UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

Otavio Prates Aguiar

CONEXÃO DE CISALHAMENTO CONSTITUÍDA POR FUROS EM CHAPA PREENCHIDOS COM CONCRETO COM BARRA PASSANTE: COMPORTAMENTO EM MEIO CONFINADO

Belo Horizonte
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

"CONEXÃO DE CISALHAMENTO CONSTITUÍDA POR FUROS EM CHAPA PREENCHIDOS COM CONCRETO COM BARRA PASSANTE: COMPORTAMENTO EM MEIO CONFINADO"

Otavio Prates Aguiar

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Doutor em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Rodrigo Barreto Caldas - DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Hermes Carvalho - DEES - UFMG

Prof. Dr. Ricardo Hallal Fakury - DEES - UFMG

Prof. Dr. Pedro Colmar Gonçalves da Silva Vellasco - UERJ

Prof. Dr. Rui Antônio Duarte Simões - Universidade de Coimbra

Belo Horizonte, 23 de outubro de 2020

Documento assinado eletronicamente por **Hermes Carvalho**, **Professor do Magistério Superior**, em 26/10/2020, às 17:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Pedro Colmar Gonçalves da Silva Vellasco**, **Usuário Externo**, em 29/10/2020, às 10:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Barreto Caldas**, **Professor do Magistério Superior**, em 29/10/2020, às 12:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Rui António Duarte Simões**, **Usuário Externo**, em 29/10/2020, às 14:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Hallal Fakury**, **Pró-reitor(a)**, em 30/10/2020, às 15:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0325133** e o código CRC **DC8ED0A6**.

Referência: Processo nº 23072.235957/2020-89 SEI nº 0325133

A282c

Aguiar, Otavio Prates.

Conexão de cisalhamento constituída por furos em chapa preenchidos com concreto com barra passante [recurso eletrônico] : comportamento em meio confinado / Otavio Prates Aguiar. - 2020.

1 recurso online (163 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Rodrigo Barreto Caldas.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 143-163.

Bibliografia: f. 138-142.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Conectores de cisalhamento - Teses. 3. Concreto - Teses. I. Caldas, Rodrigo Barreto. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)

Ficha catalográfica: Biblioteca Profº Mário Werneck, Escola de Engenharia da UFMG

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Rodrigo Caldas pela orientação, pela dedicação em seu trabalho e pela amizade que desenvolvemos ao longo desses anos.

Ao colega de projeto e amigo Paulo Estevão, pela parceria, pelos momentos de descontração e por todo seu esforço nesse trabalho.

Aos colegas Hermano Cardoso, Lucas Santos, Júlia Prates e Larice Justino, com quem tive o prazer de trabalhar durante esse período.

Aos técnicos Geraldo Silva, José Simeão, Heron Resende e Gabriel Passos, e ao aluno de iniciação científica Gabriel Silva, pela valiosa ajuda na execução dos ensaios e pelos momentos de descontração no laboratório.

À minha família, especialmente à minha mãe, Maria Inês, pelo apoio incondicional, e ao meu pai, Fernando Vitor, que foi quem despertou em mim o interesse pelos números e pela ciência.

À minha querida esposa, Marina, por estar ao meu lado durante todo esse período. Seu carinho e incentivo diários foram o que me trouxeram ao fim dessa etapa.

Muito obrigado!

Este trabalho contou com suporte financeiro dos órgãos CNPq, CAPES e FAPEMIG, e com fornecimento de materiais pelas empresas MC Bauchemie e Lafarge-Holcim Cimentos.

RESUMO

Nesse trabalho, realizaram-se investigações experimentais e numéricas e desenvolveu-se um modelo analítico para descrever o comportamento de conectores de cisalhamento constituídos por furos em chapas preenchidos com concreto com barra passante, capaz de prever tanto a capacidade resistente quanto a capacidade de deslizamento desses conectores quando empregados em ponto confinado de uma seção mista. Este trabalho foi realizado, pois observou-se que a maior parte dos estudos e modelos de cálculo desenvolvidos até o presente, situam o conector em um ponto superficial ou não confinado da seção mista. Contudo, sabe-se que o conector em questão apresenta considerável melhora em termos de capacidade resistente e capacidade de deslizamento, quando empregado em situação confinada, pois, enquanto na situação superficial o conector tende a falhar de forma frágil por destacamento do concreto, na situação confinada o conector tende a falhar de forma dúctil por ruptura da barra passante. Assim sendo, buscando proporcionar um melhor aproveitamento desses conectores em situação confinada, foi realizado um aprofundado estudo de seu comportamento, descrevendo os efeitos de segunda ordem na barra passante e a curva força-deslizamento até seu ponto de ruptura. O modelo desenvolvido foi testado e calibrado com diversos ensaios experimentais, tanto desse trabalho, quanto de outros autores, mostrando-se válido e com amplos limites de aplicabilidade e tendo apresentado forte correlação com dados experimentais.

Palavras-chave: Estrutura mista. Conector de cisalhamento. Perfobond. Pino. Barra passante. Efeito de segunda ordem. Catenária. Capacidade de deslizamento. Confinamento.

ABSTRACT

In this work, experimental and numerical investigations were conducted, and an analytical model was proposed to describe the behavior of circular openings with transverse bars as steel-concrete shear connectors. The aim was to predict both the strength and slip capacity of these connectors when applied in a confined location of a composite section. This work was conducted because most studies and design models currently available place the connector in a superficial or non-confined location of the composite section, however, it has been shown that the referred connector shows considerable increase in strength and slip capacity when in confined situations, because, while in superficial situations the connector tends to show brittle behavior and fail by concrete spalling, in confined situation it tends to show ductile behavior and fail by rupture of rebar. Therefore, to improve usage of these connectors in confined situations, an in-depth study of its behavior was carried out, describing second order effects in the rebar and the load-slip curve up until failure. The model was tested and calibrated with several experimental results, both from this work and from other authors, proving to be valid and having a wide range of applicability and showing strong correlation with experimental data.

Keywords: Composite structure. Shear connector. Perfobond. Dowel. Transverse bar. Second order. Catenary. Slip capacity. Confinement.

SUMÁRIO

Apêndices:

LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
CAT	Catenária (Modelo Analítico)
CEB	*Comite Euro-internacional du Beton*
CoSFB	*Composite Slim-Floor Beam*
DEES	Departamento de Engenharia de Estruturas
EN	Norma Europeia
EYM	*European Yield Model*
FIP	*International Federation for Prestressing*
FPCB	Furo(s) Preenchido(s) com Concreto com Barra Passante (Conector de Cisalhamento)
FPC	Furo(s) Preenchido(s) com Concreto (Conector de Cisalhamento)
MEF	Método dos Elementos Finitos
NBR	Norma Brasileira
TRA	Estágio de transição (Modelo Analítico)
T1, T2	Tipologias de protótipos experimentais
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
VAE	Viga sobre Apoio Elástico (Modelo Analítico)

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras romanas minúsculas

b	Coeficiente de regressão
d	Diâmetro da barra passante
d_c	Dano à compressão no concreto
d_t	Dano à tração no concreto
e_0	Distância inicial entre a barra passante e a borda comprimida do furo
e_u	Distância última entre a barra passante e a borda comprimida do furo
f_c	Resistência à compressão do concreto
f_{cc}	Resistência à compressão do concreto em estado tri-axial no contato com a barra de armadura
f_{cm}	Resistência à compressão média do concreto
f_{ctm}	Resistência à tração média do concreto
f_{s1}	Resistencia ao cisalhamento do concreto nas interfaces de deslizamento

f_{s2}	Resistência residual ao cisalhamento do concreto nas interfaces de deslizamento
f_u	Resistência à ruptura do aço
f_y	Resistência ao escoamento do aço
K	Rigidez à deflexão da barra passante
k_{c1}	Rigidez ao encurtamento em regime elástico do volume de concreto entre a barra passante e a borda comprimida do furo
k_{c2}	Rigidez ao encurtamento em regime plástico do volume de concreto entre a barra passante e a borda comprimida do furo
l	Distância entre a rótula lateral e a interface de deslizamento
l_b	Comprimento de ancoragem da barra passante
l_{ef}	Comprimento efetivo do carregamento transversal à barra passante entre a rótula lateral e a interface de deslizamento
l_{ref}	Comprimento de referência da região de concentração das deformações junto às rótulas plásticas
p	Profundidade do conector
s	Deslizamento
s_1	Deslizamento no ponto de cedência ou ruptura ao cisalhamento do concreto do conector
s_2	Deslizamento no ponto de estabilização da resistência residual
s_I	Deslizamento no início da degradação da rigidez do conector
s_R	Deslizamento no ponto de força máxima do conector
s_u	Capacidade de deslizamento do conector ou deslizamento máximo
t	Espessura da chapa
u	Deflexão da barra passante
u_{pl}	Deslocamento plástico equivalente
$u_{plf,S}$	Deslocamento plástico equivalente no ponto de fratura ao cisalhamento
u_u	Deflexão da barra passante no limite de resistência
w	Abertura de fissura
w_c	Abertura crítica de fissura

Letras romanas maiúsculas

A_{ac}	Área de contato aço-concreto dentro da área A_{comp}
Ac	Taxa de armadura confinante
A_c	Área de concreto no furo
A_{cc}	Área de contato concreto-concreto dentro da área A_{comp}
A_{comp}	Área projetada pelo cone de compressão do concreto na interface de deslizamento
D	Diâmetro do furo
D_i	Dano no aço
E_a	Módulo de elasticidade do aço
E_c	Módulo de elasticidade do concreto
F_{cc}	Força resultante do carregamento transversal à barra passante entre a rótula lateral e a interface de deslizamento
F_{tr}	Força resultante de compressão transversal à interface de deslizamento
I	Momento de inércia
K	Rigidez do concreto sob a barra passante em regime elástico
K_p	Rigidez do concreto sob a barra passante em regime plástico
M	Momento fletor nas rótulas plásticas

M_p	Momento plástico máximo
M_r	Momento elástico máximo
M_s	Momento fletor na seção de ruptura
N	Força normal na barra passante
N_s	Esforço normal na seção de ruptura
P	Força atuante no conector
P_1	Força no ponto de cedência ou ruptura ao cisalhamento do concreto do conector
P_b	Força resistida pela barra passante
P_{bu}	Força resistida pela barra passante no limite de resistência
P_c	Força de compressão no volume de concreto entre a barra passante e a borda comprimida do furo
P_{c1}	Força de plastificação do volume de concreto entre a barra passante e a borda comprimida do furo
P_I	Força no início da degradação da rigidez do conector
P_R	Capacidade resistente do conector ou força máxima
P_{Rk}	Capacidade resistente característica do conector
P_s	Força resistida pelo atrito nas interfaces de deslizamento
P_{sc}	Força resistida pelo cisalhamento do concreto nas interfaces de deslizamento
P_{sc1}	Capacidade resistente do concreto cisalhado nas interfaces de deslizamento
P_{sc2}	Capacidade resistente residual do concreto cisalhado nas interfaces de deslizamento
P_{sf}	Força resistida pelo atrito nas interfaces de deslizamento
P_u	Força no limite de resistência ou ponto de deslizamento máximo do conector
R^2	Fator de determinação
V	Força cortante na barra passante
V_s	Esforço cortante na seção de ruptura

Letras gregas minúsculas

α_f	Fator de ajuste da resistência ao cisalhamento do concreto nas interfaces de deslizamento
α_p	Fator de ajuste da rigidez do concreto sob a barra passante em regime plástico
α_r	Fator de ajuste da resistência residual ao cisalhamento do concreto nas interfaces de deslizamento
α_s	Fator de ajuste do deslizamento no ponto de ruptura ao cisalhamento do concreto
α_{uni}	Fator de ajuste da curva única para o comportamento força-deflexão da barra passante
α_ϕ	Fator de ajuste da inclinação da barra no ponto de intersecção com a interface de deslizamento
β	Coeficiente de rigidez do modelo de viga sobre apoio elástico
β_b	Fator de ajuste da rigidez secante da barra entre o início da formação das rótulas plásticas laterais e o início da plastificação do concreto fora do furo
β_s	Fator de ajuste do trecho inicial da curva força-deslizamento do concreto cisalhado nas interfaces de deslizamento
γ_a	Densidade do aço
γ_c	Densidade do concreto
ε	Deformação
ε_{pl}	Deformação plástica
$\bar{\varepsilon}_{pl0}$	Deformação plástica no ponto de iniciação do dano
$\bar{\varepsilon}_{pl0,S}$	Deformação plástica no ponto de iniciação do dano ao cisalhamento
η	Parâmetro de falha

θ	Giro nas rótulas plásticas
θ_T	Estado de triaxialidade
μ	Coeficiente de atrito médio na interface de deslizamento na região de compressão transversal
μ_{ac}	Coeficiente de atrito na interface aço-concreto
μ_{cc}	Coeficiente de atrito na interface concreto-concreto
ν	Módulo de Poisson
σ_c	Tensão de compressão
σ_p	Tensão de plastificação
σ_t	Tensão de tração
τ	Tensão de cisalhamento
τ_c	Tensão de cisalhamento resistida pelo concreto
τ_f	Tensão de cisalhamento resistida pelo atrito
φ	Inclinação da barra no ponto de intersecção com a interface de deslizamento
$\bar{\sigma}$	Tensão verdadeira na ausência de dano

Letras gregas maiúsculas

Δ	Alongamento junto às rótulas plásticas
Δe	Encurtamento do volume de concreto entre a barra passante e a borda comprimida do furo
Δe_1	Encurtamento elástico máximo do volume de concreto entre a barra passante e a borda comprimida do furo
Δe_{max}	Limite máximo de encurtamento do volume de concreto entre a barra passante e a borda comprimida do furo (contato da barra com a borda do furo)
Δe_u	Encurtamento último do volume de concreto entre a barra passante e a borda comprimida do furo
Δ_{max}	Alongamento máximo junto às rótulas plásticas

7

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRÄ, W. EP0215148A1: Connecting means for a composite concrete supporting construction. *European Patent Office*, Stuttgart, 1985.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT NBR 5739:2018. *Concreto - Ensaios de Compressão de Corpos-de-Prova Cilíndricos*. Rio de Janeiro, Brasil, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT NBR 7222:2011. *Concreto e argamassa - Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos de prova cilíndricos*. Rio de Janeiro, Brasil, 2011.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT NBR 8522:2017. *Concreto - Determinação dos módulos estáticos de elasticidade e de deformação à compressão*. Rio de Janeiro, Brasil, 2017.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT NBR ISO 6892-1:2018. *Materiais metálicos - Ensaio de Tração Parte 1: Método de ensaio à temperatura ambiente*. Rio de Janeiro, Brasil, 2018.

