



Universidade Federal de Minas Gerais  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia de Produção



# **NOVAS ABORDAGENS PARA PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA DE DOIS ESTÁGIOS**

DÉBORA ALVES RIBEIRO

Belo Horizonte MG  
2020

DÉBORA ALVES RIBEIRO

# NOVAS ABORDAGENS PARA PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA DE DOIS ESTÁGIOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Engenharia de Produção.

**Orientador:** Ricardo Saraiva de Camargo.

Belo Horizonte - MG  
30 de novembro de 2020

R484n	<p>Ribeiro, Débora Alves. Novas abordagens para problemas de otimização robusta de dois estágios [recurso eletrônico] / Débora Alves Ribeiro. - 2020. 1 recurso online (xiii, 81 f. : il., color.) : pdf.</p> <p>Orientador: Ricardo Saraiva de Camargo.</p> <p>Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.</p> <p>Bibliografia: f. 77-81.</p> <p>Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.</p> <p>1. Engenharia de produção - Teses. 2. Otimização robusta - Teses. 3. Algoritmos - Teses. I. Camargo, Ricardo Saraiva de. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.</p> <p>CDU: 658 (043)</p>
-------	--



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**



## FOLHA DE APROVAÇÃO

**Novas abordagens para problemas de otimização robusta de dois estágios**

### **DÉBORA ALVES RIBEIRO**

Tese submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, como requisito para obtenção do grau de Doutor em ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, área de concentração PESQUISA OPERACIONAL E INTERVENÇÃO EM SISTEMAS SOCIOTÉCNICOS, linha de pesquisa Otimização e Simulação de Sistemas Logíst. e de Grande Porte.

Aprovada em 30 de novembro de 2020, pela banca constituída pelos membros:

Prof(a). Ricardo Saraiva de Camargo - Orientador  
UFMG

DocuSigned by:

Prof(a). Gilberto de Miranda Junior  
UFOP

Prof(a). Rodney Rezende Saldanha  
UFMG

Prof(a). Alexandre Xavier Martins  
UFOP

Prof(a). Elisângela Martins de Sá  
CEFET-MG

Prof(a). Thiago Augusto de Oliveira Silva  
UFOP

Belo Horizonte, 30 de novembro de 2020.

*Este trabalho é dedicado especialmente a minha mãe Socorro, ao meu pai Nelson, as minhas  
sobrinhas Beatriz, Alice, Gabrielle e meu sobrinho Benício.*

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus e Maria por ter chegado até aqui e por todas as bênçãos que me são ofertadas diariamente.

Ao meu orientador Dr. Ricardo Saraiva de Camargo pela paciência, incentivo e ensinamentos ao longo desses anos.

Agradeço minha mãe Maria do Socorro Alves Ribeiro e ao meu pai Nelson Noel Ribeiro pelo amor, incentivo, orações e confiança. Vocês são minha inspiração e minha força diária.

Aos meus irmãos Douglas, Regiane, Nelson e Dyemes por estarem sempre por perto me apoiando.

Aos amigos que permaneceram próximos e colaboraram para que esta caminhada se tornasse um pouco mais leve. Em especial e por motivos diversos agradeço a Karolliny Santos, Elaine Santos, Elizene Ribeiro, Luiza Real, Guilherme Ferreira, Tatiana Santos, Marcene Rodrigues e Edenilson Lopes.

A CAPES pela concessão da bolsa contribuindo para uma dedicação integral à pesquisa realizada.

A todos minha gratidão.

# Resumo

Nesta tese, novas técnicas para acelerar a resolução de problemas de otimização robusta de dois estágios, são propostas. Primeiramente, criou-se uma técnica híbrida baseada no método de feixe que acelera e melhora o método de geração de colunas e restrições de Zeng e Zhao. O problema não-linear resultante é resolvido por um algoritmo especializado de aproximação externa. Posteriormente, é introduzido um novo método decorrente da junção do Benders-dual com o método de Zeng e Zhao. Essa junção torna o problema mestre de cada iteração menor e mais fácil de ser resolvido quando comparado com o método de geração de colunas e restrições. Instâncias de dois problemas de localização e transporte foram usadas para avaliar o desempenho computacional dos métodos desenvolvidos.

**Palavras-chave:** Otimização robusta de dois estágios. Método de feixe. Geração de colunas e restrições. Técnica de aproximação externa. Problema de localização e transporte. Problema de localização de facilidades de dois níveis.

# Abstract

In this thesis, new techniques are proposed to solve the two stages robust optimization problem with uncertain data. First the column and constraint generation method of Zeng and Zhao is speeded by a bundle hybrid strategy, in which the resulting nonlinear problem is solved by an outer approximation technique. Moreover, a new method is devised. The method combines the Benders-dual with the Zeng and Zhao method. The combination of the method result in a smaller master problem that is easier to solve at each iteration when compared with the column and constraint generation of Zeng and Zhao. Instances of two facility and transportation robust optimization problems were used to assess the performance of the devised solution approaches.

**Keywords:** Two-stage robust optimization. Bundle method. Column-and-constraint generation. Outer approximation technique. Location transportation problem. Two-level facility location problem.



# Lista de figuras

Figura 3.1 – Esquema do método de geração de coluna e restrições com feixe . . . . .	23
Figura 3.2 – Impacto do orçamento de incerteza em relação ao tempo médio de execução ( $\bar{T}$ ) nas instâncias de tamanho $70 \times 70$ . . . . .	32
Figura 3.3 – Impacto do orçamento de incerteza em relação aos percentuais médios de economia ( $\bar{T}^s$ ) de execução das instâncias de tamanho $70 \times 70$ . . . . .	32
Figura 3.4 – Razão de tempo ( $T_{\Gamma(\%)} / \min_{m \in M} T_{m\Gamma(\%)}$ ) para cada orçamento de incerteza ao resolver as instâncias de tamanho $70 \times 70$ . . . . .	33
Figura 3.5 – Evolução do limite inferior e superior nas instâncias tipo 04 e $\Gamma = 40\%$ . . . . .	33
Figura 3.6 – Perfil de desempenho dos métodos em resolver instâncias $70 \times 70$ . . . . .	33
Figura 4.1 – Impacto do orçamento de incerteza em relação ao tempo médio de execução ( $\bar{T}$ ) nas instâncias classe-3-30-60-120. . . . .	54
Figura 4.2 – Impacto do orçamento de incerteza em relação ao tempo médio de execução ( $\bar{T}$ ) nas instâncias classe-3-50-50-100. . . . .	54
Figura 4.3 – Impacto do orçamento de incerteza em relação ao tempo médio de execução ( $\bar{T}$ ) nas instâncias class4-30-60-120. . . . .	54
Figura 4.4 – Impacto do orçamento de incerteza em relação ao tempo médio de execução ( $\bar{T}$ ) nas instâncias class4-50-50-100. . . . .	54
Figura 4.5 – Impacto do orçamento de incerteza em relação ao tempo médio de execução ( $\bar{T}$ ) nas instâncias classe 5-30-60-120. . . . .	55
Figura 4.6 – Impacto do orçamento de incerteza em relação ao tempo médio de execução ( $\bar{T}$ ) nas instâncias classe 5-50-50-100 . . . . .	55
Figura 4.7 – Perfil de desempenho dos métodos BD1 e CCG em resolver instâncias da classe 3. . . . .	55
Figura 4.8 – Perfil de desempenho dos métodos BD1, BD2 e CCG em resolver instâncias da classe 3. . . . .	55
Figura 4.9 – Perfil de desempenho dos métodos BD1 e CCG em resolver instâncias da classe 4. . . . .	56
Figura 4.10–Perfil de desempenho dos métodos BD1, BD2 e CCG em resolver instâncias da classe 4. . . . .	56
Figura 4.11–Perfil de desempenho dos métodos BD1 e CCG em resolver instâncias da classe 5. . . . .	56
Figura 4.12–Perfil de desempenho dos métodos BD1, BD2 e CCG em resolver instâncias da classe 5. . . . .	56

# Lista de tabelas

Tabela 3.2 – Comparação do desempenho dos algoritmos na resolução das instâncias $70 \times 70$ : médias para o número de iterações e número de nós <i>branch-and-bound</i> .	31
Tabela 3.3 – Comparação do desempenho dos algoritmos na resolução das instâncias $70 \times 70$ : médias do tempo execução do problema mestre por iteração e tempo total de execução.	31
Tabela 3.4 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias $70 \times 70$ para $\Gamma(\%)$ de 10 a 30.	34
Tabela 3.5 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias $70 \times 70$ para $\Gamma(\%)$ de 40 a 60.	35
Tabela 3.6 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias $70 \times 70$ para $\Gamma(\%)$ de 70 a 90.	36
Tabela 3.7 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias $70 \times 70$ para $\Gamma(\%)$ de 100.	37
Tabela 4.2 – Valores dos intervalos das classes de instâncias geradas para o problema de localização de facilidades capacitadas em dois níveis.	49
Tabela 4.3 – Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias classe $3-50 \times 50 \times 100$ : Médias para problema mestre por iteração e tempos totais de execução.	50
Tabela 4.4 – Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias classe $4-50 \times 50 \times 100$ : Médias para problema mestre por iteração e tempos totais de execução.	50
Tabela 4.5 – Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias classe $5-50 \times 50 \times 100$ : Médias para problema mestre por iteração e tempos totais de execução.	50
Tabela 4.6 – Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias classe $3-30 \times 60 \times 120$ : Médias para problema mestre por iteração e tempos totais de execução.	51
Tabela 4.7 – Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias classe $4-30 \times 60 \times 120$ : Médias para problema mestre por iteração e tempos totais de execução.	51
Tabela 4.8 – Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias classe $5-30 \times 60 \times 120$ : Médias para problema mestre por iteração e tempos totais de execução.	51
Tabela 4.9 – Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias $50 \times 50 \times 100$ : médias para o número de iterações e número de nós <i>branch-and-bound</i> .	53

Tabela 4.10–Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias $30 \times 60 \times 120$ :: médias para o número de iterações e número de nós <i>branch-and-bound</i> .	53
Tabela 4.11–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 3 - $50 \times 50 \times 100$ para $\Gamma(\%)$ de 10 a 50. . . . .	57
Tabela 4.12–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 3 - $50 \times 50 \times 100$ para $\Gamma(\%)$ de 60 a 100. . . . .	58
Tabela 4.13–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 4 - $50 \times 50 \times 100$ para $\Gamma(\%)$ de 10 a 50. . . . .	59
Tabela 4.14–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 4 - $50 \times 50 \times 100$ para $\Gamma(\%)$ de 50 a 100. . . . .	60
Tabela 4.15–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 5 - $50 \times 50 \times 100$ para $\Gamma(\%)$ de 10 a 50. . . . .	61
Tabela 4.16–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 5 - $50 \times 50 \times 100$ para $\Gamma(\%)$ de 60 a 100. . . . .	62
Tabela 4.17–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 3 - $30 \times 60 \times 120$ para $\Gamma(\%)$ de 10 a 50. . . . .	63
Tabela 4.18–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 3 - $30 \times 600 \times 120$ para $\Gamma(\%)$ de 60 a 100. . . . .	64
Tabela 4.19–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 4 - $30 \times 60 \times 120$ para $\Gamma(\%)$ de 10 a 50. . . . .	65
Tabela 4.20–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 4 - $30 \times 60 \times 120$ para $\Gamma(\%)$ de 60 a 100. . . . .	66
Tabela 4.21–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 5 - $30 \times 60 \times 120$ para $\Gamma(\%)$ de 10 a 10. . . . .	67
Tabela 4.22–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 5 - $30 \times 60 \times 120$ para $\Gamma(\%)$ de 60 a 100. . . . .	68
Tabela 4.23–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 3 - $90 \times 90 \times 90$ para $\Gamma(\%)$ de 10 a 50. . . . .	69
Tabela 4.24–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 3 - $90 \times 90 \times 90$ para $\Gamma(\%)$ de 60 a 100. . . . .	70
Tabela 4.25–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 4 - $90 \times 90 \times 90$ para $\Gamma(\%)$ de 10 a 50. . . . .	71
Tabela 4.26–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 4 - $90 \times 90 \times 90$ para $\Gamma(\%)$ de 60 a 100. . . . .	72
Tabela 4.27–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 5 - $90 \times 90 \times 90$ para $\Gamma(\%)$ de 10 a 50. . . . .	73
Tabela 4.28–Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 5 - $90 \times 90 \times 90$ para $\Gamma(\%)$ de 50 a 100. . . . .	74

# Lista de algoritmos

1	Benders-dual . . . . .	14
2	Geração de colunas e restrições . . . . .	16
3	Abordagem BCCG . . . . .	24
4	$Heur(k, \tau_{k-1}, s, \xi)$ . . . . .	25
5	Nova abordagem de resolução do problema de otimização robusta de dois estágios	40
6	Nova abordagem melhorada de resolução para o problema de localização de facilidades capacitadas em dois níveis . . . . .	48

# Sumário

	<b>Lista de figuras</b> . . . . .	<b>viii</b>
	<b>Lista de tabelas</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>OTIMIZAÇÃO ROBUSTA</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>2.1</b>	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>2.2</b>	<b>Conceitos básicos</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>2.3</b>	<b>O método de planos de cortes Benders-dual para problemas de otimização robusta de dois estágios</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2.4</b>	<b>O método de geração de colunas e restrições para o problema de otimização robusta de dois estágios</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>UMA ABORDAGEM POR MÉTODO DE FEIXE</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>3.2</b>	<b>Método de feixe</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>3.2.1</b>	<b>Método de feixe aplicado ao método de geração de colunas e restrições</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>3.2.2</b>	<b>O algoritmo de geração de colunas e restrições combinado com o método de feixe</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>3.3</b>	<b>Estudo de caso: problema robusto de transporte e localização</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>3.3.1</b>	<b>Algoritmo de geração de colunas e restrições</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Algoritmo de geração de colunas e restrições com o método de feixe</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>3.3.3</b>	<b>Resultados e discussões</b> . . . . .	<b>30</b>
<b>4</b>	<b>UMA NOVA ABORDAGEM PARA PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA DE DOIS ESTÁGIOS</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>4.1</b>	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>4.2</b>	<b>Nova abordagem</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>4.3</b>	<b>Análise da convergência</b> . . . . .	<b>40</b>
<b>4.3.1</b>	<b>Convergência</b> . . . . .	<b>41</b>
<b>4.4</b>	<b>Estudo de caso: problema robusto de localização de facilidades capacitadas em dois níveis</b> . . . . .	<b>42</b>
<b>4.4.1</b>	<b>Seleção do corte dual e do cenário</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>4.4.2</b>	<b>Resultados e discussões</b> . . . . .	<b>48</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>75</b>

**Referências** . . . . . 77

# 1 Introdução

A maioria das pesquisas envolvendo sistemas logísticos concentra-se em problemas com dados de entrada conhecidos previamente. No entanto, a maioria dos sistemas reais operam na presença de incerteza nos dados (GORISSEN; YANIKOĞLU; HERTOĞ, 2015), o que dificulta o desenvolvimento de soluções computacionais para auxiliar no processo de tomada de decisão.

Para lidar com essa incerteza, pode-se utilizar os arcabouços das técnicas de otimização estocástica e de otimização robusta (OR). A primeira é usada quando os dados incertos podem ser descritos por funções conhecidas distribuição probabilísticas, enquanto na última assume-se apenas o conhecimento dos limites dos intervalos de variação dos dados de entradas. Como esta tese se restringe a problemas de OR, indica-se ao leitor interessado os seguintes trabalhos e as referências neles contidas sobre a teoria e as aplicações de programação estocásticas: Kall, Wallace e Kall (1994), Shapiro, Dentcheva e Ruszczyński (2009), Birge e Louveaux (2011) e Prékopa (2013).

A OR teve sua inserção na literatura dada por Soyster (1973) e desde então tem causado interesse à comunidade de otimização (BERTSIMAS; BROWN; CARAMANIS, 2011; GABREL; MURAT; THIELE, 2014), por não pressupor do conhecimento das distribuições de probabilidade, mas, em vez disso, usar o chamado conjunto de incerteza ao qual os dados incertos pertencem. A ideia é obter soluções imunes ou menos vulneráveis a perturbações dos dados, ou seja, obter soluções robustas.

O método Soyster (1973) obtém soluções extremamente conservadoras (BERTSIMAS; SIM, 2003), uma vez que se baseia em um programa linear determinístico que assume o pior cenário para os dados incertos. No entanto, ao longo dos anos, abordagens mais flexíveis e aderentes a prática foram introduzidas para superar o super conservadorismo de SOYSTER, (GHAOUI; LEBRET, 1997; BEN-TAL; NEMIROVSKI, 1998; GHAOUI; OUSTRY; LEBRET, 1998; BEN-TAL; NEMIROVSKI, 1999; BEN-TAL; NEMIROVSKI, 2000; BERTSIMAS; SIM, 2003; BERTSIMAS; SIM, 2004; BERTSIMAS; THIELE, 2006). Esses avanços colaboraram para a ampliação da aplicabilidade da OR para diversas áreas como a de finanças, sistemas de energia, assistência médica, gerenciamento da cadeia de suprimentos, engenharia, aprendizado de máquina, estatística, programação de computadores, entre outras. Uma extensa lista de trabalhos sobre a teoria e aplicações de OR, pode ser encontrada nos trabalhos de Mulvey, Vanderbei e Zenios (1995), Ben-Tal e Nemirovski (2002), Beyer e Sendhoff (2007), Ben-Tal, Ghaoui e Nemirovski (2009), Bertsimas, Brown e Caramanis (2011), Gabrel, Murat e Thiele (2014) e Gorissen, Yanikoğlu e Hertog (2015).

Basicamente, as diversas abordagens de OR variam o nível de robustez ou o conservadorismo de uma solução, ao controlar como a incerteza é considerada dentro do problema e

como o contexto da tomada de decisão é abordado. Observe que os dados incertos podem estar presentes na função objetivo e/ou dentro de restrições (lados direito e/ou esquerdo), enquanto, o processo de tomada de decisão pode ser considerado estático (estágio único) ou dinâmico (múltiplos estágios), dependendo de como os valores incertos são revelados.

Para modelos de OR estáticos, as revelações dos parâmetros incertos são conhecidos somente após a solução ser proposta, enquanto que, para modelos de OR dinâmicos, introduzidos por [Ben-Tal et al. \(2004\)](#), as revelações ocorrem por estágios ou etapas. No primeiro caso, as soluções propostas tendem a ser extremamente conservadoras. Já no segundo, as soluções tendem a ser menos conservadoras, porém, demandam um esforço computacional mais alto e procedimentos mais elaborados para serem obtidas.

Devido a dificuldade computacional encontrada em trabalhar com os problemas de OR dinâmico com múltiplos estágios, a literatura tem-se concentrado nos casos com dois estágios. Nesses casos, o segundo estágio que é conhecido como problema recurso possui as decisões de recurso a serem tomadas após as decisões do primeiro estágio serem feitas e os parâmetros incertos revelados. Essa hierarquia de decisão permite ao decisor explorar as revelações das informações incertas para assim tomar decisões menos conservadoras. Exemplos de aplicações de OR com dois estágios podem ser encontradas para problemas de projeto de rede [Atamtürk e Zhang \(2007\)](#), [Ordóñez e Zhao \(2007\)](#), [An et al. \(2014\)](#), [Gabrel et al. \(2014\)](#), [Zeng e Zhao \(2013\)](#), otimização de portfólio ([TAKEDA; TAGUCHI; TÛTÛNCÛ, 2008](#)), distribuição de energia elétrica ([DING et al., 2016](#); [BERTSIMAS et al., 2012](#); [ZHAO; ZENG, 2012](#); [JIANG et al., 2012](#); [ZHANG et al., 2018](#)) e processos de manufaturas ([SHI; YOU, 2016](#)).

Problemas de OR com dois estágios são mais difíceis de resolver do que os problemas de OR com um único estágio ([BEN-TAL et al., 2004](#)). Entretanto, métodos de resolução baseados em estratégias de aproximação ou planos de cortes foram propostos no decorrer dos anos. Em estratégias de aproximação, assume-se que as decisões do segundo estágio podem ser representadas por simples funções. Essas funções, geralmente, permitem a redução do problema com dois estágios em um problema de único estágio ([BERTSIMAS; BROWN; CARAMANIS, 2011](#)). Nas estratégias de planos de cortes, métodos exatos baseados em procedimentos sofisticados são usados para gerar cortes e resolver o problema com dois estágios.

Uma estratégia conhecida de plano de cortes se assemelha ao método de decomposição de Benders ([BENDERS, 1962](#); [GEOFFRION, 1972](#)) e por isso são chamados de algoritmo de plano de corte Benders-dual ([ZENG; ZHAO, 2013](#)) e algoritmo de decomposição de Benders ([THIELE; TERRY; EPELMAN, 2009](#); [JIANG et al., 2012](#); [BERTSIMAS et al., 2012](#); [ZARRINPOOR; FALLAHNEZHAD; PISHVAEE, 2017](#)). Em [Gabrel et al. \(2014\)](#) essa estratégia é chamada de algoritmo de Kelly. Esse método busca encontrar, iterativamente, o valor da função objetivo das decisões do primeiro estágio por meio de planos de cortes gerados a partir de soluções duais do problema do segundo estágio.

Uma outra estratégia de plano de cortes foi apresentada por [Zeng e Zhao \(2013\)](#). Diferen-



temente da estratégia anterior, o método de ZENG; ZHAO não gera restrições a partir de soluções duais do problema recurso. Em vez disso, a cada iteração, o valor da função objetivo das decisões de primeiro estágio é construído a partir da adição de um subsistema primal com variáveis de decisão de recurso (variáveis do problema do segundo estágio) e respectivas restrições para um cenário identificado. Como variáveis e restrições são adicionadas, essa estratégia é conhecida como um procedimento de geração de colunas e restrições, do inglês *column-and-constraint generation* (CCG)(ZENG; ZHAO, 2013; AN et al., 2014) o qual foi aplicado com êxito para problema robusto de programação de sistema de energia (DING et al., 2015; AN; ZENG, 2015; HU; WU, 2016).

Uma das maiores vantagens da abordagem de Zeng e Zhao (2013) é que ele identifica um cenário significativo resolvendo seu subproblema. A adição de um subsistema com recurso por iteração, aumenta a taxa de convergência enquanto que o método Benders requer muitas iterações para obter o valor da função objetivo para uma decisão de primeiro estágio específica no mesmo cenário. Entretanto, o método ZENG; ZHAO obtém essa convergência mais rápida ao custo de ter, em cada iteração, um programa inteiro misto de grande escala a ser resolvido. A cada nova iteração, este programa inteiro misto de grande porte requer um tempo arbitrariamente longo para sua solução, dependendo do problema e/ou conjunto de dados abordados. A solução eficiente de tais programas era um desafio em aberto na literatura.

Aprimoramentos algorítmicos, que identifiquem rapidamente os cenários significativos e auxiliem na resolução do problema, reduzindo assim o número necessário de cenários identificados como o CCG faz, para alcançar o ótimo, podem melhorar significativamente a capacidade da resolução de problemas de otimização robusta de dois estágios. Sendo portanto, o objetivo principal desta tese propor este tipo de procedimento.

Para acelerar o processo de solução, impedindo assim um grande número de novos cenários e/ou tornando o problema mais fácil de se resolver, são desenvolvidos duas técnicas: a técnica de geração de colunas e restrições com base no método de feixe, e uma técnica nova de solução resultante da combinação dos métodos propostos por Thiele, Terry e Epelman (2009) e Zeng e Zhao (2013).

Os métodos de feixe são técnicas eficientes que foram usadas para otimização convexa não-suave, especialmente quando a precisão e a confiabilidade da solução são uma preocupação. Projetados independentemente por Wolfe (1975) e Lemarechal (1975), os métodos de feixe foram empregados com sucesso para estabilizar os métodos do plano de cortes usando um método de estabilização quadrática de feixe proximal e/ou nível (HIRIART-URRUTY; LEMARÉCHAL, 1993; LEMARÉCHAL; NEMIROVSKII; NESTEROV, 1995; ZAOURAR; MALICK, 2014). Aqui, é estendido o procedimento para lidar com o método CCG.

Pensando o quanto o problema pode se tornar difícil de ser resolvido ao se adicionar novos cenários, é aqui proposta uma nova abordagem na qual um único cenário significativo identificado é mantido no programa inteiro misto a ser resolvido em cada iteração. Isto resulta

em um programa matemático mais fácil de se resolver quando comparado com o método CCG. Além de ser de fácil implementação abre perspectivas para utilização de melhorias conhecidas na literatura aplicados a ambos os métodos Benders e CCG.

Para comparação das abordagens propostas são utilizados dois problemas logísticos importantes da literatura, ambos com incerteza na demanda. O primeiro usado na apresentação da abordagem com feixe é o problema de transporte e localização (PTL) abordado por GABREL et al. e ZENG; ZHAO em seus respectivos trabalhos. O problema consiste em atender às demandas incertas dos clientes com mercadorias enviadas das instalações. As instalações têm capacidades limitadas e custos fixos de instalação, existem ainda custos variáveis para aquisição de capacidade adicional. O objetivo é determinar as instalações a serem abertas e os respectivos tamanhos, enquanto se encaminham as mercadorias para os clientes a um custo total mínimo.

O uso do método CCG de Zeng e Zhao (2013) está restrito a problemas de otimização robusta de dois estágios que não crescem rapidamente com a adição de novos cenários identificados. Isto limita muito o escopo de aplicações práticas nas quais o CCG pode atuar. Para mostrar como a nova técnica proposta nesta tese suplanta esta limitação, resolve-se aqui o problema de localização de facilidades capacitadas em dois níveis com múltiplas atribuições. O problema consiste em instalar facilidades e depósitos capacitados para atender as demandas incertas dos clientes a um custo total mínimo. As fábricas e depósitos têm custos fixos de instalações. Existem também custos atribuídos aos fluxos de transporte.

Ambas as abordagens e os problemas são melhores descritos nos Capítulos 3 e 4, respectivamente. As pesquisas desenvolvidas e os resultados obtidos mostram que as estruturas projetadas apresentam uma notável economia do tempo computacional, quando comparados com o CCG. É importante destacar que dado o tamanho dos problemas e como o problema aumenta de tamanho a cada iteração, a aceleração obtida é computacionalmente significativa.

As principais contribuições desta tese são destacadas abaixo:

- São introduzidas técnicas de acelerações baseadas tanto nos métodos de CCG e Benders contribuindo para uma convergência mais rápida.
- É criada uma estrutura híbrida de geração de colunas e restrições com o método de feixe onde utiliza a estabilização quadrática do método de feixe na otimização robusta por meio das variantes, método de feixe proximal e método de feixe em nível e em uma dupla estabilização com o uso de ambas;
- Primeira vez na literatura de otimização robusta que são utilizados procedimentos como aproximação externa e obtenção de cortes Pareto-ótimos.
- Utilização de métodos exatos na resolução do problema de localização de facilidades capacitadas em dois níveis como problemas de otimização robusta de dois estágios. Até onde se sabe é a primeira vez na literatura.

- Um artigo sobre a primeira técnica de aceleração já foi submetido para publicação na *Optimization Letters*.

Este trabalho segue então organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 traz uma introdução à otimização robusta seguido da apresentação dos métodos exatos da literatura que é usado neste trabalho. O Capítulo 3 apresenta o método de geração de colunas e restrições estabilizado por duas estratégias diferentes do método de feixe aplicado no problema de otimização robusta de transporte e localização em dois estágios. Enquanto, o Capítulo 4 possui a descrição e desenvolvimento da técnica de aceleração baseada no CCG e Benders, sendo aplicado no problema de localização de facilidades capacitadas em dois níveis. Finalizando, o Capítulo 5 apresenta a conclusão geral com possíveis direcionamentos de pesquisas futuras.

## 2 Otimização robusta

### 2.1 Introdução

A otimização robusta é uma área emergente na pesquisa operacional que permite abordar problemas de otimização com um certo grau de incerteza em alguns dos parâmetros envolvidos. Desde sua introdução por [Soyster \(1973\)](#), surgiram muitas metodologias diferentes que descrevem como aplicar otimização robusta e como lidar adequadamente com um problema real. Aqui, serão apresentados alguns dos conceitos básicos de otimização robusta juntamente com diferentes tipos de definições de robustez.

Para resolver problemas reais de otimização, é preciso levar em consideração, além das restrições e a compensação de custos entre as variáveis de decisão, que os dados estão sujeitos a incertezas. Nesse sentido, ao resolver um problema, a solução obtida pode estar sujeita a perguntas como: dado cenários diferentes, o quão viável seria a solução? Como a solução seria afetada com incertezas e variação nestes dados de entrada?

Uma maneira de lidar com a incerteza é considerar a robustez de uma solução. Isso requer, no entanto, a definição do que é robustez, o que não é trivial dadas as várias definições existentes na literatura atualmente: robustez estrita ([SOYSTER, 1973](#); [BEN-TAL](#); [NEMIROVSKI, 1998](#); [BEN-TAL](#); [NEMIROVSKI, 1999](#)), robustez com limitação de cardinalidade ([BERTSIMAS](#); [SIM, 2004](#)), robustez ajustável ([BEN-TAL et al., 2004](#)), robustez recuperável ([CICERONE et al., 2007](#)), robustez suave ([BEN-TAL](#); [BERTSIMAS](#); [BROWN, 2010](#)), robustez de arrependimento ([KOUVELIS](#); [YU, 2013](#)), robustez branda ([SCHÖBEL, 2014](#)),

Em termos gerais, uma solução para ser considerada robusta deve se comportar razoavelmente em relação à sua qualidade, viabilidade ou otimização ao enfrentar determinadas condições do espaço de pesquisa ou condições operacionais. Dependendo do nível exigido de qualidade da solução, pode-se esperar uma política mais rígida de gerenciamento de incertezas, no qual uma solução estaria associada ao que se chama do pior cenário possível ([SOYSTER, 1973](#)).

O ideal seria balancear a qualidade da solução e a sua robustez. A estimativa desse equilíbrio é o objetivo de muitos dos métodos da literatura ([BEN-TAL](#); [GHAOUI](#); [NEMIROVSKI, 2009](#)). No entanto, o conceito de robustez ainda está em processo de amadurecimento, assim como o desenvolvimento de novas técnicas de solução. Não existe ainda uma metodologia clara e definida sobre como lidar com problemas robustos, sendo, portanto, um tópico de pesquisa vivo e empolgante ([BERTSIMAS](#); [SIM, 2004](#)). Desta forma, ainda existem muitos desafios conceituais, computacionais e de aplicação na área de otimização robusta. Um deles é como lidar com problemas de otimização robusta em dois níveis. Antes de apresentar esses problemas, é

introduzido algumas notações e conceitos iniciais.

## 2.2 Conceitos básicos

Geralmente, quando os tomadores de decisão enfrentam algum grau de ambiguidade ou erros nos parâmetros do modelo, ou algum tipo de incerteza no processo e em seu ambiente, eles precisam avaliar se uma solução proposta é robusta ou não. Eles precisam avaliar se a viabilidade da solução permanece próxima da condição de otimização para qualquer cenário de parâmetro ou realização de incerteza nos dados. Para fazer essa avaliação, são necessários dois conceitos básicos: a incerteza da viabilidade de uma solução e a incerteza do valor da função objetivo.

### **Incerteza na viabilidade de uma solução:**

Garantir a viabilidade de uma solução para a realização de qualquer parâmetro incerto tem suas consequências. Considerar todos os valores de parâmetros possíveis aumenta significativamente o esforço computacional e, muito provavelmente, leva a uma deterioração na qualidade da solução. Quanto maior a requisição por viabilidade do parâmetro, maior a probabilidade de se afastar da otimalidade. Portanto, é necessária uma compensação entre viabilidade e qualidade da solução, que por sua vez está relacionada ao problema.

Para garantir esta compensação, deve-se definir um conjunto de incertezas ou um conjunto de valores que podem ser assumidos por um número fixo de parâmetros considerados incertos. Este conjunto pode apresentar cardinalidade finita, ou pode conter infinitos elementos (compactação sendo assumida neste caso). Observe que a seleção adequada de um conjunto de incertezas desempenha um papel importante na questão de viabilidade e na qualidade da solução alcançada.

### **Incerteza na otimização da solução:**

Diferentes conjuntos de incertezas levam, muito provavelmente, a diferentes soluções ótimas. Nesse sentido, a otimização robusta encontra uma solução que se porta adequadamente para diferentes cenários, mas não da mesma maneira para todos os cenários. A maneira como uma solução ótima se comportará ao enfrentar diferentes cenários depende de qual conceito de robustez está sendo adotado. Antes de introduzir esses conceitos de robustez, são necessárias algumas notações.

Considere um problema de otimização descrito como:

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{s.a.:} & F(x) \leq 0 \\ & x \in S \end{aligned}$$

Onde  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  descreve um problema com  $n$  colunas e  $m$  restrições,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é a função objetivo, e  $S \subset \mathbb{R}^n$  é uma região de viabilidade. Esse problema é conhecido como problema nominal ou médio.

Quando um cenário de incerteza  $u \in \mathbb{R}^k$  ocorre, o problema de otimização pode ser escrito:

$$P(u) \begin{cases} \min f(x, u) \\ \text{s.a.: } F(x, u) \leq 0 \\ x \in S \end{cases}$$

Embora não seja conhecido a priori qual é o valor de  $u$ , presume-se que ele esteja dentro de um conjunto de incertezas  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ , representando os possíveis cenários a serem considerados. Portanto, para cada  $u \in \mathcal{U}$  possível, há um problema de otimização  $P(u)$  a ser resolvido.

A otimização robusta converte esses vários problemas de otimização, em um único problema de otimização considerando que haja um conjunto de incertezas prescrito  $\mathcal{U}$ . Na literatura, os conjuntos de incertezas mais adotados são:

- (i) finito  $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_l\}$ ,
- (ii) baseado em intervalo  $\mathcal{U} = |u_1, \hat{u}_1| \times \dots \times |u_l, \hat{u}_l|$ ,
- (iii) baseado em norma  $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^k : \|u - \hat{u}\| \leq r\}$ ,
- (iv) politópico  $\mathcal{U} = \text{conv}\{u_1, \dots, u_l\}$ ,
- (v) orientado a restrição  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m$ , em que  $\mathcal{U}_i$  afeta apenas as restrição  $i = 1, \dots, m$ .

Após a seleção de um conjunto de incertezas, um conceito de robustez adequado ao problema a ser otimizado deve ser escolhido. Como mencionado anteriormente, há vários conceitos de robustez com caracterizações diferentes, entre os muitos, destacam-se:

1. **Robustez estrita** considera que todos os cenários têm a mesma probabilidade de ocorrência. Este conceito é adequado para aplicações com sistemas críticos nos quais uma falha não é aceitável, como por exemplo no gerenciamento de usina nuclear. O conceito foi introduzido por [Soyster \(1973\)](#) para resolver conjuntos convexos incertos usando programação linear. Posteriormente, O conceito foi formalizado como uma estrutura teórica por [Ben-Tal e Nemirovski \(1998\)](#), [Ben-Tal e Nemirovski \(1999\)](#).

Para formalizar o uso deste conceito, considere  $\bar{x} \in S$  como uma solução para um problema de otimização com incerteza  $P(u)$ ,  $u \in \mathcal{U}$ . A solução  $\bar{x}$  é considerada estritamente robusta se, para todo  $u \in \mathcal{U}$ ,  $F(\bar{x}, u) \leq 0$ ; ou  $\bar{x} \in R(\mathcal{U})$ , onde  $R(\mathcal{U}) = \bigcap_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(u)$  e  $\mathcal{F}(u) = \{\bar{x} \in S : F(\bar{x}, u) \leq 0\}$ . Isto permite então em escrever robustez estrita como:

$$\begin{aligned} & \min \sup_{u \in \mathcal{U}} f(x, u) \\ & \text{s.a.: } x \in R(\mathcal{U}) \\ & x \in S \end{aligned}$$

2. **Robustez com limitação de cardinalidade** relaxa o conceito de robustez estrita ao restringir o espaço de incerteza. Aqui assume-se que é improvável que todos os cenários tenham a mesma probabilidade de acontecer ou que todos os parâmetros incertos variem ao mesmo tempo para o pior caso.

Introduzida por [Bertsimas e Sim \(2003\)](#) em problemas de otimização discreta, foi abordado numa configuração de problemas contínuos em [Bertsimas e Sim \(2004\)](#) que é facilmente estendido para os problemas otimização discretas e numa abordagem para problemas combinatório por [Atamtürk \(2006\)](#).

Segundo [Bertsimas e Sim \(2004\)](#), que fez sua abordagem sobre um problema contínuo com incerteza somente nas restrições (pode ser estendida com incerteza na função objetivo), a robustez com limitação de cardinalidade pode ser formalizada com as seguintes notações e definições. Seja  $F(x) \leq 0$  escrito, sem perda de generalidade, como  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ , para todos os  $i = 1, \dots, m$  com  $l_i \leq x \leq l_s$ . Seja também a matriz  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  com valores incertos, com cada  $a_{ij}$  pertencente ao intervalo  $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ . Em vez de permitir que cada parâmetros possa variar, como no caso de [Soyster \(1973\)](#), permitem-se que apenas  $\Gamma_i \geq 0$  parâmetros da linha  $i = 1, \dots, m$  variem dentro dos respectivos intervalos. O parâmetro  $\Gamma_i$  é conhecido como o orçamento de incerteza para a  $i$ -ésima restrição e controla o equilíbrio entre a robustez e a otimização de uma solução. Como as definições e notações acima, podemos formular o problema robusto de otimização como:

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ \text{s.a.: } & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \max_{\{S_i \subseteq \{1, \dots, n\} : |S_i| = \Gamma_i\}} \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij}|x_j| \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & l_i \leq x \leq l_s \end{aligned}$$

O problema de maximização interna torna todo o problema não convexo. Então com o intuito de reformular o problema, considera-se que dado um vetor  $x^*$  o problema de maximização interna pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \beta_i(x^*, \Gamma_i) &= \max \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij}|x_j^*|z_{ij} \\ \text{s.a.: } & \sum_{j=1}^n z_{ij} \leq \Gamma_i \\ & 0 \leq z_{ij} \leq 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Tomando o seu dual e mesclando com o problema de minimização, se obtêm o seguinte

problema linear equivalente:

$$\begin{aligned}
 & \min f(x) \\
 \text{s.a.: } & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + z_i\Gamma_i + \sum_{j=1}^n p_{ij} \leq b_i & \forall i = 1, \dots, m \\
 & z_i + p_{ij} \geq \hat{a}_{ij}y_j & \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \\
 & -y_j \leq x_j \leq y_j & \forall j = 1, \dots, n \\
 & li_j \leq x_j \leq ls_j & \forall j = 1, \dots, n \\
 & y_j \geq 0 & \forall j = 1, \dots, n \\
 & p_{ij} \geq 0 & \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \\
 & z_i \geq 0 & \forall i = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

No qual as variáveis  $z$  e  $p$  vêm da dualização do problema de maximização interno,  $y$  da linearização do valor absoluto de  $x$ ,  $l$  e  $u$  são limites inferior e superior para as variáveis  $x$ .

3. **Robustez branda** Introduzido por [Fischetti e Monaci \(2009\)](#), este conceito relaxa as restrições em favor da qualidade da solução em lugar de reduzir o espaço de incerteza. O raciocínio por trás deste conceito é que, se o problema de otimização nominal ou médio pode ser resolvido de forma eficiente, então é possível buscar soluções que atendam as restrições para todos  $u \in \mathcal{U}$  da melhor maneira possível. Ou formalmente como:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{i=1}^m w_i \lambda_i \\
 \text{s.a.: } & f(x, \bar{u}) \leq f(\bar{x}, \bar{u})(1 + \delta) \\
 & F(x, u) \leq \lambda & \forall u \in \mathcal{U} : u \neq \bar{u} \\
 & x \in S \\
 & \lambda_i \in \mathbb{R} & \forall i = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

Este conceito permite uma compensação entre robustez e a qualidade da solução controlando-se o parâmetro  $\delta$  em uma restrição que força a solução a estar próxima da solução  $\bar{x}$  do caso nominal ou médio representado por  $\bar{u}$ . Quando  $\delta = 0$ , o problema corresponderá ao problema nominal enquanto que quando  $\delta = \infty$  a restrição será desconsiderada. O parâmetro  $\delta$  impõe um limite máximo para a função objetivo.

