Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Instituto de Ciências Exatas – ICEX

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Edwin Pedro López Bambarén

Choques não-locais na Variedade de Ondas em Sistemas Quadráticos de duas Leis de Conservação

Brasil

2020

Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Instituto de Ciências Exatas – ICEX
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Edwin Pedro López Bambarén

Choques não-locais na Variedade de Ondas em Sistemas Quadráticos de duas Leis de Conservação

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: César de Souza Eschenazi

Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Instituto de Ciências Exatas – ICEX

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Brasil
2020

López Bambarén, Edwin Pedro

L864c Choques não-locais na variedade de ondas em sistemas quadráticos de duas leis Leis de Conservação [manuscrito] / Edwin Pedro López Bambarén. — 2020.
131 f.; il.; 29cm.

Orientador: César de Souza Eschenazi.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 123-124

1. Matemática – Teses. 2. Sistemas quadráticos - Teses. 3. Riemann, Superfícies de – Teses. 4. Variedades (Matemática). 5. Lei da conservação (Física). I. Eschenazi, César de Souza. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz CRB 6ª Região nº 819.

ATA DA CENTÉSIMA QUADRAGÉSIMA SÉTIMA DEFESA DE TESE DO ALUNO EDWIN PEDRO LOPEZ BAMBAREN, REGULARMENTE MATRICULADO NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 29 DE MAIO DE 2020.

Aos vinte e nove dias do mês de maio de 2020, às 09h00, em reunião pública remota, meet.google.com/whf-orce-smq(conforme mensagem eletrônica da Pró-Reitoria de Pós-Graduação de 26/03/2020, com orientações para a atividade de defesa de tese durante a vigência da Portaria nº 1819), reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese do aluno **Edwin Pedro Lopez Bambaren**, intitulada: *"Choques não locais na Variedade de Ondas em Sistemas Quadráticos de duas Leis de Conservação"*, requisito final para obtenção do Grau de doutor em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Cesar de Souza Eschenazi, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se, ainda remotamente, sem a presença do aluno, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado sem ressalvas e por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 29 de maio de 2020.

Cesar de Souza Eschenazi

PROF. DR. CESAR DE SOUZA ESCHENAZI
Orientador (UFMG)

Aparecido Jesuino de Souza

PROF. DR. APARECIDO JESUÍNO DE SOUZA
Examinador (UFPB)

Carlos Frederico B Palmeira

PROF. DR. CARLOS FREDERICO BORGES PALMEIRA
Examinador (PUC-Rio)

C. Carballo

PROF. DR. CARLOS MARIA CARBALLO
Examinador (UFMG)

PROF. DR. JOSÉ ANTÔNIO GONÇALVES MIRANDA
Examinador (UFMG)

PROF. DR. ALBERTO B. SARMIENTO VERA

Examinador (UFMG)

A Jakeline.

Agradecimentos

A vida é bela, e uma das principais características dessa beleza é que podemos compartilhá-la e desfrutá-la com aqueles que amamos, podemos ajudar e guiar muitas pessoas, se elas permitirem, mas também podemos ser ajudados e guiados durante nossas vidas; Por esse motivo, graças a esta tese, quero louvar o trabalho de todos os meus amigos, de todos os que estiveram presentes durante toda ou quase toda a realização e desenvolvimento desta tese, graças a quem, com respeito e decência, fez contribuições para este, obrigado a todos.

Não posso classificar o desenvolvimento desta tese como algo fácil, mas o que posso fazer é afirmar que durante todo esse tempo pude aproveitar cada momento, que cada investigação, processo e projeto que foram realizados nela, eu gostei muito, e não foi porque eu simplesmente decidi que seria, era porque meus amigos sempre estavam lá, foi porque a própria vida me mostrou que, das coisas e atos que realizo, serão os mesmos que farão comigo.

Semeie uma amizade boa e sincera, e muito provavelmente o tempo permitirá que você desfrute de uma colheita agradável.

Obrigado Professor César e obrigado CAPES.

"Não creio em números, não creio na palavra tudo e nem na palavra nada. São três afirmações exatas e imóveis: o mundo está sempre dando voltas.

(Provérbio Chinês)

Resumo

Foram construídas soluções locais de Riemann para sistemas quadráticos de duas leis de conservação, no contexto geométrico da variedade de ondas. É sabido que característica C, sônica S' e sônica S são as fronteiras de choques admissíveis. Na primeira parte deste trabalho, fazemos um estudo completo da interseção das curvas de Hugoniot com a superfície sônica S. Na segunda parte, decompomos a variedade de ondas em regiões de admissibilidade com apenas choques locais e regiões de admissibilidade com choques locais e não-locais. Importante para este estudo foi a introdução de um sistema de coordenadas em que as curvas de Hugoniot são retas, o que simplifica bastante a caracterização dos bordos das regiões admissíveis.

Palavras-chave: sistemas quadráticos de leis de conservação; variedade de ondas; superfícies sônicas, superfície característica; choques admissíveis; curvas de Hugoniot.

Abstract

Local Riemann solutions for quadratic systems of two conservation laws, in the geometric context of the wave manifold, were constructed. It is well known that characteristic C, sonic S' and sonic S are the boundaries of admissible shocks. In the first part of this work, we do a complete study on how Hugoniot curves intersect the sonic S surface. In second part, we decompose the wave manifold into regions of admissibility of only local shocks and regions of admissibility of both local and non-local shocks. Important for this study was the introduction of a system of coordinates in which Hugoniot curves are straight lines, which is greatly simplify the characterization of the boundaries of admissible regions.

Keywords: quadratic systems of conservation laws; wave manifold; sonic surfaces; characteristic surface; admissibles shocks; Hugoniot curves.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

Consideraremos um sistema de duas leis de conservação

$$\partial_t W + \partial_x \mathbf{F}(W) = 0, \ W = W(x,t) \in \Omega, \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto e $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação suave. O problema de valor inicial para (1.1) com dados iniciais

$$W(x,0) = \begin{cases} W_- & se \quad x < 0, \\ W_+ & se \quad x > 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

é denominado problema de Riemann, em analogia com os experimentos de tubo de choque analisados por Riemann em 1858.

Sistemas de leis de conservação com dados iniciais de Riemann surgem naturalmente no estudo de fluxo de gás em dutos, vibração de barras elásticas ou cordas e extração de petróleo, entre outros. A teoria clássica resolve satisfatoriamente problemas de dinâmicas de gases porém, não se mostra adequada, por exemplo, quando aplicada nas soluções de problemas de elasticidade e de fluxo multifásico.

O enfoque clássico para resolver os problemas locais de Riemann foi amplamente estudado por vários autores [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], que identificam classes de leis de conservação para os quais os problemas globais de Riemann podem ser resolvidos.

A condição de Rankine-Hugoniot incorpora o princípio de conservação física aplicado a uma solução descontínua. Uma descontinuidade de salto em cada instante é caracterizada por sua velocidade de propagação σ e pelos estados W_- e W_+; as leis de conservação exigem que essas quantidades satisfaçam a condição de Rankine-Hugoniot

$$-\sigma[W_+ - W_-] + \mathbf{F}(W_+) - \mathbf{F}(W_-) = 0. \tag{1.3}$$

A tripla (W_-, W_+, σ) satisfazendo (1.3) são de três tipos:

1. soluções com $W_- \neq W_+$ representando ondas de choque;

2. limites $|W_+ - W_-| \to 0$, de soluções de ondas de choques, que representam ondas de rarefação; para essas soluções, σ é um autovalor do Jacobiano $D\mathbf{F}(\overline{W})$ com $\overline{W} := W_+ = W_-$; e

3. soluções constantes com $W_+ = W_-$.

Determinar se uma onda de choque é fisicamente admissível é difícil, e critérios simples são úteis na resolução de problemas de Riemann. Um desses critérios é o critério de Lax. Uma onda de choque é denominada um choque de Lax da i-ésima família se

$$\begin{array}{rcccl} \lambda_i(W_+) & < & \sigma & < & \lambda_i(W_-), \\ \lambda_{i-1}(W_-) & < & \sigma & < & \lambda_{i+1}(W_+), \end{array} \tag{1.4}$$

O critério de Lax garante a existência e estabilidade de soluções de Riemann em sistemas de leis de conservação estritamente hiperbólicos (autovalores da derivada da função de fluxo reais e distintos) apenas localmente. O principal obstáculo para se obter soluções globais com esse critério está no fato de que as curvas de choque não folheiam o espaço de estados.

As dificuldades da teoria clássica para tratar problemas de Riemann não lineares aparecem quando se considera sistemas de leis de conservação não estritamente hiperbólicos. Em [10], Schaeffer e Shearer consideram um sistema de duas leis de conservação com funções de fluxo quadráticas não estritamente hiperbólico com um ponto umbílico isolado. Mesmo nesse caso mais simples a teoria clássica não foi suficiente para descrever a solução na vizinhança do ponto umbílico.

Em [11] é introduzido um referencial que unifica o tratamento de todas as ondas fundamentais que aparecem em soluções de problemas de Riemann para sistemas gerais de n leis de conservação. Esse novo referencial geométrico, denominado *variedade de ondas*, é uma variedade de dimensão $n+1$ que contém naturalmente as ondas de rarefação, ondas de choque e ondas compostas choque-rarefações. A variedade de ondas contém três subvariedades de dimensão n importantes que são interpretadas como fronteiras de regiões de admissibilidade de ondas de choque: a característica, folheada pelas curvas de rarefação; e as duas sônicas que são folheadas pelas ondas compostas.

A primeira abordagem topológica de sistemas de leis de conservação (1.1) com dados iniciais (1.2), foi feita por Palmeira em [12] considerando sistemas de duas leis de conservação com funções de fluxo quadráticas $\mathbf{F}(u,v) = (f(u,v), g(u,v))^T$, obtidas acrescentando-se termos lineares às funções de fluxo de [10] com a condição de que as novas funções não sejam o gradiente de uma função cúbica (caso do ponto umbílico isolado). Como a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(u,v) & = & (b_1+1)\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + a_1 u + a_2 v, \\ g(u,v) & = & uv - b_2\frac{v^2}{2} + a_3 u + a_4 v, \end{array} \right. \tag{1.5}$$

onde (u,v) são estados em Ω, b_1, b_2, a_1, a_2, a_3, a_4 são constantes, $b_2^2 - 4(b_1-1) \neq 0$, $b_1(b_1 \pm 1) \neq 0$ e $b_2^2 + 4/(b_1+1) \neq 0$. Com o acréscimo dos termos lineares o ponto umbílico dá lugar a uma região elítica onde $D\mathbf{F}$ tem autovalores complexos. Palmeira constrói uma superfície em $\mathbb{R}^3$ chamada superfície característica, que é o ambiente natural para as rarefações. Mostra ainda que as configurações obtidas são estruturalmente estáveis na topologia C^3 de Whitney. As curvas de rarefação da superfície característica foram projetadas no espaço de estados recobrando as curvas de rarefação clássicas.

A configuração das curvas de Hugoniot para sistemas quadráticos de duas leis de conservação foi obtida em [13]. Neste trabalho os autores constroem explicitamente a Variedade de Ondas, além das subvariedades Característica C, Sônica S e Sônica S' introduzidas em [11], importantes para o estudo de soluções de problemas de Riemann. A importância de tais subvariedades está no fato de que elas são fronteiras de choques admissíveis na variedade de ondas, [11]. As ondas compostas e as interseções de curvas de Hugoniot com a superfície Sônica S' foram estudadas em [14] e interseções de curvas de Hugoniot com a superfície Sônica S foram estudadas em [15], com o parâmetro $b_2 = 0$.

Neste trabalho consideramos o sistema (1.1) com a função de fluxo $\mathbf{F}(u, v) = (f(u, v), g(u, v))^T$ quadrática dada em (1.5). Diferenciamos dois tipos de problemas: o caso simétrico, quando na função fluxo consideramos o parâmetro $b_2 = 0$, e o caso não simétrico.

Em [16] e [17] a condição de entropia de Liu foi estendida para a variedade de ondas, o que permitiu a construção de soluções de Riemann locais para o caso IV (simétrico) na classificação de [10]. Recentemente em [18], ainda para o caso IV simétrico, a variedade de ondas é decomposta em regiões com arcos de curvas de choque local e regiões com arcos de curvas de choque local e arcos de curvas de choque não-local.

O principal objetivo deste trabalho é subdividir a variedade de ondas em regiões com arcos de curvas de choques locais e regiões com arcos de curvas de choques locais e arcos de curvas de choque não-locais para os casos I, II, III e IV (não simétrico) na classificação de [10]. No Capítulo 2, por completeza, apresentamos os principais resultados de [12], [14] e [15].

No Capítulo 3 estudamos as interseções das curvas de Hugoniot com a Superfície Sônica S para o caso não simétrico. Este estudo é importante porque a superfície Sônica S é parte da fronteira de regiões de admissibilidade, [11]. A introdução do parâmetro b_2 induz o aparecimento de novas regiões no espaço de estados bem como uma decomposição do espaço de parâmetros, $b_1 b_2$, em 10 regiões. A conclusão final é que genericamente as curvas de Hugoniot intersectam a superfície Sônica S em 0, 2 ou 4 pontos decompondo o espaço de estados uv em regiões de acordo com o número de interseções. Os resultados contendo essas conclusões são apresentados nas Proposições 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6. No Apêndice A são apresentados os resultados técnicos que usamos na prova dessas Proposições.

No Capítulo 4 apresentamos a decomposição da variedade de ondas introduzida em [13], dependendo do caso considerado na classificação de [10], existem uma ou doze regiões. Nessas regiões as curvas de Hugoniot têm uma ou três componentes, cada uma delas difeomorfa a $\mathbb{R}$. Dentro de cada uma destas regiões podemos identificar se existem as superfícies característica C, sônica S ou sônica S'. Terminamos o Capítulo 4 introduzindo uma função Φ de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^5$ que define um sistema de coordenadas na variedade de ondas. Neste sistema de coordenadas, que denominamos *espaço de estados estendido*, as curvas de Hugoniot são retas, a variedade de ondas é o produto do espaço de estados por $\mathbb{R}$ e as superfícies característica, sônica S e sônica S' são produtos de curvas por $\mathbb{R}$. O espaço de estados estendido é de grande importância para a identificação de arcos de curvas de choque admissíveis no Capítulo 5.

Finalmente, no Capítulo 5, com as hipóteses adicionais introduzidas, concluímos que os critérios de admissibilidade para 1-choque de Lax usados nos casos I, II, III e IV são equivalentes à condição de entropia de Liu na variedade de ondas. A partir dos resultados obtidos nos Capítulos 3 e 4 e da construção de um algoritmo decompomos as distintas regiões da variedade de ondas M^3 em sub regiões onde existem somente 1-choques locais e em sub regiões onde existem ambos 1-choques locais e 1-choques não-locais, no espaço de estados estendido as fronteiras dessas sub regiões são o produto de arcos de curvas por $\mathbb{R}$. Em trabalhos futuros abordaremos 2-choques reverso definido em [17].

2 Preliminares

Neste capítulo são dados alguns conceitos básicos introduzidos em [12, 13, 14, 15] usados no estudo topológico de problemas de Riemann com duas funções fluxo e duas incógnitas.

2.1 Variedade de Ondas M^3

No sentido clássico, choques são soluções descontínuas do sistema (1.1) e (1.2) entre dois estados $W \in \Omega$ e $W' \in \Omega'$ $(\Omega = \Omega')$ que satisfazem a condição de Rankine-Hugoniot,

$$\mathbf{F}(W) - \mathbf{F}(W') = \sigma(W - W'), \tag{2.1}$$

onde σ é a velocidade de propagação do choque. Eliminando σ entre as equações de (2.1) obtemos o conjunto $Q \subset \Omega \times \Omega'$. Constituído pelas soluções de

$$H(u, v, u', v') = (f(u, v) - f(u', v'))(v - v') - (g(u, v) - g(u', v'))(u - u') = 0. \tag{2.2}$$

Denotamos o conjunto de soluções triviais de (2.2) por Λ_Q, isto é, o conjunto

$$\Lambda_Q = \{(u, v, u', v') \in Q : u = u', v = v'\}. \tag{2.3}$$

Os cálculos qye se seguem só ficam mais fáceis considerando as coordenadas abaixo, introduzidas em [13]:

$$\begin{array}{llllll}
\tilde{u} & = b_1 u + b_2 v + a_1 - a_4, & U & = (u + u')/2, & \tilde{X} & = \tilde{u} - \tilde{u}', \\
\tilde{v} & = v + a_2, & V & = (v + v')/2, & \tilde{Y} & = \tilde{v} - \tilde{v}', \\
\tilde{u}' & = b_1 u' + b_2 v' + a_1 - a_4, & X & = u - u', & \tilde{U} & = (\tilde{u} + \tilde{u}')/2, \\
\tilde{v}' & = v' + a_2, & Y & = v - v' & \tilde{V} & = (\tilde{v} + \tilde{v}')/2, \\
c & = a_3 - a_2, & K & = b_1 X + 2\tilde{U} - 2b_2\tilde{V}, & L & = Y + 2\tilde{V}.
\end{array} \tag{2.4}$$

Cálculos diretos a partir das equações (2.4), permitem mudar as variáveis (u, v, u', v') para $(K, L, \tilde{V}, X)$ como a seguir:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
u = u(K, L, \tilde{V}, X) & = & (K/2 + a_2 b_2 - a_1 + a_4)/b_1, \\
v = v(K, L, \tilde{V}, X) & = & L/2 - a_2, \\
u' = u'(K, L, \tilde{V}, X) & = & (K/2 - b_1 X + a_2 b_2 - a_1 + a_4)/b_1, \\
v' = v'(K, L, \tilde{V}, X) & = & -L/2 + 2\tilde{V} - a_2.
\end{array}\right. \tag{2.5}$$

Substituindo as equações dadas em c na Equação (2.2) obtemos o conjunto de pontos Q em coordenadas $(K, L, \tilde{V}, X)$, denotado por $\overline{Q}$, que satisfaz a seguinte equação

$$(L - 2\tilde{V})(K + 2b_2\tilde{V})X + 2\tilde{V}(L - 2\tilde{V})^2 - 2((b_1 - 1)\tilde{V} + c)X^2 = 0. \tag{2.6}$$

Substituindo as equações dadas em (2.5) em (2.3) obtemos o conjunto de singularidades Λ_Q em coordenadas $(K, L, \tilde{V}, X)$, denotado por $\overline{C}$, que satisfaz

$$\overline{C} = \{(K, L, \tilde{V}, X) \in \overline{Q} : X = 0, L = 2\tilde{V}\}. \tag{2.7}$$

Note que $\overline{C}$ é uma variedade de dimensão 2 (um plano) e $Q \setminus \Lambda_Q$ é difeomorfo a $\overline{Q} \setminus \overline{C}$.

De (2.5) temos que $v - v' = L - 2\tilde{V}$ e daí obtemos que

$$\frac{v - v'}{u - u'} = \frac{L - 2\tilde{V}}{X}.$$

Assim, seguindo a mesma estratégia de [13], fora da singularidade $\overline{C}$ de $\overline{Q}$ definimos os blow-up

$$L - 2\tilde{V} = ZX. \tag{2.8}$$

Substituindo a equação (2.8) em (2.6) obtemos a seguinte equação para o conjunto $\overline{Q}$ em coordenadas $(K, L, \tilde{V}, X, Z)$, denotado por $\hat{Q}$,

$$X^2 \left(ZK - b_1 L + 2p(Z)\tilde{V} - 2c \right) = 0, \tag{2.9}$$

onde

$$p(Z) = Z^2 + b_2 Z + b_1 - 1. \tag{2.10}$$

Observe que o conjunto de pontos $\overline{C}$ pelo blow-up torna-se

$$\tilde{C} = \{(K, L, \tilde{V}, X, Z) \in \hat{Q} : X = 0, L = 2\tilde{V}\}, \tag{2.11}$$

ou seja, o conjunto $\tilde{C}$ é um plano, para cada Z fixo, além disso $\tilde{C}$ é a solução trivial de (2.9). Então, sem considerar o conjunto $\tilde{C}$, isto é, $X \neq 0$ podemos definir a seguinte variedade.

Definição 2.1. Sejam $G, \Theta : \Omega \times \Omega' \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por

$$G = ZK - b_1 L + 2p(Z)\tilde{V} - 2c, \tag{2.12}$$

$$\Theta = -L + 2\tilde{V} + ZX, \tag{2.13}$$

com $p(Z) = Z^2 + b_2 Z + b_1 - 1$ e $X \neq 0$. O conjunto $(G, \Theta)^{-1}(0, 0) \subset \Omega \times \Omega' \times \mathbb{R}$ é chamado *Variedade de Ondas* M^3.

Com a definição anterior o conjunto $\hat{Q}$ se decompõe como a união de duas variedades disjuntas, $\tilde{C}$ e M^3, isto é,

$$\hat{Q} = \tilde{C} \cup M^3 = \{X = 0, L = 2\tilde{V}\} \cup \{(K, L, \tilde{V}, X, Z) : G = 0, \Theta = 0\}. \tag{2.14}$$

A Variedade de Onda M^3 é difeomorfo a $B \times \mathbb{R}$, onde B é uma faixa de Möbius, [13].

2.2 A Superfície Característica C

Soluções do sistema de leis de conservação (1.1), que são da forma

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\lambda), \quad \lambda = \frac{x}{t}, \quad t > 0, \tag{2.15}$$

quando substituídas no sistema (1.1) fornecem o sistema de EDOs

$$D\mathbf{F}(\mathcal{R})\dot{\mathcal{R}} = \lambda\dot{\mathcal{R}}, \tag{2.16}$$

onde $\dot{\mathcal{R}}$ é a derivada de $\mathcal{R}$ com relação à λ. Ou seja, $\dot{\mathcal{R}}$ é autovetor associado ao autovalor λ de $D\mathbf{F}(\mathcal{R})$. No espaço de estados, as soluções de (2.16) são representadas por segmentos de curvas integrais de $\dot{\mathcal{R}}$, orientadas no sentido de crescimento do autovalor λ. Estas curvas são chamadas *curvas de rarefação* ou simplesmente *rarefação* e $\lambda = \lambda(\mathcal{R})$ é chamado *velocidade característica*.

Considerando $\mathbf{F} = (f, g)^T$ e $\dot{\mathcal{R}} = (du, dv)^T$, o sistema (2.16) se escreve como

$$\begin{cases} \partial_u f\, du + \partial_v f\, dv &= \lambda\, du, \\ \partial_u g\, du + \partial_v g\, dv &= \lambda\, dv. \end{cases} \tag{2.17}$$

Eliminando λ entre as equações de (2.17), supondo $du \neq 0$, obtemos

$$\partial_v f \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (\partial_u f - \partial_v g)\frac{dv}{du} - \partial_u g = 0. \tag{2.18}$$

Ou seja, obtemos uma equação diferencial quadrática. As curvas integrais da Equação (2.18), são as curvas de rarefação (ou simplesmente rarefações) associadas a cada autovalor λ da matriz jacobiana da função de fluxo.

Pondo $Z = dv/du$, a equação (2.18) se escreve como

$$\partial_v f Z^2 + (\partial_u f - \partial_v g)Z - \partial_u g = 0.$$

Introduzindo a 1-forma $\omega = dv - Zdu$ e usando as expressões de f e g dadas em (1.5), o problema de encontrar as rarefações pode ser reformulado como:

$$(v + a_2)Z^2 + (b_1 u + b_2 v + a_1 - a_4)Z - (v + a_3) = 0 \tag{2.19}$$

$$\omega = dv - Zdu = 0. \tag{2.20}$$

Em palavras, estudar o campo de linhas definido pelo núcleo da 1-forma ω sobre a superfície (2.19). O campo de linhas é definido pela interseção do plano tangente à superfície (2.19) com o plano vertical $dv - Zdu = 0$.

Usando as mudanças de coordenadas dadas pelas equações em (2.5)

$$\begin{cases} u = u(K, L) &= (K/2 + a_2 b_2 - a_1 + a_4)/b_1, \\ v = v(K, L) &= L/2 - a_2, \end{cases}$$

nas equações (2.19) e (2.20), temos

$$F(K, L, Z) = ZK + (p(Z) - b_1)L - 2c = 0, \tag{2.21}$$

$$\omega = -ZdK + b_1 dL = 0. \tag{2.22}$$

onde

$$p(Z) = Z^2 + b_2 Z + b_1 - 1. \tag{2.23}$$

Observe que, as derivadas parciais $\partial_K F = Z$ e $\partial_L F = p(Z) - b_1$ não têm raízes em comum, assim, $F^{-1}(0)$ é uma superfície suave.

Definição 2.2. Seja $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por (2.21). A superfície definida por $F^{-1}(0)$ é denominada *superfície característica* e denotada por C.

Estudar as soluções de (2.18) equivale a estudar as curvas integrais de ω sobre a superfície característica C. O campo de linhas definido pelo núcleo de ω em $\mathcal{C}$ é também denominado *campo de rarefação*. Assim, a superfície característica C é o ambiente natural das curvas de rarefação, [12].

Observação 1. Considerando o ponto $(K, L, X, \tilde{V}, Z)$ na Variedade de Ondas M^3, se considerarmos $X \to 0$ e $\tilde{V} \to L/2$ nas equações (2.12) e (2.13) obtemos a equação da superfície característica (2.21), isto é,

$$G(K, L, L/2, 0, Z) \to F(K, L, Z) = ZK + (p(Z) - b_1)\tilde{V} - 2c = 0$$

e

$$\Theta(K, L, L/2, 0, Z) \to 0.$$

Ou seja, o conjunto $\tilde{C}$ de (2.11) também representa a superfície característica C. Além disso, por (2.14) a superfície característica C é uma subvariedade da Variedade de Ondas M^3. A partir de agora denotaremos $\tilde{C}$ por C.

2.2.1 Singularidades do campo de rarefações

O campo de rarefações nas variáveis K, L, Z se escreve como:

$$dF = ZdK + (p(Z) - b_1)dL + (K + p'(Z)L)dZ$$
$$\omega = -ZdK + b_1 dL$$

Se $Z = 0$,

$$dF = -dL + (K + b_2 L)dZ$$
$$\omega = b_1 dL$$

os planos coincidem se $K + b_2L = 0$. Já que $L = -2c$, vemos que $(2cb_2, -2c, 0)$ é um ponto singular.

Se $Z \neq 0$, os planos coincidem quando $p(Z) = 0$ e $K + p'(Z)L = 0$, então $K + (2Z_i + b_2)L = 0$ e $Z_iK - b_1L - 2c = 0$ com Z_i $(i = 1, 2)$ raiz de $p(Z)$. Assim, o ponto $(2c(2Z_i + b_2)/(Z_i^2 + 1), -2c/(Z_i^2 + 1), Z_i)$ é um ponto singular.

Tomando K, Z como coordenadas para C, ou seja, isolando L em (2.21) temos

$$L = \frac{-ZK + 2c}{p(Z) - b_1}. \tag{2.24}$$

Nessa coordenada o núcleo da 1-forma ω, equação (2.22), se escreve como:

$$-Zp(Z)dK + \frac{b_1[-K(p(Z) - b_1) + (ZK - 2c)p'(Z)]}{p(Z) - b_1}dZ = 0.$$

Localmente, o núcleo da 1-forma ω nas coordenadas K, Z tem o mesmo comportamento que o campo A dado por:

$$\dot{K} = b_1[K(p(Z) - b_1) + (-ZK + 2c)p'(z)]/(p(Z) - b_1) \tag{2.25}$$

$$\dot{Z} = -Zp(Z) \tag{2.26}$$

cuja derivada é

$$DA(K, Z) = \begin{pmatrix} -\frac{b_1(1+Z^2)}{p(Z)-b_1} & \frac{b_1[(b_2(1-Z^2)+4Z)K-2c(2(p(Z)-b_1)+b_2^2)]}{(p(Z)-b_1)^2} \\ 0 & -p(Z) - Zp'(Z) \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Para o ponto singular $(2cb_2, 0)$, temos que

$$DA(2cb_2, 0) = \begin{pmatrix} b_1 & -4cb_1 \\ 0 & 1 - b_1 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Observa-se que os autovalores, não zeros, de $dA(2cb_2, 0)$ são $\{b_1, 1 - b_1\}$, portanto se $b_1(1 - b_1) > 0$, o ponto singular $(2cb_2, 0)$ é sela e se $b_1(1 - b_1) < 0$, o ponto singular $(2cb_2, 0)$ é nó. Ou seja, se $0 < b_1 < 1$, tem-se um nó, e se $b_1 < 0$ ou $1 < b_1$, tem-se uma sela.

Para o ponto singular (K_i, Z_i) com $K_i = 2c(2Z_i + b_2)/(1 + Z_i^2)$, com $i = 1, 2$, temos que

$$DA\left(K_i, Z_i\right) = \begin{pmatrix} 1 + Z_i^2 & \frac{2c}{b_1}\left[(b_2(1 - Z_i^2) + 4Z_i)\frac{(2Z_i+b_2)}{1+Z_i^2} + (2b_1 - b_2^2)\right] \\ 0 & -Z_i(2Z_i + b_2) \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

Observa-se que os autovalores, de $DA(K_i, Z_i)$ são $\{-Z_i(2Z_i + b_2), Z_i^2 + 1\}$. Já que, $Z_1 + Z_2 = -b_2$, tem-se $2Z_i + b_2 = Z_i - Z_j$, $i \neq j$, então, $Z_i(2Z_i + b_2) = Z_i(Z_i - Z_j)$, portanto, se $Z_i(Z_i - Z_j) < 0$, o ponto singular (K_i, Z_i) é um nó, e se $Z_i(Z_i - Z_j) > 0$, o ponto singular (K_i, Z_i) é uma sela. Se Z_1 e Z_2 são as raízes de $p(Z)$ com $Z_1 < Z_2$, se $Z_1 < Z_2 < 0$ ou $0 < Z_1 < Z_2$, tem-se uma sela e um nó, e se $Z_1 < 0 < Z_2$, tem-se duas selas.

2.2.2 Curva de Inflexão

Importante para o estudo de soluções de problemas de Riemann é variação dos autovalores de $D\mathbf{F}$ ao longo das curvas de rarefação. Os autovalores de $D\mathbf{F}$ são dados por (2.17), usando essas equações e a definição $Z = dv/du$ pode-se escrever λ como

$$\lambda = f_u + Zf_v. \tag{2.30}$$

Usando as expressões de u, v dadas em (2.5) e as expressões de f e g dadas em (1.5) na Equação (2.30) podemos expressar λ em coordenadas (K, L, Z) como

$$\lambda = \frac{b_1+1}{2b_1}K + \frac{Z}{2}L + \frac{m}{b_1}, \tag{2.31}$$

onde $m = (b_1+1)(a_2b_2+a_4) - a_1$. Sabemos ainda que a 1-forma ω é dada por:

$$\omega = -ZdK + b_1 dL \tag{2.32}$$

Seja $\mathcal{R}(t)$ uma trajetória do campo de linhas de rarefação definido por $\omega = 0$ na superfície característica C. Queremos encontrar os valores críticos de λ restrito a $\mathcal{R}(t)$. Queremos encontrar os pontos críticos da função $\lambda \circ \mathcal{R}(t)$, isto é, os pontos onde $(\lambda \circ \mathcal{R}(t))' = 0$.

$$(\lambda \circ \mathcal{R}(t))' = d\lambda(\mathcal{R}(t)).\mathcal{R}'(t)$$

.

Como $\mathcal{R}'(t)$ é dado pela interseção do núcleo de ω com o espaço tangente à $\mathcal{C}$, $(\lambda \circ \mathcal{R}(t))' = 0$ se $d\lambda$, dF e ω são linearmente dependentes. Temos a seguinte definição:

Definição 2.3. A curva na superfície característica definida por

$$\begin{cases} F(K,L,Z) &= 0, \\ \det\{dF, \omega, d\lambda\} &= 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

é denominada curva de inflexão e denotada por I.

A curva de inflexão é o lugar onde os autovalores da matriz $D\mathbf{F}$ atingem valores extremos ao longo das rarefações.

Calculando o determinante na equação acima obtemos

$$(Z^2 + b_1 + 1)K + (Z^3 + (b_1+3)Z + b_2(b_1+1))L = 0. \tag{2.34}$$

Usando K, L como coordenadas em $\mathcal{C}$, Equação (2.24), obtemos que a curva de inflexão se escreve como

$$K = \frac{-2c(Z^3 + (b_1+3)Z + b_2(b_1+1))}{b_2Z^3 - 3Z^2 - b_1 - 1} \tag{2.35}$$

Um estudo completo das curvas de inflexão é apresentado por Palmeira em [12].

2.3 Curvas de Hugoniot em M^3

Fixado um estado $W = (u, v) \in \Omega$, o conjunto $H(u, v, u', v') = 0$, dado em (2.2), define uma curva no espaço Ω', denominada *curva de Rankine-Hugoniot clássica* passando pelo ponto (u, v). Fixar o estado (u, v) é o mesmo que considerar $du = 0$ e $dv = 0$, que por sua vez, considerando as coordenadas $(K, L, \tilde{V}, X, Z)$, é o mesmo que $dK = 0$, $dL = 0$. Em termos da Variedade de Ondas M^3 definimos estas curvas como segue.

Definição 2.4. Uma *curva de Hugoniot* em M^3, denotado por H, é o conjunto de pontos $(K, L, \tilde{V}, X, Z) \in M^3$ com $K = constante$, $L = constante$.

Segue da definição acima que dado um par de números reais k e l, a curva de Hugoniot definida por $K = k$, $L = l$ é o conjunto solução do sistema

$$\begin{aligned} G &= 0, \\ \Theta &= 0, \\ K &= k, \\ L &= l. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Observação 2. Seja $\pi : M^3 \subset \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\pi(u, v, u', v') = (u', v')$. A projeção por π da curva de Hugoniot por (u, v) no espaço Ω' é a curva de Rankine-Hugoniot clássica passando por (u, v).

Notação:

Fixados k e l, a curva de Hugoniot definida por (k, l) será denotada por H_{kl}.

Da mesma forma, fixado um estado (u', v'), $H(u, v, u', v') = 0$ define uma curva em M^3, representada por $du' = 0$, $dv' = 0$. Das duas últimas equações de (2.5), em termos das coordenadas $(K, L, \tilde{V}, X, Z)$, temos que $du' = 0$, $dv' = 0$ são equivalentes às equações $dK - 2b_1 X = 0$ e $-dL + 4d\tilde{V} = 0$.

Definição 2.5. Uma curva de Hugoniot$'$ em M^3, denotado por H', é o conjunto de pontos $(K, L, \tilde{V}, X, Z) \in M^3$ que satisfazem as equações

$$dK - 2b_1 dX = 0, \quad -dL + 4d\tilde{V} = 0. \tag{2.37}$$

Segue da definição acima que dado um par de números reais k' e l', a curva de Hugoniot$'$ definida por $K - 2b_1 X = k'$, $4\tilde{V} - L = l'$ é o conjunto solução do sistema

$$\begin{aligned} G &= 0, \\ \Theta &= 0, \\ K - 2b_1 X &= k', \\ 4\tilde{V} - L &= l'. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Notação 2.1. Fixados k' e l', a curva de Hugoniot' definida por (k', l') será denotada por H'_{kl}.

Em seguida vamos analisar em que casos a curva de Hugoniot H_{kl} tem bifurcação. Para cada Z fixo, as equações em (2.36) formam um sistema linear nas variáveis K, L, X e $\tilde{V}$,

$$\left\{\begin{array}{lllll} ZK & -b_1 L & & +2p(Z)\tilde{V} & = 2c, \\ & -L & +ZX & +2\tilde{V} & = 0, \\ K & & & & = k, \\ & L & & & = l, \end{array}\right. \tag{2.39}$$

com determinante

$$\det \begin{pmatrix} Z & -b_1 & 0 & 2p(Z) \\ 0 & -1 & Z & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2Zp(Z). \tag{2.40}$$

Veja que as soluções de (2.39) dependem do determinante acima.

Se $Zp(Z) \neq 0$, as curvas de Hugoniot H_{kl} são parametrizados por Z e não tem bifurcação. Logo, resolvendo o sistema (2.39), temos

$$\left\{\begin{array}{lll} K(Z) & = & k, \\ L(Z) & = & l, \\ X(Z) & = & (Zk + (p(Z) - b_1)l - 2c)/(Zp(Z)), \\ \tilde{V}(Z) & = & (-Zk + b_1 l + 2c)/(2p(Z)). \end{array}\right. \tag{2.41}$$

onde $p(Z)$ é dado em (2.10).

Por outro lado, calculando as diferenciais dG, $d\Theta$, dK, dL e dZ em (2.38) temos

$$\begin{aligned} dG &= ZdK - b_1 dL + 2p(Z)d\tilde{V} + (K + 2p'(Z)\tilde{V})dZ = 0, \\ d\Theta &= -dL + ZdX + 2d\tilde{V} + XdZ = 0, \\ dK &= 0, \\ dL &= 0, \end{aligned}$$

eliminando as terceira e quarta equações obtemos

$$\begin{aligned} dG &= 2p(Z)d\tilde{V} + (K + 2p'(Z)\tilde{V})dZ = 0, \\ d\Theta &= ZdX + 2d\tilde{V} + XdZ = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2p(Z) & K + 2p'(Z)\tilde{V} \\ Z & 2 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ d\tilde{V} \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

Logo, fazendo eliminação de Gauss por linhas na matriz de coeficientes de (2.42) temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 2p(Z) & K + 2p'(Z)\tilde{V} \\ Z & 2 & X \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -Zp(Z) & 0 & K + 2p'(Z)\tilde{V} - p(Z)X \\ Z & 2 & X \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

Dizer que o determinante (2.40) é zero equivale a dizer que a matriz acima tem posto um. Então, se $Z = 0$ em (2.43) temos $K + 2b_2\tilde{V} + (1 - b_1)X = 0$, e se $Z = Z_i$ é uma raiz de $p(Z)$ em (2.43) temos $K + 2(2Z_i + b_2)\tilde{V} = 0$, com $i = 1, 2$. Assim, substituindo estas últimas equações em (2.36) temos as retas

$$r_0 = \begin{cases} K(Z_0) &= (b_1 - 1)X + 2cb_2 = k, \\ L(Z_0) &= -2c = l, \\ \tilde{V}(Z_0) &= -c, \end{cases} \tag{2.44}$$

$$r_i = \begin{cases} K(Z_i) &= (2Z_i + b_2)(b_1 Z_i X + 2c)/(Z_i^2 + 1) = k, \\ L(Z_i) &= (Z_i^2(2Z_i + b_2)X - 2c)/(Z_i^2 + 1) = l, \\ \tilde{V}(Z_i) &= (-b_1 Z_i X/2 - c)/(Z_i^2 + 1), \end{cases} \tag{2.45}$$

para $i = 1, 2$. Então, quando a curva de Hugoniot intersecta as retas r_i $(i = 0, 1, 2)$ ocorre uma bifurcação, ou seja, se divide em dois ramos. Note que se $b_2^2 - 4(b_1 - 1) < 0$ só temos a reta r_0 e se $b_2^2 - 4(b_1 - 1) > 0$ temos a união das retas r_0, r_1, r_2; a união de estas retas é chamado *bifurcação secundária* de H_{kl}.

Observação 3. As curvas de Hugoniot em M^3 são singulares quando $Zp(Z) = 0$, isto é, há perda de transversalidade entre o plano $Z + Z_i$, $i = 0, 1, 2$ e a Variedade de Ondas M^3.

Observação 4. Quando $X = 0$ em (2.44) e (2.45), r_i $(i = 0, 1, 2)$ e as singularidades do campo de rarefações coincidem. Isto é, a bifurcação secundaria corta a superfície característica em um ou três pontos. Cada reta r_i $(\ i = 0, 1, 2)$ intersecta a superfície característica C em um único ponto.

2.3.1 Interseção da curva de Hugoniot com a Superfície Característica

Para obter a interseção da curva de Hugoniot H_{kl} com a superfície característica C basta considerar $K = k$ e $L = l$ na Equação (2.21), com k, l constantes, obtendo a equação polinomial de segundo grau em Z,

$$F(k, l, Z) = lZ^2 + (k + b_2 l)Z - l - 2c = 0, \tag{2.46}$$

cujo discriminante é

$$\Delta(F(k, l, Z)) = (k + b_2 l)^2 + 4l(l + 2c) \tag{2.47}$$

(ver Apêndice A). É fácil ver que a expressão $\Delta(F(k,l,Z)) = 0$ descreve uma elipse, que denotaremos por E. Para os pontos (k,l) no interior da elipse, em que $\Delta(F(k,l,Z)) < 0$, a curva de Hugoniot não corta a superfície característica, esta região é chamada *Região Elítica*; para os pontos (k,l) na elipse a curva de Hugoniot é tangente a superfície característica; e para os pontos (k,l) fora da elipse, em que $\Delta(F(k,l,Z)) > 0$, a curva de Hugoniot corta a superfície característica em dois pontos, esta região é chamada *Região Hiperbólica*. Na Variedade de Ondas M^3, o local onde as curvas de Hugoniot são tangentes à superfície característica é denominada *coincidência* $\mathcal{E}$ e a projeção desta no espaço de estados kl é a elipse E. Em [12] $\mathcal{E}$ é denominada curva de dobra de C, uma vez que ela é o conjunto de pontos da característica onde a projeção canônica, π, $\pi : C \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação singular e todas as singularidades são do tipo dobra.

2.4 As Superfícies Sônica S e Sônica S' em M^3

Usando a primeira das equações na condição de Rankine-Hugoniot em (2.1) a função velocidade $\sigma : Q\backslash\Delta_Q \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\sigma = \frac{f(u,v) - f(u',v')}{u - u'}. \tag{2.48}$$

Reescrevendo em coordenadas $(K, L, \tilde{V}, X, Z)$ obtemos

$$\sigma = \frac{(b_1+1)}{2b_1 Z}(ZK - b_1 L) + \frac{(Z^2 + b_1 + 1)}{Z}\tilde{V} + \frac{m}{b_1}, \tag{2.49}$$

onde $m = (b_1+1)(a_2 b_2 + a_4) - a_1$.

Observação 5. A superfície característica C representa choques infinitesimalmente pequenos $(u,v) \simeq (u',v')$. É possível provar que a velocidade σ se estende a C suavemente e se iguala ao autovalor real λ de dF, [17]. No caso quadrático essa extensão suave pode ser verificada diretamente substituindo-se as condições da Equação (2.7) na expressão de σ, Equação (2.49).

O conjunto de pontos $(K, L, \tilde{V}, X, Z) \in M^3$ onde a velocidade σ atinge um extremo ao longo da curva de Hugoniot H ocorre quando dG, $d\Theta$, $d\sigma$, dK e dL são linearmente dependentes. Daí segue a definição destes conjunto de pontos.

Definição 2.6. A *Superfície Sônica* S, em M^3, é definida como o conjunto de pontos onde a velocidade σ atinge extremo ao longo das curvas de Hugoniot H_{kl}, quando (k,l) em (2.36), isto é, é o conjunto de pontos de M^3 onde as 1-formas dG, $d\Theta$, $d\sigma$, dK e dL são linearmente dependentes.

Notação 2.2. Denotaremos a superfície Sônica S por S.

Segue da Definição 2.6 que a superfície S é dada por

$$\begin{cases} G &= 0, \\ \Theta &= 0, \\ \det(dG, d\Theta, d\sigma, dK, dL) &= 0. \end{cases} \tag{2.50}$$

Cálculos diretos mostram que a expressão do determinante na Equação (2.50) se escreve como

$$A_K K + A_L L + A_{\tilde{V}} \tilde{V} = 0, \tag{2.51}$$

onde $A_K = Z(Z^2 + b_1 + 1)$, $A_L = -(b_1 + 1)p(Z)$ e $A_{\tilde{V}} = 2(Z^2 + b_1 + 1)^2 + 4q(Z)$, com $p(Z)$ dada por (2.10) e

$$q(Z) = Z^2 + b_2(b_1 + 1)Z - b_1 - 1. \tag{2.52}$$

De forma análoga temos a definição:

Definição 2.7. A *Superfície Sônica* S' em M^3, é o conjunto de pontos onde a velocidade σ atinge extremo ao longo de uma curva de Hugoniot$'$ H'_{kl}, quando (k', l') em (2.38) varia, isto é, o conjunto de pontos de M^3 onde as 1-formas dG, $d\Theta$, $d\sigma$, $dK - 2b_1 dL$ e $-dL + 4d\tilde{V}$ são linearmente dependentes.

Notação 2.3. Denotaremos a superfície Sônica S' por S'.