ARCELORMITTAL EUROPE. Slim Floor – An innovative concept for floors, Design Guide. Disponível em: <*http://constructalia.arcelormittal.com*>. Acesso em: 24 de Abril, 2017.

BONORA N.; RUGGIERO A.; ESPOSITO L.; GENTILE D. CDM modelling of ductile failure in ferritic steels: Assessment of the geometry transferability of model parameters. *International Journal of Plasticity*, v. 22, n. 11, p. 2015-2047, 2006.

BRAUN, M. *Investigation of the Load-bearing Behaviour of Cosfb-dowels*. Tese de doutorado, *Université du Luxembourg*, Luxemburgo, 2018.

BRAUN, M.; OBIALA, R.; ODENBREIT, C. Numerical simulation of the load bearing behaviour of concrete dowels in slim-floor construction. *Proceedings of Eurosteel*, v. 1, p. 1831-1840, 2017.

COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON - CEB FIP *Model Code 1990*. Lausanne, Switzerland, 1993.

CORNELISSEN, H.; HORDIJK, D.; REINHARDT, H. Experimental determination of crack softening characteristics of normal weight and lightweight concrete. *Heron*, v.31, n.2, pp. 45-56, 1986.

ENGSTRÖM, B. Combined effects of dowel action and friction in bolted connections. *Nordic Concrete Research*, v. 9, p. 14-33, 1990.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION - EN 1992-1-1:2004. *Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1-1: general rules and rules for buildings*. Brussels, 2004.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION - EN 1994-1-1:2004. *Eurocode 4: Design of composite steel and concrete structures. Part 1-1: general rules and rules for buildings*. Brussels, 2004.

HE, S.; FANG, Y.; LIU, L.; MOSALLAM, A. Experimental study on perfobond strip connector in steel–concrete joints of hybrid bridges. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 118, p. 169-179, 2016.

HOSAKA, T.; MITSUKI, K.; HIRAGI, H.; USHIJIMA, Y.; TACHIBANA, Y.; WATANABE, H. An experimental study on shear characteristics of perfobond strip and its rational strength equations. *Journal of Structural Engineering*, v. 46, p.1593-1604, 2000.

JOHANSEN, K. Theory of Timber Connections. *Proceedings of IABSE Conference*, Bern, p. 249-262, 1949.

KOPP, M.; WOLTERS, K.; CLASSEN, M.; HEGGER, J.; GÜNDEL M.; GALLWOSZUS, J.; HEINEMEYER, S.; FELDMANN, M. Composite Dowels as Shear Connectors for Composite Beams – Background to the Design Concept for Static Loading. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 147, p. 488-503, 2018.

NAKAJIMA, A.; NGUYEN, M. Strain behaviour of penetrating rebar in perfobond strip and its evaluation of shear resistance. *Journal of Japan Society of Civil Engineers*, v. 71, n.1, p. 99-112, 2015.

PAVLOVIĆ, M. *Resistance of Bolted Shear Connectors in Prefabricated Steel-Concrete Composite Decks*. Tese de doutorado, Universidade de Belgrado, Sérvia, 2013.

PAVLOVIĆ, M.; MARKOVIĆ, Z.; VELJKOVIĆ, M.; BUĐEVAC, D. Bolted Shear Connectors vs. Headed Studs Behaviour in Push-Out Tests. *Journal of Constructional Steel Research*, v.88, p. 134-149, 2013.

PENG-ZHEN, L.; LIN-FENG, C.; YANG, L.; ZHENG-LUN, L.; HUA, S. Study on Mechanical Behavior of Negative Bending Region Based Design of Composite Bridge Deck. *International Journal Civil Engineering*, v. 16, n. 5, p.489-497, 2018.

RICE, J.; TRACEY, D. On the Ductile Enlargement of Voids in Triaxial Stress Fields. *Journal of Mechanics Physics of Solids*, v. 17, p. 201-217, 1969.

SIMULIA CORP. Software ABAQUS 6.13, *Dassault Systèmes*, 2013.

SMITH, I.; FOLIENTE, G. Load and Resistance Factor Design of Timber Joints: International Practice and Future Direction. *Journal of Structural Engineering*, v. 128, n.1, p. 48-59, 2002.

SOBOTKA, Z. *Theorie plasticity a mezních stavů stavebních konstrukcí*, v. I-II, Praga, 1954/1955.

SØRENSEN, J.; HOANG, L.; OLESEN, J.; FISCHER, G. Testing and modeling dowel and catenary action in rebars crossing shear joints in RC. *Engineering Structures*, v. 145, p. 234-245, 2017.

SOURASHIAN, P.; OBASEKI, K.; ROJAS, M. Bearing strength and stiffness of concrete under reinforcing bars. *American Concrete Institute Material Journal (ACI)*, pp. 179-184, 1987

SU, Q.; WANG, H.; YANG, G. Experimental research on bearing mechanism of perfobond rib shear connectors. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 95, p. 22-31, 2014.

USHIJIMA, Y.; TETSUYA, H.; MITSUKI, M. An experimental study on shear characteristics of perfobond strip and its rational strength equations. *International Symposium on Connections between Steel and Concrete*, p. 1066-1075, 2001.

VIANNA, J.; COSTA-NEVES, L.; VELLASCO, P.; ANDRADE, S. Structural behaviour of T-Perfobond shear connectors in composite girders: An experimental approach. *Engineering Structures*, v. 30, n. 9, p.2381-2391, 2008.

XIAO, L.; LI, X.; MA, Z. Behavior of Perforated Shear Connectors in Steel–Concrete Composite Joints of Hybrid Bridges. *ASCE Journal of Bridge Engineering*, v. 22, n.4, 2016.

XU, F.; ZHANG, Z.; WANG, D.; HULIL, W. Application of a Perfobond Rib Shear Connector Group in a Beam–Arch Hybrid Bridge. *Structural Engineering International*, v. 25, n. 4, p.414-418, 2015.

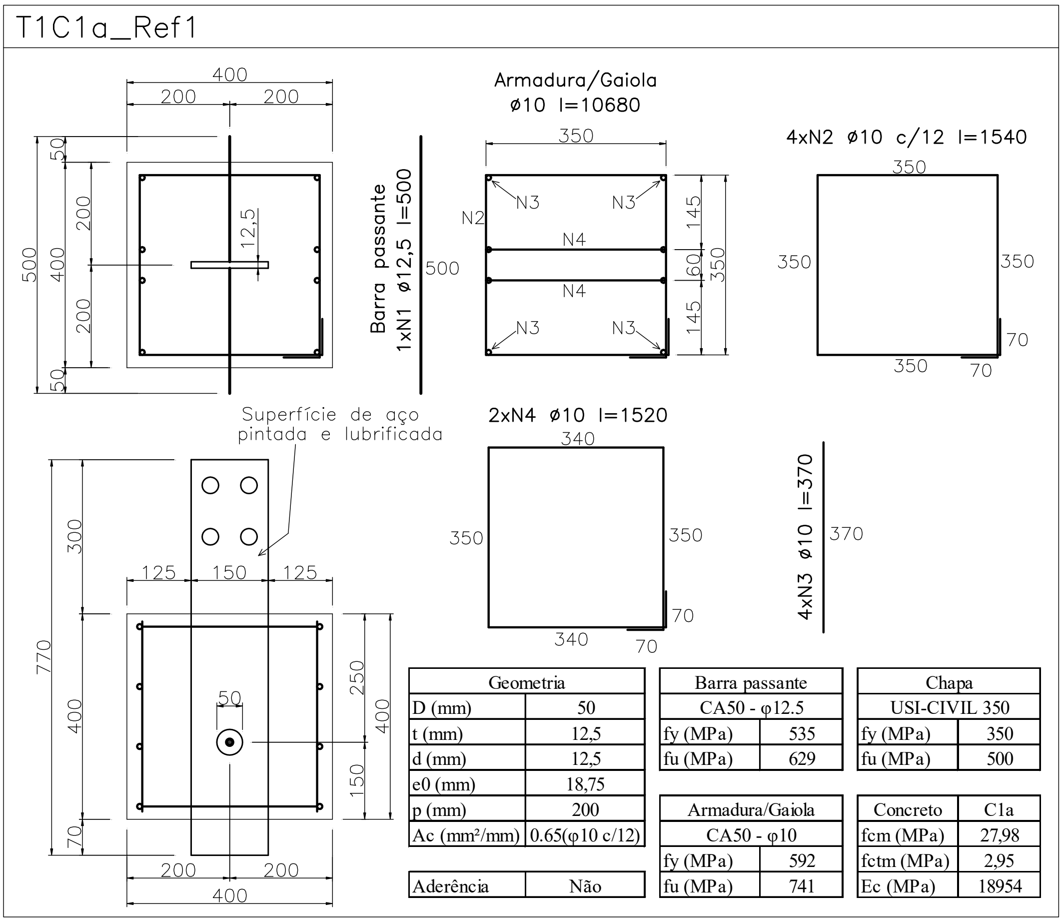
ZAPFE, C. *Trag- und Verformungsverhalten von Verbundträgern mit Betondübeln zur Übertragung der Längsschubkräfte*. Tese de doutorado, *Universität der Bundeswehr München*, Alemanha, 2001.

ZHAO, C.; LIU, Y. Experimental study of shear capacity of perfobond connector. *Engineering Mechanics*, v. 29, n. 12, p.349-354, 2012.

ZHENG, S.; LIUA, Y.; YODA, T.; LINB, W. Parametric study on shear capacity of circular-hole and long-hole perfobond shear connector. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 117, 2016; p. 64-80.

