

TESE DE DOUTORADO Nº 334

**APLICAÇÃO DE ÓPTICA GEOMÉTRICA NA SÍNTESE DE ANTENAS  
DUPLO-REFLETORAS OFFSET E DE LENTES DIELÉTRICAS SEM  
SIMETRIA CIRCULAR**

**Aline Rocha de Assis**

DATA DA DEFESA: 29/05/2020

**Universidade Federal de Minas Gerais**

**Escola de Engenharia**

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica**

**APLICAÇÃO DE ÓPTICA GEOMÉTRICA NA SÍNTESE DE  
ANTENAS DUPLO-REFLETORAS OFFSET E DE LENTES  
DIELÉTRICAS SEM SIMETRIA CIRCULAR**

Aline Rocha de Assis

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Fernando José da Silva Moreira

Coorientador: José Ricardo Bergmann

Belo Horizonte – MG

Maio de 2020

A848a	<p>Assis, Aline Rocha de.  Aplicação de óptica geométrica na síntese de antenas duplo-refletores <i>offset</i> e de lentes dielétricas sem simetria circular [recurso eletrônico] /  Aline Rocha de Assis. - 2020.  1 recurso online (220 f. : il., color.) : pdf.</p> <p>Orientador: Fernando José da Silva Moreira.  Coorientador: José Ricardo Bergmann.</p> <p>Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais,  Escola de Engenharia.</p> <p>Apêndice: f. 219-220.  Bibliografia: f. 214-218.</p> <p>Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.</p> <p>1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Antenas refletoras - Teses.  3. Óptica geométrica - Teses. 4. Monge-Ampere, Equações de – Teses.  I. Moreira, Fernando José da Silva. II. Bergmann, José Ricardo.  III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia.  IV. Título.</p>
	CDU: 621.3(043)

**"Aplicação de Óptica Geométrica na Síntese de Antenas Duplo-Refletores Offset e de Lentes Dielétricas sem Simetria Circular"**

**Aline Rocha de Assis**

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 29 de maio de 2020.

Por:



---

**Prof. Dr. Fernando José da Silva Moreira  
DELT (UFMG) - Orientador**



---

**Prof. Dr. José Ricardo Bergmann  
CETUC (PUC-Rio) - Coorientador**



---

**Profa. Dra. Úrsula do Carmo Resende  
Engenharia Elétrica (CEFET-MG)**



---

**Prof. Dr. Sandro Trindade Mordente Gonçalves  
Engenharia Elétrica (CEFET-MG)**



---

**Prof. Dr. Guilherme Simon da Rosa  
CETUC (PUC-Rio)**



---

**Prof. Dr. Cássio Gonçalves do Rego  
DELT (UFMG)**



---

**Prof. Dr. Elson José da Silva  
DEE (UFMG)**



*Aos meus pais, Lázaro e Fátima.*

# Agradecimentos

- Ao Prof. Fernando José da Silva Moreira, meu orientador, pela confiança a mim depositada para desenvolver este tema de doutorado e pela análise e revisão do artigo publicado e desta tese;
- ao Prof. José Ricardo Bergmann, meu coorientador, pela orientação, ensinamentos, paciência, receptividade, e pela ótima condução no desenvolvimento deste trabalho;
- à UFOP e aos colegas de trabalho no DEELT, pelo afastamento em tempo integral no período de maio de 2017 a julho de 2019;
- ao CETUC-PUC-Rio pela disponibilidade de uso dos laboratórios e *softwares* computacionais para o desenvolvimento deste trabalho;
- à CAPES, pelo apoio financeiro para realização da Missão de Estudos na PUC-Rio nos períodos de junho 2017 a novembro de 2017 e de abril de 2018 a setembro de 2018;
- ao PPGEE-UFMG, pelo ensino público, gratuito e de qualidade;
- e a todos aqueles, que direta ou indiretamente, contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional durante o período de doutoramento.

*Mas é preciso ter força,  
é preciso ter raça,  
é preciso ter gana sempre.*

---

Milton Nascimento e Fernando Brant

# Resumo

O presente trabalho investiga um procedimento numérico alternativo para a solução de uma formulação exata baseada nos princípios de Óptica Geométrica (GO) para a síntese de antenas duplo-refletoras *offset* e de lentes dielétricas sem simetria circular. A solução do problema de síntese consiste em avaliar uma equação diferencial parcial não-linear de segunda ordem do tipo Monge-Ampère como um problema de valor de contorno em coordenadas complexas. Para isso, foram desenvolvidos algoritmos iterativos baseados no método de Newton que utilizam superfícies quádricas confocais com eixos deslocados para representar localmente as superfícies sintetizadas. Desta forma, as derivadas parciais envolvidas na formulação podem ser expressas analiticamente. Para ilustrar o método numérico, antenas duplo-refletoras *offset* foram sintetizadas para prover distribuição Gaussiana para a densidade de potência na abertura, em situações com fase uniforme e não-uniforme, e para contornos circular, elíptico e super-elíptico, a fim de gerar diagramas de radiação com feixes modelados. As superfícies sintetizadas foram posteriormente interpoladas por pseudo-*splines* de quinta ordem e analisadas via aproximações da Óptica Física (PO) com correções das correntes de borda, considerando os sistemas duplo-refletores *offset* operando em 11,725 GHz e 30 GHz. O algoritmo de síntese conseguiu projetar duplo-refletores *offset* com eficiência de iluminação de até 86,46% para uma abertura circular uniforme. Visto a robustez da técnica de solução numérica empregada na síntese de duplo-refletores *offset*, o procedimento numérico foi posteriormente aplicado para modelar lentes dielétricas sem simetria circular, visando controlar a largura de feixe transmitido, bem como a densidade de potência na região de cobertura da lente. Para isso, a formulação matemática exata, baseada nos princípios da GO, foi desenvolvida para o problema de síntese de uma lente dielétrica sem simetria circular em coordenadas complexas. As superfícies das lentes foram posteriormente interpoladas por *splines* cúbicas e analisadas por um método híbrido clássico, combinando os princípios da GO e da PO, que calcula o diagrama de radiação em campo distante das lentes dielétricas modeladas, operando em 30 GHz, 60 GHz e 120 GHz.

## Palavras-chave

Antenas duplo-refletoras *offset*, lentes dielétricas, Óptica Geométrica, coordenadas complexas, superfície quádrica confocal com eixo deslocado, equação de Monge-Ampère.

# Abstract

This work investigates an alternative numerical procedure for the solution of an exact formulation based on Geometrical Optics (GO) principles to the synthesis of offset dual reflector antennas and dielectric lenses without circular symmetry. The solution to synthesis problem consists in to evaluate a second-order nonlinear partial differential equation of the Monge-Ampère type as a boundary value problem in complex coordinates. For such, iterative algorithms based on Newton method were developed, using axis-displaced confocal quadrics to locally represent the synthesized surfaces, so that partial derivatives involved in the formulation were analytically expressed. To illustrate the numerical method, offset dual reflector antennas were synthesized to provide an aperture Gaussian power density distribution with uniform and non-uniform phase distributions, within circular, elliptical and super-elliptical contours, to yield radiation patterns with shaped beams. The synthesized reflector surfaces were further interpolated by quintic pseudo-splines and analyzed by Physical Optics (PO) with equivalent edge currents, at 11.725 GHz and 30 GHz. The algorithm synthesized offset dual reflectors with illumination efficiency up to 86.46% for a uniform circular aperture. Verified the robustness of the numerical technique employed in the synthesis of dual offset reflectors, the procedure was further applied to design dielectric lenses without circular symmetry, aiming to control beam width as well as the power density in the coverage region of a lens. For this, an exact mathematical formulation, based on GO principles, was developed for the synthesis problem of dielectric lenses without circular symmetry in complex coordinates. The synthesized surfaces were further interpolated by cubic splines and analyzed by a classical hybrid method, combining GO and PO principles, to compute the far-field radiation patterns of the designed dielectric lenses, at 30 GHz, 60 GHz and 120 GHz.

## Keywords

Offset dual reflector antennas, dielectric lenses, Geometrical Optics, complex coordinates, axis-displaced confocal quadrics, Monge-Ampère equation.

# Lista de Figuras

Figura 1.1	Geometria da antena duplo-refletora <i>offset</i> (configuração Gregorian).	23
Figura 1.2	Geometria da antena duplo-refletora <i>offset</i> (configuração Cassegrain).	24
Figura 1.3	Lente dielétrica homogênea integrada ao alimentador. . . . .	28
Figura 2.1	Projeção estereográfica da esfera unitária. . . . .	34
Figura 2.2	Geometria do problema de síntese de duplo-refletores. . . . .	36
Figura 2.3	Seção de cônica com eixo deslocado [2]. . . . .	39
Figura 2.4	Superfície quádrlica confocal com eixo deslocado [2]. . . . .	40
Figura 2.5	Sistemas de coordenadas principal e sistema de coordenadas auxiliar do alimentador. . . . .	44
Figura 2.6	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 10$ , $\alpha = 1$ , no domínio $\theta' \phi'$ . . . .	46
Figura 2.7	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$ , $\alpha = 1$ , no domínio $\theta' \phi'$ . . . .	47
Figura 2.8	Grade polar não-uniforme $J \times K = 10 \times 30$ , $\alpha = 0,6$ , no domínio $\theta' \phi'$ .	47
Figura 2.9	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$ , $\alpha = 1$ , no plano complexo auxiliar $\eta'$ . . . . .	48
Figura 2.10	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$ , $\alpha = 1$ , no plano complexo auxiliar $\eta'$ . . . . .	49
Figura 2.11	Grade polar não-uniforme $J \times K = 10 \times 30$ , $\alpha = 0,6$ , no plano complexo auxiliar $\eta'$ . . . . .	49
Figura 2.12	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$ , $\alpha = 1$ , no plano complexo inverso $1/\eta'$ . . . . .	50
Figura 2.13	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$ , $\alpha = 1$ , no plano complexo inverso $1/\eta'$ . . . . .	50
Figura 2.14	Grade polar não-uniforme $J \times K = 10 \times 30$ , $\alpha = 0,6$ , no plano complexo inverso $1/\eta'$ . . . . .	51
Figura 2.15	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$ , $\alpha = 1$ , no plano complexo $\eta$ .	51
Figura 2.16	Grade regular polar $J \times K = 10 \times 30$ , $\alpha = 1$ , no plano complexo $\eta$ .	52
Figura 2.17	Grade polar não-uniforme $J \times K = 10 \times 30$ , $\alpha = 0,6$ , no plano complexo $\eta$ . . . . .	52
Figura 2.18	Grade polar com células triangulares [2]. . . . .	53
Figura 2.19	Célula triangular com quatro pontos [2]. . . . .	54
Figura 2.20	Célula triangular $j, k$ no centro da grade [2]. . . . .	59

Figura 2.21	Célula triangular no primeiro anel da grade [2]. . . . .	60
Figura 2.22	Célula triangular nas bordas da grade [2]. . . . .	61
Figura 2.23	Contorno super-elíptico na abertura. . . . .	68
Figura 2.24	Diagrama de blocos do algoritmo de síntese. . . . .	73
Figura 3.1	Geometria do problema de síntese de um sistema duplo-refletor com fase uniforme na abertura como um problema de valor de contorno. . . . .	76
Figura 3.2	Configuração TB (Gregorian) com a abertura definida na direção do semi espaço $z$ -positivo. . . . .	80
Figura 3.3	Configuração TT (Cassegrain) com a abertura definida na direção do semi espaço $z$ -positivo. . . . .	80
Figura 3.4	Diagrama de radiação do alimentador no plano $1/\eta'$ . . . . .	85
Figura 3.5	Diagrama de radiação do alimentador em 3D. . . . .	86
Figura 3.6	Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$ dos casos A.1, A.2 e A.3. . . . .	87
Figura 3.7	Direções de reflexão da solução inicial no plano $xy$ dos casos A.1, A.2 e A.3. . . . .	88
Figura 3.8	Traçado de raios da solução inicial no plano $xz$ dos casos A.1, A.2 e A.3. . . . .	88
Figura 3.9	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano $xy$ do caso A.1. . . . .	90
Figura 3.10	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano $xz$ do caso A.1. . . . .	90
Figura 3.11	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.1. . . . .	91
Figura 3.12	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.1. . . . .	92
Figura 3.13	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano $xy$ do caso A.2. . . . .	93
Figura 3.14	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano $xz$ do caso A.2. . . . .	93
Figura 3.15	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.2. . . . .	94
Figura 3.16	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.2. . . . .	94
Figura 3.17	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano $xy$ do caso A.3. . . . .	96
Figura 3.18	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano $xz$ do caso A.3. . . . .	96
Figura 3.19	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.3. . . . .	97
Figura 3.20	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.3. . . . .	97
Figura 3.21	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano $xy$ do caso A.4. . . . .	99

Figura 3.22	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano $xz$ do caso A.4.	99
Figura 3.23	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.4.	100
Figura 3.24	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.4.	100
Figura 3.25	Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$ dos casos B.1.	102
Figura 3.26	Direções de reflexão da solução inicial no plano $xy$ dos casos B.1.	102
Figura 3.27	Traçado de raios da solução inicial no plano $xz$ dos casos B.1.	103
Figura 3.28	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano $xy$ do caso B.1.	104
Figura 3.29	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano $xz$ do caso B.1.	105
Figura 3.30	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso B.1.	105
Figura 3.31	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.1.	106
Figura 3.32	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano $xy$ do caso B.2.	107
Figura 3.33	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano $xz$ do caso B.2.	107
Figura 3.34	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso B.2.	108
Figura 3.35	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.2.	108
Figura 3.36	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano $xy$ do caso B.3.	110
Figura 3.37	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano $xz$ do caso B.3.	110
Figura 3.38	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso B.3.	111
Figura 3.39	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.3.	111
Figura 3.40	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano $xy$ do caso B.4.	112
Figura 3.41	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano $xz$ do caso B.4.	113
Figura 3.42	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso B.4.	113
Figura 3.43	Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.4.	114
Figura 4.1	Geometria do problema de síntese de um sistema duplo-refletor <i>off-set</i> com fase não-uniforme na abertura como um problema de valor de contorno.	116
Figura 4.2	Diagrama de blocos do algoritmo de mapeamento para a fase não-uniforme.	118
Figura 4.3	Configuração TB (Gregorian) com a abertura definida na direção do semi espaço $z$ -negativo.	120
Figura 4.4	Configuração TT (Cassegrain) com a abertura definida na direção do semi espaço $z$ -negativo.	121
Figura 4.5	Configuração do duplo-refletor com fase linear na abertura.	130
Figura 4.6	Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$ .	133



Figura 4.7	Direções de reflexão da solução inicial no plano $xy$ .	134
Figura 4.8	Traçado de raios da solução inicial no plano $xz$ .	134
Figura 4.9	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano $xy$ .	135
Figura 4.10	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano $xz$ .	135
Figura 4.11	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese.	136
Figura 4.12	Diagrama de radiação da superfície modelada.	137
Figura 4.13	Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$ .	139
Figura 4.14	Direções de reflexão da solução inicial no plano $xy$ .	140
Figura 4.15	Traçado de raios da solução inicial no plano $xz$ .	140
Figura 4.16	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano $xy$ .	141
Figura 4.17	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano $xz$ .	141
Figura 4.18	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese.	142
Figura 4.19	Diagrama de radiação no plano $uv$ - polarização principal.	143
Figura 4.20	Diagrama de radiação no plano $uv$ - polarização cruzada.	143
Figura 4.21	Direções de incidência da solução inicial no plano $1/\eta'$ .	144
Figura 4.22	Direções de reflexão da solução inicial no plano $xy$ .	145
Figura 4.23	Traçado de raios da solução inicial no plano $xz$ .	145
Figura 4.24	Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano $xy$ .	146
Figura 4.25	Traçado de raios da superfície sintetizada no plano $xz$ .	147
Figura 4.26	Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese.	147
Figura 4.27	Diagrama de radiação no plano $uv$ - polarização principal.	148
Figura 4.28	Diagrama de radiação no plano $uv$ - polarização cruzada.	148
Figura 5.1	Geometria do problema de síntese da lente.	151
Figura 5.2	Geometria de uma lente dielétrica como um problema de valor de contorno.	159
Figura 5.3	Contorno super-elíptico na região de cobertura.	160
Figura 5.4	Diagrama de blocos do algoritmo de síntese da lente.	166
Figura 5.5	Direção dos raios refratados no plano complexo $\zeta$ para o caso I-a.	170
Figura 5.6	Traçado de raios da lente sintetizada para para o caso I-a.	171
Figura 5.7	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso I-a.	172
Figura 5.8	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso I-a.	173
Figura 5.9	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso I-a.	173

Figura 5.10	Direção dos raios refratados no plano complexo $\zeta$ para o caso I-b. . . . .	174
Figura 5.11	Traçado de raios da lente sintetizada para o caso I-b. . . . .	175
Figura 5.12	Direção dos raios refratados no plano complexo $\zeta$ para o caso II-a. . . . .	176
Figura 5.13	Traçado de raios da lente sintetizada para o caso II-a. . . . .	177
Figura 5.14	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso II-a. . . . .	177
Figura 5.15	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso II-a. . . . .	178
Figura 5.16	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso II-a. . . . .	178
Figura 5.17	Direção dos raios refratados no plano complexo $\zeta$ para o caso II-b. . . . .	180
Figura 5.18	Traçado de raios da lente sintetizada para o caso II-b. . . . .	180
Figura 5.19	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso II-b. . . . .	181
Figura 5.20	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso II-b. . . . .	181
Figura 5.21	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso II-b. . . . .	182
Figura 5.22	Direção dos raios refratados no plano complexo $\zeta$ para o caso II-c. . . . .	183
Figura 5.23	Traçado de raios da lente sintetizada para o caso II-c. . . . .	184
Figura 5.24	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso II-c. . . . .	184
Figura 5.25	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso II-c. . . . .	185
Figura 5.26	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso II-c. . . . .	185
Figura 5.27	Direção dos raios refratados no plano complexo $\zeta$ para o caso II-d. . . . .	187
Figura 5.28	Traçado de raios da lente sintetizada para o caso II-d. . . . .	187
Figura 5.29	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso II-d. . . . .	188
Figura 5.30	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso II-d. . . . .	188
Figura 5.31	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso II-d. . . . .	189
Figura 5.32	Direção dos raios refratados no plano complexo $\zeta$ para o caso III-a. . . . .	190
Figura 5.33	Traçado de raios da lente sintetizada para o caso III-a. . . . .	191
Figura 5.34	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-a. . . . .	192

Figura 5.35 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-a. . . . .	192
Figura 5.36 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-a. . . . .	193
Figura 5.37 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-a. . . . .	193
Figura 5.38 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-a. . . . .	194
Figura 5.39 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-a. . . . .	194
Figura 5.40 Direção dos raios refratados no plano complexo $\zeta$ para o caso III-b.	196
Figura 5.41 Traçado de raios da lente sintetizada para o caso III-b. . . . .	196
Figura 5.42 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-b. . . . .	197
Figura 5.43 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-b. . . . .	197
Figura 5.44 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-b. . . . .	198
Figura 5.45 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-b. . . . .	198
Figura 5.46 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-b. . . . .	199
Figura 5.47 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-b. . . . .	199
Figura 5.48 Direção dos raios refratados no plano complexo $\zeta$ para o caso III-c.	200
Figura 5.49 Traçado de raios da lente sintetizada para o caso III-c. . . . .	201
Figura 5.50 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-c. . . . .	202
Figura 5.51 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-c. . . . .	202
Figura 5.52 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-c. . . . .	203
Figura 5.53 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-c. . . . .	203
Figura 5.54 Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-c. . . . .	204
Figura 5.55 Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-c. . . . .	204
Figura 5.56 Direção dos raios refratados no plano complexo $\zeta$ para o caso III-d.	205

Figura 5.57	Traçado de raios da lente sintetizada para o caso III-d. . . . .	206
Figura 5.58	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-d. . . . .	207
Figura 5.59	Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 30 GHz para o caso III-d. . . . .	207
Figura 5.60	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-d. . . . .	208
Figura 5.61	Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 60 GHz para o caso III-d. . . . .	208
Figura 5.62	Diagrama de radiação no plano $\phi = 0^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-d. . . . .	209
Figura 5.63	Diagrama de radiação no plano $\phi = 90^0$ com a lente operando na frequência de 120 GHz para o caso III-d. . . . .	209
Figura A.1	Geometria da lente com foco virtual no ponto $P(\rho_0, Z_0)$ [46]. . . . .	220

# Lista de Símbolos

$\hat{p}$	Vetor unitário na direção do raio incidente no subrefletor e na lente
$\hat{t}$	Vetor unitário na direção do raio refletido pelo subrefletor ou pelo raio transmitido pela lente
$\hat{q}$	Vetor unitário na direção do raio refletido pelo refletor principal
$\vec{r}$	Vetor posição na superfície do subrefletor ou da lente
$r$	Magnitude do vetor posição $\vec{r}$
$\vec{s}$	Vetor que representa o raio refletido pelo subrefletor em direção ao refletor principal
$\vec{v}$	Vetor que conecta a origem $O$ ao ponto $Q$ na abertura
$\vec{r} + \vec{s}$	Vetor que representa a superfície do refletor principal
$\eta$	Coordenada complexa na direção do vetor unitário $\hat{p}$
$\eta_r$	Parte real da coordenada $\eta$
$\omega$	Coordenada complexa do ponto $Q$ na abertura
$\omega_r$	Parte real da coordenada $\omega$
$\xi$	Coordenada complexa na direção do vetor $\vec{s}$
$\zeta$	Coordenada complexa na direção do vetor unitário $\hat{q}$ na síntese do duplo-refletor e do vetor unitário $\hat{t}$ na síntese da lente
$L(\eta)$	Função real de variável complexa relacionada à superfície $r$
$l(\omega)$	Fase na abertura
$z_d$	Distância do plano da abertura à origem $O$ do sistema de coordenadas
$I(\eta)$	Densidade de potência por ângulo sólido do alimentador
$G(\omega)$	Fluxo de densidade de potência por unidade de área normal à abertura
$G_{ob}(\omega)$	Densidade de potência desejada na abertura
$G_{sq}(\omega)$	Densidade de potência refletida na abertura
$a$	<i>Semi-latus rectum</i> da superfície quádrlica confocal
$b$	Parâmetro da superfície quádrlica confocal
$c$	Parâmetro da superfície quádrlica confocal
$d$	Parâmetro da superfície quádrlica confocal
$L_\eta$	Derivada de $L(\eta)$ em relação à variável complexa $\eta$

$L_{\eta\eta}$	Derivada de segunda ordem de $L(\eta)$ em relação à $\eta$
$L_{\bar{\eta}\bar{\eta}}$	Derivada de segunda ordem de $L(\eta)$ em relação ao complexo conjugado de $\eta$
$L_{\eta\bar{\eta}}$	Derivada de segunda ordem cruzada de $L(\eta)$
$j$	Anel da grade polar
$k$	Radial da grade polar
$J$	Quantidade de anéis da grade polar
$K$	Quantidade de radiais da grade polar
$a_{j,k}$	<i>Semi-latus rectum</i> da superfície quádrlica confocal que interpola a superfície sintetizada no ponto $j, k$ da grade polar
$b_{j,k}$	Parâmetro $b$ da superfície quádrlica confocal que interpola a superfície sintetizada no ponto $j, k$ da grade polar
$c_{j,k}$	Parâmetro $c$ da superfície quádrlica confocal que interpola a superfície sintetizada no ponto $j, k$ da grade polar
$d_{j,k}$	Parâmetro $d$ da superfície quádrlica confocal que interpola a superfície sintetizada no ponto $j, k$ da grade polar
$\alpha$	Especifica a regularidade da grade polar em $\theta$
$\theta_c$	Ângulo que define o cone de alimentação do alimentador
$\theta_0$	Ângulo de <i>offset</i> do alimentador em relação ao eixo $z$ positivo
$r_0$	Distância do centro de fase do alimentador $O$ ao centro do subrefletor
$\omega_c$	Centro da abertura sobre o eixo $x$
$L_0$	Valor da superfície no centro da grade
$ra_x$	Raio do contorno da abertura super-elíptica ao longo do eixo $x$
$ra_y$	Raio do contorno da abertura super-elíptica ao longo do eixo $y$
$\sigma$	Parâmetro que define o formato da super-elipse
$\Gamma[L]$	Operador não-linear
$\Gamma_{j,k}[L]$	Valor do operador não-linear no ponto $j, k$ da grade polar
$\Gamma_c$	Valor do operador $\Gamma[L]$ sobre um ponto do contorno
$n$	Parâmetro do modelo cosseno elevado do diagrama do alimentador
$I_0$	Densidade de potência máxima do diagrama do alimentador
$L_e$	Atenuação do diagrama do alimentador na borda do subrefletor ou da lente
$G_0$	Densidade de potência máxima na abertura ou na região de cobertura
$L_G$	Atenuação da densidade de potência na borda da abertura ou da região cobertura
$\psi$	Fator de atenuação da distribuição de densidade de potência da abertura ou da região de cobertura
$\mu$	Passo intermediário do algoritmo de síntese
$\theta_A$	Ângulo do cone de alimentação a partir do ponto $P_0$
$I_A(\zeta)$	Representação do diagrama de radiação da Óptica Geométrica (GO)
$\hat{n}$	Vetor unitário normal à superfície da lente
$\theta_i$	Ângulo de incidência

$\theta_t$	Ângulo de transmissão
$N$	Índice de refração da lente sintetizada
$G(\zeta)$	Densidade de potência por ângulo sólido na região de campo distante
$Z_A$	Espessura da lente
$\Omega''$	Contorno da abertura ou da região de cobertura
$\alpha_u$	Abertura angular do diagrama de radiação ao longo do eixo $u$
$\alpha_v$	Abertura angular do diagrama de radiação ao longo do eixo $v$
$\alpha_0$	Ângulo de <i>offset</i> da região de cobertura em relação ao eixo $z$ positivo
$G_{ob}(\zeta)$	Densidade de potência desejada na região de cobertura
$G_{sq}(\zeta)$	Densidade de potência transmitida na região de cobertura
$T_{\perp}$	Coeficiente de transmissão de Fresnel para polarização perpendicular função de $\eta$ e $\zeta$
$T_{\parallel}$	Coeficiente de transmissão de Fresnel para polarização paralela função de $\eta$ e $\zeta$
$t_{12}$	Transmitância da superfície
$\lambda_0$	Comprimento de onda no ar (espaço-livre)
$\delta_d$	Tangente de perdas do material dielétrico
$\vec{k}_i$	Vetor na direção do raio incidente
$\vec{k}_t$	Vetor na direção do raio transmitido
$E_i$	Campo elétrico incidente
$E_{i\perp}$	Componente perpendicular do campo elétrico incidente
$E_{i\parallel}$	Componente paralela do campo elétrico incidente
$H_{i\parallel}$	Componente paralela do campo magnético incidente
$E_{t\perp}$	Componente perpendicular do campo elétrico transmitido
$E_{t\parallel}$	Componente paralela do campo elétrico transmitido
$H_{t\parallel}$	Componente paralela do campo magnético transmitido
$E_t$	Campo elétrico transmitido
$H_t$	Campo magnético transmitido
$t_{\perp}$	Coeficiente de transmissão de Fresnel para polarização perpendicular função de $\theta$ e $\phi$
$t_{\parallel}$	Coeficiente de transmissão de Fresnel para polarização paralela função de $\theta$ e $\phi$
$\vec{J}_s(P)$	Corrente equivalente elétrica na superfície do material dielétrico
$\vec{M}_s(P)$	Corrente equivalente magnética na superfície do material dielétrico
$\vec{u}_0$	Vetor posição na região de cobertura
$Z_0$	Impedância do ar
$Z_1$	Impedância do material dielétrico
$n_1$	Índice de refração de um material dielétrico
$n_0$	Índice de refração do ar
$k_0$	Número da onda no espaço-livre (ou no ar)
$\epsilon_r$	Permissividade elétrica relativa

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>22</b>
1.1	O Problema de Síntese Rigorosa de Antenas Refletoras <i>Offset</i> . . . . .	24
1.2	Lentes Dielétricas . . . . .	27
1.2.1	O Problema de Síntese Rigorosa de Lentes Dielétricas . . . . .	28
1.3	Objetivos . . . . .	29
1.3.1	Objetivos Específicos . . . . .	30
1.4	Contribuições do Trabalho . . . . .	30
1.5	Organização do Trabalho . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Síntese Óptica de Antenas Duplo-Refletoras <i>Offset</i></b>	<b>33</b>
2.1	Notação em Coordenadas Complexas . . . . .	33
2.2	Formulação do Problema de Síntese . . . . .	35
2.3	Superfície Quádrica Confocal com Eixo Deslocado . . . . .	38
2.3.1	Definição e Equações Gerais . . . . .	39
2.3.2	Derivadas Parciais . . . . .	42
2.4	Solução Numérica do Problema de Síntese . . . . .	43
2.4.1	Grade Polar . . . . .	44
2.4.2	Interpolação Local de uma Superfície por Quádricas Confocais com Eixos Deslocados . . . . .	53
2.4.3	Operador Não-Linear $\Gamma[L]$ . . . . .	58
2.4.4	Método Iterativo de Newton . . . . .	58
2.4.5	Matriz Jacobiana do Operador $\Gamma[L]$ . . . . .	62
2.5	Condição de Contorno . . . . .	67
2.6	Modelo para o Diagrama do Alimentador . . . . .	69
2.7	Modelo de Distribuição de Densidade de Potência na Abertura . . . . .	71
2.8	Algoritmo de Síntese . . . . .	73
2.9	Considerações Finais . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Antenas Duplo-Refletoras <i>Offset</i> com Fase Uniforme na Abertura</b>	<b>75</b>
3.1	Geometria do Problema de Síntese . . . . .	75
3.2	Mapeamento $\eta \rightarrow \omega$ . . . . .	76
3.3	Equação de Monge-Ampère . . . . .	77



3.4	Coordenadas do Refletor Principal . . . . .	78
3.5	Exemplo de Solução Analítica para a Síntese de Duplo-Refletores com Fase Uniforme na Abertura . . . . .	78
3.6	Densidade de Potência Refletida na Abertura . . . . .	80
3.7	Solução Numérica do Problema de Síntese . . . . .	82
3.8	Estudos de Casos . . . . .	84
3.8.1	Projeto de Sistemas Duplo-Refletores com Abertura Circular . . . . .	86
3.8.2	Projeto de Sistemas Duplo-Refletores com Abertura Elíptico . . . . .	101
3.9	Considerações Finais . . . . .	114
<b>4</b>	<b>Antenas Duplo-Refletoras <i>Offset</i> com Fase Não-Uniforme na Abertura</b>	<b>115</b>
4.1	Geometria do Problema de Síntese . . . . .	115
4.2	Mapeamento $\eta \rightarrow \omega$ . . . . .	116
4.3	Coordenadas do Refletor Principal . . . . .	119
4.4	Exemplo de Solução Analítica para a Síntese de Duplo-Refletores com Fase Uniforme na Abertura . . . . .	119
4.5	Densidade de Potência Refletida na Abertura . . . . .	122
4.6	Solução Numérica do Problema de Síntese . . . . .	123
4.7	Estudos de Casos . . . . .	129
4.7.1	Controle do Diagrama de Radiação em Cobertura Circular . . . . .	129
4.7.2	Controle do Diagrama de Radiação em Cobertura com Formato de Bumerangue . . . . .	137
4.7.3	Projeto de um Sistema Duplo-Refletor com Abertura Super-Elíptica . . . . .	144
4.8	Considerações Finais . . . . .	149
<b>5</b>	<b>Síntese Óptica de Lentes Dielétricas sem Simetria Circular</b>	<b>150</b>
5.1	Formulação e Geometria do Problema de Síntese . . . . .	150
5.2	Mapeamento $\eta \rightarrow \zeta$ . . . . .	152
5.3	Equação de Monge-Ampère . . . . .	154
5.4	Densidade de Potência na Região de Cobertura . . . . .	155
5.5	Solução Numérica do Problema de Síntese . . . . .	156
5.6	Condição de Contorno . . . . .	159
5.7	Modelo de Distribuição de Densidade de Potência na Região de Cobertura . . . . .	161
5.8	Perdas por Reflexão . . . . .	163
5.9	Algoritmo de Síntese para a Lente Dielétrica . . . . .	165
5.10	Método de Análise de uma Lente Dielétrica . . . . .	167
5.11	Estudos de Casos . . . . .	169
5.11.1	Projeto de Lentes Dielétricas com Cobertura Circular ( $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ ) . . . . .	170
5.11.2	Projeto de Lentes Dielétricas com Cobertura Circular ( $0 \leq \theta \leq 60^\circ$ ) . . . . .	175
5.11.3	Projeto de Lentes Dielétricas com Cobertura Elíptica ( $0 \leq \theta \leq 60^\circ$ ) . . . . .	189

5.12 Considerações Finais . . . . .	210
<b>6 Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>211</b>
6.1 Trabalhos Futuros . . . . .	213
<b>Referências</b>	<b>214</b>
<b>Apêndice</b>	<b>218</b>
<b>A Lente Circularmente Simétrica</b>	<b>219</b>

# Capítulo 1

## Introdução

De acordo com Balanis [1], uma antena é definida como um dispositivo para a radiação ou a recepção de ondas de rádio. Nos avançados sistemas de comunicação sem fio (*wireless*), além da recepção e transmissão de energia, é usualmente exigido que a antena otimize ou reforce a energia de radiação em determinadas direções e que a suprima em outras. Uma antena ideal é aquela que radiará, em uma direção ou direções desejadas, toda a potência a ela fornecida pelo transmissor. No entanto, esse desempenho ideal jamais pode ser obtido na prática, mas um desempenho próximo deste pode ser alcançado. Existem diversos tipos de antena, e cada uma tem uma forma geométrica diferente de modo a atingir as características de radiação desejadas para a aplicação pretendida.

Antenas do tipo refletoras têm sido usadas desde a descoberta da propagação de ondas eletromagnéticas por Hertz em 1888. Entretanto, a arte de analisar e projetar refletores de diversas formas geométricas não progrediu até a época da Segunda Guerra Mundial, quando foram desenvolvidas numerosas aplicações de radar. A subsequente demanda por refletores para uso em radioastronomia, comunicação em micro-ondas e rastreamento por satélites resultou em um espetacular progresso e desenvolvimento de sofisticadas técnicas analíticas e experimentais para a modelagem de superfícies refletoras e otimização da iluminação de suas aberturas para maximizar o seu ganho [1].

As antenas refletoras assumem diversas configurações geométricas. Um exemplo comum é o refletor parabólico. Uma outra possível geometria de antenas refletoras são as antenas refletoras *offset*, que podem ter um único refletor ou ser duplo-refletoras [2], [3], [4]. A principal vantagem desta configuração assimétrica é evitar o bloqueio da abertura [2], conforme ilustrado nas Figuras 1.1 e 1.2. As geometrias assimétricas representam um grande avanço comparadas às geometrias simétricas, pois evitam espalhamento eletromagnético causado pelo alimentador ou subrefletor e suas respectivas estruturas de sustentação, minimizando os níveis dos lóbulos laterais e aumentando a eficiência do sistema. Assim, essas antenas modeladas podem ser empregadas para fornecer uma cober-

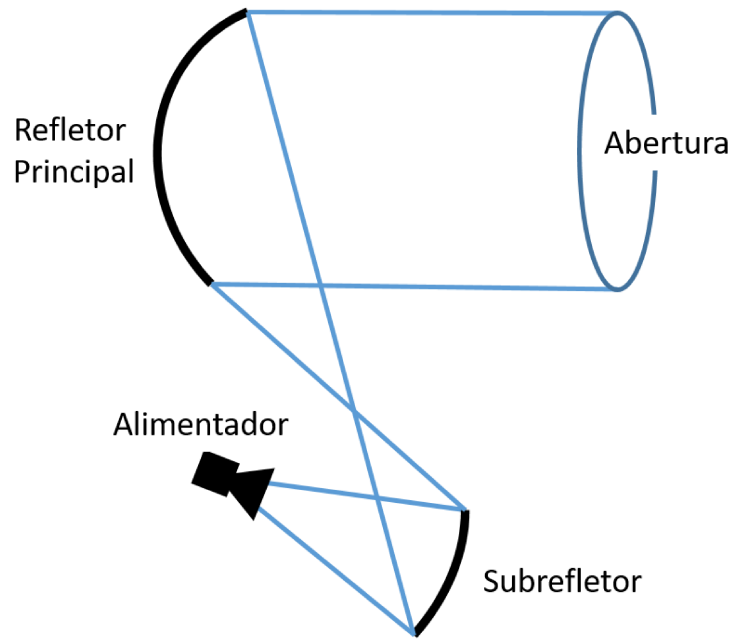


Figura 1.1: Geometria da antena duplo-refletora *offset* (configuração Gregorian).

tura otimizada com alto ganho e baixa interferência co-canal [5]. Outro aspecto positivo é conseguir isolar a estrutura de alimentação da energia refletida na região central da superfície refletora, minimizando a perda de retorno do alimentador [3]. Em contrapartida, a grande desvantagem dos sistemas *offset* reside na complexidade e custos de implementação da estrutura mecânica de sustentação dos refletores e alimentador [6]. Do ponto de vista eletromagnético, a principal desvantagem é a polarização cruzada gerada quando alimentada por uma fonte com polarização linear ou circular [2], [7].

A solução clássica para o projeto de antenas refletoras *offset* é o uso de superfícies quádricas confocais [8], por exemplo, elipsóides, parabolóides e hiperbolóides. Entretanto, a rotação na polarização imposta pela geometria torna-se um grande inconveniente quando a aplicação requerida exige baixos níveis de polarização cruzada. Na segunda metade da década de 1970, foi demonstrado em [9] e [10] que antenas duplo-refletoras *offset* podem ser projetadas de tal forma que, quando alimentadas por uma fonte linearmente polarizada, a despolarização decorrida da assimetria dos refletores pode ser largamente reduzida, proporcionando baixo nível de polarização cruzada. O princípio utilizado consiste em obter uma condição em que ocorra o casamento do campo espalhado do subrefletor com aquele proveniente do refletor principal. Nesta condição a componente de polarização cruzada na abertura causada pela assimetria do refletor principal pode ser compensada pela assimetria do subrefletor, desde que, sejam utilizados determinados ângulos de rotação do alimentador. Do ponto de vista da Óptica Geométrica (GO), pode-se mostrar que o perfeito casamento é atingido quando a condição de Mizugutch é respeitada e, nestes casos, círculos concêntricos no alimentador são mapeados em círculos concêntricos na abertura da antena [2], [11].

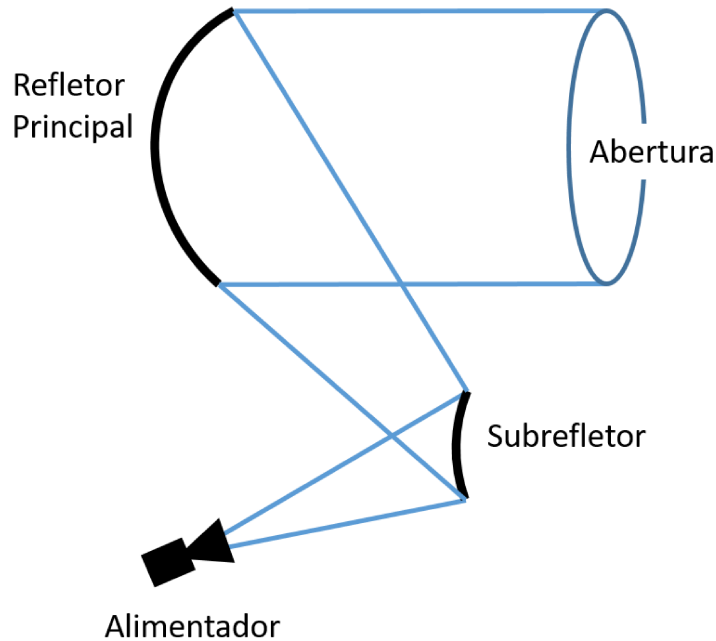


Figura 1.2: Geometria da antena duplo-refletora *offset* (configuração Cassegrain).

## 1.1 O Problema de Síntese Rigorosa de Antenas Refletoras *Offset*

Uma análise matemática rigorosa para o problema de síntese de antenas refletoras *offset* com um único refletor e contorno da abertura geral foi inicialmente apresentado em [12]. Nesse trabalho, são utilizadas variáveis paramétricas para representar as direções espaciais, substituindo assim, expressões trigonométricas por expressões algébricas, levando a importantes simplificações nas expressões de síntese. Nessa abordagem, a Lei de Snell é aplicada na equação de conservação da energia, resultando em uma equação diferencial parcial não-linear de segunda ordem do tipo Monge-Ampère elíptica, que representa fisicamente a transformação da densidade de potência contida em um tubo de raios.

Com a abordagem proposta em [12] e utilizando cálculo tensorial, em [13] as mesmas expressões são obtidas para a síntese de superfícies refletoras iluminadas por uma fonte pontual para gerar um diagrama de radiação específico utilizando as aproximações da GO. A solução numérica da equação de Monge-Ampère é apresentada em [14] para o caso elíptico e em [15] e [16] para o caso hiperbólico, onde uma antena com um refletor *offset* é projetada para o contorno circular na região de campo distante. O algoritmo desenvolvido consiste em um procedimento iterativo em que aproximações baseadas em diferenças finitas são aplicadas a uma forma linearizada de um operador diferencial.

Em [17] os problemas de síntese explorados em [12] - [16] são abordados utilizando coordenadas complexas e unificadas em uma única equação diferencial de Monge-Ampère elíptica ou hiperbólica, a depender de um sinal. O sistema de coordenadas complexas é

definido através da projeção estereográfica de uma esfera de raio unitário sobre um plano complexo [18]. Com esse novo formalismo é mostrado que, para o mapeamento entre um raio incidente e refletido, pode ser utilizada qualquer transformação analítica, em particular, uma transformação analítica conformal nos casos onde a distorção é uniforme.

Com a notação de [17], [19] apresenta a relação entre a distribuição de fase e densidade de potência proveniente de uma fonte pontual no plano de abertura, considerando sistemas refletores *offset* com um único refletor e com dois refletores. Ainda em [19], é demonstrado que, para os sistemas duplo-refletores, ambas as distribuições de fase e densidade de potência podem ser obtidas no plano de abertura sem as aproximações feitas em [20] e [21]. Além disso, verifica-se que a transformação da densidade de potência em um tubo de raios também é representada por uma equação do tipo Monge-Ampère. Particularizando a solução para o caso de simetria axial, duas equações diferenciais ordinárias são obtidas e avaliadas com as mesmas condições iniciais assumidas em [22].

Já no trabalho [23], Westcott e Brickel utilizam coordenadas complexas e demonstram que a equação diferencial parcial não-linear de primeira ordem numericamente avaliada em [24] pode ser resolvida analiticamente. Também, demonstra-se que para o caso de fase uniforme na abertura, o sistema deve ter necessariamente um plano de simetria para se obter a condição de polarização cruzada nula. Em [25], o problema de polarização cruzada nula é novamente examinado e conclui-se que, em princípio, a modelagem pode compensar não somente a assimetria dos refletores, mas também assimetrias provenientes do diagrama de radiação do alimentador.

Utilizando a formulação proposta em [19], em [26] o problema de síntese de antenas duplo-refletores *offset* é particularizado para uma abertura circular com fase uniforme. A formulação matemática exata é apresentada, e novamente uma equação diferencial parcial do tipo Monge-Ampère é avaliada utilizando uma adaptação da técnica desenvolvida para sistemas com um único refletor [13]. Como solução, um conjunto de funções reais associadas ao refletor principal é obtido. A solução mais apropriada é feita pela escolha de uma constante que define a distância do centro do sistema de coordenadas ao ponto central do refletor. Em [27], a formulação é particularizada para sistemas duplo-refletores com fase uniforme e abertura elíptica.

Um aspecto bastante controverso e pouco significativo para o projeto de antenas refletores *offset* modeladas é a existência de solução para a equação de Monge-Ampère e a unicidade dessa solução. É bem verdade que ainda não foi provado matematicamente que a solução exista para uma abertura com geometria arbitrária [2]. Entretanto, diversos trabalhos, entre eles [28], [29] e [30], demonstraram através de resultados numéricos a existência de solução para vários contornos de abertura. Em [31], além da tradicional abertura circular, diversos outros tipos de abertura com geometrias elípticas e modeladas

foram amplamente estudados e sintetizados com sucesso. Para validação do método, resultados de análise difrativa foram apresentados para as antenas sintetizadas. Com relação à unicidade da solução, de fato não se pode garantir que ao mudar a condição inicial do problema ter-se-á a mesma resposta inicialmente obtida.

Em [32], Caffarelli e Osher estabeleceram a existência de soluções fracas para a equação de Monge-Ampère sob certos termos. Em [33], utilizando uma abordagem similar à proposta em [32], um novo método de síntese rigoroso é apresentado para sistemas *offset* com um único refletor. A técnica utiliza uma coleção de elipsóides confocais para compor a superfície refletora sintetizada. Para a solução do mapeamento, é desenvolvido um algoritmo iterativo para solução do problema de redistribuição de energia, na forma integral, de cada uma das elipses que compõem a superfície em vez de avaliar a equação diferencial de Monge-Ampère numericamente. Outra abordagem alternativa para a síntese geométrica de sistemas duplo-refletores é explorada em [34] e [35] onde a redistribuição de energia é formulada e resolvida como um problema de transferência de Monge-Kantorovich.

Apesar da síntese rigorosa de antenas refletoras *offset* baseada na equação de Monge-Ampère ter sido amplamente estudada durante quase duas décadas [12], [31], o problema de aumento exponencial do erro de discretização na região central das grades polares ainda é um dos inconvenientes do método. Segundo [31], este erro ocorre em virtude do procedimento numérico empregado ser baseado em diferenças finitas, levando a erros de truncamento nas derivadas parciais de primeira e segunda ordem que são proporcionais a  $1/\rho$  e  $1/\rho^2$ , respectivamente, onde  $\rho$  é o raio da grade polar. Como consequência, o erro na distribuição de fase e amplitude na região central da grade é maior do que nas bordas.

