Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas - ICEX
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Viviane Mendes Magalhães

Comportamento assintótico de soluções de alguns problemas elípticos em espaços de Orlicz-Sobolev

BELO HORIZONTE
2021

Viviane Mendes Magalhães

Comportamento assintótico de soluções de alguns problemas elípticos em espaços de Orlicz-Sobolev

Versão final

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Grey Ercole
Coorientador: Gilberto de Assis Pereira

Belo Horizonte
2021

Magalhães,Viviane Mendes.

M188c Comportamento assintótico de soluções de alguns problemas elípticos em espaços de Orlicz-Sobolev [manuscrito] / Viviane Mendes Magalhães. – 2021.
viii, 94 f. il.

Orientador: Grey Ercole.
Coorientador: Gilberto de Assis Pereira.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f.93-94
.
1. Matemática – Teses. 2. Expansões assintótica – Teses. 3. Equações diferenciais parciais – Teses. 4. Operador laplaciano – Teses. 5. Perturbação (Matematica) – Teses. 6. Soluções de viscosidade – Teses. I. Ercole, Grey. II. Pereira , Gilberto de Assis. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV.Título.

CDU 51 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6ª Região nº 1510

ATA DA CENTÉSIMA QUINQUASÉSIMA SÉTIMA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DA ALUNA VIVIANE MENDES MAGALHÃES, REGULARMENTE MATRICULADA NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA DIA 05 DE FEVEREIRO DE 2021.

Aos cinco dias do mês de fevereiro de 2021, às 09h00, em reunião pública virtual na Plataforma Google Meet pelo link meet.google.com/xos-tnma-ets (conforme mensagem eletrônica da Pró-Reitoria de Pós-Graduação de 26/03/2020, com orientações para a atividade de defesa de tese durante a vigência da Portaria nº 1819), reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese da aluna **Viviane Mendes Magalhães**, intitulada: *"Comportamento assintótico de soluções de alguns problemas elípticos em espaços de Orlicz-Sobolev"*, requisito final para obtenção do Grau de Doutora em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Grey Ercole, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da aluna. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente, sem a presença da aluna, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a aluna foi considerada aprovada sem ressalvas e por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 05 de fevereiro de 2021.

Grey Ercole

PROF. DR. GREY ERCOLE
Orientador (UFMG)

Gilberto de Assis Pereira

PROF. DR. GILBERTO DE ASSIS PEREIRA
Coorientador (UFOP)

PROF. DR. OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI
Examinador (UFSCar)

Luiz Fernando de O F

PROF. DR. LUIZ FERNANDO DE OLIVEIRA FARIA
Examinador (UFJF)

Ronaldo B. Assunção

PROF. DR. RONALDO BRASILEIRO ASSUNÇÃO
Examinador (UFMG)

PROF. DR. HAMILTON PRADO BUENO
Examinador (UFMG)

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Comportamento assintótico de soluções de alguns problemas elípticos em espaços de Orlicz-Sobolev

VIVIANE MENDES MAGALHÃES

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Grey Ercole
UFMG

Prof. Gilberto de Assis Pereira
UFOP

Prof. Olimpio Hiroshi Miyagaki
UFSCar

Prof. Luiz Fernando de Oliveira Faria
UFJF

Prof. Ronaldo Brasileiro Assunção
UFMG

Prof. Hamilton Prado Bueno
UFMG

Belo Horizonte, 05 de fevereiro de 2021.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Agradecimentos

À minha família pelo suporte e dedicação. De modo especial, agradeço à minha mãe Ana pelo incentivo, apoio incondicional, orações e alegria de sempre.

Ao meu orientador Grey e ao meu coorientador Gilberto, pelas sábias orientações, pelo conhecimento, pela motivação e compreensão. Expresso minha admiração pelo trabalho desenvolvido e pela dedicação ao ensino.

Ao professor Claudianor Alves, pelo minicurso sobre espaços de Orlicz que originou esse trabalho.

Aos demais professores que tive ao longo da vida, que de alguma forma contribuíram para esse momento.

Ao meu companheiro de todos os momentos, Danton, pela atenção, contribuição, carinho, incentivo, presença constante em minha vida e por tornar essa caminhada mais leve.

Aos meus colegas e amigos pelo aprendizado coletivo, pelos bons momentos e pela amizade.

Á OBMEP, que despertou minha vontade de fazer graduação e pós em Matemática. Ao PICME, por me enviar uma carta quando eu ainda estava no ensino médio me oferecendo bolsas para estudar matemática e pelas oportunidades oferecidas.

Obrigada a todos!

Resumo

Seja Ω um domínio limitado e suave de $\mathbb{R}^N$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja Φ_n uma N-função da forma

$$\Phi_n(t) = \int_0^t s\phi_n(s)\ \mathrm{d}s$$

em que $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par satisfazendo propriedades adicionais. Na primeira parte deste trabalho estudamos o comportamento assintótico, quando $n \to \infty$, de $u_n \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega)$, solução de um problema singular da forma

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_n} u = \Lambda_n \dfrac{f(x)}{u^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que $0 \leq \alpha \leq 1$, f é uma função não negativa, não trivial em $L^1(\Omega)$, e Λ_n é uma constante positiva.

No Capítulo 1, mostramos que o problema singular (1) tem uma única solução fraca $u_n \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega)$ no caso em que $\Lambda_n = 1$ e $0 \leq \alpha \leq 1$.

No Capítulo 2, exploramos o fato de que u_n é o minimizador global do funcional energia

$$J_n(u) := \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u|)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega f \frac{u}{(u_n)^\alpha}\ \mathrm{d}x, \qquad u_n \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega),$$

para provar que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = d \qquad \text{uniformemente em } \Omega,$$

em que d denota a função distância até a fonteira $\partial\Omega$.

No Capítulo 3, provamos que, para $0 \leq \alpha < 1$, o funcional modular $t \mapsto \displaystyle\int_\Omega \Phi_n(|\nabla u|)\ \mathrm{d}x$, sob a restrição $\displaystyle\int_\Omega f|u|^{1-\alpha}\ \mathrm{d}x = 1$, admite um minimizador positivo $u_n \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega)$ que é solução fraca de (1) com $\Lambda_n = \displaystyle\int_\Omega \phi_n(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2\ \mathrm{d}x$. Além disso, provamos que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \varepsilon^{-1} d \qquad \text{uniformemente em } \overline{\Omega},$$

em que $\varepsilon = \displaystyle\int_\Omega f d^{1-\alpha}\ \mathrm{d}x$, e também que

$$\lim_{n\to\infty} (\Lambda_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n|)\ \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} = \gamma_1(\varepsilon),$$

em que a função $\gamma_1 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é definida por

$$\gamma_1(t) := \lim_{n\to\infty} \left(\phi_n'(t)\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \text{se } \ t > 0, \quad \text{e } \ \gamma_1(0) = 0.$$

Para provar esses resultados de convergência mostramos que: γ_1 é contínua, estritamente crescente e sobrejetiva; as sequências $(\Lambda_n)^{\frac{1}{n}}$ e $\left(\int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n|)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$ convergem para o mesmo número positivo Λ_∞; e u_n converge uniformemente para uma função $u_\infty \in C_0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ que é solução de viscosidade da equação

$$\min\{-\Delta_\infty u, \gamma_1(|\nabla u|) - \Lambda_\infty\} = 0.$$

Então, concluímos que $\Lambda_\infty = \gamma_1(\varepsilon)$ e $u_\infty = \varepsilon^{-1} d$.

Na segunda parte deste trabalho, desenvolvida no Capítulo 4, estudamos o comportamento assintótico dos minimizadores do quociente do tipo Rayleigh $\frac{\|\nabla v\|_{\Phi_l}}{\|v\|_{\Psi_j}}$, em que (Φ_l) e (Ψ_j) são sequências de N-funções. Provamos que, a menos de subsequências, o minimizador de $\frac{\|\nabla \cdot\|_{\Phi_l}}{\|\cdot\|_{\Psi_j}}$ converge, quando $j \to \infty$, para o minimizador de $\frac{\|\nabla \cdot\|_{\Phi_l}}{\|\cdot\|_{\infty}}$, o qual, por sua vez, converge, quando $l \to \infty$, para o minimizador w_∞ do quociente tipo Rayleigh $\frac{\|\nabla \cdot\|_{\infty}}{\|\cdot\|_{\infty}}$. Além disso, mostramos que w_∞ é a solução de viscosidade de

$$\begin{cases} \Delta_\infty \left(\frac{u}{\|\nabla u\|_\infty}\right) = 0 & \text{em } D := \Omega \setminus \{x_\star\}, \\ \frac{u}{\|u\|_\infty} = d & \text{sobre } \partial D = \Omega \cup \{x_\star\}. \end{cases}$$

em que $x_\star \in \Omega$ é tal que $w_\infty(x_\star) = \|w_\infty\|_\infty = 1$ e $d(x_\star) = \|d\|_\infty$.

Palavras-chave: Comportamento assintótico, N-função, Φ-Laplaciano, problema singular, solução de viscosidade.

Abstract

Let Ω be a bounded, smooth domain of $\mathbb{R}^N$ and, for each $n \in \mathbb{N}$, let Φ_n be an N-function of the form

$$\Phi_n(t) = \int_0^t s\phi_n(s)\ \mathrm{d}s$$

where $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is an even function satisfying additional properties.

In the first part of this work we study the asymptotic behavior, as $n \to \infty$, of $u_n \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega)$, solution of a singular problem

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_n} u = \Lambda_n \dfrac{f(x)}{u^\alpha} & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

where $0 \leq \alpha \leq 1$, f is a nonnegative, nontrivial function in $L^1(\Omega)$ and Λ_n is a positive constant.

In Chapter 1, we prove that, if $\Lambda_n = 1$, then problem (2) has a unique weak solution $u_n \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega)$, for any $0 \leq \alpha \leq 1$.

In Chapter 2 we show that u_n is the global minimizer of the energy functional

$$J_n(u) := \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u|)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega f \frac{u}{(u_n)^\alpha}\ \mathrm{d}x, \qquad u_n \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega),$$

and exploit this fact to prove that

$$\lim_{n\to\infty} u_n = d \qquad \text{uniformly in } \Omega,$$

where d denotes the distance function to the boundary $\partial\Omega$.

In Chapter 3 we consider the modular functional $t \mapsto \displaystyle\int_\Omega \Phi_n(|\nabla u|)\ \mathrm{d}x$, under the constraint $\displaystyle\int_\Omega f|u|^{1-\alpha}\ \mathrm{d}x = 1$. In the case $0 \leq \alpha < 1$, we prove that it admits a positive minimizer $u_n \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega)$ which solves (2) with $\Lambda_n = \displaystyle\int_\Omega \phi_n(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2\ \mathrm{d}x$. Moreover, we prove that $\lim_{n\to\infty} u_n = \varepsilon^{-1} d$, uniformly in $\overline{\Omega}$, where $\varepsilon = \int_\Omega f d^{1-\alpha}\ \mathrm{d}x$. Furthermore, we also show that

$$\lim_{n\to\infty} (\Lambda_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n|)\ \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} = \gamma_1(\varepsilon),$$

where the function $\gamma_1 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ is defined by

$$\gamma_1(t) := \lim_{n\to\infty} (\phi_n'(t))^{\frac{1}{n}}, \quad \text{if } t > 0, \quad \text{and} \quad \gamma_1(0) = 0.$$

In order to prove these convergences, we show that γ_1 is continuous, strictly increasing and onto. We also consider the sequences $(\Lambda_n)^{\frac{1}{n}}$ and $\left(\int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n|)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$ and prove that they both converge to a positive number Λ_∞. Considering the sequence of solutions u_n, we prove that it converges uniformly to a function $u_\infty \in C_0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$, which solves the equation

$$\min\{-\Delta_\infty u, \gamma_1(|\nabla u|) - \Lambda_\infty\} = 0$$

in the viscosity sense. We conclude that $\Lambda_\infty = \gamma_1(\varepsilon)$ and $u_\infty = \varepsilon^{-1} d$.

In the second part of this work, exposed in Chapter 4, we study the asymptotic behavior of the minimizers of the Rayleigh-type quotient $\frac{\|\nabla v\|_{\Phi_l}}{\|v\|_{\Psi_j}}$, where (Φ_l) and (Ψ_j) are sequences of N-functions. We prove that, up to subsequences, the minimizer of $\frac{\|\nabla \cdot\|_{\Phi_l}}{\|\cdot\|_{\Psi_j}}$ converges, as $j \to \infty$, to the minimizer of the quotient $\frac{\|\nabla \cdot\|_{\Phi_l}}{\|\cdot\|_\infty}$. On its turn, this quotient converges, as $l \to \infty$, to the minimizer w_∞ of the Rayleigh-type quotient $\frac{\|\nabla \cdot\|_\infty}{\|\cdot\|_\infty}$. We show that w_∞ is the viscosity solution of

$$\begin{cases} \Delta_\infty \left(\frac{u}{\|\nabla u\|_\infty}\right) = 0 & \text{em } D := \Omega \setminus \{x_\star\}, \\ \frac{u}{\|u\|_\infty} = d & \text{sobre } \partial D = \Omega \cup \{x_\star\}, \end{cases}$$

where $x_\star \in \Omega$ satisfies $w_\infty(x_\star) = \|w_\infty\|_\infty = 1$ and $d(x_\star) = \|d\|_\infty$.

Keywords: Asymptotic behavior, N-function, Φ-Laplacian, singular problem, viscosity solution.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudamos dois problemas envolvendo o operador Φ-Laplaciano definido no espaço de Orlicz-Sobolev $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Inicialmente, nos capítulos 1, 2 e 3, apresentamos resultados de existência, unicidade, comportamento assintótico de soluções e propriedades de minimização para o seguinte problema singular envolvendo o operador Φ-Laplaciano (definido em (A.8))

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u = \dfrac{f(x)}{u^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $0 \leq \alpha \leq 1$, $f \geq 0$, $f \not\equiv 0$ e $\Phi(t) = \displaystyle\int_0^t s\phi(s)\, ds$, sendo a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par de classe C^1 com $\phi(0) = 0$ e a restrição $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ crescente tal que o homeomorfismo $\phi(t)t$ satisfaz a condição de crescimento

$$a^- - 1 \leq \frac{\Big(\phi(t)t\Big)'}{\phi(t)} \leq a^+ - 1, \qquad \forall\, t > 0. \tag{4}$$

para $a^-, a^+ > 1$ constantes.

Já no Capítulo 4, descrevemos o comportamento assintótico dos minimizadores do quociente de Rayleigh $\frac{\|\nabla u\|_{\Phi_l}}{\|u\|_{\Psi_j}}$ em espaços de Orlicz-Sobolev. Primeiro fazemos $j \to \infty$, e depois, $l \to \infty$.

O espaço de funções no qual esperamos encontrar soluções para o problema (3) é o espaço de Orlicz-Sobolev $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Descrevemos esse espaço e suas propriedades no Apêndice A.

Segue de (4) que

$$1 < a^- \leq \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} \leq a^+, \qquad \forall\, t > 0 \tag{5}$$

(ver Lema A.16).

Assim, definindo

$$\phi^- := \inf_{t>0} \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)}$$

e

$$\phi^+ := \sup_{t>0} \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)},$$

segue que

$$1 \leq \phi^- \leq \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} \leq \phi^+ < \infty, \qquad \forall\, t > 0. \tag{6}$$

Como ϕ é crescente,

$$\Phi(t) = \int_0^1 \phi(s)s\ ds + \int_1^t \phi(s)s\ ds \geq \int_0^1 \phi(s)s\ ds + (t-1)\phi(1), \qquad t \geq 1,$$

e, assim,

$$\Phi(t) \to +\infty \ \text{ quando } \ t \to +\infty.$$

Logo, (5) implica

$$\phi(t)t^2 \to +\infty \qquad \text{quando } t \to +\infty.$$

Além disso, como Φ é contínua e $\Phi(0) = 0$, temos

$$\Phi(t) \to 0 \ \text{ quando } \ t \to 0$$

e, então, (5) implica

$$\phi(t)t^2 \to 0 \ \text{ quando } \ t \to 0.$$

Observe, também, que $\Phi(t) = 0$ se, e só se, $t = 0$. Como ϕ é não decrescente, para $t > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(t)}{t} &= \frac{1}{t}\int_0^t \phi(s)s\ ds \\ &\leq \phi(t)t \end{aligned}$$

e, então, usando que $\phi(t)t$ é contínua e $\phi(0) = 0$, concluímos que

$$\frac{\Phi(t)}{t} \ \to\ 0, \qquad \text{quando } \ t \to 0^+.$$

Temos também

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(t)}{t} &\geq \frac{1}{t}\int_{\frac{t}{2}}^t \phi(s)s\ ds \\ &\geq \frac{1}{t}\,\phi\left(\frac{t}{2}\right)\,\frac{t}{2}\,\left(t - \frac{t}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\phi\left(\frac{t}{2}\right)\,\frac{t}{2} \end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{\Phi(t)}{t} \ \to\ +\infty, \qquad \text{quando } \ t \to +\infty.$$

No Capítulo 1, mostramos existência e unicidade de soluções para o problema (3).

Para a existência, fazemos $n \to \infty$ no seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u_n = \dfrac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$ e Δ_Φ é o operador Φ-Laplaciano.

Mostramos, também, resultados de minimização para $0 < \alpha < 1$. Provamos que a solução fraca u_α de (3) é o único minimizador do funcional energia

$$J_\alpha(v) = \int_\Omega \Phi(|\nabla v|)\ dx - \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (v^+)^{1-\alpha} f\ dx, \qquad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \tag{7}$$

O problema (3) foi estudado inicialmente para o p-Laplaciano. No caso $\phi(t) = |t|^{p-2}$, Chu e Gao em [8] estudaram a existência de soluções fracas. Para $\phi(t) = 1$, Boccardo e Orsina em [5] investigaram a existência, regularidade e não existência de soluções para um problema similar. Já Bhattacharya, DiBenedetto e Manfredi [4] mostraram para $f \in L^\infty(\Omega)$ contínua e positiva e u_p solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

que existe uma subsequência tal que

$$u_p \to d \quad \text{uniformemente em } \Omega \text{ quando } p \to \infty$$

onde

$$d(x\ , \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|, \qquad x \in \overline{\Omega},$$

é a função distância em relação a fronteira.

Nos Capítulos 2 e 3 consideramos, para cada $n \in \mathbb{N}$, o espaço de Orlicz $W_0^{1,\Phi_n}(\Omega)$ definido pela N-função

$$\Phi_n(t) = \int_\Omega \phi_n(s) s\ ds$$

sendo $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par de classe C^1 com $\phi_n(0) = 0$ e a restrição $\phi_n : [0, \infty) \to [0, \infty)$ crescente tal que o homeomorfismo $\phi_n(t)t$ satisfaz (4), o que implica que existem constantes $\phi_n^+ \geq \phi_n^- > 1$ tais que

$$1 \leq \phi_n^- \leq \frac{t^2 \phi_n(t)}{\Phi_n(t)} \leq \phi_n^+ < \infty, \qquad \forall\ t > 0.$$

Para a sequência (Φ_n) de N-funções e $0 \leq \alpha \leq 1$, analisamos no Capítulo 2, o comportamento assintótico das soluções u_n do problema

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_n} u = \dfrac{f(x)}{u^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

quando $n \to \infty$. Mostramos que a sequência (u_n) converge (sem precisar passar a subsequência) para u_∞, a qual é a função d. Na Seção 2.1 fazemos isso usando que u_n é solução do problema não singular

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_n} u = \frac{f(x)}{u_n^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e, portanto, minimiza o funcional

$$J_n(u) = \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u|)\, dx - \int_\Omega \frac{f}{u_n^\alpha} u\, dx.$$

Na Seção 2.2, apresentamos uma prova alternativa para o caso $0 \leq \alpha < 1$. Fizemos essa demonstração usando que u_n minimiza o funcional energia definido em (7).

Já no Capítulo 3, para $0 < \alpha < 1$, provamos, na Seção 3.1, que a função u_n, minimizador de

$$\mu_n := \inf \left\{ \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u|)\, dx; u \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega), \int_\Omega f u^{1-\alpha}\, dx = 1 \right\},$$

é solução de

$$-\Delta_{\Phi_n} u = \Lambda_n \frac{f}{u^\alpha} \tag{9}$$

com

$$\Lambda_n = \int_\Omega \phi_n(\nabla u_n)|\nabla u_n|^2\, dx.$$

Nesse caso, a singularidade não permite usar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange como na Seção 3.2. Para contornar esse obstáculo e demonstrar que u_n é solução de (9), obtemos a derivada de

$$h(\varepsilon) \ := \int_\Omega (u + \varepsilon\eta)^{1-\alpha} f\, dx$$

em $\varepsilon = 0$. Mostramos que, quando $n \to \infty$, passando a subsequência, temos $\Lambda_n^{\frac{1}{n}} \to \Lambda_\infty$ e $u_n \to u_\infty$ uniformemente em Ω. Provamos também que u_∞ é solução de

$$\min \{-\Delta_\infty u, \gamma_1(|\nabla u|) - \Lambda_\infty\} = 0, \tag{10}$$

em que Δ_∞ é o operador ∞-Laplaciano, definido por

$$\Delta_\infty u := \left\langle D^2 u \nabla u, \nabla u \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j},$$

e γ_1 é a função definida por

$$\gamma_1(t) := \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\phi_n'(|t|)}{t} \right)^{\frac{1}{n}}. \tag{11}$$

com $\gamma_1(0) = 0$. O limite é uniforme em todo subconjunto limitado de $(0, \infty)$, γ_1 é contínua e

$$\gamma_1(t) \neq 0, \qquad \forall\, t \neq 0.$$

Em seguida, provamos que

$$u_\infty = \frac{1}{\varepsilon} d, \tag{12}$$

onde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ é tal que

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(\varepsilon) = \Lambda \\
&\gamma_1(t) < \Lambda \text{ para todo } 0 < t < \varepsilon, \\
&\gamma_1(t) > \Lambda \text{ para todo } t > \varepsilon.
\end{aligned}$$

Na Seção 3.2, fazemos o caso $\alpha = 0$, isto é, começamos com o problema de minimização

$$\mu_n := \inf \left\{ \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u|)\, dx, u \in X_n \right\}, \tag{13}$$

com

$$X_n := \left\{ u \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega), \int_\Omega f u \; dx = 1 \right\}.$$

Para u_n minimizador de μ_n segue do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange que existe $\Lambda_n > 0$ tal que u_n é solução de

$$-\Delta_{\Phi_n} u_n = \Lambda_n f.$$

Mostramos que, quando $n \to \infty$, passando a subsequência, temos $\Lambda_n^{\frac{1}{n}} \to \Lambda_\infty$ e $u_n \to u_\infty$ uniformemente em Ω.

Para explicitar a função limite u_∞, no Capítulo 3, mostramos primeiro que u_∞ é a única solução de viscosidade da equação (10). Em seguida usamos a bijetividade da função γ_1 e o seguinte fato conhecido: $\frac{d}{\varepsilon}$ é a única solução de viscosidade para a equação

$$\min\{-\Delta_\infty u, |\nabla u| - \varepsilon\} = 0 \quad \text{em} \;\; \Omega. \tag{14}$$

Ressaltamos que esta conexão entre essas duas equações é uma novidade na literatura.

A minimização com vínculo, feita no Capítulo 3, faz aparecer uma constante multiplicativa na equação de Euler-Lagrange que depende da subsequência de (u_n). Isso não permite utilizar o argumento do caso em que a constante é 1, como no Capítulo 2. Daí, a necessidade de usar solução de viscosidade, no Capítulo 3.

Não foi preciso passar a subsequência para obter a convergência de (u_n). Isso ocorre porque a equação da forma (10) não depende da subsequência, uma vez que esta depende do valor da constante Λ_∞, que é a mesma para toda subsequência.

Os Capítulos 2 e 3 do nosso trabalho foram inspirados pelo problema de autovalor tratado em [7]. Mais precisamente, os autores Bocea, Mihăilescu e Stancu-Dimitru consideraram uma sequência de N-funções da forma $\Phi_n(t) = \int_0^t \phi_n(s)s\, ds$ e o minimizador u_n de

$$c_n^1 \;:=\; \inf\left\{\int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n|)\, dx : u \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega), \int_\Omega \Phi_n(u(x))\, dx = 1\right\}.$$

Eles provaram que u_n é solução de

$$-\Delta_{\Phi_n} u = \Lambda_n \phi_n(|u|)u$$

para algum $\Lambda_n > 0$. Mostraram também que a sequência (u_n) converge uniformemente, a menos de subsequência, para uma uma função u_∞ quando $n \to \infty$. Eles provaram ainda que u_∞ é solução de viscosidade de

$$\min\{-\Delta_\infty u, \gamma_1(|\nabla u|) - \Lambda_\infty \gamma_2(|u|)\} = 0$$

para $\Lambda_\infty = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n^{\frac{1}{n}}$, γ_1 dada em (11) e

$$\gamma_2(t) := \lim_{n\to\infty} [\phi_n(t)t]^{\frac{1}{n}}, \qquad t \neq 0, \tag{15}$$

em que o limite é uniforme em todo subconjunto limitado de $(0, \infty)$, γ_2 é contínua, $\gamma_2(0) = 0$. Naquele artigo [7], não foi percebido que as funções γ_1 e γ_2 são iguais. Na Proposição 3.1 provamos que

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(t)^{\frac{1}{n}}, \qquad t \geq 0.$$

O estudo do comportamento assintótico de soluções de problemas envolvendo espaços de Orlicz e o operador Φ-Laplaciano é recente. Ver, por exemplo, [6, 7, 10, 15].

