

Filipe Henrique de Castro Menezes

Termodinâmica de Buracos Negros

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Nelson de Oliveira Yokomizo

Belo Horizonte

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M543t Menezes, Filipe Henrique de Castro.
Termodinâmica de buracos negros / Filipe Henrique de Castro Menezes. –
2021.
130f., enc. : il.

Orientador: Nelson de Oliveira Yokomizo.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.
Bibliografia: f. 128-130.

1. Relatividade geral. 2. Buracos negros. 3. Teoria quântica de campos.
I. Título. II. Yokomizo, Nelson de Oliveira. III. Universidade Federal de
Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 524:882 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

A presente dissertação, intitulada “**Termodinâmica de buracos negros**” de autoria de **FILIPE HENRIQUE DE CASTRO MENEZES**, submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA** em 13 de abril de 2021.

Belo Horizonte, 13 de abril de 2021.

Prof. Nelson de Oliveira Yokomizo

Orientador do estudante

Departamento de Física/UFMG

Prof. Gláuber Carvalho Dorsch

Departamento de Física/UFMG

Prof. José Abdalla Helayël Neto

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF



Documento assinado eletronicamente por **Gláuber Carvalho Dorsch, Professor do Magistério Superior**, em 14/04/2021, às 10:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **José Abdalla Helayël Neto, Usuário Externo**, em 14/04/2021, às 10:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Nelson de Oliveira Yokomizo, Professor do Magistério Superior**, em 14/04/2021, às 13:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0674769** e o código CRC **418790D9**.

Referência: Processo nº 23072.219327/2021-48

SEI nº 0674769

Agradecimentos

Aos meus pais e irmã, Marco, Rosana e Thaís, por todo suporte e apoio oferecidos ao longo da minha trajetória na física.

Ao meu avô, Flávio, que foi, e ainda é, uma grande inspiração para mim na vida acadêmica.

À minha namorada, Laís, pela paciência em ouvir minhas divagações e sempre me apoiar nos estudos.

Ao meu orientador, Nelson, por ser sempre solícito nos meus momentos de dúvida, assim como pela sua influência e contribuição em minha formação acadêmica.

Aos meus gatos, Feynman, Pipa e Simba, pelo apoio emocional, em particular ao Feynman pela sua onipresença nos meus estudos.

Ao GFT pelas sempre ricas discussões que colaboraram para minha formação.

Às agências CNPq, CAPES e FAPEMIG pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é construir e apresentar a chamada termodinâmica de buracos negros. Primeiro são expostos os elementos da relatividade geral necessários para a caracterização de buracos negros, sendo em seguida construídas as quatro leis da termodinâmica clássica de buracos negros formuladas por J. Bardeen, B. Carter e S. Hawking. Segue-se uma análise da teoria quântica de campos em espaços curvos na geometria de fundo de um buraco negro, culminando na formulação da radiação Hawking. Finalmente, é obtido o tensor de energia-momento da radiação Hawking para um modelo simplificado de colapso, sendo possível descrever seus efeitos na geometria do espaço-tempo.

Palavras-chaves: Buracos Negros, Gravitação, Relatividade Geral, Teoria Quântica de Campos, Termodinâmica.

Abstract

The objective of this work is to construct and present the so-called black hole thermodynamics. First, the elements of general relativity necessary for the characterization of black holes are exposed, and then the four laws of classical black hole thermodynamics formulated by J. Bardeen, B. Carter and S. Hawking are constructed. This is followed by an analysis of quantum field theory in curved spaces in the background of a black hole, leading to the formulation of Hawking radiation. Finally, the Hawking radiation energy-moment tensor is obtained for a simplified collapse model, and it is possible to describe its effects on the spacetime geometry.

Key-words: Black Holes, Gravitation, General Relativity, Quantum Field Theory, Thermodynamics.

Sumário

	Introdução	10
1	PROPRIEDADES DO ESPAÇO-TEMPO	11
1.1	Simetrias do espaço-tempo	11
1.1.1	Vetores de Killing	11
1.2	Quantidades conservadas	12
1.2.1	Geodésicas	12
1.2.2	Espaço-tempo	14
1.3	Estrutura causal	18
1.3.1	Domínios de dependência	21
1.4	Diagramas de Penrose	22
1.4.1	Espaço de Minkowski em dimensão (1+1)	23
1.4.2	Espaço de Minkowski em dimensão (1+3)	26
1.4.3	Métrica de Schwarzschild	27
1.4.4	Formação de buraco negro	30
1.5	Condições de energia	32
1.5.1	Condição fraca de energia	32
1.5.2	Condição dominante de energia	33
1.5.3	Condição forte de energia	34
2	BURACOS NEGROS	35
2.1	Assintoticamente plano	35
2.2	Caracterização	36
2.3	Estados de equilíbrio	39
2.3.1	Soluções estacionárias	40
2.3.2	Horizonte de eventos para soluções estacionárias	42
2.3.3	Horizonte de eventos como congruência geodésica	44
2.4	Velocidade angular	50
3	TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS CLÁSSICA	53
3.1	Lei zero	53
3.1.1	Interpretação física de κ	55
3.1.2	Variação de κ no horizonte de eventos	58
3.2	Primeira lei	62

3.2.1	Massa	63
3.2.2	Momento angular	63
3.2.3	Primeira Lei	63
3.2.4	Varição de κ em processos	67
3.3	Segunda lei	74
3.3.1	Pontos conjugados	75
3.3.2	Segunda lei	76
3.4	Terceira lei	77
3.4.1	Movimento de corpos com momento angular	78
3.4.2	Queda de corpos em um buraco negro	80
3.4.3	Terceira lei da termodinâmica	83
4	GRAVITAÇÃO SEMICLÁSSICA	84
4.1	Segunda quantização	84
4.2	Campos quânticos em espaços curvos	88
4.2.1	Geodésicas nulas na métrica de Kerr	88
4.2.2	Campo escalar de massa zero na métrica de Kerr	92
4.2.3	Aproximação da óptica geométrica	95
4.3	Radiação Hawking	96
4.4	Fluxos de energia devido à radiação Hawking	109
4.4.1	Tensor de energia-momento	110
5	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	118
A	MÉTRICA DE KERR	120
A.1	Quantidades conservadas na métrica de Kerr	122
A.1.1	Massa	122
A.1.2	Momento angular	123
B	REPRESENTAÇÃO LOCAL NO HORIZONTE DE EVENTOS	125
B.1	Horizonte de eventos como congruência geodésica	126
B.2	Varição de κ no horizonte de eventos	126
B.3	Varição de κ em processos	127
	REFERÊNCIAS	129

Introdução

A relatividade geral é uma das teorias mais bem sucedidas já formuladas na física. Desde sua formulação em 1915, forneceu a descrição para fenômenos como o avanço do periélio de mercúrio, a deflexão e o desvio para o vermelho da luz por campos gravitacionais e a existência de lentes e ondas gravitacionais, além de fornecer as bases para, por exemplo, o modelo cosmológico padrão. Uma das principais previsões da relatividade geral, demonstrada por R. Penrose em 1965 [36], é que em determinadas circunstâncias, corpos que sofrem colapso gravitacional formarão, invariavelmente, buracos negros. Desde então, o estudo sistemático de buracos negros tomou forma, tanto no ponto de vista de sua caracterização, quanto nas consequências que eles geram às estruturas do espaço-tempo, já que buracos negros estão associados a singularidades.

Dentre os resultados na física de buracos negros, um deles será abordado nessa dissertação devido ao seu aspecto particular. Em 1973, os físicos J. Bardeen, B. Carter e S. Hawking formularam as chamadas *quatro leis da termodinâmica de buracos negros* [4]: relações obtidas quando se utiliza a relatividade geral para se descrever o comportamento de buracos negros, que apresentam uma estrutura análoga às leis da termodinâmica. Dois anos mais tarde, Hawking demonstrou que buracos negros emitem radiação térmica como um efeito conjunto de relatividade geral e mecânica quântica [9], tornando a analogia entre as leis dos buracos negros e as leis da termodinâmica algo mais profundo do que se imaginava.

Além de ser um resultado rico por si só, a relação entre buracos negros e termodinâmica motiva o estudo de outros sistemas gravitacionais com comportamento termodinâmico, assim como a de uma teoria de unificação entre relatividade geral e mecânica quântica. O objetivo desta dissertação é descrever as leis da termodinâmica de buracos negros, tanto no ponto de vista da gravitação clássica quanto no da semiclassica, a fim de se compreender os mecanismos físicos que adquirem a estrutura termodinâmica na análise de buracos negros.

1 Propriedades do espaço-tempo

Quando trabalhamos com termodinâmica, necessariamente assumimos diversos conceitos prévios, referentes aos contextos nos quais tal teoria é válida. Isso se deve, claramente, ao fato de que a termodinâmica é definida apenas para estados de equilíbrio, e para sistema que sejam grandes o suficientes para que as grandezas macroscópicas, como temperatura e pressão, sejam relacionados a valores médios de grandezas microscópicas associadas aos constituintes do sistema termodinâmico.

De forma semelhante, ao estudarmos a termodinâmica de buracos negros estamos assumindo uma classe de espaços-tempos e condições nos quais tal formulação faz sentido. Expomos nesta seção algumas dessas condições, como o ponto de partida para o assunto.

1.1 Simetrias do espaço-tempo

1.1.1 Vetores de Killing

Assim como em quase todos os contextos na física, o primeiro passo para se estudar um sistema qualquer é conhecer suas simetrias. No contexto em questão, é conveniente, dado um espaço-tempo (M, g_{ab}) , conhecer as simetrias relacionadas à métrica. Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada em [1].

Em M , é possível definir um mapa $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, de forma que, para cada $p \in M$, ϕ define unicamente uma curva $\phi_t(p) : \mathbb{R} \rightarrow M$ parametrizada por t e que passa por p .

Definição 1. *O mapa ϕ_t define uma isometria se $\phi_t^* g_{ab} = g_{ab}$, sendo ϕ_t^* o pullback induzido pelo mapa ϕ_t .*

Definição 2. *O campo vetorial ζ^a é chamado de campo vetorial de Killing se suas curvas integrais correspondem a uma família de isometrias ϕ .*

Assim, o campo de Killing aponta para as direções nas quais existe uma simetria da métrica.

A condição apresentada para caracterizar uma isometria pode ser escrita na forma de uma *derivada de Lie*. Assim, a existência de tal grupo de isometria ϕ_t corresponde a:

$$(\mathcal{L}_\zeta g)_{ab} = 0. \quad (1.1)$$

Explicitamente:

$$(\mathcal{L}_\zeta g)_{ab} = \zeta^c \nabla_c g_{ab} + g_{cb} \nabla_a \zeta^c + g_{ac} \nabla_b \zeta^c.$$

Como a derivada covariante é compatível com a métrica, o primeiro termo do lado direito da igualdade se anula. Assim, a equação (1.1) corresponde a:

$$\nabla_a \zeta_b + \nabla_b \zeta_a = 0, \quad (1.2)$$

conhecida como *equação de Killing*.

1.2 Quantidades conservadas

Já é sabido do contexto da mecânica analítica que simetrias físicas estão relacionadas a quantidades conservadas. O conhecido *teorema de Noether* [19] fornece uma forma sistemática de se obter tais quantidades conservadas quando as simetrias correspondem a simetrias na lagrangiana. Já no contexto da relatividade geral, em que a métrica desempenha papel central, é de se esperar que simetrias relacionadas a ela retornem quantidades conservadas.

Como será visto adiante, os vetores de Killing estão relacionados a grandezas conservadas tanto para observadores que viajam em geodésicas em espaços curvos, quanto para as propriedades globais do espaço-tempo, como a massa e o momento angular das distribuições de energia e matéria do espaço-tempo [1].

1.2.1 Geodésicas

Observadores livres para se movimentar no espaço-tempo seguem geodésicas. Assim, na ausência de forças externas e momento angular [1, 10], trajetórias de corpos no espaço-tempo, quando parametrizadas em termos de um parâmetro afim, e com vetor tangente p^a , obedecem à *equação geodésica*:

$$p^b \nabla_b p^a = 0, \quad (1.3)$$

sendo:

$$p^a = \begin{cases} m \frac{dx^a}{d\tau} & \text{para geodésicas temporais,} \\ \frac{dx^a}{d\lambda} & \text{para geodésicas nulas,} \end{cases} \quad (1.4)$$

m a massa do corpo, τ o tempo próprio, e λ o parâmetro afim para geodésicas nulas.

A obtenção de quantidades conservadas para observadores que seguem geodésicas é imediata quando observamos a variação da contração de um vetor de Killing ζ^a com o vetor tangente ao longo das geodésicas:

$$p^b \nabla_b (p^a \zeta_a) = \zeta_a p^b \nabla_b p^a + p^a p^b \nabla_b \zeta_a = 0, \quad (1.5)$$

sendo o primeiro e segundo termos do lado direito da igualdade nulos devido à equação geodésica, e por se tratar de contração de um tensor simétrico com um antissimétrico, respectivamente. Como a contração $p^a \zeta_a$ não varia ao longo de geodésicas, ela corresponde a uma quantidade conservada.

Para a métrica que será tratada no contexto da termodinâmica de buracos negros, dois dos vetores de Killing importantes são o de translação temporal $\xi^a = (\partial_t)^a$, e axial $\psi^a = (\partial_\phi)^a$. As quantidades conservadas, nesse caso, são:

$$p^a \xi_a = C_1,$$

$$p^a \psi_a = C_2.$$

Para identificar o significado físico das constantes, é conveniente analisar o caso de distâncias muito grandes, considerando espaços nos quais a métrica tende à de Minkowski:

$$p^a \xi_a \rightarrow p^0 \xi_0 = -E,$$

$$p^a \psi_a \rightarrow p^3 \psi_3 = L_z,$$

sendo E e L_z a energia e momento angular ortogonal ao plano equatorial no infinito, respectivamente. A assimilação com as grandezas no infinito de fato carrega a intuição física, já que a interação dos observadores com a curvatura do espaço-tempo atua de forma análoga a uma energia potencial, que varia o movimento obedecendo uma

lei de conservação. Assim, temos que as energias e momento angular ao longo de geodésicas podem ser descritas como:

$$E = -p^a \xi_a, \quad (1.6a)$$

$$L_z = p^a \psi_a. \quad (1.6b)$$

1.2.2 Espaço-tempo

No que diz respeito às propriedades globais do espaço-tempo, os vetores de Killing definem quantidades conservadas através do que chamamos de *integrals de Komar*. O tratamento desta seção foi baseado nas referências [1, 5].

Para se compreender a origem das quantidades conservadas, é conveniente observar a relação entre os vetores de Killing e o tensor de curvatura. Pela definição do tensor de Riemann:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \zeta_c = R_{abc}{}^d \zeta_d. \quad (1.7)$$

Se ζ for um vetor de Killing, é possível permutar os índices (ac) do segundo termo do lado esquerdo da equação (1.7), invertendo seu sinal devido à equação de Killing:

$$\nabla_a \nabla_b \zeta_c + \nabla_b \nabla_c \zeta_a = R_{abc}{}^d \zeta_d. \quad (1.8)$$

Renomeando os índices da equação acima para as permutações cíclicas de (abc) :

$$\nabla_a \nabla_b \zeta_c + \nabla_b \nabla_c \zeta_a = R_{abc}{}^d \zeta_d,$$

$$\nabla_b \nabla_c \zeta_a + \nabla_c \nabla_a \zeta_b = R_{bca}{}^d \zeta_d,$$

$$\nabla_c \nabla_a \zeta_b + \nabla_a \nabla_b \zeta_c = R_{cab}{}^d \zeta_d.$$

Somando as duas primeiras equações, e subtraindo a terceira, obtemos:

$$2\nabla_b \nabla_c \zeta_a = (R_{abc}{}^d + R_{bca}{}^d - R_{cab}{}^d) \zeta_d. \quad (1.9)$$

Levando em conta que o tensor de Riemann é antissimétrico nos dois primeiros índices, e possui a propriedade de que $R_{[abc]}^d = 0$, temos que:

$$(R_{abc}^d + R_{bca}^d + R_{cab}^d) \zeta_d = 0.$$

Subtraindo a equação acima de (1.9), obtemos:

$$\nabla_b \nabla_c \zeta_a = -R_{cab}^d \zeta_d. \quad (1.10)$$

A contração de (bc) resulta no tensor de Ricci no lado esquerdo da igualdade (1.10), resultando, por fim, na relação entre o tensor de Ricci e o vetor de Killing:

$$\nabla_b \nabla^b \zeta^a = -R^a_d \zeta^d. \quad (1.11)$$

Não é difícil de se notar uma certa semelhança entre a equação (1.11) e as equações de Maxwell não homogêneas em espaços curvos:

$$\nabla_b F^{ba} = -J^a,$$

sendo F^{ba} o tensor eletromagnético, e J^a a densidade de corrente. Além da forma, a principal semelhança se deve ao fato de que, assim como o tensor eletromagnético, pela equação de Killing, $\nabla^b \zeta^a$ também é antissimétrico, sendo $R^a_d \zeta^d$ o termo que faz o papel de densidade de corrente.

A conservação da carga no eletromagnetismo surge pela equação da continuidade:

$$\nabla_a J^a = 0, \quad (1.12)$$

que como será verificado, é uma consequência direta de qualquer equação do tipo:

$$\nabla_b K^{ba} = -j^a, \quad (1.13)$$

com K^{ab} antissimétrico. Para se verificar isso, começamos observando a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned}\nabla_b \nabla_a K^{ab} &= -\nabla_b \nabla_a K^{ba}, \\ &= -\nabla_a \nabla_b K^{ab},\end{aligned}$$

sendo que na primeira linha foi utilizado a antissimetria de K^{ab} , e na segunda linha os índices foram renomeados. A relação apresentada acima mostra que podemos escrever:

$$2\nabla_b \nabla_a K^{ab} = (\nabla_b \nabla_a - \nabla_a \nabla_b) K^{ab}. \quad (1.14)$$

Aplicando a derivada covariante em ambos os lados da equação (1.13), e utilizando a relação obtida em (1.14), temos:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) K^{ba} = -2\nabla_a j^a \quad (1.15)$$

Pela definição do tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) K^{ba} &= -R_{abd}{}^b K^{da} - R_{abd}{}^a K^{bd}, \\ &= -R_{abd}{}^b K^{da} - R_{dba}{}^a K^{bd}, \\ &= 0,\end{aligned} \quad (1.16)$$

sendo utilizado a simetria na primeira e terceira componente do tensor de Riemann para o segundo termo do lado direito da segunda linha de (1.16). O primeiro termo do lado direito da segunda linha se anula já que consiste em uma contração de um tensor simétrico com um antissimétrico, enquanto o segundo termo se anula devido à antissimetria do terceiro e quarto índice do tensor de Riemann. As equações (1.15) e (1.16) implicam na equação da continuidade para j^a :

$$\nabla_a j^a = 0. \quad (1.17)$$

Se a equação da continuidade é satisfeita para j^a , é possível definir a grandeza:

$$Q = \alpha \int_O \epsilon_{abcd} j^d, \quad (1.18)$$

sendo α uma constante, ϵ_{abcd} a forma de volume, e O consiste em uma região tipo-espaço na qual é feita a integração, grande o suficiente para englobar todas as fontes de corrente. Pela equação (1.13), (1.18) pode ser reescrita em termos de K^{ab} :

$$Q = \alpha \int_O \epsilon_{abcd} \nabla_e K^{de}. \quad (1.19)$$

Aplicando o teorema de Stokes:

$$Q = \alpha \int_{\partial O} \epsilon_{abcd} K^{cd} \quad (1.20)$$

Para se verificar a grandeza Q é realmente a quantidade conservada, é possível integrar diretamente a equação da continuidade em uma região V do espaço-tempo, delimitada pelas superfícies espaciais O_1 e O_2 , e pela superfície temporal W , como mostram a figura 1.

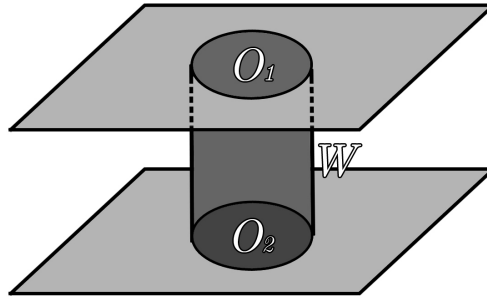


Figura 1 – Região V de integração. Tal região é delimitada por duas superfícies O_1 e O_2 espaciais, e uma superfície W temporal. Os planos em cinza podem ser vistos como duas foliações do espaço-tempo para tempos distintos.

As regiões O_1 e O_2 são escolhidas de forma a serem grandes o suficiente para englobar as fontes de corrente, fazendo com que $j = 0$ em W . Assim:

$$\begin{aligned} \int_V \epsilon_{abcd} \nabla_e j^e &= 0 \\ &= \int_{O_1} \epsilon_{abcd} j^d - \int_{O_2} \epsilon_{abcd} j^d \\ &= \int_{\partial O_1} \epsilon_{abcd} K^{cd} - \int_{\partial O_2} \epsilon_{abcd} K^{cd}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

sendo aplicado o teorema de Stokes da primeira para a segunda e da segunda para a terceira linha, além da equação (1.13) também utilizada da segunda para a terceira linha. Portanto, (1.21) resulta em:

$$\int_{\partial O_1} \epsilon_{abcd} K^{cd} = \int_{\partial O_2} \epsilon_{abcd} K^{cd}, \quad (1.22)$$

evidenciando que a quantidade conservada Q é única, e independente da escolha da superfície. Fazendo a identificação:

$$K^{ab} = \nabla^a \zeta^b, \quad (1.23a)$$

$$j^a = R^a{}_d \zeta^d, \quad (1.23b)$$

é imediata a relação entre as equações (1.11) e (1.13). Assim, a existência de vetores de Killing implica em quantidades conservadas, definidas por:

$$Q = \alpha \int_{\partial O} \epsilon_{abcd} \nabla^c \zeta^d. \quad (1.24)$$

A expressão acima também é conhecida como integral de Komar.

1.3 Estrutura causal

Na física, o tempo é a grandeza que define a ordem dos acontecimentos. Com a noção de ordenamento, surge naturalmente o princípio da *causalidade*, que dita o quanto um evento pode afetar outro. Na mecânica newtoniana, em que informação pode se propagar instantaneamente, o princípio da causalidade nos diz que para um evento A influenciar um evento B, A deve ocorrer antes de B.

Quando partimos para a relatividade especial, existe uma velocidade limite na qual informação pode se propagar. Isso faz com que a noção de causalidade se altere, estando relacionada não somente à ordem temporal dos eventos, mas também à distância espacial entre eles. Como a relatividade trata o tempo de maneira análoga às coordenadas espaciais, é de se esperar que as noções de causalidade sejam incorporadas na própria estrutura do espaço-tempo. A relação entre pontos no espaço-tempo envolvendo as noções de causalidade é descrita pela *estrutura causal*.

Para o espaço de Minkowski, sua estrutura causal pode ser totalmente caracterizada, sem grandes dificuldades, em termos dos cones de luz [1]. Quando partimos

para espaços curvos, a mudança de topologia em relação ao espaço de Minkowski acarreta em mudanças globais, de forma que a estrutura causal do espaço-tempo deve ser adaptada. Esta seção tem como objetivo apresentar alguns resultados mais importantes sobre estruturas causais que podem ser incorporadas em espaços-tempos, visando construir espaços nos quais a estrutura causal esteja de acordo com o esperado para espaços fisicamente razoáveis. As provas para os resultados apresentados a seguir podem ser todas encontradas em [1, 3].

Como ponto de partida, queremos que os espaços-tempos (M, g_{ab}) estudados possuam uma noção de passado e futuro bem definidas, como ocorre em Minkowski. Seja V_p o espaço tangente de um ponto $p \in M$. Como V_p é isomorfo a Minkowski, podemos partir da mesma ideia de se definir o passado e o futuro com base nos cones de luz.

Definição 3. *Um espaço-tempo (M, g_{ab}) é dito tempo-orientável se é possível associar a cada ponto $p \in M$, de forma contínua, uma parte do cone de luz como o cone de luz futuro, e a outra como o cone de luz passado.*

Exige-se que a associação seja contínua para excluir as situações em que exista uma inversão abrupta do cone de luz se analisamos o comportamento do cone em um ponto e sua vizinhança. Dada tal definição, os espaços tempo-orientáveis seguem tal propriedade:

Lema 1. *Um espaço-tempo (M, g_{ab}) é dito tempo-orientável se, e somente se, existe algum campo vetorial suave e tipo tempo em M que não se anula em nenhum ponto.*

Tal campo vetorial tipo tempo carrega a intuição de uma direção de fluxo temporal. O fato de ser suave faz com que em todos os pontos os vetores estejam sempre no interior do cone de luz do passado ou futuro. Assim, é construída de forma mais clara a noção de passado e futuro de cada ponto.

Construída a noção de um espaço tempo-orientável, partimos para a definição de *passado cronológico* e *passado causal* de um ponto. Para isso, é conveniente definir duas categorias de curvas:

Definição 4. *Uma curva $\lambda(t)$ é dita temporal futuro (passado) direcionada se o vetor tangente a ela é sempre um vetor tipo tempo direcionado para o futuro (passado).*

Definição 5. *Uma curva $\lambda(t)$ é dita causal futuro (passado) direcionada se o vetor tangente a ela é sempre um vetor nulo ou tipo tempo direcionado para o futuro (passado).*

Assim, definimos os seguintes conjuntos:

Definição 6. O futuro (passado) cronológico de p , $I^+(p)$ ($I^-(p)$), é definido como o conjunto de eventos que são ligados a p por curvas temporais direcionadas para o futuro (passado).

Definição 7. O futuro (passado) causal de p , $J^+(p)$ ($J^-(p)$), é definido como o conjunto de eventos que são ligados a p por curvas causais direcionadas para o futuro (passado).

Para um conjunto $S \subset M$, o futuro/passado cronológico e causal seguem como:

$$I^\pm(S) = \bigcup_{p \in S} I^\pm(p), \quad (1.25a)$$

$$J^\pm(S) = \bigcup_{p \in S} J^\pm(p). \quad (1.25b)$$

A construção de um princípio de causalidade a ser seguido pelos espaços-tempos fisicamente razoáveis toma como premissa que não devem existir curvas temporais fechadas. Como o movimento de corpos massivos num espaço-tempo segue curvas temporais, a existência de tais curvas sendo fechadas implica que $p \in J^\pm(p)$, sendo interpretado como uma forma de se retroceder no tempo. Assim, colocamos como o princípio de causalidade a condição de que $p \notin J^\pm(p)$.

Além disso, também esperamos que os espaços-tempos estudados não estejam “próximos” de possuírem curvas temporais fechadas. Uma situação de um espaço “próximo” de violar o princípio de causalidade seria um que não admite curvas temporais fechadas, porém, pequenas perturbações na métrica podem levá-lo a admitir tais curvas. Levando em conta a existência do princípio da incerteza, e que a descrição completa do universo deve levar em conta tanto relatividade geral quanto mecânica quântica, perturbações são naturais o suficiente para evitarmos métricas “próximas” de violar o princípio de causalidade [3]. Por isso, construímos a noção de um espaço-tempo *causalmente estável*.

Seja t^a um vetor tipo tempo para $p \in M$, e a métrica \bar{g}_{ab} em p definida por:

$$\bar{g}_{ab} = g_{ab} - t_a t_b \quad (1.26)$$

sendo g_{ab} a métrica do espaço tempo. Vetores tipo tempo e tipo luz em relação a g_{ab} são vetores tipo tempo em relação a \bar{g}_{ab} . Dessa forma, \bar{g}_{ab} pode ser vista como uma

métrica que “abre” os cones de luz definidos em termos da métrica g_{ab} . Assim, se o espaço tempo (M, g_{ab}) estiver “próximo” de violar o princípio de causalidade, a métrica \bar{g}_{ab} admitirá curvas temporais fechadas.

Definição 8. *Um espaço-tempo (M, g_{ab}) é dito causalmente estável se existe um campo vetorial t^a tipo tempo, contínuo e não nulo de forma que no espaço (M, \bar{g}_{ab}) , para \bar{g}_{ab} definido em (1.26), não existam curvas temporais fechadas.*

O teorema que será apresentado a seguir é uma consequência da definição de espaços-tempos causalmente estáveis, podendo ser utilizado como outra forma de se classificar tais espaços-tempos.

Teorema 1. *Um espaço-tempo (M, g_{ab}) é dito causalmente estável se, e somente se, existe uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\nabla^a f$ é um campo vetorial tipo tempo em todo o espaço.*

As superfícies geradas por f constante são tipo espaço, fazendo com que tal função possa ser pensada como um tempo cósmico, e tais superfícies como instantes de tempo no espaço-tempo. Para curvas tipo tempo, f pode sempre ser escolhida de forma a ser crescente ao longo da curva.

1.3.1 Domínios de dependência

Os futuros cronológicos e causal de uma região S descrevem as regiões do espaço-tempo que podem ser influenciadas de forma causal por S . Entretanto, poderíamos fazer o caminho inverso, e definir qual a região do espaço-tempo é afetada de forma causal inteiramente por uma superfície S , localizada em seu passado causal. Esse conceito é extremamente conveniente na física, tendo em vista que as condições da superfície S poderiam determinar inteiramente a configuração de sistemas nessa região do espaço-tempo, passando uma ideia de evolução temporal, dada as condições iniciais.

Para prosseguir com esse tipo de ideia, e por razões técnicas, primeiro nos restringimos a uma superfície S fechada e acronal, *i.e.*, uma superfície na qual $I^+(S) \cap S = \emptyset$. Fisicamente, S pode ser vista como uma região do espaço em um certo instante de tempo. Assim, definimos o que chamamos de *domínio de dependência futuro* de S .

Definição 9. *Uma curva $\lambda(t)$ é dita inextensível se ela não possui um ponto final, *i.e.*, um ponto p tal que para todo aberto O de p , existe um t_0 tal que a curva $\lambda(t)$ está inteiramente contida em O para $t > t_0$.*

Definição 10. *O domínio de dependência futuro (passado) de uma região S , $D^+(S)$ ($D^-(S)$), é definido como o conjunto de eventos nos quais todas as curvas causais passadas (futuras) inextensíveis partindo deles intersectam S .*

Unindo as definições de domínio de dependência futuro e passado, temos o que chamamos de *domínio de dependência* de S :

$$D(S) = D^+(S) \cup D^-(S). \quad (1.27)$$

Assim, o domínio de dependência de S corresponde a toda região do espaço-tempo na qual todas as condições podem ser definidas pela configuração em S .

Definição 11. *Uma superfície acronal fechada Σ que obedece à condição $D(\Sigma) = M$ é chamada de superfície de Cauchy.*

Definição 12. *Um espaço-tempo (M, g_{ab}) é dito globalmente hiperbólico se ele admite uma superfície de Cauchy.*

O fato do domínio de dependência de uma superfície de Cauchy ser o próprio espaço-tempo nos passa a ideia de que em espaços globalmente hiperbólicos é possível determinar toda a história do universo a partir de condições iniciais em uma superfície de Cauchy. Espaços globalmente hiperbólicos têm uma estrutura topológica da forma $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, sendo Σ uma folha espacial de M para um certo parâmetro real, que é visto como um instante do tempo. Existem razões físicas [1, 3] para se acreditar que os espaços fisicamente aceitáveis são globalmente hiperbólicos.

1.4 Diagramas de Penrose

Os efeitos notáveis gerados pela relatividade geral estão associados, de maneira geral, às regiões próximas das fontes de campo gravitacional, já que para campos fracos a relatividade geral tende à gravitação universal de Newton. Entretanto, em diversos contextos, como por exemplo aqueles que envolvem o estudo de radiação, é necessário analisar regiões distantes das fontes de campo. Além disso, é esperado que, suficientemente distante dessas fontes, o espaço-tempo se comporte como Minkowski.

Com isso em mente, é conveniente a utilização de ferramentas que nos permitem “tomar o limite para o infinito” de forma mais estratégica. Uma das maneiras de se fazer isso é com os chamados *diagramas de Penrose*. Tais diagramas consistem na representação da estrutura causal do espaço-tempo em uma região finita, envolvendo as chamadas *transformações conformes*.

Definição 13. *Uma transformação conforme é um mapa entre (M, g_{ab}) e (M, \tilde{g}_{ab}) , de forma que:*

$$\tilde{g}_{ab} = \Lambda^2(x)g_{ab}, \quad (1.28)$$

sendo $\Lambda(x)$ uma função suave estritamente não nula.

Apesar das transformações conformes alterarem a métrica do espaço-tempo, modificando assim as curvas geodésicas e a curvatura do espaço-tempo, as transformações conformes preservam a estrutura causal do espaço-tempo [1, 5]. Isso é facilmente verificável pela definição das transformações em (1.28), que implica em:

$$g_{ab}V^aV^b > 0 \rightarrow \tilde{g}_{ab}V^aV^b > 0, \quad (1.29a)$$

$$g_{ab}V^aV^b = 0 \rightarrow \tilde{g}_{ab}V^aV^b = 0, \quad (1.29b)$$

$$g_{ab}V^aV^b < 0 \rightarrow \tilde{g}_{ab}V^aV^b < 0. \quad (1.29c)$$

Assim, apesar de as geodésicas não serem iguais antes e depois das transformações conformes, tais transformações levam curvas tipo tempo/luz/espaço em curvas tipo tempo/luz/espaço. Dessa forma, análises que levam em conta a estrutura causal do espaço-tempo podem ser feitas usando diagramas de Penrose sem perdas.

Para construir a noção dos diagramas de Penrose, será exemplificado o caso para Minkowski, e posteriormente serão apresentados os diagramas correspondentes a um buraco negro estático eterno, e de um corpo em colapso que gera um buraco negro estático. A construção desta seção se baseia nas referências [1, 5].

1.4.1 Espaço de Minkowski em dimensão (1+1)

O espaço de Minkowski em dimensão (1 + 1) é caracterizado pelo elemento de linha:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2, \quad (1.30)$$

com $-\infty < t, x < \infty$. Introduzindo as coordenadas nulas u e v :

$$u = t - x, \quad (1.31a)$$

$$v = t + x, \quad (1.31b)$$

o elemento de linha (1.30) toma a forma simples:

$$ds^2 = -dudv. \tag{1.32}$$

Assim como t e x , temos que $-\infty < u, v < \infty$.