Recentemente, [2] avaliou o problema da síntese rigorosa de antenas refletoras *offset* utilizando coordenadas complexas, assim como em [17]. No entanto, ao contrário de [26] que adota um procedimento numérico iterativo em que aproximações baseadas em diferenças finitas são aplicadas a uma forma linearizada de um operador diferencial, [2] utiliza superfícies quádricas confocais com eixos deslocados para representar localmente a superfície refletora sintetizada a fim de reduzir o erro de discretização das derivadas parciais discutido em [31], uma vez que se tem a expressão analítica exata para a função de mapeamento local e suas derivadas, sendo necessário apenas determinar os parâmetros que definem cada quádrica. Para ilustrar o método, [2] apresenta antenas modeladas com um único refletor para prover diagramas de radiação Gaussianos em contornos de cobertura circular, elíptico e super-elíptico.

## 1.2 Lentes Dielétricas

O uso de uma lente dielétrica como parte de uma antena é tão antigo quanto a demonstração da existência das ondas eletromagnéticas por Hertz. Em 1888, Oliver Logde usou uma lente dielétrica em seu experimento de comprimento de onda de 1 m. No entanto, assim, como as antenas refletoras, a pesquisa sobre antenas lentes não progrediu até a Segunda Guerra Mundial. As lentes eram usadas para transformar o diagrama de radiação de uma fonte primária em um padrão de radiação de alto ganho, para aplicações com feixe fixo ou de varredura. Mas naquela época, as lentes foram substituídas pelas antenas refletoras, menos volumosas e mais leves nas faixas de micro-ondas [36].

Com o avanço da tecnologia nas últimas décadas, em particular na tecnologia de circuitos de ondas milimétricas e submilimétricas, o interesse por antenas lentes foi renovado, visto que o tamanho das lentes torna-se aceitável nessas frequências. Atualmente, as lentes têm sido exploradas em diversas aplicações, como por exemplo, para imagens [37], comunicação sem fio *indoor* [38], sistemas de radar [39], espectroscopia temporal [40], radioastronomia [41], comunicações via satélite [42], entre outras.

As lentes podem ser usadas para modificar a fase ou a amplitude (ou ambas) do padrão de radiação de um alimentador primário, a fim de transformá-lo em um padrão de radiação de saída especificado. Nesse sentido, as lentes são equivalentes aos refletores. No entanto, em vez da reflexão, o princípio de operação da lente é baseado na refração das ondas eletromagnéticas nas superfícies da lente (no caso de lentes homogêneas isotrópicas) ou no material dielétrico da lente no caso de lentes de índice de refração não uniforme.

Uma principal vantagem das lentes sobre os refletores é que a alimentação e sua estrutura de suporte não bloqueiam a abertura da antena. Esse recurso de retroalimentação foi essencial para o desenvolvimento do conceito de lente integrada de onda milimétrica e submilimétrica, onde a base da lente é posicionada diretamente em contato com a alimentação (vide Fig. 1.3) para produzir um padrão de radiação diretivo de feixe único ou de feixe múltiplo. A estrutura da lente integrada é muito flexível e permite obter especificações exigentes de padrões de radiação de saída, enquanto várias camadas podem ser adicionadas, por exemplo, para aumentar os graus de liberdade do projeto, mantendo uma estrutura compacta. Isso contrasta com os sistemas multi-refletores, onde os problemas de bloqueio forçam grandes estruturas complexas [36].

Além disso, as lentes dielétricas convencionais são relativamente baratas, têm boa tolerância de fabricação, possuem grande largura de banda, sendo limitadas apenas pela largura de banda de alimentação, e apresentam baixas perdas dissipativas [37], [38], [39], [40], [42], [43].



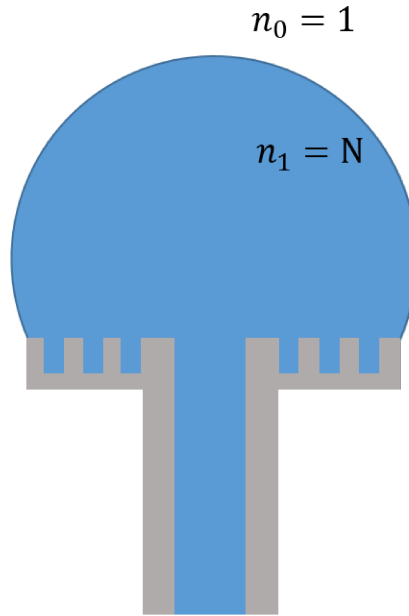


Figura 1.3: Lente dielétrica homogênea integrada ao alimentador.

### 1.2.1 O Problema de Síntese Rigorosa de Lentes Dielétricas

As lentes dielétricas apresentadas na literatura têm, em geral, formas geométricas canônicas, podendo ser constituídas por uma única superfície refrativa (por exemplo, esférica, hiperbólica), ou de duas superfícies refrativas (por exemplo, bihiperbólicas). Há também lentes montadas sobre substratos com perfis elípticos ou hemisférico estendido. Suas funcionalidades básicas consistem em controlar a diretividade da antena e eventualmente a distribuição Gaussiana do feixe radiado [43].

A partir da década de 1980, alguns trabalhos dedicados à análise matemática rigorosa do problema de síntese de lentes dielétricas, assim como foi feito para antenas refletoras *offset* na década de 1970. O mais relevante deles foi em 1986, quando Westcott e Brickell usaram os princípios de GO para estudar a refração através de uma interface em coordenadas complexas [44]. A relação de mapeamento, lei de Snell da refração, entre as direções dos raios incidentes e refratados foi obtida analiticamente. Nesse mesmo trabalho, Westcott e Brickell formularam teoricamente o problema de modelar um material dielétrico duplo-refrativo para produzir uma distribuição de potência arbitrária sobre uma abertura com fase uniforme. A formulação matemática conduziu a uma equação diferencial parcial não-linear do tipo Monge-Ampère. No entanto, as perdas por reflexão no interior do dielétrico foram desprezadas.

Mais tarde, em 1993, Westcott formulou o problema de síntese de um refletor *offset* alimentado por um cone dielétrico sob os princípios da GO usando a notação em coordenadas complexas para traçar as direções dos raios e suas polarizações. As perdas por reflexão foram incluídas na teoria apresentada. Assim como na metodologia de projeto

de sistemas duplo-refletores formulada em [19], [26], as superfícies do refletor e da lente são obtidas simultaneamente. O problema de modelar o refletor e a superfície dielétrica para controlar as distribuições de potência e fase na abertura é formulado e também requer a solução de uma equação diferencial parcial não-linear do tipo Monge-Ampère [45].

Em 1996, Lemaire *et al.* projetaram uma lente dielétrica com simetria cilíndrica usando os princípios da GO para estabelecer o perfil da lente. No entanto, foi adicionado um segundo passo no procedimento de projeto para corrigir o diagrama de radiação da lente. Nesse estudo foi construído um protótipo de uma antena lente de 7 cm de diâmetro alimentado por um guia de onda circular excitado com o modo  $TE_{11}$  com polarização circular e seu diagrama de radiação foi mensurado com o sistema operando na frequência de 62,5 GHz.

Em 2005, uma lente dielétrica homogênea tridimensional de formato arbitrário foi sintetizada [43]. O objetivo era encontrar um perfil de lente que transformasse o diagrama de radiação de uma fonte de alimentação primária em um diagrama de radiação de saída com amplitude desejada. Para isso, a geometria da lente 3D foi rigorosamente derivada usando os princípios da GO resultando em uma equação diferencial parcial de segunda ordem do tipo Monge-Ampère. A formulação foi apresentada em coordenadas esféricas e o algoritmo iterativo proposto baseia-se em aproximar as derivadas parciais presentes na formulação por diferenças finitas. Para alcançar o padrão de saída especificado, os resultados obtidos na síntese da GO foram otimizados usando uma aproximação baseada na Óptica Física (PO). Antes da etapa de otimização, os resultados obtidos com a GO tiveram boa concordância com aqueles preditos. No entanto, surgiram oscilações no lóbulo principal das lentes mensuradas evidenciando uma forte diferença entre os padrões desejados e medidos. Esta discrepância somente foi reduzida com a etapa de otimização da lente.

Recentemente, uma fórmula simples foi derivada em [46] para descrever a geratriz de lentes circularmente simétricas baseando-se no princípio de Fermat. A espessura da lente é projetada para minimizar as perdas por reflexão no interior da lente. Embora a largura do feixe principal possa ser especificada, a amplitude da distribuição de potência na região de campo distante não pode ser controlada.

### 1.3 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo obter soluções numéricas para a síntese de antenas duplo-refletores *offset* e lentes dielétricas sem simetria circular, e que gerem um diagrama de radiação com feixes modelados. A solução do problema de síntese consiste em avaliar uma equação diferencial parcial não-linear de segunda ordem do tipo Monge-Ampère como um problema de valor de contorno em coordenadas complexas. Para isso, este estudo

aplica a técnica de solução numérica da equação de Monge-Ampère proposta em [2], que utiliza superfícies quádricas confocais com eixos deslocados para representar localmente a superfície sintetizada, permitindo a representação analítica das derivadas parciais da equação de Monge-Ampère e sua subsequente simplificação.

### 1.3.1 Objetivos Específicos

O presente trabalho tem como objetivos específicos:

- desenvolvimento de modelagem para a síntese de antenas duplo-refletoras *offset* com fase uniforme na abertura;
- desenvolvimento de modelagem para a síntese de antenas duplo-refletoras *offset* com fase não-uniforme na abertura;
- desenvolvimento de uma formulação matemática exata, baseada nos princípios da GO, da equação de Monge-Ampère para o problema de síntese de lentes dielétricas homogêneas com uma superfície refrativa em coordenadas complexas;
- desenvolvimento de modelagem para a síntese de lentes dielétricas não-circularmente simétricas com uma superfície refrativa;
- implementação de um algoritmo de análise de lentes dielétricas não-circularmente simétricas com uma superfície refrativa baseado em um método híbrido GO-PO.

## 1.4 Contribuições do Trabalho

Este trabalho contribui cientificamente com o desenvolvimento de modelagem para a síntese numérica de antenas duplo-refletoras *offset* (com fase uniforme e não-uniforme na abertura) e de lentes dielétricas sem simetria circular. Para a síntese numérica de lentes dielétricas foi desenvolvida uma formulação matemática inédita, baseada nos princípios da GO, que conduziu a uma equação diferencial parcial não-linear de segunda ordem do tipo Monge-Ampère em coordenadas complexas.

A partir dos resultados obtidos com o desenvolvimento de modelagem para a síntese numérica de sistemas duplo-refletores *offset* com fase uniforme na abertura foi publicado o seguinte artigo científico:

- ASSIS, A. R.; MOREIRA, F. J. S.; BERGMANN, J. R. “GO Synthesis of Offset Dual Reflector Antennas Using Local Axis-Displaced Confocal Quadrics”, *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*, v. 19, no. 2, pp. 177-190, 2020.

Além disso, após a defesa da tese, serão submetidos dois artigos técnico-científicos em periódicos especializados da área com os seguintes temas:

- (i) síntese óptica de duplo-refletores *offset* para gerar feixes modelados na região de cobertura;
- (ii) síntese óptica de lentes dielétricas sem simetria circular.

O artigo com tema (i) será elaborado a partir dos resultados obtidos com o desenvolvimento de modelagem para a síntese numérica de sistemas duplo-refletores *offset* com fase não-uniforme na abertura. E o artigo com tema (ii) conterá a formulação matemática inédita para a síntese de lentes dielétricas, bem como a desenvolvimento de modelagem e os resultados da síntese numérica.

## 1.5 Organização do Trabalho

O presente trabalho aborda o emprego de superfícies quádricas confocais no procedimento de síntese de superfícies duplo-refletoras *offset* e lentes dielétricas assimétricas. A formulação matemática para o desenvolvimento dos algoritmos computacionais, bem como os resultados obtidos, são apresentados conforme descrito a seguir.

No Capítulo 2 é descrita a formulação matemática, em coordenadas complexas, para a síntese de sistemas duplo-refletores *offset* presente na literatura [19]. Em seguida, é apresentada a representação em coordenadas complexas do equacionamento de superfícies quádricas confocais com eixos deslocados que são utilizadas neste trabalho para representar localmente as superfícies sintetizadas, utilizadas anteriormente por [2] na síntese de refletores *offset*. Também é apresentada a estratégia numérica para solução do problema de síntese, que consiste em um algoritmo baseado no método de Newton. Para completar a solução numérica do problema de síntese, é definida a condição de contorno para a equação de Monge-Ampère. Além disso, são descritos os modelos do alimentador e do campo na abertura adotados na síntese dos duplo-refletores com fase uniforme.

No Capítulo 3, o problema de síntese descrito no Capítulo 2 é particularizado para fase uniforme na abertura, sendo a superfície do subrefletor representada localmente por quádricas confocais com eixos deslocados. Em seguida, são apresentadas a solução inicial adotada para o algoritmo de síntese e a matriz Jacobiana obtida analiticamente para a solução deste problema. As superfícies obtidas pelo algoritmo de síntese são interpoladas por pseudo-*splines* de quinta ordem e, então, analisadas via aproximações da PO com correções das correntes de borda [47], [48], considerando-se a antena operando na frequência de 11,725 GHz.

No Capítulo 4, o problema de síntese descrito no Capítulo 2 é implementado para

o caso geral, ou seja, considerando fase não-uniforme na abertura. É apresentado o procedimento numérico adotado para a função de mapeamento na abertura. Os detalhes para implementar a matriz Jacobiana analiticamente são descritos e o algoritmo de fase não-uniforme é principiado com uma solução inicial com fase uniforme na abertura. Para validar o algoritmo são apresentadas antenas duplo-refletores que geram feixes modelados na região de campo distante, como, por exemplo, feixe circular com distribuição de amplitude uniforme, feixe no formato de boomerang e feixe gerado de uma abertura super-elíptica. As antenas foram analisadas operando na frequência de 30 GHz.

No Capítulo 5, o problema de síntese rigorosa de lentes dielétricas homogêneas é formulado em coordenadas complexas. A formulação exata baseada nos princípios da GO conduz a uma equação diferencial parcial não-linear do tipo Monge-Ampère. O cálculo analítico da matriz Jacobiana é apresentado, bem como, as perdas por reflexão na interface dielétrico-ar [45]. A solução inicial adotada para iniciar o algoritmo de síntese é uma lente circularmente simétrica proposta em [46]. Além disso, também é apresentado o método de análise das lentes dielétricas baseado em um método híbrido GO-PO [43]. Na sequência, são apresentados estudos de casos para validar os algoritmos desenvolvidos.

Por fim, no Capítulo 6 são sumarizadas as conclusões obtidas a partir dos algoritmos desenvolvidos e dos resultados numéricos obtidos para os problemas de síntese de sistemas duplo-refletores *offset* e lentes dielétricas sem simetria circular. Além disso, são apresentadas as propostas futuras para este trabalho.

## Capítulo 2

# Síntese Óptica de Antenas Duplo-Refletoras *Offset*

Neste capítulo são apresentadas as bases teóricas que fundamentam o algoritmo de síntese de antenas duplo-refletoras *offset*. Inicialmente, é apresentada a notação em coordenadas complexas adotada neste trabalho que consiste na mesma abordagem de [17]. A descrição do problema de síntese de sistemas duplo-refletores *offset* formulado em [19] é apresentada bem como a superfície quádrlica confocal com eixo deslocado usada para aproximar localmente uma superfície refletora, que consiste no diferencial da solução numérica do problema síntese proposto em [2]. Além disso, são abordadas a grade polar usada para discretizar o subrefletor e o desenvolvimento do algoritmo de síntese, que é baseado no método de Newton para a solução de um operador não-linear como um problema de contorno. Para concluir o capítulo, são apresentados a condição de contorno e os modelos adotados para o diagrama do alimentador e para a distribuição de densidade de potência na abertura, respectivamente. Para finalizar o capítulo, o algoritmo descrito é apresentado em diagrama de blocos.

### 2.1 Notação em Coordenadas Complexas

Seja um ponto  $P$  sobre uma esfera de raio unitário definido em coordenadas esféricas pelas variáveis  $\theta$  e  $\phi$  em relação à origem  $O$  do sistema de coordenadas. Através da projeção estereográfica a partir do ponto  $N(0, 0, 1)$ ,  $P$  projeta o ponto  $P'$  no plano  $z = 0$ , conforme ilustrado na Figura 2.1. A coordenada complexa  $\eta$  do ponto  $P'$  associada ao vetor unitário  $\hat{p} = \overline{OP}$  é definida como

$$\eta = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} = x + iy, \quad (2.1)$$

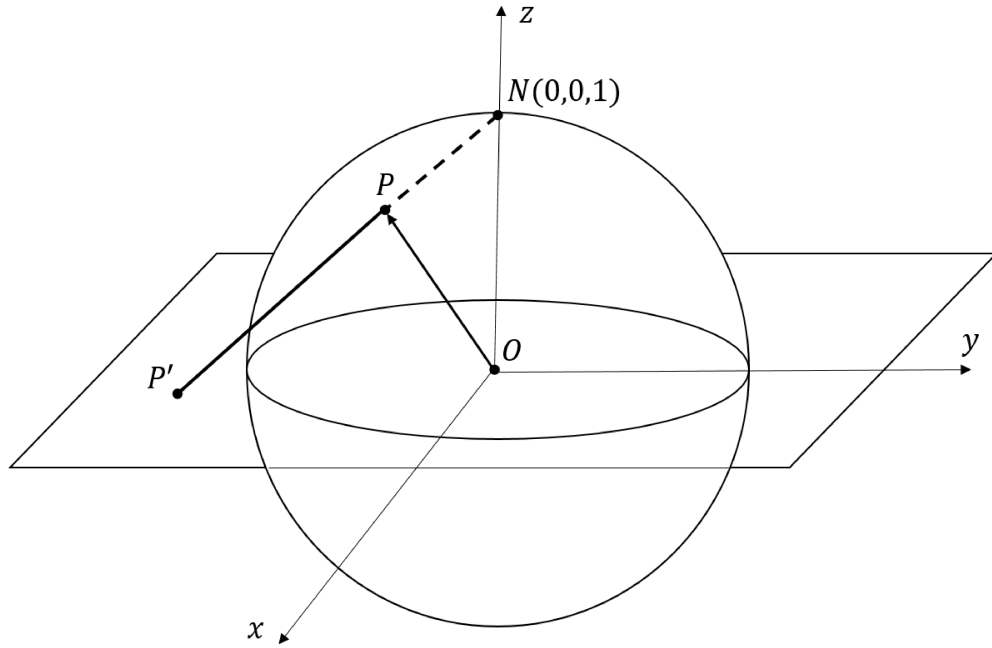


Figura 2.1: Projeção estereográfica da esfera unitária.

onde  $(x, y, z = 0)$  são as coordenadas cartesianas do ponto  $P'$ . Manipulando a equação (2.1), pode-se mostrar que

$$\phi = \frac{1}{2i} \ln \left( \frac{\eta}{\bar{\eta}} \right), \quad (2.2)$$

onde a coordenada esférica  $\phi$  é expressa em função da variável complexa  $\eta$  e seu complexo conjugado  $\bar{\eta}$ . Manipulando novamente a equação (2.1) obtém-se expressões relacionando a coordenada esférica  $\theta$  à coordenada complexa  $\eta$ :

$$\cos \theta = \frac{|\eta|^2 - 1}{|\eta|^2 + 1}, \quad (2.3a)$$

$$\sin \theta = \frac{2|\eta|}{|\eta|^2 + 1}. \quad (2.3b)$$

Utilizando a fórmula de Euler, obtém-se ainda outras duas expressões relacionando a coordenada esférica  $\phi$  à coordenada complexa  $\eta$ :

$$\cos \phi = \frac{\bar{\eta} + \eta}{2|\eta|}, \quad (2.4a)$$

$$\sin \phi = \frac{i(\bar{\eta} - \eta)}{2|\eta|}. \quad (2.4b)$$

Agora, seja um vetor qualquer  $\vec{a}$  que possui o conjunto de componentes  $(a_1, a_2, a_3)$  em relação ao sistema de coordenadas Cartesianas. Seja  $(\alpha, a_3)$  uma outra representação para esse conjunto, onde  $\alpha$  é o número complexo  $a_1 + ia_2$ . Usando esta notação, as

componentes do vetor unitário  $\hat{p}$  são expressas em termos de sua coordenada complexa  $\eta$  como

$$\left( \frac{2\eta}{|\eta|^2 + 1}, \frac{|\eta|^2 - 1}{|\eta|^2 + 1} \right). \quad (2.5)$$

Devido à notação em coordenadas complexas, é conveniente introduzir suas derivadas com respeito a esta coordenada. Dada a função  $f$  de  $\eta = x + iy$  (em geral,  $f$  é uma função complexa) define-se

$$f_\eta = \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad f_{\bar{\eta}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\eta}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

e que satisfazem as relações

$$\bar{f}_\eta = \overline{(f_{\bar{\eta}})}, \quad \bar{f}_{\bar{\eta}} = \overline{(f_\eta)},$$

onde  $\bar{f}$  é o complexo conjugado da função  $f$ . Consequentemente,  $f_{\eta\bar{\eta}} = f_{\bar{\eta}\eta}$ .

As equações diferenciais parciais que surgem neste trabalho têm a forma

$$|L_{\eta\eta} - A|^2 - (L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2 = \mathcal{H} \quad (2.6)$$

onde  $L$  é uma função real de  $\eta$  e os termos  $A$ ,  $B$  e  $\mathcal{H}$  são funções de  $\eta$ ,  $L$  e de derivadas parciais de primeira ordem de  $L$ . Além disso, as funções  $B$  e  $\mathcal{H}$  são reais. Pode ser visto que (2.6) é uma equação diferencial parcial não-linear de segunda ordem de Monge-Ampère, do tipo elíptica se  $\mathcal{H} < 0$  ou hiperbólica se  $\mathcal{H} > 0$ .

## 2.2 Formulação do Problema de Síntese

A Figura 2.2 mostra o percurso de um raio proveniente da fonte  $O$  de radiação que é refletido nos pontos  $R$  e  $S$  sobre o subrefletor e o refletor principal, respectivamente, e passa através do plano de abertura do refletor principal em  $Q$  da esquerda para a direita. Os vetores unitários nas direções de  $\overrightarrow{OR}$ ,  $\overrightarrow{RS}$  e  $\overrightarrow{SQ}$  são representados por  $\hat{p}$ ,  $\hat{t}$  e  $\hat{q}$  respectivamente. Também será usada a seguinte representação:  $\overrightarrow{OR} = \vec{r}$ ,  $\overrightarrow{RS} = \vec{s}$  e  $\overrightarrow{OQ} = \vec{v}$ . Escolhendo o sistema de coordenadas Cartesianas retangulares com origem em  $O$  e o eixo  $z$  perpendicular à abertura, as coordenadas complexas de  $\hat{p}$ ,  $\hat{t}$  e  $\hat{q}$  relativas a este sistema são denotadas por  $\eta$ ,  $\xi$  e  $\zeta$  respectivamente. As componentes do vetor  $\vec{v}$  são expressas como  $(\omega, z_d)$ , tal que  $z_d$  é a distância perpendicular de  $O$  à abertura e  $\omega$  é a coordenada complexa de  $Q$ .

A função fase  $l(\omega)$  é definida assumindo que passa um único raio através de cada



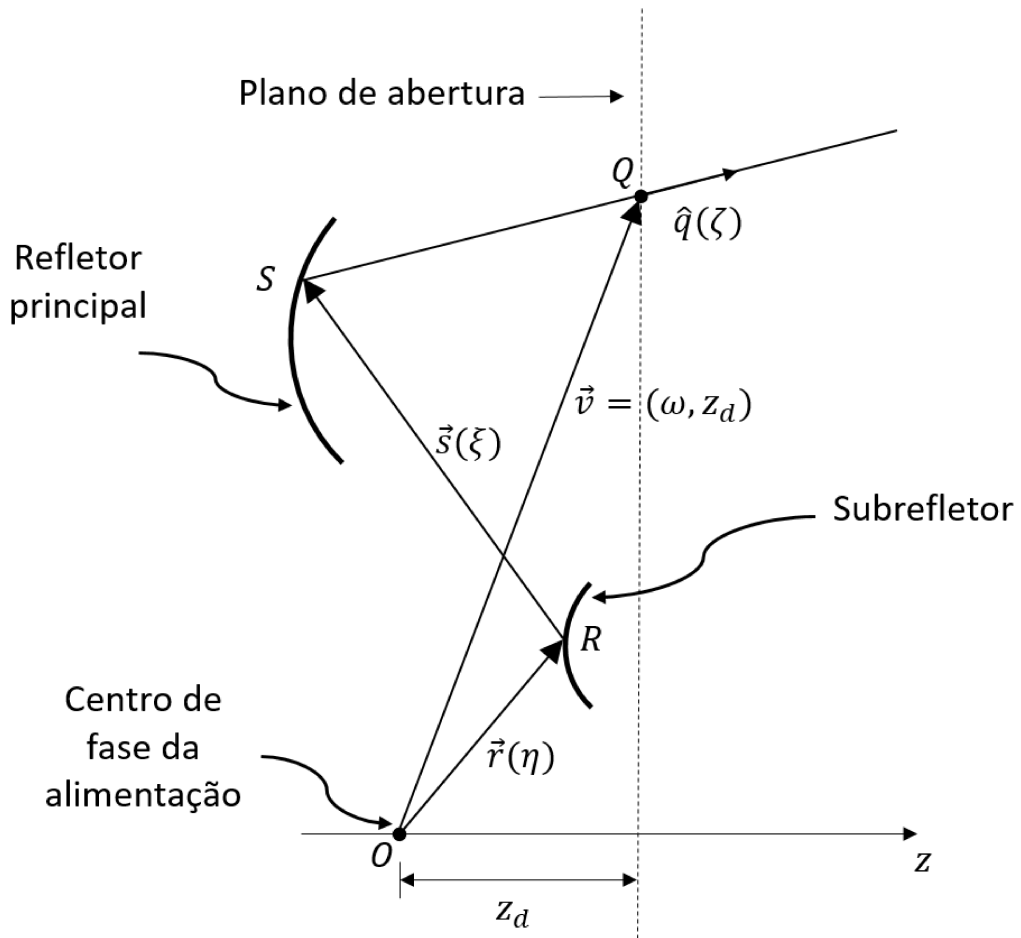


Figura 2.2: Geometria do problema de síntese de duplo-refletores.

ponto da abertura do refletor principal. Esta condição proíbe qualquer cáustica sobre a abertura. As derivadas da função  $l(\omega)$  determinam  $\zeta$  como uma função de  $\omega$  e estas relações foram obtidas em [19] aplicando o teorema de Malus que conduz às seguintes relações em coordenadas complexas:

$$l_\omega = \frac{\bar{\zeta}}{1 + |\zeta|^2} \quad \text{e} \quad l_{\bar{\omega}} = \frac{\zeta}{1 + |\zeta|^2}, \quad (2.7)$$

que, após algumas manipulações matemáticas, permite obter a equação que fornece  $\zeta$  a partir das funções  $l_\omega$  e  $l_{\bar{\omega}}$  [19]:

$$\zeta = \frac{2l_{\bar{\omega}}}{1 + (1 - 4|l_\omega|^2)^{1/2}}. \quad (2.8)$$

Da equação (2.8) é possível observar que a função fase deve satisfazer necessariamente à desigualdade  $|l_\omega| \leq \frac{1}{2}$ .

Agora suponha que o subrefletor da Figura 2.2 seja representado pela equação

$\vec{r} = \vec{r}(\eta)$ . As componentes Cartesianas de  $\vec{r}$  são

$$r \left( \frac{2\eta}{1 + |\eta|^2}, \frac{|\eta|^2 - 1}{|\eta|^2 + 1} \right). \quad (2.9)$$

É definida a função real  $L(\eta)$  de variável complexa relacionada à função  $r(\eta)$  através da seguinte expressão [17]:

$$r = (|\eta|^2 + 1)e^{L(\eta)}. \quad (2.10)$$

Introduzindo a notação  $\tau = e^{L(\eta)}$ , as componentes da expressão (2.9) podem ser reescritas como

$$(2\eta\tau, \tau(|\eta|^2 - 1)). \quad (2.11)$$

Brickell *et al.* mostrou em [17] que a lei de Snell da reflexão no subrefletor pode ser expressa em termos da derivada da função  $L(\eta)$  como

$$L_\eta = \frac{1}{\xi - \eta}. \quad (2.12)$$

Além disso, foi demonstrado em [19] que a variável complexa que representa o raio refletido pelo subrefletor é dada por

$$\xi = \frac{l + z_d - 2\tau|\eta|^2 - (\omega - 2\eta\tau)\bar{\zeta}}{\bar{\omega} - 2\bar{\eta}\tau + (2\tau + z_d - l)\bar{\zeta}}. \quad (2.13)$$

Substituindo (2.13) na equação (2.12), obtém-se a seguinte expressão [19]:

$$L_\eta = \frac{\bar{\omega} - 2\bar{\eta}\tau + (2\tau + z_d - l)\bar{\zeta}}{l + z_d - \omega\bar{\zeta} - \bar{\omega}\eta + (l - z_d)\bar{\zeta}\eta}. \quad (2.14)$$

A equação (2.14) estabelece uma relação de mapeamento  $\eta \rightarrow \omega$  entre a esfera unitária de centro O e a abertura. Este mapeamento depende da função fase e do subrefletor. Uma vez determinados  $\eta$ , o subrefletor e a função fase, o refletor principal é obtido a partir da seguinte expressão [19]:

$$\vec{r} + \vec{s} = \vec{v} - (H/2K)\vec{q}, \quad (2.15)$$

onde  $H$  e  $K$  são funções de  $\omega$  e  $\eta$  a saber:

$$\begin{aligned} H &= (l - r)^2 - |\vec{v} - \vec{r}|^2 = l^2 - |\vec{v}|^2 - 2r(l - \hat{p} \cdot \vec{v}) \\ &= l^2 - |\omega|^2 - z_d^2 - 2\tau [l(1 + |\eta|^2) + z_d(1 - |\eta|^2) - \bar{\eta}\omega - \eta\bar{\omega}], \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
 K &= (l - r) - \hat{q} \cdot (\vec{v} - \vec{r}) \\
 &= \frac{l(1 + |\zeta|^2) + z_d(1 - |\zeta|^2) - \bar{\zeta}\omega - \zeta\bar{\omega} + 2\tau(\bar{\eta}\zeta + \eta\bar{\zeta} - |\eta|^2 - |\zeta|^2)}{1 + |\zeta|^2}.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Sendo  $I(\eta)$  a densidade de potência de uma fonte pontual em  $O$  e  $G(\omega)$  o fluxo de densidade de potência normal à abertura, então a transferência de energia da fonte para a abertura é obtida comparando as áreas elementares de um tubo de raios atravessando uma esfera de raio unitário e centro  $O$  e, depois de duas reflexões, atravessando o plano de abertura. Tal conceito conduz à seguinte expressão da lei da Conservação da Energia em coordenadas complexas [19]:

$$\frac{I(\eta)}{G(\omega)} = \frac{(1 + |\eta|^2)^2}{4} ||\omega_\eta|^2 - |\omega_{\bar{\eta}}|^2|, \tag{2.18}$$

onde  $\omega_\eta$  e  $\omega_{\bar{\eta}}$  são as derivadas parciais de  $\omega$  em relação à  $\eta$  e  $\bar{\eta}$ , respectivamente. Substituindo  $\omega_\eta$  e  $\omega_{\bar{\eta}}$ , obtidas com o auxílio da equação (2.14), na equação (2.18) obtém-se a desejada relação entre as funções  $l$ ,  $G$  e  $L$  [19]:

$$(L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2 - |L_{\eta\eta} - L_\eta^2|^2 = \pm \mathcal{H}(\eta, \omega) \tag{2.19}$$

onde

$$\begin{aligned}
 B &= -\frac{2e^L\gamma}{\beta - \frac{1}{2}h\delta}, \quad V = \frac{4\gamma^2}{(1 - \delta)(\beta - \frac{1}{2}h\delta)^2(1 + |\eta|^2)^2}, \\
 \beta &= l + z_d - 2e^L|\eta|^2, \quad \gamma = |1 + \eta L_\eta|^2, \quad \delta = 1 + (1 - 4|l_\omega|^2)^{1/2}, \quad h = H/K
 \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{H}(\eta, \omega) = V \{ [hl_{\omega\bar{\omega}} - (1 - 2|l_\omega|^2)] - |hl_{\omega\omega} + 2l_\omega^2|^2 \} \frac{I(\eta)}{G(\omega)}.$$

A equação (2.19) é uma equação diferencial parcial não-linear de segunda ordem do tipo Monge-Ampère na forma complexa. A escolha do sinal corresponde às formas elíptica (sinal +) e hiperbólica (sinal -) da equação<sup>1</sup>.

## 2.3 Superfície Quádrica Confocal com Eixo Deslocado

Para a solução numérica do problema de síntese descrito na Seção 2.2, o subrefletor será representado localmente por superfícies quádricas confocais com eixos deslocados. Esse tipo de superfície é muito utilizado em antenas refletoras devido a suas propriedades ópticas. As quádricas confocais são formadas a partir da revolução de uma cônica sobre seu próprio eixo. Nesta seção é apresentada a equação que define esta classe de quádricas e suas derivadas parciais utilizando a notação em coordenadas complexas.

<sup>1</sup>As formas elíptica e hiperbólica da equação de Monge-Ampère são analisadas por Westcott em [49].

### 2.3.1 Definição e Equações Gerais

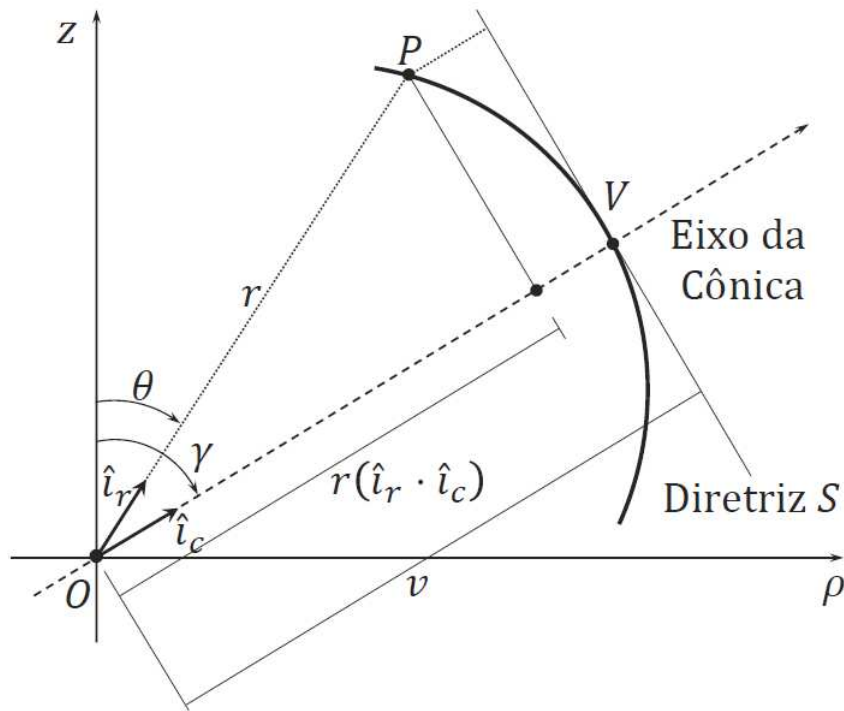


Figura 2.3: Seção de cônica com eixo deslocado [2].

A equação polar de uma seção cônica assume formas simples quando um dos focos está na origem  $O$  do sistemas de coordenadas polares e a reta diretriz  $S$  é perpendicular ao eixo da cônica, como ilustrado na Figura 2.3. Para determinar a equação polar da cônica utiliza-se a seguinte proposição: uma cônica é o lugar geométrico dos pontos do plano  $P = (r, \theta)$  tais que

$$\overline{OP} = e\overline{PS}, \quad (2.20)$$

onde  $e$  é a excentricidade e

$$\overline{PS} = v \pm r(\hat{i}_r \cdot \hat{i}_c), \quad (2.21)$$

em que  $v$  é a distância entre o foco  $O$  e a diretriz  $S$ ,  $\hat{i}_r$  é a direção unitária do vetor  $\overline{OP}$  e  $\hat{i}_c$  é a direção unitária do eixo de simetria da cônica (direção perpendicular à reta diretriz) [2]. Assumindo que os vetores  $\hat{i}_r$  e  $\hat{i}_c$  estão no espaço, e não no plano, tem-se, então, uma superfície quádrlica confocal, conforme ilustra a Figura 2.4. Os vetores  $\hat{i}_r$  e  $\hat{i}_c$  são definidos como:

$$\hat{i}_r(\theta, \phi) = \text{sen } \theta \cos \phi \hat{x} + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \quad (2.22a)$$

$$\hat{i}_c(\gamma, \varphi) = \text{sen } \gamma \cos \varphi \hat{x} + \text{sen } \gamma \text{sen } \varphi \hat{y} + \cos \gamma \hat{z} \quad (2.22b)$$

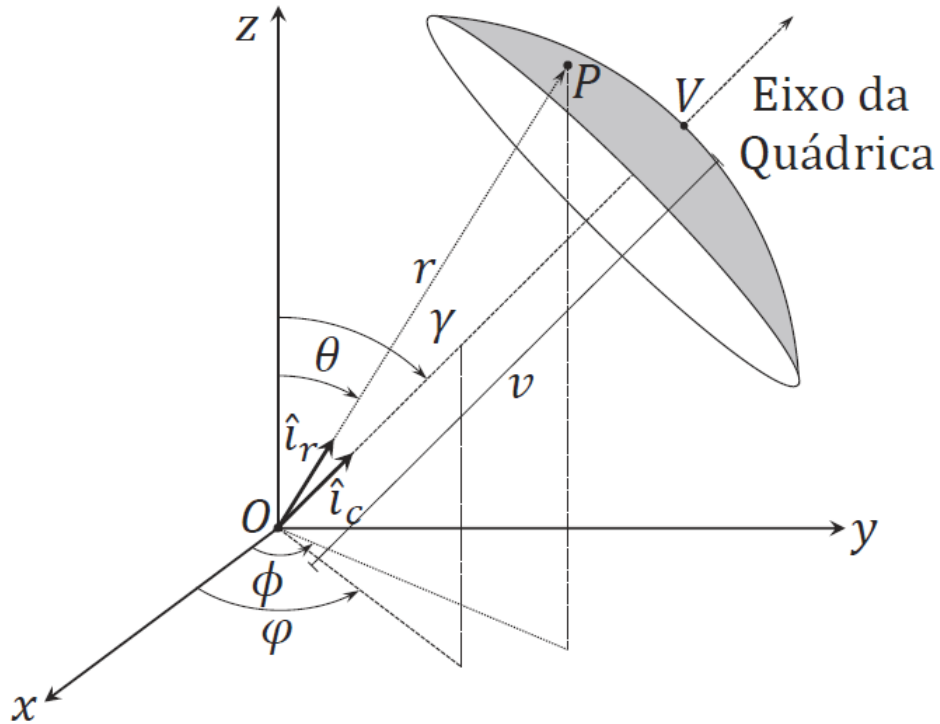


Figura 2.4: Superfície quádrlica confocal com eixo deslocado [2].

onde  $\gamma$  é o ângulo de elevação do eixo da cônica em relação ao eixo  $z$  e  $\varphi$  é o azimute do eixo da cônica em relação ao eixo  $x$  conforme pode ser visto na Figura 2.4. Na equação (2.21) o sinal negativo ( $-$ ) indica que a diretriz  $S$  está à esquerda do pólo e o sinal positivo ( $+$ ) indica que está à direita. No presente trabalho considerou-se a diretriz à esquerda e, conseqüentemente, o sinal negativo. Fazendo,

$$\overline{OP} = r \quad (2.23)$$

e com a ajuda da equação (2.21), a equação (2.20) pode ser escrita como

$$r = e \left[ v + r(\hat{i}_r \cdot \hat{i}_c) \right] \quad (2.24)$$

e, após algumas manipulações, reescrita na forma

$$r = \frac{-ev}{e(\hat{i}_r \cdot \hat{i}_c) - 1}. \quad (2.25)$$

Substituindo as equações (2.22a) e (2.22b) em (2.25) encontra-se [2]:

$$r = \frac{a}{b \operatorname{sen} \theta \cos \phi + c \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + d \cos \theta - 1}, \quad (2.26)$$

onde os parâmetros da quádrlica são

$$a = -ev, \quad (2.27a)$$

$$b = e \sen \gamma \cos \varphi, \quad (2.27b)$$

$$c = e \sen \gamma \sen \varphi, \quad (2.27c)$$

$$d = e \cos \gamma, \quad (2.27d)$$

onde  $a$  é o *semi-latus rectum*,  $e$  é a excentricidade,  $\gamma$  e  $\varphi$  são os ângulos do eixo de simetria em elevação e azimute, respectivamente. Conforme já mencionado, a representação das direções em coordenadas complexas simplifica a formulação do presente método de síntese. Desta forma, substituindo as identidades (2.3a) e (2.3b) em (2.26), tem-se que

$$r = \frac{a}{b \left( \frac{2|\eta|}{|\eta|^2+1} \right) \cos \phi + c \left( \frac{2|\eta|}{|\eta|^2+1} \right) \sen \phi + d \left( \frac{|\eta|^2-1}{|\eta|^2+1} \right) - 1} \quad (2.28)$$

que pode ser reescrito na forma

$$r = \frac{a(|\eta|^2 + 1)}{(2|\eta| \cos \phi)b + (2|\eta| \sen \phi)c + (|\eta|^2 - 1)d - |\eta|^2 - 1}. \quad (2.29)$$

Substituindo a relação (2.10) em (2.29) obtém-se

$$ae^{-L(\eta)} = (2|\eta| \cos \phi)b + (2|\eta| \sen \phi)c + (|\eta|^2 - 1)d - |\eta|^2 - 1. \quad (2.30)$$

Como o auxílio das identidades (2.4a) e (2.4b), a equação da quádrlica (2.30) pode ser escrita em função das coordenadas complexas como [2]:

$$ae^{-L(\eta)} = (\bar{\eta} + \eta)b + i(\bar{\eta} - \eta)c + (|\eta|^2 - 1)d - |\eta|^2 - 1. \quad (2.31)$$

Alternativamente, a equação (2.31) pode ser expressa por [2]:

$$ae^{-L(\eta)} = (d - 1)\eta\bar{\eta} + (b - ic)\eta + (b + ic)\bar{\eta} - d - 1. \quad (2.32)$$

Além das duas formas apresentadas acima, pode-se obter uma expressão para a função  $L(\eta)$  em função dos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  manipulando a equação (2.31) e é escrita na forma [2]:

$$L(\eta) = \ln \left[ \frac{a}{(\bar{\eta} + \eta)b + i(\bar{\eta} - \eta)c + (|\eta|^2 - 1)d - |\eta|^2 - 1} \right]. \quad (2.33)$$

### 2.3.2 Derivadas Parciais

Conforme apresentado na Seção 2.2, a equação diferencial parcial do tipo Monge-Ampère (2.19) é escrita em função das derivadas parciais de primeira e segunda ordem da função  $L$  em relação as variáveis  $\eta$  e seu complexo conjugado  $\bar{\eta}$ . Assim, diferenciando a equação (2.32) em relação a  $\eta$ :

$$\frac{\partial}{\partial \eta}[ae^{-L(\eta)}] = \frac{\partial}{\partial \eta}[(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1]. \quad (2.34)$$

Sabendo que, por definição

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \eta} = 0, \quad (2.35)$$

faz-se a derivação da equação (2.34), resultando em

$$-ae^{-L(\eta)}\frac{\partial L(\eta)}{\partial \eta} = [(d-1)\eta + (b-ic)]. \quad (2.36)$$

Substituindo a equação (2.32) em (2.36) obtém-se [2]:

$$L_{\eta}(\eta) = -\frac{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1}, \quad (2.37)$$

onde  $L_{\eta}$  é a derivada da função real  $L$  em relação à variável complexa  $\eta$ . A derivada da função  $L$  em relação à variável  $\bar{\eta}$  é obtida de forma direta observando a propriedade  $\overline{L_{\eta}} = L_{\bar{\eta}}$ , válida para qualquer função real [2]. Logo,

$$L_{\bar{\eta}}(\eta) = -\frac{(d-1)\eta + (b+ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1}. \quad (2.38)$$

As derivadas de segunda ordem são obtidas a partir das derivadas já obtidas. Logo, derivando novamente a equação (2.37) em relação a  $\eta$ :

$$\frac{\partial}{\partial \eta}[L_{\eta}(\eta)] = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ -\frac{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right]. \quad (2.39)$$

Após algumas manipulações matemáticas, mostra-se que [2]:

$$L_{\eta\eta}(\eta) = \left[ \frac{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right]^2, \quad (2.40)$$

onde  $L_{\eta\eta}$  é a derivada de segunda ordem da função real  $L$  em relação à variável complexa

$\eta$ . Comparando as equações (2.37) e (2.40), é possível constatar que [2]:

$$L_{\eta\eta}(\eta) = [L_{\eta}(\eta)]^2, \quad (2.41)$$

conduzindo à uma importante simplificação na equação de Monge-Ampère. Outra derivada de segunda ordem pode ser obtida derivando-se a equação (2.38) em relação a  $\bar{\eta}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} [L_{\eta}(\eta)] = \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left[ -\frac{(d-1)\eta + (b+ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right]. \quad (2.42)$$

Após algumas manipulações, a equação (2.42) é reduzida a [2]:

$$L_{\bar{\eta}\bar{\eta}}(\eta) = \left[ \frac{(d-1)\eta + (b+ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right]^2, \quad (2.43)$$

onde  $L_{\bar{\eta}\bar{\eta}}$  é a derivada de segunda ordem da função  $L$  em relação à variável complexa  $\bar{\eta}$ . Por fim, a derivada cruzada de segunda ordem é obtida derivando novamente (2.37), porém agora em relação à variável complexa  $\bar{\eta}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} [L_{\eta}(\eta)] = \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left[ -\frac{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}{(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1} \right]. \quad (2.44)$$

Reescrevendo (2.44) obtém-se [2]:

$$L_{\eta\bar{\eta}}(\eta) = \frac{b^2 + c^2 + d^2 - 1}{[(d-1)\eta\bar{\eta} + (b-ic)\eta + (b+ic)\bar{\eta} - d - 1]^2}. \quad (2.45)$$

Como a função  $L(\eta)$  é uma função real de variável complexa, mostra-se facilmente que [2]:

$$L_{\eta\bar{\eta}}(\eta) = L_{\bar{\eta}\eta}(\eta). \quad (2.46)$$

## 2.4 Solução Numérica do Problema de Síntese

A solução do problema de síntese de sistemas duplo-refletores *offset* consiste em avaliar numericamente a equação diferencial parcial de Monge-Ampère (2.19) como um problema de contorno. Para a solução de (2.19), será empregado um método numérico alternativo proposto em [2] para a síntese de um sistema *offset* composto por um único refletor e é baseado no Método de Newton. Neste trabalho, a metodologia alternativa consiste em representar localmente a superfície do subrefletor por um conjunto de superfícies quádricas confocais com eixos deslocados (descritas na Seção 2.3), ou seja, cada quádrica individualmente representa apenas uma área local do subrefletor. É importante ressaltar



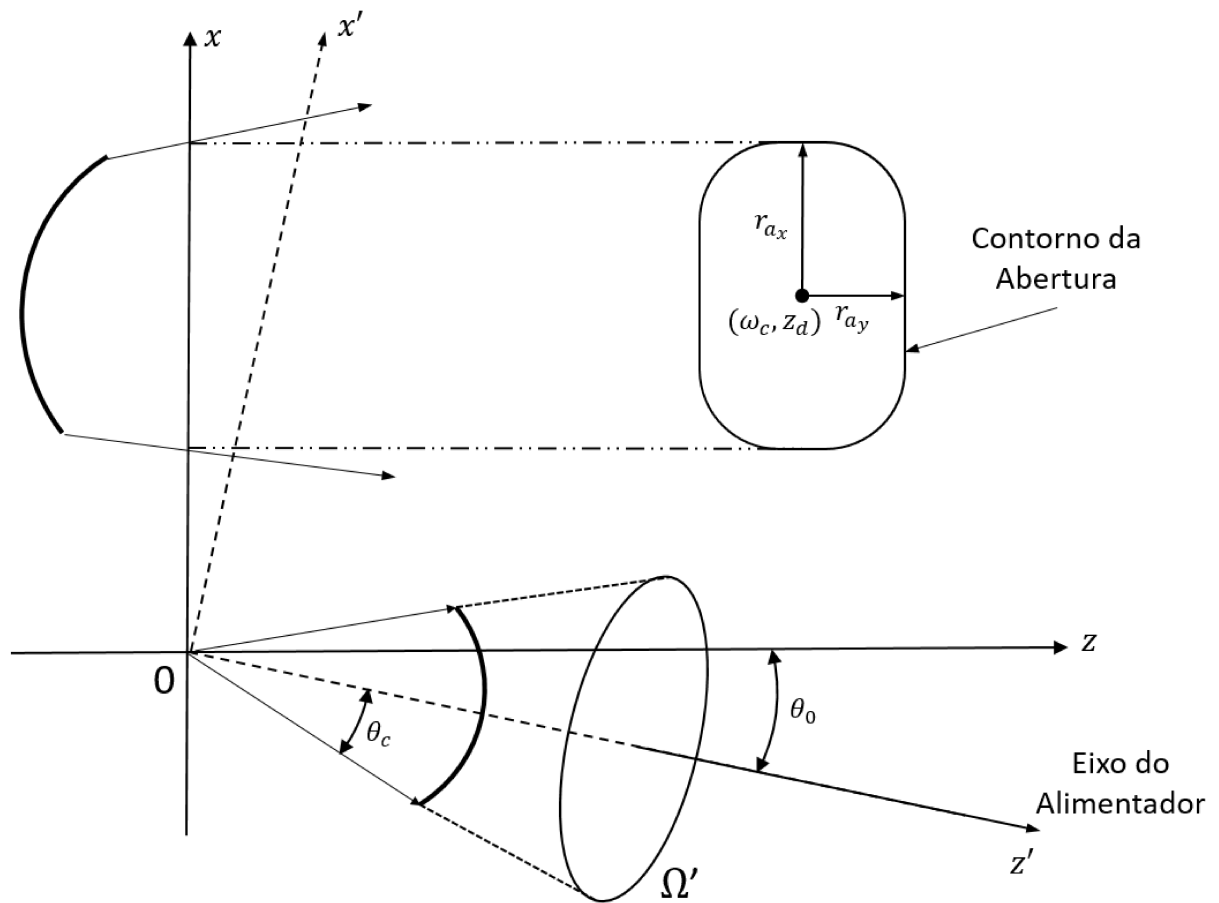


Figura 2.5: Sistemas de coordenadas principal e sistema de coordenadas auxiliar do alimentador.

que cada quádrlica confocal local que compõe a superfície do subrefletor é circularmente simétrica em relação ao seu eixo de simetria, eixo que está deslocado do eixo  $z$  pelo ângulo de elevação  $\gamma$  e pelo ângulo de azimute  $\varphi$  em relação ao eixo  $x$ , conforme visto na Figura 2.4. Assim, a possibilidade de deslocamento do eixo de simetria de cada quádrlica em elevação e azimute permite a representação de superfícies assimétricas e, conseqüentemente, a obtenção de diagramas de radiação em função de duas variáveis.

