  $\chi\phi^{MN}$ , em que  $\phi^{MN}$  é a dimensão característica da menor partícula do par em testagem. Basicamente, para cada nova partícula randomicamente gerada dentro de um segmento de gradação extraído de uma distribuição granulométrica, multiplica-se sua dimensão característica por um fator  $(1 + \chi)$ , de tal maneira que o diâmetro médio de teste seja superior ao tamanho original da inclusão e a distância mínima seja respeitada automaticamente. Caso não haja qualquer violação, a partícula é aceita e alocada na posição aleatória designada; caso contrário, descarta-se a partícula e uma nova é testada. Podem ser encontradas na literatura algumas alternativas com variados níveis de otimização, em que, por exemplo, translada-se recursivamente a inclusão até uma posição anuível, ao invés de baldar a partícula (Wriggers e Moftah, 2006; Häfner et al., 2006; Eckardt, 2009). Verificações mais restritivas e de conformação mais geral, nas quais avalia-se a ocorrência de interseções entre arestas, também são possíveis, embora de menor praticidade. A figura 4.18 ilustra o processo para um caso geral com partículas poligonais irregulares e o algoritmo 4.11 condensa os procedimentos implementados para análises bidimensionais.

Aqui, como indicado anteriormente, os tamanhos das partículas são baseados em especificações de agregados para concreto da norma ABNT NBR 7211 (2005). Para ambos os tipos de partículas, a dimensão característica é tomada como um raio médio. Então, para as circulares, a determinação de uma nova partícula é direta; quanto ao espécime poligonal, a criação de uma partícula é baseada em uma circunferência média circunscrita a um polígono regular (com lados  $\eta$ ), ao qual alguns desvios angulares e radiais são aplicados ( $\delta\theta$ ,  $\delta r$ ). Essas variações representam quanto um vértice se desvia um do outro e do raio médio, respectivamente, e foram introduzidos para controlar a rudeza da partícula

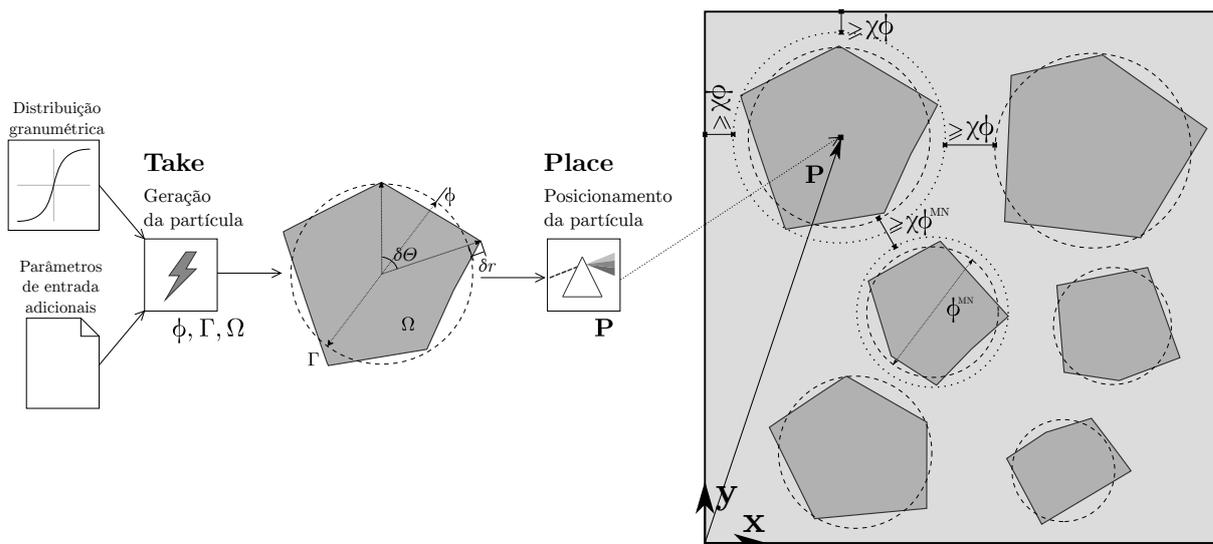


Figura 4.18: Processo de geração e alocação de partículas – *take-and-place*.

(Fig. 4.16b). As partículas podem ser criadas usando-se uma distribuição contínua ou uma curva de granulométrica específica obtida em laboratório. Nos testes mostrados aqui, a curva de Füller (Eq. 4.40) foi empregada.

Cabe salientar, para clareza didática, que a operação da linha 3 do procedimento em questão é dada de acordo com um algoritmo geral para cômputo da superfície de geometrias planas fechadas (algoritmo 4.12) e as condições na linha 21 referem-se a operações de interseções entre geometrias submetidas a restrições. O algoritmo 4.13 apresenta os procedimentos sintéticos considerados neste trabalho.

#### 4.2.3.4 Tratamento Numérico do Metadado

Nas seções anteriores vimos como construir um modelo específico de mesoestrutura de materiais particulados. Tal padrão leva em consideração um expediente estocástico-heurístico que gera partículas de dimensões variadas e posicionamentos contingentes, submetidas à uma distribuição de tamanhos prévia e restrições de distanciamento empírico-numéricas. Seguindo orientações previamente expostas neste texto, são apresentadas agora estratégias de vinculação dos metadados geométricos ao cerne de um modelo numérico-discreto congênere do MEFG. Algumas abstrações computacionais introduzidas na seção 4.2.1 serão melhor exploradas aqui. Reitera-se que o universo aqui retratado se propende à bidimensionalidade espacial, de modo que as operações e referências dos modelos numéricos dizem respeito a domínios 2D.

Métodos como o MEFG baseiam-se na composição de malhas para construção das

```

entrada:  $\mathcal{R}$ : uma região com contorno  $\partial\mathcal{R}$ ;
            $\Phi = \{\phi^{MAX}, \dots, \phi_s, \phi_{s+1}, \dots, \phi^{MIN}\}$ : distribuição granulométrica;
            $\Delta$ : fração de partículas;
            $\chi$ : fator de distribuição;
            $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ : parâmetros adicionais.
saída :  $L = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots\}$ : lista de partículas.
/* Inicialize o que for preciso */
1 inicialize variáveis no geral
2 inicialize área restante ( $A^{REST} \leftarrow 0$ )
3 encontre área da região ( $A^{\mathcal{R}} \leftarrow \text{area}(\mathcal{R})$ ) // função específica
/* Para cada intervalo de gradação, gerar um conjunto de
partículas */
4 para cada  $[\phi_s, \phi_{s+1}] \subset \Phi$  faça
5  $A[\phi_s, \phi_{s+1}] \leftarrow [\zeta(\phi_s, P) - \zeta(\phi_{s+1}, P)] \div [\zeta(\phi^{MAX}, P) - \zeta(\phi^{MAX}, P)] \times \Delta \times A^{\mathcal{R}}$ 
/* Adicione área que sobrou do intervalo anterior ao atual */
6  $A^{ATUAL} \leftarrow A[\phi_s, \phi_{s+1}] + A^{REST}$ 
7  $A^{REST} \leftarrow A^{ATUAL}$ 
8 encontre área limite do intervalo ( $A^{LIM} \leftarrow \text{area}(\Omega(\phi_{s+1}))$ )
/* Enquanto couberem partículas, continue gerando-as e
alocando-as */
9 enquanto  $A^{REST} \geq A^{LIM}$  faça
10 encontre número randômico  $c$  / distribuição uniforme  $n$ 
11  $x^P \leftarrow \min(x^{\mathcal{R}}) + [\max(x^{\mathcal{R}}) - \min(x^{\mathcal{R}})] \times n$ 
12  $y^P \leftarrow \min(y^{\mathcal{R}}) + [\max(y^{\mathcal{R}}) - \min(y^{\mathcal{R}})] \times n$ 
13  $\mathbf{P} \leftarrow \{x^P, y^P\}^\top$ 
14  $\phi \leftarrow \phi_{s+1} + (\phi_s - \phi_{s+1}) \times n$ 
15  $\Omega \leftarrow \text{gerar\_particula}(\mathbf{P}, \phi)$  // construtor da instância
/* Primeira partícula */
16 se  $L = \emptyset$  então
17  $\Omega \cup L$ 
18  $A^{REST} \leftarrow A^{REST} - \text{area}(\Omega)$ 
19 continue laço linha 9
/* Se a partícula se sobrepõe à outra ou se ela cruza o
contorno, descarte-a e siga; do contrário, adicione-a à
lista e ajuste os parâmetros */
20 para cada  $\Omega_i \in L$  faça
/* considerando  $\Omega < \Omega_i$  e  $(1 + \chi)\Omega \equiv \Omega((1 + \chi)\phi)$  */
21 se  $[(1 + \chi)\Omega] \cap \Omega_i \neq \emptyset$  ou  $[(1 + \chi)\Omega] \cap \partial\mathcal{R} \neq \emptyset$  então
22 continue laço linha 20
23 senão
24  $\Omega \cup L$ 
25  $A^{REST} \leftarrow A^{REST} - \text{area}(\Omega)$ 
26 retorna  $L$ 

```

Algoritmo 4.11: *Take-and-Place* default.

aproximações. A cada elemento da malha, têm-se um espaço de aproximação vinculado a partições da unidade (e enriquecimentos, no caso do referido método generalizado) e um conjunto de pontos com posições ótimas, que serão utilizados para descrição e integração

```

entrada:  $\Omega$ : um polígono com contorno discretizado  $\Gamma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_1\}$ , em
           que  $\mathbf{v}_s$  é um vértice.
saída :  $a$ : área do polígono.
1 inicialize variável de área cumulativa ( $a^{aux} \leftarrow 0$ )
   /* Para cada par de pontos no contorno do polígono */
2 para cada  $\{\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_{s+1}\} \subset \Gamma$  faça
   /* Área encontrada através de uma composição de retalhos
      retangulares sobre o polígono original;  $x, y$  coordenadas */
3    $a^{AUX} \leftarrow a^{AUX} + x^{\mathbf{v}_s} \times y^{\mathbf{v}_{s+1}} - x^{\mathbf{v}_{s+1}} \times y^{\mathbf{v}_s}$ 
4    $a \leftarrow \left| \frac{a^{AUX}}{2} \right|$ 
5 retorne  $a$ 

```

Algoritmo 4.12: Procedimento geral para cálculo de áreas de polígonos.

```

entrada:  $L = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots\}$ : lista de partículas com contornos
            $\Gamma_s = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_1\}$ ,  $\mathbf{v}_i$  é um vértice, com centros  $\mathbf{P}_s$  e dimensões
           características  $\phi_s$ ;
            $\chi$ : fator de distribuição (restrição).
saída :  $b \in \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}$ : se há sobreposição ou não,
           respectivamente.
1 inicialize booleano ( $b \leftarrow \text{falso}$ )
   /* Para cada par de partículas na lista  $L$  */
2 para cada  $\{\Omega_s, \Omega_{s+1}\} \subset L$ , com  $\phi_{s+1} < \phi_s$  faça
3   se  $(\Omega_s \& \Omega_{s+1}) \equiv \text{SphericalParticle}$  então
   /* Verificação simplificada geral: vale tanto para partículas
      esféricas, quanto para poligonais, caso a verificação destas
      seja feita através de sua circunferência circunscrita
      geradora. */
4   se  $(\mathbf{P}_s - \mathbf{P}_{s+1}) \leq \phi_s + (1 + \chi)\phi_{s+1}$  então
5      $b \leftarrow \text{verdadeiro}$ 
6   retorna  $b$ 
7 senão
   /*  $(\Omega_s \& \Omega_{s+1}) \equiv \text{IrregularParticle}$  */
   /* Avaliação minimalista: ao invés de verificação de
      interseção de arestas, verifica-se a distância de um vértice
      de uma partícula às arestas de outra partícula; verificações
      mais detalhadas podem ser obtidas de desdobramentos deste
      algoritmo */
8   para cada  $\{\Omega_s, \Omega_{s+1}\} \subset L$ , com  $\phi_{s+1} < \phi_s$  faça
9     para cada  $\mathbf{v}_i \in \Gamma_s$  faça
10      se  $\mathbf{v}_i \in \Omega_{s+1}$  então
11         $b \leftarrow \text{verdadeiro}$ 
12      encontre projeção de  $\mathbf{v}_i$  na aresta  $\gamma_i = \overline{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i+1}}$  de  $\Omega_{s+1}$  ( $\text{proj}_{\gamma} \mathbf{v}_i$ )
13      se  $(\mathbf{v}_i - \text{proj}_{\gamma} \mathbf{v}_i) \leq \phi_s + (1 + \chi)\phi_{s+1}$  então
14         $b \leftarrow \text{verdadeiro}$ 
15 retorne  $b$ 

```

Algoritmo 4.13: Procedimento para determinação de sobreposição de partículas.

das funções de base e de suas derivadas. Há, portanto, a necessidade de mecanismos para traduzir para o universo de elementos finitos a informação topológica anteriormente apresentada, o que foi projetado e feito de algumas maneiras (rever seção 2.3 para um apanhando da literatura): malha conforme à geometria interna; malha não conforme à geometria interna; abordagens probabilísticas indiretas ou redes aleatórias.

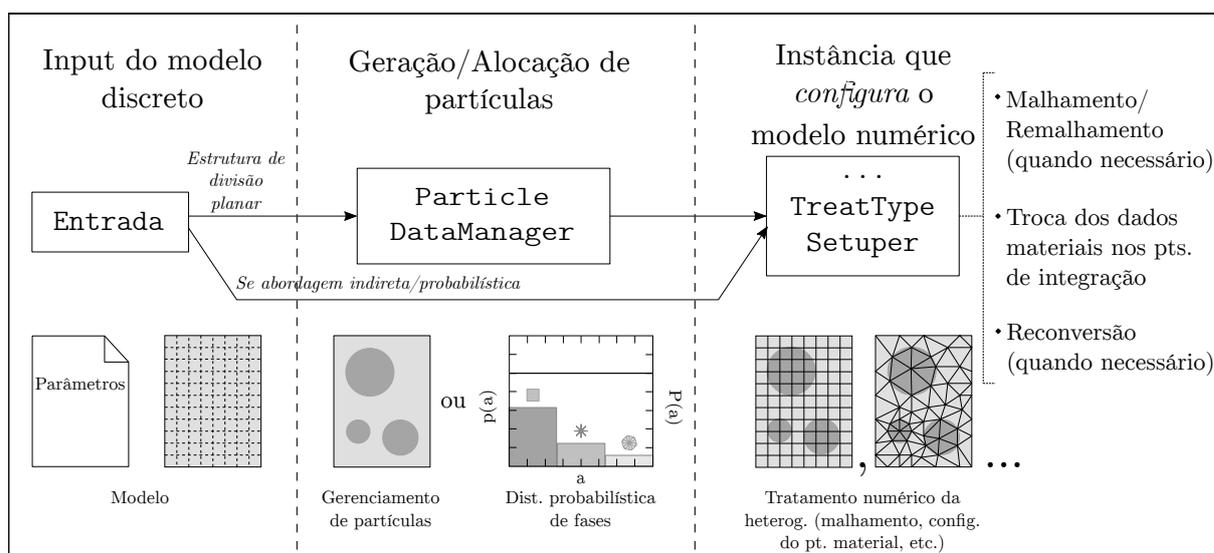


Figura 4.19: Fluxo sintético do tratamento numérico da heterogeneidade

O fluxo sintético de processamento do metadado morfológico segue a linha da figura 4.19.

Conforme ilustrado no diagrama da figura 4.14, há como operação principal nos configuradores de heterogeneidade o método `setUp()`. Serão destacados a seguir, em conjunto com uma descrição geral das classes de configuração, procedimentos algorítmicos sintéticos que estampam as estratégias de introdução das heterogeneidades, combinadas no referido método.

#### 4.2.3.4.1 Malha conforme à geometria interna

Nesse caso, talvez de interpretação mais premente, constrói-se uma topologia totalmente conforme/alinhada aos contornos externos e internos. Exige, pois, algoritmos de malhamento mais complexos, via de regra baseados em triangulação (como a de Delaunay (Heckbert, 1994)), que costumam exigir mais recursos de processamento, sobretudo memória, sendo aplicados de modo eficiente (quanto ao tempo de processamento notoriamente) em alguns poucos sistemas e bibliotecas específicas e otimizadas, mantidas por grupos acadêmicos e comerciais especializados na tarefa. Particularmente para o caso

da plataforma de implementação utilizada (INSANE), cujos recursos possuem inerentes limitações de processamento gráfico e topológico (dada a aplicação do sistema), e com o hardware particular do autor, a alternativa mostrou-se um tanto restritiva.

Nesse tratamento, cada elemento finito possuirá uma única fase (ou seja, todos os seus pontos materiais receberão propriedades elásticas particulares e exclusivas de um único tipo de meio), havendo, portanto, elementos completamente dentro das heterogeneidades. Evidentemente, a captura da morfologia é unívoca e mais precisa.

A instância responsável por conduzir a tradução do metadado para o modelo discreto é a classe `ConformMeshTreatTypeSetuper`, um configurador específico que atua em tempo de processamento, remalhando o domínio carregado na entrada de dados. O algoritmo 4.14 apresenta a operação principal da instância.

**entrada:**  $M = \{L^N = \{n_1, n_2, \dots\}, L^E = \{e_1, e_2, \dots\}, L^D = \{d^{m_1}, d^{m_2}, \dots\}, L^M = \{m_1, m_2, \dots\}, \dots\}$ : um modelo (estrutura de dados composta por listas de nós, elementos, degenerações, materiais etc.);  
 $DM = \{L^P = \{\Omega_1(\mathbf{P}^{\Omega_1}, r^{\Omega_1}, \Gamma^{\Omega_1}), \Omega_2(\mathbf{P}^{\Omega_2}, r^{\Omega_2}, \Gamma^{\Omega_2}), \dots\}, \dots\}$ : data manager (com lista de partículas).

**saída** :  $\mathcal{M} = \{\mathcal{L}^E, \mathcal{L}^N, \mathcal{L}^D, \mathcal{L}^M, \dots\}$ : um novo modelo, com novas listas de elementos e nós e devidamente configurado.

- 1  $h \leftarrow \min(r^{\Omega_i})$
- 2 **para cada**  $\Omega_i \in L^D$  **divida**  $\Gamma^{\Omega_i}$  **em**  $\kappa h$  **partes**,  $\kappa \in (0, 1]$
- 3 **gere**  $HEDS(M) = \mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$
- 4 **para cada**  $\Omega_i \in L^P$  **faça**  $\mathbf{P}^{\Omega_i} \cup \mathcal{R}$
- 5 **divida**  $\partial\mathcal{R}$  **em**  $h$  **partes**;  $\partial\mathcal{R} = \{\partial\mathcal{R}_1, \partial\mathcal{R}_2, \dots\}$ ,  $\partial\mathcal{R}_i \supset \{v_i, v_{i+1}\}$
- 6 **gere**  $n(h)$  **vértices**  $v_n(\mathbf{P}(h))$  **em**  $\mathcal{R}$ ;  $\mathcal{R} \supset L^V = \{v_j(\mathbf{P}^{\Omega_j}), v_n(\mathbf{P}(h))\}$
- 7 **triangule os vértices**  $L^V$  **em**  $\mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$
- 8 **atualize**  $HEDS(M)$
- 9 **traduza**  $HEDS(M)$  **para**  $\mathcal{M} = Model(HEDS(M)) = \{\mathcal{L}^E, \mathcal{L}^N, \mathcal{L}^D, \mathcal{L}^M, \dots\}$
- 10 **para cada**  $e_i \in \mathcal{L}^E$  **faça**
- 11     **para cada**  $\Omega_i \in L^P$  **faça**
- 12         **encontre baricentro**  $\mathbf{G}^{e_i}$
- 13         **se**  $\mathbf{G}^{e_i} \in \Omega_i$  **então limpe degenerações de**  $e_i$  **pegue informação de degenerações em**  $DM$
- 14         **troque degeneração (fase 1 para fase 2;**  $d^{m_1} \leftarrow d^{m_2}$ **)**
- 15 **retorne**  $\mathcal{M}$

Algoritmo 4.14: Tratamento conforme para a heterogeneidade – `ConformMeshTreatTypeSetuper`.

#### 4.2.3.4.2 Malha não conforme à geometria interna

Mecanismo mais simples, que se vale da superposição das partículas a malhas regulares de elementos tri ou quadrilaterais. Nessa abordagem há a possibilidade de obtenção de elementos uni ou multifásicos, i.e., a depender da posição da partícula e da hipótese escolhida, pontos materiais distintos de um elemento finito possuirão as mesmas propriedades elásticas ou poderão dispor de constantes materiais de fases distintas, respectivamente. Esta estratégia é também dita uma abordagem de pixel/voxel, ou seja, a conformação interna alcançada tem uma aparência “*pixelada*” (Bohm, 2016).

Particularmente à implementação aqui desenvolvida temos como alternativas dois configuradores específicos: `NonConformMeshSinglePhaseElementTreatTypeSetuper` e `NonConformMeshSingleMultiphaseElementTreatTypeSetuper`. Na primeira, a avaliação do metadado se dá de modo mais simples e direto, em outras palavras, avalia-se se o baricentro ( $\mathbf{G}^{e_i}$ ) do elemento finito está dentro ou fora de uma partícula; se  $\mathbf{G}^{e_i}$  está no interior, todos os pontos materiais deste elemento possuirão propriedades mecânicas da inclusão. Na segunda abordagem, a exame é ligeiramente mais criterioso: ao invés de avaliar o baricentro, utilizam-se os próprios pontos materiais. Naturalmente, uma abordagem multifásica é algo superior à monofásica na captura da morfologia, com a precisão crescendo com o número de pontos de integração. Os algoritmos 4.15 e 4.16 ilustram as abordagens.

Há ainda neste trabalho a providência de uma outra opção de tratamento não conforme, através de uma estratégia de enriquecimento específica. A classe `LevelSetEnrichmentTreatTypeSetuper` foi prevista, embora não trabalhada no contexto desta pesquisa, por contenção de variáveis em investigação. Nessa abordagem, funções de descontinuidade fraca são utilizadas para modelagem da interface entre as fases, de maneira que o embutimento da heterogeneidade se processa indiretamente. O processo algorítmico da inserção da função a partir do metadado geométrico é similar ao dos tratamentos não conformes apresentados, havendo contudo a criação dos enriquecimentos e graus de liberdade quando da verificação da distância entre os elementos e as partículas.

#### 4.2.3.4.3 Redes aleatórias

Utilizando-se a conformação morfológica interna, pode-se triangular um conjunto de barras ao longo do domínio, interconectando, por exemplo, os baricentros de cada partícula e o contorno da região. Modelos tipo *random lattice* foram empregados de distintas maneiras na literatura (Bažant et al., 1990; Schlangen e van Mier, 1992), com elementos exclusivamente axiais ou elementos que incorporam flexão. O funcionamento do processo

```

entrada:  $M = \{L^N = \{n_1, n_2, \dots\}, L^E = \{e_1, e_2, \dots\}, L^D = \{d^{m_1}, d^{m_2}, \dots\}, L^M = \{m_1, m_2, \dots\}, \dots\}$ : um modelo (estrutura de dados composta por listas de nós, elementos, degenerações, materiais etc.);
 $DM = \{L^P = \{\Omega_1(\mathbf{P}^{\Omega_1}, r^{\Omega_1}, \Gamma^{\Omega_1}), \Omega_2(\mathbf{P}^{\Omega_2}, r^{\Omega_2}, \Gamma^{\Omega_2}), \dots\}, \dots\}$ : data manager (com lista de partículas).
saída :  $\mathcal{M} = \{\mathcal{L}^E, \mathcal{L}^N, L^D, L^M, \dots\}$ : modelo com novas listas de elementos e nós e devidamente configurado.
/* Estrutura de dados de malha */
1 gere  $HEDS(M) = \mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$ 
2 gere malha através de técnica de malhamento específica (mapeamento transfinito aqui)
3 atualize  $HEDS(M)$ 
/* Estrutura de dados de modelo discreto */
4 traduza  $HEDS(M)$  para  $\mathcal{M} = Model(HEDS(M)) = \{\mathcal{L}^E, \mathcal{L}^N, L^D, L^M, \dots\}$ 
/* Trocando o tipo de fase do elemento */
5 para cada  $e_i \in \mathcal{L}^E$  faça
6   para cada  $\Omega_k \in L^P$  faça
7     encontre baricentro  $\mathbf{G}^{e_i}$ 
8     se  $\mathbf{G}^{e_i} \in \Omega_k$  então limpe degenerações de  $e_i$ 
9     pegue informação de degenerações em  $DM$ 
10    troque degeneração (fase 1 para fase 2;  $d^{m_1} \leftarrow d^{m_2}$ )
11    inicialize  $e_i$  // ver INSANE
12 retorne  $\mathcal{M}$ 

```

Algoritmo 4.15: Tratamento não conforme monofásico para a heterogeneidade – NonConformMeshSingleElementPhaseTreatTypeSetuper.

é similar ao de uma malha conforme, havendo, contudo, uma simplicidade relativamente maior nos elementos utilizados. Há alternativas mais imediatas, que se valem de malhas treliçadas regulares e sobreposição da morfologia, de modo análogo à tratamentos não conformes.

De maneira similar ao tratamento de *level-sets*, a abordagem de modelos de redes foi prevista no âmbito da pesquisa, mas não explorada no presente contexto, sendo destinada para investigação isolada em dissertação específica.

#### 4.2.3.4.4 Modelos probabilísticos

Denegando a avaliação explícita de uma morfologia submacroscópica, pode-se introduzir heterogeneidades em modelos do MEF/MEFG através de uma abordagem dita aqui probabilística, que em certa medida guarda semelhança a tratamentos não conformes

```

entrada:  $M = \{L^N = \{n_1, n_2, \dots\}, L^E = \{e_1, e_2, \dots\}, L^D = \{d^{m_1}, d^{m_2}, \dots\}, L^M = \{m_1, m_2, \dots\}, \dots\}$ : um modelo (estrutura de dados composta por listas de nós, elementos, degenerações, materiais etc.);
 $DM = \{L^P = \{\Omega_1(\mathbf{P}^{\Omega_1}, r^{\Omega_1}, \Gamma^{\Omega_1}), \Omega_2(\mathbf{P}^{\Omega_2}, r^{\Omega_2}, \Gamma^{\Omega_2}), \dots\}, \dots\}$ : data manager (com lista de partículas).
saída :  $\mathcal{M} = \{\mathcal{L}^E, \mathcal{L}^N, L^D, L^M, \dots\}$ : modelo com novas listas de elementos e nós e devidamente configurado.

/* Estrutura de dados de malha */
1 gere  $HEDS(M) = \mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$ 
2 gere malha através de técnica de malhamento específica (mapeamento transfinito aqui)
3 atualize  $HEDS(M)$ 
/* Estrutura de dados de modelo discreto */
4 traduza  $HEDS(M)$  para  $\mathcal{M} = Model(HEDS(M)) = \{\mathcal{L}^E, \mathcal{L}^N, L^D, L^M, \dots\}$ 
/* Trocando o tipo de fase da degeneração */
5 para cada  $e_i \in \mathcal{L}^E$  faça
6   inicialize  $e_i$  // ver INSANE
7   para cada  $d_j \in L^D(e_i)$  faça
8     para cada  $\Omega_k \in L^P$  faça
9       se  $d_j \in \Omega_i$  então limpe degenerações de  $e_i$ 
10      pegue informação de degenerações em  $DM$ 
11      troque degeneração (fase 1 para fase 2;  $d^{m_1} \leftarrow d^{m_2}$ )
12 retorne  $\mathcal{M}$ 

```

Algoritmo 4.16: Tratamento não conforme multifásico para a heterogeneidade – NonConformMeshMultiPhaseElementTreatTypeSetuper.

multifásicos com modelagem explícita da geometria interna, havendo algumas alternativas para a tarefa.

Numa estratégia apreendida de Pitangueira (1998) e batizada aqui por um modelo ou estratégia de degeneração randômica RandomDegenerationTreatTypeSetuper, incorpora-se o caráter não homogêneo do contínuo ao modelo numérico discreto através do inventário e da sucessiva amostragem de pontos de integração de uma malha, que recebem propriedades materiais conforme um proporcionamento de fases prescrito. Considerando-se uma distribuição de probabilidades (uniforme, p.ex.), repartem-se aleatoriamente diferentes propriedades elásticas ao conjunto de pontos materiais do modelo numérico (Pitangueira, 1998). Nesse modelo, têm-se ainda a incorporação de uma não localidade, através de um fator que relaciona a relação constitutiva local do ponto material com a mistura homogênea. O Índice de Heterogeneidade ( $IH$ ) é a razão entre os volumes de uma célula básica

```

entrada:  $M = \{L^N = \{n_1, n_2, \dots\}, L^E = \{e_1, e_2, \dots\}, L^D = \{d^{m_1}, d^{m_2} \dots\}, L^M = \{m_1, m_2, \dots\}, \dots\}$ : um modelo (estrutura de dados composta por listas de nós, elementos, degenerações, materiais etc.);
 $DM = \{L^P = \{\Omega_1(\mathbf{P}^{\Omega_1}, r^{\Omega_1}, \Gamma^{\Omega_1}), \Omega_2(\mathbf{P}^{\Omega_2}, r^{\Omega_2}, \Gamma^{\Omega_2}), \dots\}$ 
 $FASES = \{f^{MIX}, f_1, f_2, f_3, \dots\}$ ,
 $COMB = verdadeiro || falso, \dots\}$ :
data manager (com lista de partículas, proporção de fases, indicador de combinação de propriedades etc.);
saída :  $\mathcal{M} = \{L^E, L^N, L^D, L^M, \dots\}$ : modelo devidamente configurado.
1 para cada  $e_i \in L^E$  faça
2   inicialize  $e_i$ 
   /* Espaço amostral das degenerações  $S$  */
3   para cada  $d_j \in L^D(e_i)$  faça
4      $S \cup d_j$ ;  $S = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ 
   /* Amostra de cada fase */
5   para cada  $f_i \in FASES$  faça
6      $N^{f_i} \leftarrow f_i \times S$ 
   /* Atribuir aleatoriamente um tipo de fase para degenerações do espaço amostral */
7   para cada  $f_i \in FASES$  faça
8     para cada  $j \in \{1, 2, \dots, N^{f_i}\}$  faça
9       encontre número randômico com distribuição uniforme  $n^U$ 
10       $tipo(S[n^U \times |S|]) \leftarrow tipo(L^D(M)^{f_i})$ 
   /* Trocar degeneração do elemento */
11  para cada  $e_i \in L^E$  faça
12    inicialize  $e_i$  // ver INSANE
13    para cada  $d_j \in L^D(e_i)$  faça
14      se  $tipo(d_j) \equiv tipo(L^D(M)^{f_i})$  então
15         $d_j \leftarrow d_k^{L^D(M)^{f_i}}$ 
16      se  $COMB$  então (se há combinação via IH)
17        encontre  $IH$  (Eq. 4.42)
18        atualize propriedades materiais de  $d_j$  (Eq. 4.43)
19  retorne  $\mathcal{M}$ 

```

Algoritmo 4.17: Tratamento não conforme multifásico para a heterogeneidade – modelo de degeneração randômica – RandomDegenerationTreatTypeSetuper.

( $V^{CB}$ ) e o de um ponto de integração ( $V^{PI}$ ), ou seja:

$$IH = \frac{V^{CB}}{V^{PI}} \quad (4.42)$$

O IH pode ser utilizado para compor a propriedade mecânica do ponto material ( $P^{PI}$ )

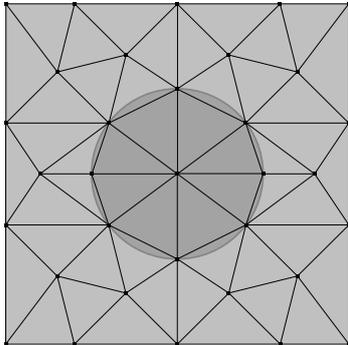
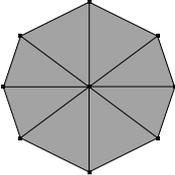
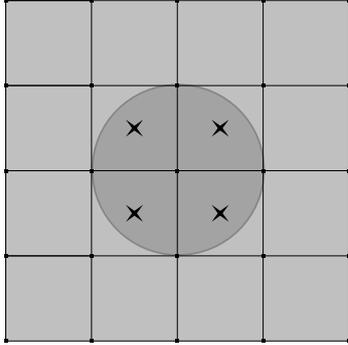
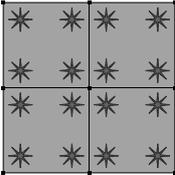
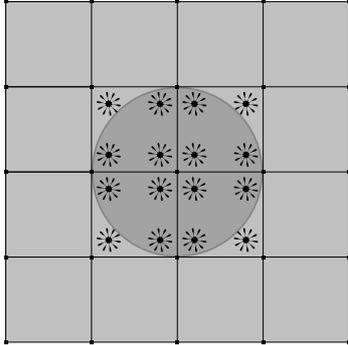
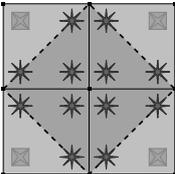
segundo:

$$P^{PI} = IH \cdot P^{LC} + (1 + IH) \cdot P^{LE} \quad (4.43)$$

em que  $P^{LC}$  é a propriedade local, da fase, e  $P^{LE}$  a propriedade estrutural da mistura. O algoritmo 4.17 ilustra a estratégia.

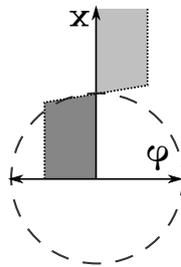
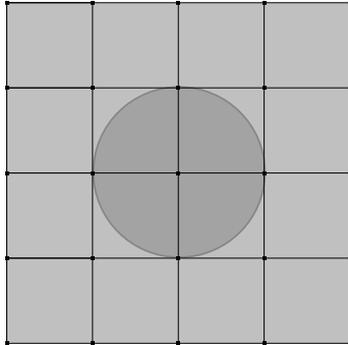
Na tabela 4.5 são apresentados os tratamentos numéricos de heterogeneidade num modelo do MEF/MEFG implementados e/ou previstos no âmbito da pesquisa em que se insere este trabalho.

Tabela 4.5: Resumo dos tratamentos numéricos para heterogeneidade previstos.

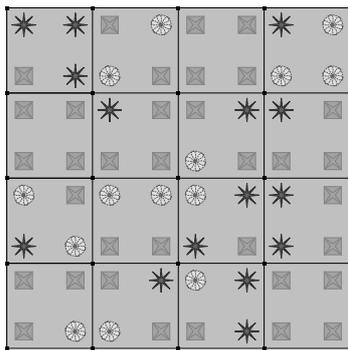
Tratamento	Partícula	Descrição
		<p>Malha conforme gerada através de triangulação de Delaunay, a partir da especificação de um tamanho típico de elemento finito (associado ao número de divisões do contorno do domínio). Modelo herda de maneira mais fiel a morfologia. Instância prevista e testada, mas não trabalhada de modo intensivo nesta obra, devido a limitações de hardware do autor. <i>Instância:</i> <code>ConformMeshTreatTypeSetuper</code>.</p>
		<p>Malha regular obtida através de mapeamento trans-finito, a partir da especificação de um tamanho típico de elemento finito (associado ao número de divisões do contorno do domínio). Se o CG do elemento (X) pertencer à partícula, seus PIs recebem propriedades materiais da inclusão (*). Processo consideravelmente menos complexo do ponto de vista operacional e que exige menor poder de processamento. A geometria da inclusão degrada, mas a representação da partícula guarda relação posicional original. Mesmo havendo uma precisão eminentemente menor, a depender do tamanho do elemento, a conformação da morfologia interna é praticamente fidedigna. <i>Instância:</i> <code>NonConformSinglePhaseElementTreatTypeSetuper</code>.</p>
		<p>Malha regular obtida através de mapeamento trans-finito, a partir da especificação de um tamanho típico de elemento finito (associado ao número de divisões do contorno do domínio). Se o PI (*) pertencer à partícula, receberá propriedades materiais da inclusão (*); os PIs que ficam fora permanecem com a fase original de matriz (■). Há perdas na descrição morfológica, mas a aproximação é de boa precisão. Quanto maior a amostra de PIs, mais rigorosa se torna a descrição da geometria interna. <i>Instância:</i> <code>NonConformMultiPhaseElementTreatTypeSetuper</code>.</p>

... continua

... continuação

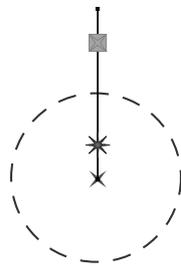
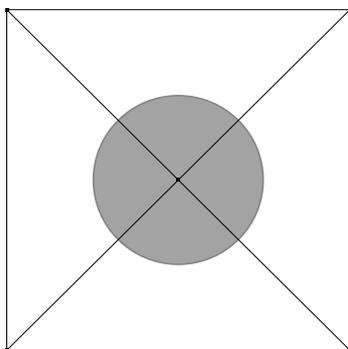


Espécie de tratamento não conforme, no qual há sobreposição da geometria interna sobre uma malha regular (em geral) através de funções de enriquecimento ( $\varphi$ ) que simulam descontinuidades fracas. Não necessariamente há necessidade de alteração de propriedades materiais, uma vez que o salto nos campos internos se dá de modo indireto via funções de aproximação. Descrição da geometria é, em teoria, unívoca e fiel, apesar de depender do número de elementos da malha original. A integração das funções de forma com descontinuidade embutida requerem mais pontos de integração ou estratégias distintas, o que não necessariamente costuma ser atendido. Instância prevista no desenvolvimento, mas não trabalhada nesta obra. *Instância: LevelSetTreatTypeSetuper.*



\*

A cada ponto de integração é atribuído um conjunto de propriedades materiais distinto, representativo de um certa fase. Da população de PIs são retiradas amostras de cada fase com base no proporcionamento prescrito de materiais da mistura e seguindo uma distribuição uniforme de probabilidades. Permite de maneira mais imediata o emprego de mais de duas fases; via de regra, três são consideradas: matriz (■), partícula/agregado (\*) e interface (⊗). O modelo ainda permite o estabelecimento de um fator de estabilização numérica (índice de heterogeneidade,  $IH$ ) que incorpora uma não localidade ao comportamento constitutivo do ponto material. A heterogeneidade se reduz a um ponto. *Instância: RandomDegenerationTreatTypeSetuper.*



Uso de redes de elementos unidimensionais (“treliça” ou “pórtico”) interconectando os CGs (X) das partículas. A depender da posição do PI, suas propriedades materiais (ou mais precisamente, suas propriedades geométrico-materiais degeneradas) serão da matriz (■) ou da heterogeneidade (\*). Instância prevista, destinada a trabalho correlato incluído no escopo desta pesquisa, mas não trabalhada aqui. *Instância: RandomLatticeTreatTypeSetuper.*

#### 4.2.4 Síntese

Nesta seção foram apresentadas alguns dos fundamentos da implementação desenvolvida no âmbito desta pesquisa, bem como algumas premissas básicas. Em resumo, foram

apontados:

- Delimitação conceitual de uma simulação numérica: experimento numérico autocontido, formado por fases não necessariamente herméticas ou seriadas, que reproduza virtualmente um dado problema e utilize de expedientes de ascendência matemática para construir representações analíticas e sintéticas de um modelo conceitual alusivo ao problema real;
- Descrição telegráfica dos conceitos envolvidos com a implementação: novas instâncias responsáveis pela materialização do conceito de simulação;
- Concepção de um novo conjunto de abstrações para a plataforma de desenvolvimento empregada na pesquisa. A aplicação é composta por funcionalidades básicas qualificadas aqui como *gerência* e *configuração*;
- Apresentação da especialização para simulações em dois níveis/escalas (global-local) via método dos elementos finitos generalizados;
- Cada abstração GLSM controla um tipo de simulação específico, sendo elas capazes de processar experimentos lineares e não lineares diversos, como propagação de trincas e análises fisicamente não lineares com degradação elástica (esta, o foco deste texto em particular);
- Concepção e implementação de estratégias para incorporação simplificada de heterogeneidade material em modelos do MEF/MEFG;

### 4.3 Plano de Experimentos Numéricos

Nesta seção, formaliza-se o plano de experimentos numéricos da pesquisa. Três são os enquadramentos dos testes:

1. Tratamento da heterogeneidade;
2. Verificação e validação (*V&V*) do MEFG-GL-NL;
3. Estudos de caso.

Cada categoria de apuração escolhida é por definição tomada como pressuposto determinante na construção incremental da pesquisa e de sua técnica numérica primária (MEFG-GL-NL). Em vista disso, uma vez definidos o modelo material e o caminho a ser tomado para resolução do problema de pesquisa, iniciou-se a experimentação com a avaliação da morfologia assumida, seguindo-se com a verificação e validação dos artifícios numéricos idealizados e finalizando-se com estudos de caso. Cada enquadramento possui esferas particulares. Estes alcances foram devidamente posicionados frente ao domínio conceitual a que pertencem (se material ou puramente numérico, por exemplo), e instrumentalizados através de um experimento próprio devidamente rotulado.

Cabe ressaltar que, embora tenham sido idealizados macro-enquadramentos relacionados à geração de uma mesoestrutura, à construção de etapas para consolidação do MEFG-GL-NL e à avaliação mais detalhada de algumas variáveis, com inclusão de experimentos reais, essa divisão é meramente formal e há toda uma sobreposição entre esses níveis, sobretudo naquilo que se definiu como “verificação e validação” e “estudos de caso”. Naturalmente, em última instância, todos os experimentos aqui têm, por um lado, um caráter validativo, i.e., de corroborar os resultados da estratégia numérica e de sua implementação; e, por outro lado, a intenção de avaliar o impacto de variáveis independentes do método numérico no comportamento estrutural e de submeter a técnica às situações com um lastro mais real, comparando seu comportamento com resultados históricos. A diferenciação dada aqui às instâncias de “estudos de caso” e “V&V” reside basicamente na adoção ou não de controles não numéricos, ou seja, se a dita solução de referência foi obtida em experimento não virtual.

Conforme indicado no introito deste trabalho, há na pesquisa uma proeminência de enfoque quantitativo (na medida em que calculam-se grandezas e manipulam-se números), com alcances descritivo e correlacional, sobretudo; ou seja, considera-se aqui um fenômeno e seus componentes, medem-se conceitos, definem-se variáveis, oferecendo-se prognósticos, explicando-se a relação entre certas variáveis e quantificando-se suas inter-relações. Sob outra perspectiva, há, no limite, um alcance explicativo/causal, no qual busca-se, através dos testes, gerar um entendimento do comportamento observado (Sampieri et al., 2013). Em todos os âmbitos numerados acima houve o manejo de variáveis independentes e avaliação de efeitos em variáveis dependentes. Na maioria dos casos em que problemas de elasticidade foram resolvidos, a variável dependente foi genericamente

tratada como “comportamento estrutural”. Essa resposta pôde ser materializada, por exemplo, pelas distribuições dos campos internos, representadas por isofoixas e avaliadas, portanto, por inspeção visual e cotejo de máximos/mínimos, em geral; ou através de trajetórias de equilíbrio, ou seja, curvas no espaço força(ou fator de carga)-deslocamento. Houve, assim, o manuseio intencional de determinados parâmetros para avaliação da capacidade do arcabouço numérico utilizado em capturar uma resposta estrutural de um sólido, averiguando-se limites e potencialidades, assegurando-se sempre o controle (ao máximo), a validação interna e a equivalência de grupos nos testes.

Para a construção das configurações experimentais, o escopo precisou ser afinado invariavelmente. Dada a variedade de modelos constitutivos possíveis, leis tensão-deformação, leis inelásticas, propriedades materiais, distribuições granulométricas, discretizações, métodos de controle de trajetória, corpos-de-prova, entre outros, decisões de caráter metodológico precisaram ser tomadas, para que fosse possível não somente avaliar as estratégias numérico-computacionais propostas, mas, principalmente, construir um texto com continuidade, apresentando resultados coesos e com equivalência de grupos e validade interna. Dessa maneira, ainda que outros cenários tenham sido investigados ao longo da pesquisa, algumas prerrogativas básicas foram:

- os experimentos propostos necessariamente deveriam guardar relação com problemas ou ensaios presentes na literatura;
- tentativa de simplificação das formulações constitutivas para facilitar a construção de cenários comparativos, de modo que permitiu-se uma natural inclinação dos experimentos para contextos com *softening* linear, por exemplo (essa característica não diminuiu, entretanto, a complexidade do fenômeno modelado);
- utilização de uma única estratégia de controle nas análises não lineares, elegendo-se o método de controle de deslocamento generalizados como protagonista;
- as frações de heterogeneidade deveriam variar a partir da proporção típica de agregados em estruturas de concreto (40%, 20%, ...);
- avaliações de medidas de tendência central em experimentos com heterogeneidade deveriam possuir no mínimo triplicidade de corpos-de-prova (sabendo-se, contudo, que esse número é pequeno e tem um caráter mais qualitativo que estatístico);

- as propriedades elásticas utilizadas em experimentos com prescrição mais rigorosa das constantes materiais – para aderência a resultados de referência – foram extraídas e/ou baseadas em bibliografia (indicada na configuração do teste). Nos testes com mais de uma fase material (matriz, inclusão, mistura “homogênea”), empregou-se valor integral da propriedade extraída da referência, ou realizou-se adaptação que se julgou apropriada, parametrizando-se as leis tensão-deformação para a melhor representação possível do material alvo.

A seguir, discute-se cada esfera de testes. Maiores detalhes serão fornecidos quando da apresentação dos resultados, no capítulo 5, no qual as configurações experimentais serão devidamente ilustradas.

### 4.3.1 Tratamento da Heterogeneidade

Para teste do *framework* projetado para tratamento de heterogeneidade em modelos do MEF/MEFG, considerou-se dois expedientes principais:

- **Geração e alocação das partículas dentro de domínio planos (GAP):** nesta fase, foram aferidos os algoritmos de geração e alocação das representações de partículas no interior de domínios bidimensionais, em conformidade com as hipóteses metodológicas básicas (seções 4.1.3 e 4.2). Constituiu-se de testes das operações de geometria computacional implementadas (e/ou reaproveitadas parcial ou integralmente de outras fontes) no contexto particular do trabalho. Para tanto, pequenos domínios poligonais fechados e regulares foram elegidos como região para preenchimento. Cada tipo de partícula idealizada foi devidamente avaliado, sob o controle de curvas granulométricas arquetípicas do tipo de material granular investigado (via de regra, curvas contínuas de Füller (Wang et al., 1999b,a; Häfner et al., 2006)). Essas granulometrias respeitaram intervalos de gradação com extensão não muito ampla (tamanhos mínimo e máximo não tão discrepantes), e aderentes às especificações normativas para inclusões em concreto (agregados grosseiros, sobretudo). Testes mais específicos correlacionando-se algumas variáveis foram processados. Sinteticamente, portanto, classifica-se segundo as seguintes propriedades:
  - *Teste no domínio material, com interface com a geometria computacional, cuja variante instrumental escolhida foi a aplicação do take-and-place em domínio plano regular.*

- *Variáveis independentes: distribuição granulométrica ( $\zeta(\phi)$ ) e dimensão característica ( $\phi$ ), fração de partículas ( $\Delta$ ), fator de distribuição ( $\chi$ ).*
  - *Variáveis dependentes: empacotamento/aproveitamento ( $\rho$ ), número de partículas ( $N$ ), tempo ( $t$ )*
  - *Distribuições granulométricas contínuas no intervalo [25mm, 0.030mm], com prioridade para os limites [25mm, 4.75mm] (agregados graúdos (ABNT NBR 7211, 2005)).*
  - *Partículas esféricas e poligonais de 5 ou 6 lados, característico de agregados britados (Wang et al., 1999a).*
  - *Fatores de distribuição da ordem de  $10^{-2}$  a  $10^{-1}$ .*
  - *Proporção de partículas de 30% a 50% da dimensão do domínio.*
- **Tratamento numérico dos metadados gerados na etapa anterior (TNMG):** este expediente consiste na verificação e validação das estratégias numérico-computacionais idealizadas para o embutimento das meta-informações das inclusões geradas no modelo numérico/discreto. Partindo das premissas fundamentais arbitradas no estágio metodológico (seção 4.1.3), as avaliações naturalmente se inclinaram para abordagens de menores complexidades operacional e computacional (na proporção das limitações de hardware do autor e da plataforma de desenvolvimento), debruçando-se sobre soluções com discretizações mais regulares, ou seja, os resultados apresentados tem maior foco em tratamentos não conformes monofásicos. Estratégias consideradas além do escopo deste trabalho (como os modelos de rede), foram deixados de fora do texto. Em resumo, portanto, verificou-se aqui se as propriedades materiais em determinadas regiões específicas do modelo (vinculadas às inclusões) foram elencadas de acordo com a premissa do tratamento escolhido. Assim, pode-se classificar o ensaio em:
    - *Teste no domínio material, com interface com a geometria computacional. Variantes instrumentais escolhidas foram: malhamento com associação ao metadado e aplicação da randomização probabilística característica de um tipo particular de tratamento (seção 4.2.3).*
    - *Foco em tratamento numérico não conforme, monofásico.*
    - *Malhas na proporção da dimensão característica das partículas.*

### 4.3.2 Verificação e Validação do Mefg-GL-NL

Para a verificação e validação da estratégia nuclear proposta, abreviadamente referida por Mefg-GL-NL, foram estabelecidos alguns estágios, que incrementalmente avaliaram o comportamento da implementação em determinados limites. Em regra, os experimentos agrupam-se aos pares, havendo versões com meio homogêneo, e versões com meio heterogêneo; variantes em escala/nível única(o), e variações com duas escalas. Em cada experimento há o registro da motivação e algumas de suas diretrizes sucintas, registradas para exposição genérica de certas características assumidas para o expediente. Entre as modalidades de ensaios propostas, há:

- **Análise linear em nível único com meio homogêneo (AL-HM-1E):** composição de solução de referência com MEF puro. Sumariamente, tem-se:
  - *Domínio: teste no domínio numérico*
  - *Variante instrumental: teste instrumentalizado através de simulação de tração simples em domínio poligonal regular.*
  - *Geometria: dimensões arbitrárias.*
  - *Material: propriedades materiais arbitrárias.*
  - *Observação: em geral, para cada exemplo, executou-se uma análise homogênea de MEF puro ou coletaram-se dados de referência equivalentes, usados na avaliação gráfica comparativa.*
  
- **Análise linear em nível único com meio heterogêneo (AL-HT-1E):** experimento com vistas à apreciação do efeito da inclusão de uma nova fase na simulação (via abstrações propostas – seção 4.2.3) e visualização do impacto da heterogeneidade no modelo discreto. Solução de referência para comparação com variação de duas escalas. Diretrizes básicas:
  - *Domínio: teste nos domínios numérico (principalmente) e material, cuja variante instrumental escolhida foi um ensaio de tração simples em domínio finito bidimensional.*
  - *Variante instrumental: ensaio de tração simples em domínio finito bidimensional.*

- *Geometria: dimensões do domínio são arbitrárias.*
  - *Material: propriedades materiais arbitrárias.*
  - *Variável independente: distribuição/posição da heterogeneidade.*
  - *Variáveis independentes: inspeção visual, cotejo de máximos e mínimos, diferença para o caso homogêneo.*
- **Análise linear em dois níveis com meio homogêneo (AL-HM-2E):** ensaio no qual se aferiu parte da implementação, bem como a influência do enriquecimento. Classifica-se segundo:
    - *Domínio: teste no domínios numérico.*
    - *Variante instrumental: tração direta em domínio “semi-infinito” conforme problema a seguir.*
    - *Geometria: dimensões do domínio são arbitrárias.*
    - *Material: propriedades materiais arbitrárias.*
    - *Variável independente: nós enriquecidos.*
    - *Variável dependente: resposta estrutural, desvio para o caso homogêneo não enriquecido.*
- **Análise linear em dois níveis com meio heterogêneo (ANL-HT-2E):** introdução da heterogeneidade em escala local e avaliação de efeitos trazidos para a escala global através do enriquecimento GL.
    - *Domínio: teste nos domínios numérico (principalmente) e material.*
    - *Variante instrumental: “problema da inclusão” (Mal e Singh, 1991) – partícula esférica imersa em domínio semi-infinito com solução analítica disponível.*
    - *Geometria: dimensões do domínio são arbitrárias.*
    - *Material: propriedades materiais arbitrárias.*
    - *Variável independente: discretização da escala local, tamanho do problema local, nós enriquecidos.*
    - *Variável dependente: resposta estrutural, tensões radiais, desvio para o analítico.*

- **Análise não linear em nível único com meio homogêneo (ANL-HM-1E):** construção de solução numérica de referência (MEF puro), sem qualquer variação adicional na representação material, acréscimo de enriquecimento etc. Suas propriedades englobam:
  - *Domínio: teste no domínio numérico.*
  - *Variante instrumental: modelo de flexão simples reduzido – inspirado em Penna (2011) e Pitangueira (1998).*
  - *Geometria: dimensões do domínio são arbitrárias.*
  - *Material: propriedades materiais arbitrárias e modelos constitutivos de degradação elástica.*
  - *Variável independente: discretização.*
  - *Variável dependente: resposta estrutural, trajetória de equilíbrio, iterações.*
  
- **Análise não linear em nível único com meio homogêneo (ANL-HT-1E):** contemplou o efeito de inclusões elásticas em problemas com não linearidade material.
  - *Domínio: teste nos domínios numérico (principalmente) e material.*
  - *Variante instrumental: tração e flexão simples em domínio reduzido.*
  - *Geometria: dimensões do domínio são arbitrárias.*
  - *Material: propriedades materiais arbitrárias e modelos constitutivo de degradação elástica.*
  - *Variável independente: discretização, proporção de fases, posição da inclusão.*
  - *Variável dependente: resposta estrutural, trajetória de equilíbrio, iterações, desvio do homogêneo.*
  
- **Análise não linear em dois níveis com meio homogêneo (ANL-HM-2E):** ensaio no qual se aferiu a implementação da técnica numérica proposta, MEEG-GLNL, bem como o comportamento da estratégia para problemas com não linearidade material. Em síntese:
  - *Domínio: teste no domínio numérico.*

- *Variante instrumental: modelo reduzido de flexão simples inspirado em Penna (2011) e Pitangueira (1998).*
  - *Geometria: dimensões do domínio são arbitrárias.*
  - *Material: propriedades materiais arbitrárias e modelos constitutivo de degradação elástica.*
  - *Variáveis independente: discretização, upscaling.*
  - *Variável dependente: resposta estrutural, trajetória de equilíbrio, iterações.*
- **Análise não linear em dois níveis com meio heterogêneo (ANL-HT-2E):** simulação do estágio final da pesquisa, representativo da técnica multiescala consolidada. Nesta etapa, avaliaram-se o comportamento da nova abordagem, suas potencialidades e restrições.
- *Testes nos domínios numérico (principalmente) e material.*
  - *Variante instrumental: modelo reduzido de flexão simples inspirado em Penna (2011) e Pitangueira (1998).*
  - *Propriedades materiais e dimensões do domínio são arbitrárias ou típicas do meio frágil arquetípico.*
  - *Modelos constitutivos de degradação elástica.*
  - *Variável independente: discretização, heterogeneidade, upscaling.*
  - *Variável dependente: resposta estrutural, trajetória de equilíbrio, desvio do homogêneo.*

Por vezes, as análises serão referidas como “análises (não) lineares homogêneas ou heterogêneas”, por simplicidade, em alusão à natureza do meio considerado (se integralmente homogêneo ou se com inclusões).

Em essência, portanto, esta etapa remete-se ao exame do código implementado, vinculado à técnica numérica em sentido estrito, e a sua aferição. Em certa medida, também, sua natureza perpassa o enquadramento seguinte, dos estudos de caso, o qual invariavelmente possui um caráter de *V&V*, ainda que estejamos em uma aplicação real específica mais tangível.

### 4.3.3 Estudos de Caso

Algumas simulações com lastro em experimentos laboratoriais ditos reais foram executadas para comparativo do desempenho da técnica numérica final deste estudo (e de algumas de suas etapas intermediárias) com resultados de ensaios físicos típicos. As soluções de referência obtidas em ensaios não virtuais de laboratório serão referidas no texto quase sempre como “experimentais”, ainda que a expressão seja uma redução semântica do termo “experimento” (experimento é algo mais amplo). Contudo, por simples vício de linguagem e jargão da área, o termo será empregado quando essa classe de ensaios for referenciada. Embora, a rigor, possam ser considerados dimensionalmente simples, os experimentos escolhidos são tradicionais e dos poucos largamente difundidos na literatura. Desse modo, optou-se por seguir a tendência do grupo de pesquisa e da área, e empregar os referidos modelos. A simplicidade geométrica não é necessariamente equivalente a uma simpleza do fenômeno físico, pelo contrário, os estados de deformação nos exemplos escolhidos possuem uma complexidade satisfatória para análises fisicamente não lineares. Os ensaios selecionados foram:

- **Petersson (1989)**: ensaio de flexão simples em vigas de concreto biapoiadas. As características gerais do exemplo são:
  - *Modelo geométrico: dimensões prescritas fixadas pela referência.*
  - *Modelo material: propriedades materiais prescritas e modelo constitutivo de degradação elástica com relações tensão-deformação clássicas.*
  - *Modelo numérico: ANL-HM/HT-2E com avaliação das seguintes variáveis: número de nós globais enriquecidos, do tamanho do domínio local, do refinamento do domínio local, do refinamento do domínio global, e da heterogeneidade.*
- **Winkler et al. (2004)**: ensaio em painel de cisalhamento com formato  $L$ , cujas propriedades básicas são:
  - *Modelo geométrico: dimensões prescritas fixadas pela referência.*
  - *Modelo material: propriedades materiais prescritas e modelos constitutivos de degradação elástica com leis tensão-deformação clássicas.*

- *Modelo numérico: ANL-HM/HT-2E com avaliação do efeito regularizador do upscaling e de modelo local com heterogeneidade.*

#### **4.3.4 Síntese**

A seguir, a tabela 4.6 apresenta o resumo do plano experimental proposto. De maneira condensada, retoma-se nela as indicações apresentadas nos parágrafos anteriores, havendo, portanto, a identificação das características principais dos ensaios, agrupados de maneira direta, o registros dos respectivos objetivos, de cada variante, bem como dos rótulos gerais e domínio básicos de cada tipo de teste.

Tabela 4.6: Síntese dos experimentos numéricos.

Ensaio	Objetivo	Siglas	Domínio	Variante
Geração e alocação de partículas	Verificação, aferição e validação dos algoritmos de geometria computacional implementados e desenvolvidos	GAP	Geometria Computacional	Take-and-place em domínio plano regular
Tratamento numérico de metadados geométricos	Verificação, aferição e validação das estratégias numéricas de incorporação do metadado geométrico de mesoestrutura no modelo numérico	TNMG	Geometria Computacional	Randomização e malhamento em domínio retangular
Análise linear homogênea em nível único	Solução de referência para comparativo	AL-HM-1E	MEF; MEFG	Tração simples
Análise linear heterogênea em nível único	Avaliar o efeito da heterogeneidade material no modelo numérico-computacional discreto	AL-HT-1E	MEF; MEFG	
Análise linear homogênea em dois níveis	Verificação, aferição e validação da arquitetura computacional do núcleo numérico projetado	AL-HM-2E	MEFG-GL	Problema da inclusão (Mal e Singh, 1991)
Análise linear heterogênea em dois níveis	Avaliar o efeito da incorporação da heterogeneidade material somente em escala local no comportamento global	AL-HT-2E	MEFG-GL	
Análise não linear homogênea em nível único	Solução de referência para comparativo	ANL-HM-1E	MEF; MEFG	Modelo reduzido e estudos de caso (Pitangueira (1998); Penna (2011) Petersson (1989); Winkler et al. (2004))
Análise não linear heterogênea em nível único	Avaliar o efeito da heterogeneidade material em uma análise fisicamente não linear	ANL-HT-1E	MEF; MEFG	
Análise não linear homogênea em dois níveis	Verificação, aferição e validação da nova estratégia não linear em duas escalas para problemas com não linearidade material (MEFG-GL-NL)	ANL-HM-2E	MEFG-GL-NL	
Análise não linear heterogênea em dois níveis	Consolidação de uma estratégia efetivamente multiescala (duas escalas) com representação de contínuo heterogêneo, avaliando o impacto da incorporação da não homogeneidade material somente em escala local	ANL-HT-2E	MEFG-GL-NL	

# Capítulo 5

## Resultados e Discussão

No presente capítulo, apresentam-se os resultados dos experimentos numéricos propostos, na ordem em que foram indicados, ou seja, da geração e alocação de partículas em domínios bidimensionais, parte-se para exemplificação de tratamento do metadado, seguindo-se para os testes de verificação e validação da implementação da técnica numérica e finalizando-se com a apresentação dos estudos de caso.

### 5.1 Geração e Alocação de Partículas de Mesoestrutura

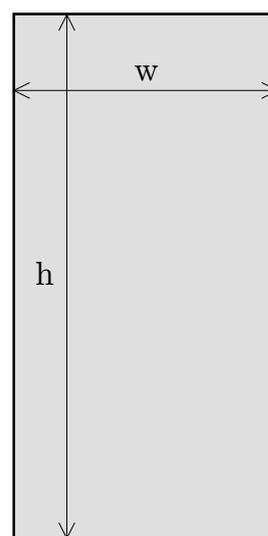
Para a aferição do modelo computacional da mesoestrutura proposto, aponta-se a seguir uma matriz experimental simples: a produção e posicionamento de morfologias no interior de um polígono regular convexo. Sempre buscando um apelo físico maior, considera-se aqui somente um domínio bidimensional simples e objetivo, alusivo a geometrias típicas de estruturas prismáticas. Dessa maneira, portanto, optou-se por compilar aqui as conformações obtidas em regiões retangulares reduzidas, indicativas de seções transversais  $w \times h$ , tipicamente  $10\text{cm} \times 20\text{cm}$ . A configuração experimental é apresentada no *set-up* 5.1 com algumas simplificações. Quatro tipos de testes foram assumidos. Serão apresentadas a influência do fator de distribuição  $\chi$  (exame 1) e da fração de partículas  $\Delta$  (exame 2) no processo de alocação, bem como o efeito da composição granulométrica (exame 3). Ainda, verifica-se o processo de formação de partículas poligonais (exame 4).

Antes da apresentação dos testes individuais, uma nota: é razoável pensar, já de antemão, que, para um domínio fixo, há limites inerentes nas prescrições da fração de partículas ( $\Delta$ ), do fator de distribuição ( $\chi$ ) e da granulometria. Não é sensato pensar em frações de heterogeneidades muito grandes, acima da média do concreto, por exemplo,

ultrapassando os 50%; tal consideração é irreal e irá inevitavelmente impor dificuldades ao algoritmo, demandando muito tempo para alocação ou, até mesmo, sendo impossível o processamento. Além disso, fatores de distribuição elevados colocam maiores obstáculos para a instância gerenciadora das operações, uma vez que reduzem o universo de posições possíveis, sendo coerente, assim, pensar que um aumento considerável de  $\chi$  demanda frações de partículas menores. Ainda, é igualmente natural se considerar que a distribuição granulométrica prescrita interfira na alocação e nos demais parâmetros de entrada, i.e., partículas muito grandes (relativamente ao tamanho do domínio) possuem maiores chances de interseção e têm, portanto, menos posições disponíveis para alocação, exigindo, ainda, que as restrições de espaçamento sejam reduzidas (ou seja, que  $\chi$  e  $\Delta$  sejam limitados). Desse modo, curvas bem graduadas são melhor trabalhadas pela implementação. Logo, o bom julgamento é importante quando do uso de ferramentas como a que foi implementada.

Parâmetro	Valor
<i>Granulometria</i>	<i>Contínua (Füller)</i>
$\zeta([\phi^{MAX}, \phi^{MIN}])$	25mm – 0.30mm
$\Delta$	5% – 50%
$\chi$	0.01 – 0.7
$\eta$	5 e 6
$\delta r$	[0.01 – 100]
$\delta \Theta$	[0.01 – 10]
$h \times w$	10cm $\times$ 20cm

(a) Propriedades gerais



(b) Domínio.

Set-up 5.1: Configuração experimental – Geração e alocação de partículas.

### 5.1.1 Exame 1: Influência do Fator de Distribuição na Alocação

Utilizando-se uma fração de partículas característica de agregados em concreto, 40%, na faixa granulométrica de  $\phi \in [25mm - 4.75mm]$ , representativa de partículas britadas típicas, e com uma curva de distribuição contínua  $\zeta(\phi, n = 0.5)$  (ver equação 4.40), avaliou-se o efeito do parâmetro responsável por regular as operações de sobreposição e distanciamento com a abstração circular de partículas. Conforme dito no capítulo 4, há no fator  $\chi$  uma conotação física importante, a de garantir uma camada de matriz ao redor de

cada inclusão, proporcional à dimensão característica desta. Com variações incrementais arbitrárias de 1% a 70% do tamanho da partícula corrente, mais precisamente, valores na série  $\{0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7\}$ , apresenta-se a seguir na figura 5.1 os efeitos da variação de  $\chi$ .

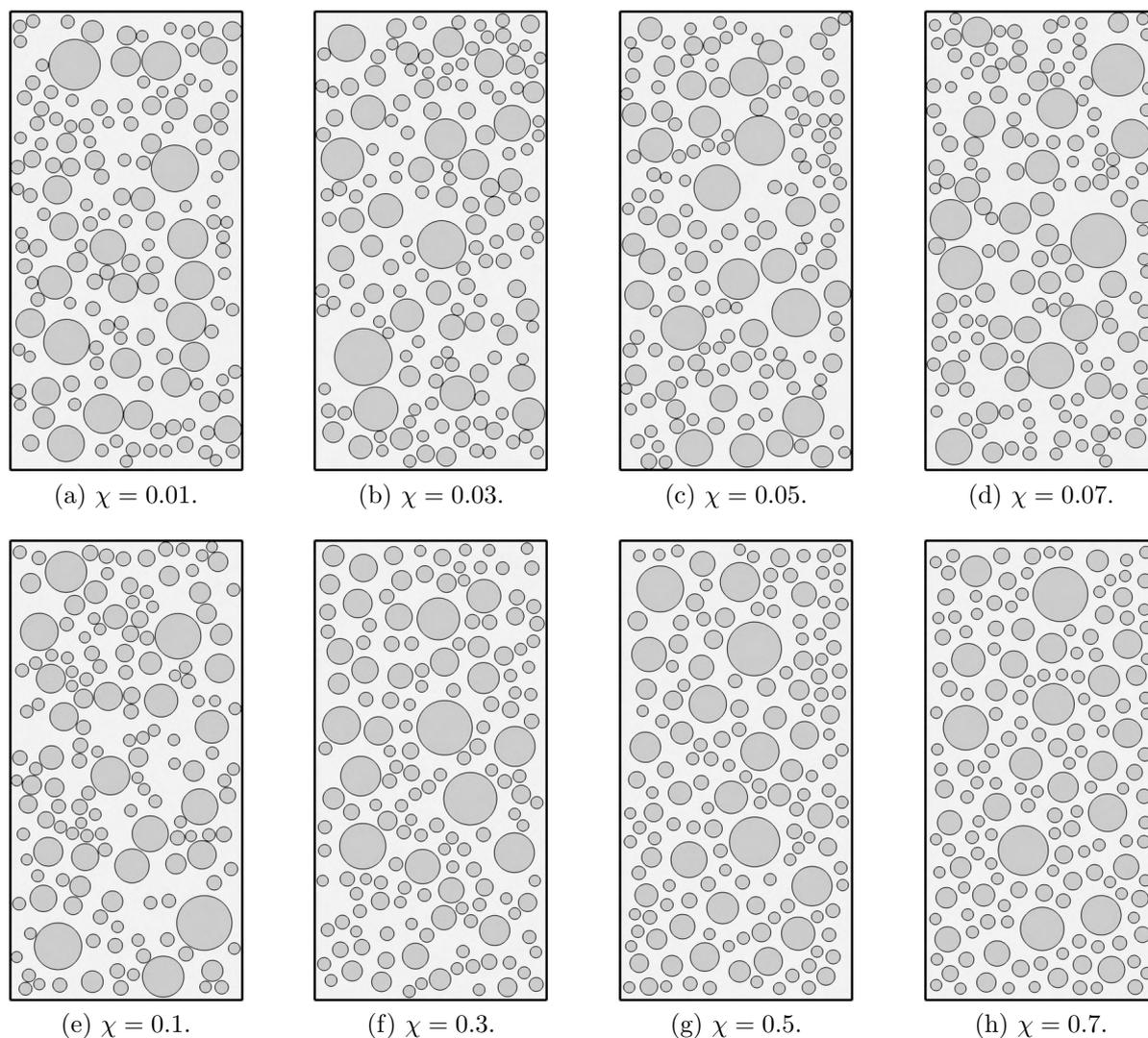


Figura 5.1: Variação do fator de distribuição  $\chi$  – Inspeção visual.

Como se pode notar, o incremento de  $\chi$  no algoritmo produz distribuições mais regulares e uniformes, com espaçamentos inter-partículas maiores. Quanto maior o fator de distribuição menor é aglomeração de heterogeneidades. A redução do fator, por sua vez, produz morfologias aparentemente mais aleatórias e compactas.

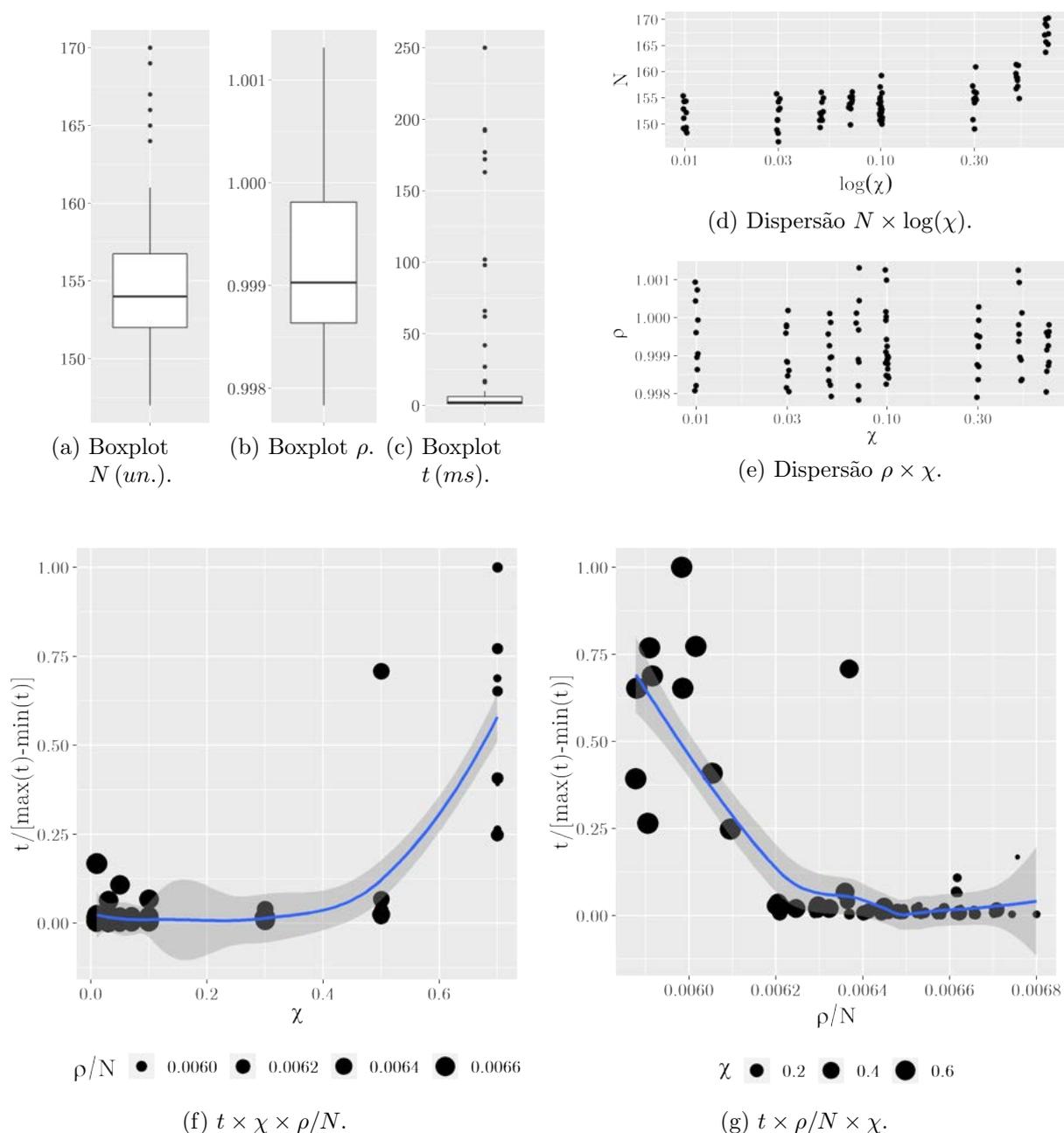


Figura 5.2: Influência de  $\chi$  no número de partículas geradas ( $N$ ), na razão de alocação ( $\rho$ ) e no tempo de alocação ( $t$ ).

Avaliou-se ainda o efeito de  $\chi$  no número de partículas produzidas ( $N$ ), na razão de alocação ( $\rho$ ), i.e., na fração real de partículas posicionadas daquilo que foi prescrito (40% neste exemplo) e no tempo levado para alocar todas as partículas ( $t$ ). Para tanto, dez rodadas sequenciais de processamento do conjunto de fatores de distribuição propostos (ou seja, 80 distribuições) foram realizadas para coleta de parâmetros médios menos oscilantes. Na figura 5.2, apresentam-se as respostas gráficas selecionadas para a referida avaliação: em 5.2a, 5.2b e 5.2c registram-se os boxplots de  $N$ ,  $\rho$  e  $t$ ; em 5.2d e 5.2e registram-se

as dispersões de  $N$  e  $\rho$  para cada  $\chi$ ; em 5.2f há a variação do tempo de processamento (normalizado) em função do fator de distribuição e da razão de alocação, e em 5.2g tem-se o tempo frente a razão de alocação normalizada pelo número de partículas (ou seja,  $\rho/N$ ) e o fator de distribuição.

Nas figuras 5.2a, 5.2b, 5.2c, 5.2d e 5.2e observa-se que, nos testes realizados, a alocação final de partículas é, em média, integral, ou seja, toda a fração de partículas prescrita é embutida no domínio com a implementação. O número de heterogeneidades posicionadas varia pouco, com um desvio-padrão baixo. Dentro dos limites experimentais indicados, há uma leve assimetria positiva em  $N$  e  $\rho$ , o que indica uma potencial variação para cima do número final de partículas alocadas. Relativamente ao tempo, há um espriamento maior. Aqui, cabe uma ressalva antes de qualquer discussão. Em Java, em que a compilação e a execução são gerenciadas por uma máquina virtual, a JVM, há uma otimização nativa em estruturas de repetição, conhecida como *loop unrolling*. No caso de programas Java, por causa do compilador JIT (*Just In Time*), *loops* “contados” (por exemplo, laços `for`) que usam uma variável `int`, `short` ou `char` como contador, o corpo do laço é desenrolado, desmembrado, e substituído por várias cópias de si, organizadas uma após a outra. Isso faz com que haja uma redução considerável e sucessiva do tempo ao longo das iterações (Newland e Evans, 2019). Desta maneira, considerando que os testes performados aqui se valeram de estruturas de repetição para a execução das dez rodadas, com igual uso para a variação dos parâmetros de distribuição, os testes com a variável tempo obtiveram resultados médios baixos, em geral. Dito isso, ressalva-se, portanto, que as análises com a variável  $t$  têm um caráter prioritariamente qualitativo, com o intuito de se observar tendências nos resultados, e, finalmente, para os experimentos particulares aqui realizados, não houve uma grande demanda de tempo de processamento. O que, em hipótese alguma, pode ser tomado como regra.

É possível notar na figura 5.2f que o acréscimo em  $\chi$  implica em um crescimento quase-exponencial do tempo, indicando que o algoritmo apresenta potencialmente uma complexidade  $\mathcal{O}(2^\chi)$  no âmbito avaliado. Ainda, para fatores de distribuição menores, há uma alocação mais compacta, i.e., quanto menor o fator de distribuição, maior a razão de alocação (ainda que a variação numérica de  $\rho$ , em módulo, seja muito pequena, como aponta o gráfico 5.2b).

Da resposta gráfica 5.2g nota-se que há uma relação inversa entre o tempo de processamento e a razão de alocação normalizada, bem como uma interação similar entre esta e o fator de distribuição. Infere-se daí que o gerenciador de partículas tem maiores dificuldades para processar distribuições menos compactas (com  $\chi$  mais elevados), isto é, a instância leva mais tempo para encontrar uma posição ideal para as partículas nos espaços livres, consumindo um número maior de partículas menores, e culminando em um menor aproveitamento final, quer dizer, na redução da razão de alocação.

Fatores de distribuição mais elevados do que 0.7, ou seja, que considerem um aumento de 70% nas heterogeneidades durante o posicionamento se mostraram restritivos para a fração de partículas particular usada, conforme previamente antevisto.

Infere-se, ao fim e ao cabo, que fatores de distribuição da ordem de  $10^{-2}$  sejam adequados para uma representação virtual de mesoestrutura de materiais particulados, proporcionando uma aleatoriedade visual mais proeminente, produzindo morfologias relativamente compactas e um desempenho computacional adequado.

### 5.1.2 Exame 2: Influência da Fração de Partículas na Alocação

Para verificação do efeito da fração de partículas na implementação, realizou-se teste similar ao anterior. Considerando uma distribuição granulométrica  $\zeta(\phi, n = 0.5)$ , contínua em  $\phi \in [25mm - 4.75mm]$ , e um fator de distribuição de 0.02, variou-se a fração de partículas de 5% da dimensão do domínio até o limite máximo habitual de misturas de concreto (50%) –  $\{0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ . Dez rodadas foram processadas para cada fração de partículas. A figura 5.3 apresenta as conformações obtidas.

Estudou-se o impacto da fração de partículas no número de heterogeneidades obtidas pelo algoritmo, no aproveitamento da alocação da fração prescrita e no tempo de execução. Na figura 5.4 apresentam-se algumas das avaliações feitas nos moldes daquelas anteriormente apresentadas no exame anterior: em 5.4a, 5.4b, 5.4c, registram-se os box-plots de  $N$ ,  $\rho$  e  $t$ ; em 5.4d e 5.4e há as dispersões de  $N$  e  $\rho$  para cada fração; já em 5.4f apontam-se as variações do tempo de processamento com relação à  $\Delta$ , discriminado por razão de alocação normalizada ( $\rho/n$ ) e em 5.4g, há uma relação complementar, a variação do tempo frente à  $\rho/N$ , discriminada por  $\Delta$ .

Naturalmente, incrementado-se  $\Delta$ , aumenta-se o número de partículas (fig. 5.3).

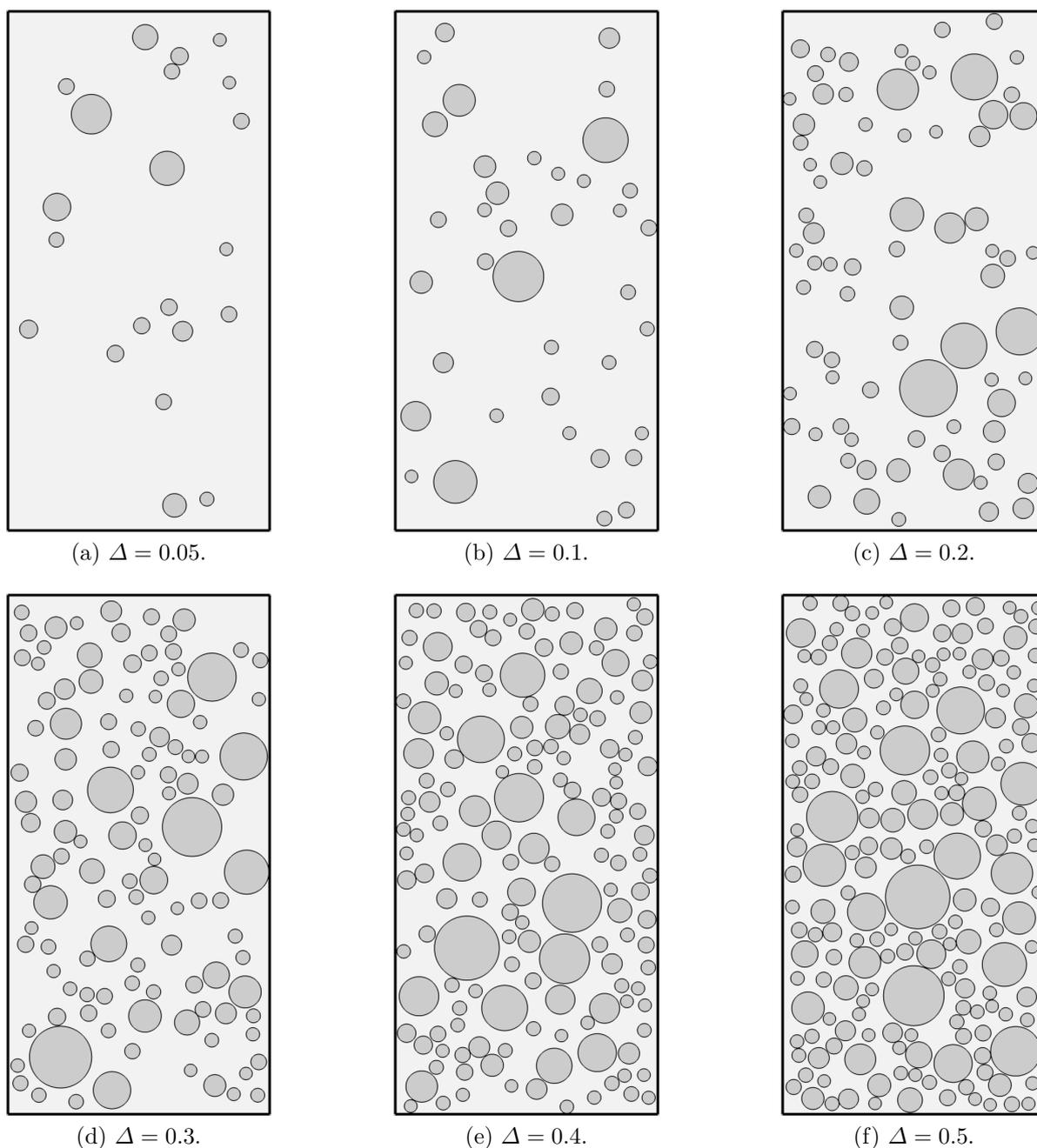


Figura 5.3: Variação da fração de partículas  $\Delta$  – Inspeção visual.

Observando-se os gráficos 5.4a e 5.4d, percebe-se que a distribuição de  $N$  é aproximadamente normal com relação à fração de partículas e varia pouco em cada realização de  $\Delta$ . De modo semelhante àquilo capturado na avaliação de  $\chi$ , o boxplot 5.4b mostra que o gerenciador permanece alocando integralmente a fração prescrita, mesmo esta variando. A distribuição de  $t$  (fig. 5.4c), assim como as suas ressalvas, mantiveram-se praticamente inalteradas, havendo contudo uma redução em módulo.

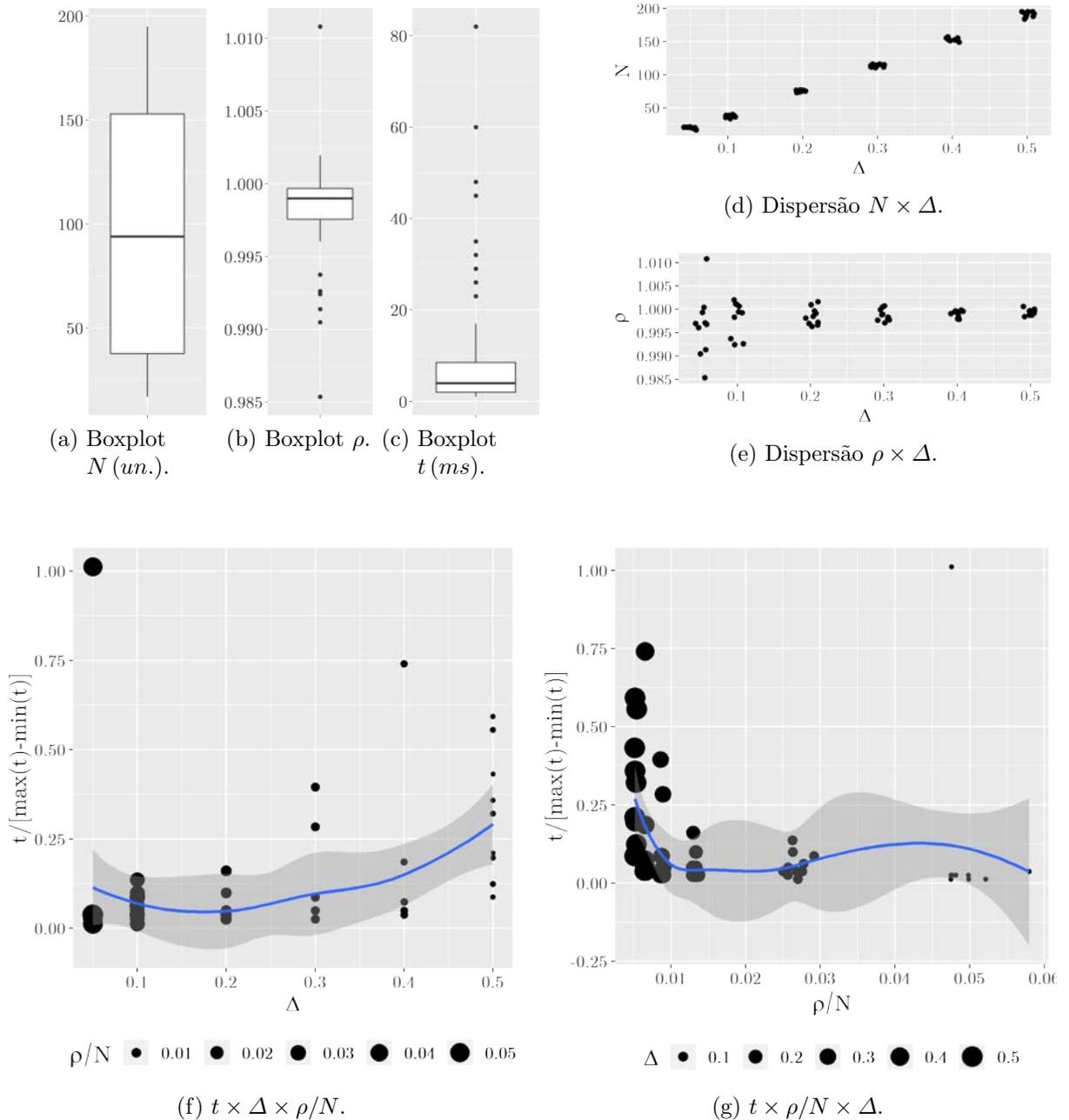


Figura 5.4: Influência de  $\chi$  no número de partículas geradas ( $N$ ), na razão de alocação ( $\rho$ ) e no tempo de alocação ( $t$ ).

