UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

Superálgebras com involução graduada: classificação das variedades minimais de crescimento quadrático

Maria Luiza Oliveira Santos

Belo Horizonte
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Maria Luiza Oliveira Santos

Superálgebras com involução graduada: classificação das variedades minimais de crescimento quadrático

Tese apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientadora: Ana Cristina Vieira
Coorientador: Rafael Bezerra dos Santos

Belo Horizonte
2021

Aos meus queridos pais, Antônio e Liliana.

Aos meus amados sobrinhos,
Ana Clara e Pedro.

"Porque sou eu que conheço os planos que tenho para vocês, diz o Senhor,
planos de fazê-los prosperar e não de causar dano,
planos de dar a vocês esperança e um futuro."
(Jeremias 29:11)

Santos, Maria Luiza Oliveira.

S237s Superálgebras com involução graduada [manuscrito]: classificação das variedades minimais de crescimento quadrático / Maria Luiza Oliveira. Santos. – 2021.
xiv, 74 f. il.

Orientador: Ana Cristina Vieira.
Coorientador: Rafael Bezerra dos Santos.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f.72-74.

1. Matemática – Teses. 2. Variedades (Matematica) – Teses. 3. Polinômios – Teses. 4. Superálgebras – Teses. I. Vieira, Ana Cristina. II. Santos, Rafael Bezerra dos. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV.Título.

CDU 51 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6ª Região nº 1510

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Superálgebras com involução graduada: classificação das variedades minimais de crescimento quadrático

MARIA LUIZA OLIVEIRA SANTOS

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Ana Cristina Vieira

Profa. Ana Cristina Vieira
UFMG

Prof. Rafael Bezerra dos Santos
UFMG

Antonio Ioppolo

Prof. Antonio Ioppolo
Universidade de Milano Bicocca

Profa. Daniela La Mattina
Universidade de Palermo

Diogo Diniz P.S. Silva

Prof. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva
UFCG

Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

Profa. Viviane Ribeiro Tomaz da Silva
UFMG

Belo Horizonte, 19 de março de 2021.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Sumário

Agradecimentos

Esta tese é o resultado de uma longa jornada, na qual pude contar com a ajuda e apoio de pessoas maravilhosas. Por isso, escrever meus agradecimentos não é uma tarefa fácil, já que talvez eu não consiga retribuir à altura todo carinho e ajuda que recebi. Agradeço a todos que estiveram comigo e, em especial, agradeço:

A Deus, meu melhor e mais fiel amigo, por toda generosidade, proteção, bênçãos, por sempre estar ao meu lado e por cuidar de cada detalhe da minha vida. À Nossa Senhora Aparecida pela proteção e intercessão sempre presentes. Obrigada por serem refúgio, amparo e por me darem força e sabedoria para superar as dificuldades. Minha gratidão por mais essa conquista.

Aos meus amados pais, Antônio e Liliana, minha base e os meus maiores exemplos, pelo amor e apoio incondicionais e pelos valores que me ensinaram e que guiam a minha vida. Obrigada por terem feito de tudo para me dar condições de chegar até aqui, essa conquista é nossa. Muito obrigada por tudo!

À minha orientadora Prof. Ana Vieira e ao meu coorientador Prof. Rafael dos Santos por me introduzirem na PI-teoria e por toda ajuda, generosidade, disponibilidade, ensinamentos, paciência, atenção, torcida, amizade e por serem exemplos. Obrigada pela confiança, por acreditarem em mim e por terem contribuído tanto para meu crescimento profissional e pessoal. Muito obrigada!

Ao meu noivo Weberson por todo amor, incentivo, atenção, cuidado e por ser meu porto seguro. Obrigada por me proporcionar os momentos mais felizes e por arrancar risadas que me trazem leveza mesmo nos tempos mais difíceis.

Ao meu irmão Pedro, à Angélica e aos meus sobrinhos Ana Clara e Pedro Henrique pelo apoio e por todos os momentos de alegria.

A toda minha família pela torcida e orações. Em especial, minha avó Anália (*in memorian*).

À minha amiga Dafne, minha irmã acadêmica e presente da UFMG, pela amizade, pelas horas intermináveis de estudo e de conversas, por toda ajuda e por sempre acreditar em mim e me mostrar que sou capaz. Sua amizade e apoio sempre foram e continuam sendo muito importantes para mim.

A todos os meus irmãos acadêmicos pelas horas de estudo, pelos seminários e, principalmente, pelas pausas para o café com bolo que suavizaram meus dias. Em especial, ao Willer que se tornou um grande amigo.

A todos os amigos da Graduação e Pós-graduação em Matemática UFMG pela convivência, ajuda e pelos momentos de distrações.

Às minhas queridas Neise, Noara e Regiane, amigas da vida inteira, pela amizade, pelas orações, por serem abrigo nos tempos mais difíceis e por vibrarem comigo a cada conquista.

Aos professores Antonio Ioppolo, Daniela La Mattina, Diogo Diniz e Viviane da Silva por aceitarem fazer parte da banca examinadora e pelas sugestões que enriqueceram este trabalho. Também agradeço ao Antonio Ioppolo pela colaboração no desenvolvimento dos resultados desta tese.

Ao corpo docente do Departamento de Matemática da UFMG por contribuir para minha formação.

À Andréa e Kelli por toda ajuda.

A CAPES pelo tão importante apoio financeiro.

A todos que estiveram comigo ao longo desse caminho e que involuntariamente não foram citados, muito obrigada!

Abstract

Let $\mathcal{V}$ be a variety of superalgebras with graded involution and let $\{c_n^{\text{gri}}(\mathcal{V})\}_{n\geq 1}$ be its sequence of $*$-graded codimensions. We say that $\mathcal{V}$ has polynomial growth n^k if asymptotically $c_n^{\text{gri}}(\mathcal{V}) \approx an^k$, for some $a \neq 0$. Furthermore, $\mathcal{V}$ is minimal of polynomial growth n^k if $c_n^{\text{gri}}(\mathcal{V})$ grows as n^k and any proper subvariety of $\mathcal{V}$ has polynomial growth n^t, with $t < k$. In this thesis we present the classification of minimal varieties of superalgebras with graded involution with quadratic growth, by giving a complete list of 36 finite dimensional superalgebras with graded involution which generate, up to equivalence, the only minimal varieties of quadratic growth. The 36 superalgebras with graded involution presented here form the smallest list of algebras that should be excluded from a variety $\mathcal{V}$ in order to conclude that $\mathcal{V}$ has at most linear growth. We emphasize that among these algebras, 16 are presented in an unprecedented way in this work.

Keywords: polynomial identity, codimension growth, superalgebra, algebra with involution, minimal variety.

Resumo

Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de superálgebras munidas de involução graduada e seja $\{c_n^{\mathrm{gri}}(\mathcal{V})\}_{n\geq 1}$ sua sequência de codimensões $*$-graduadas. Dizemos que $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial n^k se assintoticamente $c_n^{\mathrm{gri}}(\mathcal{V}) \approx an^k$, para uma constante $a \neq 0$. Além disso, $\mathcal{V}$ é uma variedade minimal de crescimento polinomial n^k se $c_n^{\mathrm{gri}}(\mathcal{V})$ cresce como n^k e qualquer subvariedade própria de $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial n^t, com $t < k$. Nesta tese classificamos todas as variedades de superálgebas com involução graduada minimais de crescimento quadrático, exibindo, a menos de equivalência, uma lista completa de 36 álgebras de dimensão finita geradoras de tais variedades minimais. Dessas 36 álgebras, 16 são apresentadas de forma inédita neste trabalho. Acrescentamos que essas 36 superálgebras munidas de involução graduada constituem a menor lista de álgebras que devem ser excluídas de uma variedade $\mathcal{V}$ a fim de garantir que $\mathcal{V}$ tem crescimento no máximo linear.

Palavras chave: identidade polinomial, crescimento das codimensões, superálgebra, álgebra com involução, variedade minimal.

Introdução

Consideremos F um corpo de característica zero e $F\langle X\rangle$ a álgebra livre associativa gerada por um conjunto enumerável X de variáveis não comutativas. Dizemos que um polinômio em $F\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial de uma álgebra associativa A sobre F, se o mesmo se anula quando avaliado em quaisquer elementos de A. Se A satisfaz uma identidade não nula, então dizemos que A é uma PI-álgebra.

Podemos dizer que o interesse pela PI-teoria enquanto área de pesquisa teve seu marco inicial em 1948 com o artigo de Kaplansky [23] que trata da estrutura de PI-álgebras primitivas. Desde então, vários problemas relevantes vêm sendo propostos e muitos resultados interessantes têm sido publicados, o que faz da teoria das álgebras com identidades polinomiais um ramo ativo e promissor da pesquisa matemática.

Um dos principais eixos de estudo da PI-teoria consiste na descrição das identidades polinomiais satisfeitas por uma determinada álgebra e no estudo da classe das álgebras que satisfazem essas identidades.

Assim, um objeto importante na teoria é o conjunto $\mathrm{Id}(A)$ de todas as identidades satisfeitas por uma álgebra A. Cabe destacar que $\mathrm{Id}(A)$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$, isto é, um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$.

Em 1950, Specht conjecturou que, sobre um corpo de característica zero, o T-ideal de uma álgebra associativa é finitamente gerado como um T-ideal. Embora provada para casos particulares nos anos seguintes, esta conjectura só teve uma prova completa em 1987, dada por Kemer [24]. Assim, a fim de descrevermos todas as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra A é suficiente encontrarmos um conjunto gerador de $\mathrm{Id}(A)$ como um T-ideal. Além disso, a possibilidade de álgebras distintas possuírem o mesmo T-ideal favorece o estudo da classe das álgebras que satisfazem as identidades de uma dada álgebra A, chamada de variedade gerada por A e denotada por $\mathrm{var}(A)$.

Contudo, é importante destacar que a descrição do T-ideal de uma álgebra ainda é, em geral, um problema árduo, já que o trabalho de Kemer não fornece um método para encontrar tal base finita. Para exemplificar essa dificuldade, podemos citar a álgebra de matrizes $M_k(F)$ para a qual o T-ideal foi descrito somente para $k = 1, 2$ até o presente momento.

Na tentativa de minimizar a dificuldade mencionada acima, alguns invariantes numéricos foram introduzidos a fim de se conhecer informações quantitativas sobre o T-ideal de uma álgebra. Um invariante numérico muito útil é a chamada sequência de codimensões de uma álgebra A, $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$. Para uma variedade de álgebras $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$, definimos $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$. Tal sequência foi introduzida por Regev em 1972 [37] e mede, de uma certa maneira, a taxa de crescimento das identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra.

É bem compreendido (ver [27, 26]) que se A é uma PI-álgebra, então a sequência de codimensões cresce exponencialmente ou é limitada polinomialmente, isto é, existem constantes $a, k \geq 0$ tais que $c_n(A) \leq an^k$ para todo $n \geq 1$.

A sequência de codimensões, além de ser uma importante ferramenta, se tornou um dos principais objetos de investigação na PI-teoria, tanto que, nos últimos anos, vários autores têm estudado essa sequência com o intuito de caracterizar e classificar variedades de álgebras $\mathcal{V}$ através do comportamento assintótico de $\{c_n(\mathcal{V})\}_{n\geq 1}$. Em particular, neste trabalho, estamos interessados em variedades com crescimento polinomial da sequência de codimensões.

O estudo das variedades de crescimento polinomial foi iniciado por Kemer em [27]. Mais especificamente, ele mostrou que $\mathrm{var}(A)$ tem crescimento polinomial se, e somente se, $\mathcal{G}$ e $UT_2(F) \notin \mathrm{var}(A)$, onde $\mathcal{G}$ é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e $UT_2(F)$ é a álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2 com entradas em F. Como consequência dessa caracterização, segue que $\mathrm{var}(\mathcal{G})$ e $\mathrm{var}(UT_2(F))$ são as únicas variedades de crescimento quase polinomial, isto é, as sequências de codimensões de $\mathcal{G}$ e de $UT_2(F)$ crescem exponencialmente, mas qualquer subvariedade própria de $\mathrm{var}(\mathcal{G})$ e de $\mathrm{var}(UT_2(F))$ tem crescimento polinomial.

Em [28, 29], La Mattina classificou todas as subvariedades das variedades $\mathrm{var}(\mathcal{G})$ e $\mathrm{var}(UT_2(F))$ e dentre elas se destacam as minimais. Dizemos que $\mathcal{V}$ é uma variedade minimal de crescimento polinomial n^k se assintoticamente $c_n(\mathcal{V}) \approx an^k$, para alguma constante $a \neq 0$ e para qualquer subvariedade própria $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}$, $c_n(\mathcal{U}) \approx bn^t$, com $t < k$. A relevância das variedades minimais de crescimento polinomial está no fato de que essas variedades são os "blocos construtores"que permitiram à autora dar uma classificação completa das subvariedades das variedades de crescimento quase polinomial.

Inspirados por tais classificações, Giambruno, La Mattina e Zaicev classificaram as variedades minimais de crescimento polinomial n^k geradas por álgebras unitárias [11]. Também temos que em [22], Jorge e Vieira classificaram todas as variedades minimais de crescimento quadrático de modo geral.

Neste ponto, uma pergunta natural diz respeito a classificações gerais de variedades, não necessariamente minimais, de crescimento polinomial n^k, com k fixo. Em [10], Giambruno, La Mattina e Petrogradsky classificaram todas as variedades de crescimento no máximo cúbico geradas por álgebras unitárias. Já em [36], Oliveira e Vieira classificaram as variedades de crescimento polinomial n^4 geradas por álgebras unitárias. Acrescentamos que em [8], Giambruno e La Mattina determinaram, a menos de PI-equivalência, todas as álgebras que geram variedades de crescimento no máximo linear.

Os conceitos de codimensões, crescimento polinomial e variedades minimais têm sido estendidos para classes de álgebras munidas com estruturas adicionais, tais como superálgebras e álgebras com involução. Portanto, o estudo das variedades de crescimento polinomial também tem sido amplamente desenvolvido nesses casos e classificações de variedades de crescimento quase polinomial e de subvariedades minimais das variedades de crescimento quase polinomial também foram fornecidos no contexto de superálgebras ([14], [30]) e de álgebras com involução ([12], [31]).

Para estabelecer uma nomenclatura comum para as estruturas citadas acima, usaremos o termo φ-álgebras. Qualquer álgebra A munida de um automorfismo ou um antiautomorfismo φ de ordem no máximo 2, ou seja, qualquer superálgebra ou qualquer álgebra com involução, será chamada de φ-álgebra e, neste caso, dizemos que A gera uma φ-variedade e escrevemos $\mathrm{var}^{\varphi}(A)$.

Em [17], Gouveia, dos Santos e Vieira provaram que existe apenas um número finito de φ-variedades minimais de crescimento quadrático geradas por álgebras unitárias e também apresentaram uma lista de álgebras de dimensão finita gerando cada uma dessas φ-variedades minimais. Para $k \geq 3$ mostraram que o número de φ-variedades minimais de crescimento polinomial n^k é infinito e classificaram todas essas φ-variedades minimais fornecendo um método para a construção dos seus φ-ideais.

Analogamente ao caso ordinário, classificações gerais de φ-variedades de crescimento no máximo linear foram apresentadas em [9] e [32].

Destacamos ainda nossa classificação das φ-variedades de crescimento quadrático geradas por φ-álgebras unitárias apresentada em [1]. Mais especificamente, em um trabalho em conjunto com Bessades, dos Santos e Vieira, exibimos uma lista de superálgebras unitárias de crescimento quadrático e uma lista de álgebras com involução unitárias de crescimento quadrático que geram, a menos de equivalência, todas as φ-variedades de crescimento quadrático. Neste artigo também explicitamos todas as funções quadráticas que descrevem a sequência de φ-codimensões de uma φ-álgebra unitária.

Nesta tese trabalhamos com superálgebras associativas sobre um corpo de característica zero munidas de uma involução graduada. Uma involução graduada $*$ em uma superálgebra $A = A^{(0)} + A^{(1)}$ é uma involução que preserva as componentes homogêneas de A, ou seja, $(A^{(0)})^* = A^{(0)}$ e $(A^{(1)})^* = A^{(1)}$. Uma superálgebra munida de uma involução graduada $*$ é chamada de $*$-superálgebra. As noções de ideais, sequências de codimensões, crescimento polinomial e variedades minimais também são estendidas naturalmente para esta estrutura.

Em [6], Giambruno, dos Santos e Vieira apresentaram no contexto de $*$-superálgebras uma caracterização de variedades de crescimento polinomial análoga à fornecida por Kemer no caso ordinário. Mais precisamente, os autores caracterizaram variedades de crescimento polinomial via exclusão de 5 $*$-superálgebras da variedade e, consequentemente, mostraram que existem 5 variedades de $*$-superálgebras de crescimento quase polinomial. Destacamos que, neste contexto, todas as subvariedades minimais das variedades de crescimento quase polinomial também foram determinadas [20, 30, 31].

Acrescentamos ainda que em [20], Ioppolo e La Mattina classificaram, a menos de equivalência, todas as $*$-superálgebras de crescimento no máximo linear e, em particular, determinaram a existência de apenas 5 variedades minimais de crescimento linear.

Motivados pelos problemas de classificações de variedades minimais tratados no caso ordinário e nos casos das superálgebras e álgebras com involução e, em particular, estimulados pelos resultados obtidos em [1], o objetivo desta tese é fornecer uma classificação de variedades de superálgebras com involução graduada minimais de crescimento quadrático.

Mais especificamente, desenvolveremos resultados que nos permitirão apresentar uma lista completa de 36 $*$-superálgebras que geram, a menos de equivalência, as únicas variedades minimais de crescimento quadrático, dentre as quais 26 se apresentam inéditas com tal propriedade. Para cumprir com esse propósito este trabalho foi dividido em três capítulos dispostos do seguinte modo.

No Capítulo 1, apresentaremos os conceitos e resultados básicos necessários no desenvolvimento deste trabalho. Recordaremos brevemente algumas definições e resultados sobre PI-álgebras, superálgebras e álgebras com involução. Também apresentaremos nosso principal objeto de estudo, as $*$-superálgebras, e comentaremos sobre resultados relacionados a essa estrutura que serão frequentemente requisitados ao longo do texto.

No Capítulo 2, apresentaremos uma lista de 37 $*$-superálgebras, destacando algumas de suas características e desenvolvendo resultados que nos garantem que todas têm crescimento quadrático.

No Capítulo 3, estarão os principais resultados desta tese. Nele trabalhamos em resultados que nos permitem concluir que 36 das $*$-superálgebras apresentadas no Capítulo 2 formam uma lista completa de álgebras que devem ser excluídas de uma variedade $\mathcal{V}$ a fim de garantir que $\mathcal{V}$ tem crescimento no máximo linear. Como consequência, classificamos todas as variedades de superálgebras com involução graduada minimais de crescimento quadrático e todas as variedades de álgebras com involução minimais de crescimento quadrático.

Os resultados desta tese foram obtidos em colaboração com Ioppolo, dos Santos e Vieira e publicados em [19].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos preliminares que serão necessários para tratarmos os resultados dessa tese.

Primeiramente, abordaremos algumas definições e resultados básicos da teoria de identidades polinomiais de álgebras associativas sobre um corpo de característica zero. Também faremos uma breve e resumida descrição das PI-álgebras, das superálgebras e das álgebras munidas de involução, apresentando para cada uma dessas estruturas a noção de variedades, a sequência de codimensões e caracterizações de variedades de crescimento polinomial. Para informações mais detalhadas sobre a teoria de PI-álgebras, sugerimos [2] e [16].

A partir da Seção 1.3, discutiremos sobre os principais objetos dessa tese: as superálgebras munidas de involução graduada, as chamadas $*$-superálgebras. Basicamente, apresentaremos objetos e resultados análogos aos fornecidos no caso ordinário no contexto de $*$-superálgebras.

1.1 PI-álgebras

Começamos estabelecendo que, ao longo desta tese, salvo menção contrária, F é um corpo de característica zero e A uma álgebra associativa sobre F.

Denotamos por $F\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre gerada por $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, um conjunto enumerável de variáveis não comutativas. Dizemos que um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é uma *identidade polinomial* de A e escrevemos $f \equiv 0$ em A, se f se anula sempre que avaliado em quaisquer elementos de A, ou seja, se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$. Se A satisfaz uma identidade não nula, então dizemos que A é uma *PI-álgebra.*

O *comutador de Lie de peso 2* é definido como sendo o polinômio $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$. Indutivamente, o *comutador de peso n* normado à esquerda é definido por $[x_1, \ldots, x_n] =$

$[[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$, para todo $n \geq 3$. Observamos que valem as seguintes propriedades de comutadores: $[x_1, x_2] = -[x_2, x_1]$ (anticomutatividade) e $[x_1, x_2, x_3] + [x_3, x_1, x_2] + [x_2, x_3, x_1] = 0$ (identidade de Jacobi).

Agora, vejamos alguns exemplos de PI-álgebras.

Exemplo 1.1. Uma álgebra comutativa A é uma PI-álgebra desde que o polinômio $[x_1, x_2]$ é uma identidade para A. Também temos que se A é uma álgebra nilpotente com $A^k = 0$, então A é uma PI-álgebra desde que satisfaz a identidade $x_1 \cdots x_k$.

Exemplo 1.2. É conhecido que toda álgebra de dimensão finita é também uma PI-álgebra. Isso porque se A é uma álgebra com dimensão n, então o *polinômio standard* de grau $n+1$,

$$St_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} sgn(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n+1)},$$

é uma identidade para A (ver [16, Teorema 1.5.8]).

Como exemplos importantes de PI-álgebras de dimensão finita, temos $M_n(F)$ e $UT_n(F)$, a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas no corpo F e a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em F, respectivamente. Denotaremos $UT_n(F)$ apenas por UT_n.

A seguir, um exemplo de PI-álgebra de dimensão infinita.

Exemplo 1.3. Consideremos $\mathcal{G}$ a álgebra de Grassmann unitária de dimensão infinita, gerada pelos elementos $\{1, e_1, e_2, \ldots\}$, satisfazendo a condição $e_i e_j = -e_j e_i$, $i, j \geq 1$. Segue que $\mathcal{G}$ é uma PI-álgebra desde que satisfaz a identidade $[x_1, x_2, x_3]$.

Definição 1.4. Dada uma álgebra A, definimos o *ideal das identidades polinomiais* satisfeitas por A como

$$\mathrm{Id}(A) = \{f \in F\langle X\rangle | f \equiv 0 \text{ em } A\}.$$

Não é difícil verificar que $\mathrm{Id}(A)$ é um *T-ideal* de $F\langle X\rangle$, isto é, é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$. Além disso, é possível verificar se I é um T-ideal de $F\langle X\rangle$, então $\mathrm{Id}(F\langle X\rangle/I) = I$. Assim, temos que todos os T-ideais de $F\langle X\rangle$ são, na verdade, ideais de identidades polinomiais para álgebras adequadas. Nos referimos a $\mathrm{Id}(A)$ como sendo o *T-ideal* de A.

Desde que álgebras distintas podem satisfazer as mesmas identidades, torna-se apropriado considerarmos a classe das álgebras que satisfazem todas as identidades de uma dada álgebra A, chamada de *variedade de álgebras* gerada por A e denotada por $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$. Quando duas álgebras A e B satisfazem as mesmas identidades, temos que $\mathrm{var}(A) = \mathrm{var}(B)$ e, neste caso, dizemos que A e B são *PI-equivalentes*.

Ressaltamos ainda que a correspondência entre T-ideais de $F\langle X\rangle$ e variedades de álgebras é bem entendida e se mostra útil para traduzir problemas de uma linguagem para outra.

Em [24], Kemer mostrou que o T-ideal de uma álgebra é finitamente gerado como um T-ideal. Mas, como comentamos na Introdução dessa tese, a obtenção de uma base finita de identidades para uma álgebra é uma tarefa difícil e trabalhosa.

Assim, um método bem estabelecido para o estudo do T-ideal de uma álgebra A é através da análise de uma sequência numérica, chamada de *sequência de codimensões* de A. Essa sequência foi introduzida por Regev em [37] e mede, de um certo modo, o crescimento das identidades polinomiais satisfeitas por A.

A fim de definir esse objeto, introduzimos

$$P_n = \operatorname{span}_F\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}, \quad n \geq 1,$$

o espaço dos *polinômios multilineares* de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ (isto é, toda variável x_i aparece em cada monômio uma única vez).

Destacamos que os polinômios multilineares desempenham um papel significativo na PI-teoria, pois uma vez que estamos trabalhando sobre um corpo de característica zero, segue que todo T-ideal é completamente determinado pelos polinômios multilineares que ele contém [16, Corolário 1.3.9]. Assim, $\operatorname{Id}(A)$ é gerado pelo subespaço $(P_1 \cap \operatorname{Id}(A)) + (P_2 \cap \operatorname{Id}(A)) + \cdots + (P_n \cap \operatorname{Id}(A)) + \cdots$ de $F\langle X\rangle$ e, por isso, para estudarmos $\operatorname{Id}(A)$ podemos nos concentrar no estudo das identidades multilineares de A.

Neste ponto, cabe destacar que trabalhar com polinômios multilineares é bem vantajoso, uma vez que para verificarmos se um polinômio multilinear é ou não uma identidade para uma álgebra A basta avaliá-lo nos elementos de uma base de A.

Dadas essas informações, temos que a *sequência de codimensões* de uma álgebra A é uma sequência numérica determinada pelas dimensões dos espaços $P_n(A)$, onde

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \operatorname{Id}(A)}, \quad n \geq 1.$$

Ou seja, o n-ésimo termo dessa sequência é definido por $c_n(A) = \dim_F P_n(A)$. Para $\mathcal{V} = \operatorname{var}(A)$, definimos $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$.

Ressaltamos que o comportamento dessa sequência se tornou um dos principais objetos de pesquisa na PI-teoria. Tal investigação teve início com Regev [37], que provou que a sequência de codimensões de uma PI-álgebra A é limitada exponencialmente, isto é, existem constantes $a, \alpha > 0$ tais que $c_n(A) \leq a\alpha^n$ para todo n.

Dizemos que duas sequências $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e $\{b_n\}_{n\geq 1}$ têm o mesmo comportamento assintótico, e escrevemos $a_n \approx b_n$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.

Ao longo deste texto, estaremos interessados em *variedades de crescimento polinomial*, ou seja, variedades geradas por álgebras cuja sequência das codimensões é limitada polinomialmente.

Definição 1.5. Dizemos que uma variedade $\mathcal{V}$ tem *crescimento polinomial das codimensões*, ou que $\{c_n(\mathcal{V})\}_{n\geq 1}$ é *limitada polinomialmente*, se existem constantes a, $t \geq 0$ tais que $c_n(\mathcal{V}) \leq an^t$, para todo $n \geq 1$. Por outro lado, dizemos que uma variedade $\mathcal{V}$ tem *crescimento exponencial* se existem um inteiro $\alpha \geq 2$ e uma constante $b > 0$ tais que $c_n(\mathcal{V}) \geq b\alpha^n$, para n suficientemente grande.

Em particular, nosso interesse é no estudo das *variedades minimais de crescimento polinomial.*

Definição 1.6. Dizemos que $\mathcal{V}$ é uma *variedade minimal de crescimento polinomial* n^k se $c_n(\mathcal{V}) \approx an^k$, para alguma constante $a \neq 0$ e para qualquer subvariedade própria $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}$, $c_n(\mathcal{U}) \approx bn^t$, com $t < k$ e b uma constante.

Dessa forma, as álgebras que geram variedades minimais de crescimento polinomial serão o foco principal dessa tese e serão chamadas apenas de *álgebras minimais.*

Ressaltamos que caracterizações e classificações de variedades de crescimento polinomial têm sido consistentemente exploradas. O problema de caracterizar tais variedades foi primeiramente considerado por Kemer que forneceu a seguinte caracterização via exclusão de álgebras da variedade [27]:

Teorema 1.7. [Kemer, 1979] *Uma variedade $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial da sequência de codimensões se, e somente se, $\mathcal{G}$, $UT_2 \notin \mathcal{V}$.*

Desta caracterização, segue que não existe uma variedade de álgebras $\mathcal{V}$ com crescimento intermediário das codimensões, ou seja, $\{c_n(\mathcal{V})\}_{n\geq 1}$ ou é limitada polinomialmente ou cresce exponencialmente. Além disso, segue que UT_2 e $\mathcal{G}$ geram as únicas variedades de *crescimento quase polinomial*, isto é, as sequências de codimensões de $\mathrm{var}(UT_2)$ e de $\mathrm{var}(\mathcal{G})$ crescem exponencialmente, mas qualquer subvariedade própria de cada uma dessas variedades tem crescimento polinomial.

La Mattina em [28, 29] classificou, a menos de PI-equivalência, todas as subvariedades de $\mathrm{var}(\mathcal{G})$ e de $\mathrm{var}(UT_2)$. Em particular, classificou todas as álgebras que geram subvariedades minimais de $\mathrm{var}(\mathcal{G})$ e de $\mathrm{var}(UT_2)$ e exibiu uma álgebra de dimensão finita geradora para cada uma delas.

A busca por classificações de álgebras que geram variedades minimais foi incentivada pela classificação mencionada acima. Ressaltamos ainda que essa busca por variedades minimais se estende para outras estruturas, como as superálgebras, álgebras com involução e superálgebras com involução graduada.

1.2 Superálgebras e álgebras com involução

Noções similares de T-ideais, variedades de álgebras, polinômios multilineares e codimensões tratados no caso ordinário têm sido naturalmente estendidas para o contexto de álgebras munidas de alguma estrutura adicional, como superálgebras e álgebras com involução. Consequentemente, nos últimos anos, caracterizações de variedades de crescimento polinomial, análogas a que foi dada por Kemer, também têm sido fornecidas nesses contextos. A fim de apresentarmos tais caracterizações, a seguir faremos uma breve descrição dessas estruturas.

Definição 1.8. Uma álgebra A é dita uma *superálgebra* (ou uma *álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada*) se existem dois subespaços vetoriais $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ tais que:

(i) $A = A^{(0)} + A^{(1)}$ como soma direta de espaços vetoriais;

(ii) $A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subseteq A^{(0)}$ e $A^{(0)}A^{(1)} + A^{(1)}A^{(0)} \subseteq A^{(1)}$.

Os subespaços $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ são as componentes homogêneas de grau 0 e 1, respectivamente. Chamamos $A^{(0)}$ de *componente par* e nos referimos aos seus elementos como sendo pares ou homogêneos de grau 0. Analogamente, chamamos $A^{(1)}$ de *componente ímpar* e nos referimos aos seus elementos como sendo ímpares ou homogêneos de grau 1. Usaremos $(A^{(0)}, A^{(1)})$ para denotar a graduação da superálgebra $A = A^{(0)} + A^{(1)}$.

Observamos que toda álgebra A é uma superálgebra com *graduação trivial* que é dada por $(A, \{0\})$. A seguir, exibimos exemplos importantes de superálgebras com graduação não trivial. Denotamos por $e_{ij} \in M_n(F)$ a matriz elementar usual.

Exemplo 1.9.

(1) A álgebra UT_2 com a graduação $(Fe_{11} + Fe_{22}, Fe_{12})$ é uma superálgebra que denotaremos por UT_2^{gr}.

(2) A álgebra de Grassmann $\mathcal{G}$ com graduação $(\mathcal{G}^{(0)}, \mathcal{G}^{(1)})$, onde

$$\mathcal{G}^{(0)} = \text{span}_F\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{2k}} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k}, k \geq 0\} \quad \text{e}$$
$$\mathcal{G}^{(1)} = \text{span}_F\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_{2k+1}} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_{2k+1}, k \geq 0\}$$

é uma superálgebra que denotaremos por $\mathcal{G}^{\text{gr}}$.

(3) A álgebra comutativa $D = F \oplus F$ com a graduação $(F(1,1),\ F(1,-1))$ é uma superálgebra que denotaremos por D^{gr}.

Dizemos que um subespaço $B \subseteq A$ é *graduado* se $(A^{(0)} \cap B,\ A^{(1)} \cap B)$ for uma graduação para B. Neste caso, dizemos que B tem *graduação induzida* de A. De maneira análoga podemos definir *subálgebras graduadas* e *ideais graduados*.

Observamos que se A é uma superálgebra, então a aplicação φ dada por $\varphi(a_0 + a_1) = a_0 - a_1$, com $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$ é um automorfismo de ordem no máximo 2, chamado de automorfismo induzido pela graduação. Quando a graduação é a trivial, φ é a identidade. Reciprocamente, se existe $\varphi \in Aut(A)$ de ordem no máximo 2, então A é uma superálgebra com graduação $(A^{(0)}, A^{(1)})$, onde $A^{(0)} = \{a \in A \mid \varphi(a) = a\}$ e $A^{(1)} = \{a \in A \mid \varphi(a) = -a\}$.

Definição 1.10. Uma aplicação linear $* : A \to A$ é dita uma *involução* se $(a^*)^* = a$ e $(ab)^* = b^*a^*$, para todos $a, b \in A$. Note que, neste caso, $*$ é um antiautomorfismo de A de ordem no máximo 2.

Se A é uma álgebra munida de uma involução $*$ dizemos que A é uma $*$-*álgebra*. Neste caso, A pode ser escrita como uma soma direta de subespaços $A = A^+ + A^-$, onde $A^+ = \{a \in A \mid a^* = a\}$ é o espaço dos elementos simétricos de A e $A^- = \{a \in A \mid a^* = -a\}$ é o espaço dos elementos antissimétricos de A.

É imediato que, para uma álgebra comutativa A, a aplicação identidade é uma involução em A chamada de *involução trivial*. Reciprocamente, se a identidade é uma involução em A, então A é comutativa.

Vejamos alguns exemplos importantes de $*$-álgebras.

Exemplo 1.11.

(1) Consideremos a álgebra UT_n e a aplicação $* : UT_n \to UT_n$ dada por

$$(e_{ij})^* = e_{n-j+1,n-i+1}.$$

A aplicação $*$ é uma involução sobre UT_n, chamada de *involução reflexão*. Se $a \in UT_n$, então a^* é a matriz obtida de a ao refletir seus elementos ao longo de sua diagonal secundária.

(2) Consideremos M a seguinte subálgebra de UT_4

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\}.$$

A álgebra M munida da involução reflexão

$$\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & d & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

é uma $*$-álgebra que denotaremos por M_*.

(3) A álgebra $D = F \oplus F$ munida da involução $(a,b)^* = (b,a)$, chamada de *involução troca*, é uma $*$-álgebra que denotaremos por D_*.

Se A é uma $*$-álgebra, dizemos que um subespaço $B \subseteq A$ é *$*$-invariante* se $B^* = B$. Neste caso, dizemos que B tem *involução induzida* de A. De maneira análoga, podemos definir *subálgebra $*$-invariante* e *ideal $*$-invariante*.

A fim de estabelecer uma nomenclatura comum para superálgebras e $*$-álgebras, usaremos o termo *φ-álgebras*. Assim, qualquer álgebra A munida de um automorfismo ou um antiautomorfismo φ de ordem no máximo 2, ou seja, qualquer superálgebra ou qualquer álgebra com involução, será chamada de φ-álgebra.

Se A é uma φ-álgebra, então podemos escrever $A = A_\varphi^+ + A_\varphi^-$, onde $A_\varphi^+ = \{a \in A \mid a^\varphi = a\}$ e $A_\varphi^- = \{a \in A \mid a^\varphi = -a\}$.

Seja $F\langle X, \varphi\rangle = F\langle x_1, x_1^\varphi, x_2, x_2^\varphi, \ldots\rangle$ a φ-álgebra associativa livre gerada por X e considere $y_i = x_i + x_i^\varphi$ e $z_i = x_i - x_i^\varphi$. Assim, $F\langle X, \varphi\rangle = F\langle Y \cup Z\rangle = F\langle y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots\rangle$ e os elementos de $F\langle Y \cup Z\rangle$ são chamado de *φ-polinômios*.