A

DETALHAMENTO DOS PROTÓTIPOS EXPERIMENTAIS



Geometria	
D (mm)	50
t (mm)	12,5
d (mm)	12,5
e0 (mm)	18,75
p (mm)	200
Ac (mm²/mm)	0.65(φ10 c/12)

Aderência	Não

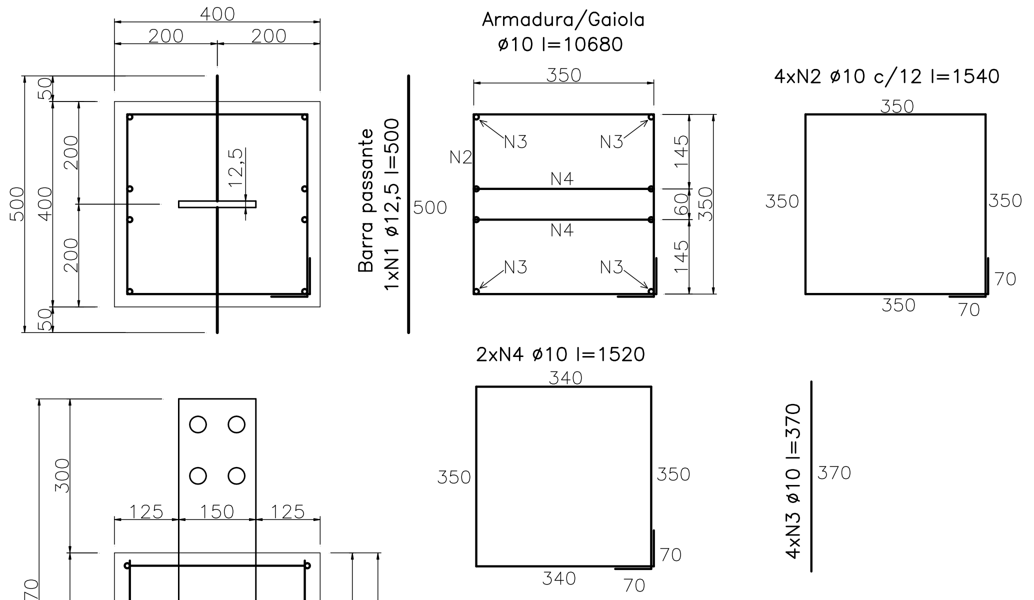
Barra passante	
CA50 - φ12.5	
fy (MPa)	535
fu (MPa)	629

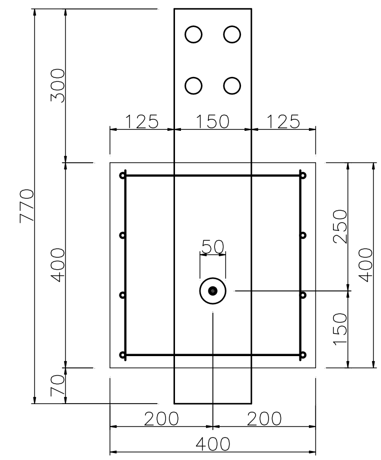
Chapa	
USI-CIVIL 350	
fy (MPa)	350
fu (MPa)	500

Armadura/Gaiola	
CA50 - φ10	
fy (MPa)	592
fu (MPa)	741

Concreto	C1a
fcm (MPa)	27,98
fctm (MPa)	2,95
Ec (MPa)	18954

T1C1b_Adr1





Geometria	
D (mm)	50
t (mm)	12,5
d (mm)	12,5
e0 (mm)	18,75
p (mm)	200
Ac (mm²/mm)	0.65(φ10 c/12)

Aderência	Sim

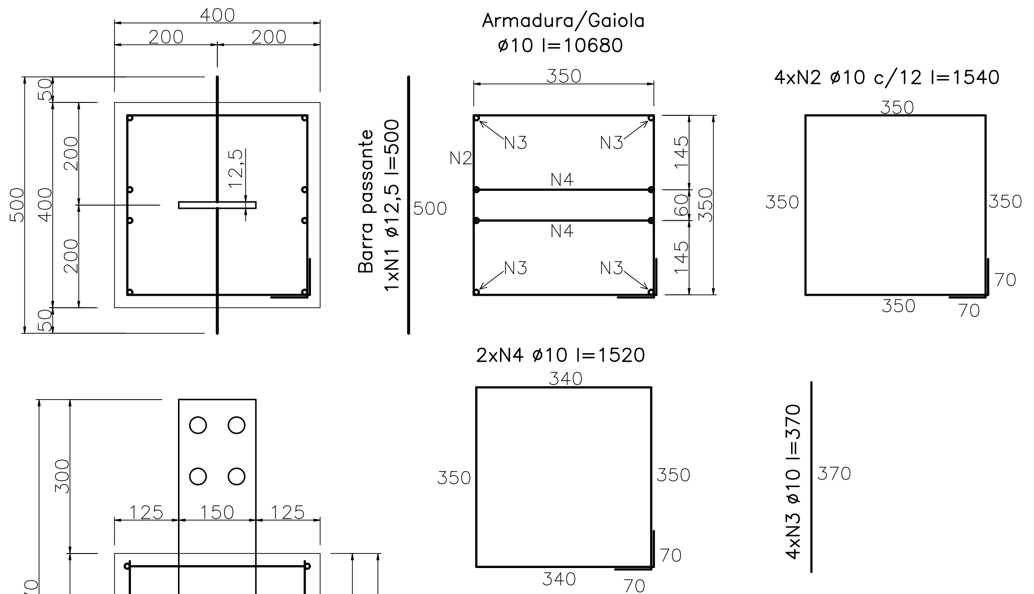
Barra passante	
CA50 - φ12.5	
fy (MPa)	535
fu (MPa)	629

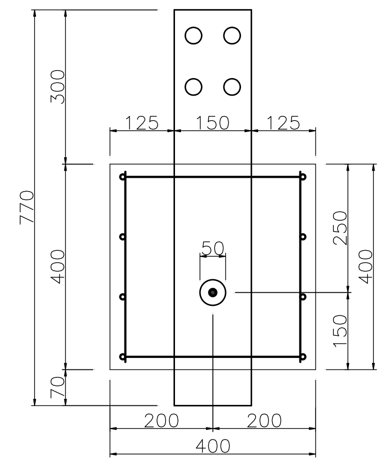
Armadura/Gaiola	
CA50 - φ10	
fy (MPa)	592
fu (MPa)	741

Chapa	
USI-CIVIL 350	
fy (MPa)	350
fu (MPa)	500

Concreto	C1b
fcm (MPa)	27,67
fctm (MPa)	2,94
Ec (MPa)	23217

T1C2a_Adr1





Geometria	
D (mm)	50
t (mm)	12,5
d (mm)	12,5
e0 (mm)	18,75
p (mm)	200
Ac (mm²/mm)	0.65(φ10 c/12)

Aderência	Sim

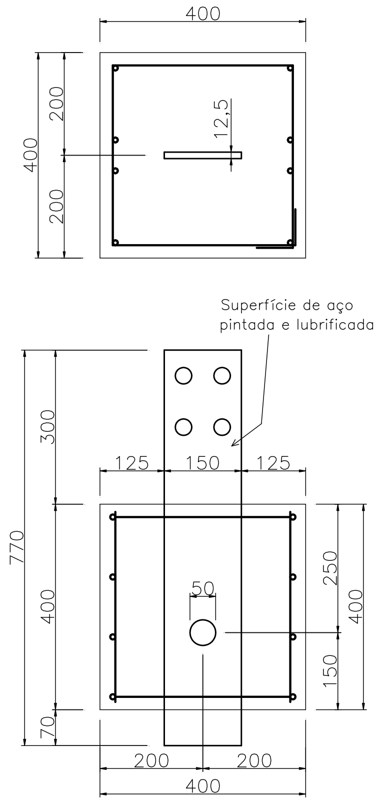
Barra passante	
CA50 - φ12.5	
fy (MPa)	535
fu (MPa)	629

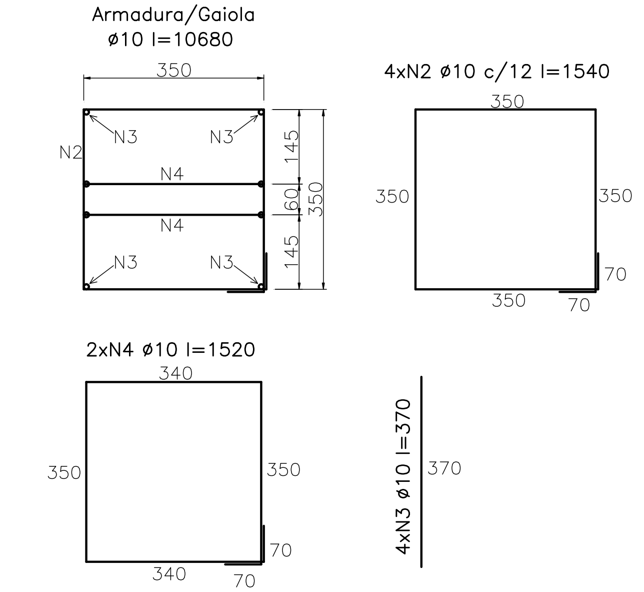
Armadura/Gaiola	
CA50 - φ10	
fy (MPa)	592
fu (MPa)	741

Chapa	
USI-CIVIL 350	
fy (MPa)	350
fu (MPa)	500

Concreto	C2a
fcm (MPa)	30,73
fctm (MPa)	3,88
Ec (MPa)	23582

T1C2b_d0





Geometria	
D (mm)	50
t (mm)	12,5
d (mm)	-
e0 (mm)	-
p (mm)	200
Ac (mm²/mm)	0.65(φ10 c/12)

Aderência	Não

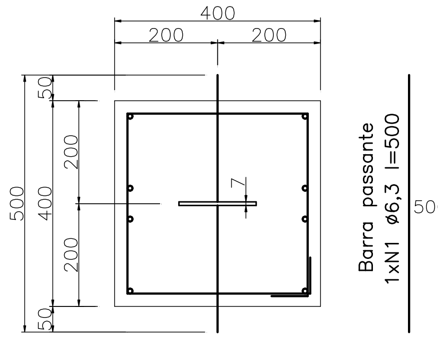
Barra passante	
-	
fy (MPa)	-
fu (MPa)	-

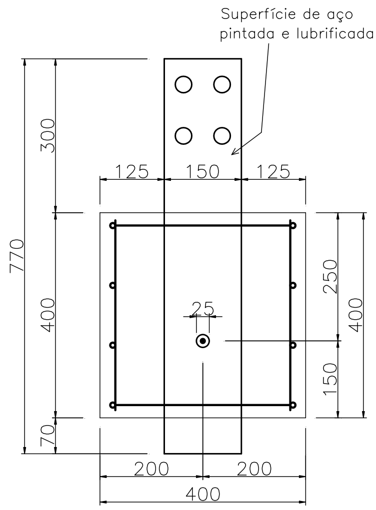
Armadura/Gaiola	
CA50 - φ10	
fy (MPa)	592
fu (MPa)	741

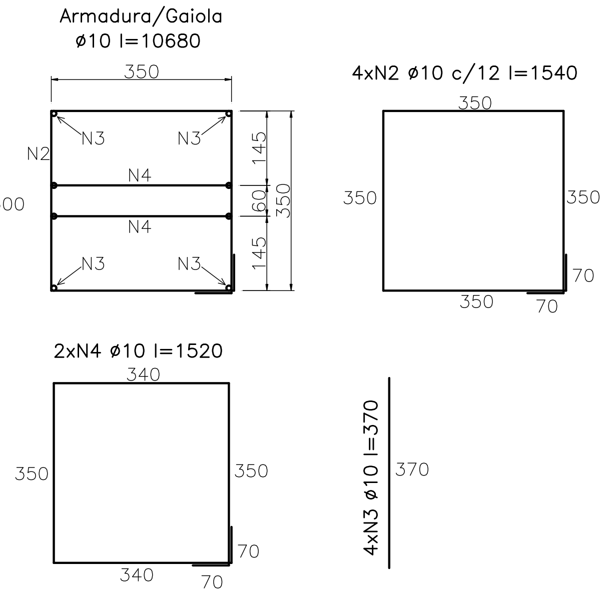
Chapa	
USI-CIVIL 350	
fy (MPa)	350
fu (MPa)	500

Concreto	C2b
fcm (MPa)	33,03
fctm (MPa)	3,79
Ec (MPa)	24128

T1C3a_D25t7d6







Geometria	
D (mm)	25
t (mm)	7
d (mm)	6,3
e0 (mm)	9,35
p (mm)	200
Ac (mm²/mm)	0.65(φ10 c/12)

Aderência	Não

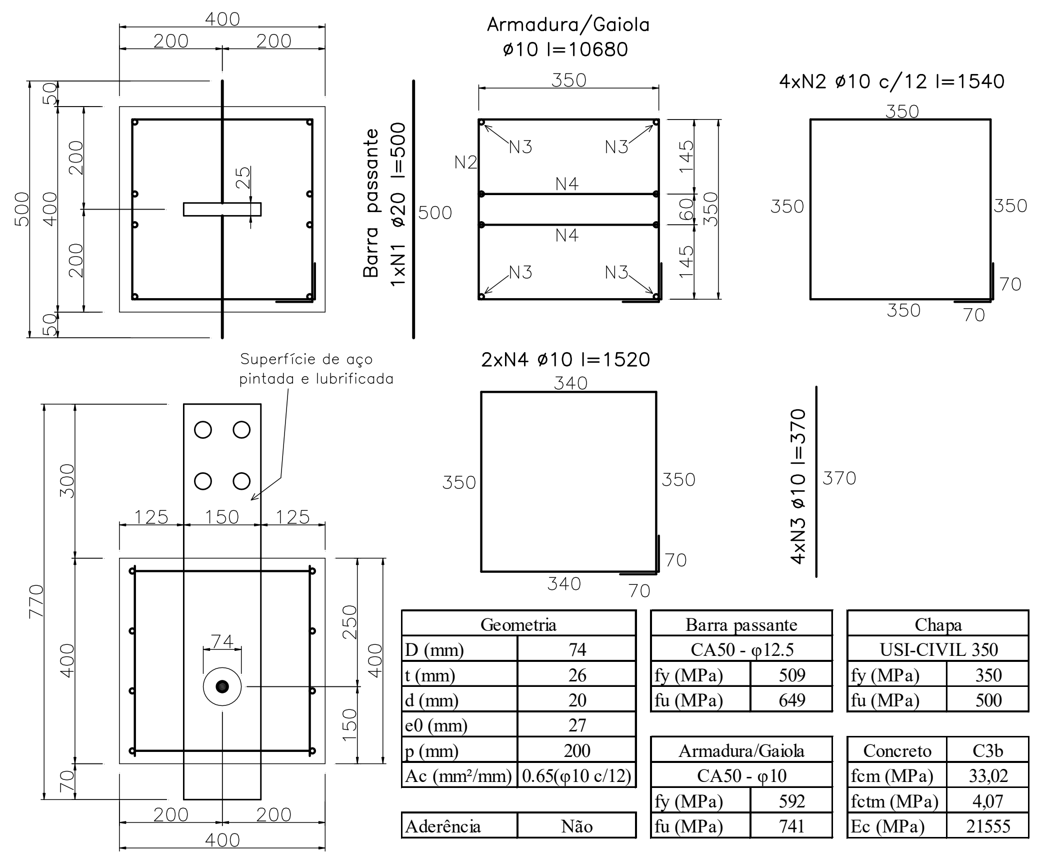
Barra passante	
CA50 - φ12.5	
fy (MPa)	608
fu (MPa)	740

