

Eduardo de Markus Athayde

# **Teoria dos grafos aplicada à análise musical**

Belo Horizonte, MG

2020



Eduardo de Markus Athayde

## **Teoria dos grafos aplicada à análise musical**

### **Versão Final**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Música da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Música.

Linha de Pesquisa: Processos analíticos e criativos

Orientador: Rogério Vasconcelos

Belo Horizonte, MG

2020

A865t Athayde, Eduardo de Markus.

Teoria dos grafos aplicada à análise musical [manuscrito] / Eduardo de Markus Athayde. - 2020.  
131 f., enc.; il.

Orientador: Rogério Vasconcelos Barbosa.

Linha de pesquisa: Processos analíticos e criativos.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Música.

Inclui bibliografia.

1. Música - Teses. 2. Composição (Música). 3. Música - Análise, apreciação. 4. Teoria dos grafos.  
5. Computadores - Modelos matemáticos. 6. Ligeti, Gyorgy, 1923-2006. I. Vasconcelos, Rogério. II.  
Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Música. III. Título.

CDD: 789.96





UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE MÚSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÚSICA

## FOLHA DE APROVAÇÃO

Dissertação defendida pelo aluno **Eduardo de Markus Athayde**, em 11 de dezembro de 2020, e aprovada pela Banca Examinadora constituída pelos Professores:

---

Prof. Dr. Rogério Vasconcelos Barbosa  
Universidade Federal de Minas Gerais  
(orientador)

---

Prof. Dr. Felipe Lovaglio Rossi  
University of California, San Diego

---

Prof. Dr. Oíliam José Lanna  
Universidade Federal de Minas Gerais

---

Prof. Dr. José Henrique Padovani Velloso  
Universidade Federal de Minas Gerais



Documento assinado eletronicamente por **Rogério Vasconcelos Barbosa, Membro**, em 11/12/2020, às 17:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jose Henrique Padovani Velloso, Professor do Magistério Superior**, em 11/12/2020, às 18:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Felipe Lovaglio Rossi, Usuário Externo**, em 12/12/2020, às 07:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Oíliam Jose Lanna, Professor do Magistério Superior**, em 15/12/2020, às 16:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0463273** e o código CRC **0E9A59AC**.

---

Referência: Processo nº 23072.245585/2020-07

SEI nº 0463273

*Para minha filha Maria Tereza Ferraz Athayde.  
Para minha mãe Marília Markus.  
Para meu pai Carlos Eduardo de Ataíde Castro. « In memoriam »*



# Agradecimentos

Ao meu orientador Rogério Vasconcelos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Agradecimentos especiais à Sr.<sup>a</sup> Dagmar Schütz-Meisel da Editora [SCHOTT MUSIC, Mainz - Germany](#), que gentilmente concedeu permissão para a reprodução das partituras de György Ligeti presentes nesta dissertação.

Agradecimentos especiais ao Sr. Erin Dickenson da Editora [Boosey & Hawkes](#) que gentilmente concedeu permissão para a reprodução da partitura de “*Pithoprakta*” de Iannis Xenakis.

E agradecimentos especiais a [Zack Ciminera](#) que gentilmente ajudou com implementações de código em *JavaScript* para a confecção de um *notebook* [D3.js](#).



*« Mull of Kintyre  
Oh, mist rolling in from the sea  
My desire is always to be here  
Oh, Mull of Kintyre »*





# Resumo

Esta dissertação busca trazer para o campo da análise musical a área matemática da Teoria dos Grafos. O trabalho se iniciou com a modelagem computacional do tema e *ostinato* da *Musica ricercata* VII de György Ligeti. A identificação de diferenças estilísticas entre as melodias geradas pelo modelo e o tema original de Ligeti conduziu a uma reavaliação dos procedimentos de modelagem. Para esta finalidade a Teoria dos Grafos foi empregada como ferramenta que permite a visualização de dados musicais, auxiliando na identificação do problema do modelo. Além de cumprir este objetivo a Teoria dos Grafos também foi usada como ferramenta auxiliar em análise musical.

**Palavras-chave:** Composição. Análise musical. Teoria dos Grafos. Modelagem computacional. Visualização de dados. György Ligeti.



# Abstract

This dissertation sought in Graph Theory a way to further improve the field of musical analysis. The research begins with the computational modeling of György Ligeti's *Musica ricercata* VII theme and *ostinato*. Differences regarding style between melodies generated by the model and Ligeti's original theme prompted a reevaluation of the modeling proceedings. For this matter, Graph Theory is used as a tool for musical data visualization, assisting in the model's problem identification. Beyond the effectiveness in solving the above objective, Graph Theory was used as a tool for musical analysis.

**Keywords:** Composition. Musical analysis. Graph Theory. Computer modeling. Data visualization. György Ligeti.



# Lista de ilustrações


Figura 1	–	Bártok (1926-1939): <i>Mikrokosmos</i> vol. II - <i>In mixolydian mode</i> (Compassos 21-25) . . . . .	6
Figura 2	–	Ligeti (1951-1953): <i>Musica ricercata</i> VII - Tema (Compassos 19-29) . . . . .	6
Figura 3	–	Ligeti (1950): <i>Fünft Stücke für Klavier zu vier Händen</i> - IV. Sonatina, 2. Andante « Piano 1 » . . . . .	9
Figura 4	–	Ligeti (1950): <i>Fünft Stücke für Klavier zu vier Händen</i> - IV. Sonatina, 2. Andante « Piano 2 » . . . . .	9
Figura 5	–	Ligeti (1990, rev. 1992): Concerto para Violino, II. <i>Aria</i> . . . . .	10
Figura 6	–	Ligeti (1951-1953): <i>Musica ricercata</i> VII - Tema . . . . .	10
Figura 7	–	Ligeti (1991): Sonata para Viola Solo: I. <i>Hora lungă</i> . . . . .	11
Figura 8	–	György Sándor Ligeti . . . . .	12
Figura 9	–	Ligeti (1951-1953): <i>Musica ricercata</i> - VII « Compassos 1 ao 12 » . . . . .	13
Figura 10	–	<i>Musica ricercata</i> VII - <i>Ostinato: Patch</i> criado em Max . . . . .	15
Figura 11	–	<i>Musica ricercata</i> VII - Tema: Frases e suas durações em semínima . . . . .	16
Figura 12	–	<i>Subpatch p-ratio-list</i> . . . . .	17
Figura 13	–	<i>Tenutas</i> . . . . .	18
Figura 14	–	Células conectivas . . . . .	18
Figura 15	–	<i>Subpatch p-9-tempos</i> . . . . .	19
Figura 16	–	<i>Subpatch sel-5-celulas</i> . . . . .	20
Figura 17	–	<i>Subpatch bach.filternull</i> . . . . .	20
Figura 18	–	<i>Subpatch p-notas</i> . . . . .	20
Figura 19	–	Tema: Tessitura . . . . .	21
Figura 20	–	<i>Subpatch p-notas-C</i> . . . . .	21
Figura 21	–	Conteúdo harmônico do <i>Ostinato</i> e do Tema e Variações . . . . .	22
Figura 22	–	Tema: <i>Patch</i> principal . . . . .	22
Figura 23	–	As sete pontes de Königsberg: Mapa de Merian-Erben, 1652 . . . . .	26
Figura 24	–	Mapa das sete pontes no trabalho original de Euler . . . . .	27
Figura 25	–	As sete pontes de Königsberg: Representação em grafo . . . . .	27
Figura 26	–	Espaços topológicos equivalentes . . . . .	28
Figura 27	–	Leonhard Euler . . . . .	28
Figura 28	–	Grafo Hiper cubo . . . . .	29
Figura 29	–	Multigrafo com <i>loop</i> . . . . .	30
Figura 30	–	Grafo simples $\mathcal{G}$ . . . . .	31
Figura 31	–	Adjacência e Grau de vértices . . . . .	32
Figura 32	–	Grafo direcionado . . . . .	32
Figura 33	–	Grafo regular . . . . .	32

Figura 34 – Grafo completo $\mathcal{K}_5$ com 5 vértices . . . . .	33
Figura 35 – Grafo Valorado . . . . .	33
Figura 36 – Passeio, Trilha, Caminho & Ciclo . . . . .	35
Figura 37 – Grafo conexo . . . . .	35
Figura 38 – Grafo, Subgrafo e Subgrafo Induzido . . . . .	36
Figura 39 – Dois elementos de um grafo desconexo . . . . .	36
Figura 40 – Grafo Caminho . . . . .	37
Figura 41 – Grafo Caminho com 90 vértices dispostos em espiral . . . . .	37
Figura 42 – Caminho $\mathcal{P} = \mathcal{P}^6$ em $\mathcal{G}$ . . . . .	37
Figura 43 – Grafo com 7 vértices, 11 arestas, 2 cliques: $\mathcal{K}_3$ (3 vértices) e $\mathcal{K}_4$ (4 vértices)	38
Figura 44 – Cliques em um Grafo $\mathcal{S}_2$ . . . . .	38
Figura 45 – Grafo Árvore . . . . .	38
Figura 46 – Circuito Euleriano para um Grafo Octaedro . . . . .	39
Figura 47 – Circuito Hamiltoniano . . . . .	39
Figura 48 – Grafo $\mathcal{G}$ com 6 vértices e 8 arestas . . . . .	40
Figura 49 – Caminho mais curto ( $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{F}$ ) entre os vértices $\mathcal{A}$ e $\mathcal{F}$ em um dígrafo valorado (ou rede) . . . . .	42
Figura 50 – <i>Stack Overflow Relationship Network</i> . . . . .	44
Figura 51 – Grafo base para exemplificar medidas de centralidades . . . . .	45
Figura 52 – Centralidade de Grau . . . . .	46
Figura 53 – Centralidade de Intermediação . . . . .	46
Figura 54 – Centralidade de Proximidade . . . . .	47
Figura 55 – Centralidade de AutoVetor . . . . .	48
Figura 56 – Centralidade de Intermediação de Arestas . . . . .	48
Figura 57 – Série temporal da balança comercial entre Inglaterra e Dinamarca e Noruega de 1700 a 1780 (William Playfair, 1786) . . . . .	50
Figura 58 – <i>Diagram of the causes of mortality in the army in the East</i> (Florence Nightingale, 1858) . . . . .	51
Figura 59 – Expotações de vinhos franceses no ano de 1864 (Charles Joseph Minard, 1865) . . . . .	51
Figura 60 – Bach: <i>Aria mit 30 Veränderungen</i> - BWV 988 - MIDI Piano Roll . . . . .	53
Figura 61 – Xenakis: <i>Pithoprakta</i> . . . . .	53
Figura 62 – Xenakis: <i>Pithoprakta</i> . . . . .	53
Figura 63 – Diagrama de Penrose . . . . .	54
Figura 64 – Grafo Simples $\mathcal{G}$ . . . . .	55
Figura 65 – Dígrafo $\mathcal{D}$ . . . . .	56
Figura 66 – Ciclo de Quintas: Diagrama cordal . . . . .	60
Figura 67 – Grafo K7 - Alturas de Fá mixolídio . . . . .	61
Figura 68 – Beethoven (1808): Sinfonia Nº 6, Op. 68 - 1.º Movimento « Tema » . . . . .	62

Figura 69 – Beethoven (1808): Sinfonia Nº 6, Op. 68 - 1.º Movimento « Encadeamentos do tema em azul » . . . . .	62
Figura 70 – Beethoven: Sinfonia Nº 6, Op. 68 - 1.º Movimento « Encadeamentos do tema nota a nota » . . . . .	62
Figura 71 – Beethoven: Sinfonia Nº 6, Op. 68 « Grafo do Tema do 1.º Movimento » . .	63
Figura 72 – Beethoven: Sinfonia Nº 6, Op.68 - Circuitos codificados por cor no grafo .	64
Figura 73 – Beethoven (1808): Sinfonia Nº 6, Op.68 « Circuitos codificados por cor na partitura » . . . . .	64
Figura 74 – Dallapiccola (1952): <i>Quaderno musicale di Annalibera - Contrapunctus primus</i> (Compassos 1-5 e série dodecafônica) . . . . .	65
Figura 75 – Dallapiccola: <i>Quaderno musicale di Annalibera - Contrapunctus primus</i> « Série dodecafônica visualizada como grafo caminho » . . . . .	65
Figura 76 – Dallapiccola: <i>Quaderno musicale di Annalibera - Contrapunctus primus</i> « Matriz serial » . . . . .	66
Figura 77 – Dallapiccola: <i>Quaderno musicale di Annalibera - Contrapunctus primus</i> « Inversão retrógrada visualizada como grafo caminho » . . . . .	66
Figura 78 – Dallapiccola: <i>Quaderno musicale di Annalibera - Contrapunctus primus</i> « Grafo caminho dentro de um grafo $\mathcal{K}_{12}$ » . . . . .	66
Figura 79 – Bach: Tocata e Fuga, BWV 565 - Sujeito da Fuga . . . . .	67
Figura 80 – Bach: Tocata e Fuga, BWV 565 « Grafo do Sujeito da Fuga » . . . . .	67
Figura 81 – Rosa Polar ou Curva <i>rhodonea</i> . . . . .	68
Figura 82 – Bach: Prelúdio e Fuga, BWV 543 « Material temático » . . . . .	68
Figura 83 – Bach: BWV 543 - « Grafo » . . . . .	69
Figura 84 – Bach: Prelúdio e Fuga, BWV 543 « Polifonia a 3 vozes » . . . . .	70
Figura 85 – Bach: BWV 543 - Polifonia a 3 Vozes « Topologia » . . . . .	70
Figura 86 – Stravinski (1913): <i>Le Sacre du printemps - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction</i> « Tema » . . . . .	71
Figura 87 – Stravinski: <i>Le Sacre du printemps - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction</i> « Grafo da 1ª Frase do Tema » . . . . .	71
Figura 88 – Iterações do Triângulo de Sierpiński . . . . .	72
Figura 89 – Triângulos de Sierpiński em arte ornamental italiana do século XIII . . . .	72
Figura 90 – Triângulos de Sierpiński - Grafos $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_4$ . . . . .	72
Figura 91 – Stravinski (1913): <i>Le Sacre du printemps - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction</i> « Tema Fractal » . . . . .	73
Figura 92 – Stravinsky (1913): <i>Le Sacre du printemps - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction</i> « Da capo até o final de Nº 2 » . . . . .	74
Figura 93 – Stravinsky: <i>L'Adoration de la Terre, Introduction (Da capo - Nº 2)</i> « Teia Orquestral » . . . . .	75

Figura 94 – Stravinsky (1913): <i>Le Sacre du printemps - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction</i> « Materiais temáticos e secundários » . . . . .	76
Figura 95 – Stravinsky: <i>L'Adoration de la Terre, Introduction (Da capo - Nº 2)</i> « Comunidades na Teia Orquestral » . . . . .	77
Figura 96 – <i>L'Adoration de la Terre, Introduction (Da capo - Nº 2)</i> « Centralidade de Intermediação » . . . . .	79
Figura 97 – Valores de Centralidade de Intermediação por vértices . . . . .	79
Figura 98 – <i>L'Adoration de la Terre, Introduction (Da capo - Nº 2)</i> : Centralidade de Grau de Entrada . . . . .	81
Figura 99 – <i>L'Adoration de la Terre, Introduction (Da capo - Nº 2)</i> : Centralidade de Grau de Saída . . . . .	81
Figura 100 – Valores de Centralidade de Grau de Entrada . . . . .	82
Figura 101 – Valores de Centralidade de Grau de Saída . . . . .	82
Figura 102 – Stravinsky (1913): <i>Le Sacre du printemps - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction</i> « Temas do Clarinete em Ré e do <i>Cor anglais</i> » . . . . .	82
Figura 103 – <i>L'Adoration de la Terre, Introduction (Da capo - Nº 2)</i> « Clique » . . . . .	83
Figura 104 – Triângulo de Penrose . . . . .	83
Figura 105 – <i>L'Adoration de la Terre, Introduction (Da capo - Nº 2)</i> « Temas do Clarinete em Ré (azul escuro) e <i>Cor anglais</i> (vermelho) » . . . . .	84
Figura 106 – Ligeti (1951-1953): <i>Musica ricercata VII</i> « <i>Ostinato</i> » . . . . .	85
Figura 107 – Ligeti: <i>Musica ricercata VII - Ostinato</i> « <i>Fish Graph</i> » . . . . .	85
Figura 108 – <i>Buttefly Graph</i> . . . . .	85
Figura 109 – Ligeti: <i>Musica ricercata VII</i> - Topologia do Tema . . . . .	86
Figura 110 – Ligeti: <i>Musica ricercata VII</i> - Clique . . . . .	87
Figura 111 – Ligeti (1951-1953): <i>Musica ricercata VII</i> - Motivo <colcheia + 2 semicolcheias> . . . . .	87
Figura 112 – Ligeti (1951-1953): <i>Musica ricercata VII</i> « Variação 1 e Início do Canon » . . . . .	88
Figura 113 – Ligeti (1951-1953): <i>Musica ricercata VII</i> « Canon (continuação) » . . . . .	89
Figura 114 – Ligeti: <i>Musica ricercata VII</i> « Tema, Variação 1 e Canon » . . . . .	91
Figura 115 – Ligeti: <i>Musica ricercata VII</i> - Centralidade de Grau de Entrada . . . . .	92
Figura 116 – Ligeti: <i>Musica ricercata VII</i> - Centralidade de Grau de Saída . . . . .	92
Figura 117 – Ligeti: <i>Musica ricercata VII</i> - Centralidade de Intermediação . . . . .	92
Figura 118 – Ligeti: <i>Musica ricercata VII</i> - Grafo com múltiplos parâmetros . . . . .	93
Figura 119 – Ligeti: <i>Musica ricercata VII</i> - Árvore melódica do tema . . . . .	94
Figura 120 – Partitura do Tema 1 « recriado » no Max . . . . .	95
Figura 121 – Partitura do Tema 2 « recriado » no Max . . . . .	96
Figura 122 – Partitura do Tema 3 « recriado » no Max . . . . .	97
Figura 123 – Ligeti: <i>Musica ricercata VII</i> - Tema . . . . .	98
Figura 124 – Albrecht Dürer: <i>Melencolia I</i> - (1514) . . . . .	99
Figura 125 – Grafo de Dürer: Seis possíveis <i>embeddings</i> . . . . .	100



Figura 126 – Grafo de Dürer: Total cromático . . . . .	100
Figura 127 – Grafo de Dürer: Circuito Hamiltoniano . . . . .	101
Figura 128 – Bloco principal do <i>patch</i> realizado em <b>OM#</b> . . . . .	104
Figura 129 – Bloco <b>Frase</b> do <i>patch</i> realizado em <b>OM#</b> . . . . .	104
Figura 130 – Bloco <i>Adjacências</i> do <i>patch</i> realizado em <b>OM#</b> . . . . .	105
Figura 131 – Estrutura do algoritmo . . . . .	107
Figura 132 – Exemplo 1 . . . . .	108
Figura 133 – Exemplo 2 . . . . .	109
Figura 134 – Exemplo 3 . . . . .	110
Figura 135 – Exemplo 4 . . . . .	110
Figura 136 – Exemplos 3 e 4 comparados ao Tema da <i>Musica ricercata VII</i> . . . . .	111
Figura 137 – Exemplos 5 e 6 comparados ao Tema da <i>Musica ricercata VII</i> . . . . .	112
Figura 138 – Exemplos 5: “Organela  ” comparado ao Tema da <i>Musica ricercata VII</i> . . . . .	113
Figura 139 – Exemplos 5 e compassos 12-14 e 19-21 Tema da <i>Musica ricercata VII</i> . . . . .	113
Figura 140 – Exemplo 6 e Tema da <i>Musica ricercata VII</i> . . . . .	114
Figura 141 – Conjunto de Mandelbrot . . . . .	115
Figura 142 – Ilustração de Stravinski sobre sua própria música . . . . .	117
Figura 143 – Labyrinth . . . . .	118



# Lista de tabelas

Tabela 1	–	Classes de altura da <i>Musica ricercata</i> . (Centro(s) ‘tonais’ em <b>negrito</b> e notas adicionadas em <i>itálico</i> .) . . . . .	7
Tabela 2	–	<i>L’Adoration de la Terre, Introduction (Da capo - Nº 2)</i> « Centralidades de Grau de <i>Entrada e Saída</i> » . . . . .	81
Tabela 3	–	Ligeti: <i>Musica ricercata VII</i> - Frequência de Encadeamentos do Tema . . . . .	98
Tabela 4	–	Exemplo 6 e Tema da <i>Musica ricercata VII</i> : Fatores de diminuição . . . . .	114



# Lista de símbolos

$=$	<b>Igualdade, equivalencia e similaridade:</b> Igualdade.
$\neq$	<b>Igualdade, equivalencia e similaridade:</b> Inequação.
$\emptyset$	<b>Teoria dos Conjuntos:</b> Conjunto vazio. Também pode ser notado como $\emptyset$ ou $\{\}$ .
$\in$	<b>Teoria dos Conjuntos:</b> $x \in \mathcal{S}$ significa que $x$ é um elemento que <b>pertence</b> ao conjunto $\mathcal{S}$ .
$\notin$	<b>Teoria dos Conjuntos:</b> $x \notin \mathcal{S}$ significa que $x$ <b>não pertence</b> ao conjunto $\mathcal{S}$ . Pode ser escrito como $\neg(x \in \mathcal{S})$ , onde $\neg$ significa <b>negação</b> .
$\subseteq$	<b>Teoria dos Conjuntos:</b> $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ significa que $\mathcal{A}$ é <b>igual</b> a um <b>subconjunto</b> de $\mathcal{B}$ .
$:$	<b>Teoria dos Conjuntos:</b> $\{x : \phi(x)\}$ é o conjunto de $x$ <b>tal que</b> $\phi(x)$ .
$ \mathcal{A} $	<b>Teoria dos Conjuntos:</b> <b>Cardinalidade</b> do conjunto $\mathcal{A}$ .
$\mathbb{Z}$	<b>Teoria dos Conjuntos:</b> Conjunto dos <b>números inteiros</b> .
$\mathbb{Q}$	<b>Teoria dos Conjuntos:</b> Conjunto dos <b>números racionais</b> .
$\cos$	<b>Trigonometria:</b> <b>Cosseno</b> .
$v_k   v_i$	<b>Teoria dos Grafos:</b> <b>Distância</b> entre $v_k$ e $v_i$ .
$\Sigma$	<b>Aritmética:</b> <b>Somatório</b> .
$\forall$	<b>Lógica:</b> Se $\mathcal{E}$ é um predicado lógico, $\forall x \mathcal{E}$ significa que $\mathcal{E}$ é verdadeiro <b>para todos</b> valores possíveis da variável $x$ .
$\neg$	<b>Lógica:</b> <b>Negação</b> .
$\exists$	<b>Lógica:</b> Se $\mathcal{E}$ é um predicado lógico, $\exists x \mathcal{E}$ significa que <b>existe</b> ao menos um valor de $x$ para o qual $\mathcal{E}$ é verdadeiro.
$\nexists$	<b>Lógica:</b> Símbolo usado em Lógica de predicados, significa “não existe”. Pode ser escrito como $\neg \exists$ .
$\vee$	<b>Lógica:</b> Se $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ são predicados lógicos $\mathcal{E} \vee \mathcal{F}$ é verdadeiro se <b>ou</b> $\mathcal{E}$ , <b>ou</b> $\mathcal{F}$ , ou ambos são verdadeiros. O símbolo $\vee^1$ é lido como <b>ou</b> .

<sup>1</sup> Iannis Xenakis atribui uma outra significação para o símbolo.

$\wedge$	<b>Lógica:</b> Se $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ são predicados lógicos, $\mathcal{E} \wedge \mathcal{F}$ é verdadeiro se $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ são ambos verdadeiros.
$\rightarrow$	<b>Lógica:</b> Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são predicados lógicos, $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ significa que se $\mathcal{P}$ é verdadeiro, então $\mathcal{Q}$ também é verdadeiro. O símbolo $\rightarrow$ é lido como <b>implica que</b> . Em <b>Lógica</b> a seta $\Rightarrow$ é mais usual.
$\top$	<b>Lógica:</b> Tautologia <sup>2</sup> .
$\perp$	<b>Lógica:</b> <i>Falsum</i> .
$\rightarrow$	<b>Teoria dos Grafos:</b> Aresta direcional ou arco. <sup>3</sup>
$\Leftrightarrow$	<b>Teoria dos Grafos:</b> Arestas (ou arcos) bidirecionais. <sup>4</sup>
$\Rightarrow$	<b>Teoria dos Grafos:</b> Arestas (ou arcos) paralelos. <sup>5</sup>
$\phi$	Phi.
$\theta$	Theta.
$\lambda$	Lambda.
$\sigma$	Sigma.
$\infty$	Infinito.

---

<sup>2</sup> Mesmo caso da Nota 1.

<sup>3</sup> Notação utilizada pelo autor inspirada na notação de grafos direcionais da linguagem de programação *Wolfram Language* disponível em: <<https://reference.wolfram.com/language/ref/DirectedEdge.html>>. (Acesso em 02/2021.)

<sup>4</sup> Mesmo caso da Nota 3.

<sup>5</sup> Mesmo caso da Nota 3.

# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>MUSICA RICERCATA VII: ANÁLISE E MODELAGEM</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1.1</b>	<b>Análise preliminar</b> . . . . .	<b>4</b>
1.1.1	Contextualização . . . . .	4
1.1.2	Forma e Textura . . . . .	7
1.1.3	Genealogia de uma melodia . . . . .	8
1.1.3.1	Sonatina . . . . .	8
1.1.3.2	Concerto para violino . . . . .	9
1.1.3.3	Sonata para viola solo . . . . .	11
<b>1.2</b>	<b>Modelagem em Max</b> . . . . .	<b>13</b>
1.2.1	Considerações sobre a Metodologia . . . . .	13
1.2.2	Modelagem do <i>Ostinato</i> . . . . .	14
1.2.2.1	Domínio das Alturas . . . . .	14
1.2.2.2	Domínio do Tempo . . . . .	14
1.2.3	Modelagem do Tema . . . . .	15
1.2.4	Limitações . . . . .	23
1.2.4.1	Limitações do modelo do <i>Ostinato</i> . . . . .	23
1.2.4.2	Limitações do modelo do Tema . . . . .	23
<b>2</b>	<b>TEORIA DOS GRAFOS</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>2.1</b>	<b>Histórico</b> . . . . .	<b>26</b>
<b>2.2</b>	<b>Definições básicas</b> . . . . .	<b>29</b>
2.2.1	Grafo . . . . .	29
2.2.2	Multigrafo . . . . .	30
2.2.3	Grafo Simples . . . . .	31
2.2.4	Adjacência, Incidência e Grau . . . . .	31
2.2.5	Grafo Direcionado ou Dígrafo . . . . .	31
2.2.6	Grafo Regular . . . . .	32
2.2.7	Grafo Completo . . . . .	33
2.2.8	Grafo Valorado . . . . .	33
<b>2.3</b>	<b>Conectividade</b> . . . . .	<b>34</b>
2.3.1	Passeio, Trilha, Caminho e Ciclo . . . . .	34
2.3.2	Grafo Conexo . . . . .	35
2.3.3	Subgrafo . . . . .	35
2.3.4	Grafo Desconexo . . . . .	36

2.3.5	Grafo Caminho . . . . .	36
2.3.6	Clique . . . . .	38
2.3.7	Grafo Árvore . . . . .	38
2.3.8	Circuito Euleriano . . . . .	39
2.3.9	Circuito Hamiltoniano . . . . .	39
<b>2.4</b>	<b>Matrizes</b> . . . . .	<b>40</b>
2.4.0.1	Matriz de Adjacência . . . . .	40
2.4.0.2	Matriz de Incidência . . . . .	41
<b>2.5</b>	<b>Distância</b> . . . . .	<b>41</b>
2.5.0.1	Excentricidade . . . . .	42
2.5.0.2	Diâmetro . . . . .	42
2.5.0.3	Raio . . . . .	43
2.5.0.4	Vértice Periférico . . . . .	43
2.5.0.5	Vértice Central . . . . .	43
<b>2.6</b>	<b>Modularidades</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>2.7</b>	<b>Centralidades</b> . . . . .	<b>45</b>
2.7.1	Centralidade de Grau . . . . .	45
2.7.2	Centralidade de Intermediação . . . . .	46
2.7.3	Centralidade de Proximidade . . . . .	47
2.7.4	Centralidade de Autovalor ( <i>Eigenvector</i> ) . . . . .	47
2.7.5	Centralidade de Intermediação de Arestas ( <i>Edge Betweenness Centrality</i> ) . . . . .	48
<b>3</b>	<b>TEORIA DOS GRAFOS E MÚSICA</b> . . . . .	<b>49</b>
<b>3.1</b>	<b>Visualização de dados</b> . . . . .	<b>49</b>
3.1.1	Conceituação e Desenvolvimento Histórico . . . . .	50
3.1.2	Representação cartesiana de dados musicais . . . . .	52
<b>3.2</b>	<b>Formalismo</b> . . . . .	<b>55</b>
3.2.1	« Caso de um elemento genérico singular » . . . . .	58
3.2.2	« Caso de dois ou mais elementos genéricos » . . . . .	59
3.2.3	« Estruturas fora do tempo » . . . . .	60
3.2.4	« Estruturas no tempo » . . . . .	61
3.2.5	« Estruturas temporais » . . . . .	61
<b>3.3</b>	<b>Aplicações em Análise Musical</b> . . . . .	<b>62</b>
3.3.1	Sinfonia Nº 6, <i>Op. 68</i> - 1.º Movimento: Tema . . . . .	62
3.3.2	<i>Quaderno Musicale di Annalibera - Contrapunctus primus</i> . . . . .	65
3.3.3	Tocata e Fuga em Ré menor - BWV 565 . . . . .	67
3.3.4	Prelúdio e Fuga em Lá menor - BWV 543 . . . . .	68
3.3.5	<i>Le Sacre du printemps - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction</i> . . . . .	71
3.3.5.1	<i>L'Adoration de la Terre, Introduction</i> « Tema » . . . . .	71
3.3.5.2	<i>L'Adoration de la Terre, Introduction</i> « Breve análise musical » . . . . .	74



3.3.5.3	<i>L'Adoration de la Terre, Introduction</i> « Centralidade de Intermediação » . . . . .	79
3.3.5.4	<i>L'Adoration de la Terre, Introduction</i> « Centralidade de Grau » . . . . .	80
3.3.5.5	<i>L'Adoration de la Terre, Introduction</i> « Clique » . . . . .	83
3.3.6	<i>Musica ricercata VII</i> . . . . .	85
3.3.6.1	<i>Ostinato</i> . . . . .	85
3.3.6.2	Tema . . . . .	86
3.3.6.3	Primeira Variação e Canon . . . . .	88
3.3.6.4	Medidas de Centralidades . . . . .	92
3.3.6.5	Múltiplos Parâmetros . . . . .	93
3.3.6.6	Distância . . . . .	94
3.3.6.7	Temas criados no Max . . . . .	95
3.3.6.8	Frequência de encadeamentos . . . . .	98
3.3.7	<i>Melencolia I</i> . . . . .	99
3.3.7.1	Série dodecafônica . . . . .	101
<b>4</b>	<b><i>MUSICA RICERCATA VII: PATCH « TEMA » V. Nº2</i></b> . . . . .	<b>103</b>
<b>4.1</b>	<b>Algoritmo elaborado no OM#</b> . . . . .	<b>103</b>
4.1.1	Estrutura . . . . .	104
4.1.1.1	Bloco <b>frase</b> . . . . .	104
4.1.1.2	Regras de Adjacências . . . . .	105
4.1.1.3	Regra de dupla bordadura ( <i>-abab</i> ) . . . . .	106
4.1.1.4	Bloco <b>seqs</b> . . . . .	106
4.1.1.5	Grafo estrutural do <i>patch</i> . . . . .	107
<b>4.2</b>	<b>Novos exemplos</b> . . . . .	<b>108</b>
4.2.1	Tema com células aleatórias . . . . .	108
4.2.2	Tema com ritmo preestabelecido . . . . .	110
4.2.3	Dois fragmentos interessantes . . . . .	111
	<b>Considerações Finais</b> . . . . .	<b>115</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>119</b>
	<b>ANEXOS</b> . . . . .	<b>125</b>
	<b>ANEXO A – PARTITURA</b> . . . . .	<b>127</b>
	<b>Cólofon</b> . . . . .	<b>131</b>



# Introdução

Esta dissertação busca trazer para o campo da análise musical a área matemática da Teoria dos Grafos.

A *Musica ricercata* VII de György Ligeti foi objeto de estudo para a construção de dois *patches* feitos em **Max**. O objetivo inicial era recriar o *ostinato* e o tema da *Musica ricercata* VII. Para isso foi necessária a concepção de um modelo que representasse os dois conteúdos musicais. Os *patches* são algoritmos de simulação construídos a partir de regras musicais estabelecidas através de análise musical. Dois resultados foram observados, (1) a reprodução *ipsis literis* do objeto original e, (2) a reprodução similar ao conteúdo original, *ostinato* e tema respectivamente. O nível de variação entre o tema original de Ligeti e os recriados em **Max** motivou uma reavaliação do modelo criado. A Teoria dos Grafos foi então empregada como forma de se avaliar sistematicamente qual a razão para a variação observada. A eficácia da avaliação matemática indicou um enorme potencial ao aliar análise musical à Teoria dos Grafos. O capítulo 1 detalha a etapa de análise e modelagem da *Musica ricercata* VII, dentre aspectos históricos, técnicas composicionais e, concepção e metodologia de construção dos modelos computacionais. O capítulo 2 faz uma revisão de conceitos fundamentais à Teoria dos Grafos. O capítulo 3 relaciona Teoria dos Grafos e análise musical através de trechos selecionados da literatura musical. O capítulo final consiste em uma reformulação do *patch* do Tema da *Musica ricercata* VII, aplicando conceitos da Teoria dos Grafos.



# 1 *Musica ricercata* VII: Análise e modelagem

György Sándor Ligeti (1923 – 2006) foi um dos mais influentes compositores dos séculos XX e XXI. Sua ampla obra musical atingiu rara apreciação além do público especializado. Esta popularização pode ser explicada em parte ao uso da música de Ligeti em filmes, *e.g.*, *2001 - Uma Odisséia no Espaço* (1968) e *De olhos bem fechados* (1999) de Stanley Kubrick. Na plataforma de *streaming* digital Spotify, o sétimo movimento da *Musica ricercata* e o Segundo Movimento da Sonatina para Piano a Quatro Mãos figuram entre as mais « populares » no catálogo do compositor. A *Musica ricercata* VII figura duas vezes nesta lista com interpretações de Pierre-Laurent Aimard e Khatia Buniatishvili com 2.924.101 e 582.004 vezes respectivamente. O movimento *II - Andante* da Sonatina para piano a quatro mãos interpretado por Pierre-Laurent Aimard e Irina Kataeva contabilizam 830.969 reproduções<sup>1</sup>. O apreço por estes movimentos, um derivado do outro, atesta claramente o que diz a *vox populi* sobre a obra de Ligeti.

A *Musica ricercata* VII foi o objeto de estudo em um trabalho de modelagem computacional, ligado à disciplina “Algoritmos e técnicas computacionais aplicados aos processos analíticos e criativo” oferecida durante este mestrado no primeiro semestre de 2019.

A técnica da modelagem computacional em música tem presença importante em estudos teóricos dos últimos anos<sup>2</sup>. A ampliação desse campo de estudos está provavelmente relacionada à adoção das **linguagens de programação visual**<sup>3</sup> em *software* de aplicações musicais, *e.g.*, **Max**, **OpenMusic**, **Pure Data**. As **VPL** podem ser mais « acessíveis » aos músicos sem experiência prévia em programação.

A ideia da modelagem é, a partir da análise de uma peça, escolher aspectos/elementos que possam ser representados em linguagem de software, para em seguida recriar o objeto original com variações. A avaliação da qualidade do modelo se faz confrontando a peça original com suas versões geradas algoritmicamente. De modo geral, o modelo sofre ajustes em função dessa comparação, de forma que partes de seu código são alterados em função dos resultados desejados.

Um ponto importante na técnica da modelagem é diferenciar aspectos fixos, que devem se manter nas versões geradas, e aspectos móveis, ou seja, partes do objeto original que podem sofrer transformações de modo interessante e aceitável, explorando potencialidades do material original que são justamente reveladas pela operação de modelagem. Assim, torna-se possível obter versões diferentes da peça original que são consistentes com suas característi-

<sup>1</sup> Todos os números de reproduções verificados em 02/10/2020.

Números disponíveis em: <[https://open.spotify.com/artist/1zb5zmluX2lTbzc7YeQlg?si=FM-g0\\_AnShaDtctJWNjVbQ](https://open.spotify.com/artist/1zb5zmluX2lTbzc7YeQlg?si=FM-g0_AnShaDtctJWNjVbQ)>.

<sup>2</sup> Por exemplo, (OBERHOLTZER, 2015) e (LARTILLOT, 2014).

<sup>3</sup> Ou **VPL**, do inglês « *visual programming language* ».

cas estilísticas e expressivas<sup>4</sup>.

Este capítulo consiste em duas seções - a primeira parte trata de questões analíticas sobre a *Musica ricercata* com foco no sétimo movimento - e a segunda parte trata da modelagem de elementos da *Musica ricercata VII*. Dizer que a análise musical precede a modelagem é parece autoevidente mas esta organização que busca promover a coerência de encadeamento discursivo no presente texto, acaba por revelar que a relação entre análise e modelagem é um processo dinâmico que se retroalimenta constantemente. Em um primeiro momento parece haver uma estrutura hierárquica entre análise e modelagem mas observou-se neste estudo que a abordagem ao se elaborar o funcionamento do modelo influencia ativamente a metodologia de análise.

## 1.1 Análise preliminar

Nesta seção iremos analisar a *Musica ricercata VII* em três aspectos: (1) O contexto histórico de sua criação; (2) seus elementos musicais relevantes para a modelagem<sup>5</sup> e, (3) a presença deste material musical em outras obras de Ligeti.

### 1.1.1 Contextualização

*Musica ricercata* (1951-1953) é uma obra para piano solo constituída por onze movimentos curtos composta por György Ligeti (1923-2006). Às peças, sem títulos, são atribuídos numerais romanos, indicações de caráter e andamento e no caso dos movimentos IX e XI, dedicatória e homenagem a compositores:

**I.** *Sostenuto - Misturato - Prestissimo*

**II.** *Mesto, rígido e cerimoniale – Più mosso, pesante – Senza tempo, rápido – Intenso, agitato – Tempo I – Senza tempo*

**III.** *Allegro com spirito*

**IV.** *Tempo di Valse (poco vivace - « à l'orgue de Barbarie »)*

**V.** *Rubato. Lamentoso – Più mosso, non rubato – Tempo I*

**VI.** *Allegro molto capriccioso*

**VII.** *Cantabile, molto legato*

**VII.** *Vivace. Energico*

<sup>4</sup> Uma discussão aprofundada sobre o tema está além do escopo deste trabalho. Para maiores referências sobre a aplicação de processos de modelagem em composição ver (AGON; ASSAYAG; BRESSON, 2006), (BRESSON; AGON; ASSAYAG, 2006a) e (BRESSON; AGON; ASSAYAG, 2006b).

<sup>5</sup> Outros aspectos analíticos serão discutidos em 3.3.6 (p. 85)

**IX.** (*Béla Bartók in Memoriam*) *Adagio. Mesto - Allegro maestoso – Più mosso, agitato – stringendo – Tempo I (Adagio) Maestoso – Più mosso, stringendo molto – Tempo I. Mesto*

**X.** *Vivace. Capriccioso – Più mosso – Meno mosso, calmo*

**XI.** (*Omaggio a Girolamo Frescobaldi*) *Andante misturato e tranquillo – Pesante e grandioso – Poco meno mosso – Più tranquillo*

Ligeti determinou uma série de restrições durante a composição da *Musica Ricercata*, como ele mesmo explica:

Fica claro para mim, por volta de 1950, que prosseguir com o estilo pós-Bartókiano, no qual eu havia composto até então, não me faria progredir. Eu tinha 27 anos de idade e vivia em Budapeste, completamente isolado de todas as ideias, tendências e técnicas de composição que emergiram na Europa Ocidental do pós-guerra. Em 1951, comecei a experimentar estruturas muito simples de sonoridades e ritmos como se eu fosse construir uma « nova música » a partir do nada. Considerei toda a música que eu conhecia e amava como sendo, para o meu propósito, irrelevante. Perguntei-me: o que posso fazer com uma única nota? Com um intervalo? Com dois? Com determinadas relações rítmicas? Assim nasceram várias peças curtas, especialmente para piano. (LIGETI, 2007 apud KERÉKFI, 2008)

Há uma declarada intenção criativa *ex nihilo*<sup>6</sup> que aponta uma inerente contradição. Ligeti, apesar de não atribuir títulos aos movimentos, deixa importantes referências textuais como, por exemplo, o *Tempo di Valse* do movimento IV e as dedicatórias dos movimentos IX e XI. Como criar algo do nada ao mesmo passo em que se faz referência às fontes criativas? Se considerarmos como válido o princípio *ex nihilo nihil fit*<sup>7</sup>, a contradição apontada constitui um paradoxo lógico. Nada mais razoável portanto, compreender a *Musica ricercata* como uma criação que surge de algo bastante concreto e de especial importância para Ligeti. A ideia de originalidade é, neste sentido, uma procura por uma sonoridade nova, como que surgida ‘do nada’, criada a partir de elementos históricos. Ao considerar “a música que conhecia e amava como irrelevante”, Ligeti tanto proporciona uma ruptura quanto reforça os elos que o conectam com a distante época de Frescobaldi e a próxima Hungria de Bartók. As figuras 1 e 2 mostram que o perfil melódico dos compassos 20 a 23 da *Musica ricercata* VII, e.g., é idêntico ao perfil de *In mixolydian mode* de Bartók (compassos 21 a 23).