### 2.4.1 Grade Polar

Para aplicar o método numérico na solução do problema de síntese será usada uma grade polar para discretizar a superfície do subrefletor, que é feita no sistema de coordenadas auxiliar  $x'y'z'$  ilustrado na Figura 2.5. A função  $L(\eta)$ , solução da equação de Monge-Ampère (2.19), é uma função real e contínua que descreve a superfície do subrefletor, solução para o problema de síntese ilustrado na Figura 2.2. Do ponto de vista

numérico, a solução de (2.19) é um conjunto finito de valores representado por

$$L[L_{1,1}, \dots, L_{j,k}, \dots, L_{J,K}] \quad \text{onde } j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.47)$$

e os valores de  $J$  e  $K$  definem o número máximo de anéis e radiais em uma grade polar disposta em um domínio  $\Omega'$  no plano  $\eta'$  associado ao cone de alimentação (vide Figura 2.5), enquanto que os índices  $j$  e  $k$  especificam um anel e uma radial nesta grade, respectivamente.

Em aplicações práticas, uma corneta cônica corrugada, cujo diagrama de radiação é circularmente simétrico, é frequentemente adotada como alimentador de antenas refletoras. Em função disto, o contorno  $\Omega'$  associado ao cone do alimentador é assumido circularmente simétrico e definido por

$$\eta' = \eta_c = \cot\left(\frac{\theta_c}{2}\right), \quad (2.48)$$

onde  $\theta_c$  é o ângulo que define o cone de iluminação do alimentador, conforme ilustra a Figura 2.5. Para discretizar a superfície refletora, é adotada uma grade polar definida pelas coordenadas  $\theta', \phi'$  no sistema de coordenadas auxiliar ( $'$ ) do alimentador. A distância angular entre os anéis ( $\Delta\theta'$ ) pode ser variável, enquanto que a distância entre as radiais ( $\Delta\phi'$ ) é mantida constante. Para o ângulo de borda  $\theta_c$ , o anel  $\theta'_j$  é obtido por

$$\theta'_j = \theta_c \left(\frac{j}{J}\right)^\alpha. \quad (2.49)$$

Quando  $\alpha = 1$  a distância angular entre os anéis é constante e a grade é dita regular. Quando  $\alpha < 1$  a distância angular entre os anéis é maior próximo ao centro e quando  $\alpha > 1$  a distância angular entre os anéis será maior próxima à borda. Por analogia, a radial  $\phi'_k$  é definida como

$$\phi'_k = 2\pi \frac{k}{K}. \quad (2.50)$$

Como exemplo, considere uma grade regular polar ( $\alpha = 1$ ) com 100 pontos ( $N = J \times K$ ), onde  $J = 10$  e  $K = 10$  e  $\theta_c = 30^\circ$ , conforme ilustrado na Figura 2.6. Observe que, como a distância entre os pontos é proporcional a  $\theta'$ , a distância entre os pontos de um mesmo anel na região central da grade é muito menor que na região próxima à borda. A grande vantagem de se trabalhar com grades polares é, evidentemente, a possibilidade de descrever com precisão contornos polares. Entretanto, o modelo trivial de discretização gera uma distribuição não uniforme dos pontos. Para melhorar a discretização na borda, pode-se aumentar o número de radiais para  $K = 30$ , como ilustra a Figura 2.7. Entretanto, essa estratégia é viável até certo limite, já que os pontos na região central ficam cada vez mais próximos, podendo ocasionar erros numéricos. Uma estratégia adotada para

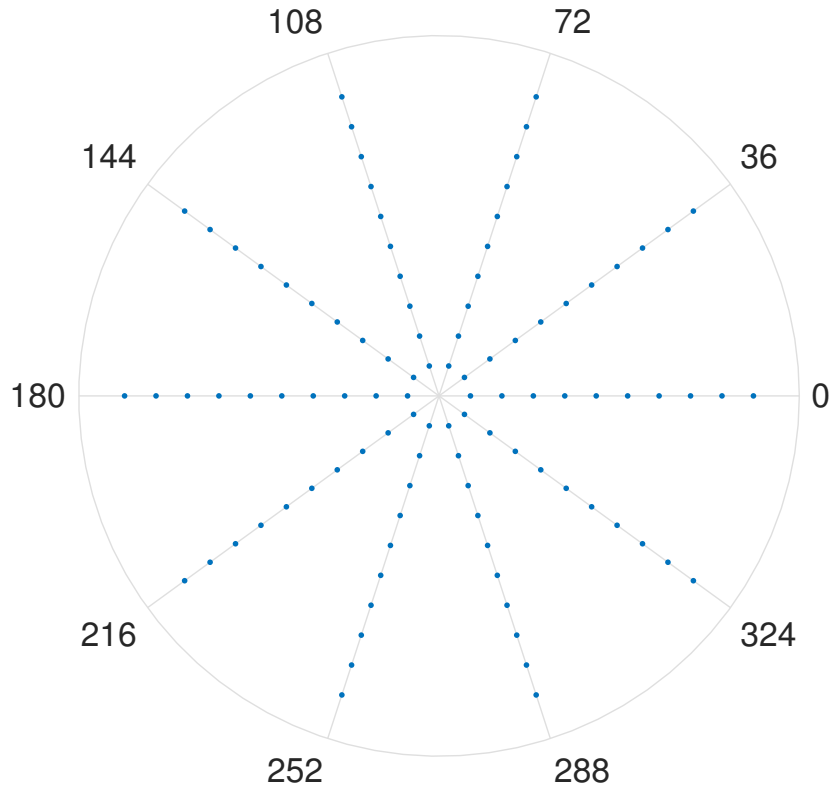


Figura 2.6: Grade regular polar  $J \times K = 10 \times 10$ ,  $\alpha = 1$ , no domínio  $\theta' \phi'$ .

contornar esse problema é usar uma grade polar não-uniforme em relação à  $\theta'$ , fazendo  $\alpha$  diferente de 1 na equação (2.49). A Figura 2.8 ilustra uma grade polar  $J \times K = 10 \times 30$  com  $\alpha = 0,6$ . Observe que os pontos dos anéis próximos à região central ficaram mais distantes entre si, enquanto que os pontos dos anéis próximos à borda ficaram menos espaçados entre si.

Os gráficos resultantes da conversão das grades polares apresentadas nas Figuras 2.6, 2.7 e 2.8 para o sistema de coordenadas complexas são ilustrados nas Figuras 2.9, 2.10 e 2.11, respectivamente. A transformação é feita através da definição da variável complexa  $\eta$  em (2.1). Pode-se verificar que a distância entre os anéis não é constante. Na região central da grade a distância entre os anéis é menor, e aumenta na medida que se aproxima da borda. A razão deste comportamento é facilmente verificável analisando o comportamento do módulo da equação (2.1):

$$|\eta'| = \cot\left(\frac{\theta'}{2}\right) \approx \frac{2}{\theta'}. \quad (2.51)$$

Logo, o módulo de  $\eta'$  é aproximadamente inversamente proporcional à  $\theta'$  e, conseqüentemente, quanto menor o valor de  $\theta'$  (anéis mais internos da grade definida nas coordenadas  $\theta', \phi'$ ) maior será o valor de  $|\eta'|$  (anéis mais externos no plano complexo). Por conta disto, é conveniente visualizar os pontos no plano complexo inverso  $1/\eta'$ , con-

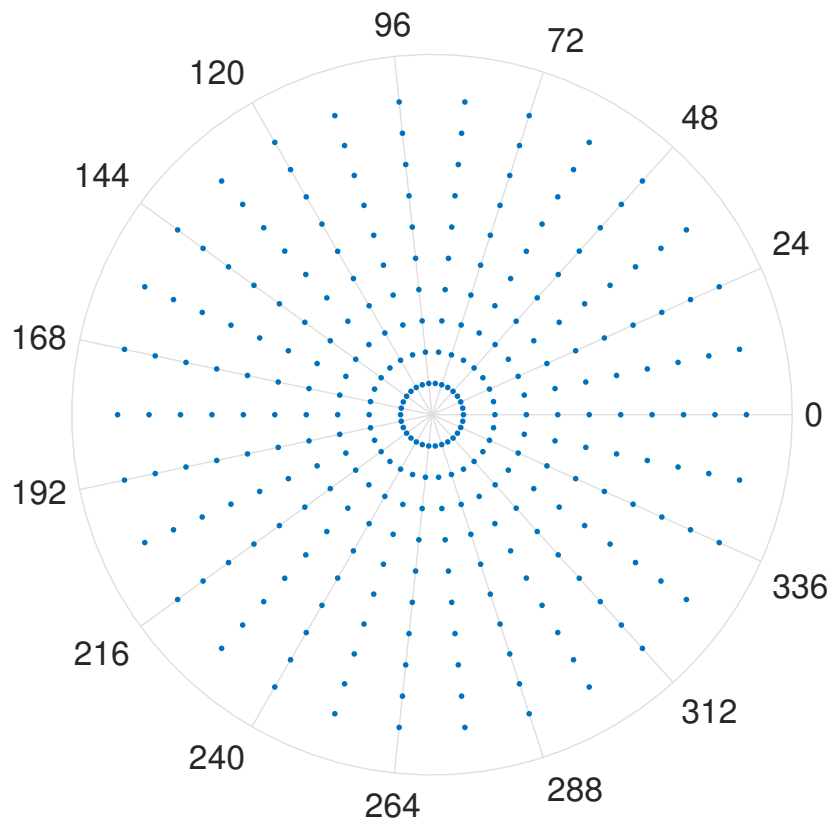


Figura 2.7: Grade regular polar  $J \times K = 10 \times 30$ ,  $\alpha = 1$ , no domínio  $\theta' \phi'$ .

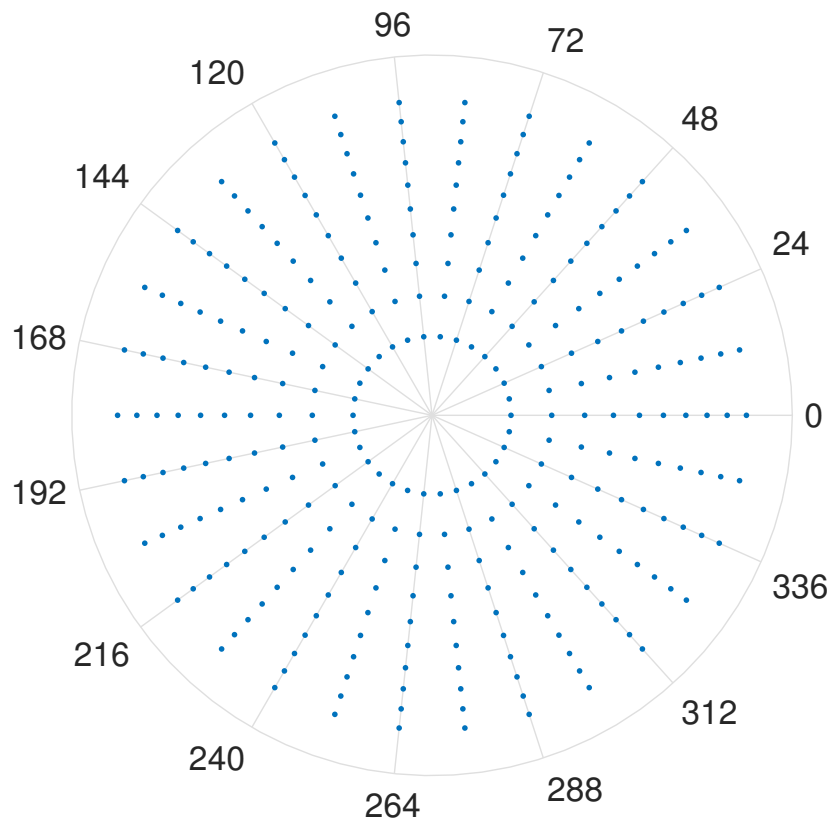


Figura 2.8: Grade polar não-uniforme  $J \times K = 10 \times 30$ ,  $\alpha = 0,6$ , no domínio  $\theta' \phi'$ .

forme ilustrado nas Figuras 2.12, 2.13 e 2.14. Neste caso, há correspondência direta entre o primeiro anel da grade definida em  $\theta', \phi'$  com o primeiro anel no plano  $1/\eta'$  e o último anel da grade em  $\theta', \phi'$  com o último anel no plano  $1/\eta'$ . Em razão desta conveniência, os gráficos utilizados para representar as direções de incidência serão representados em seus respectivos planos complexos inversos.

A relação entre os sistemas de coordenadas principal e auxiliar do alimentador é dada pela seguinte transformação linear fracionária [26]:

$$\eta' = \frac{\eta_0\eta + 1}{\eta_0 - \eta}, \quad (2.52a)$$

$$\eta = \frac{\eta_0\eta' - 1}{\eta_0 + \eta'}, \quad (2.52b)$$

onde  $\eta_0$  é uma constante definida por

$$\eta_0 = \cot\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \quad (2.53)$$

e  $\theta_0$  é o ângulo de *offset* do alimentador em relação ao eixo  $z$  positivo. Os resultados da aplicação da transformação (2.52b) nas grades  $J \times K = 10 \times 10$  e  $J \times K = 10 \times 30$  são apresentados nas Figuras 2.15, 2.16 e 2.17.

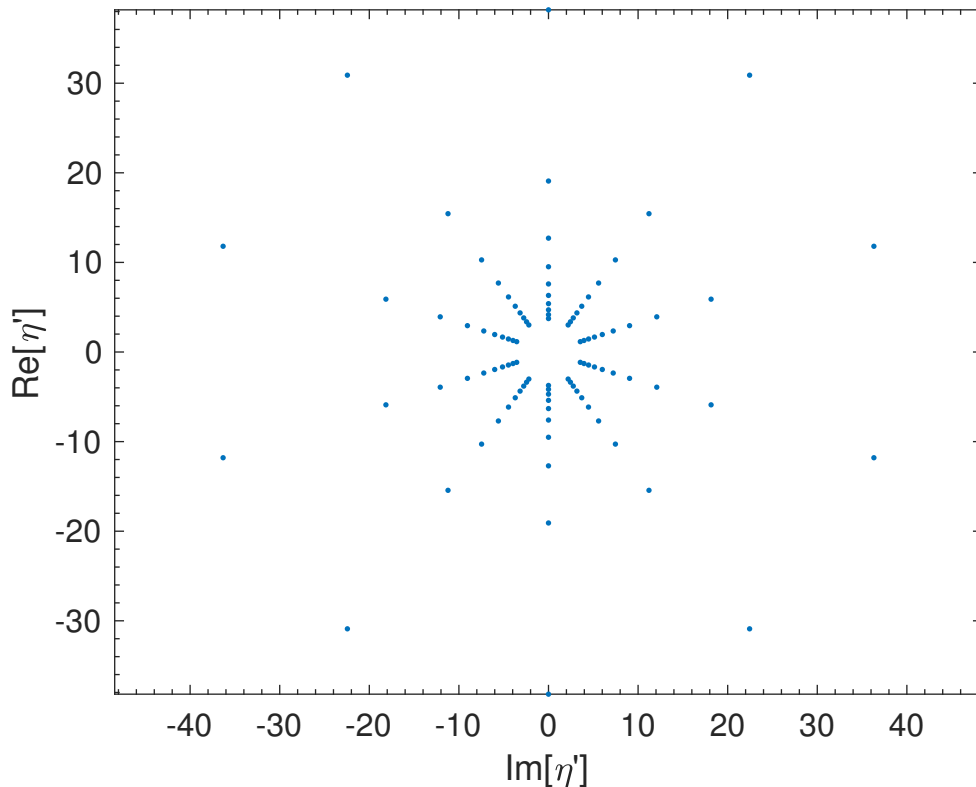


Figura 2.9: Grade regular polar  $J \times K = 10 \times 30$ ,  $\alpha = 1$ , no plano complexo auxiliar  $\eta'$ .

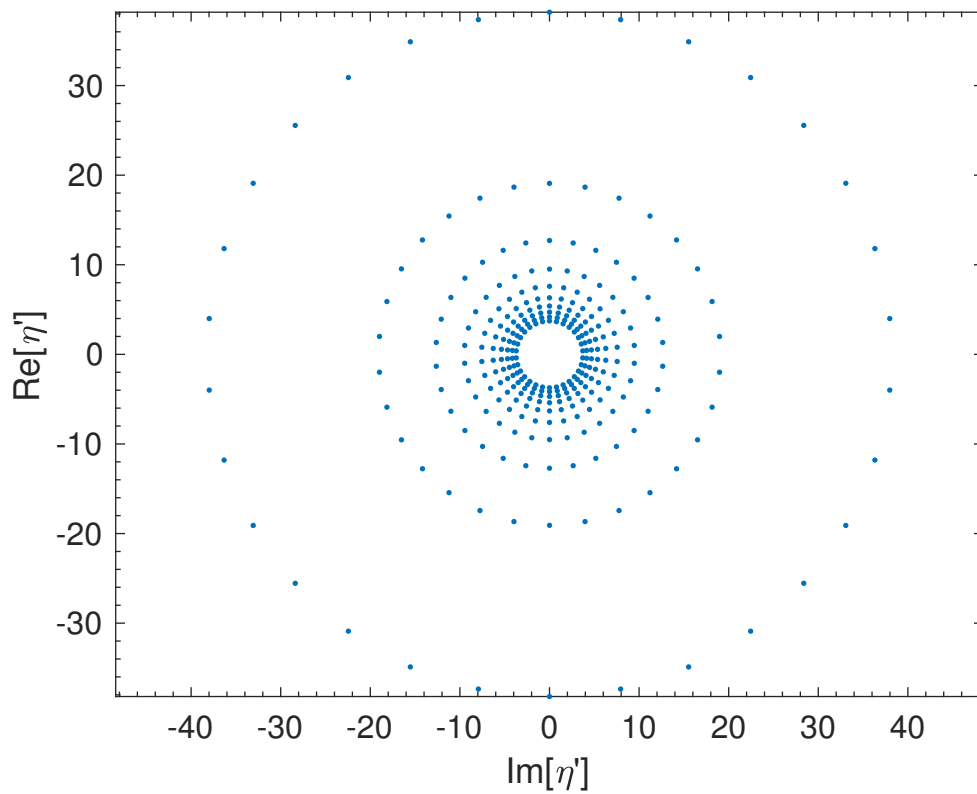


Figura 2.10: Grade regular polar  $J \times K = 10 \times 30$ ,  $\alpha = 1$ , no plano complexo auxiliar  $\eta'$ .

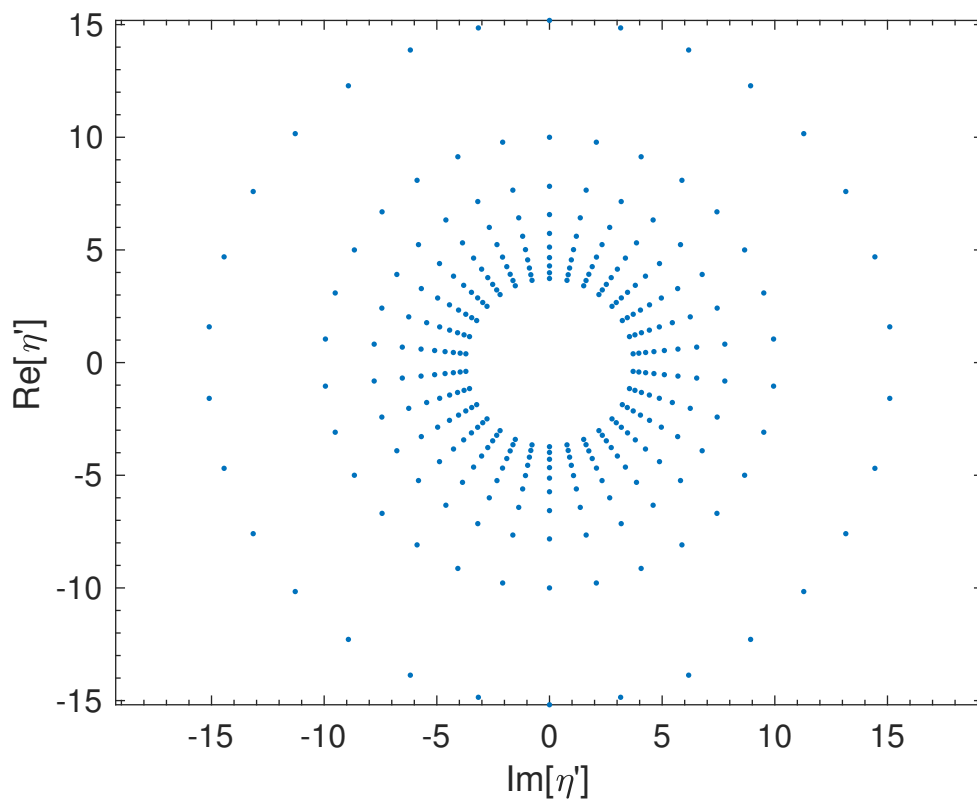


Figura 2.11: Grade polar não-uniforme  $J \times K = 10 \times 30$ ,  $\alpha = 0,6$ , no plano complexo auxiliar  $\eta'$ .

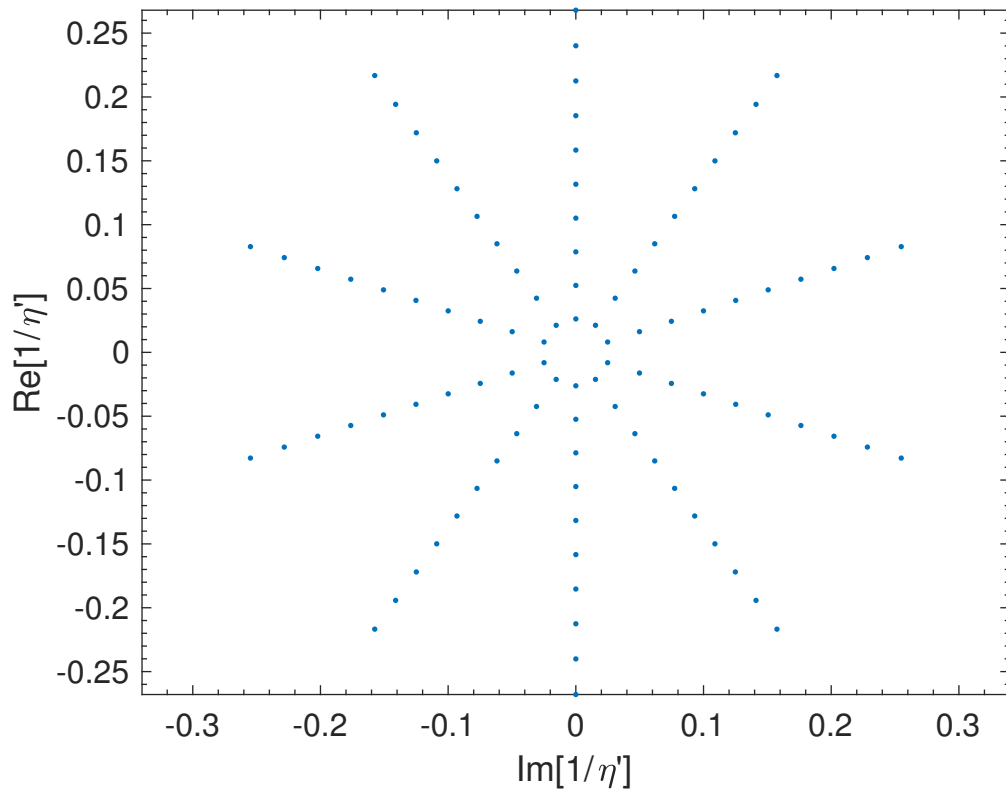


Figura 2.12: Grade regular polar  $J \times K = 10 \times 30$ ,  $\alpha = 1$ , no plano complexo inverso  $1/\eta'$ .

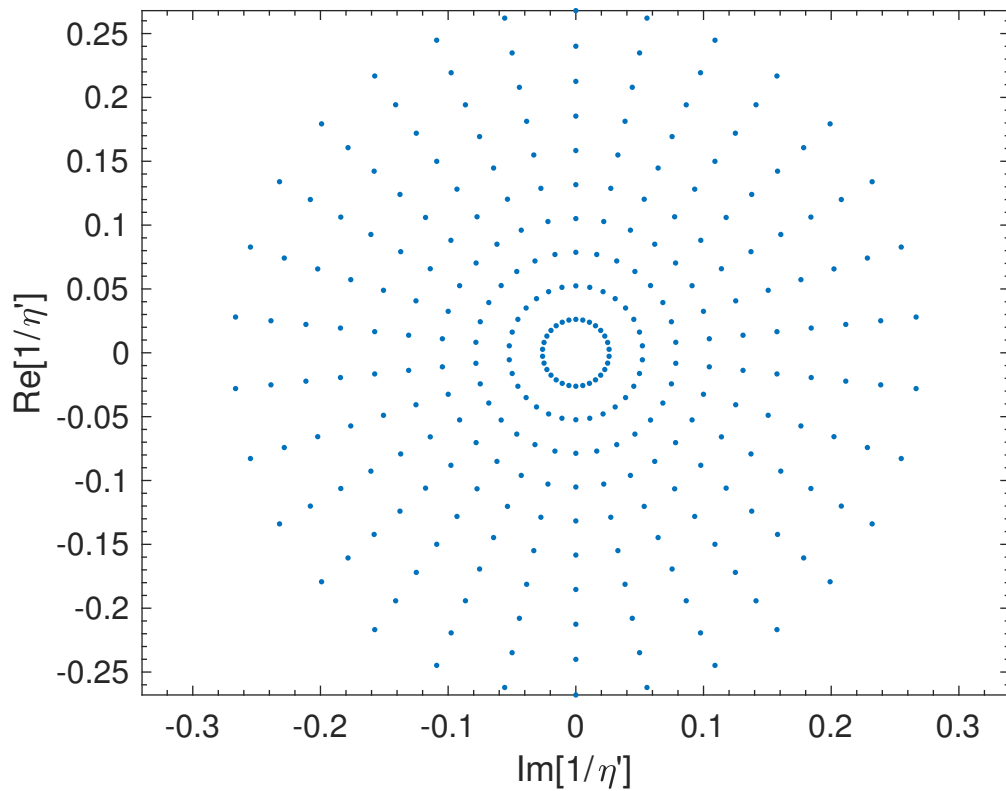


Figura 2.13: Grade regular polar  $J \times K = 10 \times 30$ ,  $\alpha = 1$ , no plano complexo inverso  $1/\eta'$ .

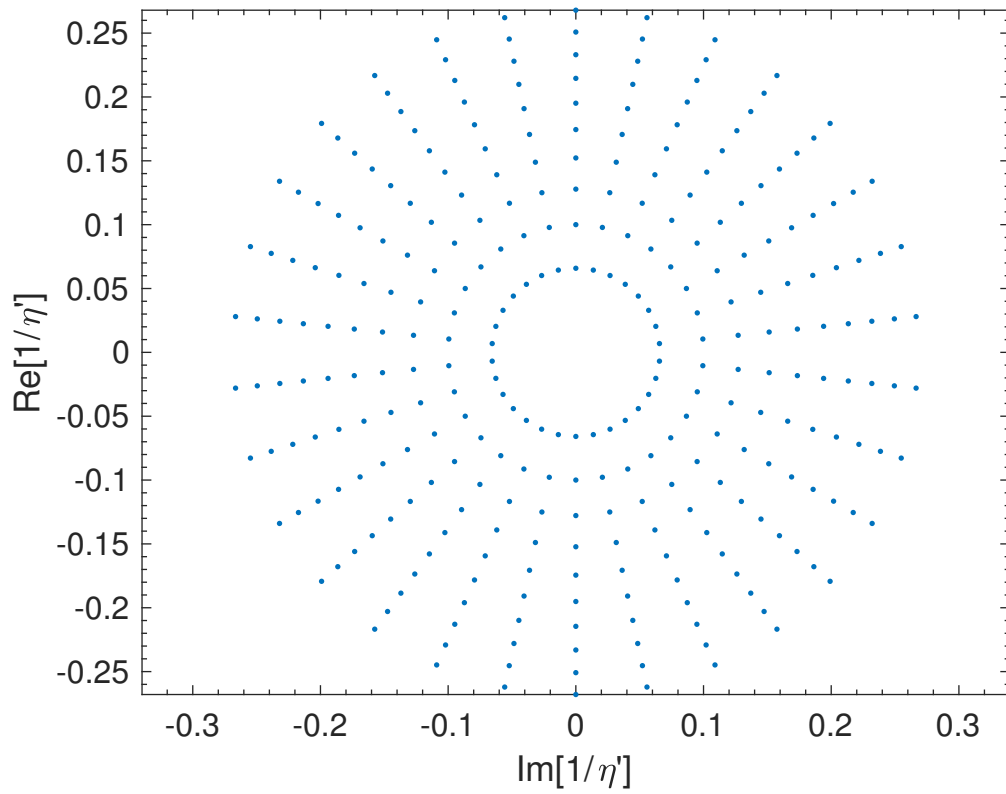


Figura 2.14: Grade polar não-uniforme  $J \times K = 10 \times 30$ ,  $\alpha = 0,6$ , no plano complexo inverso  $1/\eta'$ .

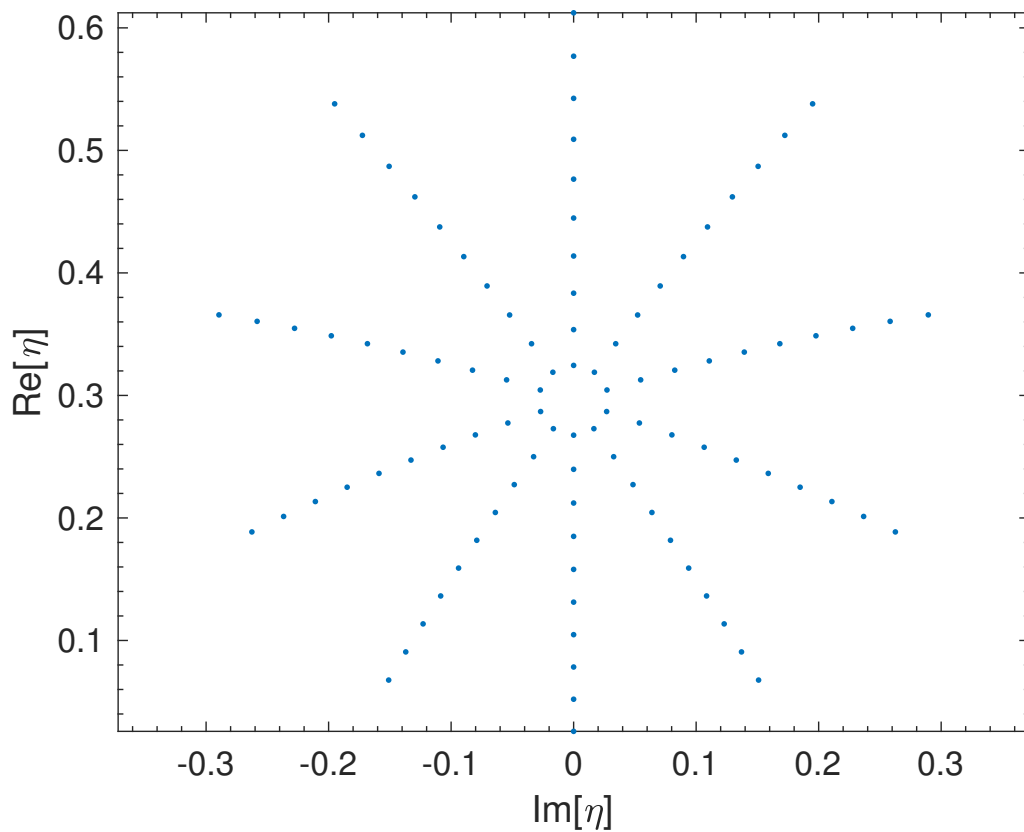


Figura 2.15: Grade regular polar  $J \times K = 10 \times 30$ ,  $\alpha = 1$ , no plano complexo  $\eta$ .



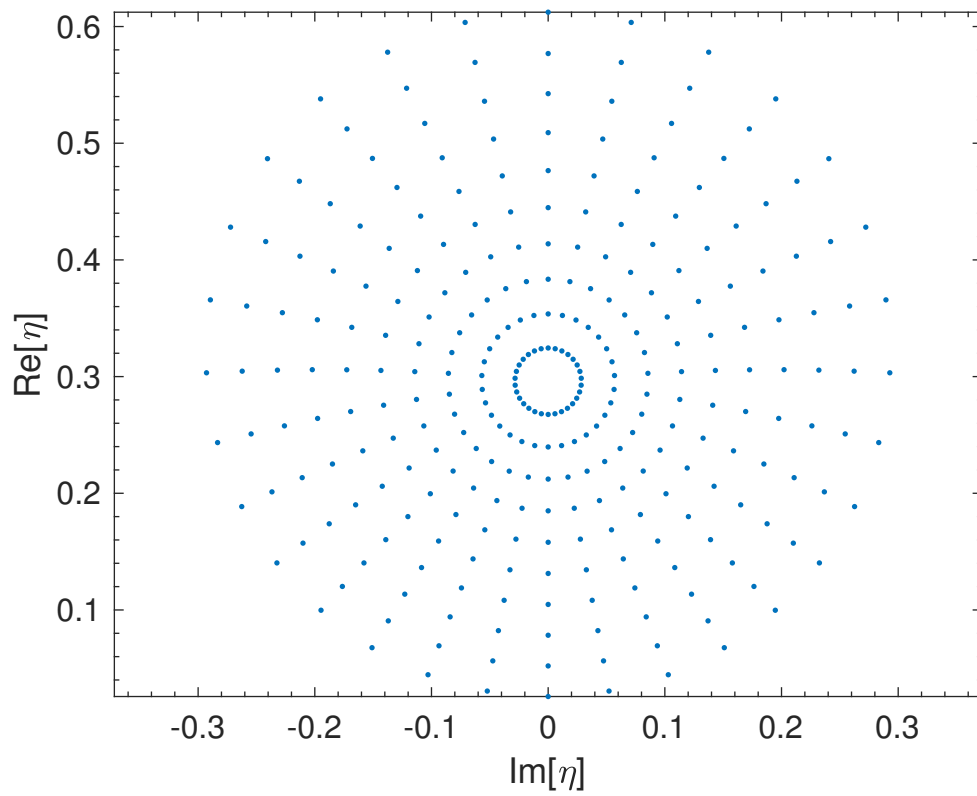


Figura 2.16: Grade regular polar  $J \times K = 10 \times 30$ ,  $\alpha = 1$ , no plano complexo  $\eta$ .

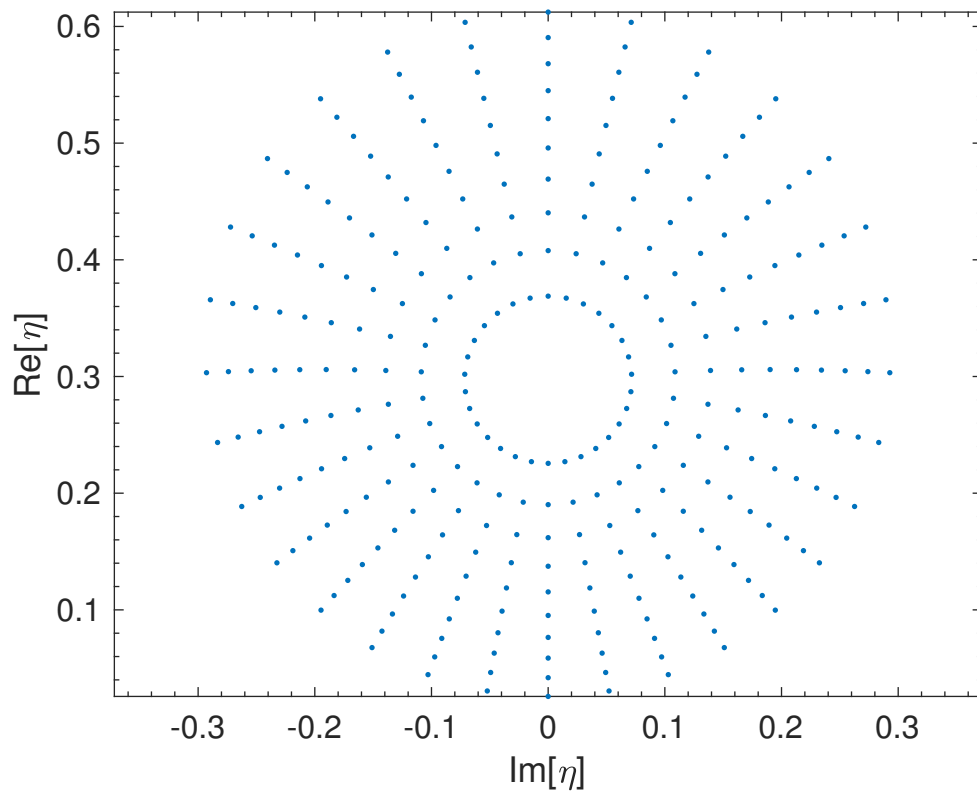


Figura 2.17: Grade polar não-uniforme  $J \times K = 10 \times 30$ ,  $\alpha = 0,6$ , no plano complexo  $\eta$ .

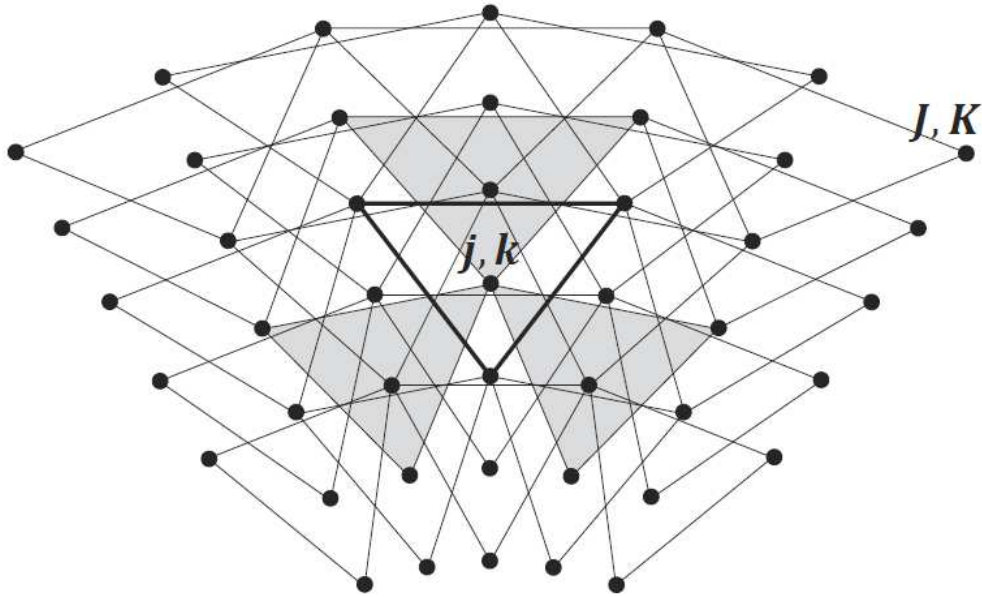


Figura 2.18: Grade polar com células triangulares [2].

### 2.4.2 Interpolação Local de uma Superfície por Quádricas Confocais com Eixos Deslocados

Neste trabalho, será introduzida a modificação proposta em [2] no procedimento numérico de solução da equação de Monge-Ampère e esta modificação ocorre na forma como a superfície sintetizada é localmente representada. Diferentemente da técnica numérica utilizada em [26], [31] e [43] que emprega diferenças finitas para representar as derivadas de primeira e segunda ordem de  $L$  em cada ponto da grade, a superfície sintetizada será localmente representada por um conjunto de superfícies quádricas confocais com eixos deslocados, ou seja, cada quádrica individualmente representa apenas uma seção local do subrefletor. Neste caso, ao invés de células locais com nove pontos, é utilizado um esquema com células triangulares com quatro pontos, conforme ilustrado na Figura 2.18. Como principal vantagem, este tratamento possibilita determinar de forma analítica as derivadas presentes na equação de Monge-Ampère.

Partindo do pressuposto que sejam conhecidos os valores de  $L_{j,k}$  sobre a grade, cada quádrica local  $j, k$  é descrita por um conjunto de quatro coeficientes  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  conforme a equação (2.33). Para determinar estes quatro parâmetros, são escolhidos o próprio ponto  $j, k$  e os outros três pontos adjacentes formando uma célula triangular, conforme ilustrado na Figura 2.19. Portanto, deseja-se obter os parâmetros da quádrica que passa simultaneamente pelos quatro pontos que definem a célula triangular. Por simplicidade, cada um desses pontos é representado pelo índice inteiro  $m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) (observe a Figura 2.19). Logo, tem-se as seguintes correspondências entre os índices:  $(j, k) \rightarrow m = 1$ ,  $(j - 1, k) \rightarrow m = 2$ ,  $(j + 1, k - 1) \rightarrow m = 3$  e  $(j + 1, k + 1) \rightarrow m = 4$ .

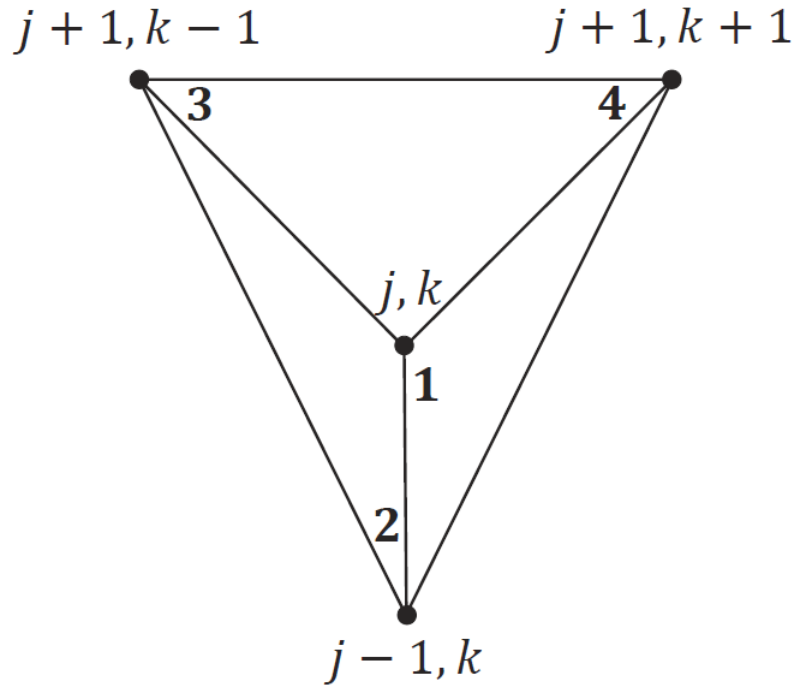


Figura 2.19: Célula triangular com quatro pontos [2].