Segue da Definição 2.7 que a superfície S' é dada por

$$\begin{cases} G &= 0, \\ \Theta &= 0, \\ \det(dG, d\Theta, d\sigma, dK - 2b_1 dX, -dL + 4d\tilde{V}) &= 0. \end{cases} \tag{2.53}$$

Cálculos diretos mostram que a expressão do determinante na Equação (2.53) se escreve como

$$A'_K K + A'_L L + A'_{\tilde{V}} \tilde{V} = 0, \tag{2.54}$$

onde $A'_K = Z(Z^2 + b_1 + 1)$, $A'_L = (b_1 + 1)p(Z) - 2b_1(Z^2 + b_1 + 1)$ e $A'_{\tilde{V}} = 2(Z^2 + b_1 + 1)^2$.

Agora vejamos a relação que existe entre estas duas superfícies. Usando as equações da Variedade de Ondas M^3, podemos eliminar X e $\tilde{V}$ das equações (2.51) e (2.54). As superfícies S e S' podem ser expressas pelas equações implícitas

$$(2p(Z)A_K - ZA_{\tilde{V}})K + (2p(Z)A_L + b_1 A_{\tilde{V}})L + 2cA_{\tilde{V}} = 0, \tag{2.55}$$

e

$$(2p(Z)A'_K - ZA'_{\tilde{V}})K + (2p(Z)A'_L + b_1 A'_{\tilde{V}})L + 2cA'_{\tilde{V}} = 0, \tag{2.56}$$

respectivamente. Note que se $Z = 0$ em (2.55) e (2.56), temos $L + 2c = 0$, ou seja, as superfícies S e S' intersectam-se no plano $Z = 0$ ao longo da reta de bifurcação r_0; da mesma forma se $Z = Z_i$, $i = 1, 2$, em (2.55) e (2.56), temos $Z_iK - b_1L - 2c = 0$, isto é, as superfícies S e S' intersectam-se no plano $Z = Z_i$ ao longo das retas de bifurcação r_i, $i = 1, 2$.

Por outro lado subtraindo (2.55) de (2.56) e simplificando obtemos a equação

$$-4q(Z)[ZK + (p(Z) - b_1)L - 2c] = 0, \tag{2.57}$$

onde $p(Z)$ e $q(Z)$ são dados em (2.10) e (2.52), respectivamente. Sejam $\tilde{Z}_1$ e $\tilde{Z}_2$, $\tilde{Z}_1 < \tilde{Z}_2$, raízes reais de $q(Z) = 0$. Substituindo $\tilde{Z}_i$, $i = 1, 2$, na equação (2.55) obtemos as retas

$$\tilde{Z}_iK - b_1L - 2c(b_1 + 1) = 0, \tag{2.58}$$

$\tilde{Z}_i \neq 2/b_2$, $i = 1, 2$. Ou seja, as superfícies S e S' se intersectam ao longo das retas dadas em (2.58). A substituição de $Z = \tilde{Z}_i$, $i = 1, 2$ na equação (2.56) também resulta na equação (2.58).

Por outro lado, multiplicando a equação da superfície característica (2.21) por $A_{\tilde{V}}$ e somando com (2.55) temos

$$p(Z)[2A_KK + (2A_L + A_{\tilde{V}})L] = 0, \tag{2.59}$$

de onde

$$Zp(Z)\left[(Z^2 + b_1 + 1)K + (Z^3 + (b_1 + 3)Z + b_2(b_1 + 1))L\right] = 0, \tag{2.60}$$

ou seja, por (2.60) vemos que a superfície característica C intersecta a superfície sônica S nas retas de bifurcação secundária ou na curva de Inflexão dada por (2.34). Da mesma forma, multiplicando (2.21) por $A'_{\tilde{V}}$ e somando com (2.56) também obtemos a equação (2.60), o que indica que a superfícies característica C intersecta a superfície sônica S' nas retas de bifurcação secundária ou na curva de Inflexão (2.34).

Segue-se que as superfícies S e S' se intersectam ao longo da curva de inflexão.

A união das retas dadas em (2.58) com a curva de inflexão é denominada *dupla sônica* e representada por $\mathcal{D}$. Classicamente o conjunto $\mathcal{D}$ é denominado *duplo contato*. Observa-se que se $b_2^2 + 4/(b_1 + 1) < 0$ $\mathcal{D}$ é formado somente pela curva de inflexão.

3 Curvas de Hugoniot e as superfícies sônicas

Neste capítulo estudaremos a interseção das curvas de Hugoniot com a superfície S para o caso não simétrico ($b_2 \neq 0$). O caso simétrico foi estudado em [15]. E também vamos descrever os resultados obtidos em [14] sobre a interseção da curva de Hugoniot com a superfície S', nas variáveis K, L, $\tilde{V}$, X e Z.

3.1 Decomposição do espaço de estados kl

Eliminando X e $\tilde{V}$ entre as equações de (2.50), obtemos a equação da superfície S em coordenadas (K, L, Z),

$$[ZA_{\tilde{V}} - 2p(Z)A_K]K + [A_{\tilde{V}}(p(Z) - b_1) - p(Z)(A_{\tilde{V}} + 2A_L)]L - 2cA_{\tilde{V}} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (b_2K - L + 2c)Z^4 - (4K + 2b_2(b_1+1)L)Z^3 + \\ -((b_1+1)(b_2K + (b_2^2-4)L - 4c) + 2L - 4c)Z^2 + \\ +2b_2(b_1+1)(L+2c)Z + (b_1^2-1)(L+2c) = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para obter os pontos de interseção de uma curva de Hugoniot H_{kl} com a superfície S substituímos k, l em (3.1), obtendo assim uma equação polinomial em Z. Em resumo, estudar a interseção das curvas de Hugoniot com a superfície S é estudar as raízes do polinômio P_S, dado por

$$\begin{aligned} P_S(Z) = {} & (b_2k - l + 2c)Z^4 - (4k + 2b_2(b_1+1)l)Z^3 + \\ & - ((b_1+1)(b_2k + (b_2^2-4)l - 4c) + 2l - 4c)Z^2 + \\ & + 2b_2(b_1+1)(l+2c)Z + (b_1^2-1)(l+2c). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Aqui consideramos o caso não degenerado em que $b_2k - l + 2c \neq 0$, ou seja, P_S é um polinômio de grau 4. Assim uma curva de Hugoniot intersecta a superfície S, zero, duas ou quatro vezes. Segue-se que o espaço de parâmetros kl se decompõe em regiões de acordo com o número de interseções da curvas de Hugoniot com a superfície S. A fronteira dessas regiões é a curva de raízes múltiplas de $P_S(Z)$. Essa curva é o conjunto de pontos k, l que anulam o discriminante

$$\Delta(P_S) = -16(b_1+1)^2\left(b_2^2 + \frac{4}{b_1+1}\right)(l+2c)\alpha(k,l)\beta(k,l), \tag{3.3}$$

onde de acordo com Apêndice A $\alpha(k,l)$ é um polinômio de terceiro grau nos parâmetros k e l,

$$\begin{aligned}
\alpha(k,l) = &- b_2^3(b_1+1)^3k^3 + 6c(b_1+1)[(b_1+1)(5b_1-11)b_2^2 + 36(b_1-1)]k^2 + \\
&- 3(b_1+1)[(b_1+1)^2b_2^4 - (b_1+1)(7b_1-13)b_2^2 - 36b_1 + 36]k^2l + \\
&- 3b_2(b_1+1)(b_2^2(b_1+1) - 4b_1 + 4)(b_2^2(b_1+1) - b_1 + 4)kl^2 + \\
&+ 6cb_2(b_1+1)[(b_1+5)(b_1+1)b_2^2 - 4(4b_1+5)(b_1-1)]kl + \\
&+ 12c^2b_2(b_1+1)[9(b_1+1)b_2^2 - 16(b_1+2)(b_1-1)]k - [(b_1+1)^3b_2^6 + \\
&+ 6(b_1+2)(b_1+1)^2b_2^4 - 3(b_1+1)(9b_1^3 + 5b_1^2 - 16b_1 - 16)b_2^2 + \\
&- 4(b_1-1)(5b_1+4)^2]l^3 + -6c[2(2b_1+1)(b_1+1)^2b_2^4 + \\
&- (b_1+2)(b_1+1)(9b_1^2 - 7b_1 - 8)b_2^2 - 4(b_1-1)(5b_1+4)(b_1+2)]l^2 + \\
&+ 12c^2(2b_1+1)[(b_1+5)(b_1+1)b_2^2 - 4(4b_1+5)(b_1-1)]l + \\
&+ 8c^3[27(b_1+1)^2b_2^2 - 4(b_1-1)(4b_1+5)^2],
\end{aligned} \tag{3.4}$$

e $\beta(k,l)$ é um polinômio de segundo grau nos parâmetros k e l,

$$\beta(k,l) = (b_1-1)k^2 + b_1b_2kl + b_1^2l^2 + 2cb_2k + 4cb_1l + 4c^2. \tag{3.5}$$

De acordo com nossas hipóteses, $\Delta(P_S)$ se anula ao longo da curva definida por $\alpha(k,l)=0$, ao longo da reta $l+2c=0$ e ao longo da curva $\beta(k,l)=0$.

Cálculos diretos mostram que se $b_2^2 - 4(b_1-1) > 0$, então $\beta(k,l) = (Z_1k - b_1l - 2c)(Z_2k - b_1l - 2c)$, com Z_1 e Z_2 raízes de $p(Z)$ definido na equação (2.9). As retas $l+2c=0$ e $Z_ik - b_1l - 2c = 0$ são as retas de bifurcação secundária apresentadas no Capítulo 2. Agora, podemos escrever:

Lema 3.1. *Suponha que $b_2k - l + 2c \neq 0$. As curvas de Hugoniot intersectam a superfície S em zero, dois ou quatro pontos. Além disto, o espaço de parâmetros kl é decomposto em regiões em que a curva de Hugoniot intersecta a superfície o mesmo número de vezes. As fronteiras dessas regiões são as curvas $\alpha(k,l)=0$ e as retas de bifurcação secundária.*

Definição 3.1. A curva $\alpha(k,l)=0$ é denominada *kl-dobra sônica*.

No espaço kl os pontos de interseção das retas r_0, r_1 e r_2 são dadas por

$$\begin{aligned}
r_1 \cap r_2 &: \left(0, \frac{-2c}{b_1}\right), \\
r_0 \cap r_1 &: \left(\frac{-2c(b_1-1)}{Z_1}, -2c\right), \\
r_0 \cap r_2 &: \left(\frac{2c(b_1-1)}{Z_2}, -2c\right).
\end{aligned}$$

Observe-se que, as três retas se intersectam quando $b_1 = 1$; a interseção $r_1 \cap r_2$ está sempre no eixo l; se $b_1 > 0$ o ponto $(0, 0)$ está fora do triângulo formado pelas retas r_0, r_1 e r_2 e se $b_1 < 0$, está dentro deste triângulo.

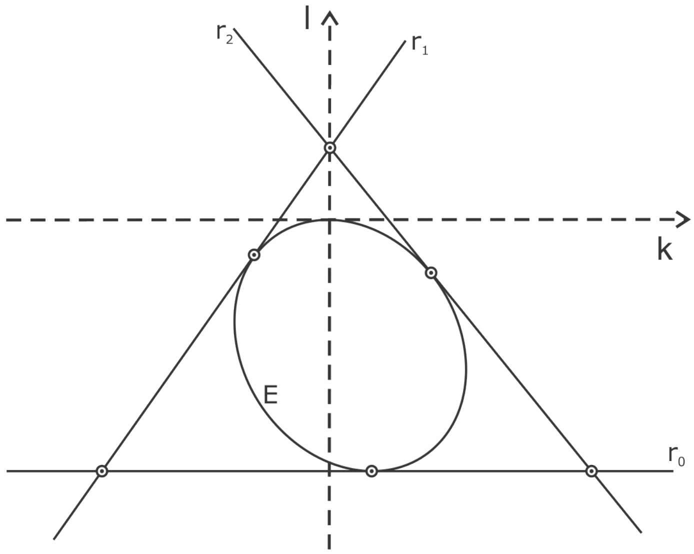


Figura 1 – Interseção das retas r_0, r_1 e r_2 no espaço de estados kl.

3.2 Análise da curva kl-dobra sônica no espaço de parâmetros b_1b_2

Para entender melhor como o espaço de parâmetros kl é decomposto vamos estudar a curva kl-dobra sônica. Para tal obtemos a equação paramétrica da curva kl-dobra sônica resolvendo o sistema $P_S(Z) = 0$, $\dot{P}_S(Z) = 0$ para k, l, obtendo

$$\begin{cases} k(Z) = \dfrac{-2c(b_1+1)\left[b_2Z^3 - 6Z^2 - 3b_2(b_1+1)Z - b_2^2(b_1+1) + 2(b_1-1)\right]}{(2+b_2^2(b_1+1))Z^3 - 3b_2(b_1+1)Z^2 + 6(b_1+1)Z + b_2(b_1+1)^2} \\[2ex] l(Z) = \dfrac{2c\left[2Z^3 + 3b_2(b_1+1)Z^2 - 6(b_1+1)Z - b_2(b_1+1)^2\right]}{(2+b_2^2(b_1+1))Z^3 - 3b_2(b_1+1)Z^2 + 6(b_1+1)Z + b_2(b_1+1)^2} \end{cases} \tag{3.6}$$

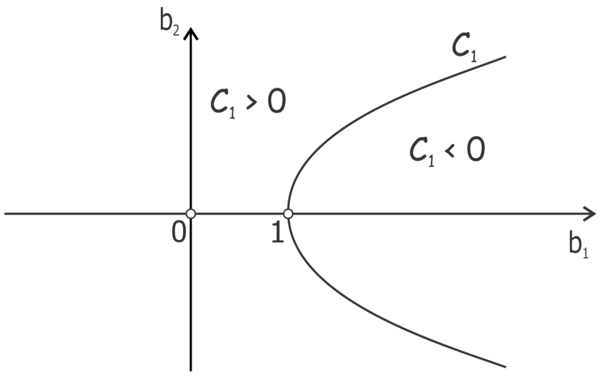
sempre que $-2((b_1-1)Z^2 + b_2Z + 1) \neq 0$.

Nesta seção estudaremos como a curva kl-dobra sônica decompõe o espaço de parâmetros b_1b_2, analisando suas auto-interseções, interseções com as retas $r_i (i = 0, 1, 2)$, com os eixos com a curva de coincidência, além de estudar seus extremos locais e assíntotas. Isto será útil para entender a interseção de uma curva de Hugoniot H_{kl} com a superfície sônica S.

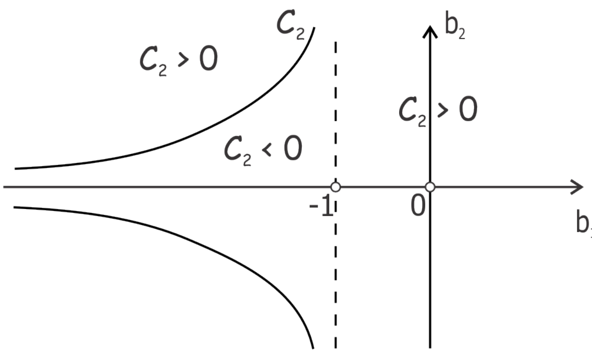
Hipótese 1. Em todos os cálculos considera-se $c > 0$, $b_2 > 0$, casos diferentes destes têm resultados análogos.

Quando estudamos as discriminantes dos polinômios que formam a equação paramétrica da curva kl-dobra sônica surgem as expressões $b_2^2 - 4(b_1 - 1)$, $b_2^2 + 4/(b_1 + 1)$ e $(b_1 - 1)(b_1 + 2)^2 - (b_1 + 1)b_2^2$ que caracterizam o sinal do discriminante (3.3). Por tal motivo consideramos as curvas no espaço de parâmetros $b_1 b_2$ dadas por

$$
\begin{aligned}
C_1 :& b_2^2 - 4(b_1 - 1) = 0, \\
C_2 :& b_2^2 + 4/(b_1 + 1) = 0 \text{ e} \\
C_3 :& (b_1 - 1)(b_1 + 2)^2 - (b_1 + 1)b_2^2 = 0,
\end{aligned}
$$



(a) Curva C_1.



(b) Curva C_2 e a reta $b_1 = 1$ é assintota.

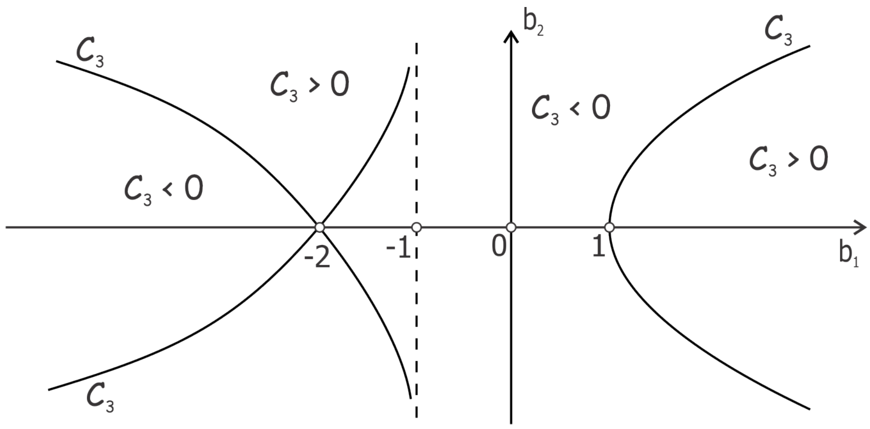


Figura 3 – Curva C_3 e a reta $b_1 = 1$ é assintota.

e as retas $b_1 = 0$, $b_1 = 1$ e $b_1 = -1$. Estas curvas e retas dividem o espaço de parâmetros $b_1 b_2$ em regiões onde o comportamento da curvas kl-dobra sônica é o mesmo. Estas regiões são uma subdivisão da classificação de Schaeffer e Shearer em [10].

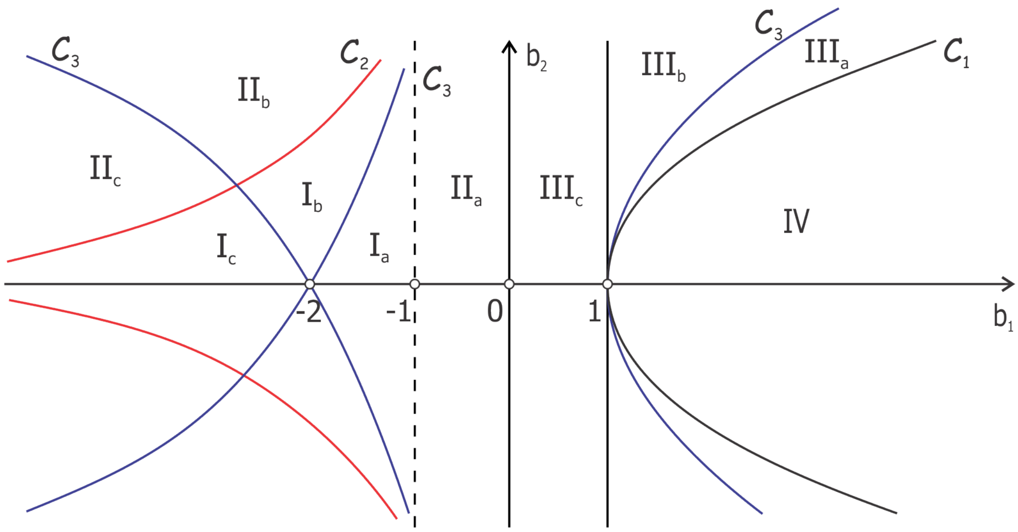


Figura 4 – Divisão dos espaço de parâmetros b_1b_2.

Proposição 3.2. *No espaço de parâmetros b_1b_2, existem 7 configurações robustas diferentes para a kl-dobra sônica correspondentes às regiões da Figura 4.*

Demonstração. Vejamos que o comportamento da curva kl-dobra sônica está relacionado as restrições consideradas em (1.5) para os parâmetros b_1 e b_2.

Caso 1:

Para obter os ponto de auto-intersecção da curva kl-dobra sônica, suponha que elas existem e ocorrem para Z_1 e Z_2, com $Z_1 \neq Z_2$. Então, de (3.6) temos o sistema

$$\begin{cases} k(Z^*) - k(Z^{**}) & = 0, \\ l(Z^*) - l(Z^{**}) & = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

resolvendo o sistema se conclui que existe auto interseção da curva kl-dobra sônica em um único ponto se $b_2^2 - 4(b_1 - 1) < 0$, isto é, para o caso IV de Schaeffer-Shearer. Nos outros casos não há auto-interseção.

Caso 2:

As interseções da curva kl-dobra sônica com o eixo l ocorrem quando $k(Z) = 0$ em (3.6), isto é, nas raízes reais do polinômio P_1 dada por

$$P_1(Z) = b_2Z^3 - 6Z^2 - 3b_2(b_1 + 1)Z - b_2^2(b_1 + 1) + 2(b_1 - 1).$$

Como $b_2 \neq 0$, o discriminante do polinômio P_1 é dado por

$$\Delta(P_1) = -27(b_1 + 1)^2 \left[b_2^2 - 4(b_1 - 1)\right] \left(b_2^2 + \frac{4}{b_1 + 1}\right)^2 \tag{3.8}$$

(ver Apêndice A). Então, se $\Delta(P_1) < 0$, o polinômio P_1 tem uma raiz real, e se $\Delta(P_1) > 0$, P_1 tem três raízes reais, ou seja, se $b_2^2 - 4(b_1 - 1) > 0$ a curva kl-dobra sônica intersecta o eixo l em um ponto e se $b_2^2 - 4(b_1 - 1) < 0$ a curva kl-dobra sônica intersecta o eixo l em três pontos.

Caso 3:

Para obter as interseções da curva kl-dobra sônica com o eixo k considere $l(Z) = 0$ em (3.6), ou seja, estos interseções ocorrem nas raízes reais do polinômio P_2 dada por

$$P_2(Z) = 2Z^3 + 3b_2(b_1+1)Z^2 - 6(b_1+1)Z - b_2(b_1+1)^2,$$

cujo discriminante é dado por

$$\Delta(P_2) = 108(b_1+1)^5 \left(b_2^2 + \frac{4}{b_1+1}\right)^2 \tag{3.9}$$

(ver Apêndice A). Logo, se $\Delta(P_2) < 0$, o polinômio P_2 tem uma raiz real e se $\Delta(P_2) > 0$, tem três raízes reais, ou seja, se $b_1 + 1 < 0$ a curva kl-dobra sônica intersecta o eixo k em um ponto e se $b_1 + 1 > 0$ a curva kl-dobra sônica intersecta o eixo k em três pontos.

Caso 4:

A curva kl-dobra sônica tem assíntota se os denominadores de $k(Z)$ e $l(Z)$ na Equação (3.6) são zeros, isto é, se

$$P_3(Z) = (b_2(b_1+1)+2)Z^3 - 3b_2(b_1+1)Z^2 + 6(b_1+1)Z + b_2(b_1+1)^2 = 0.$$

Se $b_2(b_1+1)+2 \neq 0$, a discriminante do polinômio P_3 é dado por

$$\Delta(P_3) = -27(b_1+1)^6 \left(b_2^2 + \frac{4}{b_1+1}\right)^3 \tag{3.10}$$

(ver Apêndice A). Então, se $\Delta(P_3) < 0$, o polinômio P_3 tem uma raiz real e se $\Delta(P_3) > 0$, tem três raízes reais, ou seja, se $b_2^2 + 4/(b_1+1) > 0$, a curva kl-dobra sônica tem uma assintota e se $b_2^2 + 4/(b_1+1) < 0$, tem três assintotas. Se $b_2(b_1+1)+2 = 0$, o polinômio P_3 tem duas raízes reais ou nenhuma, dependendo do sinal de $\Delta(P_3) = 12(3 - 2b_2)$, isto é, a curva kl-dobra sônica tem duas assintotas ou nenhuma.

Caso 5:

As interseções da curva kl-dobra sônica com as retas r_i, $i = 0, 1, 2$ são obtidas substituindo-se a Equação (3.6) nas equações das retas r_i. Resolvendo para r_0 obtém-se que a interseção ocorre quando $Z = 0$, isto é, no ponto

$$(k(0), l(0)) = \left(\frac{2c}{b_2}\left(b_2^2 + \frac{4}{b_1+1} - 2\right), -2c\right). \tag{3.11}$$

Observe que, se $b_2^2+4/(b_1+1)<0$, o ponto $(k(0),l(0))$ encontra-se no terceiro quadrante e se $b_2\to 0$ o valor de $k(0)\to\infty$, ou seja no caso simétrico ($b_2=0$) as coordenadas (3.11) encontram-se no infinito.

Para $i=1,2$, obtemos um polinômio em Z de grau três com discriminante zero, e cuja raiz real de multiplicidade três em Z é

$$Z = Z_i, \text{ com } i=1,2, \tag{3.12}$$

onde Z_i são as raízes reais do polinômio $p(Z)$ em (2.10). Portanto, a curva kl-dobra sônica corta a cada reta $r_i (i=1,2)$ em um único ponto. Calculando os produtos $k(Z_1)k(Z_2)$ e $l(Z_1)l(Z_2)$ obtemos,

$$\begin{aligned} k(Z_1)k(Z_2) =& \frac{4c^2(b_1+1)^2\left[b_2^2-4(b_1-1)\right]^2}{(b_1+1)\left(b_2^2+\frac{4}{b_1+1}\right)\left[(b_1-1)(b_1+2)^2-(b_1+1)b_2^2\right]}, \\ l(Z_1)l(Z_2) =& \frac{4c^2\left[4(b_1-1)(2b_1+1)^2-(b_1+1)(3b_1+1)b_2^2\right]}{(b_1+1)\left(b_2^2+\frac{4}{b_1+1}\right)\left[(b_1-1)(b_1+2)^2-(b_1+1)b_2^2\right]}, \end{aligned}$$

de onde observamos que se $(b_1-1)(b_1+2)^2-(b_1+1)b_2^2=0$, o valor de $k(Z_i)=\pm\infty$ ou $l(Z_i)=\pm\infty$.

Caso 6:

Agora, analisando os extremos locais na direção l, isto é, resolvendo a equação $(dl/dZ)(Z)=0$ em Z, obtemos como resultado $Z=0$ de multiplicidade dois, e

$$Z_3 = \frac{1}{b_2}\left(2+\sqrt{(b_1+1)\left(b_2^2+\frac{4}{b_1+1}\right)}\right), \quad \text{e} \quad Z_4 = \frac{1}{b_2}\left(2-\sqrt{(b_1+1)\left(b_2^2+\frac{4}{b_1+1}\right)}\right),$$

sempre que $(b_1+1)(b_2^2+4/(b_1+1))>0$. Observamos que para $Z=0$, temos $(d^2l/dZ^2)(0)=0$ e $(d^3l/dZ^3)(0)=2c(b_2^2+\frac{4}{b_1+1})/(b_2(b_1+1))\neq 0$, portanto, $(k(0),l(0))$ é um ponto de inflexão. E para $Z=Z_3$ e $Z=Z_4$, temos

$$\frac{d^2l}{dZ^2}(Z_3)\frac{d^2l}{dZ^2}(Z_4) = -\frac{144c^2b_2^4}{(b_1+1)^3(b_2^2+\frac{4}{b_1+1})^3}\neq 0; \tag{3.13}$$

então, $(d^2l/dZ^2)(Z_3)(d^2l/dZ^2)(Z_4)<0$, o que indica que temos um ponto mínimo e a outro ponto máximo. Portanto, temos dois caso:

- Se $b_1+1<0$ e $b_2^2+4/(b_1+1)>0$, tem-se um ponto de inflexão,
- Se $b_1+1>0$, ou se $b_1+1<0$ e $b_2^2+4/(b_1+1)<0$, tem-se um ponto de inflexão, um ponto de mínimo e um ponto de máximo.

Caso 7:

Os extremos locais na direção k são obtidos resolvendo-se a equação $(dk/dZ)(Z) = 0$ em Z. Ou seja, calculando as raízes do polinômio P_4 dado por

$$P_4(Z) = Z^4 + 2b_2(b_1+1)Z^3 + (b_2^2(b_1+1) - 2(2b_1+1))Z^2 - 2b_2(b_1+1)Z - b_1^2 + 1, \tag{3.14}$$

cujo discriminante é,

$$\begin{aligned}\Delta(P_4) =& 16b_1^2(b_1+1)^2\left(b_2^2 + \frac{4}{b_1+1}\right)\Big[(b_1+1)^3b_2^6 + 6(b_1+2)(b_1+1)^2b_2^4 \\ & -3(b_1+1)(9b_1^3 + 5b_1^2 - 16b_1 - 16)b_2^2 - 4(b_1-1)(5b_1+4)^2\Big]\end{aligned} \tag{3.15}$$

(ver Apêndice A). Considerando $k = 0$ e $l = 0$ na curva $kl-$dobra sônica obtêm-se

$$\alpha(0,0) = 8c^3\left[27(b_1+1)^2b_2^2 - 4(b_1-1)(4b_1+5)^2\right],$$

observa-se que, se $b_1 - 1 < 0$, tem-se $\alpha(0,0) > 0$. ∎

3.3 Interseção da curva de Hugoniot H_{kl} com a superfície sônica S

Nesta seção estudaremos as interseções de curvas de Hugoniot com a superfície Sônica S de acordo com a decomposição dada pela Proposição 3.2 e com a classificação em [10].

3.3.1 Interseção no caso I

A divisão do espaço de parâmetros b_1b_2 mostrada na Figura 4 mostra que o caso I na classificação de Sheaffer-Shearer se caracteriza como a união de três regiões, isto é, $I = I_a \cup I_b \cup I_c$. Em cada uma das regiões o espaço kl é dividido pela curva kl-dobra sônica e as retas de bifurcação r_0, r_1 e r_2, como mostrado nas Figuras 5, 6 e 7, respectivamente. Note que, a diferença entre I_a e I_b é a interseção da kl-dobra sônica com a reta r_2, no primeiro caso a interseção está acima da reta r_0 e no segundo, abaixo.

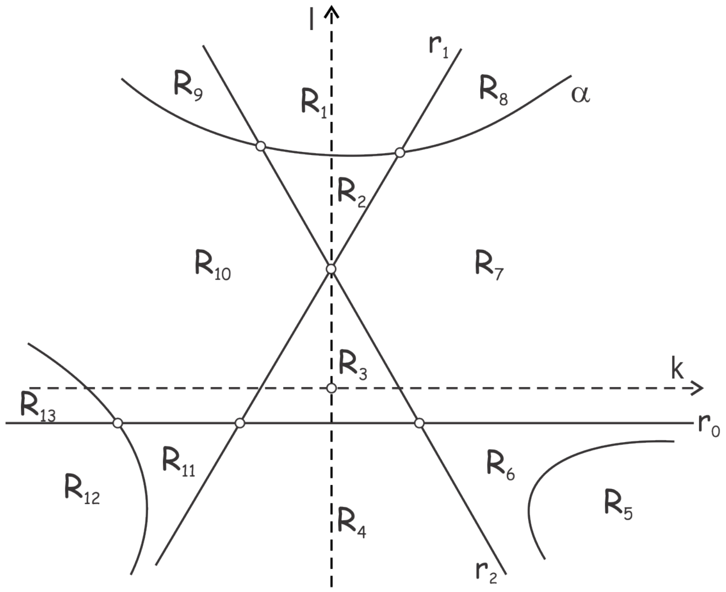


Figura 5 – Interseção da curva kl-dobra sônica com as retas de bifurcação no caso I_a.

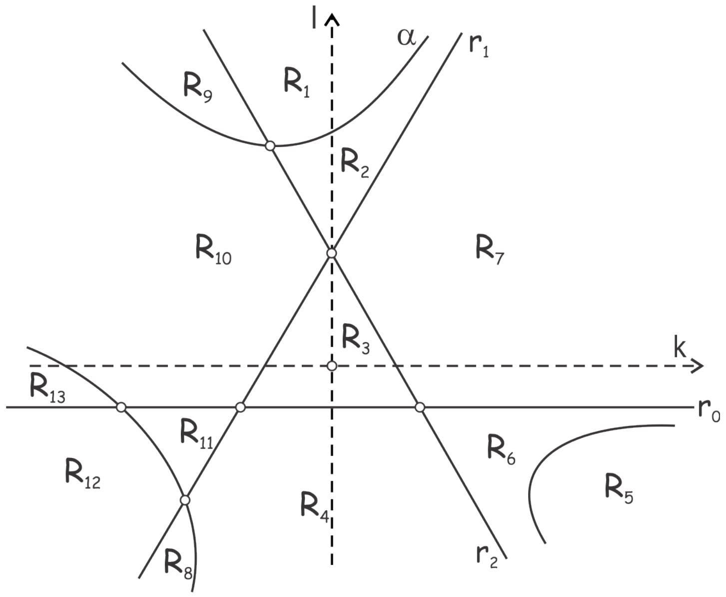


Figura 6 – Interseção da curva kl-dobra sônica com as retas de bifurcação no caso I_b.

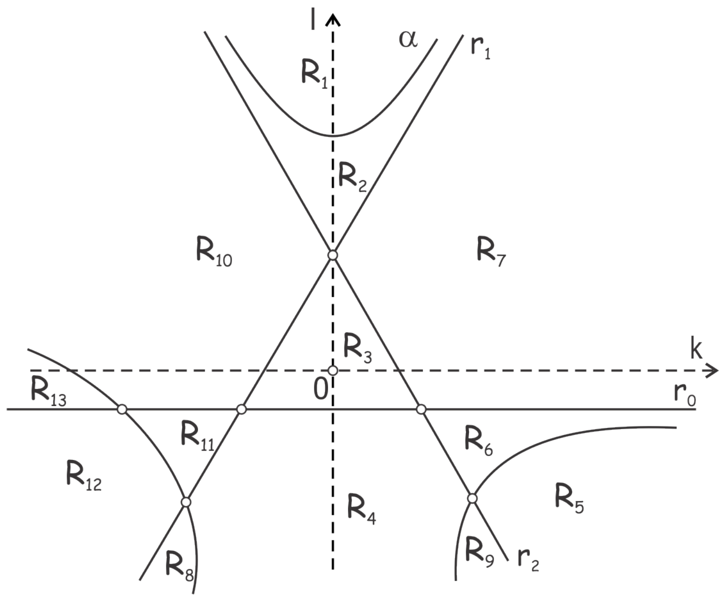


Figura 7 – Interseção da curva kl-dobra sônica com as retas de bifurcação no caso I_c.

Vale o seguinte resultado.

Proposição 3.3. *Considere* (b_1, b_2) *na região* $I = I_a \cup I_b \cup I_c$*, da Figura 4. Então*

1. *as curvas de Hugoniot* H_{kl}*, para* (k, l) *nas regiões* R_1*,* R_4*,* R_5*,* R_7*,* R_{10} *e* R_{12} *das Figuras 5, 6 e 7 intersectam a superfície sônica* S *em dois pontos distintos;*

2. *as curvas de Hugoniot* H_{kl}*, para* (k, l) *na região* R_3 *das Figuras 5, 6 e 7 não intersecta a superfície sônica* S*;*

3. *as curvas de Hugoniot* H_{kl}*, para* (k, l) *nas regiões* R_2*,* R_6*,* R_8*,* R_9*,* R_{11} *e* R_{13} *das Figuras 5, 6 e 7 intersectam a superfície sônica* S *em quatro pontos distintos.*

Demonstração. Fixado (b_1, b_2) na região I da Figura 4 temos $b_2^2 + 4/(b_1 + 1) < 0$ e $b_2^2 - 4(b_1 - 1) > 0$. Então para quaisquer ponto (k, l) temos $\beta(k, l) = (b_1 - 1)k^2 + b_1 b_2 kl + b_1^2 l^2 + 2cb_2 k + 4cb_1 l + 4c^2 = (Z_1 k - b_1 l - 2c)(Z_2 k - b_1 l - 2c)$.

Dado $(b_1, b_2) \in I_a$, já que o ponto $(0, 0)$ está dentro do triângulo formado pela bifurcação secundária temos que $\alpha(k, l) > 0$ nas regiões R_2, R_3, R_4, R_6, R_7, R_{10} e R_{11} e que $\alpha(k, l) < 0$ nas outras regiões. Por cima da reta r_0, nas regiões R_1, R_2, R_3, R_7, R_8, R_9, R_{10} e R_{13}, temos que $l + 2c > 0$ e por baixo da reta r_0, nas regiões R_4, R_5, R_6, R_{11} e R_{12}, temos que $l + 2c < 0$. Como por cima da reta r_i, com $i = 1, 2$, $Z_i k - b_1 l - 2c > 0$ e por baixo da reta r_i, temos que $Z_i k - b_1 l - 2c < 0$, obtemos que $\beta(k, l) > 0$ nas regiões R_1, R_2, R_3 e R_4, e que $\beta(k, l) < 0$ nas outras regiões. Na Tabela 1 mostramos o sinal de $\Delta(P_S)$ dado na Equação (3.3) a partir dos sinais de $l + 2c$, $\beta(k, l)$ e $\alpha(k, l)$. Daí, pelo Lema A.4 obtemos a quantidade de raízes reais em cada uma das regiões. As expressões de $P(k, l)$ e $N(k, l)$ são obtidos do Lema A.4.

Tabela 1 – Sinais de $l+2c$, $\beta(k,l)$, $\alpha(k,l)$ e $\Delta(P_S)$ para o caso I_a.

Regiões	$l+2c$	$\beta(k,l)$	$\alpha(k,l)$	$\Delta(P_S)$	$P(k,l)$	$N(k,l)$	**# de Raízes**
R_1	+	+	-	-			2
R_2	+	+	+	+	-	+	4
R_3	+	+	+	+	ou +	ou -	0
R_4	-	+	+	-			2
R_5	-	-	-	-			2
R_6	-	-	+	+	-	+	4
R_7	+	-	+	-			2
R_8	+	-	-	+	-	+	4
R_9	+	-	-	+	-	+	4
R_{10}	+	-	+	-			2
R_{11}	-	-	+	+	-	+	4
R_{12}	-	-	-	-			2
R_{13}	+	-	-	+	-	+	4

Para $(b_1, b_2) \in I_b$, vale a Tabela 1 a exceção da região R_8 onde $l + 2c < 0$ e $\beta(k,l) > 0$, mas mantendo a mesma quantidade de raízes reais.

Para $(b_1, b_2) \in I_c$, vale a Tabela 1 a exceção das regiões R_8 e R_9, onde $l + 2c < 0$ e $\beta(k,l) > 0$, mas mantendo a mesma quantidade de raízes reais em cada região. ∎

3.3.2 Interseção no caso II

De acordo com a Figura 4 o caso II na classificação de Sheaffer-Shearer se caracteriza como a união de três regiões, isto é, $II = II_a \cup II_b \cup II_c$. Em cada uma das regiões o espaço kl é dividido pela curva $kl-$dobra sônica e as retas r_0, r_1 e r_2, como se mostra nas Figuras 8, 9 e 10, respectivamente. Note que a diferença da configuração da curva α entre os casos II_a e II_b é que na região II_a a assíntota está por baixo da curva enquanto na região II_b a assíntota está por cima da curva; a diferença da configuração entre as regiões II_b e II_c está na interseção com a reta r_2, na região II_b a interseção está abaixo da reta r_0 enquanto na região II_c está acima da reta r_0.

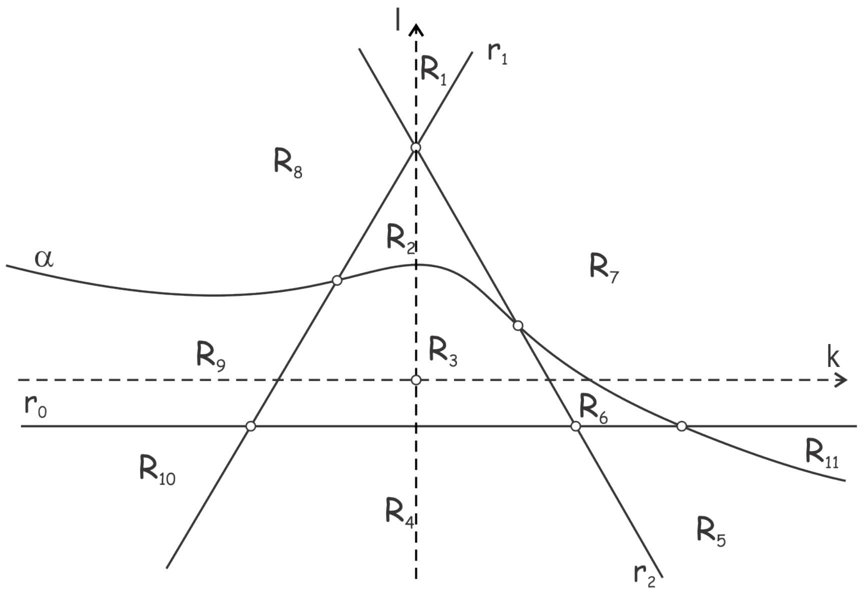


Figura 8 – Interseção da curva kl-dobra sônica com as retas de bifurcação no caso II_a

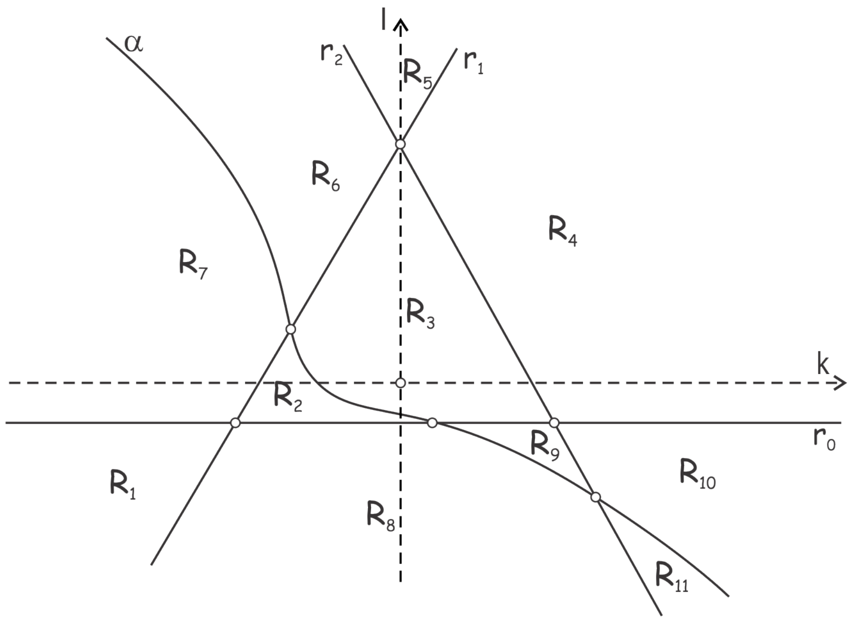


Figura 9 – Interseção da curva kl-dobra sônica com as retas de bifurcação no caso II_b

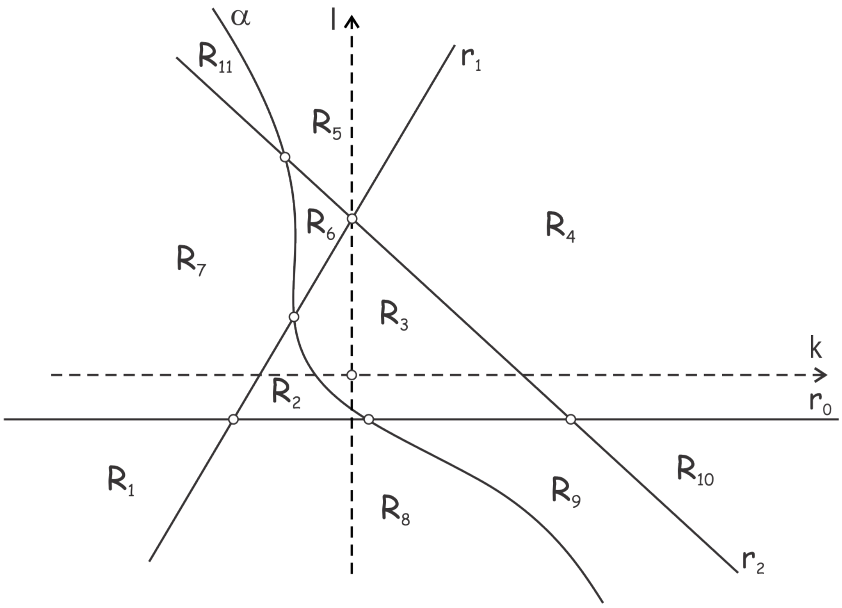


Figura 10 – Interseção da curva kl-dobra sônica com as retas de bifurcação no caso II_c

Proposição 3.4. *Considere (b_1, b_2) na região $II = II_a \cup II_b \cup II_c$, da Figura 4. Então*

1. *as curvas de Hugoniot H_{kl}, para (k, l) nas regiões R_3, R_5, R_7, R_8 e R_{10} das Figuras 8, 9 e 10 intersectam a superfície sônica S em dois pontos distintos;*

2. *as curvas de Hugoniot H_{kl}, para (k, l) nas regiões R_1 e R_4 das Figuras 8, 9 e 10 não intersecta à superfície sônica S;*

3. *as curvas de Hugoniot H_{kl}, para (k, l) nas regiões R_2, R_6, R_9 e R_{11} das Figuras 8, 9 e 10 intersectam a superfície sônica S em quatro pontos distintos.*

Demonstração. Fixado (b_1, b_2) na região II da Figura 4 temos $b_2^2 + 4/(b_1 + 1) > 0$. Assim, para quaisquer ponto (k, l) temos $\beta(k, l) = (b_1 - 1)k^2 + b_1 b_2 kl + b_1^2 l^2 + 2cb_2 k + 4cb_1 l + 4c^2 = (Z_1 k - b_1 l - 2c)(Z_2 k - b_1 l - 2c)$.