Visando uma melhor análise no limite das regiões infinitamente distantes da origem do sistemas de coordenadas, é conveniente introduzir coordenadas que compactificam o diagrama de espaço-tempo. Para Minkowski, introduzimos as coordenadas \tilde{u} e \tilde{v} :

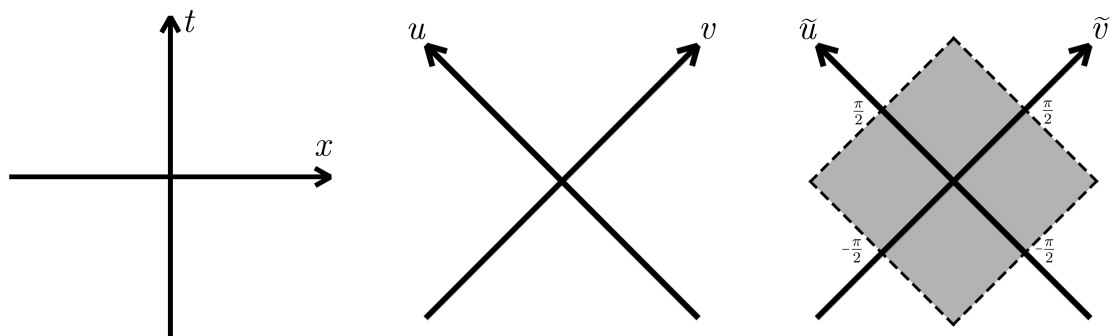
$$u = \tan \tilde{u}, \tag{1.33a}$$

$$v = \tan \tilde{v}, \tag{1.33b}$$

de forma que o domínio de ambas coordenadas é o intervalo aberto entre $-\pi/2$ e $\pi/2$. A mudança de coordenadas (1.33) nos permite representar o espaço-tempo de extensão infinita em um diagrama finito, sendo a borda de tal diagrama, que não faz parte do domínio de definição de \tilde{u} e \tilde{v} , o limite de $u, v \rightarrow \pm\infty$. Após tal mudança, o elemento de linha em termos de \tilde{u} e \tilde{v} adquire a forma:

$$ds^2 = -\frac{1}{(\cos \tilde{u} \cos \tilde{v})^2} d\tilde{u}d\tilde{v}, \tag{1.34}$$

que possui comportamento divergente em $\tilde{u}, \tilde{v} \rightarrow \pm\pi/2$, que é equivalente a $u, v \rightarrow \pm\infty$.



(a) Diagrama de espaço-tempo nas coordenadas (t, x) . (b) Diagrama de espaço-tempo nas coordenadas (u, v) . (c) Diagrama de espaço-tempo nas coordenadas (\tilde{u}, \tilde{v}) .

Figura 2 – Diagramas de espaço-tempo correspondentes a cada sistema de coordenadas apresentado.

A fim de trazer para o diagrama de espaço-tempo a região $\tilde{u}, \tilde{v} \rightarrow \pm\pi/2$, possibilitando analisar os limites assintoticamente distantes do centro do sistema de coordenadas utilizado, será realizada a transformação conforme:

$$\tilde{g}_{ab} = (\cos \tilde{u} \cos \tilde{v})^2 g_{ab}, \quad (1.35)$$

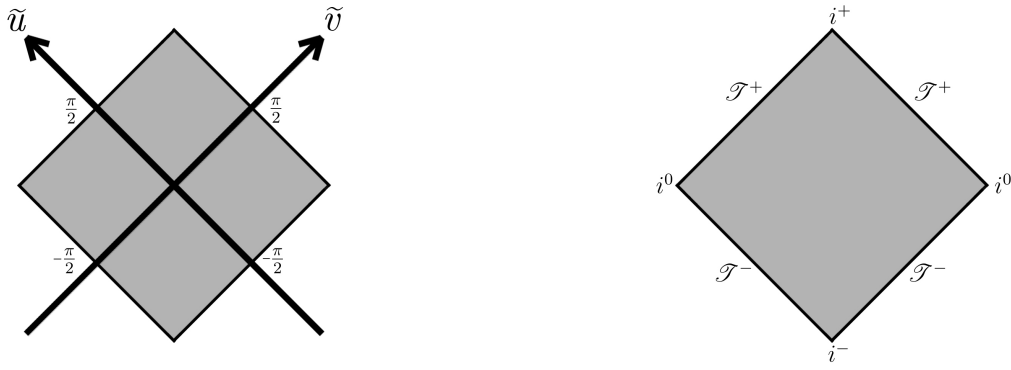
modificando o elemento de linha para:

$$d\tilde{s}^2 = -d\tilde{u}d\tilde{v}, \quad (1.36)$$

que não possui mais um comportamento divergente em $\tilde{u}, \tilde{v} = \pm\pi/2$, de forma que tais pontos podem ser adicionados ao espaço-tempo. A adição de tais pontos leva o espaço-tempo (M, g_{ab}) a um $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$, que é visto como a compactificação conforme de (M, g_{ab}) . Os chamados diagramas de Penrose correspondem aos diagramas de espaço-tempo não do espaço físico analisado, mas sim de sua compactificação.

Se analisarmos os pontos iniciais e finais de curvas tipo tempo/luz/espaço do espaço de Minkowski em seu diagrama de Penrose, temos que:

- As curvas temporais iniciam em $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ e terminam em $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Esses pontos são simbolizados, respectivamente, por i^+ e i^- e correspondem ao *futuro e passado tipo tempo*;
- As curvas nulas iniciam em $\tilde{u} = -\frac{\pi}{2}$ e $|\tilde{v}| < \pi/2$ ou em $\tilde{v} = -\frac{\pi}{2}$ e $|\tilde{u}| < \pi/2$; e terminam em $\tilde{u} = \frac{\pi}{2}$ e $|\tilde{v}| < \pi/2$ ou em $\tilde{v} = \frac{\pi}{2}$ e $|\tilde{u}| < \pi/2$. Para as regiões onde as curvas terminam e iniciam, utilizamos, respectivamente, os símbolos \mathcal{T}^+ e \mathcal{T}^- , e correspondem ao *futuro e passado tipo luz*;
- As curvas espaciais intersectam $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\pm\frac{\pi}{2}, \mp\frac{\pi}{2})$, não fazendo sentido dizer em qual desses pontos a curva começa ou termina, exatamente pelo fato de serem curvas espaciais. Esses pontos são simbolizados por i^0 , e correspondem ao *infinito espacial*.



(a) Diagrama de espaço-tempo após a transformação conforme.

(b) Diagrama de Penrose de Minkowski (1 + 1).

Figura 3 – Diagramas de espaço-tempo correspondentes a cada sistema de coordenadas apresentado.

1.4.2 Espaço de Minkowski em dimensão (1+3)

O espaço de Minkowski em dimensão (1 + 3) é caracterizado pelo elemento de linha:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.37)$$

com $-\infty < t, x, y, z < \infty$. Para que possamos representá-lo por um diagrama de Penrose, que é um diagrama bidimensional, é necessário suprimir algumas coordenadas. Para isso, é conveniente escrevermos a métrica em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.38)$$

Levando em conta que as coordenadas t, r são aquelas que caracterizam as regiões assintoticamente distantes, para o diagrama de Penrose do espaço de Minkowski (1+3) serão suprimidas as coordenadas angulares.

Introduzindo as coordenadas nulas u e v :

$$u = t - r, \quad (1.39a)$$

$$v = t + r, \quad (1.39b)$$

e em seguida as coordenadas \tilde{u} e \tilde{v} definidas em (1.33), temos que o elemento de linha (1.38) toma a forma:

$$ds^2 = \frac{1}{(2 \cos \tilde{u} \cos \tilde{v})^2} \left[-4d\tilde{u}d\tilde{v} + \sin^2(\tilde{v} - \tilde{u})d\Omega^2 \right]. \quad (1.40)$$

Realizando a transformação conforme:

$$\tilde{g}_{ab} = (2 \cos \tilde{u} \cos \tilde{v})^2 g_{ab}, \quad (1.41)$$

temos que o novo elemento de linha é dado por:

$$d\tilde{s}^2 = -4d\tilde{u}d\tilde{v} + \sin^2(\tilde{v} - \tilde{u})d\Omega^2, \quad (1.42)$$

de forma que, suprimindo a parte angular, o caso de dimensão $(1 + 3)$ é análogo ao caso de dimensão $(1 + 1)$ com a principal diferença sendo o fato de que a coordenada r é não negativa. Assim, o diagrama de Penrose para o espaço de Minkowski $(1 + 3)$, ilustrado na figura 4, corresponde a metade do de dimensão $(1 + 1)$.

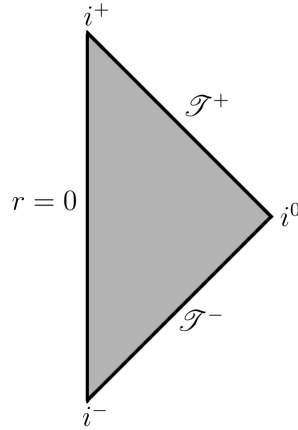


Figura 4 – Diagrama de Penrose de Minkowski em dimensão $(1 + 3)$.

Como as coordenadas angulares foram suprimidas, cada ponto do diagrama na figura 4 corresponde não a um ponto do espaço de Minkowski, como acontece no diagrama da figura 3b, mas sim a uma esfera.

1.4.3 Métrica de Schwarzschild

Por conveniência, dado os tratamentos que serão feitos nos próximos capítulos, será introduzido o diagrama de Penrose de um buraco negro formado por um corpo em colapso. Para isso, é necessário construir inicialmente o diagrama relativo a um espaço-tempo descrito por um buraco negro de Schwarzschild eterno.

O elemento de linha para um espaço-tempo na presença de um buraco negro de Schwarzschild eterno de massa M é dado por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.43)$$

sendo $d\Omega$ o elemento infinitesimal de ângulo sólido. Para construir o diagrama de Penrose de tal espaço-tempo, primeiro são introduzidas as coordenadas nulas U e V :

$$U = - \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{r-t}{4M}}, \quad (1.44a)$$

$$V = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{t+r}{4M}}, \quad (1.44b)$$

transformando o elemento de linha (1.43) em:

$$ds^2 = - \frac{32M^3 e^{-\frac{r}{2M}}}{r} dU dV + r^2 d\Omega^2, \quad (1.45)$$

com r sendo uma função implícita de U e V , dada por:

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{\frac{r}{2M}} = -UV. \quad (1.46)$$

A mudança de coordenadas (1.44) além de evidenciar que $r = 2M$ não é uma região singular, como aparenta ser por (1.43), nos permite expandir o domínio da métrica para regiões não compreendidas inicialmente pelo sistema de coordenadas em termos de t e r . Assim, temos que $-\infty < U, V < \infty$, sendo a região externa ao buraco negro descrita por $U < 0, V > 0$ e o horizonte de evento por $U, V = 0$.

Para representar o diagrama de Penrose de tal métrica, é necessário compactificar o espaço-tempo, introduzindo as coordenadas \tilde{U} e \tilde{V} :

$$U = \tan \tilde{U}, \quad (1.47a)$$

$$V = \tan \tilde{V}, \quad (1.47b)$$

resultando no elemento de linha:

$$ds^2 = \frac{1}{(2 \cos \tilde{U} \cos \tilde{V})^2} \left[-4 \frac{32M^3 e^{-\frac{r}{2M}}}{r} d\tilde{U} d\tilde{V} + r^2 \cos^2 \tilde{U} \cos^2 \tilde{V} d\Omega^2 \right]. \quad (1.48)$$

As coordenadas (1.47) fazem com que todo o espaço-tempo esteja contido em uma região que não ultrapassa os valores de $\pm\frac{\pi}{2}$ em \tilde{U} e \tilde{V} , como mostra o diagrama da figura 5.

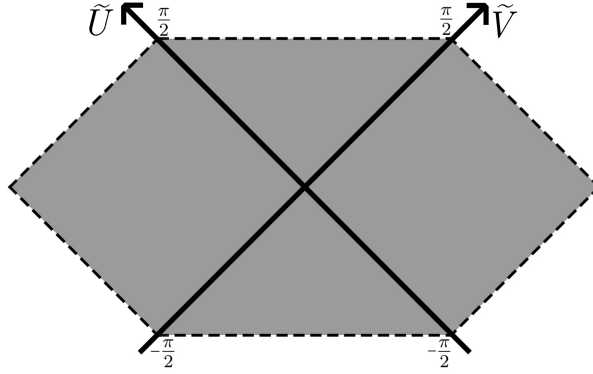


Figura 5 – Diagrama de espaço-tempo nas coordenadas (\tilde{U}, \tilde{V}) , suprimindo as coordenadas angulares .

Para obtermos o diagrama de Penrose, realizamos a transformação conforme:

$$\tilde{g}_{ab} = (2 \cos \tilde{U} \cos \tilde{V})^2 g_{ab}, \quad (1.49)$$

obtendo o elemento de linha da compactificação de Schwarzschild:

$$d\tilde{s}^2 = -4 \frac{32M^3 e^{-\frac{r}{2M}}}{r} d\tilde{U} d\tilde{V} + r^2 \cos^2 \tilde{U} \cos^2 \tilde{V} d\Omega^2, \quad (1.50)$$

que resultam no diagrama de Penrose representado na figura 6, sendo *I* e *II*, respectivamente, as regiões exterior e interior ao buraco negro.

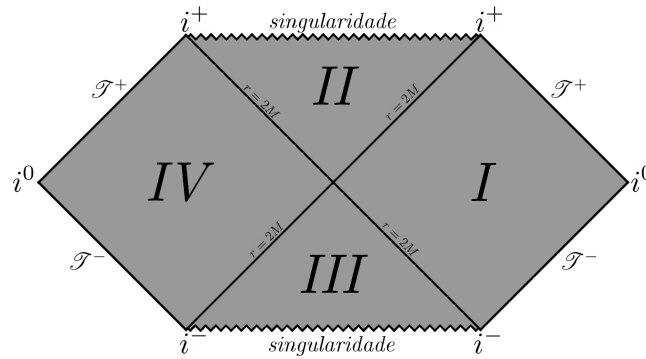


Figura 6 – Diagrama de Penrose de um buraco negro de Schwarzschild eterno.

1.4.4 Formação de buraco negro

Apesar do tratamento dos próximos capítulos consistir em buracos negros em rotação, a análise do diagrama de Penrose de um buraco negro estático em formação continua tendo sua importância, já que nas regiões externas ao buraco negro o diagrama de ambos os casos é igual. A construção nessa seção consiste no espaço-tempo de uma casca esférica que entra em colapso de forma esfericamente simétrica, formando um buraco negro de Schwarzschild.

Para construir tal diagrama, serão utilizados os últimos construídos. Como o colapso é esfericamente simétrico, pelo teorema de Birkhoff [1, 2, 3], a parte exterior à casca é descrita pela métrica de Schwarzschild, enquanto a interior é descrita pela de Minkowski. Assim, o diagrama correspondente à casca em colapso consiste de uma colagem do diagrama de Penrose construído em ambos os contextos, como mostra a figura 7. A colagem dos diagramas apresentados na figura 7 resulta no diagrama de Penrose ilustrado na figura 8a.

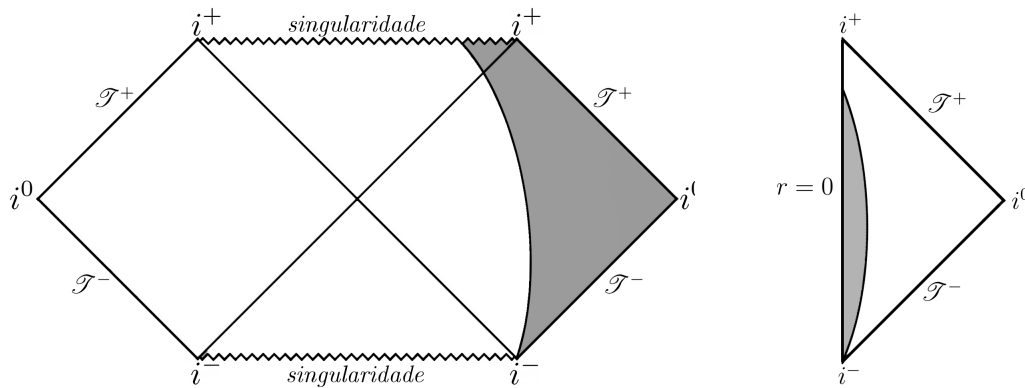
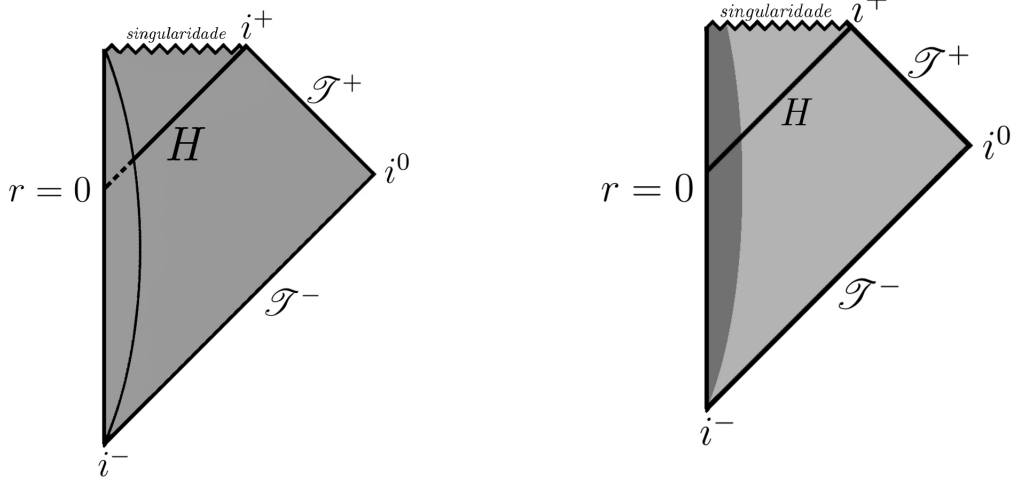


Figura 7 – Diagramas de Penrose da métrica de Schwarzschild e do espaço de Minkowski com a trajetória descrita por uma casca massiva que entra em colapso. Como uma casca em colapso é descrita pela métrica de Schwarzschild em seu exterior e pela de Minkowski em seu interior, o diagrama do buraco negro em formação deve conter as regiões em cinza.

Na figura 8a o horizonte de eventos foi representado por H , correspondendo à linha contínua. A parte tracejada não corresponde ao horizonte de eventos, já que a região interna à casca em colapso é descrita por Minkowski. Entretanto, qualquer geodésica tipo tempo/luz que ultrapassa a linha tracejada estará fadada a encontrar a singularidade. Isso ocorre porque apesar de o horizonte de eventos ainda não ter sido formado quando uma geodésica tipo tempo/luz ultrapasse a linha tracejada, não há tempo suficiente para que a geodésica saia do interior da casca em colapso antes da formação do horizonte de eventos.



(a) Diagrama de Penrose de uma casca massiva em colapso, feita a partir da colagem dos diagramas internos e externos ao corpo em colapso.

(b) Diagrama de Penrose de um buraco negro formado por um corpo em colapso. A região mais escura corresponde ao corpo em colapso, e H ao horizonte de eventos formado.

Figura 8 – Diagramas de Penrose de colapsos esfericamente simétricos.

Se considerarmos a formação de um buraco negro a partir do colapso de uma distribuição contínua de massa, que é mais geral e física do que a descrita por uma casca esférica, apesar de a região interior ao corpo em colapso depender da forma da distribuição de massa, é possível afirmar que, qualitativamente, o diagrama de Penrose relativo a essa formação de buraco negro será semelhante ao diagrama representado em 8b, que corresponde ao diagrama da casca em colapso com pequenas alterações. As adaptações feitas são todas motivadas pelo fato do colapso em questão ser de uma distribuição contínua de massa:

- A trajetória o corpo em colapso não corresponde somente a uma linha, mas sim a uma região contínua do diagrama, representada pelo cinza mais escuro;
- O horizonte de eventos não será formado de uma vez, e sim de forma contínua, já que a concentração de massa tende a aumentar mais rapidamente nas regiões mais internas do corpo em colapso. Assim, a linha tracejada foi substituída por uma linha contínua;
- As regiões mais internas do corpo em colapso cairão na singularidade antes das regiões mais externas. Assim, a linha mais externa da região correspondente ao corpo em colapso do diagrama em 8b não atinge a transição de $r = 0$ para a singularidade, mas sim a própria singularidade.

Como a construção do diagrama de Penrose representado na figura 8b levou em conta características extremamente gerais a respeito da formação de um buraco negro de Schwarzschild a partir de um colapso gravitacional esfericamente simétrico, tal diagrama será utilizado como o diagrama de Penrose padrão para essa dissertação quando levarmos em conta o contexto de formação de um buraco negro.

1.5 Condições de energia

A determinação de como distribuições de energia e momento curvam o espaço-tempo é dada pelas equações de Einstein:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (1.51)$$

sendo toda a característica da distribuição de massa e energia embutida no lado direito da igualdade, representada pelo tensor de energia-momento. Caso campos de diferentes naturezas estejam presentes no espaço-tempo, o tensor de energia-momento em (1.51) compreenderá a soma de todos eles.

Entretanto, além das equações de Einstein apresentarem diversas dificuldades matemáticas, o conhecimento da forma exata de T_{ab} não é trivial, mesmo tendo em mãos a forma precisa das equações que o determinam. Mesmo sem essa forma exata de T_{ab} em mãos, distribuições de energia e momento descrevem situações físicas, não sendo portanto arbitrárias. Dessa forma, a determinação de comportamentos fisicamente aceitáveis para T_{ab} nos permite obter propriedades sobre o espaço-tempo e desenvolver teoremas, mesmo sem conhecer a forma exata das distribuições de energia-momento. A esses comportamentos, damos o nome de *condições de energia*. A exposição de tais condições será feita seguindo as referências [3, 1].

1.5.1 Condição fraca de energia

A condição fraca de energia assume que, para cada ponto $p \in M$, o tensor de energia-momento obedece à desigualdade:

$$T_{ab}V^aV^b \geq 0, \quad (1.52)$$

para todo V^a tipo tempo, e por continuidade, tipo luz.

A interpretação física para condição fraca de energia é que densidades de energia devem sempre ser não negativas. Isso porque para um observador que se

encontra em um ponto p de sua trajetória com vetor tangente V^a , a contração $T_{ab}V^aV^b$ corresponde à densidade local de energia medida pelo observador.

Se contraírmos a equação de Einstein por um vetor V^a tipo luz, a condição fraca de energia implica em:

$$R_{ab}V^aV^b \geq 0, \text{ para todo } V^a \text{ tipo luz.} \quad (1.53)$$

Segue dessa desigualdade que, para uma congruência geodésica tipo luz, a condição fraca de energia implica que a curvatura do espaço-tempo tende sempre a convergir as geodésicas. A expressão (1.53) também é enunciada como *condição de convergência nula*.

1.5.2 Condição dominante de energia

A condição dominante de energia assume que, para cada ponto $p \in M$, o tensor de energia-momento obedece às desigualdades:

$$T_{ab}V^aV^b \geq 0, \quad (1.54a)$$

$$(T_{ab}V^a)^2 \leq 0, \quad (1.54b)$$

para todo V^a tipo tempo, e por continuidade, tipo luz.

Como a condição (1.54a) é igual à condição fraca de energia, a noção de que densidades de energia são sempre não negativas é preservada na condição dominante de energia, assim como a *condição de convergência nula* (1.53). Já quanto à (1.54b), o vetor $T_{ab}V^a$ é proporcional ao vetor momento medido por um observador em um ponto p do espaço no qual seu vetor tangente é V^a . Assim, a condição (1.54b) é vista como que o fluxo de energia e momento no espaço-tempo é sempre um vetor tipo tempo ou tipo luz, implicando que energia e momento não fluem mais rápido que a luz. Uma forma equivalente de se enunciar a condição dominante de energia é que, para qualquer base ortonormal:

$$|T^{00}| \geq |T^{\mu\nu}|, \quad (1.55)$$

para todo μ e ν .

1.5.3 Condição forte de energia

A condição forte de energia é motivada pela escrita da equação de Einstein não em termos do escalar de curvatura, mas em termos do traço do tensor de energia-momento T :

$$R_{ab} = 8\pi \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right), \quad (1.56)$$

Contraindo ambos os lados da igualdade (1.56) por um vetor normalizado tipo tempo W^a , temos que:

$$R_{ab} W^a W^b = 8\pi \left(T_{ab} W^a W^b + \frac{1}{2} T \right). \quad (1.57)$$

O que a condição forte de energia assume é que as pressões da matéria não são grandes o suficientes ao ponto de tornar o lado direito da igualdade negativo. Assim:

$$T_{ab} W^a W^b \geq -\frac{1}{2} T. \quad (1.58)$$

Como é evidente por (1.56), a condição forte de energia implica em:

$$R_{ab} V^a V^b \geq 0, \text{ para todo } V^a \text{ tipo tempo.} \quad (1.59)$$

A expressão (1.59) pode ser interpretada de forma análoga à (1.53): em uma congruência geodésica tipo tempo, a condição forte de energia implica que a curvatura do espaço-tempo tende sempre a convergir as geodésicas. Por esse motivo, (1.59) também é chamada de *condição de convergência tipo tempo*.

2 Buracos Negros

2.1 Assintoticamente plano

Se analisarmos a solução de um buraco negro de Schwarzschild em (1.43), ou a de Kerr, que será apresentada mais adiante, é evidente que no limite de $r \rightarrow \infty$ ambas as métricas se reduzem à de Minkowski. Espaços tempos que, grosso modo, se comportam como o de Minkowski em regiões “infinitamente distantes” das fontes de curvatura são chamados de espaços-tempos *assintoticamente planos*. Entretanto, métricas que descrevem buracos negros são globalmente muito diferentes da métrica de Minkowski. Assim, a definição de espaços assintoticamente planos deve ser feita de maneira menos informal. A definição apresentada segue as referências [2, 3].

Como foi visto na seção 1.4, as regiões “infinitamente distantes” do espaço-tempo, para os exemplos tratados nessa seção, são representadas pelas bordas dos diagramas de Penrose. Isso motiva a definição de espaços assintoticamente planos a partir da noção da compactificação, e sua relação com a compactificação de Minkowski. Para caracterizar o comportamento “parecido com Minkowski”, definimos primeiro espaços-tempos *assintoticamente vazios e simples*:

Definição 14. *Um espaço-tempo (M, g_{ab}) é dito assintoticamente vazio e simples se existe um espaço-tempo $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ com fronteira $\partial\tilde{M}$ e com as propriedades:*

- (1) $\tilde{M} \setminus \partial\tilde{M}$ é conforme a M com $g_{ab} = \Omega^{-2}\tilde{g}_{ab}$;
- (2) $\Omega|_{\partial\tilde{M}} = 0$, $\partial_\mu\Omega|_{\partial\tilde{M}} \neq 0$;
- (3) *Todas as geodésicas nulas em M começam e terminam em $\partial\tilde{M}$;*
- (4) $R_{ab} = 0$ na vizinhança aberta de $\partial\tilde{M}$.

Em relação à primeira propriedade da definição acima, a existência de $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ pode ser traduzida como a possibilidade de se construir um diagrama de Penrose para o espaço-tempo (M, g_{ab}) , sendo $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ a chamada compactificação de (M, g_{ab}) . A segunda e quarta propriedades correspondem ao comportamento plano do espaço-tempo para as regiões “infinitamente distantes”. Isso porque a quarta propriedade garante que o espaço-tempo é uma solução de vácuo para tais regiões, enquanto a segunda propriedade corresponde ao comportamento da compactificação do próprio espaço de Minkowski, fazendo, inclusive, com que as regiões \mathcal{I}^\pm , i^\pm e i^0 estejam presentes na compactificação de (M, g_{ab}) . Portanto, os espaços assintoticamente vazios

e simples correspondem a uma classe de espaços-tempos na qual a noção de “parecido com Minkowski” em regiões “infinitamente distantes” das fontes de curvatura é bem definida. Entretanto, a terceira propriedade exclui os espaços-tempos singulares, ou aqueles nos quais o campo gravitacional é tão intenso em determinadas regiões que geodésicas nulas assumem órbitas. Dentre esses espaços, os que descrevem buracos negros estão incluídos. Assim, a definição de espaços assintoticamente planos é mais geral que a de espaços assintoticamente vazios e simples.

Definição 15. *Um espaço-tempo (M, g_{ab}) é dito assintoticamente plano se existe um espaço-tempo assintoticamente vazio e simples (M', g'_{ab}) com borda $\partial M'$, tal que para uma vizinhança U' de $\partial M'$, $U' \cap M'$ é isométrico a um aberto U de M .*

A definição acima engloba os espaços assintoticamente vazios e simples, além de incluir aqueles com singularidades e campos gravitacionais muito intensos, porém com distribuições de energia e momento espacialmente finita, ou de rápido decaimento. Isso porque a definição de espaços assintoticamente planos em termos da vizinhança U' de $\partial M'$ consiste em analisar o aspecto assintoticamente vazio e simples apenas das regiões distantes das fontes de curvatura. Para maiores discussões a respeito de espaços assintoticamente planos, recomenda-se as referências [1, 2, 3].

A caracterização dos buracos negros na seção a seguir será feita para espaços assintoticamente planos.

2.2 Caracterização

Estrelas com massas superiores a 1,5 massas solares podem sofrer um colapso gravitacional após esgotar seu combustível nuclear [3]. Para configurações esfericamente simétricas, ou com pequenos desvios dessa simetria [1, 3], é possível se mostrar que será formada uma singularidade invisível para observadores de fora de uma certa região que engloba a singularidade. Para que qualquer informação consiga sair de tal região, seria necessário que ela viajasse mais rápido que a luz.

A noção de um buraco negro como um corpo massivo o suficiente para que, dentro da região que o delimita, nem mesmo a luz consiga escapar é o ponto de partida para se definir tais corpos de forma mais técnica. O fato de que nem mesmo a luz consegue escapar da região interior a um buraco negro pode ser traduzido como a incapacidade de geodésicas nulas interiores ao buraco negro atingirem a região \mathcal{T}^+ . Assim, a luz que chega a \mathcal{T}^+ necessariamente foi emitida no exterior do buraco negro, podendo ele ser entendido como a região do espaço-tempo não compreendida

pelo passado do futuro tipo luz. Com essa noção, podemos definir de forma precisa um buraco negro:

Definição 16. Para um espaço-tempo (M, g_{ab}) assintoticamente plano, um buraco negro B é definido como: $B = M - J^-(\mathcal{I}^+)$.

É importante ressaltar que, apesar de a definição apresentada para buracos negros ter sido feita em espaços assintoticamente planos, também é possível defini-los de maneira análoga para alguns espaços que tendem assintoticamente para outros espaços, como os de Robertson-Walker abertos [1].

Como diversas propriedades de buracos negros estão relacionadas ao comportamento da interface que separa o interior de B de $J^-(\mathcal{I}^+)$, é conveniente defini-la previamente.

Definição 17. O horizonte de eventos H de um buraco negro é definido como: $H = \dot{J}^-(\mathcal{I}^+) \cap M$, sendo o ponto referente à fronteira do conjunto.

Pela definição de um buraco negro, é possível caracterizar a natureza do horizonte de eventos [2]. Por se tratar de uma superfície, sua caracterização diz respeito ao caráter de seu vetor normal. Para isso analisaremos as consequências de supor que o horizonte de eventos seja uma superfície temporal, espacial ou nula.

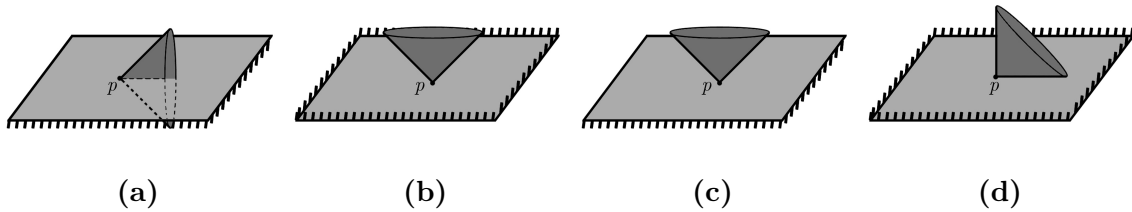


Figura 9 – Representações das reações entre o cone de luz e um elemento superfície do horizonte de eventos, supondo que o horizonte seja uma superfície **(a)** temporal, **(b,c)** espacial, **(d)** nula. O tracejado no bordo do elemento de superfície indica a região interior ao buraco negro.

Suponha que para $p \in H$, e uma vizinhança também em H , o horizonte de eventos seja uma superfície temporal (figura 9a). Como todo espaço-tempo possui a mesma estrutura local de Minkowski, podemos afirmar que o cone de luz futuro em p é dividido pelo horizonte de eventos em uma parte interior ao buraco negro, e outra parte que invade $J^-(\mathcal{I}^+)$. Assim, por continuidade, para uma vizinhança de p interior a B , o cone de luz também possui uma parte direcionada para $J^-(\mathcal{I}^+)$. Portanto, sinais emitidos no interior do buraco negro podem chegar a \mathcal{I}^+ , contradizendo a definição 16.

Se partirmos do princípio que o horizonte de eventos é uma superfície espacial, dividimos o problema em dois: ou o cone de luz futuro em p está contido no interior do buraco negro (figura 9b), ou adentra a região $J^-(\mathcal{T}^+)$ (figura 9c). Para a segunda opção, chegamos à conclusão de que sinais emitidos em uma vizinhança de p interior a B chegam a \mathcal{T}^+ , contradizendo a definição 16. Para a primeira opção, temos que para uma pequena vizinhança de p exterior a B , o cone de luz futuro cruza H no sentido interior ao buraco negro, de forma que sinais emitidos em tal vizinhança não chegam a \mathcal{T}^+ . Isso significa que uma região exterior de B é invisível a \mathcal{T}^+ , e portanto H não seria a fronteira de B . Assim, *o horizonte de eventos é necessariamente uma superfície nula*. Além disso, a parte dos cones de luz definidos no horizonte de eventos que não apontam na direção das curvas que geram o horizonte deve estar direcionado para o interior do buraco negro, como indica a figura 9d. Caso contrário, chegaríamos em uma contradição análoga a considerar o horizonte de eventos como sendo uma superfície temporal ou espacial. Uma prova mais rigorosa sobre o horizonte de eventos ser uma superfície nula pode encontrada em [36].

É importante notar que pela definição 16, a existência de um buraco negro implica no conhecimento de toda a evolução do espaço-tempo. Entretanto, de forma geral, singularidades podem quebrar o caráter globalmente hiperbólico de um espaço-tempo caso elas sejam visíveis a \mathcal{T}^+ (chamadas de *singularidades nuas*). Como poderá ser verificado mais adiante, a métrica de Kerr, que descreve a métrica de um buraco negro estacionário em rotação, pode gerar singularidades nuas para, por exemplo, valores de momento angular suficientemente altos ($J > M^2$) [3]. Além disso, não existem teoremas que garantam a não formação de singularidades nuas por colapsos gravitacionais arbitrários.