<sup>6</sup> Latim: “do nada”.

<sup>7</sup> Latim: “do nada, nada se torna”.



Figura 1 – Bartók (1926-1939): *Mikrokosmos vol. II - In mixolydian mode* (Compassos 21-25)<sup>8</sup>



Figura 2 – Ligeti (1951-1953): *Musica ricercata VII - Tema* (Compassos 19-29)<sup>9</sup>  
 © By kind permission of SCHOTT MUSIC, Mainz - Germany.

Uma sutileza presente no título da obra revela muito do que pode se dizer sobre o processo criativo da mesma. *Musica ricercata* indica dois aspectos complementares: a clara referência à música da Renascença e a resignificação de uma terminologia musical da época.

O verbo italiano *ricercare* significa procurar, buscar, pesquisar. Como terminologia musical (*ricercare, ricercare, ricercata, ricercada*), refere-se inicialmente a um gênero instrumental que busca um formato mais livre, não atrelado a formas pré-fixadas. [...] A partir da década de 1540 vamos encontrar no repertório instrumental italiano um tipo de *ricercare* que se tornou mais comum nas décadas posteriores: aquele de caráter polifônico imitativo. [...] Este tipo de *ricercare* desenvolve-se continuamente até o século XVIII e será essencial para o advento da fuga. Encontra seu ponto culminante na obra do organista italiano Girolamo Frescobaldi (1583-1643). (AGUILAR, 1, p. 3)

Por meio da etimologia, *Musica ricercata* pode ser interpretada literalmente como « música pesquisada ». Esta pesquisa foi desenvolvida através das restrições que Ligeti escolheu como forma de delimitar o campo composicional de cada movimento. Embora Ligeti estivesse isolado das vertentes composicionais da Europa ocidental há, em termos da concepção da macroforma da *Musica ricercata*, semelhanças com o serialismo. Ligeti estruturou os movimentos em função do conjunto de alturas em ordem acumulativa de forma piramidal (ver Tabela 1).

<sup>8</sup> Partitura editada pelo autor.

<sup>9</sup> Partitura editada pelo autor.



Movimento	Classes de altura	Descrição
I	<b>A, D</b>	
II	<b>E# F# G</b>	Seção de escala cromática (Seção de E# frígio & G)
III	<b>C E<sub>b</sub> E<sub>4</sub> G</b>	Triades maior e menor de C
IV	<b>F# G G# A B<sub>b</sub></b>	Seção de escala cromática (Seção de G menor & G#)
V	<b>F G A<sub>b</sub> B C# D</b>	Dois tricordes separados por trítono
VI	<b>E F# G A B C# D</b>	E dórico
VII	<b>F G A<sub>b</sub> A<sub>4</sub> B<sub>b</sub> C D E<sub>b</sub></b>	F mixolídio + A <sub>b</sub>
VIII	<b>B C C# D E F<sub>4</sub> F# G# A</b>	B dórico + G - C
IX	<b>C# D D# F F# G# A A# B C</b>	Escala cromática sem E - G
X	<b>D D# E F F# G G# A A# B C#</b>	Escala cromática sem C
XI	<b>A B<sub>b</sub> B C D<sub>b</sub> D E<sub>b</sub> E F F# G G#</b>	Total cromático

Tabela 1 – Classes de altura da *Musica ricercata*. (Centro(s) ‘tonais’ em **negrito** e notas adicionadas em *itálico*.)

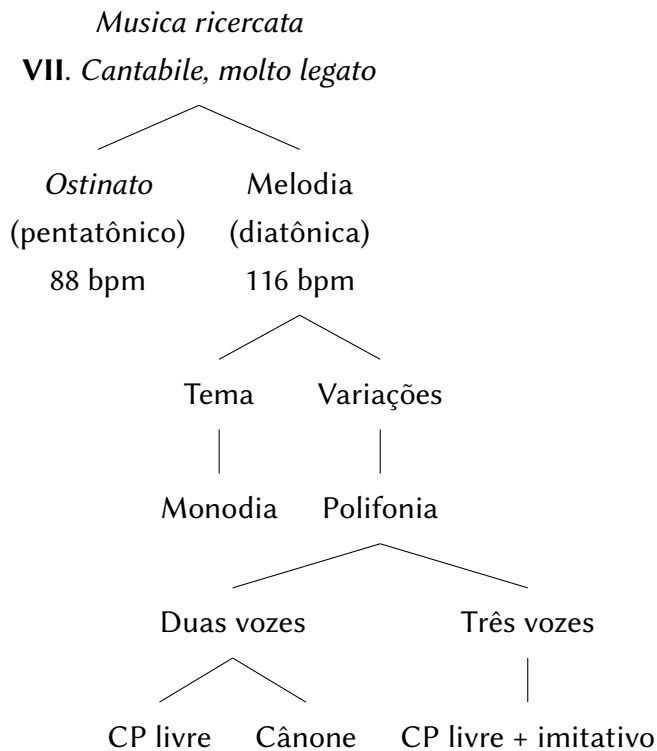
Fonte: ‘A “new music” from nothing’: György Ligeti’s *Musica ricercata*’ (KERÉKFY, 2008, p. 215)

### 1.1.2 Forma e Textura

Do ponto de vista formal, a *Musica ricercata* VII consiste em **Tema e Variações** sobre um **Basso Ostinato**. O **tema** é apresentado como **monodia** enquanto que as **variações** são **polifônicas**. Podemos dividir a *Musica ricercata* VII em 7 seções<sup>10</sup>:

- (i) Cinco repetições do *Basso Ostinato*
- (ii) Monodia (c. 1-27 do início do sexto *loop* do *ostinato*)
- (iii) Duas vezes em contraponto livre (c. 29-54)
- (iv) Duas vezes imitativas em cânone (c. 56-82)
- (v) Três vezes em polifonia mista (contraponto livre e imitativo) (c. 84-103)
- (vi) Duas vezes em contraponto livre com mudança de registro (c. 105-115)
- (vii) Duas vezes em contraponto livre (mudança para o registro agudíssimo) (c. 117-126)
  - (vii). a Seis *loops* do *Ostinato* no registro agudo (c. 126)
  - (vii). b *Ostinato* passa para a mão direita sobre um acorde de Fá da mão esquerda
  - (vii). c Seis *loops* seguidos de uma mudança no perfil ( *poco stringendo* )
  - (vii). d Bordadura que se transforma em Trinado ( *Fermata lunga* )

<sup>10</sup> A última seção é subdividida em 4 partes.



Legenda: Árvore textural da *Musica ricercata VII*.  
(»CP« Abreviatura para contraponto.)

### 1.1.3 Genealogia de uma melodia

O tema da *Musica ricercata VII* tem conexões com o folclore romeno e com a música de Bartók (figuras 1 e 2), mas a primeira versão deste material musical na obra de Ligeti aparece no Segundo Movimento da Sonatina (Cinco Peças para Piano a Quatro Mãos).

#### 1.1.3.1 Sonatina

O segundo movimento da Sonatina possui uma textura de acordes que se movem em blocos paralelos. As semelhanças com *Musica ricercata VII* são observadas por Kerékfy (2008):

O mesmo pode ser dito quando o Nº VII da *Musica ricercata* é comparado à sua versão original, o segundo movimento da Sonatina. Em ambos, a música consiste de duas camadas: uma da melodia e uma do *ostinato*. A diferença é que, enquanto na Sonatina as camadas estão conectadas motivica, harmônica e ritmicamente, em *Musica ricercata* essas camadas não estão sincronizadas: nela, a melodia quase folclórica desdobra-se contra um fundo *ostinato* de septinas *pp*. (KERÉKFY, 2008, p. 212)

## PRIMO

23

## 2.

Andante

*p legato possibile*

Figura 3 – Ligeti (1950): Fünfft Stücke für Klavier zu vier Händen - IV. Sonatina, 2. Andante « Piano 1 » © By kind permission of SCHOTT MUSIC, Mainz - Germany.

22

## SECONDO

## 2.

Andante

*p legato possibile*

Figura 4 – Ligeti (1950): Fünfft Stücke für Klavier zu vier Händen - IV. Sonatina, 2. Andante « Piano 2 » © By kind permission of SCHOTT MUSIC, Mainz - Germany.

## 1.1.3.2 Concerto para violino

A *Aria* do Concerto para Violino é mais um exemplo do uso que Ligeti faz desta melodia tão emblemática em sua história. Nesta *Aria* porém, a melodia se encontra no modo lídio (figura 6). Dantas e Lunsqui apontam sua clara origem nas *Bagatelles for Wind Quintet* e na *Musica ricercata VII*:

É impossível não comparar este movimento ao primeiro movimento da Sonata para Viola, *Hora Lungă*, que foi a obra seguinte de Ligeti a ser estreada,

em 1994. O primeiro movimento é executado inteiramente na IV corda da viola e também se inicia com uma melodia com aspectos modais, evoluindo depois para a exploração de harmônicos naturais que se encontram no limite do exequível em um instrumento de corda. A melodia que serve de tema para a ária provém, de acordo com o próprio compositor, da terceira das *Bagatelles for Wind Quintet*, que por sua vez, trata-se de uma adaptação de alguns dos movimentos da *Musica Ricercata*, originalmente para piano, para quinteto de sopros. [...] Um *ostinato* na voz inferior, que deve ser tocado ritmicamente independente, inicia o movimento seguido pela melodia, quase idêntica ao tema da ária do Concerto. Há uma diferença importante no modo utilizado: ao contrário do concerto que utiliza a melodia em modo Lídio, aqui ela se encontra em Fâ Mixolídio, com o sétimo grau rebaixado em um semitom (Mi bemol). (DANTAS; LUNSQUI, 2015, p.21)

26

## II. Aria, Hoquetus, Choral

**3 Andante con moto** ♩ = 100

*violino solo* sul IV sin al segno *cantabile, semplice ma espressivo*

*P* separate bowing, legato  
Strich für Strich

13

*Violino solo*

25 **A**

*Va. I* senza scord. n

*P* separate bowing, legato  
Strich für Strich

Figura 5 – Ligeti (1990, rev. 1992): Concerto para Violino, II. *Aria* © By kind permission of SCHOTT MUSIC, Mainz - Germany.

**VII**

György Ligeti

**Cantabile, molto legato** ♩ = 116

*p sempre* *mf*

4 5 6 7 8 9 10 11

12 13 14 15 16 17 18

19 20 21 22 23 24 25 26 27

Figura 6 – (LIGETI, 1951-1953): *Musica ricercata VII* - Tema © By kind permission of SCHOTT MUSIC, Mainz - Germany.

<sup>10</sup> Partitura editada pelo autor.

## 1.1.3.3 Sonata para viola solo

Embora com maior diferenciação de detalhes, como a utilização de microtons, podemos reconhecer traços de semelhança da melodia da *Musica ricercata VII* com *Hora lungă*, primeiro movimento da Sonata para Viola, de Ligeti (figura 7).

**Sonata**  
für Tabea Zimmermann  
1. Hora lungă  
(1994)

György Ligeti  
\*1923

Lento rubato e molto dolente,  $\text{♩} = 76$

<sup>\*)</sup>  $\frac{12}{16}$  sempre sul IV - al fine

Figura 7 – Ligeti (1991): Sonata para viola solo, I. *Hora lungă*

© By kind permission of SCHOTT MUSIC, Mainz - Germany.

Ligeti reforça nas notas de performance desse movimento sua relação com a música folclórica romena:

1º movimento - *Hora lungă*: Evoca o espírito da música folclórica romena que, juntamente com a húngara e a dos ciganos, tiveram forte impacto sobre mim na infância. Entretanto eu não utilizo diretamente o folclore ou citações folclóricas, apenas são feitas alusões. *Hora lungă* significa "dança lenta", mas na tradição romena não se trata de uma dança e sim de canções folclóricas (da província mais ao norte do país, *Maramureș*, no centro dos montes Cárpatos) nostálgicas e melancólicas, ricamente ornamentadas. Há uma forte similaridade com o "*Cante jondo*" da Andaluzia e também com a música folclórica

do Rajastão. Se isso tem a ver com a migração dos ciganos ou é uma base comum indo-européia de uma tradição melódica diatônica é difícil dizer. Esse movimento é tocado inteiramente na corda Dó e nele faço uso de intervalos naturais (terça maior pura, sétima menor pura e também do 11º harmônico).<sup>11</sup> (LIGETI, 1991, Prefácio)

De forma bem sucinta podemos enumerar a genealogia deste material musical que acompanhou Ligeti por toda sua vida:

- (i) Folclore romeno
- (ii) Béla Bartók: *Mikrokosmos*
- (iii) György Ligeti: Cinco Peças para Piano a Quatro Mãos: IV. Sonatina - 2. ***Andante***
- (iv) György Ligeti: *Musica ricercata* - VII. ***Cantabile, molto legato***
- (v) György Ligeti: Seis bagatelas para instrumentos de sopro - III. ***Allegro grazioso***
- (vi) György Ligeti: Concerto para Violino - II. ***Aria***
- (vii) György Ligeti: Sonata para Viola solo - I. ***Hora lungă***

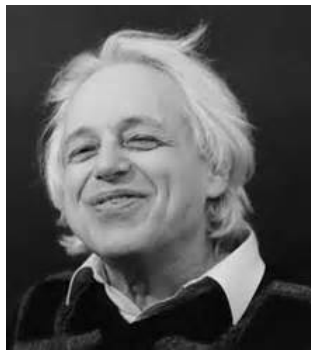


Figura 8 – György Sándor Ligeti

---

<sup>11</sup> Tradução do autor.

## 1.2 Modelagem em Max

BABA IS YOU

Como trabalho final para a disciplina « Algoritmos e técnicas computacionais aplicadas a processos analíticos e criativos », ofertada durante o primeiro semestre de 2019 na Escola de Música da UFMG, dois componentes texturais da sétima peça da *Musica ricercata* de György Ligeti foram modelados matematicamente e recriados algorítmicamente no **Max**<sup>12</sup> com o auxílio da biblioteca **bach**<sup>13</sup>. Os componentes são o *ostinato*, tocado pela mão esquerda do pianista, e o tema, executado pela mão direita.

The image shows a musical score for Ligeti's *Musica ricercata VII*, measures 1 to 12. The score is in 2/4 time and B-flat major. The right hand part is marked 'Cantabile, molto legato' with a tempo of c. 116. The left hand part is marked 'una corda con moto, giusto' with a tempo of c. 88. The left hand part is marked 'pp sempre molto leggero quasi senza ped.' and the right hand part is marked 'pochiss. ped. sin al fine'. The score shows a complex texture with many notes in both hands.

Figura 9 – Ligeti (1951-1953): *Musica ricercata VII* « Compassos 1 ao 12 »  
© By kind permission of SCHOTT MUSIC, Mainz - Germany.

### 1.2.1 Considerações sobre a Metodologia

Essencialmente toda a metodologia de modelagem aqui empregada é simbólica, *i.e.*, todos os elementos musicais são matematicamente representados. Há um processo de codificação dos elementos musicais em valores numéricos seguido por computações algorítmicas e, por fim, à decodificação dos dados numéricos em representação musical (partitura).

A técnica de representação numérica de elementos musicais é um tipo de *formalismo* musical. O *formalismo*, em música, tem como obra seminal o livro *Formalized Music Thought and Mathematics in Composition* (1963) do compositor Iannis Xenakis. Tanto o termo quanto a ideia de um *formalismo* musical tem origem no *formalismo* matemático.

<sup>12</sup> <<https://cycling74.com/products/max>>. (Acesso em 07/2020.)

<sup>13</sup> <<https://www.bachproject.net/>>. (Acesso em 07/2020.)

“Em fundamentos da matemática, filosofia da matemática e filosofia da lógica, formalismo<sup>14</sup> é uma teoria que sustenta que proposições matemáticas e lógicas podem ser definidas por sequências de símbolos regidas por regras estabelecidas de manipulação.”

Alguns dos principais matemáticos e filósofos proponentes do *formalismo* são Gottlob Frege (*The Foundations of Arithmetic*), Alfred Northon Whitehead e Bertrand Russel (*Principia Mathematica*), David Hilbert, Kürt Gödel e Ludwig Wittgenstein *Tractatus Logico-Philosophicus*.

Veremos ao longo da dissertação que análise e modelagem são processos que se retroalimentam:

No decorrer do século XX houve um dramático crescimento no número de composições criadas por processos composicionais em contraposição ao capricho pessoal. Esse interesse claramente se inicia com os métodos combinatórios da segunda escola de Viena e continua em Boulez, Cage, Xenakis, Reich e outros. Para que a teoria de composição possa ser utilizada, precisamos nos mover da análise dos resultados para a análise dos processos através dos quais aqueles resultados foram obtidos. Com a análise de uma peça por meio de procedimentos estatísticos, algorítmicos e lógicos, podemos entender melhor os processos pelos quais o trabalho foi criado e o sentido subjacente às notas. (STULZ, 2012, p. 20)

## 1.2.2 Modelagem do *Ostinato*

### 1.2.2.1 Domínio das Alturas

O *ostinato* é constituído por sete notas de iguais durações tocadas em *loop*. Cada ciclo destas sete notas está compreendido em um pulso de 88 *bpm*.

No Max as alturas são convertidas em valores numéricos segundo o padrão técnico MIDI<sup>15</sup>. O dó central do piano,  $C_4$ , segundo a convenção *Scientific pitch notation*, corresponde ao número 60. A nota  $F\sharp_4$ , distante 5 semitons do  $D\flat_4$ , possui valor 65, portanto. As sete notas do *ostinato* têm, respectivamente, valores iguais a 53, 48, 51, 46, 48, 43 e 41<sup>16</sup>.

### 1.2.2.2 Domínio do Tempo

A duração do pulso, em segundos, é obtida dividindo-se 60 por 88 e, *ipso facto*, cada colcheia do *ostinato* equivale a um sétimo desta duração (aproximadamente 97 milissegundos).

O objeto ***bach.roll*** converte as informações alfanuméricas em notação proporcional. Ele recebe a lista de números que representam as alturas e as insere sequencialmente a cada

<sup>14</sup> Definição retirada de <[https://en.wikipedia.org/wiki/Formalism\\_\(philosophy\\_of\\_mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Formalism_(philosophy_of_mathematics))>. Informações mais aprofundadas podem ser encontradas em: <<https://plato.stanford.edu/entries/formalism-mathematics/>>. (Acessos em 11/2020.)

<sup>15</sup> **MIDI**, ou « *Musical Instrument Digital Interface* », trabalha com valores de 0 a 127.

<sup>16</sup> No *patch* os valores numéricos que representam as alturas são inseridos na oitava de registro médio para facilitar o cálculo inicial.



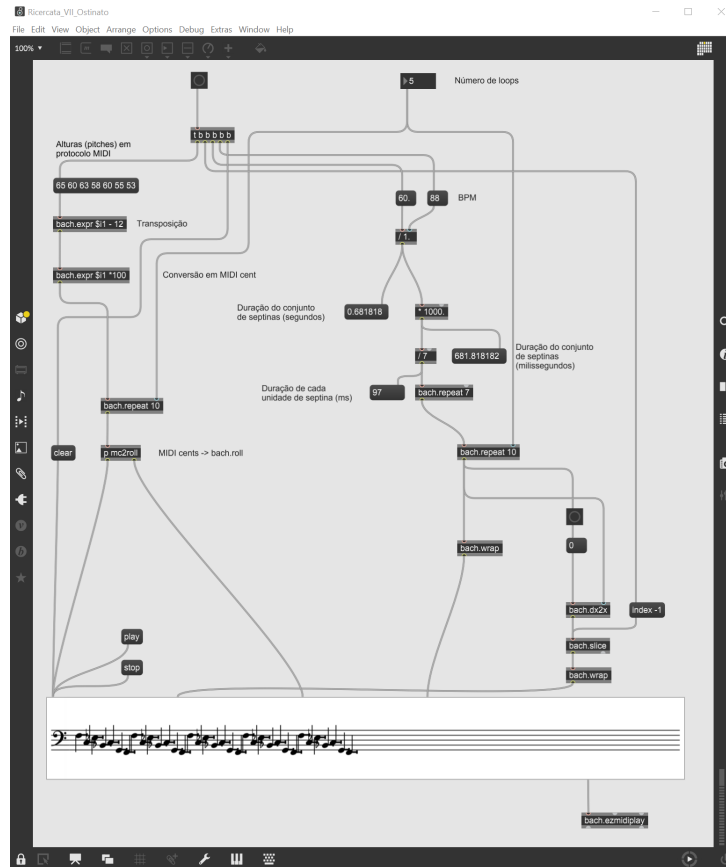


Figura 10 – *Musica ricercata VII - Ostinato*: Patch criado em Max

intervalo de 97 milissegundos. Embora pareça intuitivo, é fundamental que o *patch* execute cada nota após o término da nota que a precede. Um objeto *number* permite que se escolha quantos *loops* serão escritos.

### 1.2.3 Modelagem do Tema

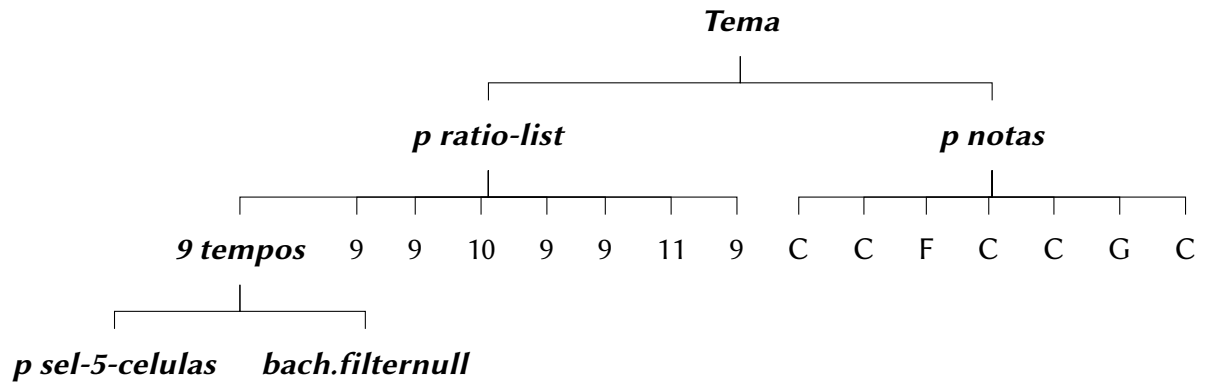
O tema é uma longa melodia de 27 compassos notados em  $\frac{3}{4}$  que pode ser dividida em pequenas frases. Há duas funções melódicas no tema: notas longas que funcionam como *tenu-tas* e notas curtas que constituem pequenos motivos. Estes motivos, além de criar movimento e curvas melódicas, funcionam como conectores entre as notas longas. As frases são aqui, delimitadas pela duração compreendida entre as notas longas. Usando a semínima como valor unitário, as 8 frases duram 9, 9, 9, 11, 9, 9, 10 e 9 tempos respectivamente. A nota final sobre a qual toda a melodia repousa é contabilizada à parte e possui o valor de 6 tempos<sup>17</sup>. O tema é recriado em de duas etapas principais:

- (i) a estruturação do esqueleto rítmico da frase e
- (ii) a distribuição das alturas.

<sup>17</sup> Para fins de simplificação a duração da *fermata* é ignorada.



O *patch* principal é constituído por *subpatches* e é organizado conforme a seguinte estrutura:



O *subpatch* **p-ratio-list** é responsável por coletar as informações relativas às 8 frases. A nota cadencial é escrita como objeto *mensagem* contendo a fração  $\frac{6}{4}$  que corresponde à duração de 6 semínimas.

É importante destacar aqui que os valores rítmicos deste *patch* são representados sempre como numeros inteiros ou frações sempre tento a semínima como base. Esta lógica é diferente do *patch* do *Ostinato* em que as durações eram calculadas em milissegundos e a sua ordem sequencial dependia destas informações.

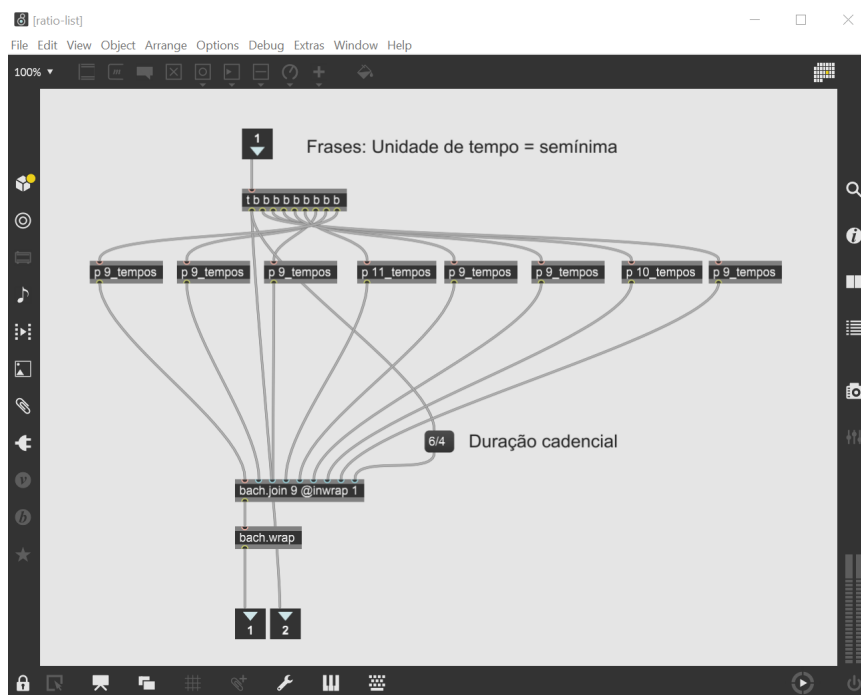


Figura 12 – *Subpatch* **p-ratio-list**

Sendo a semínima o valor unitário (semínima = 1), obtemos as seguintes frações para suas subdivisões: colcheia igual a  $\frac{1}{2}$  e semicolcheia igual a  $\frac{1}{4}$ . As figuras abaixo ilustram as *tenutas* e os motivos conectivos de acordo com sua posição métrica dentro dos compassos  $\frac{3}{4}$ :

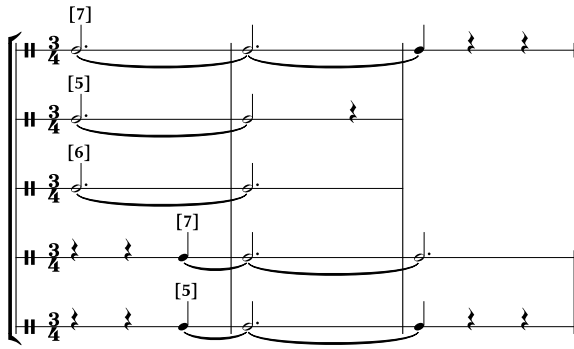


Figura 13 – *Tenutas*

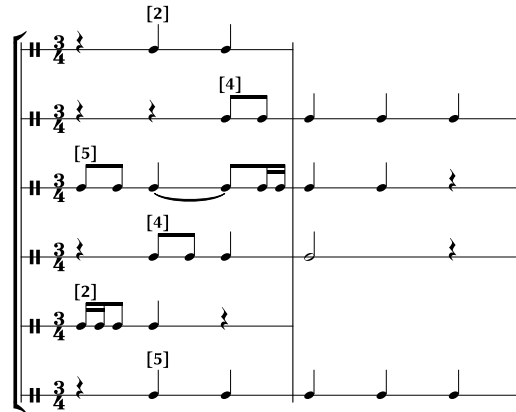


Figura 14 – *Células conectivas*

O *subpatch p-9-tempos* cria a estrutura rítmica das frases de 9 tempos. Há dois objetos *mensagem* que listam hierarquicamente a subdivisão entre *tenutas* (à esquerda no *subpatch*) e células conectivas (à direita). Os 9 tempos são divididos em 3 combinações correspondentes aos conjuntos: 7 e 2; 6 e 3; e; 5 e 4. O objeto *bach.random* seleciona um destes conjuntos de dois elementos<sup>18</sup>. Suponhamos que o *bach.random* selecione o conjunto com os elementos 7 e 2. Isto significa que será criado um espaço<sup>19</sup> de 7 tempos para a *tenuta* e outro espaço de 2 tempos para a célula conectiva. O objeto *mensagem*, à direita contém 5 conjuntos com os seguintes elementos:

- (i) 2 (mínima)
- (ii) 1 (semínima)
- (iii)  $\frac{1}{2}$  (colcheia),  $\frac{1}{2}$  (colcheia)
- (iv)  $\frac{1}{4}$  (semicolcheia),  $\frac{1}{4}$  (semicolcheia),  $\frac{1}{2}$  (colcheia)
- (v)  $\frac{3}{2}$  (semínima pontuada),  $\frac{1}{4}$  (semicolcheia),  $\frac{1}{4}$  (semicolcheia)

Note que nesta lista há três tipos de conjuntos, os que possuem apenas um elemento, os que possuem dois, e os que possuem três elementos.

<sup>18</sup> O processo aqui empregado é pseudorandômico. Uma discussão aprofundada sobre processos aleatórios, tanto no campo da ciência da computação quanto em música, vai além do escopo desta dissertação. Processos aleatórios na obra de John Cage são analisados em (ROSSI, 2015).

<sup>19</sup> Espaço, aqui se refere a distância entre dois pontos temporais.

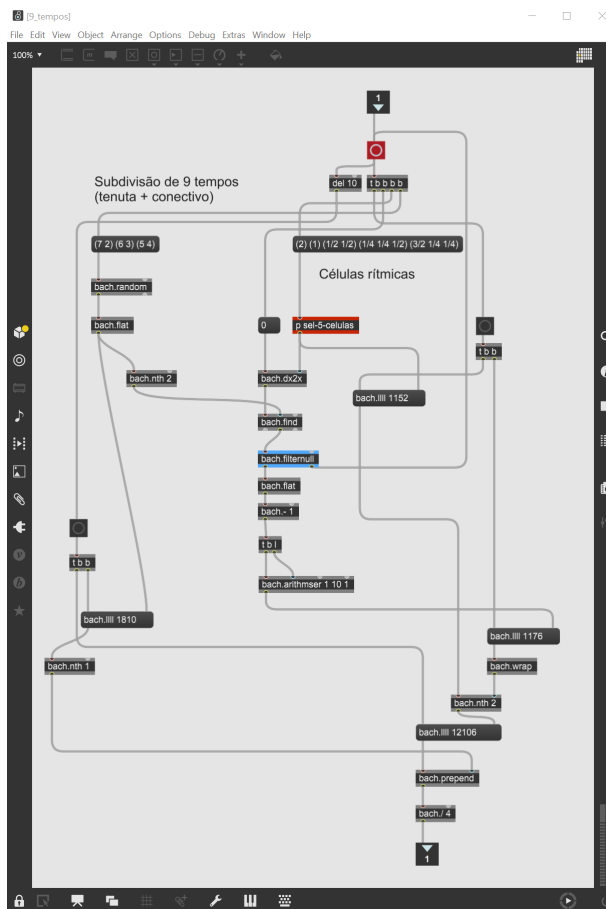


Figura 15 – *Subpatch p-9-tempos*

O *subpatch sel-5-celulas* seleciona “aleatoriamente” 5 conjuntos desta lista. O fato de que há 5 conjuntos na lista não significa que todos os conjuntos serão selecionados pelo *subpatch* sendo portanto, possível a seleção repetida de conjuntos. Caso sejam selecionados 5 conjuntos idênticos, como por exemplo, o primeiro conjunto da lista que contém o valor 2, ocorrerá um problema. Há espaço apenas para 2 tempos e o *bach.random* selecionou 5 vezes o mesmo conjunto com o valor dois, logo não há “espaço” para as 5 semínimas. O objeto *bach.filternull* dispara uma informação para que seja realizada outra operação até que os valores das células conectivas<sup>20</sup> “encaixem” dentro do espaço para elas reservado.

<sup>20</sup> No *patch*, as células conectivas são referidas como células rítmicas.

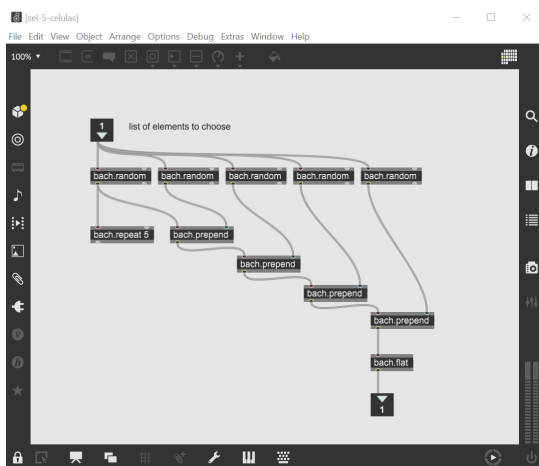


Figura 16 – *Subpatch sel-5-celulas*

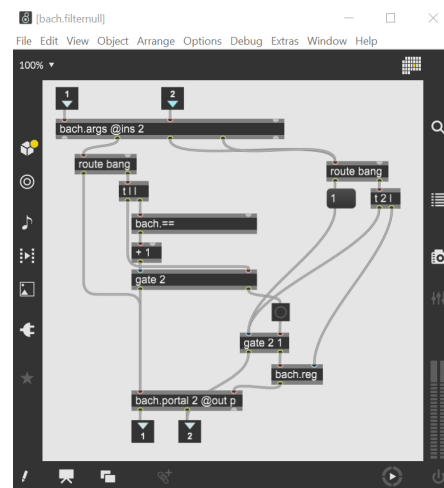


Figura 17 – *Subpatch bach.filternull*

As alturas das *tenutas* e das células conectivas são organizadas no *subpatch p-notas*. Há 8 *subpatches* para cada uma das 8 frases organizados da esquerda para a direita e um objeto *mensagem* à direita com uma lista com um único elemento, o número 6700, que em MIDI *cents* representa a nota  $G_4$ , cadência final do tema.

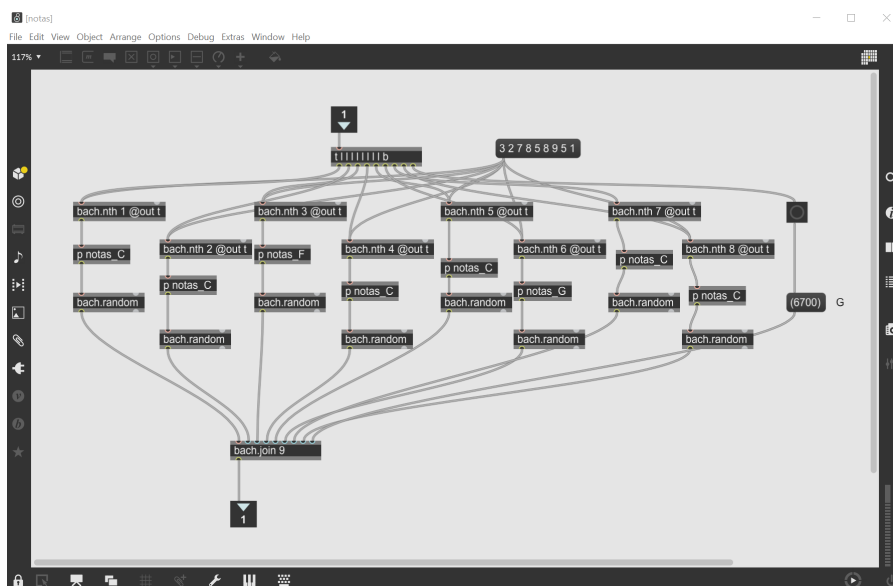


Figura 18 – *Subpatch p-notas*

O *subpatch p-notas-C* é o mesmo em todas as vezes que aparece no *subpatch p-notas*. Neste *subpatch* há 12 objetos *mensagem*. Cada um destes objetos contém quatro listas (delimitadas pelos parênteses). Estas listas, de cima para baixo, aumentam o número de elementos desde 2 até 13 elementos. Os elementos representam alturas em MIDI *cents*. O *subpatch* seleciona uma das listas de acordo com o esqueleto rítmico estabelecido previamente, ou seja, se há espaço para 5 notas, ele irá selecionar a *mensagem* que contém listas de 5 elementos. Cada *mensagem* contém sempre 4 listas com número variado de elementos (de 2 a 13). Isto significa que o *patch* seleciona uma dentre quatro opções de lista de alturas. Os elementos destas listas não são permutáveis. A principal razão para isto é preservar a estrutura original das *tenutas* da *Musica ricercata VII*<sup>21</sup>.

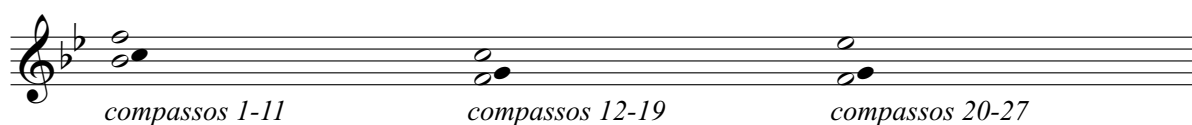


Figura 19 – Tema: Tessitura

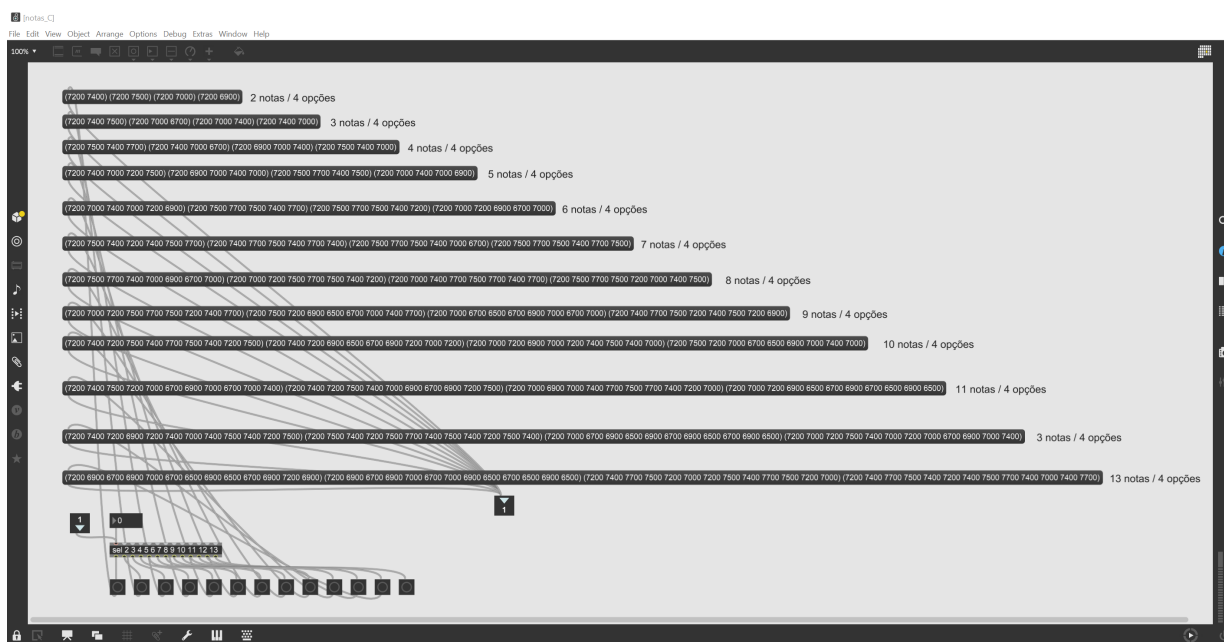


Figura 20 – *Subpatch p-notas-C*

Como as *mensagens* de cada um destes *subpatches* contém um número grande de listas e elementos, as alturas em MIDI *cents* foram inseridas sem muito critério para otimizar o tempo disponível para a criação do *patch*. O que foi preservado em relação ao tema de Ligeti foram as primeiras notas de cada frase e o conteúdo harmônico das alturas, no caso do tema, as notas de Fá mixolídio.