A dispersão 5.4e aponta para uma tendência de concentração das realizações de  $\rho$  em torno de uma média, à medida que  $\Delta$  aumenta. Com o incremento da fração de partículas, a razão de alocação tende a fixar-se num aparente valor ótimo, apontando que, apesar da intrínseca aleatoriedade da mesoestrutura, há, no limite, conformações ótimas limitadas, nas quais há um aproveitamento superior. Quanto maior o número de partículas prescritas, menores são as possibilidades de conformações internas possíveis.

Assim, conforme levantado antecipadamente, há um número finito, e cada vez menor, de posições disponíveis para as partículas, à proporção que a fração de heterogeneidades cresce, o que, por si, demonstra o motivo do aumento do tempo de processamento.

Analogamente ao acréscimo em  $\chi$ , o aumento de  $\Delta$  implica num crescimento do tempo de processamento (aqui apresentado normalizado na fig. 5.4f), sendo este, contudo, menos acentuado, mas de complexidade  $\mathcal{O}$  equivalente. Percebe-se que o tempo aumenta, com o incremento em  $\Delta$ , e que o aproveitamento ( $\rho/N$ ) é menor nos casos em que a fração de partículas é maior, comportamento reforçado no gráfico 5.4g.

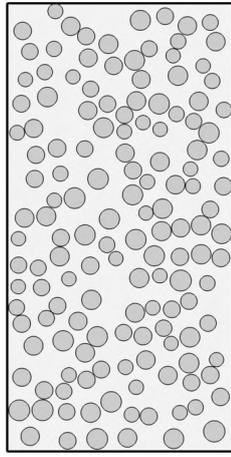
Potencialmente, portanto, dentro dos limites experimentais apresentados, o fator de distribuição aparenta ter uma maior influência no tempo de processamento do que propriamente a quantidade de partículas ( $\Delta$ ), respeitadas as emendas colocadas em parágrafos anteriores.

### 5.1.3 Exame 3: Influência da Distribuição Granulométrica na Geração e na Alocação

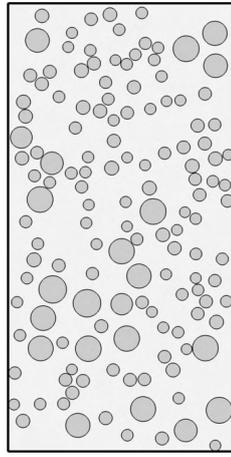
Para avaliar o impacto da distribuição granulométrica nas operações, algumas granulometrias (classes) foram testadas, a saber:

1. Curvas abertas prescritas (baseado em [Katayama \(2016\)](#)):
  - $\phi \in \{9.5mm, 6.3, 4.75mm\}$ ;  $\zeta = \{98.7, 13.1, 3.1\}$ ;
  - $\phi \in \{12.5, 9.5mm, 6.3, 4.75mm\}$ ;  $\zeta = \{60.6, 34.5, 3.0, 0.6\}$ ;
  - $\phi \in \{31.5mm, 25mm, 19.0mm, 12.5mm, 9.5mm\}$ ;  $\zeta = \{95.5, 75.0, 19.3, 0.5, 0.0\}$ ;
2. Curva contínua  $\zeta(\phi, n = 0.5)$  em séries normal/intermediária (vide curva prescrita):
  - $\phi \in [9.5mm - 4.75mm]$ ;
  - $\phi \in [12.5mm - 4.75mm]$ ;
  - $\phi \in [31.5mm - 9.5mm]$ .
3. Curva contínua  $\zeta(\phi, n = 0.5)$  em séries normal/intermediária:
  - $\phi \in [75mm - 9.5mm]$ ;
  - $\phi \in [19mm - 6.3mm]$ ;
  - $\phi \in [25mm - 0.30mm]$ .

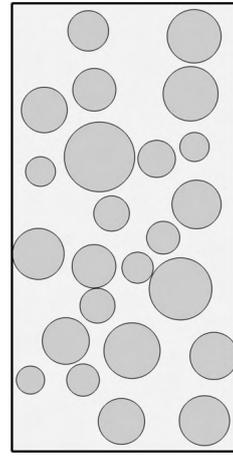
Em todas as classes utilizou-se uma fração de partículas de 40% e um fator de distribuição igual a 0.02.



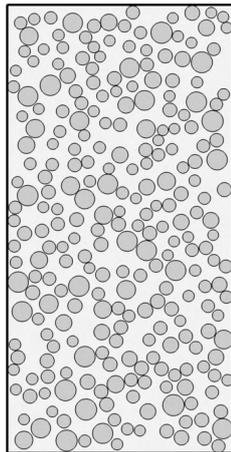
(a) Prescrita;  
{9.5, 6.3, 4.75}.



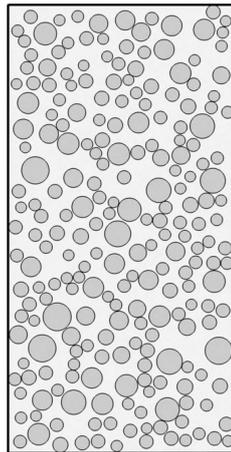
(b) Prescrita;  
{12.5, 9.5, 6.3, 4.75}.



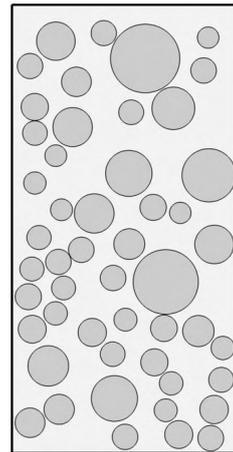
(c) Prescrita;  
{31.5, 25, 19, 12.5, 9.5}.



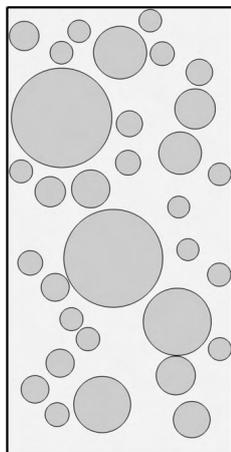
(d) Contínua;  
{9.5, 6.3, 4.75}.



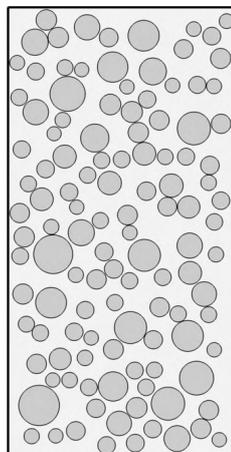
(e) Contínua;  
{12.5, 9.5, 6.3, 4.75}.



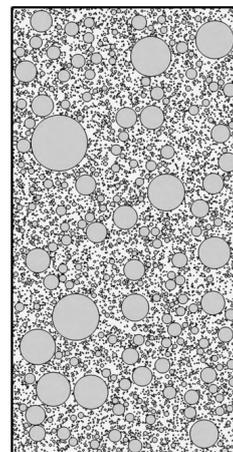
(f) Contínua;  
{31.5, 25, 19, 12.5, 9.5}.



(g) Contínua; 75 –  
4.75.



(h) Contínua; 19 –  
6.3.



(i) Contínua; 25 – 0.3.

Figura 5.5: Variação da distribuição granulométrica – Inspeção visual.

Na figura 5.5 apresentam-se as variações das distribuições granulométricas indicadas. Nota-se que a implementação consegue lidar com diferentes granulometrias, de faixas com dimensões maiores até intervalos com presença de finos, sendo capaz, inclusive, de manipular distribuições prescritas. Nesse ínterim, observa-se que há uma tendência das curvas contínuas analíticas (como as de Füller empregadas aqui) empacotarem melhor a morfologia do que as curvas experimentais prescritas utilizadas, as quais aparentemente possuem distribuições com partículas mais homogêneas, maiores e em menor número por conseguinte.

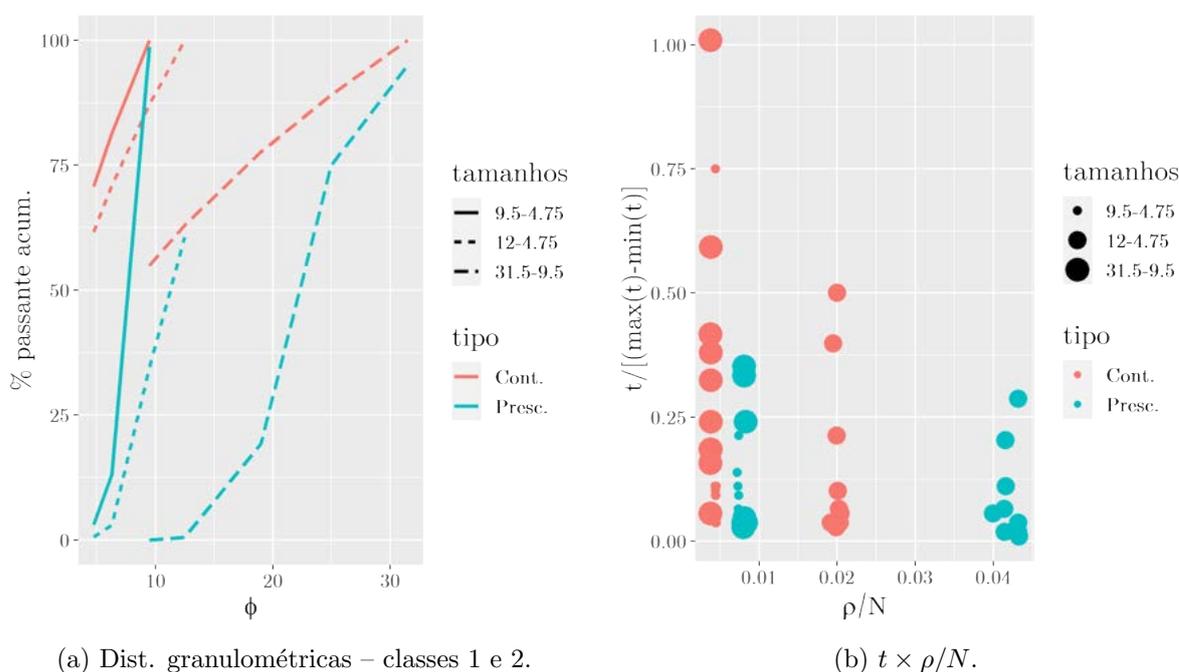


Figura 5.6: Influência da distribuição granulométrica no tempo ( $t$ ) e na razão de alocação ( $\rho$ ).

Já na figura 5.6 apresentam-se as distribuições granulométricas das classes 1 e 2, bem como a resposta temporal com respeito à razão de alocação, discriminada por faixas granulométricas e tipos de curvas (se prescrita/experimental ou contínua/analítica). Percebe-se que curvas como a de Füller tendem a possuir um perfil bastante distinto de distribuições experimentais. A fig. 5.6a aponta um potencial menor aproveitamento no processo de alocação nos extremos do espectro experimental utilizado; aparentemente, podem haver determinados intervalos de gradação cujos limites de tamanho fornecem uma melhor compactação das partículas e um melhor desempenho do algoritmo em uma dada geometria

externa, o que, contudo, não é conclusivo. Finalmente, ressalva-se que, dada as características de curvas medidas prescritas, que possuem uma gradação menos significativa, com a menor presença de partículas com dimensões próximas a do limite inferior, o gerenciamento do posicionamento dessas distribuições não analíticas pode produzir razões de alocação um pouco superiores.

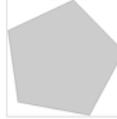
#### 5.1.4 Exame 4: Influência dos Parâmetros das Partículas na Geração

Evidentemente, para partículas com contorno circunferencial, somente a dimensão característica afeta a forma, quanto maior o raio, maior a partícula, não havendo maiores discussões a serem postas. Para opções um pouco mais rigorosas, contudo, cabe avaliar a influência dos parâmetros numéricos (mas com lastro físico) indutores de irregularidades morfológicas que foram assumidos nesta obra, a variação da dimensão característica, normalmente distribuída ao redor de um raio médio, e a variação dos ângulos centrais, uniformemente distribuída entre limites mínimos e máximos (rever seção 4.2.3). Assim, apresenta-se a seguir na tabela 5.1 uma avaliação comparativa do efeito do acréscimo sucessivo de ordens de grandeza nas distorções aplicadas à heterogeneidade. A uma partícula pentagonal com  $\phi = 25mm$  foram impostas combinações de seis desvios radiais  $\{0.0, 0.01, 0.1, 1.0, 10.0, 100.0\}$  (i.e., desvios-padrões de 0 a 100) e cinco desvios angulares  $\{0.0, 0.01, 0.1, 1.0, 10.0\}$  radianos (ou seja, distorções máximas expressivas superando  $2\pi$ ) de modo a se exceder forçosamente os limites do algoritmo, e se averiguar formatos mais aderentes ou favoráveis.

Nota-se que, para variações radiais e angulares muito significativas, as formas obtidas pelo algoritmo culminam na iminente perda de convexidade e regularidade das poligonais de contorno, e as distorções são mais sensíveis às variações angulares do que às radiais. Desvios nos ângulos superiores à  $10^0$  e desvios radiais acima de  $10^1$  são desfavoráveis, sendo encarado como limiar operacional uma distorção da ordem de  $10^0$ , portanto. De um modo geral, variações da ordem de  $10^{-1}$  e  $10^{-2}$ , em ambos os parâmetros, apresentaram comportamento mais estável e maior potencial para combinação e alternância nos valores.

Embora tenha um maior apelo físico e herde características que se julgam mais realísticas, o uso de partículas poligonais é essencialmente menos prático que a opção por topologias circunferenciais. O fato de existirem certos testes de sobreposição mais específicos e robustos exige a implementação de um número maior de salvaguardas e um natural

Tabela 5.1: Influência dos parâmetros de irregularidade ( $\delta r, \delta\theta$ ) na conformação das partículas.

$\delta r \rightarrow$ $\delta\theta \downarrow$	0.0	0.01	0.1	1.0	10.0	100.0
0.0						
0.01						
0.1						
1.0						
10.0						

maior tempo de processamento, questão *in re ipsa*, sem a apresentação de maiores testes ou detalhes neste texto. Assim, portanto, considera-se que as partículas circulares são satisfatórias, havendo nesta pesquisa uma tendência de se utilizar este tipo particular de geometria.

Finalmente, a título ilustrativo, é apresentada na figura 5.7, a seguir, uma saída simplificada típica do processo de gerenciamento da geração e alocação de partículas implementado aqui.

### 5.1.5 Síntese

O desempenho do gerador de inclusões foi apresentado. Suas potencialidades foram registradas num conjunto de exames específicos que avaliaram a influência de cada fator particular do algoritmo utilizado, dentre eles: o fator de distribuição, a fração de heterogeneidade, a distribuição granulométrica e parâmetros geométricos das partículas. Nesse

<pre> % ***** LIST OF PLACED PARTICLES ***** % Number of particles: 154 % Granulometry: [25.0--4.75] % Dist. factor: 0.1 % Particle fraction: 0.4 % Place ratio: 1.0000013574578837 % Take-and-place duration: 54.000ms % Particle type: 'SphericalParticle' % ---- PARTICLE PROPERTIES &lt;X,Y,R&gt; ---- p=[ 49.654 52.699 12.175 149.113 81.806 10.733 129.011 65.285 9.858 116.268 27.796 6.926 30.562 33.201 9.018 26.410 67.176 8.081 163.409 65.966 6.655 79.525 26.817 6.824 143.754 17.657 6.679 99.592 32.822 7.700 184.408 90.608 6.480 69.641 10.361 7.947 138.757 44.037 9.141 128.838 91.188 5.096 . . ...]</pre>	<pre> % ***** LIST OF PLACED PARTICLES ***** % Number of particles: 220 % Granulometry: [25.0--4.75] % Dist. factor: 0.01 % Particle fraction: 0.4 % Place ratio: 0.9981078891186022 % Take-and-place duration: 11,860.000ms % Irreg. param.: n:5.0 dtheta:0.5 dr:0.0 % Particle type: 'IrregularParticle' % -- PARTICLE VERTICES COORDINATES &lt;X,Y&gt; -- p1=[75.347 54.839 84.150 57.497 86.766 66.927 78.271 74.276 67.518 66.024 75.347 54.839]; p2=[166.657 92.749 152.407 89.631 152.197 74.811 160.400 70.313 172.759 78.384 166.657 92.749]; ... p=[p1,p2,...]</pre>
---	--

(a) Caso `SphericalParticle`.(b) Caso `IrregularParticle`.

Figura 5.7: Saída simplificada do gerente de partículas. (a) Indicação do número de partículas, da razão de alocação  $\rho$ , da duração do processo (em  $ms$ ), da posição  $\mathbf{P}(x, y)$  e dimensão característica da partícula  $r$ . (b) Indicação do número de partículas, da razão de alocação  $\rho$ , da duração do processo (em  $ms$ ) e da posição  $\mathbf{P}(x, y)$  de seus vértices, em que  $p_i(x, y)^1 \equiv p_i(x, y)^{ULTIMO}$ .

sentido, itemizam-se resumidamente os seguintes pontos:

- O parâmetro com impacto mais significativo no rendimento do algoritmo foi o fator de distribuição ( $\chi$ ), que regula as operações de sobreposição. A amplitude desse componente é relativamente abrangente, tendo sido testado um alcance de 70 vezes o limite mínimo com ordem de  $10^{-2}$ . O fator  $\chi$  controla a compactação da distribuição e valores na casa de  $10^{-1}$  fornecem resultados satisfatórios. Fatores  $\chi$  maiores aumentam o consumo de tempo e tendem a diminuir o rendimento ( $\rho/N$ );
- A fração de partículas ( $\Delta$ ) também tem a sua influência no processo, apresentando

uma complexidade  $\mathcal{O}$  semelhante à de  $\chi$ , porém de menor monta. Naturalmente, o aumento do número de partículas implica num maior gasto de tempo. Além disso, percebe-se que o aumento de  $\Delta$  tende a fixar o rendimento do algoritmo;

- Distribuições granulométricas ( $\zeta$ ) contínuas tendem a empacotar de maneira mais eficiente a morfologia resultante. Já curvas prescritas abertas com limites de tamanho  $\phi$  maiores tendem a afetar a eficiência do algoritmo e diminuir o rendimento ( $\rho/N$ ), ainda que de maneira relativamente modesta.

## 5.2 Tratamento do Metadado Numérico-Geométrico de Mesoestrutura

Lastreado nas hipóteses fundamentais da representação material descritas na seção 4.1.3, aponta-se a seguir o desempenho da abordagem protagonista nesta pesquisa, o tratamento não conforme com elementos monofásicos. Guardadas algumas especificidades pontuais de cada alternativa de tratamento, os apontamentos apresentados para a solução não conforme monofásica servem para as demais abordagens, isto é, a qualidade da captura de uma morfologia e/ou da variação de propriedades materiais num domínio se relaciona(m), em última instância, com a resolução da malha: quanto menor o elemento mais fiel é a representação do meio particulado. Assim, abordagens diretas como o tratamento conforme, o tratamento não conforme multifásico, o tratamento não conforme via enriquecimento, um modelo de redes ou abordagens indiretas sintéticas funcionam de maneira similar do ponto de vista representacional e, avaliando-se apenas propriedades básicas de um modelo numérico, como tamanho médio da malha, não diferem de maneira vultosa. Ainda assim, de modo a ilustrar parte da capacidade do *framework* desenvolvido, será apresentado com um rigor inferior o tratamento conforme.

Utilizando a configuração experimental 5.1 anterior os seguintes exames fundamentais foram trabalhados:

- Exame 1: avaliação do tratamento não conforme (com elementos monofásicos).

Foram avaliados:

- Efeito de malhas regulares com elementos quadrilaterais na descrição de uma mesoestrutura: para uma distribuição granulométrica contínua fixa e arbitrária

$\zeta(\phi, n, \chi) = [25, 19]\text{mm}$ ,  $n = 0.5$ ,  $\chi = 0.2$ , três níveis de refinamento foram explorados: malha com 50 elementos Q4 de  $20 \times 20$  ( $h^E \approx \phi^{MIN}$ ); malha com 200 elementos Q4 de  $10 \times 10$ ; malha com 800 elementos Q4 de  $5 \times 5$ .

– Efeito de malhas não regulares com elementos triangulares na descrição de uma mesoestrutura: utilizando-se a distribuição de partículas anterior, foi empregado um conjunto de malhas com elementos triangulares de três nós e tamanhos equivalentes aos dos tipos anteriores, i.e., malhas com tamanho médio  $h^E$  de 20, 10 e 5 mm.

Foram empregados elementos monofásicos, mas o mecanismo de funcionamento com elementos multifásicos é equivalente.

- Exame 2\*: avaliação do tratamento conforme.

Para algumas distribuições de partículas, apresentam-se as malhas obtidas e apontam-se algumas ressalvas e notas.

*Em ambos os exames, utilizaram-se partículas circulares, uma vez que a captura de sua forma exige um grau de detalhamento superior.*

### 5.2.1 Exame 1: Avaliação do Tratamento Não Conforme

Através de uma estratégia com maior apelo visual, apresenta-se na figura 5.8 a incorporação de uma fase secundária a uma malha de elementos finitos utilizando-se de recursos gráficos disponíveis no sistema. Foram exploradas diferentes malhas e a relação entre o grau de refinamento destas com a qualidade da captura de uma dada distribuição de partículas. Ao longo das seções à frente estudos numéricos mais detalhados serão fornecidos em diferentes contextos. A breve investigação adiante serviu de base para definição de estratégias posteriores nos testes e aplicações apresentados no decorrer do texto.

Observa-se que o desempenho de malhas randômicas triangulares na captura dos contornos internos é superior. Intrinsecamente, malhas obtidas através de triangulação possuem uma cobertura ótima da topologia de origem. Para tamanhos  $h$  médios equivalentes, o número de elementos triangulares construídos fatalmente será superior assim como a consequente melhora da descrição. Além disso, as morfologias obtidas via triangulação têm o potencial de indiretamente retratar inclusões poligonais muito semelhantes à fase particulada de materiais bifásicos.

Apesar do desempenho (na descrição da forma) ser ligeiramente inferior, consideram-se

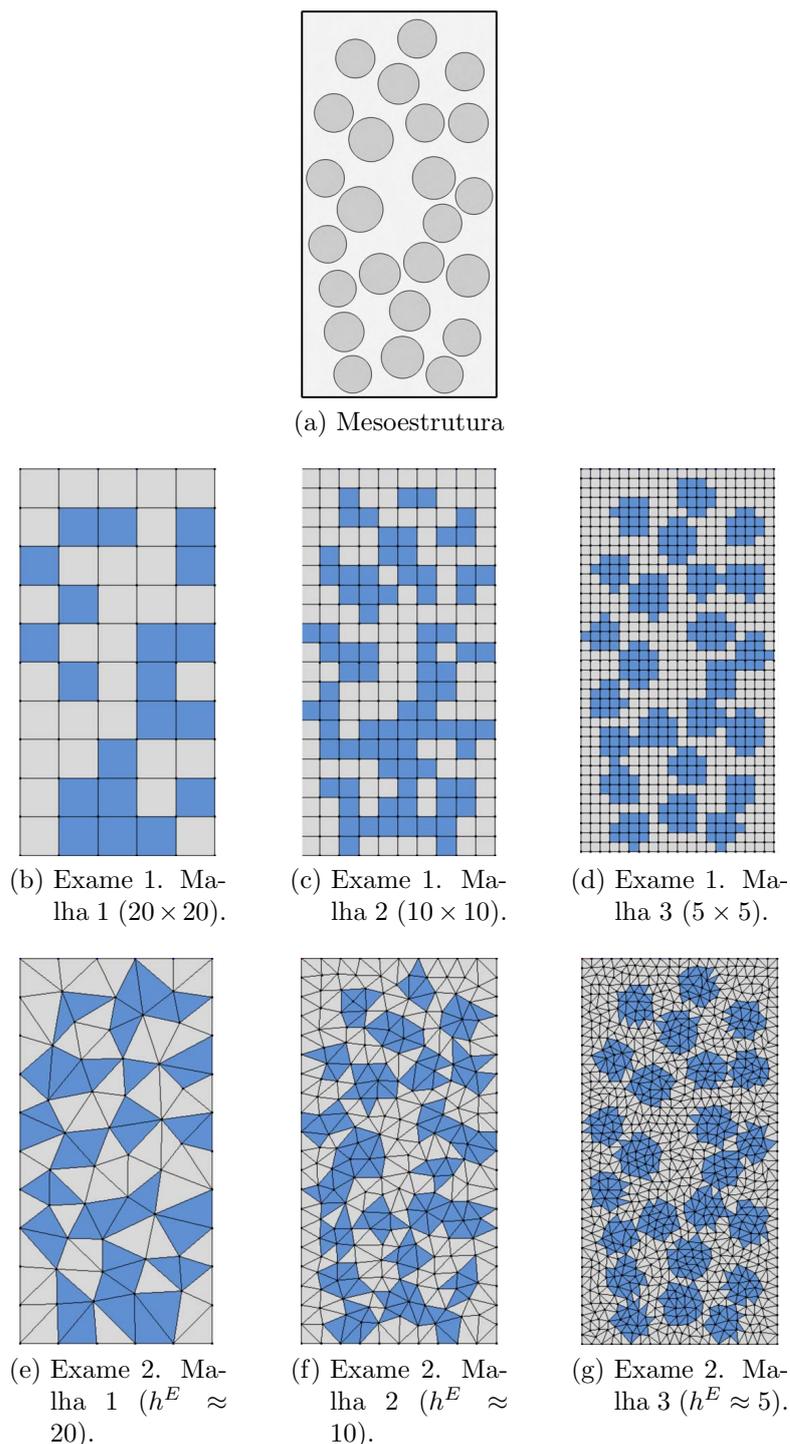


Figura 5.8: Tratamento do metadado numérico-geométrico: avaliação da malha no modelo morfológico proposto. Malhas regulares com elementos quadrilaterais (5.8b, 5.8c e 5.8d) e malhas não regulares com elementos triangulares (5.8e, 5.8f e 5.8g).

os resultados das malhas regulares quadrilaterais satisfatórios e em grau de custo-benefício adequado, sobretudo às ambições da pesquisa, cuja demanda pela manipulação de modelos numéricos distintos de maneira concorrente e em processamento exigiu otimizações em etapas intermediárias da análise, como esta da representação material.

O teste apresentado nos leva ainda a uma nota adicional. Recapitulando observações feitas anteriormente em capítulo de fundamentação teórica, o componente de escala em muitas abordagens global-local ou multiescala tem uma conotação de refinamento da resolução de uma característica do modelo em determinado nível de comprimento, isto é, dado um tamanho, o grau de detalhamento de uma propriedade se altera. Dessa maneira, em consonância com a figura 5.8, considera-se que é possível simular distintos níveis de acuidade de uma descrição material, e, portanto, diferentes escalas, alterando-se a discretização do método numérico. Malhas mais grosseiras não somente levam a aproximações (do ponto de vista estritamente numérico) mais grosseiras, mas também a uma avaliação da constituição do meio mais rústica, sem o detalhamento de nuances localizadas. Em contrapartida, malhas progressivamente mais refinadas aperfeiçoam a aproximação (em geral) e a descrição física do domínio, num processo análogo a um *zoom* – sem a alteração das dimensões macroscópicas, mas variando-se a escala de comprimento, há um efeito de acercamento e imersão ao interior do sólido à medida que refina a discretização.

Para uma escala de comprimento  $h^E \approx 1 : 20 h$  (ver *set-up* 5.1) a distribuição das fases teria o detalhamento das figuras 5.8b ou 5.8e. Já para uma escala de comprimento  $h^E \approx 1 : 5 h$ , a descrição do interior do domínio poderia ser dada segundo as figuras 5.8d ou 5.8g.

### 5.2.2 Exame 2\*: Avaliação do Tratamento Conforme

Na figura 5.9 apresentam-se alguns resultados obtidos com a implementação da variação conforme de tratamento do metadado representativo de uma morfologia particulada. Com arestas coloridas para melhor visualização, as malhas geradas para três distribuições distintas são ilustradas.

A captura da morfologia através do presente tratamento foi superior. Entretanto esse desempenho foi limitado por condicionantes, a saber:

- O tamanho dos elementos finitos triangulados é da mesma ordem de grandeza.
- A discretização do contorno da partícula é tal que resulta em cordas da ordem de grandeza do grau de refinamento prescrito para os elementos finitos, do contrário o quesito anterior não é respeitado.
- Para a captura do interstício entre as partículas, e a conseqüente preservação da

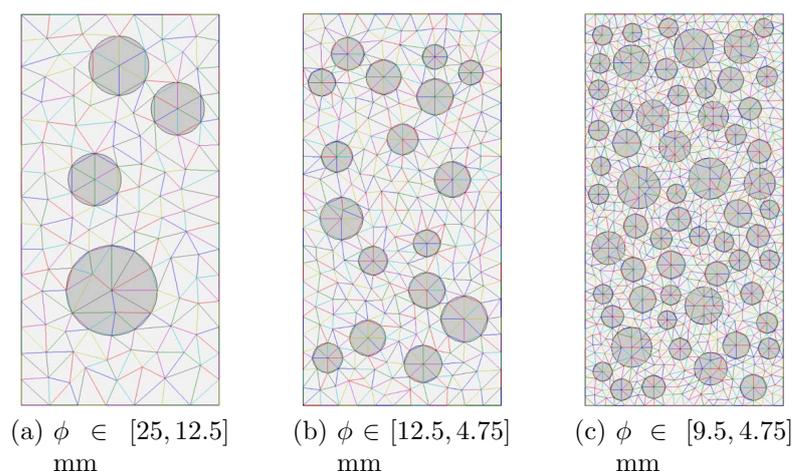


Figura 5.9: Tratamento do metadado numérico-geométrico: inspeção visual do tratamento conforme. Diferentes distribuições (5.8b, 5.8c e 5.8d).

forma da partícula, o elemento finito deve ser da ordem de grandeza de  $\chi\phi^{MIN}$ . No algoritmo utilizado, esse tamanho está relacionado à dimensão das divisões no contorno externo do domínio.

- Sendo o tamanho médio do EF fixo e constante, a faixa de distribuição granulométrica possível é diminuída, isto é,  $\phi^{MAX}/\phi^{MIN}$  não excede 3.
- De maneira a preservar elementos finitos com formato pouco distorcido e a depender do tamanho de uma partícula, a discretização do contorno da partícula pode não ser suficiente e surge a necessidade de acréscimo de camadas de vértices no interior da partícula (fig. 5.8d).
- A complexidade da implementação é consideravelmente superior à dos demais tratamentos, assim como o tempo de processamento.

Dessa maneira, apesar da aparente vantagem que a alternativa apresenta, no âmbito dos recursos disponíveis na plataforma de desenvolvimento, da dinâmica de implementação do grupo de pesquisa e das adaptações feitas pela presente implementação, há uma quantidade significativa de empecilhos e potenciais problemas quando da utilização dos algoritmos aqui empregados. A abordagem exige maior volume de código, mais recursos de processamento e de tempo, de modo que seu custo-benefício é mais restrito, ainda que a captura da geometria seja relativamente melhor. Assim, os resultados aqui são de cunho expositivo,

### 5.2.3 Síntese

Alguns dos tratamentos numéricos do metadado morfológico foram ilustrados. Por contenção de escopo, de modo a não se estender demasiadamente o texto, enfoque foi concedido à abordagem basilar empregada como regra nesta pesquisa em particular. Conforme dito no capítulo anterior, ainda que outras estratégias tenham sido previstas, certas escolhas metodológicas foram estabelecidas e o universo estreitado. Observou-se que uma técnica baseada em não conformidade de malha, com elementos monofásicos e inclusões circulares/esféricas é suficientemente adequada para a tarefa alvo e aderente aos objetivos do trabalho. Essa escolha foi justificada mediante a apresentação (em caráter ilustrativo, de fato, mas suficiente para as ambições da seção) de outra abordagem mais complexa de descrição geométrica da distribuição de partículas, o tratamento conforme, que mostrou-se mais restritivo e operacionalmente mais exigente, antagonizando a demanda de otimização dos expedientes computacionais no presente contexto, mas de resultado não tão superior ao da estratégia escolhida.

Observações complementares, sobretudo envolvendo tratamentos probabilísticos indiretos (como o dito modelo de degeneração randômica), podem ser avaliadas em [Andrade \(2019\)](#), que utilizou a implementação deste trabalho para a execução de outros tipos de teste.

## 5.3 Verificação e Validação do MEEG-GL-NL

Apresentam-se na sequência alguns exemplos de verificação e validação de algumas das etapas escolhidas como elementos de base para desenvolvimento da estratégia numérica não linear erigida nos capítulos anteriores. Conforme mencionado na seção 4.3, a clivagem dos testes se dá, tendencialmente, aos pares, ou seja, apresentação de soluções de referência em paralelo com a exposição de alguns resultados obtidos. Via de regra, essas soluções de referência são as variantes homogêneas (HM) dos ensaios elencados no plano experimental.

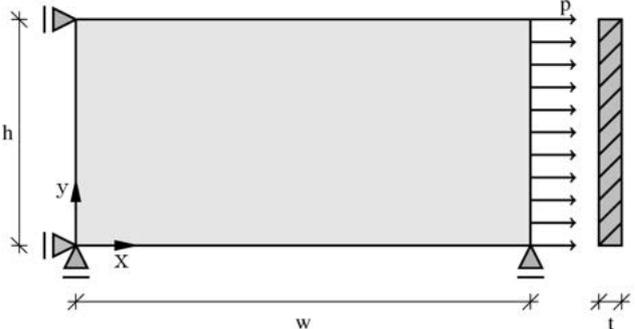
### 5.3.1 Experimentos AL-HM-1E/AL-HT-1E: Tração Direta

Para avaliar o efeito da heterogeneidade num modelo numérico de um problema acessível e comum da mecânica dos sólidos, foi proposta avaliação comparativa por inspeção visual e cotejo de variáveis de estado/duais de dois tipos de análises previamente descritas, AL-HM-1E e AL-HT-1E, relativas a simulações com meios homogêneo e heterogêneo,

respectivamente. Para tanto, uma tração direta, um problema linear simples, em estado plano de tensões, na qual tem-se um sólido com inclusões rígidas dispersas em uma matriz elástica ( $E^{PARTICULA} > E^{MATRIZ}$ ), foi modelada. A escolha das propriedades dos materiais foi tal que os efeitos da heterogeneidade no problema se tornassem mais proeminentes. A configuração experimental é apresentada no *set-up* 5.2.

Material
$E_1 = 20 \text{ GPa}, \nu_i = 0.2$
$E_2 = 10 \times E_1$ e $2 \times E_1, \nu_2 = 0.2$
Geometria (cm) e CDC
$h = 10.0, w = 20.0, t = 1.0$
$p = 1.0 \text{ kN/cm}^2$ ; lados esq./inf. fixos
Dist. granulométrica
$\Delta = 10, 20, 40\%$ ; $\chi = 0.20.3$ ; $\phi \in [32.0 - 9.5]^* \text{ mm}$

(a) Parâmetros.



(b) Modelo

Set-up 5.2: Configuração experimental – AL-HM/HT-1E – Ensaio de tração direta. Fase 1: matriz, fase 2: partículas. \**Exame distintos usaram dimensões características distintas dentro do intervalo indicado.*

Como exames principais de avaliação aponta-se:

- Exame 1: avaliação geral do modelo morfológico adotado e do desempenho do tratamento do metadado numérico-geométrico.

Através de três realizações do ensaio da configuração experimental, compilaram-se os resultados de modelos com distribuições simplificadas, diagnosticando de maneira qualitativa o desempenho do modelo adotado. Uma distribuição contínua de partículas circulares,  $\zeta(\phi, n)$ ;  $\phi \in [25.0, 19.5]$ ,  $n = 0.5$ ,  $\chi = 0.3$ , foi empregada.

- Exame 2: influência da fração de heterogeneidade no comportamento estrutural do modelo.

Para cada uma de três frações de partículas,  $\Delta = 0.10$ ,  $\Delta = 0.20$  e  $\Delta = 0.40$ , cinco realizações de mesoestrutura ( $\zeta(\phi, n)$ ;  $\phi \in [31.5, 9.5]$ ,  $n = 0.5$ ,  $\chi = 0.2$ ) foram produzidas. Ao se utilizar variadas realizações de uma mesma variante de teste, incorporou-se um caráter minimamente estocástico ao estudo, permitindo com que

a avaliação de medidas de tendência central fosse possível (ainda que com representatividade limitada, dados o número de variações e a extensão do ensaio) e certos padrões inter e intrafrações pudessem ser destacados.

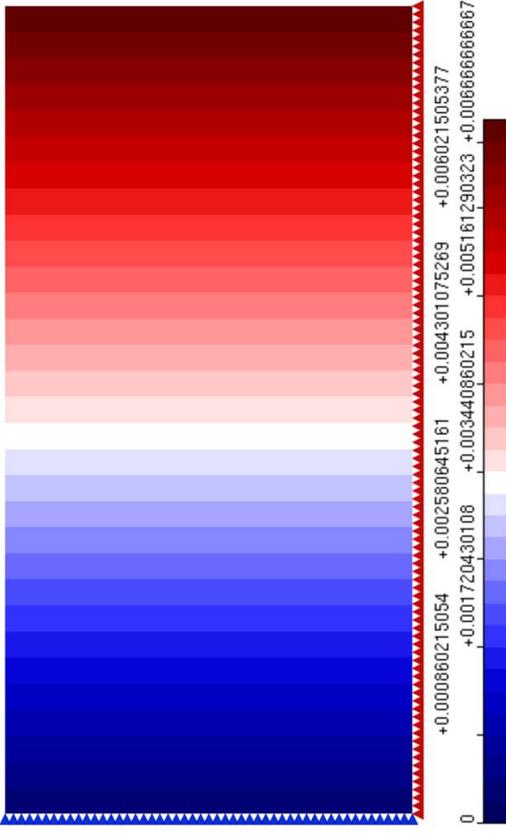
### 5.3.1.1 Exame 1: Avaliação Geral do Modelo Morfológico Adotado

Uma simulação mesoestrutural explícita foi realizada usando o modelo numérico apresentado nas seções anteriores. Partículas esféricas e um segmento de gradação fixo foram empregados. Três diferentes simulações da heterogeneidade do meio foram realizadas (AL-HT-1E), bem como o processamento de uma classe de referência homogênea.

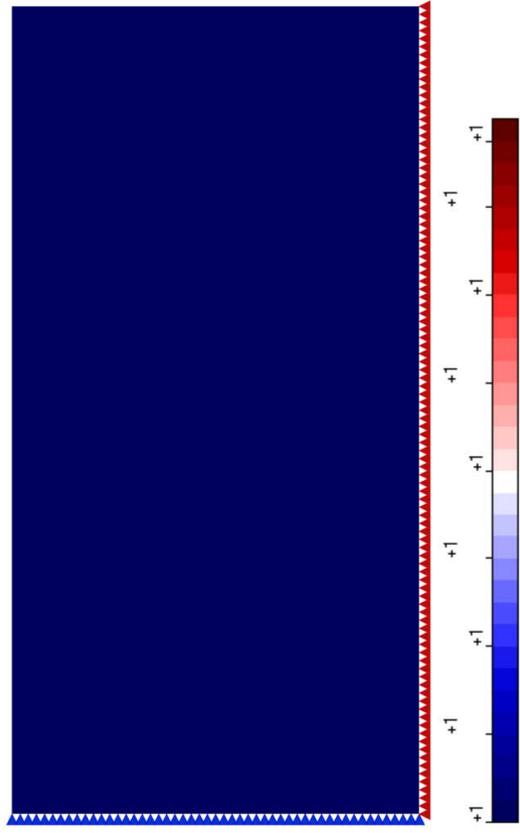
Dado que os desempenhos em termos de inserção do componente morfo-constitutivo submacroscópico na análise numérica são similares entre as diversas possibilidades de tratamento da heterogeneidade, optou-se aqui por soluções não-conformes monofásicas, eminentemente mais simples, de acordo com aquilo apontado previamente nos quesitos metodológicos da obra. Escolheu-se uma malha consideravelmente refinada para que o modelo numérico herdasse o componente morfológico de maneira mais precisa. Diretrizes operacionais do tratamento computacional podem ser encontradas no capítulo 4.

Na figura 5.10 apresenta-se a solução de referência homogênea e nas figuras 5.11, 5.12 e 5.13 compilam-se resultados de três realizações de mesoestrutura. Uma vez que os campos predominantes são na direção  $x$ , as componentes neste eixo foram escolhidas para inspeção das isofaixas. Os valores máximo e mínimo de cada campo são realçados nas legendas  $(d_x^{MAX}, \epsilon_{xx}^{MAX}, \epsilon_{xx}^{MIN}, \sigma_{xx}^{MAX}, \sigma_{xx}^{MIN})$ .

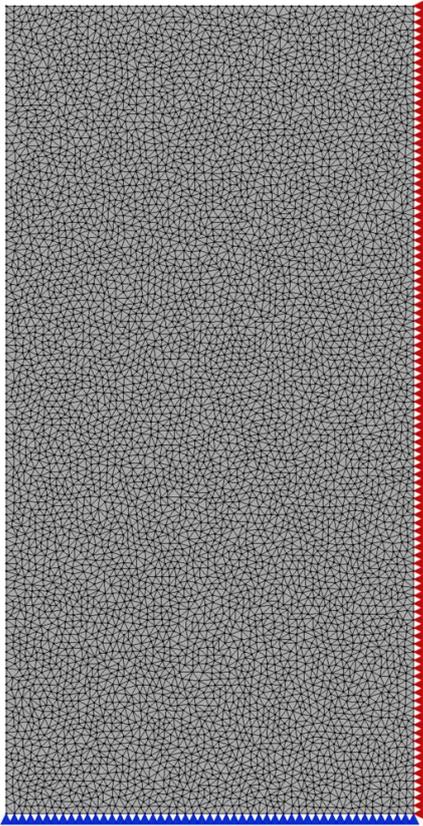
Mesmo com as características de entrada do problema mantidas constantes, a estocasticidade da heterogeneidade material se manifesta no modelo implementado e permeia o comportamento numérico. Como um circunspeção prévia esperaria e como pode ser notado, a consideração de um contínuo heterogêneo (com pontos materiais com propriedades dissimilares) afeta consideravelmente os resultados. As distribuições homogêneas dos campos internos esperadas em um teste de tração pura não são observadas quando uma dispersão matriz-partícula é considerada. Nas figuras 5.11, 5.12 e 5.13 identificam-se padrões de potenciais zonas de falha, que podem governar o comportamento material. No geral, como se observa, deformações e tensões tendem a se concentrar no contorno das heterogeneidades e no interstício partícula-partícula.



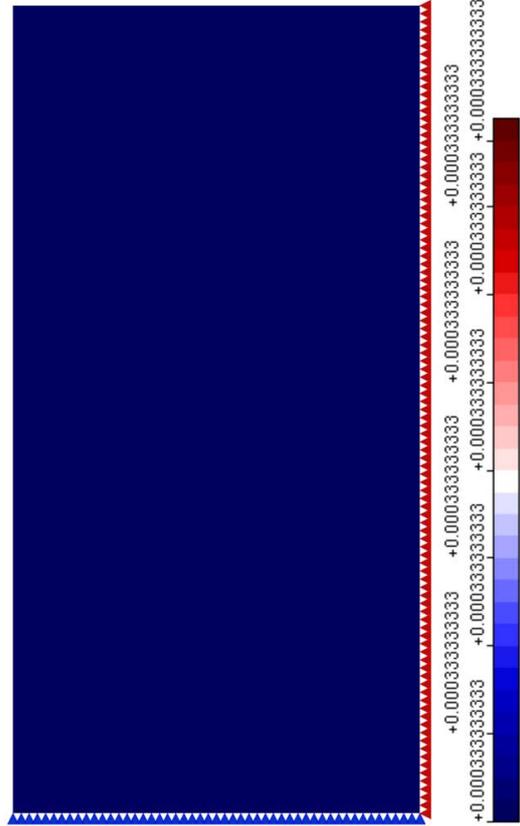
(a) Malha usada (tam. médio = 0.2 cm). T3.



(b) Deslocamento  $d_x$  (cm).  $d_x^{MAX} = 6.66 \times 10^{-3}$ .

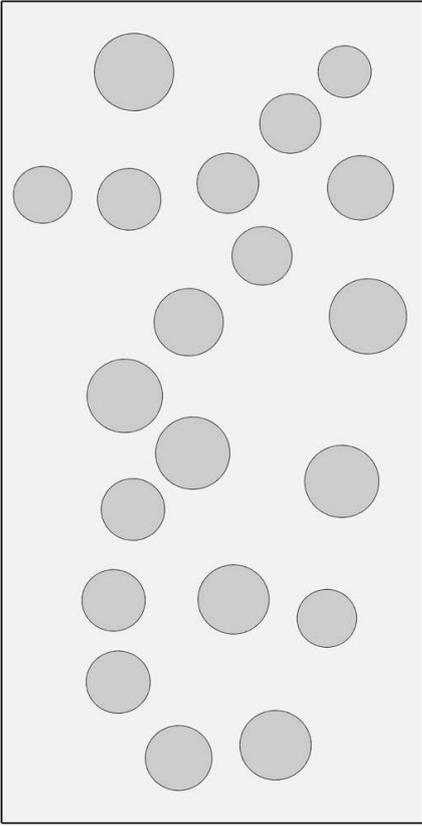


(c) Deformação  $\epsilon_{x,x}$  (cm/cm).  $\epsilon_{x,x}^{MAX} = 3.33 \times 10^{-4}$  (constante).

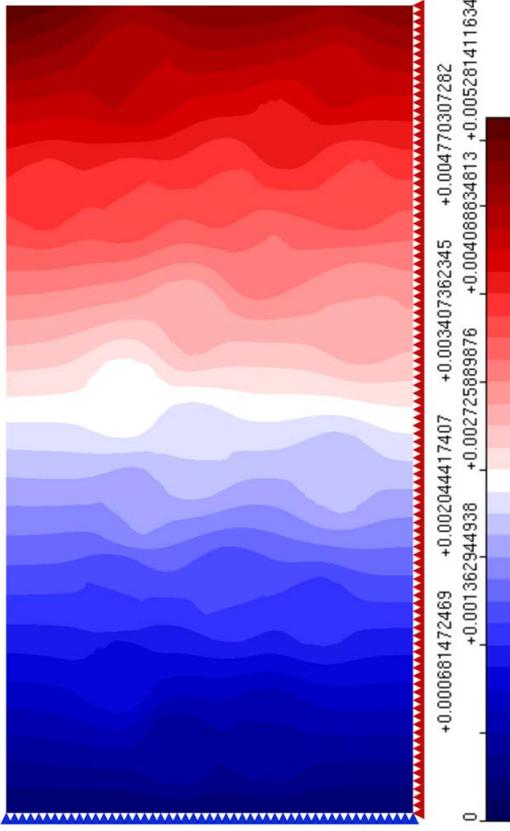


(d) Tensão  $\sigma_{x,x}$  (kN/cm<sup>2</sup>).  $\sigma_{x,x}^{MAX} = 1.00$  (constante).

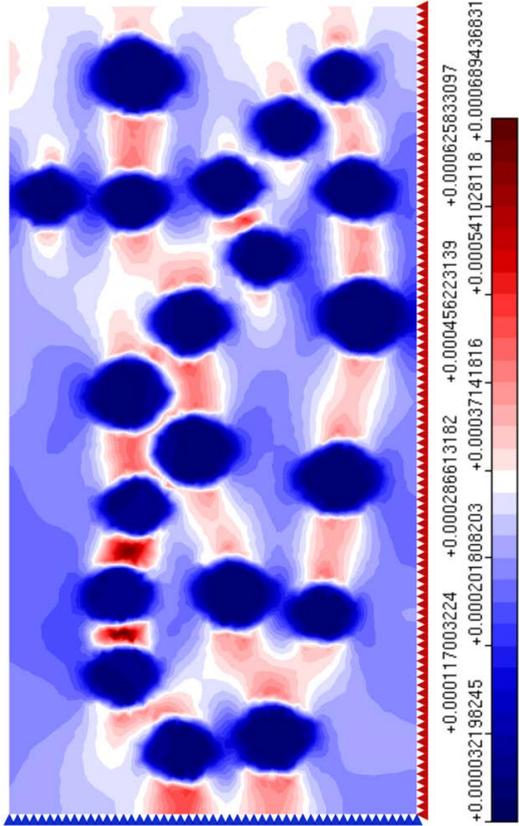
Figura 5.10: Malha de elementos finitos e solução de referência (AL-HM-1E).



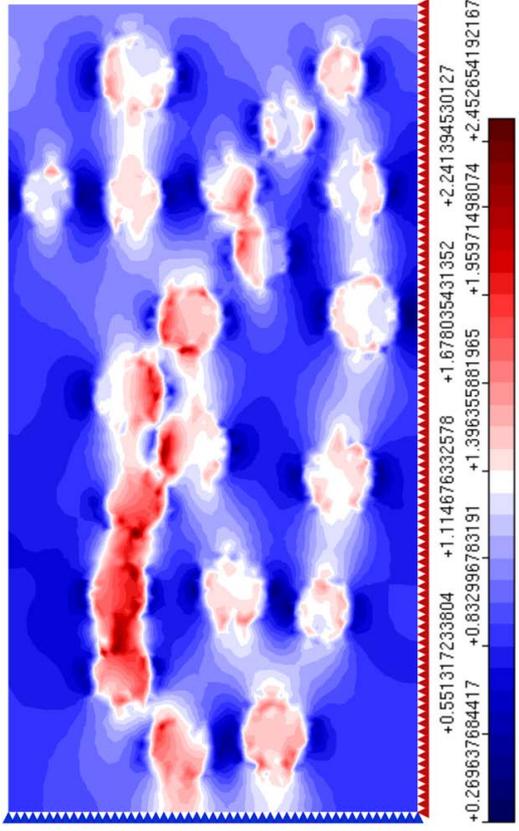
(a) Mesoestrutura 1. 20 partículas,  $\rho = 98.8\%$



(b) Deslocamento  $d_x$  (cm).  $d_x^{MAX} = 5.28 \times 10^{-3}$ .

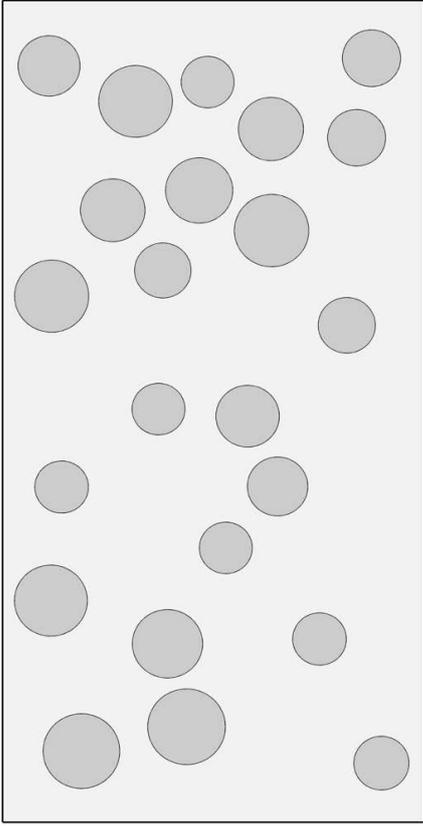


(c) Deformação  $\epsilon_{xx}$  (cm/cm).  $\epsilon_{xx}^{MAX} = 6.89 \times 10^{-4}$ ;  $\epsilon_{xx}^{MIN} = 3.21 \times 10^{-5}$

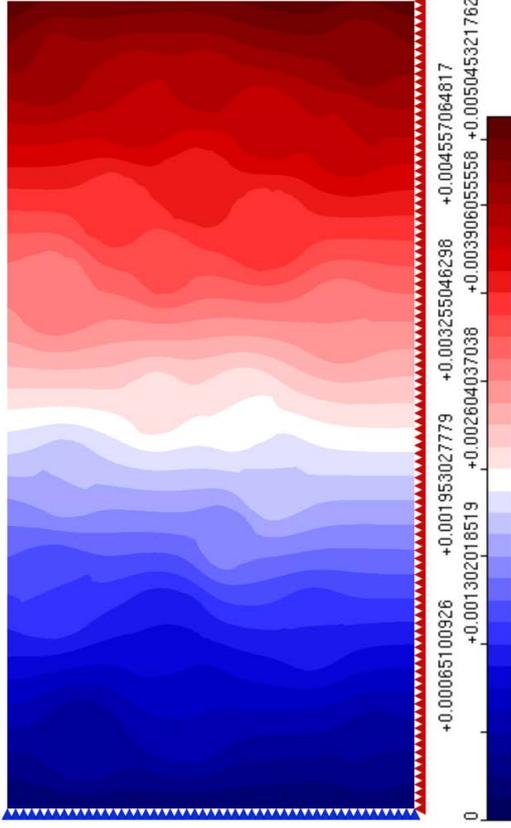


(d) Tensão  $\sigma_{xx}$  (kN/cm<sup>2</sup>).  $\sigma_{xx}^{MAX} = 2.45$ ;  $\sigma_{xx}^{MIN} = 0.269$ .

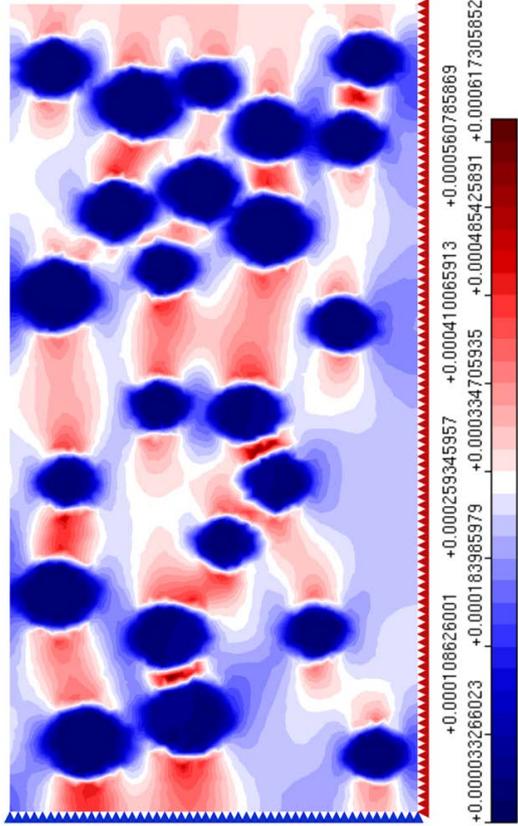
Figura 5.11: AL-HM(T)-1E – Tração direta – Exemplo 1: morfologia (5.11a), deslocamento na direção  $x$  (5.11b), deformação na direção  $x$  (5.11c) e tensões na direção  $x$  (5.11d).



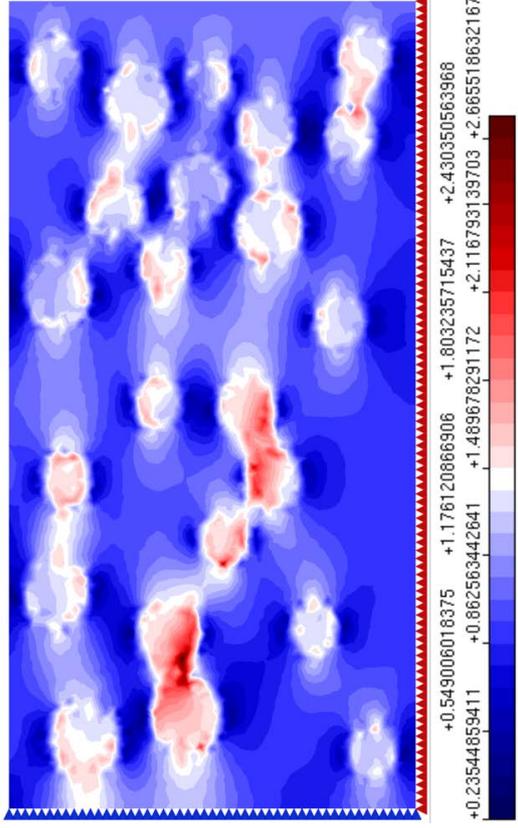
(a) Mesoeestrutura 2. 23 partículas,  $\rho$ : 102%



(b) Deslocamento  $d_x$  (cm).  $d_x^{MAX} = 5.05 \times 10^{-3}$ .

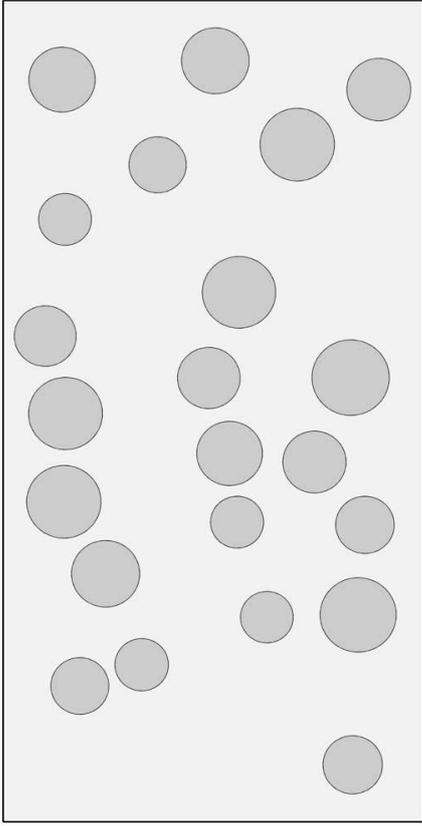


(c) Deformação  $\epsilon_{xx}$  (cm/cm).  $\epsilon_{xx}^{MAX} = 6.17 \times 10^{-4}$ ;  $\epsilon_{xx}^{MIN} = 3.32 \times 10^{-5}$

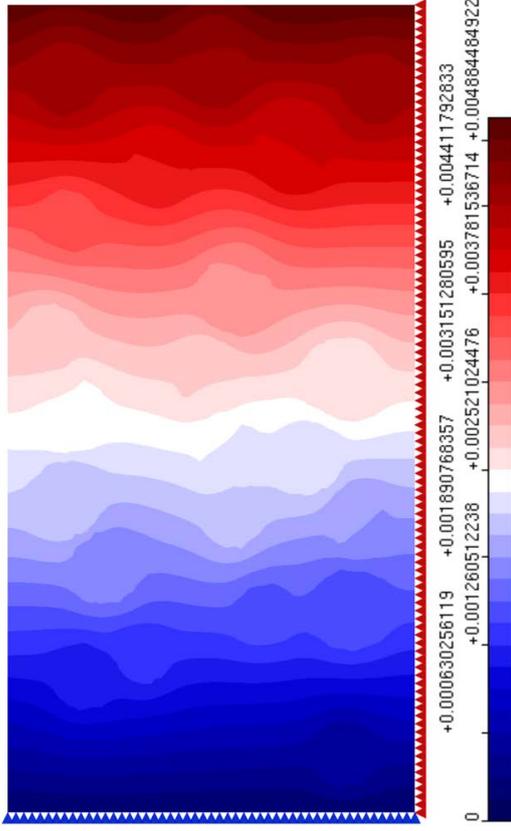


(d) Tensão  $\sigma_{xx}$  (kN/cm<sup>2</sup>).  $\sigma_{xx}^{MAX} = 2.66$ ;  $\sigma_{xx}^{MIN} = 0.235$ .

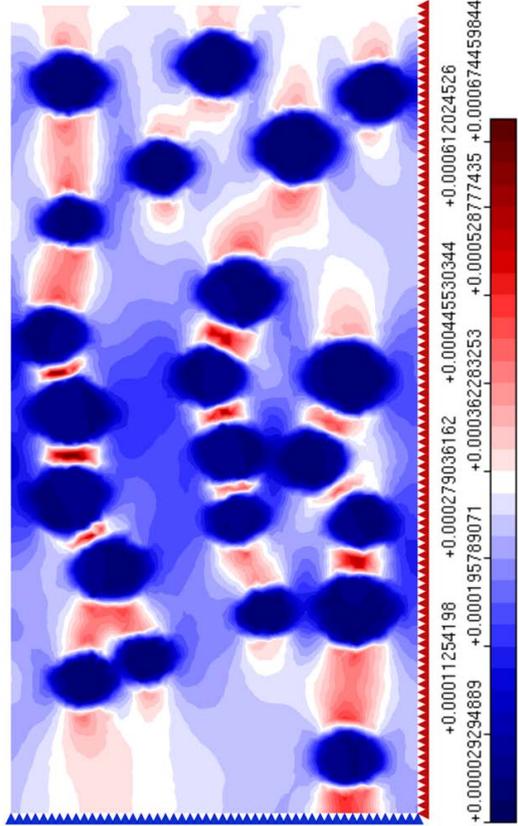
Figura 5.12: AL-HM(T)-1E – Tração direta – Exemplo 2: morfologia (5.12a), deslocamento na direção  $x$  (5.12b), deformação na direção  $x$  (5.12c) e tensão na direção  $x$  (5.12d).



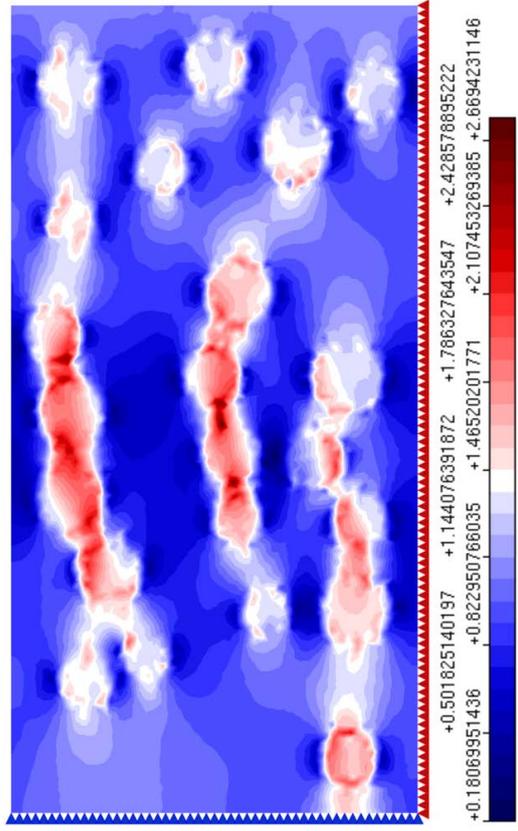
(a) Mesoestrutura 3. 22 particles,  $\rho$ : 102%



(b) Deslocamento  $d_x$  (cm).  $d_x^{MAX} = 4.88 \times 10^{-3}$ .



(c) Deformação  $\epsilon_{xx}$  (cm/cm).  $\epsilon_{xx}^{MAX} = 6.74 \times 10^{-4}$ ;  $\epsilon_{xx}^{MIN} = 2.92 \times 10^{-5}$



(d) Tensão  $\sigma_{xx}$  (kN/cm<sup>2</sup>).  $\sigma_{xx}^{MAX} = 2.67$ ;  $\sigma_{xx}^{MIN} = 0.181$ .

Figura 5.13: AL-HM(T)-1E – Tração direta – Exemplo 3: morfologia (5.13a), deslocamento na direção  $x$  (5.13b) e tensão na direção  $x$  (5.13c) e tensão na direção  $x$  (5.13d).

### 5.3.1.2 Exame 2: Influência da Fração de Heterogeneidade no Comportamento Estrutural do Modelo

Para avaliar o impacto da proporção de inclusões num modelo numérico como o do MEF/MEFG, três frações de heterogeneidade foram avaliadas. Partindo-se de 10% de partículas e dobrando-se progressivamente o fator  $\Delta$  (até  $\Delta = 40\%$ , portanto), cinco realizações de cada variante da configuração experimental 5.2 foram ensaiadas, de modo a introduzir na análise estrutural um comportamento estocástico proporcionado pela aleatoriedade das conformações de mesoestrutura. Realizou-se o cotejo de mínimos e máximos das componentes preponderantes de deslocamento, deformação e tensão de cada realização e medidas de tendência central dessas grandezas foram calculadas. Anexam-se também as isoformas dos campos trabalhados em composições comparativas para avaliações inter e intragrupos  $\Delta$ .

As figuras 5.14 e 5.15 apresentam as medidas de tendência central de cada variável e grupo.

Nas composições 5.16, 5.17 e 5.18, registram-se as distribuições de partículas e os campos de deslocamento, deformação e tensão na direção  $x$  de cada uma das cinco realizações de sólido em cada grupo  $\Delta$  (0.10, 0.20 e 0.40, nessa ordem). Embora com variações em módulo modestas entre realizações de uma mesma proporção  $\Delta$ , em virtude da diferença nas propriedades elásticas não tão expressiva quanto no caso anterior, percebem-se flutuações.

Para  $\Delta = 0.10$ , as componentes de deslocamento variaram de 0.0908 a 0.0957 mm, com deslocamento médio de 0.0936 mm. As deformações  $\varepsilon_{xx}$  mínimas absolutas variaram de 0.000269 a 0.000284 e as máximas de 0.000572 a 0.000659, com médias de 0.000276 e 0.000604, respectivamente. Tensões oscilaram entre os intervalos 6.24-7.87 MPa a 12.9-14.9 MPa, com mínimos e máximos médios de 7.23 e 14.0 MPa, nessa ordem.

No caso de  $\Delta = 0.20$ , os deslocamentos medidos variaram de 0.0908 a 0.0928 mm, com deslocamento médio de 0.0918 mm. Componentes de deformações  $\varepsilon_{xx}$  mínimas oscilaram de 0.000255 a 0.000267 (média de 0.000263), enquanto as máximas flutuaram entre 0.000560 e 0.000603, com média igual 0.000584. As tensões mínimas obtidas variaram de 6.94 a 7.17 MPa, e as máximas, entre 13.2 e 13.8 MPa. Mais detalhes nas figuras 5.14 e 5.15

No último grupo,  $\Delta = 0.40$ , os valores obtidos de deslocamentos  $d_x$  oscilaram de 0.0796 a 0.0801 mm, com média de 0.0793 mm. As deformações normais mínimas variaram de

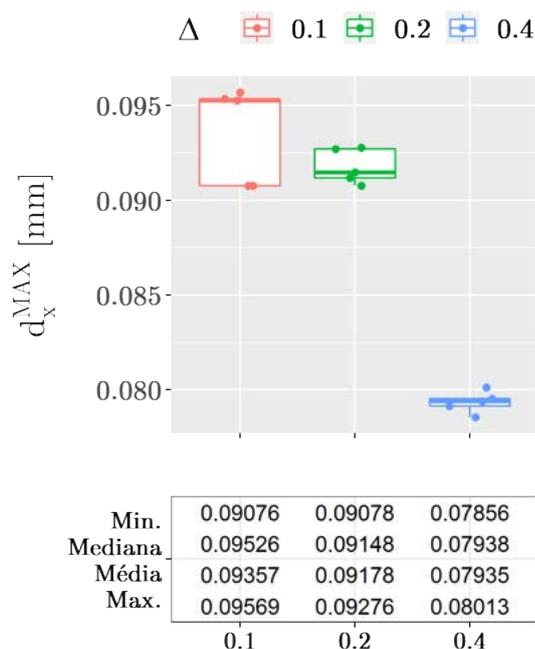


Figura 5.14: AL-HT-1E – Tração direta: box-plot dos deslocamentos máximos para cada fração de heterogeneidade (exame 2). Resposta gráfica e algumas estatísticas descritivas simples.

0.000227 a 0.000253 (média de 0.000243) e as máximas, entre 0.000566 e 0.000616 (média de 0.000585). Tensões normais flutuaram entre 5.89 a 6.54 MPa (mínimos) e 13.2 a 14.3 MPa (máximos), com médias absolutas da ordem de 6.23 e 14.0 MPa (figuras 5.14 e 5.15).

Numa avaliação interfrações, percebe-se que misturas com maior proporção de inclusões manifestam valores reduzidos nas grandezas medidas e um espectro de variação tendencialmente mais estreito, isto é, os quartis das distribuições de  $\Delta = 0.40$  são mais próximos entre si que aqueles de  $\Delta = 0.10$ . Além da aparente redução nas componentes normais com o aumento da parcela da fase secundária, a flutuação intrafração também é menor para quantidades superiores de partículas, havendo uma dispersão maior nos resultados com fração de 10%, sobretudo nas tensões.

Essa característica aponta para uma iminente aleatoriedade na gênese da região do domínio que excederá critérios de máximas deformações ou tensões, ou seja, que efetivamente falhará. Observando-se as realizações de cada grupo  $\Delta$  (figs. 5.16, 5.17 e 5.18) percebe-se, com efeito, que os valores máximos das grandezas derivadas dispersam-se ao longo da chapa ensaiada de maneira até certo ponto imprevisível, ainda que circunscrita por um morfologia prescrita.

Ampliando um pouco a análise prévia, registram-se na figura 5.19 os pontos de máxima

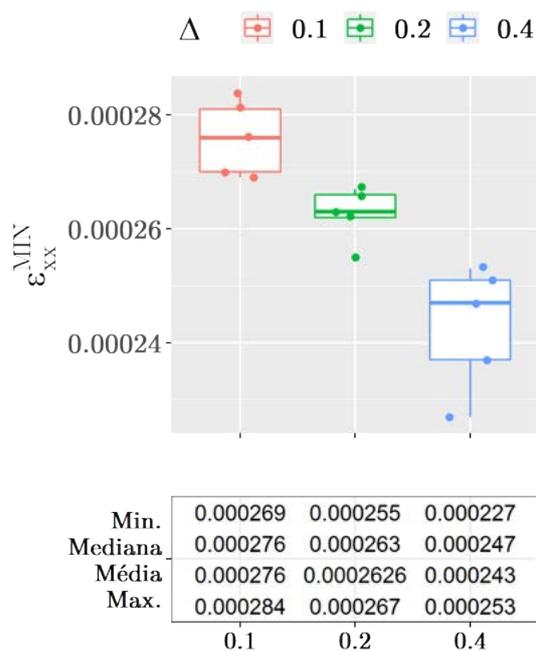
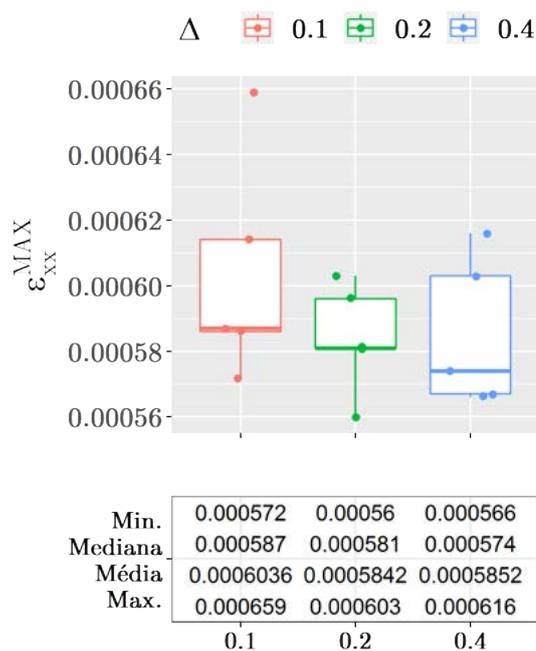
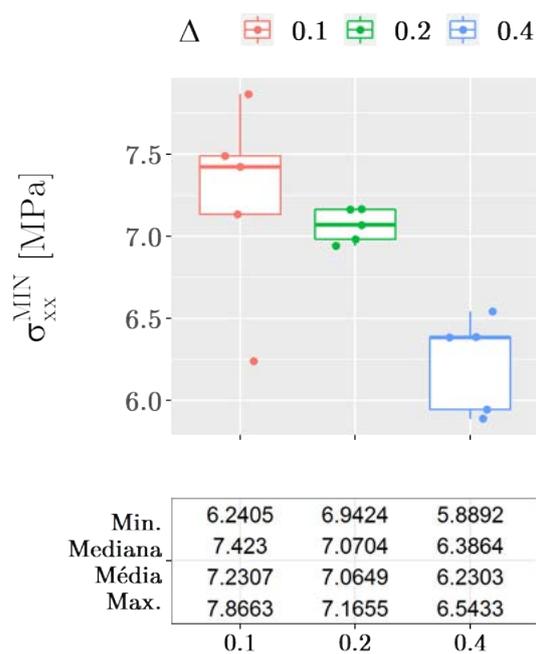
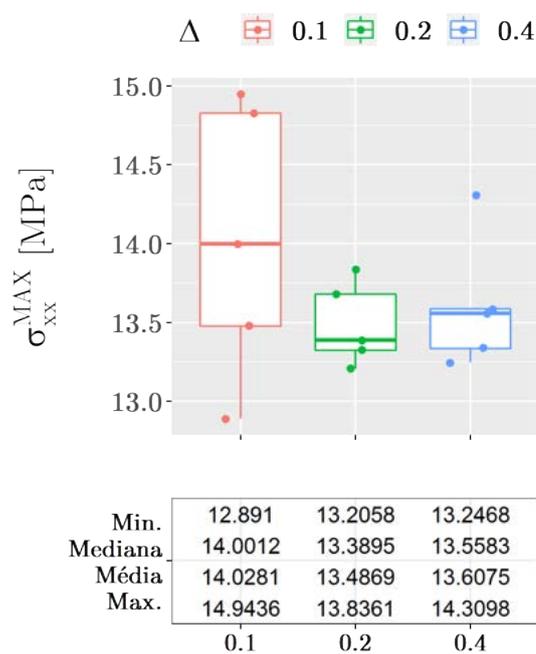
(a) Valores medidos de deformações  $\varepsilon_{xx}$  mínimas.(b) Valores medidos de deformações  $\varepsilon_{xx}$  máximas.(c) Valores medidos de tensões  $\sigma_{xx}$  mínimas.(d) Valores medidos de tensões  $\sigma_{xx}$  máximas.

Figura 5.15: AL-HT-1E – Tração direta: box-plot das deformações (5.15a, 5.15b) e tensões (5.15c, 5.15d) mínimas e máximas para cada fração de heterogeneidade (exame 2). Resposta gráfica e algumas estatísticas descritivas simples.

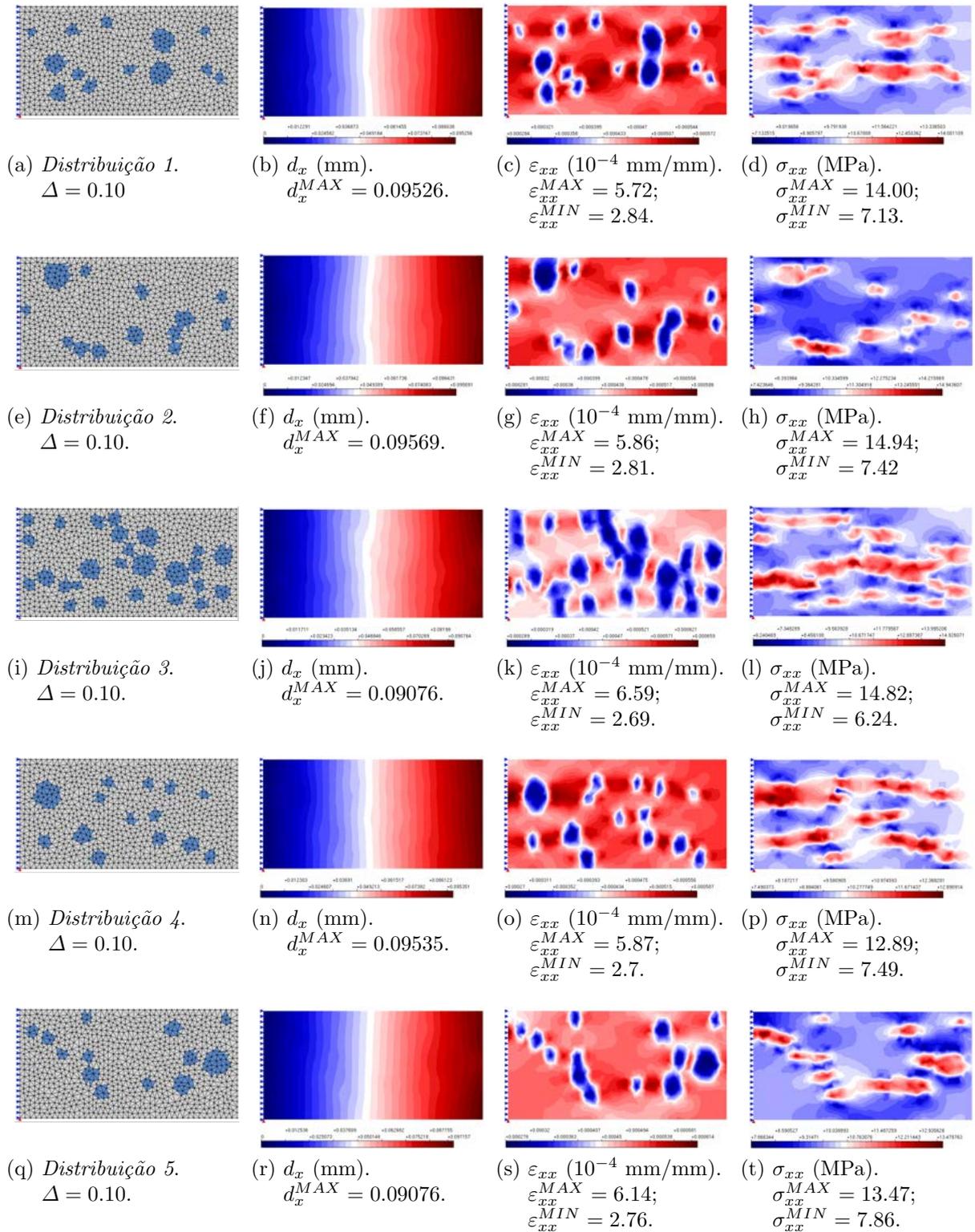


Figura 5.16: AL-HT-1E – Tração direta: componentes de deslocamento, deformação e tensão no plano e na direção  $x$  para  $\Delta = 0.10$  (caso 2). Colunas 1 a 4: *distribuição*,  $d_x$ ,  $\varepsilon_{xx}$  e  $\sigma_{xx}$ ; linhas: realizações 1 a 5.

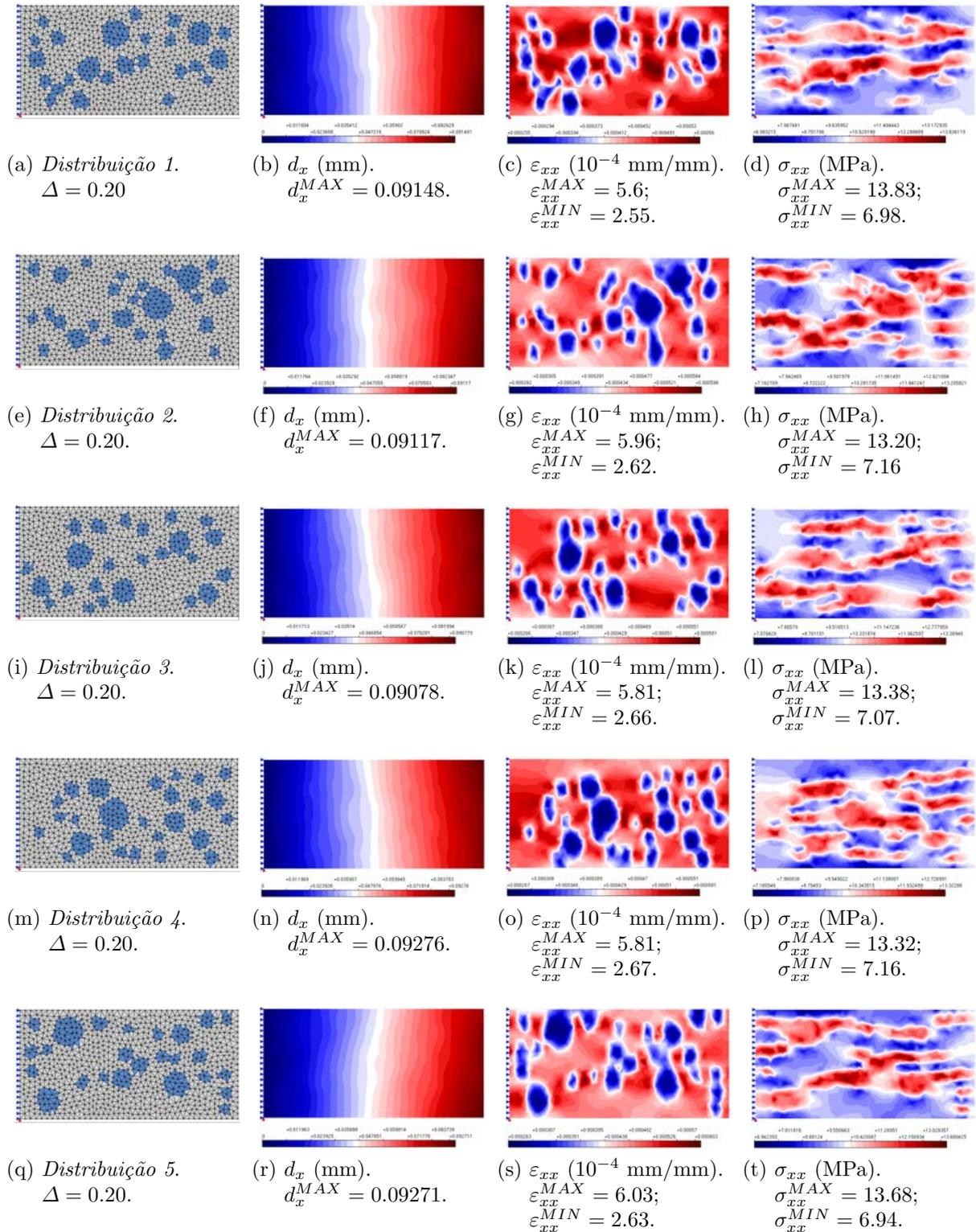


Figura 5.17: AL-HT-1E – Tração direta: componentes de deslocamento, deformação e tensão no plano e na direção  $x$  para  $\Delta = 0.20$  (caso 2). Colunas 1 a 4: *distribuição*,  $d_x$ ,  $\varepsilon_{xx}$  e  $\sigma_{xx}$ ; linhas: realizações 1 a 5.

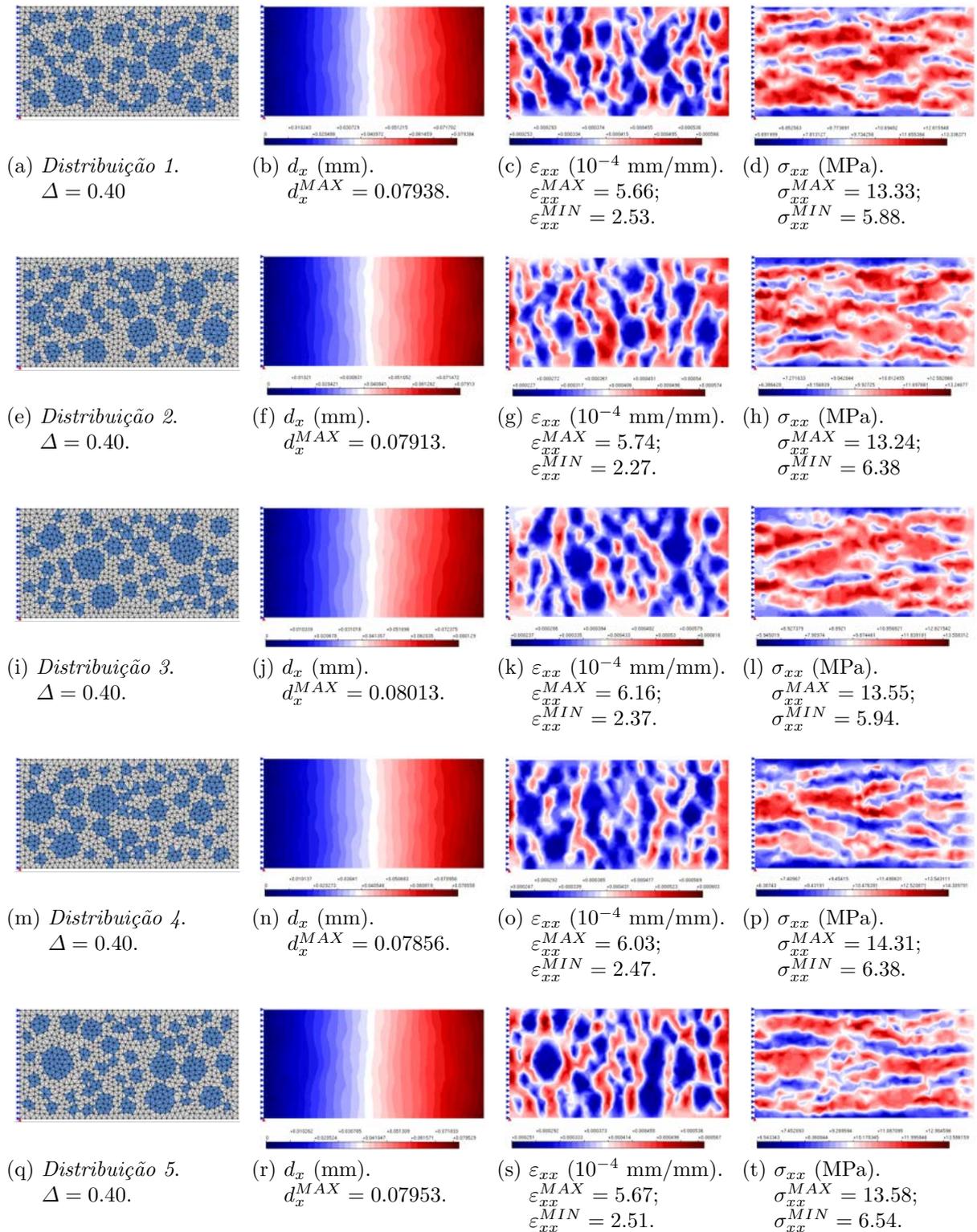


Figura 5.18: AL-HT-1E – Tração direta: componentes de deslocamento, deformação e tensão no plano e na direção  $x$  para  $\Delta = 0.40$  (caso 2). Colunas 1 a 4: *distribuição*,  $d_x$ ,  $\varepsilon_{xx}$  e  $\sigma_{xx}$ ; linhas: realizações 1 a 5.

deformação normal em cada uma das variantes da estrutura ensaiada. Na composição, isolaram-se as zonas de concentração de deformações, sobrepondo-as à mesoestrutura do domínio, para inspeção mais clara. Nota-se a propensão de acúmulo de deformações normais entre as inclusões, na região dos apoios e na faixa de aplicação do carregamento. Foram construídas ainda linhas alusivas a seções críticas admissíveis. Através de dois pontos de máxima deformação, traçaram-se retas com interseção obrigatória com as faces  $y = 0$  e  $y = h$ , e os resultados são representados com linha tracejada na ilustração indicada. Dentro dos limites experimentais considerados, tanto posição quanto inclinação da seção foram dispersos e sem padrão evidente, à exceção do grupo  $\Delta = 0.40$  que refletiu maiores deformações alinhadas (sob o critério empregado) nas adjacências do apoio.