Apesar de tal ausência, buscas por tais resultados, como mostram [1] [2] e [3], levam a uma maior plausibilidade de formação de singularidades não visíveis em \mathcal{T}^+ do que o contrário. Nesse sentido, Penrose formulou a chamada *conjectura de censura cósmica*, que em uma de suas formulações toma a forma [1]:

- Conjectura de censura cósmica (formulação física): *Todos os espaços fisicamente razoáveis são globalmente hiperbólicos.*

Formulações que indicam sob quais condições a conjectura acima é válida, além de uma prova rigorosa sobre ela, ainda são um dos principais problemas não resolvidos na física de buracos negros [2]. Entretanto, nada é possível dizer, no que diz respeito a buracos negros, para espaços que não sejam globalmente hiperbólicos.

Nesse sentido, como ponto de partida para diversos teoremas e resultados que serão apresentados, assim como pelo fato de que a definição 16 leva em conta o conhecimento da evolução completa do espaço-tempo, definimos de forma conveniente uma classe de espaços tempo:

Definição 18. *Um espaço-tempo (M, g_{ab}) é dito *strongly asymptotically predictable* (SAP) se para a compactificação $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ existe um aberto $\tilde{V} \subset \tilde{M}$ com $\overline{M \cap J^-(\mathcal{I}^+)} \subset \tilde{V}$, sendo o traço correspondente ao fecho do conjunto, de forma que $(\tilde{V}, \tilde{g}_{ab})$ é globalmente hiperbólico.*

O fato de \tilde{V} ser globalmente hiperbólico para um espaço-tempo SAP pode se traduzido como: para tais espaços, todas as singularidades existentes são acompanhadas de um horizonte de eventos, e a evolução da parte exterior a um buraco negro não é afetada pelo seu interior.

Todo tratamento feito nesta seção independe de em qual estágio o buraco negro se encontra após sua formação. Levando em conta uma formação gerada por um colapso gravitacional arbitrário, é esperado que ocorram emissões de ondas gravitacionais durante o processo, resultando posteriormente em um estado de equilíbrio [1]. Como os colapsos podem ser tão gerais quanto se queira, o tratamento matemático de buracos negros fora dos estados de equilíbrio é complicado. Partindo da premissa de que os estados de equilíbrio serão alcançados em algum momento, é conveniente estudar suas propriedades a fim de se obter uma descrição válida para um regime esperado para todo tipo de colapso gravitacional, partindo como premissa da validade da conjectura de censura cósmica. O estudo de tais estados de equilíbrio nos possibilita formular a chamada *termodinâmica de buracos negros*, que é de importância fundamental no contexto da física teórica fundamental, além de ser o foco dos próximos capítulos.

2.3 Estados de equilíbrio

A noção de estados de equilíbrio na física é associada a configurações do sistema analisado que deixam de sofrer alterações ao longo do tempo. A formalização dessa noção no contexto da relatividade geral é dada pelos chamamos *espaços-tempos estacionários*.

Definição 19. *Um espaço-tempo é dito estacionário se admite vetor de tipo tempo e normalizável nas regiões espacialmente distantes das fontes de curvatura.*

A definição de espaço-tempo estacionário carrega exatamente a noção intuitiva de algo que se estabilizou. Isso porque um vetor de Killing tipo tempo assintoticamente normalizável implica que, longe o suficiente das distribuições de massa e energia, ele pode ser escrito como uma simples translação temporal $(\partial_t)^a$. Essa é exatamente a noção de configuração em equilíbrio: ao longo de órbitas temporais, a métrica é invariante.

Além da noção de um espaço-tempo estacionário, existe também a de um *espaço-tempo estático*, que também corresponde a uma situação de equilíbrio.

Definição 20. *Um espaço-tempo é estático se sua métrica é invariante pela operação de inversão temporal.*

A noção de espaço-tempo estático é mais forte que a de um espaço-tempo estacionário. A métrica ser estática implica em estacionária, mas exclui casos, por exemplo, de rotação em torno de um eixo. A inversão temporal mudaria o sentido de rotação, e por consequência a métrica.

Tendo sido estabelecidas as definições de um estado de equilíbrio no contexto da relatividade geral, é possível buscar essas soluções para o contexto de buracos negros. Levando em conta que a definição de um espaço-tempo estático é mais restrita que a de um espaço-tempo estacionário, não abrangendo buracos negros em rotação, serão estudadas na próxima seção as soluções estacionárias para buracos negros em rotação, que englobam os estáticos quando levamos em conta uma rotação nula.

2.3.1 Soluções estacionárias

Devido a um teorema de unicidade, temos que as únicas soluções estacionárias e assintoticamente planas das equações de Einstein para um buraco negro de massa M e momento angular J fazem parte da família de soluções de Kerr [1, 2, 3]:

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - 2 \frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) dt d\phi \\ + \Sigma d\theta^2 + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.1)$$

sendo a , Δ e Σ definidos por:

$$J = Ma, \quad (2.2a)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (2.2b)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (2.2c)$$

Mais informações sobre a métrica podem ser encontradas no apêndice A.

A única singularidade real da métrica de Kerr ocorre quando $\Sigma = 0$. Além dela, existem também singularidades de coordenadas quando $\Delta = 0$, que resulta em $r = r_{\pm}$, com:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (2.3)$$

sendo o horizonte de eventos marcado por $r = r_+$.

A métrica de Kerr não depende explicitamente do tempo e do ângulo ϕ . Assim, tem-se os dois vetores de Killing:

$$\xi^a = (\partial_t)^a, \quad (2.4a)$$

$$\psi^a = (\partial_\phi)^a. \quad (2.4b)$$

O vetor ξ^a já era esperado, devido à busca por uma métrica estacionária. Apesar do caráter estacionário da métrica, seu termo espaço-temporal evidencia seu caráter não estático, já que uma inversão temporal levaria $dt \rightarrow -dt$. O termo espaço-temporal caracteriza a rotação de um buraco negro estacionário, como se verá mais adiante.

O outro vetor de Killing descreve a simetria sob rotações em torno do eixo do momento angular. A existência do vetor de Killing ψ^a faz com que a métrica de Kerr também receba o rótulo de *axissimétrica*:

Definição 21. *Um espaço-tempo é axissimétrico se admite vetor de Killing assintoticamente tipo espaço cujas curvas integrais são fechadas.*

Como a métrica de Kerr é única, todo buraco negro estacionário é axissimétrico.

Como os dois vetores de Killing citados são vetores coordenados, temos que o colchete de Lie de ambos é nulo:

$$[\xi, \psi]^a = 0 \quad \rightarrow \quad \xi^a \nabla_a \psi^b = \psi^a \nabla_a \xi^b. \quad (2.5)$$

2.3.2 Horizonte de eventos para soluções estacionárias

Apesar do horizonte de eventos ter sido definido na seção 2.2 utilizando noções da estrutura causal do espaço-tempo, para buracos negros estacionários, o horizonte de eventos pode ser descrito diretamente em termos da métrica apresentada em (2.1).

No contexto estacionário, uma classificação importante para a identificação do horizonte de eventos é o da *condição de circularidade* [2].

Definição 22. *Seja uma métrica de um espaço estacionário axissimétrico escrito em termos das coordenadas t , ϕ , x^1 e x^2 :*

$$ds^2 = -V dt^2 + 2W d\phi dt + X d\phi^2 + 2g_{tx^\mu} dx^\mu d\phi + 2g_{\phi x^\mu} dx^\mu d\phi + g_{x^1 x^2} dx^1 dx^2$$

com $V = -\xi^a \xi_a$, $X = \psi^a \psi_a$ e $W = \xi^a \psi_a$. A métrica satisfaz a condição de circularidade se existe uma mudança de coordenadas que preserve a forma acima, mas que anule os coeficientes g_{tx^μ} e $g_{\phi x^\mu}$.

Uma condição necessária e suficiente para uma métrica que atende a condição de circularidade é:

$$\xi^a R_{a[b\xi_c\psi_d]} = 0, \quad (2.6a)$$

$$\psi^a R_{a[b\psi_c\xi_d]} = 0, \quad (2.6b)$$

que são evidentemente satisfeitas pelas equações de Einstein no vácuo ($R_{ab} = 0$).

Seja o bivetor definido por:

$$\rho_{ab} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \xi_{[a} \psi_{b]}. \quad (2.7)$$

Se a condição de circularidade for satisfeita, é possível se mostrar que o horizonte de eventos de um buraco negro estacionário axissimétrico corresponde aos pontos em que $\rho_{ab}\rho^{ab} = 0$ [2]:

$$\rho^2 \equiv \rho_{ab}\rho^{ab} = W^2 + VX \stackrel{H}{=} 0. \quad (2.8)$$

A equação acima nos permite construir um vetor nulo l^a tangente ao horizonte de eventos em termos de ξ^a e ψ^a de maneira única, que será utilizado mais adiante para caracterizar completamente o horizonte de eventos. Assim, temos que l^a é dado por:

$$l^a \stackrel{H}{=} \xi^a + \alpha \psi^a.$$

Utilizando a condição de que l^a é nulo:

$$l^a l_a \stackrel{H}{=} 0$$

$$\stackrel{H}{=} \xi^a \xi_a + \alpha^2 \psi^a \psi_a + 2\alpha \xi^a \psi_a$$

$$\stackrel{H}{=} -V + \alpha^2 X + 2\alpha W.$$

Com a condição (2.8), a equação acima possui raiz única para α :

$$\alpha \stackrel{H}{=} -\frac{W}{X} \equiv \Omega_H, \quad (2.9)$$

resultando em:

$$l^a \stackrel{H}{=} \xi^a + \Omega_H \psi^a. \quad (2.10)$$

Mais adiante, a constante Ω_H será identificada como a velocidade angular do buraco negro. É possível mostrar [2] que Ω_H é constante em todo o horizonte de eventos. Evidentemente o vetor $(\partial_\theta)^a$ é ortogonal a l^a , fazendo parte do horizonte de eventos.

Pela definição de Ω_H , também é possível verificar explicitamente que:

$$\xi^a l_a \stackrel{H}{=} 0, \quad (2.11a)$$

$$\psi^a l_a \stackrel{H}{=} 0, \quad (2.11b)$$

mostrando que l^a também faz o papel de vetor normal ao horizonte de eventos. Assim, l^a possui a propriedade a seguir, descrita pelo teorema de Frobenius [1]:

Teorema 2. (Teorema de Frobenius): *Um vetor l^a é ortogonal a uma superfície S se, e somente se, satisfaz a condição $l_{[a} \nabla_b l_{c]} = 0$ em S .*

A ortogonalidade de l^a com o horizonte de eventos, em conjunto com o teorema a seguir [2, 3], provado por S. Hawking, nos permite obter mais propriedades a respeito de l^a .

Definição 23. *Um horizonte de Killing é uma superfície nula na qual seu vetor ortogonal é um vetor de Killing.*

Teorema 3. *Seja um espaço-tempo estacionário, assintoticamente plano, que contenha um buraco negro. Se a equação de Einstein for satisfeita, o horizonte de eventos é um horizonte de Killing.*

Devido a tal teorema, temos que existe um vetor de Killing χ^a , tal que:

$$\chi^a \stackrel{H}{=} \lambda l^a, \quad (2.12)$$

sendo λ alguma função.

Como é evidente pela equação de Killing, se ζ^a é um vetor de Killing, $\alpha\zeta^a$, com α constante, também é. Pela expressão (2.10), temos que l^a obedece à equação de Killing, tornando $\lambda = 1$ a solução mais simples da equação (2.12) para χ^a ser um vetor de Killing no horizonte de eventos. Como vetores de Killing são definidos no espaço-tempo em geral, é possível estender a definição de χ^a para além do horizonte de eventos:

$$\chi^a \stackrel{H}{=} \xi^a + \Omega_H \psi^a. \quad (2.13)$$

Assim, pelo teorema de Frobenius:

$$\chi_{[a} \nabla_b \chi_{c]} \stackrel{H}{=} 0. \quad (2.14)$$

Pela definição de χ^a , e pela relação (2.5), temos também que o colchete de Lie dele com os outros dois vetores de Killing se anula:

$$[\chi, \xi]^a = 0 \quad \rightarrow \quad \chi^a \nabla_a \xi^b = \xi^a \nabla_a \chi^b, \quad (2.15a)$$

$$[\chi, \psi]^a = 0 \quad \rightarrow \quad \chi^a \nabla_a \psi^b = \psi^a \nabla_a \chi^b. \quad (2.15b)$$

2.3.3 Horizonte de eventos como congruência geodésica

Como foi dito anteriormente, o horizonte de eventos possui como vetor ortogonal o vetor de Killing χ^a , podendo assim ser visto como o espaço ortogonal às curvas integrais de χ^a . Entretanto, o próprio vetor χ^a faz parte do conjunto de vetores ortogonais a si próprio no horizonte de eventos, já que, em tal região, χ^a é

um vetor tipo luz. Isso faz com que suas curvas integrais façam parte do horizonte de eventos. Essas características apontam naturalmente para o contexto de *congruência geodésica* como um dos focos para se obter propriedades do horizonte de eventos. A construção dessa seção se baseia nas referências [1, 6].

De forma geral, o estudo de congruências geodésicas consiste em analisar o comportamento de uma família de curvas geodésicas à medida que avançamos em suas parametrizações. O comportamento dos espaços ortogonais às curvas, evoluindo com respeito à parametrização das geodésicas, descreve se as curvas se tornam mais ou menos densas, se torcem, se curvam, etc.

Seja V_p o espaço tangente a um ponto p no horizonte de eventos. Será denotado por \tilde{V}_p o subespaço de V_p tal que se $\chi^a X_a \stackrel{H}{=} 0$, $X^a \in \tilde{V}_p$. Uma escolha de base para \tilde{V}_p consiste nos vetores ξ^a , ψ^a e θ^a , já que:

$$\chi^a \xi_a \stackrel{H}{=} 0, \quad (2.16a)$$

$$\chi^a \psi_a \stackrel{H}{=} 0, \quad (2.16b)$$

$$\chi^a \theta_a \stackrel{H}{=} 0, \quad (2.16c)$$

sendo $\theta^a = (\partial_\theta)^a$, além de serem linearmente independentes. Para analisar o espaço ortogonal a χ^a , cujo espaço tangente a cada ponto é \tilde{V}_p , é necessário ter em mãos a métrica \tilde{h}_{ab} restrita a tal subespaço.

Pela própria definição de métrica restrita a um subespaço, \tilde{h}_{ab} é definida de forma a sua atuação em um vetor $X^a \in V_p$ ser igual à ação da métrica g_{ab} na projeção de X^a em \tilde{V}_p . Assim, como χ^a é ortogonal ao horizonte, temos que:

$$\tilde{h}_{ab} \chi^a = 0. \quad (2.17)$$

Entretanto, χ^a também é tangente ao horizonte, fazendo com que a relação (2.17) evidencie o caráter degenerado da métrica restrita ao horizonte de eventos. Não há, portanto, uma noção natural de projeção no horizonte, tornando não trivial a análise de diversas grandezas restritas a ele. Entretanto, é possível contornar o problema da não existência da métrica no horizonte introduzindo classes de equivalência adequadas em \tilde{V}_p .

Dois vetores x^a e y^a serão ditos equivalentes se a diferença deles for múltipla de χ^a : $x^a - y^a = c\chi^a$, para c real. O espaço das classes de equivalência será denotado

por \hat{V}_p , sendo visível de que se trata de um espaço 2-dimensional. Para que uma operação seja bem definida em um espaço de classes de equivalência, é preciso que sua ação seja independente da escolha de representantes para as classes de equivalência.

Seja \hat{h}_{ab} a métrica induzida no espaço de classes de equivalência, e dois vetores $x^a, y^a \in \tilde{V}_p$ da mesma classe de equivalência $[x^a] \in \hat{V}_p$. A ação de \hat{h}_{ab} em um elemento de \hat{V}_p é definida como:

$$\begin{aligned}
 \hat{h}_{ab}[x^a] &= \tilde{h}_{ab}y^a \\
 &= \tilde{h}_{ab}(x^a + c\chi^a) \\
 &= \tilde{h}_{ab}x^a + c\tilde{h}_{ab}\chi^a \\
 &= \tilde{h}_{ab}x^a,
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

evidenciando a independência do representante. Diferentemente de \tilde{h}_{ab} , \hat{h}_{ab} é não degenerada, tendo em vista que o elemento nulo de \hat{V}_p é a classe de equivalência do vetor nulo, na qual um dos representantes é o vetor χ^a .

Como as operações no espaço das classes de equivalência devem ser independentes de representante, é possível escolher um arbitrário para cada classe de equivalência. É conveniente escolher representantes de modo a que formem um subespaço vetorial de \tilde{V}_p , no qual a restrição da métrica será então não degenerada. Para isso, o representante da classe de equivalência do vetor nulo deve ser sempre o próprio vetor nulo.

Uma forma natural de se escolher um subespaço vetorial de \tilde{V}_p com noção de projeção bem definida, e representante das classes de equivalência, é especificando um vetor N^a que satisfaz a condição $N^a\chi_a \neq 0$. O subespaço vetorial formado por vetores ortogonais a N^a e χ^a é ortogonal a χ^a por construção, e possui uma noção de projeção, já que a ortogonalidade do subespaço com N^a exclui o vetor χ^a da superfície, eliminando o caráter degenerado da métrica h_{ab} restrita a ela. Apesar de ser possível escolher a superfície descrita neste parágrafo, é preciso escolher N^a de modo adequado a garantir que os vetores do subespaço sejam tangentes ao horizonte de eventos, independente da posição que analisamos nas curvas integrais de χ^a . Uma escolha conveniente consiste em N^a atender as propriedades:

$$(i) : N^a N_a \stackrel{H}{=} 0, \quad (2.19a)$$

$$(ii) : N^a \chi_a \stackrel{H}{=} -1. \quad (2.19b)$$

Como as propriedades em (2.19) são locais, é possível mostrar, com um referencial de Minkowski local (apêndice B), que tais propriedades são compatíveis com as condições extras:

$$(iii) : N^a \xi_a \stackrel{H}{=} -1, \quad (2.20a)$$

$$(iv) : N^a \psi_a \stackrel{H}{=} 0, \quad (2.20b)$$

$$(v) : N^a \theta_a \stackrel{H}{=} 0. \quad (2.20c)$$

A superfície 2-dimensional ortogonal a N^a e χ^a , quando χ^a é tipo luz, possui métrica h_{ab} restrita a ela como:

$$h_{ab} = g_{ab} + N_a \chi_b + \chi_a N_b, \quad (2.21)$$

e portanto, o projetor na superfície toma a forma:

$$P_b^a = \delta_b^a + N^a \chi_b + \chi^a N_b. \quad (2.22)$$

Sejam η_α^a , com $\alpha = 1, 2$, dois vetores linearmente independentes, tangentes a tal superfície, e portanto ortogonais às curvas integrais de χ^a . Por serem tangentes à superfície, temos que:

$$P_b^a \eta_\alpha^b = \eta_\alpha^a. \quad (2.23)$$

Como η_α^a e χ^a são sempre ortogonais, é possível escolher um sistema de coordenadas nos quais três dos eixos coincidam com as curvas integrais desses três vetores. Portanto, o colchete de Lie de χ^a e η_α^a é nulo:

$$[\chi, \eta_\alpha]^a = 0 \quad \rightarrow \quad \chi^b \nabla_b \eta_\alpha^a = \eta_\alpha^b \nabla_b \chi^a. \quad (2.24)$$

Definindo:

$$B_{ab} \equiv \nabla_b \chi_a, \quad (2.25)$$

temos por (2.24) que:

$$\chi^b \nabla_b \eta_\alpha^a = B^a_b \eta_\alpha^b, \quad (2.26)$$

mostrando que o mapa B^a_b quantifica o quanto os vetores η_α^a não são transportados paralelamente ao longo das curvas integrais de χ^a .

Esses vetores são definidos anteriormente como pertencentes ao horizonte de eventos, de forma que, por (2.23), temos que:

$$\begin{aligned} \chi^b \nabla_b \eta_\alpha^a &= B^a_b \eta_\alpha^b, \\ P_a^c \chi^b \nabla_b \eta_\alpha^a &= P_a^c B^a_b \eta_\alpha^b, \\ \chi^b \nabla_b \eta_\alpha^c &= P_a^c B^a_b P_d^b \eta_\alpha^d, \\ \chi^b \nabla_b \eta_\alpha^c &= \hat{B}^c_d \eta_\alpha^d, \end{aligned} \quad (2.27)$$

sendo $\hat{B}^c_d \equiv P_a^c B^a_b P_d^b$. O resultado acima mostra que, se η_α^a inicialmente faz parte da superfície definida por N^a e χ^a , com χ^a tipo luz, então continuará em tal superfície ao longo das curvas integrais tipo luz de χ^a . Seguindo a definição de \hat{B}^c_d , qualquer grandeza projetada na superfície representante da classe de equivalência levará o chapéu na notação.

O mapa \hat{B}^c_d pode ser decomposto algebricamente em três partes irredutíveis:

$$\hat{B}^a_b = \frac{1}{2} \Theta P^a_b + \hat{\sigma}^a_b + \hat{\omega}^a_b, \quad (2.28)$$

correspondendo, respectivamente, à parte com traço, à parte simétrica sem traço, e à parte antissimétrica:

$$\Theta = \hat{B}^c_c, \quad (2.29a)$$

$$\hat{\sigma}_{ab} = \hat{B}_{(ab)} - \frac{1}{2} \hat{B}^c_c h_{ab}, \quad (2.29b)$$

$$\hat{\omega}_{ab} = \hat{B}_{[ab]}. \quad (2.29c)$$

Os três termos dessa separação são chamados, respectivamente, de escalar de expansão, tensor de cisalhamento e tensor de vorticidade. A motivação para tais nomes se deve ao fato de que transformações infinitesimais simétricas com traço estão relacionadas a transformações de expansão, transformações infinitesimais simétricas sem traço

estão relacionadas com cisalhamento, e transformações infinitesimais antissimétricas estão relacionadas a rotações, como foi exemplificado em [34] para o caso de matrizes em dimensão 2.

É fácil mostrar [5] que a variação de Θ ao longo das curvas integrais de χ^a é dado por:

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} \equiv \chi^c \nabla_c \Theta = -\widehat{R_{ab}\chi^a\chi^b} - \frac{1}{2}\Theta^2 - \hat{\sigma}^{ab}\hat{\sigma}_{ab} + \hat{\omega}^{ab}\hat{\omega}_{ab}, \quad (2.30)$$

sendo λ o parâmetro das curvas integrais de χ^a . A equação (2.30) é conhecida como *equação de Raychaudhuri*. Como χ^a é um vetor de Killing, temos que o mapa \hat{B}^a_b se reduz a:

$$\hat{B}^a_b = \hat{\omega}^a_b, \quad (2.31)$$

e a equação de Raychaudhuri a:

$$\widehat{R_{ab}\chi^a\chi^b} = \hat{\omega}^{ab}\hat{\omega}_{ab}. \quad (2.32)$$

A forma de se prosseguir com a relação (2.32) é utilizando o fato de que $\hat{\omega}_{ab}$ carrega em sua definição o vetor de Killing χ^a , que é ortogonal ao horizonte de eventos. Devido a tal ortogonalidade, pelo teorema de Frobenius:

$$\begin{aligned} P_d^a P_e^b P_f^c (\chi_{[a} \nabla_b \chi_{c]}) &= 0 \\ \chi_{[a} \hat{B}_{bc]} &= 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Expandindo a antissimetrização de (2.33), temos que:

$$\chi_a \hat{B}_{bc} + \chi_b \hat{B}_{ca} + \chi_c \hat{B}_{ab} = 0. \quad (2.34)$$

Contraindo ambos os lados de (2.34) por N^a , utilizando que $N^a \chi_a = -1$, e que na definição do mapa \hat{B}_{ab} inclui projetores, que aplicados em N^a se anulam, obtemos diretamente que $\hat{B}_{ab} = 0$. Assim, temos que:

$$\widehat{R_{ab}\chi^a\chi^b} = 0, \quad (2.35)$$

que como foi argumentado, pela classe de equivalência, pode ser estendido para todo o horizonte de eventos:

$$R_{ab}\chi^a\chi^b \stackrel{H}{=} 0. \quad (2.36)$$

2.4 Velocidade angular

Como é evidente na métrica de Kerr, o movimento de rotação de um corpo também gera consequências gravitacionais. O fato de um buraco negro descrito por tal métrica possuir momento angular, que privilegia uma certa direção, faz com que, diferentemente de Schwarzschild ($J = 0$), surja um termo espaço-temporal na métrica de Kerr, quebrando o caráter estático do caso sem momento angular. Como esse termo se origina exatamente pela rotação do buraco negro, é de se esperar que o valor da velocidade angular possa ser extraída de alguma análise mais minuciosa envolvendo tal termo espaço-temporal. Uma das formas de se fazer isso consiste em analisar observadores que permanecem em repouso em relação a superfícies definidas pela coordenada t constante. A construção dessa seção se baseia nas referências [1, 2].

Essa classe de observadores, também chamados de *locally non-rotational observers* (LNRO)¹, consiste em sistemas de referência que são forçados a se movimentar perpendicularmente aos “slices” temporais do espaço-tempo. A motivação por trás de se estudar essa classe de observadores surge devido à sua movimentação: ela se dá ao longo de curvas cujo vetor tangente é $\nabla^a t$. Esse vetor tangente pode ser melhor reescrito como:

$$\nabla^\mu t = g^{\mu\nu} \partial_\nu t = g^{\mu t}. \quad (2.37)$$

Para espaços estáticos, os LNRO se confundem com aqueles cuja dinâmica é ditada apenas por translações temporais, refletindo em um repouso no espaço tridimensional gerado por (r, θ, ϕ) .

Se analisarmos o momento angular de tais observadores, é imediato seu valor nulo:

$$L_z \propto p^a \psi_a \propto \psi^a \nabla_a t = 0. \quad (2.38)$$

Apesar disso, por não se tratar de um espaço estático, o surgimento de termos espaço-temporais na métrica de Kerr faz com que os LNRO sejam induzidos a se movimentar ao longo de uma coordenada espacial, já que tais termos espaço-temporais distinguem

¹ Esse nome é motivado por um resultado no contexto de congruências geodésicas.

o vetor perpendicular a superfícies de t constante do vetor de translação temporal. Como será evidenciado ao longo da dissertação, geodésicas nulas e temporais são induzidas a rotacionar com a mesma velocidade angular quando se encontram no horizonte de eventos. Essa observação será utilizada para definirmos a velocidade angular de um buraco negro de Kerr.

O parâmetro de tempo t escolhido como coordenada para a métrica (2.1) pode ser interpretado como o tempo medido por um observador infinitamente distante, onde a métrica toma a forma de Minkowski. Por conta disso, ao analisar os LNRO, estamos analisando-os na perspectiva de alguém situado no infinito.

Como a classe de LNRO está em repouso para superfícies a t constante, temos que sua velocidade deve ser proporcional a $\nabla^a t$:

$$u^a = C\nabla^a t,$$

correspondendo a uma movimentação a favor do tempo. Levando em conta que a velocidade é normalizada ($u^a u_a = -1$), temos que u^a pode ser escrita como:

$$u^a = -\frac{\nabla^a t}{\sqrt{-\nabla^b t \nabla_b t}}, \quad (2.39)$$

sendo $\nabla^b t \nabla_b t = g^{ab} \partial_a t \partial_b t = g^{tt}$.

Apesar dos LNRO não possuírem momento angular, visto por observadores no infinito, eles possuem velocidade angular diferente de zero:

$$\frac{d\phi}{dt} = u^\phi = -\frac{g^{\phi t}}{g^{tt}},$$

mostrando que a rotação do buraco negro deforma o espaço-tempo de forma que uma simples evolução a favor do tempo induz um movimento angular, provocado pelo termo misto da métrica.

Utilizando a relação entre a métrica e a métrica inversa $g^{ab} g_{bc} = \delta_c^a$, é possível reescrever a velocidade angular dos LNRO como:

$$\frac{d\phi}{dt} = u^\phi = -\frac{g_{\phi t}}{g_{\phi\phi}} = -\frac{W}{X}. \quad (2.40)$$

Como seu movimento ao longo de ϕ é induzido pelo comportamento não estático da métrica, a velocidade angular do buraco negro é definida como sendo igual à obtida pelos LNRO no horizonte de eventos, medida por um observador no infinito. Assim:

$$\Omega_H \stackrel{H}{=} -\frac{W}{X}, \quad (2.41)$$

levando à expressão explícita:

$$\Omega_H \stackrel{H}{=} \frac{a^2}{2M(M + \sqrt{M^2 - a^2})} = \frac{a}{r_+^2 + a^2}. \quad (2.42)$$

Três importantes resultados obtidos pela definição da velocidade angular, levando em conta que a simetria da métrica a torna independente de t e ϕ , são:

$$\xi^a \nabla_a \Omega_H \stackrel{H}{=} 0, \quad (2.43a)$$

$$\psi^a \nabla_a \Omega_H \stackrel{H}{=} 0, \quad (2.43b)$$

$$\chi^a \nabla_a \Omega_H \stackrel{H}{=} 0. \quad (2.43c)$$

3 Termodinâmica de buracos negros clássica

Na física, a termodinâmica pode ser vista como a área que estuda como configurações de equilíbrio de sistemas se modificam e se relacionam com suas variações de energia interna, temperaturas, fluxos de calor, variações de entropia e trabalhos realizados. Quando analisamos buracos negros no ponto de vista clássico, é imediato a sua não compatibilidade com as noções termodinâmicas. Isso porque como já é conhecido da termodinâmica, corpos com temperatura emitem um espectro térmico de radiação que caracteriza sua temperatura. Pela própria definição de buracos negros, nada escapa de seu interior, de forma que a única temperatura fisicamente razoável para caracterizá-lo é $T = 0$, não fazendo sentido a existência de uma termodinâmica real para buracos negros [4].

Entretanto, quando se analisa por meio da relatividade geral o comportamento dos buracos negros, é evidenciado que as leis que tais corpos obedecem possuem uma estrutura análoga à termodinâmica. As quatro leis obtidas nesse contexto possuem uma analogia tão forte com a termodinâmica, que é dado a elas o nome de as quatro leis da termodinâmica de buracos negros. Nesse capítulo, tais leis serão construídas e apresentadas.

3.1 Lei zero

A lei zero envolve a definição do que chamaremos de temperatura de um buraco negro. No contexto apenas da relatividade geral, essa temperatura não possui nenhum apelo físico, recebendo esse nome apenas por desempenhar um papel semelhante ao da temperatura termodinâmica na estrutura das leis da termodinâmica de buracos negros.

Termodinamicamente, a temperatura é definida como uma das grandezas que se torna constante em um sistema que atinge o equilíbrio térmico. O equilíbrio térmico consiste no equilíbrio atingido por um sistema entre a energia emitida e a absorvida. Para um buraco negro em formação, existe um tempo no qual sua massa demora para se rearranjar, buscando uma configuração de equilíbrio. Nesse processo, o buraco negro emite ondas gravitacionais, perdendo energia, até atingir o limite estacionário. Em analogia com um sistema termodinâmico, o equilíbrio atingido pelo

buraco negro ao se tornar estacionário ocorre após cessarem os fluxos de energia, caracterizando alguma espécie de termalização. Após atingir o estado estacionário, a métrica relativa ao buraco negro não dependerá explicitamente do tempo, de forma que o horizonte de eventos também se tornará estável.

No horizonte de eventos, $\chi^a \chi_a = 0$. Assim, o módulo de χ^a é uma função constante no horizonte, e por consequência $\nabla^a(\chi^b \chi_b)$ é normal a ele. Como $\nabla^a(\chi^b \chi_b)$ é normal ao horizonte, tal vetor pode ser escrito como

$$\nabla^a(\chi^b \chi_b) \stackrel{H}{=} -2\kappa \chi^a, \quad (3.1)$$

sendo o fator de proporcionalidade -2κ escolhido de forma conveniente. Desenvolvendo a expressão acima, e utilizando a antissimetria de $\nabla^a \chi^b$, obtemos:

$$\chi^b \nabla_b \chi^a \stackrel{H}{=} \kappa \chi^a. \quad (3.2)$$

A expressão acima mostra que a constante κ pode ser vista como a grandeza que quantifica o quanto as curvas geodésicas geradas por χ^a falham em serem parametrizadas de forma afim. Tal constante recebe o nome de *gravidade superficial*, devido a uma interpretação física que será apresentada a seguir.

É possível isolar κ de forma a se obter sua expressão explícita na métrica de Kerr [1, 2]:

$$\kappa = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{2M \left(M + \sqrt{M^2 - a^2} \right)}, \quad (3.3)$$

assim como escrevê-lo em termos de r_+ e r_- :

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\frac{r_+ - r_-}{r_+^2 + a^2} \right). \quad (3.4)$$

Como χ^a é ortogonal ao horizonte de eventos, vale o teorema de Frobenius no horizonte. Utilizando a equação de Killing, a relação dada pelo teorema de Frobenius para χ^a se resume a:

$$\chi_c \nabla_a \chi_b \stackrel{H}{=} -2\chi_{[a} \nabla_{b]} \chi_c. \quad (3.5)$$

3.1.1 Interpretação física de κ

A constante de κ recebe o nome de *gravidade superficial* devido a uma interpretação física no contexto de métricas estáticas [1]. Nesse sentido, a métrica em questão será a de Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.6)$$

que corresponde à de Kerr para o caso de $J = 0$, implicando em $\chi^a = \xi^a$, e por consequência:

$$\xi^b \nabla_b \xi^a \stackrel{H}{=} \kappa \xi^a. \quad (3.7)$$

De forma análoga à feita para se determinar a velocidade angular do buraco negro, será feito uso de uma classe de observadores para se obter informações a respeito de κ . Serão analisados observadores estáticos no espaço, levando em conta, assim como no contexto da velocidade angular, que a análise de tais observadores é feita na perspectiva de alguém no infinito, no qual o parâmetro de t corresponde ao tempo medido em seu relógio.

Para sistemas de referência estáticos, temos que sua velocidade consiste apenas em uma translação temporal, podendo ser escrita em termos do vetor de Killing que define o caráter estacionário da métrica:

$$u^a = C \xi^a.$$

Levando em conta que a velocidade é normalizada:

$$u^a = \frac{\xi^a}{\sqrt{-\xi^b \xi_b}}. \quad (3.8)$$

No contexto de Schwarzschild, o termo $\sqrt{-\xi^b \xi_b} = \sqrt{V}$ é identificado como o fator de *desvio para o vermelho* [1].