Um φ-polinômio $f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) \in F\langle Y \cup Z\rangle$ é uma *φ-identidade polinomial* para uma φ-álgebra A se

$$f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = 0,$$

para todos $a_1, \ldots, a_n \in A_\varphi^+$ e $b_1, \ldots, b_m \in A_\varphi^-$.

O conjunto $\mathrm{Id}^\varphi(A)$ de todas as φ-identidades de A é um ideal de $F\langle Y \cup Z\rangle$ invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle Y \cup Z\rangle$ que comutam com φ, chamado de *T^φ-ideal* de A. Observamos que se φ é um automorfismo, escrevemos $\mathrm{Id}^\varphi = \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ para denotar o T_2-ideal da superálgebra A. Agora, se φ é um antiautomorfismo, escrevemos $\mathrm{Id}^\varphi = \mathrm{Id}^*(A)$ para denotar o T^*-ideal da $*$-álgebra A.

A classe de todas as φ-álgebras que satisfazem as φ-identidades de uma determinada φ-álgebra A é chamada de *φ-variedade* gerada por A e denotada por $\mathcal{V} = \mathrm{var}^\varphi(A)$. No caso graduado, escrevemos $\mathrm{var}^\varphi(A) = \mathrm{var}^{\mathrm{gr}}(A)$ para a *supervariedade* gerada por A e, no caso com involução, escrevemos $\mathrm{var}^\varphi(A) = \mathrm{var}^*(A)$ para a *$*$-variedade* gerada por A.

Desde que estamos trabalhando sobre um corpo F de característica zero, segue que $\mathrm{Id}^\varphi(A)$ é finitamente gerado como um T^φ-ideal (veja Corolário 2.5 de [25] para o caso de superálgebras) e é completamente determinado por seus *φ-polinômios multilineares.* Isso nos leva a considerar, para cada $n \geq 1$,

$$P_n^{\varphi} = \mathrm{span}_F\{\omega_{\sigma(1)} \cdots \omega_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n,\ \omega_i = y_i \ \text{ ou } \ \omega_i = z_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

o espaço dos *φ-polinômios multilineares* de grau n nas variáveis $y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n$ (isto é, y_i ou z_i aparece uma única vez em cada monômio).

Definição 1.12. Para $n \geq 1$, o número $c_n^{\varphi}(A) = \dim_F \dfrac{P_n^{\varphi}}{P_n^{\varphi} \cap \mathrm{Id}^{\varphi}(A)}$ é chamado de *n-ésima φ-codimensão* de A.

Se φ é um automorfismo, denotamos por $c_n^{\varphi}(A) = c_n^{\mathrm{gr}}(A)$, a n-ésima codimensão graduada de A. Se φ é um antiautomorfismo, denotamos por $c_n^{\varphi}(A) = c_n^{*}(A)$, a n-ésima $*$-codimensão de A.

Neste contexto, também temos que a análise do comportamento da sequência de φ-codimensões de uma φ-álgebra A é uma ferramenta útil para o estudo do T^{φ}-ideal de A. Ressaltamos que as definições de φ-variedades de crescimento polinomial e exponencial, de φ-variedades de crescimento quase polinomial e de φ-variedades minimais de crescimento polinomial seguem análogas às apresentadas no caso ordinário.

Agora, estamos em condições de apresentar os resultados de caracterização de φ-variedades de crescimento polinomial semelhantes ao que Kemer provou para álgebras associativas.

Em [14], Giambruno, Mishchenko e Zaicev forneceram a seguinte caracterização das supervariedades de crescimento polinomial através da exclusão de cinco superálgebras, onde UT_2 e $\mathcal{G}$ denotam a álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2 com graduação trivial e a álgebra de Grassmann com graduação trivial, respectivamente.

Teorema 1.13. [14, Teorema 2] *Uma supervariedade $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial das codimensões graduadas se, e somente se, UT_2, UT_2^{gr}, $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^{\mathrm{gr}}$, $D^{\mathrm{gr}} \notin \mathcal{V}$.*

Como consequência dessa caracterização, segue que UT_2, UT_2^{gr}, $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^{\mathrm{gr}}$ e D^{gr} geram as únicas supervariedades de crescimento quase polinomial.

Em 2011, La Mattina [30] classificou todas as subvariedades das supervariedades de crescimento quase polinomial. Em particular, todas as subvariedades minimais dentro das supervariedades de crescimento quase polinomial também foram determinadas.

Já em [12], Giambruno e Mishchenko caracterizaram as $*$-variedades $\mathcal{V}$ de crescimento polinomial através da exclusão das álgebras D_* e M_* de $\mathcal{V}$, como pode ser visto abaixo.

Teorema 1.14. [12, Teorema 4.7] *Uma $*$-variedade $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial das $*$-codimensões se, e somente se, D_*, $M_* \notin \mathcal{V}$.*

Com isso, $\text{var}^*(D_*)$ e $\text{var}^*(M_*)$ são as únicas $*$-variedades de crescimento quase polinomial.

Em [31], os autores classificaram completamente todas as subvariedades das $*$-variedades de crescimento quase polinomial. Em particular, foram determinadas todas as subvariedades minimais dentro de cada uma destas $*$-variedades de crescimento quase polinomial.

1.3 $*$-Superálgebras

O objetivo dessa seção é introduzir nosso principal objeto de estudo: as superálgebras munidas de involução graduada. Ressaltamos que certas definições e resultados voltados para essa estrutura generalizam o que têm sido feito no contexto de PI-álgebras, superálgebras e de álgebras com involução.

Definição 1.15. Uma involução $*$ em uma superálgebra $A = A^{(0)} + A^{(1)}$ que preserva as componentes homogêneas $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$, ou seja, $\left(A^{(0)}\right)^* = A^{(0)}$ e $\left(A^{(1)}\right)^* = A^{(1)}$, é chamada de *involução graduada*. Uma superálgebra A munida com uma involução graduada $*$ é chamada de $*$-*superálgebra*.

Observamos que o estudo das $*$-superálgebras generaliza o estudo das álgebras com involução, uma vez que toda $*$-álgebra é uma $*$-superálgebra considerada com graduação trivial.

Além disso, é claro que para uma superálgebra comutativa A, a aplicação identidade é uma involução graduada em A, chamada de *involução graduada trivial*. Portanto, toda superálgebra comutativa é uma $*$-superálgebra considerada com involução graduada trivial. Reciprocamente, se a aplicação identidade é uma involução graduada para uma superálgebra A, então A é comutativa.

A seguir, daremos importantes exemplos de $*$-superálgebras.

Exemplo 1.16. A álgebra M, apresentada na seção anterior, com graduação trivial e munida da involução reflexão é uma $*$-superálgebra que denotaremos por M_*. Também temos que a álgebra M com a seguinte graduação

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

e com involução reflexão é uma $*$-superálgebra que denotaremos por M^{gri}.

Exemplo 1.17. Consideremos a álgebra comutativa $D = F \oplus F$, introduzida na seção anterior. A álgebra D_* é uma $*$-superálgebra com graduação trivial e involução troca. Além disso, a álgebra D com graduação $(F(1,1),\ F(1,-1))$ e involução trivial é uma $*$-superálgebra que representaremos por D^{gr}. Por fim, a mesma álgebra D com graduação $(F(1,1),\ F(1,-1))$ e involução troca também é uma $*$ superálgebra que denotaremos por D^{gri}.

É possível mostrar que uma superálgebra A munida de uma involução $*$ é uma $*$-superálgebra se, e somente se, os subespaços A^+ e A^- são graduados, isto é,

$$A^+ = (A^+)^{(0)} + (A^+)^{(1)} \quad \text{e} \quad A^- = (A^-)^{(0)} + (A^-)^{(1)}.$$

Com isso, obtemos que qualquer $*$-superálgebra A pode ser escrita como soma de 4 subespaços

$$A = (A^{(0)})^+ + (A^{(1)})^+ + (A^{(0)})^- + (A^{(1)})^-.$$

Chamaremos os subespaços $(A^{(0)})^+$, $(A^{(1)})^+$, $(A^{(0)})^-$ e $(A^{(1)})^-$ de *componentes simétrica par*, *simétrica ímpar*, *antissimétrica par* e *antissimétrica ímpar* de A, respectivamente. Uma *base $*$-graduada* de A é uma base formada pela união de bases desses subespaços.

Sejam A uma $*$-superálgebra, φ o automorfismo de ordem 2 induzido pela graduação de A e I um ideal de A. Dizemos que I é um *ideal $*$-graduado* de A se $I^\varphi = I$ e $I^* = I$. Isso equivale a dizer que I tem graduação e involução induzidas de A. Analogamente, definimos uma *subálgebra $*$-graduada* e um *subespaço $*$-graduado.*

Dizemos que A é uma *$*$-superálgebra simples* se $A^2 \neq 0$ e A não possui ideais $*$-graduados não triviais.

Consideremos X um conjunto enumerável de variáveis não comutativas. Escrevendo X como uma união disjunta de quatro conjuntos $X = Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$, onde $Y_0 = \{y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots\}, Y_1 = \{y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots\}, Z_0 = \{z_{1,0}, z_{2,0}, \ldots\}$ e $Z_1 = \{z_{1,1}, z_{2,1}, \ldots\}$, definimos a *$*$-superálgebra livre* $\mathcal{F} = F\langle X|\mathbb{Z}_2, *\rangle$ dando uma superestrutura em $\mathcal{F}$ ao determinar que as variáveis em $Y_0 \cup Z_0$ são homogêneas de grau 0 e aquelas em $Y_1 \cup Z_1$ são homogêneas de grau 1. Também definimos uma involução em $\mathcal{F}$ exigindo que as variáveis em $Y_0 \cup Y_1$ são simétricas e as variáveis em $Z_0 \cup Z_1$ são antissimétricas.

Dessa forma, temos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(0)} + \mathcal{F}^{(1)}$, onde $\mathcal{F}^{(0)}$ é o subespaço gerado por todos os monômios nas variáveis em X que têm um número par de variáveis de grau 1 e $\mathcal{F}^{(1)}$ é o subespaço gerado por todos os monômios nas variáveis em X que têm um número ímpar de variáveis de grau 1. Assim, $\mathcal{F}$ tem estrutura de $*$-superálgebra, desde que $(\mathcal{F}^{(0)})^* = \mathcal{F}^{(0)}$ e $(\mathcal{F}^{(1)})^* = \mathcal{F}^{(1)}$. Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados de *$(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômios.*

Iremos nos referir às variáveis em Y_0 como sendo *simétricas pares*, às variáveis em Y_1 como sendo *simétricas ímpares*, às variáveis em Z_0 como sendo *antissimétricas pares* e às variáveis em Z_1 como sendo *antissimétricas ímpares.*

Definição 1.18. Dizemos que um $(\mathbb{Z}_2,*)$-polinômio

$$f = f(y_{1,0},\ldots,y_{m,0},y_{1,1},\ldots,y_{n,1},z_{1,0},\ldots,z_{p,0},z_{1,1},\ldots,z_{q,1})$$

é uma $(\mathbb{Z}_2,*)$-*identidade* para uma $*$-superálgebra A, e escrevemos $f\equiv 0$ em A, se

$$f(a_{1,0}^+,\ldots,a_{m,0}^+,a_{1,1}^+,\ldots,a_{n,1}^+,a_{1,0}^-,\ldots,a_{p,0}^-,a_{1,1}^-,\ldots,a_{q,1}^-)=0,$$

para todos $a_{1,0}^+,\ldots,a_{m,0}^+ \in (A^{(0)})^+$, $a_{1,1}^+,\ldots,a_{n,1}^+ \in (A^{(1)})^+$, $a_{1,0}^-,\ldots,a_{p,0}^- \in (A^{(0)})^-$ e $a_{1,1}^-,\ldots,a_{q,1}^- \in (A^{(1)})^-$.

Observe que, neste caso, as avaliações em um $(\mathbb{Z}_2,*)$-polinômio por elementos de uma $*$-superálgebra A respeitam o tipo de variável em questão, ou seja, em variáveis simétricas pares substituímos elementos de A pertencentes à componente simétrica par e assim por diante.

O *ideal das* $(\mathbb{Z}_2,*)$-*identidades* de A é o conjunto

$$\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)=\{f\in\mathcal{F}\mid f\equiv 0 \text{ em } A\}.$$

Temos que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ é um T_2^*-*ideal* de $\mathcal{F}$, ou seja, é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $\mathcal{F}$ que preservam a graduação e comutam com a involução. Nos referimos a $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ como sendo o T_2^*-*ideal* de A.

Como no caso ordinário, $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ é finitamente gerado como T_2^*-ideal e usamos a notação $\langle f_1,\ldots,f_m\rangle_{T_2^*}$ para indicar que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ é gerado por $f_1,\ldots,f_m\in\mathcal{F}$.

A possibilidade de $*$-superálgebras distintas satisfazerem as mesmas $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades torna necessário introduzirmos a noção de variedade de $*$-superálgebras. Analogamente à definição correspondente no caso ordinário, a classe de todas as $*$-superálgebras que satisfazem as $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades de uma dada $*$-superálgebra A é chamada de *variedade de $*$-superálgebras* (ou *$*$-supervariedade*) gerada por A e denotada por $\mathcal{V}=\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$. Dessa forma, se uma $*$-superálgebra $B\in\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, então $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)\subseteq\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$. Consequentemente, $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)=\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B)$ se, e somente se, $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)=\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$. Neste caso, dizemos que A é T_2^*-*equivalente* a B e denotamos por $A\sim_{T_2^*}B$.

Desde que F é um corpo de característica zero, neste contexto também temos que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ é completamente determinado por seus polinômios multilineares. Dessa forma, para $n\geq 1$, definimos

$$P_n^{\mathrm{gri}}=\mathrm{span}_F\{w_{\sigma(1)}\cdots w_{\sigma(n)}\mid w_i\in\{y_{i,0},y_{i,1},z_{i,0},z_{i,1}\},\sigma\in S_n\},$$

como sendo o espaço dos $(\mathbb{Z}_2,*)$-polinômios multilineares de grau n nas variáveis $y_{1,0},\ldots,$ $y_{n,0},\ y_{1,1},\ldots,y_{n,1},\ z_{1,0},\ldots,z_{n,0},\ z_{1,1},\ldots,z_{n,1}$. Ou seja, se $f\in P_n^{\mathrm{gri}}$, então as variáveis $y_{i,0},\ y_{i,1},\ z_{i,0}$ e $z_{i,1}$ não podem aparecer simultaneamente em um mesmo monômio de

f, com $i = 1, \ldots, n$, mas exatamente uma delas aparece em cada monômio. Note que $\dim_F P_n^{\text{gri}} = 4^n n!$.

Destacamos que, pelo Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, todo $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômio multilinear pode ser escrito como uma combinação linear de produtos dos tipos

$$y_{i_1,0} \cdots y_{i_p,0} z_{j_1,0} \cdots z_{j_q,0} y_{k_1,1} \cdots y_{k_m,1} z_{l_1,1} \cdots z_{l_n,1} \omega_1 \cdots \omega_d,$$

onde $i_1 < \ldots < i_p$, $j_1 < \ldots < j_q$, $k_1 < \ldots < k_m$, $l_1 < \ldots < l_n$ e $\omega_1, \ldots, \omega_d$ são comutadores de pesos arbitrários nas variáveis em $Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$.

A seguir exibimos os T_2^*-ideais das $*$-superálgebras apresentadas anteriormente.

Exemplo 1.19.

(1) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(M_*) = \langle z_{1,0} z_{2,0},\ y_{1,1},\ z_{1,1} \rangle_{T_2^*}$ (Veja [34, Teorema 2]).

(2) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(M^{\text{gri}}) = \langle z_{1,0},\ x_{1,1} x_{2,1} \rangle_{T_2^*}$, onde $x_i = y_i$ ou $x_i = z_i$, para $i = 1, 2$ (Veja [6, Teorema 6.3]).

(3) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(D_*) = \langle [y_{1,0}, y_{2,0}],\ [y_{1,0}, z_{2,0}],\ [z_{1,0}, z_{2,0}],\ y_{1,1},\ z_{1,1} \rangle_{T_2^*}$ (Veja [13, Teorema 2]).

(4) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(D^{\text{gr}}) = \langle [y_{1,0}, y_{2,0}],\ [y_{1,1}, y_{2,1}],\ [y_{1,0}, y_{2,1}],\ z_{1,0},\ z_{1,1} \rangle_{T_2^*}$ (Veja [14, Teorema 6.3]).

(5) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(D^{\text{gri}}) = \langle z_{1,0}, y_{1,1} \rangle_{T_2^*}$ (Veja [35, Observação 2.2]).

Para $n \geq 1$, consideremos o espaço quociente

$$P_n^{\text{gri}}(A) = \frac{P_n^{\text{gri}}}{P_n^{\text{gri}} \cap \mathrm{Id}^{\text{gri}}(A)}.$$

Definição 1.20. O inteiro não negativo

$$c_n^{\text{gri}}(A) = \dim_F P_n^{\text{gri}}(A),\ n \geq 1,$$

é chamado de *n-ésima codimensão $*$-graduada* de A. Para $\mathcal{V} = \mathrm{var}^{\text{gri}}(A)$ definimos $c_n^{\text{gri}}(\mathcal{V}) = c_n^{\text{gri}}(A)$.

Assim como nos outros contextos, vários autores têm estudado a sequência de codimensões $*$-graduadas no intuito de caracterizar $*$-supervariedades $\mathcal{V}$ através do comportamento assintótico de $\{c_n^{\text{gri}}(\mathcal{V})\}_{n \geq 1}$.

Dizemos que uma $*$-supervariedade $\mathcal{V}$ tem *crescimento polinomial* ou que a sequência de codimensões $*$-graduadas de $\mathcal{V}$ é *limitada polinomialmente*, se existem constantes α, t tais que $c_n^{\text{gri}}(\mathcal{V}) \leq \alpha n^t$, para todo $n \geq 1$. Por outro lado, dizemos que uma $*$-supervariedade $\mathcal{V}$ tem *crescimento exponencial* se existem um inteiro $\alpha \geq 2$ e uma constante $b > 0$ tais que $c_n^{\text{gri}}(\mathcal{V}) \geq b\alpha^n$, para n suficientemente grande. Além disso, dizemos que uma $*$-supervariedade $\mathcal{V}$ tem *crescimento quase polinomial* se a sequência de codimensões $*$-graduadas de $\mathcal{V}$ cresce exponencialmente, mas toda subvariedade própria de $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial.

Enfatizamos que nosso interesse é nas $*$-supervariedades de crescimento polinomial e que mais à frente apresentaremos alguns resultados que as caracterizam.

Observação 1.21. [6, Lema 3.1] É possível identificar de forma natural P_n, P_n^* e P_n^{gr} com subespaços adequados de P_n^{gri}. Dessa forma, se A é uma $*$-superálgebra, podemos considerar suas identidades ordinárias, $*$-identidades e identidades graduadas. Segue abaixo as relações entre as codimensões correspondentes

(1) $c_n(A) \leq c_n^*(A) \leq c_n^{\mathrm{gri}}(A)$;

(2) $c_n(A) \leq c_n^{\mathrm{gr}}(A) \leq c_n^{\mathrm{gri}}(A)$;

(3) $c_n^{\mathrm{gri}}(A) \leq 4^n c_n(A)$.

Observamos que as relações entre as codimensões tratadas na observação anterior podem ser aplicadas para estimar o tipo de crescimento de uma $*$-superálgebra. Para exemplificar, seja A uma álgebra munida de uma involução $*$ tal que A tem crescimento quadrático da sequência de $*$-codimensões. Então, segue da relação (1) que ao considerarmos a álgebra A com uma graduação não trivial de tal modo que a mesma involução $*$ é uma involução graduada, temos que A, vista agora como uma $*$-superálgebra, tem crescimento pelo menos quadrático da sequência de codimensões $*$-graduadas.

Além disso, como consequência das relações acima, temos o seguinte

Corolário 1.22. [6, Corolário 3.2] *Seja A uma $*$-superálgebra. Então A é PI-álgebra se, e somente se, sua sequência de codimensões $*$-graduadas é limitada exponencialmente.*

O próximo lema lista algumas relações que serão úteis nos capítulos posteriores. Antes, é necessário observarmos que o comutador de peso 2 em variáveis simétricas e o comutador de peso 2 em variáveis antissimétricas são antissimétricos. Já o comutador de peso 2 em uma variável simétrica e uma antissimétrica (e vice-versa) é simétrico.

Lema 1.23. *Sejam A uma $*$-superálgebra e $I = \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$.*

(1) [32, Observação 8] *Se $z_{1,0} \cdots z_{k,0} \in I$, para algum $k \geq 1$, então*

$$z_{1,0} m_1 z_{2,0} m_2 \cdots m_{k-1} z_{k,0} \in I,$$

onde $m_1, \ldots, m_{k-1}$ são monômios (eventualmente vazios) de $\mathcal{F}$ em variáveis pares.

(2) [6, Observação 6.1] *Se $x_{1,1} x_{2,1} \in I$, onde $x_i = y_i$ ou $x_i = z_i$, para $i = 1,\ 2$, então $x_{1,1} f x_{2,1} \in I$, para qualquer polinômio $f \in \mathcal{F}$.*

(3) *Se* $z_{1,0}y_{2,1}$, $z_{1,0}z_{2,1} \in I$, *então* $z_{1,0}y_{2,0}y_{3,1}$, $z_{1,0}y_{2,0}z_{3,1} \in I$.

(4) *Se* $z_{1,0}y_{2,0}y_{3,1} \in I$, *então* $z_{1,0}my_{3,1} \in I$, *onde* m *é um monômio de* $\mathcal{F}$ *em variáveis simétricas pares contendo pelo menos duas variáveis. Analogamente, se* $z_{1,0}y_{2,0}z_{3,1} \in I$, *então* $z_{1,0}mz_{3,1} \in I$, *e se* $z_{1,0}y_{2,0}z_{3,0} \in I$, *então* $z_{1,0}mz_{3,0} \in I$.

(5) *Se* $z_{1,0}y_{2,1}$, $z_{1,0}z_{2,1} \in I$, *então* $z_{1,0}my_{3,1}$, $z_{1,0}mz_{3,1} \in I$, *onde* m *é um monômio de* $\mathcal{F}$ *em variáveis simétricas pares contendo pelo menos uma variável.*

Demonstração. (3) Para provarmos esse item, basta observarmos que $z_{1,0}y_{2,0}y_{3,1} = z_{1,0}y_{3,1}y_{2,0} - z_{1,0}[y_{3,1}, y_{2,0}]$ e $z_{1,0}y_{2,0}z_{3,1} = z_{1,0}z_{3,1}y_{2,0} - z_{1,0}[z_{3,1}, y_{2,0}]$.

(4) Mostraremos primeiramente que $z_{1,0}y_{2,0}y_{3,1} \in I$ implica em $z_{1,0}y_{2,0}y_{3,0}y_{4,1} \in I$. De fato, sejam s_1, $s_2 \in (A^{(0)})^+$, $k_1 \in (A^{(0)})^-$ e $k_2 \in (A^{(1)})^+$. Note que $s_1k_1 + k_1s_1 \in (A^{(0)})^-$ e, por isso, $s_1k_1 + k_1s_1 = k' \in (A^{(0)})^-$. Assim,

$$k_1s_1s_2k_2 = (k' - s_1k_1)s_2k_2 = k's_2k_2 - s_1k_1s_2k_2 = 0,$$

desde que $z_{1,0}y_{2,0}y_{3,1} \in I$. Como $s_1, s_2 \in (A^{(0)})^+$, $k_1 \in (A^{(0)})^-$ e $k_2 \in (A^{(1)})^+$ são arbitrários, concluímos que $z_{1,0}y_{2,0}y_{3,0}y_{4,1} \in I$. O resultado segue agora de modo recursivo. Os outros dois casos são mostrados de forma análoga.

Desde que o item (5) segue como consequência dos itens (3) e (4), finalizamos a prova. □

A próxima definição será necessária ao longo deste texto.

Definição 1.24. Sejam A uma superálgebra munida de uma involução graduada $*$ e B uma superálgebra munida de uma involução graduada $\dagger$. Dizemos que uma aplicação $\varphi : A \to B$ é um *isomorfismo de superálgebras com involução graduada* se φ é um isomorfismo de superálgebras, isto é, um isomorfismo de álgebras que preserva a graduação, $\varphi(A^{(0)}) = B^{(0)}$ e $\varphi(A^{(1)}) = B^{(1)}$, e satisfaz $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^\dagger$, para todo $a \in A$. Por simplicidade, chamaremos de *isomorfismo de* $*$*-superálgebras*.

1.3.1 O cocaracter $*$-graduado e o $\langle n\rangle$-cocaracter

No estudo das identidades polinomiais ordinárias de uma álgebra, o grupo simétrico S_n e o grupo linear geral GL_m têm um papel fundamental, já que as teorias de representações desses grupos são ferramentas poderosas na investigação do T-ideal e da sequência de codimensões de uma álgebra. Nesta seção veremos que, no contexto de $*$-superálgebras, um papel análogo é desempenhado pelo produto entrelaçado $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \wr S_n$, onde $\mathbb{Z}_2$ é o grupo aditivo $\{0, 1\}$, e pelos grupos $S_{n_1} \times S_{n_2} \times S_{n_3} \times S_{n_4}$ e $GL_m \times GL_m \times GL_m \times GL_m$. Para um estudo detalhado da teoria de S_n-representações sugerimos [2] e [21].

Lembramos que o *produto entrelaçado* entre $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e S_n é o grupo definido por

$$\mathbb{H}_n = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \wr S_n = \{((g_1, h_1), \ldots, (g_n, h_n); \sigma) \mid (g_i, h_i) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \sigma \in S_n, i = 1, \ldots, n\}$$

com produto dado por

$$((g_1, h_1), \ldots, (g_n, h_n); \sigma)((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n); \tau) = ((\overline{g}_1, \overline{h}_1), \ldots, (\overline{g}_n, \overline{h}_n); \sigma\tau),$$

onde $\overline{g}_i = g_i a_{\sigma^{-1}(i)}$ e $\overline{h}_i = h_i b_{\sigma^{-1}(i)}$ para todo $1 \leq i \leq n$.

O grupo $\mathbb{H}_n$ age sobre o espaço P_n^{gri} da seguinte forma:

$$((g_1, h_1), \ldots, (g_n, h_n); \sigma) y_{i,g_i} = y_{\sigma(i), g_i + g_{\sigma(i)}}$$

$$((g_1, h_1), \ldots, (g_n, h_n); \sigma) z_{i,g_i} = \begin{cases} z_{\sigma(i), g_i + g_{\sigma(i)}}, & \text{se } h_{\sigma(i)} = 1 \\ -z_{\sigma(i), g_i + g_{\sigma(i)}}, & \text{se } h_{\sigma(i)} = 0 \end{cases}.$$

Assim, desde que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ é invariante pela ação acima, temos que o espaço $P_n^{\mathrm{gri}}(A)$ tem estrutura de $\mathbb{H}_n$-módulo. O $\mathbb{H}_n$-caracter de $P_n^{\mathrm{gri}}(A)$, denotado por $\chi_n^{\mathrm{gri}}(A)$, é chamado de *n-ésimo cocaracter $*$-graduado* de A.

Para um inteiro $n \geq 1$, escrevemos $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ como a soma de quatro inteiros não negativos e denotamos por $\langle n \rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$. Uma multipartição $\langle \lambda \rangle = (\lambda(1), \ldots, \lambda(4)) \vdash \langle n \rangle$ é tal que $\lambda(i) = (\lambda(i)_1, \lambda(i)_2, \ldots) \vdash n_i$, para $i = 1, \ldots, 4$. Desde que F é um corpo de característica zero, é conhecido que existe uma correspondência biunívoca entre os $\mathbb{H}_n$-caracteres irredutíveis e as multipartições $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$, com $\langle n \rangle$ variando sobre todas as possíveis somas de inteiros não negativos $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$.

Por isso, podemos decompor o n-ésimo cocaracter $*$-graduado de A como

$$\chi_n^{\mathrm{gri}}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}, \tag{1.3.1}$$

onde $\chi_{\langle \lambda \rangle}$ é o $\mathbb{H}_n$-caracter irredutível associado à multipartição $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ e $m_{\langle \lambda \rangle}$ é a multiplicidade correspondente. Denotamos por

$$l_n^{\mathrm{gri}}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} m_{\langle \lambda \rangle}, \tag{1.3.2}$$

o *n-ésimo cocomprimento $*$-graduado* de A.

Para cada $\langle n \rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ fixo, definimos $P_{\langle n \rangle}$ como sendo o espaço dos $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômios multilineares em que as primeiras n_1 variáveis são simétricas pares, as próximas n_2 variáveis são simétricas ímpares, as próximas n_3 variáveis são antissimétricas pares e as últimas n_4 variáveis são antissimétricas ímpares.

Observe que, para cada escolha de $\langle n\rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$, existem $\binom{n}{\langle n\rangle}$ subespaços isomorfos a $P_{\langle n\rangle}$, onde $\binom{n}{\langle n\rangle} = \binom{n}{n_1,n_2,n_3,n_4}$ denota o coeficiente multinomial. Note que $P_{\langle n\rangle}$ está contido em P_n^{gri} e temos ainda que

$$P_n^{\mathrm{gri}} \cong \bigoplus_{\langle n\rangle} \binom{n}{\langle n\rangle} P_{\langle n\rangle}.$$

Consideremos

$$P_{\langle n\rangle}(A) = \frac{P_{\langle n\rangle}}{P_{\langle n\rangle} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)} \quad \text{e} \quad c_{\langle n\rangle}(A) = \dim_F P_{\langle n\rangle}(A).$$

Pelo observado acima, segue que

$$c_n^{\mathrm{gri}}(A) = \sum_{\langle n\rangle} \binom{n}{\langle n\rangle} c_{\langle n\rangle}(A). \tag{1.3.3}$$

Agora, consideremos o grupo $S_{\langle n\rangle} = S_{n_1} \times S_{n_2} \times S_{n_3} \times S_{n_4}$ e a ação à esquerda de $S_{\langle n\rangle}$ sobre $P_{\langle n\rangle}$ definida pela permutação dos quatro conjuntos de variáveis separadamente.

Com isso, temos que $P_{\langle n\rangle}$ é um $S_{\langle n\rangle}$-módulo e desde que T_2^*-ideais são invariantes sob a ação descrita acima, temos que $P_{\langle n\rangle}(A)$ também herda uma estrutura de $S_{\langle n\rangle}$-módulo.

Aqui, convém recordar da existência de uma correspondência biunívoca entre os S_{n_i}-caracteres irredutíveis e as partições de n_i. Assim, denotaremos o S_{n_i}-caracter irredutível correspondente à partição $\lambda(i) \vdash n_i$ por $\chi_{\lambda(i)}$, onde o seu grau, representado por $d_{\lambda(i)}$, é dado pela fórmula do gancho (veja [38, Teorema 3.10.2]).

Também é conhecido que existe uma correspondência biunívoca entre os $S_{\langle n\rangle}$-caracteres irredutíveis e as multipartições $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle$ e que os $S_{\langle n\rangle}$-caracteres irredutíveis são produtos tensoriais dos caracteres irredutíveis de $S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4}$, respectivamente. Denotamos por $\chi_{\lambda(1)} \otimes \cdots \otimes \chi_{\lambda(4)}$ o $S_{\langle n\rangle}$-caracter irredutível correspondente a $\langle\lambda\rangle$ cujo grau é dado por $d_{\lambda(1)} \cdots d_{\lambda(4)}$.

Concluímos que, para cada $\langle n\rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ fixo, podemos considerar o $S_{\langle n\rangle}$-caracter de $P_{\langle n\rangle}(A)$, denotado por $\chi_{\langle n\rangle}(A)$ e chamado de *n-ésimo $\langle n\rangle$-cocaracter* de A. Pela redutibilidade completa, podemos decompor $\chi_{\langle n\rangle}(A)$ em uma soma de $S_{\langle n\rangle}$-caracteres irredutíveis da seguinte forma

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} \overline{m}_{\langle\lambda\rangle} \chi_{\lambda(1)} \otimes \cdots \otimes \chi_{\lambda(4)}, \tag{1.3.4}$$

onde $\overline{m}_{\langle\lambda\rangle}$ denotam as multiplicidades correspondentes aos $S_{\langle n\rangle}$-caracteres irredutíveis. Da relação acima, temos ainda que

$$c_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle} d_{\lambda(1)} \cdots d_{\lambda(4)}. \tag{1.3.5}$$

O próximo resultado estabelece uma relação entre o cocaracter $*$-graduado e o $\langle n\rangle$-cocaracter de uma $*$-superálgebra A de maneira similar ao que ocorre no caso de álgebras com involução (veja [3, Teorema 1.3]).

Teorema 1.25. *Seja $\chi_n^{\mathrm{gri}}(A)$ o $\mathbb{H}_n$-caracter de $P_n^{\mathrm{gri}}(A)$ com decomposição dada como em* (1.3.1) *e para cada combinação possível $\langle n\rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ considere $\chi_{\langle n\rangle}(A)$ o $S_{\langle n\rangle}$-caracter de $P_{\langle n\rangle}(A)$ decomposto como em (1.3.4). Então, temos que $m_{\langle\lambda\rangle} = \overline{m}_{\langle\lambda\rangle}$, para toda multipartição $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle$.*

Ao longo dessa tese, devido ao teorema acima, tanto as multiplicidades correspondentes aos $S_{\langle n\rangle}$-caracteres irredutíveis na decomposição (1.3.4), quanto as multiplicidades dos $\mathbb{H}_n$-caracteres irredutíveis na decomposição (1.3.1) serão denotadas por $m_{\langle\lambda\rangle}$.

Neste ponto, uma pergunta natural é sobre como podemos calcular as multiplicidades $m_{\langle\lambda\rangle}$ dos $S_{\langle n\rangle}$-caracteres irredutíveis que aparecem na decomposição de $\chi_{\langle n\rangle}(A)$. Para respondermos tal questão, precisaremos recorrer à teoria de representações do grupo linear geral GL_m, cujo estudo pode ser aprofundado em [2].

Consideremos F_m o espaço dos $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômios nas variáveis $y_{1,0}, \ldots, y_{m,0}, y_{1,1}, \ldots$ $y_{m,1}, z_{1,0}, \ldots, z_{m,0}, z_{1,1}, \ldots, z_{m,1}$ e sejam $U_1 = \mathrm{span}_F\{y_{1,0}, \ldots, y_{m,0}\}$, $U_2 = \mathrm{span}_F\{y_{1,1}, \ldots,$ $y_{m,1}\}$, $U_3 = \mathrm{span}_F\{z_{1,0}, \ldots, z_{m,0}\}$ e $U_4 = \mathrm{span}_F\{z_{1,1}, \ldots, z_{m,1}\}$.

O grupo $GL(U_1) \times GL(U_2) \times GL(U_3) \times GL(U_4) \cong GL_m \times GL_m \times GL_m \times GL_m = GL_m^4$ age naturalmente à esquerda sobre o subespaço $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$ de F_m e temos que esta ação pode ser estendida diagonalmente à uma ação sobre F_m. Além disso, para qualquer $*$-superálgebra A, temos que $F_m \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ é invariante sob essa ação.

Então, considerando F_m^n o subespaço dos $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômios homogêneos em F_m de grau $n \geq m$, temos que o grupo GL_m^4 age diagonalmente sobre F_m^n e, assim, F_m^n tem estrutura de GL_m^4-módulo. Desde que $F_m^n \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ é invariante sob essa ação, segue que o espaço

$$F_m^n(A) = \frac{F_m^n}{F_m^n \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)}$$

é um GL_m^4-módulo e denotamos por $\Psi_n^{\mathrm{gri}}(A)$ o seu GL_m^4-caracter, chamado de GL_m^4-*cocaracter* de A.