Embora o bom julgamento prévio predisponha-nos à construção lógica de parte dos resultados apresentados, sem maior rigor experimental ou testes numéricos, a mera especulação (mesmo que embasada numa intuição com lastro) ainda careceria de verificação, de tal sorte que o ensaio apresentado não somente reforça resultados empíricos reais, mas aponta para potencialidades do recurso numérico-computacional na previsão de comportamentos estruturais de sólidos e de sua relação com a constituição do meio. Igualmente, compõe incremento relevante na construção da técnica multiescala estudada, servindo de referência para certas decisões.

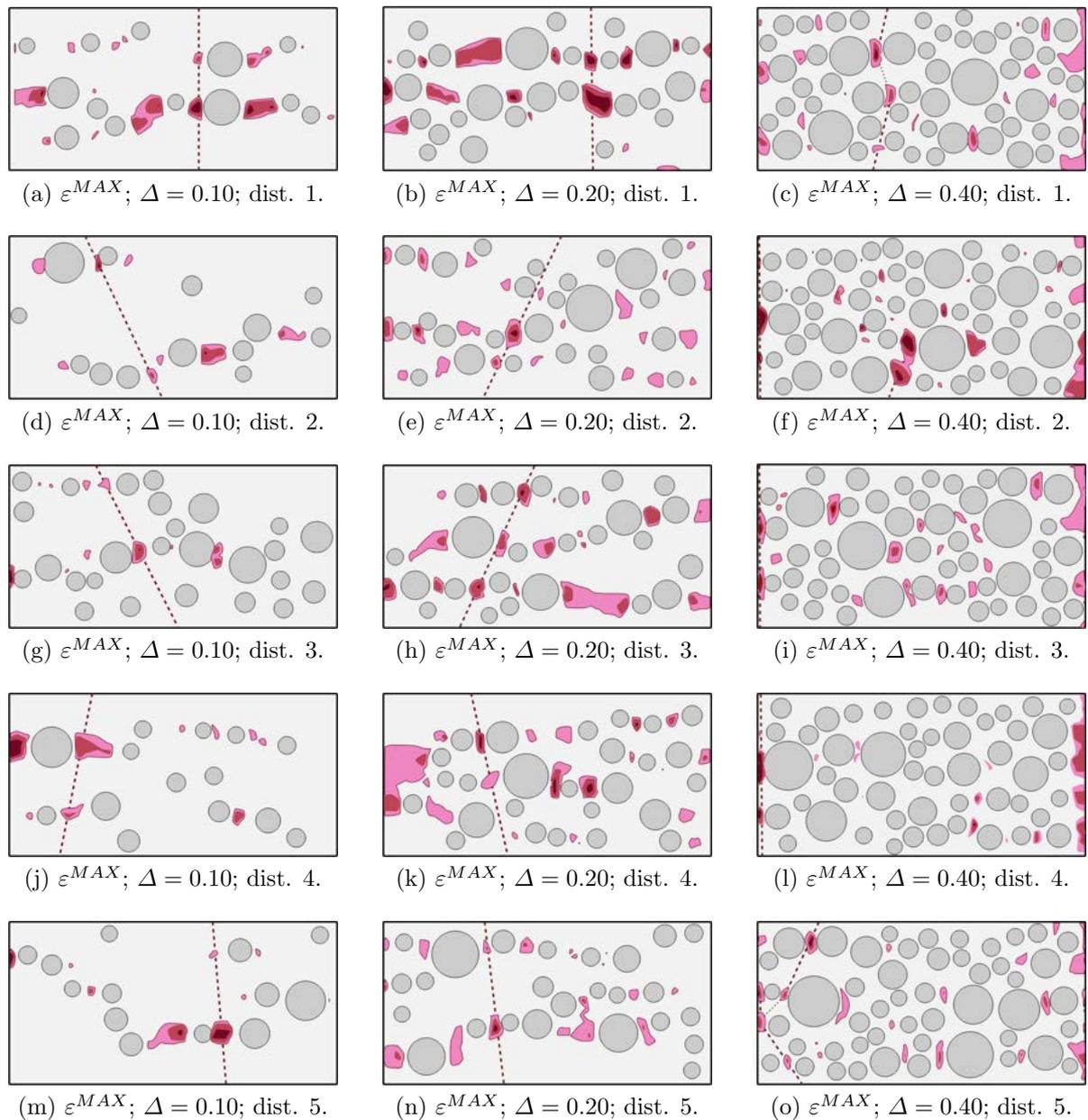


Figura 5.19: AL-HT-1E – Tração direta: destaque das zonas de deformação normal máxima e indicação de uma potencial seção crítica (caso 2). Colunas 1 a 3:  $\Delta$ ; linhas: realizações 1 a 5.  zonas de concentração de deformações máximas; --- seção crítica.

### 5.3.2 Experimentos AL-HM-2E/AL-HT-2E: Problema da Inclusão

Nesse estágio, verifica-se e valida-se a capacidade do complexo do MEFG-GL desenvolvido em se alinhar ao *framework* criado para incorporação de heterogeneidade material, se a estratégia GL de enriquecimento consegue incorporar no modelo numérico uma descrição material local mais detalhada, bem como a qualidade o desempenho da implementação. Assim, escolheu-se como variante instrumental para verificação e validação do comportamento estudado o dito “problema da inclusão”. Neste problema, um cilindro de um determinado material (inclusão) está incrustado em um domínio semi-infinito de outro material (matriz) e a distribuição de tensões segue funções complexas, com variações consideráveis em determinadas direções, ocorrendo também fenômenos de concentração de tensões, a depender das constantes materiais da partícula (Mal e Singh, 1991).

A configuração experimental do presente teste é apresentada no *set-up* 5.3. Nela observam-se os parâmetros de entrada (5.3a), a geometria e as condições de contorno do modelo (5.3b), a malha da solução de referência (5.3c) e as malhas do problema global (5.3d) e do problema local associado (5.3e) utilizadas na estratégia MEFG-GL. Duas naturezas de inclusão foram consideradas, uma mais rígida que a matriz (*hard*) e outra menos rígida (*soft*). O mecanismo de comunicação ascendente levou em consideração as propriedades materiais.

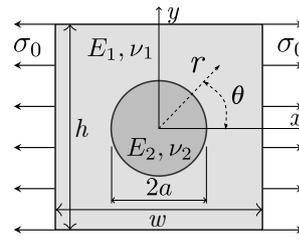
Notoriamente, o *template* de malha global já é consideravelmente refinado para descrição do comportamento estrutural modelado, ainda que o grau de polimento na descrição da inclusão seja débil. Ainda assim, escolheu-se o referido padrão para que toda a região da heterogeneidade fosse integralmente circunscrita por nós enriquecidos, e por praticidade, uma malha regular foi imposta. Adicionalmente, seguindo a lógica dos testes propostos, há a apresentação de resultados de variação homogênea do problema mecânico (tração) para reflexões sobre o MEFG-GL desenvolvido aqui.

A análise em questão possuiu alguns exames específicos. Para apurar o comportamento do modelo numérico, elegeram-se algumas variáveis e procurou-se ensaiar cada uma delas do modo mais hermético possível. Tipicamente, os parâmetros escolhidos foram:

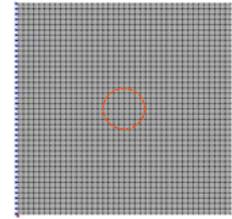
- Número de nós globais enriquecidos;
- Tamanho do escala local;

Parâmetro	Valor
$E_1$	20000 MPa
$E_2$	30000 e 10000 MPa
$\nu_1$	0.2
$\nu_2$	0.3 e 0.1
$a$	10 mm
$\sigma_0$	10 MPa
$h \times w$	$10a \times 10a$
<i>espess. (t)</i>	1
<i>natureza</i>	EPT

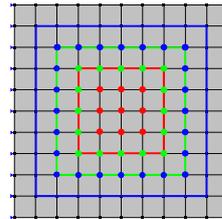
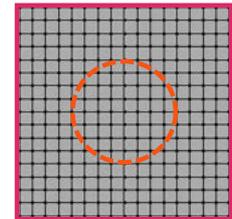
(a) Parâmetros (dimensões arbitradas).



(b) Geometria.



(c) Malha de referência.

(d) *Template* global.(e) *Template* local.

Set-up 5.3: Configuração experimental – AL-HM/HT-2E – Problema da Inclusão (Mal e Singh, 1991). Arranjo nuclear do experimento: parâmetros básicos , geometria (5.3b), malha de referência (5.3c) e *templates* global (5.3d) e local (5.3e, GI÷4). Inclusão  $\bigcirc$ ; problemas Locais  $\left[ \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix} \right]$ ; variedades de nós globais enriquecidos L1  $[\odot]$ , L2  $[\odot, \odot]$ , L3  $[\odot, \odot, \odot]$ .

- Refinamento da escala local.

Ao serem trabalhadas, as variáveis anteriores combinaram-se em verificações e validações particulares, que possuíam como nexos a confrontação dos resultados obtidos via MEFG-GL com soluções de referência, uma analítica (exata, por definição) e outra numérica, intencionalmente mais refinada, para derivação de um contraste maior entre os acabamentos dos resultados numéricos (malhas consideravelmente mais refinadas culminam em mapas de contorno mais suaves, polidos), e, assim, reforço da precisão do MEFG-GL (mesmo menos refinado globalmente, alcançou resultados equivalentes).

Cinco tipos de teste foram feitos, qual sejam:

- Exame 1: comparação da solução do MEFG-GL com uma solução analítica (exata, por definição).

Para a avaliação dos resultados frente à resposta exata, elegeram-se as componentes radiais do tensor de tensões,  $\sigma_{rr}$ , ao longo das coordenadas  $(r, \theta = 0)$ , ou seja, pela extensão do eixo ano  $x$ . Em métodos numéricos, como o MEF, o MEFG ou MEFG-GL, o cômputo de variáveis duais é, por regra, menos preciso que a determinação de variáveis de estado. Dessa forma, considera-se a verificação de tensões mais restritiva

que a de deslocamentos e, por isso, optou-se por comparar somente a grandeza derivada. As equações 5.1 e 5.2 apresentam a formulação das referidas tensões  $\sigma_{rr}^{(1)}$  e  $\sigma_{rr}^{(2)}$  ao longo do domínio, dentro da matriz e da inclusão, respectivamente.

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \frac{\sigma_0}{2} \left\{ 1 + \frac{1 + 2\alpha_1\beta - 2\alpha_2 - \beta}{2\alpha_2 + \beta - 1} \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left[ 1 - \frac{4(1-\beta)}{1-\beta + 4\alpha_1\beta} \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{3(1-\beta)}{1-\beta + 4\alpha_1\beta} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \right] \cos 2\theta \right\} \quad (5.1)$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} = \sigma_0 \alpha_1 \beta \left( \frac{1}{2\alpha_2 + \beta - 1} + \frac{2 \cos 2\theta}{1 - \beta + 4\alpha_1\beta} \right) \quad (5.2)$$

em que  $\beta = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ ,  $\mu_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}$ , e  $\alpha_i = (1 - \nu_i)$ , se EPD, ou  $\alpha_i = (1 + \nu_i)^{-1}$ , se EPT, com  $i = 1, 2$  (Mal e Singh, 1991).

- Exame 2: impacto do refinamento do enriquecimento na convergência do modelo.

Para um modelo com inclusão rígida, quatro níveis de refinamento progressivo do domínio local (e, portanto, da qualidade do enriquecimento, em tese) foram empregados para verificação do erro percentual das tensões (ao longo de  $x$ ) do MEFGL frente à resposta analítica. Emprego de inclusão rígida.

- Exame 3: avaliação do efeito do tamanho do domínio local e da influência do número de nós enriquecidos na descrição da heterogeneidade.

Com os *templates* de malha da configuração experimental básica, variou-se o tamanho da região local (fig. 5.3d), mantendo-se o número original de nós enriquecidos e alterando-o proporcionalmente às dimensões locais. Similarmente ao exame anterior, foram construídas curvas de erro percentual de tensões ao longo das abscissas do domínio. Uso exclusivo de inclusão rígida.

- Exame 4: comparação da solução do MEFGL com um solução numérica do MEF/-MEFG puro mais refinada.

A confrontação dos resultados com uma solução numérica de referência se deu nos moldes da avaliação do exemplo anterior 5.3.1, i.e., inspeção visual das isofoixas das variáveis de campo e acareação de máximos.

- Exame 5: explorando um pouco mais as potencialidades da técnica.

O problema local foi levado a situações limites. Utilizou-se a técnica para modelar indiretamente uma chapa perfurada (com furo único central, por objetividade), bem como foram trabalhadas duas mesoestruturas com múltiplas micro-inclusões localizadas de tamanhos  $\zeta(\phi \in [12.5, 4.75], n = 0.5)$ ,  $\chi = 0.2$ .

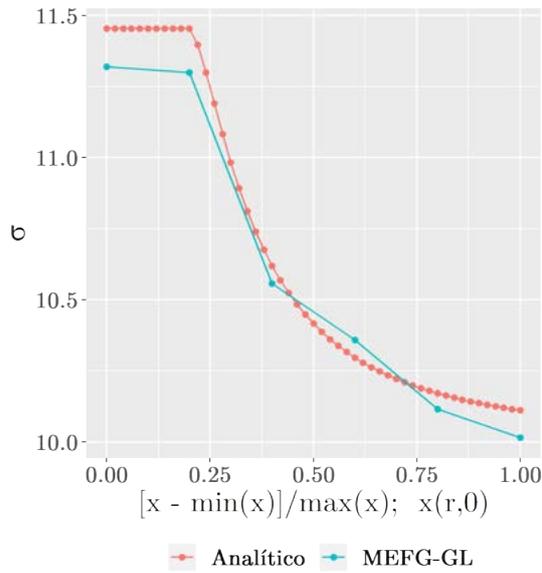
### 5.3.2.1 Exame 1: Solução do MEFG-GL $\times$ Solução Analítica

A seguir, apresentam-se em paralelo os resultados analítico e do MEFG-GL. Duas naturezas de inclusão foram ensaiadas, uma mais rígida e outra menos rígida que a matriz. As curvas das figuras 5.20a e 5.20c indicam os valores da componente radial de tensões para  $\theta = 0$  e, por conseguinte,  $r \equiv x$ . A resposta gráfica da solução numérica foi extraída a partir dos valores de  $\sigma_{xx}$  extrapolados para os seis pontos nodais da malha global conexa ao eixo  $x$ . As abscissas dos gráficos 5.20a e 5.20c aludem aos valores de distância normalizada do centro da partícula ao limite do domínio modelado, ou seja, de 0.0, no centro da partícula, a 1.0, no contorno da região. Os gráficos 5.20a e 5.20b ilustram os resultados do cenário em que a partícula possui um módulo de elasticidade superior ao de seu entorno; por sua vez, os gráficos 5.20c e 5.20d associam-se ao contexto de uma inclusão menos rígida que a vizinhança.

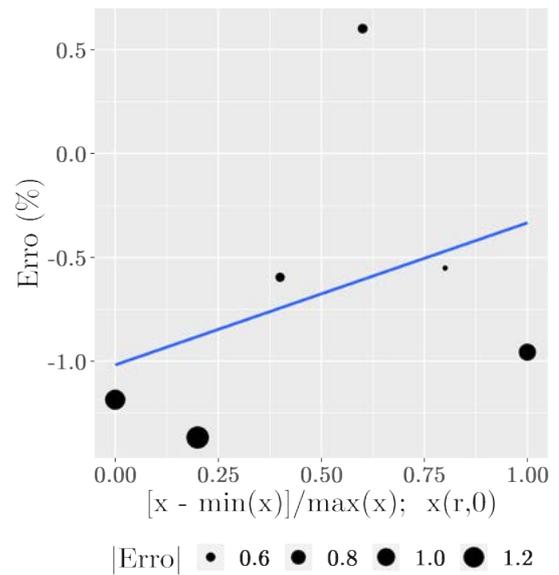
As curvas indicam que a estratégia numérica apresenta precisão consideravelmente satisfatória dentro dos limites experimentais estabelecidos. As diferenças percentuais entre as soluções do MEFG-GL e a resposta analítica, distribuídas longitudinalmente no domínio ( $x = 0$  a  $x = 1.0$ ), são registradas nas figuras 5.20b e 5.20d, e apontam para uma tendência de redução à medida que afastamo-nos da inclusão. Naturalmente, quanto mais distante da partícula uma região se encontra, menor é a perturbação nas propriedades materiais e mais regulares são as distribuições das variáveis de campo. Ainda, para a estratégia numérica utilizada, regiões próximas à inclusão são influenciadas pelo enriquecimento GL, o que contribui para variações nos valores das grandezas medidas nos arredores do centro do escala global, como será visto adiante.

### 5.3.2.2 Exame 2: Influência do Refinamento Local

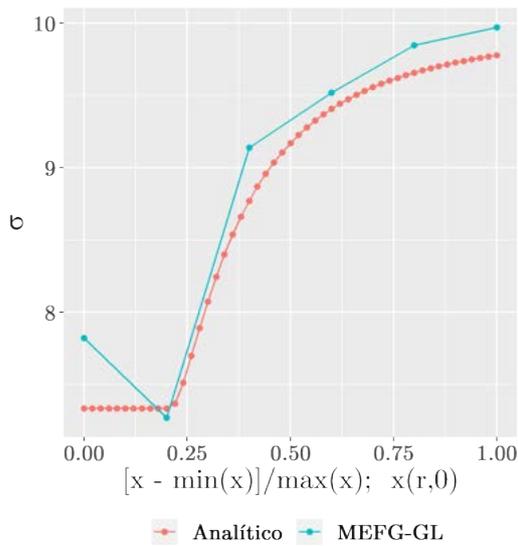
De modo a se averiguar a influência do refinamento local na resposta enriquecida e na convergência de um erro percentual disposto ao longo das abscissas, realizou-se variação incremental na malha do domínio local de duas a oito divisões consecutivas de cada elemento global. Considerando-se somente a inclusão rígida, os resultados obtidos são



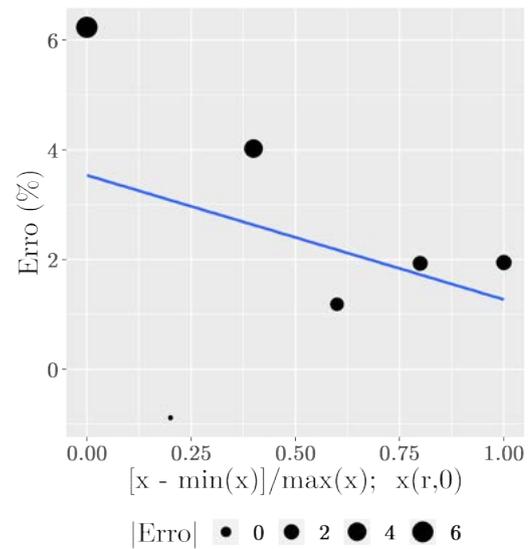
(a)  $\sigma_{rr} \times [x - \min(x)] / \max(x); x := x(r, \theta = 0)$  (MPa). *Hard*.



(b)  $Erro \times [x - \min(x)] / \max(x); x := x(r, \theta = 0)$  (%). *Hard*.



(c)  $\sigma_{rr} \times [x - \min(x)] / \max(x); x := x(r, \theta = 0)$  (MPa). *Soft*.

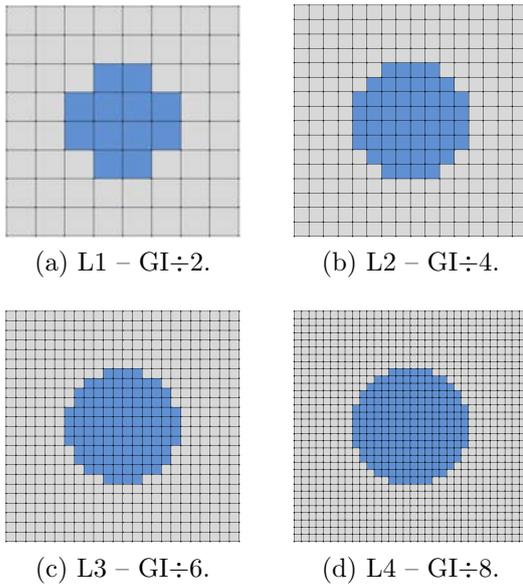


(d)  $Erro \times [x - \min(x)] / \max(x); x := x(r, \theta = 0)$  (%). *Soft*.

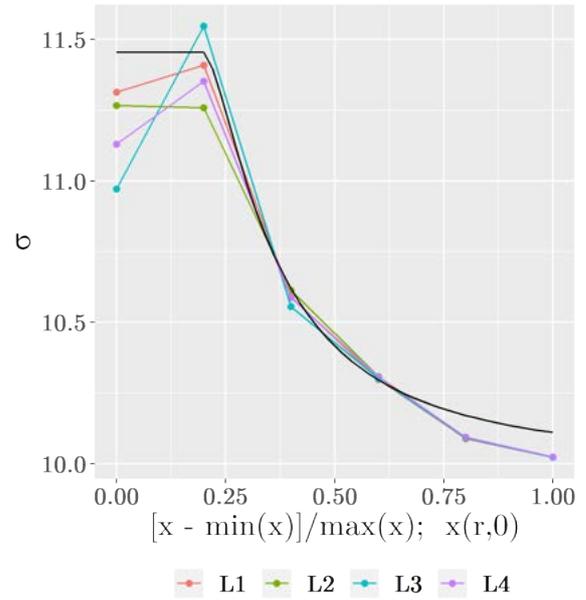
Figura 5.20: AL-HM/HT-2E – Problema da Inclusão: solução analítica vs. solução do MEFG-GL (exame 1). Tensões (*hard inclusion*, 5.20a, e *soft inclusion*, 5.20c) e erro percentual no domínio  $Erro = 100 - \sigma_{rr}^{ANALITICO} / \sigma_{rr}^{MEFG-GL}$  (*hard inclusion*, 5.20b, e *soft inclusion*, 5.20d).

ilustrados na figura 5.21.

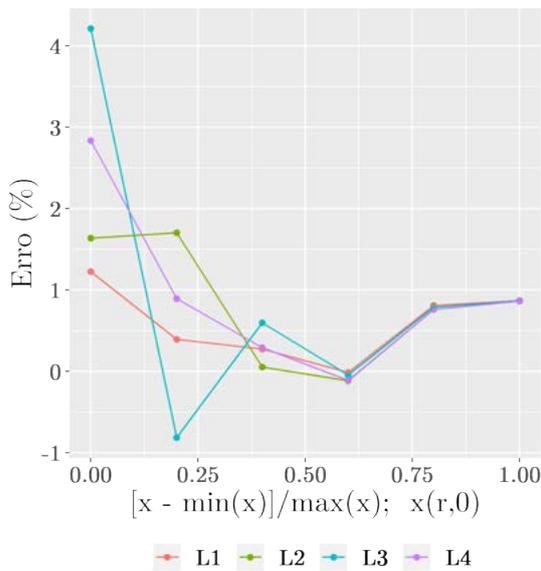
Na resposta gráfica 5.21a, nota-se um ligeiro movimento de abatimento de máximos dentro da inclusão à medida que se opera o refinamento da escala local. Em certa medida, o aumento de graus de liberdade na escala inferior parece flexibilizar o domínio local, e, conseqüentemente, a escala estrutural, característica essa de apreensão contra-intuitiva



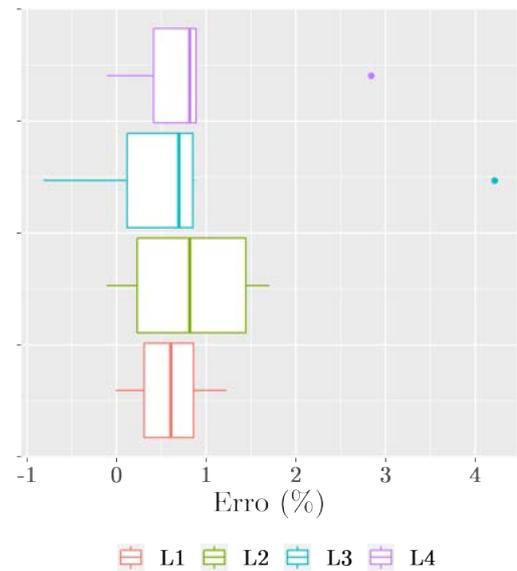
Domínios locais.



(e)  $\sigma_{rr} \times [x - \min(x)] / \max(x); x := x(r, 0)$  (MPa).



(f)  $Erro(L_i) \times [x - \min(x)] / \max(x); x := x(r, 0)$  (%).



(g) Box-plot  $Erro(L_i)$ .

Figura 5.21: AL-HM/HT-2E – Problema da Inclusão: impacto do refinamento local (exame 2). Malha local L1 – GI ÷ 2 (5.21a), malha local L2 – GI ÷ 4 (5.21b), malha local L3 – GI ÷ 6 (5.21c), malha local L4 – GI ÷ 8 (5.21d); perfil de tensões (5.21e); erro percentual de cada variante ao longo da abscissa (5.21f); box-plot do erro de percentual para cada variante local (5.21g).

e, teoricamente, não óbvia. Isso pode sugerir a existência de um simples “ruído numérico” acumulado nas operações, ao invés de um comportamento característico do modelo.

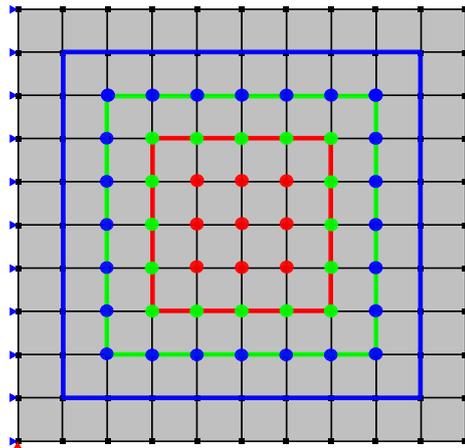
Por sua vez, a evolução do erro percentual (fig. 5.21f) reforça o comportamento de descenso, salientando, contudo, que apesar de graficamente possuir um traçado alcantilado em  $x \rightarrow 0$ , o módulo do erro é consideravelmente baixo. No âmbito dos testes executados, embora existam diferenças numéricas nos valores de  $\sigma$  dentro da inclusão, há uma certa aleatoriedade nos desvios (vide variante L3) e considera-se, portanto, que não há indicação tácita de influência considerável do refinamento de malha local na solução global. Em outras palavras, ou o grau de complexidade da mecânica modelada já é captável com discretizações reduzidas ou o *template* de modelo global já é minimamente suficiente para a tarefa. Apesar da ausência de tendências mais ostensivas no comportamento do erro percentual distribuído nas abscissas, pode-se indicar uma ligeira afluência de sua mediana ao valor de 1.0% (fig. 5.21g). A presença de *outliers*, sobretudo para a classe L3, não parece comprometer a avaliação geral.

### 5.3.2.3 Exame 3: Influência do Número de Nós Globais Enriquecidos e do Tamanho da Escala Local

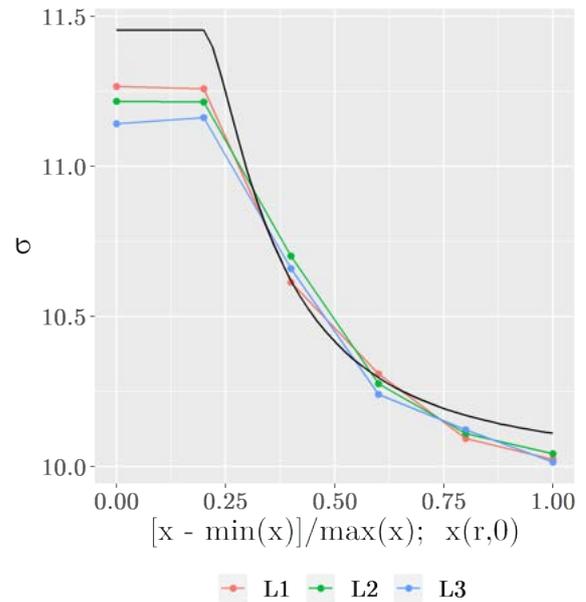
De modo análogo, a variação do número de nós globais enriquecidos (figura 5.22a) não parece impactar de maneira brusca a solução global, quer dizer, o comportamento geral das variáveis de campo permanece inalterado, a relação entre solução numérica e analítica mantém-se coesa e o perfil do erro distribuído segue em patamares baixos. Há contudo, ainda que diminuta, uma redução no valor das tensões desenvolvidas no entorno da inclusão. Tal como no exame do refinamento local, o comportamento capturado aqui aponta para uma flexibilização do modelo global. Entretanto, contrariamente ao cenário anterior, o número de nós enriquecidos afetar a resposta em tensão do domínio global parece ser mais inteligível. O incremento de enriquecimentos opera um conseqüente aumento do número de graus de liberdade globais, que, por sua vez, materializa-se num problema macro-estrutural com mais deslocabilidades e ligeiramente menos rígido, portanto.

Os efeitos da variação do tamanho da escala local, com manutenção do número de nós globais enriquecidos, são apresentados na figura 5.23. Na composição 5.23a há a indicação dos nós enriquecidos, seguida das dimensões de cada domínios local empregado em 5.23b, 5.23c e 5.23d.

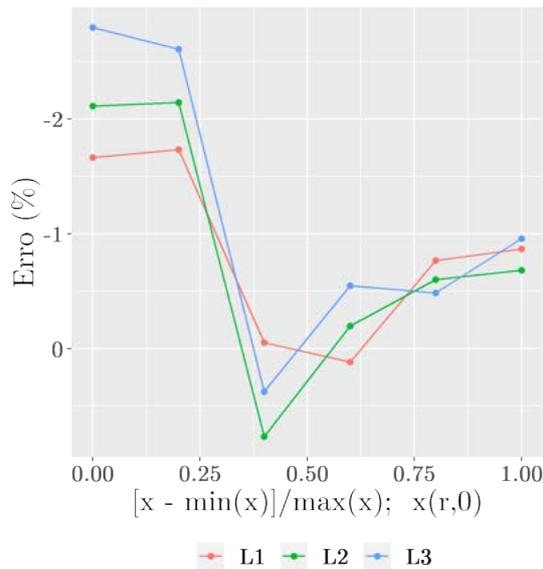
O gráfico 5.23e assinala o perfil de tensões radiais  $\sigma_{rr}(x, \theta = 0)$  na estrutura. Nota-se que na situação com a maior escala local (L3), notoriamente quase a totalidade do domínio modelado, a resposta estrutural se distancia mais da solução analítica, não havendo, em



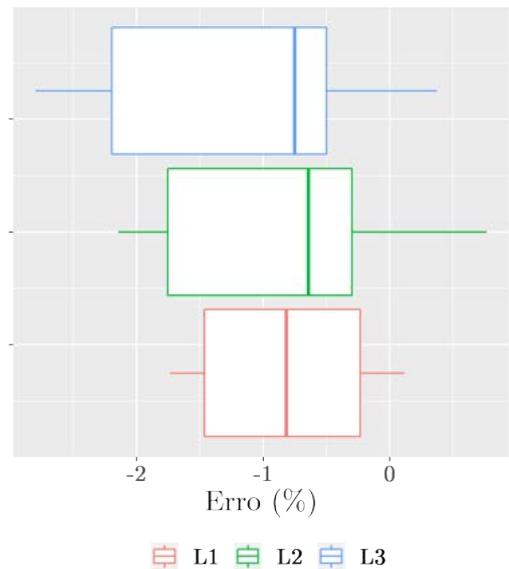
(a) Nós globais enriquecidos e domínios locais. L1 – 9 nós; L2 – 25 nós; L3 – 49 nós.



(b)  $\sigma_{rr} \times [x - \min(x)] / \max(x); x := x(r, 0)$  (MPa).



(c)  $Erro(L_i) \times [x - \min(x)] / \max(x); x := x(r, 0)$  (%).



(d) Box-plot  $Erro(L_i)$ .

Figura 5.22: AL-HM/HT-2E – Problema da Inclusão: impacto do número de nós enriquecidos (exame 3). Detalhe dos nós globais enriquecidos (5.22a, L1 [⊙], L2 [⊙, ⊙], L3 [⊙, ⊙, ⊙]); erro percentual de cada variante ao longo da abscissa (5.22c); box-plot do erro de percentual para cada variante local (5.22d).

contraposição, variação significativa entre as soluções L1 e L2, que possuem medianas do erro distribuído equivalentes (5.23g). Apesar disso, há uma aparente tendência de

aumento do erro com a expansão da escala local, na medida que a assimetria (à esquerda) da distribuição do erro tende a se ampliar com o problema local (5.23g), ou seja, há maior afastamento do primeiro/terceiro quartil e acréscimo no módulo do valor esperado para o erro. De qualquer maneira, ainda pode-se abstrair que as curvas 5.23f indiquem uma certa aleatoriedade na diferença entre a solução numérica e a exata, possuindo L1 e L2, desvios mais proeminentes nos extremos (partícula e contorno), e L3, em zonas intermediárias do domínio global. Deduz-se que a discrepância captada se deve fundamentalmente às condições de contorno impostas na escala local e sugere-se uma explicação: quanto menor o domínio local, mais homogêneas são as condições de contorno na fronteira da escala interna, isto é, os limites leste e o oeste, bem como as bordas setentrional e meridional, estão, aos pares, submetidos a campos de deslocamentos com valores mais próximos, com módulos parecidos. Assim, há quase que uma periodicidade no estado de deformação local, de modo que a estabilidade numérica é preservada e os enriquecimentos extraídos possuem ordem de grandeza contígua àquela da variável de estado calculada na região global enriquecida, não havendo impacto significativo da qualidade das CDC. No exemplo em questão, à medida que o problema local expande, a razão entre os deslocamentos em sua fronteira se avulta, e maior se torna a deslocabilidade do domínio. Como a imposição das CDC se dá indiretamente, via Método da Penalidade, variações consideráveis nos módulos dos deslocamentos prescritos podem conduzir a certa instabilidade numérica. Além disso, há que se considerar aspectos associadas à representação numérica de ponto flutuante como arredondamentos, variações em casa decimais etc.

Com o intuito de aprofundar ligeiramente o exame do perfil de erros obtido via MEFG-GL no problema mecânico estudado, consolidando as deduções produzidas no presente âmbito, um teste remanescente será destacado. Para avaliar isoladamente as características do enriquecimento apartadas de outras variáveis, foram realizadas observações do efeito do refinamento local e do incremento do número de nós globais enriquecidos em instâncias homogêneas.

Apresenta-se na figura 5.24 o comportamento da técnica numérica quando ambas as escalas são consideradas homogêneas. Como se pode notar, para o experimento em questão, há uma intrínseca perturbação na variável de campo medida (tensões neste contexto) quando do enriquecimento global-local; irrisória (fig. 5.24b e 5.24d), mas presente. Infere-se que, dada a natureza do problema mecânico simulado, com uma considerável pureza do

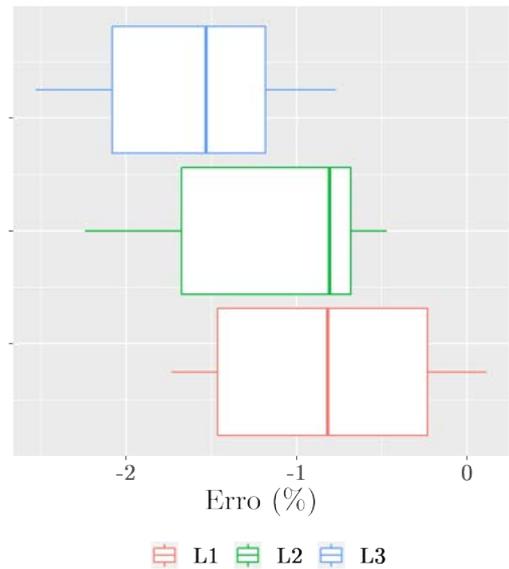
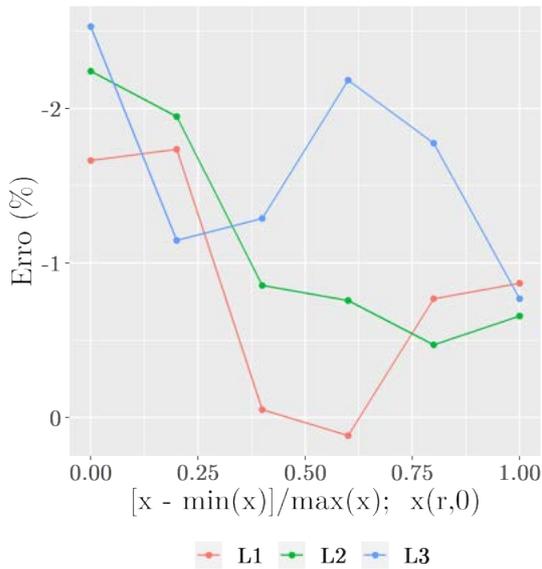
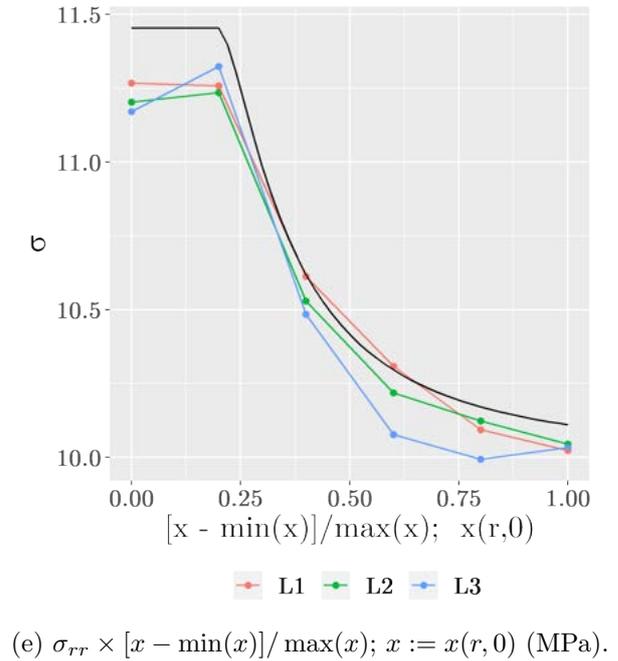
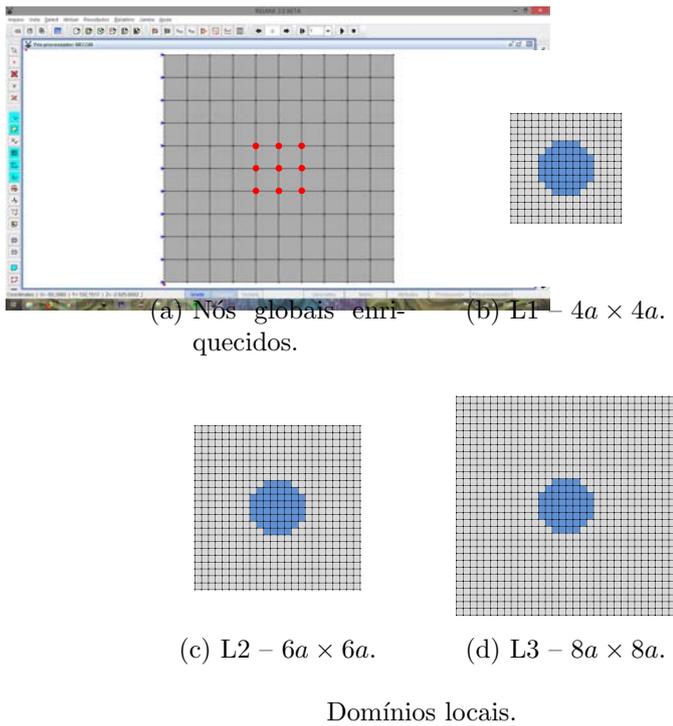


Figura 5.23: AL-HM/HT-2E – Problema da Inclusão: impacto do tamanho do problema local (exame 3). Nós enriquecidos (5.23a); modelos locais L1 –  $4a \times 4a$  (5.23b), L2 –  $6a \times 6a$  (5.23c), L3 –  $8a \times 8a$  (5.23d), perfil de tensões (5.23e); erro percentual de cada variante ao longo da abscissa (5.23f); box-plot do erro de percentual para cada variante local (5.23g).

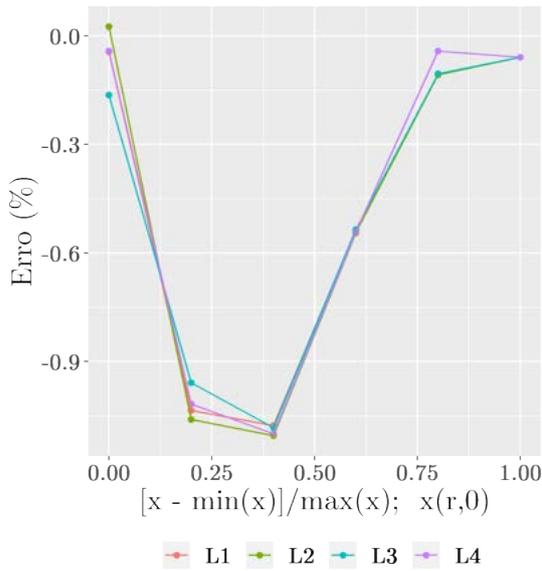
estado de deformação (já reproduzível com modelos mais elementares), a introdução de grandezas extras provenientes de um espaço de aproximação exógeno faz com que certa “turbidez” seja inserida no problema estrutural, resultando em pequenos desvios localizados na resposta final, principalmente no entorno da zona enriquecida. Logicamente, essa característica é manifestada na variante heterogênea do teste e deve ser levada em consideração quando da apreciação dos resultados.

Portanto, salienta-se que pequenas variações médias no campo de tensões da ordem de 0.5% – 1.0% aparentam ser inerentes às operações numérico-computacionais de enriquecimento no exemplo em questão, e, assim, o modelo material proposto parece não introduzir desvios significativos extras no modelo numérico. Considera-se que os resultados alcançados validam a implementação e o uso da estratégia numérica para a aplicação proposta.

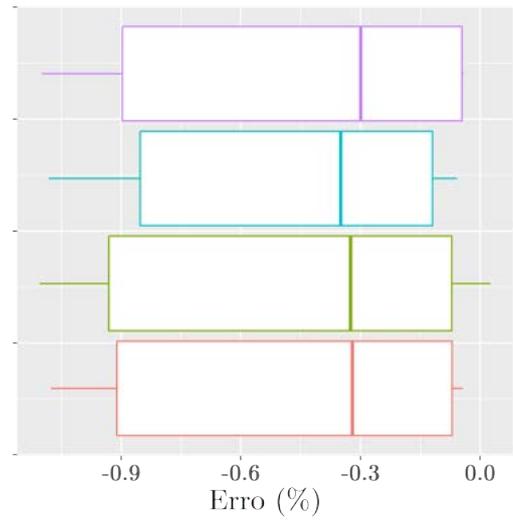
#### 5.3.2.4 Exame 4: Solução do MEFGL vs. Solução Numérica de Referência Refinada

Nas figuras 5.25 e 5.26 há o registro das distribuições das componentes de deslocamentos, deformações e tensões na direção  $x$ . O primeiro grupo refere-se à experimentação com heterogeneidade mais rígida que a matriz, e o segundo grupo é relativo à inclusão menos rígida. Anexas à solução numérica de referência, têm-se as respostas dos problemas globais sem enriquecimento (GI) e enriquecidos (GE). A estratégia consegue embutir em nível estrutural o comportamento material localizado, havendo perturbação coerente no campo de deslocamentos e nas grandezas derivadas, e a precisão obtida com malha mais grosseira foi equivalente àquela da solução refinada de referência.

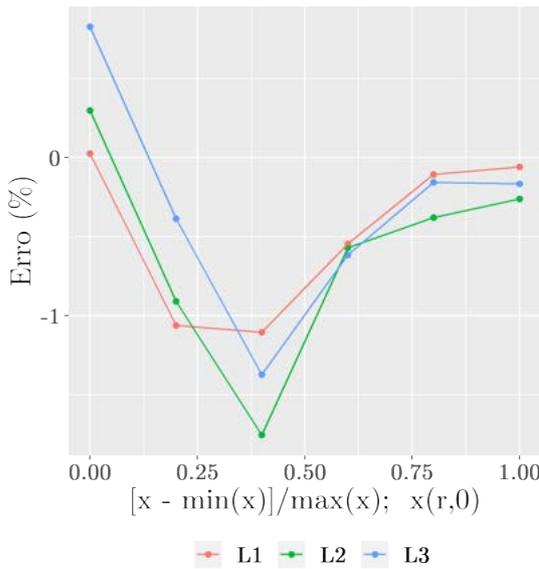
No caso da inclusão mais rígida que o entorno, os valores máximos da componente horizontal do campo de deslocamentos da solução numérica de referência e do MEFGL foram equivalentes até a terceira casa decimal ( $d_x^{MAX} = 0.0497$ ). As deformações horizontais mínimas da referência e do MEFGL, iguais respectivamente a  $\varepsilon_{xx}^{MIN,REF} = 0.000365$  e  $\varepsilon_{xx}^{MIN,MEFGL} = 0.000369$ , divergiram em 1%, sendo ligeiramente maiores no MEFGL; ao passo que as deformações máximas ( $\varepsilon_{xx}^{MAX,REF} = 0.000559$  e  $\varepsilon_{xx}^{MAX,MEFGL} = 0.000527$ ) variaram em 6%, apresentando valores minimamente maiores na solução de referência. As componentes  $x$  máximas do tensor de tensões foram 1.5% superiores na solução refinada ( $\sigma_{xx}^{MAX,REF} = 11.489$  MPa e  $\sigma_{xx}^{MAX,MEFGL} = 11.320$  MPa) e as mínimas, cerca de 7% maiores na resposta do MEFGL ( $\sigma_{xx}^{MIN,REF} = 8.703$  MPa e



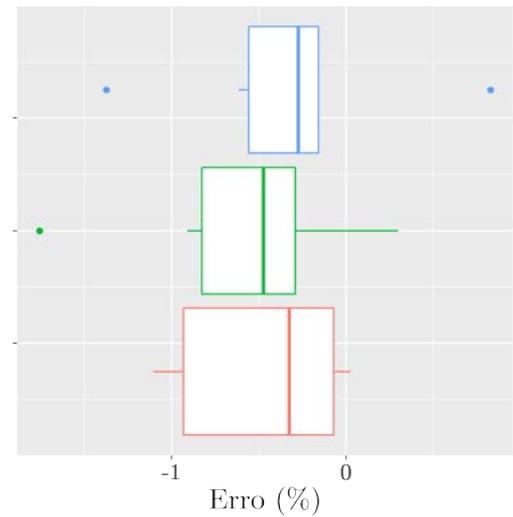
(a)  $Erro(L_i) \times [x - \min(x)]/\max(x); x := x(r, \theta = 0)$  %.  $L_i$  - Refin. Local ( $2 \times -8 \times$ ).



(b) Box-plot  $Erro(L_i)$ .



(c)  $Erro(L_i) \times [x - \min(x)]/\max(x); x := x(r, \theta = 0)$  %.  $L_i$  - Nós Enriquecidos (*set-up* 5.3).



(d) Box-plot  $Erro(L_i)$ .

Figura 5.24: AL-HM/HT-2E – Modelo homogêneo: verificação do impacto isolado do enriquecimento (exame 3). Variação do refinamento local (5.24a e 5.24a, L1 –  $GI \div 2$ , L2 –  $GI \div 4$ , L3 –  $GI \div 6$ , L4 –  $GI \div 8$ ); variação do número de nós enriquecidos (5.24c e 5.24d, L1 – 9 nós, L2 – 25 nós, L3 – 49 nós).

$$\sigma_{xx}^{MIN,MEFG-GL} = 9.306 \text{ MPa}.$$

Na situação em que a inclusão é menos rígida que a matriz, os máximos deslocamentos horizontais obtidos por ambas as estratégias permaneceram equivalentes, diferenciando-se

por um escasso milésimo ( $d_x^{MAX,REF} = 0.0518$  e  $d_x^{MAX,MEFG-GL} = 0.0497$ ). A deformação horizontal mínima do MEFG-GL ( $\varepsilon_{xx}^{MIN,MEFG-GL} = 0.000447$ ) foi 15% superior à cifra obtida pela referência ( $\varepsilon_{xx}^{MIN,REF} = 0.000387$ ), ao passo que os alongamentos máximos foram equivalentes até a segunda casa decimal ( $\varepsilon_{xx}^{MAX,MEFG-GL} = 0.000793$  e  $\varepsilon_{xx}^{MAX,MEFG-GL} = 0.000790$ ). Os valores mínimos das componentes longitudinais de tensão diminuíram 1.5% da solução de referência para o MEFG-GL e as cifras máximas, cerca de 9%.

Fundamentalmente, as variações obtidas residem na resolução da malha, consideravelmente menos refinada no caso do MEFG-GL, e no mecanismo numérico-computacional de enriquecimento que, conforme apontando em parágrafo anterior, aparenta inserir oscilações diminutas no valor localizado das variáveis de campo (no exemplo em questão, cujo comportamento mecânico é primário).

Em ambas as variantes de inclusão, a deformada alcançada é aderente à natureza morfo-estrutural do domínio e o acréscimo de graus de liberdade do método utilizado possibilitou uma descrição geométrico-cinemática de ordem superior a de um simples elemento quadrilateral Q4 no entorno da partícula (fig. 5.25j e 5.26j), característica essa mais evidente no caso da inclusão menos rígida (*soft*) que a matriz.

Interessante notar que o problema global inicial reproduz integralmente um modelo linear homogêneo, sem inclusão, (figuras 5.25d, 5.25e, 5.25f, 5.26d, 5.26e e 5.26f) cuja solução analítica é facilmente obtida e tem como resultados fundamentais (em que  $\sigma_0$  é o carregamento prescrito,  $E$ , o módulo de elasticidade, e  $w$ , a extensão longitudinal do domínio global simulado (*set-up* 5.3)):

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 = 10 \text{ MPa (constante)},$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{10}{20000} = 0.0005 \text{ (constante)},$$

$$d_x^{MAX} = \varepsilon_{xx} w = 0.0005 \cdot 100 = 0.05 \text{ mm}.$$

### 5.3.2.5 Exame 5: Explorando os Limites da Técnica Multiescala

Na tentativa de tensionar um pouco mais a estratégia numérica, apresentam-se algumas alternativas ao modelo previamente trabalhado. Inicialmente uma variedade extrema será

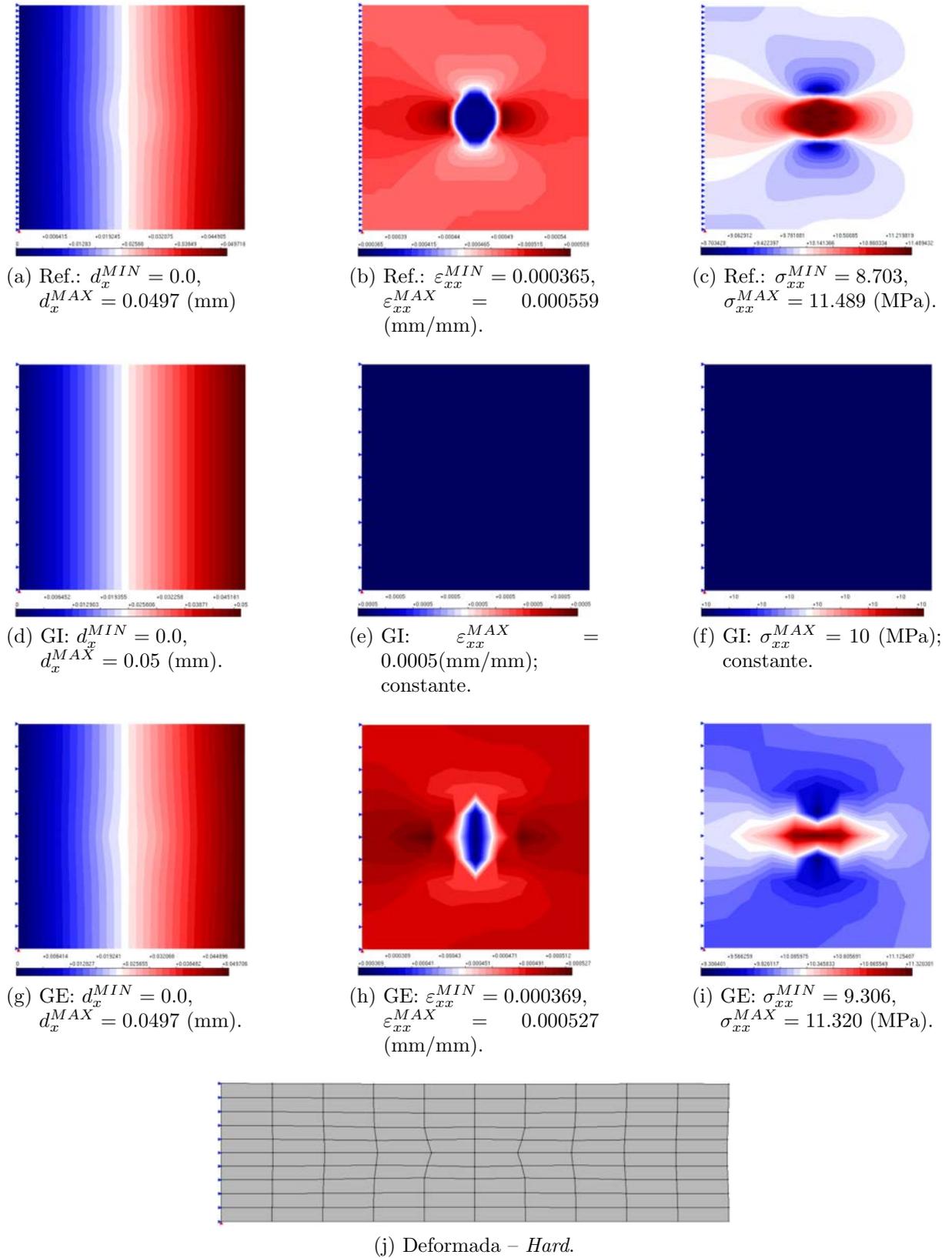


Figura 5.25: AL-HM/HT-2E – Problema da Inclusão – *hard inclusion* (exame 4): solução numérica de referência (5.25a, 5.25b, 5.25c); prob. global inicial não enriquecido (GI, 5.25d, 5.25e, 5.25f), prob. global enriquecido (GE, 5.25g, 5.25h, 5.25i); deformada (5.26j,  $3 \times 10^3 : 1$ ).

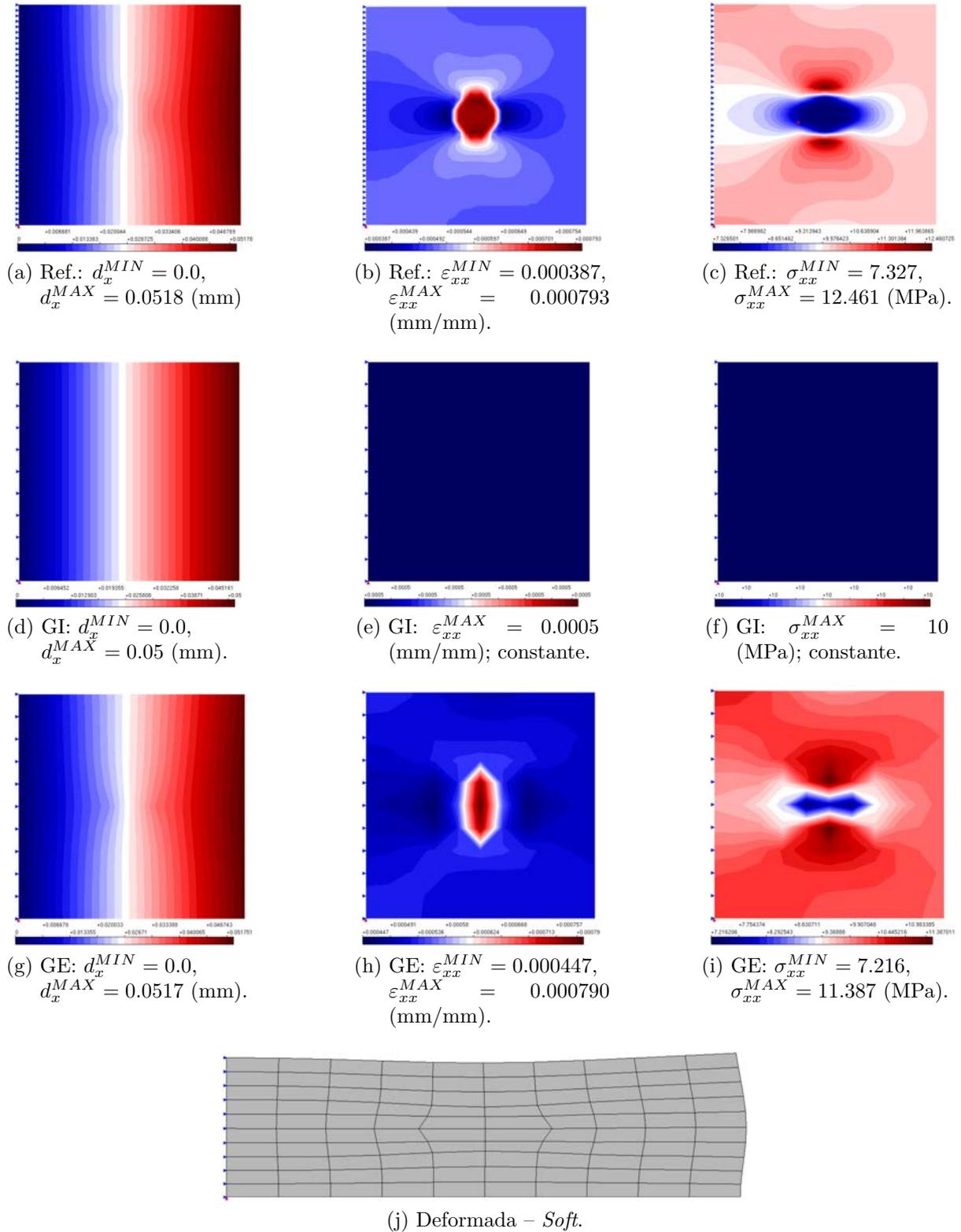


Figura 5.26: AL-HM/HT-2E – Problema da Inclusão – *soft inclusion* (exame 4): solução numérica de referência (5.26a, 5.26b, 5.26c); prob. global inicial não enriquecido (GI, 5.26d, 5.26e, 5.26f), prob. global enriquecido (GE, 5.26g, 5.26h, 5.26i); deformada (5.26j,  $3 \times 10^3 : 1$ ).

abordada, a modelagem indireta de uma chapa perfurada, com furo central, isto é, no local de uma inclusão rígida (ver fig. 5.3b), reproduziu-se na escala local uma zona circular de baixíssima rigidez ( $E \rightarrow 0$ ) e observou-se os efeitos dessa hipótese na escala global, em comparação com uma solução analítica. Utilizou-se um domínio local de  $2a \times 2a$  com malha  $GI \div 6$  (ver casos anteriores), enriquecendo-se nove nós globais na zona central

A figura 5.27 apresenta os resultados simplificados de deslocamentos, tensões e deformada do modelo de chapa perfurada. Além disso, anexam-se na figura 5.27 as tensões radiais para  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi/2$ . Como se pode notar, a técnica conseguiu representar de maneira consideravelmente satisfatória o comportamento mecânico de uma peça com as características dadas. Na região do furo, a estrição central foi capturada adequadamente, assim como as tensões tenderam a zero.

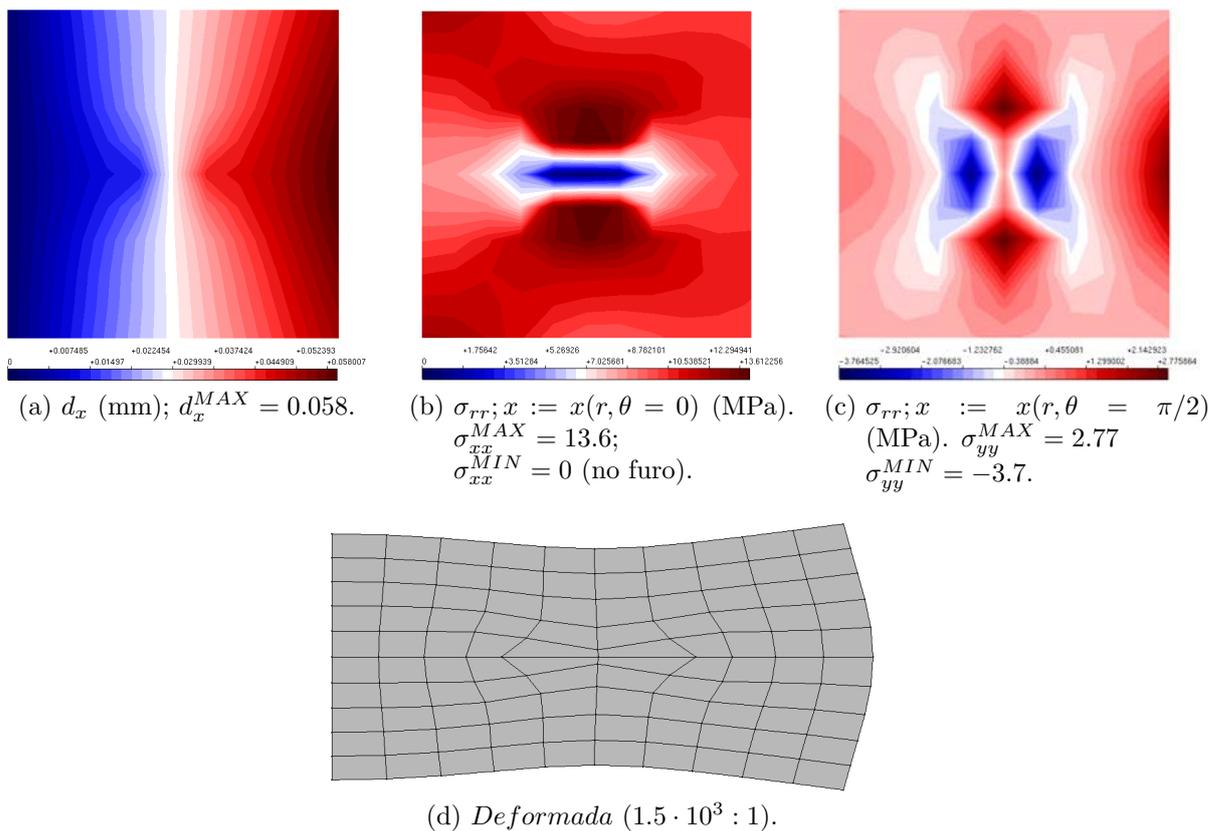


Figura 5.27: Limites da técnica multiescala: modelagem indireta de furo. Componentes cartesianas de deslocamento  $d_x$  (5.27a) e tensão  $\sigma$  (5.27b e 5.27c, equivalentes a  $\sigma_{rr}$  para pares  $(r, \theta)$  específicos); deformada (5.27d).

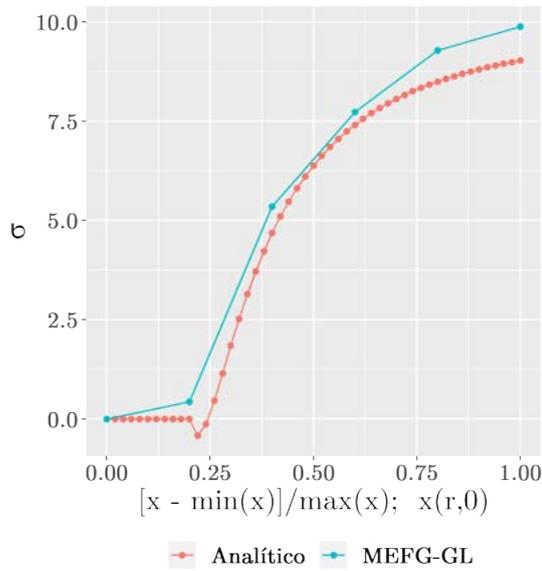
Comparando os resultados alcançados através da técnica com os valores analíticos de referência (segundo formulação anterior com  $(E, \nu|_2 \rightarrow 0)$ ) percebe-se uma aderência entre as duas soluções. De maneira eficiente, com o acréscimo de poucos graus de liberdade, foi

possível simular uma cavidade completamente virtual no macrodomínio, sem qualquer necessidade de representação geométrica explícita. Este resultado é novo (aos conhecimentos do autor) e equivalente às soluções de outros tipos de enriquecimento (Moës et al., 2003; Hettich et al., 2008; Sukumar et al., 2001). Contudo, não possui a sobrecarga de uma teoria matemática adicional e formulação de função analítica apropriada, constituindo-se, portanto, em alternativa a problemas do tipo.

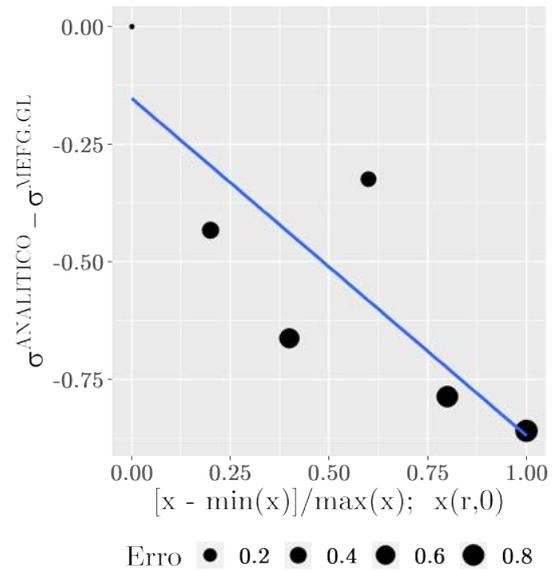
Uma outra aplicação explorada faz referência a uma chapa com microdefeitos/micro-inclusões localizados(as) na zona central da peça. Procurou-se variar a quantidade desses microdefeitos pontuais, verificando o grau de absorção pelo domínio global das características locais detalhadas. No transporte da informação de uma escala a outra, nenhum tratamento especial foi realizado; simplesmente transferiram-se os enriquecimentos e propriedades materiais tal como dadas na escala local. As dimensões e refinamento locais foram iguais ao da chapa perfurada.

Nas figuras 5.29 e 5.30, algumas variações de mesoestrutura local foram trabalhadas como forma de verificar a flexibilidade da estratégia de duas escalas e as consequências da inclusão de um número maior de partículas em uma escala local. Dois modelos, um com 20% e outro com 40% de heterogeneidade, foram processados. Nas composições 5.29 e 5.30, ilustram-se o domínio global com as micro-inclusões localizadas, as componentes de deformação e tensão dominantes (direção  $x$ ) em ambas as escalas, bem como o resultado do tratamento ao metadado numérico-geométrico, representativo da morfologia interna do nível submacroscópico da análise. Preserva-se a proporção dos tamanhos de cada escala intencionalmente, utilizam-se contornos de valores descontínuos e altera-se a palheta de cores para a descrição um pouco mais representativa das nuances pontuais em cada grandeza.

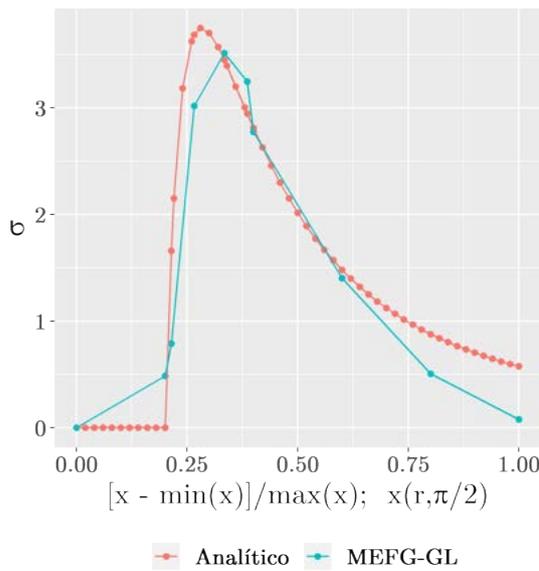
Nota-se que a reprodução das características locais detalhadas, capturadas por uma malha local com grande refinamento, não se refletem na escala global. Ainda que alguma distorção coerente nos campos de deformação e tensão seja observada, o nível de detalhamento alcançado isoladamente na escala local não é capturado pelo problema global, dado seu refinamento consideravelmente inferior. Essa perda é lógica e natural, isto é, uma região globalmente representada por não mais que quatro elementos enriquecidos dificilmente seria capaz de descrever com tamanha precisão aquilo que foi construído em um domínio com mais de quinhentos elementos. Considera-se que tal descrição global



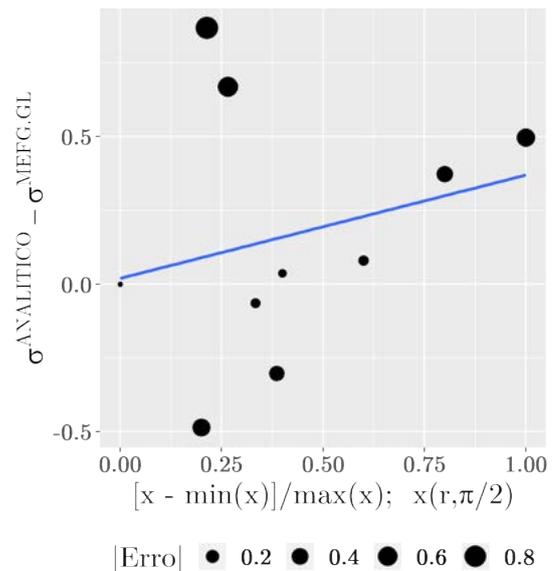
(a)  $\sigma_{rr} \times [x - \min(x)] / \max(x); x := x(r, \theta = 0)$  (MPa).



(b)  $Erro \times [x - \min(x)] / \max(x); x := x(r, \theta = 0)$  (MPa).



(c)  $\sigma_{rr} \times [x - \min(x)] / \max(x); x := x(r, \theta = \pi/2)$  (MPa).



(d)  $Erro \times [x - \min(x)] / \max(x); x := x(r, \theta = \pi/2)$  (MPa).

Figura 5.28: Limites da técnica multiescala: modelagem indireta de furo. Tensões em  $\theta = 0$  (5.28a) e  $\theta = \pi/2$  (5.28c) e erro no domínio ( $\sigma_{rr}^{ANALITICO} / \sigma_{rr}^{MEFG-GL}$ , 5.28b e 5.28d).

túrbida tende a se manifestar em problemas de maior complexidade, como aqueles não lineares objeto final desta pesquisa, de tal sorte que o resultado apresentado, por um lado, justifica os pressupostos metodológicos de representação material mais detalhada que um modelo homogêneo, porém simplificada o bastante para ser incorporada na comunicação

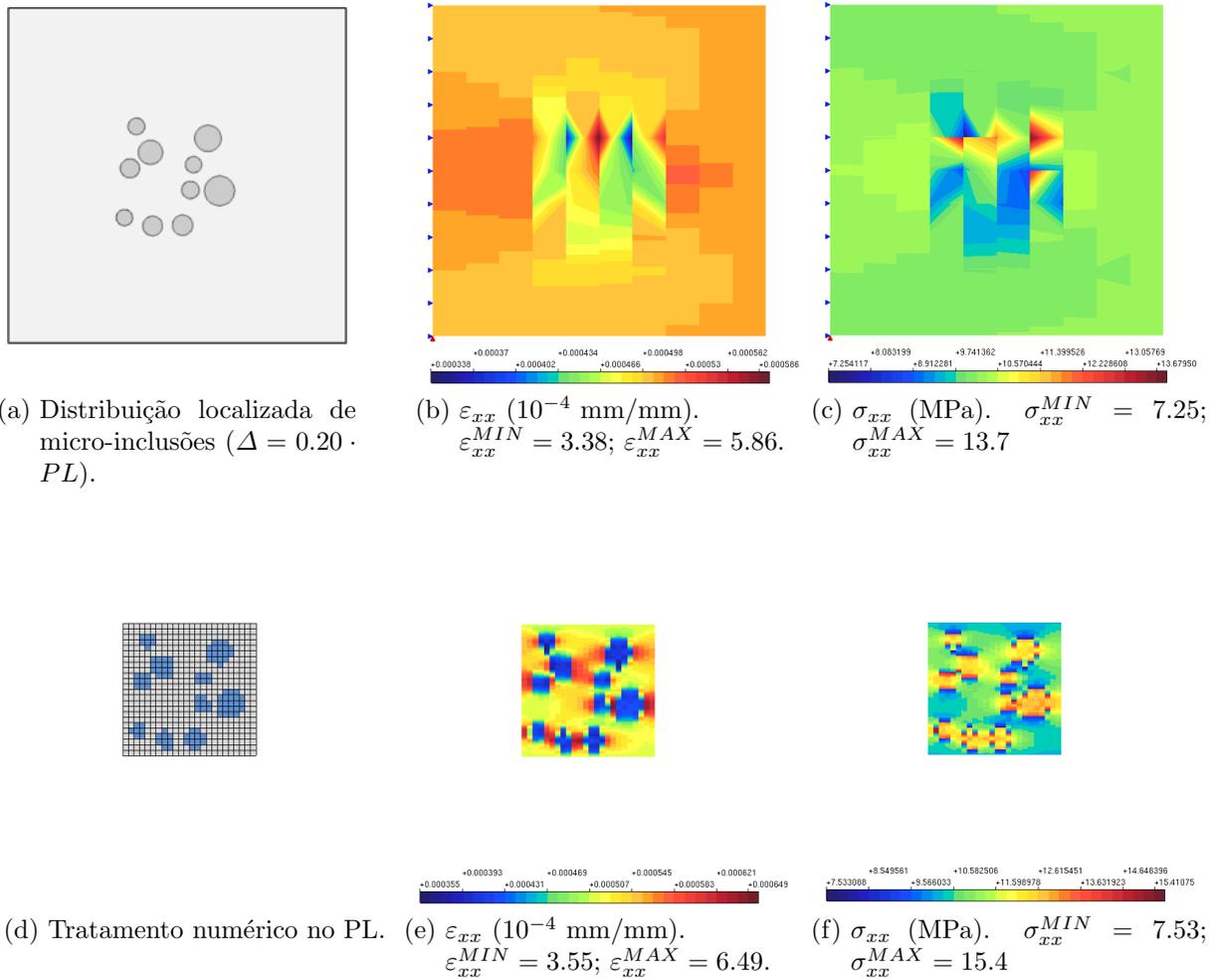


Figura 5.29: Limites da técnica multiescala: modelagem indireta de micro-inclusões múltiplas ( $\Delta = 0.20$ ). Distribuição localizada das inclusões (5.29a); componentes em  $x$  das deformações e tensões globais (5.29b e 5.29c); tratamento numérico do metadado geométrico (5.29d) e componentes em  $x$  das deformações e tensões locais (5.29e e 5.29f).

entre escalas e fornecer um custo-benefício ideal e, por outro lado, é relevante para decisões posteriores na definição de características morfológicas para exemplos de validação e estudos de caso. De qualquer maneira, ainda que com uma qualidade distante da ideal, os resultados demonstram um potencial a ser explorado. Com efeito, a estratégia permite o estudo detalhado de uma característica material local e a avaliação de tendências em nível global (tão aprimorada quanto melhor for o macrorrefinamento).

### 5.3.3 Experimentos ANL-HM-1E/ANL-HT-1E: Flexão em 3 pontos

Seguindo o que preliminarmente foi apontado na seção 4.3, registram-se aqui alguns resultados para a apreciação da influência da heterogeneidade, e de seus mecanismos

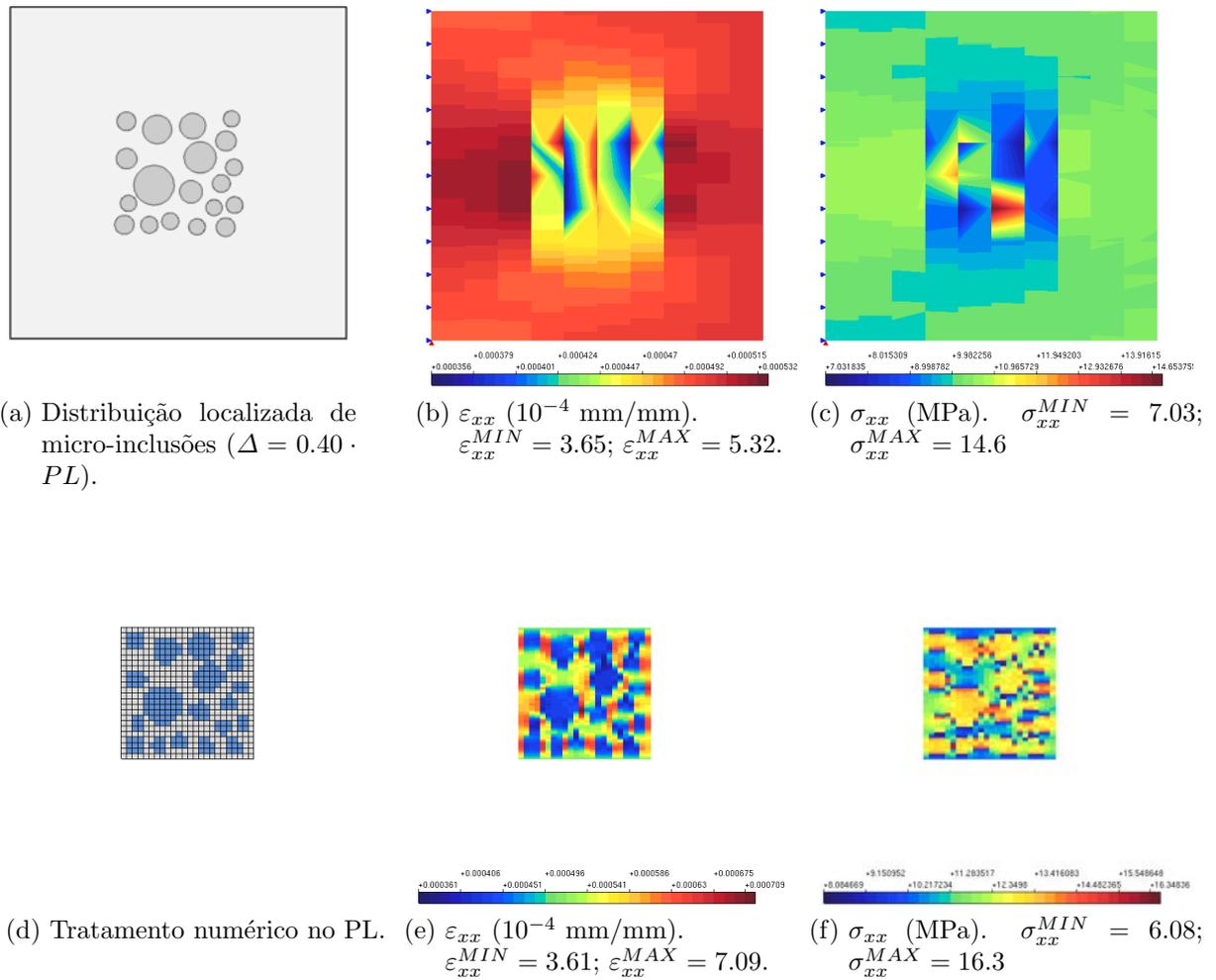


Figura 5.30: Limites da técnica multiescala: modelagem indireta de micro-inclusões múltiplas ( $\Delta = 0.40$ ). Distribuição localizada das inclusões (5.29a); componentes em  $x$  das deformações e tensões globais (5.29b e 5.29c); tratamento numérico do metadado geométrico (5.29d) e componentes em  $x$  das deformações e tensões locais (5.29e e 5.29f).

computacionais subjacentes, numa análise com não linearidade material e formalmente uma única escala. Utilizou-se a configuração experimental que aqui será referida como o ensaio de Penna (2011); Pitangueira (1998) modificado. Neste experimento numérico têm-se a simulação de um ensaio de flexão em três pontos de uma viga curta de concreto simples. As dimensões compactas da viga implicam em um comportamento estrutural consideravelmente frágil, com resposta gráfica apresentando trecho potencialmente em *snap-back*, proeminência de instabilidade numérica e dificuldades de convergência.

Para este ensaio assumiu-se um modelo de fissuração distribuída com direção fixa e lei tensão-deformação bilinear. A obtenção das trajetórias se deu através do controle de deslocamentos generalizados, com equilíbrio secante e verificação de tolerância por deslocamentos (ver 2 e referências nele citadas). Há algumas razões para as escolhas

feitas: primeiramente, a reprodução mais verossímil possível do experimento de referência de Pitanguera (1998); em segundo lugar, dada as complexidades incrementais-iterativas previstas pela referência, procurou-se utilizar num primeiro momento uma lei material mais acessível; e, finalmente, a popularidade do modelo constitutivo e da relação  $\sigma \times \varepsilon$  empregados.

O estudo da heterogeneidade levou em consideração a variação da fração volumétrica das inclusões. A proporção de heterogeneidades foi configurada utilizando-se o *grid* de elementos finitos como espaço amostral de posições para alocação, ou seja, através do tratamento não conforme monofásico implementado, distribuíram-se aleatoriamente entre os elementos um conjunto de inclusões seguindo-se as fração prescritas. Duplicando-se consecutivamente a porcentagem de inclusões, ensaiaram-se modelos com  $\approx 5\%$ ,  $\approx 10\%$ ,  $\approx 20\%$  e  $\approx 40\%$  do volume (ou área, mais precisamente) do domínio com fase distinta da matriz cimentícia. Esses valores são aproximados, pois há pequenas variações (para mais e para menos) na amostragem dos pontos de alocação; para a primeira discretização, com um malha de 24 elementos,  $5\% \approx 1/24 = 4.17\%$ ,  $10\% \approx 3/24 = 12.5\%$ ,  $20\% \approx 20.8\%$  e  $40\% \approx 10/24 = 41.7\%$ . Há aqui, portanto, o que pode se definir como uma modelagem mesoestrutural direta, ou seja, não houve a construção de nenhum tipo de domínio auxiliar no qual algum nível de detalhamento adicional do meio tenha sido realizado.

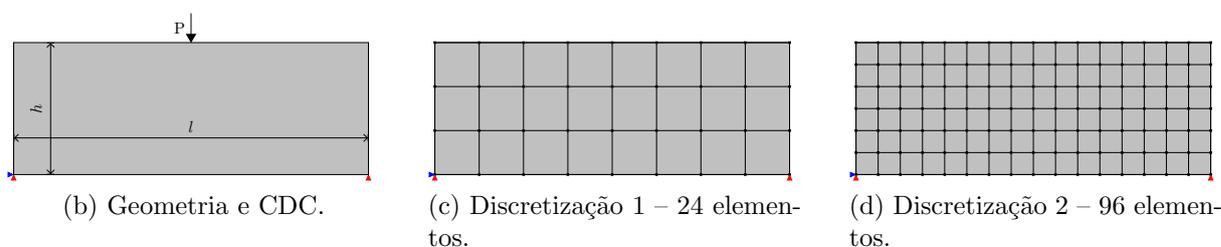
A configuração experimental é apresentada no *set-up* 5.4. Nela é possível identificar os parâmetros materiais, os dados para controle de trajetória, as dimensões da viga, o carregamento e o proporcionamento de inclusões.

Para desenvolvimento das simulações homogêneas, utilizou-se a composição de uma mistura proveniente de Pitanguera (1998) com as propriedades indicadas na tabela 5.4a. Essa mistura homogênea foi obtida com um rigor ligeiramente maior, pois leva em consideração as propriedades de uma interface. Os estudos para obtenção dos parâmetros materiais pode ser encontrado na referência e nos trabalhos nela citados. Para simulações com contínuo bifásico, empregou-se um conjunto de inclusões rígidas dispersas em uma matriz cimentícia, conforme indicado na configuração experimental. Do mesmo modo, as propriedades elásticas empregadas são equivalentes a do ensaio de referência.

Tal como frisado na seção 4.3 e apresentado anteriormente, os resultados das simulações com materiais homogêneo (HM) e heterogêneo (HT) serão expostos em conjunto, correlacionalmente. Mesmo havendo uma divisão formal, esta foi concebida para simples

Parâmetros Materiais ( $\sigma \times \varepsilon$ bilinear)						
Fase	$E_0$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$\nu_0$	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$g_f$ (MPa)
Matriz	$3.2 \cdot 10^4$	$3.2 \cdot 10^3$	0.2	3.4	48.0	$1.81 \cdot 10^{-3}$
Agregado	$1 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^4$	0.2	16.0	80.0	$1.28 \cdot 10^{-2}$
Homog.	$4.4 \cdot 10^4$	$4.4 \cdot 10^3$	0.2	3.8	40.0	$1.64 \cdot 10^{-3}$
<b>Modelo Constitutivo</b>	Fissuração Distribuída (c/ direção fixa)					
<b>Método Controle (CDG)</b>			<b>Geometria &amp; CDC</b>			
$\delta\lambda_1$	250		<i>espess.</i>	36.0 mm		
<i>tol(desloc.)</i>	$1 \times 10^{-4}$		<i>l</i>	900 mm		
<i>Equil.</i>	Secante		<i>h</i>	360 mm	<i>Restrições</i>	
<i>Passos</i>	300		P	1 N	$R_x, R_y$	
<b>Heterogeneidade <math>\Delta</math></b>	{0.05, 0.10, 0.20, 0.40}			<b>Mod. Anl.</b>	EPT	

(a) Parâmetros.



Set-up 5.4: Configuração Experimental – ANL-HM/HT-1E – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado, ensaio de flexão simples em 3 pts. Parâmetros de entrada (mod. fiss. dist. c/ lei bilinear, controle de trajetória, CDC e fração de heterogeneidade; 5.4a); geometria (5.4b); malhas (5.4c, 5.4d).

organização metodológica e os dados de saída de testes homogêneos servem principalmente como soluções de referência.