Logo, a quádriga associada ao ponto  $(j, k)$  passa pelos quatro pontos onde

$$L_1 = L_{j,k}, \quad (2.54a)$$

$$L_2 = L_{j-1,k}, \quad (2.54b)$$

$$L_3 = L_{j+1,k-1}, \quad (2.54c)$$

$$L_4 = L_{j+1,k+1}. \quad (2.54d)$$

Pode-se, então, formar um sistema de quatro equações lineares cuja solução permite obter os valores de  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$ . Assim, reescrevendo a equação (2.31) para o ponto  $m$ , resulta na seguinte equação linear [2]:

$$\alpha_m a_{j,k} + \beta_m b_{j,k} + \gamma_m c_{j,k} + \delta_m d_{j,k} = \varepsilon_m \quad (2.55)$$

onde  $\alpha_m$  para  $m = 1, 2, 3, 4$  é

$$\alpha_1 = -e^{-L_1}, \quad (2.56a)$$

$$\alpha_2 = -e^{-L_2}, \quad (2.56b)$$

$$\alpha_3 = -e^{-L_3}, \quad (2.56c)$$

$$\alpha_4 = -e^{-L_4}, \quad (2.56d)$$

$\beta_m$  para  $m = 1, 2, 3, 4$  é

$$\beta_1 = \eta_1 + \bar{\eta}_1, \quad (2.57a)$$

$$\beta_2 = \eta_2 + \bar{\eta}_2, \quad (2.57b)$$

$$\beta_3 = \eta_3 + \bar{\eta}_3, \quad (2.57c)$$

$$\beta_4 = \eta_4 + \bar{\eta}_4, \quad (2.57d)$$

$\gamma$  para  $m = 1, 2, 3, 4$  é

$$\gamma_1 = i(\bar{\eta}_1 - \eta_1), \quad (2.58a)$$

$$\gamma_2 = i(\bar{\eta}_2 - \eta_2), \quad (2.58b)$$

$$\gamma_3 = i(\bar{\eta}_3 - \eta_3), \quad (2.58c)$$

$$\gamma_4 = i(\bar{\eta}_4 - \eta_4), \quad (2.58d)$$

$\delta_m$  para  $m = 1, 2, 3, 4$  é

$$\delta_1 = |\eta_1|^2 - 1, \quad (2.59a)$$

$$\delta_2 = |\eta_2|^2 - 1, \quad (2.59b)$$

$$\delta_3 = |\eta_3|^2 - 1, \quad (2.59c)$$

$$\delta_4 = |\eta_4|^2 - 1, \quad (2.59d)$$

$\varepsilon_m$  para  $m = 1, 2, 3, 4$  é

$$\varepsilon_1 = |\eta_1|^2 + 1, \quad (2.60a)$$

$$\varepsilon_2 = |\eta_2|^2 + 1, \quad (2.60b)$$

$$\varepsilon_3 = |\eta_3|^2 + 1, \quad (2.60c)$$

$$\varepsilon_4 = |\eta_4|^2 + 1. \quad (2.60d)$$

Utilizando os valores de  $\eta_m$  e  $L_m$  nos quatro pontos da célula triangular ( $m = 1, 2, 3, 4$ ), tem-se o seguinte sistema de equações [2]:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{j,k} \\ b_{j,k} \\ c_{j,k} \\ d_{j,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

que pode ser resolvido analiticamente pela Regra de Crammer. Definindo a matriz de

coeficientes por  $\bar{\bar{Z}}$ , o determinante de  $\bar{\bar{Z}}$  é tal que

$$\begin{aligned} \det(\bar{\bar{Z}}) = & \alpha_1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} + \beta_1 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} \\ & + \gamma_1 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \delta_4 \end{vmatrix} + \delta_1 \times (-1)^{1+4} \times \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Resolvendo os determinantes das matrizes  $3 \times 3$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \det(\bar{\bar{Z}}) = & \alpha_1(\beta_2\gamma_3\delta_4 + \gamma_2\delta_3\beta_4 + \delta_2\beta_3\gamma_4 - \delta_2\gamma_3\beta_4 - \gamma_2\beta_3\delta_4 - \beta_2\delta_3\gamma_4) \\ & - \beta_1(\alpha_2\gamma_3\delta_4 + \gamma_2\delta_3\alpha_4 + \delta_2\alpha_3\gamma_4 - \delta_2\gamma_3\alpha_4 - \gamma_2\alpha_3\delta_4 - \alpha_2\delta_3\gamma_4) \\ & + \gamma_1(\alpha_2\beta_3\delta_4 + \beta_2\delta_3\alpha_4 + \delta_2\alpha_3\beta_4 - \delta_2\beta_3\alpha_4 - \beta_2\alpha_3\delta_4 - \alpha_2\delta_3\beta_4) \\ & - \delta_1(\alpha_2\beta_3\gamma_4 + \beta_2\gamma_3\alpha_4 + \gamma_2\alpha_3\beta_4 - \gamma_2\beta_3\alpha_4 - \beta_2\alpha_3\gamma_4 - \alpha_2\gamma_3\beta_4), \end{aligned} \quad (2.63)$$

que pode ser reescrito na forma

$$\det(\bar{\bar{Z}}) = f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4, \quad (2.64)$$

onde as funções auxiliares  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  e  $f_4$  são dadas por

$$f_1 = \beta_2(\gamma_3\delta_4 - \delta_3\gamma_4) + \beta_3(\delta_2\gamma_4 - \gamma_2\delta_4) + \beta_4(\gamma_2\delta_3 - \delta_2\gamma_3), \quad (2.65a)$$

$$f_2 = \beta_1(\delta_3\gamma_4 - \gamma_3\delta_4) + \beta_3(\gamma_1\delta_4 - \delta_1\gamma_4) + \beta_4(\delta_1\gamma_3 - \gamma_1\delta_3), \quad (2.65b)$$

$$f_3 = \beta_1(\gamma_2\delta_4 - \delta_2\gamma_4) + \beta_2(\delta_1\gamma_4 - \gamma_1\delta_4) + \beta_4(\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2), \quad (2.65c)$$

$$f_4 = \beta_1(\delta_2\gamma_3 - \gamma_2\delta_3) + \beta_2(\gamma_1\delta_3 - \delta_1\gamma_3) + \beta_3(\delta_1\gamma_2 - \gamma_1\delta_2). \quad (2.65d)$$

Definindo agora as matrizes de coeficientes

$$\begin{aligned} \det(\bar{\bar{Z}}_\alpha) = & \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \varepsilon_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \varepsilon_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \varepsilon_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{bmatrix}, \det(\bar{\bar{Z}}_\beta) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \varepsilon_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \varepsilon_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \varepsilon_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \varepsilon_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{bmatrix}, \\ \det(\bar{\bar{Z}}_\gamma) = & \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \varepsilon_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \varepsilon_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \varepsilon_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \varepsilon_4 & \delta_4 \end{bmatrix}, \det(\bar{\bar{Z}}_\delta) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \varepsilon_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \varepsilon_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \varepsilon_4 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

seus respectivos determinantes são expressos por

$$\det(\bar{\bar{Z}}_\alpha) = f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2 + f_3\varepsilon_3 + f_4\varepsilon_4, \quad (2.67a)$$

$$\det(\bar{\bar{Z}}_\beta) = g_1\alpha_1 + g_2\alpha_2 + g_3\alpha_3 + g_4\alpha_4, \quad (2.67b)$$

$$\det(\bar{\bar{Z}}_\gamma) = h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + h_3\alpha_3 + h_4\alpha_4, \quad (2.67c)$$

$$\det(\bar{\bar{Z}}_\delta) = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4, \quad (2.67d)$$

onde as funções auxiliares  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  e  $g_4$  são dadas por

$$g_1 = \varepsilon_2(\gamma_3\delta_4 - \delta_3\gamma_4) + \varepsilon_3(\delta_2\gamma_4 - \gamma_2\delta_4) + \varepsilon_4(\gamma_2\delta_3 - \delta_2\gamma_3), \quad (2.68a)$$

$$g_2 = \varepsilon_1(\delta_3\gamma_4 - \gamma_3\delta_4) + \varepsilon_3(\gamma_1\delta_4 - \delta_1\gamma_4) + \varepsilon_4(\delta_1\gamma_3 - \gamma_1\delta_3), \quad (2.68b)$$

$$g_3 = \varepsilon_1(\gamma_2\delta_4 - \delta_2\gamma_4) + \varepsilon_2(\delta_1\gamma_4 - \gamma_1\delta_4) + \varepsilon_4(\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2), \quad (2.68c)$$

$$g_4 = \varepsilon_1(\delta_2\gamma_3 - \gamma_2\delta_3) + \varepsilon_2(\gamma_1\delta_3 - \delta_1\gamma_3) + \varepsilon_3(\delta_1\gamma_2 - \gamma_1\delta_2), \quad (2.68d)$$

as funções auxiliares  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  e  $h_4$  são dadas por

$$h_1 = \beta_2(\varepsilon_3\delta_4 - \delta_3\varepsilon_4) + \beta_3(\delta_2\varepsilon_4 - \varepsilon_2\delta_4) + \beta_4(\varepsilon_2\delta_3 - \delta_2\varepsilon_3), \quad (2.69a)$$

$$h_2 = \beta_1(\delta_3\varepsilon_4 - \varepsilon_3\delta_4) + \beta_3(\varepsilon_1\delta_4 - \delta_1\varepsilon_4) + \beta_4(\delta_1\varepsilon_3 - \varepsilon_1\delta_3), \quad (2.69b)$$

$$h_3 = \beta_1(\varepsilon_2\delta_4 - \delta_2\varepsilon_4) + \beta_2(\delta_1\varepsilon_4 - \varepsilon_1\delta_4) + \beta_4(\varepsilon_1\delta_2 - \delta_1\varepsilon_2), \quad (2.69c)$$

$$h_4 = \beta_1(\delta_2\varepsilon_3 - \varepsilon_2\delta_3) + \beta_2(\varepsilon_1\delta_3 - \delta_1\varepsilon_3) + \beta_3(\delta_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1\delta_2), \quad (2.69d)$$

e as funções auxiliares  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$  são dadas por

$$k_1 = \beta_2(\gamma_3\varepsilon_4 - \varepsilon_3\gamma_4) + \beta_3(\varepsilon_2\gamma_4 - \gamma_2\varepsilon_4) + \beta_4(\gamma_2\varepsilon_3 - \varepsilon_2\gamma_3), \quad (2.70a)$$

$$k_2 = \beta_1(\varepsilon_3\gamma_4 - \gamma_3\varepsilon_4) + \beta_3(\gamma_1\varepsilon_4 - \varepsilon_1\gamma_4) + \beta_4(\varepsilon_1\gamma_3 - \gamma_1\varepsilon_3), \quad (2.70b)$$

$$k_3 = \beta_1(\gamma_2\varepsilon_4 - \varepsilon_2\gamma_4) + \beta_2(\varepsilon_1\gamma_4 - \gamma_1\varepsilon_4) + \beta_4(\gamma_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1\gamma_2), \quad (2.70c)$$

$$k_4 = \beta_1(\varepsilon_2\gamma_3 - \gamma_2\varepsilon_3) + \beta_2(\gamma_1\varepsilon_3 - \varepsilon_1\gamma_3) + \beta_3(\varepsilon_1\gamma_2 - \gamma_1\varepsilon_2). \quad (2.70d)$$

Pela Regra de Cramer, os parâmetros da quádrlica são calculados através de [2]:

$$a_{j,k} = \frac{\det(\bar{\bar{Z}}_\alpha)}{\det(\bar{\bar{Z}})}, \quad (2.71a)$$

$$b_{j,k} = \frac{\det(\bar{\bar{Z}}_\beta)}{\det(\bar{\bar{Z}})}, \quad (2.71b)$$

$$c_{j,k} = \frac{\det(\bar{\bar{Z}}_\gamma)}{\det(\bar{\bar{Z}})}, \quad (2.71c)$$

$$d_{j,k} = \frac{\det(\bar{\bar{Z}}_\delta)}{\det(\bar{\bar{Z}})}. \quad (2.71d)$$

Logo,

$$a_{j,k} = \frac{f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2 + f_3\varepsilon_3 + f_4\varepsilon_4}{f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4}, \quad (2.72a)$$

$$b_{j,k} = \frac{g_1\alpha_1 + g_2\alpha_2 + g_3\alpha_3 + g_4\alpha_4}{f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4}, \quad (2.72b)$$

$$c_{j,k} = \frac{h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + h_3\alpha_3 + h_4\alpha_4}{f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4}, \quad (2.72c)$$

$$d_{j,k} = \frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4}{f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4}. \quad (2.72d)$$

### 2.4.3 Operador Não-Linear $\Gamma[L]$

Para a solução numérica de (2.19) será definido um operador  $\Gamma[L]$  associado aos resíduos da equação de Monge-Ampère [31]:

$$\Gamma[L] \equiv |L_{\eta\eta} - L_\eta^2|^2 - (L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2 \pm \mathcal{H}(\eta, \omega) = 0. \quad (2.73)$$

Para aplicar o método numérico proposto em [2], a superfície a ser sintetizada é representada localmente por um conjunto de superfícies quádricas confocais e o operador  $\Gamma[L]$  expresso em (2.73) deve ser aplicado em cada ponto da grade  $j, k$ . Assim, substituindo a expressão da quádrica confocal (2.33) em (2.73), o termo  $|L_{\eta\eta} - L_\eta^2|^2 = 0$ , e a expressão local para (2.73) torna-se [2]:

$$\Gamma[L] \equiv \pm \mathcal{H}(\eta, \omega) - (L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2. \quad (2.74)$$

Analisando a equação do operador (2.74) constata-se que ela é função dos quatro parâmetros da superfície quádrica confocal:  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$ , e o problema numérico a ser resolvido consiste em aplicar o operador (2.74) aos pontos da grade e reduzir os resíduos associados a um valor menor que o critério de convergência a ser adotado.

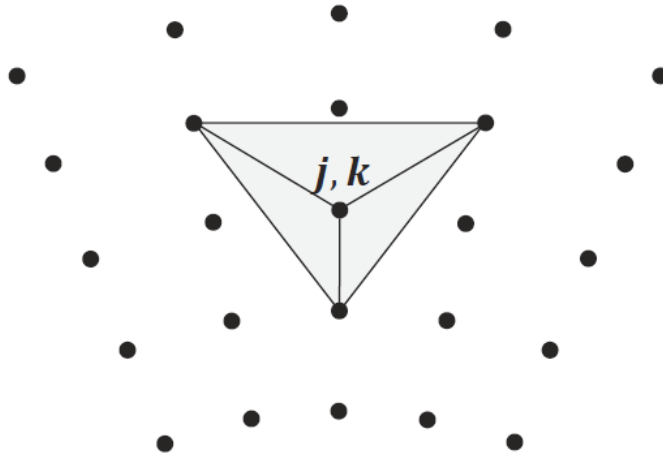
### 2.4.4 Método Iterativo de Newton

Aplicando o operador (2.74) aos pontos que definem a superfície refletora em (2.47), obtém-se um sistema de equações não-lineares representado por

$$\Gamma[L] = 0. \quad (2.75)$$

Assumindo que o operador  $\Gamma$  seja diferenciável, a equação (2.74) pode ser expandida em uma série de Taylor na forma

$$\Gamma[L] = \Gamma[L^{(n)}] + \Gamma'[L^{(n)}](L^* - L^{(n)}) + \epsilon(\Delta L^2), \quad (2.76)$$


 Figura 2.20: Célula triangular  $j, k$  no centro da grade [2].

onde  $L^*$  é uma solução na vizinhança de  $L$ ,  $\Gamma[L^{(n)}]$  são as derivadas do operador em relação à  $L^{(n)}$ ,  $n$  representa a  $n$ -ésima iteração e  $\epsilon$  é o erro de truncamento da série onde foram suprimidos os termos de alta ordem. Definindo uma solução  $L^* = L^{(n+1)}$  e desprezando  $\epsilon$ , tem-se [2]:

$$[L^{(n+1)}] = [L^{(n)}] - \Gamma'[L^{(n)}]^{-1}\Gamma[L^{(n)}]. \quad (2.77)$$

Observe que a equação (2.77) é a expressão do Método de Newton [50] para encontrar as raízes de uma equação  $f(x) = 0$ .

Para aplicar o método em (2.74) deve-se, inicialmente, expandir o operador em série, observando que ele é função de quatro valores de  $L$  definidos em cada ponto da célula triangular [2]. Logo, para a célula  $j, k$  ilustrada na Figura 2.20:

$$\begin{aligned} \Gamma_{j,k}[L] \approx & \Gamma_{j,k}^{(n)}[L] + \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j,k}} \left( L_{j,k}^{(n+1)} - L_{j,k}^{(n)} \right) + \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j-1,k}} \left( L_{j-1,k}^{(n+1)} - L_{j-1,k}^{(n)} \right) \\ & + \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j+1,k-1}} \left( L_{j+1,k-1}^{(n+1)} - L_{j+1,k-1}^{(n)} \right) + \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j+1,k+1}} \left( L_{j+1,k+1}^{(n+1)} - L_{j+1,k+1}^{(n)} \right). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Definindo

$$D_1^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j,k}}, \quad (2.79a)$$

$$D_2^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j-1,k}}, \quad (2.79b)$$

$$D_3^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j+1,k-1}}, \quad (2.79c)$$

$$D_4^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j+1,k+1}}, \quad (2.79d)$$



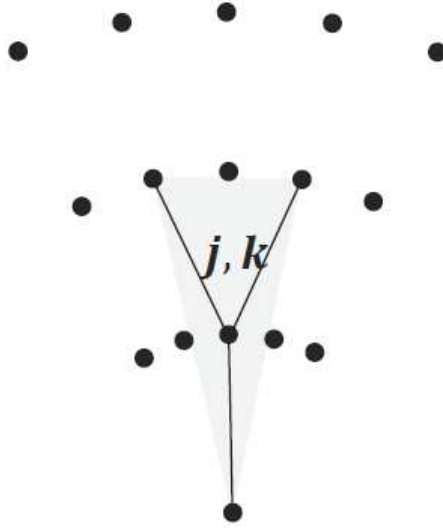


Figura 2.21: Célula triangular no primeiro anel da grade [2].

utilizando as definições em (2.54) e desprezando o erro de truncamento da série, encontra-se

$$\begin{aligned} \Gamma_{j,k}^{(n)}[L] + D_1^{(n)} \left( L_1^{(n+1)} - L_1^{(n)} \right) + D_2^{(n)} \left( L_2^{(n+1)} - L_2^{(n)} \right) \\ + D_3^{(n)} \left( L_3^{(n+1)} - L_3^{(n)} \right) + D_4^{(n)} \left( L_4^{(n+1)} - L_4^{(n)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Reescrevendo (2.80), obtém-se

$$D_1^{(n)} L_1^{(n+1)} + D_2^{(n)} L_2^{(n+1)} + D_3^{(n)} L_3^{(n+1)} + D_4^{(n)} L_4^{(n+1)} = V_{j,k}^{(n)}, \quad (2.81)$$

onde

$$V_{j,k}^{(n)} = -\Gamma_{j,k}^{(n)}[L] + D_1^{(n)} L_1^{(n)} + D_2^{(n)} L_2^{(n)} + D_3^{(n)} L_3^{(n)} + D_4^{(n)} L_4^{(n)}. \quad (2.82)$$

A equação (2.81) representa um sistema de equações lineares da forma [2]:

$$D^{(n)} L^{(n+1)} = V^{(n)}, \quad (2.83)$$

onde os termos da iteração  $(n + 1)$  são desconhecidos.

Para os pontos que compõem o primeiro anel ( $j = 1$ ) e, conseqüentemente, utilizam o valor da função  $L$  no ponto central da grade (conforme ilustrado na Figura 2.21) é necessário um cuidado especial na determinação dos coeficientes da matriz  $D^{(n)}$ . É assumido que, nesse ponto, a solução do mapeamento é conhecida, ou seja,

$$L_0^{(n+1)} = L_0^{(n)}. \quad (2.84)$$

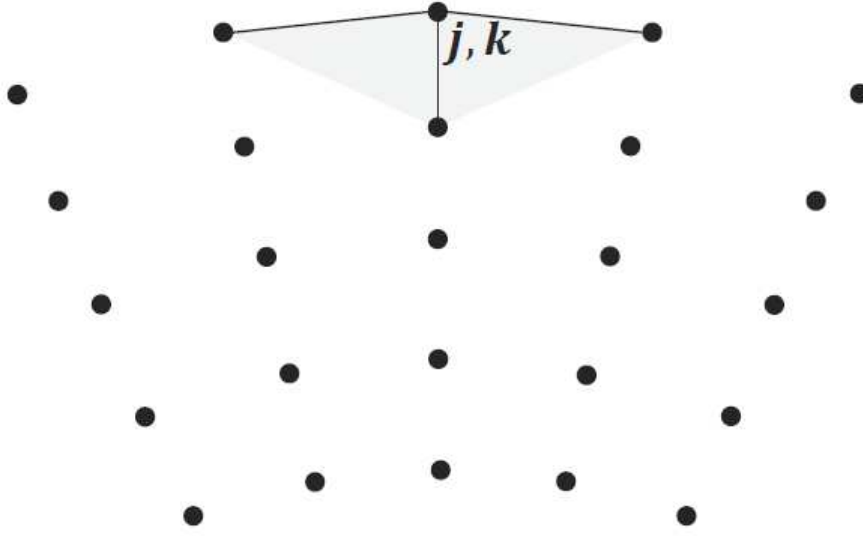


Figura 2.22: Célula triangular nas bordas da grade [2].

Logo, a equação (2.81) deve ser reescrita como [2]:

$$D_1^{(n)} L_1^{(n+1)} + D_3^{(n)} L_3^{(n+1)} + D_4^{(n)} L_4^{(n+1)} = V_{j,k}^{(n)}, \quad (2.85)$$

onde

$$V_{j,k}^{(n)} = -\Gamma_{j,k}^{(n)}[L] + D_1^{(n)} L_1^{(n)} + D_3^{(n)} L_3^{(n)} + D_4^{(n)} L_4^{(n)}. \quad (2.86)$$

A Figura 2.22 ilustra quando o ponto da grade polar pertence ao último anel ( $j = J$ ). Nesse caso são adotados os pontos laterais e, conseqüentemente, o índice  $j + 1$  dever ser alterado para  $j$ . Logo, em (2.54) e (2.79) deve-se adotar a seguinte notação para a função  $L$  [2]:

$$L_3 = L_{j,k-1}, \quad (2.87a)$$

$$L_4 = L_{j,k+1}, \quad (2.87b)$$

e para as derivadas

$$D_3^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j,k-1}}, \quad (2.88a)$$

$$D_4^{(n)} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}^{(n)}[L]}{\partial L_{j,k+1}}. \quad (2.88b)$$

Para qualquer ponto  $(j, k)$ , os elementos discretos do operador  $\Gamma_{j,k}^{(n)}$  envolvem somente pontos de sua vizinhança e, conseqüentemente, a matriz Jacobiana é uma matriz esparsa.

### 2.4.5 Matriz Jacobiana do Operador $\Gamma[L]$

Para obter a matriz Jacobiana do operador  $\Gamma_{j,k}[L]$  linearizado é necessário que as seguintes derivadas em relação a  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$  sejam determinadas [2]:

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial L_1} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial a_{j,k}} \frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_1} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial b_{j,k}} \frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_1} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial c_{j,k}} \frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_1} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial d_{j,k}} \frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_1}, \quad (2.89a)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial L_2} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial a_{j,k}} \frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_2} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial b_{j,k}} \frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_2} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial c_{j,k}} \frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_2} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial d_{j,k}} \frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_2}, \quad (2.89b)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial L_3} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial a_{j,k}} \frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_3} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial b_{j,k}} \frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_3} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial c_{j,k}} \frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_3} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial d_{j,k}} \frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_3}, \quad (2.89c)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial L_4} = \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial a_{j,k}} \frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_4} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial b_{j,k}} \frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_4} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial c_{j,k}} \frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_4} + \frac{\partial \Gamma_{j,k}}{\partial d_{j,k}} \frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_4}. \quad (2.89d)$$

Observe que a matriz Jacobiana requer o cálculo das derivadas parciais de  $\Gamma_{j,k}$  em relação aos coeficientes da superfície quádrlica  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  e também das derivadas dos coeficientes da superfície quádrlica  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  em relação a  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ . O primeiro conjunto de derivadas depende da função fase  $l(\omega)$  que é assumida no problema de síntese. Por isso, estas derivadas serão apresentadas no Capítulo 3 para o caso particular onde é considerada fase uniforme na abertura e no Capítulo 4 para o caso geral onde é considerada fase não-uniforme na abertura. Já o segundo conjunto de derivadas, ou seja, as derivadas de  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  em relação a  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ , dependem da superfície adotada para modelar localmente o subrefletor e são descritas a seguir.

As derivadas de  $a_{j,k}$  em relação à função  $L$  nos pontos da célula são dadas por:

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_1} = \frac{\partial a_{j,k}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1}, \quad (2.90a)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_2} = \frac{\partial a_{j,k}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2}, \quad (2.90b)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_3} = \frac{\partial a_{j,k}}{\partial \alpha_3} \frac{\partial \alpha_3}{\partial L_3}, \quad (2.90c)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_4} = \frac{\partial a_{j,k}}{\partial \alpha_4} \frac{\partial \alpha_4}{\partial L_4}. \quad (2.90d)$$

Derivando (2.56) em relação à  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ , tem-se que:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1} = -\alpha_1, \quad (2.91a)$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2} = -\alpha_2, \quad (2.91b)$$

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial L_3} = -\alpha_3, \quad (2.91c)$$

$$\frac{\partial \alpha_4}{\partial L_4} = -\alpha_4. \quad (2.91d)$$

Utilizando os resultados em (2.65), vê-se que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [f_1, f_2, f_3, f_4] = 0, \quad (2.92a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} [f_1, f_2, f_3, f_4] = 0, \quad (2.92b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3} [f_1, f_2, f_3, f_4] = 0, \quad (2.92c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_4} [f_1, f_2, f_3, f_4] = 0, \quad (2.92d)$$

e derivando (2.72a), é fácil demonstrar que [2]:

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_1} = \alpha_1 f_1 \frac{f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 + f_3 \varepsilon_3 + f_4 \varepsilon_4}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}, \quad (2.93a)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_2} = \alpha_2 f_2 \frac{f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 + f_3 \varepsilon_3 + f_4 \varepsilon_4}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}, \quad (2.93b)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_3} = \alpha_3 f_3 \frac{f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 + f_3 \varepsilon_3 + f_4 \varepsilon_4}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}, \quad (2.93c)$$

$$\frac{\partial a_{j,k}}{\partial L_4} = \alpha_4 f_4 \frac{f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2 + f_3 \varepsilon_3 + f_4 \varepsilon_4}{(f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 + f_3 \alpha_3 + f_4 \alpha_4)^2}. \quad (2.93d)$$

A derivada de  $b_{j,k}$  em relação à  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$  é dada por

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_1} = \frac{\partial b_{j,k}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1}, \quad (2.94a)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_2} = \frac{\partial b_{j,k}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2}, \quad (2.94b)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_3} = \frac{\partial b_{j,k}}{\partial \alpha_3} \frac{\partial \alpha_3}{\partial L_3}, \quad (2.94c)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_4} = \frac{\partial b_{j,k}}{\partial \alpha_4} \frac{\partial \alpha_4}{\partial L_4}. \quad (2.94d)$$

Analisando (2.68), pode-se verificar que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [g_1, g_2, g_3, g_4] = 0, \quad (2.95a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} [g_1, g_2, g_3, g_4] = 0, \quad (2.95b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3} [g_1, g_2, g_3, g_4] = 0, \quad (2.95c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_4} [g_1, g_2, g_3, g_4] = 0. \quad (2.95d)$$

Utilizando os resultados em (2.91) e (2.95), mostra-se que [2]:

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_1} = \alpha_1 \frac{\alpha_2(f_1g_2 - f_2g_1) + \alpha_3(f_1g_3 - f_3g_1) + \alpha_4(f_1g_4 - f_4g_1)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.96a)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_2} = \alpha_2 \frac{\alpha_1(f_2g_1 - f_1g_2) + \alpha_3(f_2g_3 - f_3g_2) + \alpha_4(f_2g_4 - f_4g_2)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.96b)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_3} = \alpha_3 \frac{\alpha_1(f_3g_1 - f_1g_3) + \alpha_2(f_3g_2 - f_2g_3) + \alpha_4(f_3g_4 - f_4g_3)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.96c)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}}{\partial L_4} = \alpha_4 \frac{\alpha_1(f_4g_1 - f_1g_4) + \alpha_2(f_4g_2 - f_2g_4) + \alpha_3(f_4g_3 - f_3g_4)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}. \quad (2.96d)$$

Derivando  $c_{j,k}$  em relação à  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ , tem-se que

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_1} = \frac{\partial c_{j,k}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1}, \quad (2.97a)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_2} = \frac{\partial c_{j,k}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2}, \quad (2.97b)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_3} = \frac{\partial c_{j,k}}{\partial \alpha_3} \frac{\partial \alpha_3}{\partial L_3}, \quad (2.97c)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_4} = \frac{\partial c_{j,k}}{\partial \alpha_4} \frac{\partial \alpha_4}{\partial L_4}. \quad (2.97d)$$

Da equação (2.69) pode-se demonstrar que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}[h_1, h_2, h_3, h_4] = 0, \quad (2.98a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2}[h_1, h_2, h_3, h_4] = 0, \quad (2.98b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3}[h_1, h_2, h_3, h_4] = 0, \quad (2.98c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_4}[h_1, h_2, h_3, h_4] = 0. \quad (2.98d)$$

Com o auxílio de (2.91) e (2.98) mostra-se que as derivadas de (2.72c) podem ser escritas como [2]:

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_1} = \alpha_1 \frac{\alpha_2(f_1h_2 - f_2h_1) + \alpha_3(f_1h_3 - f_3h_1) + \alpha_4(f_1h_4 - f_4h_1)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.99a)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_2} = \alpha_2 \frac{\alpha_1(f_2h_1 - f_1h_2) + \alpha_3(f_2h_3 - f_3h_2) + \alpha_4(f_2h_4 - f_4h_2)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.99b)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_3} = \alpha_3 \frac{\alpha_1(f_3h_1 - f_1h_3) + \alpha_2(f_3h_2 - f_2h_3) + \alpha_4(f_3h_4 - f_4h_3)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.99c)$$

$$\frac{\partial c_{j,k}}{\partial L_4} = \alpha_4 \frac{\alpha_1(f_4h_1 - f_1h_4) + \alpha_2(f_4h_2 - f_2h_4) + \alpha_3(f_4h_3 - f_3h_4)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}. \quad (2.99d)$$

Por fim, deriva-se  $d_{j,k}$  em relação à  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ :

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_1} = \frac{\partial d_{j,k}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial L_1}, \quad (2.100a)$$

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_2} = \frac{\partial d_{j,k}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial L_2}, \quad (2.100b)$$

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_3} = \frac{\partial d_{j,k}}{\partial \alpha_3} \frac{\partial \alpha_3}{\partial L_3}, \quad (2.100c)$$

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_4} = \frac{\partial d_{j,k}}{\partial \alpha_4} \frac{\partial \alpha_4}{\partial L_4}. \quad (2.100d)$$

Verifica-se através de (2.70) que:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} [k_1, k_2, k_3, k_4] = 0, \quad (2.101a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} [k_1, k_2, k_3, k_4] = 0, \quad (2.101b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3} [k_1, k_2, k_3, k_4] = 0, \quad (2.101c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_4} [k_1, k_2, k_3, k_4] = 0. \quad (2.101d)$$

Observando (2.91) e (2.101) mostra-se que as derivadas de (2.72d) podem ser escritas como [2]:

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_1} = \alpha_1 \frac{\alpha_2(f_1k_2 - f_2k_1) + \alpha_3(f_1k_3 - f_3k_1) + \alpha_4(f_1k_4 - f_4k_1)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.102a)$$

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_2} = \alpha_2 \frac{\alpha_1(f_2k_1 - f_1k_2) + \alpha_3(f_2k_3 - f_3k_2) + \alpha_4(f_2k_4 - f_4k_2)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.102b)$$

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_3} = \alpha_3 \frac{\alpha_1(f_3k_1 - f_1k_3) + \alpha_2(f_3k_2 - f_2k_3) + \alpha_4(f_3k_4 - f_4k_3)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}, \quad (2.102c)$$

$$\frac{\partial d_{j,k}}{\partial L_4} = \alpha_4 \frac{\alpha_1(f_4k_1 - f_1k_4) + \alpha_2(f_4k_2 - f_2k_4) + \alpha_3(f_4k_3 - f_3k_4)}{(f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 + f_3\alpha_3 + f_4\alpha_4)^2}. \quad (2.102d)$$

Assim, pode-se observar que as derivadas (2.93), (2.96), (2.99) e (2.102) são relacionadas à superfície adotada para modelar localmente o subrefletor.

Para finalizar esta seção, são apresentadas as derivadas parciais das equações (2.32), (2.37) e (2.45) em relação aos coeficientes da superfície quádrlica confocal que serão úteis nos Capítulos 3, 4 e 5 para completar o cálculo das derivadas parciais do operador  $\Gamma[L]$  linearizado. Para isso as expressões de interesse serão reescritas considerando que a superfície quádrlica confocal passa por um ponto  $j, k$  da grade polar usada para discretizar a superfície sintetizada. Portanto, essas expressões ficam em função dos coeficientes  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$ .

A equação (2.32) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$e^{L(\eta)} = \frac{a_{j,k}}{(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1}. \quad (2.103)$$

Assim, tem-se que:

$$\frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}} = \frac{1}{(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1}, \quad (2.104a)$$

$$\frac{\partial e^L}{\partial b_{j,k}} = -\frac{(\bar{\eta} + \eta)a_{j,k}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^2}, \quad (2.104b)$$

$$\frac{\partial e^L}{\partial c_{j,k}} = -\frac{i(\bar{\eta} - \eta)a_{j,k}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^2}, \quad (2.104c)$$

$$\frac{\partial e^L}{\partial d_{j,k}} = -\frac{(|\eta|^2 - 1)a_{j,k}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^2}. \quad (2.104d)$$

A equação (2.37) pode ser reescrita como

$$L_\eta(\eta) = -\frac{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})}{(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1}. \quad (2.105)$$

Dessa forma, escreve-se que:

$$\frac{\partial L_\eta}{\partial a_{j,k}} = 0, \quad (2.106a)$$

$$\frac{\partial L_\eta}{\partial b_{j,k}} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\eta} + \eta)[(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})] \\ -[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1] \end{array} \right\}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^2}, \quad (2.106b)$$

$$\frac{\partial L_\eta}{\partial c_{j,k}} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} i(\bar{\eta} - \eta)[(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})] \\ +i[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1] \end{array} \right\}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^2}, \quad (2.106c)$$

$$\frac{\partial L_\eta}{\partial d_{j,k}} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (|\eta|^2 - 1)[(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})] \\ -\bar{\eta}[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1] \end{array} \right\}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^2}. \quad (2.106d)$$

A equação (2.45) pode ser reescrita como

$$L_{\eta\bar{\eta}}(\eta) = \frac{b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^2}. \quad (2.107)$$

Logo, as derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial a_{j,k}} = 0, \quad (2.108a)$$

$$\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial b_{j,k}} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} 2b_{j,k}[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1] \\ -2(b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1)(\bar{\eta} + \eta) \end{array} \right\}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^3}, \quad (2.108b)$$

$$\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial c_{j,k}} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} 2c_{j,k}[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1] \\ -2i(b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1)(\bar{\eta} - \eta) \end{array} \right\}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^3}, \quad (2.108c)$$

$$\frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial d_{j,k}} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} 2d_{j,k}[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1] \\ -2(b_{j,k}^2 + c_{j,k}^2 + d_{j,k}^2 - 1)(|\eta|^2 - 1) \end{array} \right\}}{[(\bar{\eta} + \eta)b_{j,k} + i(\bar{\eta} - \eta)c_{j,k} + (|\eta|^2 - 1)d_{j,k} - |\eta|^2 - 1]^3}. \quad (2.108d)$$

## 2.5 Condição de Contorno

Para a solução numérica do problema de síntese é necessário que a equação de Monge-Ampère (2.19) seja resolvida como um problema de valor de contorno. A condição de contorno é obtida impondo que os raios da borda do cone de alimentação sejam mapeados, depois de duas reflexões, no contorno da abertura. Para isso, o contorno fechado associado ao campo da abertura deve ser representado por uma função contínua e com derivadas de primeira ordem contínuas. Neste estudo são abordados três tipos de contorno da abertura: circular, elíptico e super-elíptico, onde a equação da super-elipse é suficientemente geral para representar estes três tipos de contorno (vide Figura 2.23). Da equação da super-elipse, tem-se que

$$\left| \frac{\text{Re}[\omega - \omega_c]}{ra_x} \right|^{2\sigma} + \left| \frac{\text{Im}[\omega - \omega_c]}{ra_y} \right|^{2\sigma} = 1, \quad (2.109)$$

onde  $\omega_c$  é o centro da abertura sobre o eixo  $x$ , e  $ra_x$  e  $ra_y$  são os raios da super-elipse ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. É importante observar que, para  $\sigma = 1$ , o contorno se torna uma elipse, ou um círculo se  $ra_x = ra_y$ . Para  $\sigma \rightarrow \infty$ , o contorno se torna um retângulo de lados  $2ra_x$  e  $2ra_y$ .

Sabendo que

$$\text{Re}[\omega - \omega_c] = \frac{\omega + \bar{\omega} - 2\omega_c}{2},$$

$$\text{Im}[\omega - \omega_c] = \frac{\omega - \bar{\omega}}{2i},$$



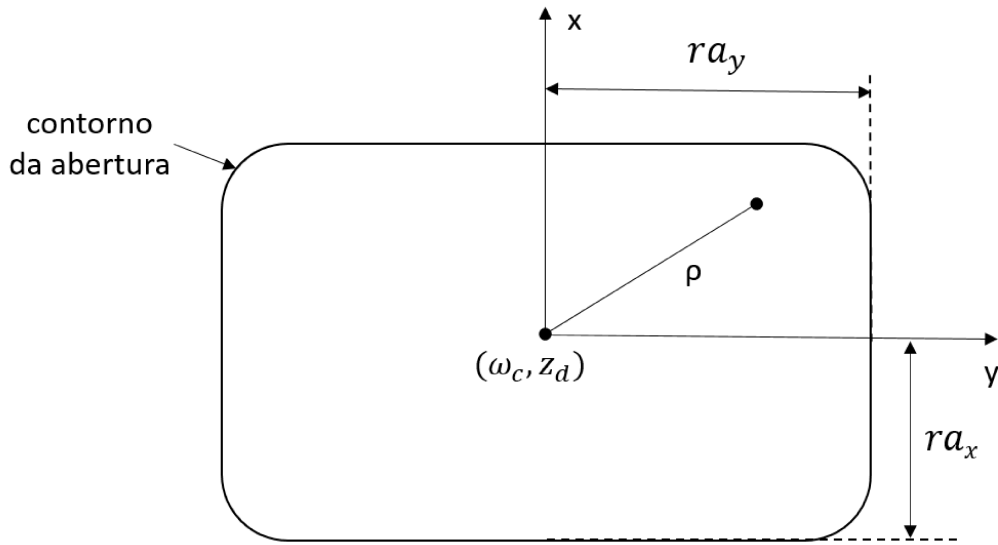


Figura 2.23: Contorno super-elíptico na abertura.

a equação (2.109) pode ser reescrita como

$$\left| \frac{\omega + \bar{\omega} - 2\omega_c}{2ra_x} \right|^{2\sigma} + \left| \frac{\omega - \bar{\omega}}{i2ra_y} \right|^{2\sigma} = 1. \quad (2.110)$$

Assim, o operador  $\Gamma_{j,k}$  a ser aplicado nos pontos do contorno da grade polar para a solução numérica do problema de síntese é representado por  $\Gamma_c$  e é dado pela seguinte expressão:

$$\Gamma_c = \left| \frac{\omega + \bar{\omega} - 2\omega_c}{2ra_x} \right|^{2\sigma} + \left| \frac{\omega - \bar{\omega}}{i2ra_y} \right|^{2\sigma} - 1. \quad (2.111)$$

Para determinar a matriz Jacobiana deve-se obter as derivadas do operador  $\Gamma_c$  em relação aos parâmetros da quádrlica  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$ . Desta forma, derivando a equação (2.111) tem-se:

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial a_{j,k}} = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial a_{j,k}} = 2\text{Re} \left[ \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} \right], \quad (2.112a)$$

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial b_{j,k}} = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial b_{j,k}} = 2\text{Re} \left[ \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} \right], \quad (2.112b)$$

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial c_{j,k}} = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial c_{j,k}} = 2\text{Re} \left[ \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} \right], \quad (2.112c)$$

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial d_{j,k}} = \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial d_{j,k}} = 2\text{Re} \left[ \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} \right], \quad (2.112d)$$

onde a derivada parcial de  $\Gamma_c$  em relação à  $\omega$  é dada por

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} = \frac{\sigma}{ra_x} \left\{ \frac{1}{2ra_x} (\omega + \bar{\omega} - 2\omega_c) \right\}^{2\sigma-1} - i \frac{\sigma}{ra_y} \left\{ \frac{1}{i2ra_y} (\omega - \bar{\omega}) \right\}^{2\sigma-1}, \quad (2.113)$$

e as derivadas parciais de  $\omega$  em relação aos coeficientes da superfície quádrlica  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  serão apresentadas nos Capítulos 3 e 4 pois dependem da função fase  $l(\omega)$ .

## 2.6 Modelo para o Diagrama do Alimentador

A formulação apresentada assume que uma fonte pontual em  $O$  irradia uma frente de onda esférica TEM com centro de fase na origem do sistema de coordenadas e com intensidade de radiação  $I(\eta)$ . Neste estudo, o campo elétrico desta onda TEM é analiticamente representado por [1]:

$$E_p(r') = \left[ \cos^e \theta' \cos \phi' \hat{\theta}' - \cos^h \theta' \sin \phi' \hat{\phi}' \right] \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad \text{para } \theta \leq \pi/2, \quad (2.114)$$

$$E_c(r') = \sin \phi' \cos \phi' \left[ \cos^e \theta' \hat{\theta}' - \cos^h \theta' \hat{\phi}' \right] \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad \text{para } \theta \leq \pi/2, \quad (2.115)$$

onde  $E_p$  e  $E_c$  representam as polarizações principal e cruzada, segundo a terceira definição de Ludwig [51],  $\cos^e \theta'$  e  $\cos^h \theta'$  representam os diagramas nos planos principais de polarização e os parâmetros  $e$  e  $h$  são escolhidos para fornecer a atenuação na borda do refletor. Este tipo de modelo é válido para o semi-espço  $z'$  positivo e é largamente utilizado para caracterizar a radiação de cornetas corrugadas. A intensidade de radiação, obtida a partir da polarização principal, equação (2.114), é dada por:

$$I(\theta', \phi) = I_0 \left[ \cos^{2e} \theta' \cos^2 \phi' + \cos^{2h} \theta' \sin^2 \phi' \right], \quad (2.116)$$

onde  $I_0$  é uma constante que representa a intensidade máxima de radiação. Para o caso particular em que  $n = e = h$ , os campos não têm polarização cruzada e a intensidade de radiação é circularmente simétrica na forma:

$$I(\theta', \phi') = I_0 \cos^{2n} \theta'. \quad (2.117)$$

A atenuação do alimentador  $L_e$  é dada por

$$L_e = \frac{I}{I_0} = \frac{I_0 \cos^{2n} \theta'}{I_0}. \quad (2.118)$$

Assim,

$$L_e = \cos^{2n} \theta' \quad (2.119)$$

e aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação (2.119), tem-se que

$$10 \log L_e = 10 \log_{10}(\cos^{2n} \theta'). \quad (2.120)$$

Sendo assim, tem-se que

$$L_e[dB] = 20n \log_{10}(\cos \theta'). \quad (2.121)$$

Assim, chega-se em uma expressão útil para obter o valor de  $n$  em termos do ângulo  $\theta_c$  e da atenuação na borda do subrefletor  $L_e$  [dB], que é dada por

$$2n = \frac{L_e[dB]}{10 \log_{10} \cos \theta_c}. \quad (2.122)$$

A constante  $I_0$  é determinada através da normalização da potência total irradiada. Desta forma, para o modelo descrito pode-se utilizar:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_c} I(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' = P_{rad}. \quad (2.123)$$

Substituindo a equação (2.116) na equação (2.123) tem-se:

$$I_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_c} [\cos^{2e} \theta' \cos^2 \phi' + \cos^{2h} \theta' \sin^2 \phi'] \sin \theta' d\theta' d\phi' = P_{rad} \quad (2.124)$$

Fazendo  $P_{rad} = 4\pi$  e resolvendo a integral da equação (2.124), mostra-se que:

$$I_0 = \frac{4}{\left[ \frac{1}{2e+1} (1 - \cos^{2e+1} \theta_c) + \frac{1}{2h+1} (1 - \cos^{2h+1} \theta_c) \right]}. \quad (2.125)$$

Para  $n = e = h$ , a expressão (2.125) é reduzida a

$$I_0 = \frac{2(2n+1)}{1 - \cos^{2n+1} \theta_c}. \quad (2.126)$$

Neste trabalho será assumido que a intensidade de radiação é circularmente simétrica, ou seja,  $e = h = n$ . Então, com o auxílio da equação (2.3a), a equação (2.117) é escrita em termos da coordenada complexa  $\eta'$  do sistema de coordenadas auxiliar:

$$I(\eta') = I_0 \left( \frac{|\eta'|^2 - 1}{|\eta'|^2 + 1} \right)^{2n}. \quad (2.127)$$

Substituindo a equação (2.52a) em (2.127) obtém-se a expressão para a intensidade de radiação em termos da coordenada complexa  $\eta$ :

$$I(\eta) = I_0 \left[ \left( \left| \frac{\eta_0 \eta + 1}{\eta_0 - \eta} \right|^2 - 1 \right) \cdot \left( \left| \frac{\eta_0 \eta + 1}{\eta_0 - \eta} \right|^2 + 1 \right)^{-1} \right]^{2n} \quad (2.128)$$

onde  $I_0$  é dado pela equação (2.126).