Mais recentemente, Grecu e Mihăilescu, em [15], consideram: uma sequência φ_n de homeomorfismos crescente e ímpares de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$,

$$\Phi_n(t) := \int_0^t \varphi_n(s)\, ds,$$

$$\Psi_n(t) := \frac{\Phi_n(t)}{\Phi_n(1)|\Omega|}$$

satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\inf_{t>0}\frac{t\varphi_n(t)}{\Phi_n(t)}\right) = +\infty,$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sup_{t>0}\frac{t\varphi_n(t)}{\Phi_n(t)}\right)\left(\inf_{t>0}\frac{t\varphi_n(t)}{\Phi_n(t)}\right)\right] = 1.$$

Então, eles estudaram o comportamento assintótico, quando $n \to \infty$, dos minimizadores u_n de

$$\mu_n := \inf_{u\in W_0^{1,\Psi_n}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_{\Psi_n}}{\|u\|_{\Psi_n}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Eles provaram que, para

$$\Lambda_\infty := \inf_{u\in X_0\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|u\|_{L^\infty(\Omega)}},$$

onde

$$X_0 := W^{1,\infty}(\Omega) \cap \left(\cap_{q>1} W_0^{1,q}(\Omega)\right),$$

vale

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \Lambda_\infty.$$

O principal resultado de [15] mostra que, passando a subsequência, $u_n \to u_\infty$, em que $u_\infty \in C(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$ é um minimizador de Λ_∞. O quociente estudado em [15] é semelhante a [11] para quocientes com expoentes variáveis no espaço de Sobolev $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Citamos alguns artigos que tratam de estudos semelhantes para os operadores p-Laplaciano e $p(x)$-Laplaciano. Em [9], Ercole e Pereira consideraram o seguinte problema de minimização

$$\lambda_q(\Omega) := \min\left\{\|\nabla u\|_p^p; u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_q = 1\right\}.$$

Eles mostraram a existência de um minimizador positivo u_p de

$$\Lambda_p(\Omega) := \lim_{q\to p^*} \lambda_q(\Omega) = \inf\left\{\|\nabla u\|_p^p; u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_\infty = 1\right\}$$

como o limite uniforme em Ω de uma sequência de minimizadores $\lambda_q(\Omega)$. A função u_p assume seu máximo em um único ponto x_p e satisfaz

$$\Delta_p u_p = u_p(x_p)\Lambda_p(\Omega)\delta_{x_p} \text{ em } \Omega,$$

onde δ_{x_p} é distribuição delta de Dirac centrada em x_p. Além disso, eles mostraram que existe uma subsequência de (u_p) que converge uniformemente em Ω a u_∞, a qual é solução do problema de minimização

$$\Lambda_\infty := \min\left\{\|\nabla u\|_\infty; u \in W_0^{1,\infty}(\Omega), \|u\|_\infty = 1\right\} = \lim_{p\to\infty} \Lambda_p(\Omega)^{\frac{1}{p}}$$

e é uma solução de viscosidade positiva do problema limite

$$\begin{cases} \Delta_\infty \left(\frac{u}{\|\nabla u\|_\infty}\right) = 0 & \text{em } D := \Omega \setminus \{x_\star\}, \\ \frac{u}{\|u\|_\infty} = d(\cdot, \partial\Omega) & \text{sobre } \partial D = \Omega \cup \{x_\star\}, \end{cases}$$

onde $x^\star = \lim\limits_{p\to\infty} x_p$ é o único ponto de máximo de u_∞.

Baseado neste último artigo e influenciados por [11], Alves, Ercole e Bolaños estenderam, em [2], os resultados de [9] para o problema de minimização do quociente de Rayleigh com expoentes variáveis. Primeiramente, eles mostram que o minimizador $u_{l,j}$ de

$$\Lambda_{l,j} := \min\left\{ \frac{\|\nabla v\|_{lp(x)}}{\|v\|_{jq(x)}}; v \in W_0^{1,lp(x)}(\Omega) \setminus \{0\} \right\}.$$

converge uniformemente, a menos de subsequência, quando $j \to \infty$, para uma função w_l e esta minimiza

$$\mu_l := \min\left\{ \frac{\|\nabla v\|_{lp(x)}}{\|v\|_\infty}; v \in W_0^{1,lp(x)}(\Omega) \setminus \{0\} \right\}.$$

Depois, passando a subsequência, $\mu_l \to \Lambda_\infty$ e $w_l \to w_\infty$ uniformemente em Ω, quando $l \to \infty$. Além disso, w_∞ minimiza Λ_∞ e satisfaz

$$\begin{cases} \Delta_\infty \left(\frac{u}{\|\nabla u\|_\infty}\right) = 0 & \text{em } D := \Omega \setminus \{x_\star\}, \\ \frac{u}{\|u\|_\infty} = d(\cdot, \partial\Omega) & \text{sobre } \partial D = \Omega \cup \{x_\star\} \end{cases}$$

no sentido de viscosidade, onde $x_* = \lim\limits_{l\to\infty} x_0^l$ é ponto de máximo de w_∞ e x_0^l é o único ponto de máximo de w_l.

No Capítulo 4, provamos todos os principais resultados de [2] para dois operadores Φ-Laplaciano e Ψ-Laplaciano, os quais são definidos em seus respectivos espaços de Orlicz-Sobolev. Mais precisamente, analisamos o comportamento assintótico dos minimizadores do quociente $\frac{\|\nabla v\|_{\Phi_l}}{\|v\|_{\Psi_j}}$ para duas sequências de N-funções (Φ_l) e (Ψ_j). Primeiro, fazemos $j \to \infty$ e, depois, $l \to \infty$. Provamos que, passando a subsequência, o minimizador de $\frac{\|\nabla v\|_{\Phi_l}}{\|v\|_{\Psi_j}}$ converge (quando $j \to \infty$) para o minimizador de $\frac{\|\nabla v\|_{\Phi_l}}{\|v\|_\infty}$ e este converge (quando $l \to \infty$) para o minimizador w_∞ de $\frac{\|\nabla v\|_\infty}{\|v\|_\infty}$. Verificamos, também, que w_∞ é solução de

$$\begin{cases} \Delta_\infty \left(\frac{u}{\|\nabla u\|_\infty}\right) = 0 & \text{em } D := \Omega \setminus \{x_\star\}, \\ \frac{u}{\|u\|_\infty} = d & \text{sobre } \partial D = \Omega \cup \{x_\star\}. \end{cases} \tag{16}$$

onde $d = \text{dist}(\cdot, \partial\Omega)$ é a distância em relação a fronteira de Ω e $x_* = \lim\limits_{l\to\infty} x_0^l$ é tal que $w_\infty(x_*) = \|w_\infty\|_\infty = 1$, x_0^l é o único ponto de máximo de w_l e $d(x_*) = \|d\|_\infty$.

Com o objetivo de contornar as dificuldades encontradas foi necessário desenvolver argumentos diferentes daqueles que constam em trabalhos que usamos como inspiração para nossa tese. Por exemplo, devido a singularidade do problema considerado, usamos no Capítulo 1 uma equação auxiliar para mostrar a existência de solução para o problema singular (ver Teorema 1.6). Além disso, no Capítulo 3, para mostrar que o minimizador em questão satisfaz a equação associada envolvendo o operador Φ_n-Laplaciano obtivemos uma derivada de Gâteaux (ver Lema 3.5).

Outro exemplo de obstáculo encontrado foi a não homogeneidade do operador Φ-Laplaciano. Foi necessário desenvolver novas justificativas, induzidas pelos artigos consultados ou até mesmo desenvolver outros argumentos. Como exemplo, citamos a desigualdade de Hölder que, no caso dos espaços de Orlicz, é mais fraca que em espaços L^p em razão da constante multiplicativa 2 que aparece em um dos termos (ver Proposição A.9). Por isso, no Capítulo 4, para mostrar que a função limite w_∞ é extremal, ou seja, que w_∞ satisfaz $\|\nabla w_\infty\|_\infty = \Lambda_\infty$, usamos o Lema 4.13 (ver Proposição 4.14). Assim, conseguimos obter uma desigualdade que desempenha o mesmo papel da desigualdade de Hölder, mas com constantes que tendem a 1, na passagem ao limite.

A principal contribuição nesta parte do trabalho foi estender resultados dos operadores p-Laplaciano e $p(x)$-Laplaciano para o operador Φ-Laplaciano. Desta forma, ampliamos resultados dos espaços de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ para o espaço de Orlicz-Sobolev $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Também, expandimos o estudo de comportamento assintótico em espaços de Orlicz-Sobolev para problemas singulares. Além disso, adaptamos e desenvolvemos demonstrações e justificativas para problemas singulares envolvendo o operador Φ-Laplaciano.

Capítulo 1

Problema singular

Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par de classe C^1 tal que $\phi(0) = 0$, a restrição $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é não decrescente e $\phi(t)t$ é um homeomorfismo e existem constantes $a^-, a^+ > 1$ tais que

$$a^- - 1 \leq \frac{\Big(\phi(t)t\Big)'}{\phi(t)} \leq a^+ - 1, \qquad \forall\, t > 0. \tag{1.1}$$

Neste capítulo estudamos a existência de soluções fracas para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u = \dfrac{f(x)}{u^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

em que Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ com fronteira suave $\partial\Omega$, $0 < \alpha \leq 1$, $f \in L^1(\Omega)$, $f \geq 0$, $f \not\equiv 0$ e $\Phi(t) = \displaystyle\int_0^t s\phi(s)\ ds$.

Seguindo [7], supondo (1.1) o Lema A.16 implica

$$1 < a^- \leq \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} \leq a^+, \qquad \forall\, t > 0. \tag{1.3}$$

Logo, definindo

$$\phi^- := \inf_{t>0} \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)}$$

e

$$\phi^+ := \sup_{t>0} \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)},$$

temos

$$1 < \phi^- \leq \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} \leq \phi^+ < \infty, \qquad \forall\, t > 0, \tag{1.4}$$

e

$$\phi^- - 1 \leq \frac{\Big(\phi(t)t\Big)'}{\phi(t)} \leq \phi^+ - 1, \qquad \forall\, t > 0. \tag{1.5}$$

Por outro lado (ver por exemplo [12, Lema 2.1]), temos

$$\|u\|_{\Phi}^{\phi^+} \;\leq\; \int_\Omega \Phi(u(x))\;dx \;\leq\; \|u\|_{\Phi}^{\phi^-}, \quad \forall\; u \in L^{\Phi}(\Omega),\; \|u\|_{\Phi} < 1, \tag{1.6}$$

$$\|u\|_{\Phi}^{\phi^-} \;\leq\; \int_\Omega \Phi(u(x))\;dx \;\leq\; \|u\|_{\Phi}^{\phi^+}, \quad \forall\; u \in L^{\Phi}(\Omega),\; \|u\|_{\Phi} > 1 \tag{1.7}$$

e, então,

$$\min\left\{\|u\|_{\Phi}^{\phi^-}, \|u\|_{\Phi}^{\phi^+}\right\} \;\leq\; \int_\Omega \Phi(|u(x)|)\;dx \;\leq\; \max\left\{\|u\|_{\Phi}^{\phi^-}, \|u\|_{\Phi}^{\phi^+}\right\}, \quad \forall\; u \in L^{\Phi}(\Omega). \tag{1.8}$$

Temos também que para todo $\rho, t > 0$ vale

$$\Phi(t)\begin{cases} \rho^{\phi^+} & \text{se } \rho \in (0,1] \\ \rho^{\phi^-} & \text{se } \rho \in (1,\infty) \end{cases} \;\leq\; \Phi(\rho t) \;\leq\; \Phi(t)\begin{cases} \rho^{\phi^-} & \text{se } \rho \in (0,1] \\ \rho^{\phi^+} & \text{se } \rho \in (1,\infty). \end{cases} \tag{1.9}$$

Portanto,

$$\Phi(t)\min\left\{\rho^{\phi^-}, \rho^{\phi^+}\right\} \;\leq\; \Phi(\rho t) \;\leq\; \Phi(t)\max\left\{\rho^{\phi^-}, \rho^{\phi^+}\right\}, \quad \forall\; \rho, t > 0. \tag{1.10}$$

Definição 1.1. Uma função $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é chamada *solução fraca do problema* (1.2) se $u > 0$ em Ω e

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \varphi\;dx \;=\; \int_\Omega \frac{f(x)}{u^\alpha}\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Considere o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u_n = \dfrac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.11}$$

em que $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$.

Definição 1.2. Uma função $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é chamada *solução fraca do problema* (1.11) se

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \varphi\;dx \;=\; \int_\Omega \frac{f_n(x)}{\left(u + \frac{1}{n}\right)^\alpha}\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Lema 1.3. *Sejam $f \in L^1(\Omega)$ e $\alpha > 0$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, o problema (1.11) tem uma única solução fraca não negativa $u_n \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. **Existência**

Para cada $w \in L_\Phi(\Omega)$ temos

$$\left| \frac{f_n}{\left(|w| + \frac{1}{n}\right)^\alpha} \right| \leq \frac{n}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha} = n^{\alpha+1}$$

e, então,

$$\frac{f_n}{\left(|w| + \frac{1}{n}\right)^\alpha} \in L^\infty(\Omega).$$

Logo, por [13, Lema 3.4], o seguinte problema tem uma única solução fraca positiva $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi v = \frac{f_n}{\left(|w|+\frac{1}{n}\right)^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.12}$$

Assim, podemos definir a aplicação $\Gamma : L_\Phi(\Omega) \to L_\Phi(\Omega)$ como $\Gamma(w) = v$. Portanto,

$$\int_\Omega \phi(|\nabla v|)\nabla v \nabla \varphi \; dx = \int_\Omega \frac{f_n}{\left(|w| + \frac{1}{n}\right)^\alpha}\varphi \; dx, \qquad \forall \; \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Usando v como função teste, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi(|\nabla v|)|\nabla v|^2 \; dx &= \int_\Omega \frac{f_n}{\left(|w| + \frac{1}{n}\right)^\alpha} v \; dx \\ &\leq \frac{n}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha} \int_\Omega |v| \; dx \\ &= n^{\alpha+1}\|v\|_1 \\ &\leq Cn^{\alpha+1}\|v\|_\Phi \qquad\qquad \text{pois } W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L_1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Segue de (1.3) que

$$\Phi(t) < \phi(t)t^2.$$

Portanto,

$$\int_{|\nabla v|\geq 1} \Phi(|\nabla v|) \; dx \leq \int_{|\nabla v|\geq 1} \phi(|\nabla v|)|\nabla v|^2 \; dx \leq \int_\Omega \phi(|\nabla v|)|\nabla v|^2 \; dx. \tag{1.14}$$

Daí, segue de (1.13) que

$$\int_{|\nabla v|\geq 1} \Phi(|\nabla v|) \; dx \leq Cn^{\alpha+1}\|v\|_\Phi. \tag{1.15}$$

Por outro lado, como Φ é não negativa e crescente em $[0, \infty]$, temos

$$\int_{|\nabla v|\leq 1} \Phi(|\nabla v|) \; dx \leq \int_\Omega \Phi(1) \; dx = \Phi(1) \; |\Omega|$$

e, então, segue de (1.15) que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla v|)\ dx \leq Cn^{\alpha+1}\|v\|_\Phi + \Phi(1)|\Omega|\}.$$

Logo, a norma é limitada por 1 ou, por (1.7), temos

$$\|v\|_\Phi^{\phi^-} \leq (n^{\alpha+1}\|v\|_\Phi + \Phi(1)|\Omega|).$$

Portanto, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|\Gamma(w)\| \leq c, \quad \forall\ w \in L_\Phi(\Omega). \tag{1.16}$$

Como $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L_\Phi(\Omega)$, segue que se (w_k) é uma sequência qualquer em $L_\Phi(\Omega)$ então $(\Gamma(w_k))$ possui uma subsequência convergente em $L_\Phi(\Omega)$. Assim, mostramos que $\Gamma : L_\Phi(\Omega) \to L_\Phi(\Omega)$ é compacto. Temos também que Γ é contínuo pois

$$\Gamma(w) = L^{-1}\left(\frac{f_n}{|w| + \frac{1}{n}}\right)$$

em que $Lu = -\Delta_\Phi u = -\text{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u)$, é um isomorfismo, por [13, Lema 3.1]. Além disso, se $u = \lambda\Gamma(u)$ para algum $0 \leq \lambda \leq 1$ então segue de (1.16) que

$$\|u\|_\Phi \ = \ \|\lambda\Gamma(u)\|_\Phi \ \leq C_1\|\lambda\Gamma(u)\|_{W^{1,\Phi}(\Omega)} \ \leq C_1\ \lambda c.$$

Assim, o conjunto $\{u \in L_\Phi(\Omega);\ u = \lambda\Gamma(u)$ para algum $0 \leq \lambda \leq 1\}$ é limitado. Portanto, pelo teorema do ponto fixo de Schaefer (Teorema A.23) existe $u_n \in W_0^{1,\Phi}$ tal que $u_n = \Gamma(u_n)$. Por [13, Lema 3.3] temos que $u_n \in C(\overline{\Omega})$ e por [13, Lema 3.4] temos que $u_n > 0$ em Ω. Assim, u_n é uma solução fraca positiva para o problema (1.11).

Unicidade

Sejam $u_n, v_n \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ soluções fracas não negativas do problema (1.11). Escolhendo $\varphi = u_n - v_n$ como função teste temos

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega (\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla v_n|)\nabla v_n) \cdot \nabla(u_n - v_n)\ dx = \\
= & \int_\Omega \frac{f_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\alpha}\ (u_n - v_n)\ dx - \int_\Omega \frac{f_n}{(v_n + \frac{1}{n})^\alpha}\ (u_n - v_n)\ dx \\
= & \int_\Omega f_n \left[\frac{1}{(u_n + \frac{1}{n})^\alpha} - \frac{1}{(v_n + \frac{1}{n})^\alpha}\right](u_n - v_n)\ dx \\
\leq & \ 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, de [13, Lema 3.2] segue que existe $k_0 > 0$ tal que

$$[\phi(|\xi|)\xi - \phi(|\eta|)\eta] \cdot [\xi - \eta] \geq k_0 \frac{\Phi(|\xi - \eta|)^{(\phi^- + 1)/\phi^-}}{[\Phi(|\xi|) + \Phi(|\eta|)]^{1/\phi^-}} \tag{1.17}$$

para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N, \xi \neq 0$. Portanto,

$$(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla v_n|)\nabla v_n) \cdot \nabla(u_n - v_n) \;\geq\; 0. \tag{1.18}$$

e, então,

$$\int_\Omega (\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla v_n|)\nabla v_n) \cdot \nabla(u_n - v_n)\; dx = 0.$$

Daí, usando (1.18) novamente obtemos

$$(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla v_n|)\nabla v_n) \cdot \nabla(u_n - v_n) \;=\; 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Logo, segue de (1.17) que $\nabla(u_n - v_n) = 0$ q.t.p. em Ω, o que implica $u_n - v_n = 0$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Portanto, $u_n = v_n$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. □

Lema 1.4. *Sejam $f \in L^1(\Omega)$ e $\alpha > 0$. A sequência $\{u_n\}$ é crescente em relação a n. Além disso, se $\Omega' \subset\subset \Omega$ então $u_n > 0$ em Ω' e existe uma constante positiva $C_{\Omega'}$ (independente de n) tal que para todo $n \in \mathbb{N}^*$*

$$u_n \geq C_{\Omega'} > 0, \quad \forall x \in \Omega'. \tag{1.19}$$

Demonstração. Usando $(u_n - u_{n+1})^+$ como função teste, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega [\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u_{n+1}|)\nabla u_{n+1}]\nabla(u_n - u_{n+1})^+ \; dx \\
= &\int_\Omega \left[\frac{f_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\alpha} - \frac{f_{n+1}}{(u_{n+1} + \frac{1}{n})^\alpha}\right](u_n - u_{n+1})^+ \; dx \\
\leq &\int_\Omega f_{n+1}\left[\frac{1}{(u_n + \frac{1}{n})^\alpha} - \frac{1}{(u_{n+1} + \frac{1}{n})^\alpha}\right](u_n - u_{n+1})^+ \; dx \\
\leq \;& 0.
\end{aligned}$$

Nas últimas passagem usamos que $f_n \leq f_{n+1}$ e

$$u_n - u_{n+1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(u_n + \frac{1}{n})^\alpha} - \frac{1}{(u_{n+1} + \frac{1}{n})^\alpha} \;\leq\; 0.$$

Por outro lado, segue de (1.17) que

$$[\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u_{n+1}|)\nabla u_{n+1}]\nabla(u_n - u_{n+1})^+ \;\geq\; 0. \tag{1.20}$$

Portanto,

$$\int_\Omega [\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u_{n+1}|)\nabla u_{n+1}]\nabla(u_n - u_{n+1})^+ \, dx \; = \; 0.$$

Daí, usando (1.20) novamente

$$[\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u_{n+1}|)\nabla u_{n+1}]\nabla(u_n - u_{n+1})^+ \; = \; 0,$$

o que implica por (1.17) que

$$\nabla(u_n - u_{n+1})^+ \; = \; 0 \quad \text{q.t.p.}$$

Logo,

$$\|(u_n - u_{n+1})^+\|_\Phi \; = \; 0$$

e, então,

$$(u_n - u_{n+1})^+ \; = \; 0,$$

ou seja,

$$u_n \; \leq \; u_{n+1}.$$

Temos também que u_1 é solução da equação

$$-\Delta_{\Phi_1} u = \frac{f_1}{u_1 + 1}$$

e

$$\left\| \frac{f_1}{u_1 + 1} \right\|_\infty \; \leq \; 1.$$

Portanto, o Princípio do Máximo Forte (Teorema A.21) implica $u_1 > 0$. Logo, pela continuidade de u_1, temos

$$C_{\Omega'} \; := \; \min_{\Omega'} u_1 \; > \; 0.$$

Assim, usando que a sequência (u_n) é crescente, obtemos (1.19). $\square$

O lema seguinte permite usar as funções teste em $C_0^\infty(\Omega)$ para mostrar que uma função é solução fraca.

Lema 1.5. *Seja $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ não negativa, satisfazendo*

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla\varphi \, dx \; = \; \int_\Omega \frac{f}{u^\alpha}\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.21}$$

Então u é uma solução fraca do problema (1.2).

Demonstração. Seja $w \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Existe $(\xi_n) \subset C_0(\Omega)$ tal que $\xi_n \to w$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Logo, $\xi_n \to w$ em $L^1(\Omega)$, pois $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^\Phi(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$. Passando a subsequência temos $\xi_n \to w$ q.t.p.. Note que para $\lambda > 1$ e $\tilde{\Phi}$ como na Definição A.6 temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \widetilde{\Phi}\left(\frac{|\phi(|\nabla u|)\nabla u|}{\lambda}\right)\, dx &\leq \int_\Omega \frac{1}{\lambda}\widetilde{\Phi}(|\phi(|\nabla u|)\nabla u|) && \text{por convexidade}\\
&\leq \frac{1}{\lambda}\int_\Omega \Phi(2|\nabla u|)\, dx && \text{por convexidade}\\
&\leq \frac{1}{\lambda} K \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\, dx && \text{pela condição } \Delta_2.
\end{aligned}$$

Logo, se

$$\lambda \geq K\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\, dx$$

então

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\left(\frac{|\phi(|\nabla u|)\nabla u|}{\lambda}\right)\, dx \leq 1.$$

Portanto,

$$\|\phi(|\nabla u|)\nabla u\|_{\widetilde{\Phi}} \leq \max\left\{1, K\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\, dx.\right\} \tag{1.22}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \frac{fw}{u^\alpha}\, dx\right| &\leq \int_\Omega \frac{f|w|}{u^\alpha}\, dx, && \text{pois } u, f \geq 0\\
&\leq \liminf \int_\Omega \frac{f\xi_n}{u^\alpha}\, dx, && \text{pelo Lema de Fatou}\\
&= \lim \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u\cdot\nabla\xi_n\, dx, && \text{pois } \xi_n \in C_0^\infty(\Omega)\\
&\leq 2\|\phi(|\nabla u|)\nabla u\|_{\widetilde{\Phi}} \lim_{n\to\infty}\|\nabla\xi_n\|_\Phi && \text{pela desigualdade de Hölder}\\
&\leq \max\left\{1, K\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\, dx\right\} \lim_{n\to\infty}\|\nabla\xi_n\|_\Phi && \text{por (1.22).}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Agora sejam $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tais que $\varphi_n \to \varphi$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Usando (1.23) para $w = \varphi_n - \varphi$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left|\frac{f}{u^\alpha}(\varphi_n - \varphi)\right|\, dx \;\leq\; \max\left\{1, K\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\, dx\right\} \lim_{n\to\infty}\|\nabla\varphi_n - \varphi\|_\Phi \;=\; 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{f}{u^\alpha}\varphi_n\, dx = \int_\Omega \frac{f}{u^\alpha}\varphi\, dx. \tag{1.24}$$

Por outro lado, segue da desigualdade de Hölder que

$$\left|\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla(\varphi - \varphi_n)\, dx\right| \;\leq\; 2\|\phi(|\nabla u|)\nabla u\|_{\widetilde{\Phi}}\, \|\varphi - \varphi_n\|_\Phi \;\to\; 0$$

e, então,

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla\varphi_n\, dx \;\to\; \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla\varphi\, dx. \tag{1.25}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \varphi \, dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla\varphi_n \, dx && \text{por (1.25)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{f}{u^\alpha}\varphi_n \, dx && \text{por hipótese}\\
&= \int_\Omega \frac{f}{u^\alpha}\varphi \, dx && \text{por (1.24).}
\end{aligned}$$

Portanto, u é solução fraca. □

Teorema 1.6. *Suponha que f é uma função não negativa em $L^p(\Omega)\setminus\{0\}$ para algum $p \geq 1$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. Então a equação (1.2) possui uma única solução $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.*

Demonstração. Vamos provar para $0 < \alpha \leq 1$, pois para $\alpha = 0$ é um resultado já conhecido. Sabemos que o funcional

$$I_n(w) = \int_\Omega \Phi(|\nabla w|)\, dx - \int_\Omega \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} w \, dx, \qquad w \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

é de classe C^1 e

$$I'(w)v = \int_\Omega \phi(|\nabla w|)\nabla w \nabla v \, dx - \int_\Omega \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} v \, dx.$$

Existência

Afirmação 1.7. Se $w_k \rightharpoonup w$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ então

$$I_n(w) \leq \liminf_{k\to\infty} I_n(w_k).$$

De fato, para

$$F(v) := \int_\Omega \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} v \, dx, \qquad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$$

temos

$$|F(u)| = \left|\int_\Omega \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} v \, dx\right| \leq 2\left\|\frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha}\right\|_\Phi \|v\|_{\tilde{\Phi}},$$

o que implica $F \in (L^1(\Omega))^*$ e, então, $F(w_k) \to F(w)$.
Por outro lado,

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla w|)\, dx \leq \liminf_{k\to\infty}\int_\Omega \Phi(|\nabla w_k|)\, dx$$

pois esse funcional é fracamente semicontínuo inferiormente.

