UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO: CONHECIMENTO E INCLUSÃO SOCIAL

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

ALANA NUNES PEREIRA

CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

BELO HORIZONTE – MG

JUNHO DE 2020

ALANA NUNES PEREIRA

CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Educação.

Área de concentração: Educação

Linha de pesquisa: Educação Matemática

Orientadora: Dra. Samira Zaidan

BELO HORIZONTE – MG

JUNHO DE 2020

P436c
T

Pereira, Alana Nunes, 1987-
Conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria na educação básica [manuscrito] / Alana Nunes Pereira. - Belo Horizonte, 2020.
233 f. : enc, il.

Tese -- (Doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.
Orientadora: Samira Zaidan.
Bibliografia: f. 214-221.
Anexos: f. 222-224.
Apêndices: f. 225-233.

1. Educação -- Teses. 2. Matemática (Ensino fundamental) -- Estudo e ensino -- Teses. 3. Geometria -- Estudo e ensino (Ensino fundamental) -- Teses. 4. Professores de matemática -- Formação -- Teses. 5. Matemática -- Licenciatura -- Teses.
I. Título. II. Zaidan, Samira. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.

CDD- 372.7

Catalogação da fonte: Biblioteca da FaE/UFMG (Setor de referência)
Bibliotecário: Ivanir Fernandes Leandro CRB: MG-002576/O

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - CONHECIMENTO E INCLUSÃO SOCIAL

FOLHA DE APROVAÇÃO

CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

ALANA NUNES PEREIRA DE OLIVEIRA

Tese submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em EDUCAÇÃO - CONHECIMENTO E INCLUSÃO SOCIAL, como requisito para obtenção do grau de Doutor em EDUCAÇÃO - CONHECIMENTO E INCLUSÃO SOCIAL, área de concentração EDUCAÇÃO: CONHECIMENTO E INCLUSÃO SOCIAL..

Aprovada em 15 de junho de 2020, pela banca constituída pelos membros:

Prof(a). Samira Zaidan - Orientador
UFMG

Prof(a). Ana Cristina Ferreira
UFOP

Prof(a). Julia Schaetzle Wrobel
UFES

Prof(a). Filipe Santos Fernandes
UFMG

Prof(a). Jussara de Loiola Araújo
UFMG

Andrea Moreno

Professora Dra. Andrea Moreno
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Educação:
Conhecimento e Inclusão Social - FAE/UFMG

Belo Horizonte, 16 de junho de 2020.

Ao meu amor, Marcos Paulo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e a Nossa Senhora Aparecida pela sustentação na fé.

Aos meus pais, Neuza e Lucas, pelo amor que dedicam a mim, pelo incentivo de toda a vida, pelas orações e constantes cuidados. Tudo é por vocês e para vocês, sempre.

Ao meu esposo, Marcos Paulo, meu porto seguro e meu amor, que desde o começo da minha caminhada acadêmica segura forte em minha mão dando-me forças para seguir em frente. Esteja certo de que eu não teria conseguido chegar até aqui sem o seu apoio. À minha filha, Maria Júlia, que ainda em meu ventre acompanhou a finalização dessa jornada, fortalecendo ainda mais a minha mente e o meu coração. Obrigada, minha pequena, por você e seu pai existirem em minha vida.

Às minhas irmãs, Ananda e Adriane, pela torcida e pelas palavras de conforto. Aos demais familiares por toda a compreensão diante das minhas ausências nesses últimos anos e por todo o carinho que a mim dedicam.

À minha querida orientadora, Samira, por acreditar em mim de uma maneira tão intensa, desde o início dessa caminhada, nunca deixando que eu desanimasse ou que me sentisse mal. Agradeço por me ter me orientado de forma tão competente, amiga e generosa e por ter me ensinado a amar ainda mais a formação docente. Serei sempre grata pela oportunidade de ter convivido com você e pelo privilégio de ter sido sua aluna.

Aos professores Antônio e Benjamin e aos licenciandos/professores Hipátia e Hilbert por, carinhosamente, terem aberto as portas de suas salas de aula para que eu pudesse realizar as observações de suas práticas de ensino. Obrigada por terem dividido comigo tantos conhecimentos, experiências e ensinamentos. Aos estudantes do 7º e 9º anos da Escola na qual a pesquisa se realizou, minha gratidão pela recepção incrível e por tudo que fizeram nas aulas que acompanhei. Minha torcida por vocês será para sempre. Agradeço também aos demais professores/as e funcionários/as da Escola pela cordial receptividade.

À banca avaliadora deste trabalho, constituída pelas professoras Júlia Wrobel, Ana Cristina Ferreira e Jussara Araújo e pelo professor Filipe Santos. Obrigada por terem aceitado dar suas contribuições certamente importantes e imprescindíveis para esta tese. Considero um privilégio ter recebido os pareceres de todos vocês. Às professoras Flávia Coura e Vanessa Tomaz, pelo aceite em participar da banca avaliadora como suplentes e pelas excelentes contribuições que deram ao trabalho.

De maneira especial, deixo aqui o meu sincero agradecimento ao professor Plinio Cavalcanti Moreira, por sua generosidade em dividir comigo tão preciosos conhecimentos em diferentes momentos da realização desta pesquisa. Os diálogos que tecemos foram de suma importância. Também agradeço, especialmente, à professora Vanessa Tomaz por suas importantes e cuidadosas contribuições ao trabalho no momento da qualificação.

Aos amigos e amigas do Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social da Universidade Federal de Minas Gerais (PPGE), pelo companheirismo, pelas lutas e momentos de alegria. Agradeço a Deus por ter encontrado pessoas como vocês nessa caminhada. Em especial, agradeço aos amigos e amigas que batalharam na coordenação e organização do XXII EBRAPEM, por ensinarem e cuidarem tanto de mim.

Às "doutorandas de Samira", Niusarte e Danieli, pela recepção aconchegante e amorosa e pela força que sempre me deram. Vocês foram fundamentais para que eu me sentisse feliz em estar no doutorado. Nunca esquecerei das nossas agradáveis tardes de segunda-feira. Que a nossa união seja duradoura!

Aos professores e professoras PPGE, em especial os/as docentes da linha de pesquisa em Educação Matemática, por tantos ensinamentos, pelo respeito que sempre tiveram às diferenças e às dificuldades dos/as estudantes, e também pelos momentos de descontração nos lanchinhos que marcaram as finalizações das disciplinas. Agradeço, ainda, aos funcionários e funcionárias e demais prestadores/as de serviços do Programa e da Faculdade de Educação, por tudo que fazem pelos alunos e alunas perante às diversas questões que cercam a vida acadêmica.

Aos/às colegas do PRODOC, pelos momentos incríveis de aprendizado nas sextas-feiras de manhã. Obrigada por me receberem e por ensinarem tantas coisas sempre com muita alegria.

Familiares, amigos e amigas de Belo Horizonte e região, obrigada por tornarem a minha passagem pela cidade mais agradável e inesquecível possível.

À Universidade Federal do Espírito Santo, pela concessão do afastamento com direito a recebimento de salário.

Aos colegas do DMPA (CCENS-UFES), por toda mobilização para que o afastamento fosse possível e pela torcida durante os últimos anos. Em especial, deixo meu agradecimento ao Willer, por ter dividido comigo, de maneira tão amiga e sincera, as angústias e as alegrias das experiências na UFMG.

Aos alunos e alunas do curso de Licenciatura em Matemática da UFES/Alegre, por terem em muito contribuído com a inspiração para a realização deste projeto.

RESUMO

Nesta tese, apresentamos e problematizamos os resultados de uma pesquisa em que investigamos conhecimentos matemáticos para o ensino, no que se refere ao trabalho com a geometria nos anos finais do Ensino Fundamental. A discussão sobre o que se pode constituir como um conjunto de conhecimentos de geometria relevantes para serem tratados na Licenciatura, para nós, está relacionada à especificidade da prática de ensino dessa área da Matemática. Nesse sentido, o questionamento que deu o direcionamento à nossa investigação foi: Que conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria - portanto, relevantes para serem tratados na Licenciatura - são desvelados em aulas de Matemática do Ensino Fundamental? Seguindo dessa pergunta, o objetivo da pesquisa concerne a identificar e problematizar conhecimentos matemáticos para o ensino, no que tange ao ensino de geometria no Ensino Fundamental, visando a uma discussão sobre a relevância desses conhecimentos para a formação de professores de Matemática. A inspiração teórica para a constituição da tese foi tecida a partir da articulação de obras na temática dos conhecimentos dos professores de Matemática específicos para o ensino na Educação Básica e sobre a Matemática Escolar. Para alcançar o objetivo da pesquisa, analisamos, sob uma perspectiva interpretativa, um conjunto de situações reais de sala de aula de geometria, em anos finais do Ensino Fundamental, em que questões que foram colocadas perante aos professores participantes demandaram conhecimentos que se mostraram específicos para o ensino de geometria, tendo sido tais conhecimentos mobilizados ou não pelos sujeitos da pesquisa durante o ensino observado. Os dados analisados foram situados, durante a sua discussão, em literaturas específicas sobre questões do ensino de geometria na Educação Básica. Algumas questões apontadas na literatura se sobressaíram nas observações das aulas, o que nos sugeriu que fossem analisadas sob a perspectiva do conhecimento geométrico para o ensino. Entre elas, destacamos questões relativas ao uso da visualização, enquanto componente do ensino de poliedros e não poliedros e formas planas, e o uso da argumentação e prova no trabalho com a semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras. Nossas análises convergem para uma conclusão de que o conhecimento matemático específico para o ensino de geometria, ou o conhecimento geométrico para o ensino, envolve conhecimentos múltiplos, enraizados nos processos do ensino em si, e também enraizados em teorias da Educação Matemática e dos Fundamentos da Matemática. Consideramos como uma implicação da tese para o curso de Licenciatura em Matemática a possibilidade de construção de um currículo para esses cursos que contemple o estudo de conhecimentos geométricos para o ensino, os quais poderão fornecer elementos que de fato atendam às necessidades formativas dos professores.

Palavras-chave: Conhecimento matemático para o ensino; Matemática Escolar; Ensino de geometria; Formação de professores; Educação Matemática.

ABSTRACT

In this thesis, we present and problematize the results of a research in which we investigated mathematical knowledge for teaching, with regard to working with geometry in elementary school. The discussion about what can be constituted as a set of relevant geometry knowledge to be treated in the Teachers Education, for us, is related to the specificity of teaching practice in this area of Mathematics. Therefore, the question that gave direction to this investigation was the following: What mathematical knowledge for teaching Geometry - therefore, relevant to be dealt with in the Teachers Education - are unveiled in elementary school Mathematics classes? Based on this question, this research aims to identify and problematize mathematical knowledge for teaching, regarding to teaching geometry in elementary school, aiming at a discussion about the relevance of this knowledge for the Mathematics Teachers Education. The theoretical inspiration for the constitution of the thesis was formed from the articulation of works on the theme of the specific knowledge of Mathematics teacher's for teaching in Basic Education and on School Mathematics. To achieve the research objective, it was analyzed, under an interpretative perspective, a set of real geometry classroom situations, in the final years of elementary school, in which questions that were asked to the participating teachers demanded knowledge that proved to be specific to teaching geometry, either these knowledge having been used or not by the research teachers during the observed teaching. The analyzed data were located, during their discussion, in specific literature on issues of teaching geometry in Basic Education. Some issues pointed out in specific literature stood out in the observations of the teachers' classes, which suggested that they should be analyzed from the perspective of geometric knowledge for teaching. Among them, we highlight issues related to the use of visualization, as a component of the teaching of polyhedra and non-polyhedra and flat shapes, and the use of argumentation and proof when working with the similarity of triangles and the Pythagorean Theorem. Our analyzes converge to a conclusion that specific mathematical knowledge for teaching geometry, or geometric knowledge for teaching, involves multiple knowledge attached to the teaching processes themselves, and also attached in theories of Mathematics Education and Fundamentals of Mathematics. We consider as an implication of the thesis for the Mathematics Teachers Education the possibility of building a curriculum for these majors that includes the study of geometric knowledge for teaching, which may provide elements that in fact meet the training needs of teachers.

Keywords: Mathematical knowledge for teaching; School Mathematics; Geometry teaching; Teachers Education; Mathematical Education.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AA – Ângulo - Ângulo

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CCENS – Centro de Ciências Exatas Naturais e da Saúde

CCK - Common Content Knowledge

DCN's – Diretrizes Curriculares Nacionais

HCK – Horizon Content Knowledge

IES – Instituição de Ensino Superior

KCS - Knowledge of Content and Students

KCT - Knowledge of Content and Teaching

LLL – Lado-Lado-Lado

MKT - Mathematical Knowledge for Teaching

MTSK - Mathematics Teacher's Specialized Knowledge

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics

PCK – Pedagogical Content Knowledge

PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

PNLD – Plano Nacional do Livro Didático

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

SCK - Specialized Content Knowledge

UFES – Universidade Federal do Espírito Santo

UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Foram me chamar, eu estou aqui, o que que é há ...

No âmbito dos debates sobre a formação de professores de Matemática, nas últimas décadas, a discussão sobre os conhecimentos desses profissionais relacionados ao ensino de Matemática na Educação Básica e as questões inerentes ao processo de apropriação desses saberes na formação inicial têm ganhado espaço (BALL, BASS, 2002; MOREIRA, DAVID, 2005; ROLDÃO, 2007; BALL, THAMES, PHELPS, 2008; MOREIRA, FERREIRA, 2013). Essa problemática vem ao encontro de algumas preocupações que me trazem a esta pesquisa.

Minha trajetória como professora atuante na formação de professores de Matemática na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), no Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde (CCENS), localizado na cidade de Alegre/ES, propiciou experiências relacionadas às práticas de ensino de Matemática como, por exemplo, o acompanhamento dos licenciandos em seus Estágios Supervisionados na Educação Básica e durante a realização de suas atividades no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). Durante os quatro anos em que trabalhei como professora nessas atividades na UFES[1], estive em grande proximidade com as escolas de Ensino Fundamental e Médio situadas no município e, por consequência disso, pude realizar observações para além das intervenções dos licenciandos nessas escolas. Tive a oportunidade de voltar os meus olhares e minhas reflexões também para as práticas dos professores que os recebiam em suas turmas.

A observação de situações de sala de aula da Matemática constitui-se em um bom campo de visão dos diversos conhecimentos mobilizados e daqueles potencialmente mobilizáveis pelos professores durante o ensino. O trabalho como docente na formação inicial de professores pode oferecer oportunidades para o acompanhamento de diferentes situações notadas nas atividades da Educação Básica. Por isso, muitas inquietações podem surgir.

Dentre todas as questões emergentes da observação das práticas dos professores, minha principal inquietação foi com relação ao ensino dos conteúdos de geometria. As minhas observações sugeriram que o ensino de conteúdos referentes a essa área nas escolas daquele município eram, por vezes, deixados de lado ou mesmo abordados de forma desconectada de outros conteúdos da Matemática. Notei, também, que o ensino dos conteúdos de geometria, nas escolas observadas, reduzia-se a uma exploração de cunho mais algébrico

[1] Refiro-me aos anos de trabalho que precederam o período de licença para o doutorado, com direito a recebimento de salário, concedido pela Universidade Federal do Espírito Santo.

do que geométrico, firmado na aquisição do conhecimento das fórmulas em detrimento do conhecimento das propriedades das figuras planas, da noção de espaço, da visualização e da exploração das figuras não planas por suas características tridimensionais.

Ao tentar fazer uma conexão entre as práticas de ensino da Escola Básica e o trabalho com a geometria no curso de Licenciatura em Matemática em que atuo, fui levada a refletir sobre o fato de que as dificuldades por parte dos professores de Matemática no trabalho com os conteúdos de geometria na Educação Básica podem estar relacionadas a diversos motivos, dentre eles, a como os conhecimentos relativos ao ensino dessa área, nesse segmento de escolarização, vêm sendo desenvolvidos durante os processos de formação inicial desses profissionais.

Como um exemplo de tal problemática, durante as minhas experiências como professora nas disciplinas Geometria I e Geometria II no referido curso, notei que, apesar de essas serem duas entre as disciplinas nas quais se trabalha com a geometria de forma mais aprofundada, suas ementas[2] concentram-se no tratamento de questões pertinentes ao conhecimento do conteúdo acadêmico[3], do ponto de vista axiomático-dedutivo da geometria euclidiana plana e espacial. Com relação às demais disciplinas do curso em que atuo, como as disciplinas de Instrumentação para o Ensino de Matemática, Didática da Matemática e Estágios Supervisionados, a geometria tem sido tratada com foco na perspectiva dos modos de se ensiná-la na Escola Básica. Assim como no curso de Licenciatura em Matemática em que trabalho, outros cursos de formação de professores, geralmente, costumam ter como referencial de formação a dualidade conteúdo acadêmico *versus* modos de se ensinar esse conteúdo na Escola Básica.

O que consideramos como ponto principal nessa problemática é o fato de que a formação inicial de professores parece cada vez mais necessitar ter como referencial um corpo de conhecimentos de geometria que dizem respeito à sua especificidade para o ensino, ou seja, que envolvam e considerem questões relativas aos fundamentos da geometria, aos diversos modos de se ensiná-la na Escola Básica, aos estudantes e suas dúvidas, erros, equívocos conceituais, aos currículos, entre outros tipos de conhecimentos, de maneira articulada. Nesta tese, tomamos como principal termo para designar esses tipos de

[2] De forma resumida, as ementas das disciplinas compreendem tópicos da Geometria Euclidiana Plana e Espacial, tais como: Os postulados de Euclides, Congruência e Semelhança de figuras plana, Triângulos, Circunferências, O Princípio de Cavalieri, Poliedros, Áreas de superfícies, Volumes. A forma como os tópicos aparecem para serem trabalhados diz respeito ao conteúdo geométrico acadêmico a eles concernente.

[3] Nesta tese, usamos os termos Matemática Acadêmica (baseado em MOREIRA, DAVID, 2005), conteúdo acadêmico e geometria acadêmica para nos referirmos aos conhecimentos acadêmicos abstratos, que são produzidos e utilizados para fins da pesquisa Matemática científica.

conhecimentos o termo “conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria”, ou algumas de suas simplificações de escrita e variações, como “conhecimentos”, ou “conhecimentos geométricos para o ensino”. Esses termos, para nós, expressam tanto os conhecimentos relativos ao conteúdo de geometria, quanto os saberes pedagógicos, saberes relativos aos alunos, saberes da experiência dos professores, etc.

Antes de problematizarmos sobre a questão apontada acima, lembramos que propostas de discussões sobre possíveis dificuldades no trabalho com a geometria na formação de professores não são recentes na pesquisa brasileira. Seguindo os debates sobre o ensino de geometria estar relegado a segundo plano ou mesmo não presente nas salas de aula da Educação Básica brasileira, Sérgio Lorenzato, no ano de 1995, por exemplo, levantou como uma das prováveis causas desses fatos as fragilidades dos currículos de formação de professores de Matemática vigentes nas décadas de 1980 e 1990. Esses currículos, no entendimento do autor, não privilegiavam a geometria no processo de formação inicial dos professores de Matemática e o que neles havia do trabalho com a geometria não era satisfatório para tal formação. Por esse raciocínio, Lorenzato (1995) abriu espaço para uma reflexão sobre qual, de fato, seria um currículo mínimo de geometria adequado à formação inicial de professores de Matemática que atuariam na Educação Básica.

Destacamos também o estudo realizado por Gazire (2000), no qual a pesquisadora investigou sobre o não resgate da geometria nos segmentos do Ensino Fundamental e Médio e constatou a existência de uma significativa lacuna do assunto no que dizia respeito à formação dos professores de Matemática, naquela época.

Em Crescenti (2005), encontram-se discussões feitas a partir dos resultados da sua tese de doutorado, na qual a autora investigou sobre o ensino da geometria no Ensino Fundamental e sobre os saberes docentes para se ensiná-la nesse segmento de escolaridade, segundo a visão de um grupo formado por professores de Matemática novatos e experientes. Os resultados da investigação da autora apontaram que os professores entrevistados, em sua maioria, consideravam a sua formação deficitária tanto nos aspectos relativos aos conceitos quanto aos aspectos referentes ao trabalho com metodologias para ensino da geometria. Segundo os professores, muito do conhecimento de geometria que detinham para o ensino na escola era devido às suas próprias experiências.

Mais tarde, o estudo de Leivas (2009), sobre o trabalho com a geometria em oito cursos de Licenciatura em Matemática no Rio Grande do Sul, apontou que na maioria desses cursos, à época, ela era desenvolvida no que diz respeito ao conhecimento do conteúdo estritamente acadêmico, sem que houvesse uma conexão e uma reflexão sobre o ensino do conteúdo geométrico na Educação Básica. O autor discute, ainda, sobre possibilidades do trabalho com a geometria nas Licenciaturas a partir de abordagens que envolvam questões mais próximas ao seu ensino na Escola Básica, como questões vinculadas à visualização, intuição e imaginação.

A pesquisa de Procópio (2011) teve como objetivo identificar características de um curso de Serviço em Geometria destinado à Licenciatura em Matemática. Cursos de Serviço são, conforme tratado no trabalho, disciplinas de Matemática ofertadas especificamente para a Licenciatura, em que o objetivo é proporcionar ao licenciando uma formação específica para o seu futuro trabalho com a Matemática na Educação Básica. Na pesquisa, o autor escolheu analisar como duas disciplinas de geometria – ofertadas para um curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição de Ensino Superior (IES) específica –, a saber, as disciplinas denominadas Geometria Plana e Geometria Espacial, poderiam sofrer possíveis mudanças e, assim, virem a caracterizar-se como um Curso de Serviço em Geometria. Procópio (2011) defende que deve existir uma aproximação entre "a formação que é oferecida ao licenciando e a prática que se espera desse futuro professor" (p. 09).

Após o trabalho empírico, Procópio (2011) constatou três possíveis modificações a serem feitas nas disciplinas analisadas para que fossem caracterizadas como disciplinas que atendam a uma formação específica para o trabalho do futuro professor na Educação Básica. Segundo o autor, disciplinas do tipo Curso de Serviço em Geometria devem romper com uma tradição de que o ensino dessa área, na formação de professores, seja de caráter exclusivamente axiomático-dedutivo.

As pesquisas citadas, e várias outras que não mencionamos, embora sem dúvidas mostrem-se como pontos de apoio para a promoção de avanços nas melhorias no tratamento da geometria na formação inicial de professores, tomam como estrutura básica para se discutir propostas de educação geométrica nas Licenciaturas a dicotomia conteúdo geométrico acadêmico *versus* metodologias para o ensino. Pensada dessa maneira, a Licenciatura pode ainda não contemplar, de fato, um tratamento dos conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria. Ou seja, dos diferentes e complexos tipos de conhecimentos demandados de questões relativas propriamente ao ensino desse conteúdo na Escola Básica, havendo a possibilidade de que a formação inicial ainda se caracterize pela concepção de que o professor, sabendo a geometria acadêmica, estará apto a transpô-la didaticamente aos estudantes da Educação Básica.

Em 1908, Félix Klein já denunciava o que chamou de "dupla descontinuidade na formação do professor de Matemática". Tal descontinuidade sugeriria, segundo esse autor, a existência de uma lacuna no que tange ao conhecimento acadêmico priorizado nesse processo:

> (...) a matemática a que os professores em formação são expostos durante os cursos de graduação tem pouca conexão com aquela que aprenderam anteriormente como alunos da escola, por um lado, e com aquela com que lidarão em sua futura prática docente, por outro lado. (Klein, 1908/2009 *apud* Melo, Giraldo, Risoslato, 2015, p. 391).

No ensejo da denúncia de Klein, buscamos, na literatura, algumas visões a respeito de quais conhecimentos são relevantes para serem tratados na Licenciatura, os quais abarquem questões sobre o que os professores realmente precisa saber para ensinar. O entendimento do que seja esse conhecimento, e como ele é ou como ele deve ser caracterizado é o que abre um grande desafio para a Educação Matemática.

Uma concepção que pode ser considerada consensual − por boa parte dos formadores de professores − tem por base a ideia de que a formação de professores de Matemática precisa se pautar, fundamentalmente, nos estudos relacionados aos conhecimentos matemáticos acadêmicos. Por essa ótica, entende-se que o foco da formação profissional do professor deve estar no conhecimento da Matemática e seus princípios fundamentais, de maneira a se constituir uma base teórica do que se solicita desses fundamentos no ensino escolar. Interpretamos em Wu (2011), por exemplo, a argumentação de que a formação de professores de Matemática deve se preocupar com a apropriação de um conhecimento matemático acadêmico e de complementações relativas aos saberes específicos da docência escolar. Assim, o autor afirma: "Temos que ensinar-lhes a Matemática para que, com modificações pedagógicas adequadas, possam ensiná-la aos alunos do ensino básico[4] (...)" (WU, 2011, p. 375, tradução nossa).

Moreira (2004), ao analisar a formação matemática conferida aos licenciandos em Matemática na UFMG, traz, em sua tese de doutorado, uma conclusão de que o conhecimento matemático nesse curso é tratado seguindo como referencial os princípios da Matemática concebida pelos matemáticos profissionais, relegando-se, assim, questões centrais da prática escolar. Em conformidade com esse achado, Gatti (2010) constata que a maioria dos cursos de Matemática de instituições públicas no Brasil, na modalidade da Licenciatura, possui uma carga horária superior para as disciplinas relacionadas aos conhecimentos da Matemática para

---

[4] We have to teach them Mathematics so that, with proper pedagogical modifications, they can teach it to primary students (…) (WU, 2011, p. 375).

fins acadêmicos/científicos. Isso ocorre sob a justificativa de que é necessário saber mais Matemática para se ensiná-la de maneira melhor nos segmentos da Educação Básica.

Moreira (2012) traz uma reflexão que congrega como argumento que as Licenciaturas, nos seus moldes atuais, ainda não superaram o modelo baseado na "fórmula 3+1" – três anos da formação dedicados aos chamados conteúdos específicos (acadêmicos) somados a um ano de formação em didática/ensino. Para esse autor, a lógica que ainda rege a formação continua centralizada na separação entre as disciplinas referentes ao conteúdo acadêmico e as disciplinas referentes ao ensino desse conteúdo na Escola Básica, tendo sido modificada a maneira como a proporção dos grupos dessas disciplinas aparece nos currículos da formação. Moreira (2012) entende que a modificação na proporção pode se configurar como uma mudança significativa, mas que ainda permanece intacta uma questão crucial no que diz respeito à organização das Licenciaturas em um corpo de conhecimentos específico para a prática docente.

Em uma direção diferente do que preza o modelo de Licenciatura problematizado em Moreira (2004, 2012) e em Gatti (2010), Ball (1990) afirma que o êxito e a aprendizagem dos estudantes da Escola Básica não serão garantidos através de um acréscimo no conhecimento matemático acadêmico dos seus professores. Para a autora, um professor poderá ensinar de uma maneira satisfatória se a ele for proporcionada uma compreensão sobre a Matemática que será trabalhada nas diferentes situações do ensino escolar.

A discussão sobre o que se pode constituir como um conjunto de conhecimentos de geometria relevantes para serem tratados na formação de professores, em nossa visão, está intimamente relacionada a uma discussão sobre o que se pode constituir como um corpo de conhecimentos relacionados à especificidade da prática de ensino dessa área da Matemática. No sentido do que pontua Ball (1990), sugerimos que seja pertinente a realização de pesquisas que investiguem a existência de saberes da geometria específicos para o ensino. Isto é, pesquisas que se refiram às distinções, articulações e discussões sobre o conhecimento do conteúdo a ser ensinado e o conhecimento para o ensino desse conteúdo na Educação Básica.

Pesquisadores têm situado a existência de diversos tipos de conhecimentos para o ensino na Educação Básica que não devem ser considerados como triviais, pois caracterizam-se como um amálgama de conhecimentos indissociáveis e cuja natureza é das demandas da Escola Básica, dos fundamentos da própria Matemática, das relações entre conhecimento e prática, dos contextos nos quais o ensino acontece, entre outros. Isto é, esses conhecimentos para o ensino edificam-se a partir de diversos condicionantes da prática pedagógica (SHULMAN, 1986; BALL, BASS, 2002; MOREIRA, DAVID, 2005, BALL, THAMES,

PHELPS, 2008; CARRILLO, CLIMENT, CONTRERAS, MUNOZ-CATALÁN, 2013). As concepções desses autores chamam atenção para uma distinção entre o que se deve saber a respeito de um conteúdo matemático para o domínio comum (ou do domínio acadêmico) e o que se deve saber desse conteúdo quando a intenção é ensiná-lo.

Com base em concepções como essas, pesquisadores brasileiros têm realizado estudos sobre conhecimentos matemáticos específicos para o ensino na Educação Básica. Ferreira (2014), em sua tese de doutorado, procurou identificar elementos constituintes desse conhecimento, no que diz respeito, em particular, ao trabalho com a álgebra na Educação Básica. A partir de observações de aulas de dois professores de uma escola pública, a autora realizou a identificação de tais elementos que foram mobilizados ou que seriam potencialmente mobilizáveis na prática daqueles sujeitos. Como conclusão, Ferreira (2014) traz uma discussão e análise, na perspectiva do conhecimento matemático específico do professor, de diversas questões notáveis durante o processo de observação e coleta de dados e que também são levantadas pela literatura específica do ensino e aprendizagem de álgebra na Educação Básica.

Moriel Júnior (2014), também em sua pesquisa de doutorado, constatou a existência de um conhecimento especializado para ensinar divisão de frações a partir dos conhecimentos mobilizados por professores e licenciandos em Matemática durante a realização de atividades em uma oficina e das respostas dos sujeitos às perguntas de uma entrevista.

Sobre conhecimentos matemáticos específicos para o ensino de geometria, em relação a pesquisas nacionais, temos poucos trabalhos. Destacamos, dentre eles, a dissertação de Carvalho (2017), em que o autor analisou possíveis mobilizações de saberes por 20 estudantes de um curso de Licenciatura em Pedagogia de uma universidade federal do interior de Minas Gerais, durante uma disciplina obrigatória da matriz curricular desse curso, ao realizarem tarefas relacionadas ao ensino de Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A intenção da sua investigação foi responder a seguinte questão: “Que saberes são mobilizados por licenciandos em Pedagogia a partir de um conjunto de tarefas relacionadas ao ensino de Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental?”.

O estudo de Carvalho (2017) evidenciou que, provavelmente devido à formação recebida na Educação Básica pelos participantes da pesquisa e à relação estabelecida por eles com a Matemática, não foi possível observar saberes efetivamente mobilizados pelos sujeitos. No entanto, o autor constatou fortes indícios de mobilização de outros saberes que considera como relevantes para a construção da identidade docente, relacionados à compreensão da existência de variadas formas de ensinar geometria nos anos iniciais, à percepção do papel do professor na construção dos conhecimentos geométricos nas aulas dos anos iniciais, à valorização da participação das crianças nas tarefas de Matemática, ao reconhecimento da necessidade de o professor buscar interpretar/compreender o raciocínio dos alunos para melhor planejar suas aulas, entre outros.

No cenário internacional, as pesquisas de Patricio Herbst e suas equipes de pesquisadores da Universidade de Michigan têm se destacado. Dentre elas, citamos os achados de Herbst e Kosko (2014). Ao investigarem e desenvolverem itens de conceitualização e medidas dos diferentes domínios do conhecimento geométrico para o ensino, os autores, com base nos achados de Ball, Thames e Phelps (2008) e Hill, Ball e Schilling (2008), desenvolveram, discutiram e propuseram a um grupo de professores novatos e experientes uma lista de tarefas matemáticas que os autores concebem como específicas do ensino da geometria no Ensino Médio e que demandam do professor conhecimentos intrinsecamente relacionados a esse ensino. Como um exemplo do que fizeram, os autores trabalharam com os professores com tarefas que lhes solicitavam selecionar exemplos e contraexemplos apropriados para os conceitos geométricos ensinados, e com tarefas que exigiam dos professores estarem atentos às ideias inadequadas e aos erros dos alunos perante aos conceitos da geometria.

Diante do que relatamos até aqui, surgiu o nosso interesse em investigar a respeito do que se pode constituir como um corpo de conhecimentos relacionados ao ensino da geometria na Educação Básica. A partir dessa investigação, consideramos que seja possível alinhavar uma discussão sobre conhecimentos que podem, então, ser considerados relevantes para compor a formação inicial de professores de Matemática, visando ao objetivo principal desses cursos que é o preparo de professores para o ensino na Educação Básica. Após intensos debates sobre o assunto que aqui trazemos, e após delinearmos o segmento da Educação Básica ao qual nos ateríamos nesta pesquisa, chegamos à indagação que deu o direcionamento para a composição desta tese:

Que conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria - portanto, relevantes para serem tratados na Licenciatura - são desvelados em aulas de Matemática do Ensino Fundamental?

Ao considerarmos a ideia de conhecimentos matemáticos para o ensino como aqueles que são específicos do professor para a atividade que irá desenvolver na Escola Básica, recorremos à ideia de Roldão (2007) de que os professores, visto como profissionais do ensino, ou seja, profissionais que "promovem intencionalmente a aprendizagem de alguma coisa para alguém" (p. 100), ensinam não somente porque sabem o conteúdo, por si, mas, sim, porque sabem ensiná-lo, porque são especialistas da complexa ação do ensino. Esse saber ensinar estrutura-se a partir de vários tipos de conhecimentos que dizem respeito tanto a conteúdos, quanto a possíveis ações pedagógicas e às experiências dos professores, por exemplo. É um conhecimento que torna-se cada vez mais profissional na medida em que os professores o transformam, o questionam, o analisam, o comunicam e o mobilizam em sua prática.

Giraldo (2018) reforça a nossa argumentação quando diz que a escola é um "lugar de produção de saberes", confrontando a ideia de que essa instituição é um lugar onde os conhecimentos matemáticos estabelecidos são meramente transmitidos aos estudantes. A partir desse pensamento, ele defende que o "ser professor" necessita ser pensado como:

> (...) uma atividade profissional, que está associada a uma rede complexa de práticas e saberes específicos, isto é, que se estabelece a partir de uma **epistemologia própria**. De fato, se a função do professor fosse meramente a de transmitir ao aluno conhecimentos estabelecidos, sua própria formação poderia contemplar apenas um conjunto de regras e procedimentos gerais, isto é, poderia se reduzir à dimensão do "saber fazer". (GIRALDO, 2018, p. 40, grifo nosso).

Quando indicamos a nossa busca por um corpo de conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria na Educação Básica a partir do que práticas de ensino no Ensino Fundamental nos revelam, referimo-nos àqueles saberes que puderam ser identificados nesta pesquisa, específica de um determinado contexto de investigação e realizada sob a luz das teorias às quais escolhemos nos reportar como referenciais para a produção e análise dos dados. Portanto, a pergunta que colocamos como direcionadora deste estudo não se refere, em nenhuma hipótese, a uma tentativa de esgotamento de possibilidades de discussões a respeito de tais conhecimentos. Assim, a pesquisa proposta teve como principal objetivo:

Identificar e problematizar conhecimentos matemáticos para o ensino, no que tange ao ensino de geometria no Ensino Fundamental, visando a uma discussão sobre a relevância desses conhecimentos para a formação de professores de Matemática.

Em síntese, a nossa pesquisa surgiu de uma tomada de consciência de que o caminho para se promover uma formação inicial que atenda às necessidades centrais da prática de ensino na Escola Básica passa, principalmente, pelo estudo dos conhecimentos nela produzidos e dela demandados. Por essa égide, o estudo aqui proposto seguiu no sentido de uma construção de uma visão sobre os conhecimentos geométricos relacionados ao ensino.

A estrutura da escrita desta tese está organizada da seguinte maneira:

No **Capítulo 2**, há uma apresentação das inspirações teórico-metodológicas que nos auxiliaram na sistematização da produção e da análise dos dados que compõem a tese. Tais teorias foram escolhidas por nós como ferramentas para a exploração analítica dos conhecimentos mobilizados e/ou potencialmente mobilizáveis pelos professores, levando-se em consideração, principalmente, a premissa de que a prática profissional é constituída de diversas situações que demandam conhecimentos específicos, cuja natureza é principalmente das experiências docentes escolares. Considerando-se as especificidades da Matemática para o ensino na escola, bem como as especificidades da própria escola, focalizamos autores que se debruçam analiticamente sobre essas questões. Durante as análises dos dados, não nos ativemos a uma única estrutura teórica, pois assumimos que a pluralidade de ideias que parecem convergir para um mesmo círculo de entendimentos em construção e constante discussão aponta direções para o que investigamos.

No **Capítulo 3,** apresentamos as nossas opções metodológicas para a realização da pesquisa de campo e para o tratamento e discussão dos dados a partir dela produzidos.

Nos **Capítulos 4** e **5** encontram-se as descrições e análises das situações de sala de aula que foram escolhidas para constarem como os dados empíricos da tese, bem como, discussões sobre os resultados encontrados, situando essas discussões principalmente em parte da literatura que trata de questões relacionadas ao ensino e aprendizagem da geometria na Educação Básica. É necessário salientar que cada um desses Capítulos traz, separadamente, a descrição, a análise e a discussão dos dados concernentes às aulas de cada um dos professores participantes da pesquisa.

Encerramos a tese trazendo nossas **Conclusões** sobre o estudo realizado.

2 INSPIRAÇÕES TEÓRICAS: visões sobre conhecimentos matemáticos relacionados ao ensino

Este Capítulo foi produzido a partir de nossas discussões e reflexões a respeito de algumas das teorias que concernem aos conhecimentos relacionados ao ensino de Matemática. Durante o movimento de análise dos dados, os construtos do arcabouço teórico que tomamos como referência não necessariamente foram totalmente considerados como ferramenta teórico-metodológica. Contudo, o estudo deu-nos uma base teórica para definir a própria pesquisa e os referenciais para a análise que aqui apresentamos.

No decorrer da primeira seção, apresentamos, de maneira mais abrangente, as teorias que escolhemos como referencial teórico para a análise dos dados, quais sejam: os estudos sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino (Mathemathical Knowledge for Teaching – MKT) (BALL, THAMES, PHELPS, 2008; BALL, BASS, 2009; BALL, 2017) e sobre a Matemática Escolar (MOREIRA, DAVID, 2005). Em alguns momentos do texto da primeira seção, apresentamos, de forma breve e genérica, ideias centrais de outras teorias que também tangem à temática dos conhecimentos relacionados ao ensino de Matemática, a fim de situar o leitor sobre outros estudos que consultamos, mas que não foram utilizados na tese como referenciais teóricos.

Na segunda seção, trazemos alguns apontamentos a respeito de uma perspectiva de educação geométrica do professor de Matemática presentes em documentos relacionados à formação de professores, os quais nos auxiliaram a discutir sobre a Licenciatura em Matemática segundo os resultados de nossas análises.

Na terceira seção, propomo-nos à apresentação de uma síntese das reflexões que concebemos sobre a literatura consultada e tratada.

2.1 Visões sobre os conhecimentos específicos dos professores de Matemática para o ensino

Que Matemática os professores precisam saber para ensinar na Escola Básica? Essa foi uma das perguntas que circularam a região de inquérito da Educação Matemática na década de 1970 e que teve como uma resposta a prerrogativa de que os professores precisam conhecer a Matemática de um ponto de vista avançado para se ensiná-la nas escolas (DAVIS, RENERT, 2013). Embora tenha havido – e, em certa medida, ainda haja – um senso comum, por parte das comunidades de formadores de professores e das comissões que elaboram políticas de formação, de que o ensino depende principalmente do conhecimento do professor sobre o assunto a ser ensinado, por si, com o passar dos anos, outras perguntas sobre os conhecimentos específicos e necessários para se ensinar Matemática na Escola Básica foram levantadas, como a pergunta que questiona: Que conhecimento matemático o ensino desse conteúdo na Escola Básica demanda?

Na perspectiva de se encontrar respostas a perguntas como essa, alguns estudos aludem à existência de uma diferença entre os conhecimentos matemáticos para uso por matemáticos (ou para serem aplicados, profissionalmente, na resolução de problemas ou criação de produtos) e os conhecimentos matemáticos para e em situação de ensino, produzidos e demandados das ações pedagógicas dos professores na Educação Básica (BALL, THAMES, PHELPS, 2008; BALL, BASS, 2009, DAVIS, RENERT, 2013).

Falar sobre alguns dos estudos que identificamos nessa visão pressupõe que reportemo-nos, inicialmente, a um dos construtos teóricos que promoveu importantes avanços no campo das ideias do conhecimento dos professores: o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Pedagogical Content Knowledge – PCK), proposto por Lee Shulman em uma conferência na Universidade do Texas, no ano de 1983, cujo título foi "O paradigma perdido na pesquisa sobre ensino".

Na atmosfera das ideias sobre o que compõe um repertório de conhecimentos para a formação e profissionalização do professor, Shulman propôs uma categoria de conhecimento denominado Conhecimento do conteúdo para o ensino, e sugeriu que ela fosse subdividida em três subcategorias: o Conhecimento do conteúdo (ou do assunto por si); o Conhecimento curricular e o Conhecimento pedagógico do conteúdo (o PCK). Em 1987, o autor popôs o que chamou de Bases do conhecimento para o ensino (Knowledge bases for teaching), compostas pelas três subcategorias do Conhecimento do conteúdo para o ensino mais as seguintes: Conhecimento pedagógico geral; Conhecimento dos alunos e de suas características; Conhecimento de contextos educacionais e conhecimentos dos propósitos, fins e valores educacionais (SHULMAN, 1987).

Entendemos que Shulman (1987) considera que o PCK é de especial interesse, já que o autor sugere que o conhecimento do professor é um domínio específico e contextualizado, e que é nessa perspectiva de conhecimento que o profissional alia os conceitos do conteúdo a ser ensinado com a didática para o ensino. É por meio desse conhecimento que o professor concebe as ideias de como adaptar e representar tais conceitos de forma que possam ser refletidos, analisados e, possivelmente, entendidos pelos alunos. Essa categoria inclui o saber do que fazer para facilitar o aprendizado dos alunos sobre certos tópicos do assunto ensinado, tidos como fáceis ou difíceis. Diante das ideias dos alunos sobre um assunto (ou da falta ou internalização inadequada de ideias), o professor precisa saber o que fazer para organizar ou reorganizar o entendimento dos estudantes (SHULMAN, 1986, 1987).

A compreensão do PCK como "(...) aquele amálgama especial de conteúdo e pedagogia que é exclusivamente de pertencimento dos professores, sua própria forma especial de entendimento profissional" (SHULMAN, 1987, p. 8, tradução nossa[5]) o colocou no patamar de uma recuperação ao que Shulman nomeou como o paradigma perdido entre conteúdo e pedagogia (SHULMAN, 1986). O paradigma perdido é, para o autor, o conteúdo específico e a escassa atenção que esse conteúdo tinha no decorrer do caminho para a preparação do futuro professor.

Os estudos de Shulman, realizados na década de 1980, marcaram a abertura de entendimentos sobre o conhecimento dos professores firmados na ideia de que não basta a esse profissional saber o conteúdo que irá ensinar, mas que é preciso que ele o compreenda para, então, saber explicá-lo. Essa é, a nosso ver, uma diferença essencial que marca as visões que apresentaremos ao longo desse texto sobre os conhecimentos para o ensino e o reconhecimento da natureza dinâmica e multidimensional desses conhecimentos.

Mais recentemente, Shulman realizou uma apresentação, por videoconferência, aos pesquisadores que organizavam e elaboravam textos para o livro cujo título é Re-examining Pedagogical Content Knowledge in Science Education (BERRY, FRIEDRICHSEN, LOUGHRAN, 2015). Nessa apresentação, Shulman expôs algumas de suas próprias reflexões sobre a história do PCK, do nascimento do construto à sua compreensão e aplicação em pesquisas na atualidade. Na ocasião, o pesquisador reforçou que o PCK constitui-se como uma reinvindicação de que os professores devem ser vistos como profissionais que mobilizam um corpo de conhecimentos único e especial e que, portanto, merecem ser tratados pela sociedade com o respeito, a autonomia e a compensação adequados.

Os trabalhos desenvolvidos por Deborah Ball e suas equipes perpassam pela referência às ideias de Shulman e, em nosso entendimento, destacam como questionamento fundamental a pergunta: Existe um conhecimento matemático profissional específico para o ensino de Matemática (na Escola Básica)? (BALL, THAMES, PHELPS, 2008). Essa pergunta focaliza o conhecimento matemático para o ensino e vai além do que já se havia estudado, para o caso da Matemática, até então, pois preocupa-se com as especificidades do seu ensino e seu sentido

[5] Do original: (...) that especial amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding.

próprio. Isto é, preocupa-se – mais do que em entender o que os professores precisam saber do conteúdo matemático – em compreender de que maneira e em que lugar os professores podem utilizar os saberes relacionados ao conteúdo em sua prática docente: "Nosso ponto, aqui, não é sobre o que os professores precisam ensinar às crianças, mas sobre o que os próprios professores precisam saber e serem capazes de fazer para realizar o ensino" (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 398, tradução nossa[6]).

Fundamentados em resultados de mais de 20 anos de pesquisas empíricas sobre as demandas de conhecimento matemático durante a prática docente na Escola Básica e nos conceitos de Conhecimento do conteúdo e do PCK (SHULMAN, 1986, 1987), Ball, Thames e Phelps (2008) e Ball e Bass (2009) propuseram um conjunto de subcategorias no sentido de conceituar e desdobrar o que denominaram de **Conhecimento Matemático para o Ensino** (Mathemathical Knowledge for Teaching – MKT). O pressuposto epistemológico subjacente às pesquisas de Ball e colaboradores sobre o MKT circula em torno de que é necessário aos professores sobre entender e usar a Matemática de maneiras específicas quanto ao ensino, o que difere das maneiras pelas quais a Matemática é utilizada para fins científicos (ou acadêmicos), no estudo e desenvolvimento de assuntos da própria área, e em outras áreas de conhecimento, como a Engenharia, por exemplo.

Constituem o MKT seis subdomínios de conhecimentos específicos para a ação de ensinar, quais sejam: o Conhecimento comum do conteúdo (Common Content Knowledge – CCK); o Conhecimento especializado do conteúdo (Specialized Content Knowledge – SCK); o Conhecimento do conteúdo e dos estudantes (Knowledge of Content and Students – KCS); o Conhecimento do conteúdo e do ensino (Knowledge of Content and Teaching – KCT); o Conhecimento do conteúdo e do currículo (Knowledge of Content and Curriculum); e, por fim, o Conhecimento do horizonte do conteúdo (Horizon Content Knowledge – HCK). A Figura 01 ilustra a disposição dos subdomínios no modelo do MKT:

[6] Do original: Our point here is not about what teachers need to teach to children but what about teachers themselves must now and be able to do to carry out that teaching.

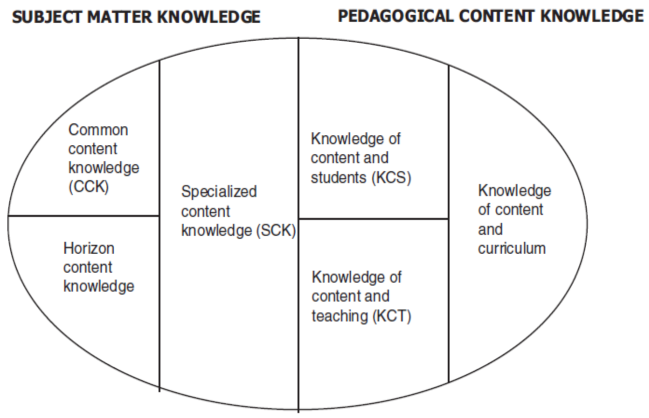


Figura 1: Domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino
(Fonte: BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 403)

Compreendemos por Conhecimento comum do conteúdo o assunto que será ensinado pelo professor, mas que também é de conhecimento de outros profissionais de áreas variadas e de outras pessoas com algum grau de instrução em Matemática. Para o professor, é necessário que o conhecimento do conteúdo seja no que se refere a todas as suas dimensões presentes no currículo escolar.

Como Conhecimento especializado do conteúdo, entendemos que sejam os conhecimentos relativos aos conteúdos específicos para o ensino e exclusivos do professor para essa ação. Portanto, não é requerido para outras tarefas profissionais, que não as da instrução. Esse tipo de conhecimento envolve a Matemática, a sua compreensão, o pensamento matemático e outras variáveis relacionadas ao conteúdo e que constituem as ações de ensinar. Permite também que os professores sejam capazes de considerar a adequação dos raciocínios matemáticos dos alunos, a validade dos argumentos que possam ser levantados por eles e para verificar, por exemplo, as dimensões dos erros dos alunos ao resolverem um problema incorretamente.

Como um exemplo, na perspectiva do conhecimento especializado do conteúdo em geometria, o professor precisaria conhecer diferentes definições de triângulos para serem apresentadas e discutidas com os estudantes, e não somente uma única definição que, do ponto de vista do conhecimento comum do conteúdo, estaria apta a conter as condições necessárias e suficientes para se identificar um exemplo desse objeto. Ainda sobre triângulos, para o ensino dessas formas, o professor precisaria conhecê-las por exemplo, sob um repertório rico de imagens em diferentes orientações, e não somente por suas imagens mais padronizadas.

O Conhecimento do conteúdo e dos estudantes é entendido por nós como um amálgama de saberes do professor relacionados à antecipação e identificação das dificuldades, ideias, equívocos e curiosidades matemáticas demonstradas pelos alunos. Entendemo-lo, ainda, como um conjunto de habilidades do docente em pensar sobre o que poderá despertar, ou não, a motivação e o interesse dos estudantes a respeito de determinado assunto e em interpretar a linguagem inicial dos alunos quando se expressam sobre os conteúdos que lhes são ensinados.

Já o Conhecimento do conteúdo e do ensino, segundo a nossa interpretação, diz respeito à aliança, nos processos de ensino, entre a compreensão matemática do professor dos conceitos envolvidos nesse processo e os "princípios pedagógicos para o ensino desse conteúdo em particular" (BALL, THAMES, PHELPS, 2008, p. 402, tradução nossa[7]). Isso requer que o professor seja capaz de selecionar, organizar e elaborar sequências de atividades adequadas para que, durante as diferentes situações de ensino, essa aliança aconteça.

O Conhecimento do conteúdo e do currículo – ainda sem uma posição clara no modelo do MKT – envolve o conhecimento do professor da maneira como os conteúdos se inter-relacionam e evoluem ao longo do ano escolar em relação ao currículo. Os autores consideram que essa inter-relação ocorre tanto na articulação do conteúdo com os anos escolares anteriores e posteriores àquele no qual o trabalho acontece, quanto no que é estudado em momentos diferentes da disciplina, ou em outras disciplinas, que não a Matemática.

O Conhecimento do horizonte do conteúdo, para nós, refere-se à consciência que o professor precisa ter sobre os conteúdos matemáticos que ensina e que irá ensinar futuramente, levando-se em consideração os tópicos matemáticos propostos pelos currículos e a evolução da aprendizagem dos alunos, com relação a esses tópicos, no decorrer da sua vida escolar. Por exemplo, quando o professor da Escola Básica, ao propor uma atividade, antecipa aos alunos, implícita ou explicitamente, as primeiras ideias sobre um determinado conteúdo e, a partir daí, desenvolve o sequenciamento adequado para o trabalho com ele. Segundo Ball e Bass (2009):

> É um tipo de conhecimento que pode guiar os seguintes tipos de responsabilidades e atos do ensino: a) fazer julgamentos sobre a importância da matemática; b) ouvir o significado matemático naquilo que os alunos estão dizendo; c) destacar pontos-chave do conteúdo; c) antecipar e fazer conexões; d) perceber e avaliar oportunidades matemáticas; e) capturar distorções matemáticas ou possíveis

[7] Do original: (…) pedagogical principles for teaching that particular content.

> precursores de confusões posteriores ou deturpação matemática. (BALL, BASS, 2009, p. 6, tradução nossa[8]).

Há de se considerar que vem acontecendo muitos progressos na compreensão e no uso em pesquisas do construto teórico sobre o Conhecimento Matemático para o Ensino por parte das comunidades acadêmicas. Houve, também, propostas de outros modelos teóricos sobre o conhecimento matemático dos professores a partir da problemática, levantada por alguns autores, da implementação em pesquisas dos subdomínios do MKT. Como um exemplo disso, citamos o modelo teórico de Carrillo, Climent, Contreras e Munoz-Catalán (2013) sobre o conhecimento profissional que é específico de professores de Matemática. Sua elaboração leva em conta os avanços de outros modelos precedentes, como o Shulman (1986) e o de Ball, Thames e Phelps (2008), e procura, conforme afirmam Carrillo *et al* (2013), superar as limitações dessas últimas estruturas teóricas citadas.

Denominado como Conhecimento especializado dos professores de Matemática (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge - MTSK), esse modelo possui dois domínios de conhecimento, a saber: o domínio do Conhecimento da Matemática – dividido em subdomínios do Conhecimento de tópicos matemáticos, do Conhecimento da estrutura da Matemática e do Conhecimento da prática matemática –, e o domínio do Conhecimento pedagógico do conteúdo – cujos subdomínios que o integram correspondem ao Conhecimento das características da aprendizagem da Matemática, ao Conhecimento do ensino da Matemática e ao Conhecimento das normas da aprendizagem da Matemática. A proposta do MTSK preza por uma valorização quanto às crenças dos professores sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem, e essa concepção é congregada aos seus subdomínios.

Pode-se encontrar em Ball (2017) um levantamento das produções científicas mais recentes sobre como o conhecimento matemático está envolvido e é mobilizado na instrução, assim como, um reforço de que mais estudos nesse veio teórico precisam ser realizados para que possam acontecer mais expansões na compreensão sobre o que é posto em jogo quando se ensina Matemática. A visão da pesquisadora nessa produção mais recente coloca em voga que tais avanços poderão orientar os processos de educação profissional de professores, de maneira que a centralidade desses processos esteja na prática. Assim, defende a autora, tais processos poderão melhor preparar os professores para a "atividade matemática dinâmica e

---

[8] Do original: It is a kind of knowledge that can guide the following kinds of teaching responsibilities and acts: making judgments about mathematical importance; hearing mathematical significance in what students are saying; highlighting and underscoring key points; anticipating and making connections; noticing and evaluating mathematical opportunities; catching mathematical distorcions or possible precursors to later mathematical confusion or misrepresentation.

performativa" que o ensino exige (p. 11, tradução nossa[9]). Isto posto, Ball (2017), buscando ampliações teóricas no sentido exposto acima, analisam e discutem o que nomeiam como o **Trabalho matemático especial do ensino**.

Antes de explicarmos sobre esse último construto apontado, convém pontuar que Ball e suas equipes, durante e após a proposição do MKT, já destacavam algumas das tarefas do trabalho do ensino de Matemática com as quais os professores precisam se envolver e que demandam conhecimentos que são específicos para isso. Thames e Ball (2010), por exemplo, defendem que os professores, ao ensinarem Matemática, precisam propor questionamentos matemáticos aos alunos, dar explicações claras e avaliar as explicações dadas pelos estudantes, escolher e/ou preparar potenciais tarefas matemáticas, usar e escolher representações adequadas, registrar as produções matemáticas dos alunos no quadro e analisá-las junto à comunidade de sala de aula, selecionar e sequenciar exemplos, analisar os erros dos alunos, avaliar as ideias não convencionais e/ou não adequadas dos estudantes, mediar discussões matemáticas, utilizar uma linguagem matemática clara e acessível a cada nível de escolaridade e definir os termos que são utilizados nas explicações fazendo uso da notação matemática apropriada.

Mais recentemente, Ball (2017) reforça que o Trabalho matemático especial do ensino (Special Mathematical Work of Teaching) diz respeito às ações que os professores mobilizam para ensinar Matemática aos estudantes, visando ao seu aprendizado e à evolução desse aprendizado. A autora pondera que o Trabalho matemático especial do ensino envolve as ações dos professores mais tênues e intrínsecas da instrução em Matemática e, que, segundo a autora, precisam ser descompactadas por pesquisas na temática do conhecimento matemático para o ensino. Ela considera como tais tipos de ações aquelas ligadas à mobilização que o professor faz, durante as suas práticas de ensino, da sua audição, da sua fala, da sua escrita, da sua capacidade de interação com os estudantes, da sua capacidade de leitura e interpretação dos trabalhos realizados pelos alunos, e dos pensamentos matemáticos desses indivíduos, da sua capacidade de leitura do contexto em que o ensino se insere e, por fim, da sua própria compreensão da Matemática.

Como um exemplo do trabalho matemático especial do ensino, Ball (2017) solicita que façamos o seguinte exercício: imaginemos que um professor estabeleça que os estudantes trabalhem sempre em pequenos grupos durante as aulas de Matemática. Não é difícil de se concordar que essa possa ser uma boa estratégia para que as aulas sejam produtivas e

[9] Do original: (…) dynamic and performative mathematical activity.

interessantes. O que a autora nos sugere é que o trabalho matemático especial do ensino, realizado por esse professor, pertence a um horizonte para além do tipo e do alcance pedagógico da estratégia adotada por ele e dos recursos de que ele dispõe para adotar tal estratégia. A autora reivindica que tal trabalho esteja relacionado aos conhecimentos e às ações que o professor mobiliza para que a estratégia do trabalho em grupos de estudantes funcione de tal forma que os alunos realmente prosperem em sua aprendizagem.

Em Ball (2017), a pesquisadora discute o trabalho matemático do ensino a partir da análise de um estudo – realizado no ano de 2016 por ela e sua equipe – de diversas situações de sala de aula de Matemática que envolveram 30 crianças do quinto ano escolar de uma escola pública estadunidense situada em uma comunidade predominantemente afro-americana e de baixa renda. A partir dessa investigação, e dos diversos estudos anteriores que realizou, em síntese, a autora aponta que o trabalho matemático especial do ensino envolve ações e conhecimentos dos professores tais como: ouvir os pensamentos matemáticos dos alunos – rompendo-se, assim, com a tendência de sempre se preocupar em classificar as respostas dos estudantes como corretas ou incorretas. A aprendizagem dos estudantes depende da capacidade do professor em perceber o que eles sabem e de saber o que fazer com o que eles sabem; ler e interpretar matematicamente os trabalhos que os estudantes desenvolvem ao realizar as tarefas que lhes são propostas – dando sentido ao que eles produzem, sobretudo enquanto produzem. O professor precisa tentar compreender os significados das produções matemáticas dos estudantes para, então, dialogar com os alunos a respeito dessas produções; criar oportunidades para que os estudantes se identifiquem com a Matemática que estudam; desestruturar as desigualdades que marginalizam os grupos minoritários nas salas de aula – levando em conta o ensino para a promoção de inclusão e de justiça social; buscar maneiras de falar com os estudantes de forma que o conteúdo matemático torne-se compreensível a eles e que se alcancem as várias diferenças sociais e culturais presentes nas salas de aula; produzir, avaliar e utilizar tarefas e atividades matemáticas como potenciais ferramentas para a aprendizagem e para a evolução da aprendizagem dos estudantes.

As ideias dos autores que até agora foram citados neste Capítulo aproximam-se de nossas preocupações e, acreditamos, da preocupação dos formadores de professores brasileiros no âmbito da Educação Matemática, pois suscitam também as questões relativas aos contextos, aos estudantes e seu aprendizado e às relações nos ambientes de ensino. Tais questões permeiam a docência, assim como as questões especificamente relativas aos conteúdos matemáticos. Portanto, consideramos que a visão dos conhecimentos matemáticos para o ensino busca superar a lógica transmissiva de ensino firmada sobre uma relação unilateral “professor para alunos” (ZAIDAN, 2001).

Outras pesquisas a respeito dos conhecimentos relevantes aos professores para o ensino procuraram desvendar as maneiras como eles devem conhecer a Matemática para que ela seja mobilizada no momento e no serviço do ensino. Entre elas, citamos brevemente a visão de Davis e Renert (2013) sobre o que denominam como Matemática para o ensino (Mathematics for teaching). Os autores a consideram como um saber ligado a uma Matemática que é dinâmica, tácita e emergente das diversas situações que acontecem nas práticas de ensino. Em virtude desse entendimento, esses pesquisadores consideram o conhecimento disciplinar dos professores como uma disposição aberta e:

> (...) um modo de estar com conhecimento matemático que permite ao professor estruturar situações de aprendizagem, interpretar atentamente as ações dos alunos e responder de maneira flexível, de modo a permitir que os alunos ampliem a sua compreensão e ampliem o alcance de suas possibilidades interpretativas por meio do acesso a conexões poderosas e práticas adequadas (p. 110, tradução nossa[10]).

Ao final dos 10 anos de encontros com professores novatos e experientes no ensino, cujo foco das atividades e discussões foi compreender melhor tópicos e conceitos matemáticos seguindo das reflexões desses professores, Davis e Renert (2013) defendem que a Matemática para o ensino ou o conhecimento necessário aos professores:

> (...) não é simplesmente um conjunto de princípios claros e bem conectados, mas uma mistura sofisticada, emergente e altamente ativa de realizações de conceitos matemáticos, vinculada a uma consciência dos processos complexos ao longo dos quais a matemática é produzida (p. 118, tradução nossa[11]).

Ressaltamos, por fim, que, segundo a visão desses autores, o desenvolvimento de uma estrutura da Matemática para o ensino deve acontecer na formação e na prática dos professores – considerando-se este último como um lugar no qual os saberes para o ensino são altamente situados – e nas comunidades de professores que estudam e tentam compreender a Matemática para, então, ensiná-la.

No que se refere aos estudos brasileiros sobre os conhecimentos para o ensino de Matemática, destacamos o estudo de Moreira e David (2005), no qual os autores propõem uma distinção entre os termos **Matemática Acadêmica** e **Matemática Escolar** a partir da consideração das efetivas demandas da prática profissional do professor na Escola Básica.

---

[10] Do original: (…) a way of being with mathematics knowledge that enables a teacher to structure learning situations, interpret student actions mindfully, and respond flexibly, in ways that enable earners to extend understandings and expand the range of their interpretive possibilities through access to powerful connections and appropriate practice.

[11] Do original: (…) is not simply a clear-cut and well-connected set of basics, but a sophisticated, emergent, and largely enactive mix of realizations of mathematical concepts coupled to an awareness of the complex processes through which mathematics is produced.

A discussão promovida por esses autores, em torno dos dois conceitos, é contemporânea à proposição do modelo do MKT e parece, a nós, convergir para as ideias colocadas por essa outra visão. Também vale sublinhar que o estudo de Moreira e David (2005) nos evidencia claramente a natureza epistemológica da Matemática na e para a formação dos professores que a ensinarão na Escola Básica.

Em nossa interpretação, Moreira e David (2005, p. 20) concebem a Matemática Acadêmica (ou Científica) como "um corpo científico de conhecimentos, segundo a produzem e a percebem os matemáticos profissionais" e a Matemática Escolar como um "conjunto de saberes produzidos e mobilizados pelos professores de Matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, quanto resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos, etc.".

Diferenciadas dessa forma, notamos que os autores, embora os situem como tipos distintos de saber matemático, não sugeriram uma hierarquia ou uma oposição entre os dois conceitos. Entendemos, nós, que tanto a Matemática Acadêmica quanto a Matemática Escolar têm suas práticas profissionais – e os condicionantes dessas práticas – específicos, objetivos e lógicas internas distintas. Quando bem identificadas, conforme fazem Moreira e David (2005), fica mais bem definida a análise sobre o lugar e o papel de cada uma na formação inicial do professor.

No que diz respeito à relação entre esses dois conceitos, e dado que nos é muito interessante entendê-la, os autores pontuam que:

> De modo geral, o saber docente é decomposto em componentes, de tal forma que um deles, o chamado conhecimento da disciplina, assume a condição de essencial. Os demais componentes, ainda que reconhecidos como saberes complexos e importantes, conformam um conjunto de conhecimentos de caráter basicamente acessório ao processo de transmissão do saber disciplinar. Decomposta dessa forma, a Matemática Escolar costuma se reduzir à parte elementar e simples da Matemática Acadêmica, a complexidade do saber profissional do professor vai se localizar em conhecimentos considerados de natureza essencialmente não matemática (MOREIRA, DAVID, p.15).

Ponderando as concepções desses autores, interpretamos que uma razão para a referida redução da Matemática Escolar é a concentração do ensino da Matemática Científica que, em vários casos, ocorre nos cursos de formação de professores, em detrimento de uma Matemática para o ensino. Ao criticarem as perspectivas de Chevallard (1991) sobre o saber científico e o saber ensinado, e de Chervel (1990) sobre as relações das disciplinas escolares e a pedagogia, compreendemos que Moreira e David (2005, p. 20-21) apresentam um entendimento diferenciado como Matemática Escolar:

> (...) a Matemática Escolar inclui tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de Matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, quanto resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos, etc. Dessa forma, distanciamo-nos em certa medida, de uma concepção de Matemática Escolar que a identifica com uma disciplina "ensinada" na escola, para tomá-la como um conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente.

Um tipo de formação de professores que não situa a Matemática Escolar, esta conforme definida por Moreira e David (2005), como uma perspectiva fundamental para a formação, acreditamos, desprivilegia o estudo dos conhecimentos oriundos da prática profissional no momento em que se prepara os futuros professores para a sua atuação na Escola.

Pontuamos, também, a discussão realizada por Moreira e Ferreira (2013) que se relaciona com a reflexão sobre os conhecimentos para a formação inicial de professores da Escola Básica. Ao discutirem qual Matemática e qual o seu lugar na Licenciatura, os autores enveredam por caminhos que nos levam a compreender a necessidade de pensar a formação na direção do que está relacionado com o saber para a prática. Segundo esses autores, ao se considerar a especificidade da profissão docente e da escola e, ainda, esta última como uma instituição dotada de características próprias, somos levadas à busca pelo entendimento da demanda de conhecimentos específicos chamados a fazer parte da formação de professores de Matemática. Ainda nesse segmento, os autores sugerem que seja dado um lugar de destaque na Licenciatura ao estudo da sala de aula da Escola "onde se analisem e vivenciem práticas de formação que envolvam os saberes específicos associados à docência escolar em matemática" (MOREIRA, FERREIRA, 2013, p. 986).

Ao analisarmos concepções como as de Moreira e David (2005) e Moreira e Ferreira (2013), fica patente a definição de Matemática Escolar como aquela que se seria relevante estudar na Licenciatura, haja vista que a compreendemos como um amálgama de conhecimentos próprios para a docência na Escola Básica. No caso específico da geometria, valendo-nos do nosso entendimento teórico sobre as visões que situamos aqui, defendemos que uma perspectiva de formação de professores que considere que a geometria para o ensino, ou a geometria escolar, tenha um lugar (ou lugares) fundamental (fundamentais) nesse processo seja investigada. Mas, primeiramente, vemos como necessário que sejam dadas respostas para perguntas que inquiram por quais conhecimentos constitui-se a geometria escolar. Segundo o que pudemos constatar teoricamente, até o momento, um entendimento sobre as demandas próprias do ensino dessa área na escola pode auxiliar na discussão dessa constituição.

2.2 Algumas orientações curriculares sobre uma educação geométrica do futuro professor

A seguir, pontuamos algumas orientações curriculares para a formação inicial de professores, visando ao estabelecimento de um panorama sobre como os documentos consultados tratam dos conhecimentos para a Licenciatura em Matemática e como trazem, se trazem, uma perspectiva de educação geométrica em suas orientações. Algumas dessas pontuações nos serviram de apoio para algumas discussões presentes nas Conclusões da tese, no que se refere à relevância dos conhecimentos aqui identificados para a Licenciatura.

No ano de 2015, o Ministério da Educação homologou as novas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação em nível inicial e continuada de professores – DCN's - (MEC, CNE, 2015) – as quais regem os cursos de Licenciatura no país. As diretrizes priorizam que os Projetos Políticos e Pedagógicos desses cursos devem considerar diferentes tipos de conhecimentos para o processo de formação dos professores. São alguns desses tipos de conhecimento:

> (...) conhecimentos pedagógicos, específicos e interdisciplinares dos conteúdos a serem trabalhados. (...) conhecimento multidimensional e interdisciplinar sobre o ser humano e práticas educativas, incluindo o conhecimento de processos de desenvolvimento de crianças, adolescentes, jovens e adultos, nas dimensões física, cognitiva, afetiva, estética, cultural, lúdica, artística, ética e biopsicossocial, (...) [conhecimentos sobre] os fundamentos da educação, didáticas e práticas de ensino. (DCN, MEC, CNE, 2015, p. 09 – 11).

Para nós, a lista de conhecimentos expressa pelas DCN's remete a um horizonte de formação que contempla um conjunto de diferentes tipos de conhecimentos cuja natureza pertence às práticas pedagógicas e a elementos nela envolvidos. Isso aponta para algumas similaridades dessa proposta curricular com as bases do conhecimento para o ensino proposta por Shulman (1987) e, ao transladarmos as sugestões para o campo da formação inicial de professores de Matemática, percebemos, ainda, certa proximidade dessa lista com os domínios e subdomínios do modelo do MKT de Ball e colaboradores (2008, 2009). Entretanto, também notamos que a lista de conhecimentos das diretrizes não é discutida de maneira ampla e clara com respeito a esses conhecimentos, sua natureza e importância na formação de professores, o que pode gerar certa insuficiência da abordagem desses tipos saberes nos Projetos Políticos e Pedagógicos das Licenciaturas.

Com base nas DCN's datadas do ano de 2002, foram elaborados e publicados os Referenciais Curriculares Nacionais dos cursos de Bacharelado e Licenciatura (MEC, 2010). Tais documentos "compõem um conjunto de descritivos que apontam: o perfil do egresso, os temas abordados na formação, os ambientes em que o profissional poderá atuar e a infraestrutura mínima recomendada para a oferta" (p. 4). Ao tratarem especificamente do curso de Matemática, na modalidade Licenciatura, os Referenciais consideram que o licenciado é o profissional que:

> (...) planeja, organiza e desenvolve atividades e materiais relativos à Educação Matemática. Sua atribuição central é a docência na Educação Básica, que requer **sólidos** conhecimentos sobre os fundamentos da Matemática, sobre seu desenvolvimento histórico e suas relações com diversas áreas; assim como sobre estratégias **para transposição do conhecimento matemático em saber escolar**. Além de trabalhar diretamente na sala de aula, o licenciado elabora e analisa materiais didáticos, como livros, textos, vídeos, programas computacionais, ambientes virtuais de aprendizagem, entre outros. Realiza ainda pesquisas em Educação Matemática, coordena e supervisiona equipes de trabalho. Em sua atuação, prima pelo desenvolvimento do educando, incluindo sua formação ética, a construção de sua autonomia intelectual e de seu pensamento crítico. (MEC, 2010, p. 79, grifos nossos).

O documento supracitado destaca quais devem ser os temas abordados na formação inicial, indicando que sejam trabalhados os Fundamentos da Geometria, a Geometria Analítica e Desenho Geométrico como conteúdos obrigatórios e componentes da Matemática Acadêmica. Fica implícito em seus destaques que o estudo de tópicos da geometria também pode estar presente no trabalho realizado em outras áreas da formação, como por exemplo a Modelagem Matemática, a História da Matemática, Metodologias e Práticas de Ensino e Tecnologias.

Nesse documento, não há recomendações explícitas sobre como uma educação geométrica poderia acontecer com vistas a privilegiar uma formação pautada em conhecimentos específicos para o ensino. Todavia, vale lembrar que os destaques tanto das DCN's (2015) quanto dos Referenciais Curriculares Nacionais para os cursos de graduação (2010) têm papel de orientação para a criação dos currículos para as Licenciaturas, logo não esgotam e nem prescrevem todas as possibilidades de implementação de estudos para tais cursos.

