

Laboratório de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não-Lineares
Departamento de Engenharia Eletrônica
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901 Belo Horizonte, MG Brasil
Fone: +55 3499-4866 - Fax: +55 3499-4850



Resiliência de Redes de Kuramoto:

*uma Aplicação a
Sistemas Elétricos de Potência*

Ercílio Inácio Moreira

Orientador: Prof. Luis Antonio Aguirre, Ph.D.

Belo Horizonte, novembro de 2019

Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**RESILIÊNCIA DE REDES DE KURAMOTO: UMA APLICAÇÃO A
SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA**

Ercílio Inácio Moreira

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Luis Antonio Aguirre

Belo Horizonte - MG

Novembro de 2019

M838r

Moreira, Ercílio Inácio.

Resiliência de redes de Kuramoto [recurso eletrônico] : uma aplicação a sistemas elétricos de potência / Ercílio Inácio Moreira. – 2019.
1 recurso online (xxix, 93 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Luis Antonio Aguirre.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 89-93.

Bibliografia: f. 81-88.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Sistemas dinâmicos - Teses.
3. Sistemas elétricos de potência - Teses. I. Aguirre, Luis Antônio.
II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia.
III. Título.

CDU: 621.3(043)

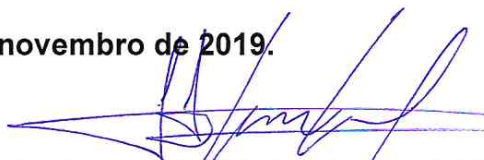
"Resiliência de Redes de Kuramoto: Uma Aplicação A Sistemas Elétricos de Potência"

Ercílio Inácio Moreira

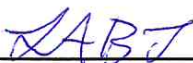
Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 29 de novembro de 2019.

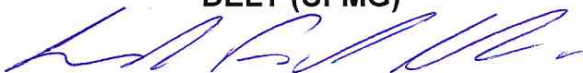
Por:



Prof. Dr. Luis Antonio Aguirre
DELT (UFMG) - Orientador



Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôres
DELT (UFMG)



Prof. Dr. Leandro Freitas Abreu
Engenharia (Instituto Federal Minas Gerais, Campus Betim)

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha querida Mel.

Agradecimentos

A Deus, pela oportunidade de estar aqui, neste lugar e tempo; e por sempre me guiar pelos caminhos da vida, mesmo que eu não seja capaz de entender todos eles.

Ao meu orientador, professor Luis Aguirre, pelos ensinamentos valiosos, pela compreensão e paciência. Seu entendimento acerca do ensino e da pesquisa, bem como seu profissionalismo e dedicação, são extremamente admiráveis.

A todos os professores que me incentivaram e compartilharam conhecimento. À UFMG, ao PPGEE e aos seus funcionários, por fornecerem o ambiente e a estrutura necessários ao desenvolvimento deste trabalho. À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos membros da banca examinadora, professores Leandro Freitas e Leonardo Torres, por prontamente aceitarem o convite e pelo tempo dedicado à avaliação deste trabalho. Ao professor Edgar Furtado, que não pôde estar presente na defesa mas participou da avaliação do texto.

Aos meus amigos. Entre eles, o Marcelo, com quem sempre pude contar nesse período em BH. Aos colegas de trabalho do CPH, pelas conversas e dicas, pelo compartilhamento de experiências e pelas palavras de incentivo. Ao Arthur, com quem tive o prazer de trabalhar diretamente.

Aos meus pais, por tudo o que fizeram por mim em meio a tantas dificuldades. Serei eternamente grato.

À minha namorada Melania, por todo apoio e incentivo, e por realmente acreditar em mim. Por todo seu amor e carinho que sempre me motivam. E à sua família, que tão bem me acolheu.

Muito obrigado!

Epígrafe

*“Nós também sabemos o quanto a verdade é muitas vezes cruel,
e nos perguntamos se a ilusão não é mais consoladora.”*

Henri Poincaré (1854-1912)

Sumário

Agradecimentos	ix
Resumo	xvii
Abstract	xix
Lista de Figuras	xxii
Lista de Algoritmos	xxiii
Lista de Símbolos	xxv
Lista de Acrônimos	xxix
1 Introdução	1
1.1 Contexto e motivação	1
1.2 Objetivos	2
1.2.1 Objetivo geral	2
1.2.2 Objetivos específicos	2
1.3 Contribuições	2
1.4 Organização do texto	3
2 Notação e conceitos fundamentais	5
2.1 Sistemas dinâmicos	5
2.2 Redes dinâmicas	7
2.2.1 Teoria de grafos	8
2.2.2 Topologia de redes	9
2.2.3 Modelo de Kuramoto	11
2.2.4 Sincronismo de osciladores	12
2.3 Análise de estabilidade e bacias de atração	14
2.3.1 Sistemas lineares	16

2.3.2	Método indireto de Lyapunov	17
2.3.3	Método direto de Lyapunov	17
2.3.4	Estabilidade estrutural	18
2.4	Outros termos importantes	19
3	Modelagem de sistemas elétricos de potência	21
3.1	Introdução	21
3.2	Máquinas síncronas	22
3.2.1	Modelo mecânico	23
3.2.2	Modelo elétrico	24
3.3	Matriz de admitância	25
3.4	Fluxo de potência	27
3.5	Dinâmica coletiva	29
3.5.1	Abordagem EN	29
3.5.2	Abordagem SP	32
3.5.3	Abordagem SM	33
4	Abordagens baseadas em amostras	37
4.1	O tamanho da bacia de sincronia	37
4.2	Trabalhos subsequentes	41
4.3	Potenciais e limitações	54
5	Resultados e Discussões	57
5.1	Introdução	57
5.2	Comparação dos modelos EN, SP e SM	59
5.2.1	Procedimento Numérico	59
5.2.2	Exemplo 1: sistema de testes	60
5.2.3	Exemplo 2: SEP brasileiro	61
5.2.4	Conclusões parciais	64
5.3	Resiliência, tempo de seccionamento e heterogeneidade em SEPs	64
5.3.1	Metodologia	65
5.3.2	Resultados	69
5.3.3	Aplicação ao SEP brasileiro	71
5.3.4	Conclusões parciais	72
5.4	Considerações finais	73
6	Conclusões	75
6.1	Discussões finais	75
6.2	Problemas em aberto	77

6.3 Sugestões de trabalhos futuros	78
Bibliografia	88
A Estabilidade da bacia e centralidade de intermediação	89

Resumo

As redes dinâmicas têm sido alvo de grande interesse na comunidade científica. Tal fato justifica-se pela inúmera quantidade de sistemas físicos que podem ser representados por esses modelos. Grande parte dos estudos relacionados focam-se na estabilidade e resiliência desses sistemas. A estabilidade de um sistema dinâmico é um problema importante, especialmente quando se consideram sistemas interconectados. Neste trabalho, realizou-se uma análise de resiliência em modelos de Kuramoto, motivada pela capacidade que eles possuem de representar sistemas elétricos de potência. As investigações concentraram-se em duas linhas principais.

Primeiramente, dois exemplos foram analisados: um sistema de testes e um modelo em escala ampla do sistema elétrico brasileiro. O objetivo foi determinar o efeito da escolha da representação (*Effective Network*, *Structure-Preserving*, ou *Synchronous Motor*) sobre a medida de resiliência desses sistemas. Utilizando-se um conceito chamado *estabilidade da bacia*, que quantifica a estabilidade não local e fornece a probabilidade de um sistema perturbado retornar ao regime estável, constatou-se que as abordagens não são totalmente correspondentes em relação à classificação dos geradores.

Em estudos anteriores, a estabilidade da bacia foi utilizada, mas limitada a sistemas elétricos de potência homogêneos. Então, na segunda investigação, usou-se uma abordagem semelhante, estendendo-a a sistemas heterogêneos. A partir de uma amostra de topologias de redes de energia geradas aleatoriamente, estudou-se como a estabilidade da bacia de um sistema elétrico de potência é afetada por dois fatores principais: (i) a heterogeneidade da rede elétrica; e (ii) o tempo de seccionamento, que define o tempo para um dispositivo de proteção isolar o gerador perturbado do restante da rede. As simulações numéricas mostraram que, enquanto para uma rede completamente homogênea, quanto menor o tempo de seccionamento, maior a estabilidade da bacia, para uma heterogênea, a melhor escolha do tempo de seccionamento pode não ser o mais curto. Ao contrário, em uma rede muito heterogênea, a melhor escolha pode ser não isolar o gerador perturbado da rede. Por fim, aplicou-se essa metodologia também na análise de um modelo do sistema elétrico de potência brasileiro.

Palavras-chave: redes dinâmicas; heterogeneidade de redes; sistemas elétricos de potência; modelo de Kuramoto; resiliência; estabilidade da bacia; tempo de seccionamento.

Abstract

Dynamic networks have been the subject of great interest in the scientific community. This is justified by the countless number of physical systems that can be represented by these models. Most related studies focus on the stability and resilience of such systems. The stability of a dynamical system is an important problem in nonlinear science, especially when considering interconnected systems. In this work, a resilience analysis was performed using Kuramoto models, motivated by their ability to represent power grids. The investigations follows along two lines.

First, two examples were studied: a test system and a large scale model of the Brazilian power grid. The goal was to determine the effect of the choice of representation (Effective Network, Structure-Preserving or Synchronous Motor) on the resilience measure of these systems. By using a concept called *basin stability*, which quantifies non-local stability and gives the likelihood that a perturbed system returns to the stable state, it was found that the approaches are not fully equivalent with respect to generator classification.

In previous studies, basin stability was used but limited to homogeneous power grids. Then, in the second investigation, a similar approach was adopted, extending it to heterogeneous power grids. From a sample of randomly generated power grid topologies, we studied how the basin stability of an electric power system is affected by two main factors: (i) the heterogeneity of the power grid; and (ii) the tripping time, which defines the time for a protection device to isolate the perturbed generator from the rest of the network. The numerical simulations showed that while for a completely homogeneous network, the shorter the tripping time, the better the basin stability, for a heterogeneous one, the best choice of tripping time may not be the shortest. Contrariwise, in a highly heterogeneous network, the best choice may be to not isolate the perturbed generator from the network at all. Finally, this methodology was also applied to the analysis of a model of the Brazilian electric power grid.

Keywords: dynamical networks; network heterogeneity; power grids; Kuramoto model; resilience; basin stability; tripping time.

Lista de Figuras

2.1	Exemplos de topologias de redes	10
2.2	Ponto de equilíbrio estável e bacias de atração real e estimada	16
3.1	Esquemáticos elétrico e mecânico de uma máquina síncrona	23
3.2	Diagrama simplificado de um SEP com três barras	26
3.3	Diagrama simplificado de um SEP com três barras com as representações dos geradores e da carga	30
3.4	Redes resultantes para as três abordagens (EN, SP e SM) para o SEP com três barras	34
4.1	Analogia entre bacia de atração e um objeto sobre uma curva irregular	38
4.2	Ilustração esquemática em duas dimensões	41
4.3	Estabilidade da bacia em sua versão por nó	42
4.4	Algumas estruturas recorrentes em redes complexas	43
4.5	Ilustração do processo de estimação do limiar de estabilidade	44
4.6	Exemplo de restrição estática para cálculo da CBS	47
4.7	Estabilidade da bacia em sua versão de múltiplos nós	51
4.8	Pêndulo duplo forçado usado na literatura em experimentos para validação da medida de estabilidade da bacia	52
4.9	Ilustração do processo de estimação da estabilidade intervalar da bacia	54
4.10	Bacias de atração com mesma estabilidade da bacia e previsibilidades distintas	55
5.1	Estabilidade da bacia estimada para um sistema com 10 geradores	60
5.2	SEP brasileiro e medida de resiliência de seus geradores	62
5.3	Subespaço correspondente ao estado do gerador 5 do SEP brasileiro	63
5.4	Séries temporais para perda de estabilidade e para recuperação após perturbação no gerador 5 do SEP brasileiro	63
5.5	Conjunto de SEPs artificiais.	66

5.6	Medida de estabilidade da bacia para um conjunto de SEPs com diferentes distribuições de potência e tempos de seccionamento	69
5.7	Histograma da estabilidade da bacia para um conjunto de redes com diferentes distribuições de potência	71
5.8	Relação entre resiliência, tempo de seccionamento e heterogeneidade para o SEP brasileiro	72
A.1	Estabilidade da bacia em função da centralidade de intermediação para o caso homogêneo	90
A.2	Estabilidade da bacia em função da centralidade de intermediação para o caso heterogêneo sem seccionamento	91
A.3	Estabilidade da bacia em função da centralidade de intermediação para o caso heterogêneo e $t_{\text{trip}} = 0,005$	92
A.4	Estabilidade da bacia em função da centralidade de intermediação para o caso heterogêneo e $t_{\text{trip}} = 0,005$, com destaque para algumas redes	93

Lista de Algoritmos

1	Estimativa numérica da estabilidade da bacia	40
2	Estimativa numérica do limiar de estabilidade	44
3	Estimativa numérica da estabilidade estendida da bacia	46
4	Estimativa numérica da bacia de sincronia	49
5	Estimativa numérica da estabilidade da bacia de múltiplos nós	51
6	Estudo estatístico de resiliência de SEPs	68

Lista de Símbolos

Notação e símbolos gerais

$\mathbb{R}; \mathbb{N}$	Conjunto dos números [reais; naturais]
\mathbb{R}^n	Espaço vetorial euclidiano de dimensão n
x, X, ξ	Denotam escalares
$\mathbf{x}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}$	Denotam vetores
$\mathbf{X}, \boldsymbol{\Xi}$	Denotam matrizes
\mathcal{X}	Denota conjunto ou espaço vetorial euclidiano
$\mathbf{X} = [x_{ij}]_{n \times m}$	Matriz de dimensão (por vezes omitida) $n \times m$, com elementos x_{ij}
$\mathcal{X} = \{x_i\}_n$	Conjunto de cardinalidade (por vezes omitida) n , com elementos x_i
$\hat{x}; x^*; \langle x \rangle; x ; \Delta x$	[Estimativa; Complexo conjugado; Média; Módulo; Variação] de x
$\dot{x}; \ddot{x}$	[Primeira; Segunda] derivada de x em relação ao tempo
$\ \mathbf{x}\ ; \ \mathbf{x}\ _\infty$	[Norma euclidiana; Norma do máximo] de \mathbf{x}
$\mathbf{x}^T; \mathbf{X}^T; \mathbf{X}^{-1}$	Transposição do vetor \mathbf{x} ; Transposição da matriz \mathbf{X} ; Inversa da matriz \mathbf{X}
$\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$	Matriz diagonal com elementos x_1, \dots, x_n
$\text{blkdiag}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$	Matriz bloco diagonal com blocos $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$
$\text{dist}(x_1, x_2)$	Distância euclidiana entre dois pontos x_1 e x_2
$\partial\mathcal{X}$	Fronteira de um conjunto \mathcal{X}
$\text{card}(\mathcal{X}); \text{vol}(\mathcal{X})$	[Cardinalidade; Volume] de um conjunto \mathcal{X}
$\min(\mathcal{X}); \inf(\mathcal{X})$	[Mínimo; Ínfimo] de um conjunto \mathcal{X}
$\text{Re}(\cdot); \text{Im}(\cdot)$	Parte [real; imaginária] do argumento
$x_1 := x_2; x_1 \leftarrow x_2$	x_1 [é igual a x_2 por definição; recebe o valor x_2]
$x_1 \approx x_2; x_1 \propto x_2$	x_1 é [aproximadamente igual; proporcional] a x_2
$x_1 \equiv x_2 \pmod{x_3}$	x_1 é congruente a x_2 módulo x_3
$x_1 \cdot x_2; x_1 \times \dots \times x_n$	Produto entre escalares; Denota dimensão
$\mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2$	\mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 são vetores ortogonais
$\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2; \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$	\mathcal{X}_1 é um subconjunto de \mathcal{X}_2 ; Produto cartesiano entre os conjuntos \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2
$\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2; \bigcup_i^n \mathcal{X}_i$	\mathcal{X}_1 interseção com \mathcal{X}_2 ; União: \mathcal{X}_1 união com \dots união com \mathcal{X}_n
C^1	Classe de funções com primeira derivada contínua
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$	Matriz Jacobiana de uma função vetorial \mathbf{f}
$f: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$	A função f mapeia o conjunto \mathcal{X}_1 no conjunto \mathcal{X}_2
$X \sim \text{unif}(x_1, x_2)$	X segue distribuição uniforme de probabilidade no intervalo $[x_1, x_2]$
t	Variável tempo contínuo, $t \in \mathbb{R}$
j	Unidade imaginária, $j^2 = -1$
◆; ◇	Fim de [definição; teorema]

Capítulo 2

$x; u; \mathbf{x}; \mathbf{u}$	Variável de [estado; entrada]; Vetor de variáveis de [estado; entrada]
\mathbf{f}	Campo vetorial
\mathcal{X}	Espaço de estados
$\mathbf{x}^{\text{eq}}; \mathbf{x}_0$	Ponto de equilíbrio; Vetor de condições iniciais
$\mathbf{A}; \mathbf{B}$	Matriz [dinâmica; de entradas]
$\mathcal{G}; \mathcal{N}; \mathcal{E}$	Grafo; Conjunto de nós; Conjunto de arestas
$N; E$	Número de [nós; arestas] de um grafo
$K_{ij}; d_{ij}$	[Peso associado a uma aresta conectando; Distância entre] dois nós i e j
$k_i; b_i$	[Grau; Centralidade de intermediação] do i -ésimo nó
$\langle k \rangle; k$	Grau médio de um grafo; Grau do i -ésimo nó quando $k_i = k, \forall i$
$e_{jl}; e_{jl}(i)$	Número de menores caminhos entre os nós j e l [; que passam pelo nó i]
$e_i; c_i$	[Número de arestas entre vizinhos; Coeficiente de clusterização] do i -ésimo nó
$\mathbf{A}_{\text{adj}}; \mathbf{L}$	Matriz [de adjacência; Laplaciana]
\mathbb{P}	Denota probabilidade em algoritmos de evolução de redes
$\delta; \omega$	[Fase; Frequência] de um oscilador de Kuramoto
\mathbf{K}	Matriz de acoplamento
$U; m; \alpha; \tau$	Parâmetro [de controle; massa; coeficiente de amortecimento; torque]
\mathbf{x}_i	Vetor de variáveis de estado do i -ésimo nó de uma rede
ψ	Variável de fase
$\mathcal{A}; \mathcal{B}; t_c$	Atrator; Bacia de atração; Tempo crítico
$\mathbf{A}_{\mathbf{f}}; \lambda$	Matriz jacobiana de \mathbf{f} ; Autovalor
$p; \mathbf{p}; \mathcal{P}$	Parâmetro; Vetor de parâmetros; Espaço de parâmetros

Capítulo 3

ω_r	Frequência de referência
$J; H$	[Momento; Constante] de inércia de um gerador
$\theta; \delta$	Ângulo de um rotor; Desvio do ângulo de um rotor
$\tilde{\tau}_m; \tau_e; \tau_m$	Torque [mecânico aplicado; elétrico; mecânico resultante]
$D_m; D_e; D$	Coefficiente de amortecimento [mecânico; elétrico; resultante]
R	Parâmetro de ajuste
$\tilde{P}_m; \tilde{P}; P_r; P_m; P$	Potência [mecânica; elétrica; de referência; [mecânica; elétrica] resultante]
$E; V; I$	[Tensão interna; Tensão nos terminais; Corrente] em um gerador
$x'_d; y'_d$	[Reatância; Admitância] transitória de um gerador
$y; g; b; z; r; x$	Admitância; Condutância; Susceptância; Impedância; Resistência; Reatância
$I_i, I_{ij}, I_{ij}^{\text{sh}}, I_{ij}^s$	Correntes relacionadas às barras i e j
$\mathbf{Y}; \mathbf{G}; \mathbf{B}$	Matriz de admitância; Parte real de \mathbf{Y} ; Parte imaginária de \mathbf{Y}
$N_b; N_g; N_1; N_{\text{SP}}$	Número de [barras; geradores; cargas; nós do modelo SP]
\mathcal{V}_i	Conjunto das barras vizinhas da i -ésima barra
β_{ij}	Fase do elemento Y_{ij}
$S_i; P_i; Q_i$	Potência [aparente; ativa; reativa] na i -ésima barra
\mathbf{Y}^{sh}	Matriz de admitância <i>shunt</i> devido a cargas
$\mathbf{Y}_d; \mathbf{Y}'_d$	Matriz de admitância transitória [de geradores; completa]

$\mathbf{0}; \mathbf{1}$	[Matriz nula ou vetor nulo; Matriz identidade] de dimensão apropriada
$\mathbf{V}_g; \mathbf{V}_t; \mathbf{V}_l$	Vetor de tensões [internas; nos terminais de geradores; nas cargas]
\mathbf{I}_g	Vetor de correntes nos geradores
$\mathbf{Y}^{\text{EN}}; \mathbf{Y}^{\text{SP}}; \mathbf{Y}^{\text{SM}}$	Matriz de admitância resultante [EN; SP; SM]
$A_i; K_{ij}; \gamma_{ij}$	Parâmetro do modelo resultante: [potência líquida no i -ésimo nó; capacidade da linha de transmissão entre i e j ; defasamento angular entre i e j]

Capítulo 4

$N; N_i; N_A; N_C; N_P;$ $N_a; N_b; N_i; N_j$	Número de [nós; realizações; vezes que uma trajetória alcançou o atrator \mathcal{A} ; subconjuntos; nós perturbados; atratores; caixas; cores dentro da caixa i ; condições iniciais que levam à cor j]
$k_i; k$	Grau do i -ésimo nó [; quando $k_i = k, \forall i$]
$\delta; \omega$	[Fase; Frequência] de um oscilador de Kuramoto
U	Parâmetro de controle
q	Número de enrolamento
$\mathbb{P}; \mathbb{P}(q, l); \mathbb{P}_{ij}$	Probabilidade [no algoritmo de WS; de convergência para \mathbf{x}_q^{eq} , dado l ; de uma condição inicial na caixa i levar à cor j]
$\mathbf{x}; \mathbf{x}_i$	Vetor de variáveis de estado [; do i -ésimo nó]
$\mathbf{f}(\cdot), \mathbf{f}_p(\cdot), \mathbf{h}(\cdot); g(\cdot)$	Campos vetoriais; Campo escalar
$\mathcal{X}; \mathcal{X}_i$	Espaço de estados; Região de interesse no espaço de estados
$\mathcal{A}; \mathcal{B}; \mathcal{C}$	Atrator; Bacia de atração; Região permitida a um transiente
$S; S_i; S_t; \hat{S}(\mathcal{P}_i^j); S_c;$	Estabilidade da bacia; Estabilidade da bacia por nó; Limiar de estabilidade;
$S_s(t); S_d; S_{\text{trr}};$	Estimativa da estabilidade da bacia dado um conjunto de parâmetros; Estabilidade restrita da bacia; Sobrevivência; Distância generalizada; Tempo de
$\hat{S}(\mathcal{M}_j^{N_p}); \langle \hat{S}^{N_p} \rangle$	alcance regularizado; Estimativa da estabilidade da bacia de múltiplos nós; Estimativa da média da estabilidade da bacia de múltiplos nós
$\mathbb{1}_{\mathcal{B}}; \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$	Funções indicadoras de [convergência; cumprimento de restrições]
$\rho; \rho_{\mathbf{x}}; \rho_{\mathbf{p}}$	PDF que caracteriza a distribuição de [condições iniciais; parâmetros]
σ_S	Desvio padrão da estimativa da estabilidade da bacia
$\langle k \rangle$	Grau médio de uma rede
$k_i; b_i$	[Grau; Centralidade de intermediação] do i -ésimo nó
K_{ij}	Peso associado a uma aresta conectando dois nós i e j
σ	Menor distância entre um atrator e a fronteira de sua bacia de atração
$\partial \mathcal{B}$	Fronteira de uma bacia de atração \mathcal{B}
M_j	Pontos de convergência do algoritmo que estima o limiar de estabilidade
$p; \Delta p; p_0$	Parâmetro genérico ; Variação de parâmetro; Parâmetro inicial
$\mathcal{P}; \mathcal{P}_i; \mathcal{P}_i^j$	Espaço de parâmetros; Espaço de parâmetros de interesse; j -ésimo subespaço de parâmetros de interesse
$\mathbf{x}^{\text{eq}}; \mathbf{x}_0; \mathbf{x}_0^{\text{ref}}; \mathbf{x}_q^{\text{eq}}$	Ponto de equilíbrio; Vetor de condições iniciais; Vetor de condições iniciais de referência; Ponto de equilíbrio caracterizado pelo número de enrolamento q
ε	Distância generalizada de um atrator
$t_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$	Tempo que uma trajetória leva para alcançar uma distância generalizada ε
$\mathbf{x}'_j; \boldsymbol{\eta}_{qlj}$	Vetor de [perturbações; de condições iniciais perturbado]
\mathbf{A}_{adj}	Matriz de adjacência
$s_i; s$	Entropia [de uma caixa; média]

Capítulo 5

$H_i; D_i; A_i; K_{ij}; \gamma_{ij}$	Parâmetro [constante de inércia; coeficiente de amortecimento; potência líquida; de acoplamento; de defasamento] de um oscilador de Kuramoto
$\delta_i; \omega_i$	[Fase; Frequência] do i -ésimo oscilador de Kuramoto
$N; M; N_b; N_g; N_i$	Número de [osciladores; topologias; barras; geradores; realizações]
ω_r	Frequência de referência
$\mathbf{x}_i; \mathbf{x}$	Vetor de variáveis de estado [do i -ésimo oscilador; completo] para as abordagens EN e SM
$\boldsymbol{\omega}$	Vetor de frequências dos osciladores de Kuramoto
δ_i^{ss}	Fase do i -ésimo oscilador em estado estacionário
$\hat{S}; \hat{S}_i; \hat{S}(k, l); \hat{S}_{\text{avg}}$	Estimativa da estabilidade da bacia [; por nó; para a k -ésima rede dado o isolamento do l -ésimo gerador; média para todos k e l]
$\{\mathcal{G}_k\}; \{\mathcal{G}_k^{d_m}\}; \{d_m\}$	Conjunto de [topologias; topologias com distribuição de potência d_m ; pares ordenados, $d_m = (X_m\%, Y_m\%)$]
$S_t; P_t; Q_t; S_{l,i}$	Potência [aparente; ativa; reativa] total; Potência consumida por carga
$\mathbf{D}; \mathbf{H}; \mathbf{A}$	Vetor com [coeficientes de amortecimento; constantes de inércia; potências líquidas] em uma rede de Kuramoto
$\mathbf{K}; \mathbf{\Gamma}$	Matriz com [acoplamentos; defasamentos] em uma rede de Kuramoto
$\mathcal{A}, \mathcal{A}'$	Atrator [antes do; após o] isolamento de um gerador
$\rho(\mathbf{x}_i)$	PDF que caracteriza a ocorrência de perturbações no i -ésimo nó
$t; t_{\text{trip}}; \Delta t$	Variável tempo contínuo; Tempo de seccionamento; Intervalo de integração
$\mathbf{D}^l; \mathbf{H}^l; \mathbf{A}^l$	Vetor com [coeficientes de amortecimento; constantes de inércia; potências líquidas] em uma rede de Kuramoto após o isolamento do l -ésimo gerador
$\mathbf{K}^l; \mathbf{\Gamma}^l$	Matriz com [acoplamentos; defasamentos] em uma rede de Kuramoto após o isolamento do l -ésimo gerador

Lista de Acrônimos e Abreviaturas

BS	Estabilidade da bacia (<i>Basin Stability</i>)
CBS	Estabilidade restrita da bacia (<i>Constrained Basin Stability</i>)
CDN	Rede dinâmica complexa (<i>Complex Dynamical Network</i>)
EBS	Estabilidade estendida da bacia (<i>Extended Basin Stability</i>)
EN	Rede eficaz (<i>Effective Network</i>)
ER	Erdős-Rényi
IBS	Estabilidade intervalar da bacia (<i>Interval Basin Stability</i>)
IST	Limiar de estabilidade em intervalo (<i>Interval Stability Threshold</i>)
LT	Linha de transmissão
MNBS	Estabilidade da bacia de múltiplos nós (<i>Multiple-Node Basin Stability</i>)
EDO	Equação diferencial ordinária
PDF	Função densidade de probabilidade (<i>Probability Density Function</i>)
SEP	Sistema Elétrico de Potência
SF	Livre de escala (<i>Scale-Free</i>)
SM	Motor síncrono (<i>Synchronous Motor</i>)
SNBS	Estabilidade da bacia por nó (<i>Single-Node Basin Stability</i>)
SP	Preservação da estrutura (<i>Structure-Preserving</i>)
ST	Limiar de estabilidade (<i>Stability Threshold</i>)
SW	Mundo Pequeno (<i>Small-World</i>)
WS	Watts-Strogatz
Alg.	Algoritmo
Cap.	Capítulo
Eq.	Equação
etc.	e assim por diante (<i>et coetera</i>)
e.g.	por exemplo (<i>exempli gratia</i>)
Fig.	Figura
i.e.	isto é (<i>id est</i>)
pág.	página
Seq.	Seção
vs.	versus

Introdução

“Quanto mais aumenta nosso conhecimento, mais evidente fica nossa ignorância”

John F. Kennedy

1.1 Contexto e motivação

Os Sistemas Elétricos de Potência (SEPs) estão entre as maiores construções já realizadas. Constituídos, principalmente, por grandes unidades geradoras e agrupamentos de consumidores interconectados por linhas de transmissão e distribuição, um SEP deve operar sempre dentro de especificações pré-estabelecidas. É necessário, também, que essa operação seja estável e robusta, uma vez que qualquer irregularidade nesses sistemas pode levar a prejuízos consideráveis [Pourbeik et al., 2006; Andersson et al., 2005].

Recentemente, pesquisadores têm dedicado esforços para entender melhor os SEPs de um ponto de vista mais abrangente. Uma abordagem atual consiste na análise de tais sistemas no arcabouço de redes complexas e/ou dinâmicas [Saleh et al., 2018; Nishikawa and Motter, 2015]. Geralmente, essa abordagem faz uso de modelos que procuram capturar a dinâmica do sistema como um todo, considerando as dinâmicas das unidades geradoras, dos agrupamentos de consumidores e a interação entre eles, que se dá por meio das linhas de transmissão. Os modelos utilizados devem ser simples o suficiente para possibilitar a realização de estudos com complexidade computacional razoável, mas, ainda assim, devem ser capazes de capturar os aspectos mais essenciais de cada elemento que compõe o sistema [Rohden et al., 2012; Nishikawa and Motter, 2015].

Uma condição necessária para a operação normal de um sistema elétrico de potência é que (i) as frequências dos geradores do sistema permaneçam iguais — i.e., que eles permaneçam *sincronizados* — e (ii) dentro de uma faixa especificada. Muitos trabalhos dedicaram-se a encontrar configurações topológicas ou de parâmetros que favorecem o sincronismo [Motter et al., 2013], além de identificar pontos frágeis e quantificar essa fragilidade [Mittra et al., 2017a; Liu and Zhang, 2017].

Menck et al. [2014] utilizaram um conceito chamado *estabilidade da bacia* (do inglês: *basin stability*) para determinar estruturas comumente presentes que diminuem a *resiliência* de uma rede — característica que reflete sua capacidade de permanecer funcional após uma falha [Gao et al., 2015] —. Esse conceito complementa o paradigma da análise

linear de estabilidade, fornecendo medidas de probabilidade de convergência por meio de uma análise não local [Menck et al., 2013]. Em termos práticos, trata-se de um Método de Monte Carlo que permite caracterizar alguns aspectos da estabilidade de sistemas dinâmicos. A estabilidade da bacia faz parte de um conjunto de ferramentas recentemente desenvolvidas chamadas de *abordagens baseadas em amostras* [Brzeski and Perlikowski, 2018].

Métodos baseados na teoria de Lyapunov evitam integrações custosas computacionalmente, porém, encontrar uma função de Lyapunov para determinados sistemas pode ser uma tarefa analiticamente inviável [Gajduk et al., 2014] e os resultados obtidos podem ser bastante conservadores.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

Estudar a resiliência de redes de Kuramoto aplicadas à modelagem de SEPs por meio de abordagens baseadas em amostras.

1.2.2 Objetivos específicos

A seguir, listam-se os objetivos específicos deste estudo.

1. Apresentar a derivação dos três modelos mais utilizados (EN, SP e SM, do inglês: *Effective Network*, *Structure-Preserving* e *Synchronous Motor*, respectivamente) nos estudos de SEPs no contexto de redes dinâmicas.
2. Revisar as contribuições recentes relacionadas às *abordagens baseadas em amostras*, utilizadas para caracterização de estabilidade e/ou resiliência de redes e sistemas dinâmicos.
3. Comparar os modelos EN, SP e SM em relação à medida de *estabilidade da bacia* estimada para SEPs modelados a partir dessas abordagens.
4. Estudar como o *tempo gasto para se efetuar o isolamento de geradores perturbados* influencia a *estabilidade da bacia* para diferentes *níveis de heterogeneidade* referentes à distribuição de potência entre os geradores que compõem os SEPs.

1.3 Contribuições

Neste trabalho, utilizaram-se *modelos abrangentes* e os conceitos de *estabilidade da bacia* (e suas versões modificadas) para quantificar a resiliência de SEPs. A dinâmica dos SEPs é aqui modelada como uma rede de osciladores de Kuramoto de segunda e primeira ordens acoplados [Dörfler et al., 2013; Nishikawa and Motter, 2015]. Tais modelos

representam um paradigma para o estudo de sincronismo e trazem consigo um longo repertório de resultados teóricos obtidos desde a sua formulação por Kuramoto [1975]. Além disso, osciladores de segunda ordem, que surgiram na literatura posteriormente, podem capturar a inércia existente em sistemas reais, ao contrário daqueles de primeira ordem [Dörfler and Bullo, 2011].

As investigações concentraram-se em duas linhas principais. (i) Em um primeiro momento, compararam-se as três abordagens para modelagem mais comumente usadas na literatura no contexto descrito (EN, SP e SM) em relação à medida de resiliência obtida. Essas abordagens diferem no que diz respeito à representação das cargas, sendo estas consideradas: impedâncias constantes para a EN, osciladores de primeira ordem para a SP e osciladores de segunda ordem para a SM. Como resultado, constatou-se que não há concordância entre os resultados obtidos partindo-se de cada uma delas, embora exista alguma correlação em termos gerais. (ii) Posteriormente, escolhida a abordagem EN (com base em seu histórico de sucesso na literatura de SEPs e menor custo computacional), realizou-se uma investigação a respeito das relações entre a (a) distribuição do fornecimento de potência, (b) o tempo requerido para a isolamento de um nó perturbado e (c) a resiliência de SEPs. Observou-se que, em relação à resiliência, o tempo ideal para se isolar um nó perturbado varia de acordo com a distribuição de potência na rede, podendo ser vantajoso até mesmo mantê-lo conectado.

1.4 Organização do texto

Esta dissertação organiza-se conforme descrito a seguir.

No Cap. 2, apresentam-se alguns conceitos básicos e termos necessários ao entendimento dos capítulos posteriores. Fala-se sobre redes e sobre a nomenclatura usada no presente estudo, buscando apresentar ao leitor também outros termos comumente usados no mesmo contexto, a fim de guiá-lo caso consulte a literatura correspondente. Apresenta-se, também, o modelo de Kuramoto usado nas investigações.

No Cap. 3, apresenta-se a derivação de modelos para SEPs e como eles são reduzidos a modelos de Kuramoto sob determinadas considerações. São modelados as máquinas síncronas individualmente e o comportamento coletivo, de acordo com as três abordagens usadas nas investigações.

O Cap. 4 consiste em uma revisão de trabalhos que usaram ou propuseram métricas, algoritmos, discussões, entre outros, das abordagens baseadas em amostras. O objetivo é apresentar trabalhos relacionados. Parte dos artigos revisados utilizam modelos cuja apresentação de detalhes foge do escopo desta dissertação; no entanto, julgou-se que as ferramentas e discussões são importantes e merecem ser citadas. Nesses casos, para mais detalhes, convida-se o leitor a consultar as referências.

Então, no Cap. 5, apresentam-se os resultados obtidos fazendo-se uso dos modelos vistos no Cap. 3 e de algumas das ferramentas revisadas no Cap. 4. As duas linhas de

investigação e seus resultados são apresentados em seções distintas para melhor compreensão (Seqs. 5.2 e 5.3). Discussões e conclusões parciais também são realizadas.

Por fim, no Cap. 6, são feitas as considerações finais, com aspectos mais gerais. Além disso, são apresentadas propostas de trabalhos futuros. Esse capítulo inclui ainda algumas críticas presentes na literatura sobre os modelos aqui usados, juntamente com referências, para os leitores que desejarem explorá-las.

