

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 1216
COMPENSAÇÃO DE NÃO LINEARIDADES VIA MODELOS

Lucas Amaral Tavares

DATA DA DEFESA: 11/12/2020

Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

COMPENSAÇÃO DE NÃO LINEARIDADES VIA MODELOS

Lucas Amaral Tavares

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Luis Antonio Aguirre

Belo Horizonte - MG

Dezembro de 2020

T231c	<p>Tavares, Lucas Amaral. Compensação de não linearidades via modelos [recurso eletrônico] / Lucas Amaral Tavares. - 2020. 1 recurso online (xxvi,134 f. : il., color.) : pdf.</p> <p>Orientador: Luís Antônio Aguirre.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.</p> <p>Apêndice: f.107-108. Bibliografia: f. 99-106.</p> <p>Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.</p> <p>1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Histerese - Teses. 3. Identificação de sistemas - Teses. I. Aguirre, Luís Antônio. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.</p>
	CDU: 621.3(043)

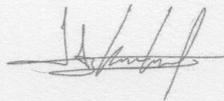
"Compensação de Não Linearidades Via Modelos"

Lucas Amaral Tavares

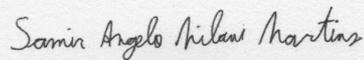
Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 11 de dezembro de 2020.

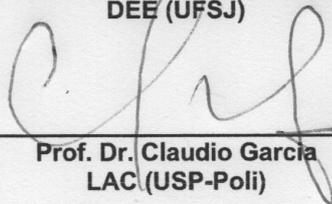
Por:



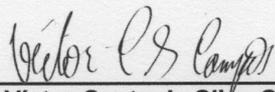
Prof. Dr. Luis Antonio Aguirre
DELT (UFMG) - Orientador



Prof. Dr. Samir Angelo Milani Martins
DEE (UFSJ)



Prof. Dr. Claudio Garcia
LAC (USP-Poli)



Prof. Dr. Victor Costa da Silva Campos
(UFMG)

Dedicatória

A minha família, que com amor incondicional me encorajam e fortalecem, principalmente nos dias tempestuosos.

Agradecimentos

A Deus, pelas incontáveis graças, oportunidades e desafios a mim confiados.

Ao professor Luis Antonio Aguirre, pela paciência, dedicação, auxílio, ensinamentos e valorosa orientação. Com ele, aprendi e aprendo muito mais do que ciência.

Aos meus pais, Cleusa e Márcio, e a minha irmã Carol, pelo apoio incondicional, pelos valores transmitidos e por todo esforço que sempre fizeram pela minha formação.

A minha namorada, Thais, pelo amor e compreensão, e por me dar as mãos nos dias mais difíceis. Obrigado por acreditar em mim e estar ao meu lado.

Aos amigos que encontrei ao longo de minha trajetória, por terem tornado tudo mais leve. Com os amigos do CPH, dividi um ambiente produtivo de pesquisa, com excelentes discussões e constante troca de ideias. De maneira especial ao Petrus, um grande companheiro além das publicações.

A todos os familiares, pela consideração e incentivo constante, em especial aos meus avós Alpha e Afonso que sempre foram fonte de inspiração e aprendizado.

A todos que tem me apoiado na busca dos meus sonhos que aos poucos se tornam realidade, especialmente aos que me incentivaram ao longo de minha trajetória, meus professores.

A todos que se dedicam à ciência, inspirando as gerações futuras à investigação e à busca de se conhecer hoje um pouco mais do que ontem.

Epígrafe

"Remember to look up at the stars and not down at your feet. Try to make sense of what you see and wonder about what makes the universe exist. Be curious. And however difficult life may seem, there is always something you can do and succeed at. It matters that you don't just give up."

Stephen Hawking

"Reconheço e confesso minha excessiva ousadia, sendo ignorante das Sagradas Letras, ao querer meter-me a explicar os sentidos de tão alta contemplação. Mas, assim como minha total submissão ao julgamento de meus superiores pode me fazer desculpar, assim também em o que se segue do versículo já explicado: 'O testemunho do Senhor é fiel, comunicando a Sabedoria aos pequeninos' me deu esperança de que é possível que a infinita benignidade de Deus possa endereçar à pureza de minha mente um raio mínimo de sua graça pela qual me aclare algum dos escondidos sentidos de suas palavras."

Galileu Galilei na obra *Ciência e Fé*, p. 46.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	xiii
Abstract	xv
Lista de Figuras	xviii
Lista de Tabelas	xix
Lista de Símbolos	xxi
Lista de Acrônimos	xxv
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	3
1.2 Contribuições	3
1.3 Estrutura do Texto	4
2 Aspectos Teóricos Fundamentais	7
2.1 Modelagem Matemática	7
2.1.1 Modelos que Apresentam Histerese	9
2.1.2 Identificação de Sistemas	13
2.2 Algoritmos Evolutivos	17
2.3 Modelos NARX polinomiais	19
2.3.1 Análise em Estado Estacionário	19

2.3.2	Utilização de Modelos NARX para Representação de Histerese	20
2.3.3	Determinação de Estruturas	21
2.3.4	Estimação de Parâmetros	23
2.4	Formulação do Problema de Compensação	25
2.5	Compensação e Controle de Sistemas Histeréticos	25
2.5.1	Compensadores	26
2.5.2	Controladores Realimentados e Compensadores	29
2.6	Considerações Finais	33
3	Compensação de Histerese usando Modelos Bouc-Wen	35
3.1	Compensação de Histerese	35
3.2	Identificação de Modelos BW	37
3.2.1	Sinal de Excitação	37
3.2.2	Estimação de Parâmetros via Abordagem Evolutiva	38
3.2.3	Validação dos Modelos	40
3.2.4	Aplicação da Estratégia para Modelo BW	40
3.2.5	Compensação de Histerese para o Modelo Modificado	41
3.3	Resultados	41
3.3.1	Um Exemplo Simulado – Modelo de Prandtl-Ishlinskii	42
3.3.2	Aplicação a uma Válvula Pneumática	44
3.4	Considerações Finais	48
4	Compensação de Não-Linearidades via Modelos NARX polinomiais	51
4.1	Seleção de Estrutura e Estimação de Parâmetros de Modelos NARX polinomiais	51
4.2	Compensação Estática	52
4.3	Compensação Dinâmica	55
4.4	Compensação de Sistemas com Histerese	57
4.4.1	Inicialização de Compensadores para Sistemas com Histerese	59
4.5	Aspectos Importantes para a Implementação	61
4.6	Considerações Finais	61

5	Resultados de Simulação	63
5.1	Exemplo 1 - Um Sistema de Aquecimento	63
5.1.1	Discussão	68
5.2	Exemplo 2 - Um Sistema Histerético	72
5.2.1	Discussão	76
5.3	Considerações Finais	80
6	Resultados Experimentais	83
6.1	Obtenção e Validação dos Modelos	83
6.2	Compensadores	88
6.3	Considerações Finais	93
7	Considerações Finais e Propostas de Continuidade	95
7.1	Propostas de Continuidade	96
	Bibliografia	106
A	Soluções Analíticas de Equações Algébricas Polinomiais	107
A.1	Equações Lineares	107
A.2	Equações Quadráticas	107
A.3	Equações Cúbicas	108

Resumo

A presença de efeitos não lineares tende a impor limitações de desempenho em sistemas de controle. Particularmente, a histerese é um tipo de não linearidade classificada como severa. Visando superar tais dificuldades, o projeto de compensadores é uma abordagem recorrente na literatura. De posse de um modelo representativo do sistema, o compensador objetiva determinar uma entrada que reduza o impacto das não linearidades na saída do sistema. Neste trabalho, propõe-se o projeto de compensadores para sistemas dinâmicos não lineares. Inicialmente, são apresentados os aspectos teóricos fundamentais, tais como: o modelo de Bouc-Wen (BW), modelos NARX polinomiais, o processo de identificação de sistemas, formulação do problema de compensação e uma revisão sobre o problema de compensação e controle de sistemas histeréticos. Na sequência, apresenta-se um algoritmo evolutivo para estimar os parâmetros de modelos BW que são invertidos para compensação de histerese em um exemplo simulado, modelo de Prandtl-Ishlinskii (PI) para um atuador, e em uma válvula pneumática. Como o algoritmo facilita a estimação de parâmetros, um termo é adicionado, gerando modelos modificados. Os resultados de compensação são comparados entre o modelo clássico e o modificado, mostrando que estes últimos são capazes de gerar resultados com erro de rastreamento, em média, 30% inferiores. Em seguida, tem-se a principal contribuição deste trabalho: uma estratégia para compensação de não linearidades baseada em modelos NARX. Nesta estratégia, a entrada de compensação é obtida iterativamente, sendo proposta para os contextos estático (referências constantes) e dinâmico (referências variantes no tempo), além de adaptada para sistemas com histerese. A compensação proposta via modelos NARX consiste em escrever um polinômio em função da entrada de compensação desejada e, então, calcular as raízes desse polinômio. Isso é feito iterativamente, sendo que torna-se necessária a seleção da raiz a ser aplicada como entrada de compensação, de modo que um algoritmo é proposto para tal contexto. A estratégia proposta é aplicada inicialmente em exemplos simulados: um sistema de calor com uma curva estática polinomial e um atuador PZT descrito por um modelo BW. Para ambos exemplos simulados, discute-se questões importantes como: o impacto da inicialização; robustez do método a variações nos parâmetros; e, utilização de restrições para que o compensador seja capaz de lidar com referências que se tornam constantes. Por fim, aplica-se a estratégia para a mesma válvula pneumática previamente citada. Os resultados obtidos são comparados com métodos bem estabelecidos e recentemente publicados, em que são discutidos benefícios e limitações de cada abordagem. Por fim, mostra-se que o método proposto é capaz de prover entradas de compensação que permitiram um erro de rastreamento máximo de 3,9%, cujo esforço adicional tende a apresentar vantagens em termos energéticos e de regularidade.

Palavras-chave: Compensações estática e dinâmica de não linearidades; compensação de histerese; modelo de Bouc-Wen; modelos NARX polinomiais.

Abstract

The presence of nonlinear effects imposes significant limitations on a wide range of systems. Notably, hysteresis is a hard nonlinearity that enforces challenges in the context of control. Aiming to overcome these issues, the design of compensators is a recurrent approach in the literature. Based on a representative model, the compensator's purpose is to determine a compensation input that reduces the impact of the nonlinearity effects in the output. This work aims to design compensators for nonlinear dynamical systems. Firstly, theoretical fundamentals are presented, such as the Bouc-Wen (BW) model, NARX polynomials, the identification process, the mathematical formulation of the compensation, and a review of control for hysteretic systems. In the sequel, it has proposed an evolutionary algorithm for parameter estimation of BW models, which are inverted and used for the hysteretic compensation in a numerical example, Prandtl-Ishillinsky, and a pneumatic valve. As this algorithm facilitates the parameter estimation process, a term is added, generating modified models. Both classical and modified models are compared, showing that the last could improve the results, reducing the tracking error of about 30% for the experimental test. Next, it is presented the compensation approach based on NARX polynomials, the main contribution of this work. This approach aims to find compensation inputs iteratively for nonlinear systems in static (constant references) and dynamical contexts (time variant references) through identified NARX models. Besides, an adaptation of the dynamical strategy comes for hysteretic systems. In rewriting the NARX model as a polynomial in the desired compensation input, the polynomial roots are iteratively calculated. In this process, a decision-making procedure selects a suitable solution that will be the compensation input. This compensation strategy is presented in two numerical examples: the first one is a heating system with a static curve, while the second is a piezoelectric device modeled by a BW model. For both examples, it has been discussed relevant issues for the method like the impact of the initialization process in the compensation performance, the robustness of the approach to parameter variations, and the use of restrictions to deal with time-varying references which become constant. Finally, this method is applied to a physical example, the previous pneumatic valve. The results of the presented compensators are compared with well-established and recent works. For each compensator, it has discussed their benefits and limitations. The results show that the proposed NARX-based compensators produce relevant compensation inputs that can make the system approximately linear with a maximum tracking error of 3.9%. It has also been shown that the additional effort for the presented strategy tends to be less energetic and more regular.

Keywords: Static and dynamical compensations of nonlinearities; hysteretic compensation; Bouc-Wen Models; NARX Polynomials.

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de curva de histerese produzida por um modelo BW.	11
2.2	Diagrama de blocos do sistema compensado.	25
2.3	Exemplo de curva de histerese típica em amortecedores magneto-reológicos obtida via simulação.	28
2.4	Modelo de compensação de histerese.	29
3.1	Representação esquemática da viga piezoelétrica em consola.	36
3.2	Esquema de determinação da função de adaptação.	39
3.3	Simulação livre em dados de validação para sistema PI	42
3.4	Saída do sistema PI com e sem compensação via modelo (3.13).	44
3.5	Esquema ilustrativo do experimento envolvendo a válvula pneumática realizado neste trabalho.	45
3.6	Simulação livre em dados de validação para a válvula.	46
3.7	Entradas de compensação para a válvula calculadas via (3.15) e (3.16).	47
3.8	Desempenho da compensação na válvula obtida com modelo (3.15).	47
3.9	Desempenho da compensação na válvula obtida com modelo (3.16).	48
4.1	Inicialização de compensadores histeréticos via amostragem de \mathcal{H}	60
5.1	Desempenho de simulação livre para \mathcal{S} (5.2) sobre dados de medição.	64
5.2	Critério AIC utilizado para definição do número de termos do modelo.	65
5.3	Validação livre de ruído para \mathcal{M} (5.2).	66
5.4	Resultados para compensação estática obtida com $\bar{\mathcal{M}}_r$ (5.5).	67
5.5	Resultados de compensação no contexto dinâmico para \mathcal{M}_r (5.7)	68
5.6	Teste de Monte Carlo para avaliar a variação do MAPE em função do aumento do ruído.	69
5.7	Semiplano definido pela desigualdade (5.10).	70
5.8	Resultados da abordagem de Monte Carlo para sistema de aquecimento.	72
5.9	Validação livre de ruído para modelo \mathcal{M}_h (5.11).	73
5.10	Resultados de desempenho do compensador $\mathcal{M}_{h,r}$ (5.15 e 5.16) para compensação do sistema histerético.	75

5.11	Resultados de validação e compensação para modelos \mathcal{M}_h (5.11) e $\mathcal{M}_{h,z}$ (5.12) quando alimentados por entradas e referências que se tornam constantes em uma dada amostra.	77
5.12	Impacto de usar condições iniciais adequadas para $\mathcal{M}_{h,r}$, (5.15) e (5.16).	78
5.13	Resultados para 10000 execuções do teste de Monte Carlo para sistema histerético.	79
6.1	Validação de simulação livre para os modelos da válvula pneumática.	87
6.2	Validação de simulação livre para modelos diretos e inverso alimentados por sinais que se tornam constantes em determinado instante.	88
6.3	Resultado de compensação para a válvula pneumática.	91

Lista de Tabelas

3.1	MAPE expresso em % dos modelos $A_1(3.13)$ e $B_1(3.14)$ para entradas senoidais.	43
3.2	MAPE expresso em % para as saídas dos sistemas compensados $A_2(3.3)$ e $B_2(3.12)$ quando as referências são senoidais.	44
3.3	MAPE expresso em % para as saídas dos sistemas compensados $A_3(3.15)$ e $B_3(3.16)$ com referências senoidais de 0,01 Hz.	48
5.1	MAPE para simulação livre de \mathcal{M} (5.2) excitado por senoides.	65
5.2	MAPE calculado para o sistema compensado por $\mathcal{M}_r(5.7)$ e para o não compensado.	68
5.3	Resultados de MAPE calculado para a compensação estática e dinâmica.	71
5.4	MAPE de simulação livre para os modelos dados pelas Equações (5.11), (5.12) e (5.13), excitados por entradas senoidais.	74
5.5	MAPE para sistemas compensados e sem compensação considerando $r(k) = G_0 \text{sen}(2\pi fk + \pi/2)$	76
5.6	Impacto de se fixar cada um dos parâmetros nos testes de Monte Carlo.	80
6.1	MAPE para validação dos modelos diretos com entradas senoidais da forma $u(t) = G_0 \text{sen}(2\pi(0,1)t + \pi/4) + 3V$	86
6.2	MAPE para sistemas compensados e não compensado sobre a válvula, considerando $r(t) = G_0 \text{sen}(2\pi(0,1)t) + 3,07V$	90
6.3	Energia de esforço adicional para um período, $E(\delta_m)$, e desvio padrão de δ_m , $\sigma(\delta_m)$	90

Lista de Símbolos

Capítulo 2

$x(t)$	Sinal temporal de deslocamento no modelo de Bouc;
$dx(t)/dt = \dot{x}$	Derivada de $x(t)$ com respeito ao tempo;
\mathcal{F}	Sinal temporal de força, saída do modelo de Bouc;
z_i	i -ésima variável que descreve as forças restauradoras no modelo de Bouc;
\mathcal{H}	Laço de histerese;
\mathcal{S}	Sistema a ser modelado para compensação;
\mathcal{M}	Modelo para representar \mathcal{S} ;
$\mathcal{M}_{\text{NARX}}$	Modelo do tipo NARX polinomial para representar \mathcal{S} ;
$u(t)$	Entrada aplicada ao sistema \mathcal{S} em tempo contínuo;
$u(k)$	Sinal amostrado de $u(t)$;
$y_s(t)$	Saída de \mathcal{S} ao se aplicar a entrada $u(t)$;
$y_s(k)$	Sinal amostrado de $y(t)$;
T_s	Tempo de amostragem;
y_i	Estimativa do i -ésimo modelo para $y_s(k)$;
\vec{p}_i	Cromossomo (vetor de parâmetros) do i -ésimo indivíduo/modelo;
\vec{p}_*	Cromossomo com parâmetros ótimos no sentido do critério MAE.
\vec{f}	Cromossomo filho, resultante do cruzamento dos cromossomos pais, \vec{p}_1 e \vec{p}_2 .
ℓ	Grau de não linearidade do modelo $\mathcal{M}_{\text{NARX}}$;
$f^\ell(\cdot)$	Função polinomial de grau ℓ ;
n_u, n_y	Máximos atrasos da saída e da entrada, respectivamente;
τ_d	Atraso puro de tempo;
$e(k)$	Incertezas relacionadas ao processo de modelagem, incluindo ruído;
θ_i	i -ésimo parâmetro associado ao i -ésimo termo do modelo $\mathcal{M}_{\text{NARX}}$;
\bar{u}	Análise em estado estacionário para $u(k)$, sendo $\bar{u} = u(k) = \dots = u(k - n_u)$;
\bar{y}	Análise em estado estacionário para $y(k)$, $\bar{y} = y(k) = \dots = y(k - n_y)$;
$\bar{\mathcal{M}}_{\text{NARX}}$	Modelo $\mathcal{M}_{\text{NARX}}$ em estado estacionário;
$(\bullet)^T$	Transposição de vetores ou matrizes;
N	Número de medições;
$\text{eig}(\bullet)$	Autovalores;
$\text{sign}(\cdot)$	Função sinal;
$\mathcal{M}_{\text{NARX,h}}$	Modelo NARX para representar histerese;
$\phi_1(k)$	Primeira diferença da entrada, $\phi_1(k) = u(k) - u(k - 1)$;
$\phi_2(k)$	Sinal da primeira diferença da entrada, $\phi_2(k) = \text{sign}[\phi_1(k)]$;
Σ_y	Soma de todos os regressores lineares da saída;
$\xi(k)$	Erro de modelagem;
n_θ	Número de parâmetros de $\mathcal{M}_{\text{NARX}}$;
\hat{g}_i	i -ésimo elemento do vetor de parâmetros g ;
w_i	Regressor do modelo que deve ser ortogonal aos dados no contexto do ERR;
$\ln[\cdot]$	Logaritmo natural;
$\sigma_{\text{erro}}^2(n_\theta)$	Erro de polarização para modelo de n_θ termos;
ψ_{k-1}^T	Vetor de regressores considerados até o instante $k - 1$;
$\hat{\theta}$	Vetor de parâmetros a serem estimados;
$\xi(k)$	Resíduo gerado no instante k ;
$ \bullet $	Valor Absoluto;

y	Vetor de saídas retiradas dos dados de identificação;
Ψ	Matriz de regressores;
$\hat{\theta}_{MQ}$	Vetor de parâmetros estimado pelo Método Clássico de Mínimos Quadrados (MQ);
$(\bullet)^{-1}$	Inversão de matrizes;
Ψ_i^*	Matriz estendida de regressores;
$\hat{\theta}_{EMQ_i}^*$	Vetor de parâmetros do EMQ na i -ésima iteração;
ξ_i	Vetor de resíduos do EMQ na i -ésima iteração;
\mathbb{R}	Números reais;
\mathbb{N}	Números naturais;
\mathbb{N}^+	Números naturais não nulos;
$r(t)$	Referência a ser rastreada pelo sistema em tempo contínuo;
$r(k)$	Versão discreta de $r(t)$;
$Z^N = \{u(k), y_s(k)\}_{k=1}^N$	Conjunto de dados para identificação do modelo \mathcal{M} ;
\mathcal{M}_r	Compensador projetado para \mathcal{S} ;
$y_c(t)$	Saída do sistema compensado;
\mathbb{R}	Números reais;
\mathbb{N}	Números naturais;
\mathbb{N}^+	Números naturais não nulos;

Capítulo 3

$h(t)$	Variável do modelo BW para modelagem da histerese;
\mathcal{M}_{bw}	Modelo BW;
\mathcal{M}_{bw}^{-1}	Inversão do modelo BW;
f_i	i -ésima frequência de corte utilizada para projeto de sinal de excitação;
\mathbb{R}^+	Números reais não negativos;
$\mathcal{J}_i(q)$	Filtro passa-baixa em domínio discreto com frequência de corte f_i ;
$e_i(k)$	i -ésimo sinal puramente aleatório;
$\mathcal{N}(0, 1)$	Distribuição normal de média nula e desvio padrão unitário;
$\max[\bullet]$	Valor máximo;
$\min[\bullet]$	Valor mínimo;
N_i	Número de amostras de $e_i(k)$;
v	Número de pontos de operação;
o_j	j -ésimo ponto de operação para montar o sinal de excitação;
G_j	Amplitude do j -ésimo ponto de operação para montar o sinal de excitação;
$s_i(k)$	Sinal de excitação para a frequência f_i ;
n_v	Número de parâmetros do modelo fenomenológico a serem estimados;
$[\lambda_1, \dots, \lambda_{n_v}]$	Parâmetros codificado como genes do modelo a ser identificado;
N_{nich}	Número de nichos;
\vec{c}_j	Centro do j -ésimo nicho;
$\ \bullet\ _2$	Norma euclidiana de um vetor;
$\vec{\sigma}$	Vetor de raios;
P_c	Probabilidade de cruzamento;
P_m	Probabilidade de mutação;
$\vec{\sigma}$	Vetor de desvios padrões para definição da mutação;
δt	Intervalo de integração;
\vec{q}_i	Vetor de parâmetros em forma cromossômica do modelo clássico;
\vec{q}_*	Vetor ótimo de parâmetros em forma cromossômica do modelo clássico;
\vec{p}_i	Vetor de parâmetros em forma cromossômica do modelo modificado;
\vec{p}_*	Vetor ótimo de parâmetros em forma cromossômica do modelo modificado;
$\hat{h}(t)$	Variável do modelo BW modificado para modelagem da histerese;
$\hat{m}(t)$	Entrada de compensação para modelo BW modificado;
$\vec{\ell}_{\max}, \vec{\ell}_{\min}$	Vetores de limites máximos e mínimos (determinação da área de busca);

Capítulo 4

\mathcal{M}	Modelo NARX para representação do sistema \mathcal{S} ;
\bar{r}	Valor constante da referência;
$[u_{\min}, u_{\max}]$	Limites mínimos e máximos, respectivamente, para a entrada $u(k)$;
$[y_{\min}, y_{\max}]$	Limites mínimos e máximos, respectivamente, para a saída $y(k)$;
$\bar{\mathcal{M}}$	Modelo NARX em estado estacionário;
$\bar{\mathcal{M}}_r$	Compensador para contexto estático;
$i\bar{m}$	Valor constante da entrada de aplicação a ser aplicado ao sistema;
ℓ_m	Grau do polinômio algébrico gerado pelo compensador;
$i\bar{m}(\bar{r})$	Vetor que contém as raízes do polinômio algébrico da compensação estática;
$\arg \min(\bullet)$	Argumento mínimo da função;
m_k	Vetor que contém as raízes do polinômio algébrico (compensação dinâmica) em k ;
\mathcal{M}_h	Modelo NARX para representar histerese;
$g^\ell(\bullet)$	Função polinomial de grau ℓ que representa \mathcal{M}_h ;
$k \leftarrow k + \tau_d$	Deslocamento temporal de k para $k + \tau_d$;
\mathcal{H}	Laço de Histerese;
f_{\min}	Menor frequência utilizada para obter \mathcal{H} na inicialização dos de $\mathcal{M}_{h,r}$;
$\tilde{u}(k)$	Entrada de excitação senoidal com frequência f_{\min} ;

Lista de Acrônimos

RBFs	Funções Radiais de Base (<i>Radial Basis Functions</i>);
NNs	Redes Neurais (<i>Neural Networks</i>);
NARX	Modelos Não lineares AutoRegressivos com entradas eXógenas (<i>Nonlinear Autoregressive model with eXogenous inputs</i>);
BW	Modelo de Bouc-Wen;
MIMO	Múltiplas Entradas, Múltiplas Saídas (<i>Multiple-Input, Multiple-Output</i>);
SISO	Única Entrada, Única Saída (<i>Single-Input, Single-Output</i>);
ARMAX	Modelo Auto-Regressivo, de Média Móvel com entradas eXógenas (<i>AutoRegressive Moving Average model with eXogenous inputs</i>);
ARX	Modelo Auto-Regressivo com entradas eXógenas
NARMAX	Modelo Não-Linear Auto-Regressivo, de Média Móvel com entradas eXógenas (<i>Nonlinear AutoRegressive Moving Average model with eXogenous inputs</i>);
AIC	Critério de Informação de Akaike (<i>Akaike's Information Criterion</i>);
PEM	Método de Predição do Erro (<i>Prediction Error Method</i>);
MAE	Erro Absoluto Médio (<i>Mean Absolute Error</i>);
MQ	Método de Mínimos Quadrados Clássico;
MQE	Método de Mínimos Quadrados Estendido;
ERR	Taxa de Redução do Erro (<i>Error Reduction Ratio</i>);
RMSE	Raiz do Erro Médio Quadrático (<i>Root Mean Error Square</i>);
MR	Magneto-Reológico;
PZT	Atuador Piezo-elétrico;
MAPE	Erro Percentual Quadrático Médio (<i>Mean Absolute Percentage Error</i>);
PI	Modelo de Prandtl-Ishlinkskii;
PID	Controlador Proporcional Integral Derivativo;
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais;
PPGEE	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica;

Introdução

Não linearidades são caracterizadas pela variação do ganho de um sistema dinâmico em função da mudança do ponto de operação. A presença de efeitos não lineares tende a impor limitações significativas no contexto de controle para um variado conjunto de sistemas, tais como: atuadores (RAKOTONDRABE, 2011; LI e TIAN, 2018), sensores (CAO et al., 2018), neutralização de pH (HONG et al., 1996), sistemas de potência (SINGH et al., 2007), dentre outros (CHERNOUS'KO et al., 2008; MORRIS, 2012; CASTILLO e MELIN, 2012). Tais limitações estão relacionadas à redução das margens de ganho e de fase dos sistemas controlados, sendo que as não linearidades impactam de maneira mais severa sistemas de controle projetados via abordagens clássicas, que consistem em técnicas lineares (HASSANI et al., 2014). De maneira simplificada, isso pode ser explicado pelo fato de modelos puramente lineares não serem capazes de representar variações de ganho em função da variação do ponto de operação. Dessa forma, os controladores derivados desses modelos realizam ações que consideram tais variações de ganho, e, portanto, não são efetivas com a mudança do ponto de operação.

Visando superar tais dificuldades, o projeto de compensadores é uma abordagem recorrente na literatura. A compensação consiste em obter uma entrada capaz de reduzir o impacto das não linearidades na saída, fazendo com que o sistema compensado se torne mais simples de ser controlado. Assim, pode-se utilizar estratégias de controle realimentado (*feedback*) que se tendem a se tornarem mais efetivas ou mesmo o seguimento de referências sem realimentação (*feedforward*).

Muitas dessas estratégias de compensação se iniciam com a obtenção de um modelo para o sistema que seja capaz de representar os aspectos dinâmicos e estáticos fundamentais. Existe uma vasta literatura sobre modelagem e compensação de sistemas não lineares, abarcando desde abordagens baseadas em modelos fenomenológicos (RAKOTONDRABE, 2011; LIU et al., 2011; LIN et al., 2013) até aquelas que usam inteligência computacional (QUARANTA et al., 2020) como funções radiais de base, RBFs (do inglês, *Radial Basis Functions*) (CAO et al., 2018; LI e TIAN, 2018; ZHOU et al., 2020) e redes neurais, NNs (do inglês *Neural Networks*) (CHOW e LEUNG, 1996; SINGH et al., 2007; BAO et al., 2019; MENG et al., 2020).

No contexto de modelos fenomenológicos, pode existir a necessidade de testes específicos para o levantamento da estrutura, de modo a se selecionar quais fenômenos

físicos serão incorporados ao modelos. Quando a estrutura é previamente conhecida, é comum encontrar na literatura, trabalhos que abordam a dificuldade de estimar os parâmetros desses modelos (QUARANTA et al., 2020). Algoritmos evolutivos são ferramentas úteis para a estimação de tais parâmetros, de modo que abordam o problema em uma perspectiva de otimização baseada em populações. Contudo, tais algoritmos tendem a apresentar considerável complexidade computacional, obtendo soluções heurísticas em que existe a necessidade de se ajustar meta-parâmetros, o que tende a ser uma tarefa empírica (QUARANTA et al., 2020). Ao se utilizar modelos fenomenológicos, outra desvantagem é o fato de esses modelos apresentarem uma estrutura mais específica, o que os tornam menos versáteis quando comparados, por exemplo, com modelos NARX polinomiais (do inglês, *Nonlinear Autoregressive model with exogenous inputs*). Por outro lado, modelos fenomenológicos já utilizados na literatura para compensação de não linearidades, possuem leis de compensação previamente determinadas, o que facilita o projeto de compensadores. É importante ressaltar que para modelos desse tipo que ainda não possuem leis de compensação previamente obtidas, nem sempre as inversões matemáticas relacionadas a essas tarefas são simples ou mesmo possíveis de serem realizadas.

Quanto às NNs, um tipo especial de rede é conhecido como NARX NNs que são amplamente utilizadas na literatura de identificação e compensação de sistemas não lineares (ZHANG et al., 2010; MENG et al., 2020). Embora essas redes aproveitem os aspectos de generalidade apresentados em estruturas NARX, o processo de estimação é realizado em uma abordagem caixa-preta. Tal fato tende a dificultar a imposição de restrições relacionadas à estrutura ou aos parâmetros, o que é tipicamente feito em abordagens caixa-cinza (ABREU et al., 2020). Além disso, os compensadores obtidos apresentam baixo ou nenhum grau de conhecimento da lei de compensação, limitando a análise a ser realizada sobre esses compensadores.

Este trabalho utiliza modelos NARX polinomiais para o projeto de compensadores, devido à simplicidade, à capacidade de generalização dessas estruturas e à possibilidade de se executar o processo de identificação em um contexto caixa-cinza (LEONTARITIS e BILLINGS, 1985). A execução de uma abordagem caixa-cinza é particularmente relevante no contexto de sistemas com histerese, em que modelos caixa preta tendem a não reproduzir características relevantes do fenômeno (MARTINS e AGUIRRE, 2016; ABREU et al., 2020). Nesta dissertação, o termo NARX é usado exclusivamente para modelos NARX polinomiais. É importante mencionar que, embora os modelos NARX polinomiais possam representar uma variada gama de fenômenos, existem poucas estratégias na literatura que utilizam tais modelos para projetar a entrada de compensação (LACERDA JUNIOR et al., 2019; ABREU et al., 2020), sendo mais comum a utilização de NARX NNs. Além disso, as abordagens que utilizam modelos NARX polinomiais, geralmente se limitam a modelos com estruturas específicas.

No contexto específico de sistemas com histerese, uma estratégia baseada na inversão analítica de modelos NARX é apresentada em (LACERDA JUNIOR et al., 2019).

Nessa técnica, o modelo precisa apresentar somente termos lineares na entrada de compensação, de modo a ser possível isolar algebricamente tal entrada. Como discutido em (ABREU et al., 2020), o trabalho anterior apresenta uma questão relacionada à existência de uma singularidade nos momentos em que a variável velocidade da entrada é nula. Tal singularidade ocorre quando a lei de compensação possui termos em que a função sinal da velocidade da entrada aparece em algum denominador. Duas formas de se obter os compensadores foram apresentadas em (ABREU et al., 2020): a primeira é bastante similar ao que é feito em (LACERDA JUNIOR et al., 2019) e, na segunda, tem-se a obtenção dos compensadores diretamente dos dados a partir de uma abordagem inversa que modela a entrada do sistema a partir do conhecimento da saída. Ambas estratégias não apresentam o problema de singularidade, devido às restrições impostas na obtenção dos modelos. Dessa forma, não ocorre a divisão pela velocidade da entrada ou pelo sinal dessa velocidade. Contudo, a abordagem inversa requer um cuidadoso processamento de dados, visto que a saída precisa ser filtrada com baixo impacto dinâmico, além de existir a necessidade dos sinais obtidos serem tratados para que sejam causais devido à relação inversa existente. Ademais, pelo fato de ser necessário isolar a entrada de compensação explicitamente, ambos os métodos lidam com estruturas mais restritas do que as propostas neste trabalho. A seguir, são apresentados os objetivos desta dissertação.

1.1 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é propor métodos baseados em modelos para compensação de não linearidades. Do ponto de vista matemático, fundamentar as técnicas propostas nos contextos estático (para referências constantes), dinâmico (para referências variantes no tempo) e a adaptação para sistemas histeréticos. Além disso, objetiva-se investigar a pertinência da utilização das técnicas propostas em exemplos simulados e experimentais. As contribuições da presente dissertação são apresentadas na sequência.

1.2 Contribuições

Este trabalho apresenta contribuições nos contextos de identificação e compensação de sistemas dinâmicos não lineares. Especificamente, têm-se as seguintes contribuições:

- Proposta de uma formalização matemática para obtenção de sinais de excitação adequados à identificação de sistemas dinâmicos não lineares. Nessa proposta, tem-se uma metodologia para a excursão em torno de vários pontos de operação. Tal metodologia considera um conjunto variado de frequências e amplitudes em torno de cada ponto de operação. Particularmente para sistemas histeréticos, a

obtenção de sinais de excitação efetivos é fundamental devido ao comportamento quase-estático desses sistemas;

- Adaptação de um algoritmo evolutivo para estimar os parâmetros de modelos fenomenológicos. Tal algoritmo é proposto de forma genérica, desde que a estrutura do modelo esteja previamente definida. Neste trabalho, o algoritmo foi aplicado para estimação de parâmetros de modelos de Bouc-Wen;
- Modificações ao modelo de Bouc-Wen utilizado em [RAKOTONDRABE \(2011\)](#) e aplicação desses modelos modificados no contexto de compensação de histerese. Propõe-se um relaxamento às restrições de sinal dos parâmetros impostas por [RAKOTONDRABE \(2011\)](#), além da adição de um parâmetro que pondera a contribuição da variável histerética;
- Proposta de uma estratégia de compensação generalizada que seja baseada em modelos NARX para referências constantes (compensação estática);
- Proposta de uma estratégia de compensação generalizada que seja baseada em modelos NARX para referências variantes no tempo (compensação dinâmica);
- Adaptação da compensação dinâmica para sistemas histeréticos e avaliação das propostas de compensação baseadas em modelos NARX para sistemas histeréticos considerando as restrições impostas por [ABREU et al. \(2020\)](#);

Nas estratégias de compensação formuladas, a entrada de compensação é obtida iterativamente. A compensação proposta via modelos NARX se constitui como a maior contribuição deste trabalho. Tal abordagem consiste em escrever um polinômio em função da entrada de compensação desejada e, então, calcular as raízes desse polinômio iterativamente. Ademais, um algoritmo para a seleção da raiz apropriada é executado. Tal seleção se faz necessária devido ao fato de ser possível existir raízes dos polinômios que não possam ser implementadas de maneira prática, como raízes complexas e raízes reais que estão fora da região da faixa de operação do atuador. Na sequência, apresenta-se a estruturação deste texto.

1.3 Estrutura do Texto

Dessa forma, a organização do presente trabalho é mostrada na sequência. O Capítulo 2 apresenta uma revisão de identificação de sistemas e compensação de não linearidades, fornecendo as bases teóricas para os capítulos seguintes. O Capítulo 3 apresenta a aplicação do algoritmo evolutivo para a identificação de modelos BW e a modificação supramencionada para aplicação da compensação de histerese em exemplos simulados e em uma válvula pneumática. O Capítulo 4 apresenta a metodologia para compensação de não linearidades com a utilização de modelos polinomiais NARX,

abordando os contextos estático, dinâmico e histerético. Os resultados de tal estratégia de compensação são apresentados nos Capítulos 5 e 6, sendo que o primeiro apresenta os resultados de simulações numéricas com uma discussão aprofundada do método, enquanto o último, a aplicação à mesma válvula pneumática previamente utilizada no Capítulo 3. As conclusões são apresentadas no Capítulo 7 e no Apêndice A são apresentadas as soluções analíticas de polinômios com grau menor ou igual a 3.

Aspectos Teóricos Fundamentais

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas conceitos e ferramentas essenciais para o entendimento da modelagem e da compensação de sistemas com não linearidades, com especial olhar para o fenômeno de histerese. A Seção 2.1 apresenta os aspectos básicos de modelagem matemática e os principais conceitos relacionados à identificação de sistemas, além do modelo de Bouc-Wen (BW) que tem importância fundamental neste trabalho. Uma breve introdução sobre algoritmos evolutivos é apresentada na Seção 2.2, visto que tais algoritmos são utilizados para estimação de parâmetros de modelos BW. Por outro lado, a Seção 2.3 apresenta conceitos fundamentais envolvendo modelos NARX polinomiais, além de estratégias comumente utilizadas em problemas de identificação de sistemas deste tipo. Tais modelos são usados nos Capítulos 4, 5 e 6 nos quais apresenta-se a metodologia e os resultados obtidos com os compensadores. Na Seção 2.4, tem-se uma definição precisa do problema de compensação. Por fim, a Seção 2.5 apresenta artigos relevantes que abordam estratégias de controle já utilizadas em sistemas com histerese, enquanto que a Seção 2.6 traz as considerações finais.

2.1 Modelagem Matemática

A modelagem matemática consiste em determinar um conjunto de expressões matemáticas que sejam capazes de descrever as relações entre as entradas e as saídas de um sistema. Um sistema pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por interdependências ou interações, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos apresentados nesses objetos (MONTEIRO, 2011). A área de engenharia tem grande interesse por *sistemas dinâmicos*, que são aqueles nos quais ocorre variação no tempo de grandezas que caracterizam pelo menos um dos objetos do sistema. Assim, os sistemas dinâmicos ao serem excitados por sinais de entradas temporais, devolvem sinais de respostas ou saídas também dependentes do tempo, fato que geralmente ocorre por processos de transformação de energia (OPPENHEIM et al., 2010). Sistemas dinâmicos desse tipo são conhecidos como MIMO (do inglês, *Multiple Input Multiple Output*), ou seja, transformam um conjunto de entradas em um conjunto de saídas.

Em diversas áreas do conhecimento, como física (STROTGATZ, 2018), biologia (EDELSTEIN-KESHET, 2005), engenharia (GARCIA, 2013) e economia (KWOK, 2008), é necessário obter um modelo do sistema dinâmico a ser estudado, seja para entender e

analisar o comportamento do sistema físico, seja para projetar outros sistemas capazes de melhorar alguma característica do processo (OGATA, 2000; OPPENHEIM et al., 2010). EYKHOFF (1974) e DENN (1987) resumem o conceito de modelo matemático como um sistema de equações, que alimentado por um conjunto de entradas, determina uma solução que represente algumas características das respostas do processo físico. O modelo pode ser visto como uma abstração matemática que é uma aproximação do sistema físico dentro de um domínio onde as hipóteses inicialmente assumidas são válidas (SEBORG et al., 2010). Dessa forma, a análise ou o projeto a ser desenvolvido devem se basear em condições que não violem tais hipóteses (OPPENHEIM et al., 2010). Em síntese, pode-se entender a modelagem matemática como um processo que visa obter um modelo minimamente representativo do sistema físico, dentro de um domínio de validade que faça sentido no contexto do problema em estudo (SEBORG et al., 2010). Nesse processo, é importante buscar um compromisso entre o esforço de se obter o modelo e o nível de precisão que garantam a representatividade das características de interesse (AGUIRRE, 2007; MONTEIRO, 2011; GARCIA, 2013).