Em uma busca por documentos que fomentam ideias mais específicas no que tange a uma perspectiva de formação de professores em que elementos da prática docente e suas demandas têm lugar de destaque, encontramos o boletim "A formação do professor de

Matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM[12]" (2013). Esse documento faz uma análise crítica, a partir do estabelecimento de um consenso entre as duas sociedades (SBEM e SBM), dos Referenciais Curriculares Nacionais para os cursos de Licenciatura em Matemática.

No boletim, não há uma proposta de grade curricular para a Licenciatura, mas a proposta de uma visão de organização comum desse curso, dadas as necessidades de se avançar e identificar/compreender conhecimentos relevantes para a formação inicial de professores de Matemática. Nesse sentido, em suas considerações preliminares, o boletim destaca a necessidade de se repensar a formação inicial, tentando não permanecer sob a ideia dominante através da qual se soma os conhecimentos matemáticos acadêmicos aos métodos de ensino:

> (...) torna-se necessário trabalhar ativamente no processo de formação para ir além da ideia vigente de que existem duas coisas distintas e separáveis: "o conteúdo matemático" e "os métodos de ensino deste conteúdo", ou seja, **é preciso procurar romper a tradição de tratar a formação Matemática na licenciatura de modo separado das questões referentes ao trabalho docente escolar**. Nessa perspectiva, permanece inquestionável o valor e a importância nuclear do conhecimento matemático a ser construído ao longo da formação do futuro professor. O que distingue essa perspectiva de formação da visão corrente é a ideia de que **esse conhecimento matemático precisa ser trabalhado de uma forma que leve em consideração as características e os objetivos da prática para a qual se destina o profissional a ser formado**. (SBEM/SBM, 2013, p. 5, grifo nosso).

No que diz respeito ao trabalho com a geometria, o documento reforça a necessidade de um olhar especial sobre esse conteúdo, o qual, segundo o texto, ainda passa por abordagens insuficientes na Escola Básica. O documento propõe que uma apresentação axiomática de conteúdos da geometria euclidiana plana e espacial e da geometria analítica tenha espaço de destaque na Licenciatura, desde que evidencie as demonstrações e as construções de conceitos, do ponto de vista mais formal/acadêmico – destacamos – para a Matemática e seu ensino básico. Essa apresentação, segundo o boletim, deverá acontecer de maneira que uma relação entre a Matemática Acadêmica e a Matemática para o ensino seja preservada.

Em vista de uma síntese, o boletim traz que:

> (...) o trabalho com a Geometria na licenciatura deveria contemplar o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e indutivo, aprimorando habilidades de formulação e resolução de problemas geométricos, bem como tornando o aluno capaz de explicar o papel de cada postulado da Geometria, destacando a sua importância e suas consequências; a percepção geométrica-espacial; a comparação entre a geometria euclidiana e outras geometrias, utilizando a História da Matemática para uma compreensão mais crítica da evolução das ideias fundamentais da Geometria; construções com régua e compasso, enfatizando as construções

---

[12]Sociedade Brasileira de Educação Matemática/Sociedade Brasileira de Matemática.

> gráficas e as suas justificativas, resolução de problemas que favoreçam o desenvolvimento das estratégias de resolução e a compreensão das propriedades geométricas, além de resultados de cálculo, bem como utilizar programas computacionais de geometria dinâmica como apoio pedagógico; e, a aplicação dos conhecimentos geométricos em outras áreas do conhecimento. (SBEM/SBM, 2013, p. 13-14).

Interpretamos que as pontuações do documento, embora carreguem traços de que a dicotomia conteúdo acadêmico *versus* modos de se ensinar o conteúdo na escola precisa ser rompida, e que uma concepção de conhecimentos matemáticos para o ensino precisa perpassar a Licenciatura, ainda se contradizem quando sugerem, por exemplo, que a geometria axiomática (acadêmica) seja tomada como pilar principal da formação de professores e que os modos e materiais didáticos para o ensino sejam trabalhados sob um ponto de vista de complementariedade dessa geometria.

Cabe ressaltar, por fim, a notoriedade da necessidade de se buscar melhorias para os currículos e políticas da formação de professores no Brasil, visando aos conteúdos que serão trabalhados nesse processo, sem perder de vista a futura prática docente desse profissional na Educação Básica. Para o caso da geometria, uma discussão sobre um conjunto de conhecimentos específicos para o ensino dessa área no Ensino Fundamental, a partir da análise de situações de sala de aula nesse segmento, pode trazer à luz possíveis contribuições para a construção dessas melhorias.

2.3 Síntese de nossas reflexões

O propósito deste Capítulo foi revisar alguns entendimentos sobre conhecimentos matemáticos para o ensino e pontuar algumas considerações curriculares que trazem indicações sobre conhecimentos relacionados a uma educação geométrica inicial do professor. Sentimo-nos convocadas a explicitar algumas de nossas reflexões sobre as visões de alguns autores, já que identificamos que há, na Educação Matemática, um cenário fecundo de compreensões teóricas a esse respeito. Discutimos, ainda, um pouco do que nos ficou evidente, a partir da literatura que exploramos, como relevante para se pensar a respeito da formação inicial de professores de Matemática.

Quando voltamos a nossa atenção para Ball, Thames e Phelps (2008) e Ball e Bass (2009), notamos que, segundo eles, o que distingue o conhecimento matemático específico para o ensino de outros, em suas dimensões citadas, é que ele é um corpo de conhecimentos dos assuntos matemáticos necessários para e demandados das diversas tarefas específicas da prática docente. Portanto, os autores articulam diferentes tipos de saberes nas diversas classificações de conhecimentos que apresentam, em um exercício de compreensão dos elementos pertinentes à prática rotineira de professores de Matemática.

Ball (2017), ao dar protagonismo às ações que são mobilizadas implícita ou explicitamente pelos professores na dinâmica e complexa atividade do ensino, coloca-nos frente a discussões ainda muito labirínticas a respeito da prática desses profissionais. Analisar as ações que os professores mobilizam enquanto ensinam é uma via muito complexa, dado que isso implica em tentar perceber os modos de ser e de estar com e de compreender e de pensar sobre a Matemática dos professores, a compreensão dos professores da Matemática internalizada, pensada e (re)produzida pelos alunos e o alcance dos professores, durante o ensino, das diferenças culturais e sociais sempre presentes nas salas de aula brasileiras. Por outro lado, o contato com a prática e a descompactação dessas ações intrínsecas do ensino pode levar-nos a uma amplitude de compreensão dos conhecimentos nele envolvidos.

Ao considerarmos o construto teórico sobre a Matemática Escolar de Moreira e David (2005), concordamos com esses autores, principalmente, quando eles conceituam a Matemática Escolar, em nossa percepção, como uma articulação cuidadosa dos fundamentos da Matemática com os saberes que constituem a prática de ensino. Considerando, ainda, que Moreira e David (2005, p. 36) apresentam uma conclusão sobre a Matemática Escolar expressando que ela "constitui um amálgama de saberes regulado por uma lógica que é específica do trabalho educativo, ainda que envolva uma multiplicidade de condicionantes", propomo-nos, portanto, a considerar esse conceito como um dos pilares do nosso estudo, destacando, sobretudo, a importância do seu entendimento para os processos inerentes à formação inicial de professores.

Em conclusão, os estudos de Moreira e David (2005), Ball, Thames e Phelps (2008), Ball e Bass (2009), Ball (2017) têm nos propiciado elementos para nossa síntese teórica sobre o que pode ser vislumbrado como um conjunto de conhecimentos matemáticos específicos para o ensino na Educação Básica. Doravante, interpretamo-lo como um amálgama de conhecimentos que os professores precisam mobilizar para ensinar na Escola Básica. Em vista disso, compreende não somente conhecimentos da Matemática, por si, mas um conjunto de conhecimentos que são próprios da profissão e que envolvem: conhecimentos sobre os alunos, e suas dificuldades, ideias, erros e equívocos a respeito dos assuntos; conhecimentos sobre os currículos e sobre a articulação entre os assuntos neles considerados; conhecimentos sobre metodologias de ensino e sobre tarefas potencialmente favoráveis à promoção e à evolução da aprendizagem dos estudantes; conhecimentos relacionados à construção, comunicação e evolução dos conceitos matemáticos; conhecimentos emergentes dos contextos sócio-históricos-culturais em que o ensino se desenvolve, entre outros. Resumindo a nossa interpretação, observamos que qualquer conhecimento, quando considerado para o ensino, está em relação com uma pluralidade de elementos específicos da instrução. Essa tem sido, após o estudo que fizemos das teorias apresentadas, a "nossa" visão.

No que se refere às proposições do boletim elaborado pela comissão paritária SBEM/SBM (2013), notamos uma contradição no entendimento estabelecido pelas duas sociedades de que o trabalho com a geometria deva ocorrer, nos cursos de formação de professores, sob um ponto de vista axiomático mais formal articulado às discussões sobre o desenvolvimento de conceitos, para nós certamente acadêmicos, no ensino básico da geometria.

Na maneira como está colocada no documento, acreditamos que essa formulação não responde à perspectiva de uma educação geométrica na qual conhecimentos geométricos escolares que consideramos como diferentes e, ao mesmo tempo, indissociáveis – e os quais entendemos que envolvem tanto conhecimentos mais estáveis, como aqueles relativos especificamente aos conteúdos, quanto conhecimentos mais dinâmicos, como aqueles inerentes às práticas – tomam igual lugar de destaque. Permanece, assim, na visão colocada, um curso para a formação inicial de professores como um somatório de partes que não se articulam.

Após todas as leituras que realizamos até aqui, preferimos interpretar que uma relação entre a geometria acadêmica (ou formal, conforme refere-se o documento) e a geometria escolar (ou para o ensino) deva implicar na ideia de que os futuros professores precisam conhecer a geometria em uma perspectiva de que esse conhecimento os tornem capazes de, ao se graduar, ensiná-la dentro das condições da sua prática docente, por exemplo: elaborando e analisando estratégias pedagógicas para o trabalho com a geometria na Educação Básica que sejam favoráveis ao aprendizado dos estudantes e à evolução desse aprendizado; reconhecendo e avaliando os limites e possibilidades para o trabalho com os assuntos da geometria quando situados nos contextos escolar e social/cultural/comunitário; construindo e considerando horizontes conceituais que sejam pedagogicamente pertinentes ao ensino da geometria na Escola; conhecendo e sendo capazes de inter-relacionar e estabelecer conexões entre os conteúdos e habilidades geométricos presentes nos currículos da Educação Básica; tratando, valorizando e articulando os conhecimentos da geometria que emergem a partir das ideias, dúvidas, erros e equívocos dos alunos, bem como, as possibilidades de aplicação e de discussão desses conhecimentos.

Chamou-nos a atenção que os documentos oficiais para a formação de professores não esclarecem o que se deve entender a respeito de alguns termos de que fazem uso, como por exemplo o termo "sólida formação teórica", presente no texto das DCN's (2015). Nos Referenciais Curriculares Nacionais (MEC, 2010), por exemplo, não há discussões sobre os processos de transposição dos "sólidos conhecimentos dos fundamentos da Matemática" para o "saber escolar", o que fica a cargo da interpretação das comissões institucionais internas que lidam com os currículos da formação inicial. Diante disso, perguntamo-nos se as expressões destacadas dos dois documentos podem gerar uma interpretação de que os professores, sabendo a Matemática Acadêmica de maneira sólida e profunda, serão capazes de transpô-la didaticamente aos estudantes na Escola Básica.

Ao construirmos este Capítulo, ainda identificamos que podem haver pelo menos duas concepções dos processos de formação inicial de professores de Matemática. Uma dessas concepções respalda a formação no estudo da Matemática Acadêmica (MOREIRA, DAVID, 2005), na certeza de que, munido do conhecimento acadêmico, o futuro professor saberá adaptar e ensinar a Matemática na Escola Básica. Se procurássemos assumir esse modelo de formação, parece, a nós, que cairíamos em uma lógica necessariamente transmissiva, em que a prática é vista como aplicação da teoria, o que indica uma identificação com o modelo da racionalidade técnica (DINIZ-PEREIRA, 2014).

No entanto, ao nos posicionarmos em outro sentido, diferentemente do que a lógica citada acima pressupõe, aproximamo-nos de um tipo de pensamento sobre a formação de professores que entende não ser possível formá-los sem nos atentarmos para a visão dos conhecimentos associados à Matemática Escolar (MOREIRA, DAVID, 2005).

Destacamos, nessa perspectiva de formação, as pontuações de Moreira e David (2005) e Moreira e Ferreira (2013). Respectivamente, defendem os primeiros que o estudo sobre os saberes associados ao ensino da Matemática na Educação Básica pode alavancar processos de mudança na Licenciatura, pautados na "complementariedade com o processo de produção de saberes da prática docente escolar" (p. 41). Em conformidade, os segundos confirmam a importância do lugar de destaque que deve ser dado à escola nos processos formativos dos profissionais do ensino de Matemática. Por essa via de perspectiva da Licenciatura, compreendemos que há que se trabalhar para que os projetos de formação de professores possam desdobrar as visões sobre uma Matemática específica para o ensino, como aquelas que apresentamos nesse Capítulo, de modo que o foco desses projetos seja de que o futuro professor aprenda para ensinar na Escola Básica.

3 A EDUCAÇÃO BÁSICA COMO UM CAMPO DE INVESTIGAÇÃO

Conforme já mencionado, o objetivo desta tese é: Identificar e problematizar conhecimentos matemáticos para o ensino, no que tange ao ensino de geometria no Ensino Fundamental, visando a uma discussão sobre a relevância desses conhecimentos para a formação de professores de Matemática. Como nos ficou perceptível a partir do estudo realizado no Capítulo 2, consideramos a própria Educação Básica como um campo fértil para a produção dos dados empíricos de pesquisas sobre os conhecimentos matemáticos para o ensino. Isto posto, escolhemos como principal fonte de dados empíricos para a constituição da tese um conjunto de situações de sala de aula, as quais aconteceram em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental em uma escola da rede federal de ensino.

Investigar situações de sala de aula, seja qual for a linha da investigação pretendida, é uma ação que presume cuidado e atenção do pesquisador aos inúmeros acontecimentos que ocorrem durante as práticas observadas. Desde o planejamento do professor, sujeito da pesquisa, às ações propriamente ditas do ensino, o pesquisador precisa cuidar para que o seu olhar esteja, ao mesmo tempo, atento ao que se pretende alcançar e expandido às situações inesperadas e emergentes daquele contexto específico. Foi o que procuramos fazer. Da pluralidade dos conhecimentos para o ensino evidenciada pelos estudos apresentados no Capítulo 2, segue que as estratégias para a produção e para a análise dos dados de pesquisas como esta são múltiplas. Nas seções que se seguem, são explicitados os caminhos metodológicos, o contexto e os participantes envolvidos nesta investigação, bem como, as justificativas das escolhas feitas.

3.1 Caminhos metodológicos[13]

Em razão da natureza da questão que procuramos responder por meio desta pesquisa, e das inspirações teóricas consideradas para a sua realização, esta investigação configura-se como uma abordagem qualitativa (BOGDAN, BILKEN, 1994). Para tentar alcançar o objetivo da tese, optei por analisar os conhecimentos matemáticos relacionados a situações reais de sala de aula, observadas nos anos finais do Ensino Fundamental de uma escola pública. Em outras palavras, analisei conhecimentos que foram demandados dos professores

[13] Dessa seção em diante, a escrita deste Capítulo ocorre em primeira pessoa do singular, dado que a presença no campo de pesquisa e a produção de dados do campo foram realizadas propriamente pela autora da tese.

perante a questões que foram colocadas durante tais situações, tendo sido tais conhecimentos mobilizados ou não pelos professores participantes.

Quando se decide investigar um fenômeno em Educação a partir do olhar sobre práticas de ensino de professores, os caminhos para tal investigação costumam se enveredar por vários rumos. Não é possível que encontremos vias retas que nos levem diretamente aonde queremos chegar. Por isso, utilizei técnicas e instrumentos de produção e triangulação dos dados empíricos diversos, quais sejam: observação participante semiestruturada[14] de aulas de geometria em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental; gravações em áudio das aulas observadas; cadernos de campo de pesquisa contendo anotações diversas sobre as aulas observadas e sobre os sujeitos envolvidos na pesquisa.

Para cada professor sujeito da pesquisa e, consequente, para cada turma pesquisada, construí um caderno de campo. As anotações contidas neles foram feitas durante e/ou em momentos imediatamente após cada aula observada para tentar registrar, da maneira mais completa possível, todos os movimentos que aconteceram em cada uma dessas aulas. Nos cadernos de campo constam, ainda, mapas dos lugares ocupados pelos estudantes nas salas de aula em que as observações aconteceram, descrições físicas das salas de aula, descrições dos materiais pedagógicos utilizados nas aulas e descrições dos sujeitos participantes de todas as aulas observadas; transcrições das falas dos participantes da pesquisa durante as aulas observadas; fotografias de materiais didáticos utilizados nas aulas, cadernos e folhas de atividades e entrevistas com os professores sujeitos da pesquisa e transcrições dessas entrevistas.

A escolha pelos anos finais do Ensino Fundamental deveu-se ao fato da impossibilidade natural de se cobrir, em uma pesquisa como esta, todos os segmentos da escolarização básica. Também ao fato de que o ensino de geometria nos anos finais desse segmento está previsto no currículo da Educação Básica brasileira para revisitar conceitos geométricos tratados nos anos iniciais, os quais constituem o alicerce da construção do pensamento geométrico do aluno e dos assuntos geométricos que o acompanharão por toda sua vida escolar.

Feita a escolha, delineei como fonte para a produção dos dados empíricos um conjunto de situações de sala de aula em que a geometria foi trabalhada. Tais situações foram obtidas da observação das práticas de ensino de dois professores de uma Escola pública de Educação Básica da cidade de Belo Horizonte, em turmas de 7º e de 9º anos do Ensino Fundamental.

[14] Consideramos como observação semiestruturada aquela para a qual se prepara um estrutura orientadora inicial, estrutura essa sujeita à mudanças no decorrer da realização da observação.

Para a escolha dos anos de escolaridade específicos para as observações, fiz uma consulta à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (MEC, BRASIL, 2017) em um momento anterior à entrada no campo de pesquisa. Por meio de tal consulta, verifiquei quais são os conteúdos e habilidades descritos nesse documento para o trabalho com a geometria no Ensino Fundamental. A partir disso, elenquei alguns dos conteúdos salientados pela BNCC com os quais tive a oportunidade de trabalhar na formação de professores de Matemática, nas ocasiões em que lecionei as disciplinas de Geometria I e Geometria II na UFES/Alegre, quais sejam: triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos; poliedros e corpos redondos; cálculo de volume de blocos retangulares, utilizando unidades de medida convencionais mais usuais; equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras; ângulos internos e externos de polígonos regulares; semelhança de triângulos; relações métricas no triângulo retângulo; teorema de Pitágoras; retas paralelas cortadas por transversais e teorema de Tales. A partir dessa lista de assuntos, escolhi o 7º e o 9º anos como anos escolares para a investigação.

O acompanhamento das práticas de ensino de professores da Educação Básica exige que o pesquisador analise e se envolva em múltiplas ações subjacentes às práticas pesquisadas. Portanto, com respeito à minha escolha pela observação participante como uma técnica de investigação, ponderei que ela "(...) tornou-se uma referência importante na distinção entre as diferentes abordagens, caracterizando-se, num sentido geral, pela presença constante do pesquisador no campo e a observação direta de atividades de um grupo no local de sua ocorrência" (TURA, 2003, p. 187). Vale ressaltar que a observação participante que realizei foi semiestruturada, uma vez que a partir dos estudos que fiz de algumas leituras (MOREIRA, DAVID, 2005; BALL, THAMES, PHELPS, 2008), antes da entrada no campo de pesquisa, tracei questões que funcionaram como direcionadoras *a priori*. Por meio de tais perguntas questionei que conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria podem estar relacionados: às dúvidas dos alunos sobre os assuntos que lhes são ensinados; às ideias que os alunos possuem ou formulam sobre o assunto que lhes é ensinado; aos equívocos conceituais (*misconceptions*) dos estudantes; aos erros cometidos pelos estudantes; às metodologias de ensino propostas pelos docentes e às tarefas que são propostas aos alunos.

Essas questões foram planejadas para que o foco das lentes da observação fosse projetado especificamente sobre os conhecimentos que são demandados dos professores quando ensina geometria nos anos finais do Ensino Fundamental. No preparo dessas questões, levei em consideração a importância de que as práticas de ensino sejam construídas em interação com o grupo que compõe o ambiente onde o ensino acontece (COHEN, RAUDENBUSH, BALL, 2003 *apud* BALL, 2017). A participação dos estudantes nesse processo é essencial e inseparável, haja vista o que dizem os referenciais teóricos que foram apresentados no Capítulo 2, os quais destacam as demandas emergentes das dinâmicas das situações de sala de aula, que envolvem tanto professores quanto alunos com evidente protagonismo na construção de suas visões sobre os conhecimentos específicos para o ensino de Matemática.

É preciso que eu diga, ainda, que as questões mencionadas não foram, em momento algum, consideradas como um único respaldo para a descrição das situações observadas, mas como um auxílio aos meus olhares sobre as práticas rotineiras dos professores durante o ensino de geometria. Também não foram definitivas, pois outras questões surgiram na medida em que as observações foram realizadas e algumas das questões determinadas *a priori* dissiparam-se em outras mais específicas das observações daquele contexto de ensino no qual eu me inseri.

Alves-Mazzoti (2001) pondera que os pesquisadores adeptos aos formatos mais tradicionais de pesquisa criticam alguns aspectos da observação como técnica de investigação. Para os críticos, essa técnica pode restringir os registros do pesquisador apenas aos eventos ocorridos no período de observação. Ciente desse aspecto, para que detalhes ocorridos fora dos períodos das observações não fossem desconsiderados durante a análise e discussão dos dados, e para que até mesmo alguns detalhes desses períodos de observação fossem melhor compreendidos, realizei separadamente uma entrevista com cada um dos professores participantes da pesquisa.

Após o fim dos períodos de observação nas duas turmas investigadas, fiz uma primeira leitura da descrição que consta no diário de campo de cada conjunto de situações de sala de aula produzido a partir das aulas de cada professor. Ao consultar esse material, levantei algumas partes específicas das aulas que me geraram algumas dúvidas, ou que me chamaram a atenção. Com base nesses momentos, preparei uma entrevista para ser realizada com cada um dos professores para que, através deste diálogo, tentássemos esclarecer os pontos que levantei e para que pudéssemos, além disso, tratar mais sobre a formação inicial de cada um deles, sobre a sua trajetória profissional e as suas experiências com o ensino da geometria na Educação Básica.

Os professores receberam-me na Escola em horários previamente agendados para que os diálogos pudessem acontecer. Os roteiros para as entrevistas com os professores são diferentes, dado que cada uma delas foi preparada, também, a partir das observações realizadas em cada turma pesquisada. Ambas estão apresentadas nos Apêndices (Apêndice A e Apêndice B) desta tese.

Como no 7º ano houve a participação de dois licenciandos (estagiários do professor regente) na ministração de algumas aulas de geometria, realizei uma entrevista também com eles após o término do período de observação no 7º ano. A entrevista versou sobre o seu percurso de formação inicial como professores de Matemática e sobre as experiências dos então futuros professores com o ensino de Matemática, e, mais especificamente, com o ensino de geometria na Educação Básica. Ainda procurei saber dos dois licenciandos um pouco mais a respeito das práticas de ensino de geometria que desenvolveram juntamente com Benjamin ao 7º ano. O roteiro das perguntas feitas aos licenciandos também se encontra nos Apêndices (Apêndice C) da tese.

3.2 A entrada no campo de pesquisa

Ao final do ano de 2017, após o projeto de pesquisa ser aprovado pelo Colegiado do Curso de Pós-Graduação, entrei em contato com o então coordenador do núcleo que contempla o corpo docente de Matemática da Escola pesquisada para que pudéssemos conversar sobre a minha intenção em fazer as observações das aulas. O professor coordenador recebeu-me na Escola. A princípio, e informalmente, ele mostrou interesse em que a pesquisa fosse realizada naquela instituição e explicou-me que estava programado que houvesse duas turmas de 7º ano e duas turmas de 9º ano no ano letivo de 2018. Ao mostrar-me o horário das aulas para tal ano letivo, percebi que seria possível realizar as observações em uma turma específica de 7º ano e em uma turma específica de 9º ano, levando em consideração que as aulas de Matemática nessas duas turmas não se sobrepunham e, portanto, caso os professores das duas turmas trabalhassem com geometria ao mesmo tempo, eu poderia frequentar as aulas em ambas as turmas sem prejuízos.

Encaminhei o projeto de pesquisa ao professor coordenador e ele o encaminhou oficialmente, em uma reunião, juntamente ao meu pedido de permissão para a realização da pesquisa de campo na escola, aos demais professores de Matemática. Todos os professores se manifestaram de acordo com a realização das observações das aulas de geometria na Escola e colocaram-se à disposição para quaisquer contatos a respeito de uma possível participação na pesquisa.

Ainda no ano de 2017, os dois professores designados para lecionarem Matemática nas turmas específicas de 7º ano e de 9º ano que escolhi, respectivamente, após conhecerem o projeto, aceitaram participar como sujeitos da pesquisa mediante um convite feito por e-mail.

No ano de 2018, assim que o projeto foi aprovado pelo Comitê de Ética e Pesquisa da UFMG, os professores assinaram os Termos de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice D), confirmando o seu aceite.

Logo que o ano letivo de 2018 se iniciou, os professores e eu demos início às conversas a respeito das turmas nas quais as observações aconteceriam, das suas expectativas sobre o trabalho com a geometria nessas turmas, sobre os conteúdos com os quais eles pretendiam iniciar o ensino de geometria naquele ano e sobre os planejamentos de aulas para esses conteúdos.

O professor do 9º ano foi o primeiro com quem tive contato, quando nos reunimos para uma primeira conversa ao final do ano de 2017. Naquele momento, o seu planejamento de aulas estava sendo desenvolvido em conjunto com a professora de Matemática da outra turma de 9º ano. Por isso, o planejamento ainda não estava concluído. Nessa reunião, o professor também me mostrou o livro didático com o qual pretendia trabalhar nas aulas de geometria. Esse não era o livro que fora adotado oficialmente pela escola para o triênio 2017-2019, mas um livro com o qual gostava muito de trabalhar. Ele deixou um exemplar desse livro comigo para que eu o tivesse em mãos durante as aulas. O professor relatou a mim que pretendia iniciar o trabalho com o conteúdo de geometria em meados do mês de fevereiro de 2018. Entretanto, como esse era o mês em que o ano letivo se iniciaria, o professor pediu que eu esperasse até o início do mês de março para começar as observações das aulas, para que assim ele tivesse um tempo a sós com a turma e, dessa forma, pudesse estabelecer uma maior aproximação com ela. Assim o fiz e as observações ocorreram, nessa turma, nos períodos de 08-03-2018 a 12-04-2018 e de 08-08-2018 a 22-08-2018, totalizando a observação de 20 aulas.

Meu primeiro contato com o professor do 7º ano para uma reunião sobre as observações foi em março de 2018. As duas turmas de 7º ano estavam sob a responsabilidade apenas desse professor. Na reunião, ele relatou que nunca havia dado aulas para os alunos de ambas as turmas, portanto, estava em processo de conhecê-los melhor. Através desse processo, disse o professor, estava percebendo, naquele momento, alguns problemas com relação aos conteúdos de geometria nas turmas. O professor, embora ainda não estivesse trabalhando com assuntos de geometria, percebeu, durante algumas conversas que teve com os estudantes e também com o professor de Matemática que havia dado aulas para aqueles alunos no ano escolar anterior, que eles pouco tinham estudado sobre alguns assuntos que serviriam de alicerce para o trabalho que ele pretendia desenvolver em 2018. Ele relatou que, por conta disso, já estava buscando alternativas e abordagens que o pudessem auxiliar na recuperação desses assuntos e na evolução da aprendizagem dos estudantes.

No dia da nossa primeira reunião, o professor do 7º ano havia acabado de retornar de compromissos profissionais que o afastaram de algumas tarefas rotineiras das aulas. Portanto, naquele dia, ele ainda não havia conseguido concluir o seu planejamento anual de atividades. Ele relatou que daria início ao trabalho com a geometria nas turmas de 7º ano em meados do mês de maio e que eu poderia iniciar as observações quando preferisse. Assim, as observações nessa turma ocorreram no período de 21-05-2018 a 20-06-2018 e totalizaram 10 aulas.

É conveniente explicar que ao chegar à Escola para meu primeiro dia de observação na turma de 7º ano, turma que escolhi em 2017, na ocasião do meu conhecimento do horário das turmas, o professor sugeriu que eu levasse em conta que a outra turma de 7º ano era formada por alunos que interagiam mais entre si, com o professor e com os licenciandos (estagiários), nas aulas de Matemática, em nível superior à interação dos estudantes da turma de 7º ano que foi escolhida para a pesquisa. Considerei a informação do professor como algo relevante para a pesquisa e, por isso, decidi assistir aulas nas duas turmas para decidir o que fazer. Depois da experiência de ter assistido duas aulas nas duas turmas, constatei que a turma indicada pelo professor participou das aulas significativamente mais do que a outra. Houve muito mais perguntas, discussões e interações dos alunos com o professor e com os licenciandos que o estavam acompanhando. Esses movimentos motivaram-me a tentar buscar, nesse ambiente, uma visão sobre conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria nos anos finais do Ensino Fundamental.

Todavia, os horários das aulas de Matemática dessa turma coincidiam em um dia da semana com os horários das aulas de Matemática do 9º ano, o que havia sido considerado por mim na escolha inicial entre os 7os anos. Levando isso em conta, conversei com o professor do 9º ano para saber se estavam previstas aulas de geometria nessa turma no período em que eu assistiria aulas no 7º ano. Ele respondeu-me que pretendia voltar a trabalhar com assuntos da geometria no 9º ano apenas a partir do início do segundo semestre. Conversei também com o professor do 7º ano e ele relatou que, provavelmente, não trabalharia com conteúdos de geometria no início do segundo semestre. Diante de tais informações, como não havia o risco de sobreposição de aulas em que seriam trabalhados assuntos de geometria nas duas turmas, decidi realizar as observações no 7º ano indicado pelo professor.

Também é conveniente melhor explicar o fato aqui já mencionado de que quando cheguei à Escola para realizar as observações no 7º ano, o professor estava trabalhando em conjunto com uma estagiária e com um estagiário, alunos do curso de Licenciatura em

Matemática da UFMG. O professor informou-me, em nossa primeira conversa, que os licenciandos participariam ativamente na ministração das aulas de geometria, o que poderia ser relevante para a realização da minha pesquisa. Ao saber dessa informação, ponderei que o acompanhamento dos licenciandos, os quais desempenhariam função de professores, não traria prejuízos para os objetivos da pesquisa. Muito pelo contrário, esse fato poderia em muito contribuir para a constituição da tese. Assim, convidei-os para uma conversa e expliquei-lhes sobre a pesquisa. Após o nosso diálogo, ambos aceitaram participar da investigação como sujeitos dela.

Segundo relatos dos licenciandos participantes, o trabalho desse professor com seus estagiários era pautado em muitos diálogos e planejamentos conjuntos em que ele procurava ouvi-los, conhecer as suas expectativas quanto ao ensino de Matemática e apresenta-los às suas próprias expectativas quanto ao ensino na Escola Básica. O estágio acontecia nos três dias da semana em que o professor tinha aulas com as duas turmas: segundas, terças e quartas-feiras. Havia, também, um horário reservado às terças-feiras para que o professor e os estagiários fizessem reuniões para troca de experiências, planejamento e discussões de atividades e de temas que o professor costumava sugerir aos licenciandos para leitura. Ou seja, o planejamento das aulas era feito em conjunto com o professor e por ele monitorado.

Desde o meu primeiro dia em cada uma das salas de aula, não notei constrangimentos dos alunos do 7º e 9º anos com relação à minha presença. Pelo contrário, senti-me muito acolhida, respeitada e incorporada àqueles ambientes. Já nas primeiras aulas que assisti, muitos alunos sentiram-se à vontade para me chamar até as suas mesas para tirar dúvidas durante as atividades e/ou para me perguntar se a sua maneira de fazer determinado exercício estava correta ou não. Sempre que precisei abordar algum aluno para pedir permissão para tirar uma fotografia do seu caderno, para solicitar que escolhessem o seu pseudônimo ou mesmo para conversar a respeito de alguma pergunta ou de alguma ideia que aquele aluno havia colocado durante a aula, não recebi respostas negativas ou percebi desconforto por parte deles em me abrir esses espaços. A Escola pesquisada, por ser uma escola de aplicação de uma Universidade Federal, está acostumado a receber estagiários, pesquisadores, monitores, entre outras pessoas em suas turmas. Desde muito cedo, os alunos acostumam-se com as presenças de outras pessoas nas aulas, que não somente a do professor, e a interagirem com elas.

Tanto os professores, os licenciandos e os alunos, após serem esclarecidos por mim sobre a pesquisa, receberam, respectivamente os primeiros, os Termos de Consentimento Livre e Esclarecido, e os últimos, o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (Anexos E e

F) para que pudessem lê-los e assiná-los, caso concordassem. Após fazerem uma leitura cuidadosa, os dois professores, os licenciandos e todos os alunos e seus respectivos pais/responsáveis assinaram os termos que receberam.

Na medida em que as aulas foram acontecendo, solicitei aos alunos, um por um, que escolhessem pseudônimos para serem utilizados – sempre que esse uso fosse possível ou relevante – nas transcrições das aulas. Todos os estudantes das duas turmas fizeram escolhas de nomes fictícios e alguns ficaram muito empolgados com isso. Ambos os professores também escolheram pseudônimos para a preservação da sua identidade na tese. Já os pseudônimos dos licenciandos foram escolhidos por mim, segundo sugestão dos próprios.

Com a assinatura dos termos de compromisso e assentimento, dois gravadores de áudio foram inseridos nas salas de aula. Um gravador ficava posicionado mais próximo ao lugar onde o professor ou os estagiários (quando esses ministravam as aulas) se posicionavam na sala de aula. O outro gravador ficava em minha posse, para que, assim, eu pudesse andar pelas salas de aula e capturar as falas dos alunos e também dos professores e estagiários quando estes saíam dos lugares mais próximos do outro gravador. A câmera fotográfica de um celular passou a ser utilizada por mim para registrar as imagens do que eventualmente estava exposto na lousa, nas folhas e cadernos que estavam sob a posse dos estudantes e dos materiais utilizados nas aulas. As imagens dos estudantes, dos professores e dos licenciandos foram preservadas em todos os registros fotográficos. Assim como em relação à minha presença nas aulas, a inserção dos gravadores e as fotografias não me pareceram ter causado constrangimento nos estudantes, tampouco nos professores e nos licenciandos.

3.3 Um lugar escolhido para a produção de reflexões sobre os conhecimentos específicos do professor

Durante uma das nossas reuniões, minha orientadora sugeriu que eu realizasse a pesquisa de campo em uma Escola da rede federal de ensino básico. Nessa ocasião, ela explicou-me que tal Escola funciona como uma instituição que proporciona o Ensino Fundamental à comunidade e, paralelamente a isso, desenvolve pesquisas, experimenta e desenvolve práticas pedagógicas inovadoras, além de tratar-se de uma escola-laboratório do desenvolvimento e da formação de professores. Essa conversa foi decisiva para que eu a escolhesse como o campo para a realização desta pesquisa. A expectativa com a escolha, então, foi de que havendo um contexto de práticas inovadoras e participativas, eu poderia acessar situações de maiores desafios no ensino, com a possibilidade de surgirem mais elementos para a compreensão dos conhecimentos matemáticos relacionados ao ensino de geometria nos anos finais do Ensino Fundamental.

A Escola é caracterizada como um colégio de aplicação vinculado a uma Universidade e, por isso, diferencia-se em vários aspectos de outras escolas de Educação Básica. Um deles relaciona-se ao seu corpo docente. Os professores que nela trabalham são, em sua maioria, doutores, mestres e pesquisadores. Todos os professores efetivos trabalham sob regime de dedicação exclusiva à instituição, o que auxilia na sua disponibilidade para qualificação, preparo de aulas, pesquisa, elaboração e experimentação de abordagens pedagógicas diferenciadas. Além disso, os docentes atuam como formadores de professores ao receberem, constantemente durante o ano letivo, estagiários para supervisão e orientação das observações e participações desses futuros professores na elaboração e no desenvolvimento de práticas significativas e de qualidade.

Outro aspecto que diferencia a Escola é que o ingresso dos alunos acontece por meio de um sorteio. Essa metodologia de ingresso é considerada pela instituição como a forma mais democrática de admissão dos estudantes, sobretudo porque evita, desse modo, o possível favorecimento de quaisquer grupos sociais nesse processo. Devido a esse mecanismo de admissão, há uma forte tendência de que as turmas de todos os ciclos sejam muito heterogêneas no que diz respeito às dificuldades e limitações dos estudantes, ao padrão sócio econômico e às diferentes culturas que circulam entre os grupos de alunos e aos lugares de onde vêm.

Sobre esses lugares, vale destacar que os alunos da Escola, diferentemente de outras, não são todos moradores de bairros adjacentes à sua localização. Costumam ser provenientes de diversos bairros e regiões próximas à cidade na qual localiza-se. Os dois professores que acompanhei relataram, durante conversas anteriores e durante as observações das aulas, que essa heterogeneidade torna o ensino ainda mais desafiador e interessante. O professor do 9º ano ressaltou, inclusive, que essa era uma das principais particularidades da Escola que muito o motivava para o desenvolvimento do seu trabalho nela.

Por se tratar de uma escola-laboratório da formação de professores, a instituição oferece além dos ambientes e dinâmicas para a realização dos estágios supervisionados na Educação Básica das Licenciaturas da Universidade, programas de formação docente e profissional, como programas de monitoria e de imersão docente. A Escola ainda recebe alunos participantes do PIBID da Universidade.

O Ensino Fundamental na Escola acontece em horário integral. No 3º ciclo, as aulas acontecem em três blocos de horários no período da manhã – 7h30min às 8h50min; de

9h10min às 10h30min; e de 10h50min às 12h10min – e, na parte da tarde, acontece uma aula no bloco de 13h10min às 14h30min.

Além das disciplinas regulares, a Escola oferta semestralmente, como uma das suas atividades curriculares, disciplinas que se configuram como componentes curriculares obrigatórios pertencentes à parte diversificada do currículo, em que os estudantes participam de oficinas variadas (práticas corporais, robótica, teatro, astronomia, redes sociais, animação, desafios matemáticos, etc.). Durante três dias da semana é reservado o horário de uma hora/aula para a realização dessas disciplinas.

O corpo docente da instituição é organizado por núcleos de ensino. A sala na qual os professores da área de Matemática trabalham enquanto não estão em aulas contém armários, computadores, mesas e cadeiras para o uso tanto dos professores quanto das outras pessoas que frequentam a Escola para a realização de atividades vinculadas a essa área, como estagiários do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade e pesquisadores. Notei que os estagiários, por exemplo, frequentam a sala para fazerem as suas reuniões com os professores que os supervisionam e os orientam, para prepararem materiais didáticos para as aulas, fazerem planejamentos, etc. Nessa sala também ficam guardados livros e materiais didáticos diversos, como representações de figuras geométricas em acrílico e em material emborrachado, instrumentos de desenho geométrico, embalagens, jogos pedagógicos, entre outros. Alguns dos materiais foram confeccionados pelos professores juntamente com os seus estagiários e/ou com os próprios estudantes da Escola durante a realização de atividades nas aulas.

O livro didático que foi adotado oficialmente pela escola para o triênio 2017/2019 é o livro "Projeto Araribá: Matemática", organizado pela Editora Moderna, 4ª edição, 2014. Entretanto, apesar de o livro "Matemática: Imenes & Lellis", da Editora Moderna, 2ª edição, 2012 não fazer parte do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2017 e, por consequência disso, não ter sido considerado para ser adotado pela Escola, os dois professores participantes desta pesquisa disseram, em conversa realizada anteriormente à minha entrada no campo, que preferiam utilizá-lo em suas aulas a utilizar o livro didático adotado oficialmente. No ano de 2018, a Escola possuía muitas unidades do livro "Matemática: Imenes & Lellis" e os professores que desejassem usá-lo em suas aulas podiam emprestar exemplares aos seus alunos.

3.4 Sobre os docentes participantes

Conforme já mencionado, escolhi, primeiramente, os anos escolares para a realização da pesquisa. A partir dessa escolha, foram escolhidos os sujeitos participantes. Havia um único professor de Matemática para as duas turmas de 7º ano do ano letivo de 2018 e o professor do 9º ano foi escolhido tendo como critério o fato de que os horários das aulas de Matemática das turmas de 7º e 9º anos não se sobrepusessem.

As informações que apresento sobre os Professores[15] do 7º e do 9º ano, respectivamente, foram organizadas após uma consulta ao currículo *lattes* de cada um deles e também a partir da entrevista que tivemos quando do término das observações.

Os dois Licenciandos que participaram da pesquisa ministraram algumas das aulas de geometria que acompanhei. Portanto, embora eu não tenha planejado, durante a elaboração do projeto desta tese, acompanhar práticas de ensino de geometria de futuros professores de Matemática, os Licenciandos passaram a ser considerados como sujeitos desta investigação a partir da minha entrada no campo. As informações que apresento sobre eles foram obtidas por meio da entrevista individual que me concederam.

Os dois Professores, no momento das observações, eram docentes efetivos da Escola, sendo que o Professor do 7º ano possuía mais tempo de experiência com a Educação Básica do que o Professor do 9º ano. Considero relevante dizer que eu não os conhecia antes de ingressar no doutorado. Por isso, pondero que a minha relação com os dois Professores, até o momento da entrada no campo, era muito recente.

A partir desse ponto, apresentarei os sujeitos da pesquisa e referir-me-ei ao Professor do 7º ano como Benjamin[16] e ao Professor do 9º ano como Antônio[17]. A Licencianda e o Licenciando que ministraram algumas aulas para o 7º ano também serão apresentados nas subseções que se seguem e serão designados pelo pseudônimos Hipátia[18] e Hilbert[19], respectivamente.

---

[15] A partir desse ponto do texto, ao me referir especificamente a cada sujeito da pesquisa sem citar seus nomes fictícios, usarei a palavra Professor, em letra inicial maiúscula, para designar os docentes oficiais da Escola, e a palavra Licenciando(a), também em letra inicial maiúscula, para me referir aos dois alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade que ministraram aulas no 7º ano. Durante a descrição das aulas do Professor do 7º ano, ao me referir ao trio composto por ele e pelos Licenciandos, usarei a palavra Docentes, com letra inicial maiúscula. Quando fizer referência aos professores de Matemática em geral, principalmente ao apontar os conhecimentos que identificarmos como conhecimentos geométricos para o ensino, usarei a palavra professor(es), em letra inicial minúscula.

[16] Nome fictício escolhido pelo professor do 7º ano.

[17] Nome fictício escolhido pelo professor do 9º ano.

[18] Nome fictício escolhido pela pesquisadora

[19] Nome fictício escolhido pela pesquisadora.

3.4.1 O professor Benjamin

Benjamin é graduado em Matemática por uma instituição privada de ensino superior e fez cursos de Especialização em diversas áreas da Educação. É Mestre e Doutor em Educação, na linha de pesquisa em Educação Matemática, pela mesma universidade federal. Trabalha com ensino de Matemática no Ensino Fundamental, desde o ano de 2002, tendo atuado, antes da sua efetivação na Escola, em escolas estaduais, municipais, particulares e como docente em uma IES da rede privada de ensino.

Sua história com a Escola pesquisada iniciou-se no ano de 2006, quando foi admitido como professor substituto, permanecendo nesse cargo por dois anos. Em 2011, foi aprovado em concurso público como professor efetivo e, desde então, leciona Matemática em turmas do Ensino Fundamental naquela Escola. Seu regime de trabalho é de 40 horas semanais em dedicação exclusiva. No ano de 2018, lecionou Matemática nas duas turmas de 7º ano totalizando uma carga horária de 12 horas semanais de trabalho em sala de aula. De acordo com Benjamin, ele nunca havia tido contato como professor dos alunos das duas turmas em que trabalhava naquele ano.

Segundo relato feito durante a nossa conversa após o período de observações, a sua admissão na Escola como professor efetivo foi como a “realização de sonho”. Ele contou que no ano de 2004, quando ainda era professor da Rede Estadual de ensino, esteve na Universidade para a realização de um curso. Não conhecia essa instituição e, nessa mesma ocasião, quando conheceu a Escola pesquisada, disse: “Eu vou dar aula aqui!”.

No ano de 2018, Benjamin desenvolvia, além das atividades de ensino, atividades de extensão, pesquisa, orientação/supervisão de estagiários e coordenação de órgãos administrativos na Escola, além de atuar como docente em um Programa de Mestrado Profissional.

Sobre a sua experiência com o ensino de Matemática na Educação Básica, Benjamin afirma que possui uma boa bagagem no que diz respeito aos diversos tipos de abordagens de ensino dessa área que já experienciou durante a sua trajetória como professor. Ele disse que sempre tenta desenvolver novas propostas metodológicas que renovem e melhorem o seu trabalho nesse segmento e que proporcionem mudanças para uma melhor aprendizagem dos estudantes, sempre que tais mudanças são necessárias. Relatou-me, ainda, que considera a Escola como uma instituição que sempre o possibilita desenvolver tais propostas e a buscar soluções para os problemas de aprendizagem que aparecem nas turmas em que leciona.

Com respeito às suas experiências com o ensino de geometria na Educação Básica, Benjamin relatou que, desde quando se formou na graduação em Matemática, considera que o ensino de geometria lhe proporciona oportunidades para desenvolver novas abordagens metodológicas em suas aulas. Além disso, ele acredita que as experiências das práticas de ensino de geometria que vivencia o levam a criar, a pensar e a repensar sobre a sua prática.

A exemplo do que costuma fazer em suas aulas, ele citou a articulação que faz entre a arte e a geometria, a qual nomeou como "artemetria", o uso que faz de diferentes materiais concretos para o trabalho com elementos da geometria não plana e da geometria plana, o uso que faz, frequentemente, de tecnologias como, por exemplo, *softwares* e aplicativos de geometria dinâmica e o uso dos livros do Projeto Fundão Matemática[20] e do livro "Matemática: Imenes & Lellis" como auxiliares no preparo de atividades.

Benjamin diz acreditar que as experiências que constrói em suas práticas de ensino de geometria, através das diferentes metodologias de que faz uso, permitem-lhe analisar o que deu certo, e o que não deu, e a tentar buscar outros elementos e outras atividades que possam melhorar e ampliar a aprendizagem dos alunos.

3.4.2 O professor Antônio

Antônio é licenciado em Matemática, Mestre e Doutor em Educação, tendo obtido todas essas titulações pela mesma universidade federal.

No ano de 2012, atuou como professor substituto na Escola pesquisada. No momento de realização desta pesquisa, Antônio era professor do quadro efetivo de professores dessa Escola e suas experiências com o ensino regular de Matemática na Educação Básica haviam sido com turmas de Ensino Fundamental dessa mesma instituição. Antes dessas experiências, Antônio atuou como bolsista de projetos de extensão, promovidos pela universidade onde se graduou junto à comunidade, relacionados ao ensino de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental.

Como professor na Escola, Antônio desenvolvia atividades de ensino de Matemática, pesquisas, extensão e orientações de estagiários. No ano de 2018, ele lecionou Matemática em

[20] Em síntese, o Projeto Fundão Matemática é um projeto vinculado à Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) que tem como objetivo principal a valorização do professor de Matemática. Por isso, busca, para esse profissional, atualização de metodologias para o ensino e aprofundamento do conhecimento matemático. O projeto possui uma equipe dividida em Grupos Temáticos e é composta por professores do Instituto de Matemática da UFRJ, professores da escola básica e licenciandos. O projeto publica livros sobre diversas temáticas do ensino básico de Matemática, dentre eles livros sobre e para o ensino de geometria nesse segmento. Para mais informações, consultar: http://www.matematica.projetofundao.ufrj.br/.

uma turma de 8º ano e em uma turma de 9º ano, totalizando 12 horas de trabalho em sala de aula. Seu regime de trabalho era de 40 horas semanais em dedicação exclusiva. Segundo o Professor, suas experiências docentes são mais vastas com turmas de 5º e 6º anos, do 2º ciclo. Antes de dar aula naquele 9º ano, em 2018, havia dado aulas nesse ano de escolaridade somente uma vez. Outra informação que me foi relatada por Antônio é que ele já havia dado aulas, em anos escolares anteriores, para aproximadamente um terço dos alunos da turma de 9º ano pesquisada. Mesmo aqueles estudantes que não haviam sido seus alunos, Antônio os conhecia de outras atividades extraclasses e das disciplinas referentes à parte diversificada do currículo.

Sobre a sua experiência como professor de Matemática na Escola Básica, Antônio relatou que se sentia muito feliz em lecionar no Ensino Fundamental, sobretudo pelas características dos estudantes desse segmento. Também relatou que suas experiências na Educação Básica nasceram nos projetos dos quais participou ainda na graduação, principalmente no projeto no qual iniciou a vida como professor atuante no ensino em tempo integral.

No tocante às suas experiências com o ensino de geometria, Antônio disse-me, em conversa anterior à minha entrada no campo de pesquisa, que não se considera como um professor com muita experiência nesse ensino, no que diz respeito, como ele exemplificou, ao uso de “metodologias inovadoras” para a prática. Assim, em sua entrevista, solicitei que ele me falasse um pouco mais sobre isso.

O Professor, então, explicou-me que durante a sua trajetória escolar, e também em sua formação inicial como professor de Matemática, aprendeu uma geometria desprovida de sentido “do porquê estava sendo ensinada” e, além disso, de uma maneira “sempre muito desconectada de qualquer outra coisa da Matemática”. Antônio disse que, apesar disso, na medida em que cursou outras disciplinas na graduação e que participou de discussões sobre a geometria na Educação Básica, compreendeu que existiam “maneiras de se ensinar a geometria na escola” que não respondiam àquele mesmo formato conforme foi o seu aprendizado. Não obstante, ele afirmou que, embora tenha ressignificado a sua visão sobre o tratamento da geometria no ensino básico, a partir dessas outras oportunidades de discussão, ele não havia aprendido como e em que medida poderia ensinar geometria para estudantes do Ensino Fundamental segundo essas outras formas.

Antônio também relatou que sempre que trabalha com o ensino de geometria sente que precisa estudar e refletir mais do que quando trabalha com outras áreas da Matemática. Ele atribuiu isso à falta de experiência com a geometria escolar em sua formação inicial como professor de Matemática. Perante a esse fato, sempre buscou auxílio através de diálogos com uma colega de trabalho que possui uma vasta experiência com o ensino e a pesquisa sobre a geometria na Educação Básica. Também apoiava-se em estudos dos livros de geometria do Projeto Fundão, material que, segundo Antônio, conheceu através da indicação de uma professora do curso de Licenciatura em Matemática no qual se graduou.

3.4.3 A licencianda Hipátia

No início do ano de 2018, período em que acompanhei as aulas no 7º ano, Hipátia cursava o sétimo semestre do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade que congrega a Escola pesquisada, sendo essa sua segunda graduação – a primeira foi na área de Engenharia. Ao final do ano de 2018, Hipátia graduou-se como professora de Matemática.

Hipátia cursou boa parte do Ensino Fundamental em seu país de origem e, ao final desse segmento de escolarização, mudou-se para o Brasil e terminou todos os seus estudos nesse país. Por isso, segundo ela, não teve nenhum contato com conteúdos relacionados à geometria. Ela salientou que, provavelmente, houve um "desencontro nos planejamentos dos dois países em que estudou" e, por conta disso, não pôde ter acesso a esse conteúdo em nenhum deles. Seu primeiro contato com a geometria na escola aconteceu somente no Ensino Médio. No entanto, Hipátia afirmou que, apesar de tardio, a partir do seu contato com a geometria sempre se deu bem com tal área. Ela considera que isso se deve ao fato de que a geometria "é favorecida pela intuição e pela imaginação".

Durante o seu processo de formação inicial como professora de Matemática, Hipátia cursou três disciplinas de geometria que contemplam assuntos da geometria plana e do desenho geométrico, da geometria espacial e da geometria na Educação Básica. Segundo ela, a sua melhor experiência, tanto no que diz respeito ao conteúdo em si, quanto no que diz respeito à variação nas metodologias para o ensino, foi com a disciplina relacionada à geometria espacial. Ela ressaltou o fato de que o professor que conduziu a disciplina atuava, geralmente, como mediador dos processos de produção e de mobilização de conhecimentos nas aulas. Hipátia finalizou as suas ponderações sobre o seu processo de educação geométrica na graduação dizendo que tal processo não lhe trouxe "aprimoramento" e que, por isso, sempre recorre a "outras fontes" quando precisa ensinar geometria.

Hipátia considera que tenha razoável experiência com o ensino de Matemática na Educação Básica. Durante a sua graduação, trabalhou em um projeto de extensão realizado com os alunos da Escola pesquisada que cursam do 3º ao 6º ano. Por meio do projeto, os estudantes são apresentados a problemas/desafios similares aos problemas propostos pela

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas com o objetivo de se "construir um banco de problemas, sistematizar as estratégias utilizadas pelas crianças para resolvê-los e contribuir para a formação inicial e continuada de professores". No momento da entrevista, Hipátia tinha aproximadamente dois anos de experiência com o ensino de Matemática em escolas estaduais, nas quais atuou como professora designada para substituir professores efetivos em suas licenças. Ela também trabalhava havia três anos ministrando aulas particulares de Matemática e em uma escola de acompanhamento (reforço escolar). Assim que se graduou, Hipátia começou a dar aulas de Matemática em uma escola estadual e continuou trabalhando no projeto de extensão supracitado.

3.4.4 O licenciando Hilbert

No primeiro semestre de 2018, Hilbert estava no sexto semestre da graduação em Licenciatura em Matemática na Universidade que congrega a Escola pesquisada. No ano de 2019, Hilbert formou-se nesse curso.

Segundo seu relato, quando cursou o Ensino Fundamental, Matemática e geometria eram disciplinas distintas. Ele disse se lembrar que estudou poucos assuntos de geometria nessa fase de escolaridade. Entre esses poucos temas, Hilbert citou medidas de ângulos (em graus, minutos e segundos) e cálculo de perímetro e áreas de figuras planas. No Ensino Médio, Hilbert disse ter tido contato apenas com temas relacionados à geometria analítica, mais especificamente, no 3º ano.

Sobre as suas experiências com a geometria durante os seus processos de formação inicial, Hilbert relatou que cursou disciplinas referentes aos fundamentos da geometria plana e ao desenho geométrico no mesmo semestre em que fez o estágio supervisionado com Benjamin (2018/1). Já as disciplinas relativas à geometria espacial e geometria na Educação Básica foram cursadas por ele no semestre seguinte ao estágio.

Ele ressaltou que tais disciplinas o levaram a perceber que "o professor de Matemática precisa ter domínio do conteúdo, pois podem surgir dúvidas de todo o tipo, e o professor deve estar preparado". Além disso, segundo a percepção de Hilbert, um professor de Matemática deve, durante o ensino de geometria na Educação Básica, "instigar os alunos a verem a geometria no nosso cotidiano e estar aberto ao uso de mídias digitais, que são muito importantes para o aprendizado".

Quando perguntei a Hilbert sobre as suas experiências com o ensino de Matemática na Educação Básica, ele disse que só havia lecionado Matemática em aulas particulares individuais e nas aulas de geometria que aconteceram durante o estágio supervisionado que realizou com Benjamin.

3.5 Sobre as turmas da Educação Básica

3.5.1 A turma do 7º ano

Foram observadas, gravadas em áudio, fotografadas e relatadas em um diário de campo de pesquisa 10 aulas de geometria na turma de 7º ano que aconteceram no período de 21-05-2018 a 20-06-2018. Os horários das aulas de Matemática nesta turma, durante o ano letivo de 2018, eram: segunda-feira de 10h50min às 12h10min; terça-feira de 13h10min às 14h30min e quarta-feira de 9h10min às 10h30min.

Benjamin e os Licenciandos iniciaram o trabalho com a geometria nessa turma com o estudo de figuras não planas e figuras planas com o objetivo, segundo eles, de revisitar e sistematizar, com os estudantes, conceitos, definições e propriedades relacionadas a estes assuntos. O Professor encerrou o trabalho com a geometria no primeiro semestre trabalhando com esses mesmos assuntos. Ele voltaria a trabalhar com assuntos de geometria no segundo semestre do ano de 2018. Todavia, ao final do período de observação supracitado, decidi que as aulas assistidas nessa turma já configuravam-se como um conjunto de situações de sala de aula suficiente para as análises da tese.

A turma era composta por 25 estudantes, sendo 14 meninas e 11 meninos, e as suas idades variavam entre 12 e 13 anos. Na primeira semana de observação nessa turma, percebi que o coletivo de alunos era, no geral, muito participativo nas aulas de geometria. Notei poucas conversas paralelas e fora do assunto abordado enquanto Benjamin e/ou os Licenciandos davam explicações. Houve muita participação dos estudantes nas discussões sobre os assuntos abordados e muito empenho na realização das diversas atividades propostas.

Percebi que os alunos do 7º ano apreciavam a presença dos Licenciandos nas aulas. Os alunos os tratavam como professores e sempre os solicitavam para auxiliá-los nas atividades, para fazer alguma observação, mostrar o que tinham feito e sempre faziam isso com bastante confiança nos estagiários.

Fui muito bem recebida pelos estudantes do 7º ano. Ao me apresentar, eles ficaram curiosos em saber sobre algumas coisas sobre a minha vida e sobre a minha pesquisa, demonstrando empolgação na medida em que eu ia respondendo às suas perguntas. Imediatamente após eu dizer a eles que a sua participação na pesquisa era voluntária, muitos começaram a levantar as mãos e a dizer: “Eu quero! Eu quero!”. Expliquei aos estudantes que a participação de cada um seria formalizada por um termo e dei mais detalhes sobre isso. Um aluno, que segundo Benjamin era muito curioso e participativo nas aulas, perguntou-me como eu faria a pesquisa e por que eu escolhi fazê-la. Expliquei a ele que eu estava ali para observar as aulas de geometria, fazer anotações sobre essas aulas em um caderno e gravá-las em áudio. Disse a ele que escolhi fazer a pesquisa porque gosto muito de geometria e porque com ela pretendo ajudar a formar professores para que eles trabalhem de maneira segura com esse conteúdo na escola. Ele demonstrou ter ficado satisfeito com a resposta e fez-me um sinal de aprovação com um largo sorriso no rosto.

A participação e o empenho dos alunos nas aulas de geometria responderam, segundo a minha observação, positivamente às abordagens pedagógicas pensadas e escolhidas por Benjamin, juntamente com os dois Licenciandos, para despertar a motivação dos alunos em recuperar e aprender conceitos básicos da geometria. Tais abordagens faziam parte do planejamento das aulas de geometria que Benjamin e os Licenciandos propuseram pautando-se, especialmente, sobre a preocupação do Professor com o fato de que essa turma parecia, no início do ano letivo, saber pouco sobre conteúdos considerados pelo Professor como básicos para o desenvolvimento do trabalho com a geometria no 7º ano.

Em todas as aulas de Matemática, assim que chegávamos – o Professor, os Licenciandos e eu – à sala de aula, os alunos organizavam-se em grupos de cinco estudantes. Percebendo que isso sempre acontecia e que os grupos eram sempre formados pelos mesmos estudantes, perguntei a Benjamin se aquela era uma estratégia sua para todas as aulas de Matemática, uma espécie de combinado entre ele e os estudantes, ou se apenas naquelas aulas de geometria o trabalho acontecia em grupos. Benjamin explicou-me que desenvolver o ensino com os alunos em grupos é uma opção sua para todas as aulas. Ele ainda disse que não acredita em aprendizado solitário, portanto fez a opção dos grupos.

Segundo Benjamin, a formação dos grupos deu-se da seguinte maneira: cada grupo possuía pelo menos um aluno considerado como um estudante com bom desempenho em Matemática e pelo menos um aluno com mais dificuldades de aprendizagem, o que, segundo ele, poderia proporcionar trocas de ideias e momentos em que o auxílio entre os próprios alunos acontecesse. Cada grupo tinha um líder que ficava responsável por conversar com o Professor sobre o grupo, sobre as experiências, fazer críticas a esse tipo de trabalho, etc. O Professor relatou que, inicialmente, alguns alunos estranharam essa organização da aula, mas, à medida que o ano letivo transcorria, os grupos encontravam, eles próprios, maneiras de se organizar e de proceder com o trabalho de forma produtiva e interessante para todos.

Observei que o fato de os alunos trabalharem sempre em grupos nas aulas levava ao fato de que eles se auxiliavam o tempo todo. Emprestavam materiais para os desenhos geométricos, lápis de cor e folhas de papel A4, quando algum colega não os possuía, auxiliavam os colegas que não conseguiam fazer os traçados dos desenhos, explicavam sobre as figuras não planas que estavam manuseando. Portanto, o que observei foi que os alunos primeiramente tentavam buscar ajuda entre os colegas do próprio grupo, em um sentido de bastante cooperação entre os pares. Sempre passávamos pelos grupos para verificarmos como os estudantes estavam desenvolvendo as atividades propostas. Em algumas dessas passagens, os alunos aproveitavam para se certificar de que estavam desenvolvendo boas estratégias. Contudo, na maioria das vezes, as primeiras discussões sobre tais estratégias ocorriam entre os integrantes dos próprios grupos, antes de solicitarem a ajuda de Benjamin, dos Licenciandos ou a minha.

Outro combinado de Benjamin com a turma era o de que sempre que estivessem conversando muito e que o Professor desejasse que fizessem silêncio, ele pediria uma "salva de palmas" aos estudantes. Isso aconteceu em algumas aulas observadas e, como pude perceber, essa estratégia funcionava.

Acredito que sejam naturais algumas características que percebi nos estudantes dessa turma devido à sua faixa etária. Por exemplo, sempre que eram solicitados a realizar alguma atividade relacionada a desenhos e a colorirem tais desenhos, os estudantes demonstravam certa empolgação com o fato de usarem lápis de cor. Também percebi que os estudantes gostavam muito de mostrar essas atividades, quando já finalizadas, ao Professor, aos Licenciandos e a mim, sempre nos perguntando se seus desenhos estavam bonitos e comparando os desenhos entre os colegas.

Em todas as aulas observadas nesta turma houve a proposta de atividades com o uso de materiais pedagógicos, como objetos em acrílico e em borracha representativos de figuras não planas, *softwares* de geometria dinâmica e instrumentos de desenhos geométricos, como réguas, compassos e esquadros.

3.5.2 A turma do 9º ano

Foram observadas, gravadas em áudio, fotografadas e relatadas em um diário de campo de pesquisa 20 aulas de geometria na turma de 9º ano que aconteceram nos períodos de 08-03-2018 a 12-04-2018 e de 08-08-2018 a 22-08-2018. Os horários das aulas de Matemática nesta turma, durante o ano letivo de 2018, eram, no primeiro semestre: segunda-feira de 7h30min às 8h50min; terça-feira de 13h10min às 14h30min e quarta-feira de 7h30min às 8h50min.

Antônio iniciou o trabalho com o ensino de geometria ao final do mês de fevereiro com o assunto “semelhança (de figuras planas)”, Capítulo 1 do livro “Matemática: Imenes & Lellis”. No segundo semestre, Antônio iniciou o trabalho com o assunto “ângulos na circunferência”, uma seção do Capítulo 7 do mesmo livro. Além do livro citado, Antônio relatou a mim, em conversa não gravada e anterior à minha entrada na sala de aula, que também estava utilizando como material pedagógico de apoio para as aulas de geometria os livros de geometria para o Ensino Fundamental do Projeto Fundão. Segundo o Professor, esse material o auxiliava no preparo de listas de atividades investigativas complementares às atividades propostas no livro utilizado.

Antônio voltaria a trabalhar com geometria no 9º ano mais ao final do ano letivo de 2018, entretanto, considerei que o número de aulas assistidas já integrava suficientemente um conjunto de situações de sala de aula para serem analisadas.

A turma era composta por 20 estudantes, sendo 10 meninas e 10 meninos, e as suas idades variavam entre 14 e 16 anos. Fui muito bem recebida nessa turma desde o primeiro dia das observações. Antônio abriu um espaço em sua aula para que me apresentasse aos alunos, falasse um pouco sobre a pesquisa e sobre a participação dos alunos nela. Expliquei a respeito do Termo de Assentimento e sobre o Termo de Consentimento que eu lhes entregaria para levarem para as suas casas para que fossem lidos e assinados, caso concordassem, por eles e por seus pais/responsáveis, respectivamente. Quando coloquei-me à disposição para esclarecer alguma dúvida, ninguém se manifestou. Um momento que me marcou no primeiro dia de observações no 9º ano foi quando uma aluna, ao final da aula, fez a seguinte pergunta ao Professor: “Quando a gente vai sair de geometria? Eu odeio geometria!”. O Professor disse a ela, olhando para mim e sorrindo, que o trabalho com a geometria ainda se prolongaria por muito tempo.

Senti, no primeiro contato com essa turma, que a minha presença nas aulas era muito natural para os estudantes. Nas primeiras aulas em que estive presente, os alunos já me chamavam em suas mesas para auxiliá-los nas atividades com muita naturalidade e sem constrangimentos.

Antônio recebeu, no primeiro período de observação das aulas de geometria, dois estagiários, ambos, na época, alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade. Durante as aulas de geometria observadas, os estagiários participaram auxiliando Antônio no preparo de materiais pedagógicos, na organização da sala de aula e no atendimento aos alunos do 9º ano quando estes lhes solicitavam auxílio. Não houve a participação direta dos estagiários na ministração das aulas que acompanhei no 9º ano. Segundo o que Antônio me informou, as aulas dos estagiários aconteceriam durante o trabalho com assuntos relativos à álgebra.

Geralmente, a turma ficava dividida entre grupos de alunos que costumavam prestar atenção nas aulas de Antônio e em grupos de alunos que, embora não conversassem em voz alta, conversavam muito durante as explicações e, portanto, não prestavam muita atenção no que estava sendo discutido. Entre os alunos que prestavam atenção nas aulas, alguns faziam muitas perguntas e expunham as suas ideias sobre os assuntos estudados, principalmente quando Antônio estava corrigindo exercícios no quadro. Enquanto isso, aqueles alunos que pouco davam atenção à aula, praticamente não se manifestavam quanto ao conteúdo explorado.

Como os estudantes dessa turma cursavam o último ano do Ensino Fundamental, muitos faziam cursos preparatórios (cursinhos) para as provas de seleção de escolas federais de ensino médio, técnico e tecnológico. Em conversas com alguns alunos da turma, eu soube que eles frequentavam os cursinhos em horários imediatamente após o término das aulas na Escola. Observei, ainda, que durante as aulas os alunos faziam perguntas ao professor sobre questões que eram discutidas nesses cursinhos ou que estavam nas apostilas oriundas deles. Geralmente, tais questões eram referentes a assuntos que não pertenciam à geometria, como teoria de conjuntos, funções, etc. Por isso, Antônio sempre solicitava aos alunos que o procurassem depois do horário das aulas para conversarem sobre essas questões à parte da matéria que estava sendo estudada naquele momento.

Diferentemente da turma do 7º ano, os alunos do 9º ano sentavam-se individualmente durante as explicações do Professor. Apenas quando Antônio propunha tarefas para serem feitas, os alunos organizavam-se em duplas ou trios para fazê-las.

O trabalho com o livro didático "Matemática: Imenes & Lellis" nessa turma foi muito intenso durante as aulas observadas. Em todas as aulas havia textos para que os alunos pudessem ler e discutir e exercícios do livro a serem feitos ou corrigidos. Os alunos também eram solicitados a fazer muitos exercícios do livro como "Para Casa", além das listas de exercícios que recebiam do Professor. Durante o uso do livro nas aulas, os alunos, geralmente os mesmos, voluntariavam-se a fazer a leitura em voz alta dos enunciados dos exercícios e dos textos de Matemática que nele havia.

Nessa turma, o pedido de auxílio ao Professor, aos estagiários e a mim para a realização das tarefas foi muito mais frequente do que na turma do 7º ano. Os alunos pareciam preferir imediatamente nos chamar em suas mesas para pedir ajuda do que discutir, entre eles (já que estavam em duplas e trios), as estratégias para resolução dos exercícios. Ao notar isso, Antônio pediu que os estagiários e eu não déssemos muitas explicações aos alunos e que déssemos apenas dicas que os pudessem ajudar a seguir com as atividades.

Ao final do segundo período das observações, Antônio relatou que alguns alunos daquela turma corriam riscos de serem reprovados, não somente em Matemática como em outras disciplinas. Isso estava preocupando os professores da turma que, durante as suas reuniões, buscavam alternativas para auxiliar esses alunos a conseguirem superar as dificuldades que possuíam. Todavia, durante a entrevista após o período das observações, Antônio relatou que todos os alunos do 9º ano pesquisado foram aprovados e se formaram no Ensino Fundamental. A cerimônia de formatura do 9º ano aconteceu no início de mês de dezembro do ano de 2018 e Antônio foi o professor homenageado.

4 CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS PARA O ENSINO DE FIGURAS ESPACIAIS E PLANAS NO 7º ANO POR MEIO DA VISUALIZAÇÃO

Neste Capítulo, apresentamos, analisamos e discutimos alguns dados oriundos das observações das aulas ministradas pelo Professor Benjamin e pelos Licenciandos. A análise dos dados ocorreu de forma descritiva e interpretativa, sob a luz dos referenciais que escolhemos como amparo teórico, e os frutos dessa análise, ao serem discutidos, foram situados na literatura de pesquisa sobre questões específicas do ensino e aprendizagem de geometria na Educação Básica que pudemos consultar. É relevante sublinhar que a análise dos dados não intencionou primordialmente um julgamento das práticas de ensino que foram observadas. No entanto, não foi possível desvinculá-la de alguns apontamentos sobre as aulas.

Reiteramos, portanto, que o objetivo da análise foi identificar e problematizar conhecimentos matemáticos para o ensino, no que tange ao ensino de geometria no Ensino Fundamental, os quais entendemos que foram demandados das situações observadas. Logo, os saberes que apontamos nas análises podem ter sido ou não mobilizados pelos professores participantes da pesquisa. Para nós, nessa pesquisa, importou apenas o fato de que tais saberes afloraram das situações de sala de aula analisadas como conhecimentos relacionados aos diferentes tipos de questões nelas colocadas e, dessa maneira, como conhecimentos relevantes para a formação inicial de professores.

Foram observadas 10 aulas de geometria no 7º ano, de 1 hora e 20 minutos cada uma, no período de 21-05-2018 a 20-06-2018. As aulas que foram escolhidas para compor um conjunto de situações de sala de aula para serem analisadas aconteceram nos dias 22-05-2018, 06-06-2018, 11-06-2018, 12-06-2018 e 13-06-2018. A maioria das aulas de geometria que aconteceram no período das observações foi preparada por Hipátia e Hilbert, sob a supervisão de Benjamin, e ministrada pelos dois Licenciandos. Os próprios Licenciandos escolheram trabalhar com assuntos de geometria nas aulas que deveriam ministrar como parte do estágio supervisionado. Segundo eles, Benjamin apresentou-lhes os recursos pedagógicos de que costuma fazer uso durante as suas aulas – o livro didático “Matemática: Imenes & Lellis”, livros do Projeto Fundão, materiais concretos e aplicativos de geometria dinâmica – e permitiu que eles escolhessem quais recursos queriam utilizar e como gostariam de utilizá-los em suas abordagens.