Evidentemente, para manter um corpo estático no espaço definido pela métrica (3.6), é necessário exercer uma força sobre ele. Tal força gera uma aceleração. Levando em conta que a aceleração é definida como:

$$a^a \equiv \frac{du^a}{d\tau} = u^b \nabla_b u^a,$$

sendo τ o tempo próprio do observador estático, temos que:

$$\begin{aligned}
a^a &= \frac{\xi^b}{\sqrt{V}} \nabla_b \left(\frac{\xi^a}{\sqrt{V}} \right), \\
&= \frac{\xi^b}{\sqrt{V}} \left(\frac{\nabla_b \xi^a}{\sqrt{V}} + \xi^a \nabla_b (V^{-\frac{1}{2}}) \right), \\
&= \frac{\xi^b \nabla_b \xi^a}{V} - \frac{\xi^b \xi^a \nabla_b V}{2V^{5/2}}, \\
&= -\frac{\xi^b \nabla^a \xi_b}{V} + \frac{\xi^b \xi^a (\xi^c \nabla_b \xi_c)}{V^{5/2}}, \\
&= \frac{\nabla^a V}{2V}, \\
&= \frac{\nabla^a \sqrt{V}}{\sqrt{V}}, \tag{3.9}
\end{aligned}$$

sendo que o segundo termo da quarta linha se anula por ser a contração de um tensor simétrico com um antissimétrico nos índices (bc) .

É possível se obter o módulo da aceleração tridimensional sofrida pelo observador estático, levando em conta que ele se relaciona com o vetor aceleração por:

$$\sqrt{a^b a_b} = a = \frac{\sqrt{\nabla^b \sqrt{V} \nabla_b \sqrt{V}}}{\sqrt{V}}. \tag{3.10}$$

Assim, a força necessária para manter um corpo de massa m estático em Schwarzschild é dada por:

$$F = \frac{m}{\sqrt{V}} \sqrt{\nabla^b \sqrt{V} \nabla_b \sqrt{V}}.$$

Temos que os vetores de Killing estão associados a grandezas conservadas ao longo de geodésicas. Nesse contexto, a grandeza associada ao vetor de Killing estacionário é a energia:

$$E = -m \xi_a u^a. \tag{3.11}$$

É evidente que um observador estático não segue geodésicas. Assim, a contração apresentada em (3.11) não é conservada. Entretanto, ela ainda pode ser interpretada como energia. Mais especificamente, a expressão (3.11) pode ser interpretada como a energia de um corpo de massa m e velocidade u^a medida por algum observador no

infinito (para tal observador, a contração corresponde à componente temporal do vetor momento do corpo de massa m). Se imaginarmos que o observador no infinito torna o observador estático como tal, através de uma corda sem massa que os liga, o ato de recolher ou soltar a corda faz com que o observador no infinito varie a energia associada ao corpo estático. Para realizar essa variação, é necessário exercer trabalho, de forma que o trabalho realizado pelo observador do infinito ao variar o tamanho da corda é responsável pela variação da energia do corpo estático. Assim, como qualquer energia nessa situação, sua derivada está relacionada ao vetor força que o observador no infinito exerce sobre a corda:

$$\begin{aligned}
(F_\infty)_a &= \nabla_a E, \\
&= \nabla_a (-m\xi_b u^b), \\
&= \nabla_a (-m\sqrt{V}u_b u^b), \\
&= m\nabla_a \sqrt{V}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Como a relação entre o vetor aceleração e a aceleração tridimensional é análoga à do vetor força com a força tridimensional, temos que:

$$F_\infty = m\sqrt{\nabla^b \sqrt{V} \nabla_b \sqrt{V}}, \tag{3.13}$$

ou seja, a força que o observador no infinito realiza para manter o corpo de massa m estático é a força que deve ser feita no referencial do corpo estático, corrigida por um fator de *redshift*:

$$F_\infty = \sqrt{V}F. \tag{3.14}$$

Se analisarmos melhor o valor de F_∞ na situação que o corpo estático está logo acima do horizonte de eventos, e portanto vale a relação (3.7), temos que:

$$\begin{aligned}
F_\infty &= m\sqrt{\xi_a \nabla^b \xi^a \xi^c \nabla_b \xi_c}, \\
&= m\sqrt{\frac{\xi_a \nabla^a \xi^b \xi^c \nabla_c \xi_b}{V}}, \\
&= m\sqrt{\frac{\kappa^2 \xi^b \xi_b}{V}}, \\
&= m\kappa,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

sendo utilizada a equação de Killing da primeira para a segunda linha, e a equação (3.7), que define κ , da segunda para a terceira linha. O resultado em (3.15) evidencia o significado físico de κ , assim como justifica seu nome: κ representa a força realizada por um observador no infinito para manter um corpo de massa unitária estático no horizonte de eventos, que equivale à aceleração gravitacional gerada na superfície do buraco negro.

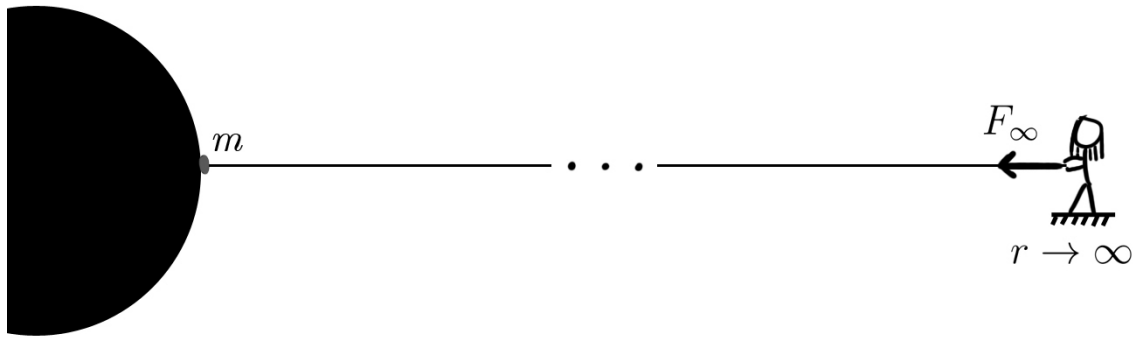


Figura 10 – Ilustração da interpretação física de κ . A força feita por um observador infinitamente distante do buraco negro para deixar um corpo de massa m imóvel no horizonte de eventos através de uma corda inextensível e sem massa é dada pela expressão (3.15).

3.1.2 Variação de κ no horizonte de eventos

Tendo em vista que κ é uma grandeza diretamente relacionada ao horizonte de eventos, é conveniente e necessário entender como ela varia ao longo do horizonte. A metodologia seguida nesta seção se baseia na referência [1].

Um procedimento padrão para quantificar a variação de qualquer grandeza dentro de uma região do espaço-tempo é aplicar o operador $h^{ab}\nabla_b$ em tal grandeza, sendo h_{ab} a métrica restrita a tal região. Entretanto, como foi visto na seção 2.3.3, o fato do horizonte de eventos ser a superfície ortogonal a χ^a , que é um vetor nulo, faz com que a métrica restrita ao horizonte de eventos seja degenerada (equação (2.17)). Consequentemente, não existe uma noção clara de projeção no horizonte, fazendo com que o cálculo da variação de κ no horizonte de eventos tenha que ser computada de outra forma.

Para isso, é necessário procurar algum tensor não degenerado que seja tangente ao horizonte de eventos. Assim, a derivada covariante de κ contraída com esse tensor

retornaria alguma informação de como tal quantidade varia ao longo do horizonte. Será utilizado o tensor $\epsilon_{abcd}\chi^d$ devido às suas propriedades em relação às contrações. Como pode ser mostrado em um referencial de Minkowski local (apêndice B), a contração do tensor $\epsilon_{abcd}\chi^d$ com quaisquer dois vetores diferentes de χ^a resulta em um vetor tangente ao horizonte de eventos. Qualquer vetor tangente ao horizonte pode ser construído dessa forma. Assim, o operador $\epsilon_{abcd}\chi^d\nabla^c$ está relacionado à variação ao longo do horizonte, nos levando a agir $\epsilon_{abcd}\chi^d\nabla^c$ sobre κ . Como a forma de volume é totalmente antissimétrica, é possível, de forma equivalente, aplicar o operador $\chi_{[d}\nabla_{c]}$ sobre κ para se obter alguma informação sobre sua variação ao longo do horizonte de eventos. Aplicando tal operador em ambos os lados da equação (3.2):

$$\begin{aligned}\chi_{[d}\nabla_{c]}(\kappa\chi_a) &\stackrel{H}{=} \chi_{[d}\nabla_{c]}(\chi^b\nabla_b\chi_a), \\ \kappa\chi_{[d}\nabla_{c]}\chi_a + \chi_a\chi_{[d}\nabla_{c]}\kappa &\stackrel{H}{=} \nabla_b\chi_a\chi_{[d}\nabla_{c]}\chi^b + \chi^b\chi_{[d}\nabla_{c]}\nabla_b\chi_a, \\ \chi_a\chi_{[d}\nabla_{c]}\kappa &\stackrel{H}{=} \underbrace{\nabla_b\chi_a\chi_{[d}\nabla_{c]}\chi^b}_{(i)} - \underbrace{\kappa\chi_{[d}\nabla_{c]}\chi_a}_{(ii)} + \underbrace{\chi^b\chi_{[d}\nabla_{c]}\nabla_b\chi_a}_{(iii)}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Aplicando (3.5) em (i) e (ii), e utilizando a relação (3.2) em (ii), temos que:

$$(i) = (ii) = -\frac{1}{2}\kappa\chi_a\nabla_d\chi_c.\quad (3.17)$$

Quanto ao termo (iii), abrindo a antissimetrização e utilizando a definição do tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}(iii) &= \frac{\chi^b\chi_d\nabla_c\nabla_b\chi_a - \chi^b\chi_c\nabla_d\nabla_b\chi_a}{2}, \\ &= \frac{-\chi^b}{2}(\chi_d R_{bac}{}^f\chi_f - \chi_c R_{bad}{}^f\chi_f), \\ &= -\chi^b R_{ba[c}{}^f\chi_d]\chi_f.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Aplicando os resultados em (3.17) e (3.18) a (3.16), temos que:

$$\chi_a\chi_{[d}\nabla_{c]}\kappa \stackrel{H}{=} -\chi^b R_{ba[c}{}^f\chi_d]\chi_f.\quad (3.19)$$

A busca agora é por uma forma de reescrever o segundo lado da igualdade de (3.19) a fim de se fatorar o termo χ^a em ambos os lados da igualdade, resultando na expressão que quantifica a variação de κ ao longo do horizonte de eventos. Isso

pode ser feito utilizando as equações (3.5) e (1.10), e diversos processos algébricos que serão apresentados a seguir.

Aplicando o operador $\chi_{[c}\nabla_{e]}$ em ambos os lados da equação (3.5):

$$\begin{aligned} \chi_{[c}\nabla_{e]}(\chi_c\nabla_a\chi_b) &\stackrel{H}{=} \chi_{[c}\nabla_{e]}(-2\chi_{[a}\nabla_{b]}\chi_c), \\ \chi_{[c}\nabla_{e]}(\chi_c\nabla_a\chi_b) &\stackrel{H}{=} \chi_{[c}\nabla_{e]}(\chi_b\nabla_a\chi_c - \chi_a\nabla_b\chi_c), \\ \chi_c\chi_{[c}\nabla_{e]}\nabla_a\chi_b + \nabla_a\chi_b\chi_{[c}\nabla_{e]}\chi_c &\stackrel{H}{=} \chi_b\chi_{[c}\nabla_{e]}\nabla_a\chi_c + \nabla_a\chi_c\chi_{[c}\nabla_{e]}\chi_b \\ &\quad - \chi_a\chi_{[c}\nabla_{e]}\nabla_b\chi_c - \nabla_b\chi_c\chi_{[c}\nabla_{e]}\chi_a. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Aplicando agora a própria equação (3.5) em (3.20) nos termos em que o operador $\chi_{[c}\nabla_{e]}$ age diretamente em χ e abrindo a antissimetrização dos termos em que ele atua na derivada covariante de χ :

$$\begin{aligned} -\nabla_a\chi_b\chi_c\nabla_d\chi_e + \chi_c\chi_d\nabla_e\nabla_a\chi_b - \chi_c\chi_e\nabla_d\nabla_a\chi_b &\stackrel{H}{=} \nabla_b\chi_c\chi_a\nabla_d\chi_e - \chi_a\chi_d\nabla_e\nabla_b\chi_c \\ &\quad + \chi_a\chi_e\nabla_d\nabla_b\chi_c + \chi_b\chi_d\nabla_e\nabla_a\chi_c \\ &\quad - \chi_b\chi_e\nabla_d\nabla_a\chi_c - \nabla_a\chi_c\chi_b\nabla_d\chi_e. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Passando o primeiro e o último termo do lado direito para o lado esquerdo da igualdade em (3.21), é possível, juntamente com o primeiro termo do lado esquerdo da igualdade, colocar $-\nabla_d\chi_e$ em evidência:

$$-\nabla_d\chi_e(\chi_c\nabla_a\chi_b + \chi_a\nabla_b\chi_c - \chi_b\nabla_a\chi_c), \quad (3.22)$$

resultando em um termo que é identicamente nulo pelo teorema de Frobenius. Levando isso em conta, e utilizando a equação (1.10) em (3.21), temos que:

$$\left(\chi_c\chi_d R_{abc}^f - \chi_c\chi_e R_{abd}^f\right)\chi_f \stackrel{H}{=} \left(-\chi_a\chi_d R_{bce}^f + \chi_a\chi_e R_{bcd}^f + \chi_b\chi_d R_{ace}^f - \chi_b\chi_e R_{acd}^f\right)\chi_f. \quad (3.23)$$

Reescrevendo a expressão (3.23) em termos dos antissimetrizadores em (e, d) e (a, b) , temos que:

$$\chi_c R_{ab|e}{}^f \chi_d \chi_f \stackrel{H}{=} 2 \chi_{[b} R_{a]c|e}{}^f \chi_d \chi_f. \quad (3.24)$$

Contraindo os índices (c, e) em ambos os lados de (3.24), temos que para o lado esquerdo da igualdade:

$$\chi_c R_{ab|e}{}^f \chi_d \chi_f g^{ce} = \chi^c \chi^f R_{abcf} \chi_d - \chi_c \chi^c R_{abd}{}^f \chi_f = 0, \quad (3.25)$$

sendo utilizado que o tensor de Riemann é antissimétrico nos dois últimos índices, e que no horizonte de eventos χ^a é um vetor nulo. Assim, a contração em (c, e) retorna apenas termos oriundos do lado direito da igualdade em (3.24):

$$\begin{aligned} \chi_{[b} R_{a]c|e}{}^f \chi_d \chi_f g^{ce} &\stackrel{H}{=} 0, \\ \chi_{[b} R_{a]c}{}^{ef} \chi_d \chi_f - \chi_{[b} R_{a]cd}{}^f \chi^c \chi_f &\stackrel{H}{=} 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sabendo que a contração do segundo com o terceiro índice do tensor de Riemann retorna o tensor de Ricci com sinal negativo, e fatorando o termo χ_f , temos que:

$$\chi_{[b} R_{a]}{}^f \chi_d \stackrel{H}{=} -\chi_{[b} R_{a]cd}{}^f \chi^c. \quad (3.27)$$

Como o tensor de Riemann é simétrico no primeiro e terceiro índice, é possível trocar os índices (a, d) e permanecer com a antissimetria em (b, a) . Utilizando isso, e o fato de que o tensor de Riemann é antissimétrico nos dois primeiros índices, podemos reescrever a equação (3.27) como:

$$\chi_{[b} R_{a]}{}^f \chi_d \stackrel{H}{=} R_{cd|a}{}^f \chi_b \chi^c, \quad (3.28)$$

de forma que, a menos de uma renomeação de índices, o termo da direita de (3.28) é idêntico ao da direita de (3.19). Portanto, substituindo uma equação na outra, e fatorando χ_a :

$$\chi_{[d} \nabla_{c]} \kappa \stackrel{H}{=} -\chi_{[d} R_{c]}{}^f \chi_f. \quad (3.29)$$

A relação (3.29) é completamente geral, não tendo sido necessário a utilização das equações de Einstein ou qualquer outro argumento físico. Para prosseguir no caminho de se quantificar a variação de κ ao longo do horizonte de eventos, será necessário introduzir argumentos físicos. Sendo válida a equação de Einstein:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (3.30)$$

temos que:

$$\chi_{[d}R_{c]}^f \chi_f = 8\pi \chi_{[d}T_{c]}^f \chi_f. \quad (3.31)$$

A vantagem de se obter a variação de κ ao longo do horizonte de eventos em termos do tensor de energia-momento é a possibilidade de utilização das condições de energia. A que será utilizada nesse contexto é condição dominante de energia (seção 1.5.2), que afirma que $T_{ab}\chi^a$ é um vetor nulo ou tipo tempo. Aplicando as equações de Einstein a (2.36), temos que:

$$T_{ab}\chi^a\chi^b \stackrel{H}{=} 0, \quad (3.32)$$

evidenciando que o termo $T_{ab}\chi^a$ é ortogonal a χ^b . A relação acima, juntamente com a condição dominante de energia, nos leva a:

$$T_{ab}\chi^a \stackrel{H}{\propto} \chi_b.$$

Assim, o lado direito da igualdade (3.31) se anula, resultando em:

$$\chi_{[d}\nabla_{c]}\kappa \stackrel{H}{=} 0, \quad (3.33)$$

que nos leva à lei zero da termodinâmica de buracos negros:

Lei 0: *Para um buraco negro estacionário, em um espaço-tempo que respeite a condição dominante de energia e a equação de Einstein, a gravidade superficial κ é constante no horizonte de eventos.*

3.2 Primeira lei

A primeira lei da termodinâmica é vista como uma lei de conservação de energia, já que relaciona variações em primeira ordem de energia e entropia com os trabalhos exercidos no sistema termodinâmico. No contexto da relatividade geral, é sabido que massa e momento angular carregam energia. Assim, é de se esperar que dependendo dos processos nos quais os buracos negros sejam submetidos, suas

variações de momento angular estarão relacionadas com suas variações de massa, e por consequência de seu tamanho. O que chamamos da primeira lei da termodinâmica de buracos negros consiste exatamente nessa relação, em primeira ordem, entre os parâmetros de um buraco negro. Para descrevê-la, é necessário começar pela definição de massa e momento angular de tais corpos. A construção da primeira lei será feita seguindo as referências [1, 4, 6].

3.2.1 Massa

Como é conhecido na mecânica, simetrias sob translações temporais implicam na conservação da energia. No contexto de relatividade geral, tal simetria é descrita pelo vetor de Killing $\xi^a = (\partial_t)^a$, sendo a massa, pela equivalência entre massa e energia, a quantidade conservada associada a tal simetria.

Essa quantidade conservada é dada pela integral de Komar (1.24) com $\alpha = -1/8\pi$:

$$M = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial O} \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d, \quad (3.34)$$

como discutido no apêndice A.

3.2.2 Momento angular

Assim como no caso da massa, simetrias de rotação estão relacionadas à conservação do momento angular. No contexto de relatividade geral, o mesmo resultado é obtido em termos do vetor de Killing $\psi^a = (\partial_\phi)^a$.

Para o momento angular, o fator α da integral de Komar (1.24) é $\alpha = 1/16\pi$:

$$J = \frac{1}{16\pi} \int_{\partial O} \epsilon_{abcd} \nabla^c \psi^d, \quad (3.35)$$

como discutido no apêndice A.

3.2.3 Primeira Lei

A busca pela primeira lei consiste em unir os resultados da massa e momento angular obtidos. Para isso, é necessário utilizar o vetor de Killing χ^a , que relaciona os outros dois estudados. Pela definição de χ^a em termos de ξ^a e ψ^a , podemos afirmar que:

$$\int_{\partial O} \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^a = \int_{\partial O} \epsilon_{abcd} \nabla^c \chi^a - \Omega_H \int_{\partial O} \epsilon_{abcd} \nabla^c \psi^a. \quad (3.36)$$

Duas das integrais são proporcionais às quantidades conservadas M e J , restando determinar a quantidade conservada associada ao χ^a . Como estamos interessados na termodinâmica de buracos negros, é evidente o desejo de encontrar em (3.36) a grandeza κ , análoga à temperatura. Por conta disso, a liberdade de escolha da região de integração ∂O será utilizada, para a integral envolvendo χ^a , para tomar $\partial O = \mathcal{H}$, sendo \mathcal{H} uma folha temporal do horizonte de eventos, correspondendo ao horizonte em um instante do tempo. Realizando a integração em \mathcal{H} , é natural que apareça κ no resultado, dada sua relação com o vetor χ^a no horizonte de eventos.

Evidentemente, para se realizar uma integração em \mathcal{H} é necessário que tal superfície possua uma métrica não degenerada restrita a ela, a fim de se definir uma forma de volume relativa a \mathcal{H} . Apesar de ter sido dito na seção 2.3.3 que a métrica restrita ao horizonte de eventos é degenerada, \mathcal{H} não possui esse problema. Isso ocorre porque o aspecto não degenerado da métrica em H é decorrente do horizonte de eventos ser uma superfície nula. Da mesma forma que a utilização das classes de equivalência nos permitiu contornar o caráter degenerado da métrica no horizonte de eventos, reduzindo a dimensão do problema de 3 para 2, a escolha de \mathcal{H} correspondendo a uma folha temporal do horizonte de eventos gera um efeito análogo, quebrando o caráter degenerado para \mathcal{H} e tornando-a uma superfície espacial bem comportada. Por uma questão de praticidade, será escolhida uma folha tal que a métrica restrita a \mathcal{H} seja exatamente a da representante da classe de equivalência descrita na seção 2.3.3, dada por (2.21). É fácil verificar que isso é possível já que (2.21) descreve a métrica restrita a uma superfície 2-dimensional que faz parte do horizonte de eventos por construção, e respeita as relações $h_{ab}\theta^a = g_{ab}\theta^a$ e $h_{ab}\psi^a = g_{ab}\psi^a$, sendo θ^a e ψ^a dois vetores tipo espaço linearmente independentes, que por consequência expandem \mathcal{H} .

Como r_+ em (2.3) corresponde à coordenada radial do horizonte de eventos, que depende da massa e do momento angular do buraco negro, é de se esperar que variações dessas duas grandezas influenciem no tamanho do horizonte de eventos. Levando em conta que \mathcal{H} é uma superfície espacial 2-dimensional, é de se esperar que se a integral envolvendo χ^a tiver relação com o tamanho do horizonte de eventos, será com sua área calculada em um tempo fixado. Assim, seria conveniente que a 2-forma $\epsilon_{abcd} \nabla^c \chi^a$ fosse traduzida em termos da 2-forma de volume ϵ_{ab} restrita à superfície de integração:

$$\int_{\mathcal{H}} \epsilon_{abcd} \nabla^c \chi^a = \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{ab} (), \quad (3.37)$$

a fim de se obter a área de \mathcal{H} como resultado imediato.

Para determinar o termo que deve estar entre parênteses do lado direito da igualdade (3.37), utilizaremos o fato de que n -formas definidas em um espaço n -dimensional possuem apenas um grau de liberdade [35]. Portanto, a 2-forma $\epsilon_{abcd} \nabla^c \chi^a$, restrita à superfície de integração, é caracterizada apenas por uma função, assim como qualquer n -forma em um espaço n -dimensional. Portanto, para uma região de integração ∂O qualquer, nomeando $\epsilon_{abcd} \nabla^c \chi^a = \omega_{ab}$, temos que:

$$\omega_{ab}|_{\partial O} = () \epsilon_{ab}|_{\partial O}. \quad (3.38)$$

Para se determinar o fator de proporcionalidade entre uma n -forma e a n -forma de volume, é comum realizar contrações com a n -forma de volume, utilizando a relação [1]:

$$\epsilon^{a_1 \dots a_j a_{j+1} \dots a_n} \epsilon_{a_1 \dots a_j b_{j+1} \dots b_n} = (-1)^s (n-j)! j! \delta_{[b_{j+1}}^{a_{j+1}} \dots \delta_{b_n]}^{a_n}, \quad (3.39)$$

com $s = 1$ se a região de integração for uma superfície espacial, e $s = -1$ se for uma superfície espaço-temporal. Como as integrais em (3.36) são feitas em superfícies espaciais, a relação (3.39) será utilizada durante a determinação da primeira lei sempre com $s = 1$.

Assim, contraindo ambos os lados da relação (3.38) com ϵ^{ab} , utilizando (3.39) e levando em conta que a integração é feita em \mathcal{H} , temos que:

$$\epsilon^{ab} \omega_{ab}|_{\mathcal{H}} = 2 ()|_{\mathcal{H}}.$$

A contração acima nos leva à igualdade:

$$\int_{\mathcal{H}} \epsilon_{abcd} \nabla^c \chi^a = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{ab} \left(\epsilon^{ef} \epsilon_{efcd} \nabla^c \chi^d \right). \quad (3.40)$$

Fórmulas análogas valem para os vetores de Killing ξ^a e ψ^a . Levando em conta que realizaremos a integração em \mathcal{H} , que é ortogonal aos vetores χ^a e N^a , vale a relação:

$$\epsilon_{ab} = \epsilon_{abcd} N^c \chi^d. \quad (3.41)$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{abcd} \nabla^c \chi^a &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{ab} \left(\epsilon^{ef} \epsilon_{efcd} \nabla^c \chi^d \right), \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{ab} \left(N_g \chi_h \epsilon^{efgh} \epsilon_{efcd} \nabla^c \chi^d \right), \\
 &= -2 \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{ab} \left(N_g \chi_h \delta_{[c}^g \delta_{d]}^h \nabla^c \chi^d \right), \\
 &= -2 \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{ab} \left(N_{[c} \chi_{d]} \nabla^c \chi^d \right), \\
 &= -2 \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{ab} \left(N_c \chi_d \nabla^c \chi^d \right), \\
 &= 2\kappa \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{ab} \left(N_c \chi^d \right), \\
 &= -2\kappa \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{ab}, \\
 &= -2\kappa A,
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

sendo que da quarta para quinta linha foi utilizado o fato de que $\nabla^c \chi^d$ é antissimétrico e da quinta para a sexta a equação (3.2).

Assim, levando em conta as definições de massa (3.34) e momento angular (3.35), a equação (3.36) fornece a relação:

$$-8\pi M = -2\kappa A - 16\pi \Omega_H J,$$

que pode ser reescrita como:

$$M = \frac{\kappa A}{4\pi} + 2\Omega_H J. \tag{3.43}$$

A expressão acima nos permite, em conjunto com (2.42) e (3.3), obter a expressão explícita da área do horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr:

$$A = 8\pi M \left(M + \sqrt{M^2 - a^2} \right). \tag{3.44}$$

O que chamamos de primeira lei da termodinâmica de buracos negros consiste na expressão que relaciona as variações, em primeira ordem, da massa e do momento angular de um buraco negro com as da área do horizonte de eventos para duas configurações de buracos negros ligeiramente distintas. Pela expressão (3.43) temos que:

$$\delta M = \frac{\kappa}{4\pi} \delta A + \frac{A}{4\pi} \delta \kappa + 2\Omega_H \delta J + 2J \delta \Omega_H. \tag{3.45}$$

Vê-se que é necessário obter alguma relação entre as variações de κ e Ω_H para que a expressão (3.45) seja escrita em termos apenas das variações de A e J .

3.2.4 Variação de κ em processos

O procedimento a seguir consistirá em avaliar a variação de κ para duas configurações ligeiramente distintas de buracos negros de Kerr. Tais configurações podem diferir de diversas maneiras possíveis. Como o objetivo final é transformar (3.45) em uma relação entre δM , δA e δJ , essa arbitrariedade na variação entre as duas soluções de Kerr será utilizada de forma à posição do horizonte de eventos e os vetores de Killing ξ^a e ψ^a não variarem. Assim¹:

$$\delta\xi^a = 0, \quad (3.46a)$$

$$\delta\psi^a = 0, \quad (3.46b)$$

$$\delta g_{ab} = g'_{ab} - g_{ab} \equiv \gamma_{ab}. \quad (3.46c)$$

Pela definição de variação, temos que:

$$\delta\xi_a = g'_{ab}\xi^b - g_{ab}\xi^b \rightarrow \delta\xi_a = \gamma_{ab}\xi^b, \quad (3.47a)$$

$$\delta\psi_a = g'_{ab}\psi^b - g_{ab}\psi^b \rightarrow \delta\psi_a = \gamma_{ab}\psi^b, \quad (3.47b)$$

$$\delta\chi^a = \delta(\xi^a + \Omega_H\psi^a) \rightarrow \delta\chi^a = \delta\Omega_H\psi^a, \quad (3.47c)$$

$$\delta\chi_a = \delta(\xi_a + \Omega_H\psi_a) \rightarrow \delta\chi_a = \gamma_{ab}\chi^b + \delta\Omega_H\psi_a. \quad (3.47d)$$

Como ξ^a e ψ^a são isometrias de ambas as métricas g_{ab} e g'_{ab} , suas derivadas de Lie nessas direções devem se anular. Por consequência:

$$\mathcal{L}_\xi\gamma_{ab} = \xi^c\nabla_c\gamma_{ab} + \gamma_{cb}\nabla_a\xi^c + \gamma_{ac}\nabla_b\xi^c = 0, \quad (3.48a)$$

$$\mathcal{L}_\psi\gamma_{ab} = \psi^c\nabla_c\gamma_{ab} + \gamma_{cb}\nabla_a\psi^c + \gamma_{ac}\nabla_b\psi^c = 0. \quad (3.48b)$$

¹ Devido à grande quantidade de igualdades no horizonte de eventos nesta seção, todas as igualdades são avaliadas nele.

Contraindo os índices (a, b) com g^{ab} , dois dos três termos da expansão da derivada de Lie serão nulos por se tratar de um tensor simétrico contraído com um antissimétrico. Por consequência:

$$\xi^c \nabla_c \gamma = 0, \quad (3.49a)$$

$$\psi^c \nabla_c \gamma = 0, \quad (3.49b)$$

$$\chi^c \nabla_c \gamma = 0, \quad (3.49c)$$

sendo γ o traço de γ_{ab} , e (3.49c) obtida por uma combinação linear de (3.49a) e (3.49b).

Para calcular a variação de κ , é importante ter em mãos certas propriedades obedecidas pelas variações de outras grandezas definidas no espaço-tempo. A primeira delas é:

$$\chi^a \nabla_a \delta \Omega_H = 0, \quad (3.50a)$$

$$\xi^a \nabla_a \delta \Omega_H = 0, \quad (3.50b)$$

$$\psi^a \nabla_a \delta \Omega_H = 0, \quad (3.50c)$$

que pode ser obtido pelas relações (2.43) e (3.47). A segunda é que como ambas as métricas g_{ab} e g'_{ab} descrevem buracos negros, os vetores de Killing associados a elas, assim como o vetor N^a , possuem as mesmas propriedades com relação às suas métricas, em particular a de contração entre eles. Como todas essas contrações são constantes, temos que:

$$\delta(\chi_a \xi^a) = 0 \quad \rightarrow \quad \xi^a \delta \chi_a = 0, \quad (3.51a)$$

$$\delta(\chi_a \psi^a) = 0 \quad \rightarrow \quad \psi^a \delta \chi_a = 0, \quad (3.51b)$$

$$\delta(\chi_a N^a) = 0 \quad \rightarrow \quad N^a \delta \chi_a = -\chi_a \delta N^a, \quad (3.51c)$$

sendo utilizado também as relações de (3.46). A partir de (3.51a) (3.51b) e levando em conta que θ^a e os vetores de Killing continuam ortogonais em relação a g'_{ab} , dado que a posição do horizonte de eventos é a mesma em ambas as configurações:

$$\theta^a \delta \chi_a = 0, \quad (3.52)$$

obtemos a proporcionalidade entre $\delta \chi_a$ e χ_a :

$$\delta \chi_a = \alpha \chi_a, \quad (3.53)$$

que pode ser justificada com a construção de um referencial de Minkowski local (apêndice B). A não alteração da posição do horizonte de eventos também implica que α é constante ao longo das órbitas de χ^a [4], ou seja:

$$\chi^a \nabla_a \alpha = 0. \quad (3.54)$$

E a terceira:

$$\mathcal{L}_\chi \delta \chi_a = 0 \rightarrow \chi^b \nabla_b (\delta \chi_a) = \delta \chi_b \nabla^b \chi_a, \quad (3.55)$$

que pode ser verificada facilmente pelas relações (3.53) e (3.54).

Contraindo a expressão (3.1) por N_a , temos uma forma explícita para κ :

$$\kappa = \frac{1}{2} N^a \nabla_a (\chi^b \chi_b). \quad (3.56)$$

Assim, a variação de κ para as duas configurações infinitesimalmente próximas g_{ab} e g'_{ab} é:

$$\begin{aligned} 2\delta\kappa &= N^a \nabla_a \delta (\chi^b \chi_b) + \delta N^a \nabla_a (\chi^b \chi_b), \\ &= \underbrace{N^a \nabla_a (\delta \chi^b \chi_b + \chi^b \delta \chi_b)}_{(i)} + \underbrace{2\delta N^a \chi^b \nabla_a \chi_b}_{(ii)}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

sendo que na primeira linha de (3.57) foi comutada a variação com a derivada covariante para o primeiro termo por atuarem em um escalar. Expandindo o termo (i), e utilizando a equação de Killing, temos:

$$(i) = \underbrace{N^a \delta \chi^b \nabla_a \chi_b + N^a \chi_b \nabla_a (\delta \chi^b)}_{(iii)} - \underbrace{N^a \delta \chi_b \nabla^b \chi_a + N^a \chi^b \nabla_a (\delta \chi_b)}_{(iv)}. \quad (3.58)$$

Somando e subtraindo o termo $N^b \chi^a \nabla_a (\delta \chi_b)$ a (iv), temos:

$$\begin{aligned}
(iv) &= -N^a \delta \chi_b \nabla^b \chi_a - N^b \chi^a \nabla_a (\delta \chi_b) + N^b \chi^a \nabla_a (\delta \chi_b) + N^a \chi^b \nabla_a (\delta \chi_b), \\
&= -N^a \delta \chi_b \nabla^b \chi_a - N^b (\delta \chi_a) \nabla^a \chi_b + \nabla_a (\delta \chi_b) (N^a \chi^b + N^b \chi^a), \\
&= 2N^a (\delta \chi_b) \nabla_a \chi^b + \nabla_a (\delta \chi_b) (N^a \chi^b + N^b \chi^a), \tag{3.59}
\end{aligned}$$

sendo utilizada a relação (3.55) da primeira para a segunda linha, e a equação de Killing da segunda para a terceira linha.

Trabalhando com o termo (iii):

$$\begin{aligned}
(iii) &= N^a \delta \chi^b \nabla_a \chi_b + N^a \chi_b \nabla_a (\delta \chi^b), \\
&= N^a \delta \Omega_H \psi^b \nabla_a \chi_b + N^a \chi_b \nabla_a (\delta \Omega_H \psi^b), \\
&= N^a \delta \Omega_H \chi^b \nabla_a \psi_b + N^a \chi_b \psi^b \nabla_a \delta \Omega_H + N^a \chi_b \delta \Omega_H \nabla_a \psi^b, \\
&= 2N^a \chi_b \delta \Omega_H \nabla_a \psi^b, \tag{3.60}
\end{aligned}$$

sendo utilizado (3.47c) da primeira para a segunda linha, (2.15b) da segunda para a terceira linha, e a ortogonalidade entre χ^a e ψ^a da terceira para a quarta linha.