Afirmação 1.8. u_n minimiza globalmente o funcional I_n.

De fato, para cada $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $\|v\|_\Phi \geq 1$ temos, usando (1.7), que

$$\begin{aligned} I_n(v) &= \int_\Omega \Phi(|\nabla v|)\, dx - \int_\Omega \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\alpha} v\, dx \\ &\geq \|\nabla v\|_\Phi^{\phi^-} - \int_\Omega \frac{n}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha}|v|\, dx \\ &= \|\nabla v\|_\Phi^{\phi^-} - n^{\alpha+1}\int_\Omega |v|\, dx \\ &= \|\nabla v\|_\Phi^{\phi^-} - n^{\alpha+1}\|v\|_1 \\ &\geq \|\nabla v\|_\Phi^{\phi^-} - Cn^{\alpha+1}\|\nabla v\|_\Phi, \end{aligned} \tag{1.26}$$

pois $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^\Phi(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$. Se $\|v\|_\Phi \leq 1$, de modo análogo obtemos

$$I_n(v) \geq \|\nabla v\|_\Phi^{\phi^+} - Cn^{\alpha+1}\|\nabla v\|_\Phi.$$

Como $\phi^\pm > 1$, a função $p(t) = t^{\phi^\pm} - n^{\alpha+1}t$ é limitada inferiormente e, então,

$$\mu \; := \inf_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)} I_n \; > \; -\infty.$$

Seja $\{w_k\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $I_n(w^k) \to \mu$ quando $k \to \infty$. Assim, segue de (1.26) que $\{w_k\}$ é limitada. Como $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é reflexivo, existe $w \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que a menos de subsequência $w_k \rightharpoonup w$. Daí, segue da Afirmação 1.7 que $I_n(w) \leq \liminf_{k\to\infty} I_n(w_k)$. Portanto,

$$I_n(w) \;\leq\; \liminf_{k\to\infty} I_n(w_k) \;=\; \mu.$$

Logo, w minimiza globalmente o funcional I_n. Como

$$I_n(|w|) \leq I_n(w),$$

concluímos que w é um minimizador não negativo. Portanto, w é um ponto crítico não negativo de I_n e, então, é uma solução do problema (1.11). Mas, pelo Lema 1.3 u_n é a única solução. Portanto, $u_n = w$ e, assim, u_n minimiza I_n.

Pelo Lema 1.3

$$0 \leq u_n(x) \leq u(x) := \lim_n u_n(x) \leq \infty.$$

Se $\|\nabla u_n\|_\Phi \geq 1$ então

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_n\|_\Phi^{\phi^-} &\leq \int_\Omega \Phi(|\nabla u_n|)\ dx && \text{por (1.9)}\\
&\leq \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2\ dx && \text{por (1.4)}\\
&= \int_\Omega \frac{f_n}{(u_n+\frac{1}{n})^\alpha} u_n\ dx && \text{usando } u_n \text{ como função teste}\\
&\leq \int_\Omega f u_n^{1-\alpha}\ dx && \text{pois } u_n+\tfrac{1}{n} \geq u_n\\
&\leq \|f\|_{\frac{1}{\alpha}}\ \|u_n\|_{\frac{1}{1-\alpha}} && \text{pela desigualdade de Hölder}\\
&= \|f\|_{\frac{1}{\alpha}}\ \|u_n\|_1^{1-\alpha} &&\\
&\leq C\|f\|_{\frac{1}{\alpha}}\ \|\nabla u_n\|_\Phi^{1-\alpha} && \text{pois } W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)
\end{aligned}$$

e, então,

$$\|\nabla u_n\|_\Phi^{\phi^- -(1-\alpha)} \leq C\|f\|_{\frac{1}{\alpha}}.$$

Portanto, $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Logo, existe $\overline{u} \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup \overline{u} \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega), \tag{1.27}$$

$$u_n \to \overline{u} \text{ em } L^1(\Omega),$$

$$u_n \to \overline{u} \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

o que implica $u = \overline{u} \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Usando $u_n - u$ como função teste obtemos

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla(u_n-u)\ dx = \int_\Omega \frac{f}{(u_n+\frac{1}{n})^\alpha}(u_n-u)\ dx \leq 0.$$

Por outro lado a convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$ implica

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla(u_n-u)\ dx \to 0.$$

Logo,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \left[\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\right] \nabla(u_n-u)\ dx \leq 0.$$

Além disso, segue de (1.17) que

$$\left[\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\right] \nabla(u_n-u) \geq 0$$

e, então,

$$\int_\Omega \left[\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u\right] \nabla(u_n-u)\ dx \ \to\ 0 \qquad \text{quando } \ n\to\infty.$$

Logo, seguindo [13, p. 545], usando que (u_n) é limitada segue da desigualdade de Hölder e de (1.17) que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)\, dx \\
\leq\ & \left(\int_\Omega \frac{\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)^{\frac{\phi^-+1}{\phi^-}}}{(\Phi(|\nabla u_n|)+\Phi(|\nabla u|))^{\frac{1}{\phi^-}}}\, dx\right)^{\frac{\phi^-}{\phi^-+1}} \left(\int_\Omega (\Phi(|\nabla u_n|)+\Phi(|\nabla u|))\ dx\right)^{\frac{1}{\phi_1^-}} \\
\leq\ & M\frac{1}{k_0}\left(\int_\Omega [\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u]\,\nabla(u_n-u)\ dx\right)^{\frac{\phi^-}{\phi^-+1}} \\
\to\ & 0 \quad \text{quando} \ \ n\to\infty.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$u_n \to u \ \text{ em } \ W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

o que implica (ver [13, Lema 3.1]) que

$$\lim_n \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla\varphi\ dx = \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla\varphi\ dx, \qquad \forall\ \varphi\in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \tag{1.28}$$

Por outro lado, para $\varphi\in C_c(\Omega)$, obtemos de (1.19) que

$$0\leq \frac{f_n\varphi}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\alpha} \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{(C_{\Omega'})^\alpha} f$$

com

$$\Omega' = \{x\in\Omega, \varphi(x)\neq 0\}.$$

Logo, como $u_n\to u$ q.t.p., pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_n \int_\Omega \frac{f_n\varphi}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\alpha}\ dx = \int_\Omega \frac{f\varphi}{u^\alpha}\ dx. \tag{1.29}$$

Temos também que u_n é solução fraca de (1.11) e, então,

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n\nabla\varphi\ dx = \int_\Omega \frac{f_n\varphi}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\alpha}\ dx.$$

Portanto, fazendo $n\to\infty$ na identidade acima e usando o lema anterior, segue de (1.28) e (1.29) que u é solução fraca de (1.2).

Unicidade

Sejam $u_1, u_2 \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ soluções fracas de (1.2). Usando $\varphi = u_1 - u_2$, obtemos

$$\int_\Omega [\phi(|\nabla u_1|)\nabla u_1 - \phi(|\nabla u_2|)\nabla u_2]\nabla(u_1-u_2)\ dx \ = \ \int_\Omega (u_1-u_2)\left(\frac{1}{u_1^\alpha}-\frac{1}{u_2^\alpha}\right) f\ dx.$$

Segue de (1.17) que o lado esquerdo dessa igualdade é não negativo. Temos também que o lado direito é menor ou igual a 0. Portanto,

$$\int_\Omega [\phi(|\nabla u_1|)\nabla u_1 - \phi(|\nabla u_2|)\nabla u_2]\nabla(u_1 - u_2)\ dx = 0.$$

Assim, segue de (1.17) que $\Phi(|\nabla(u_1 - u_2)|) = 0$ q.t.p. Logo, $\|\nabla(u_1 - u_2)\|_\Phi = 0$, isto é, $\|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)} = 0$. Portanto, $u_1 = u_2$. $\square$

Observação 1.9. Na Afirmação 1.7 provamos que I_n é fracamente semicontínuo inferiormente e por (1.26) esse funcional é coercivo e limitado inferiormente. Portanto, o funcional I_n possui um minimizador. Assim, temos outro modo de fazer a parte inicial da demonstração do teorema anterior.

1.1 Minimização do funcional energia

Nesta seção vamos assumir $0 < \alpha < 1$ e $f \in L^{\frac{1}{\alpha}}(\Omega)$. Vamos mostrar inicialmente que a solução fraca de (1.2) minimiza o funcional $J_\alpha : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_\alpha(v) = \int_\Omega \Phi(|\nabla v|)\ dx - \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (v^+)^{1-\alpha} f\ dx$$

e conhecido como o **funcional energia** associado ao problema (1.2). Uma vez que $0 < \alpha < 1$, este funcional não é derivável. Portanto, não podemos usar recursos de derivação para concluir que seus possíveis minimizadores são pontos críticos.

Observação 1.10. Sejam $0 < \beta < 1$, $\gamma > 1$ e $a, b \geq 0$ tais que $a + b = 1$. Então a função $t \mapsto t^\beta$ é estritamente côncava e a função $t \mapsto t^\gamma$ é estritamente convexa, isto é,

$$(ax + by)^\beta \ \geq \ ax^\beta + by^\beta, \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R},$$

$$(ax + by)^\gamma \ \leq \ ax^\gamma + by^\gamma, \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R},$$

e essas desigualdades são estritas nos pontos em que $x \neq y$.

Como $0 < 1 - \alpha < 1$ e $p > 1$, para $w_1, w_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos

$$(aw_1 + bw_2)^{1-\alpha} \ \geq \ aw_1^{1-\alpha} + bw_2^{1-\alpha},$$

$$(a|\nabla w_1| + b|\nabla w_2|)^p \ \leq \ a|\nabla w_1|^p + |\nabla w_2|^p$$

e a primeira desigualdade é estrita nos pontos em que $w_1(x) \neq w_2(x)$.

Lema 1.11. *O funcional $J_\alpha : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ possui um único minimizador, o qual é não negativo.*

Demonstração. **Existência.**
Note que o funcional J_α está bem definido, pois se $\|\nabla v\| \geq 1$ então

$$\begin{aligned}
|J_\alpha(v)| &\leq \|\nabla v\|^{\phi^+} + \|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \|(v^+)^{1-\alpha}\|_{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \text{pela desigualdade de Hölder e (1.7)} \\
&= \|\nabla v\|^{\phi^+} + \|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \|v^+\|_1^{1-\alpha} \\
&\leq \|\nabla v\|^{\phi^+} + \|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \|v\|_1^{1-\alpha} \\
&\leq \|\nabla v\|^{\phi^+} + C\|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \|\nabla v\|^{1-\alpha}, \qquad \text{pois } W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Temos também se $\|\nabla v\| \leq 1$ então

$$|J_\alpha(v)| \leq \|\nabla v\|^{\phi^-} + C\|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \|\nabla v\|^{1-\alpha}.$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned}
J_\alpha(v) &\geq \|\nabla v\|^{\phi^-} - C\|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \|v\|, \quad \text{se } \|\nabla v\| \geq 1, \\
J_\alpha(v) &\geq \|\nabla v\|^{\phi^+} - C\|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \|v\|, \quad \text{se } \|\nabla v\| \leq 1.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Logo, como $0 < 1 - \alpha < 1 < \phi^-$, segue que a função $p(t) = t^{\phi^\pm} - C\|f\|_{\frac{1}{\alpha}} t^{1-\alpha}$ é limitada inferiormente em $\mathbb{R}^+$ e, então,

$$\mu := \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} J_\alpha(v) > -\infty. \tag{1.31}$$

Sejam $t > 0$ e $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega (v^+)^{1-\alpha} f \, dx > 0.$$

Assim, para

$$\phi_1 = \begin{cases} \phi^-, & \text{se} \quad \|\nabla(tv)\|_\Phi \leq 1, \\ \phi^+, & \text{se} \quad \|\nabla(tv)\|_\Phi \geq 1, \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned}
J_\alpha(tv) &= \int_\Omega \Phi(t|\nabla v|) \, dx - \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \int_\Omega (v^+)^{1-\alpha} f \, dx \\
&\leq t^{\phi_1} \|\nabla v\|_\Phi^{\phi_1} - \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \int_\Omega (v^+)^{1-\alpha} f \, dx \\
&= t^{1-\alpha} \left[t^{\phi_1 - (1-\alpha)} \|\nabla v\|_\Phi^{\phi_1} - \frac{1}{1-\alpha} \int_\Omega (v^+)^{1-\alpha} f \, dx \right],
\end{aligned}$$

e, então, a função $t \mapsto J_\alpha(tv)$ é negativa para valores de t entre suas duas raízes. Portanto, $\mu < 0$.

Seja $\{w_k\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} J_\alpha(w_k) = \mu. \tag{1.32}$$

Logo, a sequência $(J(w_k))_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}$ e, então, segue de (1.30) que $\{w_k\}$ é uma sequência limitada em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Como $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é reflexivo, (w_k) possui uma subsequência, que vamos continuar denotando por (w_k), fracamente convergente em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Passando possivelmente a uma subsequência, temos que existe $w \in L^1(\Omega)$ tal que $w_k \to w$ em $L^1(\Omega)$. Note que,

$$w_k^+ = \frac{1}{2}(|w_k| + w_k) \;\to\; \frac{1}{2}(|w| + w) = w^+ \;\text{ em } L^1(\Omega) \tag{1.33}$$

quando $k \to \infty$. Como

$$|a^\beta - b^\beta| \leq |a-b|^\beta, \quad \forall\, a, b \geq 0,\; 0 < \beta \leq 1, \tag{1.34}$$

temos

$$\begin{aligned}
& \left|\int_\Omega [(w_k^+)^{1-\alpha} - (w^+)^{1-\alpha}]\; f\; dx\right| \\
\leq\; & \int_\Omega |(w_k^+)^{1-\alpha} - (w^+)^{1-\alpha}|\; |f|\; dx \\
\leq\; & \int_\Omega |w_k^+ - w^+|^{1-\alpha}\; |f|\; dx, && \text{por (1.34)} \\
\leq\; & \|(w_k^+ - w^+)^{1-\alpha}\|_{\frac{1}{1-\alpha}}\; \|f\|_{\frac{1}{\alpha}}, && \text{pela desigualdade de Hölder} \\
=\; & \|w_k^+ - w^+\|_1^{1-\alpha}\; \|f\|_{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Logo, segue de (1.33) que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega (w_k^+)^{1-\alpha} f\; dx \;=\; \int_\Omega (w^+)^{1-\alpha} f\; dx. \tag{1.35}$$

A convergência fraca implica

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla w|)\; dx \;\leq\; \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \Phi(|\nabla w_k|)\; dx. \tag{1.36}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
J_\alpha(w) &= \int_\Omega \Phi(|\nabla w|)\,dx - \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (w^+)^{1-\alpha} f\,dx \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \Phi(|\nabla w_k|)\,dx - \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (w^+)^{1-\alpha} f\,dx \\
&= \liminf_{k\to\infty} \left(\int_\Omega \Phi(|\nabla w_k|)\,dx - \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (w_k^+)^{1-\alpha} f\,dx\right) \\
&+ \tfrac{1}{1-\alpha} \lim_{k\to\infty} \left(\int_\Omega (w_k^+)^{1-\alpha} f\,dx - \int_\Omega (w^+)^{1-\alpha} f\,dx\right) \\
&= \liminf_{k\to\infty} J_\alpha(w_k) + \frac{1}{1-\alpha}\lim_{k\to\infty} \left(\int_\Omega (w_k^+)^{1-\alpha} f\,dx - \int_\Omega (w^+)^{1-\alpha} f\,dx\right) \\
&= \mu + 0 = \mu.
\end{aligned}$$

Mostramos, em particular que J_α é semicontínuo inferiormente. Por outro lado,

$$\mu = \inf_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} J_\alpha(v) \leq J_\alpha(w).$$

Logo, $J_\alpha(w) = \mu$ e, então, w minimiza J_α.

w é não negativo.

Sabemos que

$$\nabla w^+ = \begin{cases} \nabla w, & \text{em} \quad w \geq 0, \\ 0, & \text{em} \quad w < 0, \end{cases}$$

e

$$\nabla w^- = \begin{cases} 0, & \text{em} \quad w \geq 0, \\ -\nabla w, & \text{em} \quad w < 0. \end{cases}$$

Logo, se $\nabla w^- \not\equiv 0$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(|\nabla w|)\,dx &= \int_{w\geq 0} \Phi(|\nabla w|)\,dx + \int_{w<0} \Phi(|\nabla w|)\,dx \\
&= \int_\Omega \Phi(|\nabla w^+|)\,dx + \int_\Omega \Phi(|\nabla w^-|)\,dx \\
&> \int_\Omega \Phi(|\nabla w^+|)\,dx
\end{aligned}$$

e, então,

$$J_\alpha(w^+) < J_\alpha(w), \tag{1.37}$$

o que contradiz o fato de w ser um minimizador de J_α. Portanto,

$$w^- \equiv 0. \tag{1.38}$$

Assim, $w \geq 0$.

Unicidade.

Sejam w_1 e w_2 minimizadores de J_α e suponhamos que

$$D := \{x \in \Omega \ / \ w_1(x) \neq w_2(x)\}$$

tem medida positiva. Como já mostramos w_1 e w_2 são não negativos. Sejam $a, b \geq 0$ são tais que $a + b = 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mu &\leq J_\alpha(aw_1 + bw_2) \\
&= \int_\Omega \Phi(|a\nabla w_1 + b\nabla w_2|)\ dx - \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (aw_1 + bw_2)^{1-\alpha} f\ dx \\
&\leq \int_\Omega (a\Phi(|\nabla w_1|) + b\Phi(|\nabla w_2|)\ dx - \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (aw_1 + bw_2)^{1-\alpha} f\ dx, \quad \text{pois } \Phi \text{ é convexa} \\
&< \int_\Omega (a\Phi(|\nabla w_1|) + b\Phi(|\nabla w_2|)\ dx - \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega (aw_1^{1-\alpha} + bw_2^{1-\alpha}) f\ dx, \quad \text{pela Observação 1.10} \\
&= aJ_\alpha(w_1) + bJ_\alpha(w_2) \\
&= (a+b)\ \mu, \qquad \text{por (1.31)} \\
&= \mu
\end{aligned}$$

Assim, chegamos ao absurdo $\mu < \mu$. Logo, $|D| = 0$ e $w_1 = w_2$ q.t.p. em Ω. □

Lema 1.12. *A solução u_n encontrada no Lema 1.3 é o único minimizador positivo do funcional*

$$H_n(v) = \int_\Omega \Phi(|\nabla v|)\ dx - \int_\Omega G_n(v(x))\ f_n(x)\ dx$$

em que

$$\begin{aligned}
G_n(t) &= \int_0^t \left(s^+ + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} ds \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(t + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}, & se \quad t \geq 0, \\ \left(\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} t, & se \quad t < 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Demonstração. H_n **é de classe** C^1
Defina

$$g(x,s) = \frac{f_n(x)}{\left(s^+ + \frac{1}{n}\right)^\alpha}. \tag{1.40}$$

Note que, para todo $s \in \mathbb{R}$, a função $x \mapsto g(x,s)$ é Lebesgue mensurável, pois $f_n \in L^1(\Omega)$. Temos também que para quase todo $x \in \Omega$ a função $s \mapsto g(x,s)$ é contínua em $\mathbb{R}$. Portanto, g definida em (1.40) é uma função de Carathéodory.

Temos que g satisfaz a condição de crescimento

$$|g(x,s)| \leq C|s|^{q-1} + b(x), \quad x \in \Omega, \ s \in \mathbb{R} \tag{1.41}$$

em que $C \geq 0$ é uma constante, $1 < q < p^*$ e $b \in L^{q'}(\Omega)$, pois

$$\begin{aligned} |g(x,s)| &= \frac{f_n(x)}{\left(s^+ + \frac{1}{n}\right)^\alpha} \\ &\leq \frac{n}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha} \\ &= n^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Portanto, o funcional $H_n : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e

$$\langle H_n'(v), \phi\rangle = \int_\Omega \phi(|\nabla v|)\nabla v \nabla \phi \, dx - \int_\Omega g(x,v)\phi \, dx, \quad \forall \, \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

H_n possui um minimizador

Note que

$$G_n(v(x)) = \frac{1}{1-\alpha}\left(v(x) + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(v^+(x) + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}, \quad \text{para } v(x) \geq 0,$$

$$G_n(v(x)) = \left(\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} v(x) \leq 0 \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(v^+(x) + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}, \quad \text{para } v(x) \leq 0.$$

Assim,

$$G_n(v) \leq \frac{1}{1-\alpha}\left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}, \tag{1.42}$$

o que, pela desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev, implica

$$\begin{aligned} \int_\Omega G_n(v) f_n \, dx &\leq \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega \left(v^+ + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} f \, dx \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega \left(v^+ + 1\right)^{1-\alpha} f \, dx \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha}\| f\|_{\frac{1}{\alpha}} \|v+1\|_1^{1-\alpha} \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha}\| f\|_{\frac{1}{\alpha}} (\|v\|_1 + |\Omega|)^{1-\alpha} \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha}\| f\|_{\frac{1}{\alpha}} (C\|\nabla v\|_p + |\Omega|)^{1-\alpha} \\ &= C_1(\|\nabla v\|_p + C_2)^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Logo,

$$\begin{aligned} H_n(v) &= \int_\Omega \Phi(|\nabla v|) \, dx - \int_\Omega G_n(v(x)) \, f_n(x) \, dx \\ &\geq \min\left\{\|\nabla v\|^{\phi^-}, \|\nabla v\|^{\phi^+}\right\} - C_1(\|\nabla v\|_p + C_2)^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Uma vez que a função $t \in [0, +\infty) \mapsto t^{\phi^{\pm}} - C_1(t + C_2)^{1-\alpha}$ é limitada inferiormente, temos que

$$\lambda \ := \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} H_n(v) \ > \ -\infty.$$

Portanto, existe uma sequência $\{w_k\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que

$$H_n(w_k) \to \lambda \text{ quando } k \to \infty. \tag{1.44}$$

Segue de (1.44) que w_k é limitada em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, pois

$$\lim_{t \to +\infty} \left[t^{\phi^{\pm}} - C_1(t + C_2)^{1-\alpha} \right] \ = \ +\infty.$$

Como $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é reflexivo, passando a uma subsequência se necessário, $\{w_k\}$ é fracamente convergente em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Passando novamente a uma subsequência, existe $w \in L^1(\Omega)$ tal que

$$w_k \to w \text{ em } L^1(\Omega), \text{ quando } k \to \infty.$$

Note que

$$G_n'(t) = \left(t^+ + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha} \leq \left(\frac{1}{n} \right)^{-\alpha} = n^{\alpha}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{1.45}$$

Assim, G_n é Lipschitziana e, então,

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega G_n(w_k) f_n \, dx - \int_\Omega G_n(w) f_n \, dx \right| \ &\leq \ n \int_\Omega |G_n(w_k) - G_n(w)| \, dx, && \text{pois } |f_n| \leq n \\
&\leq \ n^{\alpha+1} \int_\Omega |w_k - w| \, dx, && \text{por (1.45)} \\
&= \ n^{\alpha+1} \|w_k - w\|_1 \\
&\leq \ n^{\alpha+1} C \|w_k - w\|_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)}, && \text{pela imersão de Sobolev.}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega G_n(w_k) f_n \, dx \ = \ \int_\Omega G_n(w) f_n \, dx,$$

o que implica

$$\begin{aligned}
H_n(w) \ &\leq \ \liminf_{k \to \infty} \int_\Omega \Phi(|\nabla w_k|) \, dx - \int_\Omega G_n(w) f_n \, dx \\
&= \ \liminf_{k \to \infty} \left(\int_\Omega \Phi(|\nabla w_k|) \, dx - \int_\Omega G_n(w_k) f_n \, dx \right) \\
&= \ \liminf_{k \to \infty} H_n(w_k) \\
&= \ \lambda
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Logo, w minimiza H_n.

Uma vez que $G_n(w) \leq G_n(w^+)$, podemos concluir que $\nabla w^- \equiv 0$, ou seja, $w \geq 0$.

Como H_n é de classe C^1 e w é um minimizador, concluímos que w é um ponto crítico de H_n. Portanto, w é solução de (1.11), implicando que $w = u_n$ e, então, u_n minimiza H_n.

