

Lucas Mourão Vieira Montese

Modelo Não Linear de Dínamo Solar Unidimensional

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Gustavo Guerrero

Belo Horizonte

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M779m Montese, Lucas Mourão Vieira.
Modelo não linear de dínamo solar unidimensional / Lucas Mourão Vieira
Montese. – 2020.
89f., enc. : il.

Orientador: Gustavo Andres Guerrero Eraso.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.
Bibliografia: f. 69-72.

1. Campo magnético. 2. Sol. 3. Astrofísica.
I. Título. II. Eraso, Gustavo Andres Guerrero. III. Universidade Federal de
Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 537.612 (043)



Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física
Caixa Postal 702
30.123-970 Belo Horizonte - MG - Brasil

Telefone (xx) (31) 3499 5637
(xx) (31) 3499 5633
Fax (xx) (31) 3499 5688
(xx) (31) 3499 5600
e-mail pgfisica@fisica.ufmg.br

ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 636ª DISSERTAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DEFENDIDA POR LUCAS MOURÃO VIEIRA MONTESE, orientado pelo professor Gustavo Andrés Guerrero Eraso para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA**. Às 09:00 horas de dez de março de 2020, na sala 4123A do Departamento de Física da UFMG, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Gustavo Andrés Guerrero Eraso** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Luiz Paulo Ribeiro Vaz** (Departamento de Física/UFMG) e **Maria Cristina de Assis Rabello Soares** (Departamento de Física/UFMG) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o bacharel **LUCAS MOURÃO VIEIRA MONTESE** à arguição de seu trabalho de dissertação, que recebeu o título de "Modelo Não Linear de Dínamo Solar Unidimensional". Às 14:00 horas do mesmo dia o candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação do candidato.

Belo Horizonte, 10 de março de 2020.

Prof. Gustavo Andrés Guerrero Eraso
Orientador do estudante
Departamento de Física/UFMG

Prof. Luiz Paulo Ribeiro Vaz
Departamento de Física/UFMG

Profa. Maria Cristina de Assis Rabello Soares
Departamento de Física /UFMG

Candidato

Lucas Mourão Vieira Montese

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à Universidade Federal de Minas Gerais, ao departamento de física, aos docentes com quem tive contato, em especial, meu orientador, Gustavo Guerrero, pela excelente experiência em pesquisa e todo o aprendizado obtido ao longo desses dois anos de mestrado. Agradeço, também, à CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, agência financiadora da minha pesquisa, que dá exemplo de resistência aos ataques sofridos e à falta de recursos.

Agradeço também aos colegas do laboratório de astrofísica, pela troca de experiências e pelas conversas descontraídas durante o café que forneceram volorosos momentos de alívio; à minha família, por todo o suporte que me forneceram durante este período; à minha namorada, Taís, que esteve ao meu lado nos momentos mais difíceis e também nos mais agradáveis; e por fim, à todos os amigos que tornam a vida mais prazerosa, em especial, aos da república Nós é Nós - Ouro Preto, minha eterna casa e onde formei uma segunda família.

Resumo

Neste trabalho estuda-se a geração de campos magnéticos em grande escala observadas em objetos cósmicos a partir de diferentes modelos, analíticos e numéricos, de dínamo turbulento de campo médio. É utilizada uma formulação simplificada, unidimensional, com valores fixos para a rotação diferencial, $\nabla\Omega$, o efeito turbulento α e a difusividade magnética turbulenta η_t , os chamados coeficientes de dínamo. São resolvidos modelos de dínamo α^2 , $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$ descrevendo a evolução das componentes toroidal e poloidal do campo magnético. Estima-se que, para o caso do Sol, por exemplo, essas equações possuam soluções supercríticas, fazendo com que os campos cresçam exponencialmente. Portanto, estudam-se dois mecanismos diferentes de saturação que amortecem a contribuição do efeito α , uma estática (algébrica) e outra dinâmica. Enquanto o primeiro formalismo baseia-se em considerações heurísticas, o segundo carrega o conceito da conservação da helicidade magnética em MHD ideal. As duas formulações dependem inversamente do número de Reynolds magnético, levando ao amortecimento catastrófico do dínamo, já que nesses objetos, $R_m \gg 1$. Esse amortecimento é aliviado quando fluxos de helicidade magnética são incluídos na equação dinâmica de α . As simulações descrevem o comportamento do campo magnético ao variar os coeficientes de dínamo bem como os coeficientes que controlam o fluxo de amortecimento magnético, κ_α . Para o modelo α^2 , encontra-se que a amplitude média do campo decai de acordo com a relação $B_{media} \propto R_m^{-0.5}$, tal como encontrado na literatura. Para os modelos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$, o decaimento é proporcional a $R_m^{-0.8}$, possivelmente, devido a baixa dimensionalidade do modelo. Nos três casos, a inclusão de um fluxo difusivo da helicidade magnética permite que o dínamo sustente valores consideráveis do campo, mesmo para $R_m = 10^9$. O período do ciclo magnético como função do número de dínamo, para os modelos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$ apresenta uma tendência de $T \sim D^{0.5}$. Como consequência da difusão de helicidade magnética, observa-se uma segunda periodicidade que engloba o ciclo principal. Já modelos α^2 não apresentam periodicidade. Para números de dínamo $\gg 1$, como esperado em objetos astrofísicos, modelos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$ possuem resultados divergentes quanto ao período do ciclo. Aplicando os resultados a valores de $\nabla\Omega$, α e η_t compatíveis com o interior solar, os resultados são capazes de reproduzir o período de 22 anos, assim como os ciclos de 2 e de 80 anos, dependendo da região em que são analisados.

Palavras-chave: Dínamo de Campo Médio, Sol, Manchas Solares, Atividade Magnética, Helicidade Magnética.

Abstract

In this work we study the generation of the large scale magnetic fields observed in cosmic objects using analytical and numerical turbulent mean-field dynamo models. We use a simplified, one-dimensional formulation, with fixed values for differential rotation, $\nabla\Omega$, the turbulent α effect and the turbulent magnetic diffusivity η_t , the so-called dynamo coefficients. Dynamo models α^2 , $\alpha\Omega$ and $\alpha^2\Omega$ describing the evolution of the toroidal and poloidal components of the magnetic field are solved. It is expected that for the case of the Sun, for example, these equations have supercritical solutions, causing exponentially growing magnetic fields. Therefore, we study two different mechanisms of saturation which quench the contribution of the α effect, one static (algebraic) and the other dynamic. While the first formalism is based on heuristic considerations, the second carries the concept of the conservation of magnetic helicity in ideal MHD. The two formulations depend inversely on the magnetic Reynolds number, leading to catastrophic quenching of the dynamo, since in these objects, $R_m \gg 1$. This quenching is alleviated when a magnetic helicity flux is included in the dynamic equation of α . The simulations describe the behavior of the magnetic field by varying the dynamo coefficients as well as the coefficient that controls the magnetic quenching flux, κ_α . For the α^2 model, we find that the average amplitude of the field decreases according to the scaling relation, $B_{media} \propto R_m^{-0.5}$, which agrees with previous results in literature. For the models $\alpha\Omega$ and $\alpha^2\Omega$, the decay is proportional to $R_m^{-0.8}$, possibly due to the low dimensionality of the model. In all three cases, the inclusion of a diffusive flux of the magnetic helicity allows the dynamo to sustain considerable values of the field, even for $R_m = 10^9$. The magnetic cycle period as a function of the dynamo number, for the models $\alpha\Omega$ and $\alpha^2\Omega$ behaves as, $T \sim D^{0.5}$. As a consequence of magnetic helicity diffusion, a second periodicity is observed which encompasses the main cycle. The α^2 models do not exhibit any periodicity. For dynamo numbers $\gg 1$, as expected in astrophysical objects, models $\alpha\Omega$ and $\alpha^2\Omega$ have divergent results regarding the cycle period. Applying our results to values of $\nabla\Omega$, α and η_t compatible with the solar interior, our simulations are able to reproduce the period of 22 years, as well as the cycles of 2 and 80 years, depending on the region where they are analyzed.

Keywords: Mean Field Dynamo, Sun, Sunspot, Magnetic activity, Magnetic helicity.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	TEORIA DO DÍNAMO DE CAMPO MÉDIO	21
2.1	Equação de Indução	21
2.2	Geração de Campo Magnético	23
2.3	O Efeito α	24
2.4	Modelos de dínamo	28
2.4.1	Dínamo α^2	30
2.4.2	Dínamos $\alpha^2\Omega$ e $\alpha\Omega$	31
2.5	Equações Dinâmicas Para α	33
2.5.1	Conservação da Helicidade Magnética	35
3	MODELO UNIDIMENSIONAL	39
3.1	Saturação Com Amortecimento Algébrico	42
3.2	Saturação Incluindo a Helicidade Magnética	43
3.3	Método Numérico	47
4	RESULTADOS E ANÁLISES	49
4.1	Influência do Número de Reynolds Magnético e do Termo de Fluxo	49
4.2	Efeito da Variação dos coeficientes de dínamo na Evolução dos Campos Poloidais e Toroidais	53
4.3	Análise dos Períodos e das Amplitudes	58
4.4	Valores e Estimativas dos Parâmetros Aplicados ao Sol	62
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	65
	Referências	69
	APÊNDICES	73
	APÊNDICE A – AS REGRAS DE REYNOLDS	75
	ANEXOS	77
	ANEXO A – CÓDIGO DO MODELO DE SATURAÇÃO ALGÉBRICA	79

ANEXO B – CÓDIGO DO MODELO DE SATURAÇÃO DINÂMICA 85

1 Introdução

O Sol é a estrela mais próxima da Terra, porém, vários processos físicos que ocorrem, tanto no seu interior, como no exterior permanecem obscuros para a ciência. Um deles diz respeito ao ciclo magnético solar, onde existem propriedades que não se conhecem com a clareza necessária para interpretá-las com precisão. A teoria do dínamo é a que melhor representa a evolução do campo magnético ao longo dos anos e permite estudar as características deste ciclo.

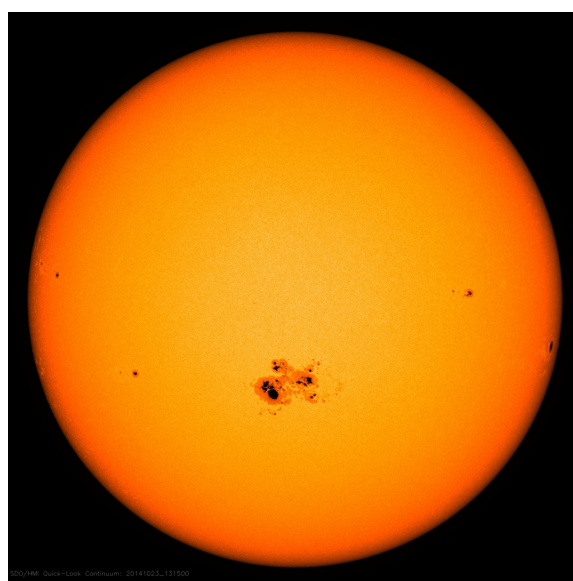


Figura 1 – Fotografia do Sol exibindo uma grande mancha escura de cerca de 128000Km de diâmetro. Imagem capturada pelo 'NASA's Solar Dynamic Observatory' em 23 de outubro de 2014. Fonte: <https://www.nasa.gov/content/goddard/largest-sunspot-of-solar-cycle>.

Um indicativo da atividade magnética do Sol são as manchas solares, que são manchas escuras observadas em sua superfície. A Figura 1 exibe uma fotografia do Sol com uma grande mancha escura. A teoria do dínamo prevê que grande parte da atividade magnética ocorre abaixo da superfície, na camada convectiva (Baumann et al., 2004). Então, por processos ainda não bem conhecidos, as linhas de campo emergem na superfície em regiões de baixa latitude. Essas linhas formam tubos de fluxo magnético que, imersas em um meio condutor gasoso, prejudicam a transferência de calor por convecção. Essas regiões, então, tornam-se mais frias que sua vizinhança, ocasionando a formação das manchas escuras (Parker, 1955a). A Figura 2 ilustra como um tubo de fluxo magnético emerge na superfície.

Desde a invenção do telescópio existem registros das posições e do número de

manchas (aproximadamente, os últimos quatrocentos anos) (Carrasco et al., 2019), no entanto, este é um tempo relativamente curto para a escala de tempo do Sol. Uma das dificuldades em entender o ciclo é, justamente, a escassez de dados anteriores a este período. Existem outras técnicas capazes de estimar a intensidade do campo magnético em período mais longevos. Um exemplo é medir a concentração do isótopo ^{10}Be nas bolhas de ar presente em camadas de gelo formadas nos polos do planeta. A formação de ^{10}Be é ocasionada por fluxos de raios cósmicos que penetram a atmosfera terrestre. A intensidade desses fluxos, por sua vez, é um indicativo da atividade magnética, já que o campo magnético solar funciona como um escudo de partículas carregadas que se aproximam da Terra, como explicado por Usoskin et al. (2004). Contudo, esta técnica possui um alcance de alguns milhares de anos no passado, o que ainda é pouco, se comparado à idade do Sol, estimada em 4.5 bilhões de anos.

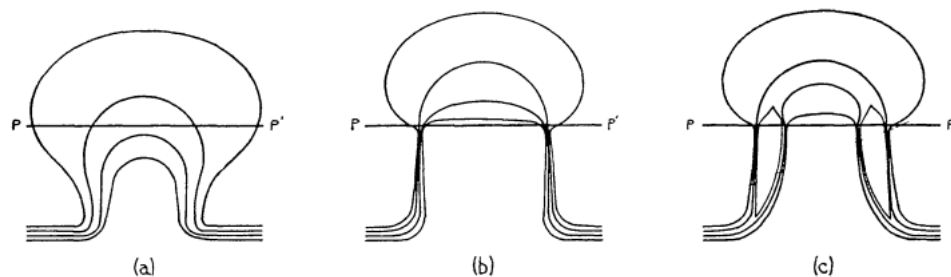


Figura 2 – O desenvolvimento de um tubo de fluxo em uma mancha solar. Fonte: Parker, 1955a

O ciclo das manchas dura cerca de 11 anos. Elas surgem em torno dos 30° de latitude e se movimentam em direção à linha do equador, onde desaparecem (Parker, 1955a). A duração de uma mancha individual pode variar entre semanas a meses (Eddy, 1980). A explicação deste fenômeno é que as linhas de campo emergem em uma latitude positiva e mergulham em uma latitude negativa oposta (e vice-versa), tomando como referência o equador. O diagrama borboleta mostra a evolução das manchas no decorrer dos últimos anos e também pode indicar a intensidade do campo magnético radial. O ciclo magnético principal, por sua vez, é composto por dois ciclos de manchas, resultando em um período de duração de aproximadamente 22 anos. Isso ocorre graças à mudança de polaridade do campo depois que ele atinge um máximo de intensidade. O período de duração varia a cada novo ciclo em alguns anos para mais, ou para menos. Além disso, supõe-se que existam ciclos maiores, com aproximadamente 80 anos de duração, que englobam os ciclos mais curtos (Eddy, 1980) e também ciclos menores, de aproximadamente 2 anos (Vecchio and Carbone, 2008). Todas as previsões de duração dos ciclos baseadas em modelos de dínamo, até hoje, falharam. Por isso fazem-se necessários novos estudos que tentem entender os processos físicos relacionados à geração de campo magnético no Sol. A Figura 3 exhibe um diagrama borboleta das manchas no painel superior e outro

diagrama borboleta no painel inferior expondo a evolução do campo na direção radial, que é uma média longitudinal.

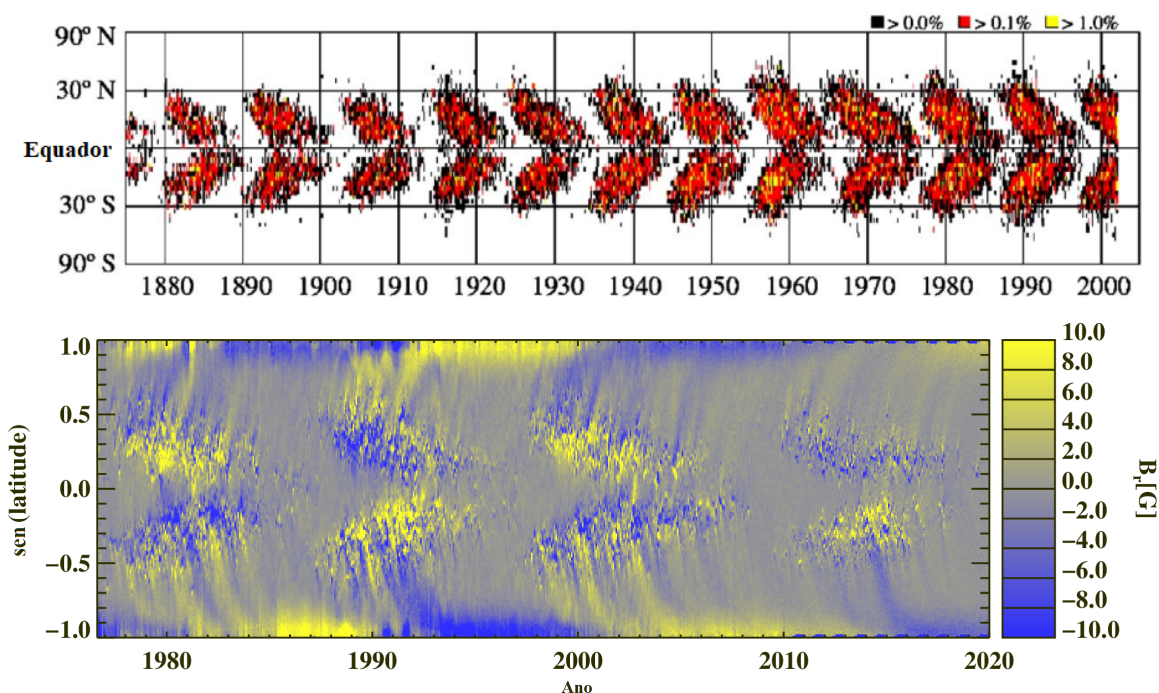


Figura 3 – Diagrama borboleta indicando a aparição das manchas solares com o passar dos anos (painel superior), retirado de Brandenburg and Subramanian (2005). Diagrama borboleta do Sol exibindo a intensidade do campo magnético dos últimos anos (painel inferior). O campo radial representa a média longitudinal (cortesia de A. Kosovichev).

A atividade magnética solar também apresenta algumas anomalias, sendo a mais famosa, o fenômeno conhecido como mínimo de Maunder, ocorrido entre a metade do século 17 e início do século 18. Acredita-se que neste período o Sol diminuiu drasticamente sua atividade. Há poucos registros de manchas dessa época e foi identificada uma quantidade incomum de raios cósmicos (Eddy, 1983). Nesse período, também, é provável que a Terra tenha vivido uma pequena era glacial. Este é um dos motivos que levam a crer que a atividade magnética do Sol influencia o clima espacial e pode alterar a temperatura da Terra. Outro fator que influencia a nossa sociedade são as ejeções de partículas carregadas por explosões solares. Ao chegarem na Terra, essas partículas podem comprometer componentes de satélites (Tavares, 2000), gerando um alto custo para a indústria de telecomunicações e de pesquisas espaciais.

A área de estudos dos processos magnéticos e convectivos do plasma ionizado denomina-se magneto-hidrodinâmica ou MHD (Alfvén, 1942). Contudo, o trabalho aqui apresentado é focado em analisar somente a evolução magnética, deixando as equações da hidrodinâmica de lado, colocando-se a entender esta atividade como um processo de dínamo. Nessa análise é necessário supor que o campo de velocidades já é conhecido.

O dínamo é um mecanismo de geração e sustentação do campo magnético baseado na transformação de energia mecânica em energia eletromagnética e, em geral, é aplicado no estudo de corpos celestes que possuem atividade magnética. Existem trabalhos, por exemplo, que analisam dínamos galácticos, como em Shukurov et al. (2006) e Del Sordo et al. (2013) e outros que analisam o dínamo terrestre, como Kuang and Bloxham (1997). No entanto, a análise aqui realizada restringe-se a dínamos estelares, mais precisamente, no Sol.

A teoria do dínamo solar leva em consideração a rotação diferencial do Sol, isto é, a velocidade de rotação no equador é maior, diminuindo gradativamente até a região dos polos. Também é possível observar o efeito de rotação diferencial radial, em que a velocidade de rotação nas regiões mais externas é diferente do que a velocidade na tacoclina (região de transição entre a camada convectiva e a camada radioativa). Este fenômeno cria o chamado efeito Ω , responsável por distorcer as linhas de campo da direção poloidal (as linhas do campo emergem em um dos polos do Sol e penetram no outro, encontrando-se em seu interior) para a direção toroidal (as linhas circulam o Sol na mesma direção das linhas latitudinais). Os painéis superiores da Figura 4 exemplificam este processo. O responsável por causar a reação inversa e retornar o campo à sua posição de origem (poloidal) é o chamado efeito α , relacionado a uma força eletromotriz induzida por movimentos turbulentos do plasma ionizado. No processo descrito, o campo inverte sua polaridade, logo, considera-se que o Sol completou a metade de um ciclo magnético (painéis inferiores da Figura 4). Após o processo se repetir, é completado um ciclo (Brandenburg and Subramanian, 2005).

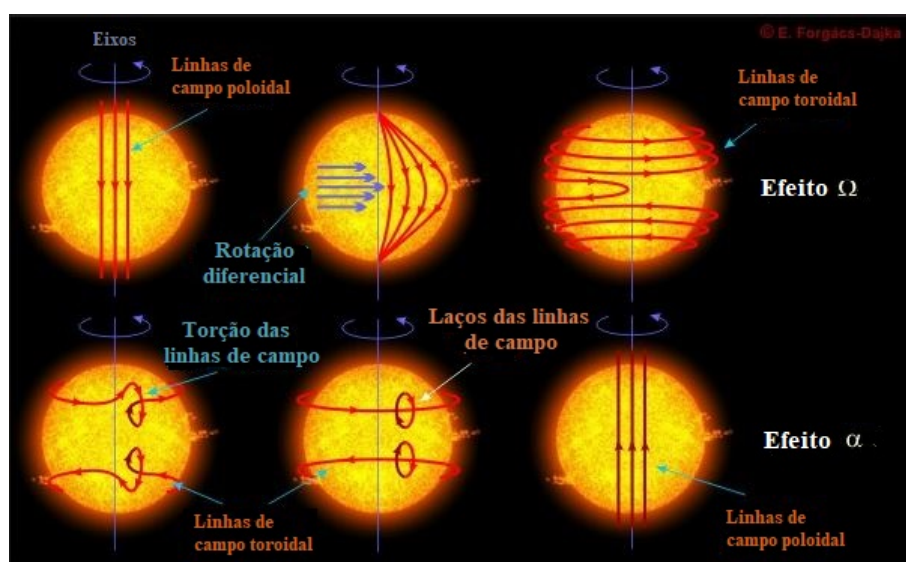


Figura 4 – Linhas de campo toroidal sendo distorcidas pelo efeito Ω (painéis superiores) e depois retornando a serem poloidais devido ao efeito α (painéis inferiores). Fonte: <https://www.crediblehulk.org/index.php/2017/01/12/the-solar-dynamo-the-physical-basis-of-the-solar-cycle-and-the-suns-magnetic-field/>.

A heliosismologia consegue medir com precisão os movimentos de rotação diferencial, mas isso não é o suficiente para entender a evolução do campo, pois os movimentos meridionais e os movimentos turbulentos no interior do envelope convectivo não são bem conhecidos (Kosovichev et al., 1997). Portanto, torna-se necessário recorrer a modelos teóricos e à modelagem numérica.

Utiliza-se a equação de indução magnética para descrever a evolução do campo. O efeito α surge ao adotar a abordagem de campo médio, em que considera-se o campo magnético total como a soma do campo magnético médio, proveniente da grande escala, e de um campo magnético de flutuações, resultante dos fluxos de pequena escala (Parker, 1955b). Entende-se por grande escala processos que ocorram com escalas temporais ou espaciais maiores, com duração de anos ou que abranjam regiões próximas à superfície total do Sol. A pequena escala representa processos que durem dias ou semanas e que englobem pequenas regiões, de alguns milhares de quilômetros. O mesmo vale para os fluxos de velocidade do fluido, tal que a grande escala é a velocidade de rotação diferencial e os movimentos meridionais e a pequena escala são movimentos convectivos e turbulentos.

A geração do efeito α pode ser interpretada como pequenos ciclones que ocorrem graças às forças de empuxo e de Coriolis, ou pela turbulência causada no cisalhamento que ocorre entre a camada convectiva e a camada radioativa. Ele é responsável por torcer as linhas de campo toroidal em pequenos turbilhões. Em um dado momento, a torção é tão grande que as linhas não são capazes de se sustentar, arrebatando e, instantaneamente, reconectando-se na orientação poloidal (Parker, 1955b). A ação coletiva desses turbilhões é capaz de criar um campo dipolar em grande escala. Através de procedimentos matemáticos, é possível representar este efeito em termos do campo magnético médio, onde são apresentados alguns coeficientes fundamentais para a análise. São eles: o coeficiente α , que representa a helicidade do sistema, η_t , que é a difusividade magnética turbulenta e outros termos de alta ordem normalmente desconsiderados (Moffatt, 1978).

Três modelos distintos são estudados, os dínamos α^2 , $\alpha\Omega$ e o $\alpha^2\Omega$. Eles levam em consideração diferentes contribuições para a regeneração dos campos. O primeiro despreza a influência do efeito Ω e o efeito α torna-se o responsável pela regeneração dos campos poloidais e toroidais. O segundo considera que somente o efeito Ω regenera o campo toroidal e o efeito α , o campo poloidal. O último modelo carrega todas as contribuições, sendo este o modelo mais completo (Brandenburg and Subramanian, 2005).