A teoria de representações do grupo linear geral GL_m mostra que existe uma correspondência biunívoca entre os GL_m^4-módulos irredutíveis e as multipartições $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \lambda(4))$ de $\langle n\rangle$, onde $\lambda(i)$ são partições com no máximo m partes [2, Teorema 12.4.4]. Denotamos por $\Psi_{\langle\lambda\rangle}$ o GL_m^4-caracter irredutível correspondente à multipartição $\langle\lambda\rangle$ e temos que

$$\Psi_n^{\mathrm{gri}}(A) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle \\ h(\langle\lambda\rangle) \leq m}} \tilde{m}_{\langle\lambda\rangle} \Psi_{\langle\lambda\rangle}, \tag{1.3.6}$$

onde $\tilde{m}_{\langle\lambda\rangle} \geq 0$ é a multiplicidade de $\Psi_{\langle\lambda\rangle}$, $h(\langle\lambda\rangle) = \max\{h(\lambda(i)), i = 1, \ldots, 4\}$ e $h(\lambda(i))$ denota o número de partes de $\lambda(i) \vdash n_i$, $i = 1, \ldots, 4$.

Além disso, temos que todo GL_m^4-módulo irredutível é gerado por um polinômio não nulo $f_{\langle\lambda\rangle}$ chamado *vetor de altura máxima associado à multipartição* $\langle\lambda\rangle$ (veja [2, Teorema 12.4.12]).

Uma multitabela $T_{\langle\lambda\rangle} = (T_{\lambda(1)}, T_{\lambda(2)}, T_{\lambda(3)}, T_{\lambda(4)})$ é uma 4-upla formada por tabelas de Young $T_{\lambda(i)}$ do tipo $\lambda(i) \vdash n_i$ (veja [2, Teorema 12.4.14] para definição), para $i = 1, \ldots, 4$. A multitabela *padrão* $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}$ é aquela em que os inteiros $1, \ldots, n$ são preenchidos, nesta ordem, de cima para baixo, da esquerda para direita, coluna por coluna, da tabela $\tilde{T}_{\lambda(1)}$ até a tabela $\tilde{T}_{\lambda(4)}$. O vetor de altura máxima associado à multitabela padrão é chamado de *vetor de altura máxima padrão* e é dado por

$$\begin{aligned} f_{\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}} = & \prod_{j=1}^{\lambda(1)_1} St_{h_j(\lambda(1))}(y_{1,0}, \ldots, y_{h_j(\lambda(1)),0}) \prod_{j=1}^{\lambda(2)_1} St_{h_j(\lambda(2))}(y_{1,1}, \ldots, y_{h_j(\lambda(2)),1}) \\ & \prod_{j=1}^{\lambda(3)_1} St_{h_j(\lambda(3))}(z_{1,0}, \ldots, z_{h_j(\lambda(3)),0}) \prod_{j=1}^{\lambda(4)_1} St_{h_j(\lambda(4))}(z_{1,1}, \ldots, z_{h_j(\lambda(4)),1}), \end{aligned}$$

onde $h_j(\lambda(i))$ denota a altura da j-ésima coluna da tabela de Young do tipo $\lambda(i) \vdash n_i$, $i = 1, \ldots, 4$, e $St_r(x_1, \ldots, x_r)$ é o polinômio standard de grau r.

Para uma multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$, denotamos por $f_{T_{\langle\lambda\rangle}}$ o vetor de altura máxima $f_{\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}}\sigma^{-1}$, onde σ é o único elemento de S_n que transforma a multitabela padrão $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}$ na multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ e a ação à direita de S_n sobre $F_m^n(A)$ é definida pela *permutação lugar*, que age permutando os lugares em que as variáveis ocorrem.

Analogamente ao caso de álgebras com involução (veja [5, Teorema 3]), é possível estabelecer uma relação entre o $\langle n\rangle$-cocaracter e o GL_m^4-cocaracter de uma $*$-superálgebra A.

Teorema 1.26. *Se* $\chi_{\langle n\rangle}(A)$ *tem decomposição como em* (1.3.4) *e* $\Psi_n^{\mathrm{gri}}(A)$ *tem decomposição como em* (1.3.6)*, então* $m_{\langle\lambda\rangle} = \tilde{m}_{\langle\lambda\rangle}$*, para toda multipartição* $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle$ *tal que* $h(\langle\lambda\rangle) \leq m$*.*

Tudo que foi desenvolvido acima nos ajuda a obter um meio de calcular as multiplicidades dos $S_{\langle n\rangle}$-caracteres irredutíveis que aparecem em (1.3.4), como pode ser visto na observação abaixo.

Observação 1.27. [2, Teorema 12.4.4] A multiplicidade $\tilde{m}_{\langle\lambda\rangle} \neq 0$ se, e somente se, existe uma multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ tal que $f_{T_{\langle\lambda\rangle}} \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$. Além disso, $\tilde{m}_{\langle\lambda\rangle}$ é igual ao número máximo de vetores $f_{T_{\langle\lambda\rangle}} \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ que são linearmente independentes em $F_m^n(A)$.

Observação 1.28. Observamos que o Teorema 1.26 nos garante que $m_{\langle\lambda\rangle} = \tilde{m}_{\langle\lambda\rangle}$, para toda multipartição $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle$ tal que $h(\langle\lambda\rangle) \leq m$, onde $m_{\langle\lambda\rangle}$ denota as multiplicidades dos $S_{\langle n\rangle}$-caracteres irredutíveis em (1.3.4) e as multiplicidades dos $\mathbb{H}_n$-caracteres irredutíveis em (1.3.1). Por isso, segue da observação anterior que para toda multipartição $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle$

tal que $h(\langle\lambda\rangle) \leq m$, temos que $m_{\langle\lambda\rangle} \neq 0$ se, e somente se, existe uma multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ tal que $f_{T_{\langle\lambda\rangle}} \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$.

Encerramos essa seção com a seguinte observação que lista algumas propriedades básicas das sequências de codimensões $*$-graduadas, de $\langle n\rangle$-cocaracteres e de cocomprimentos $*$-graduados.

Observação 1.29. Sejam A e B $*$-superálgebras tais que

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\lambda(1)} \otimes \cdots \otimes \chi_{\lambda(4)} \quad \text{e} \quad \chi_{\langle n\rangle}(B) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} m'_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\lambda(1)} \otimes \cdots \otimes \chi_{\lambda(4)}.$$

A soma direta de álgebras $A \oplus B$ é também uma $*$-superálgebra, com involução graduada induzida pelas involuções graduadas definidas em A e B. Consideremos

$$\chi_{\langle n\rangle}(A \oplus B) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} \overline{m}_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\lambda(1)} \otimes \cdots \otimes \chi_{\lambda(4)}$$

a decomposição do $\langle n\rangle$-cocaracter de $A \oplus B$. Temos o seguinte:

(1) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A \oplus B) = \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A) \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ e $c_n^{\mathrm{gri}}(A), c_n^{\mathrm{gri}}(B) \leq c_n^{\mathrm{gri}}(A \oplus B) \leq c_n^{\mathrm{gri}}(A) + c_n^{\mathrm{gri}}(B)$;

(2) $\overline{m}_{\langle\lambda\rangle} \leq m_{\langle\lambda\rangle} + m'_{\langle\lambda\rangle}$, para todo $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle$;

(3) Se $B \in \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, então $c_n^{\mathrm{gri}}(B) \leq c_n^{\mathrm{gri}}(A)$. Além disso, $m'_{\langle\lambda\rangle} \leq m_{\langle\lambda\rangle}$, para todo $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle$ e $l_n^{\mathrm{gri}}(B) \leq l_n^{\mathrm{gri}}(A)$, para todo $n \geq 1$.

No caso em que B é uma $*$-superálgebra nilpotente, temos que $l_n^{\mathrm{gri}}(A \oplus B) = l_n^{\mathrm{gri}}(A)$ e $c_n^{\mathrm{gri}}(A \oplus B) = c_n^{\mathrm{gri}}(A)$, para n suficientemente grande.

1.3.2 Decomposição de Wedderburn-Malcev de uma $*$-superálgebra

As $*$-superálgebras de dimensão finita desempenham um importante papel no estudo das $*$-supervariedades de crescimento polinomial, como veremos no próximo capítulo. Com isso, informações sobre a estrutura das $*$-superálgebras de dimensão finita colaboram significativamente na investigação das $*$-supervariedades de crescimento polinomial. Assim, a proposta dessa seção é comentarmos sobre a estrutura de $*$-superálgebras de dimensão finita.

O teorema a seguir é uma generalização do Teorema de Weddeburn-Malcev dado no caso ordinário, onde $J(A)$ denota o *radical de Jacobson* de uma $*$-superálgebra A.

Teorema 1.30. [6, Teorema 7.3] *Seja A uma $*$-superálgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero. Então:*

(1) *$J(A)$ é um ideal $*$-graduado de A;*

(2) *Se A é semissimples, então A é uma soma direta finita de $*$-superálgebras simples;*

(3) *Se F é algebricamente fechado, então $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_m + J(A)$, onde cada álgebra B_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, é uma $*$-superálgebra simples.*

Pelo teorema acima, se A é uma $*$-superálgebra de dimensão finita, então $J(A)$ é um ideal $*$-graduado, ou seja, $J(A)$ tem graduação e involução graduada induzidas de A. Logo, concluímos que podemos escrever $J = J(A)$ como uma soma direta de subespaços da seguinte maneira

$$J = (J^{(0)})^+ + (J^{(1)})^+ + (J^{(0)})^- + (J^{(1)})^-.$$

Desde que estamos considerando que A tem dimensão finita, cabe recordar que, neste caso, J é o maior ideal nilpotente de A e que o *índice de nilpotência* de J é definido como sendo o menor natural q tal que $J^q = 0$.

Para uma $*$-superálgebra de dimensão finita A do tipo $B + J$, onde B é uma $*$-superálgebra semissimples e J é seu radical de Jacobson, segue por [15, Lema 2], que o radical J de A pode ser decomposto em uma soma direta finita de 4 subespaços estáveis pela multiplicação à esquerda e à direita por elementos de B,

$$J = J_{00} + J_{01} + J_{10} + J_{11}, \tag{1.3.7}$$

onde $J_{ik} = \{a \in J \mid 1_B a = ia \text{ e } a1_B = ka\}$ com $i, k \in \{0, 1\}$ e 1_B denota a unidade da $*$-superálgebra semissimples B. Além disso, para $i, k, r, s \in \{0, 1\}$, temos $J_{ik}J_{rs} \subseteq J_{is}$ se $k = r$ e $J_{ik}J_{rs} = 0$, caso contrário.

É importante ressaltarmos que os subespaços J_{ik} são graduados e que J_{00} e J_{11} são estáveis pela involução graduada $*$ de A, enquanto que $J_{01}^* = J_{10}$. Assim, J_{00} e J_{11} são subálgebras $*$-graduadas de A e podem ser decompostas da forma

$$J_{00} = (J_{00}^{(0)})^+ + (J_{00}^{(1)})^+ + (J_{00}^{(0)})^- + (J_{00}^{(1)})^- \quad \text{e}$$
$$J_{11} = (J_{11}^{(0)})^+ + (J_{11}^{(1)})^+ + (J_{11}^{(0)})^- + (J_{11}^{(1)})^-.$$

Observamos ainda que o subespaço $J_{10} + J_{01}$ é graduado e é invariante pela involução graduada $*$ de A. Por isso,

$$J_{10} + J_{01} = ((J_{10} + J_{01})^{(0)})^+ + ((J_{10} + J_{01})^{(1)})^+ + ((J_{10} + J_{01})^{(0)})^- + ((J_{10} + J_{01})^{(1)})^-.$$

Observação 1.31. Afirmamos que no subespaço $J_{10} + J_{01}$ os elementos simétricos e antissimétricos são das formas $a + a^*$ e $a - a^*$, respectivamente, com $a \in J_{10}$.

De fato, seja $a+b \in (J_{10}+J_{01})^+$, onde $a \in J_{10}$, $b \in J_{01}$. Então $a^*+b^* = (a+b)^* = a+b$ implica em $a^*-b = a-b^*$. Desde que $a^*-b \in J_{01}$ e $a-b^* \in J_{10}$, concluímos que $a^*-b=0$ e, portanto, $a^*=b$.

Agora, se $a+b \in (J_{10}+J_{01})^-$, então $a^*+b^* = (a+b)^* = -a-b$ e, com o mesmo raciocínio acima, concluímos que $-a^*=b$.

O exemplo a seguir ilustra a decomposição de Weddeburn-Malcev e a decomposição do radical de Jacobson de uma $*$-superálgebra de dimensão finita.

Exemplo 1.32. Seja M_8 a seguinte álgebra

$$M_8 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e,f \in F \right\}.$$

Agora, consideremos a $*$-superálgebra $M_{8,2}^{\text{gri}}$, correspondente à álgebra M_8 com graduação $(F(e_{11}+e_{66}) + Fe_{13} + Fe_{46}, Fe_{12} + Fe_{56} + F(e_{23}+e_{45}))$ e involução reflexão. Primeiro, observe que

$$\begin{aligned} (M_{8,2}^{\text{gri}(0)})^+ &= F(e_{11}+e_{66}) + F(e_{13}+e_{46}) \\ (M_{8,2}^{\text{gri}(1)})^+ &= F(e_{23}+e_{45}) + F(e_{12}+e_{56}) \\ (M_{8,2}^{\text{gri}(0)})^- &= F(e_{13}-e_{46}), \quad (M_{8,2}^{\text{gri}(1)})^- = F(e_{12}-e_{56}). \end{aligned}$$

Além disso, note que a $*$-superálgebra $M_{8,2}^{\text{gri}}$ é da forma $B+J$, onde $B = F(e_{11}+e_{66})$ é uma $*$-superálgebra simples e $J = J(M_{8,2}^{\text{gri}}) = Fe_{12} + Fe_{13} + F(e_{23}+e_{45}) + Fe_{46} + Fe_{56}$. Neste caso, temos que $B = F(e_{11}+e_{66})$ é isomorfa a F como $*$-superálgebra e, por isso, podemos dizer que $M_{8,2}^{\text{gri}}$ é uma $*$-superálgebra do tipo $F+J$.

Vamos encontrar os subespaços presentes na decomposição de J, conforme em (1.3.7). Antes, recorde que, para $i,k \in \{0,1\}$, temos $J_{ik} = \{a \in J \mid 1_B a = ia \text{ e } a1_B = ka\}$. Assim, como

$$\begin{aligned} (e_{11}+e_{66})\big(ae_{12} + be_{13} + d(e_{23}+e_{45}) + ee_{46} + fe_{56}\big) &= ae_{12} + be_{13} \\ \big(ae_{12} + be_{13} + d(e_{23}+e_{45}) + ee_{46} + fe_{56}\big)(e_{11}+e_{66}) &= ee_{46} + fe_{56}, \end{aligned}$$

com $a,\ldots,f \in F$, obtemos que

$$J_{00} = F(e_{23}+e_{45}), \ J_{11} = 0, \ J_{10} = Fe_{12} + Fe_{13}, \ J_{01} = Fe_{46} + Fe_{56}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
&\left(J_{00}^{(1)}\right)^{+}=F(e_{23}+e_{45}),\ \left(J_{00}^{(0)}\right)^{+}=\left(J_{00}^{(0)}\right)^{-}=\left(J_{00}^{(1)}\right)^{-}=0\ \text{ e}\\
&((J_{10}+J_{01})^{(0)})^{+}=F(e_{13}+e_{46}),\qquad ((J_{10}+J_{01})^{(0)})^{-}=F(e_{13}-e_{46})\\
&((J_{10}+J_{01})^{(1)})^{+}=F(e_{12}+e_{56}),\qquad ((J_{10}+J_{01})^{(1)})^{-}=F(e_{12}-e_{56}).
\end{aligned}$$

Ao longo dessa tese, estaremos interessados principalmente nas $*$-superálgebras A de dimensão finita do tipo $F+J$, onde J denota o radical de Jacobson de A. Cabe destacar que é particularmente interessante trabalhar com as $*$-superálgebras desse tipo, pelo fato de que muitas das suas propriedades são obtidas através da análise do radical J e do comportamento dos subespaços presentes na decomposição de J dada em (1.3.7) acima. Esse fato será evidenciado nos capítulos posteriores.

Se $A=F+J$ então podemos escrever

$$A=F+(J^{(0)})^{+}+(J^{(0)})^{-}+(J^{(1)})^{+}+(J^{(1)})^{-},$$

onde suas componentes simétricas par e ímpar e antissimétricas par e ímpar são dadas por

$$\begin{aligned}
(A^{(0)})^{+}&=F+\left((J_{10}+J_{01})^{(0)}\right)^{+}+(J_{11}^{(0)})^{+}+(J_{00}^{(0)})^{+},\\
(A^{(1)})^{+}&=\left((J_{10}+J_{01})^{(1)}\right)^{+}+(J_{11}^{(1)})^{+}+(J_{00}^{(1)})^{+},\\
(A^{(0)})^{-}&=\left((J_{10}+J_{01})^{(0)}\right)^{-}+(J_{11}^{(0)})^{-}+(J_{00}^{(0)})^{-},\\
(A^{(1)})^{-}&=\left((J_{10}+J_{01})^{(1)}\right)^{-}+(J_{11}^{(1)})^{-}+(J_{00}^{(1)})^{-}.
\end{aligned}$$

Finalizamos essa seção com a seguinte observação que nos permite assumir, sem perda de generalidade, que F é um corpo algebricamente fechado, sempre que estivermos estudando T_2^*-ideais e codimensões $*$-graduadas. Isso será feito de forma implícita ao longo dessa tese.

Observação 1.33. Seja F um corpo de característica zero, $\overline{F}$ seu fecho algébrico e A uma $*$-superálgebra sobre F. Então a $\overline{F}$-álgebra $\overline{A}=A\otimes_F\overline{F}$ tem uma estrutura de $*$-superálgebra, $\dim_F(A)=\dim_{\overline{F}}(\overline{A})$ e $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)=\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(\overline{A})$, vistas como $*$-superálgebras sobre F. Além disso, $c_n^{\mathrm{gri}}(A)=c_n^{\mathrm{gri}}(\overline{A})$.

1.3.3 Crescimento polinomial e $*$-supervariedades minimais

A partir de agora apresentaremos algumas caracterizações de $*$-supervariedades de crescimento polinomial. Tais caracterizações, que foram tratadas em [4] e [6], garantem crescimento polinomial por meio da exclusão de $*$-superálgebras da $*$-supervariedade, da decomposição do $\langle n\rangle$-cocaracter e por meio de T_2^*-equivalência.

Analogamente ao caso ordinário, dizemos que uma $*$-supervariedade $\mathcal{V}$ é *minimal* de crescimento polinomial n^k se $c_n^{\mathrm{gri}}(\mathcal{V}) \approx an^k$, para alguma constante $a \neq 0$ e para qualquer subvariedade própria $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}$, segue que $c_n^{\mathrm{gri}}(\mathcal{U}) \approx bn^t$, com $t < k$ e b uma constante.

Teorema 1.34. [7, Teoremas 5.1, 5.2 e 5.3] *Seja $\mathcal{V}$ uma $*$-supervariedade tal que $D_* \notin \mathcal{V}$. Então $\mathcal{V} = \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, para alguma $*$-superálgebra A de dimensão finita.*

O teorema anterior permite removermos a exigência sobre a dimensão da $*$-superálgebra do resultado original citado abaixo.

Teorema 1.35. [6, Teorema 8.6] *Uma $*$-supervariedade $\mathcal{V} = \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$ tem crescimento polinomial das codimensões $*$-graduadas se, e somente se, D_*, D^{gr}, D^{gri}, M_*, $M^{\mathrm{gri}} \notin \mathcal{V}$.*

Como consequência do teorema acima, temos que não existe uma $*$-supervariedade $\mathcal{V}$ com crescimento intermediário da sequência de codimensões $*$-graduadas, ou seja, $\{c_n^{\mathrm{gri}}(\mathcal{V})\}_{n\geq 1}$ é limitada polinomialmente ou cresce exponencialmente [6, Corolário 8.7]. Além disso,

Corolário 1.36. [6, Corolário 8.8] $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(M_*)$, $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(M^{\mathrm{gri}})$, $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(D_*)$, $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(D^{\mathrm{gr}})$ *e* $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(D^{\mathrm{gri}})$ *são as únicas $*$-supervariedades de crescimento quase polinomial.*

Acrescentamos que todas as subvariedades de $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(M_*)$, de $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(D_*)$, de $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(D^{\mathrm{gr}})$, de $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(M^{\mathrm{gri}})$ e de $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(D^{\mathrm{gri}})$ foram classificadas em [31], [30], [20], respectivamente. Em particular, a menos de T_2^*-equivalência, todas as $*$-superálgebras que geram subvariedades minimais nas $*$-supervariedades de crescimento quase polinomial foram determinadas.

É importante ressaltarmos que os Teoremas 1.34 e 1.35 possibilitam que o estudo das $*$-supervariedades de crescimento polinomial seja feito através da análise das $*$-supervariedades de crescimento polinomial geradas por $*$-superálgebras de dimensão finita. Por isso, voltaremos nossa atenção às $*$-superálgebras de dimensão finita de crescimento polinomial, começando com um resultado a respeito da estrutura das mesmas.

Tal resultado foi mostrado em [4] e diz que uma $*$-superálgebra de dimensão finita A tem crescimento polinomial se, e somente se, $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A) = \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ para alguma $*$-superálgebra de dimensão finita B, tendo uma decomposição explícita em subálgebras com involução graduada induzida, como veremos a seguir. Antes, destacamos que os Teoremas 1.34 e 1.35 permitem que retiremos a hipótese de dimensão finita desse resultado.

Teorema 1.37. [4, Teorema 3.5]*Seja A uma $*$-superálgebra. Então $\{c_n^{\mathrm{gri}}(A)\}_{n\geq 1}$ é limitada polinomialmente se, e somente se,*

$$\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A) = \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B_1 \oplus \cdots \oplus B_m),$$

onde cada B_i é uma $*$-superálgebra de dimensão finita tal que $\dim_F \frac{B_i}{J(B_i)} \leq 1$, para todo $i = 1, \ldots, m$.

O teorema acima será uma ferramenta muito útil neste trabalho, já que sempre que precisarmos provar alguma propriedade sobre uma $*$-superálgebra A tal que $\{c_n^{\mathrm{gri}}(A)\}_{n\geq 1}$ é limitada polinomialmente, poderemos estudar as propriedades das $*$-superálgebras de dimensão finita do tipo $F+J$ e então recuperar a propriedade sobre A. Esse fato justifica nosso interesse nas $*$-superálgebras desse tipo.

O teorema a seguir caracteriza $*$-superálgebras com crescimento polinomial em termos da decomposição do $\langle n\rangle$-cocaracter.

Teorema 1.38. [4, Teorema 4.5] *Seja A uma $*$-superálgebra. Então $\{c_n^{\mathrm{gri}}(A)\}_{n\geq 1}$ é limitada polinomialmente se, e somente se, existe uma constante q tal que para cada $\langle n\rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$, temos*

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle \\ n-\lambda(1)_1<q}} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\lambda(1)}\otimes\cdots\otimes\chi_{\lambda(4)}. \tag{1.3.8}$$

Se A é uma $*$-superálgebra de dimensão finita, então q é o índice de nilpotência de $J(A)$.

Se A é uma $*$-superálgebra de dimensão finita de crescimento polinomial, então pelo teorema anterior sabemos que a decomposição do $\langle n\rangle$-cocaracter de A é dada como em (1.3.8). Nestas condições, com o próximo resultado obteremos informações a respeito das multiplicidades dos $S_{\langle n\rangle}$-caracteres irredutíveis que aparecem em (1.3.8).

Teorema 1.39. [18, Teorema 5.3] *Seja A uma $*$-superálgebra de dimensão finita. Então $\{c_n^{\mathrm{gri}}(A)\}_{n\geq 1}$ é limitada polinomialmente se, e somente se, existe uma constante h tal que para todo $n\geq 1$, temos $l_n^{\mathrm{gri}}(A)\leq h$.*

Observação 1.40. Observe que se existe uma constante h tal que para todo $n\geq 1$, temos $l_n^{\mathrm{gri}}(A)\leq h$, então por (1.3.2), concluímos que $m_{\langle\lambda\rangle}\leq h$, para toda multipartição $\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle$ com $\langle n\rangle$ variando sobre todas as possíveis somas de inteiros não negativos.

Como vimos, os resultados comentados acima caracterizam $*$-supervariedades de crescimento polinomial de uma forma geral e serão bem úteis para o desenvolvimento de alguns resultados que serão trabalhados neste texto. Mas, assim como comentamos na Introdução, nosso foco será em $*$-supervariedades com *crescimento quadrático* da sequência de codimensões $*$-graduadas.

Definição 1.41. Dizemos que uma $*$-supervariedade $\mathcal{V}$ tem crescimento quadrático da sequência de codimensões $*$-graduadas se, para $a>0$, temos $c_n(\mathcal{V})\approx an^2$.

Mais especificamente, iremos determinar uma lista completa de $*$-superálgebras que geram, a menos de T_2^*-equivalência, as únicas *$*$-supervariedades minimais de crescimento quadrático.*

Definição 1.42. Uma $*$-supervariedade $\mathcal{V}$ é minimal de crescimento quadrático se $c_n^{\mathrm{gri}}(\mathcal{V}) \approx an^2$, para algum $a > 0$ e para qualquer subvariedade própria $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}$, temos que $\mathcal{U}$ tem crescimento no máximo linear.

As $*$-superálgebras que geram $*$-supervariedades minimais de crescimento quadrático serão chamadas apenas de *minimais de crescimento quadrático*.

A partir do próximo capítulo, começaremos a apresentar os resultados que nos permitirão classificar todas as $*$-supervariedades minimais de crescimento quadrático.

Capítulo 2

$*$-Superálgebras de crescimento quadrático

Neste capítulo nos dedicaremos à apresentação e ao estudo de 37 $*$-superálgebras de crescimento quadrático que desempenham um papel fundamental nesta tese. Recordemos que uma $*$-superálgebra é de crescimento quadrático se sua sequência de codimensões $*$-graduadas se comporta assintoticamente como um polinômio de grau 2. É importante ressaltarmos que 16 das $*$-superálgebras que apresentaremos aqui foram construídas neste trabalho. Estas $*$-superálgebras inéditas foram obtidas a partir de algumas álgebras que já haviam aparecido no contexto de álgebras com involução e no contexto de superálgebras.

2.1 Algumas $*$-superálgebras de crescimento quadrático

A partir de agora, introduziremos uma lista de 37 $*$-superálgebras e desenvolveremos resultados que nos permitirão concluir que todas as $*$-superálgebras dessa lista têm crescimento quadrático da sequência de codimensões $*$-graduadas.

Enfatizamos que uma $*$-supervariedade $\mathcal{V}$ é minimal de crescimento quadrático se $\mathcal{V}$ tem crescimento quadrático e todas as subvariedades próprias de $\mathcal{V}$ têm crescimento linear ou constante.

Começaremos considerando a subálgebra de dimensão finita da álgebra de Grassmann de dimensão infinita,

$$G_2 = \langle 1, e_1, e_2 \mid e_1e_2 = -e_2e_1 \rangle.$$

Consideremos ainda as seguintes involuções em G_2 definidas como

$$\tau : e_i \mapsto -e_i, \quad \psi : e_i \mapsto e_i \quad \text{e} \quad \rho : e_i \mapsto (-1)^i e_i.$$

A seguir, apresentamos 6 $*$-superálgebras de crescimento quadrático construídas a partir de G_2 que foram tratadas em [35] e que iniciam nossa lista.

- $G_{2,0,\tau}$, a álgebra G_2 com graduação trivial e involução τ.
- $G_{2,1,\tau}$, a álgebra G_2 com graduação $(F1 + Fe_1e_2, Fe_1 + Fe_2)$ e involução τ.
- $G_{2,2,\tau}$, a álgebra G_2 com graduação $(F1 + Fe_1, Fe_1e_2 + Fe_2)$ e involução τ.
- $G_{2,1,\rho}$, a álgebra G_2 com graduação $(F1 + Fe_1e_2, Fe_1 + Fe_2)$ e involução ρ.
- $G_{2,2,\rho}$, a álgebra G_2 com graduação $(F1 + Fe_1, Fe_1e_2 + Fe_2)$ e involução ρ.
- $G_{2,1,\psi}$, a álgebra G_2 com graduação $(F1 + Fe_1e_2, Fe_1 + Fe_2)$ e involução ψ.

No próximo lema exibiremos informações sobre o T_2^*-ideal e a sequência de codimensões $*$-graduadas das $*$-superálgebras acima. Usaremos a seguinte notação $a_1 \circ a_2 = a_1a_2 + a_2a_1$.

Lema 2.1. [35, Lemas 7.1, 7.2 e 7.3] *Sobre $G_{2,0,\tau}$, $G_{2,1,\tau}$, $G_{2,2,\tau}$, $G_{2,1,\rho}$, $G_{2,2,\rho}$ e $G_{2,1,\psi}$, temos que*

(1) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,0,\tau}) = \langle y_{1,1},\ z_{1,1},\ [y_{1,0}, y_{2,0}],\ [y_{1,0}, z_{2,0}],\ z_{1,0} \circ z_{2,0},\ z_{1,0}z_{2,0}z_{3,0}\rangle_{T_2^*}$.

(2) $c_n^{\mathrm{gri}}(G_{2,0,\tau}) = 1 + n + \frac{n^2-n}{2}$.

(3) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,1,\tau}) = \langle y_{1,1},\ z_{1,0}z_{2,0},\ z_{1,0}z_{2,1},\ [y_{1,0}, y_{2,0}],\ [y_{1,0}, z_{2,0}],\ z_{1,1} \circ z_{2,1},\ z_{1,1}z_{2,1}z_{3,1}\rangle_{T_2^*}$.

(4) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,2,\tau}) = \langle y_{1,1},\ z_{1,0}z_{2,0},\ z_{1,1}z_{2,1},\ [y_{1,0}, y_{2,0}],\ [y_{1,0}, z_{2,0}],\ z_{1,0} \circ z_{2,1}\rangle_{T_2^*}$.

(5) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,1,\rho}) = \langle z_{1,0},\ z_{1,1}z_{2,1},\ y_{1,1}y_{2,1},\ [y_{1,0}, y_{2,1}],\ [y_{1,0}, z_{2,1}],\ y_{1,1} \circ z_{2,1}\rangle_{T_2^*}$.

(6) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,2,\rho}) = \langle z_{1,1},\ z_{1,0}z_{2,0},\ y_{1,1}y_{2,1},\ [y_{1,0}, y_{2,0}],\ [y_{1,0}, z_{2,0}],\ z_{1,0} \circ y_{2,1}\rangle_{T_2^*}$.

(7) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,1,\psi}) = \langle z_{1,1},\ z_{1,0}z_{2,0},\ z_{1,0}y_{2,1},\ [y_{1,0}, y_{2,0}],\ [y_{1,0}, z_{2,0}],\ y_{1,1} \circ y_{2,1},\ y_{1,1}y_{2,1}y_{3,1}\rangle_{T_2^*}$.

(8) $c_n^{\mathrm{gri}}(G_{2,1,\tau}) = c_n^{\mathrm{gri}}(G_{2,2,\tau}) = c_n^{\mathrm{gri}}(G_{2,1,\rho}) = c_n^{\mathrm{gri}}(G_{2,2,\rho}) = c_n^{\mathrm{gri}}(G_{2,1,\psi}) = 1 + 2n + \frac{n^2-n}{2}$.

A álgebra $G_{2,0,\tau}$ gera uma $*$-supervariedade minimal de crescimento quadrático [17, Teorema 6.2].

As próximas 9 $*$-superálgebras que irão compor nossa lista geram subvariedades minimais de crescimento quadrático nas $*$-supervariedades de crescimento quase polinomial.

Consideremos a álgebra comutativa

$$C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in F \right\}$$

e a seguinte involução em C_3

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & -b & c \\ 0 & a & -b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \tag{2.1.1}$$

A partir de C_3 obtemos as seguintes $*$-superálgebras.

- $C_{3,*}$, a álgebra C_3 com graduação trivial e involução definida em (2.1.1).
- C_3^{gr}, a álgebra C_3 com graduação $(F(e_{11}+e_{22}+e_{33})+Fe_{13}, F(e_{12}+e_{23}))$ e involução trivial.
- C_3^{gri}, a álgebra C_3 com graduação $(F(e_{11}+e_{22}+e_{33})+Fe_{13}, F(e_{12}+e_{23}))$ e involução definida como em (2.1.1).

O lema abaixo garante que as $*$-superálgebras obtidas a partir de C_3 têm crescimento quadrático.

Lema 2.2. *Sobre as $*$-superálgebras $C_{3,*}$, C_3^{gr} e C_3^{gri} temos:*

(1) [31, Lema 9] $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(C_{3,*}) = \langle y_{1,1},\ z_{1,1},\ [y_{1,0}, y_{2,0}],\ [y_{1,0}, z_{2,0}],\ [z_{1,0}, z_{2,0}],\ z_{1,0}z_{2,0}z_{3,0}, \rangle_{T_2^*}$.

(2) [30, Teorema 8.1] $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(C_3^{\mathrm{gr}}) = \langle z_{1,0},\ z_{1,1},\ y_{1,1}y_{2,1}y_{3,1}, \rangle_{T_2^*}$.

(3) [20, Teorema 6.1] $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(C_3^{\mathrm{gri}}) = \langle z_{1,0},\ y_{1,1},\ z_{1,1}z_{2,1}z_{3,1}, \rangle_{T_2^*}$.

(4) $c_n^{\mathrm{gri}}(C_{3,*}) = c_n^{\mathrm{gri}}(C_3^{\mathrm{gr}}) = c_n^{\mathrm{gri}}(C_3^{\mathrm{gri}}) = \frac{n^2+n+2}{2}$.

Observamos que $C_{3,*}$, C_3^{gr}, C_3^{gri} geram, a menos de T_2^*-equivalência, as únicas subvariedades minimais de crescimento quadrático em $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(D_*)$ [31, Corolário 3], $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(D^{\mathrm{gr}})$ [30, Corolário 8.2], $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(D^{\mathrm{gri}})$ [20, Corolário 6.1], respectivamente.

Agora, sejam N_3 e U_3, as seguintes subálgebras unitárias da UT_6, consideradas em [31].

$$N_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in F \right\},$$

$$U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in F \right\}.$$

A seguir, apresentaremos as $*$-superálgebras de crescimento quadrático obtidas a partir de N_3 e U_3 que estão na nossa lista.

- $N_{3,*}$, a álgebra N_3 com graduação trivial e involução reflexão.
- $U_{3,*}$, a álgebra U_3 com graduação trivial e involução reflexão.
- N_3^{gri}, a álgebra N_3 com graduação $(F(e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44} + e_{55} + e_{66}) + F(e_{23} + e_{45}), F(e_{12} - e_{56}) + Fe_{13} + Fe_{46})$ e involução reflexão.
- U_3^{gri}, a álgebras U_3 com graduação $(F(e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44} + e_{55} + e_{66}) + F(e_{23} + e_{45}), F(e_{12} + e_{56}) + Fe_{13} + Fe_{46})$ e involução reflexão.

Lema 2.3. [31, Lemas 2 e 3] *Sobre $N_{3,*}$ e $U_{3,*}$, temos que:*

(1) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(N_{3,*}) = \langle y_{1,1},\ z_{1,1},\ [y_{1,0}, y_{2,0}],\ z_{1,0}z_{2,0}\rangle_{T_2^*}$.

(2) $c_n^{\text{gri}}(N_{3,*}) = n^2 + 1$.

(3) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(U_{3,*}) = \langle y_{1,1},\ z_{1,1},\ [z_{1,0}, y_{2,0}],\ z_{1,0}z_{2,0}\rangle_{T_2^*}$.

(4) $c_n^{\text{gri}}(U_{3,*}) = \frac{n^2+n+2}{2}$.

