

Renata Alves Antunes Teles

**Aplicação da Transformada Rápida de Fourier  
em Equações Integrais no Domínio do Tempo  
para a Caracterização de Propagação  
Radioelétrica**

Belo Horizonte

2021

Renata Alves Antunes Teles

**Aplicação da Transformada Rápida de Fourier em  
Equações Integrais no Domínio do Tempo para a  
Caracterização de Propagação Radioelétrica**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas de Computação e Telecomunicações.

Linha de Pesquisa: Antenas, Propagação de Ondas de Rádio e Eletromagnetismo Aplicado.

Orientador: Fernando José da Silva Moreira

Belo Horizonte

2021

T269a Teles, Renata Alves Antunes.  
Aplicação da transformada rápida de Fourier em equações integrais no domínio do tempo para a caracterização de propagação radioelétrica [recurso eletrônico] / Renata Alves Antunes Teles. - 2021.  
1 recurso online (76 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Fernando José da Silva Moreira.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 70-76.  
Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Equações integrais - Teses.  
3. Fourier, Transformações de - Teses 4. Método dos momentos (Estatística) - Teses. I. Moreira, Fernando José da Silva. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621.3(043)

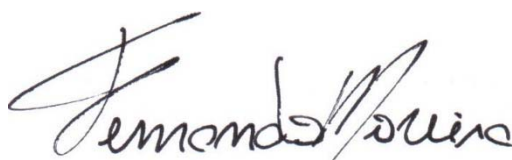
**"Aplicação da Transformada Rápida de Fourier em Equações  
Integrais no Domínio do Tempo para a Caracterização de  
Propagação Radioelétrica"**

**Renata Alves Antunes Teles**

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 24 de fevereiro de 2021.

Por:



---

**Prof. Dr. Fernando José da Silva Moreira  
DELT (UFMG) - Orientador**



---

**Prof. Dr. Cássio Gonçalves do Rego  
DELT (UFMG)**



---

**Prof. Dra. Úrsula do Carmo Resende  
Engenharia Elétrica (CEFET-MG)**

*Dedico este trabalho à minha tia Rosania  
e ao meu amigo Marcelo.*

# Agradecimentos

Como uma boa cristã, agradeço, primeiramente, a Deus.

Aos meus pais pelo suporte e educação que recebi ao longo da vida.

À minha tia Rosania por todo apoio e por ser referência.

Às pessoas que conheci e às com quem mantive contato este ano pelos momentos de leveza, especialmente durante uma pandemia.

À UFMG por todas as oportunidades de aprendizado.

Ao professor Fernando pela orientação, paciência e empatia.

Às pessoas do GAPTEM pela breve convivência e prestatividade.

À CNPq/CAPES pelo apoio financeiro ao projeto.

*"And in front of my judgmental eyes*

*(...)*

*Can't cope with my own*

*How to not fail"*

*("Human", Sevdaliza)*

# Resumo

Neste trabalho, propõe-se a aceleração da previsão de propagação de onda eletromagnética baseada em equações integrais no domínio do tempo por meio do uso da Transformada Rápida de Fourier (FFT). No problema, considera-se uma onda com polarização vertical - ou paralela - e incidência rasante sobre um terreno suavemente irregular. Assim, este pode ser tratado como um condutor magnético perfeito e, aplicando o princípio da equivalência, substituído por correntes magnéticas superficiais que podem ser calculadas por meio do Método dos Momentos (MoM). Para a formulação no domínio do tempo, a técnica *marching-on-in-time* é utilizada na discretização do tempo para os cálculos de convolução temporal. A FFT é aplicada para acelerar essas convoluções. Os resultados da Equação Integral do Campo Magnético no Domínio do Tempo (TD-MFIE) e da Equação Integral do Campo Elétrico no Domínio do Tempo (TD-EFIE) foram comparados aos das equações integrais no domínio da frequência - MFIE e EFIE - e da Teoria Uniforme da Difração no Domínio do Tempo (TD-UTD), e seus tempos de simulação foram comparados à TD-MFIE com aplicação da FFT. Observou-se uma boa concordância entre os resultados, com algumas diferenças na TD-UTD em razão de esta técnica não considerar difrações duplas e em arestas com ângulo interno maior que  $180^\circ$ . Utilizar a FFT no cálculo das integrais de convolução temporal reduz o tempo de cálculo em até 28 vezes, o que mostra seu potencial de aplicação neste problema, mas demanda um estudo maior sobre os sinais envolvidos na operação.

**Palavras-chave:** Transformada Rápida de Fourier, Equações Integrais no Domínio do Tempo, Método dos Momentos, *marching-on-in-time*, terreno suavemente irregular.



# Abstract

This work proposes accelerating prediction of propagation of an electromagnetic wave based on time-domain integral equations by using Fast Fourier Transform (FFT). In this problem, a vertically - or parallel - polarized wave with near graze over a smoothly irregular terrain is considered, so that it can be treated as a perfect magnetic conductor and, by applying the equivalence principle, replaced by equivalent superficial magnetic currents which can be calculated using the Method of Moments (MoM). For the formulation in time domain, marching-on-in-time is used on time discretization for computing time convolution. FFT is applied to accelerate those convolutions. Results from Time-Domain Magnetic Field Integral Equation (TD-MFIE) and Time-Domain Electric Field Integral Equation (TD-EFIE) were compared to frequency domain integral equations - MFIE and EFIE - and to Time-Domain Uniform Theory of Diffraction (TD-UTD), and their simulation times were compared to TD-MFIE with FFT. There were highly concordant results between the methods, despite some differences shown on TD-UTD given the fact that it does not consider double diffractions and diffractions in edges with an internal angle greater than  $180^\circ$ . Using FFT to calculate time convolution integrals reduces significantly calculation time in 28 times, which shows its potential application in this problem, but a greater study about signals involved in operations is required.

**Keywords:** Fast Fourier Transform, Time-domain Integral Equations, Method of Moments, marching-on-in-time, smoothly irregular terrain.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Sistema rádio enlace analisado . . . . .	26
Figura 2 – Sistema de coordenadas que descreve o perfil do terreno . . . . .	27
Figura 3 – Incidência oblíqua de uma onda plana com polarização vertical, ou paralela, sobre uma interface plana . . . . .	28
Figura 4 – Parâmetros considerados no cálculo do campo espalhado . . . . .	38
Figura 5 – Cunha simples . . . . .	39
Figura 6 – Perfil de Hjørringvej . . . . .	39
Figura 7 – Resultados para cunha simples a 1 GHz . . . . .	39
Figura 8 – Resultados para cunha simples a 100 MHz . . . . .	40
Figura 9 – Resultados para o perfil de Hjørringvej a 970 MHz . . . . .	40
Figura 10 – Resultados para o perfil de Hjørringvej a 1,9 GHz . . . . .	41
Figura 11 – Resultados para o perfil de Hjørringvej a 143 MHz e 0,5 segmento/ $\lambda$ . . . . .	41
Figura 12 – Resultados para o perfil de Hjørringvej a 143 MHz e 3 segmentos/ $\lambda$ . . . . .	41
Figura 13 – Resultados para o perfil de Hjørringvej a 435 MHz e 0,5 segmento/ $\lambda$ . . . . .	42
Figura 14 – Resultados para o perfil de Hjørringvej a 435 MHz e 3 segmentos/ $\lambda$ . . . . .	42
Figura 15 – Parâmetros considerados na definição dos limites de integração em $t'$ . . . . .	47
Figura 16 – Sistema e perfil do terreno analisado . . . . .	56
Figura 17 – Pulso eletromagnético transmitido . . . . .	57
Figura 18 – Pulso eletromagnético na antena receptora para $h_R = 5m$ calculado pela TD-MFIE, MFIE+IFT e TD-UTD . . . . .	60
Figura 19 – Pulso eletromagnético na antena receptora para $h_R = 5m$ calculado pela TD-EFIE, EFIE+IFT e TD-UTD . . . . .	60

Figura 20 – Pulso eletromagnético na antena receptora para $h_R = 15m$ calculado pela TD-MFIE, MFIE+IFT e TD-UTD . . . . .	61
Figura 21 – Pulso eletromagnético na antena receptora para $h_R = 15m$ calculado pela TD-EFIE, EFIE+IFT e TD-UTD . . . . .	61
Figura 22 – Pulso eletromagnético na antena receptora para $h_R = 30m$ calculado pela TD-MFIE, MFIE+IFT e TD-UTD . . . . .	62
Figura 23 – Pulso eletromagnético na antena receptora para $h_R = 30m$ calculado pela TD-EFIE, EFIE+IFT e TD-UTD . . . . .	62
Figura 24 – Pulso eletromagnético na antena receptora para $h_R = 90m$ calculado pela TD-MFIE, MFIE+IFT e TD-UTD . . . . .	63
Figura 25 – Pulso eletromagnético na antena receptora para $h_R = 90m$ calculado pela TD-EFIE, EFIE+IFT e TD-UTD . . . . .	63
Figura 26 – Densidades superficiais de corrente equivalentes no primeiro segmento do perfil do terreno calculadas pela TD-MFIE diretamente no domínio do tempo e com aplicação da FFT . . . . .	65
Figura 27 – Diferença entre as densidades superficiais de corrente equivalentes no primeiro segmento do perfil do terreno calculadas pela TD-MFIE dire- tamente no domínio do tempo e com aplicação da FFT . . . . .	66
Figura 28 – Razão entre as densidades superficiais de corrente equivalentes no pri- meiro segmento do perfil do terreno calculadas pela TD-MFIE direta- mente no domínio do tempo e com aplicação da FFT . . . . .	66

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Tempo de execução da simulação para cada método . . . . .	65
--	----

# Lista de abreviaturas e siglas

CEP	Condutor Elétrico Perfeito
CMP	Condutor Magnético Perfeito
DFT	Transformada Discreta de Fourier ( <i>Discrete Fourier Transform</i> )
FAFFA	Aproximação de Campo Distante Rápida ( <i>Fast Far Field Approximation</i> )
FDTD	Diferenças Finitas no Domínio do Tempo ( <i>Finite Difference Time-Domain</i> )
FEM	Método dos Elementos Finitos ( <i>Finite Element Method</i> )
FFT	Transformada Rápida de Fourier ( <i>Fast Fourier Transform</i> )
GO	Ótica Geométrica ( <i>Geometrical Optics</i> )
IE-FFT	<i>Integral Equation-Fast Fourier Transform</i>
IFT	Transformada Inversa de Fourier ( <i>Inverse Fourier Transform</i> )
IoT	Internet das Coisas ( <i>Internet of Things</i> )
IP	Protocolo de Internet ( <i>Internet Protocol</i> )
MFIE	Equação Integral do Campo Magnético ( <i>Magnetic Field Integral Equation</i> )
MOD	<i>marching-on-in-degree</i>
MoM	Método dos Momentos ( <i>Method of Moments</i> )

MOO	<i>marching-on-in-order</i>
MOT	<i>marching-on-in-time</i>
TD-EFIE	Equação Integral do Campo Elétrico no Domínio do Tempo ( <i>Time-Domain Electric Field Integral Equation</i> )
TD-MFIE	Equação Integral do Campo Magnético no Domínio do Tempo ( <i>Time-Domain Magnetic Field Integral Equation</i> )
TD-PO	Ótica Física no Domínio do Tempo ( <i>Time-Domain Physical Optics</i> )
TD-UAT	Teoria Uniforme Assintótica da Difração no Domínio do Tempo ( <i>Time-Domain Uniform Asymptotic Theory of Diffraction</i> )
TD-UTD	Teoria Uniforme da Difração no Domínio do Tempo ( <i>Time-Domain Uniform Theory of Diffraction</i> )
UTD	Teoria Uniforme da Difração ( <i>Uniform Theory of Diffraction</i> )
UWB	Banda Ultra-Larga ( <i>Ultra-Wide Band</i> )

# Lista de símbolos

$\vec{r}$	Vetor posição
$\hat{n}$	Vetor unitário normal à superfície do terreno
$\hat{l}$	Vetor unitário tangente à superfície do terreno
$\vec{E}$	Campo elétrico no domínio da frequência
$j$	Número imaginário
$\omega$	Frequência angular da onda eletromagnética
$\mu$	Permeabilidade magnética do meio
$\vec{J}$	Densidade volumétrica de corrente elétrica no domínio da frequência
$G$	Função de Green no espaço livre
$\vec{M}$	Densidade volumétrica de corrente magnética no domínio da frequência
$\epsilon$	Permissividade elétrica do meio
$\vec{J}_s$	Densidade superficial de corrente elétrica no domínio da frequência
$\vec{M}_s$	Densidade superficial de corrente magnética no domínio da frequência
$\vec{H}$	Campo magnético no domínio da frequência
$f$	Frequência da onda eletromagnética
$k$	Número de onda
$\lambda$	Comprimento de onda

$\Gamma$	Coefficiente de reflexão
$\eta$	Impedância intrínseca do meio
$\theta_{i,r,t}$	Ângulo de incidência ( $i$ ), reflexão ( $r$ ) e transmissão ( $t$ )
$\Delta i, j$	Comprimento dos segmentos observador ( $i$ ) e fonte ( $j$ ) do terreno
$V_i$	Elemento $i$ da matriz de tensão no domínio da frequência
$Z_{ij}$	Elemento $ij$ da matriz de impedância no domínio da frequência
$M_j$	Elemento $j$ da matriz de corrente no domínio da frequência
$\vec{\mathcal{E}}$	Campo elétrico no domínio do tempo
$\vec{\mathcal{H}}$	Campo magnético no domínio do tempo
$\vec{\mathcal{M}}_s$	Densidade superficial de corrente magnética no domínio do tempo
$c$	Velocidade da luz
$\tau$	Tempo de retardo
$\Delta t$	Incremento temporal
$\mathcal{V}_i$	Elemento $i$ da matriz de tensão no domínio do tempo
$\mathcal{Z}_{ij}$	Elemento $ij$ da matriz de impedância no domínio do tempo
$\mathcal{M}_j$	Elemento $j$ da matriz de corrente no domínio do tempo



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>18</b>
1.1	Motivação	18
1.2	Objetivos e Contribuições	23
1.3	Estrutura da Dissertação	24
<b>2</b>	<b>EQUAÇÕES INTEGRAIS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA</b>	<b>26</b>
2.1	Equações Integrais	26
2.2	Método da Fase Estacionária	30
2.3	Método dos Momentos	33
2.4	Resultados Anteriores e Considerações Finais	38
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO</b>	<b>43</b>
3.1	Aplicando a Transformada Inversa	43
3.2	Marching-on-in-time	46
3.3	Método dos Momentos	48
3.4	Aplicação da Transformada Rápida de Fourier (FFT) nas Integrais de Convolução e Cálculo do Campo Espalhado	51
3.5	Considerações Finais	55
<b>4</b>	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E RESULTADOS</b>	<b>56</b>
4.1	Descrição do Enlace	56
4.2	Pulso eletromagnético na antena receptora	59
4.3	Tempos de cálculo e discussões sobre FFT	64

<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>68</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>71</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação

O desenvolvimento e a popularização de dispositivos móveis, bem como de tecnologias que implementam o conceito de Internet das Coisas (*Internet of Things* - IoT) e a expansão das redes Wi-Fi, têm motivado o aprimoramento das comunicações sem fio [1].

A comunicação por canais de rádio apresenta vantagens e desvantagens em comparação com a transmissão por meios guiados. Os custos de implantação e de manutenção de cabos - coaxiais, fibra ótica, cobre - são mais altos, e esse meio é mais limitante do ponto de vista de mobilidade, dado o amplo uso de dispositivos móveis e o caráter dinâmico das redes presentes no tráfego IP (Internet Protocol), o que culmina na mudança constante de rotas. No entanto, seus canais são previsíveis e permitem o uso de bandas maiores, o que implica a possibilidade de se obter taxas de transmissão maiores [1], [2], [3].

Os canais de rádio, por sofrer influência de fatores que dependem do ambiente e das condições climáticas, além da presença de outros canais de comunicação sem fio, demandam um cuidado muito maior em relação à sua modelagem. Contudo, são alternativas mais vantajosas em relação a custos de implantação e manutenção, além de permitir maior mobilidade por não se utilizar apenas de cabos [2], [3].

Dito isso, a importância dos cálculos para previsão de atenuação de ondas eletromagnéticas se deve à necessidade de se determinar a potência do sinal que o transmissor precisa emitir para que se viabilize a comunicação sem fio em um determinado ambiente. Isso permite que um sistema de comunicação sem fio seja projetado de forma mais eficiente, possibilitando o uso apropriado do espectro e, por consequência, alcançando taxas

de transmissão maiores [4]. Esses cálculos precisam considerar o perfil do terreno e o espalhamento, as reflexões e difrações que a onda eletromagnética sofre ao encontrar os obstáculos presentes no meio entre as antenas transmissora e receptora [3].

Os métodos para caracterização de canais de rádio podem ser classificados como empíricos ou determinísticos. Os empíricos, como os modelos Log-Distância e Okumura-Hata, utilizam resultados provenientes de medições locais para obter curvas e expressões que caracterizem o canal estudado, levando em consideração, de forma implícita, os fatores de propagação citados no parágrafo anterior [3]. Por se basear em dados obtidos por meio de medições, são métodos de baixo custo computacional. A desvantagem desses métodos é a necessidade de se realizarem novas medições para locais e frequências de operação diferentes.

Os métodos determinísticos se baseiam em aproximações das equações de Maxwell para o cálculo das amplitudes dos sinais, o que faz com que retornem resultados mais precisos, além de não dependerem de medições. Entretanto, o alto custo computacional desestimulou seu uso por anos, o que vem mudando com o desenvolvimento de computadores mais robustos em termos de memória e velocidade de processamento [5]. Exemplos de métodos determinísticos são a Ótica Geométrica (*Geometrical Optics* - GO) [6], [7] e a Teoria Uniforme da Difração (*Uniform Theory of Diffraction* - UTD) [8], [9], técnicas assintóticas que utilizam traçados de raios e são recomendadas para ambientes mais complexos [10], bem como técnicas numéricas como o Método dos Elementos Finitos (*Finite Element Method* - FEM) [11], o método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (*Finite Difference Time-Domain* - FDTD) [12] e o Método dos Momentos (*Method of Moments* - MoM) aplicado às Equações Integrais [13], utilizados em ambientes mais simples, como ambientes rurais com variações suaves no relevo e enlaces com poucos ou nenhum obstáculo, por possuírem maior complexidade computacional. Para se utilizarem

esses métodos, precisa-se das características do terreno e o resultado retornado inclui as interações entre as antenas transmissora e receptora e os obstáculos [10].

Um dos primeiros trabalhos que utilizou Equações Integrais para resolver problema de espalhamento em terrenos levemente irregulares está descrito em [13]. Posteriormente, outros trabalhos foram desenvolvidos em [14] e [15]. Uma formulação estável, baseada na Equação Integral do Campo Elétrico (*Electric Field Integral Equation* - EFIE) e considerando um condutor magnético perfeito, foi desenvolvida em [16], e os resultados foram comparados às medições de um terreno na Dinamarca - o perfil de Hjørringvej -, próximo à cidade de Aalborg. Em [17], um método baseado na Equação Integral do Campo Magnético (*Magnetic Field Integral Equation* - MFIE) foi desenvolvido e comparado com [16], apresentando melhor convergência nos resultados.

Apesar das vantagens envolvendo os métodos baseados em Equações Integrais, o cálculo das correntes equivalentes demanda um alto custo computacional à medida em que a distância do enlace cresce. Pensando nisso, [10] desenvolveu uma técnica de aceleração baseada em [18]- [19] chamada Aproximação de Campo Distante Rápida (*Fast Far Field Approximation* - FAFFA), que consiste em dividir o terreno em grupos de segmentos e aplicar aproximações de campo distante para simplificar o cálculo das correntes.