Unicidade

Já mostramos que H_n é de classe C^1 e, portanto, todo minimizador de H_n é um ponto crítico. Mostramos também que todo ponto crítico de H_n é uma solucão de (1.11). Logo, todo minimizador de H_n é uma solucão de (1.11). Além disso, segue do Lema 1.3 que o problema (1.11) possui uma única solução. Portanto, H_n possui um único minimizador, o qual é u_n. □

Teorema 1.13. *A solução u encontrada no Teorema 1.6 minimiza J_α.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} G_n(t) &= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}, & \text{se} \quad t \geq 0, \\ 0, & \text{se} \quad t < 0. \end{cases} \\ &= \frac{(t^+)^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) G_n(u_n(x)) = \frac{1}{1-\alpha} f(x) u(x)^{1-\alpha}, \quad x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

Além disso, como $u_n \leq u$ e G_n é crescente, temos

$$\begin{aligned} |f_n(x) G_n(u_n(x))| &\leq f(x)\, |G_n(u_n(x))| \\ &\leq f(x)\, |G_n(u(x))| \\ &\leq \frac{f(x)}{1-\alpha} \left(u(x) + \frac{1}{n} \right)^{1-\alpha} \\ &\leq \frac{f(x)}{1-\alpha} \left(u(x) + 1 \right)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|(u+1)^{1-\alpha} f\|_1 &\leq \|u+1\|_1^{1-\alpha}\, \|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \\ &\leq \left(\|u\|_1 + |\Omega| \right)^{1-\alpha}\, \|f\|_{\frac{1}{\alpha}} \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) G_n(u_n(x))\, dx = \frac{1}{1-\alpha} \int_\Omega f(x) u^{1-\alpha}\, dx. \tag{1.47}$$

Analogamente, se $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$|f_n(x)G_n(v(x))| \ \leq \ f(x)\ |G_n(v^+(x))| \ \leq \ \frac{f(x)}{1-\alpha}\left(v^+(x)+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \ \in \ L^1(\Omega)$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)G_n(v(x))\ dx = \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega f(x)(v^+(x))^{1-\alpha}\ dx. \tag{1.48}$$

Como $u_n \geq 0$ e u_n é um minimizador de H_n, temos

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n|)\ dx - \int_\Omega f_n(x)G_n(u_n(x))\ dx \ \leq \ \int_\Omega \Phi(|\nabla v|)\ dx - \int_\Omega f_n(x)G_n(v(x))\ dx.$$

Daí, como sabemos que $u_n \to u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ - veja demonstração do Teorema 1.6 - temos de (1.47) e (1.48) que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\ dx - \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega f(x)u^{1-\alpha}\ dx \ \leq \ \int_\Omega \Phi(|\nabla v|)\ dx - \int_\Omega f(x)(v^+(x))^{1-\alpha}\ dx$$

ou seja,

$$J_\alpha(u) \leq J_\alpha(v), \quad \forall\ v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

$\square$

Capítulo 2

Comportamento assintótico para o problema singular

Para $0 \leq \alpha \leq 1$ e $f \in L^1(\Omega)$ tal que $f > 0$, estudamos o comportamento assintótico, quando $n \to \infty$, da solução u_n da equação

$$-\Delta_{\Phi_n} u = \frac{f}{u^\alpha}. \tag{2.1}$$

No Capítulo 1, já provamos que tal solução existe.

Neste e no próximo capítulo vamos supor

1. $$\phi_n^- \to \infty \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{2.2}$$

2. Existem duas constantes $q^+ \geq q^- \geq 1$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_n^\pm}{n} = q^\pm. \tag{2.3}$$

3. Existem duas constantes $a \geq b > 0$ tais que

$$a \leq \phi_n(1) \leq b, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Listamos alguns exemplos de funções ϕ_n que satisfazem tais condições.

Exemplo 2.1. Para $\phi_n(t) = t^{n-2} + t^{\theta n-2}$, com $\theta > 1$, temos $\phi_n^+ = \theta\phi_n^-$, $\beta = \theta$, $a = b = 2$.

Exemplo 2.2. Para $\phi_n(t) = t^{n-2}\ln(1+t^n)$, temos $\phi_n^+ = 2\phi_n^-$, $\beta = 2$, $a = b = \log 2$.

Exemplo 2.3. Para

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{n-1}}{\ln(1+t^n)} & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

temos $\phi_n^+ = \phi_n^+ + 1$, $\beta = 1 + \epsilon$ (para qualquer $\epsilon > 0$), $a = b = \frac{1}{\ln 2}$.

Segue de (2.3) que para n suficientemente grande e $\beta = \frac{q^+}{q^-} + 1$ vale

$$1 \leq \frac{\phi_n^+}{\phi_n^-} \leq \beta. \tag{2.5}$$

Segue de (2.4) que

$$\left(\frac{a}{\phi_n^+}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \Phi_n(1)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{b}{\phi_n^-}\right)^{\frac{1}{n}}$$

e, então, usando (2.3) obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(1)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Logo, (2.3) implica que existem $\tilde{a}, \tilde{b} > 0$ tais que

$$\tilde{a} \leq \Phi_n(1)^{\frac{1}{n}} \leq \tilde{b}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\phi_n^+} &\leq \frac{\phi_n(1)}{\phi_n^+} && \text{por (2.4)},\\
&\leq \Phi_n(1) && \text{por (6)},\\
&\leq \frac{\phi_n(1)}{\phi_n^-} && \text{por (6)},\\
&\leq \frac{b}{\phi_n^-} && \text{por (2.4)}.
\end{aligned}$$

Logo, usando (2.5) obtemos

$$\left(\frac{\phi_n^-}{b} + |\Omega|\right)^{\frac{1}{\phi_n^-}} \leq \left(\frac{1}{\Phi_n(1)} + |\Omega|\right)^{\frac{1}{\phi_n^-}} \leq \left(\frac{\phi_n^+}{a} + |\Omega|\right)^{\frac{1}{\phi_n^-}} \leq \left(\frac{\phi_n^+}{a} + |\Omega|\right)^{\frac{\beta}{\phi_n^+}},$$

o que implica

$$\lim_{n\to\infty} C_{\Phi_n}^- = 1, \tag{2.7}$$

em que

$$C_{\Phi_n}^- = \left(\frac{1}{\Phi_n(1)} + |\Omega|\right)^{\frac{1}{\phi_n^-}}. \tag{2.8}$$

Esta constante (veja Teorema A.19) satisfaz

$$\|\nabla v\|_{\phi_n^-} \leq C_{\Phi_n}^- \|\nabla v\|_{\Phi_n}, \qquad \forall\, v \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega).$$

Apresentamos a seguir um resultado que usaremos na próxima seção e também no Capítulo 3.

Lema 2.4. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $v_n \in W_0^{1,\phi_n^-}(\Omega)$ uma sequência de funções não negativas.*

Suponha que

$$\limsup_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_{\phi_n^-} \leq C, \tag{2.9}$$

para uma constante C. *Então, existe uma subsequência* v_{n_j} *e uma função* $v_\infty \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ *tal que* $v_{n_j} \to v_\infty$ *uniformemente em* $\overline{\Omega}$. *Além disso,*

$$\|\nabla v_\infty\|_\infty \leq C, \quad \text{ e } \quad 0 \leq v_\infty \leq Cd \;\text{ em }\; \Omega, \tag{2.10}$$

em que

$$d = d(\cdot, \partial\Omega),$$

é a função distância até a fronteira.

Demonstração. Seja $r \geq N$. Então, $\phi_n^- > r$ para n suficientemente grande. Segue da Desigualdade de Hölder e do Teorema A.19 que

$$\|\nabla v_n\|_r \;\; \leq \;\; |\Omega|^{\frac{1}{r} - \frac{1}{\phi_n^-}} \|\nabla v_n\|_{\phi_n^-}$$

e, então, usando (2.9) e a imersão compacta [1] $W_0^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, concluímos da desigualdade anterior que existe $v_\infty \in W_0^{1,r}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que (a menos de subsequência) $v_n \rightharpoonup v_\infty$ fracamente em $W_0^{1,r}(\Omega)$ e uniformemente em $\overline{\Omega}$. Além disso, fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$\|\nabla v_\infty\|_\infty \leq C|\Omega|^{\frac{1}{r}}.$$

Fazendo $r \to \infty$, obtemos

$$\|\nabla v_\infty\|_\infty \leq C. \tag{2.11}$$

Seja $x \in \Omega$. Como a fronteira $\partial\Omega$ é compacta, existe $y_x \in \partial\Omega$ tal que

$$d(x) = |x - y_x|.$$

Temos,

$$v_\infty(y_x) = 0,$$

pois $v_\infty \in W_0^{1,r}(\Omega)$. Portanto, segue de (2.11) que

$$\begin{aligned} v_\infty(x) &= |v_\infty(x) - v_\infty(y_x)| \\ &\leq C|x - y_x| \\ &= Cd(x). \end{aligned}$$

□

[1] Temos $W_0^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{1-\frac{N}{r}}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, em que $\hookrightarrow$ denota uma imersão contínua e $\hookrightarrow\hookrightarrow$ indica uma imersão compacta. Portanto, $W_0^{1,r}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

2.1 Comportamento assintótico das soluções para $\mathbf{0} \leq \alpha \leq \mathbf{1}$

Nesta seção, estudaremos o comportamento das soluções quando $n \to \infty$ de

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_n} u = \frac{f}{u^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.12}$$

em que $0 \leq \alpha \leq 1$, $f \in L^1(\Omega) \setminus \{0\}$, $f \geq 0$, usando um problema não singular. Seja u_n a única solução de (2.12), a qual foi garantida no Teorema 1.6. Segue do Teorema A.19 que

$$\|\nabla u_n\|_{\phi_n^-} \leq C_{\Phi_n}^- \|\nabla u_n\|_{\Phi_n} \tag{2.13}$$

para

$$C_{\Phi_n}^- = \left(\frac{1}{\Phi_n(1)} + |\Omega| \right)^{\frac{1}{\phi_n^-}}. \tag{2.14}$$

Vamos provar, a seguir, que

$$\limsup_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_{\phi_n^-} \leq 1. \tag{2.15}$$

Temos,

$$\begin{aligned}
& \min\left\{ \left(\frac{\|\nabla u_n\|_{\phi_n^-}}{C_{\Phi_n}^-} \right)^{\phi_n^-}, \left(\frac{\|\nabla u_n\|_{\phi_n^-}}{C_{\Phi_n}^-} \right)^{\phi_n^+} \right\} \\
\leq\; & \min\left\{ \|\nabla u_n\|_{\Phi_n}^{\phi_n^-}, \|\nabla u_n\|_{\Phi_n}^{\phi_n^+} \right\}, && \text{por (2.13)} \\
\leq\; & \int_\Omega \Phi(|\nabla u_n|)\, dx, && \text{por (1.8)} \\
\leq\; & \frac{1}{\phi_n^-} \int_\Omega \phi_n(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2\, dx && \text{por (1.4)} \\
\leq\; & \int_\Omega \phi_n(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2\, dx && \text{pois } \tfrac{1}{\phi_n^-} \leq 1 \\
=\; & \int_\Omega f u_n^{1-\alpha}\, dx && \text{usando } u_n \text{ como função teste} \\
\leq\; & \|f\|_1\, \|u_n\|_\infty^{1-\alpha}, \\
\leq\; & \|f\|_1 \frac{\|\nabla u_n\|_{\phi_n^-}^{1-\alpha}}{(S_{\phi_n^-})^{\frac{1-\alpha}{\phi_n^-}}},
\end{aligned} \tag{2.16}$$

com

$$S_{\phi_n^-} := \min\left\{ \frac{\|\nabla u\|_{\phi_n^-}^{\phi_n^-}}{\|u\|_\infty^{\phi_n^-}}, u \in W_0^{1,\phi_n^-}(\Omega) \setminus \{0\} \right\}.$$

Se $\|\nabla u_n\|_{\phi_n^-} \leq C_{\Phi_n}^-$ para uma subsequência, então segue de (2.7) que

$$\limsup_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_{\phi_n^-} \;\leq\; \limsup_{n\to\infty} C_{\Phi_n}^- \;=\; 1.$$

Se $\|\nabla u_n\|_{\phi_n^-} \geq C^-_{\Phi_n}$ para uma subsequência, então

$$\begin{aligned}\left(\frac{\|\nabla u_n\|_{\phi_n^-}}{C^-_{\Phi_n}}\right)^{\phi_n^-} &= \min\left\{\left(\frac{\|\nabla u_n\|_{\phi_n^-}}{C^-_{\Phi_n}}\right)^{\phi_n^-}, \left(\frac{\|\nabla u_n\|_{\phi_n^-}}{C^-_{\Phi_n}}\right)^{\phi_n^+}\right\}\\ &\leq \|f\|_1 \left(S_{\phi_n^-}\right)^{-\frac{1-\alpha}{\phi_n^-}} \|\nabla u_n\|^{1-\alpha}_{\phi_n^-}\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\nabla u_n\|_{\phi_n^-} \leq \left(C^-_{\Phi_n}\right)^{\frac{\phi_n^-}{\phi_n^- -(1-\alpha)}} \left(\|f\|_1 \left(S_{\phi_n^-}\right)^{-\frac{1-\alpha}{\phi_n^-}}\right)^{\frac{1}{\phi_n^- -(1-\alpha)}} \tag{2.17}$$

e, portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_{\phi_n^-} \leq 1.$$

Assim, usando (2.7), obtemos (2.15).

Logo, segue do Lema 2.4 que, a menos de subsequência, existe $u_\infty \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ tal que $u_n \to u_\infty$ uniforme em $\overline{\Omega}$ e

$$\|\nabla u_\infty\|_\infty \leq 1, \quad \text{e} \quad 0 \leq u_\infty \leq d \ \text{ em } \ \Omega. \tag{2.18}$$

Agora vamos mostrar que u_n converge uniformemente em $\overline{\Omega}$ para d.

Antes ressaltamos que a função u_n também é solução do problema não singular

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_n} u = \frac{f(x)}{u_n^\alpha} & \text{em } \Omega,\\ u > 0 & \text{em } \Omega,\\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega,\end{cases} \tag{2.19}$$

e, portanto, minimiza o funcional

$$J_n(u) = \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u|)\, dx - \int_\Omega \frac{f}{u_n^\alpha} u \, dx.$$

Observação 2.5. O funcional linear

$$u \mapsto A_n(u) := \int_\Omega \frac{f}{u_n^\alpha} u\, dx$$

é bem definido e está no dual de $W_0^{1,\Phi_n}(\Omega)$. De fato, segue de (1.23) que

$$|A_n(u)| \leq C_n \|\nabla u\|_{\Phi_n} \quad \forall\, u \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega),$$

em que

$$C_n := \max\left\{1, K_n \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n|)\, dx\right\}$$

e K_n vem da condição Δ_2 para Φ_n.

Teorema 2.6. *Sejam $f \in L^1(\Omega) \setminus \{0\}$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. A sequência (u_n) das soluções do problema (2.12) converge uniformemente em $\overline{\Omega}$ para a função distância d.*

Demonstração. Como $J_n(u_n) \leq J_n(d)$, o que implica

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{fd}{u_n^\alpha}\, dx - \int_\Omega f u_n^{1-\alpha}\, dx &\leq \Phi_n(1)|\Omega| - \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n|)\, dx \\ &\leq \Phi_n(1)|\Omega| \\ &\to 0, \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, pois $|\nabla d| = 1$ q.t.p. e $\Phi_n(1) \to 0$. Logo, da convergência uniforme,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{fd}{u_n^\alpha}\, dx \leq \int_\Omega f u_\infty^{1-\alpha}\, dx.$$

Por outro lado, o Lema de Fatou implica

$$\int_\Omega \frac{fd}{u_\infty^\alpha}\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{fd}{u_n^\alpha}\, dx$$

e, então,

$$\int_\Omega \frac{f(d - u_\infty)}{u_\infty^\alpha}\, dx \leq 0.$$

Portanto, usando a última desigualdade de (2.18), obtemos

$$u_\infty = d.$$

Como toda subsequência convergente de (u_n) tem o mesmo limite uniforme d, concluímos que (u_n) converge uniformemente para d em $\overline{\Omega}$. □

2.2 Uma prova alternativa para o caso $0 \leq \alpha < 1$

Na Seção 2.1 provamos que $u_\infty = d$ e dividimos a demonstração deste fato em duas partes. Na primeira, provamos que $u_\infty \leq d$ e usamos o funcional energia associado a um problema não singular para provar a desigualdade inversa $u_\infty \geq d$. Nesta seção, usando o funcional energia associado ao problema singular, visto na Seção 1.1, vamos dar uma outra demonstração dessa desigualdade para o caso $0 \leq \alpha < 1$.

Considere

$$J_\alpha(u) = \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u|)\, dx - \frac{1}{1-\alpha} \int_\Omega f u^{1-\alpha}\, dx.$$

Pelo Teorema 1.13, u_n minimiza J_α para $0 < \alpha < 1$. Para $\alpha = 0$, este resultado já é conhecido, pois nesse caso o funcional é de classe C^1. Portanto,

$$\int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n|)\, dx - \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega f u_n^{1-\alpha}\, dx \leq \int_\Omega \Phi_n(|\nabla d|)\, dx - \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega f d^{1-\alpha}\, dx$$

e assim

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega f(x)(d^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha})\, dx &\leq \Phi_n(1)|\Omega| - \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n|)\, dx \\ &\leq \Phi_n(1)|\Omega| \\ &\to 0, \qquad \text{quando} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_\Omega f d^{1-\alpha}\, dx \leq \int_\Omega f u_\infty^{1-\alpha}\, dx$$

e consequentemente, usando que $u_\infty \leq d$, obtemos

$$d = u_\infty, \tag{2.20}$$

isto é,

$$u_\infty = d(\cdot, \partial\Omega).$$

Observe que provamos que toda subsequência de (u_n) possui uma subsequência que converge para a função $u_\infty = d(\cdot, \partial\Omega)$. Portanto, $u_n \to u_\infty$ uniformemente em Ω sem precisar passar a subsequência.

Assim, provamos o seguinte resultado.

Teorema 2.7. *Sejam $f \in L^1(\Omega) \setminus \{0\}$ e $0 \leq \alpha < 1$. A sequência (u_n) das soluções do problema (2.12) converge uniformemente em $\overline{\Omega}$ para $d(\cdot, \partial\Omega)$ função distância em relação a fronteira.*

Capítulo 3

Comportamento assintótico para o problema de minimização com vínculo

Partimos de um problema de minimização com vínculo e deduzimos que o minimizador é uma solução do problema

$$-\Delta_{\Phi_n} u = \Lambda_n \frac{f}{u^\alpha}. \tag{3.1}$$

Então descrevemos o comportamento assintótico das soluções. Para isso vamos assumir, além de (2.2)-(2.4), as duas seguintes hipóteses:

1. As funções $b_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$b_n(t) := \frac{\phi_n'(t)}{t} \quad \text{para } t > 0, \qquad b_n(0) := 0 \tag{3.2}$$

   são contínuas.

2. O limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\phi_n'(|t|)}{t} \right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \text{existe para cada} \ \ t > 0. \tag{3.3}$$

   Seja

$$\gamma_1(t) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\phi_n'(|t|)}{t} \right)^{\frac{1}{n}} & \text{se } \ t > 0, \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

   Observe que os exemplos do início do Capítulo 2 satisfazem também tais condições. No Exemplo 2.1,

$$\gamma_1(t) = \max\{t, t^\theta\}.$$

   No Exemplo 2.2,

$$\gamma_1(t) = \min\{t, t^2\}.$$

No Exemplo 2.3,

$$\gamma_1(t) = t.$$

Antes de provarmos os principais resultados deste capítulo, vamos provar algumas das propriedades da função γ_1 que foram assumidas como hipóteses em outros artigos. Apresentamos primeiro a igualdade entre as funções γ_1 e γ_2 definidas em [7].

Proposição 3.1. *Para γ_2 dada em (15), isto é,*

$$\gamma_2(t) := \lim_{n\to\infty} [\phi_n(t)t]^{\frac{1}{n}}, \qquad t \neq 0,$$

temos

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = \lim_{n\to\infty} [\phi_n(t)]^{\frac{1}{n}}, \qquad \forall\ t \geq 0. \tag{3.4}$$

Demonstração. Observe que, para $t = 0$, essa igualdade é imediata, pois $\phi_n(0) = 0$. Vamos provar então para $t > 0$. Segue de (1.5) que para $\phi_n^- > 2$

$$(\phi_n^- - 2)\frac{1}{t} \leq \frac{\phi_n'(t)}{\phi_n(t)} \leq (\phi_n^+ - 2)\frac{1}{t},$$

isto é,

$$(\phi_n^- - 2)\frac{\phi_n(t)}{t} \leq \phi_n'(t) \leq (\phi_n^+ - 2)\frac{\phi_n(t)}{t}, \tag{3.5}$$

ou ainda,

$$(\phi_n^- - 2)^{\frac{1}{n}}\frac{\phi_n(t)^{\frac{1}{n}}}{t^{\frac{2}{n}}} \leq \left(\frac{\phi_n'(t)}{t}\right)^{\frac{1}{n}} \leq (\phi_n^+ - 2)^{\frac{1}{n}}\frac{\phi_n(t)^{\frac{1}{n}}}{t^{\frac{2}{n}}}. \tag{3.6}$$

Note que para $\phi_n^\pm > 2$ temos

$$\frac{\phi_n^\pm}{2} \ \leq\ \phi_n^\pm - 2 \ \leq\ \phi_n^\pm.$$

Assim,

$$\left(\frac{\phi_n^\pm}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \ \leq\ (\phi_n^\pm - 2)^{\frac{1}{n}} \ \leq\ (\phi_n^\pm)^{\frac{1}{n}},$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\left[(\phi_n^\pm)^{\frac{1}{\phi_n^\pm}}\right]^{\frac{\phi_n^\pm}{n}} \ \leq\ (\phi_n^\pm - 2)^{\frac{1}{n}} \ \leq\ \left[(\phi_n^\pm)^{\frac{1}{\phi_n^\pm}}\right]^{\frac{\phi_n^\pm}{n}}$$

e, então,

$$(\phi_n^\pm - 2)^{\frac{1}{n}} \ \to\ 1, \qquad \text{quando } n \to \infty.$$

Logo, segue de (3.6) que $\left(\phi_n(t)^{\frac{1}{n}}\right)$ também converge para $\gamma_1(t)$ uniformemente nos intervalos fechados de $(0,\infty)$. Além disso, segue de (3.5) que

$$\frac{(\phi_n^- - 2)^{\frac{1}{n}}}{t^{\frac{3}{n}}}[\phi_n(t)t]^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{\phi_n'(t)}{t}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{(\phi_n^+ - 2)^{\frac{1}{n}}}{t^{\frac{3}{n}}}[\phi_n(t)t]^{\frac{1}{n}}.$$

Assim, para a função γ_2 dada em (15), temos

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

□

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$\rho_n(t) = \lim_{n\to\infty} [\phi_n(t)t]^{\frac{1}{n}}$$

Lema 3.2. *Para $t > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi_n^- > 2$ vale*

$$\frac{\min\{t, t^\beta\}}{t^{\frac{2}{\phi_n^-}}} \leq \frac{\rho_n(t)}{\rho_n(1)} \leq \frac{\max\{t, t^\beta\}}{t^{\frac{2}{\phi_n^+}}} \tag{3.7}$$

e

$$\left(1 - \frac{2}{\phi_n^-}\right) \frac{\min\{t, t^\beta\}}{t^{1+\frac{2}{\phi_n^-}}} \leq \frac{\rho_n'(t)}{\rho_n(1)} \leq \left(\beta - \frac{2}{\phi_n^-}\right) \frac{\max\{t, t^\beta\}}{t^{1+\frac{2}{\phi_n^-}}} \tag{3.8}$$

Demonstração. Note que $\frac{\rho_n'(t)}{\rho_n(t)} = \frac{d}{dt} \ln \phi_n(t)$. Além disso, segue de (1.5) que para $\phi_n^- > 2$ e $t > 0$ vale

$$(\phi_n^- - 2)\frac{1}{t} \leq \frac{\phi_n'(t)}{\phi_n(t)} \leq (\phi_n^+ - 2)\frac{1}{t}. \tag{3.9}$$

Assim, integrando esta desigualdade obtemos

$$(\phi_n^- - 2) \ln t\Big|_1^t \;\leq\; \ln \phi_n(t)\Big|_1^t \;\leq\; (\phi_n^+ - 2) \ln t\Big|_1^t, \qquad t \geq 1,$$

e

$$(\phi_n^- - 2) \ln t\Big|_t^1 \;\leq\; \ln \phi_n(t)\Big|_t^1 \;\leq\; (\phi_n^+ - 2) \ln t\Big|_t^1, \qquad 0 < t \leq 1.$$

Portanto,

$$\min\left\{t^{\phi_n^- - 2}, t^{\phi_n^+ - 2}\right\} \;\leq\; \frac{\phi_n(t)}{\phi_n(1)} \;\leq\; \min\left\{t^{\phi_n^- - 2}, t^{\phi_n^+ - 2}\right\}, \qquad t > 0,$$

o que equivale a

$$\min \frac{\{t, t^{\frac{\phi_n^+}{\phi_n^-}}\}}{t^{\frac{2}{\phi_n^-}}} \;\leq\; \frac{\rho_n(t)}{\rho_n(1)} \;\leq\; \max \frac{\{t, t^{\frac{\phi_n^+}{\phi_n^-}}\}}{t^{\frac{2}{\phi_n^-}}}, \qquad t > 0. \tag{3.10}$$

Segue de (2.5) que

$$\min\{t, t^\beta\} \leq \min\{t, t^{\frac{\phi_n^+}{\phi_n^-}}\} \leq \max\{t, t^{\frac{\phi_n^+}{\phi_n^-}}\} \leq \max\{t, t^\beta\}, \qquad t > 0.$$

Logo, obtemos (3.7) de (3.10).

Temos também

$$\begin{aligned}\rho_n'(t) &= \frac{1}{\phi_n^-}\phi_n(t)^{\frac{1}{\phi_n^-}-1}\phi_n'(t)\\ &= \frac{1}{\phi_n^-}\rho_n(t)\frac{\phi_n'(t)}{\phi_n(t)},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho_n(t) = \phi_n^-\rho_n'(t)\frac{\phi_n(t)}{\phi_n'(t)}$$

Assim, (3.7) implica

$$\frac{\min\{t,t^\beta\}}{t^{\frac{2}{\phi_n^-}}}\frac{1}{\phi_n^-}\frac{\phi_n'(t)}{\phi_n(t)} \leq \frac{\rho_n'(t)}{\rho_n(1)} \leq \frac{\max\{t,t^\beta\}}{t^{\frac{2}{\phi_n^+}}}\frac{1}{\phi_n^-}\frac{\phi_n'(t)}{\phi_n(t)}$$

e, então, usando (3.9) obtemos (3.8). □

Proposição 3.3. *O limite em (3.3) é uniforme em todo subconjunto limitado de $(0,\infty)$, a função $\gamma_1 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é contínua, estritamente crescente e sobrejetiva. Em particular,*

$$\gamma_1(t) > 0, \qquad \forall\ t > 0.$$

Demonstração. A Proposição 3.1 implica

$$\gamma_1(t) = \lim_{n\to\infty}\rho_n(t), \qquad t \geq 0. \tag{3.11}$$

Logo, segue de (2.4) que

$$\gamma_1(1) = \lim_{n\to\infty}\phi_n(1)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Assim, pelo Lema 3.2, temos que toda subsequência de (ρ_n) é uniformemente limitada e equicontínua em cada intervalo fechado contido em $(0,\infty)$. Logo, o Teorema de Arzelá-Ascoli, existe uma subsequência de (ρ_n) que converge uniformemente em cada intervalo fechado contido em $(0,\infty)$. Segue então de (3.3) e(3.11) que, a menos de subsequência, o limite

$$\gamma_1(t) = \lim_{n\to\infty}\rho_n(t)$$

é uniforme em cada intervalo fechado contido em $(0,\infty)$ e, em particular, a função γ_1 é contínua. Fazendo $n\to\infty$ em (3.7) obtemos

$$\min\{t,t^\beta\} \leq \gamma_1(t) \leq \max\{t,t^\beta\}, \qquad t \geq 0, \tag{3.12}$$

pois para $t=0$ a desigualdade é imediata. De (3.12), temos a continuidade em $t=0$. A sobrejetividade de γ_1 também segue de (3.12).