Dentre as abordagens utilizadas para a obtenção do modelo, tem-se os tipos de modelagem *caixa branca*, *caixa preta* e *caixa cinza*. Na modelagem caixa branca, os modelos são obtidos inteiramente pela física do processo, ou seja, conhecendo os fenômenos que regem o sistema físico, encontra-se um conjunto de equações capazes de reproduzir os efeitos desejados nas saídas do modelo (GARCIA, 2013). Contudo, em fenômenos complexos, nem sempre é possível obter um modelo simples seguindo essa estratégia, de forma que o procedimento torna-se muito custoso ou mesmo inviável (BILLINGS, 2013). Nesse contexto, as abordagens caixa preta e caixa cinza estão inseridas no estudo de técnicas de *identificação de sistemas*, que podem ser vistas como alternativas a essas dificuldades relacionadas ao conhecimento pleno e prévio das equações que incorporam as características físicas do sistema (AGUIRRE, 2007). Na abordagem caixa preta, utilizam-se apenas dados empíricos extraídos do sistema real, ou seja, de posse desses dados, modelos capazes de apresentar relações de causa e efeito entre as entradas e as saídas do modelo são procurados (AGUIRRE, 2007; BILLINGS, 2013). Por outro lado, a modelagem caixa-cinza tem sido um dos grandes desafios da área de identificação de sistemas e conceitualmente se situa entre as duas abordagens anteriores, buscando construir o modelo a partir de dados experimentais e de alguma informação sobre o comportamento do sistema além desses dados (AGUIRRE, 2007). Como dados de identificação são utilizados, essa estratégia não exige um conhecimento profundo da física do sistema, ao mesmo tempo que permite impor determinadas características ao modelo.

Os sistemas dinâmicos são, na prática, não lineares. As estratégias clássicas de controle iniciam com a obtenção de um modelo linear para o sistema em torno de um ponto de operação. Assim, realiza-se o controle, para pequenas variações em torno desse ponto em que o sistema é aproximadamente linear (OGATA, 2000). Contudo, para sistemas não lineares, os ganhos do processo são variáveis com o ponto de ope-

ração. Dessa forma, quando são necessárias maiores excursões em torno do ponto para o qual o sistema foi linearizado, as estratégias clássicas apresentam deterioração do desempenho. Diversas não linearidades são objeto de pesquisa na área de controle: curvas estáticas polinomiais, saturação, liga-desliga (*on-off*), folga mecânica, zona morta, histerese, dentre outras.

2.1.1 Modelos que Apresentam Histerese

Este trabalho apresenta um olhar especial para sistemas dinâmicos que apresentam histerese. Tal fenômeno é conhecido como uma não linearidade severa e se caracteriza pela existência de efeitos de memória entre a entrada e a saída. A histerese pode ser observada em diversas áreas, abarcando desde sensores e atuadores (VISONNE, 2008; RAKOTONDRABE, 2011), estruturas mecânicas (MURAKAM et al., 1999; SWEVERS et al., 2000), variáveis econômicas (GÖCKE, 2002; CROSS et al., 2009) e sinais biológicos (COLLINSWORTH et al., 2002; POMERENING et al., 2003; SHA et al., 2003). Basicamente, a histerese é um fenômeno em que a saída não depende apenas do estado atual das entradas, mas também do histórico das entradas. Esse comportamento é frequentemente associado a materiais ferromagnéticos devido ao estudo de EWING (1881), onde apresentou-se inicialmente tal fenômeno no contexto científico. Em sistemas mecânicos, fricção e folga são manifestações de histerese discutidas na literatura (ARMSTRONG-HÉLOUVRY et al., 1994; SWEVERS et al., 2000; JOHANASTROM e CANUDAS-DE-WIT, 2008; RUDERMAN et al., 2009). No âmbito das ciências biológicas, a histerese desponta como um mecanismo de robustez para funções celulares que são submetidas a perturbações aleatórias (POMERENING et al., 2003). Tal fenômeno pode ser visto na economia por meio dos efeitos de longo prazo que recessões provocam na produtividade e na geração de riqueza, mesmo após tais recessões terem sido superadas (CROSS et al., 2009). No caso de sensores e atuadores eletromecânicos, esse efeito se relaciona à memória natural do comportamento inelástico, sendo que a força restauradora depende do histórico de deformação (VISONNE, 2008).

Quanto às contribuições fundamentais no estudo matemático do fenômeno, MADELUNG (1905) apresentou regras básicas que regem a histerese no contexto escalar. Posteriormente, PREISACH (1935) desenvolveu um modelo matemático para a histerese escalar e LANDAU (1937) explicou a origem do fenômeno por meio da existência de metaestabilidade nos múltiplos pontos de equilíbrio do sistema dinâmico. Os estudos mais aprofundados sobre modelos que apresentam histerese se iniciaram com BOUC (1967), que propôs um modelo fenomenológico para representar a histerese, estudando a histerese como um mapa entre espaços de funções. Em seguida, esse modelo foi estendido por WEN (1976), passando a ser conhecido como modelo de Bouc-Wen (BW). Mais recentemente e no contexto de sistemas mecânicos, foi proposto o modelo LuGre (CANUDAS-DE-WIT et al., 1995; OLSSON et al., 1998) nomeado dessa maneira em reconhecimento ao trabalho de colaboração dos grupos de pesquisa em controle das cidades Lund e Grenoble. O modelo de LuGre foi proposto inicialmente para a

modelagem de fricção em sistemas mecânicos e tem sido utilizado para a modelagem e controle de sistemas histeréticos (YAO et al., 2015; CHEN et al., 2015) juntamente com o modelo BW (RAKOTONDRABE, 2011; MANZOORI e TOOPCHI-NEZHAD, 2017; SOLOVYOV et al., 2017; PELLICIARI et al., 2018). Diversas razões explicam a extensa utilização de tais modelos, uma delas está relacionada à dificuldade de se modelar sistemas com histerese a partir de uma abordagem puramente caixa branca, que tende a produzir modelos excessivamente complexos, fato que impõe limitações em aplicações práticas (HELLENSEN et al., 2000; IKHOUANE e RODELLAR, 2007). Por outro lado, os modelos fenomenológicos BW e LuGre congregam as vantagens de serem simplificados, ao mesmo tempo que versáteis: ambos são definidos a partir de equações diferenciais de primeira ordem dos estados e a variação nos parâmetros é capaz de modificar o contorno do laço de histerese (KYPRIANOU et al., 2001). Ademais, tais modelos são obtidos por uma abordagem caixa cinza que exige pouco conhecimento da física do processo. Portanto, esses modelos combinam aspectos físicos do comportamento de histerese com a estimação de parâmetros por métodos caixa preta que podem explicar aspectos particulares de cada fenômeno (IKHOUANE e RODELLAR, 2007). Pode-se citar também outros modelos capazes de apresentar histerese: Preisach, Prandtl-Ishlinskii (PI), Krasnoselskii-Pokrovskii, Maxwell-Slip e Duhem. Em HASSANI et al. (2014) é possível encontrar uma revisão mais detalhada acerca desses últimos modelos mencionados.

As razões acima apresentadas explicam a existência de diversos trabalhos no contexto de controle que utilizam o modelo BW como ponto de partida para a investigação dos efeitos da histerese (RAKOTONDRABE, 2011; SOLOVYOV et al., 2017; PELLICIARI et al., 2018). Existem abordagens na literatura que consideram representar o sistema a partir dos modelos BW ou LuGre, sendo os parâmetros estimados por meio de algum algoritmo de otimização (HASSANI et al., 2014). Tais algoritmos visam minimizar uma função de custo relacionada a alguma medida de erro entre os dados de saída do sistema e a saída do modelo. Nesse contexto, podem ser utilizados algoritmos evolutivos que visam estimar os parâmetros por meio de uma estratégia de populações, em que cada indivíduo da população é um modelo.

É importante mencionar que abordagens baseadas em algoritmos de otimização podem levar a modelos instáveis e não representativos, além de não ser uma tarefa simples obter o modelo inverso de modelos de grau superior a dois, no contexto de compensação da histerese, que é a aplicação mais comum nos estudos que envolvem controle (ISMAIL et al., 2009). Outras abordagens utilizam os modelos de LuGre e BW como referência e, a partir daí, escolhe-se outra representação matemática como, por exemplo, funções radiais de base (RBF, do inglês *Radial Basis Function* (DU et al., 2006)) ou modelos NARX polinomiais (LEVA e PIRODDI, 2002) para representar o sistema. Assim, após a determinação da estrutura do modelo, os parâmetros são estimados. As razões acima apresentadas justificam a utilização do modelo BW como referência e o próximo item apresenta tal modelo com maior detalhamento.

Modelo de Bouc-Wen (BW)

Na Figura 2.1 apresenta-se um exemplo de curva de histerese, que é uma relação entre uma das entradas do sistema, o deslocamento x (eixo das abscissas), e a saída, dada pela força restauradora \mathcal{F} (eixo das ordenadas). Observa-se que a relação é um tipo de ciclo que geralmente é obtido de duas formas: *estática* ou *quase-estática* (ABREU et al., 2020). A curva é dita estática quando obtida a partir dos valores de estado estacionário da saída, de acordo com a aplicação de degraus de diferentes amplitudes em uma das entradas que foi escolhida para ser apresentada no eixo das abscissas. Por outro lado, ao se aplicar um sinal periódico de baixa frequência com regimes de carga (derivada positiva) e descarga (derivada negativa) na entrada escolhida do sistema, obtém-se uma saída de mesma frequência do sinal de entrada escolhido (IKHOUANE e RODELLAR, 2007). Nesse caso, a curva é conhecida como quase-estática, quando a frequência da entrada tende a zero e plota-se a amplitude dessa entrada em um período *versus* a amplitude da saída. Observa-se que tal relação apresentada na Figura 2.1 não é uma função, dado que a força depende não só da entrada escolhida, mas também dos valores passados da entrada e da saída. Exceto nos extremos de saturação, para um dado valor de entrada, tem-se um respectivo valor de saída no regime de carga e outro na descarga. É importante ressaltar que modelos de Bouc-Wen apresentam comportamento histerético conhecido como *independente da taxa*, de modo que o formato do laço de histerese independe da frequência de excitação da entrada.

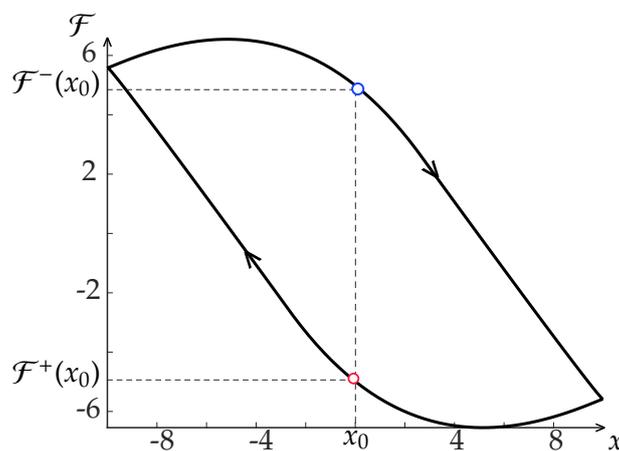


Figura 2.1: Exemplo de curva de histerese produzida por um modelo BW com parâmetros: $n = 1$, $\mu = 1$, $\alpha = 1,2$, $\beta = 0,05$ e $A = 0,05$. Exceto nos extremos de saturação, para cada valor da entrada x , tem-se dois respectivos valores de saída \mathcal{F} . Considerando $x_0 = 0$, o valor respectivo para carga ($\dot{x} > 0$) é denotado por $\mathcal{F}^+(x_0)$ representado por (\circ) . Por outro lado, para descarga ($\dot{x} < 0$), tem-se $\mathcal{F}^-(x_0)$ que é representado por (\circ) . As setas indicam que o par (x, \mathcal{F}) se move no sentido anti-horário, sendo que o ramo superior é o regime de descarga, enquanto o ramo inferior, o de carga. Como modelos BW apresentam histerese independente da taxa, o aumento da frequência da entrada não gera alterações no formato do laço, sendo que nesse exemplo $x = 10\text{sen}(2\pi t + \pi/2)$.

BOUC (1967) propôs um modelo em que a taxa de variação do funcional \mathcal{F} é dependente do deslocamento x no tempo e de uma função não linear $g[\cdot]$, cujos argumentos são o deslocamento e a derivada temporal do deslocamento. Tal modelo é:

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = g \left[x, \text{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right), \mathcal{F} \right] \frac{dx}{dt}, \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mathcal{F}(t) = p(t), \quad (2.2)$$

em que $p(t)$ é a força de excitação e a saída \mathcal{F} , força restauradora, pode ser determinada numericamente, se forem conhecidas as condições iniciais: $\frac{dx}{dt}(t_0)$, $x(t_0)$ e $\mathcal{F}(t_0)$. Devido à não linearidade da função $g[\cdot]$, encontrar a solução analítica do sistema não é uma tarefa simples. BOUC (1967) introduziu uma variante da integral de Stieltjes para explicitar a saída \mathcal{F} :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu^2 x(t) + \sum_{i=1}^N z_i = p(t) \quad (2.3)$$

$$\frac{dz_i}{dt} + \alpha_i \left| \frac{dx}{dt} \right| z_i - A_i \frac{dx}{dt} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.4)$$

em que o modelo descrito pelas Equações 2.3 e 2.4 é conhecido como modelo de Bouc e um detalhamento matemático mais aprofundado sobre a dedução dessas equações pode ser encontrado em (BOUC, 1967). O conjunto de variáveis z_i são dedicadas a descrever as N forças restauradoras com comportamento histerético e, assim, torna-se necessário estimar as N constantes α_i e A_i , além de μ , sendo, por isso, um modelo do tipo caixa cinza. WEN (1976) estendeu o modelo inicial de Bouc, adaptando-o de forma a representar melhor o comportamento físico da histerese, permitindo que uma variedade maior de possíveis contornos de laços pudesse ser representada. Observe que realizando as modificações propostas e considerando uma única força restauradora ($i = 1$), tem-se um modelo de única entrada e única saída, SISO (do inglês *Single Input Single Output*):

$$\dot{z} = -\alpha|\dot{x}|z^n - \beta\dot{x}|z^n| + A\dot{x}, \quad \text{para } n \text{ ímpar} \quad (2.5)$$

$$\dot{z} = -\alpha|\dot{x}|z^{n-1}|z| - \beta\dot{x}z^n + A\dot{x}, \quad \text{para } n \text{ par} \quad (2.6)$$

em que os pontos indicam a diferenciação com respeito ao tempo e as Equações 2.3 (com $i = 1$), 2.5 e 2.6 são conhecidas na literatura como modelo de Bouc-Wen (BW). No entanto, tal modelo fenomenológico apresenta grande sensibilidade aos valores dos parâmetros, podendo levar a respostas instáveis, fato que exige atenção especial com a estimação desses parâmetros (IKHOUANE e RODELLAR, 2007). Esse modelo é utilizado como ponto de partida para as investigações desse trabalho, como é visto no Capítulo 3.

2.1.2 Identificação de Sistemas

Conforme já citado, o problema básico de identificação de sistemas é obter um modelo que represente características de causa e efeito, a partir do conhecimento dos dados empíricos de entradas e saídas do sistema real e de pouca ou nenhuma informação sobre a física do processo. As etapas sequenciais básicas desse processo são apresentadas a seguir (AGUIRRE, 2007):

1. Testes dinâmicos e coleta de dados;
2. Escolha da representação matemática;
3. Determinação da estrutura do modelo;
4. Estimação de parâmetros;
5. Validação do modelo.

Detalha-se a seguir as principais etapas citadas, focando em aspectos relevantes para sistemas histeréticos.

Testes Dinâmicos e Coleta de Dados

No contexto de identificação de sistemas existe uma dependência direta entre a qualidade do modelo e os dados empíricos utilizados. Por isso, a elaboração de testes dinâmicos e a coleta de dados devem constituir o primeiro passo. Para sistemas MIMO, o primeiro passo é definir quais serão as entradas e as saídas utilizadas pelo modelo. Além disso, é importante que as entradas selecionadas excitem o sistema nas frequências de interesse e, por isso, devem ser escolhidos sinais de entrada apropriados (AGUIRRE, 2007). Caso os sinais de excitação não abarquem as frequências, pontos de operação e amplitudes desejáveis para reprodução no modelo, os algoritmos de identificação terão dificuldades em encontrar uma estrutura factível com o objetivo da modelagem. É importante ressaltar que a escolha das entradas também está limitada às condições de operação do sistema: nem sempre é possível utilizar sinais que excitem o sistema em uma faixa larga de frequência devido às limitações físicas do processo.

Ao coletar dados é importante obter conjuntos distintos: *dados de identificação* e *dados de validação*. Tal separação se faz necessária para averiguar a validade do modelo, pois é possível que um modelo esteja ajustado especificamente para os dados de identificação, mas não incorpore as características fundamentais do sistema. Para que os algoritmos de identificação tenham boa eficiência, é importante que o sinal de entrada excite o sistema na faixa de frequências de interesse e, como a histerese é um fenômeno quase-estático, importa que os sinais de entrada excitem o sistema em baixas frequências (IKHOUANE e RODELLAR, 2007). Para sistemas com histerese, uma abordagem encontrada na literatura é aplicar sinais de entrada periódicos de baixa frequência com

características de carga e descarga, em diversas amplitudes, permitindo-se excursionar vários laços de histerese (MARTINS, 2016).

Uma outra questão se dá pelo fato de que a maioria dos sistemas reais são contínuos no tempo, mas em questões práticas de identificação ou controle, torna-se necessário registrar tais valores contínuos de forma discreta, exigindo a definição de uma taxa de amostragem que tem impacto significativo na obtenção do modelo (AGUIRRE, 2007). O teorema da amostragem de Shannon (SHANNON, 1949) mostra que se a taxa de amostragem for superior ao dobro da maior frequência presente no espectro do sinal original, existe uma relação unívoca entre os valores amostrados e o sinal. Essa frequência limite, 2 vezes a maior frequência do sinal original, é conhecida como *frequência de Nyquist*. Por outro lado, intervalos de amostragem muito pequenos podem gerar mal condicionamento numérico relacionados, por exemplo, à inversão de matrizes na etapa de estimação dos parâmetros. Dessa forma, é necessário utilizar um intervalo de amostragem que não dificulte à reconstrução nem o processo de identificação por mal condicionamento numérico. Em aplicações práticas tipicamente se utiliza frequência de amostragem valendo de 5 a 10 vezes a maior componente de frequência do sinal original (AGUIRRE, 2007). Ademais, como frequências maiores que a frequência de Nyquist não serão bem amostradas, também é comum realizar a filtragem do sinal original, objetivando eliminar tais frequências e evitar o efeito de *falseamento* ou *aliasing* do sinal. Portanto, a definição desse filtro também é relevante nessa etapa.

Escolha da Representação Matemática

Existe uma variedade de modelos capazes de representar características dinâmicas de sistemas. No contexto contínuo de modelos lineares, tipicamente os modelos são representados por funções de transferência ou pela representação em espaço de estados (OGATA, 2000). Por outro lado, para modelos discretos também lineares, alguns exemplos de possíveis representações abarcam: modelo de resposta ao impulso infinito IIR (do inglês, *Infinite Impulse Response*), modelo autorregressivo com entradas externas (ARX, do inglês, *AutoRegressive with eXogenous inputs*), modelo autorregressivo com média móvel e entradas exógenas (ARMAX, do inglês, *AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs*) ou modelos de erro na saída (BILLINGS, 2013). Com o objetivo de se modelar comportamentos não lineares, alternativas tipicamente apresentadas na literatura envolvem: modelos de Hammerstein e Wiener, redes neurais artificiais, funções radiais de base, neurônio *neofuzzy* (NFN do inglês, *NeoFuzzy Neuron*), representações polinomiais e racionais NARX (do termo em inglês, *Nonlinear AutoRegressive model with eXogenous inputs*) e NARMAX (do termo em inglês, *Nonlinear AutoRegressive Moving Average model with eXogenous inputs*) (AGUIRRE, 2007).

Dada a grande variedade de estruturas de modelos e a importância dessa escolha para as etapas subsequentes, deve-se dar atenção especial à escolha da representação. Responder algumas perguntas podem nortear essa escolha: quais comportamentos dinâmicos são suficientes de serem representados para a solução do problema? Qual o

grau de dificuldade de se lidar com o modelo para as aplicações a que ele se destina? Qual tipo de modelo é tipicamente encontrado na literatura em problemas similares?

Como já apresentado, a histerese é um fenômeno severamente não linear, portanto, uma possível representação para este tipo de fenômeno são os modelos NARX polinomiais. Esses modelos são relativamente simples, além de capazes de representar diferentes tipos de não linearidades, ao mesmo tempo que permitem a incorporação de informações que precedam a obtenção dos parâmetros ao se utilizar uma abordagem caixa cinza (NEPOMUCENO, 2002). LEVA e PIRODDI (2002) utilizaram modelos NARX que foram capazes de representar o laço de histerese de um amortecedor magneto reológico, contudo, foram encontrados modelos de alto grau de não linearidade e com número excessivo de termos, ambos maiores que 10. MARTINS e AGUIRRE (2016) apresentaram condições suficientes para que modelos polinomiais reproduzam o comportamento histerético. Uma destas condições está relacionada com a escolha adequada de regressores de entrada, sendo que um desses regressores deve ser uma multi função da primeira diferença da entrada do sistema. Na Subseção 2.3.2 essas questões são detalhadas, incluindo a definição do termo multi função. Nesse trabalho foram obtidos modelos autorregressivos de baixo grau de não linearidade, compostos por poucos regressores e que foram capazes de reproduzir a histerese para os sistemas de BW e LuGre. Visando aproveitar a versatilidade, ao mesmo tempo que a simplicidade oferecida por esses modelos e apresentadas na literatura, o Capítulo 3 utiliza modelos NARX para a representação de histerese, abordando as recomendações dadas em (MARTINS e AGUIRRE, 2016).

Determinação da Estrutura do Modelo

Nesta etapa, objetiva-se determinar uma estrutura o mais simples possível, mas que ainda seja capaz de apresentar os efeitos de causa e efeito relevantes para o propósito de modelagem. Lida-se, portanto, com os problemas de sobreajuste ou sobreparametrização (*overfitting*) e subajuste ou subparametrização (*underfitting*) (BOZDOGAN, 1987). O sobreajuste ocorre quando o modelo possui uma estrutura maleável o suficiente para se ajustar aos dados de identificação, mas não incorpora as características fundamentais do sistema. Dessa forma, o modelo tende a ser ineficiente para prover resultados quando excitado por dados ligeiramente diferentes daqueles utilizados para identificação. O caso de subajuste ocorre quando a estrutura do modelo é inferior em complexidade a uma estrutura mínima que consiga reproduzir os efeitos de interesse, sendo o modelo incapaz de apresentar as características desejadas do sistema físico. Dessa forma, em ambos os casos tem-se a degradação da representatividade do modelo. Isso significa que existe um compromisso na determinação da estrutura de forma que ela seja capaz de se adequar aos dados de identificação, ao mesmo tempo que flexível para representar o sistema quando o modelo é excitado por entradas com características diferentes das utilizadas na identificação. Esse compromisso é conhecido como dilema polarização-variância (NELLES, 2001).

Em modelos lineares, o número de estruturas possíveis cresce linearmente com a ordem do modelo, ao mesmo tempo que termos redundantes induzem cancelamentos de polos e zeros na função de transferência. Contudo, para sistemas não lineares o problema da escolha da estrutura é mais grave: em primeiro lugar porque o número de estruturas possíveis cresce muito mais rapidamente e, em segundo, porque termos redundantes tendem a degradar a dinâmica original do sistema (AGUIRRE, 2007).

A taxa de redução de erro (ERR, do inglês *Error Reduction Ratio*) é uma técnica baseada em otimização mono-objetivo que busca quantificar a contribuição de cada termo, ao explicar a variância do erro de modelagem (KORENBERG et al., 1987). Essa técnica visa ordenar hierarquicamente os termos candidatos ao modelo, contudo ainda é preciso estabelecer um ponto de corte que separe os termos que serão efetivamente utilizados e aqueles que serão descartados. Uma forma de estabelecer esse ponto de corte é conhecida como critério de informação de Akaike (AKAIKE, 1974), que busca estabelecer uma ponderação entre a minimização do erro e o tamanho da estrutura do modelo.

Estimação de Parâmetros

Com a estrutura do modelo determinada, faz-se necessária a estimação dos parâmetros envolvidos em cada termo do modelo. Diversos algoritmos podem ser utilizados nessa etapa e a escolha deles também depende da estrutura. Existem algoritmos de identificação baseados na minimização do erro um passo à frente ou erro de predição conhecidos como PEM (do inglês, *Prediction Error Method*) e outros baseados no erro de simulação livre. No contexto do primeiro grupo, destacam-se os algoritmos derivados do método clássico de mínimos quadrados que podem ser utilizados para representações lineares nos parâmetros. No segundo grupo, é viável definir uma função de custo associada ao somatório do erro quadrático médio entre os dados de saída e a saída estimada pelo modelo ao longo de toda a janela de identificação. Dessa forma, os parâmetros são encontrados para minimizar essa função de custo, sendo que diversos algoritmos podem ser utilizados para esse fim, existindo estratégias que envolvem computação evolucionária e otimização não linear (LUH e C.-Y., 2000; PIRODDI e SPINELLI, 2003).

Como estruturas NARX são lineares nos parâmetros, é possível utilizar o método clássico de mínimos quadrados (AGUIRRE, 2007). NEPOMUCENO (2002) propôs uma metodologia caixa cinza baseada em otimização multiobjetivo para identificar modelos NARX utilizando mínimos quadrados. Nesse estudo permite-se adicionar informações auxiliares aos dados de identificação, tais como aquelas relativas à curva estática e aos pontos fixos.

Validação do Modelo

As etapas anteriores permitem encontrar um conjunto de modelos para o sistema, sendo que na etapa de validação objetiva-se verificar se os modelos obtidos incorpora-

ram as características desejadas como propósito da modelagem. Embora seja uma etapa de maior subjetividade, a validação permite realizar uma comparação entre os modelos e decidir quais deles são os mais representativos do sistema. Uma questão importante relativa a esta etapa é que ela requer dados específicos, distintos dos dados de identificação, sendo a razão disso o fato de que o modelo pode ter simplesmente representado bem os dados de identificação, mas mesmo assim não incorporado as características dinâmicas principais do sistema, como ocorre no problema de sobreparametrização.

Além disso, a histerese é um fenômeno quase-estático, o que justifica a utilização de sinais de entrada de baixa frequência para a verificação do fenômeno (IKHOUANE e RODELLAR, 2007). Para verificar a validade do modelo no entorno de várias regiões de operação, é importante que a validação seja feita para diferentes pontos de operação e amplitudes, de forma que se possa excursionar vários laços de histerese. Também pelo fato do fenômeno ser característico em baixas frequências é importante se preocupar com o impacto do ruído nos dados de saída, pois tipicamente o efeito do ruído tende a tornar os laços de histerese menos evidentes (IKHOUANE e RODELLAR, 2007).

2.2 Algoritmos Evolutivos

No Capítulo 3 é utilizado um algoritmo evolutivo para estimar parâmetros de modelos BW. Por essa razão, são apresentados tanto os fundamentos conceituais quanto a notação que é utilizada no capítulo referido para a formalização do algoritmo. Existe uma vasta literatura envolvendo algoritmos de computação evolucionária, sendo que o objetivo desta seção é apenas dar uma ideia fundamental para o entendimento do algoritmo desenvolvido nesta dissertação. Um estudo mais detalhado sobre os temas envolvidos nesta seção está descrito em (EIBEN e SMITH, 2003).

Em algoritmos evolutivos, o cromossomo é um vetor que contém a representação codificada de um indivíduo, enquanto o gene é um elemento com uma posição determinada em um cromossomo (EIBEN e SMITH, 2003). O conjunto de cromossomos é conhecido como espaço genotípico.

Em problemas de estimação de parâmetros de modelos SISO, tipicamente é utilizada a codificação real. Nessa codificação, cada gene possui um valor real que representa cada parâmetro do modelo. Assim, para uma população de N_{pop} indivíduos (modelos) com n_v genes, o i -ésimo indivíduo possui cromossomo \vec{p}_i , que é um vetor de dimensão $n_v \times 1$. Cada cromossomo pode ser avaliado via uma função de adaptação que permite comparar indivíduos entre si (FLEMING e PURSHOUSE, 2002). Os dados $u(k)$ e $y_s(k)$, $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ são conhecidos e são obtidos amostrando-se regularmente $u(t)$ e $y_s(t)$ que são, respectivamente, a entrada e saída do sistema.

Alguma medida de desempenho é então utilizada para comparar modelos, codificados como cromossomos no algoritmo. Neste trabalho foi utilizado o MAE (do inglês,

Mean Absolute Error):

$$\text{MAE}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |y_i(k) - y_s(k)|, \quad (2.7)$$

em que y_i é a saída do i -ésimo modelo. O objetivo é encontrar o modelo com menor MAE, \vec{p}_* . Existem algumas vantagens de se utilizar o índice MAE ao invés de índices que envolvem o erro quadrático como a Raiz do Erro Médio Quadrático, RMSE (do inglês, *Root Mean Error Square*). Tais vantagens estão relacionadas ao fato de que índices que incluem medidas de erro quadrático tendem a crescer mais (e não necessariamente de forma monotônica) com o aumento da variabilidade dos erros de magnitudes em comparação com o índice MAE. Além disso, índices quadráticos não apresentam uma interpretação direta e inequívoca quanto o índice MAE. Uma discussão detalhada sobre essas vantagens pode ser encontrada em (WILLMOTT e MATSUURA, 2005).

No transcorrer de um algoritmo evolutivo existem algumas operações típicas como: seleção para cruzamento, cruzamento, mutação e seleção dos sobreviventes. A cada vez que uma sequência dessas operações é concluída, finaliza-se uma geração, sendo o número de gerações N_{ger} geralmente utilizado como critério de parada. Na seleção para cruzamento, um método típico é o torneio: dois indivíduos são escolhidos aleatoriamente e o mais adaptado é selecionado para o cruzamento (EIBEN e SMITH, 2003). O número de pais selecionados é determinado pela probabilidade de cruzamento, P_c . Com dois desses pais selecionados, o cruzamento aritmético consiste em uma combinação convexa dos genes desses pais:

$$\vec{f} = \alpha \vec{p}_1 + (1 - \alpha) \vec{p}_2, \quad (2.8)$$

sendo \vec{p}_1 e \vec{p}_2 os cromossomos dos pais, \vec{f} , o cromossomo do filho gerado e α um parâmetro aleatoriamente escolhido a cada operação. Tal parâmetro determina a proximidade do filho a cada um desses pais. O número de mutações é definido pela probabilidade de mutação P_m e essa operação gera um novo indivíduo a partir de um outro aleatoriamente escolhido. Como o indivíduo possui n_v genes, o p -ésimo gene, $p \in \{1, 2, \dots, n_v\}$ é escolhido via amostragem de uma distribuição normal centrada em zero e de desvio padrão σ_p , em que σ_p é elemento do vetor $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \dots, \sigma_{n_v}]$.

Na seleção de sobreviventes, um subconjunto de indivíduos é preservado. Para isso, utiliza-se algum critério de elitismo, de forma a se reduzir as chances de uma busca meramente aleatória. Em problemas não convexos, o elitismo exagerado pode gerar convergência prematura, isto é: a população fica presa em torno de um mínimo local.

Visando evitar o inconveniente de convergência prematura, uma estratégia que pode ser utilizada é a preservação de nichos. Tal abordagem visa promover uma busca global, consistindo na divisão dos indivíduos em nichos onde são selecionados os sobreviventes. Ademais, essa estratégia pode ser combinada com uma busca local após um número determinado de gerações. Por fim, é importante ressaltar que esses

algoritmos tendem a ser computacionalmente custosos e não garantem que a solução ótima seja encontrada. Tais algoritmos também não garantem que o modelo seja estável, sendo que essa condição pode ser alcançada com a inclusão de restrições aos parâmetros. No caso do projeto de uma entrada de excitação coerente conforme detalhado na Subseção 3.2.1, modelos instáveis levarão a resultados de índice MAE elevados, sendo, portanto, descartados devido aos critérios de elitismo do algoritmo.

2.3 Modelos NARX polinomiais

Modelos NARX (do inglês, *Nonlinear Autoregressive model with eXogenous input*) polinomiais são modelos discretos, que descrevem sistemas não lineares por meio de combinações de versões passadas das entradas e da saída do sistema. Na literatura podem ser encontradas diversas aplicações desse tipo de modelo nos contextos de modelagem e controle (NICOLAO et al., 1997; LEVA e PIRODDI, 2002; PIRODDI e SPINELLI, 2003; BASSO et al., 2005). Isso se deve principalmente à simplicidade desses modelos, sendo uma representação SISO para um modelo NARX, $\mathcal{M}_{\text{NARX}}$, assim definida (LEONTARITIS e BILLINGS, 1985):

$$\mathcal{M}_{\text{NARX}} : y(k) = f^\ell(y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-\tau_d), \dots, u(k-n_u)) + e(k), \quad (2.9)$$

em que $y(k)$, $u(k) \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, séries temporais da saída e da entrada obtidas por amostragem dos sinais contínuos de entrada, $u(t)$, e saída, $y(t)$, a partir de um intervalo de amostragem T_s . A saída $y(k)$ é calculada a partir de uma função polinomial $f^\ell(\cdot)$, em que $\ell \in \mathbb{N}^+$ é o grau de não linearidade, sendo tal função formada pela combinação de termos da entrada $u(k)$ e suas versões atrasadas, bem como das versões atrasadas da própria saída. Os máximos atrasos da saída e da entrada são denotados por n_y e n_u , enquanto o atraso puro de tempo, por $\tau_d \in \mathbb{N}^+$. O termo $e(k)$ representa as incertezas relacionadas ao processo de modelagem, incluindo o ruído. Cada parcela de $\mathcal{M}_{\text{NARX}}$ pode ser qualquer combinação linear e não linear de $u(k)$ e $y(k)$ até o grau ℓ , sendo tais parcelas multiplicadas por um parâmetro de valor constante. Neste trabalho, o parâmetro do i -ésimo termo é indicado por θ_i , de modo que tais modelos são lineares nos parâmetros.

2.3.1 Análise em Estado Estacionário

Considerando $u(k) = \bar{u}$ e $y(k) = \bar{y}$, $\forall k$, obtém-se a relação em estado estacionário do modelo (2.9):

$$\bar{\mathcal{M}}_{\text{NARX}} : \bar{y} = \bar{f}^\ell(\bar{u}, \bar{y}),$$

que, para um valor conhecido de \bar{u} , pode ser reescrita como:

$$c_{y,\ell_y}(\bar{u})\bar{y}^{\ell_y} + c_{y,\ell_y-1}(\bar{u})\bar{y}^{\ell_y-1} + \dots + c_{y,1}(\bar{u})\bar{y} + c_{y,0}(\bar{u}) = 0, \quad (2.10)$$

em que $1 \leq \ell_y \leq \ell$ é o grau de não linearidade do modelo estático $\bar{\mathcal{M}}_{\text{NARX}}$, dos quais os coeficientes $c_{y,i}$, $i = 0, \dots, \ell_y$ usualmente dependem de \bar{u} . Resolvendo (2.10) para a incógnita \bar{y} , as ℓ_y raízes desse polinômio são encontradas. Tais raízes são denotadas como pontos fixos do modelo (2.9), sendo uma definição para esse termo apresentada a seguir.

Definição 2.3.1. [Pontos fixos (AGUIRRE e MENDES, 1996)]. A análise em estado estacionário do modelo $\mathcal{M}_{\text{NARX}}$ (2.9) é realizada considerando $y(k)=\bar{y}, \forall k$ e $u(k)=\bar{u}, \forall k$, $\bar{y} = \bar{f}^\ell(\bar{y}, \bar{u})$, cujas soluções ou raízes \bar{y} (2.10) para um dado valor constante da entrada \bar{u} são definidas como pontos fixos ou pontos de equilíbrio de $\mathcal{M}_{\text{NARX}}$.

A condição para estabilidade local dos pontos fixos é obtida encontrando os autovalores da matriz Jacobiana de $\mathcal{M}_{\text{NARX}}$ (2.9) avaliados em cada ponto fixo:

$$\left| \text{eig} \left(\frac{\partial f^\ell}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\bar{u}, \bar{y}} \right) \right| < 1, \quad (2.11)$$

sendo $\mathbf{y} = [y(k-1) \dots y(k-n_y)]^T$, T é a transposta e $\text{eig}(\bullet)$ indica os autovalores.

2.3.2 Utilização de Modelos NARX para Representação de Histerese

Para representação de histerese, modelos NARX identificados via abordagens caixa-preta tipicamente não são capazes de representar o laço de histerese. Inicialmente, considere a seguinte definição para o termo multi função:

Definição 2.3.2. [Multi função (MARTINS e AGUIRRE, 2016)]. Seja $\phi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Delta x(k) = x(k) - x(k-1)$, a primeira diferença ou velocidade da entrada. $\phi[\Delta x(k)]$ é uma multi função se:

$$\phi[\Delta x(k)] = \begin{cases} \phi_c & \text{se } \Delta x(k) > \epsilon \\ \phi_n & \text{se } \Delta x(k) = \epsilon \\ \phi_d & \text{se } \Delta x(k) < \epsilon. \end{cases} \quad (2.12)$$

sendo $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\phi_c \neq \phi_n \neq \phi_d$. $\phi_c = f_1[x(k)]$, $\phi_d = f_2[x(k)]$ e $f_3[x(k)]$.

Note que a função sinal da velocidade atende à definição 2.3.2 com $\phi_c = 1$, $\phi_n = 0$, $\phi_d = -1$ e $\epsilon = 0$. MARTINS e AGUIRRE (2016) mostraram que a inclusão de uma multi função da primeira diferença da entrada é uma condição suficiente para que modelos NARX polinomiais reproduzam o laço de histerese quando excitados por entradas do tipo carga descarga. Uma vez que função sinal é uma multi função, é possível representar sistemas histeréticos incluindo a primeira diferença da entrada $u(k)$ e a função sinal dessa primeira diferença (MARTINS e AGUIRRE, 2016; ABREU et al., 2020). Para essa representação, utiliza-se um modelo NARX estendido (BILLINGS e

CHEN, 1989) com os regressores mencionados, denotado por $\mathcal{M}_{\text{NARX},h}$:

$$\mathcal{M}_{\text{NARX},h} : y(k) = g^\ell(y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-\tau_d), \dots, u(k-n_u), \phi_1(k-1), \phi_2(k-1)) + e(k), \quad (2.13)$$

em que $\phi_1(k)=u(k)-u(k-1)$, $\phi_2(k)=\text{sign}(\phi_1(k))$, $g^\ell(\cdot)$ é uma função polinomial de regressores até o grau ℓ e os outros parâmetros são os mesmos que foram definidos em (2.9). Para modelos do tipo (2.13), existem dois conjuntos de pontos de equilíbrio para a parte determinística: um conjunto para o regime carga $\phi_2(k)=1$ e outro para descarga $\phi_2(k)=-1$ (MARTINS e AGUIRRE, 2016).

No processo de identificação de $\mathcal{M}_{\text{NARX},h}$, alguns regressores candidatos podem ser excluídos, independente dos atrasos τ_u e τ_y , reduzindo o espaço de busca:

- (i) $y^p(k-\tau_y)$, $y^p(k-\tau_y)\phi_1(k-\tau_u)^q$ e $y^p(k-\tau_y)\phi_2(k-\tau_u)^q$ para $p>1, \forall q$ (AGUIRRE e MENDES, 1996),
- (ii) $\phi_2^q(k-\tau_u)$ para $q > 1$ (MARTINS e AGUIRRE, 2016),
- (iii) $y^p(k-\tau_y)u^m(k-\tau_u)$ e $u^m(k-\tau_u)$, $\forall p,m$ ABREU et al. (2020).

Recentemente, ABREU et al. (2020) mostraram que, ao se excluir os regressores (i), (ii) e (iii), é possível que o modelo seja capaz de permanecer em seu estado atual para entradas que se tornam constantes. Para isso, também é necessário garantir que a soma de todos os parâmetros de termos lineares da saída seja 1, $\sum_y = 1$. Tal restrição faz com que o modelo apresente um *continuum* de soluções em estado estacionário. Assim, o comportamento histerético é bem estimado até mesmo para entradas que, a princípio eram variantes no tempo, contudo, tornam-se constantes a partir de algum instante. Além disso, caso a entrada torne-se constante para um mesmo valor, mas em regimes de carga e descarga, sistemas histeréticos alcançam valores de saída diferentes nesses dois regimes, devido às diferenças de ganho existentes nos laço de carga e descarga. Dessa forma, os autores mostraram que modelos que utilizam as restrições mencionadas, apresentam essa característica em estados estacionário, enquanto que modelos que não as utilizam, tendem a ser pouco representativos nesse cenário.