Lema 2.4. [20, Teoremas 4.4 e 4.5] *Sobre N_3^{gri} e U_3^{gri}, temos que:*

(1) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(N_3^{\text{gri}}) = \langle z_{1,0},\ [y_{1,1}, y_{2,0}],\ x_{1,1}x_{2,1}\rangle_{T_2^*}$, *onde $x_i = y_i$ ou $x_i = z_i$ para $i = 1, 2$.*

(2) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(U_3^{\text{gri}}) = \langle z_{1,0},\ [z_{1,1}, y_{2,0}],\ x_{1,1}x_{2,1}\rangle_{T_2^*}$, *onde $x_i = y_i$ ou $x_i = z_i$, para $i = 1, 2$.*

(3) $c_n^{\text{gri}}(N_3^{\text{gri}}) = c_n^{\text{gri}}(U_3^{\text{gri}}) = n^2 + n + 1$.

Observamos que $N_{3,*}$, $U_{3,*}$ geram subvariedades minimais de crescimento quadrático em $\mathrm{var}^{\text{gri}}(M_*)$ [31, Corolário 1], enquanto que N_3^{gri}, U_3^{gri} geram subvariedades minimais de crescimento quadrático em $\mathrm{var}^{\text{gri}}(M^{\text{gri}})$ [20, Corolário 5.1].

Prosseguindo, consideremos mais duas subálgebras de UT_6.

$$M_8 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e,f \in F \right\},$$

$$M_9 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e,f \in F \right\}.$$

A partir da álgebra M_8, podemos considerar

- $M_{8,*}$, a álgebra M_8 com graduação trivial e involução reflexão.
- $M_{8,1}^{\mathrm{gri}}$, a álgebra M_8 com graduação $(F(e_{11}+e_{66})+F(e_{23}+e_{45}), Fe_{12}+Fe_{56}+Fe_{13}+Fe_{46})$ e involução reflexão.

No próximo lema veremos que as $*$-superálgebras acima têm crescimento quadrático. Destacamos que em [31, Corolário 1] e em [20, Corolário 5.1], os autores mostraram que $M_{8,*}$ e $M_{8,1}^{\mathrm{gri}}$ geram subvariedades minimais de crescimento quadrático em $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(M_*)$ e em $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(M^{\mathrm{gri}})$, respectivamente.

Lema 2.5. *Sobre as $*$-superálgebras $M_{8,*}$ e $M_{8,1}^{\mathrm{gri}}$, temos:*

(1) [33, Lema 3.10] $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{8,*}) = \langle y_{1,1}, \; z_{1,1}, \; z_{1,0}z_{2,0}, \; y_{1,0}y_{2,0}z_{3,0}y_{4,0}y_{5,0}, \; y_{1,0}St_3(y_{2,0}, y_{3,0}, y_{4,0})y_{5,0}\rangle_{T_2^*}$.

(2) $c_n^{\mathrm{gri}}(M_{8,*}) = 4n^2 - 2n - 1$.

(3) [20, Teorema 5.1] $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{8,1}^{\mathrm{gri}}) = \langle z_{1,0}, \; y_{1,0}y_{2,0}x_{3,1}y_{4,0}y_{5,0}, \; x_{1,1}x_{2,1}\rangle_{T_2^*}$, *onde* $x_i = y_i$ *ou* $x_i = z_i$ *para* $i = 1, 2, 3$.

(4) $c_n^{\mathrm{gri}}(M_{8,1}^{\mathrm{gri}}) = 4n^2 + 1$.

Considerando outras graduações em M_8 e em M_9 para as quais a involução reflexão é uma involução graduada, foi possível obtermos mais 5 $*$-superálgebras ainda não estudadas no contexto de álgebras com estruturas adicionais e que serão apresentadas a seguir. A álgebra $M_{9,*}$ já havia sido considerada em [32] no caso de álgebras com involução.

- $M_{8,2}^{\text{gri}}$, a álgebra M_8 com graduação $(F(e_{11}+e_{66})+Fe_{13}+Fe_{46}, Fe_{12}+Fe_{56}+F(e_{23}+e_{45})$ e involução reflexão.

- $M_{8,3}^{\text{gri}}$, a álgebra M_8 com graduação $(F(e_{11}+e_{66})+Fe_{12}+Fe_{56}, Fe_{13}+Fe_{46}+F(e_{23}+e_{45})$ e involução reflexão.

- $M_{9,*}$, a álgebra M_9 com graduação trivial e involução reflexão.

- $M_{9,1}^{\text{gri}}$, a álgebra M_9 com graduação $(F(e_{11}+e_{66})+F(e_{23}-e_{45}), Fe_{12}+Fe_{56}+Fe_{13}+Fe_{46})$ e involução reflexão.

- $M_{9,2}^{\text{gri}}$ a álgebra M_9 com graduação $(F(e_{11}+e_{66})+Fe_{13}+Fe_{46}, Fe_{12}+Fe_{56}+F(e_{23}-e_{45})$ e involução reflexão.

- $M_{9,3}^{\text{gri}}$, a álgebra M_9 com graduação $(F(e_{11}+e_{66})+Fe_{12}+Fe_{56}, Fe_{13}+Fe_{46}+F(e_{23}-e_{45})$ e involução reflexão.

Destacamos que, para as $*$-superálgebras acima e para as que apresentaremos a seguir, não serão explicitados os seus T_2^*-ideais, bem como os polinômios que descrevem o comportamento de suas sequências de codimensões $*$-graduadas. Nos limitaremos a garantir que elas têm crescimento quadrático.

Agora, apresentaremos as 16 últimas $*$-superálgebras da nossa lista. Ressaltamos que, dentre as $*$-superálgebras que serão listadas abaixo, somente as que têm graduação trivial já apareceram na literatura, dentro do contexto de álgebras com involução.

Consideremos as seguintes subálgebras da UT_3:

$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in F \right\}, \quad M_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in F \right\}.$$

As álgebras M_4 e M_5 apareceram primeiro em [8]. A partir delas, construímos as seguintes $*$-superálgebras.

- $M_{4,*}$ e $M_{5,*}$, que correspondem às álgebras M_4 e M_5 com graduação trivial e involução reflexão, respectivamente.

- M_4^{gri}, a álgebra M_4 com graduação $(F(e_{11}+e_{33})+Fe_{13}, Fe_{12}+Fe_{23})$ e involução reflexão.

- M_5^{gri}, a álgebra M_5 com graduação $(Fe_{22}+Fe_{13}, Fe_{12}+Fe_{23})$ e involução reflexão.

Em [32, Lema 20], os autores mostraram que $c_n^*(M_{4,*}), c_n^*(M_{5,*}) \geq n(n-2)$, para todo $n \geq 3$. Logo, pela Observação 1.21, temos

$$n(n-2) \leq c_n^{\mathrm{gri}}(M_{4,*}) = c_n^*(M_{4,*}) \leq c_n^{\mathrm{gri}}(M_4^{\mathrm{gri}}),$$

donde concluímos que $M_{4,*}$ e M_4^{gri} têm crescimento pelo menos quadrático da sequência de codimensões $*$-graduadas. O mesmo pode ser concluído sobre as $*$-superálgebras $M_{5,*}$ e M_5^{gri}.

Agora, consideremos as seguintes subálgebras de UT_4:

$$M_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, \ldots, f \in F \right\}, M_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ 0 & a & 0 & e \\ 0 & 0 & a & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, \ldots, f \in F \right\}.$$

As álgebras M_6 e M_7 apareceram primeiro em [32] e a partir delas, obtemos as seguintes $*$-superálgebras.

- $M_{6,*}$, a álgebra M_6 com graduação trivial e involução definida por

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & -f & e & -d \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \tag{2.1.2}$$

- $M_{6,1}^{\mathrm{gri}}$, a álgebra M_6 com graduação $(F(e_{11}+e_{44}) + Fe_{13} + Fe_{24}, Fe_{12} + Fe_{34} + Fe_{14})$ e involução como em (2.1.2).

- $M_{6,2}^{\mathrm{gri}}$, a álgebra M_6 com graduação $(F(e_{11}+e_{44}) + Fe_{14}, Fe_{12} + Fe_{13} + Fe_{24} + Fe_{34})$ e involução como em (2.1.2).

- $M_{7,*}$, a álgebra M_7 com graduação trivial e involução dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ 0 & a & 0 & e \\ 0 & 0 & a & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.3}$$

- $M_{7,1}^{\mathrm{gri}}$, a álgebra M_7 com graduação $(F(e_{22}+e_{33}) + Fe_{13} + Fe_{24}, Fe_{12} + Fe_{34} + Fe_{14})$ e involução como em (2.1.3).

- $M_{7,2}^{\mathrm{gri}}$, a álgebra M_7 com graduação $(F(e_{22}+e_{33}) + Fe_{14}, Fe_{12} + Fe_{13} + Fe_{24} + Fe_{34})$ e involução como em (2.1.3).

Por [32, Lemas 22 e 23], temos que $c_n^*(M_{6,*}),\ c_n^*(M_{7,*}) \geq n(n-2)$, para todo $n \geq 3$. Dessa forma, usando novamente a Observação 1.21, concluímos que $M_{6,*}$, $M_{6,1}^{\text{gri}}$, $M_{6,2}^{\text{gri}}$, $M_{7,*}$, $M_{7,1}^{\text{gri}}$ e $M_{7,2}^{\text{gri}}$ têm crescimento pelo menos quadrático da sequência de codimensões $*$-graduadas.

Prosseguindo, consideremos a álgebra

$$M_{10} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e,f \in F \right\}.$$

A partir da M_{10}, obtemos as $*$-superálgebras descritas abaixo.

- $M_{10,*}$, a álgebra M_{10} com graduação trivial e involução reflexão.
- $M_{10,1}^{\text{gri}}$, a álgebra M_{10} com graduação $(F(e_{11}+e_{22}+e_{55}+e_{66})+Fe_{23}+Fe_{45}, F(e_{12}-e_{56})+Fe_{13}+Fe_{46})$ e involução reflexão.
- $M_{10,2}^{\text{gri}}$, a álgebra M_{10} com graduação $(F(e_{11}+e_{22}+e_{55}+e_{66})+F(e_{12}-e_{56}), Fe_{13}+Fe_{46}+Fe_{23}+Fe_{45})$ e involução reflexão.
- $M_{10,3}^{\text{gri}}$, a álgebra M_{10} com graduação $(F(e_{11}+e_{22}+e_{55}+e_{66})+Fe_{13}+Fe_{46}, F(e_{12}-e_{56})+Fe_{23}+Fe_{45})$ e involução reflexão.

Em [32, Lema 26], os autores mostraram que $c_n^*(M_{10,*}) \geq n(n-2)$, para todo $n \geq 3$. Por isso, os mesmos argumentos utilizados anteriormente confirmam que $M_{10,*}$, $M_{10,1}^{\text{gri}}$, $M_{10,2}^{\text{gri}}$ e $M_{10,3}^{\text{gri}}$ têm crescimento pelo menos quadrático da sequência de codimensões $*$-graduadas.

Por fim, vamos considerar a álgebra

$$M_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e,f \in F \right\}.$$

A álgebra M_{11} foi construída nesta tese e a partir dela obtemos as últimas $*$-superálgebras da nossa lista.

- $M_{11,1}^{\text{gri}}$, a álgebra M_{11} com graduação $(F(e_{11}+e_{22}+e_{55}+e_{66})+Fe_{23}+Fe_{45}, F(e_{12}+e_{56})+Fe_{13}+Fe_{46})$ e involução reflexão.

- $M_{11,2}^{\text{gri}}$, a álgebra M_{11} com graduação $(F(e_{11}+e_{22}+e_{55}+e_{66})+Fe_{13}+Fe_{46}, F(e_{12}+e_{56})+Fe_{23}+Fe_{45})$ e involução reflexão.

Lema 2.6. *As $*$-superálgebras $M_{11,1}^{\text{gri}}$ e $M_{11,2}^{\text{gri}}$ têm crescimento pelo menos quadrático da sequência de codimensões $*$-graduadas.*

Demonstração. Primeiro, observe que, em $M_{11,1}^{\text{gri}}$,

$$\begin{aligned}
({M_{11,1}^{\text{gri}}}^{(0)})^+ &= F(e_{11}+e_{22}+e_{55}+e_{66})+F(e_{23}+e_{45}),\\
({M_{11,1}^{\text{gri}}}^{(1)})^+ &= F(e_{12}+e_{56})+F(e_{13}+e_{46}),\\
({M_{11,1}^{\text{gri}}}^{(0)})^- &= F(e_{23}-e_{45}),\ ({M_{11,1}^{\text{gri}}}^{(1)})^- = F(e_{13}-e_{46}).
\end{aligned}$$

E em $M_{11,2}^{\text{gri}}$,

$$\begin{aligned}
({M_{11,2}^{\text{gri}}}^{(0)})^+ &= F(e_{11}+e_{22}+e_{55}+e_{66})+F(e_{13}+e_{46}),\\
({M_{11,2}^{\text{gri}}}^{(1)})^+ &= F(e_{12}+e_{56})+F(e_{23}+e_{45}),\\
({M_{11,2}^{\text{gri}}}^{(0)})^- &= F(e_{13}-e_{46}),\ ({M_{11,2}^{\text{gri}}}^{(1)})^- = F(e_{23}-e_{45}).
\end{aligned}$$

Agora, sejam $f = y_{1,0}^{n-2}y_{1,1}z_{1,0}$ e $g = y_{1,0}^{n-2}y_{1,1}z_{1,1}$ os vetores de altura máxima associados às multitabelas

$$T_{((n-2),(1),(1),\varnothing)} = \left(\boxed{1 \mid \dots \mid n-2}\ ,\ \boxed{n-1}\ ,\ \boxed{n}\ ,\ \varnothing \right),$$

$$T_{((n-2),(1),\varnothing,(1))} = \left(\boxed{1 \mid \dots \mid n-2}\ ,\ \boxed{n-1}\ ,\ \varnothing\ ,\ \boxed{n} \right),$$

respectivamente.

Avaliaremos f em elementos de $M_{11,1}^{\text{gri}}$ e g em elementos de $M_{11,2}^{\text{gri}}$.

Primeiro, fazendo, em f, $y_{1,0} = e_{11}+e_{22}+e_{55}+e_{66}$, $y_{1,1} = e_{12}+e_{56}$ e $z_{1,0} = e_{23}-e_{45}$, obtemos $f = e_{13} \neq 0$ e, portanto, f não é uma $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidade para $M_{11,1}^{\text{gri}}$.

Em g, fazendo a avaliação $y_{1,0} = e_{11}+e_{22}+e_{55}+e_{66}$, $y_{1,1} = e_{12}+e_{56}$ e $z_{1,1} = e_{23}-e_{45}$, obtemos $g = e_{13} \neq 0$ e, por isso, g não é uma $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidade para $M_{11,2}^{\text{gri}}$.

Assim, pela Observação 1.28, concluímos que o caracter irredutível $\chi_{((n-2),(1),(1),\varnothing)}$ aparece na decomposição do cocaracter $*$-graduado de $M_{11,1}^{\text{gri}}$ com multiplicidade não nula. Usando as relações (1.3.3) e (1.3.5), obtemos que

$$c_n^{\text{gri}}(M_{11,1}^{\text{gri}}) \geq \binom{n}{n-2,1,1,0} d_{(n-2)}d_{(1)}d_{(1)}d_{\varnothing} = n(n-1).$$

Analogamente, concluímos que $\chi_{((n-2),(1),\varnothing,(1))}$ aparece na decomposição do cocaracter $*$-graduado de $M_{11,2}^{\mathrm{gri}}$, com multiplicidade não nula e, portanto,

$$c_n^{\mathrm{gri}}(M_{11,2}^{\mathrm{gri}}) \geq \binom{n}{n-2,1,0,1} d_{(n-2)}d_{(1)}d_{\varnothing}d_{(1)} = n(n-1).$$

Diante do exposto, concluímos que $M_{11,1}^{\mathrm{gri}}$ e $M_{11,2}^{\mathrm{gri}}$ têm crescimento pelo menos quadrático da sequência de codimensões $*$-graduadas, como afirmamos. $\square$

Agora, após estarmos familiarizados com todas as $*$-superálgebras da lista, ainda precisamos confirmar que

$$M_{4,*},\ M_4^{\mathrm{gri}},\ M_{5,*},\ M_5^{\mathrm{gri}},\ M_{6,*},\ M_{6,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{6,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{7,*},\ M_{7,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{7,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{8,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{8,3}^{\mathrm{gri}},\ M_{9,*},\ M_{9,1}^{\mathrm{gri}},$$
$$M_{9,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{9,3}^{\mathrm{gri}},\ M_{10,*},\ M_{10,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{10,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{10,3}^{\mathrm{gri}},\ M_{11,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{11,2}^{\mathrm{gri}}$$

têm crescimento quadrático da sequência de codimensões $*$-graduadas. Para tanto, é importante ressaltarmos que todas as 37 $*$-superálgebras que apresentamos possuem características comuns que nos serão úteis. A primeira é que todas são $*$-superálgebras de dimensão finita do tipo $F + J$ e, portanto, pelo Teorema 1.37, segue que todas têm crescimento polinomial da sequência de codimensões $*$-graduadas. Outra é que o índice de nilpotência do radical de Jacobson de cada uma delas é três.

Essas informações junto com a proposição a seguir nos ajudarão a concluir que todas as $*$-superálgebras da nossa lista têm, de fato, crescimento quadrático. Denotaremos por J o radical de Jacobson de A.

Proposição 2.7. *Seja A uma $*$-superálgebra de dimensão finita tal que $\{c_n^{\mathrm{gri}}(A)\}_{n\geq 1}$ é limitada polinomialmente. Se $J^q = 0$, então $c_n^{\mathrm{gri}}(A) \leq \alpha n^{q-1}$, para alguma constante α.*

Demonstração. Desde que A é uma $*$-superálgebra de dimensão finita e $c_n^{\mathrm{gri}}(A)$ é limitada polinomialmente, pelo Teorema 1.38, para cada $\langle n\rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$, obtemos a seguinte decomposição do $\langle n\rangle$-cocaracter de A

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle \\ n-\lambda(1)_1<q}} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\lambda(1)} \otimes \cdots \otimes \chi_{\lambda(4)},$$

onde, pelo Teorema 1.39 e pela Observação 1.40, existe uma constante h tal que $m_{\langle\lambda\rangle} \leq h$ para toda multipartição $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle$.

Observe que $n-\lambda(1)_1 < q$ implica que $\lambda(1)_1 \in \{n-(q-1), \ldots, n-1, n\}$. Assim, através das possibilidades para $\lambda(1)_1$, verificamos que as variações de $\langle n\rangle$ que podem aparecer na decomposição de $\chi_n^{\mathrm{gri}}(A)$, dada em (1.3.1), são as que estão no conjunto

$$\mathcal{S} = \{\langle n\rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4) \mid n-(q-1) \leq n_1 \leq n \text{ e } 0 \leq n_i \leq q-1,\ i \neq 1\}.$$

Dessa forma, pela relação (1.3.5), para todo $\langle n\rangle \in \mathcal{S}$ temos que

$$c_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle \\ n-\lambda(1)_1<q}} m_{\langle\lambda\rangle} d_{\lambda(1)}\cdots d_{\lambda(4)} \leq \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle \\ n-\lambda(1)_1<q}} h d_{\lambda(1)}\cdots d_{\lambda(4)}.$$

Neste ponto, observamos que se $\lambda(1)_1 = n_1 - r$, então, pela fórmula do gancho, obtemos que $d_{\lambda(1)} \leq \frac{n_1!}{(n_1-r)!} \leq c n_1^r \leq d n^r$, onde c e d são constantes. Além disso, atentamos para o fato de que $d_{\lambda(i)}$ é uma constante para toda partição $\lambda(i) \vdash n_i$, com $i = 2, 3, 4$.

Agora, denotando por $t = n_2 + n_3 + n_4$, temos que $\binom{n}{n_1,n_2,n_3,n_4} \leq \frac{n!}{n_1!} = \frac{n!}{(n-t)!} \leq bn^t$, para uma constante b.

Ao juntarmos todas as informações acima, obtemos que

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3, n_4} c_{\langle n\rangle}(A) \leq kn^{r+t} = kn^{n-\lambda(1)_1} \leq kn^{q-1},$$

para cada $\langle n\rangle \in \mathcal{S}$, onde k é uma constante.

Por isso, pela relação (1.3.3), concluímos que

$$c_n^{\mathrm{gri}}(A) = \sum_{\langle n\rangle\in\mathcal{S}} \binom{n}{\langle n\rangle} c_{\langle n\rangle}(A) \leq \alpha n^{q-1},$$

para alguma constante α e a prova está completa. □

Teorema 2.8. *As $*$-superálgebras $M_{4,*}$, M_4^{gri}, $M_{5,*}$, M_5^{gri}, $M_{6,*}$, $M_{6,1}^{\mathrm{gri}}$, $M_{6,2}^{\mathrm{gri}}$, $M_{7,*}$, $M_{7,1}^{\mathrm{gri}}$, $M_{7,2}^{\mathrm{gri}}$, $M_{8,2}^{\mathrm{gri}}$, $M_{8,3}^{\mathrm{gri}}$, $M_{9,*}$, $M_{9,1}^{\mathrm{gri}}$, $M_{9,2}^{\mathrm{gri}}$, $M_{9,3}^{\mathrm{gri}}$, $M_{10,*}$, $M_{10,1}^{\mathrm{gri}}$, $M_{10,2}^{\mathrm{gri}}$, $M_{10,3}^{\mathrm{gri}}$, $M_{11,1}^{\mathrm{gri}}$, $M_{11,2}^{\mathrm{gri}}$ têm crescimento quadrático da sequência de codimensões $*$-graduadas.*

Demonstração. Como já mencionamos anteriormente, todas as $*$-superálgebras citadas no enunciado têm crescimento pelo menos quadrático da sequência de codimensões $*$-graduadas. Além disso, o índice de nilpotência do radical de Jacobson de cada uma delas é igual a 3. Com essas informações, concluímos que as $*$-superálgebras satisfazem as condições da Proposição 2.7 com $q = 3$ e que, consequentemente, todas essas $*$-superálgebras têm crescimento quadrático. □

2.2 Comparando T_2^*-ideais

Tendo em vista a lista de 37 $*$-superálgebras de crescimento quadrático que apresentamos, uma pergunta natural é se a lista é minimal, isto é, se dadas duas $*$-superálgebras distintas A e B na lista, temos $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$. Nesta seção nos concentraremos em estabelecer uma lista com as $*$-superálgebras apresentadas na seção anterior que seja minimal.

Para tanto, começamos observando que $U_{3,*} \in \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(M_{6,*})$ e que, consequentemente, $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(M_{6,*})$ não é uma $*$-supervariedade minimal de crescimento quadrático.

Lema 2.9. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{6,*}) \subsetneq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(U_{3,*})$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{6,*}) \not\subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(U_{3,*})$. Então existe um $(\mathbb{Z}_2,*)$-polinômio multilinear f de certo grau, digamos n, tal que

$$f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{6,*}) \quad \text{e} \quad f \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(U_{3,*}).$$

No Lema 2.3, vimos que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(U_{3,*}) = \langle y_{1,1}, \quad z_{1,1}, \quad [z_{1,0}, y_{2,0}], \quad z_{1,0}z_{2,0}\rangle_{T_2^*}$. Note que $[y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}]$ e $[y_{1,0}, y_{2,0}][y_{3,0}, y_{4,0}]$ são $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para $U_{3,*}$. Assim, ao considerarmos todas essas identidades não é difícil ver que, pelo Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, f pode ser escrito, módulo $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(U_{3,*})$, da seguinte forma

$$f = \alpha y_{1,0}\cdots y_{n,0} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_{i_1,0}\cdots y_{i_{n-1},0} z_{i,0} + \sum_{h=1}^{n-1}\left(\sum_{k=h+1}^{n} \gamma_{k,h} y_{l_1,0}\cdots y_{l_{n-2},0}[y_{k,0}, y_{h,0}]\right),$$

onde $i_1 < \cdots < i_{n-1}$, $l_1 < \cdots < l_{n-2}$ e $k > h$. No último termo de f temos exatamente $\frac{n(n-1)}{2}$ polinômios.

Recordemos que

$$\begin{aligned}
(M_{6,*}^{(0)})^{+} &= F(e_{11}+e_{44}) + F(e_{13}+e_{24}) + F(e_{12}-e_{34}),\\
(M_{6,*}^{(0)})^{-} &= F(e_{12}+e_{34}) + F(e_{13}-e_{24}) + Fe_{14},\\
(M_{6,*}^{(1)})^{+} &= (M_{6,*}^{(1)})^{-} = 0.
\end{aligned}$$

Para chegarmos a uma contradição, provaremos que f é o polinômio nulo. Para tanto, consideremos as seguintes avaliações em elementos de $M_{6,*}$.

Primeiro, fazendo $y_{1,0} = \ldots = y_{n,0} = e_{11} + e_{44}$ e $z_{1,0} = \ldots = z_{n,0} = 0$, obtemos $0 = \alpha(e_{11} + e_{44})$ e, por isso, $\alpha = 0$.

Para $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixo, façamos $z_{i,0} = e_{14}$, $z_{j,0} = 0$, para qualquer $j \neq i$ e $y_{1,0} = \ldots = y_{n,0} = e_{11} + e_{44}$. Com isso, obtemos $0 = \beta_i e_{14}$ e, por isso, $\beta_i = 0$. Desde que o mesmo raciocínio pode ser feito para todo i, concluímos que $\beta_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Agora, vamos considerar os casos em que $k < n-1$. Com a avaliação

$$y_{k,0} = e_{12} - e_{34}, \quad y_{h,0} = e_{13} + e_{24}, \quad y_{a,0} = e_{11} + e_{44},$$

para todo $a \neq k$ e $a \neq h$, obtemos $f = 2\gamma_{k,h}e_{14} = 0$ e, assim, $\gamma_{k,h} = 0$. Aqui, convém observar que como as variáveis fora do comutador estão ordenadas e $h < k < n-1$, obtemos que a avaliação acima anula todos os termos em que y_k ou y_h estão a esquerda do comutador. Assim, chegamos que $\gamma_{k,h} = 0$ sempre que $k < n-1$.

Na prática, o que fizemos acima implica que o polinômio f, módulo $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(U_{3,*})$, é da forma

$$f = \sum_{h=1}^{n-1} \gamma_{n,h} y_{l_1,0}\cdots y_{l_{n-2},0}[y_{n,0}, y_{h,0}] + \sum_{h=1}^{n-2} \gamma_{n-1,h} y_{l_1,0}\cdots y_{l_{n-2},0}[y_{n-1,0}, y_{h,0}].$$

Para os casos em que $h \leq n-3$, ao fazermos primeiro a avaliação $y_{h,0} = e_{13} + e_{24}$, $y_{n-1,0} = e_{12} - e_{34}$, e $y_{l,0} = e_{11} + e_{44}$, para todo $l \neq h$ e $l \neq n-1$ e depois $y_{h,0} = e_{13} + e_{24}$, e $y_{l,0} = e_{11} + e_{44}$ para todo $l \neq h$, obtemos, respectivamente,

$$(2\gamma_{n-1,h} - \gamma_{n,h})e_{14} = 0 \quad \text{e} \quad (\gamma_{n-1,h} + \gamma_{n,h})e_{13} = 0.$$

Daí segue claramente que $\gamma_{n-1,h} = \gamma_{n,h} = 0$, sempre que $h \leq n-3$.

Finalmente, chegamos que, módulo $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(U_{3,*})$, o polinômio f é da forma

$$f = \gamma_{n,n-1}y_{1,0}\cdots y_{n-2,0}[y_{n,0}, y_{n-1,0}] + \gamma_{n,n-2}y_{1,0}\cdots y_{n-3,0}y_{n-1,0}[y_{n,0}, y_{n-2,0}] +$$
$$\gamma_{n-1,n-2}y_{1,0}\cdots y_{n-3,0}y_{n,0}[y_{n-1,0}, y_{n-2,0}].$$

Fazendo as seguintes avaliações

- $y_{n-2,0} = e_{13}+e_{24}$, $y_{n-1,0} = e_{12}-e_{34}$, $y_{l,0} = e_{11}+e_{44}$, para todo $l \neq n-1$ e $l \neq n-2$,
- $y_{n-2,0} = e_{13} + e_{24}$, $y_{l,0} = e_{11} + e_{44}$, para todo $l \neq n-2$,
- $y_{n-1,0} = e_{13} + e_{24}$, $y_{l,0} = e_{11} + e_{44}$, para todo $l \neq n-1$,

obtemos, respectivamente,

- $(\gamma_{n,n-1} - \gamma_{n,n-2} + 2\gamma_{n-1,n-2})e_{14} = 0$,
- $(\gamma_{n-1,n-2} + \gamma_{n,n-2})e_{13} = 0$,
- $(-\gamma_{n-1,n-2} + \gamma_{n,n-1})e_{13} = 0$.

Assim, concluímos que $\gamma_{n,n-1} = \gamma_{n,n-2} = \gamma_{n-1,n-2} = 0$ e, portanto, obtemos que f é o polinômio nulo. Logo, $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{6,*}) \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(U_{3,*})$.

Finalmente, é imediato verificar que $z_{1,0}z_{2,0} \equiv 0$ em $U_{3,*}$ e $z_{1,0}z_{2,0} \not\equiv 0$ em $M_{6,*}$ e com isso finalizamos a prova. $\square$

Consideremos $\mathcal{L}$ o conjunto das $*$-superálgebras de crescimento quadrático apresentadas na seção anterior, exceto $M_{6,*}$,

$$\mathcal{L} = \{ G_{2,0,\tau}, G_{2,1,\tau}, G_{2,2,\tau}, G_{2,1,\psi}, G_{2,1,\rho}, G_{2,2,\rho}, C_{3,*}, C_3^{\mathrm{gri}}, C_3^{gr}, N_{3,*}, N_3^{\mathrm{gri}}, U_{3,*}, U_3^{\mathrm{gri}},$$
$$M_{4,*}, M_4^{\mathrm{gri}}, M_{5,*}, M_5^{\mathrm{gri}}, M_{6,1}^{\mathrm{gri}}, M_{6,2}^{\mathrm{gri}}, M_{7,*}, M_{7,1}^{\mathrm{gri}}, M_{7,2}^{\mathrm{gri}}, M_{8,*}, M_{8,1}^{\mathrm{gri}}, M_{8,2}^{\mathrm{gri}}, M_{8,3}^{\mathrm{gri}},$$
$$M_{9,*}, M_{9,1}^{\mathrm{gri}}, M_{9,2}^{\mathrm{gri}}, M_{9,3}^{\mathrm{gri}}, M_{10,*}, M_{10,1}^{\mathrm{gri}}, M_{10,2}^{\mathrm{gri}}, M_{10,3}^{\mathrm{gri}}, M_{11,1}^{\mathrm{gri}}, M_{11,2}^{\mathrm{gri}}\}.$$

Veremos no próximo lema que não há inclusões entre os T_2^*-ideais das $*$-superálgebras em $\mathcal{L}$.

Proposição 2.10. *Se A e B são quaisquer $*$-superálgebras distintas em $\mathcal{L}$, então* $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$.

Demonstração. Sejam

$$\mathcal{L}_1 = \{G_{2,0,\tau},\ C_{3,*},\ N_{3,*},\ U_{3,*},\ M_{4,*},\ M_{5,*},\ M_{7,*},\ M_{8,*},\ M_{9,*},\ M_{10,*}\} \text{ e}$$

$$\mathcal{L}_2 = \big\{G_{2,1,\tau},\ G_{2,2,\tau},\ G_{2,1,\psi},\ G_{2,1,\rho},\ G_{2,2,\rho},\ C_3^{\mathrm{gri}},\ C_3^{gr},\ N_3^{\mathrm{gri}},\ U_3^{\mathrm{gri}},\ M_4^{\mathrm{gri}},\ M_5^{\mathrm{gri}},\ M_{6,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{6,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{7,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{7,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{8,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{8,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{8,3}^{\mathrm{gri}},\ M_{9,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{9,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{9,3}^{\mathrm{gri}},\ M_{10,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{10,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{10,3}^{\mathrm{gri}},\ M_{11,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{11,2}^{\mathrm{gri}}\big\}$$

os conjuntos das $*$-superálgebras em $\mathcal{L}$ com graduação trivial e com graduação não trivial, respectivamente.

Primeiro, mostraremos que, para toda $*$-superálgebra $A \in \mathcal{L}_1$, temos que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, para toda $*$-superálgebra $B \in \mathcal{L}$.

Para tanto, observe que se $A \in \mathcal{L}_1$, então é imediato que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, para toda $B \in \mathcal{L}_2$. De fato, temos que $y_{1,1},\ z_{1,1} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, para toda $A \in \mathcal{L}_1$, mas estes polinômios não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para quaisquer $*$-superálgebras em $\mathcal{L}_2$. Por isso, neste caso, precisamos garantir somente que para cada $A \in \mathcal{L}_1$, temos que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, para toda $*$-superálgebra B distinta de A em $\mathcal{L}_1$. Para isso, exibiremos polinômios que são $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para A e que não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para toda $B \in \mathcal{L}_1$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,0,\tau}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, pois $z_{1,0} \circ z_{2,0}$, $[y_{1,0}, y_{2,0}]$ $[y_{1,0}, z_{2,0}] \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,0,\tau})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}_1$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(C_{3,*}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, pois $[y_{1,0}, y_{2,0}]$, $[y_{1,0}, z_{2,0}]$ $[z_{1,0}, z_{2,0}] \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(C_{3,*})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}_1$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(N_{3,*}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, pois $[y_{1,0}, y_{2,0}]$, $z_{1,0}z_{2,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(N_{3,*})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}_1$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(U_{3,*}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, pois $[z_{1,0}, y_{2,0}]$, $z_{1,0}z_{2,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(U_{3,*})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}_1$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{4,*}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $[z_{1,0}, z_{2,0}]$, $z_{1,0}y_{2,0}z_{3,0}$, $[y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0}, y_{4,0}]$, $St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}) \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{4,*})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}_1$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{5,*}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, pois $[z_{1,0}, z_{2,0}]$, $y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{5,*})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}_1$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{7,*}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, pois $z_{1,0} \circ z_{2,0}$, $y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{7,*})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}_1$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{8,*}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $y_{1,0}y_{2,0}z_{3,0}y_{4,0}y_{5,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{8,*})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}_1$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,*}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}y_{2,0}z_{3,0}$, $y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,*})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}_1$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{10,*}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0}z_{4,0}y_{5,0}$, $[y_{1,0},y_{2,0}][y_{3,0},y_{4,0}]$, $St_3(y_{1,0},y_{2,0},y_{3,0})$, $St_3(y_{1,0},y_{2,0},z_{3,0}) \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{10,*})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}_1$.