Dado $(b_1, b_2) \in II_b$, já que o ponto $(0, 0)$ está por cima da curva $kl-$dobra sônica e dentro do triângulo formado pela bifurcação secundaria temos que $\alpha(k, l) > 0$ nas regiões R_3, R_4, R_5, R_6, R_9 e R_{10} e que $\alpha(k, l) < 0$ nas outras regiões. Por cima da reta r_0, nas regiões R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 e R_7 temos que $l + 2c > 0$ e por baixo, nas regiões R_1, R_8, R_9, R_{10} e R_{11}, temos que $l + 2c < 0$. Como por cima da reta r_i, com $i = 1, 2$, $Z_i k - b_1 l - 2c > 0$ e por baixo da reta r_i, que $Z_i k - b_1 l - 2c < 0$, segue que $\beta(k, l) > 0$ nas regiões R_2, R_3, R_5, R_8 e R_9 e que $\beta(k, l) < 0$ nas outras regiões. Na Tabela 2 mostramos o sinal de $\Delta(P_S)$ a partir dos sinais de $l + 2c$, $\beta(k, l)$ e $\alpha(k, l)$. Logo, pelo Lema A.4 segue a quantidade de raízes reais em cada uma das regiões.

Tabela 2 – Sinais de $l + 2c$, $\beta(k,l)$, $\alpha(k,l)$ e $\Delta(P_S)$ para o caso II_b.

Regiões	$l + 2c$	$\beta(k,l)$	$\alpha(k,l)$	$\Delta(P_S)$	$P(k,l)$	$N(k,l)$	**# de Raízes**
R_1	-	-	-	+	ou +	ou -	0
R_2	+	+	-	+	-	+	4
R_3	+	+	+	-			2
R_4	+	-	+	+	ou +	ou -	0
R_5	+	+	+	-			2
R_6	+	-	+	+	-	+	4
R_7	+	-	-	-			2
R_8	-	+	-	-			2
R_9	-	+	+	+	-	+	4
R_{10}	-	-	+	-			2
R_{11}	-	-	-	+	-	+	4

Para $(b_1, b_2) \in II_c$, vale a Tabela 2 a excepção da região R_{11} onde $l + 2c > 0$ e $\beta(k,l) > 0$, mas mantendo a mesma quantidade de raízes reais.

Para $(b_1, b_2) \in II_a$, vale a Tabela 2 a excepção das regiões R_1, R_4, R_5, R_8 e R_9, tais que em R_1, $l + 2c > 0$ e $\beta(k,l) > 0$, em R_4, $l + 2c < 0$ e $\beta(k,l) > 0$, em R_5, $l + 2c < 0$ e $\beta(k,l) < 0$, em R_8, $l + 2c > 0$ e $\beta(k,l) < 0$, e em R_9, $l + 2c > 0$ e $\beta(k,l) < 0$, mas mantendo a mesma quantidade de raízes reais em cada região. ∎

3.3.3 Interseções no caso III

De acordo com a Figura 4 o caso III na classificação de Sheaffer-Shearer se caracteriza como a união de três regiões, isto é, $III = III_a \cup III_b \cup III_c$. Em cada uma das regiões o espaço kl é dividido pela curva $kl-$dobra sônica e as retas da bifurcação secundaria, como mostrado nas Figuras 11, 12 e 13, respectivamente. Note que a diferença da configuração da curva α entre as regiões III_a e III_b é que na região III_a a interseção da curva com a reta r_2 está acima da reta r_0, enquanto no caso III_b a interseção está abaixo da reta r_0.

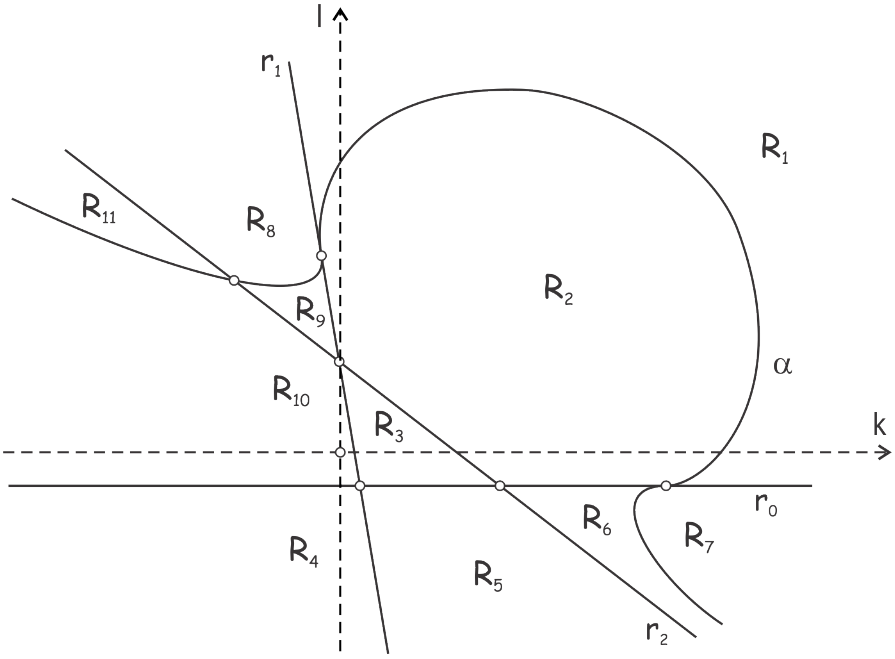


Figura 11 – Interseção da curva kl-dobra sônica com as retas de bifurcação no caso III_a

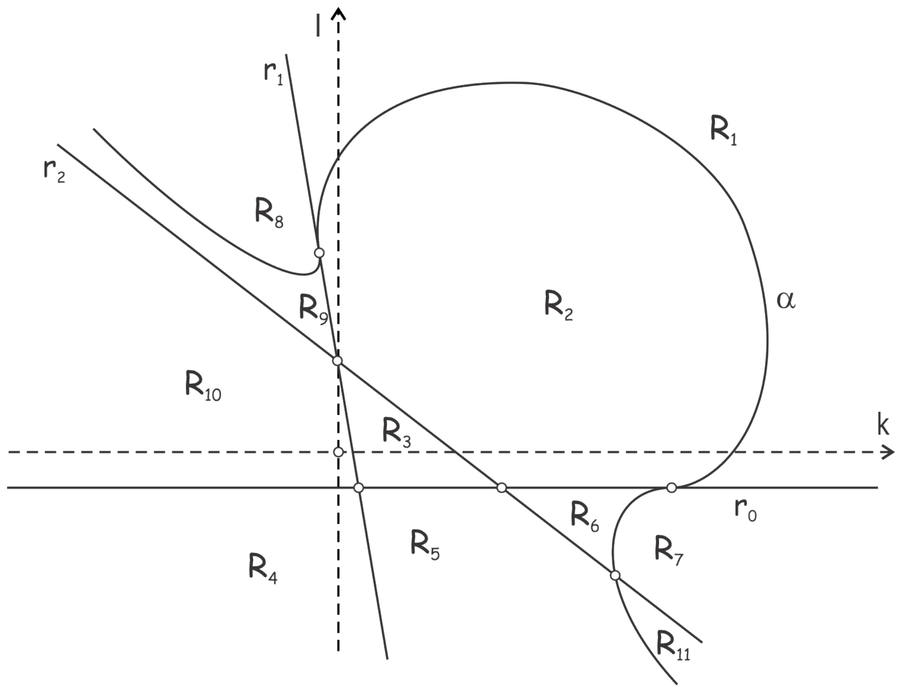


Figura 12 – Interseção da curva kl-dobra sônica com as retas de bifurcação no caso III_b

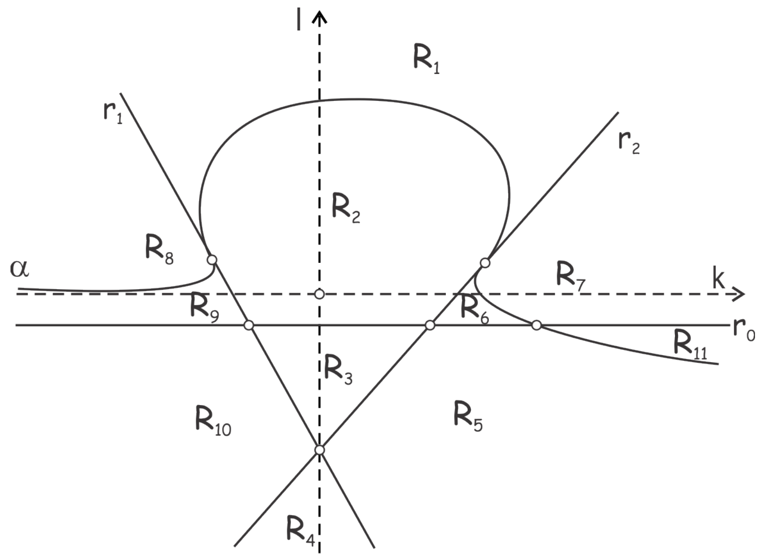


Figura 13 – Interseção da curva kl-dobra sônica com as retas de bifurcação no caso III_c

Proposição 3.5. *Considere* (b_1, b_2) *na região* $III = III_a \cup III_b \cup III_c$*, da Figura 4. Então*

1. *as curvas de Hugoniot* H_{kl}*, para* (k, l) *nas regiões* R_2*,* R_5*,* R_7*,* R_8 *e* R_{10} *das Figuras 11, 12 e 13 intersectam a superfície sônica* S *em dois pontos distintos;*

2. *as curvas de Hugoniot* H_{kl}*, para* (k, l) *na região* R_3 *das Figuras 11, 12 e 13 não intersecta a superfície sônica* S*;*

3. *as curvas de Hugoniot* H_{kl}*, para* (k, l) *nas regiões* R_1*,* R_4*,* R_6*,* R_9 *e* R_{11} *das Figuras 11, 12 e 13 intersectam a superfície sônica* S *em quatro pontos distintos.*

Demonstração. Fixado (b_1, b_2) na região III da Figura 4 temos que $b_2^2 + 4/(b_1 + 1) > 0$ e para quaisquer ponto (k, l) tem-se $\beta(k, l) = (b_1 - 1)k^2 + b_1 b_2 kl + b_1^2 l^2 + 2cb_2 k + 4cb_1 l + 4c^2 = (Z_1 k - b_1 l - 2c)(Z_2 k - b_1 l - 2c)$.

Dado $(b_1, b_2) \in III_a$, já que o ponto $(0, 0)$ está por baixo da curva $kl-$dobra sônica e fora do triângulo formado pela bifurcação secundaria, temos que $\alpha(k, l) > 0$ nas regiões R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_9 e R_{10} e que $\alpha(k, l) < 0$ nas outras regiões. Por cima da reta r_0, nas regiões R_1, R_2, R_3, R_8, R_9, R_{10} e R_{11}, temos que $l + 2c > 0$ e por baixo, nas regiões R_4, R_5, R_6 e R_7, temos que $l + 2c < 0$. Como por cima da reta r_i, com $i = 1, 2$, temos que $Z_i k - b_1 l - 2c > 0$ e por baixo da reta r_i, $Z_i k - b_1 l - 2c < 0$, obtemos que $\beta(k, l) > 0$ nas regiões R_1, R_2, R_4, R_6, R_7, R_{10} e R_{11}, e que $\beta(k, l) < 0$ nas outras regiões. Na Tabela 3 se mostramos o sinal de $\Delta(P_S)$ a partir dos sinais de $l + 2c$, $\beta(k, l)$ e $\alpha(k, l)$. Daí, pelo Lema A.4 obtemos a quantidade de raízes reais em cada uma das regiões.

Tabela 3 – Sinais de $l + 2c$, $\beta(k,l)$, $\alpha(k,l)$ e $\Delta(P_S)$ para o caso III_a.

Regiões	$l+2c$	$\beta(k,l)$	$\alpha(k,l)$	$\Delta(P_S)$	$P(k,l)$	$N(k,l)$	**# de Raízes**
R_1	+	+	-	+	-	+	4
R_2	+	+	+	-			2
R_3	+	-	+	+	ou +	ou -	0
R_4	-	+	+	+	-	+	4
R_5	-	-	+	-			2
R_6	-	+	+	+	-	+	4
R_7	-	+	-	-			2
R_8	+	-	-	-			2
R_9	+	-	+	+	-	+	4
R_{10}	+	+	+	-			2
R_{11}	+	+	-	+	-	+	4

Para $(b_1, b_2) \in III_b$, vale a Tabela 3 a excepção das região R_{11} onde $l + 2c < 0$ e $\beta(k,l) > 0$, mas mantendo a mesma quantidade de raízes reais.

Para $(b_1, b_2) \in III_c$, vale a Tabela 3 a excepção das regiões R_3, R_6, R_7, R_{10} e R_{11}, tais que em R_3, onde $l + 2c < 0$ e $\beta(k,l) > 0$, em R_6, onde $l + 2c > 0$ e $\beta(k,l) < 0$, em R_7, onde $l + 2c > 0$ e $\beta(k,l) < 0$, em R_{10}, onde $l + 2c < 0$ e $\beta(k,l) < 0$, e em R_{11}, onde $l + 2c < 0$ e $\beta(k,l) < 0$, mas mantendo a mesma quantidade de raízes reais em cada região. ∎

3.3.4 Interseções no caso IV

Como mostra a Figura 4, o caso IV é composto por uma única região. Neste caso o espaço kl é dividido pela curva kl-dobra sônica e pela reta r_0, como mostrado na Figura 14. Note que neste caso IV a curva kl-dobra sônica tem dois ou quatro extremos na direção k dependendo da quantidade de raízes de (3.14) e tem uma auto interseção.

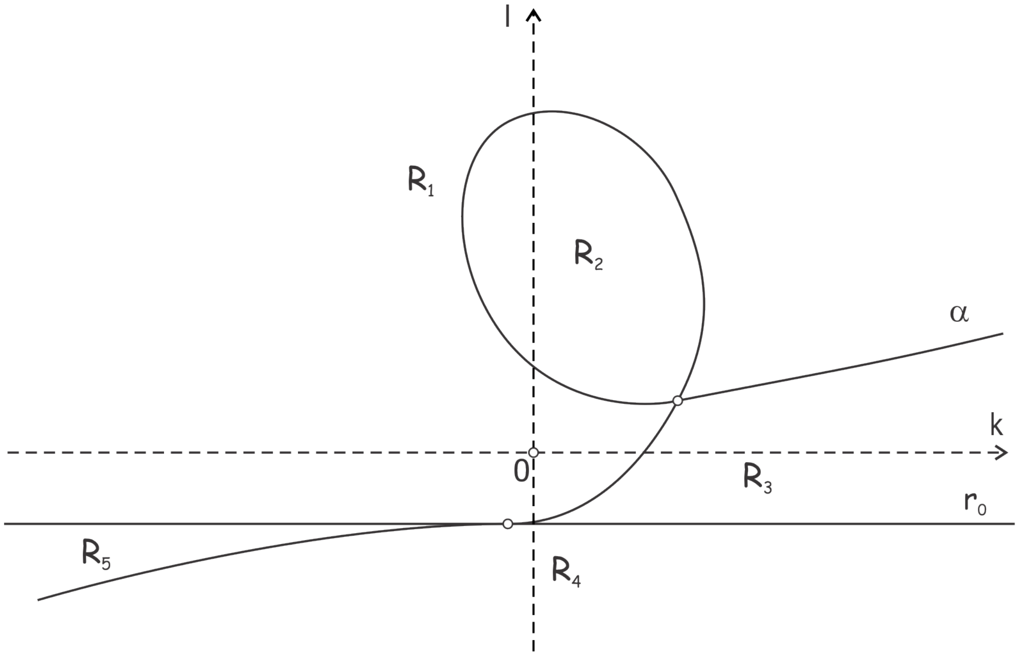


Figura 14 – Interseção da curva kl-dobra sônica com a reta de bifurcação no caso IV

Proposição 3.6. *Considere (b_1, b_2) na região IV, da Figura 4. Então*

1. *as curvas de Hugoniot H_{kl}, para (k, l) nas regiões R_1 e R_4 da Figura 14 intersectam a superfície sônica S em dois pontos distintos;*

2. *as curvas de Hugoniot H_{kl}, para (k, l) na região R_2 da Figura 14 não intersecta a superfície sônica S;*

3. *as curvas de Hugoniot H_{kl}, para (k, l) nas regiões R_3 e R_5 da Figura 14 intersectam a superfície sônica S em quatro pontos distintos.*

Demonstração. Fixado (b_1, b_2) na região IV da Figura 4 temos que $b_2^2 + 4/(b_1 + 1) > 0$ e para quaisquer ponto (k, l) temos $\beta(k, l) = (b_1 - 1)k^2 + b_1 b_2 kl + b_1^2 l^2 + 2cb_2 k + 4cb_1 l + 4c^2 > 0$.

Por cima da curva α, nas regiões R_1 e R_5, temo que $\alpha(k, l) > 0$ e por baixo, nas regiões R_2, R_3 e R_4, temos que $\alpha(k, l) < 0$, além disso, por cima da reta r_0, nas regiões R_1, R_2 e R_3, temos que $l + 2c > 0$ e por baixo, nas regiões R_4 e R_5, temos que $l + 2c < 0$. Então, se (k, l) está em R_1, segue que $\Delta(P_S) < 0$ e pelo Lema A.4, $P_S(Z)$ tem duas raízes reais; se (k, l) está em R_2, $\Delta(P_S) > 0$ e ou $P > 0$ ou $N < 0$ e pelo Lema A.4, $P_S(Z)$ não tem raízes reais; se (k, l) está em R_3, tem-se $\Delta(S) > 0$, $P < 0$ e $N > 0$, pelo Lema A.4, $P_S(Z)$ tem quatro raízes reais. ∎

3.4 Interseção da curva de Hugoniot H_{kl} com a superfície sônica S'

Eliminando $\tilde{V}$ e X entre as equações de (2.53) obtemos a equação da superfície S' nas coordenadas KLZ,

$$\begin{aligned}(b_2K + L + 2c)Z^4 - 2(K - b_2L)Z^3 +\\ +((b_1 + 1)(b_2K + (b_2^2 + 2)L + 4c) - 4L)Z^2 +\\ -2(b_1 + 1)(K + b_2L)Z + (b_1 + 1)^2(L + 2c) = 0.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Fazendo constantes $K = k$ e $L = l$ na equação acima obtemos um polinômio em Z,

$$\begin{aligned}P_{S'}(Z) = {}&(b_2k + l + 2c)Z^4 - 2(k - b_2l)Z^3 +\\ &+ ((b_1 + 1)(b_2k + (b_2^2 + 2)l + 4c) - 4l)Z^2 +\\ &- 2(b_1 + 1)(k + b_2l)Z + (b_1 + 1)^2(l + 2c),\end{aligned} \tag{3.17}$$

tal que as raízes reais deste polinômio representam a quantidade de vezes que a curva de Hugoniot H_{kl} intersecta a superfície sônica S'.

Se $b_2k + l + 2c \neq 0$, o polinômio $P_{S'}(Z)$ é de quarto grau, cujo discriminante é

$$\Delta(P_{S'}) = 16(b_1 + 1)^4 \left(b_2^2 + \frac{4}{b_1 + 1}\right)^2 \left[(k + b_2l)^2 + 4l(l + 2c)\right]^2 \gamma(k, l) \tag{3.18}$$

onde $\gamma(k, l) = (b_1 + 1)(-k^2 + b_1b_2kl + 4cb_1l) + b_1^2l^2 + 2c(b_1 + 1)^2(b_2k + 4c)$.

A curva $\Delta(P_{S'}) = 0$ divide o espaço de estados kl em regiões onde $P_{S'}(Z)$ tem a mesma quantidade de raízes reais. A elipse E, cuja equação é $(k + b_2l)^2 + 4l(l + 2c) = 0$, também é solução da equação $\Delta(P_{S'}) = 0$. A curva $\gamma(k, l) = 0$ é uma equação do segundo grau completa em duas variáveis, portanto é uma cônica ou suas degenerações. Cálculos diretos mostram que se $b_2^2 + 4/(b_1 + 1) < 0$ temos $\gamma(k, l) > 0$ e se $b_2^2 + 4/(b_1 + 1) > 0$ temos $\gamma(k, l) = 0$. Neste último caso temos que a equação $\gamma(k, l) = 0$ representa duas retas concorrentes no plano kl, que pode ser escrita como

$$\gamma(k, l) = (\tilde{Z}_1k - b_1l - 2c(b_1 + 1))(\tilde{Z}_2k - b_1l - 2c(b_1 + 1)) = 0$$

onde $\tilde{Z}_1 < \tilde{Z}_2$ são as raízes do polinômio $q(Z)$ dado por (2.52). Identifiquemos estas duas retas como:

$$D_1 \text{ a reta } \tilde{Z}_1k - b_1l - 2c(b_1 + 1) = 0 \tag{3.19}$$

e

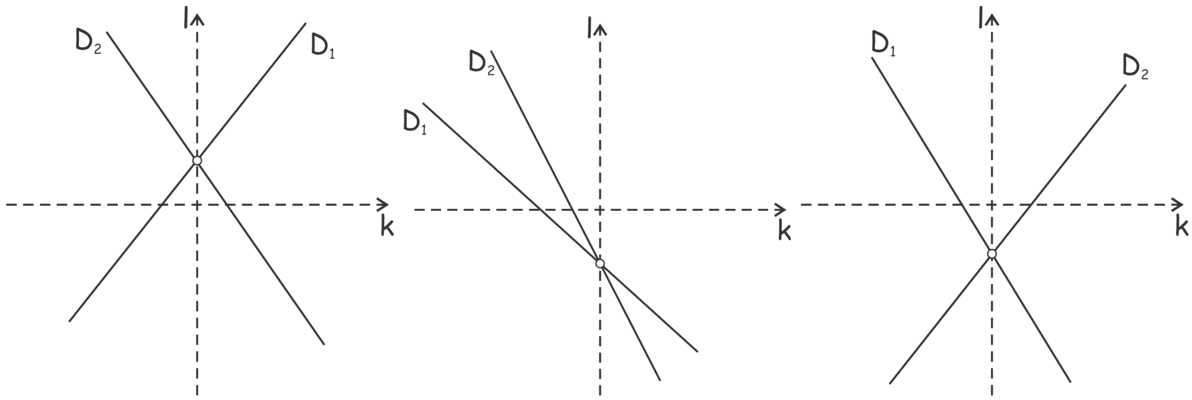
$$D_2 \text{ a reta } \tilde{Z}_2k - b_1l - 2c(b_1 + 1) = 0, \tag{3.20}$$

veja que estas retas são a projeção da dupla sônica (contato duplo) definida por (2.58).

Observação 6. As retas D_1 e D_2 não existem para o caso I definido na seção 3.3.

A reta D_1 intersecta a reta D_2 no ponto $(k, l) = (0, -2c(b_1 + 1)/b_1)$, Ou seja a interseção das retas é um ponto do eixo-l. Se $b_1 \in (-1, 0)$ tal ponto de interseção está acima do eixo-k e em outro caso está por baixo.

Já que $\tilde{Z}_1\tilde{Z}_2 = -b_1 - 1$, nos Casos II_b e II_c da Figura 4, tem-se $0 < \tilde{Z}_1 < \tilde{Z}_2$ e nos outros casos, $\tilde{Z}_1 < 0 < \tilde{Z}_2$.



(a) Caso II_a. (b) Casos II_b e II_c. (c) Casos III e IV.

Figura 15 – Representação das retas dupla sônica (contato duplo) D_1 e D_2 definidas em (2.58) no espaço kl.

Como ilustrado na Figura 15, no Caso II_a a inclinação de D_1 é positiva e a inclinação de D_2 é negativa. No Casos II_b e II_c, as retas D_1 e D_2, têm inclinação negativa, sendo D_2 mais inclinada do que D_1. No Casos III e IV, a inclinação de D_1 é negativa e a inclinação de D_2 é positiva.

Por outro lado, as retas D_1 e D_2 são tangentes a elipse E em dois pontos dada pelas coordenadas

$$k = \frac{c\left(b_2(b_1+1)^2(b_2^2 + \frac{4}{b_1+1}) \pm (b_2^2(b_1+1) + 2b_1 + 4)\sqrt{(b_1+1)^2(b_2^2 + \frac{4}{b_1+1})}\right)}{(b_1+1)^2 b_2^2 + (b_1+2)^2},$$
$$l = \frac{-c(b_1+1)\left(b_2^2(b_1+1) + 2b_1 + 4 \pm b_2\sqrt{(b_1+1)^2(b_2^2 + \frac{4}{b_1+1})}\right)}{(b_1+1)^2 b_2^2 + (b_1+2)^2}.$$

.

A partir de agora apresentaremos, sem demonstração, os resultados obtidos na Seção 3 de [14] que se referem à decomposição do plano kl em regiões de acordo com o número de interseções da curva de Hugoniot H_{kl} com a superfície sônica S'.

Considerando o Caso I definido na seção 3.3, a curva $\Delta(P_{S'}) = 0$ é representada na Figura 16.

Proposição 3.7. *Considere* (b_1, b_2) *na região* I *da Figura 4. Então*

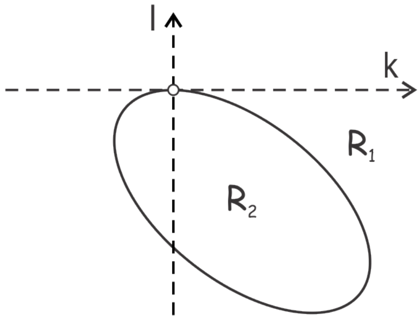
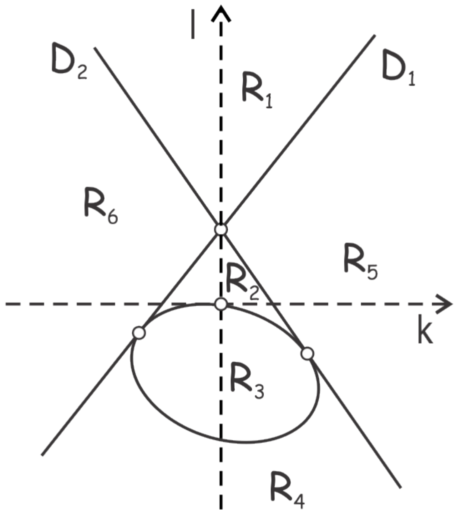


Figura 16 – Representação no espaço kl da curva $\Delta(P_{S'}) = 0$ para o Caso I.

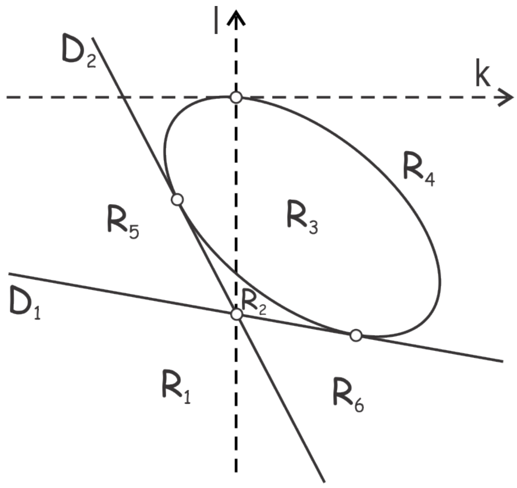
1. *as curvas de Hugoniot H_{kl}, para (k, l) na região R_1 da Figura 16 intersectam a superfície sônica S' em quatro pontos distintos;*

2. *as curvas de Hugoniot H_{kl}, para (k, l) na região R_2 da Figura 16 não intersectam a superfície sônica S'.*

Considerando o caso II, a curva $\Delta(P_{S'}) = 0$ tem duas possíveis configurações como mostra a Figura 17.



(a) Caso II_a.



(b) Casos II_b e II_c.

Figura 17 – Representação no espaço kl da equação $\Delta(P_{S'}) = 0$ definida em (3.18).

Proposição 3.8. *Considere (b_1, b_2) na região II da Figura 4. Então*

1. *as curvas de Hugoniot H_{kl}, para (k, l) nas regiões R_1 e R_4 intersectam a superfície sônica S' em quatro pontos distintos;*

2. *as curvas de Hugoniot H_{kl}, para (k, l) nas regiões R_2 e R_3 não intersecta a superfície sônica S';*

3. *as curvas de Hugoniot H_{kl}, para (k, l) nas regiões R_5 e R_6 intersectam a superfície sônica S' em dois pontos distintos.*

Para os casos III e IV, a curva $\Delta(P_{S'}) = 0$ é representada na Figura 18.

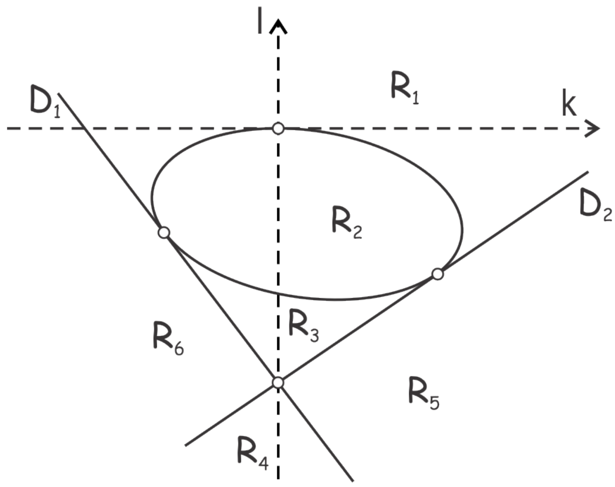


Figura 18 – Representação no espaço kl da equação $\Delta(P_{S'}) = 0$ definida em (3.18) para os Casos III e IV.

Proposição 3.9. *Considere* (b_1, b_2) *na região* III *ou* IV *da Figura 4. Então*

1. *as curvas de Hugoniot* H_{kl}*, para* (k, l) *nas regiões* R_1*,* R_2 *e* R_4 *da Figura 18 não intersecta a superfície sônica* S'*;*

2. *as curvas de Hugoniot* H_{kl}*, para* (k, l) *na região* R_3 *da Figura 18 intersectam a superfície sônica* S' *em quatro pontos distintos;*

3. *as curvas de Hugoniot* H_{kl}*, para* (k, l) *nas regiões* R_5 *e* R_6 *da Figura 18 intersectam a superfície sônica* S' *em dois pontos distintos.*

4 Decomposição da Variedade de Ondas M^3

Nesse capítulo reobtemos a decomposição da variedade de ondas de [13] nas variáveis K, L, $\tilde{V}$ e Z. Considerando que usaremos K, L e Z como coordenadas da variedade de ondas no Capítulo 5, ao final entenderemos essa decomposição nas novas coordenadas.

Sabe-se que a Variedade de Ondas M^3 é dividida em duas ou doze regiões, [13]. O número de regiões depende da quantidade de raízes do polinômio $p(Z)$ definido em (2.10). Se $p(Z)$ tem raízes reais teremos doze regiões caso contrário teremos duas regiões. Já que dG, $d\Theta$ e dK são linearmente independente podemos definir uma folheação regular de M^3 sem introduzir novas singularidades, fixando K. Cada folha regular, M_k, é uma superfície no espaço $(K, L, \tilde{V}, X, Z)$ definida por

$$\begin{aligned} ZK - b_1 L + 2p(Z)\tilde{V} - 2c &= 0 \\ -L + 2\tilde{V} + ZX &= 0 \\ K &= k. \end{aligned} \tag{4.1}$$

A superfície M_k é coberta por curvas de Hugoniot H_{kl}, com k fixado e l variando.

Resolvendo o sistema (4.1) para $L = l$ obtemos

$$\frac{Zp(Z)X - Zk + 2c}{p(Z) - b_1} = l. \tag{4.2}$$

Logo, cada curva de Hugoniot em M_k é uma curva de nível da função $L(X, Z)$ que passamos a analisar em seguida.

Calculando as derivadas parciais de $L = l$ na Equação (4.2) obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \frac{Zp(Z)}{p(Z) - b_1}, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial Z} = \frac{p(Z)(p(Z)X - k - b_1 X) + p'(Z)(b_1 ZX + Zk - 2c) - b_1 k}{(p(Z) - b_1)^2}. \tag{4.4}$$

Portanto as singularidades destas curvas H_{kl} são os pontos críticos em que $Zp(Z) = 0$ e

$$X = \frac{kp(Z) + (2c - kZ)p'(Z) + b_1 k}{(Z^2 + b_2 Z - 1)p(Z) + b_1 Zp'(Z)}. \tag{4.5}$$

Assim os pontos singulares ocorrem em $Z_0 = 0$, $Z = Z_1$, $Z = Z_2$ em cada M_k, onde Z_1 e Z_2 são raízes de $p(Z)$. Calculando as segundas derivadas obtemos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial X^2} = 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial Z \partial X} \frac{\partial^2 L}{\partial Z \partial X} > 0, \tag{4.7}$$

para qualquer Z e X. Assim, concluímos que os pontos singulares de H_{kl} em M_k são selas como ilustrado na Figura 19. Também podemos observar que os pontos singulares são interseções transversais das retas de bifurcação secundária r_i $(i = 0, 1, 2)$ com cada M_k.

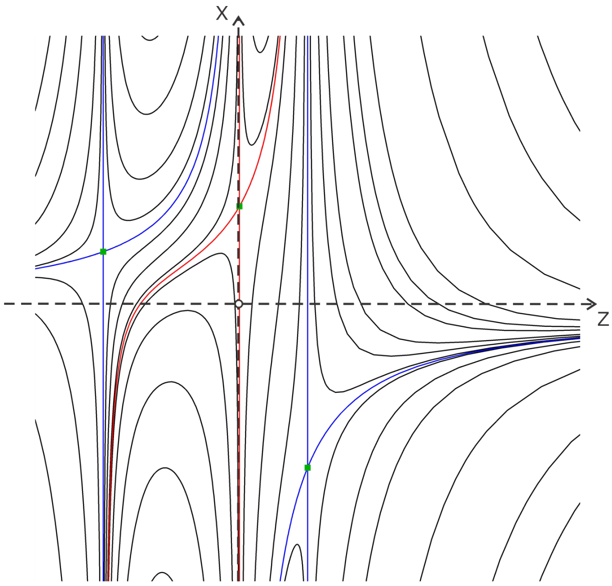


Figura 19 – Superfície M_k folheada por curvas de Hugoniot para os Casos I, II e III definidos na seção 3.3.

Para estudar as conexões entre as singularidades de $L|_{M_k}$, escrevemos a Equação (4.2) como

$$Zp(Z)X = Zk + (p(Z) - b_1)l - 2c. \tag{4.8}$$

Na Equação (4.8) vemos que a linha $\{Z = 0\}$ é uma curva de Hugoniot se e somente se $l + 2c = 0$. Então a curva de Hugoniot que passa pelo ponto singular com $Z = 0$ em cada M_k é formado pela linha $\{Z = 0\}$ e a curva

$$X = \frac{k - 2c(Z + b_2)}{p(Z)}, \tag{4.9}$$

a qual denotaremos por s_k^0. A curva s_k^0 da superfície M_k intersecta a linha $\{Z = 0\}$ no ponto singular $(X_0, Z_0) = ((k - 2cb_2)/(b_1 - 1), 0)$.

Da mesma forma, a reta $Z = Z_i$, $i = 1, 2$ onde Z_i é uma raiz de $p(Z)$, é uma curva de Hugoniot se e somente se $Z_i k - b_1 l - 2c = 0$, para cada i. Segue que a curva de Hugoniot que passa pelo ponto singular $r_k^i = r_i \cap M_k$ é formado pela reta $Z = Z_i$, $(i = 1, 2)$ e pela curva

$$X = \frac{b_1 k + (Z - Z_j)(Z_i k - 2c)}{b_1 Z(Z - Z_j)}, \tag{4.10}$$

a qual denotaremos por s_k^i. O ponto singular r_k^i tem coordenadas

$$(X_i, Z_i) = ((b_1 k + (Z_i - Z_j)(Z_i k - 2c))/(b_1 Z_i (Z_i - Z_j)), Z_i)\,, \quad i \neq j.$$

Note que, igualando as equações (4.9) e (4.10) e considerando $p(Z) = (Z - Z_i)(Z - Z_j)$, obtemos que s_k^0 e s_k^i coincidem somente quando

$$k_i = k = \frac{-2c(b_1 - 1)}{Z_i}, \tag{4.11}$$

para cada $i = 1, 2$, como ilustrado na Figura 20. Note que as curvas s_k^i e s_k^j coincidem apenas quando $k = 0$.

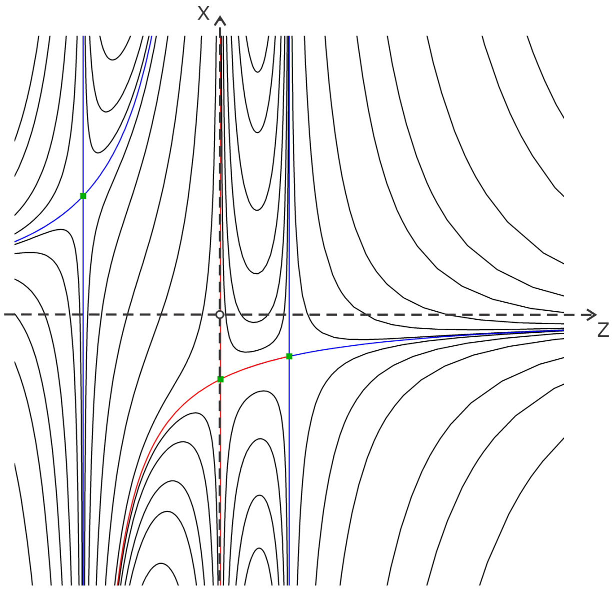


Figura 20 – Folheação da superfície M_k, quando $k = k_1$ para os Casos I, II e III definidos na seção 3.3.

Para k variando, a reta $Z = Z_i$, $i = 0, 1, 2$ gera um plano denotado por P_i em M^3 e o gráfico de s_k^i gera uma superfície denotada por Sep^i. O estudo de Sep^i e suas interseções com P_j e Sep^j é apresentado em [13], onde Sep^i e Sep^j se intersectam transversalmente, assim como P_i e Sep^j.

No próximo capítulo, estudaremos arcos de curva de Hugoniot admissíveis usando as variáveis K, Z, L. Considerando que usaremos a decomposição descrita acima para distinguir regiões com os chamados arcos locais e não-locais a serem definidos mais adiante. Vamos entender essa decomposição nas variáveis K, Z, L.

Começamos definindo a função $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ dada por

$$\Phi(K, Z, L) = (K, L, X(K, Z, L), \tilde{V}(K, Z, L), Z)$$

onde

$$X(K, Z, L) = \frac{ZK + (p(Z) - b_1)L - 2c}{Zp(Z)}, \tag{4.12}$$

$$\tilde{V}(K, Z, L) = \frac{-ZK + b_1 L + 2c}{2p(Z)}, \tag{4.13}$$

com $Z \neq 0$ e $p(Z) \neq 0$ são obtidas de (2.12) e (2.13). A imagem de Φ representa a Variedade de Ondas M^3 em coordenadas $(K, L, X, \tilde{V}, Z)$. Como a derivada de Φ tem posto 3, cada ponto da Variedade de Ondas M^3 é representado por um único ponto nas coordenadas (K, Z, L). Chamaremos o espaço gerado pelas coordenadas (K, Z, L) de *Espaço de Estados Estendido ou Espaço Estendido.*

Nas próximas duas seções estudaremos o espaço de estados estendido relacionado aos casos definidos na seção 3.3.

4.1 Espaço de estados estendido para o Caso IV

A identificação de regiões de admissibilidade de arcos de curvas de choque é mais simples quando consideradas no Espaço de Estados Estendido. Para melhor entender a divisão da Variedade de Ondas nesse espaço, consideramos o caso IV introduzido na seção 3.3 para os parâmetros kl (raízes de $p(Z)$ complexas). Neste caso a Variedade de Ondas é dividida somente pelo plano P_0 e pela Superfície Sep^0. No Espaço de Estados Estendido essas superfícies são representadas pelos planos $\mathcal{P}_0 = \Phi^{-1}(P_0) = \{(K, Z, L) : Z = 0\}$ e $\mathcal{S}ep^0 = \Phi^{-1}(S^0) = \{(K, Z, L) : L + 2c = 0\}$. A reta de bifurcação secundária r_0 nesse espaço é representada por $\rho_0 = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{S}ep^0$, conforme ilustrado na Figura 21.

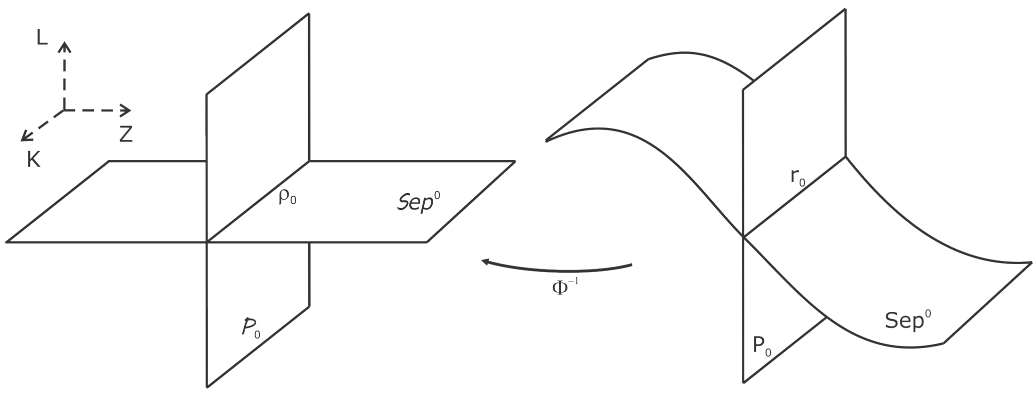


Figura 21 – Variedade de Ondas M^3 no espaço estendido para o Caso IV.

Notação:

Denotaremos por $\mathcal{M}_k$, $\mathcal{P}_i$, $\mathcal{S}ep^i$ e ρ_i $(i = 0, 1, 2)$ os conjuntos $\Phi^{-1}(M_k)$, $\Phi^{-1}(P_i)$, $\Phi^{-1}(Sep^i)$ e $\Phi^{-1}(r_i)$ $(i = 0, 1, 2)$, respectivamente.

Como a superfície M_k é uma faixa de Möbius na variedade de ondas M^3 (ver [13]), esta superfície é representada nas coordenadas (Z, L) pela imagem inversa de Φ como $\mathcal{M}_k = \{(K, Z, L) : K = k\}$. Intersectando o plano $\mathcal{M}_k$ com o espaço de estados estendido obtemos a reta $\{Z = Z_0 = 0\} = \mathcal{M}_k \cap \mathcal{P}_0$ e o segmento de reta $\tau_k^0 = \mathcal{M}_k \cap \mathcal{S}ep^0$. Logo, o segmento de reta $\{Z = Z_0 = 0\}$ e a reta τ_k^0 dividem o plano $\mathcal{M}_k$ em 2 regiões (em coordenadas Z e L).