As variáveis de folga  $\lambda$  são utilizadas para capturar uma possível inviabilidade, cuja soma ponderada é minimizada na função objetivo. Cada variável  $\lambda_i$  define um nível de robustez da solução em relação à incerteza dos parâmetros na  $i$ -ésima restrição. Observe que  $\lambda_i$  assume um valor positivo se a  $i$ -ésima restrição robusta for violada, e que os pesos  $w_i$  que aparecem na função objetivo destinam-se a compensar possíveis diferenças das escalas nas restrições. Originalmente pensado para problemas de programação linear apenas, este conceito foi posteriormente generalizado para qualquer problema de otimização e conjunto de incertezas ([SCHÖBEL, 2014](#)).



4. **Robustez de arrependimento** Pode haver diferentes critérios de arrependimentos. Kouvelis e Yu (2013) relaxa o problema por meio da função objetivo onde em vez de minimizar o pior cenário possível, ele minimiza a diferença da função objetivo para a melhor solução possível em um cenário ou mais formalmente:

$$\begin{aligned} & \min \sup_{u \in \mathcal{U}} (f(x, u) - f(x^*, u)) \\ \text{s.a.: } & F(x) \leq 0 \\ & x \in S \end{aligned}$$

no qual  $f(x^*, u)$  é o melhor valor para o cenário  $u \in \mathcal{U}$ .

5. **Robustez recuperável** adota uma política de dois estágios para obter uma solução por meio de algoritmos de recuperação (CICERONE et al., 2007; LIEBCHEN et al., 2009). Dada uma família de algoritmos  $\mathcal{L}$ , uma solução  $x$  é uma recuperação robusta em relação a  $\mathcal{L}$  se existe, para todo cenário  $u \in \mathcal{U}$ , um algoritmo  $\ell \in \mathcal{L}$  tal que  $\ell$  permite construir uma solução  $\ell(x, u) \in \mathcal{F}(u)$  (definido em robustez estrita) quando aplicado à solução  $x$  e ao cenário  $u$ . O problema de otimização pode ser escrito em sua forma robusta como:

$$\begin{aligned} & \min_{(x, \ell) \in (S, \mathcal{L})} f(x) \\ \text{s.a.: } & \ell(x, u) \in \mathcal{F}(u) \quad \forall u \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

6. **Robustez ajustável ou multi-estagio** divide o espaço em dois conjuntos de variáveis. O primeiro possui as chamadas variáveis *aqui e agora* que devem ser avaliadas antes que o cenário  $u \in \mathcal{U}$  seja revelado, enquanto o segundo constitui-se das variáveis *esperar e ver*, que são determinadas uma vez que o cenário é conhecido.

Apesar da maioria dos trabalhos iniciais em otimização robusta visasse à tomada de decisão estática, o campo amadureceu muito desde que Ben-Tal et al. (2004) introduziu a robustez ajustável (YANIKOĞLU; GORISSEN; HERTOOG, 2019). Este conceito de robustez lida diretamente com uma forma tratável no qual a informação é liberada ao longo do tempo. Dada a dificuldade computacional de lidar com vários estágios em otimização robusta, muitos trabalhos concentraram-se na variante de duas fases (GABREL; MURAT; THIELE, 2014).

Esta variante usa as seguintes definições: seja  $x = [y, z]$  tal que  $y \in S_y \subset \mathbb{R}^{n_y}$ ,  $z \in S_z \subset \mathbb{R}^{n_z}$  com  $n_y + n_z = n$  e onde  $S_y$  e  $S_z$  são as regiões de viabilidade do primeiro e segundo estágios, respectivamente. A variável  $y$  é a variável *aqui e agora*, enquanto a variável  $z$  é a *espera e veja*. Assim, para um cenário  $u \in \mathcal{U}$ , um problema de otimização

robusto de dois estágios pode ser formulado como:

$$\min f([y, z], u) \quad (2.1)$$

$$\text{s.a.: } F([y, z], u) \leq 0 \quad (2.2)$$

$$y \in S_y \quad (2.3)$$

$$z \in S_z \quad (2.4)$$

De modo geral ao fixar a variável  $y$  em um valor viável ou  $\bar{y} \in S_y$ , deve-se garantir que exista um  $z \in S_z$  tal que  $[y, z]$  seja viável para qualquer um dos cenários selecionados  $u \in \mathcal{U}$ .

Para resolver um problema de otimização robusta em dois estágio, pode-se usar projeção ou  $P_{S_y}(\mathcal{F}(u)) = \{y \in S_y : \exists z \in S_z \text{ tal que } x \in \mathcal{F}(u)\}$  ou a projeção de  $\mathcal{F}(u)$  sobre  $S_y$ , em que  $\mathcal{F}(u) = \{x \in S : F(x, u) \leq 0\}$ . Isso permite a construção do conjunto de soluções  $R = \bigcap_{u \in \mathcal{U}} P_{S_y}(\mathcal{F}(u))$ .

O problema consiste então em encontrar o pior caso  $\omega(y)$  para algum  $y$  específico em relação a um conjunto de soluções  $R$  ou  $\min\{\omega(y) : y \in R\}$ , onde  $\omega(y) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \inf_{x: [y, z] \in \mathcal{F}(u)} f([y, z], u)$ .

Na próxima seção será explicado o esboço geral da estratégia de projeção para robustez ajustável baseada no método de planos de cortes de Thiele, Terry e Epelman (2009). Como este método serve de base para o procedimento de Zeng e Zhao (2013) e como, mostrado por ZENG; ZHAO, o procedimento deles claramente supera o de THIELE; TERRY; EPELMAN, a revisão aqui apresentada estará limitada a estes dois métodos.

## 2.3 O método de planos de cortes Benders-dual para problemas de otimização robusta de dois estágios

Thiele, Terry e Epelman (2009) introduziram um método de planos de cortes semelhante ao método de decomposição de Benders (BENDERS, 1962; GEOFFRION, 1972), a partir daqui será denotado como método de Benders-dual, para o problema de otimização robusta de dois estágios, i.e., para robustez ajustável, no qual a incerteza é definida como um conjunto discreto finito ou um poliedro  $\mathcal{U}$ . Considere  $y$  a variável de decisão do primeiro estágio e  $x$  a variável do segundo estágio. A menos que mencionado, eles podem assumir valores discretos ou contínuos. Seguindo a notação usada em (ZENG; ZHAO, 2013), uma forma alternativa e mais geral de se representar um problema de otimização robusta de dois estágios é:

$$\min_y c^\top y + \max_{u \in \mathcal{U}} \min_{x \in F(y, u)} b^\top x \quad (2.5)$$

$$\text{s.a.: } Ay \geq d \quad (2.6)$$

$$y \in S_y \quad (2.7)$$

no qual  $F(y, u) = \{x \in S_x : Gx \geq h - Ey - Mu\}$ , e  $S_y \subseteq \mathbb{R}_+^{n_y}$  e  $S_x \subseteq \mathbb{R}_+^{n_x}$ .

Considerando que os problemas de decisão do segundo estágio sejam lineares em  $x$  e assumindo que o problema de segundo estágio possui recurso relativamente completo, i.e, sempre viável para quaisquer  $y$  e  $u$ , é possível obter o seu dual com o auxílio das variáveis duais  $\pi$  ou:

$$\begin{aligned} \min_y c^\top y + \max_{u \in \mathcal{U}} \max_{\pi \geq 0} \{ (h - Ey - Mu)^\top \pi : G^\top \pi \leq b \} \\ \text{s.a.: } Ay \geq d \\ y \in S_y \end{aligned}$$

Note que o problema interno de maximização (max max) é na realidade um problema de otimização bilinear de maximização ou:

$$\begin{aligned} \min_y c^\top y + \max_{u \in \mathcal{U}, \pi \geq 0} \{ (h - Ey - Mu)^\top \pi : G^\top \pi \leq b \} \\ \text{s.a.: } Ay \geq d \\ y \in S_y \end{aligned}$$

Assumindo que haja um oráculo que resolva o problema de maximização para um dado  $y$  ( $\bar{y}$ ), obtêm-se a solução ótima do problema recurso que é dado por pontos extremos do seu conjunto de viabilidade. Desta forma, podem-se enumerar todos os planos de cortes como no método de decomposição de Benders. Assim, o problema de otimização robusta de dois estágio pode ser reescrito como:

$$\min c^\top y + \eta \tag{2.8}$$

$$\text{s.a.: } Ay \geq d \tag{2.9}$$

$$y \in S_y \tag{2.10}$$

$$\eta \geq (h - Ey - M\bar{u}_l)^\top \bar{\pi}^l \quad \forall l = 1, \dots, r \tag{2.11}$$

$$\eta \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

onde  $(\bar{u}_l, \bar{\pi}^l)$  são pontos extremos de seus respectivos conjuntos viáveis do problema recurso, para um dado  $\bar{y}$ . Observe que resolvendo a formulação resolve-se o problema original (2.5)-(2.7).

A formulação (2.8) - (2.12) tem uma função objetiva linear porém possui um número exponencial de restrições. Daí, no método Benders-dual de [Thiele, Terry e Epelman \(2009\)](#) a ideia é gerar pontos extremos iterativamente ao resolver o problema recurso e adicioná-los como cortes (otimalidade de Benders) ao problema mestre até que a solução ótima seja encontrada. Assim, a cada iteração o problema mestre providência um limite inferior (LI) para o problema, enquanto um limite superior (LS) pode ser obtido facilmente por  $c^\top \bar{y} + q$ , onde  $q < +\infty$  (valor de  $Q(\bar{y})$ ) mais os valores de  $\bar{u}_l$  e  $\bar{\pi}^l$  são obtido ao se resolver:

$$Q(\bar{y}) = \max\{(h - E\bar{y} - Mu)^T \pi : G^T \pi \leq b, u \in \mathcal{U}, \pi \geq 0\}$$

O Algoritmo 1 sistematiza a estratégia do Benders-dual, no qual o parâmetro  $\epsilon$  é um valor real pequeno,  $L = \{1 \dots k\}$  é o conjunto dos cortes de otimalidades adicionados e  $\Delta_k = \frac{LS-LI}{LS}$  o gap de otimalidade.

<b>Algoritmo 1: Benders-dual</b>	
1	$LS \leftarrow +\infty, LI \leftarrow -\infty, l \leftarrow 0, L \leftarrow \emptyset \Delta_k \leftarrow 100$ // inicialização;
2	<b>enquanto</b> $\Delta_k > \epsilon$ <b>faça</b>
3	$(LI, \bar{y}) \leftarrow \min_{\eta \in \mathbb{R}} c^T y + \eta$ s.a.: $Ay \geq d$ $y \in S_y$ $\eta \geq (h - Ey - M\bar{u}_l)^T \bar{\pi}^l \quad \forall l \in L$
4	$k \leftarrow k + 1$
5	$(q, \bar{u}_k, \bar{\pi}^k) \leftarrow Q(\bar{y})$
6	<b>se</b> $q < +\infty$ <b>então</b>
7	$LS \leftarrow \min\{LS, c^T \bar{y} + q\}$
8	$L \leftarrow L \cup \{k\}$
9	<b>fim</b>
10	<b>fim</b>

Ao alternar as soluções do problema mestre e do oráculo, os limites inferior e superior convergirão em um número finito de iterações (THIELE; TERRY; EPELMAN, 2009) obtendo-se assim a solução ótima para o problema de otimização robusta de dois estágios.

Para os casos em que se assume que o problema recurso não seja relativamente completo, i.e., que o problema de recurso possa ser inviável dependendo dos valores  $\bar{y}$ , cortes de viabilidade poderão ser necessários. Para uma discussão mais pormenorizada para este caso favor consultar Terry (2009).

Note que o oráculo geralmente resolve um problema de otimização não-linear que, dependendo de qual definição de conjunto de incertezas seja usada, é possível linearizá-lo através da dualização das restrições do conjunto de incertezas. Isso será melhor explicado nos próximos capítulos ao solucionar os problemas das aplicações.

## 2.4 O método de geração de colunas e restrições para o problema de otimização robusta de dois estágios

Assim como no Benders-dual na Seção 2.3 o conjunto de incerteza é definida como um conjunto discreto finito ou um poliedro  $\mathcal{U}$ . Apesar do problema de maximização-minimização interno da função objetivo (2.5), ser um problema de otimização bilinear, ZENG; ZHAO mostraram

que, ao enumerar todos os cenários incertos possíveis de  $\mathcal{U}$  (quando um conjunto discreto finito) a formulação pode ser reformulada como um problema equivalente inteiro misto, provavelmente de grande escala ou:

$$\min \mathbf{c}^T y + \eta \quad (2.13)$$

$$\text{s.a.: } Ay \geq d \quad (2.14)$$

$$y \in S_y \quad (2.15)$$

$$\eta \geq b^T x^l \quad l = 1, \dots, r \quad (2.16)$$

$$Ey + Gx^l \geq h - Mu_l \quad l = 1, \dots, r \quad (2.17)$$

$$x^l \in S_x \quad l = 1, \dots, r \quad (2.18)$$

no qual  $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_r\}$  e  $\{x^1, \dots, x^r\}$  são as variáveis de decisão correspondentes aos recursos associadas com suas respectivas restrições para cada cenário  $u_l$  de  $\mathcal{U}$  possível. Note que resolvendo a formulação (2.13) - (2.18) resolve-se o problema original.

A desvantagem da formulação (2.13) - (2.18) é o seu tamanho. Em geral, é impraticável enumerar todos os cenários incertos possíveis em  $\mathcal{U}$ . No entanto, quando  $\mathcal{U}$  é um conjunto muito grande ou um poliedro uma enumeração parcial produz uma relaxação válida e, portanto, um limite inferior válido para o problema original devido às restrições (2.16). Assim, uma estratégia que amplie, iterativamente, uma enumeração parcial de  $\mathcal{U}$ , separando cenários não-triviais com suas respectivas variáveis de decisão de recurso e restrições (2.16) - (2.18), pode levar a limites inferiores mais fortes.

Assim como no Benders-dual, a estratégia requer a existência de um oráculo capaz de resolver o problema de decisão de segundo estágio para um dado  $\bar{y}$  ou:

$$Q(\bar{y}) = \max_{u \in \mathcal{U}} \min_{x \in S_x} \{b^T x : Gx \geq h - E\bar{y} - Mu\}.$$

$Q(y)$  será um valor ótimo finito em relação à solução ótima  $(\bar{u}, \bar{x})$ , ou  $+\infty$  em relação a algum  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  para o qual o problema de segundo estágio seja inviável (isso não acontece aqui por ter assumido o recurso relativamente completo). O algoritmo 2 sistematiza a estratégia de geração de colunas e restrições, no qual  $O$  é o conjunto dos cenários nos quais os problemas de segundo estágio são viáveis.

Em cada ciclo do Algoritmo 2, a formulação relaxada na linha 3 produz um LI e um valor ótimo para  $y$  ( $\bar{y}$ ) que é usado no problema de segundo estágio  $Q(\bar{y})$  a ser resolvido na linha 5. Ao resolver se  $Q(\bar{y})$ , são obtidos valores para  $\bar{u}_l$ , independentemente da viabilidade de  $Q(\bar{y})$ . Se viável ( $q < +\infty$ ) tem-se um novo LS construído conforme linha 7.

A cada iteração, o problema da linha 3 cresce em tamanho, tanto em variáveis, um novo  $x^l$ , quanto em restrições. Zeng e Zhao (2013) mostraram que quando o problema de recurso

<b>Algoritmo 2:</b> Geração de colunas e restrições	
1	$LS \leftarrow +\infty, LI \leftarrow -\infty, k \leftarrow 0, O \leftarrow \emptyset, \Delta_k \leftarrow 100$ // inicialização;
2	<b>enquanto</b> $\Delta_k > \epsilon$ <b>faça</b>
	$(LI, \bar{y}) \leftarrow \min_{\eta \in \mathbb{R}} c^T y + \eta$
	s.a.: $Ay \geq d$
3	$y \in S_y$
	$\eta \geq b^T x^l \quad \forall l \in O$
	$Ey + Gx^l \geq h - M\bar{u}_l \quad l = 1, \dots, k$
	$x^l \in S_x \quad l = 1, \dots, k$
4	$k \leftarrow k + 1$
5	$(q, \bar{u}_k) \leftarrow Q(\bar{y})$
6	<b>se</b> $q < +\infty$ <b>então</b>
7	$LS \leftarrow \min\{LS, c^T \bar{y} + q\}$
8	$O \leftarrow O \cup \{k\}$
9	<b>fim</b>
10	<b>fim</b>

de segundo estágio é um programa linear, e a suposição de recurso relativamente completo se mantém, o Algoritmo 2 converge de uma maneira finita.

Para resolver  $Q(y)$ , ZENG; ZHAO associaram os vetores de multiplicadores duais  $\pi$  às restrições (2.17) e aplicaram as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para obter um problema equivalente a  $Q(y)$  ou:

$$\max b^T x \quad (2.19)$$

$$\text{s.a.: } Gx \geq h - Ey - Mu \quad (2.20)$$

$$G^T \pi \leq b \quad (2.21)$$

$$(Gx - h + Ey + Mu)_i \pi_i = 0 \quad \forall i \quad (2.22)$$

$$(b - G^T \pi)_j x_j = 0 \quad \forall j \quad (2.23)$$

$$u \in \mathcal{U}, x \in S_x, \pi \geq 0 \quad (2.24)$$

Esta reformulação é válida, mesmo para um conjunto geral de incertezas poliédricas, desde que a hipótese de recurso relativamente completo se mantenha. Observe que as restrições (2.22) e (2.23) são as condições de folga complementares, no quais os índices  $i$  e  $j$  se referem às respectivas variáveis e restrições, e que o problema (2.19) - (2.24) é não-linear. No entanto, ele pode ser linearizado por meio da introdução de variáveis binárias e constantes do tipo *big-M* para representar a ativação ou não das condições das folgas complementares, resultando em um programa inteiro misto que pode ser manipulado pelos resolvidores de programas inteiros mistos atuais. Para melhorar o desempenho dos solucionadores, deve-se atentar para a escala dos valores da constante *big-M*.

Apesar dos problemas de otimização robusta de dois estágios possuírem estruturas favoráveis às técnicas de planos de cortes como o Benders-dual e de geração de colunas e restrições, os problemas são difíceis de serem resolvidos, devido a elevadas dimensões dos problemas que possuem um número grande de variáveis e restrições e/ou do conjunto de dados utilizados. Com a alta complexidade computacional para resolver os problemas robustos torna-se necessário utilizar técnicas e aprimoramentos algorítmicos para reduzir os esforços computacionais. Assim, nos capítulos seguintes serão apresentadas algumas abordagens utilizadas para lidar com esse desafio.

## 3 Uma abordagem por método de feixe

### 3.1 Introdução

O método de [Zeng e Zhao \(2013\)](#) decompõe problemas de otimização robusta de dois estágios em um problema mestre e um subproblema que são resolvidos iterativamente. A cada iteração, o procedimento gera restrições com variáveis de recurso no espaço primal para um cenário identificado após a resolução do subproblema atual. Esse novo subsistema de colunas e restrições é então adicionado ao problema mestre do próximo ciclo. Como o problema mestre é uma relaxação válida do problema original de otimização robusta de dois estágios, a cada iteração, o problema mestre fornece um limite inferior válido para o problema original, enquanto um limite superior pode ser facilmente construído pelos resultados obtidos pelo problema do segundo estágio em conjunto com o problema do primeiro estágio, ver [Seção 2.4](#).

Ao se adicionar cenários não triviais ao problema mestre, o método converge de maneira finita mais rapidamente do que a abordagem baseada no Benders-dual ([ZENG; ZHAO, 2013](#)). A convergência mais rápida do método tem o custo de se ter um programa mestre significativamente maior para ser resolvido a cada iteração. Portanto, aperfeiçoamentos algorítmicos que acelerem a resolução do método podem ampliar ainda mais a aplicabilidade dele para mais problemas de otimização robusta de dois estágios, sendo aqui o objetivo deste capítulo.

Para acelerar o método de [ZENG; ZHAO](#), são desenvolvidas, neste capítulo, três estratégias baseadas no método de feixe, uma técnica eficiente que foi utilizada com sucesso na otimização convexa não-suave ([WOLFE, 1975; LEMARECHAL, 1975; KIWIEL, 2010](#)), na programação estocástica ([RUSZCZYŃSKI; ŚWITANOWSKI, 1997](#)) e na estabilização de métodos de planos de corte onde foi utilizada para acelerar a decomposição de Dantzig-Wolfe em problemas lineares inteiro mistos ([BRIANT et al., 2008](#)), em decomposição de Benders com variáveis contínuas em um problema estocástico com dois estágios para oráculos exatos ([RUSZCZYŃSKI, 1986](#)) e não exatos ([OLIVEIRA; SAGASTIZÁBAL; SCHEIMBERG, 2011](#)) e para estabilizar o método de decomposição de Benders para problemas inteiros mistos ([ZAOURAR; MALICK, 2014](#)).

Na otimização robusta o método de feixe foi abordado no trabalho [Ackooij, Lebbe e Malick \(2017\)](#) em um problema geral de otimização estruturado em blocos robusto, resolvido por um plano de corte regularizado onde o método de feixe proximal foi utilizado na resolução do subproblema. No artigo [Ning e You \(2020\)](#), onde usa o método de feixe em sua variante proximal de transformação para problemas de otimização robusta ajustável em múltiplos estágios, os problema de múltiplos estágios é transformado em um problema equivalente de otimização robusta ajustável de dois estágios, sendo o método de feixe proximal aplicado no problema de



dois estágios.

Aqui, o método de feixe proximal (KIWIEL, 1990) e o método de feixe de nível (LEMARÉCHAL; NEMIROVSKII; NESTEROV, 1995) são combinados dentro do método geração de colunas e restrições, originando três novas abordagens.

## 3.2 Método de feixe

Normalmente, os métodos baseados em planos de cortes oscilam em torno de uma solução ótima quanto mais se aproximam dela, mostrando assim um comportamento de zigue-zague ou também conhecido como efeito de cauda longa (BONNANS et al., 2006, veja o exemplo 9.7). Este zigue-zague é um dos motivos que explica a lenta convergência destes métodos. Para mitigar isso, um procedimento de estabilização quadrática de feixe (HIRIART-URRUTY; LEMARÉCHAL, 1993; LEMARÉCHAL; NEMIROVSKII; NESTEROV, 1995; KIWIEL, 1990; ZAOURAR; MALICK, 2014) foi desenvolvido para incentivar o método a permanecer próximo da melhor solução corrente, enquanto diminui o valor da função objetivo em um problema de minimização.

Para apresentar o método de feixe, considere um modelo convexo  $\check{f}_k$  e um centro de estabilidade  $\hat{y}_k$ , em que, para uma sequência de iterados  $\{y_k\}$  tem-se uma sequência de centros de estabilidade  $\{\hat{y}_k\}$ . Iterados são as soluções encontradas para o problema otimizado na iteração  $k$  e o centro de estabilidade é uma solução do problema podendo ser o iterado corrente ou não.

Dentre as abordagens mais conhecidas do método de feixe, são adaptadas para o método de geração de colunas e restrições de ZENG; ZHAO o método de feixe de nível e o método de feixe proximal. Além disso, criou-se uma terceira com a combinação das duas. As abordagens de feixe utilizadas são:

- método de feixe de nível (LEMARÉCHAL; NEMIROVSKII; NESTEROV, 1995) que possui o seguinte problema a ser resolvido:

$$\min_{y \in S_y} \left\{ \frac{1}{2} \|y - \hat{y}_k\|^2 : \check{f}_k(y) \leq L_k \right\}; \quad (3.1)$$

- método de feixe proximal (KIWIEL, 1990) que tem o seguinte problema a ser resolvido:

$$\min_{y \in S_y} \left\{ \check{f}_k(y) + \frac{1}{2\tau_k} \|y - \hat{y}_k\|^2 \right\} \quad (3.2)$$

Os parâmetros escalares reais  $L_k$  e  $\tau_k$  são parâmetros para balancear a estabilização entre a minimização da função objetivo original e a distância da solução ao centro de estabilidade. Embora as variantes sejam teoricamente equivalentes, elas apresentam desempenhos computacionais diferentes devido aos detalhes da implementação e da seleção apropriada dos valores dos parâmetros. Apesar de terem o mesmo propósito, não há regras de correspondência direta em como eles devem ser tratados.

### 3.2.1 Método de feixe aplicado ao método de geração de colunas e restrições

Para o desenvolvimento do problema de otimização robusta de dois estágio (2.5)- (2.7) é assumido que: (i) o conjunto  $R = \{y \in S_y : Ay \leq d\}$  é não vazio, (ii) possui recurso relativamente completo e (iii) o conjunto que define a incerteza  $\mathcal{U}$  é um conjunto discreto finito ou um poliedro.

De modo geral ao fixar a variável  $y$  em um valor viável ou  $\bar{y} \in S_y$ , deve-se garantir que exista um  $x \in S_x$  tal que  $[y, x]$  seja viável para qualquer um dos cenários selecionados  $u \in \mathcal{U}$ . O problema consiste então em encontrar o pior caso  $\omega(y) = \max_{u \in \mathcal{U}} \min_{x \in F(y, u)} b^T x$  para algum  $y \in R$ . Assim o problema de otimização robusta de dois estágio pode ser escrito como:

$$f = \min_{\bar{y} \in V \cap R} c^T \bar{y} + \omega(\bar{y}) \quad (3.3)$$

no qual o conjunto  $V = \{\bar{y} \in S_y : \text{subproblema é viável}\}$ .

Para lidar com essa estrutura, Zeng e Zhao (2013) ao introduzirem o método geração de colunas e restrições propõe uma abordagem que considera uma sequência de dois problemas, um é o problema mestre que é uma relaxação do (3.3) e o outro é o problema do segundo estágio (subproblema) que para dado  $y$  identifica um cenário  $u$  para ser inserido ao problema mestre.

Na terminologia de otimização não suave ao considerar que  $f$  é fechada e convexa (consequente seu domínio  $R$  será um conjunto convexo) e que para todo  $y \in R$  pode-se encontrar o valor de  $f$ , tem-se um indicativo que existe um oráculo retornando uma linearização de  $f$  ou os cortes de otimalidade ou os cenários identificados. Assim, considerando que exista um oráculo capaz de resolver o problema do segundo estágio, para um dado  $y$ , o oráculo retorna o valor  $f(y)$ .

Assumindo que o oráculo provem informações para  $k$  pontos  $y_1, \dots, y_k$ , tal que  $y_i \in R$ , o modelo de plano de corte convexo da função  $f$  definido como  $\check{f}_k$ , é o problema com o pior caso de  $f$  dada pelo oráculo. Na versão do método de geração de colunas e restrições onde satisfaz (i), (ii) e (iii) esse problema para a iteração  $k$  é:

$$\min_{y \in S_y} \check{f}_k$$

ou equivalente:

$$\min_{\eta \in \mathbb{R}} c^T y + \eta \quad (3.4)$$

$$\text{s.a.: } Ay \geq d \quad (3.5)$$

$$y \in S_y \quad (3.6)$$

$$\eta \geq b^T x^l \quad l = 1, \dots, k \quad (3.7)$$

$$Ey + Gx^l \geq h - Mu_l \quad l = 1, \dots, k \quad (3.8)$$

$$x^l \in S_x \quad l = 1, \dots, k \quad (3.9)$$

Para definir valores para os parâmetros dos métodos de feixe  $\hat{y}_k$ ,  $\tau_k$  e  $L_k$  há diferentes estratégias. Aqui foram escolhidos esquemas simples para se ter algoritmos enxutos de fácil implementação. Duas estratégias comuns para selecionar o centro de estabilidade  $\hat{y}_k$  são atualizá-lo sempre que o limite superior melhorar (HIRIART-URRUTY; LEMARÉCHAL, 2013) e corrigi-lo para um limite superior válido em todas as iterações (CRUZ; OLIVEIRA, 2014). Neste trabalho,  $\hat{y}_k$  é atualizado em toda iteração em que o limite superior melhorar. Seu valor é assumido como uma combinação convexa dado por  $\hat{y}_k = \lambda \bar{y} + (1 - \lambda)\hat{y}_{k-1}$ , no qual  $\bar{y}$  é a solução atual, e  $\lambda \in (0, 1)$ . Escolheu-se  $\lambda = \frac{1}{2}$  após alguns testes preliminares realizados.

Como todas as três variantes desenvolvidas terão funções objetivas quadráticas, a resolução dos respectivos problemas não é tarefa fácil. Os termos quadráticos na função objetivo aumentam muito a complexidade de resolução. Apesar de existirem resolvidores como CPLEX e GUROBI que podem resolver adequadamente problemas quadráticos, é utilizada a técnica de aproximação externa (OA) de Duran e Grossmann (1986) para lidar com a não-linearidade. Para isso, um vetor de variável irrestrito foi adicionado para representar a diferença  $e = y - \hat{y}_k$  e uma restrição de linearização  $\omega \geq (\bar{e}^h)^2 + 2\bar{e}^h(e - \bar{e}^h)$  para substituir os termos quadráticos, no qual  $h$  indexa as iterações da técnica de aproximação externa.

Vamos aqui apresentar, para cada uma das variantes desenvolvidas, como o problema mestre do método de geração de colunas e restrições, veja Linha 3 do Algoritmo 2, será reescrito.

#### • Método de feixe de nível aplicado ao método de geração de colunas e restrições

O problema mestre do método de geração de colunas e restrições na Linha 3 do Algoritmo 2 pode ser assim escrito para o método de feixe de nível.

$$\min \frac{1}{2} \|y - \hat{y}_k\|^2 \quad (3.10)$$

$$\text{s.a.: } Ay \geq d \quad (3.11)$$

$$y \in S_y \quad (3.12)$$

$$Ey + Gx^l \geq h - Mu_l \quad l = 1, \dots, k \quad (3.13)$$

$$x^l \in S_x \quad l = 1, \dots, k \quad (3.14)$$

$$c^T y + b^T x^l \leq L_l \quad \forall l \in O \quad (3.15)$$

Repare na função objetivo quadrática (3.10) e nas restrições de níveis (3.15), uma para cada cenário viável gerado.

Aplicando a técnica de aproximação externa e após algumas manipulações algébricas, tem-se o seguinte problema mestre do método de geração de colunas e restrições com a abordagem

de feixe:

$$\min (1 - \alpha) \frac{\omega}{2} + \alpha \eta \quad (3.16)$$

$$\text{s.a.: (3.11) - (3.14)} \quad (3.17)$$

$$e = y - \hat{y}_k \quad (3.18)$$

$$\omega \geq (\bar{e}^h)^2 + 2\bar{e}^h(e - \bar{e}^h) \quad (3.19)$$

$$c^T y + b^T x^l \leq (1 - \alpha)L_l + \alpha \eta \quad \forall l \in O \quad (3.20)$$

Aqui, o parâmetro  $\alpha$  funciona como um sinalizador de qual é o procedimento que está sendo executado no momento. Se  $\alpha = 0$  tem-se o método de feixe com a técnica de aproximação externa, enquanto quando  $\alpha = 1$  tem-se o método de geração de colunas e restrições.

As escolhas do centro de estabilidade e do parâmetro  $L_k$  são muito importantes para o desenvolvimento da variante de nível. Então, seguindo as diretrizes de [Lemaréchal, Nemirovskii e Nesterov \(1995\)](#) o parâmetro  $L_k$  foi calculado e ajustado ao longo das iterações como:

$$L_k = \lambda LS + (1 - \lambda)LI, \text{ no qual } \lambda \in (0, 1).$$

Aqui foi definido  $\lambda = 0.4$  após alguns testes preliminares.

#### • Método de feixe proximal para o método de geração de colunas e restrições

Seguindo passos similares, a estratégia de feixe proximal tem o seguinte problema mestre:

$$\min \frac{1}{2\tau_k} \|y - \hat{y}_k\|^2 + \eta \quad (3.21)$$

$$\text{s.a.: (3.11) - (3.14)} \quad (3.22)$$

$$\eta \geq c^T y + b^T x^l \quad \forall l \in O \quad (3.23)$$

que linearizado com a técnica de aproximação externa e mesclado com o problema mestre do método de [ZENG; ZHAO](#), possibilita o problema mestre do método de geração de colunas e restrições com a abordagem proximal dado por:

$$\min (1 - \alpha) \frac{\omega}{2\tau_k} + \eta \quad (3.24)$$

$$\text{s.a.: (3.18) - (3.19), (3.22) - (3.23)} \quad (3.25)$$

Novamente,  $\alpha$  tem o papel de sinalizar qual o método foi resolvido no momento. Se  $\alpha = 0$  tem-se o método de feixe proximal com a técnica de aproximação externa. Caso  $\alpha = 1$  tem-se o problema mestre do método de geração de colunas e restrições.

O parâmetro  $\tau_k$  afeta muito o desempenho da variante proximal especialmente quando é atualizada durante as iterações. Estratégias baseadas numa heurística ([KIWIEL, 1990](#)) e numa

fórmula Quase-Newton (LEMARÉCHAL; SAGASTIZÁBAL, 1997) foram adaptadas e testadas, sendo a primeira escolhida, devido à eficiência exibida na solução de problemas restritos. A estratégia baseada numa heurística é apresentada no Algoritmo 4 e sua explicação se dará juntamente com a explicação do Algoritmo 3 pelo fato dela está inserida nele e para melhor compreensão.

- **Combinação das abordagens de feixe de nível e proximal para o método de geração de colunas e restrições**

A terceira estratégia combina as duas abordagens anteriores, o método de feixe de nível e o proximal com o método de geração de colunas e restrições. Para tal, basta adicionar a restrição (3.26) para a formulação (3.24)-(3.25) sempre que  $\alpha = 0$ .

$$c^T y + b^T x^l \leq L_l \quad \forall l \in O \tag{3.26}$$

A combinação de estratégias de feixe, ou a ideia de dupla estabilização, já foi usada anteriormente na otimização não-suave em Astorino et al. (2011) e Oliveira e Solodov (2016), ambos usando lógicas e contextos diferentes dos aqui abordados.

### 3.2.2 O algoritmo de geração de colunas e restrições combinado com o método de feixe

As três variantes desenvolvidas com método de feixe aceleram o desempenho do método de geração de colunas e restrições ao trabalhar com dois problemas mestre ao mesmo tempo. A ideia é que o problema mestre de feixe possibilite encontrar limites superiores melhores, mais próximo a um centro de estabilização, visando assim acelerar o processo de convergência.

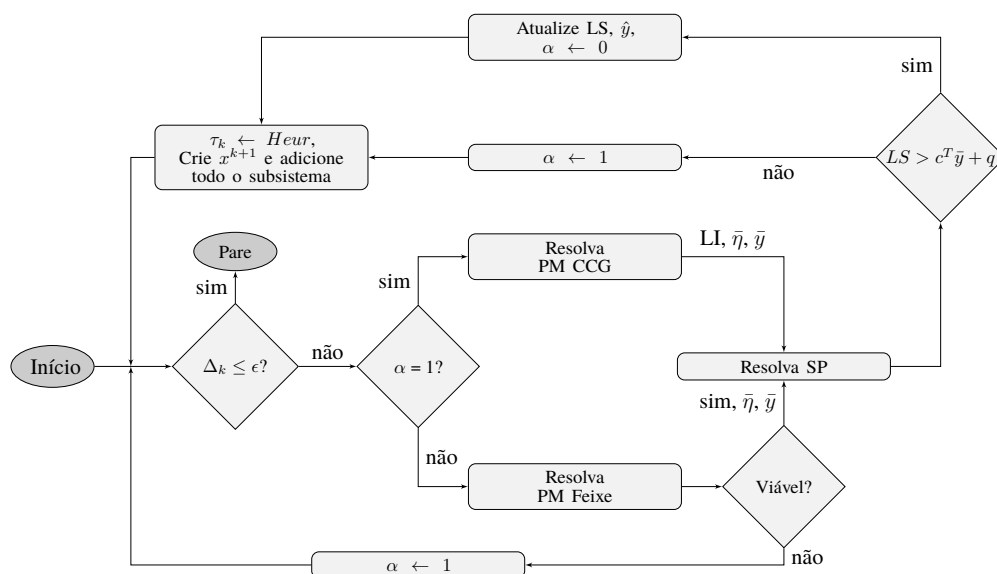


Figura 3.1 – Esquema do método de geração de coluna e restrições com feixe

O método proposto de geração de colunas e restrições com feixe para resolver problemas de otimização robusta de dois estágios tem suas principais etapas mostradas na Figura 3.1 e no Algoritmo 3. A saber, o método de geração de colunas e restrições será chamado de CCG. Inicialmente é realizada uma fase de aquecimento que resolve o CCG para algumas iterações ( $k_{ccg}$ ) antes de alternar entre as resoluções dos problemas mestres ( $PM$ ) do método feixe e do método CCG. O parâmetro  $\alpha$  indica qual problema mestre será executado na próxima iteração:  $\alpha = 1$  define o problema mestre do CCG, enquanto  $\alpha = 0$  seleciona o problema mestre do feixe.

<b>Algoritmo 3: Abordagem BCCG</b>	
1	$LS \leftarrow \infty, LI \leftarrow -\infty, k \leftarrow 0, O \leftarrow \emptyset, \Delta_k \leftarrow 100$ // inicialização
2	$\alpha_k \leftarrow 1, \tau_k \leftarrow 1, s \leftarrow -1$
3	<b>enquanto</b> $\Delta_k > \epsilon$ <b>faça</b>
4	$(LI, \bar{y}) \leftarrow PM(\alpha)$ // LI só é válido com $\alpha = 1$
5	$k \leftarrow k + 1$
6	<b>se</b> $k > k_{ccg}$ <b>então</b>
7	$\alpha_k \leftarrow 0$ // PM Feixe
8	<b>senão</b>
9	$\alpha_k \leftarrow 1$ // PM CCG
10	<b>fim</b>
11	<b>se</b> $PM$ é inviável <b>então</b>
12	$\alpha_k \leftarrow 1$ // PM CCG
13	<b>senão</b>
14	$(q, \bar{u}_k) \leftarrow Q(\bar{y})$
15	<b>se</b> $q < +\infty$ <b>então</b>
16	$O \leftarrow O \cup \{k\}$
17	<b>se</b> $LS > c^T \bar{y} + q$ <b>então</b>
18	$\xi \leftarrow 0$
19	$LS \leftarrow c^T \bar{y} + q$
20	$\hat{y}_k \leftarrow \lambda \bar{y} + (1 - \lambda) \hat{y}_{k-1}$
21	$L_k \leftarrow \lambda LS + (1 - \lambda) LI$
22	<b>senão</b>
23	$\xi \leftarrow 1$
24	<b>se</b> $\alpha_{k-1} = 0$ <b>então</b>
25	$\alpha_k \leftarrow 1$ // PM CCG
26	<b>fim</b>
27	<b>fim</b>
28	$\tau_k \leftarrow Heur(k, \tau_{k-1}, s, \xi)$
29	<b>fim</b>
30	<b>fim</b>
31	<b>fim</b>

Sempre que o LS é atualizado, os parâmetros  $L_k$  (presente na variante de nível e na variante proximal e nível) e  $\hat{y}_k$  também são atualizados e um problema mestre de feixe é resolvido na iteração seguinte; caso contrário, uma iteração do CCG será executada. O método CCG é chamado sempre que não é mais possível melhorar o LS ou quando o problema mestre de feixe for

inviável. Observe que a convergência é garantida uma vez que um LI só é obtido pelo problema mestre do CCG ou seja quando  $\alpha = 1$ . A convergência ocorre quando a tolerância  $\Delta_k \leq \epsilon$  é alcançada com  $\Delta_k = \frac{LS-LI}{LS}$  e  $\epsilon$  um valor real pequeno.