Notação e conceitos fundamentais

“Se queres conversar comigo, define primeiro os termos que usas.”

Voltaire

No presente capítulo, faz-se uma breve revisão sobre sistemas dinâmicos, destacando-se aqueles que são de interesse neste trabalho. Apresenta-se a nomenclatura usada para as redes dinâmicas sob investigação e definem-se alguns termos úteis usados ao longo do texto.

2.1 Sistemas dinâmicos

Definem-se, comumente, sistemas dinâmicos como sistemas que evoluem com o tempo obedecendo uma regra ou função [Strogatz, 2018]. Esta definição é extremamente ampla, portanto, é conveniente estabelecer os termos usados para referir-se a classes de sistemas que compartilham características em comum. Sendo assim, considere-se o conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_{n_x}(t), u_1(t), \dots, u_{n_u}(t)), \\ \dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1(t), \dots, x_{n_x}(t), u_1(t), \dots, u_{n_u}(t)), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n_x}(t) = f_{n_x}(t, x_1(t), \dots, x_{n_x}(t), u_1(t), \dots, u_{n_u}(t)), \end{cases} \quad (2.1)$$

escrito na forma compacta como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (2.2)$$

O vetor $\mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_{n_x}]^\top$, pertencente ao espaço de estados $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$, é chamado vetor de variáveis de estado ou, por simplicidade, *vetor de estado*. O vetor $\mathbf{u} = [u_1 \ \dots \ u_{n_u}]^\top$ é o vetor de entradas do sistema. A função $\mathbf{f} = [f_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \ \dots \ f_{n_x}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})]^\top$ é chamada de *campo vetorial*.

Seguindo as definições de Khalil [2002], se a entrada \mathbf{u} é nula, ou se pode ser escrita como uma função do tempo e dos estados, diz-se que o sistema é *não forçado*; caso contrário, é *forçado*. Se \mathbf{f} não depender explicitamente do tempo, diz-se que o sistema é

autônomo ou *invariante no tempo*; caso contrário, é *não autônomo* ou *variante no tempo*. Um sistema autônomo é invariante a deslocamentos do instante inicial de tempo, ou seja, depende apenas do intervalo de tempo analisado. No caso de um sistema autônomo e não forçado, a EDO é dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.3)$$

Os *pontos de equilíbrio* de (2.3) são aqueles tais que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, denotados \mathbf{x}^{eq} . Eles podem ser isolados ou formarem um continuum de pontos no espaço de estados. A evolução do estado desse sistema a partir de condições iniciais $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ ao longo do tempo é indicada por $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ ou, por simplicidade, $\mathbf{x}(t)$. Refere-se a essa curva como *trajetória*. Trajetórias são curvas no espaço de estados parametrizadas pelo tempo. Nas investigações realizadas neste trabalho, existe uma única trajetória que passa por \mathbf{x}_0 e satisfaz a EDO, ou seja, \mathbf{f} satisfaz as propriedades que garantem a existência e unicidade de soluções [Khalil, 2002].

Um caso especial de sistemas dinâmicos são os sistemas lineares: aqueles que obedecem ao princípio da superposição. Neste caso, a EDO é dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad (2.4)$$

em que $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ são matrizes variantes no tempo de dimensão apropriada. Se tais matrizes são constantes, o sistema é linear e invariante no tempo. Sistemas lineares contam com ferramentas poderosas de análise construídas sobre, por exemplo, o princípio da superposição, a transformada de Laplace, a análise de Fourier, entre outras [Strogatz, 2018].

Apesar de ser muito poderosa e utilizada em incontáveis aplicações, existem inúmeros fenômenos de interesse na engenharia que não podem ser explicados ou analisados sob a teoria de sistemas lineares. De fato, todo sistema físico é, em última instância, não linear. A grande maioria dos sistemas não lineares não pode ser resolvida analiticamente, sendo que métodos computacionais ou análises qualitativas são frequentemente empregados.

Alguns fenômenos interessantes associados à dinâmica não linear são [Khalil, 2002; Strogatz, 2018]:

1. *Escape em tempo finito*. Uma trajetória em um sistema linear somente tende ao infinito quando o tempo também tender ao infinito. Em sistemas não lineares, no entanto, a trajetória pode tender ao infinito em um tempo finito.
2. *Múltiplos equilíbrios*. Ao contrário de um sistema linear, um sistema não linear pode possuir inúmeros pontos de equilíbrio. A trajetória pode convergir para algum deles, dependendo das condições iniciais. Conforme será visto, os sistemas sob investigação neste trabalho possuem múltiplos pontos de equilíbrio.
3. *Ciclos limite*. Um sistema linear só produz oscilações que não são estruturalmente estáveis, ou seja, variações infinitesimais nos parâmetros podem interromper o re-

gime oscilatório. Além disso, a amplitude das oscilações depende das condições iniciais. Na prática, apenas sistemas não lineares produzem oscilações estáveis, cujas frequência e amplitude não dependem das condições iniciais.

4. *Sub-harmônicas, harmônicas e oscilações quase periódicas.* Um sistema linear excitado por uma entrada periódica produz apenas oscilações com a mesma frequência da entrada. Sistemas não lineares podem produzir oscilações com frequências sub-múltiplas ou múltiplas da frequência de um sinal forçante. Além disso, podem produzir oscilações quase-periódicas.
5. *Caos.* Possivelmente, esse é um dos mais intrigantes entre os comportamentos de sistemas não lineares. Não existe um consenso com relação a uma definição de caos [Monteiro, 2006], no entanto, pode-se dizer que a dependência sensível das soluções com relação às condições iniciais seja uma das principais características presentes nesses sistemas.
6. *Múltiplos modos de comportamento.* Um mesmo sistema não linear pode exibir mais que um dos modos de comportamento descritos acima.
7. *Estruturas fractais de atratores e bacias de atração.* Grosso modo, são formas geométricas complexas com estruturas recorrentes em escalas arbitrariamente pequenas. Usualmente, apresentam autossimilaridade ou, em outras palavras, ampliando-se partes pequenas de um objeto fractal, pode-se ver características similares ao todo. Essa similitude pode ser exata ou aproximada.

Os fenômenos supracitados ocorrem tanto em sistemas de baixa quanto de alta dimensão. Sistemas de alta dimensão podem apresentar, além desses, outros comportamentos como, por exemplo, a formação de padrões espaciais e outros fenômenos emergentes [Jeong et al., 2002; Kazanci and Ermentrout, 2007]. Estes surgem a partir de subsistemas espacialmente alocados e conectados entre si. Sistemas dinâmicos dessa forma são referidos como redes dinâmicas.

2.2 Redes dinâmicas

Muitos sistemas naturais ou construídos pelo homem podem ser modelados na forma de redes. As aplicações passam por áreas diversas das ciências sendo, atualmente, a maioria dos estudos pertencentes às áreas da física, da biologia, das ciências sociais e da engenharia [Motter and Albert, 2012; Saleh et al., 2018; Strogatz, 2018].

Redes dinâmicas constituem-se de subsistemas dinâmicos que interagem entre si, formando um sistema maior. Muitos autores usam o termo *redes complexas* para referirem-se a esse tipo de sistema [Strogatz, 2001]. No entanto, o termo *complexas* diz respeito às características topológicas da rede. Mais especificamente, uma *rede complexa* possui *características topológicas não triviais*, ou seja, sua topologia não é totalmente aleatória

nem regular [Lü et al., 2013]. De fato, algumas redes dinâmicas têm topologia complexa, levando à criação de termos como *redes dinâmicas complexas* (CDN, do inglês: *complex dynamical networks*) [Li and Chen, 2003; Wu et al., 2009]. Há, ainda, trabalhos interessantes nos mecanismos com que redes evoluem, i.e., como novos elementos são adicionados a ela [Dorogovtsev and Mendes, 2002].

O estudo de redes frequentemente busca relacionar os aspectos topológicos e dinâmicos individuais a algum comportamento de interesse como, por exemplo, algum fenômeno emergente. Alguns desses fenômenos são de interesse prático em engenharia, como o sincronismo entre os subsistemas acoplados. A seguir, apresentam-se alguns conceitos sobre ferramentas matemáticas, topologias de rede e os subsistemas que foram alvos de investigação, e fala-se um pouco sobre o fenômeno emergente de interesse: o sincronismo.

2.2.1 Teoria de grafos

A teoria de grafos fornece o arcabouço matemático para estudos relacionados à topologia de redes. Enquanto uma rede é uma representação esquemática de um sistema real, o grafo, por outro lado, é uma representação matemática da topologia da rede, sem qualquer significado físico [Chen et al., 2014; Newman et al., 2011]. Um grafo constitui-se de *nós* conectados por *arestas* em uma determinada *topologia*. Seja \mathcal{N} um conjunto finito e não vazio de nós distintos, com cardinalidade $N = \text{card}(\mathcal{N})$. Seja \mathcal{E} um conjunto de pares não ordenados em \mathcal{N}^2 , com cardinalidade $E = \text{card}(\mathcal{E})$. Então, o par $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ é referido como grafo não orientado. Grafos orientados, por outro lado, possuem arestas direcionadas, ou seja, pares ordenados em \mathcal{N}^2 . As redes de interesse neste trabalho tem topologia representada por grafos não orientados.

Se um grafo possuir um valor $K_{ij} \neq 1$ associado a pelo menos uma aresta, é chamado grafo com peso. Caso contrário, é um grafo sem peso. O *grau* de um nó i é definido como o número de arestas adjacentes a ele e denotado por k_i . O grau médio de um grafo, $\langle k \rangle$, é a média tomada sobre os graus de todos os nós. A distância entre dois nós d_{ij} é definida como o número de arestas no menor caminho entre i e j . A *centralidade* de um nó mede sua importância topológica na rede. Existe um número relativamente grande de medidas de centralidade, evidenciando diferentes aspectos topológicos. A *centralidade de intermediação* de um nó é definida como:

$$b_i = \sum_{j \neq l \neq i} \frac{e_{jl}(i)}{e_{jl}}, \quad (2.5)$$

em que e_{jl} é o número de todos os menores caminhos entre os nós j e l , e $e_{jl}(i)$ é o número de caminhos, entre esses, que passam por i . Outra métrica importante é o *coeficiente de clusterização*. Seja i um nó com k_i arestas conectando-o a outros k_i nós. Seja e_i o número

de arestas entre esses k_i nós. Então, o coeficiente de clusterização é dado por:

$$c_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i - 1)}. \quad (2.6)$$

Note-se que $k_i(k_i - 1)/2$ é o número máximo de arestas que pode haver entre k_i nós.

Duas matrizes úteis ao se lidar com grafos são as matrizes de adjacência e Laplaciana. A *matriz de adjacência* $\mathbf{A}_{\text{adj}} = [a_{ij}]$ de um grafo \mathcal{G} é definida como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ e } j \text{ são adjacentes;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.7)$$

A *matriz Laplaciana* $\mathbf{L} = [l_{ij}]$, por sua vez, é definida como:

$$l_{ij} = \begin{cases} k_i, & \text{se } i = j; \\ -1, & \text{se } i \text{ e } j \text{ são adjacentes, } i \neq j; \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Para uma revisão mais detalhada da teoria de grafos voltada ao estudo de redes dinâmicas, recomenda-se [Chen et al. \[2014\]](#).

2.2.2 Topologia de redes

É comum classificar-se uma rede com relação à sua topologia. Alguns tipos de topologia mais comumente encontrados em estudos de redes são brevemente apresentados e discutidos a seguir.

São denominadas *redes regulares* aquelas cujas topologias são: estrela, anel, completa, *grid*, entre outras. A Fig. 2.1a–e mostra alguns exemplos de redes regulares mais comuns. Uma rede regular não é, necessariamente, um grafo regular, que é aquele em que todos os nós possuem o mesmo grau. Muitas redes regulares possuem alto coeficiente de clusterização. Além disso, geralmente, possuem uma distância média entre nós também elevada. Antes do aparecimento das redes complexas no final do século passado e início deste, estudos sobre sincronismo baseavam-se, frequentemente, em redes com topologias regulares, principalmente completa. Ainda hoje, quando se objetiva evidenciar o efeito das dinâmicas individuais, é comum e conveniente considerar-se uma topologia regular para, de certa forma, *isolar* o aspecto dinâmico.

Uma *rede aleatória* é aquela cuja topologia é formada aleatoriamente, sem qualquer tipo de viés ou conexão preferencial e, portanto, apresenta-se no lado oposto do espectro em relação às redes regulares. As redes ER, estudadas por [Erdős and Rényi \[1960\]](#), constituem, possivelmente, o tipo mais difundido de rede aleatória. Possuem um mecanismo de formação de conexões dado por: (i) inicia-se com N nós isolados; (ii) em seguida, toma-se cada par possível de nós uma única vez e conecta-se esse par com probabilidade $\mathbb{P} \in (0, 1)$.

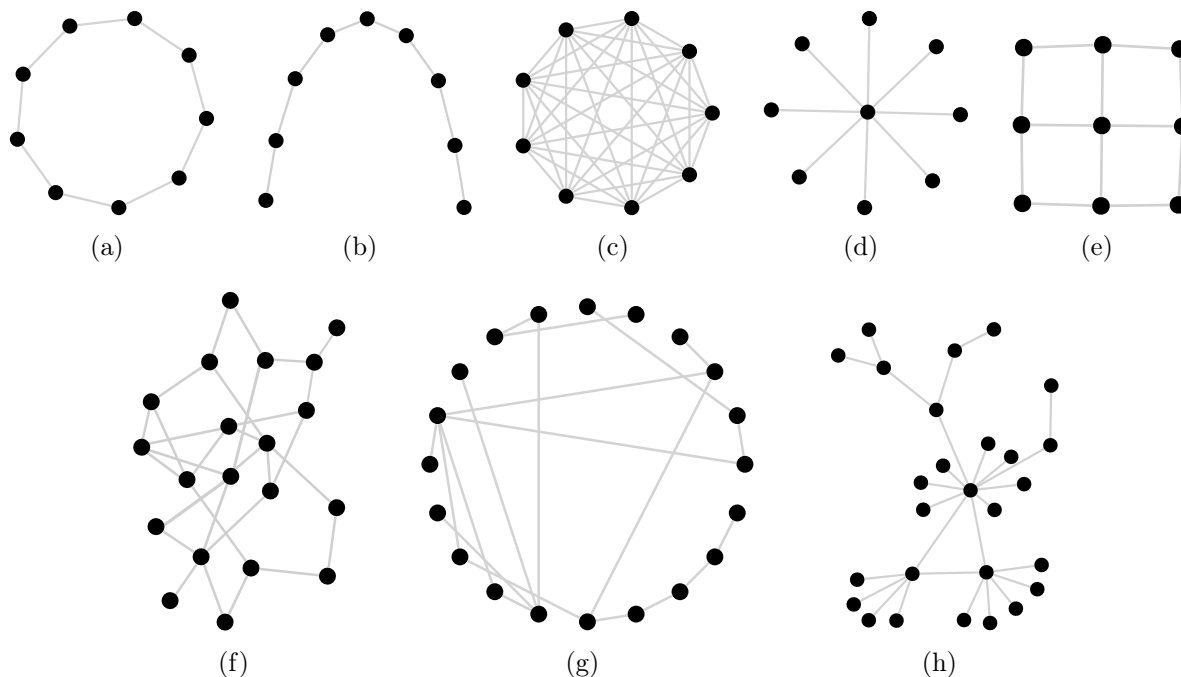


Figura 2.1: Exemplos de topologias de redes. Redes regulares com topologia (a) anel, (b) caminho, (c) completa, (d) estrela e (e) *grid*. (f) Rede aleatória (Erdős-Rényi) com $N = 20$ e $\mathbb{P} = 0,16$. Redes complexas (g) de mundo pequeno (Watts e Strogatz) com $N = 20$, $k = 2$ e $\mathbb{P} = 0,5$; e (h) livre de escala (Albert-Barabasi) com $N_0 = 3$ (topologia completa), adicionados 27 nós com $k' = 1$.

Redes aleatórias geralmente possuem uma distância média entre nós e um coeficiente de clusterização pequenos. A Fig. 2.1f mostra uma rede aleatória ER com $N = 20$ e $\mathbb{P} = 0,16$.

As *redes de mundo pequeno* (redes SW, do inglês: *small-world networks*) estão entre as redes regulares e as aleatórias e possuem características de ambas. O algoritmo de formação mais comum dá origem às redes de mundo pequeno WS (devido aos trabalhos de [Watts and Strogatz \[1998\]](#)). Estas, por sua vez, são formadas por (i) uma rede inicial com N nós, em formato de anel, em que cada nó é conectado a k vizinhos mais próximos; (ii) para cada conexão entre os nós i e $j \neq i$, com probabilidade $\mathbb{P} \in (0, 1)$, desconecta-se o nó i de j e conecta-se ele a algum outro nó da rede escolhido aleatoriamente. Conforme \mathbb{P} varia de zero a um, a rede resultante varia de regular a aleatória. As redes de mundo pequeno possuem uma distância média entre nós pequena (o que dá origem ao seu nome) e, ao mesmo tempo, alto coeficiente de clusterização. Estas características são muito comuns, por exemplo, em redes sociais [[Milgram, 1967](#)] e biológicas [[Bassett and Bullmore, 2006](#)]. Uma rede de mundo pequeno WS é mostrada na Fig. 2.1g com $N = 20$, $k = 2$ e $\mathbb{P} = 0,5$.

As *redes livres de escala* (redes SF, do inglês: *scale-free network*) caracterizam-se por novos nós conectarem-se, preferencialmente, a nós que possuem maior grau. Entre elas, redes livres de escala BA [[Barabási and Albert, 1999](#)] constituem, possivelmente, o mecanismo de evolução mais difundido e estudado. Neste caso, (i) inicia-se com uma rede

pequena de N_0 nós; (ii) em seguida, um por vez, adicionam-se os novos nós. Cada nó adicionado é conectado a k' ($1 \leq k' \leq N_0$) nós na rede existente. A probabilidade de um nó existente i receber uma conexão, a cada adição, é $\mathbb{P}_i \propto k_i / \sum_{j=1}^N k_j$ (considerando-se o caso linear). Consequentemente, as redes livres de escala seguem a lei de potência $\mathbb{P}(k) \sim k^{-\gamma}$, com $k, \gamma > 0$. Isto é, a probabilidade $\mathbb{P}(k)$ de um nó escolhido ao acaso ter grau k é proporcional a $k^{-\gamma}$. Alguns exemplos incluem a internet (redes física de roteadores e de páginas web) e redes de colaboração de cientistas [Barabási and Bonabeau, 2003]. Redes livres de escala também são redes de mundo pequeno [Cohen and Havlin, 2003]. A Fig. 2.1h mostra uma rede livre de escala BA formada a partir de uma rede completa com $N_0 = 3$ em que, posteriormente, foram adicionados 27 nós com $k' = 1$.

As redes da Fig. 2.1 foram criadas usando funções do pacote LightGraphs [Bromberger et al., 2017], em linguagem Julia [Bezanson et al., 2017].

2.2.3 Modelo de Kuramoto

Estudos sobre redes dinâmicas podem envolver de subsistemas simples aos mais complicados. Por exemplo, subsistemas dinâmicos lineares acoplados também linearmente¹ formam sistemas maiores, da mesma forma, lineares. Por outro lado, sistemas não lineares com acoplamento difusivo (linear ou não) podem apresentar grande complexidade. Inúmeros trabalhos são dedicados, parcial ou totalmente, ao estudo de sistemas não lineares acoplados dessa maneira [Eroglu et al., 2017; Boccaletti et al., 2002]. Tem-se, ainda, aqueles que são dinamicamente simples isoladamente, e que se comportam de forma complicada quando conectados por uma função de acoplamento não linear. Considere-se o oscilador de fase de primeira ordem

$$\dot{\delta} = \omega, \quad (2.9)$$

acoplado a outros osciladores de mesma forma, conforme:

$$\dot{\delta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.10)$$

Nesse caso, ω_i é chamada frequência natural do i -ésimo oscilador, $\mathbf{K} = [K_{ij}]$ é uma matriz que contém o peso dos acoplamentos e N é o número de osciladores. A fase de cada oscilador é, então, dada por $\delta_i \in \mathbb{R}$.² O vetor de estado do sistema completo é $\mathbf{x} := [\delta_1 \ \dots \ \delta_N]^T$, pertencente ao \mathbb{R}^N . A matriz \mathbf{K} pode representar diferentes formas de conexão como, por exemplo, acoplamento mais forte com os vizinhos mais próximos, acoplamentos aleatórios de longo alcance ou, até mesmo, acoplamento dependente do estado [Arenas et al.,

¹Denomina-se acoplamento linear aquele que pode ser escrito como uma combinação linear das variáveis de estado envolvidas.

²É comum alguns autores considerarem $\delta'_i \equiv \delta_i \pmod{2\pi}$ e analisarem a fase dos osciladores em um círculo, ou seja, $\delta'_i \in (-\pi, \pi]$ [Dörfler and Bullo, 2011].

2008]. O sistema (2.10) foi apresentando originalmente no trabalho de Kuramoto [1975], como um modelo para explicar oscilações e outras formas de organização temporal em sistemas químicos. Naquele caso, assumiu-se que todos os osciladores estavam conectados entre si, ou seja, a topologia da rede era representada por um grafo completo. Além disso, assumiu-se que as forças de acoplamentos eram as mesmas em todas as conexões, de modo que $K_{ij} = U/N$, em que U é um parâmetro de controle.

Os osciladores de Kuramoto de segunda ordem, por sua vez, apresentam-se frequentemente na forma [Tanaka et al., 1997]:

$$m_i \ddot{\delta}_i + \alpha_i \dot{\delta}_i = \tau_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.11)$$

Alguns trabalhos referem-se à Eq. (2.11) como *Kuramoto-like model*. Outros, como modelo de Kuramoto com inércia, fazendo analogia a sistemas mecânicos rotativos. Nesse caso, $m_i \ddot{\delta}_i$, $\alpha_i \dot{\delta}_i$ e τ_i representam, respectivamente, inércia, amortecimento e torque aplicado no i -ésimo rotor. Algumas versões de (2.11) não incluem o termo $\alpha_i \dot{\delta}_i$ [Inagaki, 1993], porém, a existência de um termo de dissipação, mesmo que pequeno, modifica fortemente as soluções em estado estacionário [Tanaka et al., 1997].

Pode-se, ainda, reescrever (2.11) na sua representação em espaço de estados como:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \omega_i, \\ \dot{\omega}_i = -\frac{\alpha_i}{m_i} \omega_i + \frac{\tau_i}{m_i} + \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i), \end{cases} \quad (2.12)$$

$i = 1, \dots, N$. Então, define-se $\mathbf{x}_i := [\delta_i \ \omega_i]^\top \in \mathbb{R}^2$ como o vetor que contém as variáveis de estado do i -ésimo oscilador e $\mathbf{x} := [\mathbf{x}_1^\top \ \dots \ \mathbf{x}_N^\top]^\top \in \mathbb{R}^{2N}$ como o vetor de estado do sistema completo.

O modelo Kuramoto é simples o suficiente para ser matematicamente tratável, mas suficientemente complexo para ser não trivial. O modelo é rico o suficiente para exibir uma grande variedade de padrões, com destaque para o sincronismo, e suficientemente flexível para adaptar-se a muitos contextos diferentes [Acebrón et al., 2005]. De fato, existem incontáveis trabalhos relacionados ao modelo de Kuramoto. Além das referências já citadas, uma revisão recente com teoria e aplicações pode ser encontrada no trabalho de Rodrigues et al. [2016].

2.2.4 Sincronismo de osciladores

O sincronismo de sistemas dinâmicos é um fenômeno presente em uma variedade de áreas da ciência, como biologia [Fell and Axmacher, 2011; Trafton, 2014], física e engenharia [Tórres and Aguirre, 2004; Strogatz, 2005; Furtado, 2009; Tórres et al., 2015; Eroglu et al., 2017], entre outros [Néda et al., 2000; Groth and Ghil, 2017]. Existem diferentes

tipos de sincronismo, mas todos compartilham uma mesma essência, que é um comportamento harmonioso dos sistemas envolvidos. [Pikovskij et al. \[2001\]](#) definem sincronismo como “*um ajuste de ritmos de objetos oscilantes devido à sua fraca interação*”. Um *objeto oscilante* é descrito matematicamente por um sistema autônomo. A oscilação deve ser estável e depender apenas dos parâmetros do sistema. O *ritmo* de um objeto oscilante está relacionado ao número de oscilações deste objeto por unidade de tempo. Além disso, a *interação* deve ser fraca o suficiente tal que não modifique o regime de comportamento dinâmico dos sistemas individuais envolvidos. Para uma discussão mais detalhada desses conceitos, recomenda-se o trabalho de [Pikovskij et al. \[2001\]](#).

Entre os tipos de sincronismos mais conhecidos e estudados, estão o *sincronismo de fase* e o *sincronismo completo*. Considerem-se os sistemas dinâmicos

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1), \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2), \quad (2.13)$$

em que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_x}$. O sincronismo completo entre esses dois sistemas ocorre quando $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \leq \varepsilon \ll 1$ [[Boccaletti et al., 2002](#)]. No caso de N sistemas, diz-se que há sincronismo completo quando essa condição é satisfeita para cada par de osciladores. Em geral, o sincronismo completo só é alcançado para osciladores idênticos.

O sincronismo de fase acontece quando $|\psi_i - \psi_j| \leq \varepsilon < 2\pi$, para cada par de osciladores. Nesse caso, ψ_i é uma variável de fase (ou, por simplicidade, fase) definida apropriadamente. Encontram-se, na literatura, algumas definições diferentes para a fase de um sistema, mas há um consenso no que diz respeito a quais propriedades essa variável deve possuir: (i) ser monotonicamente crescente e (ii) estar associada à direção do expoente de Lyapunov nulo [[Boccaletti et al., 2002](#); [Freitas et al., 2018](#)]. No caso de osciladores de Kuramoto, a fase é definida como o próprio estado $\psi_i := \delta_i$.

As definições apresentadas acima para sincronismo de fase e completo são clássicas e foram apresentadas por [Boccaletti et al. \[2002\]](#) dentro de um contexto de sistemas caóticos. O tipo de sincronismo de interesse no presente trabalho é um pouco mais restritivo que o sincronismo de fase e menos restritivo que o completo. Além disso, o valor do acoplamento pode ser da mesma ordem de grandeza que τ_i , para o caso do modelo de Kuramoto (Eq. 2.11). Portanto, não se exige que a interação seja fraca. Diz-se que N osciladores (sejam eles de primeira e/ou segunda ordem) estão *sincronizados em frequência* quando

$$\dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_2 = \dots = \dot{\delta}_N. \quad (2.14)$$

Como, nesse caso, \mathbf{f} é suave, a condição (2.14) só é alcançada quando $t \rightarrow \infty$. Sincronismo de fase, conforme definido acima, não implica sincronismo de frequência, mas sincronismo de frequência implica sincronismo de fase. Para uma discussão sobre a terminologia em sincronismo de osciladores de Kuramoto, recomenda-se o trabalho de [Dörfler and Bullo \[2011\]](#). Por simplicidade, utiliza-se apenas o termo *sincronismo* no lugar de *sincronismo de frequência*, a menos que seja explicitada outra condição.

2.3 Análise de estabilidade e bacias de atração

A teoria de estabilidade desempenha papel fundamental no estudo de sistemas dinâmicos, principalmente na engenharia, em que as ferramentas desenvolvidas são utilizadas não apenas para análise, mas, também, para projeto e controle de sistemas. O estudo da estabilidade de pontos de equilíbrio merece destaque nesse contexto. Além de representarem a solução em estado estacionário de alguns modelos de forma direta, outros podem ser manipulados de forma a transformar, por exemplo, o problema da estabilidade de uma órbita periódica na análise de estabilidade de um ponto de equilíbrio.

Considere-se, novamente, o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.15)$$

em que $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$. A seguir, define-se a estabilidade de pontos de equilíbrio no sentido de Lyapunov. A definição é estabelecida em relação à origem do sistema (2.15), uma vez que qualquer ponto de equilíbrio pode ser transladado para a origem por meio de uma mudança de variáveis.

Definição 2.3.1 (Ponto de equilíbrio | Khalil, 2002). *O ponto de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema (2.15) é*

1. *estável se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que*

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.16)$$

2. *instável, se não é estável.*

3. *assintoticamente estável se é estável e δ pode ser escolhido tal que*

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \quad (2.17)$$

◆

Logo, um ponto de equilíbrio é estável se as trajetórias que se iniciam em sua vizinhança permanecem próximas dele por todo tempo futuro. Caso contrário, é instável. Se além de ser estável, as trajetórias convergirem para o ponto de equilíbrio quando o tempo tender ao infinito, diz-se que este é assintoticamente estável.

Outra definição importante diz respeito a qual região do espaço de estados contém as condições iniciais que são atraídas por um ponto de equilíbrio estável ou, de forma mais geral, por um atrator \mathcal{A} qualquer, convenientemente definido a seguir.

Definição 2.3.2 (Atrator | Monteiro, 2006). *Um conjunto fechado de pontos \mathcal{A} , no espaço de estados do sistema (2.15) é um atrator se:*

- (i) \mathcal{A} é um conjunto invariante;

(ii) \mathcal{A} atrai um conjunto aberto de condições iniciais;

(iii) \mathcal{A} é mínimo. ◆

A condição (i) implica que qualquer trajetória $\mathbf{x}(t)$ que se inicia em \mathcal{A} permanece em \mathcal{A} por todo o tempo futuro. A condição (ii) implica a existência de um hipervolume \mathcal{B} que contém \mathcal{A} , tal que para qualquer condição inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{B}$, a distância entre $\mathbf{x}(t)$ e \mathcal{A} tende a zero, quando $t \rightarrow \infty$. A condição (iii) diz que não pode haver um subconjunto de \mathcal{A} que satisfaça as duas condições anteriores. O maior conjunto de condições iniciais satisfazendo a condição (ii) da Def. 2.3.2 para um atrator \mathcal{A} é chamado bacia de atração de \mathcal{A} . Um ponto de equilíbrio estável é um caso particular de atrator.

Definição 2.3.3 (Bacia de Atração | Monteiro, 2006). *A bacia de atração $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ de um atrator \mathcal{A} é definida como o conjunto de todas as condições iniciais que convergem para \mathcal{A} ,*

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{x}(0) \in \mathcal{X} \mid \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathcal{A} \text{ quando } t \rightarrow \infty\}. \quad (2.18)$$
◆

Estimar a bacia de atração de um determinado atrator pode ser de grande interesse. Para exemplificar, considere-se a seguinte situação [Khalil, 2002; Gajduk et al., 2014]: um sistema dinâmico representado por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x})$ opera, em estado estacionário, em um ponto de equilíbrio assintoticamente estável (que é um ponto de operação desejado) \mathbf{x}_1^{eq} . Por algum motivo, possivelmente uma falha, em $t = t_1$, a estrutura do sistema é modificada e a equação que o descreve passa a ser $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_2(\mathbf{x})$, com condições iniciais $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1^{\text{eq}}$. Essa nova equação, que descreve o comportamento do sistema no regime de falha, pode ter um ponto de equilíbrio estável em \mathbf{x}_1^{eq} ou próximo, ou pode ser de tal forma que conduza o estado para longe de \mathbf{x}_1^{eq} ao longo de uma trajetória qualquer. Suponha-se, que em determinado $t = t_2$, a falha seja corrigida e o sistema volte a seguir a dinâmica \mathbf{f}_1 . Além disso, suponha-se que o estado, no fim do período de falha, seja $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}_2$. É importante saber se o ponto \mathbf{x}_2 pertence à bacia de atração de \mathbf{x}_1^{eq} sob a ação de \mathbf{f}_1 , ou seja, se o sistema vai retornar ao ponto de operação desejado \mathbf{x}_1^{eq} . Outra informação relevante diz respeito ao máximo intervalo de tempo $t_2 - t_1$, tal que o estado permaneça na bacia de atração de \mathbf{x}_1^{eq} .

Essas informações ajudam na tomada de decisões, elaboração de medidas de contingência, projeto de sistemas que ampliam a região de atração do ponto de operação desejado etc. Caso a bacia de atração seja desconhecida, é desejável ter-se uma estimativa, preferencialmente não muito conservadora, dessa região. A Fig. 2.2 ilustra esse exemplo. São mostrados: o ponto de equilíbrio assintoticamente estável \mathbf{x}_1^{eq} de \mathbf{f}_1 , a bacia de atração real, sua estimativa e a trajetória devido a \mathbf{f}_2 .

Algumas formas de se obter a bacia de atração ou sua estimativa consistem no uso de métodos diretos (e.g., a teoria de Lyapunov e de funções energia) [Chiang, 2011], na

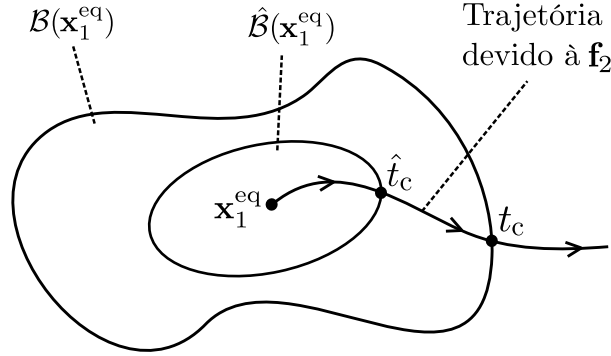


Figura 2.2: Ponto de equilíbrio estável (x_1^{eq}) e bacias de atração real ($B(x_1^{eq})$) e estimada ($\hat{B}(x_1^{eq})$). Trajetória hipotética devido à dinâmica f_2 com dois pontos indicados. A partir de $t = t_c$, a trajetória deixa a bacia de atração de x_1^{eq} ; no entanto, medidas de contingência são planejadas com base em $t = \hat{t}_c$.

integração numérica dos sistemas para uma lista de falhas específicas e no uso de métodos baseados em amostras [Brzeski et al., 2017; Brzeski and Perlikowski, 2018; Menck et al., 2013]. Estes últimos constituem objeto de estudo no presente trabalho e uma revisão mais detalhada é apresentada no Cap. 4. Outros conceitos relacionados são apresentados a seguir.

2.3.1 Sistemas lineares

Sistemas lineares não forçados e invariantes no tempo,

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.19)$$

possuem apenas um ponto de equilíbrio: a origem. Caso seja estável, sua bacia de atração é todo espaço de estados. Caso seja instável, todas as condições iniciais, exceto a própria origem, levam a trajetórias que tendem ao infinito quando $t \rightarrow \infty$. A Eq. (2.19) pode representar um sistema de baixa dimensão ou uma rede dinâmica cujos nós e acoplamentos são lineares. A análise de estabilidade se dá de forma direta por meio dos autovalores da matriz A , conforme estabelece o seguinte teorema:

Teorema 2.3.1. [Chen, 1998]

1. O sistema (2.19) é estável se e somente se todos os autovalores de A possuem parte real nula ou negativa e aqueles com parte real nula são raízes simples do polinômio mínimo de A .
2. O sistema (2.19) é assintoticamente estável se e somente se todos os autovalores de A possuem parte real negativa. \diamond

Vale ressaltar que a estabilidade não assintótica, conforme item 1 do Teo. 2.3.1 não é robusta, uma vez que mudanças infinitesimais nos elementos de \mathbf{A} podem levar à instabilidade.

2.3.2 Método indireto de Lyapunov

Um ponto equilíbrio é hiperbólico quando todos os autovalores da versão linearizada do sistema em torno dele têm parte real não nula. Na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico, um sistema não linear apresenta comportamento qualitativamente equivalente a um sistema linear correspondente. A análise de estabilidade realizada por meio de linearização é frequentemente referida como método indireto de Lyapunov. O Teo. 2.3.2 fornece condições suficientes para se afirmar que um ponto de equilíbrio de um sistema não linear é assintoticamente estável ou instável.

Teorema 2.3.2. [Khalil, 2002] *Seja $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um ponto de equilíbrio de (2.15) em que $\mathbf{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é continuamente diferenciável e \mathcal{X} é uma vizinhança da origem. Seja*

$$\mathbf{A}_f = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}. \quad (2.20)$$

Então,

1. A origem é assintoticamente estável se $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ para todos os autovalores de \mathbf{A}_f .
2. A origem é instável se $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ para ao menos um autovalor de \mathbf{A}_f . \diamond

Se a origem é um ponto de equilíbrio não hiperbólico, a versão linear não é suficiente para se analisar a estabilidade do sistema original. Logo, outras ferramentas podem ser usadas, como a teoria da variedade central [Monteiro, 2006] e o método direto de Lyapunov, mostrado a seguir.