2.3.3 Determinação de Estruturas

MENDES e BILLINGS (2001) mostraram que, para modelos NARX, a expansão do espaço de busca aumenta de forma muito rápida com o aumento do máximo grau de não linearidade e do máximo atraso dos regressores. Para sistemas com histerese, LEVA e PIRODDI (2002) apresentaram um modelo polinomial NARX de grau de não linearidade maior do que dez, o que acarreta um alto custo computacional. De forma a lidar com esse aumento rápido do espaço de busca, torna-se necessário o estudo de

técnicas para reduzir tal espaço, visando eliminar termos candidatos que não agreguem representatividade ao modelo. Além disso, a inclusão de termos candidatos não representativos pode gerar fenômenos indesejados, destruindo a dinâmica desejada do sistema. [AGUIRRE \(1997\)](#) mostrou que o conhecimento *a priori* pode ser utilizado na eliminação desses termos candidatos não representativos. A seguir, apresentam-se algumas técnicas que visam lidar com o problema da determinação de estruturas.

Algoritmo ERR

A taxa de redução de erro (ERR, do inglês *Error Reduction Ratio*) é uma técnica baseada em otimização mono-objetivo que busca quantificar a contribuição de cada termo, ao explicar a variância do erro de modelagem ([KORENBERG et al., 1987](#)). Para definir a taxa de redução do erro, considere o seguinte modelo para um sistema NARX:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{g}_i w_i(k-1) + \xi(k), \quad (2.14)$$

sendo $\xi(k)$, o erro de modelagem, $y(k)$, a saída do modelo constituído por n_θ parâmetros, \hat{g}_i cada elemento do vetor de parâmetros g e w_i , cada regressor do modelo que deve ser ortogonal aos dados. Ao tomar o valor médio de $y(k)^2$ sobre os dados, é possível encontrar a seguinte expressão ([AGUIRRE, 2007](#)):

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)^2 = \sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{g}_i^2 w_i^T w_i + \xi^T \xi. \quad (2.15)$$

A taxa de redução do erro devido à inclusão do i -ésimo regressor pode ser dada pela seguinte razão:

$$|ERR_i| = \frac{\hat{g}_i^2 w_i^T w_i}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}}. \quad (2.16)$$

Observa-se que a inclusão de cada termo ao modelo faz com que a variância do erro de modelagem diminua. O índice $|ERR_i|$ visa quantificar a contribuição do i -ésimo termo na redução desta variância. Um critério que pode ser utilizado para a escolha dos regressores é considerar aqueles cujo índice seja maior, reduzindo o número de termos candidatos. Essa técnica visa ordenar hierarquicamente os termos candidatos ao modelo, contudo ainda é preciso estabelecer um ponto de corte que separe os termos que serão efetivamente utilizados e aqueles que serão descartados.

O Critério de Akaike

O critério de informação de Akaike ([AKAIKE, 1974](#)) é uma ferramenta que permite estimar o número de termos que devem ser incluídos no modelo com base na minimização de uma função de custo. A ideia básica é que a adição de novos termos

candidatos aumenta a complexidade do modelo, permitindo um melhor ajuste aos dados de identificação. Isso significa que o erro sistemático ou erro de polarização $\sigma_{erro}^2(n_\theta)$ deve diminuir, contudo, o aumento da complexidade não necessariamente garante uma melhor generalização do modelo sobre outras massas de dados. Dessa forma, tal critério visa penalizar o aumento do número de termos do modelo. A função de custo de Akaike é definida como:

$$J_{AIC(n_\theta)} = N \ln[\sigma_{erro}^2(n_\theta)] + 2n_\theta. \quad (2.17)$$

Portanto, a função de custo acima tende a atingir um valor mínimo para um dado número de termos do modelo n_θ . Esse valor é ótimo no sentido de minimizar a função de custo $J_{AIC(n_\theta)}$, contudo, este critério é puramente estatístico, não sendo garantido que o modelo obtido seja válido do ponto de vista de identificação.

2.3.4 Estimação de Parâmetros

O modelo (2.9) possui como termos as combinações possíveis entre as saídas e entradas considerando os máximos atrasos e o grau de não linearidade. Como $f^\ell(\cdot)$ é uma função polinomial, o modelo é linear nos parâmetros e, portanto, pode ser escrito como uma regressão linear:

$$y(k) = \psi_{k-1}^T \hat{\theta} + \xi(k), \quad (2.18)$$

sendo ψ_{k-1}^T , o vetor de regressores considerados até o instante $k-1$, $\hat{\theta}$, o vetor de parâmetros a serem estimados e $\xi(k)$, o resíduo gerado no instante k , isto é: o erro cometido pelo modelo $\psi_{k-1}^T \hat{\theta}$, ao tentar explicar $y(k)$. A partir de uma massa de dados de identificação, podem ser impostas restrições que compõem um sistema *sobredimensionado*:

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Psi} \hat{\theta} + \boldsymbol{\xi}, \quad (2.19)$$

sendo \mathbf{y} , o vetor de saídas retiradas dos dados de identificação e $\mathbf{\Psi}$, a matriz de regressores. A equação matricial 2.19 pode ser utilizada para se estimar o vetor $\hat{\theta}$, utilizando algoritmos de identificação de um passo à frente, como é o caso do método clássico dos Mínimos Quadrados (MQ) aplicado sobre o sistema sobredimensionado. A solução estimada via MQ, objetivando minimizar a soma dos quadrados dos erros, $\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi}$, é:

$$\hat{\theta}_{MQ} = [\mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi}]^{-1} \mathbf{\Psi}^T \mathbf{y}. \quad (2.20)$$

Quando o erro na equação de regressão é autocorrelacionado, o estimador de mínimos quadrados clássico acaba sendo polarizado. Isso tipicamente ocorre na presença de ruído, sendo comum adicionar termos de média móvel (MA, do inglês *moving average*), resultando em modelos não lineares nos parâmetros. Uma forma de contornar este problema é utilizar o estimador Estendido de Mínimos Quadrados (EMQ). Tal algoritmo iterativo utiliza os resíduos da iteração anterior para estender a matriz de regressores, sendo executado até um critério de convergência ser alcançado, conforme

é ilustrado nos seguintes passos (AGUIRRE, 2007):

1. A partir dos dados disponíveis, determine os parâmetros via MQ clássico:

$$\hat{\theta}_{MQ} = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T y;$$

2. Calcule o vetor de resíduos fazendo $\xi_1 = y - \Psi \hat{\theta}_{MQ}$;

3. Defina a iteração $i = 2$

4. Monte a matriz estendida de regressores: $\Psi_i^* = [\Psi \quad \xi_{i-1}]$;

5. Estime via MQ o novo vetor de parâmetros para a iteração atual:

$$\hat{\theta}_{EMQ_i}^* = [\Psi_i^{T*} \Psi_i^*]^{-1} \Psi_i^{T*} y$$

6. Determine o vetor de resíduos da iteração atual: $\xi_i = y - \Psi_i^{T*} \hat{\theta}_{EMQ_i}^*$

7. Caso não se tenha alcançado a convergência do vetor de parâmetros $\hat{\theta}_{EMQ_i}^*$, faça $i = i + 1$, voltando ao passo 4.

Em cenários de identificação caixa cinza, é possível incluir restrições aos parâmetros. No contexto de mínimos quadrados, o método que inclui tais restrições é conhecido como Método de Mínimos Quadrados com Restrições (MQR). Para apresentar tal método, considere um conjunto de n_r restrições organizadas de forma vetorial como:

$$c = S\theta, \quad (2.21)$$

em que $c \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$ e $S \in \mathbb{R}^{n_r \times n_\theta}$ são conhecidos. O objetivo é encontrar o vetor $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 1}$ que minimiza o somatório dos quadrados dos erros e satisfaz o conjunto de restrições (2.21):

$$\hat{\theta}_{MQR} = \arg \min [\xi^T \xi]. \quad (2.22)$$

$$\text{sujeito a: } c = S\theta$$

Uma solução em batelada para esse problema foi dada em (DRAPER e SMITH, 1998):

$$\hat{\theta}_{MQR} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T y - (\Psi^T \Psi)^{-1} S^T [S(\Psi^T \Psi)^{-1} S^T]^{-1} (S \hat{\theta}_{MQ} - c), \quad (2.23)$$

em que $\hat{\theta}_{MQ}$ é solução do método clássico dada por 2.20. Esse algoritmo foi utilizado em uma estratégia caixa cinza proposta por ABREU et al. (2020) para garantir $\Sigma_y = 1$. Os algoritmos apresentados nesta subseção são utilizados neste trabalho para a estimação de parâmetros de modelos NARX.

2.4 Formulação do Problema de Compensação

O problema central abordado neste trabalho é a compensação de não linearidades, de forma que esta seção objetiva formular matematicamente tal problema. Considere-se um sistema \mathcal{S} SISO dinâmico e não linear que ao ser excitado por uma entrada $u(t)$, produz uma saída $y_s(t)$. Sobre o sistema \mathcal{S} , assume-se que:

Proposição 2.4.1. \mathcal{S} é um sistema BIBO (do inglês, *Bounded Input - Bounded Output*) estável em malha aberta, isto é: uma entrada limitada aplicada ao sistema \mathcal{S} gera uma saída limitada.

Assume-se que um modelo \mathcal{M} foi identificado para \mathcal{S} , o que pode ser feito, a princípio, por meio de um conjunto de N amostras coletadas de \mathcal{S} , $Z^N = \{u(k), y_s(k)\}_{k=1}^N$. O objetivo é projetar um compensador \mathcal{M}_r de modo que a combinação em malha aberta de \mathcal{M}_r com \mathcal{S} gere uma relação aproximadamente linear entre a referência a ser seguida $r(t)$ e a saída do sistema compensado $y_c(t)$, fazendo, portanto com que o sistema compensado se torne mais dócil ao controle quando comparado ao caso não compensado. A Fig. 2.2 apresenta a situação previamente descrita, sendo \mathcal{M}_r projetado para determinar uma entrada de compensação $m(t)$ que reduza os efeitos não lineares presentes em \mathcal{S} . Dessa forma, espera-se que para uma referência $r(t)$, a saída do sistema compensado $y_c(t)$ se aproxime de $r(t)$.

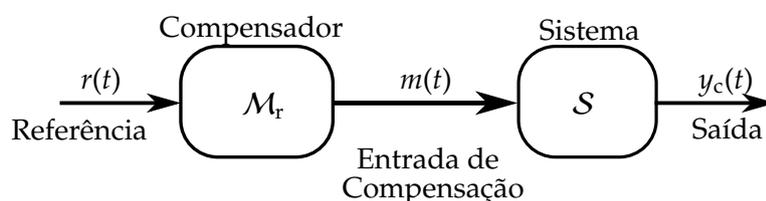


Figura 2.2: Diagrama de blocos do sistema compensado.

Matematicamente, deseja-se que $J[r(t), y_c(t)] < J[u(t), y_s(t)]$, em que J é alguma função de custo de proximidade, como o erro quadrático médio, por exemplo. Em outras palavras: $r(t)$ e $y_c(t)$ devem ser mais próximas entre si do que a entrada $u(t)$ e a saída $y_s(t)$ do sistema não compensado. Uma observação importante é que da forma como o problema foi apresentado, não se definiu a representação matemática para o modelo \mathcal{M} , sendo importante que a representação escolhida seja capaz de representar os aspectos não lineares fundamentais de \mathcal{S} .

2.5 Compensação e Controle de Sistemas Histeréticos

A histerese é frequentemente vista como uma característica negativa para sistemas de controle. Essa visão se relaciona às dificuldades adicionais que o fenômeno impõe, dado que diferentes estados da saída podem ser obtidos para um mesmo valor da

entrada, dependendo da memória do sistema. Os efeitos adversos incluem uma piora significativa nas margens de ganho e de fase de sistemas que apresentam tal fenômeno, dificultando a obtenção de erros pequenos para o problema de rastreamento (KYPRIANOU et al., 2001; DEVASSIA et al., 2007).

Tipicamente na literatura, problemas de controle envolvendo sistemas com histerese estão relacionados ao problema de seguimento de trajetória com aplicações diversas: atuadores piezoelétricos, amortecimento magnético, sistemas de nano posicionamento, ligas com memória de forma, dentre outros (HASSANI et al., 2014). Esta seção visa apresentar alguns trabalhos realizados no contexto de compensação e controle de sistemas histeréticos, de forma a apresentar as ideias tipicamente utilizadas nesse contexto que inspiraram esta dissertação.

2.5.1 Compensadores

Na literatura, utiliza-se o termo *controle antecipatório* ou *controle antecipativo* ou *feed-forward* para designar o que neste trabalho definimos como *compensação*. Dessa forma, esse tipo de proposta ocorre em malha aberta e utiliza um modelo com características inversas àquelas da planta que desejam ser eliminadas ou atenuadas. Por questões de clareza, este trabalho evita o termo controle para esse tipo de procedimento, de modo a reservar o termo controle para o contexto de malha fechada. O desempenho da compensação depende muito da qualidade do modelo inverso para apresentar bons resultados, embora tenha a vantagem de não necessitar de equipamentos adicionais para realizar o fechamento da malha.

- **RAKOTONDRABE (2011)**

O primeiro artigo a ser tratado neste item foi publicado no periódico *IEEE Transactions on Automation, Science and Engineering* (RAKOTONDRABE, 2011). Segundo o banco de dados *Web of Science*, tal artigo possui um total de 212 citações, desde sua publicação em 2011, até o dia 30/10/2020.

RAKOTONDRABE (2011) utilizou um modelo BW para compensar a histerese de um atuador piezoelétrico por meio de uma estratégia antecipativa. O atuador consiste em uma viga de seção transversal retangular que possui duas camadas justapostas: uma delas ativa, apresentando o efeito piezoelétrico, e outra passiva feita de níquel. Ao se aplicar uma tensão elétrica U à camada ativa, ela sofre uma deformação mecânica de contração ou expansão e, estando as camadas unidas, é possível medir um deslocamento y em relação ao eixo horizontal que é definido pela posição das placas na ausência de tensão elétrica. Esse tipo de material é utilizado em aplicações que exijam alto grau de precisão e exatidão, como por exemplo a produção de componentes microeletrônicos. Um problema que compromete a exatidão necessária a essas aplicações é o fato de que materiais piezoelétricos apresentam comportamento histerético que pode ser observado ao se plotar a curva quase-estática $U \times y$, de forma que estratégias de

controle são alternativas para compensar esse efeito. O autor argumenta que existem dificuldades relacionadas ao controle em malha fechada: os sensores necessários tendem a ser volumosos e caros, justificando a utilização de uma abordagem antecipativa. O autor também justifica que embora tal estratégia não seja capaz de rejeitar perturbações, os objetos a serem posicionados possuem massas desprezíveis, o que torna o efeito de carga insignificante.

Para compensar a histerese, o autor estimou os parâmetros de um modelo de Bouc-Wen que seria capaz de representar os dados de histerese da planta por meio da identificação baseada em técnicas de filtragem não linear. Os dados de identificação e validação foram obtidos aplicando sinais senoidais cuja amplitude máxima foi de 80 V. Como o modelo é quase-estático, utilizaram-se frequências baixas o suficiente para evitar o efeito dinâmico de atraso de fase e não tão baixas de forma que os efeitos de deslizamento na curva de histerese fossem desprezíveis. Experimentalmente, o efeito de deslizamento pôde ser visto na curva para frequências menores que 0,01 Hz, enquanto que o atraso de fase para frequências maiores que 5 Hz. Dessa forma, optou-se por uma frequência intermediária de 0,1 Hz e os resultados de validação corroboraram que o modelo obtido foi capaz de capturar o comportamento histerético.

Utilizou-se uma planta composta por um atuador piezoelétrico conectado com um sistema de controle de tempo real para a obtenção de resultados experimentais. A partir do modelo inverso do modelo BW obtido na etapa de identificação, a compensação de histerese foi imposta à planta e os resultados obtidos foram capazes de eliminar praticamente por completo a histerese inicial que era próxima de 56%, tendo o sistema linearizado ganho unitário. Com a utilização do compensador, foi possível alcançar o rastreamento, enquanto que sem essa compensação o seguimento de trajetória foi comprometido, além do que o sistema compensado possui atraso de fase próximo de 3° , enquanto que sem a compensação o atraso foi de 16° . Conforme as considerações iniciais feitas, o modelo é válido para frequências entre 0,01 e 5 Hz, onde se resolve o problema de rastreamento. Devido à importância desse artigo para a realização deste trabalho, maiores detalhes são fornecidos no Capítulo 3.

- **WEBER (2013)**

O segundo artigo a ser tratado foi publicado em *Smart Materials and Structures* sendo de autoria de **WEBER (2013)**. Esse artigo trata da aplicação de compensação a um amortecedor magneto-reológico (MR) visando a melhora de desempenho no contexto de seguimento de trajetória. Fluidos magneto-reológicos são um tipo de fluido inteligente (*smart fluid*), compostos por um óleo que contém partículas com propriedades magnéticas. Na ausência de campos magnéticos, o óleo mantém uma viscosidade próxima à de óleos lubrificantes convencionais utilizados em automóveis, contudo, ao ser submetido a um campo magnético, tal fluido aumenta sua viscosidade bruscamente em um intervalo da ordem de milissegundos. Ademais, o fluido pode retornar à condição de líquido em velocidade similar a partir da remoção do campo magnético.

Essas características podem ser aproveitadas para a construção de amortecedores reológicos aplicáveis no sistema de suspensão de automóveis, na fabricação de próteses e no amortecimento de abalos sísmicos para a construção civil.

Nesse trabalho, o autor propõe um modelo composto pelo modelo clássico de Bouc-Wen acrescido a um filtro de segunda ordem para modelar o efeito de Stribeck. Tal efeito de fricção pode ser visto pelo efeito de ultrapassagem ou *overshoot* em um gráfico $v \times F$, onde v é a velocidade do amortecedor e F é a força normalizada, como mostrado na Figura 2.3. Ademais, a figura mostra que o aumento da corrente tende a alargar o laço de histerese, a partir de efeitos lineares e não lineares.

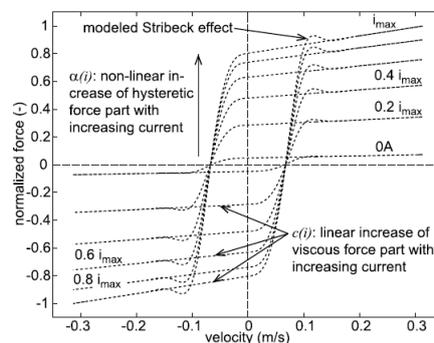


Figura 2.3: Exemplo de curva de histerese típica em amortecedores magneto-reológicos obtida via simulação - extraído de (WEBER, 2013).

A Figura 2.4 apresenta a ideia básica do esquema de compensação proposto, em que a força de controle desejada, f_{des} , é calculada com base nas variáveis de estado, deslocamento x e a velocidade de deslocamento \dot{x} . Em seguida, x , \dot{x} e f_{des} são utilizados para a estimativa da corrente desejada, i_{des} que, por fim, alimenta o modelo BW juntamente com x e \dot{x} para se calcular a força a ser aplicada no amortecedor MR. A estimativa da corrente desejada é realizada por meio de blocos BW idênticos alimentados por correntes constantes e pelas variáveis de estado. Cada bloco i gera como saída uma força f_i , sendo a corrente desejada calculada como uma interpolação linear por partes dessas forças. A corrente desejada é restrita a um intervalo definido $[0, i_{max}]$.

O modelo exige uma quantidade considerável de parâmetros que foram estimados experimentalmente por tentativa e erro, de forma a garantir que diversas características dinâmicas e estáticas fossem apresentadas. A compensação baseada no modelo apresentado foi testada para referências que são consideradas padrões (*benchmark*), dado que permitem apresentar os efeitos dinâmicos em estudo. Os autores mostraram que, além de não sofrer com instabilidades de origem numérica, o esquema proposto é capaz de resolver o problema de rastreamento com um erro inferior a 8% para ambos os casos testados.

O caso de utilização de estratégias de compensação tem validade no contexto de sistemas com histerese, embora tenha uma dependência considerável da qualidade do modelo. Muitas vezes a obtenção do modelo não é simples, visto que os modelos

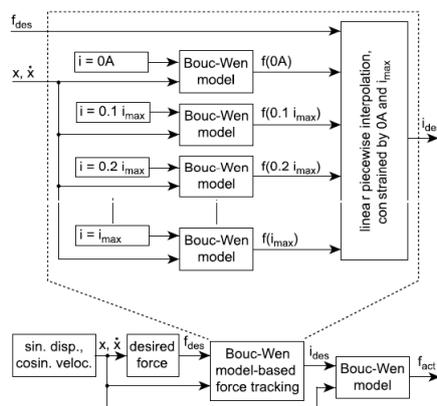


Figura 2.4: Modelo de compensação de histerese - extraído de (WEBER, 2013).

acabam por exigir uma quantidade elevada de parâmetros que devem ser estimados o que, por vezes, é feito por técnicas de tentativa e erro (WEBER, 2013). Além disso, em alguns casos exige-se a estabilização do sistema que é tipicamente provida por um sistema de controle em malha fechada. O próximo item apresenta o caso em que compensadores são utilizados juntamente com controladores realimentados.

2.5.2 Controladores Realimentados e Compensadores

Nesta subseção são apresentados técnicas e resultados em que controladores realimentados são usados em cascata com compensadores. A função dos compensadores é tornar o sistema mais dócil ao controle realimentado que permite a rejeição às perturbações.

- **TAO e KOKOTOVIC (1995)**

O artigo a ser inicialmente citado neste tópico foi publicado em *IEEE Transactions on Automatic Control* sendo de autoria de TAO e KOKOTOVIC (1995). Segundo o banco de dados *Web of Science*, tal artigo possui um total de 411 citações, desde a sua publicação em 1995, até o dia 30/10/2020. Nesse artigo é proposta uma técnica de controle adaptativo para plantas compostas por uma dinâmica linear e uma característica histerética inicialmente desconhecida. Os objetivos de controle são estabilizar o sistema e garantir o rastreamento de uma entrada de referência na presença de histerese. Assume-se que o modelo linear da planta no domínio de Laplace, $G(s) = k_p \frac{Z(s)}{P(s)}$ pode ou não ser conhecido, sendo k_p uma constante escalar e os polinômios $Z(s)$ e $P(s)$ mônicos, enquanto que a característica de histerese deve ser estimada de maneira adaptativa. A saída $y(t)$ do sistema é obtida a partir das equações abaixo:

$$\begin{aligned} u(t) &= H(v(t)) \\ U(s) &= \mathcal{L}\{u(t)\} \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\}. \end{aligned}$$

O modelo de histerese é construído por partes, a partir de segmentos de retas e semirretas do plano quase-estático $v \times u$ que determinam um laço $H(\cdot)$, no qual ocorre histerese e que é parametrizado pelas constantes $m_t, c_t, m_b, c_b, m_r, c_r, m_l, c_l$. Embora o modelo de histerese utilize vários parâmetros, devido à sua concepção por partes de segmentos e semirretas, a obtenção do modelo inverso torna-se simplificada, embora não descreva características polinomiais de grau superior a um no plano $v \times u$. Tais constantes devem ser estimadas de forma adaptativa a partir dos dados e, assim, o modelo inverso é colocado em cascata com o sistema, visando compensar a histerese.

Os resultados de simulação mostraram que a utilização de controladores sem a compensação de histerese apresenta erro crescente de rastreamento com a evolução do tempo. Contudo, ao se adicionar o modelo inverso de histerese, o esforço de controle torna-se menor e o erro de rastreamento também é reduzido, seja com a utilização de um controlador linear adaptativo ou não o utilizando. Ademais, se for adicionado, o controle realimentado tende a reduzir o erro de rastreamento. Embora o erro de seguimento tenda a zero com a evolução do tempo, existe um erro considerável até a estimação convergir para valores de parâmetros próximos aos parâmetros ótimos, além de se exigir um elevado custo computacional ao se fazer tal estimação de forma *online*.

- **GE e JOUANEH (1997)**

O próximo artigo a ser tratado foi publicado em *Precision Engineering* sendo de autoria de **GE e JOUANEH (1997)**. Segundo o banco de dados *Web of Science*, tal artigo possui um total de 286 citações, desde a sua publicação em 1997, até o dia 01/07/2018. Esse trabalho objetiva apresentar uma solução para o problema de seguimento de trajetórias senoidais em um atuador piezo cerâmico. Tal solução se baseia em um compensador, além de um controlador PID que tende a melhorar o desempenho do sistema controlado. Para modelar o comportamento histerético, os autores utilizaram o modelo de memória não local de Preisach. Não linearidades com memória não local se caracterizam pelo fato de que existem uma gama variada de curvas que podem representar o comportamento futuro, visto que cada curva depende de uma sequência passada de extremos da entrada (**ALMEIDA et al., 2003**).

A partir de tal modelo, obteve-se o modelo inverso da característica histerética que exigiu o cálculo da inversa de funções integrais. Embora seja custoso encontrar tal modelo inverso, a compensação é capaz de linearizar o sistema. Contudo, uma outra dificuldade também se apresenta: devido à alta complexidade, o modelo linearizado é válido somente ao longo do laço principal de histerese. Tal fato limita a utilização de diversos sinais de entrada, dado que é essencial garantir que o sistema não excursiona por laços secundários de histerese.

Como esperado, o erro de seguimento de trajetória é considerável em malha aberta. Utilizando somente o controlador PID, ocorre redução nesse erro, embora os resultados obtidos sejam inferiores à utilização exclusiva do compensador. Os melhores resultados são obtidos ao se combinar as duas estratégias.

- **CHEN et al. (2013)**

Por fim, apresenta-se o artigo de [CHEN et al. \(2013\)](#) que propõe uma técnica de controle *feedforward* combinada com *feedback* para atuadores piezoelétricos. Os autores apresentam um modelo modificado de Prandtl-Ishlinskii, de forma a representar características de histerese assimétricas em relação à origem, visto que o modelo original não apresenta essa propriedade. Os modelos foram identificados e o controle foi executado para uma faixa estreita de frequências, considerando o caso simplificado em que a histerese é independente da frequência. Para estimar os parâmetros do modelo, o atuador foi excitado por uma senoide de 0,5 Hz, sendo o deslocamento medido por um sensor de laser. O modelo inverso foi obtido e um compensador foi proposto para linearizar o sistema. Três sinais de frequência dominante próxima a 0,5 Hz foram utilizados como referência para rastreamento, sendo o sistema de controle testado em duas abordagens: somente compensação e pela combinação de compensação com realimentação.

O uso somente de compensação foi capaz de linearizar o sistema e resolver o problema de seguimento de trajetória para os três sinais de frequência testados. Visando obter melhores resultados, obtém-se um modelo linear para a dinâmica do sistema e um controlador realimentado pode ser projetado utilizando técnicas tradicionais de controle. Utiliza-se, então, um controlador puramente proporcional que é capaz de reduzir significativamente o erro de rastreamento em relação à compensação, da ordem de 75%. Também é possível observar que o compensador é responsável pela maior contribuição na redução do erro para o problema de rastreamento, sendo o controle por realimentação capaz de refinar os resultados obtidos. Os autores observam que o controle realimentado tende a mitigar os efeitos de deslizamento, além dos erros de medição.

Compensadores baseados em modelos NARX polinomiais

Devido à relevância de modelos NARX polinomiais para este trabalho, compensadores que utilizam esses modelos são apresentados separadamente. São detalhados dois trabalhos recentes que inspiraram a presente dissertação.

- **LACERDA JUNIOR et al. (2019)**

[LACERDA JUNIOR et al. \(2019\)](#) apresentaram uma contribuição importante, em que uma técnica analítica baseada em modelos NARX é proposta para compensação de histerese. Nessa abordagem, os modelos contêm as características caixa-cinza propostas por [MARTINS e AGUIRRE \(2016\)](#) e a seleção da estrutura é realizada considerando o peso dos agrupamentos de termos. Desse modo, termos significativos são mantidos na estrutura, sendo os parâmetros estimados via MQ.

O compensador é obtido via inversão analítica do modelo em que a entrada de compensação é isolada. Assim, tem-se que os modelos precisam exibir uma estrutura

linear na entrada de compensação para que seja possível isolá-la. Ademais, determinadas estruturas podem gerar problemas de singularidade no cálculo da entrada de compensação. Para verificar esse fato, considere o seguinte modelo simplificado como exemplo:

$$y(k) = \hat{\theta}_1 y(k-1) + \hat{\theta}_2 \phi_1(k-1) \phi_2(k-1) u(k-1), \quad (2.24)$$

promovendo um adiantamento de tempo conveniente, $k \leftarrow k+1$. Substituindo $y(k)$ por $r(k)$, e isolando $u(k)$, tem-se o compensador conforme proposto no artigo:

$$u(k) = \frac{1}{\hat{\theta}_2 \phi_1(k) \phi_2(k)} [r(k+1) - \hat{\theta}_1 r(k)]. \quad (2.25)$$

Como $\phi_1(k) = u(k) - u(k-1)$ e $\phi_2 = \text{sign}[u(k) - u(k-1)]$, note que esses regressores dependem da entrada desconhecida $u(k)$. Os autores propõem a seguinte simplificação para resolver esse problema: $\phi_1(k) \approx \phi_1(k-1)$. Observe que para referências que se tornam constantes $\phi_1(k) = \phi_2(k) = 0$ e, portanto, existe uma singularidade na compensação. Dessa forma, em modelos como o mencionado, a compensação precisaria ser desligada para referências constantes.

Os autores utilizaram a técnica proposta para compensar a histerese em um sistema eletrônico. Os modelos utilizados não apresentaram a singularidade, visto que $\phi_1(k)$ e $\phi_2(k)$ não aparecem multiplicando a entrada $u(k-1)$ em qualquer termo do modelo. O compensador foi capaz de linearizar essa planta, sendo integrado a um controlador PID (Proporcional Integral Derivativo) que foi ajustado por tentativa e erro. Os resultados sem compensação apresentaram atraso e erro considerável em estado estacionário. Isso não ocorreu para o sistema compensado, em que resultados relevantes a nível de rastreamento foram obtidos, inclusive para referências que não eram puramente senoidais.

- **ABREU et al. (2020)**

Alguns aspectos sobre a identificação caixa-cinza proposta por [ABREU et al. \(2020\)](#) foram discutidas na Subseção 2.3.2. Esse mesmo trabalho apresentou duas estratégias de compensação. A singularidade evidenciada no artigo anterior não ocorre em ([ABREU et al., 2020](#)) devido às restrições (i) e (iii) que, ao serem impostas, impedem a existência da divisão pela velocidade da entrada na lei de compensação. Na primeira estratégia, além das restrições (i), (ii) e (iii), impõe-se que os regressores envolvendo $u(k-\tau_d)$ e $\phi_1(k-\tau_d)$ sejam lineares e que $n_u > \tau_d$. Isso é feito para que, ao se aplicar o deslocamento $k \leftarrow k + \tau_d$, torne-se possível isolar a entrada de compensação, sem que termos dependentes de $m(k)$ apareçam na lei compensatória. Tal fato evita a necessidade de simplificações como $\phi_1(k) \approx \phi_1(k-1)$.

A segunda estratégia consiste em obter um modelo inverso, isto é, a entrada do modelo é a saída do sistema $y(k)$, sendo o objetivo prever a entrada do sistema, $u(k)$. Note que esse tipo de estratégia é interessante, visto que a lei de compensação é

obtida diretamente dos dados a menos de algumas manipulações algébricas necessárias por questões de causalidade [ABREU et al. \(2020\)](#). Para que essa técnica funcione adequadamente, é necessário que a saída medida seja filtrada, visto que o modelo inverso é descrito em termos de regressores sensíveis ao ruído: $\check{\phi}_1(k) = y(k) - y(k-1)$, $\check{\phi}_2(k) = \text{sign}[\check{\phi}_1(k)]$. Dessa forma, o método necessita de técnicas prévias de filtragem que alterem pouco a dinâmica dos dados. Além disso, existe a necessidade de uma pequena manipulação algébrica por questões de causalidade no compensador.

Os autores aplicaram as duas técnicas mencionadas em dois exemplos: um modelo BW e uma válvula pneumática que apresenta histerese. Nos dois casos, os sistemas compensados apresentaram resultados consideravelmente superiores ao sistema não compensado. Para o exemplo experimental, a primeira estratégia forneceu uma redução de erro de aproximadamente 3 vezes e, a segunda, 6 vezes, quando comparadas ao caso não compensado. A segunda abordagem também apresentou um esforço de compensação mais suave, devido ao fato de seu compensador ser alimentado somente por sinais suaves: a referência, velocidade da referência e pelo sinal dessa velocidade. O presente trabalho visa prover alternativas às estratégias citadas. Assim, no Capítulo 4, apresenta-se uma forma de se obter a compensação para estruturas menos restritas do que as apontadas nos artigos previamente mencionados. No Capítulo 6, os resultados da estratégia proposta neste trabalho são comparados com os compensadores de [ABREU et al. \(2020\)](#). Devido à similaridade da primeira estratégia proposta em tal artigo com a técnica de [LACERDA JUNIOR et al. \(2019\)](#), não são realizadas comparações com este último.

2.6 Considerações Finais

Este capítulo apresentou uma revisão bibliográfica sobre os principais aspectos que cobrem a modelagem e a compensação de sistemas dinâmicos não lineares que são de interesse direto a este trabalho. Um olhar especial foi direcionado para sistemas histeréticos, uma não linearidade severa que atrai considerável atenção no contexto de controle. Foram apresentadas as etapas envolvidas no trabalho de identificação do sistema, além do modelo BW que terá um importante papel nos capítulos seguintes. Também foram apresentados conceitos básicos envolvendo modelos NARX, identificação caixa-cinza, e estratégias para a seleção de estruturas, envolvendo técnicas como ERR e critério AIC. Por fim, foram apresentados trabalhos relevantes no contexto de sistemas de controle não lineares, tipicamente focados puramente em compensadores ou compensadores cascadeados com realimentação. Nos trabalhos apresentados, o foco é a solução do problema de rastreamento, sendo que a compensação é uma estratégia fundamental nesse contexto. Por outro lado, o controle realimentado é responsável pelo refinamento dos resultados ou pela estabilização do sistema.

Compensação de Histerese usando Modelos Bouc-Wen

O modelo de Bouc-Wen (BW) pode ser adaptado para descrever efeitos não lineares apresentados por dispositivos de posicionamento com histerese. [RAKOTONDRABE \(2011\)](#) utilizou uma versão desse modelo para compensar a histerese presente em uma viga piezoelétrica (PZT). Embora a estrutura do modelo BW seja conhecida, em problemas práticos, os parâmetros devem ser estimados a partir de dados, o que resulta em um problema de otimização não convexo. Esse autor utilizou um método de filtragem não linear para estimar os parâmetros do modelo, restringindo tais parâmetros a serem estritamente positivos. De posse desses parâmetros, é possível realizar a inversão da equação de saída e, assim, calcular iterativamente uma entrada que vise aproximar a saída do sistema de uma referência previamente definida. Neste capítulo, apresenta-se o método de compensação utilizado por ([RAKOTONDRABE, 2011](#)), em que os parâmetros do modelo são obtidos via um algoritmo evolutivo. Tal algoritmo permitiu a adição de um parâmetro ao modelo e um relaxamento às restrições anteriormente impostas, de modo a gerar modelos modificados. A metodologia e os resultados deste capítulo estão publicados em ([TAVARES et al., 2019](#)).

3.1 Compensação de Histerese

[RAKOTONDRABE \(2011\)](#) realizou a compensação de histerese para um atuador de nanoposicionamento. Esse atuador é uma viga em consola composta de uma camada de material PZT e uma camada passiva de níquel. Ao ser excitada por uma tensão elétrica, a camada PZT é capaz de se expandir ou de se contrair, enquanto a camada passiva não sofre alterações. Assim, como ambas estão coladas, ocorre uma deflexão em relação ao estado de tensão nula como mostrado na Figura 3.1. Nessa figura, tem-se uma representação dessa viga em consola para fins didáticos.

[RAKOTONDRABE \(2011\)](#) considerou a Eq. 2.5 com $n = 1$ juntamente com uma equação de saída para modelar o comportamento histerético da viga:

$$\dot{h}(t) = \alpha_{bw}\dot{u}(t) - \beta_{bw}|\dot{u}(t)|h(t) - \gamma_{bw}\dot{u}(t)|h(t)|, \quad (3.1)$$

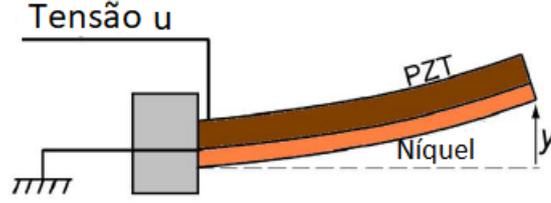


Figura 3.1: Representação esquemática da viga PZT - adaptado de (RAKOTONDRABE, 2011).

$$y(t) = v_y u(t) - h(t), \quad (3.2)$$

sendo $u(t)$, a tensão aplicada à camada PZT, $h(t)$, uma variável interna capaz de modelar os laços de histerese e $y(t)$, a saída do modelo que corresponde à deflexão unidimensional da viga. Tal deflexão é medida em relação à posição referencial que é definida para o estado de tensão nula. Dessa forma, o modelo dado por (3.1) e (3.2) é referido neste capítulo como modelo clássico, denotado por \mathcal{M}_{bw} . Os seguintes parâmetros do modelo foram obtidos a partir de dados experimentais: $k = 1,6\mu\text{m}$, $\alpha = 0,9\mu\text{mV}^{-1}$ e $\beta = \gamma = 0,008\text{V}^{-1}$. A estimação dos mesmos se deu por meio de um método de filtragem não linear que os restringia a serem estritamente positivos. Para esse sistema, a amplitude mínima da tensão a ser aplicada é de -80 V e a máxima é de 80 V, sendo que as frequências de excitação dessa entrada devem variar de 0,01 Hz a 5 Hz. Nessas condições, o modelo foi capaz representar o laço de histerese.

RAKOTONDRABE (2011) propôs uma metodologia para compensação da histerese presente nesse sistema. Tal metodologia não se restringe ao caso particular da viga, podendo ser generalizada como se segue. Dado um modelo \mathcal{M}_{bw} (3.1 e 3.2) do sistema \mathcal{S} , é possível obter um compensador via inversão, \mathcal{M}_{bw}^{-1} , conforme Fig. 2.2, em que o compensador $\mathcal{M}_r = \mathcal{M}_{bw}^{-1}$. O modelo inverso é utilizado para calcular a entrada de compensação $m(t)$ a ser aplicada ao sistema \mathcal{S} . O objetivo é que essa entrada seja projetada de tal forma que a saída do sistema compensado, $y_c(t)$, se aproxime da referência, $r(t)$.

A Eq. 3.2 pode ser reescrita para o sistema compensado como: $y_c(t) = v_y m(t) - h(t)$. Como se objetiva que $y_c(t)$ siga a referência $r(t)$, essa substituição é realizada para obter (RAKOTONDRABE, 2011):

$$m = \frac{r + h}{v_y}, \quad (3.3)$$

em que v_y é estritamente positivo devido às restrições impostas pelo método e h é obtido de (3.1). Assim, a Eq. (3.3) é calculada a cada iteração para gerar a ação de controle u_c . Com essa metodologia, RAKOTONDRABE (2011) foi capaz de compensar a histerese, resolvendo o problema de equalização para esse sistema.

3.2 Identificação de Modelos BW

A utilização de algoritmos evolutivos no processo de identificação de sistemas permite a adição de parâmetros com facilidade aos modelos que serão identificados. Dessa forma, foi adicionado um parâmetro à Eq. de saída (3.2):

$$\hat{y}(t) = \hat{\nu}_y u(t) + \hat{\mu}_y \hat{h}(t), \quad (3.4)$$

em que o parâmetro adicional, $\hat{\mu}_y$, pondera a participação da variável de estado que modela a histerese no cálculo da saída. Utiliza-se o símbolo “chapéu” em (3.4) para reforçar o fato de que os parâmetros e variáveis se referem ao modelo modificado e são estimados e calculados conforme o procedimento proposto neste capítulo. A modificação do modelo é realizada visando torná-lo mais maleável, além disso, devido à praticidade de relaxar as restrições não se faz nenhuma exigência quanto ao sinal dos parâmetros, exceto $\hat{\nu}_y \neq 0$. Tal restrição deve ser imposta para viabilizar a inversão na qual o parâmetro $\hat{\nu}_y$ aparece no denominador, similarmente à Eq. 3.3. A Seção 3.3 mostra o impacto dessas modificações nos resultados em relação ao modelo clássico, sendo que os modelos são comparados em dois exemplos: o primeiro consiste em uma simulação numérica de um modelo do tipo Prandtl-Ishlinskii, enquanto, o segundo se refere a uma válvula pneumática com comportamento histerético.