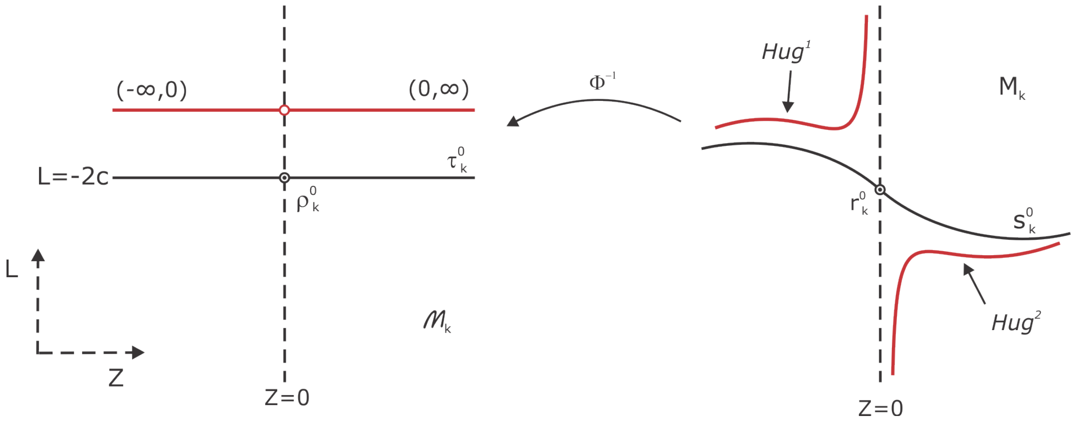


Figura 22 – Curva de Hugoniot no plano $\mathcal{M}_k$ e na superfície M_k para o Caso IV.

Observamos na Figura 22 que, se fixarmos $K = k$ e $L = l$, temos duas semirretas (k, Z, l), $Z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, dentro do plano $\mathcal{M}_k$ cuja imagem pela aplicação Φ é uma curva de Hugoniot dentro da superfície M_k na Variedade de Ondas M^3, ou seja, o conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, representa uma curva de Hugoniot, sendo que o intervalo $(-\infty, 0)$ corresponde a parte Hug^1 e o intervalo $(0, \infty)$ corresponde a parte Hug^2 (lembre-se que $-\infty$ é colado com $+\infty$, neste caso a curva de Hugoniot tem apenas uma componente). Além disso, observamos que esta reta não intersecta a reta $\{Z = 0\}$, caso contrário existiria uma curva de Hugoniot intersectando $\{Z = 0\}$ que não pertence a s_k^0; visto de outro modo, se Z se aproxima de zero a curva de Hugoniot tende para o infinito na Variedade de Ondas M^3. Já que $Z \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a reta que representa a curva de Hugoniot é continua no infinito. Portanto, observando a Figura 23 fica claro que as curvas de Hugoniot que estão acima da reta τ_k^0 estão em uma das duas regiões da Variedade de Ondas M^3 e as que estão abaixo pertencem a outra região, ou seja, quando o ponto (k, l) do espaço de estados KL atravessa a reta τ_k^0, a curva de Hugoniot muda de região na Variedade de Ondas M^3.

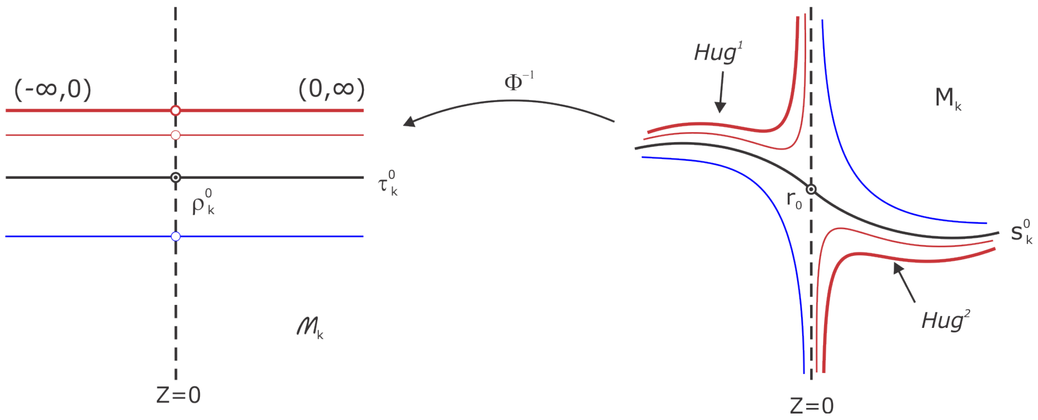


Figura 23 – Curvas de Hugoniot no plano $\mathcal{M}_k$ e na superfície M_k para o Caso IV.

Observe na Figura 24 que a elipse E dada por $(k+b_2l)^2+4l(l+2c)=0$ (ver (2.47)), no espaço de estados estendido é vista como o cilindro $E\times\mathbb{R}$, este cilindro é tangente ao plano $\mathcal{S}ep^0$ ao longo de uma reta e separa a região hiperbólica da região elíptica. Além disso, este cilindro contém a curva de coincidência $\mathcal{E}$, onde os autovalores de $DF(\tilde{W})$ coincidem.

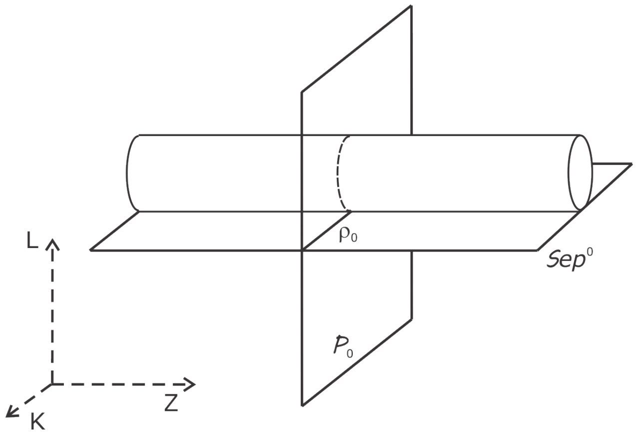


Figura 24 – Cilindro $E\times\mathbb{R}$ no espaço estendido para o Caso IV.

4.2 Espaço de estados estendido para os casos I, II e III

Nos casos I, II e III definidos na seção 3.3, considerando Z_1, Z_2 raízes reais de $p(Z)$ a Variedade de Ondas M^3 é dividida pelos planos P_i e pelas superfícies Sep^i, com $i=0,1,2$. Então, no espaço estendido, P_0, P_1 e P_2 são dados respectivamente por $\mathcal{P}_0=\Phi^{-1}(P_0)=\{(K,Z,L):Z=0\}$, $\mathcal{P}_1=\Phi^{-1}(P_1)=\{(K,Z,L):Z=Z_1\}$ e $\mathcal{P}_2=\Phi^{-1}(P_2)=\{(K,Z,L):Z=Z_2\}$; enquanto as superfícies Sep^0, Sep^1 e Sep^2 são representadas nos casos I, II e III_c (considerando $Z_1<0<Z_2$), pelos conjuntos

$$\mathcal{S}ep^0=\Phi^{-1}(Sep^0)=\{(K,Z,L):L+2c=0,Z\in(Z_1,Z_2)\},$$

$$\mathcal{S}ep^1=\Phi^{-1}(Sep^1)=\{(K,Z,L):Z_1K-b_1L-2c=0,Z\in(-\infty,0)\cup(Z_2,\infty)\}$$

e

$$\mathcal{S}ep^2=\Phi^{-1}(Sep^2)=\{(K,Z,L):Z_2K-b_1L-2c=0,Z\in(-\infty,Z_1)\cup(0,\infty)\},$$

respectivamente (Ver Figura 25). Nos casos III_a e III_b (considerado $Z_1<Z_2<0$), essas superfícies são representadas por

$$\mathcal{S}ep^0=\Phi^{-1}(Sep^0)=\{(K,Z,L):L+2c=0,Z\in(-\infty,Z_1)\cup(Z_2,\infty)\},$$

$$\mathcal{S}ep^1=\Phi^{-1}(Sep^1)=\{(K,Z,L):Z_1K-b_1L-2c=0,Z\in(-\infty,Z_2)\cup(0,\infty)\}$$

e

$$\mathcal{S}ep^2=\Phi^{-1}(Sep^2)=\{(K,Z,L):Z_2K-b_1L-2c=0,Z\in(Z_1,0)\},$$

respectivamente. Observe que, o plano $\mathcal{P}_i$ intersecta apenas a superfícies $\mathcal{S}ep^i$ em $\rho_i = \mathcal{P}_i \cap \mathcal{S}ep^i$. Logo, $\mathcal{S}ep^i$ é projetado no espaço de estados KL como r_i $(i = 0, 1, 2)$. Também, observe que entre os planos $\mathcal{S}ep^i$ e $\mathcal{S}ep^j$, $i \neq j$, existem quatro regiões difeomorfas a $\mathbb{R}^3$. Cada uma destas regiões correspondem às regiões na Variedade de Ondas M^3 difeomorfas a $\mathbb{R}^3$, onde as componentes das curvas de Hugoniot são difeomorfas a $\mathbb{R}$.

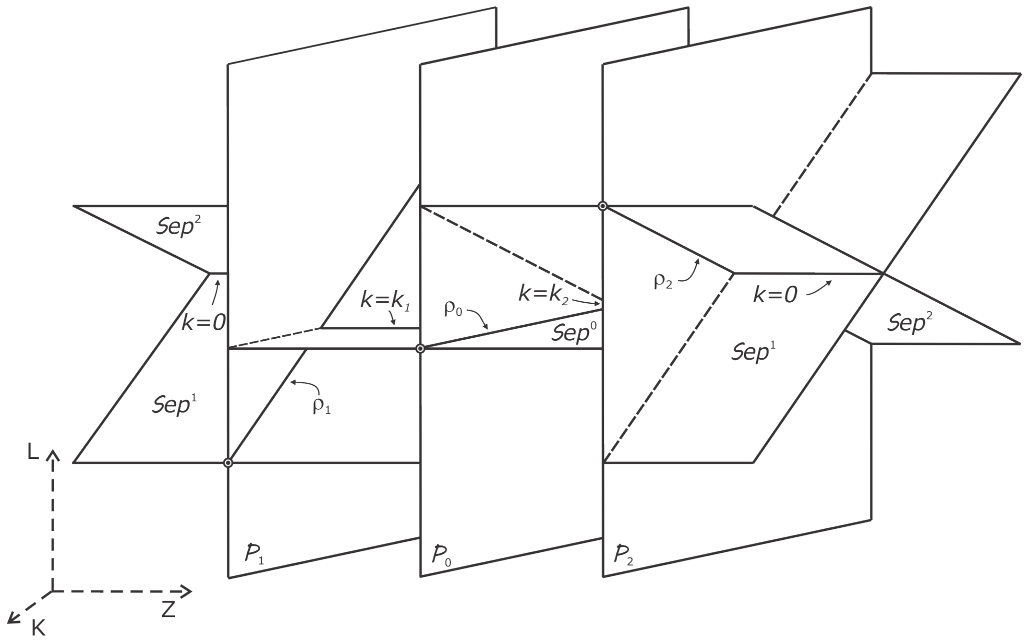


Figura 25 – Divisão da Variedade $\Phi^{-1}(M^3)$ em coordenadas (K, L, Z) para os Casos I e II.

Agora, para cada k fixo, o plano $\mathcal{M}_k$ representa a imagem do hiperplano (em $\mathbb{R}^5$) $K = k$ pela função Φ^{-1}. Seguindo a notação acima temos $\mathcal{M}_k = \Phi^{-1}(M_k) = \{(K, Z, L) : K = k\}$. No plano $\mathcal{M}_k$ temos as retas $\{Z = Z_i\} = \mathcal{M}_k \cap \mathcal{P}_i$ e segmentos de retas $\tau_k^i = \mathcal{M}_k \cap \mathcal{S}ep^i$. Então, os segmentos de retas $\{Z = Z_i\}$ e as retas τ_k^i (para $i = 0, 1, 2$) dividem o plano $\mathcal{M}_k$ (em coordenadas Z e L) em 9 regiões (ver Figura 26). Note que existem três regiões entre cada par de retas verticais e que a interseção de $\{Z = Z_i\}$ com τ_k^i é parte da bifurcação secundária, que corta transversalmente o plano $\mathcal{M}_k$. Se variarmos k, os segmentos de reta τ_k^i (para $i = 0, 1, 2$) do plano $\mathcal{M}_k$ variam, por exemplo na Figura 26, τ_k^0 poderia se deslocar para cima e τ_k^2 poderia se deslocar para baixo chegando num momento a coincidir para Z entre $\{Z = 0\}$ e $\{Z = Z_2\}$ (de (4.11) isto ocorre quando $k = k_2$). Neste momento no espaço de estados KL ocorre a interseção das retas ρ_0 e ρ_2. No espaço estendido o plano $\mathcal{S}ep^0$ intersecta o plano $\mathcal{S}ep^2$ e na variedade de Onda M^3 temos a ligação entre dois pontos singulares; assim se k continuar variando, o plano $\mathcal{M}_k$ intersecta uma nova região no espaço estendido.

Note que, nos casos I, II e III da seção 3.3 a reta (k, Z, l), representa uma curva de Hugoniot no plano $\mathcal{M}_k$ no espaço estendido (coordenadas (K, Z, L)), além disso, observamos que esta reta não deve intersectar os planos $Z = Z_i$ $(i = 0, 1, 2)$, caso contrário

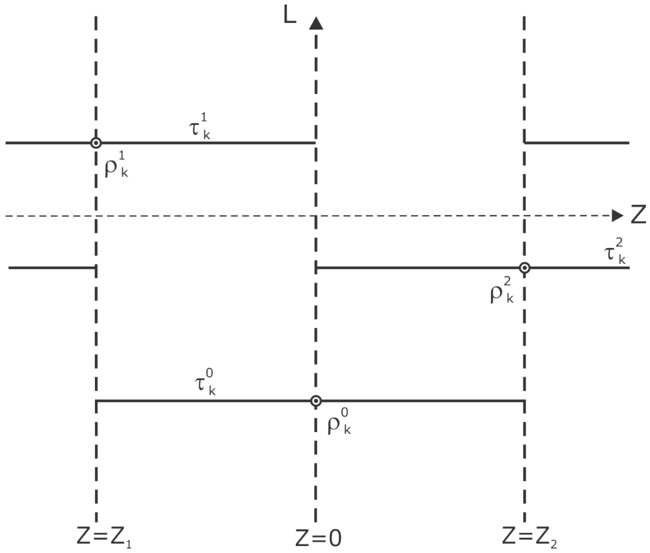


Figura 26 – Plano $\mathcal{M}_k = \Phi^{-1}(M_k)$, nas coordenadas Z e L.

existiria uma curva de Hugoniot intersectando $\mathcal{P}_i$ $(i = 0, 1, 2)$ que não pertencem a $\mathcal{S}ep^i$ $(i = 0, 1, 2)$, isto é, para Z se aproximando de $Z = Z_i$ $(i = 0, 1, 2)$ a curva de Hugoniot tende para infinito na Variedade de Ondas M^3 (ver Figura 27). Assim, nos casos I, II e III, para cada par (k, l) fixo, a curva de Hugoniot H_{kl} possui três componentes, cada uma delas pertencente a uma região difeomorfa à $\mathbb{R}^3$ diferente.

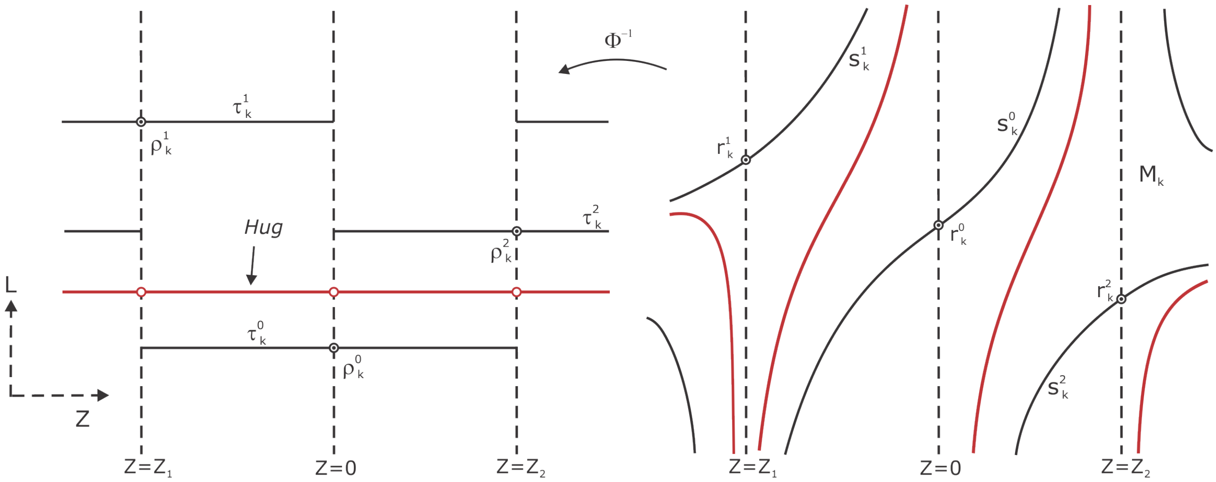


Figura 27 – Curva de Hugoniot no plano $\mathcal{M}_k$ e na superfície M_k para os Casos I e II.

Observação 7. Nos casos em que a variedade de ondas é dividida em 12 regiões (casos I, II e III), se fixarmos apenas k, l para considerar a curva de Hugoniot, esta curva pode coincidir com τ_k^0, τ_k^1 ou τ_k^2, para algum intervalo de Z. (Ver Figura 28)

Como está ilustrado na Figura 29, nos casos I, II e III, o cilindro $E \times \mathbb{R}$ tangencia ao planos $\mathcal{S}ep^0$, $\mathcal{S}ep^1$ e $\mathcal{S}ep^2$ ao longo de retas cuja projeção no espaço KL torna-se pontos de tangencia entre as retas r_i $(i = 0, 1, 2)$ e a Elipse E.

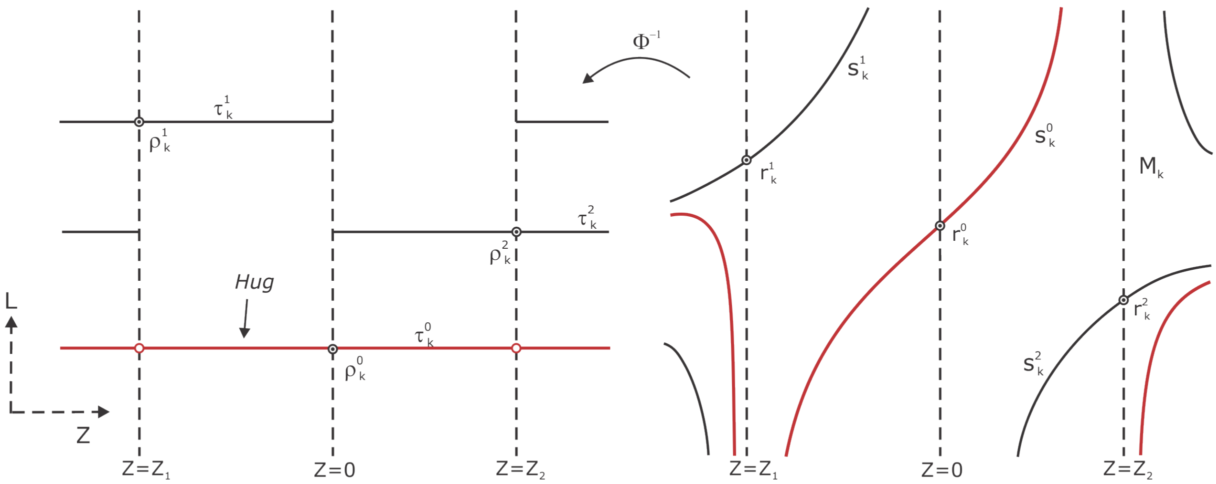


Figura 28 – Curva de Hugoniot no plano $\mathcal{M}_k$ e na superfície M_k que coincide com s_k^0.

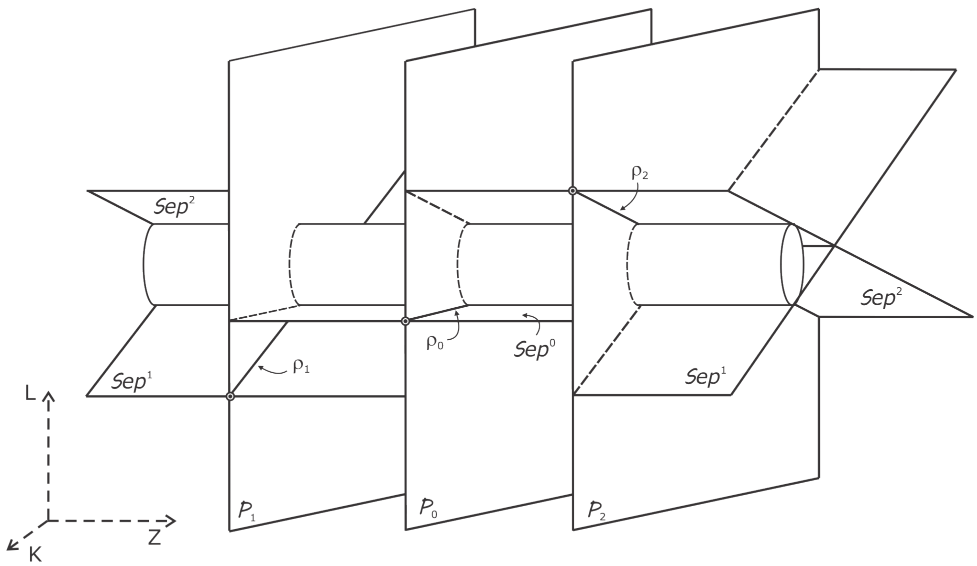


Figura 29 – Cilindro $E \times \mathbb{R}$ no espaço estendido para os Casos I e II.

5 Choques de Lax locais e não-locais

Neste capítulo apresentamos uma análise de choques locais e não-locais no espaço de estados estendido.

5.1 Considerações Gerais

Choques admissíveis na variedade de ondas, para sistemas de duas leis de conservação, foram introduzidos em [17]. Foram considerados apenas arcos de curvas de choque que se iniciam na superfície característica, C. Um tal arco de curva de choque é denominado *choque local*. Neste capítulo, além de choque local, estudaremos arco de curva de choque que começa na superfície sônica S', denominado *choque não-local*.

A análise feita nos capítulos anteriores são utilizadas neste capítulo, para responder à pergunta: em quais regiões da variedade de ondas M^3 existem choques locais e choques não-locais? Usaremos o espaço de estados estendido como sistema de coordenadas. Nestas coordenadas as equações que representam as superfícies característica C (eq. (2.21)), sônica S (eq. (3.1)) e sônica S' (eq. (3.16)) são mais facilmente manipuladas. A Figura 30 ilustra como essas superfícies separam regiões na Variedade de Ondas M^3. Ilustra também como outros ingredientes importantes em nosso estudo estão posicionados na variedade de ondas.

No espaço de estados estendido, uma curva de Hugoniot é o conjunto de pontos (K, Z, L) tal que $K = k$, $L = l$, com k e l fixos, e qualquer $Z \in \mathbb{R} \setminus \{0, Z_1, Z_2\}$, com $Z_1 < Z_2$ raízes reais do polinômio $p(Z)$, como vimos no Capítulo 4.

Notação:

Denotaremos esta curva de Hugoniot por H_{kl}.

Eliminando $\tilde{V}$ de (2.49), utilizando (2.12), temos a função velocidade σ sobre o espaço de estados estendido dada pela expressão

$$\sigma(K, Z, L) = \frac{q(Z)(ZK - b_1 L) + 2cb_1(Z^2 + b_1 + 1)}{2b_1 Z p(Z)} + \frac{m}{b_1}, \tag{5.1}$$

onde $p(Z)$ e $q(Z)$ são dados em (2.10) e (2.52), respectivamente, e $m = (b_1+1)(a_2b_2+a_4)-a_1$. Observe que a função σ é continua para todos os pontos (K, Z, L) tais que $Zp(Z) \neq 0$. Agora, usando (5.1) definimos a função velocidade σ_{kl} ao longo da curva de Hugoniot H_{kl} como

$$\sigma_{kl}(Z) = \sigma(k, Z, l). \tag{5.2}$$

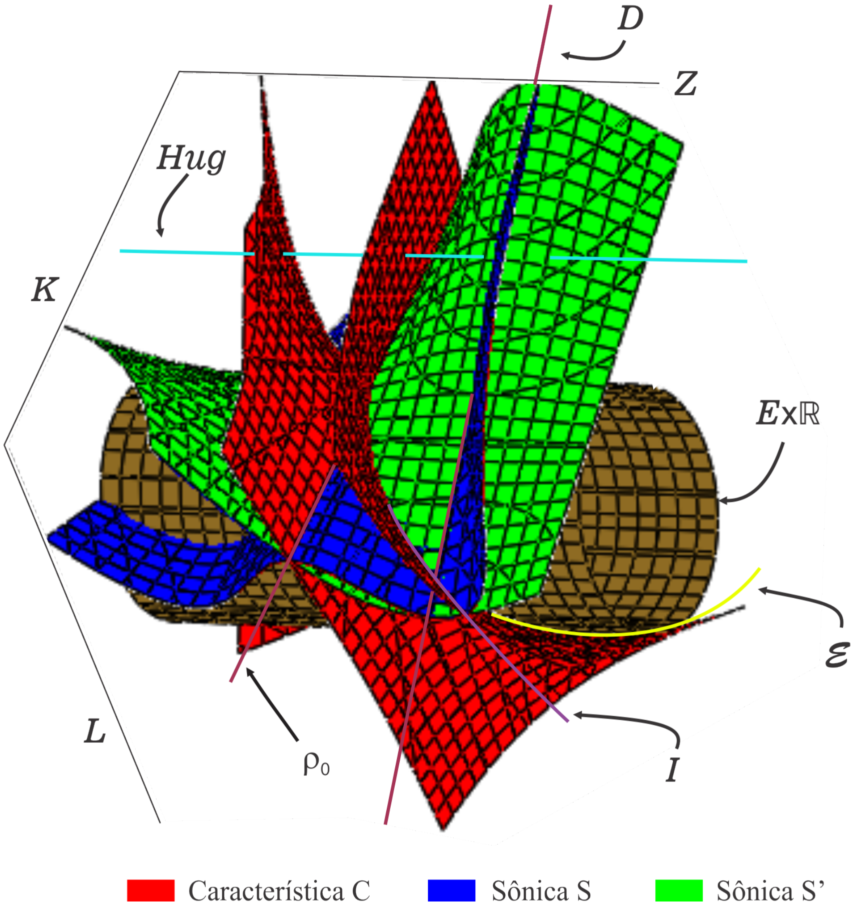


Figura 30 – Superfícies C, S e S' no espaço de estados estendido KZL para o caso IV da seção 3.3.

A função σ_{kl} tem assíntota nos planos $Z = 0$, $Z = Z_i$, $i = 1, 2$, logo, quando a curva de Hugoniot $H_{kl}(Z)$ se aproxima para o plano $\mathcal{P}_i$ $(i = 0, 1, 2)$ o valor da função velocidade tende para $+\infty$ ou $-\infty$.

A Observação 5 (pg. 29) mostra que em um ponto da superfície característica C a velocidade ao longo da curva de Hugoniot coincide com uma das velocidades características (autovalores da matriz derivada da função fluxo), isto é, dado (k, l) Z_s, existem $Z_f \in \mathbb{R} \setminus \{0, Z_1, Z_2\}$ tais que $\sigma_{kl}(Z_s) = \lambda_s(k, l, Z_s) < \sigma_{kl}(Z_f) = \lambda_f(k, l, Z_f)$. A curva de coincidência $\mathcal{E}$ separa a superfície característica em duas subvariedades, a característica lenta, denotada por C_s, associada ao autovalor λ_s e a característica rápida, denotada por C_f, associada ao autovalor λ_f.

Por outro lado, derivando σ_{kl} com relação à Z, temos

$$\frac{d\sigma_{kl}}{dZ}(Z) = \frac{P_S(Z)}{2b_1 Z p(Z)}, \tag{5.3}$$

onde $P_S(Z)$ é dado em (3.2) e $p(Z)$ é dado em (2.10). Lembrando que as raízes de $P_S(Z)$ são os pontos de interseção da curva de Hugoniot com a superfície sônica S, segue que a velocidade σ_{kl} atinge valor extremo ao longo da curva de Hugoniot H_{kl} ao intersectar a superfície S para algum valor $Z = Z_S$.

Seguiremos a Seções 2 e 3 de [17], para definir arcos admissíveis de curvas de Hugoniot. Por completeza apresentamos um resumo do conteúdo dessas seções.

A partir de agora consideramos as seguintes hipóteses adicionais:

Hipótese 2. Consideramos somente pontos $(k, l, \tilde{V}, X, Z)$ na variedade de ondas, M^3, que estão na região hiperbólica, isto é, pontos tais que sua curva de Hugoniot H_{kl} intersecta a superfície característica C.

Hipótese 3. Consideramos somente curvas de Hugoniot cujas componentes são difeomorfos a $\mathbb{R}$. Como consequência não consideramos curvas de Hugoniot que intersectam as retas de bifurcação secundária.

Abordaremos agora as curvas de Hugoniot$'$ no espaço estendido KZL. Eliminando $\tilde{V}$ e X na Equação (2.38) definimos a função $(K', Z', L') : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre o espaço de estados estendido por

$$\begin{cases} K'(K,Z,L) &= [Z(p(Z)-2b_1)K - 2b_1(p(Z)-b_1)L + 4b_1c]/[Zp(Z)] = k' \\ Z'(K,Z,L) &= Z \\ L'(K,Z,L) &= [-2ZK - (p(Z)-2b_1)L + 4c]/p(Z) = l' \end{cases} \tag{5.4}$$

onde $p(Z)$ é dados em (2.10). Observe que (5.4) é inversível e sua inversa é dada por

$$\begin{cases} K(K',Z',L') &= [Z'(p(Z')-2b_1)K' - 2b_1(p(Z')-b_1)L' + 4b_1c]/[Z'p(Z')] \\ Z(K',Z',L') &= Z' \\ L(K',Z',L') &= [-2Z'K' - (p(Z')-2b_1)L' + 4c]/p(Z') \end{cases} \tag{5.5}$$

onde $p(Z')$ é dado em (2.10).

Fixados $K = k$, $L = l$ e $Z = \overline{Z}$ temos que $(k', \overline{Z}, l')$ representa um ponto da curva de Hugoniot$'$ H'_{kl} que passa pelo ponto $(k, \overline{Z}, l)$ de H_{kl}. Na variedade de ondas as curvas H_{kl} e H'_{kl} apenas se intersetam para algum valor de $Z = \overline{Z}$.

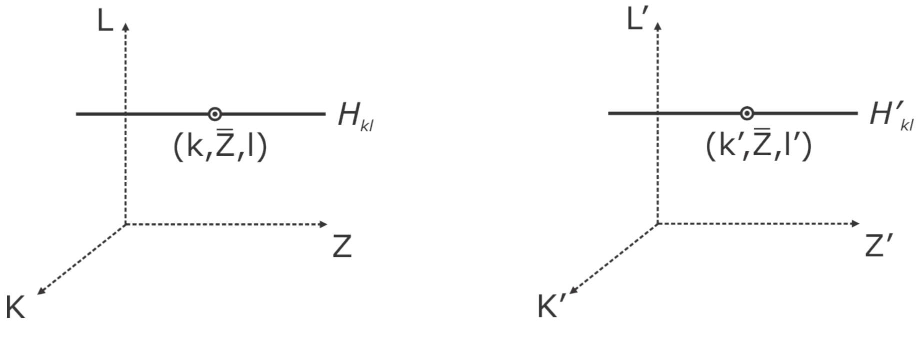


Figura 31 – Representação da relação entre H_{kl} e H'_{kl} dada por (5.4).

Substituindo (5.5) em (5.1) a função velocidade nas coordenadas (K', Z', L') tem a mesma expressão que no espaço estendido, isto é,

$$\sigma(K', Z', L') = \frac{q(Z')(Z'K' - b_1L') + 2c(Z'^2 + b_1 + 1)}{2b_1Z'p(Z')} + \frac{m}{b_1}. \tag{5.6}$$

Então, podemos definir a função velocidade ao longo da curva de Hugoniot′ $H'_{k'l'}$ como

$$\sigma_{k'l'}(Z) = \sigma(k', Z, l'); \forall Z \in \mathbb{R} \backslash \{0, Z_1, Z_2\}.$$

Dados $Z'_s, Z'_f \in \mathbb{R}\backslash\{0, Z_1, Z_2\}$ os números $\sigma_{k'l'}(Z'_s) < \sigma_{k'l'}(Z'_f)$ são os valores da função velocidade na interseção da curva de Hugoniot′ $H'_{k'l'}$ com a superfície característica C. Segue que $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = \lambda_s(k', Z'_s, l')$ e $\sigma_{k'l'}(Z'_f) = \lambda_f(k', Z'_f, l')$.

Substituindo a inversa de (K', Z, L') em (2.21) temos

$$ZK' + (p(Z) - b_1)L' - 2c = 0, \tag{5.7}$$

como a equação da superfície característica nas coordenadas (K', Z, L'). Observe que as equações (5.6) e (5.7) sugerem que para cada curva de Hugoniot′ $H'_{k',l'}$ intersetando a característica para Z'_s e Z'_f, existe uma curva de Hugoniot H_{kl} intersetando a característica nos mesmos pontos.

Observação 8. Pelo Teorema de Bethe-Wendroff (enunciado no Apêndice D de [17]) se (k, l, Z) é um ponto de S então ou $\sigma_{kl}(Z) = \lambda_s(k', l', Z'_s)$ ou $\sigma_{kl}(Z) = \lambda_f(k', l', Z'_f)$. Denotamos por S_s o conjunto de pontos da superfície sônica S tais que $\sigma_{kl}(Z) = \lambda_s(k', l', Z'_s)$ e por S_f o conjunto de pontos tais que $\sigma_{kl}(Z) = \lambda_f(k', l', Z'_f)$. Da mesma forma, se (k, l, Z) é um ponto da superfície sônica S' então $\sigma_{kl}(Z) = \lambda_s(k, l, Z_s)$ ou $\sigma_{kl}(Z) = \lambda_f(k, l, Z_f)$. Denotamos o conjunto de pontos de S' tais que $\sigma_{kl}(Z) = \lambda_s(k, l, Z_s)$ por S'_s (S'_f pontos tais que $\sigma_{kl}(Z) = \lambda_f(k, l, Z_f)$).

Os cálculos abaixo verificam as conclusões da Observação 8 para o caso de interseções entre curvas de Hugoniot H e a superfície S'. De (2.54) e (2.49) temos a função velocidade σ sobre a superfície S' dada por

$$\sigma = \frac{K}{2b_1} - \frac{2Z + b_2(b_1 + 1)}{2(Z^2 + b_1 + 1)}L + \frac{m}{b_1}. \tag{5.8}$$

Igualando σ com a velocidade característica λ (ver (2.31)) e simplificando obtemos

$$(Z^2 + b_1 + 1)K + [Z(Z^2 + b_1 + 3) + b_2(b_1 + 1)]L = 0, \tag{5.9}$$

ou seja, fixado K e L a Equação (5.9) é um polinômio de terceiro grau na variável Z cujas raízes reais indicam os pontos onde a curva de Hugoniot intersecta a superfície S' e a superfície característica com a mesma velocidade. Se esse polinômio tem uma única raiz real, essa raiz é um ponto em C_s (ou C_f) e a curva de Hugoniot ou não intersecta S' ou intersecta S'_f(ou S'_s). Se o polinômio tem três raízes reais uma delas representa o caso descrito acima e as outras duas são pontos de S'_s(ou S'_f), conforme [14].

Observação 9. A velocidade, σ_{kl}, ao longo de uma curva de Hugoniot assume valores extremos apenas na superfície S. Assim nos pontos de interseção de uma curva de Hugoniot,

H, com a característica C e S' fora da inflexão e da dupla sônica a velocidade σ_{kl} não assume valores extremos. Da mesma forma, ao longo de uma curva de Hugoniot′ H' a velocidade atinge valores extremos apenas na S', consequentemente onde uma curva de Hugoniot′ H' intersecta a característica C e sônica S fora da inflexão e da dupla sônica, a velocidade não atinge valores extremos.

A hipótese adicional, enunciada abaixo, vale para sistemas quadráticos de leis de conservação e suas perturbações, como provado no Apêndice B de [17].

Hipótese 4. Seja $\mathcal{V} \subset M^3$ uma vizinhança de um ponto da superfície característica C fora da inflexão e da curva de coincidência. Seja $\mathcal{V}_1$ uma das componentes de $\mathcal{V}\backslash C$. Assumiremos que dado um ponto em $\mathcal{V}_1$, se a velocidade $\sigma_{kl}(Z)$ decresce ao longo da curva de Hugoniot H por esse ponto em $\mathcal{V}_1$ então $\sigma_{k'l'}(Z)$ cresce ao longo da curva de Hugoniot′ H' por esse mesmo ponto em $\mathcal{V}_1$. Uma hipótese análoga vale se σ_{kl} cresce ao longo das curvas de Hugoniot em $\mathcal{V}_1$.

Com essas hipóteses e observações acima temos:

Definição 5.1. Seja Z_m igual a Z_s ou $Z_{S'}$ tal que $H_{kl}(Z_s) \cap C_s$ ou $H_{kl}(Z_{S'}) \cap S'_s$ existem. Um arco de curva de Hugoniot H_{kl} é dito um arco de 1-choque se satisfaz

$$\sigma_{kl}(Z) < \sigma_{kl}(Z_m) \text{ e} \tag{5.10}$$

$$\sigma_{k'l'}(Z'_s) < \sigma_{kl}(Z) < \sigma_{k'l'}(Z'_f), \tag{5.11}$$

para todo $Z < Z_m$. A curva de Hugoniot′ $H'_{k'l'}$ interseta a superfície característica C_s e C_f para os valores de $Z = Z'_s$ e $Z = Z'_f$, respectivamente.

Segue da definição acima e da Observação 8 que arcos de 1-choque começam em C_s ou S'_s. Arcos de 1-choques que começam em C_s são chamados 1-choque local e denotado por $S_1(Z_s)$; já arcos de 1-choque começando em S'_s são chamados 1-choque não-local e são denotados por $S_1(Z_{S'})$. Ver Figura 32.

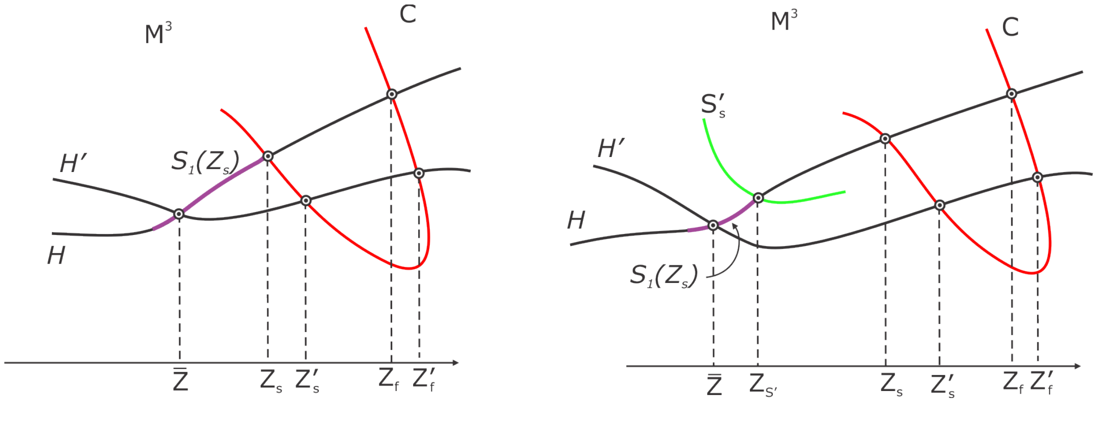


Figura 32 – Arcos de 1-choques $S_1(Z_s)$ e $S_1(Z_{S'})$ na Variedade de Ondas M^3.

Lema 5.1. *Seja um arco de curva de Hugoniot H_{kl} começando em C_s que satisfaz* (5.10), *então tal arco também H_{kl} satisfaz* (5.11).

Demonstração. Bastaria verificar que $\sigma_{k'l'}(Z'_s) \leq \sigma_{kl}(Z_s)$. Mas, isto é evidente pois $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = \sigma_{kl}(Z_s)$ e $\sigma_{k'l'}(Z'_f) = \sigma_{kl}(Z_f)$. ∎

Segue do Lema 5.1 que arco de 1-choque local é um arco que começa em C_s com velocidade decrescente por (5.10) e que arco de 1-choque local $S_1(Z_s)$ existe para toda curva de Hugoniot H_{kl} que se encontra na região hiperbólica.

Em seguida apresentamos o algoritmo para encontrar arcos de curva de Hugoniot que são arcos de 1-choque local $S_1(Z_s)$; nesta construção usamos a Hipótese 4.

1. Fixe $K = k$, $L = l$ e tome a curva de Hugoniot H_{kl};
2. Procure Z_s tal que $\sigma_{kl}(Z_s)$ na superfície sônica S é a velocidade na superfície característica lenta C_s;
3. Considere o intervalo $\mathcal{I} = (-\infty, Z_s)$ ou $(Z_s, +\infty)$ na curva de Hugoniot H_{kl} tal que $\sigma_{kl}(Z) < \sigma_{kl}(Z_s)$ $\forall Z \in \mathcal{I}$. Então $\mathcal{I} = S_1(Z_s)$.

Em seguida apresentamos o algoritmo para encontrar os arcos de curva de Hugoniot que são arcos de 1-choque não-local $S_1(Z_{S'})$.

1. Fixe $K = k$, $L = l$ e tome a curva de Hugoniot H_{kl};
2. Procure valores $Z_{S'}$ e Z_s tal que a velocidade $\sigma_{kl}(Z_{S'})$ na superfície sônica S' é igual a velocidade $\sigma_{kl}(Z_s)$ na superfície característica lenta C_s;
3. Considere o intervalo $\mathcal{I} = (-\infty, Z_{S'})$ ou $(Z_{S'}, +\infty)$ na H_{kl} tal que $\sigma_{kl}(Z) < \sigma_{kl}(Z_s)$ $\forall Z \in \mathcal{I}$;
4. Fixado $\overline{Z}$ em $\mathcal{I}$, usando (5.4) determine as coordenadas (K', Z', L') no ponto $(k, \overline{Z}, l)$ e construa a curva de Hugoniot$'$ $H'_{k'l'}$ que passa tal ponto;
5. Procure Z'_s e Z'_f ao longo da curva de Hugoniot$'$ $H'_{k'l'}$ tal que $\sigma_{k'l'}(Z'_s) < \sigma_{k'l'}(Z'_f)$ são as velocidades na interseção da curva de Hugoniot$'$ $H'_{k'l'}$ com a característica C;
6. Escolher como arco de 1-choque não-local $S_1(Z_{S'})$ aos subintervalo de $\mathcal{I}$ contendo $\overline{Z}$ que satisfaz $\sigma_{k'l'}(Z'_s) < \sigma_{k'l'}(\overline{Z}) < \sigma_{k'l'}(Z'_f)$.

Nas seguintes quatro seções apresentamos os casos não simétricos ($b_2 \neq 0$) onde mostramos os arcos de 1-choque locais e 1-choque não-locais. Com tal motivo foi decomposto o espaço de estados estendido em planos $\mathcal{M}_k$ em coordenadas (Z, L), às quais representam às superfícies M_k, que constituem uma folheação da variedade de ondas M^3. No plano $\mathcal{M}_k$ mostramos para cada L fixo curvas (retas) de Hugoniot H_{kl}; uma curva para a interseção da superfície característica C com $\mathcal{M}_k$; uma curva para a interseção $S \cap \mathcal{M}_k$; e outra curva para a interseção $S' \cap \mathcal{M}_k$ (ver Figura 33). Logo, para cada curva de Hugoniot é analisado a velocidade de onda σ_{kl} para obter o arco de curva que é 1-choque local $S_1(Z_s)$ ou 1-choque não-local $S_1(Z_{S'})$, no espaço $\mathcal{M}_k$, usando os algoritmos descritos acima. Por exemplo, na Figura 33 observamos para algum k um arco de 1-choque local e dois arcos de 1-choque não-local.