A caracterização de canais de rádio pode ser feita não apenas no domínio da frequência, mas também no domínio do tempo. A análise no domínio da frequência é normalmente realizada para sistemas de faixa estreita - largura de banda do sinal transmitido muito pequena em comparação com a frequência da portadora. O que se faz, geralmente, é analisar uma frequência da faixa - normalmente, a frequência central - e assumir o mesmo comportamento para as demais [5].

A análise no domínio do tempo tem despertado interesse devido ao aumento das taxas de transmissão e ao crescimento de aplicações que envolvem pulsos de banda ultra-

larga (*Ultra-Wide Band* - UWB), como radares de alta precisão e rádio pulsado [20]. Essa análise pode ser feita diretamente no domínio do tempo ou aplicando a transformada inversa de Fourier numericamente após a análise no domínio da frequência para diferentes frequências contidas no espectro do sinal, o que demanda conhecimento prévio da janela temporal do sinal, para que não ocorra *aliasing* no seu processo de amostragem [21]. Esse tipo de análise é recomendada para sinais UWB e para estudo do regime transiente [22]. Além disso, ela permite obter a dispersão temporal do sinal e a resposta ao impulso do sistema, o que permite a determinação da função de transferência e de características como causalidade, estabilidade e variância no tempo [23].

Trabalhos utilizando métodos determinísticos para fazer uma análise no domínio do tempo são encontrados na literatura, como a Teoria Uniforme da Difração no Domínio do Tempo (*Time-Domain Uniform Theory of Diffraction* - TD-UTD) [8], [20], [24], a Ótica Física no Domínio do Tempo (*Time-Domain Physical Optics* - TD-PO) [24], a Teoria Uniforme Assintótica da Difração no Domínio do Tempo (*Time-Domain Uniform Asymptotic Theory of Diffraction* - TD-UAT) [25], o FDTD [12], [26] e o Método dos Momentos aplicado às Equações Integrais no domínio do tempo [21], [27].

Em [10] foi desenvolvida uma formulação utilizando a Equação Integral do Campo Magnético no Domínio do Tempo (*Time-Domain Magnetic Field Integral Equation* - TD-MFIE) para terrenos suavemente irregulares, considerando incidência rasante de uma onda com polarização vertical. Os resultados foram comparados com os obtidos pela TD-UTD em [8]. Em [5], para o mesmo tipo de terreno e sob as mesmas condições, foi desenvolvida uma formulação para a Equação Integral do Campo Elétrico no Domínio do Tempo (*Time-Domain Electric Field Integral Equation* - TD-EFIE), cujos resultados foram comparados com [10] e [8].

A desvantagem da análise no domínio do tempo é o alto custo computacional, em

comparação com o domínio da frequência, devido aos cálculos das integrais de convolução feitos diretamente no domínio do tempo. Uma proposta é utilizar, juntos às técnicas computacionais empregadas nas simulações, a Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* - FFT), um algoritmo que calcula, de maneira eficiente, a Transformada Discreta de Fourier (*Discrete Fourier Transform* - DFT) e sua inversa, com o intuito de acelerar os cálculos dessas integrais, como normalmente é feito em *softwares* de cálculo numérico que possuem a ferramenta de cálculo de convoluções [23].

Em [28] e [29], um algoritmo IE-FFT (*Integral Equation-Fast Fourier Transform*) utiliza FFT para acelerar o cálculo do produto matricial encontrado no Método dos Momentos ao resolver o problema de espalhamento em uma esfera condutora elétrica perfeita baseando-se em EFIE e MFIE, respectivamente.

Em [22] e [30], a Transformada Rápida de Fourier é aplicada para acelerar convoluções temporais de algoritmos que utilizam as técnicas *marching-on-in-order* (MOO) e *marching-on-in-degree* (MOD), respectivamente, baseando-se em TD-EFIE para resolver um problema de espalhamento envolvendo um objeto condutor elétrico perfeito.

Em [31], propõe-se a aplicação de FFT para a resolução de duas integrais de convolução espacial e uma temporal obtidas pela técnica *marching-on-in-time* (MOT) para resolver um problema de espalhamento por um cilindro dielétrico.

A FFT, em [32], é usada na resolução de integrais de convolução espacial para acelerar um algoritmo que aplica *marching-on-in-time* em TD-EFIE em um problema de espalhamento por uma superfície condutora elétrica perfeita.

## 1.2 Objetivos e Contribuições

Neste trabalho, propõe-se a aplicação da Transformada Rápida de Fourier (FFT) em um método de caracterização de terrenos levemente irregulares que utiliza a Equação Integral do Campo Magnético no Domínio do Tempo (TD-MFIE), com o intuito de reduzir o custo computacional da simulação, acelerando as convoluções temporais presentes na formulação que fazem o algoritmo de análise no domínio do tempo demandar horas de cálculo.

Em tempo de cálculo, essa formulação foi comparada à TD-MFIE [10], à Equação Integral do Campo Elétrico no Domínio do Tempo (TD-EFIE) [5], e às equações integrais no domínio da frequência [5]. São comparados os resultados da TD-MFIE, TD-EFIE, Teoria Uniforme da Difração no Domínio do Tempo (TD-UTD) [8], e as transformadas inversas da EFIE e da MFIE no domínio da frequência.

As formulações são desenvolvidas considerando incidência rasante sobre o terreno e uma onda eletromagnética com polarização vertical. O Método da Fase Estacionária é aplicado sobre a formulação no domínio da frequência para reduzir a integral de superfície da equação a uma integral de linha. A formulação no domínio do tempo é obtida por meio da transformada inversa das equações integrais no domínio da frequência. O Método dos Momentos é utilizado para calcular as correntes equivalentes ao longo do terreno. A técnica *marching-on-in-time* é utilizada para avaliar as integrais de convolução que aparecem na formulação no domínio do tempo.

A Transformada Rápida de Fourier, por sua vez, é aplicada sobre essas integrais de convolução, reduzindo o tempo de cálculo da simulação em até 28 vezes, o que a torna uma interessante ferramenta para métodos de análise no domínio do tempo, apesar das discrepâncias obtidas entre os resultados apresentadas e discutidas no Capítulo 4.



## 1.3 Estrutura da Dissertação

No Capítulo 2, apresenta-se a formulação no domínio da frequência utilizada para previsão de propagação de uma onda polarizada verticalmente sobre um terreno levemente irregular desenvolvida em [10]. Na Seção 2.1, apresentam-se as equações integrais no domínio da frequência. A Seção 2.2 mostra como o Método da Fase Estacionária é aplicado para reduzir as integrais de superfície presentes nas MFIE e na EFIE a integrais de linha. Na Seção 2.3, o Método dos Momentos é utilizado para o cálculo das correntes equivalentes a longo da superfície do terreno. Por fim, na seção 2.4, são apresentados resultados obtidos em trabalhos anteriores que utilizaram a EFIE e MFIE no domínio da frequência e algumas considerações finais.

O Capítulo 3 apresenta a formulação no domínio do tempo, desenvolvida em [5], sob as mesmas condições da formulação desenvolvida no Capítulo 2. Na Seção 3.1, aplica-se a transformada inversa de Fourier nas equações obtidas na Seção 2.2 após a aplicação do Método da Fase Estacionária. A Seção 3.2 apresenta a discretização do tempo por meio da técnica *marching-on-in-time* [5], [10]. A Seção 3.3 mostra a utilização do Método dos Momentos para o cálculo das correntes por segmento, o que permite encontrar o campo espalhado cuja expressão se encontra nessa seção. Na Seção 3.4, aplica-se a transformada de Fourier na formulação obtida na Seção 3.2 para mostrar como ela é utilizada na simulação. A seção 3.5 contém algumas considerações finais.

No Capítulo 4, comparam-se os resultados obtidos com a TD-MFIE, TD-EFIE, MFIE, EFIE e a TD-UTD e os tempos de simulação da formulação no domínio da frequência, TD-EFIE, TD-MFIE e a TD-MFIE com a FFT. O enlace analisado e o pulso emitido são descritos na Seção 4.1 e os resultados para as formulações no domínio do tempo são apresentados na Seção 4.2. Na Seção 4.3, apresentam-se e discutem-se os tempos

de execução de cada algoritmo e as divergências de resultados entre a TD-MFIE resolvida diretamente no domínio do tempo e o algoritmo que envolve FFT.

O Capítulo 5, por fim, apresenta as conclusões do trabalho e sugestões de trabalhos futuros.

## 2 Equações Integrais no Domínio da Frequência

Este Capítulo consiste no desenvolvimento da formulação das Equações Integrais, no domínio da frequência, para uma onda com polarização vertical, ou paralela - campo elétrico paralelo ao plano de incidência -, e incidência rasante sobre um terreno levemente irregular como o da Figura 1, o que permite que se desconsidere o retroespalhamento. A determinação do campo pode ser feita por meio do princípio da equivalência, substituindo o terreno por correntes equivalentes. Essas correntes, por sua vez, podem ser encontradas utilizando o Método dos Momentos. Feito isso, determina-se o campo espalhado no receptor.

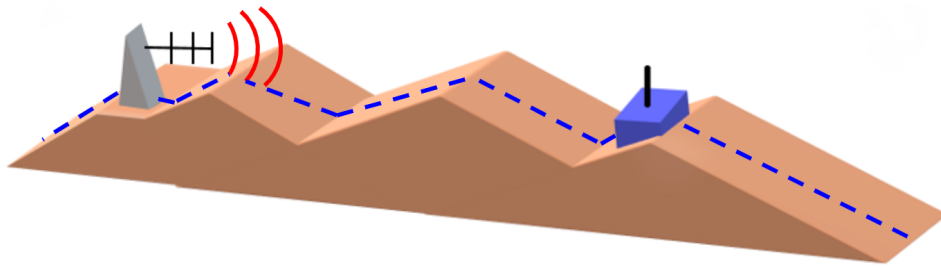


Figura 1 – Sistema rádio enlace analisado

### 2.1 Equações Integrais

A solução do problema consiste em analisar o comportamento da corrente ao longo do perfil do terreno, definido pela interseção do solo com o plano de incidência do enlace, representado pela linha tracejada da Figura 1. O sistema de coordenadas utilizado na descrição do problema está presente na figura 2.  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  localizam, respectivamente, o observador e a fonte de corrente equivalente.  $\hat{n}$  e  $\hat{n}'$  são vetores unitários normais à superfície em  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$ , respectivamente, e  $\hat{l}$  e  $\hat{l}'$  são as correspondentes direções tangentes

ao perfil do terreno.  $\vec{R}_1$  localiza a fonte de corrente equivalente em relação à antena transmissora e  $\vec{R}_2 = \vec{r} - \vec{r}'$  descreve a posição do observador em relação à fonte. A antena transmissora e o observador estão no plano de incidência  $y = y_0 = 0$ .

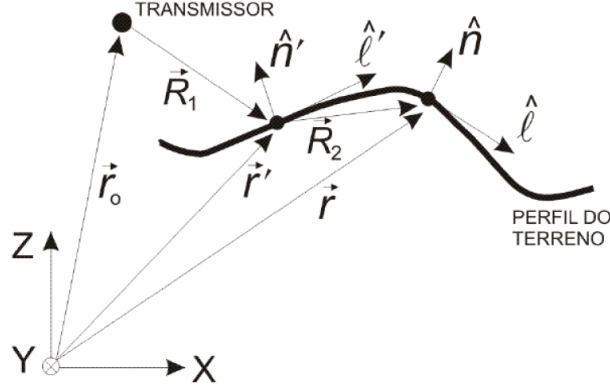


Figura 2 – Sistema de coordenadas que descreve o perfil do terreno

Tendo em vista o sistema de coordenadas descrito, tem-se a Equação Integral do Campo Elétrico (EFIE) - equação 2.1 - e a Equação Integral do Campo Magnético (MFIE) - 2.2 a seguir [33]:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{E}(\vec{r})}{T} = & - \int_{V'} \left[ j\omega\mu\vec{J}(\vec{r}')G + \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla'G + \frac{\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{j\omega\epsilon} \nabla'G \right] dv' \\ & - \int_{S'} \left[ j\omega\mu\vec{J}_s(\vec{r}')G + \vec{M}_s(\vec{r}') \times \nabla'G + \frac{\nabla' \cdot \vec{J}_s(\vec{r}')}{j\omega\epsilon} \nabla'G \right] ds', \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{H}(\vec{r})}{T} = & - \int_{V'} \left[ j\omega\epsilon\vec{M}(\vec{r}')G - \vec{J}(\vec{r}') \times \nabla'G + \frac{\nabla' \cdot \vec{M}(\vec{r}')}{j\omega\mu} \nabla'G \right] dv' \\ & - \int_{S'} \left[ j\omega\epsilon\vec{M}_s(\vec{r}')G - \vec{J}_s(\vec{r}') \times \nabla'G + \frac{\nabla' \cdot \vec{M}_s(\vec{r}')}{j\omega\mu} \nabla'G \right] ds', \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde as integrais em  $V'$  representam o campo gerado pelas distribuições de corrente volumétrica e as integrais em  $S'$  contabilizam o campo gerado pelas distribuições de corrente superficiais.  $\vec{J}$  e  $\vec{M}$  são, respectivamente, as densidades volumétricas de correntes elétrica e magnética enquanto as densidades superficiais são representadas por  $\vec{J}_s$  e  $\vec{M}_s$ .  $\epsilon$  é a permissividade elétrica e  $\mu$ , a permeabilidade magnética do meio de propagação -

neste trabalho, o meio é o ar e se consideram a permissividade e a permeabilidade do vácuo.  $\omega = 2\pi f$  é a frequência angular da onda eletromagnética.  $T$  vale 1 se o observador se encontra fora da superfície do terreno e 2 se ele está sobre o terreno.  $G$  é função de Green no espaço livre, definida por:

$$G = \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad (2.3)$$

em que  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  é o comprimento de onda, e os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  representam, respectivamente, as posições do observador e da fonte, conforme especificado na figura 2.

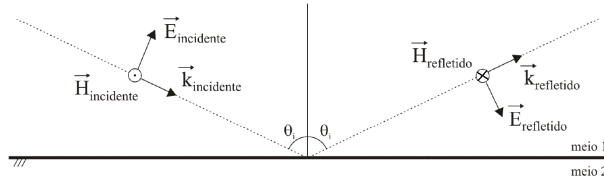


Figura 3 – Incidência oblíqua de uma onda plana com polarização vertical, ou paralela, sobre uma interface plana

No problema analisado, considera-se incidência rasante - ângulo de incidência  $\theta_i \approx 90^\circ$  em relação à normal à superfície. Considerando uma superfície plana, como a da Figura 3, os coeficientes de reflexão de Fresnel para as polarizações vertical e horizontal são, respectivamente [34]:

$$\Gamma_v = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}, \quad (2.4)$$

$$\Gamma_h = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}, \quad (2.5)$$

onde  $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$  e  $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$  são as impedâncias intrínsecas dos meios 1 e 2, respectivamente, dadas em função de suas permeabilidades magnéticas  $\mu_{1,2}$  e permissividades elétricas  $\epsilon_{1,2}$  e  $\theta_t$  é o ângulo da onda transmitida em relação à normal à superfície.

Para incidência rasante,  $\Gamma_v \rightarrow 1$  (reflexão total), independente da relação entre  $\eta_1$  e  $\eta_2$  [34]. Assim, as somas dos campos incidente e refletido da Figura 3 levam à não

existência de componente do campo magnético tangencial à superfície e à existência apenas de uma componente tangencial do campo elétrico. Logo, o campo magnético tem apenas componente perpendicular e, o elétrico, paralela à superfície, o que faz com que essa superfície se comporte como um condutor magnético perfeito (CMP) [35]. Ressalta-se que, utilizando dualidade, o problema pode ser resolvido da mesma forma - e com o mesmo custo computacional - para polarização horizontal - ou perpendicular - sobre um condutor elétrico perfeito. Como o problema em questão se trata da incidência rasante de uma onda polarizada verticalmente sobre uma superfície condutora magnética perfeita, considera-se somente a presença de correntes magnéticas superficiais no problema. Dessa forma, e considerando também que o campo gerado pelas correntes volumétricas corresponde ao campo incidente, as equações 2.1 e 2.2 assumem as seguintes formas:

$$\vec{E}(\vec{r}) = T \left[ \vec{E}_{in}(\vec{r}) + \vec{L}_2(\vec{M}_s) \right], \quad (2.6)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = T \left[ \vec{H}_{in}(\vec{r}) + \frac{1}{\eta} \vec{L}_1(\vec{M}_s) \right], \quad (2.7)$$

onde  $\vec{E}_{in}$  e  $\vec{H}_{in}$  representam os campos elétrico e magnético incidentes gerados pela antena transmissora e as expressões dos operadores  $\vec{L}_1$  e  $\vec{L}_2$  são descritas da seguinte maneira:

$$\vec{L}_1(\vec{M}_s) = -jk \int_{S'} \left[ \vec{M}_s(\vec{r}') G - \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot \vec{M}_s(\vec{r}') \nabla' G \right] ds', \quad (2.8)$$

$$\vec{L}_2(\vec{M}_s) = - \int_{S'} \left[ \vec{M}_s(\vec{r}') \times \nabla' G \right] ds'. \quad (2.9)$$

Para um CMP, têm-se as seguintes condições de contorno [35]:

$$\hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{M}_s(\vec{r}'), \quad (2.10)$$

$$\hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}) = 0. \quad (2.11)$$

Aplicando as condições de contorno 2.10 e 2.11 sobre as equações 2.6 e 2.7 e considerando que o observador se encontra sobre a superfície ( $T = 2$ ):

$$\hat{n} \times \vec{E}_{in}(\vec{r}) = -\frac{\vec{M}_s(\vec{r}')}{2} - \hat{n} \times \vec{L}_2(\vec{M}_s), \quad (2.12)$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_{in}(\vec{r}) = -\frac{1}{\eta} \hat{n} \times \vec{L}_1(\vec{M}_s). \quad (2.13)$$

Considerando a antena transmissora suficientemente afastada do terreno, esta pode ser tratada como uma fonte pontual. Assim, as correntes equivalentes assumem uma distribuição de fase aproximadamente esférica [5]. Logo:

$$\vec{M}_s(\vec{r}') = \vec{M}_a(\vec{r}') e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}_0|} \quad (2.14)$$

onde  $\vec{r}_0$  localiza a antena transmissora, conforme explicitado na figura 2.