Nesse sentido, torna-se necessário estimar os parâmetros do modelo modificado (Eq. 3.1 e 3.4) e validar esses modelos. Como tal estimação é realizada a partir de dados, é fundamental ter um sinal de excitação capaz de prover um conjunto de dados que excursionsse vários pontos de operação e excite o sistema em frequências de interesse. Isso é realizado conforme descrito na sequência.

3.2.1 Sinal de Excitação

O procedimento aqui apresentado é utilizado para obtenção de sinais de excitação que se mostraram adequados para a identificação dos modelos apresentados neste capítulo e nos capítulos seguintes. Quando essas recomendações não foram levadas em consideração, os modelos identificados se especializaram em frequências ou pontos de operação específicos, não generalizando o comportamento dos sistemas.

A estratégia proposta baseia-se na necessidade de excitar o sistema em uma larga faixa de frequências, além de permitir que o mesmo excursionsse vários pontos de operação (SCHOUKENS e LJUNG, 2019). Assim, o procedimento se inicia com a definição de um conjunto de frequências $f_i \in \mathbb{R}^+$, $i \in \{1, \dots, n\}$, que serão preservadas no sinal de excitação. Para sistemas com histerese, a necessidade de se preservar esse tipo de informação é crítica, visto que o fenômeno é dominante em baixas frequências (IKHOUANE e RODELLAR, 2007). Para cada frequência f_i , projeta-se um filtro passa baixas do tipo *Butterworth* de quinta ordem, $\mathcal{J}_i(q)$, com frequência de corte f_i . Tais filtros são então aplicados a sinais puramente aleatórios, $e_i(k) = \mathcal{N}(0, 1)$, $k \in \{1, 2, \dots, N_i\}$ em que $\mathcal{N}(0, 1)$ é

uma distribuição normal de média nula e desvio padrão unitário. Dessa forma, cada sinal $e_i(k)$ é condicionado a excursionar a faixa $[-1,1]$ como se segue:

$$e_i(k) = 2 \left(\frac{e_i(k) - \min[e_i(k)]}{\max[e_i(k)] - \min[e_i(k)]} \right) - 1, \quad (3.5)$$

sendo que o número de amostras N_i é especificado de modo que o sinal $u(k)$ tenha N amostras, $N=N_1+N_2+\dots+N_n$.

Para assegurar que $u(k)$ possa excursionar uma variada faixa de operação, são definidos v pontos de operação, $o_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, v\}$. Além disso, define-se um amplitude G_j para cada ponto de operação o_j , permitindo variações em torno de cada ponto de operação. O número de amostras N_i deve ser definido como múltiplo do número de pontos de operação, v e, assim, o sinal $s_i(k)$ que fará parte de $u(k)$ pode ser produzido:

$$s_i(k) = \begin{cases} \alpha_{i,1} \mathcal{J}_i(q) e_i(k) + o_1, & k=1, 2, \dots, \frac{N_i}{v} \\ \alpha_{i,2} \mathcal{J}_i(q) e_i(k) + o_2, & k = \frac{N_i}{v} + 1, \frac{2N_i}{v} + 2, \dots, 2 \frac{N_i}{v} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{i,v} \mathcal{J}_i(q) e_i(k) + o_v, & k = (v-1) \frac{N_i}{v} + 1, (v-1) \frac{N_i}{v} + 2, \dots, N_i. \end{cases} \quad (3.6)$$

As constantes $\alpha_{i,j}$ são definidas para limitar a excursão em torno de cada ponto de operação, de modo que para cada o_j , $\alpha_{i,j} = G_j / \max[e_i(k_{i,j})]$ com $k_{i,j} = (j-1)(N_i/v) + 1, (j-1)(N_i/v) + 2, \dots, j(N_i/v)$. Ao aplicar (3.6) para $i = 1, 2, \dots, n$, os sinais s_1, s_2, \dots, s_n são obtidos e a entrada $u(k)$ consiste na concatenação dos mesmos:

$$u(k) = [s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_n]. \quad (3.7)$$

Por fim, selecionando a maior frequência f_i , o filtro passa baixas relacionado a tal frequência é utilizado para eliminar as possíveis altas frequências decorrentes do processo de concatenação. A seguir, apresenta-se um algoritmo evolutivo projetado para estimar parâmetros de modelos com estruturas previamente especificadas.

3.2.2 Estimação de Parâmetros via Abordagem Evolutiva

Recomenda-se a leitura da Seção 2.2 para um melhor entendimento do método e da notação que são aqui apresentados. O algoritmo evolutivo aqui proposto é formulado de maneira geral cujo objetivo é estimar os parâmetros de um modelo com estrutura previamente conhecida. As adaptações específicas para o modelo BW são apresentadas na sequência.

Inicialmente, considere que dados amostrados $Z^N = \{u(k), y_s(k)\}_{k=1}^N$ foram obtidos de um determinado sistema, conforme procedimento descrito na Subseção 3.2.1. Deseja-

se obter os parâmetros de um modelo com estrutura conhecida e n_v parâmetros: $[\lambda_1, \dots, \lambda_{n_v}]$. O i -ésimo indivíduo é codificado com n_v genes e cada gene representa um parâmetro do modelo:

$$\vec{p}_i = [\lambda_1^i \quad \lambda_2^i \quad \dots \quad \lambda_{n_v}^i]^T. \quad (3.8)$$

Cada indivíduo/modelo é um elemento do espaço genotípico cuja adaptação aos dados é medida via índice MAE (2.7). Portanto, cada modelo é simulado, obtendo-se a saída do modelo $\hat{y}_i(t)$ que é discretizada, gerando $\hat{y}_i(k)$. Ao utilizar o índice avaliado para o i -ésimo modelo, MAE_i , tem-se uma medida de adaptação aos dados. Esse processo é exemplificado na Fig. 3.2.

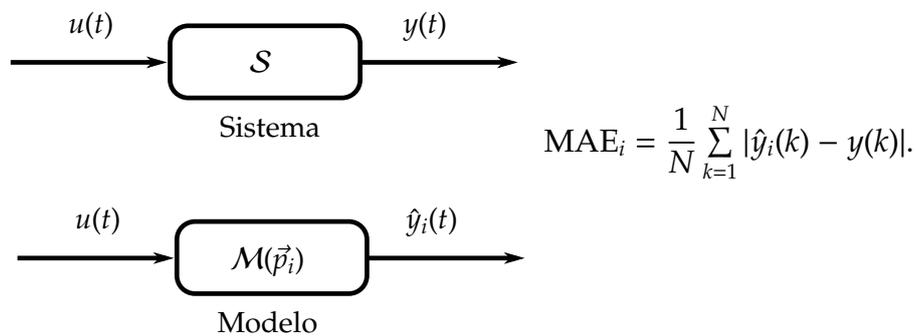


Figura 3.2: Esquema de determinação da função de adaptação.

O espaço de busca é limitado por valores mínimos e máximos para cada gene, ou seja: $\vec{\ell}_{\min} \leq \vec{p}_i \leq \vec{\ell}_{\max}$. Como o algoritmo realiza duas etapas de busca, uma etapa inicial de busca global e uma etapa final de busca local, esses limites podem ser inicialmente relaxados. A busca global é baseada em uma estratégia de nichos, de modo que esses nichos dividem o espaço de busca em paralelepípedos de n_v dimensões. Portanto, torna-se necessário definir o número de nichos N_{nich} . Cada nicho j tem um centro \vec{c}_j e cada indivíduo \vec{p}_i é rotulado a um único nicho j . Essa rotulação é definida de modo que um indivíduo é associado ao nicho cujo centro possui menor distância euclidiana em relação à codificação do indivíduo no espaço genotípico: $\min_j \|\vec{c}_j - \vec{p}_i\|_2$.

A preservação de nichos é uma estratégia que visa gerar maior variabilidade ao longo das gerações, excursionando de forma efetiva a região de busca. Gera-se a população inicial de cada nicho que compõe a população de N_{pop} indivíduos na geração inicial e, ao longo da primeira metade das gerações, o algoritmo faz uma busca global. Define-se $\vec{\sigma}$, P_c e P_m , de modo que $P_c < P_m$ e $P_m > 50\%$. Essas restrições têm por objetivo priorizar a mutação que é mais efetiva na busca global. As operações de seleção via torneio, cruzamento aritmético e mutação são realizadas dentro dos nichos, conforme apresentado na Seção 2.2. O parâmetro α do cruzamento aritmético (2.8) é escolhido aleatoriamente e todos os novos indivíduos são avaliados pelo índice MAE (2.7). Assim, aqueles indivíduos provenientes da mutação são novamente rotulados. Não existe a necessidade de rotulação dos indivíduos provenientes de cruzamento, visto que o cruzamento aritmético é uma operação convexa que mantém o filho gerado dentro do

nicho dos pais. Por outro lado, a mutação é uma perturbação de direção e amplitude aleatórias, não garantindo a fixação do novo indivíduo no nicho do cromossomo que o gerou. Ao fim de cada geração, o indivíduo mais adaptado de cada nicho é preservado. Os demais indivíduos sobreviventes são escolhidos aleatoriamente com probabilidade uniforme, de forma a se manter o tamanho dos nichos. Esse processo se repete até que se alcance a segunda metade de gerações.

A partir de então, inicia-se uma busca local. Para isso, apenas o nicho em que se localiza o indivíduo mais adaptado é completamente preservado e, para os outros nichos, apenas o indivíduo mais adaptado sobrevive. Faz-se a inversão de prioridade: $P_c > P_m$ e $P_c > 50\%$, de forma a priorizar o cruzamento, mais efetivo na busca local. Para completar a população, são gerados novos indivíduos via mutação dos sobreviventes. Nessa busca, a rotulação por nichos é desconsiderada e as operações de cruzamento e mutação são feitas exatamente como mencionado, mas considerando toda a população. A preservação torna-se mais seletiva: metade dos indivíduos mais adaptados sobrevive e a outra metade é escolhida aleatoriamente sobre os restantes em que cada um desses tem a mesma probabilidade de sobrevivência. O algoritmo é finalizado quando o número de gerações ultrapassa N_{ger} .

3.2.3 Validação dos Modelos

Visando obter realizações diferentes para identificação e validação, o processo descrito na Seção 3.2.1 é realizado duas vezes. Assim, essas entradas são aplicadas ao sistema para coleta dos dados de identificação e validação. Nos exemplos simulados deste trabalho, um ruído gaussiano é adicionado diretamente aos dados de saída de identificação, de modo que o $\sigma_r/\sigma_s = 5\%$, em que σ_r é o desvio padrão do ruído, enquanto σ_s é o desvio padrão do sinal de saída de identificação. Visando apresentar a qualidade dos modelos obtidos, nos exemplos simulados deste trabalho os gráficos de validação são produzidos via simulação livre e livres de ruído. Para complementar os dados de validação, também são coletados dados decorrentes da aplicação de senoides com diferentes amplitudes e frequências ao sistema.

Pelo fato de dar uma interpretação em relação à faixa de operação, a avaliação do desempenho dos modelos e das estratégias de compensação propostas são avaliadas, para sinais senoidais, utilizando o índice erro absoluto percentual médio (MAPE, do inglês *Mean Absolute Percentage Error*) calculado como:

$$\text{MAPE} = \frac{\sum_{k=1}^N |y(k) - \hat{y}(k)|}{N|\max(\mathbf{y}) - \min(\mathbf{y})|} \quad (3.9)$$

3.2.4 Aplicação da Estratégia para Modelo BW

Para obtenção do sinal de excitação procedeu-se conforme as recomendações da Subseção 3.2.1, definindo as frequências de excitação, o número de amostras e os

pontos de operação. Para cada exemplo, utilizou-se meta parâmetros adequados à formação desse sinal, como explicado mais adiante. O intervalo de amostragem dos dados é igual ao intervalo de integração do modelo BW, ou seja, $T_s = \delta t = 0,01$ s.

Os parâmetros dos modelos BW foram estimados via algoritmo evolutivo descrito na Subseção 3.2.2. O algoritmo pode ser utilizado para a estimação tanto do modelo clássico quanto do modelo modificado. Tais modelos diferem entre si apenas na forma como os limites do espaço de busca devem ser impostos e na representação do cromossomo que deve possuir um gene a mais no modelo modificado. O i -ésimo indivíduo do modelo clássico é codificado com os parâmetros das equações (3.1) e (3.2) colocados na forma cromossômica (3.8):

$$\vec{q}_i = [\alpha_{bw}^i \quad \beta_{bw}^i \quad \gamma_{bw}^i \quad v_y^i]^T, \quad (3.10)$$

enquanto o i -ésimo indivíduo do modelo modificado é definido de forma análoga e se refere às equações (3.1) e (3.4):

$$\vec{p}_i = [\alpha_{bw}^i \quad \beta_{bw}^i \quad \gamma_{bw}^i \quad \hat{v}_y^i \quad \hat{\mu}_y^i]^T, \quad (3.11)$$

De posse dessas codificações, o algoritmo descrito na Subseção 3.2.2 é utilizado para estimação desses parâmetros. Por fim, os modelos são validados seguindo as recomendações da Subseção 3.2.3.

3.2.5 Compensação de Histerese para o Modelo Modificado

A compensação desse modelo é análoga à compensação realizada para o modelo clássico (3.3). A única diferença é a existência do parâmetro adicional, ou seja,

$$\hat{m} = \frac{r - \hat{\mu}_y \hat{h}}{\hat{v}_y}, \hat{v}_y \neq 0. \quad (3.12)$$

O símbolo “chapéu” é novamente utilizado com o intuito de reforçar o fato que os parâmetros e variáveis se referem ao modelo modificado. Assim, determina-se a ação de controle \hat{m} a ser aplicada, uma vez que todas as variáveis do lado direito de (3.12) são conhecidas.

3.3 Resultados

Nesta seção os parâmetros de modelos BW são estimados via abordagem evolutiva apresentada na Subseção 3.2.2. Estimam-se os parâmetros tanto do modelo clássico como do modelo modificado para dois exemplos: um simulado e outro experimental.

Os dados de estimação e de validação são realizações diferentes, mas ambos foram gerados conforme recomendações da Subseção 3.2.3. Visando validar o modelo em diversos regimes dinâmicos e pontos de operação, outros conjuntos de validação são gerados a partir de entradas senoidais de diversas frequência e amplitudes.

Como os modelos incluem uma equação diferencial (3.1), utiliza-se o método Runge-Kutta de 4ª ordem com passo de integração $\delta t = 0,01$ s. Conforme mencionado na Subseção 3.2.3, o índice MAPE (3.9) é o critério utilizado para quantificação dos resultados.

Os meta parâmetros do algoritmo evolutivo, comuns à identificação em ambos os exemplos, são: $N_{\text{ger}} = 100$, $P_c^g = 50\%$, $P_c^l = 100\%$, $P_m^g = 90\%$, $P_m^l = 10\%$, $\vec{\sigma}^g = 20\% \times (\vec{\ell}_{\text{max}} - \vec{\ell}_{\text{min}})$ e $\vec{\sigma}^l = 10\% \times \vec{\sigma}^g$, em que l e g denotam valores para a busca local e a global, respectivamente. O número de nichos usado foi $N_{\text{nich}} = 2^{n_v}$ com 10 indivíduos em cada nicho, $N_{\text{pop}} = 10N_{\text{nich}}$. Os seguintes limites foram definidos: $\vec{\ell}_{\text{max}} = [10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10]^T$ e $\vec{\ell}_{\text{min}} = -\vec{\ell}_{\text{max}}$.

Para estimar os parâmetros do modelo clássico (3.1) e (3.2) utiliza-se o cromossomo (3.10) e o espaço de busca limitado a valores de parâmetros que sejam estritamente positivos (RAKOTONDRABE, 2011): $\vec{\ell}_{\text{max}} = [10 \ 10 \ 10 \ 10]^T$ e $\vec{\ell}_{\text{min}} = 10^{-5} \times [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$.

Ao final das gerações, objetiva-se encontrar os cromossomos ótimos \vec{p}_* e \vec{q}_* que correspondem aos parâmetros do modelo modificado e do clássico, respectivamente. Nas subseções seguintes os modelos estimados são comparados em termos de seu comportamento dinâmico. Por fim, esses modelos são utilizados no projeto de compensação, de modo a mitigar os efeitos da histerese presente em ambos os sistemas.

3.3.1 Um Exemplo Simulado – Modelo de Prandtl-Ishlinskii

Um modelo de Prandtl-Ishlinskii (PI) é apresentado em (EDARDAR et al., 2014) para representar um atuador PZT de nano posicionamento. Tal modelo é aqui utilizado como sistema \mathcal{S} , sendo composto por 5 operadores com limiares expressos em $\vec{r} = [0 \ 0,63 \ 1,27 \ 2,54 \ 4,45]^T$ e pesos em $\vec{w} = [5,88 \ 1,58 \ 0,47 \ 0,98 \ 0,4]^T$.

Foi gerado um sinal de entrada de estimação conforme (3.6) e (3.7) com $N = 6000$, $N_1 = 4800$, $u_1 = 5$ V, $G_1 = 4$ V, $N_2 = 1200$, $u_2 = 10$ V e $G_2 = 3$ V. Um segundo sinal de entrada foi gerado de forma similar para a validação dos modelos (Fig. 3.3). Conforme pode ser observado na Figura 3.3(a), os dados de saída se localizam em torno de $50 \mu\text{m}$ e $100 \mu\text{m}$. A escolha de k_0 foi realizada de tal modo que o número de oscilações em torno de cada ponto de operação seja próximo.

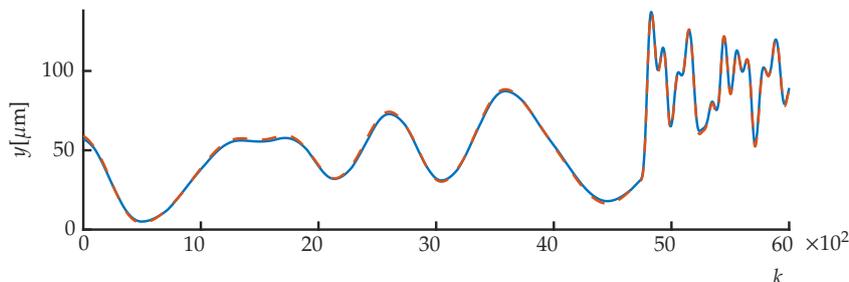


Figura 3.3: Simulação livre em dados de validação para sistema PI na ausência de ruído, os dados são mostrados sem ruído. A linha contínua em azul (—) apresenta os dados desse sistema, enquanto a linha tracejada em vermelho (- -) apresenta os dados do modelo com parâmetros (3.13).

Após coletar os dados de identificação, aplica-se a estratégia evolutiva para obter os parâmetros do modelo modificado. Os parâmetros são apresentados conforme (3.11):

$$\vec{p}_* = [0,65 \quad 0,21 \quad 0,66 \quad 9,28 \quad 3,98]^T. \quad (3.13)$$

O item A_1 da Tabela 3.1 mostra o MAPE desse modelo para entradas senoidais. Para comparar as modificações, obtêm-se os parâmetros do modelo clássico (3.1) e (3.2):

$$\vec{q}_* = [1,97 \quad 0,24 \quad 0,022 \quad 9,29]^T, \quad (3.14)$$

de modo que \vec{q}_* contém os parâmetros do modelo clássico, codificado como em (3.10). Os resultados de MAPE para o modelo clássico são indicados no item B_1 da Tabela 3.1. O modelo modificado proposto neste trabalho apresentou resultados superiores (ver item A_1), de modo que os erros percentuais médio e máximo do modelo clássico em relação ao proposto é de 48% e 135%, respectivamente.

Tabela 3.1: MAPE expresso em % dos modelos A_1 e B_1 para entradas senoidais. O modelo A_1 é dado por (3.1) e (3.4) com parâmetros (3.13). O modelo B_1 , por (3.1) e (3.2) e parâmetros (3.14).

Modelos	f [Hz]	Amplitude [V]			
		1	5	10	50
A_1 : (3.13)	0,01	3,54	0,47	0,39	0,13
	0,1	3,50	0,52	0,47	0,27
	0,5	3,41	0,93	1,03	1,01
	1	3,46	1,59	1,82	1,94
B_1 : (3.14)	0,01	5,11	0,62	0,70	0,21
	0,1	5,08	0,61	0,76	0,36
	0,5	5,02	0,99	1,26	1,09
	1	5,09	1,70	2,06	2,04

Para a compensação via modelo inverso obtido dos parâmetros (3.13), apresenta-se a comparação da saída do sistema compensado com a referência senoidal de 50 μm e 0,1 Hz na Fig. 3.4.

Utilizando o compensador, a relação entre a saída e a referência são praticamente lineares (Fig. 3.4-b), fato que não ocorre na ausência de compensação. Além disso, o item A_2 da Tabela 3.2 apresenta os valores de MAPE do sistema compensado via modelo modificado para referências senoidais de diversas frequências e amplitudes. Por outro lado, o item B_2 apresenta os valores de MAPE da compensação para o modelo clássico. Por meio da Tabela 3.2, fica claro que o compensador B_2 é inferior ao compensador A_2 . O erro médio do modelo clássico em relação ao modificado é da ordem de 5 vezes, enquanto o erro máximo da ordem de 30 vezes. O desempenho superior da compensação realizada com o modelo A_1 (Tabela 3.1) indica que, como esperado, o procedimento é sensível à qualidade do modelo.

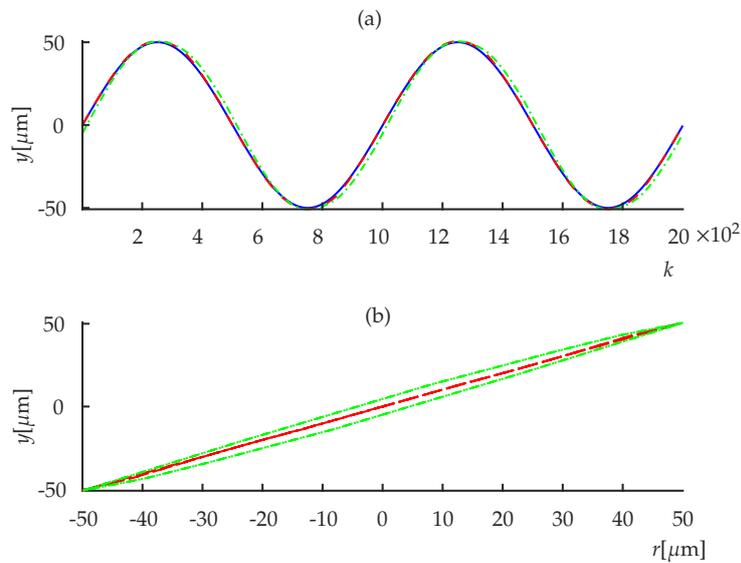


Figura 3.4: Saída do sistema PI com e sem compensação via modelo (3.13). A referência é apresentada pela linha contínua azul (—), a saída do sistema compensado pela linha tracejada em vermelho (- -) e os traços e pontos em verde (---) referem-se à saída sem compensação. (a) evolução temporal e (b) laços entre a referência e essas saídas.

3.3.2 Aplicação a uma Válvula Pneumática

Este exemplo considera uma válvula pneumática, atuador de uma planta piloto de nível. Tal válvula é alimentada por tensão elétrica e opera ao deslocar um êmbolo regulador da passagem de fluxo. Assim, a entrada do sistema é essa tensão, enquanto a saída é a posição do êmbolo. A Fig. 3.5 apresenta um esquema do experimento realizado com essa válvula. Com o auxílio do *software* MATLAB® instalado em um microcomputador, um sinal discreto da entrada de compensação é determinado. Esse sinal é codificado digitalmente e enviado para uma placa de aquisição de dados que faz a conversão Digital/Analógica (DA). Com um circuito auxiliar, tal sinal de tensão é convertido em um sinal de corrente que é recebido pela planta piloto. Na planta piloto,

Tabela 3.2: MAPE expresso em % para as saídas dos sistemas compensados A_2 e B_2 quando as referências são senoidais. O modelo A_2 é dado por (3.3) com parâmetros (3.14), enquanto o modelo B_2 por (3.12) e parâmetros (3.13).

Compensadores	f [Hz]	Amplitude [V]			
		20	50	100	400
A_2 : (3.13)	0,01	0,94	0,46	0,36	0,16
	0,1	0,96	0,49	0,38	0,16
	0,5	1,14	0,68	0,49	0,19
	1	1,48	0,92	0,63	0,23
B_2 : (3.14)	0,01	5,11	0,61	0,69	0,21
	0,1	5,08	0,61	0,75	0,35
	0,5	5,03	0,98	1,26	1,09
	1	5,09	1,69	2,04	2,03

ocorre a conversão do sinal de corrente em um sinal de pressão que é enviado para a válvula. Ao ser excitada pelo sinal de pressão, ocorre um deslocamento na válvula que é convertido em um sinal de tensão por meio de um potenciômetro. Tal sinal de tensão chega à placa de aquisição e é convertido para um sinal digital que é lido pelo microcomputador. Note que, embora exista uma infra-estrutura para o controle realimentado, neste trabalho, utiliza-se essa planta apenas para compensação. Assim, o sinal de medição é utilizado apenas para fins de registro e o processo ocorre em malha aberta.

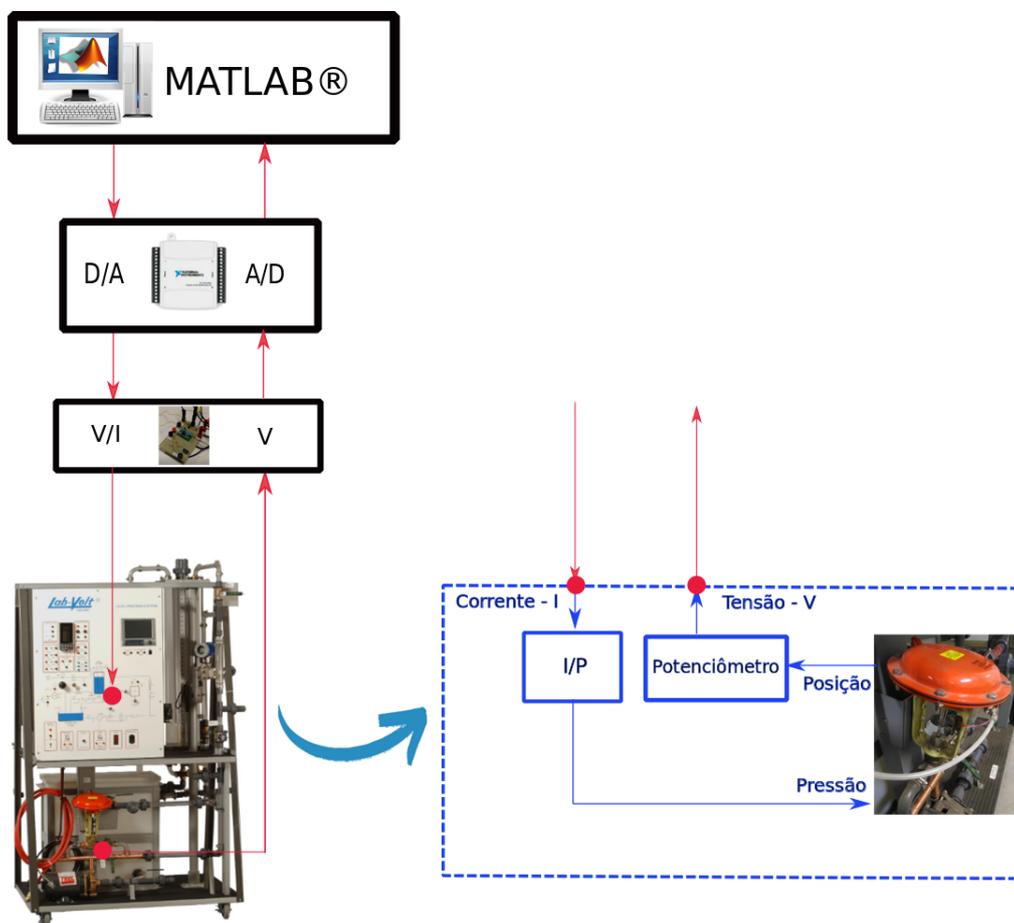


Figura 3.5: Esquema ilustrativo do experimento envolvendo a válvula pneumática realizado neste trabalho.

Nos resultados desta subseção, tanto a entrada quanto a saída são apresentadas variando dentre os limites de 0% a 100%. A entrada de identificação é gerada a partir da aplicação dos parâmetros $N = 6000$, $u_1 = 50\%$, $G_1 = 45\%$, $N_1 = 6000$ às Equações 3.6 e 3.7, de modo que a filtragem só ocorre para a frequência de 0,01 Hz. Ao aplicar a

estratégia evolutiva de maneira análoga à subseção anterior, obtém-se:

$$\vec{p}_* = [-3,08 \quad -3,06 \quad -1,83 \quad 0,04 \quad 0,16]^T, \quad (3.15)$$

$$\vec{q}_* = [0,69 \quad 1,92 \quad 0,48 \quad 1,01]^T, \quad (3.16)$$

sendo \vec{p}_* os parâmetros dados na codificação (3.11) e \vec{q}_* na codificação (3.10). É importante ressaltar que, além da existência do parâmetro adicional, o algoritmo selecionou alguns parâmetros negativos para o modelo modificado (3.15), o que não pode ocorrer nos modelos clássicos. A seguir, mostra-se que esse conjunto de escolhas levaram a resultados superiores.

Na Fig. 3.6, tem-se a validação para o modelo modificado (3.15) quando aplicada uma senoide de frequência 0,01 Hz, média 50 % e amplitude 28 %. Observe que mesmo com a presença de ruído de medição, tal modelo se ajusta aos dados, sendo possível a representação do laço de histerese. Contudo, o modelo perde aderência nas regiões de máximos e mínimos da saída.

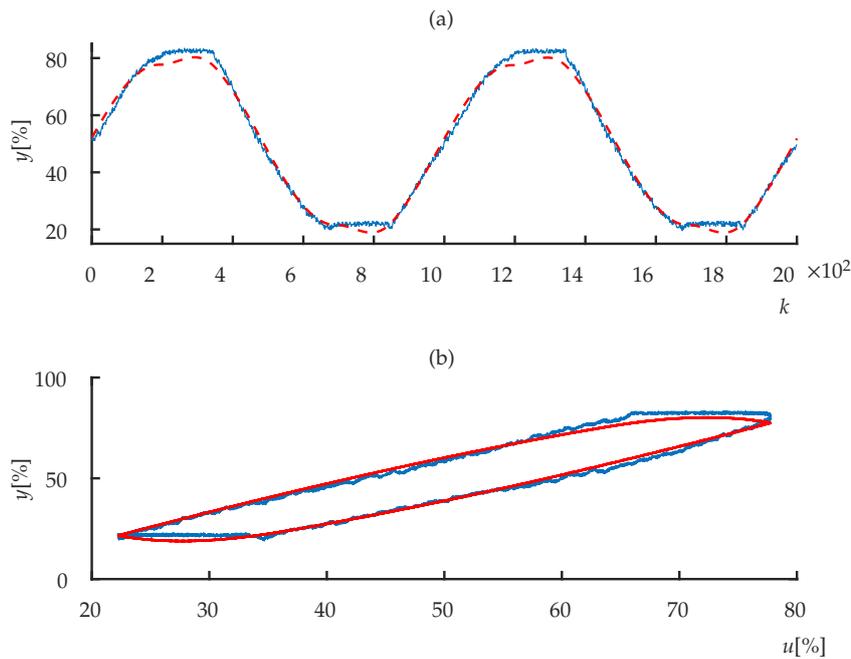


Figura 3.6: Simulação livre em dados de validação. A linha contínua em azul (—) apresenta os dados medidos da válvula, enquanto a linha tracejada em vermelho (---) mostra os dados do modelo com parâmetros (3.15). (a) evolução temporal e (b) o plano entrada \times saída.

A compensação é realizada para referências senoidais de média 50%, frequência 0,01 Hz e diversas amplitudes. A Fig. 3.7 apresenta \hat{m} (3.12) e m (3.3) para uma referência r senoidal de amplitude 30%. Essas entradas são calculadas via inversão dos modelos dados pelos parâmetros (3.15) e (3.16), respectivamente. Embora essas entradas de compensação apresentem semelhanças, existe uma diferença considerável nas regiões de picos, onde a entrada gerada via inversão do modelo modificado é menos

suave. As Figuras 3.8 e 3.9 apresentam o desempenho dos sistemas compensados para uma referência de amplitude 30%. A compensação é deteriorada na região de extremos da senoide devido ao fato de o modelo ser menos acurado nessa região, conforme pode ser visto na Fig. 3.6. Observe que a válvula compensada têm desempenho superior ao caso não compensado, independente da compensação usada. Contudo, ao se utilizar o modelo modificado de parâmetros (3.15), tem-se uma compensação mais efetiva, fato que se comprova na comparação dos laços presentes nas Figuras 3.8 e 3.9.

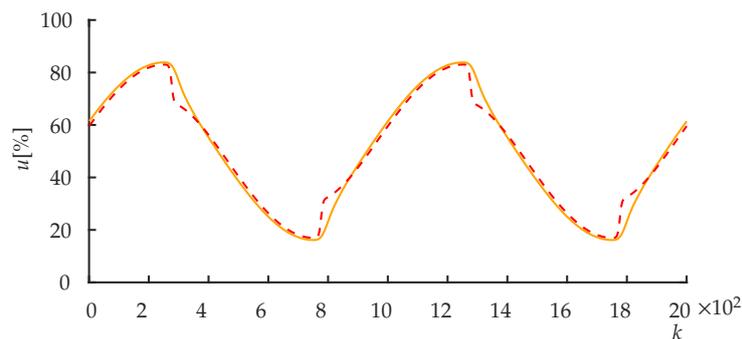


Figura 3.7: Entradas de compensação calculadas para a válvula quando o modelo inverso é alimentado por uma referência senoidal de média 50%, frequência 0,01 Hz e amplitude 30%. A linha tracejada em vermelho (- -) apresenta a entrada obtida dos parâmetros (3.15), enquanto a linha contínua em laranja (-) se refere aos parâmetros (3.16).

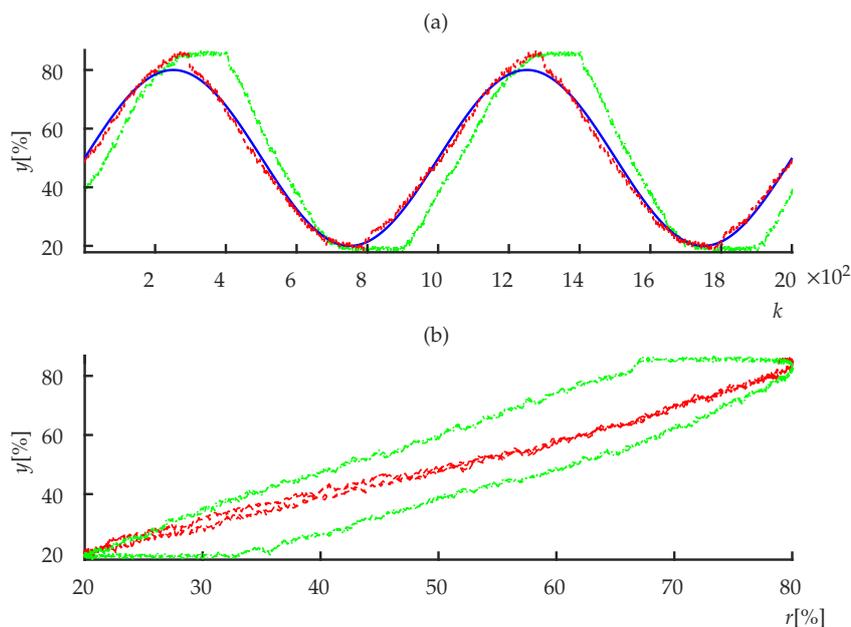


Figura 3.8: Desempenho da válvula sem compensação – traços e pontos em verde (- -) – e compensada via modelo com parâmetros (3.15) – linha tracejada em vermelho (- -). A referência é apresentada pela linha contínua azul (-). (a) evolução temporal; (b), os laços entre a referência e essas saídas.

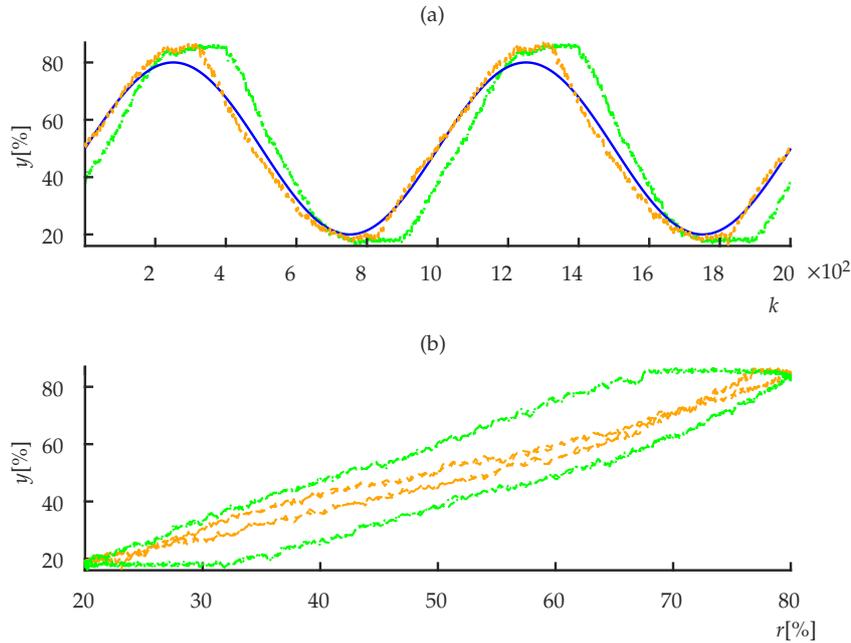


Figura 3.9: Desempenho da válvula sem compensação – traços e pontos em verde (---) – e compensada via modelo com parâmetros (3.16) – linha tracejada em laranja (- -). A referência é apresentada pela linha contínua azul (-). (a) evolução temporal; (b), os laços entre a referência e essas saídas.

Os resultados para testes realizados com referências de outras amplitudes estão na Tabela 3.3. Esses resultados também comprovam que o modelo modificado apresentou melhores resultados de compensação em todos os cenários avaliados. O modelo clássico apresentou um erro médio de 47% e máximo de 62% em relação ao modelo modificado.

Tabela 3.3: MAPE expresso em % para as saídas dos sistemas compensados A_3 e B_3 quando as referências são senoidais de 0,01 Hz. O modelo modificado A_3 tem parâmetros (3.15). O modelo clássico B_3 tem parâmetros (3.16).

Compensadores do modelo	Amplitude [%]		
	20	30	40
A_3 : (3.15)	3,20	2,39	2,35
B_3 : (3.16)	4,83	3,85	3,00

3.4 Considerações Finais

Este capítulo apresentou um algoritmo evolutivo que foi capaz de estimar os parâmetros de modelos BW para serem aplicados no contexto de compensação de histerese. De posse desse algoritmo, é possível relaxar as restrições quanto ao sinal dos parâmetros e, também, inserir um parâmetro adicional. Esse conjunto de alterações permitiu a obtenção de modelos modificados e tanto tais modelos quanto os clássicos foram capazes

de apresentar resultados superiores quando comparados ao sistema sem compensação. Contudo, os modelos modificados se mostraram consistentemente superiores aos modelos clássicos em todos os casos avaliados para a compensação de histerese em dois exemplos: um exemplo simulado e um sistema físico. Os resultados superiores dos modelos modificados eram esperados, visto que tais modelos apresentaram melhores resultados de validação, sendo, portanto, mais representativos.

Um problema relacionado a essa abordagem é que ela exige um alto custo computacional, que seria ainda mais elevado no caso de se modelar mais características do sistema, como por exemplo, aspectos dinâmicos. Além disso, tal abordagem é restrita a sistemas compatíveis com as características modeladas pelo BW, apresentando baixa generalidade. Por fim, é importante ressaltar que a variável histerética é definida em tempo contínuo de modo que esse processo requer a integração numérica iterativamente.

Nesse sentido, o próximo capítulo apresenta uma alternativa para a compensação de sistemas com histerese no contexto de modelos NARX polinomiais. Além de esses modelos serem capazes de representar uma enorme gama de comportamentos dinâmicos e estáticos, eles são tipicamente mais simples de serem obtidos e não requerem o processo de integração numérica para obtenção da entrada de compensação. Por outro lado, existem poucos trabalhos na literatura que abordam o projeto de compensadores do ponto de vista de modelos NARX. Os trabalhos que utilizam tais abordagens ([LACERDA JUNIOR et al., 2019](#); [ABREU et al., 2020](#)), partem de estruturas limitadas, de modo que seja possível explicitar a entrada de compensação. Dessa forma, o próximo capítulo apresenta contribuições importantes em uma metodologia que visa obter compensadores baseados em modelos NARX a partir de uma formulação geral.