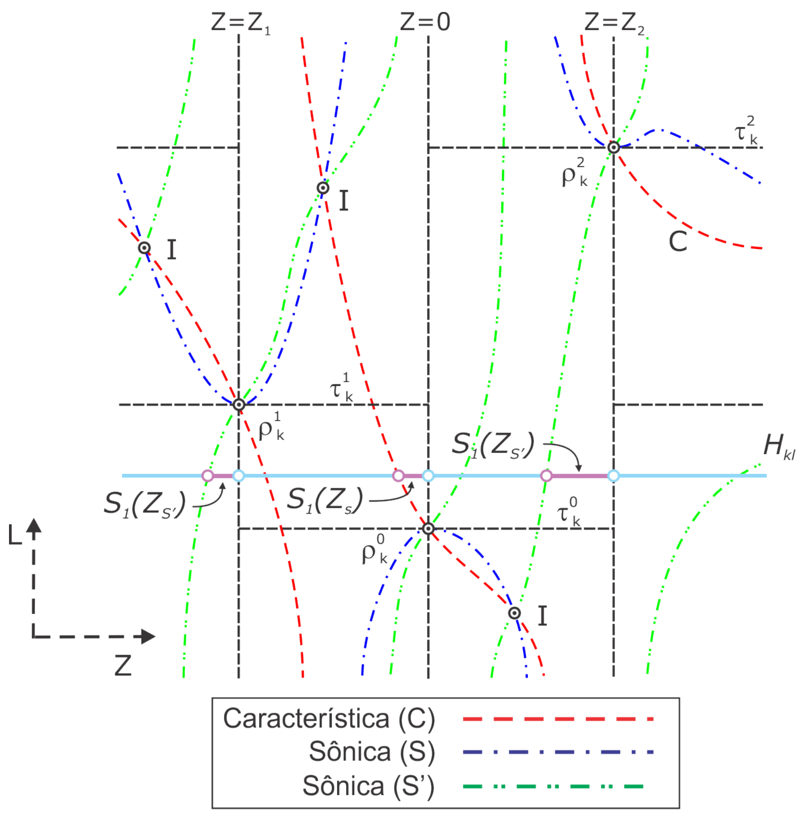


Figura 33 – Interseção das superfícies C, S e S' com $\mathcal{M}_k$. Ramos de curvas de Hugoniot pelos pontos de bifurcação. Curvas de Hugoniot H_{kl} com $-2c < l < (Z_1k - 2c)/b_1$ mostrando arcos de 1-choque locais e não-locais.

Como vimos no parágrafo anterior as superfícies característica C e as sônicas S e S' intersectam o espaço $\mathcal{M}_k$ ao longo de curvas que, por abuso de linguagem e simplicidade também denotaremos por C, S e S', respectivamente. Pelas equações (2.21), (3.1) e (3.16) estas curvas tem como equações

$$L = \frac{-Zk + 2c}{p(Z) - b_1}, \tag{5.12}$$

$$L = \frac{Z^2(b_2Z^2 - 4Z - b_2(b_1+1))k + 2c[Z^4 + 2(b_1+2)Z^2 + 2b_2(b_1+1)Z + b_1^2 - 1]}{Z^4 + 2b_2(b_1+1)Z^3 + (b_2^2(b_1+1) - 2(2b_1+1))Z^2 - 2b_2(b_1+1)Z - b_1^2 + 1}, \tag{5.13}$$

e

$$L = \frac{-Z(b_2Z^3 - 2Z^2 + b_2(b_1+1)Z - 2(b_1+1))k - 2c(Z^2 + b1 + 1)^2}{Z^4 + 2b_2Z^3 + (b_2^2(b_1+1) + 2(b_1-1))Z^2 - 2b_2(b_1+1)Z + (b_1+1)^2}, \tag{5.14}$$

respectivamente. No caso da característica C a curva tem duas assintotas verticais; no caso da sônica S o denominador de (5.13) é dado pelo polinômio P_4 dado em (3.14) cuja discriminante $\Delta(P_4)$ é dada em (3.15) e aplicando o Teorema A.4 onde

$$P = -4(3b_1+1)(b_1+1)b_2^2 - 16(2b_1+1) \tag{5.15}$$

e

$$N = 48b_1(b_1+1)\left(b_2^2 + \frac{2}{b_1+1}\right)\left[(b_1+1)(3b_1+2)b_2^2 + 2(5b_1+4)\right] \tag{5.16}$$

temos que:

- Se $\Delta(P_4) < 0$, a curva em (5.13) tem duas assintotas;
- Se $\Delta(P_4) > 0$, $P \leq 0$ e $N \geq 0$, a curva em (5.13) tem quatro assíntotas.

5.2 Arcos de 1-choque para o Caso I do espaço de parâmetros b_1b_2

Em primeiro lugar frisamos que ao longo de toda esta seção foram utilizados os valores $b_1 = -3/2$, $b_2 = 1/2$, $c = 1$ para efeito das figuras e cálculos. Sabemos de [13] e do Capítulo 4 que a variedade de ondas é folheada pela superfícies M_k. Fixado um $K = k$, a configuração das curvas de Hugoniot nessas superfícies muda de acordo com os valores de k para os quais há ligação entre as singularidades da folheação definida pelas curvas de Hugoniot em M_k. Essas singularidades são a interseção das bifurcações secundárias r_i, $i = 0,1,2$, com a M_k. No Capítulo 4 observamos ainda que no espaço KL a ligação entre as singularidades é caracterizada pela interseção da projeção das retas ρ_i, $i = 0,1,2$. Usaremos a decomposição mostrado na Figura 34 do espaço KL definida pelas projeções das retas ρ_i, $i = 0,1,2$, pela elipse E e pelos pontos de tangências das projeções das retas de bifurcação com a elipse E para auxiliar o estudo de arcos de 1-choques em $\mathcal{M}_k$.

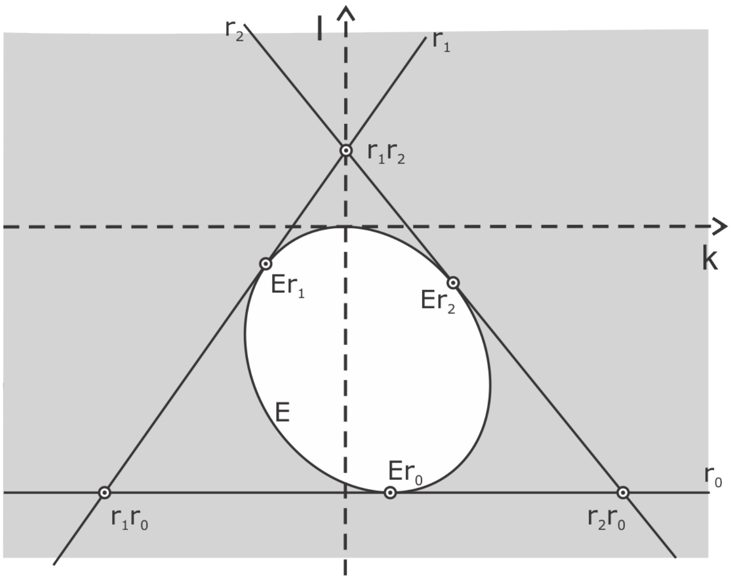


Figura 34 – Decomposição do espaço de estados KL com Z fixo para o Caso I_a do espaço de parâmetros b_1b_2 da Figura 4. No caso, $b_1 = -3/2$, $b_2 = 1/2$, $c = 1$.

Na Figura 34 estão mostrados os seguintes pontos (neste caso $Z_1 < 0 < Z_2$): A interseção entre as retas r_1 e r_0 denotada por $r_1r_0 = (K_{r_1r_0}, L_{r_1r_0}) = (-2c(b_1-1)/Z_1, -2c)$; a interseção entre as retas r_1 e r_2 denotada por $r_1r_2 = (K_{r_1r_2}, L_{r_1r_2}) = (0, -2c/b_1)$; a interseção entre as retas r_2 e r_0 denotada por $r_2r_0 = (K_{r_2r_0}, L_{r_2r_0}) = (-2c(b_1-1)/Z_2, -2c)$; a interseção entre a elipse E e a reta r_0 denotada por $Er_0 = (K_{Er_0}, L_{Er_0}) = (2cb_2, -2c)$; Para cada $i = 1, 2$, a interseção entre a elipse E e a reta r_i denotada por $Er_i = (K_{Er_i}, L_{Er_i})$ onde $L_{Er_i} = (Z_iK_{Er_i} - 2c)/b_1$ e K_{Er_i} é solução da equação $b_1^2 + (K^2 - 2cb_2K - 4c^2)(b_2^2 - 4(b_1 - 1)) = 0$.

Uma vez obtidos os pontos de interseção acima consideramos a seguinte divisão para K em 6 subcasos de acordo com os intervalo: $(-\infty, K_{r_1r_0})$, $(K_{r_1r_0}, K_{Er_1})$, $(K_{Er_1}, K_{r_1r_2})$, $(K_{r_1r_2}, K_{Er_2})$, $(K_{Er_2}, K_{r_2r_0})$ e $(K_{r_2r_0}, +\infty)$. Para cada um destes subcasos é construído o plano $\mathcal{M}_k$ em coordenadas (Z, L) e feita a análise.

5.2.1 Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -11/2 \in (-\infty, K_{r_1r_0})$

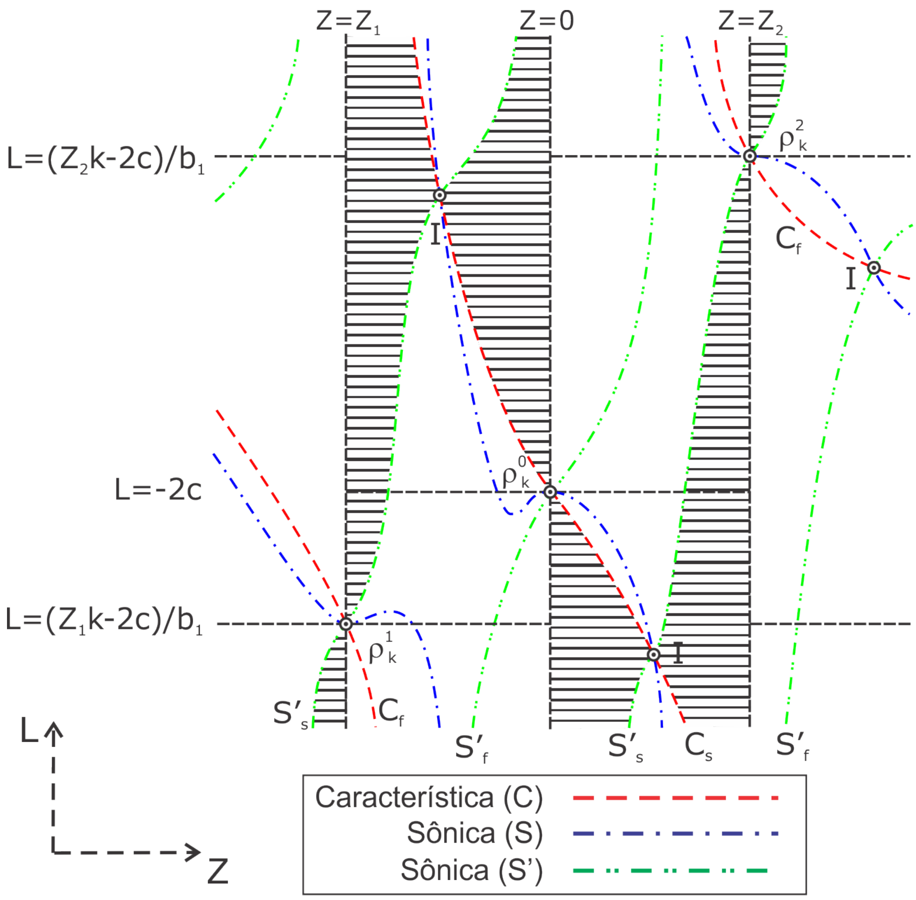


Figura 35 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -11/2 \in (-\infty, K_{r_1r_0})$. Segmentos hachuriados representam arcos de 1-choque.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 34, começaremos nossa análise a partir da interseção das retas r_0 e r_1. O valor de K para essa interseção é $K_{r_1r_0} = -2c(b_1 - 1)/Z_1$ (Ver Equação (4.11)). Então, para $K = -11/2 < K_{r_1r_0}$, um comportamento típico do espaço $\mathcal{M}_k$ numa vizinhança desse valor de K é mostrado na Figura 35, onde considerando os valores de L nas retas r_i, $i = 0, 1, 2$, tomamos os seguintes intervalos: $(-\infty, (Z_1k - 2c)/b_1)$, $((Z_1k - 2c)/b_1, -2c)$, $(-2c, (Z_2k - 2c)/b_1)$ e $((Z_2k - 2c)/b_1, +\infty)$. Nestes intervalos estudamos as velocidades ao longo da curva de Hugoniot, dada pela Equação (5.2), numa vizinhança de alguns L fixos:

- Para $L = -13/2 \in (-\infty, (Z_1k - 2c)/b_1)$, temos o gráfico da velocidade σ_{kl} na Figura 36 (H_{kl} por cima da inflexão), onde podemos identificar que a velocidade na caraterística lenta $\sigma_{kl}(Z_s)$ ao longo da curva de Hugoniot é igual as velocidades na sônica S' lentas $\sigma_{kl}(Z^a_{S'})$ e $\sigma_{kl}(Z^b_{S'})$, que a velocidade na caraterística rápida $\sigma_{kl}(Z_f)$ é igual a velocidade na sônica S' rápida $\sigma_{kl}(Z^c_{S'})$ e $\sigma_{kl}(Z^d_{S'})$, e que a curva de Hugoniot atravessa a sônica S com velocidade $\sigma_{kl}(Z^a_S)$ e $\sigma_{kl}(Z^b_S)$. Veja que isto é refletido na Figura 35 para o intervalo de L considerado.

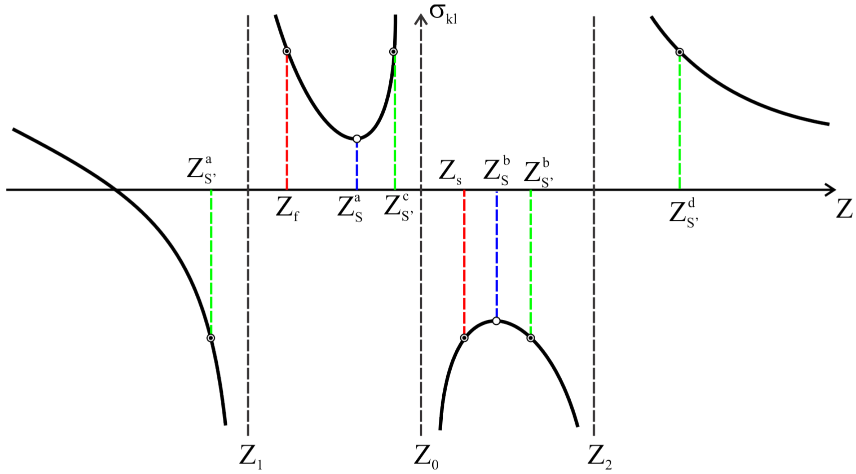


Figura 36 – Função velocidade σ_{kl} para $(k, l) = (-11/2, -13/2)$.

Já que, $\sigma_{kl}(Z)$ é menor que $\sigma_{kl}(Z_s)$, $\sigma_{kl}(Z^a_{S'})$ e $\sigma_{kl}(Z^b_{S'})$, a desigualdade (5.10) é satisfeito nos intervalos $\mathcal{I}_a = (Z^a_{S'}, Z_1) = (-1.97, -1.85)$, $\mathcal{I}_s = (Z_0, Z_s) = (0, 0.40)$ e $\mathcal{I}_b = (Z^b_{S'}, Z_2) = (0.36, 1.35)$. Então, analisando cada um destes intervalos temos que: o intervalo $\mathcal{I}_s$ corresponde a um arco de 1-choque local saindo da característica lenta C_s e aproximando-se para a reta $Z = Z_0$, esta aproximação na variedade de ondas é visto como assíntota; Para encontrar o arco de 1-choque não-local consideramos um valor para $\overline{Z} = -1.80$ no intervalo $\mathcal{I}_a$, seguindo o passo 4 do algorítmo temos a coordenada $(K', Z', L') = (-13.06, -15.56, -1.80)$ associada a curva $H'_{k'l'}$ que é calculado pelas Equações (5.4), seguindo o passo 5 do algorítmo temos $Z'_s = -1.82$, $Z'_f = 0.48$ tal que $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = 8.36 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 11.97$ onde Z'_s, Z'_f são calculado por (5.7) e seguindo o passo 6 do algorítmo temos $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -5.91 < \sigma_{k'l'}(\overline{Z}) = 8.36 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 11.97$; Para encontrar o arco de 1-choque não-local consideramos um valor para $\overline{Z} = 0.85$ no intervalo $\mathcal{I}_b$, seguindo o passo 4 do algorítmo temos a coordenada $(K', Z', L') = (14.65, -17.98, 0.85)$ associada a curva $H'_{k'l'}$ que é calculado pelas Equações (5.4), seguindo o passo 5 do algorítmo temos $Z'_s = 1.11$, $Z'_f = -0.80$ tal que $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -7.56 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 9.61$ onde Z'_s, Z'_f são calculado por (5.7) e seguindo o passo 6 do algorítmo temos $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -7.56 < \sigma_{k'l'}(\overline{Z}) = -4.46 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 9.61$. Podemos concluir que, ambos os intervalos satisfazem a desigualdade (5.11), o seja, ambos os intervalos correspondem a arcos de 1-choque não-local.

Observe que para a curva de Hugoniot por abaixo da inflexão os intervalos são $I_a = (Z^a_{S'}, Z_1)$, $\mathcal{I}_b = (Z_0, Z_s)$ e $\mathcal{I}_s = (Z^b_{S'}, Z_2)$.

- Para $L = -4 \in ((Z_1k - 2c)/b_1, -2c)$, na Figura 37 temos: os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, resp., os pontos Z^a_S e Z^b_S da sônica S, os pontos $Z^a_{S'}$, $Z^b_{S'}$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z^c_{S'}$, $Z^d_{S'}$ da sônica rápida S'_f. Então, nos intervalos $\mathcal{I}_a = (Z_1, Z^a_{S'})$, $\mathcal{I}_s = (Z_0, Z_s)$ e $\mathcal{I}_b = (Z^b_{S'}, Z_2)$ a desigualdade (5.10) é satisfeita. Assim, o intervalo $\mathcal{I}_s = (Z_0, Z_s)$ corresponde a um arco de 1-choque local saindo da característica lenta C_s, e seguindo como no caso anterior os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$ correspondem a arcos de 1-choque não-local, já que, satisfazem a desigualdade (5.11), para Z'_s, Z'_f calculados por (5.7). Observe que quando L tende para os extremos do intervalo $((Z_1k - 2c)/b_1, -2c)$ a curva de Hugoniot corta a sônica S em quatro pontos e quanto mais se afasta dos extremos apenas intersecta em dois pontos.

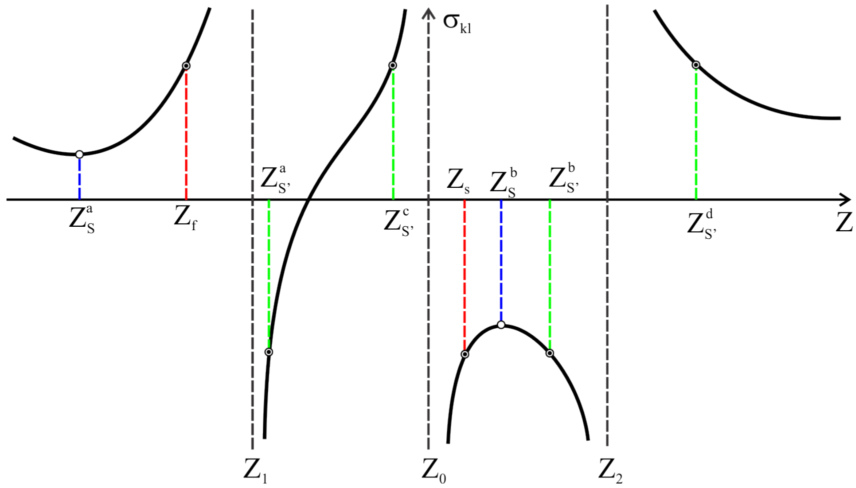


Figura 37 – Função velocidade σ_{kl} para $(k, l) = (-11/2, -4)$.

- Para $L = -1 \in (-2c, (Z_2k - 2c)/b_1)$ consideramos na Figura 38 (H_{kl} encontra-se abaixo das inflexões do intervalo) os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, resp., os pontos extremos Z_S^a e Z_S^b, os pontos $Z_{S'}^a$, $Z_{S'}^b$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z_{S'}^c$, $Z_{S'}^d$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_a = (Z_1, Z_{S'}^a)$, $\mathcal{I}_s = (Z_s, Z_0)$ e $\mathcal{I}_b = (Z_{S'}^b, Z_2)$ satisfazem a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ corresponde a um arco de 1-choque local. Para os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$, seguindo como nos casos anteriores aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algoritmo, e concluímos que ambos correspondem a arcos de 1-choque não-local.

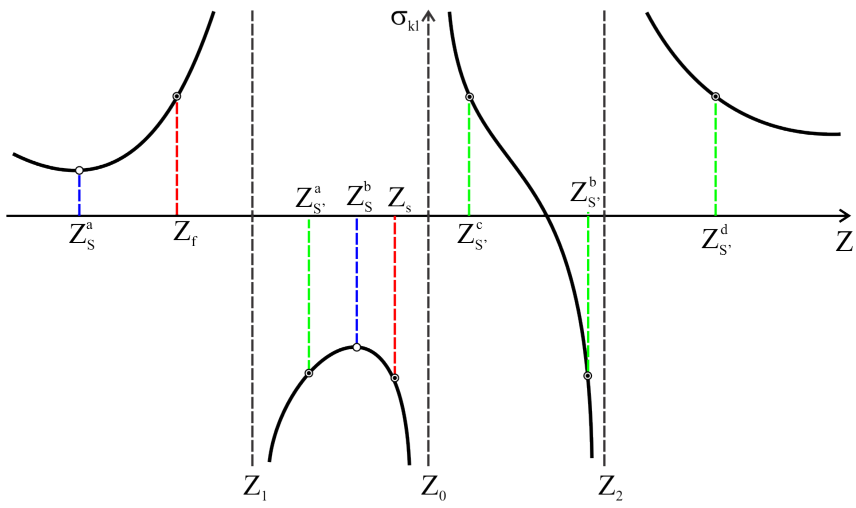


Figura 38 – Função velocidade σ_{kl} para $(k, l) = (-11/2, -1)$.

- Para $L = 8 \in ((Z_2k - 2c)/b_1, +\infty)$, na Figura 39 temos: os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, resp., os pontos Z_S^a e Z_S^b da S, os pontos $Z_{S'}^a$, $Z_{S'}^b$ da sônica lenta S_s', e os pontos $Z_{S'}^c$, $Z_{S'}^d$ da sônica rápida S_f'. A desigualdade (5.10) é satisfeita pelos intervalos $\mathcal{I}_a = (Z_{S'}^a, Z_0)$, $\mathcal{I}_s = (Z_1, Z_s)$ e $\mathcal{I}_b = (Z_2, Z_{S'}^b)$. Então, $\mathcal{I}_s$ corresponde a um arco de 1-choque local, e os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$, seguindo como nos casos anteriores, correspondem a arcos de 1-choque não-local.

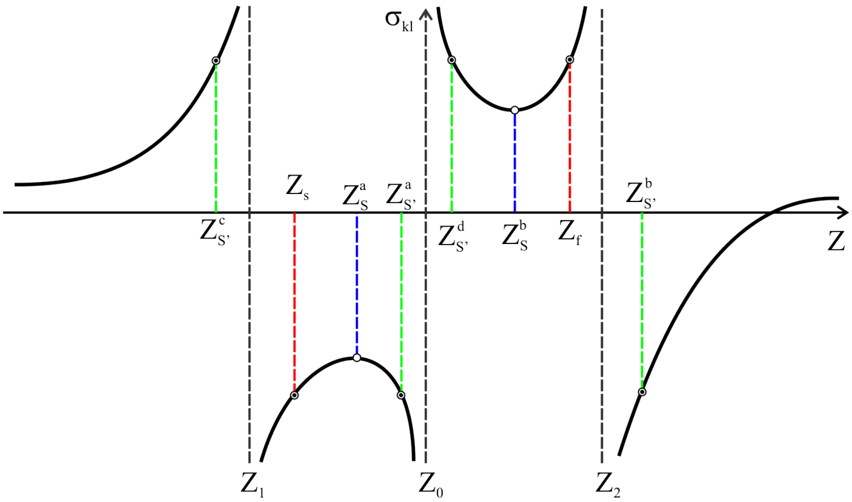


Figura 39 – Função velocidade σ_{kl} para $(k, l) = (-11/2, 8)$.

Nas regiões $(Z_1, 0) \times (-2c, +\infty)$, $(0, Z_2) \times (-\infty, -2c)$ e $(Z_2, +\infty) \times ((Z_1k - 2c)/b_1, (Z_2k - 2c)/b_1)$ temos pontos de inflexão I e nos dois primeiros temos 1-choques. Na primeira região os arcos de 1-choque local saindo da característica lenta se aproximam para $Z = Z_1$, logo, quando a característica lenta atravessa a inflexão os arcos 1-choque local se aproximam para $Z = 0$. Comportamento semelhante é observado para os arcos 1-choque não-local saindo de S_s'.

5.2.2 Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -2 \in (K_{r_1 r_0}, K_{Er_1})$

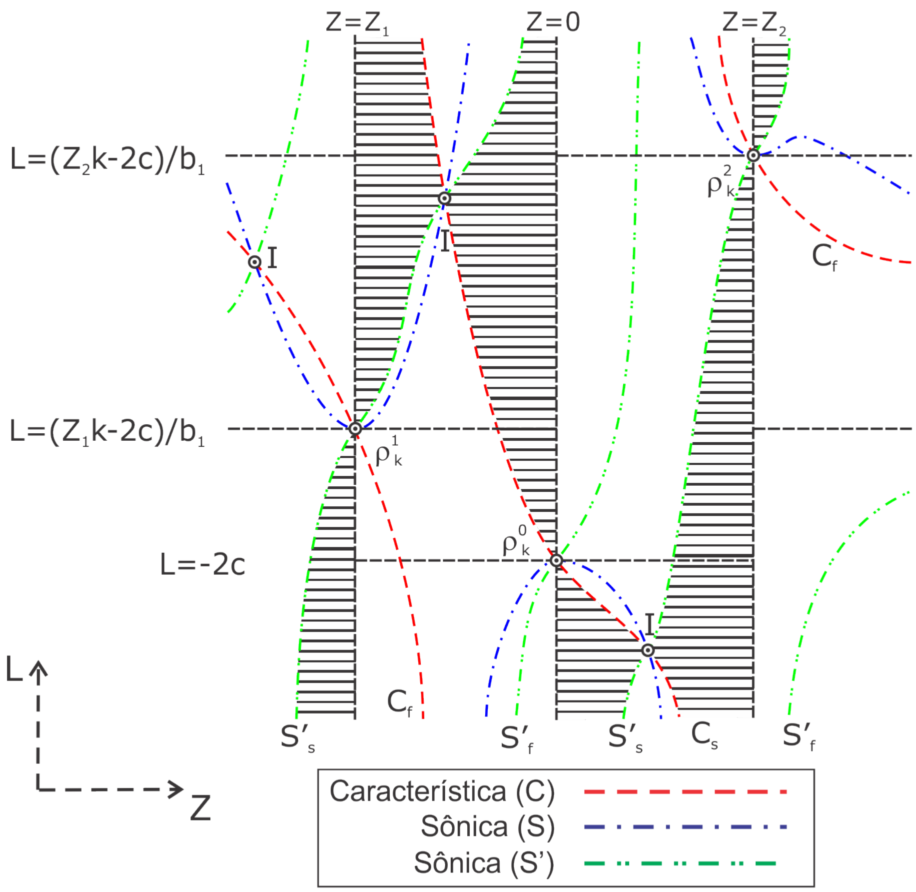


Figura 40 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -2 \in (K_{r_1 r_0}, K_{Er_1})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 34, considere K com $K_{r_1 r_0} < K = -2 < K_{Er_1}$. Neste caso o espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 40. Daí, consideramos os seguintes intervalos para L: $(-\infty, -2c)$, $(-2c, (Z_1 k - 2c)/b_1)$, $((Z_1 k - 2c)/b_1, (Z_2 k - 2c)/b_1)$ e $((Z_2 k - 2c)/b_1, +\infty)$. Analogamente ao caso anterior, estudamos a velocidade σ_{kl} dada pela Equação (5.2) ao longo da curva de Hugoniot H_{kl}:

- Para $L = -4 \in (-\infty, -2c)$ consideramos na Figura 41 (H_{kl} encontra-se abaixo da inflexão) os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos extremos Z_S^a e Z_S^b, os pontos $Z_{S'}^a$, $Z_{S'}^b$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z_{S'}^c$, $Z_{S'}^d$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_a = (Z_{S'}^a, Z_1) = (-2.61, -0.44)$, $\mathcal{I}_b = (Z_0, Z_{S'}^b) = (0, 0, 30)$ e $\mathcal{I}_s = (Z_s, Z_2) = (0.36, 1.35)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local.

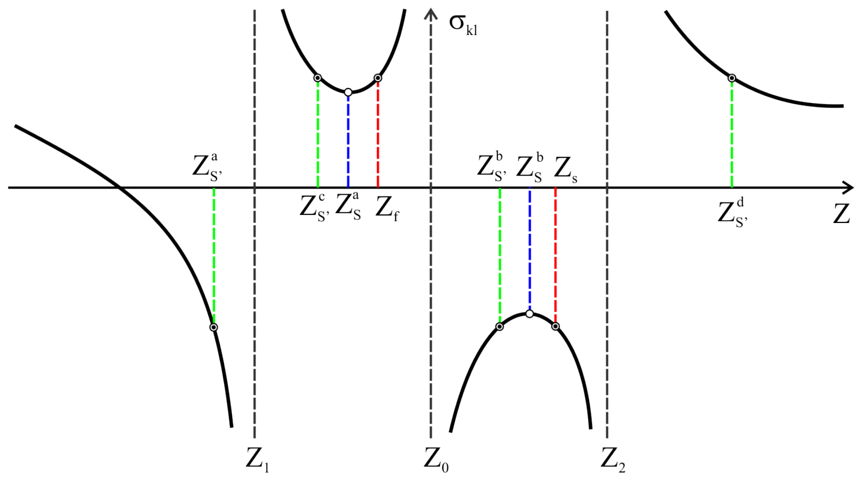


Figura 41 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (-2, -4)$.

Para encontrar o arco de 1-choque não-local consideramos um valor para $\overline{Z} = -2.23$ no intervalo $\mathcal{I}_a$, seguindo o passo 4 do algorítmo temos a coordenada $(K', Z', L') = (6.87, 9.19, -2.23)$ associada a curva $H'_{k'l'}$ que é calculado pelas Equações (5.4), seguindo o passo 5 do algorítmo temos $Z'_s = -1.89$, $Z'_f = 0.64$ tal que $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -7.55 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 4.10$ onde Z'_s, Z'_f são calculado por (5.7) e seguindo o passo 6 do algorítmo temos $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -7.55 < \sigma_{k'l'}(\overline{Z}) = -2.49 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 4.10$; Para encontrar o arco de 1-choque não-local consideramos um valor para $\overline{Z} = 0.15$ no intervalo $\mathcal{I}_b$, seguindo o passo 4 do algorítmo temos a coordenada $(K', Z', L') = (-12.79, -2.91, 0.15)$ associada a curva $H'_{k'l'}$ que é calculado pelas Equações (5.4), seguindo o passo 5 do algorítmo temos $Z'_s = -0.06$, $Z'_f = -4.95$ tal que $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -2.22 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 5.08$ onde Z'_s, Z'_f são calculado por (5.7) e seguindo o passo 6 do algorítmo temos $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -2.22 < \sigma_{k'l'}(\overline{Z}) = -1.49 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 5.08$. Podemos concluir que, ambos os intervalos satisfazem a desigualdade (5.11), o seja, ambos os intervalos correspondem a arcos de 1-choque não-local.

- Para $L = -3/2 \in (-2c, (Z_1 k - 2c)/b_1)$, consideramos na Figura 42 os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos $Z^a_{S'}$, $Z^b_{S'}$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z^c_{S'}$, $Z^d_{S'}$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_a = (Z^a_{S'}, Z_1)$, $\mathcal{I}_s = (Z_s, Z_0)$ e $\mathcal{I}_b = (Z^b_{S'}, Z_2)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local. Para os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$, seguindo como no caso anterior aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algorítmo, e concluímos que ambos representam arcos de 1-choque não-local.

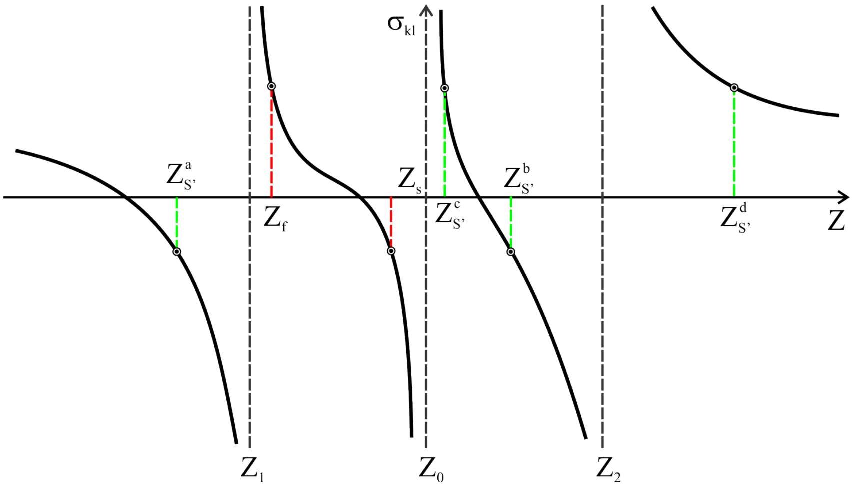


Figura 42 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (-2, -3/2)$.

- Para $L = 2 \in ((Z_1k - 2c)/b_1, (Z_2k - 2c)/b_1)$ consideramos na Figura 43 os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos extremos Z^a_S e Z^b_S, os pontos $Z^a_{S'}$, $Z^b_{S'}$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z^c_{S'}$, $Z^d_{S'}$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_s = (Z_1, Z_s)$, $\mathcal{I}_a = (Z^a_{S'}, Z_0)$ e $\mathcal{I}_b = (Z^b_{S'}, Z_2)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local. Para os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$, seguindo como nos casos anteriores aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algorítmo, e concluímos que ambos representam arcos de 1-choque não-local.

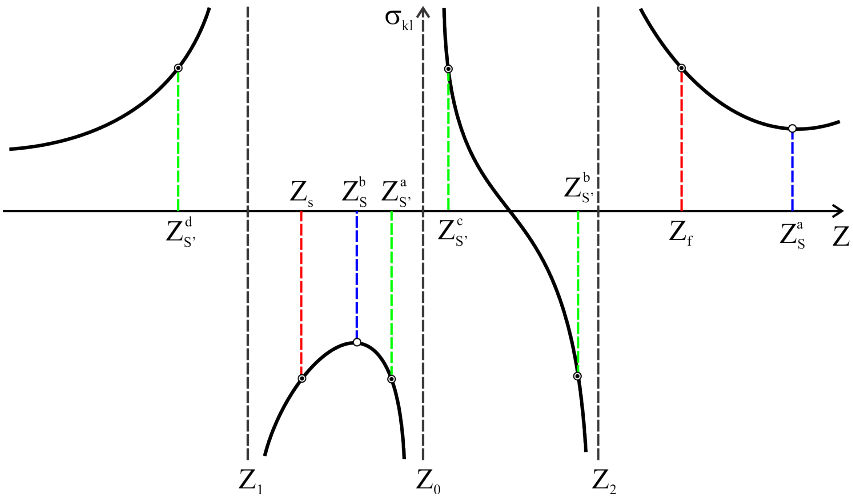


Figura 43 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (-2, 2)$.

- Para $L = 9/2 \in ((Z_2k - 2c)/b_1, \infty)$ consideramos na Figura 44 os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos Z^a_S e Z^b_S pontos extremos, os pontos $Z^a_{S'}$, $Z^b_{S'}$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z^c_{S'}$, $Z^d_{S'}$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_s = (Z_1, Z_s)$, $\mathcal{I}_a = (Z^a_{S'}, Z_0)$ e $\mathcal{I}_b = (Z_2, Z^b_{S'})$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local. Para os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$, seguindo como nos casos anteriores aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algorítmo, e concluímos que ambos representam arcos de 1-choque não-local.

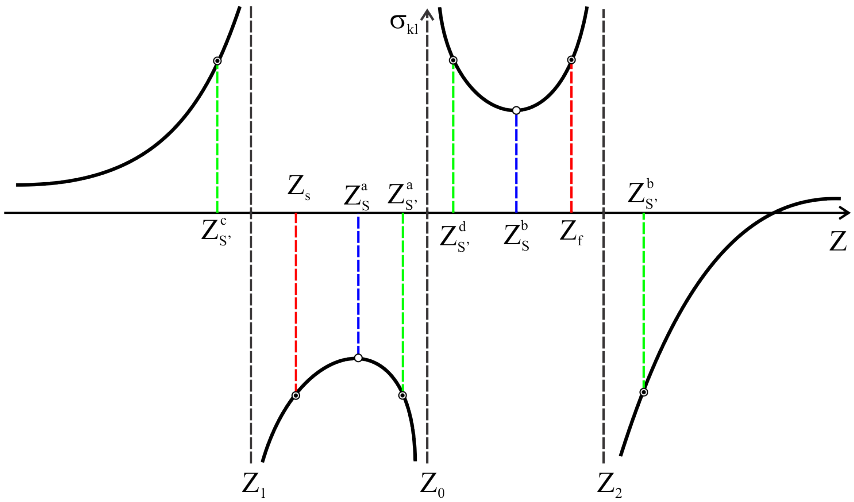


Figura 44 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (-2, 9/2)$.

Observe que quando K se aproxima para K_{Er_1} aparece uma região elíptica que não esta sendo refletida na Figura 40. Nas regiões $(-\infty, Z_1) \times ((Z_1 - 2c)/b_1, (Z_2 - 2c)/b_1)$, $(Z_1, 0) \times ((Z_1 - 2c)/b_1, +\infty)$ e $(0, Z_2) \times (-\infty, -2c)$ temos pontos de inflexão e os dois últimos separam arco de 1-choque local de arco de 1-choque não-local.

5.2.3 Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -1 \in (K_{Er_1}, K_{r_1r_2})$

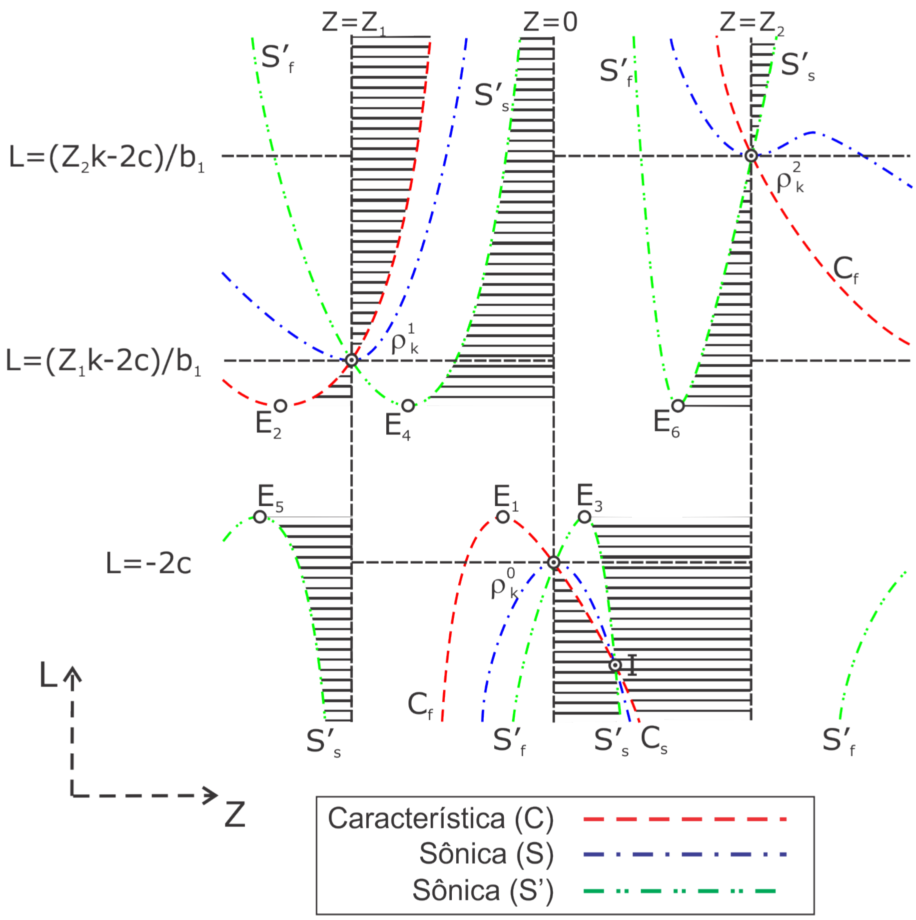


Figura 45 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -1 \in (K_{Er_1}, K_{r_1r_2})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura Figura 34, considere K com $K_{Er_1} < K = -1 < K_{r_1r_2} = 0$. Neste caso o espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 45. Daí, consideramos os intervalos para L: $(-\infty, -2c)$, $(-2c, (Z_1k-2c)/b_1)$, $((Z_1k-2c)/b_1, (Z_2k-2c)/b_1)$ e $((Z_2k-2c)/b_1, +\infty)$. Observe que, E_1 e E_2 são pontos de interseção do cilindro $E \times \mathbb{R}$ com a característica C e E_3, E_4, E_5 e E_6 são pontos de interseção do cilindro $E \times \mathbb{R}$ com a sônica S', ou seja, as curvas de Hugoniot com $L_{E_1} < L < L_{E_2}$ estão na região elíptica, onde a curva de Hugoniot não intersecta a superfície S' e nem a caraterística C. Nos intervalos para L, estudamos, as velocidades σ_{kl} ao longo da curva de Hugoniot, dada pela Equação (5.2):

- Para $L = -7/2 \in (-\infty, -2c)$ consideramos na Figura 46 (H_{kl} por abaixo da inflexão) os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos extremos Z_S^a e Z_S^b, os pontos $Z_{S'}^a$, $Z_{S'}^b$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z_{S'}^c$, $Z_{S'}^d$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_a = (Z_{S'}^a, Z_1) = (-3.31, -1.85)$, $\mathcal{I}_b = (Z_0, Z_{S'}^b) = (0, 0.27)$ e $\mathcal{I}_s = (Z_s, Z_2) = (0.37, 1.35)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local.

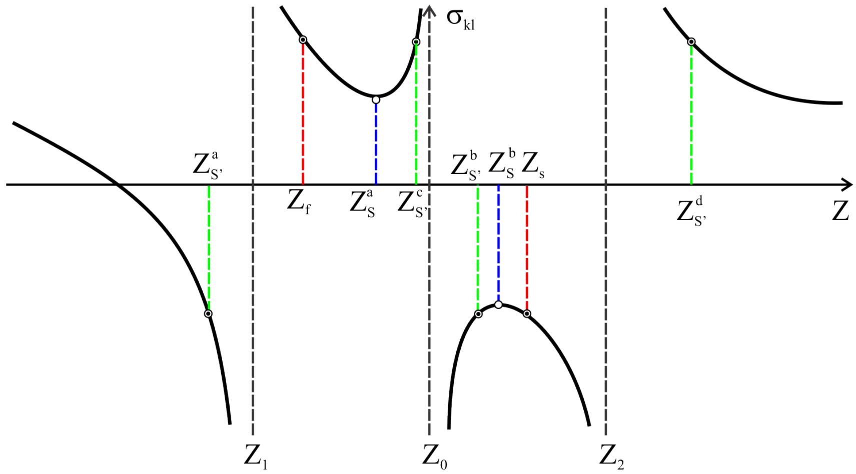


Figura 46 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (-1, -7/2)$.

Para encontrar o arco de 1-choque não-local consideramos um valor para $\overline{Z} = -2.58$ no intervalo $\mathcal{I}_a$, seguindo o passo 4 do algorítmo temos a coordenada $(K', Z', L') = (4.95, 6.75, -2.58)$ associada a curva $H'_{k'l'}$ que é calculado pelas Equações (5.4), seguindo o passo 5 do algorítmo temos $Z'_s = -1.91$, $Z'_f = 0.68$ tal que $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -5.62 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 3.11$ onde Z'_s, Z'_f são calculado por (5.7) e seguindo o passo 6 do algorítmo temos $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -5.62 < \sigma_{k'l'}(\overline{Z}) = -1.77 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 3.11$; Para encontrar o arco de 1-choque não-local consideramos um valor para $\overline{Z} = 0.13$ no intervalo $\mathcal{I}_b$, seguindo o passo 4 do algorítmo temos a coordenada $(K', Z', L') = (-11.02, -2.61, 0.13)$ associada a curva $H'_{k'l'}$ que é calculado pelas Equações (5.4), seguindo o passo 5 do algorítmo temos $Z'_s = 0.05$, $Z'_f = -4.77$ tal que $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -1.90 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 4.39$ onde Z'_s, Z'_f são calculado por (5.7) e seguindo o passo 6 do algorítmo temos $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -1.90 < \sigma_{k'l'}(\overline{Z}) = -1.20 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 4.39$. Podemos concluir que, ambos os intervalos satisfazem a desigualdade (5.11), o seja, ambos os intervalos correspondem a arcos de 1-choque não-local.