Algumas variáveis foram definidas como independentes para avaliação do comportamento estrutural, a saber:

- Fração de heterogeneidades;
- Posição de alocação da inclusão no domínio;
- Refinamento de malha.

Das variáveis anteriores, desdobraram-se alguns exames específicos apontados a seguir:

- Exame 1: avaliação do caráter contingente da resposta estrutural do sólido heterogêneo.

Utilizando-se a primeira discretização proposta, processaram-se diferentes distribuições aleatórias de inclusões para cada fração de heterogeneidade prescrita (ver *set-up* 5.4). De modo a se impor controle ao experimento, o espaço amostral das posições possíveis foi restringido ao conjunto de elementos finitos das malhas, ou seja, os baricentros de cada elemento foram os referenciais de alocação. Dessa maneira, tratamentos não conformes monofásicos foram aplicados para incorporar o metadado numérico-geométrico morfológico ao modelo do MEF/MEFG. Das realizações de cada fração, construíram-se trajetórias de equilíbrio do ponto de aplicação do carregamento e avaliaram-se médias, medianas e quartis dos fatores de carga das curvas obtidas. Trajetórias de equilíbrio médias para cada proporcionamento de heterogeneidade foram traçadas a partir dos resultados alcançados. Ao serem promovidas diferentes realizações de distintas composições, são esperados comportamentos estruturais díspares e contingentes na proporção da aleatoriedade imposta na composição do meio. Assim, curvas com um resposta estrutural ideal em *hardening* e em *softening* foram construídas com os dados obtidos para a realização de apontamentos acerca do potencial comportamento característico do sólido ensaiado.

- Exame 2: avaliação da influência da fração de heterogeneidade na resposta estrutural.

Com dados do exame anterior, realizou-se uma comparação de etapas consecutivas de incremento da fase representativa dos agregados. Contudo, uma amostragem sem reposição dos pontos de alocação foi empregada para estabelecimento de controle adicional e consideração do efeito isolado de quantidades extras da fase não cimentícia.

- Exame 3: avaliação do impacto do refinamento de malha.

Modelos de degradação elástica locais, como aqueles que são foco da presente pesquisa, sofrem com problemas de objetividade e, portanto, são afetados por refinamento  $h$  de malha, sendo essa característica de notório conhecimento e de citação considerável na literatura. Contudo, dado que o modelo material empregado aqui é heterogêneo, é legítima a investigação do comportamento numérico da estrutura em questão sob a moderação de uma distribuição de inclusões. Dessa maneira, de modo a se verificar a influência combinada de uma não homogeneidade e do refinamento

da discretização, aplicaram-se sinteticamente os tipos de exame anteriores a uma nova malha e compararam-se os resultados.

- Exame 4: impacto do acréscimo de uma nova fase na eficiência numérica.

Eficiência é um termo complexo que engloba uma miríade de conceitos<sup>1</sup>, que em Ciência da Computação costumam envolver tempo. Diversas são as medidas que podem ser propostas, mas no âmbito deste trabalho, aspectos puramente computacionais são deixados de lado e atém-se à acepção básica do conceito. Variáveis como tempo, quando avaliadas, são meramente descritores qualitativos. Opta-se exclusivamente por parâmetros numéricos e particularmente nas análises não lineares apresentadas, utiliza-se o número de iterações em cada passo como referencial de interferência (positiva ou negativa) de uma determinada variável independente manipulada. Assim, ao serem apresentados os perfis de iteração, avaliações comparativas serão registradas.

Embora não seja completamente correto se referir a regimes de *hardening* e *softening* na análise de curvas no espaço “fator de carga ( $\lambda$ ) – deslocamento ( $d$ )”, uma vez que o “encruamento” e o “amolecimento” são fenômenos ligados a um estado de deformação e remetem-se, portanto, ao comportamento do material propriamente dito, há uma natural correspondência ou associação entre uma dada relação tensão–deformação e um resposta estrutural  $\lambda \times d$ . Dessa maneira, para extensão de léxico nas avaliações registradas a seguir serão utilizados os paralelismos “ramo ascendente – *hardening* – encruamento”, “ramo descendente – *softening* – amolecimento”, havendo as devidas ressalvas quando do destaque do regime elástico puro nos trechos de subida.

### 5.3.3.1 Exame 1: Avaliação do Caráter Contingente da Resposta Estrutural do Sólido Heterogêneo.

Após uma busca rápida na literatura sobre ensaios destrutivos, não virtuais, de estruturas ou corpos-de-prova de concreto (ou material equivalente), um pesquisador interessado perceberá que mesmo havendo tendências muito marcantes na resposta estrutural global

<sup>1</sup>Dicionário Michaelis (<http://michaelis.uol.com.br/busca?r=0&f=0&t=0&palavra=eficiciência>): 1. Capacidade de produzir um efeito; 2. Capacidade de realizar bem um trabalho ou desempenhar adequadamente uma função; aptidão, capacidade, competência; 3. Qualidade do que é passível de aplicação vantajosa; proveito, serventia, utilidade; 4. Atributo ou condição do que é produtivo; desempenho, produtividade, rendimento

dos espécimens rompidos, há uma aleatoriedade muito marcante nos comportamentos individuais captados. Santos (2015), por exemplo, apresenta nos resultados da caracterização dos materiais empregados em seu trabalho, bem como nos testes de detecção do efeito de escala em vigas de concreto, curvas carga–deslocamento de corpos-de-prova com similaridade de composição e geometria (estruturas equivalentes, portanto) que se espalham por trajetórias distintas, algumas vezes consideravelmente divergentes umas das outras. Mesmo havendo certa predisposição de traçado em casos particulares, não se conseguiria prever de antemão e exatamente uma trajetória específica, sendo, portanto, contingente o comportamento. Tal cenário já não é necessariamente verdade em experimentos numéricos puros. Via de regra, um modelo virtual sem qualquer fonte de estocasticidade em sua composição material (o caso da presente discussão) entregará resultados iguais quando processado múltiplas vezes (nas publicações do grupo de pesquisa em que se insere este estudo, pode-se verificar testes realizados em diferentes estudos, por pesquisadores distintos, com resultados iguais, por exemplo). Será esse comportamento herdado irrestritamente quando resolvemos introduzir na constituição do contínuo variações pontuais e aleatórias em suas propriedades elásticas?

Para investigar o comportamento estrutural (numérico) contingente de uma viga de concreto simples, foram analisadas quatro realizações de três frações de partículas prescritas. Com composições de  $\approx 10\%$ ,  $\approx 20\%$  e  $\approx 40\%$  do domínio, simularam-se modelos com distintos posicionamentos das heterogeneidades. As inclusões amostradas foram alocadas com base nos centróides dos elementos finitos da malha e tiveram sua dimensão característica amarrada ao tamanho do elemento, i.e., a largura média  $h$  da malha foi tomada como o diâmetro médio das partículas, tendo todas elas, portanto, o mesmo tamanho. Conforme apontado anteriormente, o tratamento numérico dado à morfologia foi não conforme com elementos monofásicos (figura 5.31). A malha de referência adotada é a da figura 5.4c da configuração experimental. Nela, os elementos finitos possuem uma dimensão (raio) característica da ordem de 56 mm.

Naturalmente, para a presente abordagem, que impôs intencionalmente um conjunto de controles para o experimento, com destaque para o espaço amostral de alocação de inclusões e o conseqüente amarramento da dimensão característica do agregado ao diâmetro médio do elemento finito, o tamanho absoluto das heterogeneidades foge um pouco de considerações reais e das prescrições normativas. Em contrapartida, a intenção original

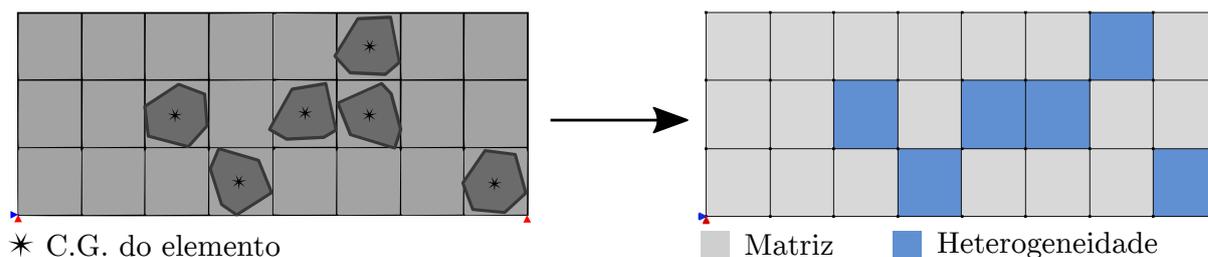


Figura 5.31: Representação operacional simplificada da estratégia utilizada para configurar o modelo numérico com o metadado da distribuição de inclusões.

do experimento sustém-se: preserva-se a proporção volumétrica das fases e, em última instância, uma base para avaliação da interferência da variação dessa proporção no comportamento estrutural, quer dizer, mesmo o tamanho individual de um inclusão isolada sendo superior ao de um agregado típico (no presente caso), a fração total de uma fase não cimentícia conserva seu sentido próprio e seus efeitos sobre o modelo numérico. Há ainda uma razão de cunho teórico-formal por trás da escolha de uma representação mais grosseira da heterogeneidade do meio: parte-se do pressuposto que as simulações realizadas no âmbito dos testes ANL-HT-1E são em escala única, ou seja, em última instância o modelo numérico utilizado seria representativo de uma escala macroestrutural, na qual, por definição, não há um nível de detalhamento muito robusto da constituição do meio. Dessa forma considerou-se uma discretização grosseira associada à um retrato menos fiel da morfologia.

Cada uma das três frações de heterogeneidade simuladas será apresentada a seguir. O primeiro exame considerado é relativo a  $\Delta \approx 10\%$ , partindo-se para o estudo com  $\Delta \approx 20\%$  e finalizando-se com os dados obtidos nos modelos com  $\Delta \approx 40\%$ .

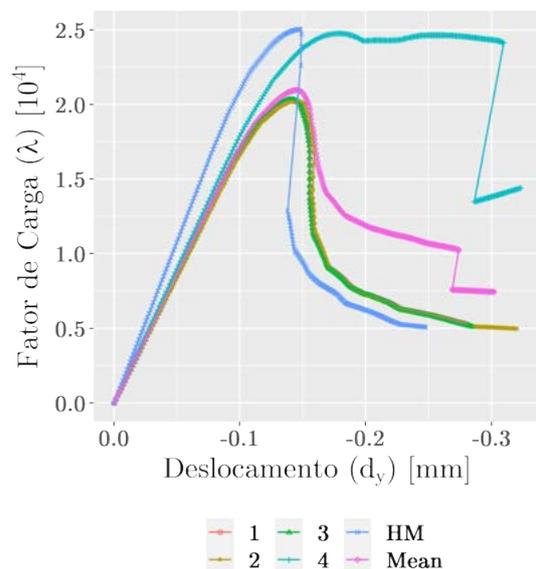
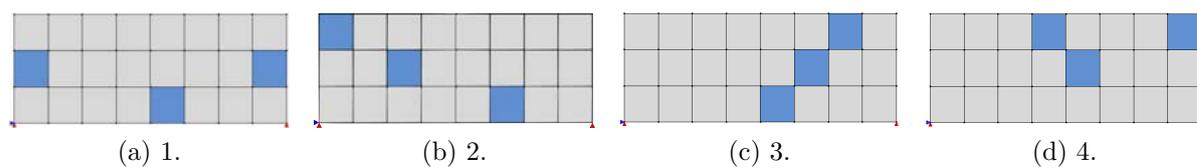
Inicia-se a apresentação e a análise dos resultados partindo-se da menor proporção de agregados, i.e.,  $\Delta \approx 10\%$ . Os resultados alcançados foram compendiados na figura 5.32 e na tabela 5.2. Fig. 5.32 apresenta: cada realização de distribuição (5.32a, 5.32b, 5.32c, 5.32d); as trajetórias de equilíbrio de cada variante, uma homogênea – HM – e uma heterogênea com quatro realizações e uma curva média – 1, 2, 3, 4 e Mean (5.32e); a evolução de um desvio percentual entre as trajetórias das variantes heterogêneas e do modelo homogêneo (5.32f); uma composição isolada de uma trajetória média para o modelo com inclusão de heterogeneidade (5.32g); e o perfil dos desvios percentuais entre as curvas heterogênea média e homogênea (5.32h). A tabela 5.2 apresenta algumas estatísticas básicas para duas as variantes de análise estrutural. São elencadas informações associadas

ao fator de carga e ao grau de liberdade correspondente ao carregamento aplicado. Os valores calculados para a variante heterogênea levam em consideração as quatro realizações de comportamento estrutural capturado com a manipulação da constituição interna do sólido.

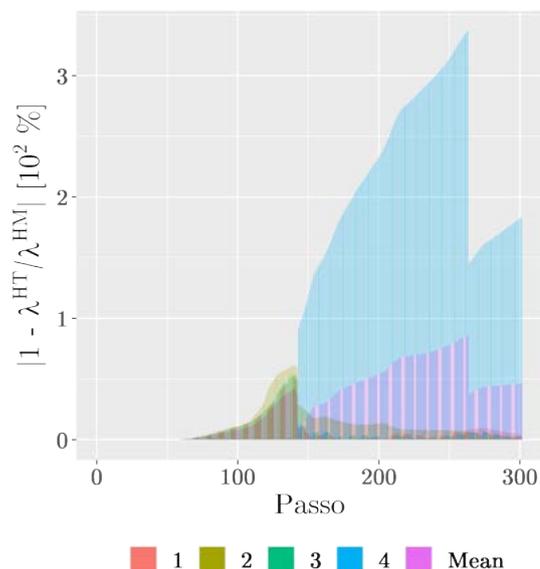
As conformações internas obtidas após quatro amostragens com reposição dos pontos de alocação (figuras 5.32a, 5.32b, 5.32c e 5.32d), apresentam-se com uma considerável aleatoriedade na distribuição de inclusões e uma boa cobertura espacial do domínio.

Da observação da fig. 5.32e, nota-se que o comportamento do modelo numérico com meio homogêneo apresentou instabilidade pós-pico, e ligeiro *snap-back*. O fator de carga máximo alcançado na variante homogênea foi de  $2.5 \cdot 10^4$ , com deslocamento vertical (para baixo) correspondente igual a  $-0.15$  mm e flecha máxima registrada de  $-0.25$  mm, aproximadamente. As vigas heterogêneas 1, 2 e 3 apresentaram respostas consideravelmente próximas umas das outras, sendo visualmente quase imperceptível a diferença entre as trajetórias. Com máximos fatores de carga da ordem de  $2.0 \cdot 10^4$  e deslocamento correspondente de aproximados  $-0.15$  mm, há uma quase sobreposição de ramos descendentes, e pode-se considerar os comportamentos qualitativamente equivalentes, portanto. A realização 4, em contrapartida, desenvolveu resposta significativamente distinta das demais, com um ramo elástico mais próximo daquele desenvolvido pela viga homogênea, um comportamento pós-pico dúctil e um rompimento frágil, brusco e repentino. A carga máxima absorvida foi equivalente à da variante homogênea, alcançando  $\lambda$  máximo de aproximadamente  $2.5 \cdot 10^4$ , mas um deslocamento correspondente superior (em módulo) a  $0.30$  mm. No geral, as variantes HT desenvolveram um comportamento ligeiramente mais dúctil em *hardening* e no início do regime de *softening*, havendo, entretanto, uma ductilidade semelhante no trecho final das trajetórias das três primeiras vigas HT e da variante HM. Nesse sentido, a diferença percentual entre as variantes homogênea e heterogênea alcançou valores mais elevados nas imediações do pico (imediatamente antes do passo 150) e, durante o amolecimento, diminuiu progressivamente de maneira assintótica nas vigas 1, 2, 3 e aumentou de maneira aparentemente linear na realização 4.

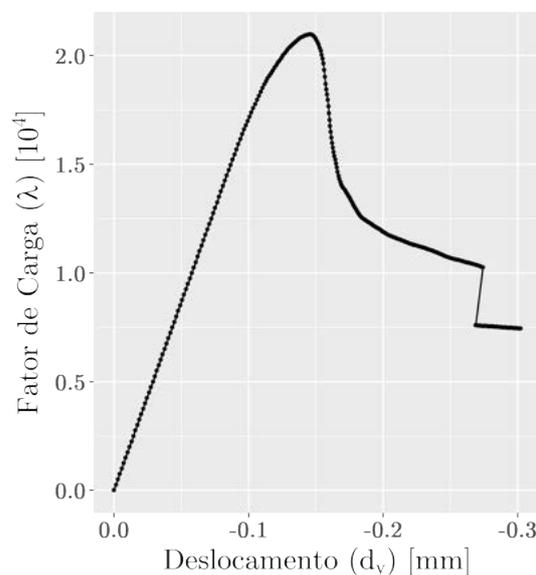
Uma curva média representativa de uma tendência central de comportamento estrutural simulado foi construída com base nos dados de cada realização heterogênea. Inserida para análise comparativa em 5.32e e 5.32f, isola-se a trajetória de equilíbrio na fig. 5.32g. A resposta estrutural obtida possui um traçado estável (à exceção dos últimos pontos da



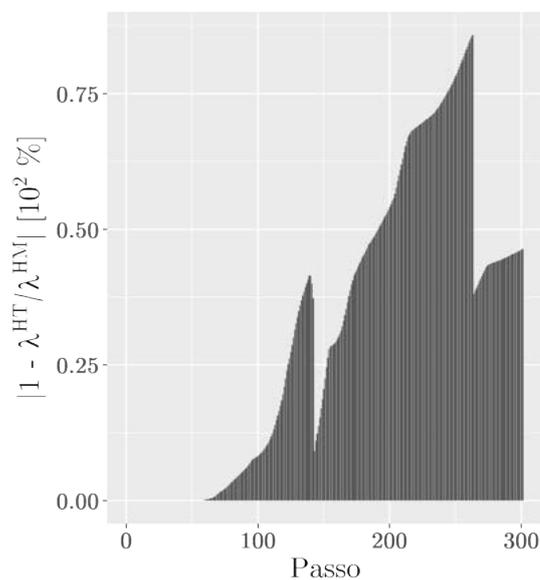
(e) Trajetórias de equilíbrio de cada realização, da classe homogênea e da média.



(f) Módulo dos desvios percentuais em  $\lambda$  entre soluções heterogêneas e homogênea.



(g) Trajetória de equilíbrio média para  $\Delta \approx 0.1$ .



(h) Módulo do desvio percentual médio em  $\lambda$  entre soluções heterogêneas e homogênea para  $\Delta \approx 0.1$ .

Figura 5.32: ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: impacto do acréscimo de  $\approx 10\%$  de heterogeneidade no meio (exame 1). Dist. de heterogeneidade (5.32a, 5.32b, 5.32c, 5.32d); trajetórias de equilíbrio (5.32e) e desvios em módulo para o homogêneo (5.32f) de cada realização; trajetória de equilíbrio média (5.32g) e desvio médio em módulo (5.32h). Realizações (1 a 4), Média (Mean), Homogêneo (HM).

curva) e um desenho condizente com a natureza material do modelo e com os resultados do experimento de referência (Pitangueira, 1998; Pitangueira e Rosas e Silva, 1999). O fator de carga máximo na trajetória construída alcançou  $2.4 \cdot 10^4$ , com flecha correspondente igual a pouco menos que  $-0.15$  mm (em módulo), e o deslocamento vertical máximo registrado foi de  $0.32$  mm (para baixo).

Tabela 5.2: Variação  $\Delta \approx 0.10$  – medidas de tendência central: deslocamento do ponto de aplicação da carga  $\mathbf{P}$  ( $d_y^{\mathbf{P}}$ ) e fator de carga ( $\lambda$ ).

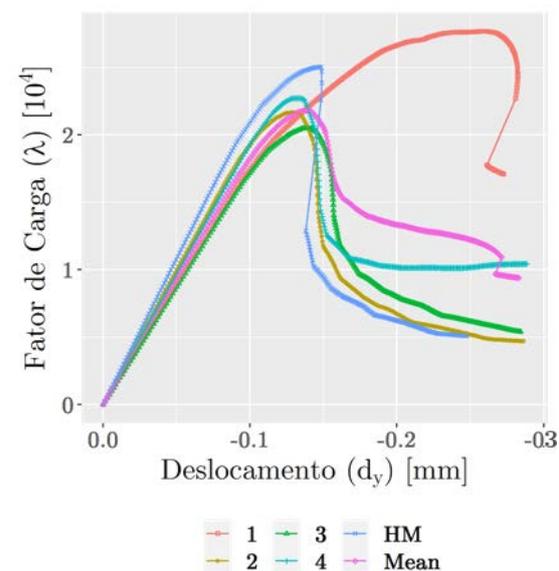
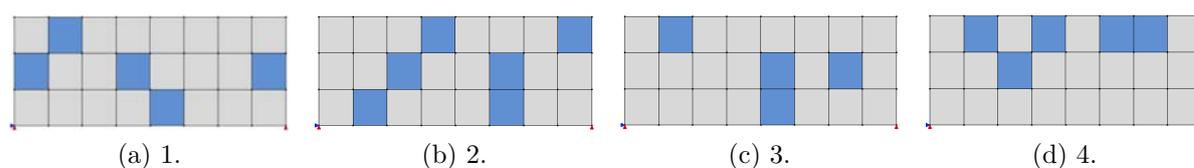
	Homogêneo		Heterogêneo	
	$d_y^{\mathbf{P}}$	$\lambda$	$d_y^{\mathbf{P}}$	$\lambda$
<b>Mínimo*</b>	-0.24762	0	-0.3232	0
<b>1º Quartil</b>	-0.19325	5882	-0.2393	6129
<b>Mediana</b>	-0.14587	8000	-0.1727	9496
<b>Média</b>	-0.13826	11159	-0.1700	12081
<b>3º Quartil</b>	-0.08658	16500	-0.1074	18620
<b>Máximo*</b>	0.00000	25044	0.0000	24767

\*Os conceitos de máximo e mínimo aqui não têm relação com a interpretação física de sentido de um vetor, mas sim à noção puramente numérico-estatística do número em si. Assim, embora  $-0.24762$  represente um mínimo na avaliação de uma tendência central, ele representa um deslocamento máximo para baixo de um ponto da viga.

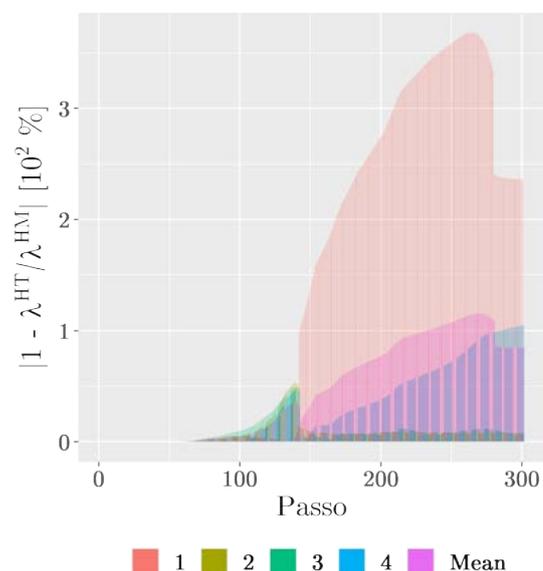
A seguir, os resultados dos ensaios com  $\Delta \approx 20\%$  serão apresentados. De modo similar à fração anterior, compendiam-se as soluções na figura 5.33 e na tabela 5.3, nas quais registram-se: cada uma das distribuições aleatoriamente geradas (5.33a, 5.32b, 5.32c, 5.33d); as trajetórias de equilíbrio das variantes (5.33e); o perfil do desvio percentual entre as curvas HT e HM (5.33f); uma trajetória média para o modelo com consideração de heterogeneidade (5.33g) e seus desvios percentuais com relação à solução homogênea (5.33h); e medidas de tendência central para as modalidades HM e HT (tab. 5.3).

Tal como alcançado nos testes com  $\Delta \approx 0.10$ , as distribuições obtidas com  $\Delta \approx 0.20$  (figuras 5.33a, 5.33b, 5.33c e 5.33d) mostram-se suficientemente distintas entre si.

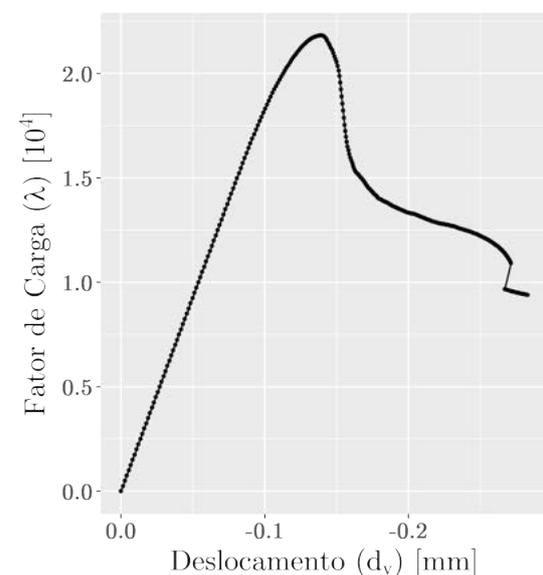
Analisando as trajetórias na figura 5.33e, percebe-se que os comportamentos dos modelos numéricos das vigas heterogêneas 2, 3 e 4 apresentaram respostas relativamente semelhantes, com máximos fatores de carga próximos ( $\lambda_3 \approx 2.0 \cdot 10^4 < \lambda_2 \approx 2.1 \cdot 10^4 < \lambda_4 \approx 2.0 \cdot 10^2$ ) e deslocamentos correspondentes equivalentes ( $-0.15$  mm). As curvas 2



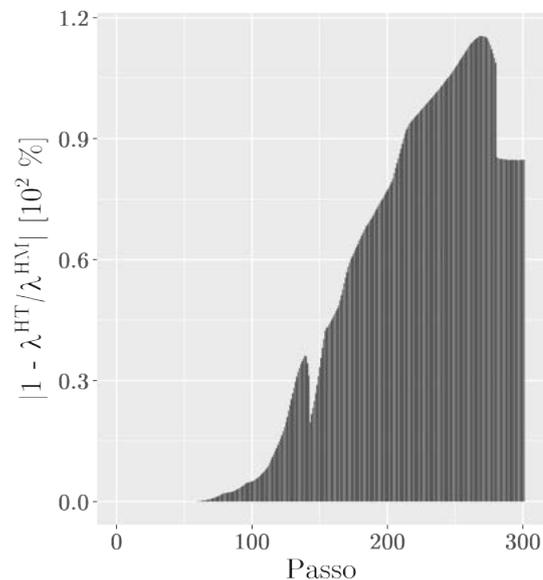
(e) Trajetórias de equilíbrio de cada realização, do classe homogêneo e da média.



(f) Módulo dos desvios percentuais em  $\lambda$  entre soluções heterogêneas e homogênea.



(g) Trajetória de equilíbrio média para  $\Delta \approx 0.2$ .



(h) Módulo do desvio percentual médio em  $\lambda$  entre soluções heterogêneas e homogênea para  $\Delta \approx 0.2$ .

Figura 5.33: ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: impacto do acréscimo de  $\approx 20\%$  de heterogeneidade no meio (exame 1). Dist. de heterogeneidade (5.33a, 5.33b, 5.33c, 5.33d); trajetórias de equilíbrio (5.33e) e desvios em módulo para o homogêneo (5.33f) de cada realização; trajetória de equilíbrio média (5.33g) e desvio médio em módulo (5.33h). Realizações (1 a 4), Média (Mean), Homogêneo (HM).

e 3 apresentaram traçados relativamente colaterais em toda a extensão. A trajetória 4, por sua vez, seguiu a mesma tendência das realizações previamente apontadas, divergindo de modo mais acentuado a partir da segunda metade do ramo descendente. A realização 1 apresentou resposta consideravelmente diferente das demais, atingindo um pico apreciavelmente superior (quase  $3.0 \cdot 10^4$  de fator de carga e mais de 0.25 mm de flecha), um regime de *softening* com um traçado em *snap-back*, mas um regime elástico que se sobrepôs àquele das demais realizações, sobretudo da terceira. No geral, as variantes HT desenvolveram um comportamento ligeiramente mais dúctil em *hardening* e no início do regime de *softening*, havendo, entretanto, uma ductilidade semelhante no trecho final das trajetórias das três primeiras vigas HT e da variante HM. Nesse sentido, a diferença percentual entre as variantes homogênea e heterogênea alcançou valores mais elevados nas imediações do pico (imediatamente antes do passo 150) e, durante o amolecimento, diminuiu progressivamente de maneira assintótica nas vigas 1, 2, 3 e aumentou de maneira aparentemente linear na realização 4.

A trajetória média pode ser vista isoladamente na figura 5.33g, ao lado da evolução do valor absoluto do desvio percentual médio entre as variantes HT e HM. A resposta estrutural obtida possui um traçado estável e indica um desenho não tão dissimilar ao da solução da viga homogênea um desenho condizente com a natureza material do modelo e com os resultados do, diferenciando-se prioritariamente por um pós-pico de mais estável e cargas máximas absorvidas durante o amolecimento superiores às de HM. Do mesmo modo que no teste anterior, há congruência entre os resultados alcançados aqui e aquelas do experimento de referência. O fator de carga máximo na trajetória construída alcançou  $2.7 \cdot 10^4$ , com flecha correspondente igual a pouco menos que  $-0.15$  mm, e o deslocamento vertical máximo registrado foi de  $-0.28$  mm.

Os resultados dos ensaios com  $\Delta \approx 10\%$  são apresentados na figura 5.33 e na tabela 5.3. As distribuições são ilustradas em 5.33a, 5.32b, 5.32c e 5.33d. Trajetórias de equilíbrio das variantes são assinaladas em 5.33e e os desvios percentuais entre as curvas HT e HM correspondentes são mostrados em 5.33f, seguidos da trajetória média para o modelo com consideração de heterogeneidade (5.33g) e seus desvios percentuais (5.33h). Na tabela 5.3 há medidas de tendência central para as modalidades HM e HT.

As distribuições obtidas com  $\Delta \approx 0.40$  (figuras 5.33a, 5.33b, 5.33c e 5.33d) mostram-se satisfatoriamente aleatórias e distintas umas das outras. Em regra, os regimes elásticos

Tabela 5.3: Variação  $\Delta \approx 0.20$  – medidas de tendência central: deslocamento do ponto de aplicação da carga  $\mathbf{P}$  ( $d_y^{\mathbf{P}}$ ) e fator de carga ( $\lambda$ ).

	Homogêneo		Heterogêneo	
	$d_y^{\mathbf{P}}$	$\lambda$	$d_y^{\mathbf{P}}$	$\lambda$
<b>Mínimo*</b>	-0.24762	0	-0.2884	0
<b>1º Quartil</b>	-0.19325	5882	-0.2317	7081
<b>Mediana</b>	-0.14587	8000	-0.1669	10669
<b>Média</b>	-0.13826	11159	-0.1620	13332
<b>3º Quartil</b>	-0.08658	16500	-0.1001	19752
<b>Máximo*</b>	0.00000	25044	0.0000	27705

\*vide tab. 5.2.

de todas as realizações heterogêneas foram equivalentes. Contrariamente às vigas com frações de inclusões inferiores, as trajetórias de equilíbrio auferidas (figura 5.33e retratam comportamentos numéricos expressivamente dissimilares, tanto do ponto de vista da resistência estrutural, quanto da ductilidade estrutural, existindo variações importantes no *hardening* e no *softening*. A viga 1 atingiu fator de carga da ordem de  $3.0 \cdot 10^4$ , dos modelos numéricos das vigas heterogêneas 2, 3 e 4 apresentaram respostas relativamente semelhantes, com máximos fatores de carga próximos ( $\lambda_3 \approx 2.0 \cdot 10^4 < \lambda_2 \approx 2.1 \cdot 10^4 < \lambda_4 \approx 2.0 \cdot 10^2$ ) e deslocamentos correspondentes equivalentes ( $-0.15$  mm). Curvas 2 e 3 apresentaram traçados relativamente colaterais em toda a extensão. A trajetória 4, por sua vez, segue a mesma tendência das realizações previamente apontadas, divergindo de modo mais acentuado a partir da segunda metade do ramo descendente. A realização 1 apresentou resposta consideravelmente diferente das demais, atingindo um pico apreciavelmente superior (quase  $3.0 \cdot 10^4$  de fator de carga e mais de 0.25 mm de flecha), um regime de *softening* com um traçado em *snap-back*, mas um encruamento que se sobrepôs ao *hardening* das demais realizações, sobretudo da terceira. No geral, as variantes HT desenvolveram um comportamento ligeiramente mais dúctil em *hardening* e no início do regime de *softening*, havendo, entretanto, uma ductilidade semelhante no trecho final das trajetórias das três primeiras vigas HT e da variante HM. Nesse sentido, a diferença percentual entre as variantes homogênea e heterogênea alcançou valores mais elevados nas imediações do

pico (imediatamente antes do passo 150) e, durante o amolecimento, diminuiu progressivamente de maneira assintótica nas vigas 1, 2, 3 e aumentou de maneira aparentemente linear na realização 4.

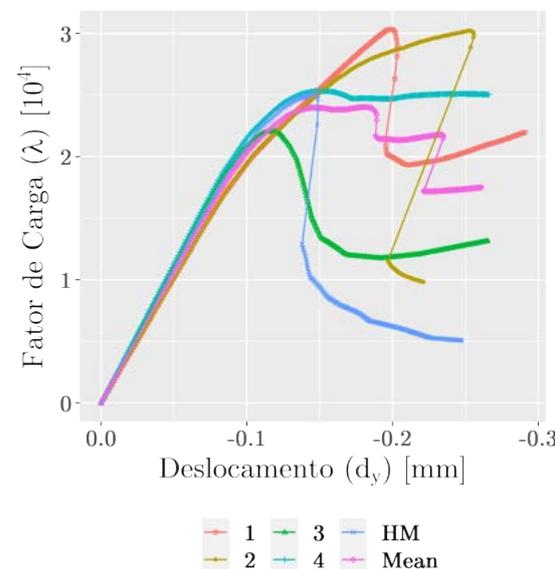
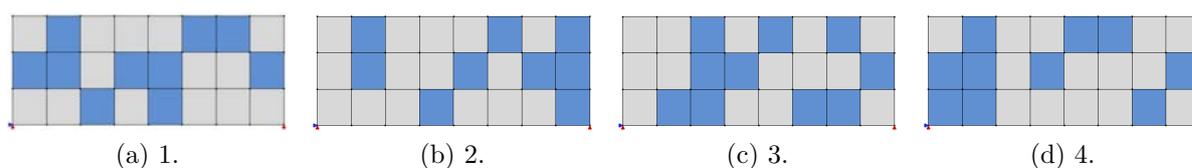
A trajetória média pode ser vista isoladamente na figura 5.33g, ao lado da evolução do valor absoluto do desvio percentual médio entre as variantes HT e HM (5.33h). A resposta estrutural obtida possui um traçado estável e indica um desenho não tão dissimilar ao da solução da viga homogênea um desenho condizente com a natureza material do modelo e com os resultados do, diferenciando-se prioritariamente por um pós-pico de mais estável e cargas máximas absorvidas durante o amolecimento superiores às de HM. Do mesmo modo que no teste anterior, há congruência entre os resultados alcançados aqui e aquelas do experimento de referência. O fator de carga máximo na trajetória construída alcançou  $2.7 \cdot 10^4$ , com flecha correspondente igual a pouco menos que  $-0.15$  mm, e o deslocamento vertical máximo registrado foi de  $-0.28$  mm.

Tabela 5.4: Variação  $\Delta \approx 0.40$  – medidas de tendência central: deslocamento do ponto de aplicação da carga  $\mathbf{P}$  ( $d_y^{\mathbf{P}}$ ) e fator de carga ( $\lambda$ ).

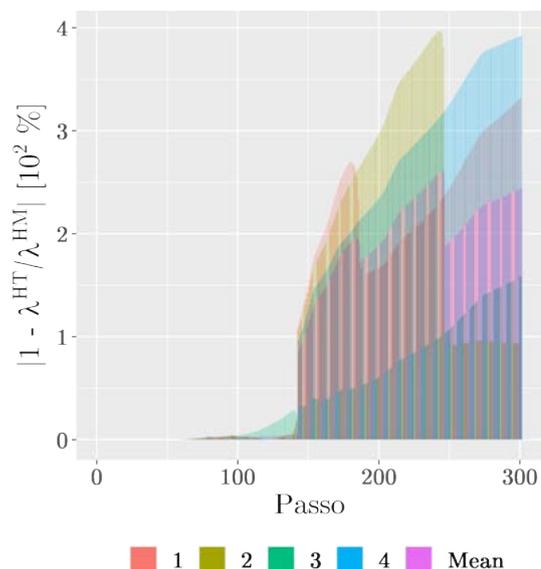
	Homogêneo		Heterogêneo	
	$d_y^{\mathbf{P}}$	$\lambda$	$d_y^{\mathbf{P}}$	$\lambda$
<b>Mínimo*</b>	-0.24762	0	-0.29083	0
<b>1º Quartil</b>	-0.19325	5882	-0.21199	12000
<b>Mediana</b>	-0.14587	8000	-0.15853	19852
<b>Média</b>	-0.13826	11159	-0.14933	18204
<b>3º Quartil</b>	-0.08658	16500	-0.08697	24913
<b>Máximo*</b>	0.00000	25044	0.0000	30365

\*vide tab. 5.2.

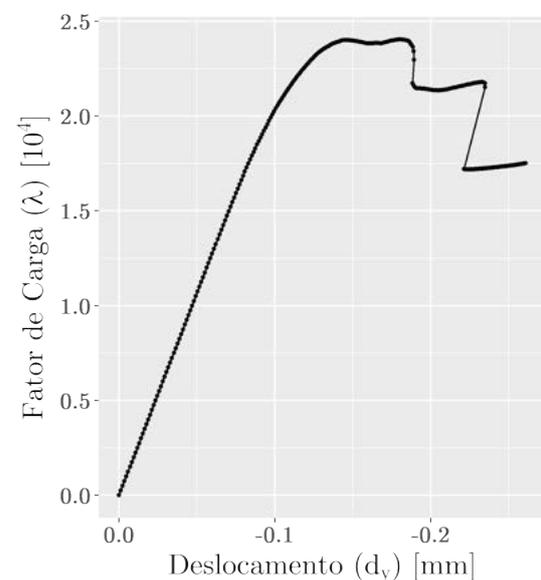
Uma construção comparativa é indicada na sequência. Na figura 5.35 apontam-se todas as trajetórias obtidas. Há, logicamente, um espalhamento importante nas curvas, que indica um caráter contingente no modelo numérico implementado, caráter esse que, conforme dito no introito dessa seção, é comum em experimentos não virtuais análogos aos testes numéricos desenvolvidos aqui, e característico do material em questão. Mesmo assim, a aleatoriedade se dá sob a égide de um comportamento global específico e único, limitado pela natureza geométrica da estrutura, suas condições de contorno e, até mesmo,



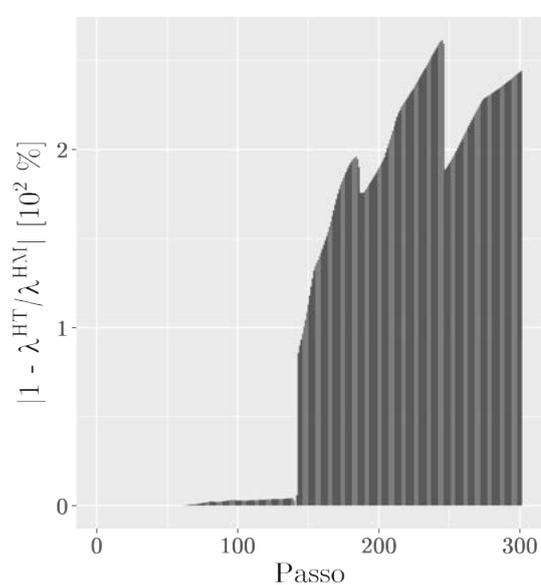
(e) Trajetórias de equilíbrio de cada realização, do classe homogênea e da média.



(f) Módulo dos desvios percentuais em  $\lambda$  entre soluções heterogêneas e homogênea.



(g) Trajetória de equilíbrio média para  $\Delta \approx 0.4$ .



(h) Módulo do desvio percentual médio em  $\lambda$  entre soluções heterogêneas e homogênea para  $\Delta \approx 0.4$ .

Figura 5.34: ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: impacto do acréscimo de  $\approx 40\%$  de heterogeneidade no meio (exame 1). Dist. de heterogeneidade (5.34a, 5.34b, 5.34c, 5.34d); trajetórias de equilíbrio (5.34e) e desvios em módulo para o homogêneo (5.34f) de cada realização; trajetória de equilíbrio média (5.34g) e desvio médio em módulo (5.34h). Realizações (1 a 4), Média (Mean), Homogêneo (HM).

a organização do próprio material. Considera-se que esse comportamento estrutural tendencial foi efetivamente capturado nas simulações, não havendo o modelo material com heterogeneidades distribuídas afetado de maneira negativa a tradicional formulação constitutiva. Pelo contrário, de um ponto de vista superficial, atrelado a um exame visual ordinário, o acréscimo de uma fração reduzida de uma nova fase parece estabilizar o modelo numérico do exemplo em questão, eliminando dificuldades de convergência e captando integralmente, na maioria dos casos, todo o traçado da resposta gráfica buscada. Essa observação embora verdadeira, oculta algumas nuances: a posição em que as inclusões são alocadas é determinante na reação da estrutura, isto é, posicionando-se uma fase mais rígida em regiões de danificação dominante, naturalmente ocorrerá um retardamento ou interrupção da degradação da área; essa locação pode levar a concentração de tensões em outras regiões adjacentes e a um redirecionamento dos fluxos de tensão no interior do domínio, o que pode promover comportamentos estruturais distintos, desde aqueles com um trajetória de equilíbrio suave e bem comportada, até situações em que rompimentos frágeis repentinos ocorrem.

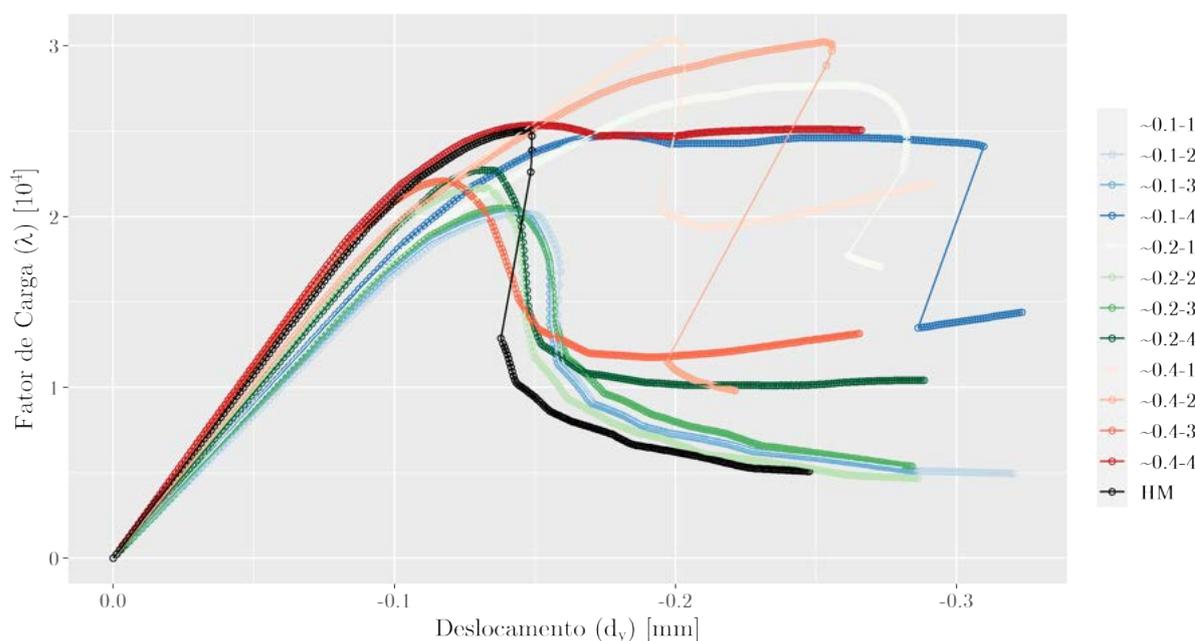


Figura 5.35: ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: comparativo de todas as trajetórias de equilíbrio obtidas ( $\sim \Delta$ - $Y$ ,  $\Delta$ : fração e  $Y$ : realização) (exame 1).

Pode-se facultar ainda que o modelo particulado empregado, mais do que uma abstração discricionária que, de início, acabou por impelir uma relação unívoca entre uma partícula e um elemento finito em razão de critérios metodológicos e operacionais, possa

ser uma representação de um elemento estrutural com concreto mal adensado, em que regiões contíguas de uma peça estejam com características consideravelmente distintas. Dada a conformação das regiões de inclusão, acredita-se que o modelo apresentado seja capaz de reproduzir o comportamento de estruturas com variação abrupta de propriedades elásticas em curtas distâncias do domínio, comportamento esse aleatório e relativamente imprevisível.

### 5.3.3.2 Exame 2: Avaliação da Influência da Fração de Heterogeneidades na Resposta Estrutural.

Para o desenvolvimento de avaliação qualitativa sobre a influência de  $\Delta$  na análise não linear em escala única realizaram-se simulações similares à passada: a partir de quatro frações de heterogeneidade,  $\Delta \approx 0.05$ ,  $\Delta \approx 0.10$ ,  $\Delta \approx 0.20$  e  $\Delta \approx 0.40$ , quatro tipos de análise não linear foram produzidos. Serão indicadas as evoluções dos campos de deslocamento, deformações e tensões, bem como da danificação do meio, e das trajetórias de equilíbrio.

Indiretamente, o exame anterior apontou para certos impactos do acréscimo de  $\Delta$  no traçado das trajetórias de equilíbrio de uma viga pequena de concreto simples fletida, e o comportamento médio computado será retomado adiante. Contudo, um exame inicial mais direcionado e com um controle distinto será apresentado nesta seção. Nos testes passados, a amostragem das posições para alocação de regiões heterogêneas no interior das vigas foi uma espécie de amostragem com reposição, ou seja, cada nova realização de distribuição poderia ter inclusões em posições idênticas. Para se averiguar o efeito do acréscimo sucessivo de uma nova fase, procurando-se reduzir o impacto das contingências impostas pela variação do posicionamento das inclusões, fixou-se a distribuição alcançada em cada uma das frações simuladas, amostrando-se somente as regiões adjacentes às partículas já posicionadas; ou seja, sendo  $\zeta$  uma distribuição de inclusões,  $\zeta(\Delta \approx 0.05) \subset \zeta(\Delta \approx 0.10) \subset \zeta(\Delta \approx 0.20) \subset \zeta(\Delta \approx 0.40)$ . Assim, houve a tentativa de se assegurar que os efeitos de posicionamento das menores frações estivessem inclusos nas maiores, e que somente o impacto do acréscimo em delta tivesse uma manifestação mais contundente no modelo. A figura 5.36 apresenta as composições internas utilizadas. Somente uma realização de cada  $\Delta$  foi utilizada.

Na escolha dos passos para apresentação dos campos de descolamento, deformação e tensão, bem como do dano, tentou-se fotografar as vigas em cada um dos três regimes

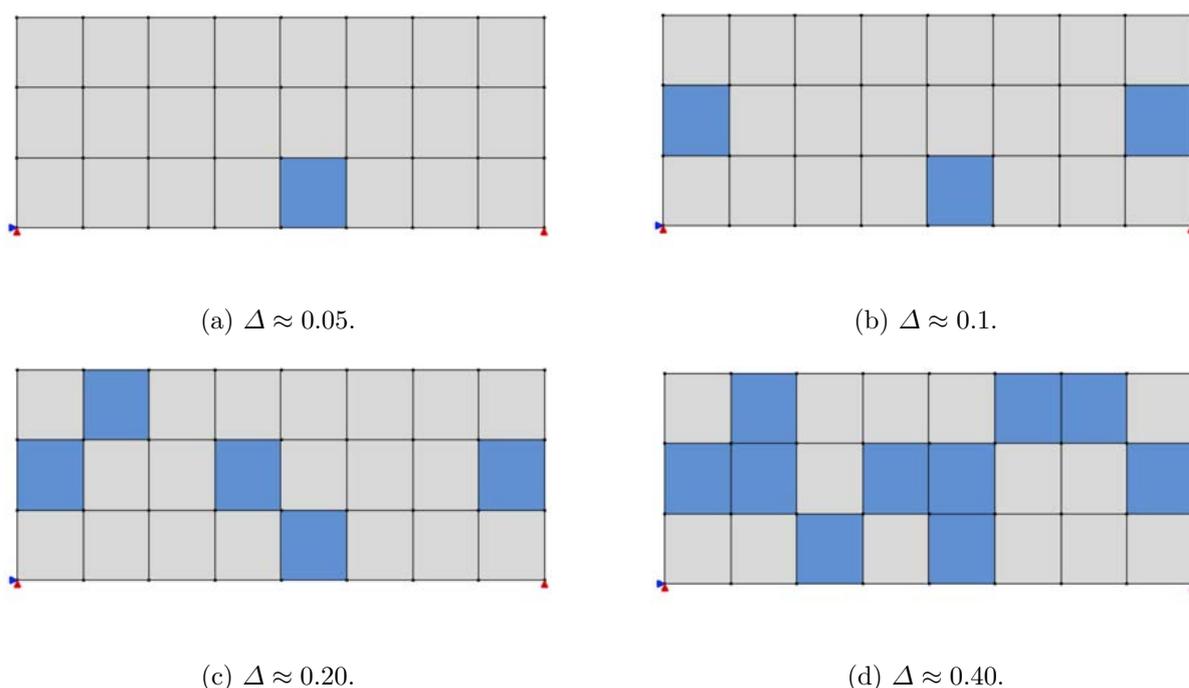


Figura 5.36: ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: distribuições ensaiadas (exame 2).  $\Delta \approx 0.05$  (5.36a),  $\Delta \approx 0.10$  (5.36b),  $\Delta \approx 0.20$  (5.36c) e  $\Delta \approx 0.40$  (5.36d). ■ Heterogeneidade, ■ Matriz.

admissíveis (elástico, *hardening* e *softening*) do modo mais homogêneo possível. Contudo, dadas as particularidades de cada espécimen, há uma natural variabilidade do início de cada fase do carregamento. Assim, por critérios metodológicos de garantia de equivalência entre grupos e validação interna, optou-se por fixar os passos de maneira arbitrária em estágios similares da análise, partindo-se das imediações do surgimento do dano, e abrangendo-se pontos relativamente equidistantes nas trajetórias.

Como base comparativa, o modelo HM é apresentado na figura 5.37. Os resultados dos modelos HT são registrados nas figuras 5.38, 5.39, 5.40, 5.41. Cada linha das composições representa uma grandeza, de cima para baixo: deslocamentos na direção  $y$ , deformações  $\varepsilon_{xx}$ , tensões  $\sigma_{xx}$  e variável de dano na direção principal 1  $D1$ . Da esquerda para direita, as colunas representam os passos 60, 150 e 225. Na legenda, há o cotejo dos valores limites de cada variável.

Na interpretação conjunta das figuras 5.37, 5.38, 5.39, 5.40, 5.41 a seguir, nota-se que a inclusão de heterogeneidade, assim como já observado anteriormente nos modelos lineares, distorceu o campo de deslocamentos e afetou razoavelmente as deformações e as tensões, induzindo trechos de concentração das grandezas derivadas muito característicos, que se relacionaram diretamente à quantidade de inclusões na peça e ao posicionamento

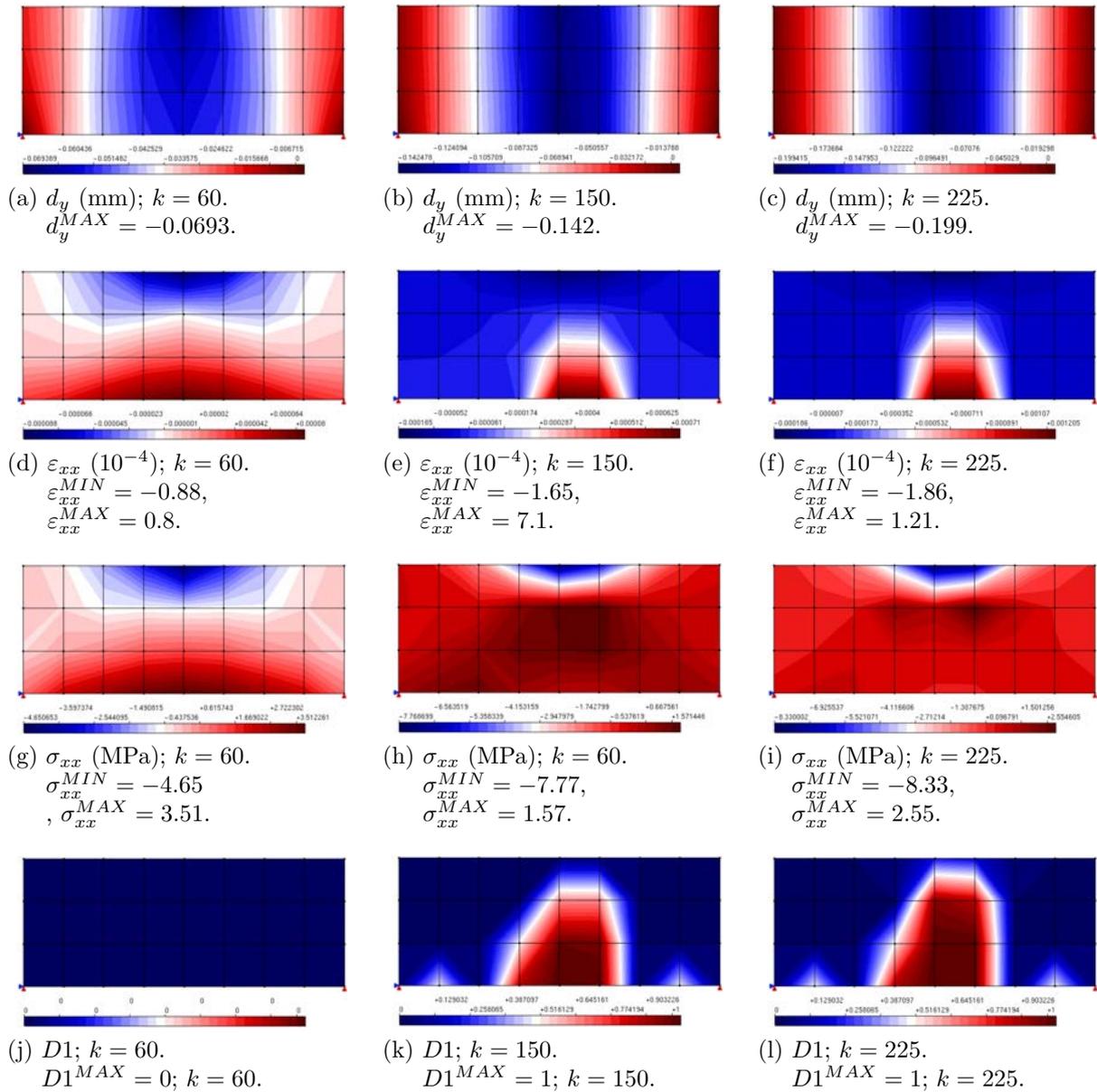


Figura 5.37: ANL-HM-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: solução da viga homogênea (caso 2). Deslocamentos (5.37a, 5.37b, 5.37c), deformações (5.37d, 5.37e, 5.37f), tensões (5.37g, 5.37h, 5.37i) e dano na primeira direção principal (5.37j, 5.37k, 5.37l). Coluna 1: passo 60; coluna 2: passo 150; coluna 3: passo 225.

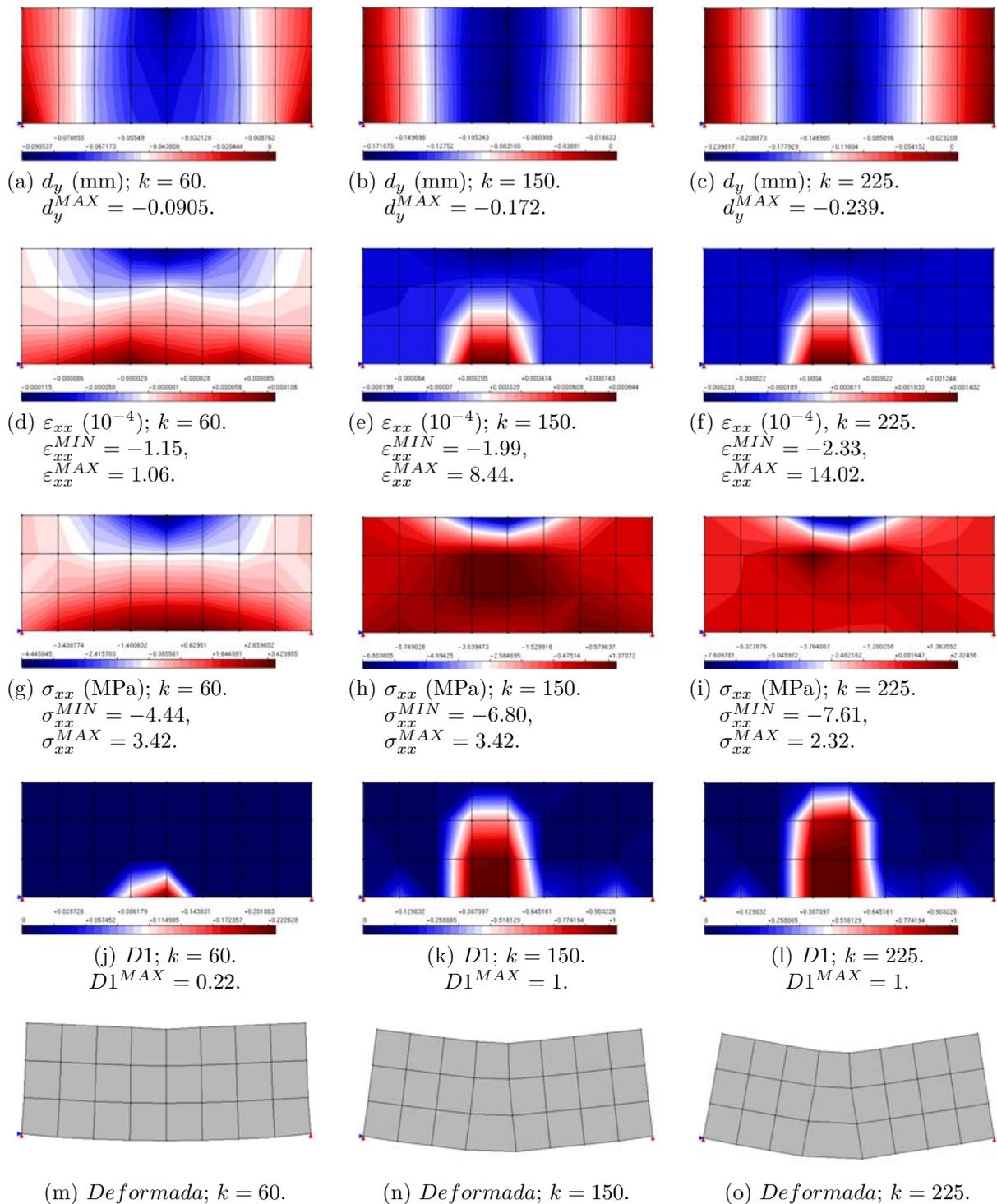


Figura 5.38: ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: impacto da variação da fração de heterogeneidade;  $\Delta \approx 0.05$  (caso 2). Deslocamentos (5.38a, 5.38b, 5.38c), deformações (5.38d, 5.38e, 5.38f), tensões (5.38g, 5.38h, 5.38i), dano na primeira direção principal (5.38j, 5.38k, 5.38l) e deformada (5.38m, 5.38n, 5.38o, 300:1). Coluna 1: passo 60; coluna 2: passo 150; coluna 3: passo 225.

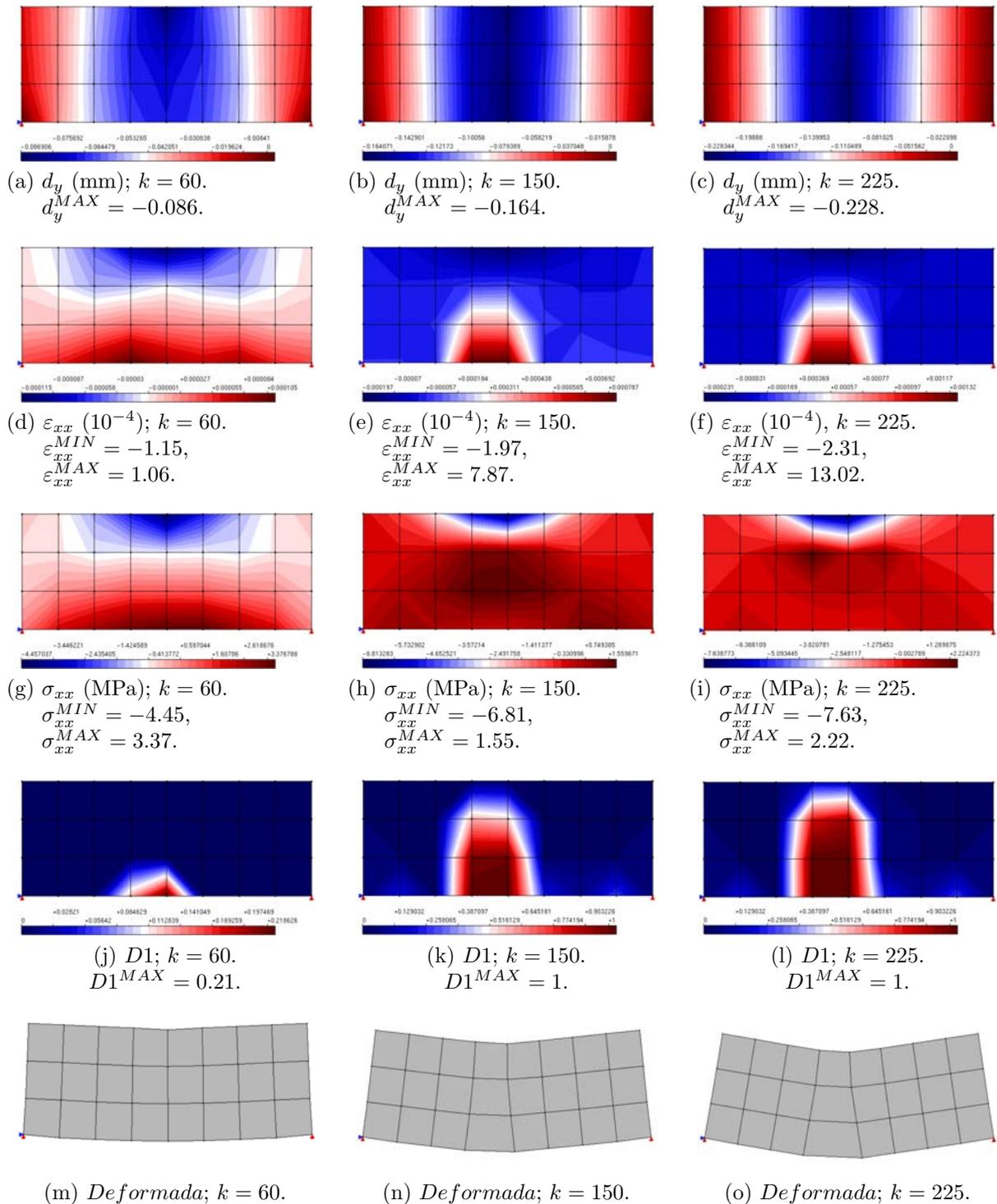


Figura 5.39: ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitanguiera (1998) Modificado: impacto da variação da fração de heterogeneidade;  $\Delta \approx 0.10$  (caso 2). Deslocamentos (5.39a, 5.39b, 5.39c), deformações (5.39d, 5.39e, 5.39f), tensões (5.39g, 5.39h, 5.39i), dano na primeira direção principal (5.39j, 5.39k, 5.39l) e deformada (5.39m, 5.39n, 5.39o, 300:1). Coluna 1: passo 60; coluna 2: passo 150; coluna 3: passo 225.

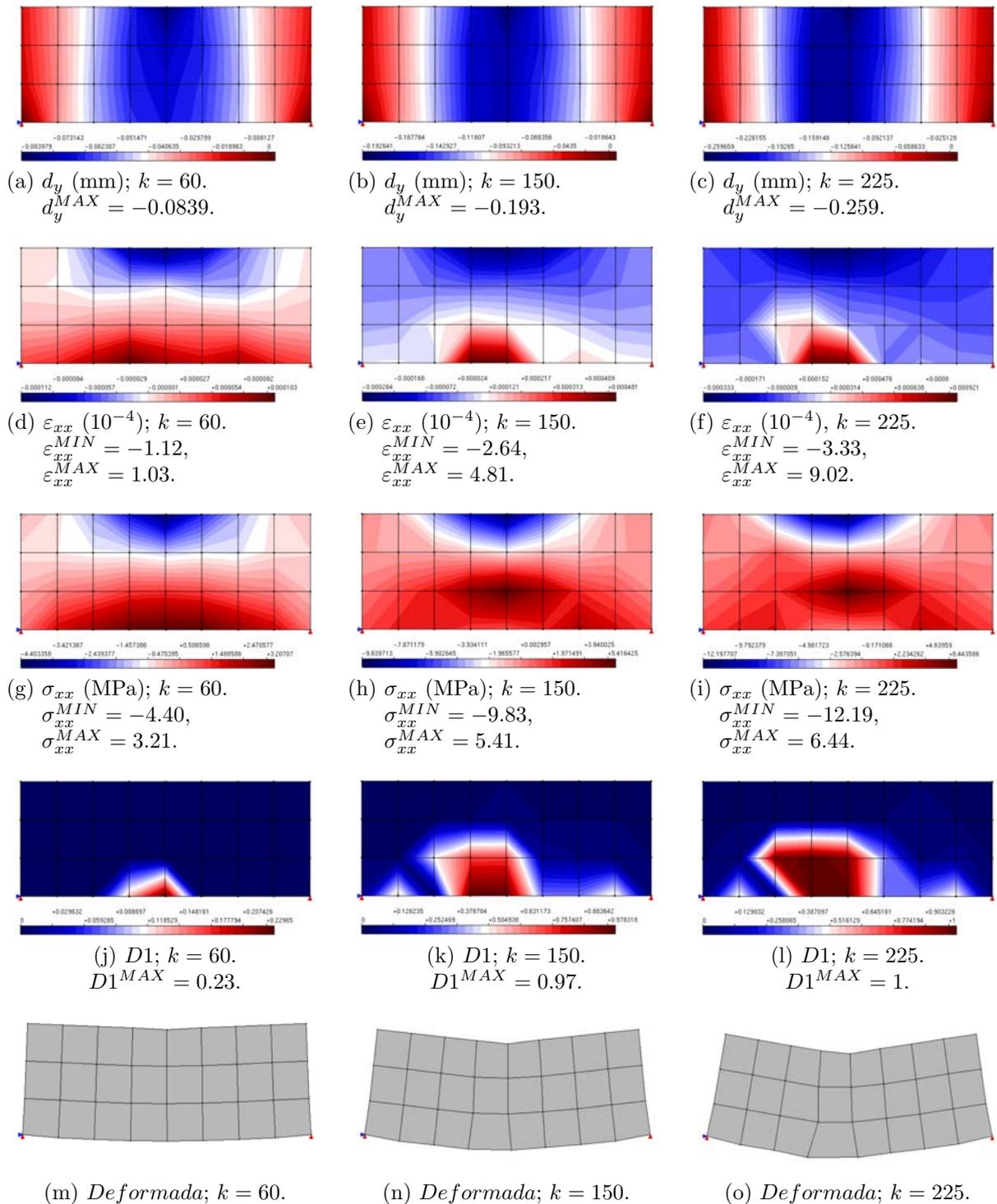


Figura 5.40: ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: impacto da variação da fração de heterogeneidade;  $\Delta \approx 0.20$  (caso 2). Deslocamentos (5.40a, 5.40b, 5.40c), deformações (5.40d, 5.40e, 5.40f), tensões (5.40g, 5.40h, 5.40i), dano na primeira direção principal (5.40j, 5.40k, 5.40l) e deformada (5.40m, 5.40n, 5.40o, 300:1). Coluna 1: passo 60; coluna 2: passo 150; coluna 3: passo 225.

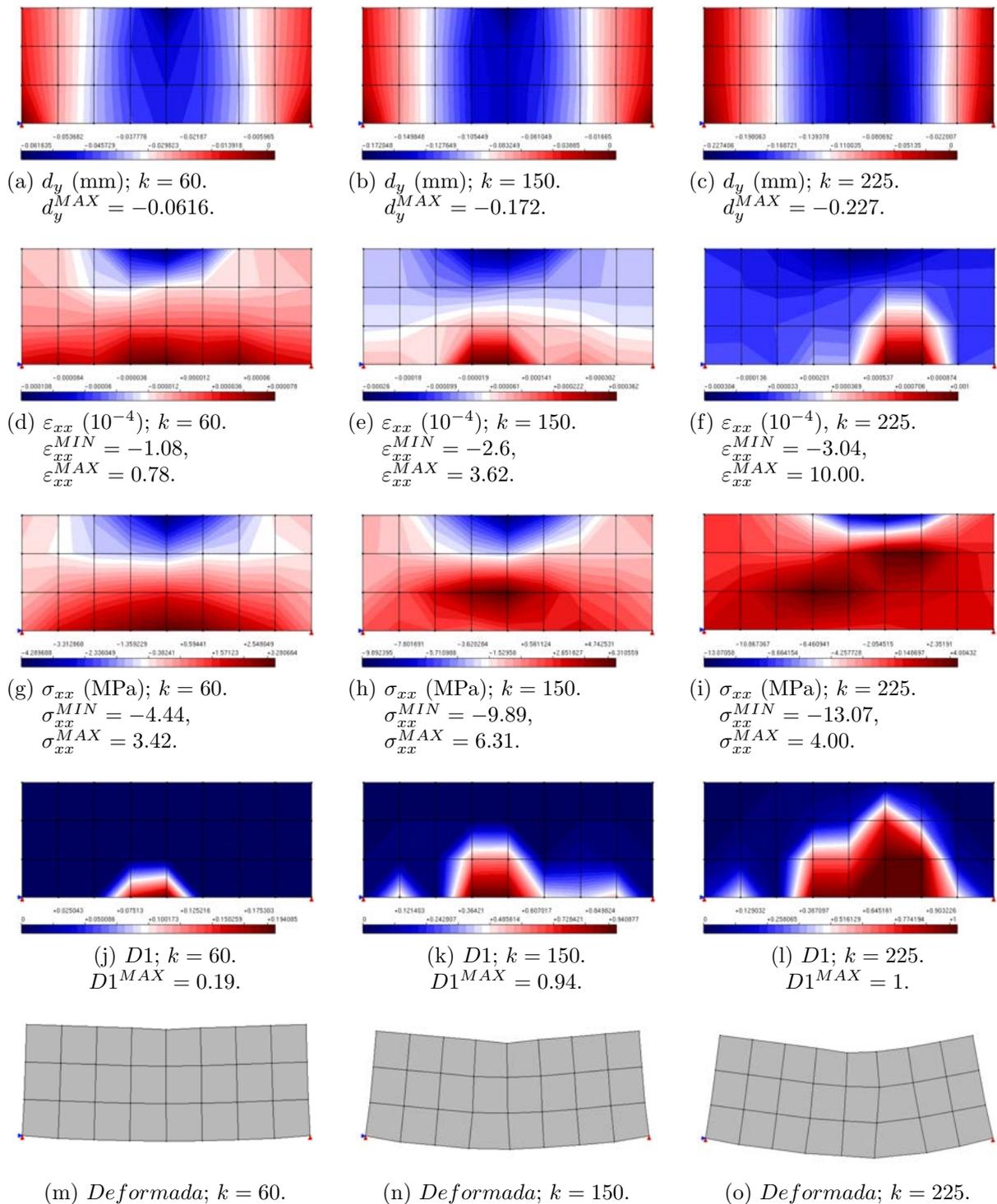


Figura 5.41: ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – [Penna \(2011\)](#); [Pitangueira \(1998\)](#) Modificado: impacto da variação da fração de heterogeneidade;  $\Delta \approx 0.40$  (caso 2). Deslocamentos (5.41a, 5.41b, 5.41c), deformações (5.41d, 5.41e, 5.41f), tensões (5.41g, 5.41h, 5.41i), dano na primeira direção principal (5.41j, 5.41k, 5.41l) e deformada (5.41m, 5.41n, 5.41o, 300:1). Coluna 1: passo 60; coluna 2: passo 150; coluna 3: passo 225.

delas. As deformações no primeiro terço da análise (passo 60) das vigas HT foram muito próximas entre si (e à variante HM), tendendo a diminuir ligeiramente com o aumento de  $\Delta$ , indicando que os regimes elásticos de todas as variações se sobrepõe. Considerações análogas podem ser feitas para as demais variáveis. Nos outros passos destacados, as informações registradas sugerem que cada viga se encontra em estágios distintos do seu carregamento, de tal sorte que o meio aparentou responder de maneiras particulares à evolução da carga (logicamente), e que, portanto,  $\Delta$  tem sua parcela de interferência no comportamento estrutural.

Considerando que matriz cimentícia no modelo HT é ligeiramente menos resistente que a mistura homogênea e que as inclusões afetam as variáveis de campo, houve uma aparente tendência de antecipação da danificação do meio na variante HT.

Embora tenha existido um início mais prematuro do dano, a localização de deformações no modelo numérico foi ligeiramente retardada, ou seja, mesmo a matriz degradando de modo relativamente mais acelerado, o fenômeno característico da localização de deformações do modelo constitutivo foi disparado em passos cada vez mais tardios, à medida que  $\Delta$  crescia, aspecto que pode ser notado, por exemplo, na avaliação de  $\varepsilon_{xx}$  dos passos 150 (na variante HM, em  $k = 150$  já havia ocorrido localização, ao passo que para  $\Delta = 0.2$ , a localização ainda estava na iminência – ver figs. 5.38e, 5.39e, 5.40e, 5.41e). Esse fato, entretanto, é mais de natureza mecânica que de regularização do modelo numérico, não constituindo-se em alternativa para essa finalidade (inferre-se). A fase adicional, tendo propriedades elásticas de maior monta, sobretudo o módulo de elasticidade ( $E^H$ ), a resistência à compressão ( $f_c^H$ ) e a resistência à tração ( $f_t^H$ ), parece comandar o espectro compressivo das solicitações, permitindo com que valores mais elevados de tensões normais negativas sejam alcançados (notar a diferença entre  $\Delta$ s consecutivos), e aparenta induzir esforços de tração moderadamente mais elevados na matriz (figs. 5.38h, 5.39h, 5.40h, 5.41h, p.ex.), que, por sua vez, rege a danificação da estrutura.

Nesse sentido, portanto, o caminho preferencial de propagação da banda de fissuração distribuída esteve amarrado à disposição da matriz. Ao se avaliar cada variante, observa-se que à medida que  $\Delta$  aumenta, e, portanto, mais regiões com propriedades elásticas distintas surgem no meio, o ponto de origem do dano translada e se propaga tentando contornar as zonas de inclusão. Essa característica é evidenciada nos diagramas descontínuos da variável de dano na primeira direção principal (figura 5.42). De maneira

contundente, os diagramas mostram a interferência das inclusões na propagação da banda de fissuração. Zonas de danificação iniciaram-se em regiões compostas pela fase primária (matriz) e com maior sollicitação por esforços de tração. À medida que a carga proporcional aumentou, o dano progrediu e induziu a degradação das adjacências. A fissuração cruzou elementos mais frágeis, contornando (quase sempre) as regiões com fase secundária (heterogeneidade). Interessante notar o efeito das inclusões no surgimento de novas frentes de fissuração. Na figura 5.42o, por exemplo, após degradar a base da seção central da viga e encontrar pontos adjacentes com um material mais rígido, a fissuração alcançou uma seção acessória e concentrou-se nessa nova faixa, evoluindo progressivamente até a localização de deformações eclodir.

Para uma comparação numérica minimamente mais robusta e clara, utiliza-se adiante o critério de Von Mises para cômputo de uma tensão equivalente com base nas tensões principais nos pontos materiais. Uma vez que essa tensão é sempre positiva e guarda relação com a evolução histórica da carga proporcional, valores máximos calculados através desse critério servem melhor ao propósito de base comparativa. Essas tensões últimas são apresentadas na tabela 5.5 e as isofaixas com a distribuição ponto-a-ponto dessa grandeza, para os passos 60, 150 e 300, estão na figura 5.43.

Tabela 5.5: Impacto da variação de  $\Delta$  no comportamento estrutural de vigas em flexão: tensões de von Mises máximas absolutas em cada variante de análise.

	Variante				
	<i>HM</i>	<i>HT</i> ( $\Delta \approx 0.05$ )	<i>HT</i> ( $\Delta \approx 0.10$ )	<i>HT</i> ( $\Delta \approx 0.20$ )	<i>HT</i> ( $\Delta \approx 0.40$ )
$\sigma_{VM}^{MAX}$ (MPa)	8.9818	8.2358	7.9497	11.6020	18.9756

Dos resultados apresentados neste conjunto inicial do exame 2, tendências e conclusões peremptórias são mais restritas, ou seja, notam-se algumas projeções quanto à capacidade resistente e à evolução da fissuração, sobretudo. Entretanto, considera-se que a afirmação da existência de padrões de proporcionalidade evidentes da relação de  $\Delta$  com os deslocamentos, deformações ou tensões seja precipitada. Embora perceba-se uma distinção clara nos extremos da faixa experimental (isto é, *HM* – ou *HT*( $\Delta \approx 0.05$ ) – e *HT*( $\Delta \approx 0.40$ )), o que sugere que vigas com frações  $\Delta$  maiores tenham uma capacidade resistente superior, o efeito de  $\Delta$  entre esses marcos é nublado.

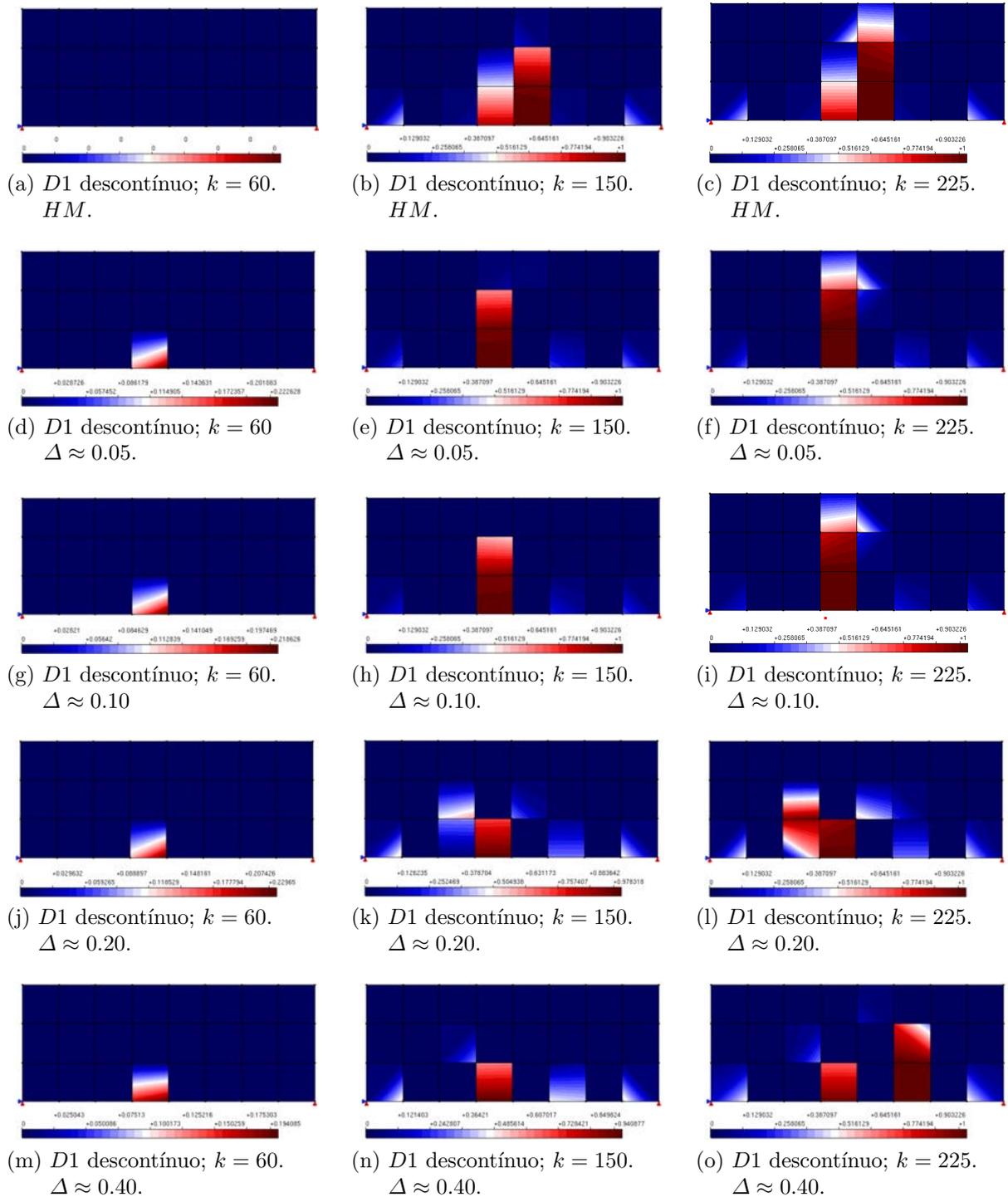


Figura 5.42: ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: propagação da banda de fissuração (caso 2). Dano (descontínuo) na primeira direção principal de cada proporção de heterogeneidade (linhas) nos passos 60, 150 e 225 (colunas).

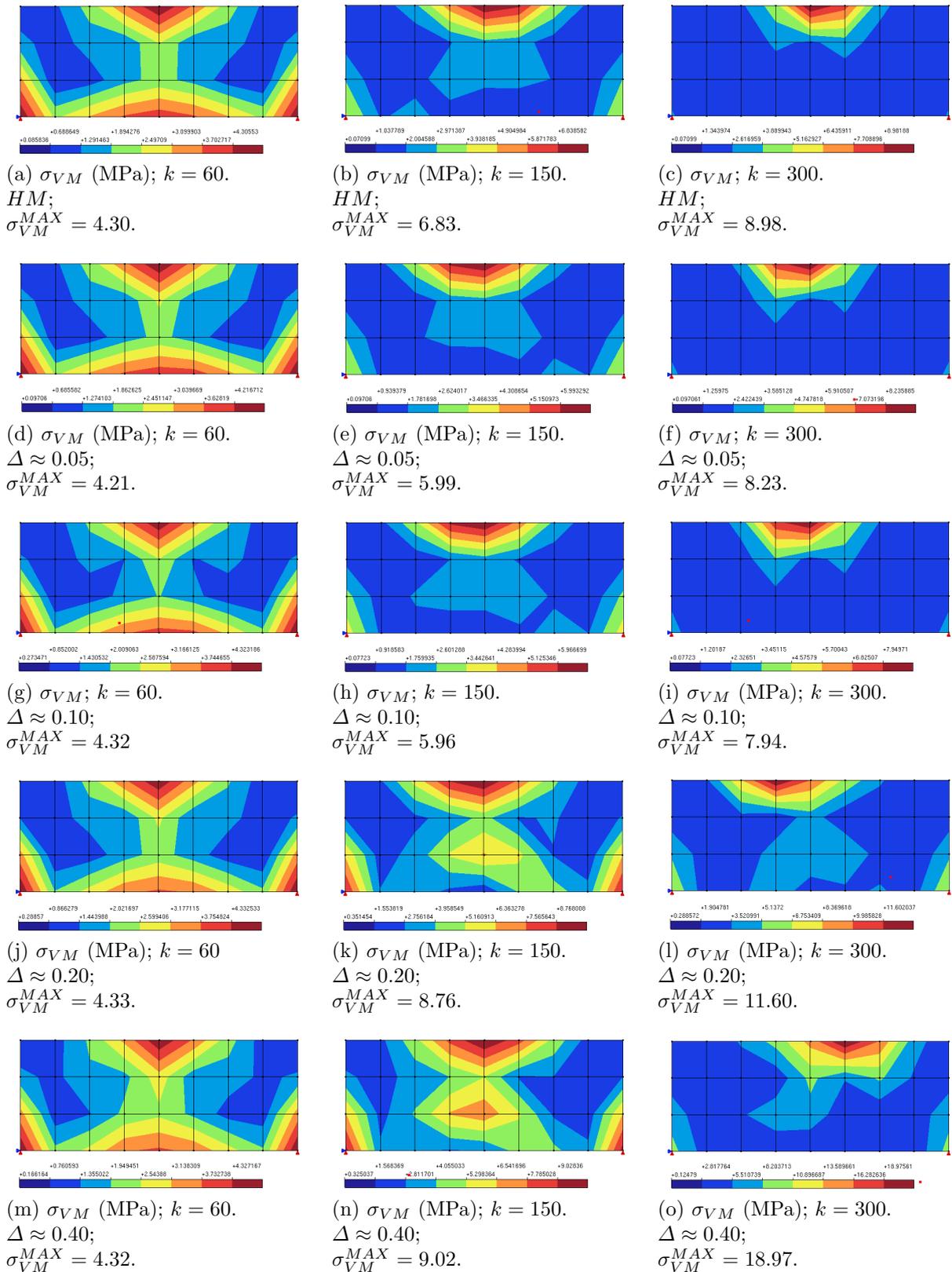
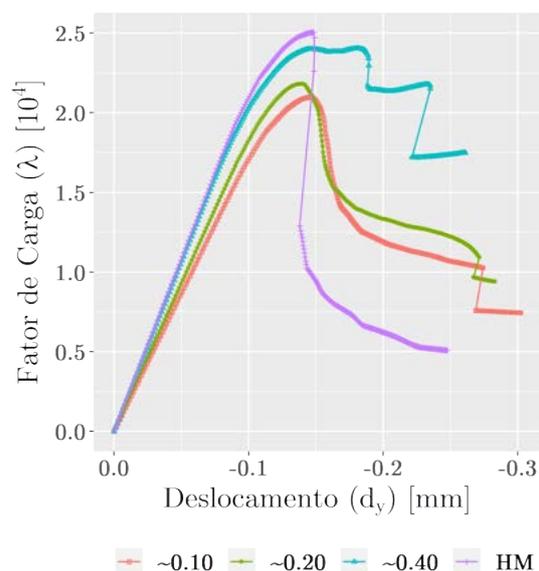
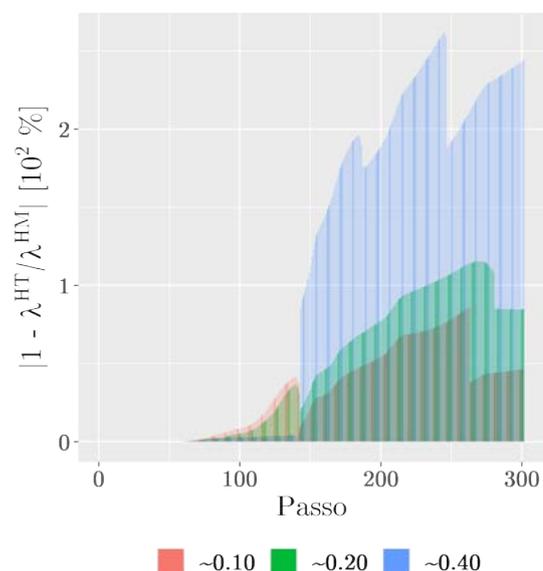


Figura 5.43: ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: tensão equivalente de Von Mises ( $\sigma_{VM}$ ) para cada proporção de heterogeneidade (linhas) nos passos 60, 150 e 300 (colunas) (caso 2).