## 2.2 Método da Fase Estacionária

Utilizando o sistema de coordenadas da figura 2 como referência, 2.8 e 2.9 podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\vec{L}_1(\vec{M}_s) = -jk \int_{l'} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \vec{M}_s(\vec{r}') G - \frac{1}{k^2} \nabla' \cdot \vec{M}_s(\vec{r}') \nabla' G \right] dy' dl', \quad (2.15)$$

$$\vec{L}_2(\vec{M}_s) = - \int_{l'} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \vec{M}_s(\vec{r}') \times \nabla' G \right] dy' dl', \quad (2.16)$$

onde  $l'$  descreve o perfil do terreno. O gradiente da função de Green do espaço livre - 2.3 - e o divergente da densidade superficial de corrente magnética - 2.14 - são dados por:

$$\nabla' G = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{jk|\vec{r}-\vec{r}'| + 1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \right) e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad (2.17)$$

$$\nabla' \cdot \vec{M}_s(\vec{r}') = \left[ -jk\vec{M}_a \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} + \nabla' \cdot \vec{M}_a \right] e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \quad (2.18)$$

Aplicando as equações 2.17 e 2.18 em 2.15 e 2.16, as integrais em função de  $y'$  destas podem ser expressas por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y') e^{-jkh(y')} dy', \quad (2.19)$$

expressão na qual, para  $\vec{L}_1$ :

$$g_1(y') = \frac{\vec{M}_a}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{k^2} \left[ -jk\vec{M}_a \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} + \nabla' \cdot \vec{M}_a \right] \left( \frac{jk|\vec{r} - \vec{r}'| + 1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (2.20)$$

para  $\vec{L}_2$ :

$$g_2(y') = \left( \vec{M}_a \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \frac{jk|\vec{r} - \vec{r}'| + 1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|^2}, \quad (2.21)$$

e para ambos os operadores:

$$h(y') = |\vec{r} - \vec{r}_0| + |\vec{r} - \vec{r}'|. \quad (2.22)$$

Assumindo  $kr \gg 1$  - dimensões do terreno muito maiores do que  $\lambda$  - e que a variação do perfil do terreno não é significativa na direção  $\hat{y}$ , o Método da Fase Estacionária [36] pode ser empregado para avaliar assintoticamente a integral 2.19:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y') e^{-jkh(y')} dy' = g(y_s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jk \left( h(y_s) + \frac{(y' - y_s)^2}{2} \frac{\delta^2 h(y_s)}{\delta y'^2} \right)} dy', \quad (2.23)$$

na qual  $y_s$  representa o ponto estacionário ou ponto de fase estacionária, onde a primeira derivada de  $h$  é nula.  $h(y')$  foi aproximada pelos três primeiros termos de sua expansão em série de Taylor.

Ao igualar a primeira derivada de 2.22 a zero, tem-se que  $y_s = y_0$ , ou seja, o ponto estacionário corresponde à coordenada  $y$  da antena, que determina o plano de incidência.



Resolvendo 2.23 para  $y' = y_0$ , tem-se [10]:

$$g(y_s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jk \left( h(y_s) + \frac{(y' - y_s)^2}{2} \frac{\delta^2 h(y_s)}{\delta y'^2} \right)} dy' = g(y_s) e^{-jk(R_1 + R_2) - \frac{j\pi}{4}} \sqrt{\frac{\lambda R_1 R_2}{R_1 + R_2}}, \quad (2.24)$$

onde a distância entre o transmissor e o ponto fonte  $R_1$  é dada por:

$$R_1 = |\vec{r} - \vec{r}_0|_{y'=y_0} = \sqrt{(x' - x_0)^2 + (z' - z_0)^2}, \quad (2.25)$$

e a distância entre o observador e o ponto fonte  $R_2$  é:

$$R_2 = |\vec{r} - \vec{r}'|_{y=y'=y_0} = \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2}. \quad (2.26)$$

Utilizando 2.20-2.22 e 2.24-2.26, pode-se expressar 2.15 e 2.16 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \vec{L}_1(\vec{M}_s) = -jk \int_{V'} \left[ \frac{\vec{M}_a}{4\pi R_2} - \frac{jkR_2 + 1}{4\pi R_2^2} (-jk\vec{M}_a \cdot R_1 \right. \\ \left. + \nabla' \cdot \vec{M}_a) \frac{\hat{R}_2}{k^2} \right] e^{-jk(R_1 + R_2) - \frac{j\pi}{4}} \sqrt{\frac{\lambda R_1 R_2}{R_1 + R_2}} dl', \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\vec{L}_2(\vec{M}_s) = - \int_{V'} (\vec{M}_a \times \hat{R}_2) \left( \frac{jkR_2 + 1}{4\pi R_2^2} \right) e^{-jk(R_1 + R_2) - \frac{j\pi}{4}} \sqrt{\frac{\lambda R_1 R_2}{R_1 + R_2}} dl'. \quad (2.28)$$

Com a aplicação do Método da Fase Estacionária, o problema passa a ser tratado no perfil do terreno ao longo do plano de incidência, onde a corrente equivalente se encontra na direção  $\hat{y}$ . Logo,  $\vec{M}_a \cdot \hat{R}_1 = 0$ . Nessa direção, a corrente varia muito lentamente, de forma que essas variações possam ser desprezadas nos cálculos. Assim,  $\nabla' \cdot \vec{M}_a \approx 0$ . Tendo isso em mente, 2.27 e 2.27 podem ser reescritas de forma mais simplificada [10]:

$$\vec{L}_1(\vec{M}_s) = -k \int_{V'} \vec{M}_a G_1 dl', \quad (2.29)$$

$$\vec{L}_2(\vec{M}_s) = -k \int_{V'} \vec{M}_a \times \hat{R}_2 G_2 dl', \quad (2.30)$$

onde

$$G_1 = \frac{e^{-jk(R_1+R_2)+\frac{j\pi}{4}}}{4\pi\sqrt{\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_2}{\lambda}}}, \quad (2.31)$$

$$G_2 = \left(1 - \frac{j}{kR_2}\right) G_1. \quad (2.32)$$

A partir dessas expressões, 2.12 e 2.13 podem ser expressas por:

$$\hat{n} \times \vec{E}_{in}(\vec{r}) = -\frac{\vec{M}_a}{2} e^{-jkR_1} + k \int_{V'} (\hat{n} \cdot \hat{R}_2) \vec{M}_a G_2 dl', \quad (2.33)$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_{in}(\vec{r}) = \frac{k}{\eta} \int_{V'} \hat{n} \times \vec{M}_a G_1 dl'. \quad (2.34)$$

## 2.3 Método dos Momentos

As equações 2.33 e 2.34 são utilizadas no cálculo da densidade de corrente magnética equivalente  $\vec{M}_a$  que, por sua vez, é utilizada para encontrar o campo espalhado, considerando  $T = 1$ .  $\vec{M}_a$  é calculada por meio do Método dos Momentos (MoM), que consiste em dividir o terreno em  $N$  segmentos. Em cada um desses segmentos, a corrente é modelada por uma função de base  $\vec{m}_j$  - que, no caso deste trabalho, trata-se de um pulso unitário e pode ser escrita como  $\vec{m}_j = m_j \hat{y}$ , já que  $\vec{M}_a$  se encontra na direção  $\hat{y}$  - ponderada por uma constante  $M_j$ , que é a amplitude de corrente a ser determinada em cada segmento  $j$ , conforme expresso a seguir:

$$\vec{M}_a = \sum_{j=1}^N M_j \vec{m}_j = M_j m_j \hat{y}. \quad (2.35)$$

Encontrar os  $N$  valores de  $M_j$  demanda um sistema de  $N$  equações. Dito isso, aplica-se produto interno entre uma função de teste  $\vec{w}_i$  - que, neste caso, é a função impulso orientada em  $\hat{y}$  para a EFIE e em  $\hat{l}$  para a MFIE [2], [37], [38] - e as equações

2.33 e 2.34 para calcular o valor do integrando no centro de cada segmento  $j$ , obtendo o seguinte [2], [37], [38]:

$$\int_l \vec{w}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{E}_{in}) dl = -\frac{1}{2} \int_l (\vec{w}_i \cdot \vec{M}_a) e^{-jkR_1} dl + k \int_l \int_{l'} (\hat{n} \cdot \hat{R}_2) (\vec{w}_i \cdot \vec{M}_a) G_2 dl' dl, \quad (2.36)$$

$$\int_l \vec{w}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{H}_{in}) dl = \frac{k}{\eta} \int_l \int_{l'} \vec{w}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{M}_a) G_1 dl' dl. \quad (2.37)$$

Aplicando 2.35 em 2.36 e 2.37 e resolvendo o produto interno, obtém-se:

$$[\hat{y} \cdot (\hat{n} \times \vec{E}_{in})]_{\vec{r}=\vec{r}_i} = - \left[ \frac{M_i}{2} e^{-jkR_1} \right]_{\vec{r}=\vec{r}_i} + \sum_{j=1}^N \left[ k \int_{l'} (\hat{n} \cdot \hat{R}_2) M_j G_2 dl' \right]_{\vec{r}=\vec{r}_i}, \quad (2.38)$$

$$[\hat{l} \cdot (\hat{n} \times \vec{H}_{in})]_{\vec{r}=\vec{r}_i} = - \sum_{j=1}^N \left[ \frac{k}{\eta} \int_{l'} M_j G_1 dl' \right]_{\vec{r}=\vec{r}_i}. \quad (2.39)$$

Escrevendo 2.38 como um sistema linear na forma matricial, tem-se:

$$[V_i] = [Z_{ij}][M_j], \quad (2.40)$$

onde  $[V_i]$ ,  $[Z_{ij}]$  e  $[M_j]$  representam as matrizes de tensão, impedância e corrente, respectivamente. Para a EFIE, os elementos das matrizes de tensão e de impedância são dados por [10]:

$$V_{i_{EFIE}} = [\hat{y} \cdot (\hat{n} \times \vec{E}_{in})]_{\vec{r}=\vec{r}_i} = [\vec{E}_{in} \cdot \hat{l}_i]_{\vec{r}=\vec{r}_i}, \quad (2.41)$$

$$Z_{ij_{EFIE}} = \left[ -\frac{1}{2} e^{-jkR_1} \delta_{ij} + k \int_{l'} (\hat{n} \cdot \hat{R}_2) G_2 dl' \right]_{\vec{r}=\vec{r}_i}, \quad (2.42)$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (2.43)$$

pois a função de teste é uma função impulso. Para  $i = j$ ,  $\hat{R}_2 = 0$ , pois o segmento fonte corresponde ao segmento observador. Logo, para esse caso,  $\hat{n} \cdot \hat{R}_2 = 0$ .

Para resolver a integral de 2.42, assume-se que  $R_1$  e  $R_2$  possuem amplitudes constantes e fases que variam linearmente conforme as expressões a seguir [10]:

$$R_1 \approx R_{1j} + u' \frac{\Delta_j}{2} (\hat{R}_{1j} \cdot \hat{l}'), \quad (2.44)$$

$$R_2 \approx R_{2ij} - u' \frac{\Delta_j}{2} (\hat{R}_{2ij} \cdot \hat{l}'), \quad (2.45)$$

onde  $R_{1j}$  representa a distância entre a antena transmissora e o segmento fonte  $j$ ;  $R_{2ij}$ , a distância entre o segmento observador  $i$  e o  $j$ ;  $u'$  é uma função que varia de -1 a 1 ao longo do segmento  $j$  e  $\Delta_j$  é o comprimento desse segmento. Com essa aproximação, a integral em 2.42, tendo em vista o valor de  $G_2$ , é dada por:

$$\begin{aligned} k \int_{l'} e^{-jk(R_1+R_2)} dl' &= e^{-jk(R_{1j}+R_{2ij})} \int_{-1}^1 e^{-jku' \frac{\Delta_j}{2} [(\hat{R}_{1j} - \hat{R}_{2ij}) \cdot \hat{l}']} \hat{R}_{2ij} \frac{k\Delta_j}{2} du' \\ &= e^{-jk(R_{1j}+R_{2ij})} k\Delta_j \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde

$$\alpha = \frac{k\Delta_j}{2} (\hat{R}_{1j} - \hat{R}_{2ij}) \cdot \hat{l}'. \quad (2.47)$$

Resolvida essa integral, os elementos das matrizes de tensão e de impedância, para a EFIE, são:

$$V_{i_{EFIE}} = \vec{E}_{in} \cdot \hat{l}_i, \quad (2.48)$$

$$Z_{ij_{EFIE}} = (\hat{n}_i \cdot \hat{R}_2) G_2 k \Delta_j \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}, \quad i \neq j, \quad (2.49)$$

$$Z_{ii_{EFIE}} = -\frac{1}{2} e^{-jkR_1}, \quad i = j. \quad (2.50)$$

Tomando os mesmos passos para a MFIE - equação 2.34, têm-se:

$$V_{i_{MFIE}} = \eta [\hat{l} \cdot (\hat{n} \times \vec{H}_{in})]_{\vec{r}=\vec{r}_i} = -\eta [\vec{H}_{in} \cdot \hat{y}]_{\vec{r}=\vec{r}_i}, \quad (2.51)$$

$$Z_{ij_{MFIE}} = - \left[ k \int_{V'} G_1 dl' \right]_{\vec{r}=\vec{r}_i}. \quad (2.52)$$

A integral em 2.52 é resolvida com as mesmas aproximações que a EFIE. No entanto, tem-se uma singularidade em  $R_2 \rightarrow 0$ , ou seja, quando  $i = j$ , que deve ser tratada.

Considerando que, neste caso,  $R_2 = \frac{\Delta_j}{2} |u'|$ , a integral assume a forma [39]:

$$\begin{aligned} k \int_{V'} G_1 dl' &= \frac{e^{\frac{j\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}} e^{-jkR_1} \int_{-1}^1 \frac{e^{-jk u' \frac{\Delta_j}{2} (\hat{R}_{1j} \cdot \hat{l})} e^{-jk|u'| \frac{\Delta_j}{2} \frac{k\Delta_j}{2}}}{\sqrt{\frac{k|u'|\Delta_j}{2}}} du' \\ &= \frac{e^{-jkR_1 + \frac{j\pi}{4}}}{2} \left[ \frac{Fres \left( \sqrt{(1 - \hat{R}_1 \cdot \hat{l}_j) \frac{k\Delta_j}{\pi}} \right)}{\sqrt{(1 - \hat{R}_1 \cdot \hat{l}_j)}} + \frac{Fres \left( \sqrt{(1 + \hat{R}_1 \cdot \hat{l}_j) \frac{k\Delta_j}{\pi}} \right)}{\sqrt{(1 + \hat{R}_1 \cdot \hat{l}_j)}} \right], \end{aligned} \quad (2.53)$$

em que

$$Fres(x) = \int_0^x e^{-j\frac{\pi t^2}{2}} dt = C(x) - jS(x), \quad (2.54)$$

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt, \quad (2.55)$$

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt, \quad (2.56)$$

onde 2.55 e 2.56 são as integrais de Fresnel [39]. Tem-se, portanto, para a MFIE:

$$V_{i_{MFIE}} = \eta(\vec{H}_{in} \cdot \hat{y}), \quad (2.57)$$

$$Z_{ij_{MFIE}} = G_1 k \Delta_j \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha}, \quad i \neq j, \quad (2.58)$$

$$Z_{ii_{MFIE}} = \frac{e^{-jkR_1 + \frac{j\pi}{4}}}{2} \left[ \frac{Fres \left( \sqrt{(1 - \hat{R}_1 \cdot \hat{l}_j) \frac{k\Delta_j}{\pi}} \right)}{\sqrt{(1 - \hat{R}_1 \cdot \hat{l}_j)}} + \frac{Fres \left( \sqrt{(1 + \hat{R}_1 \cdot \hat{l}_j) \frac{k\Delta_j}{\pi}} \right)}{\sqrt{(1 + \hat{R}_1 \cdot \hat{l}_j)}} \right], \quad i = j. \quad (2.59)$$

Obtidas as expressões para os elementos das matrizes de tensão e impedância, consegue-se encontrar os da matriz de corrente. A desvantagem desse método é o seu

alto custo computacional, que aumenta com o tamanho do terreno, da superfície ou do objeto analisado, visto a necessidade de se aumentar o número de segmentos para se obter maior exatidão. No entanto, o fato de o terreno ser suave permite que se despreze o retro-espalhamento - acoplamento eletromagnético entre cada segmento e os posteriores a ele [10]. Dessa forma, as correntes podem ser calculadas de maneira recursiva, pois dependem apenas dos segmentos anteriores, o que agiliza o algoritmo [16]:

$$M_i = \frac{1}{Z_{ii}} \left( V_i - \sum_{j=1}^{i-1} Z_{ij} M_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, N_b. \quad (2.60)$$

Calculados os valores da corrente equivalente em cada segmento, calcula-se o campo espalhado por meio de 2.6 com  $T = 1$ , já que observador, neste caso, se encontra fora da superfície. Logo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{in}(\vec{r}) + \vec{L}_2(\vec{M}), \quad (2.61)$$

$$\vec{L}_2(\vec{M}) = -k \int_{l'} \vec{M}_a \times \hat{R}_2 G_2 dl'. \quad (2.62)$$

Resolvendo 2.62, tem-se a fórmula do campo espalhado:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{in}(\vec{r}) - \sum_{j=1}^N M_j \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} (\hat{y} \times \hat{R}_2) G_2 k \Delta_j, \quad (2.63)$$

onde  $\alpha$  é dado em 2.47 e  $G_2$ , em 2.21. Conforme a Figura 4,  $R_1$  é a distância entre o transmissor e o centro do segmento fonte  $j$  e  $R_2$ , a distância entre o segmento  $j$  e o receptor.

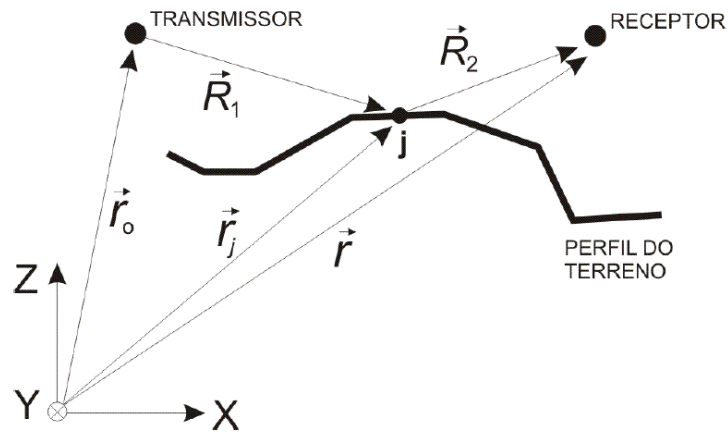


Figura 4 – Parâmetros considerados no cálculo do campo espalhado

## 2.4 Resultados Anteriores e Considerações Finais

Neste Capítulo, foi apresentado o desenvolvimento da formulação no domínio da frequência da EFIE e da MFIE utilizada para prever a propagação de uma onda verticalmente polarizada com incidência rasante sobre o perfil de um terreno suavemente irregular.

As formulações apresentadas foram utilizadas em trabalhos anteriores - [17], [10] e [5] - para previsão de propagação de um terreno cujo perfil é modelado por uma cunha de extensão de 5000 m e uma altura de 50 m - Figura 5 -, com as condições descritas - condutor magnético perfeito e incidência rasante - e diferentes segmentações do terreno, tomando a UTD como referência, e [10] também estudou o caso de um terreno prático como o estudado em [16], o perfil de Hjørringvej - Figura 6, pertencente a uma região da Dinamarca.

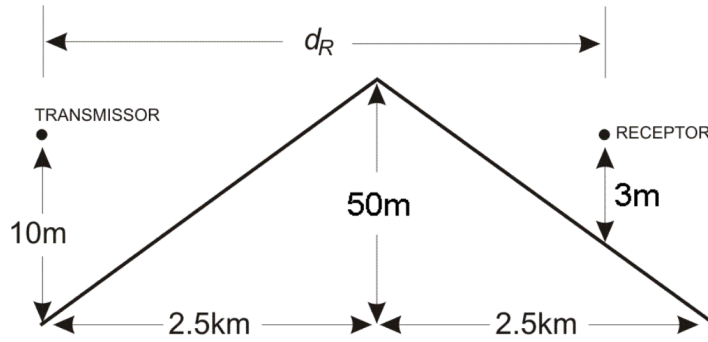


Figura 5 – Cunha simples

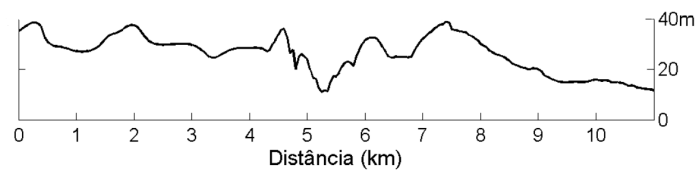


Figura 6 – Perfil de Hjørringvej

Para os perfis estudados, a MFIE se mostrou uma formulação mais robusta e eficiente que a EFIE, demandando que o terreno seja dividido em um número menor de segmentos, inclusive em frequências de operação menores, para alcançar resultados satisfatórios [5], [10], [17].