## 2.7 Modelo de Distribuição de Densidade de Potência na Abertura

Nesta seção é apresentado o modelo desejado para a distribuição da densidade de potência na abertura do sistema duplo-refletor sintetizado. A densidade de potência desejada  $G_{ob}(\omega)$  será descrita por uma função Gaussiana cujo contorno pode ser circular, elíptico ou super-elíptico. A atenuação da função Gaussiana pode ser usada para controlar a diretividade e os níveis dos lóbulos laterais do diagrama de radiação [26]. No final da seção, será apresentada a estratégia de convergência que combina a função Gaussiana com a densidade de potência fornecida pelas quádricas confocais  $G_{sq}(\omega)$ .

A função que descreve a distribuição Gaussiana na abertura tem a seguinte forma:

$$G_{ob}(\omega) = G_0 e^{-\psi \rho(\omega, \bar{\omega})}, \quad (2.129)$$

onde

$$\rho(\omega, \bar{\omega}) = \left| \frac{\text{Re}[\omega - \omega_c]}{ra_x} \right|^{2\sigma} + \left| \frac{\text{Im}[\omega - \omega_c]}{ra_y} \right|^{2\sigma} = \left| \frac{\omega + \bar{\omega} - 2\omega_c}{2ra_x} \right|^{2\sigma} + \left| \frac{\omega - \bar{\omega}}{i2ra_y} \right|^{2\sigma}, \quad (2.130)$$

$\psi$  é uma constante que determina o fator de atenuação e  $G_0$  é uma constante que representa a distribuição de potência máxima na abertura. Uma forma prática para determinar  $\psi$  é especificar a atenuação na borda do contorno  $L_G$  em relação ao ponto de máximo. Novamente, partindo do conceito de atenuação, tem-se que

$$L_G = \frac{G}{G_0} = \frac{G_0 e^{-\psi \rho(\omega, \bar{\omega})}}{G_0} \quad (2.131)$$

Sabendo que no contorno,

$$|\rho(\omega, \bar{\omega})| = 1, \quad (2.132)$$

a atenuação  $L_G$ , em valor absoluto, é dada por

$$L_G = e^{-\psi}. \quad (2.133)$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação (2.133), tem-se que

$$L_G[dB] = -10\psi \log_{10} e \quad (2.134)$$

que pode ser reescrita como

$$\psi = -\frac{L_G[dB]}{10 \log_{10} e}. \quad (2.135)$$

Novamente, a constante  $G_0$  é obtida a partir da normalização da potência total irradiada pela abertura. Logo,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\rho(\omega, \bar{\omega})} G_0 e^{-\psi \rho} \rho d\rho d\phi = P_{rad}. \quad (2.136)$$

Definindo-se  $P_{rad} = 4\pi$ , a integral é resolvida analiticamente para os seguintes casos particulares, sendo  $G_0$  dado por:

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{2\psi}{1 - e^{-\psi r_a^2}}, \quad \text{para } ra_x = ra_y = r_a, \sigma = 1 \text{ e } \psi \neq 0, \\ G_0 &= \frac{4}{r_a^2}, \quad \text{para } ra_x = ra_y = r_a, \sigma = 1 \text{ e } \psi = 0, \\ G_0 &= \frac{\pi \Gamma(1 + \frac{2}{2\sigma})}{ra_x ra_y \{\Gamma(1 + \frac{1}{2\sigma})\}^2}, \quad \text{para } ra_x \neq ra_y, \sigma \neq 1 \text{ e } \psi = 0. \end{aligned}$$

Para os demais casos, a integral (2.136) deve ser avaliada numericamente.

Para determinar a matriz Jacobiana nos Capítulos 3 e 4 será necessária a derivada de  $G_{ob}(\omega)$  em relação a  $\omega$  que é dada por

$$G_{\omega}^{ob}(\omega) = G_{ob}(\omega) \left[ -\psi \frac{\partial \Gamma_c}{\partial \omega} \right], \quad (2.137)$$

onde a derivada parcial de  $\Gamma_c$  em relação a  $\omega$  é dada em (2.113).

A estratégia utilizada para obter a convergência da solução numérica da equação de Monge-Ampère para os casos onde a solução inicial é muito diferente da solução final consiste em utilizar, como solução inicial, uma superfície quádrica e, como função do campo na abertura  $G(\omega)$ , uma combinação linear do campo na abertura de uma superfície quádrica  $G_{sq}(\omega)$  com o campo Gaussiano desejado  $G_{ob}(\omega)$ . Assim,  $G(\omega)$  é dado por

$$G(\omega) = (1 - \mu)G_{sq}(\omega) + \mu G_{ob}(\omega). \quad (2.138)$$

O processo de síntese tem início com  $\mu = 0$ , ou seja, a distribuição de campo  $G(\omega)$  é dada pelo campo de abertura das quádricas confocais  $G_{sq}(\omega)$  e, neste caso, o operador  $\Gamma$  é nulo. Nos estágios intermediários,  $\mu$  assume valores entre zero e um e no estágio final  $\mu = 1$ , ou seja, a distribuição de campo  $G(\omega)$  passa a ser igual à função Gaussiana desejada  $G_{ob}(\omega)$ . A derivada da função  $G(\omega)$  em relação a  $\omega$  é dada por

$$G_{\omega}(\omega) = (1 - \mu)G_{\omega}^{sq}(\omega) + \mu G_{\omega}^{ob}(\omega). \quad (2.139)$$

## 2.8 Algoritmo de Síntese

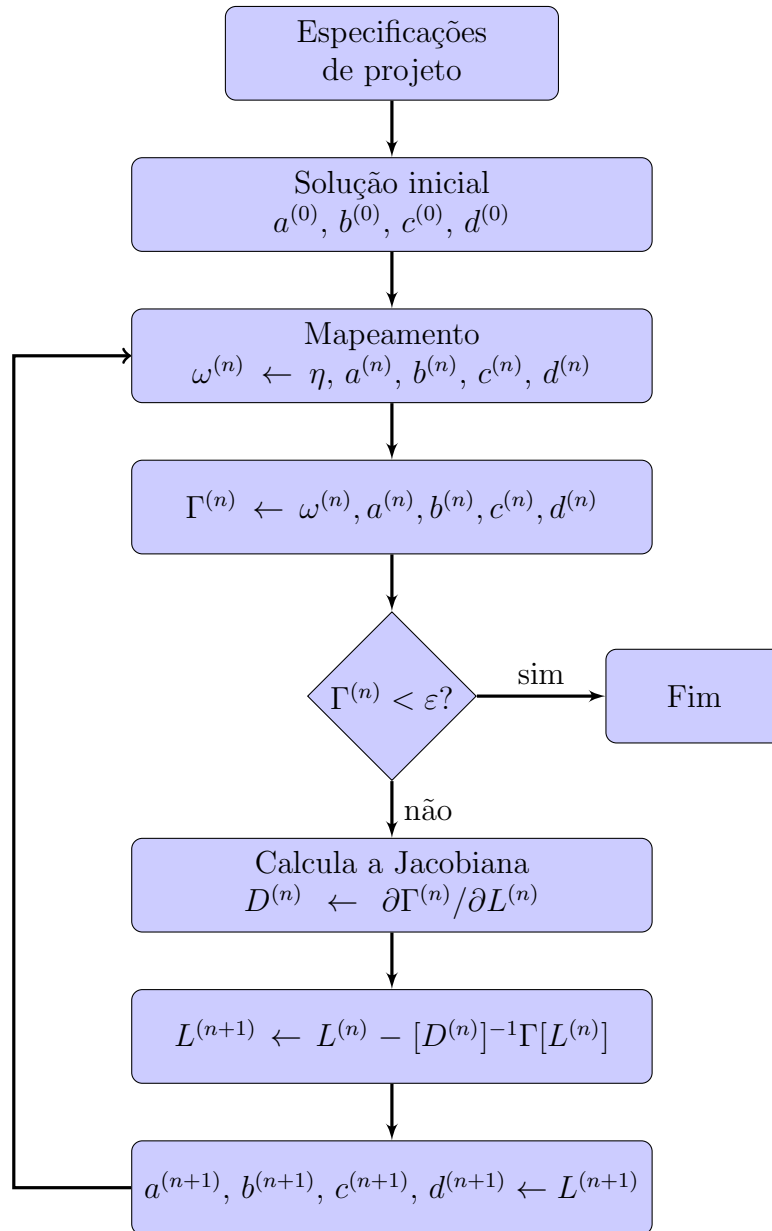


Figura 2.24: Diagrama de blocos do algoritmo de síntese.

O algoritmo da Figura 2.24 ilustra o procedimento numérico para a solução do problema de síntese de um sistema duplo-refletor *offset*. Inicialmente, as especificações de projeto devem ser definidas. Em seguida, é escolhida uma superfície para iniciar o algoritmo de síntese. Neste trabalho, a quádrlica confocal representada pelos coeficientes  $a^{(0)}$ ,  $b^{(0)}$ ,  $c^{(0)}$ ,  $d^{(0)}$  foi adotada como solução inicial e deve ser uma superfície próxima da solução a ser sintetizada para a convergência do algoritmo. A partir da solução inicial é obtida a relação de mapeamento  $\eta \rightarrow \omega$  que depende da função fase  $l(\omega)$ . Conhecidos  $\eta$ ,  $\omega$  e os coeficientes das superfícies quádrlicas que representam a superfície do subrefletor, o operador  $\Gamma[L]$  é obtido. Se este operador for menor que o critério de convergência

adotado, então, a superfície avaliada é aquela desejada, ou seja, o subrefletor sintetizado em conjunto com o refletor principal geram a densidade de potência na abertura  $G(\omega)$  especificada. Caso contrário, o algoritmo calcula a matriz Jacobiana do operador  $\Gamma[L]$ , e uma nova superfície é obtida  $L^{(n+1)}$ . Esta superfície é então interpolada por um conjunto de quádricas confocais com eixos deslocados e a relação de mapeamento é reavaliada, bem como o operador  $\Gamma[L]$ . O algoritmo continua iteragindo até que o critério de convergência seja atendido.

## 2.9 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentado o procedimento numérico alternativo, proposto em [2], para a solução da equação de Monge-Ampère (2.19). A metodologia é empregada no Capítulo 3 para o projeto de antenas duplo-refletoras *offset* com fase uniforme na abertura e no Capítulo 4 para o projeto de sistemas duplo-refletores *offset* com fase arbitrária na abertura a fim de modelar o feixe do diagrama de radiação para um contorno específico. Além disso, o algoritmo será empregado para sintetizar lentes dielétricas sem simetria circular no Capítulo 5 a partir da especificação da densidade de potência na região de cobertura.

## Capítulo 3

# Antenas Duplo-Refletoras *Offset* com Fase Uniforme na Abertura

Neste capítulo, a formulação matemática do problema de síntese apresentado na Seção 2.2 é particularizada para o caso de fase uniforme na abertura usando a aproximação de superfícies quádricas confocais para representar localmente a superfície do subrefletor. No problema de fase uniforme, o mapeamento  $\eta \rightarrow \omega$  é determinado por uma expressão analítica fechada. Para a solução numérica do problema de síntese é determinada uma solução inicial para o algoritmo, bem como as derivadas do operador não-linear quando a fase é constante. Para avaliar o algoritmo de síntese desenvolvido, são apresentados alguns estudos de casos com o objetivo de projetar sistemas duplo-refletores *offset* com densidades de potência na abertura com distribuição de amplitude Gaussiana em contornos circulares e elípticos. Para a análise dos resultados gerados pelo algoritmo de síntese, as superfícies sintetizadas são interpoladas por pseudo-*splines* quádruplas [52] e analisadas via aproximações da PO mais corrente de borda [47], [48].

### 3.1 Geometria do Problema de Síntese

A geometria do problema de síntese de um sistema duplo-refletor com fase uniforme na abertura é ilustrada na Figura 3.1 como um problema de valor de contorno. Neste caso particular, os raios refletidos pelo refletor principal cruzam a abertura paralelos ao eixo  $z$ . Assim, a função fase  $l(\omega)$  é igual a uma constante e  $\zeta \rightarrow \infty$ , uma vez que o plano de abertura está definido na direção do semi espaço  $z$ -positivo. Assim, a relação de mapeamento entre as direções dos raios incidentes  $\eta$  e as coordenadas da abertura  $\omega$  representada em (2.14) será simplificada e a direção dos raios refletidos  $\zeta$  se cancelam na formulação.



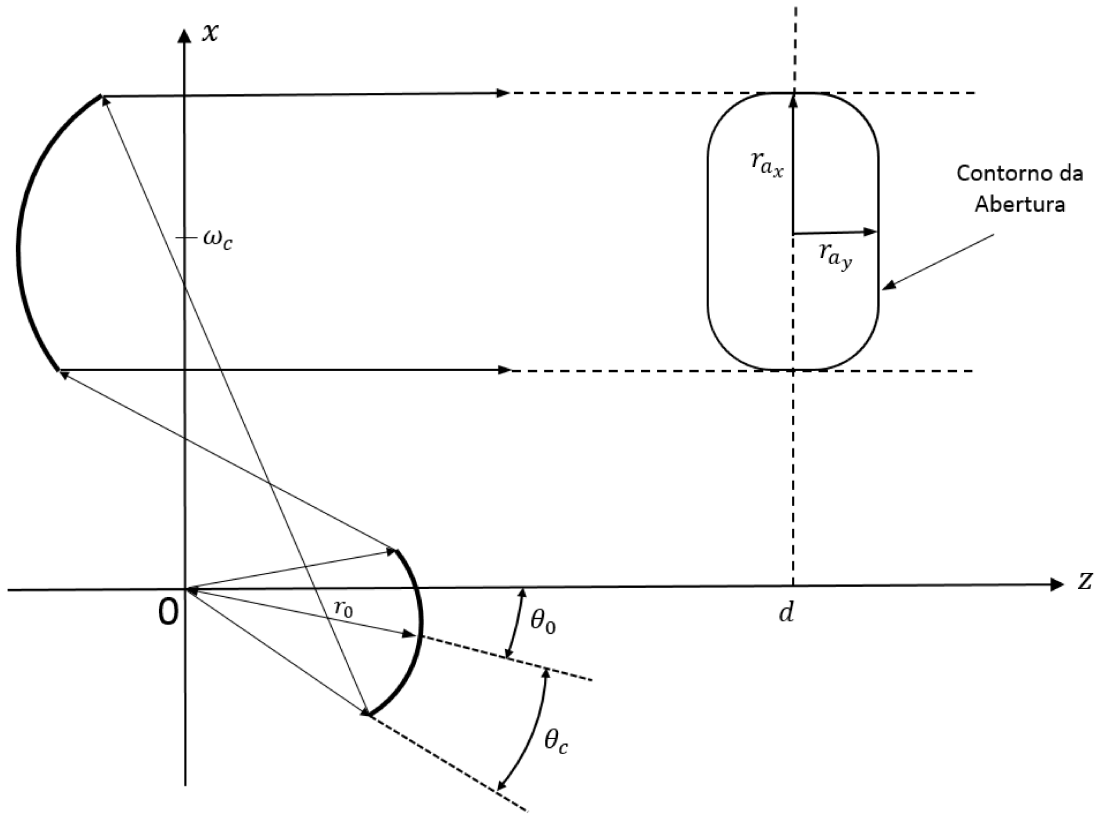


Figura 3.1: Geometria do problema de síntese de um sistema duplo-refletor com fase uniforme na abertura como um problema de valor de contorno.

### 3.2 Mapeamento $\eta \rightarrow \omega$

Para o caso particular  $\zeta \rightarrow \infty$  (todos os raios refletidos paralelos ao eixo  $+z$ ), a equação (2.14) torna-se:

$$L_\eta = \frac{2\tau + z_d - l}{(l - z_d)\eta - \omega}. \quad (3.1)$$

Definindo  $A = l - z_d$ , a equação (3.1) pode ser reescrita como

$$L_\eta = \frac{2\tau - A}{\eta A - \omega}. \quad (3.2)$$

ou, ainda, da seguinte forma [26]:

$$\omega = \eta A + \frac{A - 2e^L}{L_\eta}. \quad (3.3)$$

Assumindo aproximação por superfícies quádricas confocais, ou seja, substituindo as equações (2.37) e (2.31) em (3.3), a relação entre  $\eta$  e  $\omega$  é escrita como [53]:

$$\omega = \frac{2a + A[(d+1) - (b+ic)\bar{\eta}]}{(d-1)\bar{\eta} + (b-ic)}. \quad (3.4)$$

### 3.3 Equação de Monge-Ampère

Para o caso particular de fase uniforme na abertura, ou seja,  $l(\omega) = \text{constante}$ ,  $l_\omega = 0$  e  $l_{\bar{\omega}} = 0$ . Interpretando a equação (3.2) como uma função  $F(\omega, \eta)$ , função das variáveis complexas  $\omega$  e  $\eta$ , as derivadas parciais de  $F$  são:

$$F_\omega = \frac{2e^L - A}{(A\eta - \omega)^2}, \quad F_{\bar{\omega}} = 0, \quad (3.5)$$

e

$$F_\eta = L_\eta^2, \quad F_{\bar{\eta}} = \frac{2e^L |L_\eta|^2}{2e^L - A}. \quad (3.6)$$

Diferenciando a equação

$$L_\eta = F(\omega, \eta)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} L_{\eta\eta} &= F_\omega \omega_\eta + F_{\bar{\omega}} \bar{\omega}_\eta + L_\eta^2 \quad \text{e} \\ L_{\eta\bar{\eta}} &= F_\omega \omega_{\bar{\eta}} + F_{\bar{\omega}} \bar{\omega}_{\bar{\eta}} + B, \end{aligned}$$

onde  $B = F_{\bar{\eta}}$ . Observe da equação (3.6) que  $B$  é real. Estas equações e seus complexos conjugados podem ser combinados na seguinte equação matricial

$$\begin{bmatrix} L_{\eta\eta} - L_\eta^2 & L_{\eta\bar{\eta}} - B \\ L_{\eta\bar{\eta}} - B & L_{\bar{\eta}\bar{\eta}} - L_{\bar{\eta}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_\omega & F_{\bar{\omega}} \\ \bar{F}_\omega & \bar{F}_{\bar{\omega}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_\eta & \omega_{\bar{\eta}} \\ \bar{\omega}_\eta & \bar{\omega}_{\bar{\eta}} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Calculando os determinantes de ambos os lados da equação, obtém-se

$$|L_{\eta\eta} - L_\eta^2|^2 - (L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2 = (|F_\omega|^2 - |F_{\bar{\omega}}|^2)(|\omega_\eta|^2 - |\omega_{\bar{\eta}}|^2). \quad (3.8)$$

Chamando  $V = (|F_\omega|^2 - |F_{\bar{\omega}}|^2)$ , combinando as expressões (3.8) e (2.18) e usando as expressões (3.5), (3.6), (3.3) e (2.41) chega-se à [53]:

$$-(L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2 = \pm V \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2}, \quad (3.9)$$

onde

$$B = \frac{2e^L |L_\eta|^2}{2e^L - A} \quad \text{e} \quad V = \frac{|L_\eta|^4}{(2e^L - A)^2}.$$

Esta é a forma complexa da equação de Monge-Ampère para o problema de síntese de um sistema de duplo-refletor com fase uniforme na abertura usando as aproximações por superfície quádricas confocais. Em (3.9) o sinal  $(-)$  denota a forma elíptica e o sinal  $(+)$

a forma hiperbólica da equação de Monge-Ampère.

### 3.4 Coordenadas do Refletor Principal

A superfície do refletor principal  $S$  pode ser deduzida para o caso particular de fase constante na abertura substituindo as equações (2.16) e (2.17) em (2.15). Então, as coordenadas do refletor principal são dadas por [26]:

$$\vec{r} + \vec{s} = \left\{ \omega, \frac{|\omega|^2 - A^2 + 2e^L(A(1 + |\eta|^2) - \bar{\eta}\omega - \eta\bar{\omega})}{2(A - 2e^L)} \right\}. \quad (3.10)$$

### 3.5 Exemplo de Solução Analítica para a Síntese de Duplo-Refletores com Fase Uniforme na Abertura

Como solução inicial para o algoritmo de síntese será adotada um exemplo de solução analítica para a síntese de duplo-refletores com fase uniforme na abertura. No plano de simetria  $\phi = 0$ , assumindo que não há deslocamento azimutal em seu eixo de simetria  $\varphi = 0$  e, conseqüentemente,  $c = 0$ , mostra-se facilmente que a equação (3.4) torna-se

$$\omega_r = \frac{2a + A[(d + 1) - b\bar{\eta}_r]}{(d - 1)\bar{\eta}_r + b}, \quad (3.11)$$

onde  $\eta_r$  e  $\omega_r$  são as partes reais de  $\eta$  e  $\omega$ , respectivamente. Da equação (2.26) é possível obter uma expressão para  $a$  em função dos termos  $b$  e  $d$  da superfície quádrlica:

$$a = r_0(b \sin \theta_0 + d \cos \theta_0 - 1). \quad (3.12)$$

Substituindo (3.12) na expressão (3.11), tem-se que

$$(2r_0 \sin \theta_0 - A\eta_r - \omega_r)b + (2r_0 \cos \theta_0 + A - \eta_r\omega_r)d = 2r_0 - A - \eta_r\omega_r. \quad (3.13)$$

Os coeficientes  $b$  e  $d$  da superfície quádrlica podem ser obtidos definindo-se um sistema linear de duas equações. Para isso, dois raios,  $\eta_{r1}$  e  $\eta_{r2}$ , são definidos no plano de simetria ( $\phi = 0$ ), assim como ilustrado na Figura 3.2 para um sistema duplo-refletor com configuração Gregorian ou TB (topo-base) e na Figura 3.3 para a configuração Cassegrain ou TT (topo-topo) e expressos em (3.14). Na configuração Gregorian ou TB, o raio mapeado no topo (extremidade superior) do subrefletor é refletido na base (extremidade inferior) do refletor principal, enquanto que na configuração Cassegrain ou TT, o raio mapeado no

topo do subrefletor é refletido no topo do refletor principal.

$$\eta_{r1} = \cot\left(\frac{\theta_1}{2}\right), \quad (3.14a)$$

$$\eta_{r2} = \cot\left(\frac{\theta_2}{2}\right), \quad (3.14b)$$

onde  $\theta_1 = \theta_0 - \theta_c$  e  $\theta_2 = \theta_0 + \theta_c$  para a configuração TB (Gregorian), e  $\theta_1 = \theta_0 + \theta_c$  e  $\theta_2 = \theta_0 - \theta_c$  para a configuração TT (Cassegrain). Também, tem-se que

$$\omega_{r1} = \omega_c + ra_x \quad e \quad (3.15a)$$

$$\omega_{r2} = \omega_c - ra_x. \quad (3.15b)$$

Uma vez definidas as especificações do projeto,  $\theta_0$ ,  $\theta_c$ ,  $r_0$ ,  $A = l - z_d$ ,  $\omega_c$ ,  $ra_x$ , as variáveis (3.14) e (3.15) são determinadas e o sistema linear na forma matricial é então formulado:

$$\begin{bmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

onde

$$P_1 = 2r_0 \sin \theta_0 - A\eta_{r1} - \omega_{r1},$$

$$P_2 = 2r_0 \sin \theta_0 - A\eta_{r2} - \omega_{r2},$$

$$Q_1 = 2r_0 \cos \theta_0 + A - \eta_{r1}\omega_{r1},$$

$$Q_2 = 2r_0 \cos \theta_0 + A - \eta_{r2}\omega_{r2},$$

$$R_1 = 2r_0 - A - \eta_{r1}\omega_{r1},$$

$$R_2 = 2r_0 - A - \eta_{r2}\omega_{r2}.$$

O sistema linear (3.16) pode facilmente ser resolvido usando a regra de Cramer:

$$b = \frac{R_1 Q_2 - Q_1 R_2}{P_1 Q_2 - Q_1 P_2}, \quad (3.17)$$

$$d = \frac{P_1 R_2 - R_1 P_2}{P_1 Q_2 - Q_1 P_2}, \quad (3.18)$$

e o coeficiente  $a$  é obtido pela equação (3.12).

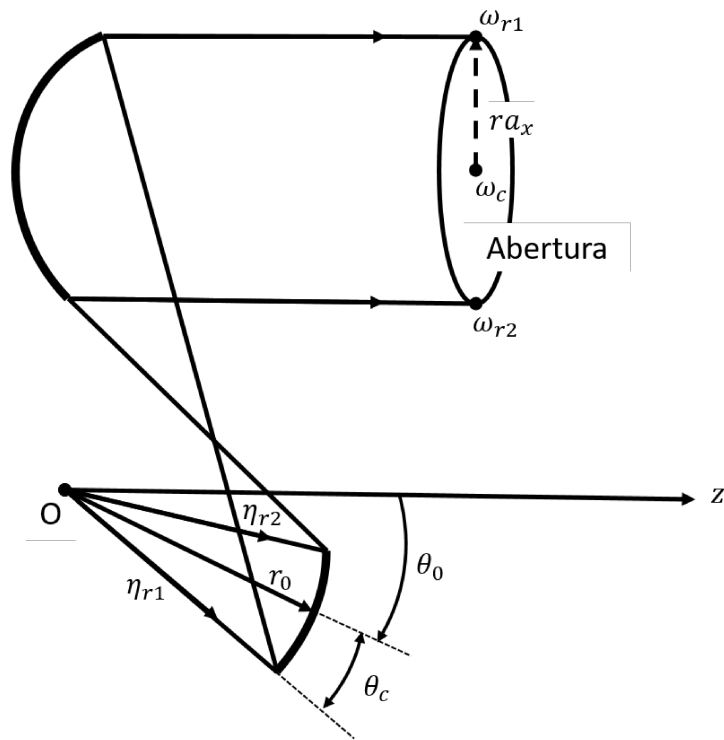


Figura 3.2: Configuração TB (Gregorian) com a abertura definida na direção do semi espaço  $z$ -positivo.

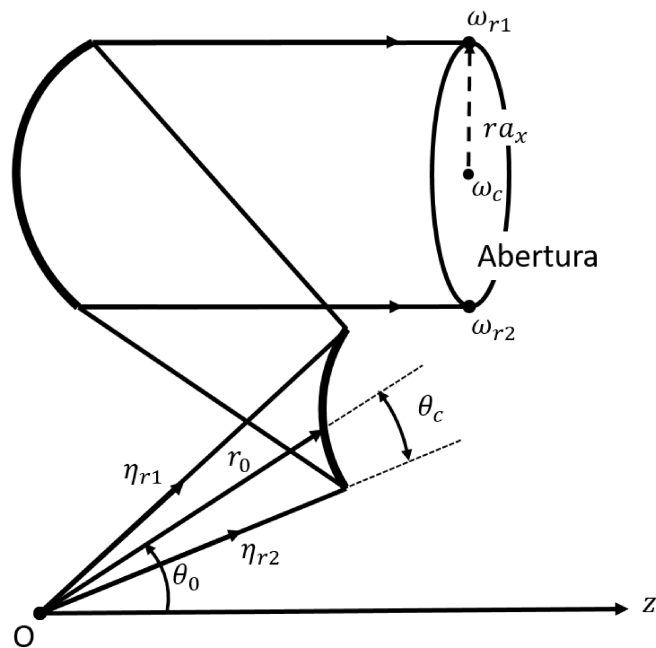


Figura 3.3: Configuração TT (Cassegrain) com a abertura definida na direção do semi espaço  $z$ -positivo.

### 3.6 Densidade de Potência Refletida na Abertura

A equação (3.9) pode ser considerada de duas formas. Se a densidade de potência é especificada na abertura, então a expressão se torna uma equação diferencial de Monge-

Ampère para  $L$ . Por outro lado, se a superfície  $L(\eta)$  é conhecida, então a expressão (3.9) é uma equação para densidade de potência  $G(\omega)$ . Nesta seção é deduzida a densidade de potência refletida na abertura por sistema duplo refletor cujo subrefletor é uma superfície quádrlica confocal determinada pelos coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ . A relação entre  $\eta$  e  $\omega$  da expressão (3.4) pode ser invertida e expressa da seguinte forma:

$$\bar{\eta} = \frac{2a + A(d+1) - (b-ic)\omega}{(d-1)\omega + A(b+ic)}, \quad (3.19)$$

$$\eta = \frac{2a + A(d+1) - (b+ic)\bar{\omega}}{(d-1)\bar{\omega} + A(b-ic)}. \quad (3.20)$$

Calculando as derivadas de  $\eta$  em relação a  $\omega$  e seu complexo conjugado  $\bar{\omega}$ , obtém-se:

$$\eta_\omega = 0, \quad (3.21)$$

$$\eta_{\bar{\omega}} = -\frac{A(b^2 + c^2) + 2a(d-1) + A(d^2 - 1)}{[A(b-ic) + (d-1)\bar{\omega}]^2}. \quad (3.22)$$

A partir da equação da Conservação da Energia (2.18), obtém-se a expressão de  $G_{sq}(\omega)$  [19]:

$$G_{sq}(\omega) = \frac{4I(\eta)}{(1 + |\eta|^2)^2} ||\eta_\omega|^2 - |\eta_{\bar{\omega}}|^2|. \quad (3.23)$$

Substituindo as equações (3.21) e (3.22) em (3.23) obtém-se uma expressão para a densidade de potência refletida na abertura por um sistema duplo-refletor quando o subrefletor é uma superfície quádrlica confocal:

$$G_{sq}(\omega) = \frac{4I(\eta)}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{[A(b^2 + c^2) + 2a(d-1) + A(d^2 - 1)]^2}{|A(b-ic) + (d-1)\bar{\omega}|^4}. \quad (3.24)$$

Para determinar os elementos da matriz Jacobiana deve-se obter a derivada da função  $G_{sq}(\omega)$  em relação a  $\omega$ :

$$\frac{\partial G_{sq}(\omega)}{\partial \omega} = 4I(\eta)\eta_{\bar{\omega}} \frac{\bar{\eta}_{\omega\omega}(1 + \eta\bar{\eta}) - 2\eta(\bar{\eta}_\omega)^2}{(1 + \eta\bar{\eta})^3} \quad (3.25)$$

onde

$$\bar{\eta}_\omega = -\frac{A(b^2 + c^2) + 2a(d-1) + A(d^2 - 1)}{[A(b+ic) + (d-1)\omega]^2}, \quad (3.26)$$

$$\bar{\eta}_{\omega\omega} = \frac{2(d-1)[A(b^2 + c^2) + 2a(d-1) + A(d^2 - 1)]}{[A(b+ic) + (d-1)\omega]^3}. \quad (3.27)$$

### 3.7 Solução Numérica do Problema de Síntese

O problema de síntese de um sistema duplo-refletor com fase uniforme na abertura (3.9) será resolvido numericamente usando a técnica alternativa descrita na Seção 2.4. Para isso, a superfície do subrefletor é discretizada pela grade polar da Seção 2.4.1, e então é representada localmente por um conjunto de superfícies quádricas confocais. A solução analítica para o problema de síntese da Seção 3.5 é usada como solução inicial. A partir da equação de Monge-Ampère para a síntese de um sistema duplo-refletor com fase uniforme na abertura (3.9), o operador não-linear  $\Gamma[L]$  é escrito como [53]:

$$\Gamma[L] = (L_{\eta\bar{\eta}} - B)^2 \pm \mathcal{H}(\eta, \omega), \quad (3.28)$$

onde

$$\mathcal{H}(\eta, \omega) = V \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2}. \quad (3.29)$$

O procedimento iterativo de Newton da Seção 2.4.4 é então empregado para para reduzir os resíduos associados ao operador (3.28) nos pontos da grade a um valor menor que o critério de convergência adotado. Para isso, será necessário obter os elementos da matriz Jacobiana (2.89) descrita na seção 2.4.5 para o operador  $\Gamma[L]$  linearizado. A partir daí, uma nova superfície é obtida pela equação (2.83), que será usada no processo iterativo para a convergência do algoritmo de síntese representado pelo diagrama de blocos da Figura 2.24.

Para determinar a matriz Jacobiana (2.89) do operador (3.28), as derivadas dos coeficientes da superfície quádrica  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  em relação à  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$  já foram determinadas na Seção 2.4.5 e estão expressos nas seguintes equações: (2.93), (2.96), (2.99) e (2.102), respectivamente. Para completar o cálculo da matriz Jacobiana, serão determinadas as derivadas parciais de operador  $\Gamma[L]$  em relação aos coeficientes da superfície quádrica  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  que são apresentadas em (3.30):

$$\frac{\partial \Gamma[L]}{\partial a_{j,k}} = 2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left[ \frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial a_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial a_{j,k}} \right] \pm \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_{j,k}}, \quad (3.30a)$$

$$\frac{\partial \Gamma[L]}{\partial b_{j,k}} = 2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left[ \frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial b_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial b_{j,k}} \right] \pm \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial b_{j,k}}, \quad (3.30b)$$

$$\frac{\partial \Gamma[L]}{\partial c_{j,k}} = 2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left[ \frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial c_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial c_{j,k}} \right] \pm \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_{j,k}}, \quad (3.30c)$$

$$\frac{\partial \Gamma[L]}{\partial d_{j,k}} = 2(L_{\eta\bar{\eta}} - B) \left[ \frac{\partial L_{\eta\bar{\eta}}}{\partial d_{j,k}} - \frac{\partial B}{\partial d_{j,k}} \right] \pm \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial d_{j,k}}, \quad (3.30d)$$

onde

$$\frac{\partial B}{\partial a_{j,k}} = \frac{4e^L}{2e^L - A} \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial L_\eta}{\partial a_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{2A}{(2e^L - A)^2} \frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}} |L_\eta|^2, \quad (3.31a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial b_{j,k}} = \frac{4e^L}{2e^L - A} \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial L_\eta}{\partial b_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{2A}{(2e^L - A)^2} \frac{\partial e^L}{\partial b_{j,k}} |L_\eta|^2, \quad (3.31b)$$

$$\frac{\partial B}{\partial c_{j,k}} = \frac{4e^L}{2e^L - A} \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial L_\eta}{\partial c_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{2A}{(2e^L - A)^2} \frac{\partial e^L}{\partial c_{j,k}} |L_\eta|^2, \quad (3.31c)$$

$$\frac{\partial B}{\partial d_{j,k}} = \frac{4e^L}{2e^L - A} \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial L_\eta}{\partial d_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{2A}{(2e^L - A)^2} \frac{\partial e^L}{\partial d_{j,k}} |L_\eta|^2. \quad (3.31d)$$

A função  $\mathcal{H}(\eta, \omega)$  depende dos coeficientes  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  da superfície quádrica e suas derivadas são determinadas utilizando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_{j,k}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial a_{j,k}} \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial a_{j,k}} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} \right] \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial a_{j,k}}, \end{aligned} \quad (3.32a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial b_{j,k}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial b_{j,k}} \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial b_{j,k}} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} \right] \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial b_{j,k}}, \end{aligned} \quad (3.32b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_{j,k}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial c_{j,k}} \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial c_{j,k}} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} \right] \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial c_{j,k}}, \end{aligned} \quad (3.32c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial d_{j,k}} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial d_{j,k}} \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial d_{j,k}} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} \right] \pm \frac{I(\eta)}{G(\omega)} \frac{4}{(1 + |\eta|^2)^2} \frac{\partial V}{\partial d_{j,k}}, \end{aligned} \quad (3.32d)$$

onde

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} = \pm V \frac{4I(\eta)}{(1 + |\eta|^2)^2} \left\{ \frac{-G_\omega}{[G(\omega)]^2} \right\}, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_{j,k}} = \frac{4|L_\eta|^2}{(2e^L - A)^3} \left\{ (2e^L - A) \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial L_\eta}{\partial a_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{\partial e^L}{\partial a_{j,k}} |L_\eta|^2 \right\}, \quad (3.34a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial b_{j,k}} = \frac{4|L_\eta|^2}{(2e^L - A)^3} \left\{ (2e^L - A) \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial L_\eta}{\partial b_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{\partial e^L}{\partial b_{j,k}} |L_\eta|^2 \right\}, \quad (3.34b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial c_{j,k}} = \frac{4|L_\eta|^2}{(2e^L - A)^3} \left\{ (2e^L - A) \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial L_\eta}{\partial c_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{\partial e^L}{\partial c_{j,k}} |L_\eta|^2 \right\}, \quad (3.34c)$$

$$\frac{\partial V}{\partial d_{j,k}} = \frac{4|L_\eta|^2}{(2e^L - A)^3} \left\{ (2e^L - A) \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial L_\eta}{\partial d_{j,k}} L_{\bar{\eta}} \right] - \frac{\partial e^L}{\partial d_{j,k}} |L_\eta|^2 \right\}. \quad (3.34d)$$



No procedimento de síntese, a densidade de potência na abertura  $G(\omega)$  da expressão (3.29) é dada pela equação (2.139), onde  $G_{ob}(\omega)$  é dada por (2.129) e  $G_{sq}(\omega)$  pela expressão (3.24). Assim, a derivada de  $G(\omega)$  em relação  $\omega$  que surge na expressão (3.33) é expressa (2.139), onde  $G_{\omega}^{ob}(\omega)$  foi dada em (2.137) e  $G_{\omega}^{sq}(\omega)$  em (3.25).

As derivadas parciais das expressões  $e^L$ ,  $L_{\eta}$  e  $L_{\eta\bar{\eta}}$  em relação aos coeficientes da superfície quádrlica  $a_{j,k}$ ,  $b_{j,k}$ ,  $c_{j,k}$  e  $d_{j,k}$ , que surgiram nas equações (3.30), (3.31) e (3.34), foram dadas em (2.104), (2.106) e (2.108), respectivamente.

Por fim, tem-se as derivadas relacionadas ao mapeamento  $\eta \rightarrow \omega$ :

$$\frac{\partial \omega}{\partial a_{j,k}} = \frac{2}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})}, \quad (3.35a)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial b_{j,k}} = -\frac{\left\{ \frac{2a_{j,k}}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})} + A \left[ (\bar{\eta} + \eta) + \frac{1}{L_{\eta}} \right] \right\}}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})}, \quad (3.35b)$$

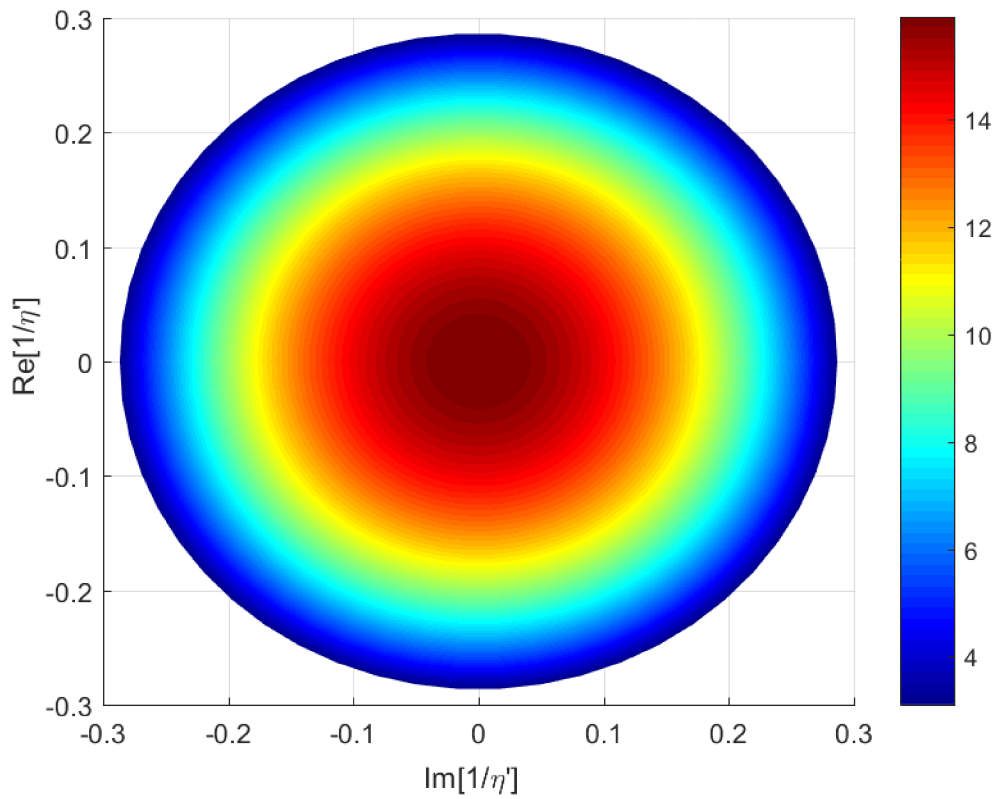
$$\frac{\partial \omega}{\partial c_{j,k}} = -\frac{\left\{ \frac{-i2a_{j,k}}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})} + A \left[ i(\bar{\eta} - \eta) - \frac{i}{L_{\eta}} \right] \right\}}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})}, \quad (3.35c)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial d_{j,k}} = -\frac{\left\{ \frac{2\bar{\eta}a_{j,k}}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})} + A \left[ (|\eta|^2 - 1) + \frac{\bar{\eta}}{L_{\eta}} \right] \right\}}{(d_{j,k} - 1)\bar{\eta} + (b_{j,k} - ic_{j,k})}. \quad (3.35d)$$

### 3.8 Estudos de Casos

Nesta seção são apresentados alguns estudos de casos para avaliar a formulação para síntese de antenas duplo-refletoras *offset* com fase uniforme na abertura. O objetivo é verificar se os resultados gerados pelo método numérico de solução da equação de Monge-Ampère são os esperados e validá-los através das aproximações da Óptica Física (PO) com correção das correntes de bordas [47], [48]. Nos casos estudados, as antenas duplo-refletoras *offset* foram sintetizadas para gerar, segundo os princípios da GO, densidades de potência na abertura Gaussianas em contornos circulares e elípticos. Como alimentador foi adotado o modelo cosseno elevado (2.117) com  $n = 9$ , o que representa uma atenuação de  $L_e = -12,8843$  dB em  $\theta_c = 32^\circ$  de acordo com (2.121), que corresponde ao ângulo de incidência na borda do subrefletor. O diagrama de radiação do modelo do alimentador no plano  $uv$  está ilustrado nas Figuras 3.4 e 3.5.

Para a análise do diagrama de radiação gerado pelas superfícies sintetizadas, é necessário interpolar os pontos dados pelo método de síntese óptica e obter uma superfície contínua. Para modelar uma superfície refletora definida por um conjunto de  $N$  pontos


 Figura 3.4: Diagrama de radiação do alimentador no plano  $1/\eta'$ .

$(x_i, y_i, z_i)$  foi utilizada interpolação por pseudo-*splines* quínticas, que é escrita como [52]:

$$z(x, y) = \sum_{i=1}^N a_i [r_i(x, y)]^5 + b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 y^2 + b_4 x + b_5 y + b_6 \quad (3.36)$$

com

$$\sum_{i=1}^N a_i P_k(x_i, y_i) = 0, \quad k = 1, \dots, 6,$$

onde

$$P_1(x, y) = x^2,$$

$$P_2(x, y) = xy,$$

$$P_3(x, y) = y^2,$$

$$P_4(x, y) = x,$$

$$P_5(x, y) = y,$$

$$P_6(x, y) = 1,$$

e  $r_i(x, y) = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{1/2}$  representa a distância, no plano  $xy$ , do ponto que está sendo avaliado em (3.36) ao conjunto de dados representado nas coordenadas  $(x_i, y_i)$ .

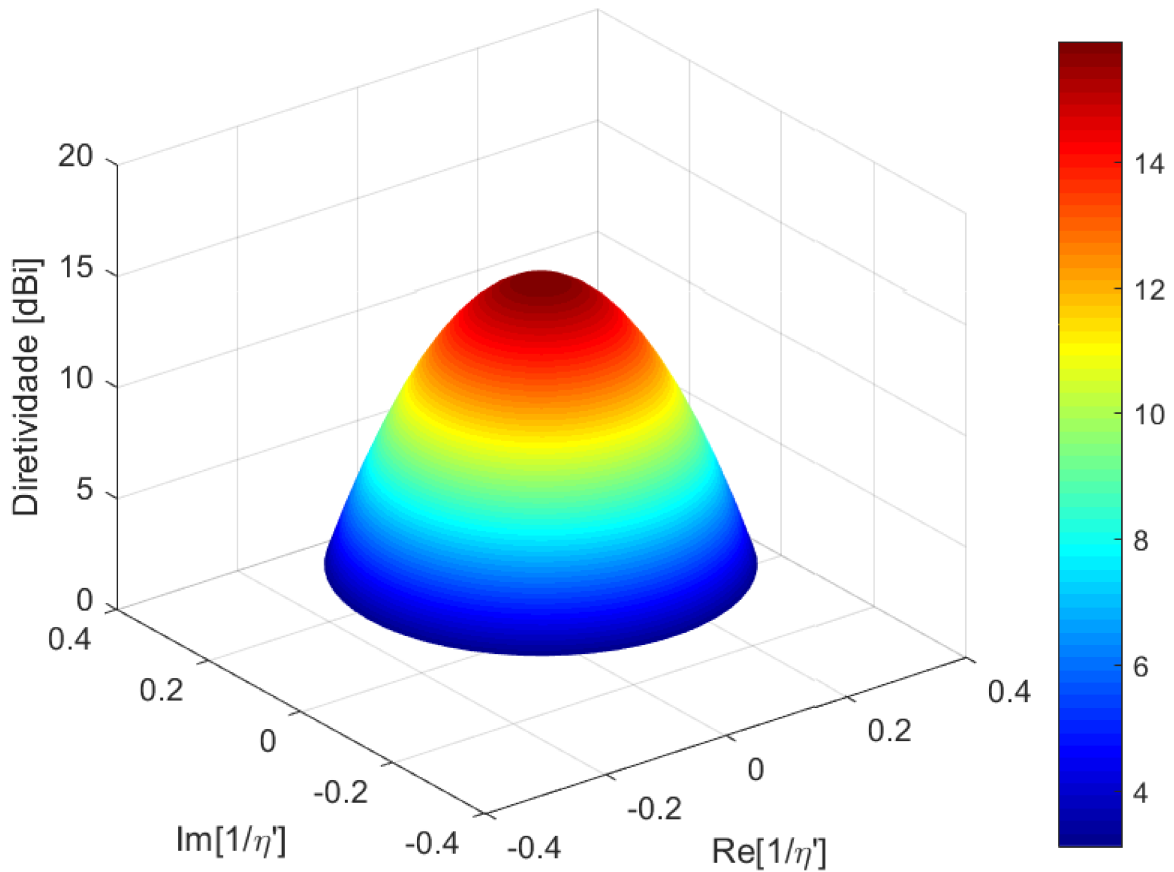


Figura 3.5: Diagrama de radiação do alimentador em 3D.