Unindo os termos desenvolvidos separadamente, obtemos:

$$\delta \kappa = \frac{1}{2} \nabla_a (\delta \chi_b) (N^a \chi^b + N^b \chi^a) + N^a \chi_b \delta \Omega_H \nabla_a \psi^b + \underbrace{N^a (\delta \chi_b) \nabla_a \chi^b + \delta N^a \chi_b \nabla_a \chi^b}_{(v)}. \tag{3.61}$$

Com (3.51c), (3.53), e com a definição de κ , é de imediato que o termos (v) é nulo. Portanto:

$$\delta \kappa = \frac{1}{2} \nabla_a (\delta \chi_b) (N^a \chi^b + N^b \chi^a) + N^a \chi_b \delta \Omega_H \nabla_a \psi^b. \tag{3.62}$$

O termo $(N^a \chi^b + N^b \chi^a)$ pode ser reescrito como a diferença entre a métrica inversa h^{ab} , representante da classe de equivalência descrita na seção 2.3.3, e a métrica inversa g^{ab} do espaço-tempo. Contraíndo h^{ab} com $\nabla_a (\delta \chi_b)$ e levando em conta (3.53):

$$h^{ab} \nabla_a (\delta \chi_b) = h^{ab} \chi_b \nabla_a \alpha + \alpha h^{ab} \nabla_a \chi_b, \tag{3.63}$$

que é nulo pela definição de h_{ab} e pela equação de Killing. Assim, a variação de κ toma a forma:

$$\delta\kappa = -\frac{1}{2}\nabla^a(\delta\chi_a) + N^a\chi_b\delta\Omega_H\nabla_a\psi^b. \quad (3.64)$$

Integrando ambos os lados em relação à forma de volume ϵ_{cd} restrita a \mathcal{H} , temos que:

$$\delta\kappa A = \underbrace{-\frac{1}{2}\int_{\mathcal{H}}\nabla^a(\delta\chi_a)\epsilon_{cd}}_{(vi)} + \underbrace{\delta\Omega_H\int_{\mathcal{H}}N^a\chi^b\nabla_a\psi_b\epsilon_{cd}}_{(vii)}. \quad (3.65)$$

Pelo mesmo argumento que levou à equação (3.38), temos que a 2-forma presente no termo (vii) é proporcional à 2-forma $\epsilon_{cdab}\nabla^a\psi^b$ na superfície de integração:

$$N^a\chi^b\nabla_a\psi_b\epsilon_{cd}\Big|_{\mathcal{H}} = (\)\epsilon_{cdab}\nabla^a\psi^b\Big|_{\mathcal{H}}. \quad (3.66)$$

Contraindo ambos os lados com ϵ^{cd} , e utilizando as relações (3.39) e (3.41):

$$\begin{aligned} \epsilon^{cd}N^a\chi^b\nabla_a\psi_b\epsilon_{cd}\Big|_{\mathcal{H}} &= (\)\epsilon^{cd}\epsilon_{cdab}\nabla^a\psi^b\Big|_{\mathcal{H}}, \\ 2N^a\chi^b\nabla_a\psi_b\Big|_{\mathcal{H}} &= (\)\epsilon^{cdef}N_e\chi_f\epsilon_{cdab}\nabla^a\psi^b\Big|_{\mathcal{H}}, \\ 2N^a\chi^b\nabla_a\psi_b\Big|_{\mathcal{H}} &= (\) - 4N_{[a}\chi_{b]}\nabla^a\psi^b\Big|_{\mathcal{H}}, \\ -\frac{1}{2}\Big|_{\mathcal{H}} &= (\)\Big|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Com o fator de proporcionalidade encontrado, podemos reescrever o termo (vii) em (3.65) de forma que ele se assemelhe mais a (3.35), que define o momento angular do buraco negro. Assim:

$$(vii) = -\frac{\delta\Omega_H}{2}\int_{\mathcal{H}}\epsilon_{cdab}\nabla^a\psi^b = -8\pi J\delta\Omega_H. \quad (3.68)$$

É conveniente escrever o termo (vi) de (3.65) em termos da perturbação da métrica, utilizando a equação (3.47d):

$$(vi) = -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{H}}\epsilon_{cd}\nabla^a(\gamma_{ab}\chi^b), \quad (3.69)$$

sendo que a derivada covariante aplicada ao termo proporcional a $\delta\Omega_H$ de $\delta\chi_a$ se anula pela equação de Killing e pela propriedade (3.50). Pela propriedade $g'_{bc}g'^{ac} = \delta_b^a$,

obtemos que $\gamma^{ab} = g^{ab} - g'^{ab}$, de forma que ao levantar os índices da perturbação, seu sinal deve ser alterado. Levando isso em conta, e aplicando a regra do produto, temos que (3.65) adquire a forma:

$$\int_{\mathcal{H}} \epsilon_{cd} \chi_b \nabla_a \gamma^{ab} = 2\delta\kappa A + 16\pi J \delta\Omega_H. \quad (3.70)$$

A ideia de se quantificar a variação de κ para duas configurações infinitesimalmente próximas de buracos negros era para, em conjunto com (3.45), descrever uma relação entre δM , δA e δJ . Não é imediato, no entanto, como relacionar a integral envolvendo a perturbação da métrica (3.70) com as propriedades globais do buraco negro pelo nosso formalismo desenvolvido até o momento. Assim, a resolução da integral em (3.70) deve partir de outro lugar.

Para resolver esse problema, consideramos primeiro uma questão análoga no caso mais simples da métrica de Minkowski. Seguindo o caminho da referência [6], é possível mostrar que, dado uma métrica g_{ab} , o traço da equação de Einstein linearizada para $r \rightarrow \infty$ retorna um valor de T_{00} que, integrado no espaço e utilizando o teorema de Gauss, fornece:

$$M = \frac{1}{8\pi} \sum_{i,j=1}^3 \int_S (\partial_j \beta^{ij} - \partial^i \beta) r_i d^3x, \quad (3.71)$$

sendo S uma superfície com r e t fixos no limite $r \rightarrow \infty$, $\beta_{ab} = g_{ab} - \eta_{ab}$ e β o traço de β_{ab} .

Considerando que a métrica de Kerr é assintoticamente plana, é possível utilizar (3.71) nas regiões espacialmente distantes do buraco negro. A equação (3.71) pode ser escrita de maneira covariante como:

$$M = \frac{1}{8\pi} \int_S (\nabla_e \beta^{ce} - \nabla^c \beta) r_c \epsilon_{ab}. \quad (3.72)$$

Com a expressão acima, é possível calcular δM a partir da subtração de M' para g'_{ab} e M para g_{ab} . Nesse processo, os fatores de η_{ab} vindos de β'_{ab} e β_{ab} se anulam, resultando em:

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} \int_S (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) r_c \epsilon_{ab}. \quad (3.73)$$

Apesar da integral (3.73) se assemelhar à de (3.70), as integrais são feitas em superfícies diferentes. Assim, é conveniente encontrar alguma integral que não dependa da superfície de integração, e que se reduza a (3.70) se calculada no horizonte

de eventos, e a (3.73) se calculada em S . É possível mostrar [1] que uma integral que cumpre esse papel é:

$$\int_S \epsilon_{abcd} \xi^d (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) = \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{abcd} \xi^d (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma). \quad (3.74)$$

Para encontrar a relação entre a integral (3.74) no horizonte de eventos e (3.73), utilizamos a proporcionalidade entre as 2-formas na superfície de integração:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ab} \chi_e \nabla_c \gamma^{ce} \Big|_{\mathcal{H}} &= () \epsilon_{abcd} \xi^d (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) \Big|_{\mathcal{H}}, \\ \epsilon^{ab} \epsilon_{ab} \chi_e \nabla_c \gamma^{ce} \Big|_{\mathcal{H}} &= () \epsilon^{abfg} N_f \chi_g \epsilon_{abcd} \xi^d (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) \Big|_{\mathcal{H}}, \\ 2 \chi_e \nabla_c \gamma^{ce} \Big|_{\mathcal{H}} &= -4 () \delta_{[c}^f \delta_{d]}^g N_f \chi_g \xi^d (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) \Big|_{\mathcal{H}}, \\ \chi_e \nabla_c \gamma^{ce} \Big|_{\mathcal{H}} &= -2 () N_{[c} \chi_{d]} \xi^d (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) \Big|_{\mathcal{H}}, \\ \chi_e \nabla_c \gamma^{ce} \Big|_{\mathcal{H}} &= 2 () \chi_c (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) \Big|_{\mathcal{H}}, \\ \chi_e \nabla_c \gamma^{ce} \Big|_{\mathcal{H}} &= -2 () N_{[c} \chi_{d]} \xi^d (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) \Big|_{\mathcal{H}}, \\ \chi_e \nabla_c \gamma^{ce} \Big|_{\mathcal{H}} &= 2 () \chi_c (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) \Big|_{\mathcal{H}}, \\ \frac{1}{2} \Big|_{\mathcal{H}} &= () \Big|_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

sendo utilizado $\epsilon_{ab} = \epsilon_{abcd} N^c \chi^d$, (2.20) e (3.49).

Para a relação entre a integral (3.74) em S e expressão (3.73), utilizamos o mesmo procedimento:

$$\begin{aligned} (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) r_c \epsilon_{ab} \Big|_S &= () \epsilon_{abcd} \xi^d (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) \Big|_S, \\ \epsilon^{ab} (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) r_c \epsilon_{ab} \Big|_S &= () \epsilon^{abfg} r_f \xi_g \epsilon_{abcd} \xi^d (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) \Big|_S, \\ 2 (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) r_c \Big|_S &= -4 () \delta_{[c}^f \delta_{d]}^g r_f \xi_g \xi^d (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) \Big|_S, \\ (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) r_c \Big|_S &= -2 () r_{[c} \xi_{d]} \xi^d (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) \Big|_S, \\ (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) r_c \Big|_S &= -2 () r_c (\nabla_e \gamma^{ce} - \nabla^c \gamma) \Big|_S, \\ -\frac{1}{2} \Big|_S &= () \Big|_S, \end{aligned} \quad (3.76)$$

sendo utilizado $\epsilon_{ab} = \epsilon_{abcd} r^c \xi^d$, e que ξ^a é normalizado no infinito. Assim, relacionando o lado esquerdo da igualdade de (3.70) à expressão (3.73), via (3.74), temos:

$$\int_{\mathcal{H}} \epsilon_{cd} \chi_b \nabla_a \gamma^{ab} = -8\pi \delta M, \quad (3.77)$$

resultando na relação para a variação de κ :

$$\delta M = -\frac{A}{4\pi}\delta\kappa - 2\pi J\delta\Omega_H. \quad (3.78)$$

Somando as expressões (3.45) e (3.78), obtemos a primeira lei da termodinâmica de buracos negros:

1ª Lei: *Para um buraco negro estacionário, variações em primeira ordem de energia, área do horizonte de eventos e momento angular são descritas por:*

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H\delta J. \quad (3.79)$$

3.3 Segunda lei

A segunda lei da termodinâmica, que define a entropia, atua como uma lei que limita a reversibilidade de processos físicos. Assim como em sistemas termodinâmicos, a física dos buracos negros também apresenta processos irreversíveis, como o que será apresentado a seguir, sugerindo a possibilidade de existir uma entropia para buracos negros:

Teorema 4. *Seja (M, g_{ab}) um espaço-tempo SAP, e Σ_1 e Σ_2 duas superfícies de Cauchy para \tilde{V} com $\Sigma_2 \subset I^+(\Sigma_1)$. Seja \mathcal{B}_1 uma componente conexa não vazia de $B \cap \Sigma_1$, ou seja, um buraco negro no tempo constante que define Σ_1 . Então, $J^+(\mathcal{B}_1) \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$ e está contida em uma única componente conexa de $B \cap \Sigma_2$.*

Prova: Como Σ_1 é uma superfície de Cauchy, então $J^+(\mathcal{B}_1) \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$, já que $I^+(\Sigma_1) \subset \Sigma_2$. Suponha que $J^+(\mathcal{B}_1) \cap \Sigma_2$ não é conexo. Então, existem dois abertos disjuntos U e U' em Σ_2 , tais que $U \cap J^+(\mathcal{B}_1) \neq \emptyset$, $U' \cap J^+(\mathcal{B}_1) \neq \emptyset$, e $(U \cup U') \supset (J^+(\mathcal{B}_1) \cap \Sigma_2)$. Além disso, $\mathcal{B}_1 \cap I^-(U) \neq \emptyset$, $\mathcal{B}_1 \cap I^-(U') \neq \emptyset$, e $\mathcal{B}_1 \subset I^-(U) \cup I^-(U')$. Entretanto, como o interior do cone de luz em um ponto p é conexo, se $p \in \mathcal{B}_1$, tal ponto não pode morar simultaneamente em $I^-(U)$ e $I^-(U')$, já que isso dividiria geodésicas tipo tempo partindo de p naquelas que intersectam U e U' , dividindo os vetores tipo tempo em abertos disjuntos não vazios, contrariando o fato de que o interior do cone de luz futuro é conexo. Assim, $I^-(U) \cap \Sigma_1$ e $I^-(U') \cap \Sigma_1$ devem ser abertos disjuntos de Σ_1 , de forma que sua união forme \mathcal{B}_1 contradizendo a hipótese de que \mathcal{B}_1 é conexo. \square

O resultado do teorema 4 pode ser entendido como afirmando que um buraco negro não pode desaparecer ou se dividir em dois ou mais buracos negros com o passar do tempo.

A primeira lei da termodinâmica de buracos negros sugere que a área do buraco negro está relacionada a sua entropia, visto que o termo $\frac{\kappa}{8\pi}\delta A$ cumpre o papel de $T\delta S$. Para analisar o comportamento da área do horizonte de eventos, podemos estudar o comportamento da congruência geodésica que o gera. O escalar de expansão Θ , definido em (2.29), em particular, é diretamente relacionado ao afastamento das geodésicas nulas da congruência que forma o horizonte de eventos, e portanto relacionado à sua área. Alguns resultados importantes que relacionam Θ ao comportamento de congruências geodésicas dizem respeito ao que chamamos de *pontos conjugados*.

3.3.1 Pontos conjugados

O escalar de expansão Θ está relacionado ao comportamento dos vetores η_α^a ortogonais às curvas integrais de χ^a . Para uma congruência geodésica, temos duas opções: ou as geodésicas se intersectam em algum ponto, ou não se intersectam. A existência de um ponto pertencente a mais de uma curva geodésica está diretamente relacionada ao comportamento de η_α^a , e portanto também ao de Θ . Caso exista tal ponto, e as geodésicas que passam por ele tenham origem de uma superfície Σ , partindo dela ortogonalmente, dizemos que p é um ponto conjugado a Σ . É possível mostrar [1], utilizando a equação de desvio geodésico e a mesma técnica de classe de equivalências, por estarmos tratando de geodésicas nulas, que a existência de um ponto $p \in \gamma(\lambda)$ conjugado a Σ , sendo $\gamma(\lambda)$ uma geodésica que passa por p e parametrizada por λ , com $p = \gamma(\lambda_0)$, ocorre se, e somente se, $\Theta \rightarrow -\infty$ quando $\lambda \rightarrow \lambda_0$.

Como foi mostrado em [1], a existência de pontos conjugados pode ser inferida pelas condições de energia no espaço-tempo, assim como pelos valores de Θ em determinados pontos de alguma curva geodésica $\gamma(\lambda)$. Um dos resultados é a proposição a seguir:

Proposição 1. *Seja (M, g_{ab}) um espaço-tempo que satisfaça $R_{ab}k^ak^b \geq 0$ para todo k^a tipo luz. Seja S uma subvariedade em M de dimensão 2, tipo espaço, suave, cuja expansão Θ é negativa para geodésicas nulas em $q \in S$. Então, existe um ponto conjugado a S ao longo de uma geodésica nula $\mu(\lambda)$ partindo de q , para m parâmetro afim finito.*

Resultados semelhantes à proposição 1 não são obtidos para Θ não negativos, mostrando que as condições de energia atuam como um sistema de *feedback* positivo para o aumento da negatividade do escalar de expansão. Entretanto, assim como a existência de pontos conjugados pode ser inferida por certas condições, o mesmo pode ser feito no que diz respeito à ausência deles. Como exemplos, temos o teorema a seguir:

Teorema 5. *Seja (M, g_{ab}) um espaço-tempo globalmente hiperbólico e K uma subvariedade de dimensão 2 em M , compacta e orientável. Então, todo ponto $p \in J^+(K)$ mora em alguma geodésica nula direcionada para o futuro partindo de K que é ortogonal a K , e não existem pontos conjugados a K entre K e p .*

De forma geral, os teoremas que indicam a existência de pontos conjugados utilizam como hipótese os valores de Θ [1]. Entretanto, o teorema 5, que diz respeito à não existência de pontos conjugados, independe dos valores de Θ . Isso sugere a existência de alguma restrição quanto aos valores de Θ possíveis, refletindo em uma restrição à área do horizonte de eventos.

3.3.2 Segunda lei

Para uma superfície de Cauchy Σ_1 , obtida como uma folha para um valor contante da coordenada temporal, a região $\mathcal{H}_1 = H \cap \Sigma_1$ pode ser vista como o horizonte de eventos naquele instante de tempo. Tal região corresponde a uma superfície de dimensão 2, tipo espaço, compacta, suave e orientável [1], se enquadrando nas premissas da proposição 1 e do teorema 5.

Suponha que $\Theta < 0$ para um ponto $p \in \mathcal{H}_1$ em um espaço *SAP* com a condição $R_{ab}k^ak^b > 0$ para todo k^a nulo. Por continuidade, é possível deformar \mathcal{H}_1 em uma superfície \mathcal{H}'_1 que intersecte $J^-(\mathcal{T}^+)$, ainda com a condição de que $\Theta < 0$ para tal região. Como existe uma região de \mathcal{H}'_1 fora do horizonte de eventos, existe um $q \in \mathcal{T}^+$ tal que $q \in J^+(\mathcal{H}'_1)$. Nesse momento, já é possível perceber que as condições obedecidas por \mathcal{H}'_1 cumprem a proposição 1 e o teorema 5. Pela proposição 1, o valor negativo de Θ em p , juntamente com a condição de energia, evidenciam a existência de um ponto conjugado a \mathcal{H}'_1 anterior a q ; enquanto pelo teorema 5, como $q \in J^+(\mathcal{H}'_1)$, não podem haver pontos conjugados a \mathcal{H}'_1 anteriores a q . A conclusão portanto, é que Θ deve ser exclusivamente não negativo para um buraco negro, levando à lei das áreas enunciada por Hawking:

Teorema 6. (Lei das áreas - Hawking) *Seja (M, g_{ab}) um espaço-tempo *SAP* satisfazendo a condição dominante de energia. Sejam Σ_1 e Σ_2 duas superfícies de*

Cauchy para \tilde{V} com $\Sigma_2 \subset J^+(\Sigma_1)$ e $\mathcal{H}_1 = H \cap \Sigma_1$, $\mathcal{H}_2 = H \cap \Sigma_2$, sendo H o horizonte de eventos. Então, a área de \mathcal{H}_2 é maior ou igual à área de \mathcal{H}_1 .

A lei das áreas impõe uma restrição direta para a grandeza que aparece na primeira lei da termodinâmica de buracos negros como análogo ao termo de entropia. Portanto, o teorema 6, pode ser simplificadaamente escrito em termos do que chamamos da segunda lei da termodinâmica de buracos negros:

2ª Lei: Para quaisquer processos físicos, temos que a área A do horizonte de eventos de um buraco negro obedece a relação:

$$\delta A \geq 0. \quad (3.80)$$

É importante notar que o teorema 6 leva em conta somente características que envolvem a estrutura causal do espaço-tempo, não importando se os buracos negros são estacionários ou não. Inclusive, levando em conta o resultado (3.42), a área do horizonte de eventos é uma grandeza conservada para os estados estacionários. Portanto, para tais estados, $\delta A = 0$, de forma que o aumento da área do horizonte de eventos é provocado por processos não estacionários.

3.4 Terceira lei

O contexto da termodinâmica de buracos negros tem como premissa os estados estacionários de tais corpos, descritos pela métrica de Kerr. Algo que não pode deixar de ser notado é que para desenvolver os procedimentos que culminaram na lei zero e nas duas primeiras leis, mais do que somente a métrica de Kerr foi assumido. Nas três leis descritas também foram assumidas condições de energia e a condição de que os espaços-tempos são *SAP*, sendo válida a conjectura de censura cósmica, que proíbe a existência de singularidades nuas.

Entretanto, a métrica de Kerr admite soluções com singularidades nuas. Além disso, é possível modificar os parâmetros M e J de um buraco negro incorporando a eles outros corpos que possuam massa e momento angular. Assim, a pergunta que surge naturalmente é: podem existir processos que produzam singularidades nuas a partir de buracos negros? Ou de forma análoga: é consistente assumir a conjectura de censura cósmica?

Buracos negros respeitam a desigualdade:

$$M^2 \geq J, \quad (3.81)$$

de forma que para migrar de um buraco negro para uma singularidade nua é necessário mudar o sinal da desigualdade (3.81), passando portanto pela situação extrema $M^2 = J$. Em termos das grandezas definidas para a termodinâmica de buracos negros, migrar para uma singularidade nua implica em passar por $\kappa = 0$, como pode ser verificado por (3.3) e (2.2a).

Para se verificar a consistência de se adotar a conjectura de censura cósmica, mostraremos em um exemplo típico que não é possível inverter o sinal da desigualdade (3.81). Para isso, é necessário entender como é o movimento descrito por um corpo com momento angular, tendo em vista que sua presença altera a trajetória em relação às geodésicas. O tratamento a seguir se baseia na referência [10].

3.4.1 Movimento de corpos com momento angular

Na mecânica newtoniana, a trajetória de um corpo extenso é descrita em termos do seu centro de massa. No contexto da relatividade geral, o centro de massa é dependente do referencial, como pode ser ilustrado ao analisar um disco homogêneo em rotação. No referencial de repouso de seu centro, o centro de massa é evidentemente o centro do disco. Entretanto, para referenciais que se movimentam em relação a ele e paralelamente ao plano de rotação, verifica-se velocidades diferentes em cada ponto da extremidade do disco. Isso faz com que o fator de compressão de Lorentz dependa da região do disco de forma não radial, deformando-o e modificando a posição de seu centro de massa. Por esse motivo, é necessário definir de maneira covariante uma forma de se descrever o movimento de um corpo não pontual.

Uma maneira de se fazer isso é definindo primeiro o vetor momento. Seja T^{ab} o tensor de energia-momento de um corpo de massa m que descreve um movimento no espaço. No contexto da relatividade restrita, o vetor momento é definido como:

$$P^a = \int_{\sigma} T^{ab} n_b d^3x, \quad (3.82)$$

sendo n^b um vetor unitário tipo tempo ortogonal ao elemento de superfície d^3x , e σ um *slice* espacial. Assim, P^a é o vetor de momento no instante de tempo que define a folha espacial σ . No contexto da relatividade especial, existem referenciais preferidos, que correspondem àqueles em que a métrica toma a forma de Minkowski, excluindo a ambiguidade na escolha das folhas espaciais σ . Entretanto, o mesmo não ocorre para a relatividade geral, de forma que é necessário especificar a superfície de

integração. Uma maneira análoga de se definir o momento P^a de um corpo extenso na relatividade geral consiste em primeiro definir um vetor momento para cada ponto x e para cada escolha de superfície de integração.

Para cada ponto x , é possível escolher, de forma não única, um vetor temporal n . O vetor momento no ponto x é definido, para uma escolha do vetor temporal n , como:

$$P^a(x, n) = \int_{\Sigma(x, n)} T^{ab} \epsilon_{bcde}, \quad (3.83)$$

sendo $\Sigma(x, n)$ a superfície espacial gerada pelas geodésicas espaciais em x e ortogonais a n . A expressão em (3.83) pode ser vista como o momento do corpo em questão analisado por um observador em x que se move em uma trajetória com vetor tangente n . É possível mostrar [13] que para cada ponto x , existe apenas uma única escolha de n , que será chamada de u , tal que:

$$u^{[a} P^{b]}(x, u) = 0, \quad (3.84)$$

Para esse vetor u , teremos como notação $P^a(x) = P^a(x, u)$. Agora, definimos o chamado tensor de spin de um corpo no ponto x :

$$S^{ab}(x) = 2 \int_{\Sigma(x, u)} (y - x)^{[a} T^{b]c} \epsilon_{cdef}(y), \quad (3.85)$$

sendo $\epsilon_{cdef}(y)$ a 4-forma de volume, indicando que a integração será feita em y . Pode-se mostrar que há uma única trajetória $z(\tau)$ tal que [13]:

$$P_a(z) S^{ab}(z) = 0. \quad (3.86)$$

Para a trajetória $z(\tau)$, damos o nome de a *trajetória do centro de massa*. Da mesma forma que na mecânica newtoniana a descrição da dinâmica de um corpo extenso é em termos do centro de massa, na relatividade geral a descrição é feita para $z(\tau)$ [10]. Passando a escrever $P^a = P^a(z(\tau))$ e $S^{ab} = S^{ab}(z(\tau))$, sendo τ o tempo próprio do corpo a ser analisado, temos que as equações que descrevem sua dinâmica são [10]:

$$\frac{dP^a}{d\tau} = -\frac{1}{2} R^a{}_{bcd} \dot{z}^b S^{cd}, \quad (3.87a)$$

$$\frac{dS^{ab}}{d\tau} = P^a \dot{z}^b - P^b \dot{z}^a, \quad (3.87b)$$

sendo o ponto derivada com respeito a τ . Contraindo (3.87b) com S_{ab} e utilizando (3.86), concluímos que $S^{ab}S_{ab}$ é uma constante de movimento. Sendo:

$$S^2 = \frac{1}{2}S^{ab}S_{ab}, \quad (3.88)$$

temos que S é interpretado como o módulo do momento angular do corpo em rotação.

Na ausência de rotação ($S^{ab} = 0$), é visível que as equações (3.87) se reduzem ao movimento em geodésicas:

$$\frac{dP^a}{d\tau} = \dot{z}^b \nabla_b P^a = 0. \quad (3.89)$$

3.4.2 Queda de corpos em um buraco negro

Dadas as equações (3.87), que descrevem a dinâmica de corpos com momento angular no espaço-tempo, é possível avaliar a possibilidade de se inverter a desigualdade (3.81) introduzindo corpos de massa m e momento angular j nos buracos negros, transformando-os em uma singularidades nuas.

O modelo proposto é discutido na referência [11]. O corpo a ser introduzido no buraco negro realizará seu movimento de forma radial, sobre o eixo de rotação do buraco negro, de forma que o momento angular de ambos sejam paralelos. Assim, para tal movimento, $\theta = 0$ ou π . Por simplicidade, também será considerado que os parâmetros do corpo são muito menores que os parâmetros do buraco negro, a fim de se desprezar efeitos de *back-reaction*. Apesar de restrito, tal modelo possui a física necessária para tirarmos as conclusões devidas, além de possuir contas menos extensas. Estudos mais recentes [12] realizaram os cálculos para corpos em queda de forma mais geral, e chegam às mesmas conclusões do modelo mais simples que será reproduzido adiante, se adotada a condição de energia dominante para tensores de energia-momento não eletromagnéticos.

Para transformar um buraco negro em uma singularidade nua, deixando cair sobre ele um corpo de massa m e momento angular j , é necessário que exista uma relação específica entre m e j . É possível fazer tal processo de duas maneiras: introduzindo no buraco negro um corpo com relações entre m e j suficientes para transformá-lo por um único processo em uma singularidade nua; ou jogando, de forma sucessiva, corpos que façam a transição passar por $\kappa = 0$. Para ambas as situações temos conservação de energia e de momento angular:

$$J_T = Ma + j, \quad (3.90a)$$

$$M_T = M + m. \quad (3.90b)$$

Para a transição de um buraco negro de $\kappa > 0$ para $\kappa = 0$, temos que:

$$\text{Condição inicial : } M > a \quad (3.91a)$$

$$\text{Condição final : } M_T^2 = Ma + j \quad (3.91b)$$

de forma que:

$$\begin{aligned} (M + m)^2 &= Ma + j, \\ M^2 + 2Mm &< (M + m)^2 = Ma + j, \\ Ma + 2Mm &< M^2 + 2Mm < Ma + j, \\ m &< \frac{j}{2M}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Para a transição de um buraco negro para uma singularidade nua, temos que:

$$\text{Condição inicial : } M > a, \quad (3.93a)$$

$$\text{Condição final : } M_T^2 < Ma + j, \quad (3.93b)$$

de forma que:

$$\begin{aligned} (M + m)^2 &< Ma + j, \\ M^2 + 2Mm &< (M + m)^2 < Ma + j, \\ Ma + 2Mm &< M^2 + 2Mm < Ma + j, \\ m &< \frac{j}{2M}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Diferentemente do caso sem rotação, a contração de P^a com um vetor de Killing não indica uma quantidade conservada, já que corpos com momento angular não descrevem seu movimento mais ao longo de geodésicas. Entretanto, a interpretação

das contrações continua as mesmas, já que para $r \rightarrow \infty$, em que a métrica é vista como a do espaço-tempo de Minkowski, $P_a \xi^a = -E$, por exemplo. Assim, contraindo (3.87a) com ξ^a , obtemos:

$$-\frac{dE}{d\tau} = -\frac{1}{2} \xi_\mu R^\mu{}_{\nu\sigma\rho} \dot{z}^\nu S^{\sigma\rho}. \quad (3.95)$$

Calculando os termos do tensor de curvatura que influenciam na expressão (3.95), temos que [11]:

$$-\frac{dE}{d\tau} = -\frac{2Maj(3r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2)^3} \frac{dr}{d\tau}. \quad (3.96)$$

Integrando ambos os lados de $r \rightarrow \infty$ a um r qualquer:

$$-E = -m + \frac{2Majr}{(r^2 + a^2)^2}. \quad (3.97)$$

Como o movimento se dá apenas radialmente:

$$-m^2 = g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu = g^{tt} E^2 + g^{rr} P_r^2, \quad (3.98)$$

de forma que, substituindo os valores da métrica inversa, de E calculado em (3.97), e usando que $P^r = mdr/d\tau$:

$$-1 = -\frac{(r^2 + a^2)}{r^2 + a^2 - 2Mr} \left(\frac{2Marj}{m(r^2 + a^2)^2} - 1 \right)^2 + \frac{(r^2 + a^2)}{r^2 + a^2 - 2Mr} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2.$$

Rearranjando de forma adequada os termos, temos que:

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = -\frac{r^2 + a^2 - 2Mr}{r^2 + a^2} + \left(\frac{2Marj}{m(r^2 + a^2)^2} - 1 \right)^2. \quad (3.99)$$

Como o termo do lado esquerdo da igualdade (3.99) é estritamente positivo, temos que o termo entre parênteses do lado direito da igualdade não pode ser nulo para que a equação tenha solução real. Além disso, para $r \rightarrow \infty$, o termo entre parênteses tende a (-1) . Assim, a solução física para a equação (3.99) é condicionada a:

$$m > \frac{2Marj}{(r^2 + a^2)^2}. \quad (3.100)$$

A desigualdade (3.100), que é equivalente a exigir que o termo entre parênteses do lado direito da equação (3.99) não se anule, faz com que exista algum $r = r_0$ de forma que $dr/d\tau = 0$. Esse resultado pode ser entendido como um ponto de retorno na trajetória $r(\tau)$ do corpo que cai sobre o buraco negro. Assim, se fixamos $r = r_+$, que corresponde ao horizonte de eventos, obtemos uma relação que deve ser obedecida por m e j para que a partícula entre no buraco negro. Utilizando a expressão (2.3) de r_+ , temos que:

$$m > \frac{2Mar_+j}{(r_+^2 + a^2)^2} \geq \frac{a}{(M + \sqrt{M^2 - a^2})} \frac{j}{2M}. \quad (3.101)$$

Como o termo que acompanha $\frac{j}{2M}$ na desigualdade (3.101) é sempre maior ou igual a 1, obtemos:

$$m \geq \frac{j}{2M}. \quad (3.102)$$

O resultado acima, comparado aos obtidos em (3.92) e (3.94), evidencia que corpos com massa e momento angular suficientes para transformar um buraco negro em uma singularidade nua, ou para levar $\kappa = 0$, recebem uma força, devido à sua rotação, suficiente para não conseguir entrar no buraco negro. Assim, para um espaço-tempo contendo um buraco negro estacionário em rotação, a adoção da conjectura de censura cósmica se mostra consistente. Como será apresentado a seguir, essa conclusão pode ser vista como uma relação análoga à terceira lei da termodinâmica.

3.4.3 Terceira lei da termodinâmica

A terceira lei possui mais de uma forma de ser enunciada. Entretanto, todas elas estão associadas ao comportamento do sistema no limite de $T \rightarrow 0$. Uma das formas tradicionais de se enunciar a terceira lei da termodinâmica é:

-Terceira lei da termodinâmica: *Não é possível atingir $T = 0$ por processos físicos finitos.*

No contexto de buracos negros, a formulação da terceira lei da termodinâmica acima corresponde exatamente à consistência da adoção da conjectura de censura cósmica. Assim, definimos como a terceira lei da termodinâmica de buracos negros:

3ª Lei: *Não é possível atingir $\kappa = 0$ por processos físicos finitos.*

4 Gravitação semiclássica

A descrição de buracos negros feita até o momento consistiu na análise de tais corpos utilizando somente a relatividade geral, que é o contexto no qual os buracos negros são definidos. A introdução de outros campos clássicos no espaço-tempo, como por exemplo o campo eletromagnético, pode ser feita sem grandes problemas [2]. Entretanto, a natureza também apresenta a existência de campos quânticos que, apesar de apresentarem características totalmente distintas dos campos clássicos (como por exemplo a existência de energia negativa e flutuações de vácuo), carregam energia, e portanto resultam em soluções diferentes para o espaço-tempo em relação às aquelas obtidas quando são considerados apenas campos clássicos.

Não foi formulada, até o momento, uma descrição unificada de relatividade geral e mecânica quântica. Dessa forma, uma descrição completa do problema de buracos negros levando em conta efeitos quânticos, que deveria ser feita com uma teoria mais geral que abarcasse a mecânica quântica e a relatividade geral (gravitação quântica), ainda não é possível. Entretanto, é possível considerar efeitos quânticos em um problema tipicamente gravitacional através do que chamamos de *gravitação semiclássica*. Uma das maneiras de realizar isso, que será explorada nas próximas seções, consiste em levarmos em conta que os campos quânticos estão imersos não no espaço de Minkowski, como é feito na teoria quântica de campos, mas sim em um espaço-tempo curvo. Evidentemente a mudança de geometria de fundo interfere no comportamento dos campos quânticos, devido à sua interação com o campo gravitacional, resultando em alguns fenômenos não observados em um espaço plano. Um desses fenômenos mais conhecidos é a emissão da *radiação Hawking*, que será tratada mais adiante.