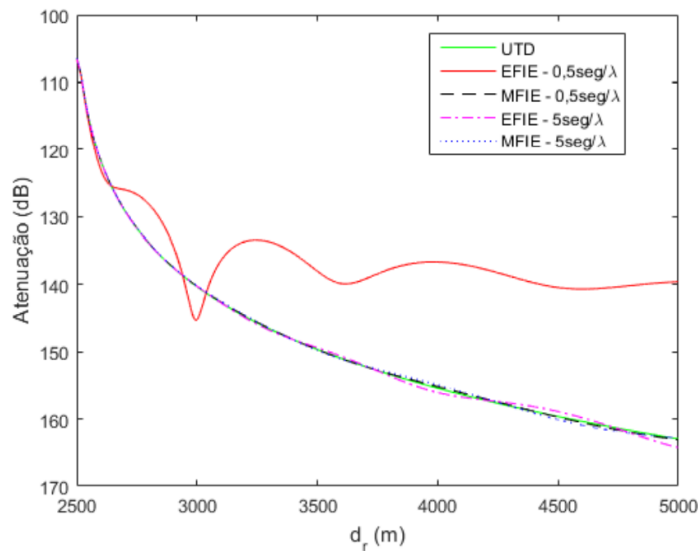


Figura 7 – Resultados para cunha simples a 1 GHz



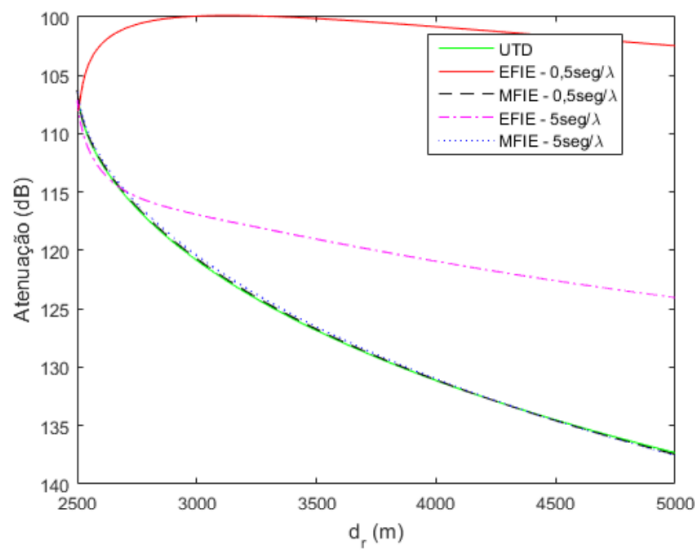


Figura 8 – Resultados para cunha simples a 100 MHz

No caso da cunha, a EFIE apresentou bons resultados apenas para a frequência de 1 GHz e 5 segmentos por comprimento de onda [5], como é possível observar na Figura 7, enquanto a MFIE convergiu para 100 MHz até mesmo com 0,5 segmento/ $\lambda$ , conforme apresentado na Figura 8 [5], [10].

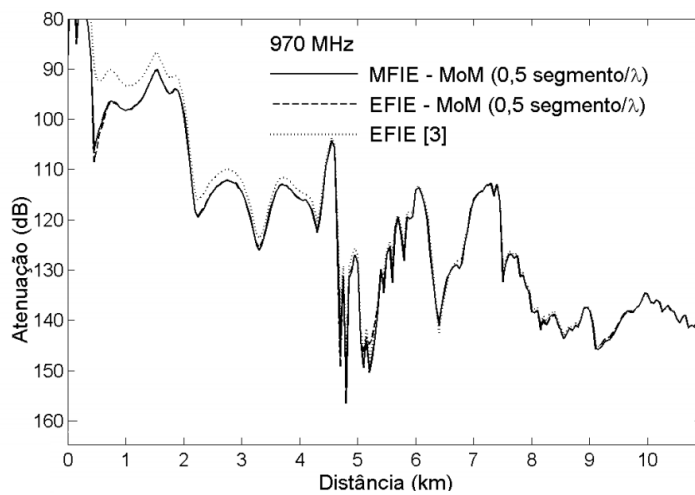


Figura 9 – Resultados para o perfil de Hjørringvej a 970 MHz

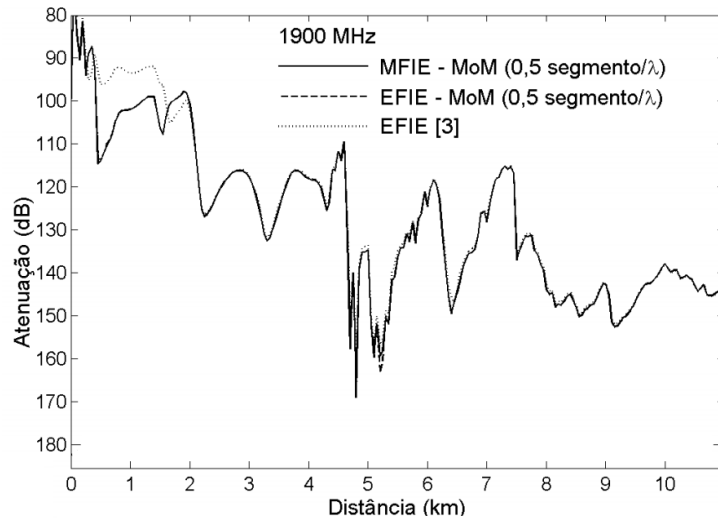


Figura 10 – Resultados para o perfil de Hjørringvej a 1,9 GHz

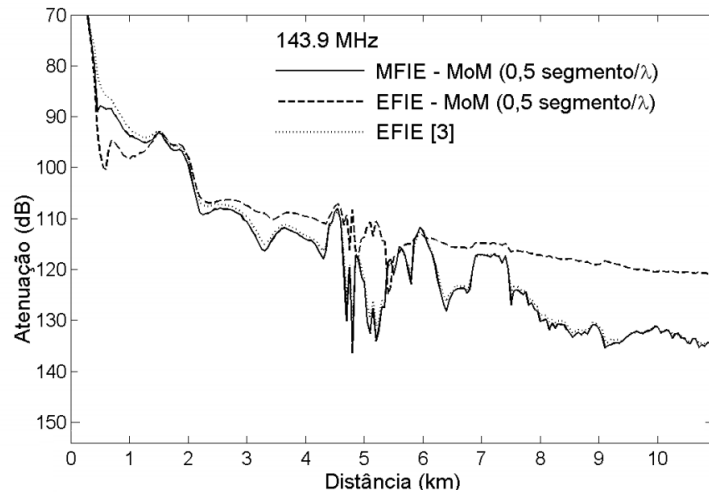


Figura 11 – Resultados para o perfil de Hjørringvej a 143 MHz e 0,5 segmento/ $\lambda$

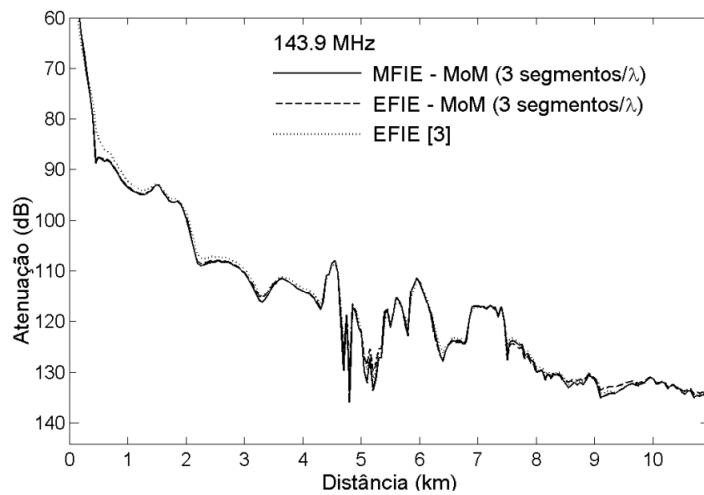


Figura 12 – Resultados para o perfil de Hjørringvej a 143 MHz e 3 segmentos/ $\lambda$

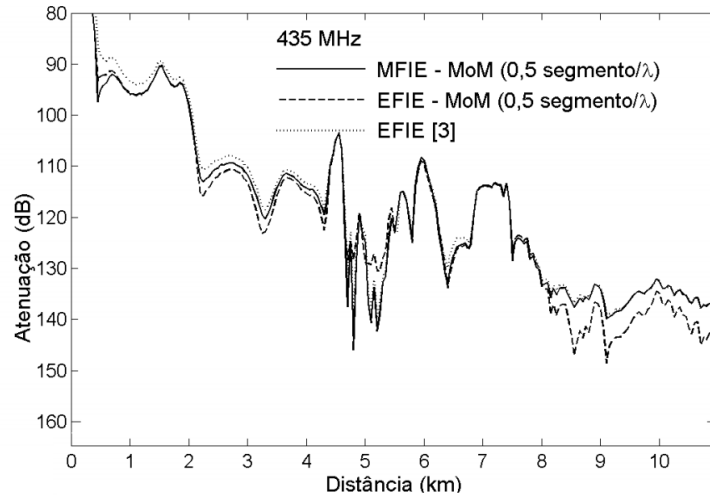


Figura 13 – Resultados para o perfil de Hjørringvej a 435 MHz e 0,5 segmento/ $\lambda$

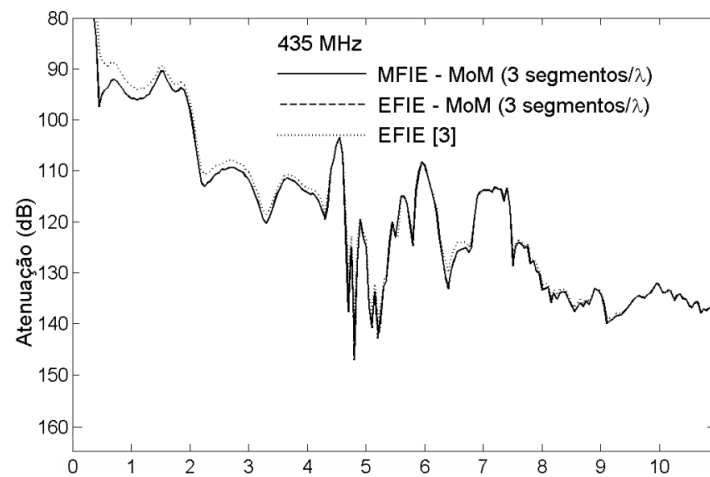


Figura 14 – Resultados para o perfil de Hjørringvej a 435 MHz e 3 segmentos/ $\lambda$

Para o perfil de Hjørringvej [16], a MFIE também apresentou melhor convergência que a EFIE, embora ambas tenham alcançado bons resultados para 970 MHz e 1,9 GHz até mesmo com 0,5 segmentos/ $\lambda$ . Para 143,9 e 435 MHz, a EFIE só apresentou resultados satisfatórios com 3 segmentos/ $\lambda$  [10].

Os motivos para a MFIE apresentar melhor convergência podem ser estudados de maneira mais aprofundada. Uma possibilidade é a existência de uma singularidade em  $R_2 \rightarrow 0$  no cálculo dos elementos das matrizes de impedância ao aplicar o Método dos Momentos na EFIE, o que não acontece na MFIE. Contudo, essa hipótese precisa ser estudada com cuidado.

## 3 Formulação no Domínio do Tempo

A caracterização de um canal de rádio diretamente no domínio do tempo se mostra importante para sistemas faixa larga, especialmente os que envolvem sinais UWB (*Ultra-Wide Band*), cujas aplicações vêm crescendo com o passar do anos, e para a análise do regime transitório do sistema [20], [22].

Este Capítulo apresenta a formulação no domínio do tempo sob as mesmas condições que a do Capítulo 2 - terreno suave e incidência rasante por uma onda verticalmente polarizada. Como o terreno é levemente irregular, pode-se desprezar o retroespalhamento. Logo, a corrente em cada segmento e instante de tempo depende, apenas, das correntes em segmentos e instantes de tempo anteriores. A técnica *marching-on-in-time* é utilizada para discretizar o tempo, o Método dos Momentos, para o cálculo das correntes equivalentes e a FFT, para acelerar o cálculo das convoluções temporais que aparecem nas expressões da corrente.

### 3.1 Aplicando a Transformada Inversa

As transformadas de Fourier direta e inversa são definidas como [40]:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{M}(t)\} = M(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{M(\omega)\} = \mathcal{M}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (3.2)$$

sendo  $\mathcal{M}$  uma função no domínio do tempo e  $M$  a sua transformada.

A transformada inversa de Fourier - 3.2 - pode ser aplicada nas equações integrais desenvolvidas no Capítulo 2 - 2.33 e 2.33 - para se obter a formulação no domínio do

tempo. Aplica-se a transformada nas equações após o Método da Fase Estacionária pois, apesar de possível, não é necessário desenvolver toda a formulação novamente, dado que as condições impostas para a utilização desse método -  $kr \gg 1$  e variação do terreno desprezível na direção  $\hat{y}$  - são invariantes no tempo. Reescrevendo as equações 2.33 e 2.33:

$$\hat{n} \times \vec{E}_{in}(\vec{r}) = -\frac{\vec{M}_a}{2} e^{-jkR_1} + k \int_{V'} (\hat{n} \cdot \hat{R}_2) \vec{M}_a \left(1 - \frac{j}{kR_2}\right) \frac{e^{-jk(R_1+R_2)+\frac{j\pi}{4}}}{4\pi\sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{\lambda}}} dl', \quad (3.3)$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_{in}(\vec{r}) = \frac{k}{\eta} \int_{V'} \hat{n} \times \vec{M}_a \frac{e^{-jk(R_1+R_2)+\frac{j\pi}{4}}}{4\pi\sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{\lambda}}} dl'. \quad (3.4)$$

Sabendo que  $\vec{M}_s(\vec{r}') = \vec{M}_a(\vec{r}') e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|} = M_a(\vec{r}') e^{-jkR_1}$ , têm-se:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{E}_{in}(\vec{r}) &= -\frac{M_s(\vec{r}')\hat{y}}{2} + jk \int_{V'} [(\hat{n} \cdot \hat{R}_2) M_s(\vec{r}')\hat{y}] \left(1 - \frac{j}{kR_2}\right) \frac{e^{-jkR_2-\frac{j\pi}{4}}}{4\pi\sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{\lambda}}} dl' \\ &= -\frac{M_s(\vec{r}')\hat{y}}{2} + jk \int_{V'} [(\hat{n} \cdot \hat{R}_2)\hat{y}] \left(jkM_s(\vec{r}') + \frac{M_s(\vec{r}')}{R_2}\right) \frac{e^{-jkR_2-\frac{j\pi}{4}}}{4\pi\sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{\lambda}}} dl', \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_{in}(\vec{r}) = \frac{jk}{\eta} \int_{V'} [\hat{n} \times M_s(\vec{r}')\hat{y}] \frac{e^{-jkR_2-\frac{j\pi}{4}}}{4\pi\sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{\lambda}}} dl' = -\frac{\hat{l}}{\eta} \int_{V'} jkM_s(\vec{r}') \frac{e^{-jkR_2-\frac{j\pi}{4}}}{4\pi\sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{\lambda}}} dl'. \quad (3.6)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier em 3.5 e 3.6:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}_{in}(\vec{r}, t) &= -\frac{\mathcal{M}_s(\vec{r}', t)\hat{y}}{2} + \\ &jk \int_{V'} [(\hat{n} \cdot \hat{R}_2)\hat{y}] \left(\mathcal{F}^{-1}\{jkM_s(\vec{r}')\} + \frac{\mathcal{M}_s(\vec{r}', t)}{R_2}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{-jkR_2-\frac{j\pi}{4}}}{4\pi\sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{\lambda}}}\right\} dl', \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{in}(\vec{r}, t) = -\frac{\hat{l}}{\eta} \int_{V'} \mathcal{F}^{-1}\{jkM_s(\vec{r}')\} * \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{-jkR_2-\frac{j\pi}{4}}}{4\pi\sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{\lambda}}}\right\} dl'. \quad (3.8)$$

É possível utilizar a propriedade da derivada de uma transformada em 3.7 e 3.8. Lembrando que  $k = \omega/c$ , em que  $\omega$  é a frequência angular e  $c$  é a velocidade da onda eletromagnética:

$$\mathcal{F}^{-1} \{jkM_s(\vec{r}')\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{j\omega}{c} M_s(\vec{r}') \right\} = \frac{1}{c} \frac{\delta \mathcal{M}_s(\vec{r}', t)}{\delta t}. \quad (3.9)$$

A segunda transformada inversa das equações 3.7 e 3.8 pode ser resolvida por meio da definição - 3.2 [10]:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{e^{-jkR_2 - \frac{j\pi}{4}}}{4\pi \sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{\lambda}}} \right\} = \frac{\sqrt{2\pi c}}{8\pi^2 \sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jkR_2 + j\omega t}}{\sqrt{j\omega}} d\omega, \quad (3.10)$$

cuja integral é dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jkR_2 + j\omega t}}{\sqrt{j\omega}} d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{t - \frac{R_2}{c}}} \left[ 1 + \text{Sign} \left( t - \frac{R_2}{c} \right) \right] = 2\sqrt{\frac{\pi}{t - \frac{R_2}{c}}}, \quad (3.11)$$

onde  $t$  é o instante de tempo no observador;  $R_2$  a distância entre o segmento fonte e o observador;  $t - \frac{R_2}{c}$  o instante de tempo no segmento fonte e

$$\text{Sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}. \quad (3.12)$$

Como  $t - \frac{R_2}{c}$  é sempre positivo, dado que não faz sentido, em um problema real, lidar com instantes de tempo negativos,  $\text{Sign} \left( t - \frac{R_2}{c} \right) = 1$ . Por isso a segunda igualdade da equação 3.11.

Definindo o retardo de tempo como  $\tau = t - \frac{R_2}{c}$  e substituindo 3.9-3.11 em 3.7 e 3.8:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}_{in}(\vec{r}, t) &= -\frac{\mathcal{M}_s(\vec{r}', t)\hat{y}}{2} + \\ &\frac{1}{4\pi} \int_{V'} [(\hat{n} \cdot \hat{R}_2)\hat{y}] \sqrt{\frac{2c}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_2}} (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2) dl', \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{in}(\vec{r}, t) = -\frac{\hat{l}}{4\pi\eta} \int_{V'} \sqrt{\frac{2c}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_2}} \mathcal{J}_1 dl', \quad (3.14)$$

em que  $\mathcal{J}_1$  e  $\mathcal{J}_2$  são as integrais de convolução temporal a seguir:

$$\mathcal{J}_1 = \frac{\delta\mathcal{M}_s(\vec{r}', t)}{c\delta t} * \frac{1}{\sqrt{\tau}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c} \frac{\delta\mathcal{M}_s(\vec{r}', t')}{\delta t'} \frac{1}{\sqrt{\tau - t'}} dt', \quad (3.15)$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{\mathcal{M}_s(\vec{r}', t)}{R_2} * \frac{1}{\sqrt{\tau}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{M}_s(\vec{r}', t')}{R_2} \frac{1}{\sqrt{\tau - t'}} dt'. \quad (3.16)$$

## 3.2 Marching-on-in-time

Para resolver numericamente as integrais de convolução 3.15 e 3.16 das equações integrais do campo elétrico - 3.13 - e do campo magnético - 3.14 -, é necessário discretizar o tempo. Para isso, utiliza-se da técnica *marching-on-in-time*, que consiste em calcular a corrente em um determinado instante de tempo por meio da corrente em instantes de tempo anteriores [41]. Isso pode ser feito porque o terreno suavemente irregular permite que se despreze o retroespalhamento.