<sup>21</sup> Na Figura 11, as notas negras são polos e as brancas são os limites da tessitura destes polos. Notas como o F<sub>5</sub>, apesar de ser descrita em minha análise como uma *tenuta* e ser o ponto culminante do tema, não chega, no meu entendimento, a constituir um polo.

A figura abaixo mostra o conteúdo harmônico da textura híbrida da peça. Há um polimodalismo gerado pela pentatônica do *ostinato* sobreposta aos modos mixolídio e dórico dos Tema e Variações. Mais à frente iremos explicar o que cria o polimodalismo em uma das *variações*.



Figura 21 – Conteúdo harmônico do *Ostinato* e do Tema e Variações

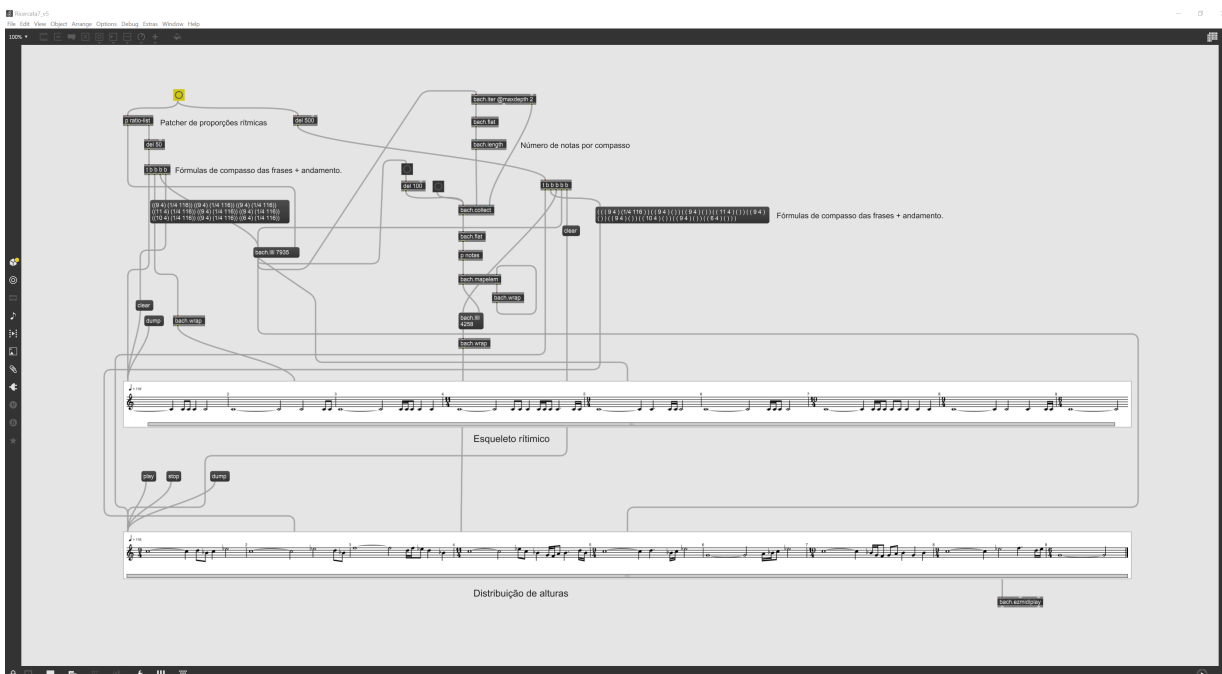


Figura 22 – Tema: *Patch* principal



## 1.2.4 Limitações

### 1.2.4.1 Limitações do modelo do *Ostinato*

O *patch* feito para o *Ostinato* o recria *ipsis litteris*<sup>22</sup>. Este *patch* mais se aproxima de procedimentos de notação formalizada<sup>23</sup> não sendo arquitetado para a criação de materiais musicais. Uma possível elaboração deste *patch* seria manipular o objeto **mensagem** que contém as alturas do *ostinato*. Outra possível elaboração do *patch* é manipular transformações de conteúdo harmônico do *ostinato* após um determinado número de ciclos concluídos, e.g., após 30 ciclos do *loop* a terceira nota do *ostinato* passa a ser Mi♭. O *patch* auxilia no controle composicional destas transformações porque permite que se calcule com precisão qual a duração de cada secção harmônica do *ostinato* a ser criado em relação ao fluxo temporal de outras camadas texturais com andamentos independentes. Desta forma é possível incrementar a polifonia entre as camadas não só do ponto de perspectiva temporal mas também sobre a perspectiva harmônica.

### 1.2.4.2 Limitações do modelo do Tema

O *patch* do tema « cria »<sup>24</sup> melodias similares ao tema original. De forma intuitiva pode-se perceber anomalias estilísticas entre a melodia de Ligeti e as geradas pelo *patch*. As variações de ordem rítmica, i.e., as permutações e ou novas combinações das células conectivas não parecem ser responsáveis por esta detecção de anomalias estilísticas<sup>25</sup>. Já os parâmetros de ordem das alturas parecem ser os responsáveis pelas diferenças estilísticas. Para testar esta hipótese recorreremos a uma metodologia baseada em Teoria dos Grafos. Esta metodologia permite uma visualização dos encadeamentos das alturas.

<sup>22</sup> Latim para “letra por letra” e no caso aqui, nota a nota.

<sup>23</sup> Um exemplo de notação formalizada é *Désordre*, do primeiro livro de *Études* de Ligeti, transcrito no Abjad: <[http://abjad.mbrsi.org/literature\\_examples/ligeti.html](http://abjad.mbrsi.org/literature_examples/ligeti.html)>. (Acesso em 07/2020.)

<sup>24</sup> As « Guillemets » são um galicismo tipográfico punctual adotadas pelo autor.

<sup>25</sup> Reafirmo que a avaliação sobre aspectos estilísticos é feita de forma intuitiva por parte exclusiva do autor, não seguindo nenhum protocolo de pesquisa psicoacústica. Ademais, testar a hipótese sobre a identidade estilística da melodia implicaria em uma dissertação completamente diferente.



## 2 Teoria dos Grafos

Esta dissertação procura na área matemática da Teoria dos Grafos uma forma de expandir as ferramentas do campo da análise musical. Para melhor estabelecer uma conexão entre as duas áreas, torna-se necessária a exposição de conceitos, definições e nomenclaturas da Teoria dos Grafos de modo a permitir a compreensão fluída por um leitor da área da música que pode não estar familiarizado com definições e formulações matemáticas. A pesquisa inicial em artigos das enciclopédias (*MathWorld* e *Wikipedia*) permitiu uma compilação de conceitos e definições que o autor avaliou como interessantes ao campo de análise musical. Nem todos estes conceitos e definições foram aplicados em análise musical nesta dissertação mas o autor considera que sua pertinência promove pesquisas futuras e quiça, a pesquisa de terceiros. As fontes primárias são os trabalhos de (HARARY, 1969), (BOLLOBÁS, 1998), (WEST, 2001), (DIESTEL, 2005), (BENDER; WILLIAMSON, 2010) e (GUICHARD, 2017). A maioria das definições aqui reunidas são formuladas *verbatim*, ou « essencialmente *verbatim* » e todas as traduções são do autor. O autor optou por seguir as recomendações da *American Mathematical Society* descritas em **AMS Style Guide Journals - October 2017** no item **4.1.3. Definition style** (p.33)<sup>1</sup> no que diz respeito à organização de definições matemáticas. O autor também seguiu as recomendações da **AMS** para a criação do « ambiente **Postulado** » em  $\LaTeX$  conforme o item **4.1.1. Theorem style** (p.31).

As terminologias em Teoria dos Grafos são relativamente complexas e termos similares por muitas vezes possuem sutis diferenças conceituais. Harary (1969, p. 8) faz a seguinte consideração: “Acreditamos que uma terminologia uniforme [em Teoria dos Grafos] nunca será alcançada, e não é algo necessariamente desejável.”<sup>2</sup> Este problema é delicado porque os termos provém em sua imensa maioria do inglês e suas respectivas traduções podem levar a erros e ou confusões semânticas, em particular quando se trata de definições técnicas. Harju (2011, p. 3) observa que não há padronização para nomenclatura em Teoria dos Grafos:

Não há notação padrão para objetos em Teoria dos Grafos. É natural, já que os termos empregados para nomear os objetos refletem suas aplicações. Logo, por exemplo, se consideramos uma rede de telecomunicações (digamos, para *email*) como um grafo, então os computadores desta rede são chamados de nós em vez de vértices ou pontos. Por outro lado, outros nomes são usados para estruturas moleculares em química, *flow charts* em programação, e assim por diante.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Disponível em: <<https://www.ams.org/publications/authors/AMS-StyleGuide-online.pdf>>. (Acesso em 01/2021.)

<sup>2</sup> Tradução do autor. Texto original em inglês: “We believe that uniformity in graphical terminology will never be attained, and is not necessarily desirable.”

<sup>3</sup> Tradução do autor. Texto original em inglês: “There are no standard notations for graph theoretical objects. This is natural, because the names one uses for the objects reflect the applications. Thus, for instance, if we consider a communications network (say, for email) as a graph, then the computers taking part in this network, are called nodes rather than vertices or points. On the other hand, other names are used for molecular structures in chemistry, flow charts in programming, human relations in social sciences, and so on.”

## 2.1 Histórico

A Teoria dos Grafos remonta ao problema das [Sete pontes de Königsberg](#)<sup>4</sup>. Perguntava-se na época, se era possível traçar uma rota que percorresse todas as sete pontes sem utilizar a mesma ponte duas vezes. Leonard Euler acreditava que esse problema estava relacionado a um tópico que Gottfried Wilhelm Leibniz chamou de *geometria situs*, ou geometria da posição. [Euler \(1741\)](#) demonstrou que tal percurso é impossível e sua publicação *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* é considerada como a origem da Teoria dos Grafos. Apesar de Euler ter considerado o problema na época como matemática recreativa, sua publicação estabeleceu uma área amplamente estudada em matemática e em ciência da computação. Embora seja um campo relativamente antigo da matemática da Era Moderna há, ainda hoje, avanços na Teoria dos Grafos como, *e.g.*, ([SHITOV, 2019](#)). O problema do [novelamento de proteínas](#) é, segundo os autores do AlphaFold 2, modelado como um grafo:

Uma proteína enovelada pode ser considerada como um “grafo espacial”, onde os resíduos [de aminoácidos] são os vértices e as arestas conectam os resíduos em estreita proximidade. Este grafo é importante para compreender as interações físicas dentro das proteínas, assim como sua história evolutiva. Para a versão mais recente do AlphaFold, usado em CASP14, criamos um sistema de rede neural baseado em atenção, treinado ponta-a-ponta, que tenta interpretar a estrutura deste grafo, enquanto pondera sobre o grafo implícito que está construindo. Ele usa sequências evolutivamente relacionadas, alinhamento de sequência múltipla (MSA) e uma representação de pares de resíduos de aminoácidos para refinar este grafo.<sup>5</sup> ([JUMPER et al., 2020](#))

A Figura abaixo é um mapa que ilustra o rio Pregel, as ilhas Kneiphof e Lomse, e as sete pontes:

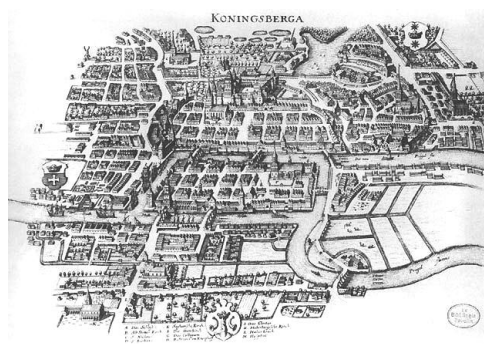


Figura 23 – As sete pontes de Königsberg: Mapa de Merian-Erben, 1652

<sup>4</sup> Algumas das sete pontes foram destruídas durante a Segunda Guerra Mundial e Königsberg (cidade da extinta Prússia) atualmente é Kaliningrado na Rússia.

<sup>5</sup> Tradução do autor. Texto original em inglês: “A folded protein can be thought of as a “spatial graph”, where residues are the nodes and edges connect the residues in close proximity. This graph is important for understanding the physical interactions within proteins, as well as their evolutionary history. For the latest version of AlphaFold, used at CASP14, we created an attention-based neural network system, trained end-to-end, that attempts to interpret the structure of this graph, while reasoning over the implicit graph that it’s building. It uses evolutionarily related sequences, multiple sequence alignment (MSA), and a representation of amino acid residue pairs to refine this graph.”

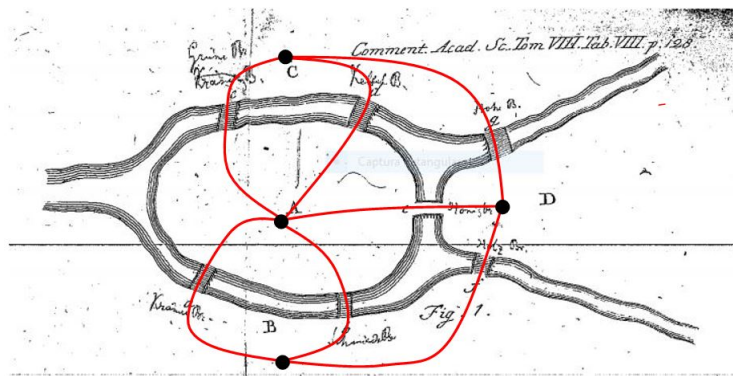


Figura 24 – Mapa das sete pontes no trabalho original de Euler

Legenda: Topologia destacada em vermelho.

A Figura acima foi retirada da publicação original de Euler.

Na modelagem proposta por Euler, todas as porções terrestres são representados por pontos e as pontes como linhas que conectam os pontos. Em Teoria dos Grafos os pontos são chamados de vértices e as linhas de arestas. Nesta representação obtemos a seguinte Figura:

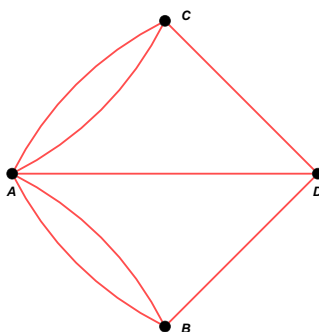


Figura 25 – As sete pontes de Königsberg: Representação em grafo

De maneira simplificada, o trabalho de Euler demonstra que, partindo-se do vértice **A**, toda vez que se passa por qualquer outro vértice, duas arestas são usadas: uma de chegada e uma de saída. Assim, se for possível achar uma rota que use todas as arestas do grafo e comece e termine em **A**, o número total de chegadas e saídas de cada vértice deve ser um valor igual ou múltiplo de 2. No entanto, temos que os vértices **B**, **C** e **D** possuem 3 arestas incidentes e o vértice **A** possui 5. Assim, uma rota percorrendo todas as sete pontes sem utilizar a mesma ponte duas vezes é impossível. Um **caminho euleriano** percorre cada extremidade de um grafo uma vez e apenas uma vez. A conclusão de Euler de que esse caminho só é possível em um grafo que contém no máximo dois vértices de grau ímpar, é considerado como o primeiro teorema da teoria dos grafos.

A representação em forma de grafo (Figura 24) pode induzir a um equívoco. É possível interpretar a forma constituída por seções do plano compreendido pelos vértices **A**, **B**, **C** e

D como áreas e associá-los às porções terrestres. Porém, no grafo as porções terrestres são representadas pelos vértices como na Figura 23. A representação de Euler em forma de grafo comprime a área bidimensional em pontos de dimensão zero. Em Teoria dos Grafos, *ipso facto*, vértices não são equivalentes aos vértices da Geometria Euclidiana. A Teoria dos Grafos também é considerada como ponto de partida da área matemática que foi “batizada” no século XIX por Johann Benedict Listing como **Topologia**. A Figura<sup>6</sup> abaixo ilustra espaços topológicos equivalentes embora geometricamente distintos:



Figura 26 – Espaços topológicos equivalentes



Figura 27 – Leonhard Euler

Retrato pintado por Jakob Emanuel Handmann (1753). *Kunstmuseum* em Basel, Suíça

<sup>6</sup> Imagens disponível em: <<https://en.wikipedia.org/wiki/Torus>>. (Acesso em 07/2020).

Um grafo é uma estrutura bastante útil na representação e solução de diversos tipos de problemas, *e.g.*, modelar uma rede de computadores, projetar redes de cabamentos, estabelecer logística de transportes em malhas viárias são algumas das inúmeras aplicações da Teoria dos Grafos. Matematicamente um grafo formaliza a relação de interdependência existente entre os elementos de um conjunto, que são desenhados como pontos ou círculos e denominados como vértices. A relação entre os elementos do conjunto é caracterizada por linhas ou arcos ligando os pontos e são denominadas arestas. Se o grafo for direcionado, seu sentido é indicado na aresta por uma seta. A representação gráfica não deve ser confundida com o grafo em si (a estrutura abstrata, não-gráfica). Diferentes representações gráficas podem corresponder ao mesmo grafo desde que sejam preservadas as relações entre os vértices e suas respectivas arestas. Em Teoria dos Grafos isto é denominado **isomorfismo**<sup>7</sup>. As seções subsequentes tratam em maiores detalhes os conceitos e definições da Teoria dos Grafos.

## 2.2 Definições básicas

### 2.2.1 Grafo

**Definição 1** “Um **grafo**  $\mathcal{G}$  é uma tripla que consiste em um **conjunto de vértices**  $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ , um **conjunto de arestas**,  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ , e a relação que associa cada **aresta** a um **par de vértices** (não necessariamente distintos) chamados de **pontos terminais**.” (WEST, 2001, p. 2)

A relação que associa os **pares de vértices** às **arestas** é formulada como: “um **grafo** é um par  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  de conjuntos tal que  $\mathcal{E} \subseteq [\mathcal{V}]^2$ , logo os elementos de  $\mathcal{E}$  são subconjuntos de 2 elementos de  $\mathcal{V}$ ”.<sup>8</sup> (DIESTEL, 2005, p. 2)

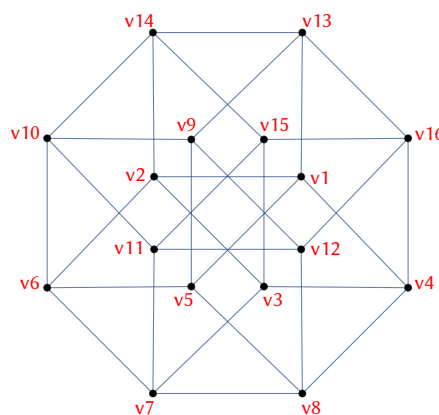


Figura 28 – Grafo Hipercubo

<sup>7</sup> Ver (BOLLOBÁS, 1998, p. 3).

<sup>8</sup> A notação  $[\mathcal{V}]^2$  indica **subconjuntos de dois elementos** de  $\mathcal{V}$ , não deve ser confundido, portanto, com **potenciação**.



O **Grafo Hipercubo** é constituído pelos seguintes os conjuntos:

- (i)  $\mathcal{V} = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}]$  e
- (ii)  $\mathcal{E} = [e_1(v_1, v_3), e_2(v_1, v_4), e_3(v_1, v_5), e_4(v_1, v_{13}), e_5(v_2, v_3), e_6(v_2, v_6), e_7(v_2, v_{14}), e_8(v_3, v_4), e_9(v_3, v_7), e_{10}(v_3, v_{15}), e_{11}(v_4, v_8), e_{12}(v_4, v_{16}), e_{13}(v_5, v_6), e_{14}(v_5, v_8), e_{15}(v_5, v_9), e_{16}(v_6, v_7), e_{17}(v_6, v_{10}), e_{18}(v_7, v_8), e_{19}(v_7, v_{11}), e_{20}(v_8, v_{12}), e_{21}(v_9, v_{10}), e_{22}(v_9, v_{12}), e_{23}(v_9, v_{13}), e_{24}(v_{10}, v_{11}), e_{25}(v_{10}, v_{14}), e_{26}(v_{11}, v_{12}), e_{27}(v_{11}, v_{15}), e_{28}(v_{12}, v_{16}), e_{29}(v_{13}, v_{14}), e_{30}(v_{13}, v_{16}), e_{31}(v_{14}, v_{15}), e_{32}(v_{15}, v_{16})]$ .

## 2.2.2 Multigrafo

Multigrafos são grafos que podem conter **laços** e ou **arestas múltiplas**<sup>9</sup>

Por definição, um grafo não contém *loops*, uma “aresta” que une um vértice a si próprio; tampouco contém arestas múltiplas, *i.e.*, várias “arestas” unindo o mesmo par de vértices. Em um **multigrafo**, ambas arestas múltiplas e *loops* são permitidas; o *loop* é uma aresta especial.<sup>10 11</sup> (BOLLOBÁS, 1998, p. 7)

**Definição 2** “Um **laço**<sup>12</sup> é uma aresta cujos pontos terminais são iguais.” (WEST, 2001, p. 2)

**Definição 3** “**Arestas múltiplas** são arestas que dividem o mesmo par de pontos terminais.” (WEST, 2001, p. 2)

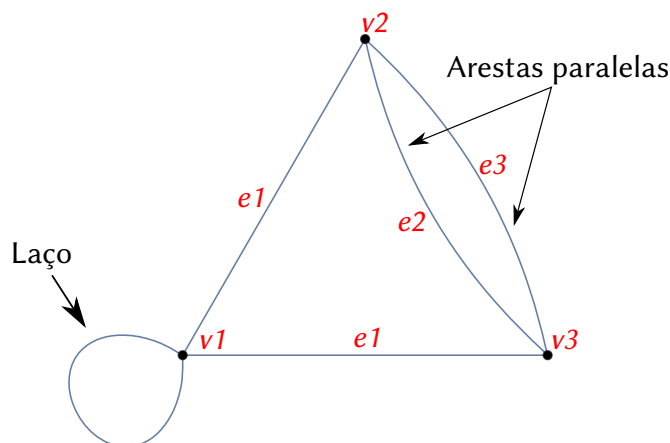


Figura 29 – Multigrafo com *loop*

<sup>9</sup> Por vezes chamadas de **arestas paralelas**.

<sup>10</sup> Tradução do autor. Texto original em inglês: “By definition a graph does not contain a loop, an “edge” joining a vertex to itself; neither does it contain multiple edges, that is, several “edges” joining the same two vertices. In a multigraph both multiple edges and multiple loops are allowed; a loop is a special edge.”

<sup>11</sup> Note que Bollobás (1998) usa o termo **grafo**. Outros autores são mais específicos e denominam a mesma estrutura como de **grafo simples**.

<sup>12</sup> Ou *loop*.



### 2.2.3 Grafo Simples

**Definição 4** “Um **grafo simples** não possui **laços** nem **arestas múltiplas**.” (WEST, 2001, p. 2)

Consideremos os seguintes conjuntos:

- (i) Conjunto de vértices  $\mathcal{V} = [v_1; v_2; v_3; v_4; v_5]$ , e
- (ii) Conjunto de arestas  $\mathcal{E} = [e_1(v_1, v_2); e_2(v_2, v_3); e_3(v_3, v_4); e_4(v_2, v_4); e_5(v_3, v_5); e_6(v_4, v_5)]$ .<sup>13</sup>

Os conjuntos relacionados criam o seguinte grafo:

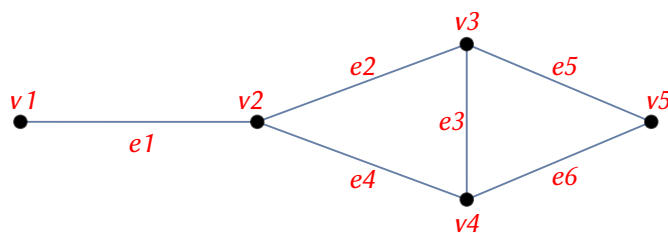


Figura 30 – Grafo simples  $\mathcal{G}$

### 2.2.4 Adjacência, Incidência e Grau

**Definição 5** “Se dois **vértices** em um grafo são conectados por um aresta, dizemos que são **vértices adjacentes**.” (GUICHARD, 2017, p. 81)

**Definição 6** “Os **vértices** nas extremidades de uma **aresta** são ditos **incidentes a ela**.” (BENDER; WILLIAMSON, 2010, p. 90)

**Definição 7** “O **grau** de um vértice  $v$  é o número de arestas incidentes a  $v$  e é denominado  $d(v)$ .”<sup>14</sup> (GUICHARD, 2017, p. 81)

### 2.2.5 Grafo Direcionado ou Dígrafo

**Definição 8** “Um **grafo direcionado**, ou **dígrafo**, é um grafo em que as arestas possuem direção indicada por uma seta na aresta. Sejam  $v$  e  $w$  vértices adjacentes, uma aresta é o par não ordenado  $\{v, w\}$ , e uma aresta direcional (ou **arco**) é o par ordenado  $(v, w)$  ou  $(w, v)$ .”<sup>15</sup>

<sup>13</sup> Conforme notação proposta em (WEST, 2001, p. 2): “[...] conjunto de pares não ordenados de vértices notados como  $e = uv$  ou  $e = vu$  para uma aresta  $e$  com pontos terminais  $u$  e  $v$ .”

<sup>14</sup> A definição de grau em um dígrafo é um pouco mais sofisticada como iremos ver na seção 3.3.5.4 (p. 80)

<sup>15</sup> Adaptado de (GUICHARD, 2017, p. 127). Texto original em inglês: “A directed graph, also called a digraph, is a graph in which the edges have a direction. This is usually indicated with an arrow on the edge; more formally, if  $v$  and  $w$  are vertices, an edge is an unordered pair  $\{v, w\}$ , while a directed edge, called an arc, is an ordered pair  $(v, w)$  ou  $(w, v)$ .”

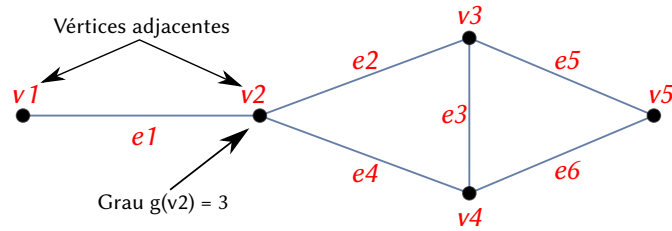


Figura 31 – Adjacência e Grau de vértices

Mais formalmente, “um **grafo direcionado** (ou **dígrafo**) é uma tripla  $\mathcal{D} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \phi)$  onde  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{E}$  são conjuntos finitos, e  $\phi$  é uma função com domínio  $\mathcal{E}$  e codomínio  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ .” (BENDER; WILLIAMSON, 2010, p. 161)

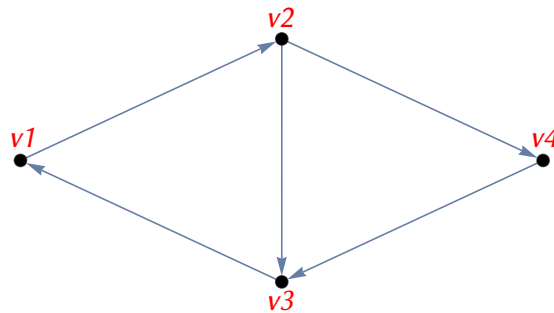


Figura 32 – Grafo direcionado

### 2.2.6 Grafo Regular

**Definição 9** “É um grafo onde todos os graus dos vértices são iguais.” (GUICHARD, 2017, p. 81)

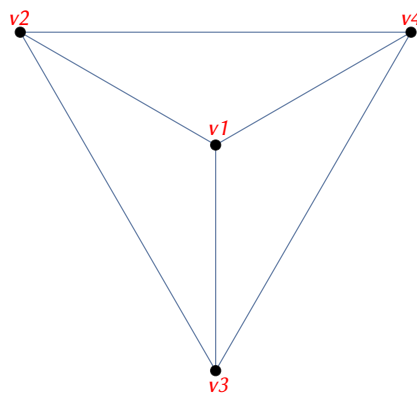


Figura 33 – Grafo regular

### 2.2.7 Grafo Completo

**Definição 10** “Um grafo completo  $K_n$  é um grafo  $v_1; v_2, \dots; v_n$ , onde 2 vértices distintos são unidos por uma aresta.”<sup>16</sup> (GUICHARD, 2017, p. 81)

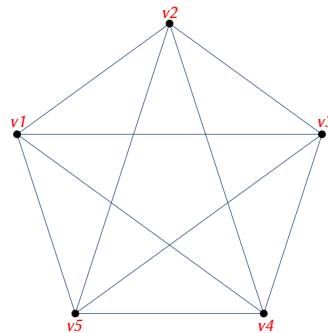


Figura 34 – Grafo completo  $K_5$  com 5 vértices

### 2.2.8 Grafo Valorado

Um grafo valorado é um grafo em que cada aresta e/ou vértices tem um valor associado. Os grafos valorados são usados para modelar vários problemas importantes em ciências da computação, rotas de transporte, mapeamento de processo e tarefas, arquitetura de Redes Neurais Artificiais, entre outros.

**Definição 11** “Um **grafo valorado**<sup>17</sup> é um grafo em que um número  $w(e)$ <sup>18</sup>, chamado de peso, é designado à aresta  $e$ .” (FLETCHER; HOYLE; PATTY, 1991, p. 463)

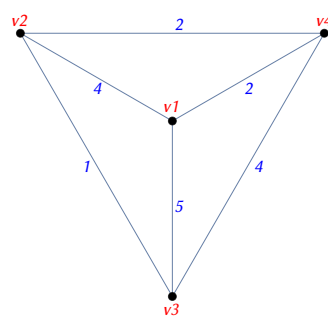


Figura 35 – Grafo Valorado

<sup>16</sup> A letra  $K$  é oriunda do alemão, *komplett*.

<sup>17</sup> Alguns autores afirmam que um **grafo valorado** é uma **rede**: “A network  $\mathcal{N}$  may be regarded as a graph or directed graph together with a function which assigns a positive real number to each line.” (HARARY, 1969, p. 52). Outros autores, e.g. (WOLFRAM, 2015, « 21. Graphs and Networks, Q & A ») afirmam que **grafos** e **redes** são sinônimos.

<sup>18</sup> A letra  $w$  provém do inglês « *weight* », *peso* em português.

## 2.3 Conectividade

*“Yes, there are two paths you can go by, but in the long run  
There’s still time to change the road you’re on.”*

### 2.3.1 Passeio, Trilha, Caminho e Ciclo

**Definição 12** “Um **passeio**<sup>19</sup> em um grafo  $\mathcal{G}$  é uma sequência alternada de vértices e arestas  $v_0, x_1, v_1, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$ , começando e terminando em vértices, nos quais cada aresta é incidente aos 2 vértices imediatamente anterior e posterior.” (HARARY, 1969, p. 13)

Harary (1969, p. 13) continua: “Um passeio conecta  $v_0$  a  $v_n$ , podendo também ser denominado  $v_0 v_1, \dots, v_n$  (as arestas são evidentes por contexto). Um passeio é fechado se  $v_0 = v_n$  e aberto caso contrário”, *i.e.*, o passeio fechado começa e termina no mesmo vértice.

**Definição 13** “É uma **trilha**<sup>20</sup> se todas as arestas são distintas [...]” (HARARY, 1969, p. 13)

**Definição 14** “[...] é um **caminho**<sup>21</sup> se todos os vértices (e portanto necessariamente todas as arestas) são distintos.” (HARARY, 1969, p. 13)

**Definição 15** “Se um caminho é fechado e seus  $n$  vértices são distintos, sendo  $n \geq 3$ , temos um **ciclo**. Denotamos por  $\mathcal{C}_n$  o grafo que consiste em um **ciclo** com  $n$  vértices e  $\mathcal{P}_n$  um caminho com  $n$  vértices.  $\mathcal{C}_3$  é usualmente chamado de **triângulo**.” (HARARY, 1969, p. 13)

A Figura abaixo<sup>22</sup> usa um mesmo grafo para ilustrar os 4 conceitos como definidos por Harary:

(i) **Caminho:**  $v_1 v_2 v_5 v_3$ ;

(ii) **Trilha:**  $v_1 v_2, v_4 v_2$ ;

(iii) **Passeio:**  $v_1 v_2, v_5, v_4 v_2 v_3$  e

(iv) **Ciclo:**  $v_2 v_4 v_5, v_2$ .

<sup>19</sup> **Passeio** é traduzido do inglês « walk ».

<sup>20</sup> **Trilha** é traduzida do inglês « trail ».

<sup>21</sup> **Caminho** é traduzido do inglês « path ».

<sup>22</sup> Reprodução a partir da Figura 2.9 do livro *Graph Theory*, (HARARY, 1969, p. 13).

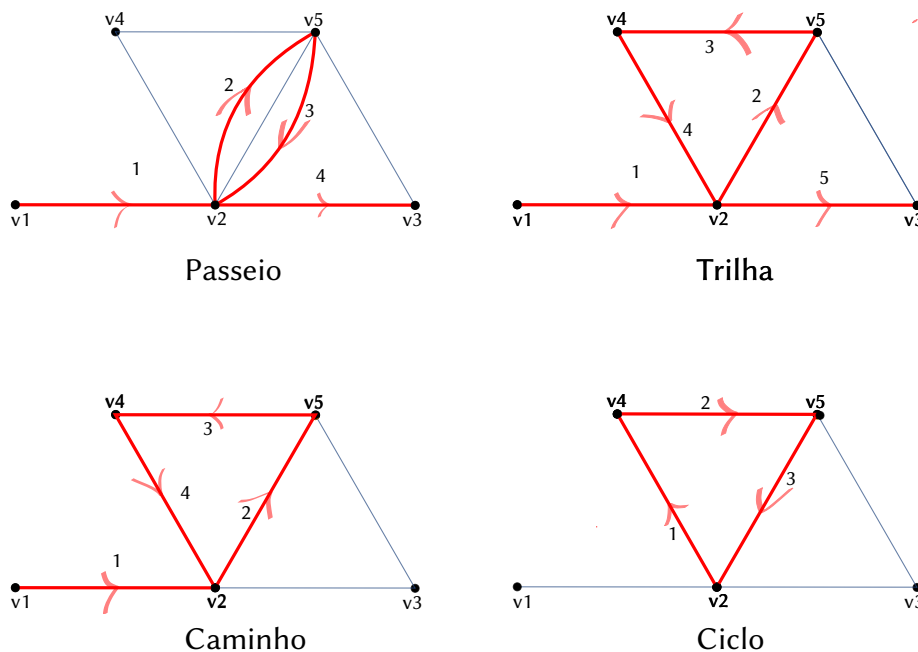


Figura 36 – Passeio, Trilha, Caminho & Ciclo

Harary observa que (i)  $v_1 v_2 v_5 v_3$  “é um passeio que não é uma trilha” e, (ii)  $v_1 v_2, v_4 v_2$  “é uma trilha que não é um caminho”.

### 2.3.2 Grafo Conexo

**Definição 16** “Um grafo é **conexo** se para todo par  $x, y$  de **vértices distintos** existe um **caminho** de  $x$  para  $y$ . Note que para um **grafo conexo** de no mínimo **ordem 2** não é possível haver um **vértice isolado**.”<sup>23</sup> (BOLLOBÁS, 1998, p. 6)

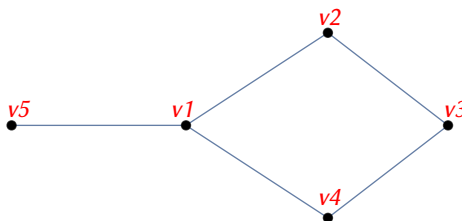


Figura 37 – Grafo conexo

### 2.3.3 Subgrafo

**Definição 17** “Um grafo  $\mathcal{H} = (\mathcal{W}, \mathcal{F})$  é um **subgrafo** de  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  se  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$  e  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ . (Como  $\mathcal{H}$  é um grafo, as arestas em  $\mathcal{F}$  têm suas extremidades em  $\mathcal{W}$ .)” (GUICHARD, 2017, p. 92)

<sup>23</sup> Tradução do autor. Texto original em inglês: “A graph is connected if for every pair  $x, y$  of distinct vertices there is a path from  $x$  to  $y$ .” Note that a connected graph of order at least 2 cannot contain an isolated vertex.”

**Definição 18** “ $\mathcal{H}$  é um **subgrafo induzido** se  $\mathcal{F}$  consiste em todas as arestas de  $\mathcal{E}$  com pontos terminais em  $\mathcal{W}$ . Sempre que  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$  denotamos o **subgrafo induzido** de  $\mathcal{G}$  nos vértices  $\mathcal{U}$  como  $\mathcal{G}[\mathcal{U}]$ .” (GUICHARD, 2017, p. 92-93)

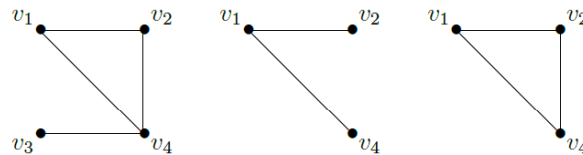


Figura 38 – Grafo, Subgrafo e Subgrafo Induzido

Fonte: « *An Introduction to Combinatorics and Graph Theory* » (GUICHARD, 2017, p. 93)  
This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike License.

### 2.3.4 Grafo Desconexo

**Definição 19** “Um grafo é conexo se todos os pares de vértices são unidos por um **caminho**. O subgrafo conexo máximo de  $\mathcal{G}$  é chamado de **componente conexo** ou simplesmente, **componente** de  $\mathcal{G}$ . Logo, um **grafo desconexo** possui ao menos dois elementos.” (HARARY, 1969, p. 13)

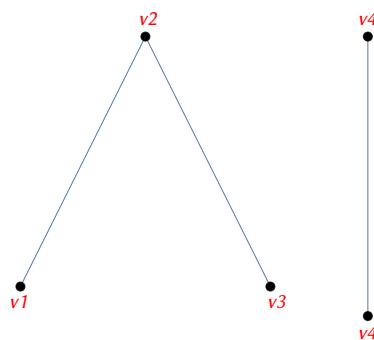


Figura 39 – Dois elementos de um grafo desconexo

### 2.3.5 Grafo Caminho

**Definição 20** “O **grafo caminho**  $\mathcal{P}_n$  é uma **árvore** com dois **vértices** de **grau 1**, e os outros  $n - 2$  **vértices** de **grau 2**. Um **grafo caminho** é portanto, um grafo cujos **vértices** e **arestas** podem ser desenhados sobre uma linha reta.” (GROSS; YELLEN, 2005, p. 18)



Figura 40 – Grafo Caminho

Em outras palavras, um **grafo caminho** é uma **árvore** sem ramificações, com dois vértices (inicial e final) grau 1 e, os demais vértices, grau 2. Embora o **grafo caminho** possa ser desenhado sobre uma linha reta, seus vértices e arestas também podem ser dispostos de outras formas como, *e.g.*, em uma espiral:

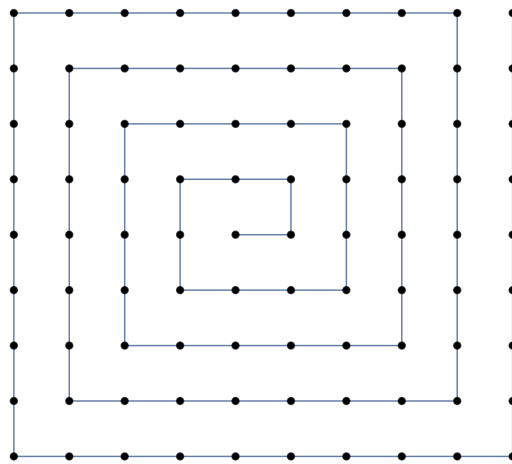
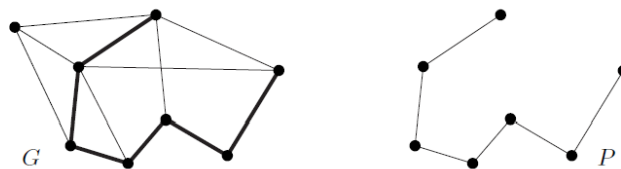


Figura 41 – Grafo Caminho com 90 vértices dispostos em espiral

Na Figura abaixo, [Diestel \(2005, p. 7\)](#) preserva a estrutura de coordenadas dos vértices do grafo  $\mathcal{G}$  para salientar o caminho  $\mathcal{P}^6$ :<sup>24</sup>

Figura 42 – Caminho  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^6$  em  $\mathcal{G}$ 

Fonte: ([DIESTEL, 2005, p.7](#)) © Springer-Verlag Heildeberg, New York 1997, 2000, 2005

<sup>24</sup> A notação  $\mathcal{P}^6$  de [Diestel \(2005, p. 7\)](#) indica o comprimento do passeio, *i.e.*, o passeio  $\mathcal{P}^6$  possui 6 etapas.