Vamos provar agora que γ_1 é estritamente crescente. Fixemos $0 < t_1 < t_2$. Para $n \in \mathbb{N}$

com $\phi_n^- > 2$, seja $\theta_n \in (t_1, t_2)$ tal que

$$\rho_n(t_2) - \rho_n(t_1) = \rho_n'(\theta_n)(t_2 - t_1).$$

Assim, a primeira desigualdade em (3.8) implica

$$\begin{aligned} \rho_n(t_2) - \rho_n(t_1) &\geq (t_2 - t_1)\rho_n(1)\left(1 - \frac{2}{\phi_n^-}\right)\frac{1}{\theta_n^{1+\frac{2}{\phi_n^-}}}\min\{\theta_n, \theta_n^\beta\} \\ &\geq (t_2 - t_1)\rho_n(1)\left(1 - \frac{2}{\phi_n^-}\right)\frac{1}{t_2^{1+\frac{2}{\phi_n^-}}}\min\{t_1, t_1^\beta\}. \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$\rho_n(t_2) - \rho_n(t_1) \geq (t_2 - t_1)\rho_n(1)\left(1 - \frac{2}{\phi_n^-}\right)\frac{1}{t_2}\min\{t_1, t_1^\beta\} > 0.$$

Portanto, γ_1 é estritamente crescente.

Além disso, para $t > 0$, a primeira desigualdade em (3.12) implica

$$\gamma_1(t) \geq \min\{t, t^\beta\} > 0 = \gamma_1(0).$$

□

Vamos apresentar o caso $0 < \alpha < 1$ na Seção 3.1 e o caso $\alpha = 0$ na Seção 3.2.

3.1 Comportamento assintótico para $0 < \alpha < 1$

Lema 3.4. *Sejam $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, λ_1 o primeiro autovalor de $-\Delta_p$ e $\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solução positiva de*

$$\Delta_p u = \lambda_1 f u^{p-1} \quad \text{em } \Omega$$

e

$$F(u) := \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega |u|^{1-\alpha} f\, dx, \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Se $u \geq \varepsilon\varphi_1$ para algum $\varepsilon > 0$ então

$$F'(u)\eta := \int_\Omega \frac{f}{u^\alpha}\eta\, dx.$$

Demonstração. Para $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ defina

$$z(\xi) := \frac{1}{1-\alpha}\frac{d}{d\xi}\xi^{1-\alpha} = \xi^{-\alpha}$$

Consequentemente,

$$\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = \int_\Omega \left(\int_0^1 z(u+stv)f \ ds \right) v \ dx. \tag{3.13}$$

Observe que

$$\frac{d}{ds} \frac{(u(x)+stv(x))^{1-\alpha}}{1-\alpha} = (u(x)+stv(x))^{-\alpha} tv(x). \tag{3.14}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 z(u(x)+stv(x)) \ ds &= \frac{1}{tv(x)} \int_0^1 z(u(x)+stv(x)) \ tv(x) \ ds \\
&= \frac{1}{tv(x)} \int_0^1 (u(x)+stv(x))^{-\alpha} \ tv(x) \ ds && \text{por definição de } z \\
&= \frac{1}{tv(x)} \frac{1}{1-\alpha} \left[(u(x)+stv(x))^{1-\alpha} - u(x)^{1-\alpha} \right] && \text{por (3.14)} \\
&\to \frac{1}{v(x)} \frac{d}{dt} \frac{(u(x)+stv(x))^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Bigg|_{t=0} && \text{quando } t \to 0 \\
&= \frac{1}{v(x)} (u(x)+stv(x))^{-\alpha} v(x) \Bigg|_{t=0} \\
&= u(x)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^1 z(u+stv)f \ ds \ \to \ z(u(x)) \ = \ u(x)^{-\alpha} \quad \text{quando} \ \ t \to 0.$$

Temos também

$$u(x) \ \le \ \max_{0\le s\le 1} |u(x)+stv(x)|. \tag{3.15}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 z(u+stv)f \ ds &\le \int_0^1 |u(x)+stv(x)|^{-\alpha} f \ ds \\
&\le C_\alpha \left(\max_{0\le s\le 1} |u(x)+stv(x)| \right)^{-\alpha} && \text{por [14, Lema A.1]} \\
&\le C_\alpha u(x)^{-\alpha} && \text{por (3.15)} \\
&\le C_\alpha (\varepsilon \varphi_1(x))^{-\alpha} \\
&= C_{\alpha,\varepsilon} \varphi_1(x)^{-\alpha}
\end{aligned}$$

com a constante $C_{\alpha,\varepsilon}$ independente de $x \in \Omega$. Como $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, segue da desigualdade de Hardy que $v\varphi_1^{-\alpha} \in L^1(\Omega)$. Assim, segue do Teorema da Convergência Dominada em (3.13) que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = \int_\Omega \frac{f}{u^\alpha} v \ dx.$$

$\square$

Lema 3.5. *Seja*

$$h(\varepsilon) \ := \ \int_\Omega (u+\varepsilon\eta)^{1-\alpha} f \ dx.$$

Se $u, \eta \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, $u \geq 0$ *e* $0 < \alpha < 1$ *então* h *é derivável em* $\varepsilon = 0$ *e*

$$h'(0) \ = \ \int_\Omega \frac{f}{u^\alpha}\eta \ dx.$$

Demonstração. Sejam $p > 1$ tal que $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ e φ_1 uma solução de

$$\Delta_p u = \lambda_1 u^{p-1} \ \text{ em } \Omega.$$

Considere o funcional E definido em $W_0^{1,p}(\Omega)$ por

$$E(u) := \int_\Omega |\nabla u|^p \ dx - \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega |u|^{1-\alpha} f \ dx.$$

Considere $v := (u-\varepsilon\varphi_1)^- = (\varepsilon\varphi_1 - u)^+$ e $\Omega^+ := \{x \in \Omega : v(x) > 0\}$. Em Ω^+ temos para $t \in (0,1)$ que

$$\begin{aligned} u+tv &= u + t(\varepsilon\varphi_1 - u) \\ &= (1-t)u + t\varepsilon\varphi_1 \\ &\geq t\varepsilon\varphi_1. \end{aligned}$$

Já em $\Omega \setminus \Omega^+$ temos

$$u + tv = u \geq t\varepsilon\varphi_1.$$

Portanto,

$$u + tv \geq t\varepsilon\varphi_1,$$

o que, pelo Lema 3.4, implica

$$F'(u+tv) = \frac{f}{(u+tv)^\alpha}.$$

Daí, para

$$\xi(t) := E(u+tv)$$

temos

$$\begin{aligned} \xi'(t) &= E'(u+tv)v \\ &= \int_{\Omega^+} |\nabla u + t\nabla v|^{p-1}(\nabla u \nabla v + t|\nabla v|^2) \ dx + \int_{\Omega^+} \frac{f}{(u+tv)^\alpha} v \ dx \end{aligned} \tag{3.16}$$

pois $v = 0$ em $\Omega \setminus \Omega^+$. Temos também que ξ é convexa, ξ' é crescente e não negativa. Além disso,

$$u + v = u + \varepsilon\varphi_1 - u = \varepsilon\varphi_1 \qquad \text{em } \ \Omega^+ \tag{3.17}$$

e para ε suficientemente pequeno

$$\lambda_1(\varepsilon \max \varphi_1)^{p-1+\alpha} < \frac{1}{2},$$

o que implica

$$\lambda_1(\varepsilon \max \varphi_1)^{p-1+\alpha} < \frac{1}{2} + f,$$

pois $f \geq 0$. Assim, para ε suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} E'(\varepsilon\varphi_1) &= -\Delta_p(\varepsilon\varphi_1) - \frac{f}{(\varepsilon\varphi_1)^\alpha} \\ &= \lambda_1 f(\varepsilon\varphi_1)^{p-1} - \frac{f}{(\varepsilon\varphi_1)^\alpha} \\ &= f(\varepsilon\varphi_1)^{-\alpha}\left[\lambda_1(\varepsilon\varphi_1)^{p-1+\alpha} - 1\right] \\ &\leq -\frac{1}{2}\frac{f}{(\varepsilon\varphi_1)^\alpha}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Logo, para $t \in (0,1)$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi'(1) - \xi'(t) \\ &= E'(u+v)v - \xi'(t) \qquad \text{por (3.16)} \\ &= E'(\varepsilon\varphi_1)v - \xi'(t) \qquad \text{por (3.17)} \\ &\leq -\frac{1}{2}\int_{\Omega^+} \frac{f}{(\varepsilon\varphi_1)^\alpha} v\, dx \quad \text{por (3.18)} \\ &< 0, \end{aligned}$$

se $v > 0$ em algum ponto de Ω, o que é um absurdo. □

Para $0 < \alpha < 1$, considere

$$\mu_n := \inf\left\{\int_\Omega \Phi_n(|\nabla u|)\, dx; u \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega), \int_\Omega f|u|^{1-\alpha}\, dx = 1\right\}.$$

Se u_n é um minimizador não negativo de μ_n então para todo $\eta \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega)$ vale

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_\Omega \Phi_n\left(\frac{|\nabla u_n + \nabla\varepsilon\eta|}{\left(\int_\Omega f(u_n+\varepsilon\eta)^{1-\alpha}\, dx\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\right) dx\Big|_{\varepsilon=0,} = 0$$

ou seja, pelo lema anterior, temos

$$\int_\Omega \phi_n(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla\eta\, dx = \left(\int_\Omega \phi_n(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2\, dx\right)\int_\Omega \frac{f}{u_n^\alpha}\eta\, dx.$$

Logo, u_n é solução não negativa de

$$-\Delta_{\Phi_n} u = \Lambda_n \frac{f}{u^\alpha} \tag{3.19}$$

com

$$\Lambda_n = \int_\Omega \phi_n(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 \, dx.$$

Segue do Capítulo 1 que para $0 < \alpha < 1$ essa solução u_n minimiza o funcional $J_n : W_0^{1,\Phi_n}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_n(v) = \int_\Omega \Phi_n(|\nabla v|) \, dx - \frac{\Lambda_n}{1-\alpha} \int_\Omega (v^+)^{1-\alpha} f \, dx$$

e conhecido como o **funcional energia** associado a equação (3.19).

Lema 3.6. *Para $0 \leq \alpha < 1$, existe u_n minimizador não negativo de μ_n.*

A prova desse lema segue de argumentos padrão tomando uma sequência minimizante.

Demonstração. Seja $(u_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência minimizante de μ_n, isto é, $u_n^k \in X_n$, com

$$X_n := \left\{ u \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega), \int_\Omega f|u|^{1-\alpha} \, dx = 1 \right\}$$

e

$$\int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n^k|) \, dx \;\to\; \mu_n \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Uma vez que $|u_n^k| \in X_n$ e

$$\int_\Omega \Phi_n(|\nabla |u_n^k||) \, dx = \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n^k|) \, dx,$$

podemos considerar u_n^k não negativa. Assim, $(u_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em $W_0^{1,\Phi_n}(\Omega)$ e, então, existe $u_n \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u_n \geq 0$, tal que, a menos de subsequência,

$$u_n^k \rightharpoonup u_n \text{ em } W_0^{1,\Phi_n}(\Omega) \text{ quando } k \to \infty,$$

$$u_n^k \to u_n \text{ em } C(\overline{\Omega}) \text{ quando } k \to \infty.$$

Logo,

$$\left| \int_\Omega f(u_n^k)^{1-\alpha} \, dx - \int_\Omega f u_n^{1-\alpha} \, dx \right| \;\leq\; \|f\|_\infty \int_\Omega |u_n^k - u_n|^{1-\alpha} \, dx \to 0 \quad \text{quando } k \to \infty,$$

o que implica

$$\int_\Omega f u_n^{1-\alpha} \, dx = 1.$$

Portanto, $u_n \in X_n$. Além disso, segue da convergência fraca que

$$\int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n|)\ dx \ \leq\ \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n^k|)\ dx \ =\ \mu_n$$

e, assim, u_n minimiza μ_n. $\square$

Observação 3.7. Como

$$\int_\Omega f u_n^{1-\alpha}\ dx = 1,$$

temos $u_n \neq 0$. Logo, usando u_n como função teste temos

$$\Lambda_n = \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2\ dx \ \geq\ \phi_n^- \int_\Omega \Phi(|\nabla u_n|)\ dx \ >\ 0.$$

Assim, segue do Princípio do Máximo Forte (Teorema A.21) que a solução de

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_n} u = \Lambda_n \frac{f}{u^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.20}$$

é positiva. Portanto, u_n é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_n} u = \Lambda_n \frac{f}{u^\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.21}$$

Lema 3.8. *A sequência $(\Lambda_n)^{\frac{1}{n}}$ é limitada.*

Demonstração. A sequência $(\mu_n)^{\frac{1}{n}}$ é limitada, pois para

$$a = \left(\int_\Omega |d|^{1-\alpha} f\ dx\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}}$$

temos

$$(\mu_n)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int \Phi_n(a|\nabla d|)\ dx\right)^{\frac{1}{n}} = |\Omega|^{\frac{1}{n}} \Phi_n(a)^{\frac{1}{n}} \leq |\Omega|^{\frac{1}{n}} \Phi_n(1)^{\frac{1}{n}} \max\left\{a^{\frac{\phi_n^-}{n}}, a^{\frac{\phi_n^+}{n}}\right\} \to \max\left\{a^{q^-}, a^{q^+}\right\}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 0 \ &<\ (\Lambda_n)^{\frac{1}{n}} \\ &=\ \left(\int_\Omega \phi_n(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2\ dx\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq\ (\phi_n^+)^{\frac{1}{n}} \left(\int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n|)\ dx\right)^{\frac{1}{n}} \\ &=\ (\phi_n^+)^{\frac{1}{n}} (\mu_n)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Logo, $(\Lambda_n)^{\frac{1}{n}}$ é limitada, pois $(\mu_n)^{\frac{1}{n}}$ é limitada e

$$(\phi_n^+)^{\frac{1}{n}} = \left[(\phi_n^+)^{\frac{1}{\phi_n^+}} \right]^{\frac{\phi_n^+}{n}} \to 1^{q^+} = 1.$$

□

Segue do Lema 3.8 que, a menos de subsequência, existe Λ_∞ tal que

$$(\Lambda_n)^{\frac{1}{n}} \to \Lambda_\infty.$$

Além disso, segue da demonstração do lema anterior que

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n)^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{n\to\infty} (\Lambda_n)^{\frac{1}{n}} = \Lambda_\infty.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\Lambda_n)^{\frac{1}{n}} &= \left(\int_\Omega \phi_n(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{n}} \\
&\geq (\phi_n^-)^{\frac{1}{n}} \left(\int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n|) \, dx \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= (\phi_n^-)^{\frac{1}{n}} (\mu_n)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

implica

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} (\Lambda_n)^{\frac{1}{n}} = \Lambda_\infty.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (\Lambda_n)^{\frac{1}{n}} = \Lambda_\infty. \tag{3.22}$$

Lema 3.9. *A menos de subsequência, $u_n \to u_\infty$ uniformemente em $\overline{\Omega}$ para alguma função $u_\infty \in W^{1,\infty} \cap C_0(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\int_\Omega f u_\infty^{1-\alpha} \, dx = 1. \tag{3.23}$$

Além disso,

$$\|\nabla u_\infty\|_\infty \leq \max\left\{ \Lambda_\infty^{\frac{1}{q^-}}, \Lambda_\infty^{\frac{1}{q^+}} \right\} \quad e \quad 0 \leq u_\infty \leq \max\left\{ \Lambda_\infty^{\frac{1}{q^-}}, \Lambda_\infty^{\frac{1}{q^+}} \right\} d \quad em \ \overline{\Omega}. \tag{3.24}$$

Demonstração. Sabemos que

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n|) \, dx \\
&= \min\left\{ \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u|) \, dx : u \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega), \int_\Omega f u^{1-\alpha} \, dx = 1 \right\}.
\end{aligned}$$

Assim, por (1.8) e (2.13)

$$\min\left\{\left(\frac{\|\nabla u_n\|_{\phi_n^-}}{C_{\Phi_n^-}}\right), \left(\frac{\|\nabla u_n\|_{\phi_n^-}}{C_{\Phi_n^-}}\right)^{\frac{\phi_n^+}{\phi_n^-}}\right\} \leq \left(\int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n(x)|)\, dx\right)^{\frac{1}{\phi_n^-}} = \mu_n^{\frac{1}{\phi_n^-}}.$$

Logo,

$$\|\nabla u_n\|_{\phi_n^-} \leq C_{\Phi_n^-} \max\left\{\mu_n^{\frac{1}{\phi_n^-}}, \mu_n^{\frac{1}{\phi_n^+}}\right\}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n^{\frac{1}{\phi_n^-}} = \lim_{n\to\infty} \left(\mu_n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{\phi_n^-}} = \Lambda_\infty^{\frac{1}{q^-}} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n^{\frac{1}{\phi_n^+}} = \lim_{n\to\infty} \left(\mu_n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{\phi_n^+}} = \Lambda_\infty^{\frac{1}{q^+}},$$

usando (2.7), concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_{\phi_n^-} \leq C := \max\left\{\Lambda_\infty^{\frac{1}{q^-}}, \Lambda_\infty^{\frac{1}{q^+}}\right\}.$$

Portanto, do Lema 2.4 podemos concluir que, a menos de subsequência, $u_n \to u_\infty$ uniformemente em $\overline{\Omega}$ para alguma função $u_\infty \in W^{1,\infty} \cap C_0(\overline{\Omega})$ que satisfaz (3.24). A conclusão (3.23) segue da convergência uniforme, uma vez que

$$\int_\Omega f u_n^{1-\alpha}\, dx = 1.$$

□

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_n} u_n = f & \text{em } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{em } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.25}$$

Definição 3.10. 1. Uma função semicontínua superiormente $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é subsolução de viscosidade de (3.25) se $u\,|_{\partial\Omega} \leq 0$ e para todo $x_0 \in \Omega$ e $\Psi \in C^2(\Omega)$ tais que $u(x_0) = \Psi(x_0)$ e

$$u < \Psi \quad \text{em} \quad B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$$

para algum $r > 0$, vale

$$-\Delta_{\Phi_n} \Psi(x_0) \leq f.$$

2. Uma função semicontínua inferiormente $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é supersolução de viscosidade de (3.25) se $u\,|_{\partial\Omega} \geq 0$ e para todo $x_0 \in \Omega$ e $\Psi \in C^2(\Omega)$ tais que $u(x_0) = \Psi(x_0)$ e

$$u > \Psi \quad \text{em} \quad B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$$

para algum $r > 0$, vale

$$-\Delta_{\Phi_n}\Psi(x_0) \geq f.$$

3. Uma função contínua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é solução de viscosidade de (3.25) se u é sub e supersolução de viscosidade de (3.25).

Lema 3.11. *Se u é uma solução fraca contínua de (3.25) então u também é uma solução de viscosidade.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que u é uma supersolução de viscosidade de (3.25). Sejam $x_0 \in \overline{\Omega}$ e $\Psi \in C^2(\overline{\Omega})$ tais que $u(x_0) = \Psi(x_0)$ e $u - \Psi$ possui um mínimo estrito em x_0. Precisamos mostrar que

$$-\operatorname{div}\left(\phi(|\nabla\Psi(x_0)|)\nabla\Psi(x_0)\right) \geq f(x_0),$$

isto é,

$$-\phi(|\nabla\Psi(x_0)|)\Delta\Psi(x_0) - \frac{\phi'(|\nabla\Psi(x_0)|)}{|\nabla\Psi(x_0)|}\Delta_\infty\Psi(x_0) \geq f(x_0). \tag{3.26}$$

Suponha por contradição que

$$-\phi(|\nabla\Psi(x_0)|)\Delta\Psi(x_0) - \frac{\phi'(|\nabla\Psi(x_0)|)}{|\nabla\Psi(x_0)|}\Delta_\infty\Psi(x_0) < f(x_0).$$

Logo, usando que f é contínua, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset \Omega$ e

$$-\phi(|\nabla\Psi(x)|)\Delta\Psi(x) - \frac{\phi'(|\nabla\Psi(x)|)}{|\nabla\Psi(x)|}\Delta_\infty\Psi(x) < f(x).$$

Reduzindo r se necessário, temos também $u > \Psi$ em $\overline{B(x_0, r)} \setminus \{x_0\}$. Considere

$$m := \inf_{|x-x_0|=r}(u - \Psi)(x)$$

e

$$w(x) := \Psi(x) + \frac{m}{2}.$$

Assim, $m > 0$,

$$w(x_0) = \Psi(x_0) + m = u(x_0) + m > u(x_0)$$

e para $x \in \partial B(x_0, r)$

$$\begin{array}{rcll} w(x) & = & \Psi(x) + \frac{m}{2} & \text{por definição de } w \\ & < & \Psi(x) + m & \text{pois } m > 0 \\ & \leq & \Psi(x) + u(x) - \Psi(x) & \text{por definição de } m \\ & = & u(x). & \end{array}$$

Multiplicando a desigualdade acima por $(w-u)^+$, obtemos

$$\int_{B(x_0,r)\cap\{w>u\}} \phi(|\nabla w|)\nabla w \nabla(w-u)\ dx < \int_{B(x_0,r)\cap\{w>u\}} (w-u) f\ dx. \tag{3.27}$$

Por outro lado, usando $(w-u)^+$ como função teste

$$\int_{B(x_0,r)\cap\{w>u\}} \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla(w-u)\ dx = \int_{B(x_0,r)\cap\{w>u\}} (w-u) f\ dx. \tag{3.28}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &> \int_{B(x_0,r)\cap\{w>u\}} \left(\phi(|\nabla w|)\nabla w - \phi(|\nabla u|)\nabla u\right) \nabla(w-u)\ dx && \text{por (3.27) e (3.28)} \\ &\geq \int_{B(x_0,r)\cap\{w>u\}} \left(\phi(|\nabla w|)|\nabla w| - \phi(|\nabla u|)|\nabla u|\right)\left(|\nabla w| - |\nabla u|\right) dx && \text{pela desigualdade triangular} \\ &\geq 0 && \text{por (1.17)}, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Analogamente, definindo $m := \inf_{|x-x_0|=r} (\Psi - u)(x)$ e usando $(w-u)^+$ como função teste, provamos que u é subsolução de viscosidade. $\square$

Lema 3.12. *Uma solução fraca contínua de*

$$-\Delta_{\Phi_n} u = \Lambda_n \frac{f}{u^\alpha}$$

é uma solução de viscosidade.