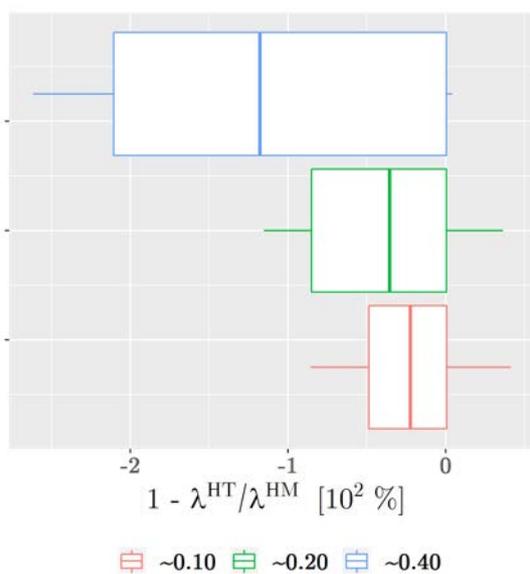
Para aprimorar a análise, retomam-se os resultados do exame 1, e avaliam-se as trajetórias de equilíbrio médias de cada composição material sugerida no teste passado, relevando-se, portanto, a fração de 5%.



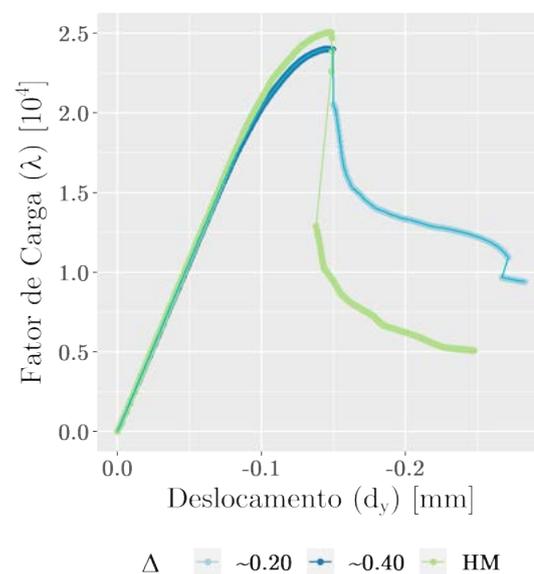
(a) Comparativo das trajetórias de equilíbrio médias das realizações do caso 1.



(b) Desvios percentuais médios (em módulo) em  $\lambda$  entre soluções heterogêneas e homogêneas.



(c) Box-plot dos desvios médios para cada  $\Delta$ .



(d) Trajetória de equilíbrio híbrida composta com base nos comportamentos médios de cada fração de inclusão.

Figura 5.44: ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: comportamento estrutural médio para cada fração de heterogeneidade (caso 2). Trajetórias médias (5.44a), desvios médios em módulo (5.44b), distribuição do desvio (5.44c), trajetória de equilíbrio híbrida (5.44d).

Na figura 5.44 são ilustrados os comportamentos médios das vigas com diferentes

constituições. As trajetórias de equilíbrio médio das quatro realizações de cada uma das estruturas simuladas com  $\Delta \in \{0.10, 0.20, 0.40\}$  são apresentadas em paralelo (5.44a), ao lado do perfil médio dos desvios entre as variantes HT e HM (5.44b). Em 5.44c há a avaliação gráfica da tendência central desses desvios. Finalmente, em 5.44d apresenta-se uma trajetória de equilíbrio híbrida, integrada por um trecho em *hardening* e um trecho em *softening* característicos de uma dada composição mais representativa do comportamento homogêneo.

Evocando as análises estruturais do início desta seção e reavaliando-as à luz das trajetórias médias da fig. 5.44a, percebe-se que o acréscimo das inclusões de fato enrijece a viga, trazendo o comportamento estrutural, antes de uma matriz cimentícia, cada vez mais próximo do desempenho limite da estrutura homogênea (composta por uma mistura que leva em consideração diferentes fases no cômputo das propriedades elásticas). À proporção do aumento da fração de inclusões, os regimes elástico e de *hardening* da estrutura explicitamente heterogênea tenderam àquele da variante homogeneizada e, em contrapartida, o regime de *softening* divergiu do amolecimento da viga homogênea (fig. 5.44a), de modo que as vigas HT ( $\Delta \approx 0.40$ ) apresentaram desvios globais de HM maiores que os das demais (figs. 5.44b e 5.44c). Estruturas com menores frações de agregados e, portanto, com predomínio da matriz, levam a terços finais da análise não linear mais próximos do comportamento de uma mistura.

Visualmente percebe-se que trechos de trajetórias de vigas com composições diferentes se aderem de maneiras particulares ao comportamento homogeneizado. Hibridizando as respostas estruturais da figura 5.44a através da avaliação do perfil de desvios percentuais, consegue-se construir uma trajetória composta por ramos ascendente e descendente de origens distintas, conforme ilustrado na figura 5.44d. De um modo geral, esses resultados numéricos reforçam a ideia de que a etapa de descarregamento da estrutura seja comandada por uma fase alusiva a uma matriz cimentícia e que uma fase material secundária destaque-se na etapa de carregamento.

### 5.3.3.3 Exame 3: Avaliação do Impacto do Refinamento de Malha

De modo a avaliar a influência combinada da inclusão da heterogeneidade no modelo numérico e do refinamento da discretização, propõe-se um exame adicional. Aqui, as distribuições do exame 2 (figura 5.36) foram simuladas utilizando-se o segundo *template* de malha da configuração experimental 5.4.

Como ferramenta de análise, três variáveis foram empregadas em análises comparativas entre os modelos com 24 e 96 elementos: a evolução da banda de fissuração, as tensões de von Mises no último passo da simulação e as trajetórias de equilíbrio.

A seguir, registram-se isoladamente alguns resultados do modelo refinado. Na figura 5.45 há o histórico da variável de dano em uma direção principal ( $D1$ ) e as tensões equivalentes ao final da análise estrutural. Similarmente ao que já foi apresentado neste texto, a composição apresenta em cada uma de suas linhas as diferentes frações de heterogeneidade, partindo-se da viga homogênea até a versão  $HT(\Delta \approx 0.40)$ ; as três colunas iniciais refletem, da esquerda para a direita, os estágios de danificação do meio nos passos 60, 150 e 225; a última coluna faz referência às tensões de von Mises no 300º passo.

Do mesmo modo que nos testes anteriores realizados com uma malha mais grosseira, na análise com uma malha refinada a propagação do dano obviamente seguiu caminhos preferenciais de maior sollicitação, desviando o traçado ao ser interrompida por uma inclusão. Entretanto, no segundo tipo de malha, em razão de sua maior resolução não só numérica (ou seja, de refinamento da aproximação), mas também espacial (cobrir topologicamente o domínio com “retalhos” menores), houve uma ligeira tendência de maior simetria na degradação (ver 5.42c e 5.45d, por exemplo). Tensões de von Mises apresentaram distribuições coerente e análogas às do exemplo anterior, embora com variações nos módulos.

Na figura 5.46 traça-se um paralelo entre os estágios de fissuração da viga simulada com 24 e 96 elementos finitos, discriminadas por constituições internas. Conforme dito, fenomenologicamente há uma relativa sobreposição espacial das bandas de fissuração, sobretudo para as situações em que as vigas são mais homogêneas. Contudo, versões da variante heterogênea com maiores frações da fase secundária, que fatalmente possuem inclusões em zonas de maior sollicitação e no caminho potencial do dano, desenvolveram um comportamento distinto quando da alteração da malha. Mormente no caso de  $\Delta \approx 0.20$ , os desvios das bandas de fissuração nas adjacências da inclusão central foram distintos nas discretizações 1 e 2: na primeira, há uma aparente mudança de direção à esquerda; na segunda, o desvio se concentra predominantemente à direita (figs. 5.46m e 5.46n). Na mesma linha, as versões  $HT(\Delta \approx 0.40)$  divergiram ao se refinar a malha (figs. 5.46p e 5.46q). Na malha mais grosseira, há um acúmulo de energia de deformação na tentativa de transpor uma zona de heterogeneidade que é dissipado em uma nova franja de degradação,

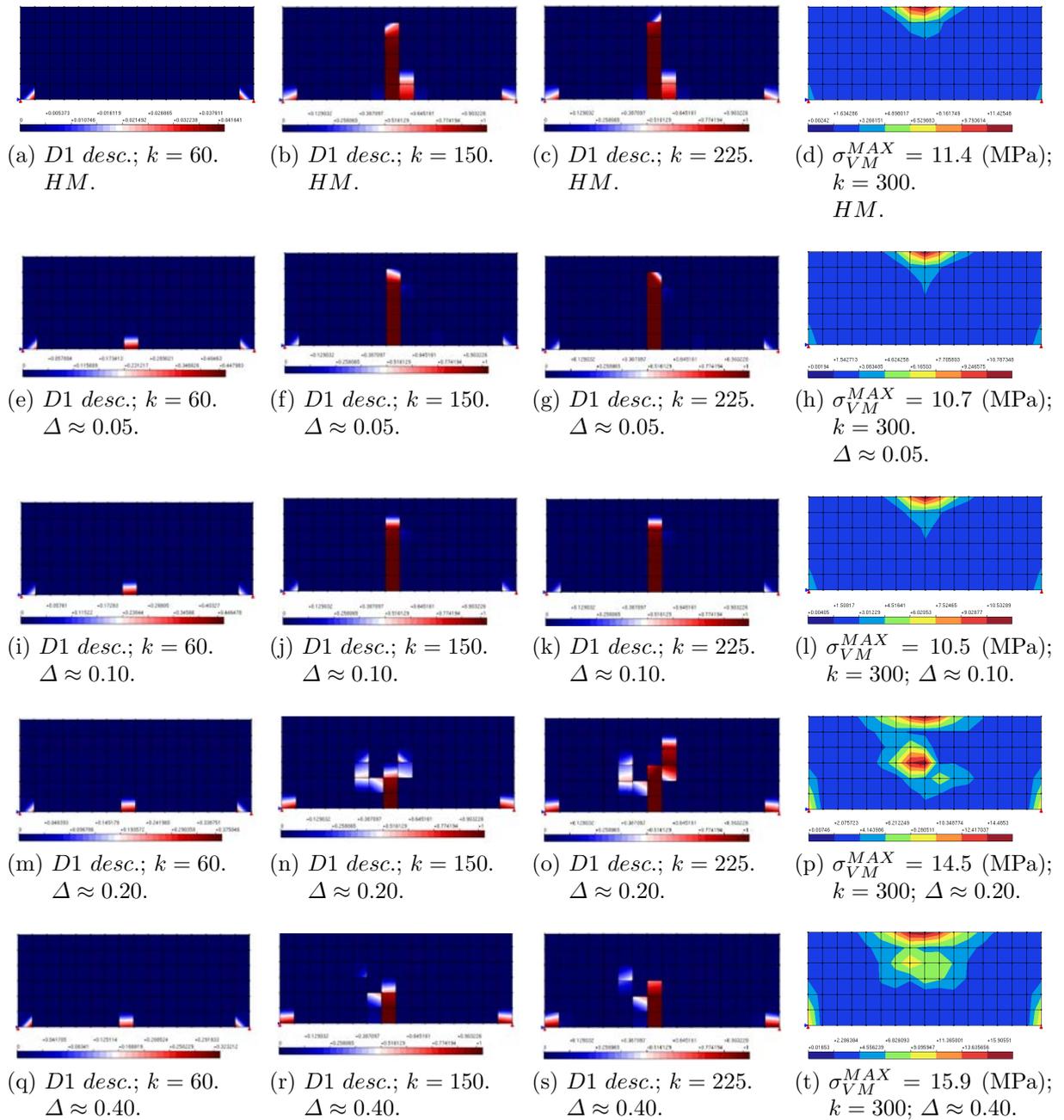


Figura 5.45: ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: propagação da banda de fissuração ao longo da evolução do carregamento e tensões de von Mises ao final da análise (caso 3). Colunas 1 a 3: passos 60, 150 e 225; coluna 4: tensão de von Mises; linhas: variante homogênea e versões heterogêneas.

associada a um processo de localização de deformações repentino. Em contrapartida, não se evidencia um comportamento semelhante na malha refinada.

As divergências verificadas na variável de dano se prolongam às tensões, isto é, houve diferenças numéricas e qualitativas entre as tensões equivalentes das duas versões de malha ao final da análise estrutural. Na malha com 96 elementos, notam-se tensões superiores à exceção da última versão da estrutura.

Tabela 5.6: Impacto da variação de  $\Delta$  e do refinamento no comportamento estrutural de vigas em flexão: tensões de von Mises máximas absolutas em cada variante de análise.

	Variante				
	<i>HM</i>	<i>HT</i> ( $\Delta \approx 0.05$ )	<i>HT</i> ( $\Delta \approx 0.10$ )	<i>HT</i> ( $\Delta \approx 0.20$ )	<i>HT</i> ( $\Delta \approx 0.40$ )
$\sigma_{VM}^{MAX,24}$ (MPa)	8.9818	8.2358	7.9497	11.6020	18.9756
$\sigma_{VM}^{MAX,96}$ (MPa)	11.425	10.7873	10.5328	14.4853	15.9055

As trajetórias de equilíbrio de cada viga testada são apresentadas na figura 5.47 isoladamente (5.47e) e em paralelo aos resultados obtidas com a malha grosseira para as mesmas composições de heterogeneidade (5.47f).

Particularmente às trajetórias individuais, negrita-se o traçado da curva *HT*( $\Delta \approx 0.20$ ), no qual pode-se observar a interação entre inclusões e a propagação do dano. O carregamento solicita zonas iniciais com a fase primária (matriz) até a fissuração integral desta (primeira inflexão na trajetória). A partir daí, ao encontrar uma inclusão, há um acúmulo de energia e conseqüente pico. Ao contornar a fase secundária, o dano degrada as adjacências da banda de fissuração e propaga, com o domínio descarregando progressivamente e refletindo um ramo descendente na trajetória.

Numa avaliação intrafrações, os contornos das trajetórias das variantes com 24 e 96 elementos finitos foram similares, à exceção de  $\Delta \approx 0.40$ , cujas curvas diferiram de modo mais vultoso. Naturalmente, os desvios de pico entre soluções progressivamente refinadas, característicos do modelo constitutivo empregado, também foram observados nas simulações realizadas, de modo que a inserção de uma outra fase não interferiu consideravelmente nesse comportamento. Apesar dos traçados das trajetórias em pares refinado-grosseiro e grupos  $\Delta$  apresentarem suas dissimilitudes pontuais, globalmente nota-se uma homogeneidade nos desvios entre picos das soluções via malha refinada e malha grosseira. Sob os

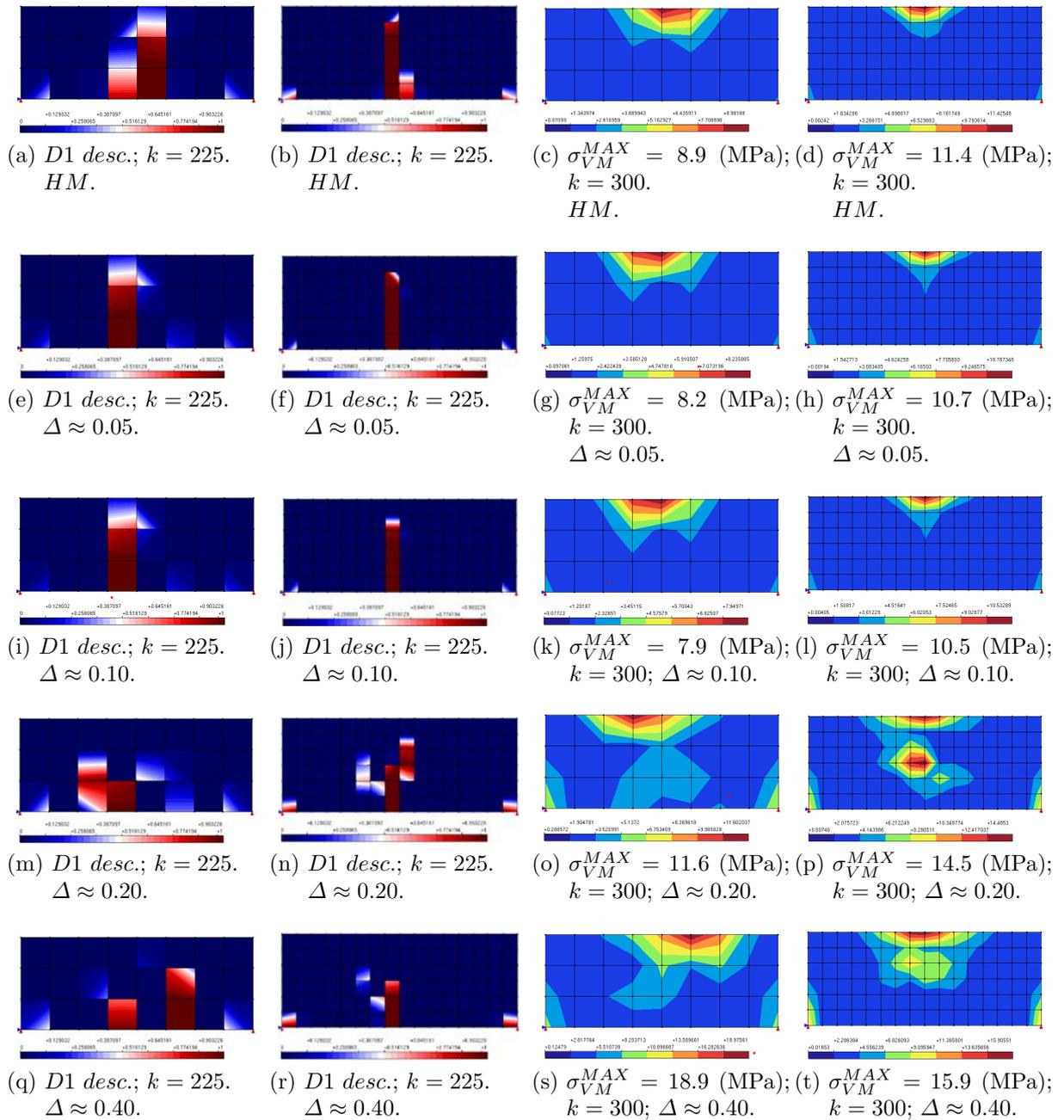


Figura 5.46: ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: avaliação do impacto da malha em uma análise com heterogeneidade; comparativo entre malhas 5.4c e 5.4d (caso 3). Colunas 1 e 2: dano; colunas 3 e 4: tensões; linhas: variante homogênea e versões heterogêneas.

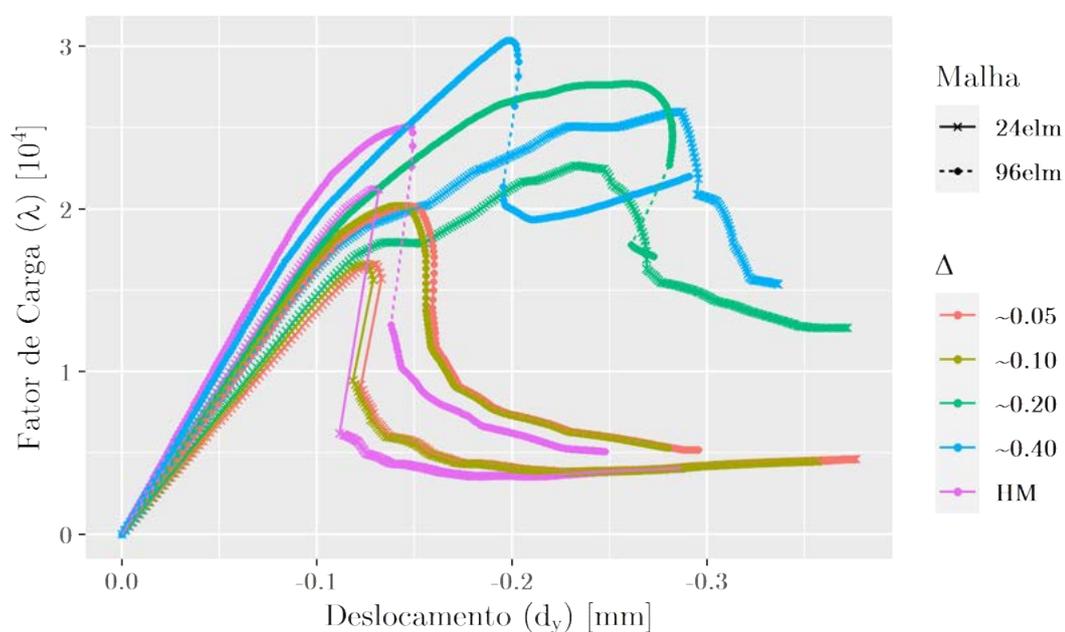
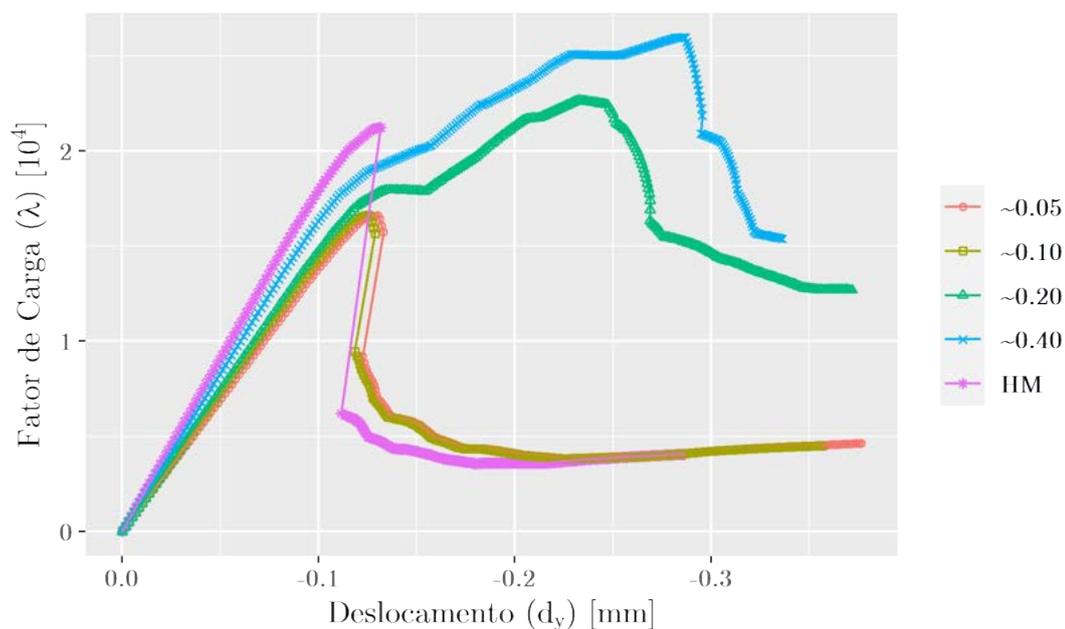
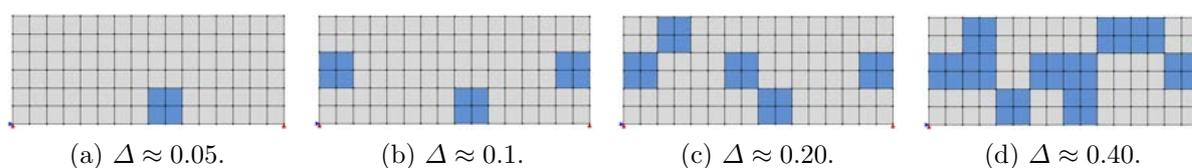


Figura 5.47: ANL-HM/HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitanguieira (1998) Modificado: impacto do refinamento de malha em simulações com heterogeneidade (caso 3). Inclusões (5.47a a 5.47d), trajetórias via malha refinada (5.47e) e comparativo entre malha refinada e malha grosseira para mesmas composições internas.

limites experimentais do teste, as razões dos fatores de carga máximos das curvas refinadas ( $\lambda^{96}$ ) e grosseiras ( $\lambda^{24}$ ) de cada grupo  $\Delta$  ficaram no intervalo 0.822-0.855 (tabela 5.7), indicando uma potencial existência de relação numérico-empírica que associe as respostas estruturais de modelos com distintos refinamentos.

Tabela 5.7: Fatores de carga máximos ( $\lambda$ ) para cada refinamento de malha (24 e 96) e grupo  $\Delta$ .

	Variante				
	<i>HM</i>	<i>HT</i> ( $\Delta \approx 0.05$ )	<i>HT</i> ( $\Delta \approx 0.10$ )	<i>HT</i> ( $\Delta \approx 0.20$ )	<i>HT</i> ( $\Delta \approx 0.40$ )
$\lambda^{24}$	25044	20192	20212	27705	30365
$\lambda^{96}$	21227	16601	16635	25969	25969
$\lambda^{96}/\lambda^{24}$	0.847	0.822	0.823	0.818	0.855

Partindo-se do princípio que o comportamento mecânico de um sólido seja único e constante sob características materiais e geométricas fixas, considerações de homogeneidade e carregamentos e restrições não variáveis (do contrário a Física Básica não teria validade), e que o refinamento de malha seja apenas, em teoria, o acréscimo de mais pontos para interpolação de uma superfície de resposta e que, portanto, à medida que aumenta, melhora a aproximação, qualquer alteração no sentido contrário ao da manutenção dos valores calculados com uma dada malha de EF ou da aproximação desses valores à uma solução de referência é exógena à física do problema e à formulação numérica utilizada nos cálculos, isto é, o abatimento de uma trajetória de equilíbrio em razão de um refinamento de malha não se deve ao comportamento da estrutura em si, ou do método numérico utilizado para resolução de seu PVC, mas sim às hipóteses fundamentais do modelo constitutivo utilizado. Nesse sentido, assumindo-se que, por exemplo, uma dada resposta estrutural calculada com o modelo menos refinado se encaixasse em um solução de referência ou se enquadrasse em critérios analíticos pré-estabelecidos (de resistência, por exemplo), não parece absurdo cogitar a existência de algum mecanismo que eventualmente possa ajustar um modelo com malha mais refinada em direção à resposta de referência. Considera-se, portanto, que os desvios que surjam possam ser corrigidos de maneira também exógena e *a posteriori*, isto é, uma trajetória de equilíbrio (representativa da evolução de um grau de liberdade com o carregamento, ou mais precisamente, de um comportamento estrutural) poderia ser corrigida através de alguma função numérico-empírica que permitisse a equivalência de soluções obtidas com variações nos parâmetros básicos do modelo numérico

(como o tamanho do EF). Aqui, ao se referir a uma relação dessa natureza, tem-se em mente (por ora) razões ou funções que possam equiparar respostas gráficas para fins de modelagem virtual de materiais e obtenção, por exemplo, de leis de correção para modelos com características materiais e formulação constitutiva equivalentes, mas graus de refinamentos distintos.

Avançando ligeiramente nesse sentido, exemplifica-se a seguir um estudo preliminar para construção daquilo que se definiu aqui como um mecanismo de correção *a posteriori* de trajetórias de equilíbrio. Uma proposição simplificada assumiu os seguintes pressupostos:

- Correção do abatimento via razão de pico:

$$\Delta = \lambda^{96} / \lambda^{24} = 0.8,$$

para todas as variedades.

- Correção dos deslocamentos via regressão linear empírica:

$$|d_y^{96} - d_y^{24}| = a \times k + b,$$

$k = \text{passo}$ ,  $a, b = \text{coeficiente regressão e intercepto}$ .

As curvas de regressão estabelecidas para cada variante do teste são apresentadas na figura 5.48. Notam-se ajustes com qualidade razoável ( $0.77 < R^2 < 0.88$ ), intervalos de confiança estreitos, uma potencial equivalência entre as retas e a possibilidade de escolha de uma única regressão para correção de todos os grupos  $\Delta$ . Na figura 5.49 registram-se as curvas originais e a correção feita na trajetória do modelo mais refinado de modo a equiparar as duas respostas gráficas.

Para os dados levantados e as análises realizadas, a correção nas abscissas se mostrou sem grande impacto na maioria das situações, reflexo da relação simplificada proposta. Pequenas perturbações localizadas se apresentaram, mas sem comprometimento do traçado global da trajetória. Curvas antes mais dissimilares, se mostraram relativamente coincidentes (como o caso de  $\Delta \approx 0.20$ ; fig. 5.49c).

Embora as observações não sejam conclusivas em razão da extensão mais restrita do ensaio (sobretudo estatística), a combinação do refinamento de malha com a incorporação

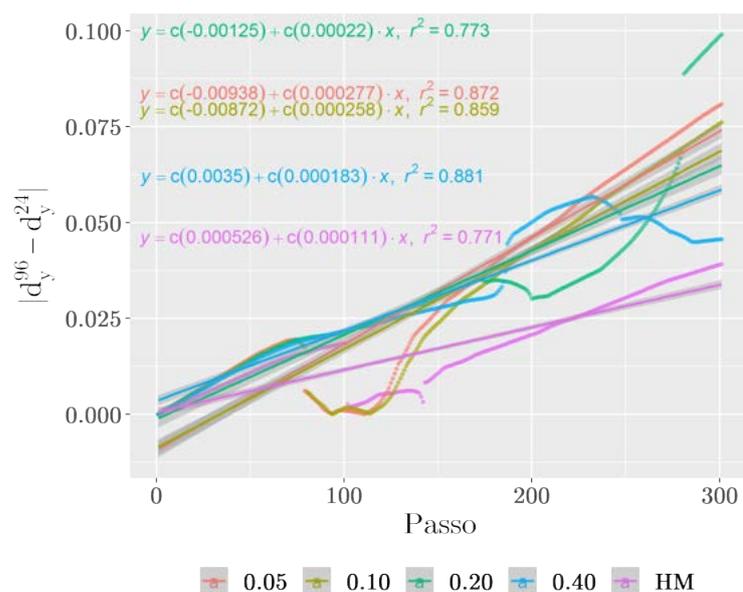


Figura 5.48: Retas de regressão  $|d_y^{96} - d_y^{24}| = a \times k + b$  (ou  $y = ax + b$ ) para ajuste dos deslocamentos das trajetórias.

do comportamento estrutural contingente via representação material variável, avança a possibilidade de produção de algum tipo de relação que possa virtualmente incorporar quesitos de objetividade a um modelo numérico equivalente ao utilizado.

Reitera-se que só se foi possível identificar uma relação entre repostas estruturais de diferentes refinamentos de malha, pois introduziu-se uma variável adicional na análise, a distribuição de inclusões, que alterou o modelo material localmente, relaxando o critério de homogeneidade do meio, sem modificar o modelo constitutivo ou o tipo de lei tensão-deformação, e preservando, portanto, a natureza do material utilizado e as características físicas do problema.

#### 5.3.3.4 Exame 4: Avaliação do Impacto do Acréscimo de Nova Fase na Eficiência Numérica

Conforme apontado anteriormente, “eficiência” é uma palavra com significados distintos e que variam a depender de quem a utilize, podendo se relacionar a uma infinidade de determinantes concretos. Aqui, se é menos ambicioso e elege-se um parâmetro numérico elementar para verificação da interferência da inserção de heterogeneidades num modelo não linear do MEF/MEFG, qual seja: o número de iterações por passo. Fundamentalmente, considera-se que números mais elevados de iterações refletem maiores dificuldades no equilíbrio estrutural e perda de desempenho (quanto mais o algoritmo itera, mais tempo ele gasta). A partir da discretização 1 do *set-up* 5.4 e das composições do exame

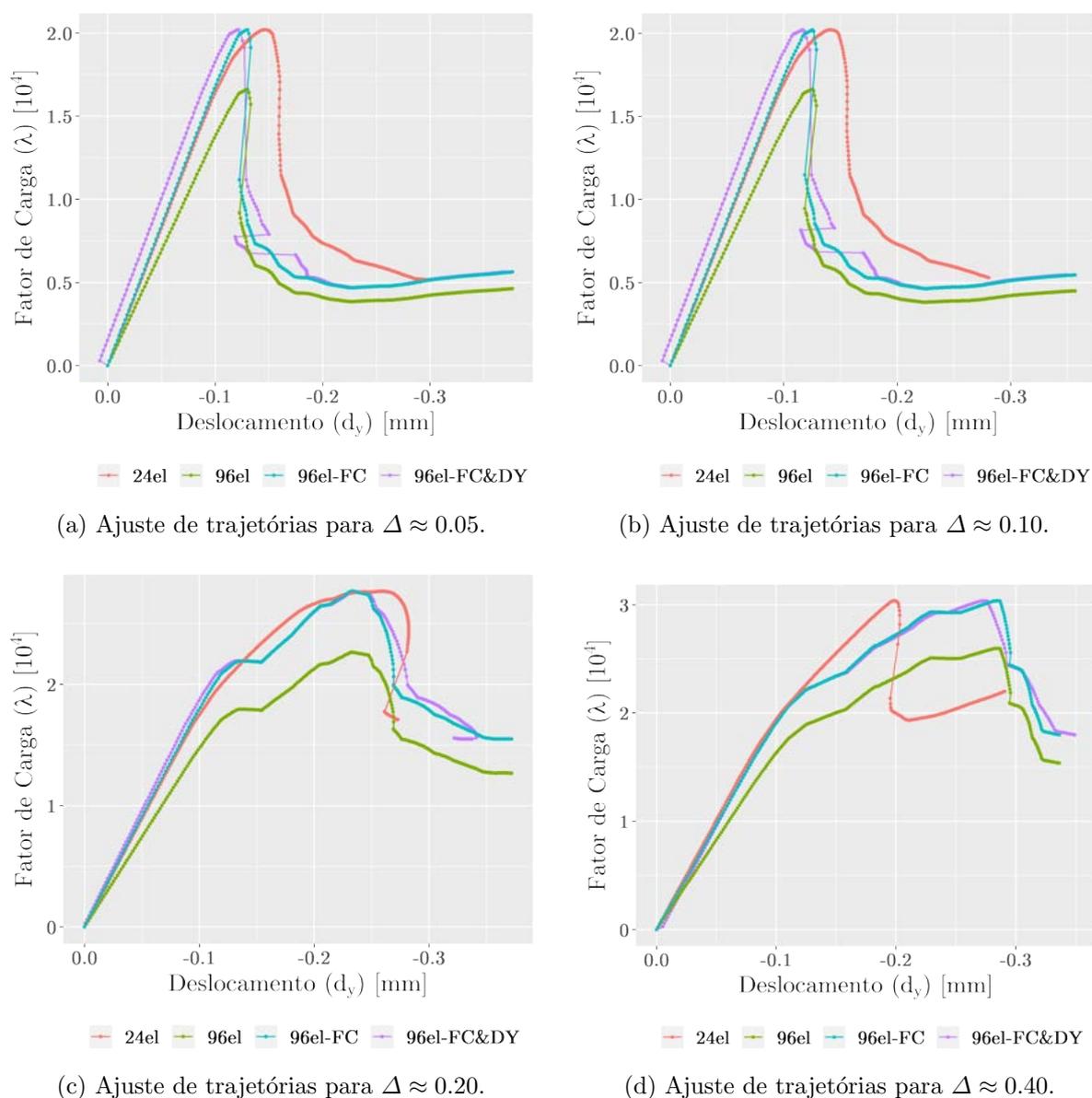


Figura 5.49: ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: avaliação do impacto do refinamento e proposta de correção exógena, *a posteriori*, de trajetórias de equilíbrio.  $\Delta \approx 0.05$  (5.49a) a  $\Delta \approx 0.40$  (5.49d). 24el e 96el: trajetórias dos modelos com 24 e 96 elementos; 96el – FC: correção no fator de carga através da razão de pico ( $\lambda$ ); 96el – FC&DY: correção no fator de carga (via  $\lambda$ ) e nos deslocamentos (via regressão empírica).

1 (seção 5.3.3.1), os perfis iterativos dos modelos foram traçados e colocados lado-a-lado para avaliação comparativa. A figura 5.50 registra os gráficos.

Ainda, na figura 5.51, apresentam-se as iterações médias, passo a passo, de cada fração  $\Delta$  e da variante HM. A tabela 5.8 compila algumas medidas de tendência central das curvas de iteração para a variante homogênea e as realizações da variante heterogênea.

Notadamente, o modelo homogêneo apresentou considerável instabilidade numérica no

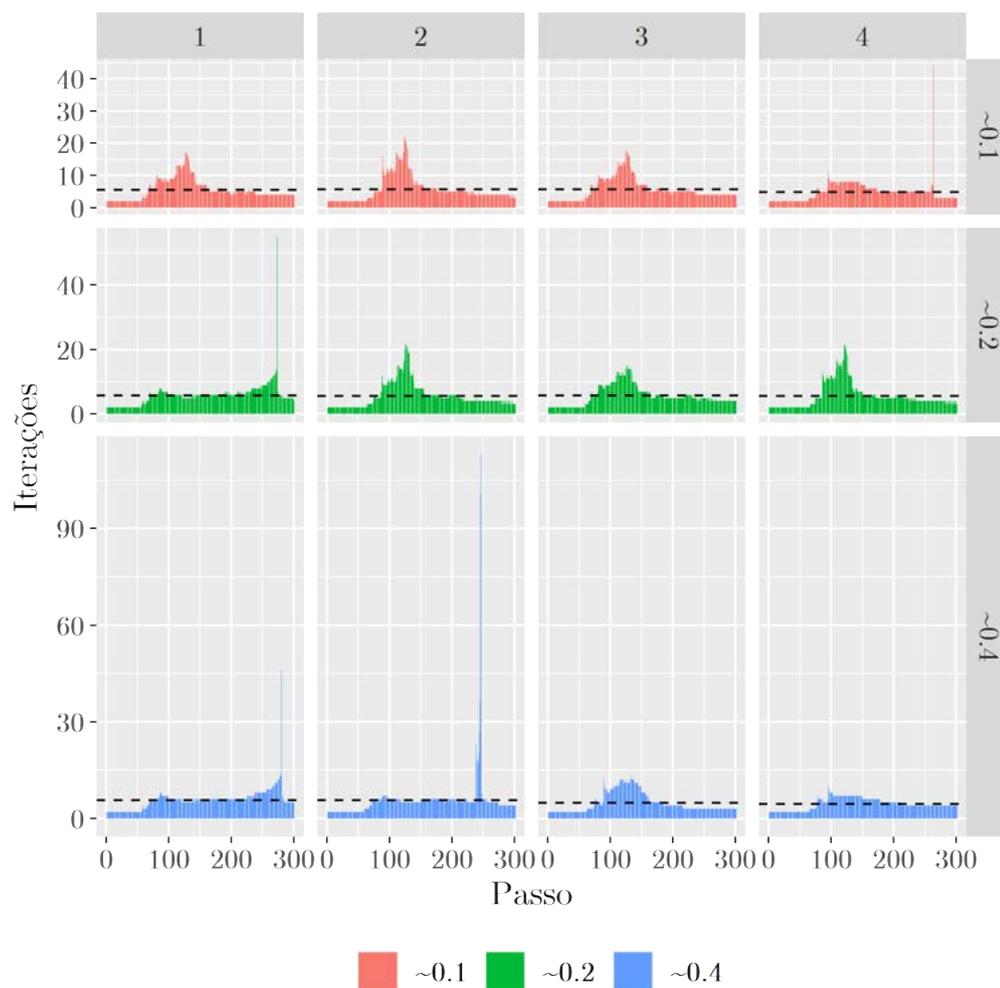


Figura 5.50: ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: perfil das iterações para realizações distintas (exame 4). Colunas: realizações; linhas:  $\Delta$ ; linha tracejada: média.

Tabela 5.8: Medidas de tendência central das iterações de cada fração de inclusão ( $\Delta \approx 0.10$ ,  $\Delta \approx 0.20$ ,  $\Delta \approx 0.40$ ).

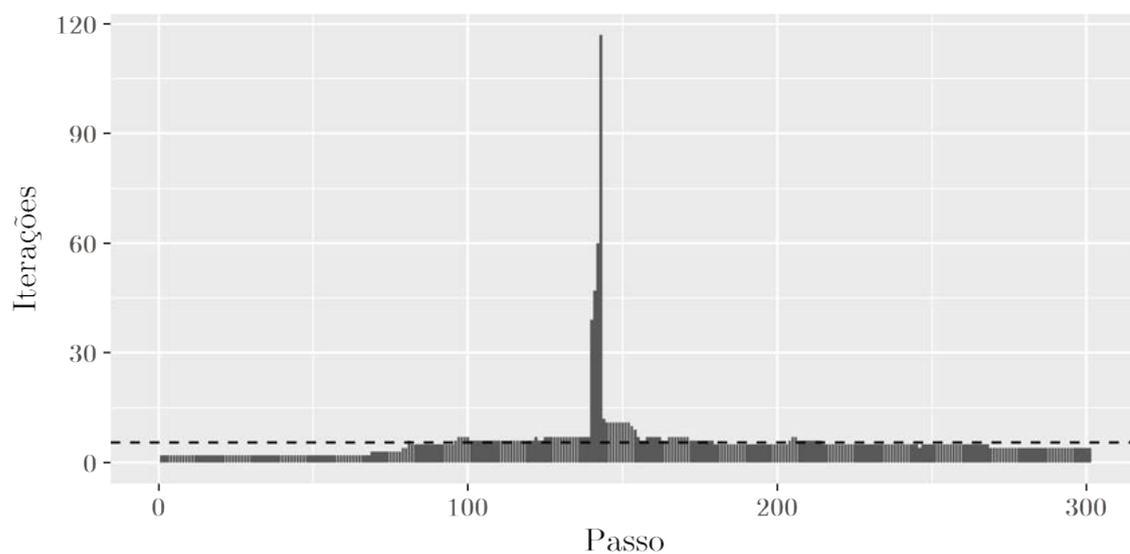
	<i>HM</i>	<i>HT</i> ( $\Delta \approx 0.10$ )	<i>HT</i> ( $\Delta \approx 0.20$ )	<i>HT</i> ( $\Delta \approx 0.40$ )
<b>Mínimo</b>	0.0	0.0	0.0	0.0
<b>1º Quartil</b>	3.0	3.0	3.0	3.0
<b>Mediana</b>	5.0	5.0	5.0	4.0
<b>Média</b>	5.523	5.384	5.642	5.010
<b>3º Quartil</b>	6.0	6.0	6.0	6.0
<b>Máximo</b>	117.0	44.0	22.0	113.0
<b>Total méd.</b>	1668	1714	1638	1566

entorno de sua carga limite, desenvolvendo um pico de iterações consideravelmente superior ao das demais vigas e demonstrando maiores dificuldades para equilibrar a estrutura sob os parâmetros de controle utilizados. Na variante heterogênea, com exceções pontuais que apresentaram instabilidades nos trechos finais das análises, há comportamentos relativamente coesos inter e intrafrações, com perfis uniformes e traçados suaves. O aumento de iterações nos terços finais das trajetórias HT pode ser reflexo da mudança de direção da banda de fissuração ao desviar de uma inclusão e/ou da ruptura frágil secundária das vigas quando do surgimento de uma nova frente de degradação.

De  $\Delta \approx 0.10$  para  $\Delta \approx 0.20$  há uma leve redução do pico de iterações, com estabilidade da mediana global. A média, entretanto, aumenta, indicando que há uma predominância de números ligeiramente mais elevados de iterações pós-pico. De  $\Delta \approx 0.20$  para  $\Delta \approx 0.40$ , por sua vez, há uma redução considerável das iterações máximas nas imediações da carga limite, seguida por diminuições na média e na mediana.

De maneira sintética, todas as simulações precisaram majoritariamente de 3 a 6 iterações (primeiro e terceiro quartis, respectivamente) para equilibrar a estrutura e os valores médios alcançados variam pouco mais que 10% entre cada peça.

Desse modo, embora os resultados indiquem uma redução do número de iterações com o aumento da fração de inclusões, sobretudo quando se avaliam os limites da faixa experimental HT, isto é, vigas com proporções muito elevadas de inclusões em comparação com vigas com quantidade reduzida de heterogeneidade, a introdução de uma nova fase mais rígida não parece impactar consideravelmente o equilíbrio da estrutura, e o desempenho iterativo da solução numérico, por associação. Portanto, quando utilizamos um modelo de fissuração distribuída com equilíbrio secante e controle de deslocamentos generalizados, de um ponto de vista exclusivamente numérico, a heterogeneidade não demonstra interferir drasticamente na eficiência da solução. O perfil altera com a variação de  $\Delta$ , mas o comportamento global médio permanece similar.



(a) Iterações da variante homogênea.

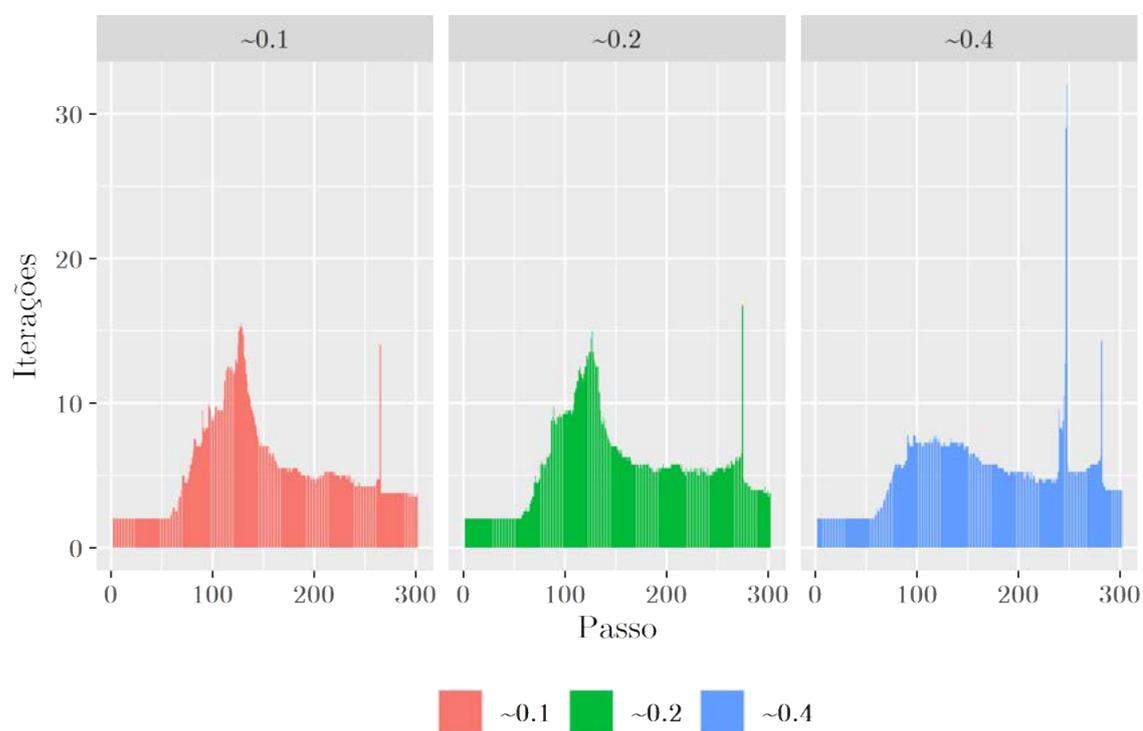
(b) Comparativo das iterações de cada realização de  $\Delta$ .

Figura 5.51: ANL-HT-1E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: perfil das iterações médias para casos distintos de  $\Delta$  (caso 4). Iterações da variante homogênea (5.44a), iterações médias de cada uma das realizações HT (5.51b).

### 5.3.4 Experimentos ANL-HM-2E/ANL-HT-2E: Flexão em 3 pontos

Conforme mencionado neste texto em momentos anteriores, houve uma escalada natural no desenvolvimento da técnica multiescala aplicada à realidade material não linear, objetivo final do trabalho. Até aqui, parte basilar da implementação foi verificada e validada, isto é, a camada adicional da representação material via introdução de uma distribuição de inclusões elásticas foi apresentada e debatida, aplicações com essa mesoestrutura foram registradas em alguns experimentos de escala única e em modelos global-local, e discussões foram realizadas ao longo do texto.

Adiante, inicia-se a consolidação da técnica proposta, em outras palavras, a aplicação do método dos elementos finitos generalizados com enriquecimento global-local a problemas não lineares, cujo meio é parcialmente frágil e representado matematicamente por modelos de degradação elástica. Se antes houve maior interesse para com a variante heterogênea (HT) dos experimentos, daqui em diante a variante homogênea (HM) receberá melhor tratamento. Daqui até a seção de estudos de caso haverá a apresentação da técnica não linear em duas escalas com a exposição de exemplos com meio homogêneo, incrementando-se os resultados pouco a pouco com os testes em que se incluiu a heterogeneidade.

Tal como na versão em escala única, para a verificação e validação da nova estratégia não linear, utilizou-se aqui o modelo referido como Penna (2011); Pitangueira (1998) modificado. Conforme apontado antes, neste experimento numérico tem-se a simulação de um ensaio de flexão em três pontos de uma viga curta de concreto simples. As dimensões compactas da viga implicam em um comportamento estrutural frágil, com instabilidade numérica e dificuldades de convergência.

De modo semelhante aos testes ANL-HT-1E, o grau de refinamento da malha e o detalhamento do meio iniciaram-se menos rigorosos e, assim, empregou-se a princípio um modelo de duas escalas equivalente àquele do experimento anterior. Dois níveis de refinamento global (grosseiro e refinado) foram assumidos como soluções de referência e um modelo global-local equivalente foi utilizado, no qual foram manejadas uma malha global com nível de refinamento análogo ao do *template* grosseiro e uma malha local semelhante àquela da referência refinada.

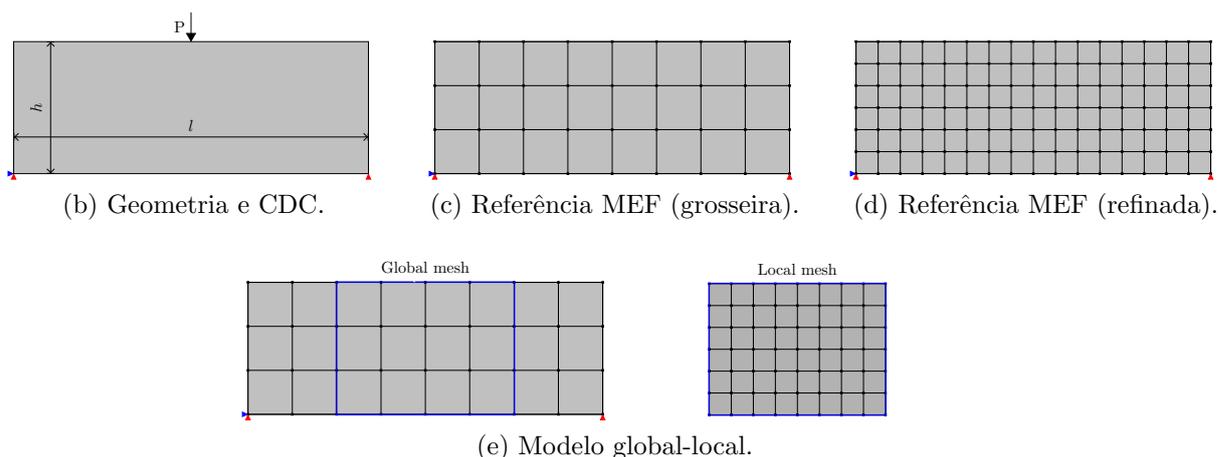
Duas configurações experimentais foram utilizadas. A primeira delas (*set-up* 5.5), destinada à avaliação inicial da variante homogênea do experimento (ANL-HM-2E) e de

duas possibilidades de *upscaling*, considerou um modelo de fissuração distribuída com lei tensão-deformação bilinear. A segunda configuração preservou as malhas, mas utilizou um modelo constitutivo de dano ortotrópico com lei inelástica linear similar ao modelo de fissuração (*set-up* 5.6). O uso do modelo de dano teve duas motivações principais: mostrar o desempenho da técnica proposta sob as características de um modelo constitutivo dessa natureza e viabilizar uma outra alternativa de *upscaling*.

Parâmetros Materiais ( $\sigma \times \varepsilon$ bilinear)						
Fase	$E_0$ (MPa)	$E_2$	$\nu_0$	$f_t$ (MPa)	$f_c$ (MPa)	$g_f$ (MPa)
Matriz	$3.2 \cdot 10^4$	$3.2 \cdot 10^3$	0.2	3.4	48.0	$1.81 \cdot 10^{-3}$
Agregado	$1 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^4$	0.2	16.0	80.0	$1.28 \cdot 10^{-2}$
Homog.	$4.4 \cdot 10^4$	$4.4 \cdot 10^3$	0.2	3.8	40.0	$1.64 \cdot 10^{-3}$
<b>Modelo Constitutivo</b>		Fissuração Distribuída (c/ direção fixa)				
<b>Método Controle (CDG)</b>			<b>Geometria &amp; CDC</b>			
$\delta\lambda_1$	250		<i>espess.</i>	36.0 mm		
<i>tol(desloc.)</i>	$1 \times 10^{-4}$		<i>l</i>	900 mm		
<i>Equil.</i>	Secante		<i>h</i>	360 mm	<i>Restrições</i>	
<i>Passos</i>	250*		P	1 N	$R_x, R_y$	
<b>Heterogeneidade <math>\Delta</math></b>	{0.10, 0.20, 0.40}			<b>Mod. Anl.</b>	EPT	

\*houve exceções.

(a) Parâmetros.



Set-up 5.5: Configuração Experimental 1 – ANL-HM/HT-2E – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado, ensaio de flexão simples em 3 pts. Parâmetros de entrada (mod. fiss. dist. c/ lei bilinear, controle de trajetória (desloc. generalizado), CDC e fração de heterogeneidade ( $\Delta$  com base no volume do domínio local); 5.4a); geometria (5.4b); malhas de referência (5.4c, 5.4d); malhas global e local (5.5e).

Trajetórias extraídas referem-se ao ponto de aplicação da carga e as quadraturas dos

Parâmetros Materiais ( $\sigma \times \varepsilon$ bilinear)				
Fase	$E$ (MPa)	$\nu$	$k_0$	$k_f$
Matriz	$3.2 \cdot 10^4$	0.2	$1.063 \cdot 10^{-3}$	$2.662 \cdot 10^{-2}$
Agregado	$1 \cdot 10^5$	0.2	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$
Homogênea (Mistura)	$4.4 \cdot 10^4$	0.2	$8.636 \cdot 10^{-5}$	$3.021 \cdot 10^{-4}$
<b>Modelo Constitutivo</b>	Dano Ortotrópico de <b>De Borst e Gutiérrez (1999)</b>			
	<b>Controle (CDG)</b>		<b>Geom. &amp; CDC</b>	
$\delta\lambda_1$	250		<i>espess.</i>	36.0 mm
<i>tol(desloc.)</i>	$1 \times 10^{-4}$		<i>l</i>	900 mm
<i>Equil.</i>	Secante		<i>h</i>	360 mm
<i>Passos</i>	250		P e <i>Rest.</i>	1 N; $R_x, R_y$
<b>Heterogeneidade <math>\Delta</math></b>	{0.05, 0.20, 0.40}		<b>Mod. Anl.</b>	EPT

Set-up 5.6: Configuração Experimental 2 – ANL-HM/HT-2E – **Penna (2011)**; **Pitangueira (1998)** Modificado, ensaio de flexão simples em 3 pts. Parâmetros de entrada (dano orto. c/ lei linear, controle de trajetória (desloc. generalizado), CDC e fração de heterogeneidade ( $\Delta$  com base no volume do domínio local)). Malhas equivalentes às do *set-up* 5.5.

elementos globais contém  $4 \times 4$  pontos de integração.

Ainda que os modelos constitutivos nas duas configurações sejam análogos, comportam-se de modo ligeiramente distinto, isto é, mesmo representando naturezas de fissuração equivalentes (provenientes de um dano distribuído em uma direção principal que comanda o fenômeno), a conta realizada por cada um deles é diferente, de modo que numericamente, durante o processo iterativo, variações ocorrem e trajetórias um pouco distintas umas das outras são obtidas. Feita essa ressalva, ainda assim, de modo a (tentar) se preservar a equivalência de grupos e a validade interna dos experimentos, ambas as configurações experimentais buscaram utilizar as mesmas estratégias para solução, isto é, controle de deslocamento generalizado (CDG), com tolerâncias equivalentes e mesmo incremento, afrouxando-se, contudo, a exigência de igualdade do tipo de operador incremental e do número de passos máximos prescritos. Além disso, com a mesma intenção, empregou-se no processo de validação da implementação da estratégia multiescala distribuições de inclusões equivalentes àquelas usadas na simulação de escala única (*set-up* 5.4; figura 5.36). Indicações de ajustes isolados que fugiram das configurações experimentais foram devidamente pontuados. Com esses pressupostos metodológicos, acredita-se que o alcance comparativo dos exemplos se sustentou.

Para avaliar o comportamento estrutural (variável dependente) e construir cada tipo de exame individual, consideraram-se as seguintes variáveis independentes:

- Constituição do meio (homogeneidade ou heterogeneidade);
- Modelo constitutivo;
- Fração de heterogeneidade;
- Mecanismo de *upscaling*.

Relembrando a analogia anteriormente apresentada no capítulo 4, o mecanismo de *upscaling* tem duas conotações no presente contexto: a primeira tem um sentido *stricto*, isto é, refere-se ao processo tradicional de enriquecimento da partição da unidade; já a segunda possui uma conotação mais abrangente (*lato*) e considera não somente a perspectiva cinemática do envio de graus de liberdade da escala inferior à superior, mas também um caráter material-constitutivo de remessa de algum dado adicional representativo das características materiais locais. Assim, há um mecanismo de *upscaling* cinemático, que considera somente os GDL e a PU; cinemático-material, que além dos GDL, considera a transferência de propriedades elásticas; e cinemático-constitutivo, que transporta a função de enriquecimento da PU e as variáveis constitutivas homogeneizadas do domínio local.

Nesse contexto, portanto, o presente experimento foi composto pelos seguintes exames:

- Exame 1: avaliação da estratégia não linear em duas escalas com meio homogêneo. Empregando-se a configuração experimental 5.5, comparam-se os comportamentos estruturais de duas soluções de referência (grosseira e refinada) com aquela obtida através de um modelo GL equivalente. Consideraram-se meio homogêneo e comunicação entre as escalas exclusivamente via enriquecimento (*enriquecimento stricto*). Uma avaliação da eficiência algorítmica da estratégia não linear foi realizada nos moldes daquela apresentada na seção 5.3.3, i.e., os perfis de iterações foram levantados e inspecionados comparativamente.
- Exame 2: avaliação da estratégia não linear em duas escalas com meio global original com fase primária (matriz ou mistura), meio local heterogêneo (fase primária + fase secundária (agregado)) e *upscaling* cinemático apenas.

A partir da configuração experimental 5.5, comparam-se os comportamentos estruturais de duas soluções de referência (grosseira e refinada) com aquela obtida através de um modelo GL equivalente. O modelo material é similar àquele das simulações de escala única, ou seja, meio bifásico com heterogeneidade inserida no domínio local e o modelo global composto por fase primária variável. Fases primárias do tipo “matriz” e “mistura” foram avaliadas. A interação local  $\rightarrow$  global (*upscaling*) foi de natureza cinemática exclusivamente, ou seja, considerou somente o enriquecimento *stricto* com incorporação de GDL adicionais à malha global. Para uma fração aleatoriamente escolhida, considerou-se uma variação dos materiais em cada escala, i.e., meio global composto originariamente por mistura homogeneizada de Pitangueira (1998), e meio local bifásico (com matriz e agregado).

Em resumo, portanto, duas variantes materiais:

- *Global: matriz; Local: (matriz + agregado); Upscaling: cinemático;*
- *Global: mistura; Local: (matriz + agregado); Upscaling: cinemático*
- Exame 3: avaliação da estratégia não linear em duas escalas com meio local heterogêneo (matriz + agregado), meio global original com fase primária (matriz ou mistura) e *upscaling* cinemático-material.

Com a mesma configuração experimental dos exames anteriores, consideraram-se não somente o transporte dos graus de liberdade, mas também das propriedades elásticas do domínio local (um enriquecimento *lato*, portanto). Os pontos materiais das regiões globais sobre domínios locais receberam as propriedades elásticas integrais das regiões correspondentes da escala inferior, em conjunto com o enriquecimento padrão da PU, num processo aqui aludido como *upscaling* cinemático-material.

Vigas com meios do tipo matriz-agregado em três versões de  $\Delta$  foram confrontados com os experimentos ANL-HT-1E. Para uma fração aleatoriamente escolhida, considerou-se uma variação dos materiais: meio global composto por mistura homogeneizada e meio local bifásico, com matriz e agregado.

Em resumo, portanto:

- *Global: matriz; Local: (matriz + agregado); Upscaling: cinemático-material;*
- *Global: mistura; Local: (matriz + agregado); Upscaling: cinemático-material.*

- Exame 4: avaliação da estratégia não linear em duas escalas com meio local heterogêneo, meio global original com fase primária (mistura) e *upscaling* cinemático-constitutivo.

Partindo-se da configuração experimental 5.6 e de modo similar ao exame anterior, além do enriquecimento da PU característico do MEEG, uma nova informação foi trazida. Através de um processo de homogeneização (vide capítulo 4), as variáveis constitutivas dos pontos materiais globais sobre domínios locais foram obtidas de um conjunto de pontos materiais mapeados da escala inferior nas adjacências do ponto global considerado. Dessa maneira, formalmente considerou-se a escala global eminentemente homogênea, e a escala local, com um traço heterogêneo.

- Exame 5: avaliação do estado de deformação e evolução do dano na escala local.

São apresentados os comportamentos estruturais dos problemas locais com fração máxima de heterogeneidade. Verificações da relação entre o estado de deformação global corrente e a resposta local foram realizadas. Dois mecanismos de *upscaling* são confrontados (e por conseguinte o modelo de fissuração distribuída tradicional e o modelo de dano ortotrópico equivalente).

Diferentemente dos experimentos anteriores, no presente contexto a representação da variável dependente (comportamento estrutural) foi feita predominantemente através das trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga. Distribuições de deslocamento, deformação, tensão e dano são indicadas no caso da verificação e validação da variante homogênea da estratégia não linear (ANL-HM-2E), o que foi considerado suficiente para inspeção do recurso computacional nesse contexto, ou quando pertinente. Dada a preocupação maior em se avaliar as potencialidades da técnica numérico-computacional, do que o comportamento material em si, ou seja, se os mecanismos idealizados conseguiriam desempenhar as funções propostas, a atenção com várias realizações de uma mesma proporção de inclusões foi relaxada. Mesmo considerando-se a variação da fração de partículas, os efeitos de distintas mesoestruturas de distribuições granulométricas não foram abordados, focando-se principalmente nos movimentos internos do processo de comunicação local  $\rightarrow$  global. Reforça-se ainda que o nível de detalhamento dessas distribuições seguiram a mesma interpretação concedida ao exemplo de escala única, a de uma representação macroscópica da constituição interna do meio menos criteriosa. Mesmo

o contexto de duas escalas pressupondo um maior nível de detalhamento local, optou-se por avaliá-lo posteriormente.

#### 5.3.4.1 Exame 1: Avaliação da Estratégia Não Linear em Duas Escalas com Meio Homogêneo

Parte fundamental da técnica proposta reside na comunicação entre modelos distintos dentro de um processo incremental-iterativo que media a degradação material da estrutura. Para a superação dessa contenda, foram idealizados os mecanismos enunciados na metodologia desta obra. Naturalmente, antes de se buscar alterar o modelo material, trazendo o componente da heterogeneidade para a simulação, uma etapa basilar há de ser o teste do ferramental computacional num conjunto de experimentos homogêneos. Assim, valendo-se do *set-up* 5.5 como plataforma de verificação do desempenho do MCFG-GL-NL, o comportamento estrutural da viga com propriedades elásticas da mistura de Pitangueira (1998) foi avaliado.

Apresenta-se na figura 5.52a a trajetória do modelo global-local (MCFG-GL-NL) em paralelo com duas soluções de referência, uma grosseira (REF-GR) e outra refinada (REF-RFN). Ao lado, na figura 5.52b, o perfil dos desvios entre as soluções é apresentado. Embora o comportamento estrutural do modelo via estratégia global-local não linear aparente aproximar-se (qualitativamente) da solução refinada, um olhar mais criterioso para o desvio entre as soluções indica que, numa perspectiva passo-a-passo, em razão da variante REF-RFN ter apresentado dificuldades no regime de *softening* e não haver computado estados de equilíbrio no ramo descendente, a diferença entre os fatores de carga do MCFG-GL-NL e da solução refinada é fatalmente maior que àquela entre o modelo GL e REF-GR.

Diferentemente de ambos os modelos de referência, o mecanismo GL proposto apresentou menores instabilidades pós-pico, conseguindo equilibrar a estrutura ao longo do descarregamento de maneira mais eficiente e capturando, por conseguinte, um número maior de pontos no ramo descendente da trajetória.

O melhor desempenho no equilíbrio se materializou no processo iterativo. No exemplo em questão, o modelo GL pondera um melhor custo-benefício que as soluções tradicionais, produzindo 36% menos iterações que a solução grosseira e 22% que a refinada (tabela 5.9). Na figura 5.53, apresentam-se os perfis de iterações de cada variante do presente exame.

O campo de deformação  $\varepsilon_{xx}$  e a evolução do dano na primeira direção principal do modelo GL são apresentados na figura 5.54, ao lado das respectivas grandezas do modelo

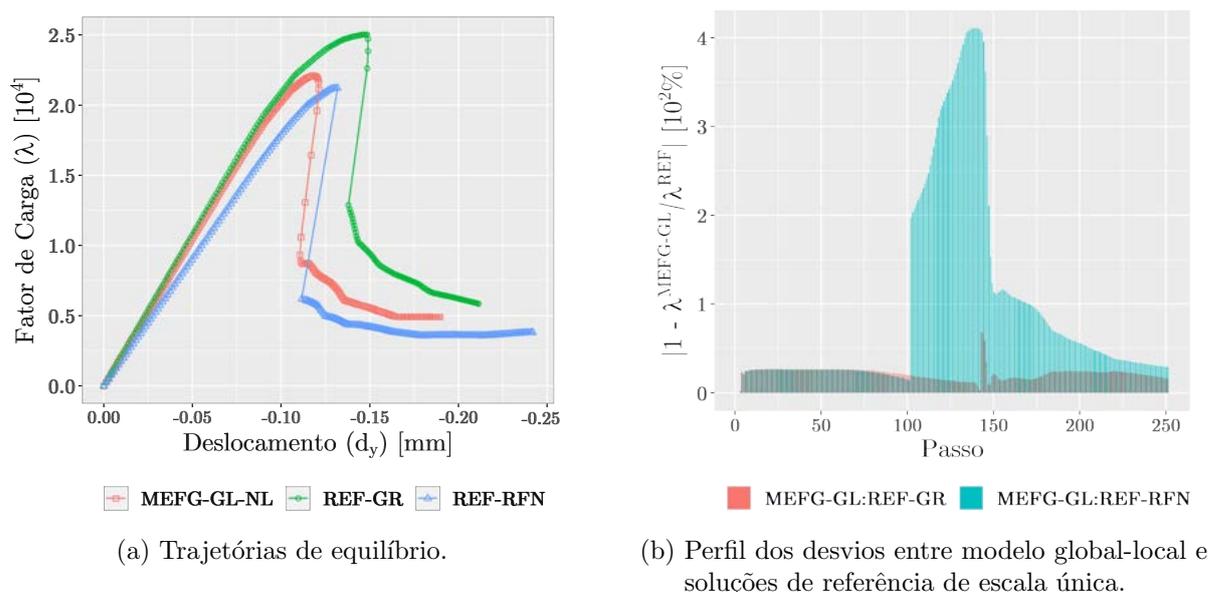


Figura 5.52: ANL-HM-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: estratégia não linear em duas escalas com meio homogêneo (caso 1). Trajetórias de equilíbrio de soluções de referência em escala única (REF-GR e REF-RFN) e do modelo global local (MEFG-GL-NL) (5.44a), desvios entre o MEFG-GL-NL e as soluções de referência (5.52b).

Tabela 5.9: ANL-HM-2E – Resumo do processo iterativo. Graus de liberdade globais, número de iterações, máximos e médias.

Modelo	GDL globais	Nº Iter.	Pico	Média
REF-GR	72	1565	31	6.26
MEFG-GL-NL	96	1007	20	4.02
REF-RFN	238	1286	78	5.14

REF-GR. Os passos elegidos relacionam-se ao surgimento do dano no modelo GL (passo 90), localização no modelo REF-GR (passo 142) e alcance do dano máximo em REF-GR (passo 170). Como se pode notar, diferentemente da solução de referência que, em razão da malha e de sua relação com os mecanismos intrínsecos de localização do modelo constitutivo, não preserva uma simetria nos campos, a estratégia não linear proposta viabilizou um arranjo um pouco mais coerente, simétrico, e sem os efeitos tão proeminentes de localização de deformações, ainda que os valores absolutos alcançados sejam maiores. Assim, dentro dos limites experimentais, considera-se que a técnica não linear proposta conseguiu de certa maneira regularizar a análise, postergando fenômenos numéricos deletérios.

Testes adicionais do presente exame (i.e., ANL-HM-2E) podem ser verificados em

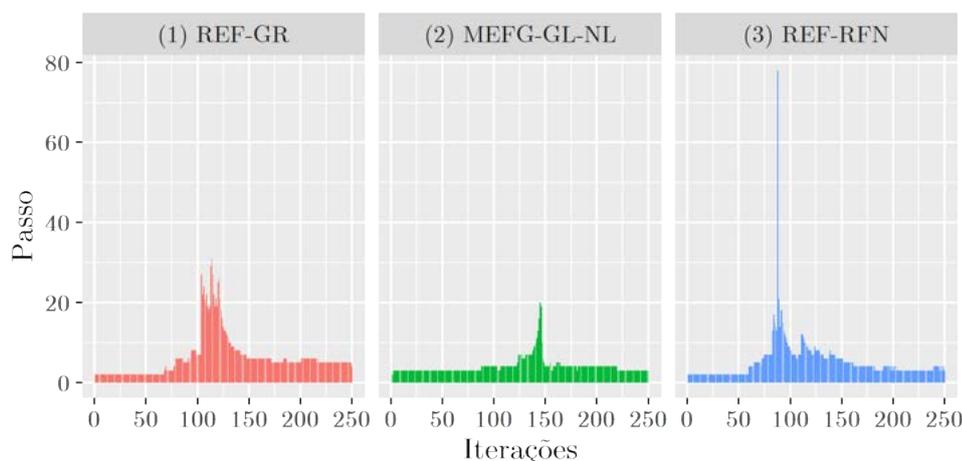


Figura 5.53: ANL-HM-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: perfis das iterações para variantes de referência grosseira e refinada (REF-GR e REF-RFN, respectivamente) e global-local (MEFG-GL-NL) (exame 1).

Monteiro et al. (2020) ou Novelli (2019). Neste, são investigados, por exemplo, outros métodos de controle de trajetória.

#### 5.3.4.2 Exame 2: Avaliação da Estratégia Não Linear com Meio (Local) Heterogêneo e *Upscaling* Cinemático

Três alternativas de *upscaling* foram idealizadas e avaliadas nesta pesquisa. A primeira delas é apresentada a seguir.

Uma das premissas da estratégia de duas escalas divulgada neste texto é a de utilização de um domínio acessório de caráter submacroscópico, no qual ao menos uma nova fase material seja ativada e, por conseguinte, uma potencial melhoria na descrição das propriedades elásticas globais do contínuo seja viabilizada (em teoria). Naturalmente, cabe averiguar se as funções de enriquecimento *per si* são capazes de capturar a mudança da constituição do meio local e embutir seus efeitos no domínio global. Aqui este mecanismo é referido como *upscaling* cinemático (UP-C).

Nesse sentido, no presente caso, partindo-se de um problema global com uma dada fase primária prescrita, três conformações grosseiras de inclusões foram embutidas no domínio local. Conforme visto nos experimentos AL-HT-2E (seção 5.3.2), o domínio global não herda integralmente a resolução espacial da mesoestrutura e do refinamento local quando da inserção de heterogeneidades na escala inferior. Como foi mostrado, quando a variação espacial da discretização global é muitas ordens de grandeza superior ao tamanho característico da representação mesoestrutural, há fatalmente uma perda da

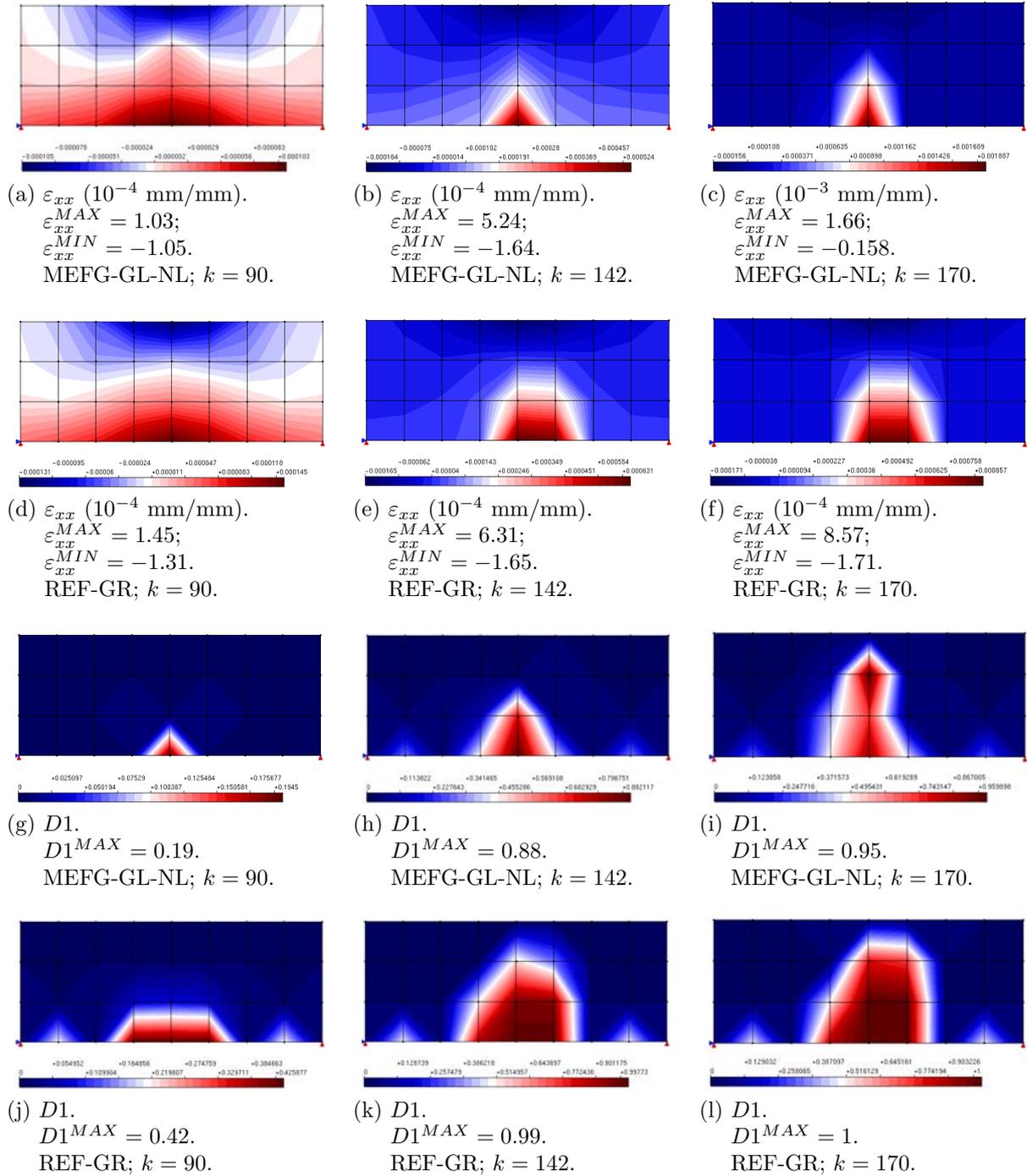


Figura 5.54: ANL-HM-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: comparação entre MEFG-GL-NL e solução de referência com mesmo grau de refinamento global (caso 1). Deformações (5.54a–5.54c; 5.54d–5.54f) e dano (5.54g–5.54i–5.54j–5.54l) nos passo 90, 142 e 170 (colunas, da esquerda para direita).

descrição do metadado numérico-geométrico. Dessa maneira, reforçando as motivações do encadeamento de experimentos concedido a essa obra, os exames do espectro não linear da pesquisa se valeram desse resultado para a escolha do tamanho das inclusões, de tal forma que as distribuições utilizadas nos testes adiante mimetizaram aquelas aleatoriamente geradas na simulação de escala única, bem como as fases utilizadas foram equivalentes (i.e., matriz – primária – e agregado – secundária) para preservação de uma base comparativa. Ainda, considerou-se em um teste adicional uma natureza material distinta: domínio global originariamente composto por uma mistura (Pitangueira, 1998) e domínio local formado por meio bifásico (matriz e heterogeneidades).

Apresentam-se na figura 5.55 os resultados para a análise não linear da configuração experimental 5.5, com consideração de inclusões grosseiras equivalentes àquelas da simulação de escala única correspondente (figura 5.36). Além dos domínios locais, são ilustradas isoladamente as trajetórias das variantes heterogêneas, a resposta da variante homogênea (com propriedades elásticas de uma mistura) e as trajetórias das soluções de referências com graus de refinamento equivalentes ao do modelo GL.

Observa-se que a transmissão exclusiva das funções de enriquecimento foi sim capaz de alterar o comportamento estrutural do problema global. Os mecanismos implementados permitiram a inserção de heterogeneidade na escala local e conseguiram embutir efeitos coerentes na escala superior. Comparando-se as trajetórias de  $\Delta \approx 0.10$  e  $\Delta \approx 0.40$  (5.55d), percebe-se que há uma ligeira diferença representativa de um comportamento mais frágil com o acréscimo na fração de heterogeneidade, isto é, o ramo descendente foi mais abrupto, com *snap-back* minimamente mais acentuado. A fração intermediária, contudo, parece sofrer o impacto das posições das inclusões, que costuram o caminho da banda de fissuração, e afetam o comportamento estrutural, deixando-o mais rígido.

Diferentemente da análise em escala única, o modelo de duas escalas com *upscaling* cinemático apresentou variações estruturais mais sutis entre cada tipo de viga quando a heterogeneidade foi considerada. O comportamento estrutural desenvolvido no modelo global-local talvez seja mais representativo de um domínio global ( $\bar{\Omega}^G$ ) mecanicamente homogêneo, quer dizer, de uma macroescala sem variações espaciais de maior monta nas propriedades elásticas do contínuo. Em certa medida, portanto, os resultados apontam que em uma análise estrutural não linear é coerente se pensar na possibilidade de uso de um domínio exógeno ( $\bar{\Omega}^L$ ), submacroscópico, de dimensão arbitrária contida em  $\bar{\Omega}^G$ , no

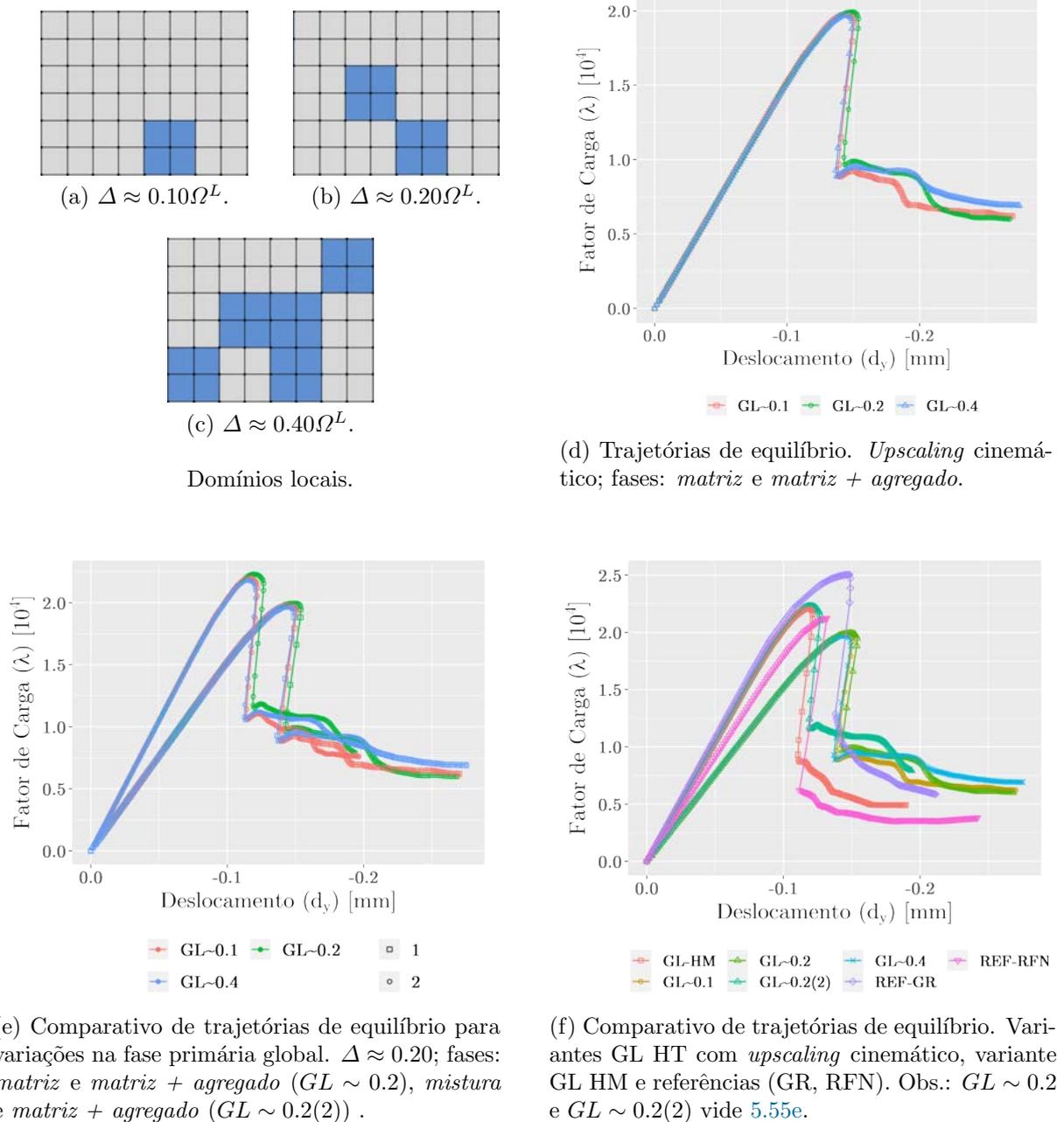


Figura 5.55: AL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: avaliação do *upscaling* cinemático (caso 2). Domínios locais  $\Omega^L$  ( $\Delta \approx 0.10\Omega^L$ , 5.55a;  $\Delta \approx 0.20\Omega^L$ , 5.55b;  $\Delta \approx 0.40\Omega^L$ , 5.55c); trajetórias de equilíbrio isoladas (5.55d); comparativo com fases primárias distintas (5.55e); comparativo HT×HM (5.55f).

qual possam ser consideradas descrições materiais com valores absolutos distintos daqueles de origem, mas que aludam, quando combinados, à composição genética do meio. Parece igualmente coerente ponderar que uma comunicação ascendente (local  $\rightarrow$  global) baseada exclusivamente nas funções de enriquecimento, ou mais precisamente, em deslocamentos e

graus de liberdade nodais, possua conceitualmente impregnada em si a degeneração total do domínio local em movimentos ou deslocabilidades do macrodomínio global, isto é, ao fim e ao cabo, o comportamento estrutural obtido quando da inserção de uma fase secundária exclusivamente num espaço acessório  $\bar{\Omega}^L$ , alusivo de um nível inferior do meio, pode materializar-se globalmente em deslocamentos de pontos da estrutura. Em consequência disso, o transporte de informações locais (materiais ou internas, no presente contexto), através de grandezas cinemáticas – enriquecimentos numéricos como os empregados aqui –, inevitavelmente aparenta se substancializar nas trajetórias de equilíbrio, sem afetar consideravelmente a carga de pico e preservando a objetividade (interna) do modelo.