No decurso de uma conversa não gravada, Benjamin relatou que o planejamento para a introdução ao estudo da geometria espacial e da geometria plana no 7º ano levou em consideração a sua preocupação em tentar recuperar, com os estudantes, alguns conceitos e definições importantes para tal estudo e que, por alguns motivos, não tiveram muito espaço de tratamento no ano escolar anterior. Nas 10 aulas observadas, Benjamin e os Licenciandos trabalharam com a visualização e o reconhecimento das características e de algumas propriedades de poliedros e não poliedros, com a recuperação de alguns conceitos e definições da geometria plana, com o desenho geométrico de figuras planas e não planas e com noções de planificação de figuras não planas.

Ao final do período de observação, reli os registros que fiz no diário de campo das aulas de Benjamin, Hipátia e Hilbert. Além disso, consultei as gravações em áudio – das aulas de geometria que aconteceram no 7º ano, das conversas informais que tive com Benjamin, com os Licenciandos e com alguns alunos – que pareciam conter informações relevantes para responder ao objetivo da pesquisa. Após a realização da entrevista com Benjamin e com os Licenciandos, transcrevi e li os diálogos para algumas complementações das informações advindas das observações. Ao olhar para o material empírico, procurei, nas situações de sala de aula de geometria escolhidas para análise, subsídios para identificar demandas de conhecimentos matemáticos para o ensino, no que se refere ao ensino de geometria, emergentes dessas situações. Ou seja, conhecimentos que não foram necessariamente mobilizados pelos docentes, mas que foram demandados perante a algumas questões que foram levantadas nessas situações. A partir dessa identificação, situamos a discussão de alguns desses conhecimentos na literatura de pesquisa sobre questões relacionadas ao ensino e aprendizagem de geometria que pudemos consultar, a fim de ampliar a sua discussão como conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria no Ensino Fundamental relevantes para a formação inicial do professor.

As situações de sala de aula que foram analisadas constituem-se em uma sequência em que os docentes desenvolveram, não necessariamente nessa ordem, o ensino de poliedros e não poliedros, de planificações de objetos espaciais e dos conceitos de quadrado e de hexágono regular. Escolhemos analisar, a partir dessas situações, as demandas de conhecimentos que afloraram do trabalho com a "visualização" no ensino e aprendizagem dos assuntos citados.

4.1 A visualização no ensino e aprendizagem de geometria na Escola Básica

Um dos componentes do ensino e aprendizagem de geometria defendido por diversos autores da Psicologia e da Educação como um elemento importante para a formação do pensamento geométrico, tanto em níveis básicos como superiores de ensino, é a visualização. As orientações dos documentos oficiais para a composição de currículos da Educação Básica de diversos países a evidenciam como uma tendência para o ensino e aprendizagem da geometria no século XXI (MAMMANA, VILLANI, 1998). Em consonância, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), por meio da publicação dos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), considera que o entendimento conceitual dos estudantes é aprimorado sempre que imagens visuais são usadas. Além disso, faz recomendações sobre a utilização das representações de entes geométricos e da visualização, bi e tridimensional, como importante habilidade a ser trabalhada com estudantes de todos os níveis escolares, a fim de que eles se tornem experientes no uso dos diversos tipos de representações das formas geométricas.

Há certo consenso entre educadores matemáticos a respeito da importância da visualização na escolarização básica. Isso justifica o fato de que o seu emprego, nos processos de ensino e aprendizagem de geometria, seja objeto de atenção por parte da comunidade científica e, de maneira particular, constitua-se como um importante elemento a ser considerado para discussão na formação inicial de professores de Matemática.

O estudo de Krutetskii (1976) é um notável marco teórico sobre visualização matemática em que o pesquisador evidenciou-a como um elemento que pode guiar o raciocínio dos estudantes. Ao fazer um estudo sobre os diferentes tipos de mentes dos estudantes, Krutetskii (1976) salientou que existem estudantes cujas mentes são do tipo analíticas, pois apresentam uma tendência de pensamento e de uso de termos matemáticos lógico-verbais; estudantes cujas mentes podem ser entendidas como do tipo geométrico, uma vez que tendem a desenvolver o seu raciocínio matemático em termos visuais e pictóricos; e estudantes cujas mentes são do tipo harmônicas, visto que combinam as características das mentes analíticas e geométricas. Consideramos essa observação do autor como um saber necessário aos professores de Matemática.

Na literatura de pesquisa sobre a visualização no ensino e aprendizagem da Matemática subsequente ao estudo de Krutetskii (1976) encontram-se muitas definições e, principalmente, considerações sobre a importância da visualização como um apoio à intuição e à aprendizagem de conceitos matemáticos. Segundo Zimmermann e Cunningham (1991, p. 3), ao contrário do que preza a abordagem dos psicólogos cognitivos para o estudo da visualização, os educadores matemáticos entendem que as imagens mentais e as representações externas (ou seja, não mentais) precisam interagir para que a compreensão de conceitos e a resolução de problemas matemáticos aconteçam. Assim, para os autores, a visualização é o contexto em que essa interação se realiza.

Arcavi (2003, p. 217) oferece uma caracterização da visualização abordando-a tanto como um "substantivo" (a imagem visual), quanto como um verbo (o processo ou atividade). Além de considerar a ideia de visualização centralizada na díade imagem visual - processo, Arcavi (2003) parafraseia e mistura as definições de Zimmermann e Cunningham (1991, p. 3) e de Hershkowitz *et al*. (1989, p. 75) para postular que:

> [A] Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre desenhos, imagens, diagramas em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com o propósito de descrever e comunicar informações, de pensar e desenvolver ideias previamente desconhecidas e entendimentos avançados (tradução nossa[21]).

Gutiérrez (2006) caracteriza a visualização em Educação Matemática considerando, primeiramente, que o ensino de geometria elementar tem como uma das suas principais características o uso intensivo de objetos, figuras, diagramas e esquemas que, na concepção do autor, devem ser usados para auxiliar os alunos na compreensão dos conceitos, propriedades e relações daquilo que se estuda. Partindo disso, afirma Gutiérrez (2006, p. 38 *apud* GUTIÉRREZ, 1998, grifo do autor, tradução nossa[22]):

> (...) há que se entender a *visualização* como o conjunto de tipos de imagens, processos e habilidades necessários para que os estudantes de geometria possam produzir, analisar, transformar e comunicar informações visuais relativas a objetos reais, modelos e conceitos geométricos. A informação visual produzida (*imagens*) pode ser tanto física (figuras ou diagramas) como mental (*imagens mentais*). A análise de informação visual refere-se tanto a imagens produzidas pelo próprio estudante como às imagens recebidas do exterior (de estudantes, professor, textos, etc.). As transformações podem ser feitas entre uma imagem e informação verbal (oral ou escrita) ou de uma imagem em outra imagem. A comunicação pode ser gráfica, verbal ou mista.

[21] Do original: Visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings (ARCAVI, 2003, P. 217).

[22] Do original: (...) hay que entender la *visualización* como el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos. La información visual producida (*imágenes*) puede ser tanto física (figuras o diagramas) como mental (*imágenes mentales*). El análisis de información visual se refiere tanto a las imágenes producidas por el propio estudiante como las recibidas desde el exterior (de estudiantes, profesor, texto, etc.). Las transformaciones pueden hacerse entre una imagen e información verbal (oral o escrita) o de una imagen en otra. La comunicación puede ser gráfica, verbal o mixta (GUTIÉRREZ, 2006, p. 38 *apud* GUTIÉRREZ, 1998).

Gutiérrez (1996) considera uma imagem mental como uma representação mental de um conceito ou propriedade matemática que contém informações baseadas em elementos pictóricos, gráficos ou diagramáticos. Visualização, ou pensamento visual, para ele, é o tipo de raciocínio baseado no uso de imagens mentais. Gutiérrez (1996) ainda analisa outras definições propostas por diferentes autores da área. Um desses autores é Yakimanskaya (1991), que postula que uma imagem espacial é criada a partir da cognição sensorial das relações espaciais, e pode ser expressa em uma variedade de formas verbais ou gráficas, incluindo diagramas, figuras, desenhos, esboços, etc., numa interação entre imagens espaciais e representações externas. Além disso, as imagens espaciais devem ser dinâmicas, flexíveis e operacionais. A autora descreve o "pensamento espacial" como uma forma de atividade mental que torna possível ao indivíduo criar imagens espaciais e manipulá-las no curso da resolução de vários problemas práticos e teóricos, por meio de operações verbais e conceituais. Yakimanskaya (1991), então, considera que as imagens são as unidades operacionais básicas do pensamento espacial, e que objetos concretos que representam formas geométricas compõem o material que pode ser utilizado para se criar e manipular imagens espaciais.

Presmeg (1986) propõe uma definição de uma imagem visual declarando-a como um esquema mental que retrata informações visuais ou espaciais, com ou sem a necessidade da presença de um objeto ou de outra representação externa. Assim como na definição de Yakimanskaya (1991), a pesquisadora supracitada inclui dentro do conceito de imagem visual todas aquelas imagens que possuem um suporte gráfico diferente de uma imagem mental. Seguindo os entendimentos de Krutetskii (1976), Presmeg (1986) postula que a geração de entendimentos conceituais e a resolução de problemas matemáticos são atividades que envolvem lógica e raciocínio, e um indivíduo pode considerar, ou não, a presença de imagens visuais como parte essencial do trabalho sobre tais atividades.

Após observar alunos trabalhando na resolução de problemas matemáticos, Presmeg (1986) observou e elucidou os seus tipos de dificuldades ao se envolverem na resolução de problemas matemáticos com uso do pensamento visual. De acordo com a autora, é possível que a concretude de uma imagem ou diagrama possa levar o estudante a prestar atenção em detalhes irrelevantes ou em dados falsos sobre ela/ele. Outra dificuldade com o uso da visualização está relacionada ao fato de que uma imagem padrão (ou prototípica) pode induzir um pensamento rígido sobre os conceitos relacionados a ela, o que impede o reconhecimento desses mesmos conceitos quando associados a outras imagens não padronizadas representativas de um mesmo objeto. Ainda, uma imagem inapropriada pode ser levada em conta pelo estudante durante a resolução de problemas, evitando, assim, a abertura de vias de pensamento mais frutíferas sobre a imagem e o conceito estudados.

Cifuentes (2003) estabelece uma relação entre a visualização e a intuição. Segundo ele, a visualização é uma forma de experiência que constrói significados e atribui sentidos aos apelos intuitivos. Brunet *et al.* (2009) reforçam que existe uma ligação íntima entre intuição e visualização, quando postulam que indivíduos possuem intuição por conceberem representações mentais de objetos aos quais se associa um determinado conceito. Flores (2011) e Costa (2000) apresentam a visualização e a intuição como processos do desenvolvimento do pensamento visual, no qual uma depende ou se relaciona com a outra. Para Costa (2000, p. 176), "A visualização é geralmente considerada útil para apoiar a intuição e a formação de conceitos na aprendizagem da matemática".

Gonzato, Gondino e Contreras (2010) concebem a visualização de objetos tridimensionais em relação próxima com o raciocínio espacial. Os autores enfatizam a ideia de que visualizar um objeto espacial não envolve apenas a habilidade de vê-lo, no sentido fisiológico, mas a habilidade de reflexão sobre tal objeto em que se preze as suas possíveis representações, as relações entre seus elementos, sua estrutura e características. Para esses autores, visualizar também envolve a habilidade de se examinar as possíveis transformações do objeto em foco. A nosso ver, Yilmaz e Argun (2018) complementam essa defesa ao afirmarem que a visualização é um processo complexo de análise de transformações, construções, imagens mentais e representações, além de auxiliar no estabelecimento de conexões entre ideias matemáticas que não são previamente conhecidas e entendimentos que gradualmente se desenvolvem.

De maneira complementar ao que se entende por visualização no ensino e aprendizagem de geometria na Escola Básica e para a formação docente, destacam-se as pontuações de Fischbein (1993), o qual diz que a geometria, em especial, lida com entidades mentais que possuem, simultaneamente, características conceituais e figurais. Ou seja, na perspectiva do autor, as entidades mentais, também designadas por ele como entes geométricos, refletem tanto propriedades espaciais (forma, posição, tamanho), quanto qualidades conceituais (idealidade, abstração, generalidade). Tais entes possuem, portanto, duas componentes: uma figural e uma conceitual.

Em uma teorização sobre o que denomina por conceito figural, o autor explica, inicialmente, que um ente geométrico pode ser descrito por suas propriedades conceituais, mas, como também são imagens, apenas a descrição conceitual não é suficiente. Por exemplo, quando se raciocina em termos de compor, decompor e mover entes geométricos, isso refere-se a imagens e não somente a conceitos, uma vez que estes entes geométricos são regulados por uma natureza conceitual, mas que também possuem uma natureza figural intrínseca. O conceito (ou componente) figural é, portanto, "(...) o limite ideal de um processo de fusão e integração entre a lógica e as facetas figurais" (FISCHBEIN, 1993, p. 150, tradução nossa[23]). Em outras palavras, o conceito figural é de natureza visual (tamanho, forma, posição) e expressa-se por imagens direta ou indiretamente reguladas por conceitos.

A componente conceitual, segundo Fischbein (1993), expressa, em maior ou menor grau de formalismo, através da linguagem escrita ou falada, as definições e propriedades associadas a certa classe de entes geométricos.

Na concepção de Fischbein (1993), faz parte da natureza da geometria compreender as relações que existem entre os entes geométricos por meio de uma simbiose das suas componentes figural e conceitual. Como a componente figural está relacionada à imagem mental associada pelo aluno ao conceito, o autor preconiza que a harmonia entre essas duas componentes (figural e conceitual) é o que determina a noção adequada sobre o ente geométrico e o que caracteriza o raciocínio geométrico. Este, segundo Mariotti (1995), portanto, "(...) pode ser interpretado em termos de um processo dialético entre os aspectos conceitual e figural" de entes geométricos (p. 104, tradução nossa[24]).

Gravina (2001), citando Mariotti (1994), relata as percepções dessa autora sobre situações didáticas que firmam-se na construção de uma simbiose entre as componentes conceitual e figural de entes geométricos. Mariotti (1994), após a realização de pesquisas em que estudantes de várias faixas etárias foram solicitados a resolver algum tipo de problema em geometria, destaca, segundo Gravina (2001), que tais tipos de situações eram caracterizadas por discussões coletivas em que, inicialmente, os estudantes apresentavam, geralmente de forma espontânea, os conceitos, classificações e ideias que formularam ou que aprenderam sobre os entes geométricos. A partir disso, o professor engendra discussões que levam tais conceitos, classificações e ideias dos alunos, outrora rígidos a modificação, a um patamar de sistematização própria do conhecimento.

Após verificar uma pequena parte da literatura, convergimos para um entendimento de que a visualização em geometria pode ser considerada como um processo que gera um produto da reflexão, do uso, da interpretação e da criação de imagens em nossas mentes, usando, por exemplo, papel, materiais concretos e/ou ferramentas tecnológicas como auxílio

[23] (...) ideal limit of a process of fusion and integration between the logical and the figural facets.
[24] Do original: (…) can be interpreted in terms of a dialectical process between the figural and the conceptual aspects (…).

nesse processo. A visualização aparece no desenvolvimento do pensamento geométrico como um elemento importante para a descoberta e entendimento de novas relações entre entes geométricos, bem como, para dar significado a conceitos e às relações existentes entre eles, e como uma oportunidade de diminuição da complexidade do seu entendimento pelos estudantes. Yilmaz e Argun confirmam para nós que (2018, p. 55):

> Dadas as importantes dificuldades que os estudantes encontram na coordenação de conceitos, o uso de visualizações apropriadas será especialmente benéfico para preencher as lacunas nos processos. Além disso, como imagens concretas e dinâmicas são as imagens mais usadas, o suporte visual para essas imagens trará efeitos positivos no desenvolvimento do processo de abstração (tradução nossa[25]).

Em resumo, pesquisas baseadas em experiências com ênfase em práticas de sala de aula e nos entendimentos que se podem desenvolver a partir delas avaliam a visualização e sua natureza, apresentando-a como uma questão central na Educação Matemática. Por mais relevantes e esclarecedoras que sejam tais pesquisas, seus resultados não devem significar que a visualização seja, nas palavras de Arcavi (2003, p. 238, tradução nossa[26]), "(...) uma panaceia para os problemas da Educação Matemática". No entanto, sua compreensão poderá servir ao avanço do campo, sobretudo no que tange ao ensino e aprendizagem de propriedades, conceitos e relações presentes na construção do conhecimento geométrico dos estudantes e dos conhecimentos necessários aos professores para o ensino de geometria na Escola Básica (PRESMEG, 1986; ZIMMERMANN, CUNNINGHAM, 1991; MARIOTTI, 1995; ARCAVI, 2003).

As pontuações da literatura de pesquisa destacadas acima indicam o papel do professor na mediação, utilizando a visualização, entre o conhecimento geométrico a ser construído com e pelo aluno e o desenvolvimento do raciocínio geométrico do estudante. A condução dessa mediação, nos processos de ensino de geometria, demandam conhecimentos matemáticos complexos que são específicos para o ensino. Na sequência deste Capítulo, apresentamos[27] e discutimos sobre as demandas de conhecimentos que afloraram perante a

---

[25] Given the important difficulties that students encounter in coordinating concepts, the use of appropriate visualizations will be especially beneficial in filling the gaps in the processes. Moreover, because concrete and dynamic images are the most commonly used images, visual support for these images will bring forth positive effects on the development of the abstraction process (YILMAZ, ARGUN, 2018, p. 55).

[26] Do original: (...) a panacea for the problems of mathematics education (ARCAVI, 2003, p. 238).

[27] As seções deste capítulo em que fazemos uma apresentação das aulas analisadas estão escritas em primeira pessoa do plural. Todavia, destacamos que, em alguns momentos da escrita, quando os relatos dizem respeito às observações propriamente realizadas pela autora da tese no campo de pesquisa, as frases aparecem na primeira pessoa do singular.

algumas questões que emergiram em situações de sala de aula que privilegiaram a visualização.

4.2 Poliedros, não poliedros, bases de figuras espaciais e planificações: as aulas dos dias 22 de maio e 11, 12 e 13 de junho do ano de 2018

4.2.1 A aula do dia 22 de maio de 2018

Antes de adentrarmos nos relatos da aula do dia 22 de maio, é conveniente fazermos uma síntese do que aconteceu na aula do dia 21, já que este foi o primeiro dia de aula em que Benjamin, Hipátia e Hilbert trabalharam com geometria no 7º ano, e tendo em vista que em alguns excertos dessa aula encontram-se diálogos significativos.

Os objetivos dessa primeira aula, segundo os relatos e planejamentos dos Docentes, foram, em síntese: apresentar brevemente aos estudantes a geometria de um ponto de vista da sua história, apresentar aos alunos um panorama do trabalho com a geometria previsto para as aulas que se seguiriam, e tentar justificar aos alunos o porquê de se trabalhar, naquele momento, com a geometria euclidiana e não com outras geometrias, ouvir as concepções que os alunos possuíam sobre figuras planas e não planas, fazer um diagnóstico dos conhecimentos dos alunos sobre tais tipos de figuras, com base nas suas ideias colocadas durante a aula e com base no resultado de um jogo *online* de perguntas e respostas. Benjamin e os Licenciandos decidiram fazer essas investigações nessa primeira aula devido ao fato de que os estudantes do 7º ano não tiveram muitas oportunidades de trabalho com a geometria no ano escolar anterior.

Chegamos juntos à sala de aula e os alunos da turma estavam organizados em cinco grupos de cinco estudantes cada. Enquanto os Licenciandos montavam um *datashow* para projeção de *slides*, Benjamin pediu silêncio aos alunos e apresentei-me a eles. Após esses momentos iniciais, os Licenciandos deram início às explicações e Benjamin sentou-se ao fundo da sala. No primeiro *slide* havia uma pergunta para os estudantes: “O que é a geometria?”. Após serem instigados por Hipátia, eles deram respostas como: “Tem a ver com o estudo de formas”; “Calcula medidas de objetos, tipo, um cubo”; “Tem envolvimento com medidas (...) Eu acho que você usa para medir várias coisas...” Após escutar o que os estudantes diziam, Hipátia acolheu as respostas dos alunos, dizendo a eles que muitas delas tinham a ver com o significado da palavra geometria. Em seguida, ela deu algumas explicações e concluiu com eles que a palavra geometria significa “Medida da Terra”. Além dessa conclusão, a Licencianda explicou aos alunos que a geometria é a “(...) parte da Matemática que vai estudar o espaço que nos rodeia e quais as formas que podem ocupar esse espaço”.

A partir desse momento, Hipátia quis saber dos alunos as formas existentes na sala de aula em que estavam. Os alunos responderam que ali havia objetos identificados como cubos – associando tal figura aos armários –, círculos – associando-o ao ventilador – e cilindros – associados pelos estudantes aos apontadores de lápis. Quando a Licencianda lhes perguntou sobre quais formas geométricas poderiam identificar em suas casas, os alunos citaram: copos, portas, janelas, camas, bola de futebol, geladeira e frutas. Nesse instante, uma aluna, Joana, questionou a Licencianda sobre uma afirmação que ouviu de um colega que estava sentado ao seu lado: “(...) o que o Fernando falou aqui, é que, tá, o estojo [de lápis], por exemplo, quando você vê de cima [segurando o estojo enquanto falava], ele é um retângulo e quando você vê ele dos lados ele é um paralelepípedo”. Hipátia pediu que Joana repetisse a pergunta, e Fernando complementou: “É ... Tipo, se você estivesse em um avião e visse, por exemplo, uma cama ...”.

Nesse instante, a Licencianda disse ter compreendido o que Fernando e Joana estavam dizendo e respondeu: “Ah, o que você quer dizer é que (...) dependendo da distância que você está do objeto, você tem uma impressão a respeito daquilo que você tá vendo. (...) Se ele estiver muito longe, eu só consigo enxergar um lado desse objeto. (...) E se eu estiver perto o suficiente, eu consigo enxergar que ele tem várias partes que compõem ele, né?”. Joana e Fernando acenaram com a cabeça demonstrando que Hipátia havia entendido o raciocínio que tiveram, mas a Licencianda preferiu não adentrar na discussão levantada pelos estudantes. De toda maneira, observamos que houve uma abertura dada aos estudantes para que pudessem expor as suas ideias. Percebemos, ainda, que Joana e Fernando, provavelmente, sabiam reconhecer um paralelepípedo e diferenciá-lo, pelo menos sob aspectos estritamente visuais das formas, de um retângulo.

Após mais alguns momentos de apresentações, Hipátia cedeu o lugar onde estava para Hilbert, para que ele prosseguisse com a aula. Ele disse aos alunos que iria lhes mostrar algumas fotografias e desenhos de lugares e objetos utilizados no dia a dia, de modo que eles pudessem dizer quais figuras geométricas eram possíveis de ser identificadas a partir da visualização das fotografias e dos desenhos. As Figuras 02 e 03 trazem dois exemplos de imagens que apareceram nos *slides*:

Figura 2: Slide para o 7º ano
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

Figura 3: Slide para o 7º ano
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

Após as imagens retratadas na Figura 02 terem aparecido, um aluno mencionou ter visto nelas “um cone e uma pirâmide de base redonda”. Hipátia explicou que estudariam se existem pirâmides de base redonda e Lucas disse: “Pirâmide de base redonda seria um cone, né, professora?”. Hipátia respondeu positivamente a Lucas. Ao virem a imagem do Museu do Louvre, alguns alunos disseram que podiam identificar figuras como “um triângulo plano” e “pirâmides”, e um aluno disse: “Ah! Agora eu tô vendo uma pirâmide de base quadrada”.

De acordo com essas últimas falas, notamos que alguns estudantes conseguiam identificar visualmente cones e pirâmides. Sobre pirâmides, especialmente, notamos que alguns alunos referiram-se a elas destacando a figura que é considerada como a sua base. Percebemos, então, que os alunos pareciam ter conhecimentos sobre elementos da geometria básica. Em situações que se seguirão descritas e analisadas neste Capítulo uma discussão sobre bases de figuras espaciais tomará um espaço significativo.

Após esses momentos da aula, houve a proposta de um jogo de perguntas relacionadas a diferentes assuntos da geometria euclidiana. Esse jogo estava disponível em uma plataforma de aprendizado baseada em jogos chamada *Kahoot!*[28]. Os alunos, em sua maioria, haviam

[28] O *Kahoot!* é um sistema de questionários on-line, de simples utilização e de promoção de competições, desenvolvido para estudantes. Sua utilização em aulas acontece, geralmente, com os professores fazendo

"baixado" nos seus celulares e *tablets* o aplicativo para *androids* dessa plataforma, pois Benjamin já lhes havia feito essa solicitação.

Benjamin e os Licenciandos auxiliaram os estudantes na conexão da internet e no acesso à interface e às regras do *Kahoot!*. Houve certos problemas com as conexões à internet e isso acarretou uma demora no início da atividade e o fato de que alguns estudantes não conseguiram acessar a sala de jogo. Assim, em todos os grupos, pelo menos um membro não jogou.

O jogo aplicado tratava-se de um *quiz* sobre alguns temas da geometria e teve como objetivo, segundo Benjamin e os Licenciandos, revelar, de uma maneira lúdica e que pudesse despertar o interesse dos estudantes, o que eles sabiam naquele momento sobre assuntos básicos da geometria euclidiana. As perguntas envolviam a visualização de figuras planas e espaciais, suas características, nomenclatura, conceitos relacionados a essas figuras e ficavam disponíveis na tela por mais ou menos 30 segundos. São exemplos de perguntas que foram propostas: "Qual desses mosaicos é composto apenas por quadriláteros?"; "Qual das seguintes figuras representa um hexágono?"; "Qual das figuras abaixo representa a planificação de um cubo?".

As pontuações no jogo aconteciam à medida que os alunos acertavam as respostas e de acordo com o tempo que gastavam para dar cada uma das respostas corretas, em relação ao tempo gasto pelos outros colegas. Ao final do jogo, Benjamin mostrou, pela projeção, quais foram os alunos que mais pontuaram. Logo em seguida, Hipátia encerrou a aula propondo aos estudantes uma atividade como "Para Casa", na qual eles deveriam descrever objetos do seu uso cotidiano (Quantos lados? É redondo? Tem partes retas? etc.) e relacioná-los às figuras geométricas que já estudaram na escola (cilindros, paralelepípedos, esferas, triângulos, etc.). Assim, a aula encerrou-se.

Segundo relato dos Licenciandos, pelo resultado do jogo e pelo que foi dito por alguns estudantes sobre as figuras que apareciam nos *slides* e sobre as formas geométricas que identificaram em objetos em suas casas, Benjamin e eles constataram que os alunos conseguiam identificar formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, mas não conseguiam fazer muitas afirmações sobre suas características (plana ou sólida, presença ou não de vértices, etc.).

---

perguntas de múltipla escolha sobre algum assunto para os estudantes. Estes, por sua vez, têm, geralmente, 30 segundos para clicar na resposta certa em seus laptops, tablets ou smartphones. Os estudantes pontuam a cada resposta correta, além de receberem pontos extras à medida em que respondem mais rapidamente do que os demais estudantes (https://kahoot.com/what-is-kahoot/, acesso em 05/07/2018). A plataforma e o aplicativo *Kahoot!* foram apresentados aos estagiários por Benjamin, pois o professor já o conhecia e fazia uso dele há algum tempo em suas aulas de Matemática.

Antes da aula do dia 22 de maio começar, participei de uma reunião entre Benjamin e os Licenciandos na Escola. Nessa reunião, Benjamin relembrou que os principais objetivos para a aula daquele dia eram que os alunos descrevessem os objetos geométricos que lhes seriam apresentados por meio de materiais concretos: poliedros e não poliedros em acrílico, polígonos e círculos em borracha; que os estudantes classificassem tais objetos segundo seus próprios critérios; e que compreendessem que objetos não planos têm uma ou duas de suas faces sobre dois planos distintos e paralelos, de maneira que as outras faces desses objetos estão fora desses dois planos. Podemos dizer, portanto, que os Docentes procuraram, em seus planejamentos, avançar aos poucos do conhecimento inicial dos estudantes para um conhecimento geométrico mais sistematizado. Ou seja, os Docentes intencionaram partir do conhecimento já existente dos alunos, da tarefa de relação desses conhecimentos com objetos do meio social dos alunos, para então avançar nas ideias geométricas mais sistematizadas.

Para a representação do plano, o Professor sugeriu aos Licenciandos, em orientações do estágio anteriores, que utilizassem uma placa de isopor coberta por um pano (Figura 04). Benjamin os orientou a referirem-se ao material apenas como "pano", e que ainda não dissessem a palavra plano, pois a conexão entre o material e o plano aconteceria à medida que as aulas de geometria avançassem.

Figura 4: Placa de isopor coberta com um pano (pano)
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

Ao chegarmos à sala de aula, os alunos organizaram-se segundo os grupos já preestabelecidos. Os Licenciandos colocaram sobre três mesas localizadas na parte frontal da sala os objetos em acrílico e em borracha para serem apresentados aos alunos, conforme retrata a figura 05 abaixo. Benjamin sentou-se em uma cadeira mais ao fundo da sala.

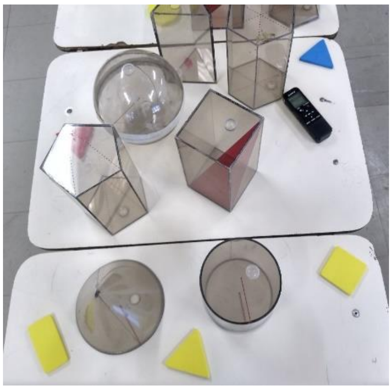


Figura 5: Objetos em acrílico
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

Hilbert passou pelos grupos carimbando os cadernos dos alunos que fizeram o “Para Casa” proposto na aula do dia 21 de maio. Após esse momento, Hipátia deu início à atividade proposta para essa aula e explicou aos estudantes que as figuras geométricas não possuem, todas, as mesmas características. Hilbert seguiu com a explicação da atividade dizendo que os estudantes fariam classificações de alguns objetos geométricos segundo as suas diferentes e as suas semelhantes características. Para isso, um representante de cada grupo deveria ir à frente da sala, um de cada vez, e escolher um objeto que estava sobre as mesas para descrevê-lo segundo o que viam e/ou o que sabiam a respeito dele.

Os objetos, como já mencionado, eram representações de poliedros e não poliedros em acrílico e representações de polígonos em borracha (cuja espessura era considerável) e não foram previamente nomeados para os alunos. Inicialmente, Hipátia e Hilbert deixaram em aberto o que deveria ser entendido, naquela aula, por características de figuras geométricas (Sua forma? Elementos que o compõem? Cores? Entre outros); e também não houve perguntas por parte dos estudantes sobre isso. Já a descrição das figuras pelos representantes dos grupos foi orientada por algumas perguntas, feitas por Hipátia, que remetiam à ideia do que poderiam ser algumas características dos objetos que os estudantes deveriam observar, como: “Essa figura tem pontas?”; “Ela rola fácil?”; “Ela rola sobre um pano?”; “Como são os lados dessa figura?”.

Um dos alunos que participaram dessa atividade escolheu a representação em acrílico de um tronco de pirâmide de base quadrada para analisar e descrever:

Hipátia: Então, vamos lá, Otávio. Como é que você descreve essa figura aqui?
Otávio: Essa figura é um quadrado aqui [referindo-se a uma das bases do tronco de pirâmide], mas, aqui, hum ... bem ... é ... Tem um quadrado grande pra base, que seria, e um quadradinho pra fechar. Tem umas ... Vértice, né? [Ficou apontando para os trapézios nas laterais do tronco].

Benjamin [sentado ao fundo da sala]: O que você quer mostrar? Como é que chama essa figura aí do lado?
Hipátia: Você quer a figura?
Otávio: É. Trapézio?
Benjamin: Isso.
Hipátia: Otávio, essa figura aí tem ponta?
Otávio: Tem.
Hipátia: Quantas pontas?
Otávio: Oito [contando com os dedos as pontas na figura].
Hipátia: É ... Ela tem parte redonda?
Otávio: Não.
Hipátia: (...) Você acha que se eu colocar ela no chão, ela rola fácil?
Otávio: Nem de perto!
Hipátia: Tem alguma outra característica que você quer observar?
Otávio [em tom de voz baixo]: É porque esse quadrado aqui [apontando para a base maior do tronco] é muito grande e o outro é pequenininho. Aí eu achei estranho. Por isso é que eu peguei essa figura, porque eu achei ela muito interessante.
Hipátia: Todo mundo ouviu o que ele falou?
Alunos [em coro]: Não.
Hipátia: Ele disse que achou estranha essa figura, porque ela tem um quadrado bem grande no fundo e um quadrado menor na parte de cima.
Joana: Você não acha que, por exemplo, a parte quadrada maior que tá embaixo, no caso aí, é a base, mas o quadrado pequeno que tá em cima também pode ser uma base?
Hipátia: Você acha que a figura, ela pode ter somente uma base?
Joana: Não! Eu tô falando que nessa figura tem mais de uma base. Só que, tá... Mas, quando vê assim, né, nesse ângulo (...) Essa figura, de onde que eu tô [a aluna estava sentada na parte mais central da sala de aula, de frente para o aluno que segurava o tronco de pirâmide], parece que ela tem a parte da frente, um trapézio. E... ela também pode ter mais de uma base. Embaixo tem um quadrado maior, que no caso é a base, mas do lado e o quadrado menor também pode ser uma base, uai!
Hipátia: Também pode ser uma base...
Joana: É só virar ela de cabeça pra baixo.
Hipátia: Mas se eu virar ela de cabeça pra baixo ela continua sendo a mesma figura [virando o tronco de cabeça para baixo]?
Joana e outros alunos [em coro]: Sim.
Melissa: Acho que não!
Hipátia: É a mesma, não? Eu mudei?
Joana: Não, porque a parte de cima, que tava de cabeça pra baixo, é menor que a parte que tá em cima agora...
Hipátia: Mas ela deixa de ser a figura, ou eu tô proporcionando a você visões diferentes da figura?
Melissa [em tom de voz baixo]: Deixa de ser.
Joana: Visões diferentes.
Hipátia: Mas ela é ainda a mesma figura?
Alunos [em tom de voz de incerteza]: É...?
Aluno: Não sei.
Hipátia: Virando de lado assim [colocando uma das faces do tronco sobre a mesa]. É a mesma figura, né? Eu não tirei nenhuma característica dela.
Melissa: Mas, quando você... Sabe quando você virou ela de cabeça para baixo? Quando você fez isso, ficou mais difícil de observar os lados e, deu pra ver em cima,

mas ficou difícil observar os lados. Quando você coloca ela normal, do jeito que tava antes [referindo-se à posição em que o tronco encontrava-se com a base maior apoiada no tampo da mesa], é mais fácil de ver que tem faces do lado.
(...)
Hipátia: É [risos]. Então, olha só! Na Matemática, a gente, na geometria, a gente tem um formato que é adequado pra gente trabalhar. Mas não significa que eu não posso colocar a figura de outras formas.
Joana: Essa figura tem várias bases, só que de diferentes formatos.
Hipátia: Tá. Mas o que é, o que eu vou considerar a base, digamos assim, como a base oficial dessa figura?
Joana: É... Ué, o quadrado maior!
Hipátia: O quadrado maior [mostrando à turma o tronco sobre uma das placas de isopor coberta pelo pano]. Daqui a pouquinho a gente vai ver porque isso, tá bom? Tá bom?
Benjamin: Alguém aí deu um nome pra essa figura. Quem foi? Acho que foi... Foi você, Luís?
Hipátia: Ele não deu um nome. Ele falou que se colocasse outra pirâmide em cima [da base menor do tronco], podia virar uma pirâmide.
Benjamin: Foi isso? É?
Lucas: Parece a metade de uma pirâmide....
Benjamin: A metade de uma pirâmide?
Alunos: [vários alunos falando ao mesmo tempo]
Lucas: É uma pirâmide cortada no meio! De base quadrada...
Hipátia: Vocês conseguem pensar num nome pra essa figura?
Lucas: Meia pirâmide!
Hipátia: Meia pirâmide? Será que ela tá exatamente no...
Joana: Meia pirâmide de base...
Joana e Melissa: Quadrada!
Benjamin: Mas quem falou que é metade, metade, metadinha? Põe aquela amarela em cima pra ver [pedindo à licencianda que colocasse uma pirâmide de base quadrada por cima da base menor do tronco de pirâmide]. Vai que dá metadinha!

A Licencianda pegou uma representação de uma pirâmide que estava dentro de uma caixa e a colocou sobre o tronco de pirâmide que estavam descrevendo (Figura 06):

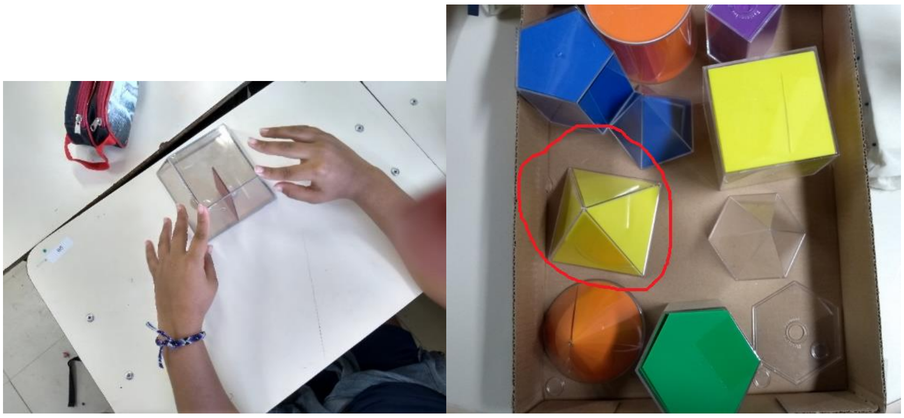


Figura 6: Representações do tronco de pirâmide e da pirâmide amarela, respectivamente
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

Os alunos ficaram olhando, calados, para a nova configuração formada pela junção da representação do tronco de pirâmide com a representação da pirâmide, e Benjamin prosseguiu com a explicação:

Benjamin: É assim, gente, óbvio que não está do mesmo tamanho, mas nada garante que é metade, né? (...) É como se fosse uma árvore.
Hipátia: Posso pensar em um outro nome?
Alguns alunos [em coro]: Pode.
Hilbert: Corta a árvore. Você tem uma árvore. Você corta ela, o que que fica preso no ....
Alguns alunos: O tronco.
Hilbert: Tronco. Então esse é o tronco de quê?
Melissa: De uma pirâmide!
Aluno: Tronco!
Joana [falando em tom de voz baixo]: Tronco de uma pirâmide de base quadrada.
Hilbert: Tronco de pirâmide. Se eu pegar um cone, por exemplo, eu cortar o cone também. Como é que chama isso?
Aluno: Cone... Não! Tronco de um cone!

Notamos que a aula, até esse momento, foi conduzida por perguntas direcionadas aos estudantes e pelas discussões que suscitaram das respostas e questionamentos colocados por eles. Primeiramente, os Docentes falaram com os estudantes sobre "características de figuras planas e não planas", não especificando para eles o que, naquela aula, considerariam como tais características. Num segundo momento, ficou subentendido, de acordo com as perguntas que foram feitas aos estudantes, que os Docentes consideraram e explicitaram aos alunos como principais características dos sólidos geométricos explorados a presença ou não nas suas representações concretas de "pontas" e de "partes arredondadas" que permitiam que o objeto rolasse.

Entendemos que, para os professores de Matemática, ter consciência dos momentos em que seja relevante fazer uma especificação para os estudantes do que se deseja entender como características de figuras geométricas configura-se como um conhecimento para o ensino de geometria. Isso porque os alunos podem considerar vários elementos como tais (cor, tamanho, posição no plano, etc.), os quais nem sempre influenciam no estudo que se pretende fazer. Além disso, a partir do momento em que os professores procuram explicar e explorar com os alunos o que será distinguido como uma característica de uma figura geométrica, eles podem apresentar-lhes um horizonte do entendimento de que figuras geométricas, ao contrário de suas representações, são entes abstratos dotados de características matemáticas, diferentes de algumas características que somente as suas representações concretas carregam (cores, tamanhos, etc.) (BALL, BASS, 2009).

Outra questão relacionada ao excerto acima pode ser destacada a partir da exploração do tronco de pirâmide, quando se levantou uma discussão sobre o que é a base de tal figura. Incialmente, alguns alunos envolveram-se na ideia de que a base do tronco explorado seria o "quadrado maior", ou seja, a "parte da figura" que fica apoiada em um plano de sustentação, conforme a posição prototípica (ou padrão) das representações de troncos de pirâmides que comumente aparecem em livros didáticos, e até mesmo conforme o posicionamento em que a representação de acrílico estava sobre a mesa (HERSHKOWITZ, 1990; PRESMEG, 1986). É válido ressaltar, inclusive, a valorização que alguns estudantes dão à configuração e posicionamento padrão de figuras espaciais. Quando Hipátia virou o tronco de pirâmide "de cabeça para baixo", Melissa, por exemplo, não concordou que a figura ainda era a mesma. Socialmente, também podemos considerar que a ideia de base tem a ver com suporte, o que dá reforço à ideia de a base ser a "face maior" da pirâmide. Portanto, a colocação dos alunos foi pertinente e natural.

Então, vale sublinhar que as representações de figuras em acrílico, as quais já estão prontas e possuem uma configuração rígida, nem sempre auxiliam em uma fuga da padronização das formas. O uso complementar de imagens mais dinâmicas, portanto, parece ser relevante para que os alunos possam experimentar e visualizar outras configurações e outros posicionamentos das formas enquanto aprendem sobre elas. Assim, temos indícios de que saber analisar as vantagens e desvantagens dos diversos tipos de representações de figuras geométricas e saber escolher representações que auxiliem os estudantes na evolução da aprendizagem configuram-se como conhecimentos matemáticos para o ensino, relacionados ao ensino de formas geométricas por meio de representações a aos estudantes (BALL, THAMES, PHELPS, 2008). O fato de que os professores precisam estar aptos a não reforçar a padronização das representações de figuras geométricas, em nossa interpretação, está incluído nesses conhecimentos.

Em um dado momento da discussão acima, percebemos que Joana saiu da ideia de que a base é a "parte da figura" que ficava apoiada no pano (ou na mesa, etc.) e afirmou que aquele tronco possuía "(...) várias bases, só que de diferentes formatos". No entanto, em outros momentos, a mesma estudante referiu-se ao tronco como "Tronco de pirâmide de base quadrada...". Assim como Joana, outros estudantes, desde a aula imediatamente anterior a essa, referiram-se a outras figuras, como pirâmides e cones, destacando as suas bases. Portanto, diante da discussão profícua que vinha acontecendo na aula, os alunos permaneciam em um trânsito de ideias a respeito da base, ora evocando uma concepção tácita que pareciam possuir sobre algumas figuras, ora evocando ideias que se apoiavam estritamente no aspecto visual (a base como a parte que fica apoiada sobre a mesa, por exemplo). Entendemos como um conhecimento para o ensino, relacionado ao conteúdo e aos estudantes e ao conteúdo e seu ensino, a habilidade que os professores de Matemática precisam ter em perceber, a partir das falas dos alunos, quais são as concepções que eles possuem sobre um assunto. É também relevante que os professores tenham uma consciência de quando é necessário pausar uma discussão para se fazer esclarecimentos sobre o que está sendo explorado (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

Ainda durante a discussão desencadeada pela escolha de Otávio pelo tronco de pirâmide, Benjamin buscou explicitar aos alunos, por meio de uma experiência visual com um tronco e uma pirâmide, ambos de bases quadradas, que a figura escolhida por Otávio não era necessariamente a "metade" de uma pirâmide, conforme sugeriram alguns alunos. Em nossa visão, o Professor se aproveitou das representações concretas para explorar a ideia dos alunos e, além disso, procurou despertar neles a necessidade de se pensar matematicamente sobre as representações, buscando certo rigor nas observações.

Em seguida, para se chegar à nomenclatura correta da figura, Benjamin e Hilbert recorreram a uma analogia entre ela e troncos de árvores. Essa analogia pode fornecer uma ideia intuitiva de troncos de pirâmides, uma vez que, assim como os troncos de árvores, tais formas são produzidas a partir de "cortes" (seções planas) nas figuras. No entanto, essa correspondência pode causar alguns equívocos, caso alguns pontos não sejam esclarecidos. Um deles, relativo à construção geométrica dessas figuras, é que os cortes nas pirâmides, para a obtenção de troncos, devem ser feitos paralelamente à sua base. Portanto, a nosso ver, a analogia proposta proporcionou mais uma exploração sobre a nomenclatura de troncos de figuras espaciais, do que uma exploração sobre o que são essas figuras.

Hipátia percebeu que a aula estava se estendendo e que alguns grupos ainda não haviam tido a oportunidade de que um de seus membros descrevesse algum dos objetos que estavam expostos. Então, um integrante de um desses grupos foi até a frente da sala e escolheu uma representação de um cone para descrever. O aluno explicou sobre o objeto dizendo que ele tinha um círculo em sua parte inferior e que rolava facilmente. Os Licenciandos, junto ao aluno, decidiram testar a sua afirmação e colocaram o objeto sobre a mesa, de maneira que a sua lateral ficasse apoiada no tampo. Após um leve toque da mão do Licenciando, o objeto rolou pela superfície:

Hipátia: Ela tá girando! Mas, nessa posição que ela tá [colocando o cone apoiado sobre a sua base na superfície da mesa] ...

Aluna: Não rola mais!
Hipátia: Não rola fácil.
Melissa: Mas tem que mudar de posição pra ela rolar!
Hipátia: Então, vamos mudar de posição. Vamos lá [colocando o cone com a sua lateral sobre a mesa]! Desse jeito ela rola fácil?
Alguns alunos: Sim.
Hipátia: Já que eu não tenho uma coisa firme pra segurar ela...
Aluno: Uma base reta.
(...)
Hipátia: Se eu colocar assim [apoiado sobre a sua base] como é que eu chamo?
Alunos [em coro]: Cone.
Hipátia: Já que ela não tem o que vocês chamaram de base, o que ela tem? Nessa parte aqui [apontando para o vértice do cone e, logo em seguida, colocando o vértice do cone sobre o pano].
Alguns alunos [falando ao mesmo tempo]: Uma ponta.
Hipátia: Uma ponta. Essa ponta... Por isso, Joana, que na Matemática tem que descrever o que eu tô considerando a base. Tá bom? Se eu colocar ela assim [com o vértice do cone apoiado sobre o pano], eu posso falar que essa é a base dela?
Alguns alunos: Não...
Lucas: Então... Então, você disse que tem que especificar a... a base, né (...)?
Hipátia: A gente define o que que eu tô considerando a base da figura.
Lucas: Então quando eu for escrever, eu tenho que escrever cone de base circular?
Hipátia: Não... Eu vou escolher o que eu chamo de base. Por exemplo, aqui, eu posso falar que a base dela é essa parte [referindo-se ao vértice do cone e segurando o cone com o vértice apoiado no pano]?
Alguns alunos [em coro]: Não.
Hipátia: Não. Então... [colocando o cone com a base apoiada no pano].
Aluno: Base é o que segura ela.
Melissa: Eu acho que é tipo o ponto de apoio.
Hipátia: O ponto de apoio. Mas, e aí...?

Vemos que, nesse momento, a ideia de base dos objetos espaciais explorados surgiu novamente. A Licencianda, dessa vez, encaminhou a discussão para o fato de que existem definições matemáticas que sustentarão a “escolha” ou a determinação da base de uma figura espacial, mas não prosseguiu com explicações sobre tais definições. De fato, a caracterização geométrica da figura que possuiu base (ou bases) é o que sustentará a determinação de tal elemento. Ao caracterizarmos os prismas, por exemplo, temos que as suas bases serão os dois polígonos paralelos e congruentes que têm seus vértices ligados um a um, produzindo-se, dessa maneira, paralelogramos no semiespaço entre os dois polígonos (DOLCE, 2013). Essa explicação pode ser analisada como da Matemática Acadêmica. No entanto, é relevante aos professores de Matemática conhecerem maneiras de explicar sobre as definições envolvidas na determinação das bases dos poliedros do ponto de vista da geometria escolar. Voltaremos a essa questão mais adiante.

Para aproveitar o que Melissa falou, considerando a base de uma figura espacial como o seu “ponto de apoio”, Hipátia pediu a Hilbert que pegasse a representação de um icosaedro. Ela colocou o objeto sobre o pano e utilizou-o para dar um contraexemplo para os estudantes a respeito da ideia deles de que a base era o ponto de apoio de uma figura tridimensional, explicando que o icosaedro possuía “vários pontos de apoio”, no entanto, não possuía uma “parte” especificada como sua base:

Hipátia: Se a gente falar que é ponto de apoio, então, será que aqui ela não tem um ponto de apoio [colocando o icosaedro apoiado sobre uma das suas faces triangulares sobre o pano]?
Alunos: [muitos falando ao mesmo tempo].
Joana: É que depende de cada figura que tem vários pontos de apoio.
Melissa: Eu acho que depende das figuras que tão nas faces, não?
Hipátia: Então, olha só. A gente não pode ficar somente na base que dá o apoio, que dá a sustentação. A gente tem que olhar uma outra condição pra falar assim: essa é a base da minha figura. Tá bom? Olha essa [um prisma de base triangular com uma das suas faces laterais apoiada no pano]! Ela poderia ficar assim e ela tá bem sustentada.
Joana: De lado também [referindo-se às faces laterais do prisma].
Hipátia: E aí, como é que eu vou escolher qual que é a base da minha figura?
Fernando: Seria a maior... Que dá sustentação pra ela.
Joana: Não, porque ali [no prisma de base triangular] é a menor e pode ser base.
Melissa: Sei lá! Igual você falou que, normalmente, na geometria, vocês usam, é... Essa base aí pra trabalhar. Então eu acho que deve ser a base mais fácil!
Hipátia: A base mais fácil?
Davi: Pra mim, é a critério da pessoa que... escolhe... que....
Hipátia: Será, Davi? Eu posso escolher essa... Essa aqui, por exemplo [o mesmo prisma de base triangular apontando uma das suas faces retangulares] ...
Davi: Vai ser a critério da pessoa.
Hipátia: Eu posso falar que essa é a minha base [apontando para uma das faces retangulares do prisma]?
Alguns alunos: Pode.
Hipátia: Poder, posso. Mas será que ela [a face escolhida] atende ao que a gente espera?
Alunos: [muitos falando ao mesmo tempo].
Hipátia: Tá. Então, vamos voltar aqui com o que o Fernando acabou de falar. E se fosse a esfera [colocando a esfera de acrílico sobre o pano]?
Alguns alunos [muitos falando coisas como]: Não tem base. Não tem um ponto de apoio. Não tem estrutura para fixar.
Fernando: Ter [base], tem! Mas ela fica apoiada de qualquer jeito.
Joana: Ela rola de qualquer jeito.
Davi: Não, ela não rola de qualquer jeito, ela tá parada...
Joana: Ela não tem base...
Alunos: [muitos falando ao mesmo tempo].
Hipátia: Olha só! Nesse ponto aqui, ela [a esfera] tem um ponto de...?
Fernando: Equilíbrio.
Hipátia: De apoio. Posso falar de base só porque tem um ponto de apoio?
Alguns alunos [indecisos]: Não...
Hipátia: Então, eu vou olhar qual característica que eu vou ter que observar pra falar que

aquela é a base da figura [os alunos não responderam]?

Nesse excerto, nota-se que Hipátia procurou sistematizar geometricamente uma ideia sobre o que é a base de uma maneira associada aos entendimentos dos estudantes. Os estudantes, provavelmente, usaram de suas ideias geradas pelo aspecto dos objetos em acrílico que manipulavam para tentar responder aos questionamentos. Chamamos a atenção para o fato de que Hipátia fez algumas perguntas aos alunos sobre quais eram as características das formas exploradas em que se devia apoiar para que se identificasse as suas bases. Um ponto que pode ser levantado quanto a isso, é a importância que Hipátia deu à caracterização das formas para a exploração da base como elemento de algumas figuras. Ao mesmo tempo, notamos que o seu questionamento, sobre as características das formas, ocorreu sem que tenha sido realizado, em algum momento dessa aula, discussões com os estudantes sobre uma caracterização, apropriada para o contexto e o ano escolar em questão, de (pelo menos) algumas das figuras que estavam representadas pelos objetos em acrílico.

No que se seguiu da aula, os entendimentos dos alunos continuaram a girar em torno de que a base de uma figura geométrica espacial era o seu "ponto de apoio". Percebendo isso, Hipátia procurou discutir a ideia da aluna usando um icosaedro como contraexemplo para a sua constatação. Segundo a observação dessa situação, inicialmente, os alunos ainda estavam confusos e inseguros com a refutação da ideia de ponto de apoio como base.

Apesar de Hipátia ter recorrido ao icosaedro como uma figura que tem "pontos de apoio", porém não possuiu bases, não foi explicado aos alunos, nessa aula e na aula anterior, que dentre as figuras que estudariam, somente prismas, pirâmides, cilindros e cones possuem bases e porque isso acontece. Ou seja, notamos que a argumentação de Hipátia poderia despertar mais conclusões sobre alguns entes geométricos que estavam sendo estudados caso tivesse havido essa explicação anterior. Ou se caso ela, primeiramente, aceitasse os argumentos dos alunos, válidos do ponto de vista das suas ideias intuitivas, apresentando explicações relacionadas à caracterização de algumas figuras, do ponto de vista da geometria escolar, posteriormente.

Mesmo diante do argumento de Hipátia, Joana ainda considerou que no icosaedro existiam "vários pontos de apoio", ou seja, várias bases. Pela definição sugerida pelos alunos, uma figura como o cone teria a sua base definida como a parte da figura que não o deixaria rolar livremente pelo plano, ou o seu ponto de apoio, conforme experimentaram com o cone de acrílico. Ou seja, a definição poderia funcionar. Por outro lado, ficaria inviável indicar as bases de um prisma, ou a base de uma pirâmide, e, para figuras como o icosaedro, em que não se fala em bases, qualquer face poderia sê-la.

A ideia de Hipátia de colocar a representação da esfera apoiada no pano e mostrar aos estudantes que ela fica "parada", e comparar isso ao ponto de apoio pareceu ter auxiliado os estudantes, momentaneamente, a entenderem de forma mais clara que o ponto de apoio não era uma compreensão adequada para a base. Ou seja, Hipátia encontrou na esfera um contraexemplo mais robusto do que o icosaedro para a ideia levantada pelos alunos. Ao mesmo tempo, também nos parece que o experimento com a esfera pode não ter convencido a maioria, já que a esfera permanecia parada, deixando ainda uma abertura para o entendimento de base como ponto de apoio. Além disso, o icosaedro pode ter permanecido na mente dos alunos como uma figura com "várias bases".

Diante dessas pontuações, percebe-se que a visualização, enquanto componente do ensino de geometria, necessita ser entendida como um processo que procura valorizar as ideias dos alunos e suas experimentações com os materiais concretos de forma a proporcionar também o desenvolvimento do raciocínio conceitual sobre as formas (FISCHBEIN, 1993).

É possível destacar dessa situação de sala de aula indícios de um afloramento de demandas relacionadas a conhecimentos do conteúdo sobre poliedros e do seu ensino e a conhecimentos sobre os estudantes (BALL, THAMES, PHELPS, 2008). Primeiramente, relacionados a um conhecimento de exemplos e contraexemplos de figuras espaciais que auxiliem os alunos a perceberem e a tentarem desconstruir suas internalizações equivocadas de conceitos. Em segundo lugar, conhecimentos a respeito da identificação nas falas dos estudantes de suas ideias inadequadas, do ponto de vista da geometria, e relativos à percepção que os docentes precisam ter dos momentos frutíferos para exploração e tratamento dessas ideias.

Hipátia chamou Davi, o representante do último grupo que ainda não havia feito a descrição de algum dos objetos expostos. Antes de Davi começar a falar sobre o prisma de base triangular que escolheu, um aluno perguntou à Licencianda se toda figura não plana possuía tronco. Hipátia respondeu ao aluno que em quase todas as figuras espaciais pode-se falar sobre troncos. Para exemplificar o que disse, ela pegou um prisma de base quadrada e explicou que, ao se fazer nele um corte paralelamente à sua outra base (mostrando ao aluno com a sua mão que o corte seria paralelo à base do prisma que estava apoiada em sua mão), a figura resultante seria o tronco daquele prisma.

Benjamin interveio, dizendo que o nome daquela figura resultante do corte no prisma não era tronco, pois, naquele caso específico, a figura resultante continuaria sendo um prisma de altura menor do que a altura do prisma original, diferentemente do que acontece com as pirâmides e com os cones. Joana disse logo em seguida: “Então, nem toda figura que cortar no meio chama tronco?” Hipátia confirmou que ao se cortar um prisma pela sua metade, a figura resultante do corte não seria um tronco, mas, dependendo da maneira como o corte acontecesse – transversalmente à base da figura, por exemplo – a figura resultante seria um tronco (mostrando com a sua mão uma possibilidade de corte transversal às bases daquele prisma). O Professor fez outra intervenção, dizendo que não tinha certeza de que no caso de um corte transversal a figura resultante seria um tronco ou apenas uma secção.

A dúvida expressa por Benjamin, sobre essas novas figuras serem caracterizadas ou não como troncos, é explicada em alguns livros da Matemática Acadêmica que consideram que cortes transversais (ou secções não paralelas) às bases de prismas triangulares e de cilindros, produzidos de maneira que não passem pelas bases dessas figuras, produzem novos sólidos que são nomeados, respectivamente, como troncos de prisma e troncos de cilindros (DOLCE, POMPEU, 2013).

Logo adiante, alguns alunos sugeriram que se fizesse um corte em um cubo e perguntaram o que seria a figura resultante. A Licencianda argumentou que, ao se cortar um cubo ao meio, dois paralelepípedos seriam obtidos. Joana, então, perguntou: “Se eu tenho uma figura, eu corto ela no meio e ela vira outra figura...? E como é que vocês dão nome para isso aqui? Tá cortando uma figura...?” Hipátia explicou que um corte “ao meio” em uma figura resultaria em outra figura que, talvez, tivesse as mesmas características da figura inicial. Já de um corte transversal, provavelmente iria resultar outra figura, cujas características não eram todas as mesmas da figura inicial.

Vale ressaltar que a fala de Joana, em que ela perguntou: “Se eu tenho uma figura, eu corto ela no meio e ela vira outra figura...?” reforça que alguns estudantes estavam associando troncos de pirâmides a uma ideia de “metade” da figura original. Essa ideia foi discutida no início da aula pelos Docentes, quando Benjamin sugeriu aos alunos que experimentassem por meio do material concreto que nem sempre os troncos de pirâmides são “pirâmides cortadas ao meio”, mas não foi retomada no momento da pergunta da aluna.

No que tange às dúvidas dos alunos Otávio e Joana sobre troncos de figuras espaciais, pode-se perceber que os Docentes, no momento da instrução, não conseguiram dar todas as respostas aos alunos. Diante disso, pode-se relacionar a essas dúvidas levantadas alguns conhecimentos para o ensino da geometria importantes para os professores quando ensinam sobre aquelas formas.

A respeito do estudo de troncos, sob a perspectiva da Matemática Acadêmica, notamos que eles são caracterizados como figuras resultantes do traçado de planos paralelos às bases de pirâmides e de cones, os quais dividem essas figuras em duas outras. São elas, respectivamente: uma outra pirâmide semelhante à pirâmide inicial e um tronco de mesma base que a pirâmide inicial; um outro cone semelhante ao primeiro e um tronco de mesma base que o cone tomado inicialmente. No caso da mobilização do conceito de troncos de pirâmides e cones no Ensino Fundamental, entendemos que aí está envolvido um conhecimento relacionado à formas compreensíveis aos estudantes de se caracterizar tais objetos que, além de deixarem claras as condições necessárias para a sua construção geométrica, lancem mão de estratégias e/ou materiais pedagógicos que auxiliem os alunos, por exemplo, na visualização da decomposição de pirâmides e cones em duas novas figuras.

Joana evidenciou-nos em sua fala "E como é que vocês dão nome para isso aqui? Tá cortando uma figura...?" que produzir cortes em figuras espaciais provavelmente não é uma transformação simples para as mentes dos estudantes do 7º ano, embora esse tipo de transformação estivesse ocupando um lugar de discussão na aula. Isso reforça para nós que o estudo sobre os troncos no Ensino Fundamental demanda dos professores um conhecimento associado ao conteúdo e seu ensino, sobre a escolha de recursos didáticos que permitam uma visualização e experimentações mais dinâmicas com esses entes geométricos (a visualização e experimentação dos cortes nas pirâmides, por exemplo).

As dúvidas dos alunos sobre os troncos foram consideradas pelos Docentes para discussão. Ressaltamos que o fato de haver uma representação de um tronco de pirâmide para os alunos explorarem pode ter contribuído para que diversas questões e ideias fossem colocadas pelos estudantes, sobre tal tipo de figura, o que talvez não tenha sido previsto pelos Docentes. A forma como a aula estava acontecendo – em que os alunos descreviam as representações das figuras por meio de visualizações relacionadas mais a noções intuitivas das formas – pode ter permitido que muitas dúvidas que afloraram tenham sido discutidas mais no que se refere ao desenvolvimento do conceito imagem das figuras estudadas e um pouco mais distante da chegada ao conceito definição de tais formas (MARIOTI, 1994 *apud* GRAVINA, 2001). No entanto, podemos considerar, ainda, que, como um estudo detalhado dos troncos não estava previsto para ser feito, a atividade e as discussões proporcionaram aos estudantes um contato com essas formas a título exploratório.

Uma aula planejada para que se abram pontos de vista diversos, pondo os estudantes em contato com objetos relacionados a formas geométricas, pode ir além do conteúdo programado. Portanto, inferimos que um conhecimento que se associa a essa situação de sala de aula diz respeito às habilidades dos professores em antecipar os tipos de dúvidas dos estudantes que podem surgir quando se trabalha com a manipulação e visualização de figuras geométricas em representações concretas. A antecipação das possíveis dúvidas pode auxiliar os professores no seu tratamento e no avanço do assunto estudado a partir da exploração do questionamento expresso pelo aluno (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

Hipátia solicitou à turma que voltasse a atenção para Davi, que estava em pé na frente da sala, para que ele pudesse descrever o prisma de base triangular que havia escolhido:

Hipátia: Davi, como você descreve essa figura?
Davi: É... Tá!
Hipátia: Tem pontas?
Davi: A base dela é essa daqui, né [apontando para uma das faces retangulares do prisma]?
Hipátia: Hum… É...?
Davi: Tá. A base dela é essa daqui [continuando a se referir a uma das faces retangulares do prisma como uma base]. Vamos supor.
Hipátia: Ok. Vamos supor.
Davi: Ela tem suporte, é..., praticamente, suporte igual daquelas cabanas de acampar [colocando o prisma apoiado sobre umas das faces retangulares sobre o pano].
Hipátia: Hum... Parece com aquela cabana de acampar. Que mais?
Davi: Aqui tem um retângulo [apontando para uma das faces que não estava sobre o pano].
Aluno: Três.
Davi: É. Três. Aqui tem dois triângulos. É... Tem as... as... as arestas.
Hipátia: O que é uma aresta, Davi?
Davi: São as... as linhas.
Joana: São as pontas.
Hipátia: São as linhas. Mas essas linhas fazem o quê?
Joana: Junta uma das outras?
Alunos: [muitos falando juntos].
Otávio: Se não vai ficar tudo caído, não vai não?
Joana: Vamos supor que eu tenho um retângulo nessa mão e aqui [na outra mão] também. Aí eu quero fazer uma figura. Pra isso eu tenho que ter aresta pra ligar, se não elas vão ficar separadas.
Hipátia: Então, a função da aresta seria o quê?
Fernando: Ligar as formas! Ligar os pedaços!
Hipátia: Ligar esses pedaços. Então, tá. Isso, a gente pode entender, quando eu falo de figuras espaciais, por exemplo, essa aqui é uma figura que eu vou chamar de figura plana [mostrando um triângulo de borracha]. Triângulo, eu posso falar de aresta?
Alguns alunos: Não.
Fernando: Não. Ele é só uma parte...
Hipátia: Ele é só uma parte. Então ele é...
Aluno: É uma face.
Hipátia: Como é que eu chamo essas bordas aqui do triângulo?
Aluno: De face? De arestas?
Alguns alunos: Arestas.
Davi: De vértice.
Hipátia: Acho que eu não tô especificando. Essa bordas aqui que eu tô falando

[contornando com o dedo o triângulo de borracha].
Joana: Lado?
Hipátia: Lados. Essa é uma diferença então que tem que ficar claro pra nós. Quando eu tô falando de figuras espaciais, não existe mais esse conceito de lado, a gente passa a falar de...?
Joana: Arestas.
Hipátia: Arestas. Que como a Joana e o Fernando falaram pra nós, ela serve pra unir essas duas partes, ou mais, que eu tô querendo formar a minha figura.

A concepção sobre bases de Davi parecia estar, ainda, associada à ideia de base de figuras espaciais como ponto de apoio. A ideia de Hipátia de aproveitar a fala do estudante sobre aresta e de perguntá-lo sobre o que achava que isso significava desencadeou falas de alguns estudantes que revelaram aos Licenciandos e a Benjamin a maneira como eles entendiam esses elementos. Para os alunos, as arestas são "linhas" que ligam as partes de uma figura espacial. A Licencianda, então, conceituou a aresta da mesma maneira que foi sugerida pelos alunos, utilizando-se de uma linguagem mais informal para isso, identificando as arestas como as linhas que unem "as partes" que formam as figuras tridimensionais: "Ligar esses pedaços"; "(...) ela serve para unir essas duas partes, ou mais, que eu tô querendo formar a minha figura".

Podemos conceituar uma aresta de um poliedro como um segmento de reta comum a duas faces da figura, ou ainda como os lados dos polígonos que formam as suas faces (DOLCE, 2013). Nos anos finais do Ensino Fundamental, é comum que os professores busquem formas de conceituar certos elementos das figuras geométricas a partir do entendimentos iniciais dos estudantes, assim como fez a Licencianda. Mas vale ressaltar a relevância para o ensino de que os professores também identifiquem momentos para se fazer algumas conexões entre tais entendimentos com a nomenclatura usual da geometria dos elementos que compõem as formas. Assim, entendemos como um saber relacionado ao uso da linguagem no ensino de geometria, a habilidade necessária aos professores de fazer associações e conexões do uso de termos mais informais - geralmente ditos pelos alunos durante a descrição das formas geométricas - para caracterizar objetos geométricos com o uso de termos próprios da geometria (TIROSH, TSAMIR, LEVENSON, 2011).

Em seguida ao diálogo acima, Benjamin levantou-se da cadeira onde estava sentado ao fundo da sala e disse:

Benjamin: Davi fez uma coisa aí que me intrigou, eu achei interessante. Ah... Ele montou a figura, bota a figura do jeito que você tinha colocado [Davi colocou o prisma de base triangular sobre o pano, com uma das faces retangulares sobre ele, de maneira

que a figura ficou parecendo uma cabana de acampar]. É interessante que aí ele chamou a base da figura aquilo que tá encostado no pano, no pano, né? Mas é... é engraçado que é... A base da figura, ela não necessariamente tem que tá nessa posição que a gente tá imaginando. Essa figura, desse jeito, continua tendo duas bases. (...) A parte que tava de base, você tá associando base a essa coisa de base que a gente tem no dia a dia, né, o que encosta, né? É interessante isso...
Davi: Eu acho que o que sustenta a gente, por exemplo, é...
Benjamin: É uma base [risos] [o professor foi à frente da sala]. Só que isso pode te causar complicação. Porque essa figura, ela já tem as bases pré definidas [pausa]. Olha só [segurando o prisma na posição em que Davi o havia colocado, Benjamin pegou os dois panos e colocou cada um deles encostado em cada uma das duas bases triangulares do poliedro]! Não importa a posição que ela esteja, ou vocês acham que importa?
Davi: Sei lá [os outros alunos ficaram em silêncio]!

O Professor pediu para os Licenciandos colocarem o objeto que representava o prisma novamente sobre o pano, da maneira como Davi havia sugerido, e que tentassem colocar o outro pano sobre a aresta oposta à face retangular que estava sobre o pano. Ao notarem que o pano não ficou parado sobre a aresta, os alunos ficaram admirados. O Professor chamou atenção para esse fato, mas não falou mais nada.

Apesar de o Professor ter feito uma exploração visual para mostrar aos alunos que as bases de um prisma são predefinidas, tanto Davi como outros alunos demonstraram continuar sem entender como determinar quais faces são as suas bases. A fala de Melissa, proferida imediatamente após a exploração de Benjamin, evidencia-nos isto: “Ainda não entendi como você percebe a base de uma figura, porque qualquer lugar pode, tipo assim, a esfera não tem como, porque ela não tem uma figura delimitada, né? Que segue as linhas. Então não tem como, ela fica rolando. Mas essa [o prisma de base triangular escolhido por Davi] tem triângulos nos lados, que ele pode ficar apoiado, né? Em um lugar plano. E tem retângulos, que se você quiser também pode ficar. Eu acho que pode ser tudo que tá aí, pode ser uma base. Eu acho que dependendo da forma, pode ser....”.

Benjamin, fazendo uso do pano e do objeto de acrílico, pareceu ter desejado explorar a ideia colocada por Davi, mostrando aos estudantes que, daquela maneira como o colega considerou a base da figura (como uma das faces retangulares), ficaria difícil concluir que ela possui duas bases, pensando-se na determinação de um prisma a partir de dois planos paralelos. Refletindo sobre essa caracterização, a fala de Benjamin, em que ele diz que os prismas têm bases predefinidas, converge para a ideia de que a determinação das faces que são as suas bases está atrelada à caracterização de tal figura. Ou seja, parece-nos que os Licenciandos e o Professor desejavam explicitar aos estudantes que, matematicamente, prismas são definidos dessa maneira.

Aqui, sublinhamos a relevância para o ensino de geometria de um conhecimento matemático, associado ao conteúdo poliedros e seu ensino e aos estudantes, sobre uma sequência de exemplos, tarefas e materiais didáticos que auxiliem os alunos a compreenderem como se dá a construção de algumas dessas figuras - como prismas, cilindros, cones e pirâmides - e a se engajarem em uma construção dinâmica delas, de maneira que fique compreensível para os alunos quais são as bases dessas figuras e qual o papel desse elemento na sua caracterização. Também faz parte dos conhecimentos sobre o conteúdo e seu ensino o reconhecimento dos professores de até que ponto as ideias intuitivas dos estudantes sobre formas geométricas devem ser exploradas e dos momentos de se priorizar algumas conceitualizações.