Compensação de Não-Linearidades via Modelos NARX polinomiais

Este capítulo trata dos métodos desenvolvidos para o projeto de compensadores baseados em modelos NARX polinomiais. Primeiramente, apresenta-se a metodologia utilizada para obtenção dos modelos NARX na Seção 4.1. Em seguida, propõe-se a compensação no contexto estático (Seção 4.2) que introduz os conceitos utilizados nesta metodologia. A compensação no contexto dinâmico é proposta na Seção 4.3 e constitui-se como a principal contribuição desta dissertação. Por fim, a compensação dinâmica é adaptada para o contexto de sistemas histeréticos na Seção 4.4. Recomenda-se a leitura das Seções 2.3 e 2.4 que abordam as bases para a formulação das estratégias aqui apresentadas.

Portanto, o objetivo do capítulo é resolver o problema de compensação conforme formulado na Seção 2.4 (ver Fig. 2.2) sendo \mathcal{M} um modelo do tipo NARX. Assim, simplifica-se a notação $\mathcal{M}_{\text{NARX}}$ para \mathcal{M} , de modo que todos os modelos aqui apresentados são do tipo NARX polinomiais. No contexto de compensação, assume-se também que \mathcal{M} (2.9) já foi identificado seguindo as recomendações da Seção 4.1, sendo a equação para modelos desse tipo reapresentada a seguir:

$$\mathcal{M} : y(k) = f^{\ell}(y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-\tau_d), \dots, u(k-n_u)) + e(k).$$

A metodologia proposta neste capítulo e os resultados apresentados nos Capítulos 5 e 6 encontram-se em fase de publicação em (TAVARES et al., 2020). A seguir, tem-se o procedimento utilizado para a identificação de modelos NARX neste trabalho.

4.1 Seleção de Estrutura e Estimação de Parâmetros de Modelos NARX polinomiais

Inicialmente, utiliza-se a metodologia de obtenção de sinais de excitação conforme a Subseção 3.2.1. De posse do conjunto de dados de identificação, o algoritmo ERR (Subseção 2.3.3) é utilizado de forma conjunta com o critério de Akaike - AIC (Subseção 2.3.3) para definição da estrutura do modelo. Em uma abordagem caixa cinza, como é tipicamente feito para modelagem de histerese, inicialmente alguns regressores podem

ser eliminados do conjunto de candidatos, conforme apresentado na Subseção 2.3.2 para o caso de histerese. Assim, os regressores restantes são classificados de modo a minimizar o critério ERR. Então, utiliza-se o critério AIC para determinar o número de termos do modelo final, de modo que tal critério seja minimizado. Para a estimação dos parâmetros, o método estendido dos mínimos quadrados (EMQ - Seção 2.3) é aplicado. Para modelagem dos termos de ruído, utilizou-se grau de não linearidade 3, 20 termos e máximo atraso de 6 unidades. É importante salientar que os termos de ruído são considerados apenas no processo de identificação, visando reduzir efeitos de polarização. Para a validação e a compensação, apenas a parte determinística é utilizada. Por fim, os modelos são validados seguindo as mesmas recomendações já apresentadas na Subseção 3.2.3.

No caso de sistemas com histerese, três abordagens são utilizadas e comparadas:

1. Abordagem caixa cinza proposta por MARTINS e AGUIRRE (2016) em que se consideram os regressores $\phi_1(k) = u(k) - u(k - 1)$ e $\phi_2(k) = \text{sign}[\phi_1(k)]$;
2. Abordagem caixa cinza proposta por ABREU et al. (2020) em que além dos regressores $\phi_1(k)$ e $\phi_2(k)$, consideram-se as restrições (i), (ii), (iii) e $\sum_y = 1$, apresentadas na Subseção 2.3.2.
3. Puramente caixa preta.

Na abordagem 2, a estrutura do modelo é obtida conforme já descrito, mas a estimação dos parâmetros é realizada via método dos mínimos quadrados com restrições. A seguir, é apresentada a formulação do problema de compensação nos contextos estático, dinâmico e adaptado para sistemas histeréticos. Assume-se que o modelo \mathcal{M} (2.9) já tenha sido identificado, seguindo as recomendações desta seção. Sobre o sistema \mathcal{S} a ser compensado, assume-se estabilidade em malha aberta conforme previamente mencionado na Proposição 2.4.1.

4.2 Compensação Estática

No contexto da compensação estática, assume-se que a referência seja conhecida e constante, $r(k) = \bar{r}, \forall k$. Além disso, assume-se que a entrada e a saída do sistema \mathcal{S} sejam limitadas, $u(k) \in [u_{\min}, u_{\max}], \forall k$ e $y_s(k) \in [y_{\min}, y_{\max}], \forall k$. Sobre o modelo \mathcal{M} (2.9), as seguintes proposições são feitas:

Proposição 4.2.1. \mathcal{M} é um modelo válido para \mathcal{S} , isto é: $y(k) \approx y_s(k)$ quando ambos são excitados para uma mesma entrada $u(k)$.

Proposição 4.2.2. Para qualquer $\bar{u} \in [u_{\min}, u_{\max}]$, \mathcal{M} tem pelo menos um ponto fixo estável $\bar{y} \in [y_{\min}, y_{\max}]$.

Ao analisar \mathcal{M} em estado estacionário e explicitando o polinômio em \bar{y} conforme descrito na Subseção 2.3.1, tem-se $\bar{\mathcal{M}}$ (2.10) que é rerepresentado:

$$\bar{\mathcal{M}}: \bar{y} = \bar{f}^\ell(\bar{u}, \bar{y}),$$

$$\bar{\mathcal{M}}: c_{y, \ell_y}(\bar{u})\bar{y}^{\ell_y} + c_{y, \ell_y-1}(\bar{u})\bar{y}^{\ell_y-1} + \dots + c_{y,1}(\bar{u})\bar{y} + c_{y,0}(\bar{u}) = 0.$$

Visando obter um compensador para o caso estático $\bar{\mathcal{M}}_r$, um problema inverso deve ser resolvido em estado estacionário. Assim, o que se procura são valores de entrada \bar{m} que levarão a saída do sistema para a referência em estado estacionário, $\bar{y} \approx \bar{r}$. Isso pode ser feito ao se considerar o modelo \mathcal{M} expresso como $\bar{y} = \bar{f}^\ell(\bar{u}, \bar{y})$, sendo \bar{y} substituído por \bar{r} e \bar{u} por \bar{m} , de modo que $\bar{\mathcal{M}}_r$ é dado por $\bar{r} = \bar{f}^\ell(\bar{m}, \bar{r})$. Assim, torna-se possível reescrever (2.10) agrupando-se os termos de modo a se obter um polinômio em função da entrada desejada, \bar{m} :

$$c_{m, \ell_m}(\bar{r})\bar{m}^{\ell_m} + c_{m, \ell_m-1}(\bar{r})\bar{m}^{\ell_m-1} + \dots + c_{m,1}(\bar{r})\bar{m} + c_{m,0}(\bar{r}) = 0, \quad (4.1)$$

sendo $\ell_m \leq \ell$. Embora cada uma das ℓ_m raízes de (4.1) seja uma solução do problema matemático inverso, não necessariamente todas poderão ser usadas em casos práticos, sendo que as seguintes restrições devem ser satisfeitas:

Restrição R1) a raiz escolhida m deve ser real, $m \in \mathbb{R}$;

Restrição R2) e deve pertencer ao intervalo de valores factíveis, $m \in [u_{\min}, u_{\max}]$.

A Proposição 4.2.2 garante que qualquer solução \bar{m} (4.1) que atende às condições acima formuladas, irá levar o sistema para o ponto fixo estável, visto que \mathcal{M} é um modelo válido (Proposição 4.2.1), $\bar{y}_c \approx \bar{r}$. Conforme é visto no Capítulo 5, a compensação estática é adequada não somente quando as referências são constantes, mas também no caso do sistema apresentar uma dinâmica consideravelmente mais rápida que a entrada. O procedimento algébrico simples que foi proposto acima é ilustrado por meio do exemplo a seguir.

Exemplo 1. Considere que \mathcal{M} satisfaça à Proposição 4.2.1 para um dado sistema \mathcal{S} e seja dado por:

$$y(k) = \hat{\theta}_1 y(k-1) + \hat{\theta}_2 u(k-1) + \hat{\theta}_3 u(k-1)u(k-2) + \hat{\theta}_4 u(k-1)^2 + \hat{\theta}_5 u(k-1)^3, \quad (4.2)$$

sendo $\tau_d=1$, $n_y=1$, $n_u=2$ e $\ell=3$. A análise estática é obtida assumindo que o sistema esteja em estado estacionário, $u(k-1)=u(k-2)=\bar{u}$ e $y(k-1)=y(k)=\bar{y}$:

$$\bar{y} = \hat{\theta}_1 \bar{y} + \hat{\theta}_2 \bar{u} + \hat{\theta}_3 \bar{u}^2 + \hat{\theta}_4 \bar{u}^2 + \hat{\theta}_5 \bar{u}^3, \quad (4.3)$$

que pode ser reescrita no formato da Equação 2.10:

$$0 = \underbrace{[\hat{\theta}_1 - 1] \bar{y}}_{c_{y,1}} + \underbrace{\hat{\theta}_5 \bar{u}^3 + [\hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4] \bar{u}^2 + \hat{\theta}_2 \bar{u}}_{c_{y,0}(\bar{u})}.$$

Assim, \mathcal{M} (4.2) possui somente um ponto fixo para cada valor de \bar{u} :

$$\bar{y} = -\frac{c_{y,0}(\bar{u})}{c_{y,1}} = \frac{\hat{\theta}_5 \bar{u}^3 + [\hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4] \bar{u}^2 + \hat{\theta}_2 \bar{u}}{1 - \hat{\theta}_1}. \quad (4.4)$$

A análise de estabilidade de \mathcal{M} (4.2) leva a uma matriz Jacobiana (2.11) composta por um único elemento

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f^\ell}{\partial y(k-1)} \Big|_{\bar{u}, \bar{y}} \right| &< 1, \\ \left| \hat{\theta}_1 \Big|_{\bar{u}, \bar{y}} \right| &< 1, \\ -1 &< \hat{\theta}_1 < 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Portanto, sendo a condição (4.5) satisfeita, então (4.4) é um ponto fixo estável (Proposição 4.2.2). Dessa forma, para obter o compensador $\bar{\mathcal{M}}_r$, substitui-se \bar{y} por \bar{r} e \bar{u} por \bar{m} em (4.3):

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \hat{\theta}_1 \bar{r} + \hat{\theta}_2 \bar{m} + \hat{\theta}_3 \bar{m}^2 + \hat{\theta}_4 \bar{m}^2 + \hat{\theta}_5 \bar{m}^3, \\ 0 &= \underbrace{\hat{\theta}_5}_{c_{u,3}} \bar{m}^3 + \underbrace{[\hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4]}_{c_{u,2}} \bar{m}^2 + \underbrace{\hat{\theta}_2}_{c_{u,1}} \bar{m} + \underbrace{[\hat{\theta}_1 \bar{r} - \bar{r}]}_{c_{u,0}(\bar{r})}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nesse sentido, para um dado valor de referência \bar{r} , as raízes de (4.6) constituem-se como potenciais candidatas a entradas de compensação que farão o sistema alcançar a referência em estado estacionário. Um problema de natureza prática é escolher uma dentre as 3 raízes. Caso exista apenas uma raiz real factível (Restrições R1 e R2), a escolha é trivial. Entretanto, no caso de existirem 3 raízes reais factíveis, um método de seleção torna-se necessário. \square

Por razões de clareza, considere as raízes de (4.1) organizadas como elementos do vetor $\bar{\mathbf{m}}(\bar{r}) \triangleq [\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_{\ell_m}]^T$. Para um dado valor \bar{r} , existem ℓ_m raízes. Embora todos esses valores \bar{m} sejam soluções do problema matemático inverso, somente aquelas que satisfazem R1 e R2 são candidatas factíveis. Na seção seguinte, apresenta-se o algoritmo desenvolvido para a escolha dentre as raízes calculadas. Tal algoritmo é generalizado para o contexto dinâmico, também sendo aplicado no contexto estático.

4.3 Compensação Dinâmica

A principal diferença entre a estratégia apresentada nesta seção e a compensação estática reside no fato de que a referência é uma sequência de valores $r(k)$ no contexto dinâmico e não um valor fixo \bar{r} . O mesmo é válido para a entrada de compensação $m(k)$ e para a saída do sistema compensado $y_c(k)$.

Nesse contexto, o objetivo é encontrar uma sequência de valores para a entrada $m(k)$ que quando aplicados ao sistema \mathcal{S} , faça $y(k) \approx r(k)$ via solução dinâmica de um problema inverso. Assim, de maneira análoga ao que foi feito na Seção 4.2, a substituição de variáveis é realizada e, omitindo o termo de ruído, o modelo \mathcal{M} (2.9) pode ser reescrito como se segue:

$$r(k) = f^\ell(r(k-1), \dots, r(k-n_y), m(k-\tau_d), \dots, m(k-n_u)).$$

Ao realizar o seguinte deslocamento temporal, $k \leftarrow k + \tau_d$ – significando que k é substituído por $k + \tau_d$ – a última equação pode ser reescrita:

$$r(k+\tau_d) = f^\ell(r(k+\tau_d-1), \dots, r(k+\tau_d-n_y), m(k), \dots, m(k+\tau_d-n_u)). \quad (4.7)$$

De modo que o objetivo é encontrar o valor presente de $m(k)$ que levará o sistema para a referência em um futuro próximo, $r(k + \tau_d)$. Portanto, similarmente à compensação estática, a Eq. 4.7 é expressa em termos da incógnita $m(k)$:

$$0 = c_{\ell_m}(k)m(k)^{\ell_m} + c_{\ell_m-1}(k)m(k)^{\ell_m-1} + \dots c_1(k)m(k) + c_0(k), \quad (4.8)$$

sendo que os coeficientes variantes $c_j(k)$, $j = 0, \dots, \ell_m$, podem depender de valores passados de m até o instante $k-1$, e de valores passados e futuros de r até o instante $k + \tau_d$. Assim, a seguinte proposição torna-se necessária para o caso dinâmico.

Proposição 4.3.1. O sinal de referência $r(k)$ deve ser conhecido até o instante $k + \tau_d$.

O exemplo a seguir ilustra o procedimento apresentado.

Exemplo 2. Considere o mesmo modelo usado no Exemplo 1, em que se substitui $y(k)$ por $r(k)$ e $u(k)$ por $m(k)$:

$$r(k) = \hat{\theta}_1 r(k-1) + \hat{\theta}_2 m(k-1) + \hat{\theta}_3 m(k-1)m(k-2) + \hat{\theta}_4 m(k-1)^2 + \hat{\theta}_5 m(k-1)^3,$$

para $\tau_d = 1$. Em sequência, efetua-se o deslocamento temporal $k \leftarrow k + 1$, de modo que a última equação seja expressa na forma (4.8):

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{\theta}_5 m(k)^3 + \hat{\theta}_4 m(k)^2 + [\hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3 m(k-1)]m(k) + [\hat{\theta}_1 r(k) - r(k+1)], \\ 0 &= c_3(k)m(k)^3 + c_2(k)m(k)^2 + c_1(k)m(k) + c_0(k), \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde os valores de r são conhecidos (Proposição 4.3.1) e também todos os valores passados de m . Dessa forma, para cada instante k , as soluções de (4.9) formam um conjunto de três potenciais entradas de compensação $m(k)$. Além disso, observe que o coeficiente $c_2(k)$ depende de $m(k-1)$, fato que torna necessária alguma estratégia de inicialização do procedimento. \square

A seguir, algumas recomendações importantes são apresentadas tanto para inicializar o compensador como para selecionar a raiz que deve ser utilizada como entrada de compensação. A curva de calibração do sistema \mathcal{S} é obtida ao se aplicar uma sequência de degraus, de modo que a saída do sistema atinja o estado estacionário. Com esses valores de saída em estado estacionário, plota-se os dados que compõem a curva $u \times y_s$.

Comentário 1. (Inicialização do Compensador). Pela Proposição 4.3.1, $r(k + \tau_d)$ é conhecida em (4.8). Denote esse valor por \bar{r} . Se a curva de calibração de \mathcal{S} for conhecida, encontre os respectivos valores de \bar{m} diretamente dessa curva, fazendo $m(j) = \bar{m}$, para $j = k-1, \dots, k + \tau_d - n_u$. Caso tal curva não esteja disponível, os valores procurados de m podem ser obtidos diretamente da curva estática do modelo \mathcal{M} ou resolvendo o compensador estático \bar{M}_r (4.1), $\bar{r} = \bar{f}^r(\bar{m}, \bar{r})$, com $m(j) = \bar{m}$, $j = k-1, \dots, k + \tau_d - n_u$. No caso de existir mais de uma solução para $\bar{r} = \bar{f}^r(\bar{m}, \bar{r})$ use aquela que i) estabilize a saída do modelo, ii) satisfaça R1 e R2. Caso ainda exista mais de uma solução factível, escolha aquela que tenha o menor valor absoluto, gerando o menor esforço de controle. Os itens i) e ii) são automaticamente levados em conta ao se usar a curva de calibração ou não linearidade estática. \square

As melhorias alcançadas ao se utilizar essas orientações (Comentário 1) no compensador são discutidas no Capítulo 5.

Comentário 2. (Escolha das raízes). Coloque as raízes (4.8) no vetor $m_k \triangleq [m_1^k \dots m_{\ell_m}^k]^T$. Considere somente aquelas que satisfazem às Restrições R1 e R2. Se somente um elemento de m_k atender a essas restrições, então este é escolhido como entrada de compensação no instante k . Por outro lado, caso exista mais de um elemento que satisfaça às restrições mencionadas, escolha a raiz apropriada de acordo com o seguinte critério de otimização:

$$m(k) = \arg \min_{m_j^k, \forall j \in \{1, \dots, \ell_m\}} (|m_j^k - m(k-1)|). \quad (4.10)$$

sujeito a: R1, R2

Ao se utilizar o critério (4.10), a solução mais próxima da entrada de compensação usada no passo anterior é selecionada. Esse critério simples resulta em sinais $m(k)$ mais suaves e, conseqüentemente, em um menor esforço de compensação (ABREU et al., 2020). \square

No caso de ℓ_m ser par e existirem somente raízes complexas conjugadas, então faz-se $m(k) = m(k-1)$. Essa situação é rara para modelos representativos e que, portanto,

satisfazem a Proposição 4.2.1. O Algoritmo 1 resume o método de seleção da raiz apropriada para a compensação.

Algoritmo 1: Seleção da Raiz Apropriada de (4.8)

Input: $m(k-1)$; $\mathbf{m}_k \triangleq [m_1^k \cdots m_{\ell_m}^k]^T$
 $v \leftarrow \infty$
 $a \leftarrow 0$
for $j = 1$ **to** ℓ_m **do**
 if $m_j^k \in \mathbb{R}$ (R1) **and** $u_{\min} \leq m_j^k \leq u_{\max}$ (R2) **then**
 $e \leftarrow |m_j^k - m(k-1)|$
 if $e < v$ **then**
 $v \leftarrow e$
 $a \leftarrow 1$
 $m(k) \leftarrow m_j^k$
if $a = 0$ **then**
 $m(k) \leftarrow m(k-1)$
Output: $m(k)$

4.4 Compensação de Sistemas com Histerese

Para sistemas histeréticos, a notação apresentada na Subseção 2.3.2 é simplificada, de modo que $\mathcal{M}_h = \mathcal{M}_{\text{NARX},h}$ (2.13) é rerepresentado:

$$\mathcal{M}_h : y(k) = g^\ell(y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-\tau_d), \dots, u(k-n_u), \phi_1(k-1), \phi_2(k-1)) + e(k).$$

Assumindo que \mathcal{M}_h foi previamente obtido, o método de compensação dinâmica deve ser adaptado para modelos como (2.13). Considerando sinais de excitação não constantes, a seguinte simplificação é utilizada:

$$\begin{aligned} \phi_1(k-1)\phi_2(k-1) &= \phi_1(k-1) \frac{|\phi_1(k-1)|}{\phi_1(k-1)} \\ &= |u(k-1) - u(k-2)|, \end{aligned} \quad (4.11)$$

para $u(k-1) \neq u(k-2)$. O compensador para sistemas com histerese $\mathcal{M}_{r,h}$ pode ser obtido seguindo os passos abaixo:

1. Reescreva \mathcal{M}_h como:

$$\begin{aligned} 0 &= g^\ell(y(k-1), \dots, y(k-n_y), u(k-\tau_d), \dots, u(k-n_u), \phi_1(k-1), \phi_2(k-1)) - y(k); \end{aligned} \quad (4.12)$$

2. se $\phi_1(k-1)\phi_2(k-1)$ aparecer em qualquer regressor de (4.12), use o resultado dado em (4.11);
3. se $\phi_1(k-1)$ e $\phi_2(k-1)$ ainda aparecerem, reescreva-os como $u(k-1) - u(k-2)$ e $|u(k-1) - u(k-2)|/[u(k-1) - u(k-2)]$, respectivamente;
4. se $[u(k-1) - u(k-2)]$ aparecer em qualquer denominador, multiplique a equação por $[u(k-1) - u(k-2)]$;
5. substitua $y(k)$ por $r(k)$, $u(k)$ por $m(k)$, aplique o deslocamento temporal $k \leftarrow k + \tau_d$, e reescreva a equação como (4.8);
6. divida a equação com $|\cdot|$ em dois polinômios em $m(k)$:

$$0 = c_{\ell_m}^C(k)m(k)^{\ell_m} + c_{\ell_m-1}^C(k)m(k)^{\ell_m-1} + \dots + c_1^C(k)m(k) + c_0^C(k) \quad (4.13)$$

para $m(k) > m(k-1)$,

$$0 = c_{\ell_m}^D(k)m(k)^{\ell_m} + c_{\ell_m-1}^D(k)m(k)^{\ell_m-1} + \dots + c_1^D(k)m(k) + c_0^D(k) \quad (4.14)$$

para $m(k) < m(k-1)$,

onde os índices sobrescritos C e D se referem aos regimes de carga e descarga, respectivamente. É importante notar que, ao lidar com um sistema histerético, o compensador (4.8) é composto por dois polinômios distintos, um para carga (4.13) e outro para descarga (4.14). Dessa forma, a entrada de compensação $m(k)$ é uma raiz factível ou de (4.13) ou de (4.14). Antes de detalhar o processo de seleção das raízes, os passos anteriores são ilustrados no exemplo seguinte.

Exemplo 3. Suponha que \mathcal{M}_h seja:

$$y(k) = \hat{\theta}_1 y(k-1) + \hat{\theta}_2 u(k-1)^3 + \hat{\theta}_3 \phi_1(k-1)\phi_2(k-1)u(k-1) + \hat{\theta}_4 \phi_1(k-1)\phi_2(k-1)y(k-1). \quad (4.15)$$

Seguindo os passos 1 e 2, (4.15) é reescrito como:

$$0 = \hat{\theta}_1 y(k-1) + \hat{\theta}_2 u(k-1)^3 + \hat{\theta}_3 |u(k-1) - u(k-2)|u(k-1) + \hat{\theta}_4 |u(k-1) - u(k-2)|y(k-1) - y(k). \quad (4.16)$$

Para esse modelo, os passos 3 e 4 não se aplicam. Por meio do passo 5, encontra-se a seguinte equação (lembre-se que $\tau_d = 1$):

$$0 = \hat{\theta}_1 r(k) + \hat{\theta}_2 m(k)^3 + \hat{\theta}_3 |m(k) - m(k-1)|m(k) + \hat{\theta}_4 |m(k) - m(k-1)|r(k) - r(k+1), \quad (4.17)$$

que pode ser dividido em dois polinômios (passo 6):

$$0 = \hat{\theta}_2 m(k)^3 + \hat{\theta}_3 m(k)^2 + [-\hat{\theta}_3 m(k-1) + \hat{\theta}_4 r(k)] m(k) + [\hat{\theta}_1 r(k) - \hat{\theta}_4 m(k-1)r(k) - r(k+1)]$$

para $m(k) > m(k-1)$, (4.18)

$$0 = \hat{\theta}_2 m(k)^3 - \hat{\theta}_3 m(k)^2 + [\hat{\theta}_3 m(k-1) - \hat{\theta}_4 r(k)] m(k) + [\hat{\theta}_1 r(k) + \hat{\theta}_4 m(k-1)r(k) - r(k+1)]$$

para $m(k) < m(k-1)$. (4.19)

Aqui, (4.18) se refere ao regime de carga na forma (4.13) com $c_3^C(k) = \hat{\theta}_2$, $c_2^C(k) = \hat{\theta}_3$, $c_1^C(k) = -\hat{\theta}_3 m(k-1) + \hat{\theta}_4 r(k)$ e $c_0^C(k) = \hat{\theta}_1 r(k) - \hat{\theta}_4 m(k-1)r(k) - r(k+1)$; enquanto, de maneira análoga, (4.19) se refere ao regime de descarga na forma (4.14) com coeficientes $c_3^D(k) = \hat{\theta}_2$, $c_2^D(k) = -\hat{\theta}_3$, $c_1^D(k) = \hat{\theta}_3 m(k-1) - \hat{\theta}_4 r(k)$ e $c_0^D(k) = \hat{\theta}_1 r(k) + \hat{\theta}_4 m(k-1)r(k) - r(k+1)$.

Os polinômios (4.18) e (4.19) que são válidos para $k \geq 1$ podem ser inicializados usando uma estimativa do laço de histerese como é mostrado no Exemplo 4. \square

Para apresentar uma maneira mais geral de selecionar a raiz apropriada, considere os polinômios na forma geral constituída de (4.13) e (4.14). A Proposição 4.3.1 também deve ser válida no contexto de histerese, a raiz apropriada $m(k)$ deve atender às restrições R1, R2 e também:

Restrição R3) $m(k) > m(k-1)$, se (4.13) é usada em k ; ou

Restrição R4) $m(k) < m(k-1)$, se (4.14) é usada em k .

As restrições R3 e R4 são necessárias para garantir que a raiz seja consistente com o regime para o qual foi calculada. Assim, o processo de seleção das raízes no contexto histerético é similar ao explicado no Comentário 2 com a adição dessas novas restrições:

$$m(k) = \arg \min_{m_j^k, \forall j \in \{1, \dots, \ell_m\}} (|m_j^k - m(k-1)|), \quad (4.20)$$

sujeito a: R1, R2, Rq

em que $q \in \{3, 4\}$. O procedimento passo a passo é análogo ao Algoritmo 1, agora usando (4.20) ao invés de (4.10). A inicialização do procedimento é descrita a seguir.

4.4.1 Inicialização de Compensadores para Sistemas com Histerese

Se algum parâmetro dos compensadores (4.13) e (4.14) dependerem de valores anteriores da entrada de compensação $m(k)$, $\{m(k-1), \dots, m(k+\tau_d - n_u)\}$, esses valores devem ser determinados na inicialização. Na Seção 4.3, utiliza-se a curva estática para estimar esses valores iniciais como descrito no Comentário 1. Aqui, o procedimento a seguir é usado visando estimar o laço de histerese \mathcal{H} para \mathcal{M}_h (2.13) no plano entrada \times saída .

Considere a seguinte entrada senoidal de período $T = 1/f_{\min}$:

$$\tilde{u}(k) = A \sin(2\pi f_{\min} k) + \tilde{u}_0, \quad (4.21)$$

sendo que $f_{\min} = 1/T$ é a menor frequência de interesse, $\tilde{u}_0 = (u_{\min} + u_{\max})/2$ é a média, e $A = u_{\max} - \tilde{u}_0$ é a amplitude. Aplicando $\tilde{u}(k)$ no modelo (2.13) e desconsiderando os valores transitórios, o conjunto resultante de dados $\{\tilde{u}(k), \tilde{y}(k)\}_{k=N_i}^{N_e}$ com $N_i > T$ e $N_e = N_i + T$, corresponde ao laço \mathcal{H} . O uso de \mathcal{H} para inicialização é ilustrado no próximo exemplo.

Exemplo 4. Considere o modelo (4.15) do Exemplo 3, com parâmetros $\hat{\theta}_1 = 0,8$, $\hat{\theta}_2 = 0,4$, $\hat{\theta}_3 = 0,2$, e $\hat{\theta}_4 = 0,1$. Visando inicializar o compensador para $k = 0$, $m(-1)$ é necessário em (4.18) e (4.19). Para esse fim, suponha que o sinal de excitação seja \tilde{u} (4.21) definido com $A = 1$, $f_{\min} = 1$ Hz, e $\tilde{u}_0 = 1$ para o qual \mathcal{H} é mostrado na Fig. 4.1.

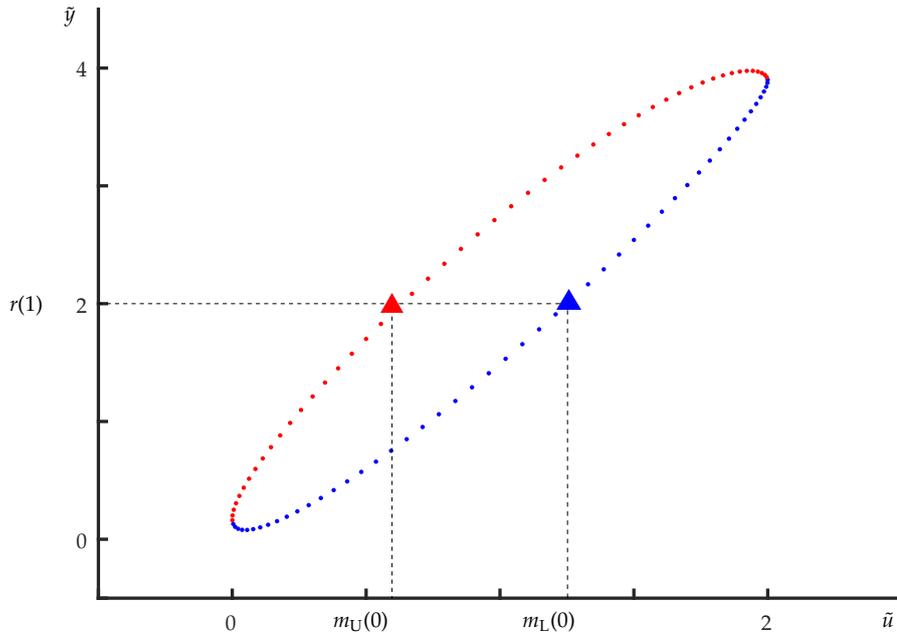


Figura 4.1: O laço \mathcal{H} é obtido da simulação do modelo (4.15) com entrada descrita no Exemplo 4. Os pontos azuis (\cdot) se referem ao regime de carga, enquanto aqueles em vermelho (\cdot) se referem ao regime de descarga. Para uma dada referência, por exemplo $r(1)$, existem duas possíveis escolhas para a entrada de compensação, uma em azul (\blacktriangle) e outra em vermelho (\blacktriangle) que correspondem a $m_C(0)$ e $m_D(0)$, respectivamente. A escolha de uma delas é definida pelo regime (carga ou descarga) no instante de inicialização.

Pela Proposição 4.3.1, sabe-se que $r(k+1)$ é conhecida no instante k . Suponha que $r(1) = 2$ e que $\tilde{y} = r(1)$, existindo dois possíveis valores para \tilde{u} , $m_L(0)$ e $m_U(0)$, obtidos de \mathcal{H} (Fig. 4.1). A escolha entre esses dois valores é baseada no regime atual da referência: carga para $r(1) - r(0) > 0$ ou descarga para $r(1) - r(0) < 0$. Nesse exemplo, em $k = 0$, a referência encontra-se em regime de carga e, portanto, $m(0) = m_L(0)$ é escolhida para inicializar as equações (4.18) e (4.19). \square

4.5 Aspectos Importantes para a Implementação

É importante mencionar que caso a ordem dos polinômios gerados pelos compensadores seja maior do que 3, não existem soluções analíticas para se obter as raízes desses polinômios. Portanto, torna-se necessária a implementação de métodos numéricos iterativos. Para sistemas suficientemente lentos, esse tipo de estratégia não seria um problema. Por outro lado, em sistemas rápidos, uma alternativa a esse tipo de questão seria encontrar as entradas de compensação *a priori*, resolvendo-se o problema em uma abordagem *offline*. Dado que esse tipo de procedimento não é o mais adequado, felizmente é possível representar uma gama considerável de sistemas via modelos de grau de não linearidade menor que 3. Para sistemas de ordem mais alta, pode-se determinar restrições que obriguem os compensadores gerados a apresentar no máximo forma cúbica. O Apêndice A apresenta as fórmulas de solução analítica para polinômios de grau menor ou igual a 3.

Particularmente sobre sistemas histeréticos, tem-se que os polinômios (4.13) e (4.14) não estão definidos para $m(k) = m(k - 1)$. De maneira prática, quando essa situação ocorre, o valor da entrada de compensação calculada no instante anterior é mantida. Isso corresponde a permanecer no ponto do laço de histerese \mathcal{H} alcançado no instante anterior (ABREU et al., 2020).

A outra situação extrema ocorre para uma referência muito rápida. Para entender esse problema, é importante lembrar que a ideia central dos métodos apresentados é fazer com que a saída do sistema compensado siga a referência. À medida que esta se torna mais rápida, a dificuldade de se verificar $y(k) \approx r(k)$ cresce gradualmente. Claramente existe um limite prático para a frequência máxima de $r(k)$ que permitirá resultados de compensação apropriados. Sobre essas questões, mais detalhes são dados no Capítulo 5.

4.6 Considerações Finais

Este capítulo apresentou as principais contribuições desta dissertação para o problema de compensação de não linearidades. A metodologia proposta consiste em reescrever a equação do modelo NARX, de modo que se obtenha um polinômio na variável desejada, que é a entrada de compensação. Assim, as raízes desse polinômio são calculadas e aquela que for apropriada, respeitando as restrições impostas e gerando o menor esforço de controle, é escolhida. A metodologia é concebida nos contextos estático e dinâmico, sendo também adaptada para sistemas com histerese. O próximo capítulo apresenta os resultados obtidos com a aplicação da metodologia aqui proposta por meio de exemplos simulados.

Resultados de Simulação

O presente capítulo trata dos resultados de aplicação da metodologia apresentada no Capítulo 4 para exemplos de simulação numérica, trazendo também uma discussão sobre particularidades do método. As entradas de excitação utilizadas para a identificação dos modelos são projetadas, conforme proposto na Subseção 3.2.1. A identificação dos modelos NARX é realizada com base na Seção 4.1 e a validação dos mesmos segue o que foi abordado na Subseção 3.2.3. Os resultados apresentados neste capítulo encontram-se em fase de publicação (TAVARES et al., 2020).

5.1 Exemplo 1 - Um Sistema de Aquecimento

Neste primeiro exemplo, utiliza-se o seguinte modelo de Hammerstein que foi obtido para um aquecedor elétrico (AGUIRRE et al., 2005):

$$\begin{aligned} y(k) &= \beta_1 y(k-1) + \beta_2 v(k-1) + \beta_3 y(k-2) + \beta_4 v(k-2), \\ v(k) &= p_1 u(k)^2 + p_2 u(k), \end{aligned} \quad (5.1)$$

sendo que $y(k)$ é a temperatura normalizada, $u(k)$ é a tensão elétrica aplicada ao aquecedor com limites $0 \leq u(k) \leq 1$. O conjunto de dados utilizado nas etapas seguintes foram extraídos de (AGUIRRE et al., 2002) e encontram-se disponíveis em <https://bit.ly/3iQ6rCF>¹. A região de operação do modelo é $u(k) \in [0; 1]$ e $y(k) \in [0; 0,5]$.

O termo independente do polinômio de segunda ordem foi omitido visando garantir que $y = 0$ quando $u = 0$. É importante mencionar que os parâmetros de (5.1) precisaram ser reestimados, porque aqueles fornecidos em (AGUIRRE et al., 2005) possuem poucas casas decimais, o que impacta consideravelmente a qualidade de simulação para modelos discretos. Realizando a estimação diretamente sobre os dados estáticos, foram obtidos os parâmetros da curva estática via MQ: $p_1 = 4,639331 \times 10^{-1}$ e $p_2 = 5,435865 \times 10^{-2}$. Usando os dados dinâmicos e o algoritmo EMQ, os demais parâmetros da parte dinâmica foram estimados: $\beta_1 = 1,205445 \times 10^0$, $\beta_2 = 8,985133 \times 10^{-2}$, $\beta_3 = -3,087751 \times 10^{-1}$ e $\beta_4 = 9,462358 \times 10^{-3}$. A validação do modelo obtido para o aquecedor é apresentada na Fig. 5.1. Daqui em diante, o modelo de Hammerstein (5.1) é tratado como o sistema \mathcal{S} a ser compensado.

¹https://www.researchgate.net/publication/3352493_Nonlinearities_in_NARX_polynomial_models_Representation_and_estimation

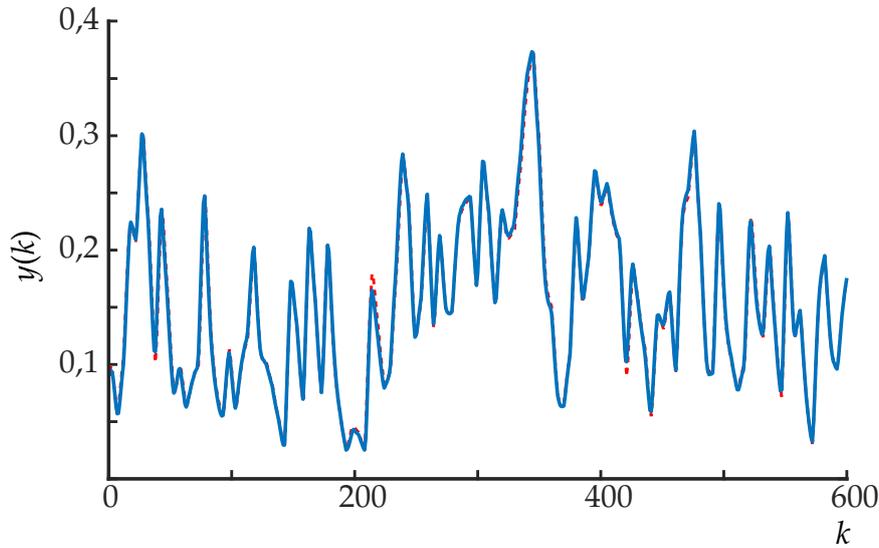


Figura 5.1: Desempenho do modelo (5.1) sobre conjunto de dados de validação obtidos via medição e apresentados em (AGUIRRE et al., 2002). A linha contínua (–) representa os dados de medição, enquanto a linha tracejada (- -) corresponde aos dados de simulação livre de (5.1). Neste exemplo, (5.1) é tratado como sistema \mathcal{S} a ser compensado.

Nesse sentido, o primeiro passo é identificar um modelo NARX polinomial \mathcal{M} (2.9) para \mathcal{S} . A entrada $u(k)$ é obtida alimentando as equações (3.6) e (3.7) com: $n = 2$, $f_1 = 0,001\text{Hz}$, $f_2 = 0,005\text{Hz}$, $v = 3$, $o_1 = 0,3\text{V}$, $o_2 = 0,5\text{V}$, $o_3 = 0,7\text{V}$, $G_1 = G_2 = G_3 = 0,2\text{V}$, $N = 2000$, $N_1 = 1000$ e $N_2 = 1000$. Visando tornar as simulações mais próximas de um experimento prático, um ruído gaussiano foi adicionado diretamente à saída, de modo que $\sigma_r/\sigma_s = 5\%$, em que σ_r é o desvio padrão do ruído, enquanto σ_s é o desvio padrão do sinal de saída de identificação. Os dados de validação são produzidos via simulação livre e livre de ruído. Fazendo $\ell = 3$ e $n_y = n_u = 3$, segue-se o procedimento apresentado na Seção 4.1 em que os termos candidatos são selecionados via ERR e o número de termos é determinado via minimização do critério AIC. A Figura 5.2 apresenta o critério de AIC que foi minimizado pelo seguinte modelo de 3 termos, cuja parte determinística é apresentada a seguir:

$$\mathcal{M}: \quad y(k) = \hat{\theta}_1 y(k-1) + \hat{\theta}_2 u(k-1)^2 + \hat{\theta}_3 y(k-2), \quad (5.2)$$

sendo $\hat{\theta}_1 = 8.958185 \times 10^{-1}$, $\hat{\theta}_2 = 6.393347 \times 10^{-2}$ e $\hat{\theta}_3 = -1.746750 \times 10^{-2}$. Os resultados de validação para \mathcal{M} são mostrados na Tabela 5.1 e na Figura 5.3, os quais indicam certa degradação em frequências mais altas e em pontos de operação próximos da origem.