O parâmetro  $\tau_k$  é atualizado em todas iterações das variantes proximal ou proximal e nível seguindo o Algoritmo 4. A ideia é diminuir ou não a penalização associada a diferença entre a variável e o centro de estabilidade no PM feixe. Para isso o algoritmo parte do valor inicial de  $\tau_{k-1}$  dado pelo subgradiente de  $c^T \bar{y} + q$  e segue dobrando ou não seu valor nas iterações seguintes. Isto dependerá da atualização do LS que é indicado pelo parâmetro  $\xi = 0$  se ele foi atualizado e  $\xi = 1$  caso contrário. O parâmetro  $s$  presente no algoritmo tem a função de contabilizar as não atualizações do LS e quando isso acontece mais de 3 vezes seguidas o  $\tau_k$  tem seu valor dobrado.

**Algoritmo 4:**  $Heur(k, \tau_{k-1}, s, \xi)$

```

1 se  $k = k_{ccg} + 1$  então
2   |  $\tau_{k-1} \leftarrow \|g\|$  //  $g$  subgradiente de  $c^T \bar{y} + q$ 
3 fim
4 se  $k > k_{ccg}$  então
5   | se  $\xi = 0$  então
6     | se  $s = 0$  então
7       |  $\tau_k \leftarrow 2\tau_{k-1}$ 
8     | senão
9       |  $\tau_k \leftarrow \tau_{k-1}$ 
10    | fim
11    |  $s \leftarrow 0$ 
12  | fim
13  | se  $s > 3$  então
14    |  $\tau_k \leftarrow 2\tau_{k-1}$ 
15    |  $s \leftarrow 1$ 
16  | senão
17    |  $\tau_k \leftarrow \tau_{k-1}$ 
18    |  $s \leftarrow \max(s + 1, 1)$ 
19  | fim
20 fim

```

### 3.3 Estudo de caso: problema robusto de transporte e localização

Para avaliar computacionalmente as três variantes estudadas do método de feixe combinadas com o método de geração de colunas e restrições, foi usado o problema de otimização robusto de transporte e localização (PTL). O problema consiste em atender as demandas  $d_j$  de um conjunto  $J = \{1, \dots, n\}$  de clientes via facilidades a serem selecionadas de um conjunto  $I = \{1, \dots, m\}$  de locais candidatos considerando a minimização dos custos de instalação  $f_i$  e de

uso unitário  $a_i$  da capacidade  $K_i$  das facilidades,  $i \in I$ , e os custos  $c_{ij}$  de transporte desde a facilidade  $i \in I$  até o clientes  $j \in J$ . A viabilidade é garantida ao se assumir que  $\sum_{i \in I} K_i \geq \sum_{j \in J} d_j$ . Usando os conjuntos, parâmetros e variáveis definidas a seguir:

Conjuntos e parâmetro:

$J = \{1, \dots, n\}$  conjunto de clientes.

$I = \{1, \dots, m\}$  conjunto de facilidades.

$d_j$  demanda do cliente  $j \in J$ .

$c_{ij}$  custo unitário de transporte para atender o cliente  $j \in J$  pela facilidade  $i \in I$ .

$f_i$  custo fixo de se instalar a facilidade  $i \in I$ .

$K_i$  capacidade total da facilidade  $i \in I$ .

$a_i$  custo unitário da capacidade  $i$ .

Variáveis de decisão:

$y_i \in \{0, 1\}$  indica se a facilidade  $i \in I$  é instalada (1) ou não (0).

$z_i \geq 0$  indica a capacidade usada pela facilidade  $i \in I$ .

$x_{ij} \geq 0$  indica a quantidade transportada da facilidade  $i \in I$  até o cliente  $j \in J$ .

é possível então escrever o problema de transporte e localização como:

$$\min \sum_{i \in I} \left( f_i y_i + a_i z_i + \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \right) \quad (3.27)$$

$$\text{s.a.: } z_i \leq K_i y_i \quad \forall i \in I \quad (3.28)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq z_i \quad \forall i \in I \quad (3.29)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq d_j \quad \forall j \in J \quad (3.30)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (3.31)$$

$$z_i \geq 0 \quad \forall i \in I \quad (3.32)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J \quad (3.33)$$

A função objetivo (3.27) minimiza o custo total. As restrições (3.28) e (3.29) garantem que os clientes sejam atendidos apenas pelas facilidades instaladas até a capacidade máxima permitida. As restrições (3.30) garantem que as demandas dos clientes sejam atendidas, enquanto as restrições (3.31) - (3.33) representam o domínio das variáveis.

A formulação (3.27) - (3.33) é determinística, isto é, não considera a incerteza nos dados. Será aqui também referenciada como formulação nominal. Geralmente, na prática, as demandas não são incertas, exigindo, portanto, procedimentos especializados como o criado por [Bertsimas e Sim \(2003\)](#), [Bertsimas e Sim \(2004\)](#) para lidar adequadamente com a incerteza. A abordagem de **BERTSIMAS; SIM** pressupõe que nenhuma função de distribuição probabilística para descrever



a demanda seja conhecida, mas que a demanda  $d_j, j \in J$ , varia dentro de um intervalo de valores possíveis ou  $d_j \in [\bar{d}_j - \tilde{d}_j, \bar{d}_j + \tilde{d}_j]$ , em que  $\bar{d}_j$  e  $\tilde{d}_j$  são os valores nominal e desvio permitido para a demanda  $d_j$ , respectivamente.

Além disso, o método deles também pressupõe que é improvável que todas as demandas se desviem de seus valores nominais, mas apenas uma fração deles. Para isso, eles introduzem a noção de um orçamento de incerteza  $\Gamma$  para representar o número máximo de demandas incertas que podem, simultaneamente, se desviar de seus valores nominais. Isso leva à definição do conjunto de incertezas sob demanda ou  $D = \{d : d_j = \bar{d}_j + \tilde{d}_j g_j : g_j \in [0, 1], \forall j, \sum_{j \in J} g_j \leq \Gamma\}$ . Originalmente pensado para otimização robusta de um único estágio este conjunto de incerteza sob demanda pode ser aplicado em otimização robusta de dois estágios para o problema de transporte e localização.

Uma abordagem de otimização robusta de dois estágios primeiro localiza as instalações e suas respectivas capacidades para posteriormente abordar a questão do transporte, gerando assim soluções menos conservadoras do que uma estratégia de otimização robusta de único estágio. Dada a incerteza definida na demanda pelo conjunto  $D$ , e considerando  $y_i$  e  $z_i, i \in I$ , as variáveis de decisão do primeiro estágio e  $x_{ij}, i \in I, j \in J$ , as variáveis de decisão de recurso, uma contraparte robusta em dois estágios do problema de transporte, seguindo a formulação 2.5-2.7, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \min_{(y,z) \in S_y} \sum_{i \in I} (f_i y_i + a_i z_i) + \max_{d \in D} \min_{x \in S_x} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.: } S_y = \left\{ (y, z) \in \{0, 1\}^m \times \mathbb{R}_+^m : (3.28) \right\} \\ S_x = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{m \times n} : (3.29) - (3.30) \right\} \end{aligned}$$

Como na formulação nominal, aqui a viabilidade é garantida ao se assumir  $\sum_{i \in I} K_i \geq \sum_{j \in J} (\bar{d}_j + \tilde{d}_j)$ .

Note que a parte do segundo estágio, constituído pela parte max-min da função objetivo mais o conjunto  $S_x$ , é sempre viável. Isto permite utilizar a teoria da dualidade na parte de minimização. O problema resultante será um max-max que, na verdade, é apenas um problema de maximização.

### 3.3.1 Algoritmo de geração de colunas e restrições

Para um dado valor  $(\bar{y}_i, \bar{z}_i) \in S_y$ , e usando as variáveis duais  $\pi_i \geq 0$  e  $\lambda_j \geq 0$  associadas as restrições (3.29) e (3.30), respectivamente, podemos escrever um subproblema identificador de cenários não-triviais como:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j \in J} \left( \bar{d}_j \lambda_j + \tilde{d}_j \lambda_j g_j \right) - \sum_{i \in I} \bar{z}_i \pi_i \\
\text{s.a.:} \quad & \lambda_j - \pi_i \leq c_{ij} && \forall i \in I, j \in J \\
& \sum_{j \in J} g_j \leq \Gamma \\
& 0 \leq g_j \leq 1 && \forall j \in J
\end{aligned}$$

Note que o subproblema acima é não-linear com produto das variáveis  $\lambda_j$  por  $g_j$  na função objetivo. Entretanto as variáveis  $0 \leq g_j \leq 1$  podem ser substituídas por  $g_j \in \{0, 1\}$  (GABREL et al., 2014, Proposição 1) e o subproblema linearizado através do método *big-M*. Com isso, o termo não-linear  $\lambda_j g_j$  é substituído por uma variável contínua  $w_j \geq 0$  resultando no seguinte subproblema:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j \in J} \left( \bar{d}_j \lambda_j + \tilde{d}_j w_j \right) - \sum_{i \in I} \bar{z}_i \pi_i \\
\text{s.a.:} \quad & \lambda_j - \pi_i \leq c_{ij} && \forall i \in I, j \in J \\
& \sum_{j \in J} g_j \leq \Gamma \\
& w_j \leq \lambda_j && \forall j \in J \\
& w_j \leq M g_j && \forall j \in J
\end{aligned}$$

O subproblema acima identifica cenários não-triviais. Uma vez identificado um cenário, o subsistema de transporte associado a este cenário é adicionado ao problema mestre (Seção 2.4) do problema de otimização robusta de transporte e localização ou:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in I} (f_i y_i + a_i z_i) + \eta \\
\text{s.a.:} \quad & (3.28), (3.31) \text{ e } (3.32) \\
& \sum_{i \in I} z_i \geq \sum_{j \in J} (\tilde{d}_j + \bar{d}_j) \\
& \sum_{j \in J} x_{ij}^l \leq z_i && \forall i \in I, l \in L \\
& \sum_{i \in I} x_{ij}^l \geq d_j^l && \forall j \in J, l \in L \\
& \eta \geq \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij}^l && \forall l \in L \\
& \eta \geq 0 \\
& x_{ij}^l \geq 0 && \forall i \in I, j \in J, l \in L
\end{aligned}$$

No problema mestre acima, o conjunto  $L$  possui os cenários já adicionados até o momento durante os ciclos do método de geração de colunas e restrições. Note que para cada cenário  $l \in L$  há um subsistema com as variáveis de recurso  $x_{ij}^l$  e as respectivas restrições.

### 3.3.2 Algoritmo de geração de colunas e restrições com o método de feixe

Aplicando o método de feixe de nível ao problema mestre obtém-se um programa equivalente a formulação (3.10)-(3.15) da Seção 3.2, dado que um centro de estabilidade  $\hat{z}_i$  seja conhecido:

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i \in I} (z_i - \hat{z}_i)^2 \quad (3.34)$$

$$\text{s.a.: } \sum_{i \in I} z_i \geq \sum_{j \in J} (\tilde{d}_j + \bar{d}_j) \quad (3.35)$$

$$z_i \leq K_i y_i \quad \forall i \in I \quad (3.36)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij}^l \leq z_i \quad \forall i \in I, l \in L \quad (3.37)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij}^l \geq d_j^l \quad \forall j \in J, l \in L \quad (3.38)$$

$$\sum_{i \in I} \left( f_i y_i + a_i z_i + \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}^l \right) \leq L_l \quad \forall l \in L \quad (3.39)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (3.40)$$

$$z_i \geq 0 \quad \forall i \in I \quad (3.41)$$

$$x_{ij}^l \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, l \in L \quad (3.42)$$

Note que há uma restrição de nível (3.39) para cada cenário  $l \in L$  gerado. Note também que o programa (3.34)-(3.42) é não-linear na função objetivo. Assim como na Seção 3.2, aplicando a técnica de aproximação externa para resolvê-lo tem-se o termo  $(z_i - \hat{z}_i)^2$  substituído pela variável  $\omega_i \geq 0, i \in I$  na função objetivo. As restrições  $e_i = z_i - \hat{z}_i$  e  $\omega_i \geq (\bar{e}_i^{h'})^2 + 2\bar{e}_i^{h'}(e_i - \bar{e}_i^{h'})$ ,  $i \in I$ , são adicionadas ao problema mestre. Isto permite escrever o problema mestre, agora estruturado para o método de feixe de nível, como:

$$\min \frac{1}{2} (1 - \alpha) \sum_{i \in I} \omega_i + \alpha \eta \quad (3.43)$$

$$\text{s.a.: (3.35) - (3.38) e (3.40) - (3.42)} \quad (3.44)$$

$$e_i = z_i - \hat{z}_i \quad \forall i \in I \quad (3.45)$$

$$\omega_i \geq (\bar{e}_i^{h'})^2 + 2\bar{e}_i^{h'}(e_i - \bar{e}_i^{h'}) \quad \forall i \in I, h' \in E \quad (3.46)$$

$$\sum_{i \in I} \left( f_i y_i + a_i z_i + \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}^l \right) \leq (1 - \alpha) L_l + \alpha \eta \quad \forall l \in L \quad (3.47)$$

$$\eta \geq 0 \quad (3.48)$$

$$e_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in I \quad (3.49)$$

$$\omega_i \geq 0 \quad \forall i \in I \quad (3.50)$$

Relembre que, quando  $\alpha = 1$ , tem-se o problema mestre normal do método de geração de colunas e restrições, e quando  $\alpha = 0$ , temos o problema mestre do método de feixe de nível.

Aplicando-se o mesmo raciocínio para o método de feixe proximal, obtemos o seguinte problema mestre:

$$\begin{aligned} \min \quad & \eta + (1 - \alpha) \left( \frac{1}{2\tau_k} \sum_{i \in I} \omega_i \right) \\ \text{s.a.:} \quad & (3.44) - (3.46) \text{ e } (3.48) - (3.50) \\ & \eta \geq \sum_{i \in I} \left( f_i y_i + a_i z_i + \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}^l \right) \quad \forall l \in L \end{aligned}$$

Assim como na estratégia de nível o parâmetro  $\alpha$  tem o mesmo significado. Para se combinar as duas variantes do método de feixe, i.e., a de nível e a proximal, em uma única versão híbrida, é necessário adicionar as restrições (3.51) ao problema mestre da variante proximal quando  $\alpha$  igual a zero.

$$\sum_{i \in I} \left( f_i y_i + a_i z_i + \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}^l \right) \leq L_l \quad \forall l \in L, \alpha = 0 \quad (3.51)$$

### 3.3.3 Resultados e discussões

Todos os testes computacionais foram realizados em uma estação de trabalho *Dell Power Edge T 620*, equipada com um CPU Intel(R) Xeon(R) E5-26090@2.40GHz e 98 GB de RAM, rodando em um ambiente Linux de 64 bits. Todos os algoritmos foram implementados em C++ e usando o solucionador CPLEX 12.7 por meio da interface *ILOG Concert Technology*. Além disso, todos os quatro algoritmos concebidos, nomeados como CCG para o algoritmo de geração de colunas e restrições, LBCCG para o CCG com o método de feixe de nível, PBCCG para o CCG com o método de feixe proximal, e LPBCCG com o CCG combinado com ambas variantes do método de feixe, foram avaliados na resolução de instâncias geradas aleatoriamente seguindo as diretrizes de [Gabrel et al. \(2014\)](#), mas com maiores custos fixos e capacidades. Para acelerar a pesquisa, a resolução dos problemas mestres de feixe foi limitada a 30 nós de *branch-and-bound* (B&B) e 10 segundos de execução. Esses valores foram definidos após alguns testes preliminares.

Um total de dez instâncias diferentes foram geradas com tamanho igual a  $|I| \times |J| = 70 \times 70$ , e os parâmetros  $f_i$ ,  $a_i$ ,  $K_i$ ,  $\bar{d}_j$ ,  $\gamma$  e  $c_{ij}$  selecionados aleatoriamente dentro dos intervalos  $[1000, 10000]$ ,  $[10, 100]$ ,  $[1200, 4200]$ ,  $[10, 500]$ ,  $[0.1, 0.5]$  e  $[1, 1000]$ , respectivamente, seguindo uma distribuição uniforme. O parâmetro de desvio é dado por  $\tilde{d}_j = \gamma \bar{d}_j$ . Além disso, para cada instância o valor de  $\Gamma$  foi variado dentro do conjunto  $\{10\%, 20\%, \dots, 100\%\}$  de  $|J|$ , resultando assim em um total de 100 problemas de teste.

As tabelas 3.2 e 3.3 resumem os resultados encontrados para cada método e cada valor de  $\Gamma(\%)$ . Na primeira são relatadas as médias para o número de iterações ( $h$ ) - e do número de nós B&B, acompanhado de seu percentual médio de economia alcançado ( $B^s$ ). Na segunda encontram-se o tempo de execução do MP por iteração ( $\bar{T}^h$ ) e o tempo total de execução ( $\bar{T}$ ).

Ambos seguidos de seus respectivos percentuais médios de economia alcançadas ( $\bar{T}^{hs}$ ) e ( $\bar{T}^s$ ). Note que o algoritmo CCG é tido como referência para obter os valores de  $B^s$ ,  $\bar{T}^{hs}$  e  $\bar{T}^s$  de cada estratégia de feixe desenvolvida em cada  $\Gamma(\%)$  e sua formula é dada por:

$$100 \times \left( 1 - \frac{\text{valor médio da estratégia de Feixe}}{\text{valor médio do CCG}} \right)$$

Tabela 3.2 – Comparação do desempenho dos algoritmos na resolução das instâncias  $70 \times 70$ : médias para o número de iterações e número de nós *branch-and-bound*.

$\Gamma(\%)$	Média # Iterações ( $h$ )				Média #nós de B&B \ $B^s(\%)$			
	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG
10	28.20	34.80	30.00	29.70	246.10	<b>15.70</b> \ 93.62	103.90 \ 57.78	111.30 \ 54.77
20	49.50	55.40	50.40	50.30	725.40	<b>18.70</b> \ 97.42	318.90 \ 56.04	317.20 \ 56.27
30	51.20	55.50	55.40	54.50	609.90	<b>19.70</b> \ 96.77	307.20 \ 49.63	309.30 \ 49.29
40	53.60	58.00	55.10	53.00	591.50	<b>15.90</b> \ 97.31	238.30 \ 59.71	242.10 \ 59.07
50	46.40	51.40	49.60	47.30	366.40	<b>10.20</b> \ 97.22	158.80 \ 56.66	161.30 \ 55.98
60	41.30	47.70	44.40	43.40	323.60	<b>9.90</b> \ 96.94	132.80 \ 58.96	144.20 \ 55.44
70	35.80	41.20	38.10	38.50	144.70	<b>6.70</b> \ 95.37	63.00 \ 56.46	67.10 \ 53.63
80	24.10	29.40	27.00	27.50	55.90	<b>4.30</b> \ 92.31	29.30 \ 47.58	31.00 \ 44.54
90	17.40	20.30	18.20	18.20	20.70	<b>2.90</b> \ 85.99	11.00 \ 46.86	8.30 \ 59.90
100	2.00	2.00	2.00	2.00	0.00	0.00 \ -	0.00 \ -	0.00 \ -
Média	34.95	39.57	37.02	36.44	308.42	<b>10.4</b> \ 96.63	136.32 \ 55.8	139.18 \ 54.87

Tabela 3.3 – Comparação do desempenho dos algoritmos na resolução das instâncias  $70 \times 70$ : médias do tempo execução do problema mestre por iteração e tempo total de execução.

$\Gamma(\%)$	Tempo médio de execução do MP por iteração $\bar{T}^h(s)$ \ $\bar{T}^{hs}(\%)$				Tempo médio de execução $\bar{T}(s)$ \ $\bar{T}^s(\%)$			
	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG
10	26.62	16.76 \ 37.04	14.79 \ 44.44	15.34 \ 42.37	1142.81	826.33 \ 27.69	<b>646.51</b> \ 43.43	657.34 \ 42.48
20	96.3	46.38 \ 51.84	45.12 \ 53.15	45.22 \ 53.04	7389.7	4862.27 \ 34.20	3978.68 \ 46.16	<b>3913.47</b> \ 47.04
30	83.41	41.01 \ 50.83	43.67 \ 47.64	43.98 \ 47.27	6251.8	<b>3522.9</b> \ 43.65	3830.36 \ 38.73	3749.86 \ 40.02
40	85.85	40.35 \ 53.00	41.44 \ 51.73	41.23 \ 51.97	6355.74	3262.37 \ 48.67	3360.88 \ 47.12	<b>3153.71</b> \ 50.38
50	56.54	27.18 \ 51.93	29.62 \ 47.61	28.67 \ 49.29	3568.03	1946.43 \ 45.45	2130.54 \ 40.29	<b>1891.37</b> \ 46.99
60	45.95	26.29 \ 42.79	26.35 \ 42.66	26.53 \ 42.26	2682.93	1914.57 \ 28.64	1823.80 \ 32.02	<b>1756.90</b> \ 34.52
70	29.4	18.60 \ 36.73	16.62 \ 43.47	17.88 \ 39.18	1334.86	992.07 \ 25.68	<b>845.87</b> \ 36.63	890.35 \ 33.30
80	13.89	11.71 \ 15.69	11.2 \ 19.37	12.06 \ 13.17	481.39	455.31 \ 5.42	<b>419.94</b> \ 12.77	467.33 \ 2.92
90	6.98	6.80 \ 2.58	5.94 \ 14.90	6.02 \ 13.75	142.17	156.44 \ -10.04	126.04 \ 11.35	<b>127.21</b> \ 10.52
100	0.05	0.04 \ 20.00	0.04 \ 20.00	0.04 \ 20.00	0.18	0.19 \ -5.56	0.19 \ -5.56	<b>0.18</b> \ 0.00
Média	44.5	23.51 \ 47.17	23.48 \ 47.24	23.7 \ 46.74	2934.96	1793.89 \ 38.88	1716.28 \ 41.52	<b>1660.77</b> \ 43.41

Para facilitar a apresentação, os melhores resultados para as médias dos números de nós *branch-and-bound* e tempos totais de execuções nas Tabelas 3.2 e 3.3 estão destacados em

negrito. Note que, embora o CCG leve menos iterações para atingir o ótimo em média, essas iterações demoram mais para terminar quando comparadas com os algoritmos de feixe devido ao maior número de nós de B&B necessários. Observe que para as médias o LPBCCG supera o método CCG para todos os valores do orçamento de incerteza, enquanto as variantes LBCCG e PBCCG têm melhores desempenhos para todos os valores, exceto 90% e 100%. Isso é melhor visto e representado nas Figuras 3.2 e 3.3.

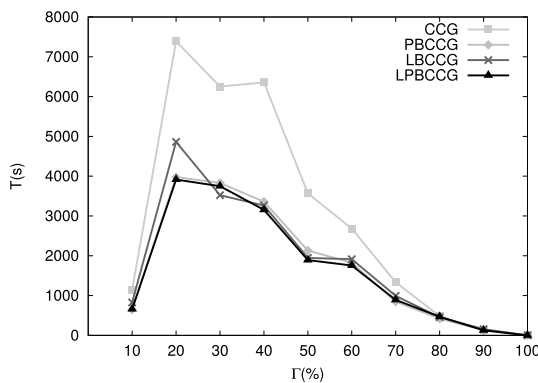


Figura 3.2 – Impacto do orçamento de incerteza em relação ao tempo médio de execução ( $\bar{T}$ ) nas instância de tamanho  $70 \times 70$ .

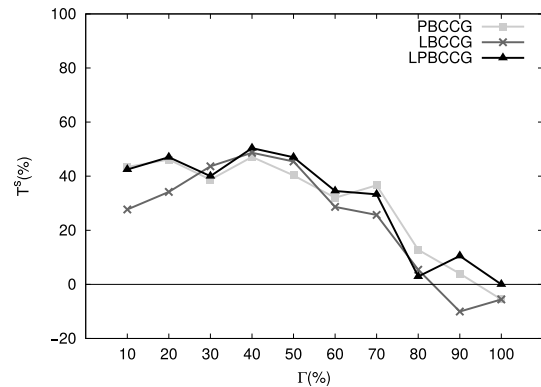


Figura 3.3 – Impacto do orçamento de incerteza em relação aos percentuais médios de economia ( $\bar{T}^s$ ) de execução das instância de tamanho  $70 \times 70$ .

Vale ressaltar que as maiores economias ocorrem dentro do intervalo  $\Gamma \in [20\%, 60\%]$ , mostrando uma economia de mais de 40% em média para o LPBCCG, e que todos os métodos têm desempenhos semelhantes quando o orçamento de incerteza está nas extremidades ou  $\Gamma$  é igual a 10% e 100%. Em média, o LPBCCG requer apenas 46% do número de nós *branch-and-bound* e 54% do tempo por iteração em cada problema mestre quando comparado com o CCG. Quando comparado com o método mais eficiente entre os algoritmos utilizados ( $M = \{CCG, PBCCG, LBCCG, LPBCCG\}$ ) para resolver cada instância para cada valor de orçamento de incerteza, é possível ver que o LPBCCG é menos sensível a variação de  $\Gamma$  como pode ser inferido na Figura 3.4.

Para ilustrar a maior convergência da estratégia LPBCCG, a Figura 3.5 traz a evolução dos limites superior e inferior dos métodos que resolvem uma das instâncias (tipo 04) com  $\Gamma = 40\%$ . Os tempos de execução foram normalizados em relação ao método considerado mais lento. A variante LPBCCG encontra melhores limites superiores e inferiores mais rapidamente, convergindo assim para a solução ótima mais rapidamente do que os outros algoritmos.

Finalizando, um perfil de desempenho (DOLAN; MORÉ, 2002), mostrado na Figura 3.6, foi construído para avaliar a porcentagem de instâncias que um algoritmo é capaz de encontrar a solução ótima dentro de uma dada razão de tempo de execução  $\tau$ , tendo como referência o melhor método de solução disponível para resolver as instâncias. Essa porcentagem é dada pela

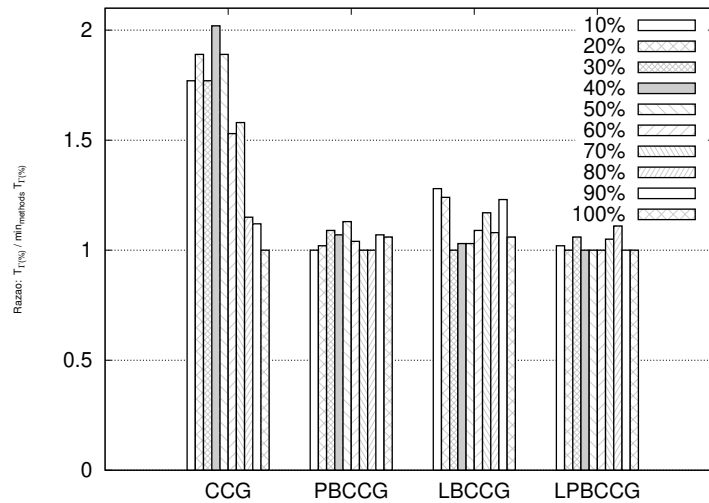


Figura 3.4 – Razão de tempo ( $T_{\Gamma(\%)} / \min_{m \in M} T_{m\Gamma(\%)}$ ) para cada orçamento de incerteza ao resolver as instâncias de tamanho  $70 \times 70$ .

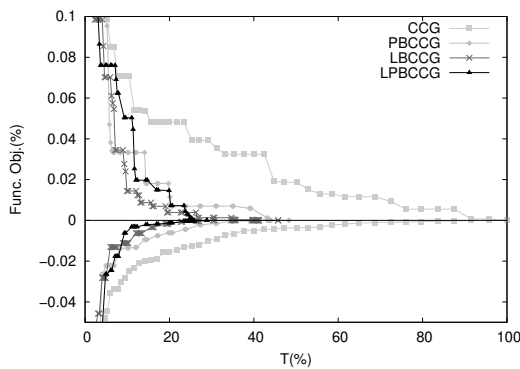


Figura 3.5 – Evolução do limite inferior e superior nas instâncias tipo 04 e  $\Gamma = 40\%$

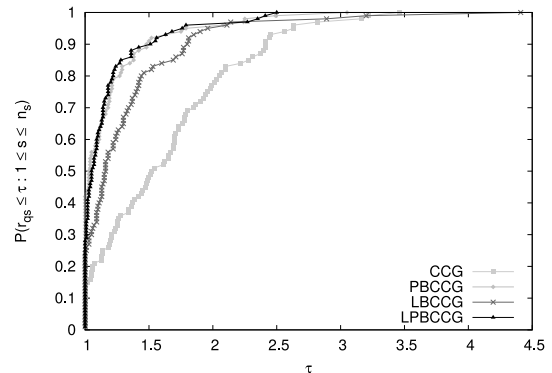


Figura 3.6 – Perfil de desempenho dos métodos em resolver instâncias  $70 \times 70$ .

função de distribuição cumulativa

$$\psi(\tau) = \frac{1}{|T|} |t \in T : r_{mt} \leq \tau|, m \in M.$$

onde  $M$  e  $T$  são os conjuntos de todos os métodos e problemas testes, respectivamente, e a relação de desempenho

$$r_{mt} = \frac{s_{mt}}{\min_{h \in M} \{s_{ht}\}}$$

no qual,  $s_{mt}$  é o tempo de solução do método  $m \in M$  no tempo  $t \in T$ . Assim sendo, percebe-se que o LPBCCG identifica inequivocamente cenários significativos mais rápido do que os outros procedimentos, sendo, portanto, mais eficiente. Em suma, melhora a capacidade do CCG de resolver problemas de otimização robusta de dois estágios.

Por fim, segue os resultados individuais e completos das instâncias nas Tabelas 3.4 - 3.7.

Tabela 3.4 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias  $70 \times 70$  para  $\Gamma(\%)$  de 10 a 30.

Type - $\Gamma(\%)$	# Iterações ( $h$ )				# B&B nodes \ $B^s(\%)$				Tempo de execução do PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$				Tempo de execução $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$			
	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG
01-10	28	32	30	29	146	17 \ 88.36	51 \ 65.07	60 \ 58.90	16.71	10.52 \ 37.05	8.99 \ 46.20	10.58 \ 36.69	592.41	457.66 \ 22.75	398.09 \ 32.80	420.63 \ 29.00
02-10	27	40	33	33	266	8 \ 96.99	85 \ 68.05	92 \ 65.41	20.09	18.59 \ 7.48	10.1 \ 49.73	12.18 \ 39.38	577.76	791.4 \ -36.98	375.56 \ 35.00	442.86 \ 23.35
03-10	28	39	33	31	214	9 \ 95.79	110 \ 48.60	109 \ 49.07	26.15	20.44 \ 21.83	17.46 \ 33.23	18.22 \ 30.32	804.55	917.13 \ -13.99	676.71 \ 15.89	652.66 \ 18.88
04-10	32	36	29	33	106	0 \ 100.00	26 \ 75.47	33 \ 68.87	23.66	13.41 \ 43.31	11.86 \ 49.87	12.91 \ 45.43	864.78	597.89 \ 30.86	430.23 \ 50.25	519.1 \ 39.97
05-10	39	37	34	34	862	33 \ 96.17	359 \ 58.35	344 \ 60.09	62.28	27.26 \ 56.23	25.27 \ 59.42	25.94 \ 58.35	2562.67	1128.44 \ 55.97	975.33 \ 61.94	997 \ 61.10
06-10	44	52	46	46	261	15 \ 94.25	124 \ 52.49	121 \ 53.64	63.92	30.64 \ 52.07	34.93 \ 45.35	34.39 \ 46.20	4267.45	2600.72 \ 39.06	2198.68 \ 48.48	2198.28 \ 48.49
07-10	20	26	21	22	59	9 \ 84.75	27 \ 54.24	27 \ 54.24	9.40	9.26 \ 1.54	7.83 \ 16.74	7.76 \ 17.49	222.68	278.1 \ -24.89	195.71 \ 12.11	204.58 \ 8.13
08-10	26	33	30	28	90	3 \ 96.67	48 \ 46.67	50 \ 44.44	13.87	13.71 \ 1.12	13.02 \ 6.10	11.21 \ 19.15	682.36	663.59 \ 2.75	703.71 \ -3.13	596.75 \ 12.55
09-10	11	18	18	15	35	20 \ 42.86	56 \ -60.00	57 \ -62.86	2.99	6.10 \ -104.32	5.7 \ -90.92	5.12 \ -71.50	35.59	113.93 \ -220.12	108.5 \ -204.86	80.88 \ -127.25
10-10	27	35	26	26	422	43 \ 89.81	153 \ 63.74	220 \ 47.87	27.18	17.62 \ 35.17	12.74 \ 53.13	15.09 \ 44.48	817.87	714.47 \ 12.64	402.55 \ 50.78	460.62 \ 43.68
01-20	47	47	44	42	147	3 \ 97.96	79 \ 46.26	77 \ 47.62	37.22	18.84 \ 49.38	17.18 \ 53.84	16.81 \ 54.84	2033.06	1089.48 \ 46.41	937.69 \ 53.88	890.05 \ 56.22
02-20	81	82	87	87	1414	24 \ 98.30	494 \ 65.06	505 \ 64.29	202.29	78.18 \ 61.35	90.96 \ 55.04	91.95 \ 54.55	17130.44	7228.92 \ 57.80	8791.89 \ 48.68	8885.4 \ 48.13
03-20	46	55	48	47	323	11 \ 96.59	126 \ 60.99	123 \ 61.92	57.59	32.96 \ 42.77	28.07 \ 51.26	29.68 \ 48.47	2935.43	2142.21 \ 27.02	1653.56 \ 43.67	1686.47 \ 42.55
04-20	38	38	32	32	74	0 \ 100.00	36 \ 51.35	31 \ 58.11	27.67	14.82 \ 46.45	12.61 \ 54.43	12.74 \ 53.96	1296.46	727.06 \ 43.92	546.64 \ 57.84	540.79 \ 58.29
05-20	66	78	71	71	3190	61 \ 98.09	1625 \ 49.06	1647 \ 48.37	333.43	165.36 \ 50.41	152.55 \ 54.25	153.04 \ 54.10	22382.65	13361.69 \ 40.30	11283.44 \ 49.59	11324.21 \ 49.41
06-20	57	67	57	57	665	24 \ 96.39	244 \ 63.31	224 \ 66.32	125.13	61.06 \ 51.20	56.46 \ 54.88	57.22 \ 54.27	14985.52	16058.81 \ -7.16	8436.53 \ 43.70	9182.15 \ 38.73
07-20	55	64	56	57	589	9 \ 98.47	230 \ 60.95	231 \ 60.78	85.71	45.86 \ 46.49	47.77 \ 44.27	46.42 \ 45.84	5246.89	3305.61 \ 37.00	3031.17 \ 42.23	3070.34 \ 41.48
08-20	44	52	49	47	319	14 \ 95.61	123 \ 61.44	88 \ 72.41	42.57	19.98 \ 53.06	21.96 \ 48.41	18.59 \ 56.33	6122.24	3555 \ 41.93	4159.4 \ 32.06	2544.98 \ 58.43
09-20	31	38	27	31	193	25 \ 87.05	82 \ 57.51	86 \ 55.44	21.80	12.28 \ 43.67	9.97 \ 54.27	11.23 \ 48.49	694.60	492.03 \ 29.16	288.04 \ 58.53	369.55 \ 46.80
10-20	30	33	33	32	340	16 \ 95.29	150 \ 55.88	160 \ 52.94	29.61	14.46 \ 51.16	13.68 \ 53.80	14.47 \ 51.13	1069.71	661.84 \ 38.13	658.46 \ 38.44	640.72 \ 40.10
01-30	37	31	39	39	69	0 \ 100.00	32 \ 53.62	23 \ 66.67	21.74	10.35 \ 52.40	13.25 \ 39.06	13.35 \ 38.60	872.09	393.17 \ 54.92	581.38 \ 33.33	614.05 \ 29.59
02-30	50	48	56	52	176	6 \ 96.59	101 \ 42.61	109 \ 38.07	47.45	20.04 \ 57.76	32.63 \ 31.23	31.36 \ 33.91	3236.64	1624.84 \ 49.80	2840.36 \ 12.24	2525.16 \ 21.98
03-30	41	52	48	47	226	9 \ 96.02	102 \ 54.87	97 \ 57.08	42.67	19.99 \ 53.15	24.59 \ 42.37	25.78 \ 39.58	1947.96	1319.21 \ 32.28	1426.41 \ 26.77	1443.64 \ 25.89
04-30	47	54	51	52	103	6 \ 94.17	58 \ 43.69	56 \ 45.63	39.50	22.86 \ 42.12	25.58 \ 35.24	25.54 \ 35.34	2149.48	1485.4 \ 30.89	1523.68 \ 29.11	1595.87 \ 25.76
05-30	58	72	68	67	2500	96 \ 96.16	1418 \ 43.28	1479 \ 40.84	244.32	136.09 \ 44.30	127.61 \ 47.77	132.23 \ 45.88	14358.99	10033.42 \ 30.12	8934.27 \ 37.78	9131.22 \ 36.41
06-30	59	63	58	58	430	11 \ 97.44	160 \ 62.79	150 \ 65.12	102.70	43.12 \ 58.01	41.18 \ 59.90	42.82 \ 58.30	13049.77	6222.7 \ 52.32	6287.34 \ 51.82	5653.17 \ 56.68
07-30	65	67	75	69	734	18 \ 97.55	380 \ 48.23	297 \ 59.54	127.40	54.42 \ 57.28	68.57 \ 46.18	56.56 \ 55.60	8900.27	4241.71 \ 52.34	5716.93 \ 35.77	4417.49 \ 50.37
08-30	51	53	48	51	407	15 \ 96.31	141 \ 65.36	172 \ 57.74	56.13	22.95 \ 59.11	24.52 \ 56.32	28.8 \ 48.69	6778.66	2407.06 \ 64.49	2906.01 \ 57.13	4043.96 \ 40.34
09-30	40	45	40	40	404	14 \ 96.53	135 \ 66.58	158 \ 60.89	35.93	18.63 \ 48.15	16.53 \ 53.99	19.58 \ 45.51	1487.42	893.98 \ 39.90	717.53 \ 51.76	843.12 \ 43.32
10-30	64	70	71	70	1050	22 \ 97.90	545 \ 48.10	552 \ 47.43	116.23	61.69 \ 46.92	62.22 \ 46.47	63.73 \ 45.17	9736.75	6607.55 \ 32.14	7369.65 \ 24.31	7230.93 \ 25.74



Tabela 3.5 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias  $70 \times 70$  para  $\Gamma(\%)$  de 40 a 60.