Armadura/Gaiola	
CA50 - φ10	
fy (MPa)	592
fu (MPa)	741

Chapa	
USI-CIVIL 350	
fy (MPa)	350
fu (MPa)	500

Concreto	C3a
fcm (MPa)	28,84
fctm (MPa)	3,63
Ec (MPa)	23465

T1C3b_D74t26d20



Geometria	
D (mm)	74
t (mm)	26
d (mm)	20
e0 (mm)	27
p (mm)	200
Ac (mm²/mm)	0.65(φ10 c/12)
Aderência	Não

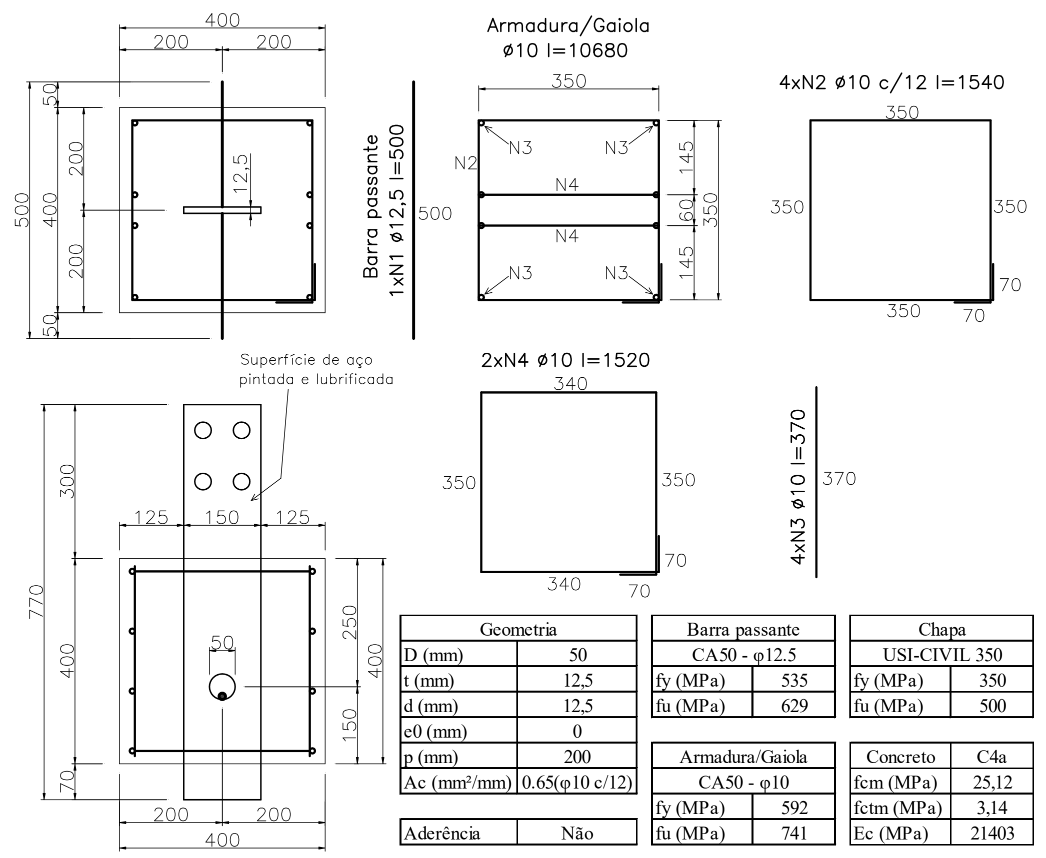
Barra passante	
CA50 - φ12.5	
fy (MPa)	509
fu (MPa)	649

Chapa	
USI-CIVIL 350	
fy (MPa)	350
fu (MPa)	500

Armadura/Gaiola	
CA50 - φ10	
fy (MPa)	592
fu (MPa)	741

Concreto	C3b
fcm (MPa)	33,02
fctm (MPa)	4,07
Ec (MPa)	21555

T1C4a_Esp0



Geometria	
D (mm)	50
t (mm)	12,5
d (mm)	12,5
e0 (mm)	0
p (mm)	200
Ac (mm²/mm)	0.65(φ10 c/12)
Aderência	Não

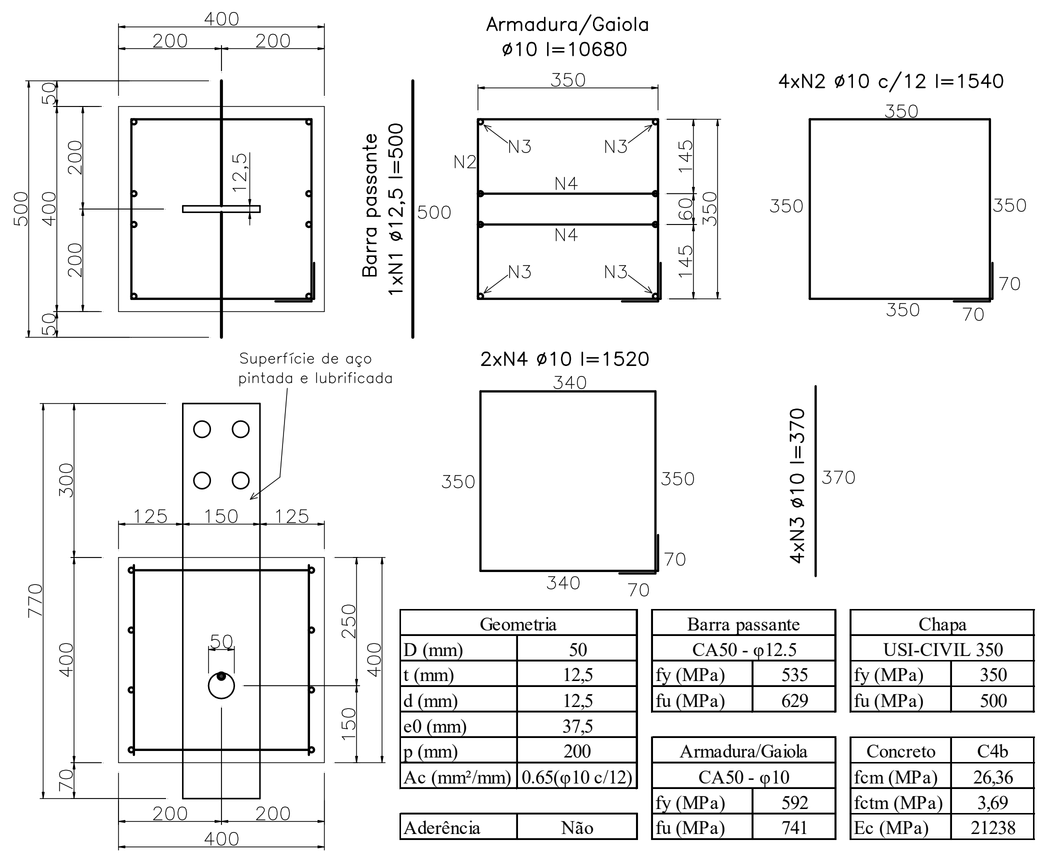
Barra passante	
CA50 - φ12.5	
fy (MPa)	535
fu (MPa)	629

Chapa	
USI-CIVIL 350	
fy (MPa)	350
fu (MPa)	500

Armadura/Gaiola	
CA50 - φ10	
fy (MPa)	592
fu (MPa)	741

Concreto	C4a
fcm (MPa)	25,12
fctm (MPa)	3,14
Ec (MPa)	21403

T1C4b_Esp38



Geometria	
D (mm)	50
t (mm)	12,5
d (mm)	12,5
e0 (mm)	37,5
p (mm)	200
Ac (mm²/mm)	0.65(φ10 c/12)
Aderência	Não

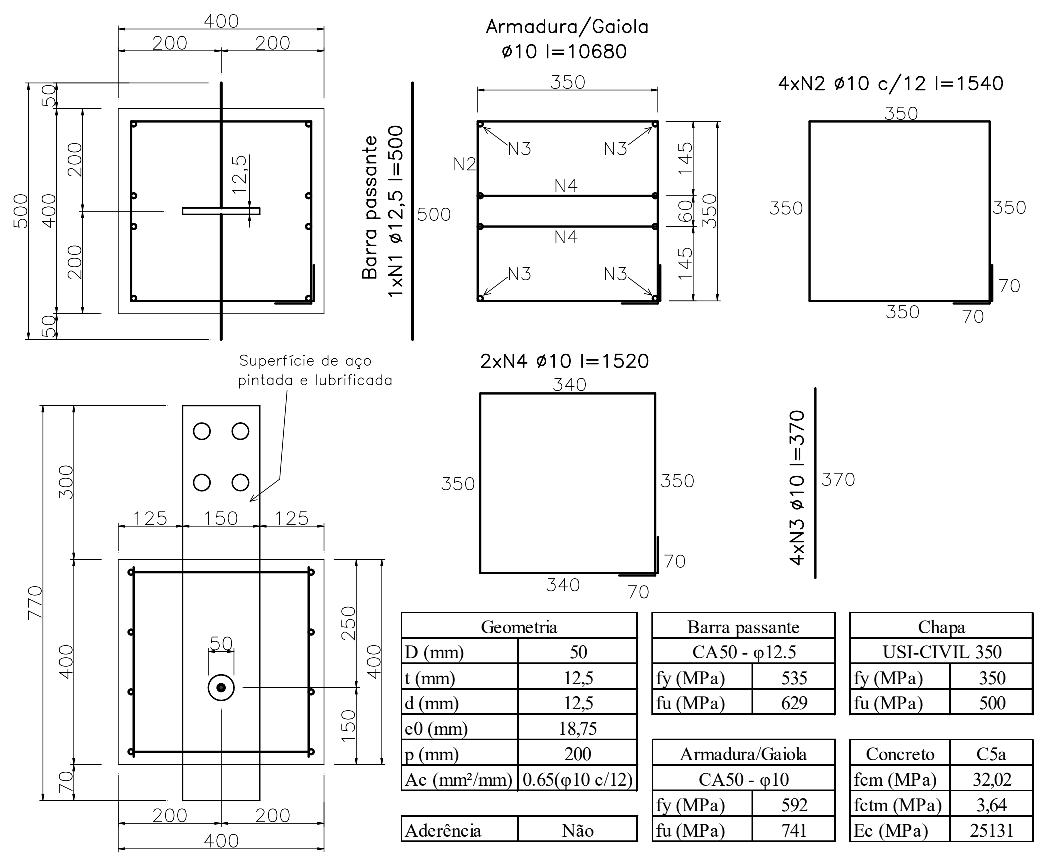
Barra passante	
CA50 - φ12.5	
fy (MPa)	535
fu (MPa)	629

Armadura/Gaiola	
CA50 - φ10	
fy (MPa)	592
fu (MPa)	741

Chapa	
USI-CIVIL 350	
fy (MPa)	350
fu (MPa)	500

Concreto	C4b
fcm (MPa)	26,36
fctm (MPa)	3,69
Ec (MPa)	21238

T1C5a_Ref1



Geometria	
D (mm)	50
t (mm)	12,5
d (mm)	12,5
e0 (mm)	18,75
p (mm)	200
Ac (mm²/mm)	0.65(φ10 c/12)
Aderência	Não