Considera-se, primeiramente, que  $t_{ini}$  e  $t_{fin}$  são, respectivamente, os instantes inicial e final de transmissão do sinal pela antena. O instantes inicial e final em que a corrente equivalente surge em um segmento  $i$  -  $t_{ini,i}$  e  $t_{fin,i}$  - são dados pelos instantes  $t_{ini}$  e  $t_{fin}$  acrescidos do tempo de propagação do sinal até esse segmento, conforme expresso nas equações a seguir [10]:

$$t_{ini,i} = t_{ini} + \frac{R_1}{c}, \quad (3.17)$$

$$t_{fin,i} = \begin{cases} t_{fin} + \frac{R_{11}}{c}, & i = 1 \\ t_{fin,i-1} + \frac{1}{c} \left( \frac{\Delta_{i-1} + \Delta_i}{2} \right), & i = 2, 3, \dots, N \end{cases}, \quad (3.18)$$

onde  $R_1$ , conforme visto na figura 15, é a distância entre a antena transmissora e o centro do segmento  $i$ ;  $R_{11}$  é a distância entre o transmissor e o centro do primeiro segmento;  $N$  é

o número de segmentos que descrevem o perfil do terreno e  $\Delta_i$  e  $\Delta_{i-1}$  são, respectivamente, os comprimentos do segmento fonte e o anterior a ele.

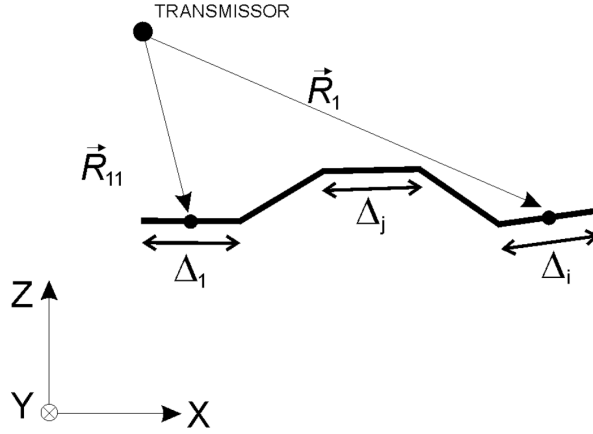


Figura 15 – Parâmetros considerados na definição dos limites de integração em  $t'$

Definidos os instantes inicial e final em que a corrente aparece em cada segmento, faz-se a discretização temporal. Os intervalos de tempo para o transmissor e para cada segmento são, respectivamente,  $\Delta t$  e  $\Delta t_i$ , sendo que  $\Delta t_i > \Delta t$ . Na discretização, cada instante de tempo  $t_p$  é dado por

$$t_p = t_{ini,i} + (p - 1)\Delta t_i, \quad p = 1, 2, \dots, N_{t,i}, \quad (3.19)$$

sendo  $N_{t,i}$  o número de instantes de tempo de cada segmento  $i$ .

Feita a discretização temporal, a variação da corrente em cada segmento  $i$ , dentro de um curto intervalo de tempo  $[t_{p-1}, t_p]$ , pode ser considerada linear. Para cada instante de tempo dentro desse intervalo, a corrente no segmento em análise é dada por [10]:

$$\mathcal{M}_i(\vec{r}', t') = \mathcal{M}_{i,p} \frac{(t' - t_p + \Delta t_i)}{\Delta t_i} - \mathcal{M}_{i,p-1} \frac{(t' - t_p)}{\Delta t_i}, \quad t_{p-1} \leq t' \leq t_p, \quad (3.20)$$

e sua derivada:

$$\frac{\delta \mathcal{M}_i(\vec{r}', t')}{\delta t'} = \frac{\mathcal{M}_{i,p} - \mathcal{M}_{i,p-1}}{\Delta t_i}, \quad (3.21)$$

onde  $\mathcal{M}_{i,p}$  e  $\mathcal{M}_{i,p-1}$  são as correntes magnéticas equivalentes no segmento  $i$  e nos instantes de tempo  $t_p$  e  $t_{p-1}$ , respectivamente. Pode-se, então, calcular as integrais de convolução



3.15 e 3.16 para cada intervalo  $\Delta t_i$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(\vec{r} = \vec{r}_i) &= \int_{t_{p-1}}^{t_p} \frac{1}{c} \frac{\mathcal{M}_{i,p} - \mathcal{M}_{i,p-1}}{\Delta t_i} \frac{1}{\sqrt{\tau - t'}} dt' \\ &= \frac{2}{c} \frac{\mathcal{M}_{i,p} - \mathcal{M}_{i,p-1}}{\Delta t_i} (\sqrt{\tau - t_{p-1}} - \sqrt{\tau - t_p}), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2(\vec{r} = \vec{r}_i) &= \int_{t_{p-1}}^{t_p} \frac{1}{R_2} \left[ \mathcal{M}_{i,p} \frac{(t' - t_p + \Delta t_i)}{\Delta t_i} - \mathcal{M}_{i,p-1} \frac{(t' - t_p)}{\Delta t_i} \right] \frac{1}{\sqrt{\tau - t'}} dt' \\ &= \frac{2}{3R_2 \Delta t_i} [(2\tau + t_{p-1} - 3t_p) \sqrt{\tau - t_{p-1}} - 2(\tau - t_p) \sqrt{\tau - t_p}] (\mathcal{M}_{i,p} - \mathcal{M}_{i,p-1}) \\ &\quad + \frac{2\mathcal{M}_{i,p}}{R_2} (\sqrt{\tau - t_{p-1}} - \sqrt{\tau - t_p}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Essas integrais são avaliadas em cada intervalo de tempo entre os instantes  $t_{ini,i}$  e o menor entre os instantes  $t_{fin,i}$  e  $\tau - t - \frac{R_2}{c}$  de cada segmento  $i$ .

### 3.3 Método dos Momentos

Feita a discretização no tempo para o cálculo das integrais de convolução  $J_1$  e  $J_2$ , as equações integrais do campo elétrico - 3.13 - e do campo magnético - 3.14 - são utilizadas para o cálculo das correntes equivalentes por meio do Método dos Momentos, assim como no domínio da frequência: define-se o pulso unitário como uma função de base e a função impulso como a função de teste. Fazendo o produto interno da função de teste com as equações 3.13 e 3.14:

$$[\hat{l} \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{in}(\vec{r}, t))]_{\vec{r}=\vec{r}_i} = - \sum_{j=1}^N \left[ \frac{1}{4\pi\eta} \int_{l'} \sqrt{\frac{2c}{(1 + \frac{R_2}{R_1}) R_2}} \mathcal{J}_1 dl' \right]_{\vec{r}=\vec{r}_i}. \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} [\hat{y} \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}_{in}(\vec{r}, t))]_{\vec{r}=\vec{r}_i} &= - \frac{[\mathcal{M}_s(\vec{r}', t)]_{\vec{r}=\vec{r}_i}}{2} + \\ &\sum_{j=1}^N \left[ \frac{1}{4\pi} \int_{l'} (\hat{n} \cdot \hat{R}_2) \sqrt{\frac{2c}{(1 + \frac{R_2}{R_1}) R_2}} (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2) dl' \right]_{\vec{r}=\vec{r}_i}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

Como as integrais de linha em 3.13 e 3.14 são avaliadas com o produto entre o valor do integrando no centro do segmento  $i$  e o comprimento  $\Delta_i$  desse segmento, desde que esse comprimento seja suficientemente pequeno, elas podem ser resolvidas pelo método dos retângulos, atentando-se para o caso em que  $R_2 = 0$  ( $i = j$ ), e reescritas em suas formas matriciais [5]:

$$[\mathcal{V}_{i,p}]_{MFIE} = [\mathcal{Z}_{ij,p}]_{MFIE} [\mathcal{M}_{i,p} - \mathcal{M}_{i,p-1}]_{MFIE}, \quad (3.26)$$

$$[\mathcal{V}_{i,p}]_{EFIE} = [\mathcal{Z}_{ij,p}^1]_{EFIE} [\mathcal{M}_{i,p} - \mathcal{M}_{i,p-1}]_{EFIE} + [\mathcal{Z}_{ij,p}^2]_{EFIE} [\mathcal{M}_{i,p}]_{EFIE}. \quad (3.27)$$

Os elementos das matrizes de tensão e de impedância, para a TD-MFIE, são [10]:

$$\mathcal{V}_{i,pMFIE} = \eta [\hat{l}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{H}}_{in}(\vec{r}, t_p))]_{\vec{r}=\vec{r}_i} = -\eta [\vec{\mathcal{H}}_{in}(\vec{r} = \vec{r}_i, t_p) \cdot \hat{y}], \quad (3.28)$$

$$\mathcal{Z}_{ij,pMFIE} = -\frac{1}{2\pi c} \sqrt{\frac{2c}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_2}} \frac{\Delta_j}{\Delta t_j} (\sqrt{\tau - t_{p-1}} - \sqrt{\tau - t_p}), \text{ se } i \neq j, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{ii,pMFIE} &= -\frac{\sqrt{2c}}{2\pi c \Delta t_i} \int_U \frac{1}{\sqrt{R_2}} (\sqrt{\tau - t_{p-1}} - \sqrt{\tau - t_p}) dl' \\ &= -\frac{\sqrt{2c}}{2\pi c \Delta t_i} (\sqrt{\tau - t_{p-1}} - \sqrt{\tau - t_p}) 2\sqrt{2\Delta_i} \\ &= -\frac{2\sqrt{c\Delta_i}}{\pi c \Delta t_i} (\sqrt{\tau - t_{p-1}} - \sqrt{\tau - t_p}), \text{ se } i = j, \end{aligned} \quad (3.30)$$

Conforme dito anteriormente, ao se desprezar o retroespalhamento, pode-se calcular a corrente de cada segmento em um determinado instante a partir de instantes de tempo anteriores. Logo:

$$\mathcal{V}_{i,p} = \sum_{j=1}^i \sum_{p_i=2}^p \mathcal{Z}_{ij,p_i} (\mathcal{M}_{j,p_i} - \mathcal{M}_{j,p_i-1}). \quad (3.31)$$

Manipulando 3.31 para retirar  $\mathcal{M}_{i,p}$  do somatório:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{i,p} &= \sum_{p_i=2}^p \mathcal{Z}_{ii,p_i}(\mathcal{M}_{i,p_i} - \mathcal{M}_{i,p_i-1}) + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p_i=2}^p \mathcal{Z}_{ij,p_i}(\mathcal{M}_{j,p_i} - \mathcal{M}_{j,p_i-1}) \\ &= \mathcal{Z}_{ii,p}(\mathcal{M}_{i,p} - \mathcal{M}_{i,p-1}) + \sum_{p_i=2}^{p-1} \mathcal{Z}_{ii,p_i}(\mathcal{M}_{i,p_i} - \mathcal{M}_{i,p_i-1}) + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p_i=2}^p \mathcal{Z}_{ij,p_i}(\mathcal{M}_{j,p_i} - \mathcal{M}_{j,p_i-1}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Isolando  $\mathcal{M}_{i,p}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i,p} &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{ii,p}} \left[ \mathcal{V}_{i,p} + \mathcal{Z}_{ii,p} \mathcal{M}_{i,p-1} - \sum_{p_i=2}^{p-1} \mathcal{Z}_{ii,p_i}(\mathcal{M}_{i,p_i} - \mathcal{M}_{i,p_i-1}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p_i=2}^p \mathcal{Z}_{ij,p_i}(\mathcal{M}_{j,p_i} - \mathcal{M}_{j,p_i-1}) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.33)$$

O mesmo procedimento, para a TD-EFIE, leva aos seguintes valores para os elementos das matrizes [5]:

$$\mathcal{V}_{i,PEFIE} = [\hat{y} \cdot (\hat{n} \times \vec{\mathcal{E}}_{in}(\vec{r}, t_p))]_{\vec{r}=\vec{r}_i} = \vec{\mathcal{E}}_{in}(\vec{r} = \vec{r}_i, t_p) \cdot \hat{l}_i, \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{ij,PEFIE}^1 &= \frac{1}{2\pi} (\hat{n}_i \cdot \hat{R}_2) \sqrt{\frac{2c}{(1 + \frac{R_2}{R_1}) R_2}} \frac{\Delta_j}{3R_2 \Delta t_i} \left[ \left( 2\tau + t_{p-1} - 3t_p + 3\frac{R_2}{c} \right) \sqrt{\tau - t_{p-1}} \right. \\ &\quad \left. - \left( 2\tau - 2t_p + 3\frac{R_2}{c} \right) \sqrt{\tau - t_p} \right], \quad \text{se } i \neq j, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\mathcal{Z}_{ii,PEFIE}^1 = 0, \quad \text{se } i = j, \quad (3.36)$$

$$\mathcal{Z}_{ij,PEFIE}^2 = \frac{1}{2\pi} (\hat{n}_i \cdot \hat{R}_2) \sqrt{\frac{2c}{(1 + \frac{R_2}{R_1}) R_2}} \frac{\Delta_j}{R_2} (\sqrt{\tau - t_{p-1}} - \sqrt{\tau - t_p}), \quad \text{se } i \neq j, \quad (3.37)$$

$$\mathcal{Z}_{ii,PEFIE}^2 = -\frac{1}{2}, \quad \text{se } i = j \text{ e } p_i = p, \quad (3.38)$$

$$\mathcal{Z}_{ii,pEFE}^2 = 0, \text{ se } i = j \text{ e } p_i \neq p. \quad (3.39)$$

Desprezando o retroespalhamento:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{i,p} &= \sum_{j=1}^i \sum_{p_i=2}^p \mathcal{Z}_{ij,p_i}^1 (\mathcal{M}_{j,p_i} - \mathcal{M}_{j,p_i-1}) + \sum_{j=1}^i \sum_{p_i=1}^p \mathcal{Z}_{ij,p_i}^2 \mathcal{M}_{j,p_i} \\ &= \sum_{p_i=2}^p \mathcal{Z}_{ii,p_i}^1 (\mathcal{M}_{i,p_i} - \mathcal{M}_{i,p_i-1}) + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p_i=2}^p \mathcal{Z}_{ij,p_i}^1 (\mathcal{M}_{j,p_i} - \mathcal{M}_{j,p_i-1}) \\ &\quad + \sum_{p_i=1}^p \mathcal{Z}_{ii,p_i}^2 \mathcal{M}_{i,p_i} + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p_i=1}^p \mathcal{Z}_{ij,p_i}^2 \mathcal{M}_{j,p_i} \\ &= \sum_{p_i=2}^p \mathcal{Z}_{ii,p_i}^1 (\mathcal{M}_{i,p_i} - \mathcal{M}_{i,p_i-1}) + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p_i=2}^p \mathcal{Z}_{ij,p_i}^1 (\mathcal{M}_{j,p_i} - \mathcal{M}_{j,p_i-1}) \\ &\quad + \mathcal{Z}_{ii,p}^2 \mathcal{M}_{i,p} + \sum_{p_i=1}^{p-1} \mathcal{Z}_{ii,p_i}^2 \mathcal{M}_{i,p_i} + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p_i=1}^p \mathcal{Z}_{ij,p_i}^2 \mathcal{M}_{j,p_i}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Como  $\mathcal{Z}_{ii,p_i}^1 = 0$  e  $\mathcal{Z}_{ii,p_i}^2 = 0$  para  $p_i \neq p$ :

$$\mathcal{V}_{i,p} = \mathcal{Z}_{ii,p}^2 \mathcal{M}_{i,p} + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p_i=2}^p \mathcal{Z}_{ij,p_i}^1 (\mathcal{M}_{j,p_i} - \mathcal{M}_{j,p_i-1}) + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p_i=1}^p \mathcal{Z}_{ij,p_i}^2 \mathcal{M}_{j,p_i}. \quad (3.41)$$

Isolando  $\mathcal{M}_{i,p}$ :

$$\mathcal{M}_{i,p} = \frac{1}{\mathcal{Z}_{ii,p}^2} \left[ \mathcal{V}_{i,p} - \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p_i=2}^p \mathcal{Z}_{ij,p_i}^1 (\mathcal{M}_{j,p_i} - \mathcal{M}_{j,p_i-1}) - \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p_i=1}^p \mathcal{Z}_{ij,p_i}^2 \mathcal{M}_{j,p_i} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.42)$$

### 3.4 Aplicação da Transformada Rápida de Fourier (FFT) nas Integrais de Convolução e Cálculo do Campo Espalhado

As equações 3.33 e 3.42 são utilizadas para calcular as correntes magnéticas equivalentes ao longo do terreno e em uma determinada janela temporal por meio da TD-MFIE e da TD-EFIE, respectivamente. Obtidas essas correntes, encontra-se o campo espalhado.

Apesar de a possibilidade de se desprezar o retroespalhamento diminuir os limites superiores dos somatórios em  $j$  e  $p_i$ , o custo computacional continua alto pois esses somatórios se tratam de duas convoluções, uma espacial e uma temporal. Quanto maiores a quantidade de segmentos para representar o terreno e a frequência de amostragem em um determinado intervalo de tempo, maior o tempo que se gasta para calcular a corrente no receptor.

Pensando nisso, a proposta deste trabalho consiste em isolar as integrais de convolução  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$  de 3.33 e 3.42 nas expressões das correntes equivalentes e utilizar a transformada rápida de Fourier, aliada à propriedade da convolução no domínio do tempo [42], para diminuir o tempo de cálculo, fazendo com que o programa demande tempo e capacidade de processamento menores. Os resultados são apresentados e discutidos no Capítulo 4.