Type - $\Gamma(\%)$	# Iterações ( $h$ )				# B&B nodes \ $B^s(\%)$				Tempo de execução do PM por iteração $\bar{T}^h(s)$ \ $\bar{T}^{hs}(\%)$				Tempo de execução $\bar{T}(s)$ \ $\bar{T}^s(\%)$			
	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG
01-40	23	30	21	22	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	7.22	6.29 \ 12.94	5.57 \ 22.90	5.69 \ 21.24	217.75	201.59 \ 7.42	132.06 \ 39.35	138.35 \ 36.46
02-40	60	51	44	44	213	6 \ 97.18	68 \ 68.08	64 \ 69.95	71.00	20.32 \ 71.38	19.34 \ 72.76	19.36 \ 72.73	5531.45	2103.34 \ 61.97	1719.01 \ 68.92	1742.6 \ 68.50
03-40	41	50	50	50	133	0 \ 100.00	74 \ 44.36	64 \ 51.88	40.71	26.97 \ 33.76	30.47 \ 25.16	30.27 \ 25.65	1774.30	1467.08 \ 17.31	1673.26 \ 5.69	1652.78 \ 6.85
04-40	62	64	60	52	89	0 \ 100.00	11 \ 87.64	15 \ 83.15	64.68	27.79 \ 57.03	27.12 \ 58.07	20.51 \ 68.29	4355.58	2010.49 \ 53.84	1866.38 \ 57.15	1258.19 \ 71.11
05-40	71	72	68	68	2794	88 \ 96.85	1166 \ 58.27	1158 \ 58.55	271.32	99.90 \ 63.18	109.47 \ 59.65	110.1 \ 59.42	19444.87	7382.46 \ 62.03	7644.99 \ 60.68	7697.58 \ 60.41
06-40	62	69	63	62	271	17 \ 93.73	121 \ 55.35	120 \ 55.72	97.75	39.25 \ 59.85	45.69 \ 53.26	49 \ 49.87	10234.76	4003.21 \ 60.89	5515.98 \ 46.11	4449.46 \ 56.53
07-40	43	53	59	50	316	16 \ 94.94	169 \ 46.52	148 \ 53.16	48.71	30.08 \ 38.25	40.76 \ 16.33	29.7 \ 39.03	2626.68	2153.27 \ 18.02	3134.81 \ -19.34	2057.16 \ 21.68
08-40	42	51	47	43	541	16 \ 97.04	157 \ 70.98	159 \ 70.61	44.07	29.66 \ 32.70	24.2 \ 45.09	24.58 \ 44.23	2890.69	2261.79 \ 21.76	1858.11 \ 35.72	1647.03 \ 43.02
09-40	72	83	78	79	1099	9 \ 99.18	352 \ 67.97	428 \ 61.06	126.47	86.45 \ 31.65	66.01 \ 47.81	77.32 \ 38.86	9260.78	7361.84 \ 20.51	5354.94 \ 42.18	6331.41 \ 31.63
10-40	60	57	61	60	459	7 \ 98.47	265 \ 42.27	265 \ 42.27	86.58	36.79 \ 57.51	45.81 \ 47.09	45.78 \ 47.12	7220.53	3678.63 \ 49.05	4709.3 \ 34.78	4562.5 \ 36.81
01-50	32	39	31	26	0	0 -	0 \ -	0 \ -	14.21	11.51 \ 18.99	8.91 \ 37.29	8.44 \ 40.60	505.69	493 \ 2.51	321.73 \ 36.38	271.87 \ 46.24
02-50	49	56	55	53	253	3 \ 98.81	108 \ 57.31	109 \ 56.92	45.79	23.14 \ 49.46	23.88 \ 47.85	24.8 \ 45.84	3040.00	2211.82 \ 27.24	2304.1 \ 24.21	2225.95 \ 26.78
03-50	29	33	29	29	59	0 \ 100.00	25 \ 57.63	22 \ 62.71	20.07	10.67 \ 46.85	11.14 \ 44.51	11.53 \ 42.56	629.40	395.36 \ 37.18	369.62 \ 41.27	382.22 \ 39.27
04-50	68	73	69	68	77	0 \ 100.00	27 \ 64.94	32 \ 58.44	69.64	34.55 \ 50.38	38.93 \ 44.09	35.31 \ 49.29	5005.22	2681.49 \ 46.43	2893.37 \ 42.19	2595.11 \ 48.15
05-50	53	57	51	50	1218	57 \ 95.32	503 \ 58.70	491 \ 59.69	110.61	45.25 \ 59.09	46.25 \ 58.19	47.98 \ 56.62	5909.10	2636.27 \ 55.39	2419.81 \ 59.05	2462.04 \ 58.33
06-50	53	45	54	55	125	0 \ 100.00	112 \ 10.40	104 \ 16.80	66.14	20.86 \ 68.46	34.87 \ 47.28	36.03 \ 45.53	4357.42	1378.2 \ 68.37	2473.49 \ 43.23	2460.53 \ 43.53
07-50	72	81	82	69	1011	19 \ 98.12	377 \ 62.71	408 \ 59.64	148.44	65.19 \ 56.08	74.41 \ 49.87	61.31 \ 58.70	11992.59	6138.25 \ 48.82	7065.37 \ 41.09	4967.11 \ 58.58
08-50	42	52	52	52	626	17 \ 97.28	319 \ 49.04	327 \ 47.76	43.40	28.53 \ 34.27	29.86 \ 31.20	32.24 \ 25.72	2152.22	1716.95 \ 20.22	1854.15 \ 13.85	1958.18 \ 9.02
09-50	34	39	38	36	192	0 \ 100.00	69 \ 64.06	75 \ 60.94	24.59	15.21 \ 38.14	13.86 \ 43.63	14.37 \ 41.56	925.55	694.33 \ 24.98	630.88 \ 31.84	613.42 \ 33.72
10-50	32	39	35	35	103	6 \ 94.17	48 \ 53.40	45 \ 56.31	22.48	16.92 \ 24.74	14.12 \ 37.19	14.68 \ 34.70	1163.07	1118.6 \ 3.82	972.85 \ 16.35	977.31 \ 15.97
01-60	24	30	27	27	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	8.39	8.61 \ -2.64	7.15 \ 14.76	7.58 \ 9.64	262.35	296.28 \ -12.93	258.4 \ 1.51	262.23 \ 0.05
02-60	51	57	61	62	459	6 \ 98.69	227 \ 50.54	261 \ 43.14	58.42	29.55 \ 49.42	35.76 \ 38.79	41.27 \ 29.35	3835.46	2706.72 \ 29.43	3281.48 \ 14.44	3679.12 \ 4.08
03-60	23	33	29	28	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	11.87	7.68 \ 35.27	11.5 \ 3.08	11.47 \ 3.33	314.13	301.16 \ 4.13	382.97 \ -21.91	367.24 \ -16.91
04-60	49	57	51	50	3	0 \ 100.00	0 \ -	0 \ -	35.27	19.14 \ 45.73	18.23 \ 48.31	17.82 \ 49.47	1872.79	1204.02 \ 35.71	1027.78 \ 45.12	986.53 \ 47.32
05-60	45	55	54	54	946	21 \ 97.78	477 \ 49.58	514 \ 45.67	78.02	50.77 \ 34.93	51.38 \ 34.15	55.05 \ 29.44	3578.76	2883.32 \ 19.43	2880.63 \ 19.51	3073.38 \ 14.12
06-60	42	45	40	41	318	5 \ 98.43	71 \ 77.67	72 \ 77.36	50.13	24.74 \ 50.65	22.26 \ 55.60	22.68 \ 54.76	2317.55	1282.23 \ 44.67	1103.67 \ 52.38	1111.31 \ 52.05
07-60	72	84	80	70	883	24 \ 97.28	336 \ 61.95	368 \ 58.32	137.02	79.21 \ 42.19	80.04 \ 41.59	69.96 \ 48.94	11047.54	8124.35 \ 26.46	7385.16 \ 33.15	6167.21 \ 44.18
08-60	40	38	35	35	474	27 \ 94.30	143 \ 69.83	155 \ 67.30	35.84	15.73 \ 56.11	14.44 \ 59.71	15.74 \ 56.08	1611.13	746.76 \ 53.65	657.14 \ 59.21	673.07 \ 58.22
09-60	34	37	33	33	81	13 \ 83.95	44 \ 45.68	44 \ 45.68	21.56	12.59 \ 41.60	10.95 \ 49.21	11.41 \ 47.07	833.34	572.06 \ 31.35	462.38 \ 44.51	475.72 \ 42.91
10-60	33	41	34	34	72	3 \ 95.83	30 \ 58.33	28 \ 61.11	22.99	14.85 \ 35.42	11.79 \ 48.73	12.33 \ 46.38	1156.22	1028.76 \ 11.02	798.41 \ 30.95	773.15 \ 33.13

Tabela 3.6 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias  $70 \times 70$  para  $\Gamma(\%)$  de 70 a 90.

Type - $\Gamma(\%)$	# Iterações ( $h$ )				# B&B nodes \ $B^s(\%)$				Tempo de execução do PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$				Tempo de execução $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$			
	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG
01-70	33	34	36	35	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	15.78	11.42 \ 27.63	11.43 \ 27.57	11.11 \ 29.60	577.26	430.79 \ 25.37	479.89 \ 16.87	450.76 \ 21.91
02-70	35	43	39	39	175	18 \ 89.71	81 \ 53.71	80 \ 54.29	28.03	20.27 \ 27.68	16.73 \ 40.31	17.52 \ 37.49	1313.74	1320.06 \ -0.48	1050.58 \ 20.03	1064.47 \ 18.97
03-70	29	29	27	27	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	16.35	9.36 \ 42.74	9.66 \ 40.90	9.86 \ 39.68	526.87	313.72 \ 40.46	309.88 \ 41.18	314.83 \ 40.25
04-70	45	59	47	49	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	28.94	19.75 \ 31.77	16.72 \ 42.24	19.52 \ 32.56	1422.85	1335.36 \ 6.15	880.83 \ 38.09	1077.35 \ 24.28
05-70	34	38	38	38	339	17 \ 94.99	136 \ 59.88	149 \ 56.05	39.09	27.28 \ 30.21	20.5 \ 47.55	22.59 \ 42.21	1359.72	1075.09 \ 20.93	824.15 \ 39.39	904.39 \ 33.49
06-70	44	48	44	42	230	0 \ 100.00	111 \ 51.74	109 \ 52.61	51.43	23.50 \ 54.31	23.89 \ 53.55	25.59 \ 50.24	2396.44	1236.13 \ 48.42	1167.91 \ 51.26	1187.2 \ 50.46
07-70	55	60	59	58	395	8 \ 97.97	138 \ 65.06	130 \ 67.09	66.68	32.96 \ 50.57	30.04 \ 54.95	30.74 \ 53.90	4190.73	2481.45 \ 40.79	2331.33 \ 44.37	2269.06 \ 45.86
08-70	30	39	28	34	247	24 \ 90.28	133 \ 46.15	176 \ 28.74	20.92	17.39 \ 16.89	12.66 \ 39.49	17.63 \ 15.74	667.03	730.86 \ -9.57	394.84 \ 40.81	644.05 \ 3.45
09-70	28	27	33	33	2	0 \ 100.00	3 \ -50.00	0 \ 100.00	13.96	11.36 \ 18.63	12.64 \ 9.46	12.5 \ 10.46	450.73	357.49 \ 20.69	493.71 \ -9.54	486.15 \ -7.86
10-70	25	35	30	30	59	0 \ 100.00	28 \ 52.54	27 \ 54.24	12.85	12.69 \ 1.21	11.89 \ 7.44	11.78 \ 8.30	443.26	639.71 \ -44.32	525.54 \ -18.56	505.24 \ -13.98
01-80	28	34	27	27	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	11.93	10.27 \ 13.92	8.83 \ 25.99	8.62 \ 27.75	349.53	367.61 \ -5.17	257.99 \ 26.19	252.2 \ 27.85
02-80	13	16	20	19	25	16 \ 36.00	30 \ -20.00	36 \ -44.00	3.33	6.05 \ -81.85	6.23 \ -87.26	6.71 \ -101.69	79.45	155.37 \ -95.56	197.89 \ -149.07	191.76 \ -141.36
03-80	12	21	16	17	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	2.90	5.00 \ -72.51	5.06 \ -74.59	5.31 \ -83.21	39.57	114.34 \ -188.96	88.91 \ -124.69	98.9 \ -149.94
04-80	33	31	31	34	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	15.03	9.38 \ 37.61	9.09 \ 39.53	10.62 \ 29.36	517.17	308.16 \ 40.41	304.9 \ 41.04	387.77 \ 25.02
05-80	11	20	15	15	12	2 \ 83.33	6 \ 50.00	5 \ 58.33	2.96	7.63 \ -157.46	5.04 \ -70.06	5.31 \ -79.17	36.16	159.38 \ -340.76	81.1 \ -124.28	84.96 \ -134.96
06-80	30	36	33	33	103	0 \ 100.00	44 \ 57.28	49 \ 52.43	24.85	17.49 \ 29.62	16.43 \ 33.88	17.86 \ 28.13	775.57	664.43 \ 14.33	571.23 \ 26.35	621.75 \ 19.83
07-80	45	53	51	54	196	0 \ 100.00	74 \ 62.24	84 \ 57.14	43.20	32.21 \ 25.44	31.6 \ 26.85	35.31 \ 18.27	2095.13	1837.21 \ 12.31	1777.4 \ 15.17	2096.08 \ -0.05
08-80	27	31	29	29	125	13 \ 89.60	81 \ 35.20	81 \ 35.20	15.54	9.85 \ 36.60	11.63 \ 25.14	12.13 \ 21.92	438.24	327.81 \ 25.20	359.27 \ 18.02	375.69 \ 14.27
09-80	21	24	22	21	54	6 \ 88.89	25 \ 53.70	25 \ 53.70	9.59	9.08 \ 5.30	7.73 \ 19.38	7.88 \ 17.82	210.00	230.96 \ -9.98	182.94 \ 12.89	177.1 \ 15.67
10-80	21	28	26	26	44	6 \ 86.36	33 \ 25.00	30 \ 31.82	9.55	10.18 \ -6.64	10.4 \ -8.94	10.86 \ -13.76	273.04	387.78 \ -42.02	377.8 \ -38.37	387.04 \ -41.75
01-90	13	15	17	16	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	2.66	4.51 \ -69.31	4.54 \ -70.43	4.08 \ -53.16	39.46	70.97 \ -79.85	82.07 \ -107.98	69.55 \ -76.25
02-90	12	14	12	12	2	0 \ 100.00	3 \ -50.00	0 \ 100.00	2.96	4.40 \ -48.81	2.76 \ 6.65	3.2 \ -8.23	40.86	67.18 \ -64.42	38.24 \ 6.41	42.84 \ -4.85
03-90	14	18	15	15	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	4.04	5.70 \ -41.26	4.38 \ -8.55	4.1 \ -1.61	59.88	106.19 \ -77.34	69.43 \ -15.95	64.73 \ -8.10
04-90	19	24	22	20	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	4.73	7.15 \ -51.11	6.35 \ -34.20	5.53 \ -16.87	98.12	177.96 \ -81.37	147.01 \ -49.83	117.64 \ -19.89
05-90	20	23	23	24	17	4 \ 76.47	12 \ 29.41	4 \ 76.47	11.25	10.05 \ 10.67	9.07 \ 19.38	9.62 \ 14.49	233.98	242.83 \ -3.78	222.98 \ 4.70	244.8 \ -4.62
06-90	23	27	24	24	74	0 \ 100.00	20 \ 72.97	17 \ 77.03	15.08	8.38 \ 44.41	10.33 \ 31.48	9.66 \ 35.92	355.39	234.26 \ 34.08	258.97 \ 27.13	241.31 \ 32.10
07-90	22	30	24	24	3	0 \ 100.00	0 \ -	0 \ -	9.47	10.56 \ -11.54	7.5 \ 20.78	8.11 \ 14.34	222.78	332.52 \ -49.26	196.51 \ 11.79	212.75 \ 4.50
08-90	20	17	17	18	45	7 \ 84.44	29 \ 35.56	19 \ 57.78	8.01	5.75 \ 28.21	5.39 \ 32.70	5.95 \ 25.71	166.19	102.38 \ 38.40	97.11 \ 41.57	112.38 \ 32.38
09-90	15	19	15	13	32	12 \ 62.50	25 \ 21.88	23 \ 28.13	5.58	6.60 \ -18.22	4.94 \ 11.51	4.45 \ 20.29	87.61	130.68 \ -49.16	78.6 \ 10.28	60.98 \ 30.40
10-90	16	16	13	16	34	6 \ 82.35	21 \ 38.24	20 \ 41.18	6.04	4.90 \ 18.92	4.09 \ 32.33	5.45 \ 9.82	117.38	99.43 \ 15.29	69.48 \ 40.81	105.15 \ 10.42

Tabela 3.7 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias  $70 \times 70$  para  $\Gamma(\%)$  de 100.

Type - $\Gamma(\%)$	# Iterações ( $h$ )				# B&B nodes \ $B^s(\%)$				Tempo de execução do PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$				Tempo de execução $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$			
	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG	CCG	LBCCG	PBCCG	LPBCCG
01-100	2	2	2	2	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	0.04	0.03 \ 25.00	0.03 \ 25.00	0.03 \ 25.00	0.17	0.14 \ 17.65	0.14 \ 17.65	0.15 \ 11.76
02-100	2	2	2	2	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	0.04	0.04 \ -14.29	0.04 \ -14.29	0.04 \ -14.29	0.18	0.2 \ -11.11	0.17 \ 5.56	0.17 \ 5.56
03-100	2	2	2	2	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	0.05	0.04 \ 20.00	0.04 \ 20.00	0.04 \ 20.00	0.17	0.18 \ -5.88	0.18 \ -5.88	0.16 \ 5.88
04-100	2	2	2	2	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	0.04	0.04 \ -14.29	0.04 \ -14.29	0.04 \ -14.29	0.16	0.18 \ -12.50	0.19 \ -18.75	0.18 \ -12.50
05-100	2	2	2	2	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	0.06	0.05 \ 16.67	0.06 \ 0.00	0.06 \ 0.00	0.21	0.21 \ 0.00	0.22 \ -4.76	0.22 \ -4.76
06-100	2	2	2	2	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	0.05	0.04 \ 20.00	0.04 \ 20.00	0.04 \ 20.00	0.18	0.18 \ 0.00	0.19 \ -5.56	0.16 \ 11.11
07-100	2	2	2	2	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	0.06	0.05 \ 9.09	0.05 \ 9.09	0.05 \ 9.09	0.19	0.22 \ -15.79	0.22 \ -15.79	0.19 \ 0.00
08-100	2	2	2	2	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	0.03	0.03 \ -20.00	0.04 \ -60.00	0.03 \ -20.00	0.14	0.18 \ -28.57	0.18 \ -28.57	0.16 \ -14.29
09-100	2	2	2	2	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	0.07	0.06 \ 7.69	0.07 \ -7.69	0.07 \ -7.69	0.21	0.22 \ -4.76	0.2 \ 4.76	0.23 \ -9.52
10-100	2	2	2	2	0	0 \ -	0 \ -	0 \ -	0.04	0.04 \ 0.00	0.03 \ 25.00	0.04 \ 0.00	0.14	0.19 \ -35.71	0.17 \ -21.43	0.19 \ -35.71

# 4 Uma nova abordagem para problemas de otimização robusta de dois estágios

## 4.1 Introdução

Para lidar com problemas de otimização robusta de dois estágios, [Zeng e Zhao \(2013\)](#) introduziram o método de geração de colunas e restrições, já exposto e discutido no Capítulo 2, Seção 2.4. Nele, a incerteza é definida ou como um conjunto discreto finito ou um poliedro. Assume-se também que o problema a ser resolvido possui recurso relativamente completo.

A técnica se destaca na resolução exata desses problemas e segue uma estrutura de problema mestre e subproblema. Nela é resolvido a cada iteração um novo problema mestre acrescido de novas variáveis e restrições provenientes de um cenário significativo identificado pelo subproblema, na iteração anterior. Isso pode tornar o método bastante custoso computacionalmente uma vez que os problemas mestres ficam cada vez maiores a cada nova iteração.

Visando superar essa adversidade, são apresentadas neste capítulo duas estratégias de planos de cortes baseadas nos métodos de Benders-dual e de geração de colunas e restrições. A ideia mescla ambas as técnicas originando um problema mestre que possui uma estrutura melhor do que o problema mestre do Benders-dual, possui também menos restrições e variáveis do que o problema mestre do método de geração de colunas e restrições.

## 4.2 Nova abordagem

Para propor a nova abordagem, primeiramente, combinou-se os dois problemas mestres dos métodos de Benders-dual e de geração de colunas e restrições no Capítulo 2, obtendo o seguinte problema mestre:

$$\min c^T y + \eta \tag{4.1}$$

$$\text{s.a.: } Ay \geq d \tag{4.2}$$

$$y \in S_y \tag{4.3}$$

$$\eta \geq b^T x^l \quad l = 1, \dots, r \tag{4.4}$$

$$Ey + Gx^l \geq h - Mu_l \quad l = 1, \dots, r \tag{4.5}$$

$$x^l \in S_x \quad l = 1, \dots, r \tag{4.6}$$

$$\eta \in \mathbb{R}^+ \tag{4.7}$$

$$\eta \geq (h - Ey - Mu_l)^T \bar{\pi}_l \quad l = 1, \dots, r \tag{4.8}$$

no qual  $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_r\}$  é o conjunto de cenários e  $\{x^1, \dots, x^r\}$  é o conjunto das variáveis de decisão de recursos associadas a cada cenário em  $\mathcal{U}$  com suas respectivas restrições e  $\{\bar{\pi}^1, \dots, \bar{\pi}^r\}$  é o conjunto dos pontos extremos associados aos cenários em  $\mathcal{U}$  do problema dual de recurso.

Zeng e Zhao (2013) mostraram que, ao enumerar todos os cenários incertos possíveis de  $\mathcal{U}$ , a formulação de otimização robusta de dois estágios escrita por (2.5) - (2.7) pode ser reformulada pela função objetivo (4.1) e as restrições (4.2) - (4.7) obtendo assim um problema equivalente. O tamanho do conjunto  $\mathcal{U}$  é provavelmente muito grande para se enumerar cada cenário a priori. Dessa forma, os cenários são identificados sob demanda e utilizada para adicionar subsistema com as variáveis primais de decisão de recursos e suas respectivas restrições. Ademais, a formulação constituída (4.1)-(4.3),(4.7) e (4.8) é outra reformulação do problema robusto. Uma solução ótima do problema dual de recurso gera um ponto extremo de seu conjunto de viabilidade (THIELE; TERRY; EPELMAN, 2009).

Essas representações possibilitam a introdução de uma terceira reformulação do problema de otimização robusta de dois estágios, dada por:

$$\min c^T y + \eta \quad (4.9)$$

$$\text{s.a.: } Ay \geq d \quad (4.10)$$

$$y \in S_y \quad (4.11)$$

$$\eta \geq b^T x \quad (4.12)$$

$$Ey + Gx \geq h - Mu_s \quad (4.13)$$

$$x \in S_x \quad (4.14)$$

$$\eta \in \mathbb{R}^+ \quad (4.15)$$

$$\eta \geq (h - Ey - M\bar{u}_l)^T \bar{\pi}_l \quad l = 1, \dots, r \quad (4.16)$$

no qual  $s$  na restrição (4.13) representa um cenário significativo identificado que servirá de referência.

Como já mencionado, é impraticável enumerar todos os cenários quando o conjunto de incerteza é muito grande ou é um poliedro. Entretanto, uma formulação baseada em uma enumeração parcial baseada nas restrições (4.16) fornece uma relaxação válida para o problema original e, conseqüentemente, um limite inferior para o mesmo. Expandir essa enumeração, adicionando-se dinamicamente, conforme necessário, planos de cortes baseados nos valores ótimos das variáveis do problema dual de recurso, possibilita encontrar limites inferiores mais fortes.

Semelhante aos algoritmos de Benders-dual e o de geração de colunas e restrições, a nova abordagem segue uma estrutura de decomposição envolvendo problema mestre e subproblema. A nova abordagem parte da solução do problema nominal e segue identificando cenários significativos e/ou cortes duais que serão inseridos iterativamente até encontrar uma solução ótima.

Na nova abordagem a identificação e atualização do cenário significativo  $s$  constituído pelo subsistema primal do problema recurso, ocorre toda vez que o limite superior é atualizado. Como as restrições do subsistema são sempre as mesmas e não são mais indexadas por cenários, basta atualizar o lado direito da restrição (4.13) para se ter um novo cenário significativo fixo. A convergência do algoritmo é garantida pela presença dos cortes (4.16), porém a melhora do limite inferior com a identificação de novos cenários não é mais monotônica como nos métodos de geração de colunas e restrições e Benders-dual. Isto acontece pois o problema mestre do método de geração de colunas e restrições é mais forte, no sentido de obter limites inferiores melhores com um número menor de cenários, do que o problema mestre do método de Benders-dual. Porém, como apenas um único cenário significativo é mantido, pode ocorrer do limite inferior não melhorar de forma monotônica. Isto será melhor explicado na Seção 4.3.

As principais etapas da abordagem podem ser visualizadas no Algoritmo 5, no qual pode-se observar que, a cada iteração  $h$ , o problema mestre (PM) da nova abordagem tem acrescentado os cortes (otimalidade do Benders-dual), e a atualização ou não do cenário  $u_s$  fixado. Essa técnica possibilita em cada iteração um problema mestre mais leve comparado com o do método de geração de colunas e restrições por ter um número menor de variáveis e restrições. Já comparando com o Bender-dual o novo problema mestre tem uma melhor estrutura matemática, devido ao fato de ter adicionado nele um subsistema primal correspondente ao um cenário identificado pelo problema recurso.

**Algoritmo 5:** Nova abordagem de resolução do problema de otimização robusta de dois estágios

```

1  $LS \leftarrow \infty, LI \leftarrow -\infty, h \leftarrow 0, \Delta_h \leftarrow 100$  // inicialização
2 enquanto  $\Delta_h > \epsilon$  faça
3    $(LI, \bar{y}) \leftarrow PM$ 
4    $h \leftarrow h + 1$ 
5    $(q, \bar{u}_h, \bar{\pi}_h) \leftarrow Q(\bar{y})$ 
6   se  $q < +\infty$  então
7      $\eta \geq (h - Ey - M\bar{u}_h)^\top \bar{\pi}_h$  // Adiciona corte dual
8     se  $LS > c^T \bar{y} + q$  então
9        $LS \leftarrow c^T \bar{y} + q$ 
10       $u_s \leftarrow \bar{u}_h$  // Atualiza cenário
11    fim
12  fim
13 fim

```

### 4.3 Análise da convergência

Antes de apresentar uma análise da convergência da nova abordagem considere, assim como na Seção 2.3,  $y$  e  $x$  as variáveis de decisão do primeiro e segundo estágio, respectivamente, sendo valores discretos ou contínuos. Daí, a formulação geral do problema de otimização robusta

de dois estágios pode ser escrita como:

$$\min_y c^\top y + \max_{u \in \mathcal{U}} \min_{x \in F(y, u)} b^\top x \quad (4.17)$$

$$\text{s.a.: } Ay \geq d \quad (4.18)$$

$$y \in S_y \quad (4.19)$$

onde  $F(y, u) = \{x \in S_x : Gx \geq h - Ey - Mu\}$  com  $S_y \subseteq \mathbb{R}^{n_y}$  e  $S_x \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ .

Assumindo que o problema de decisão do segundo estágio é um problema de programação linear em  $x$  de recurso relativamente completo tem-se que ele é viável para quaisquer  $y$  e  $u$  dados. Assim, considerando  $\pi$  as variáveis duais associadas as suas restrições obtêm-se o seu dual que mesclado com o problema de maximização externo resulta-se um problema de maximização ou:

$$Q(y) = \max_{u \in \mathcal{U}, \pi \geq 0} \{(h - Ey - Mu)^\top \pi : G^\top \pi \leq b\}$$

que é o subproblema de Benders-dual. Assumindo que para um dado  $\bar{y}^h$  na iteração  $h$ , o subproblema possa ser resolvido por algum oráculo. Então, sua solução ótima  $(\bar{u}^h, \bar{\pi}^h)$  possibilita a obtenção do corte de otimalidade de Benders-dual dado pelo plano de corte

$$\eta \geq (h - Ey - M\bar{u}^h)^\top \bar{\pi}^h$$

o qual é inserido ao problema mestre de Benders::

$$\begin{aligned} & \min c^\top y + \eta \\ & \text{s.a.: } Ay \geq d \\ & \quad y \in S_y \\ & \quad \eta \geq (h - Ey - M\bar{u}^k)^\top \bar{\pi}^h \quad \forall h \in O \\ & \quad \eta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

onde  $O$  é o conjunto de cortes de otimalidade de Benders. O problema mestre providência um limite inferior, enquanto, com a combinação do resultado do oráculo com o problema mestre obtêm-se um limite superior. Seguindo uma rotina iterativa onde os planos de cortes são introduzidos no problema mestre, os limites inferiores e superiores convergirão para a solução ótima do problema em número finito de iterações (THIELE; TERRY; EPELMAN, 2009). Note que as soluções do subproblema são pontos extremos de seus conjuntos viáveis.

### 4.3.1 Convergência

Para mostrar a convergência da nova abordagem considere  $p$  o número de pontos extremos de  $\mathcal{U}$ , se  $\mathcal{U}$  for um poliedro, ou a cardinalidade se  $\mathcal{U}$  for um conjunto discreto.

**Proposição 1.** *Seja  $q$  o número de pontos extremos de  $\{\pi : G^\top \pi \leq b, \pi \geq 0\}$ . Então, o método de Benders gerará uma solução ótima para o problema (4.17) - (4.19), em  $O(pq)$  iterações.*

**Proposição 2.** Para um mesmo conjunto de cenários  $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k\}$ , os problemas mestres dos métodos de Benders e de geração de colunas e restrições, a função objetivo do primeiro é uma subestimação da função objetiva do segundo.

A demonstração dessa proposição é apresentada em Zeng e Zhao (2013) sendo portanto aqui omitida.

**Teorema 1.** O algoritmo da nova abordagem converge para a solução ótima em um número finito de iterações.

*Prova:* Assim como em Thiele, Terry e Epelman (2009), ao introduzir uma variante do método de Benders baseado no método de Kelley Jr (1960) para problemas de otimização robusta ajustável, as restrições (4.16) podem ser consideradas como um corte de otimalidade. Sendo assim, se

- i) o cenário  $u_s$  é fixado uma única vez: a convergência do algoritmo é assegurada para qualquer  $u_s$ , uma vez que se trata de uma variante do Benders (Proposição 1) no qual o problema mestre tem, além dos cortes de otimalidade, um subsistema presente com as restrições do problema recurso para um cenário válido  $u_s$  do método de ZENG; ZHAO.
- ii) o cenário  $u_s$  é atualizado segundo alguma regra: aqui quando se altera o cenário  $u_s$  pode acontecer do limite inferior da iteração seguinte decrescer, no caso de um problema de minimização, uma vez que os cenários representados pelos cortes (4.16) subestimam o valor da função objetivo que se obteria pelo método de geração de colunas e restrições (Proposição 2). Como só há um cenário fixado com o subsistema do método de geração de colunas e restrições, não tendo todos o demais já identificados pode acontecer o decréscimo de função objetivo; porém a convergência é garantida pois o método converge para qualquer  $u_s$ .

□

## 4.4 Estudo de caso: problema robusto de localização de facilidades capacitadas em dois níveis

O problema de localização de facilidade em dois níveis aparece na literatura em diversas variantes envolvendo abordagens diferenciadas quanto a alocações, capacidade, transporte das demandas, situações particulares da vida real e com incerteza.

O caso do problema de localização de facilidades capacitadas em dois níveis (PLFCDN) foi estudado por Marín e Pelegrín (1999), Litvinchev e Espinosa (2012), Fernandes et al. (2014), entre outros. Para uma revisão mais completa ver Ortiz-Astorquiza, Contreras e Laporte (2018) o



qual cobre a literatura para os problemas multi-níveis em diversas variantes. O artigo faz uma revisão desde 1977 com ênfase nas últimas duas décadas.

O caso com incerteza é pouco abordado na literatura, restrito aos trabalhos de Wang e Yang (2014) e Mišković, Stanimirović e Grujičić (2017). O primeiro trata do problema de localização de instalações interativas para o projeto de rede logística reversa. Dois tipos de modelos de programação incerta são propostos para diferentes critérios de decisões. Os métodos apresentados ilustram técnicas de modelagem alternativas para os problemas de localização de instalações hierárquicas incertas. O segundo propõe um modelo de otimização robusta com incerteza nos custos de transportes. Pelas dificuldades encontradas em resolver problemas de grandes dimensões apresentaram um algoritmo memético que combina um algoritmo evolucionário com uma heurística de recozimento simulado.

O problema aqui abordado possui incerteza na demanda e consiste em instalar facilidades para atender as demandas dos clientes via depósitos também a serem instalados. Os clientes podem ser atendidos por múltiplos depósitos, i.e., há atribuição múltipla de clientes a depósitos. Facilidades e depósitos tem capacidade de atendimento das demandas, e possuem custos fixos associados à suas instalações, têm-se também custos variáveis atribuídos aos fluxos de transporte de clientes a depósitos. Para modelar o problema descrito acima, é usado as seguintes definições e anotações:

#### Conjuntos e parâmetro

$K$	conjunto de nós candidatos a facilidades.
$J$	conjunto de nós candidatos a depósitos.
$I$	conjunto de clientes.
$d_i$	demanda do cliente $i \in I$
$c_{ij}^1$	custo para atender ao cliente $i \in I$ pelo depósito $j \in J$ .
$c_{jk}^2$	custo de transporte entre o depósito $j \in J$ e a facilidade $k \in K$ .
$f_k^2$	custo fixo de instalar a facilidade $k \in K$ .
$f_j^1$	custo fixo de instalar o depósito $j \in J$ .
$B_k$	capacidade da facilidade $k \in K$ .
$Q_j$	capacidade do depósito $j \in J$ .

#### Variáveis de decisão

$y_j \in \{0, 1\}$	indica se o depósito $j \in J$ é instalado (1) ou não (0).
$z_k \in \{0, 1\}$	indica se a facilidade $k \in K$ é instalada (1) ou não (0).
$s_{jk} \geq 0$	indica o fluxo entre o depósito $j \in J$ e a facilidade $k \in K$ .
$x_{ij} \geq 0$	representa a demanda do cliente $i \in I$ atendido pelo depósito $j \in J$ .

A formulação nominal do problema pode ser escrita como:

$$\min \sum_{j \in J} f_j^1 y_j + \sum_{k \in K} f_k^2 z_k + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij}^1 x_{ij} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{jk}^2 s_{jk} \quad (4.20)$$

$$\text{s.a.: } \sum_{j \in J} x_{ij} \geq d_i \quad \forall i \in I \quad (4.21)$$

$$\sum_{k \in K} s_{jk} \geq \sum_{i \in I} x_{ij} \quad \forall j \in J \quad (4.22)$$

$$\sum_{j \in J} s_{jk} \leq B_k z_k \quad \forall k \in K \quad (4.23)$$

$$\sum_{k \in K} s_{jk} \leq Q_j y_j \quad \forall j \in J \quad (4.24)$$

$$s_{jk} \leq B_k y_j \quad \forall j \in J, k \in K \quad (4.25)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J \quad (4.26)$$

$$z_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K \quad (4.27)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J \quad (4.28)$$

$$s_{jk} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K \quad (4.29)$$

A função objetivo (4.20) minimiza o custo total mínimo de se instalar as facilidades e depósitos e fazer o transporte para atender os clientes. As restrições (4.21) asseguram que cada cliente tem a sua demanda atendida, enquanto as restrições (4.22) são de conservação de fluxo. Já as restrições (4.23) e (4.24) garantem que as capacidades das facilidades e dos depósitos sejam respeitadas, enquanto que as restrições (4.25) são redundantes, porém melhoram a relaxação de programação linear da formulação. Finalizando, as restrições (4.26)- (4.29) mostram o domínio das variáveis.

A incerteza presente na demanda é representada utilizando uma adaptação dos trabalhos de Bertsimas e Sim (2003), Bertsimas e Sim (2004). Sendo então, retratada pelo conjunto poliédrico  $D = \left\{ d : d_i = \bar{d}_i + \tilde{d}_i g_i, g_i \in [0, 1], \forall i \in I, \sum_{i \in I} g_i \leq \Gamma \right\}$ , em que  $\bar{d}_i$  e  $\tilde{d}_i$  são respectivamente as demandas nominais e os seus desvios. Aqui como no capítulo anterior  $\Gamma$  segue representando o orçamento de incerteza.

Observe que  $(y, z)$  são as variáveis de decisão do primeiro estágio e  $(x, s)$  as variáveis de recurso do segundo estágio. Assim, a contraparte robusta de dois estágio do problema de localização de facilidades capacitadas em dois níveis é escrita como:

$$\begin{aligned} \min_{(y,z) \in S_{yz}} & \sum_{j \in J} f_j^1 y_j + \sum_{k \in K} f_k^2 z_k + \max_{d \in D} \min_{(x,s) \in S_{xs}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij}^1 x_{ij} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{jk}^2 s_{jk} \\ \text{s.a.: } S_{yz} & = \left\{ (y, z) \in \{0, 1\}^{n_j} \times \{0, 1\}^{n_k} \right\} \\ S_{xs} & = \left\{ (x, s) \in \mathbb{R}_+^{n_i \times n_j} \times \mathbb{R}_+^{n_j \times n_k} : (4.21) - (4.25) \right\} \end{aligned}$$

Com o intuito de aplicar a nova abordagem e compará-la com o método de geração de colunas e restrições serão apresentados o subproblema e os problemas mestres de ambos os métodos. O subproblema não difere para os métodos, e, por ser um problema de recurso relativamente completo, pode ser identificado utilizando a teoria de dualidade forte, no qual a parte de minimização do problema interno de max-min é dualizada e somada à parte de maximização. O problema de

max-max resulta então em um problema de maximização. Para o melhor entendimento considere a parte de minimização do max-min da função objetivo da formulação de otimização robusta de dois estágios:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij}^1 x_{ij} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{jk}^2 s_{jk} \quad (4.30)$$

$$\text{s.a.: } \sum_{j \in J} x_{ij} \geq \bar{d}_i + \tilde{d}_{ij} g_i \quad \forall i \in I \quad (4.31)$$

$$\sum_{k \in K} s_{jk} \geq \sum_{i \in I} x_{ij} \quad \forall j \in J \quad (4.32)$$

$$-\sum_{j \in J} s_{jk} \geq -B_k z_k \quad \forall k \in K \quad (4.33)$$

$$-\sum_{k \in K} s_{jk} \geq -Q_j y_j \quad \forall j \in J \quad (4.34)$$

$$-s_{jk} \geq -B_k y_j \quad \forall j \in J, k \in K \quad (4.35)$$

$$(4.26) - (4.29) \quad (4.36)$$

Sejam  $\bar{y}_j$  e  $\bar{z}_k$  soluções do primeiro estágio e sejam as variáveis duais não negativas  $\pi_i$ ,  $v_j$ ,  $\delta_k$ ,  $\beta_j$  e  $\gamma_{jk}$  referente as restrições (4.31), (4.32), (4.33), (4.34) e (4.35), respectivamente. Então o dual pode ser escrito como:

$$\max \sum_{i \in I} (\bar{d}_i + \tilde{d}_{ij} g_i) \pi_i - \sum_{k \in K} B_k \bar{z}_k \delta_k - \sum_{j \in J} Q_j \bar{y}_j \beta_j - \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} B_k \bar{y}_j \gamma_{jk} \quad (4.37)$$

$$\text{s.a.: } \pi_i - v_j \leq c_{ij}^1 \quad \forall i \in I, j \in J \quad (4.38)$$

$$v_j - \delta_k - \beta_j - \gamma_{jk} \leq c_{jk}^2 \quad \forall j \in J, k \in K \quad (4.39)$$

Assumindo  $g \in \{0, 1\}$  pelos mesmos motivos da Proposição 1 de Gabrel et al. (2014) e mesclando com a parte de maximização tem-se

$$\max \sum_{i \in I} (\bar{d}_i + \tilde{d}_{ij} g_i) \pi_i - \sum_{k \in K} B_k \bar{z}_k \delta_k - \sum_{j \in J} Q_j \bar{y}_j \beta_j - \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} B_k \bar{y}_j \gamma_{jk} \quad (4.40)$$

$$\text{s.a.: } (4.38) - (4.39)$$

$$\sum_{i \in I} g_i \leq \Gamma \quad (4.41)$$

um subproblema não linear que pode ser linearizado pelo método *bigM*. O produto  $g_i \pi_i$  dado por uma variável binária e uma variável contínua pode ser substituída por  $w_i \geq 0$ , resultando no subproblema:

$$Q(\bar{y}, \bar{z}) = \max \sum_{i \in I} (\bar{d}_i \pi_i + \tilde{d}_{ij} w_i) - \sum_{k \in K} B_k \bar{z}_k \delta_k - \sum_{j \in J} Q_j \bar{y}_j \beta_j - \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} B_k \bar{y}_j \gamma_{jk} \quad (4.42)$$

$$\text{s.a.: } (4.38) - (4.39), (4.41) \quad (4.43)$$

$$w_i \leq \pi_i \quad \forall i \in I \quad (4.44)$$

$$w_i \leq g_i M \quad \forall i \in I \quad (4.45)$$

O problema mestre do método de geração de colunas e restrições pode ser escrito como:

$$\min \sum_{j \in J} f_j^1 y_j + \sum_{k \in K} f_k^2 z_k + \eta \quad (4.46)$$

$$\text{s.a.: (4.26) – (4.27)} \quad (4.47)$$

$$\sum_{j \in J} Q_j y_j \geq D_{max} \quad (4.48)$$

$$\sum_{k \in K} B_k z_k \geq D_{max} \quad (4.49)$$

$$\eta \geq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij}^1 x_{ij}^l + \sum_j \sum_{k \in K} c_{jk}^2 s_{jk}^l \quad \forall l \in L \quad (4.50)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij}^l \geq \bar{d}_i + \tilde{d}_i g_i^l \quad \forall i \in I, l \in L \quad (4.51)$$

$$\sum_{k \in K} s_{jk}^l \geq \sum_{i \in I} x_{ij}^l \quad \forall j \in J, l \in L \quad (4.52)$$

$$\sum_{j \in J} s_{jk}^l \leq B_k z_k \quad \forall k \in K, l \in L \quad (4.53)$$

$$\sum_{k \in K} s_{jk}^l \leq Q_j y_j \quad \forall j \in J, l \in L \quad (4.54)$$

$$s_{jk}^l \leq B_k y_j \quad \forall j \in J, k \in K, l \in L \quad (4.55)$$

$$\eta \geq 0 \quad (4.56)$$

$$x_{ij}^l \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, l \in L \quad (4.57)$$

$$s_{jk}^l \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in L \quad (4.58)$$

no qual  $D_{max} = \sum_{i \in I} (\bar{d}_i + \tilde{d}_i)$  e  $L$  é o conjunto de cenários. As restrições (4.48) e (4.49) resolve o problema de viabilidade.