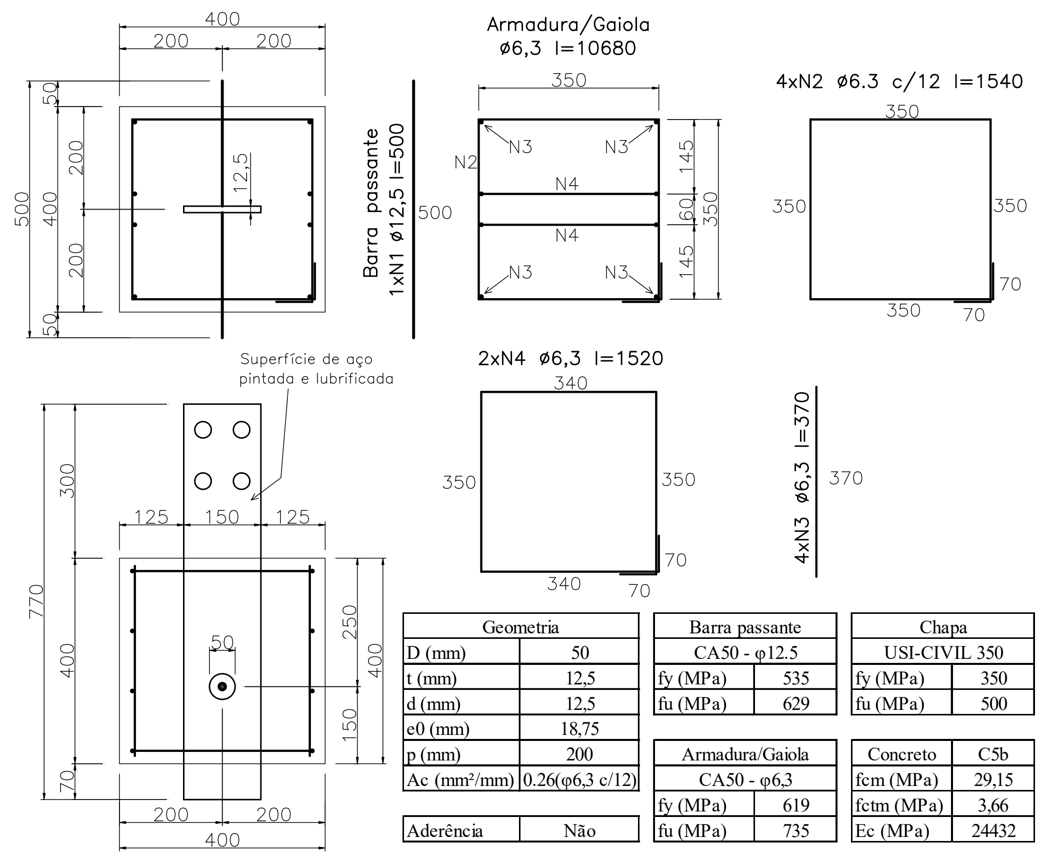
Barra passante	
CA50 - φ12.5	
fy (MPa)	535
fu (MPa)	629

Armadura/Gaiola	
CA50 - φ10	
fy (MPa)	592
fu (MPa)	741

Chapa	
USI-CIVIL 350	
fy (MPa)	350
fu (MPa)	500

Concreto	C5a
fcm (MPa)	32,02
fctm (MPa)	3,64
Ec (MPa)	25131

T1C5b_Ac26



Geometria	
D (mm)	50
t (mm)	12,5
d (mm)	12,5
e0 (mm)	18,75
p (mm)	200
Ac (mm²/mm)	0.26(φ6,3 c/12)

Aderência	Não

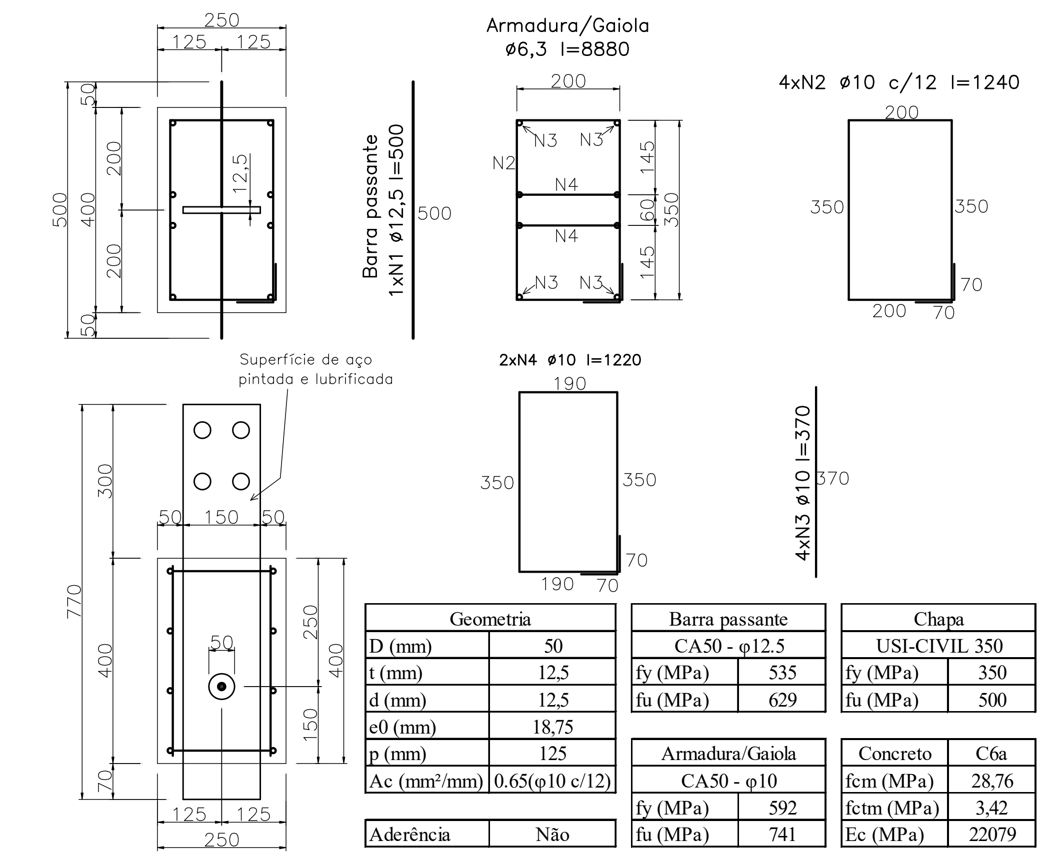
Barra passante	
CA50 - φ12.5	
fy (MPa)	535
fu (MPa)	629

Armadura/Gaiola	
CA50 - φ6,3	
fy (MPa)	619
fu (MPa)	735

Chapa	
USI-CIVIL 350	
fy (MPa)	350
fu (MPa)	500

Concreto	C5b
fcm (MPa)	29,15
fctm (MPa)	3,66
Ec (MPa)	24432

T1C6a_p125



Geometria	
D (mm)	50
t (mm)	12,5
d (mm)	12,5
e0 (mm)	18,75
p (mm)	125
Ac (mm²/mm)	0.65(φ10 c/12)

Aderência	Não

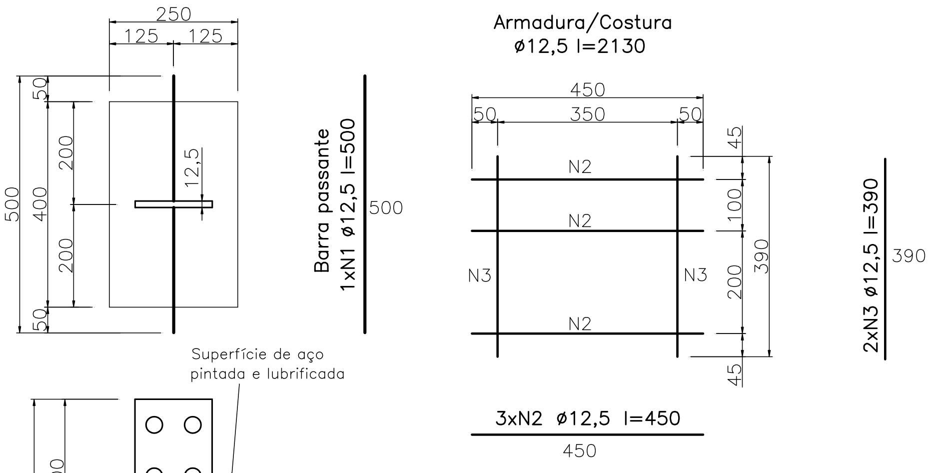
Barra passante	
CA50 - φ12.5	
fy (MPa)	535
fu (MPa)	629

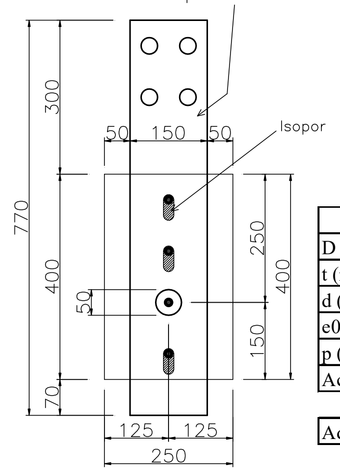
Armadura/Gaiola	
CA50 - φ10	
fy (MPa)	592
fu (MPa)	741

Chapa	
USI-CIVIL 350	
fy (MPa)	350
fu (MPa)	500

Concreto	C6a
fcm (MPa)	28,76
fctm (MPa)	3,42
Ec (MPa)	22079

T2C6a_Ref2





Geometria	
D (mm)	50
t (mm)	12,5
d (mm)	12,5
e0 (mm)	18,75
p (mm)	125
Ac (mm²/mm)	-

Aderência	Não

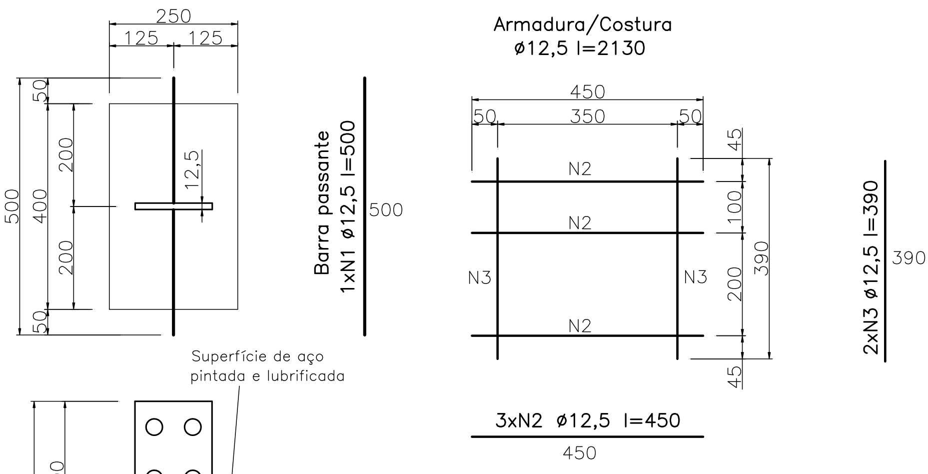
Barra passante	
CA50 - φ12.5	
fy (MPa)	535
fu (MPa)	629

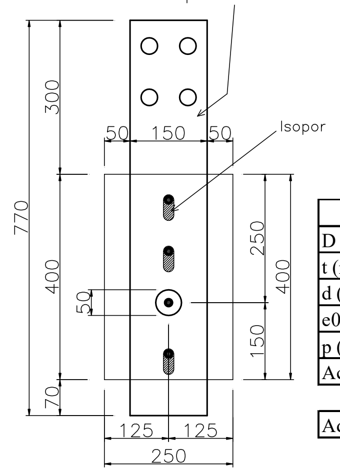
Armadura/Costura	
CA50 - φ12,5	
fy (MPa)	580
fu (MPa)	661

Chapa	
USI-CIVIL 350	
fy (MPa)	350
fu (MPa)	500

Concreto	C6a
fcm (MPa)	28,76
fctm (MPa)	3,42
Ec (MPa)	22079

T2C6b_Ref2





Geometria	
D (mm)	50
t (mm)	12,5
d (mm)	12,5
e0 (mm)	18,75
p (mm)	125
Ac (mm²/mm)	-