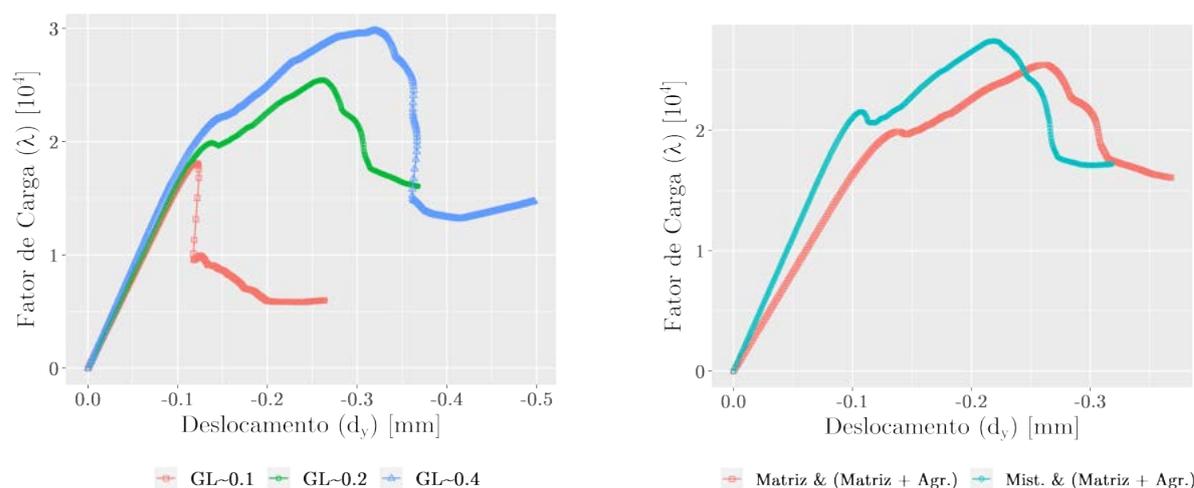
### 5.3.4.3 Exame 3: Avaliação da Estratégia Não Linear com Meio (Local) Heterogêneo e *Upscaling* Cinemático-Material

Uma outra alternativa de interação ascendente, rotulada aqui como *upscaling* cinemático-material (UP-C-M), foi testada. Nesse mecanismo, além da função de enriquecimento da partição da unidade, as propriedades elásticas do meio local são mapeadas com seus valores absolutos para os pontos materiais globais sobre zonas de  $\bar{\Omega}^L$ .

Similarmente ao exame pregresso, a configuração experimental 5.5 foi empregada e os resultados podem ser observados na figuras 5.56 e 5.57. As trajetórias de equilíbrio resultantes das análises de vigas com  $\Delta \approx 0.10$ ,  $\Delta \approx 0.20$  e  $\Delta \approx 0.40$  (ver figs. 5.55a, 5.55b e 5.55c) foram utilizadas em duas comparações: a primeira traçou paralelo entre as trajetórias do presente caso com as soluções correspondentes obtidas nas simulações de escala única com malha grosseira (ANL-HT-1E, seção 5.3.3); a segunda, por sua vez, usou como referência os resultados do modelo com 96 elementos finitos. Além disso, confrontam-se as duas abordagens de *upscaling* apresentadas até então.

Em 5.56, as respostas estruturais são isoladamente ilustradas. Nota-se que há uma diferença considerável entre as curvas de diferentes frações de heterogeneidade (5.56a). Para a fração intermediária, a hipótese de alteração da fase primária foi testada como no exame anterior, e o comportamento capturado foi equivalente (5.56b).

Diferentemente do caso anterior, as trajetórias obtidas se distanciaram das curvas das soluções homogêneas de uma e de duas escalas (fig. 5.57a). Contudo, os resultados se assemelharam àqueles produzidos nos experimentos de escala única com heterogeneidade (ANL-HT-1E), sobretudo das variantes com malha refinada (exame 3 do experimento ANL-HT-1E; seção 5.3.3.3), com trajetórias ligeiramente abaixo da referência. As figuras



(a) Trajetórias de equilíbrio.

*Upscaling* cinemático; fases: *matriz* e *matriz + agregado*.

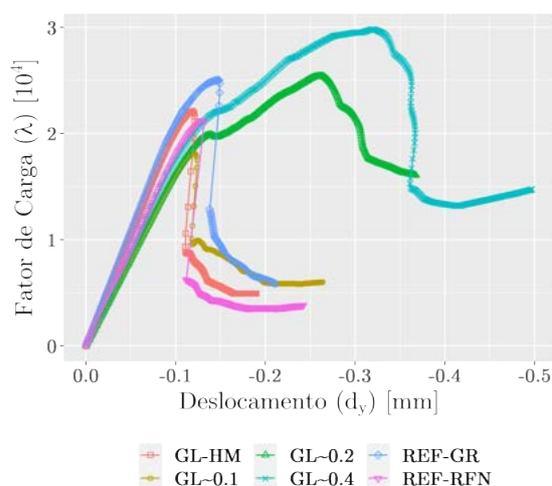
(b) Comparativo de trajetórias de equilíbrio para

variações na fase primária global.  $\Delta \approx 0.20$ ; fases: *matriz* e *matriz + agregado*, *mistura* e *matriz + agregado*.

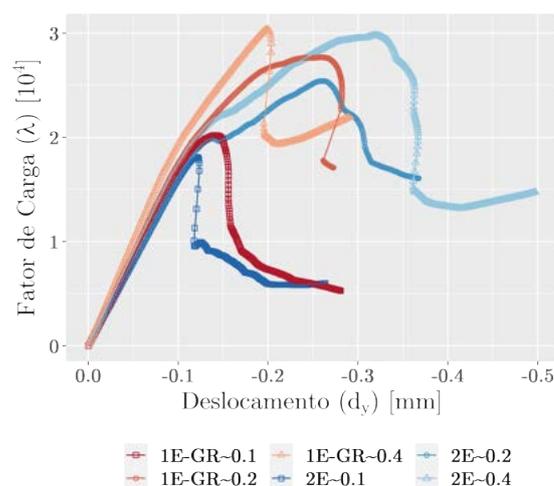
Figura 5.56: ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: avaliação do *upscaling* cinemático-material (caso 3). Trajetórias de equilíbrio do modelo global-local para diferentes  $\Delta$ s. (5.56a), desvios entre o MEFGL-NL e as soluções de referência (5.56b).

5.57b e 5.57c confrontam, respectivamente, as respostas do modelo GL com àquelas dos modelos HT dos *templates* de malha 1 e 2 (*set-up* 5.4).

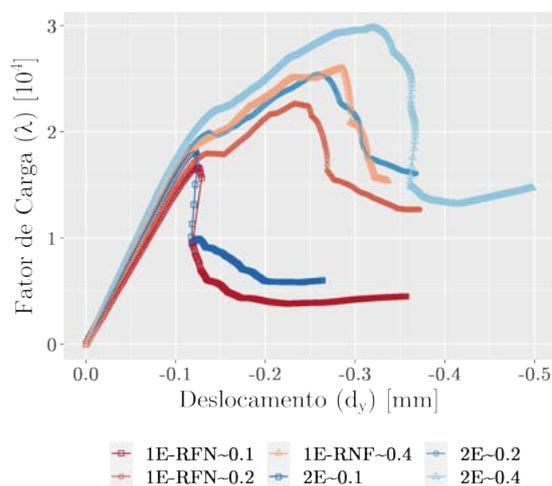
Os comportamentos estruturais nos casos de *upscaling* cinemático-material e *upscaling* cinemático são ilustrados lado a lado no gráfico 5.57d. Como se pode notar, houve uma diferença importante entre os dois tipos de solução. Nesse sentido, infere-se que a explícita consideração de propriedades elásticas distintas em nível macro, faz com que o comportamento mecânico do sólido seja mais suscetível a variações provenientes da interação entre as fases, ou seja, conforme também verificado nos experimentos ANL-HT-1E, a inserção direta de uma pseudo-mesoestrutura com resolução grosseira dentro de uma macroescala pouco refinada (por hipótese) engendra um comportamento estrutural muito vulnerável e conexo à heterogeneidade, de modo que o sólido tende a responder ao carregamento sob a mediação de uma fase secundária mais rígida, e à danificação e ao descarregamento, sob o controle da fase menos rígida primária (matriz, no presente caso). Em contrapartida, como debatido anteriormente, o não envio de propriedades elásticas absolutas da escala local para a global, mantém a homogeneidade mecânica da estrutura, de tal sorte que as trajetórias são menos dependentes da composição material local, mesmo conseguindo reproduzir globalmente os efeitos dessa composição.



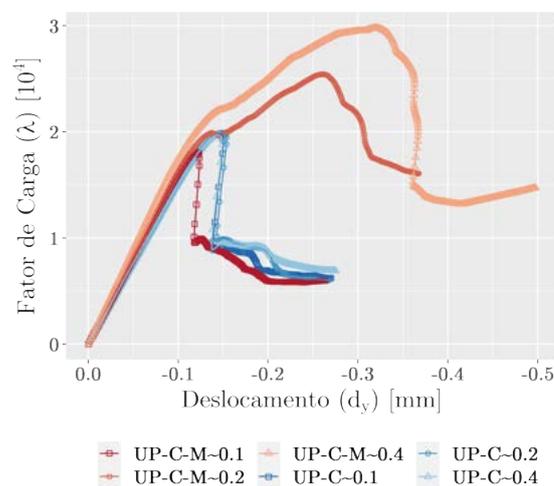
(a) Trajetórias de equilíbrio. *Upscaling* cinemático-material; fases: *matriz* e *matriz + agregado*.



(b) Comparativo de trajetórias de equilíbrio dos modelos global-local e da solução de referência HT com malha grosseira e escala única.



(c) Comparativo de trajetórias de equilíbrio dos modelos global-local e da solução de referência HT com malha refinada e escala única.



(d) Comparativo dos mecanismos de *upsaling* cinemático (UP-C) e cinemático-material (UP-C-M).

Figura 5.57: ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: avaliação do *upsaling* cinemático-material (caso 3). Trajetórias de equilíbrio global-local e versões homogêneas (GL-HT $\times$ HM, 5.57a); variantes HT de duas escalas e uma escala com malha grosseira (GL-2E $\times$ 1E-GR, 5.57b); variantes HT de duas escalas e uma escala com malha refinada (GL-2E $\times$ 1E-RFN, 5.57c); e comparação entre *upsaling* cinemático e cinemático-material (UP-C $\times$ UP-C-M, 5.57d).

#### 5.3.4.4 Exame 4: Avaliação da Estratégia Não Linear com Meio (Local) Heterogêneo e *Upscaling* Cinemático-Constitutivo e Comparativo dos Mecanismos

Finalmente, aquilo que talvez possa ser considerado como a consolidação da técnica multiescala (ou de duas escalas, mais precisamente) proposta nessa pesquisa será abordado adiante. Como previsto no capítulo 4, há no cerne desse trabalho a intenção de modelar o comportamento mecânico de estruturas compostas por materiais parcialmente frágeis levando em consideração uma descrição material um pouco mais rigorosa, que introduza de alguma maneira uma fase secundária ao meio. Essa inserção deve se processar exclusivamente em um domínio acessório mais refinado (local) e através do *framework* do enriquecimento da PU, típico do MEFG, (e de um mecanismo adicional) os efeitos locais são incorporados na escala global.

Foram apresentados testes de duas estratégias dessa comunicação ascendente, a primeira delas levou em consideração somente as funções de enriquecimento; já a segunda, o enriquecimento *stricto* e as propriedades materiais integrais. No presente caso, uma variação dos mecanismos anteriores será registrada. O *upscaling* cinemático-constitutivo (UP-C-C) transporta a solução local da variável de estado para o problema global, bem como uma variável histórica local representativa de uma deformação equivalente homogeneizada num volume de dimensão característica  $s$ . Assim, os campos derivados (de deformação e tensão, objetivamente) globais que se encontram em regiões sobre domínios locais acessórios, são computados com base na média dessa variável histórica local no entorno de um ponto material global e, dessa maneira, os efeitos constitutivos das inclusões são incorporados no modelo. Além disso, considera-se nessa estratégia que o domínio global é composto por um meio com propriedades elásticas distintas das fases locais, ou seja, globalmente tem-se uma mistura homogeneizada, e localmente, matriz e heterogeneidade.

No gráfico 5.58a temos as trajetórias obtidas através do MEFG-GL-NL com *upscaling* cinemático-constitutivo para as três conformações de domínio local trabalhadas. Ao lado, na figura 5.58b, há a comparação entre os três mecanismos de comunicação ascendente para a fração de heterogeneidade intermediária. Percebe-se que, dentro dos limites experimentais, e, portanto, sob a mediação de praticamente os mesmos parâmetros de controle usados até aqui, os traçados de trajetória obtidos são coerentes e se encaixam nos limites de carga e deslocamentos obtidos nos testes anteriores. Os resultados apontam que a estratégia com *upscaling* cinemático-constitutivo capturou traçados progressivamente mais

frágeis com o aumento da fração de heterogeneidade. Além disso, o mecanismo impôs uma rigidez um pouco maior ao modelo, que elevou um pouco a carga de pico. Conforme já mencionado, o uso de um modelo constitutivo explicitamente formulado com dano, ainda que com variáveis equivalentes àsquelas do modelo constitutivo anteriormente empregado, potencialmente pode apontar uma trajetória resultante diferente, o que se observa na comparação entre os *upscalings*. Mesmo assim, dada a complexidade do fenômeno modelado, da formulação do método utilizado e dos mecanismos de comunicação interescalares, sobretudo do presente processo de *upscaling*, que exige a extração de variáveis constitutivas de um domínio exógeno, sua manipulação através de um mecanismo de média espacial e injeção dos valores finais no modelo estrutural, acredita-se que o desempenho alcançado foi satisfatório.

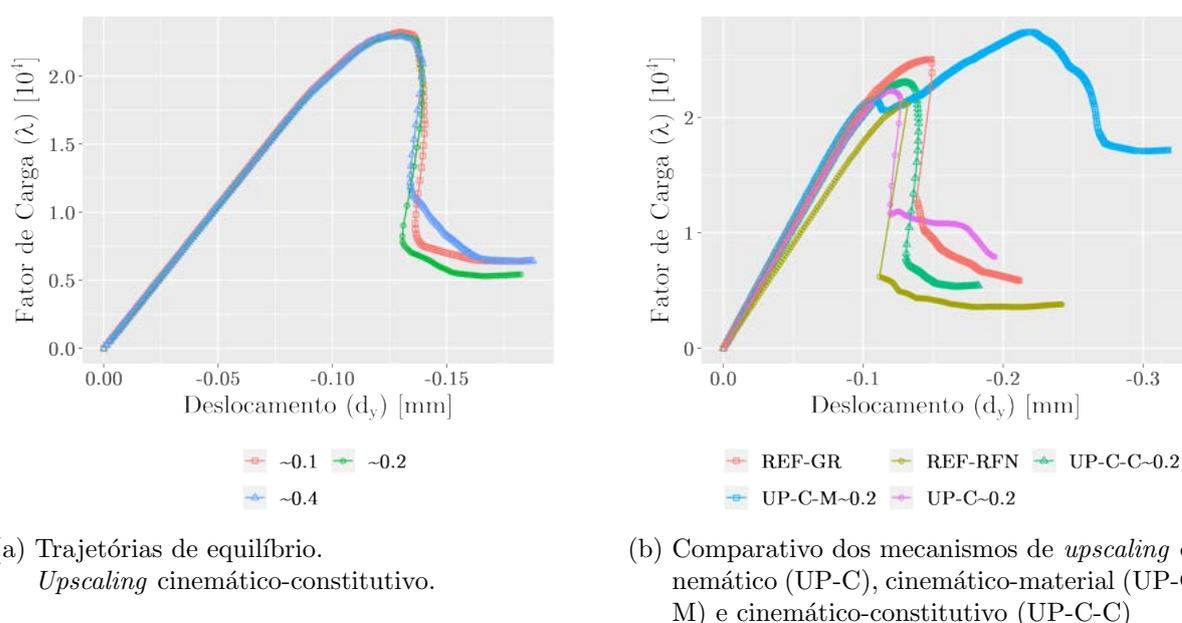


Figura 5.58: ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: avaliação do *upscaling* cinemático-constitutivo (caso 4). Trajetórias de equilíbrio para diferentes  $\Delta$  e  $s = 30$  (5.58a); comparativo entre os mecanismos de comunicação ascendente (5.58a).

Na composição 5.59 comparam-se a componente  $\varepsilon_{xx}$  e a evolução do dano na primeira direção principal das três variações de *upscaling* propostas. Fixaram-se o passo ( $k = 150$ ) e a fração de heterogeneidade ( $\Delta \approx 0.20$ ). Nas linhas, ilustram-se deformação e dano; nas colunas, cada mecanismo de comunicação ascendente (cinemático, cinemático-material e cinemático-constitutivo, da esquerda para direita).

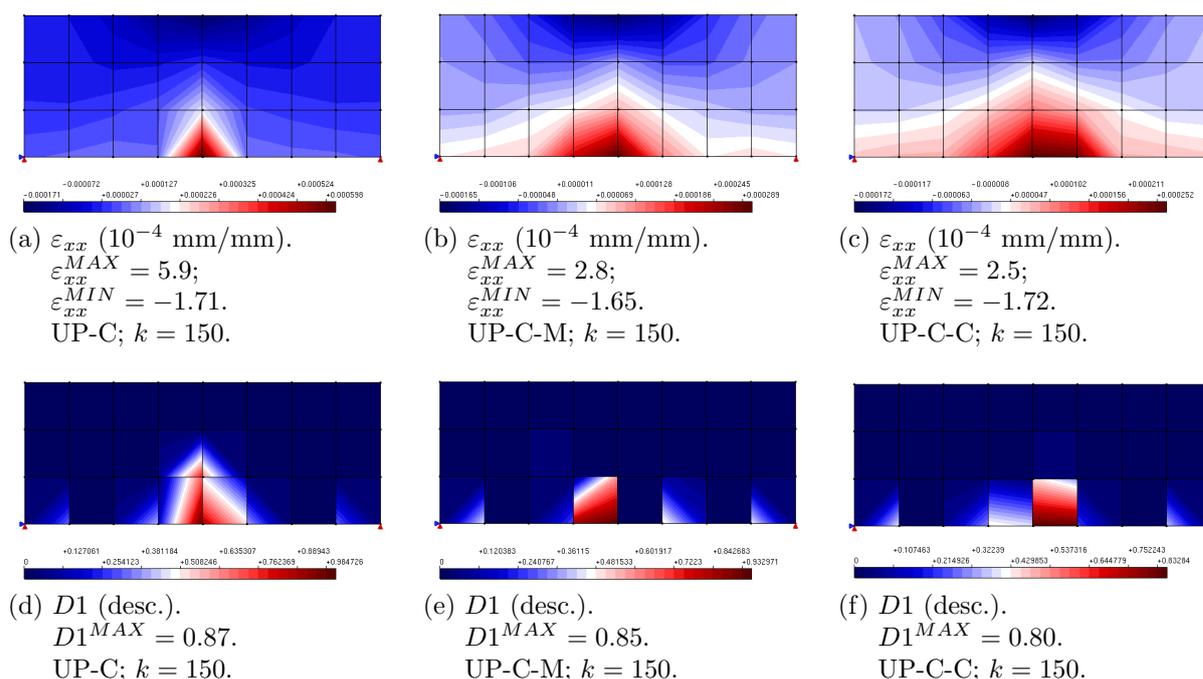


Figura 5.59: ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: comparação entre os mecanismos de *upscaling* no passo 150;  $\Delta \approx 0.20$ . Deformações (5.59a-5.59c) e dano (5.59d-5.59f). Colunas: *upscaling* (UP-C, UP-C-M, UP-C-C, da esq. p/ dir.)

A estratégia cinemático-constitutiva apresentou um padrão de deformações mais semelhante ao de uma viga homogênea, isto é, iminência de localização num elemento finito inteiro, com banda de fissuração da largura deste. Por sua vez, a estrutura ensaiada com o mecanismo cinemático-material desenvolveu um padrão de fissuração com desvio das inclusões similar àquele da simulação de escala única com malha refinada (ANL-HT-1E, seção 5.3.3.3, figuras 5.45 e 5.46), dada a existência explícita de pontos materiais com propriedades elásticas com valores absolutos de uma fase secundária mais rígida e indutora de concentrações. O modelo com *upscaling* cinemático reproduziu um comportamento mais simétrico e diluiu os impactos da heterogeneidade na escala global, simetrizando os efeitos do dano.

Observa-se que a variação nas hipóteses do mecanismo de *upscaling* interfere de maneira significativa no comportamento estrutural capturado. Tomando-se como resposta gráfica alvo (por mera construção de base comparativa) as soluções tradicionais do MEF com meio homogêneo, percebe-se que as respostas obtidas com envio exclusivo de funções de enriquecimento se assemelharam mais (na forma) com a referência refinada. Ainda

assim, refletiram flutuações adicionais nas trajetórias coerentes com a natureza material do domínio local. As evoluções das curvas com *upscalings* cinemático e cinemático-constitutivo foram mais suaves que a do mecanismo cinemático-material, que injetou no modelo global um comportamento mecânico consideravelmente mais heterogêneo e distante das curvas de referência obviamente; um comportamento distinto, mas não incorreto, pelo contrário, a resposta estrutural do modelo de duas escalas reproduziu de maneira fiel os resultados correspondentes dos modelos de escala única, indicando que a implementação de duas escalas não inseriu distorções extras no modelo discreto. Da mesma maneira que no modelo de uma só escala, ao se introduzir integralmente a heterogeneidade no domínio global do modelo de duas escalas, insere-se à reboque o comportamento de fissuração resultante, isto é, quando a banda de fissuração encontra uma inclusão, há um natural acúmulo de energia e dissipação quando do desvio do trajeto. A comunicação cinemático-constitutiva alcançou uma conformação final de trajetória um tanto similar àquela do enriquecimento *stricto*, mas tangente à referência grosseira. Em certa medida, representou um aparente comportamento médio entre as referências REF-RFN e REF-GR.

#### 5.3.4.5 Exame 5: Avaliação do Estado de Deformação Local

Uma das vantagens da estratégia de duas escalas é a prerrogativa de se modelar um comportamento global de uma estrutura, bem como extrair informações localizadas, com alteração de certas características, mas sem afetar drasticamente as hipóteses fundamentais do modelo global. Assim, numa aplicação em que se procure a inserção de fases materiais secundárias, sob a forma de inclusões concentradas, o mecanismo proposto na pesquisa permite a avaliação de estados de deformação um tanto mais detalhados, sem que necessariamente se refine o modelo do nível sobrejacente.

Nesse sentido, ilustra-se adiante as evoluções da componente  $\varepsilon_{xx}$  e da variável de dano na direção principal tracionada nos problemas locais de dois modelos, o primeiro com enriquecimento *stricto* (UP-C) e o segundo com a ponderação local→global (UP-C-C). Foram empregados os modelos com fração de heterogeneidade máxima ( $\Delta \approx 0.40$ ) e domínios locais bifásicos, com fase primária representativa de uma matriz cimentícia e fase secundária composta por inclusões alusivas a agregados grosseiros. Primeiramente, descrevem-se os comportamentos isolados dos domínios locais. Na sequência, realiza-se um paralelo entre os estados de deformação correntes nos modelos global e local. Ainda, comparam-se os comportamentos dos dois domínios locais avaliados.

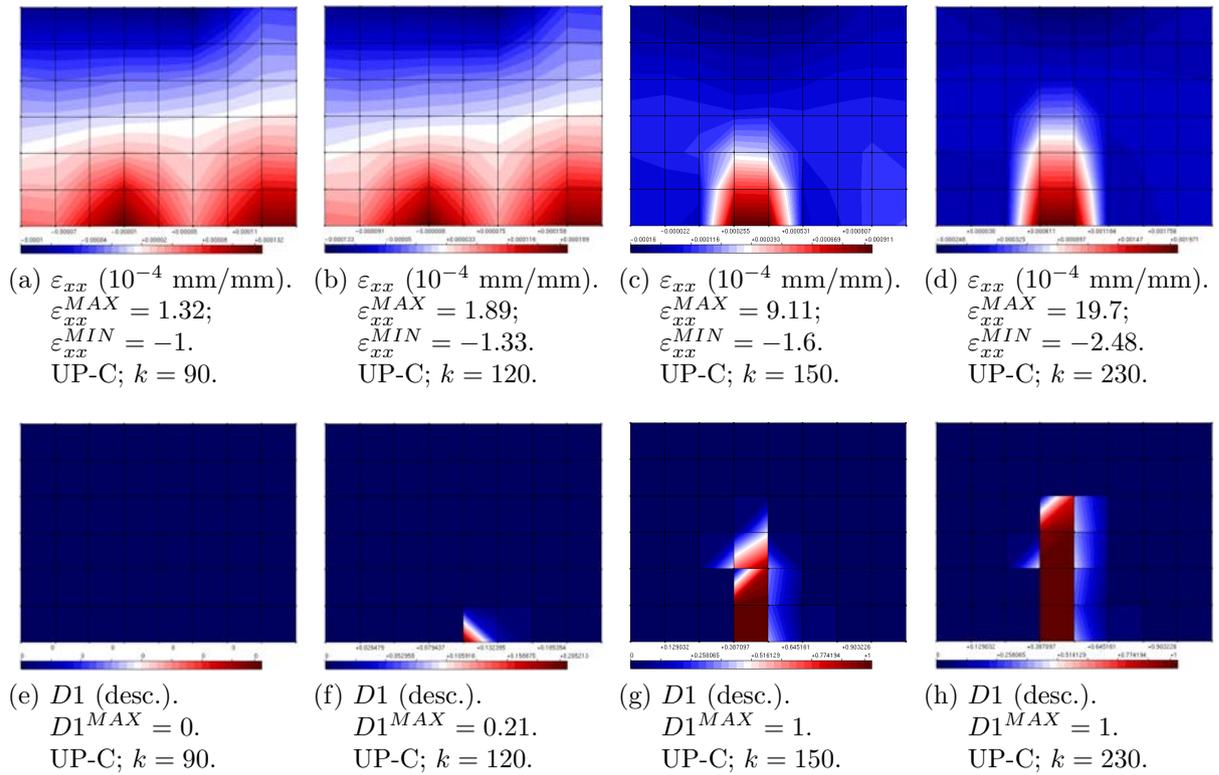


Figura 5.60: ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitanguiera (1998) Modificado: evoluções do estado de deformação e dano nos passos 90, 120, 150 e 230;  $\Delta \approx 0.40$ ; UP-C. Deformações (5.60a-5.60d) e dano (5.60e-5.60h). Colunas: passos.

Na primeira inspeção, figura 5.60, ilustram-se deformação e dano nos passos 90, 120, 150 e 230 do modelo de viga 5.5 com UP-C. Nota-se que o campo de deformações locais possui uma conformação coerente com a solicitação da estrutura e com a distribuição de fases internas, ou seja, regiões inter-inclusões com deformações concentradas e isofaixas distorcidas contornando as regiões com fase mais rígida. A evolução da banda de fissuração se assemelhou aos resultados do modelo refinado de escala única ANL-HT-1E (seção 5.3.3) e se adequou às condições globais.

Comparando-se agora os resultados do modelo local no passo 150, com aqueles do respectivo modelo global (figura 5.61) nota-se que a localização de deformações se processou em momento equivalente, embora de maneiras ligeiramente distintas: a global com um padrão de caráter mais homogêneo, e a local, um pouco mais detalhada, i.e., na região de matriz cimentícia, circundada por inclusões. Nesse contexto, algumas observações são pertinentes, portanto: uma das hipóteses primevas da estratégia de duas escalas proposta no âmbito desta pesquisa previa que o uso de um solver linear, não iterativo, em nível local pudesse mitigar ou postergar o fenômeno da localização de deformações numericamente

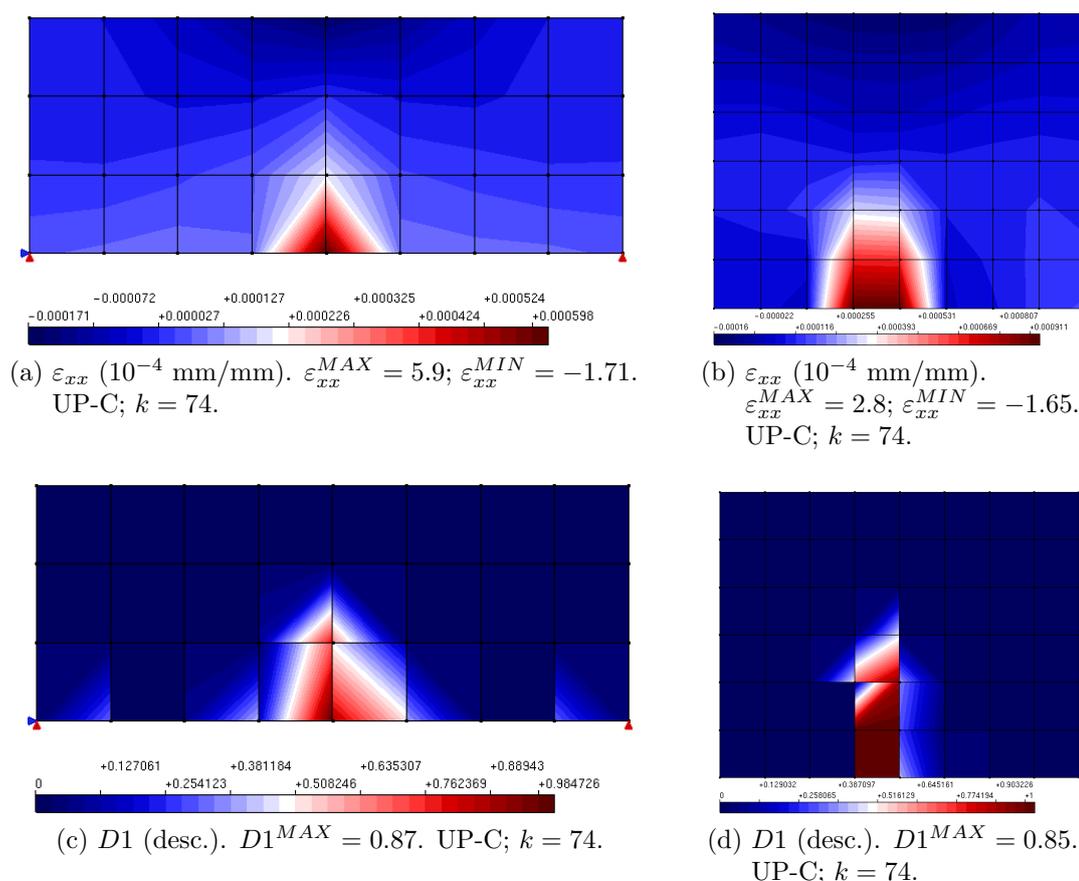


Figura 5.61: ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: comparação entre os domínios global e local no passo 150;  $\Delta \approx 0.40$ ; UP-C. Deformações (5.61a e 5.61b) e dano (5.61c e 5.61d). Colunas: modelos global e local, da esq. p/ dir.

induzidas, de tal maneira que a consideração de um refinamento local maior pudesse vigorar. Partindo-se da premissa que a comunicação ascendente entre os níveis local e global se estabelece no presente caso (UP-C) exclusivamente através de enriquecimentos (e, então, com acréscimo de poucos GDL), acreditava-se que o refinamento local progressivo pudesse incorporar um aprimoramento da solução neste nível, que se refletiria no enriquecimento do nível superior, sem, contudo, afetar o comportamento global em deformação de modo drástico. Os resultados mostram, entretanto, que em determinados casos (como o que se apresenta) o nível local herda um estado de deformação já deteriorado e que, portanto, sua solução se processa sob as mesmas condições globais. Nesse cenário, é estabelecido um mecanismo dual no qual a escala local, ora degrada pelo mapeamento constitutivo descendente, alimenta a evolução do dano global através do enriquecimento, que verdadeiramente são deslocabilidades locais fatalmente mais flexíveis e, em alguns casos, de ordens de grandeza um tanto superiores. Esse comportamento pode ser notado, por

exemplo, na banda de fissuração global, que se restringe a uma faixa equivalente àquela do nível subjacente. Assim, embora o mecanismo GL puro consiga de alguma maneira manejar trajetórias mais estáveis e permita que se encontrem *insights* diferentes, como o acompanhamento isolado de um estado de deformação de um domínio multifásico, ele ainda parece sofrer com os problemas específicos do modelo constitutivo.

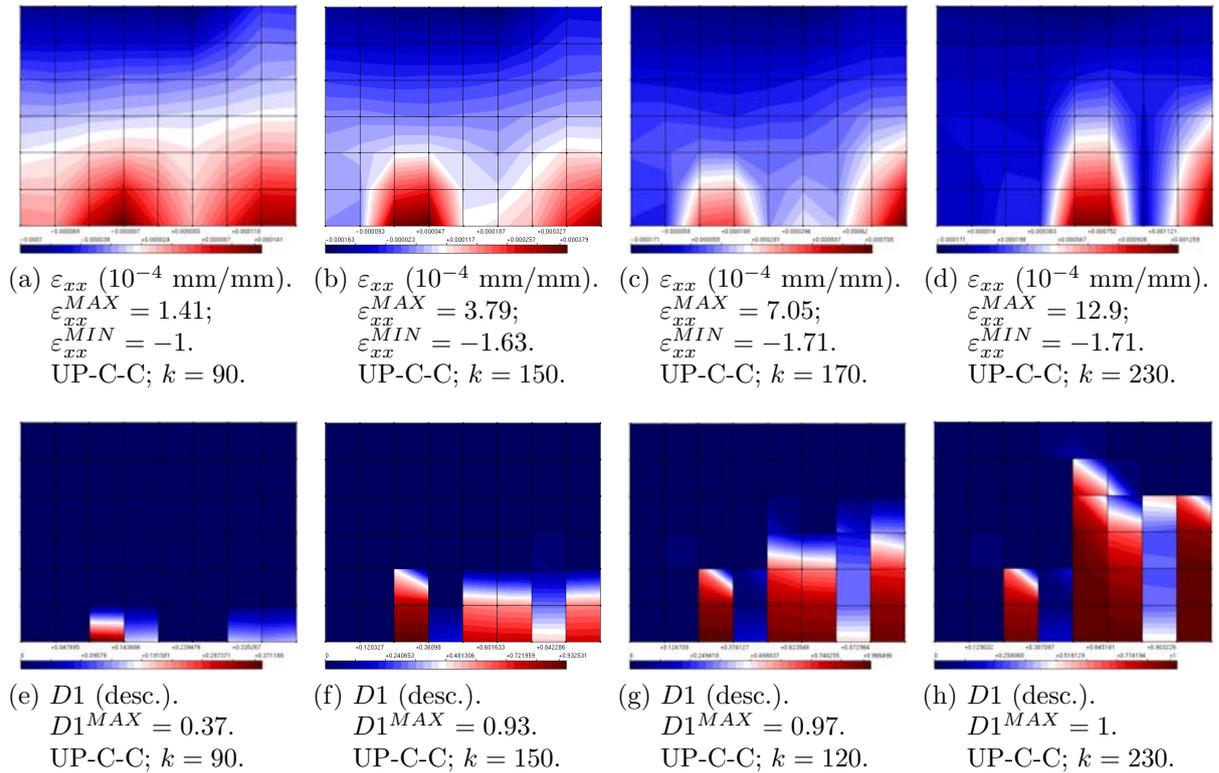


Figura 5.62: ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: evoluções do estado de deformação e dano nos passos 90, 150, 170 e 230;  $\Delta \approx 0.40$ ; UP-C-C. Deformações (5.62a-5.62d) e dano (5.62e-5.62h). Colunas: passos.

Na figura 5.62 registram-se a evolução da deformação  $\varepsilon_{xx}$  e do dano  $D_1$  no modelo com *upscaling* cinemático-constitutivo. Diferentemente do modelo anterior, o perfil de deformação varia de maneira mais expressiva ao longo da análise, movendo-se da região de matriz circunscrita por inclusões à esquerda da linha média (passo 150), passando à zona de matriz paralela à direita da heterogeneidade central (passo 170), e localizando na zona medial quando de um acúmulo de dano (passo 230), dano esse que se desenvolve de maneira similar ao da análise correspondente com malha grosseira e escala única (ANL-HT-1E; seção 5.3.3)). A estratégia e o modelo constitutivo empregados permitiram que uma degradação progressiva e distribuída se desenvolvesse mais fielmente a nível local, com localização mais tardia.

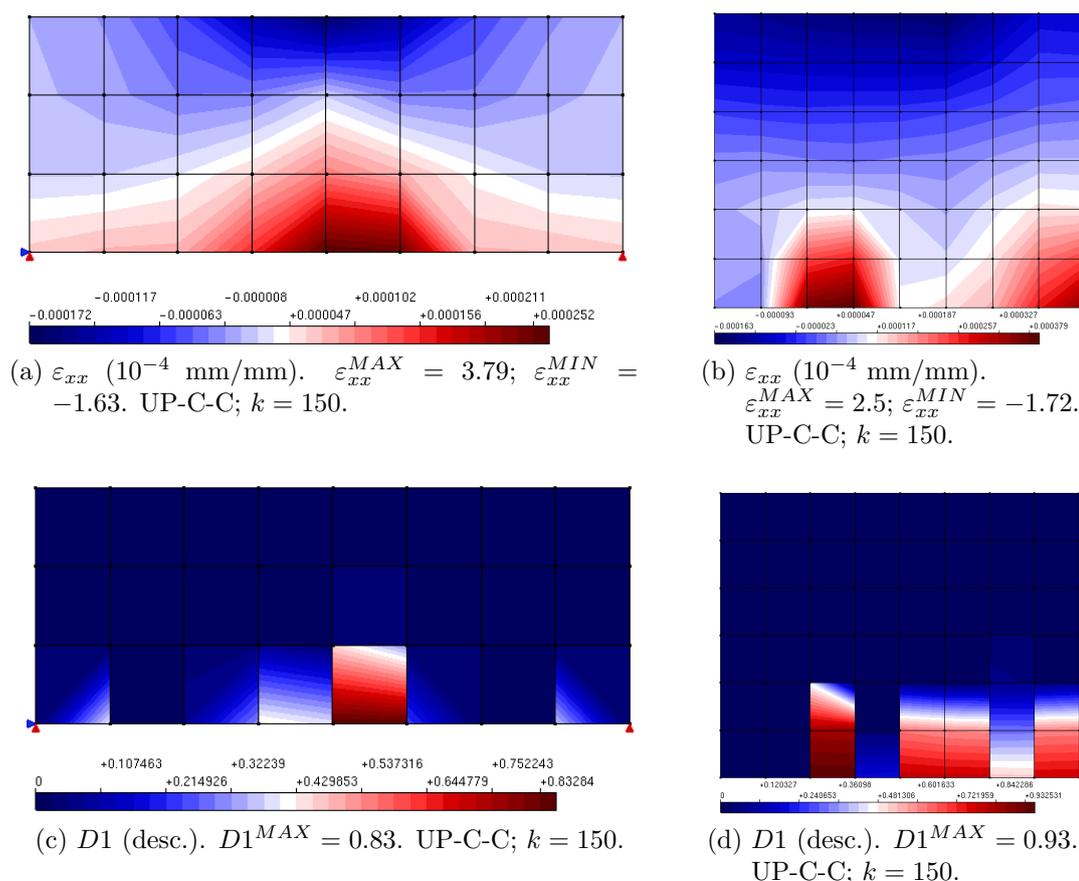


Figura 5.63: ANL-HT-2E – Flexão em 3 pontos – Penna (2011); Pitangueira (1998) Modificado: comparação entre os domínios global e local no passo 150;  $\Delta \approx 0.40$ ; UP-C-C. Deformações (5.63a e 5.63b) e dano (5.63c e 5.63d). Colunas: modelos global e local, da esq. p/ dir.

Ressalta-se que só se capturaram comportamentos distintos nas duas escalas, isto é, uma resposta estrutura de caráter mecânico homogêneo, e uma solução local heterogênea, com maior detalhamento espacial das variáveis, graças a uma das hipóteses fundamentais da estratégia GL proposta nessa pesquisa: a independência de integração. Tradicionalmente, como pode ser atestado na literatura da área de concentração, quase toda nova estratégia de enriquecimento, que via de regra exige algum tipo de alteração na quadratura padrão da partição da unidade, se vale de células de integração para cômputo das parcelas da forma fraca do problema. No caso do enriquecimento global-local, o que se vê é a utilização da discretização local na integração do problema global. Conforme apontado na descrição metodológica da pesquisa, considera-se essa abordagem restritiva e, no limite, inconsistente com determinadas aplicações, como análises não lineares típicas das estruturas trabalhadas aqui. Nesse sentido, no contexto do tipo de experimento

apresentado, no qual há a introdução de fases distintas no nível local e, portanto, alteração das propriedades elásticas dos pontos de integração, seria impossível a captura de um comportamento local particular e distinto da resposta global, resposta esta que não alcançaria a homogeneidade mecânica, por hipótese prescrita para esse nível de observação da estrutura. Ao se utilizar a quadratura local para integração do domínio global, a resposta obtida seria equivalente àquela alcançada por uma simulação com comunicação ascendente de traço cinemático-material, isto é, uma solução que no fim das contas traduz o comportamento de um modelo de escala única com inclusão de heterogeneidade (conforme experimentos ANL-HT-1E), mas com enriquecimento global-local. Uma vez que na abordagem tradicional os pontos de integração do PVC global são os mesmos do domínio local, e estes têm suas propriedades materiais prescritas com fases distintas, os valores absolutos das constantes elásticas globais seriam correspondentes aos das fases isoladas, e não mais alusivos a uma mistura equivalente, de modo que seria virtualmente irrealizável a determinação do comportamento global alcançado com a estratégia aqui proposta. Não somente, como apontado, seria igualmente ineficaz a prescrição de um domínio global cujo meio é representativo de uma mistura homogênea, e a utilização de domínios locais com fases materiais alternativas que combinadas aludissem à mistura global. Só se viabilizou uma análise estrutural com modelos com fases dissimilares e respostas das variáveis internas com naturezas mecânicas distintas, ou seja, um domínio global grosseiro mais homogêneo – aderente à hipótese fundamental de homogeneidade global/macroscópica – e um problema local mais refinado, materialmente heterogêneo, e com uma resposta mecânica correspondente, pois as escalas foram desacopladas o máximo possível; do contrário, refrisando-se, a solução global alcançada seria equivalente àquelas obtidas com o que nesse trabalho se chamou de *upscaling* cinemático-material.

### 5.3.5 Síntese

Diferentes experimentos foram apresentados, de modo a verificar o impacto de diversas variáveis independentes no comportamento estrutural modelado através do MEEG-GL. Testes em regimes linear e não linear, com e sem heterogeneidade material, foram expostos e o desempenho da técnica discutido em cada um dos exames realizados. Os exemplos apresentados têm um caráter assumido de verificação e validação da implementação e de certos limites da técnica numérica proposta, cujo pano de fundo estampa primordialmente

os efeitos da heterogeneidade e da consideração de mais de um nível/escala numa simulação do MEF/MEFG. No geral, cada experimento tem origem analítica ou numérica, sendo ele escolhido com base em uma (ou mais) referência(s) bibliográfica(s), e empenhando-se para emular do modo mais fiel possível as informações do exemplo coletado. Nesse contexto, resumam-se os seguintes comentários na ordem de encadeamento das seções precedentes *grosso modo*:

- O modelo de heterogeneidade se mostrou capaz de reproduzir uma mesoestrutura particulada com precisão adequada, pelo menos para as ambições originais da pesquisa. Foi possível alcançar resultados distintos com a variação do proporcionamento das fases, o que permitiu a avaliação de tendências centrais das variáveis de campo das respostas estruturais obtidas. Embora haja uma abrangência estatística muito limitada nas análises realizadas, os resultados indicam a possibilidade de uso de ferramentas como aquelas fornecidas nessa pesquisa para construção de modelos numéricos reduzidos para estudo do comportamento de materiais multifásicos ou, mais precisamente, bifásicos no contexto trabalhado;
- O MEFG com enriquecimento global-local facultou a introdução de efeitos secundários na escala global provenientes da heterogeneidade local, sendo os resultados alcançados aderentes a soluções analíticas e numéricas de referência;
- Particularmente às análises não lineares em escala única e simulação difusa da heterogeneidade, verificou-se que, mesmo com uma qualidade limitada da representação morfológica, em razão das contenções impostas pela natureza do modelo constitutivo (dentre outras), os resultados alcançados permitiram a avaliação de um componente adicional não presente em modelos homogêneos, uma marca de aleatoriedade no comportamento estrutural. Essa característica, impossível de ser capturada em modelos homogêneos sem a alteração (a cada realização) das hipóteses fundamentais do modelo matemático, i.e., das formulações constitutivas ou das propriedades materiais – que caso trocadas modificam o tipo de material (no limite) – é imediatamente verificada em testes com descrição de domínios multifásicos alusivos a uma mistura homogênea. Essa resposta contingente permite, com efeito, que comportamentos estruturais médios (materializados em trajetórias de equilíbrio híbridas)

sejam emulados e uma base de dados distinta seja construída com informações multifárias, pertinentes em estudos diferentes que não as tradicionais análises de tensões, como a observação da evolução da energia de deformação em domínios heterogêneos. Cabe ressaltar que para a escala de detalhamento empregada nas simulações de tipo ANL-HT-1E, a influência da distribuição espacial das inclusões elásticas no comportamento mecânico final é mais proeminente, uma vez que a interação e o imbricamento entre elas se estende por zonas maiores da estrutura;

- A estratégia multiescala consolidada, ou seja, uma técnica com uma escala global homogênea por hipótese, com uma fase única, e uma escala local heterogênea bifásica, com fases primária e secundária distintas e alusivas à mistura global quando combinadas, foi testada e diferentes mecanismos de comunicação ascendente foram avaliados, dois deles com maior concordância com a essência da separação de escalas: o *upscaling* cinemático exclusivo e o *upscaling* cinemático-constitutivo, este com maior aderência à realidade material do problema estudado, isto é, meio não linear e heterogêneo com evolução (e acompanhamento) de variável histórica em ambas os níveis;
- Nos modelos ANL-HT-2E, o MEFG-GL-NL retardou a localização de deformações, embora não a tenha extinguido;
- Notou-se que o enriquecimento *stricto* consegue levar alguma informação da constituição local para a estrutura através das funções de enriquecimento exclusivamente;
- Os resultados da estratégia cinemático-material nas análises ANL-HT-2E se assemelharam àqueles dos experimentos ANL-HT-1E;
- O mecanismo cinemático-constitutivo aparentou injetar um certo efeito regularizador na análise e de maneira coesa (do ponto de vista teórico e funcional) permitiu a obtenção de trajetórias relativamente estáveis e intermediárias às soluções numéricas de referência.

## 5.4 Estudos de Caso

Feito aquilo que se considerou formalmente “verificação e validação”, ou seja, em síntese, a comparação entre os resultados alcançados através das técnicas implementadas e

aqueles de soluções numéricas de referência (obtidas com o uso de métodos consagrados previamente disponíveis na plataforma de desenvolvimento, e, portanto, historicamente já testadas) sob limites experimentais equivalentes ou similares, procede-se agora para a aplicação da estratégia desenvolvida no âmbito da pesquisa a exemplos não virtuais. Nesta seção, serão explorados alguns experimentos com lastro em medidas laboratoriais externas, costumeiramente elencadas como “reais”, de modo a encorpar ainda mais os testes já registrados.

Dois estudos de caso serão apresentados:

- Ensaio de flexão de [Petersson \(1989\)](#);
- Painel de cisalhamento em L de [Winkler et al. \(2004\)](#).

Do mesmo modo que os exemplos passados, algumas categorias particulares de variáveis independentes foram testadas e discutidas. Os comportamentos estruturais foram ilustrados através da resposta gráfica das trajetórias de equilíbrio majoritariamente.

#### 5.4.1 [Petersson \(1989\)](#)

Nesta seção, a análise experimental de um ensaio de flexão em três pontos de uma viga de concreto simples, feita por Petersson [Petersson \(1989\)](#), será examinada. O *set-up* [5.7](#) apresenta os parâmetros gerais dos testes que se seguem. Propriedades elásticas e de evolução de dano foram baseadas na reprodução de [Penna \(2011\)](#) do ensaio. De maneira análoga ao que já foi feito neste trabalho, as malhas mais grosseiras foram as discretizações usadas na modelagem da escala global. A malha de referência do *template* [5.7e](#) emula a discretização de uma escala local refinada duas vezes em cada direção. Elementos finitos de quatro nós foram empregados. Um conjunto de variáveis de teste foi empregado para a avaliação de alguns fatores influentes na metodologia e para demonstrar as capacidades da estratégia, agora em um exemplo real. Inicia-se a seção com experimentos não lineares do tipo HM-2E, com a inserção da heterogeneidade testada na sequência. Cada exame será descrito separadamente, aos moldes daqueles das seções anteriores, e as particularidades de cada um serão descritas oportunamente. Nesse sentido, compondo cada categoria de teste temos as seguintes variáveis:

- Número de nós globais enriquecidos com enriquecimento global-local;

- Tamanho do domínio local;
- Refinamento do problema global;
- Refinamento do problema local;
- Heterogeneidade.

As análises individuais das variáveis anteriores resultaram nos seguintes exames:

- Exame 1: avaliação do número de nós globais enriquecidos.

Alterando-se progressivamente a franja de enriquecimento, cinco classes de distribuição de nós globais foram testadas. Com o emprego da variante homogênea (ANL-HM-2E), dois tipos de malha global foram empregadas (figuras 5.7d e 5.7c) e as prescrições do *set-up* 5.7 serviram de base para execução da simulação.

- Exame 2: avaliação do tamanho do domínio local.

Tal como testado anteriormente em um contexto linear, avaliou-se aqui o impacto das dimensões do problema local no comportamento estrutural capturado. Três tamanhos de domínio local foram testados para a classe de enriquecimento máximo do *template* global 5.7d.

- Exame 3: avaliação do refinamento global.

Basicamente, compararam-se os resultados de duas malhas globais com discretizações distintas e uma classe de enriquecimento fixa.

- Exame 4: avaliação do refinamento local.

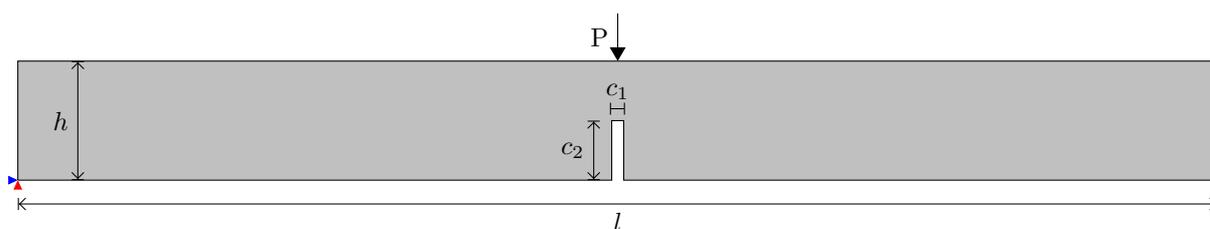
A partir do *template* global 5.7d e uma classe de enriquecimento máximo, duas discretizações locais foram examinadas, a saber: (1) elementos locais equivalentes a 1/4 dos elementos globais ( $h^L = 0.25h^G$ ) e (2) elementos globais equivalentes a 1/8 dos elementos globais ( $h^L = 0.125h^G$ ).

- Exame 5: avaliação da heterogeneidade.

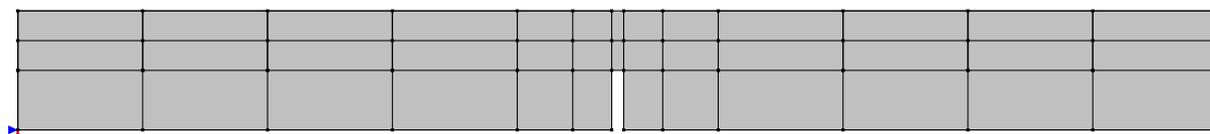
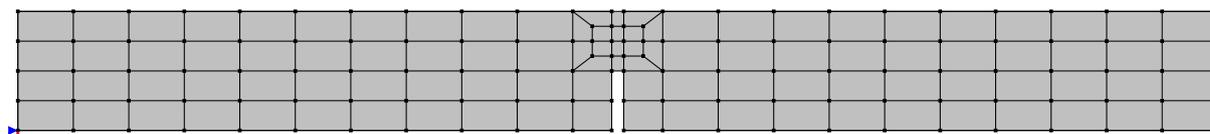
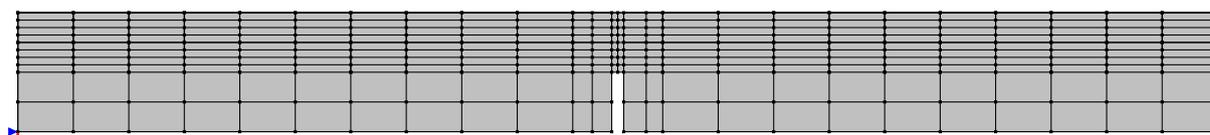
Utilizando-se distribuições de partículas com tamanhos associados à discretização local, algumas simulações com a técnica consolidada foram desenvolvidos de modo a se averiguar o desempenho da estratégia GL e o impacto de fases secundárias na análise.

Parâmetros Materiais ( $\sigma \times \varepsilon$ Carreira e Chu (1985, 1986))						
Fase	$E_0$ (MPa)	$\nu_0$	$\varepsilon_t$	$f_t$ (MPa)	$\varepsilon_c$	$f_c$ (MPa)
Matriz	$2.1 \cdot 10^4$	0.2	$2.29 \cdot 10^{-4}$	3	$3.110 \cdot 10^{-3}$	40
Agregado	$6.8 \cdot 10^4$	0.2	$3.29 \cdot 10^{-4}$	14.0	$1.57 \cdot 10^{-3}$	66.6
Homog.	$3.0 \cdot 10^4$	0.2	$2.2 \cdot 10^{-4}$	3.3	$2.0 \cdot 10^{-3}$	33.0
<b>Modelo Constitutivo</b>	Fissuração Distribuída (c/ direção fixa)					
Método Controle (CDG)			Geometria & CDC			
$\delta\lambda_1$	0.02		<i>espess.</i>	36.0 mm		
<i>tol(desloc.)</i>	$1 \times 10^{-4}$		<i>l</i>	2000 mm	$c_1$ 20 mm	
<i>Equil.</i>	Secante		<i>h</i>	200 mm	$c_2$ 100 mm	
<i>Passos</i>	200		P e <i>Restr.</i>	800 N	$R_x, R_y$	
<b>Heterogeneidade <math>\Delta</math></b>	{0.10, 0.20, 0.40}			<b>Mod. Anl.</b>	EPT	

(a) Parâmetros.



(b) Geometria e CDC.

(c) *Template* de malha 1. Escala global e solução grosseira de referência.(d) *Template* de malha 1. Escala global e solução grosseira de referência alternativa.(e) *Template* de malha refinada. Solução refinada de referência.

Set-up 5.7: Configuração Experimental – Estudo de Caso – [Pettersson \(1989\)](#), ensaio de flexão em 3 pts. Parâmetros de entrada (mod. fiss. dist. c/ leis de Carreira e Chu, controle de trajetória (desloc. generalizado), CDC e fração de heterogeneidade ( $\Delta$  com base no volume do domínio local); [5.7a](#)); geometria ([5.7b](#)); malhas de referência ([5.7c](#), [5.7d](#), [5.7e](#)).

A carga foi dividida entre os dois nós adjacentes ao ponto de aplicação. Novamente, as trajetórias de equilíbrio apresentadas são do ponto de aplicação do carregamento: o nó imediatamente à direita de  $\mathbf{P}$ . Os elementos globais foram integrados com  $4 \times 4$  pontos de integração.

#### 5.4.1.1 Exame 1: Avaliação do Número de Nós Globais Enriquecidos

O efeito do número de nós enriquecidos é apresentado a seguir. Primeiramente, duas classes de distribuições nodais ao longo da área central da vida (que controla a não linearidade do processo) são estudadas a partir do primeiro *template* de malha da configuração experimental 5.7; 5.7c. Cada elemento local foi equivalente a  $1/4$  de um elemento global ( $h^L = 0.25h^G$ , fig. 5.64b). As classes de enriquecimento utilizadas foram: *Classe 1.1 (a)* – 8 nós; *Caso 1.2 (a)* – 14 nós (vide fig. 5.64a).

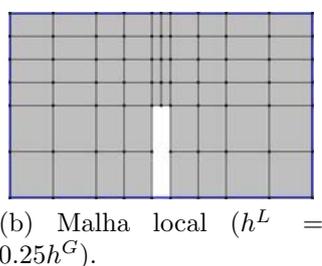
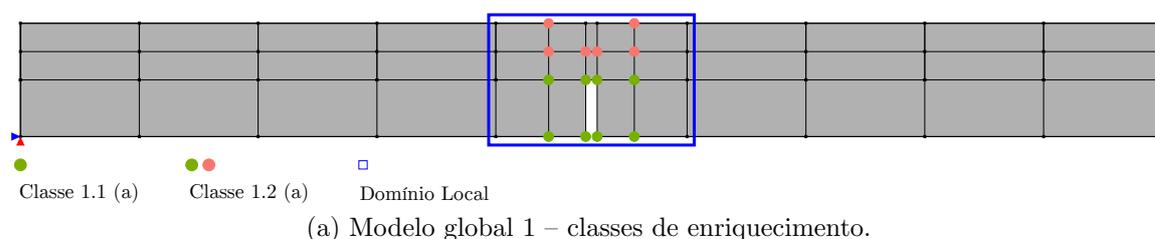


Figura 5.64: Informação adicional do primeiro *template* global (variável 1: nós enriquecidos).

A figura 5.65 apresenta as trajetórias de equilíbrio resultantes. Como pode ser visto, a malha de MEF grosseira (RER-GR) gerou um solução relativamente pobre, com algumas instabilidades e, em alguma extensão, ficou distante da referência experimental. Os resultados obtidos através do MEFG-GL-NL, por outro lado, trouxeram as curvas de equilíbrio para a o interior da mancha experimental, sendo capaz de prever os valores máximos de carga-deslocamento de maneira apropriada e com uma malha global consideravelmente pobre.

Incrementando a inspeção visual da aderência das curvas, na figura 5.66 a evolução dos desvios entre as soluções numéricas e os limites superior e inferior da mancha experimental

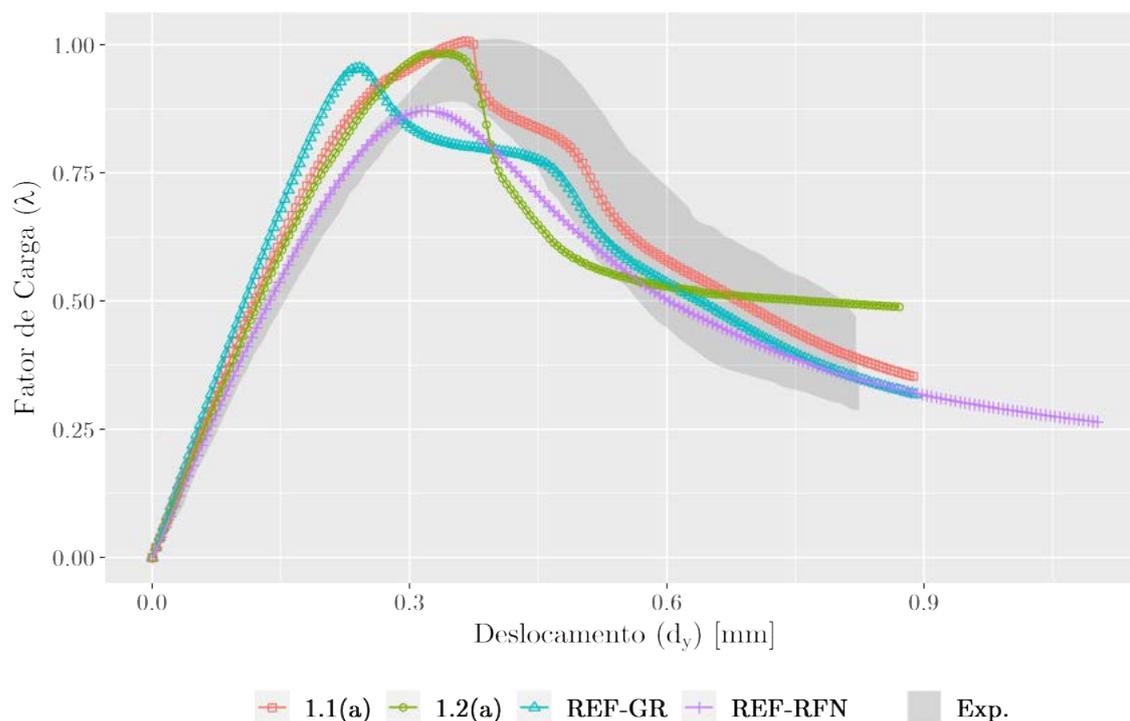
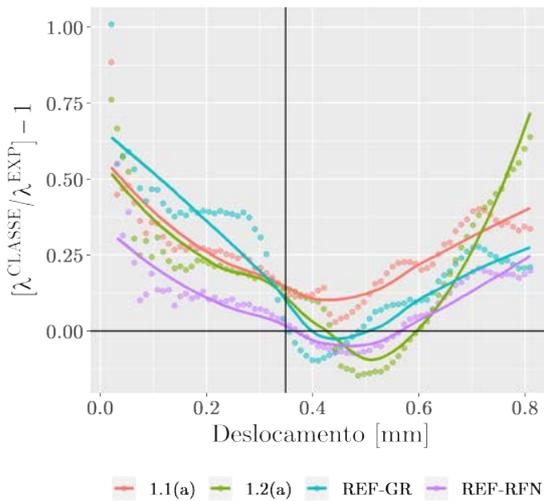


Figura 5.65: Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – [Petersson \(1989\)](#): trajetórias de equilíbrio (variável 1 (a)).

é apresentada. O desvio  $\Lambda = \lambda^{CLASSE} / \lambda^{EXP} - 1$  computa a relação entre cada classe avaliada e os resultados experimentais. Oitenta abscissas, de zero ao deslocamento máximo registrado por [Petersson \(1989\)](#), foram utilizadas para a avaliação. Curvas com o perfil de  $\Lambda$  por deslocamentos medidos, representado a aderência ponto a ponto das trajetórias, e box-plots das tendências centrais de cada distribuição dos desvios compõem a análise. Percebe-se

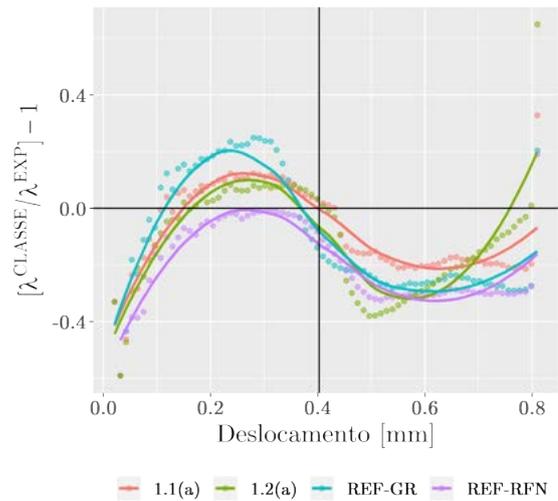
Na sequência, os resultados de cinco classes de enriquecimento em outra composição serão apresentadas. O mesmo domínio local foi escolhido ( $h^L = 0.25h^G$ , fig. 5.67b) e as classes de enriquecimento utilizados foram: *Classe 1.1 (b)* – 12 nós; *Classe 1.2 (b)* – 16 nós; *Classe 1.3 (b)* – 22 nós; *Classe 1.4 (b)* – 26 nós; *Classe 1.5 (b)* – 28 nós (figura 5.67a). A figura 5.68 apresenta as trajetórias de cada um dos casos em paralelo com a dispersão experimental e soluções numéricas de referência (MEF com malha grosseira, REF-GR, e com malha refinada, REF-RFN).

As curvas obtidas apresentaram um traçado coerente e um comportamento estrutural dentro da amplitude experimental. Analisando-se as curvas obtidas é possível notar uma convergência dos resultados com o incremento de nós enriquecidos, especialmente no ramo ascendente e no terço final do ramo descendente. O MEFGL-NL apresentou uma



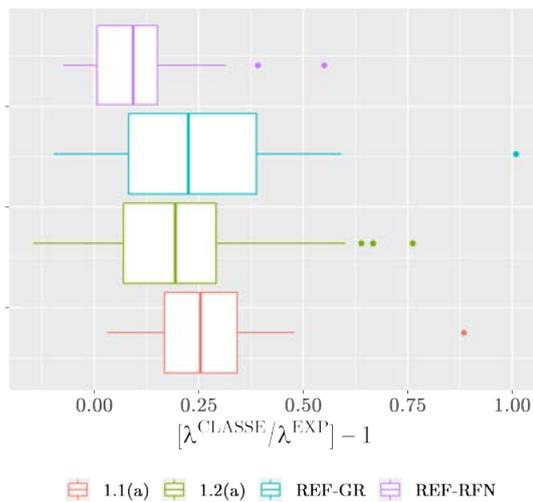
(a) Desvio do fator de carga com relação ao limite experimental inferior.

$$A^{INF} = \lambda^{CLASSE}/\lambda^{EXP,INF} - 1.$$

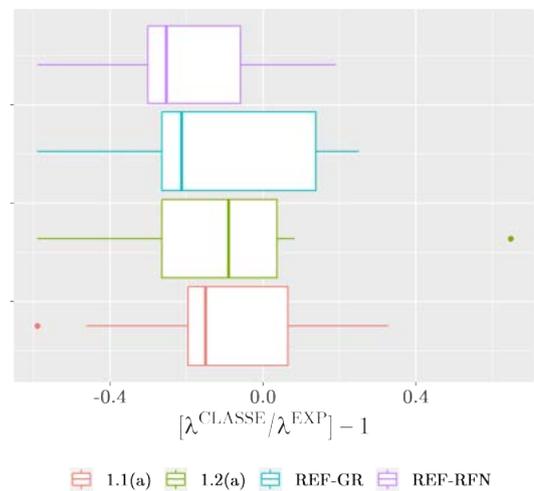


(b) Desvio do fator de carga com relação ao limite experimental superior.

$$A^{SUP} = \lambda^{CLASSE}/\lambda^{EXP,SUP} - 1$$



(c) Desvio do fator de carga com relação ao limite experimental inferior. Boxplot  $A^{INF}$ .



(d) Desvio do fator de carga com relação ao limite experimental superior. Boxplot  $A^{SUP}$ .

Figura 5.66: Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – [Petersson \(1989\)](#): desvios de cada modelo para os limites inferior e superior da faixa experimental (caso 1).  $A^{INF}$  (5.66a, 5.66c);  $A^{SUP}$  (5.66b, 5.66d); marcação do pico (linha vertical);  $A = 0$  (linha horizontal).

dependência de malha e um efeito de tamanho moderadamente inferior à solução tradicional do MEF, que em sua versão refinada alcançou fatores de carga máximos menores que dos demais modelos e abaixo, inclusive, da dispersão experimental. Além disso, pode-se observar que os resultados do modelo GL tendem aos valores da solução de referência grosseira para valores de deslocamento maiores.

Similarmente ao *template* global anterior, os perfis dos desvios do segundo modelo global foram avaliados. Nota-se que as respostas global-local possuem desvios de mesma

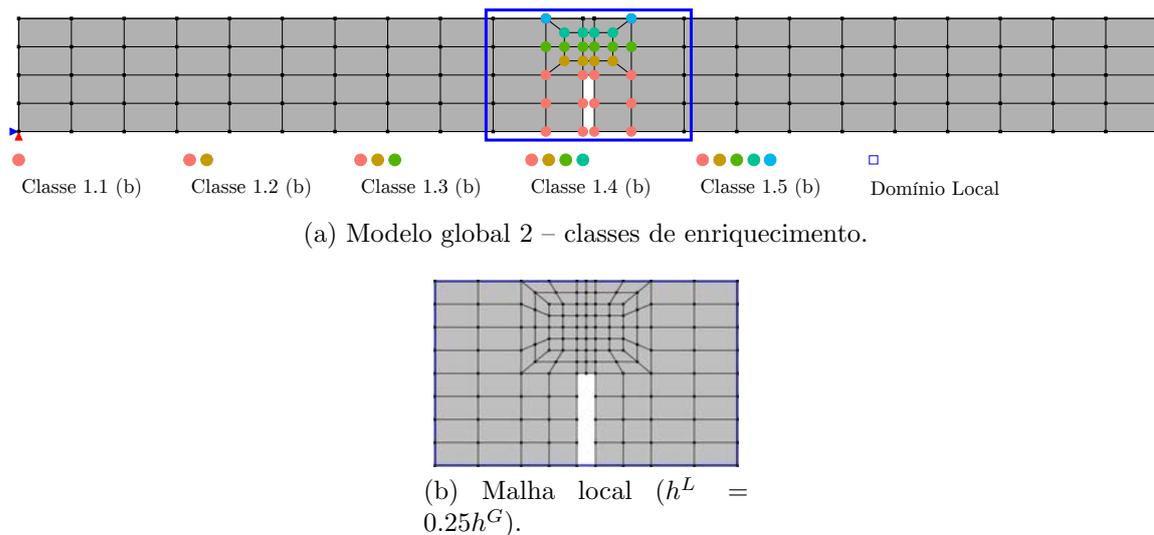


Figura 5.67: Informação adicional do segundo *template* global (variável 1: nós enriquecidos).

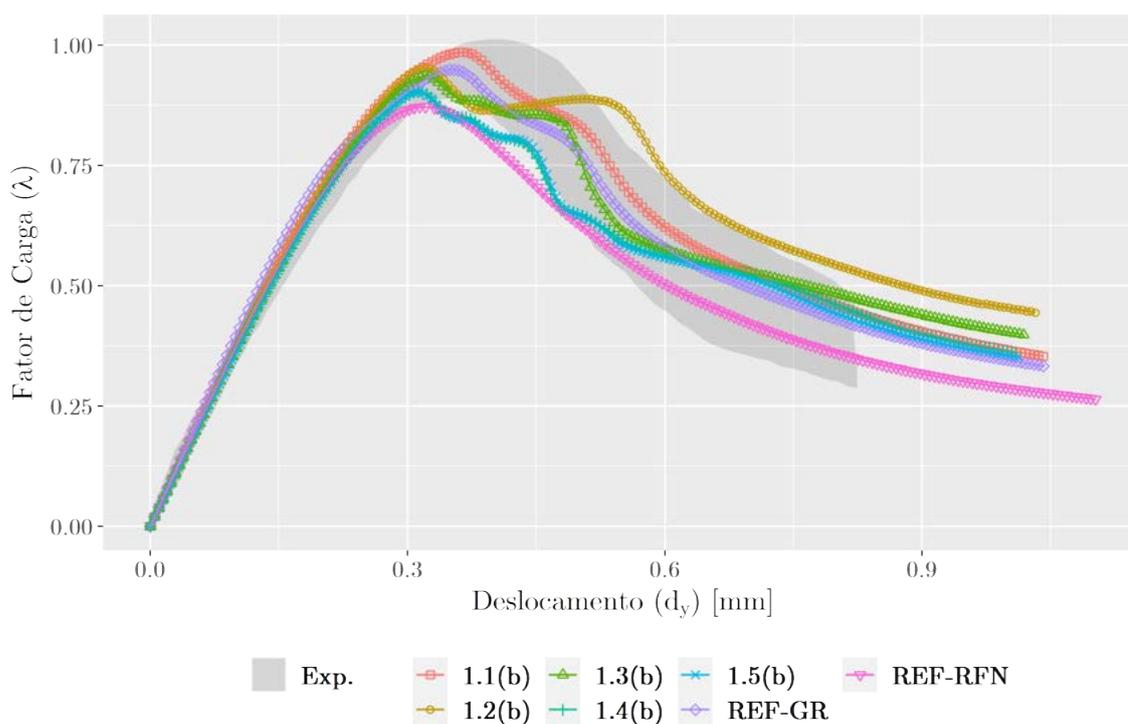
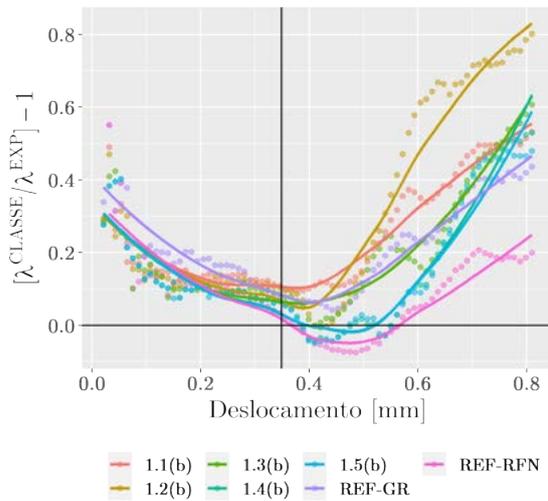


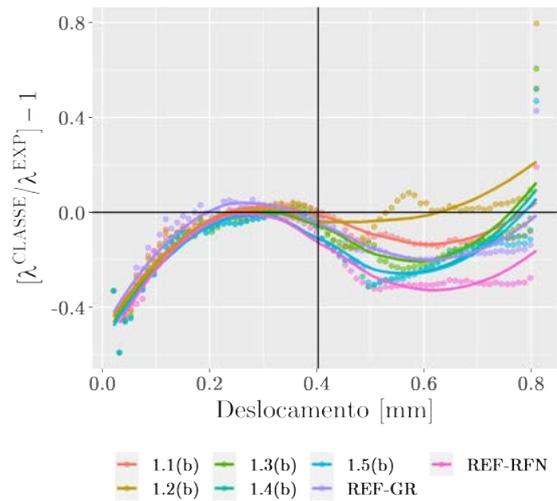
Figura 5.68: Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – Petersson (1989): trajetórias de equilíbrio (variável 1 (b)).

ordem para os limites do espectro experimental de Petersson (medianas  $\in [-0.2, 0.2]$ ) – indicando uma tendência de encaixe com os resultados médios do ramo descendente da dispersão –, com uma distribuição de desvios para o limite superior um pouco mais compacta, ligeiramente mais próximas do limite inferior, e distantes do superior, com o aumento do número de nós enriquecidos.



(a) Desvio do fator de carga com relação ao limite experimental inferior.

$$A^{INF} = \lambda^{CLASSE} / \lambda^{EXP,INF} - 1.$$



(b) Desvio do fator de carga com relação ao limite experimental superior.

$$A^{SUP} = \lambda^{CLASSE} / \lambda^{EXP,SUP} - 1$$

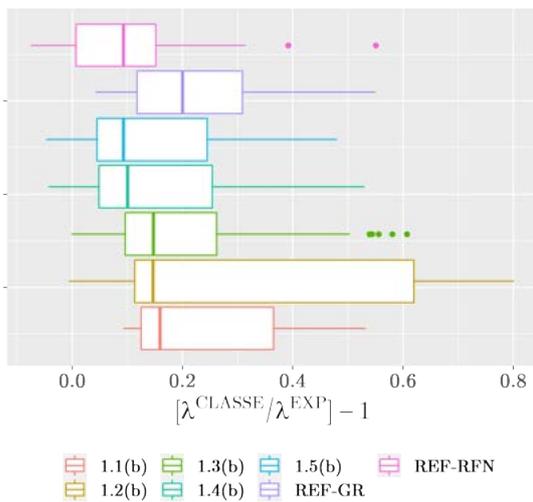
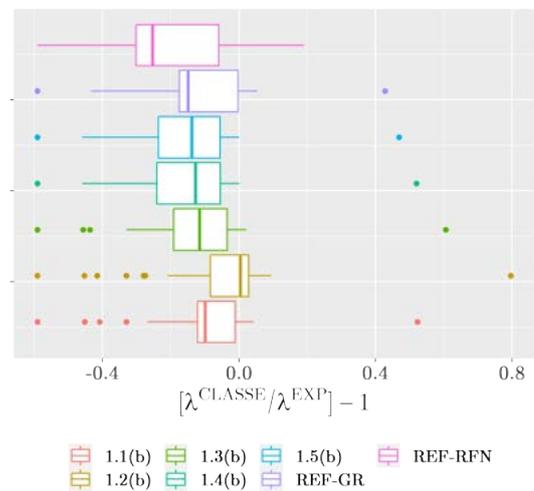
(c) Desvio do fator de carga com relação ao limite experimental inferior. Boxplot  $A^{INF}$ .(d) Desvio do fator de carga com relação ao limite experimental superior. Boxplot  $A^{SUP}$ .

Figura 5.69: Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – [Petersson \(1989\)](#): desvios de cada modelo para os limites inferior e superior da faixa experimental (global 2).  $A^{INF}$  (5.69a, 5.69c);  $A^{SUP}$  (5.69b, 5.69d); marcação do pico (linha vertical);  $A = 0$  (linha horizontal).

Ainda, pode-se inferir que numa análise fisicamente não linear usando o a versão do MEEFG-GL proposta aqui, caso seja prescrito um problema local sobre uma zona de degradação importante, é interessante que a banda de enriquecimento acompanhe a evolução do dano. Quando a variável de dano global transpassou uma das franja de nós enriquecidos, o comportamento da trajetória de equilíbrio tende a desviou mais acintosamente da tendência original (veja Classe 1.2 (b), gráfico 5.68). Desse modo uma franja de enriquecimento global e, por conseguinte, a escala local devem acompanhar o fenômeno crítico

global *se acaso entrarem em contato com ele* – a ênfase é importante: a ressalva tem sentido no cenário em que a faixa de nós enriquecidos entra em contato com o dano, ou seja, os resultados indicam as referidas variações quando a zona enriquecida tem contato direto com o dano –. Isso pode ser verificado com auxílio da distribuição do dano na primeira direção principal (figura 5.70): quando o dano cruzou a franja da classe 1.1 (b) (passo 74), a trajetória desviou do traçado inicial. Apesar da flutuação aparentar ser relativamente imprópria e inesperada, as diferentes bandas de enriquecimento GL sugerem que uma escolha apropriada de nós globais enriquecidos ao longo de uma dada zona crítica pode, guardadas as devidas proporções, estabilizar uma análise com *softening*, que geralmente sofre de objetividade de malha. Esta característica é completamente diferente da técnica MEFGL presente na literatura, que, em geral, não apresentam a evolução de uma variável histórica (representativa do comportamento material). No MEFGL padrão, voltado principalmente para aplicações lineares, os enriquecimentos global-local parecem ficar limitados à regiões específicas que não necessariamente seguem algum tipo de transformação dentro do domínio global e não há indicação tácita da influência da distribuição desses enriquecimentos na simulação, de uma maneira geral. Observações equivalentes foram feitas em Monteiro et al. (2020) e Novelli (2019).

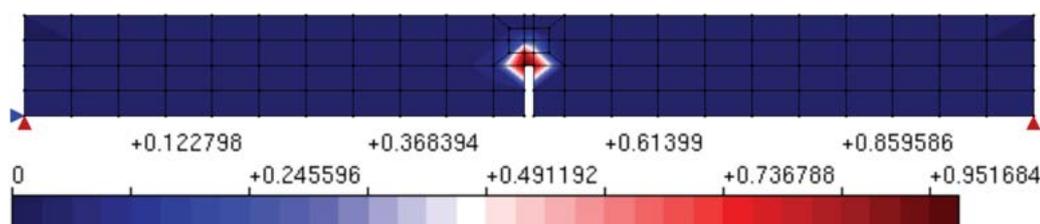


Figura 5.70: Evolução do dano; momento em que a variável de dano transpassa a franja de enriquecimento da classe 1.1 (b) (Monteiro et al., 2020; Novelli, 2019).

#### 5.4.1.2 Exame 2: Avaliação do Tamanho do Problema Local

Retomando testes anteriores no contexto linear de capítulo passado, a influência do tamanho do problema local é investigada. Para isso, foram utilizados três classes de problema local: *Classe 2.1 – problema local pequeno*; *Classe 2.2 – problema local intermediário*; e *Classe 2.3 – problema local grande*. A figura 5.71 identifica cada um desses domínios locais. Para o experimento, a malha global aprimorada (*template 2*; fig. 5.7d) e a classe de enriquecimento máximo foram escolhidos (Caso 1.5 (b); 5.67a). O tamanho da malha da escala local é o mesmo do caso anterior ( $h^L = 0.25h^G$ ). Na figura 5.72, as

respostas gráficas de cada classe do caso 2 são apresentadas em paralelo com a dispersão experimental e as soluções numéricas de referência.

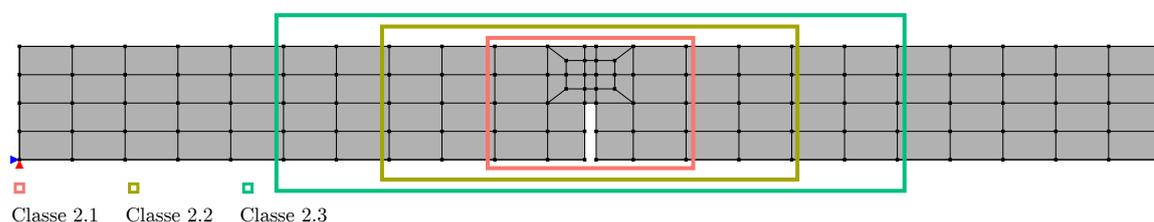


Figura 5.71: Estudo de caso – Tamanhos de problemas locais (variável 2).

Aparentemente, não há influência considerável do tamanho do problema local no comportamento geral da análise, que novamente se encaixa nos resultados obtidos por Peterson, ficando também entre as curvas de referência das soluções numéricas, com desempenho razoavelmente superior à REF-RFN. Vale ressaltar, entretanto, que a escala local deve se sobrepor suficientemente à região de evolução da variável constitutiva/histórica (ver 5.4.1.1). Além disso, se a fronteira de um domínio local está em uma zona danificada, ou imediatamente circundando-a, as condições de contorno tendem a ser mais frágeis e o PL, mais flexível. Isso implica enriquecimentos com ordens de magnitude superiores às relativas aos deslocamentos globais esperados. Nesse sentido, e em comparação com a abordagem padrão - e linear -, a dimensão de um PL é eminentemente maior no algoritmo aqui proposto, de forma que os limites do domínio local são colocados preferencialmente em uma região global com não linearidade reduzida. Na figura 5.72 as respostas gráficas de cada teste da variável 2 são apresentadas em paralelo com a dispersão experimental e soluções de referência numérica.

### 5.4.1.3 Exame 3: Avaliação do Refinamento Global

Este teste apresenta uma comparação que avalia o impacto do refinamento em escala global. Para isso, as trajetórias de equilíbrio dos modelos com as malhas 5.7d e 5.7c foram confrontados, sendo as classes 1.1 (a, b) – alusivas do problema menos enriquecido – escolhidas para a inspeção.

A figura 5.73 mostra as curvas. Logicamente, e de modo esperado para o tipo de modelo empregado, as trajetórias indicam que o refinamento da escala global implica num problema um pouco mais flexível. O refinamento, portanto, da escala global afeta a descrição do comportamento estrutural do modo tradicional que modelos não lineares da natureza do emprega registram.

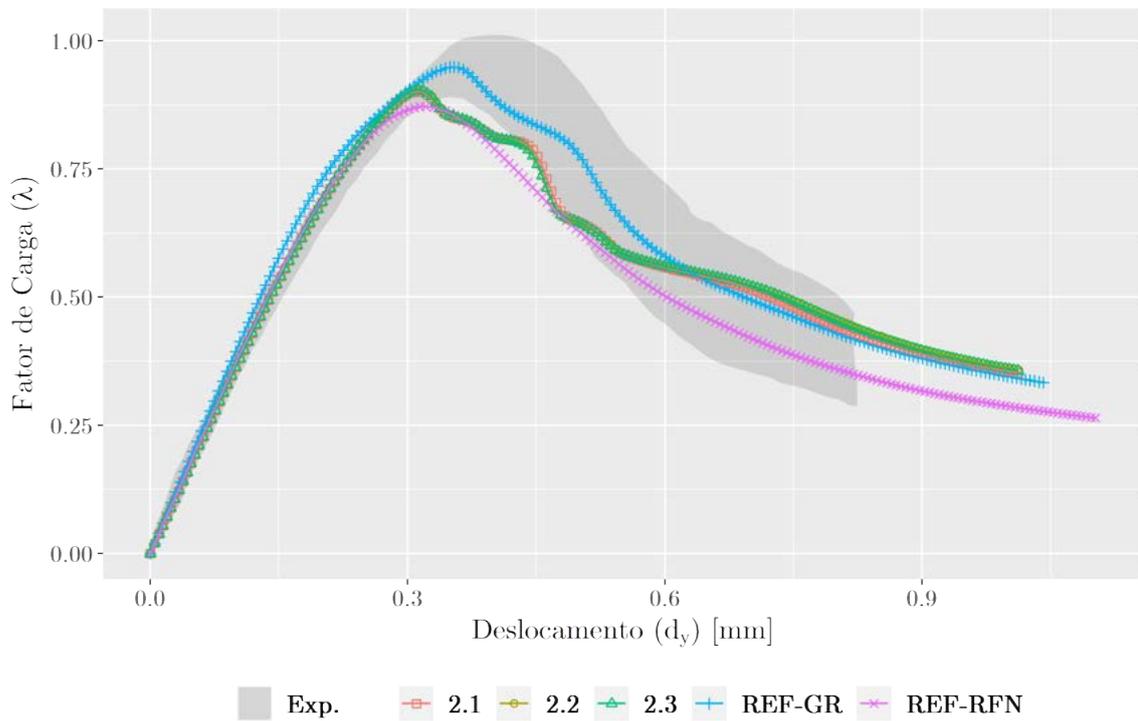


Figura 5.72: Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – [Pettersson \(1989\)](#): trajetórias de equilíbrio (variável 2).