O problema mestre da nova abordagem pode ser escrito como:

$$\min \sum_{j \in J} f_j^1 y_j + \sum_{k \in K} f_k^2 z_k + \eta \quad (4.59)$$

$$\text{s.a.: (4.22) – (4.29), (4.48), (4.49), (4.56)} \quad (4.60)$$

$$\eta \geq \sum_{i \in I} (\bar{d}_i \pi_i^{l'} + \tilde{d}_i w_i^{l'}) - \sum_{k \in K} B_k \delta_k^{l'} z_k - \sum_{j \in J} (Q_j \beta_j^{l'} y_j + \sum_{k \in K} B_k \gamma_{jk}^{l'} y_j) \quad \forall l' \in L' \quad (4.61)$$

$$\eta \geq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij}^1 x_{ij} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{jk}^2 s_{jk} \quad (4.62)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \geq \bar{d}_i + \tilde{d}_i g_i^s \quad \forall i \in I \quad (4.63)$$

Onde  $L'$  é o conjunto de cenários e  $(\pi_i^{l'}, w_i^{l'}, \delta_k^{l'}, \beta_j^{l'}, \gamma_{jk}^{l'})$  são pontos extremos do problema recurso, para um dado  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  e  $\Gamma$  fixados.

Note que, os cortes (4.61) serão adicionados dinamicamente até se obter a solução ótima. Então, uma seleção adequada que ofereça cortes de boa qualidade pode fazer toda a diferença na busca de uma convergência mais rápida.

### 4.4.1 Seleção do corte dual e do cenário

O subproblema linearizado (4.42) - (4.45) é um típico subproblema dual que por sua vez é apontado por muitos autores como degenerado, ou seja, possuem várias soluções duais que são ótimas (MAGNANTI; WONG, 1981). Como cada solução dual ótima conduz a valores de custos reduzidos diferentes e, conseqüentemente, a um corte de Benders diferente, então, escolher bons cortes pode resultar em uma implementação mais eficaz.

Com o intuito de acelerar a convergência do método de decomposição de Benders, Magnanti e Wong (1981) introduziram os cortes Pareto-ótimos que são cortes não-dominados por nenhum outro. Visando acelerar a convergência da nova abordagem, esses cortes auxiliares serão embutidos a cada iteração do Algoritmo 5. Eles podem ser gerados conforme foi proposto por Papadakos (2008) para o método de decomposição de Benders. A ideia é resolver um subproblema auxiliar, chamado problema de Magnanti-Wong independente, que é semelhante ao subproblema, para se obter um novo corte mais forte.

O novo subproblema auxiliar apresentado em (4.64)-(4.65) difere do subproblema ao ser parametrizado por *core-points* ( $y^c, z^c$ ) ou pontos pertencentes ao interior relativo da casca convexa do espaço de viabilidade do problema mestre.

$$Q(y^c, z^c) = \max \sum_{i \in I} (\bar{d}_i \pi_i + \tilde{d}_i w_i) - \sum_{k \in K} B_k z_k^c \delta_k - \sum_{j \in J} Q_j y_j^c \beta_k - \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} B_k y_j^c \gamma_{jk} \quad (4.64)$$

$$\text{s.a.: (4.43) - (4.45)} \quad (4.65)$$

Segundo Papadakos (2008), tendo um *core-point* inicial disponível, a atualização dos *core-points* são dados pela combinação convexa dos valores atuais dos *core-points* e a solução do problema mestre. Assim é usado aqui a mesma estratégia:

$$y^c = \lambda y^c + (1 - \lambda) \bar{y}$$

$$z^c = \lambda z^c + (1 - \lambda) \bar{z}$$

É fixado  $\lambda = \frac{1}{2}$  após testes preliminares.

Para esta abordagem o cenário passa a ser atualizado, caso o limite superior seja atualizado pelo cenário identificado pelo subproblema auxiliar da iteração seguinte. Como o subproblema auxiliar possibilita identificar cortes válidos e não-dominados, conseqüentemente, apresenta cenários válidos e, provavelmente, mais interessantes para a implementação. Os detalhes da nova abordagem melhorada podem ser observados no Algoritmo 6 onde os cortes paretos ótimos, linha (4) e o conjunto  $L''$  (conjunto desses cortes) são adicionado ao PM e  $\Theta = \sum_{j \in J} f_j^1 y_j + \sum_{k \in K} f_k^2 z_k + q$ , com  $q$  sendo o valor do subproblema. O parâmetro  $\alpha = 1$  indica que o cenário fixo é atualizado e se  $\alpha = 0$  não.

**Algoritmo 6:** Nova abordagem melhorada de resolução para o problema de localização de facilidades capacitadas em dois níveis

```

1   $LS \leftarrow \infty, LI \leftarrow -\infty, \alpha \leftarrow 1, l' \leftarrow 1, y^c \leftarrow \frac{1}{2}, z^c \leftarrow \frac{1}{2}, \Delta_{l'} \leftarrow 100$ 
// inicialização
2  enquanto  $\Delta_{l'} > \epsilon$  faça
3       $(\pi^{l'}, w^{l'}, \delta^{l'}, \beta^{l'}, \gamma^{l'}, g^{l'}) \leftarrow Q(y^c, z^c)$ 
4       $\eta \geq \sum_{i \in I} (\bar{d}_i \pi_i^{l'} + \tilde{d}_i w_i^{l'}) - \sum_{k \in K} B_k \delta_k^{l'} z_k - \sum_{j \in J} Q_j \beta_j^{l'} y_j - \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} B_k \gamma_{jk}^{l'} y_j$ 
// Adiciona corte pareto ótimo  $L'' \cup \{l'\}$ 
5
6      se  $\alpha = 1$  então
7           $g^s \leftarrow g^{l'}$  // Atualiza cenário fixo
8           $\alpha \leftarrow 0$ 
9      fim
10      $(LI, \bar{y}, \bar{z}) \leftarrow PM$ 
11      $(q, \pi^{l'}, w^{l'}, \delta^{l'}, \beta^{l'}, \gamma^{l'}, g^{l'}) \leftarrow Q(\bar{y}, \bar{z})$ 
12     se  $q < +\infty$  então
13          $\eta \geq \sum_{i \in I} (\bar{d}_i \pi_i^{l'} + \tilde{d}_i w_i^{l'}) - \sum_{k \in K} B_k \delta_k^{l'} z_k - \sum_{j \in J} Q_j \beta_j^{l'} y_j - \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} B_k \gamma_{jk}^{l'} y_j$ 
// Adiciona corte dual  $L' \cup \{l'\}$ 
14         se  $LS > \Theta$  então
15              $LS \leftarrow \Theta$ 
16              $\alpha \leftarrow 1$ 
17         fim
18     fim
19      $y^c \leftarrow \lambda \bar{y} + (1 - \lambda) y^c$  // Atualiza core point
20      $z^c \leftarrow \lambda \bar{z} + (1 - \lambda) z^c$ 
21      $l' \leftarrow l' + 1$ 
22 fim

```

#### 4.4.2 Resultados e discussões

Para realizar os testes computacionais foi utilizado uma estação de trabalho Dell Power Edge T 620, equipada com uma CPU Intel(R) Xeon(R) E5-26090@2.40GHz e 98 GB de RAM, rodando em um ambiente Linux de 64 bits. Os algoritmos foram implementados em C++ utilizando o solucionador *CPLEX 12.7* por meio da interface *ILOG Concert Technology*. Além disso, os algoritmos denominados CCG para geração de colunas e restrições, BD1 para a nova abordagem e a BD2 para a nova abordagem melhorada, são avaliados para a resolução de instâncias geradas aleatoriamente seguindo as diretrizes de [Fernandes et al. \(2014\)](#).

Foram geradas um total de cinco instâncias diferentes para cada uma das classes 3, 4 e 5 (as mais difíceis) com tamanhos iguais a  $|K| \times |J| \times |I| \in \{90 \times 90 \times 90, 30 \times 60 \times 120, 50 \times 50 \times 100\}$ . Assim, seguindo uma distribuição uniforme os parâmetros  $d_i, f_j^1, f_k^2, c_{ij}^1, c_{jk}^2, B_k, Q_j$  são selecionados aleatoriamente,  $\bar{d}_i = d_i$  representa a demanda nominal e o desvio é dado por  $\tilde{d}_i = \rho \bar{d}_i$  onde  $\rho \in [0.1, 0.5]$ . Os detalhes são notados na Tabela 4.2 onde  $\mathring{A} = \frac{\sum_{i \in I} (\bar{d}_i + \tilde{d}_i)}{|K|}$  e  $\mathring{P} = \frac{\sum_{i \in I} (\bar{d}_i + \tilde{d}_i)}{|J|}$ . Além disso, para cada instância o valor do  $\Gamma$  foi variado dentro do conjunto  $\{10\%, 20\%, \dots, 100\%\}$  de  $|I|$ , resultando assim em um total de 450 problemas testes.

Tabela 4.2 – Valores dos intervalos das classes de instâncias geradas para o problema de localização de facilidades capacitadas em dois níveis.

Parâmetros	Classe 3	Classe 4	Classe 5
$B_k$	[15Å 25Å]	[5Å 10Å]	[5Å 10Å]
$f_k^2$	[20000 30000]	[20000 30000]	[20000 30000]
$c_{jk}^2$	[35 45]	[50 100]	[35 45]
$Q_j$	[15 $\check{P}$ 25 $\check{P}$ ]	[5 $\check{P}$ 10 $\check{P}$ ]	[5 $\check{P}$ 10 $\check{P}$ ]
$f_j^1$	[8000 12000]	[8000 12000]	[8000 12000]
$c_{ij}^1$	[800 1000]	[50 100]	[800 1000]
$d_i$	[10 20]	[10 20]	[10 20]

As Tabelas 4.3 - 4.10 resumem os resultados encontrados para cada método e cada valor de  $\Gamma(\%)$ . Nelas, são relatados o tempo de execução do PM por iteração  $h$  ( $\bar{T}^h$ ) e o tempo total de execução ( $\bar{T}$ ). Ambos, seguido de seus respectivos percentuais médios de economia alcançadas ( $\bar{T}^{hs}$ ) e ( $\bar{T}^s$ ). O termo Razão retrata a razão entre o desempenho entre os algoritmos CCG e o proposto. Note que, o algoritmo CCG é tido como referência para obter os valores de  $\bar{T}^{hs}$  e  $\bar{T}^s$  de cada estratégia desenvolvida que é dada por:

$$100 \times \left( 1 - \frac{\text{valor médio da estratégia de BD}}{\text{valor médio do CCG}} \right)$$

Para facilitar a apresentação, os melhores resultados para as médias dos valores dos tempos totais de execuções nas Tabelas 4.3 - 4.8 estão destacados em negrito. Observe que, o CCG gasta um tempo bem mais elevado na maioria das instâncias, para encontrar a solução ótima quando comparado com os algoritmos de BD1 e BD2 nas três classe analisadas. As maiores diferença são vista nas instâncias das classes 3 onde o algoritmo CCG costuma ter maiores dificuldades. Note que, esta classe possui as maiores capacidades para as facilidades.

Para as intâncias de tamanho  $50 \times 50 \times 100$ , o algoritmo BD2 supera o método CCG em todos os valores do orçamento de incerteza, exceto em 70% classe 4 e 100% para as classe 3 e 5. Já no tamanho  $30 \times 60 \times 120$  seu desempenho dependerá da classe. Na classe 3 supera o CCG, exceto em 90% e 100% porém a diferença é pequena entre eles. Enquanto na classe 4 e 5 os algoritmo propostos tem comportamentos semelhantes sendo um mais eficiente que o outro dependendo do orçamento, aqui o CCG foi melhor em 70% e 100% na classe 4 e em 100% na classe 5.

Acredita-se que, o que explica o melhor desempenho dos algoritmos BD1 e BD2 é o fato de possuir em seu problema mestre a estrutura de rede do problema nominal inserido uma única vez, enquanto o CCG, insere toda a estrutura a cada iteração. Isso pode ser melhor notado ao avaliar os tempos médios para os problemas mestres por iteração das Tabelas 4.3 - 4.8, onde há uma economia de tempo computacional considerável.

Tabela 4.3 – Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias classe 3-50 × 50 × 100: Médias para problema mestre por iteração e tempos totais de execução.

$\Gamma(\%)$	Tempo médio PM por iteração $\bar{T}^h \setminus \bar{T}^{hs}$					Tempo total médio $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$				
	CCG	BD1	Razão	BD2	Razão	CCG	BD1	Razão	BD2	Razão
10	393,26	97,14 \ 75,30	4,05	91,67 \ 76,69	4,29	1370,14	233,34 \ 82,97	5,87	161,55 \ 88,21	8,48
20	368,25	97,22 \ 73,60	3,79	101,85 \ 72,34	3,62	1204,59	277,04 \ 77,00	4,35	231,59 \ 80,77	5,20
30	396,37	102,44 \ 74,16	3,87	92,22 \ 76,73	4,30	1354,68	273,43 \ 79,82	4,95	218,22 \ 83,89	6,21
40	309,83	108,01 \ 65,14	2,87	98,75 \ 68,13	3,14	929,71	270,36 \ 70,92	3,44	127,87 \ 86,25	7,27
50	267,84	96,56 \ 63,95	2,77	118,82 \ 55,64	2,25	790,29	249,82 \ 68,39	3,16	178,71 \ 77,39	4,42
60	248,99	109,96 \ 55,84	2,26	105,14 \ 57,77	2,37	734,16	267,74 \ 63,53	2,74	144,87 \ 80,27	5,07
70	103,16	100,68 \ 2,40	1,02	95,57 \ 7,36	1,08	281,76	201,47 \ 28,50	1,40	111,54 \ 60,41	2,53
80	91,62	105,54 \ -15,20	0,87	97,21 \ -6,10	0,94	237,57	262,24 \ -10,39	0,91	121,68 \ 48,78	1,95
90	262,67	97,25 \ 62,98	2,70	101,41 \ 61,39	2,59	774,20	194,58 \ 74,87	3,98	127,51 \ 83,53	6,07
100	49,79	88,05 \ -76,84	0,57	105,22 \ -111,33	0,47	99,72	176,17 \ -76,66	0,57	105,57 \ -5,87	0,94
Média	249,18	100,28 \ 59,75	2,48	100,79 \ 59,55	2,47	777,68	240,62 \ 69,06	3,14	152,91 \ 80,34	5,09

Tabela 4.4 – Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias classe 4-50 × 50 × 100: Médias para problema mestre por iteração e tempos totais de execução.

$\Gamma(\%)$	Tempo médio PM por iteração $\bar{T}^h \setminus \bar{T}^{hs}$					Tempo total médio $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$				
	CCG	BD1	Razão	BD2	Razão	CCG	BD1	Razão	BD2	Razão
10	15,35	6,11 \ 60,22	2,51	5,67 \ 63,06	2,71	46,58	12,54 \ 73,08	3,71	10,07 \ 78,38	4,63
20	17,31	6,65 \ 61,57	2,60	5,50 \ 68,23	3,15	51,55	16,06 \ 68,84	3,21	12,95 \ 74,88	3,98
30	27,32	9,37 \ 65,69	2,91	9,79 \ 64,16	2,79	82,17	23,83 \ 71,01	3,45	21,59 \ 73,72	3,81
40	24,01	8,44 \ 64,84	2,84	8,47 \ 64,72	2,83	72,51	24,75 \ 65,87	2,93	18,33 \ 74,72	3,96
50	22,63	8,58 \ 62,11	2,64	6,88 \ 69,58	3,29	68,43	20,78 \ 69,63	3,29	15,18 \ 77,82	4,51
60	13,50	7,39 \ 45,23	1,83	7,89 \ 41,55	1,71	39,81	21,28 \ 46,54	1,87	17,10 \ 57,04	2,33
70	5,30	9,51 \ -79,46	0,56	9,83 \ -85,58	0,54	11,48	19,54 \ -70,26	0,59	15,40 \ -34,20	0,75
80	17,40	10,43 \ 40,08	1,67	10,03 \ 42,38	1,74	50,25	25,41 \ 49,44	1,98	15,59 \ 68,97	3,22
90	10,67	8,87 \ 16,83	1,20	8,85 \ 17,04	1,21	29,48	17,95 \ 39,10	1,64	11,15 \ 62,19	2,64
100	4,23	9,57 \ -126,50	0,44	7,85 \ -85,85	0,54	8,59	19,26 \ -124,14	0,45	8,23 \ 4,26	1,04
Média	15,77	8,49 \ 46,15	1,86	8,08 \ 48,79	1,95	46,09	20,14 \ 56,30	2,31	14,56 \ 68,41	3,17

Tabela 4.5 – Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias classe 5-50 × 50 × 100: Médias para problema mestre por iteração e tempos totais de execução.

$\Gamma(\%)$	Tempo médio PM por iteração $\bar{T}^h \setminus \bar{T}^{hs}$					Tempo total médio $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$				
	CCG	BD1	Razão	BD2	Razão	CCG	BD1	Razão	BD2	Razão
10	90,79	35,76 \ 6,06	2,54	36,54 \ 59,76	2,48	269,50	107,95 \ 59,94	2,50	90,52 \ 66,41	2,98
20	116,38	35,46 \ 6,95	3,28	29,12 \ 74,98	4,00	346,54	94,35 \ 72,77	3,67	62,75 \ 81,89	5,52
30	169,61	34,67 \ 7,96	4,89	35,44 \ 79,10	4,79	631,60	99,10 \ 84,31	6,37	71,63 \ 88,66	8,82
40	52,50	35,79 \ 3,18	1,47	32,06 \ 38,94	1,64	147,27	78,49 \ 46,71	1,88	45,99 \ 68,77	3,20
50	60,34	35,53 \ 4,11	1,70	31,39 \ 47,97	1,92	173,18	85,17 \ 50,82	2,03	33,98 \ 80,38	5,10
60	74,56	35,50 \ 5,24	2,10	35,30 \ 52,66	2,11	217,03	71,16 \ 67,21	3,05	57,23 \ 73,63	3,79
70	34,49	38,10 \ -1,05	0,91	36,65 \ -6,27	0,94	88,39	76,37 \ 13,60	1,16	44,91 \ 49,19	1,97
80	25,20	35,73 \ -4,18	0,71	33,82 \ -34,20	0,75	58,26	71,61 \ -22,92	0,81	36,61 \ 37,16	1,59
90	46,94	35,14 \ 2,51	1,34	30,54 \ 34,94	1,54	130,18	80,41 \ 38,23	1,62	44,18 \ 66,06	2,95
100	17,63	37,70 \ -11,39	0,47	37,79 \ -114,40	0,47	35,39	75,50 \ -113,34	0,47	38,27 \ -8,16	0,92
Média	68,84	35,94 \ 47,80	1,92	33,86 \ 50,81	2,03	209,73	84,01 \ 59,94	2,36	52,61 \ 74,92	3,99



Tabela 4.6 – Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias classe 3-30 × 60 × 120: Médias para problema mestre por iteração e tempos totais de execução.

$\Gamma(\%)$	Tempo médio PM por iteração $\bar{T}^h \setminus \bar{T}^{hs}$					Tempo total médio $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$				
	CCG	BD1	Razão	BD2	Razão	CCG	BD1	Razão	BD2	Razão
10	528,56	278,58 \ 47,29	1,90	228,13 \ 56,84	2,32	1585,95	662,04 \ 58,26	2,40	495,01 \ 68,79	3,20
20	439,25	291,47 \ 33,64	1,51	225,56 \ 48,65	1,95	1270,54	583,02 \ 54,11	2,18	417,57 \ 67,13	3,04
30	663,72	264,82 \ 60,10	2,51	226,52 \ 65,87	2,93	2572,71	723,86 \ 71,86	3,55	<b>673,68</b> \ 73,81	3,82
40	391,13	265,13 \ 32,21	1,48	213,83 \ 45,33	1,83	1142,08	530,35 \ 53,56	2,15	<b>370,43</b> \ 67,57	3,08
50	785,39	268,56 \ 65,81	2,92	201,09 \ 74,40	3,91	2761,49	622,96 \ 77,44	4,43	<b>380,41</b> \ 86,22	7,26
60	611,87	271,67 \ 55,60	2,25	222,97 \ 63,56	2,74	1835,85	628,58 \ 65,76	2,92	<b>373,75</b> \ 79,64	4,91
70	650,00	249,72 \ 61,58	2,60	207,81 \ 68,03	3,13	1950,25	654,29 \ 66,45	2,98	<b>297,98</b> \ 84,72	6,54
80	505,28	264,52 \ 47,65	1,91	210,26 \ 58,39	2,40	1480,24	609,62 \ 58,82	2,43	<b>301,40</b> \ 79,64	4,91
90	111,88	290,41 \ -159,58	0,39	200,42 \ -79,15	0,56	<b>223,95</b>	580,93 \ -159,40	0,39	247,37 \ -10,46	0,91
100	106,67	288,99 \ -170,92	0,37	229,73 \ -115,37	0,46	<b>213,50</b>	578,04 \ -170,74	0,37	230,14 \ -7,79	0,93
Média	479,37	273,39 \ 42,97	1,75	216,63 \ 54,81	2,21	1503,66	617,37 \ 58,94	2,38	378,77 \ 74,81	3,97

Tabela 4.7 – Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias classe 4-30 × 60 × 120: Médias para problema mestre por iteração e tempos totais de execução.

$\Gamma(\%)$	Tempo médio PM por iteração $\bar{T}^h \setminus \bar{T}^{hs}$					Tempo total médio $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$				
	CCG	BD1	Razão	BD2	Razão	CCG	BD1	Razão	BD2	Razão
10	7,50	2,55 \ 65,96	2,94	2,90 \ 61,29	2,58	23,11	<b>7,09</b> \ 69,31	3,26	10,11 \ 56,24	2,29
20	6,37	2,45 \ 61,57	2,60	2,82 \ 55,79	2,26	19,59	<b>5,55</b> \ 71,68	3,53	8,46 \ 56,82	2,32
30	4,50	2,46 \ 45,43	1,83	2,82 \ 37,30	1,59	14,18	<b>6,38</b> \ 55,01	2,22	6,54 \ 53,91	2,17
40	6,96	2,46 \ 64,65	2,83	3,13 \ 55,02	2,22	21,68	<b>6,29</b> \ 70,97	3,44	6,95 \ 67,92	3,12
50	7,21	2,84 \ 60,67	2,54	2,84 \ 60,64	2,54	22,22	8,20 \ 63,10	2,71	<b>7,30</b> \ 67,13	3,04
60	5,13	2,62 \ 48,89	1,96	3,01 \ 41,33	1,70	15,45	<b>6,66</b> \ 56,88	2,32	7,01 \ 54,60	2,20
70	2,01	2,53 \ -26,20	0,79	2,85 \ -41,93	0,70	<b>5,58</b>	7,18 \ -28,84	0,78	5,88 \ -5,42	0,95
80	3,08	2,33 \ 24,30	1,32	2,98 \ 3,31	1,03	8,80	6,79 \ 22,85	1,30	<b>4,23</b> \ 51,90	2,08
90	4,62	2,31 \ 49,87	1,99	2,38 \ 48,53	1,94	13,88	6,81 \ 50,97	2,04	<b>5,57</b> \ 59,87	2,49
100	1,14	2,17 \ -90,53	0,52	3,15 \ -176,49	0,36	<b>2,47</b>	4,49 \ -82,24	0,55	3,60 \ -45,90	0,69
Média	4,85	2,47 \ 49,03	1,96	2,89 \ 40,48	1,68	14,69	6,54 \ 55,46	2,21	6,57 \ 55,32	2,24

Tabela 4.8 – Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias classe 5-30 × 60 × 120: Médias para problema mestre por iteração e tempos totais de execução.

$\Gamma(\%)$	Tempo médio PM por iteração $\bar{T}^h \setminus \bar{T}^{hs}$					Tempo total médio $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$				
	CCG	BD1	Razão	BD2	Razão	CCG	BD1	Razão	BD2	Razão
10	21,09	11,28 \ 4,65	1,87	11,18 \ 47,00	1,89	61,61	22,70 \ 63,15	2,71	<b>13,01</b> \ 78,88	4,74
20	46,30	13,65 \ 7,05	3,39	14,76 \ 68,13	3,14	138,33	<b>27,48</b> \ 80,14	5,03	32,88 \ 76,23	4,21
30	25,97	15,31 \ 4,11	1,70	17,63 \ 32,11	1,47	74,52	<b>37,88</b> \ 49,16	1,97	45,67 \ 38,71	1,63
40	47,69	16,75 \ 6,49	2,85	21,63 \ 54,64	2,20	139,16	<b>35,79</b> \ 74,28	3,89	41,19 \ 70,40	3,38
50	36,94	16,28 \ 5,59	2,27	22,30 \ 39,63	1,66	104,28	<b>32,75</b> \ 68,59	3,18	43,23 \ 58,55	2,41
60	16,94	19,25 \ -1,37	0,88	29,51 \ -74,24	0,57	<b>37,33</b>	40,91 \ -9,60	0,91	41,26 \ -10,54	0,90
70	74,56	19,10 \ 7,44	3,90	23,03 \ 69,11	3,24	221,92	38,36 \ 82,71	5,78	<b>23,67</b> \ 89,33	9,37
80	23,98	20,52 \ 1,44	1,17	21,38 \ 10,87	1,12	62,08	43,34 \ 30,20	1,43	<b>24,67</b> \ 60,26	2,52
90	22,04	15,70 \ 2,88	1,40	24,44 \ -10,90	0,90	55,54	<b>31,60</b> \ 43,10	1,76	35,85 \ 35,45	1,55
100	9,25	17,35 \ -8,76	0,53	20,60 \ -122,77	0,45	<b>18,66</b>	34,82 \ -86,54	0,54	21,14 \ -13,24	0,88
Média	32,48	16,52 \ 49,13	1,97	20,65 \ 36,43	1,57	91,34	34,56 \ 62,16	2,72	32,26 \ 64,69	2,83

Os percentuais médios de economia alcançadas chegam em média a 59.75, 48.79 e 50.81 nas classes 3, 4 e 5, respectivamente, do tamanho  $50 \times 50 \times 100$ . Já no tamanho  $30 \times 60 \times 120$  os percentuais médias são em média 54.81, 49.03, 49.13 nas classes 3, 4 e 5. As Razões apresentada nas tabelas corroboram com esses dados. Elas mostram o quão mais rápido foi a nova estratégia em relação ao CCG. Os seus valores médios são 5.09, 3,17 e 3,99 para as classes 3, 4 e 5, respectivamente, do tamanho  $50 \times 50 \times 100$  e 3,97, 2,24 e 2,83 no tamanho  $30 \times 60 \times 120$  para as mesmas classes.

O que colabora também para essa economia é percebido nas Tabelas 4.9 e 4.10 onde percebe-se que apesar dos valores médios do nós de B&B serem maiores nas abordagens propostas as iterações são em média menores em todos os tamanhos.

Para o tamanho  $90 \times 90 \times 90$  não é apresentado as tabelas de valores médios pois seus valores era bem discrepantes não possibilitando fazer uma análise justa. Optou-se por inseri-los na análise do perfil de desempenho dos métodos.

Tabela 4.9 – Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias  $50 \times 50 \times 100$ : médias para o número de iterações e número de nós *branch-and-bound*.

$\Gamma(\%)$	Classe 3						Classe 4						Classe 5					
	# Iteração ( $h$ )			#nós de B&B			# Iteração ( $h$ )			#nós de B&B			# Iteração ( $h$ )			#nós de B&B		
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2
10	3,00	2,40	1,80	5086,00	5443,20	3815,60	3,00	2,00	1,80	485,80	495,80	368,80	2,60	2,60	2,20	3788,80	7059,40	5471,80
20	3,20	3,00	2,20	5404,60	6551,80	5740,00	2,60	2,40	2,00	502,00	649,40	457,80	2,80	2,40	1,60	4500,40	6405,40	3630,20
30	3,20	2,60	2,40	5816,40	6606,40	5439,20	2,80	2,60	2,00	1206,80	1329,40	1057,00	3,00	2,60	1,60	4695,40	6341,40	3720,60
40	3,00	2,40	1,20	4841,60	6350,60	3079,20	3,00	2,80	2,00	861,80	1231,20	1010,40	2,40	2,20	1,60	2745,20	5044,20	2486,00
50	2,80	2,60	1,60	4386,80	6003,40	4223,20	3,00	2,60	2,00	808,40	1137,40	803,40	2,40	2,20	1,20	2241,00	5217,60	1757,40
60	2,80	2,40	1,40	4210,40	6285,40	3591,80	2,80	2,80	2,00	625,80	1141,80	1004,80	2,40	2,00	1,80	3216,60	4693,00	3351,20
70	2,40	2,00	1,20	2554,40	4768,40	2733,40	2,20	2,20	1,60	583,40	961,60	722,20	2,20	2,00	1,20	1973,40	4898,40	2275,00
80	2,20	2,40	1,20	2621,80	5904,60	2913,20	2,60	2,80	1,60	978,40	1288,40	869,80	2,20	2,00	1,20	1955,20	4666,40	1995,40
90	2,60	2,00	1,20	4335,00	4542,00	3277,60	2,40	2,00	1,20	674,20	930,60	561,80	2,40	2,20	1,60	2461,40	5032,80	2147,60
100	2,00	2,00	1,00	2452,60	4081,40	2602,40	2,00	2,00	1,00	513,80	912,60	415,40	2,00	2,00	1,00	1807,80	4753,20	1938,20
Média	2,72	2,38	1,52	4170,96	5653,72	3741,56	2,64	2,42	1,72	724,04	1007,82	727,14	2,44	2,22	1,50	2938,52	5411,18	2877,34

Tabela 4.10 – Comparação da performance dos algoritmos em resolver instâncias  $30 \times 60 \times 120$ :: médias para o número de iterações e número de nós *branch-and-bound*.

$\Gamma(\%)$	Classe 3						Classe 4						Classe 5					
	# Iteração ( $h$ )			#nós de B&B			# Iteração ( $h$ )			#nós de B&B			# Iteração ( $h$ )			#nós de B&B		
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2
10	3,00	2,40	2,00	15295,80	30086,60	19544,20	3,00	2,40	2,20	157,00	209,40	328,20	2,40	2,00	1,20	1396,60	2151,80	1059,20
20	2,80	2,00	1,80	12728,60	25227,00	16220,20	2,80	2,00	2,20	164,60	190,60	341,20	2,60	2,00	1,60	2371,40	2416,40	2939,60
30	3,20	2,80	3,00	13229,00	29625,20	24119,00	2,80	2,20	1,80	114,60	156,20	186,80	2,40	2,20	2,40	2233,60	3499,40	3744,20
40	2,60	2,00	1,80	9735,00	21909,60	12919,80	3,00	2,20	1,80	195,20	156,40	169,80	2,60	2,40	1,80	2791,60	3122,00	3446,40
50	3,20	2,20	2,00	13543,80	24637,20	12276,60	3,00	2,80	2,00	190,60	233,20	206,40	2,60	2,00	1,60	2261,60	2798,00	2992,80
60	3,00	2,40	1,80	13011,00	25065,60	12130,20	2,60	2,20	1,80	154,00	185,40	126,80	2,20	2,40	1,60	2295,60	3433,20	2927,80
70	3,00	2,60	1,40	12427,60	25828,20	9454,20	2,40	2,60	1,60	156,00	211,20	196,20	2,60	2,00	1,00	3236,60	3337,20	1716,40
80	2,60	2,20	1,40	10650,40	24323,40	9610,60	2,40	2,60	1,20	65,60	195,80	141,60	2,40	2,40	1,40	2113,80	3319,60	1729,60
90	2,00	2,00	1,20	7461,00	23122,00	7968,60	2,60	2,80	1,80	61,60	150,40	82,80	2,20	2,00	1,60	1939,00	2709,20	2151,40
100	2,00	2,00	1,00	7278,20	23507,00	7301,60	2,00	2,00	1,00	107,20	126,20	64,00	2,00	2,00	1,00	1237,40	2703,80	1318,60
Média	2,74	2,26	1,74	11536,04	25333,18	13154,50	2,66	2,38	1,74	136,64	181,48	184,38	2,40	2,14	1,52	2187,72	2949,06	2402,60

As maiores economias acontecem na classe 3 tanto para o conjunto de instâncias de tamanho  $50 \times 50 \times 100$  com  $\Gamma \in [10\%, 90\%]$  e  $30 \times 60 \times 120$  com  $\Gamma \in [10\%, 80\%]$ . Esse desempenho e os demais podem ser melhor visto nas Figuras 4.1 - 4.6.

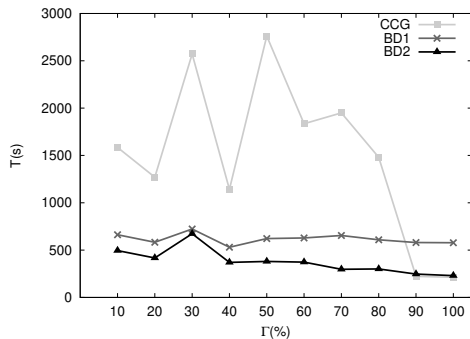


Figura 4.1 – Impacto do orçamento de incerteza em relação ao tempo médio de execução ( $\bar{T}$ ) nas instâncias classe-3-30-60-120.

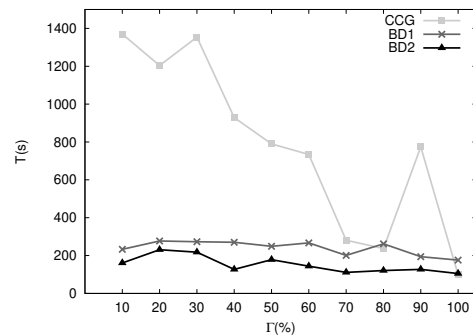


Figura 4.2 – Impacto do orçamento de incerteza em relação ao tempo médio de execução ( $\bar{T}$ ) nas instâncias classe-3-50-50-100.

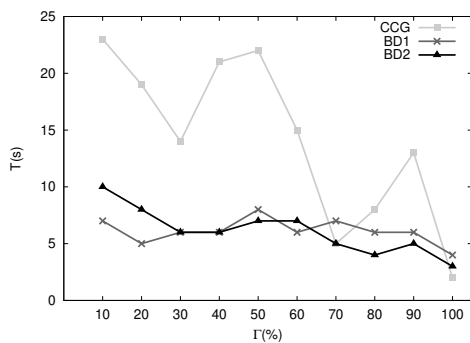


Figura 4.3 – Impacto do orçamento de incerteza em relação ao tempo médio de execução ( $\bar{T}$ ) nas instâncias class4-30-60-120.

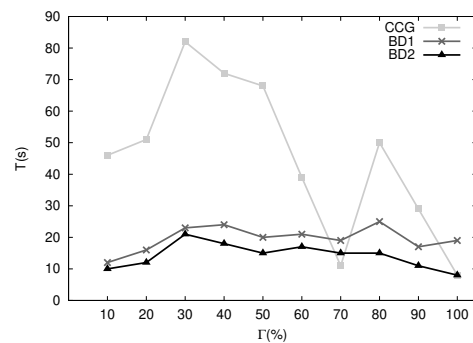


Figura 4.4 – Impacto do orçamento de incerteza em relação ao tempo médio de execução ( $\bar{T}$ ) nas instâncias class4-50-50-100.

Para as instâncias de tamanho  $50 \times 50 \times 100$ , o algoritmo BD2 supera o método CCG em todos os valores do orçamento de incerteza, exceto em 70% classe 4 e 100% para as classe 3 e 5. Já no tamanho  $30 \times 60 \times 120$  seu desempenho dependerá da classe. Na classe 3 supera CCG, exceto em 90% e 100% porém a diferença é pequena entre eles. Enquanto na classe 4 e 5 os algoritmo propostos tem comportamentos semelhantes sendo um mais eficiente que o outro dependendo do orçamento, aqui o CCG foi melhor em 70% e 100% na classe 4 e 100% na classe 5.

Tendo em vista avaliar a porcentagem de instâncias que os algoritmo são capazes de encontrar a solução ótima dentro de uma dada razão de tempo de execução  $\tau$ , foram construídos alguns perfis de desempenho (DOLAN; MORÉ, 2002), Figuras 4.7 - 4.12. Daí ao observar o desempenho do BD1 e CCG constata-se em decorrência das Figuras 4.7 e 4.9 que o primeiro identifica inequivocamente cenários significativos mais rápidos que o CCG nas classes 3 e 4,

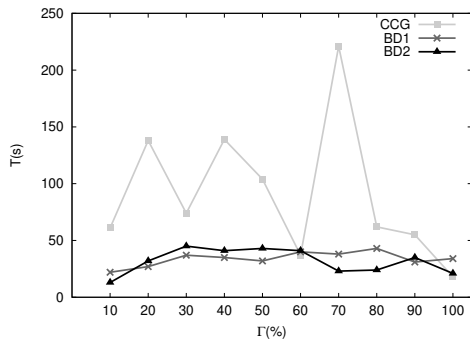


Figura 4.5 – Impacto do orçamento de incerteza em relação ao tempo médio de execução ( $\bar{T}$ ) nas instâncias classe 5-30-60-120.