Para explorar efeitos conjuntos de relatividade geral e mecânica quântica pelo método proposto, revisaremos primeiramente as noções básicas da teoria quântica de campos, e então as adaptaremos ao caso de um espaço-tempo curvo.

4.1 Segunda quantização

A segunda quantização consiste em um dos procedimentos padrões para se quantizar campos físicos descritos pelo formalismo hamiltoniano, via teoria clássica de campos. Levando em conta que mais adiante introduziremos campos quânticos no espaço-tempo, que é descrito pela relatividade geral, é conveniente tratarmos

de campos que se adequem aos princípios da relatividade especial. O processo de segunda quantização a ser apresentado nessa seção será feito particularmente para o campo de Klein-Gordon sem massa pela sua maior praticidade matemática, sendo portanto o campo utilizado nas próximas seções. Apesar do campo de Klein-Gordon descrever partículas de spin nulo, outros campos quânticos na natureza, com mais graus de liberdade e que se adequam aos princípios da relatividade especial, respeitam a equação de Klein-Gordon em cada uma de suas componentes [20]. Assim, com os devidos cuidados, é possível generalizar os resultados obtidos com o campo de Klein-Gordon para outros campos. Por praticidade, Klein-Gordon será abreviado para KG. A metodologia utilizada nessa seção seguirá a referência [19].

O campo de KG sem massa $\Phi(x)$ é um campo clássico descrito pela densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi, \quad (4.1)$$

sendo a ação definida por:

$$S = \int \mathcal{L}d^4x. \quad (4.2)$$

A integração realizada em (4.2) é feita na região do espaço-tempo na qual o campo descrito pela lagrangiana (4.1) é definido.

Pelo princípio de Hamilton, as equações de movimento são aquelas que tornam a ação estacionária ($\delta S = 0$). Assim, temos que o princípio de Hamilton aplicado à densidade lagrangiana (4.1) retorna:

$$\partial_\mu\partial^\mu\Phi = 0, \quad (4.3)$$

conhecida como equação de KG para um campo de massa zero.

O momento conjugado ao campo Φ é dado por:

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}(x)} = \dot{\Phi}(x), \quad (4.4)$$

no qual o ponto representa uma derivada temporal. A densidade hamiltoniana referente ao campo de KG de massa zero é:

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\Phi} - \mathcal{L},$$

$$= \frac{1}{2} \left(\pi^2(x) + (\nabla\Phi(x))^2 \right). \quad (4.5)$$

Juntamente com a descrição hamiltoniana, temos as relações referentes aos colchetes de Poisson envolvendo os campos Φ e π :

$$\{\Phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (4.6a)$$

$$\{\Phi(\vec{x}, t), \Phi(\vec{x}', t)\} = \{\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)\} = 0. \quad (4.6b)$$

A segunda quantização consiste em promover os campos clássicos $\Phi(x)$ e $\pi(x)$ a operadores, e os colchetes de Poisson a comutadores:

$$\Phi(x) \rightarrow \hat{\Phi}(x), \quad (4.7)$$

$$\pi(x) \rightarrow \hat{\pi}(x), \quad (4.8)$$

$$\{ \ } \rightarrow -i[\], \quad (4.9)$$

postulando as relações de comutação:

$$[\hat{\Phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{x}', t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (4.10a)$$

$$[\hat{\Phi}(\vec{x}, t), \hat{\Phi}(\vec{x}', t)] = [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{x}', t)] = 0, \quad (4.10b)$$

assim como a evolução temporal de $\hat{\Phi}(x)$ e $\hat{\pi}(x)$ dada pela equação de Heisenberg:

$$\dot{\hat{\Phi}} = -i [\hat{\Phi}(\vec{x}, t), \hat{H}], \quad (4.11a)$$

$$\dot{\hat{\pi}} = -i [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{H}], \quad (4.11b)$$

sendo \hat{H} o operador hamiltoniano do campo quantizado:

$$\hat{H} = \int d^3x \frac{1}{2} \left(\hat{\pi}^2(x) + (\nabla\hat{\Phi}(x))^2 \right). \quad (4.12)$$

É fácil mostrar que as equações em (4.11) resultam que a evolução do campo quantizado $\hat{\Phi}(x)$ é a mesma do campo clássico:

$$\partial_\mu \partial^\mu \hat{\Phi} = 0. \quad (4.13)$$

A equação de KG admite soluções de ondas planas:

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}} e^{ip^\mu x_\mu}, \quad (4.14)$$

sendo $\omega_p = |\vec{p}|$, e $p^\mu = (\omega_p, \vec{p})$. Definindo o produto escalar de KG:

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &= i \int d^3x [f_1^* \partial_0 f_2 - (\partial_0 f_1^*) f_2], \\ &\equiv i \int d^3x f_1^* \overleftrightarrow{\partial}_0 f_2, \end{aligned} \quad (4.15)$$

temos que as soluções (4.14) formam um conjunto completo de soluções da equação de KG com as relações:

$$(u_{p'}, u_p) = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}), \quad (4.16a)$$

$$(u_{p'}^*, u_p^*) = -\delta^3(\vec{p}' - \vec{p}), \quad (4.16b)$$

$$(u_{p'}, u_p^*) = 0. \quad (4.16c)$$

Em conjunto com as relações de comutação (4.10), é possível escrever as soluções de $\hat{\Phi}$ como:

$$\hat{\Phi}(x) = \int d^3p (\hat{a}_p u_p + \hat{a}_p^\dagger u_p^*), \quad (4.17)$$

com os operadores \hat{a}_p e \hat{a}_p^\dagger obedecendo as relações de comutação:

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^\dagger] = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (4.18a)$$

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}] = [\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_{p'}^\dagger] = 0. \quad (4.18b)$$

A expansão (4.17), em conjunto com as relações de comutação (4.18), nos permite definir o estado de vácuo do campo estudado:

$$\hat{a}_p |0\rangle = 0. \quad (4.19)$$

4.2 Campos quânticos em espaços curvos

Como é de se esperar, o comportamento de campos quânticos se modifica quando passamos do espaço de Minkowski para um espaço curvo. Nesta seção consideraremos o caso de uma geometria de fundo de Kerr, seguindo as referências [16, 23]. Em seguida, estudaremos o comportamento do campo de KG sem massa na métrica de Kerr, o que será feito baseado nas referências [16, 21, 25, 26]. Discutiremos então a aplicação da aproximação da óptica geométrica, que nos permite descrever a evolução do campo de KG sem massa em termos de geodésicas nulas no espaço-tempo, seguindo as referências [37, 38].

4.2.1 Geodésicas nulas na métrica de Kerr

A determinação das geodésicas para a métrica de Kerr através da resolução explícita da equação geodésica está longe de ser viável. Por isso, é conveniente a determinação das constantes de movimento ao longo das geodésicas, a fim de se obter a solução das equações geodésicas mais facilmente.

Para a métrica de Kerr, podemos encontrar quatro constantes de movimento ao longo de geodésicas [23]. Duas podem ser obtidas em termos dos vetores de Killing ξ^a e ψ^a :

$$-p_t = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) \dot{t} + \frac{2aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{\phi} = E, \quad (4.20)$$

$$p_\phi = -\frac{2aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{t} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr}{\Sigma} \sin^2 \theta\right) (\sin^2 \theta) \dot{\phi} = L_z, \quad (4.21)$$

outra pode ser obtida com a conservação do módulo do vetor momento:

$$\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) \dot{t}^2 + \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{t} \dot{\phi} - \frac{\Sigma}{\Delta} \dot{r}^2 - \Sigma \dot{\theta}^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr}{\Sigma} \sin^2 \theta\right) (\sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 = 0 \quad (4.22)$$

e outra, como mostrado por Carter em [22], pode ser obtida por meio da aplicação da teoria de Hamilton-Jacobi para o movimento de corpos na métrica de Kerr, que retorna uma equação separável para as coordenadas r e θ , sendo K_C a constante de separação dada por:

$$\frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - \frac{\Sigma^2}{\Delta} \dot{r}^2 = K_C, \quad (4.23)$$

$$(aE \sin \theta - L_z \csc \theta)^2 + \Sigma^2 \dot{\theta}^2 = K_C. \quad (4.24)$$

Rearranjando os termos das constantes de movimentos (4.20) (4.21) (4.22) (4.23) (4.24), obtemos as equações que regem as geodésicas nulas na métrica de Kerr [16] [23]:

$$\Sigma^2 \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - K_C \Delta, \quad (4.25)$$

$$\Sigma^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 = -(aE \sin \theta - L_z \csc \theta)^2 + K_C, \quad (4.26)$$

$$\Sigma \left(\frac{dt}{d\lambda} \right) = \frac{1}{\Delta} \{[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta]E - 2aMrL_z\}, \quad (4.27)$$

$$\Sigma \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right) = \frac{1}{\Delta} [2aMrE + (\Sigma - 2Mr)L_z \csc^2 \theta]. \quad (4.28)$$

Serão analisadas as geodésicas nulas principais, nas quais $\theta(\lambda) = \theta_0$. Assim, tratando-se de geodésicas nulas, os vetores tangentes às geodésicas serão os vetores nulos principais, normalizados pela condição $n^a l_a = -1$:

$$l^a = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} (\partial_t)^a + \frac{a}{\Delta} (\partial_\phi)^a + (\partial_r)^a, \quad (4.29)$$

$$n^a = \frac{r^2 + a^2}{2\Sigma} (\partial_t)^a + \frac{a}{2\Sigma} (\partial_\phi)^a - \frac{\Delta}{2\Sigma} (\partial_r)^a, \quad (4.30)$$

sendo l^a que aponta no sentido *outgoing*, e n^a no sentido *ingoing*.

Levando em conta a proporcionalidade dos vetores nulos principais com o vetor tangente às geodésicas, temos que a velocidade angular de sistemas que seguem trajetórias nulas com $\theta(\lambda) = \theta_0$, visto por um observador muito distante, corresponde a:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{a}{r^2 + a^2}. \quad (4.31)$$

Comparando a condição (4.31) com as expressões de E e L_z , temos que:

$$L_z = aE \sin^2 \theta. \quad (4.32)$$

Inserindo (4.32) e a condição de que $\theta(\lambda) = \theta_0$ nas equações que regem as geodésicas nulas em Kerr, obtemos:

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm E, \quad (4.33)$$

$$\theta(\lambda) = \theta_0, \quad (4.34)$$

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} E, \quad (4.35)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{a}{\Delta} E. \quad (4.36)$$

sendo o sinal positivo em (4.33) para geodésicas *outgoing*, e o sinal negativo para geodésicas *ingoing*.

Levando em conta o interesse em descrever as geodésicas na vizinhança do horizonte de eventos, é conveniente introduzirmos novas coordenadas para o problema. Como a coordenada ϕ não se comporta bem no horizonte de eventos, definimos uma nova coordenada angular $\tilde{\phi}$ como:

$$\tilde{\phi} = \phi - \Omega_H t, \quad (4.37)$$

correspondendo, portanto, à coordenada azimutal vista por observador distante que gira junto com o buraco negro. Pelas expressões (2.42), (4.27) e (4.28), é evidente que a coordenada $\tilde{\phi}$ se comporta bem no horizonte de eventos:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\phi}}{d\lambda} &= \frac{a}{\Delta} E - \frac{a}{r_+^2 + a^2} \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} E, \\ &= \frac{(r^2 + a^2)}{r_+^2 + a^2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Tratando-se de geodésicas nulas, é conveniente utilizar coordenadas nulas:

$$u = t - r^*, \quad (4.39a)$$

$$v = t + r^*, \quad (4.39b)$$

sendo r^* definido por:

$$dr^* = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr. \quad (4.40)$$

Como será evidenciado nas próximas seções, estaremos interessados principalmente na solução de $u(\lambda)$ para geodésicas *ingoing*. Assim, utilizando as equações (4.35), (4.34), (4.40) e (4.39a):

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda} - \frac{dr^*}{dr} \frac{dr}{d\lambda}, \quad (4.41)$$

$$= 2E \frac{r^2 + a^2}{\Delta}. \quad (4.42)$$

Integrando a equação (4.33) para geodésicas *ingoing*, adotando $r(0) = r_+$, temos que:

$$r = r_+ - E\lambda. \quad (4.43)$$

Substituindo (4.43) em (4.41), utilizando a relação de que $r_+ + r_- = 2M$:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\lambda} &= 2E \frac{(r_+ - E\lambda)^2 + a^2}{[(r_+ - E\lambda)^2 - (r_+ + r_-)(r_+ - E\lambda)]}, \\ &= 2 \frac{(r_+ - E\lambda)^2 + a^2}{\lambda [E\lambda - (r_+ - r_-)]}, \end{aligned}$$

e integrando, obtemos a coordenada $u(\lambda)$ para geodésicas nulas *ingoing*:

$$u(\lambda) = 2E\lambda - \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{E\lambda}{K_1} \right) + \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{E\lambda - (r_+ - r_-)}{K_2} \right), \quad (4.44)$$

sendo κ a gravidade superficial, K_1 e K_2 constantes de integração, e α uma constante definida por:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{r_+ - r_-}{r_-^2 + a^2} \right). \quad (4.45)$$

Quando analisada a parte exterior do buraco negro, temos que a uma distância muito grande do horizonte de eventos:

$$u(\lambda) \approx 2E\lambda, \quad (4.46)$$

enquanto na vizinhança do horizonte de eventos:

$$u(\lambda) \approx -\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{E\lambda}{K_1} \right). \quad (4.47)$$

4.2.2 Campo escalar de massa zero na métrica de Kerr

Para analisar os efeitos da interação entre o campo de KG sem massa com a geometria de um buraco negro em rotação, será utilizado o acoplamento mínimo, que resulta na equação:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = 0, \quad (4.48)$$

generalizando o produto escalar (4.15) para:

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &= i \int \epsilon_{abcd} \left[f_1^* \partial^d f_2 - (\partial^d f_1^*) f_2 \right], \\ &\equiv i \int \epsilon_{abcd} f_1^* \overset{\leftrightarrow}{\partial^d} f_2. \end{aligned} \quad (4.49)$$

É possível escrever a equação de KG sem massa em espaços curvos de forma mais geral, introduzindo um acoplamento de campo escalar com o escalar de curvatura. Entretanto, para os propósitos deste capítulo, o termo adicional não desempenha efeitos adicionais [16], de forma que será feita a opção pelo acoplamento mínimo, devido à sua menor complexidade.

A equação (4.48) pode ser convenientemente escrita [16] explicitamente em termos dos componentes da métrica:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi \right] = 0, \quad (4.50)$$

sendo g o determinante da métrica. Aplicando à equação (4.50) os valores referentes à métrica de Kerr expostos no apêndice A, obtemos:

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] \partial_t^2 - \partial_r (\Delta \partial_r) - \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) \right. \\ &\left. - \frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} (\Delta - a^2 \sin^2 \theta) \partial_\phi^2 + \frac{2a}{\Delta} [(r^2 + a^2) - \Delta] \partial_t \partial_\phi \right\} \Phi = 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Assumindo uma solução separável com energia positiva do tipo:

$$\Phi = \frac{R(r)}{\sqrt{r^2 + a^2}} S(\theta) e^{im\phi} e^{-i\omega t}, \quad (4.52)$$

temos que a equação (4.51) se torna:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] (-\omega^2) - \frac{\sqrt{r^2 + a^2}}{R} \frac{d}{dr} \left[\Delta \frac{d}{dr} \left(\frac{R}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \right] - \frac{1}{S} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) \\ - \frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} (\Delta - a^2 \sin^2 \theta) (-m^2) + \frac{2a}{\Delta} [(r^2 + a^2) - \Delta] (m\omega) = 0, \end{aligned} \quad (4.53)$$

sendo possível separá-la em uma equação dependente somente de r e outra somente de θ . Dando o nome de λ à constante de separação, temos:

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left(\lambda - a^2 \omega^2 \sin^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) S = 0, \quad (4.54)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\Delta \frac{d}{dr} \left(\frac{R}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right) \right] + \left\{ -\lambda + \frac{1}{\Delta} [\omega(r^2 + a^2) - am]^2 - \frac{4Mawmr}{\Delta} \right\} \frac{R}{\sqrt{r^2 + a^2}} = 0. \quad (4.55)$$

A equação angular (4.54), difere daquela que dá origem aos polinômios de Legendre devido ao termo adicional $a^2 \omega^2 \sin^2 \theta$. Como no caso em que $a = 0$ a solução angular $S(\theta) e^{im\phi}$ corresponde aos harmônicos esféricos, a equação (4.54) com $a \neq 0$ dá origem a outros tipos de harmônicos, chamados harmônicos esferoidais oblatos, definidos como $Z_{\lambda m}(\theta, \phi) = S_{\lambda}(\theta) e^{im\phi}$, sendo não trivial a forma dos autovalores λ , com $\lambda = \lambda(l, m, \omega)$ sendo l e m inteiros. No caso de $a = 0$, $\lambda(l, m, \omega) = l(l + 1)$ [21, 24, 25, 27, 28]. Assim como os harmônicos esféricos, os harmônicos esferoidais obedecem relações de ortogonalidade quanto aos parâmetros l , m e ω , de forma que podem ser normalizados para obedecerem as relações:

$$\oint d\Omega Z_{l'm'}^*(\omega, \theta, \phi) Z_{lm}(\omega, \theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \quad (4.56a)$$

$$\oint d\Omega \cos^2 \theta Z_{lm}^*(\omega, \theta, \phi) Z_{lm}(\omega', \theta, \phi) = C \delta(\omega - \omega'), \quad (4.56b)$$

sendo C uma constante.

Para analisar o comportamento da equação radial na proximidade do horizonte de eventos, a coordenada r não é adequada, já que em $r = r_+$ a métrica não está definida, assim como a própria equação (4.55) apresenta problemas. Para isso, utilizaremos a coordenada r^* definida em (4.40), de forma que quando $r \rightarrow \infty$, $r^* \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow r_+$, $r^* \rightarrow -\infty$. Aplicando essa mudança de coordenada à equação (4.55), temos:

$$\left(\frac{d^2}{dr^{*2}} + V_{lm} \right) R = 0 \quad (4.57)$$

sendo o potencial efetivo V_{lm} dado por:

$$\begin{aligned} V_{lm}(r) = & \left(\omega - \frac{am}{r^2 + a^2} \right)^2 - \frac{\lambda\Delta}{(r^2 + a^2)^2} - \frac{4Ma\omega m\Delta r}{(r^2 + a^2)^2} \\ & - \frac{2(r - M)\Delta r}{(r^2 + a^2)^3} - \frac{\Delta^2}{(r^2 + a^2)^3} + \frac{3\Delta^2 r^2}{(r^2 + a^2)^4}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Evidentemente, as soluções da equação (4.57) estão longe de serem triviais. Entretanto, quando olhamos o comportamento assintótico do potencial efetivo V_{lm} para $r \rightarrow r_+$ e $r \rightarrow \infty$, temos que ele adquire uma forma muito mais simples:

$$V_{lm} = \begin{cases} \omega^2, & r \rightarrow \infty, \\ (\omega - \Omega_H m)^2, & r \rightarrow r_+. \end{cases} \quad (4.59)$$

Visando estudar o comportamento da solução de KG sem massa na vizinhança do horizonte de eventos, bem como nas regiões assintoticamente planas, temos como solução, nos regimes assintóticos do potencial efetivo tratados em (4.59):

$$\Phi_{out}(r \rightarrow \infty) = \frac{e^{i\omega r^*}}{r} S_{lm}(\omega, \theta) e^{im\phi} e^{-i\omega t}, \quad (4.60a)$$

$$\Phi_{in}(r \rightarrow \infty) = \frac{e^{-i\omega r^*}}{r} S_{lm}(\omega, \theta) e^{im\phi} e^{-i\omega t}, \quad (4.60b)$$

$$\Phi_{out}(r \rightarrow r_+) = \frac{e^{i(\omega - \Omega_H m)r^*}}{\sqrt{r^2 + a^2}} S_{lm}(\omega, \theta) e^{im\phi} e^{-i\omega t}. \quad (4.60c)$$

Multiplicando (4.60c) por $e^{i\Omega_H m t} e^{-i\Omega_H m t}$, e reagrupando os termos de todas as equações de (4.60) para escrevê-las em termos da coordenadas nulas, temos que:

$$\Phi_{out}(r \rightarrow \infty) = \frac{e^{-i\omega u}}{r} Z_{lm}(\omega, \theta, \phi) \quad (4.61a)$$

$$\Phi_{in}(r \rightarrow \infty) = \frac{e^{-i\omega v}}{r} Z_{lm}(\omega, \theta, \phi) \quad (4.61b)$$

$$\Phi_{out}(r \rightarrow r_+) = \frac{e^{-i(\omega - \Omega_H m)u}}{\sqrt{r^2 + a^2}} S_{lm}(\omega, \theta) e^{im\tilde{\phi}} \quad (4.61c)$$

sendo $\tilde{\phi} = \phi - \Omega_H t$ a coordenada angular polar de um observador que gira com a mesma velocidade do buraco negro. A coordenada $\tilde{\phi}$ é a coordenada azimutal adequada para se analisar o comportamento de sistemas perto do horizonte de eventos, tendo em vista o mal comportamento da coordenada ϕ no horizonte de eventos, evidenciado por (4.36).

4.2.3 Aproximação da óptica geométrica

Apesar da equação de campo (4.48) retornar as soluções do campo de KG sem massa em qualquer background curvo, sua solução completa é, em geral, muito difícil de ser obtida. Consequentemente, é tradicional utilizar, para determinados regimes, a aproximação da óptica geométrica.

Seja f uma onda que, em um referencial local do espaço-tempo, se propaga com comprimento de onda λ e obedece à equação da onda. Seja, nesse mesmo referencial local, \mathcal{R} o raio de curvatura do espaço-tempo e \mathcal{A} o comprimento típico no qual a amplitude e o comprimento de onda da onda variam. A aproximação da óptica geométrica é dada pelos limites [37, 38]:

$$\lambda \ll \mathcal{R}, \quad (4.62a)$$

$$\lambda \ll \mathcal{A}. \quad (4.62b)$$

O limite (4.62a) nos permite substituir as derivadas covariantes por derivadas parciais nas equações que descrevem f , permitindo também, em conjunto com o limite (4.62b), escrevê-lo localmente como:

$$f = Ae^{iS}, \quad (4.63)$$

com a propagação da onda sendo dada termos de sua fase S . O vetor de propagação da onda é normal às superfícies de fase constante:

$$k_\mu = \partial_\mu S, \quad (4.64)$$

de forma que a equação da onda obedecida por f resulta em:

$$k^\mu k_\mu = 0, \quad (4.65)$$

e na equação geodésica para k^μ [37]. Desse modo, para determinar a forma da solução f , basta conhecer a forma das curvas geodésicas nulas.

4.3 Radiação Hawking

Como foi evidenciado em (4.19), a definição do estado de vácuo está intimamente relacionada às soluções de energia bem definida da equação de KG, que são obtidas em regimes estacionários. Levando em conta que o acoplamento mínimo acrescenta interações entre o campo de KG e a geometria de fundo, é de se esperar que em regimes não estacionários, as interações entre o campo quântico e a geometria de fundo alterem o estado do campo de KG. Como estamos estudando o contexto de buracos negros, que são formados por um regime não estacionário, a pergunta natural que surge é: como a formação de um buraco negro altera o estado de campos quânticos definidos no espaço-tempo? Essa seção de propõe a responder essa pergunta em certos regimes físicos, baseando sua construção nas referências [9, 16], com pequenas adaptações.

O problema a ser analisado é o de como matéria em colapso gravitacional, mantendo a simetria axial da métrica de Kerr, afeta um estado de vácuo inicial no espaço-tempo. Como o colapso analisado mantém a simetria axial, em qualquer momento da história do espaço-tempo, a métrica exterior ao corpo em colapso é a de Kerr.

Em um espaço globalmente hiperbólico, há uma solução única para a equação de KG para condições iniciais especificadas em uma superfície de Cauchy. É possível introduzir um conjunto de soluções $f_{\omega lm}$, de energia positiva e momento angular bem definidos, que em \mathcal{T}^- adquirem a forma:

$$f_{\omega lm}(\mathcal{T}^-) = N_{\omega lm} \frac{e^{-i\omega v}}{r} Z_{lm}(\omega, \theta, \phi), \quad (4.66)$$

sendo $N_{\omega lm}$ uma constante de normalização obtida pela relação:

$$(f_{\omega lm}, f_{\omega' l' m'}) = \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (4.67)$$

Para as curvas nulas, \mathcal{I}^- consiste em uma superfície de Cauchy, de forma que a condição (4.67) e

$$(f_{\omega lm}, f_{\omega' l' m'}^*) = 0 \quad (4.68)$$

evidenciam que o conjunto $\{f_{\omega lm}, f_{\omega lm}^*\}$ formam uma base para as soluções da equação de KG em todo o espaço-tempo.

A normalização nesse contexto se faz importante, já que serão feitas comparações entre bases distintas das soluções da equação de KG. Considerando que definimos os modos $f_{\omega lm}$ pela sua forma em \mathcal{I}^- , a constante de normalização será calculada pelo produto escalar em \mathcal{I}^- , que adquire uma forma diferente de (4.15) [2]. Para duas soluções g e h da equação de KG escritas em \mathcal{I}^- e \mathcal{I}^+ como:

$$g = \frac{1}{r} \mathcal{G}, \quad (4.69a)$$

$$h = \frac{1}{r} \mathcal{H}, \quad (4.69b)$$

temos que o produto escalar de KG definido em \mathcal{I}^- e \mathcal{I}^+ é dado por:

$$(g, h)_{\mathcal{I}^-} = i \int_{\mathcal{I}^-} [\mathcal{G}^* \partial_v \mathcal{H} - \mathcal{H} \partial_v \mathcal{G}^*] dv d\Omega, \quad (4.70a)$$

$$(g, h)_{\mathcal{I}^+} = i \int_{\mathcal{I}^+} [\mathcal{G}^* \partial_u \mathcal{H} - \mathcal{H} \partial_u \mathcal{G}^*] du d\Omega. \quad (4.70b)$$

Assim, a normalização dos modos $f_{\omega lm}$ é dada por:

$$\begin{aligned} (f_{\omega lm}, f_{\omega' l' m'})_{\mathcal{I}^-} &= N_{\omega lm} N_{\omega' l' m'} i \oint d\Omega Z_{lm}^*(\omega) Z_{l'm'}(\omega') \int_{-\infty}^{\infty} dv [-i\omega' - i\omega] e^{-i(\omega' - \omega)v}, \\ &= 2\omega N_{\omega lm} N_{\omega' l' m'} \oint d\Omega Z_{lm}^*(\omega) Z_{l'm'}(\omega') \delta(\omega - \omega'), \\ &= 2\omega N_{\omega lm} N_{\omega lm} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'), \end{aligned} \quad (4.71)$$

resultando, por (4.67), em:

$$N_{\omega lm} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}. \quad (4.72)$$

Como $\{f_{\omega lm}, f_{\omega lm}^*\}$ formam uma base para as soluções da equação de KG, é possível escrever o campo de KG quantizado $\hat{\Phi}$ como:

$$\hat{\Phi} = \sum_{l,m} \int_0^\infty d\omega \left(\hat{a}_{\omega lm} f_{\omega lm} + \hat{a}_{\omega lm}^\dagger f_{\omega lm}^* \right), \quad (4.73)$$

sendo o vácuo em \mathcal{T}^- definido como:

$$\hat{a}_{\omega lm} |0_-\rangle = 0. \quad (4.74)$$

Como durante o processo de colapso o espaço-tempo não é estacionário, não é possível encontrar um vetor de Killing assintoticamente tipo tempo em todo o espaço-tempo. Assim, de forma geral, a noção de partículas durante toda a história do espaço-tempo é ambígua, e dependente do observador. Por consequência, as noções de vácuo no futuro e passado assintótico podem não ser compatíveis.

Nesse sentido, é conveniente procurar soluções de energia positiva para a equação de KG em \mathcal{T}^+ , a fim de se definir de maneira natural a noção de vácuo no futuro assintótico. Como já obtido em (4.61a), é possível encontrar um conjunto de soluções de energia positiva e momento angular bem definidos para a equação de KG, que em \mathcal{T}^+ adquire a forma:

$$p_{\omega lm}(\mathcal{T}^+) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{e^{-i\omega u}}{r} Z_{lm}(\omega, \theta, \phi), \quad (4.75)$$

sendo o fator de normalização de $p_{\omega lm}$ obtido pela condição:

$$(p_{\omega lm}, p_{\omega' l' m'}) = \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (4.76)$$

e, portanto, de forma análoga a (4.71), porém utilizando a relação (4.70b).

Diferentemente de \mathcal{T}^- , nem todas as curvas nulas no espaço-tempo passam por \mathcal{T}^+ , tendo em vista que algumas dessas curvas passam pelo horizonte de eventos, estando fadadas a cair na singularidade. Entretanto, como uma trajetória nula está fadada a alcançar \mathcal{T}^+ ou cruzar o horizonte de eventos, temos que todas as curvas nulas no espaço-tempo intersectam a superfície $H \cup \mathcal{T}^+$. Assim, seja $q_{\omega lm}$ um conjunto de soluções de energia positiva da equação de KG em H , que obedeça:

$$(q_{\omega lm}, q_{\omega' l' m'}) = \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (4.77)$$

Por se tratarem de regiões disjuntas, as soluções em H e \mathcal{T}^+ são ortogonais:

$$(p_{\omega lm}, q_{\omega' l' m'}) = 0. \quad (4.78)$$

Como $H \cup \mathcal{T}^+$ atua como uma superfície de Cauchy para as curvas nulas, e pelas condições de ortogonalidade (4.76) (4.77) (4.78), o conjunto $\{p_{\omega lm}, p_{\omega lm}^*, q_{\omega lm}, q_{\omega lm}^*\}$ forma uma base para as soluções da equação de KG. Expandindo o campo quantizado $\hat{\Phi}$ nessa base, temos que:

$$\hat{\Phi} = \sum_{l,m} \int_0^\infty d\omega \left(\hat{b}_{\omega lm} p_{\omega lm} + \hat{c}_{\omega lm} q_{\omega lm} + \hat{b}_{\omega lm}^\dagger p_{\omega lm}^* + \hat{c}_{\omega lm}^\dagger q_{\omega lm}^* \right), \quad (4.79)$$

sendo o vácuo em \mathcal{T}^+ definido como:

$$\hat{b}_{\omega lm} |0_+\rangle = 0. \quad (4.80)$$

Levando em conta que $p_{\omega lm}$ é solução da equação de KG definida em todo o espaço-tempo, é possível expandi-la na base $\{f_{\omega lm}, f_{\omega lm}^*\}$:

$$p_{\omega lm} = \sum_{l,m} \int_0^\infty d\omega' (\alpha_{\omega\omega' l l' m m'} f_{\omega' l' m'} + \beta_{\omega\omega' l l' m m'} f_{\omega' l' m'}^*). \quad (4.81)$$

Os coeficientes $\alpha_{\omega\omega' l l' m m'}$ e $\beta_{\omega\omega' l l' m m'}$ são chamados de *coeficientes de Bogoliubov*; e a transformação representada em (4.81), que corresponde a uma mudança de base, é chamada de *transformação de Bogoliubov*. A forma de se escrever as soluções $p_{\omega lm}$ em termos de $f_{\omega lm}$ nos permite escrever a relação de ortonormalidade das soluções $p_{\omega lm}$ em termos dos coeficientes da transformação de Bogoliubov, que será útil mais adiante:

$$\begin{aligned} (p_{\omega_1 l_1 m_1}, p_{\omega_2 l_2 m_2}) &= \sum_{l' m' l'' m''} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega' d\omega'' \left[\alpha_{\omega_1 \omega' l_1 l' m_1 m'}^* \alpha_{\omega_2 \omega'' l_2 l'' m_2 m''} (f_{\omega' l' m'}, f_{\omega'' l'' m''}) \right. \\ &\quad \left. + \beta_{\omega_1 \omega' l_1 l' m_1 m'}^* \beta_{\omega_2 \omega'' l_2 l'' m_2 m''} (f_{\omega' l' m'}^*, f_{\omega'' l'' m''}^*) \right], \\ &= \sum_{l' m'} \int_0^\infty d\omega' \left[\alpha_{\omega_1 \omega' l_1 l' m_1 m'}^* \alpha_{\omega_2 \omega' l_2 l' m_2 m'} - \beta_{\omega_1 \omega' l_1 l' m_1 m'}^* \beta_{\omega_2 \omega' l_2 l' m_2 m'} \right]. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Dada as relações de ortonormalidade (4.67), é possível escrever os coeficientes $\alpha_{\omega\omega' l l' m m'}$ e $\beta_{\omega\omega' l l' m m'}$ em termos do produto escalar:

$$\alpha_{\omega\omega' l l' m m'} = (f_{\omega' l' m'}, p_{\omega l m}), \quad (4.83a)$$

$$\beta_{\omega\omega' l l' m m'} = -(f_{\omega' l' m'}^*, p_{\omega l m}). \quad (4.83b)$$

Como as definições de vácuo em \mathcal{T}^- e \mathcal{T}^+ estão intimamente relacionadas às soluções $f_{\omega l m}$ e $p_{\omega l m}$, os coeficientes da transformação de Bogoliubov também desempenham o papel de transformação entre os operadores de criação e aniquilação definidos em \mathcal{T}^- e \mathcal{T}^+ . Isso pode ser facilmente verificado pela expansão do campo quantizado (4.79) em conjunto com o produto escalar, resultando em:

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\omega l m} &= (p_{\omega l m}, \Phi), \\ &= \sum_{l', m'} \int_0^\infty d\omega' [\hat{a}_{\omega' l' m'}(p_{\omega l m}, f_{\omega' l' m'}) + \hat{a}_{\omega' l' m'}^\dagger(p_{\omega l m}, f_{\omega' l' m'}^*)], \\ &= \sum_{l', m'} \int_0^\infty d\omega' [-\hat{a}_{\omega' l' m'} \alpha_{\omega\omega' l l' m m'}^* + \hat{a}_{\omega' l' m'}^\dagger \beta_{\omega\omega' l l' m m'}^*]. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Assim, aplicando $\hat{b}_{\omega l m}$ ao estado de vácuo em \mathcal{T}^- :

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\omega l m} |0_-\rangle &= \sum_{l', m'} \int_0^\infty d\omega' \beta_{\omega\omega' l l' m m'}^* \hat{a}_{\omega' l' m'}^\dagger |0_-\rangle, \\ &= \sum_{l', m'} \int_0^\infty d\omega' \beta_{\omega\omega' l l' m m'}^* |1_{\omega' l' m'}-\rangle, \end{aligned} \quad (4.85)$$

evidenciando que o coeficiente $\beta_{\omega\omega' l l' m m'}^*$ quantifica a mudança do estado de vácuo do passado assintótico para o futuro assintótico. Se analisarmos o papel de tal coeficiente na expansão (4.81), fica claro que a mudança do estado de vácuo se deve à presença de algum fator no espaço-tempo que faz com que um modo de energia positiva no passado assintótico evolua para um estado incluindo modos de energia negativa no futuro assintótico. Como veremos mais adiante, esse fato se deve ao caráter não estacionário do espaço-tempo.