Agora, mostraremos que, para cada $A \in \mathcal{L}_2$, temos que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, para toda $*$-superálgebra B distinta de A em $\mathcal{L}$. Para este fim, novamente exibiremos polinômios que são $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para A e que não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para toda $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,1,\tau}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $y_{1,1}$, $z_{1,0}z_{2,0}$, $z_{1,0}z_{2,1}$, $[y_{1,0},y_{2,0}]$, $[y_{1,0},z_{2,0}]$, $z_{1,1}\circ z_{2,1} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,1,\tau})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,2,\tau}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $y_{1,1}$, $z_{1,0}z_{2,0}$, $z_{1,1}z_{2,1}$, $[y_{1,0},y_{2,0}]$, $[y_{1,0},z_{2,0}] \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,2,\tau})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,1,\rho}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $z_{1,1}z_{2,1}$, $[y_{1,0},z_{2,1}]$, $[y_{1,0},y_{2,1}] \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,1,\rho})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,2,\rho}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,1}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $z_{1,0}z_{2,0}$, $[y_{1,0},z_{2,0}]$, $[y_{1,0},y_{2,0}] \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,2,\rho})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,1,\psi}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,1}$, $z_{1,0}z_{2,0}$, $z_{1,0}y_{2,1}$, $[y_{1,0},y_{2,0}]$, $[y_{1,0},z_{2,0}]$, $y_{1,1}\circ y_{2,1} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,1,\psi})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(C_3^{\mathrm{gr}}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}$, $z_{1,1} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(C_3^{\mathrm{gr}})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(C_3^{\mathrm{gri}}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}$, $y_{1,1} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(C_3^{\mathrm{gri}})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(N_3^{\mathrm{gri}}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $z_{1,1}z_{2,1}$, $y_{1,1}z_{2,1}$, $[y_{1,1},y_{2,0}] \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(N_3^{\mathrm{gri}})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(U_3^{\mathrm{gri}}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $z_{1,1}z_{2,1}$, $y_{1,1}z_{2,1}$, $[z_{1,1}, y_{2,0}] \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(U_3^{\mathrm{gri}})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_4^{\mathrm{gri}}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}$, $y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0}$, $y_{1,1}y_{2,0}y_{3,1}$, $y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_4^{\mathrm{gri}})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_5^{\mathrm{gri}}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}$, $y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0}$, $y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0}$, $z_{1,1}z_{2,1}y_{3,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_5^{\mathrm{gri}})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{6,1}^{\mathrm{gri}}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $z_{1,1}z_{2,1}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $y_{1,1}z_{2,1}$, $y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0}$, $St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, z_{3,1})$, $[y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0}, y_{4,0}]$, $z_{1,0}y_{2,0}y_{3,1}$, $[z_{1,0}, y_{2,1}]$, $z_{1,0} \circ z_{2,1} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{6,1}^{\mathrm{gri}})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{6,2}^{\mathrm{gri}}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $z_{1,0}y_{2,1}$, $y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0}$, $y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0}$, $[y_{1,0}, z_{2,0}]$, $[y_{1,0}, y_{2,0}]$, $[y_{1,1}, z_{2,1}]$, $y_{1,1}y_{2,0}y_{3,1} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{6,2}^{\mathrm{gri}})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{7,1}^{\mathrm{gri}}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $z_{1,1}z_{2,1}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0}$, $y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0}$, $y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0}$, $[z_{1,0}, y_{2,1}]$, $z_{1,0}y_{2,1}y_{3,0}$, $z_{1,0} \circ z_{2,1} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{7,1}^{\mathrm{gri}})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{7,2}^{\mathrm{gri}}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $z_{1,0}y_{2,0}$, $z_{1,0}y_{2,1}$, $y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0}$, $y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0}$, $[y_{1,0}, y_{2,0}]$, $[y_{1,1}, z_{2,1}]$, $z_{1,1} \circ z_{2,1} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{7,2}^{\mathrm{gri}})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{8,1}^{\mathrm{gri}}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $z_{1,1}z_{2,1}$, $y_{1,1}z_{2,1}$, $y_{1,0}y_{2,0}y_{3,1}y_{4,0}y_{5,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{8,1}^{\mathrm{gri}})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{8,2}^{\mathrm{gri}}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $z_{1,0}y_{2,1}$, $z_{1,0}z_{2,1}$, $z_{1,1}z_{2,1}$, $y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0}$, $y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0}$, $y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{8,2}^{\mathrm{gri}})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{8,3}^{\mathrm{gri}}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $z_{1,0}z_{2,1}$, $z_{1,1}z_{2,1}$, $y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0}$, $y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0}$, $y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{8,3}^{\mathrm{gri}})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $z_{1,0}y_{2,0}$, $y_{1,1}z_{2,1}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $z_{1,1}z_{2,1}$, $y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0}$, $[y_{1,0}, y_{2,0}] \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,2}^{\mathrm{gri}}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $z_{1,0}y_{2,1}$, $z_{1,0}z_{2,1}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0}$, $y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0}$, $y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,2}^{\mathrm{gri}})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{gri}(M_{9,3}^{gri}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{gri}(B)$ desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $z_{1,1}z_{2,1}$, $z_{1,0}y_{2,1}$, $z_{1,0}z_{2,1}$, $y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0}$, $y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0} \in \mathrm{Id}^{gri}(M_{9,3}^{gri})$ não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{gri}(M_{10,1}^{gri}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{gri}(B)$ desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $z_{1,1}z_{2,1}$, $z_{1,0}y_{2,1}$, $y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0}$, $y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0}$, $z_{1,1}z_{2,0}y_{3,0} \in \mathrm{Id}^{gri}(M_{10,1}^{gri})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{gri}(M_{10,2}^{gri}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{gri}(B)$ desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $z_{1,1}z_{2,1}$, $[y_{1,0},y_{2,0}]$, $[y_{1,0},z_{2,0}]$, $y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0}$, $y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0} \in \mathrm{Id}^{gri}(M_{10,2}^{gri})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{gri}(M_{10,3}^{gri}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{gri}(B)$ desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $z_{1,0}y_{2,1}$, $z_{1,0}z_{2,1}$, $y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0}$, $y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0}$, $y_{1,0}z_{2,1}z_{3,1}y_{4,0}$, $z_{1,1}y_{2,1}y_{3,0} \in \mathrm{Id}^{gri}(M_{10,3}^{gri})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{gri}(M_{11,1}^{gri}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{gri}(B)$ desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $z_{1,1}z_{2,1}$, $z_{1,0}z_{2,1}$, $y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0}$, $y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0}$, $z_{1,1}z_{2,0}y_{3,0} \in \mathrm{Id}^{gri}(M_{11,1}^{gri})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

- $\mathrm{Id}^{gri}(M_{11,2}^{gri}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{gri}(B)$ desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $z_{1,1}z_{2,1}$, $z_{1,1}y_{2,1}$, $z_{1,0}y_{2,1}$, $z_{1,0}z_{2,1}$, $y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0}$, $y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0}$, $y_{1,0}y_{2,1}y_{3,1}y_{4,0}$, $y_{1,1}z_{2,1}y_{3,0} \in \mathrm{Id}^{gri}(M_{11,2}^{gri})$, mas não são simultaneamente $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades para B, com $B \in \mathcal{L}$.

Assim, concluímos a prova. □

Finalizamos essa seção estabelecendo que, ao longo desta tese, quando mencionarmos *lista de $*$-superálgebras* subentende-se que estamos nos referindo as 36 $*$-superálgebras de crescimento quadrático em $\mathcal{L}$.

2.3 O radical de Jacobson das $*$-superálgebras de crescimento quadrático

Nesta seção exibiremos a decomposição do radical de Jacobson de cada uma das $*$-superálgebras de crescimento quadrático estudadas. Recordamos que em $*$-superálgebras A de dimensão finita do tipo $B + J$, onde B é uma $*$-superálgebra semissimples e J é o radical de A, temos que $J = J_{00} + J_{01} + J_{10} + J_{11}$, onde os subespaços J_{ik} são graduados, $i,k \in \{0,1\}$, com J_{00} e J_{11} estáveis pela involução graduada $*$ de A e $J_{01}^* = J_{10}$.

Mais especificamente, explicitaremos as componentes pares e ímpares, simétricas e antissimétricas (quando for pertinente) de cada subesbaço presente na decomposição do radical de cada $*$-superálgebra da lista. Para esta apresentação dividiremos as $*$-superálgebras de crescimento quadrático da nossa lista em dois grupos: unitárias e não unitárias.

Sabemos que para uma $*$-superálgebra A unitária de dimensão finita, temos $J \neq A$. Assim, se $A = B + J$ é uma $*$-superálgebra unitária de dimensão finita, então a unidade de A deve estar na parte semissimples e, portanto, $J = J_{11}$. Vejamos na tabela abaixo como é a decomposição de J_{11} de cada uma das $*$-superálgebras unitárias da nossa lista.

	$J_{11}^{(0)+}$	$J_{11}^{(1)+}$	$J_{11}^{(0)-}$	$J_{11}^{(1)-}$
$G_{2,0,\tau}$	0	0	$Fe_1 + Fe_2 + Fe_1e_2$	0
$G_{2,1,\tau}$	0	0	Fe_1e_2	$Fe_1 + Fe_2$
$G_{2,2,\tau}$	0	0	Fe_1	$Fe_2 + Fe_1e_2$
$G_{2,1,\rho}$	Fe_1e_2	Fe_2	0	Fe_1
$G_{2,2,\rho}$	0	$Fe_2 + Fe_1e_2$	Fe_1	0
$G_{2,1,\psi}$	0	$Fe_1 + Fe_2$	Fe_1e_2	0
$C_{3,*}$	Fe_{13}	0	$F(e_{12} + e_{23})$	0
C_3^{gr}	Fe_{13}	$F(e_{12} + e_{23})$	0	0
C_3^{gri}	Fe_{13}	0	0	$F(e_{12} + e_{23})$
$N_{3,*}$	$F(e_{13} + e_{46}) + F(e_{23} + e_{45})$	0	$F(e_{13} - e_{46}) + F(e_{12} - e_{56})$	0
N_3^{gri}	$F(e_{23} + e_{45})$	$F(e_{13} + e_{46})$	0	$F(e_{13} - e_{46}) + F(e_{12} - e_{56})$
$U_{3,*}$	$F(e_{12} + e_{56}) + F(e_{13} + e_{46}) + F(e_{23} + e_{45})$	0	$F(e_{13} - e_{46})$	0
U_3^{gri}	$F(e_{23} + e_{45})$	$F(e_{12} + e_{56}) + F(e_{13} + e_{46})$	0	$F(e_{13} - e_{46})$

Tabela 2.1: $*$-superálgebras unitárias.

Para as $*$-superálgebras construídas a partir de M_4, M_6, M_{10} e M_{11}, verificamos que $J = J_{11} + J_{10} + J_{01}$, enquanto que nas $*$-superálgebras obtidas a partir de M_5, M_7, M_8 e M_9, temos $J = J_{00} + J_{10} + J_{01}$. Na tabela abaixo, exibimos a decomposição de J_{11} e de J_{00} em componentes simétricas par e ímpar e em componentes antissimétricas par e ímpar, conforme cada $*$-superálgebra. Além disso, apresentamos a decomposição de J_{10} e J_{01} em componentes pares e ímpares de acordo com cada $*$-superálgebra.

	$J_{11}^{(0)+}$	$J_{11}^{(1)+}$	$J_{11}^{(0)-}$	$J_{11}^{(1)-}$	J_{10}	J_{01}
$M_{4,*}$	Fe_{13}	0	0	0	$(Fe_{12}, 0)$	$(Fe_{23}, 0)$
M_4^{gri}	Fe_{13}	0	0	0	$(0, Fe_{12})$	$(0, Fe_{23})$
$M_{6,*}$	0	0	Fe_{14}	0	$(Fe_{12} + Fe_{13}, 0)$	$(Fe_{24} + Fe_{34}, 0)$
$M_{6,1}^{\text{gri}}$	0	0	0	Fe_{14}	(Fe_{13}, Fe_{12})	(Fe_{24}, Fe_{34})
$M_{6,2}^{\text{gri}}$	0	0	Fe_{14}	0	$(0, Fe_{12} + Fe_{13})$	$(0, Fe_{24} + Fe_{34})$
$M_{10,*}$	0	0	$F(e_{12} - e_{56})$	0	$(Fe_{13} + Fe_{23}, 0)$	$(Fe_{45} + Fe_{46}, 0)$
$M_{10,1}^{\text{gri}}$	0	0	0	$F(e_{12} - e_{56})$	(Fe_{23}, Fe_{13})	(Fe_{45}, Fe_{46})
$M_{10,2}^{\text{gri}}$	0	0	$F(e_{12} - e_{56})$	0	$(0, Fe_{13} + Fe_{23})$	$(0, Fe_{45} + Fe_{46})$
$M_{10,3}^{\text{gri}}$	0	0	0	$F(e_{12} - e_{56})$	(Fe_{13}, Fe_{23})	(Fe_{46}, Fe_{45})
$M_{11,1}^{\text{gri}}$	0	$F(e_{12} + e_{56})$	0	0	(Fe_{23}, Fe_{13})	(Fe_{45}, Fe_{46})
$M_{11,2}^{\text{gri}}$	0	$F(e_{12} + e_{56})$	0	0	(Fe_{13}, Fe_{23})	(Fe_{46}, Fe_{45})
	$J_{00}^{(0)+}$	$J_{00}^{(1)+}$	$J_{00}^{(0)-}$	$J_{00}^{(1)-}$	J_{10}	J_{01}
$M_{5,*}$	Fe_{13}	0	0	0	$(Fe_{23}, 0)$	$(Fe_{12}, 0)$
M_5^{gri}	Fe_{13}	0	0	0	$(0, Fe_{23})$	$(0, Fe_{12})$
$M_{7,*}$	0	0	Fe_{14}	0	$(Fe_{24} + Fe_{34}, 0)$	$(Fe_{12} + Fe_{13}, 0)$
$M_{7,1}^{\text{gri}}$	0	0	0	Fe_{14}	(Fe_{24}, Fe_{34})	(Fe_{13}, Fe_{12})
$M_{7,2}^{\text{gri}}$	0	0	Fe_{14}	0	$(0, Fe_{24} + Fe_{34})$	$(0, Fe_{12} + Fe_{13})$
$M_{8,*}$	$F(e_{23} + e_{45})$	0	0	0	$(Fe_{12} + Fe_{13}, 0)$	$(Fe_{46} + Fe_{56}, 0)$
$M_{8,1}^{\text{gri}}$	$F(e_{23} + e_{45})$	0	0	0	$(0, Fe_{12} + Fe_{13})$	$(0, Fe_{46} + Fe_{56})$
$M_{8,2}^{\text{gri}}$	0	$F(e_{23} + e_{45})$	0	0	(Fe_{13}, Fe_{12})	(Fe_{46}, Fe_{56})
$M_{8,3}^{\text{gri}}$	0	$F(e_{23} + e_{45})$	0	0	(Fe_{12}, Fe_{13})	(Fe_{56}, Fe_{46})
$M_{9,*}$	0	0	$F(e_{23} - e_{45})$	0	$(Fe_{12} + Fe_{13}, 0)$	$(Fe_{46} + Fe_{56}, 0)$
$M_{9,1}^{\text{gri}}$	0	0	$F(e_{23} - e_{45})$	0	$(0, Fe_{12} + Fe_{13})$	$(0, Fe_{46} + Fe_{56})$
$M_{9,2}^{\text{gri}}$	0	0	0	$F(e_{23} - e_{45})$	(Fe_{13}, Fe_{12})	(Fe_{46}, Fe_{56})
$M_{9,3}^{\text{gri}}$	0	0	0	$F(e_{23} - e_{45})$	(Fe_{12}, Fe_{13})	(Fe_{56}, Fe_{46})

Tabela 2.2: $*$-superálgebras não unitárias.

Capítulo 3

$*$-Supervariedades minimais de crescimento quadrático

Em [8], no contexto ordinário, Giambruno e La Mattina associaram o crescimento no máximo linear da sequência de codimensões de uma variedade $\mathcal{V}$ à uma lista de álgebras que não devem pertencer a $\mathcal{V}$. Mais especificamente, os autores caracterizaram as variedades de crescimento no máximo linear através da exclusão de cinco álgebras que a princípio possuíam crescimento pelo menos quadrático. Em [22], Jorge e Vieira mostraram que, de fato, as cinco álgebras tinham crescimento quadrático e mais, mostraram que elas eram as únicas minimais de crescimento quadrático, a menos de equivalência.

Assim, nosso objetivo é classificar as $*$-supervariedades minimais de crescimento quadrático usando uma estratégia similar a que foi empregada em [22] para o caso ordinário. Tal estratégia consiste em determinar $*$-superálgebras de crescimento quadrático que formam a menor lista de $*$-superálgebras que devem ser excluídas de uma $*$-supervariedade $\mathcal{V}$ a fim de garantir que $\mathcal{V}$ tem crescimento no máximo linear. Como consequência, obtemos que estas geram as únicas $*$-supervariedades minimais de crescimento quadrático.

Convém ressaltar que, em 2017, Ioppolo e La Mattina classificaram, a menos de T_2^*-equivalência, todas as $*$-superálgebras de crescimento no máximo linear [20]. Para apresentar tal classificação será necessário introduzir algumas $*$-superálgebras.

Considere
$$C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}.$$

A partir de C_2, obtemos as seguintes $*$-superálgebras.

- $C_{2,*}$, a álgebra C_2 com graduação trivial e involução definida como
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}; \tag{3.0.1}$$

- C_2^{gri}, a álgebra C_2 com graduação $(F(e_{11}+e_{22}), Fe_{12})$ e involução definida como em (3.0.1).

- C_2^{gr}, a álgebra C_2 com graduação $(F(e_{11}+e_{22}), Fe_{12})$ e involução trivial.

Lema 3.1. *Sobre $C_{2,*}$, C_2^{gri}, C_2^{gr}, temos:*

(1) [31, Lema 9] $\text{Id}^{\text{gri}}(C_{2,*}) = \langle y_{1,1},\ z_{1,1},\ z_{1,0}z_{2,0},\ [y_{1,0}, y_{2,0}],\ [y_{1,0}, z_{2,0}]\rangle_{T_2^*}$.

(2) [20, Teorema 6.1] $\text{Id}^{\text{gri}}(C_2^{\text{gri}}) = \langle z_{1,0},\ y_{1,1},\ z_{1,1}z_{2,1}\rangle_{T_2^*}$.

(3) [30, Teorema 8.1] $\text{Id}^{\text{gri}}(C_2^{\text{gr}}) = \langle z_{1,0},\ z_{1,1},\ y_{1,1}y_{2,1}\rangle_{T_2^*}$.

(4) $c_n^{\text{gri}}(C_{2,*}) = c_n^{\text{gri}}(C_2^{\text{gri}}) = c_n^{\text{gri}}(C_2^{\text{gr}}) = n+1$.

Observamos que as $*$-superálgebras $C_{2,*}$, C_2^{gri}, C_2^{gr} geram, a menos de T_2^*-equivalência, subvariedades minimais de crescimento linear em $\text{var}^{\text{gri}}(D_*)$ [31, Corolário 3], $\text{var}^{\text{gri}}(D^{\text{gri}})$ [20, Corolário 6.1] e em $\text{var}^{\text{gri}}(D^{\text{gr}})$ [30, Corolário 8.2], respectivamente.

Seja

$$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in F \right\}.$$

Consideremos as $*$-superálgebras:

- $A_{2,*}$, a álgebra A_2 com graduação trivial e involução reflexão.

- A_2^{gri}, a álgebra A_2 com graduação $(F(e_{11}+e_{44}), Fe_{12}+Fe_{34})$ e involução reflexão.

Lema 3.2. *Sobre $A_{2,*}$, A_2^{gri}, temos:*

(1) [33, Lema 3.10] $\text{Id}^{\text{gri}}(A_{2,*}) = \langle y_{1,1},\ z_{1,1},\ z_{1,0}z_{2,0},\ y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0},\ St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0})\rangle_{T_2^*}$.

(2) $c_n^{\text{gri}}(A_{2,*}) = 4n-1$.

(3) [20, Teorema 5.1] $\text{Id}^{\text{gri}}(A_2^{\text{gri}}) = \langle z_{1,0},\ x_{1,1}x_{2,1},\ y_{1,0}x_{2,1}y_{3,0}\rangle_{T_2^*}$, *onde $x_i = y_i$ ou $x_i = z_i$, para $i = 1\ ,2$.*

(4) $c_n^{\text{gri}}(A_2^{\text{gri}}) = 4n+1$.

Destacamos que $A_{2,*}$ e A_2^{gri} geram subvariedades minimais de crescimento linear em $\text{var}^{\text{gri}}(M_*)$ [31, Corolário 1] e em $\text{var}^{\text{gri}}(M^{\text{gri}})$ [20, Corolário 5.1], respectivamente.

A seguir, temos a classificação das $*$-supervariedades de crescimento no máximo linear dada por Ioppolo e La Mattina. Desse resultado concluímos que as $*$-superálgebras $A_{2,*}$, A_2^{gri}, $C_{2,*}$, C_2^{gri}, C_2^{gr} geram, a menos de T_2^*-equivalência, as únicas $*$-supervariedades minimais de crescimento linear.

Teorema 3.3. [20, Teorema 7.2] *Seja A uma $*$-superálgebra tal que $c_n^{\mathrm{gri}}(A) \leq an$, para alguma constante a. Então*

$$A \sim_{T_2^*} B_1 \oplus \cdots \oplus B_m \oplus N,$$

onde N é uma $*$-superálgebra nilpotente e, para todo $i = 1, \ldots, m$, B_i é T_2^*-equivalente a uma das seguintes $*$-superálgebras:

$\tilde{N}$, $C \oplus \tilde{N}$, $C_{2,*} \oplus \tilde{N}$, $A_{2,*} \oplus \tilde{N}$, $A_{2,*} \oplus C_{2,*} \oplus \tilde{N}$, $C_2^{\mathrm{gri}} \oplus \tilde{N}$, $C_2^{\mathrm{gr}} \oplus \tilde{N}$, $A_2^{\mathrm{gri}} \oplus \tilde{N}$, $C_2^{\mathrm{gri}} \oplus C_2^{\mathrm{gr}} \oplus \tilde{N}$, $C_2^{\mathrm{gri}} \oplus A_2^{\mathrm{gri}} \oplus \tilde{N}$, $C_2^{\mathrm{gr}} \oplus A_2^{\mathrm{gri}} \oplus \tilde{N}$, $C_2^{\mathrm{gri}} \oplus C_2^{\mathrm{gr}} \oplus A_2^{\mathrm{gri}} \oplus \tilde{N}$, onde C é uma $*$-superálgebra comutativa com graduação trivial e involução trivial e $\tilde{N}$ é uma $*$-superálgebra nilpotente.

Verificaremos que as $*$-superálgebras a serem excluídas de uma variedade para garantir que esta tem crescimento no máximo linear são justamente as presentes no conjunto $\mathcal{L}$. Como consequência, concluíremos que as 36 $*$-superálgebras em $\mathcal{L}$ geram, a menos de T_2^*-equivalência, as únicas $*$-supervariedades minimais de crescimento quadrático.

3.1 Algumas propriedades das $*$-superálgebras do tipo $F+J$

Nesta seção verificaremos que a exclusão de certas $*$-superálgebras de crescimento quadrático, estudadas no Capítulo 2, das variedades geradas por $*$-superálgebras de dimensão finita do tipo $F+J$ interferem no comportamento das componentes do radical J. Destacamos que as Tabelas 2.1 e 2.2 exibidas no capítulo anterior serão necessárias para um bom entendimento dos resultados que serão apresentados aqui.

Assim, ao longo desta seção, assumiremos que A é uma $*$-superálgebra de dimensão finita da forma $A = F + J$, onde J tem decomposição $J = J_{00} + J_{01} + J_{10} + J_{11}$, conforme vimos em (1.3.7).

Lema 3.4.

(1) [32, Lema 29] *Se $M_{4,*}$, $M_{5,*} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, então $aa^* = a^*a = 0$, para todo $a \in J_{10}^{(0)}$.*

(2) *Se M_4^{gri}, $M_5^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, então $aa^* = a^*a = 0$, para todo $a \in J_{10}^{(1)}$.*

Demonstração. (2) Suponhamos que exista $a \in J_{10}^{(1)}$ tal que $aa^* \neq 0$ e seja B a subálgebra $*$-graduada gerada, como álgebra, por 1_F, a, a^*. Além disso, consideremos I o ideal $*$-graduado gerado por a^*a. Verificamos que a $*$-superálgebra

$$\overline{B} = B/I = \mathrm{span}_F\{\overline{1_F},\ \overline{a},\ \overline{a^*},\ \overline{aa^*}\}$$

é isomorfa a $M_4^{\rm gri}$ através do isomorfismo $\varphi : \overline{B} \to M_4^{\rm gri}$ de $*$-superálgebras, definido como

$$\varphi(\overline{1_F}) = e_{11} + e_{33}, \quad \varphi(\overline{a}) = e_{12}, \quad \varphi(\overline{a^*}) = e_{23}, \quad \varphi(\overline{aa^*}) = e_{13}$$

e, portanto, $M_4^{\rm gri} \in \mathrm{var}^{\rm gri}(A)$. Isso garante que se $M_4^{\rm gri} \notin \mathrm{var}^{\rm gri}(A)$, então $aa^* = 0$, para todo $a \in J_{10}^{(1)}$.

Com o mesmo raciocínio verificamos que se $M_5^{\rm gri} \notin \mathrm{var}^{\rm gri}(A)$, então $aa^* = 0$, para todo $a \in J_{01}^{(1)}$ e concluímos a prova. $\square$

Pelo lema anterior, observamos que se $M_{4,*}$, $M_4^{\rm gri}$, $M_{5,*}$, $M_5^{\rm gri} \notin \mathrm{var}^{\rm gri}(A)$, então $aa^* = a^*a = 0$, para todo $a \in J_{10}$.

Lema 3.5.

(1) [32, Lemas 30 e 31] *Se* $M_{4,*}$, $M_{5,*}$, $M_{6,*}$, $M_{7,*} \notin \mathrm{var}^{\rm gri}(A)$, *então* $J_{10}^{(0)}J_{01}^{(0)} = J_{01}^{(0)}J_{10}^{(0)} = 0$.

(2) *Se* $M_{4,*}$, $M_4^{\rm gri}$, $M_{5,*}$, $M_5^{\rm gri}$, $M_{6,1}^{\rm gri}$, $M_{6,2}^{\rm gri} \notin \mathrm{var}^{\rm gri}(A)$, *então* $J_{10}^{(1)}J_{01} = J_{10}^{(0)}J_{01}^{(1)} = 0$.

(3) *Se* $M_{4,*}$, $M_4^{\rm gri}$, $M_{5,*}$, $M_5^{\rm gri}$, $M_{7,1}^{\rm gri}$, $M_{7,2}^{\rm gri} \notin \mathrm{var}^{\rm gri}(A)$, *então* $J_{01}^{(1)}J_{10} = J_{01}^{(0)}J_{10}^{(1)} = 0$.

Demonstração. (2) Suponhamos que $M_{4,*}$, $M_4^{\rm gri}$, $M_{5,*}$, $M_5^{\rm gri}$, $M_{6,1}^{\rm gri}$, $M_{6,2}^{\rm gri} \notin \mathrm{var}^{\rm gri}(A)$. Em particular, desde que $M_4^{\rm gri}, M_5^{\rm gri} \notin \mathrm{var}^{\rm gri}(A)$, o Lema 3.4 nos fornece que $a^*a = aa^* = 0$, para todo $a \in J_{10}^{(1)}$. Agora, suponhamos, por absurdo, que existam $a \in J_{10}^{(1)}$ e $b \in J_{01}^{(1)}$, tais que $ab \neq 0$. Temos imediatamente, $a^*a = aa^* = b^*b = bb^* = a^2 = b^2 = 0$. Note que como $(a + b^*) \in J_{10}^{(1)}$, temos $0 = (a + b^*)(a + b^*)^* = (a + b^*)(a^* + b)$, o que implica em $ab + b^*a^* = 0$. Logo, $(ab)^* = b^*a^* = -ab$ e, por isso, $ab \in (J_{11}^{(0)})^-$. Analogamente, observe que $0 = (a^* + b)(a^* + b)^* = a^*b^* + ba$ o que implica em $(ba)^* = a^*b^* = -ba$. Portanto, $ba \in (J_{00}^{(0)})^-$.

Além disso, desde que $ab = -b^*a^*$, temos $aba = -b^*a^*a = 0$ e $bab = -bb^*a^* = 0$. Seja B a subálgebra $*$-graduada de A gerada, como álgebra, por 1_F, a, a^*, b, b^*. Note que

$$B = \mathrm{span}_F\{1,\ a,\ a^*,\ b,\ b^*,\ ab,\ ba\}.$$

Considerando I o ideal $*$-graduado gerado por ba, afirmamos que a $*$-superálgebra

$$\overline{B} = B/I = \mathrm{span}_F\{\overline{1_F},\ \overline{a},\ \overline{a^*},\ \overline{b},\ \overline{b^*},\ \overline{ab}\}$$

é isomorfa a $M_{6,2}^{\rm gri}$. De fato, defina $\varphi : \overline{B} \to M_{6,2}^{\rm gri}$ de modo que

$$\overline{1_F} \mapsto e_{11} + e_{44}, \quad \overline{a} \mapsto e_{12}, \quad \overline{a^*} \mapsto -e_{34}, \quad \overline{b} \mapsto e_{24}, \quad \overline{b^*} \mapsto e_{13}, \quad \overline{ab} \mapsto e_{14}.$$

Não é difícil verificar que φ é um isomorfismo de $*$-superálgebras e, por isso, $M_{6,2}^{\rm gri} \in \mathrm{var}^{\rm gri}(A)$, uma contradição. Essa contradição garante que se $M_4^{\rm gri}$, $M_5^{\rm gri}$, $M_{6,2}^{\rm gri} \notin \mathrm{var}^{\rm gri}(A)$, então $J_{10}^{(1)}J_{01}^{(1)} = 0$.

Agora, suponhamos também por absurdo, que existam $a \in J_{10}^{(0)}$ e $b \in J_{01}^{(1)}$ tais que $ab \neq 0$. Neste caso, como $M_{4,*}$, M_4^{gri}, $M_{5,*}$, $M_5^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(A)$, pelo Lema 3.4, temos imediatamente $a^*a = aa^* = b^*b = bb^* = 0$. Note que ao usarmos a mesma estratégia acima, obtemos que $ab \in (J_{11}^{(1)})^-$, $ba \in (J_{00}^{(1)})^-$ e que também podemos definir a subálgebra $*$-graduada $B' = \text{span}_F\{1,\ a,\ a^*,\ b,\ b^*,\ ab,\ ba\}$ e o ideal $*$-graduado I' gerado por ba. Assim, temos que a $*$-superálgebra B'/I' é isomorfa a $M_{6,1}^{\text{gri}}$ através do isomorfismo $\varphi' : B'/I' \to M_{6,1}^{\text{gri}}$ de $*$-superálgebras tal que

$$\overline{1_F} \mapsto e_{11} + e_{44},\quad \overline{a} \mapsto e_{13},\quad \overline{a^*} \mapsto e_{24},\quad \overline{b} \mapsto -e_{34},\quad \overline{b^*} \mapsto e_{12},\quad \overline{ab} \mapsto -e_{14}.$$

Portanto, $M_{6,1}^{\text{gri}} \in \text{var}^{\text{gri}}(A)$ e temos uma contradição. Isto prova que se $M_{4,*}$, M_4^{gri}, $M_{5,*}$, M_5^{gri}, $M_{6,1}^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(A)$, então $J_{10}^{(0)}J_{01}^{(1)} = J_{10}^{(1)}J_{01}^{(0)} = 0$ e com isso concluímos a prova do item (2).

O item (3) é obtido de modo análogo ao item (2) e, por isso, omitiremos alguns detalhes. Suponhamos que $M_{4,*}$, M_4^{gri}, $M_{5,*}$, M_5^{gri}, $M_{7,1}^{\text{gri}}$, $M_{7,2}^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(A)$. Além disso, suponhamos, por absurdo, que existam $a \in J_{01}^{(0)}$ e $b \in J_{10}^{(1)}$ tais que $ab \neq 0$. Neste caso, também podemos definir a $*$-superálgebra $B'' = \text{span}_F\{1,\ a,\ a^*,\ b,\ b^*,\ ab,\ ba\}$ e o ideal $*$-graduado I'' gerado por ba, de tal modo que a $*$-superálgebra $B''/I'' = \text{span}_F\{\overline{1_F},\ \overline{a},\ \overline{a^*},\ \overline{b},\ \overline{b^*},\ \overline{ab}\}$ é isomorfa a $M_{7,1}^{\text{gri}}$ através do isomorfismo $\psi : B''/I'' \to M_{7,1}^{\text{gri}}$, definido da seguinte forma

$$\overline{1_F} \mapsto e_{22} + e_{33},\quad \overline{a} \mapsto e_{13},\quad \overline{a^*} \mapsto e_{24},\quad \overline{b} \mapsto -e_{34},\quad \overline{b^*} \mapsto e_{12},\quad \overline{ab} \mapsto -e_{14}.$$

Com isso, obtemos que $M_{7,1}^{\text{gri}} \in \text{var}^{\text{gri}}(A)$, uma contradição. Essa contradição garante que se $M_{4,*}$, M_4^{gri}, $M_{5,*}$, M_5^{gri}, $M_{7,1}^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(A)$, então $J_{01}^{(0)}J_{10}^{(1)} = J_{01}^{(1)}J_{10}^{(0)} = 0$. Por fim, aplicando os mesmos passos, verificamos que se M_4^{gri}, M_5^{gri}, $M_{7,2}^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(A)$, então $J_{01}^{(1)}J_{10}^{(1)} = 0$ e finalizamos a prova. $\square$

Como consequências imediatas do lema anterior, temos os seguintes.

Corolário 3.6. *Se* $M_{4,*}$, M_4^{gri}, $M_{5,*}$, M_5^{gri}, $M_{6,*}$, $M_{6,1}^{\text{gri}}$, $M_{6,2}^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(A)$, *então* $J_{10}J_{01} = 0$.

Corolário 3.7. *Se* $M_{4,*}$, M_4^{gri}, $M_{5,*}$, M_5^{gri}, $M_{7,*}$, $M_{7,1}^{\text{gri}}$, $M_{7,2}^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(A)$, *então* $J_{01}J_{10} = 0$.

É interessante observarmos que, nas condições do Corolário 3.7, temos que $B = F + J_{10} + J_{01} + J_{11}$ é uma subálgebra $*$-graduada de A.

Lema 3.8. *Se* $M_{8,*}$, $M_{8,1}^{\text{gri}}$, $M_{8,2}^{\text{gri}}$, $M_{8,3}^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(A)$, *então* $J_{10}J_{00}^+ = J_{00}^+J_{01} = 0$.

Demonstração. Suponhamos que $J_{10}^{(0)}(J_{00}^{(0)})^+ \neq 0$. Logo, existem $a \in J_{10}^{(0)}$ e $b \in (J_{00}^{(0)})^+$ tais que $ab \neq 0$. Considere B a subálgebra $*$-graduada de A gerada, como álgebra, por 1_F, a, a^*, b e I o ideal $*$-graduado gerado por aa^*, a^*a, b^2, aba^*. Observe que a $*$-superálgebra $\overline{B} = B/I$ é tal que

$$\overline{B} = \text{span}_F\{\overline{1_F},\ \overline{a},\ \overline{a^*},\ \overline{b},\ \overline{ab},\ \overline{ba^*}\}.$$

Afirmamos que $\overline{B}$ e $M_{8,*}$ são isomorfas. De fato, considere $\varphi : \overline{B} \to M_{8,*}$, definido de tal forma que

$$\overline{1_F} \mapsto e_{11} + e_{66}, \quad \overline{a} \mapsto e_{12}, \quad \overline{a^*} \mapsto e_{56}, \quad \overline{b} \quad \mapsto e_{23} + e_{45}, \quad \overline{ab} \mapsto e_{13}, \quad \overline{ba^*} \quad \mapsto e_{46}. \quad (3.1.1)$$

Não é difícil verificar que φ é um isomorfismo de $*$-superálgebras e, por isso, $M_{8,*} \in \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$. Isso mostra que se $M_{8,*} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, então $J_{10}^{(0)}(J_{00}^{(0)})^+ = (J_{00}^{(0)})^+ J_{01}^{(0)} = 0$.

Analogamente, suponhamos agora que $J_{10}^{(1)}(J_{00}^{(0)})^+ \neq 0$. Logo, existem $a \in J_{10}^{(1)}$ e $b \in (J_{00}^{(0)})^+$ tais que $ab \neq 0$. Considerando a $*$-superálgebra B' gerada, como álgebra, por $1_F,\ a,\ a^*,\ b$ e I' o ideal $*$-graduado gerado por $aa^*,\ a^*a,\ b^2,\ aba^*$ e definindo o isomorfismo de $*$-superálgebras $\varphi' : B'/I' \to M_{8,1}^{\mathrm{gri}}$ como em (3.1.1), obtemos que $M_{8,1}^{\mathrm{gri}} \in \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$. Com isso, temos que se $M_{8,1}^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, então $J_{10}^{(1)}(J_{00}^{(0)})^+ = (J_{00}^{(0)})^+ J_{01}^{(1)} = 0$. Assim, concluímos que $M_{8,*}, M_{8,1}^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$ implica em $J_{10}(J_{00}^{(0)})^+ = (J_{00}^{(0)})^+ J_{01} = 0$.