Aderência	Não

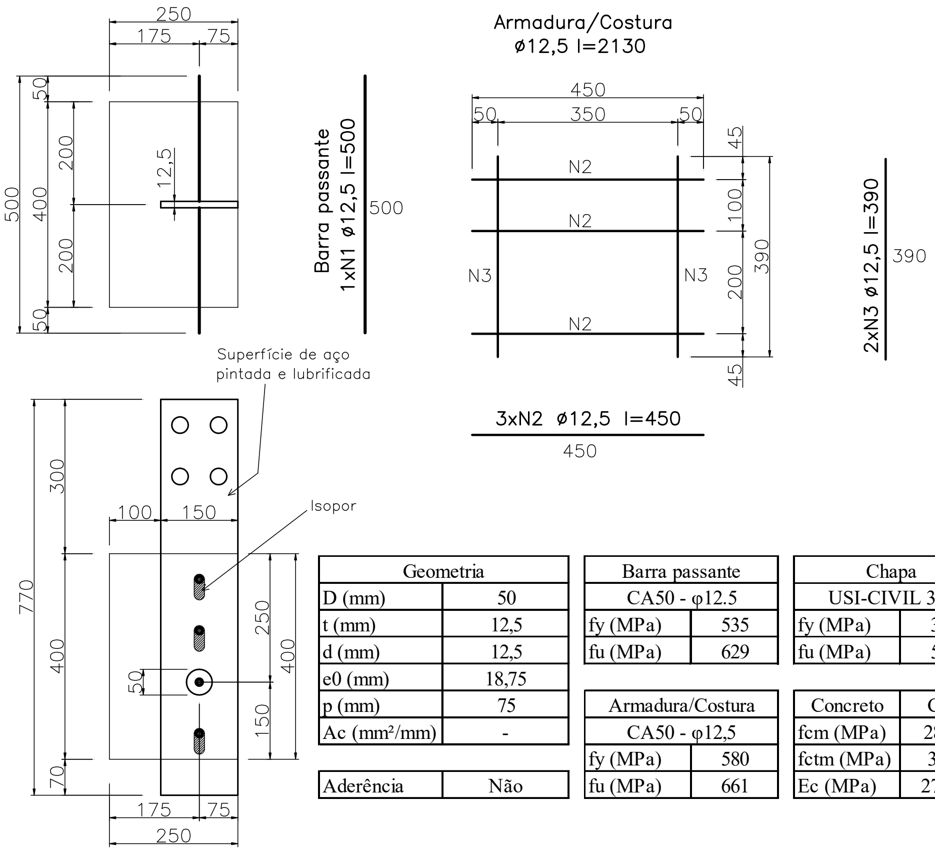
Barra passante	
CA50 - φ12.5	
fy (MPa)	535
fu (MPa)	629

Armadura/Costura	
CA50 - φ12,5	
fy (MPa)	580
fu (MPa)	661

Chapa	
USI-CIVIL 350	
fy (MPa)	350
fu (MPa)	500

Concreto	C6b
fcm (MPa)	28,13
fctm (MPa)	3,57
Ec (MPa)	27175

T2C6b_p75



Geometria	
D (mm)	50
t (mm)	12,5
d (mm)	12,5
e0 (mm)	18,75
p (mm)	75
Ac (mm²/mm)	-

Aderência	Não

Barra passante	
CA50 - φ12.5	
fy (MPa)	535
fu (MPa)	629

Armadura/Costura	
CA50 - φ12,5	
fy (MPa)	580
fu (MPa)	661

Chapa	
USI-CIVIL 350	
fy (MPa)	350
fu (MPa)	500

Concreto	C6b
fcm (MPa)	28,13
fctm (MPa)	3,57
Ec (MPa)	27175

B

PROCEDIMENTO PARA OBTENÇÃO DAS CURVAS DO MODELO *DUCTILE DAMAGE*

Descreve-se, a seguir, o procedimento realizado para se definir a curva tensão plástica verdadeira-deformação plástica localizada verdadeira ($\varepsilon^{pl} \times \bar{\sigma}^{pl}$) e a curva de evolução do dano ($u_{pl} \times D_i$) a partir da curva tensão nominal-deformação média nominal ($\varepsilon_{med}^{nom} \times \sigma^{nom}$) obtida em ensaio de tração de uma barra de aço.

1) Definição dos pontos principais na curva tensão-deformação nominal do ensaio de tração:

Os pontos são definidos conforme Figura B.1.

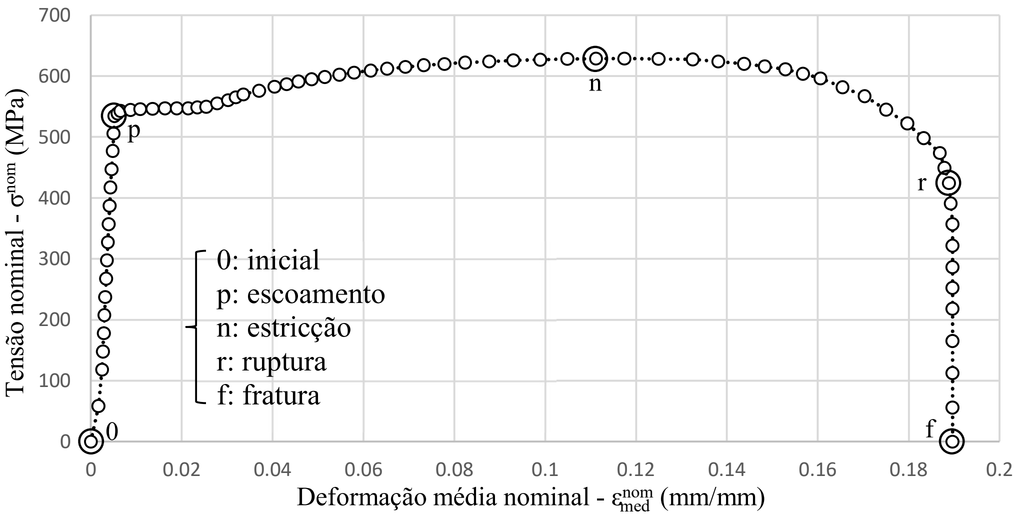


Figura B.1: Definição dos pontos principais na curva tensão-deformação nominal média.

2) Consideração da localização da deformação a partir do ponto de estricção:

A partir do ponto de início da estricção n, que corresponde ao ponto máximo da curva tensão-deformação nominal, ocorre redução gradual do comprimento l_i dentro do qual se dão os acréscimos de alongamento ($\Delta l_i - \Delta l_{i-1}$) no corpo de prova. O comprimento l_i decresce de um comprimento l_n, no ponto n, até um comprimento l_f, no ponto f, a uma taxa determinada por um fator exponencial α_L, causando considerável aumento na deformação ε_i^{nom}. Conforme Eqs. B.1 a B.2 e Figura B.2. l_f é tomado como o tamanho médio do elemento finito L_E, e l_n e α_L são definidos por processo de calibração.

$$\varepsilon_i^{nom} = \begin{cases} \Delta l_i / l_i \; ; \; i < n \\ \varepsilon_{i-1}^{nom} + (\Delta l_i - \Delta l_{i-1})/l_i \; ; \; i \geq n \end{cases} \tag{B.1}$$

$$l_i = \begin{cases} l_0 \; ; \; i < n \\ l_n - (l_n - l_f)\left(\dfrac{\Delta l_i - \Delta l_{i-1}}{\Delta l_r - \Delta l_n}\right)^{\alpha_L} \leq l_0 \; ; n \leq i \leq r \\ l_f = L_E \; ; i > r \end{cases} \tag{B.2}$$

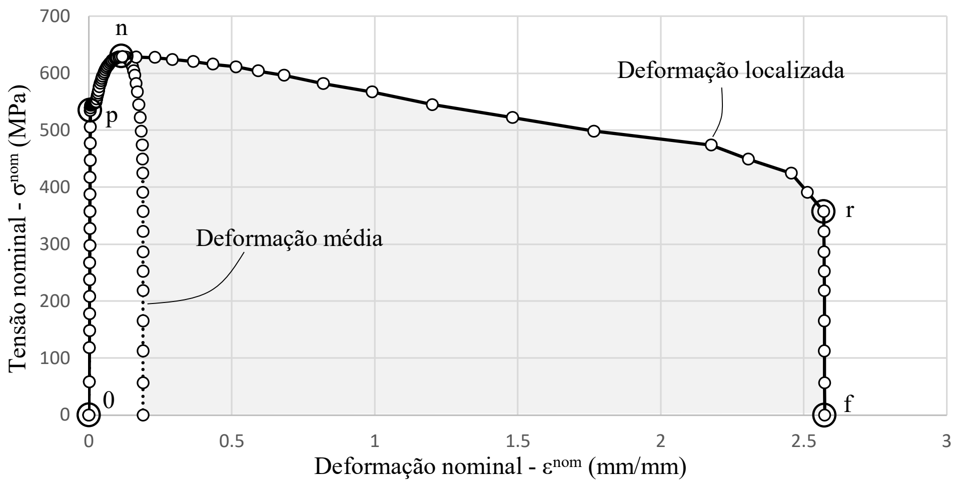


Figura B.2: Obtenção da curva tensão-deformação localizada nominal.

3) Definição da curva tensão-deformação nominal sem a influência do dano no material:

Considera-se que a curva tensão-deformação nominal sem dano seguiria um patamar horizontal a partir do ponto n, conforme Figura B.3. Portanto, a tensão nominal sem dano $\bar{\sigma}_i^{nom}$ fica definida pela Eq. B.3.

$$\bar{\sigma}_i^{nom} = \begin{cases} \sigma_i^{nom}; i < n \\ \sigma_n^{nom}; i \geq n \end{cases} \tag{B.3}$$

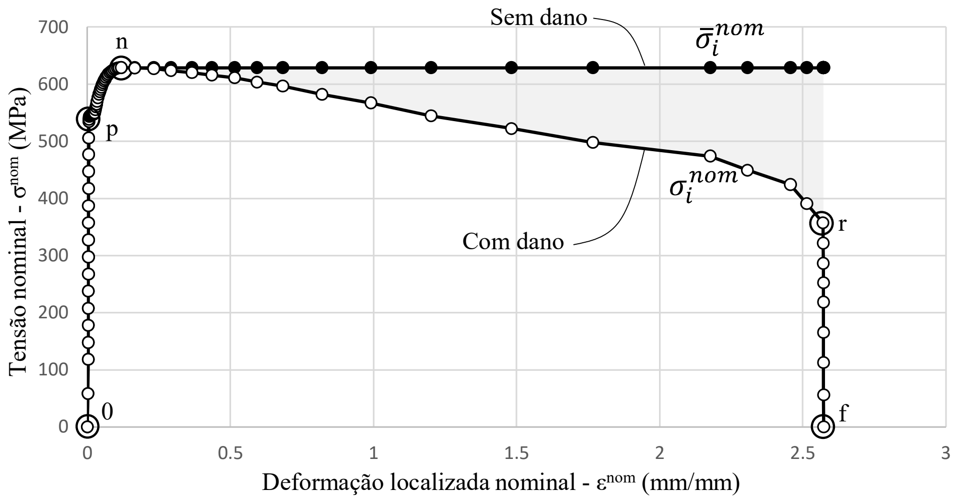


Figura B.3: Obtenção da curva tensão-deformação localizada nominal sem dano.

4) Conversão das tensões e deformações nominais em tensões e deformações plásticas verdadeiras:

Para as curvas com e sem dano, aplicam-se as Eqs. B.4 e B.5 para transformar a tensão nominal σ_i^{nom} em tensão verdadeira σ_i e a deformação nominal ε_i^{nom} em deformação plástica verdadeira ε_i^{pl}, chegando-se às curvas apresentadas na Figura B.4.

$$\sigma_i = \sigma_i^{nom}(1 + \varepsilon_i^{nom}) \quad \text{(B.4)}$$

$$\varepsilon_i^{pl} = ln\left(\frac{1 + \varepsilon_i^{nom}}{1 + \varepsilon_p^{nom}}\right) \quad \text{(B.5)}$$

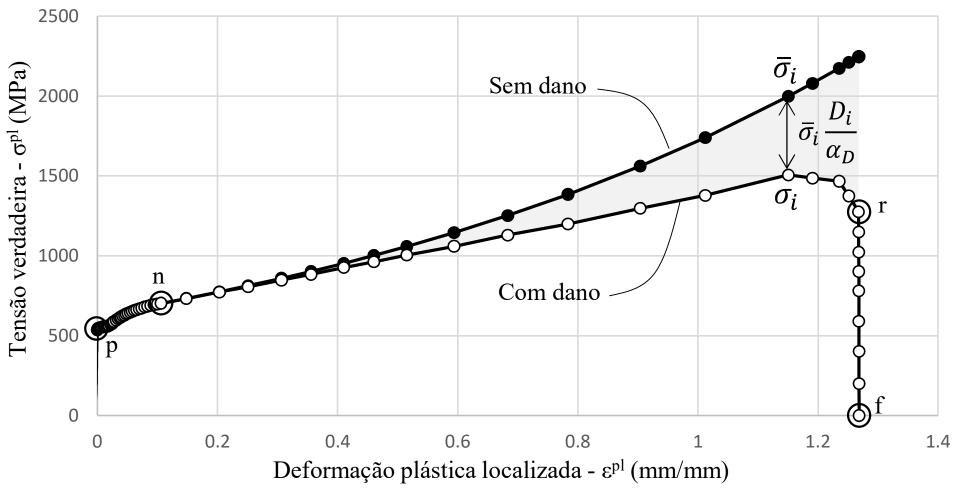


Figura B.4: Obtenção das curvas tensão-deformação plástica localizada verdadeira com e sem dano.