As equações, então, são normalizadas e transportadas para uma forma unidimensional, o que simplifica a análise. Elas ficam dependentes de alguns parâmetros, denominados coeficientes de dínamo. São parâmetros adimensionais que medem a eficiência do dínamo. Para valores acima de um valor crítico, esses coeficientes podem fazer com que o campo

cresça indeterminadamente. Portanto, surge a necessidade de incluir mecanismos que provoquem a saturação do campo (Kitiashvili and Kosovichev, 2009). A primeira tentativa é realizada de modo heurístico, isto é, cria-se uma relação de inversa proporcionalidade do efeito α , responsável pela manutenção do dínamo, com o campo ao quadrado. Este método denomina-se saturação algébrica e limita o crescimento do campo (Guerrero et al., 2010).

O segundo mecanismo consiste em deduzir equações dinâmicas para α que são acopladas à evolução do campo. Parte-se da premissa de que a helicidade magnética é uma invariante em MHD. Esta condição se evidencia ao adotar a abordagem de campo médio, onde a helicidade magnética proveniente da grande escala é compensada pelo fator oriundo da pequena escala. Por conseguinte, a helicidade total é representada pela soma de uma contribuição cinética e outra magnética, com sinal oposto, descritas pelos efeitos α_K e α_M , respectivamente (Blackman and Brandenburg, 2002). A equação de evolução do efeito magnético α_M é proporcional a R_m^{-1} , onde $R_m = vL/\eta$ é o número de Reynolds magnético, tal que v é a velocidade do fluxo e L é o seu comprimento. η representa a difusividade magnética molecular (Moffatt, 1970). R_m é um número adimensional e seu significado físico é uma estimativa da indução magnética. Ele possui um valor alto em estrelas, em geral. No Sol, estima-se que seja da ordem de 10^9 . Isto pode resultar em um processo chamado de amortecimento catastrófico. Para solucionar este problema, adiciona-se um termo de fluxo de helicidade magnética na equação da evolução de α_M . Este termo tem fundamento físico, pois ventos solares carregam consigo helicidade magnética, por exemplo. A reconexão magnética também pode levar a um fluxo difusivo desta helicidade (Guerrero et al., 2010).

A finalidade deste trabalho, então, consiste em resolver as equações de campo de forma analítica e numérica, buscando entender a influência dos coeficientes de dínamo, do número de Reynolds magnético e do termo de fluxo no comportamento dos campos poloidais e toroidais, para os três modelos de dínamo e para cada mecanismo de saturação. Realiza-se a medição dos períodos de oscilação dos campos e modificam-se os parâmetros a fim de analisar a interferência dos mesmos na duração dos ciclos e, também, na amplitude dos campos. Os resultados obtidos são comparados com soluções encontradas na literatura, inclusive aos trabalhos que utilizam modelos com dimensões mais altas com o objetivo de demonstrar que um modelo unidimensional consegue capturar a física presente no sistema. Estudos referentes ao dínamo $\alpha^2\Omega$ contendo a evolução dinâmica de α_M são originais.

A sequência deste trabalho transcorre por um capítulo onde é descrita a teoria que envolve o dínamo solar, incluindo algumas soluções analíticas para os modelos (Capítulo 2), outro que transfere os modelos para uma análise unidimensional e apresenta a metodologia utilizada no trabalho (Capítulo 3), seguido por um que exhibe os resultados obtidos com as devidas análises (Capítulo 4) e por fim, as conclusões obtidas, conectando os resultados

com a teoria (Capítulo 5).

2 Teoria do Dínamo de Campo Médio

Neste capítulo é descrita a teoria do dínamo que gera campos em grande escala de acordo com a magneto-hidrodinâmica (MHD), que é o estudo da evolução do campo magnético interagindo com os movimentos do plasma, tratado como um fluido. Em estrelas e galáxias, o gás é parcialmente ou totalmente ionizado devido às altas temperaturas. Dessa forma, a movimentação desses fluidos podem transportar e gerar corrente elétrica que, por sua vez, geram campos magnéticos (Brandenburg and Subramanian, 2005). A manutenção do dínamo, então, consiste na transformação de energia cinética em energia magnética.

Neste trabalho, os movimentos do gás ionizado podem ser caracterizados de duas formas. A primeira é o que se denomina de grande escala, guiado pela rotação solar, levando em consideração a rotação diferencial. A segunda é a pequena escala, que representa movimentos turbulentos, convectivos e helicoidais no interior do Sol, gerando efeitos indutivos não desprezíveis. Dessa forma, um campo qualquer relacionado a esses movimentos pode ser descrito como a soma de uma parcela provinda da grande escala e outra da pequena escala, como proposto por Parker em 1955b.

A seguir, inicia-se a discussão caracterizando as equações de Maxwell que determinam a evolução do campo eletromagnético.

2.1 Equação de Indução

As equações de Maxwell, em unidades SI, podem ser escritas em sua forma diferencial (Griffiths, 2005):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (2.4)$$

onde \mathbf{B} é o campo magnético, \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{J} é a densidade de corrente, ρ_e é a densidade de carga, μ_0 é a permeabilidade magnética e ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo.

A densidade de corrente \mathbf{J} é proporcional a uma força eletromagnética por unidade de área e pode ser escrita na forma (Griffiths, 2005):

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}), \quad (2.5)$$

onde σ é a condutividade elétrica do meio e \mathbf{U} é a velocidade das cargas (em MHD, \mathbf{U} pode ser entendida como a velocidade do fluxo de gás ionizado). É, então, introduzida a difusividade magnética η , tal que $\eta = (\mu_0\sigma)^{-1}$ (Brandenburg and Subramanian, 2005). Com isso, a Equação (2.3) pode ser escrita como:

$$\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{\eta} (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}). \quad (2.6)$$

O termo do lado esquerdo da equação, chamado de corrente de deslocamento de Faraday, pode ser desprezado quando a escala de tempo da variação do campo elétrico é maior que 10^{-20} s para temperaturas de aproximadamente 10^8 K (Brandenburg and Subramanian, 2005). Como as escalas de tempo de uma estrela (ou galáxia) são longas, pode-se seguramente desprezar este termo. Portanto, a Equação (2.3) retorna à lei de Ampere: $\mu_0\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$. Logo, a Equação (2.6) pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{U} \times \mathbf{B} + \eta\mathbf{J}. \quad (2.7)$$

Substituindo este resultado na lei de indução de Faraday, Equação (2.4), obtém-se uma equação que descreve a evolução temporal do campo magnético \mathbf{B} , chamada equação de indução:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B} - \eta\mathbf{J}). \quad (2.8)$$

Ela é o ponto de partida desta análise. Comparando os termos do lado direito da Equação (2.8), é possível deduzir (Moffatt, 1978):

$$-\frac{\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B})}{\eta\nabla\mathbf{J}} \approx \frac{UL}{\eta} = R_m, \quad (2.9)$$

onde os termos escalares U e L são obtidos por aproximações realizadas a partir de análises dimensionais. O número de Reynolds magnético, então, compara os efeitos indutivos ou advectivos do plasma com os efeitos dissipativos.

2.2 Geração de Campo Magnético

O ciclo magnético solar é a alternância entre o campo magnético poloidal (meridional, direções r e θ) e o toroidal (longitudinal, direção ϕ). Isto é, o campo toroidal é gerado a partir de um campo poloidal pré existente, então, o campo poloidal é regenerado a partir do campo toroidal, mas com a polaridade invertida. Este processo caracteriza metade de um ciclo magnético.

Para entender os mecanismos que geram esta alternância, considera-se os campos magnético e de velocidade axissimétricos ($\frac{\partial}{\partial \phi} \equiv 0$). Ambos são descritos como a soma de suas componentes poloidais e toroidais, respectivamente (Charbonneau, 2010).

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_p + \omega \bar{\Omega} \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_\phi, \quad (2.11)$$

onde $\omega = r \sin \theta$ e $\bar{\Omega}$ é a velocidade angular. É possível associar um potencial escalar A ao campo poloidal, de forma que $\mathbf{B}_p = \nabla \times A \hat{\mathbf{e}}_\phi$ (o rotacional de um vetor com componente apenas na direção $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ produz um outro vetor com componentes nas direções $\hat{\mathbf{e}}_r$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta$). Logo, \mathbf{B} torna-se:

$$\mathbf{B} = (\nabla \times A \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B \hat{\mathbf{e}}_\phi. \quad (2.12)$$

Respeitando a equação de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ e substituindo as Equações (2.10) e (2.12) na equação de indução (2.8), produz o sistema de equações acopladas:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \underbrace{\eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\omega} \right) A}_{\text{decaimento resistivo}} - \underbrace{\frac{\mathbf{U}_p}{\omega} \cdot \nabla (\omega A)}_{\text{advecção}}, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} = & \underbrace{\eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\omega} \right) B}_{\text{decaimento resistivo}} + \underbrace{\frac{1}{\omega} \frac{\partial (\omega B)}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r}}_{\text{transporte diamagnético}} + \\ & - \underbrace{\omega \mathbf{U}_p \cdot \nabla \left(\frac{B}{\omega} \right)}_{\text{advecção}} + \underbrace{\omega (\nabla \times (A \hat{\mathbf{e}}_\phi)) \cdot \nabla \Omega}_{\text{cisalhamento}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

O processo físico associado a cada termo se encontra na parte inferior dele (Charbonneau, 2010). É importante observar aqui, que apenas o último termo da Equação (2.14) é capaz de regenerar campo magnético toroidal partindo de um poloidal. No entanto, não há um termo com papel semelhante na Equação (2.13). Com isso, A vai, inevitavelmente, decair. Isto vai interromper o processo de criação de campo toroidal na Equação (2.14) que, por

sua vez, também vai decair. Este é o princípio do teorema de Cowling, que determina que “um campo magnético axissimétrico, em geral, não pode ser mantido pelas correntes que ele próprio configura” (Cowling, 1933). Logo, é necessário descrever um processo não axissimétrico que forneça um novo termo à equação.

2.3 O Efeito α

O problema do dínamo consiste em entender como um campo de velocidades com propriedades indutivas é capaz de sustentar um campo magnético axissimétrico. A ação dos fluxos ainda precisa ser capaz de causar a regeneração do ciclo magnético (Charbonneau, 2010). O lado direito da equação de indução possui um termo indutivo, $\mathbf{U} \times \mathbf{B}$, que gera e transporta o campo, e outro termo dissipativo, $-\eta\mathbf{J}$, responsável por difundir o campo. Uma proposta para encontrar uma solução satisfatória é considerar as grandezas vetoriais como a soma de uma contribuição da grande escala e outra da pequena escala (Parker, 1955b), respectivamente, tal que $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{b}$, $\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u}$ e $\mathbf{J} = \bar{\mathbf{J}} + \mathbf{j}$. A equação torna-se:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times [(\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u}) \times (\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{b}) - \eta(\bar{\mathbf{J}} + \mathbf{j})]. \quad (2.15)$$

Alguns termos provenientes da grande escala podem ser facilmente medidos. A dificuldade aqui é saber como se comporta a pequena escala. Portanto, a fim de eliminar parte dos termos desconhecidos, é aplicada uma média em ambos os lados da equação, que pode ser interpretada como uma média longitudinal. Obedecendo as regras de Reynolds, definidas no Apêndice A, é possível considerar $\langle \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{j} \rangle = 0$. Então, analisa-se a evolução do campo magnético da grande escala:

$$\frac{\partial \langle \bar{\mathbf{B}} \rangle}{\partial t} = \nabla \times [\langle \bar{\mathbf{U}} \rangle \times \langle \bar{\mathbf{B}} \rangle + \bar{\varepsilon} - \eta \langle \bar{\mathbf{J}} \rangle], \quad (2.16)$$

onde:

$$\bar{\varepsilon} \equiv \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle. \quad (2.17)$$

O termo $\bar{\varepsilon}$ representa uma força eletromotriz proveniente da pequena escala e uma de suas componentes tem central importância na teoria. Esta força gera o que é chamado de efeito α . Este efeito pode ser qualquer mecanismo que produza um campo poloidal de grande escala a partir de um campo toroidal, também de grande escala (Charbonneau, 2010). Esses mecanismos podem ser gerados pela turbulência causada pelo cisalhamento entre a camada convectiva e a camada radiativa (mais densa), por ciclones que surgem próximos ao equador do Sol devido à força de Coriolis ou por correntes em pequena escala (Parker, 1955b). Ainda é difícil entender os mecanismos que geram o efeito α . Pela

dificuldade de enxergar movimentos turbulentos no interior do Sol, portanto, a ideia agora é realizar uma aproximação que possa representar $\bar{\varepsilon}$ em termos da grande escala (Moffatt, 1978). Para isso, é preciso recuperar a equação de indução da pequena escala, que havia sido descartada, utilizando os termos remanescentes:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times [(\bar{\mathbf{U}} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \times \bar{\mathbf{B}}) + \mathbf{G} + \eta \mathbf{j}], \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{G} = \mathbf{u} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$.

Na abordagem em duas escalas, assume-se que $\bar{\varepsilon}$ possa ser representado por uma série de potências do campo magnético de grande escala (Moffatt, 1978),

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = & \alpha_{ij}(\hat{\mathbf{g}}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}, \bar{\mathbf{B}}, \dots) \bar{B}_j + \beta_{ijk}(\hat{\mathbf{g}}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}, \bar{\mathbf{B}}, \dots) \frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_k} + \\ & \gamma_{ijkl}(\hat{\mathbf{g}}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}, \bar{\mathbf{B}}, \dots) \frac{\partial^2 \bar{B}_j}{\partial x_k \partial x_l} + \dots, \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde os coeficiente $\alpha_{ij}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijkl}, \dots$ são pseudo tensores (ε é um vetor polar, enquanto $\bar{\mathbf{B}}$ é um vetor axial) e referem-se aos coeficientes de transporte turbulento. Eles dependem da estratificação, $\hat{\mathbf{g}}$, da velocidade angular, $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$, e do campo magnético de escala global, $\bar{\mathbf{B}}$ (Brandenburg and Subramanian, 2005).

Primeiramente, analisa-se apenas o termo de primeira ordem.

$$\alpha_{ij} = \alpha_1 \delta_{ij} \hat{\mathbf{g}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} + \alpha_2 \hat{g}_i \hat{\Omega}_j + \alpha_3 \hat{g}_j \hat{\Omega}_i. \quad (2.20)$$

É possível ver que o termo $\hat{\mathbf{g}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}} = \cos \theta$ leva à dependência cossenoidal de α com a latitude, θ , e há uma mudança de sinal no equador (Brandenburg and Subramanian, 2005). Fisicamente, os coeficientes α_{ij} representam a helicidade dos ciclones que são produzidos pela ação da força de Coriolis. Tal evento tende a distorcer as linhas de campo \mathbf{B} , como indicado na Figura 5.

Termos adicionais que são não lineares em $\hat{\mathbf{g}}$ ou $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ entram na equação somente se a estratificação for grande ou se o objeto estiver girando rapidamente (Brandenburg and Subramanian, 2005).

Agora, considerando o segundo termo presente na série (2.19) (os termos de ordem superior a esta apresentam pouca influência e podem ser desprezados), supondo que o campo \mathbf{u} é isotrópico, acredita-se que β_{ijk} também é isotrópico (Moffatt, 1978), então

$$\beta_{ijk} = \beta \epsilon_{ijk}, \quad (2.21)$$

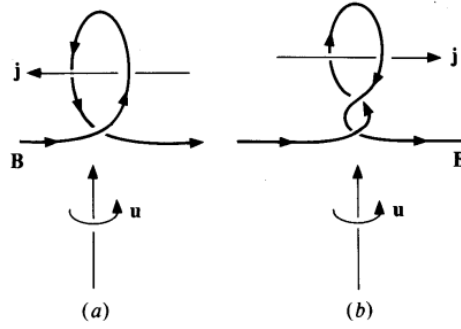


Figura 5 – Campo sendo distorcido por um evento turbulento (cyclone). Em (a) o laço é torcido por um ângulo de $\pi/2$ e a corrente associada está na direção oposta a \mathbf{B} ; em (b), o ângulo de torção é $3\pi/2$ e a corrente tem a mesma orientação de \mathbf{B} . Fonte: Moffatt, 1978.

onde β é um escalar e ϵ_{ijk} é um tensor de permutação. A parte referente à segunda ordem da Equação (2.19) torna-se:

$$\epsilon_i^{(1)} = -\beta \nabla \times \bar{\mathbf{B}} = -\beta \mu_0 \bar{\mathbf{J}}, \quad (2.22)$$

onde é possível ver que este termo ($\epsilon_i^{(1)}$) afeta a difusividade magnética. Porém é preciso calcular esses coeficientes explicitamente para obter uma forma final para a Equação (2.17).

Analisa-se, então, a Equação (2.18), que mostra a evolução das flutuações do campo. Uma primeira aproximação a se fazer é eliminar o termo $\mathbf{u} \times \mathbf{b}$ por ser uma flutuação não linear. Isso pode ser feito apenas se as flutuações forem pequenas e, somente sob algumas circunstâncias, é uma boa aproximação, por exemplo, se \mathbf{R}_m for pequeno. Portanto, termos que correspondam a flutuações não lineares ou não representem grandezas flutuantes, como $\bar{\epsilon}$, são desprezados. O termo que carrega $\bar{\mathbf{U}}$ é desprezado, pois este só seria relevante em casos com forte cisalhamento, que geraria um novo efeito de dínamo, chamado efeito “corrente de cisalhamento” (Brandenburg and Subramanian, 2005). O termo $\nabla \times (\mathbf{u} \times \bar{\mathbf{B}})$ na Equação (2.18) age como um gerador do campo da flutuação \mathbf{b} . Se supormos $\mathbf{b} = 0$ em um instante inicial $t = 0$, a derivada temporal de \mathbf{b} também desaparece, restando:

$$\eta \nabla^2 \mathbf{b} = -\nabla \times (\mathbf{u} \times \bar{\mathbf{B}}). \quad (2.23)$$

A equação acima garante que os campos \mathbf{b} e $\bar{\mathbf{B}}$ são linearmente relacionados. Segue que, da mesma forma, os campos $\bar{\epsilon}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ são linearmente relacionados. No entanto, na maioria dos casos em astrofísica, $\mathbf{R}_m \gg 1$. Em tal situação, pode-se fazer outra aproximação em que o tempo de correlação, τ_{cor} (seria algo como um tempo de resposta, tratado como um parâmetro fenomenológico livre), é pequeno, tal que $\tau_{cor} u_{rms} k_f \ll 1$, onde u_{rms} é a velocidade típica e k_f é o número de onda de correlação (Brandenburg and Subramanian,

2005), ambos associados a um campo aleatório de velocidades \mathbf{u} . Sob essas condições, a razão entre o termo não linear ($\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b})$) e a derivada temporal de \mathbf{b} ($\partial \mathbf{b} / \partial t$) é $\sim (u_{rms} k_f \mathbf{b}) / (\mathbf{b} / \tau_{cor}) = \tau_{cor} u_{rms} k_f \ll 1$, logo pode-se desprezar \mathbf{G} (Brandenburg and Subramanian, 2005). Então, tem-se:

$$\partial \mathbf{b} / \partial t = \nabla \times (\mathbf{u} \times \bar{\mathbf{B}}). \quad (2.24)$$

Para calcular $\bar{\varepsilon}$, deve-se integrar $\partial \mathbf{b} / \partial t$, fazer o produto vetorial com \mathbf{u} e tirar a média:

$$\bar{\varepsilon} = \left\langle \mathbf{u}(t) \times \int_0^t \nabla \times [\mathbf{u}(t') \times \bar{\mathbf{B}}(t')] dt' \right\rangle. \quad (2.25)$$

Utilizando notação indicial, obtém-se:

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t [\hat{\alpha}_{ip}(t, t') B_p(t') + \hat{\eta}_{ilp}(t, t') B_{p,l}(t')] dt', \quad (2.26)$$

onde $\hat{\alpha}_{ip}(t, t') = \epsilon_{ijk} \langle u_j(t) u_{k,p}(t') \rangle$ e $\hat{\eta}_{ilp}(t, t') = \epsilon_{ijp} \langle u_j(t) u_l(t') \rangle$ (a notação do coeficiente de segunda ordem muda de β para η , pois este último incorpora μ_0 . E β é, justamente, relacionado à difusividade magnética). Novamente considerando isotropia, esses tensores devem ser proporcionais aos tensores isotrópicos δ_{ip} e ϵ_{ilp} , respectivamente (Brandenburg and Subramanian, 2005), logo tem-se:

$$\bar{\varepsilon}(t) = \int_0^t [\hat{\alpha}(t-t') \bar{\mathbf{B}}(t') + \hat{\eta}_t(t-t') \bar{\mathbf{J}}(t')] dt', \quad (2.27)$$

onde $\hat{\alpha}(t-t') = -\frac{1}{3} \langle \mathbf{u}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t') \rangle$ e $\hat{\eta}_t(t-t') = \frac{1}{3} \langle \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t') \rangle$ são núcleos integrais e $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ é a vorticidade da velocidade flutuante.

Se $\bar{\mathbf{B}}$ é uma função que varia lentamente no tempo, considera-se que os núcleos integrais são proporcionais à função delta, $\delta(t-t')$ (Brandenburg and Subramanian, 2005), chega-se em:

$$\bar{\varepsilon} = \alpha \langle \bar{\mathbf{B}} \rangle - \eta_t \langle \bar{\mathbf{J}} \rangle, \quad (2.28)$$

com

$$\alpha = -\frac{1}{3} \int_0^t \langle \mathbf{u}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t') \rangle dt' \approx -\frac{1}{3} \tau_{cor} \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle, \quad (2.29)$$

$$\eta_t = \frac{1}{3} \int_0^t \langle \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}(t') \rangle dt' \approx \frac{1}{3} \tau_{cor} \langle \mathbf{u}^2 \rangle. \quad (2.30)$$

onde η_t é a difusividade magnética causada pela turbulência do sistema e α é calculado a partir da helicidade total dos fluxos ciclônicos. Aplicando este resultado à equação de indução do campo magnético de grande escala, (2.16), resulta em:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times [\bar{\mathbf{U}} \times \bar{\mathbf{B}} + \alpha \bar{\mathbf{B}} - (\eta_t + \eta) \bar{\mathbf{J}}]. \quad (2.31)$$

Esta é a equação de indução que formaliza a influência da pequena escala na grande escala (os colchetes que representam as médias espaciais podem ser negligenciados para termos da grande escala, seguindo as regras de Reynolds). O termo η é entendido como a difusividade magnética molecular, enquanto a difusividade total η_T é representada pela soma das duas componentes: $\eta_T = \eta + \eta_t$. A difusividade turbulenta possui um valor muito maior que a molecular ($\eta_t \gg \eta$). Portanto, $\eta_T \sim \eta_t$ (Kitiashvili and Kosovichev, 2009).

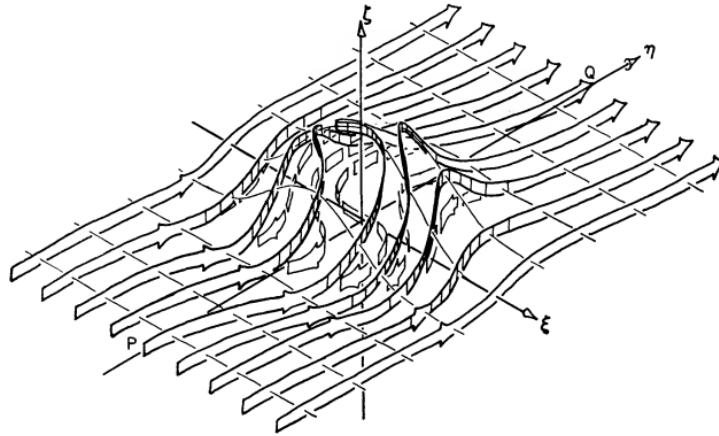


Figura 6 – Deformação do campo toroidal em uma região pela ação de movimentação ciclônica do fluido. Fonte: Parker, 1955b.

Como foi visto na Seção 2.2, a geração de um campo toroidal através de um poloidal pode ser facilmente compreendida, porém, para que o inverso ocorra, é necessário incluir forças indutivas provenientes de movimentos turbulentos. O efeito α é capaz de deformar as linhas do campo magnético toroidal, como representado na Figura 6, fazendo com que elas emirjam em direção a superfície e comecem a se torcer até arrebentarem (este assunto será melhor abordado na Seção 2.5) e se reconectem novamente na direção poloidal, com polaridade oposta à que tinha no início do ciclo.

2.4 Modelos de dínamo

Nesta seção investiga-se algumas soluções analíticas para a equação (2.31). Os dinamos α^2 e $\alpha\Omega$ são modelos a serem analisados, onde algumas aproximações são realizadas. O primeiro despreza o efeito Ω , sendo possível observar que o efeito α consegue

regenerar o campo em ambas as direções. O segundo é um modelo em que leva-se em consideração o efeito Ω , responsável pela regeneração do campo toroidal graças à rotação diferencial, e o efeito α produzindo a reação complementar (Brandenburg and Subramanian, 2005). A Figura 7 esquematiza os processos de regeneração dos dois modelos.