Demonstração. Observe que pelo Princípio do Máximo (Teorema A.21) temos $u > 0$. Primeiro vamos provar que u é supersolução. Sejam $x_0 \in \overline{\Omega}$ e $\Psi \in C^2(\overline{\Omega})$ tais que $u(x_0) = \Psi(x_0)$ e $\Psi < u$ em $\Omega \setminus \{x_0\}$. Segue do Lema 3.11 que

$$-\Delta_{\Phi_n} \Psi(x_0) \leq \Lambda_n \frac{f(x_0)}{u(x_0)^\alpha}.$$

Assim, como $\Psi(x_0) = u(x_0)$, temos

$$-\Delta_{\Phi_n} \Psi(x_0) \leq \Lambda_n \frac{f(x_0)}{\Psi(x_0)^\alpha}.$$

Portanto, u é supersolução de viscosidade. Analogamente, obtemos que u é subsolução de viscosidade. $\square$

Teorema 3.13. *A função u_∞ é solução de viscosidade de*

$$\min\{-\Delta_\infty u, \gamma_1(|\nabla u|) - \Lambda_\infty\} = 0. \tag{3.29}$$

Demonstração. Inicialmente vamos provar que u_∞ é supersolução. Seja $x_0 \in \overline{\Omega}$, considere uma função teste$\Psi \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $u_\infty(x_0) = \Psi(x_0)$ e $u_\infty - \Psi$ tem um mínimo estrito em x_0. A convergência uniforme $u_n \to u_\infty$ implica que existe uma sequência $\{x_n\} \subset \Omega$ tal que $x_n \to x_0$ e $u_n - \Psi$ tem um mínimo estrito em x_n. Logo, segue do Lema 3.12 que

$$-\phi_n(|\nabla\Psi(x_n)|)\Delta\Psi(x_n) - \frac{\phi_n'(|\nabla\Psi(x_n)|)}{|\nabla\Psi(x_n)|}\Delta_\infty\Psi(x_n) \geq \Lambda_n \frac{f(x_n)}{\Psi(x_n)^\alpha}. \tag{3.30}$$

Segue da Desigualdade de Harnack (ver [21, Corolário 4.5] e [3, Teorema 1]) que $u_\infty(x_0) > 0$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $u_\infty(x_0) > 3\varepsilon$. De modo análogo a demonstração do Teorema 3.1 de [7], temos

$$\Psi(x_n) \geq u_n(x_n) - \varepsilon > 0$$

para n suficientemente grande. Assim, segue de (3.2) que $|\Psi(x_n)| > 0$ para n suficientemente grande. Daí, usando que ϕ_n é crescente e multiplicando (3.30) por $\frac{|\Psi(x_n)|}{\phi_n'(|\nabla\Psi(x_n)|)}$ obtemos

$$\begin{aligned} -\phi_n(|\nabla\Psi(x_n)|)\frac{|\nabla\Psi(x_n)|}{\phi_n'(|\nabla\Psi(x_n)|)}\Delta\Psi(x_n) - \Delta_\infty\Psi(x_n) &\geq \Lambda_n \frac{|\nabla\Psi(x_n)|}{\phi_n'(|\nabla\varphi(x_n)|)}\frac{f(x_n)}{\Psi(x_n)^\alpha} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Daí,

$$-\Delta_\infty\Psi(x_0) \geq \limsup_{n\to\infty} \Lambda_n \frac{|\nabla\Psi(x_n)|}{\phi_n'(|\nabla\Psi(x_n)|)}\frac{f(x_n)}{\Psi(x_n)^\alpha},$$

ou seja,

$$-\Delta_\infty\Psi(x_0)\frac{\Psi(x_0)^\alpha}{f(x_0)} \geq \limsup_{n\to\infty} \Lambda_n \frac{|\nabla\Psi(x_n)|}{\phi_n'(|\nabla\Psi(x_n)|)} \tag{3.31}$$

Fazendo $n \to \infty$ segue de (1.1), (1.3) e (2.2) que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t\phi_n(t)}{\phi_n'(t)} = 0, \qquad \forall\, t > 0. \tag{3.32}$$

Logo,

$$-\Delta_\infty\Psi(x_0) \geq 0.$$

Falta mostrar que

$$\gamma_1(|\nabla\Psi(x_0)|) - \Lambda_\infty \geq 0. \tag{3.33}$$

Suponha que

$$\gamma_1(|\nabla\Psi(x_0)|) - \Lambda_\infty < 0,$$

isto é,

$$\frac{\Lambda_\infty}{\gamma_1(|\nabla\Psi(x_0)|)} > 1.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Lambda_n^{\frac{1}{n}}}{\phi_n'(|\nabla\Psi(x_n)|)^{\frac{1}{n}}|\nabla\Psi(x_n)|^{\frac{-1}{n}}} = \frac{\Lambda_\infty}{\gamma_1(|\nabla\Psi(x_0)|)} > 1.$$

Portanto, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\frac{\Lambda_n^{\frac{1}{n}}}{\phi_n'(|\nabla\Psi(x_n)|)^{\frac{1}{n}}|\nabla\Psi(x_n)|^{\frac{-1}{n}}} \geq 1 + \varepsilon_0$$

para n suficientemente grande. Assim,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\Lambda_n}{\phi_n'(|\nabla\Psi(x_n)|)|\nabla\Psi(x_n)|} \geq \lim_{n\to\infty}(1+\varepsilon_0)^n = +\infty,$$

o que contradiz (3.31). Portanto, u_∞ é supersolução.

Vamos provar agora que u_∞ é subsolução. Seja $x_0 \in \overline{\Omega}$, considere uma função teste $\Psi \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $u_\infty(x_0) = \Psi(x_0)$ e $u_\infty - \Psi$ tem um máximo estrito em x_0. Se $\nabla\Psi(x_0) = 0$ então a desigualdade desejada vale trivialmente. Logo, podemos assumir $\nabla\Psi(x_0) \neq 0$. Assim, $\nabla\Psi(x_n) \neq 0$ para n suficientemente grande. Suponha que

$$\gamma_1(|\nabla\Psi(x_0)|) - \Lambda_\infty > 0,$$

isto é,

$$\frac{\Lambda_\infty}{\gamma_1(|\nabla\Psi(x_0)|)} < 1.$$

Vamos mostrar que $-\Delta_\infty\Psi(x_0) \leq 0$. De fato,

$$-\phi_n(|\nabla\Psi(x_n)|)\frac{|\nabla\Psi(x_n)|}{\phi_n'(|\nabla\Psi(x_n)|)}\Delta\Psi(x_n) - \Delta_\infty\Psi(x_n) \leq \Lambda_n \frac{|\nabla\Psi(x_n)|}{\phi_n'(|\nabla\varphi(x_n)|)}\frac{f(x_n)}{\Psi(x_n)^\alpha}$$

implica

$$-\Delta_\infty\Psi(x_0)\frac{\Psi(x_0)^\alpha}{f(x_0)} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\Lambda_n}{\phi_n'(|\nabla\varphi(x_n)|)|\nabla\Psi(x_n)|^{-1}} = 0.$$

□

A existência de ε no próximo teorema é garantida pela Proposição 3.3.

Teorema 3.14. *Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{aligned} &\gamma_1(\varepsilon) = \Lambda_\infty \\ &\gamma_1(t) < \Lambda_\infty \quad \textit{para todo} \quad 0 < t < \varepsilon, \\ &\gamma_1(t) > \Lambda_\infty \quad \textit{para todo} \quad t > \varepsilon. \end{aligned}$$

A equação (3.29) possui única solução e $u_\infty = \dfrac{1}{\varepsilon} d$*. Além disso,*

$$\varepsilon = \left(\int_\Omega f d^{1-\alpha} \, dx \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{3.34}$$

as sequências $\left(\mu_n^{\frac{1}{n}} \right)$ *e* $\left(\Lambda_n^{\frac{1}{n}} \right)$ *convergem (sem passar a subsequência) para o mesmo valor*

$$\Lambda_\infty = \gamma_1 \left(\left(\int_\Omega f d^{1-\alpha} \, dx \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \tag{3.35}$$

e (u_n) *converge uniformemente para* u_∞.

Demonstração. Observe que $\varepsilon - |\nabla u| \geq 0$ se, e só se, $\varepsilon \geq |\nabla u|$. Logo,

$$\Lambda_\infty \geq \gamma_1(|\nabla u|),$$

isto é, $\Lambda_\infty - \gamma_1(|\nabla u|) \geq 0$. Analogamente, $\varepsilon - |\nabla u| \leq 0$ se, e só se, $\Lambda_\infty - \gamma_1(|\nabla u|) \leq 0$. Assim, a equação (3.29) é equivalente a

$$\min\{-\Delta_\infty u, |\nabla u| - \varepsilon\} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.36}$$

Lembramos que segue de [16, Teorema 2.1] que o problema (3.36) possui única solução $\frac{d}{\varepsilon}$. Logo, pela unicidade de solução dessa equação, obtemos

$$u_\infty = \frac{1}{\varepsilon} d.$$

Agora vamos provar (3.34). A convergência uniforme implica

$$\int_\Omega f u_\infty^{1-\alpha} \, dx = 1,$$

isto é,

$$\int_\Omega f \left(\frac{1}{\varepsilon} d \right)^{1-\alpha} \, dx = 1,$$

o que equivale a (3.34). De (3.22) e (3.34) concluímos que $\left(\mu_n^{\frac{1}{n}} \right)$ e $\left(\Lambda_n^{\frac{1}{n}} \right)$ convergem para o mesmo valor dado por (3.35). Mostramos que todas subsequências de $\left(\mu_n^{\frac{1}{n}} \right)$ e $\left(\Lambda_n^{\frac{1}{n}} \right)$ possuem subsequências que convergem para o mesmo valor (3.35). Assim, essas sequências convergem sem precisar passar a subsequência. Note que provamos que toda subsequência de (u_n) possui uma subsequência que converge para a função $u_\infty = \dfrac{1}{\varepsilon} d(\cdot, \partial\Omega)$. Portanto, a sequência (u_n) converge para u_∞ uniformemente em Ω. □

3.2 Comportamento assintótico para $\alpha = 0$

Nesta seção fazemos os resultados da seção anterior para o caso $\alpha = 0$. Seja $f \in L^\infty(\Omega)$ positiva. Considere

$$X_n := \left\{ u \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega), \int_\Omega fu\ dx = 1 \right\}$$

e

$$\mu_n := \inf \left\{ \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u|)\ dx, u \in X_n \right\}. \tag{3.37}$$

Segue do Lema 3.6 que o problema de minimização (3.37) possui pelo menos uma solução $u_n \geq 0$.

Teorema 3.15. *Para cada u_n minimizador de μ_n existe $\Lambda_n > 0$ tal que u_n é solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_n} u = \Lambda_n f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.38}$$

Demonstração. Considere os funcionais F e J definidos em $W_0^{1,\Phi_n}(\Omega)$ por

$$F(u) := \int_\Omega fu\ dx - 1$$

e

$$J(u) := \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\ dx.$$

Seja

$$S := \left\{ u \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega), F(u) = 0 \right\}.$$

Assim, para $u \in S$

$$\langle F'(u), u \rangle = \int_\Omega fu\ dx = 1$$

e, então, $F'(u) \neq 0$. Logo, segue do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange que existe $\Lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_n) = \Lambda_n F'(u_n),$$

isto é,

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n \nabla v\ dx = \Lambda_n \int_\Omega fv\ dx, \qquad \forall\ v \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega).$$

□

Assim como na Observação 3.7, temos que u_n é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi_n} u = \Lambda_n f & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.39}$$

Do mesmo modo que no Lema 3.8, obtemos que a sequência $(\Lambda_n^{\frac{1}{n}})$ é limitada. Portanto, a menos de subsequência, existe $\Lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Lambda_n^{\frac{1}{n}} \to \Lambda \quad \text{quando } n \to \infty.$$

De modo análogo a (3.22) obtemos

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (\Lambda_n)^{\frac{1}{n}} = \Lambda_\infty. \tag{3.40}$$

O Lema 3.9 e sua demonstração também valem para $\alpha = 0$. Apresentamos aqui uma prova alternativa para esse resultado que também vale para o caso $0 < \alpha < 1$. Essa argumentação generaliza o que foi feito nos artigos [4] e [7].

Lema 3.16. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $u_n \in W_0^{1,\Phi_n}(\Omega)$ um minimizador de μ_n. Então existe $u_\infty \in C(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$ tal que a menos de subsequência $u_n \to u_\infty$ uniformemente em Ω.*

Demonstração. Para cada $n > m$ naturais, segue de (1.9) que

$$\Phi_n(1)t^{\phi_n^-} \leq \Phi_n(t), \qquad \forall\, t > 1$$

e, então,

$$t^{\phi_n^-} \leq 1 + \frac{\Phi_n(t)}{\Phi_n(1)}.$$

Logo,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{\phi_n^-}\, dx \leq |\Omega| + \frac{1}{\Phi_n(1)} \int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n|)\, dx. \tag{3.41}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_n|^{\frac{m\phi_n^-}{n}}\, dx &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^{\phi_n^-}\, dx\right)^{\frac{m}{n}} |\Omega|^{1-\frac{m}{n}} && \text{pela desigualdade de Holder}\\
&\leq \left(|\Omega| + \frac{1}{\Phi_n(1)}\int_\Omega \Phi_n(|\nabla u_n|)\, dx\right)^{\frac{m}{n}} (1+|\Omega|) && \text{por (3.41)}\\
&\leq 2\max\left\{|\Omega|^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{\mu_n}{\Phi_n(1)}\right)^{\frac{m}{n}}\right\}(1+|\Omega|) && \text{por definnição de } \mu_n\\
&\leq 2\left[(1+|\Omega|) + \left(\frac{\mu_n^{\frac{1}{n}}}{\Phi_n(1)^{\frac{1}{n}}}\right)^{m}\right](1+|\Omega|) && \text{pois } |\Omega|^{\frac{m}{n}} \leq 1+|\Omega|\\
&\leq c(m) && \text{pois } \left(\mu_n^{\frac{1}{n}}\right) \text{ é limitada.}
\end{aligned}$$

Segue de (2.3) que para n suficientemente grande temos $\frac{m\phi_n^-}{n} > m(q^- - \varepsilon)$, o que implica na continuidade da imersão $W_0^{1,m\frac{\phi_n^-}{n}}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,m(q^--\varepsilon)}(\Omega)$. Portanto, segue da desigualdade anterior que $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,m(q^--\varepsilon)}(\Omega)$. Além disso, para m tal que $m(q^- - \varepsilon) > N$, a imersão $W_0^{1,m(q^--\varepsilon)}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ é compacta e, assim, existe $u_\infty \in C(\overline{\Omega})$ tal que a menos de subsequência $u_n \rightharpoonup u_\infty$ em $W_0^{1,m(q^- - \varepsilon)}(\Omega)$ e $u_n \to u_\infty$ uniformemente em Ω.

Como $u_n \to u_\infty$ em $L^1(\Omega)$,

$$\left| \int_\Omega f u_\infty \, dx - \int_\Omega f u_n \, dx \right| \leq \|f\|_\infty \int_\Omega |u_\infty - u_n| \, dx \to 0$$

e, então,

$$\int_\Omega f u_\infty \, dx = 1.$$

Portanto, $u_\infty \neq 0$. $\square$

De modo semelhante aos Teoremas 3.13 e 3.14, obtemos que as sequências $\left(\mu_n^{\frac{1}{n}}\right)$ e $\left(\Lambda_n^{\frac{1}{n}}\right)$ convergem para

$$\Lambda_\infty = \gamma_1 \left(\int_\Omega f d^{1-\alpha} \, dx \right)$$

e a sequência (u_n) converge uniformemente para $u_\infty = \dfrac{1}{\varepsilon} d$, a qual é a única solução de viscosidade de

$$\min\{-\Delta_\infty u, \gamma_1(|\nabla u|) - \Lambda\} = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Capítulo 4

Um problema com duas N-funções

Neste capítulo estudamos o comportamento assintótico do quociente de Rayleigh $\frac{\|\nabla u\|_{\Phi_l}}{\|u\|_{\Psi_j}}$, em que (Φ_l) e (Ψ_j) são sequências de N-funções. Primeiro fazemos $j \to \infty$ e depois, $l \to \infty$.

Suponha que vale (1.4) e (2.2)-(2.4) para ambas as N-funções. Segue de (1.4) e (2.4) que

$$\frac{a}{\phi_j^-} \leq \frac{\phi_j(1)}{\phi_j^-} \leq \Phi_j(1) \leq \frac{\phi_j(1)}{\phi_j^+} \leq \frac{b}{\phi_j^+} \leq \frac{b}{\phi_j^-}$$

e, assim,

$$\left(\frac{a}{\phi_j^-}\right)^{\frac{1}{\phi_j^-}} \leq \Phi_j(1)^{\frac{1}{\phi_j^-}} \leq \left(\frac{b}{\phi_j^-}\right)^{\frac{1}{\phi_j^-}}.$$

Logo

$$[\Phi_j(1)]^{\frac{1}{\phi_j^-}} \to 1 \quad \text{quando} \quad j \to \infty. \tag{4.1}$$

Analogamente, usando que $\phi_j^- \leq \phi_j^+$ obtemos

$$\left(\frac{a}{\phi_j^+}\right)^{\frac{1}{\phi_j^+}} \leq \Phi_j(1)^{\frac{1}{\phi_j^+}} \leq \left(\frac{b}{\phi_j^+}\right)^{\frac{1}{\phi_j^+}},$$

o que implica

$$[\Phi_j(1)]^{\frac{1}{\phi_j^+}} \to 1 \quad \text{quando} \quad j \to \infty.$$

Sejam Φ e Ψ duas N-funções definidas em Ω satisfazendo (1.4) e (2.2)-(3.2). Segue do Teorema A.19 que para $\phi^- > N$ temos as seguintes imersões

$$W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,\phi^-}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^\Psi(\Omega),$$

em que $\hookrightarrow$ denota uma imersão contínua e $\hookrightarrow\hookrightarrow$ indica uma imersão compacta. Assim,

$$W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^\Psi(\Omega)$$

é uma imersão compacta. Considere os funcionais $K, k : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidos por

$$K(u) := \|\nabla u\|_{\Phi}$$

e

$$k(u) := \|u\|_{\Psi}.$$

Considere

$$\Lambda_1 := \inf \left\{ \frac{\|\nabla u\|_{\Phi}}{\|u\|_{\Psi}} : u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \setminus \{0\} \right\}. \tag{4.2}$$

O funcional K é fracamente semicontínuo inferiormente em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Definição 4.1. Uma função $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \setminus \{0\}$ é uma função extremal (ou minimizador) de Λ_1 se

$$\frac{\|\nabla u\|_{\Phi}}{\|u\|_{\Psi}} = \Lambda_1.$$

Proposição 4.2. *Existe uma função extremal de Λ_1 não negativa.*

Demonstração. Seja $(v_n) \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega) \setminus \{0\}$ uma sequência minimizante. Normalizando se necessário, podemos considerar $k(v_n) = 1$. Temos

$$\lim_{n\to\infty} K(v_n) = \Lambda_1$$

e, então, (v_n) é limitada. Logo, existe $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que a menos de subsequência

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em } W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

$$v_n \to v \quad \text{em } L^{\Psi}(\Omega),$$

pois $W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^{\Psi}(\Omega)$ é uma imersão compacta. Assim,

$$K(v) \le \liminf_{n\to\infty} K(v_n),$$

$$k(v_n) \to k(v) = 1,$$

e, então,

$$K(v) = \Lambda_1.$$

Portanto, v é um minimizador, o que implica que $|v|$ é um minimizador não negativo, pois para $\lambda > 0$

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|\nabla |v||}{\lambda}\right) dx = \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{|\nabla v|}{\lambda}\right) dx.$$

□

Lema 4.3. *Se $u, \eta \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ então*

$$\frac{d}{d\varepsilon}K(u+\varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\displaystyle\int_\Omega \phi\left(\frac{|\nabla u|}{K(u)}\right)\frac{\nabla u}{K(u)}\eta\ dx}{\displaystyle\int_\Omega \phi\left(\frac{|\nabla u|}{K(u)}\right)\left|\frac{\nabla u}{K(u)}\right|^2\ dx}. \tag{4.3}$$

e

$$\frac{d}{d\varepsilon}k(u+\varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\displaystyle\int_\Omega \phi\left(\frac{u}{k(u)}\right)\frac{u}{k(u)}\eta\ dx}{\displaystyle\int_\Omega \phi\left(\frac{u}{k(u)}\right)\left|\frac{u}{k(u)}\right|^2\ dx}.$$

Demonstração. Temos

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(s)s\ ds$$

e, então,

$$\Phi'(t) = \phi(t)t.$$

Logo, para $a, b \in \mathbb{R}$

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \phi(s)s\ ds = (b-a)\int_0^1 \phi(a+t(b-a))(a+t(b-a))\ dt. \tag{4.4}$$

Pela Proposição A.4, temos

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{k(u)}\right)\ dx = 1 \tag{4.5}$$

e

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)}\right)\ dx = 1. \tag{4.6}$$

Subtraindo (4.5) de (4.6) segue de (4.4) que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \Phi\left(\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)}\right)\ dx - \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{k(u)}\right)\ dx \\ &= \int_\Omega \left(\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)} - \frac{u}{k(u)}\right) A(x,\varepsilon)\ dx \end{aligned} \tag{4.7}$$

com

$$A(x,\varepsilon) = \int_0^1 \phi\left(\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)} + t\left[\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)} - \frac{u}{l(u)}\right]\right)\cdot\left(\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)} + t\left[\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)} - \frac{u}{k(u)}\right]\right)\ dt.$$

Observe que de (4.7) temos

$$\frac{1}{k(u+\varepsilon\eta)}\int_\Omega uA(x,\varepsilon)\ dx + \frac{\varepsilon}{k(u+\varepsilon\eta)}\int_\Omega \eta A(x,\varepsilon)\ dx - \frac{1}{k(u)}\int_\Omega uA(x,\varepsilon)\ dx = 0,$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{k(u)}-\frac{1}{k(u+\varepsilon\eta)}\right)\int_\Omega uA(x,\varepsilon)\;dx=\frac{\varepsilon}{k(u+\varepsilon\eta)}\int_\Omega \eta A(x,\varepsilon)\;dx,$$

ou ainda,

$$\left(\frac{k(u+\varepsilon\eta)-k(u)}{\varepsilon}\right)\int_\Omega \frac{u}{k(u)}A(x,\varepsilon)\;dx=\int_\Omega \eta A(x,\varepsilon)\;dx \tag{4.8}$$

Como a norma é contínua, temos que $\varepsilon\mapsto l(u+\varepsilon\eta)$ também é contínua e, então,

$$\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)}-\frac{u}{k(u)}\to 0 \text{ q.t.p. quando } \varepsilon\to 0. \tag{4.9}$$

Afirmação 4.4. Existem $h_1,h_2\in L^1(\Omega)$ tais que

$$|u(x)A(x,\varepsilon)|\le h_1 \tag{4.10}$$

e

$$|\eta(x)A(x,\varepsilon)|\le h_2. \tag{4.11}$$

De fato,

$$|\eta(x)A(x,\varepsilon)|=$$
$$\left|\eta(x)\int_0^1\phi\left(\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)}+t\left[\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)}-\frac{u}{k(u)}\right]\right)\left(\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)}+t\left[\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)}-\frac{u}{k(u)}\right]\right)\,dt\right|.$$

Observe que segue das desigualdades (1.4) e (1.9) que

$$\phi(t)t^2\le\phi^+\Phi(t)\le\phi^+\Phi(1)\max\left\{|t|^{\phi^+},|t|^{\phi^-}\right\}$$

e, então,

$$\phi(t)t\le|t|^{\phi^+-1}\quad\text{ou}\quad\phi(t)t\le|t|^{\phi^--1}.$$

Vamos supor o primeiro caso, pois o segundo é análogo. Note que

$$\begin{aligned}|\eta A| &\le \phi^+\Phi(1)|\eta|\int_0^1\left|\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)}+t\left(\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)}-\frac{u}{k(u)}\right)\right|^{\phi^+-1}\,dt\\ &\le \phi^+\Phi(1)|\eta|\left[\frac{|u|+|\eta|}{k(u)-k(\eta)}+\frac{|u|}{k(u)}\right]\\ &\in L^1(\Omega)\end{aligned}$$

pois trocando η por $\frac{k(u)}{2k(u)}$ podemos assumir

$$k(\eta)<k(u),$$

temos também

$$\left|\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)}+t\left(\frac{u+\varepsilon\eta}{k(u+\varepsilon\eta)}-\frac{u}{k(u)}\right)\right|^{\phi^+-1}\leq\left[\frac{|u|+|\eta|}{k(u)-k(\eta)}+\frac{|u|}{k(u)}\right],$$

pela desigualdade triangular e $0<\varepsilon<1$, e

$$u,\eta\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)\subset L^\infty(\Omega),$$

o que prova nossa afirmação.

Segue de (4.9), (4.10), (4.11) e do Teorema da Convergência Dominada que quando $\varepsilon\to 0$

$$\int_\Omega u(x)A(x,\varepsilon)\;dx\to\int_\Omega\phi\left(\frac{u}{k(u)}\right)\frac{u^2}{k(u)}\;dx$$

e

$$\int_\Omega \eta(x)A(x,\varepsilon)\;dx\to\int_\Omega\phi\left(\frac{u}{k(u)}\right)\frac{u}{k(u)}\eta\;dx$$

Portanto, fazendo $\varepsilon\to 0$ em (4.8) obtemos

$$\frac{k(u+\varepsilon\eta)-k(u)}{\varepsilon}\quad\to\quad\frac{\int_\Omega\phi\left(\frac{u}{\|u\|_\Phi}\right)\frac{u}{\|u\|_\Phi}\eta\;dx}{\int_\Omega\phi\left(\frac{u}{\|u\|_\Phi}\right)\left|\frac{u}{\|u\|_\Phi}\right|^2\;dx}. \tag{4.12}$$

Assim, obtemos a segunda igualdade do lema. A demonstração da primeira desigualdade é similar. □

Sejam u um minimizador de Λ_1 e $\eta\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Assim,

$$\frac{K(u)}{k(u)}\leq\frac{K(u+\varepsilon\eta)}{k(u+\varepsilon\eta)},$$

Logo,

$$\frac{d}{d\varepsilon}\frac{K(u+\varepsilon\eta)}{k(u+\varepsilon\eta)}\Big|_{\varepsilon=0}=0,$$

isto é,

$$\frac{1}{K(u)}\frac{d}{d\varepsilon}K(u+\varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{1}{k(u)}\frac{d}{d\varepsilon}k(u+\varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Portanto, segue do Lema 4.3 que se u é uma função extremal então

$$\int_\Omega\phi\left(\frac{|\nabla u|}{K(u)}\right)\frac{\nabla u}{K(u)}\eta\;dx=\Lambda_1 S(u)\int_\Omega\psi\left(\frac{|u|}{k(u)}\right)\frac{u}{k(u)}\eta\;dx$$

em que

$$S(u):=\frac{\int_\Omega\phi\left(\frac{|\nabla u|}{K(u)}\right)\left|\frac{\nabla u}{K(u)}\right|^2\;dx}{\int_\Omega\psi\left(\frac{|u|}{k(u)}\right)\left|\frac{\nabla u}{k(u)}\right|^2\;dx}.$$

Definição 4.5. Dizemos que um número real Λ é um autovalor se existe $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que

$$\int_\Omega \phi\left(\frac{|\nabla u|}{K(u)}\right)\frac{\nabla u}{K(u)}\eta\, dx = \Lambda S(u)\int_\Omega \psi\left(\frac{|u|}{k(u)}\right)\frac{u}{k(u)}\eta\, dx, \quad \forall\, \eta \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Neste caso dizemos que u é uma autofunção correspondente ao autovalor Λ.

Observe que tomando $\eta = u$ obtemos

$$\Lambda = \frac{K(u)}{k(u)} \geq \Lambda_1.$$

Por isso, Λ_1 é chamado primeiro autovalor e a autofunção correspondente é chamada primeira autofunção.