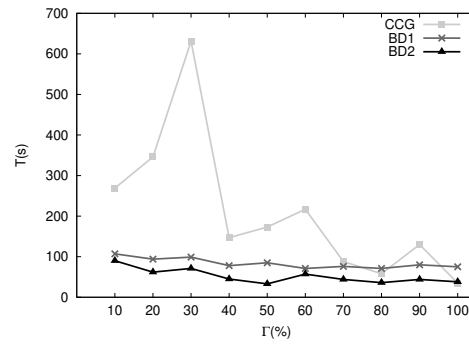


Figura 4.6 – Impacto do orçamento de incerteza em relação ao tempo médio de execução ( $\bar{T}$ ) nas instâncias classe 5-50-50-100

respectivamente. Porém apesar da Figura 4.11, que traz a classe 5, mostrar que o CCG resolve mais rápido cerca 60% das instâncias num primeiro momento,  $\tau = 1$ , nota-se que o BD1 resolve todas as instâncias com  $\tau$  até 3.55 mostrando-se mais estável e mais eficiente que o CCG no decorrer do intervalo.

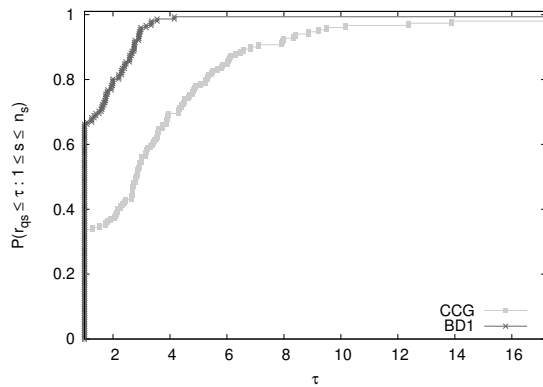


Figura 4.7 – Perfil de desempenho dos métodos BD1 e CCG em resolver instâncias da classe 3.

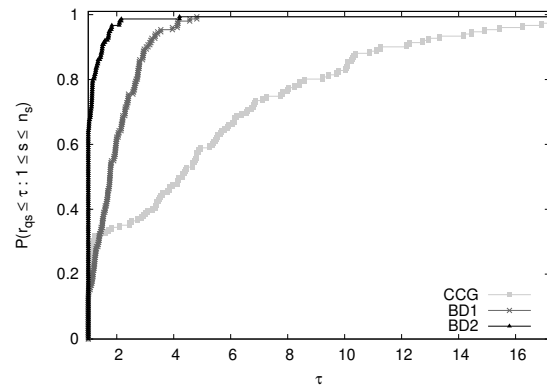


Figura 4.8 – Perfil de desempenho dos métodos BD1, BD2 e CCG em resolver instâncias da classe 3.

Em complemento a análise anterior tem-se todos os três algoritmos elencados nas Figuras 4.8, 4.10 e 4.12 onde percebe-se que o gráfico do BD2 está próximo do eixo vertical conseguindo se sobressair ao BD1. Observe que enquanto o algoritmo BD1 é capaz de resolver todas as instâncias para  $\tau$  até 4.8, 4.2 e 3.5 nos conjuntos das classes 3, 4 e 5, respectivamente, o BD2 resolve para  $\tau$  dentro do intervalo até 4.2, 4.4 e 5.2 na mesma sequência de classes.

Por fim as Tabelas 4.11 - 4.28 contém os resultados de todas as instâncias de forma individualizadas.

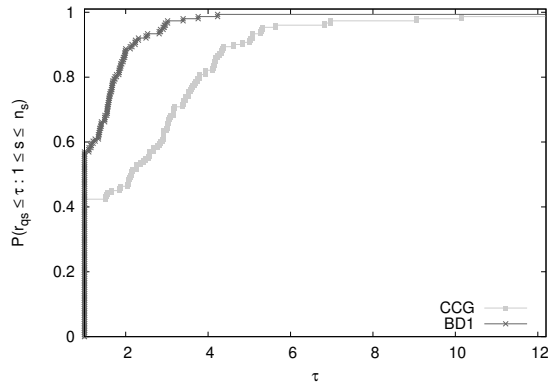


Figura 4.9 – Perfil de desempenho dos métodos BD1 e CCG em resolver instâncias da classe 4.

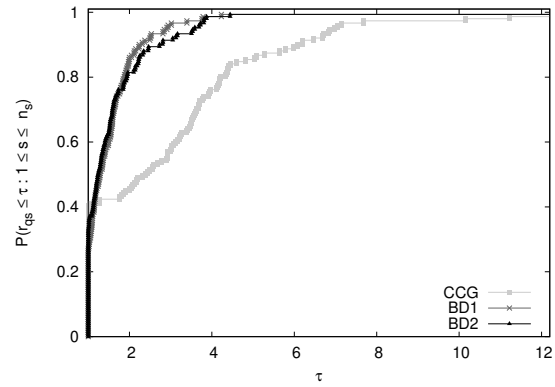


Figura 4.10 – Perfil de desempenho dos métodos BD1, BD2 e CCG em resolver instâncias da classe 4.

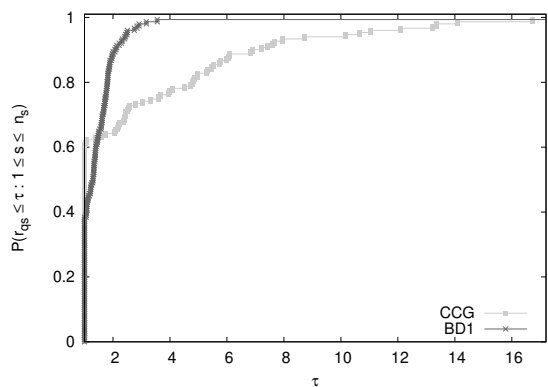


Figura 4.11 – Perfil de desempenho dos métodos BD1 e CCG em resolver instâncias da classe 5.

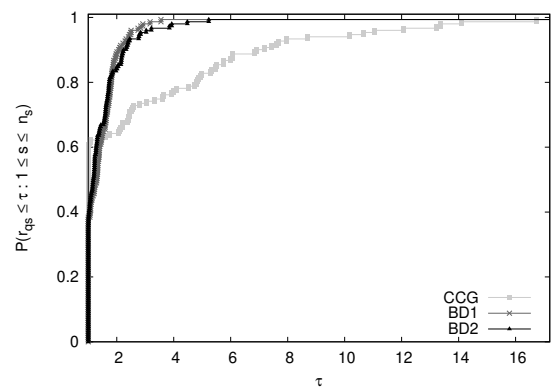


Figura 4.12 – Perfil de desempenho dos métodos BD1, BD2 e CCG em resolver instâncias da classe 5.

Tabela 4.11 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 3 -  $50 \times 50 \times 100$  para  $\Gamma(\%)$  de 10 a 50.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$ Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$ Razão					
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2			
01-10	2	2	1	1187	1886	1292	29,25	47,27 \ -61,61	0,62	47,77 \ -63,32	0,61	58,67	94,6 \ -61,24	0,62	48,06 \ 18,08	1,22		
02-10	4	3	2	10572	10171	7593	979,98	128,36 \ 86,90	7,63	150,85 \ 84,61	6,50	3920,26	385,33 \ 90,17	10,17	302,56 \ 92,28	12,96		
03-10	3	3	3	2676	4372	3566	178,57	66,36 \ 62,84	2,69	51,88 \ 70,95	3,44	535,89	199,18 \ 62,83	2,69	157,77 \ 70,56	3,40		
04-10	3	2	1	6675	5896	3149	437,86	112,22 \ 74,37	3,90	117,82 \ 73,09	3,72	1313,77	224,56 \ 82,91	5,85	118,19 \ 91,00	11,12		
05-10	3	2	2	4320	4891	3478	340,64	131,49 \ 61,40	2,59	90,05 \ 73,56	3,78	1022,12	263,04 \ 74,27	3,89	181,18 \ 82,27	5,64		
01-20	3	2	1	1603	1625	920	122,2	42,2 \ 65,47	2,90	53,09 \ 56,55	2,30	366,82	84,44 \ 76,98	4,34	53,38 \ 85,45	6,87		
02-20	3	2	2	6830	6156	7771	435,1	121,53 \ 72,07	3,58	137,66 \ 68,36	3,16	1305,5	243,13 \ 81,38	5,37	276,25 \ 78,84	4,73		
03-20	4	6	3	5575	10021	5930	498,14	73,33 \ 85,28	6,79	82,09 \ 83,52	6,07	1992,84	440,38 \ 77,90	4,53	248,17 \ 87,55	8,03		
04-20	3	3	2	8227	9828	6885	380,76	118,91 \ 68,77	3,20	131,79 \ 65,39	2,89	1142,48	356,9 \ 68,76	3,20	264,54 \ 76,85	4,32		
05-20	3	2	3	4788	5129	7194	405,04	130,13 \ 67,87	3,11	104,64 \ 74,17	3,87	1215,32	260,34 \ 78,58	4,67	315,63 \ 74,03	3,85		
01-30	3	2	2	2413	1986	2161	160,82	47,83 \ 70,26	3,36	53,59 \ 66,68	3,00	482,69	95,72 \ 80,17	5,04	108,03 \ 77,62	4,47		
02-30	3	2	2	6355	5966	5909	412,75	122,11 \ 70,42	3,38	113,93 \ 72,40	3,62	1238,43	244,28 \ 80,28	5,07	228,84 \ 81,52	5,41		
03-30	3	3	3	3508	5249	6096	201,6	82,23 \ 59,21	2,45	79,96 \ 60,34	2,52	605,01	246,79 \ 59,21	2,45	241,87 \ 60,02	2,50		
04-30	3	3	2	7693	11603	7370	380,2	135,79 \ 64,28	2,80	131,49 \ 65,42	2,89	1140,83	407,52 \ 64,28	2,80	264,14 \ 76,85	4,32		
05-30	4	3	3	9113	8228	5660	826,5	124,22 \ 84,97	6,65	82,13 \ 90,06	10,06	3306,43	372,84 \ 88,72	8,87	248,22 \ 92,49	13,32		
01-40	3	2	1	2219	2411	1360	148,89	57,39 \ 61,45	2,59	65,26 \ 56,17	2,28	446,88	114,84 \ 74,30	3,89	65,53 \ 85,34	6,82		
02-40	3	2	1	6716	6414	3151	389,52	129,38 \ 66,78	3,01	119,22 \ 69,39	3,27	1168,75	258,83 \ 77,85	4,52	119,57 \ 89,77	9,77		
03-40	3	2	1	5674	3714	1638	286,5	82,09 \ 71,35	3,49	76 \ 73,47	3,77	859,7	164,28 \ 80,89	5,23	76,44 \ 91,11	11,25		
04-40	3	3	2	6156	11402	7250	395,37	146,57 \ 62,93	2,70	142,97 \ 63,84	2,77	1186,35	439,86 \ 62,92	2,70	287,07 \ 75,80	4,13		
05-40	3	3	1	3443	7812	1997	328,88	124,62 \ 62,11	2,64	90,3 \ 72,54	3,64	986,88	373,98 \ 62,10	2,64	90,73 \ 90,81	10,88		
01-50	3	2	2	2776	2658	3217	198,8	61,14 \ 69,25	3,25	76,87 \ 61,33	2,59	596,64	122,33 \ 79,50	4,88	154,6 \ 74,09	3,86		
02-50	3	2	1	6659	6251	3452	416,74	129,26 \ 68,98	3,22	145,37 \ 65,12	2,87	1250,5	258,61 \ 79,32	4,84	145,74 \ 88,35	8,58		
03-50	3	3	2	3174	4324	4654	223,27	67,57 \ 69,74	3,30	88,08 \ 60,55	2,53	670	202,84 \ 69,73	3,30	177,32 \ 73,53	3,78		
04-50	3	4	2	6971	12053	6558	433,13	107,65 \ 75,15	4,02	130,55 \ 69,86	3,32	1299,61	430,9 \ 66,84	3,02	262,24 \ 79,82	4,96		
05-50	2	2	1	2354	4731	3235	67,27	117,16 \ -74,16	0,57	153,23 \ -127,78	0,44	134,72	234,43 \ -74,01	0,57	153,65 \ -14,05	0,88		

Tabela 4.12 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 3 -  $50 \times 50 \times 100$  para  $\Gamma(\%)$  de 60 a 100.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^h(\%)$ Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$ Razão							
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2					
01-60	3	2	2	3340	2714	3190	201,29	64,98	67,72	3,10	66,07	67,18	3,05	604,1	130,04	78,47	4,65	132,95	77,99	4,54
02-60	3	3	2	5976	10606	6603	416,91	138,22	66,85	3,02	129,63	68,91	3,22	1250,96	414,81	66,84	3,02	260,16	79,20	4,81
03-60	3	3	1	3446	6180	2343	218,01	100,3	53,99	2,17	114,48	47,49	1,90	654,23	301,03	53,99	2,17	114,92	82,43	5,69
04-60	2	2	1	3751	7016	3393	65,16	126,3	-93,83	0,52	114,01	-74,97	0,57	130,48	252,73	-93,69	0,52	114,37	12,35	1,14
05-60	3	2	1	4539	4911	2430	343,6	120	65,08	2,86	101,53	70,45	3,38	1031,04	240,08	76,71	4,29	101,96	90,11	10,11
01-70	3	2	1	2021	2822	799	159,81	64,16	59,85	2,49	47,52	70,26	3,36	479,67	128,4	73,23	3,74	47,79	90,04	10,04
02-70	2	2	1	2871	5504	3242	47,33	109,09	-130,49	0,43	104,5	-120,79	0,45	94,82	218,27	-130,19	0,43	104,85	-10,58	0,90
03-70	3	2	2	2847	4153	3412	216,43	86,52	60,02	2,50	77,3	64,28	2,80	649,5	173,12	73,35	3,75	155,8	76,01	4,17
04-70	2	2	1	3655	5898	3582	59,38	106,86	-79,96	0,56	136,1	-129,20	0,44	118,92	213,85	-79,83	0,56	136,46	-14,75	0,87
05-70	2	2	1	1378	5465	2632	32,86	136,79	-316,28	0,24	112,41	-242,09	0,29	65,9	273,69	-315,31	0,24	112,82	-71,20	0,58
01-80	2	2	1	1234	2272	783	23,79	58,61	-146,36	0,41	41,81	-75,75	0,57	47,76	117,3	-145,60	0,41	42,09	11,87	1,13
02-80	2	2	1	3312	6597	2877	56,73	132,4	-133,39	0,43	110,47	-94,73	0,51	113,6	264,86	-133,15	0,43	110,83	2,44	1,02
03-80	2	2	1	2220	3112	2739	49,75	81,4	-63,62	0,61	108,35	-117,79	0,46	99,67	162,88	-63,42	0,61	108,8	-9,16	0,92
04-80	2	3	1	2734	7693	2837	57,03	98,47	-72,66	0,58	105,64	-85,24	0,54	114,19	295,56	-158,83	0,39	105,98	7,19	1,08
05-80	3	3	2	3609	9849	5330	270,8	156,83	42,09	1,73	119,79	55,76	2,26	812,63	470,62	42,09	1,73	240,71	70,38	3,38
01-90	2	2	1	988	2519	1449	26,11	57,62	-120,68	0,45	70,11	-168,52	0,37	52,4	115,3	-120,04	0,45	70,41	-34,37	0,74
02-90	3	2	2	6590	6284	6472	426,94	121,67	71,50	3,51	128,12	69,99	3,33	1281	243,4	81,00	5,26	257,15	79,93	4,98
03-90	3	2	1	3299	2710	2877	212,61	65,33	69,27	3,25	108,23	49,09	1,96	638,03	130,74	79,51	4,88	108,62	82,98	5,87
04-90	3	2	1	8463	6077	3492	603,8	114,17	81,09	5,29	117,05	80,61	5,16	1811,6	228,46	87,39	7,93	117,41	93,52	15,43
05-90	2	2	1	2335	5120	2098	43,88	127,47	-190,50	0,34	83,52	-90,34	0,53	87,96	255,02	-189,93	0,34	83,95	4,56	1,05
01-100	2	2	1	1833	2074	1118	38,38	48,33	-25,92	0,79	54,3	-41,48	0,71	76,91	96,7	-25,73	0,80	54,57	29,05	1,41
02-100	2	2	1	2094	5699	2785	38,71	113,19	-192,41	0,34	114,12	-194,81	0,34	77,54	226,43	-192,02	0,34	114,47	-47,63	0,68
03-100	2	2	1	3181	2937	2070	65,95	71,72	-8,75	0,92	82,52	-25,13	0,80	132,05	143,51	-8,68	0,92	82,94	37,19	1,59
04-100	2	2	1	3260	5466	2792	67,06	106,28	-58,48	0,63	111,94	-66,93	0,60	134,26	212,68	-58,41	0,63	112,29	16,36	1,20
05-100	2	2	1	1895	4231	4247	38,84	100,71	-159,29	0,39	163,2	-320,19	0,24	77,84	201,51	-158,88	0,39	163,59	-110,16	0,48



Tabela 4.13 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 4 -  $50 \times 50 \times 100$  para  $\Gamma(\%)$  de 10 a 50.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão								
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2						
01-10	3	2	2	118	165	103	8,87	3,09 \ 65,16		2,87 \ 3,1		65,16		2,86	27,19	6,55 \ 75,91		4,15 \ 7,58		72,12 \ 3,59	
02-10	3	2	2	705	469	566	21,06	6,18 \ 70,66		3,41 \ 6,98		70,66		3,02	63,57	12,52 \ 80,31		5,08 \ 15,29		75,95 \ 4,16	
03-10	3	2	2	285	319	267	12,69	4,33 \ 65,88		2,93 \ 3,94		65,88		3,22	38,95	9,32 \ 76,07		4,18 \ 9,53		75,53 \ 4,09	
04-10	3	2	1	1292	1494	863	31,15	15,45 \ 50,40		2,02 \ 12,57		50,40		2,48	93,9	31,12 \ 66,86		3,02 \ 13,12		86,03 \ 7,16	
05-10	3	2	2	29	32	45	2,97	1,48 \ 50,17		2,01 \ 1,76		50,17		1,69	9,31	3,19 \ 65,74		2,92 \ 4,84		48,01 \ 1,92	
01-20	2	2	1	158	312	184	3,13	4,45 \ -42,17		0,70 \ 4,66		-42,17		0,67	6,6	9,19 \ -39,24		0,72 \ 5,22		20,91 \ 1,26	
02-20	3	3	2	1021	629	604	30,6	5,7 \ 81,37		5,37 \ 6,17		81,37		4,96	92,17	17,33 \ 81,20		5,32 \ 13,47		85,39 \ 6,84	
03-20	3	3	3	581	682	922	23,57	5,03 \ 78,66		4,69 \ 6,68		78,66		3,53	71,19	17,02 \ 76,09		4,18 \ 22,98		67,72 \ 3,10	
04-20	3	2	2	728	1591	536	28,41	16,52 \ 41,85		1,72 \ 8,56		41,85		3,32	85,84	33,41 \ 61,08		2,57 \ 18,71		78,20 \ 4,59	
05-20	2	2	2	22	33	43	0,84	1,56 \ -85,71		0,54 \ 1,43		-85,71		0,59	1,96	3,37 \ -71,94		0,58 \ 4,37		-122,96 \ 0,45	
01-30	3	3	2	2667	3063	2271	48,73	12,9 \ 73,53		3,78 \ 16,1		73,53		3,03	146,56	39,23 \ 73,23		3,74 \ 33,53		77,12 \ 4,37	
02-30	2	2	2	478	394	451	4,15	5,62 \ -35,42		0,74 \ 5,9		-35,42		0,70	8,58	11,49 \ -33,92		0,75 \ 13,12		-52,91 \ 0,65	
03-30	3	3	2	785	978	822	21,57	5,97 \ 72,32		3,61 \ 7,71		72,32		2,80	68,2	21,64 \ 68,27		3,15 \ 20,1		70,53 \ 3,39	
04-30	3	2	2	2076	2166	1714	59,6	21,07 \ 64,65		2,83 \ 17,96		64,65		3,32	179,44	42,46 \ 76,34		4,23 \ 37,17		79,29 \ 4,83	
05-30	3	3	2	28	46	27	2,56	1,31 \ 48,83		1,95 \ 1,29		48,83		1,98	8,09	4,31 \ 46,72		1,88 \ 4,04		50,06 \ 2,00	
01-40	3	3	2	1954	2271	2499	34,09	11,84 \ 65,27		2,88 \ 13,77		65,27		2,48	102,65	36,21 \ 64,72		2,83 \ 28,94		71,81 \ 3,55	
02-40	3	2	2	274	342	264	14,65	5,22 \ 64,37		2,81 \ 4,42		64,37		3,31	44,44	10,69 \ 75,95		4,16 \ 10,11		77,25 \ 4,40	
03-40	3	3	2	1210	887	870	29,82	5,48 \ 81,62		5,44 \ 6,73		81,62		4,43	90,06	16,97 \ 81,16		5,31 \ 14,81		83,56 \ 6,08	
04-40	3	3	2	848	2616	1397	39,51	18,42 \ 53,38		2,14 \ 16,38		53,38		2,41	119,18	55,79 \ 53,19		2,14 \ 34,24		71,27 \ 3,48	
05-40	3	3	2	23	40	22	1,96	1,24 \ 36,73		1,58 \ 1,05		36,73		1,87	6,23	4,08 \ 34,51		1,53 \ 3,54		43,18 \ 1,76	
01-50	3	3	2	2148	1911	2221	31,04	8,57 \ 72,39		3,62 \ 11,89		72,39		2,61	93,53	26,05 \ 72,15		3,59 \ 25,29		72,96 \ 3,70	
02-50	3	2	2	211	387	173	12,98	5,39 \ 58,47		2,41 \ 4,06		58,47		3,20	39,32	11,04 \ 71,92		3,56 \ 9,32		76,30 \ 4,22	
03-50	3	3	2	827	1008	942	23,01	5,9 \ 74,36		3,90 \ 7,27		74,36		3,17	69,57	18,4 \ 73,55		3,78 \ 15,94		77,09 \ 4,36	
04-50	3	2	2	832	2339	655	43,82	21,63 \ 50,64		2,03 \ 10		50,64		4,38	132,01	43,51 \ 67,04		3,03 \ 21,26		83,90 \ 6,21	
05-50	3	3	2	24	42	26	2,31	1,39 \ 39,83		1,66 \ 1,2		39,83		1,93	7,71	4,91 \ 36,32		1,57 \ 4,07		47,21 \ 1,89	

Tabela 4.14 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 4 -  $50 \times 50 \times 100$  para  $\Gamma(\%)$  de 50 a 100.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão					
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2			
01-60	3	3	2	1134	1636	1873	18,03	7,98 \ 55,74	2,26	11,18 \ 55,74	1,61	54,43	24,2 \ 55,54	2,25	23,61 \ 56,62	2,31		
02-60	3	3	2	166	417	186	10,63	4,67 \ 56,07	2,28	3,9 \ 56,07	2,73	32,38	14,37 \ 55,62	2,25	9,05 \ 72,05	3,58		
03-60	3	2	2	1365	986	2055	31,06	6,49 \ 79,10	4,79	12,35 \ 79,10	2,51	93,74	13,44 \ 85,66	6,97	26,06 \ 72,20	3,60		
04-60	2	3	2	446	2634	883	5,74	16,66 \ -190,24	0,34	10,91 \ -190,24	0,53	11,92	50,42 \ -322,99	0,24	23,18 \ -94,46	0,51		
05-60	3	3	2	18	36	27	2,02	1,16 \ 42,57	1,74	1,1 \ 42,57	1,84	6,58	3,99 \ 39,36	1,65	3,62 \ 44,98	1,82		
01-70	2	2	2	770	936	1325	4,3	7,12 \ -65,58	0,60	11,89 \ -65,58	0,36	8,88	14,44 \ -62,61	0,61	24,99 \ -181,42	0,36		
02-70	2	2	1	88	409	175	2,26	5,45 \ -141,15	0,41	5,74 \ -141,15	0,39	4,81	11,11 \ -130,98	0,43	6,22 \ -29,31	0,77		
03-70	2	2	2	1036	795	1220	6,89	8,06 \ -16,98	0,85	9,63 \ -16,98	0,72	14,04	16,38 \ -16,67	0,86	20,55 \ -46,37	0,68		
04-70	2	2	1	1001	2626	867	10,19	25,65 \ -151,72	0,40	20,53 \ -151,72	0,50	20,68	51,57 \ -149,37	0,40	21,04 \ -1,74	0,98		
05-70	3	3	2	22	42	24	2,85	1,26 \ 55,79	2,26	1,37 \ 55,79	2,08	8,98	4,21 \ 53,12	2,13	4,22 \ 53,01	2,13		
01-80	3	3	2	1645	1295	1411	23,04	6,76 \ 70,66	3,41	8,8 \ 70,66	2,62	69,55	20,57 \ 70,42	3,38	18,85 \ 72,90	3,69		
02-80	3	3	2	352	439	218	10,6	4,95 \ 53,30	2,14	4,32 \ 53,30	2,45	32,23	15,19 \ 52,87	2,12	9,93 \ 69,19	3,25		
03-80	3	3	2	1740	1648	1589	41,83	8,15 \ 80,52	5,13	9,85 \ 80,52	4,25	125,9	24,79 \ 80,31	5,08	21,02 \ 83,30	5,99		
04-80	2	2	1	1143	3024	1123	10,9	30,94 \ -183,85	0,35	25,64 \ -183,85	0,43	22,08	62,1 \ -181,25	0,36	26,12 \ -18,30	0,85		
05-80	2	3	1	12	36	8	0,63	1,33 \ -111,11	0,47	1,52 \ -111,11	0,41	1,51	4,39 \ -190,73	0,34	2,04 \ -35,10	0,74		
01-90	2	2	2	967	788	1174	5,44	6,09 \ -11,95	0,89	8,4 \ -11,95	0,65	11,11	12,35 \ -11,16	0,90	17,95 \ -61,57	0,62		
02-90	3	2	1	112	300	91	10,23	4,83 \ 52,79	2,12	4,16 \ 52,79	2,46	31,03	9,85 \ 68,26	3,15	4,65 \ 85,01	6,67		
03-90	3	2	1	1590	1291	752	28,98	8,94 \ 69,15	3,24	10,9 \ 69,15	2,66	87,36	18,09 \ 79,29	4,83	11,39 \ 86,96	7,67		
04-90	2	2	1	692	2244	782	8,01	23,02 \ -187,39	0,35	19,46 \ -187,39	0,41	16,26	46,25 \ -184,44	0,35	19,93 \ -22,57	0,82		
05-90	2	2	1	10	30	10	0,69	1,49 \ -115,94	0,46	1,34 \ -115,94	0,51	1,63	3,22 \ -97,55	0,51	1,81 \ -11,04	0,90		
01-100	2	2	1	664	763	628	3,98	6,99 \ -75,63	0,57	7,43 \ -75,63	0,54	8,08	14,08 \ -74,26	0,57	7,82 \ 3,22	1,03		
02-100	2	2	1	84	322	83	2,08	4,74 \ -127,88	0,44	4,41 \ -127,88	0,47	4,3	9,58 \ -122,79	0,45	4,8 \ -11,63	0,90		
03-100	2	2	1	986	733	808	5,31	7,48 \ -40,87	0,71	11,85 \ -40,87	0,45	10,76	15,11 \ -40,43	0,71	12,22 \ -13,57	0,88		
04-100	2	2	1	824	2712	547	9,11	27,17 \ -198,24	0,34	14,06 \ -198,24	0,65	18,37	54,46 \ -196,46	0,34	14,38 \ 21,72	1,28		
05-100	2	2	1	11	33	11	0,65	1,48 \ -127,69	0,44	1,52 \ -127,69	0,43	1,45	3,06 \ -111,03	0,47	1,91 \ -31,72	0,76		

Tabela 4.15 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 5 -  $50 \times 50 \times 100$  para  $\Gamma(\%)$  de 10 a 50.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão					
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2			
01-10	2	2	2	1890	2330	2979	11,35	16,55 \ -45,81	1,46	17,2 \ -45,81	0,66	22,83	33,2 \ -45,42	0,69	35,83 \ -56,94	0,64		
02-10	2	2	1	365	766	665	4,12	6,99 \ -69,66	1,70	10,41 \ -69,66	0,40	8,37	14,07 \ -68,10	0,59	10,93 \ -30,59	0,77		
03-10	3	3	1	6720	12377	3675	128,75	52,52 \ 59,21	0,41	52,91 \ 59,21	2,43	386,62	157,84 \ 59,17	2,45	53,43 \ 86,18	7,24		
04-10	3	2	4	4799	5434	10782	105,14	38,38 \ 63,50	0,37	40,78 \ 63,50	2,58	315,7	76,92 \ 75,64	4,10	165,92 \ 47,44	1,90		
05-10	3	4	3	5170	14390	9258	204,57	64,36 \ 68,54	0,31	61,38 \ 68,54	3,33	613,96	257,72 \ 58,02	2,38	186,49 \ 69,63	3,29		
01-20	3	2	1	3537	2469	1389	70,66	17,64 \ 75,04	0,25	18,86 \ 75,04	3,75	212,27	35,42 \ 83,31	5,99	19,42 \ 90,85	10,93		
02-20	3	2	1	1204	841	220	36,11	7,48 \ 79,29	0,21	6,82 \ 79,29	5,29	108,56	15,08 \ 86,11	7,20	7,38 \ 93,20	14,71		
03-20	3	3	2	5892	11350	5095	104,36	50,93 \ 51,20	0,49	37,73 \ 51,20	2,77	313,42	153,04 \ 51,17	2,05	76,61 \ 75,56	4,09		
04-20	2	2	1	2098	4927	1366	14,31	35,97 \ -151,36	2,51	19,77 \ -151,36	0,72	28,81	72,11 \ -150,30	0,40	20,29 \ 29,57	1,42		
05-20	3	3	3	9771	12440	10081	356,44	65,28 \ 81,69	0,18	62,43 \ 81,69	5,71	1069,66	196,1 \ 81,67	5,45	190,07 \ 82,23	5,63		
01-30	2	2	1	1672	2630	1514	10,2	16,68 \ -63,53	1,64	20,37 \ -63,53	0,50	20,55	33,46 \ -62,82	0,61	20,93 \ -1,85	0,98		
02-30	3	2	1	986	1015	299	22,03	9,01 \ 59,10	0,41	7,93 \ 59,10	2,78	66,3	18,14 \ 72,64	3,65	8,45 \ 87,25	7,85		
03-30	3	3	1	6062	10780	3293	121,86	50,73 \ 58,37	0,42	49 \ 58,37	2,49	365,92	152,45 \ 58,34	2,40	49,5 \ 86,47	7,39		
04-30	3	3	2	2547	7323	2568	71,39	34,27 \ 52,00	0,48	24,24 \ 52,00	2,95	214,5	103,07 \ 51,95	2,08	49,82 \ 76,77	4,31		
05-30	4	3	3	12210	9959	10929	622,57	62,68 \ 89,93	0,10	75,67 \ 89,93	8,23	2490,75	188,36 \ 92,44	13,22	229,46 \ 90,79	10,85		
01-40	2	2	1	1270	2699	1306	10,07	19,19 \ -90,57	1,91	17,9 \ -90,57	0,56	20,31	38,51 \ -89,61	0,53	18,47 \ 9,06	1,10		
02-40	2	2	2	452	801	487	4,81	7,45 \ -54,89	1,55	7,32 \ -54,89	0,66	9,78	15,03 \ -53,68	0,65	16,06 \ -64,21	0,61		
03-40	3	2	2	5347	8110	3871	122,82	55,19 \ 55,06	0,45	30,5 \ 55,06	4,03	368,81	110,59 \ 70,01	3,33	62,51 \ 83,05	5,90		
04-40	3	3	2	3075	6507	2624	87,2	33,67 \ 61,39	0,39	26,36 \ 61,39	3,31	261,95	101,23 \ 61,36	2,59	54,07 \ 79,36	4,84		
05-40	2	2	1	3582	7104	4142	37,62	63,45 \ -68,66	1,69	78,22 \ -68,66	0,48	75,51	127,07 \ -68,28	0,59	78,83 \ -4,40	0,96		
01-50	3	2	1	1827	2831	1617	49,63	18,87 \ 61,98	0,38	21,8 \ 61,98	2,28	149,14	37,85 \ 74,62	3,94	22,35 \ 85,01	6,67		
02-50	2	2	2	329	1414	841	4,12	10,07 \ -144,42	2,44	9,21 \ -144,42	0,45	8,41	20,26 \ -140,90	0,42	19,83 \ -135,79	0,42		
03-50	2	2	1	2789	6827	2570	24,1	44,32 \ -83,90	1,84	41,13 \ -83,90	0,59	48,44	88,84 \ -83,40	0,55	41,72 \ 13,87	1,16		
04-50	2	2	1	1193	4474	778	12,14	34,74 \ -186,16	2,86	17,84 \ -186,16	0,68	24,49	69,64 \ -184,36	0,35	18,38 \ 24,95	1,33		
05-50	3	3	1	5067	10542	2981	211,7	69,66 \ 67,09	0,33	66,99 \ 67,09	3,16	635,42	209,28 \ 67,06	3,04	67,6 \ 89,36	9,40		

Tabela 4.16 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 5 -  $50 \times 50 \times 100$  para  $\Gamma(\%)$  de 60 a 100.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão					
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2			
01-60	2	2	3	1836	2868	4249	12,72	17,39 \ -36,71	1,37	19,79 \ -36,71	0,64	25,59	34,9 \ -36,38	0,73	61,6 \ -140,72	0,42		
02-60	2	2	1	441	1350	415	5,93	9,49 \ -60,03	1,60	9,75 \ -60,03	0,61	12,04	19,09 \ -58,55	0,63	10,33 \ 14,20	1,17		
03-60	2	2	2	2044	6927	5331	15,93	44,01 \ -176,27	2,76	43,75 \ -176,27	0,36	32,1	88,2 \ -174,77	0,36	88,86 \ -176,82	0,36		
04-60	3	2	2	2346	4615	2158	83,32	34,74 \ 58,31	0,42	20,18 \ 58,31	4,13	250,32	69,7 \ 72,16	3,59	41,75 \ 83,32	6,00		
05-60	3	2	1	9416	7705	4603	254,9	71,86 \ 71,81	0,28	83,01 \ 71,81	3,07	765,1	143,93 \ 81,19	5,32	83,61 \ 89,07	9,15		
01-70	2	2	1	1052	1903	1399	10,15	14,03 \ -38,23	1,38	19,94 \ -38,23	0,51	20,44	28,19 \ -37,92	0,73	20,45 \ -0,05	1,00		
02-70	2	2	1	340	1091	851	4,83	9,65 \ -99,79	2,00	15,58 \ -99,79	0,31	9,83	19,45 \ -97,86	0,51	16,12 \ -63,99	0,61		
03-70	2	2	2	2496	7770	3985	22,37	54,88 \ -145,33	2,45	37,78 \ -145,33	0,59	44,96	109,94 \ -144,53	0,41	76,93 \ -71,11	0,58		
04-70	3	2	1	2182	4708	892	95,99	35,95 \ 62,55	0,37	20,92 \ 62,55	4,59	288,26	72,07 \ 75,00	4,00	21,45 \ 92,56	13,44		
05-70	2	2	1	3797	9020	4248	39,11	76,01 \ -94,35	1,94	89,04 \ -94,35	0,44	78,47	152,21 \ -93,97	0,52	89,62 \ -14,21	0,88		
01-80	2	2	1	1711	2129	1591	14,68	14,22 \ 3,13	0,97	20,62 \ 3,13	0,71	29,53	28,57 \ 3,25	1,03	21,14 \ 28,41	1,40		
02-80	3	2	2	935	1009	929	38,21	8,37 \ 78,09	0,22	10,51 \ 78,09	3,64	114,89	16,84 \ 85,34	6,82	22,26 \ 80,62	5,16		
03-80	2	2	1	2307	7891	2559	21,48	50,24 \ -133,89	2,34	44,83 \ -133,89	0,48	43,18	100,65 \ -133,09	0,43	45,42 \ -5,19	0,95		
04-80	2	2	1	1225	5274	766	13,81	40,51 \ -193,34	2,93	18,36 \ -193,34	0,75	27,85	81,19 \ -191,53	0,34	18,89 \ 32,17	1,47		
05-80	2	2	1	3598	7029	4132	37,81	65,33 \ -72,78	1,73	74,76 \ -72,78	0,51	75,83	130,79 \ -72,48	0,58	75,33 \ 0,66	1,01		
01-90	2	2	1	1399	2272	1074	9,8	17,97 \ -83,37	1,83	15,62 \ -83,37	0,63	19,79	36,07 \ -82,26	0,55	16,13 \ 18,49	1,23		
02-90	2	2	2	824	1155	1309	8,37	9,55 \ -14,10	1,14	12,74 \ -14,10	0,66	16,91	19,22 \ -13,66	0,88	26,69 \ -57,84	0,63		
03-90	3	3	2	4715	10030	3283	119,76	49,88 \ 58,35	0,42	28,79 \ 58,35	4,16	359,58	149,89 \ 58,32	2,40	58,94 \ 83,61	6,10		
04-90	3	2	2	2032	4742	1853	60,59	36,06 \ 40,49	0,60	21,82 \ 40,49	2,78	182,05	72,29 \ 60,29	2,52	44,87 \ 75,35	4,06		
05-90	2	2	1	3337	6965	3219	36,2	62,23 \ -71,91	1,72	73,73 \ -71,91	0,49	72,59	124,6 \ -71,65	0,58	74,28 \ -2,33	0,98		
01-100	2	2	1	978	2267	1315	8,61	17,38 \ -101,86	2,02	21,88 \ -101,86	0,39	17,35	34,84 \ -100,81	0,50	22,35 \ -28,82	0,78		
02-100	2	2	1	909	1172	644	7,57	9,85 \ -30,12	1,30	14,87 \ -30,12	0,51	15,24	19,77 \ -29,72	0,77	15,31 \ -0,46	1,00		
03-100	2	2	1	2668	8271	2979	22,86	57,08 \ -149,69	2,50	54,91 \ -149,69	0,42	45,9	114,28 \ -148,98	0,40	55,41 \ -20,72	0,83		
04-100	2	2	1	884	4450	1268	10,83	34,5 \ -218,56	3,19	27,02 \ -218,56	0,40	21,8	69,1 \ -216,97	0,32	27,51 \ -26,19	0,79		
05-100	2	2	1	3600	7606	3485	38,26	69,7 \ -82,17	1,82	70,27 \ -82,17	0,54	76,65	139,5 \ -82,00	0,55	70,79 \ 7,65	1,08		