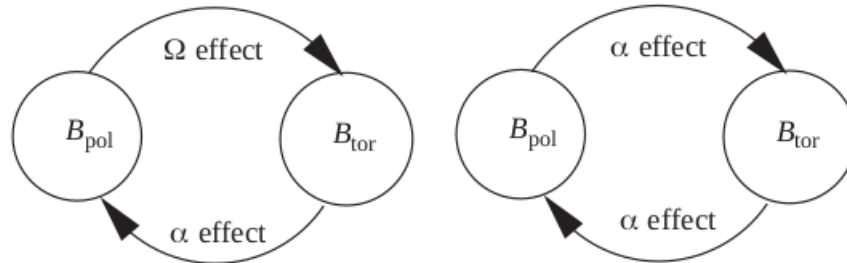


Figura 7 – Regeneração dos campos poloidais e toroidais do dínamo $\alpha\Omega$, à esquerda, e do dínamo α^2 , à direita. Fonte: Figura adaptada de Brandenburg and Subramanian, 2005.

O dínamo $\alpha^2\Omega$ é um modelo completo, onde os dois efeitos são utilizados para a formação do campo toroidal. Ele é discutido na Seção 2.4.2.

Para descrever o campo magnético de larga escala é possível escolher um sistema de coordenadas cartesianas local ao invés de coordenadas esféricas, como mostrado na Figura 8 (Parker, 1955b). O eixo z representa a coordenada radial (r), o eixo x é a colatitude (θ) e o eixo y a coordenada azimutal (ϕ).

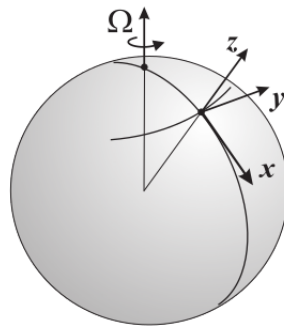


Figura 8 – Sistema de referência local em coordenadas cartesianas. Figura extraída de Kitiashvili and Kosovichev (2009).

Em todos os casos, propõem-se soluções para a equação diferencial do tipo:

$$\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{X} - \omega t)}, \quad (2.32)$$

onde \mathbf{k} é um vetor de onda, \mathbf{X} é um vetor espacial, ω a frequência angular e t o tempo. $\tilde{\mathbf{B}}$ é um parâmetro que determina a amplitude máxima da solução.

2.4.1 Dínamo α^2

Ao supor $\bar{\mathbf{U}} = 0$, torna-se possível desprezar a ação do efeito Ω e considerar a turbulência aproximadamente homogênea. Logo α e η_T são escalares (Brandenburg and Subramanian, 2005). A Equação (2.31) torna-se:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \alpha \nabla \times \bar{\mathbf{B}} + \eta_T \nabla^2 \bar{\mathbf{B}}. \quad (2.33)$$

Aplicando a solução (2.32) e definindo $\lambda \equiv -i\omega$, chega-se a um problema de autovalor. Sabendo que $\nabla \times \bar{\mathbf{B}} = i\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{B}}$ e $\nabla^2 \bar{\mathbf{B}} = -k^2 \bar{\mathbf{B}}$, obtém-se:

$$\lambda \bar{\mathbf{B}} = \alpha i\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{B}} - \eta_T k^2 \bar{\mathbf{B}}, \quad (2.34)$$

onde k é um número de onda associado ao vetor de onda e é definido como $|\mathbf{k}| \equiv k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. O problema pode ser escrito na forma matricial:

$$\lambda \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -\eta_T k^2 & -i\alpha k_z & i\alpha k_y \\ i\alpha k_z & -\eta_T k^2 & -i\alpha k_x \\ -i\alpha k_y & i\alpha k_x & -\eta_T k^2 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{B}}. \quad (2.35)$$

As soluções fornecem as seguintes relações de dispersão para o problema:

$$\lambda_0 = -\eta_T k^2, \quad \lambda_{\pm} = -\eta_T k^2 \pm \alpha k. \quad (2.36)$$

O autovalor λ_0 cria uma inconsistência nas autofunções do problema. É possível observar que a helicidade, α , não aparece nessa solução, o que indica apenas a presença de um termo dissipativo do efeito α , portanto essa solução é descartada. As outras duas soluções são representadas na Figura 9, normalizadas por um k crítico, k_c , tal que $k_c = \frac{\alpha}{\eta_T}$.

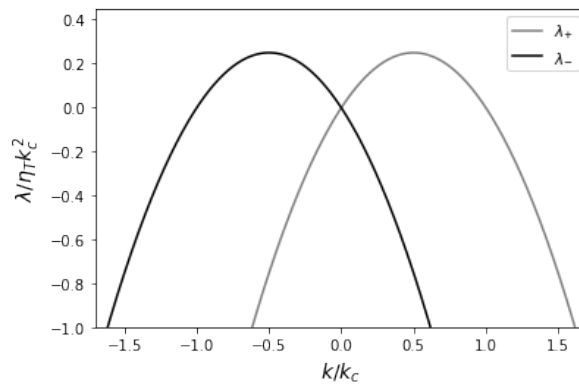


Figura 9 – Relação de dispersão do dínamo α^2

Cada curva se diferencia pelo sinal de α . Em λ_+ , $\alpha > 0$ e analogamente, para λ_- , $\alpha < 0$. O autovalor λ é crescente até $k = \frac{1}{2}k_c$ e até $k = -\frac{1}{2}k_c$, respectivamente. Após esse valor, torna-se decrescente.

Lembrando que existem termos que foram desprezados na Equação (2.19) (Moffatt, 1978), a equação de indução poderia tornar-se:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \alpha \nabla \times \bar{\mathbf{B}} - \eta_T \nabla^2 \bar{\mathbf{B}} + \gamma \nabla \times \nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{B}} - \dots, \quad (2.37)$$

com autovalor

$$\lambda = \alpha k - \eta_T k^2 + \gamma k^3 - \dots, \quad (2.38)$$

por exemplo, mas como, em geral, $k \ll 1$ (no caso do Sol, já que o número de onda k provém de campos de grande escala), esses termos são desprezados.

Analisando as soluções em que $k = k_c$, observa-se que:

$$\frac{\lambda_{\pm}}{\eta_T k_c^2} = -1 \pm C_{\alpha}, \quad (2.39)$$

onde define-se $C_{\alpha} \equiv \alpha / \eta_T k_c$. Soluções estáveis são produzidas a partir de $C_{\alpha} = \pm 1$ (respeitando o sinal de λ_{\pm}). Enquanto as demais soluções são ditas instáveis, tal que $\lambda_{\pm} < 0$ produz campos amortecidos e $\lambda_{\pm} > 0$, campos supercríticos que crescem exponencialmente.

2.4.2 Dínamos $\alpha^2 \Omega$ e $\alpha \Omega$

Agora, incluindo o efeito Ω considera-se $\bar{\mathbf{U}} = (0, Sx, 0)$ onde $S = r \frac{\partial \Omega}{\partial r}$ é uma constante (Brandenburg and Subramanian, 2005). A equação de indução para o campo da grande escala retorna o seguinte problema de autovalor:

$$\lambda \bar{\mathbf{B}} = S B_x \hat{\mathbf{e}}_y + \alpha i \mathbf{k} \times \bar{\mathbf{B}} - \eta_T k^2 \bar{\mathbf{B}}. \quad (2.40)$$

Para manter a simetria em relação ao eixo y , considera-se $k_y = 0$. A forma matricial do problema torna-se:

$$\lambda \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -\eta_T k^2 & -i\alpha k_z & 0 \\ i\alpha k_z + S & -\eta_T k^2 & -i\alpha k_x \\ 0 & i\alpha k_x & -\eta_T k^2 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{B}}, \quad (2.41)$$

e as soluções são:

$$\lambda_0 = -\eta_T k^2, \quad (2.42)$$

$$\lambda_{\pm} = -\eta_T k^2 \pm \sqrt{\alpha^2 k^2 - i\alpha S k_z}. \quad (2.43)$$

Novamente, a solução (2.42) é descartada por causar inconsistência, e apenas os autovalores em (2.43) são considerados. Esta é a solução completa para o dínamo $\alpha^2\Omega$. Para a análise do dínamo $\alpha\Omega$ realiza-se a aproximação $S \gg \alpha$, dessa forma é possível eliminar o termo $\alpha^2 k^2$ dentro da raiz. Este termo surge graças à força eletromotriz que descreve o efeito α (2.28), sendo ele o responsável pela regeneração do campo toroidal (no dínamo $\alpha\Omega$, somente o efeito Ω cumpre esse papel). Logo é possível supor que o termo seguinte ($-i\alpha S k_z$) refere-se ao efeito Ω , já que ele surge depois de incluir a rotação diferencial no problema. Para exibir o comportamento dessas soluções é preciso separar a parte real e a parte imaginária, então as relações para o dínamo $\alpha\Omega$ são:

$$Re \lambda_{\pm} = -\eta_T k^2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}\alpha S k_z}, \quad (2.44)$$

$$Im \lambda_{\pm} \equiv \omega_{cyc} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}\alpha S k_z}. \quad (2.45)$$

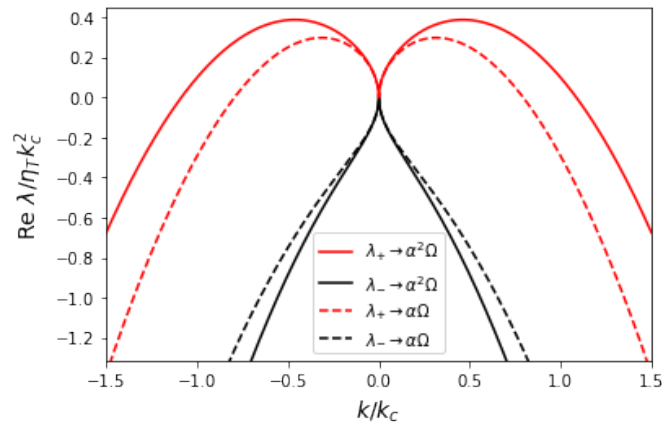


Figura 10 – Parte real da relação de dispersão dos dínamo $\alpha^2\Omega$ e $\alpha\Omega$

A comparação entre os dois modelos de dínamo está representada nas figuras (10) e (11), onde utiliza-se $\alpha k_c/S = 0.35$, de acordo com Brandenburg and Subramanian (2005). Como $k_y = 0$, já que são procurados campos axissimétricos, o vetor de onda \mathbf{k} pode ser representado como $\mathbf{k}^2 = k_x^2 + k_z^2$, mas os valores de k_x e k_z não são previamente conhecidos, então assume-se, por simplicidade, que $k_z = 0.35k$ (este valor é apenas um palpite utilizado para eliminar a dependência de k_z das soluções, não tendo relação com o valor de $\alpha k_c/S$, visto que k_z é uma fração de k).

O dínamo $\alpha\Omega$ é, em geral, uma boa aproximação para estrelas parecidas com o Sol e é utilizado por diversos autores (Kitiashvili, 2016; Kitchatinov et al., 2018; Karak

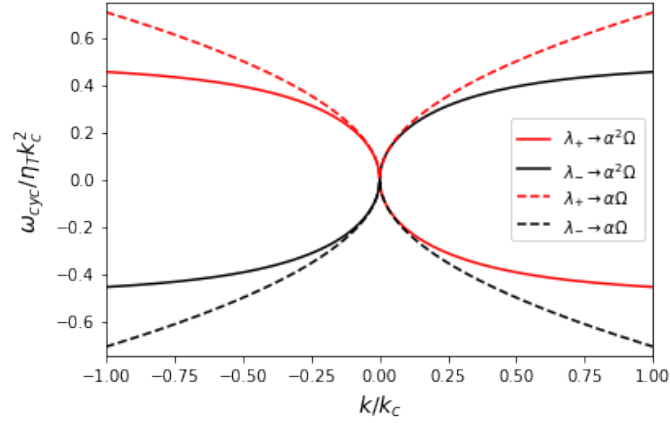


Figura 11 – Parte imaginária da relação de dispersão dos dínamo $\alpha^2\Omega$ e $\alpha\Omega$

et al., 2019) em simulações de duas ou três dimensões, para modelar o comportamento do ciclo, assim como a migração latitudinal do cinturão de atividade magnética. É possível investigar a solução crítica em que $k = k_c$ para este modelo. A equação ainda possui dependência de k_z , logo, escolhe-se outro valor que simplifique a análise. Dessa vez, $k_z = k$. O resultado é:

$$\frac{\lambda_{\pm}}{\eta_T k_c^2} = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}D}. \quad (2.46)$$

Agora, define-se $D \equiv \alpha S / \eta_T^2 k_c^3$. As soluções são estáveis para $D = 2$. As instabilidades são geradas caso $D < 2$, gerando um campo amortecido e caso $D > 2$, produzindo campos supercríticos. De acordo com Brandenburg and Subramanian (2005), o período de oscilação desse dínamo é proporcional à $D^{\frac{1}{2}}$.

As soluções para o dínamo $\alpha^2\Omega$ são complicadas de analisá-las analiticamente. Portanto, neste trabalho, apenas métodos numéricos são utilizados para resolvê-lo.

2.5 Equações Dinâmicas Para α

A maior dificuldade no modelo não linear de dínamo é entender o efeito α , principalmente porque a reação inversa do crescimento do campo magnético não é bem compreendida. Se a ação do dínamo for suficientemente forte, uma onda de dínamo se propagando em algum lugar dentro da zona convectiva é excitada (Kleeorin and Rogachevskii, 1999), o que pode causar um crescimento exponencial do campo, ou na situação contrária, quando a ação do dínamo é fraca, um decaimento do campo. Portanto, uma tentativa de incorporar essa reação no efeito α é multiplicar α_k por uma função de amortecimento do

campo:

$$\alpha = \alpha_K f_q(\bar{B}), \quad (2.47)$$

onde α_K pode ser escrito como:

$$\alpha_K = -\frac{1}{3}\tau \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle, \quad (2.48)$$

onde $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ é a vorticidade da pequena escala e

$$f_q = \left(1 + a \frac{\bar{\mathbf{B}}^2}{B_{eq}^2} \right)^{-1}, \quad (2.49)$$

é uma função Lorentziana que pode causar o amortecimento de α , confinando a amplitude do campo entre valores determinados por a e B_{eq} . O termo a é um parâmetro adimensional e B_{eq} é o campo de equipartição, dado por $B_{eq} = (\mu_0 \rho \langle \mathbf{u}^2 \rangle)^{\frac{1}{2}}$, sendo ρ a densidade do meio (Guerrero et al., 2010). Declarando o valor de $a = 1$, o campo de equipartição limita o crescimento do campo e determina sua amplitude máxima, como demonstrado na Figura 12. Porém, estudos de Vainshtein and Cattaneo (1992) sugerem que ele deva ser da ordem do número de Reynolds magnético, que pode ser definido como $R_m = \eta_t / \eta$, de acordo com Kleorin et al. (2003). No Sol, estima-se que esse número seja da ordem de 10^9 , o que causaria um evento denominado “amortecimento catastrófico”, em que o campo magnético é completamente amortecido muito rapidamente. Esta situação exemplifica-se na Figura 13.

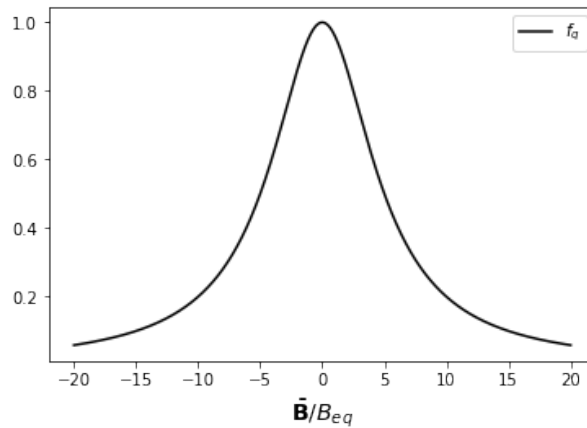


Figura 12 – Função lorentziana utilizando $a = 1$ e $B_{eq} = 5$. O termo B_{eq} marca o ponto de saturação do campo.

O tipo de amortecimento descrito é chamado amortecimento algébrico e foi obtido sob a suposição de que o sistema está em estado estacionário, no entanto essa é uma suposição errada. Como demonstrado por Pouquet et al. (1976), a helicidade magnética é

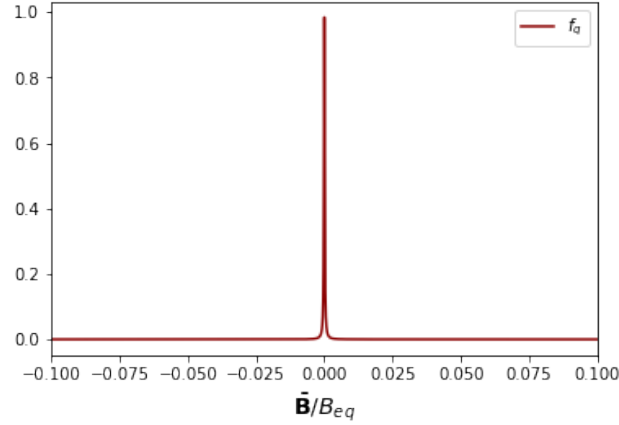


Figura 13 – Função lorentziana utilizando $a = 10^9 \sim R_m$ e $B_{eq} = 5$. O amortecimento catastrófico do efeito α não permite que o campo magnético cresça.

proporcional a elementos da pequena escala do sistema e desde que ela seja introduzida na conta, o amortecimento de α torna-se dependente do tempo. A contribuição da helicidade magnética é dada através do termo α_M descrita como (a subseção seguinte contém a origem física deste termo):

$$\alpha_M = \frac{1}{3}\tau \frac{\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{b} \rangle}{\rho}, \quad (2.50)$$

o efeito α total é a soma das contribuições cinética e magnética:

$$\alpha = \alpha_K + \alpha_M. \quad (2.51)$$

Os resultados apresentados no decorrer deste trabalho evidenciam a necessidade de investigar a coerência das soluções e melhorar esses modelos. Uma tentativa realizada é utilizar um mecanismo de saturação mais realista ao incluir uma equação para a evolução da helicidade magnética. Este assunto será abordado com mais detalhes na seção seguinte.

2.5.1 Conservação da Helicidade Magnética

A densidade de helicidade magnética $\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle$ é uma grandeza fundamental em MHD, que se conserva no limite em que a condutividade elétrica do meio vai ao infinito (Kleeorin and Rogachevskii, 1999). O termo \mathbf{A} é um potencial vetorial associado a \mathbf{B} , tal que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Utilizando a Equação (2.31), é possível escrever a equação que descreve a evolução de \mathbf{A} :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{U} \times \mathbf{B} - \eta \mu_0 \mathbf{J} - \nabla \psi, \quad (2.52)$$

onde ψ é o potencial eletrostático, que pode ser escolhido arbitrariamente sem afetar o campo magnético ou a helicidade magnética (Blackman and Brandenburg, 2002). Ainda, de acordo com (2.4), é possível observar que:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{E} - \nabla \psi. \quad (2.53)$$

Dessa forma é possível definir a helicidade magnética, H , como a integral da quantidade $\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle$ sob um volume fechado, tal que $H = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV$. Entende-se por volume fechado uma região que contém todas as linhas de campo magnético. A interpretação física deste termo pode se dar em termos de ligação e torção de tubos de fluxos isolados, como pode ser visto na Figura 14, onde estão representados dois fluxos, φ_1 e φ_2 , dentro dos tubos C_1 e C_2 , respectivamente. A helicidade, então, é representada por $H = +2\varphi_1\varphi_2$ (Brandenburg and Subramanian, 2005). Mudando a orientação dos fluxos, o sinal de H pode mudar.

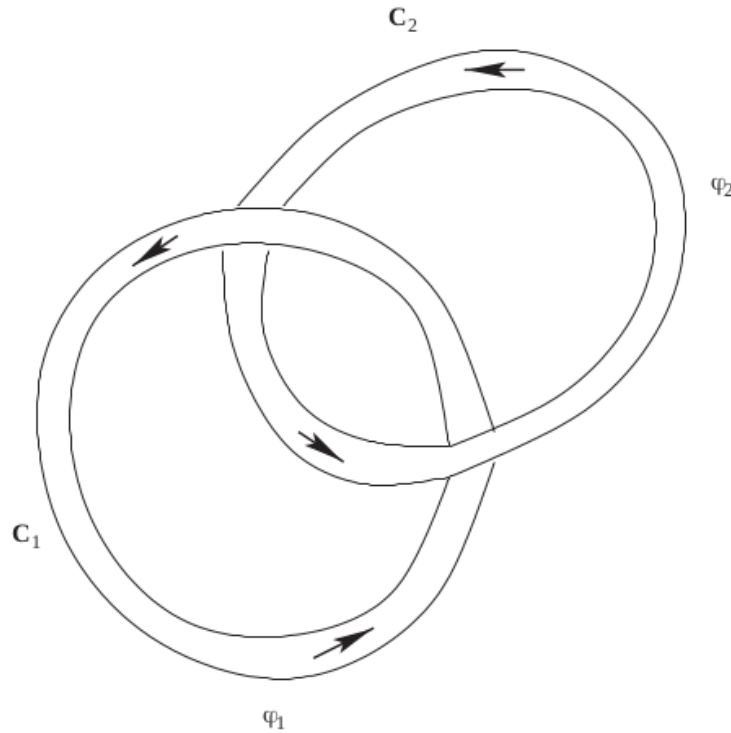


Figura 14 – Dois tubos de fluxo φ_1 e φ_2 sendo ligados, com helicidade $H = 2\varphi_1\varphi_2$. Fonte: Brandenburg and Subramanian, 2005.

Ao aplicar a regra do produto, a evolução da densidade de helicidade magnética, $\partial \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle / \partial t$, ela pode ser descrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle = -2\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathcal{F}, \quad (2.54)$$

onde

$$\mathcal{F} = \mathbf{E} \times \mathbf{A} + \psi \mathbf{B}, \quad (2.55)$$

é um termo de fluxo (Guerrero et al., 2010). Então, a helicidade magnética evolui como (Blackman and Brandenburg, 2002; Brandenburg et al., 2009; Mitra et al., 2010):

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle = -2\eta\mu_0 \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \rangle - \nabla \cdot \mathcal{F}. \quad (2.56)$$

Fazendo a mesma separação de variáveis feita na Seção 2.3 entre a grande e a pequena escala, a Equação (2.56) torna-se

$$\frac{d}{dt} \langle (\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{a}) \cdot (\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{b}) \rangle = -2\eta\mu_0 \langle (\bar{\mathbf{J}} + \mathbf{j}) \cdot (\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{b}) \rangle - \nabla \cdot \mathcal{F}, \quad (2.57)$$

e pode ser separada entre a helicidade da escala global e das flutuações:

$$\frac{d}{dt} \langle \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \rangle = 2 \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \rangle - 2\eta\mu_0 \langle \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \rangle - \nabla \cdot \bar{\mathcal{F}} \quad (2.58)$$

e

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle = 2 \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \rangle - 2\eta\mu_0 \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{b} \rangle - \nabla \cdot \bar{\mathcal{F}}_\alpha, \quad (2.59)$$

onde

$$\bar{\mathcal{F}} = \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{A}} + \psi \bar{\mathbf{B}}, \quad (2.60)$$

$$\bar{\mathcal{F}}_\alpha = \mathbf{e} \times \mathbf{a} + \psi \mathbf{b}, \quad (2.61)$$

e \mathbf{e} é a componente em pequena escala do campo elétrico \mathbf{E} (Mitra et al., 2010). O termo $\bar{\mathcal{F}}$ pode ser calculado explicitamente em termos dos campos médios (grande escala). No entanto, a Equação (2.59) possui uma propriedade de não quebrar a simetria em nenhuma das direções (Blackman and Brandenburg, 2002), que significa que $\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle$ é uma quantidade conservada e pode ser acoplada às equações de campo médio através de uma contribuição ao efeito α (Mitra et al., 2010). Porém, o termo $\bar{\mathcal{F}}_\alpha$ não é tão claro e levou a diversos autores, como exemplo Vishniac and Cho (2001) e Subramanian and Brandenburg (2004), a fornecerem diferentes abordagens a esse fluxo. Um exemplo é que ele pode ser entendido como a eliminação explícita de helicidade magnética, em processos de ejeção de massa coronal (Guerrero et al., 2010). Aqui, a abordagem do problema pode ser assimilada como um processo de difusão de helicidade magnética. Considerando que ele ocorra nas proximidades do equador, o fluxo do efeito α magnético, relacionado à pequena escala, pode ser retratado como uma difusão de Fick (processo no qual existem gradientes

de concentração de uma grandeza e se produz um fluxo que tende a homogenizar esta concentração) e descrito em termos do gradiente da helicidade magnética, $\nabla\alpha_M$ (Mitra et al., 2010),

$$\bar{\mathcal{F}}_\alpha = -\kappa_\alpha \nabla\alpha_M, \quad (2.62)$$

onde κ_α é um coeficiente de difusão efetivo.