Proposição 4.6. *Existe uma primeira autofunção contínua e estritamente positiva.*

Demonstração. A Proposição 4.2 implica que existe uma primeira autofunção não negativa $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Como $\phi^- > N$, o Teorema A.19 implica

$$W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,\phi^-}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$$

e, então, u é contínua. Logo, o Princípio do Máximo Forte (Teorema A.21) forte implica $u > 0$. $\square$

Lema 4.7. *Se* $u \in L^\infty(\Omega)$ *então*

$$\lim_{j\to\infty} \|u\|_{\Phi_j} = \|u\|_\infty.$$

Demonstração. Considere

$$M := \|u\|_\infty$$

e

$$M_j := \|u\|_{\Phi_j}.$$

Precisamos mostrar que

$$\lim_{j\to\infty} M_j = M.$$

Primeiro vamos mostrar que

$$\limsup_{j\to\infty} M_j \leq M.$$

Observe que caso, $M_j \geq M$, segue da Proposição A.4 e de (1.9) que

$$\begin{aligned}
1 &= \left[\int_\Omega \Phi_j\left(\frac{u}{M_j}\right)\, dx\right]^{\frac{1}{\phi_j^-}} \\
&\leq \left[\Phi_j\left(\frac{M}{M_j}\right)|\Omega|\right]^{\frac{1}{\phi_j^-}} \\
&\leq \left[\max\left\{\left(\frac{M}{M_j}\right)^{\phi_j^-}, \left(\frac{M}{M_j}\right)^{\phi_j^+}\right\}\Phi(1)|\Omega|\right]^{\frac{1}{\phi_j^-}} \\
&\leq \left[\left(\frac{M}{M_j}\right)^{\phi_j^-}\Phi(1)|\Omega|\right]^{\frac{1}{\phi_j^-}} \\
&= \frac{M}{M_j}[|\Omega|\Phi(1)]^{\frac{1}{\phi_j^-}}
\end{aligned}$$

e, assim, (4.1) implica

$$\limsup_j M_j \leq M$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$ existe $A_\varepsilon \subset \Omega$ talque

$$|A_\varepsilon| > 0$$

e

$$u > M - \varepsilon \ \text{ em } A_\varepsilon.$$

Portanto, segue da Proposição A.4 e de (1.9) que para $M_j < M - \varepsilon$

$$\begin{aligned}
1 &= \left[\int_\Omega \Phi_j\left(\frac{u}{M_j}\right)\, dx\right]^{\frac{1}{\phi_j^-}} \\
&\geq \left[\int_{A_\varepsilon} \Phi_j\left(\frac{u}{M_j}\right)\, dx\right]^{\frac{1}{\phi_j^-}} \\
&\geq \left[\Phi_j\left(\frac{M-\varepsilon}{M_j}\right)|A_\varepsilon|\right]^{\frac{1}{\phi_j^-}} \\
&\geq \left[\min\left\{\left(\frac{M-\varepsilon}{M_j}\right)^{\phi_j^-}, \left(\frac{M-\varepsilon}{M_j}\right)^{\phi_j^+}\right\}\Phi_j(1)|A_\varepsilon|\right]^{\frac{1}{\phi_j^-}} \\
&\geq \left[\left(\frac{M-\varepsilon}{M_j}\right)^{\phi_j^-}\Phi_j(1)|A_\varepsilon|\right]^{\frac{1}{\phi_j^-}} \\
&= \frac{M-\varepsilon}{M_j}\left[\Phi_j(1)|A_\varepsilon|\right]^{\frac{1}{\phi_j^-}}.
\end{aligned}$$

Logo, (4.1) implica

$$\liminf_j M_j \geq M - \varepsilon, \qquad \forall\, \varepsilon > 0$$

e, então,

$$\liminf_j M_j \geq M.$$

$\square$

Observação 4.8. Segue da demonstração do lema anterior para ψ_j que

$$\|u\|_{\Psi_j} \leq [|\Omega|\Psi_j(1)]^{\frac{1}{\psi_j^-}} \|u\|_\infty \quad \text{se} \quad \|u\|_{\Psi_j} \geq \|u\|_\infty$$

e

$$\|u\|_{\Psi_j} \leq [|\Omega|\Psi_j(1)]^{\frac{1}{\psi_j^+}} \|u\|_\infty \quad \text{se} \quad \|u\|_{\Psi_j} \leq \|u\|_\infty.$$

Assim,

$$\|u\|_{\Psi_j} \leq \alpha_j \|u\|_\infty,$$

com

$$\alpha_j := \begin{cases} [|\Omega|\Psi_j(1)]^{\frac{1}{\psi_j^-}} & \text{se} \quad \|u\|_{\Psi_j} \geq \|u\|_\infty, \\ [|\Omega|\Psi_j(1)]^{\frac{1}{\psi_j^+}} & \text{se} \quad \|u\|_{\Psi_j} \leq \|u\|_\infty. \end{cases}$$

Observe que

$$\lim_{j\to\infty} \alpha_j = 1,$$

pois do mesmo modo que (4.1) obtemos

$$\lim_{j\to\infty} [\Psi_j(1)]^{\frac{1}{\psi_j^\pm}} = 1.$$

Considere

$$\Lambda_{l,j} := \inf \left\{ \frac{\|\nabla v\|_{\Phi_l}}{\|v\|_{\Psi_j}}; v \in W_0^{1,\Phi_l}(\Omega) \setminus \{0\} \right\}$$

e

$$\mu_l := \inf \left\{ \frac{\|\nabla v\|_{\Phi_l}}{\|v\|_\infty}; v \in W_0^{1,\Phi_l}(\Omega) \setminus \{0\} \right\}.$$

Proposição 4.9.

$$\lim_{j\to\infty} \Lambda_{l,j} = \mu_l.$$

Demonstração. Para todo $v \in W_0^{1,\Phi_l}(\Omega) \setminus \{0\}$, segue do Lema 4.7 que

$$\begin{aligned} \limsup_{j\to\infty} \Lambda_{l,j} &\leq \lim_{j\to\infty} \frac{\|\nabla v\|_{\Phi_l}}{\|v\|_{\Psi_j}} \\ &= \frac{\|\nabla v\|_{\Phi_l}}{\|v\|_\infty}, \end{aligned}$$

o que implica,

$$\limsup_{j\to\infty} \Lambda_{l,j} \leq \mu_l.$$

Por outro lado, segue da Proposição 4.6, para $l, j \in \mathbb{N}$, existe $u_{l,j}$ minimizador de $\Lambda_{l,j}$, isto é,

$$\Lambda_{l,j} = \frac{\|\nabla v\|_{\Phi_l}}{\|v\|_{\Psi_j}}.$$

Segue da Observação 4.8 que

$$\|u_{l,j}\|_{\Psi_j} \leq \alpha_j \|u_{l,j}\|_\infty$$

e, então,

$$\frac{\mu_l}{\alpha_j} \leq \frac{\|\nabla u_{l,j}\|_{\Phi_l}}{\alpha_j \|\nabla u_{l,j}\|_\infty} \leq \frac{\|\nabla u_{l,j}\|_{\Phi_l}}{\alpha_j \|\nabla u_{l,j}\|_{\Psi_j}} = \Lambda_{l,j}.$$

Fazendo $j \to \infty$, obtemos

$$\mu_l = \liminf_{j \to \infty} \Lambda_{l,j}.$$

□

Proposição 4.10. *Para $l \in \mathbb{N}$ fixo, existem $j_m \to \infty$ e $w_l \in W_0^{1,\Phi_l}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tais que $u_{l,j_m} \to w_l$ em $C(\overline{\Omega})$ e em $W_0^{1,\Phi_l}(\Omega)$. Além disso, w_l é um minimizador de μ_l.*

Demonstração. Seja $u_{l,j}$ uma função extremal de $\Lambda_{l,j}$. Dividindo por $\|u_{l,j}\|_{\Psi_j}$ se necessário, podemos considerar $\|u_{l,j}\|_{\Psi_j} = 1$. Assim, a sequência $(u_{l,j})_{j \in \mathbb{N}}$ é limitada em $W_0^{1,\Phi_l}(\Omega)$ e, então, existe $w_l \in W_0^{1,\Phi_l}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ e $j_m \to \infty$ tais que $u_{l,j_m} \to w_l$ fraco em $W_0^{1,\Phi_l}(\Omega)$ e forte em $C(\overline{\Omega})$. Assim, a Observação 4.8 e a convergência uniforme implicam

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{m \to \infty} \|u_{l,j_m}\|_{\Psi_{j_m}} \\ &\leq \lim_{m \to \infty} \|u_{l,j_m}\|_\infty \\ &= \|w_l\|_\infty \end{aligned}$$

Portanto, segue da Proposição 4.9 que

$$\begin{aligned} \mu_l &\leq \frac{\|\nabla w_l\|_{\Phi_l}}{\|w_l\|_\infty} \\ &\leq \|\nabla w_l\|_{\Phi_l} \\ &\leq \lim_{m \to \infty} \|\nabla u_{l,j_m}\|_{\Phi_l} \\ &= \lim_{m \to \infty} \Lambda_{l,j_m} \\ &= \mu_l \end{aligned}$$

Logo, $\|w_l\|_\infty = 1$ e

$$\mu_l = \|\nabla w_l\|_{\Phi_l} = \lim_{m \to \infty} \|\nabla u_{l,j_m}\|_{\Phi_l}.$$

Além disso, segue da última igualdade e da convergência fraca que

$$u_{l,j_m} \to w_l \quad \text{forte em} \quad W_0^{1,\Phi_l}(\Omega),$$

pois (1.4) implica que $W_0^{1,\Phi_l}(\Omega)$ é uniformemente convexo (ver Proposição A.18). □

Defina

$$\Gamma_u := \{x \in \overline{\Omega}; |u(x)| = \|u\|_\infty\}.$$

Teorema 4.11. *Seja $l \in \mathbb{N}$ fixo. Uma função $u \in W_0^{1,\Phi_l}(\Omega) \setminus \{0\}$ é extremal de μ_l se, e só se, $\Gamma_u = \{x_0\}$ para algum $x_0 \in \Omega$ e*

$$\int_\Omega \phi_l\left(\frac{|\nabla u|}{K_l(u)}\right)\frac{\nabla u}{K_l(u)}\nabla\eta\ dx = \mu_l S_l(u)\cdot sgn(u(x_0))\ \eta(x_0), \qquad \forall\ \eta \in W_0^{1,\Phi_l}(\Omega),$$

em que

$$K_l(u) := \|\nabla u\|_{\Phi_l}$$

e

$$S_l(u) := \int_\Omega \phi_l\left(\frac{|\nabla u|}{K_l(u)}\right)\left|\frac{\nabla u}{K_l(u)}\right|^2\ dx.$$

Demonstração. Sejam $u \in W_0^{1,\Phi_l}(\Omega)\setminus\{0\}$ uma função extremal de μ_l e $\eta \in W_0^{1,\Phi_l}(\Omega)$ fixo. Assim,

$$\frac{\|\nabla u\|_{\Phi_l}}{\|u\|_\infty} = \mu_l \leq \frac{\|\nabla u + \epsilon\nabla\eta\|_{\Phi_l}}{\|u+\epsilon\eta\|_\infty}, \qquad \forall\ \epsilon > 0. \tag{4.13}$$

Além disso, segue de [2, Lema 4.4] que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\|u+\epsilon\eta\|_\infty - \|u\|_\infty}{\epsilon} = \max\{\text{sgn}(u(x))\eta(x); x \in \Gamma_u\} \tag{4.14}$$

Daí, temos de (4.3)

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\|\nabla u + \epsilon\nabla\eta\|_{\Phi_l}}{\|u+\epsilon\eta\|_\infty} - \frac{\|\nabla u\|_{\Phi_l}}{\|u\|_\infty} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\|\nabla u + \epsilon\nabla\eta\|_{\Phi_l}}{\|u+\epsilon\eta\|_\infty} - \frac{\|\nabla u\|_{\Phi_l}}{\|u+\epsilon\eta\|_\infty} + \frac{\|\nabla u\|_{\Phi_l}}{\|u+\epsilon\eta\|_\infty} - \frac{\|\nabla u\|_{\Phi_l}}{\|u\|_\infty} \\
&= \tfrac{1}{\|u\|_\infty}\left(\tfrac{1}{S_l(u)}\int_\Omega \phi_l\left(\tfrac{|\nabla u|}{K_l(u)}\right)\tfrac{\nabla u}{K_l(u)}\nabla\eta\ dx - \tfrac{\|\nabla u\|_{\Phi_l}}{\|u\|_\infty}\max\{\text{sgn}(u(x))\eta(x); x \in \Gamma_u\}\right)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_\Omega \phi_l\left(\frac{|\nabla u|}{K_l(u)}\right)\frac{\nabla u}{K_l(u)}\nabla\eta\ dx \geq \mu_l S_l(u)\max\{\text{sgn}(u(x))\eta(x); x \in \Gamma_u\}.$$

Trocando η por $-\eta$, obtemos

$$\int_\Omega \phi_l\left(\frac{|\nabla u|}{K_l(u)}\right)\frac{\nabla u}{K_l(u)}\nabla\eta\ dx \leq \mu_l S_l(u)\min\{\text{sgn}(u(x))\eta(x); x \in \Gamma_u\}.$$

Como

$$\min\{\text{sgn}(u(x))\eta(x); x \in \Gamma_u\} \leq \max\{\text{sgn}(u(x))\eta(x); x \in \Gamma_u\},$$

segue das duas desigualdades anteriores que

$$\begin{aligned} \min\{\mathrm{sgn}(u(x))\eta(x); x \in \Gamma_u\} &= \int_\Omega \phi_l\left(\frac{|\nabla u|}{K_l(u)}\right)\frac{\nabla u}{K_l(u)}\nabla\eta\, dx \\ &= \mu_l S_l(u)\max\{\mathrm{sgn}(u(x))\eta(x); x \in \Gamma_u\}. \end{aligned}$$

Como η é arbitrário, $\Gamma_u = \{x_0\}$ para algum $x_0 \in \Omega$.

Reciprocamente, se $u \in W_0^{1,\Phi_l}(\Omega) \setminus \{0\}$ é tal que $\Gamma_u = \{x_0\}$ para algum $x_0 \in \Omega$ e

$$\int_\Omega \phi_l\left(\frac{|\nabla u|}{K_l(u)}\right)\frac{\nabla u}{K_l(u)}\nabla\eta\, dx = \mu_l S_l(u)\cdot \mathrm{sgn}(u(x_0))\ \eta(x_0), \qquad \forall\ \eta \in W_0^{1,\Phi_l}(\Omega)$$

então para $\eta = u$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi_l\left(\frac{|\nabla u|}{K_l(u)}\right)\frac{\nabla u}{K_l(u)}\nabla u\, dx &= \mu_l S_l(u)\cdot \mathrm{sgn}(u(x_0))\ u(x_0) \\ &= \mu_l S_l(u)\|u\|_\infty \end{aligned}$$

o que implica

$$\mu_l = \frac{\|\nabla u\|_{\Phi_l}}{\|u\|_\infty}.$$

□

Corolário 4.12. *Uma função extremal de μ_l não muda de sinal em Ω.*

Demonstração. Seja $u \in W_0^{1,\Phi_l}(\Omega) \setminus \{0\}$ uma função extremal de μ_l. Assim, $|u|$ também é extremal e, então, segue do teorema anterior que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\Gamma_u = \{x_0\}$ e

$$\int_\Omega \phi_l\left(\frac{|\nabla u|}{K_l(u)}\right)\frac{\nabla u}{K_l(u)}\nabla u\, dx = \mu_l S_l(u)\cdot \|u\|_\infty \geq 0.$$

Portanto, segue do Princípio do Máximo Forte (Teorema A.21) que $|u| > 0$. □

Para cada $l \in \mathbb{N}$, seja w_l uma função extremal de μ_l positiva tal que

$$\|w_l\|_\infty = 1$$

e

$$w_l > 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Assim,

$$K_l(w_l) = \|w_l\|_{\Phi_l} = \mu_l \leq \frac{\|\nabla v\|_{\Phi_l}}{\|v\|_\infty} \qquad \forall\ v \in W_0^{1,\Phi_l}(\Omega) \setminus \{0\}.$$

Segue do Teorema 4.11 que

$$\int_\Omega \phi_l\left(\frac{|\nabla w_l|}{K_l(w_l)}\right)\frac{\nabla w_l}{K_l(w_l)}\nabla\eta\, dx = \mu_l S_l(w_l)\cdot \mathrm{sgn}(w_l(x_0))\ \eta(x_0), \qquad \forall\ \eta \in W_0^{1,\Phi_l}(\Omega),$$

isto é,

$$-\Delta_{\Phi_l}\left(\frac{w_l}{K_l(w_l)}\right) = \mu_l S_l(w_l)\delta_{x_0^l},$$

em que x_0^l é o único ponto de máximo de w_l e $\delta_{x_0^l}$ é a função delta de Dirac em x_0^l.

Defina

$$\Lambda_\infty := \inf\left\{\frac{\|\nabla v\|_\infty}{\|v\|_\infty}; v \in W_0^{1,\infty}(\Omega) \setminus \{0\}\right\}.$$

Lema 4.13. *Sejam $l, m \in N$. Para todo $\epsilon > 0$ existem constantes $a_m, b_{l,\epsilon} > 0$ tais que*

$$\|u\|_{\Phi_m} \leq a_m \left(b_{l,\epsilon}\|u\|_{\Phi_l} + \epsilon\right), \qquad \forall\ u \in W_0^{1,\Phi_l}(\Omega), \tag{4.15}$$

$$\lim_{m\to\infty} a_m = 1 \tag{4.16}$$

e

$$\lim_{l\to\infty} b_{l,\epsilon} = 1. \tag{4.17}$$

Demonstração. Segue da demonstração do Lema 4.7 que

$$\|u\|_{\Phi_m} \leq [\Phi_m(1)|\Omega|]^{\frac{1}{\phi_m^-}} \|u\|_\infty \qquad \text{se} \ \ \|u\|_\infty \leq \|u\|_{\Phi_m}.$$

Logo,

$$\|u\|_{\Phi_m} \leq \max\left\{1, [\Phi(1)|\Omega|]^{\frac{1}{\phi_m^-}}\right\} \|u\|_\infty$$

e, então, para

$$a_m := \max\left\{1, [\Phi(1)|\Omega|]^{\frac{1}{\phi_m^-}}\right\}$$

temos

$$\|u\|_{\Phi_m} \leq a_m \|u\|_\infty. \tag{4.18}$$

Alem disso, segue da demonstração do Lema 4.7 que

$$(\|u\|_\infty - \epsilon)\,[\Phi(1)|A_\epsilon|]^{\frac{1}{\phi_m^-}} \leq \|u\|_{\Phi_l} \qquad \text{se} \quad \|u\|_{\Phi_l} < \|u\|_\infty - \epsilon$$

e, então,

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\|u\|_{\Phi_l}}{[\Phi(1)|A_\epsilon|]^{\frac{1}{\phi_m^-}}} + \epsilon \qquad \text{se} \quad \|u\|_{\Phi_l} < \|u\|_\infty - \epsilon$$

Logo,

$$\|u\|_\infty \leq b_{l,\epsilon}\|u\|_{\Phi_l} + \epsilon \tag{4.19}$$

para

$$b_{l,\epsilon} := \max\left\{1, \frac{1}{[\Phi(1)|A_\epsilon|]^{\frac{1}{\phi_m^-}}}\right\}$$

Segue de (4.18) e (4.19) que

$$\|u\|_{\Phi_m} \leq a_m \left(b_{l,\epsilon}\|u\|_{\Phi_l} + \epsilon\right).$$

Além disso, (4.1) implica (4.16) e (4.17). □

Proposição 4.14. *Existe uma subsequência de* $(w_l)_{l\in\mathbb{N}}$ *que converge forte em* $C(\overline{\Omega})$ *a uma função* $w_\infty \in W_0^{1,\infty}(\Omega)\setminus\{0\}$ *tal que*

$$\lim_{l\to\infty} \mu_l = \Lambda_\infty = \|\nabla w_\infty\|_\infty$$

e

$$0 \leq w_\infty(x) \leq \frac{d(x)}{\|d\|_\infty}, \qquad x\in\Omega \quad q.t.p.$$

em que d *denota a função distância da fronteira* $\partial\Omega$*, definida por*

$$d(x) := \inf_{y\in\partial\Omega} |x-y|, \qquad x\in\overline{\Omega}.$$

Demonstração. Um fato bem conhecido (ver [9]) é que

$$\Lambda_\infty = \frac{\|\nabla d\|_\infty}{\|d\|_\infty} = \frac{1}{\|d\|_\infty}. \tag{4.20}$$

Como $d\in W_0^{1,\infty}(\Omega)\subset W_0^{1,\Phi_l}(\Omega)$ e, então,

$$\|\nabla w_l\|_{\Phi_l} = \mu_l \leq \frac{\|\nabla d\|_{\Phi_l}}{\|d\|_\infty} \tag{4.21}$$

Assim, o Lema 4.7 e (4.20) implicam

$$\begin{aligned}
\limsup_{l\to\infty} \mu_l &\leq \limsup_{l\to\infty} \frac{\|\nabla d\|_{\Phi_l}}{\|d\|_\infty} \\
&= \frac{\|\nabla d\|_\infty}{\|d\|_\infty} \\
&= \Lambda_\infty
\end{aligned}$$

e portanto

$$\limsup_{l\to\infty} \mu_l \leq \Lambda_\infty. \tag{4.22}$$

Por outro lado, existe uma subsequência $(\mu_{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{l_n} = \liminf_{l\to\infty} \mu_l. \tag{4.23}$$

Sejam $\epsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 4.13, (4.17) e (4.21), temos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \|\nabla w_{l_n}\|_{\Phi_m} &\leq \limsup_{n\to\infty} a_m \left(b_{l_n,\epsilon}\|\nabla w_{l_n}\|_{\Phi_{l_n}} + \epsilon\right)\\ &\leq \limsup_{n\to\infty} a_m \left(\|\nabla w_{l_n}\|_{\Phi_{l_n}} + \epsilon\right)\\ &\leq a_m(\Lambda_\infty + \epsilon).\end{aligned}$$

Logo, passando a subsequência, existe $w_\infty \in W_0^{1,\Phi_m}(\Omega)$ tal que

$$w_{l_n} \rightharpoonup w_\infty \ \text{ em } \ W_0^{1,\Phi_m}(\Omega)$$

e

$$w_{l_n} \to w_\infty \ \text{ uniformemente em } \ \Omega$$

A convergência uniforme implica $\|w_\infty\|_\infty = 1$, pois

$$\|w_{l_n}\|_\infty = 1, \quad \forall\ n.$$

A convergência fraca implica

$$\|\nabla w_\infty\|_{\Phi_m} \leq \liminf_{n\to\infty} \|\nabla w_{l_n}\|_{\Phi_m}. \tag{4.24}$$

Além disso, pelo Lema 4.13, (4.17) e (4.23), temos

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \|\nabla w_{l_n}\|_{\Phi_m} &\leq \liminf_{n\to\infty} a_m \left(b_{l_n,\epsilon}\|\nabla w_{l_n}\|_{\Phi_{l_n}} + \epsilon\right)\\ &= a_m \liminf_{l\to\infty} \mu_l \ + \ \epsilon.\end{aligned}$$

Logo, (4.24) implica

$$\|\nabla w_\infty\|_{\Phi_m} \leq a_m \liminf_{l\to\infty} \mu_l \ + \ \epsilon.$$

Como essa desigualdade vale para todo $\epsilon > 0$,

$$\|\nabla w_\infty\|_{\Phi_m} \leq a_m \liminf_{l\to\infty} \mu_l. \tag{4.25}$$

Logo,

$$w_\infty \in W_0^{1,\Phi_m}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,\phi_m^-}(\Omega), \qquad \forall\ m$$

e, então,

$$w_\infty \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$$

Assim, do Lema 4.7, (4.25) e (4.22), obtemos

$$\begin{aligned}
\Lambda_\infty &\leq \|\nabla w_\infty\|_\infty \\
&= \lim_{m\to\infty} \|\nabla w_\infty\|_{\Phi_m} \\
&\leq \liminf_{l\to\infty} \mu_l \\
&\leq \limsup_{l\to\infty} \mu_l \\
&\leq \Lambda_\infty.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Lambda_\infty = \|\nabla w_\infty\|_\infty = \lim_{l\to\infty} \mu_l.$$

Assim, segue de (4.20) que a melhor constante de Lipschitz de w_∞ é

$$\|\nabla w_\infty\|_\infty = \Lambda_\infty = \frac{1}{\|d\|_\infty},$$

o que implica

$$\|d\|_\infty \; |w_\infty(x) - w_\infty(y)| \leq |x-y|, \qquad \text{q.t.p. } x, y \in \overline{\Omega}.$$

Como $w_\infty \equiv 0$ em $\partial\Omega$, dados $x \in \Omega$ e $y \in \partial\Omega$, temos

$$\|d\|_\infty \; w_\infty(x) \leq \inf_{y\in\partial\Omega} |x-y| = d(x),$$

e, então,

$$w_\infty(x) \leq \frac{d(x)}{\|d\|_\infty} \qquad \text{q.t.p.} \quad x \in \Omega.$$

□

Corolário 4.15. *Existe $x_\star \in \Omega$ tal que*

$$w_\infty(x_\star) = \|w_\infty\|_\infty = 1 \quad e \quad d(x_\star) = \|d\|_\infty.$$

Demonstração. Seja w_{l_n} uma sequência dada pela Proposição 4.14 convergindo uniformemente a w_∞. Pelo Teorema 4.11, para cada minimizador w_{l_n} existe um único $x_0^{l_n} \in \Omega$ tal que

$$w_{l_n}(x_{l_n}) = \|w_{l_n}\|_\infty = 1.$$

Como Ω é limitado, passando a subsequência,

$$x_0^{l_n} \to x_\star.$$

Assim,

$$w_\infty(x_\star) = \|w_\infty\|_\infty = 1.$$

Logo, se $x_\star \in \partial\Omega$ então teríamos $w_\infty \equiv 0$. Portanto, $x_\star \in \Omega$. Daí, segue da Proposição 4.14 que

$$1 = w_\infty(x_\star) \leq \frac{d(x_\star)}{\|d\|_\infty} \leq 1,$$

o que implica

$$d(x_\star) = \|d\|_\infty.$$

□

Definimos solução de viscosidade para o operador ∞-Laplaciano.