Na sequência, ilustra-se a compensação estática (Seção 4.2). A função estática do modelo \mathcal{M} é:

$$\bar{y} = \frac{\hat{\theta}_2 \bar{u}^2}{1 - \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_3}, \quad (5.3)$$

em que existe apenas um ponto fixo \bar{y} para cada valor de entrada \bar{u} . Como \mathcal{M} é um

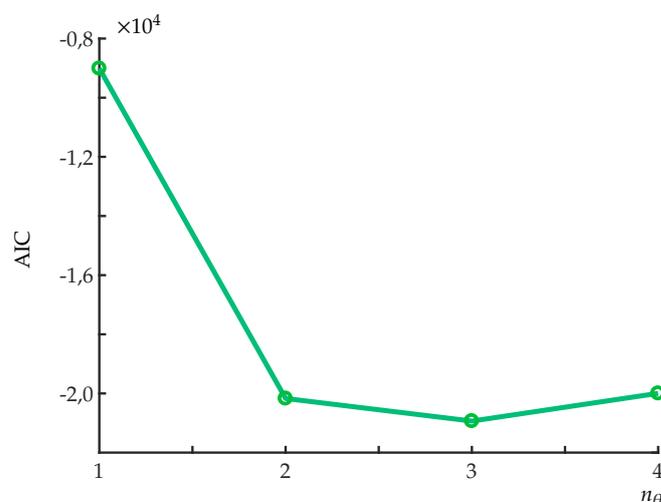


Figura 5.2: Critério AIC utilizado para definição do número de termos do modelo. Escolheu-se o modelo de 3 termos ($n_\theta = 3$) devido à minimização do índice. As linhas contínuas não têm significado, sendo mostradas apenas para facilitar a visualização.

Tabela 5.1: MAPE para simulação livre de \mathcal{M} (5.2) excitado por entradas senoidais da forma $u(k) = u_0 + 0,2\text{sen}(2\pi fk)$.

f [Hz]	u_0 [V]		
	0,3	0,5	0,7
0,0005	5,5%	3,0%	2,9%
0,001	5,8%	2,9%	2,8%
0,002	7,0%	4,0%	3,1%

sistema de segunda ordem, existem dois autovalores para cada ponto fixo \bar{y} . Nesse caso, a matriz Jacobiana não depende dos valores de \bar{u} ou \bar{y} , sendo a condição de estabilidade local (2.11):

$$\left| \text{eig} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \theta_3 & \theta_1 \end{bmatrix} \right) \right| < 1,$$

em que os autovalores da matriz Jacobiana correspondem às duas soluções algébricas de $\lambda^2 - \theta_1\lambda - \theta_3 = 0$: $|\lambda_1| = 0,8759$ e $|\lambda_2| = 0,0199$. Portanto, \bar{y} é estável para qualquer valor de \bar{u} e a Proposição 4.2.1 é satisfeita. Para realizar a compensação estática, \bar{y} é substituído por \bar{r} e \bar{u} por \bar{m} em (5.3), de modo que o polinômio em \bar{m} pode ser expresso como na Equação 4.1:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{\hat{\theta}_2 \bar{m}^2}{1 - \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_3}, \\ 0 &= \underbrace{[\hat{\theta}_2]}_{c_{m,2}} \bar{m}^2 + \underbrace{[(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_3 - 1)\bar{r}]}_{c_{m,0}(\bar{r})}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Como (5.4) é uma equação quadrática incompleta e a região de operação é limitada a

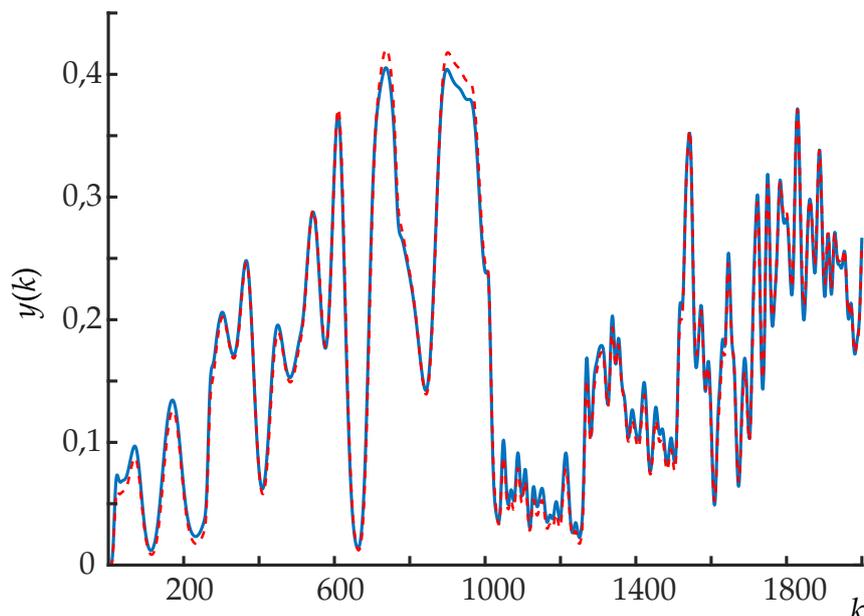


Figura 5.3: Validação livre de ruído para modelo \mathcal{M} (5.2): a linha contínua (–) apresenta valores de $y(k)$ para o sistema \mathcal{S} (5.1), enquanto a linha tracejada (- -) é a simulação livre de \mathcal{M} (5.2).

$0 \leq \bar{m} \leq 1$, a solução algébrica é única, definindo o compensador $\bar{\mathcal{M}}_r$:

$$\bar{\mathcal{M}}_r : \quad \bar{m} = \sqrt{\frac{-c_{m,0}(\bar{r})}{c_{m,2}}} = \sqrt{\frac{(1 - \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_3)\bar{r}}{\hat{\theta}_2}}. \quad (5.5)$$

Além disso, como $\bar{r} \geq 0$, $\hat{\theta}_2 > 0$ e $1 - \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_3 > 0$, o resultado da raiz quadrada em (5.5) é sempre real. Na Fig. 5.4, os resultados da compensação estática são mostrados para uma referência composta por uma sequência de degraus. Os resultados para o sistema não compensado são obtidos ao se aplicar a própria referência na entrada de \mathcal{S} . Como esperado, as ações de compensação fazem com que o sistema compensado seja aproximadamente linear (ver Fig. 5.4-b), o que não ocorre na ausência de compensação.

Como mostrado na Seção 4.3, a compensação estática pode ser usada para encontrar as condições iniciais do compensador dinâmico quando os coeficientes do polinômio (4.8) dependem de versões passadas da entrada. Para a compensação dinâmica, o procedimento da Seção 4.3 é realizado sobre \mathcal{M} (5.2), resultando em (ver Eq. 4.7):

$$r(k+1) = \hat{\theta}_1 r(k) + \hat{\theta}_2 m(k)^2 + \hat{\theta}_3 r(k-1)$$

e, finalmente (ver Eq. 4.8):

$$0 = \underbrace{[\hat{\theta}_2]}_{c_2} m(k)^2 + \underbrace{[\hat{\theta}_1 r(k) + \hat{\theta}_3 r(k-1) - r(k+1)]}_{c_0(k)}. \quad (5.6)$$

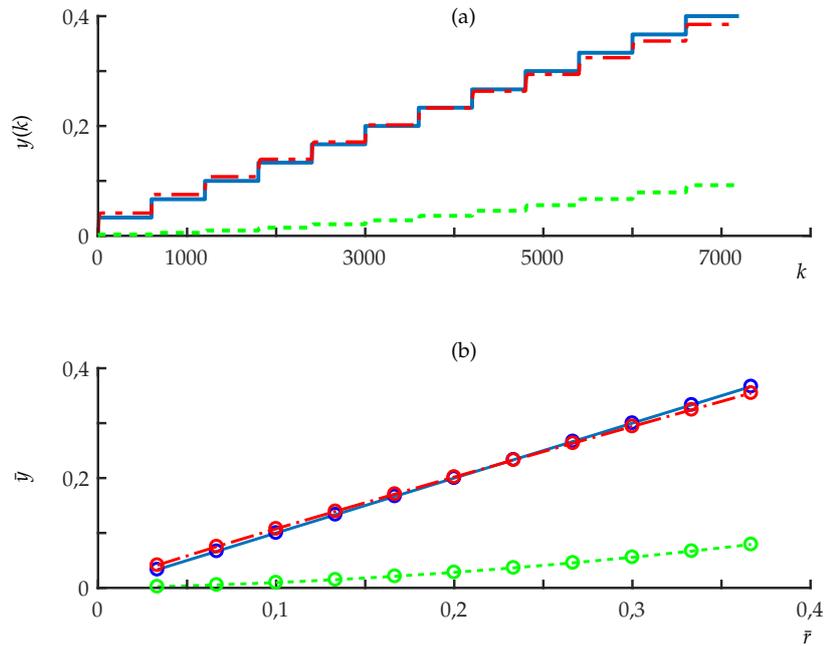


Figura 5.4: Resultados de validação para compensação estática: a linha contínua (—) apresenta a referência; a linha tracejada vermelha (- -) se refere à saída do sistema compensado por \bar{M}_r (5.5), enquanto a linha tracejada verde (- - -) mostra a saída do sistema não compensado. Em (a), tem-se a evolução temporal das saídas e da referência, enquanto em (b) apresenta-se o plano $\bar{r} \times \bar{y}$.

Resolvendo (5.6) em cada iteração, obtém-se a entrada de compensação $m(k)$. Devido a (5.6) ser quadrática, existem duas possibilidades. Ou as duas raízes são puramente reais e, então, o Algoritmo 1 é usado para selecionar uma delas; ou tais raízes são complexas conjugadas, de modo que o valor anterior é segurado, $m(k) = m(k - 1)$.

Visto que $m(k) > 0$, a solução algébrica de (5.6) define o seguinte compensador \mathcal{M}_r :

$$\mathcal{M}_r : m(k) = \sqrt{\frac{-c_0(k)}{c_2}} = \sqrt{\frac{r(k+1) - \hat{\theta}_1 r(k) - \hat{\theta}_3 r(k-1)}{\hat{\theta}_2}}, \quad (5.7)$$

e, como $\hat{\theta}_2 > 0$, a condição para que (5.7) tenha somente raízes reais é:

$$r(k+1) - \hat{\theta}_1 r(k) - \hat{\theta}_3 r(k-1) \geq 0. \quad (5.8)$$

Pelo fato de $m(k)$ (5.7) não depender de valores prévios da entrada, a inicialização do compensador é realizada simplesmente tomando-se $r(-1) = r(0)$ em (5.7) para $k = 0$. Na Fig. 5.5 e na Tabela 5.2, os resultados obtidos para o compensador \mathcal{M}_r (5.7) são comparados com aqueles obtidos sem compensação, quando diferentes referências senoidais são consideradas. Da Tabela 5.2, vê-se que, com o aumento da frequência, a compensação se torna menos efetiva, como esperado para a maioria dos sistemas de controle. Além disso, para valores pequenos de $r(k)$, tem-se o aparecimento de raízes complexas (ver Fig. 5.5-b) e, assim, o valor prévio da raiz é segurado.

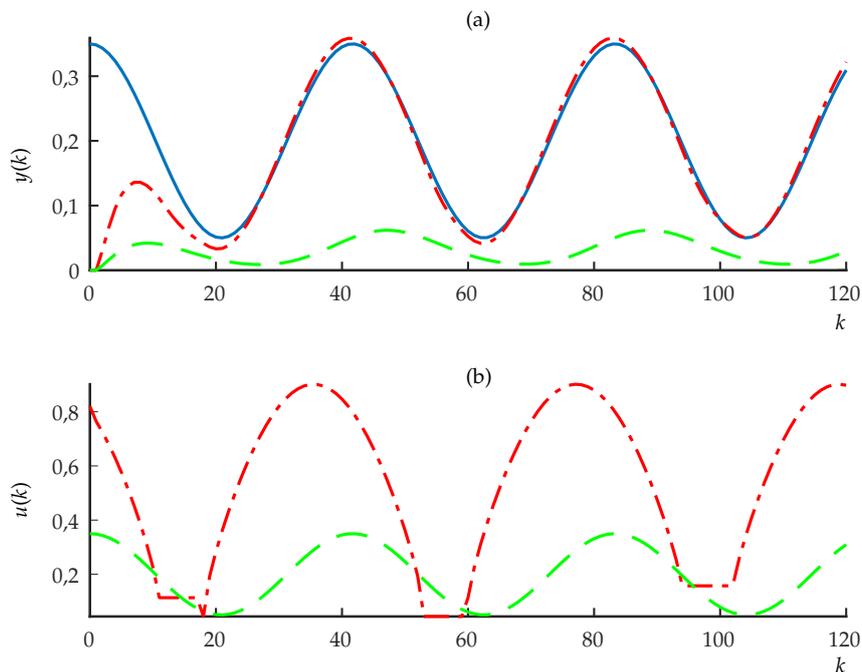


Figura 5.5: Resultados de compensação no contexto dinâmico para \mathcal{M}_r (5.7). Em (a), (—) representa $r(k) = 0,2\text{sen}(2\pi(0,002)k + \pi/2) + 0,15$, (---) é a saída do sistema compensado $y_c(k)$ e (- -) é a saída do sistema $y_s(k)$ sem compensação. Em (b), (---) é a entrada de compensação $m(k)$, enquanto (- -) é a entrada aplicada ao sistema não compensado.

Tabela 5.2: MAPE calculado para o sistema compensado por \mathcal{M}_r (5.7) e para o não compensado, sendo $r(k) = r_0 + r_0\text{sen}(2\pi fk + \pi/2)$.

	f [Hz]	r_0 [V]		
		0,05	0,10	0,20
Compensado	0,0005	7,8%	4,1%	3,4%
	0,001	9,4%	6,4%	5,6%
	0,002	15,5%	12,2%	10,2%
	0,004	29,5%	25,8%	20,2%
Sem compensação	0,0005	45,6%	44,0%	40,8%
	0,001	45,5%	44,0%	40,9%
	0,002	45,3%	44,0%	41,4%
	0,004	44,8%	43,7%	41,8%

5.1.1 Discussão

De forma a tornar a leitura sobre a aplicação da metodologia mais concisa, não foram realizadas análises e discussões. Por isso, reservou-se esta parte do texto para considerar tais aspectos.

Inicialmente, lembre-se que sobre a saída dos dados de identificação foi adicionado um ruído gaussiano $\sigma_r/\sigma_s = 5\%$, em que σ_r é o desvio padrão do ruído, enquanto σ_s é

o desvio padrão do sinal de saída. A primeira análise aqui realizada busca apresentar o impacto dessa adição de ruído na qualidade da identificação do modelo. Nos testes apresentados na Figura 5.6, retira-se o ruído da saída dos dados de identificação, utilizando esse sinal como base para gerar novas saídas com ruído. Aumentando gradativamente a potência do ruído via relação σ_r/σ_s , 50 sinais de saída são gerados como realizações distintas para cada valor de σ_r/σ_s . Os valores de σ_r/σ_s variam de 0% a 30% com aumentos sucessivos de 2%. Para cada saída perturbada, identifica-se um modelo seguindo as mesmas recomendações utilizadas na Seção 5.1. Por fim, toma-se a média e o desvio padrão dos valores de MAPE gerados pela validação dos 50 modelos. Por meio da Fig. 5.6, é possível perceber que, como esperado, a qualidade da identificação é, em média, cada vez mais afetada conforme valores crescentes de σ_r/σ_s são utilizados e, além disso, a previsibilidade da identificação é fortemente afetada como se vê pela tendência de alargamento dos intervalos de confiança.

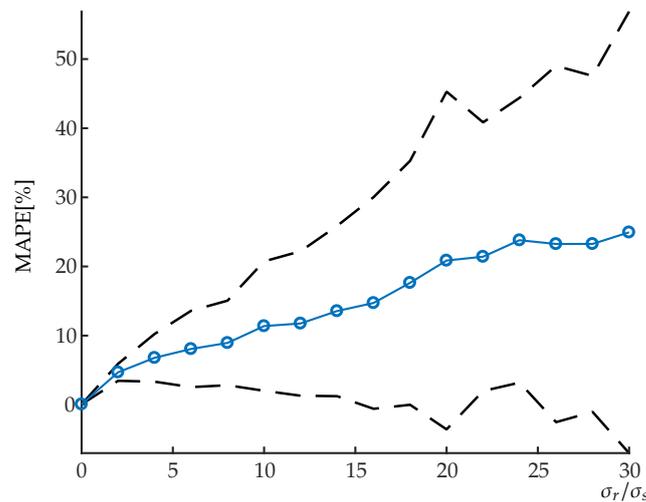


Figura 5.6: Teste de Monte Carlo realizado para avaliar a variação do MAPE[%] em função do aumento do ruído dado razão entre o desvio padrão do ruído e o desvio padrão do sinal de saída de identificação, σ_r/σ_s [%]. Foram realizados 50 testes de Monte Carlo para cada valor de σ_r/σ_s . Mostra-se a média desses 50 testes (\ominus) e ± 2 desvios-padrões (- -) dos testes. A linha contínua azul (-) é apenas ilustrativa, visto que os testes foram tomados para aumentos sucessivos de 2% em σ_r/σ_s .

Para discutir a perda de qualidade da compensação, uma análise sobre a presença de raízes complexas ao longo da compensação é realizada. Visando encontrar uma condição que relacione variações percentuais entre amostras de $r(k)$ e que garantam a existência de raízes reais, considere as seguintes substituições: $r(k+1) = (1 + \Delta_{k+1})r(k)$ e $r(k-1) = (1 + \Delta_k)r(k)$ aplicadas em (5.8):

$$(1 + \Delta_{k+1})r(k) \geq \hat{\theta}_1 r(k) + \hat{\theta}_3 (1 + \Delta_k)r(k), \quad (5.9)$$

sendo $\Delta_{k+1} \in [-100\%, 100\%]$ a variação percentual de $r(k)$ entre as amostras k e $k+1$;

enquanto $\Delta_k \in [-100\%, 100\%]$ é o análogo para $k - 1$ e k . Como $r(k) \geq 0$, o valor mínimo dessas porcentagens deve ser -100% . Assim, dividindo (5.9) por $r(k)$, a seguinte condição é encontrada:

$$\Delta_{k+1} \geq \hat{\theta}_3 \Delta_k + [\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_3 - 1], \quad r(k) > 0. \quad (5.10)$$

Na Figura 5.7, o semiplano que garante a presença de raízes reais é apresentado, visto que ele contém os valores que satisfazem (5.10). Embora esse semiplano seja construído em função de Δ_k , se $\Delta_{k+1} \geq -10,4\%$, existirão apenas raízes reais independentemente de Δ_k . Para referências $r(k)$ com altas frequências, existe a tendência de variações significativas entre poucas amostras, o que leva os valores para fora do semiplano dado por (5.10) e, conseqüentemente, raízes complexas aparecem ao longo do processo de compensação. Outra situação em que ocorre a presença de raízes complexas, está relacionada a $r(k) \approx 0$. Nesse caso, pequenas variações tornam-se percentualmente significantes, também levando à produção de raízes complexas. Note que esses resultados são consistentes com as Tabelas 5.1 e 5.2, nas quais os piores resultados de validação foram obtidos para pontos de operação próximos da origem e frequências mais altas.

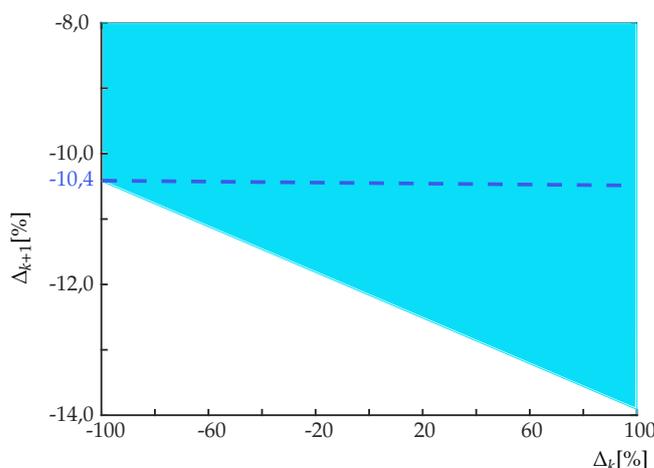


Figura 5.7: Semiplano definido pela desigualdade (5.10). As soluções apresentadas na região azul garantem que a Eq. 5.7 irá possuir apenas raízes reais. Com a redução de Δ_k , nota-se uma redução de possíveis valores de Δ_{k+1} que determinam raízes reais. Para $\Delta_{k+1} \geq -10,4\%$, existem apenas raízes reais independentemente de Δ_k .

Embora a presença de raízes complexas seja um inconveniente, quando elas ocorrem com baixa frequência e em regiões específicas, a estratégia de segurar o último valor de $m(k)$ é capaz de lidar com essa questão. Nesses casos, os resultados obtidos indicam que o compensador volta a calcular raízes reais em poucas amostras (ver Figura 5.5-b). Para essa figura, raízes complexas ocorrem em aproximadamente 15% de um ciclo da referência. É importante pontuar que para regiões em que o modelo apresenta melhor representatividade e para referências que não sejam muito rápidas, a ocorrência de raízes complexas não foi verificada.

Outra discussão está relacionada com a utilização da compensação estática para referências não necessariamente estáticas. Conforme a frequência tende a zero, o método de compensação dinâmica tende para a compensação estática. Contudo, quão melhor se torna a compensação estática conforme ocorre a redução dos valores de frequência? Para responder essa pergunta, a compensação estática é executada para referências de diferentes frequências, resolvendo a compensação estática iterativamente e fazendo $\bar{r} = r(k + 1)$. Os resultados desses testes são comparados com a compensação dinâmica na Tabela 5.3. Note que, nesta tabela, para cada amplitude, existe um valor de frequência em que a compensação estática apresenta resultados próximos ou melhores que a dinâmica. Observe que para $r_0 = 0,05V$, a compensação estática apresenta resultados próximos à compensação dinâmica, desde a frequência de 0,0005 Hz que foi a mais alta avaliada. Isso pode ser justificado pelo fato do modelo dinâmico ser menos representativo nesse ponto de operação, sendo que a compensação dinâmica é mais sensível, por utilizar valores variantes das amostras, tende a ser mais sensível à qualidade do modelo do que a compensação estática.

Tabela 5.3: Resultados de MAPE calculado para a compensação estática - $\bar{\mathcal{M}}_r(5.5)$ - e para a compensação dinâmica - $\mathcal{M}_r(5.7)$ - sendo $r(k) = r_0 + r_0\text{sen}(2\pi fk + \pi/2)$.

Tipo de Compensação	f [Hz]	r_0 [V]		
		0,05	0,10	0,20
Compensação Estática - $\bar{\mathcal{M}}_r(5.5)$	0,00005	6,5%	2,8%	2,2%
	0,0001	6,6%	2,9%	2,6%
	0,0002	6,8%	3,6%	3,9%
	0,0004	7,2%	6,5%	7,2%
	0,0005	8,2%	8,1%	8,8%
Compensação Dinâmica - $\mathcal{M}_r(5.7)$	0,00005	7,0%	2,8%	2,0%
	0,0001	7,1%	2,9%	2,1%
	0,0002	7,3%	3,2%	2,4%
	0,0004	7,6%	3,8%	3,0%
	0,0005	7,8%	4,1%	3,4%

Por fim, a Figura 5.8 mostra que os resultados da compensação para 10000 execuções seguindo a técnica de Monte Carlo. Em cada execução, um modelo perturbado $\mathcal{M}(5.2)$ é obtido ao se amostrar uma distribuição gaussiana centrada nos parâmetros originais e com matriz de covariância dada pela matriz de covariância do estimador utilizado para obter o modelo original. As linhas pretas tracejadas indicam a região determinada por $\mu(\bar{r}) \pm 2\sigma(\bar{r})$, em que $\mu(\bar{r})$ é a média e $\sigma(\bar{r})$ é o desvio padrão, avaliados para cada valor \bar{r} nas 10000 execuções. Os resultados mostram que a compensação apresenta bons resultados para $\bar{r} < 0,3$ e, a despeito das variações nos parâmetros, e, a partir daí, ocorre certa degradação. Importante notar que a região determinada pelas linhas tracejadas de erro define uma região estreita que contém a relação linear. Isso evidencia que o compensador obtido apresentou robustez a perturbações em seus parâmetros.

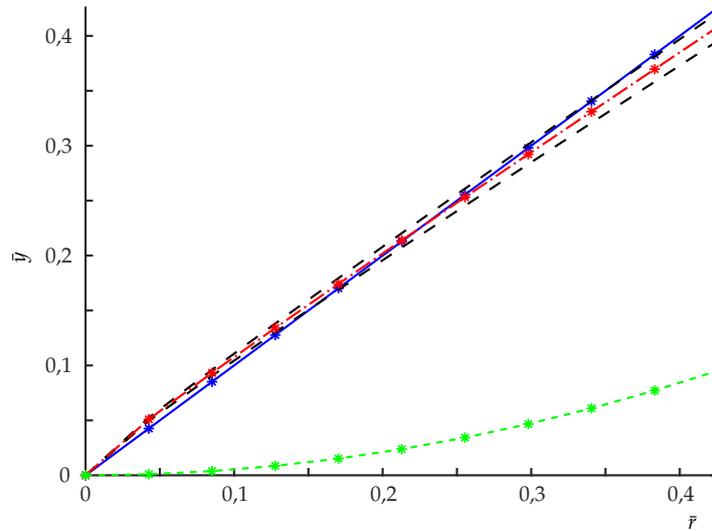


Figura 5.8: Resultados da abordagem de Monte Carlo. (---) refere-se a curva estática do sistema não compensado, (-*-), a referência e (-*-) é $\mu(\bar{r})$, a média calculada para as 10000 execuções em cada valor \bar{r} compreendida entre as barras (- -) que representam $\pm 2\sigma(\bar{r})$.

5.2 Exemplo 2 - Um Sistema Histerético

Neste exemplo, o modelo BW para viga em consola apresentada na Seção 3.1 é utilizado com os mesmos parâmetros que lá estão descritos. Daqui em diante, o modelo das Equações 3.1 e 3.2 é considerado como sistema \mathcal{S} a ser compensado.

Para identificar um modelo \mathcal{M}_h (2.13) para \mathcal{S} , a entrada de identificação $u(k)$ é obtida a partir de (3.6) e (3.7) com: $n = 2$, $f_1 = 0,2\text{Hz}$, $f_2 = 5\text{Hz}$, $v = 2$, $o_1 = o_2 = 0\text{V}$, $G_1 = 25\text{V}$, $G_2 = 50\text{V}$, $N = 19200$, $N_1 = 16000$ e $N_2 = 3200$. Novamente, um ruído gaussiano com $\sigma_r/\sigma_s = 5\%$ é adicionado diretamente à saída. Com base na Seção 4.4, $u(k)$, $y(k)$, $\phi_1(k)=u(k)-u(k-1)$ e $\phi_2(k)=\text{sign}(\phi_1(k))$ são escolhidos como regressores candidatos. Utilizando o algoritmo ERR conjugado ao critério AIC conforme a Seção 4.1, tomando $\ell = 3$ e $n_y = n_u = 1$, o seguinte modelo de quatro termos \mathcal{M}_h foi obtido:

$$\mathcal{M}_h : y(k)=\hat{\theta}_1 y(k-1)+\hat{\theta}_2 \phi_1(k-1)\phi_2(k-1)u(k-1)+\hat{\theta}_3 \phi_1(k-1)\phi_2(k-1)y(k-1)+\hat{\theta}_4 \phi_1(k-1), \quad (5.11)$$

sendo $\hat{\theta}_1 = 1,000099 \times 10^0$, $\hat{\theta}_2 = 6,630567 \times 10^{-3}$, $\hat{\theta}_3 = -6,247018 \times 10^{-3}$, e $\hat{\theta}_4 = 7,892915 \times 10^0$. Essa estratégia de identificação caixa cinza é baseada em (MARTINS e AGUIRRE, 2016).

Visando comparar as estratégias de identificação no contexto de histerese, utilizou-se a estratégia caixa cinza proposta por ABREU et al. (2020). A estrutura selecionada é idêntica à de \mathcal{M}_h mas os parâmetros foram reestimados de modo a garantir $\sum_y = 1$. Isso pode ser feito, sem uma nova seleção de estrutura, devido ao fato de que o modelo \mathcal{M}_h (5.11) não apresenta os regressores que devem ser eliminados, conforme (i), (ii) e (iii) - veja a Subseção 2.3.2. O modelo obtido seguindo essa formulação é denominado

$\mathcal{M}_{h,z}$ e é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{h,z} : y(k) = & \hat{\theta}_{1,z}y(k-1) + \hat{\theta}_{2,z}\phi_2(k-1)\phi_3(k-1)u(k-1) \\ & + \hat{\theta}_{3,z}\phi_2(k-1)\phi_3(k-1)y(k-1) + \hat{\theta}_{4,z}\phi_2(k-1), \end{aligned} \quad (5.12)$$

sendo $\hat{\theta}_{1,z} = 1,000000 \times 10^0$, $\hat{\theta}_{2,z} = 6,630913 \times 10^{-3}$, $\hat{\theta}_{3,z} = -6,157515 \times 10^{-3}$ e $\hat{\theta}_{4,z} = 7,893146 \times 10^0$.

Por meio dos mesmos dados de identificação supramencionados, mas valendo-se de uma abordagem puramente caixa preta, obteve-se o seguinte modelo de 3 termos, via ERR e AIC, denominado $\mathcal{M}_{h,p}$:

$$\mathcal{M}_{h,p} : y(k) = \hat{\theta}_{1,p}y(k-1) + \hat{\theta}_{2,p}y(k-2) + \hat{\theta}_{3,p}u(k-1) \quad (5.13)$$

sendo $\hat{\theta}_{1,p} = 1,331425 \times 10^0$, $\hat{\theta}_{2,p} = -3,407265 \times 10^{-1}$ e $\hat{\theta}_{3,p} = 8,692694 \times 10^{-3}$.

A Figura 5.9 apresenta o resultado da validação para \mathcal{M}_h . Os resultados de validação dos três modelos mencionados para entradas senoidais de diversas frequências e amplitudes são apresentado na Tabela 5.4. Tais resultados mostram que o modelo caixa preta $\mathcal{M}_{h,p}$ não é representativo, enquanto os modelos caixa cinza apresentaram resultados próximos, com certa degradação em altas frequências e amplitudes. O fato de ambos modelos caixa cinza apresentarem resultados próximos é esperado visto que possuem a mesma estrutura e parâmetros de valores próximos.

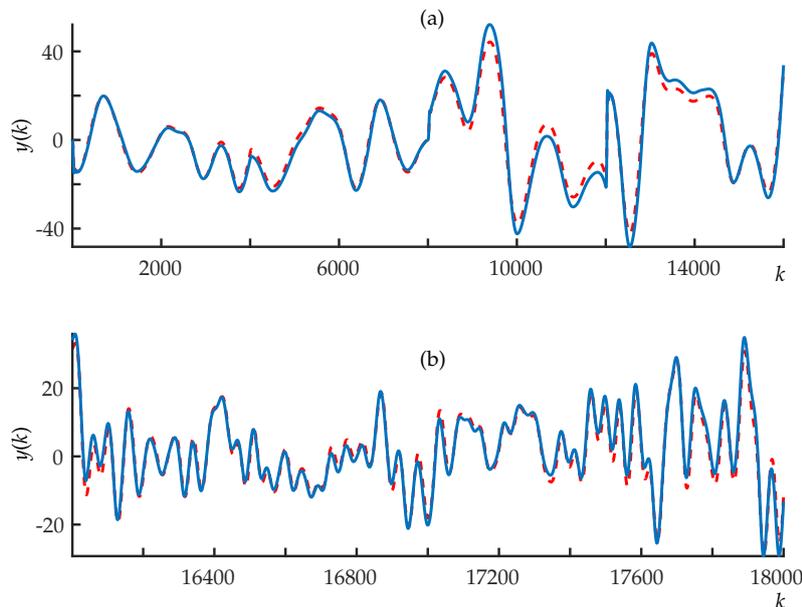


Figura 5.9: Validação livre de ruído para modelo \mathcal{M}_h (5.11): a linha contínua (—) apresenta valores de $y(k)$ para o sistema \mathcal{S} (3.1 e 3.2) a linha pontilhada (- -) apresenta os valores de saída do modelo (5.11). Em (a), tem-se a evolução temporal para a baixa frequência do sinal de excitação, $f_1 = 0,2\text{Hz}$ ($0 \leq k \leq 18000$), enquanto em (b), têm-se as primeiras 2000 amostras para a frequência mais alta, $f_2 = 5\text{Hz}$, ($16001 \leq k \leq 18000$).

Tabela 5.4: MAPE de simulação livre para os modelos 5.11, 5.12 e 5.13, excitados por entradas senoidais da forma $u(k) = G\text{sen}(2\pi fk)$.

Modelos	f [Hz]	G_0 [μm]		
		20	30	40
Caixa Cinza \mathcal{M}_h (5.11)	0,2	2,6%	2,0%	4,7%
	1,0	2,7%	1,3%	4,1%
	5,0	7,7%	5,0%	3,6%
Caixa Cinza $\mathcal{M}_{h,z}$ (5.12)	0,2	2,7%	2,4%	4,9%
	1,0	2,7%	1,3%	4,1%
	5,0	7,6%	5,0%	3,6%
Caixa Preta $\mathcal{M}_{h,p}$ (5.13)	0,2	14,1%	10,6%	8,6%
	1,0	29,0%	27,4%	26,7%
	5,0	31,4%	30,4%	30,2%

Seguindo os passos 1, 2, 3 e 5 (passo 4 não é necessário) do procedimento apresentado na Seção 4.4, obtém-se o seguinte compensador para o modelo \mathcal{M}_h :

$$0 = \hat{\theta}_1 r(k) - r(k+1) + \hat{\theta}_2 |m(k) - m(k-1)| m(k) + \hat{\theta}_3 |m(k) - m(k-1)| r(k) + \hat{\theta}_4 |m(k) - m(k-1)|, \quad (5.14)$$

para $m(k) \neq m(k-1)$. Tal compensador pode ser dividido em dois polinômios em $m(k)$ como (4.13) e (4.14), o que é mostrado no passo 6, sendo denotado no texto como $\mathcal{M}_{h,r}$:

$$0 = c_2^C m(k)^2 + c_1^C m(k) + c_0^C(k), \quad \text{para } m(k) > m(k-1); \quad (5.15)$$

e

$$0 = c_2^D m(k)^2 + c_1^D m(k) + c_0^D(k), \quad \text{para } m(k) < m(k-1), \quad (5.16)$$

sendo $c_2^C = \hat{\theta}_2$, $c_1^C(k) = -\hat{\theta}_2 m(k-1) + \hat{\theta}_3 r(k) + \hat{\theta}_4$, $c_0^C(k) = \hat{\theta}_1 r(k) - \hat{\theta}_3 m(k-1) r(k) - \hat{\theta}_4 m(k-1) - r(k+1)$, $c_2^D = -\hat{\theta}_2$, $c_1^D(k) = \hat{\theta}_2 m(k-1) - \hat{\theta}_3 r(k) - \hat{\theta}_4$, e $c_0^D(k) = \hat{\theta}_1 r(k) + \hat{\theta}_3 m(k-1) r(k) + \hat{\theta}_4 m(k-1) - r(k+1)$.

Como existem parâmetros de (5.15) e (5.16) que dependem de $m(k-1)$, a inicialização do compensador é necessária em $k = 0$. Aplicando $\tilde{u} = 50\text{sen}(2\pi 0,2k)$ ao modelo \mathcal{M}_h (5.11), obtém-se o laço $\mathcal{H}(\tilde{u}, \tilde{y})$. Fazendo $\tilde{y} = r(k+1)$, $m(k-1)$ pode ser determinado diretamente do laço \mathcal{H} , similarmente ao que foi apresentado no Exemplo 4.

É importante notar que o compensador de $\mathcal{M}_{h,z}$ tem a mesma estrutura que (5.15) e (5.16), a menos dos parâmetros. Fazendo $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_{1,z}$, $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_{2,z}$, $\hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_{3,z}$ e $\hat{\theta}_4 = \hat{\theta}_{4,z}$ nas Equações 5.15 e 5.16, obtém-se o compensador $\mathcal{M}_{h,z,r}$, cujos parâmetros são análogos aos de $\mathcal{M}_{h,r}$ procedendo-se com as substituições mencionadas acima:

$$0 = c_{z,2}^C m(k)^2 + c_{z,1}^C m(k) + c_{z,0}^C(k), \quad \text{para } m(k) > m(k-1); \quad (5.17)$$

e

$$0 = c_{z,2}^D m(k)^2 + c_{z,1}^D(k) m(k) + c_{z,0}^D(k), \text{ para } m(k) < m(k-1). \quad (5.18)$$

Para obter um compensador para o modelo caixa preta $\mathcal{M}_{h,p}$ (5.13), deve-se proceder conforme a compensação dinâmica mostrada na Seção 4.3, visto que tal modelo não apresenta os regressores velocidade $\phi_1(k)$ e sinal da velocidade $\phi_2(k)$. Assim, o compensador linear $\mathcal{M}_{h,p,r}$ é:

$$m(k) = \frac{r(k+1) - \hat{\theta}_{1,p} r(k) - \hat{\theta}_{2,p} r(k-1)}{\hat{\theta}_{3,p}}. \quad (5.19)$$

Observe que a inicialização desse compensador é trivial, visto que não existem parâmetros dependentes de valores prévios da entrada de compensação. Portanto, basta fazer em $k = 0$, $r(-1) = r(0)$. Também é importante perceber que como $\hat{\theta}_{3,p} \approx 0$, tal compensador possui uma tendência de apresentar problemas numéricos, o que pode fazer com que os valores anteriores sejam segurados em muitas iterações.

Os resultados de validação do compensador $\mathcal{M}_{h,r}$ (5.15 e 5.16) estão mostrados na Figura 5.10, enquanto uma comparação entre os desempenhos dos três compensadores

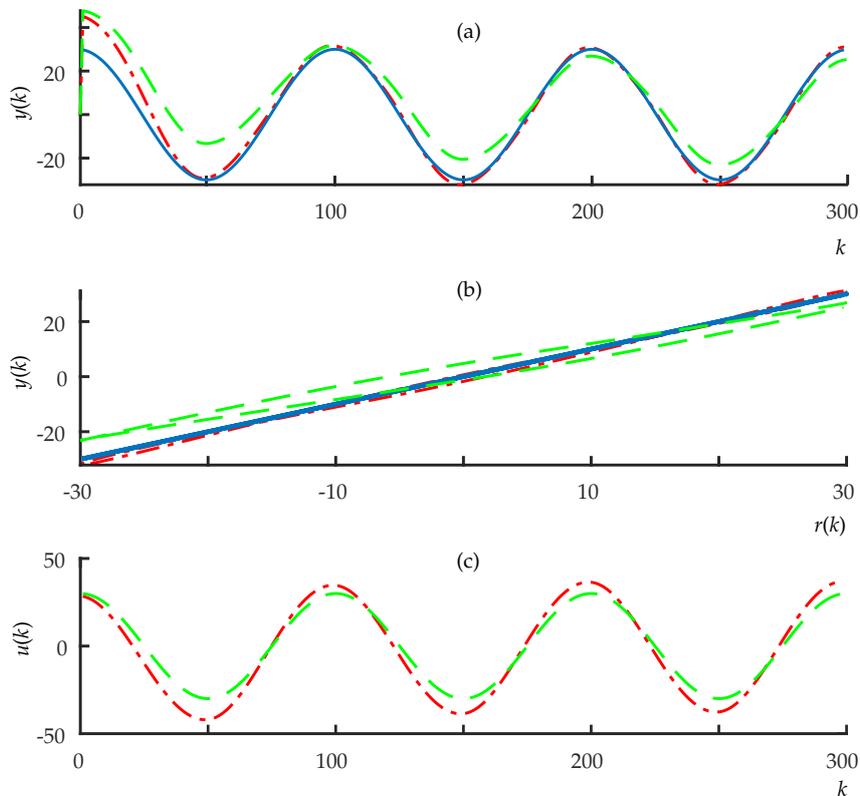


Figura 5.10: Resultados de desempenho do compensador $\mathcal{M}_{h,r}$ (5.15 e 5.16) para compensação do sistema histerético \mathcal{S} (3.1 e 3.2). (a) evolução temporal das saídas; (b) plano $r \times y$ e (c) evolução temporal das entradas. (—) é a referência $r(k) = 30\text{sen}(2\pi(2)k + \pi/2)$; (---) são os resultados para $\mathcal{M}_{h,r}$ e (- -) refere-se ao sistema não compensado.

e do sistema não compensado é mostrada na Tabela 5.5. Tais resultados indicam que os sistemas compensados por $\mathcal{M}_{h,r}$ (5.15 e 5.16) e por $\mathcal{M}_{h,z,r}$ (5.17 e 5.18) apresentam melhores resultados para o seguimento da referência em todos os cenários avaliados. Além disso, os piores resultados ocorrem para altas frequências e amplitudes, que são regiões onde o modelo é menos representativo (ver Tabela 5.4) considerando os dois compensadores mencionados. Por outro lado, o compensador gerado pelo modelo caixa preta, $\mathcal{M}_{h,p,r}$ (5.19) não foi capaz de apresentar melhores resultados nem quando comparado ao sistema não compensado. Isso já era esperado, visto que as técnicas de modelagem caixa preta disponíveis na literatura não são capazes de descrever as características fundamentais de um sistema histerético. A seguir, apresenta-se uma discussão sobre aspectos importantes relacionados aos compensadores apresentados nesta seção.