Na sequência da aula, Hipátia perguntou a Melissa se qualquer parte de uma figura poderia ser considerada como sua base. A estudante respondeu que sim, e Joana concordou com a colega. Hilbert, dirigindo-se à aluna, explicou:

Hilbert: Mas, aí, Melissa, esse tipo de figura [com um prisma na mão] recebe um nome especial. E aí, esse tipo de figura, ela tem uma... uma forma especial de você construir ela. Entendeu? Você pode mudar a base, mas alguns elementos dela vão continuar sendo os mesmos. E aí...
Benjamin: Como se fosse uma família.
Hilbert: Isso! E aí você vai conseguir o que é, qual que é a base do... Você vai conseguir ver e identificar qual que é a base da... da figura.
Benjamin [dirigindo-se a Hilbert]: Mostra um exemplo aí então [inaudível]. Gostei disso! Olha só!
Hilbert: Aqui, oh [pegando um prisma de base triangular e um prisma de base pentagonal e os colocando lado a lado sobre o pano]!
Benjamin: Oh! São da mesma família. Porquê?
Hilbert: O que tem de semelhante nas duas figuras?
Joana: Que todas as partes dela podem ser uma base?
Hilbert e Hipátia: Não.
Hilbert: Analisem as suas faces.
Alunos: [muitos falando ao mesmo tempo].
Hilbert: Os retângulos. Olha só que doideira. Pode falar [dirigindo-se a Fernando].
Fernando: Eu tenho um comentário. Eu pensei num negócio aqui. Que, pra ter uma base, vamos dizer, vai virar, tem que ser números pares. Pra fazer o negócio...
Alguns alunos: Hã?
Hipátia: Não. É porque ele tá falando de base. Eu tenho um número... Naquela ali [apontando para um pirâmide] eu tenho um [referindo-se ao fato de que a pirâmide tem somente uma base] e não é um número par.
Hilbert: Exemplo. O que você falou tem razão. Mas, somente pra essa família [referindo-se aos prismas]. Essa família tem um número par de bases. Mas existem outras famílias que não vão ter. Mas, no caso...
Davi: Mas só essa família aí que vai ter? As outras famílias vão ser diferentes?
Hilbert: Não. Vão ser as bases. Vou te dar um exemplo.

Melissa: Então, as figuras geométricas são separadas em grupos? Tem que indicar as bases? Porque o professor disse que é uma família, e você disse que esses dois aí [referindo-se aos prismas] é... é...
Hilbert: Pertencem à mesma família.
Melissa: Isso.
(...)
Hipátia: Deixa eu só fazer uma pergunta pra vocês. Se eu olhar, segura aqui pra mim. Se eu olhar esse, esse e esse [mostrando aos alunos, um de cada vez, um prisma de base triangular, um prisma de base pentagonal e um prisma de base quadrada]. Qual é a característica comum deles?
Alunos [muitos falando coisas como]: As faces. Retângulo. As faces.
Hipátia: Em comum, eles têm os...
Joana: Retângulos.
Hipátia: Retângulos. O que que diferencia uma [figura] da outra?
Alunos: [muitos falando ao mesmo tempo].
Hipátia: As bases. Então, eu não posso considerar qualquer um sendo a base. Ela [a figura] tem uma parte que eu tomo como definido que é a minha base. Que as outras características serão comuns a todas elas. E, aí, a gente vai entrar numa próxima atividade que é pra gente aprender a colocar cada uma dessas figuras numa determinada família.

Os Licenciandos mostraram em suas falas que é necessário predefinir a(s) base(s) de uma figura, e utilizaram, em especial, o prisma como exemplo dessa afirmação. Vale ressaltar que os Docentes, até esse momento da aula, não haviam especificado para os alunos quais figuras, entre aquelas que seriam estudadas, possuíam faces que poderiam ser chamadas de bases. Durante o ensino de formas geométricas nos anos finais do Ensino Fundamental, isso pode se configurar como um fator complicador para o esclarecimento das ideias dos alunos. Na situação analisada, por exemplo, muitos estudantes estavam, ainda, associando a ideia de bases a icosaedros, dodecaedros, entre outras figuras que estavam representadas pelos objetos de acrílico.

Hilbert mencionou que as bases de um prisma são definidas a partir da construção de tal figura, mas não explicou aos alunos alguma maneira de se fazer tal construção. Os Docentes passaram a considerar que a base de uma figura – utilizando o prisma para ilustração – era “a parte da figura que a diferenciava das demais figuras da família à qual ela pertence.” Notamos que para que tal definição seja utilizada para se determinar as bases de um prisma, sempre serão necessárias comparações entre mais de uma dessas figuras. Também notamos que tal maneira de se entender as bases não se aplica para outras figuras, como cones e cilindros. Ao se comparar dois cones circulares (como aqueles que estavam sendo estudados), por exemplo, temos que a figura da base é a mesma. Intencionalmente ou não, a proposta de entendimento sobre o que são as bases de certas figuras, mobilizada nesta aula, gerou um conjunto de dúvidas e problematizações.

O uso dos objetos em acrílico proporcionou, durante a explicação de Hilbert, que os estudantes visualizassem que os prismas são constituídos de retângulos nas laterais (para o caso das figuras em acrílico utilizadas, que não eram prismas oblíquos). Assim, segundo o que foi colocado pelo Licenciando, as suas duas bases configuram-se como os dois polígonos iguais – que podem ser triângulos, quadrados, pentágonos, etc. e, inclusive, retângulos – os quais distinguem os prismas entre si. Uma pergunta, então, poderia ser colocada: para o caso de prismas cujas faces são todas retangulares, como identificar as suas bases?

Apesar de que a intenção da aula proposta pelos Docentes não convergia para a exposição imediata de conceitos relacionados às figuras geométricas estudadas, percebemos uma demanda de que uma caracterização, pelo menos dos prismas, fosse explorada. Essa demanda ficou perceptível a nós a partir dos constantes questionamentos apresentados pelos estudantes na medida em que as explorações dos objetos aconteciam e das próprias explicações sobre as características das figuras que os Docentes procuraram dar. Ao mobilizarem tais explicações, observamos que algumas caracterizações apresentadas poderiam causar alguns equívocos conceituais. A ideia de bases que ficou estabelecida, até esse momento da aula, por exemplo, não possibilitava que se predefinisse(m) a(s) base(s) de uma figura, assim como os próprios Docentes disseram ser necessário, exigia que sempre era preciso fazer comparações entre figuras de uma mesma família e admitia contraexemplos.

É importante reforçarmos que os questionamentos dos estudantes fizeram parte da proposta da aula, e que os Docentes estiveram sempre atentos a ouvi-los e a levá-los em conta para discussão, o que faz parte do conhecimento matemático para o ensino. Todavia, também notamos que a aula convergiu para uma necessidade de mobilização de algumas explicações mais esclarecedoras sobre algumas questões, como aquela referente às bases de figuras espaciais.

Analisando o excerto acima, temos indícios de que dessa situação de sala de aula aflorou, mais uma vez, a importância de um conhecimento especializado sobre uma caracterização de prismas, o qual possa auxiliar os professores a proporcionarem aos alunos o esclarecimento das ideias sobre quais polígonos são as bases daquela figura e sobre o fato de que as suas faces laterais são todas paralelogramos. Conforme afirma Presmeg (1986), é também necessário aos professores conhecerem as possíveis dificuldades e obstáculos impostos pelo uso da visualização durante o ensino de geometria, de forma que eles próprios não se envolvam nas armadilhas que podem ser edificadas durante esse processo. Por exemplo, quando do uso de imagens concretas, sobretudo imagens prontas e acabadas, os professores precisam saber que estas podem conduzir os indivíduos a privilegiarem informações matematicamente inconsistentes sobre os entes geométricos em estudo. O que se percebe, através dos diálogos acima relatados, é que as representações em acrílico foram utilizadas pelos Docentes para que pudessem construir, na medida em que a situação lhes demandava, argumentações de que as suas faces laterais retangulares os caracterizavam como tais formas e que as suas demais faces não retangulares eram, por consequência, as suas bases ("O que tem de semelhante nas duas figuras? (...) Analisem as suas faces (...) Deixa eu só fazer uma pergunta pra vocês. Se eu olhar, segura aqui pra mim. Se eu olhar esse, esse e esse [mostrando aos alunos, um de cada vez, um prisma de base triangular, um prisma de base pentagonal e um prisma de base quadrada]. Qual é a características comum deles? (...) Retângulos"). Então, é concebível pensar que os próprios Docentes podem ter se envolvido na construção de uma caraterização de prismas baseando-se na configuração das representações em acrílico de prismas retos que estavam disponíveis na aula.

Ao passar para próxima atividade, a Licencianda solicitou que cada grupo elegesse um representante para ir até as mesas que estavam alinhadas na parte frontal da sala e onde havia muitas representações de figuras planas e não planas em borracha e em acrílico. Ela explicou que o coletivo de alunos formado pelos representantes dos grupos deveria observar e separar os objetos em grupos/famílias, segundo os critérios que eles mesmos criassem e/ou escolhessem.

Depois de mais ou menos cinco minutos de discussão, os estudantes concluíram as separações (Figura 07). A Licencianda convidou Joana para explicar à turma, em nome dos demais colegas, como chegaram a uma classificação final: "A gente decidiu fazer algumas... Tipo, aqui a gente usou como base quadrada [o cubo e o tronco de pirâmide], a gente colocou, é... Aqui que, né, sozinho, que rola e não tem uma base [a esfera], ali de base redonda [cone, cilindro e alguns círculos de borracha], ali de base, tem as laterais triangulares [pirâmides e também alguns triângulos de borracha], aqui é... As retangulares, as paredes, faces [prismas], e aqui porque todas têm base [icosaedro, octaedro e dodecaedro] é... em qualquer posição".

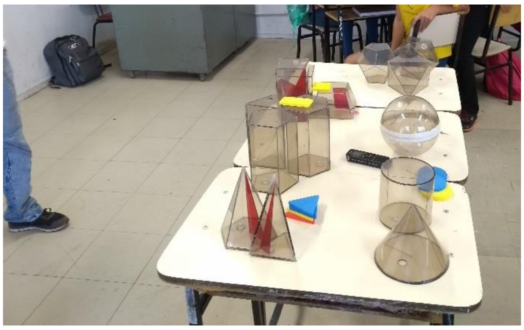


Figura 7: Separação dos objetos realizada pelos alunos
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

Durante a atividade, Melissa havia manifestado para Benjamin que gostaria que a esfera ficasse separada das demais formas, inclusive do cone e do cilindro, com o que alguns colegas não concordavam. Melissa conseguiu convencer os seus colegas, mas, mesmo assim, a Licencianda perguntou a Melissa por qual motivo ela havia manifestado o desejo de separar a esfera em uma família unitária. A aluna explicou: “É porque eu acho que ela deve ter uma família, igual vocês disseram, diferente, porque ela não tem nada assim, que ela tenha para apoiar, pra ela não rolar, foi difícil fazer ela ficar assim [inerte]...”.

Iniciou-se, entre os estudantes, uma discussão sobre o fato de a esfera não ter elementos que a impediam de rolar. Roberta argumentou que a esfera deveria ficar junto ao cone e ao cilindro, e contou que a maioria do grupo não aceitou a sua ideia na hora da classificação. Davi protestou dizendo que tanto o cilindro como o cone tinham bases, o que não os permitiam rolar, por isso eles não deveriam ficar junto da esfera. Pudemos notar que a atividade proporcionou observações muito ricas por parte dos estudantes e que a maioria delas remetia ao fato de certas figuras possuírem ou não bases.

Diante da discussão sobre a esfera ser ou não classificada junto ao cone e ao cilindro, e sobre o que Davi argumentou a respeito destas últimas figuras não rolarem por possuírem bases, Benjamin pegou as suas representações e as fez rolar pelo chão da sala através das suas laterais. Os estudantes empolgaram-se com a atitude do Professor e começaram a falar, ao mesmo tempo, coisas como: “Eles rolam!” “Rolam fora da base!”. Ele prosseguiu explicando que algumas figuras possuíam lados que permitiam a rolagem. Outras, por exemplo o cubo, apenas deslizariam por uma superfície, caso se imprimisse uma força nesses objetos. Joana, ao final da explicação de Benjamin, disse ter chegado à conclusão de que a esfera tanto poderia ficar sozinha em uma família, porque não possuía bases, quanto poderia ficar junto ao cone e ao cilindro, porque ela rolava. Nesse instante, Benjamin, olhando para os Licenciandos e para mim, disse que a "(...) ideia didática de se usar objetos que rolam ou não rolam para classificar esses objetos estava gerando uma confusão de entendimentos nos alunos".

Destacamos que os estudantes pareciam ter utilizado dois principais critérios para a separação das figuras em famílias. Um deles dizia respeito às ideias dos alunos sobre figuras que rolavam e que não rolavam. Ao utilizarem desta ideia, houve certa tensão entre alguns estudantes em classificar a esfera junto aos cilindro e ao cone, visto que, apesar de ela rolar, ela não possuía base (segundo Melissa, ela não ficava parada sobre a mesa como o cilindro e o cone, por não ter uma base).

Benjamin, ao rolar o cilindro e o cone no chão, mostrou aos estudantes que, assim como a esfera, eles rolavam, contudo, somente em uma determinada posição, no caso, aquela em que ele os havia colocado (rolando sobre as laterais). Benjamin parece ter intencionado concluir com os estudantes que algumas figuras possuem corpos totalmente arredondados, ou somente partes arredondadas que permitem a sua rolagem e, assim, chegar à classificação das figuras que estavam sendo estudadas em corpos redondos e corpos não redondos. O próprio Benjamin, todavia, percebeu que essa forma de classificação não auxiliava os estudantes no entendimento sobre figuras geométricas que são conhecidas como corpos redondos. A ideia de rolar ou não rolar, pelo contrário, parecia convergir para uma fonte de dificuldades e equívocos dos estudantes. Davi, por exemplo, estava considerando que cilindros e cones não rolavam, já que possuíam bases e, apoiados sobre elas, ficavam inertes. Portanto, se o fato de uma figura rolar fosse o critério para a sua classificação como um corpo redondo, o fato de um aluno reconhecer que cilindros e cones nem sempre rolam, já que possuem bases, poderia levá-lo a não classificar tais figuras como corpos redondos.

A partir dessa situação, percebemos que os professores de Matemática precisam saber analisar a relevância e também possíveis modos de se abordar a questão sobre objetos rolarem ou não para o ensino de poliedros e não poliedros. Ou seja, notamos que para demarcar a principal diferença entre esses tipos de figuras geométricas a partir dessa questão, algumas reflexões por parte dos professores parecem ser relevantes. Por exemplo, entendemos que eles devem levar em conta que desde que a manipulação de representações concretas seja possível, os estudantes podem verificar experimentalmente que uma forma rola ou não. Caso não haja representações concretas à disposição no momento do ensino, a caracterização dos não poliedros a partir do movimento de rolar dos objetos não é favorecida. Com o uso de representações, os alunos também podem verificar que algumas delas apenas deslizam, e que outras somente rolam se estiverem apoiadas sobre determinadas partes da sua composição, o que pode gerar discussões as quais os professores precisam mediar.

Em segundo lugar, compreendemos que esse tipo de análise das formas marcada pela concretude precisa ser avaliada pelos professores no que tange às maneiras como ela será explorada nos diferentes níveis da escolarização básica. No caso da turma do 7º ano pesquisada, notamos que os estudantes seguiram para discussões mais aprofundadas sobre alguns objetos rolarem e outros não, provocando, inclusive, algumas desestabilidades de entendimentos que os Docentes talvez não tenham previsto (por exemplo, a ideia de Davi sobre cilindros e cones não rolarem quando apoiados nas suas bases).

Situações de sala de aula como essa, em que o uso da manipulação e visualização de representações está relacionado à ilustração das definições dos entes geométricos em estudo (ARCAVI, 2003), podem se relacionar, também, a um conhecimento geométrico para o ensino que diz respeito à antecipação de possíveis dificuldades de entendimento e equívocos que os estudantes possam fortalecer ou desenvolver sobre tais definições.

É um fato totalmente compreensível que nem sempre é possível se fazer antecipações dos equívocos e dificuldades que possam surgir, mas é necessário que os professores tenha conhecimentos do assunto e dos estudantes suficientes para pensar sobre elas (BALL, THAMES, PHELPS, 2008). Nesse caso, durante a instrução, Benjamin percebeu que o critério utilizado para a caracterização de corpos redondos tornou-se uma possível fonte de equívocos e dificuldades dos estudantes. Embora ele e/ou os Licenciandos não se tenham recorrido a outro critério para a discussão sobre a caracterização de corpos redondos (ou não poliedros) nas aulas observadas, acreditamos que essa percepção do Professor poderá auxiliá-lo em decisões futuras sobre o ensino dessas figuras.

Voltando à separação dos objetos, Hipátia sugeriu aos alunos que tentassem agrupá-los em apenas duas famílias:

Hipátia: Esses dois objetos aqui [mostrando uma pirâmide e um octaedro]. Eles têm características em comum?
Alunos: [muitos falando ao mesmo tempo].
Hipátia: Me dá o pano. Pega o pano para mim [dirigindo-se ao licenciando].
Joana: Eu posso considerar que ela [apontando para o octaedro] tem só uma base, já que todas as partes são bases?
Hipátia: Ela tem base?
Davi: De qualquer jeito que você colocar ela, ela vai ficar.
Benjamin: Mas base é aquilo? Base é o jeito que a gente coloca e ela fica [a pirâmide e o octaedro estavam sobre o pano]?
Alunos: [todos em silêncio]

A Licencianda explicou aos estudantes que a classificação das figuras em duas famílias tinha a ver com o estudo de poliedros e corpos redondos, ou seja, com o que facilitava ou dificultava que as formas rolassem. Hipátia sintetizou que as figuras que têm curvas rolam e as que têm arestas não rolam. No quadro, Hilbert escreveu, de um lado, "Poliedros", e, de outro lado, escreveu "Corpos Redondos". Em seguida, escreveu abaixo de Corpos Redondos as palavras "cone, cilindro, esfera". Quando Hipátia demonstrou que finalizaria aquela discussão, Joana disse:

Joana: Eu só não entendi o que que é base...
Hipátia: Que que é base? É uma característica para, é... Como é que eu vou explicar essa parte? Vamos trabalhar com essa figura aqui [pegou um prisma de base triangular e um prisma de base pentagonal e os colocou sobre o pano]. Você tá com dúvida se essa [uma face retangular do prisma triangular] ou essa [uma das bases triangulares] poderia ser base? [Pausa] Quando, é... Como é que eu vou explicar isso? Quando eu pego uma família de figuras, por exemplo, elas têm, como é que eu daria nome pra elas, pra essa figura aqui [prisma de base triangular]?
Joana: Retângulo.
Hipátia: Retângulo?
Joana: Da parte que tá na frente?
Hipátia: Ah tá! O que elas têm em comum. É isso que você tá me falando? Você saberia me dar o nome dessa figura?
Joana: Paralelepípedo?
Hipátia: E esse aqui [prisma de base pentagonal]? (...) Como a gente explicou pra vocês agora há pouco, dentro desse grupo de famílias, dentro desse grupo de figuras, dessas famílias, tem características que são comuns e tem característica que é individual da figura. Essa característica individual, quem vai me trazer essa informação é a base da figura. Então, olha essas duas aqui [os prismas de base triangular e de base pentagonal], que que elas têm em comum? Porque que eu posso classificá-las na mesma família?
Joana: Por causa das laterais.
Hipátia: Porque elas são feitas de retângulos e...
Joana: Então, pra você classificar uma figura na base, eu preciso da família...?
Hipátia: Tem duas bases. E essa daqui?
Joana: Também.
Hipátia: Então eu posso agrupar seguindo essa ideia. Quantas bases ela tem. Ela tem essas bases. E, como que eu diferencio já que elas fazem parte da mesma família?
Joana e outros alunos: É a base!
Hipátia: É a base. (...) A base é o que diferencia a figura.
....
Joana: Então pra você saber qual é a base, você precisa pegar duas [figuras] pra você comparar?
Hipátia: Não. Essa comparação já foi feita em momento anterior e já foi definido pra você. Então, quando você pega essa figura, quando você vê, você já sabe que em algum momento alguém já estudou e já definiu que essa aqui é a base dela [apontando para a base do prisma triangular]. Porque? Porque é essa parte que a diferencia de um outro membro da mesma família que ela. Se você pensar bem, essas partes laterais são todas iguais. Como é, então, que eu vou dar nome pra essa e pra essa [os dois prismas]? De

acordo com a sua base!
Joana: Então, as bases dessas, dessas... O que diferencia é a base!
Hipátia: Elas têm a mesma lateral.
Benjamin: A lateral é retângulo.
Davi: O que diferencia vai ser a base, uai!
Hipátia: Por isso que eu não posso considerar qualquer parte sendo a base. Tá bom?

Quando Joana disse que ainda não havia entendido o que era a base de uma figura, a Licencianda, inicialmente, deu indícios de que ela mesma também não havia estabelecido uma ideia clara sobre isso para explicar aos alunos. Percebemos que a ideia que foi sugerida desencadeou diversos questionamentos por parte dos alunos, os quais, em alguns momentos, foram respondidos ainda sob algumas incertezas sobre o que é a base como elemento de alguns poliedros. Joana, por exemplo, preocupou-se se sempre necessitaria comparar duas figuras (no caso, dois prismas) para dizer quais eram as suas bases. A Licencianda respondeu à aluna que tal comparação não era necessária, uma vez que, segundo ela: "Essa comparação já foi feita em momento anterior e já foi definido pra você. Então, quando você pega essa figura, quando você vê, você já sabe que em algum momento alguém já estudou e já definiu que essa aqui é a base dela". Porém, a ideia de bases que foi evocada pelos Docentes explicitou que a comparação era necessária.

Quando Hipátia respondeu à aluna que a base (ou as bases) de uma figura era predefinida (ou eram predefinidas), notamos que a própria Licencianda referiu-se, mesmo que de maneira subliminar, ao fato de que a(s) base(s) são determinadas e têm papel específico na construção e caracterização dos prismas, pirâmides, cones e cilindros. Outro ponto a se observar é que a noção de bases foi discutida com maior apelo ao fato de que ela associa-se à nomenclatura da figura. Fato que é verídico, mas que não carrega o sentido geométrico que poderia ter sido discutido: a base como um elemento determinado na construção e caracterização das figuras.

No momento em que Hipátia convidou os alunos a voltarem à classificação dos objetos em duas famílias – corpos redondos e corpos não redondos – uma aluna perguntou por que o cubo e o paralelepípedo tinham bases iguais, apontando para as representações em acrílico. Hilbert explicou que eles são prismas especiais, que as bases do cubo e do paralelepípedo são quadrados, e que o cubo é também um paralelepípedo, porém com características mais específicas.

Em relação às bases de um paralelepípedo, há que se ressaltar que elas são paralelogramos que não são necessariamente sempre quadrados. Já em relação à pergunta da estudante, pode-se inferir que ela poderia seguir para outras problematizações a respeito da ideia de bases que fora colocada na aula, por exemplo: no caso de um paralelepípedo de base quadrada e de um cubo, assim como apontou a estudante, as bases de ambos são figuras iguais, o que não favorece a diferenciação entre tais figuras por esse elemento.

No quadro, Hipátia explicou que existem corpos redondos e corpos não redondos e que dentro da classificação dos corpos não redondos existe a classificação dos poliedros. Os alunos tentaram desvendar o significado da palavra poliedro e Hipátia explicou-lhes que ela significa "vários assentos", usando uma conotação com o ato de "sentar a figura no pano" pelos seus vários assentos. Nesse momento, Fernando disse: "Professora, então a esfera é um poliedro (...) Qualquer lugar que você colocar ela, ela vai ficar paradinha...". Hipátia argumentou para o aluno que eles estavam se referindo aos poliedros como figuras classificadas como corpos não redondos. Portanto, a esfera não poderia fazer parte desse grupo. A Licencianda também argumentou que para que uma parte de uma figura fosse um assento, precisar-se-ia que essa parte fosse "reta". Fernando concordou com Hipátia.

Na finalização da aula, a Licencianda usou representações de um paralelepípedo e de uma pirâmide para dizer que a primeira possui duas bases e que a segunda tem somente uma base. Hipátia ainda usou os dois panos para colocar a representação do paralelepípedo (como mostra a Figura 08) e a representação da pirâmide entre eles, argumentando que o prisma deixaria duas marcas iguais, uma em cada pano, e que estas marcas eram as suas bases. A pirâmide, explicou a Licencianda, deixaria uma marca no pano de baixo, e um ponto no pano de cima.

Figura 8: Prisma entre os panos
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

Por essa observação final, os Licenciandos deixaram em evidência que as bases de um prisma eram as figuras que ficavam marcadas nos panos (em analogia aos planos), quando tal figura ficava apoiada entre eles. Entendemos que essa explicação carrega consigo uma proposta pedagógica vinculada ao uso de um material concreto que pode auxiliar os alunos no entendimento dos planos paralelos tomados para a construção de figuras como prismas, pirâmides, cilindros e cones. No entanto, da maneira como foi explorada, também notamos que a explicação sobre as marcas iguais nos planos pode admitir alguns contraexemplos. Ao se tomar um prisma hexagonal, por exemplo, é possível escolher duas de suas faces paralelogramas para serem colocadas paralelamente entre dois panos, de forma que as marcas que ficarão nesses panos serão iguais. Ou seja, existem mais condições envolvidas na construção de um prisma para que se possa dizer quais são as suas bases, como o fato de que se deve fixar quais serão os dois polígonos iguais que ficarão apoiados nos panos paralelos.

Nessa aula, compreendemos que a sistematização de uma ideia sobre a base de figuras espaciais foi realizada a partir da visualização no sentido atribuído por Kaleff (2013, p. 85, grifo da autora) do "(...) *ver o objeto* (a imagem real, visual ou tátil do objeto físico) por meio do aparato sensorial" ("Então eu posso agrupar seguindo essa ideia. Quantas bases ela tem. Ela tem essas bases. E, como que eu diferencio já que elas fazem parte da mesma família? (...) A base é o que diferencia a figura!"). Ao se pensar nessa sistematização da mesma forma vinculada à exploração de uma caraterização especializada das figuras, ela poderia ocorrer sob o ponto de vista também do que preza o "(...) ver com os olhos da mente". Além disso, podemos levantar as seguintes questões para reflexão: a abordagem de exploração dos objetos em acrílico priorizou sobremaneira o aspecto intuitivo do pensamento geométrico? Quando a proposta de aula é permeada por uma atividade exploratória, que abre possibilidades para entendimentos diversos de conceitos matemáticos, que faz relações com ideias do senso comum, como retomar as explicações para os conceitos matemáticos?

Em nosso entendimento, a visualização pode ser concebida inclusive como um processo em que os conflitos entre a análise simbólica, apoiada nos aspectos mais ligados à razão, e a análise intuitiva de entes geométricos podem ser resolvidos. Cifuentes (2011, p. 655) explica que "A razão e a intuição permeiam o pensamento matemático. A racionalidade matemática envolve tanto lógica e linguagem, quanto intuição, imaginação e sensibilidade, estas últimas intimamente ligadas à experiência estética". Segundo a análise desse autor, é possível entender que o intuitivo apoia-se de uma maneira equilibrada no lógico, e vice-versa, e que não é possível separar os dois níveis de pensamento matemático apontados, atribuindo maior valor a um ou outro aspecto, ou mesmo concebê-los como excludentes durante o ensino.

Na aula aqui relatada foram valorizadas as ideias dos alunos e a lógica intuitiva que as embasava. Todavia, entendemos que, além de pensar em abordagens dialógicas e profícuas para o ensino de formas tridimensionais, os professores também precisam ter conhecimentos sobre quais são os momentos relevantes, durante a instrução, para que sejam exploradas sistematizações das caracterizações, apropriadas para o ensino no ano escolar em questão (ou seja, sistematizações e definições especializadas), dos entes geométricos em estudo.

A abordagem que foi realizada nessa aula foi escolhida porque, segundo os Docentes, os alunos não haviam tido contato adequado com conceitos de geometria no ano escolar anterior. Apesar desse fato, foi possível notar que os estudantes possuíam noções intuitivas sobre figuras geométricas espaciais, além de possuírem conhecimentos, mesmo que expressos com certas dificuldades, a respeito de alguns elementos dessas figuras por suas características e nomenclaturas conforme tratadas na geometria (arestas, vértices, faces, bases, etc.).

Assim, sugerimos a importância do conhecimento do conteúdo e dos estudantes pelos professores da Educação Básica (BALL, THAMES, PHELPS, 2008), pois ao saberem analisar quais são os conhecimentos que os alunos possuem sobre o assunto explorado, bem como, analisar a potencial evolução desses conhecimentos, eles podem, durante a instrução, melhor ponderar sobre os momentos em que as discussões, outrora mais intuitivas, podem avançar também do ponto de vista das caracterizações e definições mais abstratas, relativas às figuras geométricas.

Em síntese, situações de sala de aula como essa que analisamos sugerem uma demanda de conhecimentos para o ensino de geometria que tangem à compreensão do uso da visualização como um processo em que a razão e a intuição sejam privilegiadas, sob um relacionamento harmônico e coerente com o nível de escolarização ao qual ela se destina. Também como um processo em que se pode beneficiar dos entendimentos dos estudantes das componentes figurais e conceituais dos entes estudados, favorecendo, assim, a construção e exploração de novos e mais avançados entendimentos sobre construções e características geométricas das figuras espaciais. Situações como essa ainda sugerem uma demanda de conhecimentos dos professores de Matemática sobre a identificação de possíveis obstáculos e dificuldades do uso da visualização, principalmente quando ela está atrelada a uma abordagem pedagógica em que a intuição é priorizada como o principal patamar da construção do pensamento geométrico.

Situações de sala de aula em que o recurso à visualização se faz presente, e em que as representações das figuras são apresentadas aos estudantes prontas para manipulação, ainda requerem que possíveis dificuldades, dúvidas e equívocos dos alunos sejam dignas de antecipação por parte dos professores. Como exemplos de algumas questões que podem permear a reflexão dos professores sobre isso, podemos apontar: Que dúvidas podem aparecer ao serem exploradas representações concretas já prontas? Que equívocos podem ser gerados a partir da manipulação dessas representações? Quais são os conceitos chaves envolvidos na exploração de poliedros e não poliedros? Novamente, afirmamos nossa consciência de que não há como o professor prever todos os obstáculos frente ao assunto que irá trabalhar. Conhecer algumas possibilidades, conforme afirmam Ball, Thames e Phelps, (2008), é parte do seu conhecimento profissional.

4.2.2 As aulas dos dias 11, 12 e 13 de junho de 2018[29]

No dia 11 de junho, os Licenciandos iniciaram a aula colocando os objetos de acrílico sobre uma mesa localizada na frente do quadro (Figura 09):

Figura 9: Objetos em acrílico sobre as mesas
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

Hipátia informou aos alunos que, naquele dia, estudariam as caraterísticas dos poliedros (e anotou isso no quadro junto às palavras bases, faces, arestas e vértices). Então, ela pegou uma representação de um cilindro e perguntou por que ela não poderia ficar no grupo dos poliedros:

Lucas: Porque se você colocar ele no chão, ele rola.
Joana: Porque... Porque ele não tem base...
Davi: Mas eu acho que a base dele, tipo, a base do... da esfera, quer dizer, ela nem tem base, né? Mas, se você colocar ela no chão, de qualquer jeito ela vai rodar. E essa coisa aí que eu esqueci o nome [referindo-se ao cilindro], é... o cilindro? Minha garrafinha é quase

[29] As aulas que se seguem relatadas aconteceram alguns dias após as aulas do dia 21 e 22 de maio de 2018. Tratam-se das aulas em que se deu sequência às explicações e atividades que aconteceram nas aulas anteriormente relatadas e que, por isso, foram ministradas pelos Licenciandos. Durante o período entre o dia 22 de maio e o dia 11 de junho, Benjamin ministrou as aulas de geometria e os Licenciandos o auxiliaram na condução das atividades. Uma dessas aulas, a saber, a aula do dia 06 de junho, também é relatada e analisada neste capítulo, em seção que se segue a esta.

um cilindro [usando a sua garrafinha de água], né? Aí, se eu deixo ela assim [colocando a garrafinha em pé sobre a sua mesa], ela não roda.
Hipátia: Ela não roda. Mas, olha só, Davi, se a gente fala de base, essa aqui [um prisma] também tem base. Então, eu não posso usar esse critério para diferenciar. Vamos falar um pouquinho mais da ideia da Joana.
Aluno: Nesse aí [o cilindro na mão de Hipátia], o corpo é meio arredondado.
Hipátia: Então, nessa figura, apesar dela ter base, como as outras [inaudível]...
Joana: O corpo dela é redondo.
Hipátia: (...) então dizemos que ela é...
Joana: Redonda.
Hipátia: Redonda. Então, na composição dessa figura, eu observo uma característica que eu não observo nessas figuras daqui [apontando para os poliedros que estavam sobre a mesa].

Percebemos que Joana ainda manifestava estar confusa com relação ao que é a base de certas figuras, ao dizer, por exemplo, que o cilindro não possuía base. Já Davi pareceu ter internalizado uma ideia de que a base do cilindro é a "parte da figura" que, ao ser apoiada no plano, não permite que ela role.

Os Docentes mostraram aos alunos exemplos dos dois tipos de figuras espaciais – poliedros e corpos redondos – através de representações mais comuns, como aquelas em acrílico sobre a mesa. No livro didático que serviu de apoio para a preparação das atividades, as figuras geométricas espaciais aparecem classificadas como poliedros e não poliedros, e mostra-se, através de desenhos de certa variedade de figuras, que existem poliedros de vários tipos, tanto os mais comuns quanto outros menos comuns de serem estudados. Assim como faz o livro, também é interessante que os professores conheçam e apreciem a relevância de tipos incomuns de figuras espaciais, tanto poliedros como o contrário, para serem apresentadas aos alunos.

A Licencianda explicou que a aula deste dia seria específica para os poliedros e que precisava de um voluntário para seguir com a exploração. Melissa levantou a mão, foi até a mesa em que estavam os objetos de acrílico e a Licencianda deu-lhe um prisma pentagonal, solicitando à aluna que o descrevesse:

Melissa: Nas faces têm vários retângulos...
Hipátia: Você falou faces? O que você chama de faces, Melissa?
Melissa: Essas partes que podem apoiar [mostrando as faces do prisma]... Meio que uma parede.
Davi: Mas em cima e embaixo também pode apoiar e então... [inaudível]
Melissa [interrompendo Davi]: E aqui tem um pentágono [mostrando uma base do prisma].
Hipátia: Então, eu poderia, Davi, chamar essa parte [do prisma, no caso, o pentágono] de face?
Davi: É... Não...

Melissa: E a face? Então ela não vai existir?
Hipátia: Então, essa base [o pentágono], eu poderia chamar ela de face?
Melissa: Não.
Hipátia: Porque não, Melissa?
Melissa: Eu não sei [pensativa, girando e olhando o prisma que estava em sua mão].
Hipátia: A gente já concluiu que tem uma característica que eu tenho que usar pra falar de base. Qual que é ela? Vocês se lembram? Que a gente fez uma diferenciação. Esses dois aqui [pegando um prisma de base pentagonal e outro de base hexagonal] (...) O que diferencia esse sólido desse sólido?
Joana: Em cima, porque do lado, quando elas estão [inaudível]...
Hipátia: Isso. Então a base é o que consegue diferenciar, dentro da mesma família, os diferentes sólidos. Então eu não posso falar que isso aqui é uma base [apontando para uma face lateral de um dos prismas], porque é uma características que todas elas [os prismas] têm.
Melissa: Sim, mas, se... Se, mas e se, vamos supor, é a mesma coisa aqui [referindo-se às faces de um dos prismas] e só aqui é diferente [referindo-se às bases do mesmo prisma]. Isso aqui [apontando para a base pentagonal do prisma] vai ser a base?
Hipátia: Não. Você tem que comparar duas coisas diferentes. Essas duas [pegando os prismas de base pentagonal e hexagonal, respectivamente] ... Você percebe que elas têm essa parte igual [as laterais retangulares]?
Melissa: Uhum.
Hipátia: O que diferencia as duas?
Melissa: As [partes] de cima.
Hipátia: As [partes] de cima. Então, isso que nós vamos chamar de base. Isso. Quando eu der um nome para ela, eu vou falar que a base dessa é...?
Melissa: Um pentágono.
Hipátia: E a base dessa é...?
Melissa: Um hexágono.
Hipátia: Então, essa parte que eu vou chamar de base, aquilo que diferencia as duas é... As duas formas.

Para explicar aos alunos o que se nomeia como faces de um poliedro, Hipátia aproveitou-se da fala de Melissa, pela qual a estudante evocou a ideia de que as faces eram somente as figuras que estavam nas laterais das formas espaciais, pelas quais se podia apoiar a figura, como paredes. A fala da aluna seguiu para a exploração a respeito de as bases da figura serem consideradas faces e, novamente, sobre o que são as bases de um poliedro. Hipátia respondeu a Melissa usando a comparação entre dois prismas (figuras de uma mesma família) para mostrar quais eram as partes das figuras que se diferiam nessa comparação, recorrendo, portanto, à definição que fora proposta pelos Docentes na aula anterior.

Davi, muito inquieto em sua carteira, pediu para falar:

Davi: Professora, eu não consigo entender muito não. Porque é muito confuso!
Hipátia: O que você está achando confuso, Davi? Pode falar.
Davi: Porque, na minha opinião, eu acho que ou você chama de base ou você chama de face.

(...)
Hipátia: Tá ficando confuso?
Davi: Tá, velho! Tá, tá muito...
(...)
Hipátia: Pode falar, Joana.
Joana: Eu queria dizer que os corpos não redondos podem ter faces e... e bases, né?
Hipátia: Ela tem base sim.
Joana: Mas as faces também são bases.
Hilbert: As bases são faces, mas, nem toda face é uma base. Isso aqui é uma face [uma face retangular do prisma], mas não é base. Isso aqui é uma face [uma face pentagonal do prisma] e é também uma base.
Melissa: Então, quer dizer que, por exemplo, se eu for colocar, é.... Colocar essa figura apoiada, num daqueles, em uma das faces. Aí, a base vai continuar sendo uma face...?
Hipátia: Sim.
Joana: Então, ela tem duas maneiras...
Hipátia: De se referir a elas? Sim. Eu posso usar essas duas maneiras.
Hilbert: Só que, aí, normalmente se usa base, né? Porque aí, eu... Quer dizer, é uma coisa... um nome mais simples, face. Aí, as faces principais, a gente chama de base, aí você não se refere mais a essa face aqui só como face. Você se refere a ela como base, como algo maior. Diferencia das outras.
Mia: Mas, na... na prova, se tiver, sei lá, perguntando, eu vou colocar tudo face, que tudo é face?
Hipátia: Todas elas são faces. Então, se eu te perguntar, assim, numa prova, deixa eu pegar essa aqui que é mais fácil de identificar [usando um cubo]. Vocês conseguem ver, é... várias faces nessa figura?
Alguns alunos: Sim.
Hipátia: Quantas?
Melissa [em voz alta]: Seis.
Alguns alunos [em coro]: Seis.
Hipátia: Então, Mia, são seis faces, dentre essas seis faces, quantas são base?
Mia e alguns alunos [em coro]: Duas.
Hipátia: Então, ela [a base] não deixa de ser face porque ela é base.
Mia: Pode falar que, a base, que... Tipo, ser até o mesmo formato, mas... [apontando para uma pirâmide que estava sobre a mesa]
Hipátia: Esse [pegando a pirâmide apontada por Mia]?
Joana: Não. Mas, aí, nesse caso [pirâmide], não teria uma base... igual.... Nesse caso, tudo é face e tudo é base?
Alunos: [muitos falando ao mesmo tempo]
Mia: A base é melhor do que a face.
Alunos: Hã?
Mia: As outras faces. E... pode diferenciar isso em todos os... ou menor ou maior.
Hipátia: Não... Na verdade, eu não entendi a sua pergunta, você pode repetir, Mia?
Mia: Assim, todos esses objetos têm uma base, certo? Têm uma base. É... tá vendo que essa base [a base da pirâmide] é diferente? Tá um formato quadradão e grandão.
Hipátia: [inaudível]
Mia: Eu queria saber se é isso que diferencia?
Benjamin: Eu entendi. Eu acho que ela falou foi da relação do tamanho da base com as faces laterais. Depende, Mia, porque aí você pode ter uma pirâmide que pode ter uma base desse tamanho [abrindo os braços] e ela ter uma altura pequenininha. Ela vai ficar feia, tá? Mas ela não muda não. O que caracteriza é, por exemplo, os poliedros, as faces

laterais são sempre retângulos e o nome do poliedro, do prisma, desculpa, dos prismas, as faces laterais são sempre retângulos. O nome do prisma quem dá, então, é a base. Tá? A pirâmide é a mesma coisa. As faces laterais da pirâmide são o quê? Sempre? Que que elas são?
Alguns alunos: Sempre triangulares.
Benjamin: Sempre triangulares. E aí, que que dá o nome pra pirâmide, então?
Alguns alunos [em coro]: A base.
Benjamin: Independente do tamanho. Se for uma base grande ou uma base pequena, ela continua sendo base.

Nessa aula, os objetos explorados eram representações apenas de poliedros que possuem bases. No entanto, isso ficou implícito nas explicações, uma vez que, como aconteceu nas outras aulas, não foi especificado aos alunos porque alguns poliedros têm faces chamadas de bases e quais são essas figuras. Os alunos demonstram estar muito confusos com a discussão a respeito de que as bases de uma figura são consideradas faces. Davi, inclusive, explicitou isso aos Docentes, e Joana confundiu-se ao perguntar se numa pirâmide todas as figuras que a compõem são bases e faces ao mesmo tempo.

Procurando auxiliar os alunos a compreenderem por que algumas faces são chamadas de bases, Hilbert referiu-se a elas como “especiais”, como “algo maior”, que diferem os poliedros entre si dos membros da sua família e que os nomeiam. A aluna Mia, em meio às explicações que estavam acontecendo, referiu-se às bases como algo “melhor do que a face” e quis saber se a base da pirâmide (de base quadrada que estava sobre a mesa) era a sua face que era, na concepção da aluna, maior do que as demais faces. Convém destacar que a aluna pareceu ter concebido esses questionamentos após o momento em que Hipátia usou um cubo para mostrar aos alunos que nele há seis faces (iguais) e que duas delas são suas bases.

A nosso ver, o questionamento da aluna era exatamente sobre o fato de que, diferentemente do cubo, podem haver figuras, como a pirâmide de base quadrada, em que a base é uma figura diferente das formas de suas laterais. Assim, entendemos que Mia estava tentando encontrar uma explicação mais clara e convincente sobre como distinguir a base de uma figura espacial e sobre quais figuras possuem faces designadas como tal elemento.

Hipátia continuou a sua explicação e passou a explorar quais elementos constituem as faces de um poliedro. Os alunos sugeriram que as faces de um poliedro são compostas por partes retangulares, partes triangulares, ou seja, nas palavras deles, “partes retas”. A Licencianda perguntou aos alunos o que era igual nas faces de um prisma e nas faces de uma pirâmide, mostrando a eles representações dessas figuras. Os alunos responderam coisas como “partes retas, linhas retas, retas”. Ela explicou que essas “partes retas” são planas e Benjamin fez uma intervenção: “Só uma coisinha, assim. Não é que elas são planas. No cilindro você também vai ter isso, né? Só que a gente acaba classificando exatamente porque a gente tá chamando de reto. Só que depois a gente vai chamar isso de polígonos, né?".

Essa fala do Professor nos alerta para algo que pode ser uma origem de equívocos por parte dos alunos quando estão estudando formas tridimensionais: uma não especificação de que poliedros são figuras espaciais cujas figuras planas que compõem as suas faces são polígonos. A conotação do ato de sentar uma figura para explicar que ela é um poliedro parece carecer de uma especificação mais clara sobre tais assentos serem polígonos, uma vez que serem somente ditos como partes "retas" ou "planas", assim como alertou Benjamin, pode levar a entendimentos inadequados.

Após esse momento, o Professor e Hipátia passaram pelos grupos e entregaram aos alunos alguns dos objetos que estavam sobre a mesa. Enquanto isso, Hilbert prosseguiu com a explicação dizendo que o encontro de duas faces é "uma reta ou uma linha". Ele perguntou aos alunos qual o nome dessa reta/linha e alguns estudantes disseram: "Arestas". O Licenciando confirmou a resposta dos alunos.

Mais uma vez, notamos que em situações de sala de aula como estas que estamos analisando, em que os diálogos exploratórios sobre o assunto são frutíferos, cabe também aos professores terem conhecimentos, relacionados ao conteúdo e aos estudantes, sobre escutar as perguntas dos alunos e nelas identificar concepções e equívocos que precisam ser tratados e/ou que impliquem na necessidade de revisão do tratamento conceitual, associado às representações dos entes em estudo, que está em jogo.

A situação de sala de aula relatada ainda nos indica uma demanda de um conhecimento para o ensino de poliedros relacionado ao uso da visualização como um processo em que se estabeleça uma harmonia entre a exploração e o desenvolvimento das ideias mais intuitivas com o desenvolvimento do raciocínio conceitual. Harmonia essa determinada, conforme afirma Fischbein (1993), por uma simbiose entre as componentes conceitual e figural de entes geométricos, o que, entendemos nós, pode amenizar a produção de dificuldades e a geração de entendimentos confusos dos alunos sobre a caracterização das formas geométricas. O autor enfatiza que "A integração das componentes conceituais e figurais em uma estrutura mental unitária, com a predominância de restrições conceituais sobre restrições visuais, não é um processo natural" (p. 156, tradução nossa[30]). Diante disso, tal integração deve constituir-se, segundo ele, em uma preocupação contínua dos professores,

[30] Do original: The integration of conceptual and figural properties in unitary mental structure, with the predominance of conceptual constraints over the figural ones, is not a natural process.

o que sugere que situações de sala de aula de geometria que requeiram a cooperação entre esses dois aspectos devam ser criadas.

Com um poliedro de acrílico em cada um dos grupos, Hilbert solicitou aos estudantes que identificassem neles as suas arestas e que contassem quantas arestas, vértices e faces cada um deles possuía. Após esse momento, Hipátia distribuiu para os estudantes uma folha contendo tarefas sobre poliedros. As tarefas foram preparadas com apoio do livro "Matemática: Imenes & Lellis" e com o objetivo de que os estudantes pudessem pensar e escrever a respeito do que revisitaram sobre poliedros nas últimas aulas (a tarefa de número 01 da folha (Anexo A)). Na folha havia uma tabela contendo vários desenhos de poliedros. Os estudantes deveriam especificar qual era o polígono da base de cada poliedro, nomeá-los e contar o seu número de vértices, seu número de faces e o seu número de arestas. Em seguida, os estudantes eram solicitados a tentar perceber, para cada poliedro, a validade da "relação de Euler": $V+F=A+2$.

Durante a observação dessa atividade, percebi que, inicialmente, muitos estudantes estavam com dificuldades em contar os números de arestas, vértices e faces dos poliedros, alegando que os desenhos os impossibilitavam de ver, de forma nítida, tais elementos. Em um dos grupos que visitei, uma aluna disse: "Agora não dá pra pegar!", e fez, com as suas mãos, um gesto como se quisesse tirar a figura do papel. Muitos alunos saíram da aula no momento inicial da atividade para o ensaio da quadrilha que aconteceria na festa junina da Escola. Daqueles estudantes que ficaram, poucos conseguiram "descobrir" a relação de Euler. A aula encerrou-se com alguns alunos terminando de fazer a tarefa.

4.2.3 As aulas dos dias 12-06-2018 e 13-06-2018

Nas aulas dos dias 12 e 13 de junho, Benjamin e os Licenciandos deram prosseguimento aos assuntos relacionados à geometria espacial (reconhecimento de poliedros e de alguns dos seus elementos) e, especialmente, trabalharam com algumas ideias de planificações de figuras. Na aula do dia 12, apenas as representações de poliedros de acrílico foram levadas para a sala de aula e colocadas sobre uma mesa na parte frontal da sala. O livro didático "Matemática: Imenes & Lellis" foi utilizado para que os alunos pudessem ler e discutir alguns textos do Capítulo 8. A primeira leitura foi feita por Davi e versava sobre o significado da palavra poliedro, fazendo conotação com os vários assentos, assim como fora proposto pelos Docentes na aula anterior.

Logo em seguida, Lucas leu, na página 169 do livro, uma descrição de um prisma de base pentagonal, segundo o seu número de faces, quais delas são suas bases, e segundo o seu número de arestas e seu número de vértices. Hipátia usou uma representação de um prisma de base pentagonal de acrílico para explorar com os estudantes essas características, enquanto Lucas fazia a leitura.

Na sequência, Mia leu um texto da mesma página sobre um poliedro que não era nem prisma e nem pirâmide. Um aluno sugeriu, falando em tom de voz baixo, que tal poliedro era "indefinido". Hipátia explorou com os estudantes que tal poliedro se chama octaedro e lhes perguntou por que essa figura não poderia ser classificada como um prisma ou como uma pirâmide. As respostas dos alunos, para ambas as perguntas, variaram entre dizer que "o octaedro não possui base", pois "não possui retângulos" na composição das suas partes, e porque ele "não possui uma ponta". Ao escutar essas falas, percebi que os estudantes estavam caracterizando os prismas segundo a definição que lhes fora apresentada, ou seja, estavam entendendo os prismas como figuras que possuíam faces retangulares e, consequentemente, figuras que possuíam duas bases formadas por figuras (geralmente) com outro formato que não um formato retangular, diferenciando-os entre si. As pirâmides, na caracterização dos alunos, eram figuras espaciais que possuíam uma ponta.

Melissa quis saber em qual família de figuras não planas o octaedro deveria encaixar-se. Hilbert respondeu que o octaedro é chamado apenas de poliedro. Benjamin interveio complementando que o octaedro é um poliedro que não se pode encaixar nas famílias que foram estudadas, isto é, na família dos prismas ou na família das pirâmides. O Professor também explicou aos estudantes que a nomenclatura de algumas figuras está relacionada, usualmente, às características das suas faces.

Nesse momento, um aluno interrompeu a fala de Benjamin e fez uma pergunta: "Como assim não dá pra perceber as duas bases [apontando para o octaedro]?". Para responder ao aluno, a Licencianda pegou um paralelepípedo e, colocando-o sobre a mesa, disse aos alunos que ele tinha uma base superior e uma base inferior e explicou, novamente, que as bases eram o que diferenciavam os prismas entre eles. Ela pegou um prisma de base pentagonal e mostrou-o junto ao paralelepípedo para exemplificar o que havia falado, evidenciando aos estudantes que sempre seria necessário comparar pelo menos duas figuras da mesma família para se definir quais faces seriam as respectivas bases de tais figuras.

Em seguida, Hipátia pegou um octaedro e solicitou aos alunos que tentassem identificar as suas bases. Segundo a definição de base veiculada nas aulas anteriores, e que acabara de ser reforçada, seria necessário comparar o octaedro com "outros octaedros". O que não era possível na maneira como tal comparação deveria acontecer. Nenhum aluno se manifestou em relação à pergunta, e a Licencianda explicou que, no octaedro, não havia como identificar as duas bases (a inferior e a superior), pois todas as suas faces eram iguais.

Essa explicação pode ser um complicador para o entendimento dos estudantes, uma vez que o cubo e o tetraedro, por exemplo, também possuem todas as faces iguais, mas possuem bases. Benjamin completou a explicação de Hipátia dizendo que nos prismas é possível identificar que suas faces laterais são retângulos (e apontou para as representações que estavam na mesa). Destacamos que a fala de Benjamin reforça o fato de que os prismas são figuras que possuem faces laterais formadas por paralelogramos (retângulos, no caso dos objetos em acrílico explorados). Além disso, essa característica apontada pelo Professor ocorre justamente porque os prismas são figuras construídas a partir de duas bases (que são polígonos) paralelas e iguais.

Hipátia seguiu para a leitura do texto "Conversar para aprender", na página 170 do livro. Ela fez a leitura do item g) do texto: "Que diferenças existem entre um poliedro e um não poliedro?" (IMENES, 2010, p. 170). Quando solicitados a responderem essa questão, alguns alunos disseram que os poliedros eram figuras que "devem ter duas bases", e os demais estudantes concordaram com essa afirmação ou permaneceram calados.

Apesar de essa fala, e também de outras ("Como assim não dá pra perceber as duas bases [apontando para o octaedro]?"), indicarem que os estudantes ainda possuíam ideias confusas no que diz respeito ao conceito de poliedros, evidenciando, principalmente, que eles estavam associando esse conceito geralmente a uma imagem persistente de prismas, os Docentes não exploraram essa resposta. Dois contraexemplos para a afirmação dos alunos, que poderiam auxiliar a desfazer o equívoco, tratam-se do cilindro e do tronco de cone, figuras que possuem duas bases paralelas e que são classificadas como não poliedros. Um dos desafios do uso da visualização no ensino, que precisa ser conhecido pelos professores, é a possibilidade de que conceitos sejam associados a imagens persistentes que não correspondem totalmente ou adequadamente a tais conceitos, de maneira que essa associação perdure e crie obstáculos ao desenvolvimento da aprendizagem (PRESMEG, 1992).

Na continuação, a Licencianda leu o item h) do texto que solicitava aos leitores que imaginassem um poliedro diferente de todos aqueles já lhes apresentados. Bruno disse que pensou em um dado de 40 "lados" (faces). Benjamin e Hipátia questionaram Bruno sobre qual característica não poderia estar nessa figura. O estudante ficou confuso ao tentar responder a pergunta e a Licencianda lembrou-lhe que a figura não poderia ter partes arredondadas, pois deveria ser um poliedro. Benjamin pediu para os alunos imaginarem uma figura com mil "lados" (faces), e que pensassem como seria seu nome. Depois de muitas falas, o Professor deixou essa questão para os alunos refletirem em casa.

A curiosidade de Bruno, juntamente com a solicitação do item h), relacionam-se a conhecimentos que são relevantes para o ensino de geometria, no que se refere ao uso de imagens dinâmicas no trabalho com poliedros, as quais possam auxiliar os alunos a experimentarem a exploração de poliedros diversos e de poliedros cujas configurações sejam diferentes daquelas mais padronizadas. Esse tipo de conhecimento diz respeito ao conteúdo e seu ensino, uma vez que relaciona-se à consciência que os professores precisam ter das vantagens e desvantagens pedagógicas das representações de figuras espaciais, tipos de atividades e materiais didáticos dos quais fará uso no ensino de poliedros (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

O item l) do texto, que foi lido por Hilbert, questionava: "Todo poliedro é um prisma? Ou todo prisma é um poliedro?" (IMENES, 2010, p. 170). Inicialmente, alguns alunos reagiram assustados à pergunta. Hipátia explicou-lhes que alguns poliedros devem ser classificados em outros subgrupos, que não o subgrupo dos prismas, e alguns alunos disseram que estes outros subgrupos eram, então, relativos aos "corpos redondos". Os Licenciandos, ao escutarem essa fala, chamaram a atenção para o fato de que estavam falando apenas de poliedros. A Licencianda mostrou uma pirâmide aos alunos perguntando-lhes qual o nome do objeto. Alguns ainda responderam: "Prisma de base triangular", e foram corrigidos por Hipátia.

Nesse ponto da aula, notamos que a caracterização de poliedros por "figuras com vários assentos" parece não ter facilitado o entendimento dos estudantes, uma vez que tais "assentos", ou faces, foram determinados como partes retas não especificadas exatamente como polígonos, o que poderia dar margem para se pensar em cilindros – assim como escutei o aluno Fernando inferir durante a aula – como poliedros, já que essas figuras podem ser "sentadas" sobre as suas partes achatadas que as impedem de rolar.

Além disso, nota-se que os Docentes, nos momentos em que necessitaram corrigir os alunos quando estes se referiam a figuras não poliédricas como poliedros, utilizaram como argumento que o assunto que estava sendo abordado era o assunto relativo aos poliedros. Portanto, algumas figuras (cilindros, por exemplo), às quais os alunos se referiram inadequadamente como tal, não se encaixavam como exemplos de poliedros. Essa forma de argumentar parece indicar uma dificuldade em se extrair da definição de poliedros trabalhada na aula elementos suficientes para explicar aos alunos que os corpos redondos não pertencem a este grupo de figuras. Então, sugerimos que outras formas de se caracterizar ou definir poliedros, apropriadas para o contexto do ensino de geometria em um 7º ano do Ensino Fundamental, são relevantes para serem investigadas como um conhecimento especializado sobre o assunto poliedros (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

Também é válido ressaltar que alguns alunos ainda confundiam pirâmides com prismas. Tal equívoco, novamente, pode estar relacionado, dentre outros fatores, à uma imagem persistente de prisma que podem ter internalizado em suas mentes. Essa pontuação sugere que os professores da Educação Básica precisam saber promover associações entre as representações concretas utilizadas para o ensino de figuras geométricas e as características e relações abstratas associadas a essas figuras (GUZMAN, 2002; BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

Após o momento das leituras e breves discussões sobre alguns textos do livro, os Licenciandos seguiram para a correção da atividade da aula anterior sobre a relação de Euler. Os alunos haviam-na feito em casa e alguns deles deixaram para preencher a última coluna – sobre a relação entre os números de vértices, arestas e faces de um poliedro – nesta aula.

A Licencianda perguntou aos alunos em quais situações a fórmula de Euler poderia ser usada e alguns alunos recorreram, mais uma vez, a uma imagem mental persistente de prismas (PRESMEG, 1992) para responder que a relação deveria ser utilizada somente quando estiverem lidando com tais figuras. Ao ouvirem essa resposta, os Licenciandos e Benjamin responderam que a relação é válida para todos os poliedros, que não somente os prismas.

Nos momentos finais da aula, passou-se uma nova lista de exercícios para os alunos (página 02 do Anexo 1). Com essa lista, os Docentes objetivaram, segundo eles, que os alunos trabalhassem com aplicações da relação de Euler e que pudessem recordar os elementos (faces, arestas e vértices) das figuras que haviam estudado. Os alunos começaram a fazer os exercícios da lista e Benjamin, os Licenciandos e eu passamos pelos grupos para auxiliá-los.

Um tipo de dificuldade que percebi ter sido bastante comum entre os estudantes foi que alguns deles demoravam mais para destacar as características de algumas figuras e/ou não conseguiam lidar com a identificação dos elementos das formas tridimensionais: arestas, vértices e faces. Percebendo isso, os Docentes disponibilizaram alguns poliedros de acrílico ou de plástico aos estudantes para auxiliá-los.

Nesse sentido, notamos que os alunos ainda tinham dificuldades em identificar as características das figuras olhando apenas para sua representação na forma de desenho, sem auxílio de uma representação pelo material concreto, mostrando que ainda estavam dependentes do uso dos materiais em acrílico para a realização de atividades. Essa dificuldade também pode estar relacionada ao fato de que os Docentes e os estudantes ficaram muito tempo discutindo e realizando tarefas sobre os objetos e suas formas sem fazerem registros sobre suas características e propriedades, por exemplo.

Pensando-se nessa dificuldade dos estudantes, entendemos que configura-se como um conhecimento para o ensino de geometria, associado ao conteúdo e seu ensino e aos estudantes, saber fazer uso de um repertório diversificado de representações de figuras geométricas – apropriadas para o ensino de geometria espacial – e de tarefas envolvendo a caracterização e reconhecimento das formas que auxiliem os estudantes a progredirem na criação de imagens mentais e na integração de conceitos figurais e conceituais dos entes estudados (FISCHIBEIN, 1993; BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

A aula encerrou-se com os alunos fazendo as atividades da folha.

No início da aula do dia 13 de junho, os Licenciandos, com a ajuda de Benjamin, montaram um *datashow* e colocaram representações de poliedros e corpos redondos de plástico, um pincel, vidros de tinta lavável e o pano sobre uma mesa (Figura 10).

Figura 10: Representações de formas não planas de plástico, tinta, pincel e o pano sobre a mesa
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

Na aula deste dia, explicou Hipátia, estudariam algumas relações entre a geometria espacial e a geometria plana por meio da "geometria no pano". Para isso, ela solicitou um voluntário de cada grupo. Segundo Benjamin os Licenciandos, a intenção com essa última atividade foi mostrar aos alunos que existem maneiras de se representar, no pano, figuras planas, as quais podem fazer parte da composição das figuras não planas. Além disso, mostrar que também se pode representar figuras não planas no pano, a partir de sua planificação. Roberta foi a primeira aluna a participar da atividade, e Hipátia entregou-lhe um prisma de base triangular:

Hipátia: Roberta, como que você representaria essa figura, esse sólido nesse pano aqui?
Roberta: É... Eu não sei se eu faria a parte das... as bases, ou se eu faria as faces. Hum ...

Eu não sei!
Hipátia: Mas, assim, se for representar ou a base ou a face, você está escolhendo o que você quer representar... no papel. Eu quero ver como que a gente representa esse sólido todo.
Roberta: Todo? Base, face... Tudo? Então... eu acho que vai ser o triângulo...
Hipátia: Mas, se a gente representar o triângulo... Bom, como eu vou representar o triângulo? Hã... deixa eu te ajudar...

A Licencianda pintou uma das bases da representação do prisma e entregou-a para Roberta, pedindo que a estudante colocasse a face pintada sobre o pano (Figura 11):

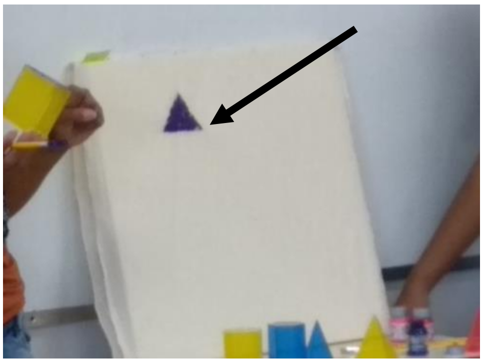


Figura 11: Polígono da base do prisma representado no pano
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

Hipátia explorou com os estudantes que daquela maneira como a colega procedeu, apenas uma face de um prisma, mais especificamente a sua base, estava representada no pano. Por isso, haveriam de pensar em outras maneiras para se fazer a representação completa de figuras espaciais em planos. Hipátia também ressaltou que, diferentemente das representações de figuras espaciais em acrílico e em plástico, as representações feitas em papel, por exemplo, não podiam ser "retiradas" da superfície em que foram desenhadas.

Além de Roberta, outros estudantes escolheram figuras não planas para serem cobertas com tinta e, assim, serem representadas no pano. Uma questão que surgiu amplamente entre os estudantes, e com a qual observei que ficaram apreensivos, levantou a ideia de que as figuras representadas no pano, isoladamente, deveriam indicar quais eram os sólidos a elas associados. Por exemplo, ao se observar um triângulo no pano, os alunos estavam entendendo que deveriam dizer se aquele triângulo era uma base de um sólido específico.

Para esclarecer os alunos sobre isso, Hipátia tomou duas pirâmides de plástico, uma de base pentagonal e uma de base quadrada, e explicou aos estudantes que, ao se representar no pano somente as bases daquelas pirâmides, não haveria como dizer quais eram os sólidos correspondentes a essas representações. Por outro lado, ao se representar também as faces, seria possível dizer quais eram os sólidos correspondentes àquelas figuras planas. Benjamin complementou a fala de Hipátia dizendo que não haveria a proposição de tarefas em que se solicitasse relacionar uma figura plana isolada a poliedros. Ele explicou que o estudo de representações planas de poliedros aconteceria por meio da planificação inteira de sólidos.

Na segunda parte da aula, Benjamin e Hilbert organizaram um *datashow* que seria utilizado. Os estudantes tiveram a oportunidade de ver figuras não planas em uma dinâmica tridimensional, e também puderam vê-las planificadas. Para isso, foi utilizado um aplicativo de realidade aumentada chamado 3D *Geometry*, apresentado aos Licenciandos pelo Professor, o qual é manipulado através do sensor *lipmotion*.

Hilbert iniciou a apresentação com um cubo, mostrando-lhes suas faces, arestas e vértices enquanto a representação da figura girava na tela projetada. As figuras não planas, na interface do aplicativo, ficavam apoiadas sobre uma malha quadriculada. Benjamin explicou aos alunos que tal malha era como o pano que estavam usando para apoiar os sólidos nas aulas. Ele solicitou a Hilbert que mostrasse aos alunos qual parte do cubo estava "encostada na malha" e, assim, os alunos puderam ver que essa parte era um quadrado. Os alunos, em maioria, pareciam maravilhados com a movimentação do cubo no aplicativo. Hilbert relembrou, junto com os alunos, o número de cada um dos elementos do cubo (faces, arestas e vértices). Ao mostrar o cubo planificado, conforme retrata a Figura 12, Hilbert perguntou-lhes o que havia acontecido com os números de faces, arestas e vértices da figura durante a planificação.

Figura 12: Projeção da planificação do cubo
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

Como não obteve uma resposta imediata dos alunos, Hilbert fez a contagem do número de faces do cubo planificado e constatou que tal número se mantém o mesmo de quando se faz a contagem do número de faces do cubo antes de planificá-lo. Antes de terminar as outras contagens, Joana questionou:

Joana: A gente ainda pode falar de faces?
Hilbert: Sim. Apesar de (...) Apesar de ele estar no plano, de a gente ter transferido ele, ele continua tendo faces.
Mia: Mas, aí, se a gente desenhar um quadrado, a gente vai ter arestas, faces, vértices ...?
Hilbert: Sim. Tem um conceito muito legal que a gente pode tirar disso. Repare só o cubo. Lembra que a gente falou que ele é composto de seis faces. Então, a gente conseguiu representar essas seis faces aqui. Mas, cada uma dessas faces tem um formato, certo? Qual que é o formato que gente consegue?
Alguns alunos: Quadrado.
Hilbert: Então, todas as figuras geométricas, elas são a reunião... todos os poliedros, eles são a reunião de várias, é... figuras planas. Vocês percebem que eu tenho uma, duas, três, quatro, cinco, seis figuras planas [contando as faces do cubo planificado] que, se elas tivessem só, se elas tivessem isoladas, eu poderia falar que se trata de um quadrado. Mas aí, eu junto...
Mia: Mas aí, quadrado é uma forma, né?
Hipátia: É uma forma achatada. Aí, se eu reunir várias figuras planas, eu consigo formar uma figura espacial.

No diálogo acima, Hilbert fez uma observação que, em nosso ponto de vista, se aproxima de uma definição especializada para o ensino de poliedros na Escola Básica: "Então, todas as figuras geométricas, elas são a reunião... todos os poliedros, eles são a reunião de várias, é... figuras planas. Vocês percebem que eu tenho uma, duas, três, quatro, cinco, seis figuras planas [contando as faces do cubo planificado] que, se elas tivessem só, se elas tivessem isoladas, eu poderia falar que se trata de um quadrado. Mas aí, eu junto...".

Essa explicação dada pelo Licenciando, a nosso ver, pode desencadear uma definição especializada de poliedros, a qual esclarece que esses são os sólidos geométricos cujas figuras planas que os compõem são todas polígonos. Aqueles sólidos que não se encaixam nessa característica são classificados como não poliedros. Em síntese, entendemos que uma explicação como essa, alinhada ao uso de um *software* de geometria dinâmica, a exemplo do próprio 3D *Geometry*, em que os alunos tenham a oportunidade de visualizar uma reunião finita de polígonos na constituição de diferentes poliedros, pode ser associada a um conhecimento especializado e a um conhecimento do conteúdo e do ensino de poliedros, uma vez que tange a saberes relativos às definições apropriadas para os estudantes do 7º ano e aos materiais didáticos que os auxiliam na aprendizagem desse assunto (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

Após explorarem mais algumas características do cubo (número de arestas, faces, vértices, etc.), Hilbert mostrou aos alunos a sua solidificação no aplicativo, assim como mostra a Figura 13:

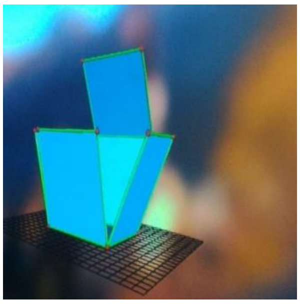


Figura 13: Projeção da solidificação do cubo
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

Na sequência da aula até o seu fim vários alunos foram ao computador manipular a dinâmica de planificação de diferentes sólidos geométricos: icosaedro, pirâmide, tronco de pirâmide dodecagonal, cilindro e esferas segmentadas.

Sobre as atividades com o pano e com o *software*, trazemos algumas considerações, levando-se em conta que os Docentes intencionaram alinhavar a ideia da representação dos sólidos no pano às explorações dos poliedros, não poliedros e suas respectivas planificações pelo aplicativo 3D *Geometry*. Vale sublinhar que o uso de tecnologias no ensino de Matemática é uma característica da docência de Benjamin, segundo o que foi relatado por ele em sua entrevista. Ao sugerir o uso do 3D *Geometry* aos Licenciandos, o Professor desejou que os estudantes visualizassem os sólidos (que eles já haviam explorado pelos materiais em acrílico), focalizando a sua planificação na malha quadriculada.

Isso pode ter melhor evidenciado que a planificação de uma figura espacial acontece de maneira integral entre suas partes, o que, através da atividade no pano, da maneira como ela foi conduzida, nos parece não ter ficado claro para alguns alunos. Com os sólidos planificados na dinâmica do *software*, também ficou mais fácil para os estudantes contarem seus números de vértices, arestas e faces. Além disso, na perspectiva apresentada pelo 3D *Geometry*, os estudantes puderam ver que as arestas dos poliedros são formadas pela sobreposição de dois lados dos polígonos que os compõem.

Diante das considerações colocadas, temos indícios de que, primeiramente, a execução da atividade com a pintura das faces dos poliedros no pano poderia ter dado uma abertura para que equívocos sobre a ideia de planificação de figuras tridimensionais fossem internalizados. Por outro lado, a atividade com o *software* complementou a atividade com o pano, auxiliando os Docentes no fornecimento de maiores esclarecimentos sobre planificações. Além disso, essa última atividade, a nosso ver, poderia ter ganhado um maior espaço na aula, em que houvesse uma apreciação dos estudantes das planificações juntamente à promoção de discussões voltadas para a caracterização das figuras, contagem de seus elementos (arestas, faces, vértices) e visualização de tipos mais incomuns de poliedros e não poliedros.

Analisando essa situação de sala de aula, pode-se inferir que configura-se como um conhecimento para o ensino de geometria necessário aos professores de Matemática saber escolher sequências de tarefas centradas na visualização, das quais fará uso para ensinar sobre poliedros e não poliedros e sua decomposição no plano, de modo que elas auxiliem os estudantes no desenvolvimento do raciocínio espacial, especialmente no que se refere à passagem do espaço para o plano. Também configura-se como um conhecimento matemático para o ensino de geometria o saber dos professores sobre a condução de explicações referentes à passagem do espaço para o plano, de modo que os erros e as concepções inadequadas dos alunos sobre planificações sejam explorados e possivelmente sanados. Ainda, pode-se considerar como um conhecimento relacionado ao conteúdo de poliedros e seu ensino, o conhecimento sobre o uso de *softwares* de geometria dinâmica para a promoção de uma visualização vinculada ao estudo das relações abstratas inerentes à construção de figuras planas e espaciais, à identificação e contagem de seus elementos, à planificação de figuras tridimensionais e ao entendimento dos conceitos associados às figuras geométricas (GUZMAN, 2002; BALL, THAMES, PHELPS, 2008; BALL, 2017).