Finalizamos a prova, observando que o mesmo raciocínio acima garante que se $M_{8,2}^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, então $J_{10}^{(1)}(J_{00}^{(1)})^+ = (J_{00}^{(1)})^+ J_{01}^{(1)} = 0$ e que se $M_{8,3}^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, então $J_{10}^{(0)}(J_{00}^{(1)})^+ = (J_{00}^{(1)})^+ J_{01}^{(0)} = 0$. $\square$

Lema 3.9. *Se $M_{9,*},\ M_{9,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{9,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{9,3}^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, então $J_{10}J_{00}^- = J_{00}^-J_{01} = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que $J_{10}^{(0)}(J_{00}^{(0)})^- \neq 0$ e sejam $a \in J_{10}^{(0)}$ e $b \in (J_{00}^{(0)})^-$ tais que $ab \neq 0$. Consideremos B a subálgebra $*$-graduada de A gerada, como álgebra, por $1_F,\ a,\ a^*,\ b$ e I o ideal $*$-graduado gerado por $aa^*,\ a^*a,\ b^2,\ aba^*$. Afirmamos que a $*$-superálgebra $\overline{B} = B/I = \mathrm{span}_F\{\overline{1_F},\ \overline{a},\ \overline{a^*},\ \overline{b},\ \overline{ab},\ \overline{ba^*}\}$ é isomorfa a $M_{9,*}$. De fato, defina $\varphi : \overline{B} \to M_{9,*}$ de tal modo que

$$\overline{1_F} \mapsto e_{11} + e_{66}, \quad \overline{a} \mapsto e_{12}, \quad \overline{a^*} \mapsto e_{56}, \quad \overline{b} \mapsto e_{23} - e_{45}, \quad \overline{ab} \mapsto e_{13}, \quad \overline{ba^*} \mapsto -e_{46}. \quad (3.1.2)$$

Não é difícil verificar que φ é um isomorfismo de $*$-superálgebras e, portanto, $M_{9,*} \in \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$. Isso mostra que se $M_{9,*} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, então $J_{10}^{(0)}(J_{00}^{(0)})^- = (J_{00}^{(0)})^- J_{01}^{(0)} = 0$.

Analogamente, suponhamos que existam $a \in J_{10}^{(1)}$ e $b \in (J_{00}^{(0)})^-$ tais que $ab \neq 0$. Sejam B' a subálgebra $*$-graduada de A gerada, como álgebra, por $1_F,\ a,\ a^*,\ b$ e I' o ideal $*$-graduado gerado por $aa^*,\ a^*a,\ b^2,\ aba^*$. Considerando o isomorfismo de $*$-superálgebras $\varphi' : B'/I' \to M_{9,1}^{\mathrm{gri}}$ definido como em (3.1.2), concluímos que $M_{9,1}^{\mathrm{gri}} \in \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$. Por isso, se $M_{9,1}^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, então $J_{10}^{(1)}(J_{00}^{(0)})^- = (J_{00}^{(0)})^- J_{01}^{(1)} = 0$. Assim, temos que $M_{9,*}$, $M_{9,1}^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$ implica em $J_{10}(J_{00}^{(0)})^- = (J_{00}^{(0)})^- J_{01} = 0$.

Por fim, observamos que ao empregarmos a mesma estratégia acima, obtemos que se $M_{9,2}^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, então $J_{10}^{(1)}(J_{00}^{(1)})^- = (J_{00}^{(1)})^- J_{01}^{(1)} = 0$ e que se $M_{9,3}^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, então $J_{10}^{(0)}(J_{00}^{(1)})^- = (J_{00}^{(1)})^- J_{01}^{(0)} = 0$ e finalizamos a prova. $\square$

Coletando as informações dos dois últimos lemas, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.10. *Se $M_{8,*}$, $M_{8,1}^{\text{gri}}$, $M_{8,2}^{\text{gri}}$, $M_{8,3}^{\text{gri}}$, $M_{9,*}$, $M_{9,1}^{\text{gri}}$, $M_{9,2}^{\text{gri}}$, $M_{9,3}^{\text{gri}}$ $\notin$ $\text{var}^{\text{gri}}(A)$, então $J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = 0$.*

Destacamos que, sob as condições dos Corolários 3.7 e 3.10, segue que em A temos $J_{01}J_{10} = J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = 0$. Consequentemente, temos que A pode ser escrita como uma soma direta de álgebras da forma

$$A = (F + J_{11} + J_{10} + J_{01}) \oplus J_{00},$$

onde $B = F + J_{11} + J_{10} + J_{01}$ é uma subálgebra $*$-graduada de A e J_{00} é uma $*$-superálgebra nilpotente. Esse fato explicará nosso interesse nas $*$-superálgebras de dimensão finita do tipo $F + J_{11} + J_{10} + J_{01}$ na próxima seção.

Lema 3.11.

(1) *Se $M_{10,*}$ $M_{10,2}^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(A)$, então $J_{01}(J_{11}^{(0)})^- = (J_{11}^{(0)})^- J_{10} = 0$.*

(2) *Se $M_{10,1}^{\text{gri}}$, $M_{10,3}^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(A)$, então $J_{01}(J_{11}^{(1)})^- = (J_{11}^{(1)})^- J_{10} = 0$.*

(3) *Se $M_{11,1}^{\text{gri}}$, $M_{11,2}^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(A)$, então $J_{01}(J_{11}^{(1)})^+ = (J_{11}^{(1)})^+ J_{10} = 0$.*

Demonstração. Provaremos apenas os itens (1) e (3), pois o item (2) pode ser provado usando um raciocínio análogo.

(1) Suponhamos que $J_{01}^{(0)}(J_{11}^{(0)})^- \neq 0$ e sejam $a \in J_{01}^{(0)}$ e $b \in (J_{11}^{(0)})^-$ tais que $ab \neq 0$. Agora, sejam B a subálgebra $*$-graduada de A gerada, como álgebra, por 1_F, a, a^*, b e I o ideal $*$-graduado gerado por aa^*, a^*a, b^2, aba^*. Verificamos que a $*$-superálgebra

$$\overline{B} = B/I = \text{span}_F\{\overline{1_F},\ \overline{a},\ \overline{a^*},\ \overline{b},\ \overline{ab},\ \overline{ba^*}\}$$

é isomorfa a $M_{10,*}$ através do isomorfismo $\varphi : \overline{B} \to M_{10,*}$ de $*$-superálgebras, definido de tal modo que

$$\overline{1_F} \mapsto e_{11} + e_{22} + e_{55} + e_{66},\quad \overline{a} \mapsto e_{45},\quad \overline{a^*} \mapsto e_{23},\quad \overline{b} \mapsto e_{12} - e_{56},\quad \overline{ab} \mapsto -e_{46},\quad \overline{ba^*} \mapsto e_{13}. \tag{3.1.3}$$

Por isso, $M_{10,*} \in \text{var}^{\text{gri}}(A)$. Isso mostra que se $M_{10,*} \notin \text{var}^{\text{gri}}(A)$, então $J_{01}^{(0)}(J_{11}^{(0)})^- = (J_{11}^{(0)})^- J_{10}^{(0)} = 0$.

Agora, suponhamos que existam $a \in J_{01}^{(1)}$ e $b \in (J_{11}^{(0)})^-$ tais que $ab \neq 0$. Como no caso anterior, podemos definir a subálgebra $*$-graduada B' gerada, como álgebra, por 1_F, a, a^*, b e o ideal $*$-graduado I' gerado por aa^*, a^*a, b^2, aba^*. Assim, considerando a $*$-superálgebra $B'/I' = \text{span}_F\{\overline{1_F},\ \overline{a},\ \overline{a^*},\ \overline{b},\ \overline{ab},\ \overline{ba^*}\}$ e definindo o isomorfismo $\varphi' : \overline{B}' \to M_{10,2}^{\text{gri}}$ de $*$-superálgebras como em (3.1.3), verificamos que $M_{10,2}^{\text{gri}} \in \text{var}^{\text{gri}}(A)$. Concluímos que se $M_{10,2}^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(A)$, então $J_{01}^{(1)}(J_{11}^{(0)})^- = (J_{11}^{(0)})^- J_{10}^{(1)} = 0$.

(3) Procedendo como no item acima, suponhamos que existam $a \in J_{01}^{(0)}$ e $b \in (J_{11}^{(1)})^{+}$ tais que $ab \neq 0$. Sejam B'' a subálgebra $*$-graduada de A gerada, como álgebra, por 1_F, a, a^*, b e I'' o ideal $*$-graduado gerado por aa^*, a^*a, b^2, aba^*. Afirmamos que a $*$-superálgebra $B''/I'' = \text{span}_F\{\overline{1_F},\ \overline{a},\ \overline{a^*},\ \overline{b},\ \overline{ab},\ \overline{ba^*}\}$ é isomorfa a $M_{11,1}^{\text{gri}}$. De fato, definindo $\psi : B''/I'' \to M_{11,1}^{\text{gri}}$ de tal modo que

$$\overline{1_F} \mapsto e_{11} + e_{22} + e_{55} + e_{66}, \quad \overline{a} \mapsto e_{45}, \quad \overline{a^*} \mapsto e_{23}, \quad \overline{b} \mapsto e_{12} + e_{56}, \quad \overline{ab} \mapsto e_{46}, \quad \overline{ba^*} \mapsto e_{13},$$

verificamos que ψ é um isomorfismo de $*$-superálgebras. Por isso, $M_{11,1}^{\text{gri}} \in \text{var}^{\text{gri}}(A)$. Isso garante que se $M_{11,1}^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(A)$, então $J_{01}^{(0)}(J_{11}^{(1)})^{+} = (J_{11}^{(1)})^{+}J_{10}^{(0)} = 0$.

Da mesma forma, se $J_{01}^{(1)}(J_{11}^{(1)})^{+} \neq 0$ podemos construir uma $*$-superálgebra isomorfa a $M_{11,2}^{\text{gri}}$. Portanto, ao excluirmos $M_{11,2}^{\text{gri}}$ de $\text{var}^{\text{gri}}(A)$, obtemos que $J_{01}^{(1)}(J_{11}^{(1)})^{+} = (J_{11}^{(1)})^{+}J_{10}^{(1)} = 0$. Com isso, finalizamos a prova do item (3). $\square$

Como consequência do lema anterior, obtemos o seguinte.

Corolário 3.12. *Se* $M_{10,*}$, $M_{10,1}^{\text{gri}}$, $M_{10,2}^{\text{gri}}$, $M_{10,3}^{\text{gri}}$, $M_{11,1}^{\text{gri}}$, $M_{11,2}^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(A)$, *então* $J_{01}(J_{11}^{(1)})^{+} = J_{01}(J_{11}^{(0)})^{-} = J_{01}(J_{11}^{(1)})^{-} = (J_{11}^{(1)})^{+}J_{10} = (J_{11}^{(0)})^{-}J_{10} = (J_{11}^{(1)})^{-}J_{10} = 0$.

3.2 $*$-Superálgebras com decomposições particulares

Nesta seção estaremos interessados em $*$-superálgebras de dimensão finita do tipo $F + J$ cujo radical $J \neq 0$ assume decomposições específicas. Consideremos $A = F + J$ uma $*$-superálgebra de dimensão finita tal que $J_{01}J_{10} = 0$. Então $B = F + J_{01} + J_{10} + J_{11}$ é uma subálgebra $*$-graduada de A e, desde que $J_{10} = 0$ se, e somente se, $J_{01} = 0$, neste caso, as seguintes situações são possíveis.

Caso (1): $J_{11} \neq 0$ e $J_{10} = 0$, isto é, $B = F + J_{11}$.

Caso (2): $J_{11} = 0$ e $J_{10} \neq 0$, isto é, $B = F + J_{01} + J_{10}$.

Caso (3): $J_{11} \neq 0$ e $J_{10} \neq 0$.

Analisaremos algumas propriedades satisfeitas pelas $*$-superálgebras dos tipos acima. Mais especificamente, estudaremos sob quais condições tais $*$-superálgebras são T_2^*-equivalentes a $*$-superálgebras de crescimento no máximo linear. Essa análise será essencial para classificarmos as $*$-superálgebras minimais de crescimento quadrático na próxima seção.

Primeiro, nos concentraremos em lemas que trazem informações a respeito das $*$-superálgebras no *Caso* (1), ou seja, consideraremos $B = F + J_{11}$, com $J_{11} \neq 0$.

Lema 3.13.

(1) [35, Lema 8.4] *Se* $G_{2,0,\tau}$, $G_{2,1,\tau}$, $G_{2,1,\psi} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B)$, *então* $[z_{1,0}, z_{2,0}] \equiv 0$, $[z_{1,1}, z_{2,1}] \equiv 0$ *e* $[y_{1,1}, y_{2,1}] \equiv 0$ *em* B.

(2) [35, Lema 8.2] *Se* $C_{3,*}$, C_3^{gr}, $C_3^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B)$, *então* $z_{1,0}^2 \equiv 0$, $y_{1,1}^2 \equiv 0$ *e* $z_{1,1}^2 \equiv 0$ *em* B.

Como consequência do lema acima, temos o seguinte.

Corolário 3.14. *Se* $G_{2,0,\tau}$, $G_{2,1,\tau}$, $G_{2,1,\psi}$, $C_{3,*}$, C_3^{gr}, $C_3^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B)$, *então* $(J_{11}^{(1)})^+(J_{11}^{(1)})^+ = (J_{11}^{(0)})^-(J_{11}^{(0)})^- = (J_{11}^{(1)})^-(J_{11}^{(1)})^- = 0$.

Demonstração. Primeiramente, desde que $G_{2,0,\tau}$, $G_{2,1,\tau}$, $G_{2,1,\psi} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B)$, segue do item (1) do Lema 3.13 que

$$[y_{1,1}, y_{2,1}] \equiv 0, \quad [z_{1,0}, z_{2,0}] \equiv 0, \quad [z_{1,1}, z_{2,1}] \equiv 0 \tag{3.2.1}$$

em B. Além disso, como $C_{3,*}$, C_3^{gr}, $C_3^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B)$, pelo item (2) do Lema 3.13, temos $z_{1,0}^2 \equiv 0$, $y_{1,1}^2 \equiv 0$ e $z_{1,1}^2 \equiv 0$ em B. Ao linearizarmos esses polinômios, obtemos que $z_{1,0} \circ z_{2,0} \equiv 0$, $y_{1,1} \circ y_{2,1} \equiv 0$ e $z_{1,1} \circ z_{2,1} \equiv 0$ em B, respectivamente. Mas, desde que B já satisfaz as identidades em (3.2.1), segue que $z_{1,0}z_{2,0}$, $y_{1,1}y_{2,1}$, $z_{1,1}z_{2,1}$ são $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades para B. Note que isso é o mesmo que dizer que $(J_{11}^{(0)})^-(J_{11}^{(0)})^- = (J_{11}^{(1)})^+(J_{11}^{(1)})^+ = (J_{11}^{(1)})^-(J_{11}^{(1)})^- = 0$, respectivamente. $\square$

Lema 3.15. [35, Lema 8.5] *Se* $G_{2,1,\rho}$, $G_{2,2,\rho}$, $G_{2,2,\tau} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B)$, *então* $(J_{11}^{(1)})^+(J_{11}^{(1)})^- = (J_{11}^{(1)})^-(J_{11}^{(1)})^+ = (J_{11}^{(0)})^-(J_{11}^{(1)})^+ = (J_{11}^{(1)})^+(J_{11}^{(0)})^- = (J_{11}^{(0)})^-(J_{11}^{(1)})^- = (J_{11}^{(1)})^-(J_{11}^{(0)})^- = 0$.

Lema 3.16.

(1) *Se* $N_{3,*}$, $N_3^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B)$, *então* $(J_{11}^{(0)})^+J_{11}^- = J_{11}^-(J_{11}^{(0)})^+ = 0$.

(2) *Se* $U_{3,*}$, $U_3^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B)$, *então* $(J_{11}^{(0)})^+J_{11}^+ = J_{11}^+(J_{11}^{(0)})^+ = 0$.

Demonstração. (1) Suponhamos que $(J_{11}^{(0)})^+(J_{11}^{(0)})^- \neq 0$. Sejam $a \in (J_{11}^{(0)})^+$ e $b \in (J_{11}^{(0)})^-$ tais que $ab \neq 0$. Note que $ba \neq 0$. Seja R a subálgebra $*$-graduada de B gerada, como álgebra, por 1_F, a, b. Considerando I o ideal $*$-graduado gerado por a^2, b^2, aba, bab, obtemos a seguinte $*$-superálgebra com graduação trivial

$$R/I = \mathrm{span}_F\{\overline{1_F},\ \overline{a},\ \overline{b},\ \overline{a}\circ\overline{b},\ [\overline{a},\overline{b}]\}.$$

Note que $\overline{a}\circ\overline{b}$ é um elemento antissimétrico e $[\overline{a},\overline{b}]$ é um elemento simétrico. Afirmamos que R/I é isomorfa a $N_{3,*}$. De fato, para ver isto, defina $\varphi : R/I \to N_{3,*}$ de tal modo que

$$\overline{1_F} \mapsto e_{11}+e_{22}+e_{33}+e_{44}+e_{55}+e_{66}, \quad \overline{a} \mapsto e_{23}+e_{45}, \quad \overline{b} \mapsto e_{12}-e_{56}, \quad \overline{a}\circ\overline{b} \mapsto e_{13}-e_{46},$$
$$[\overline{a},\overline{b}] \mapsto -(e_{13}+e_{46}). \tag{3.2.2}$$

Não é difícil verificar que φ é um isomorfismo de $*$-superálgebras e, portanto, $N_{3,*} \in \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B)$. Com isso, mostramos que se $N_{3,*} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B)$, então $(J_{11}^{(0)})^+(J_{11}^{(0)})^- = (J_{11}^{(0)})^-(J_{11}^{(0)})^+ = 0$.

Analogamente, suponhamos que $(J_{11}^{(0)})^+(J_{11}^{(1)})^- \neq 0$ e sejam $a \in (J_{11}^{(0)})^+$ e $b \in (J_{11}^{(1)})^-$ tais que $ab \neq 0$. Seguindo os passos feitos acima, podemos construir a $*$-superálgebra R' gerada, como álgebra, por 1_F, a, b e o ideal $*$-graduado I' gerado por a^2, b^2, aba, bab. Neste caso, temos que a $*$-superálgebra $\overline{R} = R'/I' = \mathrm{span}_F\{\overline{1_F},\ \overline{a},\ \overline{b},\ \overline{a} \circ \overline{b},\ [\overline{a}, \overline{b}]\}$ é tal que

$$(\overline{R}^{(0)})^+ = \mathrm{span}_F\{\overline{1_F}, \overline{a}\},\quad (\overline{R}^{(1)})^+ = \mathrm{span}_F\{[\overline{a}, \overline{b}]\},\ (\overline{R}^{(1)})^- = \mathrm{span}_F\{\overline{b}, \overline{a} \circ \overline{b}\},$$
$$(\overline{R}^{(0)})^- = 0.$$

Verificamos que $\overline{R}$ é isomorfa a N_3^{gri} ao definirmos o isomorfismo $\varphi' : \overline{R} \to N_3^{\mathrm{gri}}$ de $*$-superálgebras como em (3.2.2) e concluímos que $N_3^{\mathrm{gri}} \in \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B)$. O que fizemos garante que se $N_3^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B)$, então $(J_{11}^{(0)})^+(J_{11}^{(1)})^- = (J_{11}^{(1)})^-(J_{11}^{(0)})^+ = 0$ e o item (1) está provado.

(2) Suponhamos que $(J_{11}^{(0)})^+(J_{11}^{(0)})^+ \neq 0$ e sejam $a,\ b \in (J_{11}^{(0)})^+$ tais que $ab \neq 0$. Observe que também temos $ba \neq 0$. Seja S a subálgebra $*$-graduada de B gerada, como álgebra, por 1_F, a, b. Considerando I'' o ideal $*$-graduado gerado por a^2, b^2, aba, bab, obtemos a $*$-superálgebra $S/I'' = \mathrm{span}_F\{\overline{1_F},\ \overline{a},\ \overline{b},\ \overline{a} \circ \overline{b},\ [\overline{a}, \overline{b}]\}$ com graduação trivial.

Neste caso, note que $\overline{a} \circ \overline{b}$ é um elemento simétrico e $[\overline{a}, \overline{b}]$ é um elemento antissimétrico. Afirmamos que S/I'' é isomorfa a $U_{3,*}$. De fato, basta definir $\psi : S/I'' \to U_{3,*}$ de tal modo que

$$\overline{1_F} \mapsto e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44} + e_{55} + e_{66},\quad \overline{a} \mapsto e_{12} + e_{56},\quad \overline{b} \mapsto e_{23} + e_{45},\quad \overline{a} \circ \overline{b} \mapsto e_{13} + e_{46},$$
$$[\overline{a}, \overline{b}] \mapsto e_{13} - e_{46}.$$

Não é difícil confirmar que ψ é um isomorfismo de $*$-superálgebras e, por isso, $U_{3,*} \in \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B)$. O que fizemos acima, mostra que se $U_{3,*} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B)$, então $(J_{11}^{(0)})^+(J_{11}^{(0)})^+ = 0$.

Por fim, suponhamos que $(J_{11}^{(0)})^+(J_{11}^{(1)})^+ \neq 0$ e sejam $a \in (J_{11}^{(0)})^+$ e $b \in (J_{11}^{(1)})^+$ tais que $ab \neq 0$. Fazendo os mesmos passos do caso acima, obtemos a $*$-superálgebra $\overline{S} = \mathrm{span}_F\{\overline{1_F},\ \overline{a},\ \overline{b},\ \overline{a} \circ \overline{b},\ [\overline{a}, \overline{b}]\}$ tal que

$$(\overline{S}^{(0)})^+ = \mathrm{span}_F\{\overline{1_F}, \overline{a}\},\ (\overline{S}^{(1)})^+ = \mathrm{span}_F\{\overline{b}, \overline{a} \circ \overline{b}\},\ (\overline{S}^{(1)})^- = \mathrm{span}_F\{[\overline{a}, \overline{b}]\},$$
$$(\overline{S}^{(0)})^- = 0.$$

Neste caso, temos que $\overline{S}$ é isomorfa a U_3^{gri}. De fato, defina $\psi' : \overline{S} \to U_3^{\mathrm{gri}}$ de tal modo que

$$\overline{1_F} \mapsto e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44} + e_{55} + e_{66},\quad \overline{a} \mapsto e_{23} + e_{45},\quad \overline{b} \mapsto e_{12} + e_{56},\quad \overline{a} \circ \overline{b} \mapsto e_{13} + e_{46},$$
$$[\overline{a}, \overline{b}] \mapsto -(e_{13} - e_{46}).$$

Não é difícil verificar que ψ' é um isomorfismo de $*$-superálgebras. Por isso, $U_3^{\text{gri}} \in \text{var}^{\text{gri}}(B)$. Com isso, concluímos que se $U_3^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(B)$, então $\left(J_{11}^{(0)}\right)^+\left(J_{11}^{(1)}\right)^+ = \left(J_{11}^{(1)}\right)^+\left(J_{11}^{(0)}\right)^+ = 0$ e finalizamos a prova do item (2). $\square$

Corolário 3.17. *Se $N_{3,*}$, $U_{3,*}$, N_3^{gri}, $U_3^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(B)$, então $\left(J_{11}^{(0)}\right)^+ J_{11} = J_{11}\left(J_{11}^{(0)}\right)^+ = 0$.*

Lema 3.18. *Se $C_{3,*}$, C_3^{gr}, C_3^{gri}, $N_{3,*}$, N_3^{gri}, $U_{3,*}$, U_3^{gri}, $G_{2,1,\rho}$, $G_{2,2,\rho}$, $G_{2,0,\tau}$, $G_{2,1,\tau}$, $G_{2,2,\tau}$, $G_{2,1,\psi} \notin \text{var}^{\text{gri}}(B)$, então $J_{11}^2 = 0$.*

Demonstração. Primeiramente, note que como $N_{3,*}$, N_3^{gri}, $U_{3,*}$, $U_3^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(B)$, então pelo Corolário 3.17, já temos $\left(J_{11}^{(0)}\right)^+ J_{11} = J_{11}\left(J_{11}^{(0)}\right)^+ = 0$.

Agora, usando que $G_{2,0,\tau}$, $G_{2,1,\tau}$, $G_{2,1,\psi}$, $C_{3,*}$, C_3^{gr}, $C_3^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(B)$, concluímos pelo Corolário 3.14 que $\left(J_{11}^{(1)}\right)^+\left(J_{11}^{(1)}\right)^+ = \left(J_{11}^{(0)}\right)^-\left(J_{11}^{(0)}\right)^- = \left(J_{11}^{(1)}\right)^-\left(J_{11}^{(1)}\right)^- = 0$.

Finalmente, desde que $G_{2,1,\rho}$, $G_{2,2,\rho}$, $G_{2,2,\tau} \notin \text{var}^{\text{gri}}(B)$, obtemos, pelo Lema 3.15, que $\left(J_{11}^{(1)}\right)^+\left(J_{11}^{(1)}\right)^- = \left(J_{11}^{(0)}\right)^-\left(J_{11}^{(1)}\right)^+ = \left(J_{11}^{(0)}\right)^-\left(J_{11}^{(1)}\right)^- = \left(J_{11}^{(1)}\right)^-\left(J_{11}^{(1)}\right)^+ = \left(J_{11}^{(1)}\right)^+\left(J_{11}^{(0)}\right)^- = \left(J_{11}^{(1)}\right)^-\left(J_{11}^{(0)}\right)^- = 0$.

Os produtos nulos acima implicam que $J_{11}^2 = 0$ em B. $\square$

Lema 3.19. [35, Lema 8.7] *Se $B \in \text{var}^{\text{gri}}(D_* \oplus D^{\text{gr}} \oplus D^{\text{gri}})$, então $B \sim_{T_2^*} B_1 \oplus B_2 \oplus B_3$, onde $B_1 \in \text{var}^{\text{gri}}(D_*)$, $B_2 \in \text{var}^{\text{gri}}(D^{\text{gr}})$, $B_3 \in \text{var}^{\text{gri}}(D^{\text{gri}})$.*

Lema 3.20. *Seja $B = F + J_{11}$ uma $*$-superálgebra de dimensão finita. Se $J_{11}^2 = 0$, então ou*

$$B \sim_{T_2^*} C \quad ou \quad B \sim_{T_2^*} C_2^{\text{gri}} \quad ou \quad B \sim_{T_2^*} C_2^{\text{gr}} \quad ou \quad B \sim_{T_2^*} C_{2,*} \quad ou \quad B \sim_{T_2^*} C_2^{\text{gri}} \oplus C_2^{\text{gr}}$$
$$ou \quad B \sim_{T_2^*} C_2^{\text{gri}} \oplus C_{2,*} \quad ou \quad B \sim_{T_2^*} C_2^{\text{gr}} \oplus C_{2,*} \quad ou \quad B \sim_{T_2^*} C_2^{\text{gri}} \oplus C_{2,*} \oplus C_2^{\text{gr}},$$

onde C é uma $*$-superálgebra comutativa com graduação trivial e involução trivial.

Demonstração. Por hipótese, temos $J_{11}^2 = 0$, donde segue que B é uma $*$-superálgebra comutativa satisfazendo as seguintes $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades

$$[y_{1,0}, y_{2,0}], \quad [y_{1,0}, y_{2,1}], \quad [y_{1,0}, z_{2,0}], \quad [y_{1,0}, z_{2,1}], \quad z_{1,0}z_{2,0}, \quad z_{1,0}x_{2,1}, \quad x_{1,1}x_{2,1},$$

onde $x_i = y_i$ ou $x_i = z_i$, para $i = 1, 2$. Considerando $\mathcal{S} = D_* \oplus D^{\text{gr}} \oplus D^{\text{gri}}$, por [35, Lema 7.5], temos que

$$\begin{aligned}\text{Id}^{\text{gri}}(\mathcal{S}) = &\langle z_{1,0}y_{2,1}, \ z_{1,0}z_{2,1}, y_{1,1}z_{2,1}, [y_{1,0}, y_{2,0}], \ [y_{1,0}, y_{2,1}], \ [y_{1,0}, z_{2,0}], \ [y_{1,0}, z_{2,1}], [y_{1,1}, y_{2,1}],\\ &[z_{1,0}, z_{2,0}], \ [z_{1,1}, z_{2,1}]\rangle_{T_2^*}.\end{aligned}$$

Daí segue que $B \in \text{var}^{\text{gri}}(\mathcal{S})$ e, assim, pelo Lema 3.19, temos $B \sim_{T_2^*} B_1 \oplus B_2 \oplus B_3$, onde $B_1 \in \text{var}^{\text{gri}}(D_*)$, $B_2 \in \text{var}^{\text{gri}}(D^{\text{gr}})$, $B_3 \in \text{var}^{\text{gri}}(D^{\text{gri}})$.

Por fim, observe que pela Proposição 2.7 a $*$-superálgebra B tem crescimento no máximo linear da sequência de codimensões $*$-graduadas e, consequentemente, B_1, B_2 e B_3 têm crescimento no máximo linear. Logo, as classificações das subvariedades de $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(D_*)$, $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(D^{\mathrm{gr}})$ e de $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(D^{\mathrm{gri}})$ dadas em [31], [30], [20], respectivamente, nos permitem concluir que B é T_2^*-equivalente ou a C ou C_2^{gri} ou C_2^{gr} ou $C_{2,*}$ ou $C_2^{\mathrm{gri}} \oplus C_2^{\mathrm{gr}}$ ou $C_2^{\mathrm{gri}} \oplus C_{2,*}$ ou $C_2^{\mathrm{gr}} \oplus C_{2,*}$ ou $C_2^{\mathrm{gri}} \oplus C_{2,*} \oplus C_2^{\mathrm{gr}}$, onde C é uma $*$-superálgebra comutativa com graduação trivial e involução trivial. $\square$

Nos próximos resultados trataremos das $*$-superálgebras no *Caso* (2), ou seja, consideraremos $B = F + J_{10} + J_{01}$, com $J_{10} \neq 0$.

Lema 3.21. *Seja $B = F + J_{10} + J_{01}$, com $J_{10} \neq 0$. Então*

$$B \sim_{T_2^*} (F + (J_{01} + J_{10})^{(0)}) \oplus (F + (J_{01} + J_{10})^{(1)}).$$

Demonstração. Por hipótese $J_{01}J_{10} = J_{10}J_{01} = 0$ e, portanto, $(J_{01} + J_{10})^2 = 0$. Por isso, $B_1 = F + (J_{01} + J_{10})^{(0)}$ e $B_2 = F + (J_{01} + J_{10})^{(1)}$ são subálgebras $*$-graduadas de B e, consequentemente,

$$\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B) \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B_1 \oplus B_2).$$

Agora, seja $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B_1 \oplus B_2)$ um $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômio multilinear de grau n. Vamos mostrar que $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$. Para tanto, considere β uma base $*$-graduada de B, união de $\{1_F\}$ com uma base $*$-graduada de $J_{01}+J_{10}$. Como f é multilinear, é suficiente avaliarmos f nos elementos de β. Como $(J_{01}+J_{10})^2 = 0$, qualquer avaliação com mais de um elemento de $J_{01} + J_{10}$ é nula. Com isso, para obtermos uma avaliação não nula, devemos avaliar f em 1_F e em no máximo um elemento de $J_{01} + J_{10}$. Logo, f é avaliado em elementos de B_1 ou B_2. Mas como $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B_1 \oplus B_2)$, obtemos que $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$. $\square$

A seguir, classificaremos, a menos de T_2^*-equivalência, as $*$-superálgebras $F + (J_{01} + J_{10})^{(0)}$ e $F + (J_{01} + J_{10})^{(1)}$ consideradas acima. Antes, precisaremos de seguinte resultado.

Lema 3.22. [35, Lema 8.1] *Seja $A = F + J$ uma $*$-superálgebra de dimensão finita.*

(1) *Se $A_{2,*} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, então $J_{10}^{(0)} = J_{01}^{(0)} = 0$.*

(2) *Se $A_2^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, então $J_{10}^{(1)} = J_{01}^{(1)} = 0$.*

Lema 3.23. *Seja $B = F + J_{10} + J_{01}$, com $J_{10} \neq 0$.*

(1) *Se $J_{10}^{(0)} \neq 0$, então $B_1 = F + (J_{01} + J_{10})^{(0)} \sim_{T_2^*} A_{2,*}$.*

(2) *Se $J_{10}^{(1)} \neq 0$, então $B_2 = F + (J_{01} + J_{10})^{(1)} \sim_{T_2^*} A_2^{\mathrm{gri}}$.*

Demonstração. (1) Se $J_{10}^{(0)} \neq 0$, pelo Lema 3.22, temos que $A_{2,*} \in \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(B_1)$ e, assim, $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B_1) \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A_{2,*})$. Por outro lado, desde que $(J_{01}+J_{10})^2 = 0$ e usando o Lema 3.2 e a Observação 1.31 não é difícil verificar que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A_{2,*}) \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B_1)$ e, por isso, $B_1 \sim_{T_2^*} A_{2,*}$.

(2) Se $J_{10}^{(1)} \neq 0$, usando novamente o Lema 3.22, obtemos que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B_2) \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A_2^{\mathrm{gri}})$. Argumentos análogos ao do item anterior nos permitem concluir que $B_2 \sim_{T_2^*} A_2^{\mathrm{gri}}$. $\square$

Corolário 3.24. *Seja $B = F + J_{01} + J_{10}$ uma $*$-superálgebra de dimensão finita com $J_{10} \neq 0$. Então*

$$B \sim_{T_2^*} A_{2,*} \quad ou \quad B \sim_{T_2^*} A_2^{\mathrm{gri}} \quad ou \quad B \sim_{T_2^*} A_{2,*} \oplus A_2^{\mathrm{gri}}.$$

Como consequência do que mostramos acima, concluímos que toda $*$-superálgebra de dimensão finita do tipo $F + J_{10} + J_{01}$ tem crescimento linear da sequência de codimensões $*$-graduadas.

Finalmente, nos próximos resultados consideraremos as $*$-superálgebras no *Caso* (3), isto é, $B = F + J_{11} + J_{10} + J_{01}$, com $J_{11} \neq 0$ e $J_{10} \neq 0$.

Antes de estudarmos as propriedades das $*$-superálgebras do tipo $F + J_{11} + J_{10} + J_{01}$, precisaremos do seguinte lema que foi obtido a partir das ideias usadas em [33, Lema 3.8].

Lema 3.25. *Seja $I = \langle [y_{1,0}, y_{2,0}][y_{3,0}, y_{4,0}],\ y_{1,0}[y_{2,0}, y_{3,0}]y_{4,0},\ St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0})\rangle_{T_2^*}$ e considere f um $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômio multilinear de grau n em variáveis simétricas pares, com $n \neq 2$. Então f pode ser escrito, módulo I, como combinação linear de polinômios dos tipos*

$$y_{1,0} \cdots y_{n,0}, \qquad [y_{j,0}, y_{1,0}]y_{2,0} \cdots \widehat{y_{j,0}} \cdots y_{n,0} \qquad e \qquad y_{2,0} \cdots \widehat{y_{k,0}} \cdots y_{n,0}[y_{k,0}, y_{1,0}],$$

onde o símbolo $\widehat{y_{r,0}}$ significa que a variável $y_{r,0}$ foi omitida.

Demonstração. Desde que $f \in P_{n,0,0,0}$, pelo Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, sabemos que todo monômio em $y_{1,0}, \ldots, y_{n,0}$ pode ser escrito como uma combinação linear de produtos dos tipos

$$y_{i_1,0} \cdots y_{i_s,0} w_1 \cdots w_m, \tag{3.2.3}$$

onde $i_1 < \ldots < i_s$ e $w_1, \ldots, w_m$ são comutadores de pesos arbitrários nas variáveis $y_{i,0}'$s. Assim, usando primeiramente que $[y_{1,0}, y_{2,0}][y_{3,0}, y_{4,0}]$, $y_{1,0}[y_{2,0}, y_{3,0}]y_{4,0} \in I$, obtemos que, módulo I, no máximo um comutador pode aparecer em (3.2.3). Isto é, os elementos em (3.2.3), módulo I, são polinômios dos tipos

$$y_{1,0} \cdots y_{n,0} \ \text{ ou } \ y_{i_1,0} \cdots y_{i_s,0}[y_{r,0}, y_{j_1,0}, \ldots, y_{j_t,0}], \tag{3.2.4}$$

com $r > j_1 < \ldots < j_t$. A ordenação das variavéis simétricas pares dentro do comutador em (3.2.4) foi obtida usando a identidade de Jacobi e o fato de que $y_{1,0}[y_{2,0}, y_{3,0}]y_{4,0} \in I$.