- Para $L = -7/4 \in (-2c, (Z_1 k - 2c)/b_1)$ consideramos na Figura 47 os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos $Z^a_{S'}$, $Z^b_{S'}$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z^c_{S'}$, $Z^d_{S'}$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_a = (Z^a_{S'}, Z_1)$, $\mathcal{I}_s = (Z_s, Z_0)$ e $\mathcal{I}_b = (Z^b_{S'}, Z_2)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local. Para os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$, seguindo como nos casos anteriores aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algoritmo, e concluímos que ambos representam arcos de 1-choque não-local.

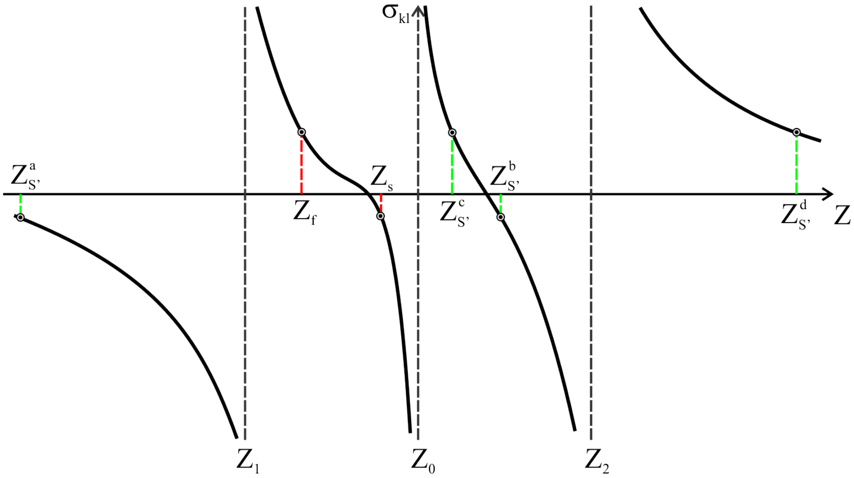


Figura 47 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (-1, -7/4)$.

- Para $L = 1 \in ((Z_1k - 2c)/b_1, (Z_2k - 2c)/b_1)$ consideramos na Figura 48 os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos extremos Z_S^a e Z_S^b, os pontos $Z_{S'}^a$, $Z_{S'}^b$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z_{S'}^c$, $Z_{S'}^d$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_s = (Z_1, Z_s)$, $\mathcal{I}_a = (Z_{S'}^a, Z_0)$ e $\mathcal{I}_b = (Z_{S'}^b, Z_2)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo (Z_1, Z_s) representa um arco de 1-choque local. Para os intervalos $(Z_{S'}^a, Z_0)$ e $(Z_{S'}^b, Z_2)$, seguindo como nos casos anteriores aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algoritmo, e concluímos que ambos representam arcos de 1-choque não-local.

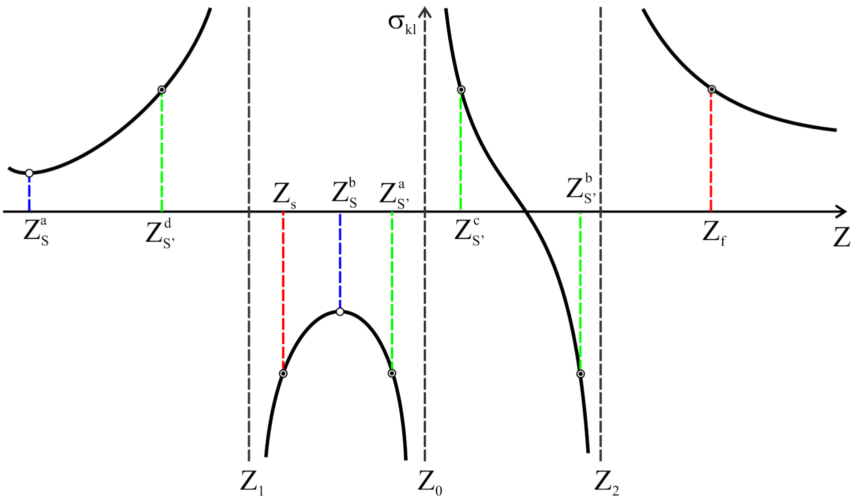


Figura 48 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (-1, 1)$.

- Para $L = 3 \in ((Z_2k - 2c)/b_1, \infty)$ consideramos na Figura 49 os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos extremos Z_S^a e Z_S^b, os pontos $Z_{S'}^a$, $Z_{S'}^b$ da S' lenta S'_s, e os pontos $Z_{S'}^c$, $Z_{S'}^d$ da S' rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_s = (Z_1, Z_s)$, $\mathcal{I}_a = (Z_{S'}^a, Z_0)$ e $\mathcal{I}_b = (Z_2, Z_{S'}^b)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local.

Para os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$, seguindo como nos casos anteriores aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algorítmo, e concluímos que ambos representam arcos de 1-choque não-local.

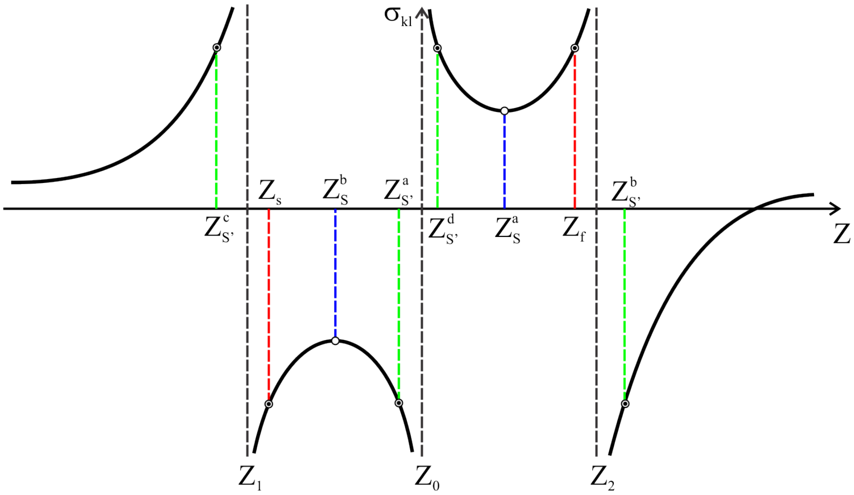


Figura 49 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (-1, 3)$.

Observe que na região $(0, Z_2) \times (-\infty, -2c)$ temos uma inflexão que separa arco de 1-choque local de arco de 1-choque não-local.

5.2.4 Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 3/2 \in (K_{r_1 r_2}, K_{Er_2})$

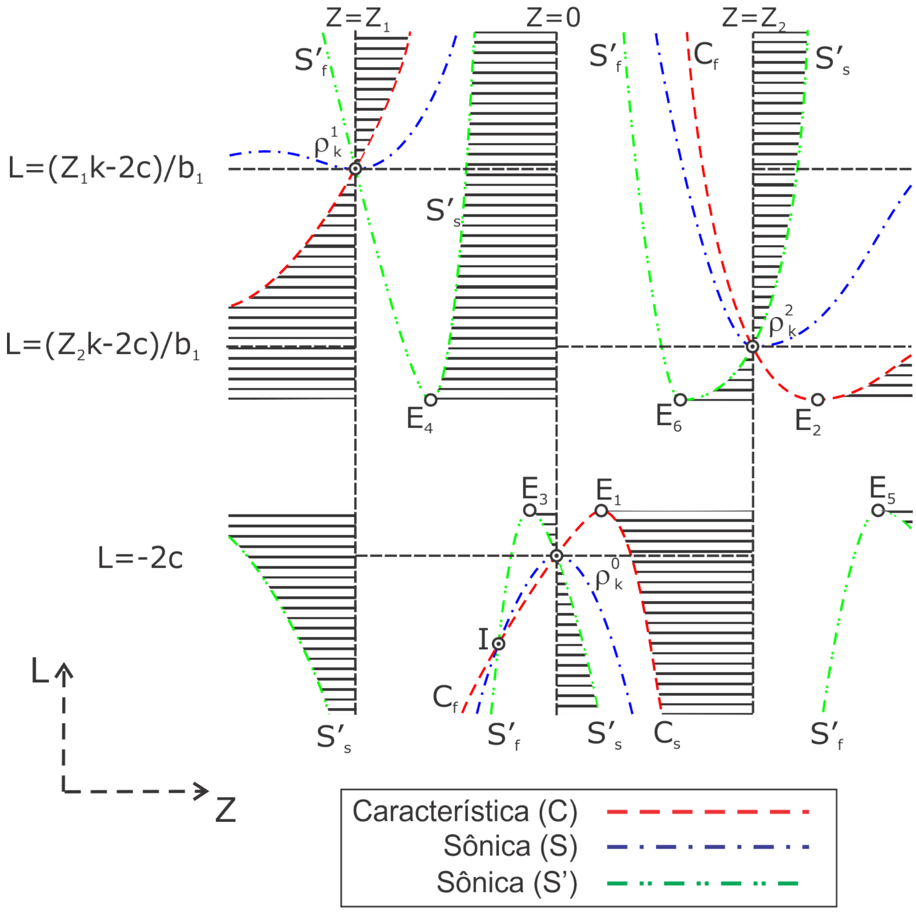


Figura 50 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 3/2 \in (K_{r_1 r_2}, K_{Er_2})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 34, considere K com $0 = K_{r_1 r_2} < K = 3/2 < K_{Er_2}$. O espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 50. Daí, consideramos os intervalos para L: $(-\infty, -2c)$, $(-2c, (Z_2 k - 2c)/b_1)$, $((Z_2 k - 2c)/b_1, (Z_1 k - 2c)/b_1)$ e $((Z_1 k - 2c)/b_1, +\infty)$. Observe que, as curvas de Hugoniot com $L_{E_1} < L < L_{E_2}$ estão na região elíptica, onde a curva de Hugoniot não intersecta a superfície S' e nem a caraterística C. Nos intervalos para L estudamos a velocidade σ_{kl}, dada pela Equação (5.2) ao longo da curva de Hugoniot:

- Para $L = -3 \in (-\infty, -2c)$ consideramos na Figura 51 (H_{kl} abaixo da inflexão) os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos extremos Z_S^a e Z_S^b, os pontos $Z_{S'}^a$, $Z_{S'}^b$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z_{S'}^c$, $Z_{S'}^d$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_a = (Z_{S'}^a, Z_1) = (-26.00, -1.85)$, $\mathcal{I}_b = (Z_0, Z_{S'}^b) = (0, 0.14)$ e $\mathcal{I}_s = (Z_s, Z_2) = (0.58, 1.35)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local.

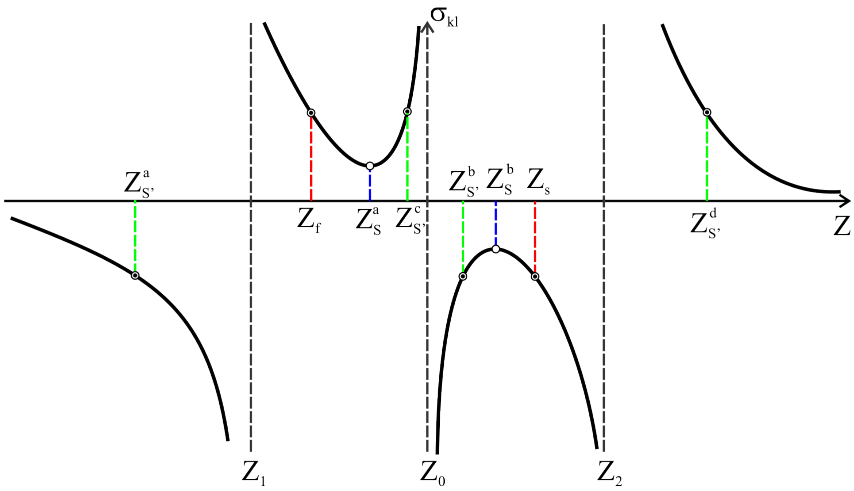


Figura 51 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (3/2, -3)$.

Para encontrar o arco de 1-choque não-local consideramos um valor para $\overline{Z} = -13.93$ no intervalo $\mathcal{I}_a$, seguindo o passo 4 do algorítmo temos a coordenada $(K', Z', L') = (2.18, 3.30, -13.93)$ associada a curva $H'_{k'l'}$ que é calculado pelas Equações (5.4), seguindo o passo 5 do algorítmo temos $Z'_s = -1.97$, $Z'_f = 0.81$ tal que $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -2.89 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 1.70$ onde Z'_s, Z'_f são calculado por (5.7) e seguindo o passo 6 do algorítmo temos $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -2.89 < \sigma_{k'l'}(\overline{Z}) = -0.73 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 1.70$; Para encontrar o arco de 1-choque não-local consideramos um valor para $\overline{Z} = 0.07$ no intervalo $\mathcal{I}_b$, seguindo o passo 4 do algorítmo temos a coordenada $(K', Z', L') = (-15.23, -2.20, 0.07)$ associada a curva $H'_{k'l'}$ que é calculado pelas Equações (5.4), seguindo o passo 5 do algorítmo temos $Z'_s = 0.01$, $Z'_f = -7.40$ tal que $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -2.55 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 5.64$ onde Z'_s, Z'_f são calculado por (5.7) e seguindo o passo 6 do algorítmo temos $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -2.55 < \sigma_{k'l'}(\overline{Z}) = -1.24 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 5.64$. Podemos concluir que, ambos os intervalos satisfazem a desigualdade (5.11), o seja, ambos os intervalos correspondem a arcos de 1-choque não-local.

- Para $L = -1/10 \in (-2c, (Z_2k - 2c)/b_1)$ consideramos na Figura 52 (H_{kl} acima da região elíptica) os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos $Z^a_{S'}$, $Z^b_{S'}$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z^c_{S'}$, $Z^d_{S'}$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_a = (Z^a_{S'}, Z_0)$, $\mathcal{I}_b = (Z^b_{S'}, Z_2)$ e $\mathcal{I}_s = (Z_s, Z_1)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local. Para os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$, seguindo como nos casos anteriores aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algorítmo, e concluímos que ambos representam arcos de 1-choque não-local.

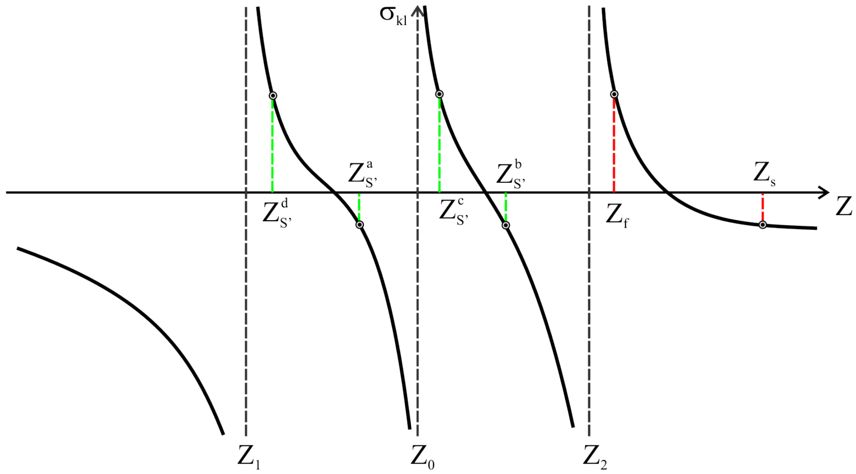


Figura 52 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (3/2, -1/10)$.

- Para $L = 2 \in ((Z_2k - 2c)/b_1, (Z_1k - 2c)/b_1)$ consideramos na Figura 53 os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos extremos Z_S^a e Z_S^b, os pontos $Z_{S'}^a$, $Z_{S'}^b$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z_{S'}^c$, $Z_{S'}^d$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos (Z_s, Z_1), $(Z_{S'}^a, Z_0)$ e $(Z_2, Z_{S'}^b)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo (Z_s, Z_1) representa um arco de 1-choque local. Para os intervalos $(Z_{S'}^a, Z_0)$ e $(Z_2, Z_{S'}^b)$, seguindo como nos casos anteriores aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algoritmo, e concluímos que ambos representam arcos de 1-choque não-local.

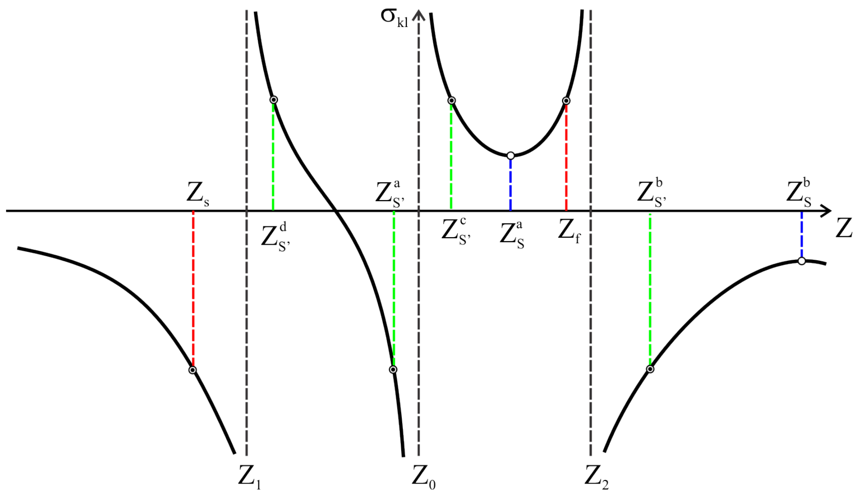


Figura 53 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (3/2, 2)$.

- Para $L = 4 \in ((Z_1k - 2c)/b_1, \infty)$ consideramos na Figura 54 os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos extremos Z_S^a e Z_S^b, os pontos $Z_{S'}^a$, $Z_{S'}^b$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z_{S'}^c$, $Z_{S'}^d$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_s = (Z_1, Z_s)$, $\mathcal{I}_a = (Z_{S'}^a, Z_0)$ e $\mathcal{I}_b = (Z_2, Z_{S'}^b)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local. Para os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$, seguindo como nos casos anteriores aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algoritmo, e concluímos que ambos representam arcos de 1-choque não-local.

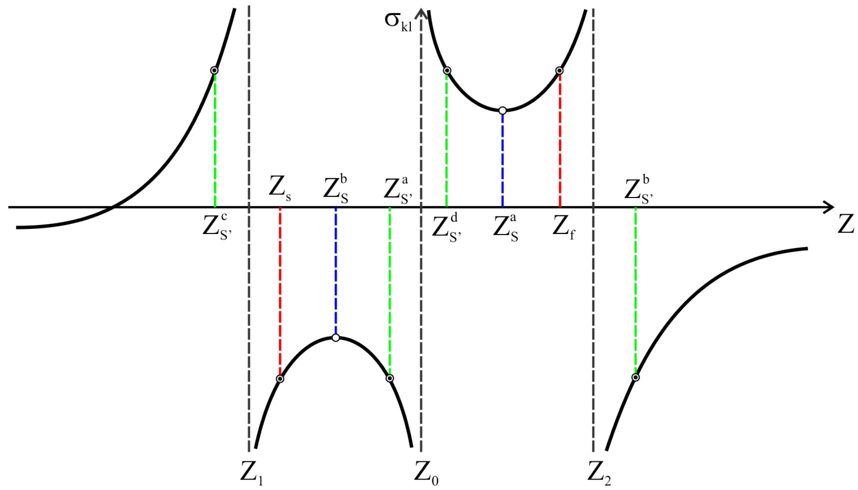


Figura 54 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (3/2, 4)$.

Observe que na região $(Z_1, 0) \times (-\infty, -2c)$ temos uma inflexão.

5.2.5 Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 3 \in (K_{Er_2}, K_{r_2r_0})$

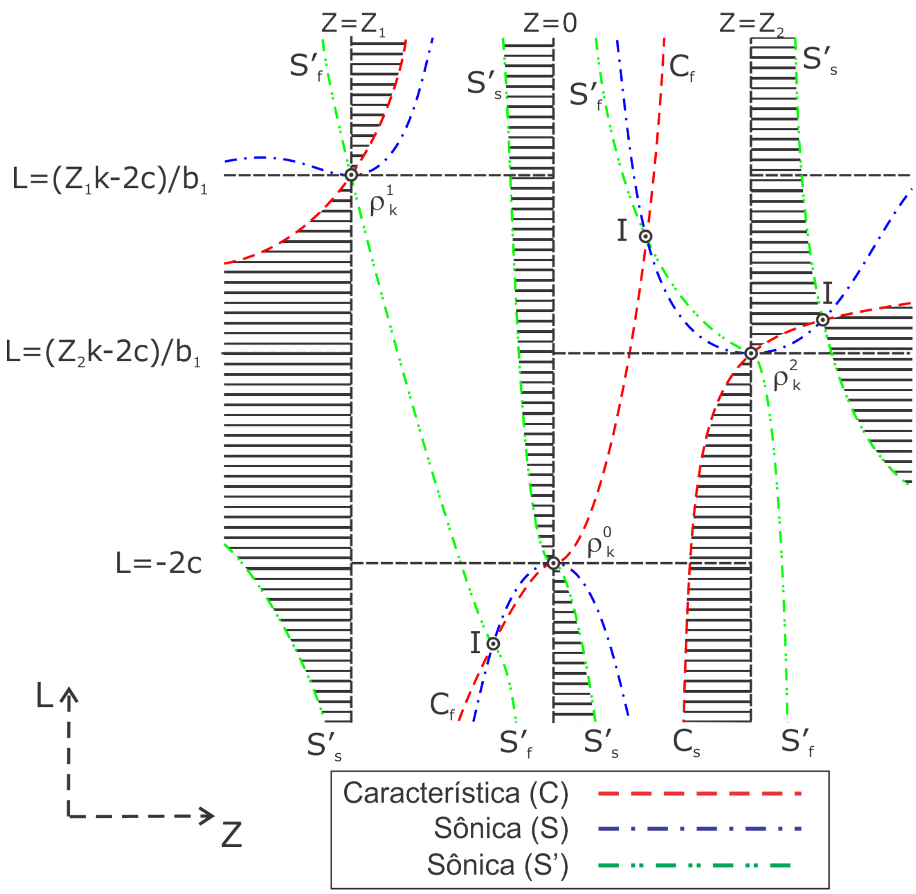


Figura 55 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 3 \in (K_{Er_2}, K_{r_2r_0})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura Figura 34, considere K com $K_{Er_2} < K = 3 < K_{r_2r_0} = -2c(b_1-1)/Z_2$. O espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 55. Daí, consideramos os intervalos para L: $(-\infty,-2c)$, $(-2c,(Z_2k-2c)/b_1)$, $((Z_2k-2c)/b_1,(Z_1k-2c)/b_1)$ e $((Z_1k-2c)/b_1,+\infty)$. Nos intervalos para L estudamos a velocidade σ_{kl}, dada pela Equação (5.2), ao longo da curva de Hugoniot:

- Para $L = -3 \in (-\infty,-2c)$ consideramos na Figura 56 os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos extremos Z_S^a e Z_S^b, os pontos $Z_{S'}^a$, $Z_{S'}^b$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z_{S'}^c$, $Z_{S'}^d$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_b = (Z_0, Z_{S'}^b) = (0, 0.10)$, $\mathcal{I}_s = (Z_s, Z_2) = (0.88, 1.35)$ e $\mathcal{I}_a = (Z_{S'}^a, Z_1) = (16.45,+\infty) \cup (-\infty,-1.85)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local.

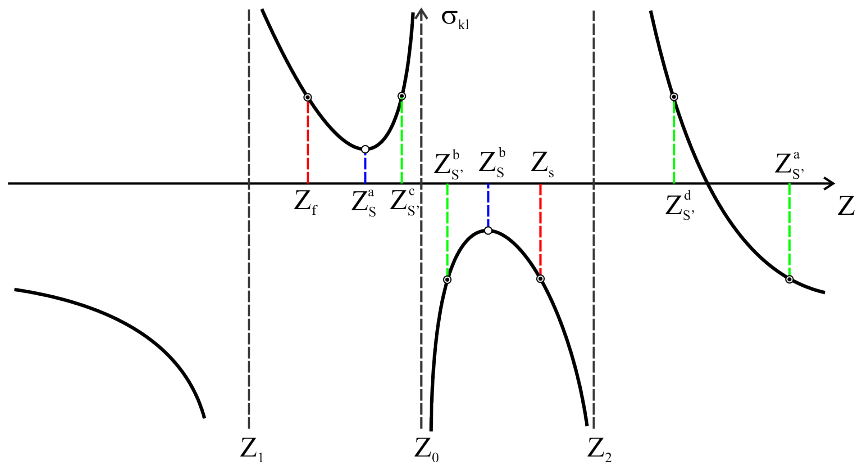


Figura 56 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (3, -3)$.

Para encontrar o arco de 1-choque não-local consideramos um valor para $\overline{Z} = 17.45$ no intervalo $\mathcal{I}_a$, seguindo o passo 4 do algorítmo temos a coordenada $(K', Z', L') = (2.51, 2, 70, 17.45)$ associada a curva $H'_{k'l'}$ que é calculado pelas Equações (5.4), seguindo o passo 5 do algorítmo temos $Z'_s = -2.21$, $Z'_f = 0.79$ tal que $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -2.58 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 1.48$ onde Z'_s, Z'_f são calculado por (5.7) e seguindo o passo 6 do algorítmo temos $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -2.58 < \sigma_{k'l'}(\overline{Z}) = -0.83 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 1.48$; Para encontrar o arco de 1-choque não-local consideramos um valor para $\overline{Z} = 0.05$ no intervalo $\mathcal{I}_b$, seguindo o passo 4 do algorítmo temos a coordenada $(K', Z', L') = (-24.08, -2.14, 0.05)$ associada a curva $H'_{k'l'}$ que é calculado pelas Equações (5.4), seguindo o passo 5 do algorítmo temos $Z'_s = 0.0055$, $Z'_f = -11.76$ tal que $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -4.02 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 8.57$ onde Z'_s, Z'_f são calculado por (5.7) e seguindo o passo 6 do algorítmo temos $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -4.02 < \sigma_{k'l'}(\overline{Z}) = -1.82 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 8.57$. Podemos concluir que, ambos os intervalos satisfazem a desigualdade (5.11), o seja, ambos os intervalos correspondem a arcos de 1-choque não-local.

- Para $L = -3/2 \in (-2c, (Z_2k - 2c)/b_1)$ consideramos na Figura 57 os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos $Z^a_{S'}$, $Z^b_{S'}$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z^c_{S'}$, $Z^d_{S'}$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_a = (Z^a_{S'}, Z_0)$, $\mathcal{I}_s = (Z_s, Z_2)$ e $\mathcal{I}_b = (Z^b_{S'}, Z_1)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local. Para os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$, seguindo como nos casos anteriores aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algorítmo, e concluímos que ambos representam arcos de 1-choque não-local.

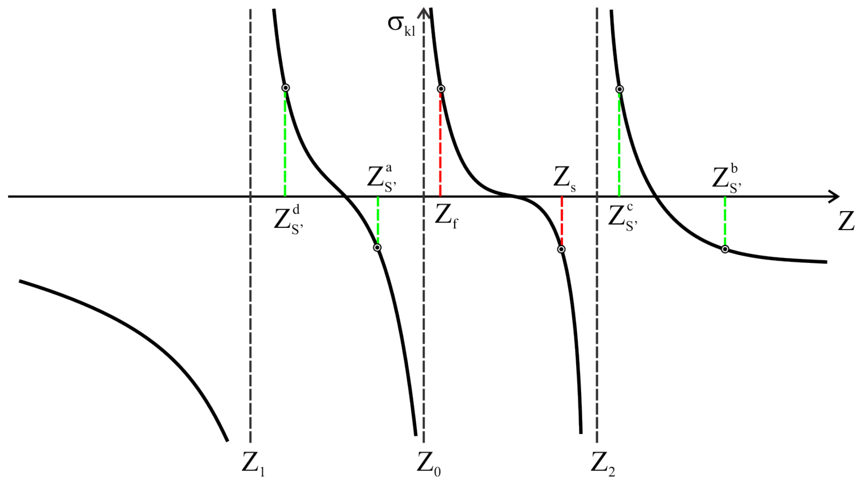


Figura 57 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (3, -3/2)$.

- Para $L = 3/4 \in ((Z_2k - 2c)/b_1, (Z_1k - 2c)/b_1)$ consideramos na Figura 58 os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos extremos Z^a_S e Z^b_S, os pontos $Z^a_{S'}$, $Z^b_{S'}$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z^c_{S'}$, $Z^d_{S'}$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_a = (Z^a_{S'}, Z_0)$, $\mathcal{I}_b = (Z_2, Z^b_{S'})$ e $\mathcal{I}_s = (Z_s, Z_1)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local. Para os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$, seguindo como nos casos anteriores aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algorítmo, e concluímos que ambos representam arcos de 1-choque não-local.

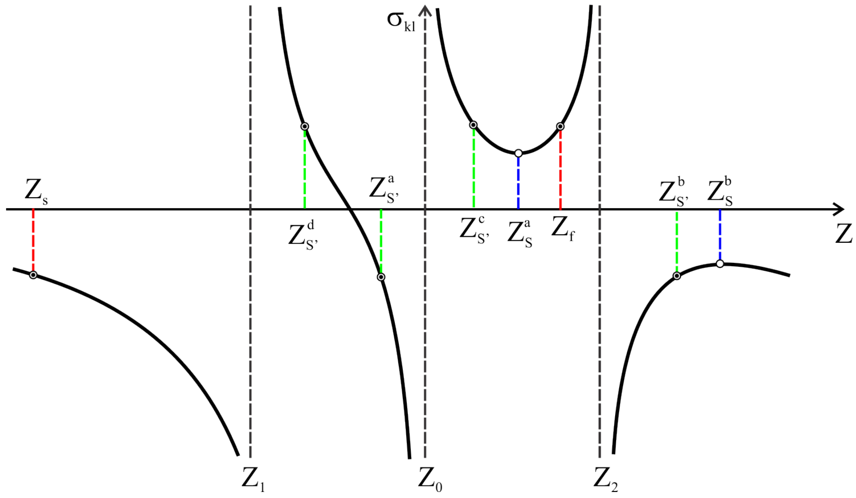


Figura 58 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (3, 3/4)$.

- Para $L = 6 \in ((Z_1 k - 2c)/b_1, \infty)$ consideramos na Figura 59 os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos extremos Z_S^a e Z_S^b, os pontos $Z_{S'}^a$, $Z_{S'}^b$ da sônica lenta S_s', e os pontos $Z_{S'}^c$, $Z_{S'}^d$ da sônica rápida S_f'. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_s = (Z_1, Z_s)$, $\mathcal{I}_a = (Z_{S'}^a, Z_0)$ e $\mathcal{I}_b = (Z_2, Z_{S'}^b)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local. Para os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$, seguindo como nos casos anteriores aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algoritmo, e concluímos que ambos representam arcos de 1-choque não-local.

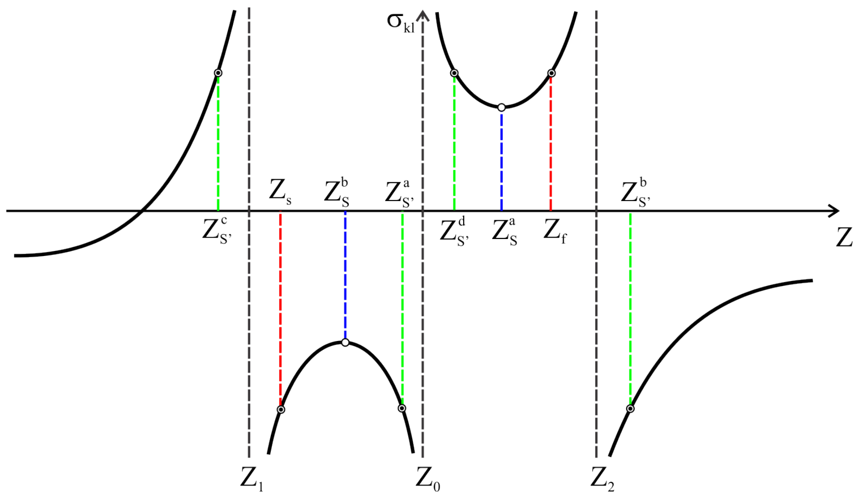


Figura 59 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (3, 6)$.

5.2.6 Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 6 \in (K_{r_2r_0}, +\infty)$

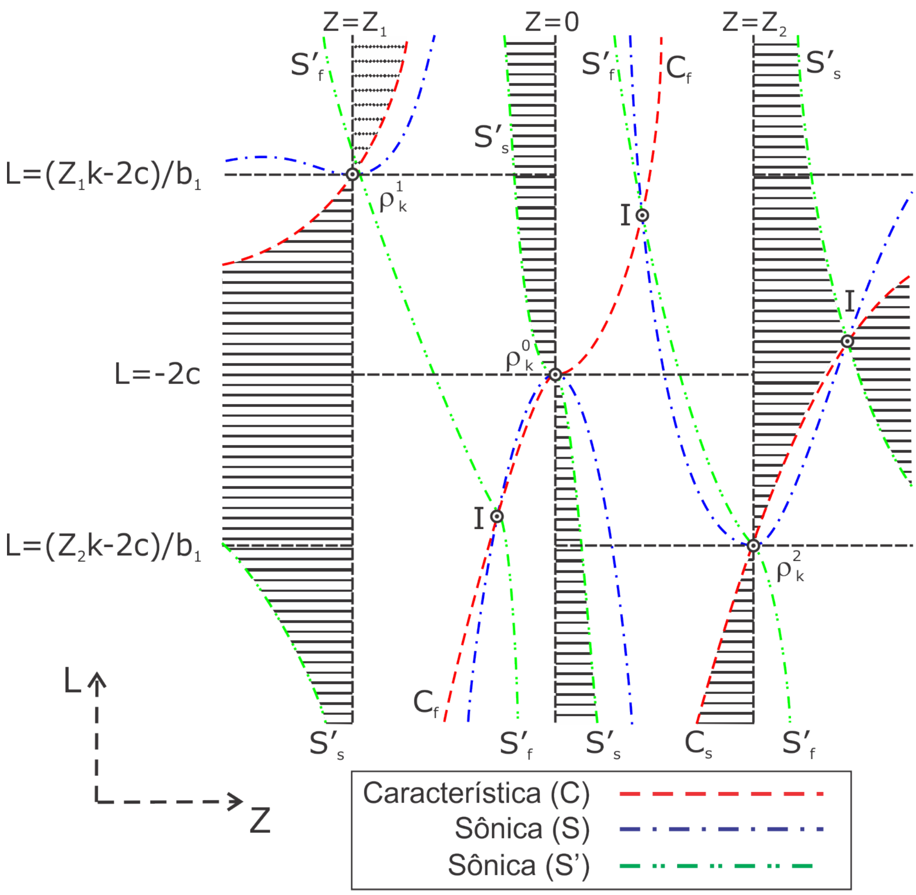


Figura 60 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 6 \in (K_{r_2r_0}, +\infty)$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura Figura 34, considere K com $-2c(b_1 - 1)/Z_2 < K = 6$. O espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 60. Daí, consideramos os intervalos para L: $(-\infty, (Z_2k - 2c)/b_1)$, $((Z_2k - 2c)/b_1, -2c)$, $(-2c, (Z_1k - 2c)/b_1)$ e $((Z_1k - 2c)/b_1, +\infty)$. Nos intervalos para L estudamos a velocidade σ_{kl} dada pela Equação (5.2), ao longo da curva de Hugoniot:

- Para $L = -9/2 \in (-\infty, (Z_2k - 2c)/b_1)$, na Figura 61 consideramos os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos Z_S^a e Z_S^b pontos extremos, os pontos $Z_{S'}^a$, $Z_{S'}^b$ da S' lenta S'_s, e os pontos $Z_{S'}^c$, $Z_{S'}^d$ da S' rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_b = (Z_0, Z_{S'}^b) = (0, 0.11)$, $\mathcal{I}_s = (Z_s, Z_2) = (1.27, 1.35)$ e $\mathcal{I}_a = (Z_{S'}^a, Z_1) = (31.76, +\infty) \cup (-\infty, -1.85)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local.

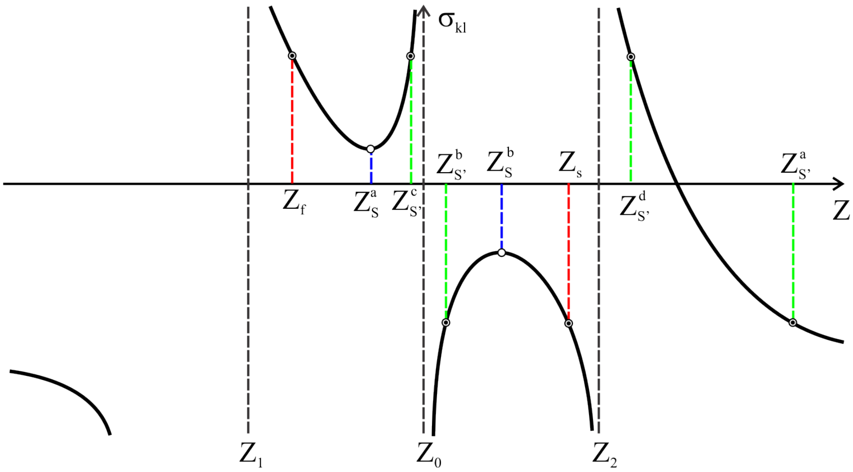


Figura 61 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (6, -9/2)$.

Para encontrar o arco de 1-choque não-local consideramos um valor para $\overline{Z} = 32.76$ no intervalo $\mathcal{I}_a$, seguindo o passo 4 do algorítmo temos a coordenada $(K', Z', L') = (5.60, 4.15, 32.76)$ associada a curva $H'_{k'l'}$ que é calculado pelas Equações (5.4), seguindo o passo 5 do algorítmo temos $Z'_s = -2.45$, $Z'_f = 0.60$ tal que $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -4.16 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 2.19$ onde Z'_s, Z'_f são calculado por (5.7) e seguindo o passo 6 do algorítmo temos $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -4.16 < \sigma_{k'l'}(\overline{Z}) = -1.86 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 2.19$; Para encontrar o arco de 1-choque não-local consideramos um valor para $\overline{Z} = 0.05$ no intervalo $\mathcal{I}_b$, seguindo o passo 4 do algorítmo temos a coordenada $(K', Z', L') = (-53.63, -2.32, 0.05)$ associada a curva $H'_{k'l'}$ que é calculado pelas Equações (5.4), seguindo o passo 5 do algorítmo temos $Z'_s = 0.0058$, $Z'_f = -23.62$ tal que $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -8.95 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 18.46$ onde Z'_s, Z'_f são calculado por (5.7) e seguindo o passo 6 do algorítmo temos $\sigma_{k'l'}(Z'_s) = -8.95 < \sigma_{k'l'}(\overline{Z}) = -4.06 < \sigma_{k'l'}(Z'_f) = 18.46$. Podemos concluir que, ambos os intervalos satisfazem a desigualdade (5.11), o seja, ambos os intervalos correspondem a arcos de 1-choque não-local.

- Para $L = -3 \in ((Z_2k - 2c)/b_1, -2c)$ consideramos na Figura 62 os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos $Z^a_{S'}$, $Z^b_{S'}$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z^c_{S'}$, $Z^d_{S'}$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_a = (Z_0, Z^a_{S'})$, $\mathcal{I}_s = (Z_2, Z_s)$ e $\mathcal{I}_b = (Z^b_{S'}, Z_1)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local. Para os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$, seguindo como nos casos anteriores aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algoritmo, e concluímos que ambos representam arcos de 1-choque não-local.

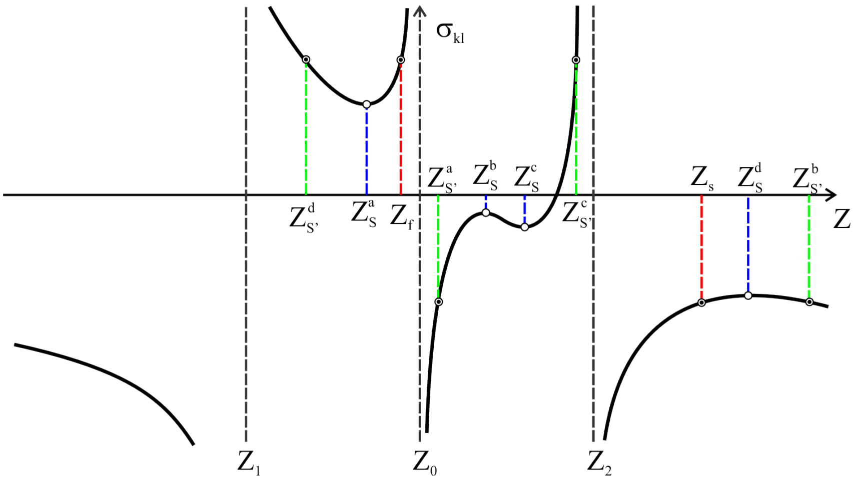


Figura 62 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (6, -3)$.

- Para $L = -1 \in (-2c, (Z_1 k - 2c)/b_1)$ consideramos na Figura 63 os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos extremos Z^a_S e Z^b_S, os pontos $Z^a_{S'}$, $Z^b_{S'}$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z^c_{S'}$, $Z^d_{S'}$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_a = (Z^a_{S'}, Z_0)$, $\mathcal{I}_b = (Z_2, Z^b_{S'})$ e $\mathcal{I}_s = (Z_s, Z_1)$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local. Para os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$, seguindo como nos casos anteriores aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algoritmo, e concluímos que ambos representam arcos de 1-choque não-local.

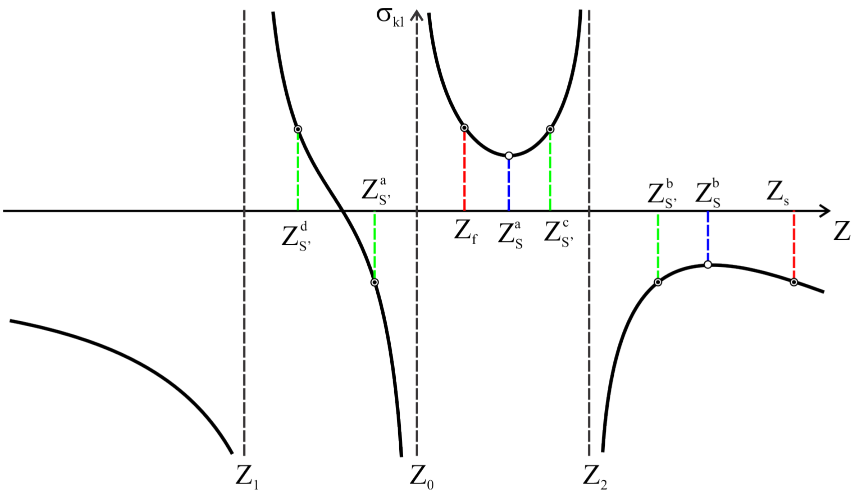


Figura 63 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (6, -1)$.

- Para $L = 10 \in ((Z_1 k - 2c)/b_1, \infty)$ consideramos na Figura 64 os pontos Z_s e Z_f da característica lenta e rápida, os pontos extremos Z^a_S e Z^b_S, os pontos $Z^a_{S'}$, $Z^b_{S'}$ da sônica lenta S'_s, e os pontos $Z^c_{S'}$, $Z^d_{S'}$ da sônica rápida S'_f. Neste caso temos os intervalos $\mathcal{I}_s = (Z_1, Z_s)$, $\mathcal{I}_a = (Z^a_{S'}, Z_0)$ e $\mathcal{I}_b = (Z_2, Z^b_{S'})$ satisfazendo a desigualdade (5.10). De onde, podemos concluir que o intervalo $\mathcal{I}_s$ representa um arco de 1-choque local. Para os intervalos $\mathcal{I}_a$ e $\mathcal{I}_b$, seguindo como nos casos anteriores aplicamos os passos 4, 5 e 6 do algoritmo, e concluímos que ambos representam arcos de 1-choque não-local.