4.3 Trabalhando com definições de quadrado e de hexágono regular: a aula do dia 06 de junho do ano de 2018

Antes de adentrar na descrição da aula do dia 06 de junho, falaremos um pouco sobre o que aconteceu na aula imediatamente anterior a esta. No dia 04 de junho, Hipátia não pôde estar presente na aula, e como ela e Hilbert estavam desenvolvendo juntos as aulas sobre poliedros e corpos redondos, Benjamin decidiu seguir com outra abordagem para a aula daquele dia, dando início ao trabalho com “artemetrias através a da atividade “curvas de retas”. Segundo Benjamin, a artemetria refere-se a uma abordagem pedagógica em que se trabalha com elementos da geometria euclidiana e de geometrias não euclidianas através do recurso à arte. O nome artemetria foi pensado pelo próprio Professor anos antes, quando da sua passagem pela Escola como professor substituto.

Para a aula deste dia, o Professor levou consigo alguns instrumentos de desenho geométrico: esquadro, régua, compasso e transferidor, todos de madeira e próprios para o uso no quadro. A mim e a Hilbert, Benjamin explicou que a aula tinha como objetivo que os alunos conhecessem técnicas de desenho geométrico e que explorassem o uso de alguns instrumentos, principalmente o compasso, de maneira adequada.

Antes do início da atividade, Benjamin deu algumas informações aos estudantes. A primeira foi de que, utilizando somente linhas retas, eles desenhariam uma curva conforme aquela que estava previamente desenhada no quadro. Na sequência, informou que antes de produzirem a artemetria que estava no quadro, os alunos fariam algumas construções geométricas iniciais que funcionariam como uma espécie de rascunho para um melhor entendimento de algumas técnicas de desenho geométrico. Após essas explicações, Benjamin iniciou o processo de construções geométricas com os alunos.

Durante a confecção da artemetria, o Professor construiu com os alunos, primeiramente, um ângulo de 90º. Nessa construção, Benjamin relembrou com os estudantes ideias a respeito de segmento de retas, ângulo reto e a sua utilidade na vida social, circunferência e arcos. O Professor também trabalhou com os alunos técnicas relativas ao desenho geométrico: traçado de linha de base (ou linha de fé), uso correto do lápis para um traçado suave, diferença entre ponto gráfico e ponto geométrico, uso correto de transferidores e compassos. Após fazerem o ângulo de 90º em seus cadernos, com auxílio do Professor, Hilbert e meu, os estudantes confeccionaram a artemetria (Figura 14)[31]:

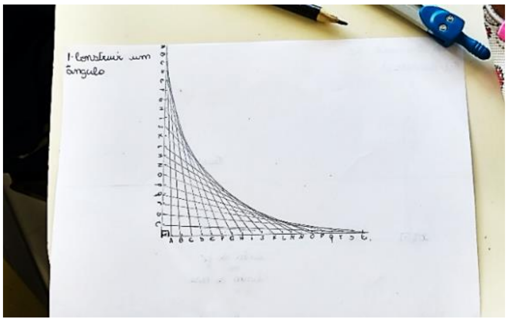


Figura 14: Artemetria feita por um estudante
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

No dia 06 de junho, os Licenciandos não participaram da aula e Benjamin iniciou a conversa com os alunos dizendo-lhes que continuariam com as artemetrias. Ouvi alguns alunos comemorando a notícia. Benjamin explicou que a primeira construção a ser feita seria um “quadrado inclinado”, de seis centímetros de medida de lado, e que tal figura deveria ser construída mais ao centro de uma folha A4 disponibilizada aos estudantes. Ele orientou-os na

[31] A curva de retas foi confeccionada após os alunos dividirem os dois lados do ângulo reto em segmentos de medidas iguais, nomear cada ponto dessa divisão, de maneira espelhada, por uma letra do alfabeto e ligá-las por retas. A curvatura formada pela tangência das retas formava a curva de retas da artemetria.

construção de dois lados adjacentes do quadrado. Enquanto os alunos construíam um quadrado em suas folhas, Benjamin continuou solicitando que o quadrado ficasse inclinado e terminou de desenhar a figura no quadro, conforme ilustrado abaixo na Figura 15:

Figura 15: Construção do quadrado no quadro
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

Benjamin: (...) A ideia é que o quadrado fique virado, tá? Ele não deixa de ser quadrado, ok? Quais são os elementos, as características de um quadrado, vocês sabem?
Melissa [levantando a mão]: Eu! Tem que ter os lados iguais.
Benjamin: Os quatro lados iguais.
Joana: O quadrado é que tem quatro ângulos de 90º?
Benjamin: Ele tem que ter quatro ângulos de 90º. Os quatro lados iguais [escrevendo essas informações no quadro]. Tá? Aí depois a gente vai ver isso pra ver como que essas definições funcionam. Porque eu tenho uma figura, olha só essa figura! Ela... Ela é uma quadrado [desenhou no quadro, à mão livre, um retângulo]?
Davi: É!
Alunos [em coro]: É.
Davi e Joana: Não...
Benjamin: E ela tem os quatro ângulos retos, olha só [fazendo as marcações com quadradinhos nos ângulos retos do retângulo]!
Davi: Ah, é um retângulo, ué!
Benjamin: Olha essa figura aqui, olha [desenhou no quadro, à mão livre, um losango].
Aluno: É um quadrilátero..
Benjamin: Ela tem os quatro lados iguais, mas ela não tem os quatro ângulos retos, tá vendo? Então, a gente vai ter que estudar esses elementos, bem aos poucos, por isso que a gente tem que ficar atento. Na figura que você vai desenhar aí agora, você precisa de uma figura de quatro lados. Os quatro lados têm que ter seis centímetros, mas, os ângulos internos dessa figura precisam ser ângulos de... 90º. Vai lá gente! (...) É engraçado que quando a gente vira o quadrado nessa posição [a posição em que estava o desenho no quadro], tem alunos que acham que isso não é um quadrado. Aí dá outro nome. Ah, isso aí parece aquela figura que é igual um docinho. Como é que chama aquela figura que é no formato de um docinho? Aquela que eu desenhei ali, mais ou menos, no canto. Como que se chama essa figura aqui, oh?
Davi: Losângulo...?
Benjamin: Losango! Não é losângulo, não! (...) Então, gente, se eu virar a figura desse jeito, ela é um quadrado ou é um losango?
Alguns alunos [em coro]: Losango.
Davi: Quadrado. Não. Os dois!
Benjamin: Os dois.

Aluno: Mas... Vai ser os dois assim...
Davi: Vais ser um losango meio...
Benjamin: Vai ser os dois. Sabe porquê? Você é belorizontino [perguntando para Davi]?
Davi: Eu? Não. Eu sou de Teófilo Otoni.
Benjamin: Mas você é teofilotonense ou é mineiro?
Davi: Sou os dois!
Alguns alunos: Os dois...
Benjamin: É os dois. (...) Então, ali [apontando para o quadrado desenhado no quadro] vai ser a mesma situação. Ele vai ser quadrado e vai ser losango.

Enquanto envolvia os alunos na construção de um "quadrado inclinado", Benjamin explorava, a partir da visualização dos estudantes da figura no quadro, algumas características de quadriláteros que os classificam como retângulos ou losangos. Benjamin voltou à construção do quadrado e disse aos alunos que, naquele momento, eles já sabiam como construí-lo ou como construir um losango com ângulos de 90º. Ele voltou-se para o quadro e explorou mais um pouco o quadrado que lá estava desenhado:

Benjamin: Olha só, gente. Essa figura geométrica [pausa]... Então, olha essa figura geométrica. Ela tem quatro lados?
Alunos [em coro]: Sim.
Benjamin: Então, se ela tem quatro lados [pausa]... Que nome que a gente dá pra ela na Matemática?
Alguns alunos: Quadrilátero.
Benjamin: Os quatro lados [pausa]... são paralelos? [Alunos ficaram pensativos] O que que isso quer dizer? Olha só. Se eu pegar esse lado aqui [apontando para um lado do quadrado desenhado no quadro] e esticar ele infinitamente [prolongou o lado com pontilhados nas duas direções] e esse lado infinitamente [fez a mesma coisa com o lado oposto] eles vão se encontrar?
Alguns alunos: Sim
Outros alunos: Não.
Benjamin: Ele tem um par de lados paralelos [pausa]... Eles não vão se encontrar, tá? Depois eu vou mostrar isso melhor no GeoGebra pra vocês.
Davi: Aham.
Benjamin: Então, que nome que eu dou pra figura que tem todos os lados paralelos?
Alguns alunos: Paralelogramo.
Benjamin: Paralelogramo. Olha só: Pa-ra-le-lo-gra-mo [escrevendo a palavra paralelogramo no quadro]. [Pausa] Agora nós vamos olhar para os ângulos. Ele tem quatro ângulos...?
Christopher: De 90º.
Benjamin: De 90º e que são chamados de ângulos... retos. Se ele tem todos os ângulos retos, que nome que eu dou para essa figura?
Christopher: Retângulo? Reto?
Benjamin: Reto ângulos. Junta tudo!
Alguns alunos [empolgando-se]: Retângulo!
Benjamin: Essa figura também é um retângulo. Agora, vamos olhar para os lados. Ela

tem os quatro lados iguais?
Alunos [em coro]: Sim.
Benjamin: Uma figura com os quatros lados iguais, que nome que eu dou para ela?
Aluno: Quatro lados! Quadrilátero!
Benjamin: Não. Quadrilátero é uma que tem quatro lados.
Alguns alunos [em coro]: Quadrado.
Benjamin: Não. Uma figura com todos os lados iguais se chama?
Christopher: Losango.
Benjamin: Losango. E aí, gente, olha só! Uma figura, que é um quadrilátero, que é paralelogramo, que é retângulo e que é losango, ao mesmo tempo, recebe o nome de...?
Alunos [em coro]: Quadrado.
Davi: Ah! Maneiro!

Todas as características do quadrado expostas pelo Professor aos alunos foram escritas no quadro enquanto ele fez a exploração: Quadrado: 04 lados = quadrilátero; 04 lados paralelos = paralelogramo; 04 ângulos retos = retângulo; 04 lados iguais = losango.

Benjamin: Então, que que é um quadrado? É um quadrilátero, porque tem quatro lados. É um paralelogramo, porque todos os lados são paralelos, né? Vão ter dois pares de lados paralelos. É um retângulo, porque vai possuir todos os ângulos de 90º, ângulos retos. É um losango, porque todos os lados são iguais. E aí, por ele ser isso tudo, ele recebe um nome especial que é quadrado. Então, um cara, para ele ser quadrado, ele tem que passar por isso tudo. E é esse o cuidado que a gente tem que ter. Ah, ele tem os quatro lados iguais, mas não tem os ângulos retos, vai ser quadrado?
Alunos [em coro]: Não.
Benjamin: Tá bom? E, assim, as pessoas às vezes se assustam. Se eu perguntar: isso aqui é um retângulo [apontando para o quadrado desenhado no quadro]?
Alunos [em coro]: É.
Benjamin: Isso aqui é um quadrilátero?
Alunos [em coro]: É.
Benjamin: Isso aqui é um losango?
Alunos [em coro]: É.
Benjamin: E isso é um quadrado?
Alunos [em coro]: É.
Benjamin: Além disso tudo, ele é um quadrado.

Benjamin perguntou quem sabia que o quadrado é uma figura caracterizada por tudo aquilo que estava no quadro. Nenhum aluno manifestou-se positivamente. Novamente, Benjamin usou a ideia de que uma pessoa daquela sala poderia ser, ao mesmo tempo, belo-horizontino, mineiro, brasileiro, etc., e explicou aos alunos que essas são classificações em grupos de pessoas pela origem regional. Nessa mesma lógica, segundo Benjamin, o quadrado também tem várias características que ocorrem ao mesmo tempo e que o incluem em várias classificações de figuras planas.

O Professor retornou ao fato de que o quadrado possui dois pares de lados paralelos. Nesse instante, ele deu um exemplo de um quadrilátero que não obedece a essa característica. Então, desenhou no quadro, à mão livre, um quadrilátero qualquer em que dois dos seus lados não contíguos, ao serem prolongados, se intersectavam. Ele fez os prolongamentos desses lados no quadro, pontilhando esses prolongamentos, e continuou a explicação sobre o porquê de aquela figura ser denominada quadrilátero e não especificamente um paralelogramo: “Pronto! Tá vendo aqui? Essa figura, ela tem um par de lados que não é paralelo. Se eu estico essa figura aqui, esse lado aqui [um dos lados da figura]. O lado oposto é esse aqui, né? Se eu estico esse lado infinitamente, você tá vendo que esse lado cruzou? Se ele cruzou, quer dizer que esse lado e esse lado [o lado oposto] não são paralelos. Essa figura nunca pode receber o nome de paralelogramo”.

Depois da discussão sobre o que é um quadrado, o Professor retornou às orientações para a construção da artemetria. Apontando para o quadrado que estava desenhado no quadro, Benjamin explicou aos alunos como traçar os pontos médios de dois lados do quadrado que haviam desenhado. Ele solicitou aos alunos que pegassem o compasso e o abrissem em 3,0 cm. Então, ele abriu o compasso, colocou a ponta seca sobre o ponto médio de um dos lados do quadrado que estava desenhado no quadro e traçou uma semicircunferência. O Professor instruiu os alunos a fazerem a mesma coisa com o outro ponto médio e, ao final da atividade, obtiveram a artemetria “coração geométrico” (Figura 16).

Figura 16: Coração geométrico construído por um estudante
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

Na sequência, o Professor passou à construção da próxima artemetria. Para tal, Benjamin solicitou aos alunos que começassem construindo um hexágono. Antes, ele explorou com os alunos os significados dos termos hexa e gono e concluiu com os estudantes que hexágonos são figuras com seis lados:

Benjamin: Se eu quiser desenhar um hexágono, basta eu fazer aqui, olha, um, dois, três, quatro, cinco, seis [fazendo, no quadro, um hexágono qualquer, sem o formato

prototípico, à mão livre (Figura 17)].
Lea: Quê?
Benjamin: Isso é um hexágono. Um hexágono, ele tem que ter um, dois, três, quatro, cinco, seis lados.
Davi: Isso é um hexágono!? Eu posso fazer do jeito que eu quiser!?
Benjamin: Uai, eu só disse um hexágono, não foi?

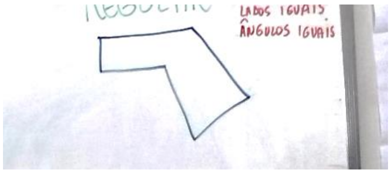


Figura 17: Desenho de um hexágono qualquer no quadro
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

O Professor solicitou aos estudantes que fizessem hexágonos em seus cadernos, respeitando que o hexágono deveria ser uma figura de seis lados. Ao passar pelos grupos, notei que os alunos usaram a sua criatividade para fazê-los, mas a maioria deles desenhou hexágonos com uma forma prototípica, próxima àquela comum nos livros didáticos. Fernando, ao mostrar o hexágono que desenhou ao Professor (parecia uma letra L), falou que o seu hexágono não estava “bonitinho”. Benjamin perguntou-lhe o que isso significava, mas o aluno não soube explicar:

Benjamin: O Fernando falou que [o hexágono] tem que estar bonitinho. O que que define a boniteza de uma figura geométrica?
Davi: A artemetria.
Benjamin: Não... Vocês já têm um padrão que vocês buscam nas figuras geométricas. Se eu perguntasse o nome daquela figura geométrica [apontando para o hexágono desenhado no quadro], vocês dariam o nome de hexágono a ela?
Alunos [alguns parecendo pensativos]: Não...
Davi: Não. Eu daria o nome de nada.
Cássio: Eu daria o nome de vira lata [risos].
Benjamin: Sabe porque, gente? A gente tá tão acostumado a ver em livros e em outros lugares é... um hexágono bonitinho, né? Como o Fernando disse. Que quando vem um hexágono estrainho, a gente não dá conta. [Pausa] Quando eu quiser um hexágono bonitinho, como que eu vou pedir ele para vocês? Eu vou escrever aqui: faça um hexágono bonitinho?
Alguns alunos [em coro]: Não.
Fernando: Faça um hexágono perfeito.
Lucas: Com lados iguais?
Benjamin: Bonitinho, perfeito, (...), lados iguais, e aí [listando no quadro os adjetivos que os alunos estavam dando para o hexágono]?
Joana [falando em tom de voz baixo]: O que que é um hexágono?
Benjamin: Não basta ser só isso, eu preciso também o quê? Que os ângulos...? Sejam iguais. Mas, imagina se toda vez que eu fosse falar, eu fizesse essa lista toda? Na

Matemática, então, a gente pode substituir isso pela expressão [pausa] [escrevendo a palavra Regular no quadro] Qual a palavra que eu escrevi? **Aluna** [em voz alta]: Regular.

Benjamin, então, solicitou aos alunos que tentassem construir um hexágono regular em suas folhas e os alunos iniciaram a construção. Passamos pelos grupos verificando as suas construções. Alguns estudantes estavam usando a régua para construir o hexágono e alguns estavam tentando fazê-lo à mão livre. O Professor falou com vários alunos que as suas construções estavam boas, ou como o Professor e os estudantes estavam dizendo, os hexágonos estavam "bonitinhos". Entretanto, Benjamin explicou-lhes que os hexágonos que construíram ainda não eram regulares.

Ao solicitar aos alunos que construíssem hexágonos quaisquer, usando a sua criatividade, Benjamin levou os alunos a construções intuitivas e não padronizadas dessa figura. Da mesma forma, na construção da artemetria anterior, Benjamin também destacou uma representação do quadrado em uma posição não padronizada. Isso levou os estudantes a ampliarem, naquele momento, a sua imaginação para além da ideia permanente das figuras geométricas prototípicas, geralmente encontradas nos livros didáticos, apostilas, etc.

O Professor se aproveitou da construção de um hexágono qualquer, como o de Fernando, e da constatação do aluno de que o seu hexágono não estava em um formato padrão, geralmente estudado na escola, para explorar com os alunos sobre figuras regulares. Ao perguntá-los sobre "o que define a boniteza de uma figura", Benjamin recorreu ao adjetivo "bonitinho", colocado por Fernando, para chegar à ideia de hexágono regular. Não houve uma apresentação pronta da definição de hexágonos regulares proposta no quadro, mas, sim, uma sistematização do conceito a partir do diálogo desencadeado pela constatação do aluno ao fazer uma construção de um hexágono qualquer.

Benjamin explicou que não é fácil construir hexágonos, triângulos, entre outras figuras regulares sem o uso dos instrumentos de desenho geométrico. Ele frisou que, a olho nu, conforme percebeu que alguns alunos estavam tentando fazer, a construção não garantiria a regularidade da figura. Ele continuou a explicação sobre como os alunos deveriam proceder com as técnicas de desenho geométrico para construírem um hexágono. A técnica utilizada por Benjamin, e explicada aos alunos, partiu da construção de uma circunferência para a obtenção de um hexágono nela inscrito. Após finalizada a construção, o hexágono regular tomou a forma comumente encontrada nos livros didáticos, conforme retrata a Figura 18:

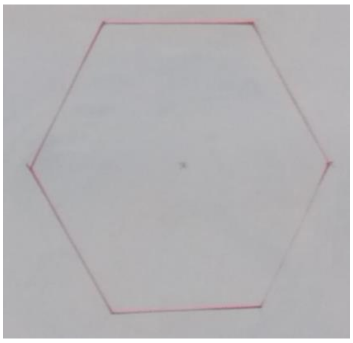


Figura 18: Construção de um hexágono regular no quadro
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

O Professor refez os passos com os alunos para que eles pudessem construir um hexágono regular em suas folhas e, em seguida, passou à construção da artemetria nomeada "Estrela de Davi". Após dar aos estudantes instruções sobre como obter a figura desejada, os alunos concluíram o desenho (Figura 19):

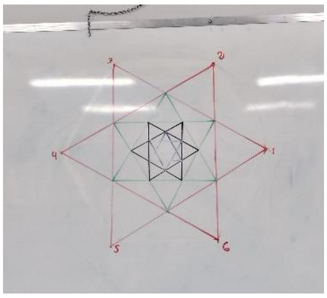


Figura 19: Construção da Estrela de Davi no quadro
(Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora)

Durante a entrevista, Benjamin lembrou que, nessa aula, ele não abordou os alunos dizendo que iriam estudar o quadrado ou o hexágono. Segundo o Professor, ele preferiu dizer a eles que fariam duas artemetrias, indicando a construção de algo diferente, e isso, de acordo com o que observamos, despertou interesse e dedicação nos alunos.

Ao propor a construção de um "quadrado inclinado", consideramos que houve uma fuga do desenho na posição prototípica que geralmente encontramos. O Professor explorou com os estudantes a ideia de que aquela posição, sob a qual o quadrado estava desenhado, não interferiria na sua definição como tal figura, retirando o posicionamento do foco quando se pensa na sua caracterização. Vale ressaltar que Benjamin preocupou-se, inclusive, em deixar claro para os estudantes que a não padronização das configurações das figuras não interfere na sua caracterização geométrica.

Sua discussão sobre o quadrado, a nosso ver, priorizou importantes elementos do estudo de uma figura geométrica, pois além de criar uma situação em que os alunos pudessem fazer uma construção do quadrado, manuseando instrumentos da geometria, ainda os levou à discussão sobre as condições de sua caracterização como tal. Sobre a definição de quadrado, embora os alunos já possuíssem conhecimentos sobre tal figura, seja pela sua experiência escolar ou pela experiência social, Benjamin, a partir da forma de ensino abordada, reconstruiu e sistematizou o conceito relativo a tal figura geométrica de uma maneira em que a visualização e a intuição estiveram em harmonia no desenvolvimento do raciocínio geométrico. Nessa aula, o Professor trabalhou sob a perspectiva de que uma figura geométrica tem natureza conceitual (FISCHBEIN, 1993). Um quadrado não se trata de apenas de uma imagem desenhada na lousa ou em uma folha de papel. Trata-se de uma forma regulada por uma definição, ainda que esta definição seja guiada por um objeto real.

Nessa situação de sala de aula, percebemos que Benjamin fez um uso mais recorrente de uma linguagem formal da geometria. Nota-se que ele evitou usar termos mais informais para, por exemplo, destacar as características das figuras a serem estudadas. Nessa aula, os momentos em que o Professor utilizou de uma linguagem mais informal (bonitinho, estrainho, boniteza, forma de um docinho), geralmente estavam relacionados ao aproveitamento que fez das colocações dos alunos, sem deixar, no entanto, de introduzir gradativamente um vocabulário específico da geometria.

Segundo Tirosh, Tsamir e Levenson (2011), professores precisam ter um conhecimento relacionado às componentes conceituais das figuras geométricas e ao ensino de geometria que convirjam para o uso adequado e preciso da linguagem geométrica em cada nível de escolaridade. Para os autores, isso inclui saber como e até quando ele deve usar de palavras mais informais para se referir às características e propriedades das formas, da mesma maneira que como e quando chegar ao vocabulário específico.

Nessa situação de sala de aula, pode-se perceber uma mobilização de um conhecimento especializado do Professor sobre uma maneira de se definir o quadrado (BALL, THAMES, PHELPS, 2008), em que há uma caracterização dessa figura geométrica, apoiada em uma representação não prototípica, que a inclui em outras classificações de figuras planas e que expressa para os estudantes tanto as suas propriedades figurais quanto conceituais.

Emerge dessa situação, ainda, um conhecimento mobilizado por Benjamin sobre o uso de figuras não prototípicas como um importante elemento da visualização, o qual fomenta a criação de imagens mentais não necessariamente padronizadas e que contribuem na obtenção de significados, favorecendo o entendimento de conceitos. Também relaciona-se a essa situação, a nosso ver, um conhecimento sobre um tipo de atividade em que é possível se trabalhar tanto a construção não padronizada da figura, quanto a exploração da sua caracterização. Os dois últimos conhecimentos mencionados alinham-se ao que que Ball, Thames e Phelps (2008) nomeiam, respectivamente, como conhecimento do conteúdo e dos estudantes e conhecimento do conteúdo e do ensino.

4.4 Discussões sobre conhecimentos matemáticos para o ensino de figuras espaciais e planas

Segundo os relatos das aulas, foi possível perceber que Hipátia e Hilbert, em um planejamento realizado em conjunto com Benjamin, que esteve na sala de aula todo o tempo orientando e supervisionando os Licenciandos em suas práticas, procuraram promover a aprendizagem dos alunos sobre figuras espaciais e planas por meio de uma abordagem em que estes pudessem expressar e debater as suas concepções sobre os entes geométricos e em que o afloramento de dúvidas foi privilegiado. Benjamin, enquanto supervisor dos Licenciandos, procurou orientá-los quanto às atividades e materiais didáticos que facilitassem esse movimento, preocupando-se com o avanço do pensamento geométrico dos alunos do 7º ano e com a formação dos futuros professores para uma prática dialógica.

Os Docentes priorizaram o atendimento às dúvidas dos estudantes, ainda que, em certos momentos, foi possível notar que a dúvida colocada talvez não fora previamente pensada por eles como um possível questionamento relacionado ao assunto ensinado. Destacamos, além disso, a busca dos Docentes em discutir com os alunos, de maneira ampla, sobre suas concepções equivocadas, não respondendo diretamente às perguntas na maioria das vezes. Ao sustentar uma proposta de aula como tal, Benjamin, Hilbert e Hipátia, em nossa interpretação, valorizaram a exploração de ideias dos estudantes como parte essencial da construção do conhecimento geométrico.

Em resumo, nossa compreensão foi de que as aulas observadas no 7º ano trataram de conteúdos básicos e essenciais da geometria do Ensino Fundamental e que houve explorações e discussões, amparadas nas percepções dos estudantes, desses conteúdos, bem como, incentivo ao raciocínio intuitivo. A apresentação e discussão de conceitos e caracterizações relativos aos objetos estudados, a nosso ver, ficou em um horizonte mais distante nessas aulas. Com isto, consideramos que os Docentes tomaram as aulas observadas como oportunidades para um contato ainda intermediário dos estudantes com o estudo de poliedros e não poliedros.

Se considerarmos que os Licenciandos, no momento das observações, eram professores em formação sob a supervisão de um Professor experiente com o ensino básico de

Matemática, a experiência com essas aulas proporcionou-lhes muitas aprendizagens. Dado que a Escola onde a pesquisa aconteceu é uma escola-laboratório de ensino, o fato de as aulas terem sido ministradas por estagiários iluminou certas características de insegurança dos Licenciandos no tratamento de algumas questões levantadas nas aulas, diante da metodologia adotada, o que, talvez, caso as aulas tivessem ocorrido somente pela ministração de Benjamin, não seriam tão visíveis. Podemos apontar isso como uma característica das situações observadas.

A respeito dos debates das dúvidas e concepções, ressaltamos a participação de alguns alunos, como Joana, Melissa e Davi, os quais levantaram questões que, provavelmente, pairavam nas mentes de outros estudantes da turma. Em especial, destacamos a participação de Joana, principalmente quando a aluna explicitou para os Docentes que a determinação das bases de alguns poliedros e corpos redondos não estava clara para ela, o que consideramos que tenha ecoado uma dificuldade vivida pelos demais estudantes.

Com base nos relatos das situações de sala de aula, e de algumas das questões que nelas foram levantadas, procuramos trazer à luz demandas de conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria no Ensino Fundamental que emergiram das situações observadas, de modo que tais saberes pudessem ser analisados na perspectiva dos referenciais teóricos adotados. Conforme já relatado, focalizamos na análise, principalmente, as demandas de conhecimentos relacionados à visualização em geometria. Assim sendo, identificamos alguns conhecimentos, os quais entendemos que fazem parte da constituição de um conjunto de conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria no Ensino Fundamental, e que, portanto, são específicos do professor de Matemática. Os resumimos a seguir como:

i) Conhecimentos especializados sobre prismas, pirâmides, cones e cilindros, que auxiliem os professores na construção, junto aos estudantes, de uma caracterização dessas formas geométricas como aquelas que possuem faces predefinidas como suas bases e de maneira que o papel desses elementos, nessa caracterização, seja explicitado. Conhecimentos especializados sobre troncos de pirâmides e troncos de cones, que auxiliem os professores a caracterizá-los, junto aos estudantes, como sólidos gerados a partir da produção de seções planas e paralelas às bases de pirâmides e cones. Conhecimentos especializados sobre poliedros e não poliedros, que auxiliem os professores a explicar para os alunos uma caracterização dos primeiros como figuras espaciais formadas por uma reunião finita de polígonos, em que cada lado de cada polígono é comum a um outro polígono.

ii) Conhecimentos sobre o currículo escolar e sobre a evolução dos conhecimentos nele destacados ao longo da escolarização básica, que auxiliem os professores na definição das metodologias de ensino melhores a serem utilizadas na introdução de conceitos geométricos, procurando por formas de ensino mais participativas, com a consciência de que essas metodologias poderão levar a uma flexibilização das linguagens, dos registros e dos entendimentos sobre o assunto abordado.

iii) Conhecimentos sobre a visualização, enquanto componente do ensino e aprendizagem de geometria, como um processo relacionado à criação e à interpretação de imagens mentais para a geração de informações sobre entes geométricos, ao reconhecimento de relações e transformações entre objetos da geometria, à caracterização de formas geométricas, à construção e compreensão de conceitos e à simbiose entre as componentes figurais e conceituais das figuras geométricas. Esses conhecimentos implicam em outros, os quais estão relacionados aos obstáculos e às dificuldades associados ao uso da visualização no ensino de geometria na Educação Básica, e em conhecimentos sobre a antecipação de dúvidas que possam ser levantadas pelos estudantes, especialmente quando se trabalha com a manipulação e visualização de representações concretas de figuras geométricas.

iv) Conhecimentos sobre um repertório diversificado de representações de figuras geométricas, que auxiliem o professor na condução do progresso dos estudantes na criação de imagens mentais dos entes geométricos. Conhecimentos sobre um repertório de representações de imagens de figuras espaciais e planas (desenhos, materiais concretos, imagens dinâmicas geradas em *softwares*, entre outras) não prototípicas, que encorajem os estudantes a evitarem a recorrência excessiva às figuras prototípicas como únicas imagens mentais de figuras geométricas.

v) Conhecimentos sobre o uso adequado da linguagem geométrica em cada nível de escolaridade, o que implica em saber como e até quando, durante o ensino de geometria, se deve usar uma linguagem mais informal para se referir às características e propriedades das formas, assim como, sobre como e quando se deve chegar ao vocabulário específico da geometria escolar.

vi) Conhecimentos relacionados à escolha e à criação de situações didáticas e tarefas, que auxiliem os estudantes no desenvolvimento do raciocínio espacial, especialmente no que se refere à passagem do espaço para o plano, e que lhes proporcionem oportunidades de experimentação, de construção e de análise de representações diversas de figuras geométricas, bem como, possibilidades de construção e análise dos conceitos a elas relacionados.

vii) Conhecimentos sobre a escolha e o uso de *softwares* de geometria dinâmica, que ajudem os estudantes na visualização de diferentes tipos de figuras espaciais. Tais conhecimentos também poderão auxiliar o professor a conduzir os processos de construção, caracterização e transformações das principais figuras a serem estudadas, de criação de imagens mentais, pelos estudantes, para além de imagens padronizadas, e do desenvolvimento dos alunos tanto de habilidades visuais quanto do raciocínio abstrato relacionado aos aspectos figurais e conceituais das formas geométricas.

Tecemos, no que se segue, comentários e discussões a respeito de alguns dos conhecimentos apontados acima, situando os comentários e discussões na literatura sobre questões relacionadas ao ensino e aprendizagem de geometria consultada.

Primeiramente, cabe comentar, mais uma vez, que na medida em que os alunos se envolveram na manipulação e visualização dos objetos geométricos em acrílico, as questões sobre a determinação da base (ou das bases) de uma figura espacial e sobre quais figuras possuem faces especificadas como tal elemento tomaram cada vez mais um lugar de destaque nas discussões. Na aula do dia 21 de maio, alguns alunos, ao verem fotografias nos *slides* (um sorvete e o Museu do Louvre, por exemplo), referiram-se às imagens nelas presentes destacando a figura geométrica associada e dando ênfase às bases dessas figuras (uma pirâmide de base quadrada foi identificada e citada no caso do Museu do Louvre). De acordo com o relato dos Docentes sobre o resultado do *quiz* realizado no *Kahoot!*, os alunos também demonstraram, por meio dessa atividade, ter noções sobre os elementos das formas tridimensionais. Esse fato já poderia dar indícios de que os alunos possuíam alguns conhecimentos, segundo o que aprenderam em algum momento da sua vida escolar e/ou social, relacionados ao fato de que alguns poliedros possuem faces que são consideradas como suas bases.

Vale lembrar que o estudo pautado na visualização e reconhecimento de formas como prismas e pirâmides está previsto nos currículos da Educação Básica para acontecer em anos escolares anteriores ao 7º ano. Apesar disso, a ideia de bases, mesmo tendo sido vastamente debatida, nos parece não ter ficado clara para alguns estudantes, haja vista que eles continuaram se questionando sobre esse elemento durante muito tempo das aulas e que algumas de suas falas reverberaram entendimentos confusos em vários dos momentos em que precisaram raciocinar sobre as figuras que estavam sendo exploradas. A polêmica em torno de como determinar as bases de certas figuras também aconteceu, em determinados momentos, para os próprios Docentes, que recorreram a explicações sobre as bases e sobre a caracterização de prismas que, em alguns pontos, não satisfaziam ou contradiziam alguns elementos da caracterização geométrica das figuras.

A opção metodológica dos Docentes para aquelas aulas, conforme relato de Benjamin em sua entrevista, não era fazer uma apresentação imediata de conceitos para os estudantes, e pudemos perceber que isso foi sustentado por ele e os Licenciandos durante as aulas sobre poliedros e não poliedros:

> (...) eu acho que quando você dá um espaço, e por mais que na teoria as pessoas digam que tem que ter diálogo, isso vai muito da prática e do saber ouvir. Quando o menino diz para mim o que rola e o que não rola, o que é base e o que não é, eu acho que você deve ter percebido que eu não respondi, por que se eu respondesse eu cessava aquela construção toda, que pode ir para um caminho ruim, mas pode ir para um caminho muito bom, e eu acho que é melhor ir para um caminho ruim e depois a gente desconstruir e conversar, do que se eu finalizo a situação e digo “é assim”. Até porque nem sempre é, e eles trazem, trouxeram coisas e elementos muito bacanas, e acho que deu para você perceber que muitas das vezes eu olhava para os estagiários para ver a reação deles, ou para ver como eles participavam daquela discussão, por que vindo do ICEX eles tendem a querer responder tudo (...)Você vê que, às vezes, eu silenciava, porque as vozes vinham e vinham coisas muito interessantes, e coisas que fazem a gente pensar e repensar o próprio conteúdo. Porque muitas das vezes eles [os alunos] colocam a gente em uma situação que você tem que repensar “Espera aí, que lei é essa? Que definição que é essa?”. A gente está baseando em definição, e foi uma discussão que a gente teve hoje com os novos estagiários, que assim, a própria geometria, você tem toda a definição, mas a hora que você fala “Não. Eu vou ensinar geometria na prática e na vida dos meninos”, são duas coisas completamente distintas (...) e aí você tem que ceder para um dos lados, e por isso que deixá-los falar começa a mobilizar outros conhecimentos, né? (Trecho transcrito da entrevista com Benjamin).

Em casos como esse, em que a construção de conceitos gira em torno de um conjunto de sistematizações de ideias variadas, emergentes dos raciocínios dos alunos, pode ocorrer um favorecimento de tal construção de modo que se proporcione a compreensão do conhecimento do senso comum e do conhecimento matemático propriamente dito. Para Zaidan (2001):

> Certamente que esse *saber matemático* também implica a apropriação da linguagem matemática e um raciocínio matemático, abstrato e generalizável, com sua lógica própria. O que pode estar apontado para nós, educadores matemáticos, é a necessidade de conceber um desenvolvimento da matemática na escola básica de maneira que, nos níveis mais fundamentais da formação de crianças e adolescentes, talvez devamos abrir mão de uma formalização matemática – que a despeito do esforço de muitos professores é complicada de ser construída em qualquer escola e, muitas vezes, incompreendida pelos alunos (formalização matemática é aqui entendida como uma apresentação rigorosa dos conceitos matemáticos, fazendo uso da lógica dedutiva e da linguagem simbólica própria). Uma formalização que poderia ir sendo melhor construída pelo docente e entendida pelo aluno se tratada ao longo de anos, colocando-se objetivamente como possível, em alguma medida, no nível de ensino médio, e prontamente no nível superior, quando há uma formação do profissional (D´AMBRÓSIO, 1996; CARVALHO, 1996). Essa formalização seria alcançada por um processo gradual de sistematizações e organizações locais do conhecimento matemático, que, segundo DAVID (2001), se tornam necessárias para

> a construção das ideias matemáticas, desde os primeiros anos de escolarização. (ZAIDAN, 2001, p. 297, grifo da autora).

Apesar de a intenção metodológica para as aulas não ter girado em torno da apresentação imediata de definições - o que, inclusive, compreendemos como um saber relevante para os professores da Educação Básica para o ensino de geometria -, segundo relato das observações, é fato que houve uma extensão do debate e do não entendimento dos alunos sobre qual face das formas em estudo poderiam ser consideradas como suas bases e sobre quais daquelas formas possuíam tais elementos. Em nossa visão, esses desentendimentos acabaram por demandar que, em algum momento do estudo dos poliedros e não poliedros, nas aulas em que os objetos de acrílico estavam sendo explorados, alguma sistematização e/ou discussão a respeito da caracterização de pelos menos certas formas – como os prismas – fossem proporcionadas.

Uma exploração da caracterização de algumas formas, adequada para o ensino de geometria no 7º ano, a nosso ver, poderia auxiliar os Docentes a proporcionar aos alunos esclarecimentos sobre quais eram as figuras, entre aquelas que estavam sendo estudadas, para as quais podemos falar em bases, bem como, a esclarecer qual é o papel específico desse elemento na caracterização de cada uma daquelas formas. Vale, aqui, ressaltar que as aulas seguintes às primeiras discussões sobre poliedros e não poliedros seguiram para a realização de uma tarefa em que se solicitou dos estudantes a dedução e aplicação em exercícios da fórmula de Euler. A chegada a esse assunto e sua exploração pressupõem que os estudantes tenham realizado um estudo mais esclarecedor sobre a caracterização de poliedros. Inclusive, essa mesma tarefa solicitava aos alunos que identificassem as bases de alguns poliedros desenhados na folha.

Em síntese, compreendemos que houve uma demanda dessa situação de um conhecimento para o ensino de poliedros relacionado à exploração de caracterizações e conceitos - elaborados do ponto de vista da geometria escolar - referentes a certas formas em estudo, os quais pudessem auxiliar os Docentes a esclarecerem a questão sobre as bases para os estudantes.

Salientamos o fato de que, perante à continuidade do afloramento das questões apresentadas pelos estudantes sobre as bases de algumas figuras, os Docentes, assim como nós, reconheceram a relevância, naquele momento, de se fazer algumas explorações de cunho mais conceitual sobre as formas exploradas, e procuraram fazê-las. No que se refere à ideia de bases, os Docentes propuseram que esses elementos "se definem" como "o que diferenciam as figuras entre si". No que diz respeito à caracterização de prismas, os docentes engendraram pelo conceito de que estas são formas "cujas faces laterais são todas retangulares". Todavia, essas sistematizações acabaram por desencadear algumas dificuldades de entendimento dos alunos, as quais foram expostas em alguns diálogos que apresentamos.

Em nossa visão, a abordagem do assunto poliedros e não poliedros, nas aulas analisadas, circulou em torno da visualização de alguns tipos de representações dessas figuras, no sentido do "ver para argumentar" (SANTOS, 2014). Ou seja, os argumentos debatidos na aula foram formulados e discutidos após a visualização dos objetos pelos alunos. Nesses casos, de acordo com autores como Gutiérrez (1996), a visualização precisa reforçar o uso das representações para obtenção de informações que auxiliem na criação e no uso de imagens mentais como representações de conceitos geométricos.

Especialmente sobre conceitos geométricos, estes podem ser entendidos no contexto da geometria ensinada na Escola Básica como um conjunto composto pelas propriedades, relações e definições referentes aos entes geométricos (CIFUENTES, 2003). Consideramos que o conceito de quadrado mobilizado por Benjamin na aula do dia 06 de junho exemplifica essa noção. Ainda de acordo com Cifuentes (2003, p. 60), dada a natureza visual de diversas designações na geometria (forma, congruência, semelhança, etc.), os conceitos geométricos precisam exprimir, "além de propriedades, transformações e correspondências inerentes aos entes estudados".

Novamente sobre o processo de construção e aprendizagem de conceitos geométricos, pode-se dizer que são várias as contribuições do estímulo aos alunos à criação de imagens mentais, as quais os professores precisam conhecer. Dreyfus (1991), por exemplo, defende que imagens mentais de conceitos matemáticos são necessárias à obtenção dos significados a eles associados. Gutiérrez (1996), citando Kosslyn (1980), afirma que este autor já identificava quatro processos aplicáveis à visualização em relação às imagens mentais que são importantes no estudo conceitual e que precisam ser reconhecidos pelos professores. O primeiro deles diz respeito à capacidade que se deve desenvolver nos estudantes de geração de uma imagem mental de uma figura a partir do conhecimento de informações sobre ela. O segundo refere-se ao fortalecimento das habilidades dos estudantes em explorar imagens mentais para que se possa observar os elementos fundamentais da figura estudada. O terceiro corresponde ao desenvolvimento da capacidade dos alunos de transformação de uma imagem mental de uma figura em outras imagens mentais dessa mesa figura ou de outras figuras. Finalmente, temos o desenvolvimento das capacidades dos alunos no uso de imagens mentais como suporte de suas respostas a questões sobre as características e propriedades das figuras geométricas.

Gutiérrez (1996) traz um exemplo do que Kosslyn (1980) defende ao nos provocar a pensar que alunos que estão aprendendo conceitos e relações entre quadriláteros podem ser estimulados, enquanto isso, a imaginar um retângulo se “encolhendo” para se tornar um quadrado e transformando-se, depois, novamente em um retângulo. Trazendo essa reflexão de Gutiérrez (1996) para os contextos de ensino atuais, as imagens mentais dos estudantes, enquanto aprendem conceitos da geometria, poderiam ser melhor desenvolvidas com auxílio do uso de imagens concretas e dinâmicas geradas por *softwares*, por exemplo.

A respeito da sistematização de caracterizações de algumas das formas tridimensionais que, segundo nosso olhar, poderiam auxiliar no esclarecimento de alguns desentendimentos durante as aulas observadas - e que compreendemos que se configuram como conhecimentos importantes para os professores durante o ensino de figuras espaciais - consideraremos uma breve discussão sobre uma caracterização de prismas nesta tese.

Do ponto de vista da Matemática Acadêmica, um prisma pode ser construído e definido a partir de um polígono $A_1A_2...A_n$ contido em um plano α. Escolhe-se um ponto B_1 qualquer, não pertencente a α, e traça-se por esse ponto um plano β paralelo a α. Traçam-se o segmento de reta A_1B_1 e, pelos demais vértices $A_2...A_n$, os segmentos de retas paralelos e congruentes a A_1B_1 que cortam β nos pontos $B_2...B_n$. Chama-se prisma (ou prisma convexo) a reunião dos segmentos de retas paralelos a A_1B_1 que cortam β nos pontos $B_2...B_n$. Os polígonos $A_1A_2...A_n$ e $B_1B_2...B_n$, contidos nos planos α e β, respectivamente, são chamados de bases do prisma. Os quadriláteros $A_1B_1A_2B_2$, $A_2B_2A_3B_3$, e assim por diante, são paralelogramos que compõem as faces laterais da figura (Figura 20) (CARVALHO, 2005):

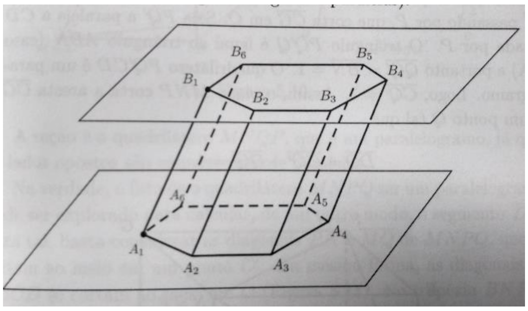


Figura 20: Construção de um prisma

(Fonte: CARVALHO, 2005, p. 37)

Essa maneira de se construir e se definir um prisma esclarece que as suas bases são os dois polígonos congruentes e paralelos $A_1A_2...A_n$ e $B_1B_2...B_n$. As faces do prisma são paralelogramos – nem sempre retângulos – por consequência da sua construção a partir dos dois polígonos paralelos. No entanto, defendemos que apresentar aos alunos de modo já finalizado uma definição dessas figuras sob esse ponto de vista – o qual é, em geral, o principal ponto vista apresentado nas disciplinas que trabalham especificamente com conceitos da geometria na formação inicial de professores – não se mostra adequado da perspectiva do ensino de geometria no 7º ano do Ensino Fundamental.

Perante a essa defesa, é conveniente destacar o papel das definições na Matemática Escolar. Segundo uma análise de Moreira e David (2005), antes de se trabalhar com uma definição na escola, há que se refletir sobre o fato de que ela precisa ser entendida pelos estudantes. Ou seja, é necessário ao professor considerar a adequação dessa definição ao contexto escolar. Para os autores:

> (...) as características da prática escolar tendem a favorecer um modo mais flexível de caracterização dos objetos matemáticos, muitas vezes através de referências descritivas ou de imagens intuitivas, no lugar de definições formais. Mesmo porque a definição formal parece não desempenhar, entre os estudantes, um papel muito significativo no processo de construção do conceito a que ela se refere. Muitas vezes, nem mesmo é evocada de modo relevante, numa situação de resolução de problemas envolvendo o conceito. (MOREIRA, DAVID, 2005, p. 30).

Ainda na perspectiva desses autores, na Matemática Escolar o conhecimento de um objeto pelos alunos está relacionado à construção de um repertório seu de representações de tal objeto, nem sempre inteiramente consistentes, as quais podem conter ou não elementos da definição acadêmica. Moreira e David (2005) também chamam atenção para o fato de que a flexibilização nas caracterizações dos objetos matemáticos exercida pela Matemática Escolar pode causar problemas, ao passo que as imagens criadas pelos estudantes para apoiar essa caracterização podem ser "para um mesmo indivíduo e para um mesmo conceito contraditórias, limitadas e mesmo, em certos aspectos, conflitantes com a definição formal do objeto" (p. 31).

Quando discutem sobre os "não saberes" associados à prática docente, Moreira e David (2005, p.44) argumentam a respeito da aprendizagem de conceitos. Inicialmente, os autores situam a identificação de um conceito abstrato que um estudante realiza como um estágio "necessário e fundamental" do seu aprendizado e, em certos momentos do seu relacionamento cognitivo com o conceito, essa identificação pode ser a maneira como o estudante pode e consegue aprendê-lo. Diante disso, os autores pontuam a importância de que o trabalho com conceitos realizado pelo professor precisa:

> (...) conduzir a uma relação qualitativamente nova: a identificação com uma forma concreta não é mais um expediente precário e provisório de apreensão do conceito, mas, ao contrário, ela resulta agora de um amplo domínio, de uma capacidade de flexibilização que permite – como num processo metonímico – ora tomar uma forma concreta de representação em lugar do próprio conceito, ora a operação inversa, de acordo com as circunstâncias (p.44).

Nas aulas em que os Docentes trabalharam com formas poliédricas e não poliédricas, destacamos que houve uma mobilização de conceitos relacionados aos prismas, quando procuraram esclarecer a demanda das bases para os estudantes. Assim como propõem os autores citados, os Docentes não recorreram a definições da Matemática Acadêmica (ou formal) dessas formas, mas, sim, a uma definição que levou em conta as representações utilizadas nas aulas e as ideias emergentes das discussões. O que ocorreu, a nosso ver, foi que a flexibilização adotada pelos Docentes, da maneira como aconteceu, acabou permitindo que as definições propostas se tornassem de certa forma inconsistentes, por, por exemplo, não satisfazerem alguns elementos da caracterização básica dos prismas enquanto figuras geométricas dotadas de propriedades específicas.

Portanto, considerando-se as dificuldades dos Docentes, presentes em determinados momentos do ensino observado, em tratar de algumas sistematizações conceituais relativas a certas formas tridimensionais, visando ao esclarecimento de algumas questões levantadas pelos estudantes, como a questão sobre as bases, inferimos que seja relevante para a formação dos professores de Matemática conhecimentos específicos para o ensino de poliedros e não poliedros que os auxiliem a conduzir explicações sobre caracterizações de formas tridimensionais. Tais conhecimentos são, para nós, considerados muito complexos, uma vez que entendemos que eles devem ultrapassar as condições necessárias e suficientes garantidas pela Matemática Acadêmica para a construção de definições, levando em conta, principalmente, além dos condicionantes da própria teoria da geometria proposta para ser ensinada no ano escolar em que se esteja trabalhando, diversos elementos que se edificam a partir da lógica do ensino na Escola Básica.

Isto é, sugerimos que os professores de Matemática, ao trabalharem com o ensino de prismas no Ensino Fundamental, por exemplo, precisam saber analisar os momentos da instrução em que conceitualizações são necessárias, sobretudo a partir das demandas das dúvidas e discussões emergentes do coletivo da sala de aula. Do mesmo modo, necessitam conhecer maneiras de se conceituar/caracterizar essas formas, do ponto de vista da Matemática Escolar, às quais transitem entre as representações concretas e mentais dessas figuras, bem como, por suas relações abstratas, e que explicite tal forma para os estudantes como a figura tridimensional que possuiu duas bases que são polígonos paralelos e iguais e que, por isso, possuiu faces laterais formadas por paralelogramos.

Essa construção conceitual, ao ser permeada pela visualização, clama por estar associada à estímulos para a criação de imagens mentais das formas, ao conhecimento e compreensão, por parte dos estudantes, dos elementos e principais propriedades relacionados aos prismas para que avanços no raciocínio geométrico possam ser privilegiados.

Identificamos como um exemplo de mobilização de um conceito de prismas e de esclarecimento sobre suas bases, segundo a geometria escolar, a abordagem realizada pelo professor Benjamin na aula realizada no dia 18 de junho[32], em que houve uma exploração visual aliada a uma exploração também conceitual das figuras em estudo. Naquele dia, Benjamin trabalhou com artemetrias chamadas "poliedros", recorrendo a uma construção de prismas e pirâmides que evidenciou a caracterização das figuras, valorizando, também, representações oblíquas, e destacou o papel da base nessa caracterização.

O Professor construiu, usando instrumentos e técnicas de desenho geométrico, prismas e pirâmides retos e oblíquos, de bases triangulares e depois de bases paralelogramas. Em síntese, durante a construção dos prismas triangulares, Benjamin explicou aos alunos que essas figuras são obtidas a partir de dois triângulos "iguais" e paralelos que deveriam ter os seus vértices correspondentes ligados entre si por segmentos de retas, para que assim se formassem as suas faces laterais que, segundo ele, "são todas paralelogramos". De maneira análoga, ele explicou aos alunos que as pirâmides de bases triangulares podem ser obtidas a partir de um triângulo, a sua base, cujos vértices estão ligados um a um a um ponto fora do plano em que o triângulo esteja desenhado. As Figuras 21 e 22 a seguir retratam exemplos de prismas e pirâmides construídos por Benjamin:

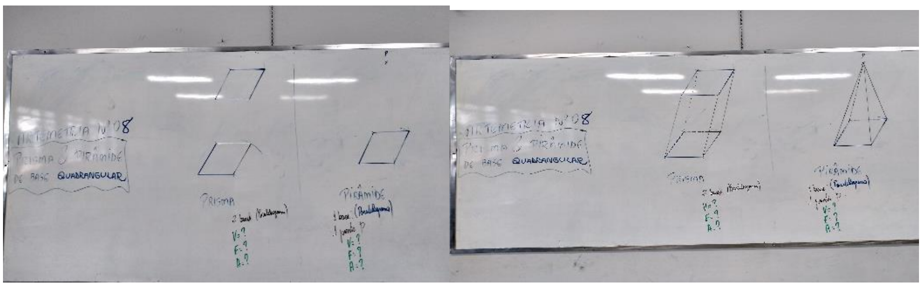


Figura 21: Construção de prismas e pirâmides de bases quadradas
(Fonte: arquivo pessoal da pesquisadora)

[32] Essa aula não foi analisada nesta tese.

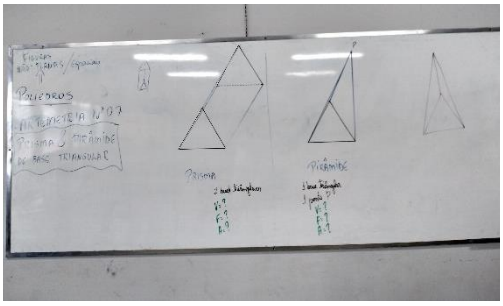


Figura 22: Construção de prismas e pirâmides de bases triangulares
(Fonte: arquivo pessoal da pesquisadora)

Ao observarmos as caracterizações de prismas e pirâmides apresentadas por Benjamin nesta aula, cabe aqui sugerirmos que talvez a dificuldade em tratá-las nas aulas analisadas, tendo em vista todo o debate e todas as dúvidas que nelas emergiram, tenha acontecido em virtude de o Professor ter concedido o espaço de ensino aos Licenciandos para que eles pudessem organizar a instrução, e responder às suas demandas, conforme o que conseguissem fazer, enquanto professores ainda em formação inicial. Assim, parece a nós, ainda, que o conhecimento de maneiras especializadas de se conceituar algumas formas geométricas na Escola Básica é um saber complexo que necessita ser desenvolvido durante os processos de formação inicial dos professores.

Como um outro exemplo de abordagem de estudo de prismas, pelo qual os alunos puderam explorar também alguns de seus elementos, como as bases, pode-se citar uma pesquisa realizada com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental da Rede Pública Municipal de ensino da cidade de São José dos Campos – SP, pela qual Sampaio (2018) investigou questões pertinentes ao uso da visualização no ensino de figuras espaciais.

Os estudantes participantes realizaram atividades no *software* GeoGebra relacionadas à ideia de volume de prismas. Ao estudarem tais figuras, os alunos, inicialmente, foram orientados a efetuar a sua construção no *software* que, por sua vez, lhes solicitou fazê-la a partir da determinação dos polígonos da base do prisma. Em seguida, os prismas foram explorados pelos alunos através dos controles de arraste do *software*, os quais permitem explorações que preservam as características e propriedades das figuras, e conceituados pela professora, juntamente com seus alunos, como poliedros cujas bases são polígonos iguais e paralelos, o que, portanto, faz com que as suas faces laterais sejam paralelogramos. Nessa situação de sala de aula, antes da chegada específica ao estudo de volume de prismas, houve uma exploração da figura por sua construção e suas características, a qual destacou para os estudantes o papel de suas bases na sua conceitualização.

Durante a formação dos alunos do Ensino Fundamental, é necessário aos professores estarem atentos à complexidade da geometria, que, nesta tese, consideramos, na perspectiva colocada por Battista (2007, p. 843), como "uma rede interligada de conceitos, formas de raciocínio e sistemas de representação, usada para conceptualizar e analisar ambientes espaciais físicos e imaginários". Entendendo a geometria dessa maneira, e de acordo com as visões apresentadas na Introdução deste Capítulo, concebemos que a visualização e o uso de representações podem em muito contribuir no processo de ensino e aprendizagem dessa área da Matemática, desde que complementem e, ao contrário, não substituam o pensamento abstrato e/ou provoquem um adiamento – de maneira quase inconsciente para quem os emprega em suas práticas – do seu avanço.

Yilmaz e Argun (2018) argumentam que na Educação Matemática o estabelecimento consciente de conceitos e relacionamentos entre entes matemáticos exige uma construção organizada de um processo de abstração, e, segundo eles, a visualização possuiu um papel central nessa composição. Principalmente no que se refere ao ensino de geometria, o conhecimento de atividades que proporcionem aos alunos oportunidades para que desenvolvam suas habilidades visuais e que os incentivem ao raciocínio visual e conceitual deve ter um importante lugar no domínio dos conhecimentos dos professores. Segundo a defesa dos autores, na medida em que os alunos são encorajados a criar imagens mentais relacionadas a conceitos, cada vez mais se tornam capazes de avaliar a veracidade das informações que recebem e as inconsistências dessas imagens, o que implica em uma elaboração conceitual cada vez mais precisa. Nas etapas em que os estudantes ainda não têm uma imagem mental clara do conceito abstraído, ou formaram uma imagem incorreta, o processo de abstração pode ser amparado com recursos visuais apropriados. Os autores ainda defendem que deve ser uma preocupação dos professores auxiliar os alunos a formarem expressões simbólicas de imagens através de processos de transformação do visual para o simbólico.

Guzman (2002) afirma que trabalhar com generalizações e conceitos matemáticos a partir da recorrência à visualização é um processo que exige muito conhecimento por parte do professor. Um deles diz respeito ao fato de que a tarefa de visualizar um objeto matemático e, a partir disso, criar imagens mentais associadas a conceitos é um processo complexo que pode alavancar a produção de erros e inadequações de entendimentos por parte dos estudantes, uma vez que:

> (...) exige para tal finalidade um trabalho envolvido de decodificação que é óbvio para o especialista, mas distante de estar aberto para o iniciante. Essa consideração é uma das razões pelas quais a introdução à visualização, por exemplo no ensino e aprendizagem da Matemática, não é uma tarefa fácil e que requer a consciência clara de que a transparência do processo, talvez real para o professor devido à familiaridade adquirida pela prática contínua por muitos anos, pode estar totalmente ausente para quem inicia com esse tipo de processo. (GUZMAN, 2002, p. 04-05, tradução nossa[33]).

Segundo pressupostos do conhecimento matemático para o ensino e da Matemática Escolar, é necessário aos professores uma habilidade em antecipar e reconhecer possibilidades de dificuldades e dúvidas apresentadas pelos alunos, bem como, identificar e saber quando e como tratar suas concepções e equívocos (*misconceptions*). Na análise empreendida nas seções anteriores, pôde-se ver exemplos em que o ensino por meio da visualização deixou transparecer algumas dificuldades, obstáculos e possibilidades de internalizações inadequadas de conceitos por parte dos alunos. Dreyfus (1991) defende que é importante para os professores ter conhecimento das dificuldades que os estudantes podem apresentar durante a visualização, tais como:

> (...) [suas] incapacidades de ver diagramas de diferentes maneiras; dificuldades em reconhecer as transformações implicadas nos diagramas; (...) falha na distinção entre uma figura geométrica e o desenho que representa essa figura; falha em unir as suas visualizações ao pensamento analítico (DREYFUS, 1991 *apud* COSTA, 2000 p. 177).

Ao investigar a capacidade de visualização espacial de estudantes com idades entre 11 e 13 anos, considerados bons alunos em Matemática e cujo nível de escolaridade coincide com Ensino Fundamental brasileiro, utilizando, para essa investigação, tarefas que os solicitavam distinguir elementos constituintes de um objeto tridimensional a partir da sua representação bidimensional, Ryo, Chong e Song (2007) constataram algumas dificuldades dos participantes que lhes chamaram a atenção. De acordo com os autores, mesmo alunos com alta performance em Matemática, quando envolvidos nas tarefas de visualização, demonstram muita dependência de fatos visuais para executá-las, buscando sempre apoio nas representações das figuras por materiais concretos ou por desenhos em que haviam linhas pontilhadas para designar algumas dimensões do sólido, não conseguindo imaginar a figura em três dimensões sem esses apoios.

---

[33] (…) it requires for such a purpose an involved work of decodification that is obvious to the expert, but far to be open to the novice. This consideration is one of the reasons why the introduction to visualization, for example in the teaching and learning of mathematics, is not an easy task that requires the clear conscience that the transparency of the process, perhaps real for the teacher because of the familiarity, acquired by the continued practice along many years, may be absent at all for the one who starts with this type of process. (GUZMAN, 2002, p. 04-05).

Também foram observadas dificuldades dos estudantes em distinguir as arestas das figuras tridimensionais, quando representadas em desenhos sem linhas pontilhadas (desenhos em perspectiva), e em imaginar uma secção plana produzida em uma figura tridimensional. Esses são exemplos de dificuldades inerentes ao ensino por meio da visualização, juntamente com as dificuldades observadas nas aulas analisadas, as quais os professores também precisam conhecer antecipadamente para preparar tarefas e escolher recursos que o auxilie a avançar com o aluno no pensamento geométrico.

Sobre o papel das representações no apoio à visualização, sublinhamos que ele também deve ser um objeto de constante conhecimento dos professores, no que se refere não somente aos tipos de representações que melhor auxiliarão os estudantes na aprendizagem, mas, também, no que diz respeito às maneiras como elas são utilizadas no ensino. Segundo Arcavi (2003), um emprego "ingênuo" de representações pode produzir distorções conceituais, substituindo o sentido abstrato do conhecimento do objeto por analogias que não condizem em sua totalidade com ente geométrico estudado. Pensando-se por essa via, faz-se necessário pensar a visualização não como algo vinculado estritamente ao que está posto aos olhos, mas como um processo que envolve, além dos sentidos, habilidades como imaginação, intuição e abstração. Santos (2014) discute essa visão argumentando que:

> A ação de olhar pode não abranger a estrutura íntima, negligenciando-se a interpretação, o pensar, o perceber e o aprofundar. (...) Quando a visualização é entendida somente como algo que é "visto", pode acontecer uma extensão abusiva das imagens, caminhando assim para a generalização errônea (p. 40-41).

A respeito das possíveis limitações do uso de certos tipos de representações concretas, tais como imagens que podem ser inscritas graficamente em uma folha, uma lousa, uma tela de computador, ou configuradas por meio de materiais concretos rígidos, Presmeg (1992) descreve situações de ensino e aprendizagem em que essa utilização não funcionou como um auxílio, mas, pelo contrário, criou obstáculos enquanto estudantes do Ensino Médio resolviam problemas matemáticos.

Em Presmeg (1985) a autora já mencionava sobre o potencial de uma imagem concreta em enganar ou obscurecer a visualização dos estudantes, já que, por sua natureza, essa imagem representa um único caso, e informações irrelevantes ou enganosas podem ser tomadas pelo aluno como parte do que é preciso compreender ou generalizar sobre a figura estudada. Um dos principais obstáculos associados ao uso de representações concretas observado pela autora relaciona-se a uma associação inadequada que os alunos podem fazer de um ente matemático ou conceito com um único tipo de imagem. A autora a denomina como "imagem incontrolável", uma vez que ela pode persistir na mente do estudante, mesmo diante de evidências contrárias, como a única imagem associada ao objeto ou a um ou mais conceitos. A constatação de Presmeg (1985, 1992) aponta, em nossa visão, para a necessidade de os professores conhecerem recursos didáticos que lhe forneçam imagens de natureza dinâmica, que possam ser transformadas em outras imagens representativas de um mesmo tipo de objeto geométrico.

Vinculada ao tratamento de representações e imagens mentais está o conhecimento que os professores precisam ter sobre o uso de figuras prototípicas como componente do ensino de geometria. Em especial, nas aulas analisadas, houve dois momentos distintos relacionados a essa questão. Nas aulas sobre figuras espaciais, os objetos de acrílico eram, em certa medida, representações padronizadas de algumas figuras. Não havia entre eles, por exemplo, objetos representativos de prismas e cones oblíquos e de poliedros em configurações mais incomuns para o conhecimento dos alunos. Já na aula em que Benjamin trabalhou com o quadrado e o hexágono, ao contrário, os desenhos construídos para análise e construção conceitual não eram padronizadas, e isso foi explorado pelo Professor.

Cifuentes (2005, 2010) chama atenção para o fato de que é inerente aos processos de visualização fazer uma contextualização espaço-temporal da imagem. Ou seja, uma contextualização em que faz sentido identificar, nos momentos iniciais de trabalho com uma determinada forma, uma representação padrão dela. Em um segundo momento do trabalho com a visualização, o qual está mais devotado à abstração, explica o autor, há uma separação repentina da imagem de sua "posição contextual". Apesar de esse segundo momento buscar na representação não padronizada elementos para o estudo da forma, esse fenômeno, quase inevitavelmente, conduz o aluno a conceber como principal identificação da figura geométrica um protótipo dela (HERSHKOWITZ, 1990; PRESMEG, 1986).

O autor dá como um exemplo disso a identificação imediata, comumente encontrada em materiais didáticos, e reproduzida por professores, do triângulo isósceles "apoiado" na sua base. Portanto, é relevante para o ensino de geometria que os professores conheçam maneiras de retirar a posição – que é de caráter contextual – do foco das propriedades geométricas das figuras, assim como precisa saber sobre modos e recursos didáticos que o auxiliem na desconstrução dimensional das formas reconhecidas "à primeira vista", levando-as a um patamar de formas outras não "reconhecidas de imediato" pelos alunos (SANTOS, 2014, p. 60).

Retornando ao emprego pelos Docentes dos objetos em acrílico, ressaltamos que por serem representações padronizadas de figuras tridimensionais, eles podem ter influenciado na persistência de algumas das dificuldades e equívocos dos alunos e até mesmo dos Docentes. Nesse sentido, percebe-se que um uso complementar de imagens mais dinâmicas, as quais poderiam ser construídas com os alunos e mais facilmente rotacionadas e transformadas, surgiu como uma demanda. Como um exemplo, imagens dinâmicas poderiam auxiliar os alunos a visualizarem poliedros em configurações mais incomuns e a produção de seções planas (os cortes) e paralelas às bases de pirâmides e cones produzindo-se, a partir delas, figuras definidas como troncos.

A produção de imagens dinâmicas está relacionada ao uso de *softwares* no ensino de geometria. É fato que o surgimento de tecnologias computadorizadas, cada vez mais dotadas de possibilidades gráficas, ampliou os horizontes da Educação Matemática e reforçou ainda mais a compreensão de que o papel da visualização no ensino ultrapassa a ideia mais reducionista de ilustração e/ou de suporte ao desenvolvimento de ideias. Na visão de Giaquinto (2007), o papel da visualização em Matemática deve ter relevância epistemológica, relacionada às descobertas de propriedades e relações, à compreensão de conceitos, às demonstrações, à exploração visual e à construção e reconstrução de representações de formas geométricas. A respeito desse papel, pesquisas apontam o trabalho com a visualização no ensino de geometria com o foco na geometria dinâmica apoiada no uso de *softwares*.

Senechal (1991 *apud* COSTA, 2000, p. 178) defende que "o pensamento visual pode revolucionar as formas como se ensina a geometria, e, fundamentalmente, deve-se repensar o papel que os modelos ou os programas de geometria dinâmica podem ter na educação geométrica a todos os níveis". Gutiérrez (1996) já reivindicava as ferramentas computacionais como recursos que fornecem uma representação tridimensional de objetos espaciais e que permitem que os usuários transformem esses objetos dinamicamente (transformações como rotações, ampliações ou seções por planos, por exemplo) nos processos de visualização. O mesmo autor chama atenção para os entendimentos necessários aos professores no que tange à escolha de um *software* de geometria dinâmica. Para esse autor, professores precisam saber que, quando um aluno manipula uma representação por um material concreto de uma figura tridimensional, fazendo movimentos como giros, as rotações feitas com as mãos costumam ser muito rápidas e inconscientes, e, assim, dificilmente se pode refletir sobre tais ações. Todavia, um *software* de geometria dinâmica, cujas ferramentas orientam e tornam precisas as direções de rotação, solicita aos alunos elaborarem estratégias de movimento e anteciparem o resultado de uma determinada transformação. Ele defende que da mesma maneira que os professores precisam saber como orientar os alunos na interpretação correta de desenhos feitos em papel ou em uma lousa, eles precisam ter conhecimentos sobre como orientá-los na interpretação correta das representações fornecidas por *softwares* e na utilização das suas ferramentas de maneira eficiente.

Há, ainda, autores que defendem as vantagens de que os professores conheçam os *softwares* sob o ponto de vista da construção e concretização de conceitos geométricos e da promoção de uma simbiose entre as componentes figurais e conceituais dos entes geométricos, posto que os ambientes computacionais permitem a visualização não apenas de imagens estáticas, mas também das relações que elas compreendem (GRAVINA, 2001). A autora pontua que os ambientes de geometria dinâmica incitam o “espírito de investigação matemática” e que a interface interativa, aberta à exploração e à experimentação disponibiliza “experimentos de pensamento”, os quais permitem que os estudantes possam questionar suas próprias ações sobre os entes geométricos, testando a validade das construções (p. 90). Por essa perspectiva, as representações construídas em um ambiente dinâmico adquirem *status* de exemplos genéricos, com a possibilidade da exploração dinâmica das suas propriedades e a visualização de diversas representações de uma mesma classe de figuras (JANZEN, 2011, p. 52).

5 CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS PARA O ENSINO DE SEMELHANÇA NOS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS E DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO 9º ANO: ARGUMENTAÇÃO E PROVA

Analogamente ao que foi feito no Capítulo 4, o movimento de análise dos dados obtidos das observações das aulas do professor Antônio ocorreu de forma descritiva e interpretativa, sob a luz dos referenciais teóricos apresentados no Capítulo 3. Não houve, assim, intenção de um julgamento e validação das práticas do Professor, mas a análise de demandas de conhecimentos relacionadas a algumas questões levantadas nas aulas, segundo os pressupostos do conhecimento matemático para o ensino.

Ao final do período de observação, de maneira similar a como procedi com o material obtido das observações no 7º ano, reli os registros que fiz no diário de campo das aulas de Antônio e consultei as gravações em áudio – das aulas de geometria que aconteceram no 9º ano, das conversas informais que tive com o Professor e com os estudantes – que indicaram informações relevantes para responder ao objetivo da pesquisa. A partir dessas ações, investigamos subsídios para identificar conhecimentos relevantes para os professores de Matemática relacionados às situações de sala de aula de geometria observadas. Assim como no Capítulo anterior, situamos a discussão de alguns dos conhecimentos identificados na literatura de pesquisa sobre questões relacionadas ao ensino e aprendizagem de geometria que pudemos consultar.

Relembrando, foram observadas 20 aulas de geometria no 9º ano, de 1 hora e 20 minutos cada, nos períodos de 08-03-2018 e 12-04-2018 e de 08-08-2018 a 22-08-2018. As aulas analisadas nesta tese aconteceram nos dias 19/03/2018, 20/03/2018, 05/04/2018 e 09/04/2018. Essas aulas não formam uma sequência ininterrupta de situações de sala de aula, dado que o trabalho do Professor, no período das observações, foi pautado em muitas correções de exercícios para a realização da primeira avaliação de Matemática do 9º ano. As aulas que aqui descrevemos e analisamos são aulas em que Antônio trabalhou com os assuntos "semelhanças nos triângulos retângulos" e "teorema de Pitágoras". Durante tais aulas, segundo a nossa percepção, ele deu ênfase ao trabalho com a "argumentação e prova" no ensino de geometria.

Algumas questões relativas a esse trabalho, em nosso ponto de vista, podem ser discutidas na perspectiva do conhecimento matemático para o ensino.

5.1 Argumentação e prova no ensino básico de geometria

As habilidades dos professores em trabalhar com argumentações e provas na Educação Básica são consideradas por parte da literatura em Educação Matemática como importante elemento do ensino de Matemática. Os padrões NCTM (2000), por meio da norma *Reasoning and Proof*, sugerem que os professores precisam estar aptos a desenvolver com os estudantes oportunidades para que possam formular e investigar conjecturas matemáticas, desenvolver e avaliar argumentos matemáticos e provas e selecionar e utilizar diversas formas de raciocínio e métodos de prova.