Definição 4.16. 1. Uma função semicontínua superiormente $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é subsolução de viscosidade de

$$\begin{cases} \Delta_\infty\left(\frac{u}{\|\nabla u\|_\infty}\right) = 0 & \text{em } D := \Omega \setminus \{x_\star\}, \\ \frac{u}{\|u\|_\infty} = d & \text{sobre } \partial D = \Omega \cup \{x_\star\}. \end{cases} \tag{P_∞}$$

se $\left.\dfrac{u}{\|u\|_\infty}\right|_{\partial\Omega} \leq d$ em ∂D e para todo $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ tais que $u(x_0) = \varphi(x_0)$ e

$$u < \varphi \quad \text{em} \quad B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$$

para algum $r > 0$, vale

$$-\Delta_\infty \varphi(x_0) \leq 0.$$

2. Uma função semicontínua inferiormente $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é supersolução de viscosidade de (P_∞) se $\left.\dfrac{u}{\|u\|_\infty}\right|_{\partial\Omega} \geq d$ em ∂D e para todo $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ tais que $u(x_0) = \varphi(x_0)$ e

$$u > \Psi \quad \text{em} \quad B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$$

para algum $r > 0$, vale

$$-\Delta_\infty \varphi(x_0) \geq 0.$$

3. Uma função contínua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é solução de viscosidade de (P_∞) se u é sub e supersolução de viscosidade de (P_∞).

Teorema 4.17. *A função w_∞ é uma solução de viscosidade de* (P_∞).

Demonstração. Precisamos mostrar que w_∞ é solução de viscosidade de

$$\begin{cases} \Delta_\infty\left(\frac{u}{\Lambda_\infty}\right) = 0 & \text{em } D := \Omega \setminus \{0\}, \\ \frac{u}{\Lambda_\infty} = d & \text{sobre } \partial D = \partial\Omega \cup \{x_\star\}, \end{cases}$$

pois $\|w_\infty\|_\infty = \Lambda_\infty$. Primeiro vamos mostrar que w_∞ é supersolução de viscosidade. Sejam $x_0 \in \Omega$ e $\varphi \in C^2(\Omega)$ tais que $u(x_0) = \varphi(x_0)$ e

$$u > \varphi \quad \text{em} \quad B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$$

para algum $r > 0$. Precisamos mostrar que

$$-\Delta_\infty \varphi(x_0) \geq 0.$$

Como a desigualdade desejada vale para $\nabla\varphi(x_0) = 0$, podemos assumir que $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$. Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_0) \subset D$ e

$$\nabla\varphi(x) \neq 0, \qquad \forall\, x \in B_\epsilon(x_0).$$

Portanto,

$$\nabla\varphi(x_{l_n}) \neq 0$$

a partir de um certo índice n. Por [19, Teorema 4.5], a convergência uniforme de w_{l_n} a w_∞ implica que existe uma subsequência $\{x_{l_n}\} \subset \Omega$ tal que $x_{l_n} \to x_0$ e $w_{l_n} - \varphi$ tem um mínimo em x_{l_n}. Logo, segue do Lema 3.11 que

$$-\Delta_{\Phi_{l_n}} \frac{\varphi}{K(u)} \geq 0,$$

isto é,

$$-\phi_n(|\nabla\varphi(x_{l_n})|)\Delta\varphi(x_{l_n}) - \frac{\phi_n'(|\nabla\varphi(x_{l_n})|)}{|\nabla\varphi(x_{l_n})|}\Delta_\infty\varphi(x_{l_n}) \geq 0.$$

Multiplicando a desigualdade por $\frac{|\nabla\varphi(x_{l_n})|}{\phi_n'(|\nabla\varphi(x_{l_n})|)}$ e usando que ϕ_{l_n} é crescente, obtemos

$$-\phi_n(|\nabla\varphi(x_{l_n})|)\frac{|\nabla\varphi(x_{l_n})|}{\phi_n'(|\nabla\varphi(x_{l_n})|)}\Delta\varphi(x_{l_n}) - \Delta_\infty\varphi(x_{l_n}) \geq 0.$$

Fazendo $n \to \infty$ segue de (1.1), (1.3) e (2.2) que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t\phi_n(t)}{\phi_n'(t)} = 0, \qquad \forall\, t > 0$$

Logo,

$$-\Delta_\infty\varphi(x_0) \geq 0.$$

□

Observação 4.18. Por homogeneidade (4.2) equivale a

$$\Lambda_1 = \inf\left\{\|\nabla u\|_\Phi : u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \setminus \{0\}, \|u\|_\Psi = 1\right\}.$$

Segue da Proposição A.4 que

$$\Lambda_1 = \inf \left\{ \|\nabla u\|_\Phi : u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega) \setminus \{0\}, \int_\Omega \Psi(|u|) \, dx = 1 \right\}.$$

Apêndice A

Espaços de Orlicz

Vamos agora introduzir os espaços de Orlicz-Sobolev $W^{1,\Phi}(\Omega)$ com as notações e resultados usados neste texto, para um domínio suave e limitado Ω. Tratamos inicialmente de alguns conceitos preliminares para o entendimento destes espaços. Fazemos também uma revisão das propriedades básicas dos espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev. Por fim, trazemos uma breve revisão do operador Φ-Laplaciano, com ênfase para os resultados usados neste trabalho. Como refêrencia citamos [1], [17], [20], [22] e [23].

Definição A.1. Uma função $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ é chamada N-função (ou função de Orlicz) se:

i) Φ é convexa e contínua,

ii) $\Phi(0) = 0$ e

$$\Phi(t) > 0, \qquad \forall\ t > 0,$$

iii) $\dfrac{\Phi(t)}{t} \ \to\ 0, \quad \text{quando } t \to 0,$

iv) $\dfrac{\Phi(t)}{t} \ \to\ +\infty, \quad \text{quando } t \to \infty,$

v) Φ é par.

Exemplo A.2. Exemplos de N-funções:

1. $\Phi(t) = |t|^p, \quad p > 1;$

2. $\Phi(t) = |t|^p + |t|^q, \quad p, q > 1;$

3. $\Phi(t) = |t|^p \ln(1 + |t|), \quad p > 1.$

Lema A.3. *Toda N-função é da forma*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(s)\ ds,$$

com $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

i) φ é contínua e não decrescente;

ii) $\varphi(s) = 0$ *se, e só se,* $s = 0$*;*

iii) $\varphi(s) \to +\infty$ *quando* $s \to +\infty$*;*

iv) $\varphi(s) > 0, \quad \forall\ s > 0.$

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e uma N-função Φ, o espaço de Orlicz $L^\Phi(\Omega)$ é definido como o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que para algum $\lambda > 0$

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right)\, dx < \infty.$$

Munido com a norma de Luxemburgo

$$\|u\|_\Phi := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right)\, dx \leq 1\right\}$$

esse é um espaço de Banach.

Observe para Φ de (i) do Exemplo A.2 temos o espaço $L^p(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

pois

$$\int_\Omega \left|\frac{u}{\lambda}\right|^p\, dx \leq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda \geq \|u\|_p.$$

Proposição A.4. *Para* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *e* $\lambda > 0$

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right)\, dx = 1$$

se, e só se, $\lambda = \|u\|_\Phi$*.*

Definição A.5. Uma N-função Φ satisfaz a condição Δ_2 se existe $k > 0$ e $t_0 \geq 0$ tais que

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t), \qquad \forall\ t \geq 0.$$

Definição A.6. A conjugada de Φ é a função $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{\Phi}(t) = \sup_{s \geq 0}(st - \Phi(s)).$$

Se Φ é uma N-função então $\tilde{\Phi}$ também é uma N-função. Além disso, para Φ como no Lema A.3,

$$\tilde{\Phi}(t) = \int_0^t \psi(s)\, ds$$

com

$$\psi(s) = \sup_{\varphi(t) \leq s} t.$$

A condição (5) implica que Φ e $\tilde{\Phi}$ satisfazem Δ_2.

Proposição A.7. *Para uma φ como no Lema A.3, Φ satisfaz a condição Δ_2 se, e só se, existem $a > 0$ e $t_0 \geq 0$ tais que*

$$\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} \leq a, \qquad \forall\ t \geq t_0.$$

Nesse texto usamos $\varphi(t) = \phi(t)t$ e de (4) obtemos (5). Logo, a proposição anterior implica que a N-função usada satisfaz a condição Δ_2.

Proposição A.8. *Se Φ satisfaz Δ_2 então:*

1. *Existem $a, b > 0$ tais que*
$$\Phi(t) \leq at^b,$$
para t suficientemente grande;

2. *Uma sequência u_n converge para u em $L^\Phi(\Omega)$ se, e só se,*
$$\int_\Omega \Phi(u_n - u)\ dx \to 0.$$

Proposição A.9 (Desigualdade de Holder)**.** *Se $u \in L^\Phi(\Omega)$ e $v \in L^{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ então $u, v \in L^1(\Omega)$ e*
$$\int_\Omega |uv|\ dx \leq 2\|u\|_\Phi\ \|v\|_{\tilde{\Phi}}.$$

Para $\varphi(t) = |t|^{p-2}t$ temos $\Phi(t) = \dfrac{1}{p}|t|^p$,

$$\psi(s) = \sup_{|t|^{p-2}t \leq s} t = s^{\frac{1}{p-1}}$$

e, então,
$$\tilde{\Phi}(t) = \int_0^t s^{\frac{1}{p-1}}\ ds = \frac{p-1}{p} t^{\frac{p}{p-1}} = \frac{1}{p'}|t|^{p'}$$
com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Observe que a desigualdade de Hölder é mais fraca nos espaços de Orlicz se comparada com com a desigualdade

$$\int_\Omega |uv|\ dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}$$

dos espaços $L^p(\Omega)$.

Proposição A.10. *Uma N-função Φ satisfaz a condição Δ_2 se, e só se, o espaço $L^\Phi(\Omega)$ é separável. Mais ainda, Φ e $\tilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2 se, e só se, $L^\Phi(\Omega)$ é reflexivo.*

O espaço de Orlicz-Sobolev é definido como

$$W^{1,\Phi}(\Omega)=\left\{\begin{array}{ccc} u\in L^{\Phi}(\Omega) & ; & \exists f_1,\dots,f_N\in L^{\Phi}(\Omega), \displaystyle\int_\Omega u\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,dx=-\int_\Omega f_i\psi\,dx, \\ & & \forall\psi\in C_0^\infty(\Omega), i\in\{1,\dots,N\}\end{array}\right\}.$$

As funções $u_{x_i}=f_i$ são as chamadas derivadas fracas e $\nabla u=(u_{x_1},...,u_{x_N})$ é o gradiente de u. O espaço de Orlicz-Sobolev é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{1,\Phi}=\|u\|_\Phi+\|\nabla\|_\Phi.$$

Proposição A.11. *O espaço $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach. Se Φ satisfaz Δ_2 então $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é separável. Se Φ e $\tilde{\Phi}$ satisfazem Δ_2 então $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é reflexivo.*

Consideremos Φ e Ψ duas N-funções.

Definição A.12.

1. Dizemos que Φ domina Ψ se existem $\alpha>0$ e $t_0\geq 0$ tais que

$$\Psi(t)\leq\alpha\Phi(t),\qquad\forall\ t\geq t_0.$$

Nesse caso, escrevemos $\Psi\prec\Phi$.

2. Dizemos que Ψ cresce estritamente mais lento que Φ se para todo $k>0$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\Psi(kt)}{\Phi(t)}=0.$$

Nesse caso, escrevemos $\Psi\prec\prec\Phi$.

Proposição A.13. *Seja Φ uma N-função tal que*

$$\int_0^1\frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}}\,ds<\infty,\qquad\int_1^{+\infty}\frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}}\,ds=+\infty.\tag{A.1}$$

A função $\Phi_*:[0,\infty)\to[0,\infty)$, definida a partir de sua inversa,

$$\Phi_*^{-1}(t)=\int_1^t\frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}}\,ds$$

e estendida para $\mathbb{R}$ de forma par é uma N-função.

Para $\Phi(t)=\dfrac{1}{p}|t|^p$ as hipóteses da proposição acima são satisfeitas para $1\leq p<N$ e, nesse caso, temos

$$\Phi_*(t)=(p^*)^{1-p^*}p^{-\frac{p^*}{p}}\ \frac{1}{p^*}|t|^{p^*}.$$

O espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é definido como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,\Phi}(\Omega)$.

Proposição A.14 (Desigualdade de Poincaré). *Existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$\|u\|_\Phi \leq K\|\nabla u\|_\Phi, \qquad \forall\ u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Essa desigualdade implica que $\|u\|_{1,\Phi}$ e $\|\nabla u\|_\Phi$ são normas equivalentes em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Por isso, é comum usar a norma $\|\nabla u\|_\Phi$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Como $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{1,\Phi}(\Omega)$, segue da Proposição A.11 que $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach. Temos também que se Φ satisfaz a condição Δ_2 então $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é separável. Além disso, se Φ e $\tilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2 então $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é reflexivo.

Teorema A.15. *Seja Φ uma N-função satisfazendo (A.1). A imersão $W^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^{\Phi_*}(\Omega)$ é contínua. Se $\Psi \prec\prec \Phi_*$ então a imersão $W^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^{\Psi}(\Omega)$ é compacta.*

Em particular, $W^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^{\Phi}(\Omega)$, pois $\Phi \prec\prec \Phi_*$.

Observamos que substituindo $W^{1,\Phi}(\Omega)$ por $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, o teorema acima pode ser estendido para o caso em que Ω não é limitado.

Em [18, Lema 1.1] temos o

Lema A.16. *Suponha*

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(s)s\ ds \tag{A.2}$$

e

$$a^- - 1 \leq \frac{\Big(\phi(t)t\Big)'}{\phi(t)} \leq a^+ - 1, \qquad \forall\ t > 0 \tag{A.3}$$

para $a^-, a^+ > 1$ constantes. Então

$$\Phi(t) \leq \phi(t)t^2$$

e

$$1 < a^- \leq \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} \leq a^+, \qquad \forall\ t > 0 \tag{A.4}$$

Demonstração. Note que a segunda desigualdade implica a primeira. Observe também que

$$\begin{aligned}(a^+ - 1)\Phi(t) &= \int_0^t (a^+ - 1)\phi(s)s\ ds \\ &\geq \int_0^t \Big(\phi(s)s\Big)' s\ ds \qquad \text{por (A.3)} \\ &= \phi(t)t^2 - \int_0^t \phi(s)s\ ds \qquad \text{usando integração por partes} \\ &= \phi(t)t^2 - \Phi(t),\end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} \leq a^+.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(a^- - 1)\Phi(t) &= \int_0^t (a^- - 1)\phi(s)s\ ds \\ &\le \int_0^t \Big(\phi(s)s\Big)' s\ ds && \text{por (A.3)} \\ &= \phi(t)t^2 - \int_0^t \phi(s)s\ ds && \text{usando integração por partes} \\ &= \phi(t)t^2 - \Phi(t)\end{aligned}$$

e, então,

$$a^- \le \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)}.$$

□

Note que

$$\Big(\phi(t)t\Big)' = \phi(t) + \phi(t)t$$

implica

$$\frac{\Big(\phi(t)t\Big)'}{\phi(t)} = 1 + \frac{t\phi'(t)}{\phi(t)},$$

e, então, segue de (A.3) que

$$a^- - 1 \le 1 + \frac{t\phi'(t)}{\phi(t)} \le a^+ - 1$$

Teorema A.17. *Seja Φ dada por (A.2) e suponha (A.4), ou seja,*

$$1 < \phi^- := \inf_{t>0} \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} \le \sup_{t>0} \frac{t^2\phi(t)}{\Phi(t)} := \phi^+ < \infty. \tag{A.5}$$

Para as constantes ϕ^- e ϕ^+ definidas acima vale

$$\Phi(s)\min\left\{t^{\phi^-}, t^{\phi^+}\right\} \le \Phi(st) \le \Phi(s)\max\left\{t^{\phi^-}, t^{\phi^+}\right\} \tag{A.6}$$

e

$$\min\left\{\|u\|_\Phi^{\phi^-}, \|u\|_\Phi^{\phi^+}\right\} \le \int_\Omega \Phi(u)\ dx \le \max\left\{\|u\|_\Phi^{\phi^-}, \|u\|_\Phi^{\phi^+}\right\}. \tag{A.7}$$

O Teorema 2, página 297, junto com o Corolário 4, página 26, em [22] e o Teorema 2, página 65 , em [20] mostram que

Proposição A.18. *Suponha que a N-função Φ satisfaça uma das seguintes condições:*

1. *Φ e Φ^* satisfazem a condição Δ_2;*

2. *Φ é dada por (A.2) e satisfaz (A.5);*

3. Φ é estritamente convexa e satisfaz Δ_2;

O espaço de Orlicz $L^{\Phi}(\Omega)$ é uniformemente convexo.

Teorema A.19. *As seguintes imersões são contínuas*

$$W_0^{1,\phi^+}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,\phi^-}(\Omega).$$

Demonstração. Seja $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e considere $u = \dfrac{v}{\|\nabla v\|_\Phi}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{|\nabla u|>1} |\nabla u|^{\phi^-}\, dx &\leq \frac{1}{\Phi(1)} \int_{|\nabla u|>1} \Phi(|\nabla u|)\, dx, && \text{por (A.6)}\\
&\leq \frac{1}{\Phi(1)} \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|)\, dx, &&\\
&\leq \frac{1}{\Phi(1)} \|\nabla u\|_\Phi^{\phi^+} && \text{por (A.7)}\\
&= \frac{1}{\Phi(1)} && \text{pois } \|\nabla u\|_\Phi = 1.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\|\nabla v\|_{\phi^-}^{\phi^-}}{\|\nabla v\|_\Phi^{\phi^-}} &= \|\nabla u\|_{\phi^-}^{\phi^-}\\
&= \int_{|\nabla u|>1} |\nabla u|^{\phi^-}\, dx + \int_{|\nabla u|\leq 1} |\nabla u|^{\phi^-}\, dx\\
&\leq \frac{1}{\Phi(1)} + |\Omega|
\end{aligned}$$

e, então,

$$\|\nabla v\|_{\phi^-} \leq C_\Phi^- \|\nabla v\|_\Phi$$

onde

$$C_\Phi^- = \left(\frac{1}{\Phi(1)} + |\Omega|\right)^{\frac{1}{\phi^-}}.$$

Além disso, para $v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e $u = \dfrac{v}{\|\nabla v\|_{\phi^+}}$, se $\|\nabla u\|_\Phi > 1$ então

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_\Phi^{\phi^-} &\leq \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\, dx && \text{por (A.7)}\\
&= \int_{|\nabla u|>1} \Phi(|\nabla u|)\, dx + \int_{|\nabla u|\leq 1} \Phi(|\nabla u|)\, dx &&\\
&\leq \Phi(1) \int_{|\nabla u|>1} |\nabla u|^{\phi^+}\, dx + \Phi(1)|\Omega| && \text{por (A.6)}\\
&\leq \Phi(1)(1+|\Omega|) && \text{pois } \|u\|_{\phi^+} = 1
\end{aligned}$$

e, então,

$$\|\nabla u\|_\Phi \leq \max\left\{ (\Phi(1)(1+|\Omega|))^{\frac{1}{\phi^-}}, 1 \right\},$$

ou seja,

$$\|\nabla v\|_{\Phi} \leq C_{\Phi}^{+} \|\nabla v\|_{\phi^{+}}$$

onde

$$C_{\Phi}^{+} = \max\left\{ (\Phi(1)(1+|\Omega|))^{\frac{1}{\phi^{-}}}, 1 \right\}.$$

□

Observe que segue da demonstração acima que as seguintes imersões são contínuas

$$L^{\phi^{+}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^{\phi^{-}}(\Omega).$$

Portanto, para $p \geq \phi^{+}$ e $1 \leq q \leq \phi^{-}$ vale

$$L^{p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega).$$

Para Φ dada por (A.2), o operador Φ-Laplaciano é definido em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ por

$$\Delta_{\Phi} u := \operatorname{div}\left(\phi(|\nabla u|\nabla u)\right) \tag{A.8}$$

e

$$-\Delta_{\Phi} u = f \tag{A.9}$$

equivale a

$$\int_{\Omega} \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla v \; dx = \int_{\Omega} f v \; dx, \qquad \forall\, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Proposição A.20 (Lema 4.1.18, [24]). *Sejam Φ como em (A.2) satisfazendo (A.3) e $I : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por*

$$I(u) = \int_{\Omega} \Phi(|\nabla u|) \; dx.$$

1. *O funcional I é de classe C^1 e*

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla v \; dx, \qquad \forall\, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

2. *I é fracamente semicontínuo inferiormente, ou seja, se $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ então*

$$\liminf_{n\to\infty} I(u_n) \leq I(u).$$

3. *I' é estritamente monótona, isto é,*

$$\langle I'(u) - I'(v), u - v\rangle > 0, \qquad \forall\, u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

4. *I' satisfaz a condição (S_+), ou seja, se $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e*

$$\limsup_{n\to\infty} \langle I'(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$$

então $u_n \to u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Em [13, Lema3.4] temos o Princípio do Máximo Forte.

Teorema A.21 (Princípio do Máximo Forte). *Se $f \in L^\infty(\Omega)$, $f \geq 0$ e $f \neq 0$ então a solução $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ de (A.9) é positiva em Ω.*

Em [13, Lema3.4] temos também o Princípio da Comparação Forte.

Teorema A.22 (Princípio da Comparação Forte). *Se $h_i \in L^\infty(\Omega)$, $i = 1, 2$, e $u_i \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ uma solução de*

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u = h_i & em\ \Omega, \\ u = 0 & sobre\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Se $0 \leq h_1 \leq h_2$ e o conjunto

$$C := \{x \in \Omega; h_1(x) = h_2(x)\}$$

tem interior vazio, então

$$0 \leq u_1 < u_2 \quad em \quad \Omega$$

e

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu} < \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \leq 0 \quad sobre \quad \partial\Omega.$$

Teorema A.23 (Teorema do ponto fixo de Schaefer). *Sejam X um espaço de Banach real e $A : X \to X$ uma aplicação contínua e compacta. Suponha que conjunto*

$$\{u \in X; u = \lambda A(u),\ para\ algum\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

seja limitado. Então A possui um ponto fixo.

Referências Bibliográficas

[1] R. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] C. O. Alves, G. Ercole, and M. D. Huaman-Bolaños. Minimization of quotients with variable exponents. *J. Differential Equations*, 265:1596–1626, 2018.

[3] T. Bhattacharya. An elementary proof of the harnack inequality for non-negative in nitysuperharmonic functions. *J. Differential Equations*, 2001.44:1–8, 2001.

[4] T. Bhattacharya, E. DiBenedetto, and J. Manfredi. Limits as $p \to \infty$ of $-\delta_p u = f$ and related extremal problems. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino.*, in press:15–68, 1989.

[5] L. Boccardo and L. Orsina. Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 37:363–380, 2010.

[6] M. Bocea and M. Mihăilescu. On a family of inhomogeneous torsional creep problems. *Proceedings of the AmericanMathematical Society*, 145:4397–4409, 2017.

[7] M. Bocea, M. Mihăilescu, and D. Stancu-Dumitru. The limiting behavior of solutions to inhomogeneous eigenvalue problems in Orlicz-Sobolev spaces. *Advanced Nonlinear Studies*, 14:977–990, 2014.

[8] Y. Chu and W. Gao. Existence of solutions to a class of quasilinear elliptic problems with nonlinear singular terms. *Boundary Value Problems*, 229, 2013.

[9] G. Ercole and G. A. Pereira. Asymptotics for the best Sobolev constants and their extremal functions. *Math. Nachr.*, 289:1433–1449, 2016.

[10] M. Farcaseanu and M. Mihăilescu. On a family of torsional creep problems involving rapidly growing operators in divergence form. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, in press:1–16, 2018.

[11] G. Franzina and P. Lindqvist. An eigenvalue problem with variable exponents. *Nonlinear Analysis*, 85:1–16, 2019.

[12] N. Fukagai and K. Narukawa. Positive solutions of quasilinear elliptic equations with critical Orlicz-Sobolev nonlinearity on $\mathbb{R}^n$. *Funkcial. Ekvac.*, 49:235–267, 2006.

[13] N. Fukagai and K. Narukawa. On the existence of multiple positive solutions of quasilinear elliptic eigenvalue problem. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 186:539–564, 2007.

[14] J. Giacomoni, I. Schindler, and P. Takác. Sobolev versus holder local minimizers and existence of multiple solutions for a singular quasilinear equation. *Ann. Scuola Norm. Sup.*, VI:117–158, 2007.

[15] A. Grecu and M. Mihăilescu. Principal frequency of $\triangle_\infty$ as limit of Rayleigh quotients in Orlicz spaces. *Applicable Analysis*, in press:1–12, 2019.

[16] R. Jensen. Uniqueness of lipschitz extensions: minimizing the sup norm of the gradient. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 123:51–74, 1993.

[17] A. Kufner, O. John, and S. Fucik. *Function Spaces*. Czechoslovak, Prague, 1977.

[18] G. M. Lieberman. The natural generalization of the natural conditions of ladyzhensaya and uraltseva for elliptic equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 16:311–361, 1991.

[19] P. Lindqvist. *Notes on the Infinity Laplace equation*. Springer, Madrid, 2016.

[20] W. Luxemburg. *Banach function spaces*. PhD thesis, Technische Hogeschool te Delft, 1955.

[21] J. Manfredi and P. Lindqvist. Note on ∞-superharmonic functions. *Rev. Mat. Complut.*, 10:471–480, 1997.

[22] M. M. Rao and Z. D. Ren. *Theory of Orlicz Spaces*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.

[23] J. A. Santos. *Equações Quasilineares Multivalentes*. PhD thesis, Universidade de Brasília, 2011.

[24] L. M. Santos. *Obtaining and breaking uniqueness of positive solutions to strong singular problems*. PhD thesis, Universidade de Brasília, 2018.