Agora, para chegar a uma forma final da evolução da helicidade magnética, define-se $\eta_t = \frac{1}{3}\tau \langle \mathbf{u}^2 \rangle$ para eliminar o tempo τ da Equação (2.50). Sabendo que $B_{eq} = (\mu_0 \rho \langle \mathbf{u}^2 \rangle)^{\frac{1}{2}}$, obtém-se:

$$\alpha_M = \frac{\mu_0 \eta_t}{B_{eq}^2} \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{b} \rangle. \quad (2.63)$$

Como $\mathbf{j} = (\nabla \times \mathbf{b}) / \mu_0$ e $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$ é possível relacionar a Equação (2.63) com $\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle$ por um fator k_f^2 em que k_f é um número de onda característico das flutuações de pequena escala (Blackman and Brandenburg, 2002):

$$\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rangle = \frac{\mu_0 \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{b} \rangle}{k_f^2} = \frac{\alpha_M B_{eq}^2}{k_f^2 \eta_t}. \quad (2.64)$$

Substituindo as Equações (2.63) e (2.64) em (2.59) chega-se à equação de evolução de α_M :

$$\frac{d\alpha_M}{dt} = -2\eta_t k_f^2 \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon} \cdot \bar{\mathbf{B}} \rangle}{B_{eq}^2} + \frac{\alpha_M}{R_m} \right) - \nabla \cdot \bar{\mathcal{F}}_\alpha. \quad (2.65)$$

Empregando o valor de $\bar{\varepsilon}$, deduzido em (2.28), a equação torna-se:

$$\frac{d\alpha_M}{dt} = -2\eta_t k_f^2 \left(\frac{\alpha \langle \bar{\mathbf{B}}^2 \rangle - \eta_t \mu_0 \langle \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \rangle}{B_{eq}^2} + \frac{\alpha_M}{R_m} \right) - \nabla \cdot \bar{\mathcal{F}}_\alpha. \quad (2.66)$$

A helicidade magnética ainda possui dependência em relação ao número magnético de Reynolds e é proporcional a R_m^{-1} podendo decair para altos valores de R_m e quando há ausência de fluxo ($\bar{\mathcal{F}}_\alpha = 0$), extinguindo a ação do dínamo.

O problema, então, consiste em resolver a Equação (2.31) junto com a Equação (2.66). As soluções analíticas dessas equações são complicadas, portanto, torna-se necessário procurar soluções numéricas. O capítulo seguinte contém as soluções para os modelos com amortecimento algébrico, assim como o amortecimento dinâmico de α .

3 Modelo Unidimensional

O modelo de dínamo é transformado em um sistema dinâmico unidimensional, propagando-se latitudinalmente em um dado raio (Kitiashvili, 2016). Para isso, o campo médio $\bar{\mathbf{B}}$ é representado como a soma de uma componente toroidal e outra poloidal, como realizado anteriormente na Seção 2.2 (na ocasião, a separação foi realizada para o campo total \mathbf{B}), logo, utilizando o sistema de coordenadas da Figura 8, $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}}_y + \bar{\mathbf{B}}_p$.

Um potencial vetorial com coordenada não nula apenas na direção y , $\bar{\mathbf{A}} = (0, A, 0)$, é associado ao campo magnético poloidal, tal que $\bar{\mathbf{B}}_p = \nabla \times \bar{\mathbf{A}}$, lembrando que o sistema de coordenadas utilizado possui z como coordenada radial, x como colatitude e y como coordenada azimutal. Substituindo esses termos na equação de indução para o campo médio (2.31) e considerando a velocidade de rotação com cisalhamento $\bar{\mathbf{U}} = (0, Sx, 0)$, o modelo pode ser representado por um sistema de equações acopladas. Note que, por simplicidade, despreza-se as componentes correspondentes à circulação meridional no campo de velocidades. Essas componentes podem ser importantes para modelos como o dínamo de transporte de fluxo “Babcock-Leighton” (Dikpati and Charbonneau, 1999).

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_y}{\partial t} = S \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_y - \alpha \nabla^2 \bar{\mathbf{A}} + \eta_T \nabla^2 \bar{\mathbf{B}}_y, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t} = \alpha \bar{\mathbf{B}}_y + \eta_T \nabla^2 \bar{\mathbf{A}}, \quad (3.2)$$

onde $S = z \frac{\partial \Omega}{\partial z}$.

Considerando um único modo de Fourier propagando na direção x , assumem-se as seguintes soluções (Kitiashvili and Kosovichev, 2009):

$$\bar{\mathbf{B}}_y = B \hat{\mathbf{e}}_y = [B_t(t) e^{ik_m x}] \hat{\mathbf{e}}_y \quad (3.3)$$

e

$$\bar{\mathbf{A}} = A \hat{\mathbf{e}}_y = [A_t(t) e^{ik_m x}] \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (3.4)$$

onde $B_t(t)$ e $A_t(t)$ são as partes temporais das soluções e k_m é o número de onda característico da grande escala (Blackman and Brandenburg, 2002). Sabendo que $\partial A / \partial x = ik_m A$ e $\nabla^2 A = k_m^2 A$ (análogo para B), o sistema de equações torna-se:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = ik_m S A + \alpha k_m^2 A - \eta_T k_m^2 B, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B - \eta_T k_m^2 A. \quad (3.6)$$

Para resolver o problema numericamente, normaliza-se as equações de tal forma que as variáveis do problema tornem-se adimensionais. Para isso, são feitas as seguintes substituições: $B = B_0 B'$, $A \simeq \frac{B_0 A'}{k_1}$, $t = t'/\eta_T k_1^2$, onde k_1 é o número de onda de normalização e refere-se ao menor k possível para o sistema, sendo da mesma ordem de k_m , o que permite realizar a aproximação $k_1 \approx k_m$ (Brandenburg, 2001; Blackman and Brandenburg, 2002). O termo t , no lado esquerdo da equação, possui unidades físicas, enquanto t' tem unidades de código e $1/\eta_T k_1^2$ tem unidades físicas e é o fator de normalização do tempo. A mesma ideia aplica-se à B e A . Por simplicidade, a notação $'$ é abandonada e as equações equivalem a:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = iC_\Omega A + C_\alpha A - B, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = C_\alpha B - A, \quad (3.8)$$

onde $C_\Omega = S/\eta_T k_1^2$ e $C_\alpha = \alpha/\eta_T k_1$ são conhecidos como os coeficientes de dínamo, e medem a eficiência do efeito Ω e do efeito α , respectivamente, em relação à difusividade turbulenta, η_t (Brandenburg and Subramanian, 2005). As soluções do dínamo α^2 são guiadas pelo coeficiente C_α e não apresentam comportamento oscilatório. A solução crítica é observada em $C_\alpha = 1$ e, analogamente, para $C_\alpha > 1$ o campo cresce e para $C_\alpha < 1$ o campo decai (Figura 15). Observa-se um comportamento semelhante para A , que é relacionado ao campo poloidal por uma fator k_1 ($B_p \approx \pm k_1 A$). Nos modelos oscilatórios, a amplitude do campo toroidal é maior que a amplitude do campo poloidal.

Existe outra constante adimensional, obtida através da multiplicação dos coeficiente anteriores, $D = C_\alpha C_\Omega$, denominado número de dínamo. As soluções são controladas por essa constante desde que $|C_\Omega| \gg C_\alpha$ (Brandenburg and Subramanian, 2005). Ao variar o valor de D , altera-se o comportamento das soluções nos dínamos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$. Se $D = 2$, é obtida a solução crítica do problema, os campos são oscilatórios e com amplitude constante. Caso $D > 2$, a solução cresce exponencialmente e para $D < 2$, o campo difunde. Tal situação é exemplificada na Figura 15 para cada modelo. As análises numéricas dos coeficientes C_α e D concordam com as soluções analíticas de duzidas na Seção 2.4, indicando que o modelo numérico funciona corretamente.

As diferenças entre cada modelo manifestam-se na equação da evolução de B , onde, no dínamo α^2 não há ação do efeito Ω . Então atribui-se $C_\Omega = 0$ à Equação (3.7):

$$\frac{\partial B}{\partial t} = C_\alpha A - B, \quad (3.9)$$

e no dínamo $\alpha\Omega$, não há produção de campo toroidal pelo efeito α , portanto:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = iC_\Omega A - B. \quad (3.10)$$

As simulações precisam de valores iniciais para começarem a rodar, onde são utilizados $B_0 = 0.0$ para o campo B e $A_0 = 1.0 \times 10^{-6}$ para A .

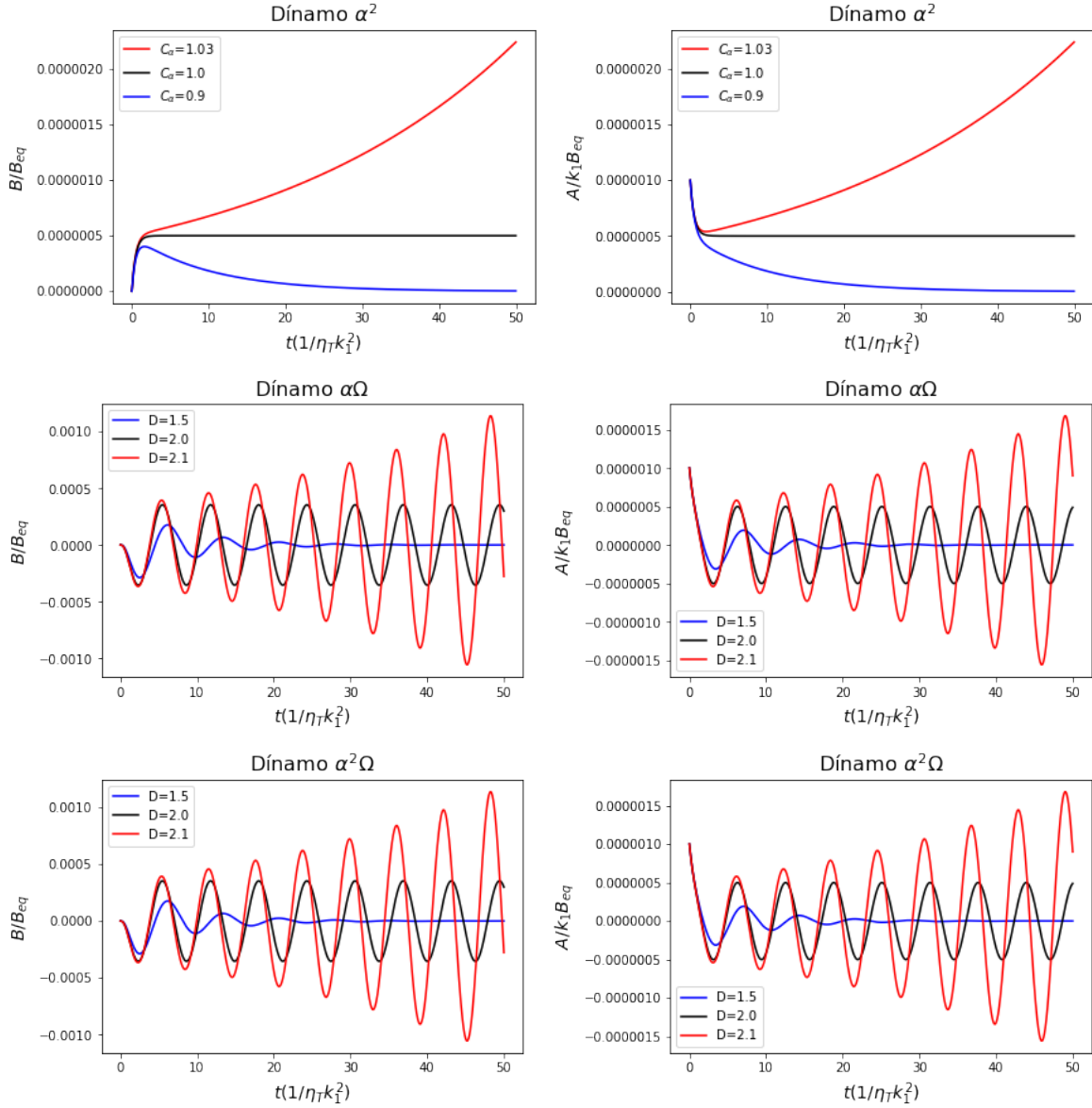


Figura 15 – Evolução do campo toroidal B (esquerda) e do campo poloidal A (direita) ao longo do tempo, com diferentes valores de C_α para o dínamo α^2 , e diferentes valores de D para os dínamos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$, com $C_\Omega = 1000$.

Na Figura 16 é retratado o diagrama de fases para as soluções críticas dos modelos oscilatórios. Os campos toroidal e poloidal possuem as fases deslocadas por aproximadamente $\pi/2$. Nestas simulações, os dínamos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$ possuem um comportamento idêntico na solução crítica.

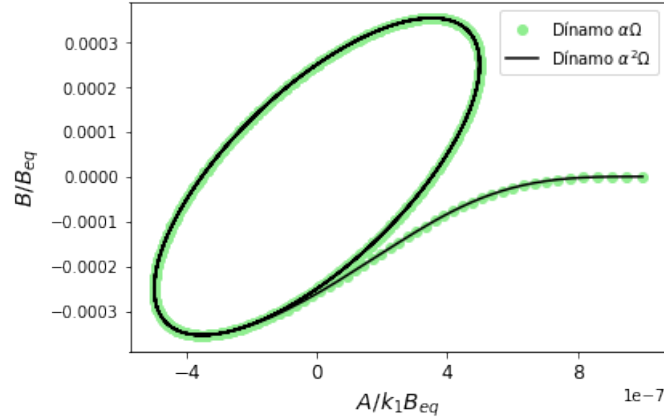


Figura 16 – Diagrama de fases para os dínamos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$ com $D = 2$.

No Sol, espera-se soluções supercríticas, portanto investiga-se os mecanismos de saturação dos campos. Todas as simulações são feitas utilizando a linguagem Fortran 90, utilizando o método Runge–Kutta de 4º ordem como sub-rotina para resolver o sistema de equações diferenciais.

3.1 Saturação Com Amortecimento Algébrico

A saturação com amortecimento algébrico é feita conforme a Equação (2.47). Utiliza-se $a = B_{eq} = 1$ para se observar o comportamento qualitativo desse mecanismo de saturação. O termo α , então, passa a ser representado como $\alpha = \alpha_K / (1 + B^2)$. Logo, este mecanismo entra no sistema de Equações 3.7 e 3.8 através de C_α :

$$C_\alpha \rightarrow C_\alpha \left(\frac{1}{1 + B^2} \right) \quad (3.11)$$

Soluções supercríticas para o dínamo são representados na Figura 17, com diversos valores para D , onde é possível observar que mesmo para valores maiores que 2, os campos saturam e passam a evoluir com uma amplitude constante. De acordo com os gráficos, quanto maior D , maior a amplitude de saturação, além de cada solução possuir uma frequência de oscilação diferente. No dínamo α^2 o valor de saturação do campo também aumenta de acordo com C_α .

Para analisar a diferença de entre as fases do campo poloidal e toroidal, a variável A foi amplificada por um fator de 1000, já que este possui amplitude bem menor do que B (Figura 18). No dínamo $\alpha^2\Omega$, as fases de A e B estão levemente deslocadas.

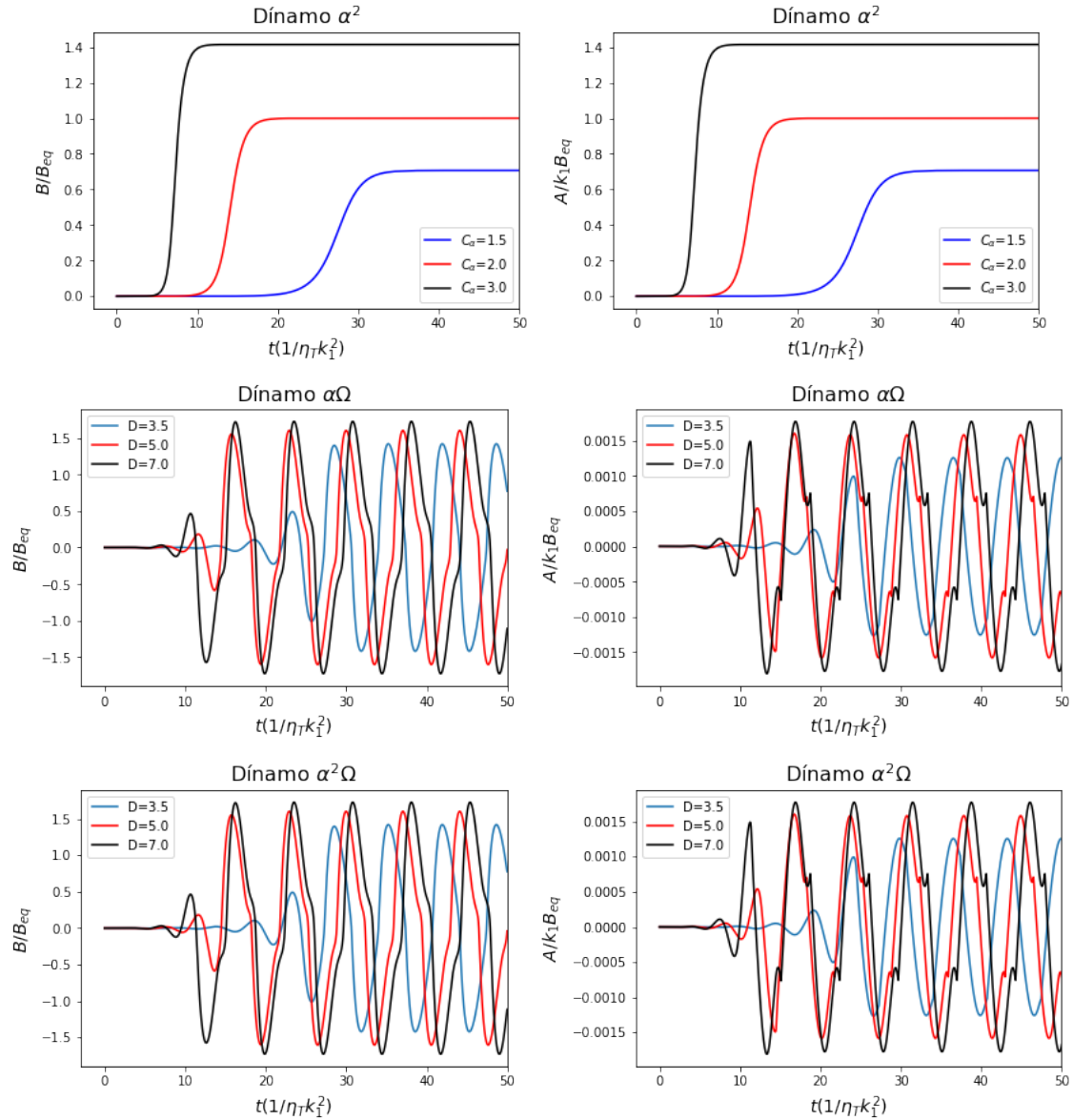


Figura 17 – Evolução do campo toroidal B (esquerda) e do campo poloidal A (direita) ao longo do tempo, utilizando o mecanismo de saturação algébrico, com diferentes valores de C_α para o dínamo α^2 . E diferente valores de D para os dínamos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$, com $C_\Omega = 1000$.

3.2 Saturação Incluindo a Helicidade Magnética

Agora é necessário transportar a Equação (2.66) para as dimensões das variáveis do problema e incluí-la ao sistema de equações a serem resolvidas. O primeiro passo é, novamente, representar o campo médio como $\bar{\mathbf{B}} = B\hat{\mathbf{e}}_y + \nabla \times (A\hat{\mathbf{e}}_y)$. Logo,

$$\bar{\mathbf{B}}^2 = \left[B^2 + 2(B\hat{\mathbf{e}}_y) \cdot (\nabla \times A\hat{\mathbf{e}}_y) + (\nabla \times A\hat{\mathbf{e}}_y)^2 \right]. \quad (3.12)$$

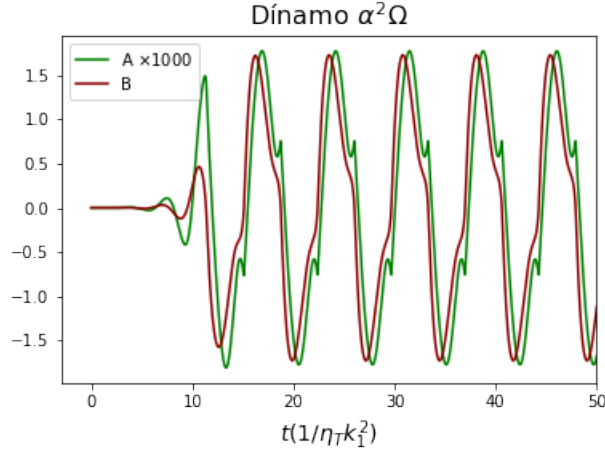


Figura 18 – Evolução do campo toroidal (linha vermelha) e do campo poloidal amplificado por 1000 vezes (linha verde) para o dínamo $\alpha^2\Omega$, com $D = 6.0$.

O termo $(B\hat{\mathbf{e}}_y) \cdot (\nabla \times A\hat{\mathbf{e}}_y)$ iguala-se a zero, pois o primeiro fator do produto escalar possui apenas elementos na direção y , enquanto o segundo, possui elementos nas direções x e z . Considerando que A tem a forma $A = A_t(t)e^{ik_mx}$, o rotacional de $A\hat{\mathbf{e}}_y$ tem o valor

$$\nabla \times A\hat{\mathbf{e}}_y = -\frac{\partial A}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial A}{\partial x}\hat{\mathbf{e}}_z = -ik_zA\hat{\mathbf{e}}_x + ik_xA\hat{\mathbf{e}}_z. \quad (3.13)$$

Ao elevar o resultado acima ao quadrado e, novamente, supondo isotropia ($k_y = 0$) obtém-se

$$(\nabla \times A\hat{\mathbf{e}}_y)^2 = -(k_z^2 + k_x^2)A^2 = -k_m^2A^2, \quad (3.14)$$

onde $k_m^2 = k_x^2 + k_z^2$. Então, o campo médio ao quadrado torna-se:

$$\langle \bar{\mathbf{B}}^2 \rangle = B^2 - k_m^2A^2 \equiv \bar{B}^2. \quad (3.15)$$

O termo $\langle \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \rangle$ é a helicidade de corrente em grande escala. Ele possui diversas interpretações, mas neste trabalho é atribuído um valor baseado em Brandenburg et al. (2001). Segue que a helicidade magnética e de corrente devem ser proporcionais ao produto do campo toroidal com campo poloidal ($B_{tor}B_{pol}$), de acordo com a aproximação:

$$\langle \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \rangle \approx \mp k_1 \frac{B_{tor}B_{pol}}{\mu_0}, \quad (3.16)$$

onde define-se:

$$B_{tor} \equiv \langle \bar{\mathbf{B}}_y^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \pm B \quad (3.17)$$

e

$$B_{pol} \equiv \langle \bar{\mathbf{B}}_x^2 + \bar{\mathbf{B}}_z^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = (-k_x^2A^2 - k_z^2A^2)^{\frac{1}{2}} \approx \pm k_1A. \quad (3.18)$$

Os sinais superiores (“-” para a Equação 3.16 e “+” para a Equação 3.17) aplicam-se ao presente caso, onde a helicidade cinética é positiva (Brandenburg et al., 2001). Logo, o valor atribuído à helicidade de corrente é:

$$\langle \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \rangle \approx -k_1^2 \frac{AB}{\mu_0}. \quad (3.19)$$

Ao último termo da Equação (2.66) aplica-se o divergente em $\bar{\mathcal{F}}_\alpha = -\kappa_\alpha \nabla \alpha_M$. Supõe-se que a solução de α_M seja semelhante às demais variáveis: $\alpha_M = \alpha_t(t) e^{ik_f x}$ (lembrando que k_f é o número de onda das flutuações). O resultado é:

$$\nabla \cdot \bar{\mathcal{F}}_\alpha = -\kappa_\alpha \nabla^2 \alpha_M = \kappa_\alpha k_f^2 \alpha_M, \quad (3.20)$$

onde κ_α é um coeficiente de difusão, cujo valor deve ser proporcional à difusividade magnética turbulenta, $\kappa_\alpha = \kappa_0 \eta_t$ (Guerrero et al., 2010), onde κ_0 é um parâmetro adimensional do sistema. A equação da evolução da helicidade magnética, então, torna-se:

$$\frac{d\alpha_M}{dt} = -2\eta_t k_f^2 \left(\frac{\alpha (B^2 - k_m^2 A^2) + \eta_t k_1^2 AB}{B_{eq}^2} \right) - 2\eta_t k_f^2 \left(\frac{1}{R_m} + \frac{\kappa_0}{2} \right) \alpha_M. \quad (3.21)$$

É preciso normalizar a equação para se chegar a sua forma final. As variáveis A , B e t são normalizadas da mesma maneira que no início deste capítulo e a helicidade magnética é normalizada como: $\alpha_M = \eta_t k_1 \alpha'_M$ (a notação ' é descartada, por simplicidade, assim como foi feito com as demais variáveis). Então, o conjunto completo de equações a ser resolvido no sistema é:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = iC_\Omega A + C_\alpha A - B,$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = C_\alpha B - A,$$

$$\frac{d\alpha_M}{dt} = -2\kappa_f^2 \left(\frac{C_\alpha (B^2 - A^2) + AB}{B_{eq}^2} \right) - 2\kappa_f^2 \left(\frac{1}{R_m} + \frac{\kappa_0}{2} \right) \alpha_M, \quad (3.22)$$

tal que α total é a soma $\alpha = \alpha_K + \alpha_M$ e $\kappa_f = k_f/k_1$. O sistema, então, possui dependência de cinco parâmetros adimensionais, são eles $C_{\alpha(cin)} = (\alpha_K/\eta_t k_1)$, C_Ω , B_{eq} , κ_f e κ_0 .