Substituindo 3.29 e 3.30 em 3.33:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i,p} = & \frac{1}{\mathcal{Z}_{ii,p}} \left[ \mathcal{V}_{i,p} + \mathcal{Z}_{ii,p} \mathcal{M}_{i,p-1} + \frac{\sqrt{c\Delta_i}}{\pi} \sum_{p_i=2}^{p-1} \frac{2}{c} \frac{(\mathcal{M}_{i,p_i} - \mathcal{M}_{i,p_i-1})}{\Delta t_i} (\sqrt{\tau - t_{p_i-1}} - \sqrt{\tau - t_{p_i}}) \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Delta_j}{4\pi} \sqrt{\frac{2c}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_2}} \sum_{p_i=2}^p \frac{2}{c} \frac{(\mathcal{M}_{j,p_i} - \mathcal{M}_{j,p_i-1})}{\Delta t_j} (\sqrt{\tau - t_{p_i-1}} - \sqrt{\tau - t_{p_i}}) \right], \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Aplicando 3.21 e 3.22 em 3.43:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i,p} = & \frac{1}{\mathcal{Z}_{ii,p}} \left[ \mathcal{V}_{i,p} + \mathcal{Z}_{ii,p} \mathcal{M}_{i,p-1} + \frac{\sqrt{c\Delta_i}}{\pi} \sum_{p_i=2}^{p-1} \int_{t_{p_i-1}}^{t_{p_i-1}} \frac{1}{c} \frac{(\mathcal{M}_{i,p_i} - \mathcal{M}_{i,p_i-1})}{\Delta t_i} \frac{1}{\sqrt{\tau - t'}} dt' \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Delta_j}{4\pi} \sqrt{\frac{2c}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_2}} \sum_{p_i=2}^p \int_{t_{p_i-1}}^{t_{p_i-1}} \frac{1}{c} \frac{(\mathcal{M}_{j,p_i} - \mathcal{M}_{j,p_i-1})}{\Delta t_j} \frac{1}{\sqrt{\tau - t'}} dt' \right], \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Utilizando 3.21 e considerando que o somatório das integrais em pequenos intervalos

$[t_{p_{i-1}}t_{p_i}]$  equivale a uma integral no intervalo  $[t_{p_{i-1}} = t_1t_{p_i} = t_p]$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i,p} = & \frac{1}{\mathcal{Z}_{ii,p}} \left[ \mathcal{V}_{i,p} + \mathcal{Z}_{ii,p}\mathcal{M}_{i,p-1} + \frac{\sqrt{c\Delta_i}}{\pi} \int_{t_1}^{t_{p-1}} \frac{1}{c} \frac{\delta\mathcal{M}_i(\vec{r}', t')}{\delta t'} \frac{1}{\sqrt{\tau - t'}} dt' \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Delta_j}{4\pi} \sqrt{\frac{2c}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_2}} \int_{t_1}^{t_p} \frac{1}{c} \frac{\delta\mathcal{M}_j(\vec{r}', t')}{\delta t'} \frac{1}{\sqrt{\tau - t'}} dt' \right], \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Nota-se que 3.45 envolve integrais de convolução próximas à descrita em 3.15, alterando o intervalo de uma janela temporal de tamanho infinito para uma janela definida pelos limites  $[t_{p_{i-1}} = t_1t_{p_i} = t_p]$ . Considerando que não houve sinal transmitido antes do instante inicial e desprezando o retroespalhamento, aplica-se 3.15 em 3.45:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i,p} = & \frac{1}{\mathcal{Z}_{ii,p}} \left\{ \mathcal{V}_{i,p} + \mathcal{Z}_{ii,p}\mathcal{M}_{i,p-1} + \frac{\sqrt{c\Delta_i}}{\pi} \left[ \frac{\delta\mathcal{M}_i(\vec{r}', t)}{c\delta t} * \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right]_{t=t_p} \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Delta_j}{4\pi} \sqrt{\frac{2c}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_2}} \left[ \frac{\delta\mathcal{M}_j(\vec{r}', t)}{c\delta t} * \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right]_{t=t_p} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Definidas as funções envolvidas nas convoluções temporais, estas são implementadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i,p} = & \frac{1}{\mathcal{Z}_{ii,p}} \left[ \mathcal{V}_{i,p} + \mathcal{Z}_{ii,p}\mathcal{M}_{i,p-1} + \frac{\sqrt{c\Delta_i}}{\pi} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \left\{ \frac{\delta\mathcal{M}_i(\vec{r}', t)}{c\delta t} \right\} \cdot \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right\} \right\} \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Delta_j}{4\pi} \sqrt{\frac{2c}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_2}} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \left\{ \frac{\delta\mathcal{M}_j(\vec{r}', t)}{c\delta t} \right\} \cdot \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right\} \right\} \right]_{t=t_p}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Podem-se adotar os mesmos procedimentos para a TD-EFIE. Substituindo 3.35,

3.37 e 3.38 em 3.42:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{i,p} &= \frac{\mathcal{V}_{i,p}}{\mathcal{Z}_{ii,p}^2} + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{p_i=2}^p 2 \cdot \frac{1}{2\pi} (\hat{n}_i \cdot \hat{R}_2) \sqrt{\frac{2c}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_2}} \left\{ \frac{\Delta_j}{3R_2 \Delta t_i} \left[ (2\tau - t_{p_{i-1}} - 3t_{p_i}) \sqrt{\tau - t_{p_{i-1}}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (2\tau - 2t_{p_i}) \sqrt{\tau - t_{p_i}} + \frac{3R_2}{c} (\sqrt{\tau - t_{p_{i-1}}} - \sqrt{\tau - t_{p_i}}) \right] (\mathcal{M}_{j,p_i} - \mathcal{M}_{j,p_{i-1}}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Delta_j}{R_2} (\sqrt{\tau - t_{p_{i-1}}} - \sqrt{\tau - t_{p_i}}) \mathcal{M}_{j,p_i} \right\} \\
&= \frac{\mathcal{V}_{i,p}}{\mathcal{Z}_{ii,p}^2} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Delta_j}{2\pi} (\hat{n}_i \cdot \hat{R}_2) \sqrt{\frac{2c}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_2}} \sum_{p_i=2}^p \left\{ \frac{2}{3R_2 \Delta t_i} \left[ (2\tau - t_{p_{i-1}} - 3t_{p_i}) \sqrt{\tau - t_{p_{i-1}}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (2\tau - 2t_{p_i}) \sqrt{\tau - t_{p_i}} \right] (\mathcal{M}_{j,p_i} - \mathcal{M}_{j,p_{i-1}}) + \frac{2\mathcal{M}_{j,p_i}}{R_2} (\sqrt{\tau - t_{p_{i-1}}} - \sqrt{\tau - t_{p_i}}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{c} \frac{(\mathcal{M}_{j,p_i} - \mathcal{M}_{j,p_{i-1}})}{\Delta t_i} (\sqrt{\tau - t_{p_{i-1}}} - \sqrt{\tau - t_{p_i}}) \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Utilizando 3.22, 3.23, 3.21 e 3.20 em 3.48, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{i,p} &= \frac{\mathcal{V}_{i,p}}{\mathcal{Z}_{ii,p}^2} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Delta_j}{2\pi} (\hat{n}_i \cdot \hat{R}_2) \sqrt{\frac{2c}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_2}} \left[ \int_{t_1}^{t_p} \frac{\mathcal{M}_j(\vec{r}', t')}{R_2} \frac{1}{\sqrt{\tau - t'}} dt' \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_1}^{t_p} \frac{1}{c} \frac{\delta \mathcal{M}_j(\vec{r}', t')}{\delta t'} \frac{1}{\sqrt{\tau - t'}} dt' \right], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.49)
\end{aligned}$$

Aplicando 3.15 e 3.16:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{i,p} &= \frac{\mathcal{V}_{i,p}}{\mathcal{Z}_{ii,p}^2} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Delta_j}{2\pi} (\hat{n}_i \cdot \hat{R}_2) \sqrt{\frac{2c}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_2}} \left\{ \left[ \frac{\mathcal{M}_j(\vec{r}', t)}{R_2} * \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right]_{t=t_p} \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{\delta \mathcal{M}_j(\vec{r}', t)}{c \delta t} * \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right]_{t=t_p} \right\} \\
&= \frac{\mathcal{V}_{i,p}}{\mathcal{Z}_{ii,p}^2} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\Delta_j}{2\pi} (\hat{n}_i \cdot \hat{R}_2) \sqrt{\frac{2c}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_2}} \left[ \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \left\{ \frac{\mathcal{M}_j(\vec{r}', t)}{R_2} \right\} \cdot \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right\} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \left\{ \frac{\delta \mathcal{M}_j(\vec{r}', t)}{c \delta t} \right\} \cdot \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right\} \right\} \right]_{t=t_p}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.50)
\end{aligned}$$

onde  $\tau = t - \frac{R_2}{c}$ .

Calculada a corrente magnética equivalente em toda a superfície do terreno, obtém-se o campo espalhado no domínio do tempo, cuja expressão pode ser obtida por meio da transformada inversa de Fourier do campo espalhado no domínio da frequência - 2.61 -,

reescrita da seguinte forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{in}(\vec{r}) - k \int_{l'} \vec{M}_a \times \hat{R}_2 \left(1 - \frac{j}{kR_2}\right) \frac{e^{-jk(R_1+R_2) + \frac{j\pi}{4}}}{4\pi \sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{\lambda}}} dl'. \quad (3.51)$$

Lembrando que  $\vec{M}_s(\vec{r}') = M_a(\vec{r}')e^{-jkR_1}\hat{y}$ , reescreve-se 3.51:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{in}(\vec{r}) - jk \int_{l'} (\hat{y} \times \hat{R}_2) M_a(\vec{r}') \left(1 - \frac{j}{kR_2}\right) \frac{e^{-jkR_2 - \frac{j\pi}{4}}}{4\pi \sqrt{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{\lambda}}} dl'. \quad (3.52)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier em 3.52, chega-se à expressão para o campo elétrico espalhado no domínio do tempo:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_{in}(\vec{r}, t) - \sum_{i=1}^N \sum_{p_i=2}^p (\hat{y} \times \hat{R}_2) \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2c}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_2}} \Delta_i(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2), \quad (3.53)$$

onde  $\mathcal{E}_{in}$  é o campo elétrico incidente na antena receptora;  $R_1$  é, conforme a Figura 4 a distância entre o transmissor e o centro do segmento fonte;  $R_2$  é a distância entre esse segmento e o receptor e  $\mathcal{J}_1$  e  $\mathcal{J}_2$  as integrais de convolução dadas por 3.22 e 3.23.

### 3.5 Considerações Finais

Neste Capítulo, desenvolveu-se a formulação das equações integrais no domínio do tempo - TD-MFIE e TD-EFIE -, bem como a maneira proposta de se acelerarem os tempos de cálculo de cada uma, utilizando FFT nos algoritmos.

No Capítulo 4, resultados obtidos do cálculo do campo espalhado no receptor por meio da TD-EFIE, da EFIE, da TD-MFIE, da MFIE e da TD-UTD são comparados em termos de exatidão, e a TD-EFIE, a EFIE, a TD-MFIE, a MFIE e a aplicação da FFT na formulação da TD-MFIE são comparadas em tempos de simulação, onde se observa que o algoritmo que envolve FFT conclui os cálculos em um tempo correspondente a 1/28 do tempo demandado pelo algoritmo que calcula diretamente no domínio do tempo.



## 4 Simulações Numéricas e Resultados

As formulações apresentadas nos Capítulos 2 e 3 são utilizadas na caracterização de um canal de rádio como o da Figura 1, cujo perfil, caracterizado pela interseção do solo com o plano de incidência, é representado por um enlace "cunha-dupla", duas cunhas consecutivas, como se vê na Figura 16. Resultados obtidos com a TD-EFIE e a EFIE [5] são comparados com a TD-MFIE e a MFIE [10] e com a TD-UTD [9] na seção 4.2. A seção 4.3 compara e discute os tempos de cálculo das formulações no domínio da frequência e do tempo apresentadas e da aplicação da FFT na TD-MFIE.

### 4.1 Descrição do Enlace

Este capítulo apresenta os resultados de simulações de um sistema de rádio enlace representado pela Figura 16. As antenas transmissora e receptora estão a uma distância de 200 metros entre si. O transmissor se encontra a cinco metros do solo e um receptor, a uma altura  $h_R$  que assume valores iguais a 5, 15, 30 e 90 metros da superfície. O terreno é representado por duas cunhas consecutivas com altura máxima de dois metros.

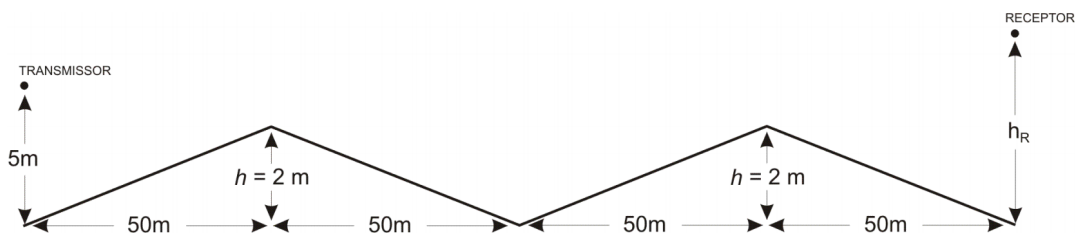


Figura 16 – Sistema e perfil do terreno analisado

O pulso eletromagnético transmitido é o da Figura 17, definido analiticamente no

domínio do tempo como [43]:

$$f(t) = \frac{C_0}{\pi} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{A_n T_n}{(t - t_0)^2 + T_n^2}, \quad (4.1)$$

em que  $A_n$  depende de  $N$ , um número inteiro e positivo, e  $T_n$  depende de  $N$  e de  $f_c$ , frequência que contém o maior valor do espectro do sinal.  $t_0$  é o retardo de tempo do pulso, considerando  $t = 0$  como origem. O espectro de  $f(t)$  é:

$$F(2\pi f) = C_0 e^{-j2\pi f t_0} \sum_{n=1}^{N+1} A_n e^{-|2\pi f| T_n} = C_0 (1 - e^{-|2\pi f| T})^N e^{-2\pi f T} e^{-j2\pi f t_0}, \quad (4.2)$$

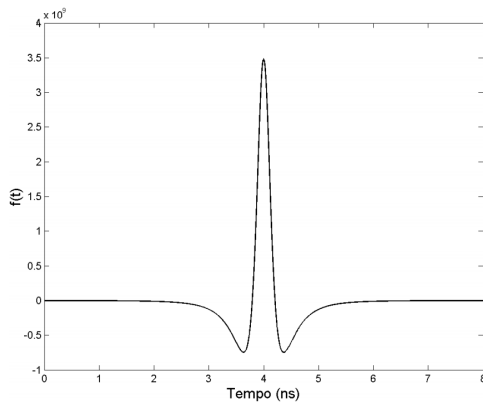
onde a constante  $C_0$  é definida de forma que  $|F(2\pi f_c)| = 1$  e

$$T = \frac{\ln(1 + N)}{2\pi f_c}. \quad (4.3)$$

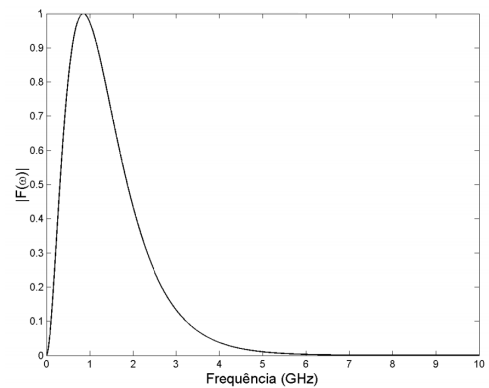
Para  $N = 2$ ,  $C_0 = (1 + N) \left(\frac{1+N}{N}\right)^N = 6,75$ ,  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = -1$ ,  $A_3 = 1$ ,  $T_1 = T$ ,

$T_2 = 2T$  e  $T_3 = 3T$ . Logo:

$$f(t) = \frac{6,75}{\pi} \left( \frac{T}{(t - t_0)^2 + T^2} - \frac{2T}{(t - t_0)^2 + (2T)^2} + \frac{3T}{(t - t_0)^2 + (3T)^2} \right). \quad (4.4)$$



(a) Sinal do pulso em função do tempo



(b) Espectro de frequência do pulso

Figura 17 – Pulso eletromagnético transmitido

Definiram-se, nas simulações, um atraso de tempo  $t_0 = 4ns$  e  $f_c = 850MHz$ . O tempo foi discretizado a uma frequência de amostragem  $f_s = 40GHz$ , o que implica um incremento temporal  $\Delta t = \frac{1}{f_s} = 25ps$ , e os instantes inicial e final de emissão do pulso pela

antena transmissora foram  $t_{ini} = 0ns$  a  $t_{fin} = 8ns$ , respectivamente. O terreno foi dividido em 0,5 segmento por comprimento de onda, considerando a maior frequência significativa do espectro do sinal que, conforme a Figura 17b, é aproximadamente  $7GHz$ .

No domínio do tempo, a caracterização radioelétrica desse canal foi feita por meio da TD-MFIE e da TD-EFIE, sendo comparados com resultados obtidos em [8] por meio da TD-UTD. Os tempos de cálculo da TD-MFIE e TD-EFIE foram comparados com as respectivas formulações no domínio da frequência e com a aplicação da FFT nas integrais de convolução da formulação da TD-MFIE.

As técnicas utilizadas para acelerar a transformada discreta de Fourier são a decimação em frequência (*decimation-in-frequency*), que consiste em dividir a transformada de Fourier de uma função em subsequências menores, e a decimação no tempo (*decimation-in-time*), na qual se formam subsequências a partir do sinal no domínio do tempo e essas subsequências são operadas paralelamente [23]. Ambos os métodos possuem o mesmo custo computacional. A ferramenta utilizada foi a biblioteca FFTW [44], desenvolvida no MIT e implementada pela combinação dos dois métodos [45].

No domínio da frequência, tanto para a EFIE quanto para a MFIE, calcula-se o campo elétrico espalhado no receptor repetidas vezes considerando diferentes frequências do espectro do pulso. Utiliza-se, nos cálculos, uma quantidade suficiente de frequências até  $7GHz$ . Acima disso, o espectro é considerado nulo. Feito isso, obtém-se a transformada inversa de Fourier do campo espalhado. O incremento de frequência  $\Delta f$  considera o intervalo de tempo do pulso no receptor [40]:

$$\Delta f = \frac{1}{t_{fin,r} - t_{ini,r}}, \quad (4.5)$$

onde  $t_{ini,r}$  e  $t_{fin,r}$  correspondem, respectivamente, aos instantes de tempo inicial e final da recepção do pulso eletromagnético.

O programa foi desenvolvido em linguagem C e a máquina utilizada nas simulações possui as seguintes especificações:

- Processador Intel Core i7-3770 CPU @ 3,40 GHz
- Memória RAM - 24 GB
- Sistema Operacional - Windows 10 (64 bits)

## 4.2 Pulso eletromagnético na antena receptora

Os resultados da simulação de propagação do pulso da Figura 17 sobre o terreno da Figura 16 utilizando TD-EFIE, TD-MFIE e TD-UTD para 5, 15, 30 e 90 m se encontram nas Figuras 18-25.

Pode-se notar que os métodos apresentaram resultados próximos entre si. No entanto, percebe-se uma discrepância nos resultados da TD-UTD em comparação com os demais métodos para  $h_R = 5m$  e  $h_R = 15m$ , que pode ser explicada pelo fato de a TD-UTD desconsiderar a difração dupla que ocorre nas cunhas consecutivas e a difração em arestas com ângulo maior que  $180^\circ$ , caso da aresta no ponto de encontro entre as cunhas. Para os casos em que a antena receptora está a 30 e a 90 metros do solo, os resultados ficaram bem mais próximos, já que o receptor se encontra afastado da região onde os campos difratados são mais intensos.