Tabela 5.5: MAPE para sistemas compensados segundo as abordagens previamente apresentadas, e para o sistema sem compensação considerando $r(k) = G_0 \text{sen}(2\pi f k + \pi/2)$.

Abordagem	f [Hz]	G_0 [μm]		
		20	30	40
Compensado por $\mathcal{M}_{h,r}$ (5.15 e 5.16)	0,2	1,4%	3,2%	5,2%
	1,0	0,9%	2,5%	4,5%
	2,0	1,0%	1,4%	3,4%
	5,0	5,4%	4,5%	3,9%
Compensado por $\mathcal{M}_{h,z,r}$ (5.17 e 5.18)	0,2	1,8%	3,6%	5,6%
	1,0	1,0%	2,6%	4,5%
	2,0	1,0%	1,4%	3,3%
	5,0	5,4%	4,5%	4,0%
Compensado por $\mathcal{M}_{h,p,r}$ (5.19)	0,2	10,7%	9,7%	9,1%
	1,0	61,7%	48,5%	38,3%
	2,0	87,4%	62,3%	41,3%
	5,0	40,9%	41,4%	41,9%
Sem compensação	0,2	7,8%	7,1%	6,4%
	1,0	7,8%	7,0%	6,3%
	2,0	7,7%	6,9%	6,1%
	5,0	7,6%	6,6%	5,8%

5.2.1 Discussão

Especificamente sobre o modelo caixa preta, tem-se que este sequer satisfaz a Proposição 4.2.1 e, portanto, não poderia ser utilizado para compensação. A realização desta foi feita para corroborar a necessidade de que os modelos sejam representativos e da identificação caixa cinza no contexto de histerese. Tais pontos foram previamente

discutidos em (MARTINS e AGUIRRE, 2016) e em (ABREU et al., 2020). A baixa qualidade do modelo caixa preta $\mathcal{M}_{h,p}$ (5.13) e de sua respectiva compensação podem ser verificadas nas Tabelas 5.4 e 5.5.

É importante mencionar que os resultados para os sistemas compensados obtidos pelos modelos caixa cinza foram superiores ao não compensado em todos os cenários avaliados (ver Tabela 5.5). Ademais, os piores resultados de compensação ocorrem para as regiões onde esses modelos são menos representativos, que são aquelas de maiores frequências e amplitudes, conforme atestam os dados de validação da Tabela 5.4. Ambos os modelos caixa cinza apresentaram resultados próximos para validação, tanto de predição quanto de compensação, sendo os resultados gerados por \mathcal{M}_h (5.11) ligeiramente superiores aos de $\mathcal{M}_{h,z}$ (5.12). Note que isso era esperado devido ao fato de que ambos modelos tem a mesma estrutura e parâmetros de valores próximos. Uma comparação relevante de ser feita é a qualidade da predição e da compensação para os respectivos modelos quando referências e entradas que inicialmente são variantes no tempo tornam-se constantes em algum momento.

Tal comparação é apresentada na Fig. 5.11. Nessa figura, o desempenho dos modelos e de seus compensadores são avaliados para entradas/referências senoidais que

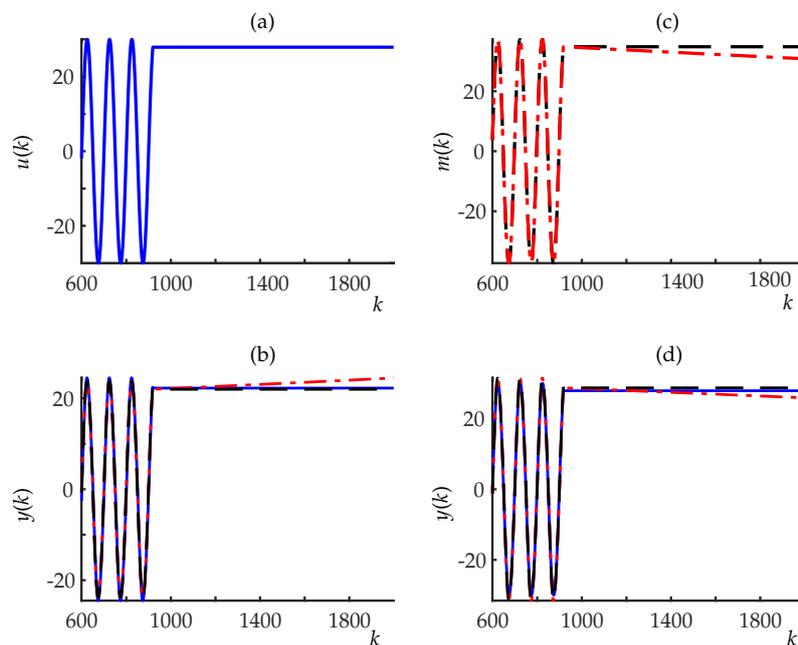


Figura 5.11: Resultados de validação e compensação para modelos \mathcal{M}_h (5.11) e $\mathcal{M}_{h,z}$ (5.12) quando alimentados por entradas e referências senoidais que se tornam constante em uma dada amostra. Em (a), tem-se a evolução temporal da entrada $u(k) = 30\text{sen}(2\pi(2)k)$ que se torna constante em $k = 920$. Os modelos e o sistema \mathcal{S} são alimentados por essa entrada, sendo que em (b), apresenta-se as respectivas saídas para \mathcal{S} (-); para \mathcal{M}_h (---) e para $\mathcal{M}_{h,z}$ (- -). Em (c), são mostradas as entradas de compensação geradas por meio da inversão de \mathcal{M}_h (---) e de $\mathcal{M}_{h,z}$ (- -) que foram calculadas para $r(k) = u(30\text{sen}(2\pi(2)k))$. Por fim, (d) apresenta as respectivas saídas de (c), com $r(k)$ representada pela linha contínua azul (-).

se tornam constantes em uma determinada amostra. Note que tanto os resultados de validação (Fig. 5.11-b) quanto de compensação (Fig. 5.11-d) para \mathcal{M}_h (5.11) não convergem em estado estacionário. Nesta condição, tem-se $\bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_2 = 0$, de modo que ambos os modelos se tornam: $\bar{y} = \Sigma_y \bar{y}$. Dessa forma, os dois apresentam um único autovalor igual Σ_y . Como $\Sigma_y = \hat{\theta}_1 = 1,000099 > 1$, \mathcal{M}_h é instável em estado estacionário com divergência lenta, visto que $\Sigma_y \approx 1$. Por outro lado, para $\mathcal{M}_{h,z}$ (5.12), $\Sigma_y = \hat{\rho}_1 = 1$, de modo que o modelo apresenta um *continuum* de pontos fixos, permanecendo em seu último estado. É importante frisar que os métodos de compensação são aplicados em malha aberta e, portanto, erros em estado estacionário são esperados, tendendo a ser menores para modelos mais representativos, principalmente aqueles que respeitem as restrições (i), (ii), (iii) e (iv), Subseção 2.3.2, propostas por ABREU et al. (2020). Para o presente exemplo, \mathcal{M}_h (5.11) tem um erro infinito em estado estacionário, enquanto $\mathcal{M}_{h,z}$ (5.12) apresenta um erro em estado estacionário de aproximadamente $0,26\mu\text{m}$ na Fig. 5.11-(b). Tais erros são refletidos nas respectivas entradas de compensação Fig. 5.11-(c) e, consequentemente, nos desempenhos dos sistemas compensados. No caso da compensação mostrada na Fig. 5.11-(d), tem-se que $\mathcal{M}_{h,r}$ (5.15 e 5.16) determina uma saída com erro infinito em estado estacionário, enquanto que $\mathcal{M}_{h,z,r}$ (5.17 e 5.18), exibe erro de $0,83\mu\text{m}$. Devido a essas características, é recomendável utilizar modelos que respeitem as restrições propostas por ABREU et al. (2020), mesmo porque tais modelos apresentaram praticamente os mesmos resultados quanto à qualidade de predição/compensação que aquele em que tais restrições não foram respeitadas.

Para ilustrar o impacto da inicialização do compensador com condições iniciais apropriadas, apresenta-se a Figura 5.12. Nessa figura, usa-se o mesmo compensador

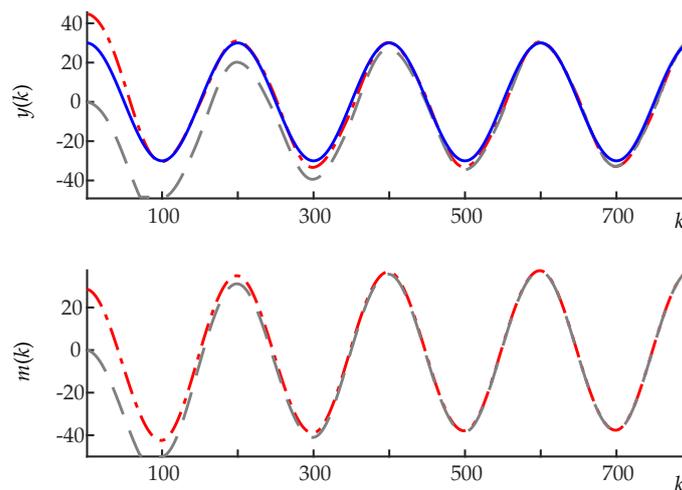


Figura 5.12: Impacto de usar condições iniciais adequadas para o compensador $\mathcal{M}_{h,r}$ (5.15) e (5.16). A figura mostra a evolução temporal para: (a) saídas; (b) entradas de compensação. (—) é $r(k) = 30\text{sen}(2\pi(2)k + \pi/2)$; (---), resultados de compensação usando condições iniciais dadas pelo laço \mathcal{H} e (- -), resultados de compensação para condições iniciais nulas.

$\mathcal{M}_{h,r}$ (5.15 e 5.16) alimentado com condições iniciais nulas e com aquelas calculadas por meio do laço \mathcal{H} como usado nas compensações anteriores e descritos na Subseção 4.4.1. Percebe-se que, usando as condições iniciais geradas via \mathcal{H} , a entrada de compensação é mais suave, não ocorrendo a saturação da entrada, além do fato de se alcançar o rastreamento mais rapidamente. A saturação ocorre devido ao fato do compensador encontrar valores fora do domínio de validade, de modo que o valor alcançado no ponto de saturação é segurado. Embora quando alimentando com condições iniciais nulas, tenha-se os inconvenientes supramencionados, como os compensadores são idênticos, após 3 ciclos da referência, tem-se praticamente a mesma resposta. Um problema de não se inicializar o compensador com condições iniciais adequadas pode ocorrer caso tais condições estejam em uma região de baixa validade do modelo, de modo que o surgimento recorrente de raízes infactíveis, gere uma entrada de compensação pouco efetiva.

Por fim, a Figura 5.13 mostra os resultados para 10000 testes de Monte Carlo realizados similarmente ao que foi feito na Subseção 5.1.1, em que se utiliza um modelo perturbado \mathcal{M}_h (5.11). A referência considerada foi $r(k) = 20\text{sen}(2\pi(2)k + \pi/2)$ aplicada ao longo de 5 ciclos. Os testes de Monte Carlo apresentam a região determinada por $\mu(k) \pm 2\sigma(k)$, sendo que $\mu(k)$ e $\sigma(k)$ são análogos aos descritos na Subseção 5.1.1, agora para k , ao invés de \bar{r} , visto que se trabalha em um contexto dinâmico. Observa-se que no

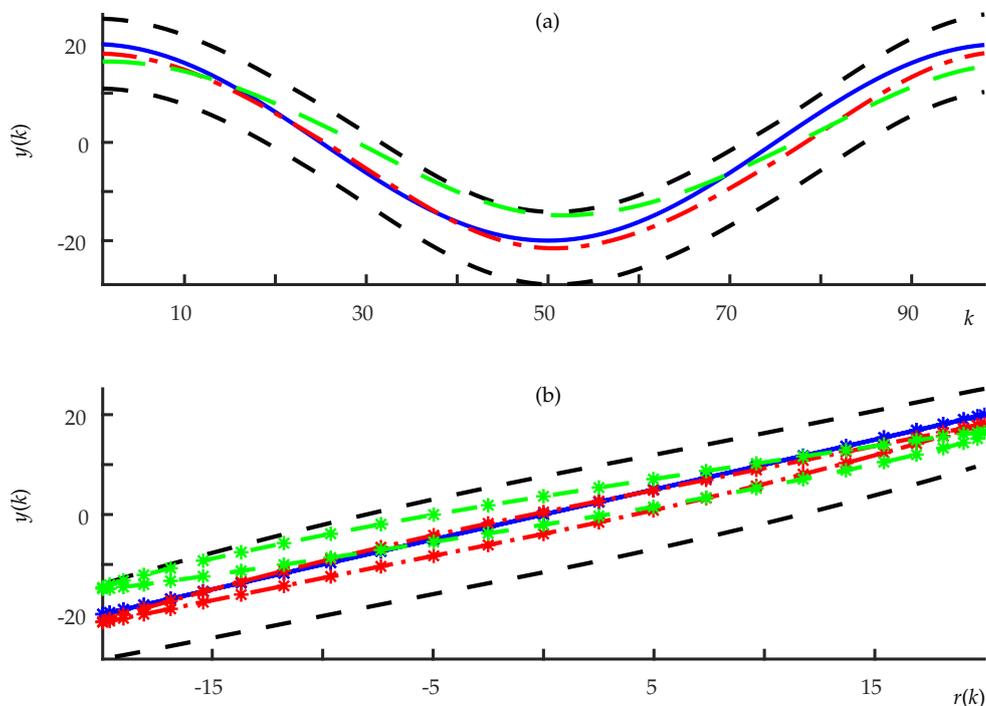


Figura 5.13: Resultados para 10000 execuções do teste de Monte Carlo. (a) evolução temporal das saídas no último ciclo; (b) plano $r(k) \times y(k)$. (-*-) refere-se ao sistema não compensado, (-*-) refere-se à referência e (-*-) é a média $\mu(k)$ das 10000 execuções para o sistema compensado. (- -) representa as barras de erro que correspondem a $\pm 2\sigma(k)$.

caso considerado, tem-se uma região mais larga do que aquela obtida para a simulação de Monte Carlo no teste do sistema de aquecimento, Fig. 5.8. Ocorre que tal modelo é consideravelmente sensível a variações no parâmetro $\hat{\theta}_2$. A Tabela 5.6 apresenta testes em que são realizados novamente 10000 execuções de Monte Carlo, mas agora fixando, por vez, cada um dos parâmetros com o valor original. Nessa tabela toma-se a média de desvios-padrões ao se fixar cada parâmetro. Fica evidente, por meio da tabela, que existe uma maior sensibilidade a variações em $\hat{\theta}_2$. Isso se justifica pelo fato de esse parâmetro compor unicamente os termos dominantes do compensador $\mathcal{M}_{h,r}$ (5.15 e 5.16): $c_2^C = c_2^D = \hat{\theta}_2 = 6,630567 \times 10^{-3}$. Assim, variações nesse parâmetro podem gerar dois efeitos indesejados. O primeiro está relacionado a perturbações que podem ocasionar a mudança de sinal do parâmetro. Note que os polinômios são quadráticos, de modo que o sinal de $\hat{\theta}_2$ define a concavidade da parábola cujas raízes são calculadas. Assim, variações nesse parâmetro podem gerar mudanças bruscas em pelo menos uma das raízes devido à mudança de concavidade. A outra, está relacionada ao fato de que o valor desse parâmetro já é pequeno, de modo que pequenas variações podem aproximá-lo ainda mais de zero, gerando polinômios algébricos praticamente lineares e, portanto, de menor representatividade.

Tabela 5.6: Impacto de se fixar cada um dos parâmetros nos testes de Monte Carlo. $\bar{\sigma}$ é a média de $\sigma(k)$ para 10000 execuções Monte Carlo considerando cada parâmetro fixado no respectivo valor original.

Parâmetro fixo	$\bar{\sigma}$
$\hat{\theta}_1$	3,47
$\hat{\theta}_2$	0,51
$\hat{\theta}_3$	3,80
$\hat{\theta}_4$	3,77
Todos livres	3,35

5.3 Considerações Finais

Este capítulo apresentou a aplicação da metodologia proposta no Capítulo 4 para compensação de não linearidades em sistemas simulados. Em todos os cenários avaliados, a utilização dos compensadores obtidos apresentaram resultados superiores ao sistema não compensado. Algumas análises e discussões foram realizadas, como por exemplo, sobre a presença de raízes infactíveis para regiões de baixa acurácia do modelo. Além disso, testes de Monte Carlo foram realizados para investigar a robustez dos compensadores a variações em seus parâmetros. O impacto do aumento da potência do ruído na qualidade dos modelos obtidos e uma discussão sobre a relevância de uma inicialização realizada com condições iniciais coerentes também foram apre-

sentados. Além disso, discutiram-se aspectos relevantes sobre como modelos caixa cinza identificados segundo a abordagem proposta em (ABREU et al., 2020) colaboram para que o modelo apresente um maior número de propriedades típicas de sistemas hysteréticos. No próximo capítulo, são apresentados resultados de compensação de histerese utilizando modelos NARX para um sistema físico.

Resultados Experimentais

Neste capítulo, aplica-se a metodologia proposta no Capítulo 4 para a compensação de histerese na válvula pneumática previamente apresentada na Subseção 3.3.2. Como já detalhado, esse tipo de atuador está sujeito a diversos efeitos não lineares, incluindo histerese. Além de projetar os compensadores via metodologia proposta nesta dissertação, o presente capítulo compara os resultados obtidos com técnicas previamente publicadas. Uma delas consiste na inversão analítica do modelo de Bouc-Wen (BW) (RAKOTONDRABE, 2011), enquanto as outras estão baseadas em modelos NARX e foram recentemente publicadas (ABREU et al., 2020). Na sequência são apresentados os modelos obtidos para compensação. Os resultados deste capítulo encontram-se em fase de publicação em (TAVARES et al., 2020).

6.1 Obtenção e Validação dos Modelos

Define-se a válvula pneumática apresentada na Subseção 3.3.2 como sistema S a ser compensado, sendo o tempo de amostragem $T_s = 0,01$ s. Para fins comparativos, utilizaram-se os mesmos dados apresentados em (ABREU et al., 2020) como sinais de entrada para a identificação dos modelos. Esses dados foram obtidos por meio de um filtro passa baixa com frequência de corte em 0,1 Hz, que foi aplicado sobre um ruído gaussiano. Esse processo é similar ao que é feito neste trabalho, utilizando-se uma única frequência. Para a validação dos modelos, senoides com frequência de 0,1 Hz e diferentes amplitudes foram utilizadas, sendo aqui realizado um conjunto mais amplo de testes do que aqueles feitos no artigo mencionado. Ambos conjuntos têm duração de 200 s e tamanho $N = 20000$ amostras.

Na sequência são apresentados 5 modelos. Os dois primeiros foram obtidos neste trabalho conforme procedimento da Subseção 4.1, que foi também aplicado no Capítulo 5. Nessa estratégia, aplica-se o ERR conjugado ao AIC para seleção da estrutura e utiliza-se o EMQ para estimação dos parâmetros. Os termos candidatos para compor os modelos são gerados com $\ell = 3$, $n_y = 2$ e $n_u = 1$. Tais modelos são:

1) \mathcal{M}_h , identificado conforme proposto por MARTINS e AGUIRRE (2016), em que os regressores $\phi_1(k)$ e $\phi_2(k)$ são incluídos como regressores candidatos, sendo esta a única

informação caixa cinza. Assim, \mathcal{M}_h possui 7 termos, sendo descrito por:

$$y(k) = \hat{\theta}_1 y(k-1) + \hat{\theta}_2 y(k-2) + \hat{\theta}_3 u(k-1) + \hat{\theta}_4 \phi_1^2(k-1) \phi_2(k-1) + \theta_5 y(k-1) u(k-1) \\ + \theta_6 u(k-1) \phi_1(k-1) \phi_2(k-1) + \hat{\theta}_7 y(k-2) \phi_1(k-1) \phi_2(k-1), \quad (6.1)$$

em que $\hat{\theta}_1 = 9,73 \times 10^{-1}$, $\hat{\theta}_2 = 2,44 \times 10^{-2}$, $\hat{\theta}_3 = 1,13 \times 10^{-3}$, $\hat{\theta}_4 = 2,70 \times 10^2$, $\hat{\theta}_5 = 1,52 \times 10^{-3}$, $\hat{\theta}_6 = 4,07$, e $\hat{\theta}_7 = -5,18$.

2) $\mathcal{M}_{h,cns}$ que é identificado seguindo as recomendações apresentadas em (ABREU et al., 2020). Portanto, além da inclusão dos regressores $\phi_1(k)$ e $\phi_2(k)$ como candidatos, também são excluídos os termos mostrados em (i), (ii) e (iii), além dos parâmetros serem forçados a satisfazer $\Sigma_y = 1$ (Subseção 2.3.2). Inicialmente, seleciona-se a estrutura sem a utilização da restrição nos parâmetros e, de posse dessa estrutura, aplica-se o método dos mínimos quadrados com restrições (MQR). $\mathcal{M}_{h,cns}$ é um modelo com 5 termos dado por:

$$y(k) = \hat{\rho}_1 y(k-1) + \hat{\rho}_2 y(k-2) + \hat{\rho}_3 \phi_1(k-1) + \rho_4 u(k-1) \phi_1(k-1) \phi_2(k-1) + \hat{\rho}_5 y(k-2) \phi_1(k-1) \phi_2(k-1), \quad (6.2)$$

com $\hat{\rho}_1 = 9.76 \times 10^{-1}$, $\hat{\rho}_2 = 2.40 \times 10^{-2}$, $\hat{\rho}_3 = 1.19 \times 10^{-1}$, $\hat{\rho}_4 = 3.76$ e $\hat{\rho}_5 = -4.73$. Observe que $\Sigma_y = \hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_2 = 1$.

Na sequência, três modelos apresentados na literatura são considerados para propósitos de comparação. Tais modelos são:

3) \mathcal{M}_{bw} , o modelo BW utilizado nos Capítulos 3 e 5, re-estimado com os novos dados de identificação pelo mesmo algoritmo evolucionário baseado em nichos, que está descrito na Subseção 3.2.2. \mathcal{M}_{bw} é:

$$\dot{h}(t) = 7.54 \times 10^{-1} \dot{u}(t) - 4.96 |\dot{u}(t)| h(t) - 3.61 \dot{u}(t) |h(t)|, \\ y(t) = 7.21 \times 10^{-1} u(t) - h(t). \quad (6.3)$$

Os últimos dois modelos adotados foram identificados por ABREU et al. (2020) com o mesmo conjunto de dados que os modelos anteriores. Os meta-parâmetros utilizados para a definição dos regressores candidatos são, $\ell = 3$, $n_y = 2$ e $n_u = 2$. Tais modelos respeitam as restrições (i), (ii) e (iii), além de $\Sigma_y = 1$, sendo a seleção de estrutura realizada via ERR. Para a estimação dos parâmetros, os autores utilizaram o algoritmo clássico MQ, diferentemente dos modelos NARX identificados neste trabalho, em que se utiliza o método EMQ (Subseção 2.3.4). Tais modelos são:

4) $\mathcal{M}_{h,cns,2}$ identificado com as mesmas restrições que $\mathcal{M}_{h,cns}$ (6.2), mais uma restrição adicional que determina que os compensadores sejam lineares, de modo a ser possível explicitar a entrada de compensação (ABREU et al., 2020). O modelo estimado com 5

termos foi:

$$y(k) = y(k-1) - 19.76\phi_1(k-2) + 19.32\phi_1(k-1) + 9.44\phi_2(k-2)\phi_1(k-2)u(k-2) - 12.61\phi_2(k-2)\phi_1(k-2)y(k-1). \quad (6.4)$$

5) $\check{\mathcal{M}}_h$ representa o modelo identificado para descrever uma relação inversa entre $u(k)$ e $y(k)$. Nesse caso, a saída do modelo é a entrada estimada $\hat{u}(k)$, enquanto a saída do sistema $y(k)$ torna-se a entrada do modelo. Como existe uma relação inversa, o conjunto de regressores é levemente modificado, utilizando-se $\check{\phi}_1(k) = y(k) - y(k-1)$ e $\check{\phi}_2(k) = \text{sign}[\check{\phi}_1(k)]$ ao invés de $\phi_1(k)$ e $\phi_2(k)$. Seguindo as mesmas restrições usadas para $\mathcal{M}_{h,\text{cns}}$ (6.2) com as conversões apropriadas para o modelo inverso, ABREU et al. (2020) determinaram o seguinte modelo com 6 termos, referido neste trabalho como $\check{\mathcal{M}}_h$:

$$\hat{u}(k) = \hat{u}(k-1) + 86,67\check{\phi}_1(k-1) - 85,02\check{\phi}_1(k-2) - 0,98\check{\phi}_1(k-1)y(k-2) + 1,72\check{\phi}_2(k-2)\check{\phi}_1(k-2)y(k-2) - 1,13\check{\phi}_2(k-2)\check{\phi}_1(k-2)\hat{u}(k-1). \quad (6.5)$$

Maiores detalhes sobre o processo de obtenção dos modelos (6.5) e (6.4), além de seus respectivos compensadores, podem ser consultados em (ABREU et al., 2020). Os quatro primeiro modelos são classificados como diretos, visto que eles predizem a saída do sistema. O desempenho dos modelos diretos excitados por senoides com diferentes amplitudes é apresentado na Tabela 6.1, indicando que esses modelos têm desempenho similar via índice MAPE. É importante ressaltar que \mathcal{M}_{bw} (6.3), o único que não é do tipo NARX, apresenta resultados ligeiramente inferiores aos demais. Devido ao fato de $\check{\mathcal{M}}_h$ (6.5) ser um modelo inverso, torna-se necessário filtrar a saída do sistema que é a entrada do modelo, uma vez que os regressores $\check{\phi}_1(k)$ e $\check{\phi}_2(k)$ são sensíveis a variações ruidosas (ABREU et al., 2020). Assim, por trabalhar com dados distintos e filtrados, a Tabela 6.1 não apresenta os valores de MAPE para $\check{\mathcal{M}}_h$ (6.5). O desempenho de todos os modelos diretos está presente na Fig. 6.1, considerando simulação livre para $u(t) = 0,55\text{sen}(2\pi(0,1)t + \pi/4) + 3\text{V}$, mostrada na Fig. 6.1-(a). Na Fig. 6.1-(b), tem-se a evolução temporal das saídas desses modelos, enquanto a Fig. 6.1-(c) apresenta os respectivos laços de histerese no plano $u \times y$. Por outro lado, o modelo inverso $\check{\mathcal{M}}_h$ é alimentado por uma versão filtrada da saída do sistema - Fig. 6.1-(b) - para prever a entrada correspondente, mostrada na Fig. 6.1-(d). O índice MAPE dessa figura é 1,8% e o plano $y \times u$ está na Fig. 6.1-(f).

A Fig. 6.2 é utilizada para analisar o comportamento dos modelos quando uma entrada variante no tempo se torna constante em algum ponto. Os resultados para os modelos diretos são mostrados na Fig. 6.2-(c) quando excitados pelas entradas mostradas na Fig. 6.2-(a). Observe que essas entradas são senoides que se tornam constantes no mesmo valor, sendo uma no regime de carga e a outra no de descarga. Por outro lado, a Fig. 6.2-(d) mostra o desempenho do modelo inverso quando excitado pelas entradas

Tabela 6.1: MAPE para validação dos modelos diretos com entradas senoidais da forma $u(t) = G_0 \text{sen}(2\pi(0,1)t + \pi/4) + 3V$.

Modelo	G_0 [V]			
	0,45	0,55	0,65	0,75
1 - \mathcal{M}_h (6.1)	3,1%	2,9%	3,5%	5,3%
2 - $\mathcal{M}_{h,\text{cns}}$ (6.2)	3,6%	3,0%	3,1%	4,9%
3 - \mathcal{M}_{bw} (6.3)	3,9%	4,1%	4,5%	6,5%
4 - $\mathcal{M}_{h,\text{cns},2}$ (6.4)	3,2%	3,5%	3,9%	5,7%

que estão na Fig 6.2-(b). O laço de histerese em um contexto inverso é mostrado na Fig. 6.2-(f), $y \times u$.

Com base nesses resultados, nota-se que as saídas dos modelos (6.1) e (6.2) permanecem constantes em estado estacionário, com algumas particularidades. No caso de \mathcal{M}_h (6.1) - identificado sem as restrições propostas por ABREU et al. (2020) - tal modelo não é capaz de prever o comportamento do sistema quando a entrada se torna constante. Note que a saída da válvula pneumática apresenta diferentes valores ao se tornar constante nos regimes de carga e descarga, fato característico em sistemas histeréticos (MORRIS, 2012; ABREU et al., 2020). Devido à existência de pontos fixos estáveis cujos valores dependem de \bar{u} , a saída do modelo \mathcal{M}_h converge para esse ponto fixo. Tal convergência determina erros em estado estacionário que são distintos para os regimes de carga e descarga, fato retratado na Fig. 6.2-(c). Nesse caso, o erro absoluto em estado estacionário é de aproximadamente 0,080V para uma parada no regime de descarga. O modelo estimado com as restrições, $\mathcal{M}_{h,\text{cns}}$ (6.2) é capaz de atingir o estado estacionário em pontos diferentes quando a entrada torna-se constante nos regimes de carga e descarga com boas aproximações. Além disso, tem-se erro em estado estacionário de aproximadamente 0,022V no regime de descarga. Para os modelos seguintes, também se considera o erro em estado estacionário dado em valores absolutos no regime de descarga.

O modelo \mathcal{M}_{bw} (6.3) é capaz de segurar o valor da saída instantaneamente com erro aproximado de 0,024V em estado estacionário. Isso era esperado, visto que modelos BW representam características fundamentais de sistemas histeréticos. Para os modelos NARX $\mathcal{M}_{h,\text{cns},2}$ (6.4) e $\check{\mathcal{M}}_h$ (6.5), a habilidade desses modelos em permanecer em estado estacionário é garantida, dado que eles satisfazem as restrições mencionadas. Contudo, como pode ser visto na Fig. 6.2, esses modelos apresentam um erro em estado estacionário de 0,043V e 0,170V, respectivamente.

Tais erros consideráveis estão relacionados ao fato de que durante a transição para o estado estacionário, apenas alguns regressores com atraso $k - 1$ são imediatamente cancelados. Então, como esses modelos têm regressores que dependem do instante $k - 3$, como por exemplo, $\phi_1(k - 2) = u(k - 2) - u(k - 3)$, com coeficientes de altas magnitudes, tais termos produzem variações bruscas durante a transição, levando a

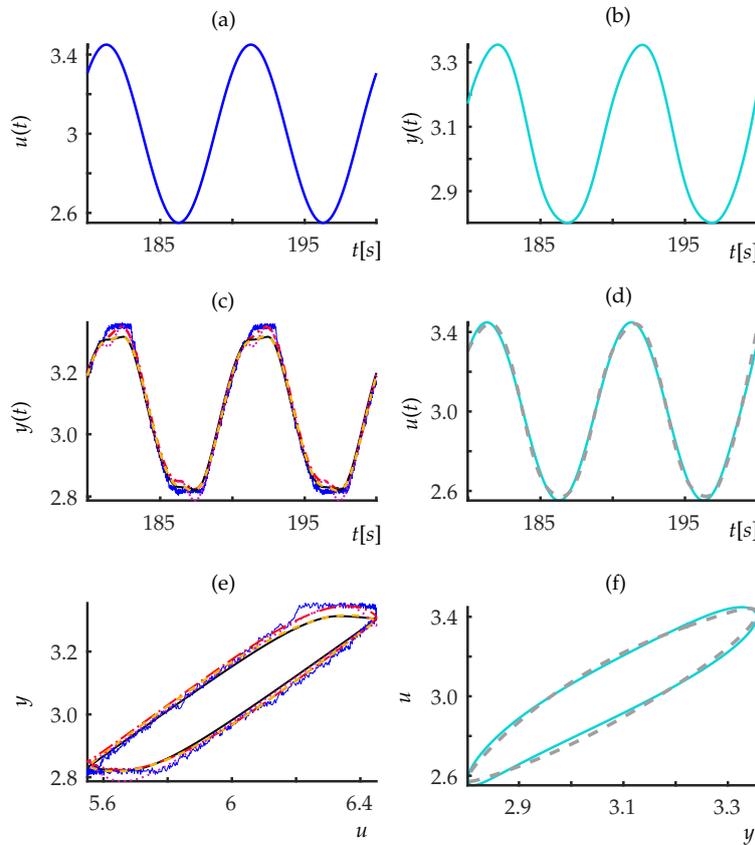


Figura 6.1: Validação de simulação livre para modelos da válvula pneumática. As figuras (a), (c) e (e) se referem aos modelos diretos. Em (c), têm-se as saídas dos modelos $y(t)$ quando excitados pela entrada mostrada em (a), $u(t) = 0,45\text{sen}(2\pi(0,1)t + \pi/4) + 3V$. O plano $u \times y$ apresenta os laços de histerese em (e). (b), (d) e (f) são os análogos respectivamente a (a), (c) e (e) para o modelo inverso $\check{\mathcal{M}}_h$ (6.5) (- -), visto que ele prediz a entrada do sistema (d) quando alimentado por uma versão suavizada da saída $y(t)$, mostrada em (b). Os dados do sistema para simulações do caso direto são representados por (-), enquanto os dados para o contexto inverso, (-). Os modelos diretos são dados por: (- -), \mathcal{M}_h (6.1); (- -), $\mathcal{M}_{h,\text{cns}}$ (6.2); (-), \mathcal{M}_{bw} (6.3); e ($\cdot \cdot$) $\mathcal{M}_{\text{bw},\text{cns},2}$ (6.4).

consideráveis erros em estado estacionário.

Com objetivo de reduzir tais erros para as predições dos modelos, algumas recomendações são propostas na sequência. Primeiramente, note que o modelo $\mathcal{M}_{h,\text{cns}}$ (6.2) apresenta baixo erro em estado estacionário, o que está relacionado à ausência de regressores de entrada com atraso superior a 1, visto que $n_u = 1$. Além disso, esse modelo apresenta parâmetros com baixas magnitudes se comparados aos modelos $\mathcal{M}_{h,\text{cns},2}$ (6.4) e $\check{\mathcal{M}}_h$. Tais modelos apresentam uma estrutura similar a $\mathcal{M}_{h,\text{cns}}$ (6.2). É importante frisar que $\mathcal{M}_{h,\text{cns},2}$ (6.4) e $\check{\mathcal{M}}_h$ (6.5) foram identificados por ABREU et al. (2020) com parâmetros estimados por métodos que podem gerar polarização. Isso sugere que a utilização de métodos não polarizados para estimação dos parâmetros e à adequação dos meta-parâmetros, conforme utilizado nesta dissertação para seleção da estrutura, tendem a reduzir os erros em estado estacionário.

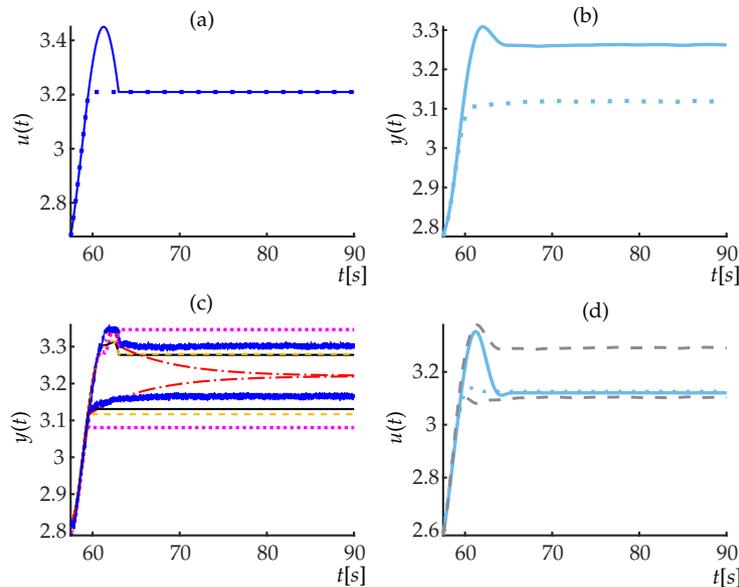


Figura 6.2: Validação de simulação livre para modelos diretos alimentados por entradas (a) que se tornam constantes em aproximadamente $t = 59s$ para carga ($\cdot \cdot$), e $t = 63s$ para descarga ($-$). Para o modelo inverso, as respectivas entradas são as saídas filtradas do sistema e estão mostradas em (b), sendo que ($\cdot \cdot$) representa aquela que se torna constante no regime de carga, enquanto ($-$), na descarga. As saídas dos modelos diretos estão em (c), enquanto em (d), têm-se às saídas do modelo inverso \hat{M}_h (6.5) ($-$). Os dados do sistema no contexto direto são representados por ($-$), enquanto para o contexto inverso, tem-se ($-$). Os resultados dos modelos diretos são: ($---$), M_h (6.1); ($-$), $M_{h,cns}$ (6.2); ($-$), M_{bw} (6.3); ($\cdot \cdot$) $M_{bw,cns,2}$, (6.4).

6.2 Compensadores

A seguir, apresenta-se o respectivo compensador para cada modelo. Os primeiros dois compensadores foram obtidos seguindo a metodologia deste trabalho.

1) Aplicando-se os passos 1, 2, 3, 5 e 6 (note que o passo 4 não é necessário) definidos na Seção 4.4, obtêm-se os seguintes polinômios algébricos que compõem o compensador do modelo M_h (6.1). O compensador obtido é:

$$0 = c_2^L m(k)^2 + c_1^L(k) m(k) + c_0^L(k), \text{ para } m(k) > m(k-1); \quad (6.6)$$

e

$$0 = c_2^U m(k)^2 + c_1^U(k) m(k) + c_0^U(k), \text{ para } m(k) < m(k-1), \quad (6.7)$$

onde os polinômios estão na forma de (4.13) e (4.14) com $c_2^L = \hat{\theta}_4 + \hat{\theta}_6$, $c_1^L(k) = \hat{\theta}_3 - 2\hat{\theta}_4 m(k-1) + \hat{\theta}_5 r(k) - \hat{\theta}_6 m(k-1) + \hat{\theta}_7 r(k-1)$, $c_0^L(k) = \hat{\theta}_1 r(k) + \hat{\theta}_2 r(k-1) + \hat{\theta}_4 m(k-1)^2 - \hat{\theta}_7 r(k-1) - r(k+1)$, $c_2^U = -\hat{\theta}_4 - \hat{\theta}_6$, $c_1^U(k) = \hat{\theta}_3 + 2\hat{\theta}_4 m(k-1) + \hat{\theta}_5 r(k) + \hat{\theta}_6 m(k-1) - \hat{\theta}_7 r(k-1)$ e $c_0^U(k) = \hat{\theta}_1 r(k) + \hat{\theta}_2 r(k-1) - \hat{\theta}_4 m(k-1)^2 + \hat{\theta}_7 r(k-1) - r(k+1)$.

2) Para o modelo $M_{h,cns}$ (6.2), analogamente ao que foi feito para M_h , as equações do

compensador são obtidas:

$$0 = d_2^L m(k)^2 + d_1^L(k) m(k) + d_0^L(k), \text{ para } m(k) > m(k-1); \quad (6.8)$$

e

$$0 = d_2^U m(k)^2 + d_1^U(k) m(k) + d_0^U(k), \text{ para } m(k) < m(k-1), \quad (6.9)$$

em que $d_2^L = \hat{\theta}_4$, $d_1^L(k) = \hat{\theta}_3 - \hat{\theta}_4 m(k-1) + \hat{\theta}_5 r(k-1)$, $d_0^L(k) = \hat{\theta}_1 r(k) + \hat{\theta}_2 r(k-1) + \hat{\theta}_3 m(k-1) - \hat{\theta}_5 r(k-1) m(k-1) - r(k+1)$, $d_2^U = -\hat{\theta}_4$, $d_1^U(k) = -\hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4 m(k-1) - \hat{\theta}_5 r(k-1)$ e $d_0^U(k) = \hat{\theta}_1 r(k) + \hat{\theta}_2 r(k-1) - \hat{\theta}_3 m(k-1) + \hat{\theta}_5 r(k-1) m(k-1) - r(k+1)$.