Sendo k_1 o número de onda relacionado à maior escala possível do Sol, define-se $k_1 = 2\pi/R_\odot$, onde R_\odot é o raio do Sol. Uma escolha razoável para o número de onda da pequena escala é $k_f = 2\pi/(R_\odot - r_c)$, com $r_c = 0.7R_\odot$ (Guerrero et al., 2010), já que a camada convectiva do Sol ocupa os 30% finais do seu raio e é onde acredita-se haver a

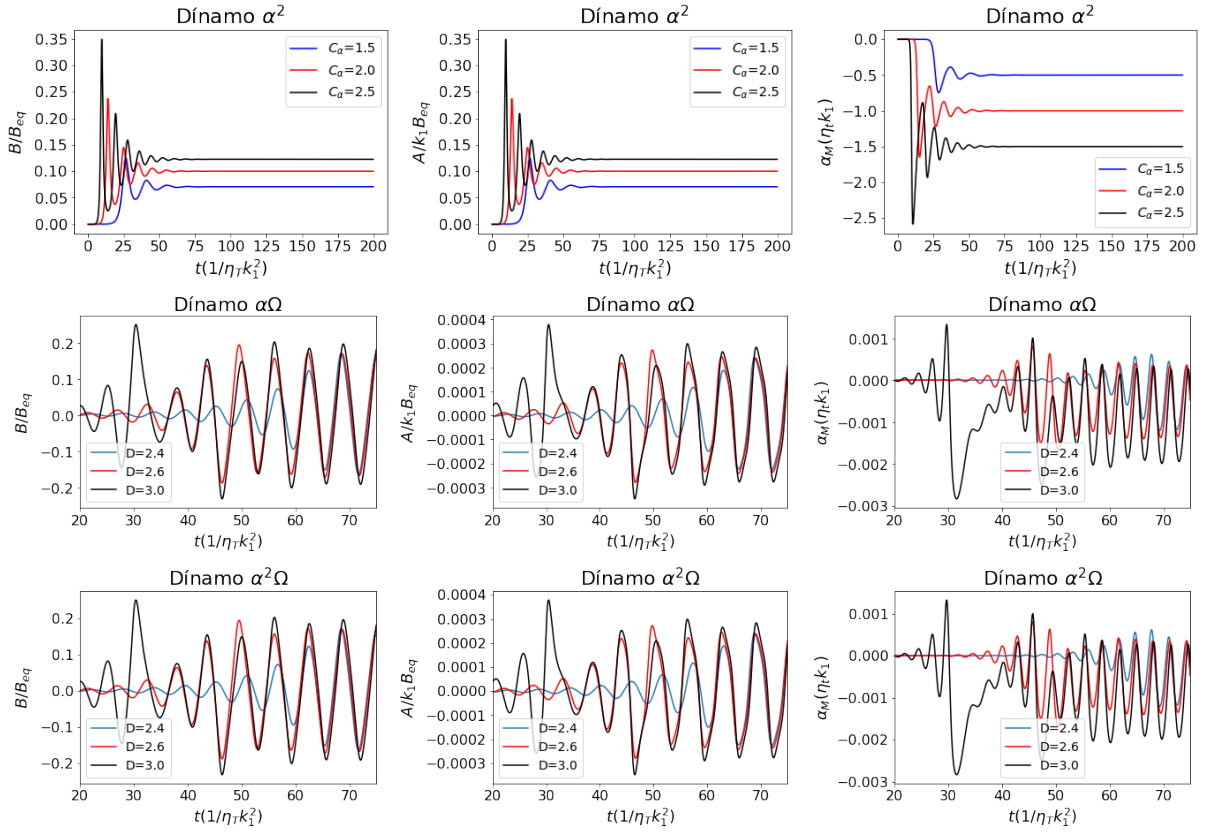


Figura 19 – Evolução do campo toroidal B (esquerda), do campo poloidal A (meio) e de α_M (direita) ao longo do tempo, amortecido pelo efeito da saturação dinâmica de α , com diferentes valores de C_α para o dínamo α^2 . E diferentes valores de D para os dínamos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$, com $C_\Omega = 1000$.

turbulência que produz o efeito α (J Schou, 1998). Portanto, $\kappa_f \approx 3.33$. Por simplicidade, nas simulações utiliza-se $\kappa_f^2 = 10$.

Os resultados da resolução das Equações 3.7, 3.8 e 3.22 são apresentados na Figura 19 para os modelos α^2 (painéis superiores), $\alpha\Omega$ (painéis do meio) e $\alpha^2\Omega$ (painéis inferiores). Os parâmetros utilizados nessas simulações são $\kappa_0 = 0.0$, $B_{eq} = 1.0$ e fixa-se $C_\Omega = 1000$ (as variações de D ocorrem ao variar o valor de C_α , com exceção do dínamo α^2). As condições iniciais são $B_0 = 0.0$, $A_0 = 1 \times 10^{-6}$ e $\alpha_0 = 0.0$. É possível observar na figura uma instabilidade no início da evolução dos campos. Isto ocorre devido ao α_M passar por um “período de ajustes” no início da evolução. O valor líquido de α_M aumenta com o desenvolvimento inicial dos campos B e A . Porém, a medida que ele cresce, o valor de $C_\alpha = (\alpha_K + \alpha_M)/\eta_t k_1$ diminui, saturando assim o crescimento das componentes do campo. Como consequência, as três quantidades passam por um período de ajuste até atingir um estado estacionário. Analogamente, quando α_M possui valor positivo, ele contribui para o aumento do efeito α total, acarretando no crescimento dos campos. O valor de α_M é predominantemente negativo, apesar de oscilar, o que acarreta em um C_α total menor do que o cinético.

3.3 Método Numérico

Numericamente, utiliza-se a função “Lomb-Scargle” na linguagem Python 3 para retornar os períodos de oscilação de cada função dos modelos oscilatórios, pois ela é um algoritmo que detecta e caracteriza periodicidade em séries temporais desigualmente amostradas e tem-se notado um uso particularmente amplo na comunidade de astronomia (VanderPlas, 2018). É necessário fazer essa análise após os campos se estabilizarem, isto é, algumas soluções mostram muitas variações no início, mas depois se estabilizam com períodos e amplitudes determinadas.

Para resolver os modelos de dínamo, é utilizada a rotina Runge-Kutta de 4^a ordem na linguagem Fortran 90. Um fator relevante para se obter as soluções é adequar o passo temporal ao problema para evitar um aumento catastrófico da solução, ou aumento no erro de arredondamento (William, 1992). O Fortran 90 é utilizado, pois ele consegue realizar corretamente a aritmética de números complexos. Os códigos para os modelos que utilizam saturação algébrica e saturação dinâmica encontram-se nos Anexos A e B, respectivamente.

Uma análise mais detalhada, variando os parâmetros livres do sistema, é apresentada no capítulo seguinte.

4 Resultados e Análises

Esta seção contém uma análise dos resultados obtidos nas simulações realizadas, resolvendo-se numericamente as Equações (3.7), (3.8) e (3.22). Busca-se entender a relação da amplitude e do período de oscilação dos ciclos magnéticos ao variar os coeficientes de dínamo para cada modelo de dínamo, bem como comparar estes resultados com alguns encontrados na literatura. Além disso, faz-se necessário entender a influência dos coeficientes adimensionais de fluxo de helicidade magnética, κ_0 , e do número de Reynolds magnético, R_m , na evolução do campo.

Todas as simulações utilizam as condições iniciais $B_0 = 0.0$, $A_0 = 1 \times 10^{-6}$ e $\alpha_0 = 0.0$ (este último, para os casos em que levam em consideração a saturação dinâmica do efeito magnético α_M).

4.1 Influência do Número de Reynolds Magnético e do Termo de Fluxo

Inicia-se a discussão ao avaliar o comportamento do campo magnético médio, \bar{B} , de acordo com a Equação (3.15), com diferentes valores de R_m . Conforme os resultados de Guerrero et al. (2010), é esperado que para valores altos desse parâmetro ($\sim 10^4$ ou mais), o dínamo não seja capaz de sustentar o campo, pois nesse caso, o valor de C_α decresce a valores subcríticos. Então adiciona-se o termo de fluxo, $\bar{\mathcal{F}}_\alpha$, em uma tentativa de compensar esse amortecimento. No modelo com saturação algébrica, o termo de fluxo não aparece, portanto analisa-se puramente valores do número de Reynolds magnético capazes de sustentar o campo, conforme a Figura 20, para os modelos de dínamo $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$.

O dínamo α^2 não é oscilatório e os campos B e A saturam no mesmo valor, resultando em um campo médio igual a zero após a fase de saturação, portanto a análise do número de Reynolds magnético ocorre ao traçar o campo toroidal B em função de t , representada na Figura 21. O gráfico à esquerda mostra o valor de saturação do campo para cada R_m . O gráfico à direita demonstra que os campos possuem uma taxa de crescimento igual para todos os valores de R_m no início da evolução, porém, saturam em pontos diferentes.

É necessária a escolha de valores supercríticos para os coeficientes de dínamo, para se observar a influência de R_m nos mecanismos de saturação dos campos. É importante ponderar que o número de dínamo regula a “intensidade da atividade” que ocorre no

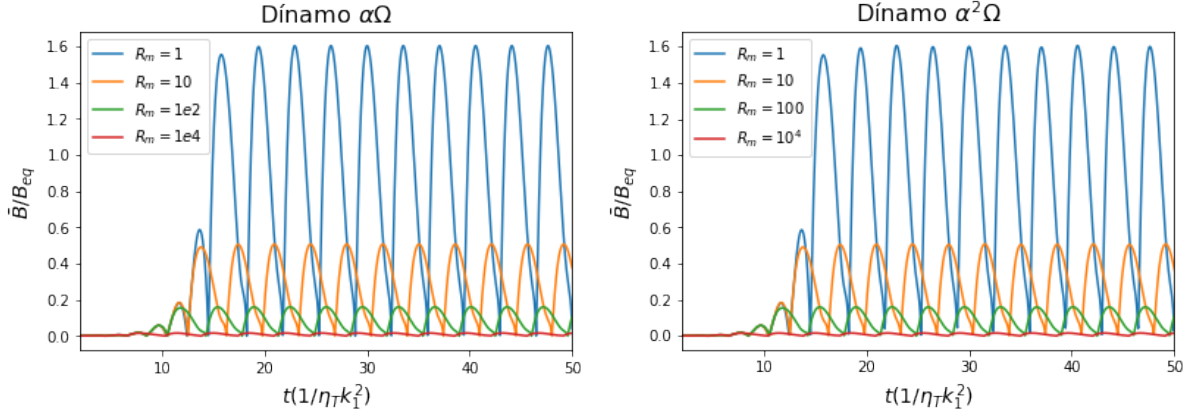


Figura 20 – Saturação do campo magnético médio nos dínamos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$ com $D = 5$ para diferentes valores de R_m .

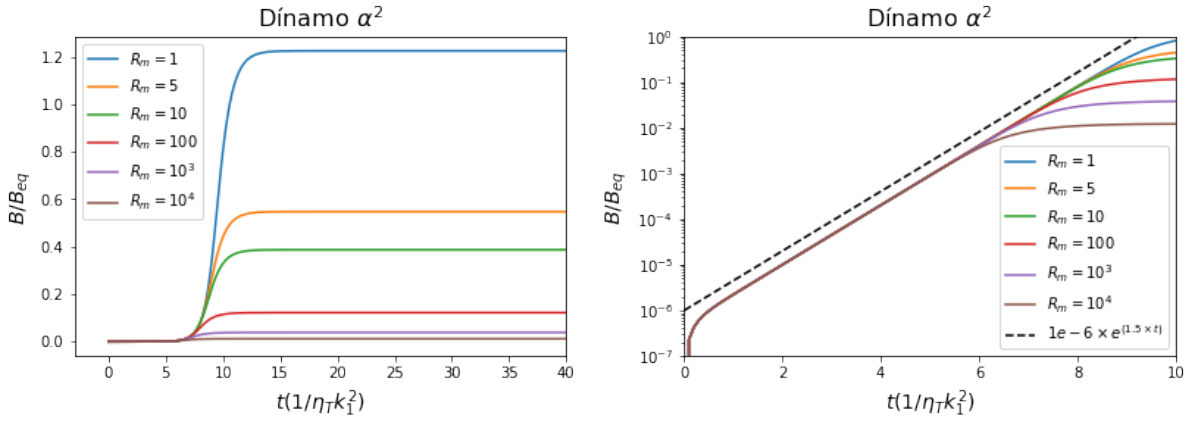


Figura 21 – Evolução do campo magnético toroidal no dínamo α^2 com $C_\alpha = 2.5$ para diferentes valores de R_m . O gráfico à esquerda demonstra a saturação do campo para cada R_m e o gráfico à direita evidencia a taxa de crescimento no início do ciclo.

processo, portanto, um número de dínamo maior pode acarretar um crescimento do campo maior (mais detalhes sobre este assunto se encontram nas seções seguintes). Nas Figuras 20 e 21 é possível observar que valores mais altos de R_m limitam o crescimento do campo. Isso evidencia a necessidade de investigar um novo mecanismo de saturação, incluindo a equação da evolução de α_M .

Resultados utilizando a saturação dinâmica do efeito α magnético estão representados na Figura 22. Ela contém os resultados obtidos sem a presença do fluxo ($\kappa_0 = 0$), nos gráficos à esquerda, e adicionando um pequeno fluxo, com valor do coeficiente $\kappa_0 = 0.005$ nos gráficos à direita, para cada modelo de dínamo, conforme indicado em cada gráfico. As oscilações do campo médio nos dínamos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$ estão menos visíveis, pois as curvas foram plotadas com uma resolução mais baixa para melhorar a visualização.

Com o aumento do número de Reynolds magnético os campos decaem até que o de

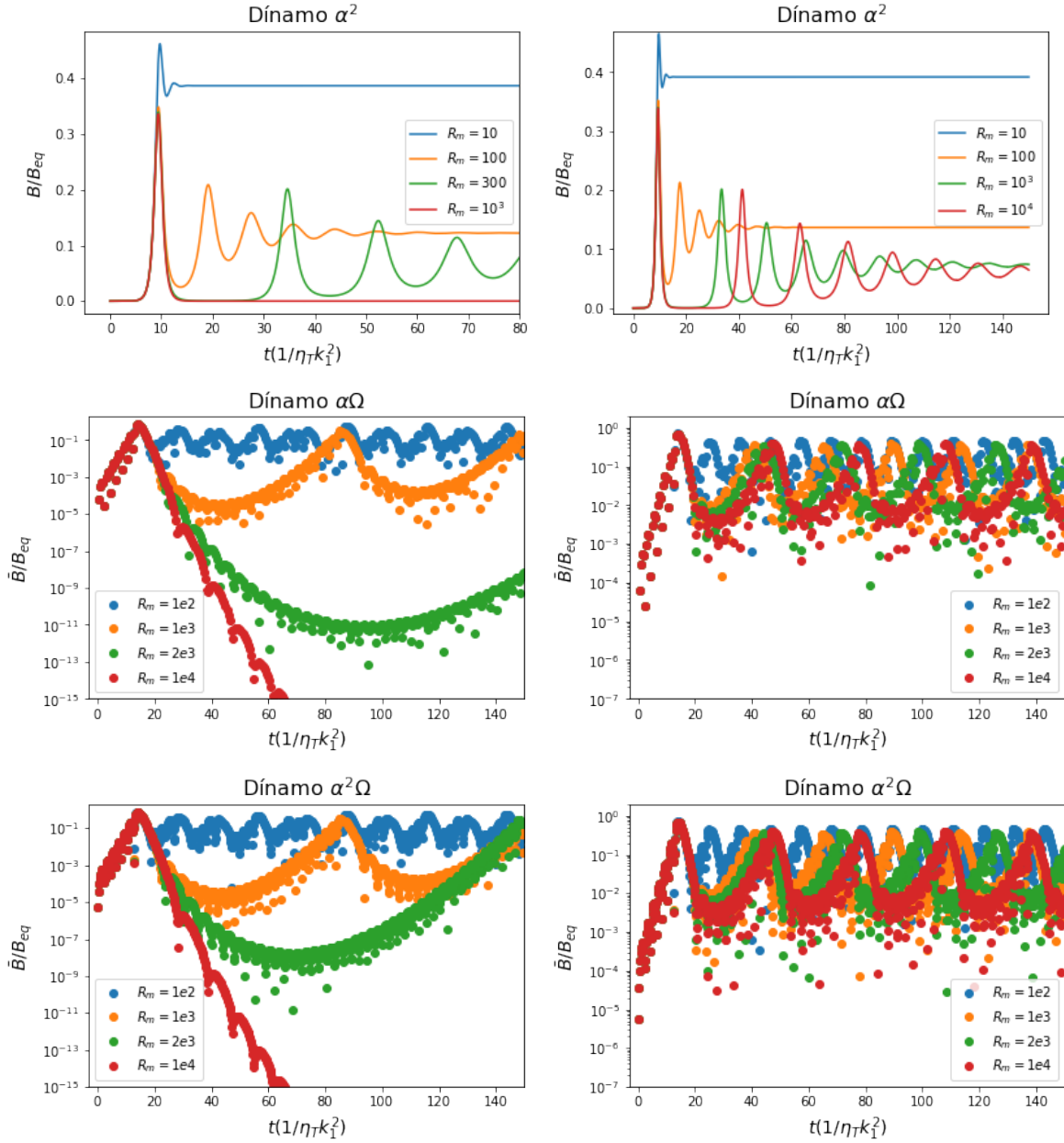


Figura 22 – Evolução do campo toroidal no dínamo α^2 e do campo médio nos dínamos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$ com diferentes valores de R_m . À esquerda, sem a presença do termo de fluxo na equação da evolução de α_M ($\kappa_0 = 0$). À direita é introduzido um pequeno fluxo ($\kappa_0 = 0.005$) que é capaz de sustentar os campos, que antes decrescia devido aos altos valores de R_m .

dínamo não consiga se manter. Este processo é denominado amortecimento catastrófico do dínamo (Guerrero et al., 2010). Contudo, até um pequeno fluxo de α_M é capaz de fazer com que o dínamo se sustente, mesmo para grandes valores de R_m . Esses modelos possuem uma fase inicial de crescimento exponencial, seguido de um período de ajuste e uma fase de saturação onde se estabilizam em um determinado valor, ou oscilando entre um máximo e um mínimo, que representa uma segunda oscilação englobando as oscilações

menores.

A relação entre R_m e $B_{m\acute{e}dia}$ ($B_{m\acute{e}dia}$ representa uma média de \bar{B} após ele se estabilizar) na Figura 23, mostra uma tendência das curvas em seguir uma inclinação proporcional a $R_m^{-0.5}$ no início da evolução, concordando com resultados de Brandenburg et al. (2009), Mitra et al. (2010) e Guerrero et al. (2010). Para os resultados com saturação algébrica, a inclinação permanece constante para todos os valores de R_m . Ao utilizar a saturação dinâmica de α e sem fluxo, o campo cai abruptamente para valores de R_m entre 10^3 e 10^4 . Adicionando o fluxo, $\kappa_0 = 0.005$, a inclinação da curva diminui, indicando que a amplitude do campo se estabiliza com o crescimento de R_m .

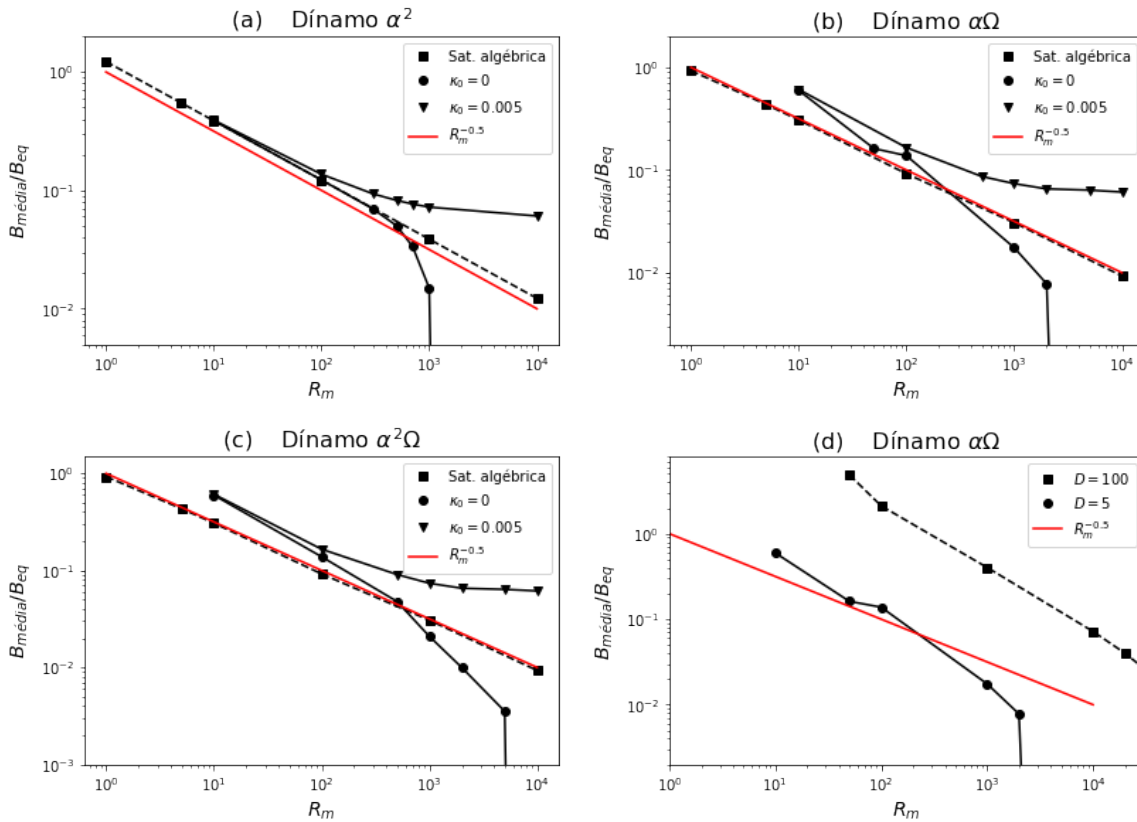


Figura 23 – Relação entre a média do campo, $B_{m\acute{e}dia}$, em função de R_m para os dínamos α^2 (painel a), $\alpha\Omega$ (painel b) e $\alpha^2\Omega$ (painel c). Três tipos de saturação estão representadas nos gráficos: a saturação algébrica (representada por quadrados), a saturação dinâmica de α sem a presença de fluxo (representada por círculos) e introduzindo um fluxo com $\kappa_0 = 0.005$ (representada por triângulos). A curva vermelha representa a inclinação de $R_m^{-0.5}$. O gráfico no painel (d) compara um mesmo modelo utilizando dois valores de número de dínamo: $D = 5$ (linha com círculos) e $D = 100$ (linha com quadrados).

Os três primeiros gráficos da Figura 23 (a, b e c) foram gerados a partir de $D = 5$. O último, no painel direito inferior, demonstra como se comporta o mesmo modelo sendo gerado com um número de dínamo diferente, no caso, $D = 100$. Ele indica que um número

de dínamo maior faz com que o decaimento abrupto do campo aconteça para números de Reynolds magnético maiores. A inclinação da curva é um pouco deslocada do valor teórico de $R_m^{-0.5}$, contudo o amortecimento catastrófico parece seguir a mesma inclinação para diferentes valores de D .

4.2 Efeito da Variação dos coeficientes de dínamo na Evolução dos Campos Poloidais e Toroidais

Um dos principais objetivos desse trabalho é investigar como os coeficientes que medem a eficiência do dínamo influenciam o comportamento do campo magnético. Nesta seção serão analisados os formatos da onda de propagação do dínamo unidimensional sob condições diversas, além de realizar comparações entre os modelos e buscar entender as diferenças entre eles.

As oscilações do dínamo têm formatos característicos, com particularidades que se acentuam a medida que se aumenta o número de dínamo. Inicialmente, analisam-se os modelos com saturação algébrica. A Figura 24 exemplifica algumas propriedades, realizando a evolução dos campos magnéticos toroidais e poloidais, utilizando diferentes valores de D , para o dínamo $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$.

Em geral, nas simulações realizadas, fixou-se o valor do coeficiente que rege o efeito Ω , C_Ω , igual a 1000, logo $C_\alpha = D/C_\Omega$. Outro ponto importante de se analisar são as variações que a mudança dessa constante podem acarretar. Para isso, fixou-se o número dínamo $D = 10$ e foram evoluídos os campos com $C_\Omega = 10^3$ e $C_\Omega = 10^4$, conforme demonstrado na Figura 25. Conseqüentemente, o valor de C_α é alterado. O que se pode observar, de acordo com a Figura 25 é que, em relação ao campo B , os campos se estabilizam em pontos diferentes, apresentando instabilidades distintas no início da evolução, mas o formato, amplitude e período de oscilação não se alteram. Já em A , altera-se a amplitude do campo, tal que a simulação com menor C_Ω apresentou maior amplitude, o que pode ser entendido pelo fato de C_α obter um valor menor, já que o efeito α é o responsável pela regeneração do campo poloidal.

Na Figura 26 realiza-se a comparação entre os modelos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$, traçando curvas que utilizam os mesmos valores para cada parâmetro. O resultado é que elas são praticamente idênticas. O que pode significar que o dínamo $\alpha\Omega$ é uma boa aproximação. Análises posteriores trarão mais informações, mas antes é preciso analisar os modelos com saturação dinâmica de α , onde espera-se que resultados mais realistas apareçam.