### 2.3.6 Clique

**Definição 21** “Uma **caminho** em um **grafo** é um **subgrafo** que é um **caminho**; se os **pontos terminais** são  $v$  e  $w$ , dizemos que há um **caminho** de  $v$  a  $w$ . Um **ciclo** em um **grafo** é um **subgrafo** que é um **ciclo**. Um **clique** em um **grafo** é um **subgrafo** que é um **grafo completo**.” (GUICHARD, 2017, p. 93)

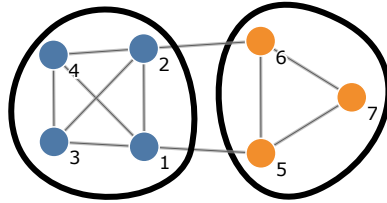


Figura 43 – Grafo com 7 vértices, 11 arestas, 2 cliques:  $\mathcal{K}_3$  (3 vértices) e  $\mathcal{K}_4$  (4 vértices)

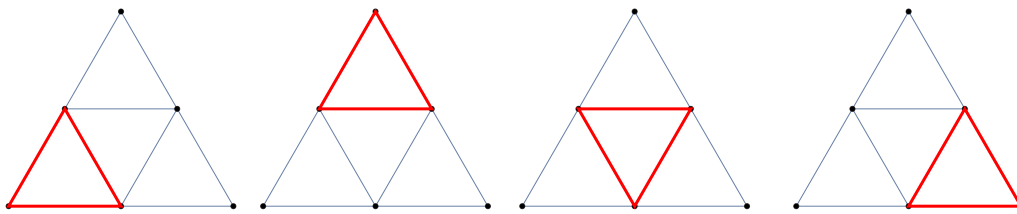


Figura 44 – Cliques em um Grafo  $\mathcal{S}_2$

Fonte: Imagem recriada a partir de: <<https://mathworld.wolfram.com/Clique.html>>. (Acesso em 11/2020).

### 2.3.7 Grafo Árvore

**Definição 22** “Um **grafo conexo**  $\mathcal{G}$  é uma **árvore** se ele for **acíclico**, ou seja, se não tiver **ciclos**. Geralmente um **grafo acíclico** é denominado uma **floresta**. Esta definição implica que nenhuma **árvore** possui **laços** ou **arestas múltiplas**.” (GUICHARD, 2017, p. 103)

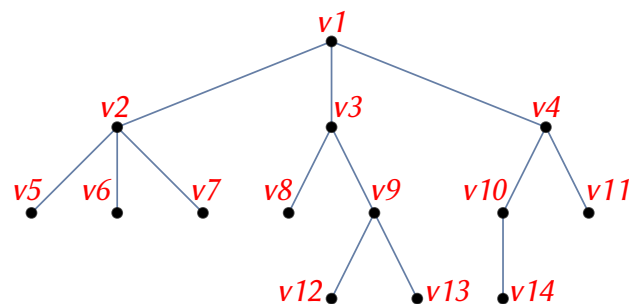


Figura 45 – Grafo Árvore



### 2.3.8 Circuito Euleriano

**Definição 23** “Um grafo é Euleriano se possuir uma trilha fechada contendo todos os vértices. [...]. Um circuito Euleriano ou trilha Euleriana em um grafo é um circuito ou trilha contendo todas as arestas.” (WEST, 2001, p. 27)

No exemplo da próxima figura<sup>25</sup> temos um Circuito Euleriano para um grafo Octaedro, com 12 passos, onde cada passo está realçado em linha vermelha.

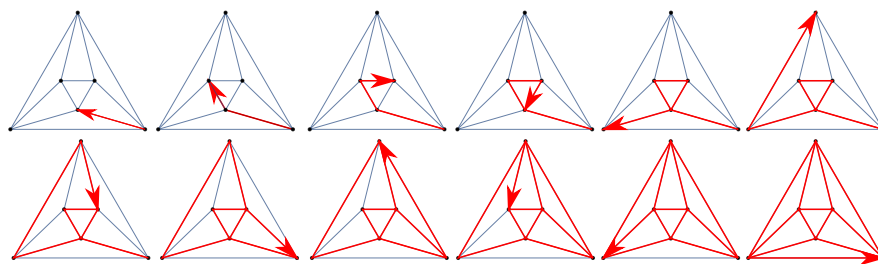


Figura 46 – Circuito Euleriano para um Grafo Octaedro

### 2.3.9 Circuito Hamiltoniano

**Definição 24** “Um ciclo contendo todos os vértices de um grafo é dito ser um ciclo Hamiltoniano do grafo. A origem do termo é um jogo inventado por Sir William Rowan Hamilton baseado na construção de ciclos contendo todos os vértices de um grafo dodecaedro.” (BOLLOBÁS, 1998, p. 14)

No exemplo da figura a seguir<sup>26</sup>, temos um Circuito Hamiltoniano para um grafo Dodecaedro<sup>27</sup>, com 20 passos, onde cada passo está realçado em linha vermelha.

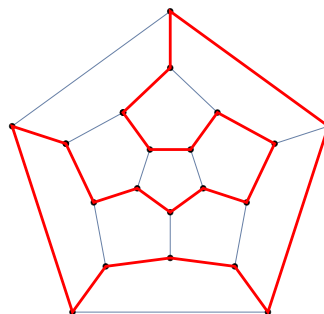


Figura 47 – Circuito Hamiltoniano

<sup>25</sup> Imagem recriada a partir de: <<https://reference.wolfram.com/language/ref/FindEulerianCycle.html>>. (Acesso em 12/2020.)

<sup>26</sup> Imagem recriada a partir de: <<https://reference.wolfram.com/language/ref/FindHamiltonianCycle.html>>. (Acesso em 12/2020.)

<sup>27</sup> Todos os sólidos platônicos possuem Caminhos Hamiltonianos. (GARDNER, 1957)

## 2.4 Matrizes

“A « déjà vu » is usually a glitch in the Matrix.”

### 2.4.0.1 Matriz de Adjacência

**Definição 25** “A **matriz de adjacência**  $\mathcal{A} = [a_{ij}]$  de um grafo  $\mathcal{G}$  com  $p$  pontos é a matriz  $p \times p$  em que,  $a_{ij} = 1$  se  $v_i$  é adjacente a  $v_j$  e,  $a_{ij} = 0$ , caso contrário. Logo, há uma correspondência um-para-um entre os grafos com  $p$  pontos e matrizes binárias simétricas  $p \times p$  com diagonal zero.” (HARARY, 1969, p. 150)

Para o seguinte grafo  $\mathcal{G}$ , obtemos a Matriz de Adjacência  $\mathcal{A}$ :

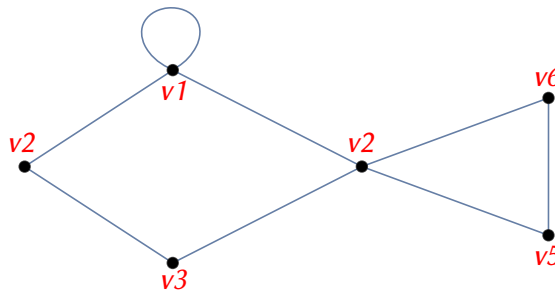


Figura 48 – Grafo  $\mathcal{G}$  com 6 vértices e 8 arestas

$$\mathcal{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

## 2.4.0.2 Matriz de Incidência

**Definição 26** “Uma segunda matriz, [...], é a **matriz de incidência**  $\mathcal{B} = [b_{ij}]$ . Esta matriz  $p \times q$  tem <valores><sup>28</sup>  $b_{ij} = 1$  se  $v_i$  e  $x_j$  são incidentes e  $b_{ij} = 0$  caso contrário. De fato, qualquer  $p - 1$  linhas de  $\mathcal{B}$  determinam  $\mathcal{G}$ , uma vez que cada linha é a soma de todos os outros módulo 2.” (HARARY, 1969, p. 152)

Para o grafo  $\mathcal{G}$ , temos a Matriz de Incidência  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{I} = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ \left[ \begin{array}{cccccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

## 2.5 Distância

**Definição 27** “A **distância**  $d(u, v)$  entre dois pontos  $u$  e  $v$  em  $\mathcal{G}$  é o comprimento do menor caminho que os conecte caso existam; caso contrário  $d(u, v) = \infty$ . [...] O caminho mais curto  $u-v$  é às vezes chamado de uma **geodésica**.” (HARARY, 1969, p. 14)

Dependendo do grafo é possível que existam mais de um **caminho mais curto**.

No caso de um **dígrafo** a distância  $d(u, v)$  entre os vértices  $u$  e  $v$  é definida como o comprimento do **caminho direcionado mais curto** entre  $u$  e  $v$  desde que exista ao menos um **caminho** que conecte os vértices. Ao contrário de **grafos simples**, *i.e.* não direcionados,  $d(u, v)$  não necessariamente coincide com  $d(v, u)$  e é possível que um **caminho** exista e o outro não.

O **Algoritmo de Dijkstra** que leva o nome de seu criador, o cientista da computação Edsger Dijkstra, foi criado em 1956 para solucionar o **problema do caminho mais curto** entre dois vértices de um grafo.

<sup>28</sup> O termo <valores> foi acrescentado no texto pelo autor na tradução.

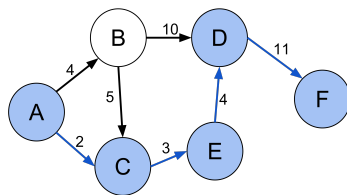


Figura 49 – Caminho mais curto  $(A, C, E, D, F)$  entre os vértices  $A$  e  $F$  em um dígrafo valorado (ou rede)

Fonte: Imagem disponível em: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Shortest\\_path\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Shortest_path_problem)>

### 2.5.0.1 Excentricidade

**Definição 28** “A **excentricidade**  $e(v)$  do ponto  $v$  em um grafo conexo  $\mathcal{G}$  é máxima  $d(u, v)$  para todo  $u$  em  $\mathcal{G}$ .” (HARARY, 1969, p. 35)

A excentricidade de um vértice é dada por<sup>29</sup>:

$$ecc_{\mathcal{G}}(v) = \max_{u \in V(\mathcal{G})} d(v, u) \quad (2.1)$$

### 2.5.0.2 Diâmetro

**Definição 29** “O **diâmetro**  $d(\mathcal{G})$  de um grafo conexo  $\mathcal{G}$  é o comprimento da geodésica mais longa.”<sup>30</sup> (HARARY, 1969, p. 14)

O diâmetro de um grafo é calculado pela seguinte equação<sup>31</sup>:

$$diam(\mathcal{G}) = \max_{v \in V(\mathcal{G})} ecc_{\mathcal{G}}(v) \quad (2.2)$$

<sup>29</sup> Como formulada em (CHEN; WANG; ZHANG, 2019, p. 2).

<sup>30</sup> Tradução do autor. Texto original em inglês: “The diameter  $d(\mathcal{G})$  of a connected graph  $\mathcal{G}$  is the length of any longest geodesic.”

<sup>31</sup> Como formulada em (CHEN; WANG; ZHANG, 2019, p. 2).

## 2.5.0.3 Raio

**Definição 30** O **raio**  $r(\mathcal{G})$  é a excentricidade mínima dos pontos<sup>32</sup>. Note que a excentricidade máxima é o diâmetro.” (HARARY, 1969, p. 35)

O raio de um grafo é determinado pela equação<sup>33</sup>:

$$rad(\mathcal{G}) = \min_{v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})} ecc\mathcal{G}(v) \quad (2.3)$$

## 2.5.0.4 Vértice Periférico

**Definição 31** “A excentricidade  $e(v)$  de um vértice  $v$  é a distância entre  $v$  e o vértice mais distante de  $v$ , e  $u$  é um vértice ecêntrico a  $v$  se sua distância de  $v$  é  $d(u, v) = e(v)$ . Um vértice de excentricidade máxima em um grafo  $\mathcal{G}$  é chamado de **periférico**, e o conjunto de todos tais vértices são a periferia, denotada  $Peri(\mathcal{G})$ .”<sup>34</sup> (KYSĚ, 2000, p. 1)

## 2.5.0.5 Vértice Central

**Definição 32** “O ponto  $v$  é o **ponto central** se  $e(v) = r(\mathcal{G})$  e o centro de  $\mathcal{G}$  é o conjunto de todos os pontos centrais.” (HARARY, 1969, p. 35)

<sup>32</sup> **Pontos** são sinônimos de **vértices**. Em outros autores o termo empregado é **nós**.

<sup>33</sup> Como formulada em (CHEN; WANG; ZHANG, 2019, p. 2).

<sup>34</sup> Tradução do autor. Texto original em inglês: “The eccentricity  $e(v)$  of a vertex  $v$  is the distance from  $v$  to a vertex farthest from  $v$ , and  $u$  is an eccentric vertex for  $v$  if its distance from  $v$  is  $d(u, v) = e(v)$ . A vertex of maximum eccentricity in a graph  $\mathcal{G}$  is called peripheral, and the set of all such vertices is the peripherian, denoted  $Peri(\mathcal{G})$ .”

## 2.6 Modularidades

A modularidade é uma medida da estrutura de redes<sup>35</sup>. Ela mede a divisão de uma rede em módulos (comunidades, grupos ou *clusters*). As comunidades são definidas como grupos de nós densamente interconectados entre si, mas esparsamente conectados com o resto da rede. É importante identificar as comunidades em redes, uma vez que elas podem ter propriedades bastante diferentes da rede média, como grau de nó, coeficiente de agrupamento, intermediação, centralidade, *et cetera*.

Na Figura a seguir, cada nó é uma etiqueta (*tag*) no *site* Stack Overflow. Os aglomerados (*clusters*) são formados usando um algoritmo<sup>36</sup> de detecção de comunidades<sup>37</sup>:

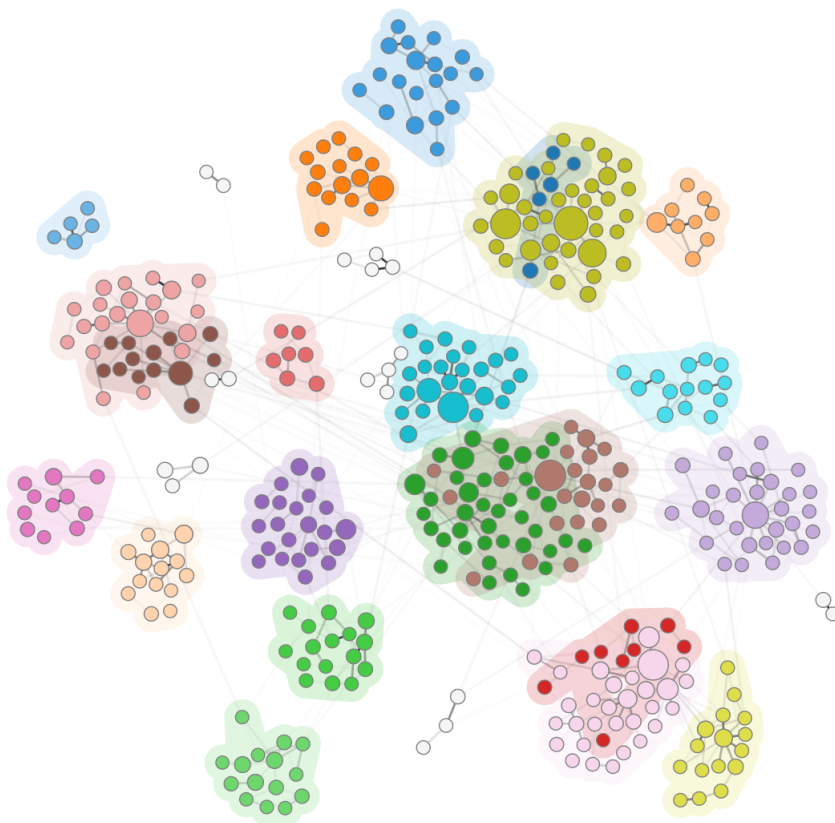


Figura 50 – *Stack Overflow Relationship Network*

Fonte: Diagrama interativo disponível em: <<https://twosixlabs.github.io/visualizing-tags/>>. (Acesso em 10/2020).

<sup>35</sup> Redes e grafos são sinônimos. (WOLFRAM, 2015, « 21. *Graphs and Networks, Q & A* »).

<sup>36</sup> O algoritmo é o *Louvain method for community detection*. (Acesso em 10/2020).

<sup>37</sup> Texto disponível em: <<https://www.twosixlabs.com/visualizing-programming-behaviors-with-stack-overflow/>>. (Acesso em 10/2020).

## 2.7 Centralidades

Na teoria dos grafos e análise de redes, a centralidade é uma medida de importância de um vértice em um grafo. Existem diferentes tipos de medidas de centralidade de um vértice num grafo que determinam a importância relativa, permitindo, por exemplo, estimar o quanto uma pessoa é influente dentro de uma rede social e como é bem utilizada uma estrada dentro de uma rede urbana. Iremos exemplificar quatro medidas de centralidade que são amplamente utilizados na análise de rede:

- (i) Centralidade de grau,
- (ii) Centralidade de intermediação
- (iii) Centralidade de proximidade e,
- (iv) Centralidade de autovetor (*eigenvector*).

Para exemplificar estas centralidades vamos utilizar como base o grafo da Figura abaixo<sup>38</sup>:

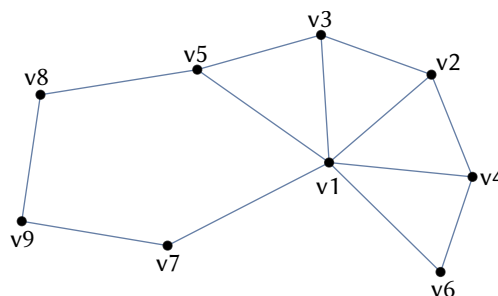


Figura 51 – Grafo base para exemplificar medidas de centralidades

### 2.7.1 Centralidade de Grau

**Definição 33** “A **centralidade de grau**<sup>39</sup> é definida como o número de arestas incidentes em um vértice. Seja  $\mathcal{N}(\mathcal{V}_i)$  o conjunto de nós conexos a  $\mathcal{V}_i$ , o grau de centralidade de um nó  $\mathcal{V}_i$  é dado por”:

$$C_D(\mathcal{V}_i) = \frac{|\mathcal{N}(\mathcal{V}_i)|}{|\mathcal{V}| - 1} \quad (2.4)$$

<sup>38</sup> Grafo base reproduzido a partir de: <<https://reference.wolfram.com/search/?q=graph%20centralities>>. (Acesso em 12/2020).

<sup>39</sup> Como definida em (BOUDIN, 2013, p. 3).

Em um **dígrafo** há duas medidas distintas de **centralidade de grau**:

- (i) « *Indegree* »: número de arestas direcionadas para o vértice e,
- (ii) « *Outdegree* »: número de arestas que partem de um vértice.

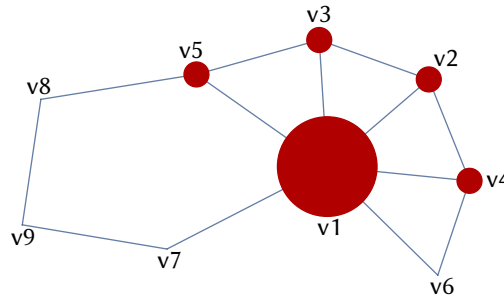


Figura 52 – Centralidade de Grau

### 2.7.2 Centralidade de Intermediação

O conceito de **centralidade de intermediação** foi introduzido por (FREEMAN, 1977) no contexto da sociometria de redes sociais.

**Definição 34** “A **centralidade de intermediação** quantifica o número de vezes, que um vértice atua como uma ponte ao longo do caminho mais curto entre dois outros vértices.” (BOUDIN, 2013, p. 3)

Boudain formula - “Seja  $\sigma(\mathcal{V}_j, \mathcal{V}_k)$  o número de **caminhos mais curtos** entre  $\mathcal{V}_j$  e  $\mathcal{V}_k$ , e  $\sigma(\mathcal{V}_j, \mathcal{V}_k | \mathcal{V}_i)$  o número de **caminhos** que passam por  $\mathcal{V}_i$ . A **centralidade de intermediação** é dada por”:

$$C_B(\mathcal{V}_i) = \frac{\sum_{\mathcal{V}_i \neq \mathcal{V}_j \neq \mathcal{V}_k \in \mathcal{V}} \frac{\sigma(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_k | \mathcal{V}_j)}{\sigma(\mathcal{V}_j, \mathcal{V}_k)}}{(|\mathcal{V}| - 1)(|\mathcal{V}| - 2)/2} \quad (2.5)$$

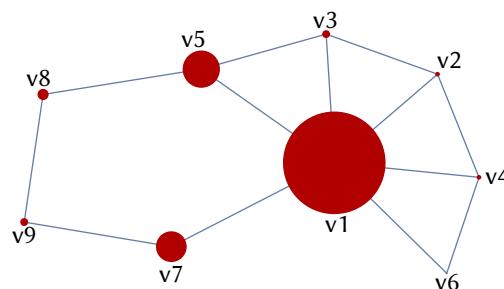


Figura 53 – Centralidade de Intermediação



### 2.7.3 Centralidade de Proximidade

**Definição 35** “A *centralidade de proximidade* é definida como o inverso da distância, ou seja, a soma das menores distâncias entre um vértice e todos os outros vértices.” (BOUDIN, 2013, p. 3)

Boudin formula - “Seja  $(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j)$  a **distância mais curta** entre os **nós**  $\mathcal{V}_i$  e  $\mathcal{V}_j$ , a **centralidade de proximidade** de um **nó**  $\mathcal{V}_i$  é dada por”:

$$C_C(\mathcal{V}_i) = \frac{|\mathcal{V}| - 1}{\sum_{\mathcal{V}_j \in \mathcal{V}} \text{distance}(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j)} \quad (2.6)$$

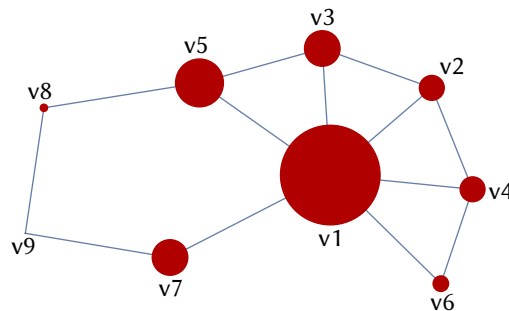


Figura 54 – Centralidade de Proximidade

### 2.7.4 Centralidade de Autovalor (*Eigenvector*)

**Definição 36** “A *centralidade de autovetor* mede a *centralidade* de um *vértice* como uma função das *centralidades* de seus *vizinhos*.” (BOUDIN, 2013, p. 3)

Boudain explica que neste tipo de medida “[...] se considera a noção de que conexões com vértices de alta pontuação (com muitas conexões) são mais importantes do que aquelas com pontuação baixa (com poucas conexões).”

Boudain formula - “Seja  $\mathcal{W}_{ij}$  o **valor** da **aresta** entre os **nós**  $\mathcal{V}_j$  e  $\mathcal{V}_i$  e  $\lambda$  uma constante, a **centralidade de autovalor** do **nó**  $\mathcal{V}_j$  é dada por”:

$$C_E(\mathcal{V}_i) = \frac{1}{\lambda} \sum_{\mathcal{V}_j \in N(\mathcal{V}_i)} \mathcal{W}_{ji} \times C_E(\mathcal{V}_j) \quad (2.7)$$

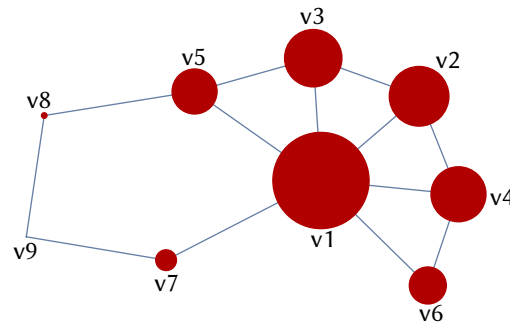


Figura 55 – Centralidade de AutoVetor

### 2.7.5 Centralidade de Intermediação de Arestas (*Edge Betweenness Centrality*)

**Definição 37** A **centralidade de intermediação de aresta** mede o número de **caminhos mais curtos** que passam por uma determinada **aresta** em um **grafo**.

A **centralidade de intermediação de aresta**<sup>40</sup> é definida em (LU; ZHANG, 2013) como:

A **centralidade de intermediação de aresta** é definida como o número dos caminhos mais curtos que passam por uma aresta em um grafo ou rede (GIRVAN; NEWMAN, 2002). A cada aresta é associado um valor de centralidade de intermediação de aresta. Uma aresta com alta pontuação de centralidade de intermediação representa uma conexão em ponte entre duas partes da rede, e sua remoção pode afetar a comunicação entre muitos pares de vértices.<sup>41</sup>

A Figura abaixo apresenta um grafo com 7 vértices. Neste grafo, a aresta  $v_1-v_5$  tem um alto valor de centralidade de intermediação e sua remoção resultaria em uma divisão do grafo em dois subgrafos:

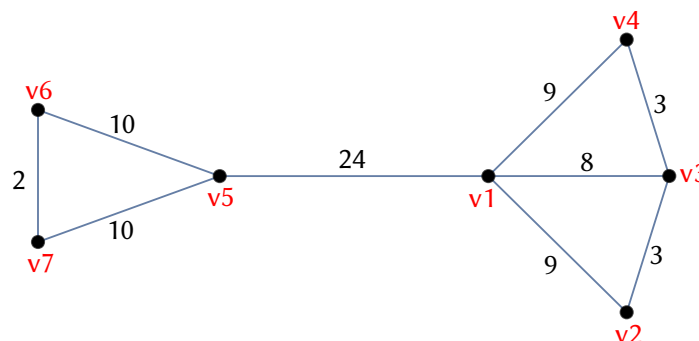


Figura 56 – Centralidade de Intermediação de Arestas

<sup>40</sup> A **centralidade de intermediação de arestas** também é estudada em (CUZZOCREA et al., 2012).

<sup>41</sup> Tradução do autor.

## 3 Teoria dos Grafos e Música

A **Teoria dos Grafos** ainda é pouco utilizada em análise musical e há grande potencial como ferramenta educacional. Na etapa de revisão bibliográfica desta dissertação foram encontrados poucos trabalhos que usam a **Teoria dos Grafos**. Em (BENNIGHOF, 1987) se faz uso da **Teoria dos Grafos** como ilustração de análises de obras seriais de compositores como Anton Webern e Elliot Carter. O trabalho é ancorado em **Set Theory** e essencialmente consiste em mostrar **classes de altura, conjuntos e classes intervalares** através de grafos. Em (SZETO; WONG, 2006) o foco é mais direcionado à demonstração de **teoremas** contruídos sobre análises prévias. (STRAUS, 2013). Há ainda um terceiro trabalho que utiliza a Teoria dos Grafos voltados ao estudo de modos, mas que se afasta bastante das perspectivas utilizados neste trabalho (BERGOMI; PORTALURI, 2013). A metodologia empregada nesta dissertação se aproxima de (PEUSNER, 2002), na qual a Teoria dos Grafos é usada como meio para visualização de dados musicais com foco em encadeamentos melódicos. Esta perspectiva se mostrou interessante pelas seguintes razões:

- (i) o objetivo inicial de investigar a sutil divergência estética entre o tema da *Musica ricercata* VII e as melodias geradas no *patch* feito em Max, conforme explicado em 1.2.4.2 (p. 23);
- (ii) Diversos parâmetros musicais que podem ser estudados com a mesma metodologia, *e.g.*, encadeamento rítmico, harmônico ou a combinação de dois ou mais parâmetros, *e.g.*, ritmo, timbre (instrumentação) e alturas.

A coleta de dados, apesar de simples, é laboriosa e propensa a erros que são - muitas vezes - difíceis de identificar, logo a escolha de metodologia técnica<sup>1</sup> de computação e geração dos grafos requer um planejamento para otimizar a representação de cada exemplo em particular. A escolha metodológica foi no caso desta dissertação, resultado de experimentações e adaptações à medida em que novos problemas foram sendo identificados. Considerando todas estas razões, o autor optou por restringir a coleta de dados aos encadeamentos melódicos salvo algumas exceções.

### 3.1 Visualização de dados

Na Era da Informação a geração, armazenamento, computação e comunicação de dados cresceu consideravelmente.

<sup>1</sup> Grafos são criados a partir das matrizes convertidas em tabelas em formatos CSV, JSON e Wolfram Language, por exemplo. Os grafos foram criados aqui em sua maioria no *software Wolfram Mathematica* e em *notebooks D3.js*.

[...] Em 2007, a humanidade foi capaz de armazenar  $2,9 \times 10^{20}$  bytes compactados de forma otimizada, transferir quase  $2 \times 10^{21}$  bytes e executar  $6,4 \times 10^{18}$  instruções por segundo em computadores de uso geral. A capacidade de computação de uso geral cresceu a uma taxa anual de 58%.<sup>2</sup> (HILBERT; LÓPEZ, 2011, p. 60)

Embora a visualização de dados seja atualmente uma ferramenta indispensável para promover a interpretação humana sobre este incrível volume de informações, suas raízes históricas podem ser traçadas aos meados da Idade Moderna (*circa* século XVII).

### 3.1.1 Conceituação e Desenvolvimento Histórico

Visualização de dados é a representação gráfica de um *corpus* (ou *corpora*) de informações. Os dados coletados são sistematicamente mapeados conforme o tipo de visualização escolhido, *e.g.*, gráficos de séries temporais, gráficos torta, gráficos barra, diagramas, fluxogramas, mapas temáticos, *et cetera*. William Playfair (1759-1823) é considerado o fundador da área de gráficos estatísticos, introduzindo os diagramas de linhas, barras e tortas.

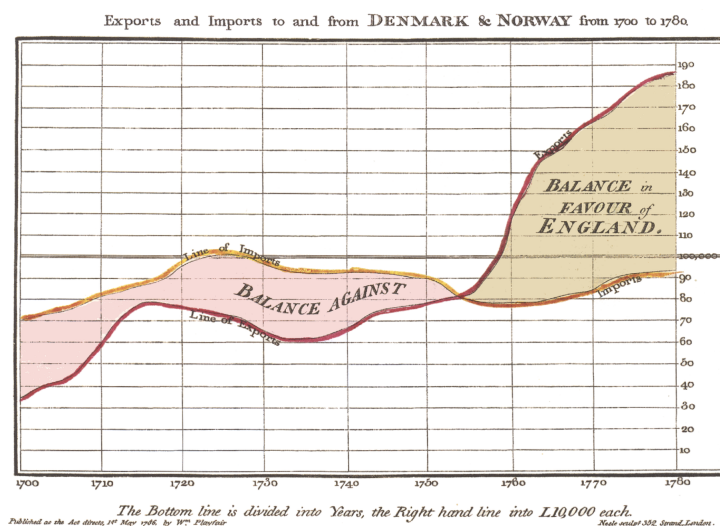


Figura 57 – Série temporal da balança comercial entre Inglaterra e Dinamarca e Noruega de 1700 a 1780 (William Playfair, 1786)<sup>3</sup>

<sup>2</sup> Tradução do autor. Texto original em inglês: “[...] In 2007, humankind was able to store  $2.9 \times 10^{20}$  optimally compressed bytes, communicate almost  $2 \times 10^{21}$  bytes, and carry out  $6.4 \times 10^{18}$  instructions per second on general-purpose computers. General-purpose computing capacity grew at an annual rate of 58%.”

<sup>3</sup> Imagem disponível em: <[https://en.wikipedia.org/wiki/File:Playfair\\_TimeSeries.png](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Playfair_TimeSeries.png)>.



Em psicologia há um modelo chamado **VARK** que propõe quatro categorias de preferências de aprendizado. **VARK** é um acrônimo que designa:

- (i) **V**: *Visual*
- (ii) **A**: *Auditory*
- (iii) **R**: *Read/Write*
- (iv) **K**: *Kinesthetic*

A primeira preferência incluem materiais diagramáticos comumente usado por educadores para simbolizar informações, (e.g., gráficos, tabelas, fluxogramas, modelos, e todas setas e círculos hierárquicos entre outros dispositivos usados por educadores para representar o que poderia ter sido informação impressa).<sup>6</sup> (FLEMING; MILLS, 1992, p. 140)

Levando em consideração estes aspectos cognitivos considero pertinente a visualização de dados como importante ferramenta pedagógica para a área da música.

### 3.1.2 Representação cartesiana de dados musicais

*« Der Unterschied zwischen Vergangenheit,  
Gegenwart und Zukunft ist eine Illusion,  
wenn auch eine sehr hartnäckige. »*

A notação musical, via de regra, obedece uma disposição cartesiana em que o eixo  $x$  representa o fluxo temporal e o eixo  $y$  indica, em se tratando de instrumentos harmônicos e ou melódicos, a altura das notas. Esta representação bidimensional de eventos sonoros permite que se descreva uma obra musical em termos de sua verticalidade e horizontalidade. Eventos simultâneos (caso existam) em uma obra são gravados verticalmente e eventos sucessivos horizontalmente. Os *piano rolls*<sup>7</sup> MIDI ilustram perfeitamente esta organização cartesiana entre alturas e tempo. Via de regra, em *piano rolls* os intervalos, tanto no eixo  $x$  quanto no eixo  $y$ , são dispostos em um *grid* e, *ipso facto*, representam valores discretos.

<sup>6</sup> Tradução do autor. Texto original em inglês: “The first preference includes diagrammatic material often used by teachers to symbolize information (e.g., graphs, charts, flow charts, models, and all the symbolic arrows, circles, hierarchies and other devices used by teachers to represent what could have been printed information).”

<sup>7</sup> Nomenclatura derivada dos rolos de pianolas.

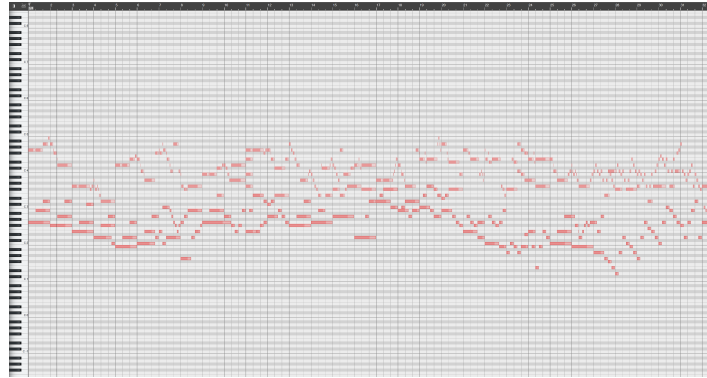


Figura 60 – Bach: *Aria mit 30 Veränderungen* - BWV 988 - MIDI Piano Roll

Mesmo partituras gráficas costumam adotar o padrão cartesiano em que o tempo é representado no eixo  $x$  e corre da esquerda para a direita. As figuras abaixo ilustram a partitura em notação tradicional e a partitura gráfica de *Pithoprakta* de Xenakis:

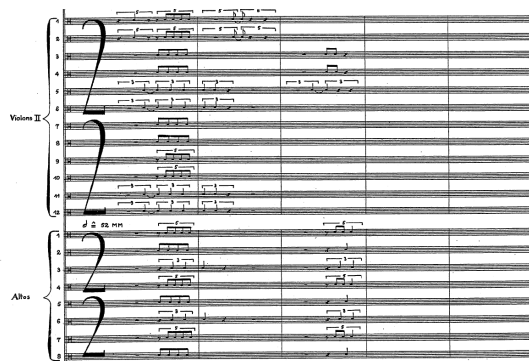


Figura 61 – “*Pithoprakta*” by Iannis Xenakis (1955-1956) © 1967 By Boosey & Hawkes Music Publishers Limited. All Rights Reserved. Used With Permission.<sup>8</sup>

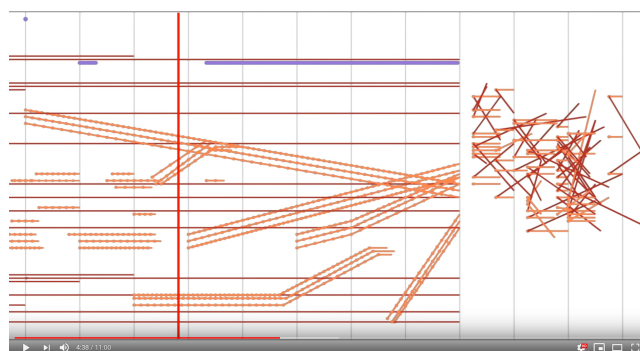


Figura 62 – “*Pithoprakta*”, Iannis Xenakis (1955-1956) Partitura gráfica<sup>9</sup>

<sup>8</sup> Partitura disponível em: <<https://www.boosey.com/cr/music/iannis-Xenakis-Pithoprakta/3078>>. (Acesso em 02/2021.)

<sup>9</sup> Imagem retirada de <<https://www.youtube.com/watch?v=nvH2KYYJg-o>>. (Acesso em 02/2021.)



Em entrevista (GULDBRANDSEN, 2011), Pierre Boulez menciona uma « dimensão diagonal » presente na *Kantate II*, Op. 31 de Anton Webern:

[...] Ou quando encontrei na Segunda Cantata de Webern, especialmente no quarto movimento, como o movimento horizontal pode ser reduzido verticalmente. Para mim, isso foi muito mais importante do que ver - bem - que você tem quatro séries, uma após a outra, e assim por diante. Geralmente, em música dodecafônica, particularmente em Webern, que afinal é muito simples, análises eram feitas com pessoas dizendo 1-2-3-4-5-6- ..., e não é isso que é interessante. O que é interessante é o tipo de dimensão diagonal, o movimento, que é ao mesmo tempo harmonia e contraponto de uma forma que não existia antes. Antes, você tinha o controle vertical de algo horizontal, e então com Webern isso mudou, e esse é o ponto principal! [...] <sup>10</sup>

Boulez se refere a processos empregados por Webern no tratamento harmônico e polifônico da série dodecafônica. Esta « dimensão diagonal » deve ser compreendida como algo intermediário entre o vertical e o horizontal mas de forma alguma deve ser entendida literalmente como uma dimensão compreendida pelo plano cartesiano.

Apesar de comum a representação da passagem do tempo no eixo  $x$ , da esquerda para direita, esta representação é arbitrária. A título de exemplificação, o **Diagrama de Penrose**<sup>11</sup> representa o fluxo temporal no eixo  $y$  e as três dimensões espaciais<sup>12</sup> são compreendidas horizontalmente no eixo  $x$ .

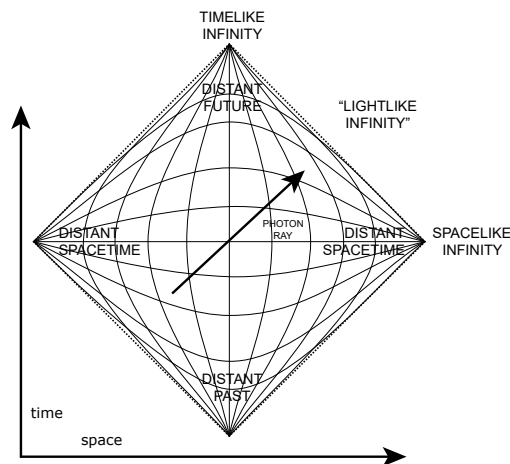


Figura 63 – Diagrama de Penrose<sup>13</sup>

<sup>10</sup> Tradução do autor. Texto traduzido do inglês: “[...] Or when I found in the Second Cantata by Webern, especially in the fourth movement, how the horizontal movement can reduce itself to being vertical. For me that was much more important than to see - well - that you have four tone rows, one after the other, and so on. Generally, when you have 12-tone music, especially in Webern, which is after all very simple, people used to analyze it by saying 1-2-3-4-5-6- ..., and that is not what is interesting. What is interesting is the kind of diagonal dimension, the movement, which is at the same time harmony and counterpoint in a way that did not exist before. Before, you had the vertical control of something horizontal, and now with Webern that is changed, and that is the whole point! [...]”

<sup>11</sup> O diagrama recebe o nome de seu criador, o matemático e físico inglês, Sir Roger Penrose.

<sup>12</sup> As três dimensões são reduzidas por evidentes limitações da representação bidimensional. O diagrama é **conformal**, *i.e.*, os intervalos espaço-tempo são preservado em todo o diagrama. A velocidade da luz  $C$  é representada através das linhas em ângulos de 45°. O fator conformal é escolhido de tal maneira que os limites do diagrama representem **infinitudes** em um diagrama finito.

<sup>13</sup> Imagem disponível em: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Penrose\\_diagram](https://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_diagram)>. (Acesso em 01/2020.)