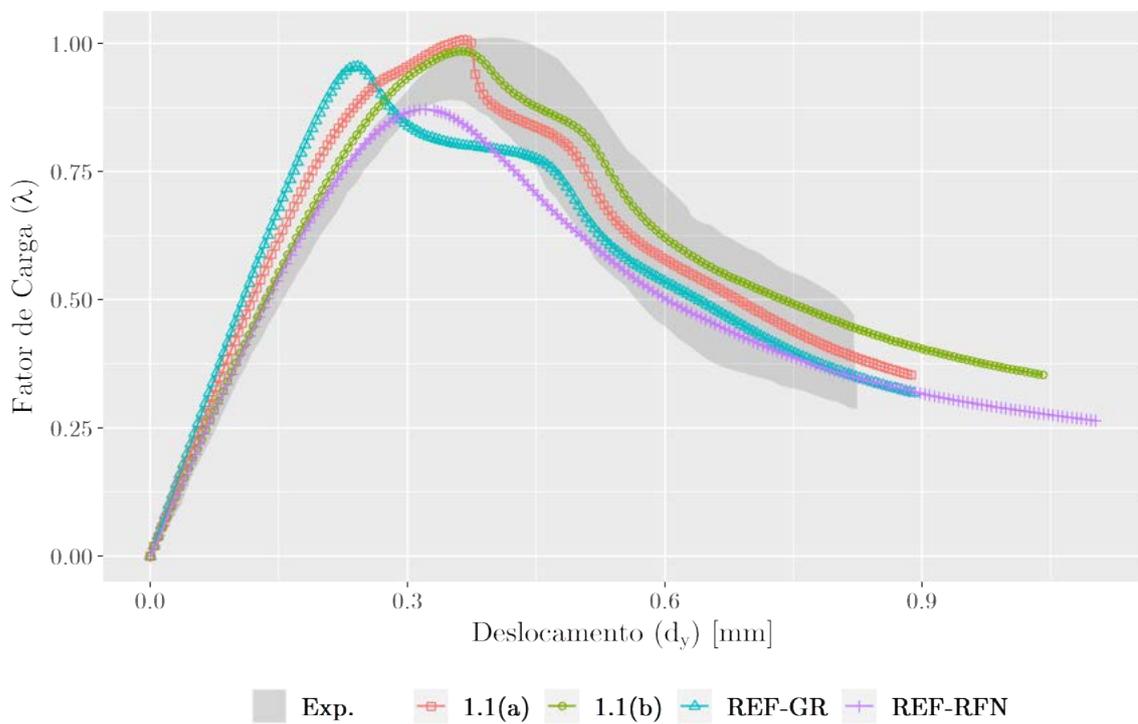
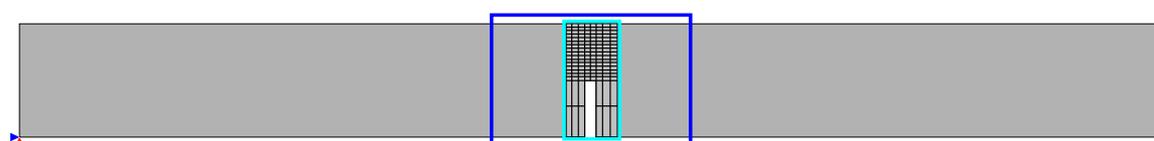


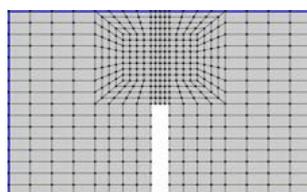
Figura 5.73: Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – [Pettersson \(1989\)](#): trajetórias de equilíbrio (variável 3).

#### 5.4.1.4 Exame 4: Avaliação do Refinamento Local

A interferência do refinamento local é apresentada a seguir. Para a realização dos testes, foram utilizados três classes de enriquecimento (Classe 1.1 (b), 1.3 (b) e 1.5 (b)), juntamente com o tamanho mínimo do domínio local (Classe 2.1) e um refinamento local extremo ( $h^L = 0.125h^G$ ). Portanto, para a variável 4, temos: *Classe 4.1 = Classe 1.1 + Classe 2.1 + refinamento local*; *Classe 4.2 = Classe 1.3 + Classe 2.1 + refinamento local* e *Classe 4.3 = Classe 1.5 + Classe 2.1 + refinamento local*. Os resultados foram comparados com duas soluções numéricas de referência: a primeira delas sendo o *template 5.7e* da configuração experimental 5.7 (REF-RFN-0.25 $h^G$ ) e a segunda, um refinamento da referida malha, com elementos da ordem daqueles do modelo local utilizado (REF-RFN-0.125 $h^G$ ).



(a) Detalhe da malha de referência com refinamento equivalente a  $h^L = 0.125h^G$ .



(b) Malha local ( $h^L = 0.125h^G$ ).

Figura 5.74: Informação adicional para os testes da variável 4 (refinamento local).

Como pode ser visto no gráfico 5.75, para o grau de refinamento local escolhido, conforme o número de nós globais enriquecidos aumenta, um efeito de tamanho considerável é apresentado. Apesar disso, o desempenho do MEEG-GL-NL no ramo ascendente e a carga máxima obtida por esta análise foram superiores à simulação do MEF com grau de refinamento equivalente na área central da viga. Os resultados indicam que um refinamento expressivo do problema local, sem a contrapartida de uma redução do refinamento em escala global e da diminuição do número de nós globais enriquecidos, resulta no rebaixamento das curvas de equilíbrio.

Na composição 5.76 os perfis dos desvios entre as soluções numéricas e experimental são apresentados. Reforçando a inspeção visual das trajetórias, percebe-se que a solução do MEF puro com refinamento máximo ( $h^L = 0.125h^G$ ) se distancia de maneira expressiva

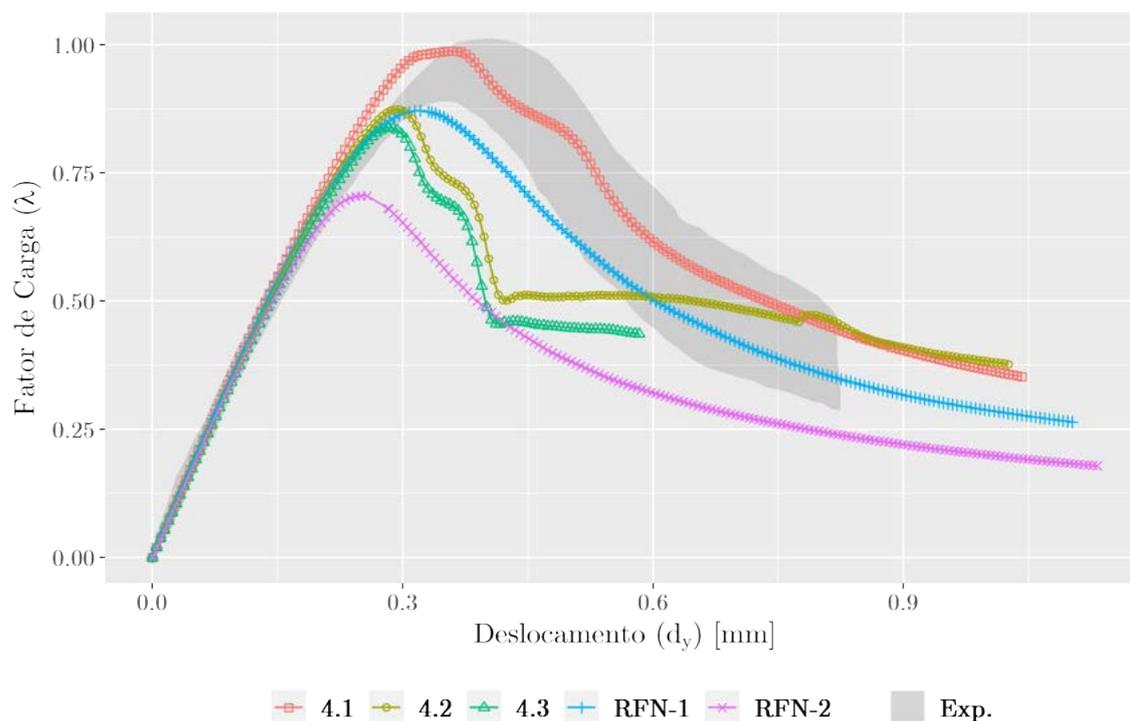
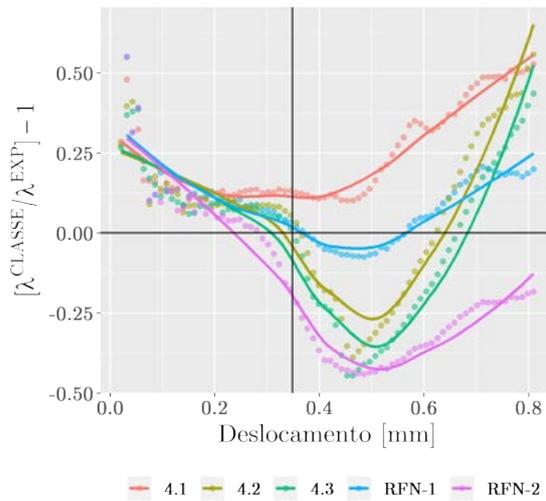


Figura 5.75: Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – Petersson (1989): trajetórias de equilíbrio (variável 4).

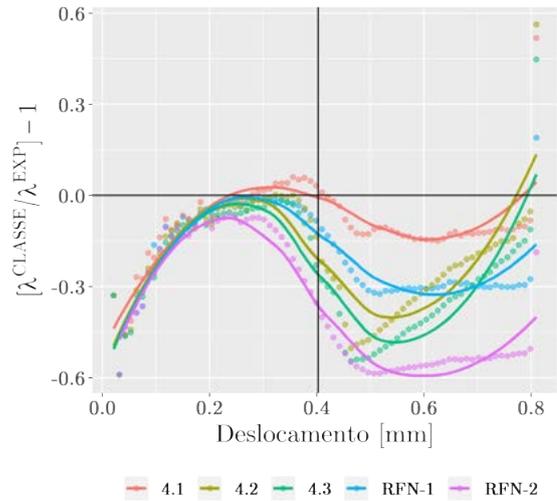
dos limites superior e inferior de Petersson; em comparação (e de um modo geral), a resposta do modelo global-local possuiu uma mediana de desvio menor e aproximou o pico do espectro experimental com maior precisão, tendo desempenho equivalente ao da primeira solução refinada de referência quando de um enriquecimento global máximo.

Pode-se inferir, portanto, que a combinação dos refinamentos global e local (tanto por meio do tamanho da discretização em si, quando por meio de outras funções de enriquecimento - incluindo o enriquecimento GL) resulta em curvas com maior ou menor aderência à valores esperados. O impacto da combinação da malha é bastante diferente do que já foi apresentado na literatura para o *framework* do MEEG-GL clássico, que não parece sofrer efeitos deletérios significativos da combinação de discretizações. Esse comportamento é notoriamente um reflexo dos modelos constitutivos empregados para a simulação de materiais parcialmente frágeis e, portanto, quanto ao tamanho dos elementos finitos, a estratégia parece herdar os problemas observados historicamente em modelos numéricos da natureza daqueles empregados.



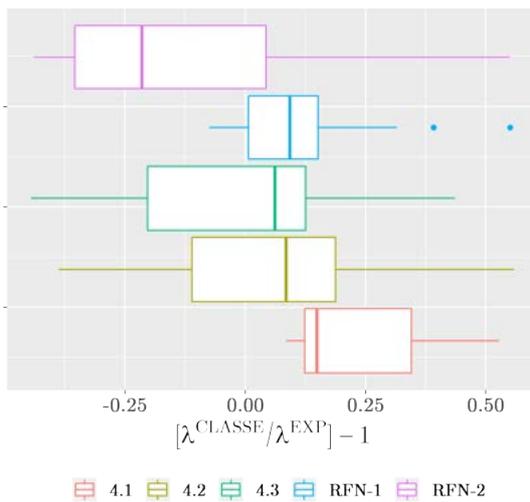
(a) Desvio do fator de carga com relação ao limite experimental inferior.

$$\Lambda^{INF} = \lambda^{CLASSE}/\lambda^{EXP,INF} - 1.$$

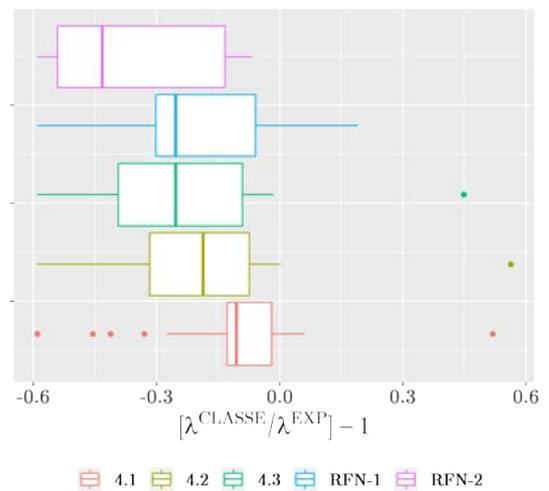


(b) Desvio do fator de carga com relação ao limite experimental superior.

$$\Lambda^{SUP} = \lambda^{CLASSE}/\lambda^{EXP,SUP} - 1$$



(c) Desvio do fator de carga com relação ao limite experimental inferior. Boxplot  $\Lambda^{INF}$ .



(d) Desvio do fator de carga com relação ao limite experimental superior. Boxplot  $\Lambda^{SUP}$

Figura 5.76: Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – [Petersson \(1989\)](#): desvios de cada modelo para os limites inferior e superior da faixa experimental.  $\Lambda^{INF}$  (5.76a, 5.76c);  $\Lambda^{SUP}$  (5.76b, 5.76d); marcação do pico (linha vertical);  $\Lambda = 0$  (linha horizontal).

#### 5.4.1.5 Exame 5: Avaliação da Heterogeneidade

No exame da heterogeneidade, modelos da viga de Petersson foram ensaiados com realizações distintas de distribuições de inclusões. As dimensões prescritas da fase local secundária foram aderentes ao grau de regimento local, i.e., partículas maiores. Uma fração de heterogeneidade fixa e única, representativa dos 40% de agregados típicos do concreto, foi empregada. A estratégia de *upscaling* final foi avaliada, o cinemático-constitutivo. Resultados de classes de vigas homogêneas são apresentados em paralelo

como soluções de referência (numérica e experimental).

As prescrições do exame estão dispostas no *set-up* adicional 5.8. A adaptação de De Borst e Gutiérrez (1999) para o modelo de dano isotrópico de Mazars (1984); Mazars e Pijaudier-Cabot (1989) (vide Penna (2011)), com lei de evolução exponencial para o dano, foram adotados para as fases. As propriedades materiais da mistura homogênea foram adaptadas da versão numérica de Penna (2011). Na ausência de informações específicas dos valores absolutos individuais dos componentes da mistura, as fases primária e secundária da escala local foram parametrizadas de acordo com a curva tensão-deformação da fase global, de modo que a média das curvas resultantes se equivalhesse à da mistura original aproximadamente. Dois conjuntos de propriedades elásticas locais ( $r_i^P, r_i^S$ ) foram utilizados, de modo a se verificar a influência da constituição local no modelo estudado.

Parâmetros Materiais ( $\sigma \times \varepsilon$ exponencial)					
Fase	$E$ (MPa)	$\nu$	$\alpha$	$\beta$	$\kappa$
Primária	$r_i^P E^{MIST}$	0.2	0.950	1000	$1.25 \cdot 10^{-4}$
Secundária	$r_i^S E^{MIST}$	0.2	0.950	1000	$1.25 \cdot 10^{-4}$
Homogênea (Mistura)	$3.0 \cdot 10^4$	0.2	0.950	1000	$1.25 \cdot 10^{-4}$
Razões r	$r^P \in \{0.80, 0.5\}$		$r^S \in \{1.2, 2.0\}$		
<b>Modelo Constitutivo</b>	Dano Isotrópico de Mazars (1984) adap. De Borst e Gutiérrez (1999)				
<b>Controle (CDG)</b>			<b>Geom. &amp; CDC</b>		
$\delta\lambda_1$	0.02	<i>ess.</i>		50 mm	
<i>tol(desloc.)</i>	$1 \times 10^{-4}$	$l$	2000 mm	$c_1; c_2$	
<i>Equil.</i>	Secante	$h$	200 mm	20; 100 mm	
<i>Passos</i>	200	P e Rest.	800 N; $R_x, R_y$		
<b>Heterog.</b>	$\Delta : 0.40; \zeta(\phi.0.5, 0.2) \in 75, 37.5$			<b>Mod. Anl.</b>	EPT

Set-up 5.8: Configuração Experimental 2 – Estudo de Caso – Petersson (1989), ensaio de flexão simples em 3 pts. Parâmetros de entrada (dano iso. c/ lei exp., controle de trajetória (desloc. generalizado), CDC e fração de heterogeneidade ( $\Delta$  com base no volume do domínio local)). Malhas equivalentes às do *set-up* 5.7.

Na figura 5.77 ilustram-se as trajetórias de equilíbrio obtidas. Na imagem, as soluções numéricas de referência representam: as respostas dos *templates* grosseiro e refinado com modelo de fissuração distribuída (REF-GR-FD e REF-RFN-FD, respectivamente – vide 5.7); a resposta estrutural da viga homogênea com malha grosseira e modelo constitutivo de dano isotrópico (REF-GF-MZ); além do espectro experimental de Petersson. Já GL-UPCC-1, é a resposta do modelo com  $(r^P, r^S) = (0.8, 1.2)$  (*set-up* 5.8) e GL-UPCC-2, a

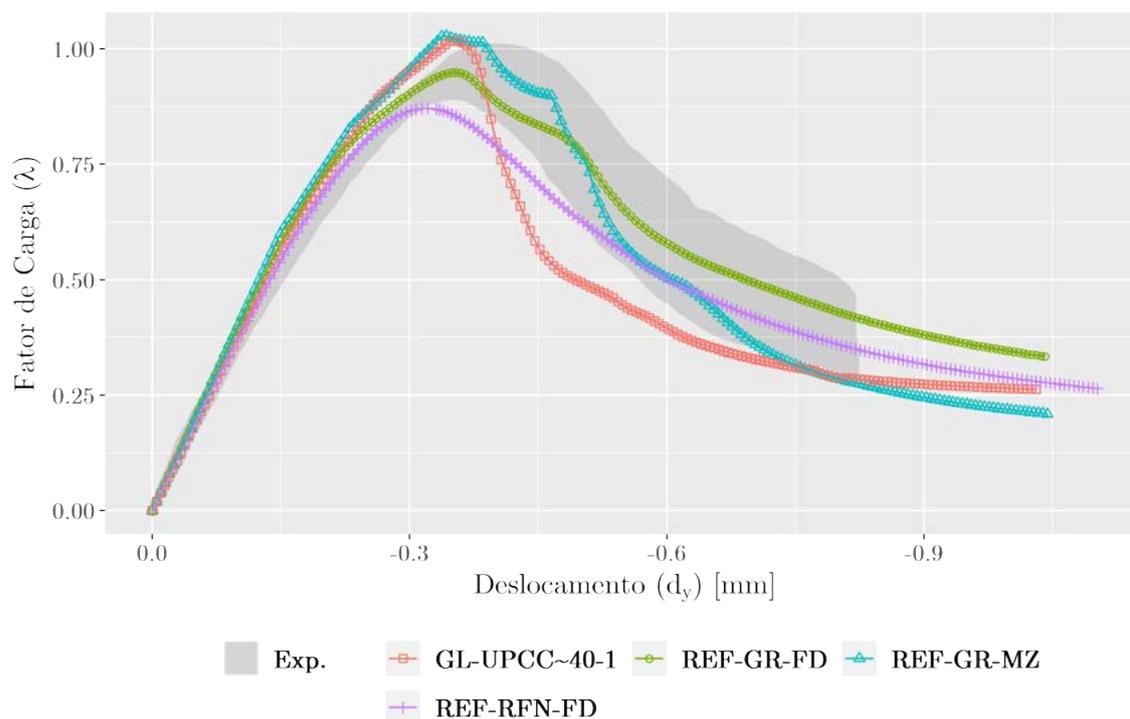


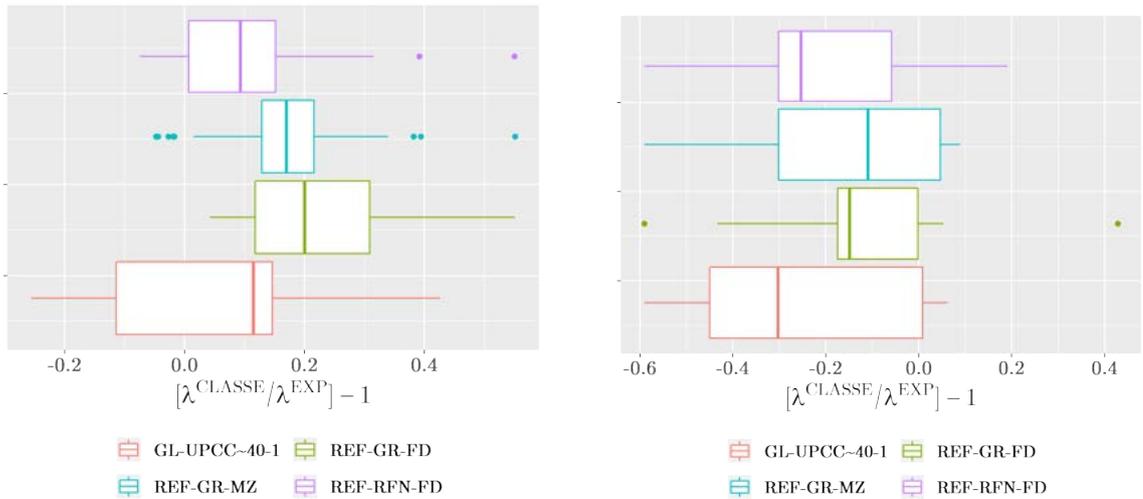
Figura 5.77: Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – [Petersson \(1989\)](#): trajetórias de equilíbrio (variável 5).

solução do modelo GL com  $(r^P, r^S) = (0.5, 2.0)$

Como se pode notar, o modelo global-local com UP-C-C conseguiu obter uma curva com uma aderência aceitável aos resultados de Petersson e às soluções numéricas de referência. O ramo ascendente apresentou um desvio pequeno do espectro experimental, a carga de pico foi adequadamente prevista, equivalendo-se ao limite superior da resposta original, e o *softening* manifestou um traçado contínuo, suave e próximo das outras respostas no terço final da análise, ainda que tenha sido um pouco mais escarpado em seu terço inicial. Infere-se que esta característica é reflexo direto da constituição local adotada, isto é, um domínio bifásico, com fase primária menos rígida e presença de inclusões dispersas na matriz.

Avaliando-se a tendência central das curvas através da razão  $\Lambda$ , percebe-se que, em módulo, os desvios entre a resposta GL-UP-C-C e a franja inferior da dispersão experimental são de magnitude baixa, com valores medianos da ordem de 0.1 e em todas as soluções numéricas os valores máximos e mínimos do desvio com relação ao limite superior de Petersson foram similares.

Avaliou-se ainda a variação das propriedades elásticas das fases locais, aumentando-se o módulo de elasticidade da fase secundária e diminuindo-se o da fase primária. Na figura



(a) Desvio do fator de carga com relação ao limite experimental inferior. Boxplot  $\Lambda^{INF}$ . (b) Desvio do fator de carga com relação ao limite experimental superior. Boxplot  $\Lambda^{SUP}$

Figura 5.78: Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – **Petersson (1989)**: padrão dos desvios entre o modelo GL e os limites inferior e superior da faixa experimental (caso 5).  $\Lambda^{INF}$  (5.78a);  $\Lambda^{SUP}$  (5.78b).

5.79 comparam-se as trajetórias dos casos GL-UP-C-C-1 e GL-UP-C-C-2, respectivamente associados com os pares de propriedades  $(r_1^P, r_1^S)$  e  $(r_2^P, r_2^S)$ .

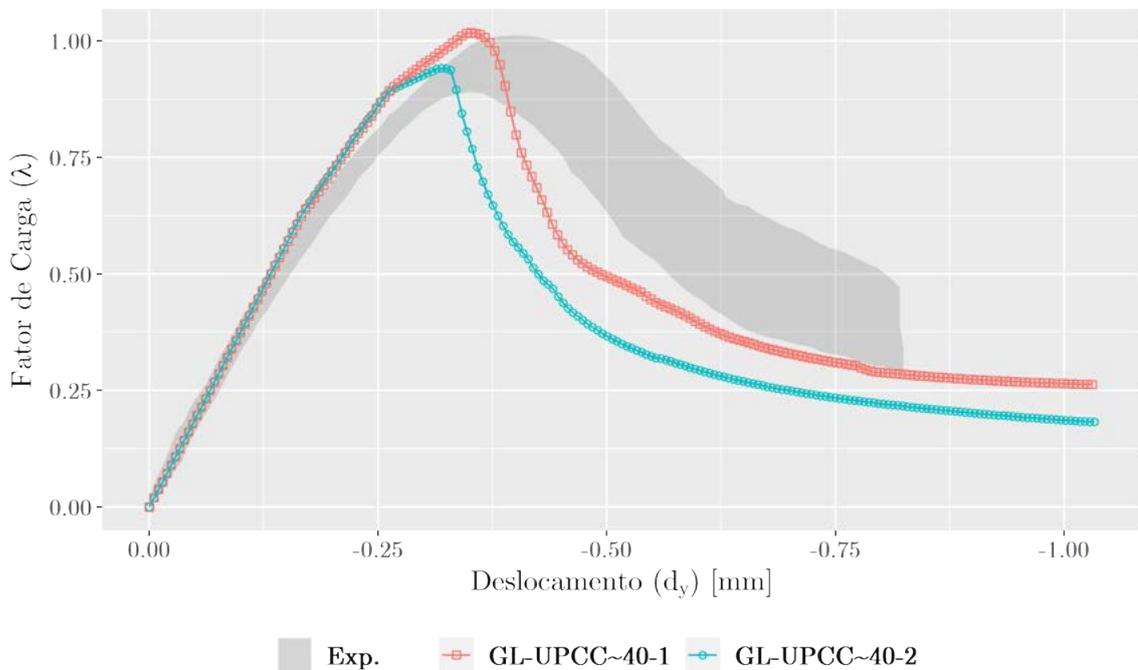


Figura 5.79: Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – **Petersson (1989)**: trajetórias de equilíbrio de modelos com  $\Delta \approx 40$  e propriedades elásticas locais distintas (variável 5).

É possível notar que ao se propor uma fase primária local menos resistente, ocorreu

um rebaixamento da trajetória. Naturalmente, os efeitos de danificação influenciam o equilíbrio e a resistência do material da estrutura, e a inserção de fase que absorve menos as solicitações implicará numa resistência.

As propriedades materiais das fases locais foram parametrizadas sob uma relação tensão-deformação de uma mistura prescrita com parâmetros já aproximados por Penna (2011), ou seja, alguns dos valores estimados pela referência já guardam uma diferença dos valores originais de Petersson (1989) (inevitavelmente). Se a mistura empregada já possuía comportamento inferido, seus constituintes (fase primária e secundária aqui) certamente detiveram uma incerteza ainda maior nos valores absolutos de suas propriedades. Nesse sentido, acredita-se que uma simulação com a prescrição mais precisa do comportamento em tensão e deformação de cada uma das fases utilizadas poderá resultar em curvas com aderência ainda maior.

Nas figuras 5.80 e 5.81 são ilustrados os resultados da análise estrutural via estratégia multiescala completa de uma realização da viga de Petersson com fração máxima de heterogeneidade local. Campos de deformação e tensão, bem como flecha, dano e deformação equivalente do modelo constitutivo no passo 74 (pico) são registrados.

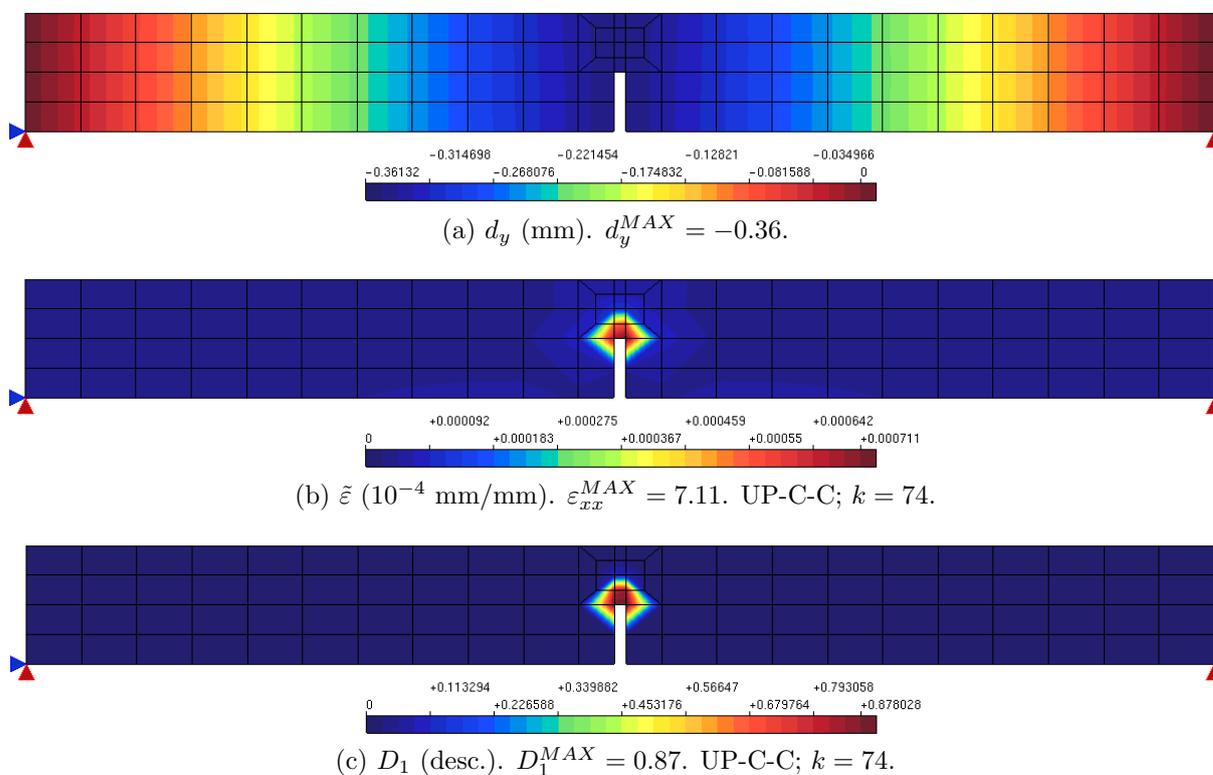


Figura 5.80: Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – Petersson (1989): resultado da análise estrutural no pico (passo 74);  $\Delta \approx 0.20$ ; UP-C-C. Flecha (5.80a), deformação equivalente (5.80b) e dano (5.80c).

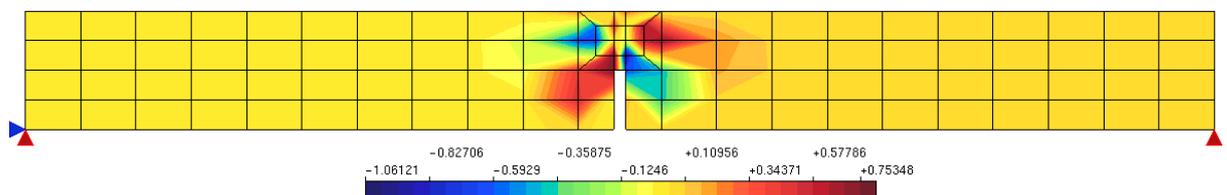
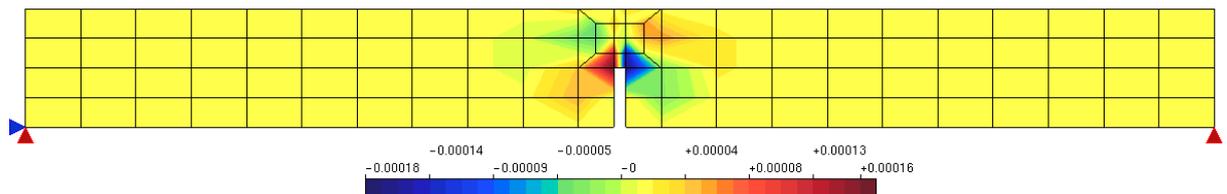
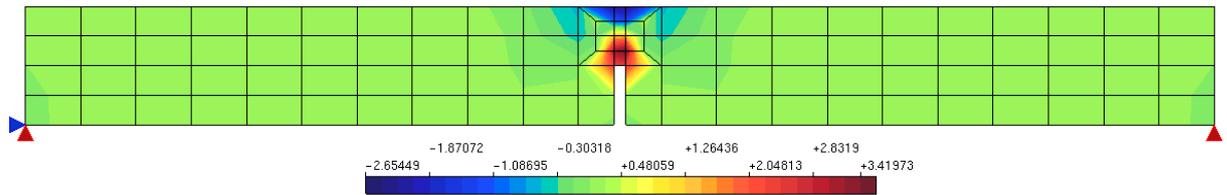
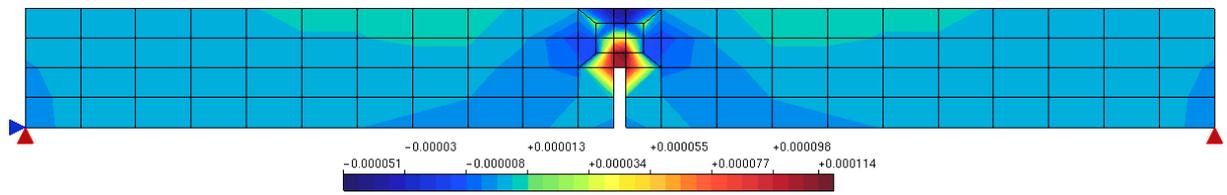
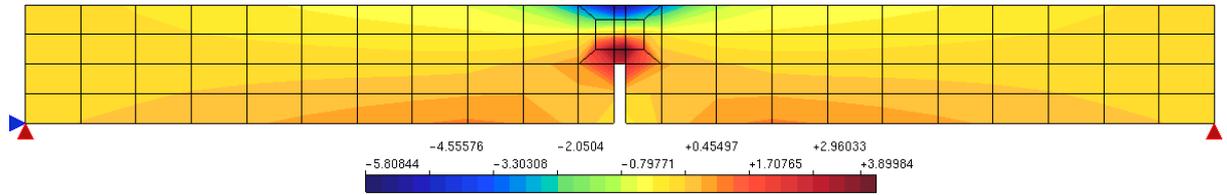
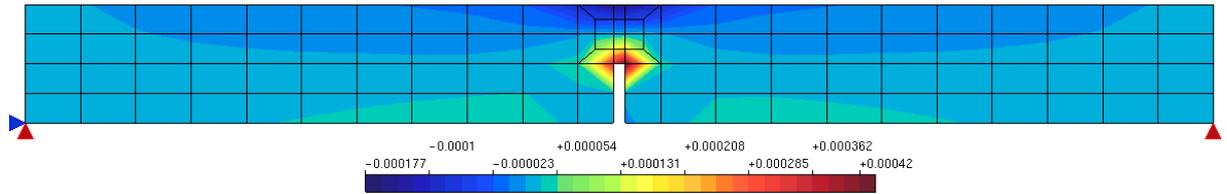
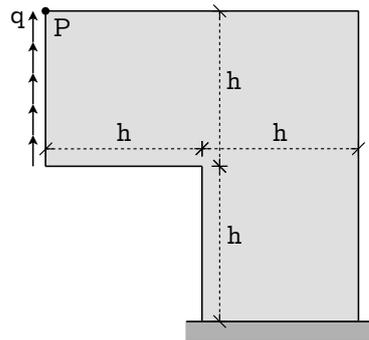


Figura 5.81: Estudo de caso – Flexão em 3 pontos – [Pettersson \(1989\)](#): resultado da análise estrutural no pico (passo 74);  $\Delta \approx 0.20$ ; UP-C-C. Deformações (5.81a, 5.81c e 5.81e); tensões (5.81b, 5.81d e 5.81f).

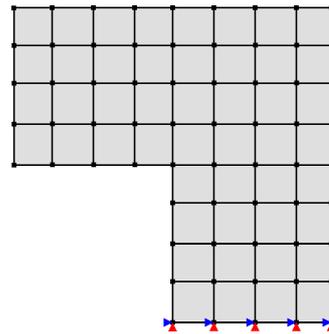
### 5.4.2 Winkler et al. (2004)

De modo a apresentar o comportamento da técnica em outro cenário, o painel em L de Winkler et al. (2004) foi ensaiado. Para sua avaliação, foi empregada a configuração experimental 5.9, adaptada da reprodução de Penna (2011) do experimento.

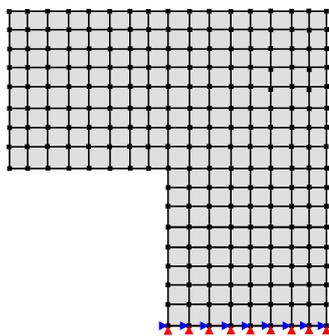
Parâmetros Materiais ( $\sigma \times \varepsilon$ exponencial)					
Fase	$E$ (MPa)	$\nu$	$\alpha^T, \alpha^C$	$\beta^T, \beta^C$	$\kappa^T, \kappa^C$
Primária	$0.5E^{MIST}$	0.18	0.970, 1.0	1000, 500	$10^{-4}, 10^{-3}$
Secundária	$1.5E^{MIST}$	0.18	0.970, 1.0	1000, 500	$10^{-4}, 10^{-3}$
Homogênea (Mistura)	25850	0.18	0.970, 1.0	1000, 500	$10^{-4}, 10^{-3}$
<b>Modelo Constitutivo</b>	Dano Volumétrico de Penna (2011)				
Controle (CDG)			Geom. & CDC		
$\delta\lambda_1$	0.02		<i>espess.</i>	100 mm	
<i>tol(desloc.)</i>	$1 \times 10^{-4}$		<i>h</i>	250 mm	
<i>Equil.</i>	Secante		<i>Rest.</i>	$R_x, R_y$	
<i>Passos</i>	400		q	28 N/mm	
<b>Heterog.</b> $\Delta : 0.40; \zeta(\phi.0.5, 0.2) \in 75, 37.5$			<b>Mod. Anl.</b> EPT		



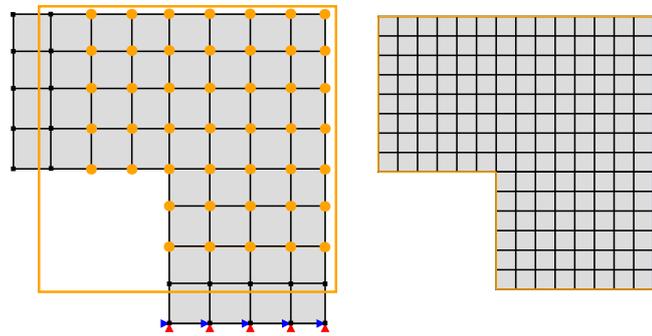
(b) Geometria e CDC.



(c) *Template* de malha grossseira.



(d) *Template* de malha refinada.



(e) Modelo GL.

Set-up 5.9: Configuração Experimental – Estudo de Caso – Winkler et al. (2004), painel em L. Parâmetros de entrada (mod. dano vol. c/ dano exponencial, controle de trajetória (desloc. generalizado), CDC e fração de heterogeneidade ( $\Delta$  com base no volume do domínio local); 5.9a); geometria (5.9b); malhas de referência (5.9c, 5.9d 5.9e).

Comparam-se um modelo homogêneo com um modelo heterogêneo, este com somente uma distribuição aleatória e uma única realização de morfologia. Utilizou-se o modelo de dano volumétrico de Penna (2011), com leis de dano exponenciais  $((\alpha, \beta, \kappa)^C$ : compressão,  $(\alpha, \beta, \kappa)^T$ : tração).

#### 5.4.2.1 Exame: Regularização de Trajetória

No presente estudo, um caso crítico enfrentado durante a pesquisa (Novelli, 2019; Novelli et al., 2020) foi examinado à luz do mecanismo de *upscaling* cinemático-constitutivo. Nas simulações do painel em L de Winkler com modelos constitutivos de dano (marcadamente o volumétrico), as respostas estruturais obtidas nas análises homogêneas com enriquecimento cinemático exclusivo apresentaram um ruído no ramo descendente.

Uma alternativa de regularização da curva de equilíbrio foi alcançada com um modelo local heterogêneo e comunicação ascendente com transmissão de variável histórica (UP-C-C).

A figura 5.82 apresenta as referidas trajetórias (deslocamento vertical do ponto P – fig. 5.9b). Como se pode notar, a oscilação desenvolvida pela forma básica do MEEG-GL-NL (meio homogêneo e enriquecimento *stricto*) foi eliminada pela estratégia multiescala consolidada (domínio local heterogêneo e *upscaling* cinemático-constitutivo). Resultado equivalente, mas através de técnica totalmente distinta, ainda homogênea, que altera a formulação nuclear do MEEG (uso do SGFEM), foi obtido em co-autoria com Novelli et al. (2020).

Na figura 5.83 compara-se a evolução do dano nos modelos HM e HT. De maneira arbitrária, elegeram-se três passos para ilustrar o comportamento da variável de dano da direção principal tracionada em momentos distintos da análise: antes do pico (passo 50), nas imediações do pico (passo 100) e no ramo descendente (passo 150). Nota-se que a conformação espacial de  $D_1$  é diferente nos dois modelos ainda que posicionadas corretamente na estrutura e na mesma faixa. Visto que o modelo local possui um fase primária alusiva a uma matriz levemente menos rígida que a mistura homogênea, os valores de  $D_1$  no modelo GL-HT foram modestamente maiores. Percebe-se, entretanto, que a evolução da banda de fissuração no modelo com heterogeneidade e UP-C-C tendeu a uma linha ascendente (ao invés de horizontal), característica observada nos resultados obtidos por Winkler et al. (2004).

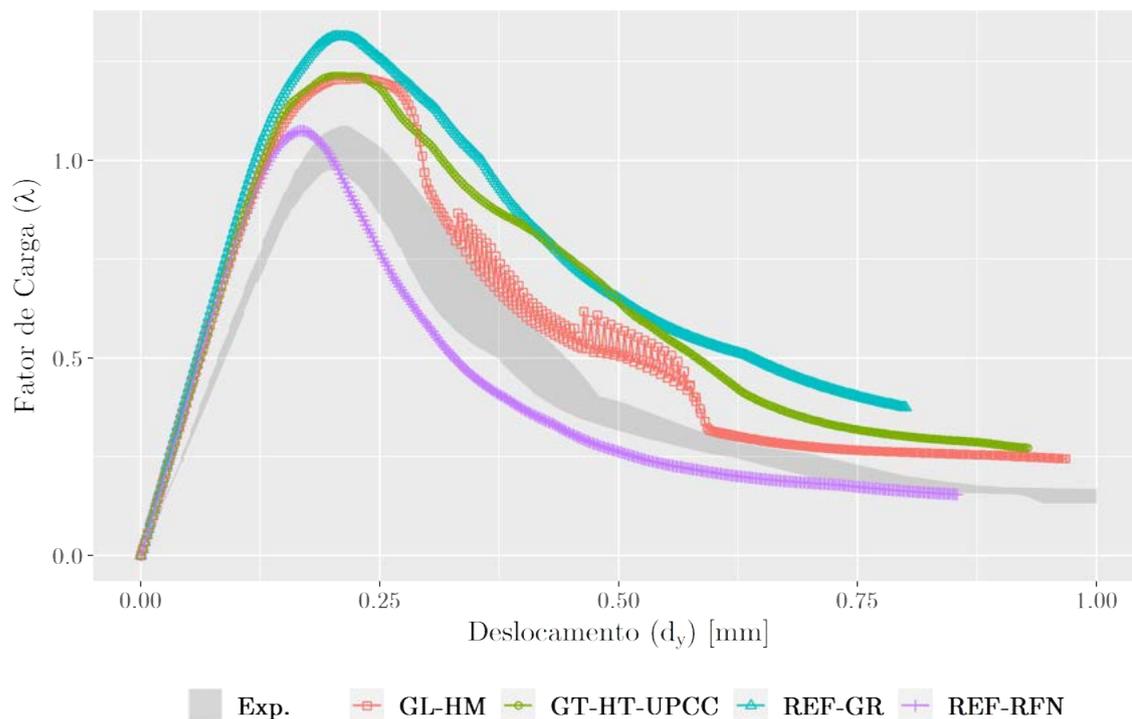


Figura 5.82: Estudo de Caso – Winkler et al. (2004) – Painel em L: comparativo trajetórias de equilíbrio de um modelo GL homogêneo (GL-HM) e um modelo heterogêneo consolidado (GL-HT-UPCC).

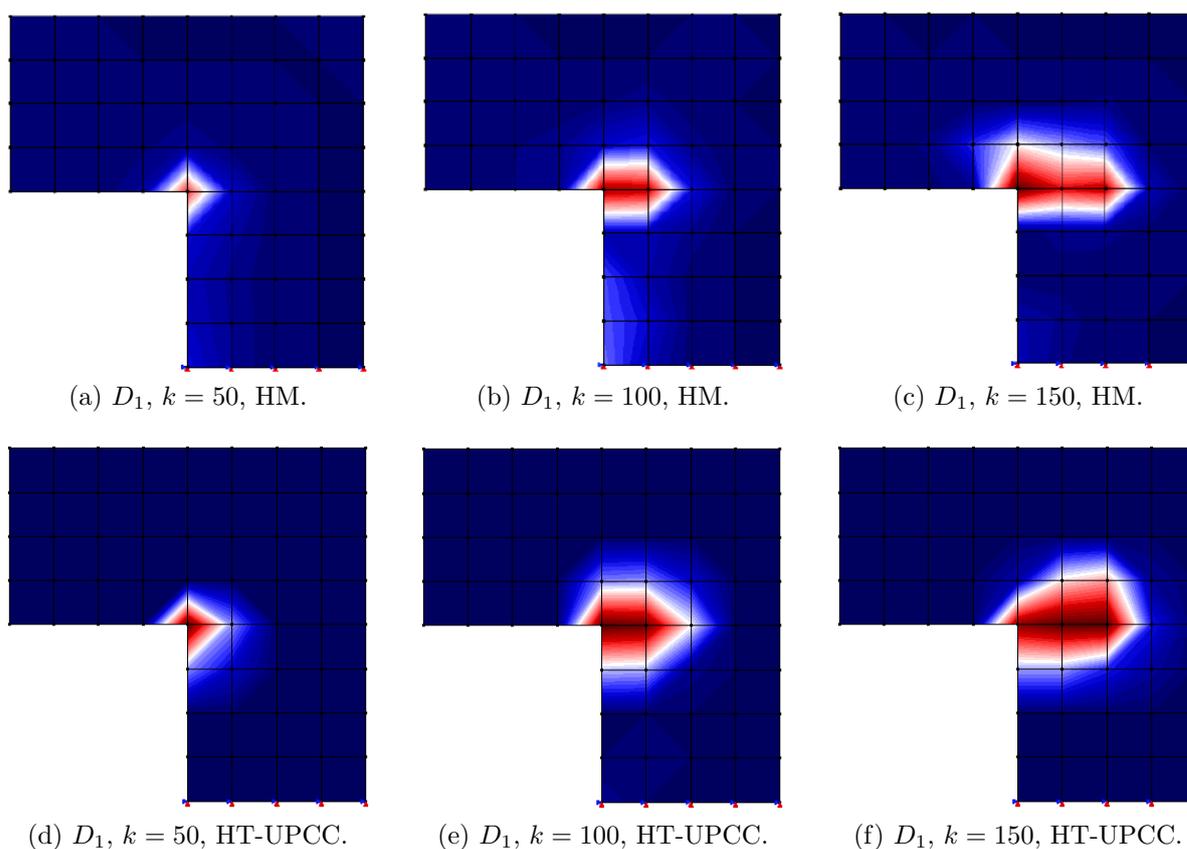


Figura 5.83: Estudo de caso – Painel em L – Winkler et al. (2004): evolução do dano (passos 50, 100 e 150). GL-HM (5.83a, 5.83b) e 5.83c) e GL-HT-UPCC  $\Delta = 0.40$  (5.83d, 5.83e) e 5.83f).

O modelo GL consolidado ainda possui extensão para um refinamento local ainda maior. Mesmo com o contraste das fases materiais e um refinamento da discretização com um alcance quase integralmente equivalente ao da malha de referência refinada, a resposta estrutural obtida com o modelo global-local heterogêneo e enriquecimento *lato* teve concordância com o limite superior da referência numérica e traçado compatível com a dispersão experimental, ainda que com uma amplitude mais significativa.

### 5.4.3 Síntese

Foram apresentados alguns estudos de caso com solução experimental, nos quais exames específicos foram conduzidos.

Para avaliar a estratégia e compará-la ao MEF tradicional na relação com resultados não virtuais, desenvolveu-se a matriz de classificação a seguir, que em sua versão atual leva em consideração indicadores qualitativos (sobretudo). Aqui, cada índice é medido por uma escala de [Likert \(1932\)](#).

Tabela 5.10: Modelo de matriz de avaliação.

Indicador	Valor/Escala
Flexibilidade de malhamento	$\eta^{MESH} \in [\text{very poor, poor, fair, good, excellent}]$
Flexibilidade para impor CDC	$\eta^{BC} \in [\text{very poor, poor, fair, good, excellent}]$
Aderência da curva carga-deslocamento ( $\zeta \times u$ ) aos resultados de referência	$\eta^{(\zeta \times u)_{REF}} \in [\text{very poor, poor, fair, good, excellent}]$
Aderência da curva carga-deslocamento ( $\zeta \times u$ ) aos resultados do MEF	$\eta^{(\zeta \times u)_{FEM}} \in [\text{very poor, poor, fair, good, excellent}]$

Analisando o comportamento do caso [5.4.1](#), por exemplo, pode-se concluir que a performance do MEFG-GL-NL é coerente e aderente a soluções de referência (numéricas e experimentais). A avaliação pode ser resumida conforme a matriz [5.11](#).

Tabela 5.11: Matriz de avaliação da estratégia.

Indicador	MEFG-GL-NL	REF-RFN	REF-GR
Flexibilidade de malhamento	excellent	fair	fair
Flexibilidade de imposição de CDC	good	fair	fair
Aderência da curva carga-deslocamento a resultados de referência	good	good	fair
Aderência da curva carga-deslocamento a resultados do MEF	fair	–	–

Por fim, percebe-se que há uma influência importante da natureza do problema modelado, isto é, os resultados de um modelo de viga em flexão simples pareceram relativamente menos promissores que aqueles de um modelo com uma geometria menos esbelta e um estado de deformação um tanto menos elementar, como o painel em L.

Negrita-se, portanto, a capacidade e o potencial da estratégia global-local com a comunicação ascendente última, ressaltando a existência de espaço para o aprimoramento do modelo local e desenvolvimento de novos mecanismos de interação entre as escalas.

## Capítulo 6

# Conclusões e Considerações Finais

Conforme visto nesta obra, o estudo dos efeitos estruturais globais provenientes da constituição interna dos materiais se desenvolve há bastante tempo. Muitas alternativas de análise foram fornecidas, seguindo distintos vieses, seja com maior apelo teórico-analítico, seja com maior enfoque computacional. Nesse sentido, nas últimas décadas, há uma proeminência de obras que desenvolvem análises numérico-computacionais, nas quais nota-se a recorrência do uso de métodos dos elementos finitos multinível. São metodologias em que não se prescrevem equações constitutivas macroscópicas explícitas e a resposta global é obtida através de um processo de análise em domínios microscópicos representativos, dos quais saem os campos macroscópicos, bem como os operadores necessários à análise dos diversos problemas propostos. Interessante ressaltar que, essencialmente, essas propostas são bastante similares, se não iguais em alguns pontos. Contudo, ao longo da história recente dos métodos multiescala, algumas delas são apresentadas como possuidoras de ineditismo.

Grande parte dos trabalhos multiescala que se propõem a estudar materiais em regimes inelásticos o fazem para análise de plasticidade em metais, sendo escasso o conjunto de obras visando avaliar o componente multiescala de meios com *softening*. Nesse contexto, abordagens tradicionalmente usadas (como aquelas baseadas no EVR) demonstraram ser conceitualmente inadequadas para modelar materiais parcialmente frágeis. Dessa maneira, é legítimo afirmar que existe um vasto campo a ser desbravado no âmbito da análise multiescala, sendo necessário o desenvolvimento de novos modelos e estratégias para modelagem de meios parcialmente frágeis e heterogêneos.

Nesse contexto, submeteu-se aqui um novo mecanismo para a ocupação do referido nicho e contribuição para o domínio acadêmico correspondente. Através daquilo que se

definiu como uma análise global-local em duas escalas via MEFG, modelos mesomecânicos foram gerados em tempo de processamento e, através da solução destes problemas locais, o domínio global (macroscópico ou estrutural) teve sua aproximação enriquecida e a resposta constitutiva material alterada. Os fundamentos metodológicos do estudo foram destacados e toda a evolução conceitual e operacional da estratégia foi ilustrada com experimentos numéricos intermediários que, através de exames específicos, apontaram potencialidades e limitações da técnica. Nesse ínterim, procurou-se definir um conjunto de hipóteses fundamentais que nortearam a pesquisa e permitiram o engendramento da metodologia proposta. Dentre elas, destacam-se o acoplamento fraco entre os modelos, a independência de integração e a generalização computacional do domínio local.

Além da técnica nuclear da tese, avaliações acessórias foram desenvolvidas e um conjunto de instrumentos para incorporação de heterogeneidade em modelos congêneres ao MEF/MEFG foi implementado. Apresentaram-se testes em escala única para a avaliação de um comportamento estrutural contingente e a variabilidade das respostas foi debatida. Constatou-se que a introdução randomizada da heterogeneidade material, mesmo que através de uma representação grosseira, com pouco detalhamento morfológico, introduz na análise uma estocasticidade que, para propriedades elásticas e proporcionamento de fases constantes, altera consideravelmente a resposta estrutural captada.

Considera-se a metodologia aqui proposta mais simplificada e imediata que algumas abordagens comumente utilizadas, embora não menos complexa. Através dos mecanismos disponibilizados foi possível captar o comportamento de uma escala mais refinada, bem como a interação entre duas escalas de observação, relação essa operacionalizada, sobretudo, através de aspectos cinemáticos: a macroescala envia condições de contorno para a microescala que interage com o domínio global através do enriquecimento. Esse enriquecimento, por sua vez, possui nesta pesquisa duas conotações, uma estrita e outra mais geral, que se manifestam na natureza da comunicação ascendente (local→global) ou *upscaling*. Três tipos foram propostos: o cinemático exclusivo (UP-C), que transporta apenas a função de enriquecimento e se constitui, portanto, num enriquecimento *stricto*; o cinemático-material (UP-C-M), que além do enriquecimento tradicional, leva ao problema global as propriedades materiais locais com seus valores absolutos; e o cinemático-constitutivo (UP-C-C), a consolidação da estratégia não linear apresentada, que encaminha a solução da

variável de estado local, bem como uma outra variável representativa do estado de deformação local. Nesse contexto, um mecanismo de média espacial, híbrido conceitual de técnicas de homogeneização e modelos não locais, foi apresentado. Essa técnica, unida com a alteração da descrição material submacroscópica, permitiu a obtenção de respostas estruturais qualitativamente equivalentes a determinados modelos discretos de referência e superiores à variante GL homogênea, em alguns casos, bem como se enquadrou em espectros experimentais de laboratório. Ainda, observou-se que o enriquecimento exclusivo *per si*, ao degenerar a escala local arbitrária em deslocabilidades apenas, conseguiu sim alterar o comportamento global quando do uso de um domínio inferior bifásico, contudo de modo menos significativo.

A capacidade iterativa do algoritmo foi também demonstrada. Efetivamente, observou-se que o MEFG-GL-NL desenvolve perfis de iteração mais homogêneos e com menos sobrecarga nos picos das trajetórias, alcançando respostas gráficas análogas às curvas de soluções numéricas com grau de refinamento equivalente. Essa capacidade, contudo, rivaliza com o tempo necessário para resolução das equações não lineares dos sistemas do MEFG, que necessitam de um processo específico para a extração da resposta (conforme apêndice A).

Distintos modelos constitutivos de degradação elástica com leis materiais diferentes foram avaliados e os resultados alcançados foram de mesma ordem de qualidade e satisfatórios. Nesse âmbito, verificou-se que o domínio local herdou da escala superior os efeitos deletérios próprios da união “modelo constitutivo + modelo discreto”, e propagou esse comportamento em si e de volta ao domínio global, que desenvolveu bandas de fissuração equivalentes (ou parecidas) com àquelas vistas nas malhas locais. Embora de alcance restrito, o MEFG-GL-NL pareceu impor um relativo efeito de regularização na análise não linear, por haver uma ligeira menor dependência de malha nos modelos do MEFG, ação potencializada com o mecanismo de UP-C-C.

Para alcançar os objetivos, uma nova implementação foi proposta. Através de algumas abstrações originais, instâncias simples e diferentes foram incorporadas à plataforma de desenvolvimento. O código proposto não altera o *kernel* do sistema, mas atua em paralelo, usufruindo do núcleo numérico e direcionando apropriadamente o fluxo do processamento. Essa implementação levou em consideração a generalização de uma simulação numérica, e permitiu a resolução de mais de um modelo numérico de modo concorrente.

Dada a extensão da pesquisa, sua abrangência e sobretudo o tamanho do texto final da tese, muito precisou ficar de fora dessa dissertação. Com tudo aquilo apresentado, da revisão e fundamentação teóricas aos exemplos, passando pelas descrições metodológicas, o texto acabou por alcançar um volume considerável. De tal sorte que escolhas precisaram ser realizadas, sobretudo nos exemplos oferecidos. Espera-se que as informações registradas tenham sido de utilidade para aqueles que as estudaram e que o conteúdo tenha ficado à altura das expectativas do leitor, tendo cumprido sua função e contribuído para o nicho que faz parte. De toda maneira, grande parte daquilo desenvolvido no âmbito da pesquisa também está registrado num conjunto de publicações (já editadas ou em processo de divulgação quando da defesa deste trabalho), podendo ser consultadas para avaliação de todos os meandros ensejados por esta pesquisa (consultar [www.insane.dees.ufmg.br](http://www.insane.dees.ufmg.br) para a lista atualizada).

Ao fim e ao cabo, registram-se os seguintes comentários isolados à respeito da pesquisa:

## 6.1 Sobre a Pergunta Primeva da Pesquisa, suas Hipóteses e os Objetivos Alcançados

Uma discussão importante numa pesquisa como esta é a retomada da pergunta central da investigação, de suas hipóteses básicas e seus objetivos. Recordando o capítulo 1, a pergunta central da investigação foi:

- *Qual o desempenho/viabilidade do método dos elementos finitos generalizados com enriquecimento global-local (numa estratégia de duas escalas, portanto) na simulação de problemas de elasticidade não lineares com meios parcialmente frágeis e heterogêneos?*

Mostrou-se que o MEFG-GL-NL pode sim ser empregado na diligência proposta. Todo o caminhar até a consolidação da alternativa final foi apresentado, e os resultados parciais e finais indicaram que há viabilidade na referida aplicação, considerando-se viável a condição daquilo que é executável, que pode ser realizado. A qualidade das repostas, por sua vez, depende de um conjunto de fatores e controles internos que serão discutidos adiante.

Voltando-se às hipóteses iniciais da investigação, pode-se pontuar:

- *Através de uma abordagem numérica do tipo MEFGL-NL é possível reproduzir numericamente o comportamento de estruturas de concreto;*
  - Ressaltando o que já foi apontado e conforme visto, o MEFGL-NL reproduz um comportamento estrutural aderente à realidade mecânica de estruturas de concreto.
- *O MEFGL-NL pondera um melhor custo-benefício através de um refinamento híbrido hp;*
  - Não necessariamente o uso do MEFGL resultará em um melhor custo-benefício. Do ponto de vista da flexibilidade e do universo de possibilidades de simulações, a técnica implementada aqui possui sim um melhor custo-benefício. Ao prever uma maior separação de escalas, a geração de modelos locais em processamento (eliminando a necessidade de prescrição de um modelo local via arquivos de entrada), mecanismos diferentes de comunicação ascendente, entre outros, o que se chamou de MEFGL-NL pondera um custo-benefício maior, de fato. Contudo, questões associadas a desempenho (numérico e computacional, como tempo) merecem ressalvas e são retomadas nos comentários que seguem.
- *Com o MEFGL é possível incorporar em escala global efeitos de uma mesoescala heterogênea;*
  - Ausente (ou com alcance restrito) na literatura do método dos elementos finitos generalizados, a simulação de sólidos particulados, com inclusões randômicas, foi explorada na pesquisa e os resultados comprovaram a hipótese, isto é, o embutimento de uma fase secundária no problema local teve seus efeitos emanados à escala global. Essa repercussão, por sua vez, pôde ser realizada de maneiras distintas, a depender, sobretudo, do mecanismo de comunicação local→global. Esta tese apresentou algumas alternativas que introduziram as características locais no comportamento estrutural global de maneiras coerentes.
- *A relação entre as escalas global e local (pode) regularizar(r) a análise não linear material.*
  - Os efeitos regularizadores previstos para a estratégia numérico-computacional

tiveram alcance restrito. Ainda que o MEFGL-NL retarde certos fenômenos deletérios, ele não os elimina. Mais sobre o tema será discutido adiante.

Com isso, considera-se que o objetivo central da pesquisa foi alcançado e que o trabalho abriu mais possibilidades de investigação.

## 6.2 Sobre o MEFGL e seu Desempenho

Em problemas lineares, sem maiores complexidades envolvendo o comportamento material, ou a formulação do contínuo, ou qualquer outro tipo de fonte de não linearidade, o MEFGL se mostra uma ferramenta poderosa. Ao possibilitar uma associação de malhas consideravelmente distintas, com graus de refinamentos muito diferentes, sem qualquer pré-requisito de conformidades geométrica ou cinemática (critérios esses especialmente restritivos), que não o abarcamento completo do domínio local pelo global, flexibiliza-se de maneira expressiva a operacionalização de refinamentos isolados e a investigação pormenorizada de comportamentos localizados complexos, que não possuem nenhum tipo de função matemática descritiva prévia, como o caso de alguns problemas com heterogeneidade randômica.

Para níveis de refinamento global equivalentes, soluções do MEFGL apresentam um custo-benefício importante frente a soluções de referência, ao introduzir uma quantidade consideravelmente menor de graus de liberdade no modelo, atenuando o esforço computacional na montagem do sistema de equações, por exemplo. Além disso, permite a paralelização da solução de modo quase imediato (a depender da arquitetura da plataforma de desenvolvimento). Investigações pormenorizadas dos custos computacionais envolvidos e dos benefícios da técnica para cenários em que o meio seja linear ou naqueles com propagação de trincas em regime linear elástico estão presentes na literatura de referência.

Viu-se adicionalmente nesta pesquisa que a estratégia funciona bem em aplicações com meio linear elástico e heterogêneo. A inserção de inclusões em domínio local exclusivamente é sim capturada pela estratégia de enriquecimento, sobretudo se o mecanismo de comunicação ascendente (ou *upscaling*) incorporar o transporte quer das propriedades materiais absolutas (preferencialmente, se a intenção for a representação integral da inclusão no nível global), quer alguma informação constitutiva acessória. Foi demonstrado que naturezas de inclusões distintas (mais rígidas ou menos rígidas que a matriz)

são apropriadamente modeladas com o MEFGL e que comportamento global responde adequadamente à natureza material local. O nível de precisão, contudo, depende da resolução da malha global (e não apenas do refinamento local), ou seja, se a morfologia que se constrói em nível local for algumas ordens de grandeza inferior ao tamanho da malha global, o nível de detalhamento das derivações dos efeitos das inclusões sobre o problema global será fatalmente reduzido.

Além disso, mostrou-se que é possível emular descontinuidades geométricas severas, como furos, através da estratégia global-local e dos mecanismos de construção de morfologias particuladas implementados. Representando-se uma região de baixíssima rigidez no domínio local, exclusivamente, incorporou-se no problema estrutural (global, por definição) os efeitos da topologia subjacente de modo quase imediato e de maneira relativamente simples.

### 6.3 Sobre o Enriquecimento Global-Local, Integração e sua Relação com a PU

Cabe destacar algumas breves impressões isoladas sobre o enriquecimento global-local:

- Do ponto de vista matemático, como se viu, o enriquecimento GL tem um caráter estritamente numérico e a depender do fenômeno que esteja sendo representando, pode ser alusivo a uma função de continuidade e suavidade um tanto intrincadas e de natureza potencialmente não polinomial. Sendo assim, a integração da função de forma do modelo numérico tende, naturalmente, a exigir quadraturas com mais pontos. Não a toa, originalmente, o MEFGL fez uso da malha local como células de integração, o que concederia uma potencial precisão maior. Nesse trabalho (e em pesquisas derivadas ([Monteiro et al., 2020](#); [Novelli et al., 2020](#))) amplia-se a quadratura e integra-se a função de forma do MEFGL tal como se integraria a PU isoladamente, i.e., “polinomialmente”. Embora não apresentado, a alteração da ordem de integração foi testada e empiricamente se observou que a duplicação da ordem de integração da PU foi suficiente para uma acurácia adequada nos cenários testados. Essa estratégia, isto é, simples ampliação da ordem da quadratura gaussiana e a preservação de uma integração considerando um caráter mais polinomial do integrando (sem a triangulação de células de integração) é também encontrada

em outros trabalhos na literatura e em cenários até mais críticos, como na integração de descontinuidades (problemas da mecânica da fratura, propagação de trincas, interfaces – Malekan, Silva, Barros, Pitangueira, e Penna (2018); Malekan, Barros, e Pitangueira (2018); Silva (2016); Hettich et al. (2008), entre outros –).

- Considera-se relevante ter atenção ao impacto que o enriquecimento GL tem nas propriedades da PU e da função de aproximação. Ao enriquecer-se um nó de um dado elemento finito, perde-se a propriedade do *delta de Kroenecker* do elemento, de modo que a recomposição exata da PU no respectivo nó se deteriora. Infere-se que parte das instabilidades e desvios encontrados em algumas trajetórias de equilíbrio seja reflexo dessa característica. Esse comportamento foi investigado por Novelli et al. (2020) que, fazendo uso da versão estável do MFG-GL (o SGFEM-GL), obtiveram curvas de equilíbrio mais bem comportadas. O melhor desempenho de versões estáveis de enriquecimentos do MFG pode ser visto em outras obras da literatura (Oliveira et al. (2019); Fonseca et al. (2020) etc.).

## 6.4 Sobre a Utilização do MFG com Enriquecimento Global-Local em Análises Fisicamente Não Lineares

No domínio da não linearidade material, contudo, o cenário é um tanto menos frugal. Como foi demonstrado, em aplicações com modelos constitutivos de degradação elástica (baseados na mecânica do dano contínuo), os problemas locais herdam de seus progenitores globais os impactos negativos desenvolvidos pela comunhão entre o modelo constitutivo e o refinamento de malha, reproduzindo os efeitos deletérios em si e propagando-os de volta ao problema estrutural original. Como numa análise fisicamente não linear (como aquelas apresentadas neste trabalho) há a necessidade de transmitir na comunicação descendente não somente as CDC, mas também um estado de deformação corrente, em sendo esse estado uma resposta já imperfeita (no limiar da localização de deformações), inevitavelmente a escala inferior tende a hospedar o fenômeno deletério, e devolvê-lo ao nível acima na forma de enriquecimento.

Embora pareça natural ao autor agora no fechamento dessa etapa da pesquisa que o referido processo ocorra, na gênese do trabalho as suspeitas levantadas careciam de confirmação a partir de experimentos. Naturalmente, como bem aponta De Borst et al.

(2012), os principais fenômenos espúrios de modelos de dano têm caráter matemático, de modo que, independentemente do método discreto utilizado, haverá manifestação de algum processo deletério (como perda de objetividade de malha) na resposta. De toda sorte, já se previam mecanismos de atenuação de impactos da natureza supracitada e, não à toa, o algoritmo não linear concebido tem em seu cerne conceitual a premissa da busca pela mitigação de efeitos numéricos negativos associados com o acúmulo de erros de arredondamento e convergência, ao conceber uma escala local linear resolvida ao final de um passo global convergido (e mecanicamente equilibrado, portanto). Presumia-se que a retirada do problema local do processo iterativo, além de preservar o espaço de aproximação durante o cálculo do equilíbrio (o que se verifica, de fato, como verdade), pudesse introduzir incrementalmente um grau de refinamento da malha global sem comprometimento severo do comportamento estrutural e perda de objetividade, a tal ponto que a diminuição sucessiva do tamanho dos elementos locais não resultasse necessariamente em rebaixamento da trajetória de equilíbrio, padrão não verificado nos resultados.

Ferramenta adicional no papel regularizador buscado com o MEFG-GL-NL, o *upscaling* cinemático-constitutivo, por outro lado, demonstrou um potencial maior. Incorporando uma não localidade do dano (não confundir com o “local” do GL) na análise, o UP-C-C permitiu a obtenção de trajetórias relativamente mais estáveis, tendencialmente aderentes a soluções de referência com grau de refinamento equivalente a *templates* globais grosseiros.

Apesar de certa limitação do algoritmo não linear, foi possível alcançar uma precisão de mesma ordem de qualidade das soluções de referência, ou superiores em alguns casos. Nos exemplos homogêneos, com enriquecimento *stricto*, os resultados da estratégia não linear desenvolvida nesta pesquisa foram superiores àqueles de modelos com malhas do mesmo grau de refinamento dos domínios locais. Quando empregou-se uma comunicação ascendente local→global baseada no processo cinemático-constitutivo, a resposta estrutural obtida foi intermediária, isto é, se encaixou entre as soluções de referência grosseira e refinada, desenvolvendo uma ligeira maior aderência ao limite superior do espectro alvo e, em alguns casos, equiparando o seu ramo ascendente (inclusive o pico) ao da solução de referência menos refinada. Dessa maneira, comparando-se o MEFG-GL-NL com soluções REF-RFN, os resultados do primeiro tendem a ser melhores.

Considera-se, por fim, que, como a perturbação ao sistema é realizada em incrementos muito pequenos na estratégia aqui idealizada, a injeção de um enriquecimento tem seu

desbalanceamento ao sistema corrigido pelo próprio processo iterativo global, de maneira que a exigência de ciclagens global-local no passo convergido foi dispensada. Isso, obviamente, não invalida a investigação futura do efeito dessa interação recursiva intra-passo; por ser considerada custosa, relevou-se esse expediente no mecanismo proposto aqui.

## 6.5 Sobre os Mecanismos de *Upscaling* e a Ponderação Ascendente

Foram apresentados três mecanismos de comunicação ascendente local→global, cada um deles com impactos distintos no modelo numérico. Observou-se que o enriquecimento *stricto* (*upscaling* cinemático), é funcional e fornece resultados com precisão adequada. Particularmente ao cenário aqui trabalho, de heterogeneidade local, o UP-C introduziu no modelo global efeitos coerentes com a realidade material da escala inferior, tanto mais frágil quanto mais heterogênea a morfologia local. Do ponto de vista conceitual, essa estratégia de enriquecimento degenera o domínio local em movimentos nodais da estrutura e, portanto, permite certa arbitrariedade na definição deste domínio, a tal ponto que o tamanho dessa escala tende a ter pouco influência na resposta final (ressalvando-se a qualidade das CDC, que a depender de onde são extraídas podem ser ruins).

Numa comunicação com maiores informações transportadas, viu-se que o *upscaling* cinemático-material permite a redefinição das propriedades materiais globais em zonas com modelos submacroscópicos ativos. Ao se mapear o metadado numérico-geométrico da mesoestrutura local, foi possível a alteração das fases globais originais e embutimento das inclusões também nos modelos globais. Esse mecanismo opera, contudo, de modo equivalente a simulações de escala única com heterogeneidade e enriquecimento *stricto*. Os comportamentos estruturais captados nos modelos ANL-HT-2E + UP-C-M foram similares àqueles dos experimentos ANL-HT-1E, nos quais houve a representação direta e grosseira de uma mesoestrutura.

O mecanismo cinemático-constitutivo, por sua vez, viabilizou uma análise que será qualificada aqui como efetivamente multiescala, isto é, na qual emulou-se comportamentos verdadeiramente desacoplados e (até certo ponto) independentes, em que a resposta estrutural global teve um caráter mecânico mais homogêneo, enquanto o domínio local mostrava-se mais heterogêneo, consubstanciando-se assim as hipóteses fundamentais da

pesquisa. Através do mapeamento da variável de estado em forma de função de enriquecimento e de uma variável constitutiva em forma de uma média ponderada num volume representativo, permitiu-se a extração de uma grandeza cinemática, que como se apontou anteriormente, degenera a escala inferior em deslocabilidades pontuais, bem como a coleta de um estado de deformação médio ao redor das coordenadas de um ponto material global, estado esse influenciado pela composição bifásica da escala refinada. Ao se considerar a ponderação da variável histórica da escala inferior, incorporou-se no modelo global uma não localidade do dano. Essa característica adicional tem um caráter restrito, na medida que se vale de um volume consideravelmente pequeno ao redor do ponto material, mas que se faz presente nos resultados, desempenhando até um papel regularizador.

O UP-C-C apresenta-se como uma estratégia mais versátil de interligação entre modelos numéricos (fisicamente não lineares) muito dessemelhantes. Ao utilizar-se de uma ponderação de uma variável constitutiva, permite, com efeito, que qualquer característica de natureza material seja introjetada no modelo numérico global, sem comprometer as hipóteses fundamentais desse modelo. Ainda que nesta pesquisa tenha sido empregado o MEEG com elementos planos em ambas as escalas, o mecanismo apresentado flexibiliza a definição do modelo local de maneira considerável, isto é, não há qualquer restrição de conformidade espacial (que não o domínio local fazer parte do global), de natureza da discretização, ou de formulação constitutiva. Basicamente, basta que do modelo constitutivo da escala refinada se consiga extrair a variável histórica a ser ponderada para o modelo global e as funções de enriquecimento.

Ainda, abre-se caminho para definições de mecanismos diferentes na comunicação ascendente. Na presente obra, a ponderação proposta se valeu de uma relação unívoca entre as malhas dos modelos, isto é, para cada ponto de integração global, um único elemento local foi utilizado como volume característico para a média e seus pontos de integração, os exemplares dispostos no cálculo. Ou seja, o domínio de influência da ponderação não foi alterado, de modo que testes com diferentes domínios de influência (e, portanto, variação na quantidade e qualidade dos pontos locais presentes na média) e distintas funções de ponderação podem alterar a resposta estrutural capturada e potencialmente regularizar a análise não linear, sobretudo (infere-se) caso se consiga relacionar a dimensão do problema local com algum comprimento interno representativo do material e relacionado aos modelos constitutivos.

Reitera-se que nenhuma outra estratégia presente na literatura ou mesmo fornecida aqui, que não o UP-C-C, permite com que comportamentos mecânico-constitutivos distintos e de inclinação dicotômica homogêneo *vs.* heterogêneo sejam reproduzidos nas duas escalas. Ao alcance dos conhecimentos do autor, somente o UP-C-C possibilita a variação das hipóteses constitutivas da escala refinada, com captura de seus efeitos particulares, e a manutenção das hipóteses macroestruturais (globais), com consequente resposta estrutural ainda homogênea.

## 6.6 Sobre as Condições de Contorno Locais

Como se pontuou anteriormente neste texto, condições de contorno de deslocamentos (Dirichlet) foram usadas exclusivamente. A transferência de CDC de força na interface global/local exige o cômputo de um tensor de tensões, de uma normal e do vetor de força de superfície ( $\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}$ ) associados a cada um dos pontos de integração da interface utilizados na operação numérica. Essa característica unida à natureza do meio exige necessariamente a atualização de variáveis históricas nesses pontos, o que adiciona uma nova camada de complexidade na simulação. Mais ainda, em cenários nos quais exista propagação do modelo local, mapeamentos e interpolações intermediários seriam necessários, de tal modo que as exigências impostas se mostraram muito restritivas para as ambições da pesquisa e optou-se pelo caminho mais imediato de transferência exclusiva da variável de estado. Esse cenário, naturalmente, pode ser encarado como potencial fonte de erro, visto que, a depender da região da qual se extraia o problema local, gradientes duais expressivos possam existir.

De toda sorte, embora parte das referências da área advoguem pela imposição de condições de Cauchy (Kim et al. (2010), p.ex.), considera-se que os resultados da literatura não são tão significativos assim. Nas experiências e cenários explorados pelo grupo de pesquisa desta tese (Alves (2012), entre outras), por exemplo, percebe-se que a interferência/melhora não é tão marcante, apesar de, negrita-se, existir.

## 6.7 Sobre as Vantagens e Desvantagens do MEEG-GL-NL

A matriz 5.10 pode ser expandida com valores numéricos auto-contidos e servir de base para outras comparações. Não se baseando explicitamente em parâmetros de *hardware*,

além dos indicadores qualitativos já indicados, podem ser especificados alguns parâmetros numéricos, como número de graus de liberdade e número de iterações para ressaltar certos pontos positivos da técnica proposta. Assim, o modelo de avaliação anterior pode ser escrito segundo:

Tabela 6.1: Modelo de matriz de avaliação (expandida).

<b>Indicador</b>	<b>Valor/Escala</b>
Número de graus de liberdade	$\eta^{DOF} \in \mathbb{N}_+^*$
Número de iterações	$\eta^{ITER} \in \mathbb{N}_+^*$
Flexibilidade de malhamento	$\eta^{MESH} \in [\text{very poor, poor, fair, good, excellent}]$
Flexibilidade para impor CDC	$\eta^{BC} \in [\text{very poor, poor, fair, good, excellent}]$
Aderência da curva carga-deslocamento ( $\zeta \times u$ ) aos resultados de referência	$\eta^{(\zeta \times u)_{REF}} \in [\text{very poor, poor, fair, good, excellent}]$
Aderência da curva carga-deslocamento ( $\zeta \times u$ ) aos resultados do MEF	$\eta^{(\zeta \times u)_{FEM}} \in [\text{very poor, poor, fair, good, excellent}]$

Tabela 6.2: Matriz adicional de avaliação da estratégia.

<b>Indicador</b>	<b>MEFG-GL-NL</b>	<b>REF-RFN</b>	<b>REF-GR</b>
Número de graus de liberdade ( $\star$ )	94	72	238
Número de iterações ( $\star$ )	1030	1286	1565
Flexibilidade de malhamento	excellent	fair	fair
Flexibilidade de imposição de CDC	good	fair	fair
Aderência da curva carga-deslocamento a resultados de referência	excellent	excellent	fair
Aderência da curva carga-deslocamento a resultados do MEF	good	–	–

$\star$  Os parâmetros numéricos foram extraídos da seção 5.3.4

De maneira análoga àquela mostrada na síntese dos estudos de caso, pode-se avaliar o experimento 5.3.4, por exemplo, e resumir a comparação de suas soluções numéricas conforme a tabela 6.2.

Por fim, resumidamente, as seguintes características positivas e negativas podem ser indicadas:

- O mecanismo de refinamento de malha apresentado é consideravelmente flexível e simples e penaliza razoavelmente menos a simulação computacional, uma vez que foca em regiões mais restritas do domínio, não exige conformidade de malha, nem outros tipos de transição entre discretizações com tamanhos distintos. Sua operação

se baseia de maneira sintética na adição de poucos graus de liberdade à escala global, o que permite uma certa otimização da análise não linear;

- Essa flexibilidade, contudo, tem seu preço. No caso geral de não linearidade, dentre os custos adicionais, enumeram-se: a geração de um novo modelo; a demanda por mapeamento de pontos materiais e estado de deformação; desenvolvimento de técnicas de *upscaling* específicas; necessidade de implementação de operações geométrico-computacionais abstratas que fogem do objetivo central da pesquisa (análise não linear de estruturas); tempo de processamento relativamente superior ao MEF tradicional (em razão do algoritmo de extração da solução do MEFG); condicionamento de matrizes (também responsabilidade do MEFG, e não da nova técnica numérico-computacional apresentada). Nesta pesquisa, p.ex., houve a necessidade de se construir todo um arcabouço computacional novo para gerenciamento de todas as operações de maneira mais clara e expansível;
- A escolha do alcance do enriquecimento global provou ser um fator regulador. Dependendo da posição dos nós globais enriquecidos, respostas mais frágeis ou mais flexíveis podem ser extraídas. Esse comportamento é distinto do MEFG-GL clássico. Uma escolha adequada da banda de enriquecimento tem o potencial de regularizar alguns efeitos do tipo de análise não linear explorada;
- O tamanho do domínio local parece não influenciar as curvas carga-deslocamento. De qualquer maneira, é recomendável que o domínio local, uma vez sobreposto à uma zona não linear global, siga a evolução do dano. Essa característica também é distinta das aplicações clássicas da literatura;
- Concernente ao grau de refinamento de ambas as escalas, pode-se dizer que um refinamento significativo da escala local, sem uma redução do número de nós enriquecidos globais, resulta no abatimento das curvas de equilíbrio. Ainda assim, a performance do MEFG-GL-NL em termos de previsão da carga de pico e em casos de refinamento extremo é relativamente melhor. Pode-se inferir que uma combinação do refinamento global (tanto via tamanho da discretização, quanto via enriquecimento – incluindo o GL) e do refinamento local pode resultar em curvas mais ou menos ajustadas a amplitudes esperadas;

- Aparentemente os efeitos da discretização global grosseira e da discretização local refinada se equilibram, no sentido de que a malha global grosseira parece aumentar os valores das curvas carga-deslocamento e o refinamento dentro do problema local rebaixar as curvas. Nesse sentido, ao que parece, é recomendável usar uma malha global que seja consideravelmente mais grosseira do que as malhas locais. Isso, contudo, afeta a qualidade da inserção das características constitutivas mesoestruturais no modelo global, que no caso de ser muito mais grosseiro que a morfologia que se deseja captar, absorve efeitos com uma qualidade restrita. O impacto da combinação de malhas é, portanto, diferente daquele visto na literatura clássica da área de concentração;
- No MCFG-GL-NL manifestam-se os efeitos deletérios já vistos em análises fisicamente não lineares semelhantes, mas em geral mais tardiamente, graças à redução do número de GDL no refinamento GL e a mecanismos como o UP-C-C.

## 6.8 Sobre o Modelo Computacional de Heterogeneidade e Análises Correlatas

O *framework* para tratamento de heterogeneidade em modelos congêneres ao MEF é versátil o suficiente para utilização de variadas estratégias. Do ponto de vista computacional, a implementação é geral o suficiente para configurar distintos tipos de objetos, isto é, injetar a informação particulada em modelos numéricos representados por classes diferentes (`FemModel`, `GFemModel` etc.). A abordagem preferencial deste trabalho (não conformidade monofásica com regularidade das inclusões) é de operacionalização mais flexível e se mostrou adequada.

Das análises realizadas na seção 5.1, surge ainda uma consideração adicional importante. Nos testes com variação da fração de partículas ( $\Delta$ ), por exemplo, notou-se uma natural tendência de concentração do aproveitamento do processo de alocação num valor fixo ( $\approx 99.99\%$ ), inferindo-se que há um limite das posições possíveis para as partículas no interior de um domínio, para granulometrias bem graduadas e contínuas. Considera-se aqui um potencial entrelaçamento positivo entre o modelo computacional proposto e a mesoestrutura real de um material particulado. Os resultados obtidos apontam que, apesar da aleatoriedade no tamanho e na topologia das inclusões, uma morfologia mesoestrutural bifásica, na qual há heterogeneidades imersas em uma matriz ligante, não será

completamente aleatória, mas possuirá organizações limitadas, derivando para ordenamentos ótimos, cujo aproveitamento espacial é restrito e otimizado. Independentemente da natureza físico-química do material, que, com efeito, regula as interações entre os componentes de um meio particulado típico, considera-se aqui que, do ponto de vista mesoscópico, há potencialmente um caráter puramente topológico na conformação interna de compostos granulares, ou seja, no limite, desconsiderando-se forças intermoleculares, p.ex., a maneira como heterogeneidades serão dispostas no interior de uma massa contínua será circunscrita pelas geometrias do domínio e das próprias partículas. Isto significa que no interior de um elemento estrutural de concreto, por exemplo, existem posições preferenciais para os agregados britados, mesmo a morfologia sendo randômica a rigor. Nesse sentido, modelos computacionais como o apresentado, ainda que alimentando-se de fundamentos e comportamentos reais medidos experimentalmente, podem servir como ferramentas para o estudo de micro/mesoestruturas de diversos materiais compósitos. Embora julgue-se que, para alguns, as colocações e interpretações anteriores possam até ser óbvias, vale destacá-las.

Além disso, observou-se que a utilização de um modelo de heterogeneidade, como aquele implementado aqui, introduz um comportamento contingente na reposta estrutural do sólido modelado. Na medida que a morfologia mesoestrutural é de caráter randômico, heurísticamente construída por um algoritmo estocástico, cada novo experimento produz soluções distintas. Nesse contexto, percebeu-se uma razão constante entre as curvas carga-deslocamento de modelos com malhas diferentes e variação da fração de heterogeneidade. A existência de uma relação fixa entre os limites de carga de modelos com graus de refinamento distintos indica um potencial nexó exógeno e empírico que associe, *a posteriori*, curvas de equilíbrio que tenham sofrido os efeitos da localização de deformações a soluções de referência. Uma regressão simplificada e rudimentar, com caráter ilustrativo, foi apresentada. Contudo, regressões mais intrincadas, que capturam padrões profundos nos dados (como aquelas baseadas em aprendizado de máquina), são alternativas para um estudo mais detalhado do tema.

## 6.9 Sobre a Implementação

De início, salienta-se a robustez, flexibilidade e qualidade do sistema empregado na pesquisa. A excelência de todo o arcabouço numérico e gráfico do INSANE, fruto do

trabalho portentoso e indelével de um grupo de pesquisa com contribuições acadêmicas perenes e de relevo, permitiu com que o trabalho aqui apresentado pudesse ser feito. O acervo constitutivo, incremental-iterativo, algébrico e gráfico do *software*, bem como sua estrutura, destacaram-se como ferramental imprescindível no desenvolvimento desta pesquisa.

De toda sorte, considera-se que com a construção apresentada aqui o pesquisador/desenvolvedor consiga identificar cada fase, processo, e requisito de uma análise em mais de um nível (global-local ou multiescala, como queira rotular o leitor), de maneira muito mais imediata e visual. Isso é sobremaneira importante quando se faz parte de um grupo de pesquisa acadêmico-científico, como o projeto INSANE, em que uma grande quantidade de estudantes compartilhará contribuições. Não é raro que os fatores “clareza” e “didatismo” sejam negligenciados na execução de trabalhos computacionais nas engenharias. Em detrimento de maior inteligibilidade de código, subentendem-se o que são julgadas obviedades, e foca-se em performance (quando muito). Dados os prazos quase sempre curtos, objetivos diversos, foco em resultados (de alto desempenho, de preferência), alcançam-se códigos e dissertações que seguem modelos muito rígidos, com pouca variação de forma, conteúdo, estratégias, abordagens e linguagem. Embora erguida sob o alerta da ótica anterior e com a intenção de transpor as limitações indicadas, tal crítica se estende também à presente obra; há muito provavelmente limitações de conteúdo e clareza, e, para alguns, um escopo não contundente. Em geral, há um grande dispêndio de tempo para compreensão daquilo que foi desenvolvido numa dada obra de referência – das hipóteses fundamentais, ao código – e na experiência do autor, uma longa jornada, quase sempre com a transposição de etapas inócuas e de pouco retorno, foi enfrentada no entendimento do funcionamento do plataforma de desenvolvimento utilizada e das implementações anteriores associadas ao conteúdo do estudo proposto (GL). Assim, considera-se que o que foi desenvolvido aqui, caso venha a ser incorporado ao núcleo do INSANE, possibilitará uma maior autonomia para muitos estudantes, principalmente àqueles que estão envolvidos com metodologias com enriquecimento da partição da unidade (MEFG, MEFG-GL, MEFG-GL-NL etc.), modelagem multiescala, modelagem multifísica, paralelização de solução, entre outros, mesmo que seja apenas na construção de ambientes de teste. Naturalmente, essa é a visão particular do autor, que considera relevante o registro – nas considerações finais de um projeto dessa natureza – de todo o caminho percorrido e de suas impressões pontuais

quanto à sua pesquisa.