2.3.3 Método direto de Lyapunov

Mesmo para um ponto de equilíbrio hiperbólico, o método indireto de Lyapunov permite a avaliação da estabilidade apenas na vizinhança deste ponto. De fato, não se pode avaliar a bacia de atração de um ponto de equilíbrio de um sistema não linear a partir de uma análise linear. A estabilidade de um ponto de equilíbrio pode ser avaliada, por meio do método direto de Lyapunov, conforme estabelece o seguinte teorema:

Teorema 2.3.3. [Khalil, 2002] *Seja $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ um ponto de equilíbrio de (2.15) e $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ um domínio contendo a origem. Seja $W : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que*

$$W(\mathbf{0}) = 0 \text{ e } W(\mathbf{x}) > 0 \text{ em } \mathcal{X} - \{\mathbf{0}\}, \quad (2.21)$$

$$\dot{W}(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ em } \mathcal{X}. \quad (2.22)$$

Então, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é estável. Além disso, se

$$\dot{W}(\mathbf{x}) < 0 \text{ em } \mathcal{X} - \{\mathbf{0}\} \quad (2.23)$$

então $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável. \diamond

Nesse caso, $W(\mathbf{x})$ é chamada função de Lyapunov. Note-se que encontrar uma função $W(\mathbf{x})$ que satisfaça as condições desse teorema pode ser uma tarefa bastante complicada, uma vez que não existem procedimentos sistemáticos para esse fim. A bacia de atração de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pode ser estimada como um subconjunto compacto e positivamente invariante de \mathcal{X} (do Teo. 2.3.3),

$$\hat{\mathcal{B}}_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x} \mid W(\mathbf{x}) \leq c\}. \quad (2.24)$$

Para uma discussão detalhada, teoremas complementares, estimativas de c e outros tópicos relacionados ao uso da teoria de Lyapunov na caracterização da estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares, recomenda-se Khalil [2002].

2.3.4 Estabilidade estrutural

Um sistema dinâmico é *estruturalmente estável* se ele é topologicamente orbitalmente equivalente a uma versão perturbada [Monteiro, 2006] ou, em outras palavras, se variações pequenas em parâmetros não provocam mudança no comportamento qualitativo do sistema. Se, por outro lado, a variação de um parâmetro p em torno de um valor crítico provoca mudanças qualitativas no campo vetorial, o sistema é *estruturalmente instável*. Essas mudanças são chamadas *bifurcações* e os valores de parâmetros em que elas acontecem são chamados *valores de bifurcação*. Bifurcações locais são aquelas previstas a partir da análise do campo vetorial na vizinhança de um ponto de equilíbrio ou de uma órbita fechada. Bifurcações globais não podem ser previstas a partir de uma análise local [Monteiro, 2006; Guckenheimer and Holmes, 1983]. A dependência de um campo vetorial \mathbf{f} com relação aos parâmetros de um sistema é denotada da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}), \quad (2.25)$$

em que $\mathbf{p} := [p_1 \ \cdots \ p_{n_p}]^T \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^{n_p}$ é o vetor de parâmetros do sistema. A quantidade de parâmetros necessária para a ocorrência de uma bifurcação é chamada *codimensão de bifurcação*.

Estudos de estabilidade estrutural justificam-se, principalmente, pelo fato de que geralmente há algum nível de incerteza presente nos parâmetros de modelos de sistemas reais. Portanto, é desejável que modelos com aplicações críticas sejam estruturalmente estáveis em torno das condições de operação de interesse.

2.4 Outros termos importantes

Definem-se aqui, sem formalismo, mais alguns termos usados recorrentemente ao longo deste texto.

1. A *resiliência* de uma rede ou de um sistema reflete sua capacidade de permanecer funcional após uma falha. No caso de redes, usa-se o termo *resiliência de um nó* para se referir à capacidade de *toda* a rede permanecer funcional após falhas localizadas nesse nó.
2. A *vulnerabilidade* ou *susceptibilidade* de uma rede ou sistema é oposto de sua resiliência. No caso de nós, valem os mesmos comentários para resiliência, feitos logo acima.
3. A *dinâmica nodal* refere-se ao comportamento dinâmico dos subsistemas que compõem uma rede, na ausência de interação com os demais.
4. Uma *perturbação* não é necessariamente uma entrada. Conforme ficará claro no decorrer do texto, usa-se esse termo também para se referir à atribuição de valores aleatórias às variáveis de estado de um dado sistema.

Modelagem de sistemas elétricos de potência

“All models are wrong, some models are useful.”¹

George E. P. Box

No presente capítulo, apresentam-se as três abordagens utilizadas neste trabalho para modelagem de SEPs em escalas macroscópicas. Por tais modelos, refere-se àqueles abrangentes, nos quais se busca representar *todo* o sistema com baixo nível de detalhamento nos elementos que o compõem. Porém, devem ser suficientes para capturar os aspectos de interesse. A modelagem baseia-se na representação das linhas de transmissão pelo *modelo* π . Geradores, por sua vez, tem como lei de movimento a *equação de swing* e representação elétrica dada pelo *modelo clássico*. Por fim, as cargas são representadas como: (i) impedâncias constantes, (ii) osciladores de primeira ordem e (iii) osciladores de segunda ordem (de forma análoga aos geradores). As representações distintas para as cargas dão origem aos três respectivos modelos: EN, SP e SM (do inglês, respectivamente: *effective network*, *structure-preserving* e *synchronous motor*).

É importante destacar que a constatação de que esses três modelos possuem uma origem comum e diferenciam-se na representação das cargas foi feita inicialmente por [Nishikawa and Motter \[2015\]](#). Sendo assim, este capítulo, principalmente a Seç. 3.5, baseia-se no referido trabalho. As demais seções possuem algumas derivações adicionais.

3.1 Introdução

Os modelos aqui mostrados são utilizados no problema da análise de *estabilidade de ângulo de rotor*. Nesse contexto, preocupa-se com o comportamento das máquinas síncronas que compõem a rede, após uma perturbação. É uma condição necessária para a continuação segura da operação que todas as máquinas permaneçam operando com mesma velocidade angular, isto é, sincronizadas, e que esta esteja próxima o suficiente da referência para a qual o sistema foi projetado, ω_r . Se todas as máquinas aumentam a velocidade em uma mesma quantidade, ainda existe sincronismo. O sincronismo diz

¹Todos os modelos estão errados, alguns modelos são úteis. [[Box, 1976](#)]

respeito à diferença entre ângulos de rotor das máquinas, medidos a partir de um sistema de referência que gira com velocidade constante ω_r . No entanto, desvios a partir da frequência nominal são claramente indesejados.

A ocorrência de distúrbios pode conduzir um SEP a uma sequência de falhas que é capaz de levar todo o sistema ou grande parte dele ao colapso. Por exemplo, a perda de uma linha de transmissão LT 1 pode causar aumento do fluxo de potência em outra linha, LT 2. Esse aumento, por sua vez, pode exceder a capacidade de LT 2, resultando no seccionamento devido aos dispositivos de proteção, aumentando o fluxo de potência em outras linhas e assim sucessivamente. Esse mecanismo é conhecido na literatura como falhas em cascata [Yang et al., 2017]. O sistema pode, também, acomodar-se de volta no ponto de operação em que se encontrava antes da falha ou em um novo ponto. Independentemente, o comportamento da rede do momento do distúrbio até essa possível acomodação é denominado transiente. Além disso, diz-se, neste caso, que o sistema é estável. Em termos práticos, oscilações continuadas não caracterizam estabilidade em SEPs ou, em outras palavras, SEPs apresentando oscilações continuadas são instáveis de um ponto de vista pragmático [Anderson and Fouad, 2002].

Distúrbios são frequentemente classificados quanto ao seu tamanho como: grandes (abertura de linhas, perda de unidades geradoras, grandes degraus de carga etc.) e pequenos (de natureza aleatória, como as variações devido aos pequenos consumidores finais). O problema da estabilidade frente a grandes distúrbios é referido como *estabilidade transiente*. Por outro lado, em relação aos pequenos distúrbios, um termo comumente utilizado é *estabilidade de regime permanente* ou *estabilidade estática*. Os SEPs são projetados para serem estáveis diante de pequenos distúrbios [Dobson, 2013]. A estabilidade a pequenos distúrbios pode ser tratada matematicamente por meio de métodos de linearização. Estudos sobre grandes distúrbios, por outro lado, exigem tratamentos mais complexos [Chiang, 2011].

Uma premissa básica associada à modelagem de SEPs conforme apresentada neste capítulo e em inúmeras referências (para citar algumas: [Filatrella et al., 2008; Rohden et al., 2012; Menck et al., 2014; Mitra et al., 2017a]) é que a frequência do sistema mantém-se próxima do valor de referência. Isso pode ser percebido na derivação do modelo da máquina síncrona, conforme apresentada, e na forma de tratamento das grandezas elétricas (e.g., potências, tensões, correntes, admitâncias). A implicação dessa premissa é abordada e discutida, com a apresentação de argumentos favoráveis e contrários a ela encontrados na literatura, nas conclusões finais (Cap. 6) desta dissertação.

3.2 Máquinas síncronas

Máquinas síncronas são projetadas para transformar energia mecânica em elétrica, no caso de geradores, ou o contrário, no caso de motores. As Figs. 3.1b, c mostram os esquemas mecânico e elétrico associados às derivações dos respectivos modelos, apresentadas a seguir. Na Fig. 3.1a são mostrados os componentes principais: estator e rotor. O modelo

mecânico é obtido para geradores, sendo que procedimento análogo pode ser aplicado para motores, mudando-se apenas o sentido dos torques elétrico e mecânico aplicados, refletindo em mudanças de sentido dos respectivos fluxos de potência.

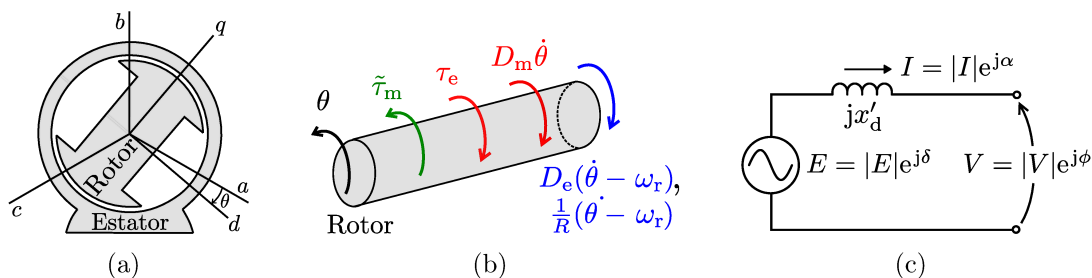


Figura 3.1: (a) Componentes básicos de uma máquina síncrona: rotor e estator. Os eixos a , b e c são os eixos das fases; q e d representam os eixos direto e em quadratura, respectivamente. (b) Rotor e torques envolvidos no movimento. (c) Circuito elétrico equivalente considerado.

3.2.1 Modelo mecânico

Um gerador síncrono é constituído por dois elementos principais: rotor e estator (Fig. 3.1a). O estator permanece fixo enquanto o rotor gira em seu interior, em torno de seu próprio eixo. As equações do movimento podem ser obtidas igualando-se a taxa de variação do momento angular do rotor aos torques que atuam sobre ele, ou seja, fazendo-se: $J\ddot{\theta} = \sum_i \tau_i$. Nesse caso, J é o momento de inércia, $\theta = \theta(t) = \omega_r t + \delta(t)$ é o ângulo do rotor em relação a uma referência fixada no estator, a constante ω_r é a velocidade angular de referência e $\delta(t)$ é o desvio de $\theta(t)$ com relação a $\omega_r t$.

Especificamente, tem-se:

$$J\ddot{\theta} = \tilde{\tau}_m - D_m \dot{\theta} - D_e \dot{\delta} - \frac{1}{R} \dot{\delta} - \tau_e, \quad (3.1)$$

em que $\tilde{\tau}_m$ é o torque mecânico aplicado, D_m é o coeficiente de amortecimento mecânico devido ao atrito, D_e é um coeficiente de amortecimento devido ao efeito dos enrolamentos amortecedores do gerador, construídos com o objetivo de evitar oscilações mecânicas do rotor ao redor da velocidade síncrona, R é um parâmetro de ajuste e τ_e é o torque elétrico sentido pelo gerador quando acoplado à rede. A Fig. 3.1b mostra um esquema com um rotor e os torques considerados. Reescrevendo a Eq. (3.1) em função de δ , tem-se:

$$J\ddot{\delta} = \tilde{\tau}_m - D_m(\omega_r + \dot{\delta}) - D_e \dot{\delta} - \frac{1}{R} \dot{\delta} - \tau_e. \quad (3.2)$$

Definindo-se as novas variáveis $\tau_m := \tilde{\tau}_m - D_m \omega_r$ e $\tilde{D} := D_m + D_e + 1/R$ e rearranjando

os termos de (3.2), obtém-se:

$$J\ddot{\delta} + \tilde{D}\dot{\delta} = \tau_m - \tau_e. \quad (3.3)$$

Multiplicando-se a Eq. (3.3) por $\dot{\theta}$ e assumindo que a frequência de operação mantém-se próxima da frequência de referência, ou seja, $\dot{\theta} \approx \omega_r$, obtém-se

$$J\omega_r\ddot{\delta} + \tilde{D}\omega_r\dot{\delta} \approx \tilde{P}_m - \tilde{P}, \quad (3.4)$$

em que $\tilde{P}_m := \tau_m\dot{\theta}$ e $\tilde{P} := \tau_e\dot{\theta}$.

Por fim, dividindo-se a Eq. (3.4) por um valor base P_r e definindo-se $H := J\omega_r^2/(2P_r)$ e $D := \tilde{D}\omega_r^2/P_r$, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{2H}{\omega_r}\ddot{\delta} + \frac{D}{\omega_r}\dot{\delta} = P_m - P, \quad (3.5)$$

em que H é a constante de inércia, D é o coeficiente de amortecimento combinado, P_m é a potência mecânica fornecida ao gerador e P é a potência elétrica ativa fornecida pelo gerador. A Eq. (3.5) é conhecida na literatura de sistemas de potência como equação de *swing* [Grainger and Stevenson, 1994; Anderson and Fouad, 2002].

3.2.2 Modelo elétrico

Utiliza-se o modelo clássico como representação do circuito elétrico da máquina síncrona. Nesse caso, um gerador é representado como uma fonte de tensão com magnitude $|E|$, seguida por uma reatância indutiva jx'_d , conforme mostrado na Fig. 3.1c. Assume-se que o ângulo de fase da fonte de tensão é igual ao ângulo de rotação do rotor e, portanto, é denominado δ , em conformidade com a Eq. (3.5).

A potência elétrica transmitida entre a barra² interna, com tensão E e a barra terminal com tensão V , através da reatância jx'_d , é dada por $P = \frac{|EV|}{x'_d} \sin(\delta - \phi)$. Então, a Eq. (3.5) pode ser escrita como:

$$\frac{2H}{\omega_r}\ddot{\delta} + \frac{D}{\omega_r}\dot{\delta} = P_m - \frac{|EV|}{x'_d} \sin(\delta - \phi). \quad (3.6)$$

A magnitude da tensão interna pode ser calculada, substituindo-se $I = \frac{E-V}{jx'_d}$ em $VI^* = P + jQ$, como:

$$|E| = \sqrt{\left(\frac{Px'_d}{|V|}\right)^2 + \left(|V| + \frac{Qx'_d}{|V|}\right)^2}. \quad (3.7)$$

²Para evitar ambiguidade, utiliza-se o termo *barra* para se referir a algum ponto de interesse no circuito elétrico e *nó* para se referir a esse ponto no modelo final derivado, isto é, na rede dinâmica correspondente.

Conforme será visto, as variáveis do lado direito de (3.7) são conhecidas ou podem ser calculadas.

3.3 Matriz de admitância

O modelo utilizado para representar uma linha de transmissão depende, geralmente, do comprimento da linha analisada [Grainger and Stevenson, 1994]. Em linhas curtas (menores que 80 km), a admitância *shunt*³ geralmente é tão pequena que pode ser desprezada. Então, tais linhas são representadas apenas por uma admitância série. A admitância *shunt*, geralmente uma capacitância pura, é incluída no modelo para linhas de tamanho médio (80–240 km). Neste caso, a admitância *shunt* total é dividida em duas partes iguais que são inseridas nas extremidades da representação da linha, dando origem ao que se conhece como modelo π . Uma linha de transmissão longa (maior que 240 km), por sua vez, necessita de modelos a parâmetros distribuídos para lhe representar. Entretanto, é possível representar uma linha longa por modelos a parâmetros concentrados, como o modelo π , desde que os valores de interesse estejam somente em suas extremidades. Portanto, é conveniente adotar-se o modelo π por sua flexibilidade e simplicidade. A Fig. 3.2b mostra, destacado em cinza, a representação de duas linhas de transmissão conectando as barras 1 e 2 à barra 3 para um pequeno exemplo de SEP (Fig. 3.2a).

A derivação da matriz de admitância é feita inicialmente para esse exemplo simples com três barras (Fig. 3.2a, b). Em seguida, o resultado para um SEP com N_b barras é apresentado. A generalização se dá de forma direta, aplicando-se repetidamente os argumentos do exemplo. Seja $y_{ij} = g_{ij} + jb_{ij} := z_{ij}^{-1} = (r_{ij} + jx_{ij})^{-1}$ a admitância, isto é, o inverso da impedância entre duas barras i e j . Neste caso, g_{ij} é chamada condutância e b_{ij} , susceptância. Elas constituem, respectivamente, as partes real e imaginária de y_{ij} . As grandezas r_{ij} e x_{ij} , por sua vez, são chamadas resistência e reatância e são as partes real e imaginária de z_{ij} , nessa ordem. Considere-se, inicialmente, o SEP mostrado na Fig. 3.2b, já com as linhas de transmissão representadas.

A corrente injetada na rede através da barra 1 em direção à barra 3, denominada I_{13} , divide-se em duas componentes (Fig. 3.2c): a primeira, I_{13}^{sh} , flui para a referência do sistema através da admitância *shunt* da linha de transmissão, representada por $jb_{13}^{\text{sh}}/2$; a segunda, I_{13}^{s} , flui através da admitância série $g_{13} + jb_{13}$. Como a barra 1 tem apenas a barra 3 como vizinha, $I_1 = I_{13} = I_{13}^{\text{sh}} + I_{13}^{\text{s}}$, em que I_1 é a corrente total injetada na rede nessa barra. Se, por exemplo, as barras 1 e 2 fossem vizinhas, então, $I_1 = I_{12} + I_{13}$. Relacionando as correntes e admitâncias às tensões nas barras 1 e 3, obtêm-se: $I_1 = (V_1 - V_3)y_{13} + V_1jb_{13}^{\text{sh}}/2$. Repetindo-se a mesma análise para as demais barras e considerando a simetria do exemplo ($y_{ij} = y_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$), presente neste caso, encontra-se

³Admitância de derivação [Grainger and Stevenson, 1994].

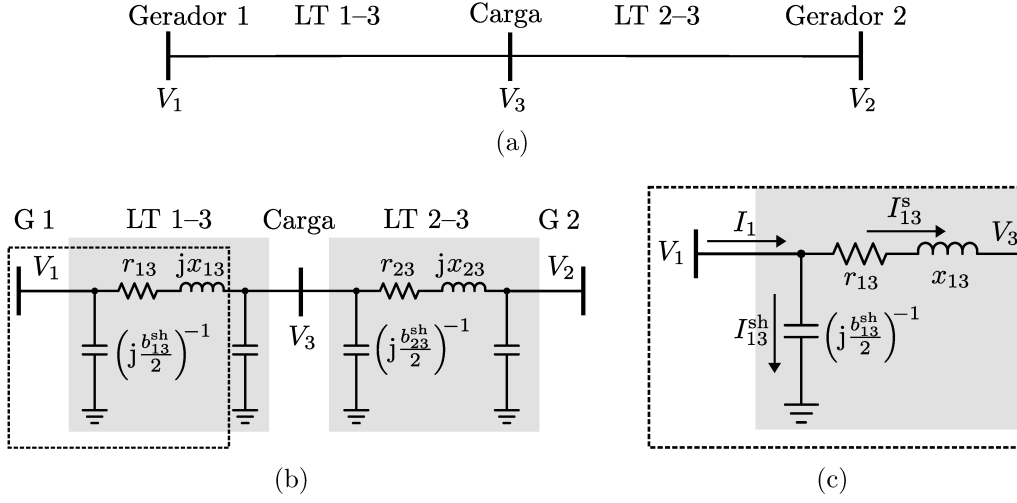


Figura 3.2: Diagrama simplificado de um SEP com três barras (b) com e (a) sem as linhas de transmissão representadas pelo modelo π ; os capacitores de cada linha são iguais. (c) Detalhe da injeção de corrente na rede pela barra 1; corresponde à região destacada em (b).

o sistema de equações que relaciona tensões e correntes:

$$\begin{cases} I_1 = (V_1 - V_3)y_{13} + V_1 j b_{13}^{\text{sh}}/2, \\ I_2 = (V_2 - V_3)y_{23} + V_2 j b_{23}^{\text{sh}}/2, \\ I_3 = (V_3 - V_1)y_{31} + V_3 j b_{31}^{\text{sh}}/2 + (V_3 - V_2)y_{32} + V_3 j b_{32}^{\text{sh}}/2, \end{cases} \quad (3.8)$$

Reescrevendo-se (3.8) em forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{13} + j b_{13}^{\text{sh}}/2 & 0 & -y_{13} \\ 0 & y_{23} + j b_{23}^{\text{sh}}/2 & -y_{23} \\ -y_{31} & -y_{32} & y_{31} + y_{32} + j b_{31}^{\text{sh}}/2 + j b_{32}^{\text{sh}}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

A matriz que associa os vetores de tensões nas barras e de correntes injetadas nestas em direção à rede é chamada *matriz de admitância*, denotada $\mathbf{Y} = [Y_{ij}]$. Note-se que, fora da diagonal principal, o elemento Y_{ij} é o negativo da admitância série ($-y_{ij}$) entre duas barras vizinhas i e j . Já para barras não vizinhas, $Y_{ij} = 0$. Os elementos da diagonal principal, Y_{ii} , constituem-se da soma das admitâncias série entre a barra i e suas vizinhas e da soma das admitâncias *shunt* ($j b_{ij}^{\text{sh}}/2$) adjacentes a essa barra, originárias da representação das linhas de transmissão pelo modelo π . De fato, estes passos constituem uma regra para formação geral de matrizes de admitância [Grainger and Stevenson, 1994].

Logo, para um sistema com N_b barras, tem-se:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_{N_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j \in \mathcal{V}_1} \left(j \frac{b_{1j}^{\text{sh}}}{2} + y_{1j} \right) & -y_{12} & \cdots & -y_{1N_b} \\ -y_{21} & \sum_{j \in \mathcal{V}_2} \left(j \frac{b_{2j}^{\text{sh}}}{2} + y_{2j} \right) & \cdots & -y_{2N_b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_{N_b 1} & -y_{N_b 2} & \cdots & \sum_{j \in \mathcal{V}_{N_b}} \left(j \frac{b_{N_b j}^{\text{sh}}}{2} + y_{N_b j} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N_b} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

em que o conjunto \mathcal{V}_i contém os índices das barras vizinhas de i . Note-se que os termos que aparecem na diagonal principal de \mathbf{Y} são devido apenas à representação das linhas de transmissão. Outras admitâncias eventualmente conectadas entre uma barra e a referência podem ser adicionadas a essa diagonal, na linha correspondente. Isto é explorado na abordagem EN.

A matriz complexa \mathbf{Y} pode ser decomposta em partes real e imaginária, como $\mathbf{G} + j\mathbf{B}$ em que $\mathbf{G} := \text{Re}(\mathbf{Y})$ e $\mathbf{B} := \text{Im}(\mathbf{Y})$. Pode-se ainda representar seus elementos na forma polar como $|Y_{ij}|e^{j\beta_{ij}}$. Em um sistema com N_g barras conectadas a geradores (barras de geração) e N_l barras conectadas a cargas (barras de carga), é conveniente reordenar linhas e colunas de \mathbf{Y} de forma a obter:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{gg} & \mathbf{Y}_{gl} \\ \mathbf{Y}_{lg} & \mathbf{Y}_{ll} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Nesse caso, \mathbf{Y}_{gg} , com dimensão $N_g \times N_g$, é o bloco que contém as admitâncias entre barras de geração; \mathbf{Y}_{ll} , com dimensão $N_l \times N_l$, é o bloco que contém as admitâncias entre barras de consumo. Os blocos \mathbf{Y}_{gl} e \mathbf{Y}_{lg} contém admitâncias entre barras de consumo e geração e possuem dimensões $N_g \times N_l$ e $N_l \times N_g$, nessa ordem. Nos exemplos deste trabalho, \mathbf{Y} é sempre simétrica, então, $\mathbf{Y}_{gl} = \mathbf{Y}_{lg}^T$. Porém, a presença de componentes como transformadores pode tornar \mathbf{Y} assimétrica [Grainger and Stevenson, 1994].

3.4 Fluxo de potência

O problema do fluxo de potência em SEPs constitui, por si só, uma área de grande interesse. Por exemplo, programar a operação do sistema de forma a minimizar perdas nas linhas de transmissão, respeitando a capacidade delas e também de fornecimento por parte dos geradores do sistema, consistem em problemas de otimização. Neste trabalho, aborda-se este problema de forma simples, sendo que a solução das equações de fluxo é obtida com ferramentas apropriadas existentes (Matpower [Zimmerman et al., 2011] e a *toolbox* de Nishikawa and Motter [2015]), sem restrições adicionais. As variáveis encontradas, por exemplo, potência ativa fornecida por um gerador em estado estacionário, refletem-

se nos parâmetros do modelo que representa tal gerador. Além disso, os ângulos das tensões encontrados podem ser usados como condições iniciais nas equações diferenciais do problema de estabilidade de ângulo de rotor.

Da Eq. (3.10), tem-se que a corrente injetada em uma rede com N_b barras, na barra i , é dada, em forma compacta, por:

$$I_i = \sum_{j=1}^{N_b} Y_{ij} V_j. \quad (3.12)$$

Sabe-se, também, que a potência complexa injetada nessa mesma barra é dada por:

$$S_i = P_i + jQ_i = V_i I_i^*, \quad (3.13)$$

em que I_i^* denota o complexo conjugado de I_i . Tomando o complexo conjugado de (3.13) e substituindo a expressão para a corrente I_i de acordo com (3.12) tem-se:

$$\begin{aligned} P_i - jQ_i &= V_i^* I_i \\ &= |V_i| e^{-j\phi_i} \sum_{j=1}^{N_b} |Y_{ij}| e^{j\beta_{ij}} |V_j| e^{j\phi_j} \\ &= \sum_{j=1}^{N_b} |V_i V_j Y_{ij}| e^{j(\beta_{ij} + \phi_j - \phi_i)} \\ &= \sum_{j=1}^{N_b} |V_i V_j Y_{ij}| [\cos(\beta_{ij} + \phi_j - \phi_i) + j \operatorname{sen}(\beta_{ij} + \phi_j - \phi_i)]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Portanto, igualando os termos real e imaginário de cada lado de (3.14),

$$\begin{cases} P_i = \sum_{j=1}^{N_b} |V_i V_j Y_{ij}| \cos(\beta_{ij} + \phi_j - \phi_i), \\ Q_i = - \sum_{j=1}^{N_b} |V_i V_j Y_{ij}| \operatorname{sen}(\beta_{ij} + \phi_j - \phi_i), \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\quad (3.16)$$

com $i = 1, \dots, N_b$. Uma vez que alguns termos da matriz de admitância são nulos, o somatório para um dado i pode ser tomado apenas nos índices $j \in \mathcal{V}_i \cup i$. As Eqs. (3.15) e (3.16) possuem quatro variáveis ($|V_i|$, ϕ_i , P_i e Q_i) por barra, em que duas devem ser conhecidas e duas calculadas. As barras são divididas em três tipos, nomeadas convenientemente como: (i) PQ : barras em que se conhecem as potências ativa e reativa. Geralmente são barras de consumo, em que P_i e Q_i são conhecidos por meio de dados históricos, medições etc. (ii) PV : são barras de geração em que P_i e $|V_i|$ são conhecidos. Geradores são programados para produzir potência ativa e módulo de tensão constantes

durante determinados intervalos de tempo, sob a ação de reguladores. (iii) $V\phi$: uma barra de geração escolhida como referência angular para sistema. Nesse caso, conhecem-se $|V_i|$ e ϕ_i , ao passo que P_i é desconhecido. Além disso, é necessário ao menos um gerador com potência ativa calculada para suprir as perdas nas linhas de transmissão. Os valores da solução do fluxo em estado estacionário são denotados com o sobrescrito “ss” (isto é, $|V_i^{ss}|$, ϕ_i^{ss} , P_i^{ss} e Q_i^{ss}).

3.5 Dinâmica coletiva

Definindo-se $\gamma_{ij} := \beta_{ij} - \pi/2$ e utilizando o fato que $\cos(\xi + \pi/2) = \text{sen}(-\xi)$, pode-se rescrever (3.15) como:

$$P_i = \sum_{j=1}^{N_b} |V_i V_j Y_{ij}| \text{sen}(\phi_i - \phi_j - \gamma_{ij}). \quad (3.17)$$

Esta manipulação é conveniente uma vez que, em modelos de Kuramoto, o acoplamento entre osciladores se dá por meio de uma função senoidal.

3.5.1 Abordagem EN

Uma vez conhecidos o consumo de potência e a tensão em uma barra de carga, pode-se calcular a admitância equivalente em relação a esse consumo. Considere-se, agora, o circuito mostrado na Fig. 3.3a. Trata-se do mesmo sistema representado na Fig. 3.2b, inseridas as representações dos circuitos equivalentes dos geradores e da carga. Para este sistema completo, utilizando a regra de formação para matrizes de admitâncias ou aplicando diretamente leis fundamentais da teoria de circuitos, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} I_{g,1} \\ I_{g,2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_{d,1} & 0 & -y'_{d,1} & 0 & 0 \\ 0 & y'_{d,2} & 0 & -y'_{d,2} & 0 \\ -y'_{d,1} & 0 & Y_{11} + y'_{d,1} & Y_{12} & Y_{13} \\ 0 & -y'_{d,2} & Y_{21} & Y_{23} + y'_{d,2} & Y_{23} \\ 0 & 0 & Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} + y_3^{\text{sh}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

As correntes $I_{g,i}$ (para $i = 1, 2$) são injetadas na rede através das barras internas. O elemento $y'_{d,i} := (jx'_{d,i})^{-1}$ representa a admitância interna do gerador $i = 1, 2$. O elemento $y_3^{\text{sh}} := (z_3^{\text{sh}})^{-1}$ representa a admitância equivalente à carga conectada na barra 3. Elementos do tipo Y_{ij} são aqueles mesmos da matriz de admitância da Eq. (3.9), ou seja, antes da inserção da representação dos geradores e da carga no circuito. Note-se que, agora, não há injeção de corrente nas barras terminais e de cargas, conforme detalhado nas Figs. 3.3c, d,

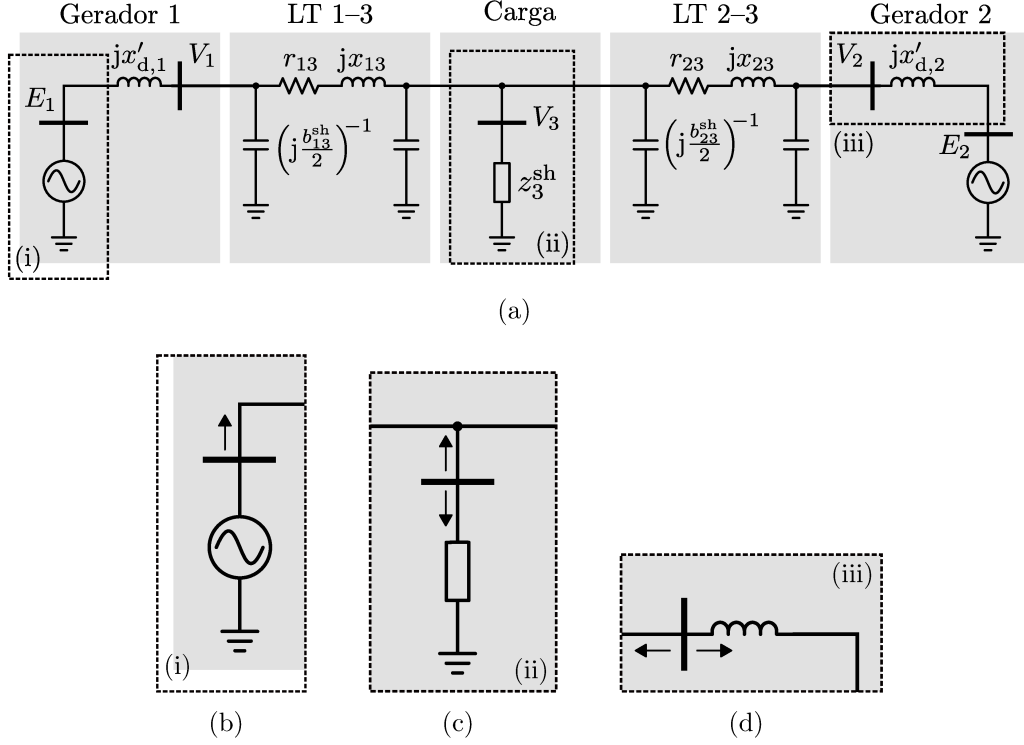


Figura 3.3: (a) SEP da Fig. 3.2, adicionadas as representações dos geradores e da carga. Detalhe da injeção de corrente nas barras: (b) interna do gerador 1; (c) de carga; (d) terminal do gerador 3.

respectivamente; ao contrário do que é mostrado na Fig. 3.3b para a barra interna do gerador 1.

Seja a matriz

$$\mathbf{Y}^{\text{sh}} := \text{blkdiag}(\mathbf{Y}_g^{\text{sh}}, \mathbf{Y}_l^{\text{sh}}), \quad (3.19)$$

em que $\mathbf{Y}_g^{\text{sh}} := \text{diag}(y_1^{\text{sh}}, \dots, y_{N_g}^{\text{sh}})$ e $\mathbf{Y}_l^{\text{sh}} := \text{diag}(y_{N_g+1}^{\text{sh}}, \dots, y_{N_b}^{\text{sh}})$, contendo como elemento da diagonal principal $Y_{g,ii}^{\text{sh}}$ a admitância *shunt* equivalente conectada às barras terminais ($i = 1, \dots, N_g$) e de carga ($i = N_g + 1, \dots, N_b$), representando elementos consumidores adjacentes a essas barras. Note-se que as susceptâncias $jb_{ij}^{\text{sh}}/2$, originárias da representação das linhas, já foram contabilizadas em \mathbf{Y} e, portanto, não são incluídas em \mathbf{Y}^{sh} . Além disso, seja

$$\mathbf{Y}_d := \text{diag}(y'_{d,1}, \dots, y'_{d,N_g}) \quad (3.20)$$

uma matriz, também diagonal, cujo elemento $Y_{d,ii}$ é a admitância interna do i -ésimo gerador. De forma geral, pode-se sempre escrever, a partir da matriz de admitância \mathbf{Y} (Eq. (3.11)), a versão que inclui as representações de geradores e cargas. Especificamente,

para a presente abordagem e uma rede arbitrária, tem-se:

$$\mathbf{Y}' := \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{Y}_d & -\mathbf{Y}_d & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{Y}_d & \mathbf{Y}_{gg} + \mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_g^{\text{sh}} & \mathbf{Y}_{gl} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{lg} & \mathbf{Y}_{ll} + \mathbf{Y}_l^{\text{sh}} \end{array} \right], \quad (3.21)$$

em que $\mathbf{0}$ denota uma matriz nula de dimensão apropriada. No exemplo mostrado, Eq. (3.18), há apenas uma barra de carga, logo, \mathbf{Y}_1^{sh} possui apenas um elemento: y_3^{sh} . Neste mesmo exemplo, não existem cargas conectadas diretamente às barras terminais e, portanto, $Y_{g,ii}^{\text{sh}} = 0$, para $i = 1, 2$.