Tabela 4.17 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 3 -  $30 \times 60 \times 120$  para  $\Gamma(\%)$  de 10 a 50.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão							
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2					
01-10	3	2	2	12834	21174	14634	435	243,08	44,12	1,79	187,73	44,12	2,32	1305,28	486,24	62,75	2,68	376,53	71,15	3,47
02-10	3	2	1	8103	7469	4474	412,56	106,39	74,21	3,88	120,53	74,21	3,42	1237,96	212,85	82,81	5,82	120,95	90,23	10,24
03-10	3	2	2	18139	39546	24469	604,13	434,16	28,13	1,39	316,95	28,13	1,91	1812,57	868,39	52,09	2,09	634,87	64,97	2,86
04-10	3	4	3	21549	48504	38132	527,87	261,94	50,38	2,02	308,94	50,38	1,71	1583,88	1047,95	33,84	1,51	928,7	41,37	1,71
05-10	3	2	2	15854	33740	16012	663,25	347,35	47,63	1,91	206,5	47,63	3,21	1990,05	694,77	65,09	2,86	413,99	79,20	4,81
01-20	3	2	1	9693	19741	5427	424,44	234	44,87	1,81	150,66	44,87	2,82	1273,54	468,07	63,25	2,72	151,09	88,14	8,43
02-20	3	2	1	7965	6871	2683	410,03	102,03	75,12	4,02	86,32	75,12	4,75	1230,36	204,13	83,41	6,03	86,79	92,95	14,18
03-20	2	2	1	20737	36374	21190	237,25	430,63	-81,51	0,55	484,09	-81,51	0,49	474,64	861,33	-81,47	0,55	484,5	-2,08	0,98
04-20	3	2	5	13913	31646	46470	651,67	357,53	45,14	1,82	238,56	45,14	2,73	1955,26	715,15	63,42	2,73	1196,86	38,79	1,63
05-20	3	2	1	11335	31503	5331	472,87	333,18	29,54	1,42	168,17	29,54	2,81	1418,91	666,43	53,03	2,13	168,59	88,12	8,42
01-30	5	5	4	21028	34729	25704	1497,33	179,76	87,99	8,33	191,77	87,99	7,81	7487,2	899,27	87,99	8,33	769,74	89,72	9,73
02-30	3	2	3	5214	6369	9397	398,03	97,28	75,56	4,09	102,5	75,56	3,88	1194,35	194,65	83,70	6,14	309,49	74,09	3,86
03-30	3	3	3	20500	50335	39873	881,18	430,84	51,11	2,05	360,16	51,11	2,45	2643,76	1292,74	51,10	2,05	1082,41	59,06	2,44
04-30	2	2	3	9564	23205	29532	88,42	262,34	-196,70	0,34	247,47	-196,70	0,36	177,04	524,78	-196,42	0,34	744,38	-320,46	0,24
05-30	3	2	2	9839	33488	16089	453,63	353,88	21,99	1,28	230,69	21,99	1,97	1361,21	707,86	48,00	1,92	462,4	66,03	2,94
01-40	2	2	1	5127	16807	5397	70,39	206,52	-193,39	0,34	160,13	-193,39	0,44	140,96	413,14	-193,09	0,34	160,59	-13,93	0,88
02-40	3	2	3	6419	5598	11987	326,3	88,92	72,75	3,67	127,56	72,75	2,56	979,19	177,91	81,83	5,50	384,68	60,71	2,55
03-40	3	2	2	14570	32481	24736	812,15	424,88	47,68	1,91	344,25	47,68	2,36	2436,68	849,83	65,12	2,87	689,47	71,70	3,53
04-40	2	2	1	6148	21117	9795	87,32	238,63	-173,28	0,37	258,59	-173,28	0,34	174,81	477,37	-173,08	0,37	259,09	-48,21	0,67
05-40	3	2	2	16411	33545	12684	659,48	366,71	44,39	1,80	178,64	44,39	3,69	1978,74	733,52	62,93	2,70	358,31	81,89	5,52
01-50	3	2	2	10370	16239	8515	433,88	203,82	53,02	2,13	135,77	53,02	3,20	1301,86	407,74	68,68	3,19	272,59	79,06	4,78
02-50	3	2	3	4338	7895	10121	243,07	120,76	50,32	2,01	115,75	50,32	2,10	729,48	241,59	66,88	3,02	349,28	52,12	2,09
03-50	4	3	2	28761	46243	19600	2025,16	428,61	78,84	4,72	280,14	78,84	7,23	8101,04	1286,06	84,12	6,30	561,27	93,07	14,43
04-50	3	2	1	11073	21607	7750	599,74	252,1	57,97	2,38	230,19	57,97	2,61	1799,44	504,32	71,97	3,57	230,69	87,18	7,80
05-50	3	2	2	13177	31202	15397	625,12	337,5	46,01	1,85	243,61	46,01	2,57	1875,65	675,11	64,01	2,78	488,23	73,97	3,84

Tabela 4.18 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 3 -  $30 \times 600 \times 120$  para  $\Gamma(\%)$  de 60 a 100.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão					
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2			
01-60	3	3	1	10108	22650	4316	458,46	201,42 \ 56,07	2,28	132,03 \ 56,07	3,47	1375,61	604,4 \ 56,06	2,28	132,47 \ 90,37	10,38		
02-60	3	2	2	7117	6803	6450	435,04	107,07 \ 75,39	4,06	105,89 \ 75,39	4,11	1305,35	214,23 \ 83,59	6,09	213,02 \ 83,68	6,13		
03-60	3	2	1	23508	35858	14787	913,1	475,16 \ 47,96	1,92	429,17 \ 47,96	2,13	2739,52	950,42 \ 65,31	2,88	429,58 \ 84,32	6,38		
04-60	3	3	3	12707	26848	18755	704,89	224,18 \ 68,20	3,14	194,84 \ 68,20	3,62	2114,92	672,68 \ 68,19	3,14	586,63 \ 72,26	3,61		
05-60	3	2	2	11615	33169	16343	547,86	350,53 \ 36,02	1,56	252,92 \ 36,02	2,17	1643,87	701,16 \ 57,35	2,34	507,05 \ 69,16	3,24		
01-70	3	3	2	8945	24076	8690	492,49	205,31 \ 58,31	2,40	127,19 \ 58,31	3,87	1477,7	616,06 \ 58,31	2,40	255,45 \ 82,71	5,78		
02-70	3	2	1	8294	6432	3541	517,43	97,49 \ 81,16	5,31	121,62 \ 81,16	4,25	1552,57	195,07 \ 87,44	7,96	122,07 \ 92,14	12,72		
03-70	3	2	1	19026	30148	9915	988,02	377,49 \ 61,79	2,62	293,5 \ 61,79	3,37	2964,29	755,06 \ 74,53	3,93	293,92 \ 90,08	10,09		
04-70	3	3	1	11436	23495	5574	595,13	202,97 \ 65,89	2,93	176,74 \ 65,89	3,37	1785,62	609,06 \ 65,89	2,93	177,24 \ 90,07	10,07		
05-70	3	3	2	14437	44990	19551	656,91	365,35 \ 44,38	1,80	320,02 \ 44,38	2,05	1971,05	1096,2 \ 44,38	1,80	641,23 \ 67,47	3,07		
01-80	2	2	1	6071	18241	6079	83,82	231,2 \ -175,83	0,36	169,18 \ -175,83	0,50	167,79	462,5 \ -175,64	0,36	169,63 \ -1,10	0,99		
02-80	3	2	2	5590	5836	5314	413,92	96,08 \ 76,79	4,31	94,24 \ 76,79	4,39	1242,02	192,25 \ 84,52	6,46	189,71 \ 84,73	6,55		
03-80	3	3	2	22558	45832	23638	1132,17	402,36 \ 64,46	2,81	357,76 \ 64,46	3,16	3396,74	1207,21 \ 64,46	2,81	716,53 \ 78,91	4,74		
04-80	2	2	1	5701	19171	5109	95,35	245,43 \ -157,40	0,39	175,44 \ -157,40	0,54	190,89	490,96 \ -157,20	0,39	175,94 \ 7,83	1,08		
05-80	3	2	1	13332	32537	7913	801,15	347,54 \ 56,62	2,31	254,67 \ 56,62	3,15	2403,75	695,17 \ 71,08	3,46	255,17 \ 89,38	9,42		
01-90	2	2	1	6137	19400	7363	89,38	236,2 \ -164,26	0,38	199,16 \ -164,26	0,45	178,92	472,51 \ -164,09	0,38	199,56 \ -11,54	0,90		
02-90	2	2	1	2303	6993	2307	41,49	120,72 \ -190,96	0,34	85,28 \ -190,96	0,49	83,19	241,51 \ -190,31	0,34	85,72 \ -3,04	0,97		
03-90	2	2	1	11626	36025	9148	171,49	476,67 \ -177,96	0,36	294,26 \ -177,96	0,58	343,15	953,45 \ -177,85	0,36	294,7 \ 14,12	1,16		
04-90	2	2	1	4849	20831	6403	77,09	258,75 \ -235,65	0,30	191,71 \ -235,65	0,40	154,36	517,6 \ -235,32	0,30	192,2 \ -24,51	0,80		
05-90	2	2	2	12390	32361	14622	179,94	359,72 \ -99,91	0,50	231,71 \ -99,91	0,78	360,12	719,56 \ -99,81	0,50	464,67 \ -29,03	0,78		
01-100	2	2	1	5505	19525	6111	68,46	243,01 \ -254,97	0,28	197,12 \ -254,97	0,35	137,08	486,09 \ -254,60	0,28	197,49 \ -44,07	0,69		
02-100	2	2	1	3250	7071	3016	60,95	104,7 \ -71,78	0,58	101,57 \ -71,78	0,60	122,09	209,46 \ -71,56	0,58	101,95 \ 16,50	1,20		
03-100	2	2	1	11893	36082	10726	175,88	470,12 \ -167,30	0,37	334,49 \ -167,30	0,53	351,9	940,3 \ -167,21	0,37	334,89 \ 4,83	1,05		
04-100	2	2	1	6070	19432	5942	83,76	230,24 \ -174,88	0,36	203,6 \ -174,88	0,41	167,64	460,54 \ -174,72	0,36	204,04 \ -21,71	0,82		
05-100	2	2	1	9673	35425	10713	144,29	396,86 \ -175,04	0,36	311,86 \ -175,04	0,46	288,8	793,79 \ -174,86	0,36	312,32 \ -8,14	0,92		

Tabela 4.19 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 4 -  $30 \times 60 \times 120$  para  $\Gamma(\%)$  de 10 a 50.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão					
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		Razão	CCG	BD1		BD2		Razão
01-10	3	3	3	114	222	177	5,3	2,49 \ 53,02	2,13	2,67 \ 53,02	1,99	16,4	7,99 \ 51,28	2,05	10,35 \ 36,89	1,58		
02-10	3	2	1	81	85	36	6,31	2,5 \ 60,38	2,52	2,16 \ 60,38	2,92	19,65	5,35 \ 72,77	3,67	2,79 \ 85,80	7,04		
03-10	3	2	1	79	69	37	4,93	1,56 \ 68,36	3,16	1,89 \ 68,36	2,61	15,46	3,55 \ 77,04	4,35	2,49 \ 83,89	6,21		
04-10	3	2	2	8	5	58	2,11	1,23 \ 41,71	1,72	1,48 \ 41,71	1,43	6,78	2,73 \ 59,73	2,48	4,54 \ 33,04	1,49		
05-10	3	3	4	503	666	1333	18,86	4,99 \ 73,54	3,78	6,32 \ 73,54	2,98	57,24	15,84 \ 72,33	3,61	30,39 \ 46,91	1,88		
01-20	3	2	2	86	97	72	5,45	2,04 \ 62,57	2,67	1,98 \ 62,57	2,75	17,13	5,89 \ 65,62	2,91	5,65 \ 67,02	3,03		
02-20	3	2	2	105	99	150	8,98	2,53 \ 71,83	3,55	3,05 \ 71,83	2,94	27,8	5,53 \ 80,11	5,03	7,75 \ 72,12	3,59		
03-20	2	2	2	105	75	102	0,91	1,66 \ -82,42	0,55	2,21 \ -82,42	0,41	2,33	3,62 \ -55,36	0,64	5,74 \ -146,35	0,41		
04-20	3	2	2	24	16	49	2,64	1,29 \ 51,14	2,05	1,7 \ 51,14	1,55	8,45	2,92 \ 65,44	2,89	4,97 \ 41,18	1,70		
05-20	3	2	3	330	401	659	13,87	4,72 \ 65,97	2,94	5,14 \ 65,97	2,70	42,24	9,78 \ 76,85	4,32	18,18 \ 56,96	2,32		
01-30	3	2	2	61	126	52	4,71	2,25 \ 52,23	2,09	2,11 \ 52,23	2,23	14,84	7,13 \ 51,95	2,08	6,21 \ 58,15	2,39		
02-30	2	2	1	84	144	104	1,4	2,74 \ -95,71	0,51	3,58 \ -95,71	0,39	4,48	6,9 \ -54,02	0,65	4,56 \ -1,79	0,98		
03-30	3	3	2	79	97	108	4,76	1,66 \ 65,13	2,87	2,26 \ 65,13	2,11	15,07	5,61 \ 62,77	2,69	6,1 \ 59,52	2,47		
04-30	3	2	2	19	13	11	2,62	1,17 \ 55,34	2,24	1,54 \ 55,34	1,70	8,8	3,01 \ 65,80	2,92	4,98 \ 43,41	1,77		
05-30	3	2	2	314	341	306	9,03	4,47 \ 50,50	2,02	4,63 \ 50,50	1,95	27,72	9,25 \ 66,63	3,00	10,83 \ 60,93	2,56		
01-40	3	2	2	157	107	112	5,83	2,24 \ 61,58	2,60	2,19 \ 61,58	2,66	18,19	5,17 \ 71,58	3,52	6,16 \ 66,14	2,95		
02-40	3	2	1	213	153	135	9,32	2,77 \ 70,28	3,36	3,81 \ 70,28	2,45	29,14	6,31 \ 78,35	4,62	4,34 \ 85,11	6,71		
03-40	3	2	2	94	62	92	5,25	1,68 \ 68,00	3,13	2,2 \ 68,00	2,39	16,41	3,75 \ 77,15	4,38	5,9 \ 64,05	2,78		
04-40	3	2	2	198	119	204	3,89	1,62 \ 58,35	2,40	1,99 \ 58,35	1,95	12,3	3,61 \ 70,65	3,41	5,73 \ 53,41	2,15		
05-40	3	3	2	245	385	443	10,5	3,99 \ 62,00	2,63	5,46 \ 62,00	1,92	32,36	12,63 \ 60,97	2,56	12,64 \ 60,94	2,56		
01-50	3	3	2	112	137	122	6,49	2,42 \ 62,71	2,68	2,31 \ 62,71	2,81	19,94	7,74 \ 61,18	2,58	6,11 \ 69,36	3,26		
02-50	3	2	2	345	398	256	8,35	3,99 \ 52,22	2,09	3,39 \ 52,22	2,46	25,62	8,32 \ 67,53	3,08	8,22 \ 67,92	3,12		
03-50	3	3	2	75	83	67	4,94	1,77 \ 64,17	2,79	1,89 \ 64,17	2,61	15,36	5,72 \ 62,76	2,69	5,25 \ 65,82	2,93		
04-50	3	3	2	176	163	144	3,58	1,65 \ 53,91	2,17	2,27 \ 53,91	1,58	11,33	5,48 \ 51,63	2,07	6,23 \ 45,01	1,82		
05-50	3	3	2	375	537	324	12,69	4,35 \ 65,72	2,92	4,33 \ 65,72	2,93	38,83	13,73 \ 64,64	2,83	10,7 \ 72,44	3,63		

Tabela 4.20 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 4-  $30 \times 60 \times 120$  para  $\Gamma(\%)$  de 60 a 100.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão					
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2			
01-60	2	2	2	65	126	123	1,36	2,37 \ -74,26	0,57	2,52 \ -74,26	0,54	2,98	5,02 \ -68,46	0,59	6,39 \ -114,43	0,47		
02-60	3	2	2	259	107	129	6,51	2,51 \ 61,44	2,59	3 \ 61,44	2,17	20,25	5,5 \ 72,84	3,68	7,57 \ 62,62	2,68		
03-60	3	2	1	55	58	27	4,83	1,57 \ 67,49	3,08	1,97 \ 67,49	2,45	15,08	3,53 \ 76,59	4,27	2,61 \ 82,69	5,78		
04-60	2	2	2	16	99	31	0,8	1,61 \ -101,25	0,50	1,33 \ -101,25	0,60	1,94	3,64 \ -87,63	0,53	4,15 \ -113,92	0,47		
05-60	3	3	2	604	753	766	12,15	5,05 \ 58,44	2,41	6,23 \ 58,44	1,95	37	15,62 \ 57,78	2,37	14,35 \ 61,22	2,58		
01-70	2	3	1	28	114	33	1,01	2,14 \ -111,88	0,47	2,34 \ -111,88	0,43	2,28	6,88 \ -201,75	0,33	2,98 \ -30,70	0,77		
02-70	2	2	1	57	98	62	1,36	2,58 \ -89,71	0,53	2,6 \ -89,71	0,52	3,06	5,44 \ -77,78	0,56	3,11 \ -1,63	0,98		
03-70	3	3	2	70	77	92	3,16	1,64 \ 48,10	1,93	2,19 \ 48,10	1,44	9,98	5,37 \ 46,19	1,86	5,84 \ 41,48	1,71		
04-70	3	2	2	21	14	28	2,51	1,5 \ 40,24	1,67	1,77 \ 40,24	1,42	8,18	3,37 \ 58,80	2,43	5,18 \ 36,67	1,58		
05-70	2	3	2	111	696	548	2	4,81 \ -140,50	0,42	5,35 \ -140,50	0,37	4,38	14,86 \ -239,27	0,29	12,28 \ -180,37	0,36		
01-80	3	3	1	55	90	28	3,08	1,99 \ 35,39	1,55	1,96 \ 35,39	1,57	9,66	6,43 \ 33,44	1,50	2,56 \ 73,50	3,77		
02-80	3	3	2	119	125	86	8,14	2,58 \ 68,30	3,16	2,43 \ 68,30	3,35	25	8,23 \ 67,08	3,04	6,3 \ 74,80	3,97		
03-80	2	2	1	31	50	37	1	1,58 \ -58,00	0,63	2,39 \ -58,00	0,42	2,34	3,49 \ -49,15	0,67	3 \ -28,21	0,78		
04-80	2	2	1	12	18	9	0,81	1,4 \ -72,84	0,58	2,08 \ -72,84	0,39	1,94	3,01 \ -55,15	0,64	2,66 \ -37,11	0,73		
05-80	2	3	1	156	467	219	2,36	4,1 \ -73,73	0,58	6,02 \ -73,73	0,39	5,05	12,78 \ -153,07	0,40	6,64 \ -31,49	0,76		
01-90	2	3	1	20	111	30	0,73	2,01 \ -175,34	0,36	1,91 \ -175,34	0,38	1,7	6,39 \ -275,88	0,27	2,45 \ -44,12	0,69		
02-90	3	2	2	77	68	82	5,16	2,39 \ 53,68	2,16	2,58 \ 53,68	2,00	15,96	5,06 \ 68,30	3,15	6,41 \ 59,84	2,49		
03-90	2	3	2	32	78	61	1,05	1,68 \ -60,00	0,63	2,12 \ -60,00	0,50	2,41	5,39 \ -123,65	0,45	5,6 \ -132,37	0,43		
04-90	3	3	2	23	28	22	3,15	1,49 \ 52,70	2,11	1,6 \ 52,70	1,97	9,93	4,82 \ 51,46	2,06	4,55 \ 54,18	2,18		
05-90	3	3	2	432	409	226	12,99	4 \ 69,21	3,25	3,67 \ 69,21	3,54	39,42	12,38 \ 68,59	3,18	8,85 \ 77,55	4,45		
01-100	2	2	1	16	89	19	0,96	1,97 \ -105,21	0,49	1,93 \ -105,21	0,50	2,09	4,13 \ -97,61	0,51	2,35 \ -12,44	0,89		
02-100	2	2	1	42	70	40	1,15	2,41 \ -109,57	0,48	2,63 \ -109,57	0,44	2,48	4,94 \ -99,19	0,50	3,08 \ -24,19	0,81		
03-100	2	2	1	36	49	26	1,05	1,75 \ -66,67	0,60	1,94 \ -66,67	0,54	2,29	3,64 \ -58,95	0,63	2,37 \ -3,49	0,97		
04-100	2	2	1	10	14	9	0,84	1,35 \ -60,71	0,62	1,9 \ -60,71	0,44	1,89	2,83 \ -49,74	0,67	2,36 \ -24,87	0,80		
05-100	2	2	1	77	220	427	1,7	3,38 \ -98,82	0,50	7,36 \ -98,82	0,23	3,58	6,93 \ -93,58	0,52	7,83 \ -118,72	0,46		



Tabela 4.21 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 5 -  $30 \times 60 \times 120$  para  $\Gamma(\%)$  de 10 a 10.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão							
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2					
01-10	2	2	1	590	771	536	4,87	6,49 \ -33,26		0,75	8,82 \ -33,26		0,55	9,89	13,11 \ -32,56		0,75	9,45 \ 4,45		1,05
02-10	2	2	2	698	1972	1265	2,62	5,98 \ -128,24		0,44	5,19 \ -128,24		0,50	5,43	12,09 \ -122,65		0,45	11,83 \ -117,86		0,46
03-10	2	2	1	143	322	369	2,03	3,95 \ -94,58		0,51	5,35 \ -94,58		0,38	4,26	8,03 \ -88,50		0,53	5,94 \ -39,44		0,72
04-10	3	2	1	3514	5515	1618	47,33	25,32 \ 46,50		1,87	13,92 \ 46,50		3,40	142,31	50,8 \ 64,30		2,80	14,54 \ 89,78		9,79
05-10	3	2	1	2038	2179	1508	48,6	14,68 \ 69,79		3,31	22,61 \ 69,79		2,15	146,12	29,48 \ 79,82		4,96	23,29 \ 84,06		6,27
01-20	3	2	2	2406	1065	2128	45,45	8,48 \ 81,34		5,36	13,91 \ 81,34		3,27	136,72	17,17 \ 87,44		7,96	29,52 \ 78,41		4,63
02-20	2	2	1	530	1745	559	2,58	6,06 \ -134,88		0,43	4,99 \ -134,88		0,52	5,36	12,27 \ -128,92		0,44	5,65 \ -5,41		0,95
03-20	2	2	1	105	242	108	1,81	4,06 \ -124,31		0,45	3,96 \ -124,31		0,46	3,89	8,31 \ -113,62		0,47	4,63 \ -19,02		0,84
04-20	3	2	3	7152	6972	10886	135,13	35,13 \ 74,00		3,85	35,19 \ 74,00		3,84	405,79	70,48 \ 82,63		5,76	108,18 \ 73,34		3,75
05-20	3	2	1	1664	2058	1017	46,51	14,5 \ 68,82		3,21	15,73 \ 68,82		2,96	139,84	29,15 \ 79,15		4,80	16,41 \ 88,27		8,52
01-30	2	2	2	1056	1729	2412	7,69	14,55 \ -89,21		0,53	18,36 \ -89,21		0,42	15,62	29,27 \ -87,39		0,53	38,33 \ -145,39		0,41
02-30	3	2	3	1466	2040	3592	24,6	6,63 \ 73,05		3,71	9,57 \ 73,05		2,57	74,14	13,44 \ 81,87		5,52	31,32 \ 57,76		2,37
03-30	2	2	1	120	299	165	2,07	4,2 \ -102,90		0,49	4,94 \ -102,90		0,42	4,37	8,58 \ -96,34		0,51	5,55 \ -27,00		0,79
04-30	3	3	2	7609	11005	7625	86,87	35,36 \ 59,30		2,46	36,63 \ 59,30		2,37	260,98	106,4 \ 59,23		2,45	74,92 \ 71,29		3,48
05-30	2	2	4	917	2424	4927	8,62	15,79 \ -83,18		0,55	18,65 \ -83,18		0,46	17,47	31,72 \ -81,57		0,55	78,22 \ -347,74		0,22
01-40	2	2	2	1526	1226	2690	12,07	11,4 \ 5,55		1,06	24,51 \ 5,55		0,49	24,38	22,95 \ 5,87		1,06	50,73 \ -108,08		0,48
02-40	3	2	2	1535	2079	1950	24,87	7,01 \ 71,81		3,55	7,52 \ 71,81		3,31	74,91	14,17 \ 81,08		5,29	16,64 \ 77,79		4,50
03-40	3	4	2	689	1253	680	15,33	5,12 \ 66,60		2,99	5,44 \ 66,60		2,82	46,38	20,96 \ 54,81		2,21	12,46 \ 73,13		3,72
04-40	3	2	2	9213	8607	10871	177,08	43,77 \ 75,28		4,05	53,1 \ 75,28		3,33	531,68	87,77 \ 83,49		6,06	107,83 \ 79,72		4,93
05-40	2	2	1	995	2445	1041	9,1	16,47 \ -80,99		0,55	17,6 \ -80,99		0,52	18,44	33,1 \ -79,50		0,56	18,28 \ 0,87		1,01
01-50	3	2	2	2138	1200	2274	77,92	10,88 \ 86,04		7,16	23,28 \ 86,04		3,35	234,15	22 \ 90,60		10,64	48,29 \ 79,38		4,85
02-50	2	2	1	875	2137	850	3,54	7,61 \ -114,97		0,47	7,36 \ -114,97		0,48	7,3	15,37 \ -110,55		0,47	8,04 \ -10,14		0,91
03-50	3	2	1	586	510	449	15,63	4,78 \ 69,42		3,27	5,7 \ 69,42		2,74	47,22	9,76 \ 79,33		4,84	6,33 \ 86,59		7,46
04-50	2	2	2	5628	7781	9126	30,64	41 \ -33,81		0,75	54,79 \ -33,81		0,56	61,58	82,19 \ -33,47		0,75	111,2 \ -80,58		0,55
05-50	3	2	2	2081	2362	2265	56,95	17,14 \ 69,90		3,32	20,37 \ 69,90		2,80	171,17	34,44 \ 79,88		4,97	42,28 \ 75,30		4,05

Tabela 4.22 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 5 -  $30 \times 60 \times 120$  para  $\Gamma(\%)$  de 60 a 100.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão							
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2					
01-60	2	2	2	1549	1409	2220	11,21	15,04	-34,17	0,75	24,48	-34,17	0,46	22,67	30,23	-33,35	0,75	50,66	-123,47	0,45
02-60	2	2	1	1834	2532	1582	11,82	8,53	27,83	1,39	11,31	27,83	1,05	23,87	17,22	27,86	1,39	11,99	49,77	1,99
03-60	3	4	2	537	1440	927	15,87	5,49	65,41	2,89	6,21	65,41	2,56	48,01	22,4	53,34	2,14	14,07	70,69	3,41
04-60	2	2	1	6145	9411	7552	33,05	49,47	-49,68	0,67	83,77	-49,68	0,39	66,33	99,14	-49,46	0,67	84,39	-27,23	0,79
05-60	2	2	2	1413	2374	2358	12,73	17,71	-39,12	0,72	21,78	-39,12	0,58	25,76	35,56	-38,04	0,72	45,2	-75,47	0,57
01-70	3	2	1	2696	1540	1274	77,55	15,09	80,54	5,14	24,71	80,54	3,14	233	30,33	86,98	7,68	25,38	89,11	9,18
02-70	2	2	1	1855	2563	1625	7,63	8,45	-10,75	0,90	14,99	-10,75	0,51	15,5	17,05	-10,00	0,91	15,68	-1,16	0,99
03-70	2	2	1	449	650	551	2,77	4,89	-76,53	0,57	6,34	-76,53	0,44	5,78	9,96	-72,32	0,58	6,93	-19,90	0,83
04-70	3	2	1	9168	9691	4059	225,7	48,88	78,34	4,62	48,13	78,34	4,69	677,46	97,97	85,54	6,91	48,7	92,81	13,91
05-70	3	2	1	2015	2242	1073	59,17	18,18	69,27	3,25	20,99	69,27	2,82	177,85	36,5	79,48	4,87	21,67	87,82	8,21
01-80	2	2	1	1243	1299	1481	13,88	14,93	-7,56	0,93	31,39	-7,56	0,44	28,02	30,03	-7,17	0,93	32,13	-14,67	0,87
02-80	3	2	1	3206	3238	1794	51,28	16,24	68,33	3,16	16,34	68,33	3,14	154,23	32,67	78,82	4,72	17,04	88,95	9,05
03-80	3	4	3	827	1301	1052	17,7	5,14	70,96	3,44	5,44	70,96	3,25	53,54	21,04	60,70	2,54	19,23	64,08	2,78
04-80	2	2	1	4082	8319	3213	25,84	47,95	-85,57	0,54	31,84	-85,57	0,81	51,95	96,1	-84,99	0,54	32,43	37,57	1,60
05-80	2	2	1	1211	2441	1108	11,21	18,35	-63,69	0,61	21,87	-63,69	0,51	22,67	36,84	-62,51	0,62	22,52	0,66	1,01
01-90	2	2	2	1089	1342	2020	11,54	14,15	-22,62	0,82	24,17	-22,62	0,48	23,32	28,48	-22,13	0,82	50,11	-114,88	0,47
02-90	2	2	1	3204	3025	2269	18,11	10,34	42,90	1,75	20,41	42,90	0,89	36,46	20,88	42,73	1,75	21,09	42,16	1,73
03-90	2	2	2	173	374	416	2,44	4,53	-85,66	0,54	4,81	-85,66	0,51	5,12	9,29	-81,45	0,55	11,08	-116,41	0,46
04-90	2	2	1	3301	6279	3762	22,18	30,95	-39,54	0,72	50,85	-39,54	0,44	44,59	62,08	-39,22	0,72	51,42	-15,32	0,87
05-90	3	2	2	1928	2526	2290	55,94	18,54	66,86	3,02	21,98	66,86	2,55	168,23	37,29	77,83	4,51	45,57	72,91	3,69
01-100	2	2	1	895	937	865	11,57	12,52	-8,21	0,92	19,81	-8,21	0,58	23,28	25,14	-7,99	0,93	20,34	12,63	1,14
02-100	2	2	1	2056	3193	2409	10,04	11,38	-13,35	0,88	33,44	-13,35	0,30	20,24	22,87	-12,99	0,89	33,99	-67,93	0,60
03-100	2	2	1	256	309	256	2,23	4,3	-92,83	0,52	5,09	-92,83	0,44	4,64	8,73	-88,15	0,53	5,6	-20,69	0,83
04-100	2	2	1	1943	6673	1945	11,02	39,38	-257,35	0,28	22,29	-257,35	0,49	22,22	78,9	-255,09	0,28	22,77	-2,48	0,98
05-100	2	2	1	1037	2407	1118	11,38	19,17	-68,45	0,59	22,38	-68,45	0,51	22,94	38,44	-67,57	0,60	22,98	-0,17	1,00

Tabela 4.23 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 3 -  $90 \times 90 \times 90$  para  $\Gamma(\%)$  de 10 a 50.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão					
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2			
01-10	4	3	1	37092	32249	9335	4145,21	446,67 \ 89,22		9,28 454,12 \ 89,22		9,13	16581,4	1340,26 \ 91,92		12,37 456,3 \ 97,25		36,34
02-10	2	2	1	22633	27933	21566	484,09	678,21 \ -40,10		0,71 1047,45 \ -40,10		0,46	968,57	1356,59 \ -40,06		0,71 1049,14 \ -8,32		0,92
03-10	3	2	1	4097	5382	3196	351,52	149,78 \ 57,39		2,35 253,93 \ 57,39		1,38	1055,08	299,66 \ 71,60		3,52 256,2 \ 75,72		4,12
04-10	5	5	4	36074	34765	20147	7455,1	310,9 \ 95,83		23,98 264,95 \ 95,83		28,14	37277,22	1556,34 \ 95,82		23,95 1073,45 \ 97,12		34,73
05-10	2	2	2	7159	14563	9783	126,35	250,82 \ -98,51		0,50 220,37 \ -98,51		0,57	253,08	501,83 \ -98,29		0,50 446,82 \ -76,55		0,57
01-20	3	4	3	24385	49475	37535	2117,2	554,2 \ 73,82		3,82 601,52 \ 73,82		3,52	6351,95	2217,97 \ 65,08		2,86 1813,83 \ 71,44		3,50
02-20	3	3	1	26118	40530	9968	1831,44	622,63 \ 66,00		2,94 450,68 \ 66,00		4,06	5494,75	1868,17 \ 66,00		2,94 451,85 \ 91,78		12,16
03-20	2	2	1	2330	4881	2034	44,48	107,5 \ -141,68		0,41 89,67 \ -141,68		0,50	89,28	215,13 \ -140,96		0,42 91,92 \ -2,96		0,97
04-20	2	2	1	5766	9176	4561	123,22	216,12 \ -75,39		0,57 276,23 \ -75,39		0,45	246,84	432,42 \ -75,18		0,57 278,13 \ -12,68		0,89
05-20	3	3	1	17036	16151	10448	766,53	226,14 \ 70,50		3,39 386,37 \ 70,50		1,98	2300,08	678,69 \ 70,49		3,39 388,57 \ 83,11		5,92
01-30	4	4	5	29913	54445	68560	3907,47	550,33 \ 85,92		7,10 654,61 \ 85,92		5,97	15630,41	2201,85 \ 85,91		7,10 3289,99 \ 78,95		4,75
02-30	3	3	1	22103	36471	11381	1573,93	571,89 \ 63,66		2,75 456,7 \ 63,66		3,45	4722,24	1715,98 \ 63,66		2,75 457,89 \ 90,30		10,31
03-30	3	2	1	4441	4838	2181	492,37	130,08 \ 73,58		3,79 118,18 \ 73,58		4,17	1477,56	260,27 \ 82,39		5,68 120,47 \ 91,85		12,26
04-30	3	2	2	12712	11329	15585	1052,49	289,35 \ 72,51		3,64 385,02 \ 72,51		2,73	3158	578,93 \ 81,67		5,45 776,11 \ 75,42		4,07
05-30	3	3	2	9157	17316	15261	909,78	256,35 \ 71,82		3,55 303,9 \ 71,82		2,99	2729,8	769,36 \ 71,82		3,55 613,95 \ 77,51		4,45
01-40	3	3	2	29218	34660	24593	1819,26	503,82 \ 72,31		3,61 619,91 \ 72,31		2,93	5458,17	1511,73 \ 72,30		3,61 1245,48 \ 77,18		4,38
02-40	3	2	1	19630	25309	9818	1569,18	602,46 \ 61,61		2,60 457,19 \ 61,61		3,43	4707,98	1205,16 \ 74,40		3,91 458,39 \ 90,26		10,27
03-40	3	3	2	6076	6118	5427	695,96	130,52 \ 81,25		5,33 164,55 \ 81,25		4,23	2088,44	392,22 \ 81,22		5,32 335,98 \ 83,91		6,22
04-40	2	2	1	8492	13995	6825	188,38	329,09 \ -74,69		0,57 367,18 \ -74,69		0,51	377,21	658,44 \ -74,56		0,57 368,89 \ 2,21		1,02
05-40	3	2	3	16402	11621	20387	1539,95	250,83 \ 83,71		6,14 285,87 \ 83,71		5,39	4620,45	501,89 \ 89,14		9,21 866,63 \ 81,24		5,33
01-50	2	2	2	11701	16977	19793	268,36	335,16 \ -24,89		0,80 484,26 \ -24,89		0,55	537,02	670,53 \ -24,86		0,80 974,22 \ -81,41		0,55
02-50	3	2	1	15694	23912	10840	1370,27	569,43 \ 58,44		2,41 497,87 \ 58,44		2,75	4111,25	1139,11 \ 72,29		3,61 499,06 \ 87,86		8,24
03-50	3	2	2	4479	4419	3979	521,94	118,75 \ 77,25		4,40 130,11 \ 77,25		4,01	1566,25	237,65 \ 84,83		6,59 266,74 \ 82,97		5,87
04-50	3	4	2	20811	34990	18433	2253,38	429,46 \ 80,94		5,25 433,5 \ 80,94		5,20	6760,7	1718,61 \ 74,58		3,93 871,88 \ 87,10		7,75
05-50	3	3	3	13137	17755	20188	1258,57	284,66 \ 77,38		4,42 357,55 \ 77,38		3,52	3776,24	854,27 \ 77,38		4,42 1082,08 \ 71,35		3,49

Tabela 4.24 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 3 -  $90 \times 90 \times 90$  para  $\Gamma(\%)$  de 60 a 100.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão					
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2			
01-60	3	2	2	21003	19210	20081	1688,19	371,65 \ 77,99	4,54	413,5 \ 77,99	4,08	5064,96	743,49 \ 85,32	6,81	832,62 \ 83,56	6,08		
02-60	3	3	4	18549	30812	47244	1674,93	491,45 \ 70,66	3,41	564,08 \ 70,66	2,97	5025,38	1474,67 \ 70,66	3,41	2268,76 \ 54,85	2,22		
03-60	3	2	2	4001	4667	4634	584,06	144,43 \ 75,27	4,04	186,56 \ 75,27	3,13	1752,64	288,99 \ 83,51	6,06	379,61 \ 78,34	4,62		
04-60	3	4	4	21466	29335	27308	2569,48	401,91 \ 84,36	6,39	428,88 \ 84,36	5,99	7708,97	1608,24 \ 79,14	4,79	1729,66 \ 77,56	4,46		
05-60	3	2	1	12140	10662	4615	1275,83	227,24 \ 82,19	5,61	233,47 \ 82,19	5,46	3828,01	454,72 \ 88,12	8,42	235,51 \ 93,85	16,25		
01-70	2	3	2	12902	28910	19522	276,05	358 \ -29,69	0,77	410,54 \ -29,69	0,67	552,36	1074,28 \ -94,49	0,51	826,76 \ -49,68	0,67		
02-70	2	2	1	7728	25219	14114	186,24	589,32 \ -216,43	0,32	776,59 \ -216,43	0,24	372,84	1178,89 \ -216,19	0,32	778,09 \ -108,69	0,48		
03-70	3	2	2	5417	4136	4838	657,51	123,35 \ 81,24	5,33	208,07 \ 81,24	3,16	1972,99	246,84 \ 87,49	7,99	422,7 \ 78,58	4,67		
04-70	2	2	1	10882	10118	8072	343,25	270,66 \ 21,15	1,27	376,85 \ 21,15	0,91	686,89	541,56 \ 21,16	1,27	378,73 \ 44,86	1,81		
05-70	3	3	3	12606	20347	15355	1063,59	338,47 \ 68,18	3,14	273,48 \ 68,18	3,89	3191,28	1015,76 \ 68,17	3,14	830,12 \ 73,99	3,84		
01-80	3	2	1	16777	19815	11286	1076,99	374,75 \ 65,20	2,87	442,49 \ 65,20	2,43	3231,34	749,7 \ 76,80	4,31	444,46 \ 86,25	7,27		
02-80	3	2	1	16253	24555	13351	1685,2	563,68 \ 66,55	2,99	751,3 \ 66,55	2,24	5056,07	1127,59 \ 77,70	4,48	752,86 \ 85,11	6,72		
03-80	2	2	1	1320	4641	1787	42,59	142,56 \ -234,73	0,30	118,13 \ -234,73	0,36	85,53	285,27 \ -233,53	0,30	120,4 \ -40,77	0,71		
04-80	3	2	1	19305	10874	10530	2520,92	272,06 \ 89,21	9,27	505,71 \ 89,21	4,98	7563,48	544,26 \ 92,80	13,90	507,12 \ 93,30	14,91		
05-80	3	4	2	10170	23982	15745	1127,5	318,91 \ 71,72	3,54	424,11 \ 71,72	2,66	3383,1	1276,07 \ 62,28	2,65	853,16 \ 74,78	3,97		
01-90	2	2	1	14486	16550	6838	327,05	327,39 \ -0,10	1,00	312,29 \ -0,10	1,05	654,37	654,99 \ -0,09	1,00	314,3 \ 51,97	2,08		
02-90	2	3	1	9438	31271	8353	242,48	482,48 \ -98,98	0,50	451,46 \ -98,98	0,54	485,32	1447,74 \ -198,31	0,34	452,63 \ 6,74	1,07		
03-90	2	2	1	3275	4484	2076	85,59	129,25 \ -51,01	0,66	154,11 \ -51,01	0,56	171,5	258,62 \ -50,80	0,66	156,39 \ 8,81	1,10		
04-90	3	2	1	26642	16538	9339	2999,83	474,08 \ 84,20	6,33	530,48 \ 84,20	5,65	9000,03	948,31 \ 89,46	9,49	531,89 \ 94,09	16,92		
05-90	2	2	1	5486	11557	6579	155,52	261,02 \ -67,84	0,60	356,03 \ -67,84	0,44	311,41	522,21 \ -67,69	0,60	357,96 \ -14,95	0,87		
01-100	2	2	1	7908	19225	8327	171,5	411,28 \ -139,81	0,42	391,29 \ -139,81	0,44	343,26	822,72 \ -139,68	0,42	393,29 \ -14,57	0,87		
02-100	2	2	1	10612	21349	6578	236,79	522,33 \ -120,59	0,45	390,84 \ -120,59	0,61	473,9	1044,87 \ -120,48	0,45	391,96 \ 17,29	1,21		
03-100	2	2	1	1826	4482	3047	67,89	155,94 \ -129,70	0,44	246,28 \ -129,70	0,28	136,09	312 \ -129,26	0,44	248,53 \ -82,62	0,55		
04-100	2	2	1	8918	15900	9718	213,31	425,2 \ -99,33	0,50	495,06 \ -99,33	0,43	426,93	850,65 \ -99,25	0,50	496,42 \ -16,28	0,86		
05-100	2	2	1	6608	10557	6526	179,82	240,71 \ -33,86	0,75	406,06 \ -33,86	0,44	360	481,58 \ -33,77	0,75	407,97 \ -13,33	0,88		