Nesse contexto em particular, acredita-se que o *kernel* do SM tem um grande potencial para testagem de código e avaliações intermediárias de funcionalidades a serem implementadas num dado sistema (no caso, o INSANE). Na plataforma de desenvolvimento empregada, embora existam *frameworks* típicos de testagem próprias da linguagem e da tecnologia utilizada (JUnit, Java), em geral há uma dificuldade de organização de testes, uma vez que quase sempre há a necessidade de preenchimento de um conjunto de objetos massivos que requerem muitas linhas de implementação e, muitas vezes, a construção de novos pontos de entrada do código (*main*) em locais pouco usuais do sistema. Essas novas interferências costumam afetar a legibilidade do código, a organização interna das classes ou ferir a arquitetura da plataforma, sendo, quase sempre, apagadas quando da finalização da testagem. Com o SM, a montagem de ambientes de testes se torna mais fluida, organizada e perene, pois o desenvolvedor consegue configurar cada etapa incremental de sua implementação em uma instância limpa, sem vícios prévios (que não os do próprio *framework*), e com maior controle interno. Parte dos testes criados nesse novo ambiente pode, inclusive, ser incorporada ao mecanismo original de testes do sistema. Considera-se ainda que dentro da lógica de *gerência/mediação* de instâncias ou operações, classes novas exclusivamente voltadas para essa atividade (testes) possam ser criadas.

Reiterando o que já foi indicado neste texto, o conteúdo computacional desenvolvido nesta obra é por natureza versionado e obsolecente. De tal sorte que já vislumbra-se, quando da publicação desta obra, potenciais mudanças e caminhos futuros a serem provavelmente explorados. O gestor de dados global-local (*GlobalLocalDataManager*), por exemplo, sofreu um esvaziamento conceitual progressivo ao longo da implementação e dos experimentos. Dadas certas características impostas pela dinâmica do *kernel* do INSANE (p.ex., imposição de condições de contorno, estruturas de dados do MCFG e de suas classes de enriquecimentos, integração e atualização de parcelas incrementais etc.), a conversa entre estruturas de dados puras de modelos discretos (notadamente, modelo global e modelo local) não se mostrou tão flexível ou mesmo impositiva. Assim, o GLDM ganhou contornos um pouco distintos dos originais, mas úteis para a automatização da geração do domínio local em tempo de processamento e para a desvinculação das integrações das escalas. Futuramente, o referido *data manager* pode vir a ser ressignificado ou mesmo, extinto, tendo suas funcionalidades migradas para configuradores.

## 6.10 Sobre Trabalhos Futuros

Há naturalmente uma tendência de continuidade na exploração do método dos elementos finitos generalizados e de sua união com estratégias global-local, sobretudo em aplicações mais complexas como os casos em que existam não linearidades diversas. Os usos do MEFG-GL tradicional e da variedade aqui apresentada em outros cenários como plasticidade, análises geometricamente não lineares e demais problemas incrementais-iterativos são certamente caminhos potenciais de seguimento das atividades de pesquisa. Não somente, casos em que haja imperativamente a demanda por um refinamento extremo, sobretudo aqueles de caráter material linear (ou seja, que não empreguem modelos constitutivos que manifestem efeitos deletérios), podem ser objetos de análise. Dentro do grupo de pesquisa que se insere essa obra, há no momento de sua publicação a investigação de métodos *phase-field*, que poderiam ser empregados ao contexto.

Estudos de otimização da implementação são cenários importantes. A paralelização da solução e a construção de ferramentas de adaptatividade do enriquecimento são atividades que prontamente surgem como próximas etapas. O uso de múltiplas *threads* para resolver cada um dos estágios da simulação era de viabilidade consideravelmente limitada na arquitetura original do sistema. Com a implementação proposta, torna-se simples a execução de atividades dessa natureza. Além disso, a exploração de alternativas de adaptatividade nos domínios locais e na distribuição do enriquecimento é um caminho possível com a estrutura construída no âmbito dessa pesquisa.

Um domínio amplo a ser explorado é o do aprendizado de máquina. Como se viu, a introdução de heterogeneidade na análise estrutural incorpora um comportamento estocástico no modelo que pode ser utilizado para geração de dados para treinamento dos diversos algoritmos e consequente modelagem constitutiva numérica de materiais particulados. Tendo em vista que a produção de dados em experimentos não virtuais (laboratoriais) tem um custo e uma demanda de tempo elevados, a utilização de modelos computacionais reduzidos, com distintas morfologias, distribuições granulométricas, frações de heterogeneidade, relações tensão-deformação, entre outros, pode ser uma alternativa poderosa para o desenvolvimento de estudos na área, que já são produzidos pelo grupo do INSANE quando da consolidação dessa pesquisa.

A seguir, são apresentadas sinteticamente sugestões de caminhamento do trabalho. Algumas das propostas fornecidas já se engatilham em iniciativas do próprio autor e em

estudos dos colegas do grupo de pesquisa.

- Consolidação do *kernel* multiescala-multifísico do conjunto `SimulationManager`;
- Testes mais intensivos com os tratamentos de heterogeneidade implementados, sobretudo com modelos “mais discretos”, como o de redes, que conceitualmente se mostram aderentes à realidade material de meios parcialmente frágeis;
- Análises térmicas e dinâmicas com heterogeneidade material;
- Verificação de outras formas de ponderação ascendente no mecanismo de *upscaling* proposto, isto é, investigação da alteração do tamanho do domínio de ponderação, do número de pontos de integração locais incluídos na conta, de outras funções de ponderação, entre outros.
- Teste do *upscaling* cinemático-constitutivo com outros modelos numéricos locais (como o de redes);
- Investigação de mecanismo de comunicação ascendente que incorpore um efeito regularizador mais forte na análise fisicamente não linear com modelos de degradação elástica. Em geral, a inserção de um comprimento interno, próprio do material, mas associado ao modelo numérico, é realizada para a estabilização de formulações dessa natureza, de modo que esta dimensão poderia ser extraída do problema local. O mecanismo em si foi concebido visando essa característica, embora os resultados obtidos com as hipóteses empregadas tenham apresentado um alcance mais restrito;
- Teste da estratégia GL proposta com mais alterações no domínio local, como o tipo de contínuo;
- Modelagem de propagação de trincas segundo a mecânica da fratura linear elástica via MEF<sub>G</sub> e com inclusão de heterogeneidade no modelo;
- Modelagem de propagação de trincas segundo a MFLE com o MEF<sub>G</sub>, enriquecimento de descontinuidade fraca (*level-set*) e demais mecanismos associados já presentes no sistema;
- Modelagem de propagação de trincas segundo MFLE via MEF<sub>G</sub> com estratégia global-local e inclusão de heterogeneidade;

- Modelagem de propagação de trincas coesivas em problemas com não linearidade material via MEFG com estratégia global-local e inclusão de heterogeneidade;
- Modelos de duas escalas com heterogeneidade local e variação do tratamento do metadado; Modelagem global-local com diferentes modelos de análise, quer dizer, utilização de elementos unidimensionais no nível global e modelos bi/tridimensionais localmente, ou emprego de análise global em estado plano e uso de um modelo 3D completo no nível local;
- Variação do modelo discreto local. Testes com formulações sem malha, com elementos de contorno, modelos de redes etc.;
- Utilização de formulações estáveis do MEFG nos cenários apresentados;
- Paralelização do MEFG-GL. O *framework* do SM proposto permite de maneira muito imediata a paralelização processo de solução, de modo que a implementação pode ser explorada de maneira inteiriça. Adianta-se que a dimensão do problema e um potencial desbalanceamento de carga computacional serão marcantes, de modo que será importante investigar o natural *overhead* dos mecanismos de paralelização empregados;
- Implementação de mecanismos de adaptatividade da distribuição espacial do enriquecimento, bem como da geração dos domínios locais;
- Simulações de Monte Carlo com modelos com heterogeneidade para determinação de comportamentos contingentes de estruturas e de materiais;
- Utilização de elementos coesivos para modelagem de interface em modelos com representação morfológica da heterogeneidade, como, por exemplo, elementos de alta razão de aspecto;
- Utilização de elementos coesivos para propagação de trincas em modelos com heterogeneidade explícita;
- Aplicação do MEFG-GL, sobretudo da variante fornecida aqui, a problemas com exigência de refinamento massivo, como métodos *phase-field*.

- União dos modelos de heterogeneidade e da estratégia global-local apresentados com modelos baseados em potencial inter-atômico para simulações com mais de duas escalas.
- Aplicação do MEFG-GL em problemas dinâmicos, térmicos e multifísicos;
- Expansão das técnicas apresentadas a problemas tridimensionais;
- Aplicação da técnica a outros cenários práticos, como o concreto com fibras;
- Emprego de modelos com heterogeneidade para geração de dados diversos para os modelos de aprendizado de máquina. Dentre as aplicações, encontram-se, p.ex.: utilização da resposta no espectro tensão-deformação de cada ponto material do modelo numérico para a construção de modelos constitutivos numéricos baseados em propriedades simples, como as características da distribuição; emprego das isofoixas das variáveis internas para construção de relações constitutivas através de algoritmos de reconhecimento de imagem de aprendizado de máquina; previsão da resposta estrutural (como a deformada, por exemplo) através da alimentação dos algoritmos com um conjunto de trajetórias; entre outros.
- Utilização de modelos com heterogeneidade (e, portanto, de modelos com variabilidade da representação material com preservação de suas propriedades elásticas e manutenção do tipo de material modelado) para busca de relações empírico-numéricas de regularização exógena ou vinculação de respostas estruturais de simulações com degradação elástica e refinamento progressivo de malha. Isso poderia ser feito com modelos de regressão mais robustos, baseados em algoritmos de aprendizado de máquina, que conseguem enxergar padrões profundos.

# Referências Bibliográficas

- Abdulle, A. e Nonnenmacher, A., 2009. ‘A short and versatile finite element multiscale code for homogenization problems’. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198(37-40), pp. 2839–2859.
- ABNT NBR 7211, 2005. ‘Agregados para concreto – especificação’. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, p. 11.
- Alves, P. D., 2012. Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Alves, P. D., Barros, F. B. e Pitangueira, R. L., 2013. ‘An object-oriented approach to the generalized finite element method’. *Advances in Engineering Software*, vol. 59, pp. 1–18.
- Anderson, T. L., 2005. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. Taylor and Francis Group.
- Andrade, M. P., 2019. Modelos para a descrição da heterogeneidade de meios parcialmente frágeis. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Argyris, J. H., (1965), Continua and discontinua, in ‘Proceedings of First Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics’, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, pp. 11–89.
- Babuška, I., 1976, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Vol. 134, Springer, Berlin, chapter Homogenization approach in engineering, pp. 137–153.
- Babuška, I. e Banerjee, U., 2012. ‘Stable generalized finite element method (SGFEM)’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 201-204, pp. 91–111.

- Babuška, I., Caloz, G. e Osborn, J. E., 1994. ‘Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients’. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31(4), pp. 945–981.
- Babuška, I. e Melenk, J. M., 1997. ‘The partition of unity method’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40(4), pp. 727–758.
- Babuška, I. e Szabó, B., 1991. *Finite Element Analysis*. John Wiley and Sons.
- Barros, B. F., Proenca, B. S. P. e Barcellos, C. S., 2004. ‘Generalized finite element method in structural nonlinear analysis a p-adaptive strategy’. *Computational Mechanics*, .
- Barros, F. B., 2002. Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não Linear de Estruturas. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo.
- Batoz, J.-L. e Dhatt, G., 1979. ‘Incremental displacement algorithms for nonlinear problems’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14(8), pp. 1262–1267.
- Bažant, Z. P., 1976. ‘Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete’. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 102(EM2), pp. 331–344.
- Bažant, Z. P., 1984. ‘Size effect in blunt fracture: Concrete, rock, metal’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 110(4), pp. 518–535.
- Bažant, Z. P., 1991. ‘Why continuum damage is nonlocal: Micromechanics arguments’. *J. Eng. Mech.*, vol. 117(5), pp. 1070–1087.
- Bažant, Z. P., 1994. ‘Nonlocal damage theory based on micromechanics of crack interactions’. *J. Eng. Mech.*, vol. 120(3), pp. 593–617.
- Bažant, Z. P. e Oh, B. H., 1983. ‘Crack band theory for fracture of concrete’. *Matériaux et Constructions*, vol. 16(3), pp. 155–177.
- Bažant, Z. P. e Planas, J., 1998. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasi-brittle Materials*. CRC Press.
- Bažant, Z. P., Tabbara, M. R., Kazemi, M. T. e Pijaudier-Cabot, G., 1990. ‘Random particle model for fracture of aggregate or fiber composites’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 116(8), pp. 1686–1705.

- Belytschko, T. e Black, T., 1999. ‘Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45(5), pp. 601–620.
- Belytschko, T., Gracie, R. e Ventura, G., 2009. ‘A review of extended/generalized finite element methods for material modeling’. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, vol. 17, pp. 24.
- Bensoussan, A., Lions, J.-L. e Papanicolaou, G., 1978. *Studies in Mathematics and Its Applications: Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. Vol. 5, North-Holland Publishing Company.
- Birck, G., 2016. Análise do processo de dano em material quase-frágil através da simulação de um modelo de barras. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Bitencourt, L., 2015. Numerical modeling of failure in steel fiber reinforced cementitious materials. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo.
- Blanco, P. J., Sánchez, P. J., de Souza Neto, E. A. e Feijóo, R. A., 2014. ‘Variational foundations and generalized unified theory of RVE-based multiscale models’. *Arch Computat Methods Eng*, vol. 23(2), pp. 191–253.
- Bohm, H. J., (2016), A short introduction to basic aspects of continuum micromechanics, techreport ILSB Report 206, ILSB-Vienna University of Technology. year 1998. updated january 25, 2016.
- Bonet, J. e Wood, R., 1997. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press.
- Bosco, E., Kouznetsova, V. G. e Geers, M. G. D., 2015. ‘Multi-scale computational homogenization-localization for propagating discontinuities using x-FEM’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 102(3-4), pp. 496–527.
- Botelho, G. G., 2019. Sistema computacional orientado a objetos para análise termomecânica fisicamente não-linear em regime transiente via método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.

- Botelho, G. G., Monteiro, H. A. S., Peixoto, R. G. e Pitangueira, R. L. S., (2018), Object oriented framework for multiphysics analysis, *in* ‘Proceedings of the XXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2018’, Paris/Compiègne, França.
- Budiansky, B., 1965. ‘On the elastic moduli of some heterogeneous materials’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 13(4), pp. 223–227.
- Burt, N. J. e Dougill, J. W., 1977. ‘Progressive failure in a model heterogeneous medium’. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 103(EM3), pp. 365–376.
- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 1994. ‘A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31(20), pp. 2835–2865.
- Carpinteri, A., 1982. ‘Application of fracture mechanics to concret structures’. *Journal of the Structural Division*, vol. 108(ST4), pp. 833–848.
- Carpinteri, A., 1989. ‘Size effects on strength, toughness, and ductility’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 115(7), pp. 1375–1392.
- Carreira, D. J. e Chu, K.-H., 1985. ‘Stress-strain relationship for plain concrete in compression’. *American Concrete Institute Journal*, vol. 82(6), pp. 797–804.
- Carreira, D. J. e Chu, K. H., 1986. ‘Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension’. *American Concrete Institute Journal*, vol. 83, pp. 21–28.
- Cassel, D., 2019. ‘Why are so many developers hating on object-oriented programming?’. *The New Stack*, . Disponível em: <https://thenewstack.io/why-are-so-many-developers-hating-on-object-oriented-programming/>. Acessado em: 06.2020.
- Cayro, E. E. P., 2016. Efeito de escala no crescimento de trincas por fadiga em materiais quase-frágeis. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Clough, R. W., 1990. ‘Original formulation of the finite element method’. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 7, pp. 89–101.
- Coenen, E., Kouznetsova, V. e Geers, M., (2013), Multi-scale modelling of damage and fracture, *in* ‘Second ECCOMAS Young Investigators Conference’.

- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E. e Witt, R. J., 2002. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 4 edn, John Wiley and Sons.
- Crisfield, M., 1981. ‘A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”’. *Computers & Structures*, vol. 13(1-3), pp. 55–62.
- Cusatis, G., Bažant, Z. P. e Cedolin, L., 2003a. ‘Confinement-shear lattice model for concrete damage in tension and compression: I. theory’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 129(12), pp. 1439–1448.
- Cusatis, G., Bažant, Z. P. e Cedolin, L., 2003b. ‘Confinement-shear lattice model for concrete damage in tension and compression: II. computation and validation’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 129(12), pp. 1449–1458.
- De Berg, M., Van Kreveld, M., Overmars, M. e Schwarzkopf, O., 2000. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag.
- De Borst, R., Crisfield, M., Remmers, J. e Verhoosel, C., 2012. *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. 2 edn, Wiley.
- De Borst, R. e Gutiérrez, M. A., 1999. ‘A unified framework for concrete damage and fracture models including size effects’. *International Journal of Fracture*, vol. 95, pp. 261–277.
- De Borst, R., Hulshoff, S. J., Lenz, S., Munts, E. A., van Brummelen, H. e Wall, W. A., (2006), Multiscale methods in computational fluid and solid mechanics, *in* E. O. P. Wesseling e J. Périaux, eds, ‘European Conference on Computational Fluid Dynamics - ECCOMAS CFD’, p. 18.
- Debella, L. C., Cittadin, C. C., Arndt, M. e Machado, R. D., 2019. ‘Transient dynamic analysis of bars and trusses by the adaptive generalized finite element method’. *Engineering Computations*, vol. 37(3), pp. 789–821.
- Devries, F., Dumontet, H., Duvaut, G. e Lene, F., 1989. ‘Homogenization and damage for composite structures’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 27(2), pp. 285–298.

- Dolbow, J., Moës, N. e Belytschko, T., 2000. ‘Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method’. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 36, pp. 235–260.
- Duarte, C., 2001. ‘A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190(15-17), pp. 2227–2262.
- Duarte, C. A., (1995), A review of some meshless methods to solve partial differential equations, techreport, TICAM - Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, The University of Texas at Austin. Taylor Hall 2.400. Austin, Texas, 78712, U.S.A.
- Duarte, C. A. e Babuška, I. M., (2005), A global-local approach for the construction of enrichment functions for the generalized fem and its application to propagating three-dimensional cracks, in ‘ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods’, pp. B41.1–B41.7.
- Duarte, C. A. e Oden, J. T., 1996*a*. ‘H-p clouds—an h-p meshless method’. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 12(6), pp. 673–705.
- Duarte, C., Babuška, I. e Oden, J., 2000. ‘Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems’. *Computers & Structures*, vol. 77(2), pp. 215–232.
- Duarte, C. e Kim, D.-J., 2008. ‘Analysis and applications of the generalized finite element method with global-local enrichment functions’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197(6-8), pp. 487–504.
- Duarte, C. e Oden, J., 1996*b*. ‘An h-p adaptive method using clouds’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139(1-4), pp. 237–262.
- E, W. e Engquist, B., 2003. ‘The heterogeneous multiscale methods’. *Communications in Mathematical Sciences*, vol. 1(1), pp. 87–132.
- E, W., Engquist, B., Li, X., Ren, W. e Vanden-Eijnden, E., 2007. ‘Heterogeneous multiscale methods: A review’. *Communications in Computational Physics*, vol. 2(3), pp. 367–450.

- Eckardt, S., 2009. Adaptive heterogeneous multiscale models for the nonlinear simulation of concrete. Tese de Doutorado, Bauhaus-Universität Weimar.
- Efendiev, Y., Galvis, J., Li, G. e Presho, M., 2014. ‘Generalized multiscale finite element methods: Oversampling strategies’. *Int J Mult Comp Eng*, vol. 12(6), pp. 465–484.
- Efendiev, Y. e Hou, T. Y., 2008. *Multiscale Finite Element Methods. Theory and Applications*. Springer.
- Elwi, A. E. e Hrudey, T. M., 1989. ‘Finite element model for curved embedded reinforcement’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 115(4), pp. 740–757.
- Eshelby, J. D., 1957. ‘The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems’. *Proc. Roy. Soc. A*, vol. 241, pp. 376–396.
- Eshelby, J. D., 1959. ‘The elastic field outside an ellipsoidal inclusion’. *Proc. Roy. Soc.*, pp. 561–569.
- Fernandes, G., Pituba, J. e de Souza Neto, E., 2015. ‘FEM/BEM formulation for multi-scale analysis of stretched plates’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 54, pp. 47–59.
- Feyel, F., 2003. ‘A multilevel finite element method (FE2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192(28-30), pp. 3233–3244.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Fonseca, F. T., Pitangueira, R. L. S. e Penna, S. S., (2018), Software erosion on a structural analysis software - a case study, in ‘Proceedings of the XXIX Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2018’, Paris/Compiègne, França.
- Fonseca, G. M., 2019. Propagação de trincas em meios elásticos lineares via método dos elementos finitos generalizados com estratégia global-local automatizada. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.

- Fonseca, G. M., Barros, F. B., de Oliveira, T. S., Monteiro, H. A., Novelli, L. e Pitangueira, R. L., 2020. ‘2-d crack propagation analysis using stable generalized finite element method with global-local enrichments’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 118, pp. 70–83.
- Fries, T.-P. e Belytschko, T., 2010. ‘The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, .
- Fuina, J., da Silva Pitangueira, R. L. e Penna, S. S., 2010. ‘Contínuos generalizados: de voigt à modelagem de materiais parcialmente frágeis’. *Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas*, vol. 31(2), pp. 119–130.
- Fuina, J. S., 2004. Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Gamma, E., Helm, R., Johnson, R. e Vlissides, J., 1994. *Design Patterns: Elements of Reusable Object-Oriented Software*. Addison-Wesley Professional.
- Garrido, J. M., 2001. *Object-Oriented Discrete-Event Simulation with Java: A Practical Introduction*. Series in Computer Systems, 1 edn, Springer US.
- Ghosh, S., Lee, K. e Moorthy, S., 1995. ‘Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and voronoi cell finite element method’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 32(11), pp. 27–62.
- Gitman, I., Askes, H. e Sluys, L., 2007. ‘Representative volume: Existence and size determination’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 74(16), pp. 2518–2534.
- Gitman, I., Askes, H. e Sluys, L., 2008. ‘Coupled-volume multi-scale modelling of quasi-brittle material’. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 27(3), pp. 302–327.
- Gitman, I. M., Askes, H., Sluys, L. J. e Valls, O. L., (2004), The concept of representative volume for elastic, hardening and softening materials, *in* ‘Proceedings of XXXII International Summer School Conference: Advanced Problems in Mechanics’, Russia.
- Goncalves, M. A. B., 2004. Geração de malhas bidimensionais de elementos finitos baseada em mapeamentos transfinitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.

- Gori, L., Penna, S. S. e Pitangueira, R. L. S., 2017. ‘A computational framework for constitutive modelling’. *Computers and Structures*, vol. 187, pp. 1–23.
- Grassl, P. e Bažant, Z. P., 2009. ‘Random lattice-particle simulation of statistical size effect in quasi-brittle structures failing at crack initiation’. *J. Eng. Mech.*, vol. 135(2), pp. 85–92.
- Gravemeier, V., Lenz, S. e Wall, W. A., 2007. ‘Towards a taxonomy for multiscale methods in computational mechanics: building blocks of existing methods’. *Computational Mechanics*, vol. 41(2), pp. 279–291.
- Griffith, A. A., 1921. ‘The phenomena of rupture and flow in solids’. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 221(582-593), pp. 163–198.
- Guedes, J. e Kikuchi, N., 1990. ‘Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 83(2), pp. 143–198.
- Gupta, V., Kim, D.-J. e Duarte, A., 2013. ‘Extensions of the two-scale generalized finite element method to nonlinear fracture problems’. *Int J Mult Comp Eng*, vol. 11(6), pp. 581–596.
- Gupta, V., Kim, D.-J. e Duarte, C. A., 2012. ‘Analysis and improvements of global–local enrichments for the generalized finite element method’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 245-246, pp. 47–62.
- Gurtin, M. E., 1981. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Vol. Mathematics in Science and Engineering, Vol 158, Academic Press.
- Häfner, S., Eckardt, S., Luther, T. e Könke, C., 2006. ‘Mesoscale modeling of concrete: Geometry and numerics’. *Computers & Structures*, vol. 84(7), pp. 450–461.
- Hashin, Z., 1983. ‘Analysis of composite materials: A survey’. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50(3), pp. 481.
- Hashin, Z. e Shtrikman, S., 1963. ‘A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials’. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 11, pp. 125–140.

- Heckbert, P. S., 1994. *Graphic Gems IV*. Morgan Kaufman–Academic Press, USA.
- Hettich, T., Hund, A. e Ramm, E., 2008. ‘Modeling of failure in composites by x-FEM and level sets within a multiscale framework’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197(5), pp. 414–424.
- Hill, R., 1963. ‘Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles’. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 11, pp. 357–372.
- Hill, R., 1965. ‘A self-consistent mechanics of composite materials’. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 13, pp. 213–222.
- Hill, R., 1972. ‘On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain’. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 326(1565), pp. 131–147.
- Hillerborg, A., Modéer, M. e Petersson, P. E., 1976. ‘Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements’. *Cement and Concrete Research*, vol. 6, pp. 773–782.
- Hughes, T. J., 1987. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall.
- Hughes, T. J., Feijóo, G. R., Mazzei, L. e Quincy, J.-B., 1998. ‘The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 166(1-2), pp. 3–24.
- INSANE Lab, n.a., ‘Interactive Structural Analysis Environment’. [www.insane.dees.ufmg.br](http://www.insane.dees.ufmg.br).
- Jirásek, M., 2004. ‘Non-local damage mechanics with application to concrete’. *RFGC-Failure, Degradation and Instabilities*, pp. 683–707.
- Kani, G. N. J., 1967. ‘How safe are our large reinforced concrete beams?’. *ACI Journal Proceedings*, vol. 64(3).
- Kaplan, M. F., 1961. ‘Crack propagation and the fracture of concrete’. *ACI Journal Proceedings*, vol. 58(11).

- Karihaloo, B., 2010. ‘What is quasi-brittle fracture and how to model its fracture behaviour’. *The FESI Bulletin: International Magazine on Engineering Structural Integrity*, vol. 4(4).
- Katayama, D., 2016, ‘Estudo da influência da granulometria do agregado graúdo nas propriedades do concreto de alto desempenho’.
- Khoei, A. R., 2015. *Extended Finite Element Method: Theory and Applications*. Wiley.
- Kim, D.-J. e Duarte, C., (2009), Generalized finite element method with global-local enrichments for nonlinear fracture analysis, *in* H. da Costa Mattos e M. Alves, eds, ‘Mechanics of Solids in Brazil’, Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, pp. 319–330.
- Kim, D.-J., Duarte, C. A. e Proenca, S. P., 2012. ‘A generalized finite element method with global-local enrichment functions for confined plasticity problems’. *Computational Mechanics*, vol. 50(5), pp. 563–578.
- Kim, D.-J., Duarte, C. A. e Sobh, N. A., 2010. ‘Parallel simulations of three-dimensional cracks using the generalized finite element method’. *Computational Mechanics*, vol. 47(3), pp. 265–282.
- Kim, D.-J., Pereira, J. P. e Duarte, C. A., 2009. ‘Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized FEM meshes’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 81, pp. 335–365.
- Kim, J. e Duarte, C. A., 2015. ‘A new generalized finite element method for two-scale simulations of propagating cohesive fractures in 3-D’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 104(13), pp. 1139–1172.
- Kim, N.-H., 2015. *Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Springer.
- Könke, C., 1995. ‘Damage evolution in macro-damage ductile materials: from micro- to macro-damage’. *Computational Mechanics*, vol. 15, pp. 497–510.
- Könke, C., Eckardt, S., Hafner, S., Luther, T. e Unger, J., 2010. ‘Multiscale simulation methods in damage prediction of brittle and ductile materials’. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, vol. 8(1), pp. 17–36.

- Kouznetsova, V., Brekelmans, W. A. M. e Baaijens, F. P. T., 2001. ‘An approach to micro-macro modelling of heterogeneous materials’. *Computational Mechanics*, vol. 27, pp. 37–48.
- Kouznetsova, V. G., Geers, M. G. D. e Brekelmans, W. A. M., 2004*a*. ‘Size of representative volume element in a second-order computational homogenization framework’. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, vol. 2(4), pp. 575–598.
- Kouznetsova, V. G., Geers, M. G. D. e Brekelmans, W. A. M., (2010), Computational homogenisation for non-linear heterogeneous solids, *in* U. Galvanetto e M. H. F. Aliabadi, eds, ‘MULTISCALE MODELING IN SOLID MECHANICS: Computational Approaches’, Vol. 3, Imperial College Press, chapter 1.
- Kouznetsova, V., Geers, M. e Brekelmans, W., 2004*b*. ‘Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials: a nested finite element solution strategy’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193(48-51), pp. 5525–5550.
- Kuchana, P., 2004. *Software Architecture Design Patterns in Jav*. Auerbach Publications - CRC Press.
- Lanczos, C., 1952. *The Variational Principles of Mechanics*. University of Toronto Press.
- Lemaitre, J. e Desmorat, R., 2005. *Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. 1 edn, Springer Berlin Heidelberg.
- Likert, R., 1932. ‘A technique for the measurement of attitudes’. *Archives of Psychology*, vol. 140, pp. 1–55.
- Lloberas-Valls, O., Everdij, F. P. X., Rixen, D. J., Simone, A. e Sluys, L. J., (2014), Multiscale analysis of damage using dual and primal domain decomposition techniques, *in* E. Oñate, J. Oliver e A. Huerta, eds, ‘WCCM XI/ECCM V/ ECFD VI’, p. 11.
- Lloberas-Valls, O., Everdij, F., Rixen, D., Simone, A. e Sluys, B., (2012), Concurrent multiscale analysis of heterogeneous materials, *in* J. E. et.al, ed., ‘ECCOMAS 2012’, p. 16.

- Lloberas-Valls, O., Rixen, D. J., Simone, A. e Sluys, L. J., (2010), Multiscale analysis of heterogeneous brittle materials using domain decomposition techniques, *in* ‘IV European Conference on Computational Mechanics’, Palais des Congrès, Paris, France.
- Lloberas-Valls, O., Simone, A. e Sluys, L., (2008), Multi-scale modelling of softening materials, *in* E. Schlangen e G. D. Schutter, eds, ‘International RILEM Symposium on Concrete Modelling/ConMod ’08’, pp. 345–352.
- Mal, A. K. e Singh, S. J., 1991. *Deformation of Elastic Solids*. Prentice-Hall, New Jersey.
- Malekan, M., Barros, F. B. e Pitangueira, R. L., 2018. ‘Fracture analysis in plane structures with the two-scale g/xfem method’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 155, pp. 65–80.
- Malekan, M., Silva, L. L., Barros, F. B., Pitangueira, R. L. e Penna, S. S., 2018. ‘Two-dimensional fracture modeling with the generalized/extended finite element method: An object-oriented programming approach’. *Advances in Engineering Software*, vol. 115, pp. 168–193.
- Mantyla, M., 1988. *An Introduction to Solid Modeling*. Computer Science Press.
- Markov, K. Z., 1999, *Heterogeneous Media: Modelling and Simulation*, Birkhauser Boston, chapter Elementary Micromechanics of Heterogeneous Media, pp. 1–162.
- Matsui, K., Terada, K. e Yuge, K., 2004. ‘Two-scale finite element analysis of heterogeneous solids with periodic microstructures’. *Computers & Structures*, vol. 82(7-8), pp. 593–606.
- Mazars, J., 1984. Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non lineaire et á la rupture du béton de structure. Tese de Doutorado, Paris 6.
- Mazars, J. e Lemaitre, J., (1984), Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete, *in* S. P. Shah, ed., ‘Application Of Fracture Mechanics to Cementitious Composites. NATO Advanced Research Workshop’, Northwestern University, pp. 375–378. citado por Carol et. (1994).
- Mazars, J. e Pijaudier-Cabot, G., 1989. ‘Continuum damage theory—application to concrete’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 115(2), pp. 345–365.

- Melenk, J. e Babuška, I., 1996. ‘The partition of unity finite element method: Basic theory and applications’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139(1-4), pp. 289–314.
- Melenk, J. M., 1995. On Generalized Finite Element Methods. Tese de Doutorado, University of Maryland.
- Michopoulos, J. G., Farhat, C. e Fish, J., 2005. ‘Modeling and simulation of multiphysics systems’. *J. Comput. Appl. Mech. Eng.*, p. 48.
- Moës, N., Cloirec, M., Cartraud, P. e Remacle, J.-F., 2003. ‘A computational approach to handle complex microstructure geometries’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192(28-30), pp. 3163–3177.
- Moës, N., Dolbow, J. e Belytschko, T., 1999. ‘A finite element method for crack growth without remeshing’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46(1), pp. 131–150.
- Mohammadi, S., 2008. *Extended finite element method for fracture analysis of structures*. Blackwell Publishing.
- Monteiro, H. A. S., Fonseca, G. M., Novelli, L., Pitangueira, R. L. S. e Bruzzi, F. B., 2018. ‘Análisis global-local de medios lineales utilizando el método de elementos finitos generalizados’. *Mecánica Computacional*, vol. XXXVI, pp. 1359–1368.
- Monteiro, H., Novelli, L., Fonseca, G., Pitangueira, R. e Barros, F., 2020. ‘A new approach for physically nonlinear analysis of continuum damage mechanics problems using the generalized/extended finite element method with global-local enrichment’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 113, pp. 277–295.
- Murakami, S., 2012. *Continuum Damage Mechanics*. Springer Science Business Media.
- Newland, C. e Evans, B., 2019. ‘Loop unrolling – an elaborate mechanism for reducing loop iterations improves performance but can be thwarted by inadvertent coding.’. *Java Magazine*, . Disponível em: <https://blogs.oracle.com/javamagazine/loop-unrolling>.
- Nguyen, V. P., Stroeven, M. e Sluys, L., (2009), On a micro-meso two-scale damage model fo concrete, in E. Oñate e D. Owen, eds, ‘X International Conference on Computational Plasticity/ COMPLAS X’, p. 4.

- Nguyen, V. P., Valls, O. L., Stroeven, M. e Sluys, L. J., 2010. ‘On the existence of representative volumes for softening quasi-brittle materials: A failure zone averaging scheme’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199(45-48), pp. 3028–3038.
- Noor, A. K., 1986. ‘Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis’. *Finite Elements in Analysis and Design*, pp. 333–346.
- Novelli, L., 2019. Uma nova metodologia para solução de modelos não lineares utilizando estratégia global-local. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Novelli, L., de Oliveira, T. S., da Silveira Monteiro, H. A., Fonseca, G. M., da Silva Pitanguera, R. L. e Barros, F. B., 2020. ‘Stable generalized/extended finite element method with global-local enrichment for material nonlinear analysis’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 372, pp. 25.
- Oden, J. T. e Demkowicz, L. F., 2010. *Applied Functional Analysis*. 2 edn, CRC Press.
- Oden, J. T. e Reddy, J. N., 1976. *An introduction to the mathematical theory of finite elements*. John Wiley and Sons.
- Oliveira, T. S., Barros, F. B., Fonseca, G. M. e Pitanguera, R. L., 2019. ‘2-d fracture mechanics problems by SGFEM’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 108, pp. 279–294.
- Özdemir, I., Brekelmans, W. A. M. e Geers, M. G. D., 2007. ‘Computational homogenization for heat conduction in heterogeneous solids’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 73(2), pp. 185–204.
- Özdemir, I., Brekelmans, W. A. M. e Geers, M. G. D., 2008. ‘Fe2 computational homogenization for thermo-mechanical analysis of heterogeneous solids’. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198(3-4), pp. 602–613.
- Pegon, P. e Anthoine, A., 1997. ‘Numerical strategies for solving continuum damage problems with softening: Application to the homogenization of masonry’. *Computers & Structures*, vol. 64(1-4), pp. 623–642.

- Pellegrino, C., Galvanetto, U. e Schrefler, B. A., 1999. ‘Numerical homogenization of periodic composite materials with non-linear material components’. *international Journal for Numerical Methods In Engineering*, vol. 46, pp. 1609–1637.
- Penna, S. S., 2007. Pós-processador para modelos bidimensionais não lineares do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Penna, S. S., 2011. Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica: Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Perić, D., de Souza Neto, E. A., Feijóo, R. A., Partovi, M. e Molina, A. J. C., 2010. ‘On micro-to-macro transitions for multi-scale analysis of non-linear heterogeneous materials: unified variational basis and finite element implementation’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 87(1-5), pp. 149–170.
- Petersson, P. E., (1989), Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials, techreport Tech. Rep. TVBM-1006, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden.
- Pijaudier-Cabot, G., Bittnar, Z. e Gérard, B., eds, 1999. *Mechanics of Quasi-Brittle Materials and Structures*. Hermes Science Publications, Paris.
- Pitangueira, R. L. S., 1998. Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeito de Tamanho e Heterogeneidade. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Pitangueira, R. L. S. e Rosas e Silva, R., (1999), Modelagem numérica do efeito de escala em estruturas de materiais frágeis heterogêneos, in ‘Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica’, number 15, Águas de Lindóia, São Paulo.
- Plews, J. e Duarte, C., 2014. ‘Bridging multiple structural scales with a generalized finite element method’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 102(3-4), pp. 180–201.

- Prado, E. B. T., 2013. Utilização de Métodos Computacional e de Homogeneização na Investigação do Comportamento Elástico Não Linear de Laminados. Tese de Doutorado, Univerisdade de São Paulo.
- Pugh, K., 2006. *Interface-Oriented Design*. The Pragmatic Programmers LLC.
- Quarteroni, A., Saleri, F. e Gervasio, P., 2010. *Calcul Scientifique*. 2 edn, Springer.
- Quintela, B. d. M., 2011. Implementação computacional paralela da homogeneização por expans~ ao assintótica para análise de problemas mecânicos em 3d. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora.
- Ransom, J. B. e N. F. Knight, J., (1989), Global/local stress analysis of composite panels, Relatório Técnico NASA-TM-101622, NASA, Langley Research Center. Hampton, Virginia.
- Rashid, Y., 1968. ‘Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels’. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 7(4), pp. 334–344.
- Riks, E., 1979. ‘An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15(7), pp. 529–551.
- Rodrigues, E. A., 2015. Um modelo multiescala concorrente para representar o processo de fissuração do concreto. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo.
- Rodrigues, E. A., Manzoli, O. L., Jr., L. A. B. e Bittencourt, T. N., 2016. ‘2D mesoscale model for concrete based on the use of interface element with a high aspect ratio’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 94-95, pp. 112–124.
- Rodriguez, A. F. G., 2014. Análise multiescala de falha dinâmica em materiais policristalinos usando o método dos elementos de contorno. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas.
- Rodríguez, R. Q., 2016. Falha multiescala de compósitos laminados usando o método dos elementos de contorno. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas.
- Rots, J. G., 1988. Computational Modeling of Concrete Fracture. Tese de Doutorado, Delft.

- Sampieri, R. H., Collado, C. F. e Lucio, M. D. P. B., 2013. *Metodologia De Pesquisa*. 5, Penso.
- Sánchez, P., Blanco, P., Huespe, A. e Feijóo, R., 2013. ‘Failure-oriented multi-scale variational formulation: Micro-structures with nucleation and evolution of softening bands’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 257, pp. 221–247.
- Sanchez-Palencia, E., 1980. *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*. Vol. 127, Springer, Berlin.
- Sanchez-Palencia, E., 1986. ‘Homogenization in mechanics: A survey of solved and open problems’. *Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino*, vol. 44(1), pp. 46.
- Santos, A. H. A., 2015. Estudo experimental do efeito de escala em estruturas de concreto utilizando correlação de imagem digital. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Santos, A. L., Silva, F. F. A., Barros, F. B. e Pitangueira, R. L. S., (2010), Desempenho de métodos direto e iterativo para extração da solução do sistema de equações do método dos elementos finitos generalizados, *in* ‘Anais do Nono Simpósio de Mecânica Computacional’, São João Del Rey.
- Sato, F. M., 2017. Numerical experiments with stable versions of the generalized finite element method. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo.
- Schlangen, E. e van Mier, J. G. M., 1992. ‘Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures’. *Materials and Structures*, vol. 25(9), pp. 534–542.
- Shah, S. P., Swartz, S. E. e Ouyang, C., 1995. *Fracture Mechanics of Concrete*. John Wiley and Sons.
- Shang, H. Y., Machado, R. D., Filho, J. E. A. e Arndt, M., 2017. ‘Numerical analysis of plane stress free vibration in severely distorted mesh by generalized finite element method’. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 62, pp. 50–66.
- Silva, L. L., 2016. Sistema gráfico interativo para análise de nucleação e propagação de trincas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.

- Silva, U. P., 2014. Emprego do método da homogeneização assintótica na obtenção de coeficientes efetivos de ossos. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo.
- Simo, J. e Ju, J., 1987. ‘Strain- and stress-based continuum damage models—i. formulation’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 23(7), pp. 821–840.
- Smit, R., Brekelmans, W. e Meijer, H., 1998. ‘Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling’. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, vol. 155, pp. 181–192.
- Souza, F. V., 2005. Modelo multiescala para análise estrutural de compósitos viscoelásticos suscetíveis ao dano. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará.
- Souza, P. L. F. B., 2016. Modelo de dano ortotrópico não local aplicado à regularização de resultados na análise fisicamente não linear. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Stroeven, M., Askes, H. e Sluys, L., 2004. ‘Numerical determination of representative volumes for granular materials’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193(30-32), pp. 3221–3238.
- Strouboulis, T., Babuška, I. e Copps, K., 2000. ‘The design and analysis of the generalized finite element method’. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 181, pp. 43–69.
- Strouboulis, T., Copps, K. e Babuška, I., 2001. ‘The generalized finite element method’. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 190, pp. 4081–4193.
- Sukumar, N., Chopp, D., Moës, N. e Belytschko, T., 2001. ‘Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190(46-47), pp. 6183–6200.
- Suzdalnitski, I., 2019. ‘Object-oriented programming - the trillion dollar disaster’. *Medium*, . Disponível em: <https://medium.com/better-programming/object-oriented-programming-the-trillion-dollar-disaster-92a4b666c7c7>. Acessado em: 06.2020.
- Teixeira-Dias, F., da Cruz, J. P., Valente, R. A. F. e de Sousa, R. J. A., 2010. *Método dos Elementos Finitos: Técnicas de simulação numérica em engenharia*. Etep.

- Teixeira, M. R., 2012. Uma Contribuição para a Modelagem Numérica da Heterogeneidade do Concreto com o Método de Galerkin Livre de Elementos. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo.
- Terada, K. e Kikuchi, N., 2001. 'A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190(40-41), pp. 5427–5464.
- Torquato, S., 2002. *Random Heterogeneous Materials*. Springer New York.
- Tvergaard, V., 1990. 'Analysis of tensile properties for a whisker-reinforced metal-matrix composite'. *Acta Metallurgica et Materialia*, vol. 38(2), pp. 185–194.
- Van Mier, J. G. M., 1984. Strain-softening of concrete under multiaxial loadin conditions. Tese de Doutorado, TU Deft.
- Vargas, S. M., 2016. Estimativa das propriedades elásticas do esmalte dentário humano via homogeneização computacional. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora.
- Varney, L. R., (2004), Interface-oriented programming, Relatório Técnico TR-040016, University of California - Computer Science Department.
- Wang, Z., Kwan, A. e Chan, H., 1999a. 'Mesoscopic study of concrete i: generation of random aggregate structure and finite element mesh'. *Computers & Structures*, vol. 70(5), pp. 533–544.
- Wang, Z., Kwan, A. e Chan, H., 1999b. 'Mesoscopic study of concrete II: nonlinear finite element analysis'. *Computers & Structures*, vol. 70(5), pp. 545–556.
- Washizu, K., 1975. *Variational Methods in Elasticity and plasticity*. 2 edn, Pergamon Press.
- Weinhardt, P. d., Debella, L. B. C., Arndt, M. e Machado, R. D., 2018. 'GFEM stabilization techniques applied to dynamic analysis of non-uniform section bars'. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 15(11).

- Winkler, B., Hofstetter, G. e Lehar, H., 2004. ‘Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining’. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28(78), pp. 797–819.
- Wittmann, F., Roelfstra, P. e Sadouki, H., 1985. ‘Simulation and analysis of composite structures’. *Materials Science and Engineering*, vol. 68(2), pp. 239–248.
- Wolenski, A. R. V., Monteiro, A. B., Penna, S. S., Pitangueira, R. L. S. e Barros, F. B., 2018. ‘Nonlinear analysis of concrete structures using GFEM enrichment strategy with a microplane constitutive model’. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, vol. 11(3), pp. 523–534.
- Wriggers, P., 2008. *Nonlinear finite element methods*. Springer.
- Wriggers, P. e Moftah, S., 2006. ‘Mesoscale models for concrete: Homogenisation and damage behaviour’. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 42(7), pp. 623–636.
- Wu, L., Noels, L., Adam, L. e Doghri, I., 2012. ‘A multiscale mean-field homogenization method for fiber-reinforced composites with gradient-enhanced damage models’. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, vol. 233-236, pp. 164–179.
- Yang, Y. e Kuo, S., 1994. *Theory and Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice-Hall.
- Yang, Y. e Shieh, M., 1990. ‘Solution method for nonlinear problems with multiple critical points’. *AIAA Journal*, vol. 28.
- Zaoui, A., 2002. ‘Continuum micromechanics: Survey’. *J. Eng. Mech.*, vol. 128(8), pp. 808–816.
- Zienkiewicz, O. C., 1971. ‘Incremental displacement in non-linear analysis’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 3(4), pp. 587–588.
- Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L., 2000. *The Finite Element Method*. Vol. Complete Set, Butterworth-Heinemann.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. e Zhu, J. Z., 2006, *The Finite Element Method*, 6 edn, Elsevier, chapter 18 - Multiscale modeling, pp. 547–589.

Zohdi, T. I. e Wriggers, P., 2010. *An Introduction to Computational Micromechanics*. Springer.

## APÊNDICES

# Introito

A seguir, um conjunto de apêndices é apresentado. Embora considerados formalmente como anexos ao corpo principal do trabalho, servindo, sobretudo, de suporte ao leitor interessado, as notas adiante são complementos importantes àquilo já exibido.

- A. Solução de Sistemas de Equações do MEFG;
- B. Imposição de Condições de Contorno no Domínio Local;
- C. *Design Patterns* Empregadas;

De modo a otimizar a produção dos apêndices, e tendo em vista o número mais restrito de referências utilizadas, no início de cada seção a seguir há a indicação da(s) obra(s) utilizada para construção do texto, quando aplicável. Assim, como será reforçado oportunamente em cada apêndice, na ausência de alguma citação ou referência explícita, remeter-se ao(s) trabalho(s) indicado(s). Além disso, flexibilizam-se a notação matemática e composição gráfica padrões do texto sem comprometimento do entendimento.

Reforça-se que para obtenção de conhecimentos acerca de alguns temas relacionados ao trabalho e aqui não detalhados, como modelagem constitutiva, operacionalização de análises não lineares, malhamento/geometria computacional, e descrição detalhada do sistema INSANE, recorrer às obras já citadas – como aquelas de [Carol et al. \(1994\)](#), [Pijaudier-Cabot et al. \(1999\)](#), [Gori et al. \(2017\)](#), [Yang e Kuo \(1994\)](#), [Mantyla \(1988\)](#) e [De Berg et al. \(2000\)](#) –, bem como ao portal do grupo de pesquisa ([INSANE Lab \(n.a.\)](#)) ou do programa de pós-graduação.

# Apêndice A

## Resolução do Sistemas de Equações no MEFG

Um sistema de equações algébricas é basicamente algo da forma

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

Em MEF, é comum a utilização de métodos tradicionais de solução por decomposição de matrizes  $[A] = [L][U]$ , como os métodos de Doolittle e Crout, que requerem matrizes quadradas e fatoráveis, ou o método de Cholesky, para matrizes simétricas e definida positiva.

Em casos particulares, que requerem um custo-benefício maior, métodos iterativos podem ser empregados. Há, contudo, situações em que é necessário o uso desses artifícios, como, por exemplo, quando o condicionamento da matriz de rigidez se degrada muito com o enriquecimento. No MEFG, em que pode existir dependência linear na rigidez e a matriz ser semi-definida positiva, o método iterativo dos gradientes conjugados (MGCP) apresenta-se como alternativa, possuindo como vantagens sua relativa simplicidade na implementação e uma boa taxa de convergência (Santos et al., 2010).

No sistema INSANE, construções híbridas de *solvers* tradicionais com um mecanismo particular batizado por Barros (2002) como procedimento de Babuška (em razão da obra de Strouboulis et al. (2000) e posteriores) são alternativas para extração da solução em problemas do método dos elementos finitos generalizados, sendo o mais comum nas simulações do grupo de pesquisa o uso do MGCP com Babuška.

Para uma revisão dos métodos tradicionais mencionados recomenda-se, por exemplo, Quarteroni et al. (2010). O algoritmo típico para um problema do MEFG é ilustrado em A.1.

1.  $T_{ij} = \frac{\delta}{\sqrt{K_{ij}}}$
2.  $\bar{F} = TF$
3.  $\bar{K} = TKT$
4.  $K_\varepsilon = \bar{K} + \varepsilon I$
5.  $\bar{U}_0 = K_\varepsilon^{-1} \bar{F}$
6.  $r_0 = \bar{F} - \bar{K} \bar{U}_0$
7.  $e_0 = K_\varepsilon^{-1} r_0$
8.  $i = 1$
9. **enquanto**  $\left\| \frac{e_i \bar{K} e_i}{U_i \bar{K} U_i} \right\| > \text{Tol}$  **faça**
10.  $r_i = r_0 - \sum_{j=0}^{i-1} \bar{K} e_j$
11.  $e_i = K_\varepsilon^{-1} r_i$
12.  $\bar{U}_i = \bar{U}_0 + \sum_{j=0}^{i-1} e_j$
13.  $i = i + 1$
14. **fim enquanto**
15.  $U = T \bar{U}_i$

Algoritmo A.1: Algoritmo para solução de sistemas do MEFG (Santos et al., 2010).

Nas linhas 5, 7 e 11 do algoritmo A.1, nos quais é necessária a resolução de sistemas lineares, podem ser utilizados os Métodos dos Gradientes Conjugados, de Crout ou de Cholesky, por exemplo (Santos et al., 2010). Neste trabalho MGCP e Crout foram explorados.

Segundo Santos et al. (2010), no sistema INSANE, o Método dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionado é mais eficiente para matrizes bem condicionadas de grande ordem. Contudo, quando o número de condição da rigidez é muito alto, o processo direto de Cholesky permite obter a solução mais rapidamente (respeitando-se os requisitos teóricos de sua formulação). As matrizes de rigidez do MEFG podem se tornar muito mal-condicionadas, de acordo com a natureza do enriquecimento, fazendo com que o processo iterativo adotado para a solução dos problemas intermediários do processo de extração da solução perca eficiência.

## Apêndice B

# Imposição de Condições de Contorno no Domínio Local

Existem diferentes alternativas para imposição indireta de condições de contorno em análise numérica via MEF, cada uma delas relacionando-se a uma dada natureza de variável (de estado ou dual, p.ex.). No campo no MEEG/MEEG-GL alguns mecanismos foram reportados na literatura (Kim et al., 2009; Kim e Duarte, 2009; Kim et al., 2012; Alves, 2012) para tratamento de condições de contorno de Neumann, Dirichlet e Cauchy, a primeira e a terceira com consideração de forças/tensões. Através de métodos específicos, como o da Penalidade, que considera a adição de uma rigidez consideravelmente alta nos graus de liberdade que se deseja impor um deslocamento prescrito, é possível se revolver sistemas de equações congêneres ao do MEF de maneira relativamente simples.

Para análise estrutural com não linearidade material, conforme repetidamente apontado neste texto, há a obrigatoriedade de acompanhamento de variáveis históricas nos diversos pontos materiais do domínio estudado. Tendo em vista a natureza material dos problemas aqui trabalhados, a transferência de forças de uma escala para outra se torna tarefa um tanto complexa, que seja do ponto de vista de processamento exclusivamente. Para a execução do encargo, haveria a necessidade de implementação de um instrumento que vigiasse continuamente não somente os pontos materiais do domínio, mas também, pontos extras no contorno da região local, nas duas escalas do problema, trabalhando, em paralelo, com um mapeamento constante. Esse tratamento exigiria uma remodelagem considerável da plataforma de desenvolvimento utilizada, que fugia do escopo da pesquisa. Nesse sentido, para as análises não lineares deste trabalho, considerou-se somente condições de contorno de Dirichlet, ou seja, transmissão de deslocamentos apenas.

Dito isso, apresentam-se a seguir alguns dos mecanismos utilizados na versão atual

do código dessa obra. A passagem das condições de contorno entre os domínios global e local empregou alguns artifícios já presentes no sistema INSANE (ver [Alves \(2012\)](#) para consulta à versão original).

Uma vez obtida a solução  $u_0^G$  do problema global, os resultados de deslocamento são transferidos para os pontos de Gauss do contorno  $\Gamma^L \setminus \Gamma^L \cap \Gamma^G$  ou  $\Gamma^L \cap \Gamma_u^G$ . Objetivamente, qual o mecanismo? A cada aresta de elemento finito local é associado um elemento paramétrico, utilizado para posicionar pontos de quadratura que serão utilizados para interpolar os deslocamentos provenientes do domínio global. A seguir, ilustra-se a transferência de deslocamentos ao contorno  $\Gamma^L \setminus \Gamma^L \cap \Gamma^G$  de um elemento finito local.

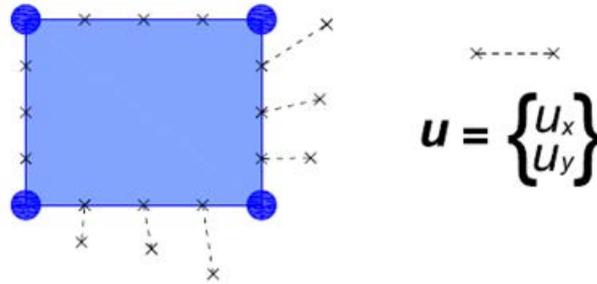


Figura B.1: Transferência de condições de contorno de Dirichlet no domínio  $\Gamma^L \setminus \Gamma^L \cap \Gamma^G$  ([Alves, 2012](#)).

A equação [B.1](#) abaixo apresenta a formulação existente no sistema e em funcionamento na versão corrente do MEFGL, para o caso de imposição de deslocamentos na interface entre as escalas.

$$\int_{\Omega^L} \sigma_{ij}(u_i^{L^k}) v_{i,j}^{L^k} d\Omega + \varrho \int_{\Gamma^L \setminus (\Gamma^L \cap \Gamma^G)} u_i^{L^k} v_i^{L^k} d\Gamma = \int_{\Omega^L} \beta_i v_i^{L^k} d\Omega + \varrho \int_{\Gamma^L \setminus (\Gamma^L \cap \Gamma^G)} u_i^{G^k} v_i^{L^k} d\Gamma. \quad (\text{B.1})$$

O parâmetro de penalidade  $\varrho$  na equação acima pode ser determinado de algumas maneiras. Na literatura do MEFGL, [Duarte e Kim \(2008\)](#) recomendam:

$$\varrho = 10^8 \times E \times J$$

em que  $E$  representa o módulo de elasticidade do material e  $J$  é o Jacobiano do elemento global que origina os elementos locais. Contudo, na prática,  $\varrho$  é um valor consideravelmente maior que a maior rigidez do modelo, de modo que  $\varrho$  acaba por reduzir-se apenas a  $10^8$ .

# Apêndice C

## *Design Patterns* Empregadas

A seguir, disserta-se rapidamente sobre alguns dos padrões de projeto utilizados como ferramentas para a concepção teórica de alguns elementos fundamentais da implementação do trabalho. Como dito anteriormente na descrição dos tópicos metodológicos, uma organização um pouco mais flexível, focada num viés mais utilitário, foi buscada, de modo que padrões comportamentais foram empregados. Inicialmente, apresenta-se parte da filosofia por trás da implementação, com uma descrição sucinta de design/programação orientada à interfaces (POI ou IOD, do inglês *interface-oriented design/programming*), seguindo-se para a apresentação de dois padrões de projeto empregados. *Patterns* comportamentais e interfaces guardam uma relação conceitual considerável, de modo que inclui-se uma breve descrição de POI por esse motivo. Salienta-se que o conteúdo a seguir serviu de base apenas. Ainda que alguns componentes desenvolvidos tenham seguido à risca certas características, não houve a pretensão de uso fiel da base conceitual a seguir, por conta das próprias características da plataforma de desenvolvimento. Padrões de projeto empregados no sistema INSANE não serão descritos; recomenda-se ao leitor interessado a produção bibliográfica do grupo de pesquisa que pode ser encontrada em [www.insane.dees.ufmg.br](http://www.insane.dees.ufmg.br). O texto que segue foi baseado em Pugh (2006), Gamma et al. (1994) e Kuchana (2004), obras estas que podem ser consultadas para um aprofundamento teórico.

### C.1 Design Orientado à Interfaces

O design orientado à interfaces espelha ideias encontradas em outras estratégias de projeto como *responsibility-driven design*, *role-based design* e *test-first development*, e engloba vários conceitos. Uma interface representa um conjunto de responsabilidades (ou

contratos) e cada responsabilidade é um serviço fornecido a ser implementado por um módulo. Um módulo pode ser uma classe, um componente, um serviço remoto ou mesmo um ser humano executando operações manualmente. Módulos podem implementar uma ou mais interfaces para que possam desempenhar uma função ou várias. Cada função, por sua vez, representa uma (ou mais) interface(s) relacionada(s) (Pugh, 2006).

O diagrama na figura C.1 apresenta o relacionamento entre interfaces, funções e implementações num exemplo com jogadores de futebol americano.

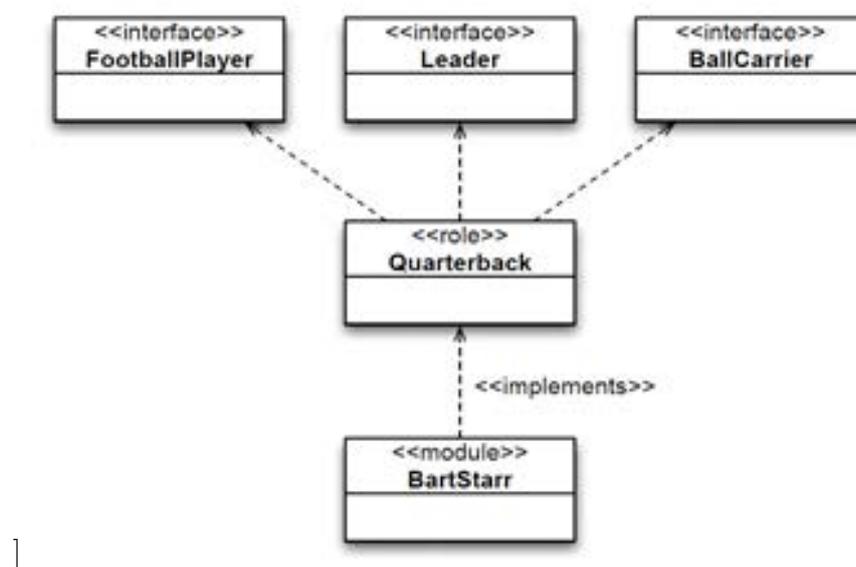


Figura C.1: Exemplo de interfaces, funções e módulos (Pugh, 2006).

No âmbito analítico, as responsabilidades da interface são expressas em termos gerais. Já no design, essas responsabilidades são geralmente representadas por métodos, sendo que algumas delas podem eventualmente não ser expostas como método e acabar como operações internas.

Na concepção de modelos é comum se fazer um rascunho das interfaces de um sistema, seguido pela atribuição de suas responsabilidades. Pode-se começar agrupando-se as responsabilidades em conjuntos, ou funções, e, em seguida, atribuir nomes a essas funções. Posteriormente à criação de um rascunho das interfaces e suas responsabilidades, analisam-se os casos de uso, para verificar se eles podem ser executados com as referidas instâncias.

A determinação de qual interface será atribuída para qual responsabilidade segue algumas diretrizes gerais fundamentais:

- Estruturar interfaces coesas, ou seja, as responsabilidades devem guardar relação;

- Desacoplar as interfaces, de modo que as responsabilidades também sejam separadas, permitindo implementações de maneiras diversas;
- Granular as interfaces com o intuito de simplificar os testes.

Alguns esteriótipos comuns incluem:

- Interfaces de armazenamento (para manter dados persistentes);
- Interfaces de entidades que refletem modelos e regras de negócios;
- Interfaces de documentos;
- Interface GUI de visualização (controlador).

Uma maneira de se conceber interfaces são os cartões Interface-Responsabilidade-Interação (IRI), figura C.2, que elencam cada contrato a ser assinado (responsabilidade) e os módulos que estão vinculados aos contratos. Se as responsabilidades forem muito complexas, normalmente será necessário dividi-las em outras mais simples e, em geral, essas responsabilidades mais elementares serão oferecidas por outras interfaces, sendo necessário a criação de outro cartão.

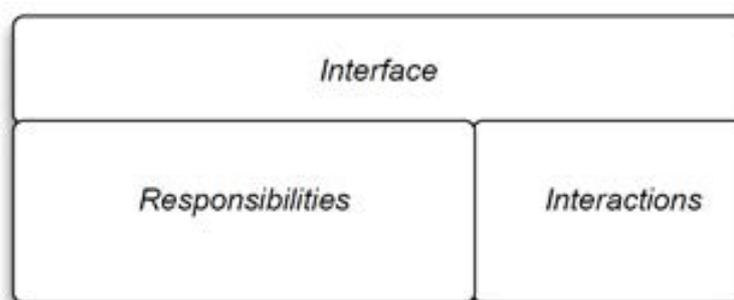


Figura C.2: Cartão IRI (Pugh, 2006).

Para exemplificar, podemos nos remeter a uma pizzaria e elencar uma estrutura conforme apresentado a seguir na tabela C.1.

## C.2 Padrão *Strategy*

O padrão *Strategy* é útil quando há um conjunto de algoritmos relacionados e um objeto cliente precisa selecionar, de maneira dinâmica, um dos tipos desse conjunto que

Tabela C.1: Exemplos de interfaces (Pugh, 2006).

Interface	Responsabilidades
Interface <i>Pizza</i>	Acompanha o tamanho e os tipos de cobertura.
Interface <i>Address</i>	Acompanha a rua, cidade, CEP, número de telefone; Determina a distância para outro endereço.
Interface <i>Order</i>	Contém <i>Pizza</i> e <i>Moradia</i> .
Interface <i>OrderEnterer</i>	Insere o pedido de pizza; Exibe tempo para entrega.
Interface <i>PizzaMaker</i>	Exibe pedido de pizza para criar; Notifica quando o pedido estiver pronto.
Interface <i>PizzaDeliverer</i>	Recebe pizza; Recolhe dinheiro; Paga pelo pedido (retorna o dinheiro).

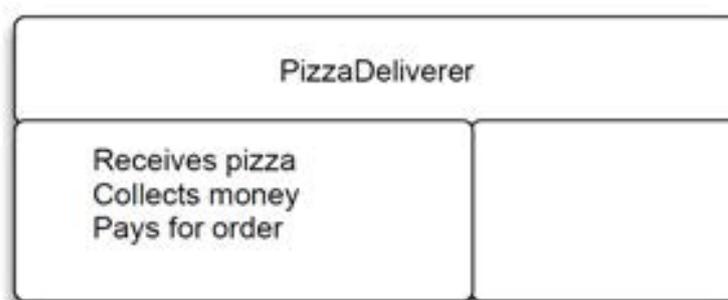


Figura C.3: Cartão IRI do exemplo (Pugh, 2006).

atenda às suas necessidades correntes (Kuchana, 2004). Ou seja, o objetivo é definir uma família de algoritmos, encapsular cada um e torná-los intercambiáveis, permitindo que a operação varie independentemente dos clientes que a usam (Gamma et al. (1994).

O padrão *Strategy* sugere manter a implementação de cada um dos algoritmos em uma classe separada, de modo que cada algoritmo encapsulado em uma classe independente é conhecido como *estratégia* (*strategy*). Um objeto que usa um *Strategy* é frequentemente referido como um objeto de contexto (*Context*). Com diferentes objetos *Strategy* num sistema, alterar o comportamento de um objeto *Context* é simplesmente uma questão de alterar seu objeto *Strategy* para aquele que implementa o algoritmo necessário.

Para habilitar um objeto *Context* para acessar diferentes objetos *Strategy* de uma maneira contínua, todos os objetos *Strategy* devem ser projetados para oferecer a mesma interface. Na linguagem de programação Java, isso pode ser realizado projetando cada objeto *Strategy* como uma implementação de uma interface comum ou como uma subclasse

de uma classe abstrata comum que declara a interface comum necessária. A estrutura do padrão é ilustrada na figura C.3.

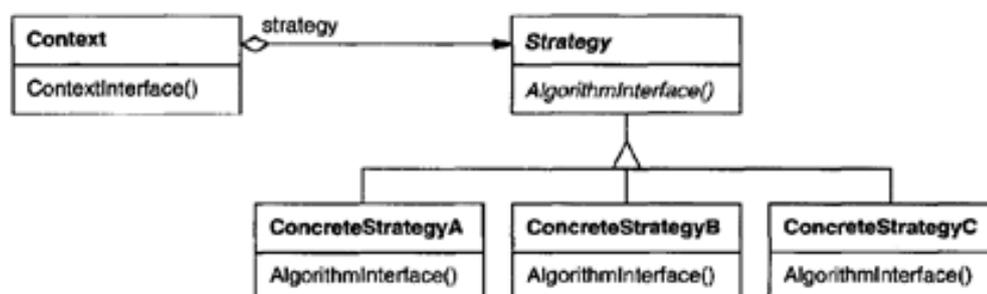


Figura C.4: Padrão *Strategy* (Gamma et al., 1994).

Uma vez que o grupo de algoritmos relacionados é encapsulado em um conjunto hierarquizado de classes de estratégia, um cliente pode escolher entre esses algoritmos selecionando e instanciando uma classe de estratégia apropriada. Para alterar o comportamento do contexto, um objeto cliente precisa configurar o contexto com a instância de estratégia selecionada. Esse tipo de arranjo separa completamente a implementação de um algoritmo do contexto que o usa. Como resultado, quando uma implementação de algoritmo existente é alterada ou um novo algoritmo é adicionado ao grupo, o contexto e o objeto cliente (que usa o contexto) permanecem inalterados.

Seguindo Gamma et al. (1994), pensemos num exemplo para expandir a discussão. Digamos que haja a uma demanda para implementar um editor de texto. Existem muitos algoritmos para quebrar um fluxo de texto em linhas. Conectar todos esses algoritmos às classes que os exigem não é desejável por vários motivos, dentre eles:

- Os clientes que precisam de quebra de linha ficam mais complexos se incluem o código de quebra de linha. Isso torna os clientes maiores e mais difíceis de manter, especialmente se eles suportam vários algoritmos de quebra de linha.
- Diferentes algoritmos serão apropriados em momentos diferentes. Não queremos oferecer suporte a vários algoritmos de quebra de linha se não usarmos todos eles.
- É difícil adicionar algoritmos e variar os já existentes quando a quebra de linha é parte integrante de um cliente.

Podemos evitar esses problemas definindo classes que encapsulam diferentes algoritmos

de quebra de linha. Um algoritmo encapsulado dessa maneira é chamado de estratégia (*Strategy*).

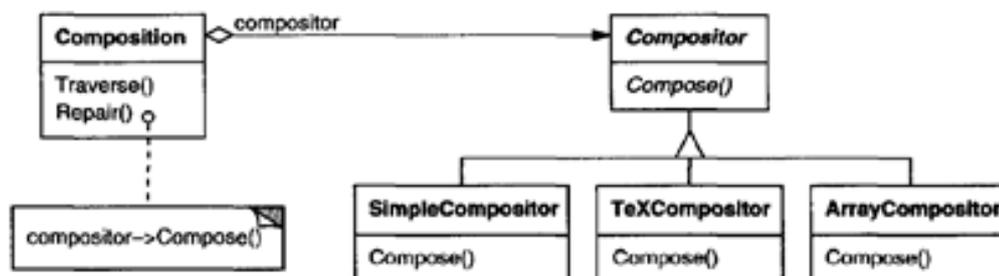


Figura C.5: Exemplo de uso do padrão *Strategy* (Gamma et al., 1994).

Supondo que uma classe *Composition* seja responsável por manter e atualizar as quebras de linha de texto exibido em um visualizador de texto, as estratégias de quebra de linha não são implementadas pela *Composition*, conforme fig. C.5. Em vez disso, elas são implementadas separadamente por subclasses de uma classe abstrata *Compositor*, representando diferentes estratégias.

Tabela C.2: Exemplos de estratégias (Gamma et al., 1994).

Classe	Estratégia
<i>SimpleCompositor</i>	Implementa uma estratégia simples que determina quebras de linha uma de cada vez.
<i>TeXCompositor</i>	Implementa o algoritmo TgX para encontrar quebras de linha. Esta estratégia tenta otimizar as quebras de linha globalmente, isto é, um parágrafo de cada vez.
<i>ArrayCompositor</i>	Implementa uma estratégia que seleciona quebras para que cada linha tenha um número fixo de itens. É útil para quebrar uma coleção de ícones em linhas, por exemplo.

No exemplo, uma composição (*Composition*) declara uma interface comum a todos os algoritmos suportados. Ao passo que o contexto usa esta interface para chamar o algoritmo definido pela implementação (*ConcreteStrategy* – (*SimpleCompositor*, *TeXCompositor*, *ArrayCompositor*), responsável. Por fim, o contexto (*Composition*), que é configurado com um objeto *ConcreteStrategy*, de modo a manter uma referência a um objeto *Strategy*, podendo definir uma interface que permite ao *Strategy* acessar seus dados.

Ou seja, uma *Composition* mantém uma referência a um objeto *Compositor*. Sempre que uma composição reformata seu texto, ela transfere essa responsabilidade para seu objeto compositor. O padrão *Strategy* é utilizado, portanto, quando muitas classes relacionadas diferem apenas em seu comportamento ou uma classe define múltiplos comportamentos (sobretudo quando amarrados em condicionais), de modo que as estratégias fornecem uma maneira de configurar uma classe com um de muitos comportamentos. Não somente, quando é necessário a investigação de diferentes *trade-offs* de espaço ou de tempo ou se evitar exposição de dados aos clientes pode-se utilizar o referido padrão.

Estratégia e contexto interagem para implementar o algoritmo escolhido. Um contexto pode transferir todos os dados exigidos pelo algoritmo para a estratégia quando o algoritmo é chamado, sendo assim, uma alternativa é o contexto se passar como um argumento para as operações da estratégia, permitindo que a estratégia retorne ao contexto conforme necessário. Além disso, um contexto encaminha as solicitações de seus clientes para sua estratégia, de modo que os clientes geralmente criam e passam um objeto *ConcreteStrategy* para o contexto; depois disso, os clientes interagem com o contexto exclusivamente, no qual – muitas vezes – há uma família de *ConcreteStrategy* classes para um cliente escolher.

Dentre as vantagens e desvantagens do padrão, elencam-se:

- Permite hierarquia e herança em famílias de algoritmos relacionados;
- É uma alternativa interessante à implementação de subclasses, uma vez que ao encapsular um dado comportamento, permite decompor um determinado contexto;
- Em classes com diferentes chamadas de métodos correlatos em condicionais, permite a eliminação de **if-else** em excesso e substituição por uma estratégia específica;
- Permite diferentes implementações para um mesmo comportamento;
- Em contrapartida, o cliente precisa conhecer como uma estratégia se diferencia da outra e potencialmente possuir alguns problemas para ser implementado. Dessa maneira, o ideal é utilizar o padrão *Strategy* quando a estratégia realmente é relevante para o cliente;
- Pode haver um excesso na comunicação entre o contexto e a estratégia, ou seja, determinadas estratégias podem receber mais dados do que precisam para desempenhar uma ação, podendo haver a instanciação de mais objetos que o necessário;

- Naturalmente, o padrão aumenta o número de objetos da aplicação.

### C.3 Padrão *Mediator*

Em geral, os aplicativos orientados a objetos, consistem em um conjunto de objetos que interagem entre si com a finalidade de fornecer um determinado serviço, sendo que essa interação pode ser direta (ponto a ponto), desde que o número de objetos que fazem referência uns aos outros diretamente seja muito baixo. A interação direta, em que um objeto A e um objeto B se comunicam diretamente está apresentada na figura C.6.



Figura C.6: Comunicação ponto-a-ponto entre dois objetos (Kuchana, 2004).

Contudo, à medida que o número de objetos aumenta, esse tipo de interação direta pode levar a um labirinto complexo de referências entre os objetos, apresentado na figura C.7, o que afeta a capacidade de manutenção do aplicativo. Ademais, ter um objeto referindo-se diretamente a outros objetos reduz muito o escopo para reutilizar esses objetos, graças ao acoplamento mais alto (Kuchana, 2004). Embora particionar um sistema em muitos objetos geralmente aprimore a sua capacidade de reutilização, a proliferação de interconexões tende a reduzir esse reuso, pois muitas interconexões tornam menos provável que um objeto possa funcionar sem o apoio de outros, e o sistema age de modo monolítico. Além disso, pode ser difícil mudar o comportamento do sistema de maneiras significativas, uma vez que o comportamento é distribuído entre muitos objetos, e como resultado, o programador pode ser forçado a definir muitas subclasses para personalizar o comportamento do sistema (Gamma et al., 1994).

Nesses casos, o padrão *Mediator* pode ser usado para projetar um modelo de comunicação coordenado e controlado para um grupo de objetos, eliminando a necessidade de os objetos referirem-se uns aos outros diretamente, de acordo com a figura C.8.

O padrão *Mediator* (fig. C.9) sugere abstrair todos os detalhes de interação em uma classe separada, conhecida como mediador *Mediator*, com conhecimento sobre o grupo de objetos em interação. Cada objeto no grupo ainda é responsável por oferecer o serviço para o qual foi projetado, mas os objetos não interagem entre si diretamente para esse fim. A interação entre dois objetos diferentes é roteada por meio da classe *Mediator*, de modo

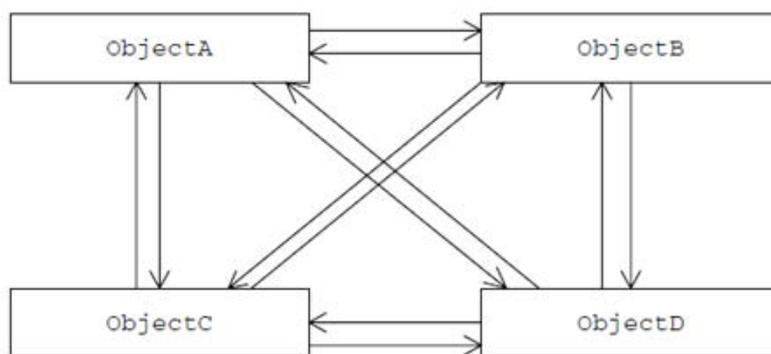


Figura C.7: Comunicação ponto-a-ponto entre múltiplos objetos (Kuchana, 2004).

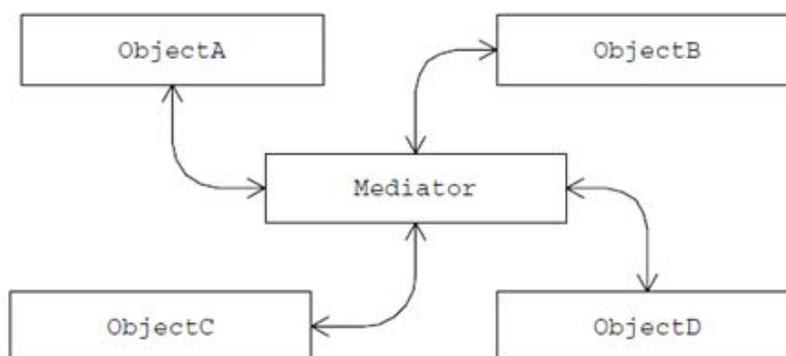


Figura C.8: Comunicação no padrão *Mediator* (Kuchana, 2004).

que todos os objetos enviam suas mensagens ao mediador, que então aciona os objetos apropriados de acordo com os requisitos do aplicativo.

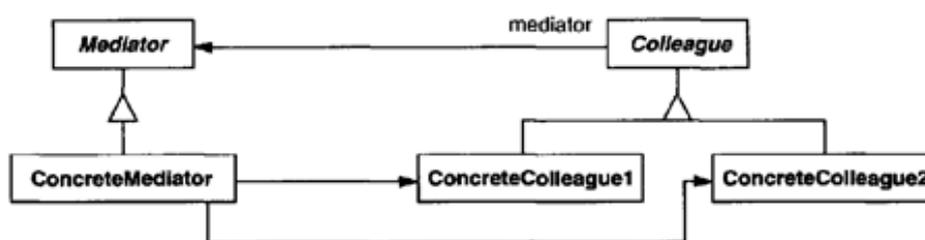


Figura C.9: Padrão *Mediator* (Gamma et al., 1994).

O design resultante do padrão *Mediator* tem algumas vantagens, sendo quatro as principais:

- Com todo o comportamento de interação do objeto movido para um objeto separado (mediador), torna-se mais fácil alterar o comportamento das inter-relações do objeto, substituindo o mediador por uma de suas subclasses com funcionalidade estendida

ou alterada;

- Mover dependências entre objetos para fora de objetos individuais resulta em maior capacidade de reutilização de objetos.
- Como os objetos não precisam se referir uns aos outros diretamente, os objetos podem ser testados mais facilmente;
- O baixo grau de acoplamento resultante permite que classes individuais sejam modificadas sem afetar outras classes.

Tal como no padrão anterior, utiliza-se um exemplo de [Gamma et al. \(1994\)](#) para ilustrar a implementação do *Mediator*. Frequentemente, no desenvolvimento de recursos GUI, existem dependências entre os *widgets* de uma caixa de diálogo, como, por exemplo, quando um determinado campo de entrada é esvaziado e um botão, desativado. Selecionar uma entrada em uma lista de opções (*list box*) pode alterar o conteúdo de um campo de entrada. Por outro lado, digitar um texto no campo de entrada pode selecionar automaticamente uma ou mais entradas correspondentes na *list box*. Uma vez que o texto apareça no campo de entrada, outros botões habilitam-se para permitir que o usuário faça algo com o texto, como alterar ou excluir o item a que se refere.

Diferentes caixas de diálogo terão dependências diferentes entre os *widgets*. Portanto, embora os diálogos exibam os mesmos tipos de *widgets*, eles não podem simplesmente reutilizar classes do “estoque”; devem ser personalizados de modo a refletir dependências específicas do diálogo. A simples customização individual por meio de subclasses seria entediante, pois muitas classes estão envolvidas.

Pode-se evitar tais problemas encapsulando o comportamento coletivo em um objeto mediador separado, pois um mediador é responsável por controlar e coordenar as interações de um grupo de objetos. Sendo assim, o mediador atua como um intermediário, capaz de impedir que os objetos do grupo se refiram explicitamente uns aos outros, pois os objetos conhecem apenas o mediador, o que reduz o número de interconexões. Exemplifica-se com o esquema apresentado na [fig. C.10](#), na qual *FontDialogDirector* pode ser o mediador entre os *widgets* em uma caixa de diálogo. Um objeto *FontDialogDirector* conhece os *widgets* em uma caixa de diálogo e coordena sua interação, atuando como um centro de comunicação para *widgets*.

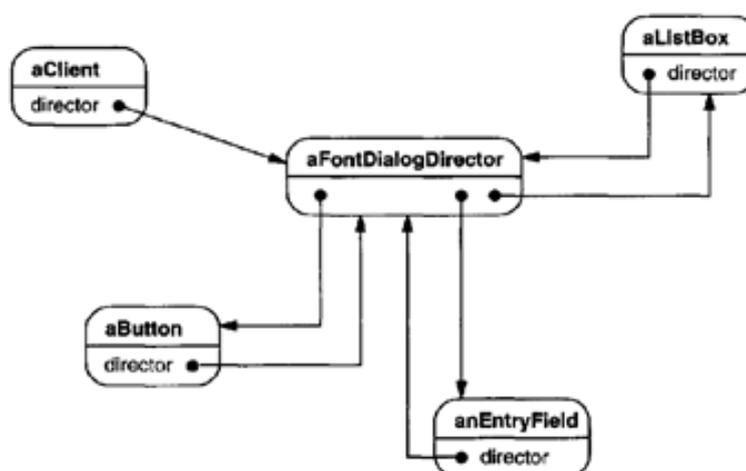


Figura C.10: Exemplo de uso do padrão *Mediator* (Gamma et al., 1994).

Pode-se verificar no diagrama apresentando na figura C.11 o mecanismo de interação entre os objetos do exemplo em questão e como eles cooperam para lidar com uma mudança na seleção de uma caixa de listagem.

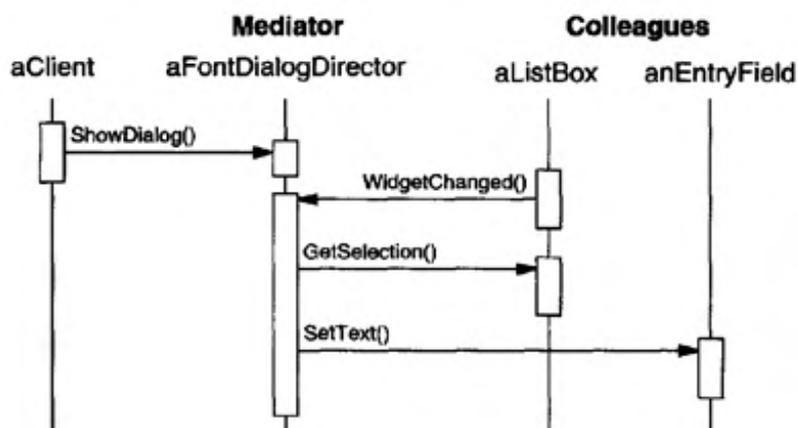


Figura C.11: Exemplo de interação entre objetos no padrão *Mediator* (Gamma et al., 1994).

Destaque é dado para a sucessão de eventos pela qual a seleção de uma caixa de listagem passa para um campo de entrada, sendo necessário a transposição de quatro passos.

- A *list box* informa ao seu diretor (mediador) que ela foi alterada;
- O diretor obtém a seleção da caixa de listagem;
- O diretor passa a seleção para o campo de entrada;

- Agora, o campo de entrada contém algum texto, o diretor habilita o(s) botão(ões) para iniciar uma ação (como “*itálico*” ou “**negrito**”, p.ex.).

Percebe-se que o diretor faz a mediação entre a caixa de listagem e o campo de entrada, de modo que os *widgets* comunicam-se uns com os outros apenas indiretamente, por meio do diretor, sendo todas as informações fornecidas por ele. Além disso, como o comportamento é localizado em uma classe, ele pode ser alterado ou substituído pela extensão ou substituição dessa classe, conforme esquema da figura C.12, que apresenta a abstração *FontDialogDirector* integrada outras classes.

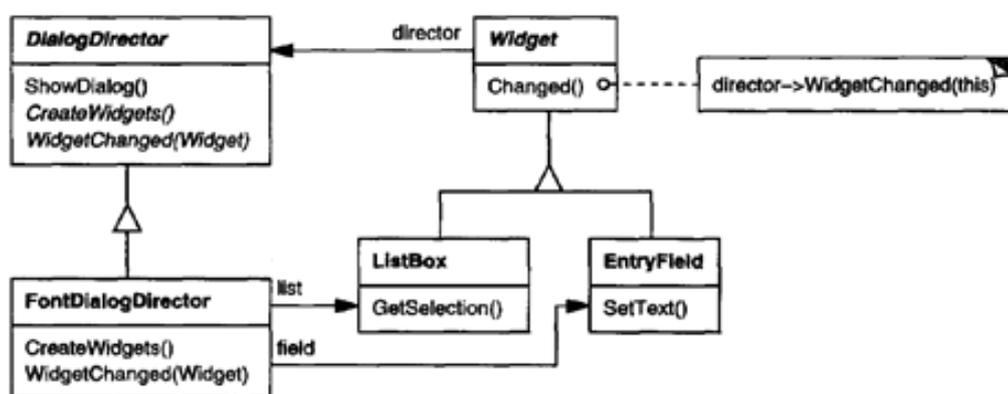


Figura C.12: Exemplo de um mediador (Gamma et al., 1994).

Do exemplo, podem ser extraídos os três principais participantes do padrão. O mediador (*DialogDirector*) define uma interface para comunicação com objetos *Colleague*. O *ConcreteMediator* (*FontDialogDirector*) implementa o comportamento cooperativo através da coordenação dos colegas, além de conhecer e fazer a manutenção de seus respectivos objetos desse tipo. Já as classes de colegas (*ListBox*, *EntryField*) conhecem seu objeto mediador e se comunicam com ele sempre que ele precisar. Isso pode ser alcançado através de algumas abordagens, como o padrão *Observer-Observable* ou outro mecanismo de propagação de mudanças. Não há necessidade de se definir uma classe abstrata *Mediator* quando os colegas trabalham com apenas um mediador.

Quando aplicar o padrão *Mediator*? Três casos fundamentais:

- Quando um conjunto de objetos se comunica de forma bem definida, mas complexa, na qual as interdependências resultantes são desestruturadas e difíceis de entender;
- Quando a reutilização de um conjunto de objeto tende a ser obstaculizada. Em geral, quando um objeto se comunica com muitos outros;

- Quando um comportamento que é distribuído entre várias classes deve ser personalizável sem muitas subclasses.

Como consequências, temos:

- Limitação de subclasse ao localizar um comportamento distribuído;
- Possibilidade de mudança de comportamentos através da alteração localizada no mediador;
- Promoção de um acoplamento fraco entre classes colegas, aumentando a reusabilidade.
- Simplifica protocolos de objetos ao substituir interações *many-to-many* por interações *one-to-many* e torna a mediação um conceito independente;
- Em compensação, há uma troca de complexidade global por uma localizada, ou seja, o mediador pode se torna uma classe monolítica difícil de se manter.