Sejam $\mathbf{V}_g := [E_1 \ \dots \ E_{N_g}]^T$, $\mathbf{V}_t := [V_1 \ \dots \ V_{N_g}]^T$ e $\mathbf{V}_l := [V_{N_g+1} \ \dots \ V_{N_b}]^T$ os vetores de tensões nas barras internas, terminais e de cargas, respectivamente. Seja $\mathbf{I}_g := [I_{g,1} \ \dots \ I_{g,N_g}]^T$ o vetor de correntes injetadas na rede nas barras internas. Além disso, definam-se as matrizes $\tilde{\mathbf{Y}}_{gg} := \mathbf{Y}_{gg} + \mathbf{Y}_g^{\text{sh}}$ e $\tilde{\mathbf{Y}}_{ll} := \mathbf{Y}_{ll} + \mathbf{Y}_l^{\text{sh}}$. Como agora apenas barras internas injetam corrente, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_g \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_d & -\mathbf{Y}_d & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{Y}_d & \tilde{\mathbf{Y}}_{gg} + \mathbf{Y}_d & \mathbf{Y}_{gl} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{lg} & \tilde{\mathbf{Y}}_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_g \\ \mathbf{V}_t \\ \mathbf{V}_l \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Utilizando a redução de Kron⁴ para obter um sistema reduzido do tipo $\mathbf{I}_g = \mathbf{Y}^{\text{EN}} \mathbf{V}_g$, com $\mathbf{Y}^{\text{EN}} = [Y_{ij}^{\text{EN}}]$ de dimensão $N_g \times N_g$, em que \mathbf{V}_t e \mathbf{V}_l são eliminados, tem-se:

$$\mathbf{Y}^{\text{EN}} = \mathbf{Y}'' (\mathbf{1} + \mathbf{Y}_d^{-1} \mathbf{Y}'')^{-1}, \quad (3.23)$$

em que

$$\mathbf{Y}'' = \tilde{\mathbf{Y}}_{gg} - \mathbf{Y}_{gl} (\mathbf{Y}_{ll})^{-1} \mathbf{Y}_{lg}. \quad (3.24)$$

Em (3.23), $\mathbf{1}$ é uma matriz identidade com dimensão $N_g \times N_g$. Considera-se $y'_{d,i} \neq 0$, para todo i , logo, a inversa de \mathbf{Y}_d sempre existe. A inversa de $(\mathbf{1} + \mathbf{Y}_d^{-1} \mathbf{Y}'')^{-1}$ existe se $x'_{d,i}$ for suficientemente pequeno. A existência da matriz $(\mathbf{Y}_{ll})^{-1}$ segue da premissa de unicidade do vetor de tensões com relação à referência [Nishikawa and Motter, 2015]. A matriz \mathbf{Y}^{EN} representa uma rede que é eletricamente equivalente a um sistema em que dois geradores i e $j \neq i$ estão conectados entre si por uma admitância Y_{ij}^{EN} .

Escrevendo-se uma Eq. (3.5) para cada gerador, com P dado por (3.17), substituindo-

⁴Discussões sobre a redução de Kron fogem do escopo desta dissertação. Para uma discussão sobre algumas propriedades, recomendam-se os trabalhos de Dörfler and Bullo [2013] e Nishikawa and Motter [2015].

se $|V_i|$, Y_{ij} , ϕ_i e γ_{ij} , respectivamente, por $|E_i^{\text{ss}}|$, Y_{ij}^{EN} , δ_i e γ_{ij}^{EN} , obtém-se:

$$\frac{2H_i}{\omega_r} \ddot{\delta}_i + \frac{D_i}{\omega_r} \dot{\delta}_i = A_i^{\text{EN}} - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_g} K_{ij}^{\text{EN}} \text{sen}(\delta_i - \delta_j - \gamma_{ij}^{\text{EN}}), \quad i = 1, \dots, N_g, \quad (3.25)$$

em que

$$A_i^{\text{EN}} := P_{m,i}^{\text{ss}} - |E_i^{\text{ss}}|^2 G_{ii}^{\text{EN}}, \quad (3.26)$$

$$K_{ij}^{\text{EN}} := |E_i^{\text{ss}} E_j^{\text{ss}} Y_{ij}^{\text{EN}}|. \quad (3.27)$$

Neste caso, $G_{ii}^{\text{EN}} := \text{Re}(Y_{ii}^{\text{EN}})$. O número de osciladores é N_g . A magnitude da tensão interna $|E_i^{\text{ss}}|$ é computada conforme Eq. (3.7) e mantida constante nas análises de estabilidade. Em regime permanente, a potência mecânica P_m em (3.5) é igual à potência elétrica ativa fornecida, isto é, $P_{m,i} = P_i$. Da mesma forma, seu valor, denotado $P_{m,i}^{\text{ss}}$, é mantido constante.

3.5.2 Abordagem SP

Na abordagem EN, considera-se que as cargas são representadas por admitâncias constantes. Conseqüentemente, seu consumo de potência é independente da frequência da tensão nas barras de cargas, $\phi_i(t)$. Uma segunda alternativa consiste em se assumir que o consumo de potência tem dependência afim na frequência da seguinte maneira:

$$P_{l,i} = P_{l,i}^{\text{ss}} + \frac{D_i}{\omega_r} \dot{\delta}_i, \quad (3.28)$$

em que $\delta_i = \delta_i(t) := \phi_i(t) - \omega_r t$, isto é, um desvio de fase com relação a um frame de referência com frequência angular igual à frequência síncrona. O consumo de potência reativa, por sua vez, é assumido ser constante e igual seu valor de estado estacionário: $Q_{l,i} = Q_{l,i}^{\text{ss}}$. Da mesma forma, assume-se que $|V_i| = |V_i^{\text{ss}}|$. A Eq. (3.28) pode ser recuperada de (3.5), quando $H_i = 0$, $P_{m,i} = -P_{l,i}^{\text{ss}}$ e $P_i = -P_{l,i}$. Nesse contexto, $D_i > 0$ deve ser reinterpretado como um coeficiente na relação entre $\dot{\delta}_i$ e $P_{l,i}$.

A matriz \mathbf{Y}^{SP} é obtida diretamente a partir da regra de formação. A redução de Kron não é necessária pois barras internas, terminais e de carga mantêm-se representadas dinamicamente no modelo resultante. Então, tem-se que:

$$\mathbf{Y}^{\text{SP}} := \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{Y}_d & -\mathbf{Y}_d & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{Y}_d & \mathbf{Y}_{\text{gg}} + \mathbf{Y}_d & \mathbf{Y}_{\text{gl}} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{\text{lg}} & \mathbf{Y}_{\text{ll}} \end{array} \right], \quad (3.29)$$

semelhantemente à (3.21). A diferença são os blocos \mathbf{Y}_g^{sh} e \mathbf{Y}_l^{sh} , que não estão presentes nesta nova abordagem, devido à consideração do comportamento dinâmico das cargas.

Logo, nenhuma barra é eliminada. Tem-se, então, para geradores:

$$\frac{2H_i}{\omega_r} \ddot{\delta}_i + \frac{D_i}{\omega_r} \dot{\delta}_i = A_i^{\text{SP}} - K_{i,i+N_g}^{\text{SP}} \text{sen}(\delta_i - \delta_{i+N_g}), \quad i = 1, \dots, N_g, \quad (3.30)$$

em que

$$A_i^{\text{SP}} := P_{m,i}^{\text{SS}}, \quad (3.31)$$

$$K_{i,i+N_g}^{\text{SP}} := |E_i^{\text{SS}} V_i^{\text{SS}} / x'_{d,i}|. \quad (3.32)$$

Os nós $i = 1, \dots, N_g$ representam barras internas. Barras terminais são indexadas, convenientemente, por $i = N_g + 1, \dots, 2N_g$, tal que o par de índices $(i, i + N_g)$ refira-se à barra interna de um gerador e sua respectiva barra terminal. O defasamento entre um nó interno e seu respectivo nó terminal é $\gamma_{i,i+N_g} = 0$, pois entre eles há uma reatância indutiva (lembre-se de que $\gamma_{ij} := \beta_{ij} - \pi/2$). Além disso, devido à preservação da estrutura da rede, cada nó interno é acoplado somente ao seu nó terminal.

Para as cargas (incluindo barras terminais), tem-se:

$$\frac{D_i}{\omega_r} \dot{\delta}_i = A_i^{\text{SP}} - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_{\text{SP}}} K_{ij}^{\text{SP}} \text{sen}(\delta_i - \delta_j - \gamma_{ij}^{\text{SP}}), \quad i = N_g + 1, \dots, N_{\text{SP}}, \quad (3.33)$$

em que

$$A_i^{\text{SP}} := -P_{1,i-N_g}^{\text{SS}} - |V_{i-N_g}^{\text{SS}}|^2 G_{ii}^{\text{SP}}, \quad (3.34)$$

$$K_{ij}^{\text{SP}} := |V_{i-N_g}^{\text{SS}} V_{j-N_g}^{\text{SS}} Y_{ij}^{\text{SP}}|, \quad (3.35)$$

$$\gamma_{ij}^{\text{SP}} := \beta_{ij}^{\text{SP}} - \pi/2, \quad (3.36)$$

$$Y_{ij}^{\text{SP}} = |Y_{ij}^{\text{SP}}| \exp(j\beta_{ij}^{\text{SP}}), \quad (3.37)$$

em que $G_{ii}^{\text{SP}} := \text{Re}(Y_{ii}^{\text{SP}})$. O número de osciladores é $N_{\text{SP}} := N_b + N_g$, dos quais N_g representam geradores e, portanto, são de segunda ordem; N_g representam barras terminais, já que há uma barra terminal para cada gerador; e N_l representam cargas. Nós terminais são representados da mesma forma que cargas, porém, com consumo de potência frequentemente igual a zero.

3.5.3 Abordagem SM

Por último, apresenta-se a abordagem SM, em que barras de carga e de geração são ambas representadas por osciladores de segunda ordem. Isso é equivalente a se considerar que as cargas comportam-se dinamicamente como geradores, exceto pelo sentido dos fluxos de potência elétrica e mecânica, isto é, são representadas pela Eq. (3.5), com $P_m, P < 0$. Adicionalmente aos N_l novos “geradores”, surgem também N_l barras terminais correspondentes. De forma ilustrativa, veja-se novamente a Fig. 3.2. A matriz de admitância entre barras terminais, para a presente abordagem, é dada novamente por \mathbf{Y} .

Seja $\mathbf{Y}'_d := \text{diag}(y'_{d,1}, y'_{d,2}, y'_{d,3})$ a matriz que contém as admitâncias internas originárias da representação de geradores e cargas como máquinas síncronas. Por argumentos análogos aos apresentados para a abordagem EN, pode-se formar a matriz de admitância completa para a rede como:

$$\mathbf{Y}'' := \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Y}'_d & -\mathbf{Y}'_d \\ \hline -\mathbf{Y}'_d & \mathbf{Y} + \mathbf{Y}'_d \end{array} \right]. \quad (3.38)$$

Evidentemente, a abordagem não se limita ao exemplo com três barras e (3.38) pode representar redes com um número arbitrário de componentes, desde que \mathbf{Y} seja a matriz de admitância entre barras e \mathbf{Y}'_d contenha como elemento $Y'_{d,ii}$ a admitância interna do i -ésimo componente, seja ele gerador ou carga. Por fim, após se aplicar a redução de Kron obtendo \mathbf{Y}^{SM} , tem-se:

$$\frac{2H_i}{\omega_r} \ddot{\delta}_i + \frac{D_i}{\omega_r} \dot{\delta}_i = A_i^{\text{SM}} - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_b} K_{ij}^{\text{SM}} \text{sen}(\delta_i - \delta_j - \gamma_{ij}^{\text{SM}}), \quad i = 1, \dots, N_b, \quad (3.39)$$

em que

$$K_{ij}^{\text{SM}} := |E_i^{\text{SS}} E_j^{\text{SS}} Y_{ij}^{\text{SM}}|, \quad (3.40)$$

$$\gamma_{ij}^{\text{SM}} := \beta_{ij}^{\text{SM}} - \pi/2, \quad (3.41)$$

$$Y_{ij}^{\text{SM}} = |Y_{ij}^{\text{SM}}| \exp(j\beta_{ij}^{\text{SM}}), \quad (3.42)$$

$$A_i^{\text{SM}} := \begin{cases} P_{m,i}^{\text{SS}} - |E_i^{\text{SS}}|^2 G_{ii}^{\text{SM}}, & \text{para } i = 1, \dots, N_g, \\ -P_{l,i}^{\text{SS}} - |E_i^{\text{SS}}|^2 G_{ii}^{\text{SM}}, & \text{para } i = N_g + 1, \dots, N_b, \end{cases} \quad (3.43)$$

em que, novamente, $G_{ii}^{\text{SM}} := \text{Re}(Y_{ii}^{\text{SM}})$.

A Fig. 3.4 mostra as redes resultantes, de acordo com cada abordagem, para o exemplo da Fig. 3.2a. Notem-se os diferentes números de osciladores em cada rede. No entanto, todas as abordagens resultam em modelos de Kuramoto, sejam de osciladores apenas de segunda ordem ou sejam de ambas, primeira e segunda ordens. Dessa forma, torna-se

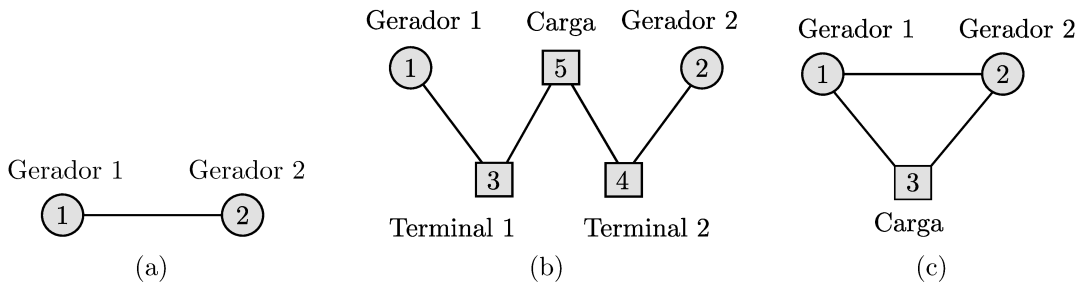


Figura 3.4: Rede resultante da modelagem do SEP mostrado na Fig. 3.2a para as abordagens (a) EN, (b) SP e (c) SM.

possível a aplicação de ferramentas de análise projetadas, muitas vezes, sem pretensões práticas ou visando outras áreas.

Neste trabalho, a obtenção dos parâmetros dos modelos é realizada por meio da *toolbox* disponibilizada por [Nishikawa and Motter \[2015\]](#). Esta, por sua vez, vale-se de funções já implementadas no Matpower [[Zimmerman et al., 2011](#)] para mapear parâmetros físicos dos SEPs analisados nos parâmetros dos modelo de Kuramoto (EN, SP, SM).

Abordagens baseadas em amostras

“While nothing is more uncertain than a single life, nothing is more certain than the average duration of a thousand lives.”¹

Elizur Wright

No presente capítulo, revisam-se trabalhos da literatura relacionados às *abordagens baseadas em amostras* (do inglês, seguindo nomenclatura de Brzeski and Perlikowski [2018]: *sample-based approach*). Tais abordagens são empregadas na caracterização de bacias de atração em sistemas dinâmicos, por meio da aplicação de métodos predominantemente numéricos. O contexto de aplicação mais comum consiste no uso das medidas obtidas como quantificadores de estabilidade não local e de resiliência desses sistemas. A Seç. 4.1 apresenta os trabalhos que, provavelmente, inspiraram os desenvolvimentos posteriores na área. Então, na Seç. 4.2, dá-se seguimento à revisão com a apresentação de alguns dos trabalhos subsequentes. Por fim, na Seç. 4.3, revisam-se trabalhos que discutem as limitações dessas abordagens e algumas formas de contorná-las.

4.1 O tamanho da bacia de sincronia

Em um trabalho chamado *“The size of the sync basin”*², Wiley et al. [2006] sugeriram uma nova abordagem para se lidar com o problema do sincronismo em redes. Entre as perguntas levantadas pelos autores, citam-se: (i) quão provável é um sistema sincronizar a partir de condições iniciais aleatórias? (ii) Como essa probabilidade depende da topologia da rede? (iii) Qual a melhor topologia para robustecer ou suprimir o sincronismo? Inicialmente, formularam-se esses questionamentos a partir de uma rede de osciladores idênticos com uma variedade síncrona localmente estável que compete com outros atratores. Por um lado, tais perguntas são bastante amplas e difíceis de responder. Envolvem, por exemplo, a estimação do tamanho da *bacia de atração da variedade síncrona*, a qual chamaram simplesmente de *bacia de sincronia* (do inglês: *sync basin*). Por outro lado, são questões importantes em aplicações reais e podem ser avaliadas numericamente.

¹Enquanto nada é mais incerto que uma única vida, nada é mais certo que a duração média de mil vidas.

²“O tamanho da bacia de sincronia”.

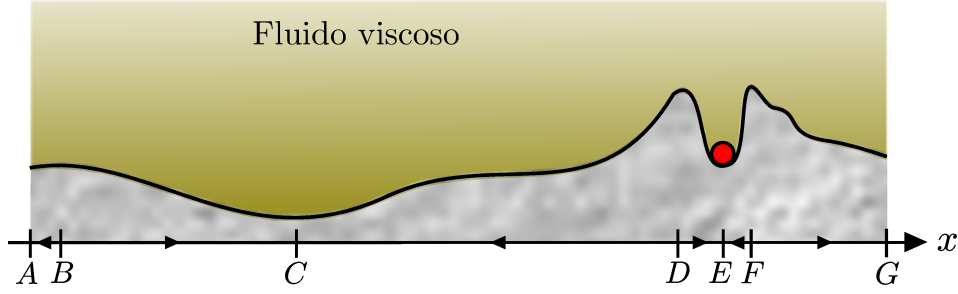


Figura 4.1: Analogia entre os conceitos de estabilidade local e bacia de atração com uma bolinha movendo-se sobre uma curva irregular em meio a um fluido viscoso. As setas sobre o eixo x indicam o sentido do movimento da bolinha quando abandonada sobre a curva nos intervalos mostrados. O fluido viscoso garante acomodação sem oscilação. Apesar da curvatura no ponto E ser maior que no ponto C , é mais provável, a partir de condições iniciais aleatórias uniformemente distribuídas no intervalo $[A, G]$, que a bolinha se acomode em C .

Naquela ocasião, apresentou-se um estudo de caso com N osciladores de Kuramoto de primeira ordem interagindo com k vizinhos mais próximos ($k_i = k, \forall i$), em uma rede com topologia anel,

$$\dot{\delta}_i = \omega_i + \frac{U}{N} \sum_{j=i-k}^{i+k} \text{sen}(\delta_j - \delta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

em que $\omega_i = \omega, \forall i$. Verificou-se que, para U/N maior que um determinado limiar, a bacia de sincronia é todo o espaço de estados. Para valores de U/N abaixo desse limiar, mais de um atrator coexiste, cada um caracterizado por um número inteiro q de acordo com $\delta_i = \omega t + 2\pi qi/N + c, i = 1, \dots, N$, em que c é uma constante. Observou-se que o tamanho das bacias seguem uma distribuição gaussiana com relação a q , com um desvio padrão que cresce linearmente de acordo com $\sqrt{N/U}$. Os autores ainda relataram que não eram capazes de explicar qualitativamente esse fenômeno e que, mesmo para essa topologia relativamente simples, ocorrem muitos padrões complicados.

A análise linear não diz nada sobre o tamanho das perturbações das quais um sistema pode se recuperar, retornando ao estado síncrono. Veja-se a analogia representada na Fig. 4.1, na qual um “estado” (acomodação da bolinha no ponto E ao longo do eixo x) é “muito localmente estável”, mas pouco provável a partir de “condições iniciais” aleatórias distribuídas uniformemente sobre a curva ao longo do intervalo $[A, G]$. As setas sobre o eixo x indicam a direção do movimento da bolinha e o meio viscoso garante a acomodação sem oscilação.

Ainda segundo Wiley et al. [2006], até então, não se conheciam métodos para calcular o volume desses objetos intrigantes que são as bacias de atração; apesar de já se conhecer alguns para aproximar seus limites. O interesse inicial estava nas redes WS, e em como a probabilidade de haver sincronismo varia com \mathbb{P} . Os autores acreditavam que estas

grandezas eram diretamente proporcionais, mas se surpreenderam ao perceber que não entendiam a estrutura das bacias mesmo para $\mathbb{P} = 0$.

Os experimentos realizados por esses autores basearam-se em integrações numéricas a partir de um grande número de vetores de condições iniciais (100 000) para vários valores de U e N . Além desses procedimentos numéricos, o limiar para estabilidade global foi calculado também analiticamente.

Alguns anos mais tarde, em “*How basin stability complements the linear-stability paradigm*”³, Menck et al. [2013] utilizaram ideias parecidas para propor o conceito de *estabilidade da bacia* (BS, do inglês: basin stability). Porém, reinterpretaram as condições iniciais aleatórias de Wiley et al. [2006] como estados causados por possíveis *perturbações*. Aqui, o termo *perturbação* tem significado diferente daquele comumente encontrado na literatura de sistemas dinâmicos como, por exemplo, em Khalil [2002], o que ficará claro a seguir. O referido trabalho apresentou o conceito, sem formalismo, e o aplicou em alguns exemplos. Uma discussão um pouco mais formal e detalhada pode ser encontrada em Menck [2014].

Considere-se que o sistema dinâmico

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (4.2)$$

em que $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$, possua ao menos um atrator \mathcal{A} , no qual opera, e que possui bacia de atração \mathcal{B} . Além disso, considere-se que, após uma perturbação, o sistema tenha sido conduzido para um outro ponto no espaço de estados.

Definição 4.1.1 (Estabilidade da Bacia | Menck, 2014). *A estabilidade da bacia de um atrator \mathcal{A} com bacia de atração \mathcal{B} é dada por*

$$S := \int_{\mathcal{X}} \mathbb{1}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (4.3)$$

em que

$$\mathbb{1}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} \in \mathcal{B} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.4)$$

é uma função indicadora e $\rho(\mathbf{x})$ é uma função densidade de probabilidade (PDF). \blacklozenge

A função $\rho(\mathbf{x})$ é a PDF que caracteriza a ocorrência de perturbações nas variáveis de estado do sistema. Pelo fato de ser uma medida de probabilidade, $S \in [0, 1]$. Se \mathcal{A} é um atrator globalmente estável, ou seja, se sua bacia de atração \mathcal{B} é todo o espaço de estados \mathcal{X} , então $S = 1$. Por outro lado, se a bacia de atração de \mathcal{A} tem hipervolume nulo ($\text{vol}(\mathcal{B}) = 0$), então $S = 0$. O procedimento numérico resumido para estimação de S é mostrado no Alg. 1.

³“Como a estabilidade da bacia complementa o paradigma da estabilidade linear”.

Algoritmo 1: Estimativa numérica da estabilidade da bacia.

- 1 Escolha $\rho(\mathbf{x})$;
 - 2 Encontre o atrator \mathcal{A} ;
 - 3 Sorteie N_i vetores de condições iniciais a partir de \mathcal{X} de acordo com $\rho(\mathbf{x})$;
 - 4 Integre a Eq. (4.2) a partir dessas condições iniciais e conte o número de vezes $N_{\mathcal{A}}$ que a trajetória convergiu para \mathcal{A} ;
 - 5 Estime S como: $\hat{S} = N_{\mathcal{A}}/N_i$;
-

O atrator \mathcal{A} pode ser encontrado analítica ou numericamente. Se a escolha de ρ for feita com base no conhecimento sobre o sistema investigado, \hat{S} fornecerá uma estimativa da probabilidade de o atrator \mathcal{A} ser alcançado. Admitindo-se que ρ seja uniforme em uma região $\mathcal{X}_i \subseteq \mathcal{X}$, \hat{S} fornecerá uma estimativa da fração do hipervolume $\text{vol}(\mathcal{X}_i)$ que converge para \mathcal{A} , i.e., $\hat{S} \approx \text{vol}(\mathcal{B} \cap \mathcal{X}_i)/\text{vol}(\mathcal{X}_i)$.

Por exemplo, em um sistema unidimensional $\dot{x} = f(x)$, admitindo-se $\rho(x) \sim \text{unif}(a, c)$, tem-se que x pode assumir valores uniformemente distribuídos no intervalo $[a, c]$ devido a perturbações. Supondo-se que x , ao ser perturbado, assumira um valor $b \in [a, c]$, avalia-se apenas o comportamento do sistema após a perturbação, ou seja, a evolução de x de acordo com f a partir de $x(t_p) = b$, em que t_p é o tempo em que ocorre a perturbação. Obviamente, para sistemas autônomos, pode-se deslocar o tempo de forma que t_p seja zero.

Um exemplo ilustrativo em duas dimensões é mostrado na Fig. 4.2. O atrator \mathcal{A} é marcado em azul e sua bacia de atração \mathcal{B} corresponde à região mais escura. A região mais clara corresponde a \mathcal{X}_i e $\rho(\mathbf{x}) \sim \text{unif}(a, b) \times \text{unif}(c, d)$. Integrações a partir de condições iniciais (pontos) sorteadas nessa região de acordo com ρ resultam em $N_{\mathcal{A}}$ trajetórias convergentes (em preto) e $N_i - N_{\mathcal{A}}$ trajetórias divergentes (em vermelho). Portanto, a divisão $N_{\mathcal{A}}/N_i$ fornece uma estimativa da fração que a bacia de atração \mathcal{B} ocupa no intervalo analisado.

O processo de estimação consiste em um experimento repetido de Bernoulli e, portanto, a estimativa \hat{S} está associada a um desvio padrão, $\sigma_S = \sqrt{S(1-S)/N_i}$ [Menck et al., 2013; Kay, 2006].

O método vale-se da natureza das perturbações, que frequentemente possuem incertezas. Além disso, funciona para sistemas de alta dimensão, uma vez que σ_S está associado somente à própria estimativa \hat{S} e ao número de realizações N_i .

Menck et al. [2013], por meio de uma rede com 100 sistemas de Rössler acoplados, cada um, a outros $k = 8$ osciladores ($k_i = k, \forall i$), e mais alguns exemplos de redes reais, mostraram que a aleatoriedade de conexões ($\mathbb{P} \approx 1$ em uma rede WS) favorece a sincronizabilidade, i.e, a ocorrência de sincronismo. Por outro lado, a regularidade ($\mathbb{P} \approx 0$) favorece a estabilidade da bacia, ou seja, o tamanho da bacia de atração dos estados síncronos alcançados. Conjecturam, a partir dessa constatação, que tais tendências opostas são responsáveis pelas características de mundo pequeno presentes em redes reais. Mostraram, também, em um modelo conceitual de vegetação da floresta amazônica e em um

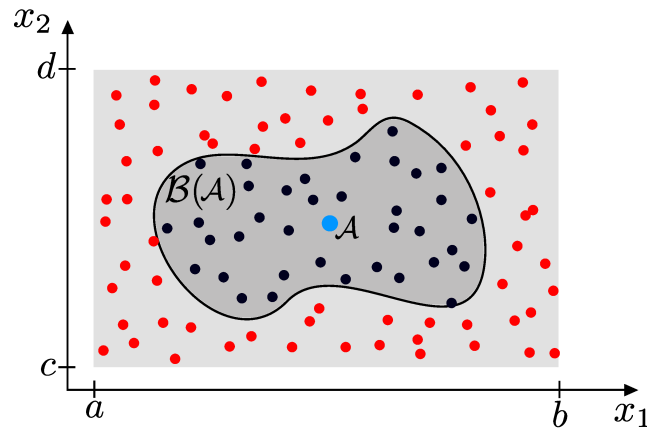


Figura 4.2: Ilustração esquemática em duas dimensões. O atrator \mathcal{A} é marcado em azul e sua bacia de atração \mathcal{B} corresponde à região mais escura. A região mais clara corresponde a \mathcal{X}_i . Integrações a partir das condições iniciais mostradas resultam em trajetórias convergentes (em preto) e divergentes (em vermelho).

pêndulo forçado amortecido que a análise linear (tal como a taxa de convergência devida a pequenas perturbações) falha ao prever a estabilidade global.

Após o referido trabalho (e possivelmente inspirados por ele) surgiram na literatura inúmeros outros valendo-se de abordagens semelhantes para análise de estabilidade e resiliência, principalmente no contexto de redes dinâmicas. Basicamente, tratam da integração numérica de sistemas a partir de condições iniciais escolhidas apropriadamente visando caracterizar a estabilidade não local e relacionar os resultados obtidos a características dinâmicas ou topológicas. A seguir, apresentam-se alguns desses trabalhos.

4.2 Trabalhos subsequentes

O procedimento descrito anteriormente pode ser adaptado para se encontrar, além de uma estimativa do volume de bacias de atração, direções nas quais perturbações são mais nocivas a um sistema. Como redes dinâmicas representam, frequentemente, sistemas distribuídos espacialmente, podem-se encontrar localidades mais sensíveis a perturbações. A Fig 4.3 ilustra esse processo. Por um lado, ao se escolher (por exemplo) aleatoriamente direções a serem perturbadas, podem-se gerar resultados que não sejam diretamente associáveis ao sistema físico investigado. Por outro lado, perturbar direções associadas a um subsistema da rede pode gerar informações a respeito dos nós mais vulneráveis.

Menck et al. [2014] utilizaram essa ideia para localizar os nós mais vulneráveis em modelos de Kuramoto representando SEPs. A investigação foi realizada sobre um conjunto de 1 000 redes com 100 nós cada uma. Geraram-se as topologias a partir do algoritmo de Schultz et al. [2014a], que as produzem com métricas (como o grau médio $\langle k \rangle$) semelhantes às de SEPs reais. Para cada topologia, metade dos nós foram considerados geradores e outra metade, cargas. A abordagem usada foi uma análoga à SM (Synchronous Mo-

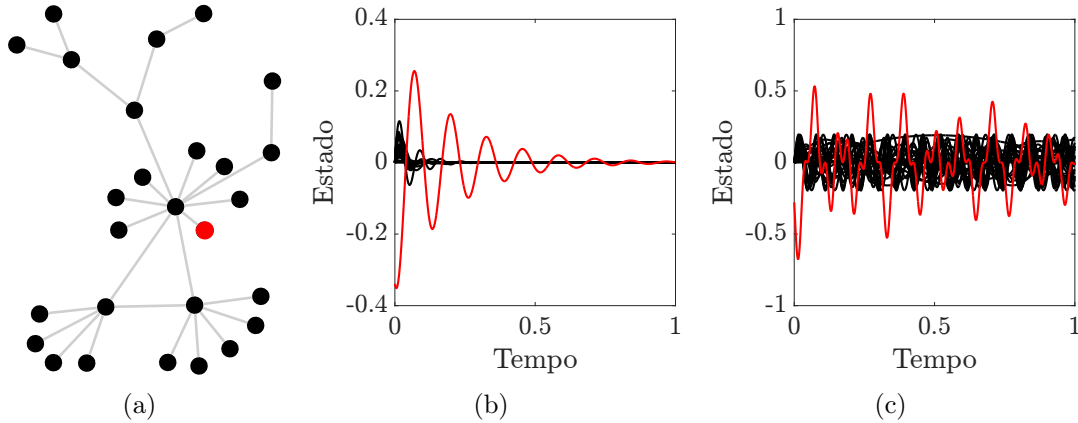


Figura 4.3: Estabilidade da bacia em sua versão por nó. (a) Rede livre de escala (BA) com o nó perturbado em vermelho. (b, c) Atribui-se um valor sorteado à variável de estado desse nó e analisa-se a evolução do estado da rede. Em (b) a rede se recupera e o estado retorna ao regime anterior à perturbação. Em (c) a perturbação causa uma mudança de regime na rede, desestabilizando-a.

tor), mostrada na Seç. 3.5.3, com algumas simplificações. Nesse caso, representaram-se todos os nós como osciladores de Kuramoto de segunda ordem. Desconsideram-se as impedâncias internas dos nós (geradores e cargas) e os elementos resistivos das linhas de transmissão. O termo de amortecimento foi escolhido de forma a manter a duração dos transientes próxima de valores típicos. Exceto pelos sentidos dos fluxos de potência, todos os demais parâmetros das redes foram considerados homogêneos, inclusive a capacidade das linhas de transmissão. Além disso, por não haver nós terminais no modelo resultante, a redução de Kron é dispensada nesse caso. Os autores não explicitam, mas, possivelmente, consideraram um único atrator que descrevem como dominante para o caso de sucesso da função indicadora; ou seja, demais condições de operação estáveis na prática não são levadas em conta. As perturbações foram sorteadas de acordo com $\rho(\delta_i, \omega_i) \sim \text{unif}(0, 2\pi) \times \text{unif}(-100, 100)$ e foram realizadas 500 integrações por nó.

Por meio de caracterização individual com relação à posição na rede, encontrou-se que a maior parte dos nós mais vulneráveis estão concentradas em estruturas nomeadas *dead ends* e *dead trees*. Alguns exemplos típicos dessas estruturas são mostrados na Fig. 4.4a–e. É interessante notar que tais estruturas não são relacionadas ao grau dos nós (k_i), mas, sim, à centralidade de intermediação deles (b_i). Por fim, os autores apresentaram um caso de estudo com o SEP de parte da Europa Setentrional.

Schultz et al. [2014b], valendo-se de metodologia análoga à de Menck et al. [2014], corroboraram e estenderam seus resultados. A partir de um conjunto de 570 redes com 100 nós cada uma, encontraram que estruturas com redundância, como mostrado na Fig. 4.4f, favorecem a estabilidade da bacia. Os estudos usaram a abordagem SM e o número de realizações foi escolhido $N_i = 100$. Por último, por meio das relações obtidas, os autores desenvolveram uma metodologia capaz de classificar os nós em dois grupos (mais e menos

vulneráveis) de acordo a estabilidade da bacia associada, baseando-se apenas em medidas topológicas, sem a necessidade de integrações. A taxa de acerto alcançada foi maior que 80%.

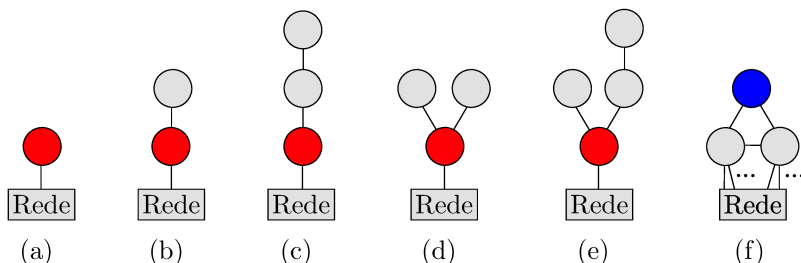


Figura 4.4: Exemplos de estruturas recorrentes em redes complexas. (a–e) Estruturas nomeadas *dead ends* representam locais de vulnerabilidade; os nós mais vulneráveis são mostrados em vermelho. (f) Nós localizados em *desvios*, como o azul, são pouco vulneráveis.

Kim et al. [2015] também investigaram o papel da topologia na resiliência de SEPs. Mais precisamente, estudaram como a *consistência de comunidade* (do inglês: *community consistency*) afeta a janela de transição da estabilidade da bacia nesses sistemas. Grosso modo, a consistência de comunidade mede o quanto um nó pertence a uma comunidade. O exemplo usado para demonstrar os resultados foi o SEP chileno e a abordagem, mais uma vez, foi a SM. Resumidamente, iniciou-se com uma rede em que todas as linhas possuíam mesma capacidade, e todos os nós apresentavam $S_i = 0$; i.e, a estabilidade da bacia da rede medida quando o i -ésimo nó é perturbado é zero, para todo i . Então, aumentaram-se igualmente as capacidades K_{ij} e verificou-se como ocorre a transição da estabilidade da bacia para diferentes nós até que se alcançasse $S_i = 1, \forall i$. Dessa maneira, os autores encontraram uma relação entre a janela de transição $\Delta K_{ij} = \Delta K, \forall (i, j)$ e a consistência de comunidade de um nó. De forma geral, nós com menor consistência de comunidade possuem uma janela de transição mais larga, ou seja, incrementando-se igualmente as capacidades de todas as linhas, são os últimos a deixarem de ser vulneráveis.

Klinshov et al. [2015] exploraram o problema da menor perturbação capaz de desestabilizar um sistema que opera em um determinado regime desejado. Segundo eles, é problemático caracterizar as bacias de atração por meio de um único escalar, principalmente, dada a escolha frequentemente arbitrária da PDF que caracteriza as perturbações. Como medida alternativa ou complementar, sugeriram o *limiar de estabilidade* (ST, do inglês: *stability threshold*), que fornece o valor, em módulo, da menor perturbação que conduz a trajetória para fora da bacia de atração (\mathcal{B}) do atrator desejado (\mathcal{A}). Seja o limiar de estabilidade

$$\sigma := \inf\{\text{dist}(a, b) \mid a \in \mathcal{A}, b \in \partial\mathcal{B}\}, \quad (4.5)$$

em que $\text{dist}(a, b)$ é a distância entre um ponto a no atrator e um ponto b sobre a fronteira

da bacia de atração, $\partial\mathcal{B}$. O procedimento sugerido é mostrado no Alg. 2 e pode ser melhor compreendido com o auxílio da Fig. 4.5.

Algoritmo 2: Estimativa numérica do limiar de estabilidade.