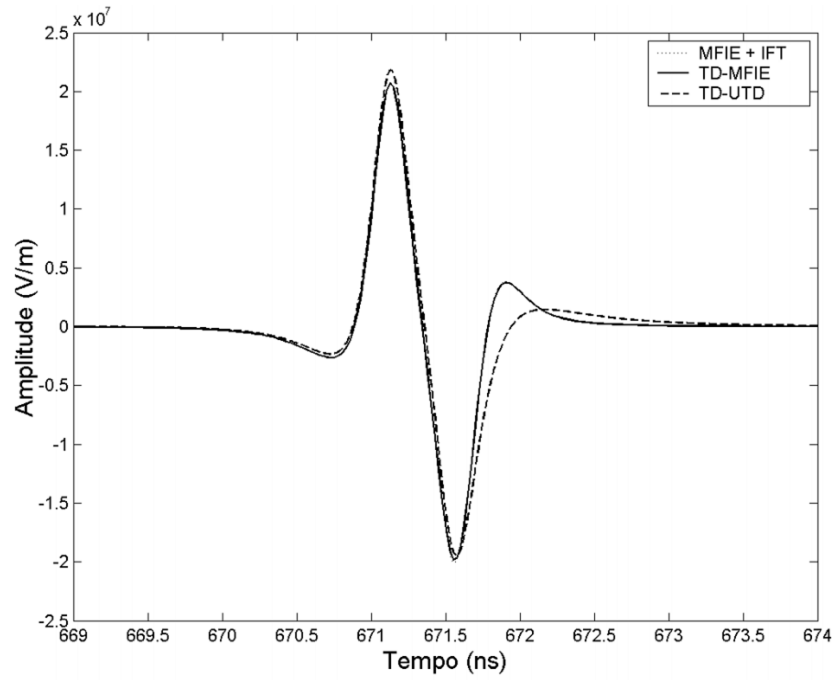


Figura 18 – Pulso eletromagnético na antena receptora para  $h_R = 5m$  calculado pela TD-MFIE, MFIE+IFT e TD-UTD

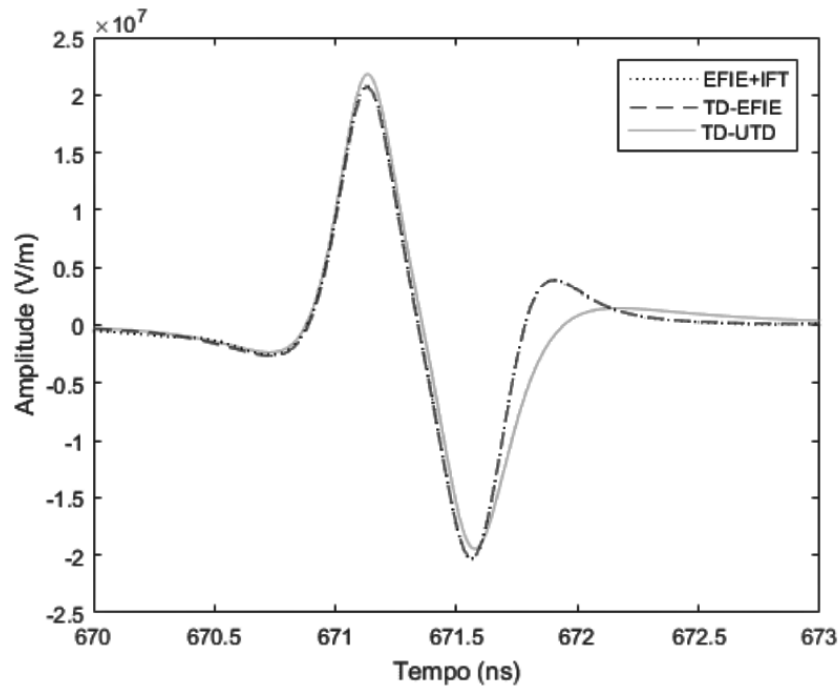


Figura 19 – Pulso eletromagnético na antena receptora para  $h_R = 5m$  calculado pela TD-EFIE, EFIE+IFT e TD-UTD

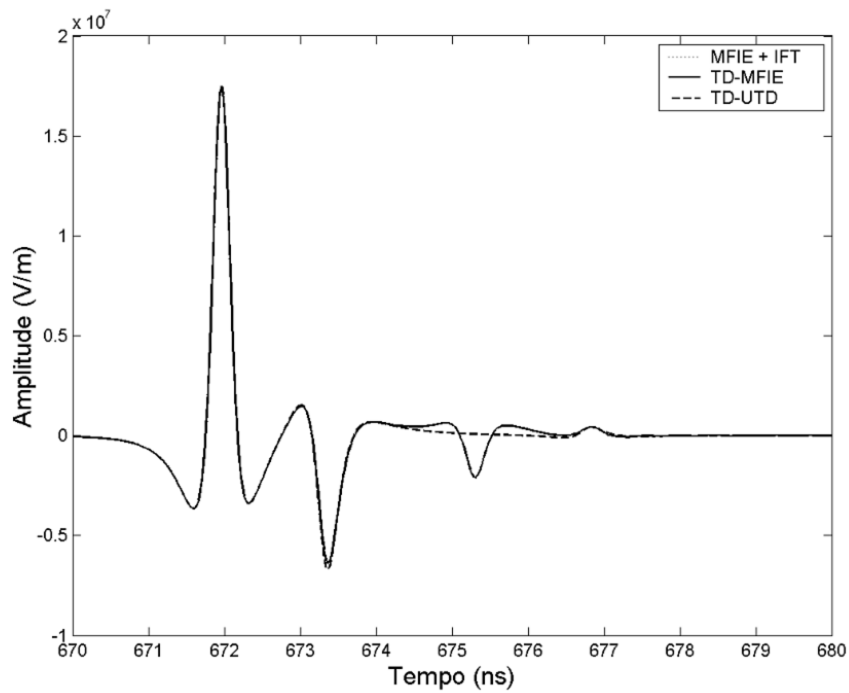


Figura 20 – Pulso eletromagnético na antena receptora para  $h_R = 15m$  calculado pela TD-MFIE, MFIE+IFT e TD-UTD

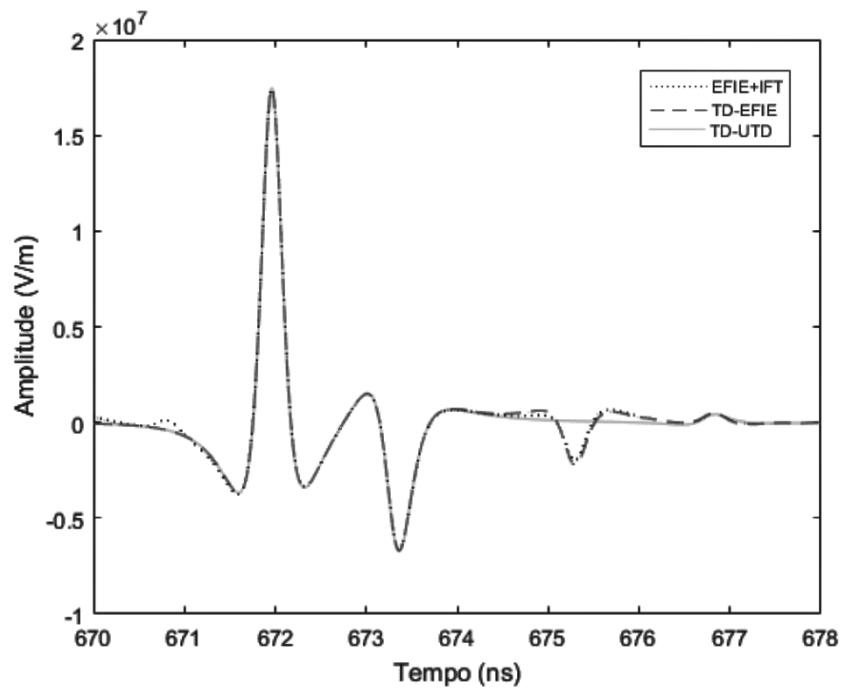


Figura 21 – Pulso eletromagnético na antena receptora para  $h_R = 15m$  calculado pela TD-EFIE, EFIE+IFT e TD-UTD

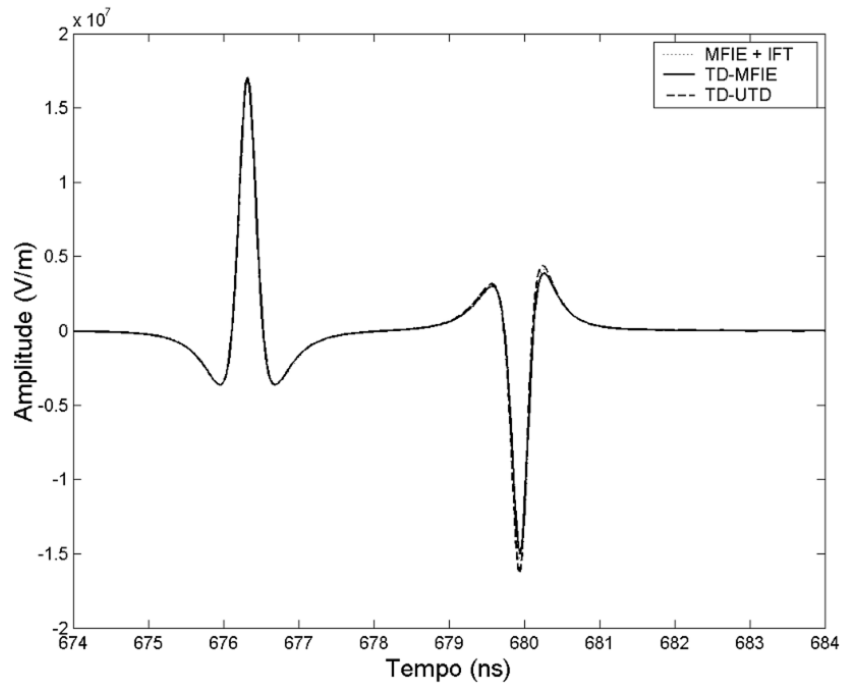


Figura 22 – Pulso eletromagnético na antena receptora para  $h_R = 30m$  calculado pela TD-MFIE, MFIE+IFT e TD-UTD

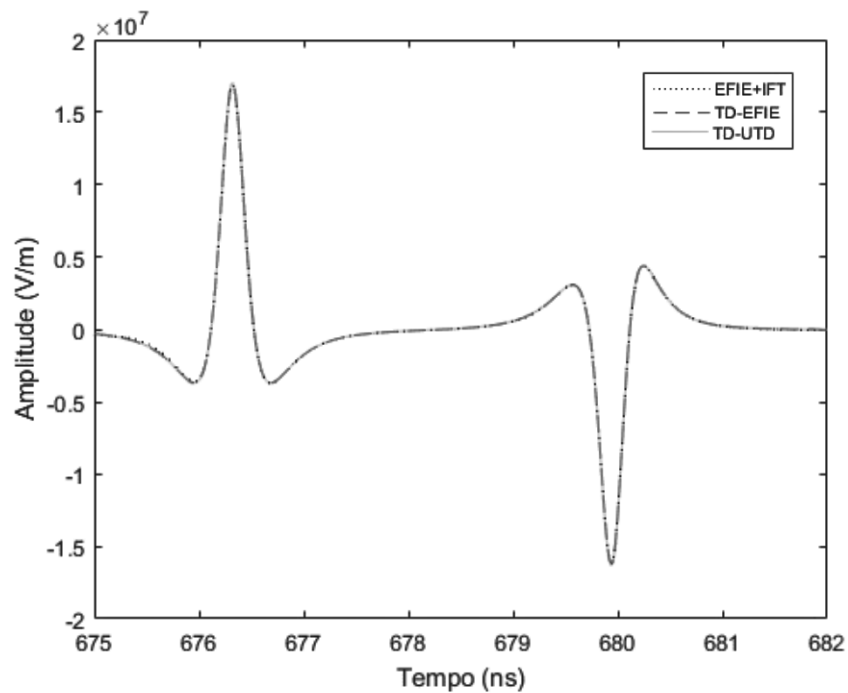


Figura 23 – Pulso eletromagnético na antena receptora para  $h_R = 30m$  calculado pela TD-EFIE, EFIE+IFT e TD-UTD

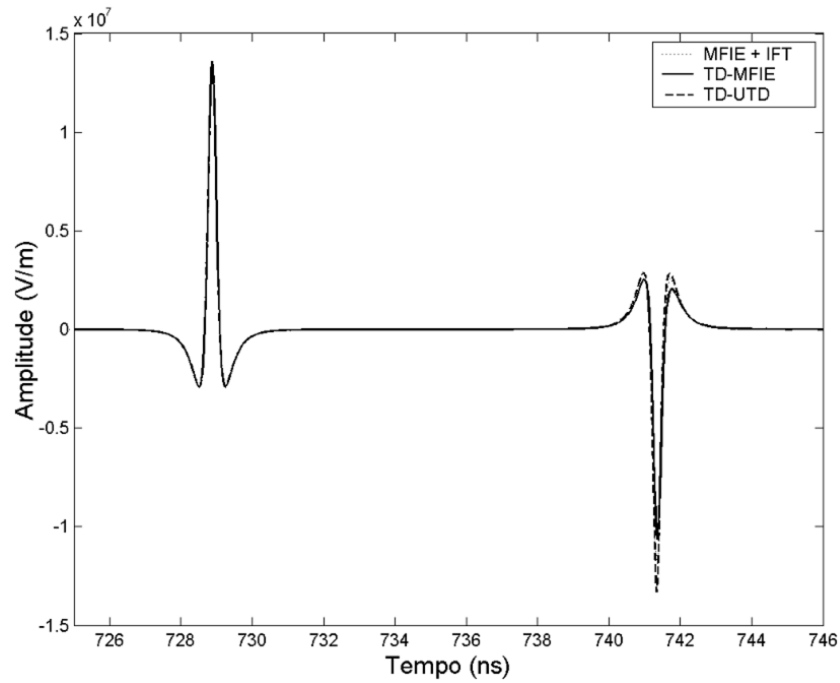


Figura 24 – Pulso eletromagnético na antena receptora para  $h_R = 90m$  calculado pela TD-MFIE, MFIE+IFT e TD-UTD

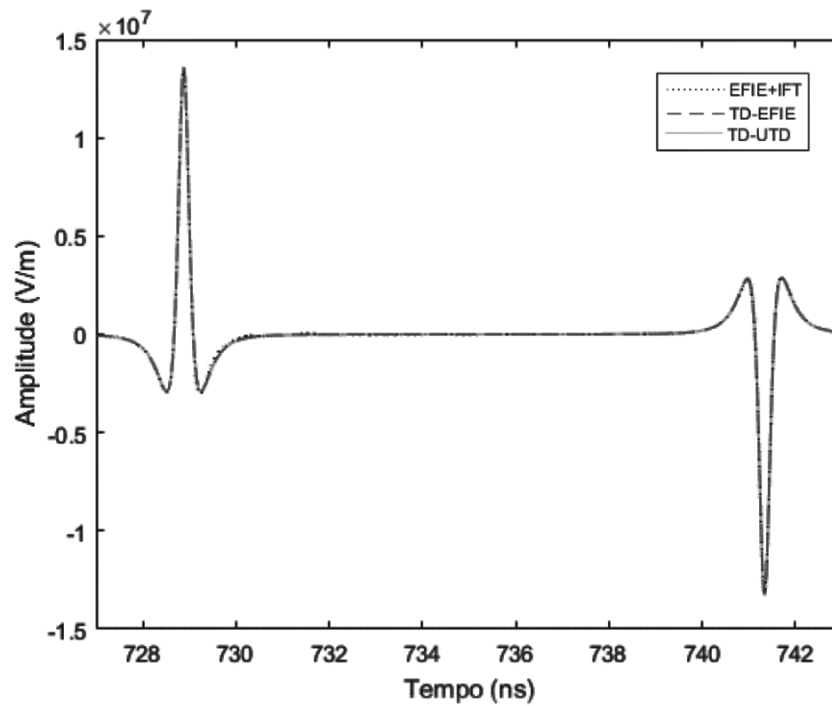


Figura 25 – Pulso eletromagnético na antena receptora para  $h_R = 90m$  calculado pela TD-EFIE, EFIE+IFT e TD-UTD



### 4.3 Tempos de cálculo e discussões sobre FFT

Os tempos que cada um dos métodos utilizados levaram para calcular o campo espalhado no receptor se encontram na Tabela 1.

Nota-se que as formulações no domínio da frequência demandaram tempos muito menores de cálculo ao serem comparadas com os cálculos feitos diretamente no domínio do tempo. A TD-EFIE levou um tempo aproximadamente 163 vezes maior que a EFIE e a TD-MFIE demandou um tempo de cálculo 168 vezes maior que a MFIE. Um dos motivos é o fato de o cálculo no domínio da frequência assumir o espectro como nulo para frequências acima de 7 GHz, o que diminui bastante o tempo de cálculo. Além disso, as integrais de convolução temporal existentes nas formulações no domínio do tempo aumentam, e muito, o número de operações a serem feitas para se chegar ao resultado.

A desvantagem do método no domínio da frequência se dá à medida em que o sinal analisado se aproxima de um sinal UWB, o que demandaria que o cálculo fosse feito para muitas frequências.

Observa-se, também, que a MFIE convergiu mais rápido que a EFIE - que demandou 40% a mais de tempo de cálculo -, bem como a TD-MFIE em comparação com a TD-EFIE - 36% a mais que o tempo de execução da TD-MFIE. As condições impostas ao problema podem ter levado a uma formulação mais simples para a MFIE, que envolva menos operações, o que demandou um tempo menor de processamento.

O uso da transformada rápida de Fourier fez com que a simulação da TD-MFIE levasse um tempo de 14 a 28 vezes menor que a simulação feita diretamente no domínio do tempo, mantendo a possibilidade de abranger sinais de banda larga, pois o sinal pode ser manipulado no domínio do tempo.

Tabela 1 – Tempo de execução da simulação para cada método

Método utilizado	Tempo de execução
EFIE+IFT	7 minutos
TD-EFIE	19 horas
MFIE+IFT	5 minutos
<b>TD-MFIE</b>	<b>14 horas</b>
<b>TD-MFIE com FFT</b>	<b>30-60 minutos</b>

Apesar de se apresentar como um método potencialmente vantajoso do ponto de vista de aplicação e tempo de cálculo, para o trabalho em questão, da maneira como foi implementado, ele apresentou discrepâncias significativas nos resultados em comparação com os demais métodos, como se vê na Figura 26, que mostra as correntes equivalentes no primeiro segmento calculadas pela TD-MFIE diretamente no domínio do tempo e pelo algoritmo que utiliza FFT; na Figura 27, que apresenta o erro calculado por meio da diferença entre essas correntes, e na Figura 28, onde se tem a razão entre as correntes calculadas pelos dois algoritmos. Apesar de as formas de onda aparentarem ser semelhantes, nota-se que a diferença é da ordem de  $10^7$ , e que a razão entre os resultados não é constante. Logo, não é simplesmente um problema de escala.