Além do mais, usando novamente que $y_{1,0}[y_{2,0},y_{3,0}]y_{4,0}\in I$, temos

$$[y_{r,0},y_{j_1,0},\ldots,y_{j_t,0}]=[y_{r,0},y_{j_1,0}]y_{j_2,0}\cdots y_{j_t,0}\pm y_{j_t,0}\cdots y_{j_2,0}[y_{r,0},y_{j_1,0}]\ (mod\ I).$$

Com isso é possível verificar que, módulo I, todo polinômio em $P_{n,0,0,0}$ pode ser escrito como combinação linear de elementos dos tipos

$$[y_{r,0},y_{1,0}]y_{2,0}\cdots\widehat{y_{r,0}}\cdots y_{n,0},\quad y_{i_1,0}\cdots y_{i_{n-2},0}[y_{i,0},y_{j,0}]\quad \text{e}\quad y_{1,0}\cdots y_{n,0},\tag{3.2.5}$$

com $2\leq r\leq n,\ 1\leq i<j\leq n$.

Note que os elementos do primeiro tipo em (3.2.5) aparecem somente no caso $s=0$ em (3.2.3). Pelo Lema 1.23 item (1), temos que $[y_{1,0},y_{2,0}]m[y_{3,0},y_{4,0}]\in I$, onde m é um monômio em variáveis $y'_{i,0}$s. Portanto, as variáveis fora do comutador nos polinômios do segundo tipo em (3.2.5) podem ser ordenadas. Acrescentamos ainda que como $St_3(y_{1,0},y_{2,0},y_{3,0})\in I$, a relação $y_{1,0}[y_{2,0},y_{3,0}]=y_{2,0}[y_{1,0},y_{3,0}]+y_{3,0}[y_{2,0},y_{1,0}]$ pode ser aplicada para obtermos que os polinômios

$$[y_{j,0},y_{1,0}]y_{2,0}\cdots\widehat{y_{j,0}}\cdots y_{n,0},\quad y_{2,0}\cdots\widehat{y_{k,0}}\cdots y_{n,0}[y_{k,0},y_{1,0}]\quad \text{e}\quad y_{1,0}\cdots y_{n,0},\tag{3.2.6}$$

geram $P_{n,0,0,0}$ módulo $P_{n,0,0,0}\cap I$. Por isso, se $f\in P_{n,0,0,0}$, podemos escrevê-lo, módulo I, como

$$f=\gamma y_{1,0}\cdots y_{n,0}+\sum_{j=2}^{n}\alpha_j[y_{j,0},y_{1,0}]y_{2,0}\cdots\widehat{y_{j,0}}\cdots y_{n,0}+\sum_{k=2}^{n}\beta_k y_{2,0}\cdots\widehat{y_{k,0}}\cdots y_{n,0}[y_{k,0},y_{1,0}].$$

□

Observação 3.26. Nas condições do lema acima, se f é um $(\mathbb{Z}_2,*)$-polinômio multilinear de grau $n=2$ em variáveis simétricas pares, então podemos escrevê-lo, módulo I, como combinação linear dos polinômios $y_{1,0}y_{2,0}$ e $[y_{2,0},y_{1,0}]$.

Lema 3.27. *Seja $B=F+J_{11}+J_{10}+J_{01}$, com $J_{11}\neq 0$ e $J_{10}\neq 0$. Se $J_{11}^2=J_{01}J_{10}=J_{10}J_{01}=(J_{11}^{(0)})^-J_{10}=(J_{11}^{(1)})^+J_{10}=(J_{11}^{(1)})^-J_{10}=J_{01}(J_{11}^{(0)})^-=J_{01}(J_{11}^{(1)})^+=J_{01}(J_{11}^{(1)})^-=0$, então*

$$B\sim_{T_2^*}(F+J_{11})\oplus(F+J_{10}+J_{01}).$$

Demonstração. Por hipótese, $J_{01}J_{10}=J_{10}J_{01}=0$ e, portanto,

$$B_1=F+J_{11}\quad \text{e}\quad B_2=F+J_{10}+J_{01}$$

são subálgebras $*$-graduadas de B. Dessa forma, concluímos que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)\subseteq\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B_1\oplus B_2)$. Vamos mostrar a inclusão inversa. Para tanto, comecemos observando que

$$(B^{(0)})^+=F+(J_{11}^{(0)})^++((J_{10}+J_{01})^{(0)})^+,\qquad (B^{(0)})^-=(J_{11}^{(0)})^-+((J_{10}+J_{01})^{(0)})^-,$$
$$(B^{(1)})^+=(J_{11}^{(1)})^++((J_{10}+J_{01})^{(1)})^+,\qquad (B^{(1)})^-=(J_{11}^{(1)})^-+((J_{10}+J_{01})^{(1)})^-.$$

Note que ao considerarmos os produtos nulos dados por hipótese, a Observação 1.31 e o Lema 1.23, obtemos que os polinômios $z_{1,0}mz_{2,0}$, $x_{1,1}mx_{2,1}$, $z_{1,0}my_{2,1}$, $z_{1,0}mz_{2,1}$, $St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0})$, com $x_i = y_i$ ou $x_i = z_i$, para $i = 1, 2$, onde m é um monômio (eventualmente vazio) em variáveis simétricas pares, são $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades para B. Além disso, desde que $[(B^{(0)})^+, B] \subseteq J_{10} + J_{01}$, segue que $y_{1,0}[y_{2,0}, x_3]y_{4,0}$ também são $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades para B, com $x_3 \in \{y_{3,0}, y_{3,1}, z_{3,0}, z_{3,1}\}$. Por último, também é possível verificar que $y_{1,0}x_3y_{2,0} - y_{2,0}x_3y_{1,0}$ se anula em B, com $x_3 \in \{y_{3,1}, z_{3,0}, z_{3,1}\}$.

Agora, seja $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B_1 \oplus B_2)$ um $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômio multilinear de grau n. Usando que B satisfaz todas as identidades mencionadas acima, pela multihomogeneidade dos T_2^*-ideais, ao reduzirmos f, módulo $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, podemos supor, sem perda de generalidade, que ou

$$f \in P_{n,0,0,0} \text{ ou } f \in P_{n-1,1,0,0} \text{ ou } f \in P_{n-1,0,1,0} \text{ ou } f \in P_{n-1,0,0,1}.$$

Se $f \in P_{n,0,0,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B_1 \oplus B_2)$, com $n \neq 2$, então desde que $z_{1,0}z_{2,0}$, $y_{1,0}[y_{2,0}, y_{3,0}]y_{4,0}$, $St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}) \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, pelo Lema 3.25, podemos escrevê-lo, módulo $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, da forma

$$f = \alpha y_{1,0} \cdots y_{n,0} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j [y_{j,0}, y_{1,0}] y_{2,0} \cdots \widehat{y_{j,0}} \cdots y_{n,0} + \sum_{k=2}^{n} \gamma_k y_{2,0} \cdots \widehat{y_{k,0}} \cdots y_{n,0} [y_{k,0}, y_{1,0}].$$

Em f, fazendo a avaliação $y_{1,0} = \ldots = y_{n,0} = (1_F, 0)$, obtemos $\alpha = 0$. Depois, para j fixo, fazendo $y_{j,0} = (0, a + a^*)$, com $0 \neq a \in J_{10}^{(0)}$, e $y_{l,0} = (0, 1_F)$, para todo $l \neq j$, obtemos que $0 = \beta_j(0, a^*) - \gamma_j(0, a)$ e, portanto, $\beta_j = \gamma_j = 0$. Desde que o mesmo raciocínio pode ser feito para todo j, segue que $\beta_j = \gamma_j = 0$, para todo $2 \leq j \leq n$.

Agora, se $f \in P_{2,0,0,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B_1 \oplus B_2)$ então, pela Observação 3.26, podemos escrevê-lo, módulo $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, da forma

$$f = \alpha y_{1,0} y_{2,0} + \beta [y_{2,0}, y_{1,0}].$$

Neste caso, fazendo primeiro $y_{1,0} = y_{2,0} = (1_F, 0)$ e, depois, $y_{2,0} = (0, a + a^*)$, com $0 \neq a \in J_{10}^{(0)}$, e $y_{1,0} = (0, 1_F)$, obtemos que $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, respectivamente. Por isso, concluímos que $P_{n,0,0,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B_1 \oplus B_2) = P_{n,0,0,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$.

Prosseguindo, se $f \in P_{n-1,1,0,0}$, com $n \neq 2$, podemos escrevê-lo, módulo $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, como

$$f = \alpha y_{n,1} y_{1,0} \cdots y_{n-1,0} + \beta y_{1,0} y_{n,1} y_{2,0} \cdots y_{n-1,0} + \gamma y_{1,0} \cdots y_{n-1,0} y_{n,1},$$

desde que $z_{1,0}my_{2,1}$, $y_{1,0}[y_{2,0}, y_{3,1}]y_{4,0}$ e $y_{1,0}y_{3,1}y_{2,0} - y_{2,0}y_{3,1}y_{1,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, com m um monômio (eventualmente vazio) em variáveis simétricas pares.

Fazendo a avaliação $y_{n,1} = (0, a + a^*)$, com $0 \neq a \in J_{10}^{(1)}$, e $y_{1,0} = \cdots = y_{n-1,0} = (0, 1_F)$, obtemos $0 = \alpha(0, a^*) + \gamma(0, a)$ e, assim, $\alpha = \gamma = 0$. Depois, fazendo $y_{n,1} = (b, 0)$, com $0 \neq b \in {J_{11}^{(1)}}^+$ e $y_{1,0} = \cdots = y_{n-1,0} = (1_F, 0)$, obtemos $\beta = 0$.

Agora, se $f \in P_{1,1,0,0}$, podemos escrevê-lo, módulo $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$, como

$$f = \alpha y_{2,1} y_{1,0} + \beta y_{1,0} y_{2,1}.$$

Neste caso, fazendo $y_{2,1} = (0, a + a^*)$, com $0 \neq a \in J_{10}^{(1)}$, e $y_{1,0} = (0, 1_F)$, obtemos $\alpha = \beta = 0$. Com isso, segue que $P_{n-1,1,0,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B_1 \oplus B_2) = P_{n-1,1,0,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$.

Ao usarmos a mesma estratégia do caso anterior, concluímos que $P_{n-1,0,1,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B_1 \oplus B_2) = P_{n-1,0,1,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ e $P_{n-1,0,0,1} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B_1 \oplus B_2) = P_{n-1,0,0,1} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$.

Os argumentos acima garantem que $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$ e, consequentemente, que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B_1 \oplus B_2) \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(B)$. Portanto, $B \sim_{T_2^*} (F + J_{11}) \oplus (F + J_{10} + J_{01})$, como afirmado. $\square$

No lema anterior, concluímos que $B \sim_{T_2^*} B_1 \oplus B_2$. Observamos que no caso em que $B_1 \sim_{T_2^*} C$, onde C é uma $*$-superálgebra comutativa com graduação trivial e involução trivial, temos $B \sim_{T_2^*} B_2$, desde que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(C) = \langle z_{1,0},\ y_{1,1},\ z_{1,1} \rangle_{T_2^*}$. Essa relação será usada implicitamente no corolário a seguir.

Corolário 3.28. *Seja $B = F + J_{11} + J_{10} + J_{01}$, com $J_{11} \neq 0$ e $J_{10} \neq 0$. Se $J_{11}^2 = J_{01}J_{10} = J_{10}J_{01} = (J_{11}^{(0)})^- J_{10} = (J_{11}^{(1)})^+ J_{10} = (J_{11}^{(1)})^- J_{10} = J_{01}(J_{11}^{(0)})^- = J_{01}(J_{11}^{(1)})^+ = J_{01}(J_{11}^{(1)})^- = 0$, então*

$$B \sim_{T_2^*} B_1 \oplus B_2,$$

com $B_1 \in \{C_{2,*},\ C_2^{\mathrm{gri}},\ C_2^{\mathrm{gr}},\ C_{2,*} \oplus C_2^{\mathrm{gri}},\ C_{2,*} \oplus C_2^{\mathrm{gr}},\ C_2^{\mathrm{gri}} \oplus C_2^{\mathrm{gr}}, C_{2,*} \oplus C_2^{\mathrm{gri}} \oplus C_2^{\mathrm{gr}}\}$ e $B_2 \in \{A_{2,*},\ A_2^{\mathrm{gri}},\ A_2^{\mathrm{gri}} \oplus A_{2,*}\}$.

3.3 Classificação das $*$-supervariedades minimais de crescimento quadrático

Finalmente, usando os resultados desenvolvidos nas seções anteriores, concluíremos que as 36 $*$-superálgebras abaixo formam uma lista completa de $*$-superálgebras que geram, a menos de T_2^*-equivalência, as únicas $*$-supervariedades minimais de crescimento quadrático.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \{\ & G_{2,0,\tau},\ G_{2,1,\tau},\ G_{2,2,\tau},\ G_{2,1,\psi},\ G_{2,1,\rho},\ G_{2,2,\rho},\ C_{3,*},\ C_3^{\mathrm{gri}},\ C_3^{\mathrm{gr}},\ N_{3,*},\ N_3^{\mathrm{gri}},\ U_{3,*},\\ & U_3^{\mathrm{gri}},\ M_{4,*},\ M_4^{\mathrm{gri}},\ M_{5,*},\ M_5^{\mathrm{gri}},\ M_{6,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{6,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{7,*},\ M_{7,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{7,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{8,*},\ M_{8,1}^{\mathrm{gri}},\\ & M_{8,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{8,3}^{\mathrm{gri}},\ M_{9,*},\ M_{9,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{9,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{9,3}^{\mathrm{gri}},\ M_{10,*},\ M_{10,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{10,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{10,3}^{\mathrm{gri}},\ M_{11,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{11,2}^{\mathrm{gri}}\}.\end{aligned}$$

Inicialmente, comprovaremos que as álgebras em $\mathcal{L}$ constituem a menor lista de $*$-superálgebras que devem ser excluídas de uma $*$-supervariedade $\mathcal{V}$ de forma a garantir que $\mathcal{V}$ tem crescimento no máximo linear.

Teorema 3.29. *Para uma $*$-superálgebra A as seguintes condições são equivalentes.*

(1) $\mathcal{B} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$*, para toda $*$-superálgebra $\mathcal{B} \in \mathcal{L}$.*

(2) *Ou $A \sim_{T_2^*} N$ ou $A \sim_{T_2^*} C \oplus N$ ou $A \sim_{T_2^*} B_1 \oplus N$ ou $A \sim_{T_2^*} B_2 \oplus N$ ou $A \sim_{T_2^*} B_1 \oplus B_2 \oplus N$, onde N é uma $*$-superálgebra nilpotente, C é uma $*$-superálgebra comutativa com graduação trivial e involução trivial,*

$B_1 \in \{C_{2,*},\ C_2^{\mathrm{gri}},\ C_2^{\mathrm{gr}},\ C_{2,*} \oplus C_2^{\mathrm{gri}},\ C_{2,*} \oplus C_2^{\mathrm{gr}},\ C_2^{\mathrm{gri}} \oplus C_2^{\mathrm{gr}},\ C_{2,*} \oplus C_2^{\mathrm{gri}} \oplus C_2^{\mathrm{gr}}\}$ *e*

$B_2 \in \{A_{2,*},\ A_2^{\mathrm{gri}},\ A_2^{\mathrm{gri}} \oplus A_{2,*}\}$.

Demonstração. Primeiramente, observamos que todas as $*$-superálgebras em $\mathcal{L}$ tem crescimento quadrático e que pelos Lemas 3.1 e 3.2 e pela Observação 1.29, as $*$-superálgebras listadas em (2) tem crescimento no máximo linear. Assim, é claro que (2) implica (1).

Agora, suponhamos que (1) ocorre. Como $N_{3,*}$, N_3^{gri}, $C_{3,*}$, C_3^{gri}, C_3^{gr} estão em $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(M_*)$, $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(M^{\mathrm{gri}})$, $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(D_*)$, $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(D^{\mathrm{gr}})$, $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(D^{\mathrm{gri}})$, respectivamente, temos que M_*, M^{gri}, D_*, D^{gr}, $D^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$ e, pelo Teorema 1.35, $c_n^{\mathrm{gri}}(A)$ é limitada polinomialmente. Pelo Teorema 1.37, temos

$$A \sim_{T_2^*} \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_m,$$

onde cada $\mathcal{A}_i$ é uma $*$-superálgebra de dimensão finita tal que $\dim_F \frac{\mathcal{A}_i}{J(\mathcal{A}_i)} \leq 1$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Isso significa que para cada i ou $\mathcal{A}_i$ é uma $*$-superálgebra nilpotente ou $\mathcal{A}_i = F + J(\mathcal{A}_i)$. Se $\mathcal{A}_i$ é nilpotente para todo i, então $A \sim_{T_2^*} N$, onde N é uma $*$-superálgebra nilpotente e não há mais o que fazer.

Suponhamos que exista algum $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\mathcal{A}_i = F + J$, com $J = J(\mathcal{A}_i)$. Neste caso, conforme observamos após o Teorema 1.30, segue que $\mathcal{A}_i$ tem uma decomposição do tipo

$$\mathcal{A}_i = F + J_{11} + J_{10} + J_{01} + J_{00}.$$

Desde que $M_{4,*}$, M_4^{gri}, $M_{5,*}$, M_5^{gri}, $M_{7,*}$, $M_{7,1}^{\mathrm{gri}}$, $M_{7,2}^{\mathrm{gri}}$, $M_{8,*}$, $M_{8,1}^{\mathrm{gri}}$, $M_{8,2}^{\mathrm{gri}}$, $M_{8,3}^{\mathrm{gri}}$, $M_{9,*}$, $M_{9,1}^{\mathrm{gri}}$, $M_{9,2}^{\mathrm{gri}}$, $M_{9,3}^{\mathrm{gri}} \notin \mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(A)$, também temos que essas $*$-superálgebras não estão em $\mathrm{var}^{\mathrm{gri}}(\mathcal{A}_i)$. Assim, pelos Corolários 3.7 e 3.10, em $\mathcal{A}_i$ temos

$$J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = J_{01}J_{10} = 0.$$

Com isso, obtemos que $F + J_{01} + J_{10} + J_{11}$ é uma subálgebra $*$-graduada de $\mathcal{A}_i$ e que podemos escrever

$$\mathcal{A}_i = (F + J_{01} + J_{10} + J_{11}) \oplus J_{00}$$

como uma soma direta de álgebras, onde J_{00} é uma $*$-superálgebra nilpotente.

A partir de agora, nos concentraremos em analisar o que ocorre com a $*$-superálgebra $B = F + J_{01} + J_{10} + J_{11}$.

Observe que se $J_{10} = J_{11} = 0$, então $B \sim_{T_2^*} C$, onde C é uma $*$-superálgebra comutativa com graduação trivial e involução trivial. Se $J_{11} = 0$ e $J_{10} \neq 0$ então, pelo Corolário 3.24, temos que ou

$$B \sim_{T_2^*} A_{2,*} \quad \text{ou} \quad B \sim_{T_2^*} A_2^{\text{gri}} \quad \text{ou} \quad B \sim_{T_2^*} A_{2,*} \oplus A_2^{\text{gri}}.$$

Agora, suponhamos $J_{11} \neq 0$. Desde que $C_{3,*}$, C_3^{gr}, C_3^{gri}, $N_{3,*}$, N_3^{gri}, $U_{3,*}$, U_3^{gri}, $G_{2,1,\rho}$, $G_{2,1,\tau}$, $G_{2,1,\psi}$, $G_{2,0,\tau}$, $G_{2,2,\tau}$, $G_{2,2,\rho} \notin \text{var}^{\text{gri}}(B)$, pelo Lema 3.18, temos $J_{11}^2 = 0$. Por isso, se $J_{10} = 0$, pelo Lema 3.20, temos que

$$\begin{aligned} &B \sim_{T_2^*} C \quad \text{ou} \quad B \sim_{T_2^*} C_2^{\text{gri}} \quad \text{ou} \quad B \sim_{T_2^*} C_2^{\text{gr}} \quad \text{ou} \quad B \sim_{T_2^*} C_{2,*} \quad \text{ou} \quad B \sim_{T_2^*} C_2^{\text{gri}} \oplus C_2^{\text{gr}} \\ &\text{ou} \quad B \sim_{T_2^*} C_2^{\text{gri}} \oplus C_{2,*} \quad \text{ou} \quad B \sim_{T_2^*} C_2^{\text{gr}} \oplus C_{2,*} \quad \text{ou} \quad B \sim_{T_2^*} C_2^{\text{gri}} \oplus C_{2,*} \oplus C_2^{\text{gr}}. \end{aligned}$$

Consideremos então o caso $J_{10} \neq 0$ e $J_{11} \neq 0$. Desde que $M_{10,*}$, $M_{10,1}^{\text{gri}}$, $M_{10,2}^{\text{gri}}$, $M_{10,3}^{\text{gri}}$, $M_{11,1}^{\text{gri}}$, $M_{11,2}^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(B)$, pelo Corolário 3.12, segue que

$$J_{01}(J_{11}^{(1)})^{+} = J_{01}(J_{11}^{(0)})^{-} = J_{01}(J_{11}^{(1)})^{-} = (J_{11}^{(1)})^{+} J_{10} = (J_{11}^{(0)})^{-} J_{10} = (J_{11}^{(1)})^{-} J_{10} = 0.$$

Além disso, uma vez que $U_{3,*} \notin \text{var}^{\text{gri}}(B)$, pelo Lema 2.9 temos que $M_{6,*} \notin \text{var}^{\text{gri}}(B)$. Por isso, segue do Corolário 3.6, que como $M_{4,*}$, M_4^{gri}, $M_{5,*}$, M_5^{gri}, $M_{6,*}$, $M_{6,1}^{\text{gri}}$, $M_{6,2}^{\text{gri}} \notin \text{var}^{\text{gri}}(B)$, temos $J_{10}J_{01} = 0$.

Portanto, estamos nas condições do Corolário 3.28 e concluímos que $B \sim_{T_2^*} B_1 \oplus B_2$, onde $B_1 \in \{C_{2,*}, C_2^{\text{gri}}, C_2^{\text{gr}}, C_{2,*} \oplus C_2^{\text{gri}}, C_{2,*} \oplus C_2^{\text{gr}}, C_2^{\text{gri}} \oplus C_2^{\text{gr}}, C_{2,*} \oplus C_2^{\text{gri}} \oplus C_2^{\text{gr}}\}$ e $B_2 \in \{A_{2,*}, A_2^{\text{gri}}, A_2^{\text{gri}} \oplus A_{2,*}\}$.

Por fim, recordando que $A \sim_{T_2^*} \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_m$ e observando que o mesmo raciocínio acima pode ser feito com todas as $*$-superálgebras $\mathcal{A}_i$, ao coletarmos as cópias, obtemos que (2) ocorre e finalizamos a prova. □

Finalmente, estamos prontos para apresentar o principal resultado dessa tese: *a classificação das $*$-supervariedades minimais de crescimento quadrático.*

Teorema 3.30. *As $*$-superálgebras em $\mathcal{L}$ geram, a menos de T_2^*-equivalência, as únicas $*$-supervariedades minimais de crescimento quadrático.*

Demonstração. Seja A uma das $*$-superálgebras em $\mathcal{L}$ e considere $\mathcal{U}$ uma subvariedade própria de $\text{var}^{\text{gri}}(A)$. Pela Proposição 2.10, segue que $A' \notin \mathcal{U}$, para toda $A' \in \mathcal{L}$. Assim, pelo Teorema 3.29, concluímos que $\mathcal{U}$ tem sequência de codimensões $*$-graduadas linearmente limitada. Desde que A tem crescimento quadrático, concluímos que A gera uma $*$-supervariedade minimal de crescimento quadrático.

Por fim, só precisamos garantir que as 36 $*$-superálgebras em $\mathcal{L}$ são as únicas minimais de crescimento quadrático, a menos de T_2^*-equivalência. Para tanto, suponhamos, por absurdo, que existe uma $*$-supervariedade minimal de crescimento quadrático $\mathcal{V}$ de modo que $\mathcal{V}$ não é gerada por alguma das $*$-superálgebras em $\mathcal{L}$. A minimalidade de $\mathcal{V}$ implica que $A \notin \mathcal{V}$, para toda $A \in \mathcal{L}$. Novamente, pelo Teorema 3.29, concluímos que $\mathcal{V}$ tem sequência de codimensões $*$-graduadas linearmente limitada, uma clara contradição. Com isso, finalizamos a prova. $\square$

Enfatizamos que das 36 $*$-superálgebras que geram as únicas, a menos de T_2^*-equivalência, $*$-supervariedades minimais de crescimento quadrático, apenas 10 já eram reconhecidas como tal. Como já mencionado no Capítulo 2, são elas: $C_{3,*}$, C_3^{gri}, C_3^{gr}, $N_{3,*}$, N_3^{gri}, $U_{3,*}$, U_3^{gri}, $M_{8,*}$, $M_{8,1}^{\mathrm{gri}}$, $G_{2,0,\tau}$. Todas essas $*$-superálgebras, com exceção da $G_{2,0,\tau}$, geram subvariedades minimais de crescimento quadrático dentro das $*$-supervariedades de crescimento quase polinomial. Dessa forma, apresentamos uma lista de 26 $*$-superálgebras de crescimento quadrático inéditas com tal propriedade.

Comentamos anteriormente que o estudo das $*$-superálgebras generaliza o estudo das $*$-álgebras, uma vez que toda álgebra munida de uma involução $*$ é uma $*$-superálgebra com graduação trivial. Assim, recordemos que se A é uma $*$-superálgebra com graduação trivial, temos que $c_n^{\mathrm{gri}}(A) = c_n^*(A)$ e

$$\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A) = \langle \mathrm{Id}^*(A),\ y_{1,1},\ z_{1,1} \rangle_{T_2^*}.$$

Este fato nos permitiu obter a classificação das $*$-variedades minimais de crescimento quadrático. Isso porque o Teorema 2.8, além de garantir que todas as $*$-superálgebras com graduação trivial no conjunto abaixo

$$\overline{\mathcal{L}} = \{C_{3,*},\quad N_{3,*},\quad U_{3,*},\quad M_{4,*},\quad M_{5,*},\quad M_{7,*},\quad M_{8,*},\quad M_{9,*},\quad M_{10,*},\quad G_{2,0,\tau}\}$$

têm crescimento quadrático da sequência de codimensões $*$-graduadas, garante que quando consideramos estas mesmas álgebras no contexto de álgebras com involução, todas têm crescimento quadrático da sequência de $*$-codimensões.

Portanto, concluímos o seguinte:

Teorema 3.31. *As $*$-álgebras $C_{3,*}$, $N_{3,*}$, $U_{3,*}$, $M_{4,*}$, $M_{5,*}$, $M_{7,*}$, $M_{8,*}$, $M_{9,*}$, $M_{10,*}$, $G_{2,0,\tau}$ geram, a menos de T^*-equivalência, as únicas $*$-variedades minimais de crescimento quadrático.*

Considerações Finais

Nesta tese classificamos todas as $*$-supervariedades minimais de crescimento quadrático, determinando, a menos de T_2^*-equivalência, todas as $*$-superálgebras de dimensão finita geradoras de tais $*$-supervariedades. Agora, é natural e importante nos questionarmos sobre a classificação geral de todas as $*$-supervariedades de crescimento quadrático e como nossa classificação poderia contribuir para esta finalidade.

Como dissemos, em [28, 29], La Mattina classificou todas as álgebras que geram, a menos de PI-equivalência, subvariedades das variedades de crescimento quase polinomial. Em particular, todas as subvariedades minimais das variedades de crescimento quase polinomial foram determinadas. O que se observa de tal classificação é que a partir das álgebras que geram variedades minimais de crescimento polinomial n^k foi possível determinar todas as álgebras que geram, a menos de PI-equivalência, subvariedades de crescimento n^k das variedades de crescimento quase polinomial. Isto porque, neste caso, verifica-se que as álgebras que geram variedades de crescimento n^k são equivalentes a somas diretas finitas de álgebras minimais de crescimento no máximo n^k e, por isso, podemos dizer que as álgebras minimais são como "blocos construtores". Destacamos que esta constatação não é uma particularidade do caso ordinário, o mesmo pode ser observado em classificações análogas fornecidas no contexto de superálgebras, de $*$-álgebras e de $*$-superálgebras ([20], [30], [31]).

O que comentamos acima nos instiga a pensar se em classificações gerais de álgebras que geram variedades de crescimento polinomial n^k, as álgebras minimais de crescimento no máximo n^k também desempenham um papel de blocos construtores.

Essa questão proposta com tal generalidade é complexa e difícil de ser respondida, mas podemos analisar o que ocorre para certos valores fixos de k.

O primeiro passo nesta direção foi dado pelo estudo das álgebras de crescimento lento da sequência de codimensões. Em particular, em [8], Giambruno e La Mattina classificaram, a menos de PI-equivalência, todas as álgebras que geram variedades de crescimento linear. Nesta classificação observamos que todas as álgebras de crescimento linear são obtidas através de somas diretas de álgebras minimais de crescimento linear. O mesmo se observa nas classificações de variedades de crescimento linear no caso das superálgebras,

$*$-álgebras e das $*$-superálgebras, obtidas em [9], [32] e [20], respectivamente.

No que diz respeito a variedades de crescimento quadrático, temos informações no caso de variedades geradas por álgebras unitárias. No caso ordinário, em [10], Giambruno, La Mattina e Petrogradsky mostraram que existem, a menos de equivalência, uma variedade de crescimento quadrático e uma variedade de crescimento cúbico, ambas geradas por álgebras unitárias minimais.

No contexto de álgebras com estruturas adicionais, ressaltamos nossa classificação das φ-variedades de crescimento quadrático geradas por φ-álgebras unitárias [1]. Neste trabalho, verificamos que as φ-álgebras unitárias de crescimento quadrático são equivalentes a somas diretas finitas de φ-álgebras unitárias minimais de crescimento no máximo quadrático.

Tudo que foi comentado acima, principalmente os resultados que foram obtidos no artigo mencionado no parágrafo anterior, embasam nossa seguinte conjectura a respeito da classificação das $*$-supervariedades de crescimento quadrático.

Conjectura 3.32. *Seja A uma $*$-superálgebra. Então $c_n^{\mathrm{gri}}(A) \approx an^2$, para alguma constante a, se, e somente se, A é T_2^*-equivalente a uma soma direta finita de $*$-superálgebras minimais de crescimento no máximo quadrático.*

Além disso, pretendemos aplicar as técnicas utilizadas nessa tese com o objetivo de classificar variedades minimais de crescimento quadrático para outras classes de álgebras como, por exemplo, superálgebras munidas de uma *superinvolução*.

Dizemos que A é uma superálgebra com superinvolução $*$ se está munida de uma aplicação linear graduada $* : A \to A$ tal que $(a^*)^* = a$, para todo $a \in A$, e $(ab)^* = (-1)^{(\deg\ a)(\deg\ b)} b^* a^*$, para quaisquer elementos homogêneos $a, b \in A$, onde $\deg c$ denota o grau do elemento homogêneo $c \in A^{(0)} \cup A^{(1)}$.

Não é difícil verificar que as involuções graduadas coincidem com as superinvoluções em uma superálgebra A se, e somente se, $\left(A^{(1)}\right)^2 = 0$. Em particular, se $A^{(1)} = 0$, então as superinvoluções são involuções em A.

Com isso, temos que das 36 $*$-superálgebras que apresentamos, 23 delas podem ser mantidas numa possível classificação de variedades de superálgebras com superinvolução minimais de crescimento quadrático. São elas:

$$G_{2,0,\tau},\ G_{2,2,\tau},\ G_{2,2,\rho},\ C_{3,*},\ N_{3,*},\ N_3^{\mathrm{gri}},\ U_{3,*},\ U_3^{\mathrm{gri}},\ M_{4,*},\ M_{5,*},\ M_{6,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{7,*},\ M_{7,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{8,*},$$
$$M_{8,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{8,3}^{\mathrm{gri}},\ M_{9,*},\ M_{9,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{9,3}^{\mathrm{gri}},\ M_{10,*},\ M_{10,1}^{\mathrm{gri}},\ M_{10,2}^{\mathrm{gri}},\ M_{11,1}^{\mathrm{gri}}.$$

Consequentemente, os resultados que utilizam as $*$-superálgebras mencionadas acima, apresentados nas Seções 3.1 e 3.2, podem ser úteis para o desenvolvimento do caso de superinvolução.

Como foi visto, para cumprir com o objetivo desta tese foi suficiente garantir o crescimento quadrático de todas as $*$-superálgebras listadas no Capítulo 2. Assim, não foi necessário exibirmos o polinômio que descreve a sequência de codimensões $*$-graduadas de algumas das $*$-superálgebras minimais de crescimento quadrático. A saber,

$M_{4,*}$, M_4^{gri}, $M_{5,*}$, M_5^{gri}, $M_{6,1}^{\text{gri}}$, $M_{6,2}^{\text{gri}}$, $M_{7,*}$, $M_{7,1}^{\text{gri}}$, $M_{7,2}^{\text{gri}}$, $M_{8,2}^{\text{gri}}$, $M_{8,3}^{\text{gri}}$, $M_{9,*}$, $M_{9,1}^{\text{gri}}$, $M_{9,2}^{\text{gri}}$, $M_{9,3}^{\text{gri}}$, $M_{10,*}$, $M_{10,1}^{\text{gri}}$, $M_{10,2}^{\text{gri}}$, $M_{10,3}^{\text{gri}}$, $M_{11,1}^{\text{gri}}$, $M_{11,2}^{\text{gri}}$.

Acrescentamos que para as $*$-superálgebras listadas acima, com exceção de $M_{4,*}$, $M_{5,*}$, $M_{7,*}$, $M_{10,*}$ e $M_{6,1}^{\text{gri}}$, foi possível calcularmos seus respectivos T_2^*-ideais e sequência de codimensões $*$-graduadas. Acreditamos que essas informações podem ser contribuições relevantes no contexto de álgebras munidas de estrutura adicional, tanto para o desenvolvimento de uma classificação geral quanto pelas técnicas utilizadas. Apresentaremos a seguir os resultados que obtivemos.

Proposição 3.33. *Sobre $M_{9,*}$ temos que*

(1) $\text{Id}^{\text{gri}}(M_{9,*}) = \langle y_{1,1},\ z_{1,1},\ z_{1,0}z_{2,0}z_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0},\ z_{1,0}y_{2,0}z_{3,0},\ [y_{1,0},y_{2,0}][y_{3,0},y_{4,0}],$ $St_3(y_{1,0},y_{2,0},y_{3,0})\rangle_{T_2^*}$.

(2) $c_n^{\text{gri}}(M_{9,*}) = 4n^2-2n-1$, *para* $n \geq 3$.

Demonstração. Primeiramente, observemos que

$$\begin{aligned}
(M_{9,*}^{(0)})^+ &= F(e_{11}+e_{66}) + F(e_{12}+e_{56}) + F(e_{13}+e_{46}),\\
(M_{9,*}^{(0)})^- &= F(e_{12}-e_{56}) + F(e_{13}-e_{46}) + F(e_{23}-e_{45}),\\
(M_{9,*}^{(1)})^+ &= (M_{9,*}^{(1)})^- = 0
\end{aligned}$$

e denotemos por $I = \langle y_{1,1},\ z_{1,1},\ z_{1,0}z_{2,0}z_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0},\ z_{1,0}y_{2,0}z_{3,0},\ [y_{1,0},y_{2,0}][y_{3,0},y_{4,0}],$ $St_3(y_{1,0},y_{2,0},y_{3,0})\rangle_{T_2^*}$.