- 1 Encontre o ponto o_1 sobre a fronteira de \mathcal{B} . Para isso, inicie do ponto o_0 e mova-se até deixar a bacia de atração. Utilize o método da bisseção para esse fim;
 - 2 Mova-se sobre a fronteira: em cada passo, tome o hiperplano tangente a ela no ponto o_n . Sobre o hiperplano, encontre o ponto mais próximo do atrator \mathcal{A} , e dê um passo em sua direção para obter o_{n+1} . O algoritmo convergirá para um mínimo local M_j ;
-

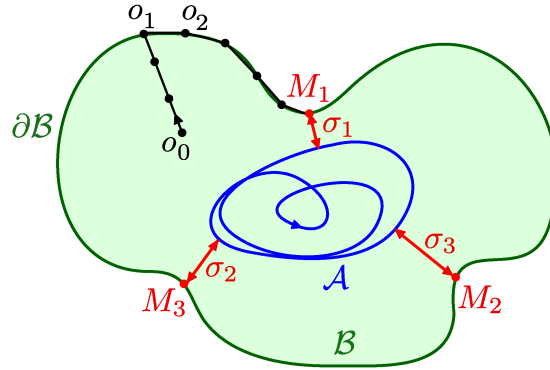


Figura 4.5: Ilustração do processo de estimativa do limiar de estabilidade. O Alg. 2 converge para um mínimo local M_j dependente de sua inicialização.

O procedimento parte da premissa de que a fronteira é de classe C^1 . Além disso, os passos mostrados encontram, a partir de diferentes valores de o_0 , os pontos M_1, M_2, \dots, M_{N_i} . Portanto, em uma segunda etapa, faz-se:

$$S_t := \min\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N_i}\}; \quad \sigma_j := \text{dist}(M_j, \mathcal{A}). \quad (4.6)$$

A busca de força bruta pode se tornar menos custosa computacionalmente quando o objetivo é avaliar a evolução do limiar de estabilidade em relação a algum parâmetro p , como frequentemente acontece. Suponha-se que, dado um parâmetro p_0 , tenha-se encontrado $M_1(p_0), \dots, M_{N_i}(p_0)$. Se o sistema for robusto, o campo vetorial varia suavemente com p . Logo, se p varia $\Delta p = p - p_0$, pode-se iniciar o algoritmo a partir dos pontos $M_j(p_0)$, aumentando sua velocidade de convergência.

Klinshov et al. [2015] citaram dois problemas que podem ser encontrados e propuseram formas de contorná-los. A saber: (i) para contornar o alto custo computacional em sistemas de alta dimensão, escolhe-se o fator de acoplamento como parâmetro a ser estudado. Iniciando-se de $p = 0$, encontram-se os valores de M_j para o sistema desacoplado. Em seguida, aumenta-se p e avalia-se a evolução dos pontos. (ii) Outro possível problema é a emergência de novos mínimos locais. Apesar de não haver garantias de se ter alcançado

um mínimo global, pode-se fazer com que a probabilidade de tê-lo encontrado seja grande escolhendo-se um número suficiente de condições iniciais aleatórias (valores de o_0).

Os exemplos apresentados pelos autores consistiram em um modelo de pêndulo não linear forçado e uma rede de mapas acoplados. Para o primeiro caso, o limiar de estabilidade foi comparado com a estabilidade da bacia. Mostrou-se como ambas as medidas variam em função da amplitude de uma entrada (constante em cada experimento). Enquanto a estabilidade da bacia apenas mostra que o volume da bacia de atração se contrai, o limiar de estabilidade aponta qual é a direção mais crítica e como ela varia, apresentando, de fato, uma mudança de sentido para determinado valor de entrada. Para o segundo exemplo, inúmeras topologias e números de nós ($2 \leq N \leq 100$) foram testados. O principal resultado foi a identificação de um valor ótimo — segundo o limiar de estabilidade — para o fator de acoplamento. A partir desse valor, apesar de a bacia de atração crescer em algumas direções, em outras há uma contração considerável. Por fim, [Klinshov et al. \[2015\]](#) apresentaram uma derivação analítica aproximada para a probabilidade de existência de mínimos desconhecidos em função do número de realizações N_i .

Retomando a discussão sobre o papel que a topologia e o fator de acoplamento possuem sobre a medida de estabilidade da bacia, [Kim et al. \[2016\]](#) abordaram novamente o problema; desta vez, em pequenas redes de dois, quatro e seis nós, investigando todas as topologias distintas possíveis. Como no trabalho anterior [[Kim et al., 2015](#)], os autores investigaram as transições de S_i em função do acoplamento ($K_{ij} = K, \forall i$) e, não, os valores em si. Mostrou-se que as transições se concentram em quatro tipos diferentes de acordo com o formato da curva S_i vs. K e que medidas como a densidade e o grau dos nós não mostram correlação com os tipos de transição. Estes, por sua vez, estão fortemente correlacionados com as centralidades de intermediação e de fluxo, sendo essa última medida proposta pelos autores.

[Lazarek and Kurths \[2016\]](#) abordaram outra questão importante. A determinação de valores de parâmetros de sistemas físicos, geralmente, está acompanhada de incertezas; então, torna-se interessante analisar a resiliência dos sistemas levando-as em consideração e cobrindo, preferencialmente, todo o espaço de parâmetros. Sabe-se que tal tarefa é computacionalmente custosa e analiticamente difícil em sistemas não lineares, com atraso e/ou outros fatores complicadores. Os autores, valendo-se da incerteza inerente aos modelos, propuseram uma metodologia de análise que une métodos clássicos de Monte Carlo (que avaliam incertezas paramétricas) ao conceito de estabilidade da bacia. Seja o sistema dinâmico

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}), \quad (4.7)$$

em que $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ e $\mathbf{p} \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^{n_p}$ são, respectivamente, os vetores de estados e de parâmetros do sistema; $\mathbf{f}_{\mathbf{p}} : \mathcal{X} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ é o campo vetorial; \mathcal{X} e \mathcal{P} são os espaços de estados e de parâmetros, nessa ordem.

Considere-se, por simplicidade, o caso em que $n_p = 1$. Sejam $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}$ o conjunto de to-

dos os valores acessíveis para o parâmetro p e $\mathcal{X}_i \subseteq \mathcal{X}$ a região de interesse contendo todos os valores possíveis para as condições iniciais. Considere-se que as funções densidade de probabilidade $\rho_{\mathbf{x}}$ e $\rho_{\mathbf{p}}$ caracterizem as distribuições de condições iniciais e de parâmetros, respectivamente. Então, para o sistema (4.7), a medida de *estabilidade estendida da bacia* (EBS, do inglês: *extended basin stability*) é obtida conforme o Alg. 3.

Algoritmo 3: Estimativa numérica da estabilidade estendida da bacia.

- 1 Divida \mathcal{P}_i em $j = 1, \dots, N_c$ subconjuntos igualmente espaçados, sem sobreposição e de forma que a expressão $\bigcup_{j=1}^{N_c} \mathcal{P}_i^j = \mathcal{P}_i$ seja verdadeira;
 - 2 **for** $j \leftarrow 1, \dots, N_c$ **do**
 - 3 Sorteie N_i vetores de condições iniciais e valores para o parâmetro p a partir de \mathcal{X}_i e \mathcal{P}_i^j , de acordo com $\rho_{\mathbf{x}}$ e $\rho_{\mathbf{p}}$, respectivamente;
 - 4 Integre o sistema a partir dessas condições iniciais e valores de parâmetros sorteados e conte o número de vezes $N_{\mathcal{A}}$ que a trajetória convergiu para \mathcal{A} ;
 - 5 Estime a estabilidade estendida da bacia como: $\hat{S}(\mathcal{P}_i^j) = N_{\mathcal{A}}/N_i$.
 - 6 **end for**
-

Com a metodologia proposta, os autores caracterizaram três exemplos: um oscilador de Duffing; um oscilador bilinear; e uma barra com pêndulos que se movimenta apenas na direção horizontal, acoplada à referência por mola e amortecedor. Algumas vantagens observadas pelos autores ao se compararem os resultados com métodos analíticos ou numéricos já existentes incluem: custo computacional relativamente baixo e a não captura de atratores improváveis, que dificilmente ocorrerão em situações práticas. Vale notar que os resultados obtidos revelam propriedades como as que são mostradas em diagramas de bifurcação. Recomenda-se aos leitores interessados em estabilidade estrutural consultar o trabalho de Lazarek and Kurths [2016] para mais detalhes. Mesmo baseada em passos relativamente simples, a metodologia pode fornecer, ao menos, direções para investigações específicas de sistemas dinâmicos.

Os trabalhos relacionados à estabilidade da bacia focam no regime permanente dos sistemas investigados. No entanto, sabe-se que o comportamento transiente possui papel crucial em sistemas físicos. Por exemplo, restrições sobre transientes estão frequentemente presentes no projeto de controladores em sistemas lineares. Em sistemas não lineares, a garantia da estabilidade assintótica já é uma tarefa desafiadora por si só. Van Kan et al. [2016] propuseram uma generalização do conceito de estabilidade da bacia que leva em conta o comportamento transiente, denominada *estabilidade restrita da bacia* (CBS, do inglês: *constrained basin stability*). Os detalhes da metodologia proposta são omitidos aqui pois se trata, basicamente, do mesmo processo usado para estimação da estabilidade da bacia, conforme descrito no Alg. 1. A consideração do transiente leva à nova medida:

$$S_c := \int_{\mathcal{X}} \rho(\mathbf{x}) \mathbb{1}_C(\mathbf{x}) \mathbb{1}_B(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (4.8)$$

em que todos os termos tem o mesmo significado daqueles em (4.3) e $1_C(\mathbf{x})$ é uma função indicadora que representa o cumprimento de alguma restrição sobre o transiente. O produto entre as duas funções indicadoras garante que os estados contabilizados pertençam à bacia do atrator de interesse e, ao mesmo tempo, que a evolução do sistema a partir deles satisfaça a restrição definida. As restrições são classificadas em três formas distintas pelos autores: (i) estáticas, ou seja, regiões previamente definidas; (ii) dinâmicas, i.e., dependentes também de \mathbf{f} ; (iii) integradas, que dependem, além do estado atual, dos estados passados, por exemplo, o tempo requerido para se alcançar um determinado atrator. Um exemplo de restrição estática é mostrado na Fig. 4.6.

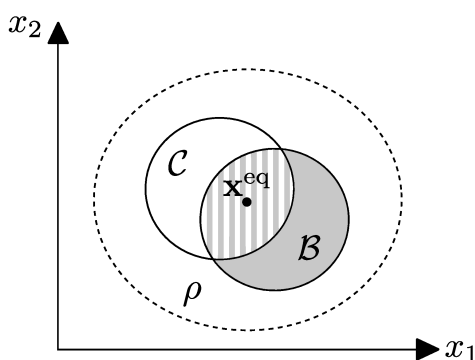


Figura 4.6: Exemplo de restrição estática. A região cinza corresponde à bacia de atração do atrator que, no caso, é o ponto de equilíbrio \mathbf{x}^{eq} . A região \mathcal{C} contém os transientes permitidos. A interseção entre essas regiões fornece o conjunto de condições iniciais (região listrada) que convergem para \mathbf{x}^{eq} e obedecem às restrições, simultaneamente.

Van Kan et al. [2016] aplicaram a metodologia em dois exemplos: um sistema de Lorenz e um modelo para o ciclo de carbono. Para o primeiro, mostrou-se como uma bifurcação de crise de fronteira no sistema de Lorenz é precedido por uma mudança no comportamento transiente. Para o segundo, mostraram que S_c varia suavemente em função de um parâmetro e é capaz de prever uma bifurcação em que um ponto de equilíbrio desejado perde estabilidade e um indesejado se torna estável. Os resultados foram comparados com a estabilidade da bacia clássica. O argumento dos autores a favor do uso dessa nova medida é que períodos que antecedem bifurcações são, em muitos casos, associados a mudanças no comportamento transiente, mas, nem sempre, no assintótico. Por exemplo, no modelo do ciclo de carbono, S varia de forma descontínua no ponto de bifurcação, sem qualquer sinal prévio. Como ponto desfavorável, cita-se, para o caso de antecipação da ocorrência de bifurcações, a necessidade de conhecimento prévio sobre sistema.

Hellmann et al. [2016] propuseram uma medida que chamaram de *sobrevivência* (do inglês: *survivability*). Esses autores também estavam interessados no comportamento transiente, mas, diferentemente de Van Kan et al. [2016], desprezaram o comportamento assintótico. Nesse caso, a região desejada não contém, necessariamente, um atrator. Com isso, definiram $S_s(t)$ como a fração do volume da região investigada cujas trajetórias não escapam de uma região definida em um tempo finito t . O método numérico é análogo ao

apresentado no Alg. 1, eliminando-se o passo 2 e considerando, no passo 4, as integrações que resultam em trajetórias que obedecem as restrições definidas.

Como parte dos resultados obtidos, citam-se: (i) de forma semelhante à estabilidade restrita da bacia, a medida de sobrevivência mostrou-se útil na antecipação de bifurcações em um modelo de estoque de carbono; (ii) em uma rede neuronal, encontrou-se, em função de um parâmetro relacionado à topologia da rede, a probabilidade de não haver sincronismo para diferentes intervalos de tempo; com isso, um valor de parâmetro que melhor suprime o sincronismo foi encontrado.

Alguns esforços na quantificação de transientes foram feitos por Kittel et al. [2017]. Em seu trabalho, além da proposição de medidas em si, encontra-se uma discussão sobre a associação entre o tempo de alcance (i.e., tempo decorrido até que uma trajetória alcance determinado atrator) e um escalar. Comumente, divide-se a trajetória arbitrariamente em partes transiente e assintótica; no entanto, as seguintes questões foram levantadas pelos autores: (a) quais os problemas desses métodos intuitivos para quantificar transientes? (b) Como consertá-los?

Para melhor desenvolver a primeira pergunta e respondê-la, foram formulados e discutidos quatro problemas essenciais com os quais se é confrontado normalmente: (i) tempo de alcance infinito: característica de campos suaves; (ii) interpretação física: não é claro quando um transiente termina, muitas vezes depende de um limiar *arbitrado* ε e pode divergir quando $\varepsilon \rightarrow 0$; (iii) descontinuidade devido a variações de parâmetros estimados; e (iv) não invariância: a medida deve ser invariante sob deformações suaves do campo vetorial quando o interesse está em sistemas reais; por exemplo, a norma euclidiana não é invariante.

Duas medidas foram propostas pelos autores em resposta à segunda pergunta: a área sob a curva de distância do atrator e o tempo de chegada regularizado, i.e., a diferença entre o tempo investigado e o de uma trajetória de referência. A primeira é dada por:

$$S_d(\mathbf{x}_0) := \int_0^\infty \text{dist}(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \mathcal{A}) dt. \quad (4.9)$$

De acordo com S_d , classificam-se as condições iniciais em *relutantes* ou *determinadas* (do inglês: *relutant* e *eager*, respectivamente).

Seja $t_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ o tempo que um trajetória iniciada em \mathbf{x}_0 leva para alcançar uma distância generalizada⁴ ε do atrator. A segunda medida é então definida como:

$$S_{\text{trr}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0^{\text{ref}}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (t_\varepsilon(\mathbf{x}_0) - t_\varepsilon(\mathbf{x}_0^{\text{ref}})). \quad (4.10)$$

De acordo com S_{trr} , classificam-se as condições iniciais como *antecipadas* e *tardias* (tradução livre para os termos em inglês: *early* e *late*). Embora os tempos de alcance possam ser infinitos, a diferença entre dois desses é finita, permitindo quantificação e as noções de *antes* e *depois*.

⁴Por exemplo, $S_d(\varepsilon)$. Para mais detalhes, consulte-se o trabalho original.

Kittel et al. [2017] mostraram que os quatro problemas supracitados aparecem para um exemplo simples; dessa forma, evitaram os problemas inerentes aos sistemas propriamente ditos, como alta dimensão e caos. Além disso, aplicaram a abordagem aos seguintes exemplos: um sistema linear, um modelo de ciclo global de carbono, um modelo de um gerador no sistema elétrico e um sistema de Rössler. Para cada exemplo, apresentaram também uma análise da correlação entre as duas medidas. Entre os resultados, a medida S_{tr} para sistema de Rössler merece destaque pelas imprevisibilidade e falta de correlação com S_d encontradas.

Delabays et al. [2017], em um trabalho convenientemente nomeado “*The size of the sync basin revisited*”⁵ estudaram, por meio de uma metodologia numérica proposta por eles, o mesmo problema analisado por Wiley et al. [2006]. O método avalia a magnitude da maior perturbação, tal que o sistema ainda retorne ao regime anterior a ela, como aproximação para o volume da bacia de atração dos pontos fixos do sistema de osciladores de Kuramoto acoplados em anel, conforme Eq. (4.1). O procedimento proposto é resumidamente apresentado no Alg. 4.

Algoritmo 4: Estimativa numérica da bacia de sincronia.

```

1 Encontre os pontos de equilíbrio estáveis ( $\mathbf{x}_q^{\text{eq}}$ ) numericamente;
2 for  $q \leftarrow q_1, \dots, q_{N_q}$  do
3   for  $l \leftarrow l_1, \dots, l_{N_l}$  do
4     Seja  $\mathbf{x}'_j \in \mathbb{R}^N$  um vetor com direção e sentido aleatórios, tal que  $\|\mathbf{x}'_j\|_\infty = 1$ ,
        $\mathbf{x}'_j \perp [1 \ \dots \ 1]^\text{T}$ , para  $j = 1, \dots, N_l$ . Tome os vetores de condições iniciais na
       superfície de hipercubos centrados no ponto de equilíbrio:  $\boldsymbol{\eta}_{qlj} := \mathbf{x}_q^{\text{eq}} + l\pi\mathbf{x}'_j$ ;
5     Estime a fração do hipercubo de lado  $l$ , centrado em  $\mathbf{x}_q^{\text{eq}}$  e que pertença à sua
       bacia de atração, como:
           
$$\mathbb{P}(q, l) := \frac{1}{N_l} \text{card} \{ \boldsymbol{\eta}_{qlj} \mid \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\eta}_{qlj}, \mathbf{x}(t \rightarrow \infty) = \mathbf{x}_q^{\text{eq}} \}. \quad (4.11)$$

6   end for
7 end for
```

No caso, $\text{card}(\cdot)$ se refere à cardinalidade do conjunto. Para realização do passo 1, os autores implementaram um algoritmo recursivo (para mais detalhes, recomenda-se o trabalho original). Na linha 3, fez-se $l \leftarrow l + \Delta l$ a cada iteração, em que Δl é um passo definido; na linha 2, por sua vez, percorreram-se os atratores encontrados na execução da linha 1.

Como um dos resultados, Delabays et al. [2017] encontraram que o volume das bacias de atração varia de acordo com $\text{vol}(\mathcal{B}(\mathbf{x}_q^{\text{eq}})) \propto (1 - 4q/N)^N$ e, não, seguindo distribuição gaussiana em q , como sugerido por Wiley et al. [2006]. A diferença nas distribuições encontradas, segundo os autores, deve-se ao fato das condições iniciais aleatórias usadas

⁵“O tamanho da bacia de sincronia revisitado”.

por Wiley et al. [2006] gerarem \mathbb{P} com distribuição gaussiana no instante inicial, o que se reflete na distribuição final.

Nitzbon et al. [2017] abordaram, como outros já citados, o problema do papel da topologia na resiliência de SEPs. Em seu trabalho, buscaram relacionar as medidas já revisadas, estabilidade da bacia e sobrevivência, com as posições topológicas dos nós. Para tal, dividiram-se os nós em classes distintas de acordo com os papéis topológicos que cumprem. As perturbações consideradas atingiam nós individualmente e o estudo foi realizado sobre um modelo de SEP seguindo a abordagem SM, semelhantemente ao trabalho de Menck et al. [2014]. Exceto pelo sinal da potência injetada, diferente para geradores e cargas, e da topologia, os parâmetros dos osciladores e das linhas de transmissão foram considerados idênticos. Não se encontrou correlação entre o grau e a estabilidade da bacia de um nó, ao passo que, nos seguintes pares, constatou-se correlação: centralidade de intermediação e estabilidade da bacia, grau e sobrevivência, e centralidade de intermediação e sobrevivência. Esta última, evidenciando-se apenas para valores específicos de perturbações.

Algumas conclusões desse trabalho incluem: para pequenas perturbações ($\|\Delta \mathbf{x}\| < 10$, em que $\Delta \mathbf{x}$ representa desvios a partir do equilíbrio \mathbf{x}^{eq}) a sobrevivência é mais influenciada pela topologia; para valores maiores, a influência maior se dá sobre a estabilidade da bacia. Além disso, os autores sugerem que se evite, além das estruturas em árvores já conhecidas (*dead ends*), os *hubs* (nós com grau elevado), que tornam a rede menos resiliente em relação à sobrevivência.

Outra questão interessante foi levantada por Mitra et al. [2017a]: qual o menor número de nós que quando perturbados, simultaneamente e de forma independente, podem levar uma rede à desestabilização? Os autores propuseram uma metodologia para responder essa questão. Eles argumentaram que, munidos dessa resposta, melhores decisões poderiam ser tomadas na tarefa de se aumentar a resiliência de uma determinada rede, por exemplo, alocando controladores ativos de forma mais eficiente. Ainda segundo eles, o número de controladores necessários para manter a operação estável poderia ser determinado.

Considere-se a rede dinâmica:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{h}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \quad (4.12)$$

em que $\mathbf{x} := [\mathbf{x}_1^\top \cdots \mathbf{x}_N^\top]^\top$ é o vetor de estados; $\mathbf{A}_{\text{adj}} = [a_{ij}]$ é a matriz de adjacência; \mathbf{f} é o campo vetorial dos subsistemas isolados; e \mathbf{h} uma função de acoplamento genérica. Assuma-se que a rede possua um atrator \mathcal{A} com bacia de atração \mathcal{B} . Considere-se, ainda, que N_p nós sejam perturbados simultaneamente, de tal forma que as perturbações individuais sejam independentes. A resiliência da rede frente a perturbações desses N_p nós, representada pela estabilidade da bacia, é estimada conforme o procedimento descrito no Alg. 5. Uma ilustração é mostrada na Fig. 4.7.

Algoritmo 5: Estimativa numérica da estabilidade da bacia de múltiplos nós.

- 1 Para um dado valor de N_p , gere uma amostra $\{\mathcal{M}_j^{N_p}\}$ de conjuntos contendo N_p nós, com cardinalidade $M = \min(M_0, \binom{N}{N_p})$, com um M_0 escolhido;
- 2 Dado o j -ésimo conjunto $\mathcal{M}_j^{N_p}$, amostre N_i vetores de condições iniciais de acordo com uma PDF ρ ;
- 3 Integre o sistema a partir dessas condições iniciais, conte o número de vezes N_A que a trajetória convergiu e estime a estabilidade da bacia do j -ésimo conjunto de N_p nós como $\hat{S}(\mathcal{M}_j^{N_p}) = N_A/N_i$;
- 4 Tome a média sobre todos os M conjuntos:

$$\langle \hat{S}^{N_p} \rangle = \frac{1}{M} \sum_j \hat{S}(\mathcal{M}_j^{N_p}) \quad (4.13)$$

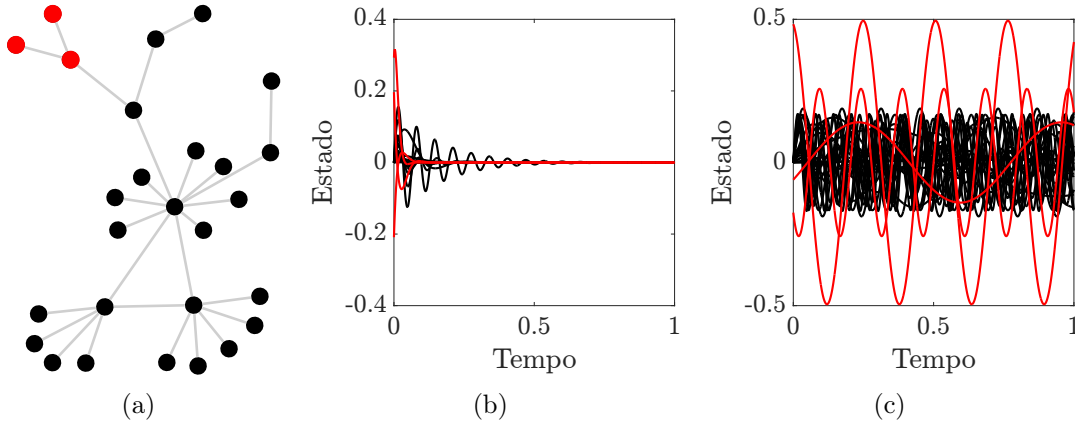


Figura 4.7: Estabilidade da bacia em sua versão de múltiplos nós. (a) Rede livre de escala (BA) com três nós perturbados ($N_p = 3$), indicados em vermelho. (b, c) Atribui-se valores sorteados às variáveis de estado desses nós e analisa-se a evolução do estado da rede. Em (b) a rede se recupera e o estado retorna ao regime anterior à perturbação. Em (c) a perturbação causa uma mudança de regime na rede, desestabilizando-a.

A *estabilidade da bacia de múltiplos nós* (MNBS, do inglês: *multiple-node basin stability*), como foi chamada, pode ser utilizada para investigar a influência de perturbações espacialmente localizadas ou ataques dirigidos a partes específicas de uma rede, selecionando-se um conjunto de N_p nós específicos. Por exemplo, dada uma rede distribuída no espaço, pode-se perturbar N_p nós de uma área de interesse e avaliar a resiliência da rede. No entanto, Mitra et al. [2017a] não investigaram grupos específicos de nós escolhidos a priori. Seus esforços se concentraram em resultados médios. Aplicando o procedimento em uma rede livre de escala composta por osciladores de Rössler e em um modelo conceitual do SEP do Reino Unido, encontraram uma relação exponencial do tipo $\langle \hat{S}^{N_p} \rangle = a e^{-b N_p}$ (com a e b constantes de cada caso) ajustando-se bem aos resultados.

No que diz respeito à relação exponencial encontrada, os autores sugeriram que possa

se tratar de uma característica universal, conforme linha de investigação indicada por eles. No entanto, em relação ao número de nós que devem ser protegidos a fim de se evitar danos à rede, faz-se uma crítica: [Mitra et al. \[2017a\]](#) sugeriram a escolha de um limiar, um valor de N_p a partir do qual a resiliência tomaria valores críticos. Porém, vale lembrar que o cálculo de $\langle \hat{S}^{N_p} \rangle$ já envolve uma escolha arbitrária. Como não se conhece ρ e, frequentemente, utiliza-se uma distribuição uniforme em uma região de interesse (o que foi o caso no trabalho mencionado), é difícil definir um valor crítico absoluto para o limiar mencionado e isso compromete a motivação apresentada pelos autores.

[Brzeski et al. \[2017\]](#) apresentaram o que disseram ser a primeira confirmação experimental da eficácia da estabilidade da bacia. Especificamente, assumiram que não conheciam precisamente alguns parâmetros do sistema que investigaram: um pêndulo duplo forçado (Fig. 4.8); em vez disso, conheciam apenas os intervalos aos quais eles pertenciam. Então, utilizam a *estabilidade estendida da bacia* para análise. Os autores argumentaram que o método é confiável e superior a abordagens clássicas em muitas aplicações. Foram examinados os intervalos de estabilidade de nove soluções em um espaço de parâmetros bidimensional, comparando-se a estabilidade estendida da bacia ao método *path-following* e a dados experimentais. Os resultados obtidos são comparáveis em termos de precisão, mas o método estatístico é mais fácil de ser aplicado, principalmente diante de incertezas paramétricas.

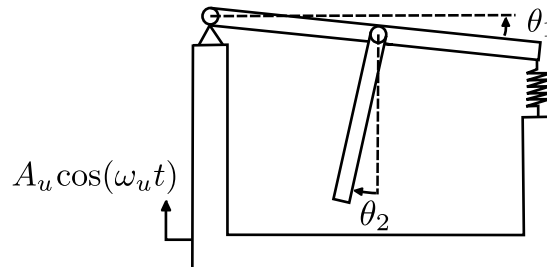


Figura 4.8: Pêndulo duplo forçado usado na investigação de [Brzeski et al. \[2017\]](#). O experimento usou abordagens baseadas em amostras para caracterização de nove bacias de atração desse sistema.

[Mitra et al. \[2017b\]](#) utilizaram as ideias de [Kittel et al. \[2017\]](#) na identificação de posições topológicas mais ou menos vulneráveis em relação ao tempo de retorno, ou seja, a localização de nós que, quando perturbados, provocam um transiente de maior ou menor duração, respectivamente. Apresentaram resultados para redes livres de escala de sistemas de Rössler e para um modelo do sistema elétrico do Reino Unido, nos quais, mais uma vez, a centralidade de intermediação dos nós mostrou-se desempenhar função importante. De forma geral, nós com valores maiores dessa medida resultaram em um transiente na rede de maior duração quando foram perturbados.

[Brzeski et al. \[2018a\]](#) utilizaram outra variação da estabilidade da bacia para obter informação sobre a compacidade e outras características de bacias de atração. A ideia consiste na avaliação da variação dessa medida em relação a uma direção específica no

espaço de estados. Por exemplo, dado um sistema com duas variáveis de estado x_1 e x_2 , ao longo de um dos eixos (e.g., x_1), tomam-se valores para a variável associada em um intervalo $[x_1^i, x_1^f]$, em ordem crescente e com um passo Δx_1 . Em seguida, para cada valor de x_1 , sorteiam-se N_1 valores para x_2 de acordo com uma dada PDF. Por fim, integra-se o sistema a partir das combinações de condições iniciais obtidas e avalia-se o comportamento de \hat{S} ao longo da direção x_1 . Dois exemplos foram apresentados pelos autores, um oscilador de Duffing com pêndulo suspenso e um sino de igreja, nos quais, por meio de gráficos, mostrou-se a dependência de \hat{S} em relação às variáveis de estado de interesse.

Brzeski et al. [2018b] propuseram uma técnica para se analisar a robustez de sistemas ao longo de trajetórias sobre atratores, que consiste no monitoramento da menor distância entre o estado atual e a fronteira da bacia de atração. Segundo eles, outras medidas, além do limiar de estabilidade, podem ser utilizadas. Assim, tem-se uma medida que varia em função do tempo ou de pontos sobre a trajetória no espaço de estados. O método baseia-se em integrações numéricas e o algoritmo é simples e facilmente implementado. Resumidamente, divide-se a trajetória de interesse em segmentos e, para o ponto médio de cada segmento, encontra-se o limiar de estabilidade. Os autores aplicaram a técnica a osciladores de Rössler e de Duffing, além de validarem experimentalmente na mesma planta utilizada no trabalho de Brzeski et al. [2017], supracitado. Dessa forma, encontraram-se os segmentos e instantes de tempo de maior vulnerabilidade para o primeiro e segundo exemplos, nessa ordem.

Klinshev et al. [2018] propuseram duas novas medidas para análise de estabilidade: *estabilidade intervalar da bacia* (IBS, do inglês: *interval basin stability*) e *limiar de estabilidade em intervalo* (IST, do inglês: *interval stability threshold*), que são extensões das medidas de estabilidade da bacia e limiar de estabilidade já revisadas, respectivamente. A primeira fornece a probabilidade de um sistema retornar ao regime desejado em um dado intervalo de tempo. A segunda, por sua vez, fornece a magnitude da menor perturbação capaz de manter o sistema fora do regime desejado dado, também, um determinado intervalo. Note-se que, apesar de já ser necessário, para as medidas anteriores relacionadas, definir um tempo de integração, estas novas não necessitam de tempos de integração (suficientemente) grandes, já que o interesse dos autores está no comportamento em intervalos de tempo predefinidos. Além disso, os limiares utilizados para verificação de convergência frequentemente poderão ser relaxados. O método pode ser aplicado, por exemplo, em sistemas nos quais uma operação anormal é tolerada por determinado intervalo de tempo. Os exemplos analisados foram: um pêndulo não linear forçado e duas redes, sendo uma delas um modelo de Kuramoto.

Um artigo que reúne diferentes medidas de resiliência/estabilidade, no contexto que aqui é revisado, foi publicado por Lundström [2018], no trabalho “*How to find simple non-local stability and resilience measures*”⁶. Além das métricas, também foram mostrados exemplos e realizadas discussões. Outro trabalho de revisão que merece ser citado é o de

⁶“Como encontrar medidas não locais simples de estabilidade e resiliência”.

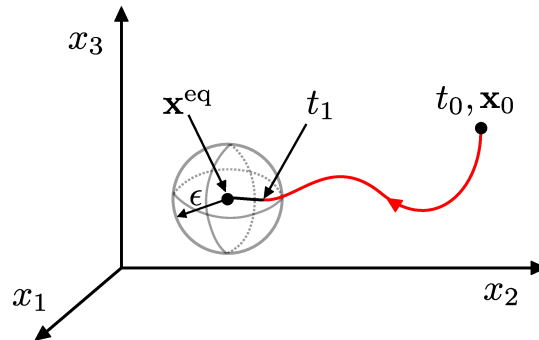


Figura 4.9: Estabilidade intervalar da bacia. Define-se um limiar, no caso, uma bola de raio ϵ centrada em \mathbf{x}^{eq} . Verifica-se se a trajetória entra na bola em um intervalo máximo de tempo definido e não a deixa mais.

Brzeski and Perlikowski [2018], nomeado “*Sample-based methods of analysis for multi-stable dynamical systems*”⁷. Nele, os autores apresentaram um resumo de seus trabalhos anteriores na área, muitos dos quais foram revisados no presente capítulo.

4.3 Potenciais e limitações

Uma discussão sobre potenciais e limitações da medida de estabilidade da bacia foi realizada por Schultz et al. [2017]. O estudo focou na avaliação da influência de erros de diferentes naturezas para o erro total de estimação. Já se sabe que o procedimento gera um resultado com desvio padrão dado por $\sigma_S = \sqrt{S(1-S)/N_i}$. Além desse, erros numéricos (de aproximação, devido a avaliações de funções ou integração; e de arredondamento, devido à precisão finita) podem afetar os resultados. Enquanto o desvio padrão pode ser diminuído aumentando-se o número de realizações, os erros numéricos são mais difíceis de se tratar. Dada essa situação, os autores investigaram casos em que o erro de arredondamento é considerável e pode ser determinante para o erro total. Tal fato ocorre em sistemas cujas bacias de atração possuem geometria bastante complicada.

Os autores abordam o problema fixando N_i e computando \hat{S} para diferentes precisões na representação em ponto flutuante. Especificamente, adotam-se como referência variáveis do tipo *double* e compara-se a saída com outras obtidas a partir de representações com menor precisão. Para um pêndulo não linear forçado com bacias de atração Wada, os erros numéricos não se mostraram significativos. No entanto, para um mapa quadrático no plano complexo, com bacias de atração crivadas, os erros numéricos alcançaram ordens de grandeza iguais às de σ_S .

Conforme mencionado anteriormente, em alguns casos, além do volume, informação a respeito da geometria da bacia de atração pode ser necessária para possibilitar uma classificação correta da resiliência do sistema investigado diante de perturbações. Exemplos de bacias de atração (hipotéticas) com mesmo “volume”, porém, com *previsibilidades*

⁷“Métodos de análise baseados em amostras para sistemas dinâmicos multiestáveis”.

diferentes, são mostrados na Fig. 4.10. As cores cinza e branca representam as bacias de atração de dois atratores distintos. Supondo-se que a cor branca represente a região do espaço de estados da qual partem trajetórias indesejadas (e.g., $\mathbf{x}(t) \rightarrow \infty$) e a cor cinza represente a região da qual partem trajetórias do sistema que convergem para um atrator \mathcal{A} desejado, fica claro que a estabilidade da bacia não é suficiente para caracterizar a região de interesse do sistema. Em cada painel da Fig. 4.10, a região cinza ocupa a mesma fração da área total mostrada (1/2) resultando em uma estabilidade da bacia de mesmo valor. No entanto, nota-se como incertezas nas condições iniciais representam maiores problemas para a previsibilidade no caso da segunda imagem mostrada.

Um ferramenta nomeada *entropia da bacia*, que procura contornar essa dificuldade, foi proposta por Daza et al. [2016]. O objetivo é proporcionar uma medida da previsibilidade de sistemas dinâmicos com base em um estudo numérico de suas bacias de atração.

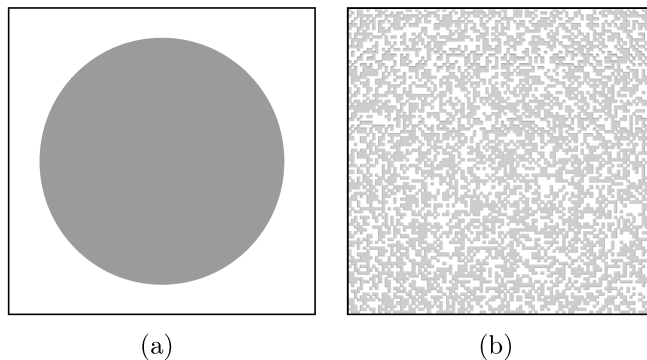


Figura 4.10: Duas bacias de atração hipotéticas com mesma estabilidade da bacia, porém, com previsibilidades distintas. Note-se que não foi especificada nenhuma classe de sistema dinâmico, podendo a bacia, então, ser formada por conjuntos desconexos como em (b).