Balacheff (2002) postula que na comunidade de Educação Matemática não há um consenso sobre o que constitui uma prova e/ou uma demonstração ou o que precisa ser objeto de investigação sobre isso. No entanto, segundo esse e outros autores, existe desde há muito tempo uma defesa da grande relevância sobre o tratamento deste tema nos currículos de Matemática (PONTE, MATOS, ABRANTES, 1998).

Para Amado, Sanchez e Pinto (2015), em Educação Matemática, uma prova (ou uma demonstração) passa por:

> (...) testar hipóteses, aceitar ou refutar conjeturas, levar os alunos a sentir a necessidade de validar resultados e, consequentemente, de estes serem aceitos pelo grupo. Portanto, na sala de aula de Matemática, uma prova assume um papel que a torna estreitamente ligada à compreensão e a comunicação da Matemática. (p. 642).

Hanna (2016) conclui que uma prova, para ser considerada útil na sala de aula, deve sempre incorporar uma explicação. Isto é, a prova precisa mostrar não apenas que um resultado é verdadeiro, mas também os porquês da sua veracidade. Um processo de prova deve preocupar-se, na visão desta autora, não apenas com a sua conclusão, mas também, e principalmente, com as principais ideias matemáticas envolvidas na prova que é desenvolvida.

De acordo com Stylianides e Stylianides (2006), existe uma importante esfera do conhecimento específico dos professores de Matemática, o qual identificam como o conhecimento do conteúdo de raciocínio e prova. Os autores situam o desenvolvimento de provas como um tipo de atividade abrangente, que engloba o conjunto de atividades associadas à identificação de padrões (relações gerais que se ajustam a determinados conjuntos de dados), realização de conjecturas (hipóteses fundamentadas que estão sujeitas a testes), argumentação (sequências conectadas de asserções) a favor ou contra as conjecturas e, finalmente, o desenvolvimento de provas (argumentos válidos de verdades aceitas que estabelecem a verdade ou a falsidade das conjecturas).

De maneira complementar ao que dizem Stylianides e Stylianides (2006), Stylianides e Ball (2008) sugerem que uma atividade cujo objetivo é a realização de uma prova inclui explorações empíricas para gerar conjecturas e raciocínio por analogia que sustentem a formulação de argumentos. Ainda, para esses autores, uma prova, no contexto de uma comunidade de sala de aula, descreve uma atividade de formulação de argumentos matemáticos que preenche três critérios, quais sejam: i) utiliza declarações verdadeiras e aceitáveis pela comunidade da sala de aula (conjunto de declarações aceitáveis) sem justificativas adicionais; (ii) emprega formas de raciocínio (modos de argumentação) válidas e conhecidas ou que estejam dentro do alcance conceitual da comunidade da sala de aula; e (iii) é comunicada com formas de expressão (modos de representação de argumentos) que são apropriadas e conhecidas ou dentro do alcance conceitual da comunidade da sala de aula. Os autores argumentam que atividades que envolvam alunos em uma prova podem auxiliá-los a explorar "porquês" relacionados a resultados matemáticos, além de auxiliá-los no desenvolvimento e no avanço da compreensão conceitual do que se está estudando.

Stylianides e Ball (2008) chamam atenção para a existência de três elementos do conhecimento sobre provas para o ensino, os quais estão apoiados na estrutura lógico-linguística das demonstrações.

O primeiro elemento refere-se à habilidade de compreensão de que o desenvolvimento de provas simboliza um conhecimento matemático de uma comunidade específica, que é utilizado por sujeitos dessa comunidade para fins de comunicação e justificativa de afirmativas para outros membros dessa mesma comunidade. Esse domínio de conhecimento sobre provas é composto por outros três componentes que são: o conjunto de afirmações aceitáveis (definições, axiomas, etc.), as formas de argumentação (uso de regras lógicas de inferência, construção de contraexemplos, etc.) e modos de representação da argumentação (pictórico, simbólico, etc.).

O segundo elemento diz respeito à habilidade de utilização e de compreensão do papel da linguagem matemática nas provas. A atenção às questões da linguagem matemática implica em uma atenção sobre como argumentos matemáticos são representados e sobre como as ideias matemáticas são definidas. Nessa lógica, o elemento de conhecimento sobre linguagem matemática tange aos componentes já identificados como os modos de representação de argumentos e como o conjunto de declarações aceitáveis.

O terceiro elemento concerne à capacidade de entendimento e de distinção entre formas empíricas e dedutivas de argumentação. Portanto, esse elemento refere-se aos modos de argumentação já mencionados. Conforme o que prezam os autores, argumentos empíricos não devem ser considerados como provas em quaisquer níveis de escolaridade, sobretudo porque esse tipo de argumentação utiliza de modos inválidos, uma vez que promove a aceitação de afirmações matemáticas com base em evidências inconsistentes. Por outro lado, argumentos dedutivos estão relacionados a modos válidos de argumentação, alguns dos quais, inclusive, já foram verificados em pesquisas sobre o conhecimento dos professores sobre provas (STYLIANIDES, BALL, 2008, p. 310-311).

Stylianides e Ball (2008) complementam o corpo de conhecimentos sobre provas para o ensino defendendo que, ao desenvolver provas em suas salas de aula, os professores precisam ser capazes de identificar situações nas quais elas são necessárias e, além disso, precisam ter habilidades para criar oportunidades apropriadas para que seus alunos se envolvam com as demonstrações.

Segundo Herbst (2002), o professor é o sujeito que durante a divisão do trabalho na realização de provas mais assume a responsabilidade pela sistematização e pela correção dos argumentos produzidos pela comunidade de sala de aula. Todavia, para Stylianides e Ball (2008), a menos que os professores tenham um bom entendimento sobre provas na Educação Básica, não se pode esperar que eles sempre possuam habilidades e/ou condições de promover efetivamente a realização de demonstrações com seus alunos. Conforme aponta uma vasta literatura citada por esses últimos autores (p. 308-309), existem sérias dificuldades que estudantes de todos os níveis de escolaridade enfrentam durante atividades de provas e, portanto, há que se considerar ainda mais a importância do desenvolvimento e do estudo crítico do conhecimento dos professores sobre provas.

Perante a algumas das produções sobre raciocínio e prova no ensino e aprendizagem de Matemática e aos referenciais teóricos que escolhemos para subsidiar as análises, apresentamos[34] e discutimos a seguir conhecimentos que afloraram de algumas situações observadas na aulas de Antônio. Nessas situações, notamos que o trabalho pautado na construção de argumentos e na realização de demonstrações delineou-se como um elemento importante e que diversos conhecimentos relacionados à argumentação e prova emergiram como conhecimentos específicos dos professores de Matemática para o ensino de geometria.

[34] Assim como procedemos no capítulo 4, as seções deste capítulo em que fazemos uma apresentação das aulas analisadas estão escritas em primeira pessoa do plural. Todavia, destacamos que, em alguns momentos da escrita, quando os relatos dizem respeito às observações propriamente realizadas pela autora da tese no campo de pesquisa, as frases aparecem na primeira pessoa do singular.

5.2 Semelhança nos triângulos retângulos: as aulas dos dias 19 e 20 de março do ano de 2018

5.2.1 A aula do dia 19-03-2018

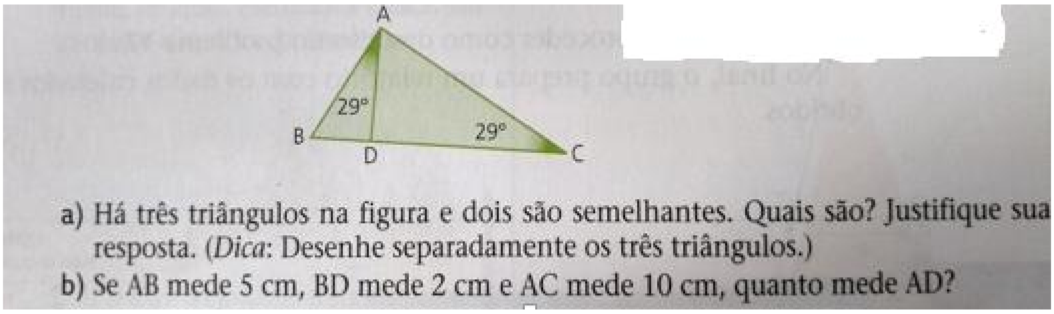
Cabe comentar que nas aulas dos dias 08, 12, 13 e 15 de março, as primeiras que foram observadas, Antônio trabalhou, resumidamente, com correções de exercícios investigativos sobre o assunto “semelhança entre figuras planas”. Os primeiros exercícios acompanhados constavam em folhas de atividades preparadas a partir de livros do Projeto Fundão. Nessas folhas, havia polígonos quaisquer desenhados, os quais os alunos podiam recortar e tentar encaixar um nos outros para – assim como disse o Professor – “perceberem” as semelhanças entre eles. Ou seja, nas primeiras atividades acompanhadas, Antônio solicitou aos alunos que manipulassem representações de figuras planas e as visualizassem para explorar a semelhança entre elas.

Ao introduzir o assunto semelhança de triângulos, o Professor realizou provas dos casos ângulo-ângulo (AA) e lado-lado-lado (LLL) e trabalhou com atividades do livro “Matemática: Imenes & Lellis”, nas quais os estudantes foram solicitados a utilizar os casos provados para constatarem semelhanças entre triângulos. Ou seja, nessas atividades, diferentemente da atividade em que os alunos deveriam inferir sobre semelhanças utilizando encaixes de representações de figuras planas, Antônio propôs que os alunos constatassem as semelhanças de triângulos a partir da congruência dos seus ângulos e da proporcionalidade de seus lados.

Na aula do dia 19 de março, chegamos, Antônio e eu, à sala de aula e os estudantes estavam se organizando em suas mesas. Enquanto isso, como era de costume, Antônio escreveu o programa da aula no quadro: Correção (14, 15, 16, p. 24 e 25 do livro); Discussão/correção e socialização de medidas; Semelhança no triângulo retângulo; Para casa. Através dessa prática cotidiana, observamos que o Professor dava aos estudantes as informações sobre as propostas para o desenvolvimento da aula. Entre todas as atividades previstas para o dia, focalizamos com mais detalhes, neste capítulo, a correção do exercício de número 16, o qual serviu para instigar os alunos às ideias que seriam discutidas na introdução do assunto “semelhança nos triângulos retângulos”.

Durante a correção dos exercícios 14 e 15, Antônio pediu aos alunos que não utilizassem como argumento para constatar que dois triângulos eram semelhantes o fato de que eles “pareciam ser semelhantes”. Ele havia notado, nas aulas anteriores, que boa parte dos estudantes não justificava a semelhança entre triângulos segundo os casos estudados. Muitos estavam recorrendo a uma ideia de que os triângulos “pareciam semelhantes”, ideia que se mostrava ainda muito relacionada ao que fizeram com os recortes de figuras planas nas primeiras aulas sobre semelhança. Por isso, o Professor solicitou aos alunos que, dessa aula em diante, utilizassem argumentos matemáticos para provarem o que se pedia.

Na correção do exercício de número 16 (página 25 do livro), Antônio solicitou muita atenção aos estudantes. A aluna Natyele leu o seu enunciado:



a) Há três triângulos na figura e dois são semelhantes. Quais são? Justifique sua resposta. (*Dica*: Desenhe separadamente os três triângulos.)
b) Se AB mede 5 cm, BD mede 2 cm e AC mede 10 cm, quanto mede AD?

Figura 23: Exercício 15
(Fonte: IMENES, 2012, p.25)

Antônio desenhou no quadro um triângulo como aquele representado no livro. Logo em seguida, pegou três representações de triângulos retângulos feitas com papel cartão: um recorte azul, um recorte amarelo e um recorte branco (Figura 24) e começou a explicação:

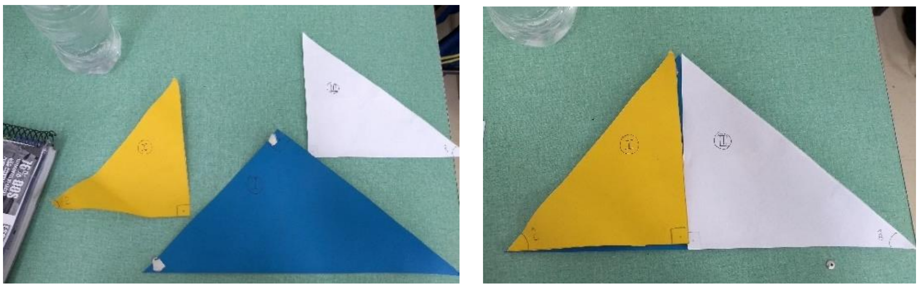


Figura 24: Material concreto de apoio ao professor no ensino de semelhança de triângulos
(Fonte: arquivo pessoal da pesquisadora)

Antônio: Todo mundo identificou quais são os três triângulos?
Alguns alunos [em coro]: Sim.
Antônio: Aqui, oh, eu trouxe um desenho [mostrando aos alunos as representações recortadas dos três triângulos, que, por vezes, chamarei de recortes], não é esse aí não [o desenho do livro], mas só pra gente ter uma ideia. É a mesma coisa de eu ter isso aqui. Quando eu falo três triângulos [pegou os recortes amarelo e branco e os sobrepôs ao recorte azul], oh, um [pausa], dois [pausa], três triângulos. É a mesma ideia aqui. Eu tenho um dois, cadê o terceiro?
Aluno: É o grande.
Antônio: É o grande. Tá claro pra todo mundo isso aqui? Todo mundo enxergou três

triângulos ou não?
Poucos alunos: Sim.
Antônio: Então, vamos lá! Oh, o que que eu vou fazer aqui. Tem três [triângulos] e o exercício está afirmando que... Que que o exercício está afirmando, galera?
Lucas: Que tem três é...
Natyele: Que dois são semelhantes.
Antônio: São... três e eu sei que dois são semelhantes. Hã?
Natyele [lendo a pergunta da letra *a* do exercício]: Quais são? Justifique sua resposta. Dica: desenhe separadamente os três triângulos.
Antônio: Letra *a* quer que você diga quais que são semelhantes. Então, oh, então, quais que são os triângulos? Eu tenho um deles que é o *DBA* [desenhando no quadro]. Eu tenho o outro que é o *DCA* [desenhando no quadro]. [Pausa] E eu tenho o [triângulo] grandão que é *BAC*.
Lucas: [inaudível] são todas diferentes.
Antônio: Todo mundo tá vendo que eu separei os três? Então, aqui [apontando para o valor 29º no desenho do triangulo *DBA*] eu tenho a medida de qual [ângulo]?
Alguns alunos: O [ângulo] *A*.
Antônio: O *A*, né? Que é 29. Nesse aqui [apontando para o triângulo *DCA*], eu tenho qual medida? O *C*, que é 29. E nesse aqui eu tenho qual [apontando para o ponto *D*]? [Pausa] Aí, um monte de gente vem querendo falar que aqui é 90 [graus]. Eu não sei, porque não falou. Eu não posso falar. Pode até ser 90, mas eu não posso garantir isso, por que não tá falando. Então, olha, estão os três ali. Oh, a gente poderia até pensar que dificultou, né? Mas não. Se a gente olhar bem, alguém pode me dizer quais são os semelhantes?
Lucas: Uai! São os dois de dentro!
Mel: *BAD* e o *ABC*!
Antônio: Oh, o Lucas acha que são os dois de dentro. Seria esse e esse aqui [apontando para o desenho dos triângulos *DBA* e *DCA*]. Me convença!
Lucas: Te convencer?
Antônio: Me convença! Você tem que me convencer que são esses dois. Eu preciso de quê, Lucas?
Lucas: Eu preciso de dois ângulos iguais...
Antônio: Tem um lá. 29 tem nos dois.
Lucas: Olhando assim... no *D* ali (...) Acho que é 90º.
Antônio: Acho. Mas não falou, não tem indicação, não pode usar. A gente vai ter um caso especial que é 90, mas não é agora não.
Diego: Tem um lado em comum, dá pra ver ali, oh, o *AD* [apontando para o segmento *AD*].
Antônio: Lado? Eles têm o *AD* em comum. Tudo bem. Mas é só isso. Você não sabe nada sobre os lados. [Pausa] Eles, ah, de novo, eles até podem, poderiam ser semelhantes, mas eu não tenho ainda informação para dizer isso.
Mel: Professor, assim, é... no... no triângulo tudo dá 180.
Antônio: Certo.
Mel: Então você podia somar os ângulos, aí...
Antônio: Tudo bem. Que ângulos que eu vou escrever aqui?
Mel: Hum...
Antônio: Se eu tiver dois fica fácil de achar o terceiro, mas eu só tenho um aqui [referindo-se ao ângulo de 29º em *C*].
Diego: Professor, achei porque eles são semelhantes. Porque na letra *a* fala que tem dois triângulos semelhantes...

Antônio: Sim, mas...
Diego: Os dois menores.
Antônio: Não senhor! Pode ser esse com esse [*DBA* com *BAC*], pode ser esse com esse [*DCA* com *BAC*], posso...
Diego: Mas a forma deles parece.
Antônio: Ah! Parece! A gente já combinou que agora a gente vai ter que ter um argumento matemático. Eu vou usar um argumento e parecer não serve mais. Quer dizer, dá um indício pra gente olhar, mas tem que usar um argumento matemático.
Alguns alunos: [falando ao mesmo tempo]
Antônio: Pera aí rapidão. Eu vou apagar esse trem lá [estava escrito no quadro que *DBA* é semelhante a *DCA*]. Lucas não conseguiu me convencer não. [Rafaela levantando a mão] Você tem outra ideia, Rafaela?
Rafaela: Eu pensei em dois [triângulos] que talvez não sejam [semelhantes].
Antônio: Qual que você acha que não é?
Rafaela: O *ACD*. Porque, na altura...
Antônio: O *ACD*?
Rafaela: O *ACD*. Porque se você comparar o *ACD* com o... o... com o *ACD*...
Alguns alunos: [falando ao mesmo tempo]
Antônio: Não. Calma. Fala o de dentro e o de fora que fica mais fácil. Você quer comparar o de dentro com o de fora ou os dois de dentro?
Rafaela: O dentro e o de fora.
Antônio: Certo. Qual de dentro que você quer comparar?
Rafaela: O de dentro que não seja [semelhante], entendeu?
Mel: Hã?
Antônio: Tá. E qual de dentro que não é semelhante?
Rafaela: *ACD*. O [triângulo] *ACD*!
Antônio: Esse aqui [apontando para o triângulo *DCA*], então, você tá dizendo que não é semelhante com o de fora [o triângulo *BAC*]? Porque?
Rafaela: Porque se... A altura do maior não é compatível com a do menor...
Lucas: Mas não pode ser...
Antônio: Parece que não é! Mas, de repente, não sei. De repente se eu girar ele dá. Eu preciso procurar os ângulos. É isso, não tem jeito!
Diego: Professor!
Antônio: Diga.
Diego: Aquele ângulo ali no *ABC* [referindo-se ao ângulo em *B*], ele não é igual ao ângulo *ABD*.
Antônio: O *ABC*, ele não é igual ao *ABD*. Porque não?
Diego: Porque...
Antônio [interrompendo Diego]: Ele não é igual? Olha aqui, olha aqui, olha aqui [mostrando aos alunos os três recortes de maneira que os ângulos representativos dos quais o aluno se referiu encaixavam-se]! Vou tirar esse aqui só pra ajudar a pensar [usando somente os recortes azul e amarelo]. Olha aqui, oh! Olha, olha pra esse ângulo aqui. Na hora que eu tiro e olho, o que que eu posso concluir sobre esse ângulo aqui [representativo do ângulo em *B*], hein?
Mel: São congruentes.
Antônio: Então, o que que eu posso concluir sobre esses ângulos aqui, o de dentro e o de fora [usando, agora, o recorte amarelo para mostrar que o ângulo em *A*, no triângulo *BDA*, e o ângulo em *C*, no triângulo *BAC*, encaixavam-se]? Então, olha aqui, esse ângulo aqui e esse ângulo aqui são?
Alguns alunos [em coro]: Congruentes.

Antônio: Agora eu já tenho dois triângulos semelhantes, não? Quais são os triângulos semelhantes?
Lourenço: *ABD* e *ABC*.
Antônio: *ABD* e *ABC*. Por qual motivo? Justifica.
Diego e Mel: Dois ângulos congruentes.
Antônio: Ambos têm ângulos... Se eu quiser ser criterioso, já posso até colocar dois... Pois ambos têm ângulos congruentes [escreveu a justificativa no quadro]. Entendemos ou não entendemos?
Alunos [em coro]: Entendemos.
Lucas: Professor, os três podem ser semelhantes?
Antônio: O Lucas tá perguntando aqui se os três podem ser semelhantes. Podem até ser, mas com as informações que a gente tem nesse problema, o que que a gente pode garantir? No caso desse problema, já trouxe que dois são semelhantes. Mas o que dá pra garantir é que esse [*ABD*] é semelhante com esse [*ABC*].

A partir desse excerto, percebemos que, no início da realização do exercício, quando Lucas afirmou que os dois triângulos "de dentro" eram semelhantes, ele baseou-se nas suas impressões visuais mais intuitivas para argumentar que a forma dos dois triângulos parecia semelhante, e Antônio chamou a atenção do aluno, solicitando a ele que o convencesse com argumentos matemáticos. Apesar de incitar a argumentação matemática para a resolução do exercício, em alguns momentos Antônio não explorou com a comunidade de sala de aula as ideias que alguns alunos colocaram durante a resolução do exercício (STYLIANIDES, BALL, 2008). Por exemplo, quando Diego falou que encontrou a solução para o exercício, ou seja, que havia encontrado uma justificativa para a semelhança entre os triângulos, Antônio não lhe pediu para explicar a sua ideia.

Nesse diálogo, existem indícios de conhecimentos para o ensino relacionados a essa situação que dizem respeito ao saber escutar as ideias dos alunos para nelas identificar modos de argumentação válidos, assim como expressões de possíveis equívocos (STYLIANIDES, BALL, 2008; BALL, THAMES, PHELPS, 2008; BALL, 2017). Também há indícios de que os professores, ao conduzirem discussões sobre semelhanças de triângulos marcadas pela presença da argumentação, precisa ter um conhecimento especializado desse conteúdo que lhe permita compreender e avaliar os diferentes argumentos produzidos pelos alunos, assim como, um conhecimento do ensino desse conteúdo que lhe auxilie a organizar a instrução de modo que as cadeias argumentativas construídas atendam ao desenvolvimento do pensamento dos estudantes (STYLIANIDES, BALL, 2008).

Sobre esse excerto, observamos que quando Antônio pediu aos alunos que olhassem para os recortes para que pudessem constatar a semelhança entre dois daqueles três triângulos, ele, de certa forma, conduziu os alunos a concluírem a semelhança entre os dois triângulos por argumentações organizadas mais pela experiência intuitiva dos encaixes entre os recortes e com menor apelo às explorações mais dedutivas vinculadas à discussões das propriedades dos triângulos. Mais adiante, retornaremos a essa questão.

Cabe comentar, também, que ao final do diálogo Antônio deixou o questionamento de Lucas, sobre os três triângulos poderem ser semelhantes entre si, em aberto. Essa pergunta aponta para o tratamento do assunto seguinte: a semelhança nos triângulos retângulos. Em contextos como o do exercício 16, a semelhança entre os três triângulos ocorre apenas quando os três, em questão, são todos triângulos retângulos. O conhecimento dessa informação diz respeito ao conhecimento comum do conteúdo sobre semelhança de triângulos. Mais a frente, veremos que Antônio tratou daquela situação específica da semelhança entre os três triângulos em outro momento. No entanto, nesse momento do questionamento de Lucas, caso houvesse uma pequena discussão, a título de uma provocação nos estudantes sobre o que o aluno perguntou, um horizonte do conteúdo semelhança nos triângulos retângulos, a respeito de quais hipóteses precisariam estar garantidas para que a pergunta de Lucas tivesse uma resposta afirmativa, poderia ter sido levantado (BALL, THAMES, PHELPS, 2008; BALL, BASS, 2009).

Continuando a correção do exercício 16, Antônio solicitou aos alunos que encontrassem as razões entre os segmentos correspondentes nos dois triângulos, sempre os alertando sobre como deveriam proceder para encontrar as razões: olhando os ângulos que fossem congruentes nos triângulos *ABD* e *ABC* e partindo desses ângulos para a correspondência entre os lados dos triângulos. Assim, junto a eles, Antônio encontrou a medida do segmento *AD*.

Na introdução do assunto "semelhança nos triângulos retângulos", o Professor desenhou um triângulo retângulo com régua e transferidor de madeira [Figura 25]. Logo em seguida, desenhou outro triângulo retângulo "menor" ao lado do primeiro. Enquanto Antônio terminava de desenhar os triângulos, Lourenço declarou que não achava que aqueles desenhos eram adequados para representar triângulos retângulos.

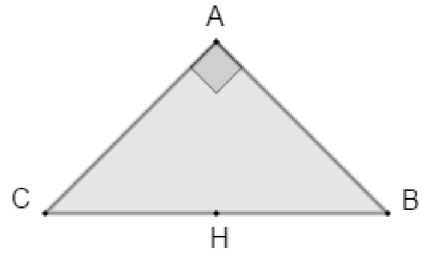


Figura 25: Representação do desenho no quadro do triângulo retângulo
(Fonte: arquivo pessoal da pesquisadora)

A reivindicação de Lourenço reforça para nós que os estudantes estão acostumados com as representações prototípicas de figuras geométricas e que os professores precisam saber que evitá-las como as principais e, muitas vezes, quase únicas representações de certas categorias de formas geométricas, é algo relevante para o ensino de geometria. No caso do estudo da semelhança no triângulo retângulo, acontece, conforme afirma Cifuentes (2005), uma aparição repentina de uma representação não padronizada da figura, devido ao posicionamento em que se desenha a figura para uma melhor exploração das semelhanças, o que pode causar incômodo nos alunos.

Após a reivindicação do aluno, Antônio dialogou com a turma sobre a fala de Lourenço, ressaltando que o desenho que estava no quadro, ainda que não fosse uma representação comum nas aulas sobre triângulos retângulos, correspondia a essa figura. Em seguida, dialogaram mais sobre a nomenclatura dos lados dos triângulos retângulos e Antônio iniciou as explicações sobre semelhanças:

Lourenço: Porque que ele [o desenho no quadro] é um triângulo retângulo?
Antônio: Porque eu construí! Podia não ser! Mas eu construí um triângulo retângulo. Eu marquei aqui, eu usei o transferidor e fiz um ângulo de 90!
Lourenço: Então sempre que tiver um ângulo de 90 vai ser triângulo retângulo?
Antônio: Isso. Definição de triângulo retângulo: todo triângulo que tem um ângulo de 90º, a gente chama ele de?
Lourenço: Retângulo.
(...)
Antônio: Então, moçada, olha lá [pausa] (...) Olha o que eu vou fazer. Construir... Isso é só pra gente saber os nomes... Eu construí um triângulo retângulo aqui. Agora, observe com calma no coração o que eu vou fazer. Eu vou traçar... a gente ainda não tá muito acostumado a ver isso não. Mas, todo triângulo, ele tem três alturas, tem uma altura relativa a cada lado. Tem altura relativa a esse lado [AB], tem altura relativa a esse lado, oh [BC], e altura relativa a esse lado [AC]. Eu vou construir a altura relativa ao lado BC. O que vai acontecer, professor? Eu vou ter que fazer isso aqui, oh [traçando a altura AH relativa à hipotenusa BC]. A altura faz 90º aqui, certo? [Pausa] Eu só construí uma altura. Tudo bem ali? Ou nada bem?
Alguns alunos [em coro]: Tudo bem.
Antônio: Fiz isso aqui, oh, construí um triângulo, o meu triângulo de fora, ele é? [Pausa] É o meu primeiro triângulo aqui, oh, certo ou não?
Natyele [em tom desanimado]: Certo.
Antônio: Eu vou chamar ele de triângulo I [escreveu I próximo ao desenho do triângulo ABC]. Aí, olha só, o amarelinho [pegando o recorte amarelo], projetei a altura, formou dois triângulos, certo?
Alunos: [em silêncio]
Antônio: Oh, eu formei três triângulos quando eu tracei a altura [escrevendo II e III, respectivamente, nos triângulos AHC e AHB]. Eu formei, ou não? Certo ou não?
Lourenço: Certo.
(...)

Antônio: Agora, olha bem. Quando eu construí a altura, aconteceu uma coisa legal que a gente não tinha no exercício lá dos 29º que a gente corrigiu hoje [exercício 16]. O que aconteceu de legal?
Rafaela: O 90.
Antônio: Esse ângulo aqui [apontando para o ponto *H*], eu já sei a medida dele. Tem quanto?
Lucas: 90.
Antônio: E esse outro aqui [apontando para o vértice *A*]?
Lucas: 90º, professor.
Antônio: 90º. E o de mais cedo [referindo-se ao triângulo do exercício 16] não tinha. Então, o que eu vou mostrar pra vocês, a gente começa hoje, mas como você viram, não dá tempo, é o seguinte: lembra aquele exercício que a gente fez, quando a gente não sabia esse ângulo? A gente concluiu que quantos triângulos eram semelhantes?
Aluno: Dois.
Antônio: Dois. Nos triângulos retângulos...
Lucas [interrompendo Antônio]: Todos os ângulos vão ser congruentes!
Antônio: Nos triângulos retângulos, quando eu traço a altura, o que eu vou descobrir é que os três triângulos são semelhantes, dois a dois. Ou seja [pegou os três recortes], amarelo é semelhante ao azul, branco é semelhante com azul e, aí, se você for olhar por forma, tudo bem, olha só como é que é a forma deles [colocando os recortes branco e amarelo, um de cada vez, com os seus ângulos retos sobrepostos ao ângulo reto do recorte azul]. Eles são sempre uma redução do triângulo azul. E aí eu vou mostrar para vocês porque que isso é verdade. Além disso ser verdade, daqui pra frente tem umas características especiais nele. As medidas ali, vocês vão ver que tem um negócio legal para gente descobrir medida de triângulo. Mas todo mundo enxergou que encaixa direitinho? Pra mostrar que eles são dois a dois semelhantes, os três triângulos. [Rafaela levantou a mão] Diga, Rafaela.
Rafaela: Mas ali [no desenho no quadro], nesse caso, a altura tá dividindo no meio?
Antônio: Oh, a Rafaela perguntou assim: a altura tá dividida no meio? Não posso afirmar isso. Pode acontecer? Até pode. Mas, assim, por enquanto eu não tenho informações suficientes pra garantir essas coisas. Lembra que na Matemática uma coisa é assim: parece, então eu tenho que mostrar que é. Vamos tentar não generalizar coisas sem informação. Por enquanto, o que eu posso garantir é que eu construí com ângulos iguais aqui embaixo [em *H*], 90º, e aí, eu tô afirmando pra vocês, mas eu vou mostrar, que eles são dois a dois semelhantes.

Em seguida, Antônio passou o “Para Casa” para os estudantes: exercícios do livro “Matemática: Imenes & Lellis”, do 18 ao 25, páginas 26 e 27. Ele finalizou a aula dizendo que nas próximas demonstraria as semelhanças entre os triângulos retângulos estudados e que, juntos, descobririam as relações entre as alturas e os lados desses triângulos.

Nessa aula, segundo a nossa percepção, houve momentos de dúvidas importantes, como por exemplo, a dúvida de Lucas sobre a congruência dos três triângulos no exercício 16, sobre a qual já mencionamos em parágrafos anteriores. Outra pergunta importante foi a pergunta de Lourenço, quando ele questionou por que o triângulo desenhado no quadro era retângulo. Antônio respondeu ao aluno explicando que a construção que estava no quadro, e que foi feita por ele, foi realizada para ser um triângulo retângulo. Nesse caso, quando se referiu apenas à construção ter sido realizada para ser de um triângulo retângulo, o Professor focalizou mais o aspecto operacional da construção do que a definição de triângulo retângulo que parecia ser necessária a ser evocada naquele momento. Novamente, aflorou dessa situação demandas de conhecimentos sobre o tratamento e a importância das dúvidas colocadas pelos alunos, inclusive quando estas dúvidas apoiam-se nas representações das figuras geométricas utilizadas nas aulas (BALL, THAMES, PHELPS, 2008; BALL, 2017).

No tocante à resolução do exercício 16, pudemos perceber, ainda, que Antônio solicitou aos alunos argumentações pautadas em resultados matemáticos e, ao mesmo tempo, recorreu com certa frequência aos recortes para sustentar as suas explicações para concluir quais ângulos possuíam mesma medida. A ideia do encaixe dos ângulos nos recortes conferiu uma dinâmica às representações e, de certa maneira, foi utilizada como principal argumento para a conclusão a que se queria chegar na atividade. Como os recortes, nesse caso, eram representações que não estavam disponíveis para os estudantes manipularem e, além disso, forneciam aos alunos impressões visuais mais intuitivas, pareceu-nos necessário que o Professor precisava saber em que momentos das atividades sobre semelhanças poderia haver um trânsito entre o uso e a exploração daquelas representações concretas e as discussões mais dedutivas.

Ao final da resolução do exercício 16, a aluna Rafaela questionou Antônio se a altura relativa à hipotenusa, que ele havia traçado, estava dividindo o ângulo de 90º e/ou a hipotenusa ao meio. Antônio, ao responder "Oh, a Rafaela perguntou assim: a altura tá dividida no meio? Não posso afirmar isso. Ainda. Pode acontecer? Até pode. Mas, assim, por enquanto eu não tenho informações suficientes pra garantir essas coisas. Lembra que na Matemática uma coisa é assim: parece, então eu tenho que mostrar que é. Vamos tentar não generalizar coisas sem informação", a nosso ver, preferiu, naquele momento, não explorar o raciocínio da aluna, optando por explicitar aos alunos que, na Matemática, as afirmações precisam ser demonstradas.

Isso nos evidencia que ao trabalhar sob o ponto de vista de argumentações e provas, os professores precisam saber avaliar quando e até que ponto das discussões sobre um assunto ele deve explorar os raciocínios dos estudantes, uma vez que a sua intenção seja que alunos perguntem e argumentem, e saber avaliar até que ponto estimular os alunos a conjecturarem, assim como, quando solicitar deles argumentos geometricamente mais robustos.

Compreendemos que à situação acima relatada estão relacionados conhecimentos sobre escutar e explorar as dúvidas e as conjecturas elaboradas pelos estudantes a fim de, a partir delas, potencializar as discussões sobre semelhanças nos triângulos retângulos (BALL, THAMES, PHELPS, 2008; BALL, 2017). Ou seja, a essa situação estão relacionados, a nosso ver, conhecimentos importantes para os professores sobre a condução das explicações durante atividades de provas, de modo que os alunos se engajem em perguntas e na realização de conjecturas para serem tratadas como parte do andamento do assunto. Os professores precisam saber que os alunos, muitas vezes, revelam suas ideias equivocadas sobre um assunto por meio de suas dúvidas e das conjecturas que formulam. Portanto, atividades de argumentação e prova também precisam ser compreendidas pelos professores como oportunidades para que os estudantes as exponham (HERBST, KOSKO, 2012). Especialmente sobre as conjecturas, para Jones e Herbst (2012) os professores precisam estar apto, ao conduzir tarefas de provas em suas aulas, a criar uma atmosfera em que os alunos façam conjecturas, forneçam justificativas para as suas ideias e construam cadeias de raciocínio. Por isso, os professores necessitam ter conhecimentos que os permitam sustentar e envolver-se em diálogos que coloquem os alunos sob a responsabilidade de raciocinar e de expor seu raciocínio. De acordo com esses autores, esses profissionais, sobretudo, precisam saber analisar os argumentos dos alunos e orientá-los no encadeamento de suas ideias.

Entendemos que também estão relacionados a essa situação conhecimentos sobre uso da visualização de representações concretas na argumentação em geometria. Sobre esse último conhecimento, há que se ter o cuidado de que se a visualização, enquanto um processo, for a própria construção da prova, então o processo precisa sustentar a veracidade da afirmação matemática que se quer provar. Casselman (2000) *apud* Hanna e Sidoli (2007), após explorar a utilização e, principalmente, usos não adequados de representações durante demonstrações matemáticas, concluiu que uma imagem pode, de fato, ser reconhecida como um componente essencial de uma prova. No entanto, segundo Hanna e Sidoli (2007), é válido explicitar que para que imagens possam ser consideradas elementos cruciais nas provas, elas devem estar sempre acompanhadas de explicações que vão além do que as representações transmitem em sua aparência.

5.2.2 A aula do dia 20-03-2018

Antônio iniciou a aula colocando o programa para o dia na lousa: Semelhança de triângulos retângulos; Propriedades; Exercícios. Em seguida, solicitou aos estudantes que abrissem o livro na página 28. Como na aula do dia anterior, ele desenhou um triângulo retângulo no quadro usando uma régua e um esquadro. Na página 28 do livro há um desenho de um triângulo retângulo na mesma configuração do desenho feito por Antônio no quadro (Figura 26):

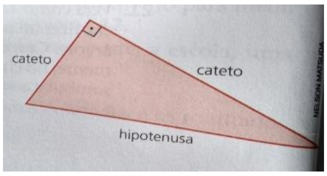


Figura 26: Desenho do triângulo retângulo no livro
(Fonte: IMENES, 2012, p. 28)

Após Antônio fazer o desenho no quadro, Diego perguntou-lhe se qualquer triângulo possuiu hipotenusa. O Professor respondeu: "Se pode chamar de hipotenusa? Eu nunca ouvi falar sobre isso. Não sei falar sobre isso... Que a gente tá assim, num triângulo retângulo, a gente chamou o lado oposto ao ângulo de 90º de hipotenusa. Diego perguntou, que ele ouviu no cursinho, que quando a gente constrói um ângulo reto, que vai construir... fazendo uma análise trigonométrica de um triângulo, ele tá querendo saber se, uma vez marcado o ângulo, eu posso chamar o lado oposto de hipotenusa para um triângulo qualquer. Eu nunca vi isso. Eu não sei. Se você tiver achado isso lá atrás, eu posso ler com você e conversar sobre. Mas eu nuca vi isso não. No triângulo retângulo, a gente pode chamar sim". Logo depois, traçou um segmento indo do vértice *A* do triângulo até um ponto *H* contido na sua hipotenusa (segmento *CB*) e explicou aos alunos que o segmento *AH* era a altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo e, por isso, *AH* era perpendicular ao lado *CB* (Figura 27).

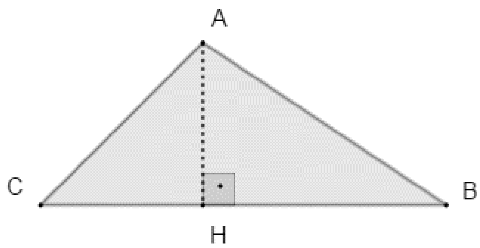


Figura 27: Representação do desenho do triângulo retângulo no quadro
(Fonte: arquivo pessoal da pesquisadora)

Diego, mais uma vez, levantou um questionamento a respeito do que o Professor estava fazendo:

Diego: Antônio, a altura de um triângulo não precisa ser de um lado até o vértice do outro...?
Antônio [interrompendo Diego]: Pode cair fora dele.
Lourenço: Tem que ser perpendicular, só [inaudível].

Antônio: Sim. Mas eu construí uma aqui que caiu dentro. Podia cair fora. Podia construir de fora. Tá? Agora olha aqui. Triângulo tem quantas alturas, Diego?
Diego: Três.
Antônio: Três. Então, eu construí uma delas. Eu podia construir uma perpendicular passando pelo vértice aqui, olha [traçando um segmento do vértice *C* a um ponto no cateto *AB*, entre os vértices *A* e *B*]. Podia fazer outra aqui [traçando um segmento do vértice *B* a um ponto no cateto *AC*, entre os vértices *A* e *C*]. Tá certo? Pessoal...
Diego: Mas, no caso, esse lado [apontando para o cateto *AC*], a altura não seria de *C* até *AB*, mas...
Antônio: Mas essa linha aqui [de *C* ao cateto *AB*] é o quê?
Diego: Não... Seria perpendicular, ali, oh, no *AB*, teria que ser perpendicular. Só que tinha que ir até...
Antônio [interrompendo Diego]: Relativa a esse [cateto *AB*].
Diego: É, só que...
Antônio: [interrompendo Diego] Podia passar uma perpendicular aqui, oh, passando por *C*, perpendicular, aí eu construo a altura.
Diego: Mas, aí, a altura não seria do *AB* até o *C*, não? Seria...
Antônio [interrompendo Diego]: Mas a perpendicular não é partindo do *C*? Eu não podia fazer isso e construir o ângulo? Que, em alguns casos, cai fora. Se eu tiver um triângulo qualquer, podia cair fora. A linha perpendicular podia dar fora, porque... eu vou te mostrar um desenho, em algum caso que cai fora. Tá certo? Mas você já deve ter visto alguns. Nesse aqui, em particular, a gente vai construir ela pra cair dentro, tá bom?

Ao final dessa aula, conversei um pouco com Diego sobre essa dúvida que tivera. Segundo o estudante, o que ele queria saber era se os próprios catetos não deveriam ser as alturas relativas um do outro, respectivamente. Sugeri, então, que ele perguntasse isso novamente ao Professor na próxima aula. No entanto, não houve mais explorações dessa dúvida.

Podemos fazer dois apontamentos sobre os questionamentos de Diego. O primeiro refere-se a quando ele perguntou ao Professor se qualquer triângulo possuiu um lado denominado hipotenusa. Por definição, hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90º em triângulos retângulos (BARBOSA, 2012), e esse é um conhecimento comum do conteúdo sobre triângulos. Quando Diego fez outra pergunta, agora sobre as outras alturas do triângulo retângulo, Antônio, inicialmente, interpretou a pergunta segundo a ideia de as alturas dos triângulos retângulos “caírem fora dele”, o que não era bem o que Diego queria saber e o que não é possível de se ocorrer nesses triângulos. Quando compreendeu a dúvida, Antônio deu as explicações ao aluno traçando segmentos partindo dos vértices *B* e *C* que não eram perpendiculares aos lados opostos a esses vértices, respectivamente, e que, logo, não poderiam representar as alturas relativas a cada cateto do triângulo. Apesar de ter dito que em triângulos quaisquer as suas alturas podem ser traçadas na região externa a essas figuras, parece-nos que não ficou claro para os alunos que isso não acontece nos triângulos retângulos.

Diante dessas questões que foram colocadas para o Professor durante a instrução, pode-se sugerir que a esse tipo de situação está relacionado um conhecimento comum do conteúdo relativo aos triângulos retângulos, sobre características e propriedades dessas figuras, como por exemplo, o fato de somente ele possuir um lado nomeado como hipotenusa e as propriedades relativas às suas alturas, e um conhecimento do conteúdo e do ensino de triângulos, o qual diz respeito às explicações que precisam ser dadas aos alunos da Educação Básica sobre tais características e propriedades.

Na sequência da aula, Antônio verificou com os estudantes que o ponto *H*, traçado sobre a hipotenusa do triângulo *ABC*, dividia aquele lado em outros dois segmentos, a saber: *CH* e *HB*. Pensando-se sobre essa constatação de Antônio, é possível ainda fazer uma ligação com a dúvida de Diego sobre as alturas. Dado que a altura relativa de cada cateto é o outro cateto, então, diferentemente da altura relativa à hipotenusa, as outras duas alturas não dividem os catetos em dois segmentos. Consideramos que é importante que os professores expliquem isso aos alunos, uma vez que esses esclarecimentos podem, a nosso ver, auxiliá-los a não assimilarem que as alturas relativas aos catetos também os dividem em dois segmentos. Consideramos como um conhecimento especializado do conteúdo saber identificar as principais características e propriedades das figuras que estão sendo estudadas, as quais às vezes estão implícitas no tratamento do assunto, mas que precisam, em muitas situações, ser explicitadas durante a instrução.

Na continuidade da aula, Antônio escreveu a letra *h* ao lado do segmento *AH*, escreveu II no desenho do triângulo *ACH* e III no desenho do triângulo *AHB*. Ao lado do desenho do triângulo retângulo *ABC*, ele escreveu: triângulo *ABC* = I. Ele pegou os recortes coloridos e disse aos estudantes que aquele material representava a situação que estava desenhada no quadro: o triângulo *ABC* poderia ser representado pelo recorte azul, assim como o triângulo *ACH* poderia ser representado pelo recorte amarelo e o recorte branco poderia representar o triângulo *AHB*. Antônio explicou que a partir daquela construção que estava no quadro, e com o auxílio do material concreto, iria provar que os triângulos I, II e III eram semelhantes entre si. Durante várias vezes, ele reforçou que as semelhanças estudadas naquela aula eram válidas apenas para triângulos retângulos e que, para triângulos não retângulos, as semelhanças poderiam não ser sempre verdadeiras.

Essa fala de Antônio retorna ao que foi questionado por Lucas na aula do dia anterior, quando estavam resolvendo o exercício 16: “Os três [triângulos] podem ser semelhantes?”. Na ocasião, Antônio deixou em aberto a questão sobre a semelhança entre três triângulos não retângulos no contexto representado pelo exercício 16. Já nesta aula, o Professor explicou que a semelhança entre os três triângulos, no contexto em questão, só aconteceria caso todos os triângulos fossem retângulos, e que para triângulos não retângulos as semelhanças entre os três "nem sempre" será verdadeira. De fato, a condição necessária para que a semelhança nos três triângulos ocorra, no contexto do estudo que estava acontecendo na aula, é que os três triângulos sejam retângulos (BARBOSA, 2012, p. 132). Essa fala do Professor nos remete a um conhecimento especializado do conteúdo sobre semelhança de triângulos. Saber como explicar isso aos alunos, lançando mão de representações e metodologias que favoreçam essa explicação, e reconhecer a importância dessa explicação é um conhecimento específico dos professores relativo ao conhecimento do conteúdo e do seu ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

Na continuação da aula, Antônio iniciou uma prova de que os triângulos I e III eram semelhantes e denominou esse fato como primeiro caso. Inicialmente, quando questionou os alunos sobre o que deveriam "procurar" nos dois triângulos para concluírem a semelhança entre eles, alguns responderam que deveriam verificar se os triângulos possuíam dois ângulos congruentes e dois lados proporcionais. Antônio chamou a atenção dos alunos sobre isso, afirmando que apenas o critério da congruência dos ângulos precisava ser verificado. Ele usou os recortes azul e branco para concluir, junto aos alunos, que em ambos os triângulos, I e III, havia um ângulo de 90º. Usando principalmente de movimentos de giros nos recortes, ele mostrou aos alunos que as representações dos ângulos de 90º em cada recorte se encaixavam e não havia "espaço não preenchido" nesse encaixe. Depois, eles concluíram que o ângulo *B* também era comum nos triângulos analisados. Em certo momento dos diálogos, Rafaela levantou uma discussão, semelhante ao que havia perguntado na aula anterior, a partir da sua observação do desenho que estava no quadro e dos recortes que estavam sendo utilizados para a conclusão da semelhança entre os triângulos I e II:

Rafaela: Eu posso considerar que o ângulo no III, aí no *A*, como o ângulo *A*, no todo [referindo-se à medida do ângulo *A* no triângulo I] é de 90, então tá dividindo no meio e o ângulo *A* no III é 45...?
Antônio: Quem falou?
Rafaela: Uai, você fez o corte aí no de 90...
Antônio: Uai, mas eu posso construir um [ângulo] de 90 e, oh, 90 se eu repartir, tem várias maneiras de dividir 90. 60 e 30 [escrevendo 90=60+30 no quadro]. Como é que você sabe que é 45º?
Aluno: Os dois têm a mesma medida!
Antônio: Quem falou? [Pausa] Alguém falou que tem a mesma medida?
Natyele: Tá, mas eles são semelhantes.
Antônio: Hã? A gente quer que [inaudível]. A gente não sabe se são.
Alunos: [todos falando ao mesmo tempo].

Antônio: Pessoal, olha pra mim aqui na frente. É cansativo mesmo. Todo mundo tá vendo qual que é o ângulo comum [girando o recorte branco sobre o recorte azul para mostrar aos estudantes o encaixe dos ângulos congruentes]. Qual que é o triângulo que tem nos dois?
Diego: Professor!
Antônio: Pera aí, Diego! Pera aí, Diego! Olha aqui. Olha aqui, Lucas. Qual que é o ângulo que tá nos dois?
Lucas: É o *B*. O ângulo *HAC* pode ser de 45º.
Antônio: Pode ou não... Por enquanto eu não vou falar com você quanto ele vale. Eu só quero...
Lucas: Se dividir no meio ali...
Antônio: Quem falou que eu dividi no meio? Eu tracei uma...
Mel: Se tivesse dividido...
Antônio: O que que eu fiz? Eu tracei uma perpendicular... passando no vértice *A*... fazendo 90º com a parte de baixo [lado *CB*]. Quantos graus tem aqui [apontando para os ângulos *HAC* e *HAB*], eu não medi! Eu não sei! Eu podia marcar aqui [em *A*] 60 e 30, não podia?
Diego: Podia.
Antônio: O que eu falei pra vocês: eu tracei uma reta de *A* até o segmento *CB* e quando ela bateu em *CB* deu 90º. Só isso que eu falei! É só isso que eu sei nesse momento. Tudo bem ou não?
Alguns alunos: Tudo bem.
Antônio: Então, não façamos afirmações que a gente não tem como... Porque parece.

No quadro, Antônio escreveu: *B* é ângulo comum a I e III. Em seguida, ele concluiu que, por tal fato, e porque ambos, triângulos I e III, também possuíam um ângulo de 90º, então eles eram triângulos semelhantes. Antônio girou novamente o recorte branco sobre o recorte azul e mostrou aos alunos que, ao colocar os dois ângulos de 90º sobrepostos, era possível notar que o recorte branco (triângulo III) era uma redução do recorte azul (triângulo I). Os alunos disseram ter compreendido o que Antônio disse.

Partindo do excerto acima, percebemos que Antônio utilizou os recortes para construir argumentações. Vejamos, por exemplo, a explicação que ele deu para o encaixe dos ângulos de 90º, baseando-se na ideia de que não havia espaço não preenchido ao se sobrepor os vértices dos recortes azul e branco em que se representavam os ângulos retos. Ao mesmo tempo, Antônio vinha solicitando aos alunos que não argumentassem excessivamente somente por meio de suas percepções visuais, assim como estavam fazendo quando afirmaram que a altura *AH* estava dividindo o ângulo de 90º em dois ângulos de 45º. Diante disso, parece-nos relevante que os professores de Matemática saibam quando e o quanto utilizar materiais concretos durante demonstrações, de maneira que os argumentos que estejam sendo construídos pelos alunos não se pautem quase que exclusivamente naquilo que tais materiais parecem mostrar.

Na situação que foi observada, por exemplo, entendemos que, em alguns momentos, houve uma demanda de que o Professor articulasse o uso dos recortes com argumentações também pautadas em hipóteses fornecidas pela teoria envolvida na situação explorada. Acreditamos, ainda, que a insistência de alguns alunos em argumentar que o ângulo de 90º em A estava dividido pela reta AH em dois ângulos de 45º pode ter sido fomentada pela tendência a uma recorrência maior, durante as aulas, aos aspectos muito intuitivos das representações.

No 9º ano, o uso de um material didático – com vistas a um auxílio na construção de argumentações – que, assim como os recortes, proporcionassem a visualização de triângulos que pudessem ser rotacionados e encaixados, tendo as suas propriedades e características preservadas, e de tal maneira que a visualização promovesse uma interação entre os raciocínios intuitivo e dedutivo, poderia fomentar discussões das conjecturas emergentes da exploração dinâmica, validando-as com base não somente em um aspecto visual mais intuitivo, mas também na teoria geométrica envolvida na situação explorada (MARIOTTI, 2002). Acreditamos que seja um conhecimento para o ensino de geometria, relativo ao conteúdo e seu ensino e aos estudantes, saber avaliar os momentos em que o uso da visualização de um material concreto precisa proporcionar, também, o estímulo ao raciocínio mais abstrato dos alunos.

Antônio seguiu para a explicação do que nomeou como o 2º caso de semelhança nos triângulos retângulos: que os triângulos I (ABC) e II (AHC) eram semelhantes. Novamente, ele fez uso das representações recortadas dos três triângulos para auxiliá-lo nas argumentações. Para concluir que havia nos triângulos I e II um ângulo de 90º e que o ângulo C era comum aos dois, Antônio sobrepôs os recortes amarelo e azul. Foi possível notar que os alunos acompanhavam as argumentações do Professor, pautadas na visualização e encaixe dos recortes, e concordavam com o que ele estava fazendo sem realizar conjecturas ou perguntas.

Após concluir a demonstração dos dois primeiros casos de semelhança nos triângulos retângulos, e de ter dito aos alunos que havia um terceiro caso válido, Antônio lhes mostrou que os três recortes, ao serem girados, se encaixavam pelo ângulo de 90º. Por isso, segundo ele, os triângulos menores (recortes branco e amarelo, ou III e II) eram reduções do triângulo maior (azul ou I). Enquanto isso, Diego parecia ter ficado incomodado com o fato de que estava tentando dizer algo a Antônio desde o começo da aula e não era ouvido. Após insistir um pouco, Diego conseguiu falar sobre isso:

Diego: Professor, eu tive uma ideia!
Antônio: Hum?

Diego: Se você tem dois triângulos, e eles dois são semelhantes, separados, entre eles e o grandão, aí os dois vão ser semelhantes entre si?
Antônio: Você fala... Entendi. A pergunta do Diego é a seguinte: se I é semelhante com III e II é semelhante com III [anotando no quadro: I~III e II~III], eu posso concluir a semelhança do II com o III? Hum... Será que pode garantir? Hein, Alana?
Alana [ao fundo da sala]: Vamos verificar...?
Diego [interrompendo Alana]: Porque se tem semelhança daquele pra aquele [I e III], eles vão ter os mesmos ângulos.
Antônio: Sim, é... Oh, se um é congruente com o outro e o outro é congruente com o outro lá, congruência dá pra concluir, semelhança não!
Diego: Mas eles têm os mesmos ângulos...
Antônio: Se tiver os mesmo ângulos... Vai lá, então!
Diego: Se compara o III com o I, que é o grandão. Aí, supondo que eles são semelhantes, aí eles têm os ângulos congruentes, né?
Antônio: Sim. Eles... Eu acho que dá... Vou pensar.
Diego: Então, se eu comparar o II com I e for semelhante também, significa que eles têm os ângulos congruentes. Então...
Antônio [interrompendo Diego]: É! Eu tô inclinado a acreditar no que você tá dizendo. Me parece que sim. Mas, não dá pra gente fechar isso aqui agora não. Tem que pensar um pouquinho mais. Pra elaborar isso do ponto de vista da Matemática. (...) Parece que sim. Pelos ângulos. Mas tem que provar!
Lourenço: Do que que ele tá falando, professor?
Antônio: O Diego tá perguntando o seguinte: se eu consigo garantir que, igual a gente fez aqui, a gente mostrou, amarelo é congruente com azul [segurando os dois recortes], branco é congruente com azul [segurando os dois recortes], eu posso garantir que, sempre, branco vai ser congruente com amarelo? No caso do triângulo retângulo, sim. A pergunta é essa. A minha dúvida é, e a gente tem que pensar, e se eu tiver trabalhando com outros ângulos ali?
Diego: Não. A minha dúvida é assim: fora desses triângulos aí, não os triângulos dentro. Fora.
Antônio: Ahã! E aí complica a vida mais um pouco ainda.
Diego: Entre triângulos qual... qual...
Antônio e Diego: Quaisquer.
Diego: Aí, se comparar esse com esse, os semelhantes, então os três...
Antônio [interrompendo Diego]: Não tenho certeza disso!
Lucas: Professor, é...
Antônio: Congruência sim. Porque é assim: se um é igual ao outro e o outro é igual ao primeiro, tudo bem que eles são. Que a congruência dá pra fechar. Semelhança tem que pensar um pouco mais. Não sei te responder isso rápido assim não.
Lucas [com a mão levantada]: O que ele quer dizer é que se eles [os triângulos] são congruentes, então eles são sempre semelhantes?
Antônio: É. A pergunta do Diego é basicamente essa. Se eu tenho três triângulos, nem sei, pegou três aqui [desenhando no quadro, à mão livre, três triângulos quaisquer], e eu sei que esse é semelhante a esse. Sei também que esse é semelhante a esse, eu posso concluir a mesma coisa pros outros dois? Entendeu?
Diego: É, uai! Se um é semelhante ao outro...
Lucas: Eu acho que pode! Eu acho!
Antônio: Oh, aí é que tá. Tem que pensar. Achar não serve pra nós aqui. A gente tem que provar tipo isso [referindo-se ao que acabara de fazer para os dois primeiros casos de semelhança no triângulo retângulo], com argumento matemático para poder concluir essas coisas. Tá bom? Podemos pensar nisso.

Antônio solicitou a Diego que escrevesse seu raciocínio em uma folha e que o entregasse para que pudesse ler com calma. O aluno começou a escrever a sua ideia em uma folha imediatamente.

Aqui vale sublinhar que Antônio deu voz a Diego para que ele expusesse a sua questão. No entanto, Antônio acabou deixando o questionamento do estudante para uma verificação posterior, o que não ocorreu. De um lado, podemos ver que o Professor estimulou e concedeu aos alunos uma liberdade de colocar suas ideias e questionar sobre o assunto. Nesse caso, Diego conseguiu vislumbrar uma interessante consequência das semelhanças de triângulos e expôs a sua ideia para a turma. De outro lado, vemos também que situações em que a colocação de ideias dos estudantes é privilegiada podem seguir para questões mais específicas sobre o assunto abordado, as quais os professores, durante a instrução, podem não compreender.

Perante a isso, defendemos, assim como sugerem Ball, Thames e Phelps (2008) e Ball (2017), que os professores precisam analisar as dúvidas dos alunos que surgem à medida que o assunto estudado avança, bem como, analisar as suas produções matemáticas, principalmente enquanto as produzem. Ainda que no momento da instrução isso não seja possível – por exemplo, devido ao não conhecimento dos professores sobre o que se refere a questão levantada pelo aluno, ou devido ao fato de que eles precisam dar andamento no cumprimento do currículo –, os professores podem buscar maneiras de fazer tal análise em momentos posteriores.

A pergunta do aluno diz respeito a uma propriedade da semelhança de triângulos, que garante que ela obedece a transitividade. Ou seja, diz respeito a um conhecimento que consideramos como da geometria acadêmica. Antônio, no momento em que o questionamento de Diego foi exposto, não conseguiu acessar essa propriedade e também não houve um momento para exploração com Diego, e com os demais alunos, a respeito da possível veracidade da conjectura daquele aluno. Houve interesse por parte de Lucas na pergunta do colega, mas aquele aluno entendeu a questão de forma equivocada, confundindo os conceitos de congruência e semelhança de triângulos, compreendendo que o fato de os triângulos serem congruentes implicava no fato de eles serem semelhantes. Antônio, então, confirmou que a pergunta de Diego era exatamente aquela que Lucas entendeu, o que não era verídico.

A respeito desse momento da aula, pode-se fazer alguns apontamentos. Primeiramente, Antônio solicitou aos alunos, até esse momento, que tentassem produzir argumentações matemáticas ao apresentarem suas ideias. Essa solicitação parece ter estimulado Diego a produzir uma conjectura e a querer expô-la à turma e ao Professor. Contudo, naquele momento, a argumentação de Diego não foi aproveitada como uma oportunidade para que o aluno expusesse "modos de argumentação" para que Antônio, juntamente com a comunidade de sala de aula, pudessem analisá-los como aceitáveis ou não. Em segundo lugar, quando Lucas quis entender melhor a questão do colega, e fez um comentário sobre a congruência dos triângulos implicar em sua semelhança, Antônio demonstrou que não havia entendido muito bem a colocação de ambos, uma vez que confirmou que o que Diego estava perguntando era o que Lucas havia entendido.

Portanto, destacamos dessa situação indícios de uma demanda de conhecimentos matemáticos para o ensino relevantes para os professores relativos às demonstrações na Educação Básica. Da mesma forma, identificamos demandas conhecimentos sobre semelhanças de triângulos, que dizem respeito tanto ao conhecimento acadêmico da validade da sua propriedade de transitividade, quanto ao conhecimento especializado do conteúdo no que se refere a maneiras apropriadas de se validar e explicar essa afirmação para alunos do 9º ano (STYLIANIDES, BALL, 2008; BALL, THAMES, PHELPS, 2008).

Ao retomar a explicação sobre o triângulo retângulo que estava desenhado no quadro, Antônio relembrou aos alunos o fato de que se dois triângulos são semelhantes, então eles possuem lados proporcionais. Mostrou-lhes os recortes, pediu que olhassem para o material e que "imaginassem" um prolongamento dos lados dos dois triângulos menores (recortes amarelo e branco). Esse prolongamento, de acordo com Antônio, faria-os "perceber" o fato de que tais lados são proporcionais, numa mesma razão, aos lados do triângulo maior (recorte azul). Ao dar início às explicações sobre as relações métricas nos triângulos retângulos, Antônio voltou a evocar a ideia das reduções e ampliações como um importante apoio à ideia de semelhança de triângulos. Foi possível notar, entretanto, que os alunos pareciam meio confusos com essa ideia, demonstrando não compreender muito bem como aconteciam e qual o sentido das ampliações e reduções no contexto que estavam explorando.

Sobre isso, pontuamos que a constatação da proporcionalidade dos lados dos triângulos pode não ser algo natural para os alunos "perceberem" a partir da imaginação do prolongamento dos lados de triângulos. No caso das aulas observadas, por exemplo, notamos que os alunos já vinham demonstrando dificuldades em distinguir e lidar com os conceitos de proporcionalidade e congruência desde o início do tratamento do assunto semelhança de triângulos.

Pensando-se por esse lado, parece-nos relevante para o ensino de geometria que os professores tenham um conhecimento do conteúdo e do seu ensino que lhes possibilitem propor atividades para o desenvolvimento das ideias de congruência e semelhança de figuras planas com uso de geometria dinâmica, por exemplo, que viabilizem experimentos com reduções e ampliações de triângulos. Tais experimentos podem proporcionar um efeito visual de prolongamento dos lados dos triângulos, de tal forma que as propriedades das figuras sejam preservadas e que seja possível a constatação, através dos cálculos das razões entre as medidas dos lados homólogos dos três triângulos, da proporcionalidade entre eles em uma constante real positiva.

No início das explicações para se chegar às relações métricas nos triângulos retângulos, Lucas retornou à uma ideia, a qual já tinha sido levantada por outros colegas anteriormente, de que o segmento *AH* (altura) dividia o ângulo *A* (90º) em dois ângulos de 45º. Ao ouvir o comentário do aluno, Antônio explicou novamente que não havia como ter certeza de que *AH* funcionava como uma bissetriz do ângulo reto no triângulo *ABC*. Lucas não aceitou de imediato essa explicação e sugeriu, ainda, que o segmento *AH* também dividia a hipotenusa (*CB*) em dois segmentos de mesma medida:

Lucas: Mas, e se... Em qualquer triângulo... qualquer triângulo. É...
Antônio: Retângulo, né? Retângulo. Eu não estou partindo ele [o ângulo de 90º] no meio.
Lucas. Não. Eu tô falando...
Antônio: Eu estou traçando a altura relativa ao vértice *A*. É só isso!
Lucas: [inaudível] eu acho que se qualquer triângulo que for dividido exatamente no meio, eu acho, os dois de dentro vão ser iguais...
Antônio: Observa! Você tá querendo uma coisa muito especial. Você tá querendo uma altura que divide no meio. Não posso afirmar nada. Não sei disso. O Diego tá perguntando um caso mais geral de todos e eu posso concluir alguma coisa?
Lucas: Pode.
Antônio: Se pode, você tem que me mostrar. Pode, chutando, não! Moçada, olha bem! Olha bem aqui. Lembra que eu perguntei para vocês, lá no começo, quando eu tracei a minha altura [segmento *AH*], que eu não sei se tá no meio certo. Se eu não sei que tá no meio certo...
Lucas [levantando-se da cadeira]: Eu vou aí!
Antônio: Calma, Lucas! Se eu não sei que tá no meio certo, eu tenho o segmento *CH* e o segmento *HB*, tudo bem?
Lucas: Não.
Antônio: Não tá tudo bem, Lucas!?
Lucas: Não! Sabe porquê?
Antônio: Não tem dois segmentos aqui?
Lucas: Não, sô!
Antônio: Então, vem cá. Levanta! Se não está tudo bem, vai ficar agora. [Lucas foi até o quadro]. Põe a mão no vértice *C* lá. Põe o dedão, mas não apaga, não [assim Lucas o fez]. Põe o seu dedão aqui, agora, no vértice *H* [assim Lucas o fez]. Não tira a mão não! Isso aí é o quê?
Lucas: Um segmento.

Antônio: Agora põe a mão no *H* [assim Lucas o fez]. Põe a mão no *B* [assim Lucas o fez]. Isso é o quê?
Lucas: Segmento.
Antônio: Ah! Então, se eu juntar os dois eu formo quem?
Lucas: Dois.
Antônio: Não. Se eu juntar os dois eu formo quem do triângulo retângulo [*ABC*]? Eu formo quem do triângulo grande?
Lucas: Hum...
Antônio: Pega... Põe a mão no [segmento] *CD* agora [assim Lucas o fez]. Eu formo quem? Como que chama isso aí?
Lucas: Hipotenusa.
Antônio: Isso! Senta lá, agora. Todo mundo viu os dois segmentos aqui na hora que o Lucas pôs a mão lá? (...) Todo mundo percebeu que quando projetei, que quando eu tracei a altura relativa à hipotenusa, eu formei dois segmentos? Eu não sei a medida desses segmentos. Parece que é igual? Parece, mas eu não posso falar que é igual. Como parece, mas eu não posso falar, eu vou usar letras diferentes pra usar ideias diferentes. Eu vou chamar o meu *CH* de *m* e... o *HB* eu vou chamar de *n*. Ah, professor, o *n* pode ser igual ao *m*? Pode. Mas eu não posso garantir isso de cara. Calma Roney, calma que tá indo! Eu preciso da concentração de vocês aqui pra gente deduzir umas coisas. [Lucas estava com a mão levantada havia um tempo] Fala, Lucas. Tô te ouvindo.
Lucas: Oh, o *CB*, é... A linha *AH*, eu posso alegar... Eu posso afirmar que ela foi cortada no meio ali [apontando para o segmento *CB*].
Antônio: Quem falou?
Lucas: Eu!
Antônio: Eu construí!
Lucas: Calma aí! Sabe porquê? Tá vendo... *H* [referindo-se ao segmento *AH*] não passou formando dois ângulos de 90?
Antônio: Sim, senhor!
Lucas: Então! Se ela tivesse meio torta, não estaria no 90. Estaria 89, 91.
Antônio: Olha aqui. Aqui tem 90, certo [apontando para o ponto *H* no segmento *CB*]?
Lucas: Aham.
Antônio: Eu posso ter um triângulo assim? Olha bem [desenhando no quadro, à mão livre, um triângulo retângulo qualquer]. Eu tenho 90 aqui [apontando para o vértice em que o ângulo reto estava representado]. Eu posso ter 30 aqui [apontando um dos outros dois vértices do triângulo]. Eu posso ter 60 aqui [apontando o outro vértice do triângulo]? Posso ou não? É isso que eu tô querendo dizer. Eu posso ter ângulos diferentes.
Lucas: Não. Mas ali, você pode afirmar. Sabe porquê? Porque se você tivesse um milímetro torto [fazendo um gesto com a mão para indicar o caso em que o segmento *AH* não estivesse perpendicular ao segmento *CB*] ...
Antônio [interrompendo Lucas]: Eu vou fazer um desenho aqui pra te mostrar, pra tentar te convencer [desenhando no quadro, à mão livre, um triângulo retângulo qualquer]. 90 ali, certo? Aqui vai ser 60 [marcando 60º em um dos vértices do triângulo retângulo]. Quanto que sobrou pra esse aqui [apontando para o outro vértice do triângulo]?
Alguns alunos [falando em to de voz baixo]: 30.
Antônio: Quanto que vai ser esse aqui?
(...)

Lucas: 30.
Antônio: Pronto!
Lucas: Me empresta a sua caneta aí! Eu vou aí mostrar. [No quadro, usando o desenho do triângulo retângulo *ABC*] Se essa medida aqui [a altura *AH*] fosse um tiquinho mais... não podia falar que isso aqui é um vértice do triângulo não [apontando para *A*].
Antônio: Esse ângulo aqui [em *A*] é 90. A gente tá falando dos outros.
Lucas: Então, pode falar que aqui tá no meio certinho [referindo-se ao ponto *H* sobre o lado *CB*], porque é 90.
Antônio: Não, moço! Olha aqui. Deixa eu ver se eu consigo fazer um desenho aqui [construindo um triângulo obtuso no quadro como representado na Figura 28].
Mel: Ah! Entendi, Lucas!
Antônio: Olha aqui, Lucas. Se eu quiser traçar a altura relativa a esse vértice aqui, oh. A altura sai do vértice, em relação ao lado *CB*. Ela faz 90º com o lado oposto, certo? Olha aqui, [inaudível] se eu for traçar a altura aqui, eu quero 90º, a altura vai cair dentro ou fora do triângulo?
Lucas: Fora.
Antônio: Fora. Olha aqui. 90. Eu não posso concluir outras coisas porque parece, porque tá... Não. Percebeu em que isso aqui [o desenho que acabara de fazer] tá diferente disso aqui [o desenho do triângulo *ABC*]? A altura faz 90º, mas ela não vai me dizer do tamanho do segmento. Pra ficar igual, se eu quiser garantir que esses dois triângulos é... que esses dois segmentos tenham mesmo tamanho, eu precisava ter que no triângulo de fora [*ABC*] tivesse 45, 45. Aí tudo bem. Que é aquele negócio que vocês observaram. No [triângulo] isósceles rola isso. Mas eu não posso garantir para qualquer caso, certo ou não?
Lucas e alguns alunos: Certo.
Antônio: De novo, nesse desenho que eu fiz no quadro, por acaso, pode até ter ficado muito parecido. Mas vocês perceberam que nesse aqui [inaudível].
Diego: Mas não dá pra provar.
Antônio: Não dá pra provar.

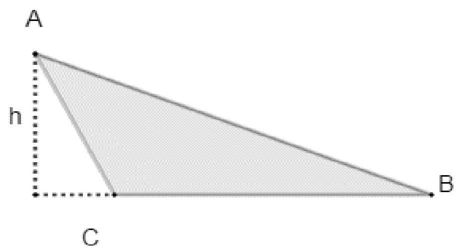


Figura 28: Representação do desenho no quadro do triângulo obtuso
(Fonte: arquivo pessoal da pesquisadora)

Apesar de Lucas ter dito a Antônio que estava de acordo com a argumentação apresentada pelo Professor, pude escutar, quando comentou em voz baixa com Lourenço, que ele ainda achava que a altura relativa à hipotenusa poderia dividir esse segmento em dois segmentos de mesma medida.