5) Obtenção e ajuste da variável de dano:

A variável de dano dúctil D_i expressa a diferença adimensional entre as curvas com e sem dano, apresentadas na Figura B.4, multiplicada por um fator α_D, que leva em consideração a distribuição não uniforme das deformações na seção transversal, conforme Eq. B.6. Segundo Bonora *et al.* (2006) o dano crítico D_{cr} para o aço, isto é, o dano D_i no instante da ruptura r, varia entre 0,55 e 0,65. Assim sendo, calibra-se α_D para que D_{cr} fique contido nesse intervalo. A curva de evolução do dano é apresentada na Figura B.5.

$$D_i = \begin{cases} (1 - \bar{\sigma}_i/\sigma_i)\alpha_D;\ n \leq i \leq r \\ 1;\ i = f \end{cases} \tag{B.6}$$

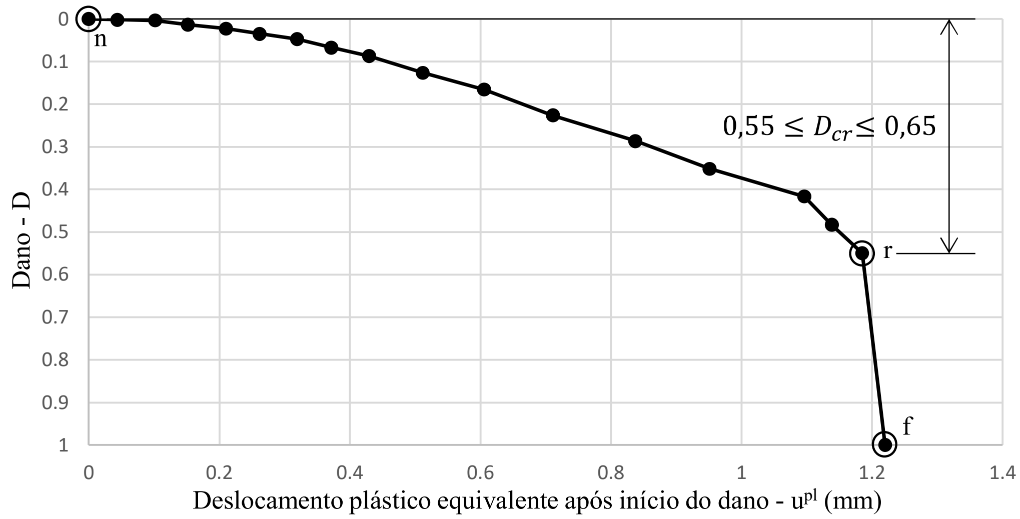


Figura B.5: Obtenção da curva de evolução do dano.

6) Obtenção do deslocamento plástico equivalente após início do dano:

A curva de evolução do dano, conforme apresentada na Figura B.5, é definida em função do deslocamento equivalente após a iniciação do dano no ponto n. Para se obter o deslocamento equivalente, aplicam-se as Eqs. B.7 e B.8, em que L_E é o tamanho médio do elemento finito na região de estricção e β_D é um fator de ajuste.

$$u_i^{pl} = u_f^{pl}\left(\varepsilon_i^{pl} - \varepsilon_n^{pl}\right)/\left(\varepsilon_f^{pl} - \varepsilon_n^{pl}\right);\ i \geq n \tag{B.7}$$
$$u_f^{pl} = \beta_D L_E\left(\varepsilon_f^{pl} - \varepsilon_n^{pl}\right) \tag{B.8}$$

Os parâmetros de ajuste l_n, α_L, α_D e β_D, das Eqs. B.2, B.6 e B.8, foram definidos em um processo iterativo de calibração. Na Tabela B.1 são apresentados os valores desses e de outros parâmetros referentes à simulação do ensaio de tração da barra passante de 12,5 mm.

Tabela B.1: Parâmetros para definição das curvas do modelo *Ductile Damage*.

Diâmetro da barra	Comprimento do corpo de prova	Dimensão do elemento finito	Constantes			
			Localização da deformação		Evolução do dano	
d (mm)	l_0 (mm)	L_E (mm)	l_n (mm)	α_L	α_D	β_D
12.5	150	1,0	138,60	0,08	1,69	1,05

C

FORMULAÇÃO DO MODELO DE VIGA SOBRE APOIO ELÁSTICO

O comportamento da barra passante em regime elástico foi descrito utilizando a teoria de vigas sobre apoio elástico. Dividiu-se a barra em dois trechos: o TRECHO 1, situado dentro do furo entre as interfaces de deslizamento e o TRECHO 2, que se estende indefinidamente à esquerda e à direita do TRECHO 1. O TRECHO 1 foi descrito como uma viga bi-apoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído e momentos nas extremidades e equacionado segundo a teoria de linha elástica. O TRECHO 2 foi descrito como uma viga semi-infinita sobre apoio elástico, submetida a uma força concentrada e um momento na extremidade.

Utilizando a teoria de vigas sobre apoio elástico, pôde-se também simular o comportamento da barra passante após a formação da rótula plástica central. Para isso, inseriu-se uma rótula e um par de momentos M_p no meio do TRECHO 1 e aplicou-se a mesma teoria para as novas condições de contorno. Na Figura C.1, apresenta-se a configuração do modelo para ambas as condições. A formulação do modelo é apresentada em seguida.

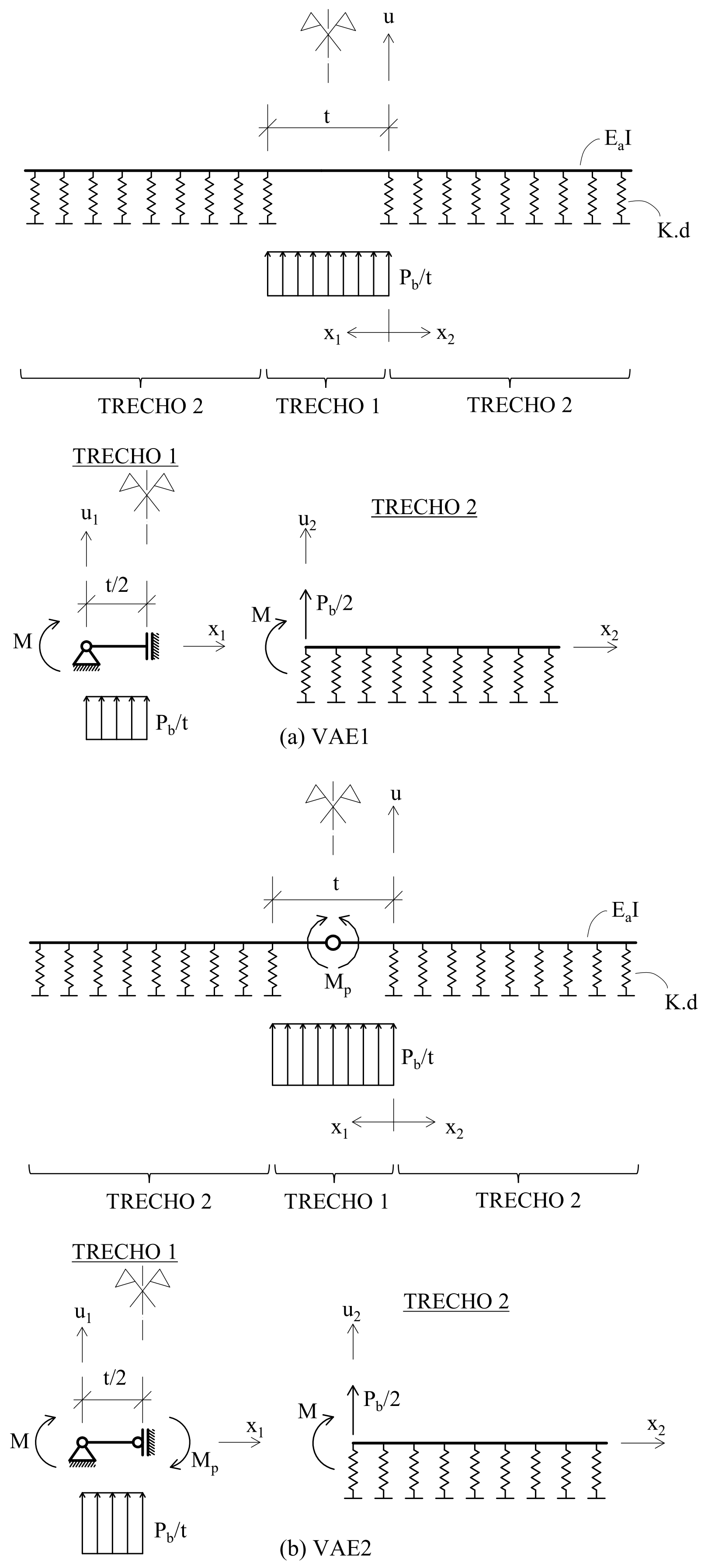


Figura C.1: Modelo de viga sobre apoio elástico (VAE).

Função de forma e derivadas para o TRECHO 1:

$$E_a I u_1 = A_1 {x_1}^4 + B_1 {x_1}^3 + C_1 {x_1}^2 + D_1 x_1 + E_1 \quad \text{(C.1)}$$

$$E_a I u_1' = 4A_1 {x_1}^3 + 3B_1 {x_1}^2 + 2C_1 x_1 + D_1 \quad \text{(C.2)}$$

$$E_a I u_1'' = 12A_1 {x_1}^2 + 6B_1 x_1 + 2C_1 \quad \text{(C.3)}$$

$$E_a I {u_1}''' = 24A_1 x_1 + 6B_1 \quad \text{(C.4)}$$

$$E_a I {u_1}'''' = 24A_1 \quad \text{(C.5)}$$

Função de forma e derivadas para o TRECHO 2:

$$\begin{aligned} u_2 = {} & A_2 e^{\beta x_2}(\cos\beta x_2) + B_2 e^{\beta x_2}(\operatorname{sen}\beta x_2) + C_2 e^{-\beta x_2}(\cos\beta x_2) \\ & + D_2 e^{-\beta x_2}(\operatorname{sen}\beta x_2) \end{aligned} \quad \text{(C.6)}$$

$$\begin{aligned} {u_2}' = {} & A_2 \beta e^{\beta x_2}(\cos\beta x_2 - \operatorname{sen}\beta x_2) + B_2 \beta e^{\beta x_2}(\operatorname{sen}\beta x_2 + \cos\beta x_2) \\ & + C_2 \beta e^{-\beta x_2}(-\cos\beta x_2 - \operatorname{sen}\beta x_2) \\ & + D_2 \beta e^{-\beta x_2}(-\operatorname{sen}\beta x_2 + \cos\beta x_2) \end{aligned} \quad \text{(C.7)}$$

$$\begin{aligned} {u_2}'' = {} & A_2 2\beta^2 e^{\beta x_2}(-\operatorname{sen}\beta x_2) + B_2 2\beta^2 e^{\beta x_2}(\cos\beta x_2) + C_2 2\beta^2 e^{-\beta x_2}(\operatorname{sen}\beta x_2) \\ & + D_2 2\beta^2 e^{-\beta x_2}(-\cos\beta x_2) \end{aligned} \quad \text{(C.8)}$$

$$\begin{aligned} {u_2}''' = {} & A_2 2\beta^3 e^{\beta x_2}(-\operatorname{sen}\beta x_2 - \cos\beta x_2) + B_2 2\beta^3 e^{\beta x_2}(\cos\beta x_2 - \operatorname{sen}\beta x_2) \\ & + C_2 2\beta^3 e^{-\beta x_2}(-\operatorname{sen}\beta x_2 + \cos\beta x_2) \\ & + D_2 2\beta^3 e^{-\beta x_2}(\cos\beta x_2 + \operatorname{sen}\beta x_2) \end{aligned} \quad \text{(C.9)}$$

$$\begin{aligned} {u_2}'''' = {} & A_2 4\beta^4 e^{\beta x_2}(-\cos\beta x_2) + B_2 4\beta^4 e^{\beta x_2}(-\operatorname{sen}\beta x_2) + C_2 4\beta^4 e^{-\beta x_2}(-\cos\beta x_2) \\ & + D_2 4\beta^4 e^{-\beta x_2}(-\operatorname{sen}\beta x_2) \end{aligned} \quad \text{(C.10)}$$

onde $\beta = \left(\frac{Kd}{4E_a I}\right)^{\frac{1}{4}}$

- VAE1: Regime elástico

1) Condições de contorno e determinação das constantes

Condições de contorno do TRECHO 1:

$$E_a I u_1'''' = \frac{P_b}{t} = 24A_1 \rightarrow A_1 = \frac{P_b}{24t} \quad \text{(C.11)}$$

$$E_a I u_1'''(0) = -\frac{P_b}{2} = 6B_1 \rightarrow B_1 = -\frac{P_b}{12} \quad \text{(C.12)}$$

$$E_a I u_1''(0) = M = 2C_1 \rightarrow C_1 = \frac{M}{2} \quad \text{(C.13)}$$

$$E_a I u_1'(t/2) = 0 = 4A_1\left(\frac{t}{2}\right)^3 + 3B_1\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 2C_1\left(\frac{t}{2}\right) + D_1 \rightarrow D_1 = \frac{P_b t^2}{24} - \frac{Mt}{2} \quad \text{(C.14)}$$

$$E_a I u_1(0) = 0 = E_1 \rightarrow E_1 = 0 \quad \text{(C.15)}$$

Condições de contorno do TRECHO 2:

$$u_2(\infty) = 0 = A_2 e^{\infty}(\cos\infty) + B_2 e^{\infty}(\operatorname{sen}\infty) \rightarrow A_2 = B_2 = 0 \quad \text{(C.16)}$$

$$u_2''(0) = \frac{M}{EI} = -D_2 2\beta^2 \rightarrow D_2 = -\frac{M}{2\beta^2 E_a I} \quad \text{(C.17)}$$

$$u_2'''(0) = \frac{P_b}{2EI} = C_2 2\beta^3 + D_2 2\beta^3 \rightarrow C_2 = \frac{P_b + 2\beta M}{4\beta^3 E_a I} \quad \text{(C.18)}$$