Suponha-se que o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ possua N_a atratores. Seja \mathcal{X}_i uma região do espaço de estados contendo as bacias de atração desses atratores, discretizada em um número finito N_b de caixas iguais. Considere-se a construção de uma função (referida como *cor*) $g : \mathcal{X}_i \rightarrow \mathbb{N}$, que relaciona cada condição inicial ao seu atrator. Para cada cor j e caixa i , associa-se uma probabilidade \mathbb{P}_{ij} . Considerando-se que as trajetórias que se iniciam em cada caixa são estatisticamente independentes, a entropia de Gibbs de cada uma delas é dada por:

$$s_i = - \sum_{j=1}^{N_i} \mathbb{P}_{ij} \log(\mathbb{P}_{ij}), \quad (4.14)$$

em que $N_i \in [1, N_a]$ é o número de cores dentro da caixa i . Uma estimativa de \mathbb{P}_{ij} é calculada tomando-se N_i vetores de condições iniciais sorteadas uniformemente em cada caixa, integrando o sistema a partir delas, e fazendo-se $\hat{\mathbb{P}}_{ij} = N_j/N_i$, em que N_j é o

número de condições iniciais que levam à cor j . A entropia da região \mathcal{X}_i é então calculada tomando-se a média sobre todas as caixas,

$$s = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} s_i = -\frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} \sum_{j=1}^{N_i} \mathbb{P}_{ij} \log(\mathbb{P}_{ij}). \quad (4.15)$$

A entropia e a estabilidade da bacia podem, juntas, fornecer importantes informações a respeito da geometria de bacias de atração. Ao que tudo indica, isso ainda não foi explorado na literatura.

As ferramentas computacionais apresentadas neste capítulo revelam importantes propriedades de sistemas dinâmicos, desde os mais simples aos mais complicados. Tais ferramentas possuem como base comum a realização de um grande número de integrações numéricas para tentar contornar a dificuldade de se obter resultados analíticos. *Amostrar* é importante para se evitar o custo computacional requerido — por vezes, inviável — caso as análises fossem realizadas cobrindo-se os espaços de estados e de parâmetros com determinado passo e, além disso, permitir calcular os erros envolvidos. Desta forma, é estabelecida uma relação de compromisso entre a precisão desejada para os resultados e o poder computacional disponível. No Cap. 5, a seguir, utilizam-se conceitos similares na análise da resiliência de sistemas elétricos de potência. Especificamente, usam-se a estabilidade da bacia e a estabilidade intervalar da bacia como quantificadores da resiliência desses sistemas.

Resultados e Discussões

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.”

Arthur Schopenhauer

No presente capítulo, apresentam-se resultados e discussões referentes às duas investigações realizadas. Na primeira (Seç. 5.2), objetivou-se comparar as medidas de resiliência obtidas para um mesmo SEP partindo-se de diferentes abordagens de modelagem. Para isso, usaram-se a estabilidade da bacia em sua versão por nó, vista no Cap. 4, e as abordagens EN, SP e SM, vistas no Cap 3. Essa seção refere-se ao trabalho “Resiliência de Sistemas Elétricos de Potência Representados por Redes de Kuramoto” [Moreira and Aguirre, 2019], publicado no 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI).

Na segunda (Seç. 5.3), buscou-se relacionar a resiliência de SEPs à distribuição do fornecimento de potência entre seus geradores e ao tempo requerido para estes serem isolados da rede como medida de proteção contra perturbações. Essa seção refere-se ao trabalho “*Effects of network heterogeneity and tripping time on the basin stability of power systems*” [Montanari et al., 2019], submetido a periódico.

5.1 Introdução

Os SEPs estão entre as infraestruturas mais críticas existentes. Tais sistemas enfrentam o crescimento da demanda de energia, o aumento de não linearidades devido a dispositivos eletrônicos e a descentralização do fornecimento de energia por meio de fontes renováveis e investimentos em microgeração. Apesar de serem sistemas em constante mudança, precisam ser estáveis e robustos contra muitos tipos de perturbações e falhas que podem levar, em casos críticos, a blecautes [Andersson et al., 2005]. Em outras palavras, SEPs devem ser *resilientes*.

A resiliência de uma rede caracteriza sua capacidade de permanecer funcional após falha de nós ou arestas, dependendo de três fatores: (i) a topologia da rede, (ii) a dinâmica nodal e (iii) o mecanismo de falha [Gao et al., 2015]. No entanto, a interação entre esses fatores e a resiliência de SEPs ainda é um intrigante problema em aberto na literatura. Contribuições recentes mostraram como as estabilidades local e global da rede podem ser melhoradas pela descentralização da fonte de alimentação [Rohden et al., 2012], ajuste de parâmetros internos de geradores (nós) [Motter et al., 2013], remoção das estruturas *dead*

ends [Menck et al., 2014], inclusão de linhas de transmissão (arestas) [Yang et al., 2016] entre outras [Carareto et al., 2013; Wolff et al., 2018; Kim et al., 2018].

Assim como nos trabalhos supracitados e de acordo com as abordagens de modelagem apresentadas no Cap. 3, aqui, representam-se os SEPs por redes de Kuramoto da seguinte forma:

$$\frac{2H_i}{\omega_r} \ddot{\delta}_i + \frac{D_i}{\omega_r} \dot{\delta}_i = A_i - \sum_{j=1, j \neq i}^N K_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j - \gamma_{ij}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.1)$$

em que N é o número de osciladores (nós) do modelo resultante, o qual depende da abordagem; $\delta_i(t)$ é o ângulo de fase do i -ésimo oscilador, no tempo t , com relação a uma referência que gira na frequência $\omega_r = 2\pi 60$ rad/s; H_i e D_i são as constantes de inércia e amortecimento, respectivamente; A_i está relacionado à injeção/consumo de potência do nó i ; K_{ij} é o peso do acoplamento relacionado à capacidade máxima de transferência de potência na respectiva linha de transmissão interligando dois nós (i e j) e γ_{ij} é o defasamento correspondente. Por conveniência, define-se ainda a variável $\omega_i := \dot{\delta}_i$ como a frequência do i -ésimo oscilador. Note-se que os termos *fase* e *frequência*, neste capítulo, referem-se ao modelo resultante (5.1), ou seja, são desvios a partir de uma referência. A Eq. (5.1) é genérica, de forma que, para representar osciladores de primeira ordem, basta fazer $H_i = 0$.

É conveniente, neste ponto, definir também os vetores $\mathbf{x}_i := [\omega_i \ \delta_i]^\top$, para $i = 1, \dots, N$, e $\mathbf{x} := [\mathbf{x}_1^\top \ \dots \ \mathbf{x}_N^\top]^\top$. Enquanto \mathbf{x}_i contém as variáveis de estado de cada um dos N osciladores para os casos EN e SM, \mathbf{x} é o vetor de estado de todo o sistema. Essa nomenclatura é útil e será usada ao longo do capítulo. Além disso, define-se $\boldsymbol{\omega} := [\omega_1 \ \dots \ \omega_N]^\top$, i.e., o vetor obtido a partir do empilhamento das frequências dos osciladores.

Se a frequência de um oscilador (ω_i) tende a zero, diz-se que ele está sincronizado com o SEP. Se cada um dos osciladores satisfaz essa condição, diz-se que eles estão *sincronizados em frequência* (conforme definido no Cap. 2) e, além disso, estão de acordo com a frequência de referência projetada para o sistema. Portanto, o estudo da estabilidade (de ângulo de rotor) em um SEP está relacionado à análise de sincronismo de osciladores de fase em redes complexas [Dörfler and Bullo, 2014].

Sistemas como (5.1) geralmente apresentam múltipla estabilidade, i.e., para um mesmo conjunto de parâmetros, diferentes atratores coexistem, e o estado estacionário é determinado pelas condições iniciais. No entanto, os atratores de interesse prático para este estudo são apenas os pontos de equilíbrio em que $\omega_i = 0, \forall i$. Sendo assim, não se faz distinção entre eles no decorrer dos estudos. É importante ressaltar que, embora as perturbações sejam locais, avalia-se a capacidade de *toda* a rede retornar para o regime normal de operação. Especificamente, verifica-se se $\omega_i \rightarrow 0$, para $i = 1, \dots, N$, após cada nó ser perturbado. Consequentemente, as fases permanecem constantes em regime permanente.

5.2 Comparação dos modelos EN, SP e SM

Conforme mencionado, os modelos EN, SP e SM são os mais utilizados para análise de SEPs no contexto de redes dinâmicas, como pode ser constatado na literatura. Observa-se, também, que determinados autores possuem preferência injustificada por alguma das abordagens. A abordagem EN pode ser encontrada em livros tradicionais de análise de estabilidade em SEPs (e.g., Grainger and Stevenson [1994]). A SP, por sua vez, é usada por um grupo mais restrito de pesquisadores (vejam-se, por exemplo, os trabalhos de F. Dörfler e colegas, citados ao longo desta dissertação). Por último, tem-se a SM. Um tanto quanto recente, essa abordagem é mais presente entre trabalhos vindos da comunidade de físicos. Trabalhos esses envolvendo, quase sempre, muitas simplificações e pouca atenção aos detalhes; mas com mérito de apresentarem, geralmente, direções a serem investigadas com maior cuidado. Dadas essas colocações, algumas questões interessantes surgem. Por exemplo: (i) como a abordagem de modelagem escolhida influencia os resultados obtidos nos desenvolvimentos recentes neste contexto? (ii) Sob quais aspectos tais modelos devem ser comparados? Considere-se o sucesso do conceito de estabilidade da bacia e some-se a isso a importância intrínseca dos estudos de resiliência em SEPs. Com isso, tem-se então uma resposta à segunda pergunta, necessária à formulação de experimentos para responder à primeira.

Portanto, a principal contribuição desta seção, adiantando os resultados, está na constatação que tais modelos não são totalmente equivalentes para os exemplos analisados. Pode ser que sejam estatisticamente equivalentes, o que é deixado para investigações futuras. A seguir, apresenta-se o procedimento desenvolvido que permitiu se chegar a essa conclusão.

5.2.1 Procedimento Numérico

Para se classificarem os nós de acordo com as respectivas resiliências, a *estabilidade da bacia* descrita no Cap. 4 foi usada e os detalhes do experimento numérico são descritos a seguir. Dado um regime normal de operação, admitiu-se que perturbações poderiam ocorrer individualmente em nós, alterando os valores de suas variáveis de estado, independentemente dos demais nós da rede. A condição usada para testar convergência em estado estacionário foi $\|\omega\| \leq 10^{-3}$. O número de realizações utilizado em cada exemplo foi $N_i = 200$. As integrações foram realizadas por um período de tempo de 30 s. Além disso, os passos de integração usados foram: 10^{-2} para as abordagens EN e SM, e 10^{-3} para a SP. Esta última resulta em uma dinâmica mais rápida que as demais para os exemplos analisados, necessitando de um passo menor de integração para a convergência da simulação.

Realizou-se a análise de dois exemplos: (Ex. 1) um sistema de testes com 10 geradores e (Ex. 2) uma versão simplificada do SEP brasileiro. Para cada exemplo, modelou-se o sistema usando as três abordagens vistas no Cap. 3, a fim de verificar a consequência da representação escolhida para a carga sobre a medida de resiliência obtida.

Embora nos modelos SP e SM as cargas também sejam representadas como osciladores, apenas os geradores foram avaliados para uma justa comparação com o modelo EN. O ponto de operação estável para cada modelo foi encontrado integrando-se as equações resultantes a partir de condições iniciais nulas. Assumiu-se que as perturbações poderiam ocorrer no estado do i -ésimo gerador com distribuição uniforme de probabilidade na região $(\delta_i^{ss} - \pi, \delta_i^{ss} + \pi) \times [-15, 15]$. Então, perturbou-se um único gerador e calculou-se \hat{S} . Em seguida, repetiu-se o procedimento para todos os geradores. No fim deste capítulo, apresenta-se uma breve discussão sobre as premissas envolvidas ao se assumir perturbações dessa forma.

Nesta investigação, utilizou-se para realização das integrações o método RK4() (Runge-Kutta 4ª ordem) [Shampine, 2005] implementado no pacote `DifferentialEquations.jl` [Rackauckas and Nie, 2017], desenvolvido em linguagem Julia.

5.2.2 Exemplo 1: sistema de testes

O presente exemplo pode ser encontrado na *toolbox* Matpower [Zimmerman et al., 2011] no arquivo chamado `case39.m`. Uma versão completa, contendo os valores dos parâmetros dos geradores (H_i , D_i e $x'_{d,i}$) usados neste trabalho, disponibilizada por Nishikawa and Motter [2015], pode ser encontrada em <https://sourceforge.net/projects/pg-sync-models>, no arquivo chamado `test_system_10gen.m`. O objetivo é comparar as medidas de resiliência estimadas para cada um dos três modelos sob investigação, para um sistema de testes bastante difundido na literatura de SEPs.

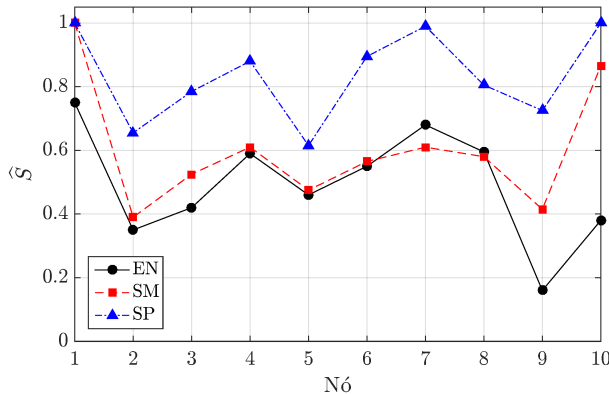


Figura 5.1: Estabilidade da bacia estimada para os geradores do Ex. 1.

A Fig. 5.1 mostra \hat{S} para os 10 geradores deste exemplo. Percebe-se que os três modelos apresentam indicadores de resiliência que, apesar de apresentarem alguma correlação em termos gerais, discordam com relação a aspectos importantes. Por exemplo, a procura pelo nó mais vulnerável resulta em 9, 2 e 5, para os os modelos EN, SM e SP, respectivamente. Destacam-se mais alguns aspectos: (i) a análise realizada sobre o modelo SP, em relação às demais, superestima a resiliência de todos os nós; (ii) as abordagens discordam entre si, de forma mais evidente, quanto aos valores da resiliência dos nós 9 e 10; (iii) enquanto

o gerador 10, no modelo EN, é classificado como um dos nós mais vulneráveis, o contrário é indicado pelos modelos SM e SP.

5.2.3 Exemplo 2: SEP brasileiro

Este exemplo foi construído com base nos dados disponibilizados pelo Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) [ONS, 2015] e um arquivo em formato Matpower [Zimmerman et al., 2011] pode ser encontrado em <https://bit.ly/2HSK1RX>, com nome `casebr44.m`. O ONS fornece mapas com a localização de centros geradores e consumidores e das linhas de transmissão que os interligam. Usando esses mapas, construiu-se a topologia da rede. Encontram-se nos relatórios do ONS, também, dados sobre a produção e o consumo de energia, que foram usados para definir os valores de potência utilizados no presente estudo. A rede correspondente é mostrada na Fig. 5.2a. Círculos representam agrupamentos de geradores e quadrados representam os principais agrupamentos consumidores. Por simplicidade, refere-se a esses agrupamentos apenas como *geradores* e *cargas*, respectivamente. Para evidenciar o efeito da topologia, neste caso, assumiu-se que todas as linhas de transmissão possuem mesma capacidade e operam à mesma tensão. Além disso, a geração de potência foi distribuída igualmente entre os geradores, da mesma forma que o consumo entre as cargas. Essa configuração é comumente empregada para isolar a influência de determinados fatores, neste caso, a topologia [Nishikawa and Motter, 2015]. Mais detalhes sobre os valores utilizados podem ser encontrados no código supracitado.

O objetivo aqui é analisar a resiliência de modelos do SEP brasileiro a partir da metodologia apresentada. Novamente, empregaram-se as três abordagens para fins de comparação. Ao fim deste exemplo, um procedimento para aumentar a resiliência da rede, proposto por Menck et al. [2014], é descrito. Esse procedimento foi aplicado com o objetivo de se verificar sua eficácia para o presente caso.

A Fig. 5.2b mostra \hat{S} para a rede representativa do SEP brasileiro. Da mesma forma que no Ex. 1, no modelo SP, superestima-se \hat{S} ; mas, desta vez, a medida indica que os geradores são insensíveis às perturbações. No modelo EN, pode-se observar que os geradores 5, 6 e 7 são classificados como bastante vulneráveis, ao passo que no modelo SM esses geradores têm valores de \hat{S} próximos à média da rede. Atribui-se esse resultado ao fato desses nós conectarem-se ao restante da rede por meio de duas cargas (nós 34 e 35). Dessa forma, para o modelo EN, devido à adição do efeito das cargas na matriz de admitância, os nós conectados à rede por meio destas percebem os demais geradores via uma admitância menor, o que é refletido diretamente na força de acoplamento desses nós com a rede, ou seja, em K_{ij} , em (5.1). Esse mesmo efeito, com menor intensidade, pode ser percebido nos geradores 13 e 17. O que difere esses últimos daqueles discutidos anteriormente é o fato de existirem mais caminhos entre a carga que os conecta à rede e os demais geradores.

Na Fig. 5.3a, mostra-se o subespaço das variáveis de estado do gerador 5. O intervalo mostrado corresponde à região de perturbações possíveis. A área cinza corresponde à

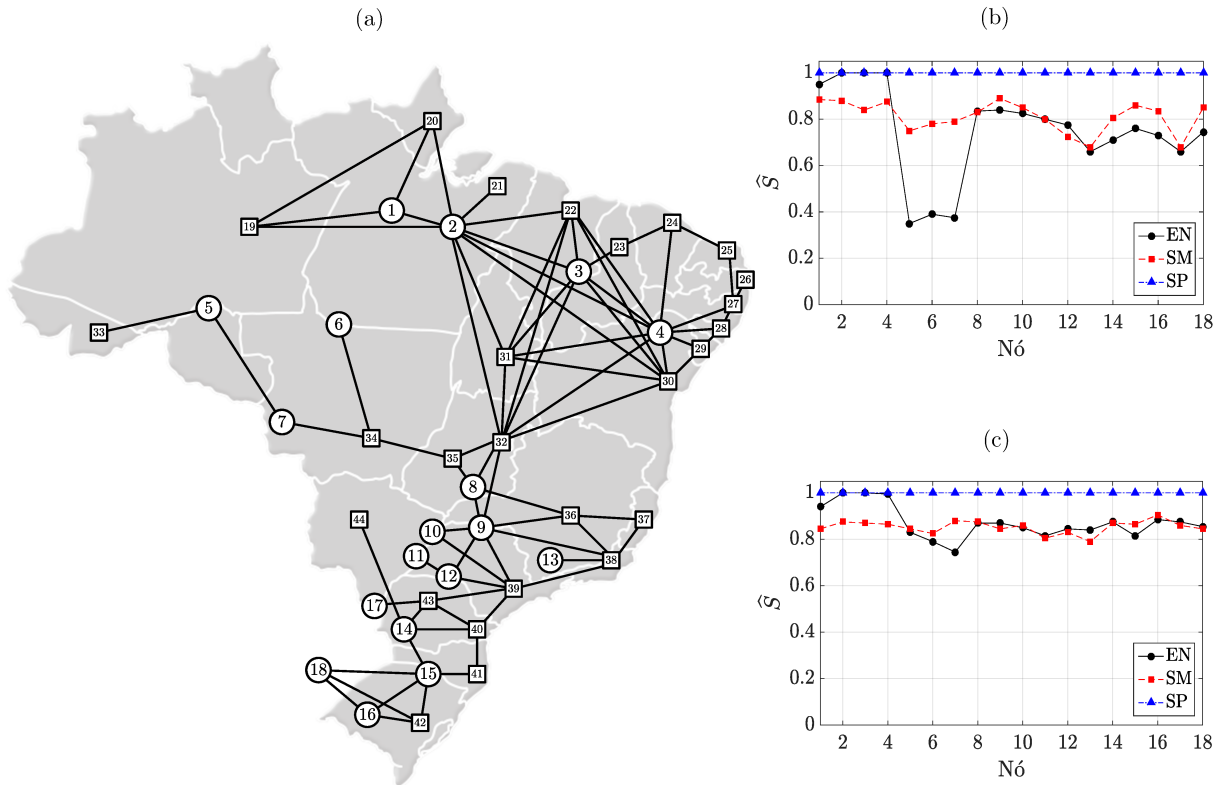


Figura 5.2: (a) SEP brasileiro representado como uma rede: círculos representam agrupamentos de geradores e quadrados representam os principais agrupamentos consumidores; (b) medida \hat{S} para cada nó gerador do sistema antes e (c) após procedimento de correção.

região que contém as perturbações no gerador 5 das quais a rede pôde recuperar-se, retornando a um estado normal de operação. Essa área foi obtida por um processo numérico exaustivo e é mostrada apenas para fornecer uma visualização da região de atração real. Cada ponto marcado corresponde a uma realização. As perturbações que resultaram em convergência (em preto) e divergência (em vermelho) são mostradas. A razão do número de pontos pretos pelo número total de pontos é uma estimativa da fração que a área cinza ocupa no intervalo analisado.

A Fig. 5.4a mostra, para perturbações no gerador 5, as séries temporais para as fases (vermelho) e frequências (preto) de todos os nós da rede, em um caso em que não houve recuperação. Os geradores mais afetados são indicados (5, 6 e 7). Observa-se que eles passam a operar com uma frequência muito acima dos demais. Devido à fraca conexão desse grupo com o restante da rede, há formação de um *cluster* que oscila com uma frequência de aproximadamente 25 rad/s. O gerador 8, que se localiza no caminho entre o *cluster* e o restante da rede também tem seu comportamento fortemente afetado. Os demais geradores passam a oscilar com frequência ligeiramente menor que zero, de forma a compensar o efeito do *cluster*. O ponto correspondente na Fig. 5.3a é (2, 0), indicado com um \times .

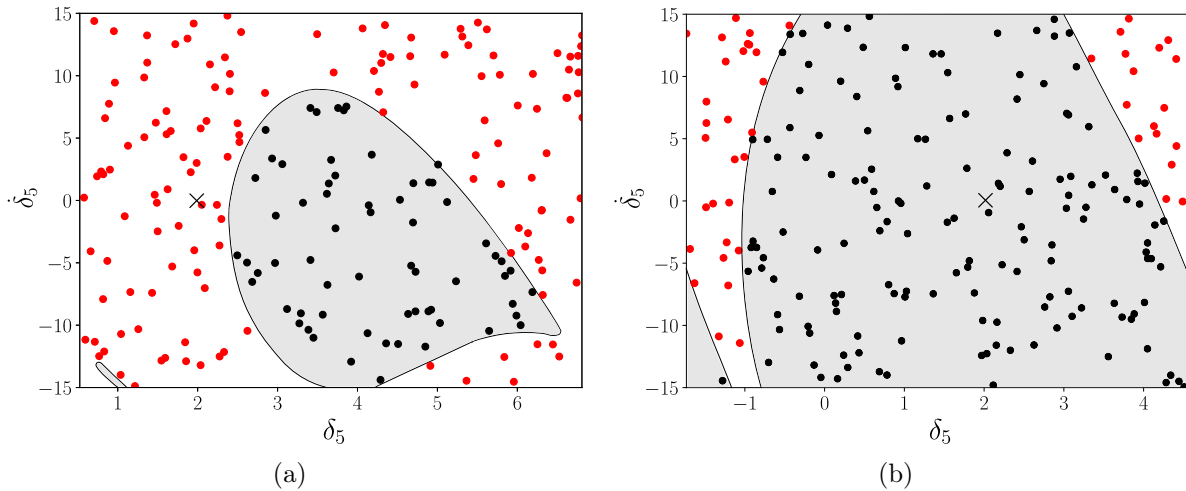


Figura 5.3: Subespaço correspondente ao estado do gerador 5. Em cinza, a região que contém as perturbações das quais o sistema se recupera. Os pontos representam as perturbações tomadas aleatoriamente para estimação de S para esse nó, em conformidade com $\rho(\mathbf{x})$, (a) antes e (b) depois do processo de correção. Os pontos pretos indicam casos em que a rede se recuperou e, vermelhos, em que divergiu. Nos dois painéis, o intervalo mostrado no eixo das abscissas é de 2π .

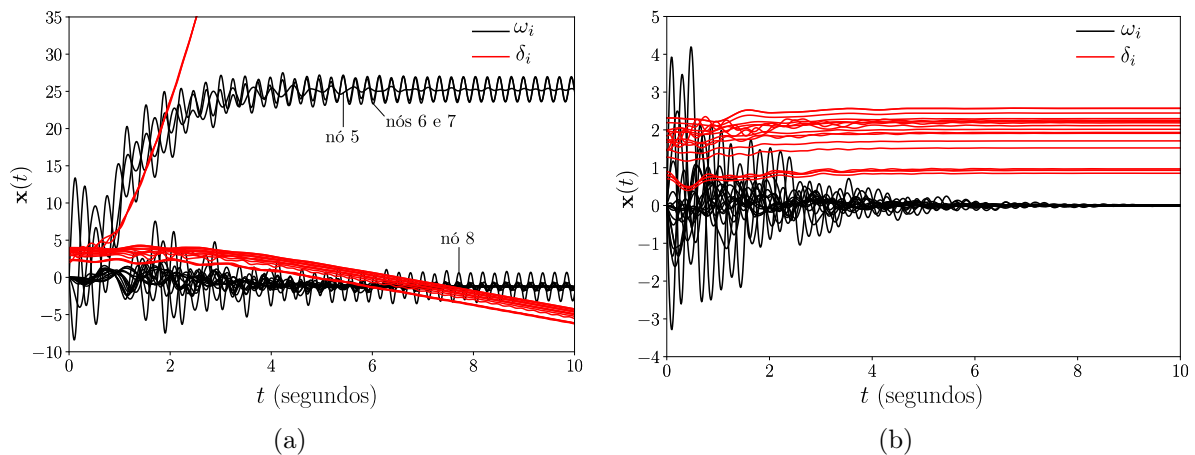


Figura 5.4: Séries temporais para (a) perda de estabilidade e (b) recuperação após perturbação no gerador 5 para o SEP brasileiro. Curvas em preto referem-se às frequências e curvas em vermelho, às fases. É interessante observar os nós destacados no painel (a) dessa figura e suas respectivas localizações no mapa (Fig. 5.2a).

O procedimento para aumentar a resiliência consiste em conectar as estruturas do tipo *dead end* ou *dead tree* à rede por um caminho redundante que vai de seu nó mais externo ao nó mais próximo em distância euclidiana — segundo a localização física desses elementos — que não faça parte dessa mesma estrutura. Por exemplo, na Fig. 5.2a, o nó 33 é um *dead end* e o nó mais próximo dele (e que não pertence a essa estrutura)

é o 19. Assim, conectar o nó 33 ao nó 19 elimina o *dead end* correspondente. Dessa forma, adicionaram-se as arestas: 5–6, 10–44, 14–17, 10–11, 13–39, 21–22, 25–26 e 19–33. O procedimento demonstrou ser eficaz para aumentar a resiliência, conforme pode ser observado para os modelos EN e SM na Fig. 5.2c. Na Fig. 5.3b mostra-se o subespaço de estado do gerador 5, com a indicação da região estável, após a adição das arestas. Na Fig. 5.4b, mostram-se as séries temporais de uma realização em que a rede se recuperou, para perturbações nesse mesmo nó. O ponto correspondente na Fig. 5.3b é (2, 0), indicado com um \times .

5.2.4 Conclusões parciais

Nesta primeira investigação, três modelos comumente utilizados no contexto de análise de SEPs como redes dinâmicas foram comparados a fim de verificar o efeito da representação escolhida para as cargas sobre a medida de resiliência. Com isso, constatou-se que esta decisão tem papel importante na caracterização desses sistemas, podendo, diferentes abordagens, levar a resultados contraditórios. Essa conclusão é relevante na medida que alguns trabalhos na literatura não argumentam em relação à escolha da representação que, ao que parece, geralmente é feita de forma arbitrária.

A modelagem de cargas não é uma tarefa trivial, principalmente nas escalas abordadas, em que cada nó deve equivaler a um grande grupo consumidor com comportamento muitas vezes desconhecido. Vale a pena destacar que os modelos SP e SM necessitam de procedimentos para estimação de diferentes parâmetros para as cargas, o que pode ser a causa do surgimento de medidas divergentes.

Os exemplos estudados foram um sistema de testes com 10 geradores e o SEP brasileiro, representado por uma rede construída a partir de dados fornecidos pelo ONS. Identificaram-se estruturas que diminuem a resiliência da rede e constatou-se que um método proposto na literatura foi eficaz na correção desses pontos de fragilidade.

5.3 Resiliência, tempo de seccionamento e heterogeneidade em SEPs

As contribuições desta seção são apresentadas a seguir. Como discutido, um objetivo importante na literatura é a busca por maneiras de melhorar a resiliência de SEPs, agindo sobre suas propriedades estruturais [Menck et al., 2014; Yang et al., 2016], ou ajustando seus parâmetros nodais [Motter et al., 2013]. Um conceito-chave — que ainda não foi explorado neste contexto — é o *tempo de seccionamento*: o tempo requerido para um dispositivo de proteção isolar um gerador perturbado do restante da rede.

Nesta seção, um estudo sistemático é realizado, mostrando que uma escolha adequada do tempo de seccionamento pode melhorar a estabilidade geral de um SEP e que esse tempo depende da heterogeneidade da rede. Simulações numéricas mostraram que a estabilidade não melhora linear ou monotonicamente com um tempo de seccionamento menor.

Enquanto uma rede mais homogênea tende a melhorar sua estabilidade para um menor tempo de seccionamento após uma perturbação, redes heterogêneas mostraram se beneficiar de um maior tempo de seccionamento. A principal vantagem desta proposta é que a parametrização do tempo de seccionamento é relativamente simples, pois a maioria dos dispositivos de proteção de alta tensão já inclui uma configuração de desarme ajustável. Essa vantagem é particularmente desejável quando comparada a outras propostas na literatura que, para melhorar a resiliência de SEPs, exigem investimentos de alto custo na remoção ou adição de linhas de transmissão [Menck et al., 2014; Yang et al., 2016], ou não são viáveis em absoluto, exigindo a descentralização da geração de energia [Rohden et al., 2012; Carareto et al., 2013].

5.3.1 Metodologia

Nesta investigação, todos os nós geradores foram representados usando (5.1), de acordo com a abordagem EN. A opção por essa abordagem deve-se à apresentação de maior contraste nos resultados obtidos por meio dela na investigação anterior. Além disso, pesam a favor dessa escolha: o fato de ser mais usada na comunidade de SEP; além de, claro, menor dimensão do modelo resultante e, conseqüentemente, menor custo computacional envolvido. Obtiveram-se, então, modelos da forma (5.1) com $N = 50$. Os parâmetros A_i e K_{ij} dependem da potência injetada por cada gerador. Uma rede na qual nem todos os geradores fornecem a mesma potência é denominada *heterogênea*.

Para investigar os efeitos da heterogeneidade e do tempo de seccionamento na resiliência de SEPs, realizou-se um estudo estatístico, semelhante àquele feito por Menck et al. [2014] e, posteriormente, analisou-se o SEP brasileiro. A investigação foi realizada sobre um conjunto $\{\mathcal{G}_k\} := \{\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_M\}$ de topologias de rede geradas com o algoritmo desenvolvido por Schultz et al. [2014a], com $M = 100$. Esse algoritmo gera topologias com características semelhantes às de sistemas reais, por meio de um processo de evolução que leva em conta aspectos como custo e redundância. Cada topologia gerada (\mathcal{G}_k) possui $N_b = 100$ barras, das quais metade foi definida como geradores ($N_g = 50$) e outra metade, como cargas ($N_l = 50$). Aos parâmetros do algoritmo foram atribuídos os valores: $n_0 = 10$; $p = 0,2$; $q = 0,3$; $r = 1/3$ e $s = 0,1$. Consulte-se Schultz et al. [2014a] para detalhes. Além disso, configurou-se a frequência de operação de referência como $\omega_r = 2\pi 60$ rad/s.

Assumiu-se que todos os parâmetros dos geradores (admitâncias internas, coeficientes de inércia e de amortecimento), das linhas de transmissão (admitância série e susceptância *shunt*), bem como a potência total ($S_t = P_t + Q_t$) possuem o mesmo valor para todas as redes. Desta forma, o que muda de um SEP para outro é (i) como as linhas de transmissão são distribuídas na rede; e (ii) como o fornecimento de potência é distribuído entre as barras de geração. O consumo de potência, por outro lado, assumiu-se ser distribuído igualmente entre as cargas, i.e., $S_{l,i} = S_t/N_l$ para $i = 1, \dots, N_l$.

Seja o conjunto $\{d_m\} := \{d_1, \dots, d_{N_d}\}$, em que cada elemento é um par do tipo

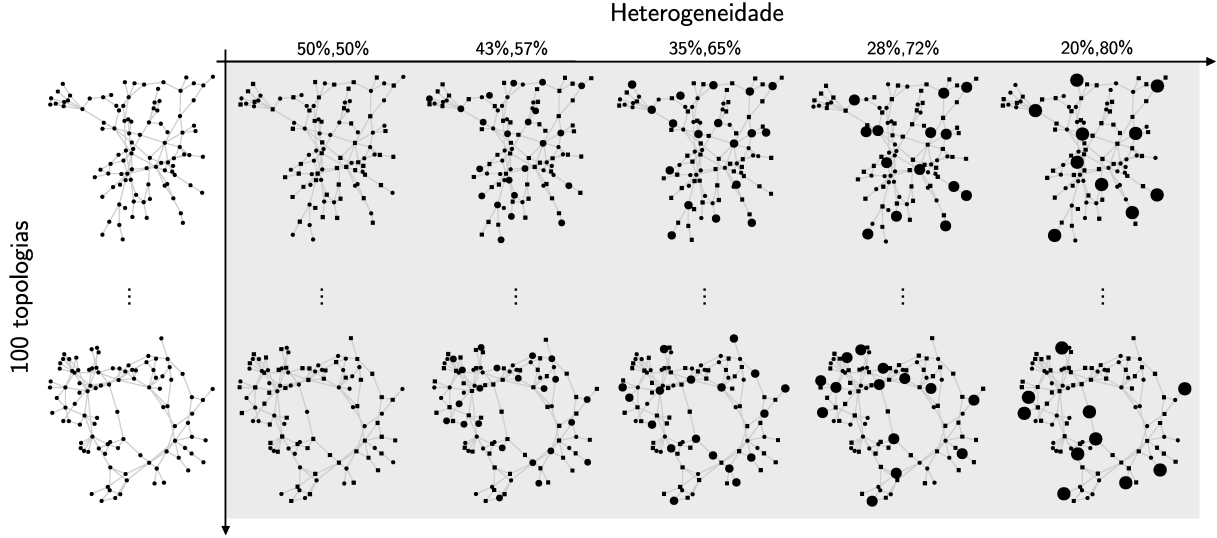


Figura 5.5: Ao longo do eixo vertical estão as 100 topologias geradas. Para cada topologia, distribuiu-se a potência de cinco maneiras diferentes; ao longo do eixo horizontal, da esquerda para a direita, cresce a heterogeneidade. Cargas são representadas como quadrados e geradores, como círculos; além disso, círculos maiores representam os geradores que fornecem mais potência. Portanto, a região cinza compreende 500 SEPs artificiais, totalizando 25 000 geradores investigados.

$d_m = (X_m\%, Y_m\%)$. Denota-se $\mathcal{G}_k^{d_m}$ uma rede em que $X_m\%$ dos geradores concentram, igualmente dividida entre eles, $Y_m\%$ da potência total gerada. A fim de investigar os efeitos da heterogeneidade sobre a resiliência de SEPs, a potência total fornecida foi distribuída entre os geradores de cada topologia \mathcal{G}_k de $N_d = 5$ maneiras diferentes: $d_1 := (50\%, 50\%)$ (a mais homogênea), $d_2 := (43\%, 57\%)$, $d_3 := (35\%, 65\%)$, $d_4 := (28\%, 72\%)$ e $d_5 := (20\%, 80\%)$ (a mais heterogênea). Obteve-se, então, um número total de $M \cdot N_d = 500$ SEPs artificiais. Denota-se $\{\mathcal{G}_k^{d_m}\} := \{\mathcal{G}_1^{d_m}, \dots, \mathcal{G}_M^{d_m}\}$ o conjunto $\{\mathcal{G}_k\}$ cujas M topologias possuem distribuição de potência d_m . A Fig. 5.5 fornece uma visualização do conjunto de SEPs artificiais gerados.