Não é difícil verificar que $I \subseteq \text{Id}^{\text{gri}}(M_{9,*})$. Por isso, nos concentraremos em mostrar a inclusão inversa.

Começamos observando que como $z_{1,0}y_{2,0}z_{3,0} \in I$, pelo Lema 1.23 item (4), temos que $z_{1,0}m_1z_{3,0} \in I$ e, consequentemente, que os polinômios dos tipos $z_{1,0}m_1z_{2,0}z_{3,0}$, $z_{1,0}z_{2,0}m_1z_{3,0}$, $z_{1,0}m_1z_{2,0}m_2z_{3,0}$ pertencem a I, onde m_1, m_2 denotam monômios nas variavés $y_{i,0}'$s. Por isso, se $f \in \text{Id}^{\text{gri}}(M_{9,*})$ é um $(\mathbb{Z}_2,*)$-polinômio multilinear de grau n, pela multihomogeneidade dos T_2^*-ideais, podemos supor sem perda de generalidade que, módulo I, ou

$$f \in P_{n,0,0,0} \text{ ou } f \in P_{n-1,0,1,0} \text{ ou } f \in P_{n-2,0,2,0}.$$

Observe que para os demais casos, já temos $P_{n_1,n_2,n_3,n_4} \subseteq I$.

Se $f \in P_{n,0,0,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,*})$, com $n \neq 2$, desde que $[y_{1,0}, y_{2,0}][y_{3,0}, y_{4,0}]$, $y_{1,0}[y_{2,0}, y_{3,0}]y_{4,0}$, $St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}) \in I$, pelo Lema 3.25, temos que f pode ser escrito, módulo I, da seguinte forma

$$f = \gamma y_{1,0} \cdots y_{n,0} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j [y_{j,0}, y_{1,0}] y_{2,0} \cdots \widehat{y_{j,0}} \cdots y_{n,0} + \sum_{k=2}^{n} \beta_k y_{2,0} \cdots \widehat{y_{k,0}} \cdots y_{n,0} [y_{k,0}, y_{1,0}].$$

Assim, fazendo primeiro a avaliação $y_{1,0} = \ldots = y_{n,0} = e_{11} + e_{66}$, obtemos $\gamma = 0$. Depois, para $j \in \{2, \ldots, n\}$ fixo, ao fazermos $y_{j,0} = e_{12} + e_{56}$ e $y_{l,0} = e_{11} + e_{66}$, para todo $l \neq j$, chegamos em $0 = \alpha_j e_{56} - \beta_j e_{12}$, o que implica em $\alpha_j = \beta_j = 0$. O mesmo pode ser feito para todo $2 \leq j \leq n$.

Agora, se $f \in P_{2,0,0,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,*})$, pela Observação 3.26, podemos escrevê-lo, módulo I, da forma

$$f = \alpha y_{1,0} y_{2,0} + \beta [y_{2,0}, y_{1,0}].$$

Neste caso, fazendo primeiro $y_{1,0} = y_{2,0} = e_{11} + e_{66}$ e, depois, $y_{2,0} = e_{12} + e_{56}$ e $y_{1,0} = e_{11} + e_{66}$, obtemos que $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, respectivamente.

Os argumentos acima provam que $P_{n,0,0,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,*}) = P_{n,0,0,0} \cap I$ e que, para $n \neq 2$, os polinômios em (3.2.6) formam uma base para $P_{n,0,0,0}(M_{9,*})$. Por isso, $c_{n,0,0,0}(M_{9,*}) = 1 + (n-1) + (n-1) = 2n - 1$, para $n \neq 2$. Note que $c_{2,0,0,0}(M_{9,*}) = 2$.

Agora, suponhamos que $f \in P_{n-1,0,1,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,*})$. Neste caso, desde que $y_{1,0} z_{2,0} y_{3,0} \in I$, segue que podemos escrever f, módulo I, da forma

$$f = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j z_{n,0} y_{j,0} y_{1,0} \cdots \widehat{y_{j,0}} \cdots y_{n-1,0} + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k y_{1,0} \cdots \widehat{y_{k,0}} \cdots y_{n-1,0} y_{k,0} z_{n,0}.$$

Para ordenar as variáveis simétricas pares nos termos acima, utilizamos que $z_{1,0} m z_{2,0} \in I$, onde m é um monômio em variáveis simétricas pares contendo pelo menos uma variável.

Note que para $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ fixo, a avaliação $y_{j,0} = e_{12} + e_{56}$, $y_{l,0} = e_{11} + e_{66}$, para todo $l \neq j$, e $z_{n,0} = e_{23} - e_{45}$, nos dá $0 = -\alpha_j e_{46} + \beta_j e_{13}$ e, portanto, $\alpha_j = \beta_j = 0$. O mesmo pode ser feito para todo $1 \leq j \leq n-1$.

Com isso, obtemos que $P_{n-1,0,1,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,*}) = P_{n-1,0,1,0} \cap I$ e que, para $n \neq 1$, os elementos $z_{n,0} y_{j,0} y_{1,0} \cdots \widehat{y_{j,0}} \cdots y_{n-1,0}$ e $y_{1,0} \cdots \widehat{y_{k,0}} \cdots y_{n-1,0} y_{k,0} z_{n,0}$, com $1 \leq j, k \leq n-1$, formam uma base para $P_{n-1,0,1,0}(M_{9,*})$. Por isso, $c_{n-1,0,1,0}(M_{9,*}) = 2n - 2$, para $n \neq 1$. Note que $c_{0,0,1,0}(M_{9,*}) = 1$.

Por fim, suponhamos que $f \in P_{n-2,0,2,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,*})$. Para este caso, convém observarmos que $y_{1,0} z_{2,0} z_{3,0} y_{4,0} \in I$, desde que $y_{1,0} z_{2,0} z_{3,0} y_{4,0} = z_{2,0} y_{1,0} z_{3,0} y_{4,0} - [z_{2,0}, y_{1,0}] z_{3,0} y_{4,0}$. Por isso, segue que podemos escrever f, módulo I, da forma

$$\begin{aligned} f = {} & \alpha z_{n,0} z_{n-1,0} y_{1,0} \cdots y_{n-2,0} + \beta z_{n-1,0} z_{n,0} y_{1,0} \cdots y_{n-2,0} + \gamma y_{1,0} \cdots y_{n-2,0} z_{n-1,0} z_{n,0} + \\ & \delta y_{1,0} \cdots y_{n-2,0} z_{n,0} z_{n-1,0}. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Para ordenar as variáveis simétricas pares nos termos acima, usamos principalmente o fato de que, módulo I, $z_{1,0}z_{2,0}y_{3,0}y_{4,0} = z_{1,0}z_{2,0}y_{4,0}y_{3,0}$ e $y_{1,0}y_{2,0}z_{3,0}z_{4,0} = y_{2,0}y_{1,0}z_{3,0}z_{4,0}$.

Fazendo primeiro $y_{1,0} = \ldots = y_{n-2,0} = e_{11} + e_{66}$, $z_{n-1,0} = e_{12} - e_{56}$ e $z_{n,0} = e_{23} - e_{45}$ e, depois, $y_{1,0} = \ldots = y_{n-2,0} = e_{11} + e_{66}$, $z_{n-1,0} = e_{23} - e_{45}$ e $z_{n,0} = e_{12} - e_{56}$, obtemos $0 = \alpha e_{46} + \gamma e_{13}$ e $0 = \beta e_{46} + \delta e_{13}$, respectivamente. Por isso, $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 0$.

Com isso, temos $P_{n-2,0,2,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,*}) = P_{n-2,0,2,0} \cap I$. Além disso, para $n \neq 2$, segue que os elementos em (3.3.1) formam uma base para $P_{n-2,0,2,0}(M_{9,*})$ e, por isso, $c_{n-2,0,2,0}(M_{9,*}) = 4$. Note que $c_{0,0,2,0}(M_{9,*}) = 2$.

Os argumentos usados acima garantem que $I = \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,*})$ e que, para $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} c_n^{\mathrm{gri}}(M_{9,*}) &= \binom{n}{n,0,0,0} c_{n,0,0,0}(M_{9,*}) + \binom{n}{n-1,0,1,0} c_{n-1,0,1,0}(M_{9,*}) + \binom{n}{n-2,0,2,0} c_{n-2,0,2,0}(M_{9,*}) \\ &= 4n^2 - 2n - 1, \end{aligned}$$

finalizando a prova. $\square$

Proposição 3.34. *Sobre $M_{9,1}^{\mathrm{gri}}$ temos que*

(1) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}}) = \langle [y_{1,0}, y_{2,0}],\ z_{1,0}z_{2,0},\ y_{1,1}y_{2,1},\ z_{1,1}z_{2,1},\ y_{1,1}z_{2,1},\ y_{1,0}z_{2,0},\ y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0},\ z_{1,0}z_{2,1}z_{3,0},\ z_{1,0}y_{2,1}z_{3,0} \rangle_{T_2^*}$.

(2) $c_n^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}}) = 4n^2 + 1$, *para* $n \geq 2$.

Demonstração. Começamos observando que, em $M_{9,1}^{\mathrm{gri}}$,

$$\begin{aligned} \left(M_{9,1}^{\mathrm{gri}(0)}\right)^+ &= F(e_{11} + e_{66}), \quad \left(M_{9,1}^{\mathrm{gri}(1)}\right)^+ = F(e_{12} + e_{56}) + F(e_{13} + e_{46}) \\ \left(M_{9,1}^{\mathrm{gri}(0)}\right)^- &= F(e_{23} - e_{45}), \quad \left(M_{9,1}^{\mathrm{gri}(1)}\right)^- = F(e_{12} - e_{56}) + F(e_{13} - e_{46}). \end{aligned}$$

Denotemos por $I = \langle [y_{1,0}, y_{2,0}],\ z_{1,0}z_{2,0},\ y_{1,1}y_{2,1},\ z_{1,1}z_{2,1},\ y_{1,1}z_{2,1},\ y_{1,0}z_{2,0},\ y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0},\ z_{1,0}z_{2,1}z_{3,0},\ z_{1,0}y_{2,1}z_{3,0} \rangle_{T_2^*}$.

É imediato verificar que $I \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}})$. Mostraremos a inclusão inversa.

Primeiramente, pelo Lema 1.23, observamos que $z_{1,0}mz_{2,0}$, $y_{1,0}mz_{2,0}$, $y_{1,1}my_{2,1}$, $z_{1,1}mz_{2,1}$, $y_{1,1}mz_{2,1}$ pertencem a I, onde onde m é um monômio em variavés simétricas pares (eventualmente vazio). Consequentemente, todos os polinômios dos tipos $x_1x_2x_3$, $x_1m_1x_2x_3$, $x_1x_2m_1x_3$, $x_1m_1x_2m_2x_3$ estão em I, com $x_i \in X \setminus Y_0$, $i = 1, 2, 3$, onde m_1 e m_2 denotam monômios em variáveis simétricas pares contendo pelo menos uma variável.

Assim, usando que todos esses polinômios estão em I, seja $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}})$ um $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômio multilinear de grau n. Pela multihomogeneidade dos T_2^*-ideais, podemos supor, sem perda de generalidade que, módulo I, ou

$$f \in P_{n,0,0,0} \text{ ou } f \in P_{n-1,1,0,0} \text{ ou } f \in P_{n-1,0,0,1} \text{ ou } f \in P_{n-2,1,1,0} \text{ ou } f \in P_{n-2,0,1,1}.$$

Se $f \in P_{n,0,0,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}})$, podemos escrevê-lo, módulo I, da forma

$$f = \alpha y_{1,0} \cdots y_{n,0}, \tag{3.3.2}$$

desde que $[y_{1,0}, y_{2,0}] \in I$. Assim, fazendo a avaliação $y_{1,0} = \ldots = y_{n,0} = e_{11} + e_{66}$, obtemos $\alpha = 0$. Isso implica que $P_{n,0,0,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}}) = P_{n,0,0,0} \cap I$ e que o monômio em (3.3.2) é uma base para $P_{n,0,0,0}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}})$. Por isso, $c_{n,0,0,0}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}}) = 1$.

Suponhamos que $f \in P_{n-1,1,0,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}})$. Uma vez que $[y_{1,0}, y_{2,0}]$, $y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0} \in I$ é fácil ver que podemos escrever f, módulo I, da forma

$$f = \alpha y_{n,1} y_{1,0} \cdots y_{n-1,0} + \beta y_{1,0} \cdots y_{n-1,0} y_{n,1}. \tag{3.3.3}$$

Fazendo a avaliação $y_{1,0} = \ldots = y_{n-1,0} = e_{11} + e_{66}$ e $y_{n,1} = e_{12} + e_{56}$, obtemos $0 = \alpha e_{56} + \beta e_{12}$, donde concluímos que $\alpha = \beta = 0$. Isso nos garante que $P_{n-1,1,0,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}}) = P_{n-1,1,0,0} \cap I$ e que os elementos em (3.3.3) formam uma base para $P_{n-1,1,0,0}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}})$. Logo, $c_{n-1,1,0,0}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}}) = 2$.

Prosseguindo, se $f \in P_{n-1,0,0,1} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}})$, desde que $[y_{1,0}, y_{2,0}]$, $y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0} \in I$, é imediato que podemos escrevê-lo, módulo I, da seguinte forma

$$f = \alpha z_{n,1} y_{1,0} \cdots y_{n-1,0} + \beta y_{1,0} \cdots y_{n-1,0} z_{n,1}. \tag{3.3.4}$$

Fazendo a avaliação $y_{1,0} = \ldots = y_{n-1,0} = e_{11} + e_{66}$ e $z_{n,1} = e_{13} - e_{46}$, obtemos $0 = -\alpha e_{46} + \beta e_{13}$, donde concluímos que $\alpha = \beta = 0$. Com isso, obtemos que $P_{n-1,0,0,1} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}}) = P_{n-1,0,0,1} \cap I$ e que os elementos em (3.3.4) formam uma base para $P_{n-1,0,0,1}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}})$. Portanto, $c_{n-1,0,0,1}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}}) = 2$.

Agora, se $f \in P_{n-2,1,1,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}})$, então podemos escrevê-lo, módulo I, como

$$f = \alpha z_{n,0} y_{n-1,1} y_{1,0} \cdots y_{n-2,0} + \beta y_{1,0} \cdots y_{n-2,0} y_{n-1,1} z_{n,0}. \tag{3.3.5}$$

Chegamos na configuração acima ao usarmos que $y_{1,0}z_{2,0}$, $z_{1,0}m_1y_{2,1}$ $[y_{1,0}, y_{2,0}] \in I$. Neste caso, fazendo a avaliação $y_{1,0} = \ldots = y_{n-2,0} = e_{11} + e_{66}$, $y_{n-1,1} = e_{12} + e_{56}$ e $z_{n,0} = e_{23} - e_{45}$, obtemos $0 = -\alpha e_{46} + \beta e_{13}$, donde concluímos que $\alpha = \beta = 0$. Com isso, garantimos que $P_{n-2,1,1,0} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}}) = P_{n-2,1,1,0} \cap I$ e que os elementos em (3.3.5) formam uma base para $P_{n-2,1,1,0}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}})$. Por isso, $c_{n-2,1,1,0}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}}) = 2$.

Finalmente, se $f \in P_{n-2,0,1,1} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}})$, então desde que $y_{1,0}z_{2,0}$, $z_{1,0}m_1z_{2,1}$ $[y_{1,0}, y_{2,0}] \in I$ podemos escrevê-lo, módulo I, como

$$f = \alpha z_{n,0} z_{n-1,1} y_{1,0} \cdots y_{n-2,0} + \beta y_{1,0} \cdots y_{n-2,0} z_{n-1,1} z_{n,0}. \tag{3.3.6}$$

Assim, fazendo a avaliação $y_{1,0} = \ldots = y_{n-2,0} = e_{11} + e_{66}$, $z_{n,0} = e_{23} - e_{45}$ e $z_{n-1,1} = e_{12} - e_{56}$, obtemos $0 = \alpha e_{46} + \beta e_{13}$, donde concluímos que $\alpha = \beta = 0$. Com isso, temos que $P_{n-2,0,1,1}\cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}}) = P_{n-2,0,1,1}\cap I$ e que os elementos em (3.3.6) formam uma base para $P_{n-2,0,1,1}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}})$. Logo, $c_{n-2,0,1,1}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}}) = 2$

Na prática, o que fizemos acima implica que $I = \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}})$. Portanto, usando a relação (1.3.3), concluímos que, para $n \geq 2$, $c_n^{\mathrm{gri}}(M_{9,1}^{\mathrm{gri}}) = 4n^2 + 1$. $\square$

As demonstrações das próximas proposições serão omitidas, pois elas podem ser deduzidas utilizando estratégias análogas às que foram empregadas nas provas dos resultados anteriores.

Proposição 3.35. *Sobre $M_{8,2}^{\mathrm{gri}}$ e $M_{9,2}^{\mathrm{gri}}$, temos que*

(1) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{8,2}^{\mathrm{gri}}) = \langle z_{1,0}z_{2,0},\ z_{1,1}z_{2,1},\ z_{1,0}z_{2,1},\ z_{1,0}y_{2,1},\ y_{1,1}y_{2,1}y_{3,1},\ y_{1,1}z_{2,1}y_{3,1},\ y_{1,1}y_{2,1}z_{3,1},\ y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,1}y_{2,0}y_{3,1},\ y_{1,0}y_{2,1}z_{3,1},\ St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0})\rangle_{T_2^*}$.

(2) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,2}^{\mathrm{gri}}) = \langle z_{1,0}z_{2,0},\ y_{1,1}y_{2,1},\ z_{1,1}z_{2,1}z_{3,1},\ z_{1,0}y_{2,1},\ z_{1,0}z_{2,1},\ y_{1,1}z_{2,1}z_{3,1},\ z_{1,1}y_{2,1}z_{3,1},\ y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0},\ z_{1,1}y_{2,0}z_{3,1},\ y_{1,1}z_{2,1}y_{3,0},\ St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0})\rangle_{T_2^*}$.

(3) $c_n^{\mathrm{gri}}(M_{8,2}^{\mathrm{gri}}) = c_n^{\mathrm{gri}}(M_{9,2}^{\mathrm{gri}}) = 4n^2 + 4n - 1$, *para* $n \geq 3$.

Proposição 3.36. *Sobre $M_{8,3}^{\mathrm{gri}}$, $M_{9,3}^{\mathrm{gri}}$ e $M_{7,1}^{\mathrm{gri}}$, temos que*

(1) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{8,3}^{\mathrm{gri}}) = \langle z_{1,0}z_{2,0},\ z_{1,1}z_{2,1},\ z_{1,0}z_{2,1},\ y_{1,1}y_{2,1},\ y_{1,1}z_{2,1},\ y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,0}y_{2,1}z_{3,0},\ z_{1,0}y_{2,0}z_{3,1},\ z_{1,0}y_{2,1}z_{3,0},\ St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0})\rangle_{T_2^*}$.

(2) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{9,3}^{\mathrm{gri}}) = \langle z_{1,0}z_{2,0},\ y_{1,1}y_{2,1},\ z_{1,1}z_{2,1},\ z_{1,0}y_{2,1},\ y_{1,1}z_{2,1},\ z_{1,0}y_{2,0}y_{3,1},\ z_{1,0}z_{2,1}z_{3,0},\ z_{1,0}y_{2,0}z_{3,1},\ y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0},\ y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0},\ St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0})\rangle_{T_2^*}$.

(3) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{7,1}^{\mathrm{gri}}) = \langle z_{1,0}z_{2,0},\ z_{1,1}z_{2,1},\ y_{1,1}y_{2,1},\ y_{1,1}z_{2,1},\ y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0},\ y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0}\ z_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},\ z_{1,0}y_{2,1}z_{3,0},\ z_{1,0}z_{2,1}z_{3,0},\ [z_{1,0}, y_{2,1}],\ z_{1,0}z_{2,1} + z_{2,1}z_{1,0},\ z_{1,1}z_{2,0}y_{3,0},\ St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}),\ z_{1,0}y_{2,0}y_{3,1} - y_{3,1}y_{2,0}z_{1,0},\ z_{1,0}y_{2,0}z_{3,1} + z_{3,1}y_{2,0}z_{1,0}\rangle_{T_2^*}$.

(4) $c_n^{\mathrm{gri}}(M_{8,3}^{\mathrm{gri}}) = c_n^{\mathrm{gri}}(M_{9,3}^{\mathrm{gri}}) = c_n^{\mathrm{gri}}(M_{7,1}^{\mathrm{gri}}) = 4n^2 + 2n - 1$, *para* $n \geq 3$.

Proposição 3.37. *Sobre M_4^{gri}, M_5^{gri} e $M_{7,2}^{\mathrm{gri}}$, temos que*

(1) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_4^{\mathrm{gri}}) = \langle z_{1,0},\ y_{1,1}y_{2,1}y_{3,1},\ z_{1,1}z_{2,1}z_{3,1},\ y_{1,1}z_{2,1}y_{3,1},\ z_{1,1}y_{2,1}y_{3,1},\ z_{1,1}y_{2,1}z_{3,1},\ y_{1,1}z_{2,1}z_{3,1},\ y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,1}y_{2,0}y_{3,1},\ z_{1,1}y_{2,0}z_{3,1},\ y_{1,1}y_{2,0}z_{3,1}\rangle_{T_2^*}$.

(2) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_5^{\mathrm{gri}}) = \langle z_{1,0},\ y_{1,1}y_{2,1}y_{3,1},\ z_{1,1}z_{2,1}z_{3,1},\ y_{1,1}y_{2,1}y_{3,0},\ z_{1,1}z_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,1}z_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,1}y_{2,1}z_{3,1},\ z_{1,1}z_{2,1}y_{3,1},\ y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,1}y_{2,0}y_{3,1} - y_{3,1}y_{2,0}y_{1,1},\ z_{1,1}y_{2,0}z_{3,1} - z_{3,1}y_{2,0}z_{1,1},\ y_{1,1}y_{2,0}z_{3,1} + z_{3,1}y_{2,0}y_{1,1}\rangle_{T_2^*}$.

(3) $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{7,2}^{\mathrm{gri}}) = \langle z_{1,0}y_{2,0},\ z_{1,0}z_{2,0},\ z_{1,0}y_{2,1},\ z_{1,0}z_{2,1},\ [y_{1,0}, y_{2,0}],\ y_{1,1}y_{2,1}y_{3,1},\ z_{1,1}z_{2,1}z_{3,1},\ y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0},\ [y_{1,1}, z_{2,1}],\ y_{1,1}z_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,1}y_{2,1}z_{3,1},\ z_{1,1}z_{2,1}y_{3,1},\ y_{1,1}y_{2,1}y_{3,0},\ z_{1,1}z_{2,1}y_{3,0},\ z_{1,1}z_{2,1} + z_{2,1}z_{1,1},\ y_{1,1}y_{2,1} + y_{2,1}y_{1,1},\ y_{1,1}y_{2,0}y_{3,1} + y_{3,1}y_{2,0}y_{1,1},\ z_{1,1}y_{2,0}z_{3,1} + z_{3,1}y_{2,0}z_{1,1},\ y_{1,1}y_{2,0}z_{3,1} - z_{3,1}y_{2,0}y_{1,1}\rangle_{T_2^*}$.

(4) $c_n^{\text{gri}}(M_4^{\text{gri}}) = c_n^{\text{gri}}(M_5^{\text{gri}}) = c_n^{\text{gri}}(M_{7,2}^{\text{gri}}) = 2n^2 + 2n + 1$, *para* $n \geq 2$.

Proposição 3.38. *Sobre* $M_{10,1}^{\text{gri}}$ *e* $M_{11,1}^{\text{gri}}$, *temos que*

(1) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(M_{10,1}^{\text{gri}}) = \langle z_{1,0}z_{2,0},\ z_{1,1}z_{2,1},\ y_{1,1}y_{2,1},\ z_{1,0}y_{2,1},\ y_{1,1}z_{2,1},\ St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}),$
$y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0},\ y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},\ z_{1,0}z_{2,1}z_{3,0},\ z_{1,1}z_{2,0}y_{3,0},\ z_{1,0}y_{2,0}y_{3,1},\ St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, z_{3,1})\rangle_{T_2^*}$.

(2) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(M_{11,1}^{\text{gri}}) = \langle z_{1,0}z_{2,0},\ z_{1,1}z_{2,1},\ y_{1,1}y_{2,1},\ z_{1,0}z_{2,1},\ y_{1,1}z_{2,1},\ St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}),$
$y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0},\ z_{1,0}y_{2,1}z_{3,0},\ y_{1,1}z_{2,0}y_{3,0},\ z_{1,0}y_{2,0}z_{3,1},\ St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,1})\rangle_{T_2^*}$.

(3) $c_n^{\text{gri}}(M_{10,1}^{\text{gri}}) = c_n^{\text{gri}}(M_{11,1}^{\text{gri}}) = 4n^2 + 3n - 1$, *para* $n \geq 3$.

Proposição 3.39. *Sobre* $M_{10,3}^{\text{gri}}$ *e* $M_{11,2}^{\text{gri}}$, *temos que*

(1) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(M_{10,3}^{\text{gri}}) = \langle z_{1,0}z_{2,0},\ z_{1,0}y_{2,1},\ z_{1,0}z_{2,1},\ y_{1,1}y_{2,1},\ z_{1,1}z_{2,1}z_{3,1},\ St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}),$
$y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0},\ y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},\ z_{1,1}y_{2,1}z_{3,1},\ z_{1,1}y_{2,1}y_{3,0},\ z_{1,1}z_{2,1}y_{3,1},\ y_{1,0}z_{2,1}z_{3,1}y_{4,0}\rangle_{T_2^*}$.

(2) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(M_{11,2}^{\text{gri}}) = \langle z_{1,0}z_{2,0},\ z_{1,0}y_{2,1},\ z_{1,0}z_{2,1},\ z_{1,1}z_{2,1},\ y_{1,1}y_{2,1}y_{3,1},\ St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}),$
$y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0},\ y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,1}z_{2,1}y_{3,1},\ y_{1,1}z_{2,1}y_{3,0},\ y_{1,1}y_{2,1}z_{3,1},\ y_{1,0}y_{2,1}y_{3,1}y_{4,0}\rangle_{T_2^*}$.

(3) $c_n^{\text{gri}}(M_{10,3}^{\text{gri}}) = c_n^{\text{gri}}(M_{11,2}^{\text{gri}}) = 4n^2 + 5n - 1$, *para* $n \geq 3$.

Proposição 3.40. *Sobre* $M_{6,1}^{\text{gri}}$, $M_{6,2}^{\text{gri}}$ *e* $M_{10,2}^{\text{gri}}$, *temos que*

(1) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(M_{6,1}^{\text{gri}}) \supseteq \langle z_{1,0}z_{2,0},\ z_{1,1}z_{2,1},\ y_{1,1}y_{2,1},\ y_{1,1}z_{2,1},\ y_{1,0}z_{2,0}y_{3,0},\ z_{1,0}y_{2,0}y_{3,1},\ z_{1,0}y_{2,0}z_{3,1}$
$St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}),\ [z_{1,0}, y_{2,1}],\ [z_{1,0}y_{2,1}, y_{3,0}],\ [z_{1,0}z_{2,1}, y_{3,0}],\ z_{1,0}z_{2,1} + z_{2,1}z_{1,0},$
$St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, z_{3,1}),\ [y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0}, y_{4,0}],\ [y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0}, y_{4,0}],\ y_{3,1}y_{2,0}y_{1,0} - y_{3,1}y_{1,0}y_{2,0}+$
$y_{2,0}y_{3,1}y_{1,0}\rangle_{T_2^*}$.

(2) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(M_{6,2}^{\text{gri}}) = \langle z_{1,0}z_{2,0},\ z_{1,0}y_{2,1},\ z_{1,0}z_{2,1},\ y_{1,1}y_{2,1}y_{3,1},\ z_{1,1}z_{2,1}z_{3,1},\ y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},\ [y_{1,0}, y_{2,0}],$
$y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0},\ [y_{1,0}, z_{2,0}],\ y_{1,1}y_{2,1}z_{3,1},\ y_{1,1}z_{2,1}y_{3,1},\ z_{1,1}z_{2,1}y_{3,1},\ z_{1,1}y_{2,1}z_{3,1},\ y_{1,1}y_{2,0}y_{3,1},$
$z_{1,1}y_{2,0}z_{3,1},\ [y_{1,1}, z_{2,1}],\ y_{1,1}y_{2,0}z_{3,1},\ [y_{1,1}z_{2,1}, y_{3,0}],\ [y_{1,1}y_{2,1}, y_{3,0}],\ [z_{1,1}z_{2,1}, y_{3,0}],\ y_{1,1}y_{2,1}+$
$y_{2,1}y_{1,1},\ z_{1,1}z_{2,1} + z_{2,1}z_{1,1}\rangle_{T_2^*}$.

(3) $\mathrm{Id}^{\text{gri}}(M_{10,2}^{\text{gri}}) = \langle z_{1,0}z_{2,0},\ z_{1,1}z_{2,1},\ y_{1,1}y_{2,1},\ y_{1,1}z_{2,1},\ [y_{1,0}, y_{2,0}],\ [y_{1,0}, z_{2,0}],\ y_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},$
$y_{1,0}z_{2,1}y_{3,0},\ z_{1,0}y_{2,1}y_{3,0},\ z_{1,0}z_{2,1}y_{3,0},\ z_{1,0}y_{2,1}z_{3,0},\ z_{1,0}z_{2,1}z_{3,0}\rangle_{T_2^*}$.

(4) $c_n^{\text{gri}}(M_{6,2}^{\text{gri}}) = 2n^2 + 3n + 1$, *para* $n \geq 2$, *e* $c_n^{\text{gri}}(M_{10,2}^{\text{gri}}) = 4n^2 + n + 1$, *para* $n \geq 2$.

Referências Bibliográficas

[1] D. C. L. Bessades, R. B. dos Santos, M. L. O. Santos and A. C. Vieira, *Superalgebras and algebras with involution: Classifying varieties of quadratic growth*. Comm. Algebra (2021). DOI: 10.1080/00927872.2021.1873354.

[2] V. Drensky, Free algebras and PI-algebras, Graduate course in algebra. Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000.

[3] V. Drensky and A. Giambruno, *Cocharacteres, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for 2×2 matrices with involution*. Canadian J. Math. **46** (1994) 718-733.

[4] L. F. G. Fonseca, R. B. dos Santos and A. C. Vieira, *Characterizations of $*$-superalgebras of polynomial growth*. Linear Multilinear Algebra (2016) 1379-1389.

[5] A. Giambruno, *$GL_m \times GL_m$-representations and $*$-polynomial identities*. Comm. Algebra **14** (1986) 787-796.

[6] A. Giambruno, R. B. dos Santos and A. C. Vieira, *Identities of $*$-superalgebras and almost polynomial growth*. Linear Multilinear Algebra, vol. 64, **3** (2016) 484-501.

[7] A. Giambruno, A. Ioppolo and D. La Mattina, *Superalgebras with involutions or superinvolutions and almost polynomial growth of the codimensions*. Algebr. Represent. Theory **22** (2019), no. 4, 961-976.

[8] A. Giambruno and D. La Mattina, *PI-algebras with slow codimension growth*. J. Algebra **284** (2005) 371-391.

[9] A. Giambruno, D. La Mattina and P. Misso, *Polynomial identities on superalgebras: classifying linear growth*. J. Pure Appl. Algebra **207** (2006) 215-240.

[10] A. Giambruno, D. La Mattina and V. M. Petrogradsky, *Matrix algebras of polynomial codimension growth*. Israel J. Math. **158** (2007) 367-378.

[11] A. Giambruno, D. La Mattina and M. Zaicev, *Classifying the Minimal Varieties of Polynomial Growth*. Canad. J. Math. Vol 6 (2014) 625-640.

[12] A. Giambruno and S. Mishchenko, *On star-varieties with almost polynomial Growth.* Algebra Colloq. **8** (2001) 33-42.

[13] A. Giambruno and S. Mishchenko, *Polynomial Growth of the $*$-codimensions and Young Diagrams.* Comm. Algebra (2001), 29(1), 277-284.

[14] A. Giambruno, S. Mishchenko and M. Zaicev, *Polynomial identities on superalgebras and almost polynomial growth.* Special issue dedicated to Alexei Ivanovich Kostrikin, Comm. Algebra **299** (2001) 3787-3800.

[15] A. Giambruno and M. Zaicev, *Asymptotics for the standard and the Capelli identities.* Israel J. Math. **135** (2003) 125-145.

[16] A. Giambruno and M. Zaicev, Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Math. Surveys and Monogr., vol. 122, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[17] T. A. Gouveia, R. B. dos Santos and A. C. Vieira, *Minimal $*$-varieties and minimal supervarieties of polynomial growth.* J. Algebra **552** (2020) 107-133.

[18] A. Ioppolo, *Some results concerning the multiplicities of cocharacters of superalgebras with graded involution.* Linear Algebra and its Appl. **594** (2020) 51-70.

[19] A. Ioppolo, R. B. dos Santos, M. L. O. Santos and A. C. Vieira, *Superalgebras with graded involution: classifying minimal varieties of quadratic growth.* Linear Algebra and its Appl. **621** (2021) 105-134.

[20] A. Ioppolo and D. La Mattina, *Polynomial codimension growth of algebras with involutions and superinvolutions.* J. Algebra **472** (2017) 519-545.

[21] G. James, A. Kerber, The representation theory of the symmetric group, London: Addison-Wesley Publishing Company, 1981.

[22] S. M. Jorge and A. C. Vieira, *On minimal varieties of quadratic growth.* Linear Algebra and its Appl. **418** (2006) 925-938.

[23] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity.* Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948) 496-500.

[24] A. R. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras.* Trans. Algebra i Logika, (1987) Vol. 26, no. 5, 597-641.

[25] A. R. Kemer, *Ideal of Identities of Associative Algebras.* Translations of Mathematical Monographs **87**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[26] A. R. Kemer, *The spechtian nature of T-ideals whose codimensions have power growth*. Sibirsk. **19** (1978) no. 1, 54-69 (in Russian).

[27] A. R. Kemer, *Varieties of finite rank*. Proc. 15th All the Union Algebraic Conf., Krasnoyarsh **2** (1979) (in Russian).

[28] D. La Mattina, *Varieties of almost polynomial growth: classifying their subvarieties*. J. Algebra **123** (2007) 185-203.

[29] D. La Mattina, *Varieties of algebras of polynomial growth*. Boll. Unione Mat. Ital. (9) **3** (2008) 525-538.

[30] D. La Mattina, *Varieties of superalgebras of almost polynomial growth*. J. Algebra **336** (2011) 209-226.

[31] D. La Mattina and F. Martino, *Polynomial growth and star-varieties*. J. Pure Appl. Algebra **220** (2016) 246-262.

[32] D. La Mattina and P. Misso, *Algebras with involution with linear codimension growth*. J. Algebra **305** (2006) 270-291.

[33] D. La Mattina, T. S. Nascimento and A. C. Vieira, *Minimal star-varieties of polynomial growth and bounded colength*. J. Pure Appl. Algebra **222** (2018) 1765-1785.

[34] S. Mishchenko and A. Valenti, *A star-variety with almost polynomial growth*. J. Algebra **223** (2000) 66-84.

[35] T. S. Nascimento and A. C. Vieira, *Superalgebras with graded involution and star-graded colength bounded by 3*. Linear Multilinear Algebra 67 **10** (2019) 1999-2020.

[36] M. A. de Oliveira and A. C. Vieira, *Varieties of unitary algebras with small growth of codimensions*. Internacional Journal of Algebra and Computation (2021). DOI: 10.1142/S0218196721500144.

[37] A. Regev, *Existence of identities in $A \otimes B$*. Israel J. Math. **11** (1972) 131-152.

[38] B. E. Sagan. The symmetric group: representations, combinatorial algorithms and symmetric functions. Springer Verlag, New York, 2001.