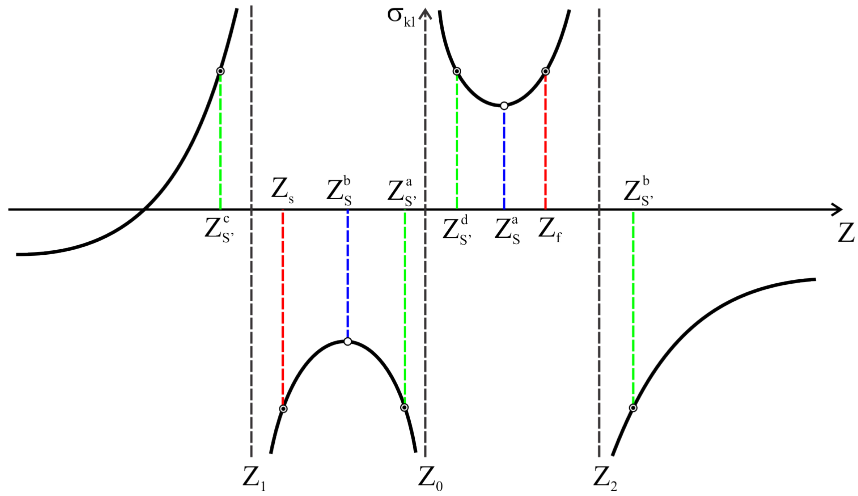


Figura 64 – Função velocidade σ_{kl} para $(K, L) = (6, 10)$.

Portanto, considerando a Figura 34 observamos que existem um arco de 1-choque local e dois arcos de 1-choque não-local para cada (k, l) do espaço de estados KL na região hiperbólica para o caso I_a. Para os casos I_b e I_c os cálculos são análogos.

5.3 Arcos de 1-choque para o Caso II do espaço de parâmetros b_1b_2

Nesta seção apresentamos dois subcasos: Caso II_a e Caso II_b (o Caso II_c é semelhante ao caso II_b), onde seguiremos a mesma estratégia do Caso I da seção 5.2.

Consideremos o Caso II_a, tomando $b_1 = -1/2$, $b_2 = 1$, $c = 1$ para efeito de cálculos e figuras. Neste caso o espaço de estados KL é dividido em regiões pelas retas de bifurcação r_0, r_1, r_2, as retas de duplo contato D_1 e D_2 e a elipse E como está ilustrado na Figura 65. A análise feita no Capítulo 4 indica que a configuração do espaço $\mathcal{M}_k$ muda quando K varia através das interseções das retas r_0, r_1 e r_2, além disto, consideraremos as mudanças que existem ao passar pelas interseções Er_1, Er_2 na Figura 65. Assim, podemos observar o comportamento dos elementos do espaço $\mathcal{M}_k$.

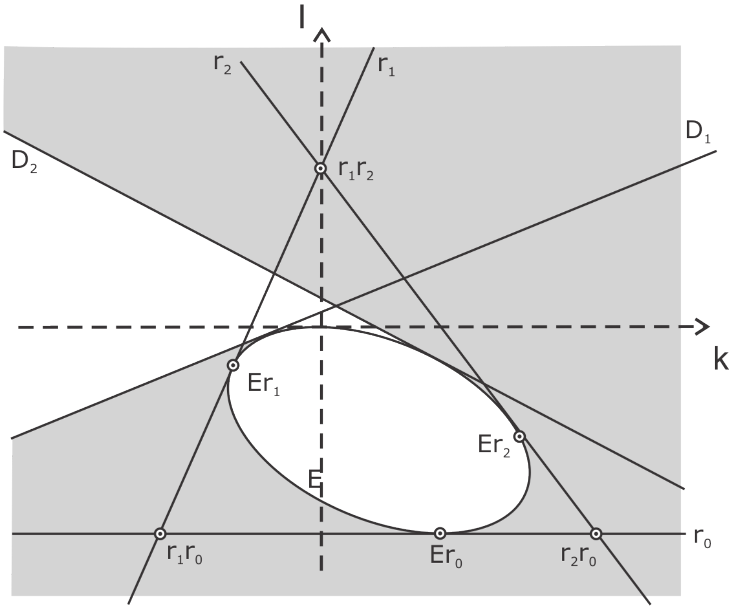


Figura 65 – Decomposição do espaço de estados KL com Z fixo para o Caso II_a do espaço de parâmetros b_1b_2 da Figura 4. No caso, $b_1 = -1/2$, $b_2 = 1$ e $c = 1$.

Na Figura 65 estão representados os seguintes pontos (neste caso $Z_1 < 0 < Z_2$): A interseção entre as retas r_1 e r_0 denotada por $r_1r_0 = (K_{r_1r_0}, L_{r_1r_0}) = (-2c(b_1-1)/Z_1, -2c)$; a interseção entre as retas r_1 e r_2 denotada por $r_1r_2 = (K_{r_1r_2}, L_{r_1r_2}) = (0, -2c/b_1)$; a interseção entre as retas r_2 e r_0 denotada por $r_2r_0 = (K_{r_2r_0}, L_{r_2r_0}) = (-2c(b_1-1)/Z_2, -2c)$; a interseção entre a elipse E e a reta r_0 denotada por $Er_0 = (K_{Er_0}, L_{Er_0}) = (2cb_2, -2c)$; Para cada $i = 1, 2$, a interseção entre a elipse E e a reta r_i denotada por $Er_i = (K_{Er_i}, L_{Er_i})$ onde $L_{Er_i} = (Z_iK_{Er_i} - 2c)/b_1$ e K_{Er_i} é solução da equação $b_1^2 + (K^2 - 2cb_2K - 4c^2)(b_2^2 - 4(b_1 - 1)) = 0$.

Uma vez obtidos pontos de interseção acima consideramos a seguinte divisão para K em 6 subcasos de acordo com os intervalos: $(-\infty, K_{r_1r_0})$, $(K_{r_1r_0}, K_{Er_1})$, $(K_{Er_1}, K_{r_1r_2})$, $(K_{r_1r_2}, K_{Er_2})$, $(K_{Er_2}, K_{r_2r_0})$ e $(K_{r_2r_0}, +\infty)$, onde é construído o plano $\mathcal{M}_k$.

Mostraremos a seguir as folheações do espaço $\mathcal{M}_k$ para cada k num dos 6 intervalos acima. Para cada um dos subcasos, repetindo os procedimentos das seções anteriores, via os algoritmos introduzidos na seção 5.1 (pg. 64, 65) exibimos também nas folheações os segmentos que representam arcos de 1-choque local e não-local.

5.3.1 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso II_a, para $K = -5/2 \in (-\infty, K_{r_1 r_0})$

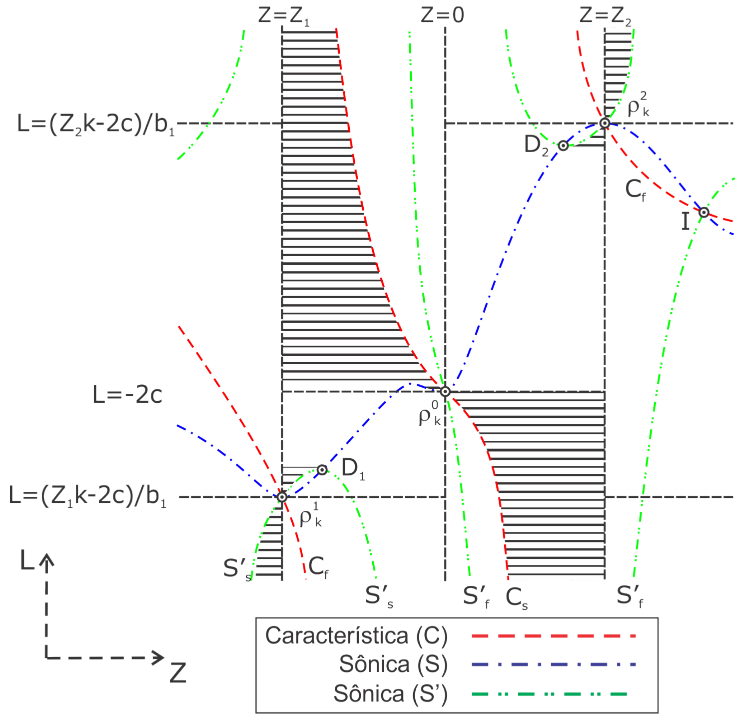


Figura 66 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -5/2 \in (-\infty, K_{r_1 r_0})$. Segmentos hachuriados representam arcos de 1-choque.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 65, começaremos considerando $K = -5/2 < K_{r_1 r_0}$. O um comportamento local do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 66, onde a característica lenta C_s passa pela reta de bifurcação ρ_0, a característica rápida passa pelas retas de bifurcação ρ_1 e ρ_2. Na Figura 65 temos também duas componentes da sônica lenta, uma passando pela reta de bifurcação ρ_1 e a outra passando por ρ_2, e duas componentes da sônica rápida.

Observamos neste caso que da característica lenta C_s saem arcos de 1-choque local para todo L e da sônica lenta S'_s saem arcos de 1-choque não-local para (Z, L) nas faixas $-\infty < Z < Z_{D_1}$, $-\infty < L < L_{D_1}$ e $Z_{D_2} < Z < \infty$, $L_{D_2} < L < \infty$.

5.3.2 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso II_a, para $K = -13/10 \in (K_{r_1 r_0}, K_{E_{r_1}})$

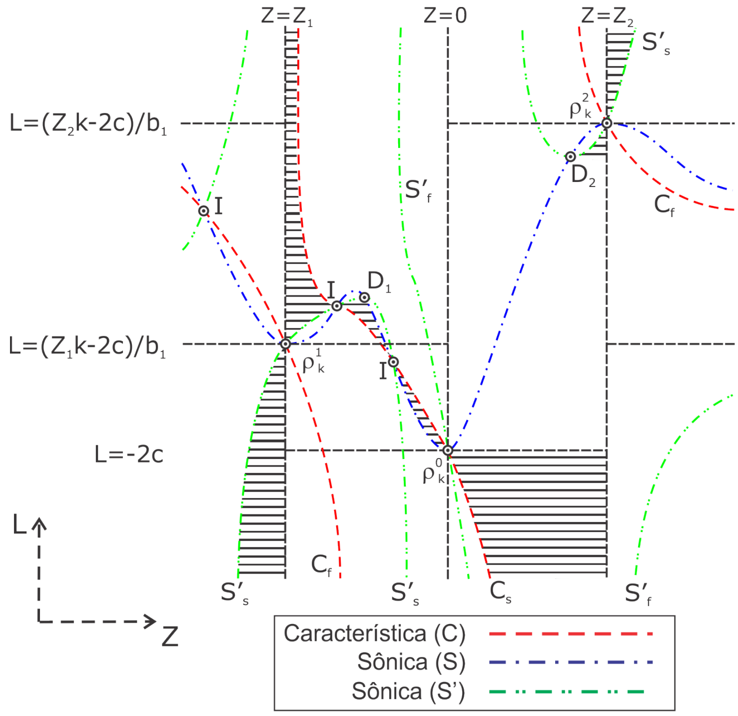


Figura 67 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -13/10 \in (K_{r_1 r_0}, K_{E r_1})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 65, consideramos K com $K_{r_1 r_0} < K = -13/10 < K_{E r_1}$. Na Figura 67 é mostrado o comportamento local do espaço $\mathcal{M}_k$. Observamos na Figura 67 que a característica lenta C_s intersecta a reta de bifurcação ρ_0 e duas inflexões; que arcos de 1-choque local que saem da característica lenta entre a reta de bifurcação ρ_0 e a inflexão I terminam na sônica S.

Também, observamos neste caso duas componentes da sônica lenta e em cada uma temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) nas faixas $-\infty < Z < Z_{D_1}$, $-\infty < L < L_{D_1}$ e $Z_{D_2} < Z < \infty$, $L_{D_2} < L < \infty$.

Observação 10. Neste caso, para K próximo de $K_{E_{r_1}}$ a região elíptica já aparece.

5.3.3 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso II_a, para $K = -1/2 \in (K_{E_{r_1}}, K_{r_1r_2})$

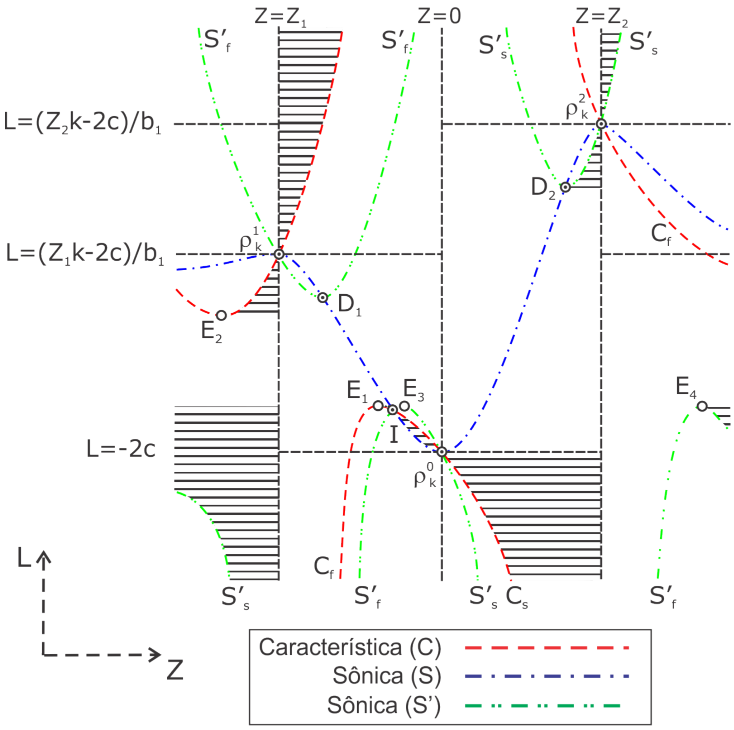


Figura 68 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -1/2 \in (K_{Er_1}, K_{r_1r_2})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 65, consideramos K com $K_{Er_1} < K = -1/2 < K_{r_1r_2}$, cujo comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 68. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_0 e ρ_1 e uma inflexão, quando a característica lenta C_s atingir E_1 e E_2 muda para característica rápida C_f; que arcos de 1-choque local que saem da característica lenta C_s entre a bifurcação ρ_0 e a inflexão I terminam na sônica S.

Também, observamos neste caso duas componentes da sônica lenta e em cada uma temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) nas faixas $Z_{E_4} < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < Z_1$, $-\infty < L < L_{E_4}$ e $Z_{D_2} < Z < \infty$, $L_{D_2} < L < \infty$.

5.3.4 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso II_a, para $K = 1 \in (K_{r_1 r_2}, K_{E_{r_2}})$

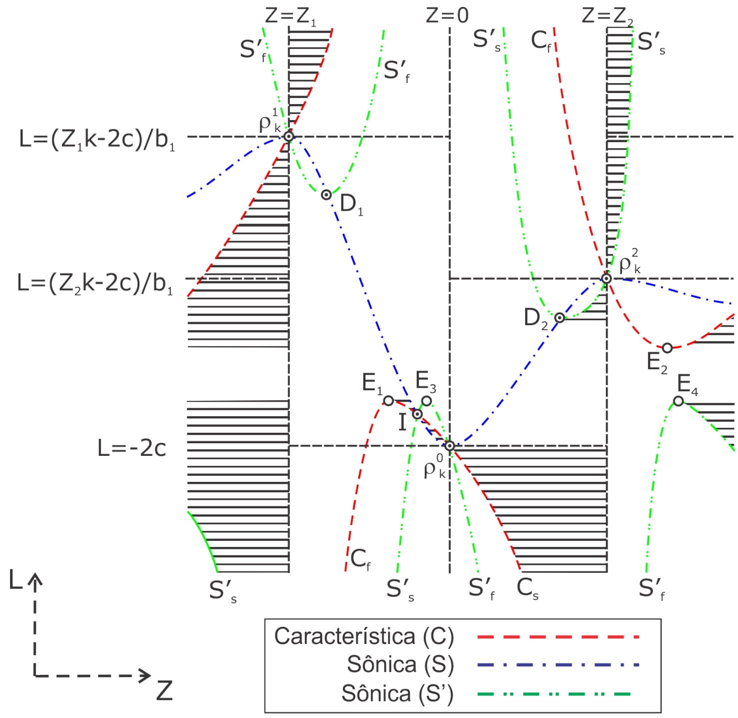


Figura 69 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 1 \in (K_{r_1 r_2}, K_{Er_2})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 65, consideramos K com $K_{r_1 r_2} < K = 1 < K_{Er_2}$, cujo comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 69. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_0 e ρ_1 e uma inflexão, quando a característica lenta C_s atingir E_1 e E_2 muda para característica rápida C_f; que arcos de 1-choque local que saem da característica lenta C_s entre a bifurcação ρ_0 e a inflexão I terminam na sônica S.

Também, observamos neste caso duas componentes da sônica lenta e em cada uma temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) nas faixas $Z_{E_4} < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < Z_1$, $-\infty < L < L_{E_4}$ e $Z_{D_2} < Z < \infty$, $L_{D_2} < L < \infty$.

5.3.5 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso II_a, para $K = 33/10 \in (K_{E_{r_2}}, K_{r_2 r_0})$

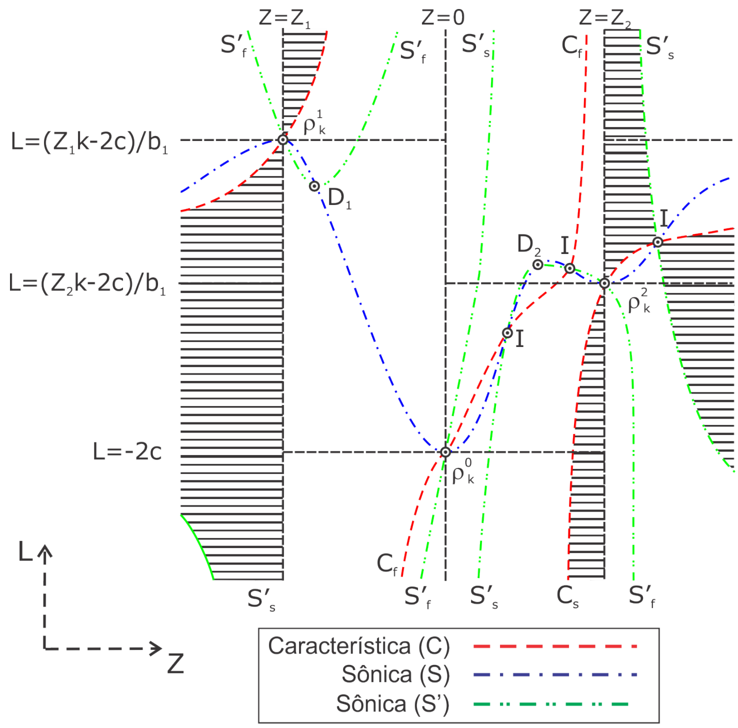


Figura 70 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 33/10 \in (K_{Er_2}, K_{r_2 r_0})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 65, consideramos K com $K_{Er_2} < K = 33/10 < K_{r_2 r_0}$, um comportamento local do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 70. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_1 e ρ_2.

Também, observamos neste caso uma componente da sônica lenta e temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) nas faixas $Z_2 < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < Z_1$.

5.3.6 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso II_a, para $K = 9/2 \in (K_{r_2 r_0}, +\infty)$

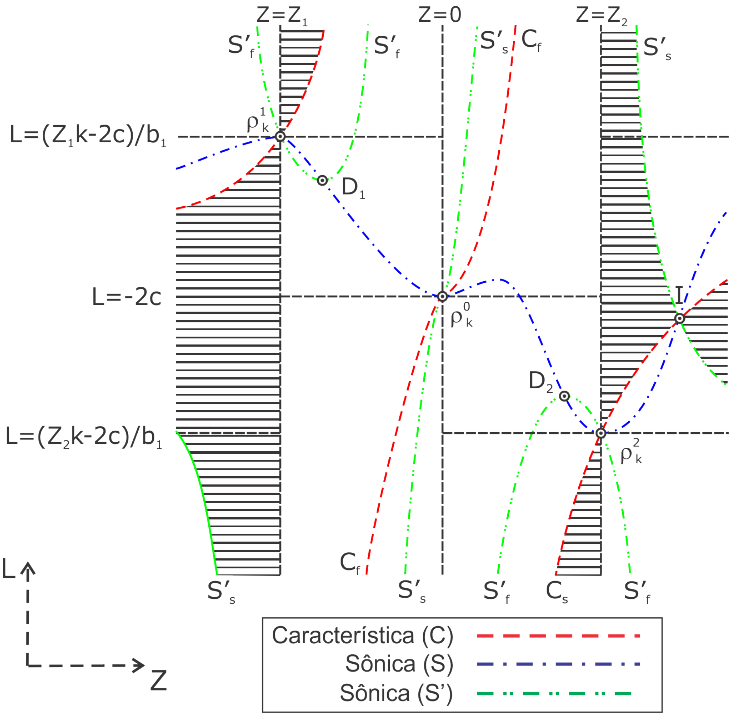


Figura 71 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 9/2 \in (K_{r_2 r_0}, +\infty)$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 65, consideramos K com $K_{r_2 r_0} < K = 9/2$, cujo comportamento local do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 71. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_1 e ρ_2.

Também, observamos neste caso uma componente da sônica lenta e temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) nas faixas $Z_2 < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < Z_1$.

Uma vez concluída a análise do Caso II_a, passemos a considerar o Caso II_b. Neste caso consideramos $b_1 = -3$, $b_2 = 3$, $c = 1$ para efeito de cálculos e figuras. No Caso II_b, o espaço de estados KL é dividido em regiões pelas retas r_0, r_1, r_2, D_1 e D_2 e a elipse E como mostrado na Figura 72, A análise feita no Capítulo 4 indica que a configuração do espaço LZ muda quando K varia através das interseções das retas de bifurcação r_0, r_1 e r_2, além disto, quando atravessa os pontos de tangência Er_1 e Er_2. Assim, podemos observar o comportamento dos elementos do espaço $\mathcal{M}_k$.

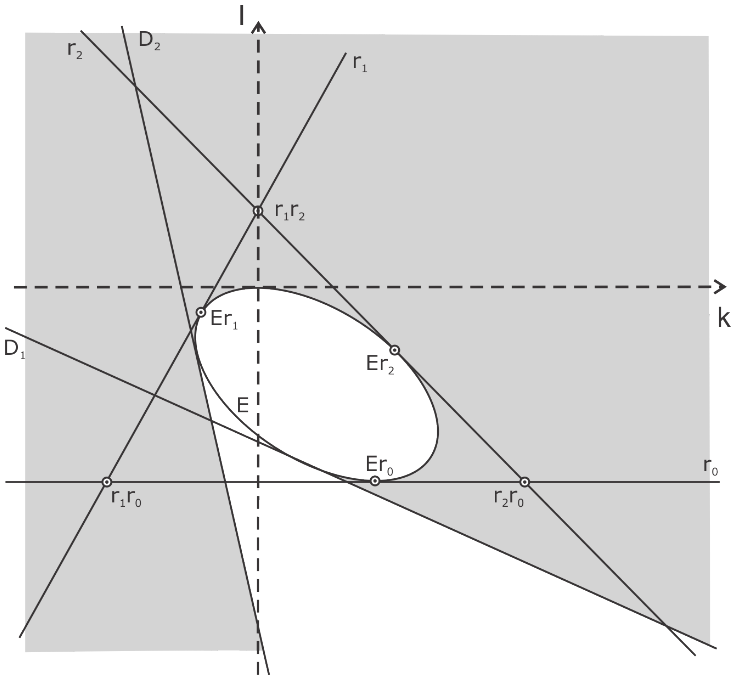


Figura 72 – Decomposição do espaço de estados KL com Z fixo para o Caso II_b do espaço de parâmetros b_1b_2 da Figura 4. No caso, $b_1 = -3$, $b_2 = 2$ e $c = 1$.

Na Figura 72 consideramos os seguintes pontos (neste caso $Z_1 < 0 < Z_2$): A interseção entre as retas r_1 e r_0 denotada por $r_1r_0 = (K_{r_1r_0}, L_{r_1r_0}) = (-2c(b_1-1)/Z_1, -2c)$; a interseção entre as retas r_1 e r_2 denotada por $r_1r_2 = (K_{r_1r_2}, L_{r_1r_2}) = (0, -2c/b_1)$; a interseção entre as retas r_2 e r_0 denotada por $r_2r_0 = (K_{r_2r_0}, L_{r_2r_0}) = (-2c(b_1-1)/Z_2, -2c)$; a interseção entre a elipse E e a reta r_0 denotada por $Er_0 = (K_{Er_0}, L_{Er_0}) = (2cb_2, -2c)$; Para cada $i = 1, 2$, a interseção entre a elipse E e a reta r_i denotada por $Er_i = (K_{Er_i}, L_{Er_i})$ onde $L_{Er_i} = (Z_iK_{Er_i} - 2c)/b_1$ e K_{Er_i} é solução da equação $b_1^2 + (K^2 - 2cb_2K - 4c^2)(b_2^2 - 4(b_1 - 1)) = 0$. Uma vez obtidos esses pontos de interseção consideramos os intervalos para K como $(-\infty, K_{r_1r_0})$, $(K_{r_1r_0}, K_{Er_1})$, $(K_{Er_1}, K_{r_1r_2})$, $(K_{r_1r_2}, K_{Er_2})$, $(K_{Er_2}, K_{r_2r_0})$ e $(K_{r_2r_0}, +\infty)$, onde é construído o plano $\mathcal{M}_k$.

5.3.7 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso II_b, para $K = -23/10 \in (-\infty, K_{r_1 r_0})$

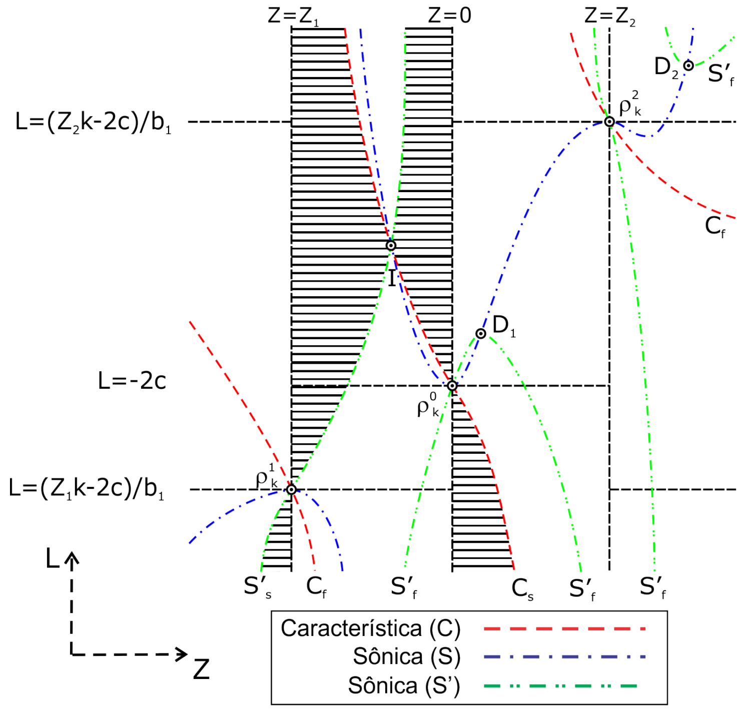


Figura 73 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -23/10 \in (-\infty, K_{r_1 r_0})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 72, consideramos K com $K = -23/10 < K_{r_1 r_0}$, cujo comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 73. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_0 e uma inflexão I.

Também, observamos neste caso uma componente da sônica lenta e temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) nas faixas $Z_2 < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < 0$.

5.3.8 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso II_b, para $K = -3/2 \in (K_{r_1r_0}, K_{Er_1})$

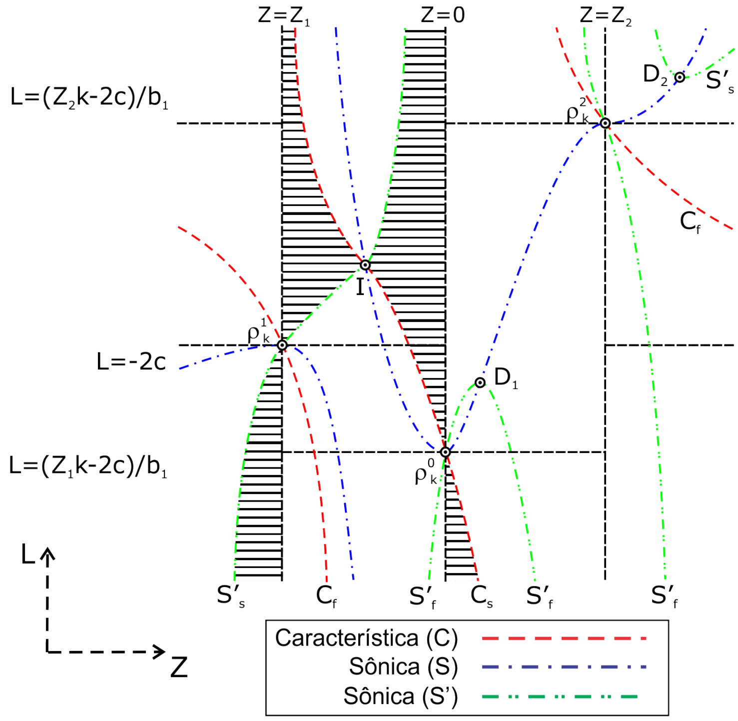


Figura 74 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -3/2 \in (K_{r_1r_0}, K_{Er_1})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 72, consideramos K com $K_{r_1r_0} < K = -3/2 < K_{Er_1}$, um comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 74. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_0 e uma inflexão I.

Também, observamos neste caso uma componente da sônica lenta e temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) nas faixas $Z_2 < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < 0$.

5.3.9 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso II_b, para $K = -3/10 \in (K_{Er_1}, K_{r_1r_2})$

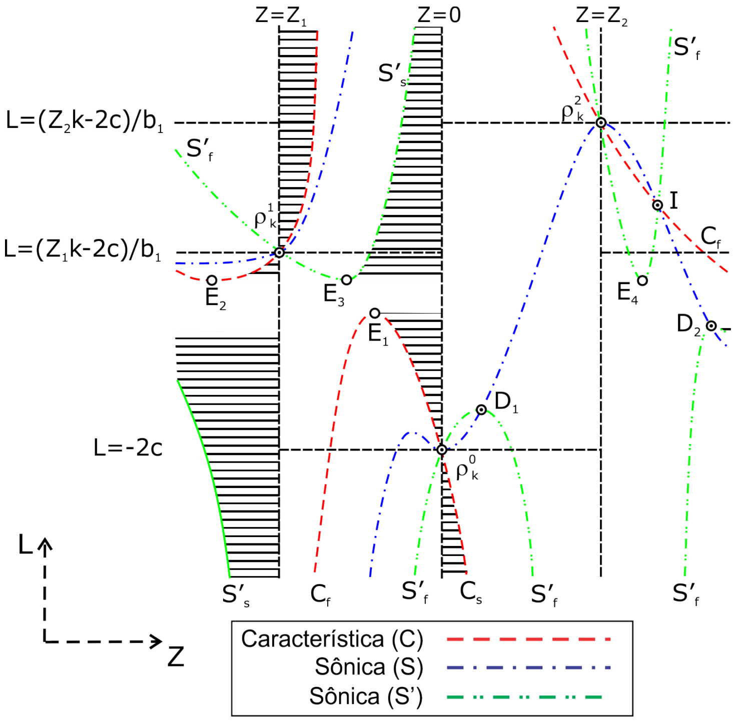


Figura 75 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -3/10 \in (K_{Er_1}, K_{r_1r_2})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 72, consideramos K com $K_{Er_1} < K = -3/10 < K_{r_1r_2}$, um comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 75. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_0 e ρ_1, quando a característica lenta C_s atingir E_1 e E_2 muda para característica rápida C_f.

Também, observamos neste caso duas componentes da sônica lenta e em cada uma temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) nas faixas $Z_{D_2} < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < Z_1$, $-\infty < L < L_{E_4}$ e $Z_{E_3} < Z < 0$, $L_{E_3} < L < +\infty$.

5.3.10 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso II_b, para $K = 1 \in (K_{r_1r_2}, K_{Er_2})$

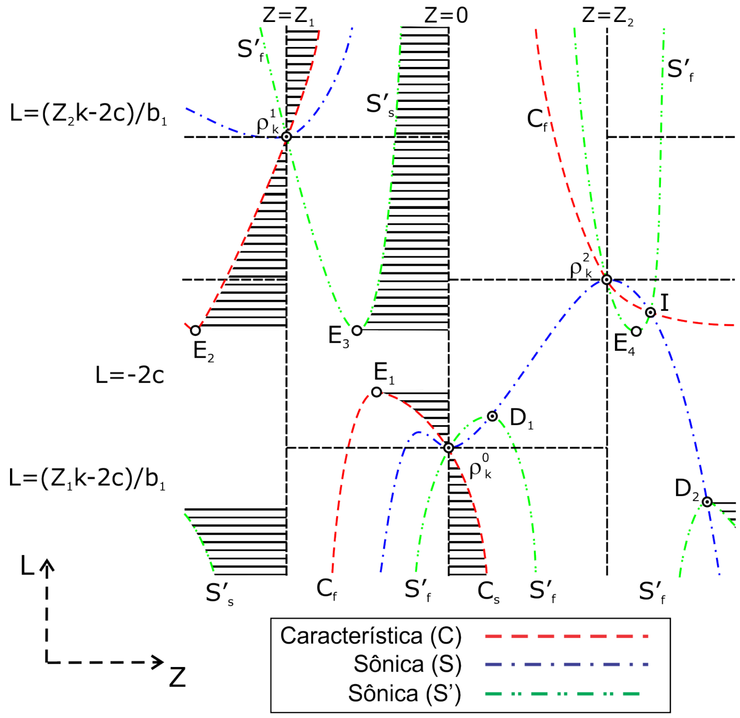


Figura 76 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 1 \in (K_{r_1r_2}, K_{Er_2})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 72, consideramos K com $K_{r_1r_2} < K = 1 < K_{Er_2}$, um comportamento no espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 76. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_0 e ρ_1, quando a característica lenta C_s atingir E_1 e E_2 muda para característica rápida C_f.

Também, observamos neste caso duas componentes da sônica lenta e em cada uma temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) nas faixas $Z_{D_2} < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < Z_1$, $-\infty < L < L_{D_2}$ e $Z_{E_3} < Z < 0$, $L_{E_3} < L < +\infty$.

5.3.11 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso II_b, para $K = 13/2 \in (K_{Er_2}, K_{r_2r_0})$

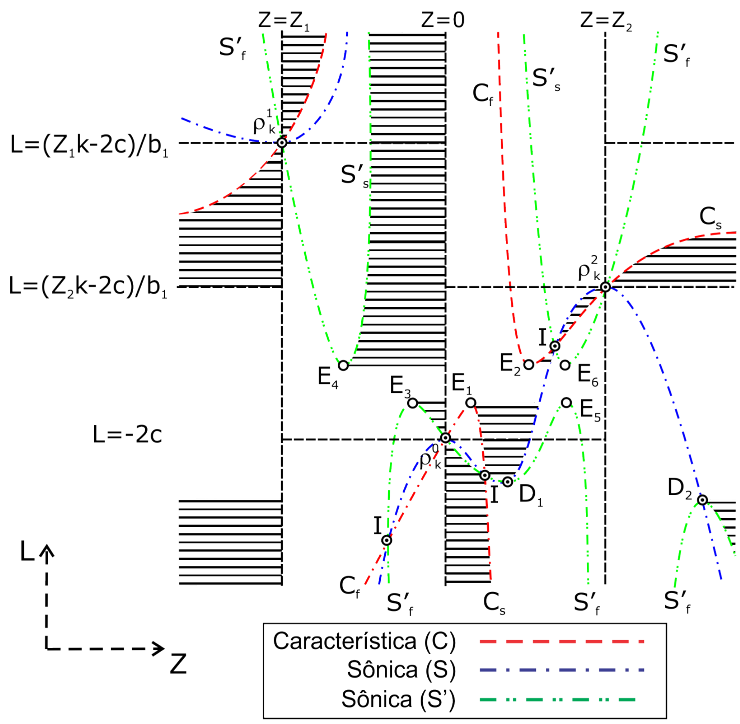


Figura 77 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 13/2 \in (K_{Er_2}, K_{r_2r_0})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 72, consideramos K com $K_{Er_2} < K = 13/2 < K_{r_2r_0}$, um comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 77. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_2 e duas inflexões I, quando a característica lenta C_s atingir E_1 e E_2 muda para característica rápida C_f.

Também, observamos neste caso três componentes da sônica lenta e em cada uma temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) na faixa $Z_{D_2} < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < Z_1$, $-\infty < L < L_{D_2}$, na faixa $Z_{E_3} < Z < Z_{D_1}$, $L_{D_1} < L < L_{E_3}$ e na faixa $Z_{E_4} < Z < 0$, $L_{E_4} < L < +\infty$.

5.3.12 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso II_b, para $K = 17/2 \in (K_{r_2 r_0}, +\infty)$

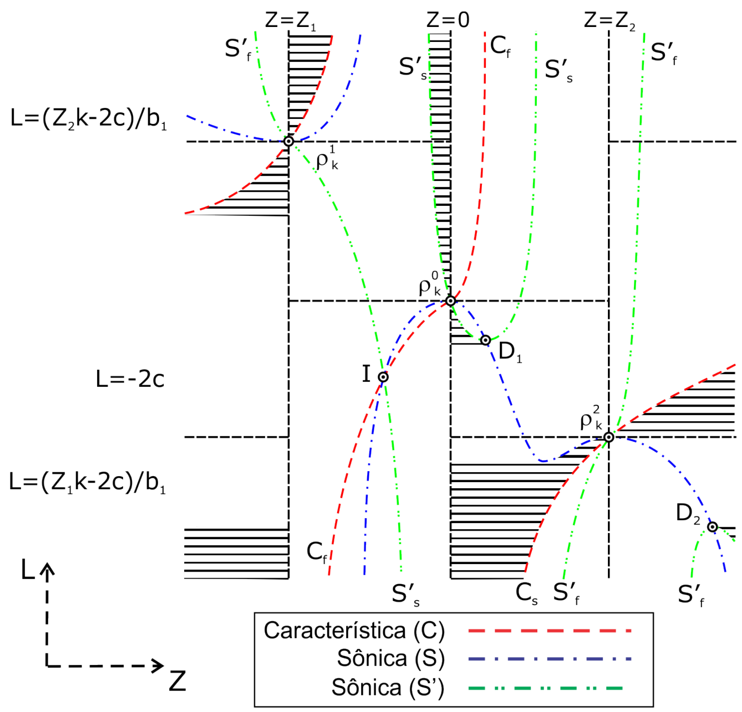


Figura 78 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 17/2 \in (K_{r_2 r_0}, +\infty)$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 72, consideramos K com $K_{r_2 r_0} < K = 17/2$, um comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 78. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_1 e ρ_2.

Também, observamos neste caso dois componentes da sônica lenta e em cada uma temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) na faixa $Z_{D_2} < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < Z_1$, $-\infty < L < L_{D_2}$ e na faixa $Z_{ass} < Z < Z_{D_1}$, $L_{D_1} < L < +\infty$, onde Z_{ass} é a assintota da curva sônica S' entre Z_1 e 0.

5.4 Arco de 1-choque para o Caso III do espaço de parâmetros $b_1 b_2$

Nesta seção apresentamos um subcaso: Caso III_a, os outros casos são semelhantes. Consideramos $b_1 = 4$, $b_2 = 4$, $c = 1$ para efeito de cálculo e figuras. O espaço de estados KL para este caso é dividido em regiões pelas retas r_0, r_1, r_2, D_1 e D_2 e a elipse E como mostrado na Figura 79. A análise feita no Capítulo 4 indica que a configuração do espaço $\mathcal{M}_k$ muda significativamente quando K varia através das interseções das retas de bifurcação r_0, r_1 e r_2, além disto, quando atravessa as interseções Er_1, Er_2. Assim, podemos observar o comportamento dos elementos do espaço $\mathcal{M}_k$.

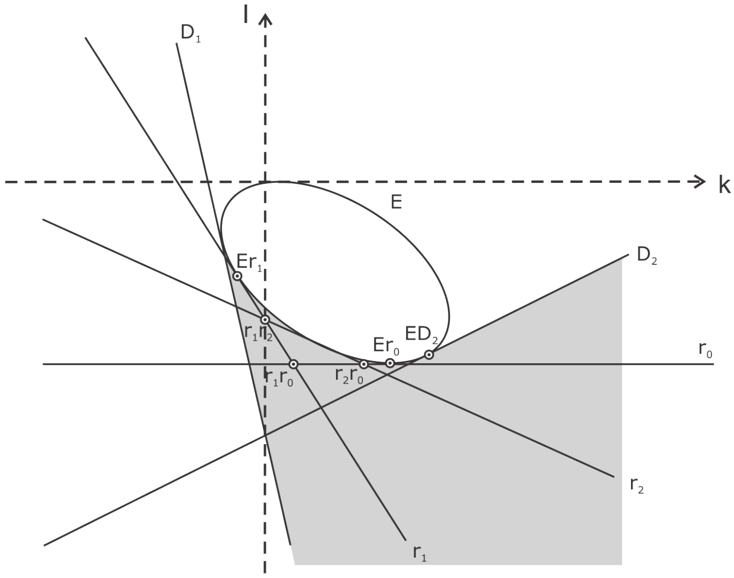


Figura 79 – Decomposição do espaço de estados KL com Z fixo para o Caso III_a do espaço de parâmetros $b_1 b_2$ da Figura 4. No caso, $b_1 = 4$, $b_2 = 4$, $c = 1$.

Na Figura 79 consideramos os seguintes pontos (neste caso $Z_1 < Z_2 < 0$): A interseção entre as retas r_1 e r_0 denotada por $r_1 r_0 = (K_{r_1 r_0}, L_{r_1 r_0}) = (-2c(b_1 - 1)/Z_1, -2c)$; a interseção entre as retas r_1 e r_2 denotada por $r_1 r_2 = (K_{r_1 r_2}, L_{r_1 r_2}) = (0, -2c/b_1)$; a interseção entre as retas r_2 e r_0 denotada por $r_2 r_0 = (K_{r_2 r_0}, L_{r_2 r_0}) = (-2c(b_1 - 1)/Z_2, -2c)$; a interseção entre a elipse E e a reta r_0 denotada por $Er_0 = (K_{Er_0}, L_{Er_0}) = (2cb_2, -2c)$; Para cada $i = 1, 2$, a interseção entre a elipse E e a reta r_i denotada por $Er_i = (K_{Er_i}, L_{Er_i})$ onde $L_{Er_i} = (Z_i K_{Er_i} - 2c)/b_1$ e K_{Er_i} é solução da equação $b_1^2 + (K^2 - 2cb_2 K - 4c^2)(b_2^2 - 4(b_1 - 1)) = 0$. Uma vez obtidos pontos de interseção acima consideramos a seguinte divisão para K em 6 subcasos de acordo com os intervalos: $(-\infty, K_{Er_1})$, $(K_{Er_1}, K_{r_1 r_2})$, $(K_{r_1 r_2}, K_{r_1 r_0})$, $(K_{r_1 r_0}, K_{r_2 r_0})$, $(K_{r_2 r_0}, K_{ED_2})$ e $(K_{ED_2}, +\infty)$, onde é construído o plano $\mathcal{M}_k$.

Mostraremos a seguir as folheações do espaço $\mathcal{M}_k$ para cada k num dos 6 intervalos acima. Para cada um dos subcasos, repetindo os procedimentos das seções anteriores, via os algoritmos introduzidos na seção 5.1 (pg. 64, 65) exibimos também nas folheações os segmentos que representam arcos de 1-choque local e não-local.

5.4.1 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso III_a, para $K = -3/2 \in (-\infty, K_{Er_1})$

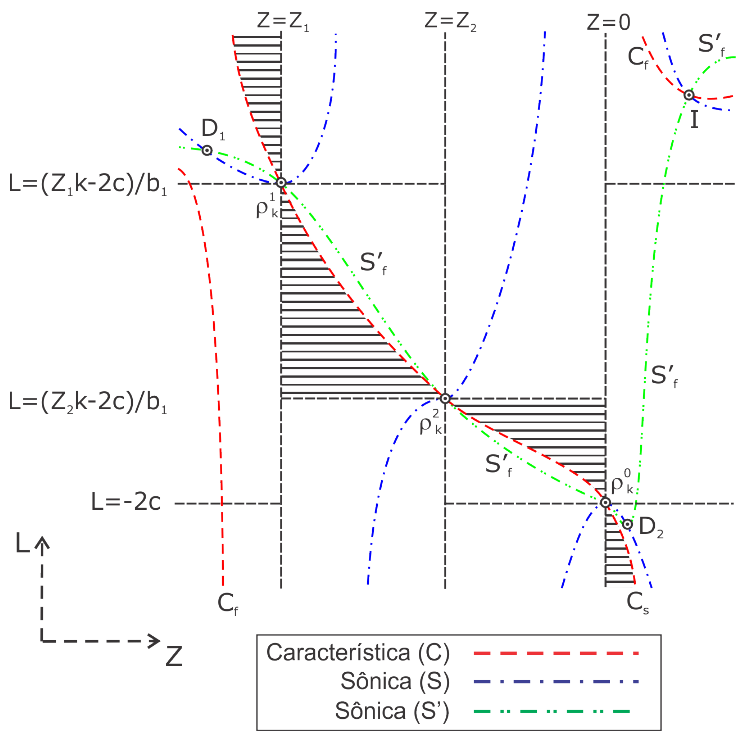


Figura 80 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -3/5 \in (-\infty, K_{Er_1})$. Segmentos hachuriados representam arcos de 1-choque.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 79, consideramos K com $K = -3/5 < K_{Er_1}$, um comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 80. Então, não temos 1-choque não-local. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_0, ρ_1 e ρ_2. Também, neste caso não temos sônica lenta S'_s.