As superfícies modeladas foram então analisadas via aproximações da PO mais correntes de borda [47], [48]. O modelamento e a análise foram efetuados considerando a antena operando em 11,725 GHz. A frequência escolhida para análise dos resultados da síntese corresponde à frequência central da banda de recepção de sinais de satélite da banda Ku. Além disso, para efeitos de comparação, todos os resultados deste capítulo foram obtidos para uma abertura circular ou elíptica com área de  $3.600\pi \text{ cm}^2$ . Nos estudos de caso apresentados foi adotada a configuração Gregoriana (ou TB) para o sistema duplo-refletor, a solução da equação de Monge-Ampère é do tipo elíptica e o critério de convergência adotado no algoritmo de síntese é  $|\Gamma|_{mean} < 1,0 \times 10^{-10}$ , onde  $|\Gamma|_{mean}$  representa o erro médio dos resíduos associados ao operador  $\Gamma[L]$ .

### 3.8.1 Projeto de Sistemas Duplo-Refletores com Abertura Circular

No primeiro conjunto de estudos de caso (casos A.1, A.2 e A.3), um sistema duplo-refletor *offset* foi sintetizado para gerar campos na abertura Gaussianos com contornos circulares ( $\sigma = 1$ ) e raio igual a  $r_{ax} = r_{ay} = 60\text{cm}$ . O centro da abertura está fixado sobre o eixo  $x$ , à 76 cm da origem  $O$  do sistema de coordenadas. A escolha do centro da abertura é feita de modo que o subrefletor não bloqueie a abertura do refletor principal.

Para discretizar o subrefletor foi escolhida uma grade polar regular, ou seja,  $\alpha = 1$  no plano complexo  $1/\eta'$  definida com 12 anéis ( $J = 12$ ) e 54 radiais ( $K = 54$ ), onde cada ponto da grade está associado à direção de um raio proveniente do alimentador, conforme ilustrado na Figura 3.6. O ângulo de *offset* foi definido em  $\theta_0 = -12^\circ$  e a distância  $r_0$  entre a origem  $O$  do sistema de coordenadas e o centro do subrefletor é de 35 cm.

Utilizando esses parâmetros e a formulação apresentada na Seção 3.4, determinou-se a superfície quádrlica confocal adotada como solução inicial, sendo ela definida pelos seguintes parâmetros:  $a^{(0)} = -0,146301$  m,  $b^{(0)} = 0,222299$ ,  $c^{(0)} = 0,0$ ,  $d^{(0)} = 0,214909$ . A análise das direções dos raios refletidos da solução inicial pode ser feita observando as direções de reflexão no plano  $xy$  ilustrado na Figura 3.7 e o traçado de raios no plano  $\phi = 0^\circ$  ilustrado na Figura 3.8. Pode-se notar que a superfície inicial do subrefletor é um elipsóide de revolução, onde um dos focos está na origem do sistema de coordenadas e o outro, acima e à direita. Este último é também o foco do parabolóide que representa o refletor principal inicial. Como esperado, as superfícies quádrlicas confocais obtidas mapearam círculos concêntricos no plano  $1/\eta'$  em círculos com os centros deslocados no plano  $xy$ , descrevendo um comportamento típico do mapeamento conformal [2]. Além disso, é possível verificar que, de fato, as superfícies iniciais são simétricas em relação ao plano de simetria  $xz$ .

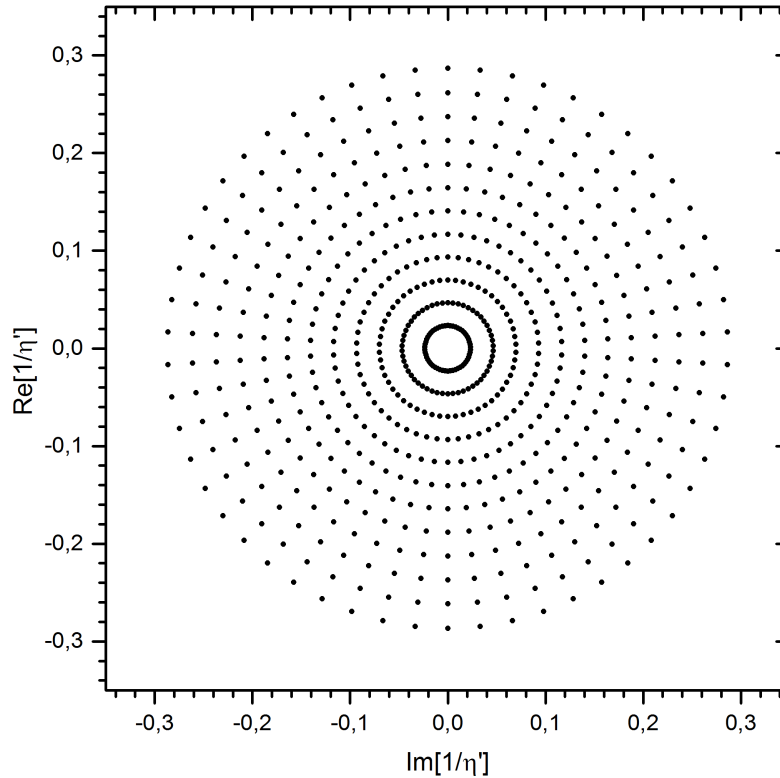


Figura 3.6: Direções de incidência da solução inicial no plano  $1/\eta'$  dos casos A.1, A.2 e A.3.

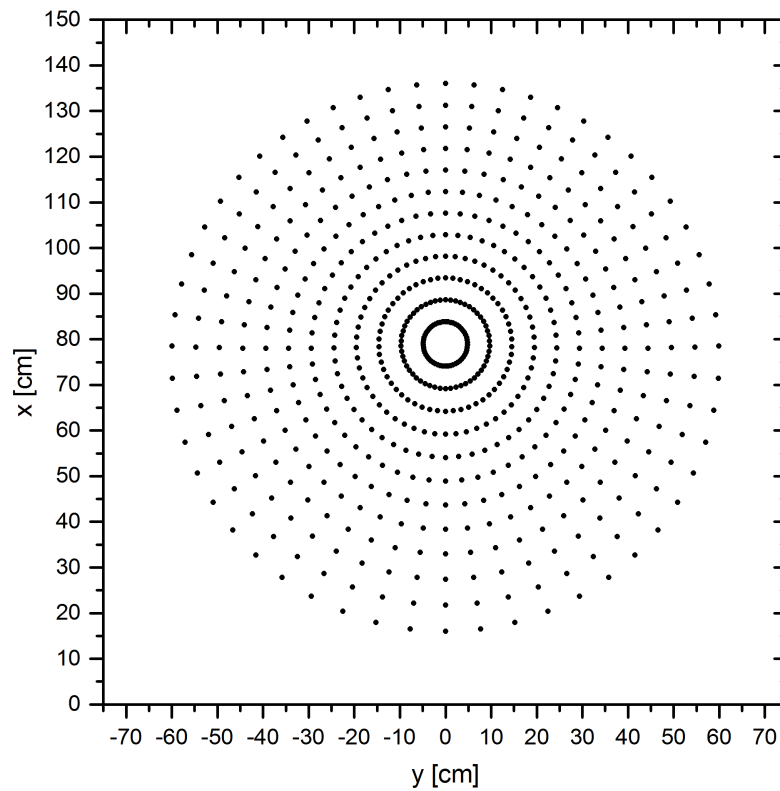


Figura 3.7: Direções de reflexão da solução inicial no plano  $xy$  dos casos A.1, A.2 e A.3.

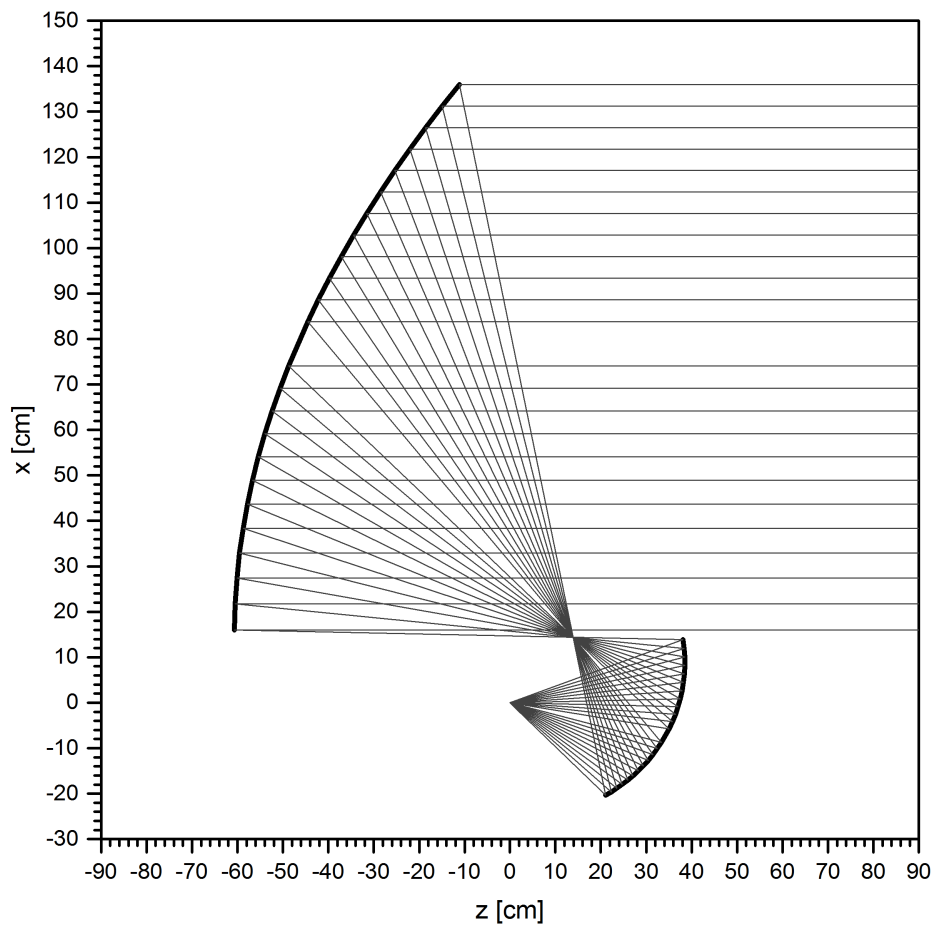


Figura 3.8: Traçado de raios da solução inicial no plano  $xz$  dos casos A.1, A.2 e A.3.

### Atenuação na borda de 0 dB: Caso A.1

No primeiro estudo de caso, caso A.1, foi desejado uma densidade de potência uniforme na abertura definida pela função constante  $G_0$  com contorno circular. Consequentemente,  $L_G = 0\text{dB}$ , que equivale ao expoente  $\psi = 0$ , de acordo com (2.135). O resultado da síntese foi obtido após 6 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador  $\Gamma[L]$  nos pontos da grade foi de  $|\Gamma|_{mean} = 5,77 \times 10^{-14}$  nos pontos interiores ao contorno e  $|\Gamma|_{mean} = 5,36 \times 10^{-10}$  nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  do subrefletor sintetizado foram de 16,8216 cm e 17,9208 cm, respectivamente. As direções dos raios refletidos pela superfície sintetizada no plano da abertura estão ilustrados na Figura 3.9 e a Figura 3.10 mostra o traçado de raios no plano de simetria.

Observando as Figuras 3.9 e 3.10 é fácil perceber que a distância entre os anéis diminui à medida em que se aproximam da borda, caracterizando o deslocamento dos raios refletidos para as bordas do contorno na abertura. Este comportamento é esperado uma vez que o princípio da Conservação da Energia está implícito na equação de Monge-Ampère, compensando a baixa iluminação do alimentador nas bordas do subrefletor ( $L_e = -12,8843\text{dB}$ ) direcionando os raios para o contorno, já que se busca uma abertura uniforme ( $L_G = 0\text{dB}$ ). Além disso, pode-se notar que a distância entre o antepenúltimo anel e o penúltimo é menor que entre o penúltimo e o último. Segundo [2], este comportamento não é adequado, uma vez que, para uma abertura uniforme deseja-se que na medida em que se aproxima da borda, a distância entre os anéis seja cada vez menor. Além disso, verifica-se também uma pequena distorção nas radiais em relação à direção  $\phi$ .

Em [2], foi feita uma análise detalhada para mensurar e explicar essas características indesejadas nos resultados da síntese quando uma grade polar uniforme foi utilizada para discretizar a superfície refletora. Além das distorções relatadas, ainda pode ocorrer do primeiro anel da grade ficar deslocado em relação ao centro especificado para a abertura. Se a função desejada para distribuição de densidade de potência na abertura for simétrica, a distribuição de raios também deve preservar a relação de simetria. Em sua análise, foi identificado que a região central e a região próxima à borda foram aquelas em que o método numérico teve a maior dificuldade para representar a superfície sintetizada por quádricas confocais. Segundo [2], essas distorções surgem quando a representação local por superfícies quádricas confocais com eixos deslocados é inadequada, conduzindo a erros no procedimento de síntese. É importante observar que a utilização da função de uma quádrica confocal com eixo deslocado leva à seguinte simplificação  $|L_{\eta\eta} - L_\eta^2|^2 = 0$  na equação de Monge-Ampère. Essa particularidade pode implicar em erros na síntese nos casos onde a distorção imposta pelo mapeamento  $\eta \rightarrow \omega$ , e, consequentemente, a equação de Monge-Ampère, tiver maior dependência deste termo.

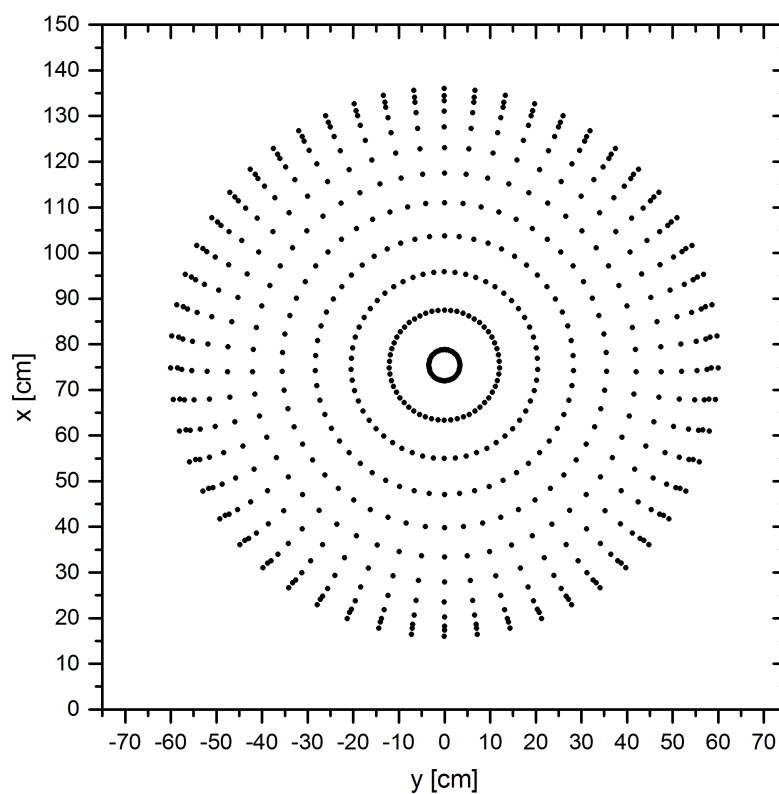


Figura 3.9: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano  $xy$  do caso A.1.

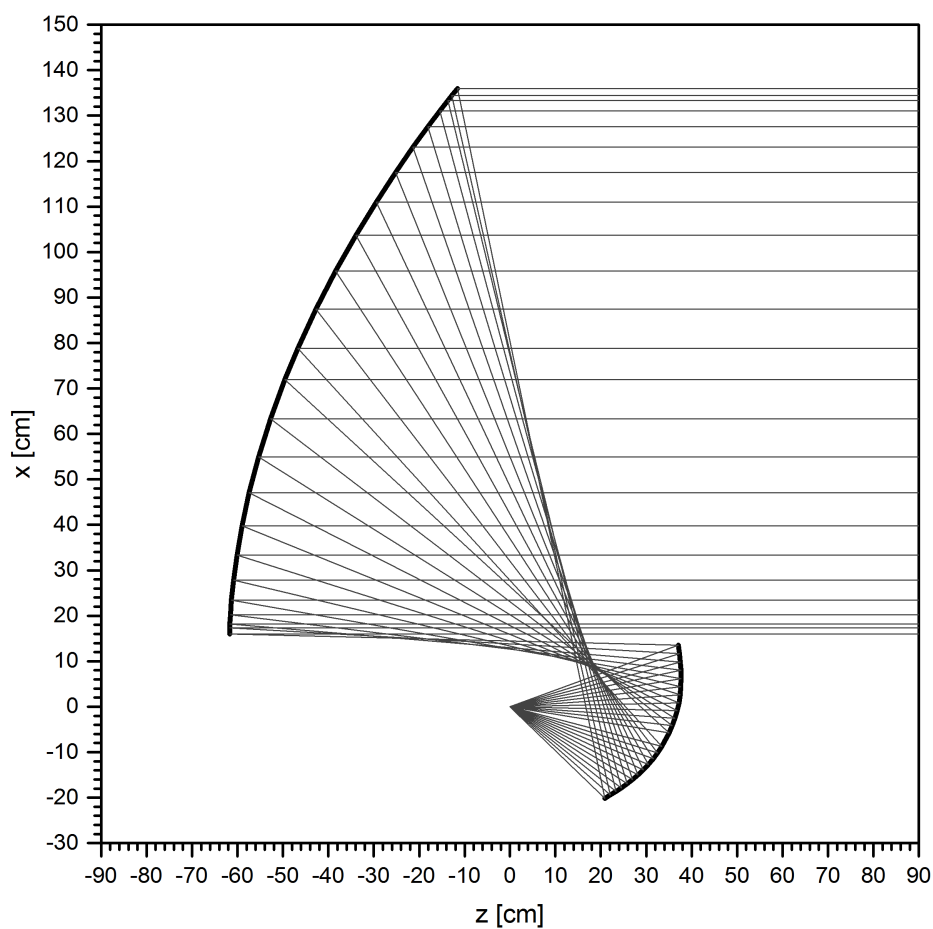


Figura 3.10: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano  $xz$  do caso A.1.

Para a análise do diagrama de radiação gerado pelas superfícies sintetizadas, os pontos obtidos pelo método de síntese óptica foram interpolados por pseudo-*splines* quínticas [52] e a diferença (em graus) entre cada ponto fornecido pela síntese e o correspondente ponto obtido pelo interpolação deve ser mínima e está ilustrado na Figura 3.11 para a superfície do refletor principal. As letras de A até T representam desvios (diferenças) de 0 a 20°, e a letra Z representa desvios superiores a 20°. Neste caso, o resultado do modelamento apresentou um desvio significativo de até ±5°, indicando que a superfície contínua interpolada representa de forma satisfatória a superfície sintetizada.

A validação da síntese é feita através da análise da superfície interpolada via aproximações da PO mais correntes de borda [47], [48]. A Figura 3.12 ilustra o diagrama de radiação onde são apresentados os diagramas dos planos  $\phi = 0^\circ$  e  $\phi = 90^\circ$  com as respectivas polarizações principal e cruzada. O ganho máximo obtido foi de 42,5736 dBi em ambos os planos de análise, o que representa uma eficiência de iluminação<sup>1</sup> de 83,197%. O nível de polarização cruzada máximo obtido foi de -40,5176 dBi. A atenuação obtida para os lóbulos secundários foi de -19,793 dB e a largura de meia potência máxima foi de 1,2874°. Para uma antena ideal com abertura circular uniforme, esses valores são de -17,6 dB e 1,245°, respectivamente.

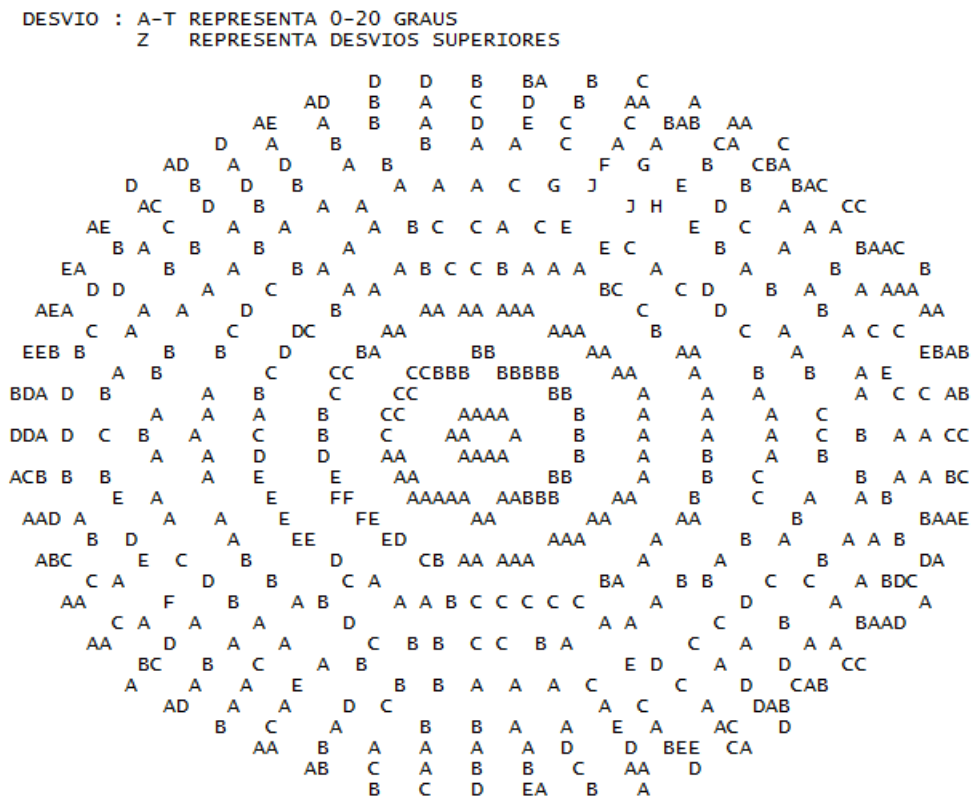


Figura 3.11: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.1.

<sup>1</sup>Razão entre o ganho máximo obtido pela antena modelada pelo ganho máximo de uma antena ideal com abertura circular uniformemente iluminada.



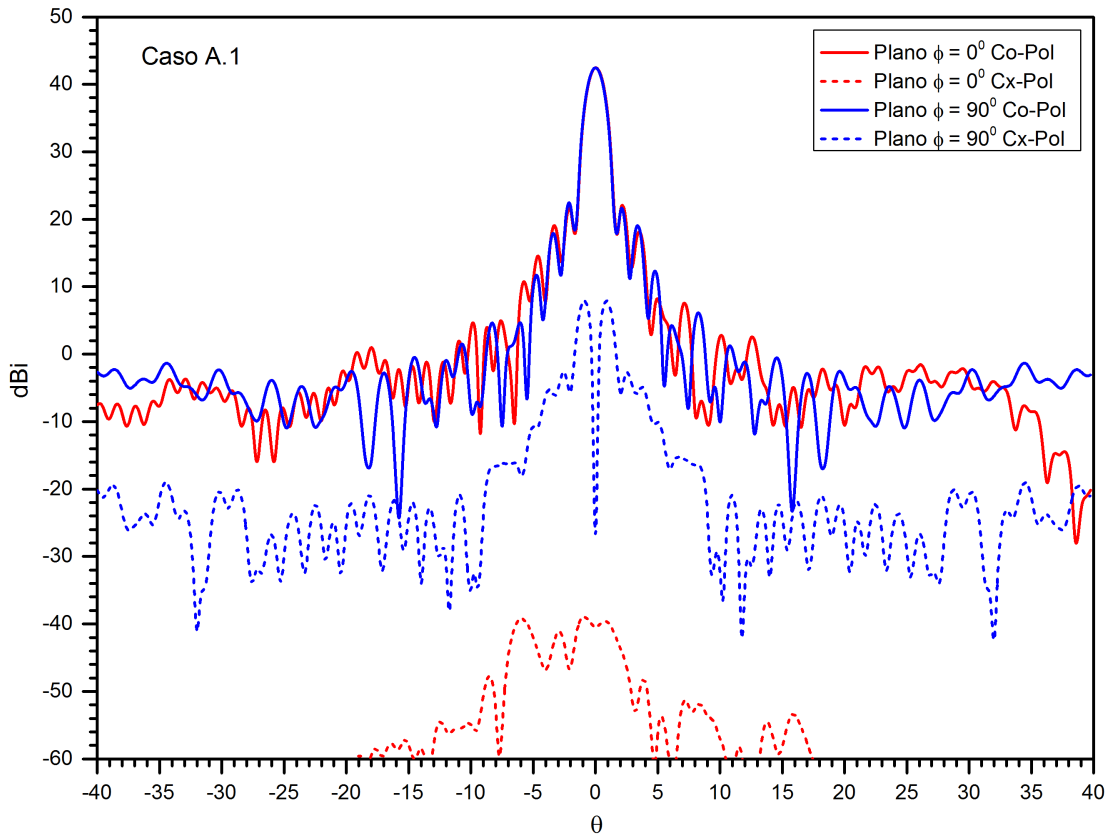


Figura 3.12: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.1.

### Atenuação na borda de $-6$ dB: Caso A.2

No estudo de caso A.2 foi desejado um campo na abertura Gaussiano com atenuação de borda de  $L_G = -6$  dB, que equivale ao expoente  $\psi = 1,38155$ . O resultado da síntese foi obtido após 6 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador  $\Gamma[L]$  foi de  $|\Gamma|_{mean} = 8,33 \times 10^{-18}$  nos pontos interiores ao contorno e  $|\Gamma|_{mean} = 2,26 \times 10^{-13}$  nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  do subrefletor sintetizado foram de 16,9620 cm e 18,0767 cm, respectivamente. O resultado da síntese é apresentado nas Figuras 3.13 e 3.14, onde estão representadas as direções de reflexão no plano  $xy$  e o traçado de raios no plano de simetria.

Dos resultados da síntese é possível perceber que a concentração de raios próximo ao contorno é menor quando comparado ao caso A.1. Este resultado é consequência da diferença entre a iluminação nas bordas do subrefletor e do contorno que foi reduzida de  $-12,8843$  dB para  $-6,8843$  dB. Além disso, pode-se notar que as distorções relatadas no caso A.1 (distâncias irregulares entre os três últimos anéis e as distorções nas radiais em relação à direção  $\phi$ ) não ocorreram neste estudo de caso, indicando que a representação do subrefletor por superfícies quádricas confocais foi adequada.

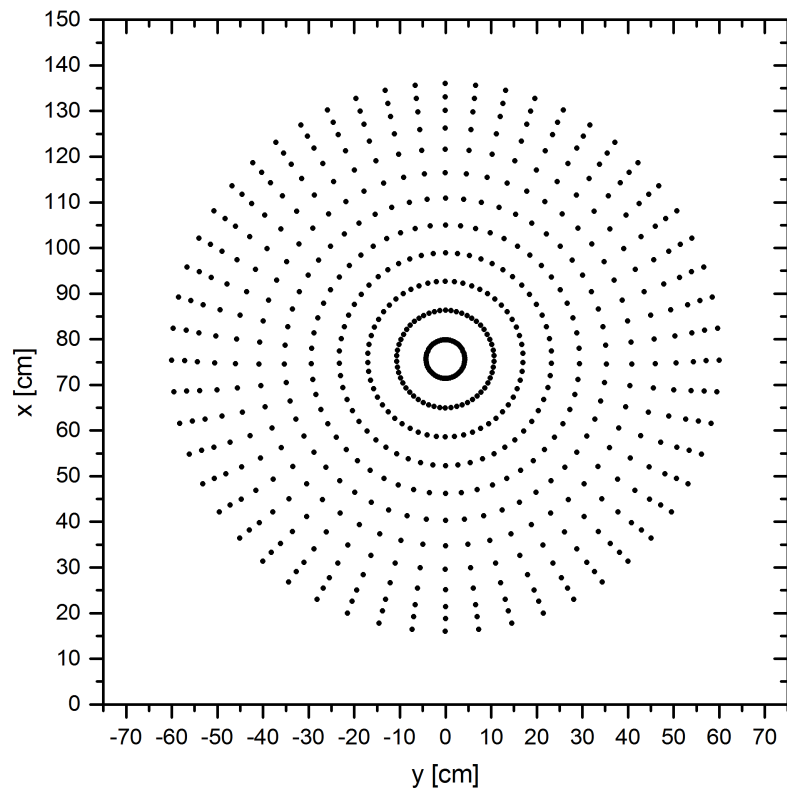


Figura 3.13: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano  $xy$  do caso A.2.

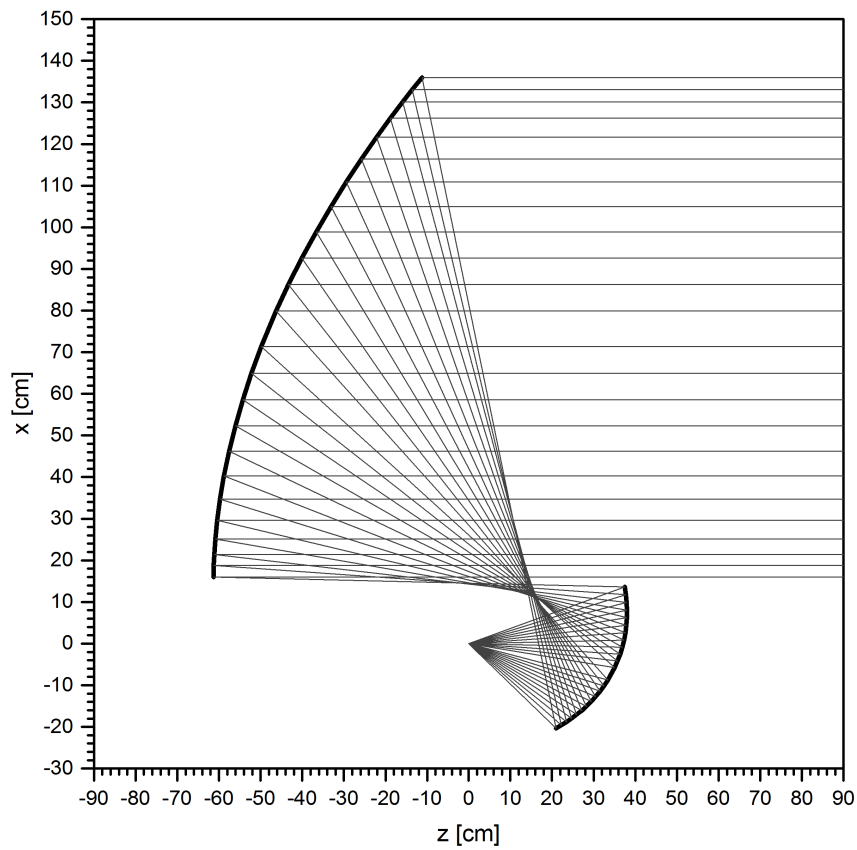


Figura 3.14: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano  $xz$  do caso A.2.

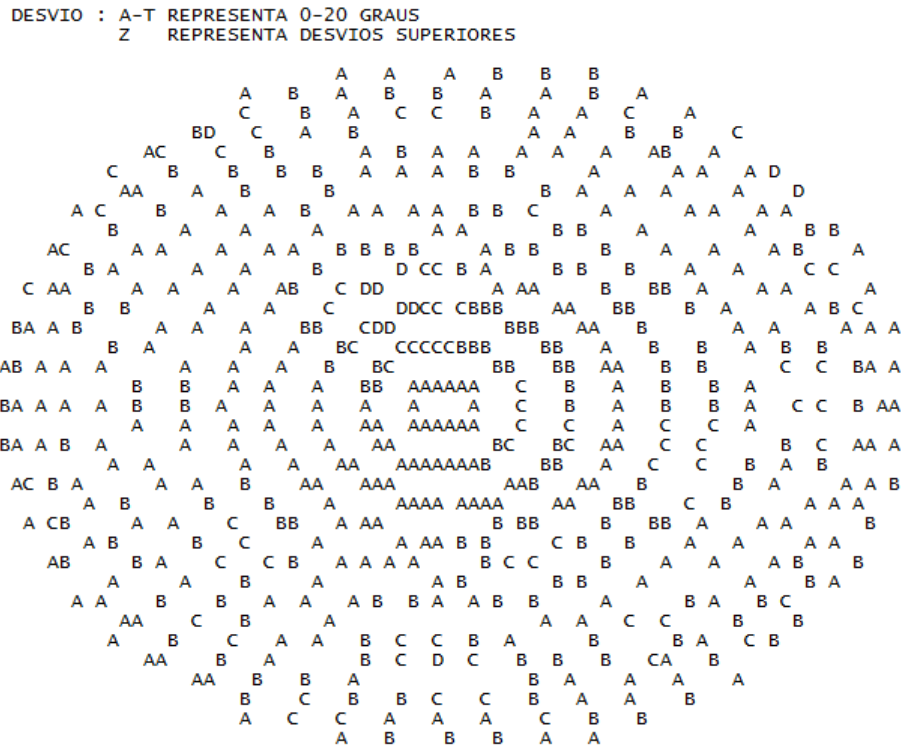


Figura 3.15: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.2.

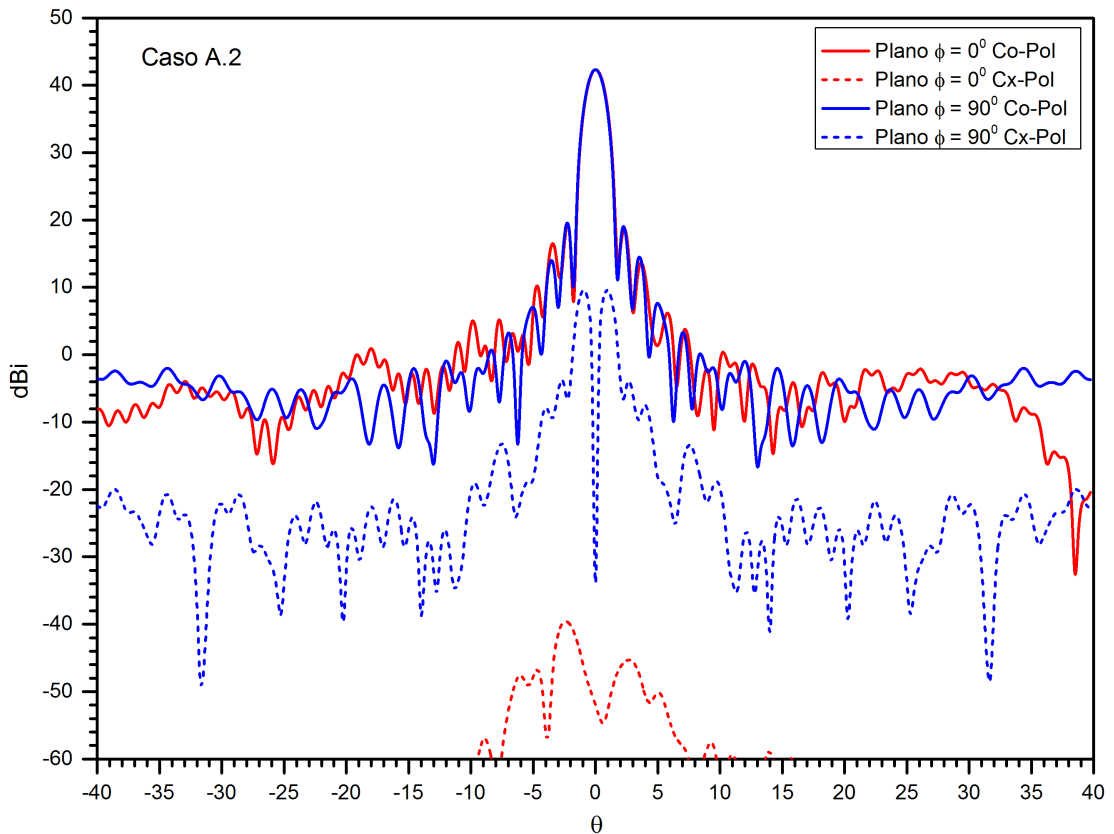


Figura 3.16: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.2.

Uma vez que os resultados da síntese foram satisfatórios, foi realizado o modelamento das superfícies sintetizadas por pseudo-*splines* quínticas que desviou em até  $\pm 3^\circ$  em relação aos pontos sintetizados para a superfície do refletor principal. Este resultado está ilustrado na Figura 3.15. O diagrama de radiação dado pela Óptica Física do sistema duplo-refletor modelado está ilustrado na Figura 3.16. O ganho máximo obtido foi de 42,415 dBi e a atenuação dos lóbulos secundários foi de  $-22,1798$  dB. O nível de polarização cruzada em  $\theta = 0^\circ$  foi de  $-51,8285$  dBi e a largura de meia potência foi de  $1,3606^\circ$  no plano  $\phi = 0^\circ$  e de  $1,3542^\circ$  no plano  $\phi = 90^\circ$ . Conforme pode ser observado, os resultados do análise da PO foram os esperados, visto que à medida que o expoente  $\psi$  da distribuição Gaussiana da densidade de potência na abertura aumenta, deve ser observado uma diminuição no valor de pico do lóbulo principal, o aumento dos níveis dos lóbulos laterais e um valor maior para a largura de meia potência.

### Atenuação na borda de $-12$ dB: Caso A.3

No estudo de caso A.3 foi solicitado um campo na abertura Gaussiano com atenuação de borda de  $L_G = -12$ dB, que equivale ao expoente  $\psi = 2,7631$ . O resultado da síntese foi obtido após 5 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador  $\Gamma[L]$  foi de  $|\Gamma|_{mean} = 3,54 \times 10^{-16}$  nos pontos interiores ao contorno e  $|\Gamma|_{mean} = 1,22 \times 10^{-11}$  nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  do subrefletor sintetizado foram de 17,0756 cm e 18,2024 cm, respectivamente. O resultado da síntese é apresentado na Figura 3.17 com as direções dos raios refletidos no plano da abertura e, também, na Figura 3.18 com o traçado de raios no plano de simetria.

Dos resultados da síntese, pode ser observado que não houve deslocamento dos raios para a borda do contorno especificado. Diferentemente dos casos A.1 e A.2, a distância entre os anéis na Figura 3.17 é aproximadamente constante, assim como no traçado de raios das direções de incidência e reflexão na Figura 3.18. Obviamente, este comportamento está diretamente associado à diferença entre a iluminação nas bordas do subrefletor e do contorno da abertura especificada, que no presente caso é de apenas 0,8843dB.

Uma vez que os resultados da síntese foram satisfatórios, devido à ausência de distorções, os mesmos foram interpolados por pseudo-*splines* quínticas. A diferença entre a superfície interpolada e aquela sintetizada para o refletor principal foi de até  $\pm 3^\circ$  conforme pode ser visto na Figura 3.19. Em seguida, foi obtido o diagrama de radiação dado pela PO para o sistema duplo-refletor modelado e está ilustrado na Figura 3.20. O ganho máximo obtido foi de 42,0738 dBi e a atenuação dos lóbulos secundários foi de  $-24,9214$  dB. O nível de polarização cruzada em  $\theta = 0^\circ$  foi de  $-34,0150$ dBi e a largura de meia potência máxima foi de  $1,4378^\circ$  no plano  $\phi = 0^\circ$  e de  $1,4545^\circ$  no plano  $\phi = 90^\circ$ .

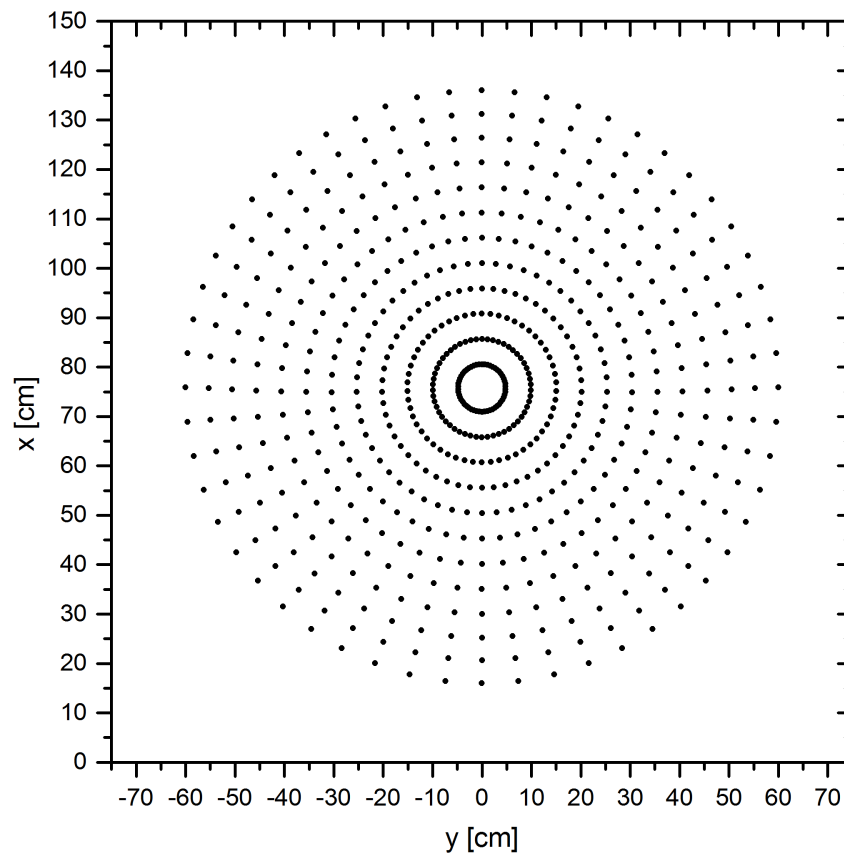


Figura 3.17: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano  $xy$  do caso A.3.

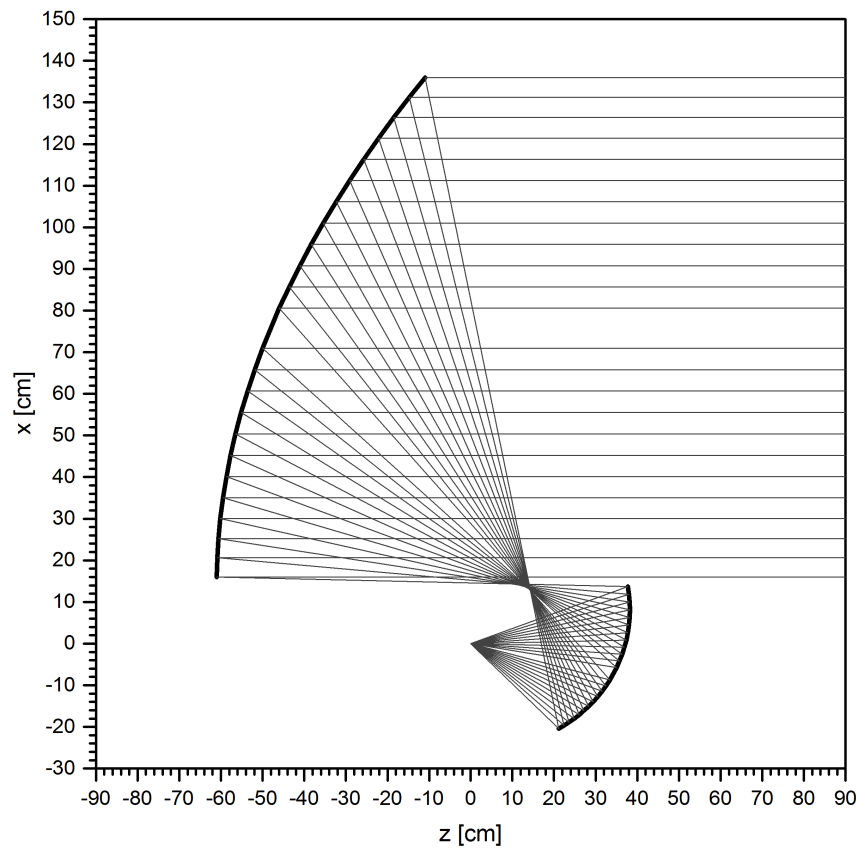


Figura 3.18: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano  $xz$  do caso A.3.

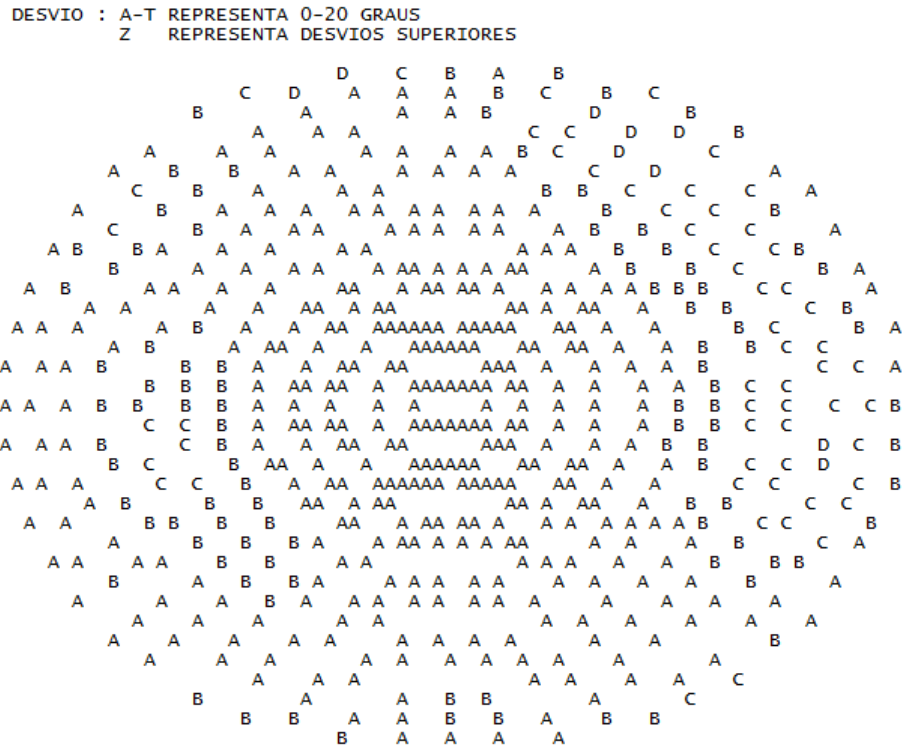


Figura 3.19: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.3.