Os geradores responsáveis por entregarem a maior potência foram escolhidos aleatoriamente em cada rede e fornecem, cada um, $\frac{Y_m}{50X_m}\%$ da potência total S_t . A demanda restante é suprida pelos demais geradores, também uniformemente, de modo que cada um deles fornecesse $\frac{100-Y_m}{50(100-X_m)}\%$ de S_t . Por exemplo, nesta investigação estatística, cada rede possui 100 barras, logo, 50 geradores e 50 cargas. Para uma rede $\mathcal{G}_k^{d_4}$ ($k = 1, \dots, 100$), 14 (i.e., $50 \cdot 0,28$) geradores produzem $0,72S_t$ de forma igualmente distribuída, ou seja, cada gerador produz $0,72S_t/14$. O restante, $0,28S_t$, é igualmente distribuído entre os demais 36 geradores. Detalhes de implementação e escolhas de parâmetros podem ser encontrados nos códigos MATLAB disponibilizados em <https://bit.ly/2LvnPhT>.

Com o conjunto de redes de osciladores de Kuramoto gerado, estimou-se a resiliência em função da distribuição d_m e do tempo de seccionamento, i.e., o tempo decorrido entre o distúrbio e o isolamento do gerador perturbado por dispositivos de proteção. Seja \hat{S}_i

a estimativa da estabilidade da bacia da rede quando o estado do gerador i é conduzido do estado síncrono \mathcal{A} para um estado aleatório sorteado em conformidade com $\rho(\mathbf{x}_i) \sim \text{unif}(-3\pi/4, 3\pi/4) \times \text{unif}(-5, 5)$.

Primeiramente, integrou-se a Eq. (5.1) resultante numericamente no intervalo de tempo $t \in [0, t_{\text{trip}}]$, com passo de integração $\Delta t = 0,01$ s. Quando um gerador i é isolado do SEP, os demais precisam suprir a potência que antes era fornecida por ele, de modo a manter o balanço de potência e a operação do sistema. Então, redistribuiu-se essa potência igualmente entre todos os outros $N - 1$ geradores na rede e encontrou-se uma nova solução para as equações do fluxo de potência. Em seguida, encontrou-se o novo estado síncrono \mathcal{A}' e, a partir disso, calcularam-se os novos parâmetros de (5.1).

O modelo (5.1), com o nó isolado e novos parâmetros, foi integrado numericamente para $t \in [t_{\text{trip}}, 10]$, com passo de integração $\Delta t = 0,02$ s. Repetiu-se esse passo $N_i = 200$ vezes, com diferentes perturbações, para cada nó i , e contou-se o número de vezes $N_{\mathcal{A}}$ que o sistema convergiu com tolerância $\|\boldsymbol{\omega}\| \leq 0,1$ rad/s. Este procedimento foi repetido para cada nó em cada rede, considerando diferentes distribuições de potência e diferentes tempos de seccionamento. Usou-se aqui, então, o conceito conhecido como *estabilidade intervalar da bacia* [Klinshov et al., 2018], uma vez que se mediu a capacidade de um sistema alcançar um regime de operação desejado em um tempo finito (neste trabalho, 10s), e, não, alcançar assintoticamente um atrator. Consulte-se o Cap. 4 para detalhes. No entanto, para não sobrecarregar a nomenclatura e devido à proximidade entre os procedimentos, matem-se o termo *estabilidade da bacia* para se referir a essa medida.

A escolha dos tempos de seccionamento investigados foi feita da seguinte maneira: iniciou-se com 0,05s e incrementou-se esse tempo de 0,05 a cada passo. Ao notar pequena variação nos resultados entre um t_{trip} e seu valor anterior, aumentava-se o intervalo. Dessa forma, os valores usados foram: 0,05; 0,10; 0,15; 0,20; 0,25; 0,30; 0,40; 0,50; 0,65; 0,80; 1,20; 1,70; 2,30 e 3,00, além do caso em que não se isola o gerador perturbado.

O Alg. 6 resume o procedimento numérico descrito. Nesse algoritmo, assume-se que o conjunto de dados $\{\mathcal{G}_k^{d_m}\}$, para uma determinada distribuição de potência, já tenha sido previamente definido. Utilizou-se para integração numérica, nesta investigação, o método `Tsit5()` (Tsitouras 5/4 Runge-Kutta) [Tsitouras, 2011], implementado no pacote `DifferentialEquations.jl` [Rackauckas and Nie, 2017] desenvolvido em linguagem Julia. Os códigos são equivalentes aos que foram disponibilizados em MATLAB. Optou-se por disponibilizar os códigos nesse formato devido a maior legibilidade alcançada graças à compatibilidade direta com outros pacotes numéricos usados (e.g., o Matpower), embora os códigos desenvolvidos em Julia sejam mais eficientes para tarefas de integração numérica.

Cada SEP artificial possui 50 geradores. Perturba-se cada gerador 200 vezes, totalizando 10^4 simulações por SEP. Tem-se 500 SEPs. Logo, o número total de simulações é dado por: 10^4 integrações por SEP \times 500 SEPs \times 15 tempos de seccionamento = $7,5 \cdot 10^7$ simulações. Como cada gerador é modelado como um oscilador Kuramoto de segunda ordem, a dinâmica de um SEP é governada por 100 EDOs de primeira ordem.

Algoritmo 6: Estudo estatístico de resiliência de SEPs.

Input: $M, N, N_i, t_{\text{trip}}, \{\mathcal{G}_k\}, d_m$
 // Percorre os índices k das redes de um conjunto $\{\mathcal{G}_k^{d_m}\}$

- 1 **for** $k \leftarrow 1, \dots, M$ **do**
- 2 Compute o fluxo de potência em estado estacionário de $\mathcal{G}_k^{d_m}$;
- 3 Estime os parâmetros ($\mathbf{A} = [A_i], \mathbf{K} = [K_{ij}], \mathbf{D} = [D_i], \mathbf{H} = [H_i]$ e $\mathbf{\Gamma} = [\gamma_{ij}]$,
 $i, j = 1, \dots, N$) do modelo (5.1) para $\mathcal{G}_k^{d_m}$ seguindo a abordagem EN;
- 4 Integre o modelo (5.1) com os parâmetros estimados para $t \in [0, 20]$ e obtenha $\mathbf{x}(t)$.
 Considere como condições iniciais $\mathbf{x}_i(0) \leftarrow [\delta_i^{\text{ss}} \ 0]^\top$, para $i = 1, \dots, N$, em que δ_i^{ss}
 vem da solução do fluxo de potência;
- 5 Defina a solução em estado estacionário $\mathbf{x}^{\text{ss}} \leftarrow \mathbf{x}(t = 20)$;
- // Percorre cada nó de uma dada rede $\mathcal{G}_k^{d_m}$
- 6 **for** $l \leftarrow 1, \dots, N$ **do**
- 7 Isole o nó l da rede e recalcule a solução do fluxo de potência;
- 8 Reestime os parâmetros ($\mathbf{A}^l = [A_i^l], \mathbf{K}^l = [K_{ij}^l], \mathbf{D}^l = [D_i^l], \mathbf{H}^l = [H_i^l]$ e
 $\mathbf{\Gamma}^l = [\gamma_{ij}^l], i, j = 1, \dots, N$) no modelo (5.1) para $\mathcal{G}_k^{d_m}$ seguindo a abordagem
 EN, em que o sobrescrito l indica que o respectivo nó foi isolado;
- 9 Defina $N_A \leftarrow 0$;
- // Perturba N_i vezes o nó l
- 10 **for** $n \leftarrow 1, \dots, N_i$ **do**
- 11 Defina novas condições iniciais $\mathbf{x}(0) \leftarrow \mathbf{x}^{\text{ss}}$;
- 12 Conduza o estado do l -ésimo nó do estado síncrono $\mathbf{x}_l(0)$ para um estado
 perturbado $\mathbf{x}_l(0) \leftarrow \mathbf{x}_l(0) + \rho(\mathbf{x}_l)$;
- 13 Integre o modelo (5.1) com parâmetros ($\mathbf{A}, \mathbf{K}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{\Gamma}$) e condições iniciais
 $\mathbf{x}(0)$ para $t \in [0, t_{\text{trip}}]$;
- 14 Integre o modelo (5.1) com parâmetros ($\mathbf{A}^l, \mathbf{K}^l, \mathbf{D}^l, \mathbf{H}^l, \mathbf{\Gamma}^l$) e condições
 iniciais $\mathbf{x}(t = t_{\text{trip}})$ para $t \in [t_{\text{trip}}, 10]$;
- 15 **if** $\|\boldsymbol{\omega}(t = 10)\| \leq 0.1$ **then**
- 16 Faça $N_A \leftarrow N_A + 1$;
- 17 **end if**
- 18 **end for**
- 19 Calcule $\hat{S}(k, l) \leftarrow \frac{N_A}{N_i}$;
- 20 **end for**
- 21 **end for**

Output: $\hat{S}_{\text{avg}} \leftarrow \frac{1}{M \cdot N} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N \hat{S}(k, l)$

Além disso, o período de integração é de 10s. Portanto, tudo isso equivale a um tempo total de simulação de $7,5 \cdot 10^8$ s (≈ 8680 dias) de um sistema com 100 EDOs de primeira ordem, das quais metade possui um somatório de senos.

A título de informação, os dados usados para criar uma única barra de cada um dos painéis da Fig. 5.6 demoram aproximadamente 11,5 h para serem gerados na seguinte máquina: notebook Dell Inspiron 5458 com S.O. Ubuntu 18.04.3 LTS; processador Intel

Core i5-5200U; *cache* de 3 072 KB; *clock* máximo de 2 700 MHz e 7 887,9 MB de memória RAM.

5.3.2 Resultados

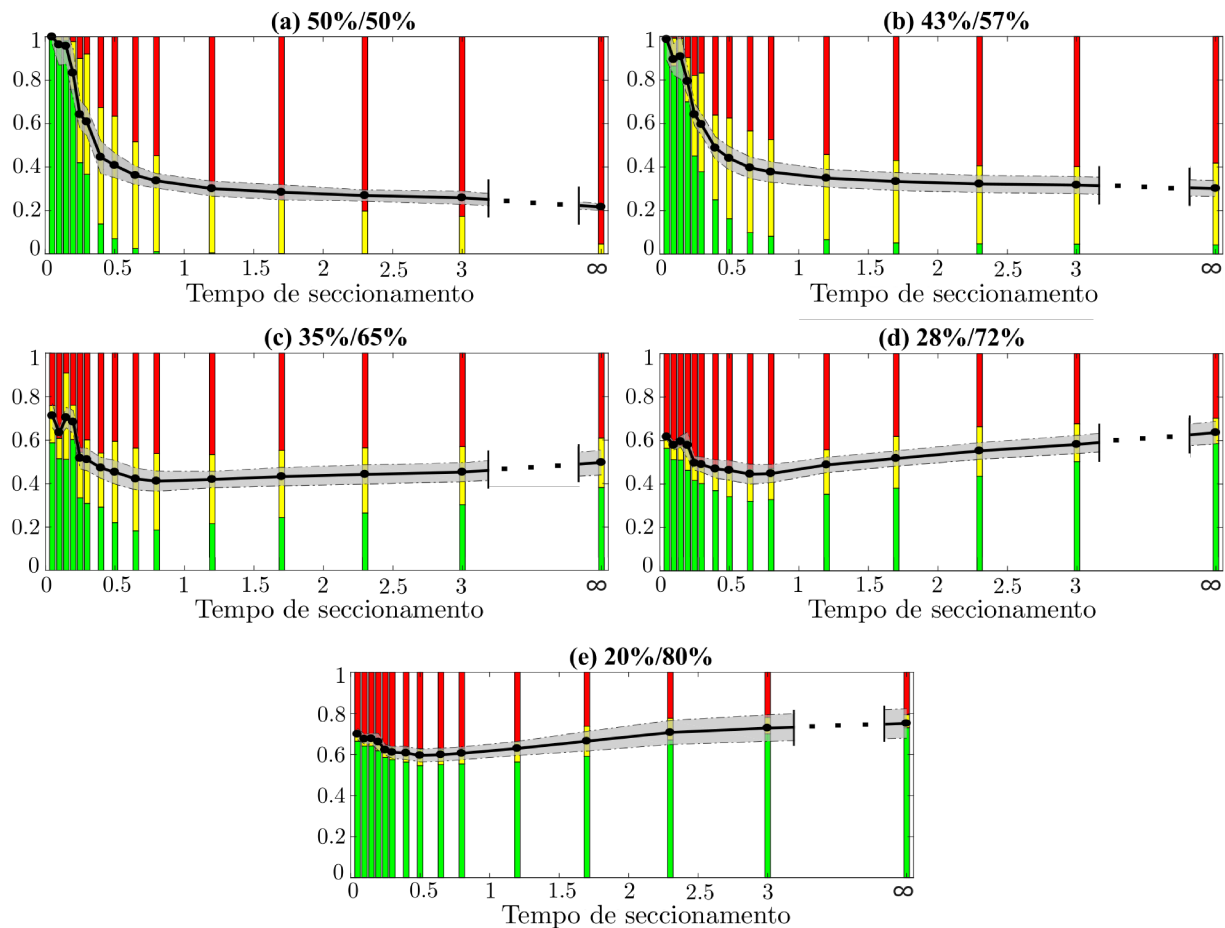


Figura 5.6: Medida de estabilidade da bacia de um conjunto de SEPs com distribuição de potência ($X\%, Y\%$). Quando t_{trip} (eixo x) é infinito, o gerador não é isolado. Para cada t_{trip} , classificam-se os nós em relação a sua medida \hat{S}_i . O eixo y mostra a proporção de nós com alta (verde), média (amarelo) e baixa (vermelho) resiliências. Como \hat{S}_i é estimado para cada um dos 50 nós de um total de 100 redes, cada barra compreende 5 000 estimações. O valor médio da estabilidade da bacia \hat{S}_{avg} , tomado sobre esses nós, é dado pela linha sólida com ± 3 desvios-padrões (em cinza), também em uma escala $[0, 1]$ sobre o eixo y .

A Fig. 5.6 mostra um primeiro conjunto de resultados obtidos seguindo o procedimento numérico descrito no Alg. 6. Nesse experimento, o mesmo tempo de seccionamento é aplicado a todos os nós, independentemente de sua posição topológica ou dinâmica individual. Conforme pode ser visto, a forma como o tempo de seccionamento afeta a estabilidade da bacia depende da distribuição de potência. Para se saber o que acontece quando um me-

nor tempo de seccionamento é implementado, move-se ao longo da linha sólida, que indica a medida média de estabilidade da bacia \hat{S}_{avg} , da direita para a esquerda. Para redes mais homogêneas (Fig. 5.6a, b), \hat{S}_{avg} geralmente aumenta monotonicamente quando se diminui o tempo de seccionamento. Por outro lado, para redes heterogêneas (Fig. 5.6d, e) não acontece o mesmo. De fato, pode-se ver que alguns valores maiores de resiliência média \hat{S}_{avg} aparecem com maiores tempos de seccionamento. Desta forma, para essas redes, no que se refere a \hat{S}_{avg} , pode ser melhor esperar mais tempo para isolar o gerador perturbado ou, até mesmo, não isolá-lo. Em particular, para a distribuição de potência (35%, 65%), o incremento de \hat{S}_{avg} não é monotônico, pois há um mínimo local em $t_{\text{trip}} \approx 0,15$. Esta figura mostra que a escolha ideal pode não ser um tempo de seccionamento muito curto, mas sim um tempo ligeiramente mais longo.

Em geral, um seccionamento rápido evita que a perturbação das variáveis de estado do gerador se espalhe para os nós vizinhos, evitando falhas em cascata. Além disso, em uma rede com distribuição de potência homogênea, como todos os nós fornecem a mesma quantidade de potência à rede, o isolamento rápido de um gerador perturbado parece ser melhor em termos de resiliência, uma vez que a quantidade de potência adicional que os demais geradores na rede deverão fornecer para suprir tal perda é levemente percebida por eles.

Por outro lado, em uma rede com distribuição de potência heterogênea, por exemplo, (20%, 80%), enfrentam-se duas situações. Se o gerador perturbado injeta pouca potência na rede, a análise é semelhante à de uma rede com distribuição homogênea. No entanto, se o gerador perturbado fornece muita potência para a rede, a decisão de se isolar ou não o nó é mais crítica. Um gerador desse tipo tem valores relativamente maiores para os parâmetros A_i e K_{ij} . Isto significa que os (20%) nós com maior fornecimento têm uma dinâmica dominante sobre os (80%) nós restantes com baixo fornecimento de potência. Essa configuração favorece a propagação de perturbações dos geradores com alta potência para o restante da rede, caso não sejam isolados, possivelmente desestabilizando o sistema elétrico. Por outro lado, quando um gerador com alto fornecimento de potência é isolado, a quantidade de potência extra que os demais devem fornecer também pode impedir que a rede retorne ao estado síncrono. Essas tendências contrárias em redes heterogêneas podem ser responsáveis pela pequena inclinação na curva de \hat{S}_{avg} em tempos de seccionamento médios (Figs. 5.6d,e). No entanto, parece que, se a rede elétrica segue uma dessas distribuições de potência, então, a melhor escolha em redes extremamente heterogêneas é não isolar o nó perturbado.

A Fig. 5.7 mostra que — sem isolamento de nós — redes heterogêneas com boa resiliência são comuns (acima de 60%), mas redes com baixa resiliência também acontecem com significativa frequência relativa (aproximadamente 20%). À medida que a distribuição de potência se torna mais homogênea, a frequência relativa de redes com boa resiliência diminui e a frequência de redes com baixa resiliência aumenta. Note-se que, na Fig. 5.7e, quase 20% dos nós resultam $\hat{S}_i \approx 0$, correspondendo aos geradores de alto fornecimento de potência; enquanto aproximadamente 80% tem $\hat{S}_i \approx 1$, correspondendo aos geradores

de baixa potência.

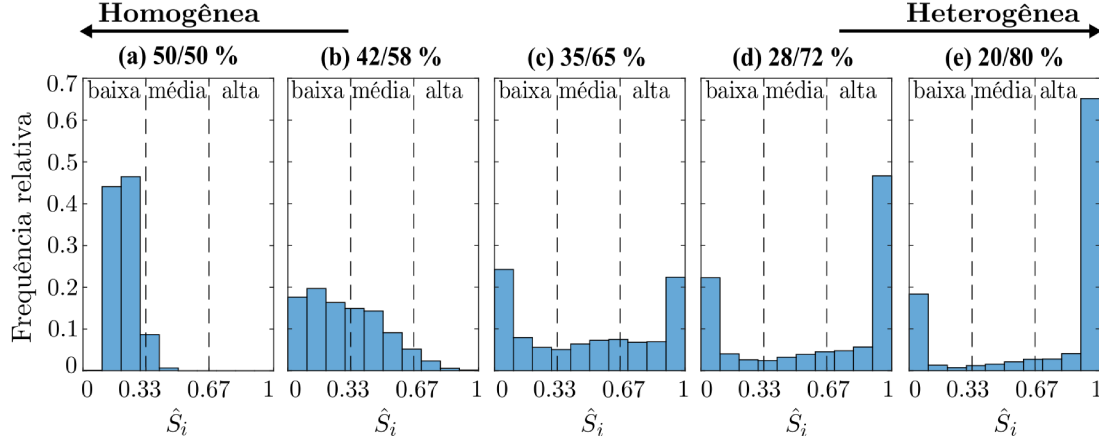


Figura 5.7: Histogramas de \hat{S}_i para o conjunto de redes com distribuição de potência ($X\%$, $Y\%$) e $t_{\text{trip}} \rightarrow \infty$. Classificam-se os nós, nas Figs. 5.6 e 5.8 de acordo com \hat{S}_i (baixa, média e alta), conforme mostrado aqui.

5.3.3 Aplicação ao SEP brasileiro

Na Fig. 5.8, mostra-se a mesma análise no modelo simplificado do SEP brasileiro. Para mais detalhes sobre a configuração numérica, consultem-se os códigos mencionados anteriormente. Somente usinas hidrelétricas são consideradas e modeladas como geradores.

Primeiramente, nota-se que a estabilidade média da bacia no SEP brasileiro (Fig. 5.8b) está mais próxima daquela apresentada para uma rede levemente homogênea (Fig. 5.6b). De fato, com exceção do gerador com alta potência (nó 17) e alguns com baixa potência (nós 3, 6 e 7), o SEP brasileiro é bastante homogêneo entre os demais nós em relação à geração hidrelétrica. Essa natureza homogênea sugere que um menor tempo de seccionamento é, em geral, melhor para esse SEP.

É interessante ressaltar que, com duas exceções, a potência do gerador e a resiliência da rede associada à perturbação dele seguem uma relação clara: quanto menor a potência injetada por um gerador, maior a resiliência da rede (Fig. 5.8c). As exceções são os geradores 1 e 17, destacados em vermelho.

Uma observação importante é feita a seguir. Nesta investigação, os resultados relatados para um determinado valor de tempo de seccionamento correspondem à situação na qual o mesmo valor de t_{trip} é usado para *todos* os geradores perturbados. Isso dificilmente será uma escolha ótima para redes heterogêneas, nas quais o melhor tempo para isolar um gerador pode depender de sua potência. Por exemplo, como mostrado na Fig. 5.8d, a estabilidade da bacia do nó 14 pode ser melhorada se um tempo de seccionamento ligeiramente maior for ajustado especificamente para este gerador, independentemente do tempo de seccionamento dos outros. Por outro lado, a estabilidade da bacia da maioria dos nós na rede elétrica brasileira apresentada se comporta como no caso do gerador 8

(Fig. 5.8d) à medida que o tempo de seccionamento aumenta. A escolha do tempo de seccionamento por nó, i.e., uma caracterização individual mais detalhada, é deixada para trabalhos futuros.

Finalmente, os resultados podem sugerir que perturbar o gerador 1 é mais prejudicial à estabilidade geral da rede do que perturbar o gerador 17, que representa a usina hidrelétrica de Itaipu. No entanto, deve-se notar que a medida de estabilidade da bacia está relacionada à perda de sincronismo de *qualquer* gerador (atente-se ao critério definido para convergência), ou seja, não distingue quantos geradores podem ter perdido a sincronia após uma determinada perturbação. Assim, embora o gerador 17 seja mais resiliente a perturbações, sua perda de sincronismo certamente tem um impacto maior no resto da rede do que os efeitos de uma perturbação no gerador 1, menos resiliente.

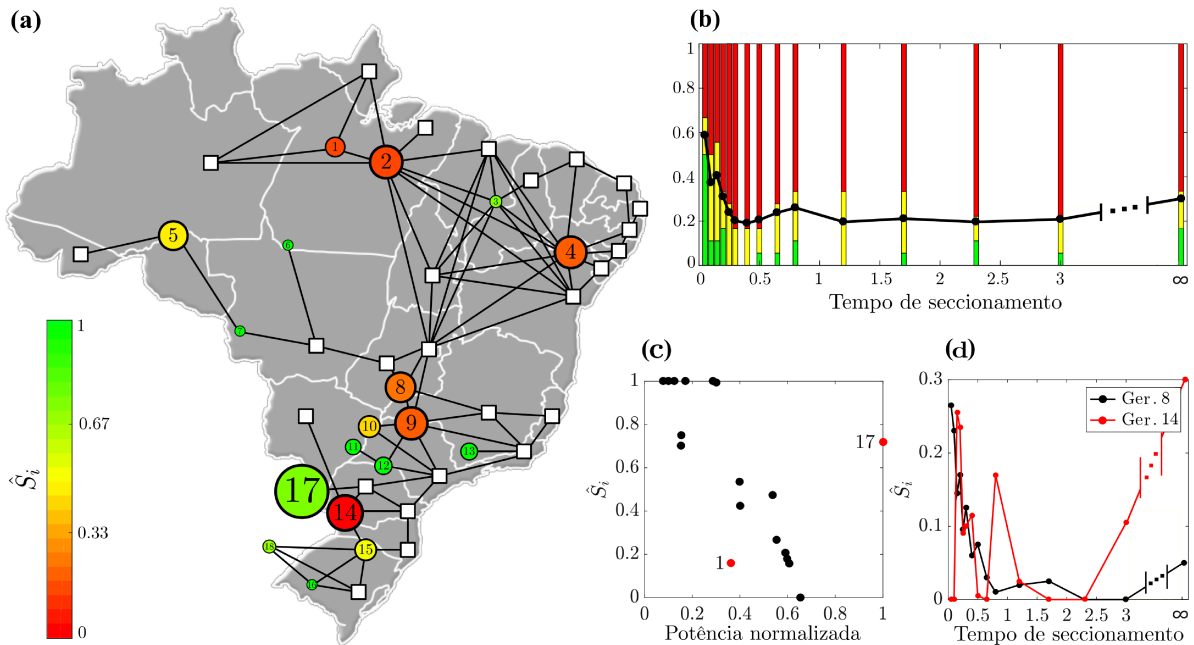


Figura 5.8: (a) SEP brasileiro. Geradores são representados como círculos; cargas, como quadrados. O tamanho dos nós gerados é ajustado proporcionalmente à potência que ele fornece. Nós de carga possuem, todos, o mesmo tamanho, já que a demanda é considerada igualmente distribuída. Geradores são coloridos de acordo com a estabilidade da bacia correspondente \hat{S}_i . Nesta figura, $t_{\text{trip}} = 0,05$ s. (b) Medida de estabilidade da bacia do SEP brasileiro (como na Fig. 5.6). Omite-se o desvio padrão, pois trata-se de uma única topologia e distribuição de potência. (c) \hat{S}_i como uma função da potência normalizada. *Outliers* são mostrados em vermelho. (d) \hat{S}_i como função de t_{trip} para dois nós.

5.3.4 Conclusões parciais

Na segunda investigação, estudou-se a heterogeneidade da rede e sua relação com a

melhor escolha do tempo de seccionamento. Para alcançar este objetivo e explicitar possíveis relações, simplificaram-se alguns aspectos dos SEPs. Os parâmetros dos geradores e da rede elétrica foram escolhidos de maneira *ad hoc* em simulações numéricas, mas buscando-se não perder a representatividade de sistemas reais.

A mensagem principal associada aos resultados não está relacionada aos *valores absolutos* nas simulações, mas pode ser encontrada em *valores relativos*. Por exemplo, o valor absoluto da resiliência da rede quando um determinado nó é perturbado não é o foco, mas, sim, como essa resiliência se comporta quando comparada à de outros nós, ou como ela varia com o tempo de seccionamento. As simulações mostram que a melhor escolha do tempo de seccionamento não é trivial e depende da distribuição de potência da rede. Enquanto uma rede homogênea se beneficia de tempos de seccionamento mais curtos, uma rede heterogênea pode se tornar mais resiliente se seus geradores perturbados não forem isolados.

Interessantemente, ao avaliar a Fig. 5.8a, é perceptível que o fornecimento de potência mais alto está, geralmente, relacionado à pior estabilidade da bacia, enquanto uma fonte de potência menor tem uma melhor estabilidade da bacia (dado o $t_{\text{trip}} = 0,05$). No entanto, duas fortes exceções estão presentes: os nós 1 e 17. Apesar de serem nós, respectivamente, de baixa e alta potências, a estabilidade da bacia é classificada como baixa e alta, nessa ordem. De fato, nota-se que, no caso de geradores de alta potência, uma posição topológica menos central (em outras palavras, uma posição topológica próxima a *dead ends*), pode melhorar a estabilidade da bacia correspondente.

Pode-se perguntar se isso não é contraditório ao trabalho de Menck et al. [2014], que relatou que *dead ends* são prejudiciais para a resiliência da rede. No referido trabalho, os autores homogeneizaram *todos* os aspectos do sistema para explicitar o efeito da topologia. Além disso, os parâmetros foram inseridos diretamente em um modelo análogo ao (5.1). Se os aspectos individuais forem frequentemente dominantes, a recomendação dos autores de se eliminar *dead ends* não deve ser o fator decisivo. Embora tenha funcionado para o Ex. 2 da primeira investigação (lembre-se de que, naquele caso, a distribuição de potência foi considerada homogênea), talvez soluções menos custosas possam ser implementadas. Os efeitos da distribuição heterogênea de potência e *dead ends* ainda não estão claros na literatura e são um tópico aberto para pesquisas futuras. Espera-se que o presente trabalho seja útil nesta direção.

5.4 Considerações finais

Neste capítulo, apresentaram-se os resultados de duas investigações: (Seç. 5.2) como a escolha da representação para as cargas reflete-se nas medidas de resiliência; e (Seç. 5.3) como se dão as relações entre o nível de heterogeneidade de uma rede, o tempo decorrido entre uma perturbação e o isolamento do gerador perturbado, e a resiliência do sistema. Em ambas as investigações, fez-se um estudo sobre a estabilidade de sistemas elétricos de potência por meio do uso de *modelos abrangentes* e, em contrapartida, menos detalhados.

Utilizou-se a medida *estabilidade da bacia*, que permite realizar uma análise não linear, numérica, para quantificar tal estabilidade. Além disso, durante o capítulo, indicaram-se algumas direções para investigações futuras, que serão melhor desenvolvidas e listadas no Cap. 6.

O uso de ferramentas como a estabilidade da bacia e suas variações, nas versões *por nó*, carregam premissas — quase sempre — implícitas relacionadas às perturbações. Vale o seguinte questionamento: as perturbações usadas correspondem a algum cenário real? Basicamente, pode-se ver essa questão a partir de duas perspectivas. (i) Assumir que o sistema investigado tem sua estrutura, a EDO que o descreve, modificada (ou é excitado por uma entrada) e, conseqüentemente, seu estado é conduzido para longe do ponto de operação nominal. Posteriormente, sua estrutura inicial é restaurada (ou a entrada cessa) e o que se tem é, então, a evolução do estado de acordo com a EDO que o descreve no período de operação normal, sem o efeito de falhas (ou da entrada). Esse cenário equivale àquele descrito na Sec. 2.3 e ilustrado na Fig. 2.2. Essa primeira perspectiva é diretamente motivada por cenários de falha reais.

Porém, na versão *por nó*, seria necessário que tais operações anormais afetassem um único nó de cada vez, modificando suas variáveis de estado, sem interferir nos demais. Uma segunda perspectiva consiste em (ii) se assumir que o volume do subespaço da bacia de atração associado às variáveis de estado perturbadas represente, por si só, as direções vulneráveis. Esse é o caso neste trabalho. Note-se, contudo, que as duas perspectivas estão relacionadas. Uma falha afetará, em um primeiro momento e mais intensamente, o local em que ocorreu; e, além disso, durante os estudos realizados, constatou-se uma regularidade razoável referente à geometria das bacias de atração (Veja-se, como exemplo, a Fig. 5.3). Esses dois fatores, somados, relacionam as duas perspectivas e constituem motivação física para os estudos apresentados.

Conclusões

“A ciência nunca resolve um problema sem criar pelo menos outros dez.”

George Bernard Shaw

Com o presente capítulo encerra-se este texto. Divide-se ele em três tópicos principais. Na Seq. 6.1, apresenta-se uma síntese do trabalho realizado, focando nos resultados obtidos. Na Seq. 6.2 são apresentadas algumas questões em aberto na literatura relacionadas a este trabalho, e outras nas quais ainda não há consenso. As principais críticas encontradas referem-se ao uso do modelo simplificado, resultante das premissas adotadas em sua derivação. Por fim, na Seq. 6.3, apresentam-se sugestões de trabalhos futuros. Aproveita-se este espaço, também, para fazerem-se algumas colocações especulativas, as quais podem ser identificadas entre as demais sem dificuldade.

6.1 Discussões finais

Neste trabalho, estudou-se a capacidade que SEPs possuem de se recuperar de eventos que modificam seu regime de operação. Para tanto, representaram-se esses sistemas como redes de osciladores de Kuramoto. Esse modelo é resultante da representação mecânica de geradores pela equação de *swing*, da representação do circuito elétrico pelo modelo clássico e da representação das linhas de transmissão pelo modelo π . As cargas, por sua vez, foram representadas: (i) como impedâncias constantes (EN); (ii) possuindo consumo de potência linearmente dependente do desvio de frequência (SP); e (iii) como motores síncronos (SM). As diferentes representações para as cargas dão origem a redes de Kuramoto com diferentes parâmetros. Além disso, o número e as ordens dos osciladores também são diferentes para cada uma delas. Os detalhes foram apresentados no Cap. 3.

Como ferramentas de análise, utilizaram-se algumas das abordagens baseadas em amostras, a saber: estabilidade da bacia e estabilidade intervalar da bacia, ambas na versão por nó. Tais ferramentas, como os nomes sugerem, consistem em integrações numéricas dos modelos investigados a partir de condições iniciais amostradas (sorteadas) de uma região de interesse. Com base na evolução das trajetórias a partir dessas condições iniciais, procura-se caracterizar toda a região. Uma revisão sobre os desenvolvimentos recentes na área foi feita no Cap. 4.

Definiram-se, então, duas linhas de investigação (Cap. 5). Na primeira, buscou-se comparar, para dois exemplos (um *benchmark* usado pela comunidade de SEP e uma versão simplificada do sistema elétrico brasileiro, construída a partir de dados fornecidos pelo ONS), as medidas de resiliência obtidas partindo-se das diferentes abordagens de modelagem.

Constatou-se que a escolha da representação das cargas influencia nos resultados obtidos, embora haja correlação entre estes. Somando-se o número de geradores dos dois exemplos, obtém-se 28 nós comparados, o que é um número relativamente pequeno. Pode ser que as abordagens gerem resultados estatisticamente relacionados dado um número suficientemente grande de geradores. Em outras palavras, caso o interesse seja uma caracterização mais geral, que, por exemplo, gire em torno de valores médios, a escolha da abordagem pode não ser crucial. Esse é um contexto para ser explorado em trabalhos futuros.

Porém, pode-se perguntar, para estudos de SEPs específicos, se os resultados presentes na literatura, referentes à resiliência, não poderiam ser diferentes caso outra abordagem fosse adotada. A situação se agrava diante da falta de argumentos objetivos com relação à escolha da representação das cargas. Grande parte dos estudos recentes adotaram a abordagem SM, na qual as cargas (grandes agrupamentos de consumidores) são representadas por motores síncronos, o que pode não ser a melhor escolha. De fato, grande parte da potência gerada é consumida por motores de indução que são bem representados por impedâncias constantes (Consulte-se [Caliskan and Tabuada, 2014, Seç. IV-B]).

Deste modo, adotou-se a abordagem EN para a segunda investigação. Já se sabe, então, que alguns resultados presentes na literatura (e.g., Menck et al. [2014]; Rohden et al. [2012]; Hellmann et al. [2016]; Witthaut and Timme [2012]; Rohden et al. [2014, 2016]) são passíveis de questionamento pelos argumentos supracitados, decorrentes da primeira investigação. Apesar de nem todos os autores citados nessa lista terem usado a estabilidade da bacia, uma vez que as abordagens implicam medidas diferentes nesse caso, podem implicar discordância em outros casos também. Independentemente, tais trabalhos apontaram problemas mas não sugeriram formas factíveis de corrigi-los.

Surgiu, então, a seguinte pergunta: dado que determinado gerador foi perturbado, o que é mais danoso ao sistema: mantê-lo conectado ou isolá-lo da rede? De fato, a resposta depende de inúmeros fatores. Obviamente, se não há solução das equações de fluxo de potência para o sistema com o gerador perturbado isolado, ou se os transientes provenientes dessa manobra forem demasiadamente nocivos ao SEP, a situação se torna um tanto quanto complicada e deve-se escolher a opção que minimize os danos inevitáveis. Nesse caso, uma análise mais detalhada se faz necessária. Caso contrário, a escolha pela isolamento ou não de um gerador pode ser feita com base nas probabilidades de recuperação da rede após a ocorrência da falha. Nesse segundo cenário se aplica o conhecimento proveniente da segunda investigação.

No estudo realizado sobre um grande número (100) de topologias de SEPs (com 50 geradores cada um), por meio da estabilidade intervalar da bacia (Cap. 4), encontrou-se

que a probabilidade de um SEP retornar a um regime aceitável de operação ($\|\omega\| \leq 0,1$) em um intervalo de tempo determinado (10s) varia em função da distribuição de potência do SEP e do tempo requerido para isolar-se o gerador perturbado. Este mostrou que além das decisões extremas (isolar ou não), existem outras intermediárias; i.e., um momento oportuno para efetuar o isolamento. Aquela, por sua vez, aponta para novos caminhos a serem explorados, por exemplo, como a potência de determinado gerador (e outras características individuais) podem auxiliar na escolha do tempo de seccionamento para ele.