Destacamos que quando Lucas afirmou que a altura *AH* dividia a hipotenusa *CB* em dois segmentos de mesma medida, Antônio demorou um pouco para solicitar que o aluno explicasse com calma o que queria dizer e quais argumentos e justificativas utilizaria para sustentar a veracidade de sua afirmação. A postura do aluno em requerer ir ao quadro e mostrar ao Professor a sua ideia foi, a nosso ver, o que possibilitou todo o debate que aconteceu. No início dos diálogos, nos parece que Antônio entendeu que Lucas estava questionando sobre os ângulos internos do triângulo *ABC*, cuja soma é 90º, quando, na verdade, não era essa a observação do aluno. Ao explicar para Antônio que, em seu entendimento, o fato de a altura *AH* ser perpendicular ao segmento *CB* fazia com que ela dividisse esse segmento em dois outros de mesma medida, ou seja, que *CH* e *HB* eram segmentos de medidas iguais, dado o fato de que em *H* havia um ângulo de 90º, o aluno construiu seu argumento reforçando que a perpendicularidade, em sua percepção, provocava a medida igual dos segmentos: "Calma aí! Sabe porquê? Tá vendo... *H* [referindo-se ao segmento *AH*] não passou formando dois ângulos de 90?"; "Então, pode falar que aqui tá no meio certinho [referindo-se ao ponto *H* sobre o lado *CB*], porque é 90". Quando o Professor compreendeu a ideia do aluno, houve uma breve exploração das suas justificativas.

Em nossa visão, o desenho que estava no quadro, por ser uma representação que visualmente se aproximava de uma representação de um triângulo retângulo isósceles, pode ter influenciado Lucas na crença da afirmação que defendeu. Inclusive, cabe aqui a observação de que o que Lucas estava afirmando só é válido para triângulos isósceles. Esse foi um comentário feito pelo Professor, mas que não foi discutido.

Já o desenho que Antônio utilizou como um contraexemplo para atestar a não veracidade da afirmação de Lucas (Figura 28) não se configurou como um modo de argumentação eficaz. O triângulo utilizado era obtuso, ou seja, o Professor argumentou através de uma representação que não satisfazia o contexto explorado. Cabe comentar, ainda, que no caso dos triângulos retângulos não há como traçar a altura relativa à hipotenusa de forma que o pé da perpendicular esteja na região externa do triângulo, assim como Antônio queria mostrar a Lucas. Portanto, para o efeito que Antônio queria causar, seria necessário, por exemplo, que ele apresentasse aos alunos um desenho de um triângulo retângulo cuja altura relativa à hipotenusa fosse traçada de tal modo que não causasse uma impressão visual de estar dividindo o cateto *CB* em dois segmentos de mesma medida, como representado pelo esboço abaixo (Figura 29):

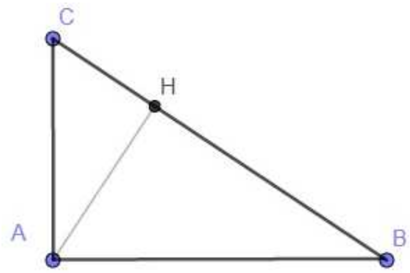


Figura 29: Esboço de exemplo para representação da altura *AH* de um triângulo retângulo *ABC*
(Fonte: arquivo pessoal da pesquisadora)

Portanto, compreendemos que Antônio precisaria recorrer a um modo pictórico de representação da argumentação (STYLIANIDES, BALL, 2008) que condissesse com a natureza da figura que estava sendo explorada (triângulos retângulos). Um outro exemplo para isso, seria a realização, em um *software* de geometria dinâmica, de um experimento em que um triângulo retângulo, inscrito em uma semicircunferência, pudesse ter o vértice que apoia o ângulo de 90º percorrendo o arco e, assim, ter a sua altura relativa à hipotenusa "arrastada", de maneira que os alunos pudessem ver o pé da perpendicular (ponto *H*) em diferentes posições sobre a hipotenusa.

O modo de argumentação de Lucas foi discutido entre o aluno e o Professor, entretanto não foi colocado para discussão com os outros estudantes. Uma discussão coletiva poderia ter auxiliado Antônio a produzir argumentações diante da afirmação de Lucas, a perceber se os outros estudantes aceitariam ou não como válida a argumentação do colega e como argumentariam a favor ou contra ela. Mel, por exemplo, disse ter entendido a afirmação que Lucas defendia. Talvez ela tenha, em algum momento, concordado com o colega. Segundo Knipping e Reid (2019), abordagens do tipo dialógicas e intuitivo-visual, como a que foi desenvolvida por Antônio, em que se deseja que os alunos estudem a veracidade de uma afirmação a partir da exploração de representações de figuras e das informações que se tem sobre elas, são tais que os professores precisam, ainda mais, incentivar os alunos a elaborarem e analisarem seus próprios argumentos e justificativas. As conjecturas e argumentos produzidos pelos alunos, enquanto exploram uma representação e o que se tem de informações sobre ela, necessitam ser avaliados e discutidos pelos professores com a comunidade de sala de aula como parte prolífica do ensino.

Com relação ao modo da argumentação do próprio Antônio, através da construção de um contraexemplo para mostrar a Lucas que sua afirmação não era verídica, entendemos que tal modo foi válido, porém não foi adequado do ponto de vista da forma de representação da argumentação utilizada, uma vez que o triângulo obtuso apresentado ao aluno não satisfazia as condições da situação explorada (STYLIANIDES, BALL, 2008).

Através do excerto acima, encontramos indícios de que essa situação de sala de aula relaciona-se a conhecimentos especializados e a conhecimentos do conteúdo e do ensino sobre elementos de triângulos, tais como propriedades relativas às suas alturas, medianas e bissetrizes. Os diálogos indicam, também, que os professores, em uma situação como esta, necessitam ter conhecimentos que lhe possibilitem explorar e avaliar os modos de argumentação apresentados pelos alunos, assim como necessita ter conhecimentos sobre formas de argumentações legítimas e acessíveis à comunidade de sala de aula, como por exemplo, conhecimentos a respeito de contraexemplos que ajudem a refutar as conjeturas não verídicas que são levantadas e defendidas (STYLIANIDES, BALL, 2008). O fato de os contraexemplos não auxiliarem na refutação de afirmações não verídicas pode contribuir para que os alunos se convençam da veracidade delas (DE VILLIERS, 2001).

Em resumo, a nosso ver, da prática proposta por Antônio aflorou uma demanda de conhecimentos que dizem respeito às habilidades dos professores de Matemática em: (i) sequenciar as justificativas e as argumentações apresentadas pelos alunos, explorando-as e avaliando-as, junto à comunidade de sala de aula, como verídicas ou passíveis de refutação; (ii) argumentar de maneira aceitável e acessível aos alunos; e (iii) utilizar modos adequados de representação da argumentação que garantam a veracidade do que se quer provar ou que sustentem a refutação de conjecturas que são colocadas para discussão (STYLIANIDES, BALL, 2008).

Após o momento dos diálogos acima, Antônio concluiu com os alunos algumas relações envolvendo a altura AH e os segmentos CH e HB, oriundas do fato de que os três triângulos explorados eram semelhantes entre si, para chegar às razões métricas no triângulo retângulo. Ao final da aula, Antônio mostrou-me a prova que Diego fez para a afirmação colocada pelo próprio aluno durante a aula (Figura 30). Como a aula já estava acabando, lemos rapidamente o que Diego escreveu e, naquele momento, Antônio e eu ponderamos que o seu raciocínio era válido e muito interessante. Entretanto, Antônio não divulgou isso aos demais estudantes da turma, falando somente com Diego que achou muito boa a sua ideia. Nas aulas que se seguiram sobre o assunto semelhança de triângulos, Antônio não voltou a falar sobre a ideia de Diego.

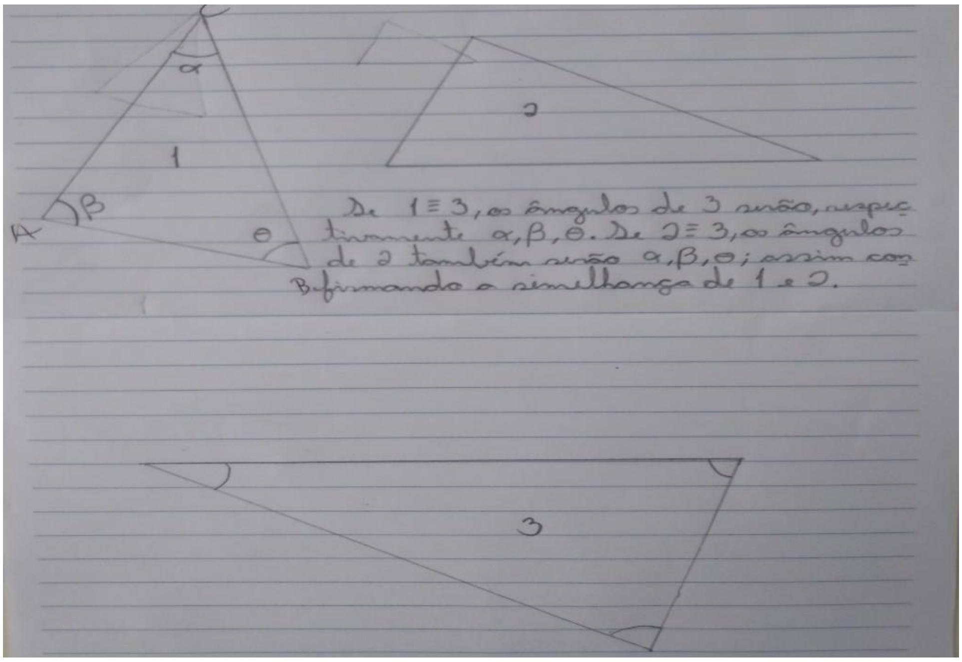


Figura 30: Prova feita por Diego: “Se 1≡3, os ângulos de 3 serão, respectivamente, α, β e θ. Se 2≡3, os ângulos de 2 também serão α, β e θ; assim confirmando a semelhança de 1 e 2.”.
(Fonte: arquivo pessoal da pesquisadora)

Sobre a participação de Diego nesta aula, ressaltamos que o aluno fez duas colocações pertinentes ao estudo do assunto semelhança de triângulos. A primeira diz respeito ao fato de que os catetos são as outras duas alturas do triângulo retângulo. A segunda refere-se à validade da transitividade para a semelhança de triângulos. Outros alunos poderiam entender o raciocínio de Diego para as duas colocações que fez, desde que o Professor conseguisse encontrar e mobilizar maneiras acessíveis aos estudantes para explorá-las. Isso fortalece a defesa da relevância de que os professores tenham domínio de conhecimentos especializados e do conhecimento do conteúdo e do ensino sobre triângulos retângulos, seus elementos e propriedades, assim como, de conhecimentos sobre possíveis dúvidas e ideias dos alunos, as quais podem surgir no decorrer do estudo dessas formas geométricas. Da mesma maneira, entendemos que é importante para o ensino que os professores saibam avaliar os momentos em que é conveniente pausar ou retornar a discussões de um determinado assunto para melhor discutir dúvidas e ideias que surgem (BALL, THAMES, PHELPS, 2008; BALL, 2017).

Ainda, tanto perante as argumentações de Diego, quanto às de Lucas, afloraram demandas de conhecimentos para o ensino de geometria sobre argumentações e provas que pudessem auxiliar Antônio a analisar se as conjecturas produzidas pelos alunos poderiam ser refutadas ou verificadas, e de que maneira poderiam acontecer as refutações ou verificações. Em conformidade com Stylianides e Ball (2008), o argumento apresentado por Diego – sobre haver semelhança entre três triângulos 1, 2 e 3, dado que o triângulo 1 era semelhante ao triângulo 3 e que o triângulo 2 era semelhante ao triângulo 3 – poderia ter sido explorado como uma prova pelo Professor, junto à turma, posto que o aluno: (i) utilizou de maneira explícita e ora implícita declarações verdadeiras que poderiam ter sido aceitas pela comunidade da sala de aula; (ii) empregou um modo válido de argumentação relativo ao uso das condições de semelhanças entre triângulos para deduzir a semelhança que se queria provar; e (iii) usou uma linguagem geométrica escrita provavelmente acessível aos demais colegas da sua turma.

5.3 O teorema de Pitágoras: as aulas dos dias 05 e 09 de abril do ano de 2018

A aula dos dias 05 e 09 de abril foram destinadas ao trabalho com o "teorema de Pitágoras". No dia 05 de abril, o Professor iniciou a aula escrevendo o programa para o dia no quadro: Atividades investigativas; Síntese; Dedução via relações métricas.

Inicialmente, o Professor disse a cada um dos estudantes um número de 01 a 04 para que se formassem quatro grupos de cinco alunos cada. Ele entregou aos grupos uma folha contendo duas tarefas (Anexo B) que foram elaboradas por ele com base em livros do Projeto Fundão e no livro "Matemática: Imenes & Lellis". Leu o enunciado das duas atividades e pediu aos alunos que trabalhassem em ambas por cerca de 40 minutos.

A tarefa de número 01 solicitava aos alunos que recortassem cinco peças (representações de polígonos), montassem dois quadrados "menores" utilizando algumas delas e um quadrado "maior" usando todas as peças. Logo em seguida, solicitava-lhes que construíssem um triângulo retângulo cujos catetos tivessem medidas, respectivamente, iguais aos lados dos dois quadrados construídos. Finalmente, a tarefa pedia aos alunos que descrevessem uma relação entre os lados dos quadrados com os três lados do triângulo retângulo em questão. Ao explicar a tarefa, Antônio desenhou no quadro, à mão livre, um triângulo retângulo. Sobre cada um de seus catetos e sobre a hipotenusa ele esboçou um quadrado. Finalmente, disse aos alunos que, ao encerrarem a montagem das peças, eles chegariam a uma figura parecida com aquela que estava no quadro.

Ao recortarem as peças para tentar construir os quadrados, os alunos perceberam que algumas delas estavam deformadas, o que estava dificultando a montagem dos quadrados, e informaram isso ao Professor. Antônio confirmou que algumas peças apresentavam pontas sobrando ou mal preenchidas e disse aos alunos que houve, provavelmente, um problema na impressão do material. Ele pediu aos alunos que continuassem tentando montar os quadrados, e ele, os estagiários que estavam presentes na aula e eu seguimos auxiliando os alunos nos grupos. Foi então que eu percebi que Rafaela havia conseguido construir o quadrado maior e chamei Antônio para verificar. Demonstrando satisfação e certo alívio, ele disse que a estudante havia construído o quadrado de acordo com o que se esperava na tarefa. Ao ouvirem o que disse o Professor, muitos colegas foram até o grupo em que Rafaela estava para copiar sua maneira de juntar as peças (Figura 31):

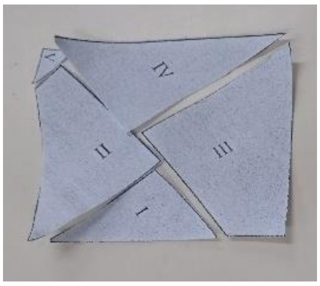


Figura 31: Montagem do quadrado feita por Rafaela
(Fonte: arquivo pessoal da pesquisadora)

Antônio pediu a atenção de todos para que pudessem ver no quadro como ficaria a montagem do quadrado maior e como a tarefa deveria ser finalizada. Então, ele desenhou, à mão livre, um triângulo retângulo e solicitou a Rafaela que desenhasse na lousa a maneira como encaixou as peças para formar o quadrado grande. A aluna fez o desenho do quadrado (Figura 32), mas não explicou aos colegas como pensou naquela construção. O Professor complementou o desenho com outros quadrados sobre os catetos e explicou aos alunos que a montagem do quadrado maior, com todas as peças recortadas, era, de fato, mais difícil do que a montagem dos outros dois quadrados menores. Em seguida, Antônio perguntou aos alunos qual era a relação entre as áreas dos três quadrados que eles poderiam encontrar:

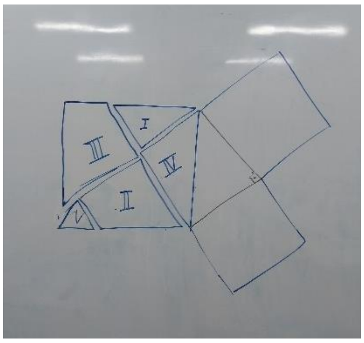


Figura 32: Desenho no quadro do triângulo retângulo com quadrados sobre os seu lados
(Fonte: arquivo pessoal da pesquisadora)

Antônio: Então, olha. Da área desse quadrado, da área desse quadrado [apontando para os quadrados construídos sobre os catetos] e da área desse quadrado [o quadrado

sobre a hipotenusa]. Alguém pode falar pra mim? Qual é a relação das áreas desses quadrados que você pode tirar? Lucas, você levantou a mão?
(...)
Lucas: Eu acho que... o quadrado um e dois [referindo-se aos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo] dá a área do [quadrado] grandão.
Antônio: Então, olha. Vamos melhorar isso. Oh, a área do quadrado... Eu vou chamar esse aqui de quadrado 01 [um dos quadrados construído sobre um dos catetos], pode ser? Esse aqui é o quadrado 02. Esse aqui é o quadrado... 02 [anotando os números 01 e 02 em cada um dos quadrados, respectivamente]. Esse aqui é o quadrado... [anotando 03 no quadrado construído sobre a hipotenusa]? Então, olha bem. A área do quadrado [pausa] 01... Que mais? Que que eu posso falar, Lucas?
Lucas: Mais a área do quadrado 02...
Antônio: Mais a área... A área do quadrado 01 mais a área do quadrado 02 é igual ao quê?
Lucas: A... [área] do quadrado 03.
Antônio: [Anotando no quadro que a área do quadrado 01 mais a área do quadrado 02 é igual a área do quadrado 03] Todo mundo concorda com essa frase aqui? [Pausa] Sim ou não?
Diego: Concordo.
Demais alunos: [em silêncio].
Antônio: Alguém não concorda?
Alunos: [em silêncio].
Antônio: Alguém não concorda? Adriane, você concorda?
Adriane: Uhum.
Antônio: Oi? Hein? Concordo com o quê?
Adriane: Que a área do grandão é igual ao... a área do 01 mais... Ah! Sei lá [risos dos estudantes]!
Antônio: Moçada, tá vendo, oh? É sério. Tem que parar e olhar pra cá! Qual que eu... Na verdade, não fui eu que falei, foi o Lucas. Que que o Lucas falou?
Alunos: [em silêncio].
Mel: Que área do quadrado mais a área do outro é igual aquele lá [apontando para o quadrado 03].
Antônio: Não foi isso? Todo mundo concorda com essa frase aqui?
Alguns alunos [em coro]: Sim.
Antônio: Ela... Agora escuta que essa é a parte que a gente não pode esquecer... Ela... Isso aqui é um das formas de justificar, ou da gente entender, um teorema importante. Vocês já viram esse desenho em algum lugar da vida de vocês?
Natyele: Não.
Alguns alunos: Sim.
(...)
Lucas: Isso aí é o negócio de Pitágoras?
(...)
Antônio: Aí, olha bem. A área é... A frase que a gente escuta muito e que vê nos livros é a seguinte: o quadrado do cateto mais o quadrado do outro cateto tá dando igual ao quadrado de quem?
Aluno: Da hipotenusa.
Antônio: Não foi isso que a gente acabou de ver? O quadrado do cateto mais o quadrado do outro cateto é igual... O teorema de Pitágoras, se você pegar no livro lá, ele vai dizer pra você assim, oh [escrevendo no quadro: Teorema de Pitágoras: A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa]. Pitágoras

descobriu lá, ou pelo menos se atribui a ele essa descoberta, que a soma dos quadrados... de quem? Dos catetos... é igual ao quê?
Alguns alunos [em coro]: Ao quadrado da hipotenusa.
Antônio: É igual ao quadrado... Da hipotenusa. Então, quando a gente tá falando quadrado, a gente tá pensando na área do quadrado que a gente tá tomando com um cateto, com o outro cateto e com a hipotenusa. É só isso que eu queria que vocês fizessem no primeiro exercício. O segundo [referindo-se à segunda atividade da folha], agora, vai ajudar a gente a ver isso aí com alguns elementos de álgebra. Pra gente começar a enxergar isso usando uma outra nomenclatura. Anota essa conclusão aqui...
Lucas: Professor, dá pra fazer um quadradão?
Antônio: Hã? Como assim?
Lucas: Dá pra fazer um quadradão? Tipo assim, pega o quadrado 2 e o quadrado 1 e no meio ali faz um... é... um...
Antônio [interrompendo Lucas]: Um triângulo? Foi isso que vocês fizeram! Olha aqui! Esse quadrado aqui [mostrando o quadrado sobre a hipotenusa], Lucas, se você colocar ele vai dar exatamente... [foi até a carteira de Lucas e lhe mostrou que o quadrado grande que montaram foi construído sobre a hipotenusa do triângulo e foi formado pelas peças dos quadrados menores]. Olha aí. Foi isso que vocês fizeram. Foi aquele desenho lá. Façam o desenho aí e completem o desenho aí no caderno. [Pausa] Viu? Enxergou aí, Lucas? Façam o desenho no caderno. Olha lá como o Lucas fez [Lucas estava mostrando o seu desenho para os colegas a sua volta]. (...) Aquele desenho lá é o que a gente montou.

Antônio explicou rapidamente para a turma que a primeira atividade que fizeram era uma “demonstração de um resultado geométrico atribuído a Pitágoras”. Ainda, ele explicou que a demonstração do mesmo resultado, que foi explorada na tarefa de número 02, é conhecida como “solução chinesa”. O Professor solicitou aos grupos que seguissem fazendo o exercício de número 02. No entanto, como a aula já estava acabando, Antônio pediu que o terminassem em suas casas para que pudessem corrigi-lo e discuti-lo na próxima aula.

Cabe comentar que muito tempo da aula foi dedicado às tentativas de montagens dos quadrados, o que pode ter prejudicado o tempo para dedicação à discussão final da validade do resultado e dos porquês envolvidos nessa validade. Talvez por isso, durante a atividade, não houve espaço para justificativas do porquê de as peças se encaixarem daquela forma e de por que foi possível formar três quadrados com elas. Ao chegarem a uma solução para a montagem dos quadrados, a partir do que Isabela fez, o Professor acabou dando maior ênfase à maneira correta de montagem das peças realizada pela aluna, focalizando, a nosso ver, mais o aspecto operacional do feito de Rafaela do que o que ela havia pensado para chegar ao produto final.

A demonstração realizada nesta aula, em que a construção de um quadrado sobre a hipotenusa de uma triângulo *ABC* foi feita a partir das cinco peças que formam os outros dois quadrados sobre os catetos, é considerada por Bastian (2000), em sua dissertação de Mestrado, bastante complexa para ser trabalhada na Escola Básica, uma vez que, para ser realizada e explicada de forma completa aos estudantes, exige uma mobilização de conhecimentos da geometria tais como congruência de polígonos e transformações como simetrias, rotação e translação. Levando em conta essa observação, ponderamos que, dependendo de qual seja o objetivo dos professores de Matemática em realizar esta prova e do seu conhecimento sobre o desenvolvimento desta demonstração, ele pode encontrar dificuldades em discutir a conclusão do teorema de Pitágoras por meio dela.

No dia 09 de abril, Antônio, primeiramente, escreveu o programa para o dia no quadro: Correção/Síntese; Relações métricas (dedução); Resolvendo questões anteriores com o teorema de Pitágoras. A respeito do que foi feito nesta aula, ater-nos-emos à explicação que o Professor fez da atividade da aula anterior e à correção/realização da tarefa de número 02 da folha de atividades (Anexo B), a qual era uma continuação da atividade realizada na aula do dia 05 de abril e que foi deixada como “Para Casa”. Antônio perguntou aos estudantes se eles fizeram a tarefa em suas casas. Muitos alunos disseram não tê-la feito e Antônio demonstrou muita insatisfação por isso.

Antes de iniciar a correção/realização da tarefa de número 02, o Professor conversou com a turma sobre o teorema que aprenderam na última aula. Antônio também fez comentários dizendo que a “prova geométrica” do teorema tinha como ideia central que a área de um quadrado, cujo lado era igual à medida de um cateto de um triângulo, somada a área de um quadrado, cujo lado era igual à medida do outro cateto, era igual à área do quadrado cujo lado tinha medida igual à medida da hipotenusa desse triângulo. Em seguida, ele disse aos alunos que, nesta aula, fariam mais duas provas do teorema de Pitágoras, e que a primeira delas era de cunho “mais algébrico do que geométrico”.

Mel voluntariou-se a ler o enunciado da tarefa de número 02. Enquanto isso, Antônio desenhou no quadro um quadrado *EFGH* (Figura 33) e explicou: “A ideia [da atividade de número 02] era que na hora que vocês montassem, aparecesse uma figura como essa aqui, oh. [Pausa] Então, era pra vocês colocarem os triângulos e aí, vazado, um buraco, ia fazer um quadrado. Mas... o que que tá... O primeiro item tá pedindo o quê?”. Mel continuou lendo o enunciado da tarefa: “Numere com a letra *a* a hipotenusa desses triângulos e com as letras *b* e *c* o cateto maior e o cateto menor de cada um deles, respectivamente”. Nesse momento, Antônio perguntou aos alunos se ele havia dito que os quatro triângulos retângulos eram todos congruentes. Alguns alunos responderam positivamente ao Professor. No entanto, observamos que Antônio não havia explicado aos alunos que os quatro triângulos retângulos eram congruentes e por que eram.

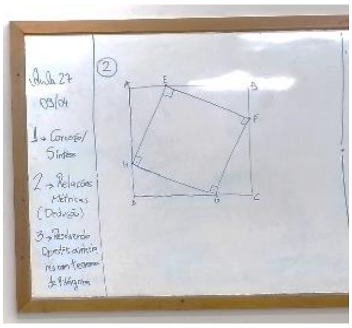


Figura 33: Desenho no quadro do quadrado ABCD feito por Antônio
(Fonte: arquivo pessoal da pesquisadora)

Em seguida, Antônio completou com as letras *b* e *c* as medidas dos catetos dos quatro triângulos retângulos da figura (Figura 34). Ele prosseguiu:

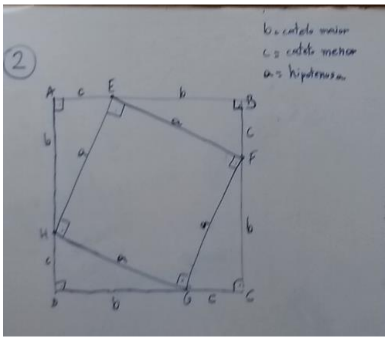


Figura 34: Desenho no quadro do quadrado ABCD com indicação das medidas dos catetos e hipotenusas dos quatro triângulos retângulos
(Fonte: arquivo pessoal da pesquisadora)

Antônio: Oh, que que era pra fazer depois?
Mel: É... [lendo na folha] *EFGH* é quadrado? Explique o porquê.
Antônio: *EFG* é... e *H* também, né? Esse de dentro aqui é um quadrado?
Rúbia: Sim. Porque tem catetos e hipotenusa.
Antônio: Hum....
Mel: Porque os lados são... hum... todos iguais?
Antônio: Porque os lados... Tem que ter mais do que isso. O lados são todos iguais ...
Mel: E os ângulos são congruentes...
Antônio: E os ângulos dele são congruentes.... E iguais a 90º. Isso é o que garante um... Pra ser quadrado tem que ter duas coisas.
Diego: Se você sabe que a soma dos ângulos adjacentes ao... é... ao ângulo do quadrilátero tem que ser 90º, só sobrou pro ângulo do quadrilátero ser 90.
Antônio: Pronto! (...) Então, olha bem. O que era pra fazer depois?
Mel [lendo na folha de atividades]: Escreva duas expressões para a área de *ABCD*.
Rúbia: Eu não entendi a pergunta.

Antônio: *ABCD* é que tipo de polígono? *ABCD*.
Alguns alunos: Quadrado.
Lucas: Quadrilátero.
Antônio: Mais do que isso, Lucas. É um quadrilátero especial. Ele é um...?
Diego: *b* mais *c* ao quadrado...
Antônio: Isso é o que nós vamos ver agora. Duas expressões pra área... Como é que eu calculo a área de um quadrado? (...)Tá claro pra todo mundo? Então, pra calcular a área, o que que eu vou fazer? *b* mais *c* vezes *b* mais *c* [escrevendo no quadro que área=$(b+c)$ $(b+c)$]. É um produto notável. Tá bom? Alguém não entendeu até aqui? [Pausa] Então, pronto! (...) Ali [apontando para a expressão que estava no quadro: $b^2+2bc+c^2$] tem uma forma de expressar a área do quadrado, não é? Agora, estamos na primeira forma... Mas pediu pra gente fazer usando quantas?
Lourenço: Duas...
Antônio: Segunda forma. Alguém tem uma ideia...? Que eu peguei a ideia básica que foi calcular usando a fórmula da área do quadrado. A medida do lado vezes a medida do outro lado. Alguém tem outra ideia? [Diego estava com a mão levantada] Pera aí, Diego. Além do Diego, outra pessoa tem alguma ideia? [Pausa] Que que significa calcular a área? Sem fórmula. Que que significa a área de uma figura? Lucas.
Lucas: Não. Eu não vou responder isso não.
Antônio: Hã!
Lucas: Tipo assim. *b* mais *c*... vezes dois... menos *a* vezes *a*.
Antônio: *b* mais *c* ao quadrado... menos *a* vezes *a* [anotando no quadro $(b+c)^2$ - a^2] ... Se eu fizer isso que você tá me pedindo, eu vou calcular a área do quadrado [*ABCD*] e só vou tirar o... o... Mas, aí, não pode ser a área dele. Vai ficar... Tem que tomar cuidado, ali, oh, se eu tirar a área do quadrado...
Lucas: Mas, aí, é a área dos triângulos...
Antônio: Pois é, mas eu quero a área disso aqui tudo. Tá quase lá... Como é que eu faço pra calcular a área do quadrado de fora [*ABCD*]? Como é que eu faço... Eu quero... Isso aqui tudo compõe ela. Não pode ser só pegar os triângulos... Tem que pegar os triângulos e fazer aquele... pra formar o quê?
Lucas: Pra formar um quadrado.
Antônio: Pra formar o quadrado de fora, o que que eu preciso fazer? Pegar um triângulo, pegar outro, pegar outro, pegar outro... Não pode ficar um buraco não. Então, eu tenho que pegar a área desse [triângulo] mais... a área desse [triângulo]... mais a área desse [triângulo]... mais a área desse [triângulo]... Que mais?
Lourenço: Mais a área do quadrado do meio.
Antônio: Mais a área do quadrado do meio [*EFGH*]. Se eu juntar isso tudo, vai dar a área de quem? Hã?
Lourenço: O [quadrado] grandão. *ABCD*.
Antônio: Mas todo mundo concorda com isso que eu falei, ou não?
Lourenço e Diego: Sim.
(...)
Antônio: Por enquanto não preocupa em ficar falando as letras não. Observa aqui. Se eu tiver assim, oh, não pensa em quadrado não. Eu tenho essa figura aqui, oh [desenhando no quadro, à mão livre, um quadrilátero *P* qualquer]. Peça um, peça dois, peça três e peça quatro [dividindo a figura em quatro partes]. Como é que eu faço pra calcular a área dessa figura aqui? [Pausa] Eu tenho que fazer peça um mais peça dois mais peça três mais peça quatro.
Rúbia: Aí, eu faço *H* mais *E* mais *F* mais *G* [referindo-se ao cálculo da área do quadrado *EFGH*].

Antônio: Cuidado! Todo mundo concorda com isso que a Rúbia falou? Pra eu calcular a área desse [polígono] *P* eu não sei a fórmula, certo? Se eu souber a área da peça um, a área da peça dois, a área da peça três e somar as áreas, eu não consigo achar a área do *P*? Da figura.
Lucas: Não, uai. Você tem que achar a área da peça quatro também.
Antônio: Sim. É a peça quatro... Com as quatro peças eu não consigo achar a área total? Olhando pra essa ideia aqui [apontando para o polígono *P*], como é que eu posso aplicar essa ideia de cá [apontando para o quadrado *ABCD*]? Como é que eu faço pra achar a área do quadradão?
Rúbia: *ABCD* vezes *HEF*...
Antônio: Cuidado! Quais são as peças que eu tenho ali, Rúbia?
Lucas: Quatro triângulos...
Antônio: Quatro triângulos...
Roney: E um quadrado.
Antônio: E um quadrado no meio, oh [acentuando o contorno do desenho do quadrado *EFGH*]. Como é que eu faço pra achar a área, então? Somo as quatro áreas dos triângulos mais a área do meio. Certo ou não, gente?
Alunos [em coro]: Certo.
Rafaela: Eu posso dizer que os triângulos... que a área dos triângulos vai fazer o quadrado de dentro?
Antônio: Aí é que tá. É... o contorno deles que forma um quadrado. Mas se eu quiser achar a área de fora, eu não posso deixar esse buraco aqui na forma de um quadrado. O quadrado aqui faz parte. Por isso que eu uso a área dele também.
Lucas: Então, e se, tipo assim, se colocar todos os triângulos dentro do quadrado pequeno, dá a área dele [o quadrado *EFGH*]?
Antônio: Poderemos tentar... Não sei... Não sei te responder isso. [Pausa] Não dá pra gente chutar essas coisas. Por enquanto, o que a gente quer é calcular a área de duas maneiras diferentes. Primeiro eu fiz usando a fórmula, que a gente sabe que é pegar essa medida e essa [$b+c$ e $b+c$]. E agora, eu vou fazer usando o conceito de área, que é: a área total da figura é a área das partes dela. Tudo bem? Claro isso aqui?
(...)
[Após realizar alguns cálculos, Antônio chegou à igualdade que corresponde ao teorema:]
Antônio: $b^2+c^2= a^2$ [escrevendo no quadro]. Olhando pro meu triângulo, agora, o que que eu acabei de concluir também pela álgebra?
Mel: Que eles são...
Diego: O teorema de Pitágoras.
Antônio: O teorema de Pitágoras. Que, olha um triângulo retângulo nosso aqui [desenhando no canto do quadro um triângulo retângulo de catetos *b* e *c* e hipotenusa *a*].
Lucas: Entendi não... Entendi não...
Antônio: Vou fazer agora, Lucas, olha. Destaquei um triângulo. Tirei ele só pra vocês verem agora. Ficou *a*, ficou *c*, ficou *b*. O que que eu acabei de concluir?
Mel: Ah! Que os catetos ao quadrado... é...
Lucas: Ah!
Antônio: Que um cateto ao quadrado, mais um outro cateto ao quadrado...
Alunos [em coro]: É igual à hipotenusa ao quadrado.
Antônio: Isso também é conhecido como... teorema do Antônio [escrevendo no quadro: Teorema de Pitágoras]. (...) Moçada, todo mundo entendeu essa demonstração, sim ou não?

Alguns alunos [em coro e em tom de voz mais baixo]: Sim.
Rúbia: Eu sei! Isso aí é a base... vezes... não.... O cateto *a* ao quadrado...
Antônio: Cuidado! Cuidado! Cateto *a*, olha ali, cateto *a*?
Rúbia: Não. É o *b* ao quadrado, o *a* ao quadrado que é igual ao...
Antônio: Sim. Mas, o que diz o teorema de Pitágoras, Rúbia? A gente viu ele primeiro pelas áreas, e agora pela álgebra.
Rúbia [com ajuda de Antônio]: A soma dos quadrados... dos catetos... é igual a *a*... ao quadrado.
Antônio: É isso que a gente viu aqui agora, só que usando álgebra. Usando as medidas.

Antônio, mais uma vez, perguntou à turma se todos haviam entendido o teorema. Diante da resposta afirmativa dos estudantes, ele relembrou que existe uma interpretação geométrica do resultado, a qual tinham visto na aula passada, e que a demonstração que haviam acabado de fazer era uma demonstração algébrica. Antônio também passou pelas mesas de alguns estudantes perguntando o que dizia o enunciado do teorema de Pitágoras. Boa parte dos alunos não conseguiu enunciá-lo de imediato e Antônio auxiliou-os. Depois de um tempo, Antônio perguntou de novo e diversas vezes aos estudantes o que dizia o teorema que acabaram de estudar. Em várias dessas vezes, os alunos ficaram em silêncio mediante o questionamento de Antônio ou enunciaram o teorema de maneira equivocada. O Professor foi ao quadro enunciar novamente o teorema e, após ter feito isso, alguns estudantes conseguiram enunciá-lo também.

Na sequência da aula, Antônio deu início ao estudo do teorema de Pitágoras como consequência de relações métricas no triângulo retângulo. Ao final da aula, ele seguiu para a resolução dos exercícios que estavam em uma lista que fora entregue aos alunos. O sinal bateu.

Segundo os relatos acima, percebemos que no decorrer da realização das duas provas do teorema, Antônio, assim como nas outras aulas que aqui foram relatadas, utilizou muito o verbo “concordar” para saber dos alunos se eles estavam de acordo com o que estava sendo constatado. Durante a condução das perguntas na atividade realizada no dia 05 de abril, por exemplo, Antônio questionou os alunos se eles concordavam que o quadrado maior (construído sobre a hipotenusa) era formado pela junção das peças dos quadrados menores (construídos sobre os catetos). Os alunos responderam que concordavam, mas quando o Professor questionou uma aluna sobre o que estavam concordando, ela não conseguiu expressar a ideia discutida na atividade.

Questionamos se essa forma de abordar os estudantes, durante uma prova, é significativa para os professores saberem se eles estão entendendo, ou, pelo menos, acompanhando o processo. Portanto, consideramos que, durante uma prova, é interessante que os professores procurem estimular os estudantes a discutirem e a tentarem vincular à conclusão final as conjecturas e as justificativas que a permeiam. Para Hanna (2002, 2016), dado que o objetivo de um professor seja realizar uma tarefa de prova, ele precisa saber que essa prova deve mostrar aos alunos não somente que um resultado é verdadeiro, assim como, não apenas instigá-los a aceitarem a sua veracidade, mas, também, a entenderem os porquês envolvidos nessa veracidade.

A prova do teorema de Pitágoras realizada na aula do dia 09 de maio carregava um importante elemento para a realização de dois cálculos diferentes da área do quadrado *ABCD* que não foi discutido: a congruência dos quatro triângulos retângulos presentes na representação utilizada. Diego, por exemplo, usou o fato de os triângulos serem congruentes para justificar sua conjectura de que o quadrilátero formado ao centro da figura, *EFGH*, era um quadrado. Outro fato decorrente da congruência dos quatro triângulos, que não foi discutido em conjunto, é que eles formam, também, um "quadrado maior" *ABCD*. Feitas essas observações, parece-nos que a explicação sobre a congruência dos triângulos retângulos configurava-se como uma etapa lógica da realização da demonstração do teorema.

No contexto da investigação na aula de Matemática, conforme Antônio se propôs a fazer, segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) e De Villiers (2001), os alunos necessitam de provas justamente para efeitos tanto de explicação e compreensão de um teorema, quanto dos resultados matemáticos envolvidos na garantia da sua veracidade. Nesse caso, o papel da explicação parece tomar um lugar de destaque, uma vez que uma prova que "ajude a clarificar o motivo pelo qual um resultado é válido, ou não, contribui certamente para uma compreensão do mesmo" (AMADO, SANCHEZ, PINTO, 2015, p. 642).

Outro ponto observado especialmente nos excertos da aula do dia 09 de abril, e que também ocorreu em excertos de outras aulas analisadas, é que em vários momentos em que os alunos responderam de uma forma inadequada às perguntas feitas por Antônio, ele respondia, primeiramente, com a expressão "Cuidado!", e logo dava a resposta correta para a questão colocada. Dessa forma, a nosso ver, não foram realizadas algumas discussões sobre o que os levou a dar as respostas erradas, assim como, não foram privilegiados momentos para as justificativas das suas respostas e para uma verificação de que se cada erro cometido não era, também, semelhante ao pensamento de outros alunos da turma. Caso tivessem ocorrido mais oportunidades para que os alunos expusessem melhor os seus erros, outros estudantes poderiam engajar-se em tentativas de correções, e, possivelmente, tais momentos poderiam oportunizar aprendizado para os alunos que cometeram ou que cometeriam erros semelhantes.

Essa parece ser uma demanda do trabalho com demonstrações na Escola Básica, haja vista que elas exigem que os erros sejam analisados ainda durante o processo e que algumas explicações que podem não estar previstas pelos professores sejam dadas.

Cury (2017) atenta que os professores precisa analisar os erros cometidos por seus alunos, tentando, assim, entender as maneiras pelas quais eles produziram as respostas inadequadas. Para essa autora, o erro consiste em um conhecimento do aluno, o qual necessita ser analisado para que as certezas indevidas possam ser desestabilizadas e para que o próprio estudante possa questionar essas certezas. Em conformidade com esse ponto de vista, Moreira e David (2005, p. 32) ressaltam que na Matemática Escolar é relevante pensar o erro como um "fenômeno psicológico", que concerne aos processos de ensino e aprendizagem, auxiliando no entendimento do professor das concepções que os alunos têm do assunto abordado e que propicia ao professor subsídios para o "planejamento e a execução das atividades pedagógicas em sala de aula" (p. 33-34).

Finalmente, foi possível notar, durante as observações, que os estudantes não conseguiam enunciar o teorema de Pitágoras após as discussões que aconteceram durante as duas diferentes provas e só conseguiram fazer isso após Antônio auxiliá-los. Isso posto, pode-se inferir que, ao propor uma tarefa de prova em sala de aula, é necessário aos professores de Matemática ter conhecimentos sobre demonstrações na Educação Básica que os permitam analisar as oportunidades que diferentes tarefas podem oferecer para que os alunos produzam argumentos e compreendam o que se quer provar, que o tornem capaz de desenvolver provas na Escola Básica menos como um produto a ser conquistado e mais como um processo e que o permitam auxiliar os alunos a pensar com flexibilidade durante a formulação de argumentos (WEISS, HERBST, CHEN, 2009). Entendemos que esses conhecimentos sobre provas, na perspectiva de Ball, Thames e Phelps (2008), estão relacionados ao conhecimento do conteúdo e do ensino e do conteúdo e dos estudantes.

5.4 Discussões sobre conhecimentos matemáticos para o ensino de semelhança nos triângulos retângulos e do teorema de Pitágoras

Antônio propôs-se a conduzir as aulas sobre semelhança nos triângulos retângulos e sobre o teorema de Pitágoras estimulando os alunos a participarem das discussões sobre esses assuntos e solicitando deles argumentações matemáticas para basear as suas conjecturas e justificativas. Ressaltamos o fato de que o Professor buscou em recursos didáticos, como o livro "Matemática: Imenes & Lellis" e o material sobre geometria do Projeto Fundão, fontes para guiar as explicações e as tarefas sobre os assuntos que foram trabalhados e procurou complementar os conteúdos desses materiais com a utilização de um material concreto (recortes), o qual conferia às representações uma possibilidade de dinâmica, na intenção de que os alunos pudessem melhor visualizar os ângulos congruentes nos triângulos. Pelo material, Antônio também procurou chamar a atenção dos alunos para o fato de que os dois triângulos retângulos gerados a partir do traçado da altura relativa à hipotenusa de outro triângulo retângulo eram reduções desse.

Apesar de sugerirmos que o uso do material concreto, em alguns momentos das aulas, poderia ter sido utilizado para proporcionar um trânsito entre uma visualização mais intuitiva e uma abertura de espaço para argumentações também mais dedutivas, pontuamos que a escolha por um material concreto e manipulável para representação de três triângulos retângulos semelhantes promoveu aos alunos uma visualização mais dinâmica das formas do que os desenhos no quadro poderiam proporcionar.

A respeito da atuação dos alunos nas aulas, destacamos as participações de Diego e Lucas como sujeitos que levantaram interessantes questionamentos e que procuraram construir argumentações sobre os assuntos discutidos. Consideramos que a participação de Diego, principalmente, poderia ter desencadeado momentos na aula em que a argumentação geométrica teria lugar de destaque nas discussões coletivas.

Com base na análise de algumas situações de sala de aula ministradas por Antônio, identificamos alguns conhecimentos associados à estas situações, os quais reconhecemos como parte de um conjunto de conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria no Ensino Fundamental. Os conhecimentos identificados e analisados nas seções anteriores são resumidos por nós como:

i) Conhecimentos especializados sobre triângulos: definições e teoremas, seus principais elementos e propriedades (como por exemplo, as propriedades sobre suas alturas e medianas), sobre propriedades concernentes à semelhança de triângulos (como por exemplo, a semelhança como uma relação que obedece a transitividade) e sobre exemplos e contraexemplos adequados dessas figuras pelos quais se valorize, principalmente, aqueles cujas configurações são diferentes daquelas comumente vistas.

ii) Conhecimentos sobre o uso adequado da linguagem geométrica para o tratamento do assunto semelhança de triângulos no 9º ano.

iii) Conhecimentos relacionados à antecipação das possíveis dúvidas que poderão surgir entre os estudantes durante o ensino do assunto semelhança de triângulos, bem como, conhecimentos relacionados ao tratamento dessas dúvidas, das ideias e *misconceptions* dos alunos consonantes ao assunto.

iv) Conhecimentos sobre formas de argumentações e provas em geometria que sejam legítimas e adequadas ao público constituinte da comunidade de sala de aula. Tais conhecimentos dizem respeito tanto para a produção dos professores de suas próprias argumentações e para que eles possam realizar provas no contexto escolar, quanto para que estes profissionais estejam aptos a conduzir e a analisar as argumentações e provas produzidas pelos estudantes.

v) Conhecimentos sobre a escolha e a proposição de tarefas de provas que levem à produção e à discussão do conhecimento geométrico relacionado ao resultado matemático que se pretende provar e não apenas a uma apresentação deste resultado sem que haja, também, espaço para as explicações necessárias. Neste domínio, ainda consideramos o conhecimento que os professores precisam ter sobre o uso da visualização em tarefas de argumentação e prova.

vi) Conhecimentos sobre o uso de *softwares* como recursos que servem à visualização, à construção e à utilização de representações durante provas e argumentações. Conhecimentos sobre o uso de *softwares* como recursos que proporcionam a realização de provas aceitáveis e adequadas à comunidade de sala de aula, uma vez que suas ferramentas operacionais possibilitam que se aja sobre os objetos com uma dinâmica organizada sob a lógica da geometria e que, portanto, preservam as propriedades das figuras.

No que se segue, fazemos comentários e levantamos algumas discussões a respeito de alguns dos conhecimentos pontuados acima, situando os comentários e discussões na literatura de pesquisa sobre argumentação e prova e sobre o ensino e aprendizagem de geometria.

Embora sejam polígonos cuja configuração é a mais simples, os triângulos podem ser tomados, entre as figuras geométricas, como potenciais formas cujas propriedades fundamentais podem ser estudadas na Escola Básica com bastante destaque. São figuras geométricas conhecidas pelos estudantes desde os seus primeiros anos de escolaridade, acompanhando-os ao longo de toda a sua trajetória escolar. O assunto “semelhança de triângulos” pode ser considerado como de nível de abstração significativo e, talvez por isso, ocupe um lugar de abordagem e discussão mais ao final do Ensino Fundamental, quando se supõe que os alunos já conheçam vários conceitos e propriedades importantes sobre os triângulos.

No caso dos conhecimentos mais gerais sobre tais formas e, especialmente, conhecimentos sobre o assunto semelhança nos triângulos retângulos, os quais entendemos que se fazem necessários aos professores de Matemática para que ele possa, sobretudo, responder às perguntas dos estudantes, destacamos os conhecimentos sobre alturas e medianas e os conhecimentos sobre propriedades válidas na relação de semelhança, como por exemplo a validade da propriedade de transitividade, dado que a semelhança é uma relação de equivalência (BARBOSA, 2012).

Nas situações de sala de aula analisadas, concebemos que essa propriedade supracitada não necessariamente precisaria ser evocada pelo Professor no tratamento do assunto. Entretanto, vimos que ela surgiu para ser tratada em uma dessas situações na forma de uma dúvida de um aluno, a qual o Professor não conseguiu responder e/ou discutir, possivelmente, devido ao fato de não ter conseguido acessar, no momento da instrução, um conhecimento comum do conteúdo sobre semelhança de triângulos, no que se refere ao conhecimento da validade de tal propriedade, e no que tange aos conhecimentos especializado do conteúdo e do conteúdo e seu ensino, a respeito de formas de justificativa de tal veracidade, para serem apresentadas aos alunos do 7º ano, e à análise e explicação da prova produzida por Diego da propriedade (BALL, THAMES, PHELPS, 2008; BALL, 2017).

O assunto “semelhança de triângulos” é tratado na formação de professores, comumente, nas disciplinas que contemplam os conteúdos de geometria euclidiana plana. O tratamento desse assunto na Licenciatura, quando feito apenas do ponto de vista da geometria acadêmica, em que o estudo encaminha-se segundo uma cadeia de axiomas, teoremas e proposições seguidas de provas estritamente rigorosas, em geral, não comtempla um estudo de tal assunto que leve em consideração questões de natureza didático-pedagógicas, voltadas para o trabalho do ensino, tais como o estudo de possíveis dúvidas, ideias e produções dos estudantes e também das possibilidades de internalização inadequada de conceitos pelos alunos do Ensino Fundamental, quando em situação do estudo da semelhança de triângulos (BALL, THAMES, PHELPS, 2008; BALL, 2017).

Portanto, a partir das demandas observadas das aulas do professor Antônio, consideramos que se faz relevante aos futuros professores conhecer não somente as definições e resultados matemáticos sobre triângulos e semelhanças do ponto de vista puramente acadêmico, de tal maneira que esse conhecimento seja complementado com o estudo de possíveis formas de se ensinar esses assuntos na Escola Básica. Aos professores, em nossa visão, se fazem relevantes para serem estudados em sua formação inicial, entre outros, conhecimentos sobre a importância do uso de representações não prototípicas dessas figuras, sobre aspectos pedagógicos das definições desses objetos que ultrapassem as condições necessárias e suficientes, requeridas pela Matemática Acadêmica, para a identificação desses objetos, sobre aspectos pedagógicos inerentes ao estudo das propriedades relativas aos triângulos, sobre a linguagem adequada e precisa a ser utilizada no tratamento desse conteúdo no 9º ano, sobre exemplos e contraexemplos adequados dessas figuras que possam encorajar os alunos à análise de resultados referentes ao assunto, sobre as possíveis dúvidas que alunos podem levantar e sobre a análise dessas dúvidas, bem como, conhecimentos relativos ao tratamento das ideias e *misconceptions* dos alunos.

No que diz respeito aos conhecimentos identificados sobre argumentações e provas para o ensino de geometria, iniciamos as discussões ressaltando que os principais pontos destacados das aulas de Antônio foram, primeiramente, o fato de que as argumentações, tanto aquelas produzidas pelo próprio Professor, quanto aquelas produzidas pelos alunos, a exemplo das argumentações de Diego e de Lucas, muitas vezes não foram analisadas e discutidas em conjunto com a comunidade de sala de aula. Caso tivesse havido mais espaços para esse tipo de abordagem, vislumbramos que poderiam ter sido estimulados, e/ou virem à tona, outros modos de argumentações de outros alunos, bem como, que discussões sobre definições, propriedades e relações geométricas envolvidas no assunto abordado poderiam ter emergido.

Sobre a importância das discussões coletivas em aulas em que a argumentação recebe lugar de destaque, concordamos com Amado, Sanchez e Pinto (2015) que elas permitem que ideias sejam esclarecidas, que os raciocínios sejam estruturados e que modos de pensar que auxiliam no desenvolvimento das provas sejam iluminados. Herbst (2002) pondera que os professores precisam saber que as argumentações que acontecem em contextos de sala de aula necessitam ser coproduzidas e analisadas de forma conjunta por alunos e professor, e que os significados desses argumentos devem evoluir em resposta um ao outro. Os argumentos matemáticos a serem defendidos e explorados em situação de sala de aula, na perspectiva do autor, formam-se em relação a esses significados emergentes.

Em segundo lugar, observamos nas aulas de Antônio que as tarefas propostas para provar o teorema de Pitágoras centralizaram-se mais na obtenção do resultado final almejado e, em certa medida, não ressaltaram questões e explicações sobre o teorema e seus significados, além de algumas relações geométricas envolvidas nas provas. Com relação à primeira tarefa (a prova do teorema de Pitágoras com uso das áreas dos quadrados), em nossa visão, é relevante aos professores saberem reconhecer quais questões e quais conhecimentos geométricos precisam ser discutidos e qual é a viabilidade da sua realização satisfatória no contexto em que ela se dará.

Situamos nossa discussão, primeiramente, trazendo as visões de Moreira e David (2005) sobre o que consideram como um dos mais importantes pontos de distinção entre a Matemática Científica e a Matemática Escolar: o papel e os significados das demonstrações em cada um dos dois campos. Para eles, na Matemática Científica, as demonstrações rigorosas conformam-se como elementos de grande relevância durante o processo de estruturação da teoria, assim como no processo de apresentação sistematizada da teoria já estruturada. Já na Matemática Escolar, as demonstrações não carregam consigo o dever de garantir a validade dos resultados matemáticos que serão discutidos com os estudantes, pois essa validade já está garantida pela Matemática Acadêmica. De acordo com Moreira e David (2005), na Matemática Escolar, o principal papel das demonstrações tange ao objetivo de que os estudantes compreendam os fatos matemáticos a serem estudados e de que as justificativas que circulam a discussão de sua prova concedam-lhes habilidades para utilizar tais fatos de forma "coerente e conveniente na sua vida escolar e extra escolar" (p. 24).

Entendemos também, sob a perspectiva de Moreira e David (2005), que a avaliação e a elaboração das argumentações na Matemática Escolar passam por ponderações de cunho didático-pedagógico. Por isso, nesse campo, é válida a ideia de que provas dedutivas rigorosas não se constituem como as únicas maneiras legítimas de demonstrações. Justificativas menos formais, como por exemplo aquelas que se apoiam em conhecimentos advindos de experiências cotidianas e também de experiências mais próximas às elaborações conceituais dos alunos podem constituir argumentações que conseguem, até mesmo, ser mais convincentes para a comunidade de sala de aula do que justificativas formais. Em nosso entendimento, de acordo com o que postulam Moreira e David (2005, p. 28-29), os papéis desempenhados pelas provas, na perspectiva da Matemática Escolar, carregam uma natureza de:

> a) Contribuir para a construção de uma visão da disciplina na qual resultados sejam tomados não como dados arbitrários, mas como elementos de saber socialmente construídos e aceitos como válidos através de negociação e argumentação;
> b) Desenvolver a capacidade de argumentação. Por exemplo, **a atividade pedagógica que consiste em submeter à crítica dos outros alunos uma determinada cadeia de argumentos construída por um deles pode levar a um entendimento mais significativo do resultado que é objeto da argumentação**; pode levar também a um refinamento dos próprios argumentos ou mesmo da linguagem utilizada para apresentá-los [grifo nosso].

Stylianides e Stylianides (2006) consideram como um elemento do conhecimento do conteúdo de raciocínio e prova para o ensino o fato de que os professores precisam ser capazes de produzir várias maneiras legítimas para tratar conceitos, comprovar afirmações, etc., a fim de gerenciar as limitações de conhecimento existentes na comunidade de sala de aula. Outro importante elemento do conhecimento sobre provas para o ensino, este defendido por Stylianides e Ball (2008), diz respeito a que os professores necessitam ter conhecimentos sobre situações para se desenvolver provas. De acordo com os autores, professores que desenvolvem provas em suas aulas precisam ser capazes de identificar situações nas quais elas são necessárias e importantes, de reconhecer as diferenças matemáticas mais relevantes entre essas situações e de criar oportunidades apropriadas para que seus alunos se envolvam em provas. Esse conhecimento, na visão desses pesquisadores, integra-se ao conhecimento que os professores precisam ter sobre tarefas de provas e as atividades de provas desencadeadas por essas tarefas.

Além do objetivo de verificação ou refutação de uma afirmação, uma tarefa em que se pretende realizar uma prova na Escola Básica pode trazer outros propósitos, sendo um dos mais importantes deles a geração de novos conhecimentos e o avanço da compreensão matemática dos estudantes. Diante disso, os autores supracitados defendem que professores precisam ter conhecimento sobre o que são tarefas de provas e de diferentes tipos dessas tarefas. Caso os professores possuam uma concepção limitada nesse aspecto, então, possivelmente, eles enfatizarão em suas instruções apenas os tipos com os quais estão mais familiarizados. Como resultado, os alunos poderão ser privados de experiências com outros tipos importantes de tarefas de prova e de atividades de provas que são suscitadas por elas. Ainda, para Stylianides e Ball (2008), os professores precisam compreender as questões matemáticas que podem ser potencialmente estimuladas durante as atividades relacionadas a determinados tipos de tarefas de provas quando implementadas em ambientes de sala de aula. Esse tipo de conhecimento pode, por exemplo, ajudar os professores a antecipar questões matemáticas que podem emergir das discussões em sala de aula, na medida em que ali implementam certos tipos de tarefas de prova.

Concordamos com a visão dos autores acima citados e salientamos que, assim como aconteceu nas aulas observadas, professores podem fazer escolhas por mais de um tipo de tarefa de prova no intuito de que seus alunos melhor compreendam o resultado da geometria a ser provado. No entanto, ao escolherem diferentes tipos de tarefas, os professores de Matemática precisam estar aptos a analisar suas potencialidades para a geração de conhecimentos geométricos, assim como, precisam conhecer desafios e obstáculos a elas vinculados, principalmente aqueles relacionados à visualização, e ter conhecimentos sobre as questões geométricas inerentes a elas e potencialmente emergentes delas. No caso da primeira demonstração do teorema de Pitágoras realizada por Antônio, por exemplo, supomos que há de ser analisado por quem irá desenvolvê-la com seus alunos, anteriormente, quais são os elementos necessários para compor a construção da prova para além da montagem do quebra-cabeças. Pensando-se ainda nessa tarefa, refletimos que, conforme o que se é exigido na prova que pretende realizar, também cabe aos professores analisar a sua adequação para o desenvolvimento no contexto em que se está ensinando.

Uma questão importante observada nas aulas de Antônio, a qual consideramos relevante no que tange ao trabalho com a visualização na Escola Básica, diz respeito a questão sobre se, e/ou em que medida, as representações visuais podem ser utilizadas não apenas como evidência ou inspiração para uma afirmação matemática, mas também nas justificativas de sua veracidade. Conforme afirmam Hanna e Sidoli (2007), há bastante tempo as representações concretas são "bem vindas como um acompanhamento heurístico" na realização de provas (p. 73-74). Duval (1995) já discutia o papel intuitivo e heurístico das representações geométricas na visualização, posto que elas permitem que problemas e resultados da geometria sejam analisados como um todo, configuram-se como um meio mais direto para a exploração de diferentes aspectos dos problemas e dos resultados e auxiliam na antecipação de conclusões sobre um problema e também sobre as provas de resultados geométricos. O papel das representações nas provas pode ser visto para além de serem facilitadoras da compreensão de um resultado matemático e da sua prova, mas também como o de guias para a escolha de tipos de abordagens para a elaboração da própria prova (HANNA, SIDOLI, 2007).

Embora, principalmente na geometria, representações visuais sejam tomadas como elementos que podem subsidiar a construção de argumentos sólidos, do ponto de vista lógico, e até mesmo rigorosos durante a realização de provas, Hanna e Sidoli (2007), baseando-se no que dizem outros autores (como BARWISE, ETCHEMENDY, 1991, 1996; DAVIS, 1993; CASSELMAN, 2000), defendem que o uso delas nesse processo precisa ser cuidadoso. Isso significa que os professores precisam saber utilizá-las para proporcionar explorações matemáticas dos resultados de uma maneira que apoie as provas, mas que não limite o pensamento dos alunos. Para Hanna e Sidoli (2007), ao fazerem uso das representações visuais para a prova de resultados matemáticos, os professores precisam principalmente saber como extrair delas informações relevantes, as quais muitas vezes estão implícitas nas representações, de tal forma que se consiga, a partir de tais informações, ou com o auxílio delas, produzir provas válidas no contexto escolar.

Sobre o trabalho com argumentação e prova no ensino de geometria, Antônio deu-nos algumas declarações, durante a sua entrevista. Nessa conversa, Antônio falou um pouco do fato de os alunos, e, em determinados momentos, ele próprio, terem utilizado muito as suas impressões visuais para gerar argumentações e conclusões sobre afirmações. Também falou a respeito da importância que atribui ao uso da visualização na argumentação em geometria. Além disso, Antônio deixou claro que sentiu, após refletir sobre suas práticas e após uma conversa que teve com uma estagiária que o acompanhou no segundo semestre de 2018, que em alguns momentos do trabalho que realizou nas aulas observadas poderia ter considerado os conhecimentos geométricos que estavam sendo tratados, ou os que já haviam sido estudados pelos alunos, com maior aproveitamento para a construção das argumentações. Ele também ponderou que poderia ter solicitado mais argumentações dos estudantes sobre as conjecturas que eles mesmos levantaram:

> Porque para mim, às vezes, o que parece vale. Assim, então os meninos [falam]: “Não professor, parece que é”. E eu deixo ir, às vezes, para ver onde está indo, o que ele está enxergando, para não jogar fora a visualização. (...) Então, o que acontece, [é que] isso às vezes incomoda muita gente. Eu falo assim: “É por que não acho legal a ideia de jogar fora isso”. Eu acho que talvez, em algumas coisas da geometria, quer dizer, a escola nunca dá conta de tudo, eu acho... (...) o nível de formalização, quer dizer, é claro que... Bom eu posso até ter feito isso e eu acho que errei a mão, mas a ideia era nunca fazer uma coisa que a demonstração virasse, que ela não fosse importante para a construção do pensamento. Por exemplo, na minha graduação, muitas vezes, eu fiz um punhado de demonstração que hoje eu não lembro de mais nada, não faço ideia de por que eu fiz aquilo, fiz porque tinha que fazer. Quando eu pedi para eles argumentarem, é porque eu queria que eles entendessem que uma coisa não pode valer só por que alguém me disse, sabe? Não pode ser geometria *fake news*. Quando os alunos falam: “Porque isso é válido?” [Respondo]: “Porque está apoiado numa outra ideia”. Então, para entender a lógica de construção do argumento final lá que a gente estava discutindo, quer dizer, esse teorema vale porque esse outro valeu e, a partir dele, eu percebi que outra coisa acontecia e que acontecia outra. Sempre foi nessa intenção de que, sei lá, se algum deles, eventualmente, for para as Ciências Exatas, quando ele for formalizar alguma coisa, a minha expectativa é de que talvez ele tenha alguma memória de que... e de que a demonstração faz sentido, e de que ela pode mudar o nível de exigência de formalização. Então, para mim, então a palavra demonstração que eu uso na graduação eu posso usar ela aqui, só tenho que fazer a adequação do que eu estou entendendo como demonstração nesse nível. Então, a visualização é uma coisa que eu tentei, quer dizer, na minha cabeça pelo menos eu tentei, não sei se eu consegui verbalizar isso, de mostrar para eles que em alguns momentos o que parece confunde a gente. Então essa argumentação que só vinha do que parece, às vezes, pode dar trabalho e complicar o meio de campo. Outras vezes, quando eu via que a justificativa matemática ia complicar demais, eu deixei ir assim. Por exemplo, quando eles usavam o recurso de que encaixava, de que dava, de que o tamanho parecia, valeu como uma explicação, sabe? Agora eu sei que é um negócio arriscado, essa é uma medida que eu procuro e que, às vezes, vai para mais, às vezes vai para menos... [Trecho transcrito da entrevista realizada com Antônio]

De acordo com os relatos de Antônio em sua entrevista e com a observação de suas aulas, destacamos que ele se preocupou que os estudantes entendessem a demonstração como algo importante na construção do conhecimento em geometria. Ao concatenar as observações das suas aulas com seus relatos, compreendemos ainda que Antônio transitou ora por interpretar argumentos geométricos mais empíricos como válidos, ora por considerar os argumentos geométricos mais dedutivos, do ponto de vista da geometria escolar, como necessários.

Sobre o seu entendimento da visualização nos processos de prova em geometria, entendemos que, de maneira similar ao que realizou em termos das argumentações, Antônio levou esse processo em suas aulas ora aceitando a construção de argumentos pautados estritamente no que as representações utilizadas nas aulas "pareciam indicar", ora solicitando bases mais dedutivas para as argumentações produzidas a partir da visualização das representações. Nesse sentido, ressaltamos a procura do Professor em lidar tanto com aspectos intuitivos quanto dedutivos na construção de provas permeada pela visualização. Todavia, não podemos deixar de ressaltar que ele também enfrentou diversas dificuldades em suas aulas ao conduzir tal processo.

Perante a essas observações e às dificuldades com as quais os professores podem se deparar na condução dos processos de argumentação e prova permeados pela visualização, dado o que discutimos sobre a visualização no capítulo anterior - complementando-se a tais discussões defesas de autores como Hanna e Sidoli (2007) -, entendemos como necessário que os professores conheçam a visualização, e as dificuldades e obstáculos inerentes ao seu uso como componente do ensino de geometria, como um processo que procura equilibrar o desenvolvimento do raciocínio intuitivo com o desenvolvimento e o avanço do raciocínio dedutivo na construção de argumentação e provas em geometria.

Conforme o que foi discutido no Capítulo anterior, é possível identificar como um conhecimento geométrico para o ensino o conhecimento sobre o uso de *softwares* de geometria dinâmica relacionado a diversas situações de sala de aula vinculadas à visualização. Neste Capítulo, ainda notamos o afloramento de demandas de conhecimentos sobre o uso de *softwares* para a promoção e o desenvolvimento das atividades desencadeadas pelas tarefas de argumentação e prova propostas, o que reforça ainda mais o conhecimento dos *softwares* de geometria dinâmica para o ensino.

Segundo o que observamos nas aulas de Antônio, em certos momentos, *softwares* de geometria dinâmica poderiam tê-lo auxiliado a resolver algumas questões que emergiram quando a visualização dos desenhos pareceu não ter auxiliado.

Como exemplos, podemos citar a situação em que se questionou sobre as alturas dos triângulos retângulos "caírem dentro ou fora" dessas figuras, ou a situação em que a altura relativa à hipotenusa supostamente coincidia com a mediana de um triângulo retângulo, ou ainda quando Antônio desejou mostrar aos alunos que os triângulos retângulos semelhantes eram reduções uns dos outros. Antônio também reconheceu que o uso de *softwares* poderia ter complementado a produção de argumentações em algumas situações. Durante a sua entrevista, quando questionado sobre algumas situações relativas aos desenhos que construiu no quadro – como o fato de que algumas afirmações equivocadas dos alunos basearam-se na configuração dessas representações e o fato de o Professor ter construído uma representação como um contraexemplo que não favoreceu a refutação da argumentação de Lucas – e ao uso dos recortes de representações de triângulos para basear as suas argumentações, ele relatou:

> A primeira explicação do porquê dessa relação com o desenho, eu acho que tem muito a ver com algumas leituras que eu já fiz na vida, assim. Tem um trabalho da Manuela com a Vanessa[35] que elas descreveram a aula de um professor em que ele estava fazendo uma correção de exercícios e tal, e daí tinha um triângulo dentro de um quadrado. O triângulo parecia retângulo, e, portanto, os meninos começaram a resolver com a ideia de um jeito equivocado e deu um *quiproquó* na sala. Aí o que acontece? A discussão que elas passam sobre o lugar do desenho me impactou desde a primeira vez que eu li. Eu falei: "Poxa, é isso". Agora, até isso organizar na minha prática, eu tenho clareza de que vai demorar um pouco, por exemplo, eu ainda não sei como fazer, acho que talvez com o *software* de geometria dinâmica isso possa me ajudar a escapar um pouco das encrencas do desenho. Agora existe uma construção cotidiana que eu ainda não consegui colocar na minha prática, porque para trabalhar, por exemplo, tinha os computadores deles, um por aluno e etc. e tal, que funcionam metade deles... Funciona metade assim, é uma energia danada para a coisa rolar, então a aula, às vezes, entre aspas, a aula agarra até essa logística funcionar e a gente chegar na conversa. Talvez se eu tivesse conseguido colocar isso como uma coisa cotidiana, eles pegassem o entendimento do uso do computador sem, por que por exemplo, tinha que deixar carregando de um dia para o outro, às vezes esquecia de deixar carregando e não podia usar, e aí tinha que ser na mão livre, e aí, à mão livre, eu acho que vai assim, mesmo que eu levasse os instrumentos de medida para fazer com a construção toda, eu gastaria um tempo gigante para fazer isso. [Trecho transcrito da entrevista realizada com Antônio].

Antônio, mesmo sem ser incitado a falar em sua entrevista sobre o possível uso de *softwares* de geometria dinâmica em suas aulas sobre semelhança de triângulos e sobre o teorema de Pitágoras, reconheceu a relevância da construção de representações nesses

[35] TOMAZ, V. S.; DAVID, M, M. Perspectiva de análise micro da estrutura da atividade matemática em sala de aula. In: **V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. 28 a 31 de outubro de 2012, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil, 2012.

instrumentos para o ensino desses conteúdos. No entanto, ele também relatou as dificuldades inerentes ao processo de utilizar os recursos computacionais em sua prática como o principal fator de não fazê-lo.

As afirmações de Antônio juntamente ao que observamos em suas práticas parecem indicar-nos que há relevância de que os professores conheçam os *softwares* de geometria dinâmica sob uma perspectiva de como utilizá-los em tarefas de argumentação e provas, entendendo-os como geradores de conhecimentos novos para os alunos, como ferramentas para o ensino que funcionam sob a lógica da geometria e que permitem a realização de experimentações que surgem das demandas, às vezes inesperadas, emergentes dos processos de argumentação e prova (como a necessidade de construção de contraexemplos para refutação de conjecturas).

Ao estudar como o uso do *software Cabri-Géomètre* mediou os processos de aprendizagem e de avanço no pensamento teórico de alunos com idade entre 15 e 16 anos, durante a realização de tarefas de provas, Mariotti (2000) sublinha que quando um desenho é produzido em uma folha de papel, é bastante natural que a validação da construção desse desenho esteja focada no próprio desenho. Para a autora, existe uma ambiguidade no entendimento dos alunos sobre o que é um desenho e o que é uma figura geométrica. Essa ambiguidade pode causar um obstáculo comum no ensino de geometria importante a ser conhecido pelos professores, principalmente quando o desenho é parte de uma tarefa de prova: embora as perguntas a serem respondidas durante a tarefa refiram-se ou apoiem-se no desenho, o sentido da questão diz respeito à figura geométrica que ele representa, o que, muitas vezes, não é reconhecido pelos estudantes.

Softwares de geometria dinâmica, por conferirem uma validação teórica aos procedimentos de construção das representações de figuras geométricas, focalizam, durante as tarefas, a figura geométrica a ser estudada ou tomada como elemento essencial em uma prova, e não o desenho produzido. Cada etapa de uma construção de uma representação realizada em um *software*, segundo Mariotti (2000), corresponde a uma propriedade geométrica, e todo o conjunto de propriedades fornecidas pelos procedimentos dessa construção constitui a(s) hipótese(s) de um resultado da geometria que garante a acurácia da construção. Quando uma tarefa de geometria que envolve a construção de uma representação em um ambiente de geometria dinâmica é realizada, as justificativas produzidas em torno da figura requerem explicações que envolvam não somente o que aquela representação parece indicar, mas explicações que girem em torno do procedimento de sua construção e, portanto, girem em torno de propriedades e resultados geométricos. A autora ainda defende que a lógica intrínseca de uma representação de uma figura construída em um *software* de geometria dinâmica induz os alunos a mudarem o foco de sua atenção de apenas para o desenho indo mais na direção dos procedimentos de sua construção, o que faz com que uma perspectiva teórica de discussão se abra como possibilidade.