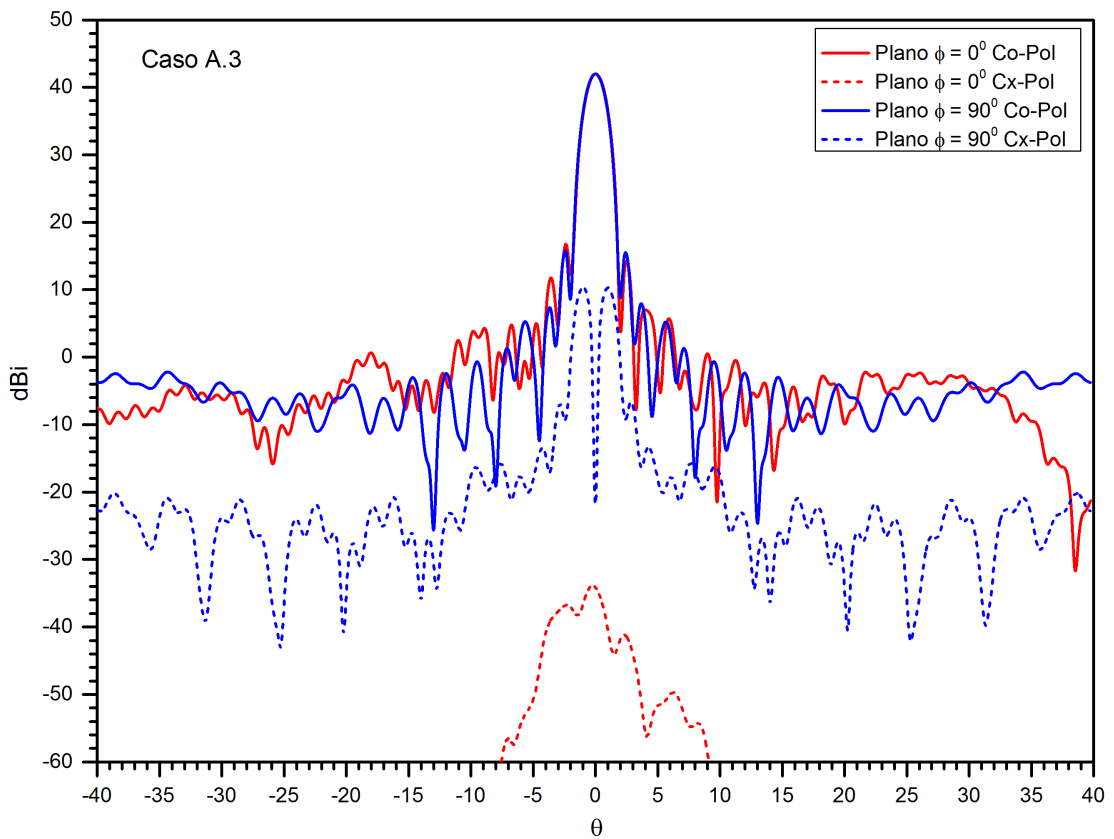


Figura 3.20: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.3.

### Atenuação na borda de 0 dB: Caso A.4

Analisando em conjunto os estudos de caso A.1, A.2 e A.3, pode-se observar que o caso A.1 apresentou a maior diretividade na direção  $\theta = 0^\circ$ , visto que a síntese impôs abertura uniforme em amplitude e fase. À medida que a distribuição de densidade de potência na abertura deixa de ter amplitude uniforme e passa a ter uma distribuição Gaussiana com atenuação de borda no contorno da abertura, a máxima diretividade diminuiu, a atenuação dos lóbulos laterais aumentou, bem como o nível de polarização cruzada e a largura de meia potência. Portanto, os resultados da análise PO validaram os resultados esperados da síntese da GO para o sistema duplo-refletor.

Para avaliar melhor o algoritmo de síntese, o estudo de caso A.1 é reformulado no estudo de caso A.4 com o objetivo de se obter uma eficiência de iluminação maior na abertura. Para isso, o ângulo de *offset* foi definido de acordo com a condição de Mizugutch [26] resultando em  $\theta_0 = -21^\circ$ . Além disso, a distância  $r_0$  entre a origem  $O$  do sistema de coordenadas e o centro do subrefletor foi dobrada para 70 cm. A superfície quádrlica confocal adotada como solução inicial neste caso é definida pelos seguintes parâmetros:  $a^{(0)} = -0,266003$  m,  $b^{(0)} = 0,129063$ ,  $c^{(0)} = 0,0$ ,  $d^{(0)} = 0,306607$ .

O resultado da síntese foi obtido após 6 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador  $\Gamma[L]$  foi de  $|\Gamma|_{mean} = 6,38 \times 10^{-13}$  nos pontos interiores ao contorno e  $|\Gamma|_{mean} = 2,79 \times 10^{-11}$  nos pontos do contorno. A dimensão do raio do subrefletor sintetizado foi de 30,2069 cm ao longo do eixo  $x$  enquanto que a dimensão do raio ao longo do eixo  $y$  foi de 35,2436 cm. Na Figura 3.21 estão ilustradas as direções dos raios refletidos pela superfície sintetizada no plano da abertura e a Figura 3.22 mostra o traçado de raios no plano de simetria. O desvio do resultado da interpolação por pseudo-splines quínticas está ilustrado na Figura 3.23 para o refletor principal e o diagrama de radiação da PO pode ser observado na Figura 3.24.

Comparando os resultados da síntese dos casos A.1 e A.4 observa-se que eles apresentam um comportamento bastante semelhante em relação à concentração dos raios refletidos próximos a borda do contorno, visto que este comportamento é consequência do princípio da Conservação da Energia implícito na equação de Monge-Ampère para compensar a baixa iluminação do alimentador nas bordas do subrefletor. Além disso, pode-se notar que a distorção devido a distância entre o antepenúltimo anel e o penúltimo ser menor que aquela entre o penúltimo e o último persiste, no entanto, a distorção que ocorreu nas radiais em relação à direção  $\phi$  no caso A.1 foi corrigida. Esta última observação sugere que no caso A.4, a superfície do subrefletor foi melhor representada pelas quádrlicas confocais do que no caso A.1.

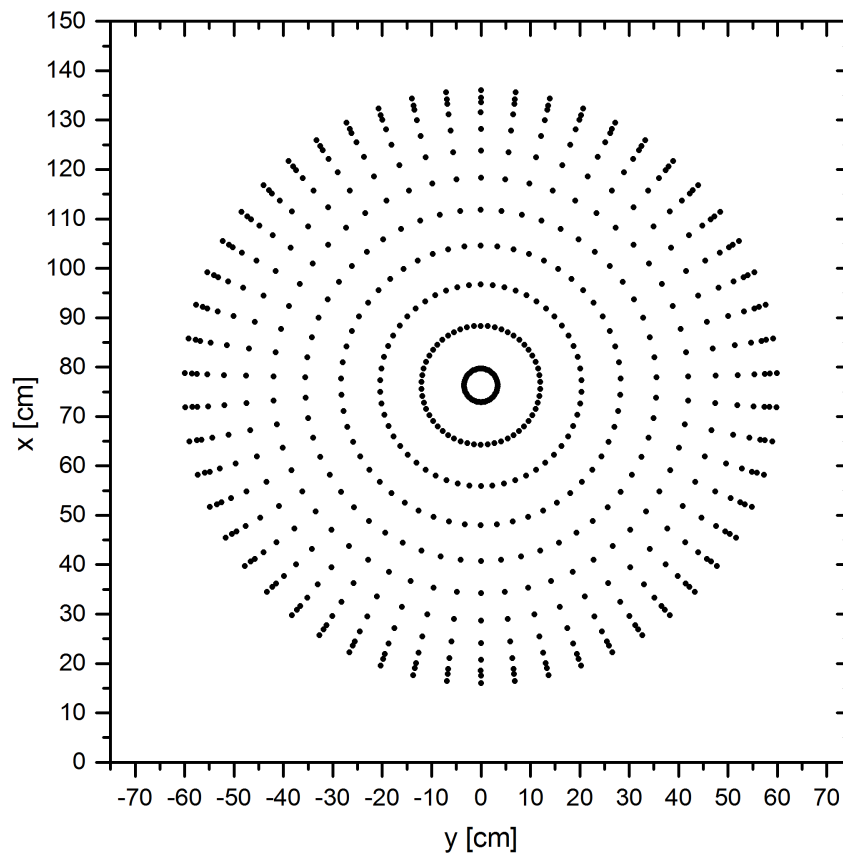


Figura 3.21: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano  $xy$  do caso A.4.

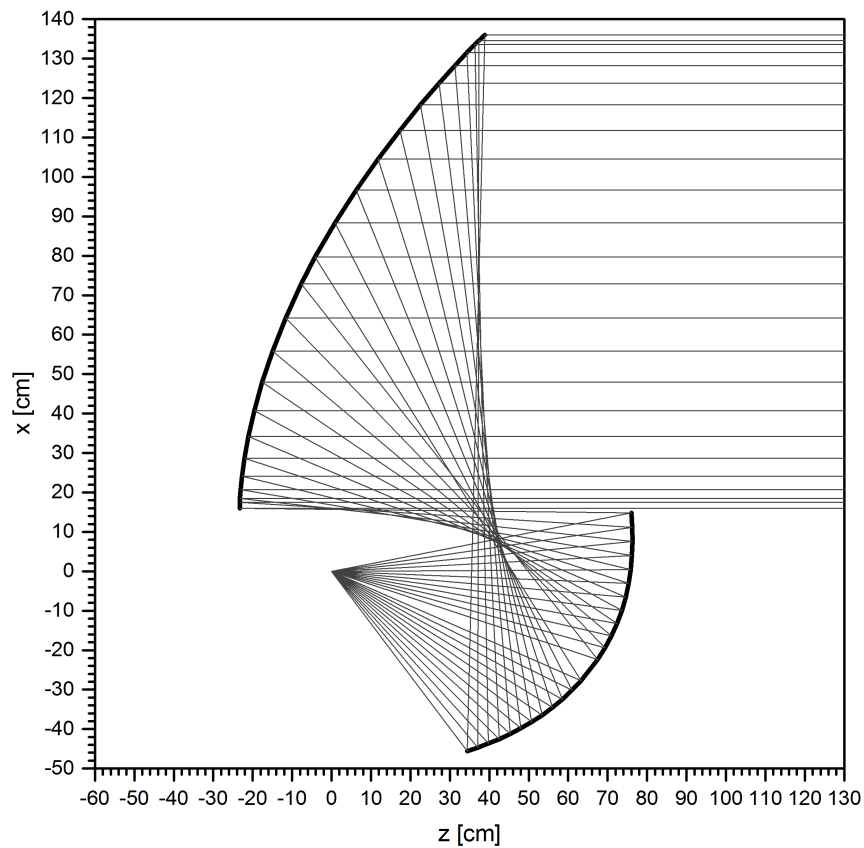


Figura 3.22: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano  $xz$  do caso A.4.



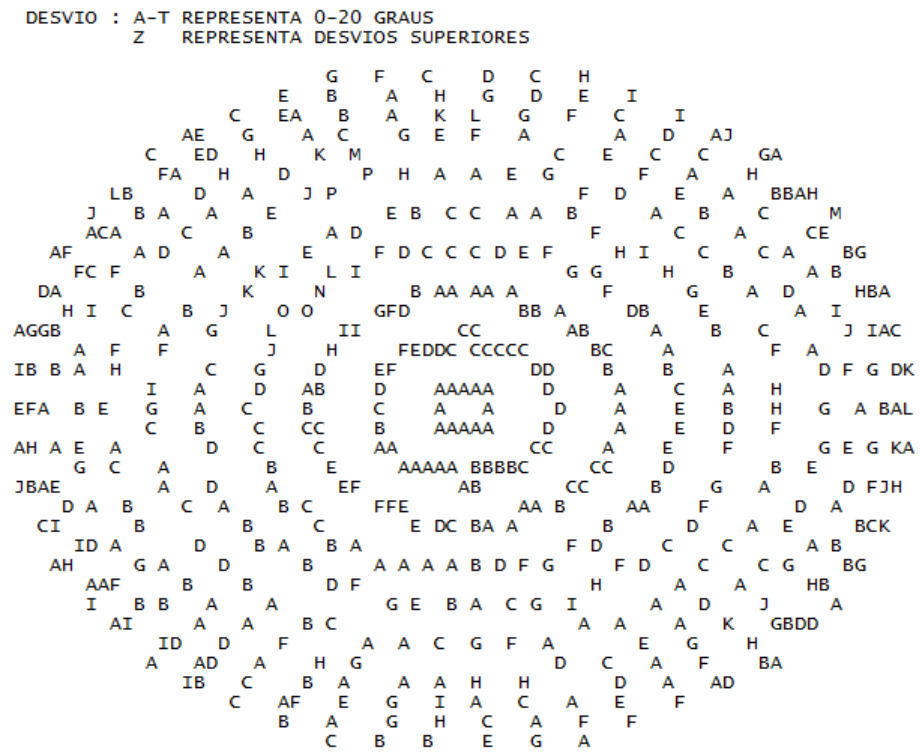


Figura 3.23: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso A.4.

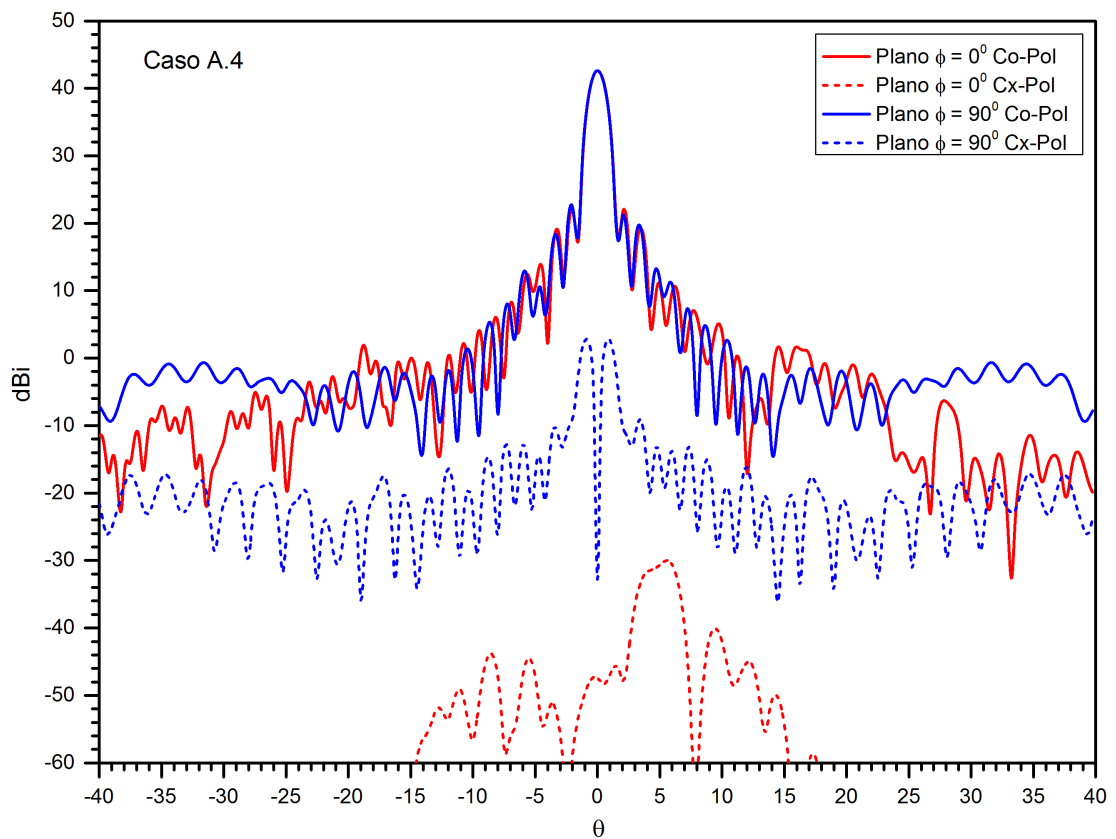


Figura 3.24: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso A.4.

Como consequência do aumento das dimensões do subrefletor em relação ao estudo de caso A.1, o ganho máximo aumentou para 42,7406 dBi, o que representa uma eficiência de iluminação de 86,459%. Observe que houve um aumento de 3,262% de eficiência em relação ao estudo de caso A.1. Além disso, a atenuação dos lóbulos secundários apresentou uma pequena diminuição em relação ao caso A.1 e foi de  $-19,5215$  dB. Já o nível de polarização cruzada em  $\theta = 0^\circ$  foi de  $-47,3354$  dBi o que representa uma redução 6,8178 dB em relação ao caso A.1. A partir dos resultados apresentados, pode ser visto que o aumento das dimensões do subrefletor reduz as perdas por transbordamento, permitindo que a iluminação do refletor principal seja mais eficiente e conseqüentemente, a abertura seja mais bem iluminada.

### 3.8.2 Projeto de Sistemas Duplo-Refletores com Abertura Elíptico

Para avaliar o algoritmo de síntese em casos onde a convergência é mais difícil, é inserido um novo grau de dificuldade modificando-se o contorno da abertura. Nesta seção uma antena duplo refletora é sintetizada para gerar um campo na abertura Gaussiano com contorno elíptico ( $\sigma = 1$ ). Foi adotada uma abertura com o raio menor ao longo do eixo  $x$  igual a  $r_{ax} = 50$ cm e o raio maior, na direção do eixo  $y$ , igual a  $r_{ay} = 72$ cm. O centro da abertura é igual a  $\omega_c = 70$ cm e está fixado sobre o eixo  $x$ . Para discretizar o subrefletor foi escolhida uma grade polar não-uniforme no plano complexo  $1/\eta'$ , com  $\alpha = 0,7$  para o caso B.1 e  $\alpha = 0,65$  nos casos B.2 e B.3, definida com 10 anéis ( $J = 10$ ) e 64 radiais ( $K = 64$ ), onde cada ponto da grade está associado à direção de um raio proveniente do alimentador, conforme ilustrado na Figura 3.25. O ângulo de *offset* foi definido em  $\theta_0 = -12^\circ$  e a distância  $r_0$  entre a origem  $O$  do sistema de coordenadas e o centro do subrefletor é de 35 cm.

Utilizando os parâmetros apresentados e a formulação da Seção 3.4, determinou-se a superfície quádrlica adotada como solução inicial para os casos onde é exigida uma abertura com contorno elíptico, sendo ela definida pelos seguintes parâmetros:  $a^{(0)} = -0,157641$  m,  $b^{(0)} = 0,228153$ ,  $c^{(0)} = 0,0$ ,  $d^{(0)} = 0,149907$ . A análise das direções dos raios refletidos pela solução inicial pode ser feita observando as direções de reflexão no plano  $xy$  da Figura 3.26 e o traçado de raios no plano  $\phi = 0^\circ$  na Figura 3.27. É importante observar que nos estudos de casos desta subseção o algoritmo iterativo de síntese parte de uma solução inicial em um contorno circular para uma solução final com contorno elíptico. Para isso, a convergência do procedimento numérico somente foi obtida quando foi adotada uma grade polar não-unifome em  $\theta$ , o que revela uma dificuldade de aproximar a superfície sintetizada por quádrlicas confocais com eixos deslocados.

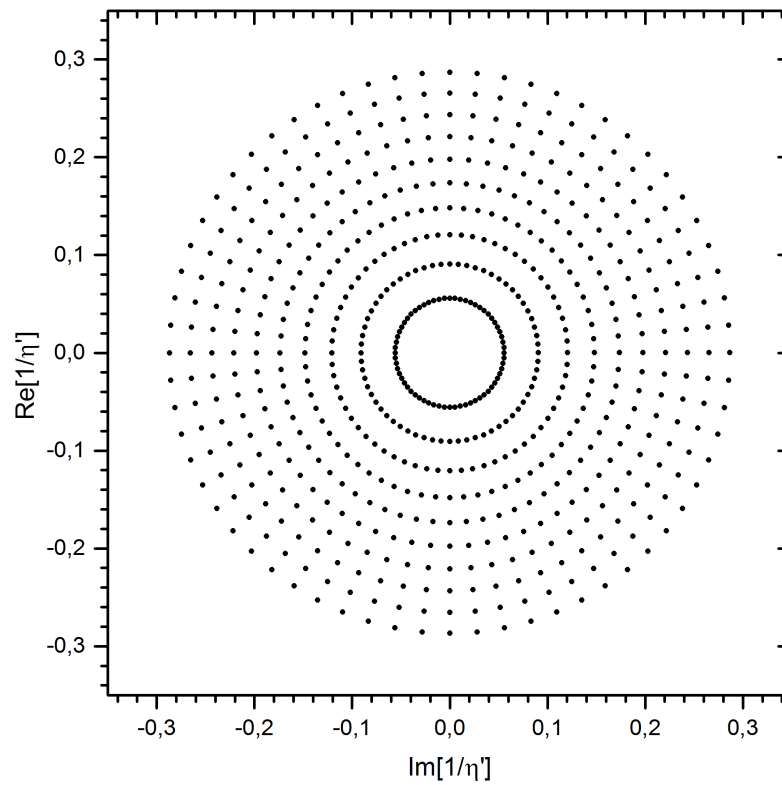


Figura 3.25: Direções de incidência da solução inicial no plano  $1/\eta'$  dos casos B.1.

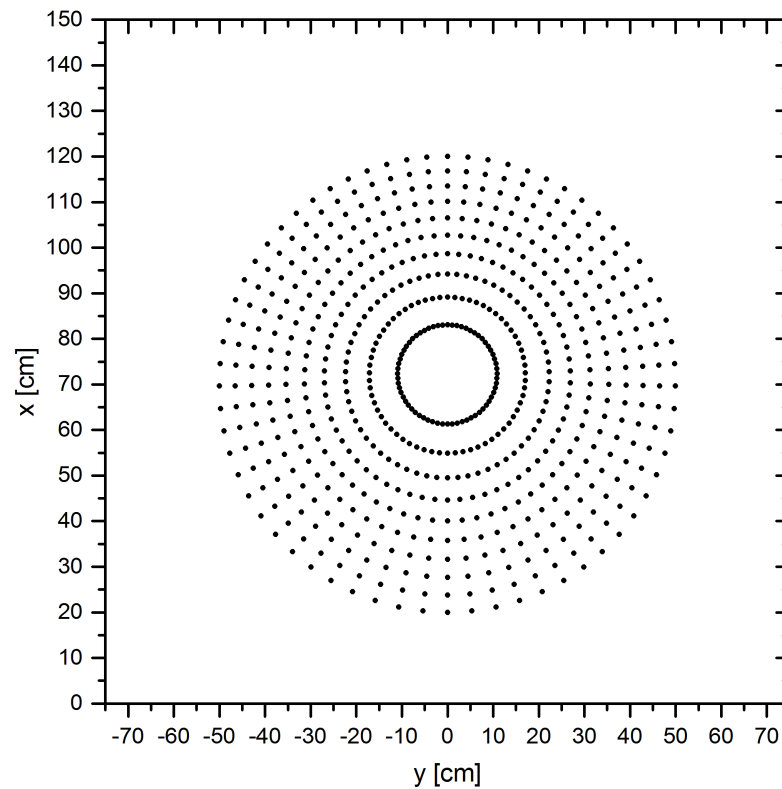


Figura 3.26: Direções de reflexão da solução inicial no plano  $xy$  dos casos B.1.

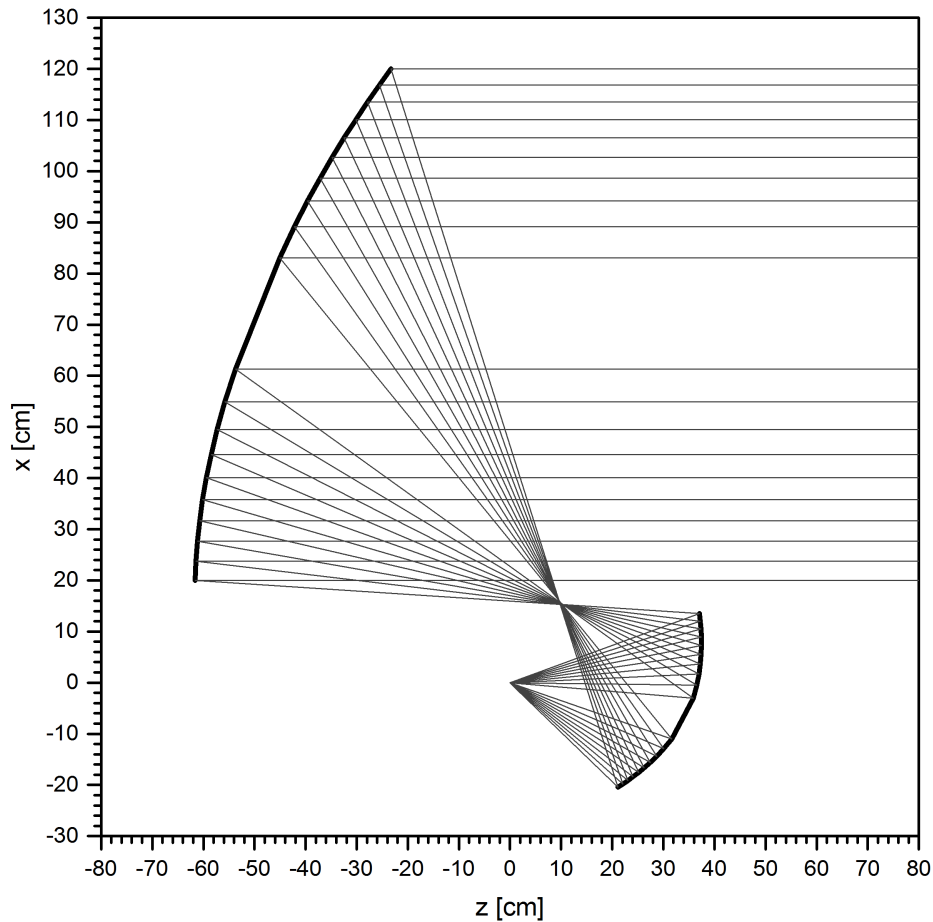


Figura 3.27: Traçado de raios da solução inicial no plano  $xz$  dos casos B.1.

### Atenuação na borda de 0 dB: Caso B.1

No estudo de caso B.1 foi adotada como função desejada a constante  $G_0$  correspondendo a uma abertura elíptica uniforme. Assim,  $L_G = 0$  dB e  $\psi = 0$ . O algoritmo de síntese atendeu ao critério de convergência após 10 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador  $\Gamma[L]$  foi de  $|\Gamma|_{mean} = 3,88 \times 10^{-14}$  nos pontos interiores ao contorno e  $|\Gamma|_{mean} = 5,23 \times 10^{-11}$  nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  do subrefletor sintetizado foram de 17,0842 cm e 17,5233 cm, respectivamente. O resultado da síntese é apresentado nas Figuras 3.28 e 3.29 e ilustram as direções dos raios refletidos pelas superfícies sintetizadas no plano de abertura  $xy$  e o traçado de raios no plano de simetria, respectivamente.

Semelhante ao estudo de caso A.1, há uma maior concentração de raios refletidos nas bordas do contorno da abertura resultado do princípio da Conservação da Energia implícito na equação de Monge-Ampère que está compensando a baixa iluminação do alimentador nas bordas do subrefletor, já que se busca uma abertura uniforme ( $L_G = 0$ dB). Também pode-se notar que a distância entre os três últimos anéis não preserva a distância esperada entre eles, em particular ao longo do eixo menor da elipse. Além disso, há fortes

distorções nas radiais em relação à direção  $\phi$ . Estas distorções são resultado da dificuldade imposta nesta síntese, visto que deseja-se mapear um conjunto de círculos no plano  $1/\eta'$  em um conjunto de elipses com centros deslocados no plano  $xy$ . Embora o resultado da síntese tenha apresentado fortes distorções, os pontos das superfícies sintetizadas são modelados por pseudo-splines quínticas e então analisados pela PO mais correntes de borda.

Conforme ilustrado na Figura 3.30, o modelamento por pseudo-*splines* quínticas desviou em até  $\pm 13^\circ$  em relação aos pontos gerados pela síntese, indicando que a superfície contínua interpolada não representa de forma satisfatória a superfície sintetizada. A Figura 3.31 apresenta o diagrama de radiação dado pela PO a partir das superfícies modeladas. O ganho máximo obtido foi de 42,3708 dBi em  $\theta = 0,25^\circ$  no plano  $\phi = 0$ , e 42,2458 dBi em  $\theta = 0^\circ$  no plano  $\phi = 90^\circ$ , o que representa um fenômeno denominado *beam squint*, ou seja, o desvio do lóbulo principal em relação à direção  $\theta = 0^\circ$ . Este resultado está associado à variação de fase na abertura e não valida o resultado da síntese, visto que foi especificado fase uniforme na abertura. Este estudo de caso ilustra um exemplo em que o resultado da síntese não é satisfatório e, conseqüentemente, não é validado pela aproximação da PO.

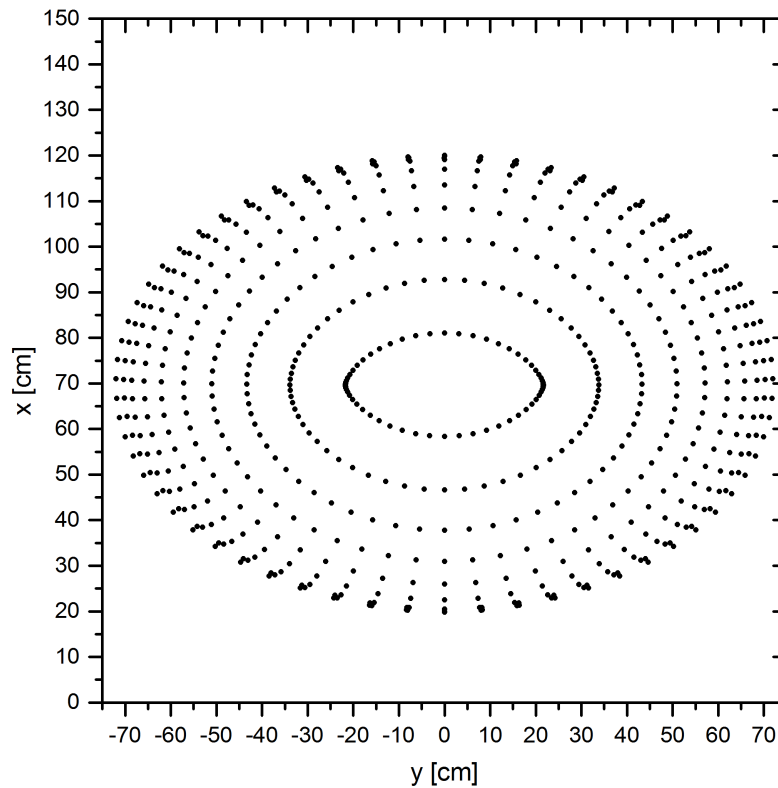


Figura 3.28: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano  $xy$  do caso B.1.



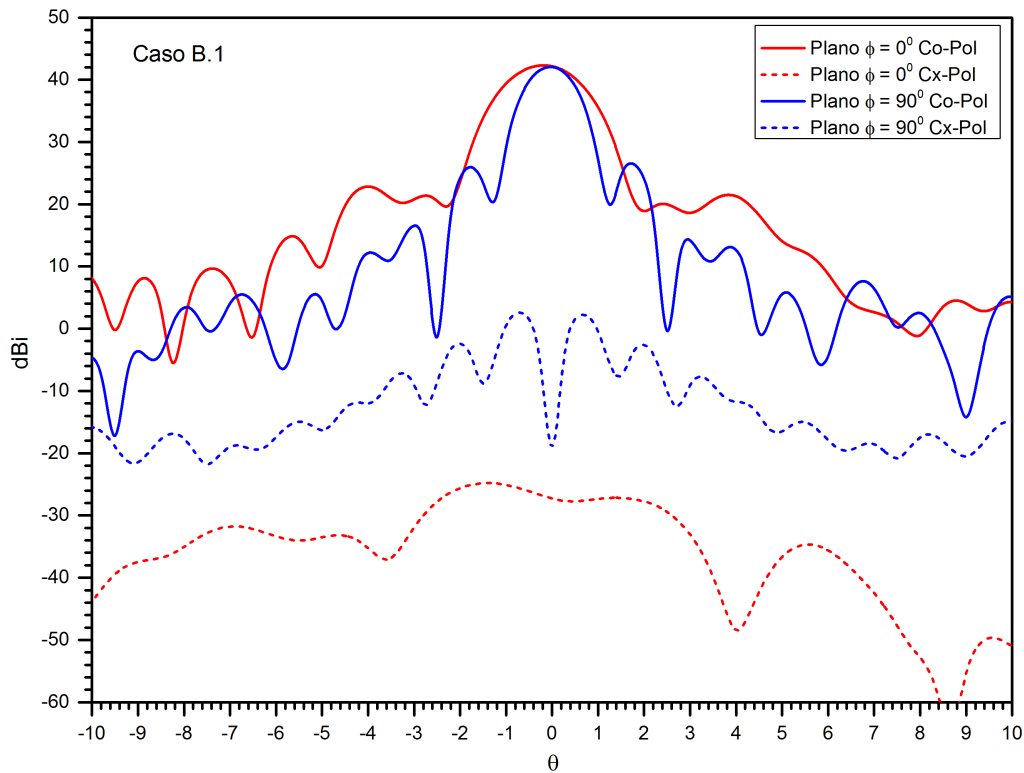


Figura 3.31: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.1.

### Atenuação na borda de $-6$ dB: Caso B.2

No estudo de caso B.2, foi adotado como objetivo um campo Gaussiano na abertura com atenuação de borda de  $L_G = -6$  dB, que equivale ao expoente  $\psi = 1,38155$ . O resultado da síntese foi obtido após 10 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador  $\Gamma[L]$  foi de  $|\Gamma|_{mean} = 1,17 \times 10^{-17}$  nos pontos interiores ao contorno e  $|\Gamma|_{mean} = 2,61 \times 10^{-13}$  nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  do subrefletor sintetizado foram de 17,2127 cm e 17,6555 cm, respectivamente. A Figura 3.32 ilustra as direções dos raios refletidos pelas superfícies sintetizadas no plano da abertura e a Figura 3.33 mostra o traçado de raios no plano de simetria.

Como a iluminação na borda do subrefletor e do contorno desejado foi reduzida de  $-12,8843$  dB para  $-6,8843$  dB, a concentração de raios no contorno é menor quando comparada ao caso B.1. Consequentemente, as distorções relatadas anteriormente ficam menos evidentes, indicando que as quádricas confocais com eixos deslocados representam mais adequadamente o subrefletor. A interpolação por pseudo-*splines* quínticas desviou em até  $\pm 2^\circ$  em relação aos pontos gerados pela síntese, indicando que a superfície contínua interpolada representa de forma satisfatória a superfície sintetizada do refletor principal, conforme pode ser observado na Figura 3.34. A Figura 3.35 mostra o diagrama de radiação da PO, onde o ganho máximo obtido foi de 42,3573 dBi. A atenuação dos lóbulos secundários foi de  $-16,8544$  dB e o nível de polarização cruzada em  $\theta = 0^\circ$  foi de  $-52,8057$  dBi.

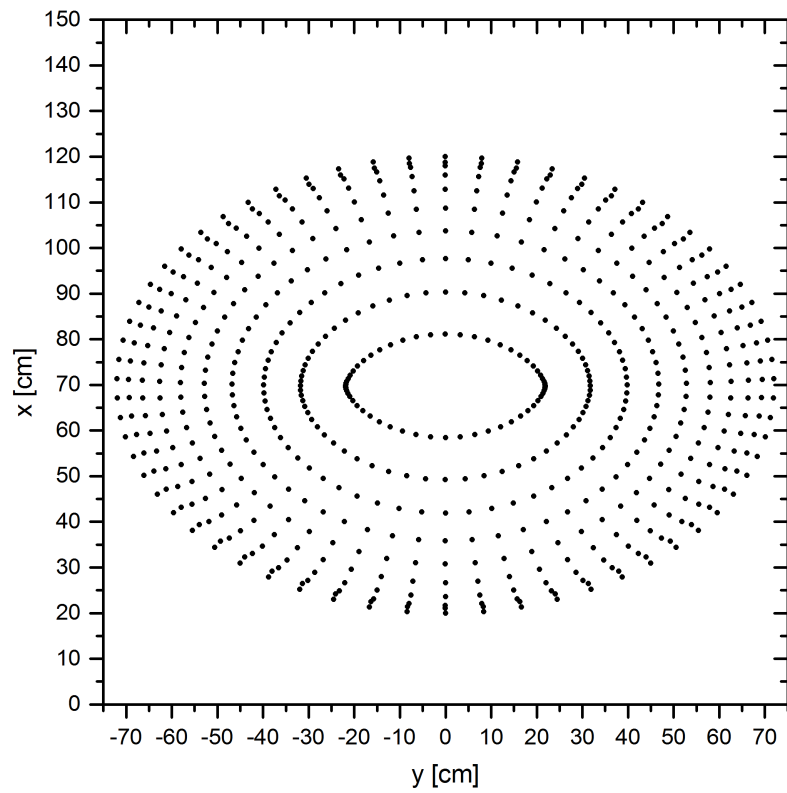


Figura 3.32: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano  $xy$  do caso B.2.

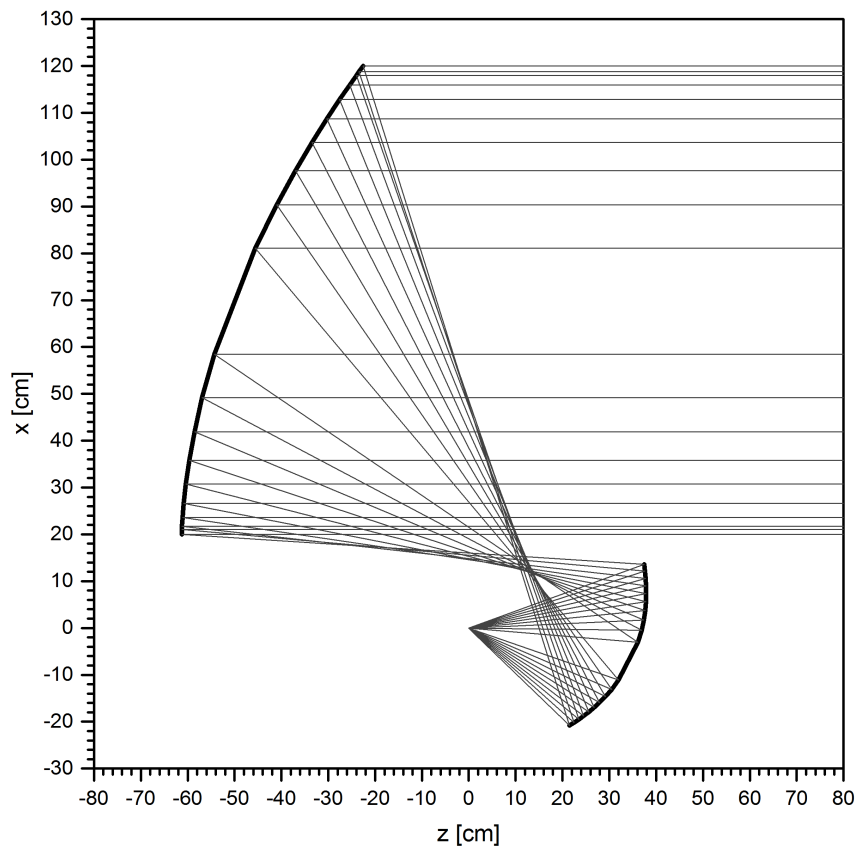


Figura 3.33: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano  $xz$  do caso B.2.



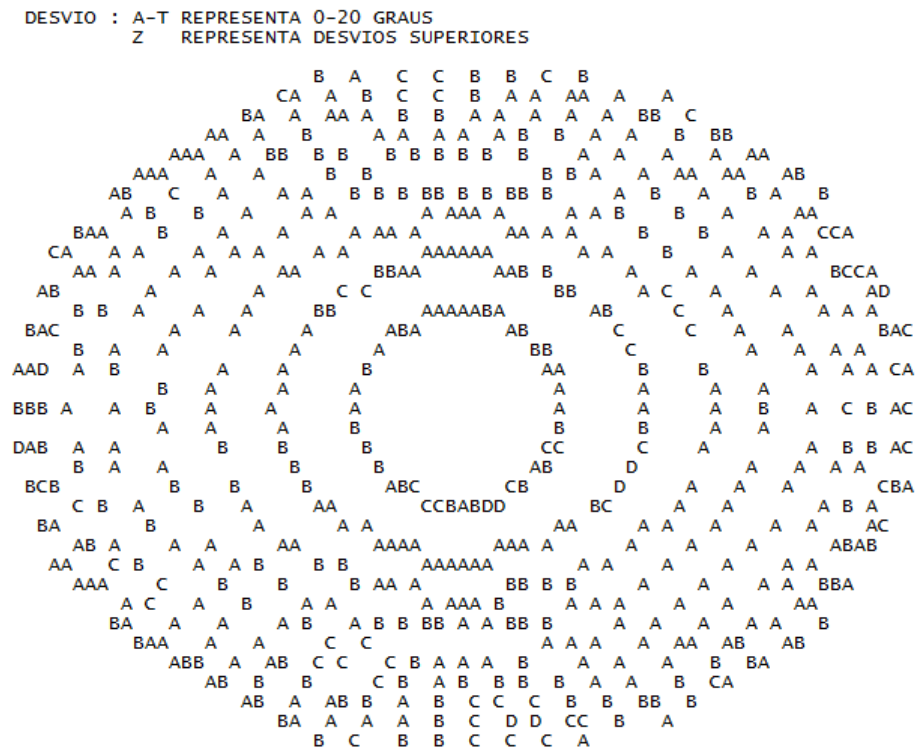


Figura 3.34: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso B.2.

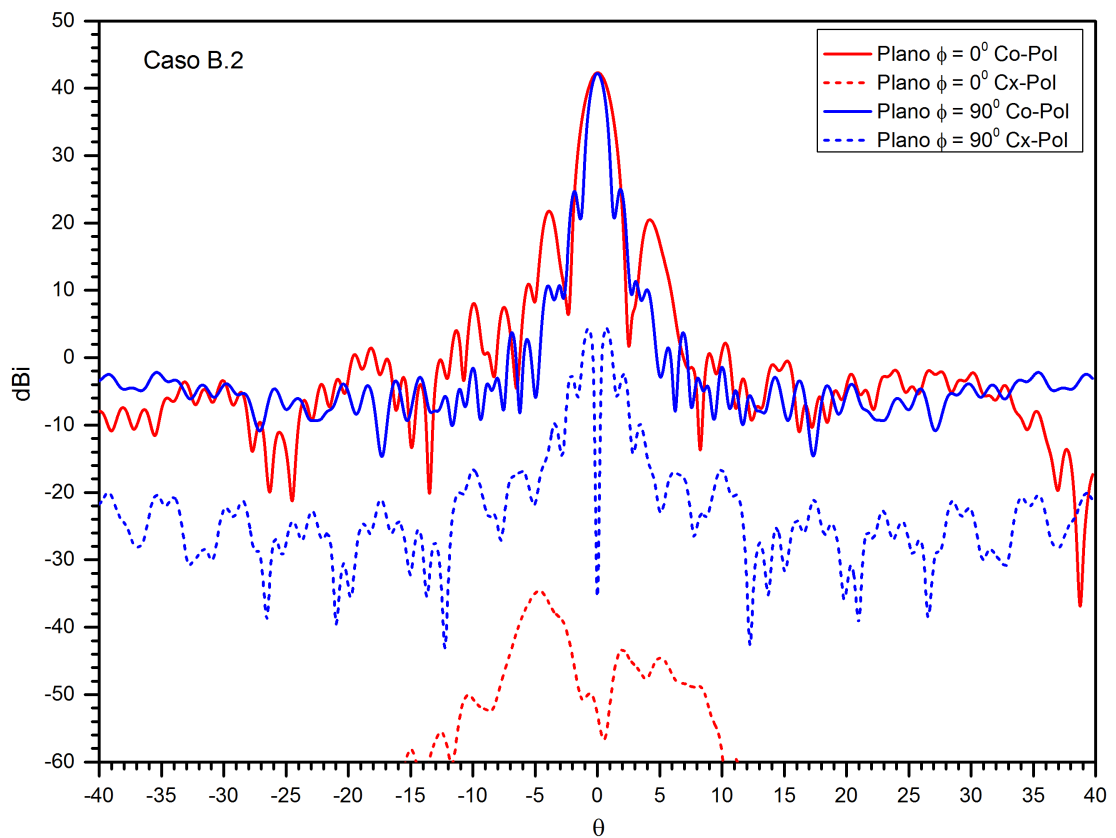


Figura 3.35: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.2.

Conforme esperado, a largura de meia potência é maior no plano  $\phi = 0^\circ$ , que corresponde à irradiação proveniente do plano que contém o raio menor da abertura elíptica, sendo de  $1,6886^\circ$ . Já no plano  $\phi = 90^\circ$ , o ângulo de meia potência foi menor e igual a  $1,0700^\circ$ , que correspondente à irradiação do plano que contém o raio maior da abertura elíptica.

### Atenuação na borda de $-12$ dB: Caso B.3

No estudo de caso B.3, foi desejado uma densidade de potência Gaussiana na abertura com atenuação de borda de  $L_G = -12$ dB, que equivale ao expoente  $\psi = 2,7631$ . O resultado da síntese foi obtido após 10 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador  $\Gamma[L]$  foi de  $|\Gamma|_{mean} = 2,19 \times 10^{-16}$  nos pontos interiores ao contorno e  $|\Gamma|_{mean} = 4,25 \times 10^{-13}$  nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  do subrefletor sintetizado foram de  $17,3418$  cm e  $17,8007$  cm, respectivamente. As direções dos raios refletidos pelas superfícies sintetizadas no plano da abertura e o traçado de raios no plano de simetria estão ilustrados nas Figuras 3.36 e 3.37.