2) Condição de continuidade e determinação do momento *M* em função de P_b

$$-u_1'(0) = u_2'(0) \rightarrow -\frac{D_1}{E_a I} = -C_2\beta + D_2\beta \rightarrow M = \frac{P_b(\beta^2 t^2 - 6)}{12\beta(\beta t + 2)} \quad \text{(C.19)}$$

3) Deflexão na interface de deslizamento e determinação da rigidez do modelo k_{VAE1}

$$u_2(0) = C_2 = \frac{P_b + 2\beta M}{4\beta^3 E_a I} \quad \text{(C.20)}$$

$$k_{VAE1} = \frac{P_b}{u_2(0)} \quad \text{(C.21)}$$

tomando P_b como unitário, tem-se:

$$k_{VAE1} = \frac{4\beta^3 E_a I}{1 + 2\beta M} = 24\beta^3 E_a I \frac{\beta t + 2}{\beta^2 t^2 + 6\beta t + 6} \quad \text{(C.22)}$$

4) Momento máximo e determinação da força de plastificação P_{bVAE1}

$$M_{max} = E_a I u_1''(t/2) = M - \frac{P_b t}{8} = P_b\left(\frac{\beta^2 t^2 - 6}{12\beta(\beta t + 2)} - \frac{t}{8}\right) \quad \text{(C.23)}$$

tem-se a força P_{bVAE1} quando $M_{max} = M_r$, portanto,

$$P_{bVAE1}\left(\frac{\beta^2 t^2 - 6}{12\beta(\beta t + 2)} - \frac{t}{8}\right) = M_r \rightarrow P_{bVAE1} = 24\beta \frac{\beta^2 t^2 + 6\beta t + 12}{\beta t + 2} \cdot M_r \quad \text{(C.24)}$$

5) Obtenção de u_{VAE1}, M_{VAE1} e V_{VAE1} em função de P_{bVAE1}

$$u_{VAE1} = \frac{P_{bVAE1}}{k_{VAE1}} \tag{C.25}$$

$$M_{VAE1} = \frac{P_{bVAE1}(\beta^2 t^2 - 6)}{12\beta(\beta t + 2)} \tag{C.26}$$

$$V_{VAE1} = \frac{P_{bVAE1}}{2} \tag{C.27}$$

- VAE2: Situação após a formação da rótula plástica central

1) Condições de contorno/continuidade e determinação das constantes

Condições de contorno do TRECHO 1:

$$E_a I u_1'''' = \frac{P_b}{t} = 24A_1 \rightarrow A_1 = \frac{P_b}{24t} \tag{C.28}$$

$$E_a I u_1'''(0) = -\frac{P_b}{2} = 6B_1 \rightarrow B_1 = -\frac{P_b}{12} \tag{C.29}$$

$$E_a I u_1''(0) = M = 2C_1 \rightarrow C_1 = \frac{M}{2} \tag{C.30}$$

$$E_a I u_1''(t/2) = M_p = 12A_1\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 6B_1\left(\frac{t}{2}\right) + 2C_1 \rightarrow M = \frac{P_b t}{8} - M_p \tag{C.31}$$

$$E_a I u_1(0) = 0 = E_1 \rightarrow E_1 = 0 \tag{C.32}$$

Condições de contorno do TRECHO 2:

$$u_2(\infty) = 0 = A_2 e^{\infty}(\cos\infty) + B_2 e^{\infty}(\mathrm{sen}\,\infty) \rightarrow A_2 = B_2 = 0 \tag{C.33}$$

$$u_2''(0) = \frac{M}{E_a I} = -D_2 2\beta^2 \rightarrow D_2 = -\frac{M}{2\beta^2 E_a I} \tag{C.34}$$

$$u_2'''(0) = \frac{P_b}{2E_a I} = C_2 2\beta^3 + D_2 2\beta^3 \rightarrow C_2 = \frac{P_b + 2\beta M}{4\beta^3 E_a I} \tag{C.35}$$

Condição de continuidade:

$$-u_1'(0) = u_2'(0) \rightarrow -\frac{D_1}{E_a I} = -C_2\beta + D_2\beta \rightarrow D_1 = \frac{P_b}{4\beta^2} + \frac{M}{\beta} \tag{C.36}$$

2) Deflexão na interface de deslizamento e determinação da rigidez do modelo k_{VAE2}

$$u_2(0) = C_2 = \frac{P_b + 2\beta M}{4\beta^3 E_a I} = \frac{P_b(4+\beta t)}{16\beta^3 E_a I} - \frac{M_p}{2\beta^2 E_a I} \tag{C.37}$$

para calcular a rigidez k_{VAE2}, deve-se descontar da deflexão total u_2 a parcela de deflexão devida à atuação do momento M_p, $u_{2[Mp]} = \frac{M_p}{2\beta^2 E_a I}$, portanto,

$$k_{VAE2} = \frac{P_b}{u_2(0) - u_{2[Mp]}} \tag{C.38}$$

tomando P_b como unitário, tem-se:

$$k_{VAE2} = \frac{16\beta^3 E_a I}{4+\beta t} \tag{C.39}$$

3) Posição do momento máximo M_{max2} no TRECHO 2 e determinação da força de plastificação P_{bVAE2}

O momento máximo M_{max2} ocorre no ponto de cortante nula x_{Mmax2}, portanto,

$$u_2'''(x_{Mmax2}) = 0 \rightarrow x_{Mmax2} = \frac{1}{\beta}\tan^{-1}\left(\frac{P_b}{4\beta M - P_b}\right) = \frac{1}{\beta}\tan^{-1}\left(\frac{2P_b}{\beta(P_b t - 8M_p)}\right) \tag{C.40}$$

obtém-se a equação de M_{max2} substituindo x_{Mmax2} em $E_a I u_2''(x_2)$,

$$M_{max2} = E_a I\left[C_2 2\beta^2 e^{-\beta x_{Mmax2}}(\operatorname{sen}\beta x_{Mmax2}) + D_2 2\beta^2 e^{-\beta x_{Mmax2}}(-\cos\beta x_{Mmax2})\right] \tag{C.41}$$

tem-se a força P_{bVAE2} quando $M_{max2} = M_r$, portanto, P_{bVAE1} é tal que

$$\begin{aligned} E_a I \Bigg\{ &\left(\frac{4P_{bVAE2} + \beta P_{bVAE2}.t}{8\beta} - M_p\right) e^{-\tan^{-1}\left(\frac{2P_{bVAE2}}{\beta(P_{VAE2}.t - 8M_p)}\right)}.sen\left[\tan^{-1}\left(\frac{2P_{bVAE2}}{\beta(P_{VAE2}.t - 8M_p)}\right)\right] \\ &+ \left(\frac{P_{bVAE2}.t}{8} - M_p\right) e^{-\tan^{-1}\left(\frac{2P_{bVAE2}}{\beta(P_{VAE2}.t - 8M_p)}\right)}.cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{2P_{bVAE2}}{\beta(P_{VAE2}.t - 8M_p)}\right)\right]\Bigg\} \\ &= M_r \end{aligned} \tag{C.42}$$

4) Obtenção de u_{VAE2}, M_{VAE2} e V_{VAE2} em função de P_{bVAE2}

$$u_{VAE2} = \frac{P_{bVAE2}(4+\beta t)}{16\beta^3 E_a I} - \frac{M_p}{2\beta^2 E_a I} \tag{C.43}$$

$$M_{VAE2} = \frac{P_{bVAE2}.t}{8} - M_p \tag{C.44}$$

$$V_{VAE2} = \frac{P_{VAE2}}{2} \tag{C.45}$$

D

FORMULAÇÃO DO MODELO DE CATENÁRIA

Através de considerações geométricas, é possível estabelecer relação entre a deflexão u e a rotação θ e o alongamento junto às rótulas Δ:

$$tan\theta = \frac{u}{l} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{u}{l} \tag{D.1}$$

$$l^2 + u^2 = (l + 2\Delta)^2 \rightarrow \Delta = \frac{l}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{u}{l}\right)^2} - \frac{l}{2} \tag{D.2}$$

Tendo-se θ e Δ expressos em função de u, pode-se obter a taxa de variação desses deslocamentos em função de u:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{du} = \frac{d}{du}\left[\tan^{-1}\frac{u}{l}\right] = \frac{1}{l}\frac{1}{1 + \left(\frac{u}{l}\right)^2} \tag{D.3}$$

$$\dot{\Delta} = \frac{d\Delta}{du} = \frac{d}{du}\left[\frac{l}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{u}{l}\right)^2} - \frac{l}{2}\right] = \frac{u}{2l}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{l}\right)^2}} \tag{D.4}$$

Assim sendo, a seguinte condição cinemática pode ser estabelecida:

$$\frac{\dot{\Delta}}{\dot{\theta}} = \frac{u}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{u}{l}\right)^2} \tag{D.5}$$

A consideração de comportamento rígido-plástico para o material implica que, em caso de tração pura, a deformação somente ocorre se a barra estiver submetida a $N_p = \frac{\pi}{4}d^2\sigma_p$, e, em caso de momento puro, a deformação somente ocorre se a barra estiver submetida a $M_p = \frac{d^3}{6}\sigma_p$. Para combinação de momento M e tração N, considera-se que a deformação ocorre se atendida a condição de plastificação $\eta(N, M) = 1$:

$$\eta = \frac{M}{M_p} + \frac{N^2}{N_p^2} = 1 \rightarrow \frac{M}{M_p} = 1 - \left(\frac{N}{N_p}\right)^2 \tag{D.6}$$

De acordo com a condição de normalidade da teoria de plasticidade, as taxas de deformação plástica devem satisfazer as seguintes relações constitutivas:

$$\dot{\theta} = \lambda \frac{\partial \eta}{\partial M} = \lambda \frac{1}{M_p} \tag{D.7}$$

$$\dot{\Delta} = \lambda \frac{\partial \eta}{\partial N} = 2\lambda \frac{N}{N_p^2} \tag{D.8}$$

Assim sendo, pode-se estabelecer a seguinte relação entre taxas de deformação plástica:

$$\frac{\dot{\Delta}}{\dot{\theta}} = \frac{2NM_p}{N_p^2} = 2\frac{M_p}{N_p}\frac{N}{N_p} = \frac{4}{3\pi} d \frac{N}{N_p} \tag{D.9}$$

Igualando as Eqs. D.5 e D.9, tem-se a relação entre a deflexão *u* e a força de tração *N*:

$$\frac{N}{N_p} = \frac{3\pi}{8}\frac{u}{d}\sqrt{1 + \left(\frac{u}{l}\right)^2} \leq 1 \rightarrow N = N_p \frac{3\pi}{8}\frac{u}{d}\sqrt{1 + \left(\frac{u}{l}\right)^2} \leq N_p \tag{D.10}$$

Substituindo a Eq. D.10 em Eq. D.6, tem-se relação entre a deflexão *u* e o momento *M*:

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \frac{9\pi^2}{64}\frac{u^2}{d^2}\left(1 + \left(\frac{u}{l}\right)^2\right) \geq 0 \rightarrow M = M_p\left[1 - \frac{9\pi^2}{64}\frac{u^2}{d^2}\left(1 + \left(\frac{u}{l}\right)^2\right)\right] \geq 0 \tag{D.11}$$