As análises a seguir são semelhantes às realizadas anteriormente, mas utilizando a saturação dinâmica de α . De forma que a Figura 27 contém a evolução dos campos toroidais e poloidais em cada modelo de dínamo, variando o número de dínamo. Na Figura

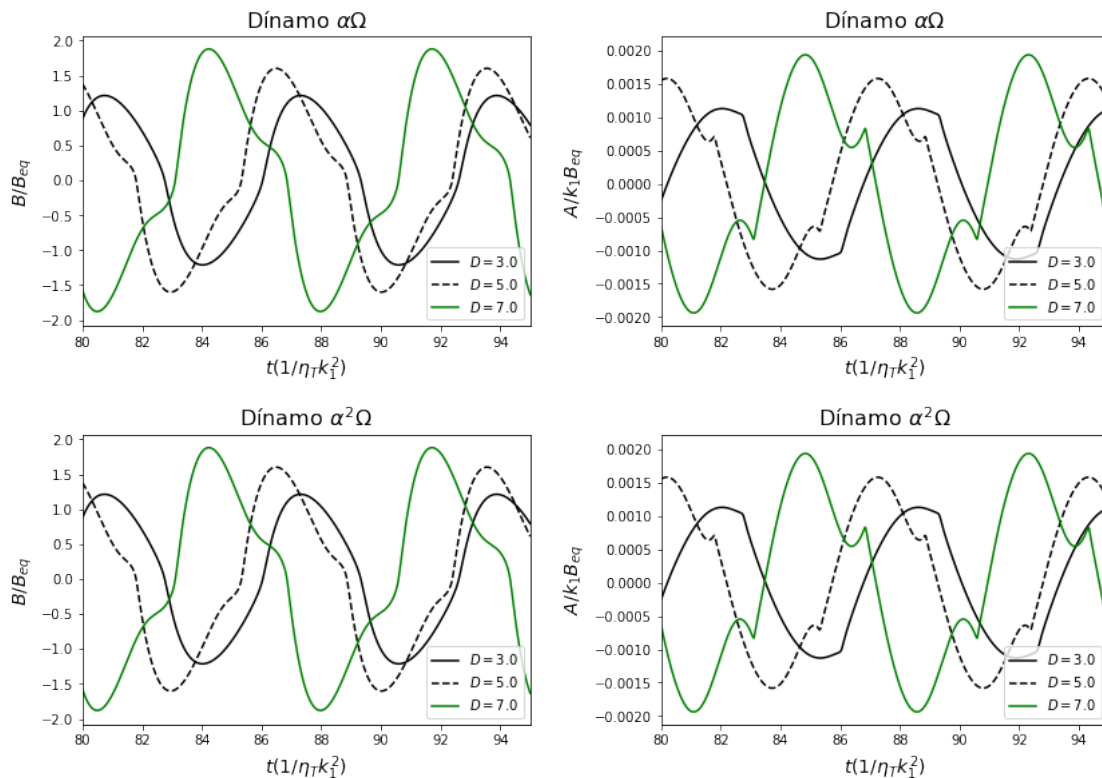


Figura 24 – Evolução do campo toroidal (à esquerda) e do campo poloidal (à direita) no dínamo $\alpha\Omega$ (acima) e $\alpha^2\Omega$ (abaixo) para alguns valores de D utilizando o mecanismo de saturação algébrica, com $C_\Omega = 1000$.

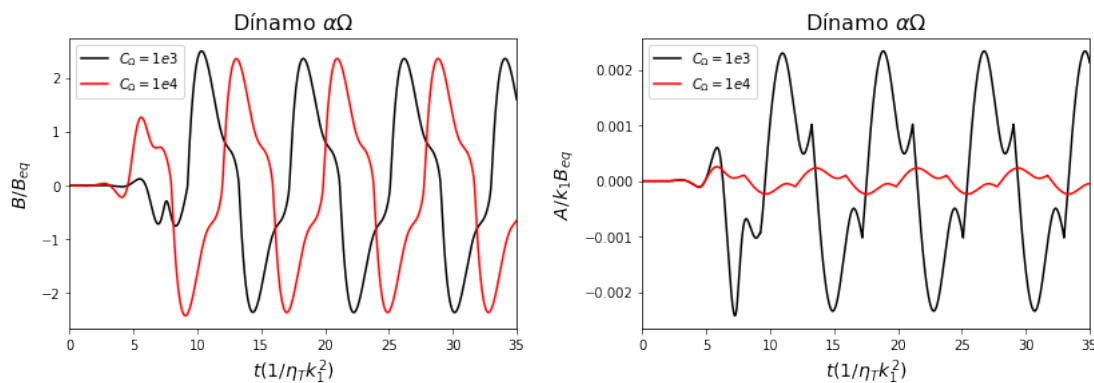


Figura 25 – Comparação entre os campos, utilizando diferentes valores de C_Ω e fixando um mesmo número de dínamo $D = 10$, para o mecanismo de saturação algébrica. Campo toroidal à esquerda e poloidal à direita.

28 realiza-se a comparação dos campos utilizando diferentes C_Ω e por fim, a comparação entre os modelos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$. As análises desses resultados se assemelham com os modelos com saturação algébrica, no que diz respeito à variação dos coeficientes. A diferença aparece somente no formato das ondas que se propagam.

Novamente, não há diferença entre os dois modelos de dínamo, mas é preciso

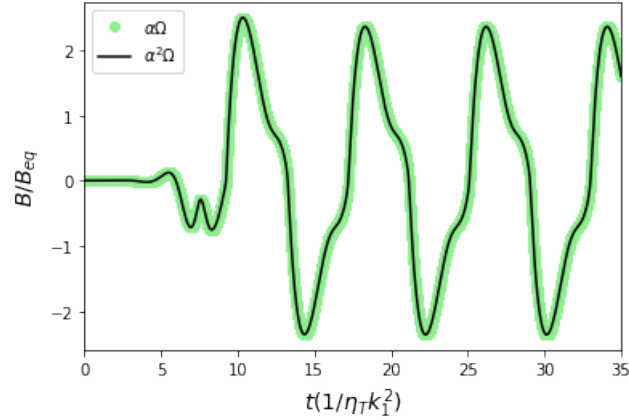


Figura 26 – Comparação entre os dois modelos de dínamo $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$ ao evoluir o campo B com saturação algébrica, com $D = 10$ e $C_\Omega = 1000$.

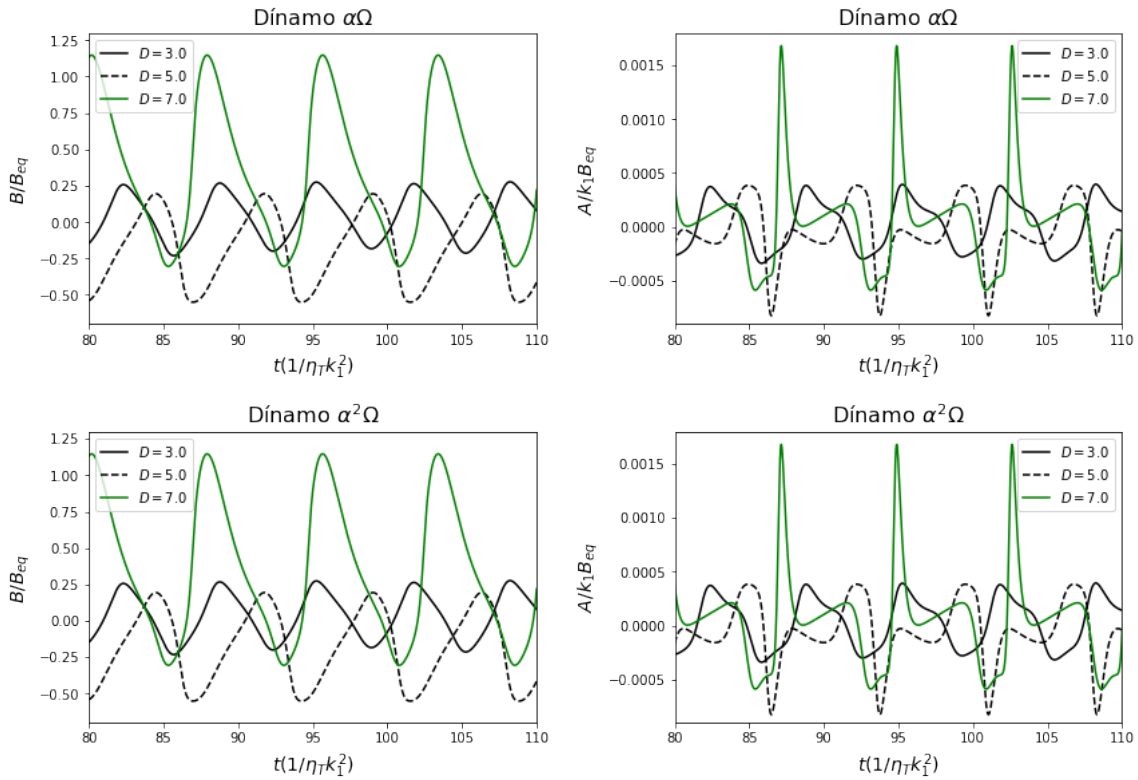


Figura 27 – Evolução do campo toroidal (à esquerda) e do campo poloidal (à direita) no dínamo $\alpha\Omega$ (acima) e no $\alpha^2\Omega$ (abaixo), para alguns valores de D utilizando o mecanismo de saturação dinâmica, com $C_\Omega = 1000$, $R_m = 10^9$ e $\kappa_0 = 0.05$.

investigar quando essa diferença ocorre. Para isso, foram realizadas evoluções temporais do campo toroidal diminuindo a diferença entre C_Ω e C_α . A Figura 30 mostra dois casos em que esse estudo foi realizado. O primeiro utiliza $C_\Omega = 100$ e $C_\alpha = 1$. Neste gráfico é possível observar um pequeno deslocamento da curva do modelo $\alpha^2\Omega$ em relação ao $\alpha\Omega$. O segundo utiliza $C_\Omega = 50$ e $C_\alpha = 2$, diminuindo a diferença, em proporção, em relação

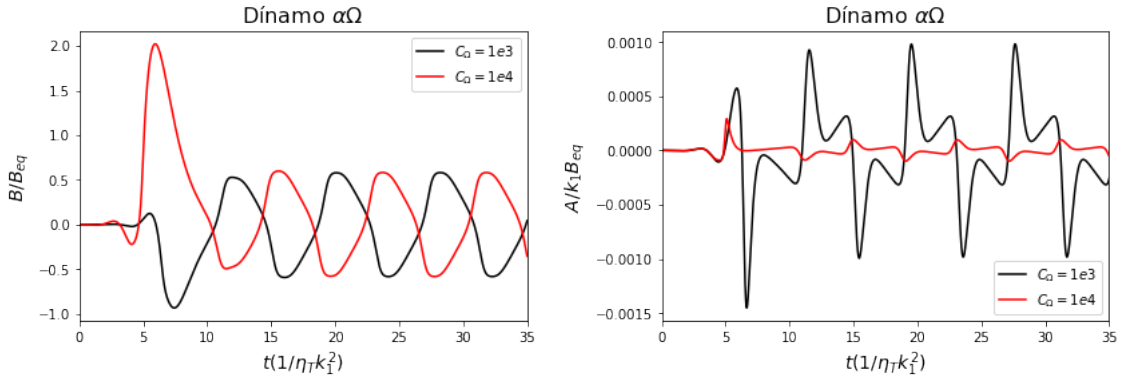


Figura 28 – Comparação entre os campos, utilizando diferentes valores de C_Ω e fixando um mesmo número de dínamo $D = 10$, para o mecanismo de saturação dinâmica. Campo toroidal à esquerda e poloidal à direita.

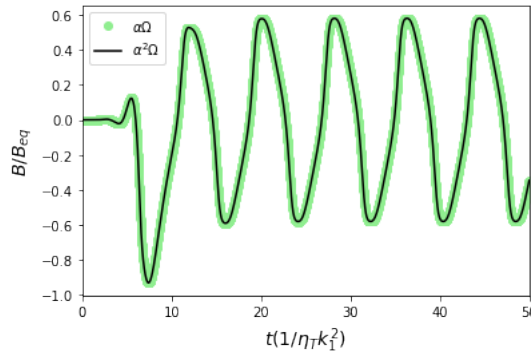


Figura 29 – Comparação entre os dois modelos de dínamo $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$ ao evoluir o campo B com saturação α_M , com $D = 10$, $R_m = 10^9$ e $\kappa_0 = 0.05$.

aos coeficientes. Nesse caso já é possível identificar uma grande diferença entre os dois modelos. Em ambos os gráficos, o número de dínamo D seria igual 100. Fato que indica que para uma diferença menor entre os coeficientes C_α e C_Ω , os modelos deixam de serem governados unicamente pelo número de dínamo, já que para um mesmo D , os campos apresentaram comportamentos diferentes.

A Figura 31 possui exemplos de como se comporta o campo B utilizando vários números de dínamo (indicados na legenda). Observa-se que alguns casos apresentam anomalias, ou oscilações levemente caóticas, como os casos com $D = 3.5$ e $D = 4.0$ em que esse comportamento é intensificado. No entanto, as oscilações voltam a tornarem-se homogêneas diminuindo ou aumentando o número de dínamo.

O número de dínamo também influencia na diferença de fases entre o campo poloidal e o campo toroidal. Como pode ser visto na Figura 32, com $D = 3$, o deslocamento entre as fases de A e B é maior do que quando $D = 7$.

O dínamo α^2 possui dependência apenas de C_α e não é um modelo oscilatório,

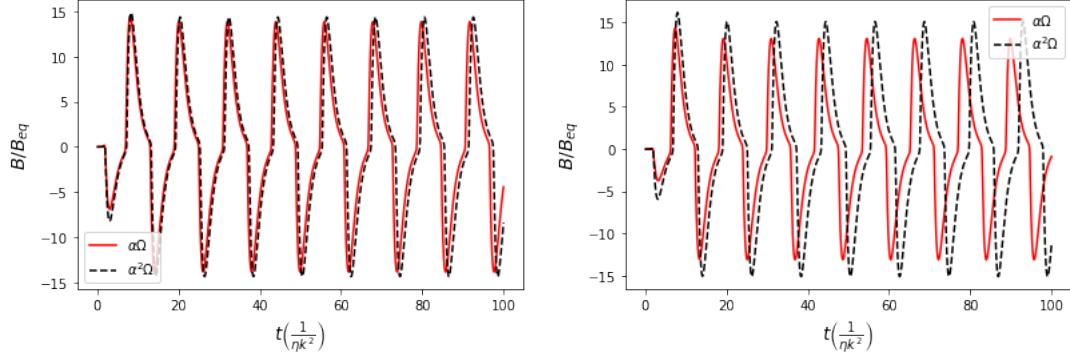


Figura 30 – Comparação dos modelos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$. À esquerda utilizando $C_\Omega = 100$ e $C_\alpha = 1$ e à direita, $C_\Omega = 50$ e $C_\alpha = 2$, com $R_m = 10^9$ e $\kappa_0 = 0.05$.

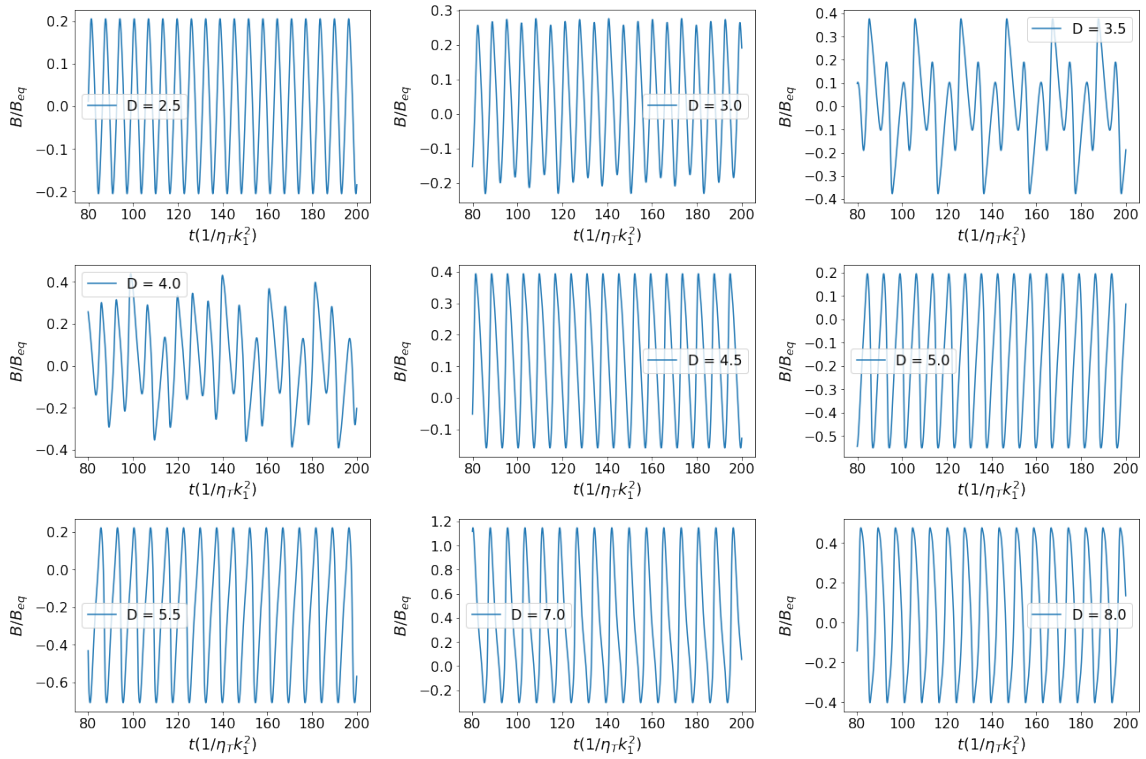


Figura 31 – Gráficos de B evoluindo no tempo t , para diferentes valores do número de dínamo. Para alguns valores de D o campo apresenta um comportamento diferente do usual. As simulações utilizam mecanismo de saturação dinâmica e $C_\Omega = 1000$, $R_m = 10^9$ e $\kappa_0 = 0.1$.

então pouca informação pode ser retirada com as análises realizadas até agora. Mas ao analisar os painéis superiores da Figura 19, na Seção 3.2, é interessante ver que, no gráfico da evolução de α_M , as curvas se estabilizam no valor que resulta em $C_\alpha = 1$, que é o valor crítico de C_α , tal que $C_\alpha = (\alpha_K + \alpha_M)/\eta_t k_1$. Para os modelos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$ que utilizam o método de saturação dinâmica, o α total é sempre positivo apesar de oscilar, conforme a Figura 33.

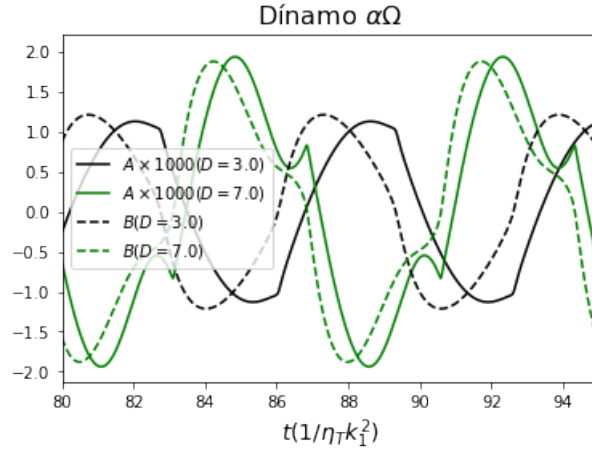


Figura 32 – Evolução do campo toroidal (linhas inteiras) e do campo poloidal amplificado por 1000 vezes (linhas pontilhadas) para o dínamo $\alpha\Omega$, com $D = 3.0$ (linhas pretas) e $D = 7.0$ (linhas verdes).

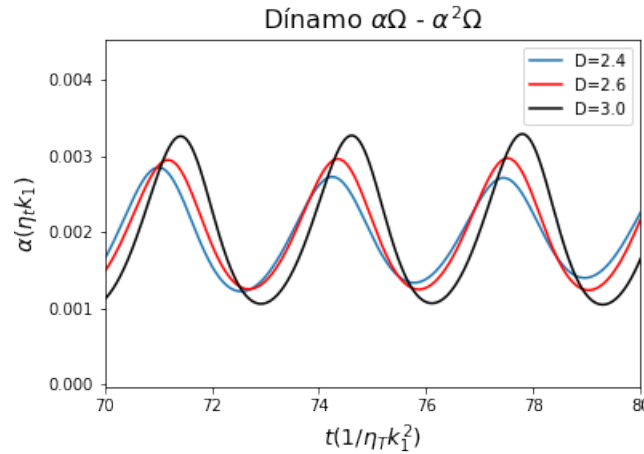


Figura 33 – Evolução de α total para diferentes valores de D , utilizando $C_\Omega = 1000$ e $R_m = 100$.

4.3 Análise dos Períodos e das Amplitudes

Nesta seção realiza-se a análise dos períodos de oscilação dos campos e de suas amplitudes em função dos diversos parâmetros analisados. Nas simulações a seguir utiliza-se o número de Reynolds magnético igual ao valor aproximado que estima-se para o Sol, de $R_m = 10^9$. Para o termo de fluxo utiliza-se, na maioria das vezes, $\kappa_0 = 0.05$. Quando há alguma mudança nesses valores, está indicado. Também fixou-se $C_\Omega = 1000$, dessa forma, com os valores de D utilizados, os modelos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$ possuem comportamentos semelhantes, conforme visto na seção anterior.

Primeiramente, analisa-se o dínamo α^2 . A única análise possível, neste caso, é o valor de saturação do campo, representado por B_{sat} , ao variar o coeficiente C_α . Os dois

modelos de saturação estão representados na Figura 34 e apresentam exatamente o mesmo comportamento.

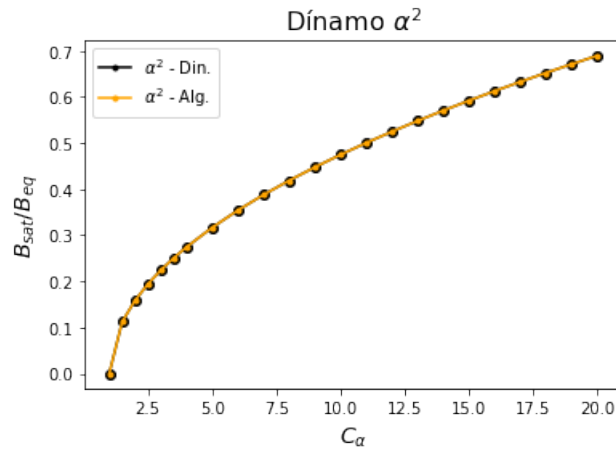


Figura 34 – Saturação de B , representado por B_{sat} em função de C_α no dínamo α^2 . O modelo com saturação algébrica é representado pela linha amarela (Alg.) e com a saturação dinâmica, pela linha preta (Din.).

Os gráficos que relacionam período e amplitude com o número de dínamo para os modelos $\alpha\Omega$ $\alpha^2\Omega$ estão representados na Figura 35, comparando os dois métodos de saturação. Os modelos com saturação dinâmica apresentam um período ligeiramente maior do que os modelos com saturação algébrica, mas possuem amplitude menor. A relação dos períodos parece ser regida por uma dependência de proporcionalidade de aproximadamente $D^{0.5}$ o que concorda com resultados encontrados na literatura, como Rogachevskii and Kleeorin (2001) e Brandenburg et al. (2009). Contudo, no modelo de saturação dinâmica, parece haver uma mudança na lei que rege o comportamento das curvas entre os valores de número de dínamo 7 e 8. Este fenômeno é mais evidente na relação das amplitudes do que na relação dos períodos.

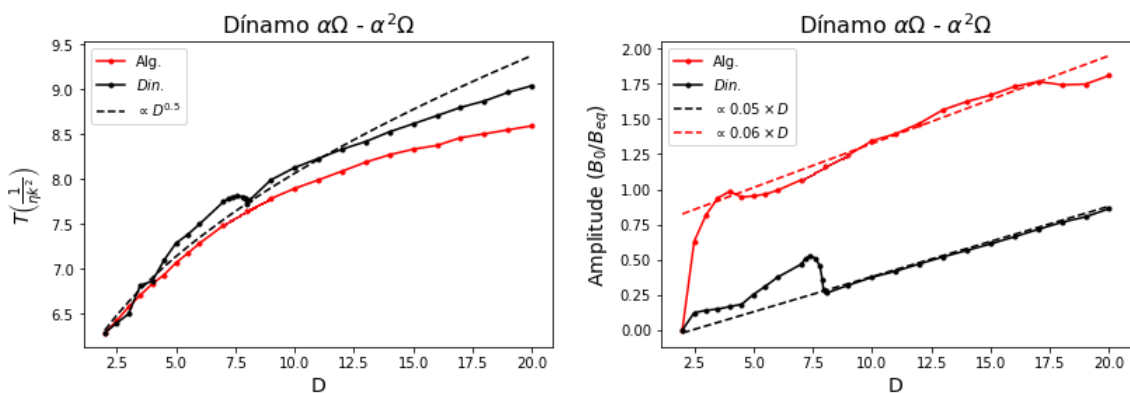


Figura 35 – Gráfico comparativo entre os mecanismos de saturação algébrica (Alg.) e da helicidade dinâmica (Din.). Análise do período à esquerda e da amplitude à direita

A Figura 36 exibe gráficos com as mesmas relações de período e amplitude como função do número de dínamo utilizando o método de saturação dinâmica, mas variando o termo κ_0 . A inclinação da curva com $\kappa_0 = 0.05$, gráfico de amplitudes, parece acompanhar a inclinação da curva com $\kappa_0 = 0.1$ até $D = 7$. Após esse valor, a curva com $\kappa_0 = 0.05$ muda repentinamente. Cada curva, como indicado na legenda, representa um valor de κ_0 . A diferença entre os painéis de cima e os de baixo é que nos painéis de baixo adiciona-se uma curva com $\kappa_0 = 0.5$. Os painéis de cima são mantidos para tornar visível a comparação entre os dois valores de fluxo, com $\kappa = 0.05$ e $\kappa = 0.1$.