## 3.2 Formalismo

Como iremos discutir nesta seção, os grafos representam (e revelam) estruturas musicais que não estão prontamente disponíveis dada a natureza temporal da música. É fundamental portanto, reiterar a diferença entre **gráfico** e **grafo**. Os exemplos citados em 3.1.2 (p. 53), tratam de representações musicais contidas no plano cartesiano em função do tempo (eixo  $x$ ) e pertencem, portanto, à categoria de gráficos. Os grafos construídos nesta dissertação também usam o parâmetro **tempo**, ou melhor, o fluxo do tempo para parear elementos, *in caso*, as alturas de uma melodia. Esta distinção entre **gráficos** e **grafos** é primordial para a compreensão clara da metodologia aqui empregada de maneira que não se confundam estruturas geométricas com estruturas topológicas. Esta confusão é bastante comum sobretudo quando a literatura que trata destes tópicos é de língua inglesa: ambos os termos para **gráfico** e **grafo** em inglês são « *graph* ». Ainda que em português existam termos distintos, a confusão entre eles pode privar o leitor das sutilezas presentes quando se empregam **grafos** em análise musical. Com estas considerações em mente e para fins de clara exposição da metodologia de construção dos grafos para aplicações em análise musical, revisitaremos conceitos e definições previamente estabelecidas mas agora, sob o ótica das formulações originárias da **Teoria Axiomática dos Conjuntos**.

Consideremos o **Grafo Simples**  $\mathcal{G}$ :

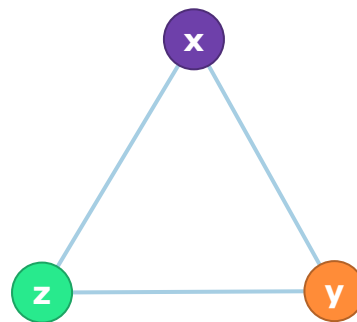


Figura 64 – Grafo Simples  $\mathcal{G}$

O **Grafo Simples**  $\mathcal{G}$ <sup>14</sup> é constituído por:

- (i) Vértices  $V = \{x, y, z\}$  e,
- (ii) Arestas  $E = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}\}$ .

<sup>14</sup> Por se tratar de um **grafo simples** omitimos do conjuntos de **vértices**, **pares ordenados** equivalentes, e.g.:  $\{x, y\} = \{y, x\}$ .

Agora consideremos o Dígrafo  $\mathcal{D}$  com a seguinte topologia:

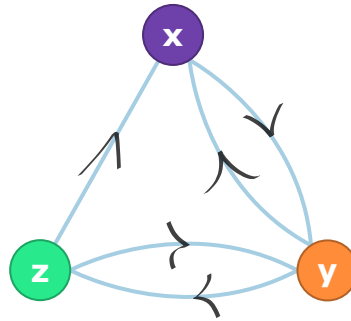


Figura 65 – Dígrafo  $\mathcal{D}$

Em **Teoria Axiomática dos Conjuntos**, o **par ordenado**  $(x, y)$  é notado, segundo a **Definição Padrão de Kuratowski**:

Seja  $\mathcal{A}$  um conjunto composto de dois elementos  $a$  e  $b$ . Existem apenas duas classes, que estabelecem uma ordem em  $\mathcal{A}$ , a saber:  $((a, b), (a))$  e  $((a, b), b)$ . Parece bastante natural admitir a seguinte definição:

**Definição 38** A classe  $((a, b), (a))$  é um „par ordenado do qual  $a$  é o primeiro elemento e  $b$  é o segundo“.

A noção de par ordenado é, como sabemos, uma das mais importantes na teoria dos conjuntos e é muito útil ter uma definição suficientemente simples para ela. [...] <sup>15</sup> (KURATOWSKI, 1921, p. 171)

A notação moderna é formulada através da seguinte identidade<sup>16</sup>:

$$(x, y)_K = \{\{x\}, \{x, y\}\} \quad (3.1)$$

Dado um **par ordenado**  $p$ , a propriedade «  $x$  é a primeira coordenada de  $p$  » é formulada como:

$$\forall Y \in p : x \in Y \quad (3.2)$$

A propriedade «  $x$  é a segunda coordenada de  $p$  » é formulada como:

$$(\exists Y \in p : x \in Y) \wedge (\forall Y_1, Y_2 \in p : Y_1 \neq Y_2 \rightarrow (x \notin Y_1 \vee x \notin Y_2)) \quad (3.3)$$

<sup>15</sup> Tradução do autor. Texto original em francês: « Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble composé de deux éléments  $a$  et  $b$ . Il n'existe que deux classes, qui établissent un ordre dans  $\mathcal{A}$ , à savoir:  $((a, b), (a))$  et  $((a, b), b)$ . Il semble bien naturel d'admettre la définition suivante:

**Definição V.** La classe  $((a, b), (a))$  est une „paire ordonnée dont  $a$  est le premier élément et  $b$  est le second“. La notion de paire ordonnée est, comme on sait une des plus importantes dans la théorie des ensembles et il est bien utile d'avoir pour elle une définition suffisamment simple. [...] »

<sup>16</sup> As formulações (3.1), (3.2) e (3.3) foram retiradas de: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Ordered\\_pair](https://en.wikipedia.org/wiki/Ordered_pair)>. (Acesso em 11/2020.)

O Dígrafo  $\mathcal{D}$  possui os seguintes pares ordenados:

$$(x, y)_K = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

$$(y, x)_K = \{\{y\}, \{x, y\}\}$$

$$(y, z)_K = \{\{y\}, \{y, z\}\}$$

$$(z, y)_K = \{\{z\}, \{y, z\}\}$$

$$(z, x)_K = \{\{z\}, \{z, x\}\}, \text{ e o par}$$

$$(x, z)_K = \{\{\}, \{\}\} \text{ é um conjunto vazio.}$$

Isto é equivalente a dizer que o Dígrafo  $\mathcal{D}$  é constituído por:

(i) Vértices  $V = \{x, y, z\}$  e,

(ii) Arestas  $E = \{\{x, y\}, \{y, x\}, \{y, z\}, \{z, y\}, \{z, x\}\}$ .

A representação visual de dados musicais através de **grafos** indica conexões entre elementos através das arestas. Não obstante, a ausência de conexões é uma informação importante para a visualização de dados porque funciona como um filtro. Desta forma podemos, e.g., « visualizar » os elementos que não estão contidos em um *corpus* de dados amostrais.

A conceituação de **pares ordenados**<sup>17</sup> e sua sistematização na construção de grafos que representam dados musicais é fundamental para relacionar esta dissertação às três categorias ou « arquiteturas musicais »<sup>18</sup> que Iannis Xenakis propõe em *Formalized Music*:

(i) *hors-temp* (fora do tempo)

(ii) *temporelle* (temporal)

(iii) *en-temps* (no tempo)

No Capítulo VII - *Towards a Meta Music*, Xenakis faz a seguinte proposição:

[...]Proponho fazer uma distinção entre arquiteturas, ou categorias, musicais: **fora do tempo, dentro do tempo e temporal**. Uma determinada escala de alturas, por exemplo, é uma arquitetura **fora do tempo**, porque nenhuma combinação horizontal ou vertical de seus elementos pode alterá-la. O evento em si, ou seja, sua ocorrência real, pertence à **categoria temporal**. Finalmente, uma melodia ou acorde em uma determinada escala é produzida relacionando a categoria **fora do tempo** à **categoria temporal**. Ambos são

<sup>17</sup> Neto (2006, p. 33) revisa Teoria dos Conjuntos na seção 1.3.6. em sua dissertação sobre Xenakis.

<sup>18</sup> Esta temática é aprofundada em (FERRAZ, 2012) e (MANOURY, 2015)

realizações **temporais** de construções **fora do tempo**.<sup>19</sup> (XENAKIS, 1992, p.183).

No capítulo VI - *Symbolic Music Xenakis* (1992) contrapõe duas ideias: (1) **Caso de um elemento genérico singular** (p. 155-156) e, (2) **Caso de dois ou mais elementos genéricos** (p. 156-157).

### 3.2.1 « Caso de um elemento genérico singular »

Para o **Caso de um elemento genérico singular**, Xenakis parte da seguinte proposição:

- (i) “Consideremos um evento sonoro de duração finita: *a*.”

De onde ele deriva os seguintes postulados:

**Postulado 1** “*Iremos sistematicamente refutar qualquer juízo qualitativo para todo e qualquer evento sonoro.*”

**Postulado 2** “*O que importará são relações abstratas contidas no evento ou entre vários eventos, e as operações lógicas sobre as quais os eventos poderão ser submetidos.*”

**Postulado 3** “*A emissão de um evento sonoro é portanto uma espécie de declaração, inscrição, ou símbolo sonoro que pode ser representado pela letra *a*.*”

**Postulado 4** “*Caso seja emitido uma única vez não significa nada além de sua particular existência, *a* simplesmente surge e desaparece.*”

**Postulado 5** “*Caso seja emitido várias vezes sucessivas, os eventos são comparados e concluímos que são idênticos, nada mais.*”

**Postulado 6** “*Identidade e tautologia são portanto implicadas por repetição.*”

**Postulado 7** “*Mas simultaneamente outro fenômeno, subjacente ao primeiro, é criado em razão desta própria repetição: modulação do tempo.*”

<sup>19</sup> Tradução do autor. Texto traduzido do inglês: “[...] I propose to make a distinction in musical architectures or categories between outside-time, in-time, and temporal. A given pitch scale, for example, is an outside-time architecture, for no horizontal or vertical combination of its elements can alter it. The event in itself, that is, its actual occurrence, belongs to the temporal category. Finally, a melody or a chord on a given scale is produced by relating the outside-time category to the temporal category. Both are realizations in-time of outside-time constructions.”

**Postulado 8** “Caso o evento fosse um som de Código Morse, a abscissa temporal assumiria um significado externo ao som e dele independente.”

**Postulado 9** “Em adição à dedução de tautologia, então, repetição causa o surgimento de um novo fenômeno, que é inscrito no tempo e que modula o tempo.”

Em suma: se o elemento temporal não é levado em consideração, então um evento sonoro singular significa apenas o próprio enunciado. O sinal, o símbolo, o elemento genérico  $a$  foi enunciado. Um evento sônico propriamente dito, ou mentalmente repetido significa apenas uma identidade, uma tautologia:

$$a \vee a \vee a \vee a \dots \vee a = a \quad (3.4)$$

onde  $\vee$  é um operador que significa « posto lado a lado sem dizer respeito ao tempo ». O sinal de equivalência = significa que trata-se da mesma coisa<sup>20</sup>. Isto é tudo que pode ser dito sobre um único evento sonoro.

### 3.2.2 « Caso de dois ou mais elementos genéricos »

Sejam  $a$  e  $b$  dois eventos sonoros tais que  $a$  não seja idêntico a  $b$ .

$$a \neq b \quad (3.5)$$

Se o elemento temporal é desconsiderado, a emissão de  $a$  seguida de  $b$ , ou  $b$  seguida de  $a$  são equivalentes:

$$a \vee b = b \vee a \quad (3.6)$$

logo, é verdadeira a **Lei Comutativa**.

No caso de 3 elementos  $a, b, c$ , dois elementos podem ser agrupados respectivamente ao terceiro elemento:

$$(a \vee b) \vee c \quad (3.7)$$

Porém, como uma operação via **Lei Associativa** não gera produto diferente:

$$(a \vee b) \vee c = a(\vee b \vee c) \quad (3.8)$$

A desconsideração do fator temporal leva a duas **leis de composição**<sup>21</sup> « fora do tempo »: a **comutativa** e a **associativa**.

Quando o fator temporal é levado em consideração, a **comutatividade** não pode ser aplicada às manifestações dos eventos sonoros  $a, b, c$ , logo:

$$a \top b \neq b \top a \quad (3.9)$$

onde  $\top$ <sup>22</sup> significa « anterior a »

<sup>20</sup> Tradução do autor. No texto da edição em inglês, Xenakis organiza sua argumentação em várias sentenças distribuídas em 4 parágrafos sob um único título de **postulado**. O autor organizou o texto de Xenakis como 9 **postulados** e 1 sumário. O autor nota que a terminologia **postulado** pode ser substituída por **proposições** a fim de se evitar conflito com o rigor do **formalismo** estritamente matemático. A opção do autor de organizar a tradução em 9 **postulados** e 1 sumário se baseia na ideia de promover o debate sobre o emprego desta terminologia na obra de Xenakis.

<sup>21</sup> Esta terminologia é datada. A terminologia mais usada atualmente é **função binária**.

<sup>22</sup> Este uso do símbolo  $\top$  é particular a Xenakis.

Xenakis faz mais considerações sobre a relação da disposição de eventos sonoros em função do tempo que contradizem a afirmação de que  $a \top b \neq b \top a$ . A argumentação sustenta que a propriedade **comutativa** também é válida caso consideremos o fator temporal. Iremos desconsiderar tais proposições.

### 3.2.3 « Estruturas fora do tempo »

Em conformidade às estruturas propostas por Xenakis podemos afirmar que as tonalidades organizadas no ciclo de quintas são estruturas *hors-temps* visto que são organizações de ordem teórica. Na Figura abaixo, o Ciclo das Quintas está representado como um diagrama cordal<sup>23,24</sup>

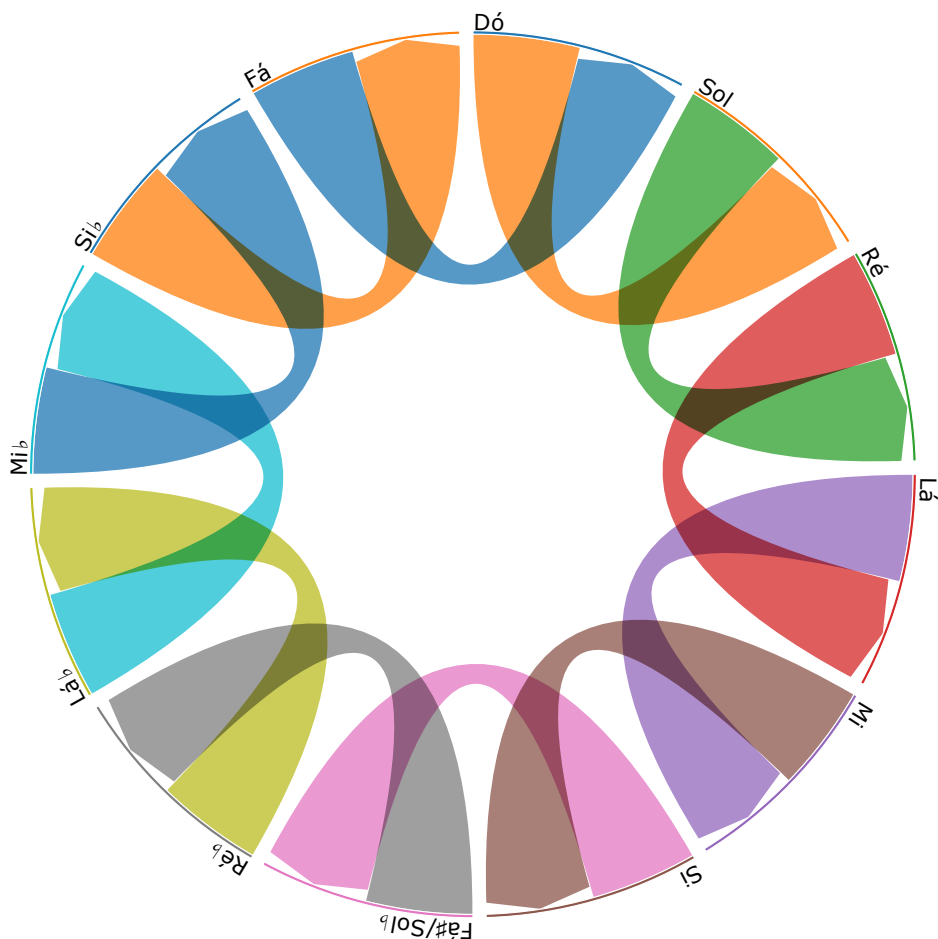


Figura 66 – Ciclo de Quintas: Diagrama cordal

Cada tonalidade ou modo, consistem-se como conjuntos diatônicos de sete alturas<sup>25</sup>. Podemos representar as alturas, *e.g.*, de Fá mixolídio, através de um grafo completo em que cada vértices corresponda a cada uma das sete notas do conjunto diatônico. As arestas indi-

<sup>23</sup> Disponível em: <<https://observablehq.com/d/09646b2f9dd73a21>>. (Acesso em 10/2020.)

<sup>24</sup> O **diagrama cordal** não deve ser confundido com o **grafo cordal**.

<sup>25</sup> Desconsidera-se aqui as alterações de tonalidades menores para fins de simplificação.

cam todas as possibilidades de encadeamento entre as notas do conjunto<sup>26</sup>. **Grafos simples** são exemplos de « estruturas fora do tempo ».

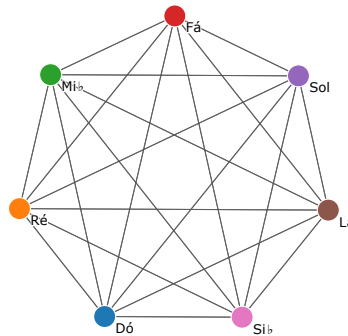


Figura 67 – Grafo K7 - Alturas de Fá mixolídio

### 3.2.4 « Estruturas no tempo »

Uma ferramenta elementar de análise é a descrição da obra objeto de estudo em função de sua respectiva tonalidade, *e.g.*, « a obra  $x$  modula de Dó menor para Mi maior ». Mas há uma limitação quando usamos este tipo de técnica analítico-descritiva para se falar sobre melodias. Descrever uma melodia em função de sua tonalidade não revela nada além do conjunto de notas ao qual ela pertence. Além disto, uma tonalidade é determinada em função de classes de altura. Porém, o registro em que se encontra uma nota melódica é fundamental para sua identidade, *i.e.*,  $Fá_3$  e  $Fá_4$ , apesar de pertencerem à mesma classe de altura, não são equivalentes em uma melodia. Uma melodia é, pela própria definição de Xenakis, pertencente à « categoria no tempo », produto da relação entre uma « categoria fora do tempo » e uma « categoria temporal ».

### 3.2.5 « Estruturas temporais »

Melodias, quando traçadas<sup>27</sup> como funções de tempo em um gráfico, nos permite a visualização de suas características lineares, *e.g.*, sua curva ou perfil melódico. Porém, suas características « reservadas » e singulares somente são reveladas quando analisamos sob a perspectiva da « categoria temporal ». Pela natureza de seus encadeamentos, uma melodia pode ser representada através de um **grafo direcional**. Como veremos a seguir, a metodologia da construção deste **grafo direcional** consiste na coleta de dados estruturados « no tempo » que são então, transformados em « estruturas temporais ». Esta representação converte um conjunto de informações dispostas linearmente em função do tempo, em informações organizadas em função de sua topologia. O **grafo direcional** é, *ipso facto* uma estrutura « temporelle ».

<sup>26</sup> Para fins de simplificação desconsideramos a repetição de alturas cuja representação no grafo seria um laço para cada vértice.

<sup>27</sup> Ou *plotadas*, em costumeiro anglicismo.

### 3.3 Aplicações em Análise Musical

Nesta seção iremos ver como os grafos podem ser empregados como ferramenta de visualização de dados musicais através de exemplos da literatura musical.

#### 3.3.1 Sinfonia Nº 6, Op. 68 - 1.º Movimento: Tema

Consideremos o tema do primeiro movimento da Sexta Sinfonia de Ludwig van Beethoven:





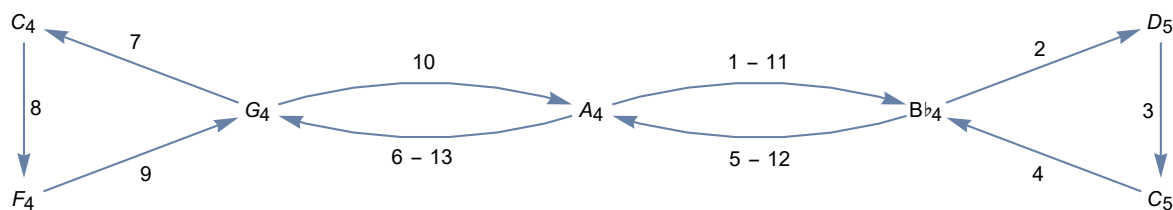


Figura 71 – Beethoven: Sinfonia Nº 6, Op. 68 « Grafo do Tema do 1.º Movimento »

O grafo do tema pertence a uma categoria<sup>32</sup> particular de grafos denominada *kayak paddle graph*<sup>33</sup>. Um grafo *kayak paddle*  $\mathcal{KP}(k, m, l)$  é o grafo obtido unindo os circuitos  $\mathcal{C}_k$  e  $\mathcal{C}_m$  através de um *caminho* de comprimento  $l$ <sup>34</sup>. No caso do tema de Beethoven, ambos os circuitos possuem o mesmo índice ( $k = m = 3$ ) e um *caminho* de comprimento três ( $l = 3$ ).

Ideais de beleza baseados em simetrias geométricas remontam à Antiguidade Clássica e embora o *corpus* analisado seja muito breve, a simetria do tema de Beethoven é notável. O dois circuitos são *caminhos* obrigatórios visto que trata-se de um grafo direcional. Os dois circuitos são conectados pelo vértice correspondente à nota Lá<sub>4</sub>, nota inicial do tema.

Há um **Circuito Euleriano**<sup>35</sup> no grafo do tema<sup>36</sup> ( $\mathcal{KP}(3, 3, 3)$ ) correspondente aos 10 primeiros passos<sup>37</sup>:

- (i)  $A_4 \rightarrow B_{b_4}$
- (ii)  $B_{b_4} \rightarrow D_5$
- (iii)  $D_5 \rightarrow C_5$
- (iv)  $C_5 \rightarrow B_{b_4}$
- (v)  $B_{b_4} \rightarrow A_4$
- (vi)  $A_4 \rightarrow G_4$
- (vii)  $G_4 \rightarrow C_4$
- (viii)  $C_4 \rightarrow F_4$

<sup>32</sup> Uma **Classe de Grafos** ou **Família de Grafos** é uma coleção (via de regra finita) de grafos, usualmente definidos a partir de propriedades específicas. Information System on Graph Classes and their Inclusions é uma enciclopédia de **Classes de Grafos** e está disponível em: <<https://graphclasses.org/>> (Acesso em 11/2020). O assunto é aprofundado em (BRANDSTÄDT; LE; SPINRAD, 1999).

<sup>33</sup> Grafo « Remo de Caiaque » por sua evidente semelhança com o objeto, prática costumeira em **Classes de Grafos**. O Grafo « Remo de Caiaque » é notado como  $\mathcal{KP}$ , as iniciais do nome em inglês.

<sup>34</sup> Como definido em (GALLIAN, 2000, p.16).

<sup>35</sup> Este **Ciurcuito Euleriano** corresponde à solução do **Problema do Caixeiro Viajante** para este grafo.

<sup>36</sup> O tema completo possui três passos adicionais:  $A_4 \rightarrow B_{b_4}$ ,  $B_{b_4} \rightarrow A_4$ ,  $A_4 \rightarrow G_4$ .

<sup>37</sup> As setas não são **conectivos lógicos condicionais** como em, e.g.,  $p \rightarrow q$ , i.e.,  $p$  implica  $q$ . As setas aqui indicam a direção das arestas do grafo.

(ix)  $F_4 \rightarrow G_4$

(x)  $G_4 \rightarrow A_4$

(xi)  $A_4 \rightarrow B\flat_4$

(xii)  $B\flat_4 \rightarrow A_4$

(xiii)  $A_4 \rightarrow G_4$

O grafo<sup>38</sup> abaixo codifica em cores os circuitos:

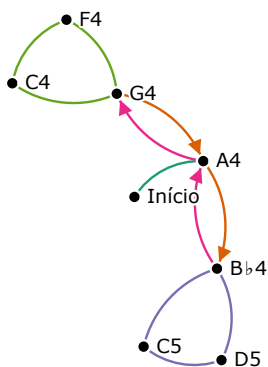


Figura 72 – Beethoven: Sinfonia Nº 6, Op.68 - Circuitos codificados por cor no grafo

Legenda: Direções também estão codificadas por cores.

Os circuitos codificados por cor na partitura:



Figura 73 – (BEETHOVEN, 1808): Sinfonia Nº 6, Op.68 « Circuitos codificados por cor na partitura »<sup>39</sup>

<sup>38</sup> Grafo criado em D3.js. Notebook disponível em: <<https://observablehq.com/d/bcf71b2f10e75221>>. (Acesso em 10/2020).

<sup>39</sup> Partitura editada pelo autor.

### 3.3.2 *Quaderno Musicale di Annalibera - Contrapunctus primus*

Consideremos agora, o *Contrapunctus primus* do *Quaderno Musicale di Annalibera* de Luigi Dallapiccola. Os primeiros 5 compassos analisados em (RAVENSBERGEN, 2012, p. 10) de acordo com a ordem da série dodecafônica<sup>40</sup>:



Order: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 t e

P<sub>e</sub>: e 0 4 7 9 3 2 6 8 1 t 6

Figura 74 – Dallapiccola (1952): *Quaderno musicale di Annalibera - Contrapunctus primus* « Compassos 1-5 e série dodecafônica »<sup>41</sup>

A série dodecafônica de Dallapiccola - por se apresentar de forma melódica - é de interesse para esta dissertação porque sua representação como grafo, invariavelmente, sempre resultará em um grafo caminho, não constituindo nenhum circuito em sua topologia.



Figura 75 – Dallapiccola: *Quaderno musicale di Annalibera - Contrapunctus primus* « Série dodecafônica visualizada como grafo caminho »

<sup>40</sup> Há um pequeno erro na classificação das classes de altura no trabalho de Ravensbergen. A nota F<sub>5</sub> corresponde a 5, e não a 6 como mostra a figura.

<sup>41</sup> Fonte: Imagem retirada de (RAVENSBERGEN, 2012, p. 10).

Consideremos, *e.g.*, a inversão retrógrada da série dodecafônica do *Contrapunctus primus*:

		Prima →										
Inversão	0	1	5	8	t	4	3	7	9	2	e	6
	e	0	4	7	9	3	2	6	8	1	t	5
	7	8	0	3	5	e	t	2	4	9	6	1
	4	5	9	0	2	8	7	e	1	6	3	t
	2	3	7	t	0	6	5	9	e	4	1	8
	8	9	1	4	6	0	e	3	5	t	7	2
	9	t	2	5	7	1	0	4	6	e	8	3
	5	6	t	1	3	9	8	0	2	7	4	e
	3	4	8	e	1	7	6	t	0	5	2	9
	t	e	3	6	8	2	1	5	7	0	9	4
	1	2	6	9	e	5	4	8	t	3	0	7
	6	7	e	2	4	t	9	1	3	8	5	0
		← Retrógrada										

Figura 76 – Dallapiccola: *Quaderno musicale di Annalibera - Contrapunctus primus* « Matriz serial »

A inversão retrógrada também desenha um grafo caminho:



Figura 77 – Dallapiccola: *Quaderno musicale di Annalibera - Contrapunctus primus* « Inversão retrógrada visualizada como grafo caminho »

A Figura a seguir mostra a melodia de Dallapiccola em um grafo completo de 12 vértices. Esta representação permite visualizar o caminho da melodia desenhado em arestas vermelhas com setas indicando as etapas, *i.e.*, a ordem das doze notas. Uma outra informação que a representação via grafo completo  $\mathcal{K}_{12}$  é que podemos visualizar o número de combinações possíveis.

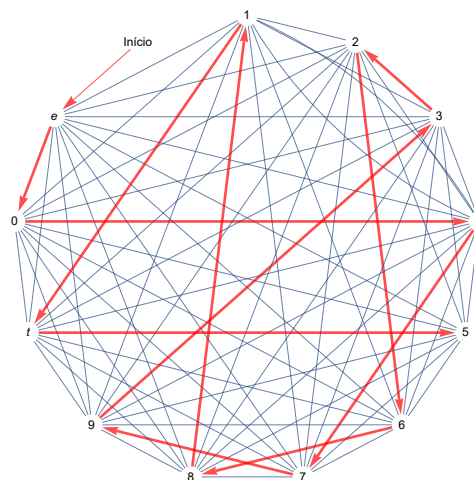


Figura 78 – Dallapiccola: *Quaderno musicale di Annalibera - Contrapunctus primus* « Grafo caminho dentro de um grafo  $\mathcal{K}_{12}$  »

## 3.3.3 Tocata e Fuga em Ré menor - BWV 565

Consideremos o sujeito desta célebre Fuga de J.S. Bach:



Figura 79 – Bach (circa 1703-1707): Tocata e Fuga, BWV 565 « Sujeito da Fuga »<sup>42</sup>

Embora os intervallos formados a partir da nota pedal Lá<sub>4</sub> gradativamente se alarguem - desde uma segunda até uma oitava - o diâmetro do grafo permanece intacto:

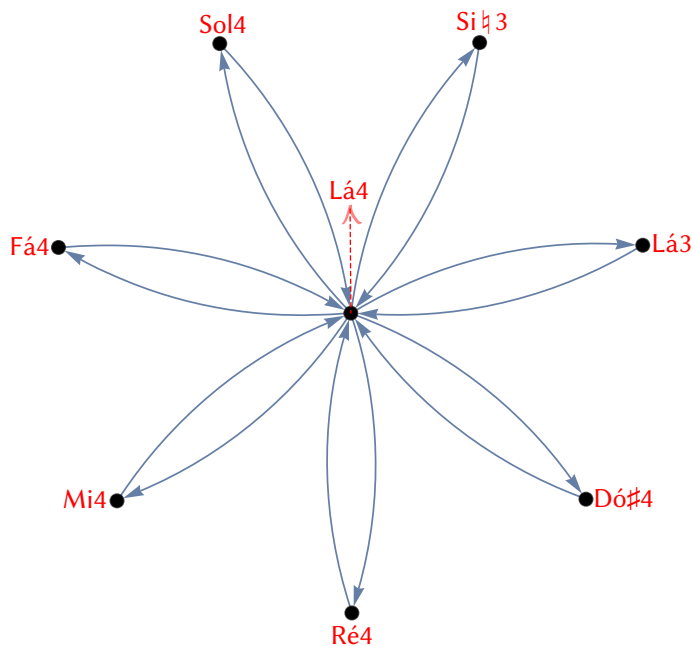


Figura 80 – Bach: Tocata e Fuga, BWV 565 « Grafo do Sujeito da Fuga »

Ainda que trate-se de um **Grafo Estrela** em termos de sua classificação, o fato de ser um dígrafo faz com que ele se assemelhe bastante com a **Rosa polar**, dada pela equação<sup>43</sup>:

$$r = a \cos n\theta \quad (3.10)$$

No caso de  $n \in \mathbb{Z}$ , i.e.,  $n$  é um número inteiro, a rosa possui  $2n$  pétalas se  $n$  é par, e  $n$  pétalas se  $n$  é ímpar. A Figura abaixo ilustra 6 Rosas Polares, com  $n = 2$  até  $n = 7$ , a rosa que se assemelha ao sujeito da Fuga de Bach:

<sup>42</sup> Edição de Pierre Gouin.

<sup>43</sup> Como definida em (CUNDY; ROLLETT, 1981, p. 73).

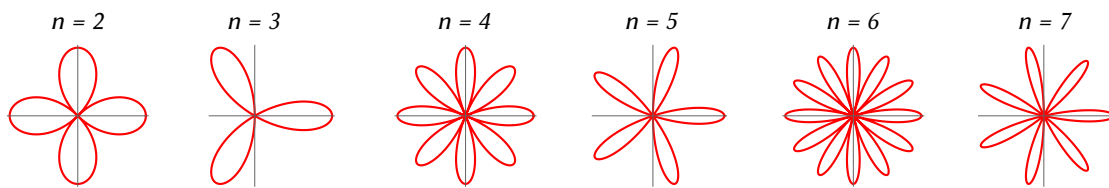


Figura 81 – Rosa Polar ou Curva *rhodonea*

Fonte: Imagem recriada a partir de: <<https://mathworld.wolfram.com/Rose.html>>

Um exemplo similar pode ser encontrado em (PEUSNER, 2002, p. 38).

### 3.3.4 Prelúdio e Fuga em Lá menor - BWV 543

Consideremos parte do material temático do prelúdio, *in caso, da capo* (Lá<sub>4</sub>) até a primeira quiáltera no terceiro tempo do quarto compasso (Sol<sub>4</sub>):

Prelúdio e Fuga em Lá menor  
BWV 543  
Johann Sebastian Bach

The image shows the first system of the musical score for the Prelude and Fugue in A minor, BWV 543 by Johann Sebastian Bach. The score is arranged for Manuals (right and left hand), Pedal, and Organ. The right hand part features a melodic line with eighth and sixteenth notes, while the left hand and organ parts are mostly rests.

Figura 82 – Bach (*circa* 1708–1713): Prelúdio e Fuga, BWV 543 « Material temático »<sup>44</sup>

<sup>44</sup> Partitura editada pelo autor.

A trama do grafo<sup>45</sup> é consideravelmente complexa. A Figura abaixo ilustra a medida de centralidade de intermediação de arestas<sup>46</sup>:

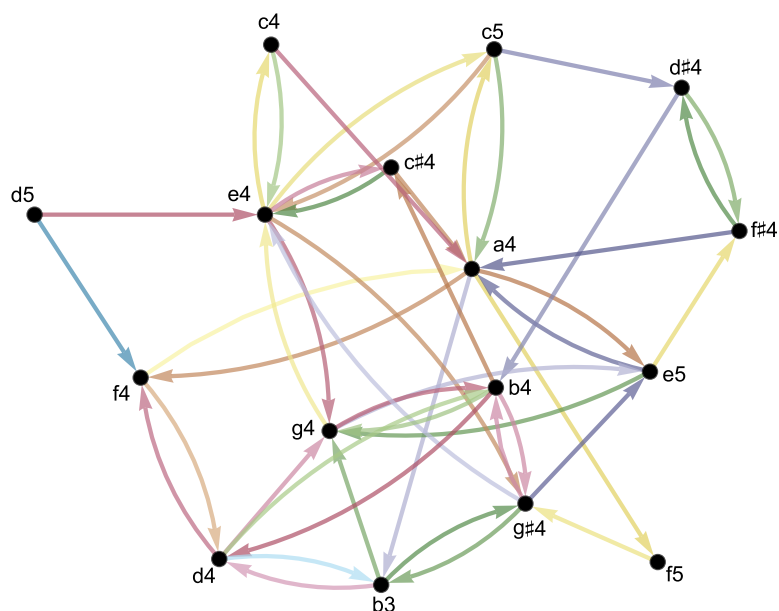


Figura 83 – Bach: BWV 543 - « Grafo »

Legenda: Centralidade de intermediação de arestas codificada por cores das arestas.

Há muitas conexões nesta rede o que dificulta a visualização de estruturas mais finas no grafo. Contudo, a melodia de Bach é polifônica e o grafo mostra os aspectos lineares da melodia, *i.e.*, o grafo foi construído interpretando o material temático do prelúdio como uma monodia.

Avaliemos pois então, o mesmo material musical à luz da polifonia. Consideremos a posição métrica de cada semicolcheia: cada tempo possui 4 posições. A posição métrica de número 1 é responsável pela voz mais aguda. A posição métrica 3 constitui-se como uma voz intermediária e por fim as posições 2 e 4 são responsáveis pela voz mais grave. A Figura abaixo codifica as vozes por cores, azul para voz mais aguda, verde para a voz intermediária e vermelho para a voz mais grave:

<sup>45</sup> Há um *notebook* do grafo feito em **D3.js** disponível em: <<https://observablehq.com/d/e976d257f8862e6d>>.

<sup>46</sup> A medida de centralidade de arestas é calculada por um algoritmo no *software Mathematica* que atribui valores numéricos (não reproduzidos aqui) para cada aresta. Arestas que possuem o mesmo valor são então agrupadas pela mesma cor.

**Prelúdio e Fuga em Lá menor**  
BWV 543  
Johann Sebastian Bach

[1] 2 3 4 1 2 3 4 ...

Tema

3 Vozes

3

Org.

Ped.

V1 V2 V3

Figura 84 – Bach (circa 1708–1713): Prelúdio e Fuga, BWV 543 « Polifonia a 3 vozes »<sup>47</sup>

A topologia das 3 vozes:

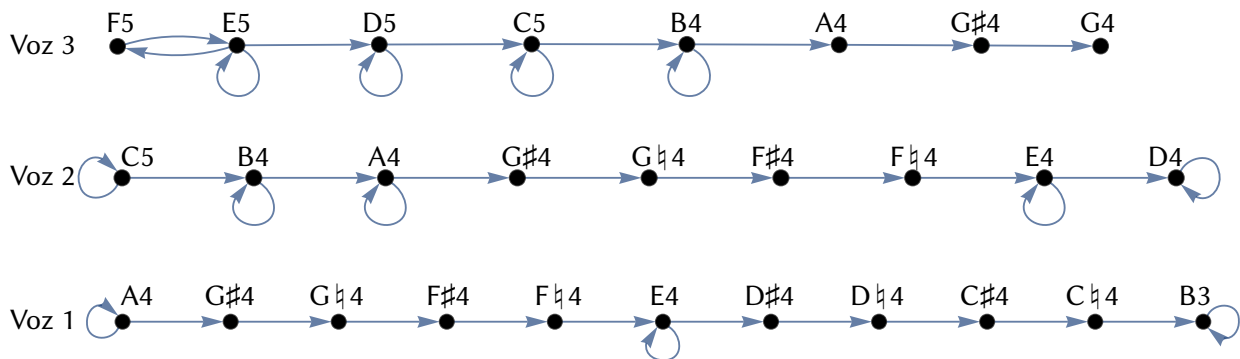


Figura 85 – Bach: BWV 543 - Polifonia a 3 Vozes « Topologia »

<sup>47</sup> Partitura editada pelo autor.



3.3.5 *Le Sacre du printemps - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction*3.3.5.1 *L'Adoration de la Terre, Introduction « Tema »*

Consideremos o tema inicial da *Sagração da Primavera*, de Ígor Stravinski, apresentado pelo fagote:

Lento ♩ = 50 tempo rubato  
l.  
solo ad lib.

Figura 86 – Stravinski (1913): *Le Sacre du printemps - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction « Tema »*<sup>48</sup>

O tema pode ser fragmentado em duas seções: uma sentença que compreende o início do tema até a a nota Lá<sub>5</sub> do terceiro compasso e, outra sentença que começa na última colcheia do compasso três (nota Dó<sub>5</sub>) e termina no quinto compasso. Consideremos, por enquanto, apenas a primeira seção. Analisando os encadeamentos nota a nota obtemos o seguinte grafo:

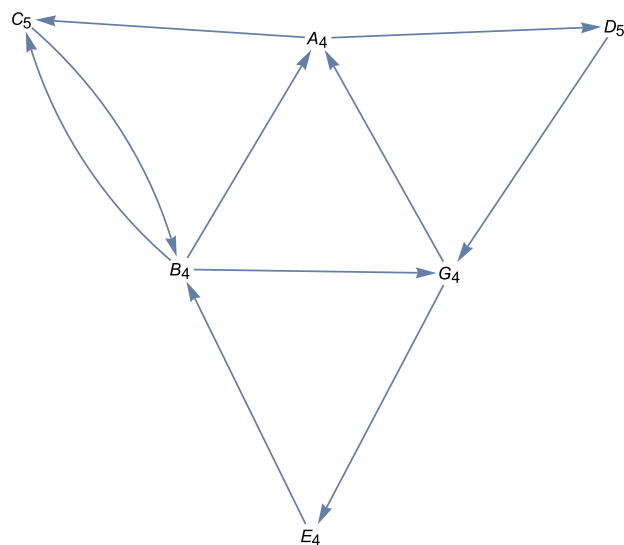


Figura 87 – Stravinski: *Le Sacre du printemps - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction « Grafo da 1ª Frase do Tema »*

<sup>48</sup> Partitura editada pelo autor.