Semelhante ao estudo de caso A.3, a distância entre os anéis na Figura 3.36 é aproximadamente constante e a distribuição dos raios refletidos para a abertura não é concentrada próximo ao contorno, resultado da diferença entre a iluminação especificada nas bordas do subrefletor e no contorno da abertura que é de apenas  $0,8843$  dB. Além disso, pode ser verificado que as distorções observadas anteriormente não surgiram neste caso, indicando que as superfícies quádricas confocais representaram de forma adequada a superfície do subrefletor. Dos estudos de casos apresentados, pode-se concluir que, assim com observado em [2], as imprecisões decorrentes da representação local da superfície sintetizada pelas quádricas confocais são mais evidentes nas regiões próximo à borda quando deseja-se uma distribuição de potência uniforme na abertura.

Assim como no estudo de caso B.2, a interpolação por pseudo-*splines* quádricas desviou em até  $\pm 2^\circ$  em relação aos pontos gerados pela síntese, conforme ilustrado na Figura 3.38. O diagrama de radiação dado pela PO está representado na Figura 3.39. O ganho máximo obtido foi de  $42,0130$  dBi. A atenuação dos lóbulos secundários foi de  $-18,5589$  dB e o nível de polarização cruzada em  $\theta = 0^\circ$  foi de  $-52,6197$  dBi. A largura de meia potência foi de  $1,8056^\circ$  no plano  $\phi = 0^\circ$  e de  $1,1202^\circ$  no plano  $\phi = 90^\circ$ . Comparando os estudos de casos B.2 e B.3, pode-se observar que, com o aumento do fator de atenuação da distribuição Gaussiana de  $\psi = 1,38155$  para  $\psi = 2,7631$ , para uma abertura elíptica com fase uniforme, a diretividade máxima diminuiu, o atenuação dos lóbulos laterais aumentou, assim como os níveis de polarização cruzada e a largura de meia potência, validando os resultados obtidos na síntese.

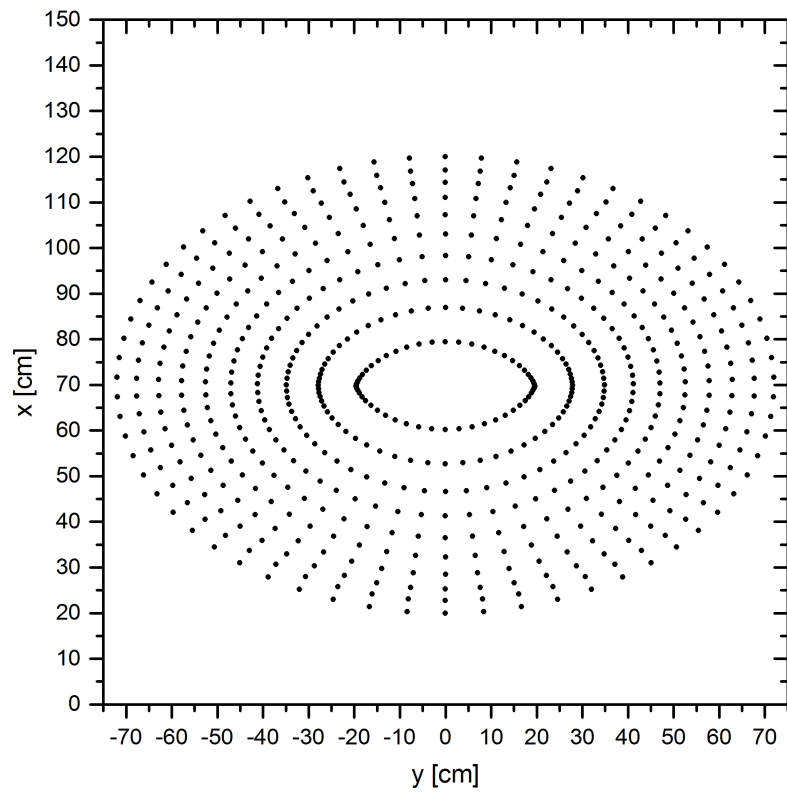


Figura 3.36: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano  $xy$  do caso B.3.

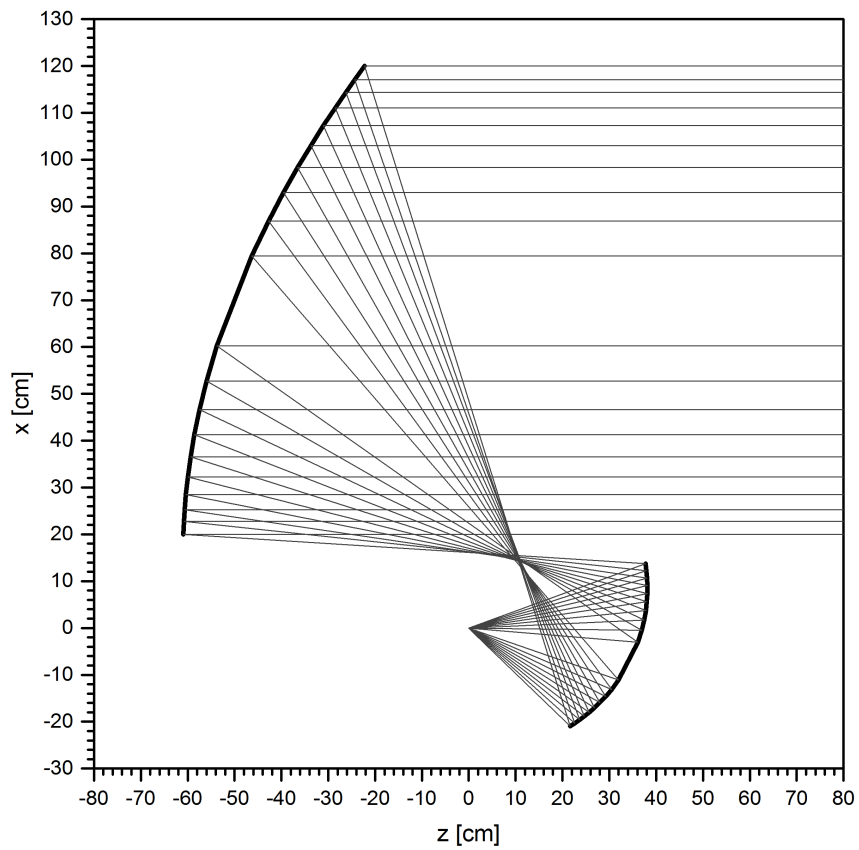


Figura 3.37: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano  $xz$  do caso B.3.

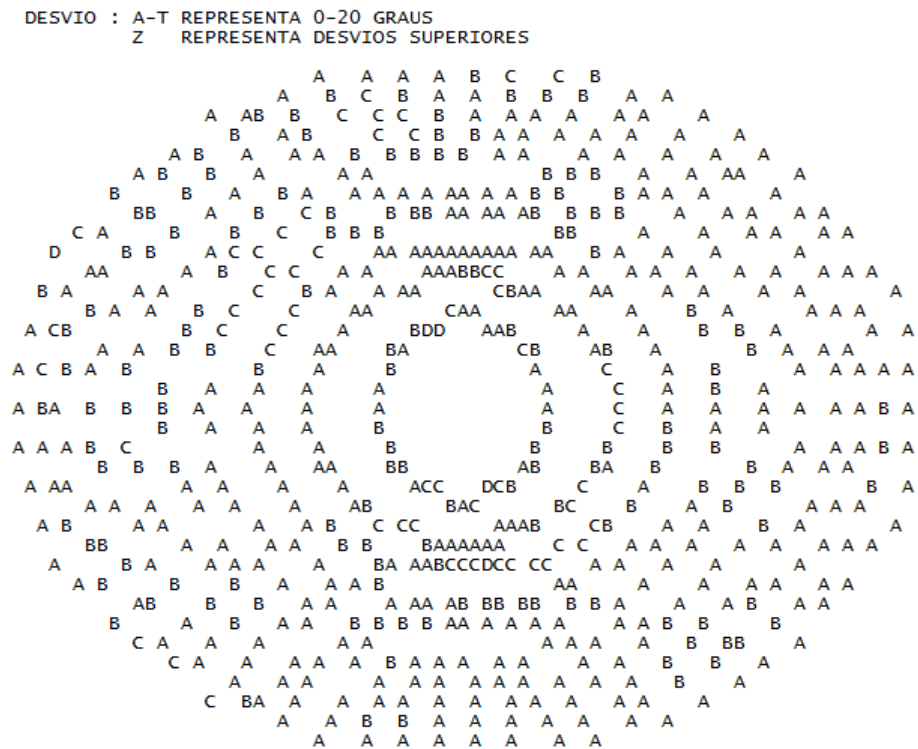


Figura 3.38: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso B.3.

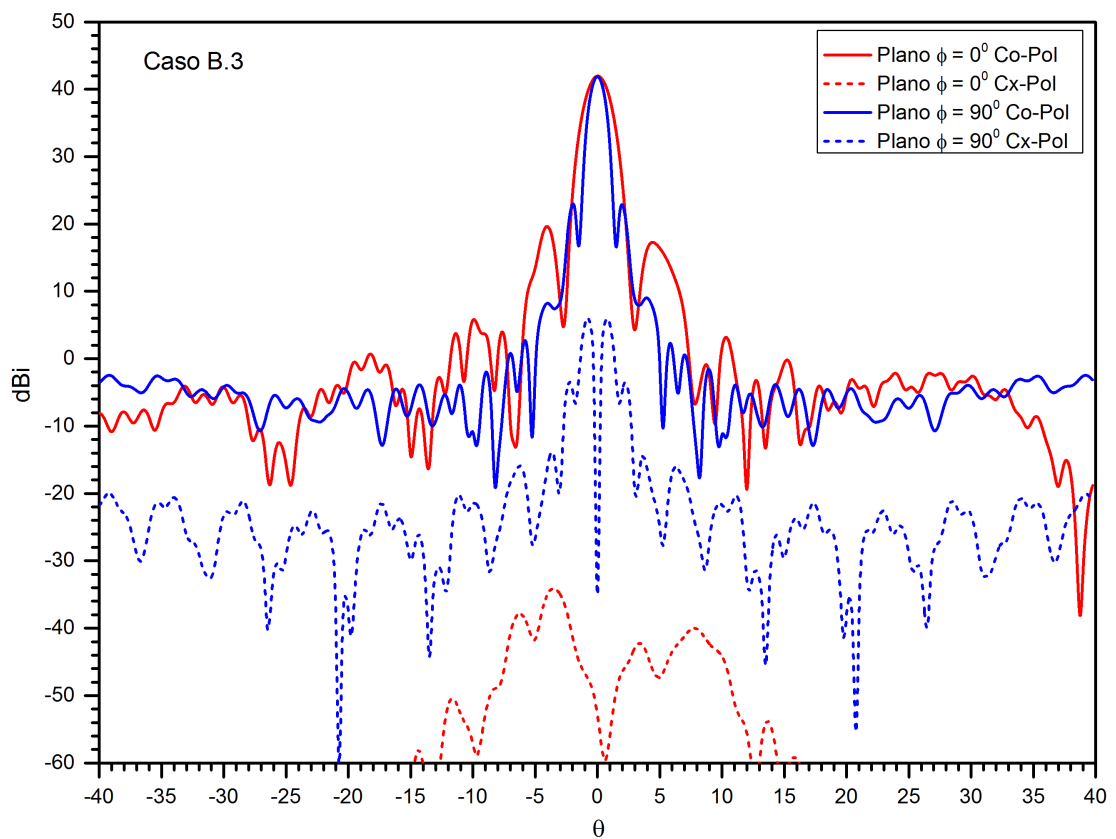


Figura 3.39: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.3.

### Atenuação na borda de 0 dB: Caso B.4

Vista a dificuldade de sintetizar uma sistema duplo-refletor *offset* com abertura elíptica uniforme em amplitude e fase, o estudo de caso B.1 foi reformulado no estudo de caso B.4. Para discretizar o subrefletor foi escolhida uma grade polar não-uniforme no plano complexo  $1/\eta'$  com  $\alpha = 0,7$  com 8 anéis ( $J = 8$ ) e 64 radiais ( $K = 64$ ). O ângulo de *offset* foi definido em  $\theta_0 = -17,65^\circ$  de acordo com a condição de Mizugutch, para o raio maior do contorno elíptico. A distância  $r_0$  foi mantida em 35 cm. Utilizando estes parâmetros a superfície quádrica adotada como solução inicial para o subrefletor foi definida pelos seguintes parâmetros:  $a^{(0)} = -0,161111$  m,  $b^{(0)} = 0,186666$ ,  $c^{(0)} = 0,0$ ,  $d^{(0)} = 0,142677$ .

O resultado da síntese foi obtido após 11 iterações, sendo que o erro médio dos resíduos associados ao operador  $\Gamma[L]$  foi de  $|\Gamma|_{mean} = 1,33 \times 10^{-13}$  nos pontos interiores ao contorno e  $|\Gamma|_{mean} = 4,66 \times 10^{-11}$  nos pontos do contorno. As dimensões dos raios ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  do subrefletor sintetizado foram de 16,4866 cm e 17,6178 cm, respectivamente. As direções dos raios refletidos pela superfície sintetizada no plano da abertura estão ilustrados na Figura 3.40 e a Figura 3.41 mostra o traçado de raios no plano de simetria. Comparando os resultados obtidos com aqueles do caso B.1 observa-se que as distorções ainda estão presentes, porém, menos acentuadas. Este resultado foi obtido ajustando a quantidade de anéis da grade e o ângulo de *offset* do alimentador.

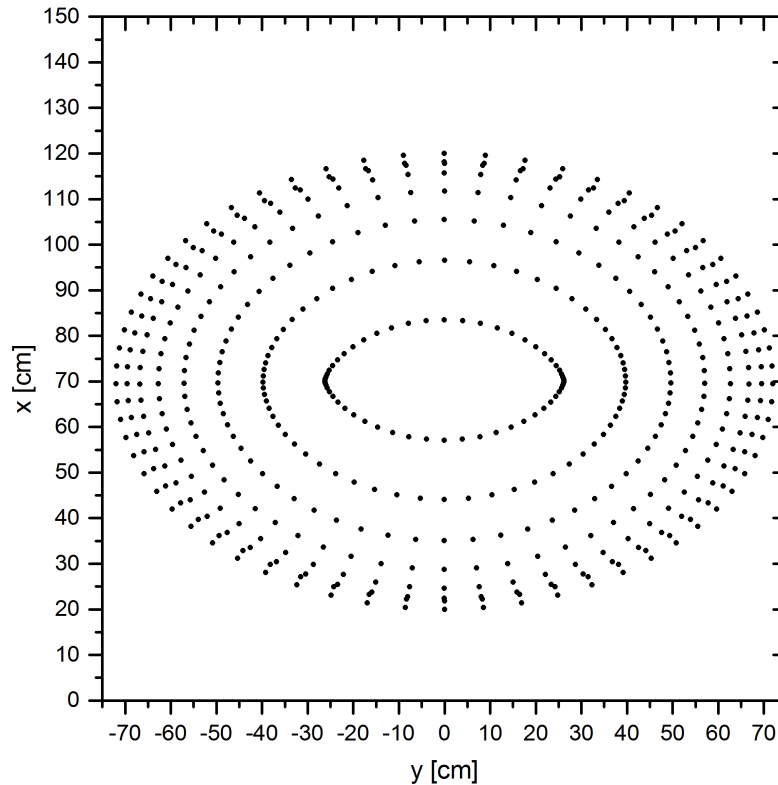


Figura 3.40: Direções de reflexão da superfície sintetizada no plano  $xy$  do caso B.4.

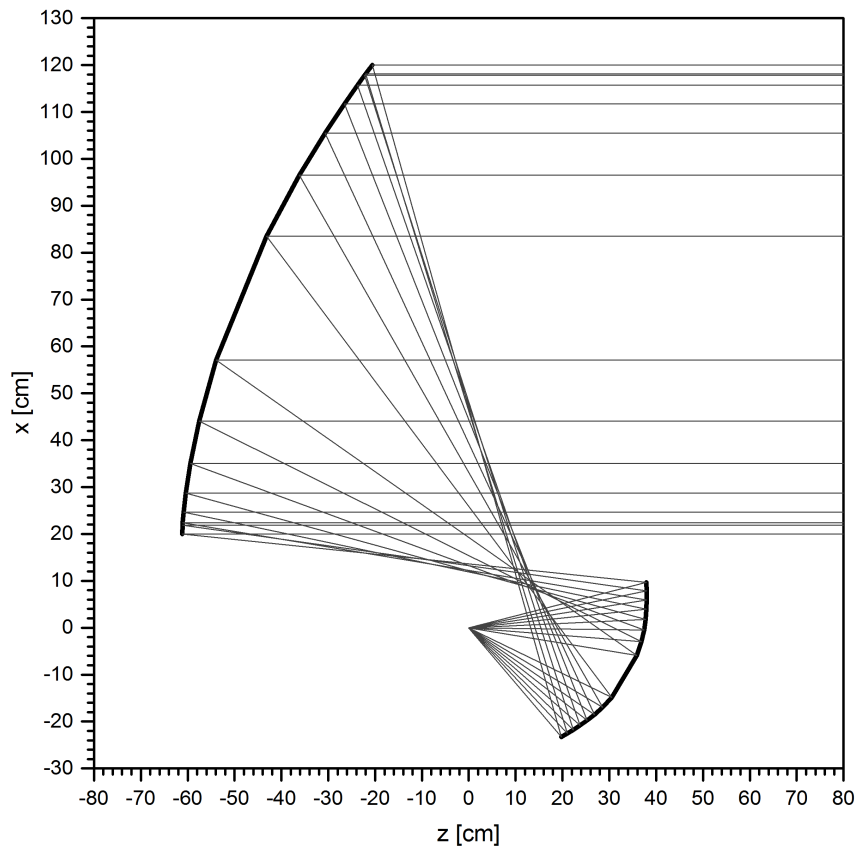


Figura 3.41: Traçado de raios da superfície sintetizada no plano  $xz$  do caso B.4.

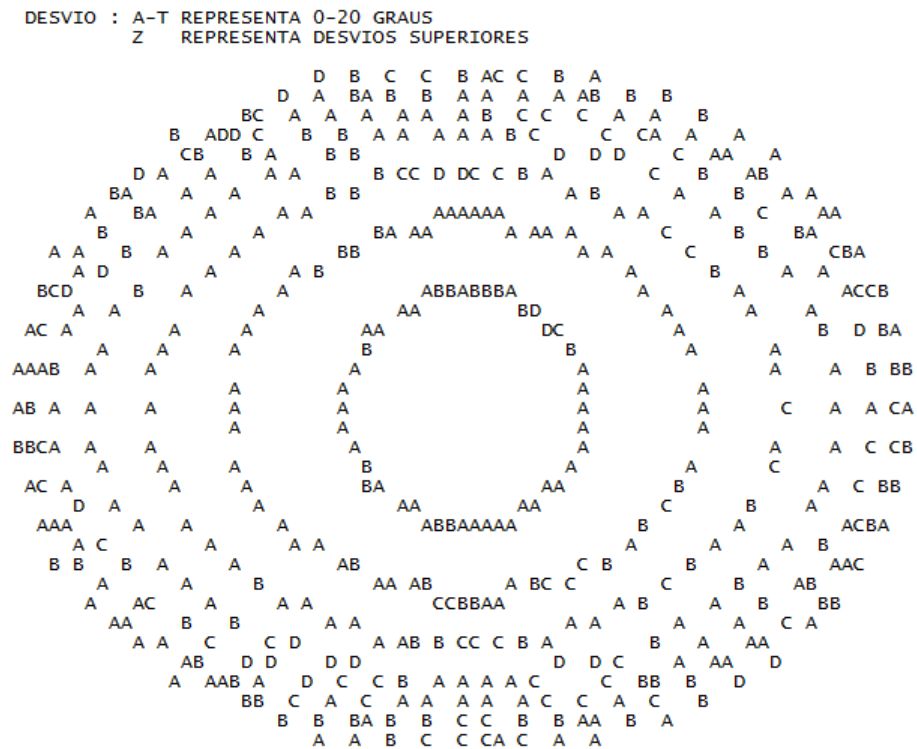


Figura 3.42: Desvio em graus da superfície modelada em relação ao resultado da síntese do caso B.4.

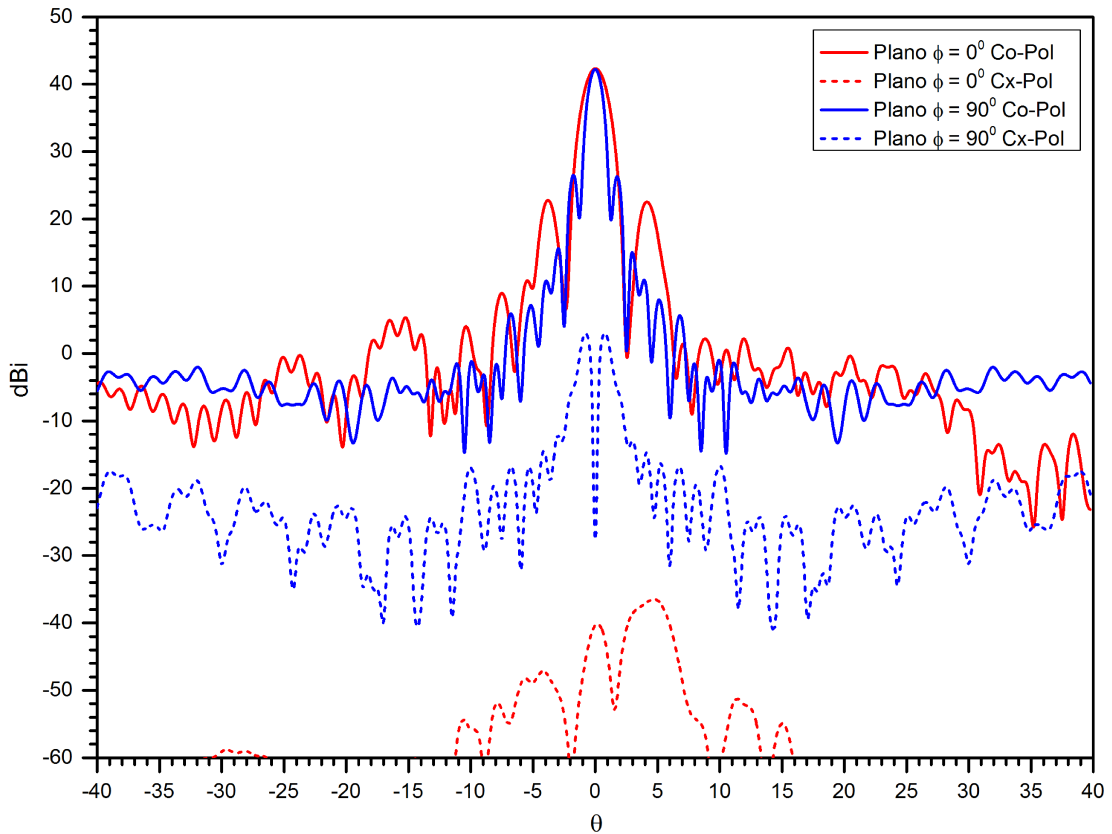


Figura 3.43: Diagrama de radiação da superfície modelada no caso B.4.

A interpolação por pseudo-*splines* quínticas apresentou um desvio significativo de  $\pm 3^\circ$  da superfície modelada para a superfície sintetizada para o refletor principal, indicando que as superfícies contínuas interpoladas representam de forma satisfatória o sistema duplo-refletor sintetizado. Este resultado está ilustrado na Figura 3.42. A Figura 3.43 mostra o diagrama de radiação dado pela PO e o ganho máximo obtido foi de 42,3900dBi. A atenuação dos lóbulos secundários foi de  $-19,4613$  dB no plano  $\phi = 0^\circ$  e de  $-15,2745$  dB no plano  $\phi = 90^\circ$ . Já o nível de polarização cruzada máxima foi de  $-40,2103$ dBi. Com estes resultados o algoritmo de síntese é validado, com destaque para os casos em que a grade polar deve ser ajustada para a obtenção de superfícies adequadas pelo procedimento de síntese.

### 3.9 Considerações Finais

Neste capítulo foi estudado o problema de síntese numérica de um sistema duplo refletor com fase uniforme na abertura em que a superfície do subrefletor é aproximada localmente por superfícies quádricas confocais com eixos deslocados. Os estudos de casos apresentados mostram que o algoritmo é eficiente e consegue projetar sistemas duplo-refletores conforme as especificações dadas, em contornos de abertura circular e elíptico.

# Capítulo 6

## Conclusões e Trabalhos Futuros

Baseadas na abordagem alternativa proposta por [2] para a síntese de antenas refletoras *offset* para um único refletor, foram apresentadas neste trabalho soluções para os problemas de síntese de antenas duplo-refletoras *offset* e lentes dielétricas sem simetria circular. Diferentemente do método tradicional que utiliza diferenças finitas para aproximar as derivadas de primeira e segunda ordem presentes na formulação do problema de síntese, adotou-se a expressão de uma superfície quádrlica confocal para representar localmente as superfícies sintetizadas. Segundo [2], através desta representação não há erro de discretização das derivadas, uma vez que as expressões analíticas exatas das derivadas parciais da função de mapeamento são conhecidas. Desta forma, no Capítulo 2 o problema da síntese geométrica de antenas duplo-refletoras *offset* foi apresentado em coordenadas complexas [19] bem como foi definida a superfície quádrlica confocal com eixo deslocado usada para interpolar a superfície discretizada. Além disso, foi apresentado o algoritmo de solução da equação de Monge-Ampère baseado no método iterativo de Newton-Raphson [2].

No Capítulo 3, o problema de síntese de antenas duplo-refletoras *offset* com fase uniforme na abertura foi formulado aplicando a representação por superfícies quádrlicas focais para a superfície do subrefletor. A técnica de solução numérica proposta por [2] foi utilizada para implementar o algoritmo de síntese de tal forma que a matriz Jacobiana foi obtida analiticamente. Os resultados da síntese foram interpolados por pseudo *splines* quádrlicas [52] e os refletores modelados foram analisados via aproximações da Óptica Física com correções das correntes de borda [47], [48], considerando a antena operando na frequência de 11,725 GHz. De modo geral, o algoritmo de síntese conseguiu gerar sistemas duplo-refletores *offset* com eficiência de iluminação de até 86,46%, com abertura circular uniforme em amplitude e fase. O algoritmo mostrou-se eficiente para gerar os contornos de abertura circular e elíptico, e a solução foi obtida em até 6 iterações para aberturas com contorno circular e, no máximo, em 11 iterações, para os casos de convergência mais



difícil. Para sintetizar antenas com abertura em contornos elípticos, a grade polar regular não se mostrou eficiente para sintetizar uma solução física para o problema de síntese, sendo necessário gerar uma grade não uniforme em  $\theta$  para obter resultados satisfatórios.

A técnica de solução numérica proposta em [2] foi, então, implementada no Capítulo 4 para a solução do problema de síntese de sistemas duplo-refletores *offset* com fase não-uniforme [19]. O algoritmo apresentado é geral e também sintetiza duplo-refletores com fase uniforme na abertura. O algoritmo foi capaz de controlar o diagrama de radiação em uma cobertura circular com distribuição de amplitude uniforme e em uma cobertura com formato de *boomerang*. O algoritmo também realizou a síntese de um sistema duplo-refletor com abertura super-elíptica. As soluções foram obtidas em até 22 iterações para o caso da cobertura em formato *boomerang*. Os elementos da matriz Jacobiana foram obtidos analiticamente e o algoritmo mostrou-se robusto e eficiente, assim como aquele apresentado em [31] que utiliza diferenças finitas para aproximar as derivadas presentes na formulação. Além disso, como na síntese de uma abertura elíptica com fase uniforme, foram adotadas grades não uniformes em  $\theta$  para melhorar a convergência do algoritmo, bem como os resultados da síntese.

No Capítulo 5 foi desenvolvida uma formulação matemática exata baseada nos princípios da GO em coordenadas complexas para a síntese de lentes dielétricas sem simetria circular composta por uma única interface de transmissão. Aplicando a lei de Snell da refração [44] na expressão da Conservação da Energia [17], foi obtida uma equação diferencial parcial não linear de segunda ordem do tipo Monge Ampère para a síntese da superfície dielétrica. A matriz Jacobiana foi obtida analiticamente e uma lente dielétrica circularmente simétrica [46] foi usada para iniciar o algoritmo de síntese. O algoritmo convergiu após 37 iterações para gerar um diagrama de radiação em coberturas circulares e após 40 iterações para gerar diagramas de radiação em coberturas elípticas. Nas etapas intermediárias da síntese foi exigido um critério de convergência da ordem de  $10^{-6}$ , enquanto que na etapa final o critério de convergência foi de  $10^{-10}$ .

O algoritmo conseguiu projetar superfícies refrativas satisfatórias, ou seja, lentes cujos diagramas de radiação concordam com as especificações prescritas. No entanto, deve ser destacada a dificuldade da síntese de obter resultados quando se deseja modelar toda a superfície da lente, ou seja, aquela compreendida no intervalo  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ , e em especial para gerar feixes mais estreitos na região de campo distante, uma vez que a condição de contorno não é obedecida para os raios mais próximos à borda da grade. Assim, optou-se por modelar apenas uma seção da lente, para  $0 \leq \theta \leq 60^\circ$ , o que flexibilizou o algoritmo de síntese e conduziu a resultados satisfatórios. Além disso, assim como na síntese das antenas duplo-refletoras *offset*, surgiram problemas nos anéis mais internos e nos anéis mais externos quando o campo distante especificado tinha atenuação na borda próxima a 0 dB e contorno mais difícil, ou seja, contorno elíptico e mais estreito.

## 6.1 Trabalhos Futuros

O uso de uma expressão analítica exata, ao invés de numérica aproximada, para representar localmente as superfícies sintetizadas mostrou-se uma estratégia eficiente para obter soluções numéricas para os problemas de síntese de antenas duplo-refletoras *offset* e lentes dielétricas sem simetria circular. Como proposta para trabalhos futuros, pretende-se avaliar o algoritmo de síntese de sistemas duplo-refletores em um problema prático, por exemplo, projetar um sistema duplo-refletor *offset* capaz de gerar um diagrama de radiação para a cobertura eficiente do território brasileiro. Para isso, é necessário determinar a função fase  $l(\omega)$  e a densidade de potência na abertura  $G(\omega)$  que provê o formato da cobertura do diagrama de radiação especificado.

Em relação ao problema de síntese de lentes dielétricas sem simetria circular, os trabalhos futuros consistem em avaliar as lentes projetadas em um software especializado de simulação eletromagnética para comparar com os resultados obtidos pela método híbrido da GO-PO [43]. Além disso, pretende-se aprimorar o algoritmo de análise implementado substituindo o uso de *splines* cúbicas por um método de interpolação que conduza a uma superfície contínua para representar a superfície sintetizada. Como exemplo, poderia ser usado pseudo-*splines* de sétima ordem, visto que a interpolação das superfícies dielétricas sintetizadas por pseudo-*splines* de quinta ordem não conduzem a resultados satisfatórios. Essa abordagem permite determinar as derivadas presentes no algoritmo da GO-PO de forma analítica, reduzindo os erros numéricos no cálculo do diagrama de radiação.

Aspectos relacionados à implementação do algoritmo de síntese também podem ser explorados visando melhorar sua convergência. Por exemplo, avaliar o uso de outros tipos de grade com células de quatro pontos na interpolação da superfície sintetizada por um conjunto de superfícies quádricas confocais com eixos deslocados nas sínteses onde são requeridas grades polares não uniformes em  $\theta$  para obter convergência. Além disso, o algoritmo também pode ser facilmente adaptado para utilizar outros tipos de superfícies na etapa de interpolação local. Como exemplo, podem ser usadas quádricas, ao invés de quádricas confocais para representar localmente a superfície sintetizada. Para essa classe de superfícies, o termo  $|L_{\eta\eta} - L_\eta|^2$  presente na equação de Monge Ampère não será nulo, podendo resolver os problemas de distorção que surgiram nas relações de mapeamento. Visto que a equação da quádrica é um polinômio definido por nove constantes (e não quatro como no caso da superfície quádrica confocal com eixo deslocado), a célula utilizada para representar localmente a superfície sintetizada deverá ter nove pontos da grade. Neste caso, como haverá maior acoplamento entre os elementos que compõem a superfície, essa aproximação poderá conduzir a soluções mais estáveis uma vez que estas superfícies podem representar mais adequadamente as assimetrias que surgem durante o procedimento iterativo.

# Referências

- [1] BALANIS, C., *Antenna Theory: Analysis and Design*. Wiley, 2012.
- [2] PENCHEL, R. A., *Síntese de antenas refletoras utilizando seções cônicas e superfícies quádricas confocais*. PhD thesis, Puc-Rio, Rio de Janeiro, Brasil, 2014.
- [3] RUDGE, A. W.; ADATIA, N. A., “Offset parabolic reflector antennas: a review,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 66, pp. 1592–1618, 1978.
- [4] COOK, J.; ELAM, E.; ZUCKER, H., “The open cassegrain antenna: Part i. electromagnetic design and analysis,” *Bell System Thechnical Journal*, vol. 44, pp. 1255–1300, 1965.
- [5] PENCHEL, R. A.; BERGMANN, J. R.; MOREIRA, F. J. S., “Shaping single offset reflector antennas using local axis-displaced confocal quadrics,” *International Journal of Antennas and Propagation*, vol. 2016, pp. 1–9, 2016.
- [6] DENKMANN, W.; GEYLING, F.; POPE, D.; SCHWARZ, A., “The open cassegrain antenna: Part ii. structural and mechanical evaluation,” *Bell System Thechnical Journal*, vol. 44, pp. 1301–1319, 1965.
- [7] CHU, T. S.; TURRIN, R., “Depolarization properties of offset reflector antennas,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 21, pp. 339–345, 1973.
- [8] HILBERT, D.; COHN-VOSSEN, S., *Geometry and the Imaginations*. AMS Chelsea Publishing Series, 1999.
- [9] TANAKA, H.; MIZUSAWA, M., “Elimination of cross polarization in offset dual-reflector antennas,” *Electronics Communications of Japan*, vol. 58, pp. 71–78, 1975.
- [10] MIZUGUTCH, Y.; AKAGAWA, M.; YOKOI, H., “Offset dual reflector antenna,” *Antennas and Propagation Society International Symposium*, vol. 14, pp. 2–5, 1976.
- [11] DRAGONE, C., “Offset multireflector antennas with perfect pattern symetry and polarization discrimination,” *Bell System Thechnical Journal*, vol. 57, pp. 2663–2684, 1978.

- 
- [12] J. S. SCHRUBEN, “Formulation of a reflector-design problem for a lighting fixture,” *Journal of the Optical Society of America*, vol. 62, p. 1498–1501, 1972.
- [13] WESTCOTT, B. S.; NORRIS, A. P., “Reflector synthesis for generalized farfields,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 8, pp. 521–523, 1975.
- [14] NORRIS, A. P.; WESTCOTT, B. S., “Computation of reflector surfaces for bivariate beamshaping in the elliptic case,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1976.
- [15] BRICKELL, F.; WESTCOTT, B. S., “Reflector design for two-variable beam shaping in the hyperbolic case,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 9, pp. 113–128, 1976.
- [16] WESTCOTT, B. S.; BRICKELL, F., “Computation of reflector surfaces for two-variable beam shaping in the hyperbolic case,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 9, pp. 611–625, 1976.
- [17] BRICKELL, F.; MARDER, L.; WESTCOTT, B. S., “The geometrical optics design of reflectors using complex coordinates,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 10, no. 2, pp. 245–260, 1977.
- [18] H. SCHWERDTFEGER, *Geometry of Complex Numbers: Circle Geometry, Moebius Transformation, Non-Euclidean Geometry*. Dover: Dover Books on Mathematics Series, 1976.
- [19] BRICKELL, F.; WESTCOTT, B. S., “Phase and power density distributions on plane apertures of reflector antennas,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 11, no. 4, pp. 777–789, 1978.
- [20] GALINDO-ISRAEL, V.; MITTRA, R.; CHA, A., “Aperture amplitude and phase control of offset dual reflectors,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 27, pp. 154–164, 1979.
- [21] MITTRA, R.; HYJAZIE, F.; GALINDO-ISRAEL, V., “Synthesis of offset dual reflector antennas transforming a given feed illumination pattern into a specified aperture distribution,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 30, pp. 251–259, 1982.
- [22] GALINDO, V., “Design of dual reflector antennas with arbitrary phase and amplitude distributions,” *Antennas and Propagation Society International Symposium*, vol. 1, pp. 91–95, 1963.

- [23] WESTCOTT, B. S.; BRICKELL, F., “Dual offset reflectors shaped for zero cross-polarization and prescribed aperture illumination,” *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 12, pp. 169–186, 1979.
- [24] ALBERTSEN, N. C., “Shaped-beam antenna with low cross polarization,” *7th European Microwave Conference*, pp. 339–342, 1978.
- [25] WESTCOTT, B. S.; BRICKELL, F., “Dual offset reflectors shaped for zero crosspolarization with asymmetric feed pattern,” *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 129, pp. 307–314, 1982.
- [26] WESTCOTT, B. S.; STEVENS, F. A.; BRICKELL, F., “Go synthesis of offset dual reflectors,” *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 128, no. 1, pp. 11–18, 1981.
- [27] WESTCOTT, B. S.; GRAHAM, R.; BRICKELL, F., “Systematic design of a dual offset reflector antenna with an elliptical aperture,” *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 131, pp. 365–370, 1981.
- [28] MEHLER, M.; TUN, S.; ADATIA, N., “Direct far-field go synthesis of shaped beam reflector antennas,” *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 133, pp. 213–220, 1986.
- [29] BERGMANN, J.; BROWN, R.; CLARRICOATS, P., “Dual reflector synthesis for specified aperture power and phase,” *Electronics Letters*, vol. 21, pp. 820–821, 1985.
- [30] BERGMANN, J.; BROWN, R.; CLARRICOATS, P.; ZHOU, H., “Synthesis of shaped-beam reflector antenna patterns,” *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 135, pp. 48–53, 1988.
- [31] BERGMANN, J. R., *The Geometrical Optics Design of Dual Reflector Antennas*. PhD thesis, Queen Mary University of London, London, UK, 1986.
- [32] CAFFARELLI, L.; OLIKER, V., “Weak solutions of one inverse problem in geometric optics,” *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 154, no. 1, pp. 39–49, 2008.
- [33] OLIKER, V. I., “A rigorous method for synthesis of offset shaped reflector antennas,” *Computing Letters*, vol. 2, pp. 29–49, 2006.
- [34] GLIMM, T.; OLIKER, V., “Optical design of single reflector systems and the monge-kantorovich mass transfer problem,” *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 117, pp. 4096–4108, 2003.
- [35] GLIMM, T.; OLIKER, V., “Optical design of two-reflector systems, the monge-kantorovich mass transfer problem and fermat’s principle,” *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 53, pp. 1255–1278, 2004.

- [36] BORISKIN, A.; SAULEAU, R., *Aperture Antennas for Millimeter and Submillimeter Wave Applications*. Springer, 2018.
- [37] UEHARA, K.; MIYASHITA, K.; NATSUMA, K.; HATAKEYAMA, K.; MIZUNO, K., “Lens-coupled imaging arrays for the millimeter- and submillimeter-wave regions,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 40, no. 5, pp. 806–811, 1992.
- [38] FERNANDES, C. A.; FERNANDES, C. G., “Performance of lens antennas in wireless indoor millimeter-wave applications,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, no. 6, pp. 732–737, 1999.
- [39] RAMAN, S.; BARKER, N. S., “A w-band dielectric-lens-based integrated monopulse radar receiver,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 46, no. 12, pp. 2308–2316, 1998.
- [40] VAN RUDD, J.; MITTLEMAN, D. M., “Influence of substrate-lens design in terahertz time-domain spectroscopy,” *Journal of Optical Society of America*, vol. 19, no. 2, pp. 319–329, 2002.
- [41] BÜTTGENBACH, T. H., “An improved solution for integrated array optics in quasi-optical mm and submm receivers: the hybrid antenna,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 41, no. 10, pp. 1750–1761, 1993.
- [42] LEMAIRE, D.; FERNANDES, C. A.; SOBIESKI, P.; BARBOSA, A., “A method to overcome the limitations of g.o. in axis-symmetric dielectric lens shaping,” *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*, vol. 17, no. 8, pp. 1377–1390, 1996.
- [43] CHANTRAINE-BARÈS, B.; SAULEAU, R.; LE COQ, L.; MAHDJOUBI, K., “A new accurate design method for millimeter-wave homogeneous dielectric substrate lens antennas of arbitrary shape,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 3, pp. 1069–1082, 2005.
- [44] WESTCOTT, B. S.; BRICKELL, F., “General dielectric-lens shaping using complex co-ordinates,” *IEE Proceedings H, Microwaves, Optics and Antennas*, vol. 133, no. 2, pp. 122–126, 1986.
- [45] WESTCOTT, B. S.; BRICKELL, F., “On the synthesis of a single offset reflector with dielectric cone feed,” *Journal of Modern Optics*, vol. 40, no. 6, pp. 1161–1173, 1993.
- [46] PATIÑO, L. S., “Síntese de refletores omnidirecionais alimentados por lente dielétricas associadas à corneta coaxial,” Master’s thesis, Puc-Rio, Rio de Janeiro, Brasil, 2016.

- 
- [47] MICHAELI, A., “Equivalent edge currents for arbitrary aspects of observation,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 32, no. 3, pp. 252–258, 1984.
- [48] MICHAELI, A., “Correction to “Equivalent edge currents for arbitrary aspects of observation,”” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 33, no. 2, p. 227, 1985.
- [49] WESTCOTT, B. S., *Shaped Reflector Antenna Design*. Letchworth, U.K.: Research Studies Press Ltd., 1983.
- [50] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A., *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series, Dover Publications, 1964.
- [51] LUDWIG, A., “The definition of cross polarization,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 21, pp. 116–119, 1973.
- [52] BERGMANN, J. R.; HASSELMANN, F. J. V.; TEIXEIRA, F. L.; REGO, C. G., “A comparison between techniques for global surface interpolation in shaped reflector analysis,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, no. 1, pp. 47–53, 1994.
- [53] ASSIS, A. R.; MOREIRA, F. J. S.; BERGMANN, J. R., “Go synthesis of offset dual reflector antennas using local axis-displaced confocal quadrics,” *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*, vol. 19, no. 2, pp. 177–190, 2020.
- [54] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 3th ed., 2007.
- [55] DESCHAMPS, G. A., “Ray techniques in electromagnetics,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 60, no. 9, pp. 1022–1035, 1972.

# Apêndice A

## Lente Circularmente Simétrica

A solução inicial para o algoritmo de síntese de uma lente dielétrica apresentado no Capítulo 5 será uma lente circularmente simétrica proposta em [46] e é dada pela relação:

$$r_1(\theta) = \frac{NC + r_0 \cos(\theta + \gamma) \pm A}{N^2 - 1}, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$A = \sqrt{C^2 + r_0^2(N^2 - 1) + 2r_0NC \cos(\theta + \gamma) + r_0^2 \cos^2(\theta + \gamma)},$$

$C$  é uma constante associada a espessura da lente  $Z_A$  e é dada em (A.2),  $r_0$  é a distância entre o foco virtual  $P(\rho_0, Z_0)$  e a origem  $O$ ,  $r_0 = \sqrt{\rho_0^2 + Z_0^2}$ ,  $\gamma$  é o ângulo formado entre o lado  $r_0$  e o eixo  $z$  negativo contado na direção horária, conforme ilustrado na Figura A.1, sendo expresso por  $\tan(\gamma) = \rho_0/Z_0$ .

$$C = NZ_A - \sqrt{(Z_A - Z_0)^2 + \rho_0^2}. \quad (\text{A.2})$$

A largura de feixe ( $\alpha_c$ ) desta lente é controlada pela escolha da posição do foco virtual  $P(\rho_0, Z_0)$  e da espessura da lente  $Z_A$  e é obtida pela expressão [46]:

$$\alpha_c = \text{sen}^{-1} \left[ \frac{r_1(\theta_{ic}) - \rho_0}{Nr_1(\theta_{ic}) - C} \right], \quad (\text{A.3})$$

onde  $\theta_{ic}$  é o ângulo de incidência crítico e é dado por:

$$\theta_{ic} = \gamma + \cos^{-1} \frac{-C}{Nr_0}. \quad (\text{A.4})$$



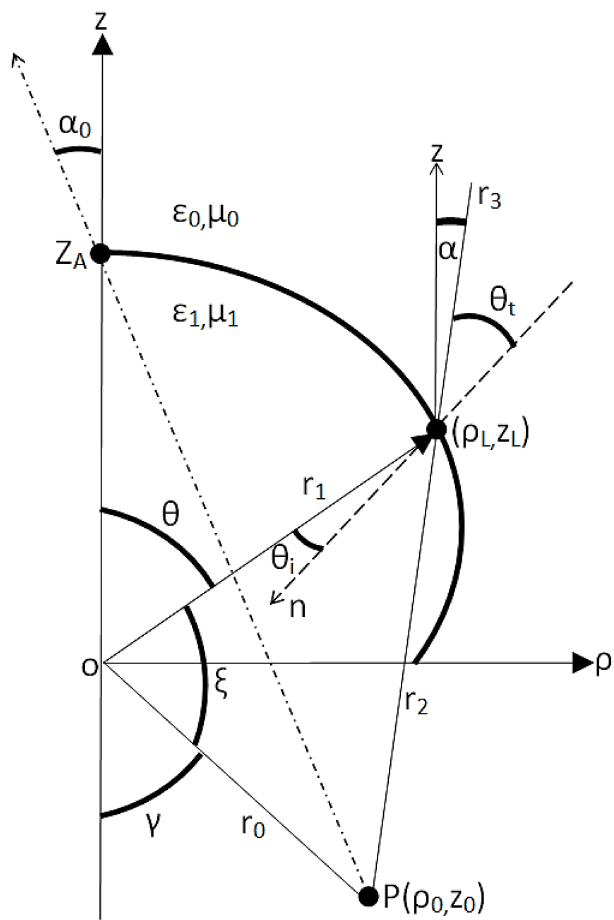


Figura A.1: Geometria da lente com foco virtual no ponto  $P(\rho_0, Z_0)$  [46].