Observa-se uma tendência do período e também da amplitude aumentarem quando se aumenta o valor do termo de fluxo de helicidade magnética. Isto ocorre porque, com a difusão de helicidade magnética, há uma predominância do efeito α cinético, que possui valor positivo, aumentando a eficiência do dínamo na geração dos campos. Ao aumentar o fluxo, também, evidencia-se uma relação não linear da amplitude com D .

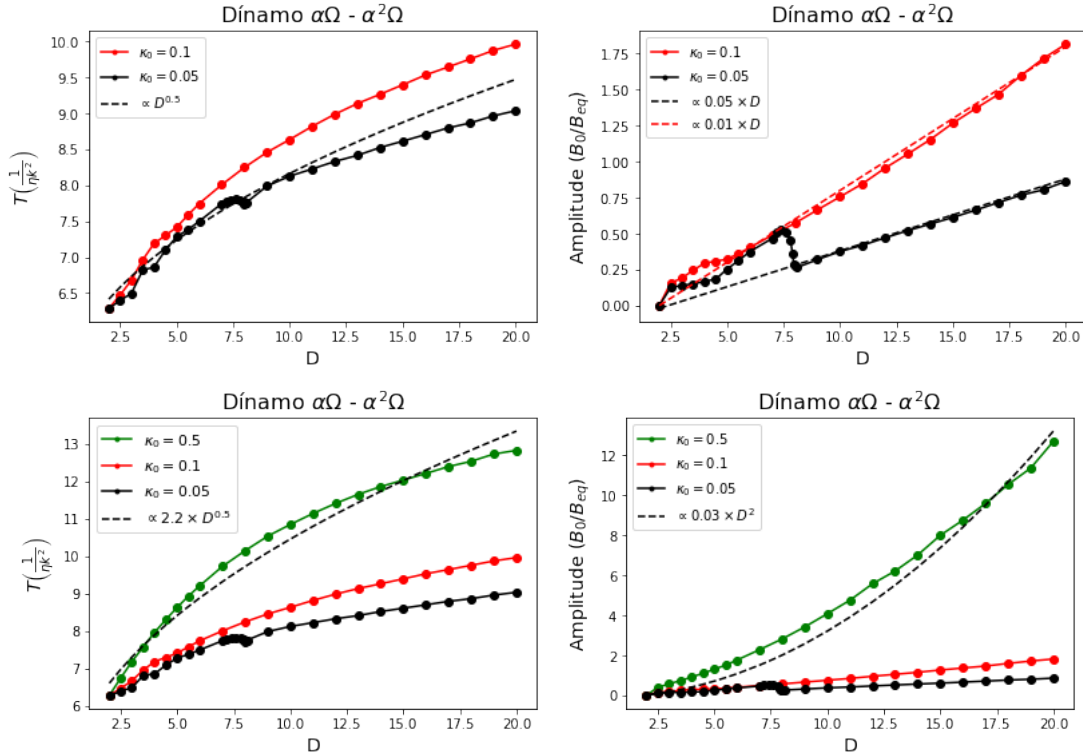


Figura 36 – Relações de período (à esquerda) e amplitude (à direita) com o número de dínamo para diferentes valores de κ_0 , com $R_m = 10^9$.

Continuando com os mesmos procedimentos realizados até aqui, repete-se a análise utilizando um número de dínamo maior, da ordem de 10^3 , mais próximo do que se estima que sejam seus valores no Sol, de acordo com modelos MHD em duas ou três dimensões, como realizado, por exemplo, em Guerrero et al. (2019). Os parâmetros descritos no início da seção permanecem os mesmos, de forma que varia-se C_α para se obter os números de

dínamo retratados nos gráficos da Figura 37. Aqui, é possível observar a diferenciação dos modelos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$. O modelo $\alpha^2\Omega$ exibe períodos e amplitudes maiores.

As curvas dos períodos se assemelham com as curvas das simulações que utilizam números de dínamo menores, porém com valores dos períodos mais elevados. As curvas das amplitudes, no entanto, aumentam levemente sua inclinação, se comparadas com os gráficos que utilizam os mesmos valores de fluxo ($\kappa = 0.05$), confirmando sua não linearidade.

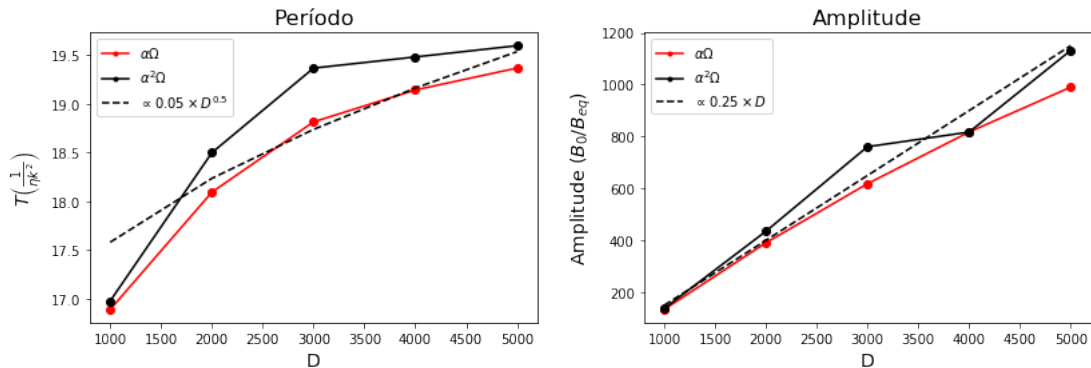


Figura 37 – Relações de período (à esquerda) e amplitude (à direita) com o número de dínamo, utilizando D da ordem de 10^3 .

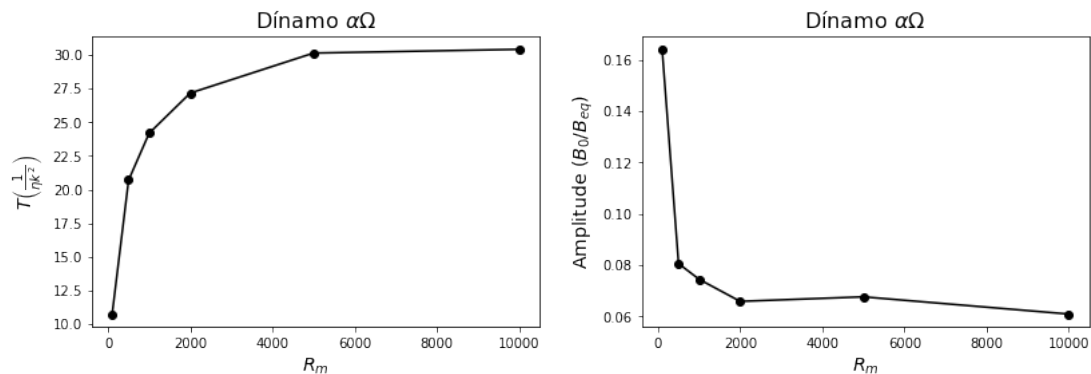


Figura 38 – Relações do período (à esquerda) e da amplitude (à direita) como função do número de Reynolds magnético, referente aos segundos ciclos aparentes que englobam as oscilações menores observados em alguns casos. O valor do número de dínamo utilizado foi $D = 5$ e do fluxo $\kappa_0 = 0.005$.

A última análise refere-se aos segundos ciclos que puderam ser observados na Figura 22 quando adicionou-se o termos de fluxo ao sistema com valor $\kappa_0 = 0.005$, nos modelos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$. Essas são oscilações com períodos maiores que englobam as oscilações referentes a um ciclo magnético padrão. As análises agora, são em relação ao número magnético de Reynolds, de acordo com a Figura 38. Nota-se um crescimento rápido do período no início e depois, ele tende a se estabilizar para R_m mais altos. Em relação

à amplitude, ela decai rapidamente no início, depois diminui mais lentamente. Como esperado, o crescimento do número de Reynolds magnético diminui a amplitude do campo.

4.4 Valores e Estimativas dos Parâmetros Aplicados ao Sol

Os valores abordados nesta seção são estimativas de parâmetros da grande escala. Os resultados das simulações não têm unidade física, podendo variar de acordo com a região do Sol, dependendo dos valores de η_t e R usados. A variação pode ser tanto em relação à latitude, quanto em relação ao raio.

De acordo com os resultados da heliosismologia (J Schou, 1998), o gradiente radial da velocidade de rotação, S , é positivo em latitudes menores do que $\approx 30^\circ$ e negativo quando se aproxima dos polos. A amplitude da rotação diferencial é maior na região polar. Além disso, as camadas externas, em geral, possuem valores de rotação maiores do que as camadas internas, conforme demonstrado na Figura 39. Os valores que interessam para este trabalho são aqueles próximos ao equador, pois é onde se concentra a atividade magnética observada na superfície solar.

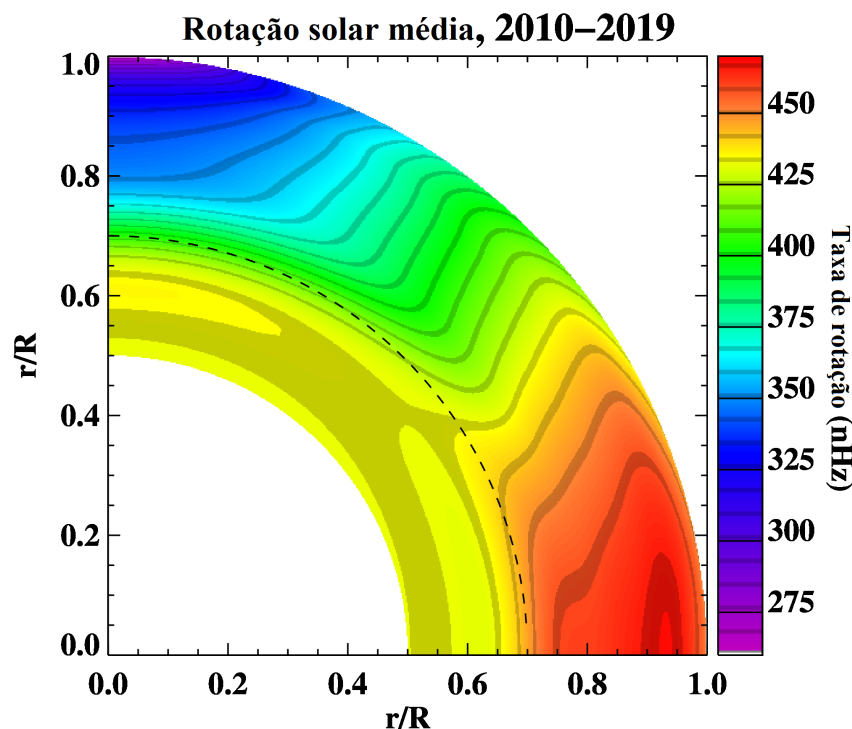


Figura 39 – Rotação diferencial média do Sol entre os anos de 2010 e 2019. Fonte: Guerrero, 2020.

Outro fator importante são os valores da difusividade magnética turbulenta, η_t . Segundo Muñoz-Jaramillo et al. (2010), que utiliza os dados de “MLT e ModelS de Christensen-Dalsgaard 1996” em um perfil traçado, partindo das camadas mais internas

do Sol até o seu exterior, a difusividade magnética turbulenta aumenta consideravelmente quando atravessa para a camada convectiva, estando por volta de $10^{13} \text{ cm}^2/\text{s}$. A Tabela 1 contém valores aproximados, retirados de Kitiashvili and Kosovichev (2009), que serão utilizados neste trabalho em três regiões, sendo elas a base da camada convectiva (B), o meio (M) e o topo (To).

Parâmetro	Base (B)	Meio (M)	Topo (To)
Raio (r), cm	5×10^{10}	6×10^{10}	7×10^{10}
Gradiente radial da velocidade (S), s^{-1}	5×10^{-6}	2×10^{-6}	-2×10^{-6}
Difusividade turbulenta (η_t), cm^2/s	2×10^{13}	3×10^{13}	1×10^{13}

Tabela 1 – Parâmetros do Sol em diferentes regiões da camada convectiva.

Os valores dos períodos apresentados até aqui foram todos em unidades de código, que são parâmetros adimensionais. Para converter para unidades de tempo utiliza-se os valores calculados na Tabela 1, bastando multiplicar o período em unidade de código por um fator referente à $1/2\pi\eta_t k^2 = r^2/2\pi\eta_t$.

Nas simulações dos dínamos oscilatórios, o valor do período, em unidades de código, para D crítico ($D = 2$) foi $T \approx 6.28$, que resulta em 3.96 anos (B), 3.83 anos (M) e 15.51 anos (To). Com o aumento do número de dínamo, há uma tendência do período aumentar em todos os modelos simulados. Valores aproximados dos períodos que, em cada região, reproduzem um ciclo magnético solar de 22 anos são $T \approx 35$ (B), $T \approx 36$ (M) e $T \approx 9$ (To). Enquanto as segundas periodicidades discutidas na Seção 4.1 e apresentadas na Figura 38, com os parâmetros utilizados, os períodos estão entre $T \sim 10$ e $T \sim 30$, que remetem algo entre 6.3 anos e 18.9 anos (B), 6.1 anos e 18.3 anos (M) e 24.7 anos e 74.1 anos (To). Este último resultado se aproxima do ciclo de Gleissberg, a que é, usualmente, atribuído uma duração de 80 anos (Eddy, 1980).

O valor do campo em unidades de código depende do valor de B_{eq} escolhido. No Sol, acredita-se que o campo toroidal seja da ordem de 10^3G e o campo poloidal, da ordem de 10G . Por simplicidade, utiliza-se, neste trabalho, $B_{eq} = 1$.

5 Conclusões e Perspectivas

O ciclo solar tem duração aproximada de 22 anos. No entanto, nunca houve um modelo que conseguisse reproduzir todas as características do ciclo com precisão. A teoria do dínamo tem estudado os processos físicos que ocorrem no interior do Sol, entendendo que o ciclo magnético é mantido pela transformação de energia mecânica em energia eletromagnética.

Neste trabalho foram estudados dínamos astrofísicos aplicados ao caso do Sol, em que adotou-se a abordagem de campo médio, a qual separa componentes da grande escala e da pequena escala, com o objetivo de investigar quais os fatores responsáveis por sustentar a atividade magnética solar e buscar entender como esses fatores afetam a duração dos ciclos e a intensidade do campo. De forma específica, são analisados os modelos α^2 , $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$, tal que os dois primeiros são aproximações do último. O sistema, então, é transportado a uma análise unidimensional, com a fim de simplificar as equações e demonstrar que é possível reproduzir a física do sistema mesmo com uma dimensão baixa.

Tanto as soluções analíticas quanto numéricas dos modelos exibiram dependência dos coeficientes de dínamo, que controlam a eficiência dos principais processos que ocorrem no sistema, sendo eles o efeito Ω e o efeito α , resultantes da rotação diferencial e dos fluxos turbulentos, respectivamente. O efeito Ω é responsável pela regeneração do campo magnético na direção toroidal, enquanto o efeito α é capaz de regenerar o campo tanto na direção poloidal, quanto na direção toroidal. O modelo de dínamo α^2 despreza o efeito de rotação diferencial, sendo movido apenas pela ação do efeito α . Já o dínamo $\alpha\Omega$ ignora a parte do efeito α que regenera o campo na direção toroidal, sendo o único responsável por este processo, o efeito Ω . O dínamo $\alpha^2\Omega$ contém todas as contribuições.

Para o Sol e outros objetos astrofísicos são esperadas soluções supercríticas das equações do dínamo, que implicam no crescimento exponencial do campo magnético. Logo, surge a necessidade de encontrar mecanismos que saturem os campos. Foram analisados dois tipos de saturação: o primeiro denominado saturação algébrica, que inclui um modo heurístico de saturação e o segundo que considera a conservação da helicidade magnética para deduzir uma equação que contrabalanceie o efeito α cinético, dessa forma, o efeito α obedece, também, a uma equação dinâmica. As duas abordagens possuem dependência do número de Reynolds magnético, o que pode causar o amortecimento catastrófico dos campos. Para que isso não ocorra, inclui-se um termo de fluxo de helicidade magnética à equação dinâmica do efeito α . O fluxo de helicidade introduzido aqui é uma simples difusão Fickiana. No entanto, outros fluxos carregando helicidade magnética devem existir

em sistemas astrofísicos (Guerrero et al., 2010).

Os coeficientes de dínamo, C_α , C_Ω e D , são grandezas adimensionais. O dínamo α^2 possui dependência apenas de C_α , obtendo valor crítico $C_\alpha = 1$, enquanto os dínamos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$, para os casos em que $C_\Omega \gg C_\alpha$, possuem dependência de $D = C_\alpha C_\Omega$, com valor crítico em $D = 2$. Os campos decaem se os coeficientes possuem valores menores que valor crítico e crescem exponencialmente se são maiores.

Dos mecanismos de saturação, os modelos que utilizam a saturação algébrica apresentam, em parte, uma boa descrição dos ciclos magnéticos. O problema mais evidente ocorre quando analisa-se a dependência do número de Reynolds magnético, R_m , com valores mais altos, característicos do interior das estrelas. Nesses casos, os campos são impedidos de crescer, já com $R_m \sim 10^4$, podendo ocorrer o processo de amortecimento catastrófico. A taxa de crescimento no início da evolução de B , para o dínamo α^2 foi de $\approx 10^{-6} \times 1.5(\text{T/s})$ para todos os valores de R_m . No entanto, eles saturam em valores diferentes.

A relação entre a média do campo e o número de Reynolds magnético, para os modelos que utilizam o mecanismo de saturação algébrica é $B_{media} \propto R_m^{-0.5}$. Esta relação reproduz-se também nos dínamos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$ que utilizam saturação algébrica. Os modelos com saturação dinâmica de α também estão sujeitos à extinção catastrófica para $R_m \simeq 10^4$. Uma saída para que o dínamo consiga sustentar o campo é incluir um termo na equação de evolução de α_M relacionado ao fluxo de helicidade magnética do sistema. Um fluxo no valor de $\kappa_\alpha = 0.005\eta_t$ foi capaz de sustentar o dínamo com $R_m = 10^4$. O fluxo difusivo é capaz de sustentar o dínamo até mesmo para valores mais altos do número de Reynolds magnético, como $R_m = 10^9$. O ajuste desse fluxo também pode gerar oscilações com períodos maiores, que englobam o ciclo principal, como demonstrado na Figura 22.

A saturação dinâmica com a presença de fluxo, observou-se uma relação de B_{media} proporcional à $R_m^{-0.5}$, para valores mais baixos de R_m e então, uma estabilização dos valores de B_{media} quando R_m aumenta. Além disso, os resultados obtidos com a saturação dinâmica, mas sem a presença de fluxo, demonstram um vínculo dessas relações com o número de dínamo, de forma que D controla a atividade do dínamo. Um número de dínamo baixo ($D = 5$) ocasionou um decaimento rápido do campo. Quando utilizou-se $D = 100$, obteve-se a relação $B_{media} \propto R_m^{-0.8}$.

As relações entre a média dos campos e R_m (Figura 23) concordam com resultados da literatura, como os trabalhos de Brandenburg et al. (2009), Mitra et al. (2010) e Guerrero et al. (2010) para os métodos de saturação algébrica (mantendo a relação de $B_{media} \propto R_m^{-0.5}$) e saturação dinâmica com a presença de fluxo. No método de saturação dinâmica sem a presença de fluxo, o expoente de R_m apresenta um valor um pouco deslocado de valores encontrados na literatura, possivelmente, pela baixa dimensionalidade

do modelo.

Nos modelos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$, os períodos de oscilação do ciclo principal possuem uma tendência de seguir a relação $T \propto D^{0.5}$. Ao aumentar o valor do termo que controla o fluxo, κ_0 , a curva alcança valores de períodos mais altos. O mesmo pode ser observado na relação das amplitudes com D , tal que quanto quanto mais alto o valor do termo de fluxo, maiores os valores de amplitude. No entanto, a relação para termos de fluxo mais baixos parece ser linear, mas termos de fluxo mais altos evidenciam que D cresce, em geral, com um expoente maior que 1.

Dentre as simulações apresentadas neste trabalho, os modelos de dínamo que melhor representam o comportamento da atividade magnética do Sol são o $\alpha\Omega$ e o $\alpha^2\Omega$. Eles apresentam oscilações que reproduzem os máximos e mínimos de intensidade e a inversão de polaridade dos campos, tanto na direção poloidal quanto na direção toroidal. O dínamo α^2 é capaz de sustentar o campo magnético somente pela ação do efeito α . Ele, em geral, mantém os campos poloidal e toroidal com a mesma intensidade e aumentam a magnitude quando a atividade do efeito α é ampliada. Isto ocorre ao variar C_α . Apesar de alguns trabalhos reportarem dínamos α^2 oscilatórios, como em Günther et al. (2005), nos modelos unidimensionais trabalhados aqui, nenhum resultado oscilatório foi encontrado.

Nos modelos $\alpha\Omega$ e $\alpha^2\Omega$ o campo toroidal apresentou uma amplitude bem maior do que o campo poloidal, o que era esperado pela teoria e pelas condições iniciais. Outro fator observado é que quando $C_\Omega \gg C_\alpha$ os dois modelos são equivalentes. Quando a razão entre C_Ω e C_α diminui, as diferenças começam a aparecer. E nos casos em que a razão entre os respectivos coeficientes é alta, ao variar C_Ω sem alterar o número de dínamo, $D = C_\Omega C_\alpha$, não é possível observar uma mudança significativa no campo toroidal B , sendo observável somente no campo poloidal A . Esses são fatores que permitem concluir que nos casos em que $C_\Omega \gg C_\alpha$, a eficiência do dínamo é controlada pelo número de dínamo D . Se a diferença diminui, é necessário analisar os coeficientes C_α e C_Ω separadamente.

As oscilações demonstradas nas Figuras 24 e 27 se assemelham às oscilações verificadas nos trabalhos de Brandenburg et al. (2001) e Kitiashvili and Kosovichev (2009), por exemplo. Fatores que influenciam em seu formato são os parâmetros adimensionais D , R_m e κ_0 .

As relações de proporcionalidade entre o período e o número de dínamo possuem comportamentos semelhantes aos apresentados por Rogachevskii and Kleorin (2001) e Brandenburg et al. (2009), por exemplo, quando os resultados das simulações são escalados apropriadamente a escalas solares. A Figura 37, que mostra a relação de amplitude para números de dínamo da ordem de 10^3 , utiliza os mesmos valores de R_m e κ_0 que as curvas pretas das Figuras 35 e 36, contudo, a inclinação é maior quando os números de dínamo são mais altos.

De acordo com os resultados de período ao variar os parâmetros adimensionais e os valores das constantes relacionados na Tabela 1, é possível supor que diferentes regiões do Sol possuam valores de D diferentes. Portanto, o mesmo sistema (e.g. o Sol) pode conter vários dínamos operando no seu interior com escalas temporais diferentes. Como foi calculado, um número de dínamo que causa um período aproximado de 22 anos em uma região, como o topo da camada convectiva, pode ser bem distinto quando calculado no meio ou na base. Outro fator que pode contribuir para o entendimento de qual dínamo opera em determinada região é a diferença de fases entre o campo poloidal e o campo toroidal que varia de acordo com a escolha de D , conforme observado na Figura 32. Uma suposição, também, é de que as anomalias encontradas na Figura 31, possam ocorrer em outros valores de D , o que explicaria comportamentos anômalos observados no ciclo solar.

Os resultados apresentados também demonstram a relação dos ciclos maiores, encontrados na Figura 22, com R_m e κ_0 . Eles são interessantes, pois demonstram que a difusão magnética causa a diminuição da helicidade magnética e pode estar gerando uma segunda periodicidade. O termo $\left(\frac{1}{R_m} + \frac{\kappa_0}{2}\right)$ presente na Equação 3.22 é o responsável por controlar este ciclo, de forma que se a soma desses dois fatores for alta o suficiente, o dínamo elimina este segundo ciclo. Se for muito baixa, o campo decai e o dínamo deixa de existir. Em um valor intermediário (também existindo uma dependência de D), os segundos ciclos aparecem. Os valores de período encontrados no topo da camada convectiva, para números de Reynolds $\geq 5 \times 10^3$, inclusive, ($T \approx 74$ anos) se aproxima da duração do ciclo de Gleissberg, com duração de 80 anos. Outra possibilidade é que as oscilações menores representem os ciclos de dois anos encontrados no Sol, enquanto a segunda periodicidade, o ciclo principal de 22 anos.

Em posse de todos esses resultados, é possível concluir que o modelo unidimensional foi capaz de capturar a física de vários processos observados em modelos bi ou tridimensionais. A análise do dínamo $\alpha^2\Omega$ com saturação dinâmica de α_M é inédita na literatura. Este modelo é importante, pois resultados de simulações 3D mostram que é esse o dínamo que, provavelmente, deve operar nas simulações do Sol (Guerrero et al., 2019). Algumas perspectivas para a continuidade da pesquisa são: comparar os modelos 1D com os resultados dos coeficientes de dínamo calculados em modelos 3D; buscar entender outras formas de interpretar o termo $\langle \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \rangle$ e estudar como ele afeta os resultados, já que é um termo de difícil interpretação, de forma que mais análises são necessárias; realizar uma análise dos números de onda da pequena escala (k_f); estudar dínamos que utilizam, majoritariamente, o efeito α magnético, α_M , como propulsor do efeito α , como proposto por Guerrero et al. (2019), utilizando outros tipos de fluxo de helicidade magnética, como o de Vishniac-Cho (Vishniac and Cho, 2001), por exemplo.