3) A lei de compensação $m(t)$ para o modelo \mathcal{M}_{bw} foi proposta por [RAKOTONDRABE \(2011\)](#) como:

$$m(t) = \frac{10}{7,21} [r(t) + h(t)]. \quad (6.10)$$

4) Extraído de [ABREU et al. \(2020\)](#), tem-se o compensador para $\mathcal{M}_{h,cns,2}$:

$$\begin{aligned} m(k) = & \frac{1}{19,32} \left[\Delta r(k+1) + 19,32 m(k-1) + 19,76 \Delta m(k-1) \right. \\ & - 9,44 \text{sign}[\Delta m(k-1)] \Delta m(k-1) m(k-1) \\ & \left. + 12,61 \text{sign}[\Delta m(k-1)] \Delta m(k-1) r(k) \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

sendo $\Delta m(k) = m(k) - m(k-1)$ para m e $\Delta r(k)$ é o análogo para r .

5) Também determinado por [ABREU et al. \(2020\)](#), nesse caso para o modelo inverso $\hat{\mathcal{M}}_h$, o compensador é:

$$\begin{aligned} \check{m}(k) = & \check{m}(k-1) + 86,67 \Delta r(k+1) - 85,02 \Delta r(k) \\ & - 0,98 \Delta r(k+1) r_k + 1,72 \text{sign}[\Delta r(k)] \Delta r(k) r_k \\ & - 1,13 \text{sign}[\Delta r(k)] \Delta r(k) \check{m}_{k-1}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Os resultados de compensação para referências senoidais com diferentes amplitudes são mostradas na Tabela 6.2 enquanto a Fig. 6.3 trata dos resultados de compensação para uma dessas referências, $r(k) = 0,41 \text{sen}(2\pi(0,1)t + \pi/4) + 3V$. Todas as estratégias de compensação apresentaram resultados consideravelmente melhores que o caso não compensado, em todos os cenários avaliados. Além disso, os resultados obtidos pelos compensadores são similares.

Para os testes realizados com o sistema não compensado, a referência é aplicada como entrada. Conseqüentemente, o esforço adicional de compensação para uma entrada $m(k)$ é calculado como:

$$\delta_m(k) = |m(k) - r(k)|. \quad (6.13)$$

Considerando que N é o tamanho $\delta_m(k)$, a energia de δ_m , $E(\delta_m)$, para um período

Tabela 6.2: MAPE para sistemas compensados e não compensado sobre a válvula, considerando $r(t) = G_0 \text{sen}(2\pi(0,1)t) + 3,07V$.

Estratégia de Compensação	G_0 [V]			
	0,26	0,34	0,41	0,50
1) - Eq. 6.6 e 6.7 para \mathcal{M}_h (6.1)	3,2%	2,8%	2,7%	3,3%
2) - Eq. 6.8 e 6.9 para $\mathcal{M}_{h,\text{cns}}$ (6.2)	3,9%	3,3%	3,3%	3,8%
3) - Eq. 6.10 para \mathcal{M}_{bw} (6.3)	5,9%	4,4%	4,3%	4,2%
4) - Eq. 6.11 para $\mathcal{M}_{h,\text{cns},2}$ (6.4)	3,6%	3,5%	3,9%	5,2%
5) - Eq. 6.12 para $\tilde{\mathcal{M}}_h$ (6.5)	2,9%	2,8%	3,2%	2,7%
Sem compensação	21,0%	18,0%	16,2%	14,4%

com N_0 amostras é dada por:

$$E(\delta_m) = \sum_{k=N-N_0}^{N-1} \delta_m(k)^2. \quad (6.14)$$

A Tabela 6.3 mostra a energia de esforço adicional para um período, $E(\delta_m)$, $E \sigma(\delta_m)$, o desvio padrão de δ_m .

Tabela 6.3: Energia de esforço adicional para um período, $E(\delta_m)$, e desvio padrão de δ_m , $\sigma(\delta_m)$. Tais valores são computados para sistemas compensados considerando como referência o sinal amostrado $r(k) = G_0 \text{sen}(2\pi(0,1)k + \pi/4) + 3,07V$. Os valores de fora dos colchetes são $E(\delta_m)$ enquanto aqueles dentro são $\sigma(\delta_m)$.

Estratégia	G_0 [V]			
	0,26	0,34	0,41	0,50
1) - Eq. 6.6 e 6.7	31,3 [0,157]	38,8 [0,170]	47,0 [0,182]	61,9 [0,196]
2) - Eq. 6.8 e 6.9	28,3 [0,154]	33,7 [0,165]	39,4 [0,174]	49,4 [0,186]
3) - Eq. 6.10	27,0 [0,149]	33,3 [0,163]	40,6 [0,178]	53,7 [0,197]
4) - Eq. 6.11	38,7 [0,184]	43,7 [0,193]	50,1 [0,203]	57,2 [0,206]
5) - Eq. 6.12	24,9 [0,139]	38,3 [0,174]	52,7 [0,203]	72,6 [0,237]

Primeiramente, note que similarmente à validação, o compensador dado pela Eq. 6.10 e projetado para o modelo \mathcal{M}_{bw} (6.3) apresenta resultados ligeiramente piores que aqueles mostrados pelos modelos NARX. Isso sugere que modelos NARX são mais apropriados para representar as não linearidades da válvula, devido à capacidade de generalização desses modelos. Além disso, do ponto de vista da implementação, o estado histerético $h(t)$ de (6.3) deve ser resolvido via método de integração numérica, dificultando aplicações em tempo real. Contudo, o modelo fenomenológico foi capaz de apresentar resultados consideravelmente superiores quando comparado ao sistema não compensado. É importante mencionar que uma vantagem relevante desse modelo reside no fato de que a lei de compensação já está previamente determinada, evitando

o trabalho adicional de se obter o compensador. Também é importante ressaltar que o compensador mencionado apresenta baixos valores para $E(\delta_m)$ e $\sigma(\delta_m)$ quando comparado aos outros compensadores, conforme Tabela 6.3, principalmente em relação aos compensadores produzidos por (ABREU et al., 2020). Isso mostra que tal modelo tende a produzir um esforço adicional mais regular e menos energético. Por fim, é importante ressaltar que, para esse modelo, a tarefa de maior complexidade é a estimação dos parâmetros.

Embora os dois compensadores extraídos de ABREU et al. (2020) tenham apre-

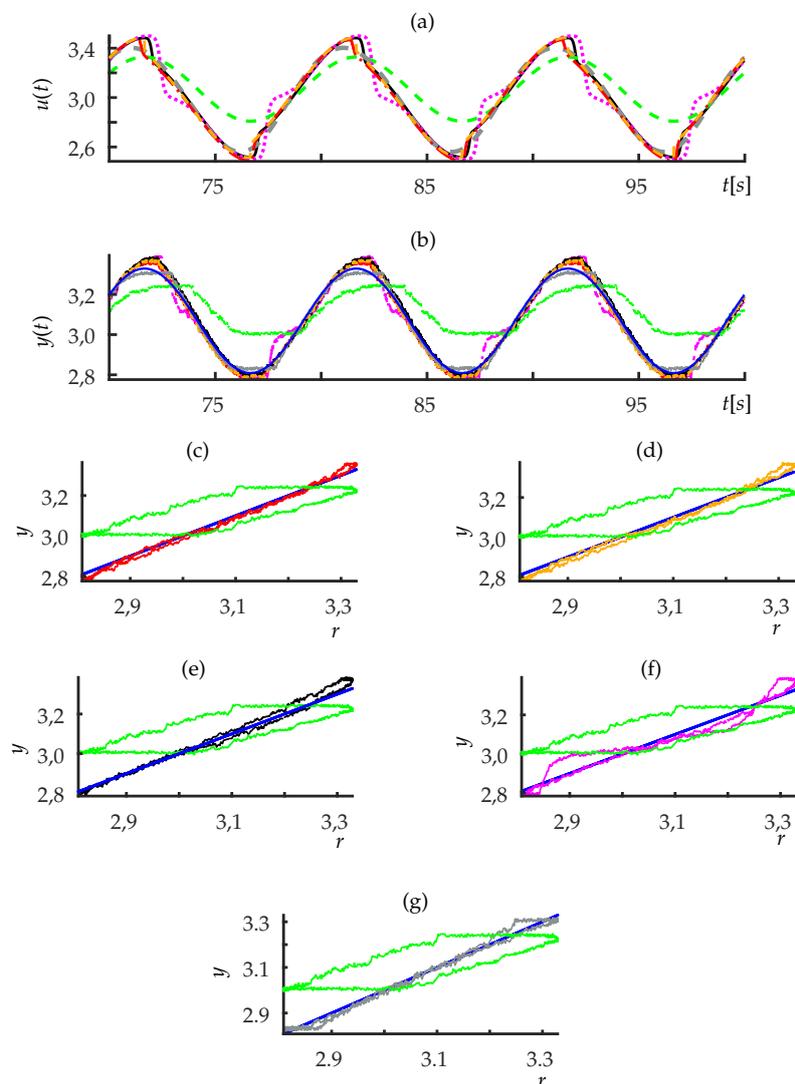


Figura 6.3: Resultado de compensação para a válvula pneumática. Em (a), tem-se a evolução temporal das entradas em 3 ciclos, enquanto em (b), as respectivas respostas dos sistemas compensados sendo que a referência $r(t) = 0,34\text{sen}(2\pi(0,1)t + \pi/4) + 3V$ é mostrada em (-). De (c) - (g), têm-se os planos $r \times y$ para cada compensador. Os dados do sistema não compensado estão em (-). Os dados dos compensadores são: (---) para Eq. 6.6 e 6.7; (- -) para Eq. 6.8 e 6.9; (-), Eq. 6.10; (· ·), Eq. 6.11; (- ·), Eq. 6.12.

sentado resultados relevantes, alguns comentários adicionais se fazem necessários. O primeiro compensador dado por (6.11) é baseado em $\mathcal{M}_{h,cns,2}$ (6.4). Nesse caso, torna-se necessário restringir o conjunto de regressores candidatos, de modo que seja possível explicitar $m(k)$. Essas restrições impostas impactam na qualidade da compensação, note que a área determinada pelo laço da Fig. 6.3-(f) é mais evidente do que àquelas relacionadas aos laços gerados pelos outros compensadores. Observe que alguns regressores eliminados nessa abordagem foram escolhidos pelos modelos \mathcal{M}_h (6.1) e $\mathcal{M}_{h,cns}$ (6.2). Por outro lado, a entrada de compensação definida pela Eq. 6.11 tende a ser mais facilmente calculável que aquelas propostas neste trabalho. Baseado nos resultados, tal compensador apresenta valores altos de $E(\delta_m)$ e $\sigma(\delta_m)$ (ver Tabela 6.3), apresentando variações abruptas geradas na entrada de compensação (ver Fig. 6.3-(a),(f)). No contexto de modelos inversos, o modelo $\check{\mathcal{M}}_h$ (6.5) apresenta o inconveniente de necessitar de um pré-processamento de dados, exigindo uma filtragem da saída do sistema com baixo impacto dinâmico e condicionamento dos dados de entrada e saída para que estes sejam causais. Apesar dessas peculiaridades, o compensador gerado (6.12) é capaz de obter entradas de compensação suaves (Fig. 6.3-(a) e (g)) com valores relevantes de MAPE como mostrado na Tabela 6.2. Outra questão sobre tal compensador está relacionada ao fato de que $E(\delta_m)$ e $\sigma(\delta_m)$ tendem a crescer consideravelmente com o aumento da amplitude, conforme a Tabela 6.3.

Os compensadores obtidos seguindo a metodologia deste trabalho, dados por (6.6)-(6.7), e (6.8)-(6.9), apresentaram resultados satisfatórios para a válvula. O primeiro deles foi obtido para \mathcal{M}_h (6.1) e não satisfaz às restrições da Seção 4.4, o que não foi um problema nos cenários avaliados, visto que não foram testados casos em que a referência torna-se constante. Por outro lado, o segundo compensador obtido para $\mathcal{M}_{h,cns}$ (6.2) é capaz de lidar com situações em que a referência se torna constante, devido às restrições impostas. Considerando os resultados obtidos, embora o primeiro apresente resultados ligeiramente superiores sob a perspectiva do índice MAPE, o segundo exibe um esforço adicional menos energético e mais regular, conforme Tabela 6.3. Ademais, é importante mencionar que o modelo restrito apresenta 5 termos, enquanto aquele identificado sem restrições possui 7. Apesar da existência de menos termos reduzir a qualidade de predição dos modelos, isso tende a facilitar consideravelmente o projeto do compensador e o cálculo iterativo da entrada de compensação. Dessa forma, tem-se que o modelo de 5 termos $\mathcal{M}_{h,cns}$ (6.2) apresenta mais vantagens quando comparado ao modelo obtido sem restrições. Particularmente sobre o método proposto, tem-se uma limitação importante: caso os polinômios gerados sejam de grau maior do que 3, faz-se necessário usar algum método de estimação numérica das raízes (*solver*). Tal fato complica o cálculo das raízes em um regime de tempo real (*online*) desde que o sistema tenha dinâmica suficientemente mais rápida que a estimação via *solver*. Além disso, para regiões de baixa representatividade dos modelos, existe a tendência dos compensadores levarem a raízes ineficazes. Nos cenários avaliados, isso não ocorreu devido à qualidade dos modelos. Felizmente, a maioria dos sistemas práticos podem

ser descritos por polinômios até grau 3 e o processo seletivo provê uma solução para a existência de mais de uma raiz real.

6.3 Considerações Finais

Este capítulo apresentou a aplicação da metodologia proposta no Capítulo 4 para compensação de não linearidades em um sistema experimental, uma válvula pneumática. Inicialmente foram obtidos dois modelos NARX para representação das não linearidades na válvula usando os dados de identificação de (ABREU et al., 2020). O primeiro desses modelos foi obtido sem restrições, enquanto o segundo, com restrições. Utilizando o algoritmo evolutivo do Capítulo 3, os parâmetros de um modelo BW foram estimados para a válvula. Considerou-se também os dois modelos obtidos por ABREU et al. (2020). Todos os modelos foram capazes de prever a saída do sistema para situações em que as entradas são variantes. No caso de entradas que se tornam constantes, comentários adicionais foram feitos, de modo a ser possível que modelos NARX representem essa situação.

Para cada modelo, mostrou-se seu respectivo compensador. Os compensadores gerados pelos modelos NARX obtidos neste capítulo foram desenvolvidos segundo a metodologia proposta, enquanto os demais, foram extraídos da literatura. Mostrou-se que todos os compensadores exibiram resultados de compensação consideravelmente superiores ao sistema não compensado quando comparados pelo índice MAPE. Além disso, foi realizada uma comparação entre eles no sentido de energia do esforço adicional. De posse desses dados, apresentaram-se limitações e benefícios de cada estratégia. No próximo capítulo, apresentam-se as considerações finais deste trabalho.

Considerações Finais e Propostas de Continuidade

As contribuições apresentadas neste trabalho podem ser divididas em duas partes. A primeira parte se refere ao Capítulo 3, em que se apresentou uma abordagem evolutiva para a obtenção de parâmetros do modelo Bouc-Wen. Como essa abordagem permite a inserção de parâmetros com facilidade, um parâmetro é adicionado ao modelo clássico apresentado em RAKOTONDRABE (2011), gerando um modelo modificado. Além do parâmetro adicional, o modelo modificado permite que todos os parâmetros apresentem valores negativos, o que não ocorre com o modelo clássico. Ambos os modelos foram usados para realizar a compensação de histerese considerando a lei de compensação proposta por (RAKOTONDRABE, 2011), em dois casos: uma simulação numérica do modelo de Prandtl-Ishlinskii dado em (EDARDAR et al., 2014) e um sistema físico, válvula pneumática de uma planta piloto de nível. Em todos os casos avaliados, o modelo clássico apresentou desempenho ligeiramente inferior em relação ao modelo modificado, embora também tenha sido útil para compensar parte dos efeitos não lineares.

Na segunda parte, têm-se as principais contribuições deste trabalho, em que se propõe a aplicação de uma abordagem em que modelos NARX são utilizados para a compensação de não linearidades. De posse de um modelo NARX representativo para um dado sistema dinâmico, reescreve-se o modelo como uma relação algébrica polinomial em função da entrada de compensação, inicialmente desconhecida. Encontrando as soluções desse polinômio algébrico em um dado instante, seleciona-se a raiz apropriada por meio de um processo decisório. Como detalhado no Capítulo 4, isso é feito de forma iterativa, tendo sido o problema de compensação proposto para três contextos: estático (referências constantes), dinâmico (referências variantes) e adaptado para sistemas histeréticos.

No Capítulo 5, tem-se a aplicação da metodologia para dois diferentes exemplos simulados extraídos da literatura: um sistema de calor descrito por um modelo de Hammerstein (AGUIRRE et al., 2005), e o modelo BW previamente descrito na Seção 3.1 (RAKOTONDRABE, 2011). Mostrou-se que para regiões em que os modelos NARX são representativos, os respectivos compensadores tendem a gerar apenas uma raiz real factível. Por outro lado, para modelos menos representativos, verificaram-se duas situações: a presença apenas de raízes infactíveis ou a existência de mais do que uma

factível. Visando superar esse problema, propõe-se um algoritmo de seleção que segura a entrada prévia no primeiro caso e, seleciona aquela que produz menor esforço de compensação no segundo. Para os casos em que o modelo seja pouco representativo apenas em determinadas regiões, tal estratégia mostrou-se eficiente. É importante ressaltar que para referências consideradas rápidas, o número de raízes ineficazes tende a crescer, degradando o desempenho do compensador, como esperado para a maioria dos sistemas de controle. Ademais, discutiu-se a robustez do método a variações nos parâmetros como avaliado nas Figuras 5.8 e 5.13. A estratégia proposta para a inicialização do método tem impacto na qualidade do processo de compensação, dado que ela evita variações bruscas no início do procedimento e excursões em regiões de menor validade, como mostrado na Figura 5.12. Para sistemas histeréticos, o impacto de se usar as restrições propostas por ABREU et al. (2020) foi avaliado para a modelagem e compensação. A aplicação dessas restrições, além de produzir resultados relevantes para o regime dinâmico, é particularmente importante no contexto em que uma referência variante se torna constante, como mostrado na Figura 5.11.

Como um exemplo experimental para a metodologia baseada nas raízes, utilizou-se novamente a válvula pneumática da Subseção 3.3.2. O desempenho dos compensadores obtidos conforme a metodologia deste trabalho foram comparados com a estratégia de RAKOTONDRABE (2011) e duas estratégias recentemente publicadas em ABREU et al. (2020). Todos os compensadores avaliados apresentaram resultados significativamente superiores àqueles em que não se usa a compensação, conforme atesta a Tabela 6.2) e foram discutidos os benefícios e limitações para cada modelo. Os métodos propostos nesta dissertação apresentaram resultados relevantes quanto ao índice MAPE, além de proverem entradas de compensação com baixa energia de esforço adicional. Ademais, é importante mencionar que modelos simples com 3 (5.2), 4 (5.11) ou 5 (6.2) termos são capazes de gerar entradas de compensações relevantes como atestam as Figuras 5.4, 5.10 e 6.3-d. Outra característica interessante da técnica é o fato do projeto de compensadores poder ser desenvolvido com ou sem restrições, além de um pré-processamento de dados não ser exigido, diferentemente dos métodos propostos por (ABREU et al., 2020). A principal limitação ocorre se os polinômios gerados têm grau maior do que 3. Nesse caso, torna-se necessário usar ferramentas numéricas para a estimação das raízes, fato que tende a dificultar aplicações em tempo real (*online*), desde que o sistema dinâmico seja suficientemente mais rápido que o estimador das raízes (*solver*). Felizmente, muitos sistemas relevantes do ponto de vista de controle, podem ser descritos por modelos com grau até 3, de modo que as raízes podem ser encontradas via expressões analíticas mostradas no Apêndice A.

7.1 Propostas de Continuidade

A seguir, propõem-se os seguintes estudos:

- Ao incluir um parâmetro adicional no modelo BW e promover o relaxamento das restrições de sinal dos parâmetros foi possível obter resultados superiores em relação ao modelo clássico proposto por RAKOTONDRABE (2011). Para investigações futuras, propõe-se a realização de um conjunto maior de testes para verificar o impacto do parâmetro adicional na flexibilidade dos modelos e/ou no desempenho do algoritmo evolutivo.
- Neste trabalho, foi usada a função sinal que tende a variar abruptamente quando ocorre a transição entre os regimes de carga e descarga. O uso de funções mais suaves do que a função sinal para esse processo de modelagem será investigado no futuro.
- Conforme discutido no texto, a histerese é um comportamento quase-estático. Contudo, o índice MAPE é formulado para a avaliação do comportamento dinâmico. A utilização e a proposta de índices para avaliação do comportamento quase-estático será investigada em trabalhos futuros.
- Para a compensação, o envelhecimento do sistema é um desafio a ser considerado. Os compensadores se baseiam na precisão do modelo em descrever os comportamentos dinâmico e estático do sistema. Neste trabalho, foi observado que a existência de raízes ineficazes estão relacionadas à baixa qualidade do modelo em determinadas regiões. Assim, o monitoramento do percentual de raízes ineficazes em um ciclo será investigado no futuro como ferramenta para determinar a necessidade de uma reestimação *online* dos parâmetros do modelo.
- Ao encontrar raízes ineficazes, o método proposto segura a última raiz utilizada, $m(k) = m(k - 1)$. Em trabalhos futuros, pretende-se utilizar algum algoritmo de otimização para o cálculo das entradas de compensação nesses instantes em que são produzidas raízes ineficazes para fins de comparação.
- Outro ponto importante a ser investigado no futuro é a obtenção de condições matemáticas que relacionem a qualidade da modelagem com a qualidade da compensação. Isso se justifica pelo fato de que modelos melhores, geram entradas de compensação mais eficientes, conforme mostrado nesta dissertação.
- Além disso, os impactos da presença de ruído na referência não foi investigado no contexto desta dissertação. Para trabalhos futuros, propõe-se essa abordagem.
- Neste trabalho, a compensação de não linearidades é focada em sistemas histeréticos e sistemas com não linearidades polinomiais. Em trabalhos futuros, serão propostas tanto a modelagem quanto à compensação via modelos NARX para outras não linearidades.
- Por fim, tem-se como última proposta a aplicação dos compensadores em uma abordagem de malha fechada, em que se espera que as entradas de compensação

tornem o sistema mais fácil de controlar, reduzindo significativamente a ação de controle. O objetivo é comparar tanto a energia gasta pelo conjunto compensador-controlador quanto a qualidade do rastreamento em relação aos cenários em que se utiliza apenas o controlador.

Referências Bibliográficas

- ABRAMOWITZ, M. e STEGUN, I. A. (1965). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical table. In *US Department of Commerce*. National Bureau of Standards Applied Mathematics series 55.
- ABREU, P. E. O. G. B., TAVARES, L. A., TEIXEIRA, B. O. S., e AGUIRRE, L. A. (2020). Identification and nonlinearity compensation of hysteresis using NARX models. *Nonlinear Dynamics*.
- AGUIRRE, L. A. (1997). On the structure of nonlinear polynomial models: higher order correlation functions, spectra, and term clusters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 44:450–453.
- AGUIRRE, L. A. (2007). *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. UFMG, Belo Horizonte, 3ª edição.
- AGUIRRE, L. A., COELHO, M. C. S., e CORRÊA, M. V. (2005). On the interpretation and practice of dynamical differences between Hammerstein and Wiener models. *Proc. IEE Part D: Control Theory and Applications*, 152(4):349–356.
- AGUIRRE, L. A., CORRÊA, M., e CASSINI, C. C. S. (2002). Nonlinearities in NARX polynomial models: representation and estimation. *Proc. IEE Part D: Control Theory and Applications*, 149(4):343–348.
- AGUIRRE, L. A. e MENDES, E. M. A. M. (1996). Global Nonlinear Polynomial Models: Structure, Term Clusters and Fixed Points. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 6(2):279–294.
- AKAIKE, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):716–723.
- ALMEIDA, L. A. L., DEEP, G. S., LIMA, A. M. N., e NEFF, H. (2003). Um modelo diferencial para histerese magnética: representação algébrica recursiva. *SBA: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, 14(1):58–68.

- ARMSTRONG-HÉLOUVRY, B., DUPONT, P., e CANUDAS-DE-WIT, C. (1994). A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, 30:1083–1138.
- BAO, W., LAI, W.-S., ZHANG, X., GAO, Z., e YANG, M.-H. (2019). MEMC-Net: Motion estimation and motion compensation driven neural network for video interpolation and enhancement. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*.
- BASSO, M., GIARRE, L., GROPPI, S., e ZAPPA, G. (2005). NARX models of an industrial power plant gas turbine. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13(4):599–604.
- BILLINGS, S. e CHEN, S. (1989). Extended model set, global data and threshold model identification of severely non-linear systems. *International Journal of Control*, 50(5):1897–1923.
- BILLINGS, S. A. (2013). *Nonlinear System Identification: NARMAX Methods in the Time, Frequency and Spatio-Temporal Domains*. Wiley.
- BOUC, R. (1967). *Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillations*. Academia, Praga.
- BOZDOGAN, H. (1987). Model selection and Akaike's Information Criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. *Psychometrika*, 52:345–370.
- CANUDAS-DE-WIT, C., OLSSON, H., ASTROM, K. J., e LISCHINSKY, P. (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3):419–425.
- CAO, H., ZHANG, Y., SHEN, C., LIU, Y., e WANG, X. (2018). Temperature energy influence compensation for MEMS vibration gyroscope based on RBF NN-GA-KF method. *Shock and Vibration*, 2018.
- CASTILLO, O. e MELIN, P. (2012). *Soft computing for control of non-linear dynamical systems*, volume 63. Physica.
- CHEN, Q., TAO, L. NAN, Y., e REN, X. (2015). Adaptive Nonlinear Sliding Mode Control of Mechanical Servo System with LuGre Friction Compensation. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 138.
- CHEN, Y., QIU, J., PALACIOS, J., e SMITH, E. C. (2013). Tracking control of piezoelectric stack actuator using modified Prandtl-Ishlinskii model. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 24(6):753–760.
- CHERNOUS'KO, F. L., ANAVIEVSKI, I. M., e RESHMIN, S. A. (2008). *Control of nonlinear dynamical systems: methods and applications*. Springer Science & Business Media.

- CHOW, T. e LEUNG, C. (1996). Neural network based short-term load forecasting using weather compensation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(4):1736–1742.
- COLLINSWORTH, A. M., ZHANG, S., KRAUS, W. E., e TRUSKEY, G. A. (2002). Apparent elastic modulus and hysteresis of skeletal muscle cells throughout differentiation. *American Journal of Physiology-Cell Physiology*, 283(4):C1219–C1227.
- CROSS, R., GRINFIELD, M., e LAMBA, H. (2009). Hysteresis and economics. *IEEE Control Systems*, 29(1):30–43.
- DENN, M. (1987). *Process modeling*. Longman Scientific & Technical.
- DEVASSIA, S., ELEFThERIOU, E., e MOHEIMANI, S. R. (2007). A Survey of Control Issues in Nanopositioning. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 15(5):479–485.
- DRAPER, N. R. e SMITH, H. (1998). *Applied regression analysis*, volume 326. John Wiley & Sons.
- DU, H., LAM, J., e ZHANG, N. (2006). Modelling of a magneto-rheological damper by evolving radial basis function networks. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 19:869–881.
- EDARDAR, M., TAN, X., e KHALIL, H. K. (2014). Tracking error analysis for feedback systems with hysteresis inversion and fast linear dynamics. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 136(4):041010.
- EDELSTEIN-KESHET, L. (2005). *Mathematical Models in Biology*. SIAM, 2ª edição.
- EIBEN, A. e SMITH, J. (2003). *Introduction to Evolutionary Computing*. Springer.
- EWING, J. A. (1881). On the production of transient electric currents in iron and steel conductors by twisting them when magnetized or by magnetising them when twisted. *Proc. R. Soc. Lond.*, 33:21–23.
- EYKHOFF, P. (1974). *System identification: parameter and state estimation*. Wiley-Interscience.
- FLEMING, P. J. e PURSHOUSE, R. C. (2002). Evolutionary algorithms in control systems engineering: a survey. *Control Engineering Practice*, 10:1223–1241.
- GARCIA, C. (2013). *Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos*. Editora da Universidade de São Paulo.
- GÖCKE, M. (2002). Various Concepts of Hysteresis Applied in Economics. *Journal of Economic Surveys*, 16:167–188.

- GE, P. e JOUANEH, M. (1997). Generalized preisach model for hysteresis nonlinearity of piezoceramic actuators. *Precision Engineering*, 20:99–111.
- HASSANI, V., TIAHJOWIDODO, T., e DO, T. N. (2014). A Survey on Hysteresis Modeling, Identification and Control. *Mechanical Systems and Signal Processing*.
- HELLENSEN, R. H. A., ANGELIS, G. Z., VAN DE MOLENGRAFT, M. J. G., DE JAGER, A. G., e KOK, J. J. (2000). Grey-box Modeling of Friction: An Experimental Case-study. *European Journal of Control*, 6(3):258 – 267.
- HONG, T., MORRIS, A. J., KARIM, M. N., ZHANG, J., e LUO, W. (1996). Nonlinear control of a wastewater pH neutralisation process using adaptive NARX models. In *1996 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Information Intelligence and Systems (Cat. No.96CH35929)*, volume 2, páginas 911–916.
- IKHOUANE, F. e RODELLAR, J. (2007). *Systems with Hysteresis: Analysis, Identification and Control Using the Bouc-Wen Model*. Wiley.
- ISMAIL, M., IKHOUANE, F. A., e RODELLAR, J. (2009). The Hysteresis Bouc-Wen Model, a Survey. *J. Arch. Computat. Methods. Engl.*, 3:161–188.
- JOHANASTROM, K. e CANUDAS-DE-WIT, C. (2008). Revisiting the LuGre friction model. *IEEE Control Systems*, 28(6):101–114.
- KORENBERG, M., BILLINGS, S. A., LIU, Y. P., e MCILROY, P. J. (1987). Orthogonal parameter estimation algorithm for non-linear stochastic systems. *Journal of Control*, 48:193–210.
- KWOK, Y.-K. (2008). *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer, 2ª edição.
- KYPRIANOU, A., WORDEN, K., e PANET, M. (2001). Identification of Hysteretic Systems Using the Differential Evolution Algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, 248:289–314.
- LACERDA JUNIOR, W., MARTINS, S. A. M., NEPOMUCENO, E., e Lacerda, M. (2019). Control of Hysteretic Systems Through an Analytical Inverse Compensation Based on a NARX Model. *IEEE Access*, 7:98228–98237.
- LANDAU, L. D. (1937). On the theory of phase transitions. *Phys. Z. Soviet Un.*, 11:26.
- LEONTARITIS, I. J. e BILLINGS, S. A. (1985). Input-output parametric models for nonlinear systems - part i: deterministic nonlinear systems. *Journal of Control*, 41:303–328.
- LEVA, A. e PIRODDI, L. (2002). NARX-based Technique for the Modelling of Magneto-rheological Damping Devices. *Smart Materials and Structures*, 11:79.

- LI, J. e TIAN, H. (2018). Position control of SMA actuator based on inverse empirical model and SMC-RBF compensation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 108:203–215.
- LIN, C., YAU, H., e TIAN, Y. (2013). Identification and Compensation of Nonlinear Friction Characteristics and Precision Control for a Linear Motor Stage. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 18(4):1385–1396.
- LIU, L., LI, L., HUANG, Y., CUI, K., XIONG, Q., HAUSKE, F. N., XIE, C., e CAI, Y. (2011). Intrachannel nonlinearity compensation by inverse Volterra series transfer function. *Journal of Lightwave Technology*, 30(3):310–316.
- LUH, G.-C. e C.-Y., W. (2000). Inversion control of non-linear systems with an inverse NARX model identified using genetic algorithms. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 214:259–271.
- MADDELUNG, E. (1905). Über Magnetisierung durch schnellverlaufende Ströme und die Wirkungsweise des Rutherford-Marconischen Magnetdetektors. *Ann. Phys.*, 17:861–890.
- MANZOORI, A. e TOOPCHI-NEZHAD, H. (2017). Application of an Extended Bouc-Wen Model in Seismic Response Prediction of Unbonded Fiber-Reinforced Isolators. *Journal of Earthquake Engineering*, 21(1):87–104.
- MARTINS, S. A. M. (2016). *Modelos Auto regressivos para Representação de Sistemas com Histerese*. Tese de doutorado, PPGEE - UFMG, Belo Horizonte, Brasil.
- MARTINS, S. A. M. e AGUIRRE, L. A. (2016). Sufficient conditions for rate-independent hysteresis in autoregressive identified models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 75:607–617.
- MENDES, E. M. A. M. e BILLINGS, S. A. (2001). An alternative solution to the model structure selection problem. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 31:597–608.
- MENG, D., XIA, P., LANG, K., SMITH, E. C., e RAHN, C. D. (2020). Neural Network Based Hysteresis Compensation of Piezoelectric Stack Actuator Driven Active Control of Helicopter Vibration. *Sensors and Actuators A: Physical*, 302:111809.
- MONTEIRO, L. H. A. (2011). *Sistemas Dinâmicos*. Livraria da Física, São Paulo, 3ª edição.
- MORRIS, K. A. (2012). What is hysteresis? *Applied Mechanics Reviews*, 64:050801.
- MURAKAM, Y., NOMOTO, T., e UEDA, T. (1999). Factors influencing the mechanism of superlong fatigue failure in steels. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 22:581–590.

- NELLES, O. (2001). *Nonlinear system identification*. Springer, Berlin.
- NEPOMUCENO, E. G. (2002). *Identificação Multiobjetivo de Sistemas Não Lineares*. Dissertação de mestrado, PPGEE - UFMG, Belo Horizonte, Brasil.
- NICOLAO, G. d., MAGNI, L., e SCATTOLINI, R. (1997). Stabilizing Predictive Control of Nonlinear ARX Models. *Automatica*, 33:1691–1697.
- OGATA, K. (2000). *Engenharia de Controle Moderno*. Rio de Janeiro, LTC, 3ª edição.
- OLSSON, H., ASTROM, K. J., CANUDAS-DE-WIT, C., GAFVERT, M., e LISCHINKSY, P. (1998). Method for random vibration of hysteresis systems. *European Journal of Control*, 3:176–195.
- OPPENHEIM, A. V., WILSKY, A. S., e NAWAB, H. (2010). *Sinais e Sistemas*. Prentice-Hall, 2ª edição.
- PELLICIARI, M., MARANO, G. C., CUOGHI, T., BRISEGHIELLA, B., LAVORATO, D., e TARANTINO, A. M. (2018). Parameter identification of degrading and pinched hysteretic systems using a modified Bouc-Wen model. *Structure and Infrastructure Engineering*, 0(0):1–13.
- PIRODDI, L. e SPINELLI, W. (2003). An identification algorithm for polynomial NARX models based on simulation error minimization. *International Journal of Control*, 76:1767–1781.
- POMERENING, J. R., SONTAG, E. D., e FERRELL, J. E. (2003). Building a cell cycle oscillator: hysteresis and bistability in the activation of Cdc2. *Nature Cell Biology*, 5:346–351.
- PREISACH, F. (1935). Über die magnetische nachwirkung. *Zeitschrift für Physik*, 94:277–302.
- QUARANTA, G., LACARBONARA, W., e MASRI, S. F. (2020). A review on computational intelligence for identification of nonlinear dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*, 99:1709–1761.
- RAKOTONDRABE, M. (2011). Bouc-Wen Modeling and Inverse Multiplicative Structure to Compensate Hysteresis Nonlinearity in Piezoelectric Actuators. *IEEE Transactions on Automation, Science and Engineering*, 8(2):1–28.
- RUDERMAN, M., HOFFMAN, F., e BERTRAM, T. (2009). Modeling and Identification of Elastic Robot Joints With Hysteresis and Backlash. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56(10):3840–3847.
- SCHOUKENS, J. e LJUNG, L. (2019). Nonlinear System Identification: A User-Oriented Road Map. *IEEE Control Systems Magazine*, 39(6):28–99.

- SEBORG, D. E., MELLICHAMP, D. A., EDGAR, T. F., e DOYLE III, F. J. (2010). *Process dynamics and control*. John Wiley & Sons.
- SHA, W., MOORE, J., CHEN, K., L. A. D., YI, C. S., TYSON, J. J., e SIBLE, J. C. (2003). Hysteresis drives cell-cycle transitions in *Xenopus laevis* egg extracts. *PNAS*, 100(3):975–980.
- SHANNON, C. E. (1949). Communication in the presence of noise. *Proc. Institute of Radio Engineers*, 37(1):10–21.
- SINGH, B., VERMA, V., e SOLANKI, J. (2007). Neural network-based selective compensation of current quality problems in distribution system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 54(1):53–60.
- SOLOVYOV, A. M., SEMENOV, M. E., MELESHENKO, P. A., e BARSUKOV, A. I. (2017). Bouc-Wen model of hysteretic damping. *Procedia Engineering*, 201:549–555.
- STROTGATZ, S. (2018). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. CRC Press., Boca Raton, 2ª edição.
- SWEVERS, J., AL-BENDER, F., GANSEMAN, C. G., e PROJOGO, T. (2000). An Integrated Friction Model Structure with Improved Presliding Behavior for Accurate Friction Compensation. *IEEE Transactions on Automation, Science and Engineering*, 45(4):675–686.
- TAO, G. e KOKOTOVIC, P. V. (1995). Adaptive control of plants with unknown hysterese. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(2):200–212.
- TAVARES, L. A., ABREU, P. E. O. G. B., e AGUIRRE, L. A. (2019). Estimação de Parâmetros de Modelos Bouc-Wen via Algoritmos Evolutivos para Compensação o de Histerese. In *Anais do 14º Simppósio Brasileiro de Automação Inteligente*.
- TAVARES, L. A., ABREU, P. E. O. G. B., e AGUIRRE, L. A. (2020). A Nonlinearity Compensation Approach Based on NARX Models. No prelo.
- VISONE, C. (2008). Hysteresis Modelling and Compensation for Smart Sensors and Actuators. *Journal of Physics: Conference Series*, 138:1–28.
- WEBER, F. (2013). Bouc-Wen model-based real-time force tracking scheme for MR dampers. *Smart Materials and Structures*, 22(4).
- WEN, Y. K. (1976). Method for random vibration of hysteresis systems. *Journal of the Engeneering Mechanics Division*, 102(2):249–263.
- WILLMOTT, C. J. e MATSUURA, K. (2005). Advantages of the mean absolute error (mae) over the root mean square error (rmse) in assessing average model performance. *Climate research*, 30(1):79–82.

- YAO, J., DENG, W., e JIAO, Z. (2015). Adaptive Control of Hydraulic Actuators with LuGre Model-Based Friction Compensation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(10):6469–6477.
- ZHANG, X., TAN, Y., SU, M., e XIE, Y. (2010). Neural networks based identification and compensation of rate-dependent hysteresis in piezoelectric actuators. *Physica B: Condensed Matter*, 405(12):2687–2693.
- ZHOU, Y., WANG, A., ZHOU, P., WANG, H., e CHAI, T. (2020). Dynamic performance enhancement for nonlinear stochastic systems using RBF driven nonlinear compensation with extended Kalman filter. *Automatica*, 112:108693.

Soluções Analíticas de Equações Algébricas Polinomiais

Equações algébricas polinomiais com incógnita x e grau $n \in \mathbb{N}^+$ podem ser expressas como:

$$0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0 \quad (\text{A.1})$$

em que os termos $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, \dots, n\}$ são valores reais e conhecidos, denominados coeficientes. Para equações da forma (A.1), existem n raízes complexas. Além disso, é possível resolver analiticamente aquelas em que $n \leq 3$ como apresentado na sequência ([ABRAMOWITZ e STEGUN, 1965](#)).

A.1 Equações Lineares

$$0 = a_1 x + a_0, \quad a_1 \neq 0$$

$$x = \frac{-a_0}{a_1}$$

A.2 Equações Quadráticas

$$0 = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_2 \neq 0$$

$$\Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0$$

$$x_i = \frac{-a_1 + (-1)^i \Delta}{2a_2}, \quad i \in \{0, 1\}$$

A.3 Equações Cúbicas

$$\begin{aligned}0 &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_3 \neq 0 \\ \Delta_0 &= a_2^2 - 3a_3a_1 \\ \Delta_1 &= 2a_2^3 - 9a_3a_2a_1 + 27a_3^2a_0 \\ C &= \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 \pm \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \\ \xi &= \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \\ x_i &= -\frac{1}{3a} \left(b + \xi^i C + \frac{\Delta_0}{C} \right), \quad i \in \{0,1,2\}\end{aligned}$$