O grafo da primeira frase é um fractal conhecido como **Triângulo de Sierpiński**:

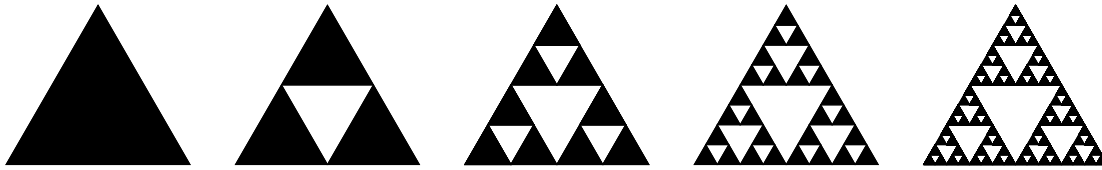


Figura 88 – Iterações do Triângulo de Sierpiński

A **Malha de Sierpiński**<sup>49</sup> é um fractal descrito pelo matemático polonês Waclaw Sierpiński em 1915. Abaixo alguns exemplos do fractal em ornamentos do século XII no que hoje é a Itália:

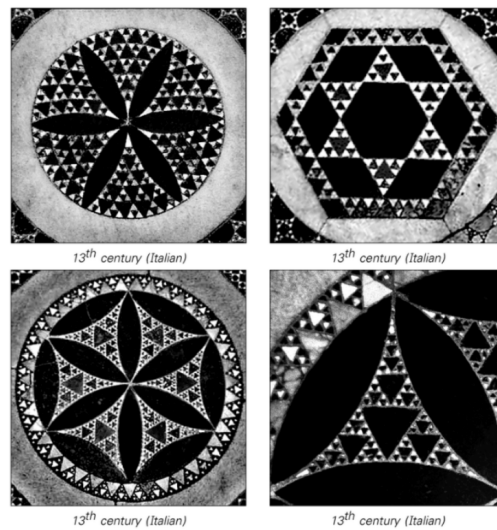


Figura 89 – Triângulos de Sierpiński em arte ornamental italiana do século XIII (WOLFRAM, 2002, p. 43)<sup>50</sup>

O **Triângulo de Sierpiński** pode ser representado como um grafo. Abaixo, grafos de quatro iterações do fractal,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$ :

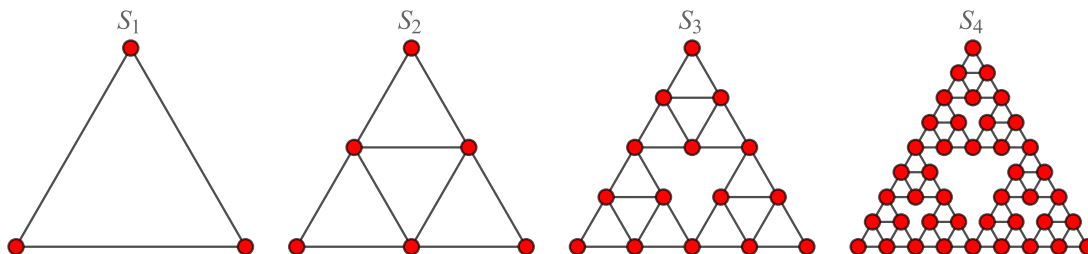


Figura 90 – Triângulos de Sierpiński - Grafos  $S_1$  a  $S_4$ <sup>51</sup>

<sup>49</sup> O termo *malha* é tradução do autor. O termo inglês é *sieve*: coador, peneira, crivo, tamis.

<sup>50</sup> Imagem disponível em: <<https://www.wolframscience.com/nks/p43--why-these-discoveries-were-not-made-before/>>.

<sup>51</sup> Imagem recriada a partir de: <<https://mathworld.wolfram.com/SierpinskiSieveGraph.html>>.

O grafo abaixo codifica por cores elementos fraseológicos do tema:

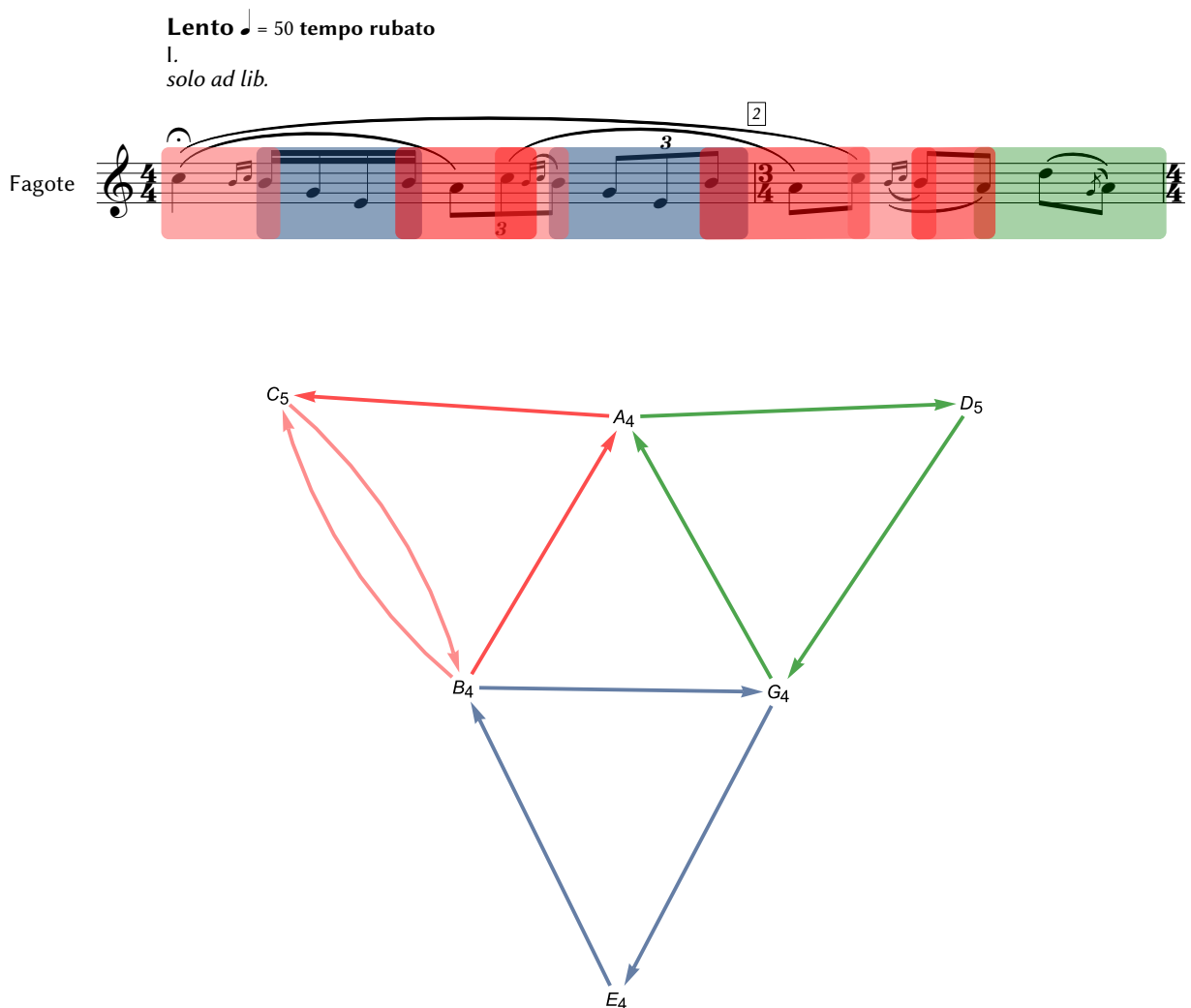


Figura 91 – Stravinski (1913): *Le Sacre du printemps - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction* « Tema Fractal »<sup>52</sup>

A bordadura, elemento fundamental na caracterização expressiva da melodia, está identificada no grafo pelas arestas paralelas ( $D_5 \leftrightarrow Si_4$ ). O arpejo  $Si_4 \rightarrow Sol_4 \rightarrow Mi_4$  está identificado no grafo como o triângulo azul e constitui-se como um ciclo. A sequencia  $Ré_5 \rightarrow Sol_4 \rightarrow Lá_4$  que cadencia a segunda frase está representada no grafo como o triângulo laranja e também é um ciclo. Também pode ser identificada a semelhança de dois caminhos, musicalmente relacionados como simetrias: (1)  $Ré_5 \rightarrow Sol_4 \rightarrow Lá_4$  e, (2)  $Mi_5 \rightarrow Si_4 \rightarrow Lá_4$ . Existe mais um ciclo importante ( $D_5 \rightarrow Si_4 \rightarrow Lá_4$ ) que corresponde ao início e fim de cada um dos motivos. Observe-se que o triângulo central, em razão da direcionalidade de suas arestas ( $Si_4 \rightarrow Sol_4$ ,  $Sol_4 \rightarrow Lá_4$  e  $Si_4 \rightarrow Lá_4$ ), não constitui um ciclo. Falta o encadeamento  $Lá_4 \rightarrow Si_4$  para haver um ciclo neste triângulo central.

<sup>52</sup> Partitura editada pelo autor. Grafo gerado no **Mathematica**.

3.3.5.2 *L'Adoration de la Terre, Introduction* « Breve análise musical »

Consideremos a introdução da Sagração até o final da marca de ensaio Nº 2:

*Le Sacre du printemps*  
Part I: *L'Adoration de la Terre - Introduction* Igor Stravinsky

The score is divided into three systems of staves:

- System 1 (Measures 1-5):** 4/4 time, *Lento* (♩ = 50 tempo rubato). Instruments: Cor Anglais, Clarinet in D, Clarinet in A, Bass Clarinet in B♭, Bassoon (solo ad lib., mp), Horn in F. Dynamics: *colla parte*, *p*.
- System 2 (Measures 6-8):** 3/4 time, *poco accelerando*. Instruments: C. A., Cl. D. (solo un peu en dehors, mp), Cl. A. I., Cl. A. II., B. Cl. I., B. Cl. II., Bsn. Dynamics: *mp*, *p*.
- System 3 (Measures 9-13):** 2/4 time, *in tempo*. Instruments: C. A., Cl. A. I., Cl. A. II., B. Cl. I., B. Cl. II., Bsn. Dynamics: *p*, *p espress.*, *p*.

Figura 92 – (STRAVINSKI, 1913): *Le Sacre du printemps - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction* « Da capo - Nº 2 »<sup>53</sup>

<sup>53</sup> Partitura (em Dó) editada pelo autor. As enarmonias privilegiam os bemóis para fins de simplificação na construção dos grafos.

O grafo abaixo foi construído contabilizando-se os encadeamentos melódicos presentes em toda a instrumentação empregada por Stravinski até o final do Nº 2. Os presentes encadeamentos são contabilizados uma única vez, *i.e.*, a sequência de duas notas pode ocorrer, *e.g.*, 7 vezes mas a sequência será representada por uma única aresta. Arcos paralelos ocorrem quando dois ou mais instrumentos tocam a mesma sequência de duas notas. Nesta caso, as cores das arestas indicam o instrumento. Há uma única exceção nesta codificação: a frase do fagote é dividida em duas seções que estão codificadas por cores diferentes conforme a legenda na parte inferior da Figura a seguir:

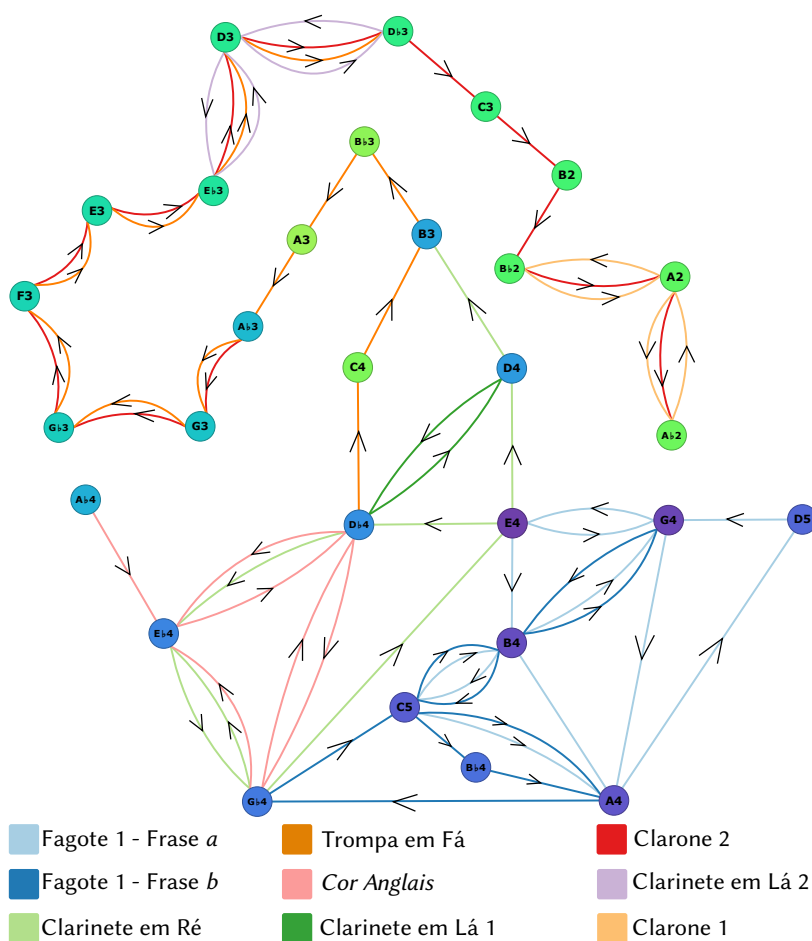


Figura 93 – *Le Sacre du printemps - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction (Da capo - Nº 2)*  
« Teia Orquestral »<sup>54</sup>

Legenda: Instrumentação codificada pelas cores das arestas.

<sup>54</sup> Agradecimentos especiais a Zack Ciminera que gentilmente ajudou com implementações no código do *notebook* para que informações como instrumentação fossem visualizadas por cores. *Notebook* disponível em: <<https://observablehq.com/d/008164058fe0db56>>. (Acesso em 01/2021)

Consideremos dois tipos de elementos componentes texturais - materiais temáticos e materiais secundários:

*Le Sacre du printemps*  
Part I: L'Adoration de la Terre - Introduction

Igor Stravinsky

The score is divided into three systems, each with a different time signature and tempo marking:

- System 1 (Measures 1-5):** Time signature 4/4, tempo *Lento* (♩ = 50 tempo rubato). Instruments include Cor Anglais, Clarinet in D, Clarinet in A, Bass Clarinet in B♭, Bassoon (solo ad lib, mp), and Horn in F (mp). Red highlights are present in the Clarinet in A and Bass Clarinet in B♭ parts.
- System 2 (Measures 6-10):** Time signature 3/4, tempo *poco accelerando*. Instruments include Clarinet in D (solo un peu en dehors, mp), Clarinet in A I and II, Bass Clarinet I and II, and Bassoon. Red highlights are present in the Clarinet in A I and II, Bass Clarinet I and II, and Bassoon parts.
- System 3 (Measures 11-13):** Time signature 2/4, tempo *in tempo*. Instruments include Clarinet in A (solo, p espress), Clarinet in A I and II, Bass Clarinet I and II, and Bassoon. Red highlights are present in the Clarinet in A I and II, Bass Clarinet I and II, and Bassoon parts.

Figura 94 – (STRAVINSKI, 1913): *Le Sacre du printemps* - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction « Materiais temáticos e secundários »

Legenda: 1) Materiais temáticos em tons de azul e 2) Materiais secundários em tons de rosa

Há, até a marca Nº 2, duas categorias de materiais: 1) material temático e, 2) material secundário. Os materiais temáticos são apresentados pelo Fagote, Clarinete em D e pelo *Cor anglais*. Uma característica que diferencia os dois extratos é que o material secundário - apresentado por Trompa, Clarinetes em A e Clarones - é exclusivamente cromático. Considerando aspectos harmônicos dos materiais temáticos, observamos que a segunda frase do Fagote (Dó<sub>5</sub> na última colcheia do compasso 3 até o mesmo Dó<sub>5</sub> no compasso 5) começa a apontar para uma nova região harmônica porque introduz uma nova altura, o Sol<sub>b4</sub>. Esta nova região é confirmada pelo Clarinete em D cuja entrada é uma espécie de reiteração variada da segunda frase do Fagote. Por fim, ao menos no que diz respeito aos materiais temáticos, o *Cor anglais* apresenta na marca Nº 2 um segundo material temático cujo desenvolvimento não está aqui contemplado. Os materiais secundários começam logo no início da peça quando a trompa fez uma pequena intervenção, quase que como um comentário discreto e complementar ao tema, sob a forma de uma bordadura. Na marca Nº 1, o Clarinete em A I e o Clarone II começam a desenhar duas linhas cromáticas em paralelo separadas por uma quarta (Láb<sub>3</sub> / Réb<sub>4</sub> → Láb<sub>3</sub> / Réb<sub>2</sub>). No terceiro tempo do compasso 6, fazendo elisão com as frases do Clarinete em D, Clarinete em A I e Clarone II, curva cromática paralela (Láb<sub>2</sub> / Réb<sub>3</sub> → Sib<sub>2</sub> / Mi<sub>b3</sub>; Sib<sub>2</sub> / Mi<sub>b3</sub> → Láb<sub>2</sub> / Réb<sub>3</sub>) é tocada pelo Clarinete em A II e o Clarone I. O Fagote volta com uma repetição da primeira frase com a omissão de algumas células motivicas (*in caso* as tercinas do primeiro compasso). Por fim, o *Cor anglais* enuncia seu material temático.

Análise descritiva dirigida ao público especializado pode parecer um tanto quanto redundante porque o que o texto descreve já está presente na partitura. De qualquer forma, este tipo de análise nos será útil porque 1) nomeamos os materiais musicais e, 2) iremos comparar esta análise descritiva com informações calculadas via algoritmos de Teoria dos Grafos do *software Mathematica*. O *Mathematica* identifica 4 comunidades no grafo como ilustra a Figura a seguir:

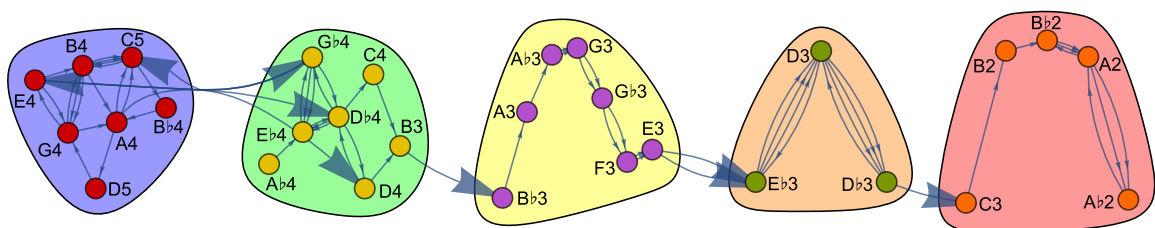


Figura 95 – Stravinsky: *L'Adoration de la Terre, Introduction (Da capo - Nº 2)* « Comunidades na Teia Orquestral »

É possível notar que a primeira comunidade (da esquerda para a direita) corresponde à primeira frase do Fagote. Ela é, portanto, exclusivamente temática. A segunda frase do fagote, como descrito no texto analítico, aponta para uma nova região harmônica. A segunda comunidade corresponde justamente aos materiais desta região harmônica, tanto materiais temáticos quanto materiais secundários. Esta segunda comunidade é, *ipso facto*, híbrida.

O  $\text{Sol}_{\flat_4}$ , introduzido pelo fagote, é um vértice é fronteiroço. Embora pertença à segunda comunidade, o  $\text{Sol}_{\flat_4}$  faz conexões com vértices da primeira comunidade. O  $\text{Sol}_{\flat_4}$  também é vértice comum a 3 instrumentos - Fagote, Clarinete em D e *Cor anglais*. O vértice  $\text{Mi}_4$  também é fronteiroço entre as duas comunidades e é dividido pelo Fagote e Clarinete em D.

A terceira, quarta e quinta comunidades são exclusivamente cromáticas, ou seja, contém apenas materiais secundários. O que difere as comunidades, possivelmente é a direcionalidade de seus **arcos paralelos**. É importante destacar que o movimento cromático começa na nota  $\text{Ré}_{\flat_4}$ , contida na segunda comunidade que é, como mencionado anteriormente, uma comunidade híbrida. Cada uma destas linhas cromáticas possuem um âmbito de uma oitava. Enquanto a linha do Clarinete em A começa na segunda comunidade e termina na terceira, a linha do Clarone II começa na terceira comunidade e termina na última comunidade, no registro mais grave de toda a seção, o  $\text{Lá}_{\flat_2}$  tocado pelo Clarone I. As curvas cromáticas paralelas tocadas pelo Clarinete em A II e Clarone I estão contidas nas comunidades Nº 4 e Nº 5. Ambas comunidades possuem **arcos** bidirecionais o que é reflexo do movimento curvilíneo que contrasta com o movimento retilíneo da comunidade Nº 3.



3.3.5.3 *L'Adoration de la Terre, Introduction* « Centralidade de Intermediação »

O grafo abaixo indica a medida de Centralidade de Intermediação calculada no **MATLAB®**. Os raios dos vértices do grafo são proporcionais aos valores:

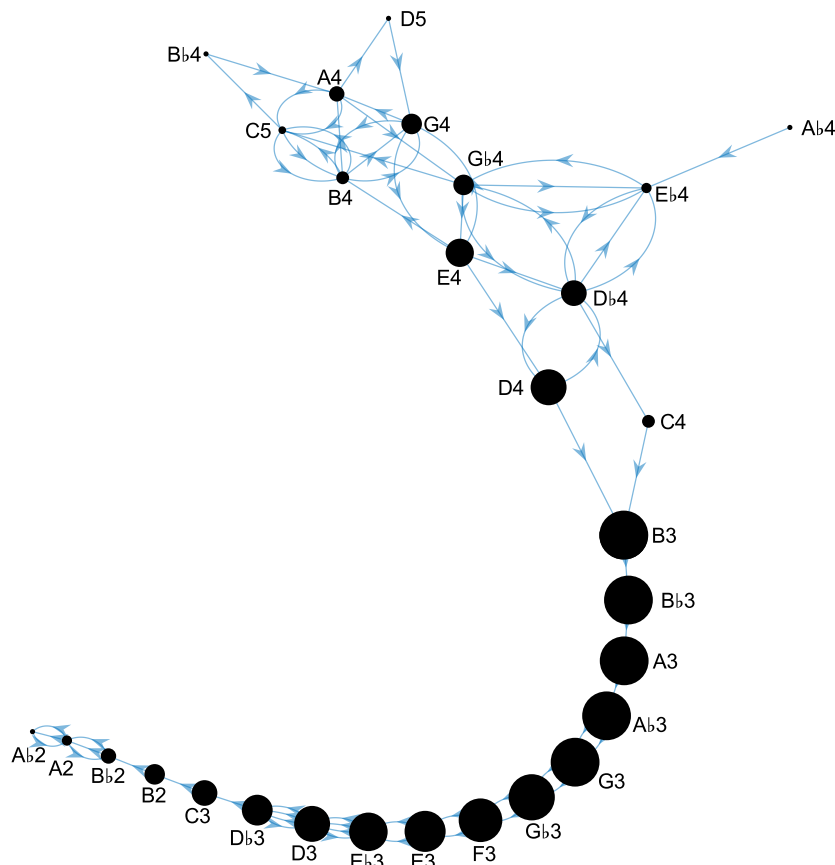


Figura 96 – *L'Adoration de la Terre, Introduction (Da capo - № 2)* « Centralidade de Intermediação »

Os materiais secundários são cromáticos e se iniciam a partir da nota Ré<sub>4</sub>, seguindo até a nota Lá<sub>2</sub>. Entre B<sub>3</sub> e Ab<sub>2</sub> há uma espécie de “grafo caminho” se considerarmos as adjacências dos vértices compreendidos neste intervalo. O gráfico da Figura ao lado indica os valores das medidas de centralidade de intermediação. Os valores mais altos estão destacados em vermelho e correspondem aos vértices B<sub>3</sub>, Ab<sub>3</sub>, G<sub>3</sub>, B<sub>b3</sub> e A<sub>3</sub>. Note que os valores decrescem entre a posição 14 e 26. À medida que percorremos o “grafo caminho” até a ponta (Ab<sub>2</sub>), a centralidade de intermediação diminuiu porque o número de **caminhos mais curtos** que percorrem os vértices mais periféricos é menor.

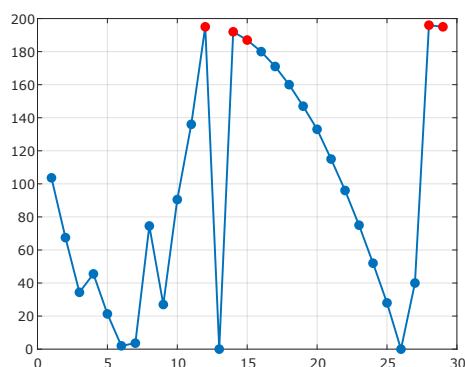


Figura 97 – Valores de Centralidade de Intermediação por vértices

3.3.5.4 *L'Adoration de la Terre, Introduction* « Centralidade de Grau »

Para o cálculo das medidas de centralidade de grau é necessário que se faça distinção entre arestas de saída e arestas de entrada. A razão para esta distinção é o fato de que estamos trabalhando com um multigrafo direcionado. Aproveitemos o ensejo para uma pequena expansão de conceitos previamente definidos em 2.2.4 (p. 31).

**Definição 39** Para um arco  $(u, v)$  o vértice  $u$  é sua **cauda** e o vértice  $v$  sua **cabeça**. Dizemos que o arco  $(u, v)$  **sai** de  $u$  e **entra** em  $v$ . A **cabeça** e **cauda** de um arco são seus vértices terminais. [...] Se  $(u, v)$  é um arco, dizemos que  $u$  domina  $v$  [...] e denotamos como  $u \rightarrow v$ .<sup>55</sup> (BANG-JENSEN; GUTIN, 2007, p. 2-3)

A soma dos graus de um multigrafo direcionado é formulada em (BANG-JENSEN; GUTIN, 2007, p. 5) como:

$$\sum_{v \in \mathcal{V}(\mathcal{D})} d^-(x) = \sum_{v \in \mathcal{V}(\mathcal{D})} d^+(x) = |\mathcal{A}(\mathcal{D})| \quad (3.11)$$

Guichard (2017, p. 127) explica que:

Se um grafo contém ambos arcos  $(v, w)$  and  $(w, v)$ , não se trata de “arestas múltiplas”, já que os arcos são distintos. É possível haver vários arcos, ou seja, um arco  $(v, u)$  pode ser incluído várias vezes no multiconjunto de arcos. Como antes, um **dígrafo** é chamado **simple** se não houver **loops** ou **arcos múltiplos**.<sup>56</sup>

No caso do grafo da Figura 98 (p. 81), os dois arcos paralelos  $D_{b_4} \Rightarrow E_{b_4}$  e.g., são distintos porque estão relacionados a um conjunto de categorias, *in caso*, o conjunto de instrumentos.

**Definição 40** “Quando **arcos paralelos** e **loops** são **admissíveis**, falamos em **pseudografos direcionados**; **pseudografos direcionados sem loops** são **multigrafos direcionados**.”<sup>57</sup> (BANG-JENSEN; GUTIN, 2007, p. 4)

Mais rigorosamente, portanto, devemos nos referir a estes grafos como **pseudografos**.

<sup>55</sup> Tradução do autor.

<sup>56</sup> Tradução do autor. Texto original em inglês: “If a graph contains both arcs  $(v, w)$  and  $(w, v)$ , this is not a “multiple edge”, as the arcs are distinct. It is possible to have multiple arcs, namely, an arc  $(v, u)$  may be included multiple times in the multiset of arcs. As before, a **digraph** is called **simple** if there are no **loops** or **multiple arcs**.”

<sup>57</sup> Tradução do autor.



Apenas 4 dos vértices são balanceados, ou seja, possuem o mesmo grau de convergência e divergência para suas arestas. Os gráficos abaixo mostram as centralidades de grau de entrada e saída. Os vértices balanceados correspondem às alturas  $D_5$ ,  $Bb_4$ ,  $Db_4$  e  $D_4$  estão destacados em vermelho.

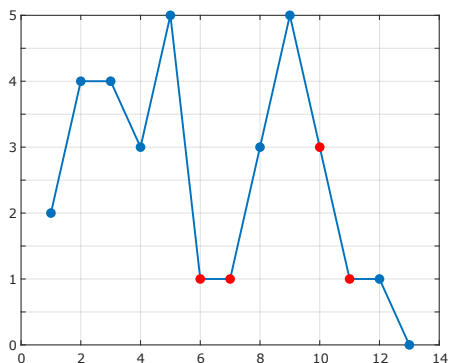


Figura 100 – Valores de Centralidade de Grau de *Entrada*

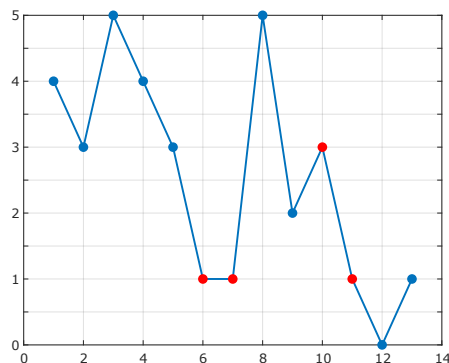


Figura 101 – Valores de Centralidade de Grau de *Saída*

Um vértice com  $\text{deg}^-(v) = 0$  é chamado de **fonte**, e um vértice com  $\text{deg}^+(v) = 0$  é chamado de **sumidouro** (ou **poço**)<sup>60</sup>. Note que o vértice  $A_{b_4}$  é uma **fonte**. Isto se deve ao fato de que no tema do *Cor anglais* - que se inicia na marca Nº 2 - há uma *ceasura* (pausas indicadas em laranja) que secciona o material temático. O  $A_{b_4}$  surge após esta *ceasura* como se estivesse surgindo « do nada ». Ao  $A_{b_4}$ , nada imediatamente precede a não ser a pausa. Considerei portanto, na confecção do grafo que nenhum vértice do grafo até ele chega e que logo, trata-se de um **vértice fonte**. De forma análoga, o  $Si_3$  do Clarinete em Ré é a última nota do tema e a nada se conecta. O  $Si_3$  é um dos elos do material secundário, não obstante, o  $Si_3$  é, no contexto dos materiais temáticos, um **sumidouro**<sup>61</sup>.

Figura 102 – (STRAVINSKI, 1913): *Le Sacre du printemps - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction* « Temas do Clarinete em Ré e *Cor anglais* »

<sup>60</sup> *Source* e *sink*, respectivamente. Há uma definição mais sofisticada destes conceitos em (BANG-JENSEN; GUTIN, 2007, p. 97).

<sup>61</sup> No contexto de todos os materiais a nota  $Si_3$  é o primeiro elo do segmento “grafo caminho”.

3.3.5.5 *L'Adoration de la Terre, Introduction* « Clique »

Há um clique presente no grafo que corresponde a:  $D_{b_4} \Leftrightarrow G_{b_4} \Leftrightarrow E_{b_4} \Leftrightarrow D_{b_4}$ . A Figura abaixo destaca em vermelho o clique:

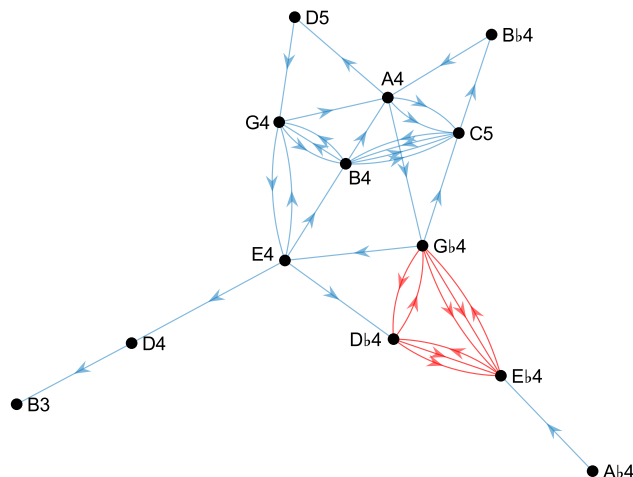


Figura 103 – *L'Adoration de la Terre, Introduction (Da capo - № 2)* « Clique »

Devemos notar que dígrafo completo  $\mathcal{K}_3$  somente existe porque dois instrumentos se complementam para que exista reciprocidade de todos os 3 vértices. Trata-se de um clique composto por **arcos** pertencentes a dois subconjuntos diferentes. Na literatura pesquisada da área da Teoria dos Grafos, o autor não encontrou informações que tratassem deste tipo de caso especificamente. Dentro da perspectiva da análise musical podemos interpretar que os materiais temáticos do Clarinete em Ré e do *Cor anglais*, são, de certa forma, independentes. O material temático do Clarinete em Ré é derivado do tema do Fagote e o tema apresentado pelo *Cor anglais* é um material temático novo que será desenvolvido. Ainda que consideremos o grafo como *estrutura temporal* dentro do intervalo *da capo* até a marca №2, devemos apontar para a pequena distância temporal (3 compassos) entre os dois temas como ilustra a Figura 102 (p. 82). Em face a estas considerações, proponho uma analogia entre este clique em particular, e o **Triângulo de Penrose**:



Figura 104 – Rotações do Triângulo de Penrose <sup>62</sup>

O Triângulo de Penrose é uma objeto impossível:

<sup>62</sup> Imagens capturadas a partir do modelo interativo do Triângulo de Penrose disponível em: <<https://sketchfab.com/3d-models/impossible-triangle-8012679e87d64f3b894bc734c41352ac>>. (Acesso em 01/2021)

“Cada parte individual é aceitável como uma representação de um objeto normalmente situado no espaço tridimensional; contudo, devido a falsas conexões das partes, a aceitação da figura inteira sobre esta fundamentação leva ao efeito ilusório de uma estrutura impossível.”<sup>63</sup> (PENROSE; PENROSE, 1958)

Lista de encadeamentos (arestas) do clique por instrumento:

- (i) *Cor anglais*:  $E_{b4} \Leftrightarrow D_{b4}$
- (ii) *Cor anglais*:  $D_{b4} \Leftrightarrow G_{b4}$
- (iii) *Cor anglais*:  $G_{b4} \rightarrow E_{b4}$
- (iv) *Clarinete em Ré*:  $D_{b4} \rightarrow E_{b4}$
- (v) *Clarinete em Ré*:  $E_{b4} \Leftrightarrow G_{b4}$

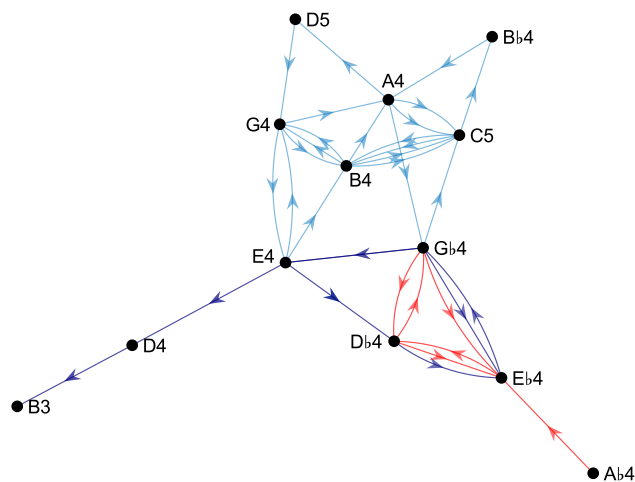


Figura 105 – *L’Adoration de la Terre, Introduction (Da capo - N.º 2)* « Temas do Clarinete em Ré (azul escuro) e *Cor anglais* (vermelho) »

Na Figura 105 podemos visualizar que as arestas do triângulo são complementares e dependem de dois componentes, *i.e.*, duas classes de arestas. É como se o triângulo do clique existisse, assim como o Triângulo de Penrose, como um objeto ilusório cuja existência depende de “falsas conexões das partes”. A simples adição, *e.g.*, da aresta  $E_{b4} \rightarrow G_{b4}$  no tema do *Cor anglais* resolveria a questão soldando a “conexão entre as partes”.

<sup>63</sup> Tradução do autor. Texto original em inglês: “Each individual part is acceptable as a representation of an object normally situated in three-dimensional space; and yet, owing to false connexions of the parts, acceptance of the whole figure on this basis leads to the illusory effect of an impossible structure.”

### 3.3.6 *Musica ricercata* VII

#### 3.3.6.1 *Ostinato*

O *ostinato* é um *loop* de 7 notas e 6 alturas - compreendidas entre  $F\acute{a}_2$  e  $F\acute{a}_3$  - pertencentes a um conjunto pentatônico:



Figura 106 – Ligeti (1951-1953): *Musica ricercata* VII « *Ostinato* » © By kind permission of SCHOTT MUSIC, Mainz - Germany.

O grafo do *ostinato* é um *Fish Graph*<sup>64</sup>, composto por dois ciclos ( $C_3$  e  $C_2$ ) unidos pelo vértice de intermediação que corresponde à nota  $D\acute{o}_3$ . O grafo é euleriano, *i.e.*, contém um circuito euleriano e que, *in caso*, corresponde a 1 ciclo do *ostinato* ou 1 *loop*.

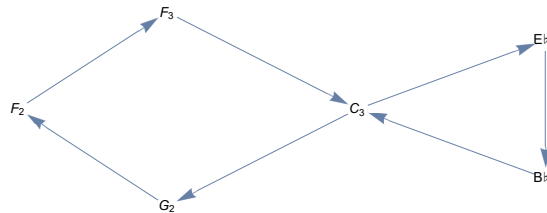


Figura 107 – Ligeti: *Musica ricercata* VII - *Ostinato* « *Fish Graph* »

O *Fish Graph* se assemelha ao *Butterfly Graph* (ilustrado abaixo). O grafo borboleta possui 2 ciclos simétricos ( $C_3$  e  $C_3$ ) e é similar ao símbolo de infinito  $\infty$ .

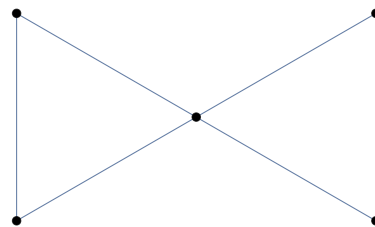


Figura 108 – *Butterfly Graph*

Curiosamente, o *ostinato* de Ligeti por ser tocado em *loop* tem uma ideia de infinitude. O grafo peixe é assimétrico possuindo um ciclo de 4 vértices e outro de 3. Os ciclos dividem

<sup>64</sup> Como descrito em: <<https://mathworld.wolfram.com/FishGraph.html>>. (Acesso em 09/2020.)

um vértice, a nota  $D\acute{o}_3$  que é o vértice central do grafo. Esta assimetria existe por causa do número ímpar de notas do *ostinato*, 7. Também é possível perceber esta assimetria pela quebra de padrão do perfil melódico do *ostinato*. Há uma padrão *dente de serra* em que movimentos ascendentes e descendentes se alternam 3 vezes até que 2 movimentos descendentes quebram o padrão.

### 3.3.6.2 Tema

Usando os grafos como metodologia de análise para estudar o tema *Musica ricercata VII* podemos visualizar suas características. O grafo abaixo mostra a topologia do tema sob a perspectiva dos encadeamentos de altura nota a nota:

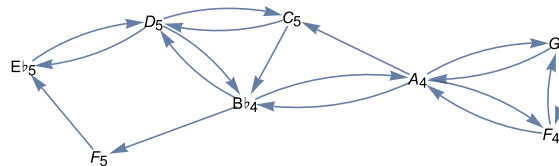


Figura 109 – Ligeti: *Musica ricercata VII* - Topologia do Tema

Em [Ciência das Redes](#), a [reciprocidade](#) de um grafo é calculada como:

$$r = \frac{\mathcal{L}^{\leftrightarrow}}{\mathcal{L}} \quad (3.12)$$

onde  $\mathcal{L}$  é o número de arestas (« *links* ») e  $\mathcal{L}^{\leftrightarrow}$  é o número de arestas bidirecionais, *i.e.*, o número de pares de arestas direcionais (saída e entrada) que conectam pares de vértices.

O grafo do Tema possui um alto índice de reciprocidade ( $\frac{7}{9}$ ). Esta razão aparentemente simples,  $r = \frac{7}{9} = 0, \overline{7}$ , revela algo que se relaciona com a proposta composicional restritiva que Ligeti adotou para *Musica ricercata*. Note que certas arestas do grafo são unidirecionais,  $Sib_4 \rightarrow F\acute{a}_5$ ,  $F\acute{a}_5 \rightarrow Mi\flat_4$ ,  $L\acute{a}_4 \rightarrow D\acute{o}_5$ . Um encadeamento que parte de  $Sib_4$  em direção a  $F\acute{a}_5$ , o ponto culminante do Tema, só pode ser seguido por  $Mi\flat_5$  que por sua vez só pode ir ao encontro de  $R\acute{e}_5$ , já que as arestas bidirecionais conectam justamente estas duas últimas notas ( $Mi\flat_4 \Leftrightarrow R\acute{e}_5$ ).

Há, de certa maneira, um nível extra de restrições mas não como as previstas por Ligeti. As restrições a que me refiro concernem os encadeamento melódicos e muito muito provavelmente não foram préconcebidas por Ligeti. Ao que todas as fontes pesquisadas indicam, as restrições de Ligeti concernem somente o conjunto de alturas empregados em cada peça e nada mais. O uso da Teoria dos Grafos como ferramenta analítica revelou, neste caso, mais um nível de regras composicionais de natureza restritiva, de forma muito similar à ideia original de Ligeti. Grafos podem portanto, servir como base de regras composicionais.