Como a relação em (4.85) mostra que o estado de vácuo em \mathcal{T}^- evolui para um estado com partículas em \mathcal{T}^+ , é natural fazermos a pergunta de como será o número médio de partículas observadas. Como o operador número em \mathcal{T}^+ é definido como $\hat{N}_{\omega l m} = \hat{b}_{\omega l m}^\dagger \hat{b}_{\omega l m}$, temos que:

$$\langle 0_- | \hat{N}_{\omega l m} | 0_- \rangle = \sum_{l', m'} \int_0^\infty d\omega'' \beta_{\omega'' \omega l l' m m''} \langle 1_{\omega'' l' m''} - | \int_0^\infty d\omega' \beta_{\omega\omega' l l' m m'}^* | 1_{\omega' l' m'} - \rangle,$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l',m'} \int_0^\infty d\omega' d\omega'' \beta_{\omega\omega'l'mm'}^* \beta_{\omega'\omega''l'm''m} \delta(\omega' - \omega'') \delta_{l'l''} \delta_{m'm''}, \\
 &= \sum_{l',m'} \int_0^\infty d\omega' |\beta_{\omega\omega'l'mm'}|^2.
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

Assim, para saber exatamente como o estado de vácuo em \mathcal{T}^- é visto em \mathcal{T}^+ é necessário resolver a equação (4.86). Para isso, estudaremos a relação entre os modos $p_{\omega lm}$ e $f_{\omega lm}$, reconstruindo a forma assintótica de $p_{\omega lm}$ em \mathcal{T}^- . Para isso, utilizaremos a notação:

$$f_{\omega lm} = f_\omega Z_{lm}(\omega), \tag{4.87a}$$

$$p_{\omega lm} = p_\omega Z_{lm}(\omega), \tag{4.87b}$$

fatorando as dependências radial e angular dos modos. Como os colapsos tratados nessa seção preservam a simetria axial da métrica, as soluções da equação de KG nessa geometria também preservarão essa simetria, não alterando o valor da projeção de momento angular m ao longo do colapso. Assumiremos, por hipótese, que o momento angular l também é preservado. Assim, os coeficientes da transformação de Bogoliubov em (4.81) pode ser escrito, de forma simplificada, por:

$$\alpha_{\omega\omega'l'mm'} = \alpha_{\omega\omega'} \delta_{l'l'} \delta_{mm'}, \tag{4.88a}$$

$$\beta_{\omega\omega'l'mm'} = \beta_{\omega\omega'} \delta_{l'l'} \delta_{m(-m')}, \tag{4.88b}$$

sendo que a relação (4.88b) leva em conta que $Z_{lm}^* \propto Z_{l(-m)}$, como é evidenciado pelas equações que definem os harmônicos esféricos.

Com a notação em (4.87) e a forma dos coeficientes em (4.88), temos que a relação (4.81) pode ser escrita como:

$$p_\omega Z_{lm}(\omega) = \int_0^\infty d\omega' (\alpha_{\omega\omega'} f_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} f_{\omega'}^*) Z_{lm}(\omega'). \tag{4.89}$$

Utilizando a relação de ortogonalidade (4.56b) em (4.89), obtemos:

$$p_\omega = \int_0^\infty d\omega' (\alpha_{\omega\omega'} f_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} f_{\omega'}^*), \tag{4.90}$$

de forma que nossa análise para determinação de $\langle \hat{N}_{\omega lm} \rangle$ passa a ser um problema bidimensional, envolvendo as coordenadas u e v . Assim, todas as análises a seguir

serão feitas no subespaço de momento angular l e m , suprimindo, portanto, tais índices.

Levando em conta que os modos p_ω em \mathcal{I}^+ possuem uma história ao longo do espaço-tempo anterior à chegada no futuro assintótico, é conveniente reconstruir o caminho dos modos $p_{\omega lm}$ de \mathcal{I}^- até \mathcal{I}^+ para se determinar os coeficientes de Bogoliubov. Para isso, é conveniente decompor os modos p_ω em duas partes, $p_\omega^{(1)}$ e $p_\omega^{(2)}$, de forma que:

- a parcela $p_\omega^{(1)}$ corresponde à parcela da solução que, partindo de \mathcal{I}^- , sofreu espalhamento antes de chegarem no centro do corpo em colapso e da formação do horizonte de eventos, chegando a \mathcal{I}^+ ; ou adentrou no corpo em colapso, porém em momentos muito anteriores à formação do horizonte de eventos, chegando também a \mathcal{I}^+ ;
- a parcela $p_\omega^{(2)}$ corresponde à parte da solução que, partindo de \mathcal{I}^- , adentra no corpo em colapso na vizinhança do momento de formação de seu horizonte de eventos, chegando a \mathcal{I}^+ .

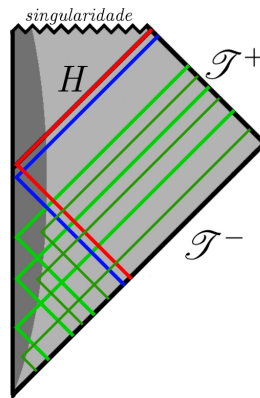


Figura 11 – Diagrama de Penrose de um buraco negro estático em formação. Apesar do caso analisado resultar em um buraco negro de Kerr, a parte externa desse diagrama da formação de um buraco negro é igual à de um buraco negro em rotação. Na imagem, a geodésica em vermelho corresponde àquelas que se tornarão o horizonte de eventos futuro; as verdes a geodésicas da parcela $p_\omega^{(1)}$; e a azul a geodésicas da parcela $p_\omega^{(2)}$.

No caso da parcela $p_\omega^{(1)}$, sua forma exata em \mathcal{I}^- depende diretamente da maneira como a matéria no espaço-tempo entra em colapso. Isso porque tal parcela interage com as regiões não estacionárias do espaço-tempo antes da formação do

buraco negro. Como essas regiões não exercem campos gravitacionais tão intensos quanto os exercidos após a formação do buraco negro, é possível caracterizar a parcela $p_\omega^{(1)}$ como sendo aquela em que $\omega_{\mathcal{T}^-} \approx \omega_{\mathcal{T}^+}$. Levando em conta que pela equação (4.44) o horizonte de eventos é gerado pelos modos com fase $u \rightarrow \infty$, a parcela $p_\omega^{(1)}$ engloba aquelas com fase u fora desse limite.

Em contrapartida, a parcela $p_\omega^{(2)}$ é independente da maneira como o corpo entra em colapso. Isso porque, apesar dessa parcela passar pelo interior do corpo em colapso, que é uma região não estacionária e evidentemente dependente do colapso, a parcela $p_\omega^{(2)}$ se transforma em modos *outgoing* imediatamente antes da formação do horizonte de eventos. Assim, por mais que ela entre em contato com regiões não estacionárias enquanto era um modo *ingoing*, ao se tornar um modo *outgoing* logo antes da formação do horizonte de eventos, o redshift sofrido até que tal parcela atinja \mathcal{T}^+ tende ao infinito quanto mais próximo da formação do horizonte de eventos ela tenha se transformado em um modo *outgoing*. Portanto, a frequência observada em \mathcal{T}^+ é muito mais influenciada pelo redshift gerado pela formação do horizonte de eventos do que qualquer efeito de interação entre $p_\omega^{(2)}$ e o espaço não estacionário. A parcela $p_\omega^{(2)}$ corresponde portanto ao limite $u \rightarrow \infty$, sendo nesse limite válida a aproximação $\omega_{\mathcal{T}^-} \gg \omega_{\mathcal{T}^+}$. Como $p_\omega^{(2)}$ observado em \mathcal{T}^+ possuirá uma frequência extremamente inferior à que possuía em \mathcal{T}^- , podemos afirmar que uma frequência finita em \mathcal{T}^+ corresponde a uma frequência elevadíssima em \mathcal{T}^- , de forma que a aproximação da óptica geométrica é evidentemente válida para o contexto.

Se pensarmos em um observador estático distante da região onde se formou o buraco negro ($r \rightarrow \infty$), é possível afirmar que com o passar do tempo, chegarão a ele os modos p_ω . À medida que o tempo de seu relógio passa, a fase u desses modos que passam por ele aumenta. Sendo a parcela $p_\omega^{(1)}$ caracterizada pelas fases u fora do limite $u \rightarrow \infty$, é possível afirmar que o tal observador distante medirá primeiro os modos dessa parcela, de forma que, caso ele possua informação das frequências relativas a cada modo normal de fase *outgoing* u em \mathcal{T}^- , ele conseguirá obter informações de como se deu o colapso de acordo com as frequências medidas de $p_\omega^{(1)}$. Os modos relativos à parcela $p_\omega^{(2)}$ só chegarão a tal observador para tempos grandes em seu relógio. Como a parcela $p_\omega^{(2)}$ é independente da maneira como se deu o colapso e é verificada por um observador distante após passar um tempo arbitrariamente grande, é possível tratar a parcela $p_\omega^{(2)}$ como sendo um estado assintótico dos modos normais medidos por um observador distante em um limite de tempos grandes estacionário para qualquer modelo de corpo em colapso.

Levando em conta que construímos no capítulo 3 o formalismo da termodi-

nâmica de buracos negros, em que vários resultados desenvolvidos se passam em regimes estacionários da métrica, e estamos interessados em relacionar o estado de vácuo em \mathcal{T}^- e \mathcal{T}^+ , é natural explorar o regime no qual a parcela de p_ω que tende a uma forma estacionária independente do colapso. Como as parcelas $p_\omega^{(1)}$ e $p_\omega^{(2)}$ são disjuntas, temos que:

$$p_\omega = p_\omega^{(1)} + p_\omega^{(2)}. \quad (4.91)$$

Seja $\Gamma(\omega)$ a fração de $p_\omega^{(2)}$ em relação a p_ω definida pelas relações de ortogonalidade:

$$(p_\omega^{(1)}, p_{\omega'}^{(1)}) = (1 - \Gamma(\omega)) \delta(\omega - \omega'), \quad (4.92)$$

$$(p_\omega^{(2)}, p_{\omega'}^{(2)}) = \Gamma(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (4.93)$$

Para determinarmos a relação entre os modos p_ω e f_ω , é necessário saber qual a forma que as soluções p_ω adquirem em \mathcal{T}^- . Para isso, utilizaremos o argumento feito em [9, 16].

No futuro assintótico, o colapso gravitacional resultará em um buraco negro de Kerr. Se acompanharmos retrocedendo as geodésicas nulas que formam o horizonte de eventos futuro, temos que elas intersectam \mathcal{T}^- com coordenada *ingoing* $v = v_0$. Assim, as geodésicas nulas que adentraram no corpo em colapso e saíram dele antes da formação do horizonte de eventos correspondem às geodésicas *ingoing* em \mathcal{T}^- com $v < v_0$. Seja γ_0 a geodésica que partiu de \mathcal{T}^- e se transformou no horizonte de eventos futuro, e γ_1 uma geodésica que partiu de \mathcal{T}^- com coordenada *ingoing* $v < v_0$ próxima de v_0 . Nessas condições, geodésicas do tipo γ_1 correspondem à última parcela de geodésicas nulas que partem de \mathcal{T}^- e atingem \mathcal{T}^+ , sendo exatamente as geodésicas descritas pela parcela $p_\omega^{(2)}$.

Agora, considere uma geodésica γ_2 *ingoing* em \mathcal{T}^- com coordenada $v = v_2 \gg v_0$. Quando tal geodésica estiver próxima à região onde o corpo entrou em colapso, o buraco negro já terá sido formado, de forma que tal geodésica será indistinguível de uma geodésica *ingoing* em um background de um buraco negro de Kerr eterno. Assim, sua coordenada *outgoing* $u(\lambda)$ será descrita pela equação (4.44).

Como γ_0 e γ_1 possuem em \mathcal{T}^- coordenadas *ingoing* menores que γ_2 , temos que em algum ponto da história do espaço-tempo as coordenadas u, v de γ_2 serão iguais às de γ_1 e γ_0 . Como γ_0 faz parte do horizonte de eventos formado após o colapso, e γ_1 consiste em uma das últimas geodésicas que saem do corpo em colapso logo antes da formação do horizonte de eventos, temos que os pontos nos quais γ_2 intersecta

tais geodésicas possui a coordenada *outgoing* $u(\lambda)$ descrita pela parametrização (4.47), sendo $\lambda = 0$ e $\lambda = \lambda_1$ os parâmetros afins da intersecção de γ_2 com γ_0 e γ_1 , respectivamente.

A separação afim entre duas geodésicas nulas de mesma direção e sentido sempre pode ser escolhida de forma a se manter constante desde \mathcal{T}^- até \mathcal{T}^+ . Como a métrica de Kerr é assintoticamente plana, temos que em \mathcal{T}^- o espaço toma a forma de Minkowski. Assim, temos que a coordenada *ingoing* pode ser utilizada como um parâmetro afim na parametrização das geodésicas nulas de forma que, como γ_0 intersecta \mathcal{T}^- em v_0 , e γ_1 em v , temos que:

$$v_0 - v = K_2 \lambda_1, \quad (4.94)$$

sendo K_2 uma constante negativa. Definindo $K \equiv K_1 K_2$, temos que:

$$u(v) = -\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{v_0 - v}{K} \right). \quad (4.95)$$

Para analisar agora a forma de $p_\omega^{(2)}$ em \mathcal{T}^- é necessário, além do resultado obtido em (4.95), levar em conta o caráter ondulatório das soluções do campo escalar. Como todo espaço-tempo é localmente plano, temos que a diferença de fase entre dois modos normais infinitesimalmente próximos se mantem a mesma durante a evolução do espaço-tempo [9]. Assim, a fase dos modos normais de $p_\omega^{(2)}$ que seguem as geodésicas γ_1 , em relação à fase de γ_0 , será a mesma durante toda a evolução do espaço-tempo. Como os modos de $p_\omega^{(2)}$ que seguem γ_1 possuem fase $(\omega - m\Omega_H)u$ logo após a formação do horizonte de eventos, evidenciado pela solução (4.61c), temos que em \mathcal{T}^- a fase será $(\omega - m\Omega_H)u(v)$ [9, 16].

Assim, a parcela $p_\omega^{(2)}$ descrita em (4.75) adquire em \mathcal{T}^- a forma:

$$p_\omega(\mathcal{T}^-) = \frac{1}{\sqrt{2(\omega - m\Omega_H)}^r} \frac{1}{\kappa} e^{\frac{i}{\kappa}(\omega - m\Omega_H) \ln \left(\frac{v_0 - v}{K} \right)}. \quad (4.96)$$

Como o produto escalar é invariante, e temos a forma de p_ω e f_ω em \mathcal{T}^- , é possível calcular os coeficientes $\alpha_{\omega\omega'}$ e $\beta_{\omega\omega'}$ utilizando a forma do produto escalar em (4.70a):

$$\alpha_{\omega\omega'} = iC_1 \int_{-\infty}^{v_0} dv \left[\left(-i\omega'^{-\frac{1}{2}} (\omega - m\Omega_H)^{\frac{1}{2}} - i\omega'^{\frac{1}{2}} (\omega - m\Omega_H)^{-\frac{1}{2}} \right) e^{i\omega'v} e^{\frac{i}{\kappa}(\omega - m\Omega_H) \ln \left(\frac{v_0 - v}{K} \right)} \right],$$

$$= C_1 \int_{-\infty}^{v_0} dv \left(\frac{\omega'}{(\omega - m\Omega_H)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega'v} e^{\frac{i}{\kappa}(\omega - m\Omega_H) \ln\left(\frac{v_0 - v}{K}\right)}, \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\omega\omega'} &= -iC_1 \int_{-\infty}^{v_0} dv \left[\left(-i\omega'^{-\frac{1}{2}}(\omega - m\Omega_H)^{\frac{1}{2}} - i\omega'^{\frac{1}{2}}(\omega - m\Omega_H)^{-\frac{1}{2}} \right) e^{-i\omega'v} e^{\frac{i}{\kappa}(\omega - m\Omega_H) \ln\left(\frac{v_0 - v}{K}\right)} \right], \\ &= C_1 \int_{-\infty}^{v_0} dv \left(\frac{\omega'}{(\omega - m\Omega_H)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega'v} e^{\frac{i}{\kappa}(\omega - m\Omega_H) \ln\left(\frac{v_0 - v}{K}\right)}, \end{aligned} \quad (4.98)$$

sendo C_1 o termo que abrange os harmônicos esferoidais e constantes de normalização; e a condição $\omega_{\mathcal{T}^-} \gg \omega_{\mathcal{T}^+}$ utilizada na forma $\omega' \gg \omega$. A integração é realizada até $v = v_0$ pelo fato de que soluções com $v > v_0$ em \mathcal{T}^- estão fadadas a cair na singularidade, não atingindo \mathcal{T}^+ , e por consequência não fazendo parte de p_ω .

Pela forma das expressões de $\alpha_{\omega\omega'}$ e $\beta_{\omega\omega'}$ em (4.97) e (4.98), é esperado que exista uma relação entre elas, de forma a ser possível escrever um coeficiente em termos do outro. Fazendo a mudança de coordenadas $s = v_0 - v$ para a expressão (4.97), $s = v - v_0$ para a expressão (4.98), e renomeando as constantes, temos que:

$$\alpha_{\omega\omega'} = -C \int_{\infty}^0 ds \left(\frac{\omega'}{(\omega - m\Omega_H)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega'v_0} e^{-i\omega's} e^{\frac{i}{\kappa}(\omega - m\Omega_H) \ln\left(\frac{s}{K}\right)}, \quad (4.99)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = C \int_{-\infty}^0 ds \left(\frac{\omega'}{(\omega - m\Omega_H)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega'v_0} e^{-i\omega's} e^{\frac{i}{\kappa}(\omega - m\Omega_H) \ln\left(-\frac{s}{K}\right)}. \quad (4.100)$$

Para evidenciar ainda mais a relação entre os coeficientes $\alpha_{\omega\omega'}$ e $\beta_{\omega\omega'}$, é conveniente realizar ambas as integrações de (4.99) (4.100) no plano complexo, via teorema dos resíduos. Pelos limites de integração, e pela exponencial envolvendo s em (4.99) e (4.100), ambas as integrais podem ser obtidas realizando integrações por um caminho que envolva os eixos imaginário e real, e um setor circular. Para (4.99) o caminho será realizado no quarto quadrante, enquanto para (4.100) o caminho será realizado no terceiro quadrante, como mostra a figura 12. Como ambos os integrandos não possuem polos dentro dos caminhos, o resíduo é nulo, e consequentemente as integrais em ambos os circuitos também são.

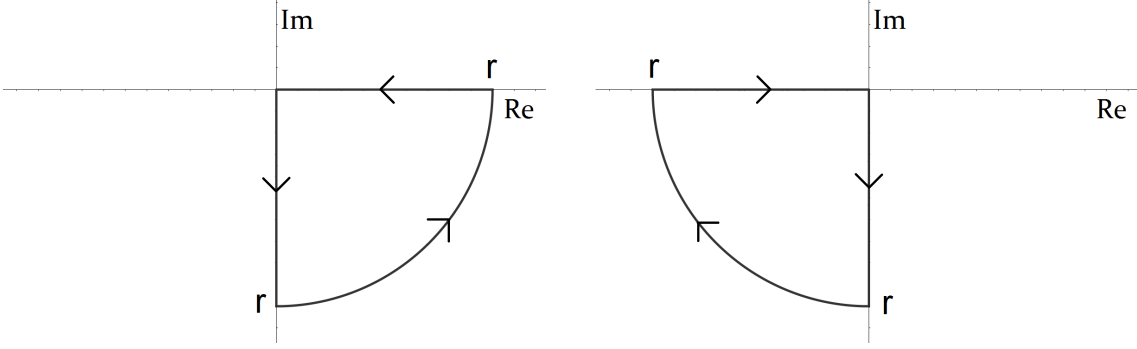


Figura 12 – O primeiro caminho será utilizado para o cálculo de $\alpha_{\omega\omega'}$, enquanto o segundo para $\beta_{\omega\omega'}$. Em ambos os casos, $r \rightarrow \infty$.

Em ambos os integrandos, se faz presente o termo $e^{-i\omega's}$, e uma integração em um setor circular na região negativa do eixo imaginário. Assim, como ambos os integrandos são analíticos e limitados nos pontos do caminho dos setores circulares, pelo Lema de Jordan [18] ambas as integrações nos setores circulares se anulam no limite de $r \rightarrow \infty$. Assim, as integrais nos circuitos da figura 12 levam a:

$$\alpha_{\omega\omega'} = -C \int_{-i\infty}^0 ds \left(\frac{\omega'}{(\omega - m\Omega_H)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega'v_0} e^{-i\omega's} e^{\frac{i}{\kappa}(\omega - m\Omega_H) \ln\left(\frac{s}{K}\right)}, \quad (4.101)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = C \int_{-i\infty}^0 ds \left(\frac{\omega'}{(\omega - m\Omega_H)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega'v_0} e^{-i\omega's} e^{\frac{i}{\kappa}(\omega - m\Omega_H) \cdot \ln\left(-\frac{s}{K}\right)} \quad (4.102)$$

Com a mudança de coordenada $s = -iz$:

$$\alpha_{\omega\omega'} = iC \int_{-\infty}^0 dz \left(\frac{\omega'}{(\omega - m\Omega_H)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega'v_0} e^{\omega'z} e^{\frac{i}{\kappa}(\omega - m\Omega_H) \ln\left(-\frac{iz}{K}\right)}, \quad (4.103)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = -iC \int_{-\infty}^0 dz \left(\frac{\omega'}{(\omega - m\Omega_H)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega'v_0} e^{\omega'z} e^{\frac{i}{\kappa}(\omega - m\Omega_H) \ln\left(\frac{iz}{K}\right)}. \quad (4.104)$$

Utilizando o ramo principal para o logaritmo, temos que, para z real::

$$\ln(\pm iz) = \ln z \mp i\frac{\pi}{2},$$

reduzindo as expressões (4.103) e (4.104) a:

$$\alpha_{\omega\omega'} = iC e^{\frac{\pi}{2\kappa}(\omega - m\Omega_H)} e^{i\omega'v_0} \int_{-\infty}^0 dz \left(\frac{\omega'}{\omega - m\Omega_H} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\omega'z} e^{\frac{i}{\kappa}(\omega - m\Omega_H) \ln\left(\frac{z}{K}\right)}, \quad (4.105)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = -iC e^{-\frac{\pi}{2\kappa}(\omega - m\Omega_H)} e^{-i\omega'v_0} \int_{-\infty}^0 dz \left(\frac{\omega'}{\omega - m\Omega_H} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\omega'z} e^{\frac{i}{\kappa}(\omega - m\Omega_H) \ln\left(\frac{z}{K}\right)}, \quad (4.106)$$

e, portanto:

$$|\alpha_{\omega\omega'}|^2 = e^{\frac{2\pi}{\kappa}(\omega - m\Omega_H)} |\beta_{\omega\omega'}|^2. \quad (4.107)$$

Tendo em vista a forma dos coeficientes completos da transformação de Bogoliubov descritos em (4.88), a relação (4.107) também é válida para $\alpha_{\omega\omega' l' m m'}$ e $\beta_{\omega\omega' l' m m'}$:

$$|\alpha_{\omega\omega' l' m m'}|^2 = e^{\frac{2\pi}{\kappa}(\omega - m\Omega_H)} |\beta_{\omega\omega' l' m m'}|^2. \quad (4.108)$$

Evidentemente, calcular $\langle \hat{N}_{\omega l m} \rangle$ após se obter o módulo ao quadrado de $\beta_{\omega\omega'}$ explicitamente, é suficientemente complicado. Entretanto, conhecida a relação (4.108), é possível calcular $\langle \hat{N}_{\omega l m} \rangle$ de uma forma mais simples, através de alguma relação que envolva $\langle \hat{N}_{\omega l m} \rangle$ e os módulos ao quadrado dos coeficientes de Bogoliubov. Com uma manipulação adequada, o lado direito da equação (4.82), aplicada a $p_{\omega}^{(2)}$, consiste em um múltiplo de $\langle \hat{N}_{\omega l m} \rangle$. Considere a identidade para a delta de Dirac:

$$\delta(\omega - \omega') = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} e^{i(\omega - \omega')t'} dt'. \quad (4.109)$$

Assim, a equação (4.82) para a parcela $p_{\omega l m}^{(2)}$, que obedece a relação (4.93), pode ser escrita como:

$$\Gamma_{lm}(\omega) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} e^{i(\omega - \omega'')t'} dt' \delta_{l'l''} \delta_{m m''} = \sum_{l' m'} \int_0^{\infty} d\omega' [\alpha_{\omega\omega' l' m m'}^* \alpha_{\omega''\omega' l' m' m''} - \beta_{\omega\omega' l' m m'}^* \beta_{\omega''\omega' l' m' m''}]. \quad (4.110)$$

Considerando o caso em que $\omega = \omega''$, $l = l''$, $m = m''$ e utilizando a relação obtida em (4.108):

$$\Gamma_{lm}(\omega) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{2\pi} = \sum_{l' m'} \int_0^{\infty} d\omega' [|\alpha_{\omega\omega' l' m m'}|^2 - |\beta_{\omega\omega' l' m m'}|^2],$$

$$\Gamma_{lm}(\omega) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{2\pi} = \left[e^{\frac{2\pi}{\kappa}(\omega - m\Omega_H)} - 1 \right] \sum_{l'm'} \int_0^\infty d\omega' |\beta_{\omega\omega'l'mm'}|^2. \quad (4.111)$$

Pela relação (4.86), obtemos portanto:

$$\frac{d \langle \hat{N}_{\omega lm} \rangle}{dt} = \frac{\Gamma_{lm}(\omega)}{2\pi} \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{\kappa}(\omega - m\Omega_H)} - 1}. \quad (4.112)$$

O fato de t ser um parâmetro temporal segue de sua definição em (4.109). Portanto, um observador distante, após um tempo assintoticamente longo do colapso que resultou na formação de um buraco negro de Kerr, sente o estado de vácuo anterior ao colapso como um banho térmico de temperatura:

$$T_{BH} = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (4.113)$$

À radiação descrita por esse banho térmico, damos o nome de *radiação Hawking*.

A radiação Hawking evidencia que o caráter termodinâmico dos buracos negros não é somente uma analogia como aparentava ser, quando não eram levados em conta os efeitos quânticos. Buracos negros não somente emitem energia, como essa energia também apresenta uma distribuição térmica com temperatura proporcional a κ , que é a constante associada à lei zero da termodinâmica de buracos negros. Da mesma forma, se a primeira e segunda lei da termodinâmica de buracos negros sugeriam que tais corpos apresentassem uma entropia proporcional à área do horizonte de eventos, o resultado (4.112) nos permite não só mostrar que buracos negros realmente apresentam entropia proporcional à sua área, como precisar qual é a constante de proporcionalidade. Pela primeira lei da termodinâmica de buracos negros apresentada em (3.79) e pelo resultado em (4.112), temos que a entropia do buracos negros é:

$$S_{BH} = \frac{A}{4} \quad (4.114)$$

4.4 Fluxos de energia devido à radiação Hawking

Como foi discutido ao longo dos procedimentos que culminaram na relação (4.112), o coeficiente $\beta_{\omega\omega'l'mm'}$ da expansão (4.81) possui papel central no mecanismo que produz a radiação Hawking, evidenciando que regimes não estacionários fazem com que modos de energia positiva do campo quântico evoluam para estados incluindo modos de energia negativa. A evolução do estado inicial de vácuo para estados

excitados é uma consequência direta da interação da geometria de fundo curva com o campo quântico, via gravitação semiclássica. Da mesma forma que a geometria de fundo influencia na dinâmica do campo quântico, é de se esperar que o campo quântico também influencie a geometria do espaço-tempo, gerando, inclusive, resultados não previstos pela termodinâmica de buracos negros, que assume por hipótese densidades de energia estritamente não negativas.

Como as equações de Einstein, que regem a dinâmica do espaço-tempo, relacionam a distribuição de energia e momento com a curvatura do espaço-tempo, se torna de interesse o cálculo do tensor de energia-momento relacionado ao campo escalar que gera a radiação Hawking, a fim de se obter os efeitos de tal radiação à métrica.

4.4.1 Tensor de energia-momento

Na teoria quântica de campos, devido ao processo de segunda quantização, as componentes do tensor de energia-momento passam a ser operadores. No contexto em que a massa do buraco negro é muito superior à massa de Planck, temos que a reação à métrica gerada por um campo quântico é dada em termos de seu valor médio pela aproximação semiclássica [2, 17]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi \langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle, \quad (4.115)$$

fazendo com que nosso objeto de interesse não seja o tensor de energia-momento do campo escalar sem massa, mas sim seu valor médio. Dessa forma, por simplicidade, utilizaremos nessa seção a notação $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle \equiv T_{\mu\nu}$.

Já é conhecido da teoria quântica de campos a necessidade de se renormalizar o tensor de energia-momento devido às divergências presentes nos cálculos [2, 19]. Entretanto, quando se leva em conta espaços curvos, os métodos de renormalização são dificultados de forma considerável, sendo cada geometria do espaço-tempo analisada separadamente [2].

Por se tratar de um problema matematicamente complexo, o tensor de energia-momento associado ao campo escalar utilizado na seção anterior para se obter a radiação Hawking será calculado para um caso mais simples. Primeiramente, o problema será simplificado para o caso de um colapso esfericamente simétrico, resultando em um buraco negro de Schwarzschild. Além disso, o problema será resolvido para dimensão $(1 + 1)$, por simplicidade. Apesar da redução da dimensão, o fato da radiação Hawking estar relacionada às geodésicas *ingoing* e *outgoing*, em

conjunto com a simetria esférica do caso de Schwarzschild, transforma o problema do colapso em um problema efetivamente de dimensão $(1 + 1)$.

O cálculo do tensor de energia-momento para o caso do colapso gravitacional segue a referência [29]. Tal cálculo é baseado na analogia existente entre o problema do colapso gravitacional que forma um buraco negro e o movimento acelerado de um espelho no espaço de Minkowski [31]. A renormalização do tensor de energia-momento no caso do espelho acelerado é tratado na referência [29].

Por se tratar de um problema em dimensão $(1 + 1)$, qualquer métrica, em particular a de Schwarzschild, pode ser escrita na forma:

$$ds^2 = -C(u, v)dudv, \quad (4.116)$$

sendo u, v coordenadas nulas. Levando em conta a presença de um campo escalar sem massa no espaço-tempo em questão, temos que a equação de KG admite a solução de ondas planas, como já mencionado nas seções anteriores. Sejam as coordenadas nulas $\bar{u} = \bar{u}(u)$ e $\bar{v} = \bar{v}(v)$ aquelas nas quais as soluções em ondas planas tomam a forma simples:

$$g_{\omega lm} \propto e^{i\omega\bar{u}}, \quad h_{\omega lm} \propto e^{i\omega\bar{v}}, \quad (4.117)$$

no passado assintótico, de forma que tais modos normais definem o estado de vácuo inicial $|0_-\rangle$, assim como em (4.73) (4.74). Se a métrica (4.116) for escrita em termos de \bar{u}, \bar{v} , temos que o tensor de energia-momento renormalizado $T_{\mu\nu}$ relativo ao campo escalar sem massa no espaço-tempo, com o estado de vácuo inicial, é dado por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\theta_{\mu\nu}}{12\pi} + \frac{R}{48\pi}g_{\mu\nu}, \quad (4.118)$$

sendo R o escalar de curvatura e $\theta_{\mu\nu}$ dado por:

$$\theta_{\bar{u}\bar{u}} = C^{1/2}\partial_{\bar{u}}^2(C^{-1/2}), \quad (4.119a)$$

$$\theta_{\bar{v}\bar{v}} = C^{1/2}\partial_{\bar{v}}^2(C^{-1/2}), \quad (4.119b)$$

$$\theta_{\bar{u}\bar{v}} = \theta_{\bar{v}\bar{u}} = 0. \quad (4.119c)$$

Como o cálculo das componentes do tensor de energia-momento envolve diretamente a forma da métrica, é necessária a utilização de algum modelo de colapso

gravitacional. O modelo utilizado será o mesmo desenvolvido em [30], que consiste em uma casca esférica de massa M e raio R , inicialmente estática, de forma que:

$$ds^2 = \begin{cases} -d\tau^2 + dr^2, & r < R(\tau), \\ -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2, & r > R(\tau), \end{cases} \quad (4.120a)$$

$$R(\tau) = \begin{cases} R_0, & \tau < 0, \\ R_0 - \nu\tau, & \tau \geq 0, \end{cases} \quad (4.120b)$$

e $R_0 > 2M$. Apesar do modelo utilizado ser artificial fisicamente falando, a radiação Hawking independe da forma do colapso, como já foi discutido anteriormente. Assim, qualquer modelo de colapso gravitacional esfericamente simétrico resultará nas mesmas conclusões no futuro assintótico, de forma que o modelo escolhido é útil pela sua simplicidade matemática.

A colagem das regiões interna e externa à casca esférica é feita de forma que o elemento de linha em $r = R$ seja o mesmo para as métricas de ambas as regiões. Assim, a relação entre os parâmetros temporais interiores e exteriores à casca é:

$$\frac{dt}{d\tau} = \begin{cases} \left(1 - \frac{2M}{R_0}\right)^{-1/2}, & \tau < 0, \\ \left[\frac{R_0 - \nu\tau}{(R_0 - 2M - \nu\tau)^2} (R_0 - 2M - \nu\tau + 2M\nu^2)\right]^{1/2}, & \tau \geq 0, \end{cases} \quad (4.121)$$

Fazendo a mudança de coordenadas:

$$U = \tau - r, \quad V = \tau + r, \quad (4.122a)$$

$$u = t - r - 2M \ln(r - 2M), \quad v = t + r + 2M \ln(r - 2M), \quad (4.122b)$$

de forma ao colapso começar em $u = U = v = V = 0$, temos que a métrica do espaço-tempo toma a forma:

$$ds^2 = \begin{cases} -dUdV, & r < R(\tau), \\ -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv, & r > R(\tau). \end{cases} \quad (4.123)$$

Levando em conta a continuidade da métrica, e as relações (4.121) (4.122), é possível relacionar as coordenadas nulas do interior da casca com as de seu exterior:

$$\frac{du}{dU} = \begin{cases} \left(1 - \frac{2M}{R_0}\right)^{-1/2} & u, U < 0, \\ \frac{R}{(1+\nu)(R-2M)} \left[\left(1 - \frac{2M(1-\nu^2)}{R}\right)^{1/2} + \nu \right] & u, U > 0, \end{cases} \quad (4.124a)$$

$$\frac{dv}{dV} = \begin{cases} \left(1 - \frac{2M}{R_0}\right)^{-1/2} & v, V < 0, \\ \frac{R}{(1-\nu)(R-2M)} \left[\left(1 - \frac{2M(1-\nu^2)}{R}\right)^{1/2} - \nu \right] & v, V > 0, \end{cases} \quad (4.124b)$$

sendo $R = R(U/(1+\nu))$ em (4.124a), e $R = R(V/(1-\nu))$ em (4.124b).