Alguns aspectos importantes devem ser enfatizados. Não foram estudados tipos específicos de perturbações, mas, sim, assumiu-se que elas poderiam ocorrer, a partir do ponto de equilíbrio, com distribuição uniforme de probabilidade em uma região retangular centrada nesse ponto. Portanto, a resiliência aqui está relacionada à estimativa do tamanho da bacia de atração da rede ou, mais precisamente, de seu subespaço correspondente à direção das variáveis de estado associadas ao gerador perturbado. A escolha de PDFs com correspondência direta aos sistemas físicos não fez parte do escopo desta dissertação, mas apresenta-se como opção para trabalhos futuros.

6.2 Problemas em aberto

Na seção anterior, discutiram-se algumas implicações da escolha da representação de cargas. No entanto, encontram-se alguns trabalhos na literatura colocando em discussão não apenas esta, mas, também, os modelos das próprias máquinas síncronas e da rede de linhas de transmissão que interligam os elementos dos SEPs.

[Anderson and Fouad \[2002, pág. 7\]](#) argumentaram (note-se a data da publicação) que a disponibilidade de poder computacional e de técnicas modernas de modelagem tornam possível representar os componentes do sistema com quase qualquer grau de complexidade, tornando simplificações e premissas desnecessárias e, algumas vezes, injustificadas. Sabe-se, no entanto, que a indisponibilidade de dados representa, sim, um obstáculo à criação de modelos detalhados, principalmente, dada a dimensão dos sistemas envolvidos. Sobre o poder computacional, a estimação de bacias de atração em alta dimensão continua representando um problema. Cenários específicos de falha, por sua vez, podem ser simulados sem exigir muito poder computacional. O problema maior nesse caso consiste no levantamento dos cenários mais prováveis de ocorrerem. Sem tal lista, as bacias de atração apresentam-se como boas indicações de, por exemplo, localidades mais vulneráveis.

Outro ponto levantado por esses autores diz respeito à duração das simulações. Segundo eles, em grandes sistemas interligados, regiões remotas podem ser afetadas algum tempo depois da ocorrência de determinado distúrbio. Então, diferentes partes do sistema responderão ao distúrbio em diferentes momentos e o comportamento coletivo, nesse caso, pode levar a falhas em larga escala. Portanto, o tempo de simulação deve ser suficiente tal que englobe esses casos. No entanto, simulações de longos períodos de tempo exigem que se acrescente ao modelo componentes ignorados em simulações curtas. No presente

trabalho, a dinâmica de tais componentes (e.g., as malhas de controle da potência mecânica) foram desprezadas. O efeito disso nos resultados obtidos pode ser melhor explorado em trabalhos futuros. Uma breve discussão sobre esses dois pontos citados (intervalo de análise e detalhamento dos modelos) pode ser encontrada no referido trabalho [Anderson and Fouad, 2002, pág. 45].

Caliskan and Tabuada [2014] também fizeram críticas aos modelos clássicos usados no estudo de estabilidade transitória. Segundo eles, algumas premissas (por vezes implícitas) envolvidas na derivação desses modelos são violadas durante transientes. Por exemplo, o uso de fasores e a consideração de que as velocidades angulares dos geradores estão muito próximas da velocidade síncrona foram citadas. Em outro trabalho [Caliskan and Tabuada, 2015], os mesmos autores mostraram, por meio de contra-exemplos, em comparação com um modelo de primeiros princípios, que a equação de *swing* pode levar a conclusões errôneas ao se realizar análise de estabilidade em SEPs, mesmo sob pequenas perturbações. Argumentaram que o sucesso ao usar esse modelo para resolver um amplo espectro de aplicações resultou no desfoque dos limites da região na qual a equação de balanço pode ser aplicada. Afirmam ainda: “*Although a deeper investigation is necessary to determine when the swing equation can be used, the results in this paper call into question the scientific foundations upon which the current power grid has been built.*”¹ Venezian and Weiss [2016] também fizeram uma análise parecida, baseada em contra-exemplos. Uma comparação usando abordagens baseadas em amostras foi feita por Auer et al. [2016], na qual também encontraram-se algumas diferenças nas medidas de resiliência obtidas por meio da análise de modelos de segunda e quarta ordens.

Como contra-argumento, colocam-se algumas das próprias afirmações desses autores. O sucesso em aplicações não pode ser desprezado, afinal, modelos devem ser úteis. Além disso, não se sabe o quão exaustiva foi a busca pelos contra-exemplos apresentados.

6.3 Sugestões de trabalhos futuros

Com base nas discussões apresentadas, listam-se como sugestões de trabalhos futuros:

1. Estudar a relação estatística entre medidas de resiliência obtidas usando-se as abordagens EN, SP e SM.
2. Estudar o efeito da heterogeneidade relacionada ao consumo desigual de potência pelas cargas de um SEP sobre sua resiliência.
3. Obter tempos de seccionamentos ideais com base nas características individuais dos elementos que compõem um SEP.

¹“Embora uma investigação mais profunda seja necessária para determinar quando a equação de *swing* pode ser usada, os resultados deste artigo questionam as bases científicas sobre as quais o SEP atual foi construído.”

-
4. Obter PDFs que caracterizem a ocorrência de perturbações para uma coleção de cenários mais realísticos.
 5. Investigar os limites de validade da equação de *swing* com base em experimentos.
 6. Investigar o papel das incertezas paramétricas sobre as medidas de resiliência em SEPs.
 7. Investigar bacias de atração por meio da associação de ferramentas como estabilidade e entropia da bacia.

Referências Bibliográficas

- Acebrón, J. A., Bonilla, L. L., Vicente, C. J. P., Ritort, F., and Spigler, R. (2005). The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Reviews of Modern Physics*, 77(1):137.
- Anderson, P. M. and Fouad, A. A. (2002). *Power system control and stability*. John Wiley & Sons.
- Andersson, G., Donalek, P., Farmer, R., Hatziargyriou, N., Kamwa, I., Kundur, P., Martins, N., Paserba, J., Pourbeik, P., Sanchez-Gasca, J., Schulz, R., Stankovic, A., Taylor, C., and Vittal, V. (2005). Causes of the 2003 major grid blackouts in North America and Europe, and recommended means to improve system dynamic performance. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(4):1922–1928.
- Arenas, A., Díaz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y., and Zhou, C. (2008). Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469(3):93–153.
- Auer, S., Kleis, K., Schultz, P., Kurths, J., and Hellmann, F. (2016). The impact of model detail on power grid resilience measures. *European Physical Journal: Special Topics*, 225(3):609–625.
- Barabási, A.-L. and Albert, R. (1999). Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512.
- Barabási, A.-L. and Bonabeau, E. (2003). Scale-free networks. *Scientific American*, 288(5):60–69.
- Bassett, D. S. and Bullmore, E. (2006). Small-world brain networks. *The Neuroscientist*, 12(6):512–523.
- Bezanson, J., Edelman, A., Karpinski, S., and Shah, V. B. (2017). Julia: A fresh approach to numerical computing. *SIAM Review*, 59(1):65–98.
- Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D., and Zhou, C. (2002). The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 366(1-2):1–101.

- Box, G. E. (1976). Science and statistics. *Journal of the American Statistical Association*, 71(356):791–799.
- Bromberger, S., Fairbanks, J., and other contributors (2017). Julia-Graphs/LightGraphs.jl: LightGraphs.
- Brzeski, P., Belardinelli, P., Lenci, S., and Perlikowski, P. (2018a). Revealing compactness of basins of attraction of multi-dof dynamical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 111:348–361.
- Brzeski, P., Kurths, J., and Perlikowski, P. (2018b). Time dependent stability margin in multistable systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 28(9):093104.
- Brzeski, P. and Perlikowski, P. (2018). Sample-based methods of analysis for multistable dynamical systems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, pages 1–31.
- Brzeski, P., Wojewoda, J., Kapitaniak, T., Kurths, J., and Perlikowski, P. (2017). Sample-based approach can outperform the classical dynamical analysis-experimental confirmation of the basin stability method. *Scientific Reports*, 7(1):6121.
- Caliskan, S. Y. and Tabuada, P. (2014). Compositional transient stability analysis of multimachine power networks. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 1(1):4–14.
- Caliskan, S. Y. and Tabuada, P. (2015). Uses and abuses of the swing equation model. In *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6662–6667. IEEE.
- Carareto, R., Baptista, M. S., and Grebogi, C. (2013). Natural synchronization in power-grids with anti-correlated units. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18:1035–1046.
- Chen, C.-T. (1998). *Linear system theory and design*. Oxford University Press, Inc., 3th edition.
- Chen, G., Wang, X., and Li, X. (2014). *Fundamentals of complex networks: models, structures and dynamics*. John Wiley & Sons, 1st edition.
- Chiang, H.-D. (2011). *Direct methods for stability analysis of electric power systems: theoretical foundation, BCU methodologies, and applications*. John Wiley & Sons.
- Cohen, R. and Havlin, S. (2003). Scale-free networks are ultrasmall. *Physical Review Letters*, 90(5):058701.
- Daza, A., Wagemakers, A., Georgeot, B., Guéry-Odelin, D., and Sanjuán, M. A. (2016). Basin entropy: A new tool to analyze uncertainty in dynamical systems. *Scientific Reports*, 6(August):1–10.

- Delabays, R., Tyloo, M., and Jacquod, P. (2017). The size of the sync basin revisited. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 27(10):103109.
- Dobson, I. (2013). Complex networks: Synchrony and your morning coffee. *Nature Physics*, 9(3):133.
- Dörfler, F. and Bullo, F. (2011). On the critical coupling for Kuramoto oscillators. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 10(3):1070–1099.
- Dörfler, F. and Bullo, F. (2013). Kron reduction of graphs with applications to electrical networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 60(1):150–163.
- Dörfler, F. and Bullo, F. (2014). Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey. *Automatica*, 50(6):1539–1564.
- Dörfler, F., Chertkov, M., and Bullo, F. (2013). Synchronization in complex oscillator networks and smart grids. *PNAS*, 110(6):2005–2010.
- Dorogovtsev, S. N. and Mendes, J. F. (2002). Evolution of networks. *Advances in Physics*, 51(4):1079–1187.
- Erdős, P. and Rényi, A. (1960). On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, 5:17–61.
- Eroglu, D., Lamb, J. S. W., and Pereira, T. (2017). Synchronisation of chaos and its applications. *Contemporary Physics*, 58(3):207–243.
- Fell, J. and Axmacher, N. (2011). The role of phase synchronization in memory processes. *Nature Reviews Neuroscience*, 12(2):105.
- Filatrella, G., Nielsen, A. H., and Pedersen, N. F. (2008). Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model. *The European Physical Journal B*, 61(4):485–491.
- Freitas, L., Torres, L. A., and Aguirre, L. A. (2018). Phase definition to assess synchronization quality of nonlinear oscillators. *Physical Review E*, 97(5):052202.
- Furtado, E. C. (2009). *Estudo do Sincronismo de Múltiplos Osciladores Acoplados: Aplicação ao Paralelismo de UPS*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Gajduk, A., Todorovski, M., and Kocarev, L. (2014). Stability of power grids: An overview. *The European Physical Journal Special Topics*, 223(12):2387–2409.
- Gao, J., Liu, X., Li, D., and Havlin, S. (2015). Recent progress on the resilience of complex networks. *Energies*, 8(10):12187–12210.
- Grainger, J. J. and Stevenson, W. D. (1994). *Power system analysis*. McGraw-Hill.

- Groth, A. and Ghil, M. (2017). Synchronization of world economic activity. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 27(12):127002.
- Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag New York.
- Hellmann, F., Schultz, P., Grabow, C., Heitzig, J., and Kurths, J. (2016). Survivability of Deterministic Dynamical Systems. *Scientific Reports*, 6(June):1–12.
- Inagaki, S. (1993). Thermodynamic stability of modified konishi-kaneko system. *Progress of Theoretical Physics*, 90(3):577–584.
- Jeong, S.-O., Ko, T.-W., and Moon, H.-T. (2002). Time-delayed spatial patterns in a two-dimensional array of coupled oscillators. *Physical Review Letters*, 89(15):154104.
- Kay, S. (2006). *Intuitive probability and random processes using MATLAB®*. Springer Science & Business Media.
- Kazanci, F. G. and Ermentrout, B. (2007). Pattern formation in an array of oscillators with electrical and chemical coupling. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 67(2):512–529.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, 3th edition.
- Kim, H., Lee, S. H., Davidsen, J., and Son, S.-W. (2018). Multistability and variations in basin of attraction in power-grid systems. *New Journal of Physics*, 20(11):113006.
- Kim, H., Lee, S. H., and Holme, P. (2015). Community consistency determines the stability transition window of power-grid nodes. *New Journal of Physics*, 17(11):113005.
- Kim, H., Lee, S. H., and Holme, P. (2016). Building blocks of the basin stability of power grids. *Physical Review E*, 93(6):062318.
- Kittel, T., Heitzig, J., Webster, K., and Kurths, J. (2017). Timing of transients: quantifying reaching times and transient behavior in complex systems. *New Journal of Physics*, 19(8):083005.
- Klinshov, V. V., Kirillov, S., Kurths, J., and Nekorkin, V. I. (2018). Interval stability for complex systems. *New Journal of Physics*, 20:043040.
- Klinshov, V. V., Nekorkin, V. I., and Kurths, J. (2015). Stability threshold approach for complex dynamical systems. *New Journal of Physics*, 18(1):013004.
- Kuramoto, Y. (1975). Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In Araki, H., editor, *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, pages 420–422, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.

- Lazarek, P. B. M. and Kurths, T. K. J. (2016). Basin stability approach for quantifying responses of multistable systems with parameters mismatch. *Meccanica*, 51(11):2713–2726.
- Li, X. and Chen, G. (2003). Synchronization and desynchronization of complex dynamical networks: an engineering viewpoint. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 50(11):1381–1390.
- Liu, Z. and Zhang, Z. (2017). Quantifying transient stability of generators by basin stability and Kuramoto-like models. In *Power Symposium (NAPS), 2017 North American*, pages 1–6. IEEE.
- Lü, J., Chen, G., Ogorzalek, M. J., and Trajković, L. (2013). Theory and applications of complex networks: Advances and challenges. In *2013 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS2013)*, pages 2291–2294. IEEE.
- Lundström, N. L. (2018). How to find simple nonlocal stability and resilience measures. *Nonlinear Dynamics*, 93(2):887–908.
- Menck, P. J. (2014). *How wires shape volumes*. PhD thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät I.
- Menck, P. J., Heitzig, J., Kurths, J., and Schellnhuber, H. J. (2014). How dead ends undermine power grid stability. *Nature Communications*, 5:3969.
- Menck, P. J., Heitzig, J., Marwan, N., and Kurths, J. (2013). How basin stability complements the linear-stability paradigm. *Nature Physics*, 9(2):89.
- Milgram, S. (1967). The small world problem. *Psychology Today*, 2(1):60–67.
- Mitra, C., Choudhary, A., Sinha, S., Kurths, J., and Donner, R. V. (2017a). Multiple-node basin stability in complex dynamical networks. *Physical Review E*, 95(3):032317.
- Mitra, C., Kittel, T., Choudhary, A., Kurths, J., and Donner, R. V. (2017b). Recovery time after localized perturbations in complex dynamical networks. *New Journal of Physics*, 19(10):103004.
- Montanari, A. N., Moreira, E. I., and Aguirre, L. A. (2019). Effects of network heterogeneity and tripping time on the basin stability of power systems. submitted.
- Monteiro, L. H. A. (2006). *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2nd edition.
- Moreira, E. I. and Aguirre, L. A. (2019). Resiliência de sistemas elétricos de potência representados por redes de Kuramoto. In *Anais do 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. SBA.
- Motter, A. E. and Albert, R. (2012). Networks in motion. *Physics Today*, 65(4):43.

- Motter, A. E., Myers, S. A., Anghel, M., and Nishikawa, T. (2013). Spontaneous synchrony in power-grid networks. *Nature Physics*, 9(3):191.
- Néda, Z., Ravasz, E., Brechet, Y., Vicsek, T., and Barabási, A.-L. (2000). The sound of many hands clapping: Tumultuous applause can transform itself into waves of synchronized clapping. *Nature*, 403(6772):849.
- Newman, M., Barabasi, A.-L., and Watts, D. J. (2011). *The structure and dynamics of networks*, volume 12. Princeton University Press.
- Nishikawa, T. and Motter, A. E. (2015). Comparative analysis of existing models for power-grid synchronization. *New Journal of Physics*, 17(1):015012.
- Nitzbon, J., Schultz, P., Heitzig, J., Kurths, J., and Hellmann, F. (2017). Deciphering the imprint of topology on nonlinear dynamical network stability. *New Journal of Physics*, 19(3):033029.
- ONS (2015). Operador Nacional do Sistema Elétrico. http://www.ons.org.br/sites/multimedia/Documentos%20Compartilhados/dados/Dados_2015/html/4-1.html. Accessed: 2019-01-30.
- Pikovskij, A. S., Rosenblum, M. G., and Kurths, J. (2001). *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, volume 12. Cambridge university press.
- Pourbeik, P., Kundur, P. S., and Taylor, C. W. (2006). The anatomy of a power grid blackout - root causes and dynamics of recent major blackouts. *IEEE Power and Energy Magazine*, 4(5):22–29.
- Rackauckas, C. and Nie, Q. (2017). DifferentialEquations.jl – a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in Julia. *Journal of Open Research Software*, 5(1).
- Rodrigues, F. A., Peron, T. K. D., Ji, P., and Kurths, J. (2016). The Kuramoto model in complex networks. *Physics Reports*, 610:1–98.
- Rohden, M., Jung, D., Tamrakar, S., and Kettemann, S. (2016). Cascading failures in ac electricity grids. *Physical Review E*, 94(3):032209.
- Rohden, M., Sorge, A., Timme, M., and Witthaut, D. (2012). Self-organized synchronization in decentralized power grids. *Physical Review Letters*, 109(6):064101.
- Rohden, M., Sorge, A., Witthaut, D., and Timme, M. (2014). Impact of network topology on synchrony of oscillatory power grids. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 24(1):013123.
- Saleh, M., Esa, Y., and Mohamed, A. (2018). Applications of complex network analysis in electric power systems. *Energies*, 11(6):1381.

- Schultz, P., Heitzig, J., and Kurths, J. (2014a). A random growth model for power grids and other spatially embedded infrastructure networks. *European Physical Journal: Special Topics*, 223(12):2593–2610.
- Schultz, P., Heitzig, J., and Kurths, J. (2014b). Detours around basin stability in power networks. *New Journal of Physics*, 16(12):125001.
- Schultz, P., Menck, P. J., Heitzig, J., and Kurths, J. (2017). Potentials and limits to basin stability estimation. *New Journal of Physics*, 19(2):023005.
- Shampine, L. (2005). Solving ODEs and DDEs with residual control. *Applied Numerical Mathematics*, 52(1):113–127.
- Strogatz, S. (2005). *Crowd Synchrony on the Millennium Bridge: Footbridges Start to Sway when Packed with Pedestrians Falling Into Step with Their Vibrations*. Nature Publ. Group.
- Strogatz, S. H. (2001). Exploring complex networks. *Nature*, 410(6825):268.
- Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press.
- Tanaka, H.-A., Lichtenberg, A. J., and Oishi, S. (1997). Self-synchronization of coupled oscillators with hysteretic responses. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 100(3-4):279–300.
- Tôrres, L. A. and Aguirre, L. A. (2004). Transmitting information by controlling nonlinear oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 196(3-4):387–406.
- Tôrres, L. A., Hespanha, J. P., and Moehlis, J. (2015). Synchronization of identical oscillators coupled through a symmetric network with dynamics: A constructive approach with applications to parallel operation of inverters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(12):3226–3241.
- Trafton, A. (2014). Synchronized brain waves enable rapid learning.
- Tsitouras, C. (2011). Runge–Kutta pairs of order 5(4) satisfying only the first column simplifying assumption. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(2):770–775.
- Van Kan, A., Jegminat, J., Donges, J. F., and Kurths, J. (2016). Constrained basin stability for studying transient phenomena in dynamical systems. *Physical Review E*, 93:042205.
- Venezian, E. and Weiss, G. (2016). A warning about the use of reduced models of synchronous generators. In *2016 IEEE International Conference on the Science of Electrical Engineering (ICSEE)*, pages 1–5. IEEE.

- Watts, D. J. and Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393(6684):440.
- Wiley, D. A., Strogatz, S. H., and Girvan, M. (2006). The size of the sync basin. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 16(1):015103.
- Witthaut, D. and Timme, M. (2012). Braess’s paradox in oscillator networks, desynchronization and power outage. *New Journal of Physics*, 14(8):083036.
- Wolff, M. F., Lind, P. G., and Maass, P. (2018). Power grid stability under perturbation of single nodes: Effects of heterogeneity and internal nodes. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 28(10):103120.
- Wu, X., Zheng, W. X., and Zhou, J. (2009). Generalized outer synchronization between complex dynamical networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 19(1):013109.
- Yang, L.-x., Jiang, J., and Liu, X.-j. (2016). Influence of edge additions on the synchronizability of oscillatory power networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 41:11–18.
- Yang, Y., Nishikawa, T., and Motter, A. E. (2017). Vulnerability and cosusceptibility determine the size of network cascades. *Physical Review Letters*, 118(4):048301.
- Zimmerman, R. D., Murillo-Sánchez, C. E., and Thomas, R. J. (2011). Matpower: Steady-state operations, planning, and analysis tools for power systems research and education. *IEEE Transactions on Power Systems*, 26(1):12–19.

Estabilidade da bacia e centralidade de intermediação

As figuras apresentadas a seguir mostram como a estabilidade da bacia se relaciona com a *centralidade de intermediação* dos geradores investigados no presente trabalho. Em trabalhos anteriores, tal medida topológica mostrou-se ser a mais influente sobre a resiliência de nós. Entretanto, os trabalhos que evidenciam essa relação utilizaram redes homogêneas em suas investigações. Diferentemente de estudos anteriores, essa relação *não* foi observada no conjunto de redes utilizadas neste trabalho, conforme pode ser constatado nas figuras, nem mesmo para o caso homogêneo. Lembre-se de que, aqui, os parâmetros dos osciladores de Kuramoto são calculados de acordo com a abordagem de modelagem e, não, atribuídos arbitrariamente.

Os dados plotados referem-se às medidas obtidas com o mesmo conjunto de redes usado na Seç. 5.3, para alguns casos do estudo estatístico. Para uma melhor visualização, ordenaram-se as centralidades de intermediação de todos os nós investigados de forma crescente. Note-se que existe mais de um nó para alguns mesmos valores de b_i . Além disso, os pontos foram unidos por segmentos de retas.

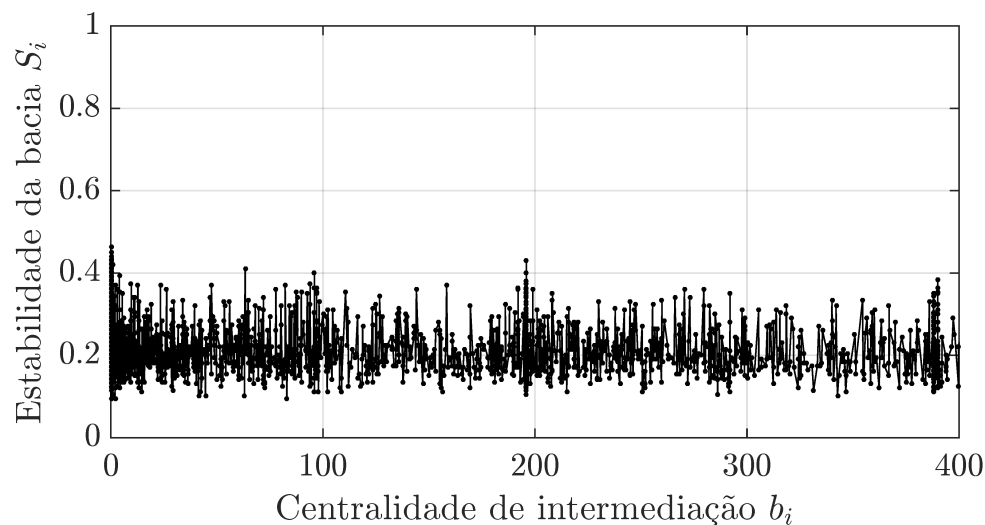
Na Fig. A.1, mostram-se os valores para o caso mais homogêneo de distribuição de potência (50%, 50%). O painel (a) corresponde ao caso sem seccionamento. Todos os nós apresentam valores de resiliência parecidos entre si, independentemente de b_i . O painel (b) corresponde ao seccionamento em $t_{\text{trip}} = 0,005$ s. Todos os nós apresentam resiliência próxima do valor máximo, exceto para alguns valores específicos de b_i ; no entanto, essa relação não é expressiva, uma vez que tais valores de centralidade são mais comuns e, logo, mais valores de S_i são plotados nesses pontos.

A Fig. A.2 mostra o caso mais heterogêneo (20%, 80%) e sem seccionamento. Os painéis (a) e (b) mostram, respectivamente, os geradores com menor e maior potências. Portanto, em redes heterogêneas e sem seccionamento, S_i mostra-se depender muito mais da potência do que da posição topológica dos geradores.

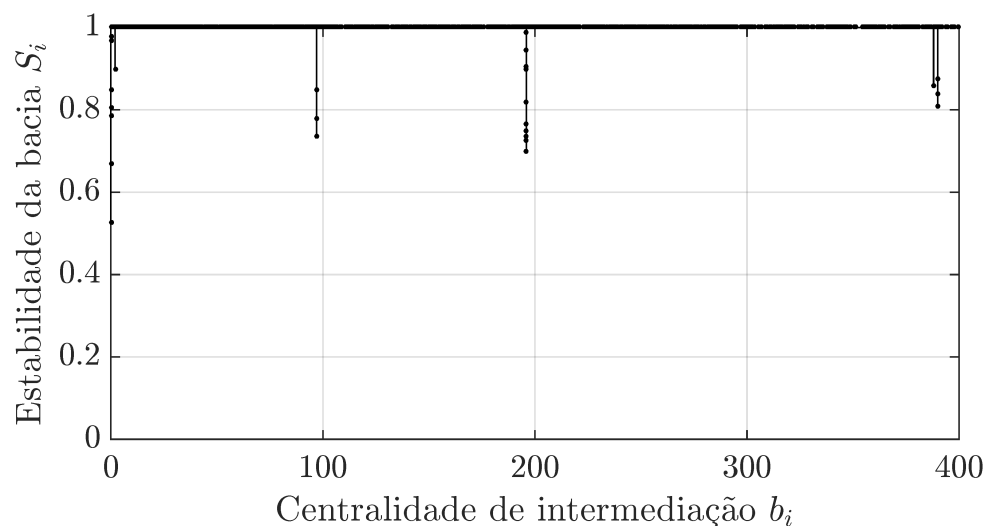
A Fig. A.3 mostra novamente o caso heterogêneo, mas com $t_{\text{trip}} = 0,005$ s. Os painéis (a) e (b) mostram, mais uma vez, os geradores com menor e maior potências, nessa ordem. Então, em redes heterogêneas e com um rápido seccionamento de nós perturbados, para geradores de baixa potência, os valores de S_i concentram-se nos dois extremos. Já para os

geradores de alta potência, os valores variam significativamente por toda faixa possível. Em ambos os casos, a centralidade de intermediação não mostra qualquer influência sobre a resiliência dos nós.

Por último, Fig. A.4 mostra os mesmos resultados que a Fig. A.3, com cores trazendo informações adicionais. Geradores em redes com valor médio de S_i maior que 0,5 são mostrados em preto, e os demais, em vermelho. Note-se que algumas redes tendem a possuir somente nós vulneráveis. Portanto, nesse caso, S_i mostra ser dependente de alguma medida (até então desconhecida) da rede e, não, de b_i .

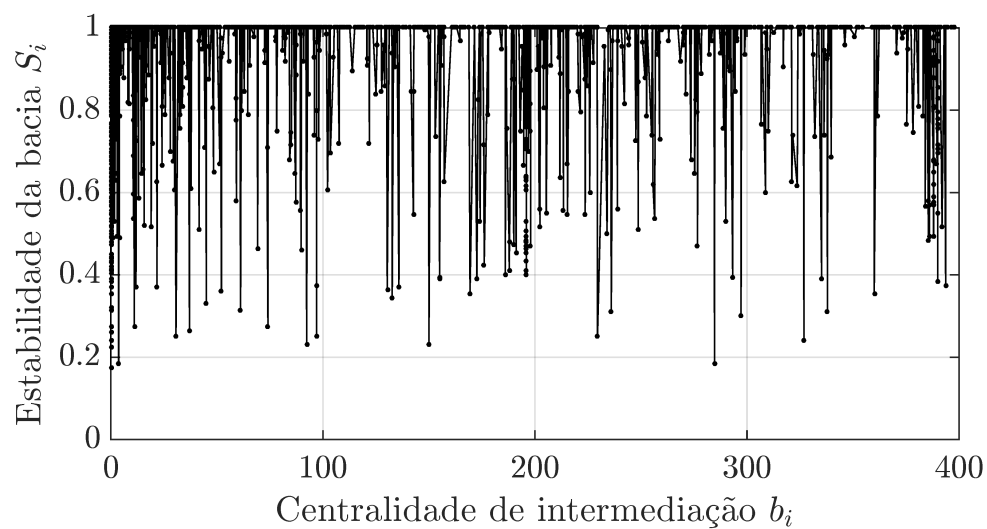


(a)

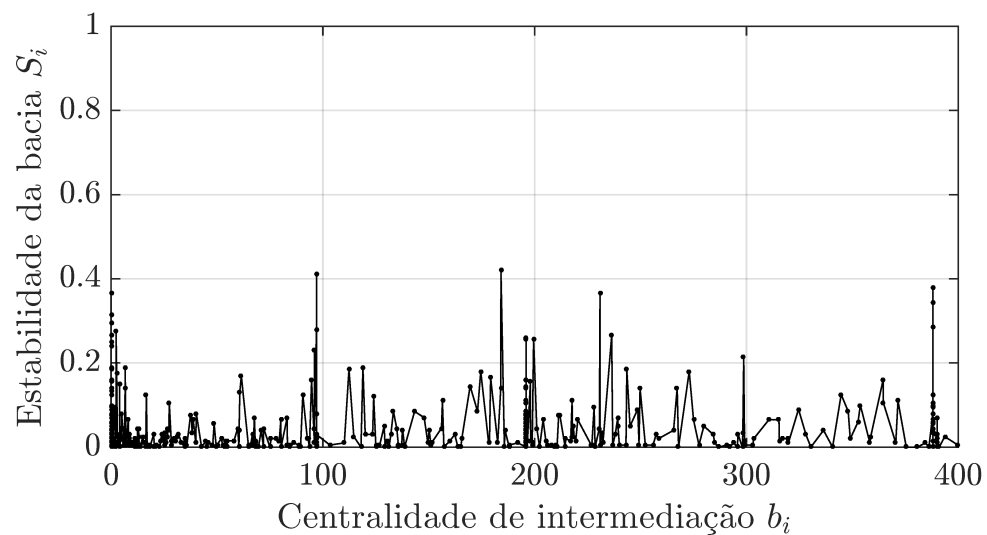


(b)

Figura A.1: Estabilidade da bacia em função da centralidade de intermediação de nós para o caso homogêneo, (a) sem seccionamento e (b) com $t_{\text{trip}} = 0,005$.



(a)

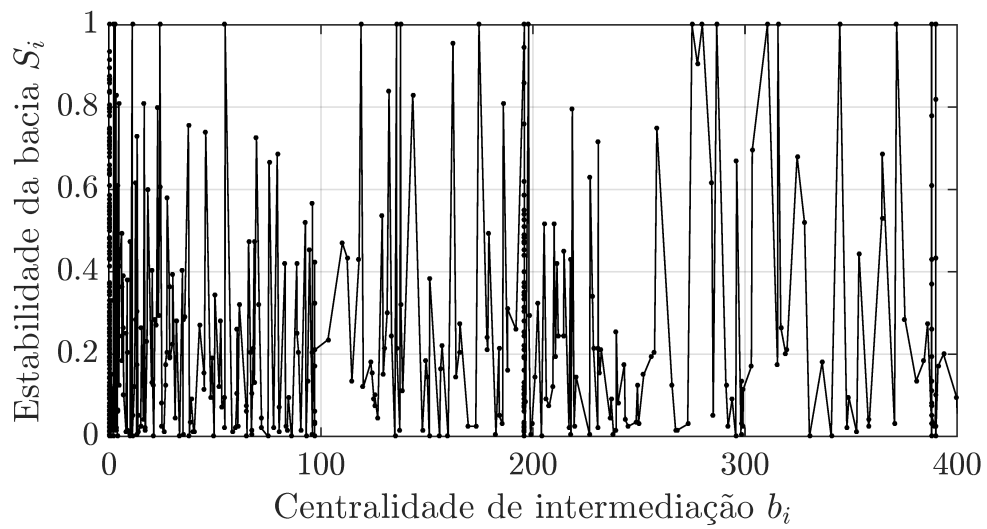


(b)

Figura A.2: Estabilidade da bacia em função da centralidade de intermediação de nós para o caso heterogêneo sem seccionamento. (a) Nós de menor e (b) maior potências.

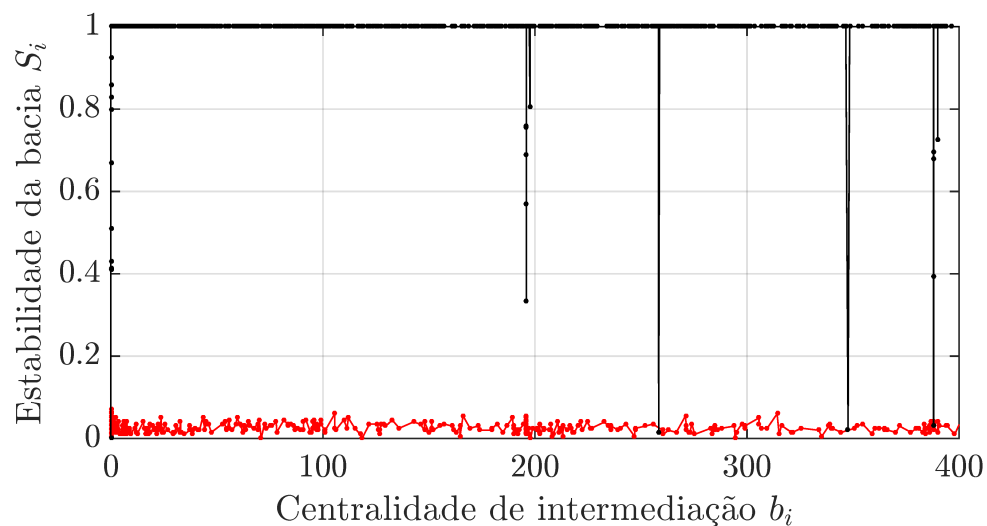


(a)

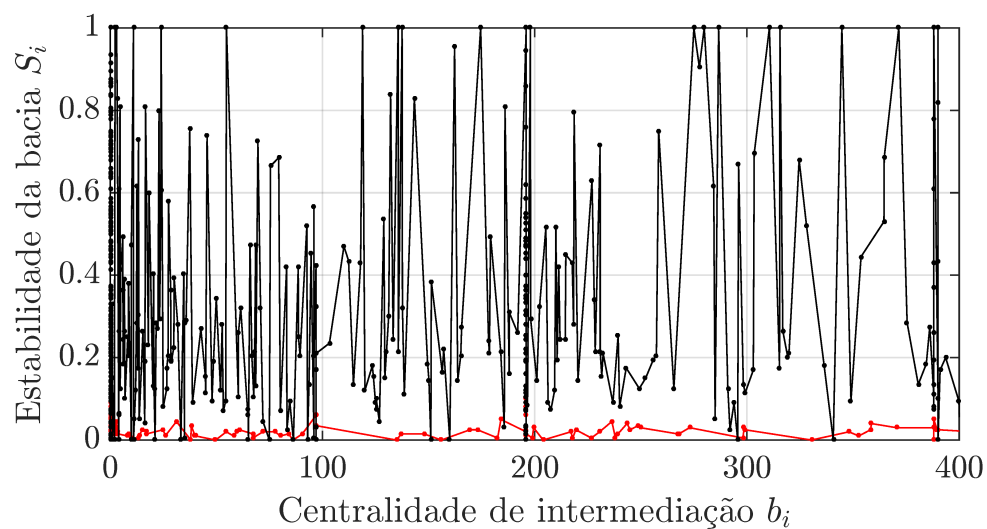


(b)

Figura A.3: Estabilidade da bacia em função da centralidade de intermediação de nós para o caso heterogêneo e $t_{\text{trip}} = 0,005$. (a) Nós de menor e (b) maior potências.



(a)



(b)

Figura A.4: Estabilidade da bacia em função da centralidade de intermediação de nós para o caso heterogêneo e $t_{\text{trip}} = 0,005$ com destaque para algumas redes. (a) Nós de menor e (b) maior potências. Valores para nós de redes com valor médio de S_i menor que 0,5 são mostrados em vermelho.