A Figura abaixo indica um clique - Lá<sub>4</sub> ⇔ Fá<sub>4</sub> ⇔ Sol<sub>4</sub> - destacado em vermelho no grafo do Tema:

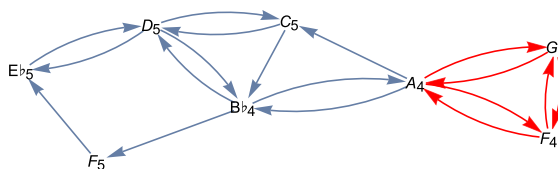


Figura 110 – Ligeti: *Musica ricercata* VII - Clique

O ciclo Lá<sub>4</sub> ⇔ Fá<sub>4</sub> ⇔ Sol<sub>4</sub> é um clique porque há vias de « mão-dupla » entre todos os vértices deste subgrafo completo  $\mathcal{K}_3$ . Observe que os nós Fá<sub>4</sub> e Sol<sub>4</sub> são intercambiáveis e suas posições não alteram a topologia do grafo. No tema de Ligeti há duas ocorrências do motivo<sup>65</sup> composto por 1 colcheia seguida de 2 semicolcheias<sup>66</sup>:



Figura 111 – Ligeti (1951-1953): *Musica ricercata* VII - Motivo «colcheia + 2 semicolcheias»<sup>67</sup>  
© By kind permission of SCHOTT MUSIC, Mainz - Germany.

O Fá<sub>4</sub> é a nota mais grave do tema e é uma nota de tensão. Em sua primeira aparição o Fá<sub>4</sub> é 1 mínima ligada a 1 colcheia. A duração prolongada gera tensão e a melodia encontra *momentum* através das semicolcheias do motivo. Na segunda vez que o Fá<sub>4</sub> aparece ele vem de um longo repouso sobre o Sol<sub>4</sub>. Novamente as semicolcheias impulsionam a melodia. O detalhe importante é que na primeira vez, as semicolcheias partem de Sol<sub>4</sub> enquanto que na segunda ocorrência partem de Fá<sub>4</sub>. O restante do perfil melódico é idêntico em ambas seções. Musicalmente os motivos são similares mas não idênticos, constituem-se como uma microvariação. Embora seja necessária uma prova matemática, parece haver uma correlação entre estas microvariações e a intercambiabilidade das notas Fá<sub>4</sub> e Sol<sub>4</sub> na topologia do grafo porque para os motivos parece não ser tão importante a nota que origina a figura composta pelas 2 semicolcheias.

<sup>65</sup> Compassos 12 e 19.

<sup>66</sup> Ver Figura 14 (p. 18).

<sup>67</sup> Partitura editada pelo autor.

## 3.3.6.3 Primeira Variação e Canon

A primeira variação introduz um único novo encadeamento ( $Ré_5 \rightarrow Fá_5$ ) para a voz superior enquanto que a voz inferior, além de ampliar o registro melódico, apresenta uma topologia consideravelmente diferente.

23

(m.s.: sempre *pp*)

Figura 112 – Ligeti (1951-1953): *Musica ricercata* VII « Variação 1 e Início do Canon »  
© By kind permission of SCHOTT MUSIC, Mainz - Germany.

A segunda variação é um canon que apresenta três características particularmente interessantes:

- (i) A métrica em  $\frac{3}{4}$  se torna mais evidenciada pelas imitações, algo que não era tão claro tanto pela natureza fraseológica do tema, quanto pela textura composta por dois andamentos independentes.
- (ii) A imitação é uma resposta real. Sua transposição - quinta abaixo - introduz a nota Lá que confere o caráter polimodal da seção (mixolídio/dórico).
- (iii) A topologia de ambas as vozes do canon são idênticas entre si e idênticas ao próprio tema.

24

The image displays a musical score for a piano piece, specifically a canon. It consists of four systems of music, each with a grand staff (treble and bass clefs). The first three systems show a canon between two voices, with the upper voice leading and the lower voice imitating it. The fourth system shows a piano texture with the instruction '(m)f tre corde' and '(m.s.: sempre pp)'. The score is in 3/4 time and features complex rhythmic patterns and melodic lines.

Figura 113 – Ligeti (1951-1953): *Musica ricercata* VII « Canon (continuação) » © By kind permission of SCHOTT MUSIC, Mainz - Germany.

No capítulo « *Wiping the Slate Clean* » (*György Ligeti: Music of the Imagination*), Richard Steinitz reafirma a relação da *Musica ricercata* VII com a *Sonatina*:

O No. 7 também é rápido, embora seu protótipo na *Sonatina* fosse um sóbrio *Andante* em blocos de acordes. A nova versão é uma melodia suave em estilo folclórico em Si bemol maior (um híbrido idiomático sérvio e romeno), logo imitada canonicamente por uma versão de si mesmo em Mi bemol.<sup>68</sup> (STEINITZ, 2003)

Embora estejam corretas as asserções sobre os conjuntos de alturas de Si $\flat$  maior e Mi $\flat$  maior, Steinitz desconsidera o caráter modal do tema e de sua imitação. O *ostinato* orienta a escuta para Fá, alturas que limitam o registro do *loop*, compreendido entre Fá $_2$  e Fá $_3$ . Se considerarmos o primeiro modo pentatônico como a pentatônica « maior<sup>69</sup> », o *ostinato* corresponde ao segundo modo que possui uma característica de ambiguidade tonal ou modal-diatônica porque seu terceiro grau faz um intervalo de quarta em relação ao primeiro.

(i) Mi $\flat$ , Fá, Sol, Si $\flat$ , Dó, Ré

(ii) Mi $\flat$ , Fá, Sol, Si $\flat$ , Dó, Ré

(iii) Mi $\flat$ , Fá, Sol, Si $\flat$ , Dó, Ré

(iv) Mi $\flat$ , Fá, Sol, Si $\flat$ , Dó, Ré

(v) Mi $\flat$ , Fá, Sol, Si $\flat$ , Dó, Ré

O tema, diatônico, começa quinto grau, Dó $_5$ , já que estabelecemos a altura Fá como fundamental. Nesta seção do canon, ambas melodias também começam em seus respectivos quinto graus, Dó $_6$  e Fá $_5$ . A segunda variação do tema está *de facto* em Fá mixolídio e é respondido por Si $\flat$  mixolídio. Fá e Si $\flat$  mixolídio possuem 6 notas em comum, exceto por suas terças, Lá e Lá $\flat$ , respectivamente. Como dividem muitas notas em comum, o tema e sua imitação soam amalgamados, logo resultante sonora do canon é polimodal, oscilando entre terça maior (Lá) e terça menor (Lá $\flat$ )<sup>70</sup>.

<sup>68</sup> Tradução do autor. Texto original em inglês: “No. 7 is also fast, although its prototype in the *Sonatina* was a staid, chordal *Andante*. The new version is a gentle folk-style melody in B flat major (a hybrid of Serbian and Romanian idioms), soon shadowed canonically by a version of itself in E flat.”

<sup>69</sup> Na transposição das alturas do *ostinato*, a pentatônica maior correspondente ao conjunto Mi $\flat$ , Fá, Sol, Dó, Ré. A nomenclatura « maior » se deve ao terceiro grau da escala, devendo-se evitar confusão com **tonalidades** « maiores ».

<sup>70</sup> A oscilação entre terça menor e maior também é característica nos gêneros musicais *jazz* e *blues*. A nota acrescentada ao modo é chamada de *blue note*. Note-se que a *blue note* também pode ser uma nota acrescentada ao modo pentatônico « menor », *in caso*, a quarta aumentada.

A Figura abaixo reúne as topologias da primeira e segunda variação e a topologia do tema como referência comparativa. Note que o Tema e as duas vozes da Segunda Variação possuem topologias idênticas, fato intrinsecamente ligado à natureza de imitação por canon. As vozes da Primeira Variação são consideravelmente distintas em termos de suas respectivas topologias. O registro é estendido pela voz mais grave até o  $Si^b_3$ . Há, na segunda voz, um **ciclo** constituído pelos encadeamentos  $Mi^b_3 \rightarrow Ré_4 \rightarrow Si^b_3 \rightarrow Dó_4 \rightarrow Lá_4 \rightarrow Mi^b_3$ . A topologia do Tema e da voz 1 da Primeira Variação são praticamente idênticas salvo a inclusão do encadeamento  $Ré_5 \rightarrow Fá_5$ . Por razões que fogem à compreensão do autor, o **Mathematica** gera um *embedding* espelhado para a rede **Variação 1 - Voz 1**. Acredito importante destacar este fato porque é possível, em um primeiro relance, interpretar os grafos como significativamente diversos quando na verdade são bastante similares.

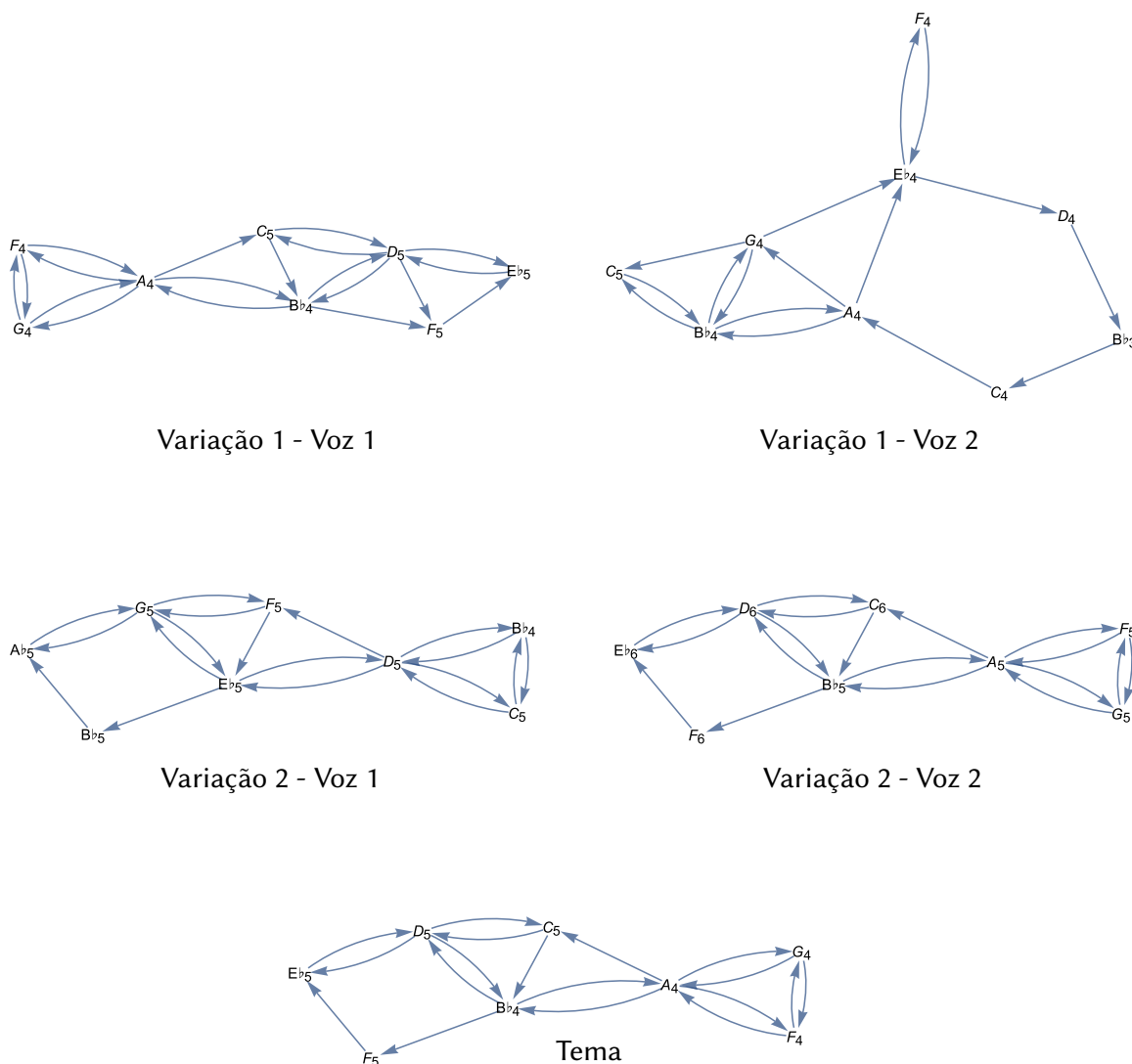


Figura 114 – Ligeti: *Musica ricercata* VII « Tema, Variação 1 e Canon »

## 3.3.6.4 Medidas de Centralidades

Para fins ilustrativos e comparativos, calculamos três medidas de centralidade no grafo do tema da *Musica ricercata* VII: (1) Centralidade de Grau de Entrada, 2) Centralidade de Grau de Saída e, (3) Centralidade de Intermediação.

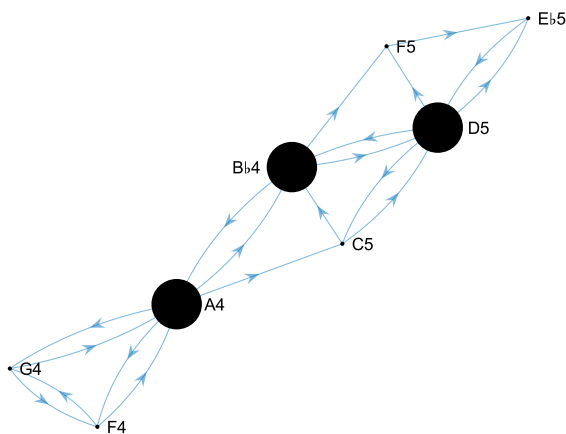


Figura 115 – Ligeti: *Musica ricercata* VII - Centralidade de Grau de Entrada

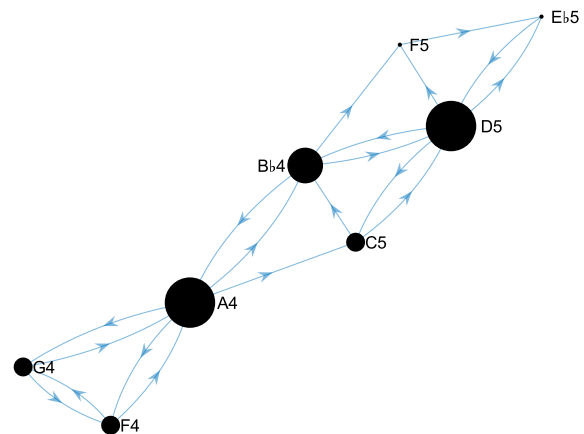


Figura 116 – Ligeti: *Musica ricercata* VII - Centralidade de Grau de Saída

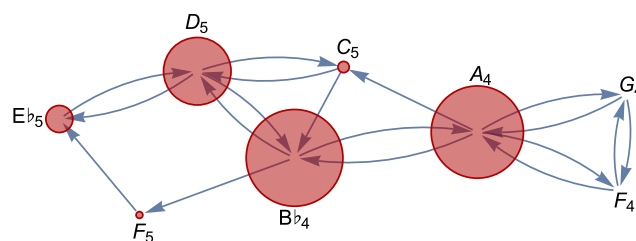


Figura 117 – Ligeti: *Musica ricercata* VII - Centralidade de Intermediação

Legenda: Tamanho dos vértices proporcionais aos valores da medida de centralidade.

A importância das notas  $A_4$ ,  $Bb_4$  e  $D_5$  em ambos cálculos de medida de centralidade fica evidenciada nos grafos.

## 3.3.6.5 Múltiplos Parâmetros

O próximo grafo combina múltiplos parâmetros:

- (i) Alturas representadas pelas formas dos vértices e pelo primeiro número que corresponde ao valor MIDI da altura.
- (ii) Durações representadas pelo tamanho proporcional dos vértices e pelo segundo número que corresponde a múltiplos da unidade igual a semínima.
- (iii) Comunidades<sup>71</sup> representadas pelas cores dos vértices.

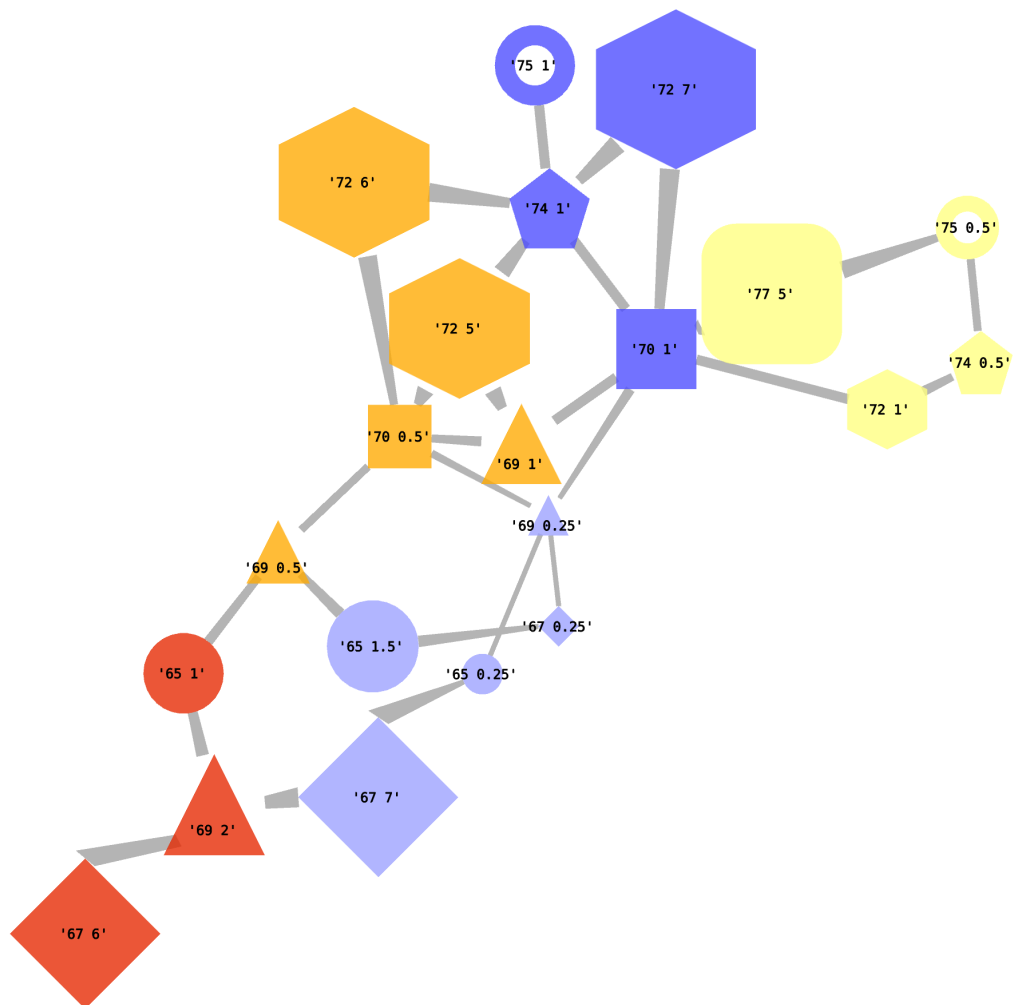


Figura 118 – Ligeti: *Musica ricercata* VII - Grafo com múltiplos parâmetros

<sup>71</sup> As comunidades foram calculadas usando o [Método de Louvain](#) no *software Tulip*.

## 3.3.6.6 Distância

A noção de distância<sup>72</sup> em termos melódicos, via de regra se refere a intervalos, *e.g.*, segunda, terça, quarta, *et cetera*. Aqui, esta noção de distância se relaciona com o número de passos necessário em uma topologia para se conectar dois pontos, no caso, duas notas melódicas. O grafo árvore aqui não é hierárquico mas representa bem a ideia de distância ou intervalo como passos ou etapas como ilustra a Figura a seguir:

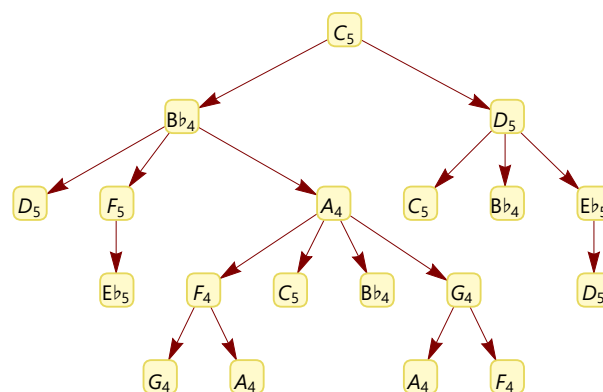


Figura 119 – Ligeti: *Musica ricercata VII* - Árvore melódica do tema

Considerando cada nível como uma etapa melódica podemos ver que há diversos caminhos possíveis para se chegar a uma mesma nota. Consideremos, *e.g.*, o Fá<sub>5</sub>, ponto culminante da melodia. Só é possível chegar até ele através do Si<sub>b4</sub>. Já o Mi<sub>b5</sub> pode ser atingido via Fá<sub>5</sub> ou via Ré<sub>5</sub>. Há limitações neste tipo de visualização porque uma mesma altura aparece em diferentes vértices e em diferentes níveis de ramificação. Note-se também que para fins de simplificação nem todas ramificações são representadas, *e.g.*, o Si<sub>b4</sub> no quarto nível não representa um nó final, podendo haver novas ramificações como ilustradas em níveis superiores, como se o nó estivesse se reciclando ao voltar alguns níveis na hierarquia<sup>73</sup>.

Consideremos os pólos do tema: Dó<sub>4</sub>, Fá<sub>5</sub> e Sol<sub>4</sub>. O Fá<sub>5</sub> exige duas etapas para ser alcançado enquanto que o Sol<sub>4</sub> requer ao menos quatro (às vezes cinco) passos para ser atingido.

<sup>72</sup> Este conceito também é discutido, sob outro ponto de vista, no capítulo « *CONCEPT OF DISTANCE (INTERVAL)* » de *Formalized Music: Thought and Mathematics in Composition* (XENAKIS, 1992, p. 157-158).

<sup>73</sup> Reitero que hierarquia aqui significa apenas a ordem dos eventos no fluxo temporal.



## 3.3.6.7 Temas criados no Max

As três imagens que se seguem reúnem as partituras das 3 melodias geradas em Max junto às topologias do tema original de Ligeti e de cada melodia respectivamente. A primeira observação que salta aos olhos é que há em todos os exemplos gerados em Max, um número significativamente maior de encadeamentos. Isto explica em parte porque as melodias soem familiares, apresentam diferenças estilísticas facilmente percebidas. Outra característica divergente é observada pelos laços presentes nas topologias das melodias 1 e 3. Os laços representam notas repetidas, algo inexistente no tema de Ligeti.

Consideremos a partitura e topologia do primeiro exemplo do tema da *Musica ricercata* VII « recriado » no **Max**:

The figure displays a musical score for a 'recreated' theme in 3/4 time, with a tempo marking of ♩ = 116. The score consists of five staves, numbered 1 through 21. Below the score are two directed graphs representing musical topologies. The left graph shows the topology of the original Ligeti theme, with nodes labeled E<sub>5</sub>, D<sub>5</sub>, C<sub>5</sub>, B<sub>4</sub>, A<sub>4</sub>, G<sub>4</sub>, and F<sub>4</sub>. The right graph shows the topology of the 'recreated' theme, with nodes labeled F<sub>4</sub>, A<sub>4</sub>, B<sub>4</sub>, C<sub>5</sub>, D<sub>5</sub>, E<sub>5</sub>, G<sub>4</sub>, and F<sub>5</sub>. The right graph is significantly more complex, featuring a self-loop on the F<sub>5</sub> node and a much denser network of directed edges between nodes.

Figura 120 – Partitura do Tema 1 « recriado » no Max

**Legenda:** Topologia do tema original de Ligeti à esquerda e topologia do tema « recriado » no Max à direita

Agora consideremos a partitura e topologia do segundo exemplo do tema da *Musica ricercata* VII « recriado » no **Max**:

Figura 121 – Partitura do Tema 2 « recriado » no Max

**Legenda:** Topologia do tema original de Ligeti à esquerda e topologia do tema « recriado » no Max à direita

Podemos perceber aqui que o clique  $Lá_4 \Leftrightarrow Fá_4 \Leftrightarrow Sol_4$  não ocorre no tema recriado no **Max** em razão da ausência da conexão  $Lá_4 \Leftrightarrow Fá_4$ <sup>74</sup>. Esta interrupção conectiva torna a nota  $Fá_4$  periférica no grafo. Curiosamente a nota  $Fá_5$  é a nota periférica do tema.

<sup>74</sup> Reitero aqui que para haver um clique em um dígrafo ou multigrafo é necessário que o subgrafo completo possua conexões em ambos os sentidos, *i.e.*,  $Lá_4 \rightarrow Fá_4 \rightarrow Sol_4$  é um ciclo mas não um clique.

Por fim consideremos a partitura e topologia do terceiro exemplo do tema da *Musica ricercata* VII « recriado » no **Max**:

The figure consists of two parts. The upper part is a musical score for a single melodic line in 3/4 time, marked with a tempo of quarter note = 116. The score is divided into six systems, with measure numbers 4, 7, 13, 19, and 24 indicated at the beginning of their respective systems. The lower part contains two directed graphs. The graph on the left represents the topology of the original theme by Ligeti, with nodes labeled E<sub>b5</sub>, D<sub>5</sub>, C<sub>5</sub>, A<sub>4</sub>, B<sub>b4</sub>, F<sub>5</sub>, and F<sub>4</sub>. The graph on the right represents the topology of the 'recreated' theme, with nodes labeled B<sub>b4</sub>, A<sub>4</sub>, C<sub>5</sub>, F<sub>5</sub>, D<sub>5</sub>, E<sub>b5</sub>, F<sub>4</sub>, and G<sub>4</sub>. Both graphs show complex, multi-directional connections between the notes.

Figura 122 – Partitura do Tema 3 « recriado » no Max

**Legenda:** Topologia do tema original de Ligeti à esquerda e topologia do tema « recriado » no Max à direita

Aqui podemos notar novamente a ocorrência inexistente no tema original, *in caso* a nota Dó<sub>5</sub>. A nota Fá<sub>5</sub> é, assim como no tema original, periférica mas no caso do exemplo gerado pelo **Max** o Fá<sub>5</sub> se conecta com Mi<sub>b5</sub> (como no original) e com Dó<sub>5</sub> (ao invés de Si<sub>b4</sub>). Note-se também que a conexão Mi<sub>b5</sub> ⇔ Fá<sub>5</sub> é uma conexão de « mão dupla », o que não ocorre no tema original.

Os temas 1 e 3 são, segundo (BANG-JENSEN; GUTIN, 2007, p. 4), **pseudografos direcionados** - conforme a **Definição 40** (p. 80) - porque são grafos que admitem *loops* (embora não possuam arcos paralelos).

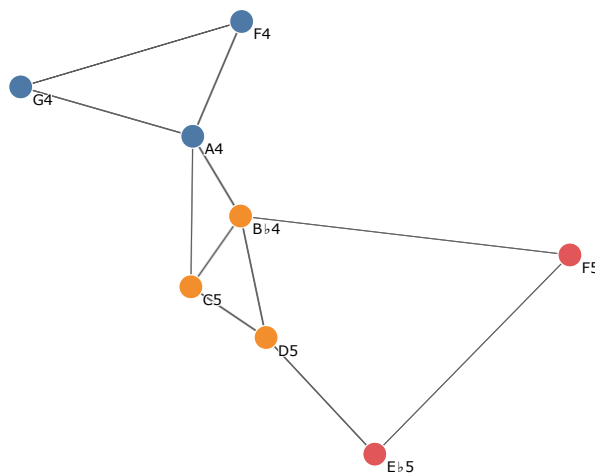
	Fá <sub>4</sub>	Sol <sub>4</sub>	Lá <sub>4</sub>	Si <sub>b4</sub>	Dó <sub>5</sub>	Ré <sub>5</sub>	Mi <sub>b5</sub>	Fá <sub>5</sub>
F <sub>4</sub>	0	1	3	0	0	0	0	0
G <sub>4</sub>	1	0	2	0	0	0	0	0
A <sub>4</sub>	3	1	0	5	0	0	0	0
B <sub>b4</sub>	0	0	2	0	5	2	0	0
C <sub>5</sub>	0	0	2	0	0	4	0	0
D <sub>5</sub>	0	0	0	3	2	0	2	0
E <sub>b5</sub>	0	0	0	0	0	1	0	1
F <sub>5</sub>	0	0	0	1	0	0	0	0

Tabela 3 – Ligeti: *Musica ricercata* VII - Frequência de Encadeamentos do Tema

### 3.3.6.8 Frequência de encadeamentos

Os **arcos paralelos** estão no cerne desta seção. O tema da *Musica ricercata* VII possui 42 notas e, *ipso facto* 41 encadeamentos, pertencentes a um rol de 8 alturas. A Tabela 3 mostra o número de ocorrências para cada encadeamento encontrado no *corpus* do tema, *i.e.*, o número de arcos paralelos que existem durante todo o percurso do Tema.

O grafo da Figura abaixo foi construído de forma que a frequência de encadeamentos, ou o número de **arcos**, fosse representada como vetores de força entre os vértices<sup>75</sup>, *i.e.* o comprimento das arestas é inversamente proporcional ao número de encadeamentos<sup>76</sup>:

Figura 123 – Ligeti: *Musica ricercata* VII - Tema

Legenda: Frequência de encadeamentos representada como força vetorial entre os vértices.

<sup>75</sup> O grafo é interativo e está disponível em <<https://observablehq.com/d/65d0b5801a7c392b>>. (Acesso em 11/2020.) Encorajo o acesso a este *notebook* em particular porque é possível « sentir » as forças entre os vértices em ação. Isto de certa forma amplia a nossa relação com o material musical. Esta grafo é, de certa forma, análogo às forças eletroquímicas que organizam os átomos em uma molécula.

<sup>76</sup> A metodologia aqui se aproxima das [Cadeias de Markov](#).

### 3.3.7 *Melencolia I*

Albrecht Dürer (1471–1528) foi um gravurista da Renascença alemã. Sua gravura *Melencolia I* é fascinante, em particular para esta dissertação por um de seus elementos: o **Sólido de Dürer**. Tal sólido é um poliedro truncado, mais especificamente, um trapezoedro triangular truncado (o primeiro de uma série infinita de trapezoedros truncados) que possui 6 pentágonos e 3 triângulos como faces.



Figura 124 – Albrecht Dürer: *Melencolia I* - (1514)

O **Sólido de Dürer** é um **Grafo de Peterson**<sup>77</sup>  $GP(2, 6)$ . A figura abaixo mostra seis possíveis *embeddings*<sup>78</sup>, topologicamente equivalentes, que facilitam a visualização de certas estruturas no **Grafo de Dürer**.

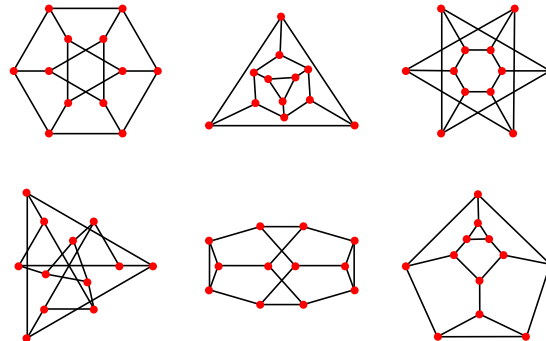


Figura 125 – Grafo de Dürer: Seis possíveis *embeddings*

Fonte: Imagem disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/DuererGraph.html>>. (Acesso em 07/2020.)

Consideremos a segunda figura da segunda linha. É possível visualizar dois pentágonos. Agora consideremos duas escalas pentatônicas sem notas em comum:

(i) F, G, B $\flat$ , C, E $\flat$

(ii) F $\sharp$ , G $\sharp$ , B $\natural$ , C $\sharp$ , E $\natural$

Duas alturas, A e D completam o total cromático<sup>79</sup>

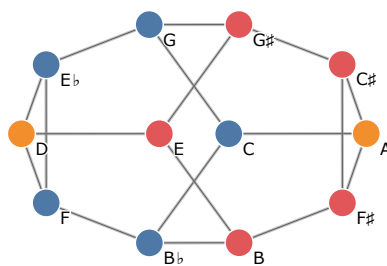


Figura 126 – Grafo de Dürer: Total cromático

<sup>77</sup> **Grafos de Peterson** são uma família de **grafos cúbicos** formados ao se conectar os vértices de um **polígono regular** aos vértices correspondentes de um **polígono estrela**. Suas propriedades estão descritas em: <<https://mathworld.wolfram.com/GeneralizedPetersenGraph.html>> e <[https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized\\_Petersen\\_graph](https://en.wikipedia.org/wiki/Generalized_Petersen_graph)>. (Acessos em 11/2020.)

<sup>78</sup> Para evitar possíveis confusões comuns a traduções de termos técnicos, adoto o anglicismo para o termo *embedding*. Em *Deep Learning Techniques for Music Generation* (BRIOT; HADJERES; PACHET, 2020, p. 40) elucidam a origem do termo: “The term embedding comes from the analogy with mathematical embedding, which is an injective and structure-preserving mapping.”

<sup>79</sup> Esta distribuição de alturas é semelhante à empregada por Luciano Berio na peça *Brin*.

## 3.3.7.1 Série dodecafônica

O Circuito Hamiltoniano percorre todos os vértices de um grafo uma única vez, como definido em 2.3.9 (p. 39).

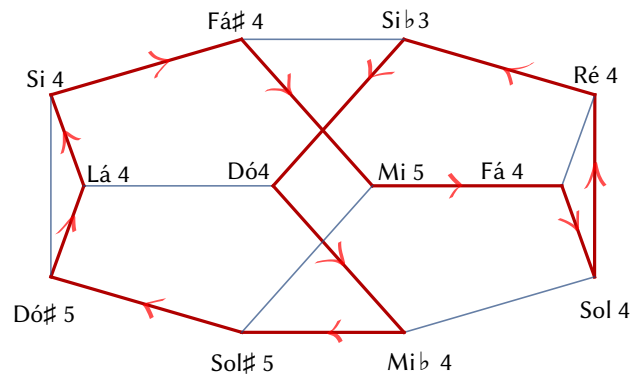


Figura 127 – Grafo de Dürer: Circuito Hamiltoniano

Por se tratar de um grafo de 12 vértices e um caminho que percorre todos os vértices, podemos derivar uma série dodecafônica a partir do Grafo de Dürer, *e.g.*:

$$(i) A_4 \rightarrow B_4 \rightarrow F\#_4 \rightarrow E_4 \rightarrow F_4 \rightarrow G_4 \rightarrow D_4 \rightarrow Bb_3 \rightarrow C_4 \rightarrow Eb_4 \rightarrow G\#_5 \rightarrow C\#_5 \rightarrow A_4$$

Tal procedimento, conforme a distribuição de alturas da Figura acima, é empregado na partitura do Anexo A.





## 4 *Musica ricercata* VII: *Patch* « Tema » v. Nº2

FLAG IS WIN

Este capítulo final trata de uma breve revisão do *patch* « Tema » (ver seção 1.2.3, p. 15) aplicando conceitos da Teoria dos Grafos para testar a hipótese levantada na seção 1.2.4.2 (p. 23) de que o principal motivo pelas divergências estilísticas observadas nas melodias recriadas pelo *patch* seria a ausência de regras para os encadeamentos melódicos.

### 4.1 Algoritmo elaborado no OM#

Após o estudo das novas possibilidades analíticas tornadas possíveis pela Teoria dos Grafos, nosso objetivo foi refazer o algoritmo de criação de melodias a partir do modelo da *Musica ricercata* VII (Ligeti), incorporando informações analíticas provindas da Teoria dos Grafos, em particular, a noção de adjacência<sup>1</sup>. Para isso, a melodia original da *Musica ricercata* VII 7 foi utilizada para geração de um grafo direcionado, onde as notas são representadas por nós e as arestas se correspondem a sequências imediatas de notas. A partir desse grafo, foram extraídos os dados de adjacência, mais especificamente, a lista de notas que podem ser empregadas em sequência, metodologia similar às Cadeias de Markov salvo a noção de probabilidades. A expectativa era que as novas melodias se aproximassem mais do modelo do original, em comparação com a primeira versão do algoritmo.

Alguns elementos da melodia original foram mantidos para manter a estrutura global, em particular a sequência de notas aqui referidas como *tenutas*, *i.e.*, as notas de maior duração. Com relação ao ritmo foram testadas duas versões, uma que o ritmo original é mantido e outra em que novas frases rítmicas foram geradas. Essa parte foi implementada no *software Max* (auxiliado pela biblioteca *bach*). O algoritmo para geração de frases melódicas foi implementado no *software OM#*<sup>2</sup>, devido aos recursos de uma biblioteca de restrições<sup>3</sup> (*OMCS*). As novas frases melódicas geradas foram em seguida incorporadas ao *patch* do *Max* para atualizar a versão anterior do algoritmo. Os dados de entrada do algoritmo do *OM#* são:

- (i) Número total de notas da frase;
- (ii) Notas inicial e final da frase (*tenutas*) e
- (iii) Número máximo de soluções.

<sup>1</sup> Ou *Vizinhança*.

<sup>2</sup> Disponível em: <<https://cac-t-u-s.github.io/om-sharp/>>. (Acesso em 01/2021.)

<sup>3</sup> Ou « *constraints* » em costumeiro anglicismo.

O número de total de notas é extraído do esqueleto rítmico gerado pelo *patch* do **Max/bach**. As notas inicial e final de cada frase são extraídas da melodia original da *Musica ricercata VII*. O número máximo de soluções teve como objetivo fornecer um leque de soluções diferentes que seriam aleatoriamente sorteadas no *patch* do **Max/bach**. Algumas vezes o algoritmo não encontra soluções, dependendo da frase rítmica. Nesses casos, no *patch* do **Max/bach** as notas são substituídas pelo Dó<sub>4</sub>, ausente no âmbito da melodia original, de modo que fica claro quando isso ocorre.

#### 4.1.1 Estrutura

O algoritmo do **OM#** é organizado em duas etapas, representadas no programa por dois blocos, **frase** e **seqs**:

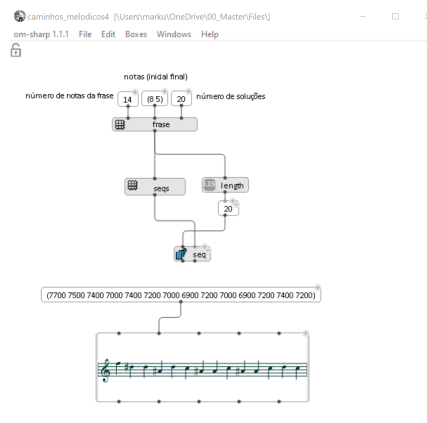


Figura 128 – Bloco principal do *patch* realizado em **OM#**

##### 4.1.1.1 Bloco **frase**

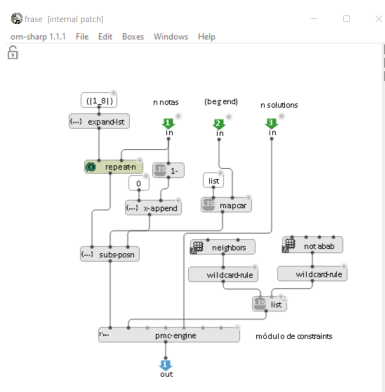


Figura 129 – Bloco **Fraser** do *patch* realizado em **OM#**

Esse bloco calcula  $n$  soluções diferentes (esse número é definido no input 3, número máximo de soluções), representando as notas da escala ascendente da melodia original (Fá<sub>4</sub> a Fá<sub>5</sub>) por uma sequência de números inteiros (1 a 8).

O coração desse bloco é o módulo de **constraints pmc-engine**. Esse módulo tem várias entradas, mas apenas três foram utilizadas:

- (i) A primeira define o espaço de sorteio (domínio) de cada nota da sequência;
- (ii) a segunda define as regras que filtram as soluções possíveis, e
- (iii) a terceira define o número de soluções buscadas. Algumas vezes o número de soluções encontradas é inferior ao proposto, daí o nome “**número máximo de soluções**”.

O funcionamento de um módulo de constraints parte da perspectiva de um espaço de sorteio e de regras que limitam as escolhas desse sorteio. No algoritmo em questão, o espaço é representado pela sequência de inteiros (1 a 8), que representam todas as notas da melodia. Entretanto, como as notas inicial e final são pré-determinadas (*input 2*), nesses casos não há escolha.

Foram utilizadas duas regras no algoritmo, a primeira diz respeito às vizinhanças das notas; a segunda procura evitar um padrão (*abab*) melódico de dupla bordadura, que havia surgido nos primeiros testes e que não se encontra na melodia original. Em seguida vamos descrever em detalhes a primeira regra, que está relacionada à Teoria do Grafos.