Dado a presença de um campo escalar sem massa no espaço-tempo, temos que, em concordância com a metodologia utilizada na obtenção da radiação Hawking, o estado de vácuo inicial é determinado em \mathcal{I}^- . Em tal região, a métrica se reduz à do espaço de Minkowski, fazendo com que os modos normais do campo escalar em tal região adquiram a forma (4.117) com as coordenadas nulas u, v . Assim, em \mathcal{I}^- , temos que $\bar{u} = u$ e $\bar{v} = v$, de forma que a métrica fora da casca é dada por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\bar{u}d\bar{v}, \quad (4.125)$$

sendo possível calcular o tensor de energia-momento do campo escalar sem massa antes do colapso. Utilizando as equações (4.118), (4.119) e (4.122), temos que as componentes do tensor de energia-momento antes do colapso, calculado nas coordenadas (t, r) são:

$$T_{tt} = -\frac{1}{24\pi} \left(\frac{7M^2}{r^4} - \frac{4M}{r^3} \right), \quad (4.126a)$$

$$T_{tr} = T_{rt} = 0, \quad (4.126b)$$

$$T_{rr} = \frac{1}{24\pi} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \frac{M^2}{r^4}, \quad (4.126c)$$

evidenciando que a configuração estática antes do colapso induz uma configuração também estática para o campo quântico, representado por $T_{tr} = 0$. Para se calcular o tensor de energia-momento posterior ao colapso, é necessário relacionar as coordenadas nulas u, v de depois do colapso com as coordenadas \bar{u}, \bar{v} . Para isso, será utilizado o fato de que as equações (4.124) relacionam as coordenadas nulas exteriores e interiores à casca para qualquer instante do tempo. Assim, as coordenadas nulas interiores à casca atuaram como uma comunicação entre as coordenadas nulas exteriores antes e muito após o colapso.

Tendo em vista a métrica antes do colapso com $\bar{u} = u$ e $\bar{v} = v$, as relações (4.124), dado que o colapso se inicia em $u = U = v = V = 0$, implicam em:

$$\bar{u} = \left(1 - \frac{2M}{R_0}\right)^{-1/2} U, \quad (4.127a)$$

$$\bar{v} = \left(1 - \frac{2M}{R_0}\right)^{-1/2} V. \quad (4.127b)$$

Como o colapso é esfericamente simétrico, a métrica exterior continua sendo a métrica de Schwarzschild. Entretanto, a relação entre as coordenadas nulas interiores e exteriores à casca esférica se modifica, como é evidenciado em (4.124). Como foi discutido na seção anterior, a radiação Hawking é observada no limite de $u \rightarrow \infty$ em \mathcal{I}^+ . Se compararmos as passagens de tempo medidas pela casca em colapso com as de um observador situado nas regiões assintoticamente planas do espaço-tempo, temos que o limite de $u \rightarrow \infty$ é atingido em $R \rightarrow 2M$ [5]. Assim, muito após o colapso, as relações de (4.124) tomam a forma:

$$\frac{du}{dU} = \frac{4M\nu}{(1+\nu)(R-2M)}, \quad (4.128a)$$

$$\frac{dv}{dV} = \frac{1+\nu}{2\nu}, \quad (4.128b)$$

resultando em:

$$u = -4M \ln [(R_0 - 2M)(1 + \nu) - \nu U], \quad (4.129a)$$

$$v = \frac{1 + \nu}{2\nu} V. \quad (4.129b)$$

Pelos resultados (4.127) (4.129), é possível relacionar as coordenadas nulas de antes com as de muito após o colapso. Unindo esses resultados, levando em conta o limite de $R \rightarrow 2M$ implícito em (4.129), temos que:

$$u = -4M \ln(A - \bar{u}), \quad (4.130a)$$

$$v = B\bar{v}, \quad (4.130b)$$

sendo A e B constantes. Com (4.130) é possível escrever a métrica exterior em termos das coordenadas que definem a escolha do vácuo inicial, e conseqüentemente o tensor de energia-momento muito após o colapso. A métrica exterior, muito após o colapso, escrita em termos de \bar{u} e \bar{v} toma a forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{4MB}{A - \bar{u}}\right) d\bar{u}d\bar{v}, \quad (4.131)$$

sendo possível calcular explicitamente a forma do tensor de energia-momento muito após o colapso. Aplicando (4.131) em (4.118) (4.119), e escrevendo o tensor nas coordenadas (t, r) , temos que:

$$T_{tt} = -\frac{1}{24\pi} \left(\frac{7M^2}{r^4} - \frac{4M}{r^3} + \frac{1}{32M^2} \right), \quad (4.132a)$$

$$T_{tr} = T_{rt} = \frac{1}{24\pi} \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{1}{32M^2}, \quad (4.132b)$$

$$T_{rr} = -\frac{1}{24\pi} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \left(\frac{M^2}{r^4} - \frac{1}{32M^2}\right), \quad (4.132c)$$

evidenciando um fluxo de energia, representado por $T_{tr} \neq 0$, em decorrência do colapso.

Como a métrica exterior é Schwarzschild durante toda a história do universo, temos que o tensor de energia-momento do campo quântico induz um fluxo de energia dado por [17]:

$$j_a = T_{ab}\xi^b, \quad (4.133)$$

sendo ξ^b o vetor de Killing tipo tempo. Assim, para um observador nas regiões assintoticamente planas do espaço-tempo, muito após o colapso, observa-se como vetor de momento associado ao campo quântico, nas coordenadas (t, r) , dado por:

$$j^\mu = \left(\frac{1}{768\pi M^2}, \frac{1}{768\pi M^2} \right), \quad (4.134)$$

implicando em um fluxo radial de energia:

$$F = (768\pi)^{-1} \frac{1}{M^2}, \quad (4.135)$$

o que implica, por conservação de energia, em um fluxo de energia negativa direcionada para o buraco negro.

Apesar de termos determinado o valor médio do tensor de energia-momento do campo desejado, a resolução da equação (4.115) apresenta diversas dificuldades. Como explicitado em [17], diferentes processos de renormalização do tensor de energia-momento diferem por termos quadráticos na curvatura, de forma que tal ambiguidade não pode ser eliminada somente com a teoria quântica de campos em espaços curvos. Além disso, as equações em (4.115) podem gerar soluções do tipo *runaway*, assim como na dinâmica clássica de elétrons, via equações de Maxwell. Entretanto, nós esperamos fisicamente que quando a massa do buraco negro é muito superior à massa de Planck, efeitos do tipo *back-reaction* serão muito pequenos em regiões como o horizonte de eventos e o exterior do buraco negro, que não estão na vizinhança de regiões singulares do espaço-tempo. Dessa forma, é possível levar em conta que a métrica continua sendo a de Schwarzschild, porém com a massa M sendo reduzida lentamente devido ao fluxo de energia negativo direcionado para o buraco negro. Assim:

$$\frac{dM}{dt} = -(768\pi)^{-1} \frac{1}{M^2}, \quad (4.136)$$

resultando em:

$$M(t) = \left(M_0^3 - \frac{t}{256\pi} \right)^{1/3} \quad (4.137)$$

que é conhecido como o processo de evaporação do buraco negro.

Apesar de (4.137) resultar na evaporação completa em um tempo finito, tal expressão é válida somente no regime em que a massa do buraco negro é muito maior que a massa de Planck. Quando seus valores são próximos, as aproximações feitas perdem a validade. Se levarmos em conta que mesmo no limite em que a massa do buraco negro é próxima à massa de Planck o buraco negro continuará a emitir radiação de forma a sofrer sua evaporação completa, é possível representar o

diagrama de Penrose de um buraco negro em formação, que evaporará futuramente, como o apresentado na figura 13.

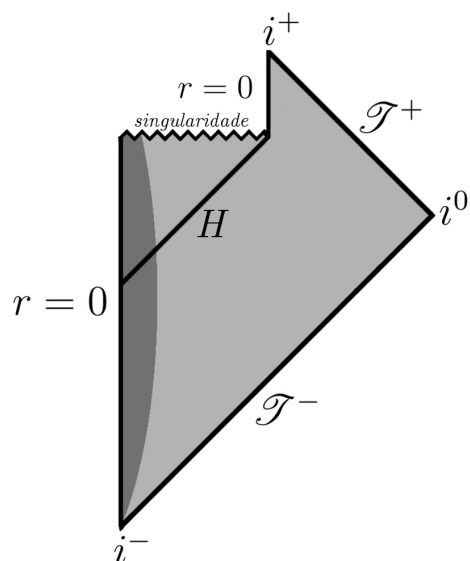


Figura 13 – Diagrama de Penrose da formação de um buraco negro de Schwarzschild, levando em conta sua evaporação por emissão de radiação Hawking.

5 Conclusão e perspectivas

Como foi evidenciado nos últimos capítulos, as leis da termodinâmica de buracos negros, que eram vistas somente como uma analogia no contexto clássico, passam a ter um caráter termodinâmico real quando incorporados efeitos quânticos. Entretanto, por mais que esse comportamento termodinâmico dos buracos negros conduza o problema da dinâmica de um buraco negro a uma interpretação mais rica, tal comportamento carrega diversas perguntas.

A primeira, e mais fundamental, é: como a relatividade geral consegue prever que buracos negros possuem temperatura e entropia, que só são interpretadas como tais quando introduzimos efeitos quânticos à sua descrição? Uma das possíveis hipóteses que poderia responder esse questionamento é a existência de uma teoria mais geral, que se reduza à relatividade geral em um limite, e à mecânica quântica em outro limite. A existência dessa teoria mais geral ainda é um dos maiores problemas a serem resolvidos na física, sendo a termodinâmica de buracos negros uma das fortes motivações.

Outra pergunta que surge da descoberta do comportamento termodinâmico de buracos negros é a respeito da origem de sua entropia. Como é conhecido na termodinâmica, a entropia está relacionada ao número de graus de liberdade acessíveis a um sistema, e o conhecimento de tal grandeza nos permite caracterizar completamente um sistema físico termodinamicamente. Assim, determinar a origem da entropia dos buracos negros poderia ser um ponto de partida para prever esse tipo de comportamento para outros sistemas gravitacionais. Apesar da origem entrópica dos buracos negros não ser totalmente conhecida, existem candidatos para isso [33], como por exemplo a entropia de emaranhamento [32].

Em um trabalho publicado em 1993 [32], o físico M. Srednicki mostrou que quando analisamos regiões fechadas em Minkowski na presença de campos quânticos, a entropia quantificada pelo emaranhamento entre os campos quânticos interiores e exteriores à região analisada era proporcional à área de sua fronteira. O procedimento utilizado consistiu em calcular a entropia de von Neumann a partir da matriz densidade reduzida correspondente ao estado restrito ao interior da região analisada. Apesar da entropia de emaranhamento como origem entrópica dos buracos negros carregar dificuldades, como por exemplo as divergências presentes nos cálculos e o fato da entropia de emaranhamento depender da quantidade dos campos quânticos na natureza [33], esse resultado mostra que a entropia proporcional a área não é

uma exclusividade dos buracos negros, de forma que seus aspectos termodinâmicos realmente podem ser parte de algo mais geral.

Aproveitando a ideia de uma entropia proporcional à área como algo mais geral, dois anos depois do trabalho do Srednicki, o físico T. Jacobson publicou um trabalho [14] em que, com algumas adaptações nos conceitos de equilíbrio, calor e temperatura para contextos gravitacionais, obteve a equação de Einstein como uma equação de estado de uma termodinâmica mais geral. Partindo de uma noção de equilíbrio local baseada no contexto de congruência geodésicas, Jacobson mostrou que quando se analisa a energia que flui ao longo de geodésicas nulas que formarão a superfície espacial de uma pequena vizinhança de um ponto p do espaço-tempo, a equação de Einstein é obtida a partir da relação $\delta Q = T\delta S$ quando se utiliza a temperatura do efeito Unruh e a entropia proporcional à área da vizinhança de p . A relação evidenciada por Jacobson em seu trabalho é, assim como a termodinâmica de buracos negros, um resultado conjunto de mecânica quântica e relatividade geral, já que o efeito Unruh é um efeito de natureza quântica, e desempenha um papel central na caracterização da termodinâmica no trabalho de Jacobson, já que o efeito Unruh define a temperatura no contexto analisado.

Os dois resultados apresentados acima são apenas alguns dos que motivam a ideia de comportamentos termodinâmicos mais gerais na relatividade geral [33]. Mesmo que as ideias de uma termodinâmica para espaços-tempos não sejam o único caminho natural para a formulação de uma teoria mais geral incluindo relatividade geral e mecânica quântica, elas podem ser uma ferramenta importante para auxiliar na compreensão de aspectos físicos e matemáticos do regime físico no qual efeitos quânticos não podem ser negligenciados.

A Métrica de Kerr

Como foi evidenciado pela equação (2.1), os componentes da métrica de Kerr, nas coordenadas de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) , são:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) & 0 & 0 & -\frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ -\frac{a \sin^2 \theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) & 0 & 0 & \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

sendo:

$$J = Ma, \quad (\text{A.2a})$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (\text{A.2b})$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (\text{A.2c})$$

A partir da métrica (A.1), é possível calcular seu determinante:

$$g = -\Sigma^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{A.3})$$

assim como as componentes da métrica inversa:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta} & 0 & 0 & -\frac{2Mar}{\Sigma \Delta} \\ 0 & \frac{\Delta}{\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{2Mar}{\Sigma \Delta} & 0 & 0 & \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Para os componentes da métrica e da métrica inversa em (A.1) (A.4), os símbolos de Christoffel não nulos são dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r &= \frac{M\Delta(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{\Sigma^3}, & \Gamma_{tt}^\theta &= -\frac{2Ma^2 r \sin \theta \cos \theta}{\Sigma^3}, \\ \Gamma_{tr}^t &= \frac{M(r^2 + a^2)(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{\Sigma^2 \Delta}, & \Gamma_{tr}^\phi &= \frac{Ma(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{\Sigma^2 \Delta}, \\ \Gamma_{t\theta}^t &= -\frac{2Ma^2 r \sin \theta \cos \theta}{\Sigma^2}, & \Gamma_{t\theta}^\phi &= -\frac{2Mar \cot \theta}{\Sigma^2}, \\ \Gamma_{t\phi}^r &= -\frac{M\Delta a \sin^2 \theta (r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{\Sigma^3}, & \Gamma_{t\phi}^\theta &= \frac{2Mar(r^2 + a^2) \sin \theta \cos \theta}{\Sigma^3}, \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{a^2 r \sin^2 \theta - M(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{\Sigma \Delta}, & \Gamma_{rr}^\theta &= \frac{a^2 \sin \theta \cos \theta}{\Sigma \Delta}, \\ \Gamma_{r\theta}^r &= -\frac{a^2 \sin \theta \cos \theta}{\Sigma}, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{r}{\Sigma}, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r\Delta}{\Sigma}, & \Gamma_{\theta\theta}^\theta &= -\frac{a^2 \sin \theta \cos \theta}{\Sigma}, \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cot \theta}{\Sigma^2} (\Sigma^2 + 2Ma^2 r \sin^2 \theta), & \Gamma_{\theta\phi}^t &= \frac{2Ma^3 r \sin^3 \theta \cos \theta}{\Sigma^2}, \\ \Gamma_{r\phi}^t &= \frac{Ma \sin^2 \theta [a^2 \cos^2 \theta (a^2 - r^2) - r^2 (a^2 + 3r^2)]}{\Sigma^2 \Delta}, \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{r\Sigma^2 + M [a^4 \cos^2 \theta \cos^2 \theta - r^2 (\Sigma + r^2 + a^2)]}{\Sigma^2 \Delta}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= \frac{\Delta \sin^2 \theta}{\Sigma^3} [-r\Sigma^2 + Ma^2 \sin^2 \theta (r^2 - a^2 \cos^2 \theta)], \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\frac{\sin \theta \cos \theta}{\Sigma^3} [\Sigma (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Sigma \Delta \sin^2 \theta + 2Ma^2 r (r^2 + a^2) r \sin^2 \theta]. \end{aligned}$$

A.1 Quantidades conservadas na métrica de Kerr

Como foi abordado na seção 3.2, as quantidades conservadas associadas aos vetores de Killing ξ^a e ψ^a são, respectivamente, a massa e o momento angular do buraco negro. Dada a métrica inversa e os símbolos de Christoffel para a métrica de Kerr, é possível calcular explicitamente M e J , verificando que as integrais (3.34) e (3.35) realmente retornam a massa e momento angular do buraco negro.

Evidentemente, o cálculo dessas integrais está longe de ser trivial para uma superfície espacial arbitrária. Como a superfície de integração de quantidades conservadas associadas aos vetores de Killing são arbitrárias, desde que englobem as fontes de campo, é conveniente calcular (3.34) e (3.35) no limite de $r \rightarrow \infty$. Nesse limite:

$$\Delta \rightarrow r^2, \quad (\text{A.6a})$$

$$\Sigma \rightarrow r^2, \quad (\text{A.6b})$$

$$\sqrt{-g} \rightarrow r^2 \sin \theta. \quad (\text{A.6c})$$

A.1.1 Massa

Para o cálculo de (3.34), é necessário expandir o termo $\epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d$ em coordenadas:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \nabla^\rho \xi^\sigma &= 4! \sqrt{-g} \delta_{[\mu}^t \delta_{\nu]}^r \delta_\rho^\theta \delta_{\sigma]}^\psi g^{\rho\lambda} \Gamma_{\lambda\beta}^\sigma \xi^\beta \\ &= 4! \sqrt{-g} \delta_{[\rho}^t \delta_\sigma^r \delta_\mu^\theta \delta_{\nu]}^\psi g^{\rho\lambda} \Gamma_{\lambda t}^\sigma \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Como a integração para a obtenção da quantidade conservada é calculada em uma superfície espacial fechada, os termos (A.7) que sobreviverão à integração são somente aqueles em que a forma de volume resultante envolver termos proporcionais a $d\theta \wedge d\phi$. Assim:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \nabla^\rho \xi^\sigma = 2\sqrt{-g} \delta_{[\mu}^\theta \delta_{\nu]}^\phi \left(g^{t\lambda} \Gamma_{\lambda t}^r - g^{r\lambda} \Gamma_{\lambda t}^t \right) + \dots \quad (\text{A.8})$$

$$= 2\sqrt{-g} \delta_{[\mu}^\theta \delta_{\nu]}^\phi \left(g^{tt} \Gamma_{tt}^r + g^{t\phi} \Gamma_{\phi t}^r - g^{rr} \Gamma_{rt}^t \right) + \dots \quad (\text{A.9})$$

de forma que:

$$\epsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d = \left(g^{tt}\Gamma_{tt}^r + g^{t\phi}\Gamma_{\phi t}^r - g^{rr}\Gamma_{rt}^t\right) d\theta \wedge d\phi + \dots \quad (\text{A.10})$$

Utilizando a métrica inversa e os símbolos de Christoffel apresentados anteriormente no limite de $r \rightarrow \infty$, desprezando todos os termos que decaem mais rápido que $1/r^2$, temos que:

$$g^{tt}\Gamma_{tt}^r \rightarrow -\frac{M}{r^2}, \quad (\text{A.11a})$$

$$g^{t\phi}\Gamma_{\phi t}^r \rightarrow 0, \quad (\text{A.11b})$$

$$g^{rr}\Gamma_{rt}^t \rightarrow \frac{M}{r^2}. \quad (\text{A.11c})$$

Substituindo (A.11) em (A.10), e integrando nas coordenadas angulares no limite de $r \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial O} \epsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d &= \oint d\Omega r^2 \left(-\frac{2M}{r^2}\right), \\ &= -2M \oint d\Omega, \\ &= -8\pi M, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

evidenciando a relação entre a quantidade conservada associada ao vetor de Killing ξ^a e a massa do buraco negro:

$$M = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial O} \epsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d. \quad (\text{A.13})$$

A.1.2 Momento angular

Para o cálculo de (3.35), é necessário expandir o termo $\epsilon_{abcd}\nabla^c\psi^d$ em coordenadas:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\nabla^\rho\psi^\sigma &= 4!\sqrt{-g} \delta_{[\mu}^t \delta_{\nu}^r \delta_{\rho}^\theta \delta_{\sigma]}^\psi g^{\rho\lambda}\Gamma_{\lambda\beta}^\sigma \psi^\beta \\ &= 4!\sqrt{-g} \delta_{[\rho}^t \delta_{\sigma}^r \delta_{\mu}^\theta \delta_{\nu]}^\psi g^{\rho\lambda}\Gamma_{\lambda\phi}^\sigma \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Como a integração para a obtenção da quantidade conservada é calculada em uma superfície espacial fechada, os termos (A.14) que sobreviverão à integração são

somente aqueles em que a forma de volume resultante envolver termos proporcionais a $d\theta \wedge d\phi$. Assim:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \nabla^\rho \psi^\sigma = 2\sqrt{-g} \delta_{[\mu}^\theta \delta_{\nu]}^\phi \left(g^{t\lambda} \Gamma_{\lambda\phi}^r - g^{r\lambda} \Gamma_{\lambda\phi}^t \right) + \dots \quad (\text{A.15})$$

$$= 2\sqrt{-g} \delta_{[\mu}^\theta \delta_{\nu]}^\phi \left(g^{tt} \Gamma_{t\phi}^r + g^{t\phi} \Gamma_{\phi\phi}^r - g^{rr} \Gamma_{r\phi}^t \right) + \dots \quad (\text{A.16})$$

de forma que:

$$\epsilon_{abcd} \nabla^c \psi^d = \left(g^{tt} \Gamma_{t\phi}^r + g^{t\phi} \Gamma_{\phi\phi}^r - g^{rr} \Gamma_{r\phi}^t \right) d\theta \wedge d\phi + \dots \quad (\text{A.17})$$

Utilizando a métrica inversa e os símbolos de Christoffel apresentados anteriormente no limite de $r \rightarrow \infty$, desprezando todos os termos que decaem mais rápido que $1/r^2$, temos que:

$$g^{tt} \Gamma_{t\phi}^r \rightarrow \frac{Ma \sin^2 \theta}{r^2}, \quad (\text{A.18a})$$

$$g^{t\phi} \Gamma_{\phi\phi}^r \rightarrow \frac{2Ma \sin^2 \theta}{r^2}, \quad (\text{A.18b})$$

$$g^{rr} \Gamma_{r\phi}^t \rightarrow -\frac{3Ma \sin^2 \theta}{r^2}. \quad (\text{A.18c})$$

Substituindo (A.18) em (A.17), e integrando nas coordenadas angulares no limite de $r \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial O} \epsilon_{abcd} \nabla^c \psi^d &= \oint d\Omega r^2 \left(\frac{6Ma \sin^2 \theta}{r^2} \right), \\ &= 6Ma \oint \sin^2 \theta d\Omega, \\ &= 6Ma 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta, \\ &= 16\pi Ma, \\ &= 16\pi J, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

evidenciando a relação entre a quantidade conservada associada ao vetor de Killing ψ^a e o momento angular do buraco negro:

$$J = \frac{1}{16\pi} \int_{\partial O} \epsilon_{abcd} \nabla^c \psi^d. \quad (\text{A.20})$$

B Representação local no horizonte de eventos

A representação local do espaço-tempo como Minkowski é uma decorrência do princípio da equivalência, que afirma que todo espaço-tempo é localmente plano. Assim, é possível reconstruir uma representação local do espaço tangente a qualquer ponto como um espaço de Minkowski.

Para um espaço-tempo descrito pela métrica Kerr, muitas de suas propriedades no contexto das leis da termodinâmicas de buracos negros são relacionadas ao comportamento geométrico de vetores definidos no horizonte de eventos. Assim, construir uma representação local dos vetores em tal região se torna conveniente. Será construída inicialmente uma representação local para os vetores ξ^a , χ^a , ψ^a e θ^a que respeite as equações (2.13), (2.16) e $\theta^a \xi_a = \theta^a \psi_a = 0$. Em algum ponto do horizonte de eventos, temos que:

- ξ^a é tipo espaço, sendo possível escolher um sistema de coordenadas que o represente por:

$$\xi^\mu = (0, \sqrt{\xi^2}, 0, 0); \quad (\text{B.1})$$

- χ^a é um vetor nulo e ortogonal a ξ^a , sendo possível escolher um sistema de coordenadas que represente o vetor χ^a por:

$$\chi^\mu = (1, 0, 1, 0); \quad (\text{B.2})$$

- ψ^a é um vetor tipo espaço ortogonal a χ^a e ξ^a que se relaciona com ambos os vetores por $\chi^a = \xi^a + \Omega_H \psi^a$. Assim, é possível representar ψ^a por:

$$\psi^\mu = \left(\frac{1}{\Omega_H}, -\frac{\sqrt{\xi^2}}{\Omega_H}, \frac{1}{\Omega_H}, 0 \right); \quad (\text{B.3})$$

- θ é um vetor tipo espaço, ortogonal a ξ^a , ψ^a e χ^a . Assim, é possível representar θ^a por:

$$\theta^a = (0, 0, 0, \sqrt{\theta^2}) \quad (\text{B.4})$$

B.1 Horizonte de eventos como congruência geodésica

No caso apresentado na seção 2.3.3, a existência do vetor N^a que obedeça as relações (2.19) e (2.20) no horizonte de eventos pode facilmente ser verificada a partir da representação local construída em (B.1) (B.2) (B.3) (B.4). Partimos de:

$$N^\mu = (a, b, c, d). \quad (\text{B.5})$$

- Impondo a relação $N^a \chi_a = -1$, temos que:

$$N^\mu = (a, b, a - 1, d); \quad (\text{B.6})$$

- Impondo N^a ser um vetor nulo, temos que:

$$N^\mu = \left(\frac{b^2 + d^2 + 1}{2}, b, \frac{b^2 + d^2 - 1}{2}, d \right); \frac{b^2 + d^2 + 1}{2} \quad (\text{B.7})$$

- Impondo a ortogonalidade entre N^a e ψ^a , temos que:

$$N^\mu = \left(\frac{(\xi^2)^{-1} + d^2 + 1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{\xi^2}}, \frac{(\xi^2)^{-1} + d^2 - 1}{2}, d \right); \quad (\text{B.8})$$

- As relações acima para N^a já resultam em $\xi^a N_a = -1$;

- Impondo a ortogonalidade entre N^a e θ^a , temos que:

$$N^\mu = \left(\frac{1 + \xi^2}{2\xi^2}, -\frac{1}{\sqrt{\xi^2}}, \frac{1 - \xi^2}{2\xi^2}, 0 \right); \quad (\text{B.9})$$

evidenciando que é possível encontrar um vetor N^a com as condições exigidas na seção 2.3.3.

B.2 Variação de κ no horizonte de eventos

Na seção 3.1.2, foi dito que, no horizonte de eventos, o tensor $\epsilon_{abcd}\chi^d$ contraído com quaisquer dois vetores resulta em um vetor tangente ao horizonte. Para se verificar isso, serão utilizados os vetores χ^a , W^a , Y^a e Z^a que formam uma base para o espaço tangente no horizonte de eventos, sendo suas representações locais escolhidas como:

$$\chi^\mu = (1, 0, 1, 0)$$

$$W^\mu = (0, 0, 0, 1), \quad (\text{B.10})$$

$$Y^\mu = (-1, 0, 1, 0), \quad (\text{B.11})$$

$$Z^\mu = (0, 1, 0, 0). \quad (\text{B.12})$$

Localmente, a forma de volume ϵ_{abcd} é reduzida ao símbolo de Levi-Civita. Pela forma como foram escolhidos os vetores W^a , Y^a e Z^a , verifica-se que W^a e Z^a são tangentes ao horizonte de eventos.

Assim, contraindo $\epsilon_{abcd}\chi^d$ com cada combinação dos outros vetores da base:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}Z^\nu W^\rho \chi^\sigma = \epsilon_{\mu 132} + \epsilon_{\mu 130} = \chi_\mu, \quad (\text{B.13})$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}Y^\nu W^\rho \chi^\sigma = -\epsilon_{\mu 032} + \epsilon_{\mu 230} = -2Z_\mu, \quad (\text{B.14})$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}Z^\nu Y^\rho \chi^\sigma = -\epsilon_{\mu 102} + \epsilon_{\mu 120} = -2W_\mu, \quad (\text{B.15})$$

evidenciando que quaisquer dois vetores contraídos com $\epsilon_{abcd}\chi^d$ retornam um vetor tangente ao horizonte de eventos.

B.3 Variação de κ em processos

Na seção 3.2.4, a relação apresentada em (3.53) foi obtida a partir do seguinte fato: para um vetor V_a que obedece, no horizonte de eventos, $V_a\chi^a = V_a\xi^a = V_a\psi^a = V_a\theta^a = 0$, tem-se que $V_a \propto \chi_a$. Para verificar tal afirmação, utilizaremos a representação local construída em (B.1) (B.2) (B.3) (B.4). Assim, partimos de:

$$V_\mu = (a, b, c, d). \quad (\text{B.16})$$

- Impondo a relação $V_a\chi^a = 0$, temos que:

$$V_\mu = (-a, b, a, d); \quad (\text{B.17})$$

- Impondo a relação $V_a \xi^a = 0$, temos que

$$V_\mu = (-a, 0, a, d); \quad (\text{B.18})$$

- As relações acima para V_a já resultam em $V_a \psi^a = 0$;
- Impondo a relação $V_a \theta^a = 0$, temos que

$$V_\mu = (-a, 0, a, 0); \quad (\text{B.19})$$

evidenciando que $V_a \propto \chi_a$.

Referências

- [1] R. M. Wald, *General relativity*, The University of Chicago Press, 1984.
- [2] P. V. Frolov & I. D. Novikov, *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [3] S. W. Hawking & G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1973.
- [4] J. M. Bardeen & B. Carter & S. W. Hawking, *The Four Laws of Black Hole Mechanics*, *Commun. math. Phys.* 31, 161-170 (1973).
- [5] F. Dowker, *Black Holes* (notas de aula), <http://sns.ias.edu/~bkocsis/Assets/Teaching/BH2015/dowker.pdf>. Acesso em 26 de maio de 2019.
- [6] P. Townsend, *Black Holes* (notas de aula), arXiv:gr-qc/9707012 .
- [7] J. D. Bekenstein, *Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics*, *Phys. Rev. D* 9, 3292 (1974).
- [8] J. D. Bekenstein, *Black Holes and Entropy*, *Phys. Rev. D* 7, 2333 (1973).
- [9] S. W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, *Commun. math. Phys.* 43, 199-220 (1975).
- [10] R. Wald, *Gravitational Spin Interaction*, *Phys. Rev. D* 6, 406 (1972).
- [11] R. Wald, *Gedanken Experiments to Destroy a Black Hole*, *Ann. Phys.* 83, 548-556 (1974).
- [12] J. Sorce & R. M. Wald, *Gedanken Experiments to Destroy a Black Hole II: Kerr-Newman Black Holes Cannot be Over-Charged or Over-Spun*, arXiv:1707.05862.
- [13] W. Beiglböck, *The center-of-mass in Einsteins theory of gravitation*, *Commun.Math. Phys.* 5, 106-130 (1967).
- [14] T. Jacobson, *Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State*, *Phys.Rev.Lett.* 75, 1260-1263 (1995).
- [15] V. Mukhanov & S. Winitzki, *Introduction to quantum effects in gravity*, Cambridge University Press, 2007.

-
- [16] L. Parker & D. Toms, *Quantum field theory in curved spacetime*, Cambridge University Press, 2009.
- [17] R. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, University of Chicago Press, 1994.
- [18] J. W. Brown & R. V. Churchill, *Variáveis complexas e aplicações*, AMGH Editora Ltda., 2015.
- [19] W. Greiner & J Reinhardt, *Field quantization*, Springer, 1996.
- [20] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1996.
- [21] H. S. Vieira & V. B. Bezerra & C. R. Muniz, *Exact solutions of the Klein-Gordon equation in the Kerr-Newman background and Hawking radiation*, *Annals of Physics* 350 14-28 (2014).
- [22] B. Carter, *Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields*, *Phys. Rev.* 174, 1559-1571 (1968).
- [23] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford Science Publications, (1983).
- [24] B.R. Iyer & A. Kumar, *Hawking radiation of scalar and Dirac quanta from a Kerr black hole*, *J Phys* 12, 103 120 (1979).
- [25] L. H. Ford, *Quantization of a scalar field in the Kerr spacetime*, *Phys. Rev. D* 14, 658 (1976).
- [26] B. S. DeWitt, *Quantum field theory in curved spacetime*, North-Holland Publishing Company - Amsterdam .
- [27] I. Agullo & J. Navarro-Salas & G. J. Olmo & L. Parker, *Hawking radiation by Kerr black holes and conformal symmetry*, *Phys.Rev.Lett.* 105, 211305 (2010).
- [28] S. Hod, *Eigenvalue spectrum of the spheroidal harmonics: A uniform asymptotic analysis*, *Phys. Lett. B* 746, 356-367 (2015).
- [29] P. C. W. Daves & S. A. Fulling & W. G. Unruh, *Energy-momentum tensor near an evaporating black hole*, *Phys. Rev. D* 13, 2720 (1976).
- [30] W. G. Unruh, *Notes on black hole evaporation*, *Phys. Rev. D* 14, 870 (1976).

-
- [31] P. C. W. Daves & S. A. Fulling, *Radiation from moving mirrors and from black holes*, *Proc. R. Soc. Lond. A* 356, 237-257 (1977).
- [32] M. Srednicki, *Entropy and area*, *Phys. Rev. Lett.* 71, 666 (1993).
- [33] G. Chirco, *Thermodynamic Aspects of Gravity*, Tese de doutorado - Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (SISSA) - Trieste, Italia.
- [34] E. V. T. Galvão, *Teoremas de singularidade em relatividade geral*, Monografia - Universidade Federal de Minas Gerais - Belo Horizonte, Brasil.
- [35] H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Dover Publications, New York, 1989.
- [36] R. Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities* - *Phys. Rev. Lett.* 14, 57 (1965).
- [37] A. Fabbri & J. Navarro-Salas, *Modeling Black Hole Evaporation*, Imperial College Press, 2005.
- [38] C. Misner & K. Thorne & K. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and company, 1973.