Mariotti (2002) reforça que a disponibilidade para se fazer construções de representações no computador permite ao professor engajar os alunos a atentarem mais para os procedimentos dessas construções do que para o desenho e, ao mesmo tempo, para as justificativas em torno dessas representações. As possibilidades dinâmicas oferecidas pelos *softwares* possibilitam que a visualização ocorra como um processo interativo entre o raciocínio indutivo e o dedutivo, uma vez que a figura a ser explorada é construída considerando-se as propriedades geométricas asseguradas pelos próprios comandos do *software*. Devido a isso, conjecturas podem emergir da exploração realizada nesses ambientes e a validação dessas conjecturas é buscada dentro da teoria geométrica.

Amado, Sanchez e Pinto (2015), citando Yang (2011), defendem que as dificuldades dos alunos em tarefas de provas podem surgir logo no momento da leitura do seu enunciado, o que pode dificultar ou mesmo inviabilizar a formulação de conjeturas e a construção da prova. Desta forma, Yang (2011 *apud* AMADO, SANCHEZ, PINTO, 2015) defende que é interessante que os estudantes comecem a tarefa pela exploração das figuras, tentando entender os termos, os conceitos e os símbolos matemáticos para que, então, possam entender o que se intenciona provar. É nesse sentido que Amado, Sanchez e Pinto (2015) defendem que os ambientes computacionais de geometria dinâmica podem dar uma importante contribuição, dado que podem possibilitar que a construção e a manipulação das figuras sejam feitas com rigor e rapidez, e dado que também podem auxiliar o professor a envolver os estudantes de maneira ativa na realização das tarefas de prova.

Assim como coloca Mariotti (2002), Amado, Sanchez e Pinto (2015) elegem como um dos principais aspectos quando se fala sobre o uso de *softwares* nas tarefas de provas o fato de que, quase ao contrário do que ocorre quando essas tarefas são executadas apenas com lápis e papel, as dificuldades de compreensão que podem surgir quando os alunos tomam como referência um desenho e não uma figura podem ser superadas. Isto porque, quando se trata de ambientes computacionais de geometria dinâmica, as representações, de fato, comportam-se conforme as figuras a elas relacionadas precisam se comportar, uma vez que estão submetidas às leis da geometria, as quais regem o funcionamento das ferramentas operacionais daqueles ambientes. Ou seja, as representações ali criadas “refletem todas as consequências teóricas das propriedades que as definem” (AMADO, SANCHEZ, PINTO, p. 646).

Ao realizarem um estudo no qual relatam uma experiência de ensino no 9º ano de uma escola portuguesa, em que os alunos trabalharam em tarefas de provas que envolviam propriedades dos triângulos e de seus pontos notáveis, Amado, Sanchez e Pinto (2015) constataram que a utilização do *software GeoGebra* nessas tarefas para apoiar a construção do triângulo e dos seus pontos notáveis e a visualização das figuras contribuiu fortemente para que os alunos formulassem conjecturas. Os autores também relataram que o uso do *software* não impediu que os alunos se deparassem com algumas dificuldades na construção de cadeias argumentativas. Todavia, ficou clara a importância de estímulo amparado pelo uso do *software* para que eles elaborassem justificativas para suas próprias ideias e para que desenvolvessem argumentos.

CONCLUSÕES

... Eu vim de lá, eu vim de lá pequeninho. Mas eu vim de lá pequenininho. Alguém me avisou pra pisar nesse chão devagarinho.

(Alguém me avisou - Dona Ivone Lara)

Que conhecimentos matemáticos para o ensino de geometria - portanto, relevantes para serem tratados na Licenciatura - são desvelados em aulas de Matemática do Ensino Fundamental?

Nesta tese, partindo da análise de situações de sala de aula de dois professores do Ensino Fundamental de uma escola pública, procuramos responder a pergunta acima. Assim, identificamos, analisamos e problematizamos alguns conhecimentos matemáticos para o ensino, no que se refere ao ensino da geometria no Ensino Fundamental. Nossa análise levou em conta questões específicas do ensino de alguns conteúdos da geometria – poliedros, planificações de formas tridimensionais, conceitos de quadrado e hexágono, semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras – que emergiram dessas situações e que se relacionam aos conhecimentos que entendemos que foram demandados das práticas observadas em ambas as turmas pesquisadas.

Não podemos deixar de observar que nossos dados originaram-se de um contexto de muita especificidade. Na Escola pesquisada, os professores efetivos trabalham sob regime de dedicação exclusiva e sua formação e experiências profissionais contemplam oportunidades de realização e participação em pesquisas, extensão universitária, orientações, entre outras oportunidades que, acreditamos, a grande maioria dos professores brasileiros não pode acessar. Por outro lado, em um contexto de Educação Básica que pode ser considerado mais aberto à inovação e participação, as questões de nosso interesse, especialmente aquelas levantadas pelos estudantes, tiveram mais condições de surgir. Logo, nosso estudo é pontual, muito específico de um contexto, mas ainda assim reflete demandas concretas de salas de aula de geometria, pelas quais outros professores poderiam passar.

Ressaltamos a importância de escolas como aquela em que a nossa investigação se deu para pesquisas da Educação Matemática, sobretudo pesquisas da formação de professores. Nesse tipo de instituição, geralmente são dadas aos professores condições de trabalho diferenciadas que lhes conferem tempo disponível para elaboração e discussão de práticas inovadoras, as quais proporcionam aos estudantes oportunidades de fazerem parte da produção de conhecimento. Assim, uma implicação metodológica que vislumbramos deste trabalho é que pesquisas sobre a geometria escolar, quando realizadas a partir do estudo de práticas reais de ensino, são privilegiadas caso os alunos sejam chamados a/e estejam à vontade para fazerem perguntas e exporem as suas ideias.

Apesar de ainda haver dúvidas e lacunas nas pesquisas atuais sobre a composição do conhecimento matemático para o ensino, pudemos perceber, em nossas análises, que ele agrega substancialmente elementos relativos à instrução em si. Um resultado desta tese é que os conhecimentos identificados, os quais notamos como saberes relevantes para serem tratados na formação inicial de professores, possuem uma conformação centrada em aspectos da geometria que se ensina na escola, uma vez que foram caracterizados a partir de demandas reais de práticas de ensino, e também em elementos apontados pela literatura especializada que foi consultada. Ou seja, confirmamos hipóteses levantadas por autores como Ball, Thames e Phelps (2008) e Moreira e David (2005).

Como uma conclusão oriunda da nossa investigação, salientamos que as questões relativas à visualização, aos *softwares* de geometria dinâmica e às argumentações e provas no ensino de geometria, as quais discutimos, evidenciaram-nos não somente como recursos e/ou estratégias para tal ensino, o que é comumente tratado na Licenciatura. Em nosso estudo, pudemos notá-los no âmbito de conhecimentos específicos para o ensino de geometria no Ensino Fundamental.

Se fizermos uma análise dos currículos de formação de professores de Matemática, a exemplo do próprio currículo do curso no qual atuo como formadora, notamos que esses conhecimentos, conforme vimos que podem se constituir, não aparecem com o *status* de saberes estruturantes da formação geométrica dos futuros professores. Muitas vezes, são tomados como temáticas a serem brevemente abordadas nos momentos do curso dedicados às discussões sobre o ensino dos conteúdos da geometria na Escola Básica.

Ao considerarmos o boletim “A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM (2013)”, notamos, primeiramente, que ao fazer um tratamento mais específico sobre conhecimentos relevantes para os currículos de formação, o documento, a nosso ver, focaliza os axiomas da geometria euclidiana como cerne desse processo. Também menciona que é preciso haver um tratamento abrangente da geometria na formação inicial de professores de Matemática que evidencie para o futuro profissional aspectos fundamentais no ensino desse tema. Um desses aspectos, rapidamente citado - sem a presença de discussões que se refiram a ele como um saber para o ensino na Escola Básica a ser desenvolvido com os futuros professores -, é a visualização.

Sobre o tratamento da visualização na Licenciatura como um saber para o ensino de geometria, inferimos, segundo nosso estudo, que o fato dele não ocorrer pode, no mínimo, levar os futuros professores a desconhecerem a utilidade do raciocínio visual e seus diferentes e importantes papéis na Educação Matemática. Em segundo lugar, notamos que os professores de Matemática, em sua formação inicial, necessitam de oportunidades de se aprofundar e de se familiarizar com conhecimentos relacionados ao papel da visualização no ensino de geometria e a tarefas de raciocínio visual, apreciando o seu potencial educacional, analisando e também desenvolvendo ferramentas para aplicá-las em suas salas de aula.

Gonzato, Godino e Contreras (2010) realizaram um trabalho cujo objetivo foi o estudo dos conhecimentos de futuros professores de educação primária, estudantes da Universidade de Granada - Espanha, sobre a visualização de objetos tridimensionais. Nesse estudo, os autores investigaram os principais erros e dificuldades dos participantes em questões e tarefas de visualização relacionados ao conhecimento comum e ampliado do conteúdo matemático (GODINO, 2009 *apud* GONZATO, GODINO, CONTRERAS, 2010).

A avaliação do conhecimento comum do conteúdo foi feita a partir das respostas dos participantes a um questionário, cujas questões eram relativas a tarefas de visualização contidas em livros textos da educação primária espanhola. Um tipo de erro observado nas respostas dos futuros professores foi que muitos deles não conseguiram identificar corretamente planificações de cubos. Outro tipo de erro constatado estava associado ao desenho de uma forma tridimensional a partir de projeções ortogonais. Os participantes, ao analisarem o desenho, consideravam-no por si só, apenas como um desenho, e não pelo objeto geométrico que ele representava.

Da avaliação do conhecimento ampliado do conteúdo, cujas análises permearam a realização de tarefas de investigação, os autores observaram muitos erros dos participantes sobre as mudanças nas três vistas de um objeto a partir da variação da sua estrutura. Também foram verificados erros relacionados à concepção dos futuros professores no que tange aos corpos de revolução. Os participantes tenderam a considerar que esses corpos são gerados unicamente a partir da rotação de uma figura plana em torno de um eixo interior ou tangente a ela.

Os resultados obtidos por Gonzato, Godino e Contreras (2010) apontam para necessidades de um tratamento de diferentes tipos de conhecimento sobre visualização durante a formação inicial dos professores da educação primária, tais como os conhecimentos que foram identificados em sua pesquisa: sobre o desenho como representação de um objeto geométrico abstrato – portanto, dotado de propriedades que regulam a sua existência – e conhecimentos sobre a geração de corpos redondos. Trazendo os resultados dessa pesquisa para o contexto de formação inicial de professores de Matemática que atuarão nos anos finais do Ensino Fundamental brasileiro, é possível ressaltar a relevância também nesses cursos do tratamento de conhecimentos sobre a visualização revelados pelos autores, dado que esses conhecimentos não são, na maioria das vezes, priorizados nesse processo.

No que se refere ao estudo da geometria dinâmica na Licenciatura em Matemática, o boletim (SBEM/SBM, 2013) faz uma breve referência a ela como um dos principais focos do estudo moderno da geometria. De acordo com o documento, a geometria dinâmica configura-se como muito importante para ser contemplada na formação visando ao preparo dos futuros professores "para os desafios de salas de aula na nova realidade escolar, em que a aprendizagem de matemática precisa complementar, com conteúdos significativos de matemática, os recursos já presentes como sítios educativos, jogos e programas interativos (...)" (p. 39).

No entanto, ampliando essa visão, parece relevante, conforme pudemos observar nesta pesquisa, que os professores de Matemática conheçam os *softwares* de geometria dinâmica, enquanto componentes do ensino, em uma perspectiva que vai além de saber operar com eles e de ter habilidades em guiar os alunos no seu uso e no desenvolvimento por si de tarefas a serem executadas nesses recursos. Nossos resultados apontam para o *softwares* como tecnologias que precisam ser conhecidas pelos professores como elementos para a promoção de aprendizagem dos alunos dos conteúdos geométricos, pois, por exemplo, permitem que eles operem sob ferramentas que garantem as propriedades das figuras geométricas, auxiliam na visualização mais dinâmica das formas e, por isso, na criação de imagens mentais não apenas nos formatos mais padronizados das figuras.

Knapp, Barrett, Jeffrey e Moore (2016) investigaram as maneiras pelas quais quatro professores do Ensino Médio desenvolveram seu conhecimento matemático para o ensino (MKT) (BALL, THAMES, PHELPS, 2008) quando implementaram o uso de *softwares* de geometria dinâmica em suas aulas. Na implementação desse recurso, um professor "treinador" auxiliou os professores participantes na condução das atividades. De acordo com essa pesquisa, o uso de *softwares* de geometria dinâmica na formação inicial de professores pode desenvolver e fortalecer o conhecimento matemático para o ensino, principalmente no que diz respeito ao conhecimento especializado e ao conhecimento do conteúdo e do ensino (BALL, THAMES, PHELPS, 2008) sobre formas bi e tridimensionais e o desenvolvimento de argumentos matemáticos sobre relações geométricas vinculadas a essas formas.

Usando o termo “discurso dinâmico” para designar as discussões entre os alunos e seus professores enquanto trabalhavam juntos na interpretação de imagens dinâmicas, os autores observaram que os professores ganharam uma visão dinâmica do pensamento dos estudantes, o que implicou em uma oportunidade de desenvolvimento do conhecimento daqueles profissionais sobre os padrões de aprendizagem dos alunos. O ambiente do *software* de geometria dinâmica também se mostrou produtivo para o desenvolvimento profissional dos docentes no que tange às explicações, exemplos e definições referentes à geometria para o ensino. Além de ter lhes auxiliado a descobrirem e a analisarem as habilidades com a geometria, outrora despercebidas, de estudantes que apresentavam baixas habilidades em outros tipos de tarefas (sem o uso de *softwares*) que envolviam formas tri e bidimensionais.

Com respeito aos conhecimentos sobre argumentação e provas aqui analisados, vimos que eles colocam em voga que não basta a um professor que ensinará na Educação Básica saber demonstrar um resultado da geometria somente do ponto de vista da construção acadêmica e extremamente rigorosa da prova, corroborando as defesas de Stylianides e Ball (2008). Segundo a nossa análise, esse conhecimento, relevante para ser tratado na formação inicial, leva em conta elementos que são específicos dos saberes profissionais dos professores, como o saber sobre a escolha das atividades de prova, sobre a condução dos processos de prova com a comunidade de sala de aula, sobre a condução e avaliação dos argumentos dos alunos, sobre a construção de exemplos e contraexemplos da geometria para a construção e a refutação de argumentações, sobre o uso de representações de formas geométricas nos processos de provas.

Compreendemos que o boletim (SBEM/SBM, 2013) desvela como principal argumento que demonstrações “formais” – as quais entendemos no sentido da geometria acadêmica – sejam trabalhadas com centralidade maior na Licenciatura. De maneira complementar a esse trabalho, o documento sugere que sejam investigadas e estudadas formas de se adaptar tais demonstrações para o ensino básico, recorrendo-se, para isso, à literatura sobre provas na Educação Básica e aos modos de ensino de geometria nesse segmento de escolaridade:

> Recomenda-se que a literatura sobre a demonstração numa perspectiva de ensino e aprendizagem em Matemática seja incorporada de modo a se discutir também as **necessárias adaptações que se deve fazer ao tratar do processo de demonstração com alunos mais jovens**. Este aspecto se torna muito importante à medida que o futuro professor compreende o significado do rigor matemático da construção axiomática ligado ao conhecimento necessário para planejar e conduzir atividades educativas na sala de aula. Ao mesmo tempo em que aprofunda seu olhar sobre a Matemática, é interessante que os futuros professores experimentem propostas inovadoras de ensino de Geometria como atividades, jogos, materiais

> didáticos. Ao vivenciar situações de aprendizagem nas quais o professor atua como mediador e o estudante tem papel ativo – agindo, argumentando construindo conhecimento – o futuro professor tem a possibilidade de ampliar seu repertório de estratégias de ensino de modo mais significativo. Um exemplo de atividade na qual a dedução de passos é regida pela teoria axiomática são os problemas de construção geométrica com régua e compasso. (SBEM/SBM, 2013, p. 12-13, grifo nosso).

Da maneira como o documento preza pelo trabalho com provas na formação inicial de professores, entendemos que ainda permanece como senso comum que o estudo aprofundado da teoria axiomática acadêmica nesse processo complementado pelas adaptações "necessárias" para o ensino básico da geometria seja suficiente para que os professores possam realizar o trabalho do ensino na escola. Todavia, pensando nas provas acadêmicas, sobretudo após nossos resultados, argumentamos que adaptações delas podem, ao contrário, ser insuficientes para que os futuros professores consigam realizar um trabalho com argumentações e provas que leve em consideração elementos defendidos no Capítulo 5.

Como vimos, mais do que adaptar provas "formais" para o ensino, durante o trabalho com demonstrações na geometria escolar, há que se considerar como elementos chaves o papel das dúvidas dos alunos nesse processo, o tratamento de internalização inadequada de conceitos e dos erros cometidos pelos estudantes, a condução da produção de argumentos pelos alunos, a promoção e a condução das discussões coletivas com a comunidade de sala de aula na construção de argumentos e na avaliação dos modos de argumentação, a escolha, a criação e as explicações relevantes nas tarefas de provas. Portanto, diferentemente do que sugere o boletim, entendemos que o conhecimento para o ensino de provas na geometria escolar é forjado por um amálgama de saberes intrínsecos à realização de demonstrações na Escola Básica - a exemplo daqueles que pudemos identificar -, e não como conhecimentos das demonstrações acadêmicas somado às suas adaptações e a conhecimentos sobre maneiras de se ensinar geometria na Escola Básica.

Healy, Jahn e Frant (2009) relatam sobre um projeto de pesquisa intitulado Argumentação e Prova em Matemática Escolar, pelo qual examinaram os desafios associados ao desenvolvimento de culturas de práticas de prova entre professores de Matemática brasileiros. Na primeira fase de execução do projeto, os pesquisadores aplicaram um questionário a um coletivo de professores Educação Básica de São Paulo, na intenção de mapear possíveis práticas de provas em sala de aula que eles estivessem realizando ou que já tivessem realizado.

Como resultado da análise das respostas dadas nesses questionários, os pesquisadores constataram que os participantes do projeto não se sentiam prontos para trabalhar com argumentação e prova em suas aulas. As suas visões a respeito do processo de prova eram limitadas às experiências que tiveram durante sua formação inicial, as quais direcionavam-se às provas ditas "formais" ou acadêmicas, e às poucas experiências com tarefas de provas que propuseram em suas aulas. Os professores, em sua maioria, haviam trabalhado e sentiam-se seguros para trabalhar apenas com tarefas relacionadas a provas consideradas inadequadas para o contexto da Educação Básica, uma vez que tais provas eram adaptações ou tentativas de adaptações das demonstrações acadêmicas que conheceram em sua formação inicial. Como consequência disso, de acordo com relato dos professores, seus alunos demonstraram enormes dificuldades em compreender e em executar as tarefas que lhes foram propostas.

Stylianides e Ball (2008) defendem que a Licenciatura precisa enfatizar o desenvolvimento do conhecimento sobre provas para o ensino e apontam algumas questões importantes a serem trabalhadas nesse processo. Uma dessas questões refere-se ao desenvolvimento do conhecimento dos futuros professores sobre diferentes tipos de tarefas de prova e da relação entre tarefas de prova e as atividades de prova desencadeadas por essas tarefas. Para esses autores, uma direção possível para o tratamento dessa questão na Licenciatura relaciona-se com a investigação sobre qual conhecimento matemático está envolvido nas decisões dos professores sobre utilizarem, ou não, e sobre quando utilizarem uma determinada tarefa de prova em suas aulas.

Os autores propõem que um importante fator que os professores precisam considerar ao tomar essas decisões diz respeito a qual estratégia de prova os estudantes precisariam mobilizar para concluírem a tarefa com sucesso. A identificação dessa estratégia direcionaria os professores para as deliberações pedagógicas necessárias para a proposição e condução da tarefa. Ainda segundo os autores, outra orientação possível para um trabalho com o conhecimento dos futuros professores sobre provas é investigar o conhecimento matemático envolvido nas suas decisões a respeito de como sequenciar uma tarefa de prova, principalmente no que se refere à maneira como os professores pretendem sequenciar o trabalho realizado pelos estudantes durante a tarefa.

Sob a nossa interpretação, a geometria escolar envolve questões múltiplas enraizadas nos processos do ensino em si, a exemplo daquelas que levantamos nos Capítulos 4 e 5, e também enraizadas em teorias da Educação Matemática e dos fundamentos da geometria. Resumidamente, nossa tese é de que ensinar geometria envolve um conhecimento matemático de alta complexidade, permeado, entre outros elementos que vão além do que foi possível pesquisar neste trabalho, por:

i) Conhecimentos especializados sobre caracterizações/conceitualizações das formas bi e tridimensionais apropriadas para o contexto escolar, bem como, conhecimentos sobre possíveis dúvidas dos alunos relacionadas à construção dessas caracterizações;

ii) Conhecimentos sobre a visualização – e também das dificuldades, obstáculos e possíveis dúvidas dos alunos relacionadas a ela – como um processo que envolve a criação e a interpretação de imagens mentais, o uso adequado de representações concretas, a escolha de exemplos e contraexemplos e a simbiose entre as componentes figurais e conceituais dos entes geométricos;

iii) Conhecimentos sobre um repertório diversificado de representações não prototípicas de figuras geométricas;

iv) Conhecimentos sobre o uso adequado e preciso da linguagem geométrica em cada nível de escolaridade;

v) Conhecimentos relacionados à escolha e à criação de metodologias, situações didáticas e tarefas que auxiliem os estudantes no desenvolvimento do raciocínio espacial e na realização de argumentações e provas geométricas;

vi) Conhecimentos sobre a escolha e o uso de *softwares* de geometria dinâmica como tecnologias que podem auxiliar os estudantes no trabalho com visualização e com argumentação e prova;

vii) Conhecimentos sobre formas legítimas e adequadas de argumentações e provas em geometria para o público constituinte da comunidade de sala de aula.

A tese que defendemos pode contribuir para a ideia de estruturação de uma educação geométrica dos futuros professores a partir de saberes constituídos segundo demandas de práticas reais de ensino, bem como, de elementos tratados na literatura de pesquisa que leva em conta discussões sobre ensino e aprendizagem da geometria/Matemática. Esse entendimento converge para a afirmação de Moreira (2012) de que a perspectiva de estruturação da formação de professores, segundo um corpo de conhecimentos específicos desse profissional, tem na prática de ensino um elemento essencial. Ao mesmo tempo, segundo o autor, a análise da prática precisa estar em conjunto com outra fonte de elementos ricos para tal estruturação: a pesquisa em Educação/Educação Matemática.

Sublinhamos a nossa crença de que a geometria escolar leva em conta conhecimentos outros que aqui não puderam ser discutidos, e que sugerimos que sejam contemplados em pesquisas futuras, principalmente saberes concernentes à Etnomatemática, à Modelagem Matemática, às relações professor-aluno, às culturas das comunidades nas quais o ensino acontece, entre outros. Depreendemos de nossas observações, também, a necessidade de que sejam realizadas pesquisas que contemplem as relações do conhecimento matemático para o ensino com outros conhecimentos, mostrando também aos futuros professores que o ensino de Matemática passa por valores, saberes e sentimentos próprios da vida social democrática.

Ball e Forzani (2009) consideram, sobremaneira, a ideia de que o ensino envolve uma teia de interações e relacionamentos que acontecem em ambientes diversos da escola e das comunidades – tanto aquelas nas quais as escolas se localizam quanto as comunidades de onde vêm os estudantes – e que não podem ser deixados de lado quando se analisa as demandas do ensino de Matemática. Em Ball (2017), a autora argumenta sobre a complexidade do ensino retomando uma noção de que:

> (...) o ensino é co-construído nas salas de aula através de uma interação dinâmica de relacionamentos, situada em amplos ambientes sócio-políticos, históricos, econômicos, culturais, comunitárias e familiares. Estes relacionamentos são construídos através das interpretações e interações de professores, alunos e conteúdo. (COHEN, RAUDENBUSH, BALL, 2003 *apud* BALL, 2017, p. 15, tradução nossa[36]).

Esta tese nos permite pensar que o estudo da geometria e seu ensino ainda não tem sido privilegiado em cursos de formação inicial de professores, ainda que uma educação geométrica para esses profissionais venha ganhando espaço nas discussões presentes na literatura e nos currículos básicos da formação. Por isso, acreditamos que ainda há muito o que percorrer. Isso nos motiva a continuar, a partir daqui, nos processos de refinamento dos nossos achados e de busca por uma caracterização da geometria escolar, sobretudo diante da importância e da complexidade do que ainda é necessário investigar sobre as diversas questões que permeiam as salas de aula de geometria, e sobre o que essas questões revelam a respeito dos saberes da geometria escolar. Da mesma maneira, incentiva-nos a fomentar o pensamento de que outras pesquisas sejam promovidas nesse rumo de discussão.

Um esforço que vislumbramos no horizonte, por exemplo, concerne à construção e à avaliação de tarefas que contemplem questões específicas do ensino da geometria na Educação Básica para serem implementadas em contextos de formação de professores, as quais visem a constatação da efetividade do conhecimento geométrico para o ensino, bem como, o seu aprimoramento.

Um dos questionamentos que surgiram para nós nesse caminhar, e que aqui deixamos para reflexão, pergunta: em que lugares conhecimentos como estes que aqui apresentamos

[36] Do original: (…) teaching is co-constructed in classrooms through a dynamic interplay of relationships, situated in broad sociopolitical, historical, economic, cultural, community, and family environments. These are constructed through the interpretations and interactions of teachers, students, and content.

poderão ser tratados na Licenciatura? Diante das discussões que promovemos nos Capítulos anteriores, principalmente quando trazemos nossos achados para serem situados em elementos de parte da literatura específica sobre o ensino e aprendizagem da geometria, acreditamos que tais conhecimentos não poderão ocupar um lugar tímido ou estanque nesse processo. Apoiamo-nos para essa reflexão na análise feita por Moreira e Ferreira (2013) de diferentes concepções sobre a natureza do conhecimento matemático e o lugar, ou lugares, da Matemática na formação do professor. Eles analisam da seguinte forma:

> (...) se pensarmos que o conhecimento matemático da formação do professor é constituído a partir da referência primordial das questões que o professor enfrenta na prática da profissão, projeta-se e destaca-se uma concepção que entende esse conhecimento como especializado para essa profissão, capaz de traduzir e produzir um olhar específico e único (no sentido de próprio do profissional docente) para a sala de aula de matemática da escola. Assim concebida, parece que o lugar dessa matemática do professor na licenciatura não se reduz a um nicho próprio, isolado, que precisa ser conectado a outros nichos isolados. Essa matemática estaria presente, de modo natural, em diversos lugares e momentos do currículo de formação, desde as disciplinas tradicionalmente referidas como de conteúdo matemático (e.g., Geometria, Álgebra), até o Estágio Supervisionado e a Prática de Ensino, a Didática, passando também, pelas práticas de investigação em sala de aula, modelagem matemática, resolução de problemas, pela história da matemática e da educação matemática, atravessando, inclusive, as discussões sobre avaliações e objetivos da educação escolar. (p. 1003 – 1004).

Isto posto, vislumbramos que os saberes relacionados à geometria escolar merecem ser melhor investigados como necessários para perpassar todo o percurso da formação inicial do professor de Matemática. Como dissemos na Introdução, a Licenciatura ainda é marcada por um referencial de formação dicotômico: conteúdo acadêmico *versus* modos de ensinar. O amálgama de conhecimentos que, segundo vários autores, caracteriza o saber específico para o ensino ainda não foi suficientemente investigado e compreendido pelas comunidades acadêmicas que trabalham na formação de professores e, por isso, mais estudos precisam ser realizados. Quando esses tipos de conhecimentos são investigados, a partir de pesquisas como esta, são suscitadas questões e demandas de conhecimentos dos professores que merecem tratamento no patamar de saberes da e para a prática, sem uma separação pontual sobre esta ou aquela fração desses conhecimentos como mais ou menos relevante para o trabalho do ensino.

Finalizando este trabalho, notamos que ao fazermos uma identificação dos saberes a partir das demandas que afloraram de situações de sala de aula de geometria, poderíamos deixar como marca principal da nossa investigação e das nossas discussões as lacunas de conhecimentos dos professores da Educação Básica. Nesse sentido, poderíamos ainda levantar uma concepção de que pesquisas baseadas no modelo do MKT (BALL, THAMES, PHELPS,

2008) trazem consigo uma perspectiva de professores “ideais”. Por conseguinte, sugerimos que uma maneira de que essas ideias não caracterizem pesquisas como essa e também não se perpetuem nelas é que mais trabalhos que dizem respeito ao MKT sejam também realizados a partir de outras fontes de dados. Citamos, por exemplo, possibilidades de realização de pesquisas com formadores de professores de Matemática, de pesquisas diretamente com professores ainda em processo de formação inicial e de investigações a partir de dados oriundos da literatura especializada sobre questões que permeiam o ensino de Matemática.

Encerramos esta tese afirmando que o que nos parece cada vez mais evidente é a possibilidade de construção de um currículo de formação de professores de Matemática que se ampare nos achados das pesquisas sobre a Matemática Escolar, as quais possam fornecer elementos que de fato atendam às necessidades formativas dos professores. Resultados dessas pesquisas podem guiar a promoção de ações e implantação de políticas da formação inicial de professores de Matemática, principalmente no que diz respeito à valorização da docência como profissão.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A Matemática na educação básica**. Lisboa: Ministério da Educação, 1999.

ALVES-MAZZOTTI, A.J. O Método nas Ciências Sociais. In: **O Método nas Ciências Naturais e Sociais**: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa, ALVES-MAZZOTTI, A.J.; GEWANDSZNAJDER, F. 2. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, p. 108-203, 2000.

AMADO, N., SANCHÉZ, J., PINTO, J. A utilização do Geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler. **Bolema**, v. 29, n. 52, p. 637-657, Rio Claro, ago. 2015.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, vol. 52, p. 215-241, 2003.

BALACHEFF, N. The researcher epistemology: A deadlock from educational research on proof. In: **International conference on mathematics: understanding proving and proving to understand**, LIN, F. L. (Ed.), p.23-44, Taipei, Taiwan, 2002.

BALL, D. L. The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. **Elementary School Journal**. vol. 90, n. 4, p. 449-466, 1990.

BALL, D. L.; BASS, H. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: **Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group Kingston**, SIMMT, E.; DAVIS, B. (Eds.). Canada: CMESG Program Committee, p. 3-14, 2002.

BALL, D. L.; BASS, H. **With an Eye on Mathematical Horizon**: Knowing Mathematics for Teaching to Learners' Mathematical Futures. Michigan USA, 2009. Disponível em <www.mathematik.tudortmund.de/ieem/cms/media/BzMU/BzMU2009/Beitraege/Hauptvortraege/BALL_Deborah_BASS_Hyman_2009_Horizon.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2017.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v.59, n.5, p. 389-407, 2008.

BALL, D. L. FROZANI. F. M. The work of teaching and the challenge for Teacher Education. **Journal of teacher education**. vol. 60, n. 5, p. 497-511, 2009.

BALL, D. L. Uncovering the special mathematical work of teaching. In: **Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education**. ICME-13 Monographs, p. 11-34, 2017.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. Rio de Janeiro, SBEM, 2012.

BASTIAN, I. V. **O teorema de Pitágoras**. Dissertação (Mestrado). 229 f. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2000.

BATTISTA, M. T. The development of geometric and spatial thinking. In: **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**, p. 843-908, Charlotte, NC, 2007.

BOGDAN, R.; BILKEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Resolução no 1, de 18 de fevereiro de 2002 – CNE/CP. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. Disponível em: <htpp://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf>. Acesso em 20 agosto de 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Superior. Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura. Brasília, abril de 2010.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Resolução CNE/CP n. 02/2015, de 1º de julho de 2015. Brasília, Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, seção 1, n. 124, p. 8-12, 02 de julho de 2015. Disponível em http://portal.mec.gov.br/docman/agosto-2017-pdf/70431-res-cne-cp-002-03072015-pdf/file. Acesso em 03 de setembro de 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Terceira versão. Brasília: MEC, 2017.

BRUNET, A. R; LEIVAS, L. C; LEYSER, M. Intuição, visualização e tecnologia no ensino de limites na licenciatura em matemática. In: **X Encontro Gaúcho de Educação Matemática**. Ijuí, RS, 2009.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L.C.; MUNOZ-CATALÁN, M.C. Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. Manuscript submitted for publication (**CERME 8**), 2013.

CARVALHO, P. C. P. **Introdução à Geometria Espacial**. 4. Ed. Rio de janeiro: SBM, 2005.

CARVALHO, H. A. F. **Aprendendo a ensinar Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**: um estudo com alunos de Pedagogia de uma universidade federal mineira. Dissertação (Mestrado). 192 f. Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Ouro Preto, Minas Gerais, 2017.

CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica**: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique. 1991.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, n.2, p.177-229, 1990.

CIFUENTES, J. C. Fundamentos estéticos da Matemática. In: **Filosofia da Educação Matemática**: Concepções e Movimento. Brasília: Plano Ed., 2003.

________________. Uma Via Estética de Acesso ao Conhecimento Matemático. **Boletim GEPEM (USU)**, Rio de Janeiro, v. 46, p. 55-72, 2005.

_________________. Do conhecimento matemático à educação matemática: uma "odisseia espiritual". In: **Filosofia, Matemática e Educação Matemática**, Editora UFJF, 2010.

_______________. O "Salto Arquimediano": um processo de ruptura epistemológica no pensamento matemático. **Scientiae Studia** (USP), v. 9, p. 645-667, 2011.

COSTA, C. Visualização: veículo para a educação em geometria. In: **Encontro de investigação em educação matemática, ensino e aprendizagem de geometria**. Fundão, ES, 2000.

CRESCENTI, E. P. **Os professores de matemática e a geometria**: opiniões sobre a área e seu ensino. Tese (Doutorado). 242.f. Universidade Federal de São Carlos. Centro de Educação e Ciências Humanas, 2005.

CURY. H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com a resposta dos alunos. 2. ed. 2. reimp. Belo Horizonte, Autêntica, 2017.

DAVIS, B; RENERT; M. **Profound understanding of emergent mathematics**: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. Educ. Stud. Math, v. 82, n. 2, p. 245-265, Feb. 2013.

DE VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 62, p. 31-36, Março/Abril, 2001.

DINIZ-PEREIRA, J. E. **Da racionalidade técnica à racionalidade crítica:** formação docente e transformação social. Perspectivas em diálogo. Revista de Educação e Sociedade. Naviraí, v. 01, n. 01, p. 34-42, jan-jun, 2014.

DREYFUS, T. On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In: **Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, p. 33-48, 1991.

DOLCE, O.; POMPEU, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar 10**: Geometria espacial: posição e métrica. 7ª ed. Atual, São Paulo, 2013.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**. Berna: Peter Lang, 1995.

FERREIRA, M. C. C. **Conhecimento matemático específico para o ensino na Educação Básica**: a álgebra na Escola Básica e na formação do professor. Tese (Doutorado). 184 f. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, Faculdade de Educação. Minas Gerais, 2014.

FISCHBEIN, E. **The Theory of Figural Concepts**. Educational Studies in Mathematics, vol. 24, n. 2, Dordretch: Publishedby: Springer, p. 139-162, 1993.

FLORES, C. R. Cultura Visual, Visualidade, Visualização Matemática: balanço provisório, propostas cautelares. **Zetetiké**, v. 18, p. 271-294, 2011.

GATTI, B. Formação de professores no Brasil: características e problemas. **Educação e Sociedade**, vol. 31, n. 113, p. 1355-1379, out-dez, Campinas, 2010.

GAZIRE, E. S. **O não resgate das geometrias**. Tese (Doutorado). 219. f. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Campinas. 2000.

GIAQUINTO, M. **Visual thinking in mathematics**: An epistemological study. Oxford University Press, Oxford, 2007.

GIRALDO, V. Formação de professores de matemática: para uma abordagem problematizada. **Ciência e Cultura**, vol. 70, n. 1, p. 37-42, jan., 2018.

GONZATO, M.; GODINO, J. D.; CONTRERAS, J. M. Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación. In: M. **Marín, G; Fernández, L; J. Blanco; (Eds.), Investigación en Educación Matemática XV**, p. 383-392. Ciudad Real: SEIEM, 2010.
Disponível em:
https://www.researchgate.net/publication/270959793_LA_COMPONENTE_VISUAL_DE_LA_GEOMETRIA_EN_LOS_LIBROS_DE_TEXTOS_DE_SECUNDARIA. Acesso em setembro de 2019.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Tese (doutorado). 262. f. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Rio Grande do Sul, 2001.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. **Proceedings of the 20th PME Conference 1**, p. 3-19, 1996.

_____________. La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometria. In: **Geometría para el siglo XXI**. p. 13-58. FLORES, P., RUIZ, F., DE LA FUENTE, M. (Coords). Federación Española de Sociedades de Professores de Matemática (FESPM). Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2006.

GUZMAN, M. The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis. In: **Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level)**. Crete, Greece, 2002.

HANNA, G. Reflections on proof as explanation. In: **13th International Congress on Mathematical Education Hamburg**, Hamburg, Germany, 24-31, July, 2016.

HANNA, G., SIDOLI, N. Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. **ZDM Mathematics Education**, v. 39, p. 73–78, 2007.

HEALY, L.; JAHN, A. P.; FRANT, J. B. Developing cultures of proof practices amongst Brazilian mathematics teachers. In: **Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education**, p. 196-201, v. 1, 2009.

HERSHKOWITZ, R. Psychological aspects of learning geometry. In: **Mathematics and Cognition**, **P. Nesher, J. Kilpatrick (Eds.)**, p. 70-95. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1990.

HERBST, P.G. Establishing a custom of proving in American school geometry: evolution of the two-column proof in the early twentieth century. **Educational Studies in Mathematics**, vol. 49, p. 283–312, 2002.

HERBST, P.; KOSKO, K. Mathematical knowledge for teaching high school geometry. In: **Proceedings of the 34th annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**: Navigating transitions along continuums, L.R. Van Zoest, J.J. Lo, J.L. Kratky (Eds.), p. 438–444. Kalamazoo, MI: Western Michigan University, 2012.

HERBST, P.; KOSKO, K. Mathematical Knowledge for Teaching and its Specificity to High School Geometry Instruction. **Research Trends in Mathematics Teacher Education**. Springer International Publishing, p. 23-45, 2014.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, vol. 39, n. 4, p. 372–400, 2008.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática**: Imenes & Lellis - 7º ano. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2012.

________________________. **Matemática**: Imenes & Lellis - 9º ano. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2012.

JANZEN, E. A. O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica. Tese (Doutorado), 194f, Programa de Pós-Graduação em Educação, Linha de Educação Matemática, Setor de Educação da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

JONES, K.; HERBST, P. Proof, proving, and teacher-student interaction: Theories and contexts. In: **Proof and Proving in Mathematics Education**, the 19th ICMI Study, G. Hanna, M. de Villiers (Eds), p. 261-277, New York, Springer, 2012.

KALEFF, A. M. M. R. Formas, Padrões, Visualização e Ilusão de ótica no ensino da geometria. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 75-91, jul-dez., 2015.

KNAPP, A. K.; BARRET, J. E.; MOORE, C. J. **School Science and Mathematics**, v. 116, n. 6, p. 326-337, Oct, 2016.

KNIPPING, C.; REID, D. A. Argumentation Analysis for Early Career Researchers. In: **Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education**, G. Kaiser and N. Presmeg (Eds.), ICME-13 Monographs, 2019.

KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren**. J. Kilpatrick, I. Wirszup (Eds.). University of Chicago Press, Chicago, 1976.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, intuição e visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura em matemática. Tese (Doutorado), Universidade Federal do Paraná. Paraná, 2009.

LORENZATO, S. Porque não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**. SBEM, ano 3. p.3-13. 1995.

MAMMANA, C.; VILLANI, V. **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century**. Dordrecht, 1998.

MARIOTTI, M. A. Images and Concepts in geometrical reasoning. In: **Exploiting Mental Imagery with Computers Mathematics Education**. p. 97-115, Springer, 1995.

_______________. Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. **Educational Studies in Mathematic**, v. 44, p. 25–53, 2002.

MELO, L. M., GIRALDO, V., RISOSLATO, R. Matemática Científica e Escolar: saberes, crenças e concepções de professores na construção coletiva de um livro didático. **Acta Scientiae**, v. 17, n. 12, p. 390-409, mai-ago, Canoas, 2015.

MOREIRA, P.C. **O conhecimento matemático do professor**: formação na licenciatura e prática docente na escola básica. 2004. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

MOREIRA, P.C.; DAVID, M.M.M.S. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MOREIRA, P. C. 3+1 e suas (In) Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). **Bolema**, Rio Claro, São Paulo, v. 26, n. 44, p. 1137-1150, dez., 2012.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, A. C. O lugar da Matemática na Licenciatura em Matemática. **Bolema**, Rio Claro, São Paulo, v. 27, n. 47, p. 981-1005, dez., 2013.

MORIEL-JÚNIOR. J. G. **Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações**. Tese (Doutorado). 162 f. Universidade Federal de Mato Grosso, Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Cuiabá, Mato Grosso, 2014.

NATIONAL CONCIL OF TEACHEARS OF MATHEMATICS (NCTM). Principles and standards for school mathematics NCTM. Reston, 2000.

PRESMEG, N. C. **The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics**: A Classroom Investigation. Unpublished PhD Dissertation, University of Cambridge, 1985.

_______________. Visualization in high school mathematics. **For the Learning of Mathematics**, n. 6, v. 3, p. 42-46, 1986.

______________. Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**. v. 23, p. 595–610, 1992.

PONTE, J.; MATOS, J.; ABRANTES, P. **Investigação em educação matemática:** implicações curriculares. Lisboa: IIE, 1998.

PROCÓPIO, R. B. **Geometria como um curso de serviço para a licenciatura em matemática**: uma leitura da perspectiva do modelo dos campos semânticos. Dissertação (Mestrado). 82. f. Universidade Federal de Juiz de Fora. Instituto de Ciências Exatas. Dissertação. Juiz de Fora, 2011.

ROLDÃO, M. do C. Função docente: natureza e construção do conhecimento profissional. **Revista Brasileira de Educação**, v. 12, n. 34, jan-abr 2007.

RYO, H., CHONG, Y., SONG, S. Mathematically gifted students' spatial visualization ability of solid figures. In: **Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, (Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S., Seo, D. Y. Eds.), v. 4, p. 137-144. Seoul: PME, 2007.

SANTOS, A. H. **Um estudo epistemológico da visualização matemática**: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização. Dissertação (Mestrado). 97 f. Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Curitiba, Paraná, 2014.

SAMPAIO, R. S. **Geometria e visualização**: ensinando volume com o software Geogebra. Dissertação (Mestrado). 92 f. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2018.

SBEM. A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Boletim n. 21, p. 1-42, fev., 2013.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v.15, n.2, p.4-14, 1986.

_______________. Knowledge and teaching foundations of the new reform. **Harvard educational review**, v. 57, n. 21, p. 1 – 22, Feb 1987.

______________. PCK: Its genesis and exodus. In: **Re-examining Pedagogical Content Knowledge in Science Education** (Orgs: BERRY, A; FRIEDRICHSEN, P; LOUGHRAN, J). Teaching and Learning in Science series. Routledge, 2015.

STYLIANIDES, A. J. STYLIANIDES, G. J. Content Knowledge for mathematics teaching: the case of reasoning and proving. In**: Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. Stehlíková, N. (Eds.), v. 5, p. 201-208. Prague: PME, 2006.

STYLIANIDES, A. J. BALL, D. L. Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. **J Math Teacher Educ**, v. 11, p. 307–332, 2008.

TIROSH, D., TSAMIR, P., LEVENSON, E. Using theories to build kindergarten teachers' Mathematical knowledge for teaching. In: **Mathematical Knowledge in Teaching**. (Edits: ROWLAND, T; RUTHVEN, K). p. 231-250, Mathematics Education Library, v. 50, Springer, 2011.

TURA, M. de L. A observação do cotidiano escolar. In: **ZAGO, N.; CARVALHO, M. P.; VILELA, R. A**, p. 183-206, 2003.

WEISS, M.; HERBST, P.; CHEN, C. Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form. **Educ Stud Math**, Springer, v. 70, p. 275–293, 2007.

WU, H. The miss education of mathematics teacher. **Notices of the MAS**, vol. 58, n. 3. Mar 2011.

YAKIMANSKAYA, I.S. The development of spatial thinking in schoolchildren. In: **Soviet Studies in Mathematics Education**, vol. 3, 1991.

YILMAZ, R.; ARGUN, Z. Role of visualization in Mathematical Abstraction: The Case of Congruence Concept. **International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology** (IJEMST), v.6, n.1, p. 41-57, 2018.

ZAIDAN, S. **O (A) professor(a) de matemática no contexto da inclusão escolar**. Tese (Doutorado). 467 f. Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

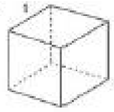
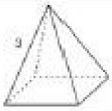
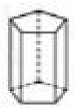
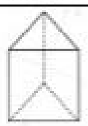
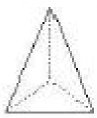
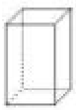
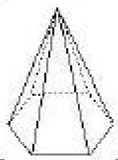
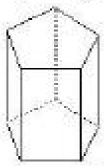
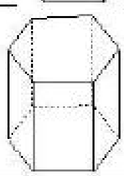
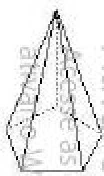
ZIMMERMANN, W; CUNNINGHAM, S. Introduction: What is Mathematical Visualization? In: **Visualization in Teaching and Learning Mathematics**, p. 1-7. W., ZIMMERMAN, W.; CUNNINGHAM, S (Eds.), Washington: MAA, 1991.

ANEXOS

ANEXO A - FOLHAS DE TAREFAS PARA O 7º ANO

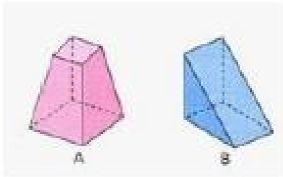
Exercícios

1. Preencha a tabela abaixo

	Polígono da Base	Nome do Sólido	Número de Vértices	Número de Faces	Número de Arestas	
	Quadrado	Cubo	8	6	12	8 + 6 = 12 + 2
						__ + __ = __ + __
						__ + __ = __ + __
						__ + __ = __ + __
						__ + __ = __ + __
						__ + __ = __ + __
						__ + __ = __ + __
						__ + __ = __ + __
						__ + __ = __ + __
						__ + __ = __ + __

2. Analise os poliedros desenhados ao lado.

Em seguida, responda no caderno:



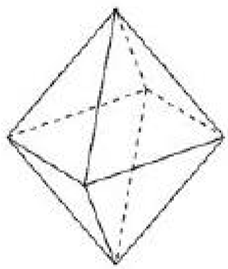
a) Qual deles tem mais vértices? Quantos a mais do que o outro?

b) Quantas arestas tem cada um deles?

c) Qual deles tem um número ímpar de faces? Quantas?

d) Verifique a relação de Euler nas duas figuras.

3. Observe o poliedro desenhado ao lado e responda:



a) Ele é um prisma ou poliedro?

b) Seu nome é octaedro. Por quê?

c) A relação de Euler se verifica nesse poliedro?

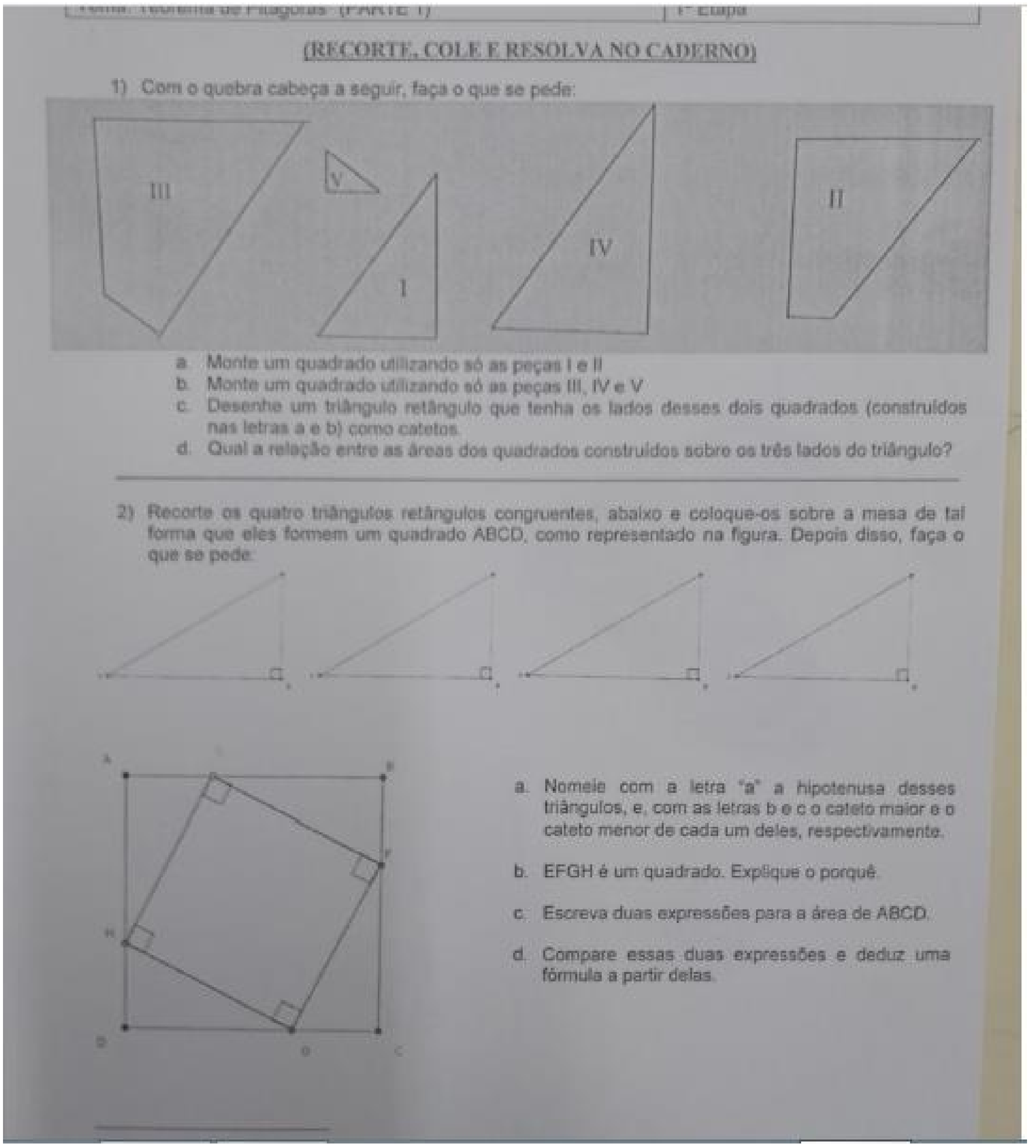
4. Entre prismas e pirâmides, existem algumas semelhanças e diferenças. Dê duas semelhanças e duas diferenças entre os prismas e as pirâmides.

5. Determine o número de arestas de um sólido geométrico que possui 10 vértices e 7 faces.

6. Tome um poliedro com 6 vértices e 9 arestas, qual seu número de faces?

7. Um poliedro possui 16 faces e 18 vértices. Qual é o número de arestas desse poliedro?

ANEXO B – FOLHA DE TAREFAS PARA O 9º ANO



(RECORTE, COLE E RESOLVA NO CADERNO)

1) Com o quebra cabeça a seguir, faça o que se pede:

a. Monte um quadrado utilizando só as peças I e II
b. Monte um quadrado utilizando só as peças III, IV e V
c. Desenhe um triângulo retângulo que tenha os lados desses dois quadrados (construídos nas letras a e b) como catetos.
d. Qual a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os três lados do triângulo?

2) Recorte os quatro triângulos retângulos congruentes, abaixo e coloque-os sobre a mesa de tal forma que eles formem um quadrado ABCD, como representado na figura. Depois disso, faça o que se pede:

a. Nomeie com a letra "a" a hipotenusa desses triângulos, e, com as letras b e c o cateto maior e o cateto menor de cada um deles, respectivamente.

b. EFGH é um quadrado. Explique o porquê.

c. Escreva duas expressões para a área de ABCD.

d. Compare essas duas expressões e deduz uma fórmula a partir delas.

APÊNDICES

APÊNDICE A – ROTEIRO PARA ENTREVISTA COM ANTÔNIO

1.Qual é seu nível de formação (Graduação, Mestrado, Doutorado)?

2. Há quanto tempo você leciona e em que lugares já lecionou?

3. Você já havia dado aulas para os estudantes do 9º ano A em anos escolares anteriores?

4. Fale-me sobre a sua experiência com o ensino de Matemática na Educação Básica.

5. Fale-me um pouco sobre a sua experiência com o trabalho com a geometria na Educação Básica.

6. Notei que o uso do livro didático aconteceu em quase todas as suas aulas, geralmente para apoiar na introdução à algum assunto (juntamente com o material do Fundão) e para que os alunos fizessem os exercícios, etc. Você costuma fazer uso do livro didático, geralmente, em suas práticas?

7. Fale-me um pouco sobre o uso especificamente do livro Matemática: Imenes e Lellis.

8. Você passou muitas atividades complementares preparadas, muitas vezes, com base no material do Projeto Fundão. Eram atividades do tipo do tipo investigativas? Qual a concepção sua sobre atividades investigativas? Porque essa escolha de tipo de atividade?

9. Em várias situações de ensino de geometria que presenciei em suas aulas, você trabalhou com algumas demonstrações apoiadas pelo recurso à argumentação: casos de semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, até chegar ao Teorema de Pitágoras. Fale-me sobre essa experiência.

10. Percebi em suas aulas que você se expressa com certo rigor na linguagem escrita e falada com uso de simbologias e com a recorrência à citações de teoremas para justificar as passagens dos exercícios. Fale-me um pouco sobre essa sua postura para o ensino de geometria no 9º ano.

11. Em praticamente todas as aulas observadas, você fez desenhos como representações de figuras planas no quadro. Fale-me um pouco sobre os desenhos que você faz e que você utiliza nas aulas.

APÊNDICE B – ROTEIRO PARA ENTREVISTA COM BENJAMIN

1.Qual é seu nível de formação (Graduação, Mestrado, Doutorado)?

2. Há quanto tempo você leciona e em que lugares já lecionou?

3. Você já havia dado aulas para os estudantes do 7º ano pesquisado em anos escolares anteriores?

4. Fale-me sobre a sua experiência com o ensino de Matemática na Educação Básica.

5. Fale-me um pouco sobre a sua experiência com o trabalho com a geometria na Educação Básica.

6. Como se deu a relação entre você e os licenciandos/estagiários no que diz respeito ao preparo das aulas que eles ministraram? Como foram feitas as escolhas dos recursos pedagógicos a serem utilizados? Os estagiários escolheram ministrar as aulas de geometria?

7. As dinâmicas das aulas que vocês ministraram foram pautadas no uso de diferentes recursos pedagógicos: material concreto, aplicativos de celular, artemetrias. Além disso, notei que houve muito diálogo com os estudantes. Você costuma, geralmente, trabalhar dessa maneira quando ensina Matemática na Escola Básica?

8. A aulas de geometria assistidas seguiram em uma dinâmica de apresentação de elementos da geometria não plana até se chegar à apresentação das planificações. Você já havia trabalhado dessa maneira em outras experiências didáticas? Porque você e os licenciandos/estagiários escolheram estruturar aquelas aulas dessa maneira?

9. Entre as aulas observadas, você trabalhou com a artemetria, trazendo elementos da geometria não plana e da geometria plana. Fale-me um pouco sobre o que é a artemetria e sobre a sua intenção no trabalho com ela.

APÊNDICE C – ROTEIRO PARA ENTREVISTA COM OS LICENCIANDOS

1. Em qual IES você estuda atualmente (ou em qual instituição você se formou)?

2. Caso já tenha se formado, você cursa ou já cursou alguma Pós-Graduação? Se sim, em qual nível (Especialização, Mestrado, Doutorado)?

3. Fale-me um pouco sobre os processos de educação geométrica pelos quais você passou durante a sua escolarização básica.

4. Fale-me um pouco sobre os processos de educação geométrica pelos quais você passou durante a sua formação inicial como professor ou professora de Matemática (tanto a respeito de disciplinas que contemplem a geometria acadêmica, quanto a respeito de disciplinas relacionadas ao ensino dessa área na Educação Básica).

5. Quais são as suas experiências com o ensino de Matemática na Educação Básica (tanto experiências em Escolas, quanto monitorias, projetos, aulas particulares, estágios, etc.)?

6. Em relação às aulas sobre os assuntos de geometria que você ministrou junto ao professor do 7º ano, você participou ativamente da preparação de tais aulas? Como foi a participação do professor da turma nessa preparação?

7. Do seu ponto de vista, quais foram os principais objetivos daquelas aulas?

8. Você já havia realizado, em situações de sala de aula anteriores ou de preparação para a sua formação como professor/a de Matemática, abordagens pedagógicas semelhantes àquelas que você realizou nas aulas de geometria que você ministrou no estágio (uso de materiais concretos, aplicativos de geometria dinâmica, artemetrias)?

9. Como você avalia as aulas de geometria que você ministrou no 7º ano pesquisado em relação às abordagens pedagógicas escolhidas e em relação à participação dos estudantes naquelas aulas?

10. O que você considera relevante, em termos de conhecimentos que um professor precisa ter, para o trabalho com a geometria na Escola Básica?

APÊNDICE D - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA PROFESSORES

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa "O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA". Neste estudo pretendemos identificar e discutir elementos que constituem o conhecimento matemático para o ensino, no que tange ao ensino da geometria na Educação Básica.

O objetivo desta pesquisa, apontado acima, se torna relevante e necessário especialmente pelo fato de que, ao tentar compreender o conhecimento geométrico para o ensino, pode-se oferecer elementos para a (re)construção de currículos dos cursos de formação de professores, além de ser uma pesquisa que ampliará os conhecimentos no campo das investigações sobre o conhecimento matemático para o ensino no Brasil.

Para a realização deste estudo, adotaremos os seguintes procedimentos: observação e análise de situações de ensino da geometria, em anos finais do Ensino Fundamental, que serão relatadas em um diário de campo e gravadas em áudio; levantamento e descrição curricular dos conteúdos da geometria destinados ao ensino nos anos finais do Ensino Fundamental; análise de livros didáticos; e a análise de artigos científicos na temática do ensino da geometria nesses mesmos anos de escolaridade. Nesse sentido, solicito sua autorização para que sejam feitas observações de suas práticas de ensino de geometria, gravações em áudio dessas práticas, bem como fotografias do conteúdo disposto no quadro/lousa, sem que nelas ocorra a identificação da sua imagem bem como da imagem dos alunos.

No que diz respeito à sua participação nesta pesquisa, você não terá nenhum custo como também não obterá qualquer vantagem financeira. A qualquer momento no curso do estudo, você poderá solicitar explicações de qualquer âmbito e também ficará livre para não participar ou mesmo interromper sua participação. Portanto, enfatizamos que o seu envolvimento é de livre vontade, de caráter voluntário e que, assim sendo, a sua recusa na participação desta pesquisa não implicará de modo algum em qualquer tipo de dano moral, penalidade ou distorção de sentido pelo pesquisador.

Também ressaltamos que os materiais que vierem a ser produzidos durante as etapas da tese - como arquivos de armazenamento digital e analógico, notas de diário de campo, entre outros desta espécie – serão destinados ao uso exclusivo para fins de divulgação científica e produção de conhecimentos. Esses produtos serão corretamente armazenados, durante o período de cinco anos e após tal intervalo serão destruídos. A pesquisadora também lidará com a questão de sua identidade e da dos demais sujeitos participantes segundo os padrões éticos e profissionais, levando em conta o sigilo respeitoso e em hipótese alguma o(a) participante será identificado(a) em qualquer publicação que possa resultar deste estudo, a não ser com sua livre vontade por meio de solicitação explícita que vier a ser feita durante as observações das aulas.

Destacamos ainda que os resultados da pesquisa estarão à sua disposição quando ela for finalizada. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma via será arquivada pela pesquisadora responsável e a outra será fornecida a você.

Enfatizamos, por fim, o caráter ético e científico desta pesquisa, considerando que o risco desta afetar negativamente qualquer sujeito participante é mínimo. Ainda assim, a pesquisadora reconhece a possibilidade de serem gerados constrangimentos para os sujeitos envolvidos, por ocasião do momento em que se encontrarem, seja em sua disposição emocional e/ou física para a participação ou ainda por algum outro motivo que veja a surgir no momento das observações. Assim sendo, reiteramos o compromisso desta proposta com a garantia da liberdade de participação e demais direitos que resguardem você e os outros seres humanos envolvidos com esta pesquisa de qualquer risco de prejuízo moral, como constrangimentos e outros desrespeitos de quaisquer ordens. Mas, caso haja danos decorrentes da pesquisa, a pesquisadora assumirá total responsabilidade pelos mesmos.

Eu, ____, portador(a) do documento de identidade _________________________ fui informado(a) dos objetivos da pesquisa "O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA", de maneira nítida e detalhada, tendo sanado minhas dúvidas. Estou ciente de que a qualquer momento poderei solicitar novas explicações e modificar minha decisão sobre a participação ou não no estudo.

Declaro que concordo em participar dessa pesquisa. Recebi uma via deste termo de consentimento livre e esclarecido e me foi dada à possibilidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Belo Horizonte, _________ de __________________________ de 201__.

____
Assinatura do (a) participante

____
Alana Nunes Pereira de Oliveira
(Pesquisadora)

Em caso de dúvidas com relação à pesquisa e/ou aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar: Alana Nunes Pereira de Oliveira (Pesquisadora - doutoranda). Endereço: Av. Antônio Carlos, 6627, Faculdade de Educação - UFMG; Programa de Pós-graduação em Educação; Campus Pampulha; Belo Horizonte, MG – Brasil; CEP: 31270-901; E-mail: alananunes.mat@gmail.com; Telefone: (28) 988014689.

Esta pesquisa é orientada pela professora Dra. Samira Zaidan. E-mail samirazai@hotmail.com. COEP: Comitê de Ética em Pesquisa. Endereço: Av. Presidente Antônio Carlos, 6627, Unidade Administrativa II, 2º andar, sala 2005; Campus Pampulha, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil; CEP: 31270-901; e-mail: coep@prpq.ufmg.br; telefone: (31)4909-4592.

APÊNDICE E - TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa "O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA". Seus pais também receberão um documento de autorização para a sua participação.

Neste estudo, queremos identificar e discutir elementos que fazem parte do conhecimento matemático para o ensino, no que diz respeito ao ensino da geometria na Educação Básica. Assim, tentaremos compreender qual é o conhecimento de geometria relevante para a formação do professor de matemática.

Coisas boas podem acontecer a partir dessa pesquisa que será realizada em sua sala de aula, pois ao tentar compreender o conhecimento geométrico para o ensino, pode-se oferecer elementos para melhorias nos cursos de formação de professores, além de ser uma pesquisa que ampliará os estudos no campo das investigações sobre o conhecimento matemático para o ensino no Brasil.

Parte da pesquisa será feita na sala de aula, onde você participará dos momentos em que a pesquisadora observa as atividades docentes do professor. Para isso, as observações serão registradas em um caderno de campo e gravadas em áudio, com foco na atividade do professor. Em alguns momentos, poderão ser tiradas fotografias do conteúdo colocado no quadro, mas garantimos que sua imagem não aparecerá nestas fotografias. Sabemos que durante as observações você pode se sentir envergonhado(a), desconfortável ou mesmo constrangido(a). Sendo assim, para que não haja preocupação, garantimos que ninguém saberá que você está participando da pesquisa; não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der.

Você não precisa participar da pesquisa se não quiser, é um direito seu e não terá nenhum problema se desistir. Além disso, a qualquer momento, você pode pedir informação se tiver alguma dúvida sobre o que está acontecendo. Além disso, os materiais que vierem a ser produzidos durante as etapas da pesquisa em sua sala de aula - como arquivos de armazenamento digital e analógico, notas de diário de campo, entre outros desta espécie – serão destinados ao uso exclusivo da pesquisa científica e para a produção de conhecimentos. Esses produtos serão corretamente armazenados, durante o período de cinco anos e após tal intervalo serão destruídos. Você não será identificado identificado(a) em qualquer publicação que possa resultar deste estudo, a não ser com sua livre vontade por meio de solicitação explícita que vier a ser feita durante as observações das aulas.

Destacamos ainda que os resultados da pesquisa estarão à sua disposição quando ela for finalizada. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma via será arquivada pela pesquisadora responsável e a outra será fornecida a você.

Caso aconteça algo errado ou se você tiver alguma dúvida, você pode nos perguntar.

Eu, ____, portador(a) do documento de identidade _________________________ fui informado(a) dos objetivos da pesquisa "O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA", de maneira nítida e detalhada, tendo sanado minhas dúvidas. Estou ciente de que a qualquer momento poderei solicitar novas explicações e modificar minha decisão sobre a participação ou não no estudo.

Declaro que concordo em participar dessa pesquisa. Recebi uma via deste termo de consentimento livre e esclarecido e me foi dada à possibilidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Belo Horizonte, _________ de __________________________ de 201__.

____
Assinatura do (a) participante

____
Alana Nunes Pereira de Oliveira
(Pesquisadora)

Em caso de dúvidas com relação à pesquisa e/ou aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar: Alana Nunes Pereira de Oliveira (Pesquisadora - doutoranda). Endereço: Av. Antônio Carlos, 6627, Faculdade de Educação - UFMG; Programa de Pós-graduação em Educação; Campus Pampulha; Belo Horizonte, MG – Brasil; CEP: 31270-901; E-mail: alananunes.mat@gmail.com; Telefone: (28) 988014689. Esta pesquisa é orientada pela professora Dra. Samira Zaidan. E-mail samirazai@hotmail.com. COEP: Comitê de Ética em Pesquisa. Endereço: Av. Presidente Antônio Carlos, 6627, Unidade Administrativa II, 2º andar, sala 2005; Campus Pampulha, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil; CEP: 31270-901; e-mail: coep@prpq.ufmg.br; telefone: (31)4909-4592.

APÊNDICE F – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA RESPONSÁVEIS LEGAIS

Prezado(a), o(a) menor de idade sob sua tutela está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa "O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA". Neste estudo pretendemos identificar e discutir elementos que constituem o conhecimento matemático para o ensino, no que tange ao ensino da geometria na Educação Básica. Assim, a fim de que que o(a) menor possa participar deste estudo, o(a) Sr.(a) precisará autorizar tal participação, assinando este termo de consentimento, uma vez ciente e esclarecido do que se trata.

O objetivo desta pesquisa, apontado acima, se torna relevante e necessário especialmente pelo fato de que, ao tentar compreender o conhecimento geométrico para o ensino, pode-se oferecer elementos para a (re)construção de currículos dos cursos de formação de professores, além de ser uma pesquisa que ampliará os conhecimentos no campo das investigações sobre o conhecimento matemático para o ensino no Brasil.

Para a realização deste estudo, adotaremos os seguintes procedimentos: observação e análise de situações de ensino da geometria, em anos finais do Ensino Fundamental, que serão relatadas em um diário de campo e gravadas em áudio; levantamento e descrição curricular dos conteúdos da geometria destinados ao ensino nos anos finais do Ensino Fundamental; análise de livros didáticos; e a análise de artigos científicos na temática do ensino da geometria nesses mesmos anos de escolaridade. Em alguns momentos, poderão ser tiradas fotografias dos conteúdos colocados no quadro, com a garantia de que elas retratarão apenas tal conteúdo, sendo preservada a imagem de todos os sujeitos envolvidos. Nesse sentido, solicito sua autorização para que haja observação do menor participante e gravação em áudio das aulas que ocorrerão em sua turma.

No que diz respeito à sua participação nesta pesquisa, você não terá nenhum custo como também não obterá qualquer vantagem financeira. A qualquer momento no curso do estudo, o Sr(a) poderá solicitar explicações de qualquer âmbito e também ficará livre para não autorizar o(a) menor a participar ou mesmo interromper sua participação. Portanto, enfatizamos que o seu envolvimento nesta autorização é de livre vontade, de caráter voluntário e que, assim sendo, a sua recusa na autorização do(a) menor de idade nesta pesquisa não implicará de modo algum em qualquer tipo de dano moral, penalidade ou distorção de sentido pelo pesquisador.

Também ressaltamos que os materiais que vierem a ser produzidos durante as etapas da tese - como arquivos de armazenamento digital e analógico, notas de diário de campo, entre outros desta espécie – serão destinados ao uso exclusivo para fins de divulgação científica e produção de conhecimentos. Esses produtos serão corretamente armazenados, durante o período de cinco anos e após tal intervalo serão destruídos. O pesquisador também lidará com a questão de identidade do(a) menor e dos demais sujeitos participantes segundo os padrões éticos e profissionais, levando em conta o sigilo respeitoso e em hipótese alguma o(a) participante será identificado(a) em qualquer publicação que possa resultar deste estudo, a não ser com sua livre vontade por meio de solicitação explícita que vier a ser feita durante as observações das aulas.

Destacamos ainda que os resultados da pesquisa estarão à sua disposição quando ela for finalizada. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma via será arquivada pela pesquisadora responsável e a outra será fornecida a você.

Enfatizamos, por fim, o caráter ético e científico desta pesquisa, considerando que o risco desta afetar negativamente qualquer sujeito participante é mínimo. Ainda assim, o pesquisador reconhece a possibilidade de serem gerados constrangimentos para os sujeitos envolvidos, por ocasião do momento em que se encontrarem, seja em sua disposição emocional e/ou física para a participação ou ainda por algum outro motivo que veja a surgir no momento das observações. Assim sendo, reiteramos o compromisso desta proposta com a garantia da liberdade de participação e demais direitos que resguardem você, o menor sob sua tutela e os outros seres humanos envolvidos com esta pesquisa de qualquer risco de prejuízo moral, como constrangimentos e outros desrespeitos de quaisquer ordens. Mas, caso haja danos decorrentes da pesquisa, a pesquisadora assumirá total responsabilidade pelos mesmos.

Eu, ____, portador(a) do documento de identidade _________________________ fui informado(a) dos objetivos da pesquisa "O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA", de maneira nítida e detalhada, tendo sanado minhas dúvidas. Estou ciente de que a qualquer momento poderei solicitar novas explicações e modificar minha decisão sobre a participação ou não no estudo.

Declaro que autorizo ____, portador do documento de identidade ____ a participar dessa pesquisa.

Recebi uma via deste termo de consentimento livre e esclarecido e me foi dada à possibilidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Belo Horizonte, _________ de __________________________ de 201__.

____
Assinatura do (a) responsável

____
Alana Nunes Pereira de Oliveira
(Pesquisadora)

Em caso de dúvidas com relação à pesquisa e/ou aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar: Alana Nunes Pereira de Oliveira (Pesquisadora - doutoranda). Endereço: Av. Antônio Carlos, 6627, Faculdade de Educação - UFMG; Programa de Pós-graduação em Educação; Campus Pampulha; Belo Horizonte, MG – Brasil; CEP: 31270-901; E-mail: alananunes.mat@gmail.com; Telefone: (28) 988014689. Essa pesquisa é orientada pela professora Dra. Samira Zaidan. E-mail samirazai@hotmail.com. COEP: Comitê de Ética em Pesquisa. Endereço: Av. Presidente Antônio Carlos, 6627, Unidade Administrativa II, 2º andar, sala 2005; Campus Pampulha, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil; CEP: 31270-901; e-mail: coep@prpq.ufmg.br; telefone: (31)4909-459.