Tabela 4.25 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 4 -  $90 \times 90 \times 90$  para  $\Gamma(\%)$  de 10 a 50.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão					
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2			
01-10	3	2	2	4825	4341	3659	102,25	20,56 \ 79,89		4,97 21,12 \ 79,89		4,84	307,21 41,36 \ 86,54		7,43 50,35 \ 83,61		6,10	
02-10	2	2	1	44	131	32	1,49	2,85 \ -91,28		0,52 2,86 \ -91,28		0,52	3,29 5,89 \ -79,03		0,56 5,27 \ -60,18		0,62	
03-10	2	2	1	185	702	292	1,34	2,99 \ -123,13		0,45 3,6 \ -123,13		0,37	2,99 6,18 \ -106,69		0,48 5,91 \ -97,66		0,51	
04-10	2	2	1	1017	640	986	4,04	4,98 \ -23,27		0,81 15,17 \ -23,27		0,27	8,45 10,21 \ -20,83		0,83 17,38 \ -105,68		0,49	
05-10	3	3	3	1033	1669	1085	59,81	9,73 \ 83,73		6,15 8,58 \ 83,73		6,97	179,96 29,63 \ 83,54		6,07 36,5 \ 79,72		4,93	
01-20	2	2	1	5584	5467	4463	27,35	29,57 \ -8,12		0,92 56,9 \ -8,12		0,48	55 59,35 \ -7,91		0,93 59,95 \ -9,00		0,92	
02-20	2	2	1	41	102	70	1,32	2,53 \ -91,67		0,52 2,58 \ -91,67		0,51	3 5,31 \ -77,00		0,56 5,01 \ -67,00		0,60	
03-20	3	2	3	889	812	2072	13,97	3,54 \ 74,66		3,95 6,31 \ 74,66		2,21	42,49 7,4 \ 82,58		5,74 28,47 \ 33,00		1,49	
04-20	2	2	1	402	481	184	3,23	4,38 \ -35,60		0,74 4,25 \ -35,60		0,76	6,82 8,97 \ -31,52		0,76 6,74 \ 1,17		1,01	
05-20	3	2	1	1271	1290	748	59,27	10,06 \ 83,03		5,89 11,75 \ 83,03		5,04	178,4 20,49 \ 88,51		8,71 14,04 \ 92,13		12,71	
01-30	2	2	1	3487	5536	10825	22,31	32,25 \ -44,55		0,69 122,19 \ -44,55		0,18	44,94 64,73 \ -44,04		0,69 125,26 \ -178,73		0,36	
02-30	2	2	1	45	102	30	1,45	2,74 \ -88,97		0,53 2,63 \ -88,97		0,55	3,25 5,71 \ -75,69		0,57 5,07 \ -56,00		0,64	
03-30	2	2	1	742	1188	1156	2,74	4,59 \ -67,52		0,60 7,47 \ -67,52		0,37	5,87 9,54 \ -62,52		0,62 9,85 \ -67,80		0,60	
04-30	2	2	1	286	827	628	3,21	5,87 \ -82,87		0,55 8,7 \ -82,87		0,37	6,8 11,96 \ -75,88		0,57 10,95 \ -61,03		0,62	
05-30	4	4	2	2238	2275	1372	180,68	10,64 \ 94,11		16,98 13,97 \ 94,11		12,93	723,51 43,22 \ 94,03		16,74 35,31 \ 95,12		20,49	
01-40	4	5	4	27673	38394	51089	1328,28	95,97 \ 92,77		13,84 161,4 \ 92,77		8,23	5314,2 480,84 \ 90,95		11,05 661,05 \ 87,56		8,04	
02-40	2	2	2	64	124	138	1,53	2,97 \ -94,12		0,52 3,38 \ -94,12		0,45	3,47 6,23 \ -79,54		0,56 13,64 \ -293,08		0,25	
03-40	2	2	1	531	1218	877	2,92	4,93 \ -68,84		0,59 8,25 \ -68,84		0,35	6,27 10,16 \ -62,04		0,62 10,81 \ -72,41		0,58	
04-40	2	2	1	1212	1440	1247	6,69	8,32 \ -24,36		0,80 20,04 \ -24,36		0,33	13,78 16,9 \ -22,64		0,82 22,32 \ -61,97		0,62	
05-40	2	2	1	677	771	714	6,63	8,94 \ -34,84		0,74 11,68 \ -34,84		0,57	13,59 18,11 \ -33,26		0,75 14,29 \ -5,15		0,95	
01-50	2	2	1	10819	13349	9674	53,58	75,24 \ -40,43		0,71 149,8 \ -40,43		0,36	107,48 150,76 \ -40,27		0,71 152,37 \ -41,77		0,71	
02-50	2	2	1	103	222	156	1,95	3,54 \ -81,54		0,55 4,75 \ -81,54		0,41	4,25 7,3 \ -71,76		0,58 7,21 \ -69,65		0,59	
03-50	2	2	1	817	1054	904	3,12	4,48 \ -43,59		0,70 8,25 \ -43,59		0,38	6,67 9,31 \ -39,58		0,72 10,67 \ -59,97		0,63	
04-50	2	2	1	1245	1420	1616	5,61	8,56 \ -52,58		0,66 25,47 \ -52,58		0,22	11,61 17,38 \ -49,70		0,67 27,7 \ -138,59		0,42	
05-50	2	2	1	730	805	620	6,71	8,84 \ -31,74		0,76 13,36 \ -31,74		0,50	13,8 17,96 \ -30,14		0,77 16,02 \ -16,09		0,86	

Tabela 4.26 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 4 -  $90 \times 90 \times 90$  para  $\Gamma(\%)$  de 60 a 100.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão								
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2						
01-60	3	3	1	15263	19007	7988	591,59	77,58 \ 86,89		7,63	116,92 \ 86,89		5,06	1775,45		233,31 \ 86,86		7,61	119,49 \ 93,27		14,86
02-60	2	2	2	133	247	380	2,43	4,07 \ -67,49		0,60	5,12 \ -67,49		0,47	5,33		8,47 \ -58,91		0,63	17,13 \ -221,39		0,31
03-60	2	2	1	385	1050	757	2,67	4,6 \ -72,28		0,58	8,27 \ -72,28		0,32	5,7		9,47 \ -66,14		0,60	10,64 \ -86,67		0,54
04-60	2	2	2	860	1298	3714	6,02	8,13 \ -35,05		0,74	29,48 \ -35,05		0,20	12,53		16,57 \ -32,24		0,76	65,53 \ -422,98		0,19
05-60	3	2	1	1814	824	895	94,35	9,91 \ 89,50		9,52	15,1 \ 89,50		6,25	283,56		20,13 \ 92,90		14,09	17,56 \ 93,81		16,15
01-70	2	2	1	7416	11172	14163	58,42	61,84 \ -5,85		0,94	186,78 \ -5,85		0,31	117,25		124,02 \ -5,77		0,95	189,27 \ -61,42		0,62
02-70	2	2	1	176	197	119	2,34	3,58 \ -52,99		0,65	4,19 \ -52,99		0,56	5,06		7,42 \ -46,64		0,68	6,62 \ -30,83		0,76
03-70	2	2	1	594	1091	582	3	4,61 \ -53,67		0,65	8,66 \ -53,67		0,35	6,41		9,48 \ -47,89		0,68	11,16 \ -74,10		0,57
04-70	2	2	2	1516	2973	3813	7,21	13,05 \ -81,00		0,55	17,77 \ -81,00		0,41	14,86		26,37 \ -77,46		0,56	42,21 \ -184,05		0,35
05-70	4	4	3	2078	3607	2483	201,94	14,95 \ 92,60		13,51	16,58 \ 92,60		12,18	808,63		60,48 \ 92,52		13,37	60,06 \ 92,57		13,46
01-80	2	2	1	17706	12535	15838	123,95	77,2 \ 37,72		1,61	262,69 \ 37,72		0,47	248,38		154,74 \ 37,70		1,61	265,66 \ -6,96		0,93
02-80	2	2	1	287	370	140	3,39	4,79 \ -41,30		0,71	5,44 \ -41,30		0,62	7,17		9,86 \ -37,52		0,73	7,74 \ -7,95		0,93
03-80	2	2	1	631	1074	592	3,34	4,62 \ -38,32		0,72	6,93 \ -38,32		0,48	7,04		9,57 \ -35,94		0,74	9,32 \ -32,39		0,76
04-80	2	2	1	1813	2282	1206	9,6	11,37 \ -18,44		0,84	26,05 \ -18,44		0,37	19,6		22,99 \ -17,30		0,85	28,26 \ -44,18		0,69
05-80	2	2	1	813	1204	940	7,31	11,79 \ -61,29		0,62	15,91 \ -61,29		0,46	15,06		23,94 \ -58,96		0,63	18,42 \ -22,31		0,82
01-90	2	3	2	25214	23205	21565	137,43	100,73 \ 26,70		1,36	145,23 \ 26,70		0,95	275,35		302,62 \ -9,90		0,91	298,21 \ -8,30		0,92
02-90	2	2	1	274	333	327	3,27	4,45 \ -36,09		0,73	7,24 \ -36,09		0,45	6,91		9,19 \ -33,00		0,75	9,55 \ -38,21		0,72
03-90	3	2	2	1691	1174	702	40,81	4,96 \ 87,85		8,23	6,29 \ 87,85		6,49	122,94		10,18 \ 91,72		12,08	18,69 \ 84,80		6,58
04-90	2	2	1	2411	1594	2089	20,18	9,13 \ 54,76		2,21	35,07 \ 54,76		0,58	40,74		18,51 \ 54,57		2,20	37,29 \ 8,47		1,09
05-90	3	2	2	1692	965	1674	76,15	11,11 \ 85,41		6,85	16,32 \ 85,41		4,67	228,99		22,5 \ 90,17		10,18	39,11 \ 82,92		5,86
01-100	2	2	1	19421	22609	11306	144,6	153,25 \ -5,98		0,94	227,9 \ -5,98		0,63	289,59		306,74 \ -5,92		0,94	230,81 \ 20,30		1,25
02-100	2	2	1	288	261	279	3,25	4,04 \ -24,31		0,80	6,63 \ -24,31		0,49	6,84		8,29 \ -21,20		0,83	8,76 \ -28,07		0,78
03-100	2	2	1	992	1147	599	4,55	5,01 \ -10,11		0,91	8,31 \ -10,11		0,55	9,46		10,2 \ -7,82		0,93	10,52 \ -11,21		0,90
04-100	2	2	1	2215	2482	3172	9,03	11,75 \ -30,12		0,77	53,86 \ -30,12		0,17	18,37		23,69 \ -28,96		0,78	55,76 \ -203,54		0,33
05-100	2	2	1	1210	1264	1474	9,96	12,61 \ -26,61		0,79	21,51 \ -26,61		0,46	20,24		25,4 \ -25,49		0,80	23,66 \ -16,90		0,86

Tabela 4.27 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 5 -  $90 \times 90 \times 90$  para  $\Gamma(\%)$  de 10 a 50.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão								
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2						
01-10	3	2	2	4825	4341	3659	102,25	20,56 \ 79,89		4,97	21,12 \ 79,89		4,84	307,21		41,36 \ 86,54		7,43	50,35 \ 83,61		6,10
02-10	2	2	1	44	131	32	1,49	2,85 \ -91,28		0,52	2,86 \ -91,28		0,52	3,29		5,89 \ -79,03		0,56	5,27 \ -60,18		0,62
03-10	2	2	1	185	702	292	1,34	2,99 \ -123,13		0,45	3,6 \ -123,13		0,37	2,99		6,18 \ -106,69		0,48	5,91 \ -97,66		0,51
04-10	2	2	1	1017	640	986	4,04	4,98 \ -23,27		0,81	15,17 \ -23,27		0,27	8,45		10,21 \ -20,83		0,83	17,38 \ -105,68		0,49
05-10	3	3	3	1033	1669	1085	59,81	9,73 \ 83,73		6,15	8,58 \ 83,73		6,97	179,96		29,63 \ 83,54		6,07	36,5 \ 79,72		4,93
01-20	2	2	1	5584	5467	4463	27,35	29,57 \ -8,12		0,92	56,9 \ -8,12		0,48	55		59,35 \ -7,91		0,93	59,95 \ -9,00		0,92
02-20	2	2	1	41	102	70	1,32	2,53 \ -91,67		0,52	2,58 \ -91,67		0,51	3		5,31 \ -77,00		0,56	5,01 \ -67,00		0,60
03-20	3	2	3	889	812	2072	13,97	3,54 \ 74,66		3,95	6,31 \ 74,66		2,21	42,49		7,4 \ 82,58		5,74	28,47 \ 33,00		1,49
04-20	2	2	1	402	481	184	3,23	4,38 \ -35,60		0,74	4,25 \ -35,60		0,76	6,82		8,97 \ -31,52		0,76	6,74 \ 1,17		1,01
05-20	3	2	1	1271	1290	748	59,27	10,06 \ 83,03		5,89	11,75 \ 83,03		5,04	178,4		20,49 \ 88,51		8,71	14,04 \ 92,13		12,71
01-30	2	2	1	3487	5536	10825	22,31	32,25 \ -44,55		0,69	122,19 \ -44,55		0,18	44,94		64,73 \ -44,04		0,69	125,26 \ -178,73		0,36
02-30	2	2	1	45	102	30	1,45	2,74 \ -88,97		0,53	2,63 \ -88,97		0,55	3,25		5,71 \ -75,69		0,57	5,07 \ -56,00		0,64
03-30	2	2	1	742	1188	1156	2,74	4,59 \ -67,52		0,60	7,47 \ -67,52		0,37	5,87		9,54 \ -62,52		0,62	9,85 \ -67,80		0,60
04-30	2	2	1	286	827	628	3,21	5,87 \ -82,87		0,55	8,7 \ -82,87		0,37	6,8		11,96 \ -75,88		0,57	10,95 \ -61,03		0,62
05-30	4	4	2	2238	2275	1372	180,68	10,64 \ 94,11		16,98	13,97 \ 94,11		12,93	723,51		43,22 \ 94,03		16,74	35,31 \ 95,12		20,49
01-40	4	5	4	27673	38394	51089	1328,28	95,97 \ 92,77		13,84	161,4 \ 92,77		8,23	5314,2		480,84 \ 90,95		11,05	661,05 \ 87,56		8,04
02-40	2	2	2	64	124	138	1,53	2,97 \ -94,12		0,52	3,38 \ -94,12		0,45	3,47		6,23 \ -79,54		0,56	13,64 \ -293,08		0,25
03-40	2	2	1	531	1218	877	2,92	4,93 \ -68,84		0,59	8,25 \ -68,84		0,35	6,27		10,16 \ -62,04		0,62	10,81 \ -72,41		0,58
04-40	2	2	1	1212	1440	1247	6,69	8,32 \ -24,36		0,80	20,04 \ -24,36		0,33	13,78		16,9 \ -22,64		0,82	22,32 \ -61,97		0,62
05-40	2	2	1	677	771	714	6,63	8,94 \ -34,84		0,74	11,68 \ -34,84		0,57	13,59		18,11 \ -33,26		0,75	14,29 \ -5,15		0,95
01-50	2	2	1	10819	13349	9674	53,58	75,24 \ -40,43		0,71	149,8 \ -40,43		0,36	107,48		150,76 \ -40,27		0,71	152,37 \ -41,77		0,71
02-50	2	2	1	103	222	156	1,95	3,54 \ -81,54		0,55	4,75 \ -81,54		0,41	4,25		7,3 \ -71,76		0,58	7,21 \ -69,65		0,59
03-50	2	2	1	817	1054	904	3,12	4,48 \ -43,59		0,70	8,25 \ -43,59		0,38	6,67		9,31 \ -39,58		0,72	10,67 \ -59,97		0,63
04-50	2	2	1	1245	1420	1616	5,61	8,56 \ -52,58		0,66	25,47 \ -52,58		0,22	11,61		17,38 \ -49,70		0,67	27,7 \ -138,59		0,42
05-50	2	2	1	730	805	620	6,71	8,84 \ -31,74		0,76	13,36 \ -31,74		0,50	13,8		17,96 \ -30,14		0,77	16,02 \ -16,09		0,86

Tabela 4.28 – Comparação de desempenho de algoritmos em instâncias classe 5 -  $90 \times 90 \times 90$  para  $\Gamma(\%)$  de 50 a 100.

Tipo - $\Gamma(\%)$	# Iteração ( $h$ )			# Nós B&B			T. de exec. PM por iteração $\bar{T}^h(s) \setminus \bar{T}^{hs}(\%)$   Razão						T. total de exec. $\bar{T}(s) \setminus \bar{T}^s(\%)$   Razão								
	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1	BD2	CCG	BD1		BD2		CCG	BD1		BD2						
01-60	3	3	1	15263	19007	7988	591,59	77,58 \ 86,89		7,63	116,92 \ 86,89		5,06	1775,45		233,31 \ 86,86		7,61	119,49 \ 93,27		14,86
02-60	2	2	2	133	247	380	2,43	4,07 \ -67,49		0,60	5,12 \ -67,49		0,47	5,33		8,47 \ -58,91		0,63	17,13 \ -221,39		0,31
03-60	2	2	1	385	1050	757	2,67	4,6 \ -72,28		0,58	8,27 \ -72,28		0,32	5,7		9,47 \ -66,14		0,60	10,64 \ -86,67		0,54
04-60	2	2	2	860	1298	3714	6,02	8,13 \ -35,05		0,74	29,48 \ -35,05		0,20	12,53		16,57 \ -32,24		0,76	65,53 \ -422,98		0,19
05-60	3	2	1	1814	824	895	94,35	9,91 \ 89,50		9,52	15,1 \ 89,50		6,25	283,56		20,13 \ 92,90		14,09	17,56 \ 93,81		16,15
01-70	2	2	1	7416	11172	14163	58,42	61,84 \ -5,85		0,94	186,78 \ -5,85		0,31	117,25		124,02 \ -5,77		0,95	189,27 \ -61,42		0,62
02-70	2	2	1	176	197	119	2,34	3,58 \ -52,99		0,65	4,19 \ -52,99		0,56	5,06		7,42 \ -46,64		0,68	6,62 \ -30,83		0,76
03-70	2	2	1	594	1091	582	3	4,61 \ -53,67		0,65	8,66 \ -53,67		0,35	6,41		9,48 \ -47,89		0,68	11,16 \ -74,10		0,57
04-70	2	2	2	1516	2973	3813	7,21	13,05 \ -81,00		0,55	17,77 \ -81,00		0,41	14,86		26,37 \ -77,46		0,56	42,21 \ -184,05		0,35
05-70	4	4	3	2078	3607	2483	201,94	14,95 \ 92,60		13,51	16,58 \ 92,60		12,18	808,63		60,48 \ 92,52		13,37	60,06 \ 92,57		13,46
01-80	2	2	1	17706	12535	15838	123,95	77,2 \ 37,72		1,61	262,69 \ 37,72		0,47	248,38		154,74 \ 37,70		1,61	265,66 \ -6,96		0,93
02-80	2	2	1	287	370	140	3,39	4,79 \ -41,30		0,71	5,44 \ -41,30		0,62	7,17		9,86 \ -37,52		0,73	7,74 \ -7,95		0,93
03-80	2	2	1	631	1074	592	3,34	4,62 \ -38,32		0,72	6,93 \ -38,32		0,48	7,04		9,57 \ -35,94		0,74	9,32 \ -32,39		0,76
04-80	2	2	1	1813	2282	1206	9,6	11,37 \ -18,44		0,84	26,05 \ -18,44		0,37	19,6		22,99 \ -17,30		0,85	28,26 \ -44,18		0,69
05-80	2	2	1	813	1204	940	7,31	11,79 \ -61,29		0,62	15,91 \ -61,29		0,46	15,06		23,94 \ -58,96		0,63	18,42 \ -22,31		0,82
01-90	2	3	2	25214	23205	21565	137,43	100,73 \ 26,70		1,36	145,23 \ 26,70		0,95	275,35		302,62 \ -9,90		0,91	298,21 \ -8,30		0,92
02-90	2	2	1	274	333	327	3,27	4,45 \ -36,09		0,73	7,24 \ -36,09		0,45	6,91		9,19 \ -33,00		0,75	9,55 \ -38,21		0,72
03-90	3	2	2	1691	1174	702	40,81	4,96 \ 87,85		8,23	6,29 \ 87,85		6,49	122,94		10,18 \ 91,72		12,08	18,69 \ 84,80		6,58
04-90	2	2	1	2411	1594	2089	20,18	9,13 \ 54,76		2,21	35,07 \ 54,76		0,58	40,74		18,51 \ 54,57		2,20	37,29 \ 8,47		1,09
05-90	3	2	2	1692	965	1674	76,15	11,11 \ 85,41		6,85	16,32 \ 85,41		4,67	228,99		22,5 \ 90,17		10,18	39,11 \ 82,92		5,86
01-100	2	2	1	19421	22609	11306	144,6	153,25 \ -5,98		0,94	227,9 \ -5,98		0,63	289,59		306,74 \ -5,92		0,94	230,81 \ 20,30		1,25
02-100	2	2	1	288	261	279	3,25	4,04 \ -24,31		0,80	6,63 \ -24,31		0,49	6,84		8,29 \ -21,20		0,83	8,76 \ -28,07		0,78
03-100	2	2	1	992	1147	599	4,55	5,01 \ -10,11		0,91	8,31 \ -10,11		0,55	9,46		10,2 \ -7,82		0,93	10,52 \ -11,21		0,90
04-100	2	2	1	2215	2482	3172	9,03	11,75 \ -30,12		0,77	53,86 \ -30,12		0,17	18,37		23,69 \ -28,96		0,78	55,76 \ -203,54		0,33
05-100	2	2	1	1210	1264	1474	9,96	12,61 \ -26,61		0,79	21,51 \ -26,61		0,46	20,24		25,4 \ -25,49		0,80	23,66 \ -16,90		0,86



## 5 Considerações finais

Esta tese introduz melhorias em técnicas de resolução exata para problemas de otimização robusta de dois estágios, especificamente, primeiro propõem ao método geração de colunas e restrições (ZENG; ZHAO, 2013) que, apesar de ter suas vantagens e benefícios, é um método que pode ser muito custoso do ponto de vista computacional para determinadas classes de problemas. Posteriormente, o método de Benders-dual é impulsionado pela utilização de cenários significativos do método de geração de colunas e restrições em sua abordagem.

O Capítulo 3 aborda os procedimentos de estabilização quadrática do método de feixe proximal e nível (Kiwiel (1990);Lemaréchal, Nemirovskii e Nesterov (1995)), os quais são manipulados dentro do método francês, originando três novas abordagens. Tais estratégias foram aplicadas ao mesmo caso de estudos utilizado por Gabrel et al. (2014) e Zeng e Zhao (2013) em seus trabalhos - o problema de transporte e localização com demandas incertas. Os resultados mostram uma economia de tempo computacional superior a 41%, em média, quando comparados ao método de ZENG; ZHAO.

Vale a pena mencionar que, uma vez que o problema mestre e subproblema são problemas inteiros mistos, não há informações duais disponíveis para auxiliar na identificação de cenários significativos no problema mestre do método de geração de colunas e restrições. No entanto, tais informações podem ser extraídas via dualidade de Fenchel ao resolver o subproblema, conforme exposto em Sherali e Fraticelli (2002), mas possivelmente a um custo computacional maior por subproblema. Porém, a perspectiva de economizar no número total de iterações e no tempo de execução pode valer a pena investigações em futuras pesquisas.

No Capítulo 4, é proposta uma nova abordagem resultante da junção do Benders-dual e geração de colunas e restrições. Atento ao fato de que um mecanismo poderoso para auxiliar nos métodos de decomposição é melhorar na seleção dos cortes que serão adicionados ao problema mestre. Como os subproblemas que são encarregados pela geração dos cortes são em geral degenerados, dedicar a seleção de corte para adicionar cortes mais fortes colabora para uma melhor convergência. Daí, seguindo essa direção é proposto um segundo algoritmo onde a seleção gera cortes não dominados por nenhum outro, ou seja, cortes Pareto-ótimos. Esse esquema é baseada em técnica utilizada no método de decomposição de Benders onde é resolvido um subproblema linear auxiliar. Esse novo subproblema também passa a ser responsável pela seleção de novos cenários quando necessário.

Para confirmar o desempenho dos algoritmos introduzidos um estudo de caso baseado no problema de localização de facilidades capacitadas em dois níveis é realizado. Ambas as abordagens propostas mostram-se mais estáveis e mais eficientes que o método de geração de colunas e restrições.

A nova abordagem aplicado ao problema de localização e transporte não demonstrou um comportamento satisfatório, acredita-se que a dependência dela por bons cortes duais tenha colaborado para isso. Aqui, pode-se investir em seleção de cortes para adicionar cortes mais fortes resultando numa melhor convergência. Outra linha é implementar o híbrido da nova abordagem adaptada ao problema em específico, com feixe.

É preciso mencionar que na técnica da nova abordagem, quanto maior o número de iterações, maior a chance de ter oscilações no crescimento dos limites inferiores, então, um bom caminho são estudos dedicados a proporcionar melhores cortes duais, juntamente com investigações voltadas para identificar o cenário significativo fixos, que impeça/ou colabore para uma convergência monótona.

# Referências

- ACKOOIJ, W. V.; LEBBE, N.; MALICK, J. Regularized decomposition of large scale block-structured robust optimization problems. *Computational Management Science*, Springer, v. 14, n. 3, p. 393–421, 2017.
- AN, Y.; ZENG, B. Exploring the modeling capacity of two-stage robust optimization: Variants of robust unit commitment model. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 30, n. 1, p. 109–122, 2015.
- AN, Y. et al. Reliable p-median facility location problem: two-stage robust models and algorithms. *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier, v. 64, p. 54–72, 2014.
- ASTORINO, A. et al. Piecewise-quadratic approximations in convex numerical optimization. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 21, n. 4, p. 1418–1438, 2011.
- ATAMTÜRK, A.; ZHANG, M. Two-stage robust network flow and design under demand uncertainty. *Operations Research*, INFORMS, v. 55, n. 4, p. 662–673, 2007.
- ATAMTÜRK, A. Strong formulations of robust mixed 0-1 programming. *Mathematical Programming*, v. 108, n. 2, p. 235–250, 2006.
- BEN-TAL, A.; BERTSIMAS, D.; BROWN, D. A soft robust model for optimization under ambiguity. *Operations Research*, v. 58, n. 4-part-2, p. 1220–1234, 2010.
- BEN-TAL, A.; GHAOUI, L. E.; NEMIROVSKI, A. *Robust optimization*. [S.l.]: Princeton University Press, 2009. v. 28.
- BEN-TAL, A. et al. Adjustable robust solutions of uncertain linear programs. *Mathematical Programming*, Springer, v. 99, n. 2, p. 351–376, 2004.
- BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. Robust convex optimization. *Mathematics of operations research*, INFORMS, v. 23, n. 4, p. 769–805, 1998.
- BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations research letters*, Elsevier, v. 25, n. 1, p. 1–13, 1999.
- BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical programming*, Springer, v. 88, n. 3, p. 411–424, 2000.
- BEN-TAL, A.; NEMIROVSKI, A. Robust optimization—methodology and applications. *Mathematical Programming*, Springer, v. 92, n. 3, p. 453–480, 2002.
- BENDERS, J. F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische mathematik*, Springer, v. 4, n. 1, p. 238–252, 1962.
- BERTSIMAS, D.; BROWN, D. B.; CARAMANIS, C. Theory and applications of robust optimization. *SIAM review*, SIAM, v. 53, n. 3, p. 464–501, 2011.
- BERTSIMAS, D. et al. Adaptive robust optimization for the security constrained unit commitment problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 28, n. 1, p. 52–63, 2012.

- BERTSIMAS, D.; SIM, M. Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical programming*, Springer, v. 98, n. 1, p. 49–71, 2003.
- BERTSIMAS, D.; SIM, M. The price of robustness. *Operations research*, Informs, v. 52, n. 1, p. 35–53, 2004.
- BERTSIMAS, D.; THIELE, A. A robust optimization approach to inventory theory. *Operations research*, INFORMS, v. 54, n. 1, p. 150–168, 2006.
- BEYER, H.-G.; SENDHOFF, B. Robust optimization—a comprehensive survey. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 196, n. 33-34, p. 3190–3218, 2007.
- BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. *Introduction to stochastic programming*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- BONNANS, J.-F. et al. *Numerical optimization theoretical and practical aspects*. 2nd. ed. [S.l.]: Springer, 2006. (Universitext). ISBN 9783540354451,354035445X.
- BRIANT, O. et al. Comparison of bundle and classical column generation. *Mathematical programming*, Springer, v. 113, n. 2, p. 299–344, 2008.
- CICERONE, S. et al. Robust algorithms and price of robustness in shunting problems. In: SCHLOSS DAGSTUHL-LEIBNIZ-ZENTRUM FÜR INFORMATIK. *OASISs-OpenAccess Series in Informatics*. [S.l.], 2007. v. 7.
- CRUZ, J. B.; OLIVEIRA, W. de. Level bundle-like algorithms for convex optimization. *Journal of Global Optimization*, Springer, v. 59, n. 4, p. 787–809, 2014.
- DING, T. et al. A two-stage robust reactive power optimization considering uncertain wind power integration in active distribution networks. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, IEEE, v. 7, n. 1, p. 301–311, 2015.
- DING, T. et al. A two-stage robust reactive power optimization considering uncertain wind power integration in active distribution networks. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, IEEE, v. 7, n. 1, p. 301–311, 2016.
- DOLAN, E. D.; MORÉ, J. J. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, Springer-Verlag, v. 91, n. 2, p. 201–213, 2002.
- DURAN, M. A.; GROSSMANN, I. E. An outer-approximation algorithm for a class of mixed-integer nonlinear programs. *Mathematical programming*, Springer, v. 36, n. 3, p. 307–339, 1986.
- FERNANDES, D. R. et al. A simple and effective genetic algorithm for the two-stage capacitated facility location problem. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 75, p. 200–208, 2014.
- FISCHETTI, M.; MONACI, M. Light robustness. In: \_\_\_\_\_. *Robust and Online Large-Scale Optimization: Models and Techniques for Transportation Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 61–84.
- GABREL, V. et al. Robust location transportation problems under uncertain demands. *Discrete Applied Mathematics*, Elsevier, v. 164, p. 100–111, 2014.

- GABREL, V.; MURAT, C.; THIELE, A. Recent advances in robust optimization: An overview. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 235, n. 3, p. 471–483, 2014.
- GEOFFRION, A. M. Generalized benders decomposition. *Journal of optimization theory and applications*, Springer, v. 10, n. 4, p. 237–260, 1972.
- GHAOUI, L. E.; LEBRET, H. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIAM Journal on matrix analysis and applications*, SIAM, v. 18, n. 4, p. 1035–1064, 1997.
- GHAOUI, L. E.; OUSTRY, F.; LEBRET, H. Robust solutions to uncertain semidefinite programs. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 9, n. 1, p. 33–52, 1998.
- GORISSEN, B. L.; YANIKOĞLU, İ.; HERTOĞ, D. den. A practical guide to robust optimization. *Omega*, Elsevier, v. 53, p. 124–137, 2015.
- HIRIART-URRUTY, J.-B.; LEMARÉCHAL, C. *Convex analysis and minimization algorithms II: Advanced theory and bundle methods*, vol. 306 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. [S.l.]: Springer-Verlag, New York, 1993.
- HIRIART-URRUTY, J.-B.; LEMARÉCHAL, C. *Convex analysis and minimization algorithms I: Fundamentals*. [S.l.]: Springer science & business media, 2013. v. 305.
- HU, B.; WU, L. Robust scuc considering continuous/discrete uncertainties and quick-start units: A two-stage robust optimization with mixed-integer recourse. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 31, n. 2, p. 1407–1419, 2016.
- JIANG, R. et al. Benders' decomposition for the two-stage security constrained robust unit commitment problem. In: INSTITUTE OF INDUSTRIAL ENGINEERS-PUBLISHER. *IIE Annual Conference. Proceedings*. [S.l.], 2012. p. 1.
- KALL, P.; WALLACE, S. W.; KALL, P. *Stochastic programming*. [S.l.]: Springer, 1994.
- KELLEY JR, J. E. The cutting-plane method for solving convex programs. *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, SIAM, v. 8, n. 4, p. 703–712, 1960.
- KIWIEL, K. C. Proximity control in bundle methods for convex nondifferentiable minimization. *Mathematical programming*, Springer, v. 46, n. 1, p. 105–122, 1990.
- KIWIEL, K. C. An inexact bundle approach to cutting-stock problems. *INFORMS Journal on Computing*, INFORMS, v. 22, n. 1, p. 131–143, 2010.
- KOUVELIS, P.; YU, G. Robust discrete optimization and its applications. *Science & Business Media*, v. 14, 2013.
- LEMARECHAL, C. An extension of davidon methods to non differentiable problems. *Mathematical programming study*, v. 3, p. 95–109, 1975.
- LEMARÉCHAL, C.; NEMIROVSKII, A.; NESTEROV, Y. New variants of bundle methods. *Mathematical programming*, Springer, v. 69, n. 1, p. 111–147, 1995.
- LEMARÉCHAL, C.; SAGASTIZÁBAL, C. Variable metric bundle methods: from conceptual to implementable forms. *Mathematical Programming*, Springer, v. 76, n. 3, p. 393–410, 1997.

- LIEBCHEN, C. et al. The concept of recoverable robustness, linear programming recovery, and railway applications. In: \_\_\_\_\_. *Robust and Online Large Scale Optimization*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. p. 1–27.
- LITVINCHEV, I.; ESPINOSA, E. L. O. Solving the two-stage capacitated facility location problem by the lagrangian heuristic. In: SPRINGER. *International Conference on Computational Logistics*. [S.l.], 2012. p. 92–103.
- MAGNANTI, T. L.; WONG, R. T. Accelerating benders decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria. *Operations research*, INFORMS, v. 29, n. 3, p. 464–484, 1981.
- MARÍN, A.; PELEGRÍN, B. Applying lagrangian relaxation to the resolution of two-stage location problems. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 86, p. 179–198, 1999.
- MIŠKOVIĆ, S.; STANIMIROVIĆ, Z.; GRUJIČIĆ, I. Solving the robust two-stage capacitated facility location problem with uncertain transportation costs. *Optimization Letters*, Springer, v. 11, n. 6, p. 1169–1184, 2017.
- MULVEY, J. M.; VANDERBEI, R. J.; ZENIOS, S. A. Robust optimization of large-scale systems. *Operations research*, INFORMS, v. 43, n. 2, p. 264–281, 1995.
- NING, C.; YOU, F. A transformation-proximal bundle algorithm for multistage adaptive robust optimization and application to constrained robust optimal control. *Automatica*, Elsevier, p. 108802, 2020.
- OLIVEIRA, W.; SAGASTIZÁBAL, C.; SCHEIMBERG, S. Inexact bundle methods for two-stage stochastic programming. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 21, n. 2, p. 517–544, 2011.
- OLIVEIRA, W. D.; SOLODOV, M. A doubly stabilized bundle method for nonsmooth convex optimization. *Mathematical programming*, Springer, v. 156, n. 1-2, p. 125–159, 2016.
- ORDÓÑEZ, F.; ZHAO, J. Robust capacity expansion of network flows. *Networks: An International Journal*, Wiley Online Library, v. 50, n. 2, p. 136–145, 2007.
- ORTIZ-ASTORQUIZA, C.; CONTRERAS, I.; LAPORTE, G. Multi-level facility location problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 267, n. 3, p. 791–805, 2018.
- PAPADAKOS, N. Practical enhancements to the magnanti–wong method. *Operations Research Letters*, Elsevier, v. 36, n. 4, p. 444–449, 2008.
- PRÉKOPA, A. *Stochastic programming*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 324.
- RUSZCZYŃSKI, A. A regularized decomposition method for minimizing a sum of polyhedral functions. *Mathematical programming*, Springer, v. 35, n. 3, p. 309–333, 1986.
- RUSZCZYŃSKI, A.; ŚWITANOWSKI, A. Accelerating the regularized decomposition method for two stage stochastic linear problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 101, n. 2, p. 328–342, 1997.
- SCHÖBEL, A. Generalized light robustness and the trade-off between robustness and nominal quality. *Mathematical Methods of Operations Research*, v. 80, n. 2, p. 161–191, 2014.

- SHAPIRO, A.; DENTCHEVA, D.; RUSZCZYŃSKI, A. *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*. [S.l.]: SIAM, 2009.
- SHERALI, H. D.; FRATICELLI, B. M. A modification of Benders' decomposition algorithm for discrete subproblems: An approach for stochastic programs with integer recourse. *Journal of Global Optimization*, v. 22, n. 1, p. 319–342, Jan 2002.
- SHI, H.; YOU, F. A computational framework and solution algorithms for two-stage adaptive robust scheduling of batch manufacturing processes under uncertainty. *AIChE Journal*, Wiley Online Library, v. 62, n. 3, p. 687–703, 2016.
- SOYSTER, A. L. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations research*, INFORMS, v. 21, n. 5, p. 1154–1157, 1973.
- TAKEDA, A.; TAGUCHI, S.; TÜTÜNCÜ, R. H. Adjustable robust optimization models for a nonlinear two-period system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Springer, v. 136, n. 2, p. 275–295, 2008.
- TERRY, T. L. *Robust linear optimization with recourse: Solution methods and other properties*. Tese (Doutorado) — University of Michigan, 2009.
- THIELE, A.; TERRY, T.; EPELMAN, M. Robust linear optimization with recourse. *Rapport technique*, p. 4–37, 2009.
- WANG, K.; YANG, Q. Hierarchical facility location for the reverse logistics network design under uncertainty. *Journal of Uncertain Systems*, v. 8, n. 4, p. 255–270, 2014.
- WOLFE, P. A method of conjugate subgradients for minimizing nondifferentiable functions. *Mathematical programming study*, v. 3, p. 145–173, 1975.
- YANIKOĞLU, İ.; GORISSEN, B. L.; HERTOĞ, D. den. A survey of adjustable robust optimization. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 277, n. 3, p. 799–813, 2019.
- ZAOURAR, S.; MALICK, J. Quadratic stabilization of Benders decomposition. *HAL*, 2014.
- ZARRINPOOR, N.; FALLAHNEZHAD, M. S.; PISHVAEE, M. S. Design of a reliable hierarchical location-allocation model under disruptions for health service networks: A two-stage robust approach. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier, v. 109, p. 130–150, 2017.
- ZENG, B.; ZHAO, L. Solving two-stage robust optimization problems using a column-and-constraint generation method. *Operations Research Letters*, Elsevier, v. 41, n. 5, p. 457–461, 2013.
- ZHANG, Y. et al. Two-stage distributionally robust coordinated scheduling for gas-electricity integrated energy system considering wind power uncertainty and reserve capacity configuration. *Renewable Energy*, Elsevier, 2018.
- ZHAO, L.; ZENG, B. Robust unit commitment problem with demand response and wind energy. In: IEEE. *Power and Energy Society General Meeting, 2012 IEEE*. [S.l.], 2012. p. 1–8.