5.4.2 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso III_a, para $K = -3/10 \in (K_{Er_1}, K_{r_1 r_2})$

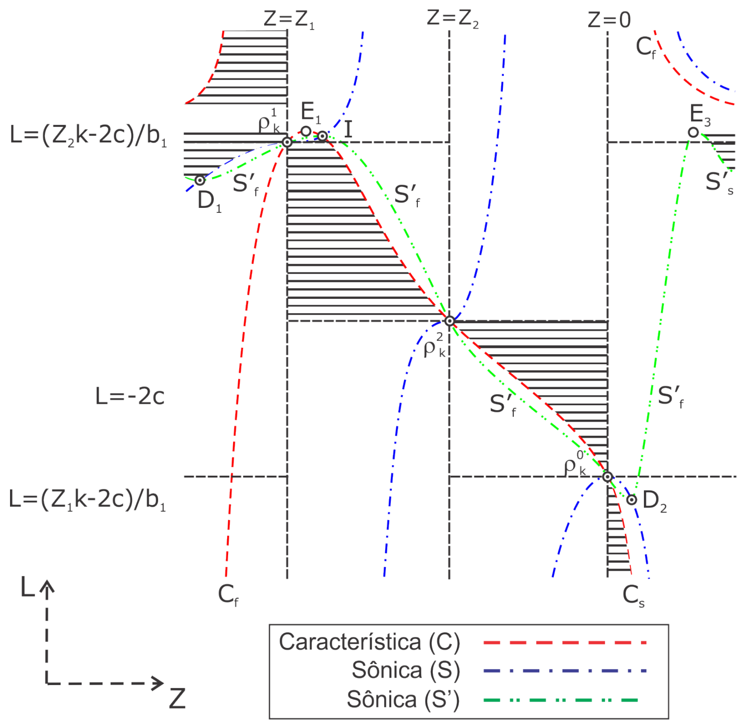


Figura 81 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -3/10 \in (K_{Er_1}, K_{r_1 r_2})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 79, consideramos K com $K_{Er_1} < K = -3/10 < K_{r_1 r_2}$, um comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 81. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_0 e ρ_2 e uma inflexão I, quando a característica lenta C_s atingir E_1 e E_2 muda para característica rápida C_f.

Também, observamos neste caso uma componente da sônica lenta e temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) na faixa $Z_{E_3} < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < Z_1$, $L_{D_1} < L < L_{E_3}$.

5.4.3 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso III_a, para $K = 1 \in (K_{r_1 r_2}, K_{r_1 r_0})$

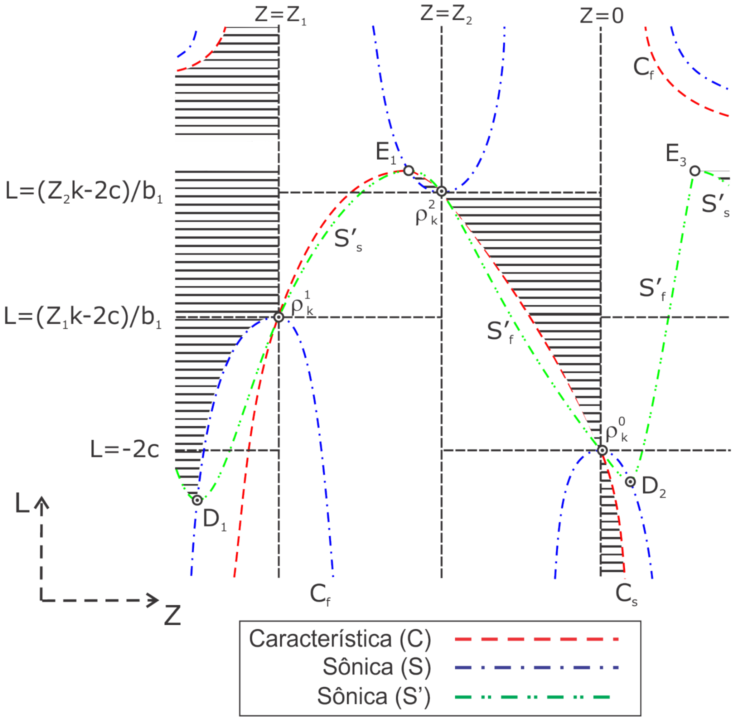


Figura 82 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 1 \in (K_{r_1 r_2}, K_{r_1 r_0})$

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 79, consideramos K com $K_{r_1 r_2} < K = 1 < K_{r_1 r_0}$, um comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 82. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_0 e ρ_2, quando a característica lenta C_s atingir E_1 e E_2 muda para característica rápida C_f.

Também, observamos neste caso uma componente da sônica lenta e temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) na faixa $Z_{E_3} < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < Z_1$, $L_{D_1} < L < L_{E_3}$.

5.4.4 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso III_a, para $K = 3 \in (K_{r_1r_0}, K_{r_2r_0})$

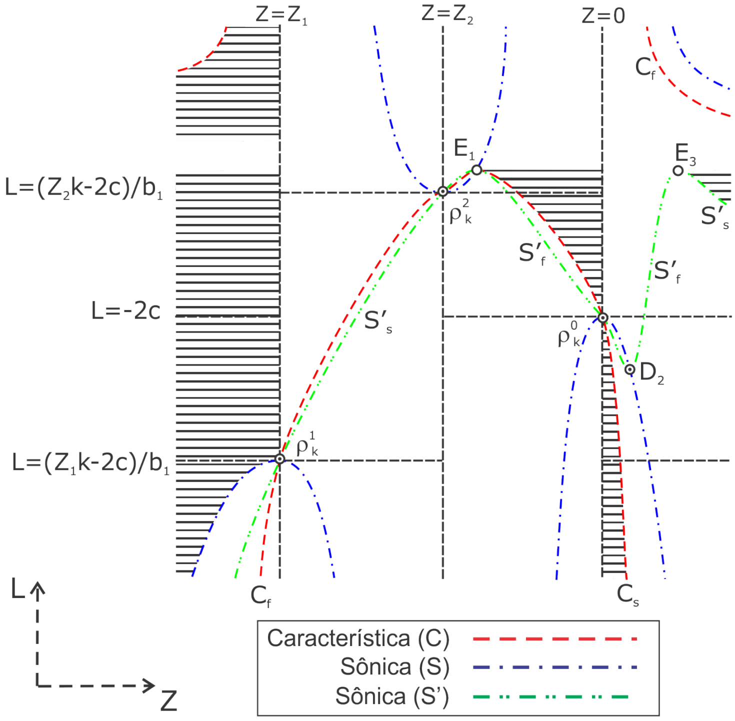


Figura 83 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 3 \in (K_{r_1r_0}, K_{r_2r_0})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 79, consideramos K com $K_{r_1r_0} < K = 3 < K_{r_2r_0}$, um comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 83. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_0, quando a característica lenta C_s atingir E_1 e E_2 muda para característica rápida C_f.

Também, observamos neste caso uma componente da sônica lenta e temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) na faixa $Z_{E_3} < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < Z_1$, $L_{D_1} < L < L_{E_3}$.

5.4.5 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso III_a, para $K = 7 \in (K_{r_2 r_0}, K_{ED_2})$

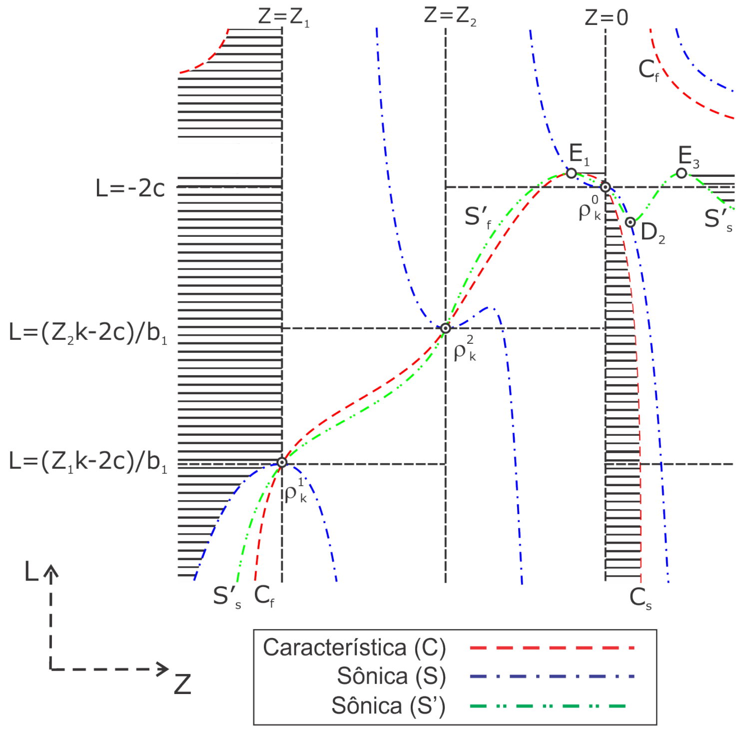


Figura 84 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 7 \in (K_{r_2 r_0}, K_{ED_2})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 79, consideramos K com $K_{r_2 r_0} < K = 7 < K_{ED_2}$, um comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 84. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_0, quando a característica lenta C_s atingir E_1 e E_2 muda para característica rápida C_f.

Também, observamos neste caso uma componente da sônica lenta e temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) na faixa $Z_{E_3} < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < Z_1$, $L_{D_1} < L < L_{E_3}$.

5.4.6 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso III_a, para $K = 9 \in (K_{ED_2}, +\infty)$

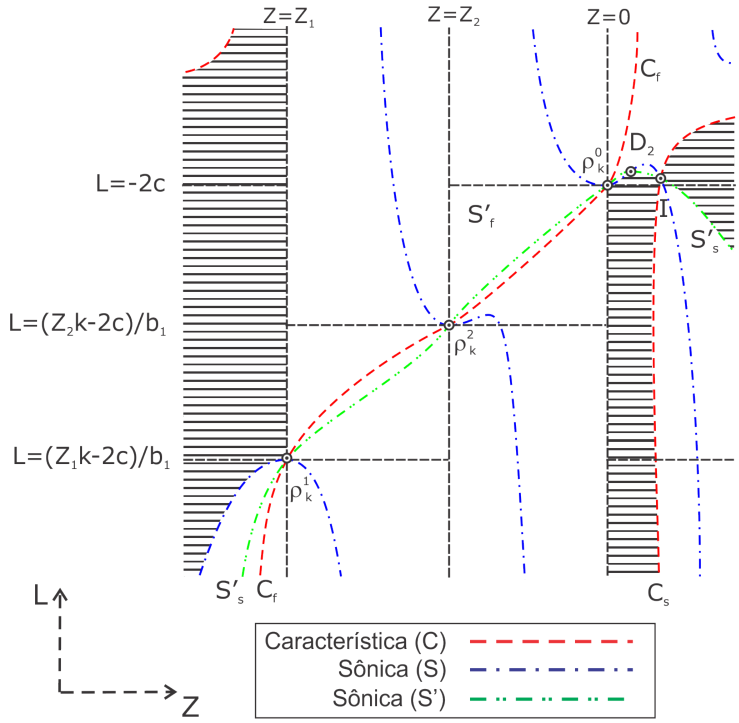


Figura 85 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 9 \in (K_{ED_2}, +\infty)$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 79, consideramos K com $K_{ED_2} < K = 9$, um comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 85. Observamos que a característica lenta C_s não interseta as bifurcações.

Também, observamos neste caso uma componente da sônica lenta e temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) na faixa $0 < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < Z_1$, $L_{D_1} < L < L_{D_2}$.

5.5 Arcos de 1-choque para o Caso IV do espaço de parâmetros $b_1 b_2$

Nesta seção apresentamos o Caso IV. Consideramos $b_1 = 8$, $b_2 = 1/5$ e $c = 1$para efeitos de cálculo e figuras. O espaço de estados KL para este caso é divido em regiões pelas retas r_0, D_1 e D_2 e a elipse E como se mostra na Figura 86. A analise feita no Capítulo 4 indica que a configuração do espaço $\mathcal{M}_k$ muda quando K varia através das interseções das retas r_0, D_1 e D_2, além disto, quando atravessa as interseções Er_0, ED_1 e ED_2. Assim, podemos observar o comportamento dos elementos do espaço $\mathcal{M}_k$.

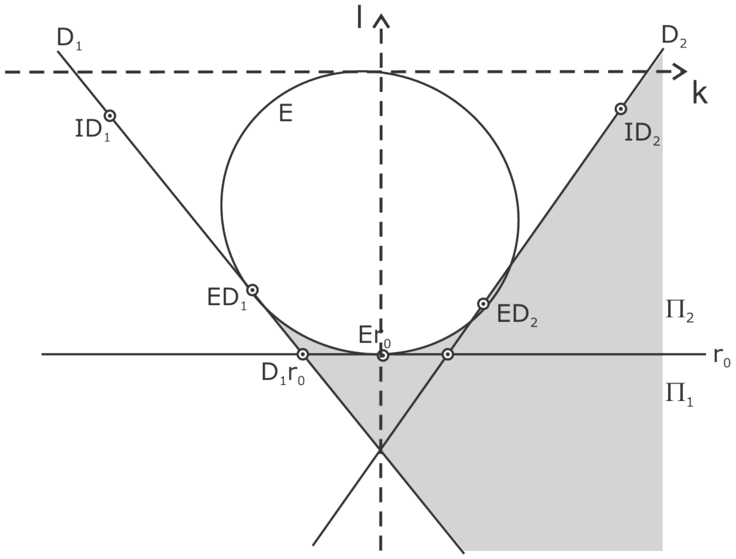


Figura 86 – Decomposição do espaço de estados KL com Z fixo para o Caso IV do espaço de parâmetros b_1b_2 da Figura 4. No caso, $b_1 = 8$, $b_2 = 1/5$, $c = 1$.

Na Figura 86 consideramos os seguintes pontos: A interseção entre as retas r_0 e D_1 denotada por $D_1r_0 = (K_{D_1r_0}, L_{D_1r_0}) = (2c/Z_1, -2c)$; a interseção entre a reta de duplo contato D_1 e Elipse E denotada por $ED_1 = (K_{ED_1}, L_{ED_1})$; a interseção entre a reta de duplo contato D_2 e Elipse E denotada por $ED_2 = (K_{ED_2}, L_{ED_2})$; a interseção entre a reta D_2 e a curva de inflexão I denotada por $ID_2 = (K_{ID_2}, L_{ID_2})$. Uma vez obtidos pontos de interseção acima consideramos a seguinte divisão para K em 5 subcasos de acordo com os intervalos: $(-\infty, K_{ED_1})$, $(K_{ED_1}, K_{D_1r_0})$, $(K_{D_1r_0}, K_{ED_2})$, (K_{ED_2}, ID_2) e $(K_{ID_2}, +\infty)$, onde é construído o plano $\mathcal{M}_k$.

Mostraremos a seguir as folheações do espaço $\mathcal{M}_k$ para cada k num dos 6 intervalos acima. Para cada um dos subcasos, repetindo os procedimentos das seções anteriores, via os algoritmos introduzidos na seção 5.1 (pg. 64, 65) exibimos também nas folheações os segmentos que representam arcos de 1-choque local e não-local.

5.5.1 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso IV, para $K = -7/2 \in (-\infty, K_{ED_1})$

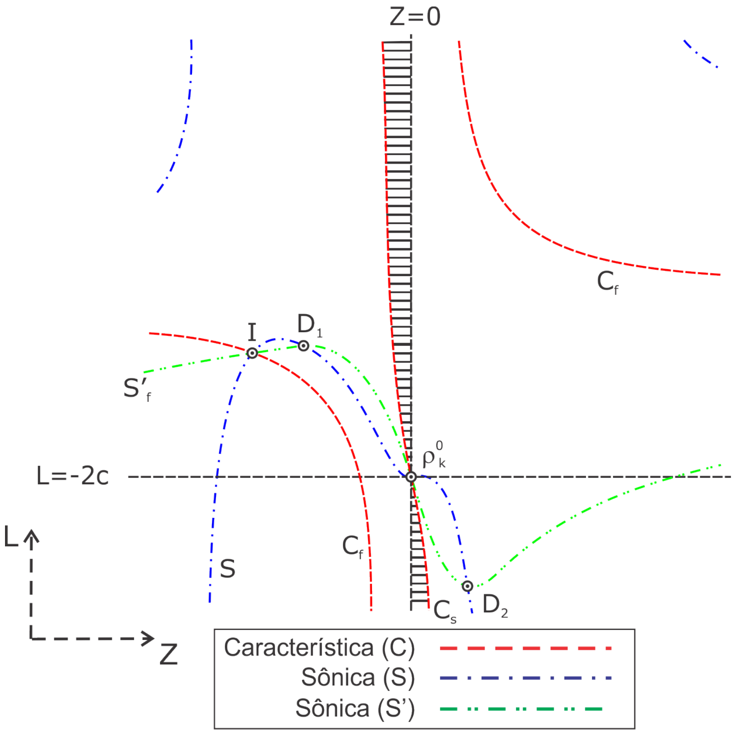


Figura 87 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -7/2 \in (-\infty, K_{ED_1})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 86, consideramos K com $K = -7/2 < K_{ED_1}$, um comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 87. Observamos que a característica lenta C_s interseta as bifurcações em ρ_0. E observamos neste caso não temos sônica lenta S'_s.

5.5.2 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso IV, para $K = -8/10 \in (K_{ED_1}, K_{D_1 r_0})$

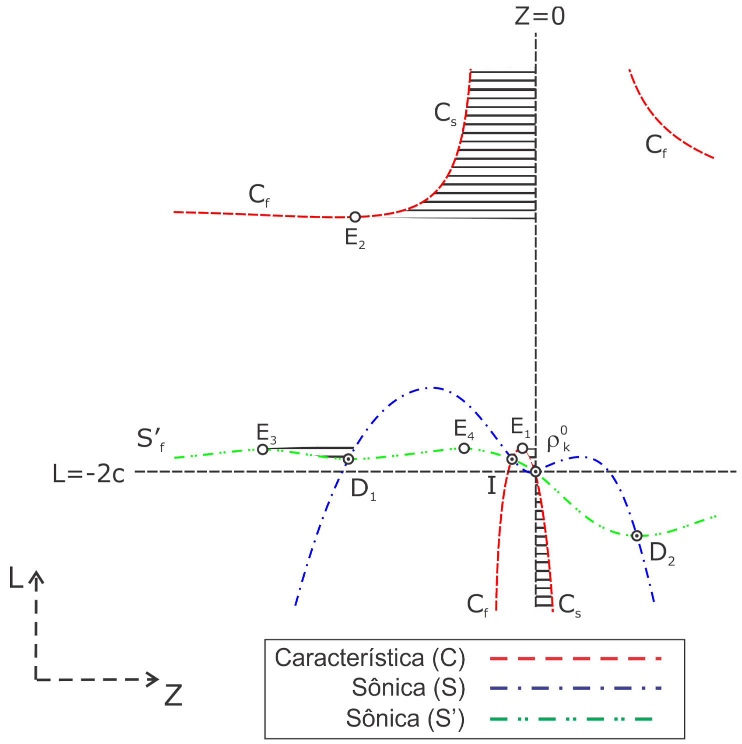


Figura 88 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = -8/10 \in (K_{ED_1}, K_{D_1 r_0})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 86, consideramos K com $K_{ED_1} < K = -8/10 < K_{D_1 r_0}$, um comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 87. Observamos que a característica lenta C_s interseta a bifurcação ρ_0, quando a característica lenta C_s atingir E_1 e E_2 muda para característica rápida C_f.

Também, observamos neste caso uma componentes da sônica lenta S'_s e temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) na faixa $L_{D_1} < L < L_{E_3}$.

5.5.3 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso IV, para $K = 8/10 \in (K_{D_1 r_0}, K_{ED_2})$

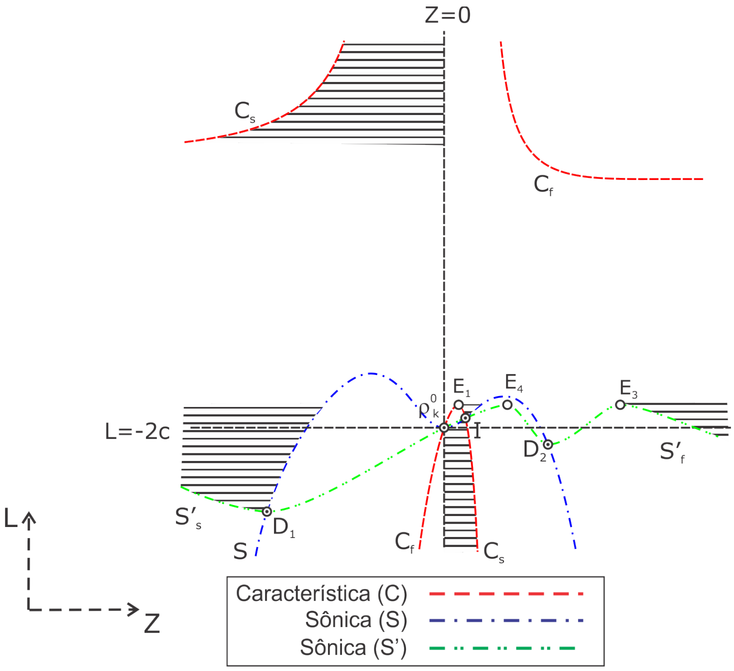


Figura 89 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 8/10 \in (K_{D_1 r_0}, K_{ED_2})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 86, consideramos K com $K_{D_1 r_0} < K = 8/10 < K_{ED_2}$, um comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 87. Observamos que a característica lenta C_s interseta a inflexão I, quando a característica lenta C_s atingir E_1 e E_2 muda para característica rápida C_f.

Também, observamos neste caso uma componentes da sônica lenta S'_s e temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) na faixa $L_{D_1} < L < L_{E_3}$.

5.5.4 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso IV, para $K = 21/10 \in (K_{ED_2}, K_{ID_2})$

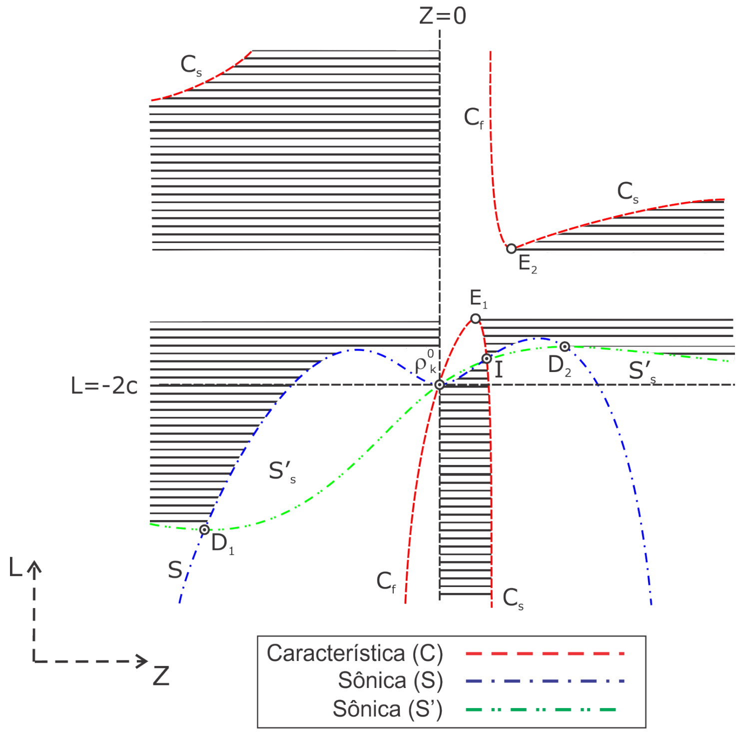


Figura 90 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 21/10 \in (K_{ED_2}, K_{ID_2})$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 86, consideramos K com $K_{ED_2} < K = 21/10 < K_{ID_2}$, um comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 87. Observamos que a característica lenta C_s interseta a inflexão I, quando a característica lenta C_s atingir E_1 e E_2 muda para característica rápida C_f.

Também, observamos neste caso uma componentes da sônica lenta S'_s e temos arcos de 1-choque não-local para (Z, L) na faixa $Z_{D_2} < Z < +\infty$ ou $-\infty < Z < 0$ $L_{D_1} < L < L_{D_2}$.

5.5.5 Folheação de $\mathcal{M}_k$ do Caso IV, para $K = 4 \in (K_{ID_2}, \infty)$

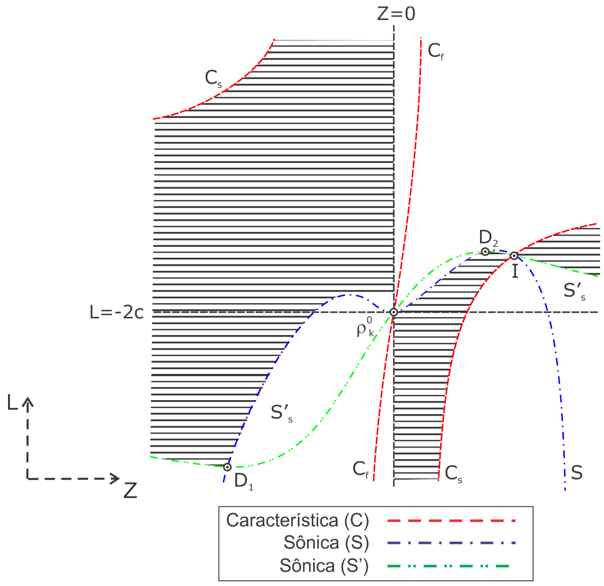


Figura 91 – Folheação de $\mathcal{M}_k$ para $K = 4 \in (K_{ID_2}, \infty)$.

Referindo-se à decomposição do espaço KL da Figura 86, consideramos K com $K_{ID_2} < K = 4$, um comportamento do espaço $\mathcal{M}_k$ é mostrado na Figura 87. Observamos que a característica lenta C_s interseta a inflexão I. Também, observamos neste caso uma componentes da sônica lenta S'_s e temos arcos de 1-choque não-local para todo (Z, L).

Referências

[1] DAFERMOS, C. Structure of solutions of the Riemann problem for hyperbolic systems of conservation laws. *Arch. Rational Mech. Arch.*, 1974. Citado na página 16.

[2] DAFERMOS, C.; DIPERNA, R. The Riemann problem for certain class of hyperbolic systems of conservation laws. *J. Differ. Eqs.*, v. 20, p. 90–114, 1976. Citado na página 16.

[3] OLEINIK, O. On the uniqueness of the general solution of the Cauchy problem for a non-linear system of equations occuring in mechanics. *Uspekhi Mat. Nauk*, v. 12, p. 189–176, 1957. Citado na página 16.

[4] SMOLLER, J.; JOHNSON, J. Global solutions for an extended class of hyperbolic systems of conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.*, v. 32, p. 169–189, 1969. Citado na página 16.

[5] WENDROFF, B. The Riemann problem for materials with non-convex equations of state: I isentropic flow: II general flow. *J. Math. Anal. And Appl.*, v. 38, p. 454–466; 640–648, 1972. Citado na página 16.

[6] LEIBOVICH, L. Solutions of the Riemann problem for hyperbolic systems of quasi-linear equations witwith convexity conditions. *J. Diff. Equations*, v. 45, p. 81–90, 1974. Citado na página 16.

[7] LIU, T. P. The Riemann problem for general 2×2 conservation laws. *Trans. Am. Math Soc.*, v. 199, p. 89–112, 1974. Citado na página 16.

[8] ______. The Riemann problem for general systems of cconservation laws. *J. Diff. Equations*, v. 18, p. 218–234, 1975. Citado na página 16.

[9] ______. Admissible solutions of hyperbolic conservation laws. *Mem. Am. Math.*, v. 30, p. 603–634, 1981. Citado na página 16.

[10] SCHAEFFER, D. G.; SHEARER, M. Riemann problems for nonstrictly hyperbolic 2×2 systems of conservation laws. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 304, n. 1, 1987. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 35 e 39.

[11] ISAACSON, E.; MARCHESIN, D.; PALMEIRA, C. F.; PLOHR, B. A global formalism for nonlinear waves in conservation laws. *Comm. Math. Phys.*, v. 146, p. 505–552, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

[12] PALMEIRA, C. F. Line fields defined by eigenspaces of derivatives of maps from the plane to itself. In: *Proceedings of the VIth International Conference of Differential Geometry*. Santiago de Compostela, Spain: [s.n.], 1988. p. 177–205. Citado 7 vezes nas páginas 13, 17, 18, 20, 23, 25 e 29.

[13] MARCHESIN, D.; PALMEIRA, C. F. B. Topology of elementary waves for mixed-type systems of conservation laws. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, v. 6, n. 3, p. 427–446, 1994. Citado 8 vezes nas páginas 13, 18, 20, 21, 54, 56, 57 e 70.

[14] ESCHENAZI, C. S.; PALMEIRA, C. F. B. The structure of composite rarefaction-shock foliations for quadratic systems of conservation laws. *Matematica Contemporanea*, v. 22, p. 113–140, 2002. Citado 6 vezes nas páginas 13, 18, 20, 32, 51 e 66.

[15] ______. Intersections of Hugoniot curves with the sonic surface in the wave manifold. *Bulletin of The Brazilian Mathematical Society-New Series*, v. 44, p. 255–272, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 13, 18, 20, 32 e 124.

[16] AZEVEDO, A. V.; ESCHENAZI, C. S.; MARCHESIN, D.; PALMEIRA, C. F. Nonclassical topological construction of riemann solutions. *Tenth International Conference On Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications (HYP2004),Osaka. Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications. Yokohama: Yokohama Publishers.*, v. 1, n. 69–76, 2006. Citado na página 18.

[17] ______. Topological resolutions of Riemann problems for pairs of conservation laws. *Quarterly of Applied Mathematicas*, v. 68, p. 375–393, 2010. Citado 7 vezes nas páginas 18, 19, 29, 63, 65, 66 e 67.

[18] ESCHENAZI, C. S.; PALMEIRA, C. F. B. Decomposition of the wave manifold in lax admissible regions. *arXiv:1908.01870*, 2019. Citado na página 18.

APÊNDICE A – Discriminante de um polinômio

Em este apêndice apresenta-se alguns resultados da discriminante e resultante de polinômios que é utilizado para a classificação de suas raízes. A discriminante é utilizada para obter resultados mais genéricos do Lema 1 de [15], que é uma ferramenta útil para o analise dos polinômios que surgem no estudo das curvas de Hugoniot nos Capítulos 3 e 5.

Sejam $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ e $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ dois polinômios de graus n e m, respectivamente, com coeficientes reais. Se define a *resultante* de f e g, denotado por $R(f,g) = R_{n,m}(f,g)$, como a determinante da matriz de Sylvester $\mathrm{Syl}(f,g) = \mathrm{Syl}_{n,m}(f,g)$ dada por

$$\mathrm{Syl}_{n,m}(f,g) \quad := \quad \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}, \tag{A.1}$$

onde as m primeiras linhas são os coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ de f deslocados $0, 1, \ldots, m-1$ entradas e completadas com zeros o restante das entradas e as n ultimas linhas são os coeficientes $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ de g deslocados $0, 1, \ldots, n-1$ entradas e completadas com zeros o restante das entradas, ou seja,

$$R(f,g) = \det(\mathrm{Syl}(f,g)).$$

Não é difícil mostrar o seguinte teorema, que é uma aplicação fundamental para o resultante de dois polinômios.

Teorema A.1. *Seja $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ e $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ dois polinômios de graus n e m, respectivamente, com coeficientes reais, suponha que f tem n raízes $\xi_1, \ldots, \xi_n$*

e g tem m raízes $\eta_1, \ldots, \eta_m$ nos números complexos. Então

$$R(f,g) := a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\xi_i - \eta_j).$$

Ao observar a equação do teorema acima pode-se concluir que se f e g são dois polinômios não nulos com coeficientes nos reais, então f e g tem raízes comuns nos complexos se e somente se $R(f,g) = 0$.

Seja $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ um polinômio de grau $n \geq 1$ com coeficientes reais, e seja $\xi_1, \ldots, \xi_n$ as raízes de f nos complexos. Define-se a *discriminante de* f como

$$\Delta(f) := a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi_i - \xi_j)^2.$$

É interessante observar que a discriminante pode ser definida como a resultante do polinômio f e sua derivada f' como segui,

Teorema A.2. *Seja $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ um polinômio de grau $n \geq 1$ com coeficientes reais. Então a discriminante é dada por*

$$\Delta(f) \quad = \quad (-1)^{n(n-1)/2} a_n^{-1} R(f, \frac{df}{dx}), \tag{A.2}$$

Um polinômio f de grau $n \geq 1$ com coeficientes reais satisfaz $\Delta(f) = 0$ se e somente se f tem uma raiz múltipla.

No que segui apresenta-se a discriminante de alguns polinômios de grau baixo e algumas propriedades. Se $f(x) = a_1 x + a_0$ é um polinômio de primeiro grau, a discriminante é $\Delta(f) = 1$. Se $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ é um polinômio de grau 2,

$$\Delta(f) = -a_2^{-1} \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 - 4a_0 a_2$$

e já que as duas raízes de f podem-se escrever como $\left(-a_1 \pm \sqrt{\Delta(f)}\right)/2$ tem-se o seguinte resultado: se $\Delta(f) > 0$, então f tem dois raízes reais distintos; e se $\Delta(f) < 0$, então f tem dois raízes complexas conjugadas.

Se $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ é um polinômio de grau 3, a discriminante é

$$\Delta(f) = -a_2^{-1} \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$
$$= a_1^2 a_2^2 - 4a_1^3 a_3 - 4a_0 a_2^3 + 18 a_0 a_1 a_2 a_3 - 27 a_0^2 a_3^2.$$

Lema A.3. *Seja $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ um polinômio de grau 3. Então*

1. *se $\Delta(f) > 0$, então f tem três raízes reais distintos;*
2. *se $\Delta(f) < 0$, então f tem uma rais real e um par de raízes complexas conjugadas.*

Demonstração. Seja

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{A.3}$$

um polinômio de grau 3. Fazendo $x := t - \frac{a_2}{3a_3}$ e dividindo por a_3 obtêm-se

$$\widehat{f}(t) = f(t - \frac{a_2}{3a_3}) = t^3 + pt + q \tag{A.4}$$

onde

$$\begin{aligned} p &= \frac{3a_1a_3 - a_2^2}{3a_3^2}, \\ q &= \frac{2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 + 27a_0a_3^2}{27a_3^3}. \end{aligned}$$

A discriminante de $\widehat{f}$ é dada por

$$\Delta(\widehat{f}) = -4p^3 - 27q^2.$$

Considere $t := u + v$, então

$$t^3 = (u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = u^3 + v^3 + 3uvt$$

de onde

$$t^3 - 3uvt - (u^3 + v^3) = 0$$

Para t ser raiz de $\widehat{f}(t) = 0$ deve-se considerar

$$3uv = -p, \tag{A.5}$$

$$u^3 + v^3 = -q. \tag{A.6}$$

Logo, resolvendo (A.5) para v e substituindo em (A.6),

$$(u^3)^2 + qu^3 + (-p/3)^3 = 0 \tag{A.7}$$

resolvendo (A.7) para u^3 obtêm-se

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta(\widehat{f})}{27}}, \tag{A.8}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta(\widehat{f})}{27}}, \tag{A.9}$$

Considere $\Delta(\widehat{f}) > 0$ e tome $z := u^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta(\widehat{f})}{27}} i$. De (A.8) e (A.9) observa-se que $\overline{z} = v^3$ e

$$|z|^2 = |\overline{z}|^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{1}{4}\frac{\Delta(\widehat{f})}{27} = \frac{|p|^3}{27},$$

de onde,

$$|z| = |\frac{p}{3}|^{3/2}.$$

Por outro lado, pode-se escrever $z = |z|(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$ e

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{-q/2}{(-p)^3/27}$$

tal que

$$\varphi \pm 2n\pi = \arccos\left(\frac{-q/2}{(-p)^3/27}\right) \text{ com } n \in \mathbb{Z}.$$

Logo, a raiz de (A.4) é

$$\begin{aligned} t &= u + v = \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}} \\ &= 2\sqrt[3]{|z|}\cos\left(\frac{\varphi \pm 2n\pi}{3}\right) = 2\left|\frac{p}{3}\right|^{1/2}\cos\left(\frac{\varphi \pm 2n\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Considerando $n = 0$, $n = 1$ tem-se as três raízes reais de (A.4),

$$\begin{aligned} t_1 &= 2\left|\frac{p}{3}\right|^{1/2}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right), \\ t_2 &= 2\left|\frac{p}{3}\right|^{1/2}\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right) = -\left|\frac{p}{3}\right|^{1/2}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right), \\ t_3 &= 2\left|\frac{p}{3}\right|^{1/2}\cos\left(\frac{\varphi - 2\pi}{3}\right) = -\left|\frac{p}{3}\right|^{1/2}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

No caso $\Delta(\widehat{f}) < 0$, tem-se

$$t_1 = \left(-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta(\widehat{f})}{27}}\right)^{1/3} + \left(-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta(\widehat{f})}{27}}\right)^{1/3}, \tag{A.10}$$

como raiz real e $t_2 = t_1\omega$, $t_3 = t_1\overline{\omega}$ como as outras dois raízes complexas conjugadas, onde ω é raiz do polinômio $t^3 - 1 = 0$.

∎

Derivando (A.3) tem-se o polinômio $\frac{df}{dx}(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ cujas raízes são

$$x_\pm = -\frac{a_2}{3a_3} \pm \frac{1}{3a_3}\sqrt{a_2^2 - 3a_1a_3}. \tag{A.11}$$

Substituindo em (A.4) tem-se

$$\begin{aligned} y_{\pm} = f(x_{\pm}) &= \left(x_{\pm} + \frac{a_2}{3a_3}\right)^3 + p\left(x_{\pm} + \frac{a_2}{3a_3}\right) + q \\ &= \left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{-3p}\right)^3 + p\left(\pm\frac{1}{3}\sqrt{-3p}\right) + q \\ &= \frac{3q \pm 2p\sqrt{-3p}}{3} \end{aligned}$$

Daí conclui-se que se $p < 0$ o polinômio (A.3) tem um máximo e um minimo.

Supondo que $a_3 > 0$, para f ter três raízes reais distintas positivas é necessário $a_0 = f(0) < 0$, $x_{\pm} > 0$ e $p < 0$, isto ocorre quando $a_0 < 0$, $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ e $a_3 > 0$.

Se $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_4 \neq 0$, um polinômio com coeficientes em $\mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} \Delta(f) = -a_2^{-1} &\begin{vmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \end{vmatrix} \\ &= a_1^2a_2^2a_3^2 - 4a_1^3a_3^3 - 4a_0a_2^3a_3^2 + 18a_0a_1a_2a_3^3 - 27a_0^2a_3^4 - 4a_1^2a_2^3a_4 + 16a_0a_2^4a_4 \\ &+ 18a_1^3a_2a_3a_4 - 80a_0a_1a_2^2a_3a_4 - 6a_0a_1^2a_3^2a_4 + 144a_0^2a_2a_3^2a_4 - 27a_1^4a_4^2 \\ &+ 144a_0a_1^2a_2a_4^2 - 128a_0^2a_2^2a_4^2 - 192a_0^2a_1a_3a_4^2 + 256a_0^3a_4^3. \end{aligned}$$

Lema A.4. *Seja $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ um polinômio de grau 4, $P = 8a_4a_2 - 3a_3^2$ e $N = P^2 - 16a_4^2(12a_4a_0 - 3a_3a_1 + a_2^2)$. Então*

1. *se $\Delta(f) > 0$, $P \leq 0$ e $N \geq 0$, então f tem quatro raízes reais distintas;*
2. *se $\Delta(f) > 0$, ou $P > 0$ ou $N < 0$, então f tem dois pares de raízes complexas conjugadas;*
3. *se $\Delta(f) < 0$, então f tem dois raízes reais e um par de raízes complexas conjugadas.*

Demonstração. Seja

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{A.12}$$

um polinômio de grau 4. Substituindo $x := t - \frac{a_3}{4a_4}$ e dividindo por a_4 em (A.12),

$$\widehat{f}(x) = t^4 + pt^2 + qt + r \tag{A.13}$$

onde

$$\begin{aligned}
p &= \frac{8a_2a_4 - 3a_3^2}{8a_4^2},\\
q &= \frac{a_3^3 - 4a_2a_3a_4 + 8a_1a_4^2}{8a_4^3},\\
r &= \frac{256a_0a_4^3 - 3a_3^4 - 64a_1a_3a_4^2 + 16a_2a_3^2a_4}{256a_4^4}.
\end{aligned}$$

cujo discriminante é

$$\Delta(\widehat{f}) = -4p^3q^2 - 27q^4 + 16p^4r - 128p^2r^2 + 144prq^2 + 256r^3$$

As raízes do polinômio (A.13) satisfazem a equação

$$t^4 + pt^2 + qt + r = 0. \tag{A.14}$$

então, para qualquer y tem-se

$$\begin{aligned}
(t^2 + y)^2 &= t^4 + 2t^2y + y^2\\
&= (2y - p)t^2 - qt + y^2 - r.
\end{aligned}$$

Seja $y := \frac{z+p}{2}$, para qualquer z,

$$\left(t^2 + \frac{z+p}{2}\right)^2 = zt^2 - qt + \frac{(z+p)^2}{4} - r,$$

o lado direito é um polinômio de segundo grau na variável t cujo discriminante é

$$\begin{aligned}
q^2 - 4z\left(\frac{(z+p)^2}{4} - r\right) &= q^2 - z(z^2 + p^2 + 2pz - 4r)\\
&= -z^3 - 2pz^2 + (4r - p^2)z + q^2 =: -\mathrm{Res}(f).
\end{aligned}$$

$\mathrm{Res}(f)$ é chamado resolvente cúbico cujo discriminante é

$$\Delta(\mathrm{Res}(f)) = -4p^3q^2 - 27q^4 + 16p^4r - 128p^2r^2 + 144prq^2 + 256r^3 = \Delta(\widehat{f}).$$

Escolhendo z como uma raiz de $\mathrm{Res}(f)$ tem-se

$$\begin{aligned}
zt^2 - qt + \frac{q^2}{4z} &= z\left(t^2 - \frac{qt}{z} + \frac{q^2}{4z^2}\right)\\
&= z\left(t - \frac{q}{2z}\right)^2 = \left(\gamma t - \frac{q}{2\gamma}\right)^2, \text{ onde } \gamma = \sqrt{z}
\end{aligned}$$

assim,

$$t^2 + \frac{z+p}{2} = \pm\left(\gamma t - \frac{q}{2\gamma}\right)$$

Observe que as raízes reais de $\mathrm{Res}(f)$ são positivas se e somente se $\Delta(\widehat{f}) > 0$, $2p < 0$, $p^2 - 4r > 0$ e $-q^2 < 0$. Então, considerando $\gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2 \in [0, \infty)$ como as raízes de $\mathrm{Res}(f)$ e β_i, com $i = 1, 2, 3, 4$ raízes de (A.13). Não é difícil mostrar que

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - \beta_4) \\
\gamma_2 &= \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4) \\
\gamma_3 &= \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 + \beta_4)
\end{aligned}$$

Assim, as raízes de (A.13) são todas reais. Caso contrário tem raízes complexas. Então, considerando

$$P := 8a_4^2 p,$$

obtemos que

$$16a_4^4(p^2 - 4r) = \frac{1}{3}\left(P^2 - 16a_4^2(12a_4a_0 - 3a_3a_1 + a_2^2)\right),$$

assim é suficiente definir

$$N := P^2 - 16a_4^2(12a_4a_0 - 3a_3a_1 + a_2^2).$$

∎