Referências

- Alfvén, H. (1942). Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. *Nature*, 150(3805):405–406. Citado na página 15.
- Baumann, I., Schmitt, D., Schüssler, M., and Solanki, S. (2004). Evolution of the large-scale magnetic field on the solar surface: A parameter study. *Astronomy & Astrophysics*, 426(3):1075–1091. Citado na página 13.
- Blackman, E. G. and Brandenburg, A. (2002). Dynamic nonlinearity in large-scale dynamos with shear. *The Astrophysical Journal*, 579(1):359. Citado 6 vezes nas páginas 18, 36, 37, 38, 39 e 40.
- Brandenburg, A. (2001). The inverse cascade and nonlinear alpha-effect in simulations of isotropic helical hydromagnetic turbulence. *The Astrophysical Journal*, 550(2):824. Citado na página 40.
- Brandenburg, A., Bigazzi, A., and Subramanian, K. (2001). The helicity constraint in turbulent dynamos with shear. , 325(2):685–692. Citado 3 vezes nas páginas 44, 45 e 67.
- Brandenburg, A., Candelaresi, S., and Chatterjee, P. (2009). Small-scale magnetic helicity losses from a mean-field dynamo. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 398(3):1414–1422. Citado 5 vezes nas páginas 37, 52, 59, 66 e 67.
- Brandenburg, A. and Subramanian, K. (2005). Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory. *Physics Reports*, 417(1-4):1–209. Citado 15 vezes nas páginas 15, 16, 17, 21, 22, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 36 e 40.
- Carrasco, V., Gallego, M., Villalba Álvarez, J., and Vaquero, J. (2019). Sunspot observations by Charles Malapert during the period 1618–1626: a key data set to understand solar activity before the Maunder minimum. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 488(3):3884–3895. Citado na página 14.
- Charbonneau, P. (2010). Dynamo models of the solar cycle. *Living Reviews in Solar Physics*, 7(1):3. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- Cowling, T. G. (1933). The magnetic field of sunspots. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 94:39–48. Citado na página 24.
- Del Sordo, F., Guerrero, G., and Brandenburg, A. (2013). Turbulent dynamos with advective magnetic helicity flux. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 429(2):1686–1694. Citado na página 16.

- Dikpati, M. and Charbonneau, P. (1999). A babcock-leighton flux transport dynamo with solar-like differential rotation. *The Astrophysical Journal*, 518(1):508. Citado na página 39.
- Eddy, J. A. (1980). The historical record of solar activity. In *The Ancient Sun: Fossil Record in the Earth, Moon and Meteorites*, pages 119–134. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 63.
- Eddy, J. A. (1983). The maunder minimum: a reappraisal. *Solar Physics*, 89(1):195–207. Citado na página 15.
- Griffiths, D. J. (2005). Introduction to electrodynamics. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- Guerrero, G. (2020). Global simulations of stellar dynamos. Citado na página 62.
- Guerrero, G., Chatterjee, P., and Brandenburg, A. (2010). Shear-driven and diffusive helicity fluxes in α dynamos. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 409(4):1619–1630. Citado 8 vezes nas páginas 18, 34, 37, 45, 49, 51, 52 e 66.
- Guerrero, G., Zaire, B., Smolarkiewicz, P., Dal Pino, E. d. G., Kosovichev, A., and Mansour, N. (2019). What sets the magnetic field strength and cycle period in solar-type stars? *The Astrophysical Journal*, 880(1):6. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 68.
- Günther, U., Stefani, F., and Znojil, M. (2005). Mhd α 2-dynamo, squire equation and pt-symmetric interpolation between square well and harmonic oscillator. *Journal of mathematical physics*, 46(6):063504. Citado na página 67.
- Henk Tennekes, J. (1972). A first course in turbulence. first prin. Citado na página 75.
- J Schou, H. A. (1998). Helioseismic studies of differential rotation in the solar envelope by the solar oscillations investigation using the michelson doppler imager. *The Astrophysical Journal*, 505(1):390–417. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 62.
- Karak, B. B., Tomar, A., and Vashishth, V. (2019). Stellar dynamos with solar and anti-solar differential rotations: Implications to magnetic cycles of slowly rotating stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. Citado na página 32.
- Kitchatinov, L., Mordvinov, A., and Nepomnyashchikh, A. (2018). Modelling variability of solar activity cycles. *Astronomy & Astrophysics*, 615:A38. Citado na página 32.
- Kitiashvili, I. and Kosovichev, A. (2009). Nonlinear dynamical modeling of solar cycles using dynamo formulation with turbulent magnetic helicity. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 103(1):53–68. Citado 6 vezes nas páginas 18, 28, 29, 39, 63 e 67.

- Kitiashvili, I. N. (2016). Data assimilation approach for forecast of solar activity cycles. *The Astrophysical Journal*, 831(1):15. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 39.
- Kleeorin, N., Kuzanyan, K., Moss, D., Rogachevskii, I., Sokoloff, D., and Zhang, H. (2003). Magnetic helicity evolution during the solar activity cycle: observations and dynamo theory. *Astronomy & Astrophysics*, 409(3):1097–1105. Citado na página 34.
- Kleeorin, N. and Rogachevskii, I. (1999). Magnetic helicity tensor for an anisotropic turbulence. *Physical Review E*, 59(6):6724. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.
- Kosovichev, A.-a., Schou, J., Scherrer, P., Bogart, R., Bush, R., Hoeksema, J., Aloise, J., Bacon, L., Burnette, A., De Forest, C., et al. (1997). Structure and rotation of the solar interior: initial results from the mdi medium-l program. In *The First Results from SOHO*, pages 43–61. Springer. Citado na página 17.
- Kuang, W. and Bloxham, J. (1997). An earth-like numerical dynamo model. *Nature*, 389(6649):371–374. Citado na página 16.
- Mitra, D., Candelaresi, S., Chatterjee, P., Tavakol, R., and Brandenburg, A. (2010). Equatorial magnetic helicity flux in simulations with different gauges. *Astronomische Nachrichten: Astronomical Notes*, 331(1):130–135. Citado 4 vezes nas páginas 37, 38, 52 e 66.
- Moffatt, H. (1970). Turbulent dynamo action at low magnetic Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 41(2):435–452. Citado na página 18.
- Moffatt, H. K. (1978). Field generation in electrically conducting fluids. *Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne*, 2:5–1. Citado 5 vezes nas páginas 17, 22, 25, 26 e 31.
- Muñoz-Jaramillo, A., Nandy, D., and Martens, P. C. (2010). Magnetic quenching of turbulent diffusivity: reconciling mixing-length theory estimates with kinematic dynamo models of the solar cycle. *The Astrophysical Journal Letters*, 727(1):L23. Citado na página 62.
- Parker, E. N. (1955a). The formation of sunspots from the solar toroidal field. *The astrophysical journal*, 121:491. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- Parker, E. N. (1955b). Hydromagnetic dynamo models. *The Astrophysical Journal*, 122:293. Citado 5 vezes nas páginas 17, 21, 24, 28 e 29.
- Pouquet, A., Frisch, U., and Léorat, J. (1976). Strong mhd helical turbulence and the nonlinear dynamo effect. *Journal of Fluid Mechanics*, 77(2):321–354. Citado na página 34.

- Rogachevskii, I. and Kleeorin, N. (2001). Nonlinear turbulent magnetic diffusion and mean-field dynamo. *Physical Review E*, 64(5):056307. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 67.
- Shukurov, A., Sokoloff, D., Subramanian, K., and Brandenburg, A. (2006). Galactic dynamo and helicity losses through fountain flow. *Astronomy & Astrophysics*, 448(2):L33–L36. Citado na página 16.
- Subramanian, K. and Brandenburg, A. (2004). Nonlinear current helicity fluxes in turbulent dynamos and alpha quenching. *Physical review letters*, 93(20):205001. Citado na página 37.
- Tavares, M. (2000). Meteorologiaespacial. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 22(4):24210–340. Citado na página 15.
- Usoskin, I. G., Mursula, K., Solanki, S., Schüssler, M., and Alanko, K. (2004). Reconstruction of solar activity for the last millennium using tree-ring data. *Astronomy & Astrophysics*, 413(2):745–751. Citado na página 14.
- Vainshtein, S. I. and Cattaneo, F. (1992). Nonlinear restrictions on dynamo action. *The Astrophysical Journal*, 393:165–171. Citado na página 34.
- VanderPlas, J. T. (2018). Understanding the lomb–scargle periodogram. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 236(1):16. Citado na página 47.
- Vecchio, A. and Carbone, V. (2008). On the origin of the double magnetic cycle of the sun. *The Astrophysical Journal*, 683(1):536. Citado na página 14.
- Vishniac, E. T. and Cho, J. (2001). Magnetic helicity conservation and astrophysical dynamos. *The Astrophysical Journal*, 550(2):752. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 68.
- William, H. (1992). Press. numerical recipes in c. *Cambridge University*. Citado na página 47.

Apêndices

APÊNDICE A – As Regras de Reynolds

De acordo com Henk Tennekes (1972) uma variável qualquer, U , pode ser escrita como a soma de uma parcela que representa o seu valor médio, \bar{U} , e outra que caracteriza a turbulência, u :

$$U = \bar{U} + u. \quad (\text{A.1})$$

O valor médio pode ser interpretado como uma média no espaço. Portanto, pode ser obtido através do cálculo da média espacial em U :

$$\bar{U} = \frac{\int U(x) dx}{\int dx}. \quad (\text{A.2})$$

Através desta definição, é possível observar que a média espacial da flutuação é zero:

$$\bar{u} = \frac{\int U(x) - \bar{U} dx}{\int dx} = 0, \quad (\text{A.3})$$

tal que a média da variável “valor médio” é a própria variável.

Com essas definições, torna-se viável determinar as regras de Reynolds, considerando U e V como variáveis e c uma constante:

$$\bar{u} = 0;$$

$$\overline{cU} = c\bar{U};$$

$$\overline{U + V} = \bar{U} + \bar{V}; \quad (\text{A.4})$$

$$\overline{(\bar{U}V)} = \bar{U}\bar{V};$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}.$$

Aplicando as regras de Reynolds à média de um produto de duas variáveis, U e V , obtém-se:

$$\overline{UV} = \overline{(\bar{U} + u)(\bar{V} + v)}$$

$$\begin{aligned} &= \bar{U}\bar{V} + \bar{u}\bar{V} + \bar{U}\bar{v} + \overline{uv} \\ &= \bar{U}\bar{V} + \overline{uv}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

O segundo termo do lado direito da equação pode ser diferente de zero, a depender de como as flutuações de ambas as variáveis se relacionam. Supondo que u e v possuem um padrão semelhante, isto é, se uma flutuação é positiva (negativa) em uma determinada região, a outra também o é. Logo, $\overline{uv} \neq 0$. Se os padrões forem descorrelacionados, considera-se $\overline{uv} = 0$.

Anexos

ANEXO A – Código do modelo de Saturação Algébrica

A seguir, o código utilizado para o método de saturação dinâmica. O programa resolve um sistema de duas equações.

```

1
2 program main
3
4 !! MAIN e o principal programa para o estudo das rotinas RK4.
5 !
6 ! Licenciamento:
7 !
8 ! Este codigo e distribuido sob a licenca GNU LGPL.
9 !
10 implicit none
11
12 write ( *, '(a)' ) ' '
13 write ( *, '(a)' ) ' Test the RK4 library.'
14
15 call dynamo ( )
16
17 ! Termino.
18
19 stop
20 end
21
22
23 subroutine rk4vec ( t0, m, u0, dt, f, u )
24
25 !! RK4VEC da um passo de Runge–Kutta para uma EDO vetorial.
26 !
27 ! Parametros:
28 !
29 ! Input, real ( kind = 8 ) T0, o tempo corrente.
30 !
31 ! Input, integer ( kind = 4 ) M, a dimensao do sistema.
32 !
33 ! Input, real ( kind = 8 ) U0(M), a solucao estimada no tempo corrente.
34 !
35 ! Input, real ( kind = 8 ) DT, o passo temporal.
36 !
37 ! Input, external F, uma subrotina da forma

```

```

38 !      subroutine f ( t, m, u, uprime )
39 !      que evolui a derivada UPRIME(1:M) retornando o tempo T e
40 !      a solucao do vetor U(1:M).
41 !
42 !      Output, real ( kind = 8 ) U(M), a solucao
43 !      do Runge-Kutta de quarta ordem
44 !      estimada no tempo T0+DT.
45 !
46 implicit none
47
48 integer ( kind = 4 ) m
49
50 real ( kind = 8 ) dt
51 external f
52 complex ( kind = 8 ) f0(m)
53 complex ( kind = 8 ) f1(m)
54 complex ( kind = 8 ) f2(m)
55 complex ( kind = 8 ) f3(m)
56 real ( kind = 8 ) t0
57 real ( kind = 8 ) t1
58 real ( kind = 8 ) t2
59 real ( kind = 8 ) t3
60 complex ( kind = 8 ) u(m)
61 complex ( kind = 8 ) u0(m)
62 complex ( kind = 8 ) u1(m)
63 complex ( kind = 8 ) u2(m)
64 complex ( kind = 8 ) u3(m)
65 !
66 !      Obtem quatro valores de amostra da derivada.
67 !
68 call f ( t0, m, u0, f0 )
69
70 t1 = t0 + dt / 2.0D+00
71 u1(1:m) = u0(1:m) + dt * f0(1:m) / 2.0D+00
72 call f ( t1, m, u1, f1 )
73
74 t2 = t0 + dt / 2.0D+00
75 u2(1:m) = u0(1:m) + dt * f1(1:m) / 2.0D+00
76 call f ( t2, m, u2, f2 )
77
78 t3 = t0 + dt
79 u3(1:m) = u0(1:m) + dt * f2(1:m)
80 call f ( t3, m, u3, f3 )
81 !
82 !      Combinando-as para estimar a solucao U no tempo T1.
83 !
84 u(1:m) = u0(1:m) + dt * ( f0(1:m) + 2.0D+00 * f1(1:m) &

```



```

85 + 2.0D+00 * f2(1:m) + f3(1:m) ) / 6.0D+00
86
87 return
88 end
89
90 subroutine dynamo ( )
91
92 !*****
93
94 !! PROJECTILE testa a rotina RK4 para uma EDO vetorial.
95 !
96 implicit none
97
98 integer ( kind = 4 ), parameter :: n = 2
99
100 real ( kind = 8 ), parameter :: dt = 0.0001D+00
101 real ( kind = 8 ), parameter :: pi = 3.141592653589793D+00
102 external dynamo_f
103 real ( kind = 8 ) t0
104 real ( kind = 8 ) t1
105 complex ( kind = 8 ) a0
106 complex ( kind = 8 ) b0
107 real ( kind = 8 ) alpha0
108 complex ( kind = 8 ) i/(0.,1.)/
109 real ( kind = 8 ), parameter :: tmax = 50.0D+00
110 complex ( kind = 8 ) u0(n)
111 complex ( kind = 8 ) u1(n)
112
113 integer passo
114 real ( kind = 8 ) Beq
115 complex ( kind = 8 ) Brms
116
117 write ( *, '(a)' ) ' '
118 write ( *, '(a)' ) 'DYNAMO'
119 write ( *, '(a)' ) ' RK4VEC takes a Runge Kutta step for a vector ODE.'
120 write ( *, '(a)' ) ' '
121
122 t0 = 0.0D+00
123 a0 = 1.e-6
124 b0 = 0.0
125 alpha0 = 0.0
126 u0(1) = a0      ! valor inicial de A
127 u0(2) = b0      ! valor inicial de B
128 u0(3) = alpha0  ! valor inicial de Alpha
129
130 Beq = 1.
131 passo = 0.

```

```

132
133 do
134
135 Brms = ((u0(2)**2 - u0(1)**2)**(0.5))/(Beq)
136 !
137 passo = passo + 1.
138 !
139 if (passo.eq.100.) then
140
141 passo = 0.
142
143 write ( *, '(2x,g14.6,2x,g14.6,2x,g14.6,2x,g14.6,2x,g14.6,2x, &
144 g14.6,2x,g14.6,2x,g14.6)' ) t0, realpart(u0(1)), &
145 imagpart(u0(1)), realpart(u0(2)), imagpart(u0(2)), &
146 realpart(u0(3)), imagpart(u0(3)), realpart(Brms)
147
148 end if
149 !
150 ! Para se tiver excedido TMAX.
151 !
152 if ( tmax <= t0 ) then
153     exit
154 end if
155 !
156 ! Caso contrario , avanca para o tempo T1, e
157 !     tem-se a estimativa de RK4
158 ! the solution U1 there.
159 !
160 t1 = t0 + dt
161 call rk4vec ( t0, n, u0, dt, dynamo_f, u1 )
162 !
163 ! Muda os dados para se preparar para outra etapa.
164 !
165 t0 = t1
166 u0(1:n) = u1(1:n)
167
168 end do
169
170 return
171 end
172
173
174 subroutine dynamo_f ( t, n, u, uprime )
175
176 !*****
177 !
178 !! PROJ_F evolui o lado direito da EDO vetorial.

```

```
179 !
180 ! Parametros:
181 !
182 ! Input, real ( kind = 8 ) T, o tempo corrente.
183 !
184 ! Input, integer ( kind = 4 ) N, a dimensao do sitema.
185 !
186 ! Input, real ( kind = 8 ) U(N), o valor da solucao corrente.
187 !
188 ! Output, real ( kind = 8 ) UPRIME(N), o valor da derivada, dU/dT.
189 !
190 implicit none
191
192 integer ( kind = 4 ) n
193
194 real ( kind = 8 ) t
195 complex ( kind = 8 ) u(n)
196 complex ( kind = 8 ) uprime(n)
197 ! Aqui definimos as constantes do problema
198 complex (kind = 8) i/(0.,1.)/
199
200 real ( kind = 8 ) Beq, a
201 real ( kind = 8 ) Ca, Cw
202
203 Beq = 1.
204 a = 1.
205
206 Cw = 1000.
207
208 alpha_K = 1.
209
210 Ca = alpha_K * 1./(1. + Rm*( u(2)**2)/Beq**2)
211
212 uprime(1) = Ca*u(2) - u(1)
213 uprime(2) = i*Cw*u(1) + Ca*u(1) - u(2)
214
215 return
216 end
```


ANEXO B – Código do Modelo de Saturação Dinâmica

A seguir, o código utilizado para o método de saturação dinâmica. O programa resolve um sistema de três equações.

```

1
2 program main
3
4 !! MAIN e o principal programa para o estudo das rotinas RK4.
5 !
6 ! Licenciamento:
7 !
8 ! Este codigo e distribuido sob a licenca GNU LGPL.
9 !
10 implicit none
11
12 write ( *, '(a)' ) ' '
13 write ( *, '(a)' ) ' Test the RK4 library.'
14
15 call dynamo ( )
16
17 ! Termino.
18
19 stop
20 end
21
22
23 subroutine rk4vec ( t0, m, u0, dt, f, u )
24
25 !! RK4VEC da um passo de Runge-Kutta para uma EDO vetorial.
26 !
27 ! Parametros:
28 !
29 ! Input, real ( kind = 8 ) T0, o tempo corrente.
30 !
31 ! Input, integer ( kind = 4 ) M, a dimensao do sistema.
32 !
33 ! Input, real ( kind = 8 ) U0(M), a solucao estimada no tempo corrente.
34 !
35 ! Input, real ( kind = 8 ) DT, o passo temporal.
36 !
37 ! Input, external F, uma subrotina da forma

```

```

38 !      subroutine f ( t, m, u, uprime )
39 !      que evolui a derivada UPRIME(1:M) retornando o tempo T e
40 !      a solucao do vetor U(1:M).
41 !
42 !      Output, real ( kind = 8 ) U(M), a solucao
43 !      do Runge-Kutta de quarta ordem
44 !      estimada no tempo T0+DT.
45 !
46 implicit none
47
48 integer ( kind = 4 ) m
49
50 real ( kind = 8 ) dt
51 external f
52 complex ( kind = 8 ) f0(m)
53 complex ( kind = 8 ) f1(m)
54 complex ( kind = 8 ) f2(m)
55 complex ( kind = 8 ) f3(m)
56 real ( kind = 8 ) t0
57 real ( kind = 8 ) t1
58 real ( kind = 8 ) t2
59 real ( kind = 8 ) t3
60 complex ( kind = 8 ) u(m)
61 complex ( kind = 8 ) u0(m)
62 complex ( kind = 8 ) u1(m)
63 complex ( kind = 8 ) u2(m)
64 complex ( kind = 8 ) u3(m)
65 !
66 !      Obtem quatro valores de amostra da derivada.
67 !
68 call f ( t0, m, u0, f0 )
69
70 t1 = t0 + dt / 2.0D+00
71 u1(1:m) = u0(1:m) + dt * f0(1:m) / 2.0D+00
72 call f ( t1, m, u1, f1 )
73
74 t2 = t0 + dt / 2.0D+00
75 u2(1:m) = u0(1:m) + dt * f1(1:m) / 2.0D+00
76 call f ( t2, m, u2, f2 )
77
78 t3 = t0 + dt
79 u3(1:m) = u0(1:m) + dt * f2(1:m)
80 call f ( t3, m, u3, f3 )
81 !
82 !      Combinando-as para estimar a solucao U no tempo T1.
83 !
84 u(1:m) = u0(1:m) + dt * ( f0(1:m) + 2.0D+00 * f1(1:m) &

```

```

85 + 2.0D+00 * f2(1:m) + f3(1:m) ) / 6.0D+00
86
87 return
88 end
89
90 subroutine dynamo ( )
91
92 !*****
93
94 !! PROJECTILE testa a rotina RK4 para uma EDO vetorial.
95 !
96 implicit none
97
98 integer ( kind = 4 ), parameter :: n = 3
99
100 real ( kind = 8 ), parameter :: dt = 0.0001D+00
101 real ( kind = 8 ), parameter :: pi = 3.141592653589793D+00
102 external dynamo_f
103 real ( kind = 8 ) t0
104 real ( kind = 8 ) t1
105 complex ( kind = 8 ) a0
106 complex ( kind = 8 ) b0
107 real ( kind = 8 ) alpha0
108 complex ( kind = 8 ) i/(0.,1.)/
109 real ( kind = 8 ), parameter :: tmax = 50.0D+00
110 complex ( kind = 8 ) u0(n)
111 complex ( kind = 8 ) u1(n)
112
113 integer passo
114 real ( kind = 8 ) Beq
115 complex ( kind = 8 ) Brms
116
117 write ( *, '(a)' ) ' '
118 write ( *, '(a)' ) 'DYNAMO'
119 write ( *, '(a)' ) ' RK4VEC takes a Runge Kutta step for a vector ODE.'
120 write ( *, '(a)' ) ' '
121
122 t0 = 0.0D+00
123 a0 = 1.e-6
124 b0 = 0.0
125 alpha0 = 0.0
126 u0(1) = a0      ! valor inicial de A
127 u0(2) = b0      ! valor inicial de B
128 u0(3) = alpha0  ! valor inicial de Alpha
129
130 Beq = 1.
131 passo = 0.

```

```

132
133 do
134
135 Brms = ((u0(2)**2 - u0(1)**2)**(0.5))/(Beq)
136 !
137 passo = passo + 1.
138 !
139 if (passo.eq.100.) then
140
141 passo = 0.
142
143 write ( *, '(2x,g14.6,2x,g14.6,2x,g14.6,2x,g14.6,2x,g14.6,2x, &
144 g14.6,2x,g14.6,2x,g14.6)' ) t0, realpart(u0(1)), &
145 imagpart(u0(1)), realpart(u0(2)), imagpart(u0(2)), &
146 realpart(u0(3)), imagpart(u0(3)), realpart(Brms)
147
148 end if
149 !
150 ! Para se tiver excedido TMAX.
151 !
152 if ( tmax <= t0 ) then
153     exit
154 end if
155 !
156 ! Caso contrario , avanca para o tempo T1, e
157 !     tem-se a estimativa de RK4
158 ! the solution U1 there.
159 !
160 t1 = t0 + dt
161 call rk4vec ( t0, n, u0, dt, dynamo_f, u1 )
162 !
163 ! Muda os dados para se preparar para outra etapa.
164 !
165 t0 = t1
166 u0(1:n) = u1(1:n)
167
168 end do
169
170 return
171 end
172
173
174 subroutine dynamo_f ( t, n, u, uprime )
175
176 !*****
177 !
178 !! PROJ_F evolui o lado direito da EDO vetorial.

```

```

179 !
180 ! Parametros:
181 !
182 ! Input, real ( kind = 8 ) T, o tempo corrente.
183 !
184 ! Input, integer ( kind = 4 ) N, a dimensao do sitema.
185 !
186 ! Input, real ( kind = 8 ) U(N), o valor da solucao corrente.
187 !
188 ! Output, real ( kind = 8 ) UPRIME(N), o valor da derivada, dU/dT.
189 !
190 implicit none
191
192 integer ( kind = 4 ) n
193
194 real ( kind = 8 ) t
195 complex ( kind = 8 ) u(n)
196 complex ( kind = 8 ) uprime(n)
197 ! Aqui definimos as constantes do problema
198 complex (kind = 8) i/(0.,1.)/
199
200 real ( kind = 8 ) Beq, Rm, alpha_K, g_p, kapa, k_f
201 real ( kind = 8 ) Ca, Cw
202
203 Beq = 1.
204 Rm = 1.e9
205 kapa = 0.05
206 k_f = 10.
207
208 Cw = 1000.
209
210 alpha_K = 4.
211
212 Ca = alpha_K + u(3)
213
214 uprime(1) = Ca*u(2) - u(1)
215 uprime(2) = i*Cw*u(1) + Ca*u(1) - u(2)
216 uprime(3) = -(2*k_f/(Beq**2))*(Ca*(u(2)**2-u(1)**2) &
217 +u(1)*u(2))-2*k_f*(1/Rm + kapa/2)*u(3)
218
219 return
220 end

```