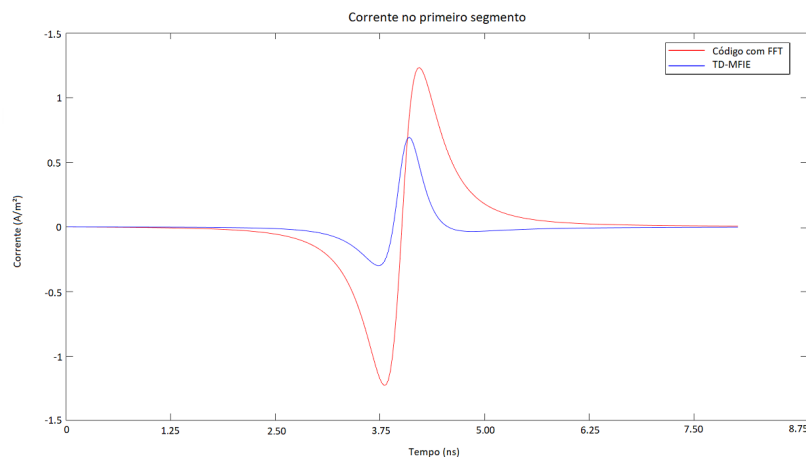


Figura 26 – Densidades superficiais de corrente equivalentes no primeiro segmento do perfil do terreno calculadas pela TD-MFIE diretamente no domínio do tempo e com aplicação da FFT

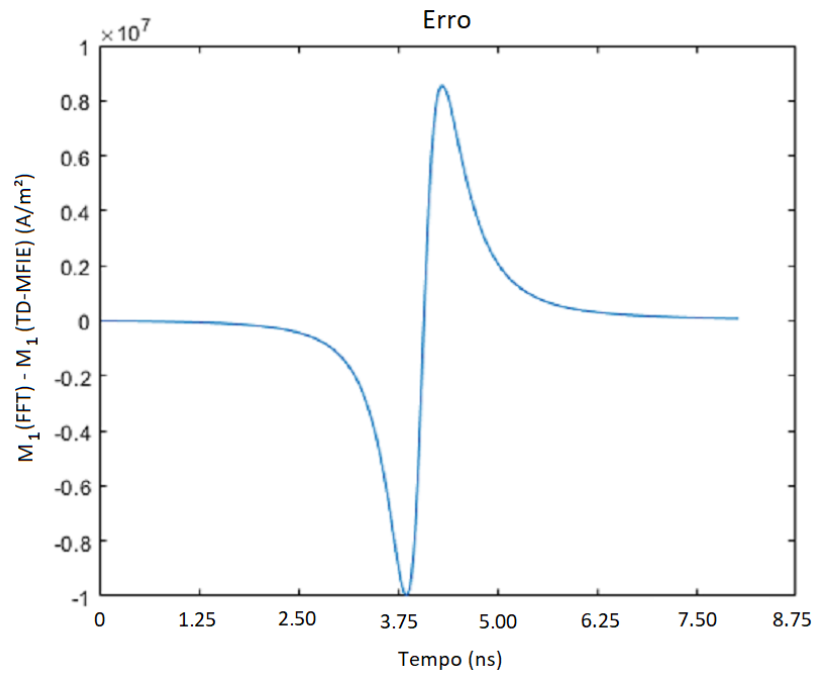


Figura 27 – Diferença entre as densidades superficiais de corrente equivalentes no primeiro segmento do perfil do terreno calculadas pela TD-MFIE diretamente no domínio do tempo e com aplicação da FFT

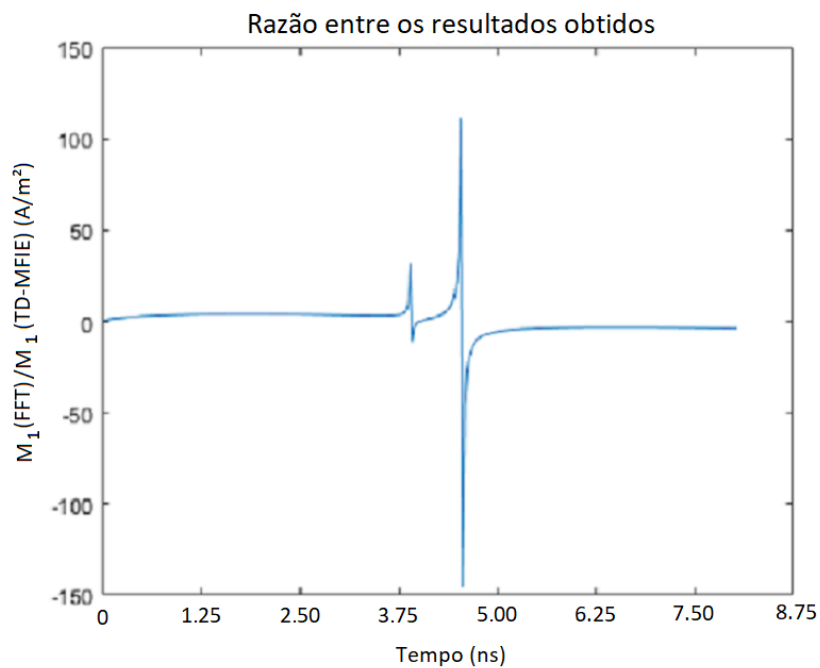


Figura 28 – Razão entre as densidades superficiais de corrente equivalentes no primeiro segmento do perfil do terreno calculadas pela TD-MFIE diretamente no domínio do tempo e com aplicação da FFT

Um hipótese para o ocorrido são problemas provenientes da mudança nos intervalos das integrais de convolução 3.15 e 3.16 ao executar as passagens 3.45-3.46 e 3.49-3.50.

Convoluções são bastante sensíveis a mudanças de intervalos. Essas passagens implicam considerar toda a janela de tempo de análise dos sinais submetidas à função de FFT. Dessa forma, as amplitudes dos sinais nos instantes iniciais de análise podem ter sofrido influência de informações contidas em instantes posteriores.

Uma segunda hipótese, que pode englobar a anterior, é a possibilidade de que os sinais tenham propriedades que mudam com o tempo - ou seja, não são sinais invariantes no tempo -, afinal, ao longo de um intervalo de tempo determinado, correntes provenientes de segmentos diferentes interferem no segmento analisado. Esse tipo de sinal demanda uma transformada de Fourier dependente do tempo (*time-dependent Fourier transform*) [23], que envolve a variável de tempo, que é discreta, e uma variável de frequência, que é contínua, além de envolver uma janela temporal, que deve ser escolhida com cuidado pois o janelamento de um sinal introduz componentes de frequências indesejadas no seu espectro.

## 5 Conclusões

Este trabalho propôs a aceleração de uma técnica de previsão de propagação radioelétrica envolvendo equações integrais no domínio do tempo que envolve aplicar a transformada rápida de Fourier (FFT) no cálculo de integrais de convolução temporal. No Capítulo 2, foram desenvolvidas as formulações da Equação integral do Campo Elétrico (EFIE) e da Equação Integral do Campo Magnético (MFIE), ambas no domínio da frequência e, no Capítulo 3, suas respectivas formulações no domínio do tempo - TD-EFIE e TD-MFIE, bem como a maneira que a FFT foi utilizada.

Assumiu-se uma onda com polarização vertical - ou paralela - e incidência rasante, o que permitiu que o terreno fosse tratado como um condutor magnético perfeito, implicando na existência, sobre ele, apenas de correntes magnéticas superficiais. O terreno foi considerado invariante na direção perpendicular ao plano de incidência para que se aplicasse o Método da Fase Estacionária que reduziu as integrais de superfície a integrais de linha. O fato de o terreno ser suavemente irregular permitiu que se desprezasse o retroespalhamento. Dessa forma, as correntes magnéticas superficiais puderam ser calculadas de maneira recursiva pelo Método dos Momentos, considerando apenas correntes de segmentos anteriores e de instantes anteriores ao analisado.

Os resultados no Capítulo 4 mostram que a TD-UTD apresenta uma diferença em comparação com as demais formulações por desconsiderar difrações que ocorrem nas arestas das cunhas que descrevem o terreno. Essas diferenças diminuíram à medida que receptor se afastava da superfícies, onde essas difrações são mais intensas. As equações integrais no domínio da frequência forneceram os resultados em um tempo muito menor que no domínio do tempo. Isso se deve à ausência de integrais de convolução temporal;

ao fato de se desconsiderarem frequências maiores que a maior frequência significativa do espectro - 7 GHz - e ao fato de que, pra frequências menores, o terreno é dividido em um número menor de segmentos, o que diminui ainda mais o tempo de cálculo. Esses motivos tornam a formulação no domínio da frequência mais atraente em muitos casos. No entanto, é interessante estudar o quanto elas são vantajosas à medida em que os sinais envolvidos se aproximam de sinais UWB - o que demandaria o cálculo em uma quantidade significativamente maior de frequências.

A aplicação da FFT no cálculo baseado em TD-MFIE acelerou consideravelmente o tempo de execução da simulação - em até 28 vezes -, mostrando ser uma técnica que mereça atenção. Contudo, sua aplicação demanda cuidado e um estudo mais profundo a respeito dos sinais que estão sendo submetidos a ela, visto que os resultados apresentaram muita discrepância. Logo no primeiro segmento, a corrente calculada pelo algoritmo que utiliza FFT alcançou valores muito mais altos - até 125 vezes maiores - que a corrente obtida com os demais algoritmos.

Uma proposta para trabalhos futuros é estudar a possibilidade da aplicação da transformada de Fourier dependente do tempo, que demandará a escolha de uma boa função para janelamento e a definição do parâmetro  $\lambda$ , variável de frequência que dependerá dos sinais analisados. Quanto à janela, deve-se ter em mente uma relação de compromisso, visto que o espectro ideal para essa janela é a função impulso, o que corresponde a uma função constante em todo o domínio temporal. Outra sugestão é cogitar a aplicação da FFT nas integrais de convolução espaciais, relacionadas ao terreno, o que demanda uma manipulação maior das equações, como, por exemplo, separação de variáveis para encontrar funções espaciais que dependam apenas de  $x$  ou de  $z$ , além de outras prováveis aproximações.

Pode-se pensar também em diminuir o tamanho elétrico do enlace, o que diminuirá

o custo computacional do algoritmo. As principais aplicações da técnica *marching-on-in-time* envolvem problemas de espalhamento em objetos eletricamente pequenos. Como sinais UWB podem sofrer interferência de canais adjacentes devido à sua largura de banda ser muito alta, estes normalmente são emitidos a potências baixas. Conseqüentemente, o alcance desses sinais é menor. Por causa disso, estes sinais estão comumente envolvidos em aplicações que envolvem objetos pequenos, como detecção de alvos.

Ainda falando em análise no domínio do tempo, pode-se pensar em outros critérios para segmentação de terreno. Considerou-se, neste trabalho, a maior frequência significativa do espectro pois a análise no domínio do tempo considera todas as frequências do espectro. Logo, segmentar o terreno considerando a maior frequência significativa permite uma boa precisão para essa frequência e para frequências inferiores. No entanto, uma sugestão é pensar em critérios no domínio do tempo, relacionados à largura do pulso, por exemplo.

Convém estudar a relação entre o problema, com suas condições e aproximações, e o fato de a MFIE convergir mais rapidamente que a EFIE, avaliando se alterações nas condições impostas ou no tipo de terreno levam a resultados diferentes nesse sentido. Outra possibilidade é aplicar, na EFIE, a ideia desenvolvida em [10] para acelerar os cálculos no domínio da frequência, dividindo os terrenos em grupos de segmentos e utilizando aproximações nos segmentos contidos em regiões de campo distante - *Fast Far Field Approximation* (FAFFA). Por fim, propõe-se analisar a viabilidade e as conseqüências no custo computacional à medida que se diminui a largura do pulso eletromagnético analisado, fazendo-o tender ao impulso.

# Referências

- [1] Teles, R. A. A.: *Lambda Switching em um Ambiente de Redes Definidas por Software*. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Minas Gerais, 2018. Citado na página 18.
- [2] Freitas, A. E. de: *Predição de cobertura em enlaces radioelétricos sobre terrenos irregulares através de equações integrais*. Dissertação de Mestrado, PPGEE-UFMG, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 18, 33 e 34.
- [3] Rappaport, T. S.: *Wireless Communications: Principles and Practice*. Prentice Hall PTR, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- [4] Barbosa, R. L. e F. J. S. Moreira: *Equações Integrais na Previsão de Propagação Radioelétrica no Domínio do Tempo*. 18 SBMO - Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica e 13 CBMAG - Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, páginas 294–298, 2018. Citado na página 19.
- [5] Barbosa, R. L.: *Caracterização da Propagação Radioelétrica sobre Terrenos Irregulares Utilizando Equações Integrais no Domínio do Tempo*. Dissertação de Mestrado, PPGEE-UFMG, 2018. Citado 12 vezes nas páginas 19, 20, 21, 23, 24, 30, 38, 39, 40, 49, 50 e 56.
- [6] Collin, R. E.: *Antennas and Radiowave Propagation*. McGraw-Hill Book Company, 1985. Citado na página 19.



- 
- [7] Kouyoumjian, R. G. e P. H. Pathak: *A Uniform Geometric Theory of Diffraction for an Edge in a Perfectly Conducting Surface*. Proceedings of the IEEE, 62:1448 – 1461, dezembro 1974. Citado na página 19.
- [8] Borges, K. L.: *Caracterização banda-larga do canal rádio utilizando a teoria uniforme da difração*. Dissertação de Mestrado, PPGEE-UFMG, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 19, 21, 23 e 58.
- [9] Schettino, D. N.: *Técnicas assintóticas para predição de cobertura radioelétrica*. Dissertação de Mestrado, PPGEE-UFMG, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 56.
- [10] Teperino, R. B. V.: *Utilização de Equações Integrais no Domínio do Tempo na Predição da Propagação sobre Terrenos Irregulares*. Dissertação de Mestrado, PPGEE-UFMG, 2003. Citado 19 vezes nas páginas 19, 20, 21, 23, 24, 32, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 42, 45, 46, 47, 49, 56 e 70.
- [11] W. G. Facco, E. J. Silva, A. S. Moura N. Z. Lima e R. R. Saldanha: *Handling Material Discontinuities in the Generalized Finite Element Method to Solve Wave Propagation Problems*. IEEE Transactions on Magnetics, 48(2):607–610, 2012. Citado na página 19.
- [12] Belém, A. N.: *Caracterização bidimensional de canais rádio através de diferenças finitas no domínio do tempo*. Dissertação de Mestrado, PPGEE-UFMG, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.
- [13] Resende, U.C., Fernando Moreira e O.M.C. Pereira-Filho: *Efficient evaluation of singular integral equations in moment method analysis of bodies of revolution*. 6:373–391, dezembro 2007. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

- [14] Ott, R. H. e L. A. Berry: *An alternative integral equation for propagation over irregular inhomogeneous terrain*. Radio Science, 5(5):767–771, 1970. Citado na página 20.
- [15] Ott, R. H., L. E. Vogler e G. A. Hufford: *Ground-wave propagation over irregular inhomogeneous terrain: Comparisons of calculations and measurements*. IEEE Trans. Antenn. Propagat., AP-27(2):284–286, 1979. Citado na página 20.
- [16] Hviid, J. T., J. B. Andersen, J. Toftgard e J. Bojer: *Terrain-based propagation model for rural area-an integral equation approach*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 43(1):41–46, 1995. Citado 4 vezes nas páginas 20, 37, 38 e 42.
- [17] Moreira, F. J. S.: *Aplicação de Equações Integrais para a predição de propagação radioelétrica sobre solos suavemente irregulares e incidência rasante*. SBMO / IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC'01), 2001. Citado 3 vezes nas páginas 20, 38 e 39.
- [18] Brennan, C., P. Cullen e L. Rossi: *A high speed adaptive methodology for calculating UHF propagation loss over terrain*. Em *Proceedings of 8th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications - PIMRC '97*, volume 2, páginas 629–634 vol.2, 1997. Citado na página 20.
- [19] Brennan, C., P. J. Cullen e L. Rossi: *An MFIE-based tabulated interaction method for UHF terrain propagation problems*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 48(6):1003–1005, 2000. Citado na página 20.
- [20] Rousseau, Paul R.: *Time Domain Version of the Uniform Geometrical Theory of Diffraction*. Tese de Doutorado, THE OHIO STATE UNIVERSITY., janeiro 1995. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 43.

- [21] Rao, S. M. e D. R. Wilton: *Transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 39(1):56–61, 1991. Citado na página 21.
- [22] Zhu, Ming Da, Xi Lang Zhou e Wen Yan Yin: *An Adaptive Marching-on-in-Order Method With FFT-Based Blocking Scheme*. Antennas and Wireless Propagation Letters, IEEE, 9:436 – 439, fevereiro 2010. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 43.
- [23] Oppenheim, Alan V., Ronald W. Schafer e John R. Buck: *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-hall Englewood Cliffs, second edição, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 58 e 67.
- [24] Rego, C.G., F.J.V. Hasselmann e Fernando Moreira: *Time-domain analysis of a reflector antenna illuminated by a Gaussian pulse*. Volume 1, páginas 483 – 486 vol. 2, fevereiro 1999, ISBN 0-7803-5807-4. Citado na página 21.
- [25] Rego, C.G. e Flavio Hasselmann: *A Time-Domain Uniform Asymptotic Theory Applied to the Analysis of Pulse-Excited PEC Wedges*. Antennas and Wireless Propagation Letters, IEEE, 10:955 – 958, janeiro 2012. Citado na página 21.
- [26] Cheng, G. S., D. Z. Ding e R. S. Chen: *Analysis of Transient Electromagnetic Scattering From Composite Conducting-Dielectric Targets With the Time-Domain Fast Dipole Method*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 65(7):3800–3805, 2017. Citado na página 21.
- [27] Teperino, R. B. V. e F. J. S. Moreira: *A TD-MFIE for a vertically-polarized pulse propagation over irregular terrains*. Em *Proceedings of the 2003 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC 2003*. (Cat. No.03TH8678), volume 1, páginas 199–204 vol.1, 2003. Citado na página 21.

- [28] Seo, S.M., C. F. Wang e J. F. Lee: *Analyzing PEC scattering structure using an IE-FFT algorithm*, 2009. Citado na página 22.
- [29] Mo, Seo Seung: *An IE-FFT Algorithm to Analyze PEC Objects for MFIE Formulation*. J Electromagn Eng Sci, 19(1):6–12, 2019. <http://www.jees.kr/journal/view.php?number=3326>. Citado na página 22.
- [30] Zhao, Jian Yao, W. Luo e W. Y Yin: *Time domain integral equation method using FFT-based marching-on-in-degree method for analyzing PEC patches on substrate (invited)*. ISAP 2013 - Proceedings of the 2013 International Symposium on Antennas and Propagation, 1:63–65, janeiro 2013. Citado na página 22.
- [31] Bloemenkamp, R. F. e P. M. van den Berg: *A conjugate gradient FFT method for transient scattering by dielectric cylinders*. Em *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. 1999 Digest. Held in conjunction with: USNC/URSI National Radio Science Meeting (Cat. No.99CH37010)*, volume 2, páginas 1374–1377 vol.2, 1999. Citado na página 22.
- [32] Yilmaz, Ali, Jian Ming Jin, Eric Michielssen e Daniel Weile: *A Fast Fourier Transform Accelerated Marching-on-in-Time Algorithm for Electromagnetic Analysis*. *Electromagnetics*, 21:181–197, abril 2001. Citado na página 22.
- [33] Poggio, A.J. e E.K. Miller: *Computer Techniques for Electromagnetics*. International Series of Monographs in Electrical Engineering. Pergamon, 1973, ISBN 978-0-08-016888-3. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080168883500088>. Citado na página 27.
- [34] Balanis, C. A.: *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley and Sons, Inc., 2012. Citado na página 28.

- [35] Harrington, R. F.: *Time-harmonic electromagnetic fields*. McGraw-Hill, 1961. Citado na página 29.
- [36] McNamara, D.A., C.W.I. Pistorius e J.A.G. Malherbe: *Introduction to the Uniform Geometrical Theory of Diffraction*. Antennas and Propagation Library. Artech House, 1990, ISBN 9780890063019. <https://books.google.co.uk/books?id=bn6pQgAACAAJ>. Citado na página 31.
- [37] Moreira, F. J. S.: *MFIE-based propagation prediction*. Volume 1, páginas 195 – 198 vol.1, fevereiro 2001, ISBN 0-7803-7065-1. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- [38] Moreira, F. J. S.: *A MFIE-based prediction for UHF vertically-polarized wave propagation over irregular terrains*. Em *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. 2001 Digest. Held in conjunction with: USNC/URSI National Radio Science Meeting (Cat. No.01CH37229)*, volume 1, páginas 456–459 vol.1, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- [39] Abramowitz, Milton e Irene A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, ninth dover printing, tenth gpo printing edição, 1964. Citado na página 36.
- [40] Bracewell, R. N.: *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw Hill, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 58.
- [41] Manara, G., A. Monorchio e R. Reggiannini: *A space-time discretization criterion for a stable time-marching solution of the electric field integral equation*. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(3):527–532, março 1997. Citado na página 46.
- [42] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky e S. H. Nawab: *Signals and Systems*. Prentice-Hall, 1996, ISBN 0-13-814757-4. Citado na página 52.

- 
- [43] Johansen, P. M.: *Time-domain analysis of electromagnetic scattering problems*. Tese de Doutorado, Technical University of Denmark, 1996. Citado na página 57.
- [44] Frigo, M. e S. G. Johnson: *FFTW Home Page*. <http://fftw.org/>. Citado na página 58.
- [45] Frigo, M. e S. G. Johnson: *FFTW-The Design and Implementation of FFTW3*. Proceedings of the IEEE, 93(2):216–231, 2005. Citado na página 58.