#### 4.1.1.2 Regras de Adjacências

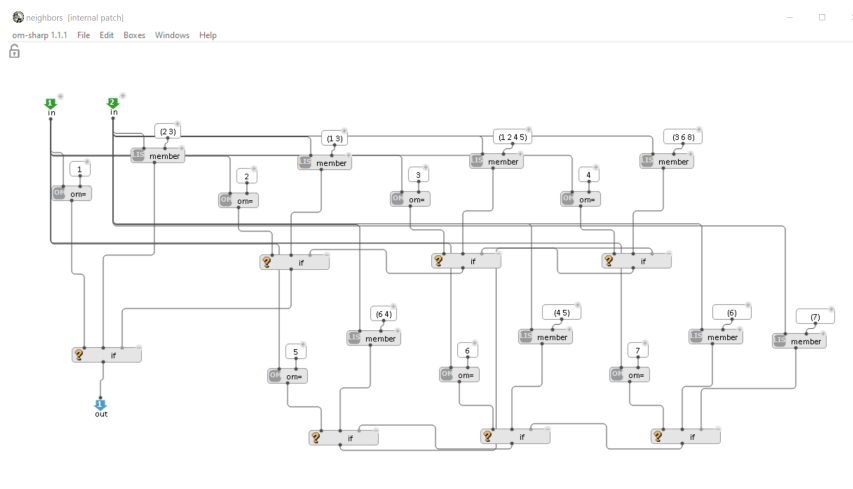


Figura 130 – Bloco *Adjacências* do *patch* realizado em OM#

Em nossa regra há duas entradas (**in1** e **in2**), que representam notas sequenciais na frase, *in caso*, quaisquer notas sequenciais, a primeira e a segunda ou a quinta e a sexta, por exemplo. Assim, é possível avaliar todas as sucessões imediatas de notas na melodia gerada pelo algoritmo. Para efeito de clareza expositiva, vamos nos referir à primeira nota de cada par como nota 1 e à segunda como nota 2.

A regra de **adjacências** está estruturada como uma cadeia de “*if's*”, um bloco com três entradas. A função “*if*” verifica se uma condição, definida em sua primeira entrada, é verdadeira ou falsa; no caso de ser verdadeira, avalia a segunda entrada; se a condição for falsa, a terceira entrada é avaliada ao invés da segunda.

No nosso caso a condição avaliada é se a nota 1 é uma nota específica, por exemplo igual a “1”. Se for o caso, a segunda entrada do “*if*” é avaliada. Ela, por sua vez, apresenta a função “*member*” seguida de uma lista de vizinhos possíveis. No caso da nota “1”, a lista de vizinhos possíveis é (2 3). Assim um desses números poderá ser escolhido para a sequência, ou seja, para a nota 2. Se a condição avaliada for incorreta, ou seja, se a nota 1 não for igual a “1”, avalia-se a terceira entrada do “*if*”, que está conectada a outro “*if*” (trata-se, portanto, de uma cadeia de “*if's*”).

Nessa segunda situação, a nova condição é verificar se a nota 1 é igual a “2”. Se for o caso, a lista de vizinhos de “2” é (1 3), definindo uma campo de escolhas para a nota 2. Caso não seja, passamos à terceira entrada que leva a um novo “*if*”.

Esse processo segue até que todas as possibilidades (1 a 8) sejam verificadas. Assim, é possível criar uma sequência de notas na melodia que respeita a regra de vizinhanças definida a partir da melodia original.

#### 4.1.1.3 Regra de dupla bordadura ( $\neg abab$ )

Essa regra é mais simples. Tem quatro entradas representando uma sequência de quatro notas seguidas na melodia. Novamente esclareço que podem ser quaisquer quatro notas seguidas.

A regra também utiliza um “*if*”, sendo que a condição avaliada é se a primeira nota é igual à terceira. Caso a condição seja verdadeira, avalia-se a segunda entrada do “*if*” que conduz a outra condição verificando se a segunda nota é diferente da quarta. Caso essa segunda condição seja verdadeira, a saída do “*if*” é “*t*”, ou “*true*” (verdadeiro) e o módulo de **constraints** aceita a sequência. No caso de alguma das condições anteriores ser falsa, o “*if*” envia “*nil*” (nulo ou vazio) ou “*false*” (falso) para o módulo de **constraints**, que então recusa a sequência das quatro notas como incorreta (caso da dupla bordadura).

#### 4.1.1.4 Bloco **seqs**

A função do bloco “**seqs**” é mapear os números 1 a 8 calculados pelo bloco “**frase**” para a representação midicents, utilizada pela biblioteca **bach** do **patch** do **Max**. Assim, é possível incorporar as soluções encontradas no **OM#** no **patch** do **Max/bach**.

4.1.1.5 Grafo estrutural do *patch*

A Figura abaixo ilustra toda a estrutura do algoritmo:

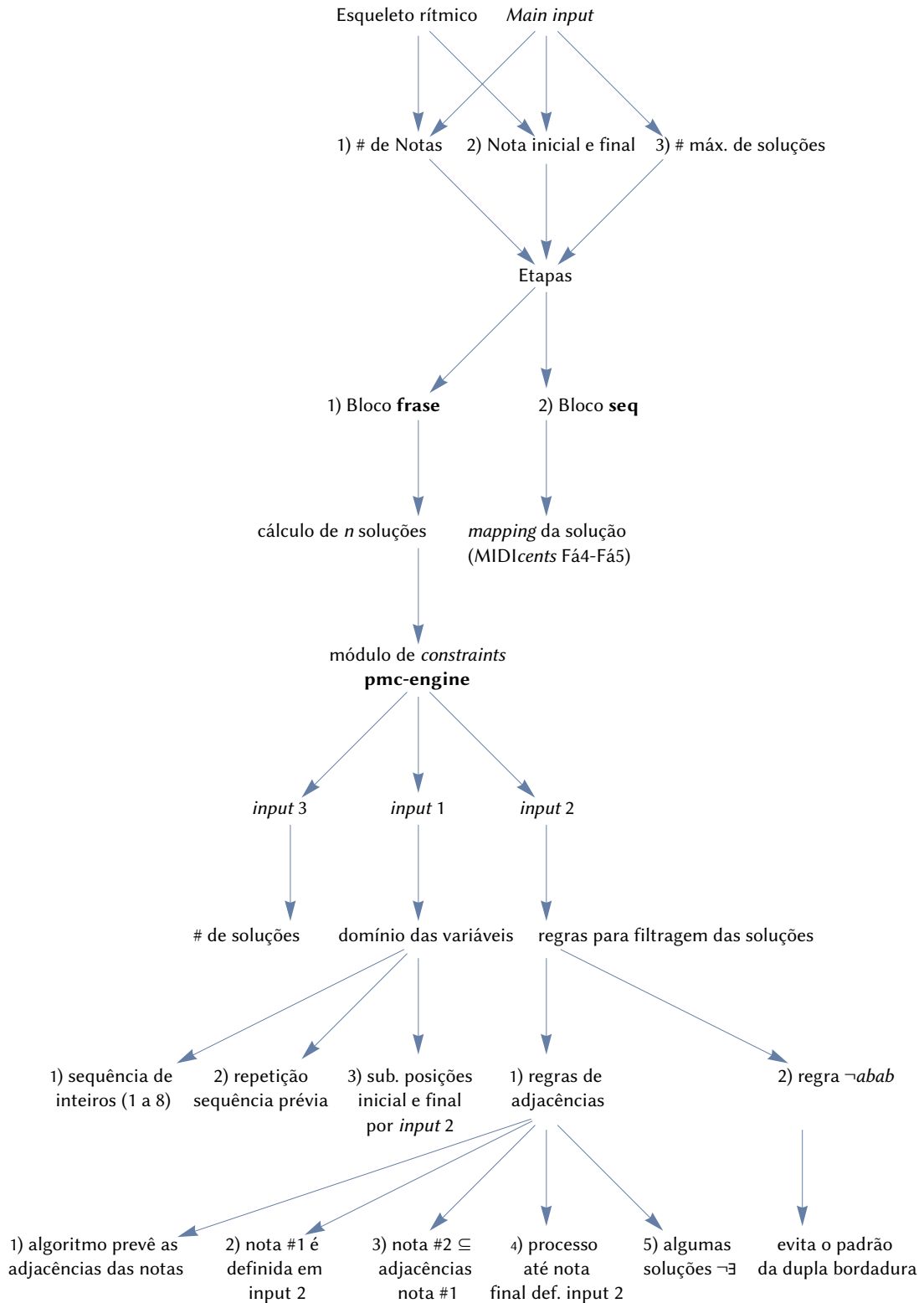


Figura 131 – Estrutura do algoritmo

## 4.2 Novos exemplos

Iremos nesta seção fazer uma breve análise de duas categorias de exemplos criados a partir do *patch* revisado. As categorias de exemplos são distintas quanto à flexibilidade de suas respectivas estruturas rítmicas. O *patch* da primeira categoria é capaz de organizar as figuras rítmicas elementares de forma a extrapolar o conteúdo do Tema de Ligeti enquanto que o *patch* da segunda categoria segue rigorosamente a estrutura de valores de durações para todas as alturas do Tema recriado. A ideia fundamental por trás desta distinção é avaliar se a regra de encadeamentos (regra de adjacências) proporcionada pela análise estatística do Tema usando a Teoria dos Grafos é suficiente para a recriação do Tema. As análises dos exemplos são comentários sobre os resultados alcançados nesta primeira revisão do *patch*. Esta revisão trouxe à tona tanto resultados esperados como erros não identificados durante a concepção do *patch* revisado.

### 4.2.1 Tema com células aleatórias

Os dois próximos exemplos foram gerados pelo *patch* revisado que incorpora as regras de adjacências extraídas via análise estatística usando a Teoria dos Grafos como descrito previamente.

The musical score for Example 1 is presented in five staves. The first staff begins with a tempo marking of a quarter note equal to 116. The key signature consists of two flats. The notation includes a variety of rhythmic values and rests, with some notes beamed together. The staves are numbered 1, 7, 13, 19, and 23, indicating the starting measure of each line.

Figura 132 – Exemplo 1

A linha melódica é mais movimentada devido à maior presença de células rítmicas. Isto ocorre, possivelmente, porque o *subpatches p-9-tempos* (ver Figura 15, p. 19) é igual para todos os segmentos de subfrases de 9 tempos. O *patch* pode ser melhorado se estes *subpatches* fossem diferentes para cada frase de 9 tempos. A porção do *subpatch* que lista os possíveis valores para a composição de cada células rítmicas pode ser modificado de forma a

melhor se aproximar do Tema de Ligeti. É possível, por exemplo, excluir os valores  $n \in \mathbb{Q}$  no objeto *message Células rítmicas* para as primeiras frases de 9 tempos de forma a eliminar a possibilidade de células compostas por colcheias pontuadas, colcheias e semicolcheias.

Figura 133 – Exemplo 2

Uma leitura à primeira vista de ambos exemplos revela a ausência do encadeamento  $Ré_5 \rightarrow Mi_b_5$ . A quinta *tenuta*,  $Dó_5$  dos compassos 13, 14 e 15 possui duração de 6 tempos, o que é incompatível com o Tema original em que a duração correspondente é de 5 tempos. Ambas anomalias podem ser pequenas falhas na concepção do *patch* ou podem ser frutos do acaso já que este algoritmo permite o sorteio de alguns elementos. Mais precisamente a duração parece ser um erro no *patch* e a ausência do encadeamento, fruto da porção aleatória do *patch*. Outro fator importante é que o grafo usado para esta versão do *patch* é o grafo da Figura 109 (p. 86) que leva em consideração somente o parâmetro altura para extrair as informações de encadeamentos. Um grafo mais preciso como o da Figura 118 (p. 93) combina o parâmetro duração e altura. Estas informações combinadas são importantes porque auxiliam na elaboração de restrições, e.g., as figuras que contêm semicolcheias em suas células sempre traçam um movimento ascendente<sup>4</sup>. Este tipo de regra não está prevista no *patch* e é possível observar nos Exemplos 1 e 2 (Figuras 132 e 133 respectivamente) que as células que contêm colcheias e semicolcheias realizam toda a sorte de movimentos.

<sup>4</sup> Ver Figura 111 (p. 87).

### 4.2.2 Tema com ritmo preestabelecido

O maior número de notas em uma frase implica em um maior número de encadeamentos nota-a-nota. Isto significa que há, entre duas *tenutas*, mais caminhos possíveis no grafo que as conectam. Cada passo trilhado também implica em uma variação das possíveis conexões, por exemplo, a nota  $Dó_5$  está a apenas dois passos de distância de  $Lá_4$ :

$$Dó_5 \rightarrow Si\flat_4 \rightarrow Lá_4.$$

A nota  $Dó_5$  possui baixo índice de centralidade de grau, tanto de entrada quanto de saída, já a nota  $Lá_4$  possui um índice alto para esta medida. Isto contribui para que rapidamente o número de encadeamentos possíveis cresça o que pode fazer com que a melodia se desvie bastante do original. Para testar esta hipótese, tornamos fixas as durações para todas as notas no *patch*, desta forma restringimos o número de encadeamentos nota-a-nota. Os resultados são interessantes, o primeiro exemplo com durações fixas preestabelecidas é bastante fidedigno ao Tema original:

Figura 134 – Exemplo 3

Contudo, este *patch* apresenta um erro no valor de uma de suas durações, *in caso*, a *tenuta*  $Dó_5$  dos compassos 13, 14 e 15. A duração correta é de 5 tempos. O próximo exemplo incorpora esta correção.

Figura 135 – Exemplo 4



Ainda que corrigido, é possível notar que o *patch* ora “acerta”, ora “erra” a ordem dos encadeamentos. A Figura abaixo compara os dois exemplos com o Tema original de Ligeti, destacando em azul (Exemplo 1) e laranja (Exemplo 2) os desvios do modelo:

The figure displays three systems of musical notation in 3/4 time, each with a treble clef and a key signature of two flats. The tempo is marked as quarter note = 116. The first system (measures 1-11) shows the original 'Tema' and two variations, 'Exemplo 3' and 'Exemplo 4'. The second system (measures 12-18) and third system (measures 19-25) also show the original 'Tema' and the two variations. In the second system, 'Ex. 3' has blue highlights and 'Ex. 4' has orange highlights. In the third system, 'Ex. 4' has orange highlights. The original 'Tema' is shown in black ink throughout.

Figura 136 – Exemplos 3 e 4 comparados ao Tema da *Musica ricercata* VII

Legenda: Desvios do Exemplo 3 em azul e desvios do Exemplo 4 em laranja.

### 4.2.3 Dois fragmentos interessantes

Esta seção reúne mais dois exemplos que apresentam fragmentos interessantes e trechos em que o *patch* não encontra uma solução válida.

Os fragmentos destacados são, na opinião do autor, interessantes porque extrapolam o Tema de Ligeti sem escapar da “órbita” estilística da melodia. Desta forma, os fragmentos em destaque apresentam uma certa “originalidade” ao mesmo passo em que se mantêm fidedignos ao estilo melódico do Tema de Ligeti. Tecnicamente, estes fragmentos se assemelham a um processo de microvariação que é bem congruente com técnicas empregadas pelo próprio Ligeti na *Musica ricercata* VII.

O primeiro fragmentos (Exemplo 5, destacado em azul) é interessante porque preserva três características do Tema no compasso correspondente (c.6):

- (i) o ponto mais alto da curva melódica é a nota Ré<sub>5</sub>,
- (ii) a última nota é o Si<sub>b</sub><sub>4</sub> e
- (iii) estas duas notas são sequenciais.

O resultado é uma variação por diminuição do encadeamentos Ré<sub>5</sub> → Si<sub>b</sub><sub>4</sub> → Fá<sub>5</sub>.

The image displays a musical score for 'Musica ricercata VII: Patch « Tema » v. Nº 2'. It is organized into three systems of staves. The first system includes the 'Tema' and two examples: 'Exemplo 5' (highlighted in blue) and 'Exemplo 6'. The second system shows 'Tema', 'Ex. 5' (with a red highlight), and 'Ex. 6' (with an orange highlight). The third system shows 'Tema', 'Ex. 5', and 'Ex. 6' (with orange and red highlights). A tempo marking of quarter note = 116 is present at the beginning.

Figura 137 – Exemplos 5 e 6 comparados ao Tema da *Musica ricercata VII*

Legenda: Trechos interessantes do Exemplo 5 em azul e do Exemplo 6 em laranja. Soluções inexistentes em vermelho ( $C_4 = \text{sol.} \neg \exists$ ).

Além desta variação há a presença da célula rítmica semínima pontuada + 2 semicolcheias (♩. ♪♪). As “organelas” desta célula são 1 colcheia + 2 semicolcheias. Elas são permutáveis, ora [♩ ♪♪], ora [♪♪ ♩]. Este motivo que contém estas “organelas” ocorre duas vezes no Tema de Ligeti, nos compassos 12 e 19 respectivamente. O perfil melódico desta célula no compasso 19 do Tema é grau conjunto, ambos ascendentes. No Exemplo 5 este perfil é permutado como indica a Figura abaixo:

Figura 138 – Exemplos 5: “Organela ♩. ♪♪” comparado ao Tema da *Musica ricercata* VII

Legenda: Perfil melódico - Grau conjunto em laranja, salto em azul. Diminuição em vermelho.

Outro fator de “originalidade” é a posição métrica em que se inicia o motivo como ilustra a figura abaixo:

Figura 139 – Exemplos 5 e compassos 12-14 e 19-21 Tema da *Musica ricercata* VII

Legenda: Cores marcam as posições métricas das células ♩. ♪♪ e ♪♪ ♩.

A célula motívica do Exemplo 5 ocupa o segundo tempo do compasso<sup>5</sup>, única posição em que Ligeti não emprega o motivo. A coerência temática é possivelmente obtida, além das regras de adjacências, pela porção fixa da frase, *i.e.*, as *tenutas*. Há um intervalo temporal com um determinado número de espaços nos quais as alturas são distribuídas e inevitavelmente ocorrerá um encadeamento com a *tenuta* Fá<sub>5</sub>. Embora o vértice Si<sub>b4</sub> possua um índice alto na medida de centralidade de grau, naquela posição somente o encadeamento Si<sub>b4</sub> → Fá<sub>5</sub> é possível. Na verdade, a única nota que pode preceder o Fá<sub>5</sub> é o próprio Si<sub>b4</sub>. O Si<sub>b4</sub> por sua vez pode ser alcançado via Lá<sub>4</sub>, Dó<sub>5</sub> e Ré<sub>5</sub>. Por sorte, o algoritmo selecionou o Ré<sub>5</sub>, permitindo assim, o perfil melódico Ré<sub>5</sub> → Si<sub>b4</sub> → Fá<sub>5</sub>, variado por diminuição (♩ → ♪).

<sup>5</sup> Primeiro tempo se considerarmos a semínima pontuada.

	Si <sub>b</sub> ₄	Lá₄ (♩)	Fá₄	Lá₄ (♩)
Tema	♩	♩	♩	♩
Exemplo 6	♩ (÷2)	♩ (÷1)	♩ (÷2)	♩ (÷4)

Tabela 4 – Exemplo 6 e Tema da *Musica ricercata VII*: Fatores de diminuição

Diminuições e inversões são o que tornam o Exemplo 6 interessante. Observemos os compassos 10 a 18 no Tema e no Exemplo 6:

Figura 140 – Exemplo 6 e Tema da *Musica ricercata VII*

Legenda: Inversão destacada em laranja e diminuição em azul.

A célula [♩ ♩], destacada em laranja, transforma-se por inversão no Exemplo 6. O movimento ascendente torna-se descendente, algo que não ocorre no Tema quando semicolcheias são empregadas. Neste caso, o que mantém a identidade temática talvez seja o fato de que não só a inversão do perfil esteja acontecendo mas também a diminuição ocorre simultaneamente. O fragmento destacado em azul indica a diminuição. Há um segundo aspecto desta diminuição que a torna mais interessante: ela é irregular. A Tabela 4 indica as figuras rítmicas do Tema e do Exemplo 6 e seus respectivos fatores de diminuição. No Tema o Dó<sub>5</sub> é uma *tenuta*, já no Exemplo 6 o Dó<sub>5</sub> é precedida por duas colcheias que impulsionam a melodia. O Dó<sub>5</sub> agora é parte desta “nova” célula que reproduz de forma mais ágil o perfil melódico do Tema.

## Considerações Finais

Em *Road to Reality - A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Roger Penrose comenta a surpreendente « descoberta » do Conjunto de Mandelbrot:

Na Fig. 1.2<sup>6</sup>, eu retratei várias pequenas porções desta famosa entidade matemática conhecida como o conjunto de Mandelbrot. O conjunto possui uma estrutura extraordinariamente elaborada, mas não é de nenhum projeto humano. Notavelmente, essa estrutura é definida por uma regra matemática de particular simplicidade. [...] O que quero dizer é que ninguém, nem mesmo o próprio Benoit Mandelbrot quando viu pela primeira vez as incríveis complexidades de finos detalhes do conjunto, tinha qualquer concepção prévia real da extraordinária riqueza do conjunto. O conjunto de Mandelbrot certamente não foi invenção de qualquer mente humana.<sup>7</sup> (PENROSE, 2007, p. 16)

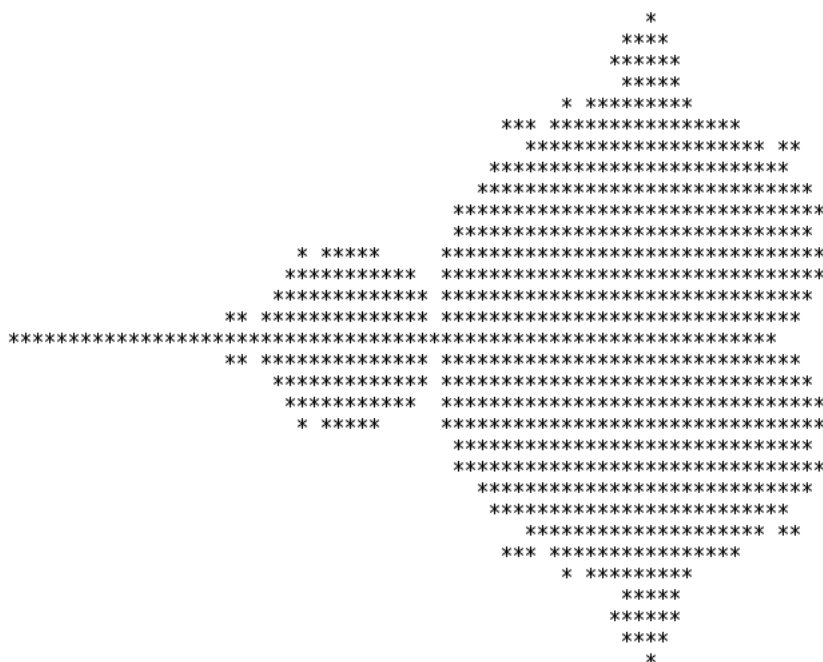


Figura 141 – Conjunto de Mandelbrot

Legenda: Primeira imagem publicada por Robert W. Brooks e Peter Matelski em 1978

<sup>6</sup> A Figura não é aqui reproduzida.

<sup>7</sup> Tradução do autor. Texto original em inglês: “In Fig. 1.2, I have depicted various small portions of that famous mathematical entity known as the Mandelbrot set. The set has an extraordinarily elaborate structure, but it is not of any human design. Remarkably, this structure is defined by a mathematical rule of particular simplicity. [...] The point that I wish to make is that no one, not even Benoit Mandelbrot himself when he first caught sight of the incredible complications in the fine details of the set, had any real preconception of the set’s extraordinary richness. The Mandelbrot set was certainly no invention of any human mind.”

Acredito não ser necessário dizer que de forma alguma estou comparando esta dissertação à descoberta da Geometria Fractal, fato que acredito ser autoevidente. Não obstante, acredito ser necessário esclarecer de forma mais específica o que quero dizer com esta citação de Penrose sobre o conjunto de Mandelbrot. Ao recorrer à Teoria dos Grafos para identificar as diferenças entre o Tema de Ligeti e as melodias geradas no **Max**, eu já imaginava que veria topologias diferentes - não houve surpresa neste sentido (muito embora eu celebrasse o momento *Eureka!* internamente). A surpresa maior veio quando, ao aplicar a mesma metodologia de análise a outras melodias, vi belas e inesperadas estruturas. Inesperadas talvez por falta de um exercício de abstração visual interna que tentasse adivinhar que imagem seria gerada mas, de qualquer forma, inesperadas. E inesperadas porque revelaram, ao contrário do que argumenta Penrose sobre o fato de que o Conjunto de Mandelbrot não é uma criação humana, estruturas simétricas ou fractais foram encontradas em música, algo inexoravelmente humano. E poder ver uma estrutura, provavelmente pela primeira vez é um sentimento de puro deslumbre. Deslumbre sobre as próprias estruturas reveladas nesta dissertação e deslumbre sobre o potencial desta poderosa área da matemática, ainda pouco explorada em música. Confesso também, um enorme apreço pela elegância gráfica de ordem puramente estética contidas nos grafos desta dissertação, independente do que estão a representar. Unir o visual ao que é sonoro me estimula a pensar de forma diferente sobre música. Acredito que esta colaboração entre duas áreas de interpretação cognitiva sobre um mesmo fenômeno pode de fato contribuir para a melhor compreensão de estruturas e relações musicais. Eu penso que uma pesquisa multidisciplinar entre música e neurociência é perfeitamente factível neste cenário. Outro aspecto sobre esta dissertação que eu acredito ser importante relatar é que esta pesquisa é essencialmente um feliz incidente, um acontecimento de pura serendipidade. Um caminho que não foi previamente planejado mas construído assim que eu tropecei em algo em uma situação absolutamente drummondiana:

*No meio do caminho tinha uma pedra  
tinha uma pedra no meio do caminho  
tinha uma pedra  
no meio do caminho tinha uma pedra.*

Sir William Hamilton em *Lectures on Metaphysics and Logic* afirma que os Diagramas de Euler são uma forma de sensualizar abstrações lógicas. Os grafos empregados aqui nesta dissertação realizam uma tradução sensorial em duas etapas:

- (i) conversão de eventos sonoros distribuídos linearmente no tempo em pontos organizados topologicamente como pares ordenados temporalmente
- (ii) mapeamento de eventos do domínio sonoro para o domínio visual

Outro aspecto que acho deveras interessante parte de um desenho feito por Stravinski para ilustrar sua música:

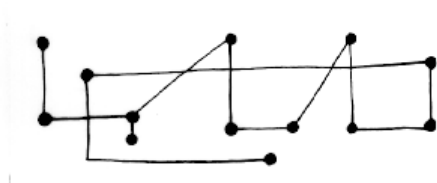


Figura 142 – Ilustração de Stravinski sobre sua própria música

Nesta dissertação foi possível criar ilustrações sobre trechos da Sagração da Primavera baseado em informações obtidas através de análise musical e a conversão destes dados em grafos. Há, acredito eu, no desenho de Stravinski um misto de algo concreto que ele quer dizer sobre sua música com uma licença poética para a criação de uma ilustração com liberdade de significados e interpretações. Mas o ponto principal é que neste trabalho foi possível ver formas derivadas da própria música de Stravinski e novamente aqui, reitero o meu apreço estético destas formas além de qualquer aplicação prática.

Imagino que os próximos passos naturais são aprofundar o conhecimento na Teoria dos Grafos. As aplicações em música são incrivelmente vastas, *e.g.*, *corpora* maiores e mais complexos certamente revelarão estruturas escondidas até então; quaisquer parâmetros musicais podem ser estudados via Teoria dos Grafos; a ferramenta também permite a visualização de múltiplos parâmetros simultaneamente. A Teoria dos Grafos pode ser usada no processo criativo, nesta dissertação há apenas uma breve ilustração desta possibilidade.

Esta pesquisa me permitiu uma reflexão diferente sobre os processos criativos. Ligeti compôs *Musica ricercata* através de uma série de restrições quanto ao conteúdo de alturas. A investigação deste trabalho revelou que há um nível superior de restrições que é responsável pela organização dos elementos de um determinado conjunto, *in casu*, o conjunto diatônico do Tema da *Musica ricercata* VII. Nas análises musicais aqui apresentadas, derivamos e ou inferimos regras estilísticas através de levantamentos estatísticos. O desenvolvimento de uma « linguagem » própria ou de um estilo particular é talvez o maior desafio enfrentado por um compositor. Não é raro, no estudo de composição, um processo criativo que parte da imitação estilística e se direciona, se orienta pela procura uma identidade singular. Este processo, que não é uma regra, pode ser fruto de uma decisão consciente e direcional mas mesmo as atividades criativas mais pragmáticas possuem algo de misterioso. Há algo profundo, inconsciente, em uma mente criativa que se transforma à medida que ela cria. A criação, portanto, modela o criador. Compor é adentrar em um [labirinto hiperbólico](#) - sem início nem fim - onde todos os possíveis caminhos *recercam* para onde se deve chegar.



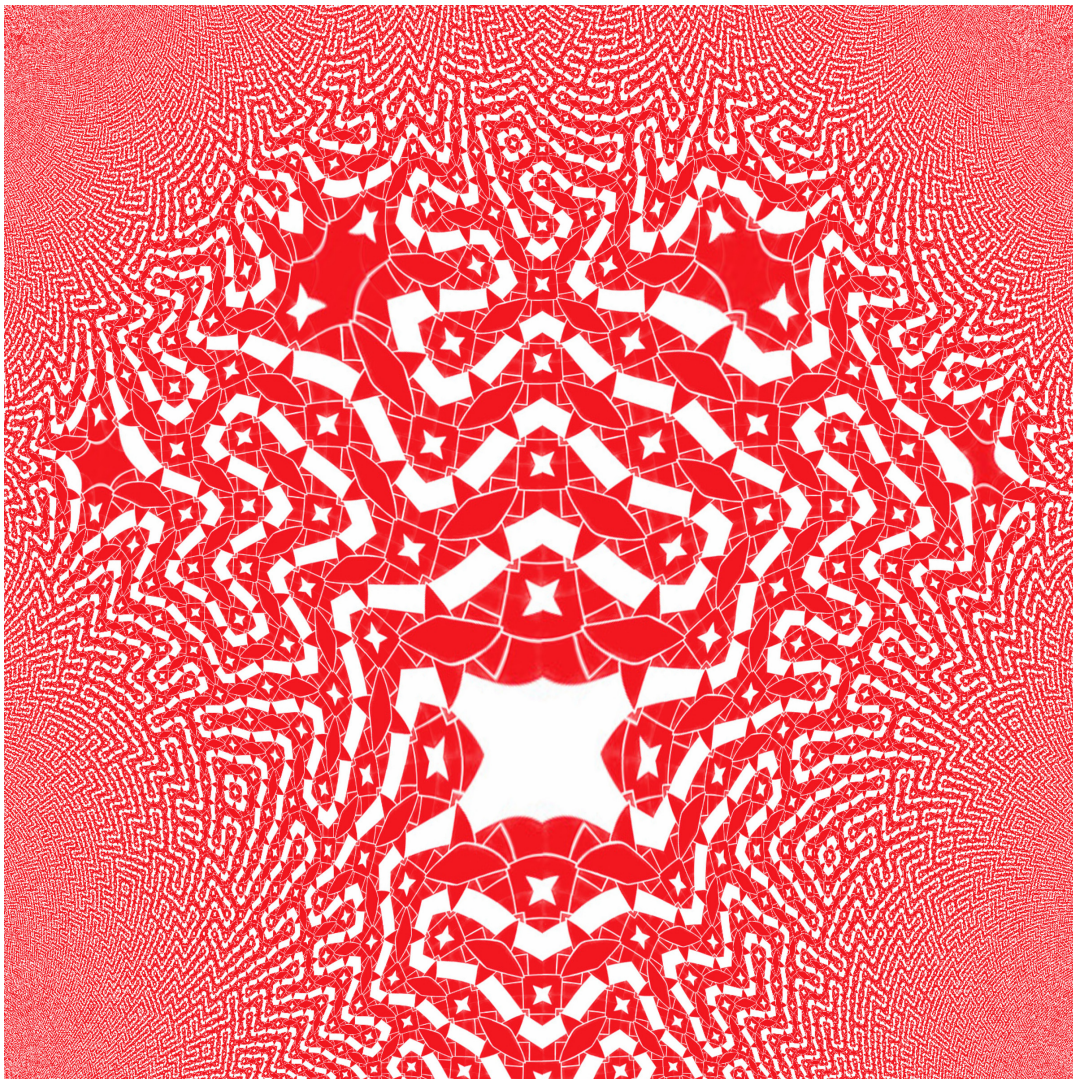


Figura 143 – Labyrinth

Fonte: Imagem criada por Jupp Hartmann realizada com ladrilhagem Truchet em coordenadas hiperbólicas. Disponível em: <<https://www.reddit.com/user/JuppHartmann/comments/hixftb/labyrinth/>>. (Acesso em 11/2020)



## Referências

- AGON, C.; ASSAYAG, G.; BRESSON, J. *The OM Composer's Book 1*. Editions Delatour France / Ircam-Centre Pompidou, 2006. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01106274>>. Acesso em: 12/2020. Citado na página 4.
- AGUILAR, P. M. El advenimiento del *ricercare* solista en el siglo XVI como transposición de la voz en instrumento: el desacuerdo en Giovanni Bassano (c. 1560-1617). *Mirabilia: electronic journal of antiquity and middle ages*, n. 27, p. 137–157, 1 1. Disponível em: <<https://www.raco.cat/index.php/Mirabilia/article/view/347035>>. Citado na página 6.
- BACH, J. S. *Tocata e Fuga em Ré menor, BWV 565. circa 1703–1707*. Domínio Público. Para órgão de tubos. Disponível em: <[https://imslp.org/wiki/Tocata\\_and\\_Fugue\\_in\\_D\\_minor%2C\\_BWV\\_565\\_\(Bach%2C\\_Johann\\_Sebastian\)](https://imslp.org/wiki/Tocata_and_Fugue_in_D_minor%2C_BWV_565_(Bach%2C_Johann_Sebastian))>. Citado na página 67.
- BACH, J. S. *Prelúdio e Fuga em Lá menor, BWV 543. circa 1708–1713*. Domínio Público. Para órgão de tubos. Disponível em: <[https://imslp.org/wiki/Prelude\\_and\\_Fugue\\_in\\_A\\_minor,\\_BWV\\_543\\_\(Bach,\\_Johann\\_Sebastian\)](https://imslp.org/wiki/Prelude_and_Fugue_in_A_minor,_BWV_543_(Bach,_Johann_Sebastian))>. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 70.
- BANG-JENSEN, J.; GUTIN, G. *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications. First Edition (Corrected)*. Springer-Verlag, 2007. 772 p. ISBN 1-85233-611-0. Disponível em: <<http://www.cs.rhul.ac.uk/books/dbook/>>. Acesso em: 01/2020. Citado 3 vezes nas páginas 80, 82 e 97.
- BARTÓK, B. *Mikrokosmos, Sz. 107 - Book 2 - No.48. In Mixolydian Mode*. 1926–1939. Boosey & Hawkes. *Pour Piano*. Disponível em: <[https://imslp.org/wiki/Mikrokosmos,\\_Sz.107\\_\(Bart%2C%20B%20k,\\_B%20C%20A9la\)](https://imslp.org/wiki/Mikrokosmos,_Sz.107_(Bart%2C%20B%20k,_B%20C%20A9la))>. Citado na página 6.
- BEETHOVEN, L. van. *Sinfonia № 6, Opus 68 (Pastoral) - I. Erwachen heiterer Empfindungen bei der Ankunft auf dem Lande*. 1808. Domínio Público. Instrumentação: Flautim, Flautas (2), Oboés (2), Clarinetes em Si $\flat$  (2), Fagotes (2), Trompas (2), Trompetes (2), Trombone (2), Tímpanos, Violinos (I. & II.), Violas, Violoncellos e Contrabaixos. Disponível em: <[https://imslp.org/wiki/Symphony\\_No.6%2C\\_Op.68\\_\(Beethoven%2C\\_Ludwig\\_van\)](https://imslp.org/wiki/Symphony_No.6%2C_Op.68_(Beethoven%2C_Ludwig_van))>. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 64.
- BENDER, E. A.; WILLIAMSON, S. G. *Lists, Decisions and Graphs With an Introduction to Probability*. [s.n.], 2010. Disponível em: <<https://cseweb.ucsd.edu/~gill/BWLectSite/Resources/LDGbookCOV.pdf>>. Acesso em: 12/2020. Citado 3 vezes nas páginas 25, 31 e 32.
- BENNIGHOF, J. Set-class aggregate structuring, graph theory, and some compositional strategies. *Journal of Music Theory*, [Duke University Press, Yale University Department of Music], v. 31, n. 1, p. 51–98, 1987. ISSN 00222909. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/843546>>. Citado na página 49.
- BERGOMI, M. G.; PORTALURI, A. *Modes in modern music from a topological viewpoint*. 2013. Citado na página 49.
- BOLLOBÁS, B. *Modern Graph Theory*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1998. v. 184. XIV, 394 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 184). Citado 5 vezes nas páginas 25, 29, 30, 35 e 39.

- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph Theory with Applications*. New York: Elsevier, 1976. Citado na página 81.
- BOUDIN, F. A Comparison of Centrality Measures for Graph-Based Keyphrase Extraction. In: *International Joint Conference on Natural Language Processing (IJCNLP)*. Nagoya, Japan: [s.n.], 2013. p. 834–838. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00850187>>. Citado 3 vezes nas páginas 45, 46 e 47.
- BRANDSTÄDT, A.; LE, V. B.; SPINRAD, J. P. *Graph Classes: A Survey*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999. Disponível em: <<https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9780898719796>>. Citado na página 63.
- BRESSON, J.; AGON, C.; ASSAYAG, G. *The OM Composer's Book 2*. Editions Delatour France / Ircam-Centre Pompidou, 2006. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01106311>>. Acesso em: 12/2020. Citado na página 4.
- BRESSON, J.; AGON, C.; ASSAYAG, G. *The OM Composer's Book 3*. Editions Delatour France / Ircam-Centre Pompidou, 2006. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01354935>>. Acesso em: 12/2020. Citado na página 4.
- BRIOT, J.-P.; HADJERES, G.; PACHET, F.-D. *Deep Learning Techniques for Music Generation*. [S.l.]: Springer, Cham, 2020. Citado na página 100.
- CHEN, Y.-H.; WANG, H.; ZHANG, X.-D. The normality and sum of normalities of trees. *Discrete Mathematics*, v. 343, p. 111635, 08 2019. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1908.11802.pdf>>. Acesso em: 12/2020. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.
- CUNDY, H.; ROLLETT, A. *Mathematical Models*. Tarquin Publications, 1981. (Tarquin publications). ISBN 9780906212202. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=IFIZAQAIAAJ>>. Citado na página 67.
- CUZZOCREA, A. et al. Edge betweenness centrality: A novel algorithm for qos-based topology control over wireless sensor networks. *Journal of Network and Computer Applications*, v. 35, n. 4, p. 1210 – 1217, 2012. ISSN 1084-8045. Intelligent Algorithms for Data-Centric Sensor Networks. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1084804511001135>>. Citado na página 48.
- DALLAPICCOLA, L. *Quaderno musicale di Annalibera -Contrapunctus primus*. 1952. Edizioni Suvini Zerboni - Milano. *Per pianoforte*. Disponível em: <<https://www.boosey.com/shop/prod/Dallapiccola-Luigi-Quaderno-Musicale-di-Annalibera-piano/678443>>. Citado na página 65.
- DANTAS, I. P. S. M.; LUNSQUI, A. R. Concerto para violino de György Ligeti: sua relevância enquanto obra representativa do estilo tardio “não- atonal” do compositor. *Revista Vórtex, Curitiba*, v. 3, n. 1, p. p.70–106, 2015. Citado na página 10.
- DIESTEL, R. *Graph Theory*. Third edition (electronic version). [S.l.]: Springer-Verlag Heidelberg, New York, 2005. XVIII, 428 p. Citado 4 vezes nas páginas 25, 29, 37 e 81.
- EULER, L. *Solutio problematis ad geometriam situspertinentis*. 1741. Disponível em: <<https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1052&context=euler-works>>. Citado na página 26.

FERRAZ, S. Três Estruturas de Tempo em O King de Luciano Berio. *Revista Música*, v. 13, n. 1, p. 61–95, Agosto 2012. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/247768985\\_TRES\\_ESTRUTURAS\\_DE\\_TEMPO\\_EM\\_O\\_KING\\_DE\\_LUCIANO\\_BERIO](https://www.researchgate.net/publication/247768985_TRES_ESTRUTURAS_DE_TEMPO_EM_O_KING_DE_LUCIANO_BERIO)>. Citado na página 57.

FLEMING, N. D.; MILLS, C. Not another inventory, rather a catalyst for reflection. *To Improve the Academy*, v. 11, p. 137, 1992. Citado na página 52.

FLETCHER, P.; HOYLE, H.; PATTY, C. W. *Foundations of Discrete Mathematics (International student ed.)*. [S.l.]: Boston: PWS-KENT Pub. Co., 1991. 781 p. ISBN 978-0-53492-373-0. Citado na página 33.

FREEMAN, L. C. A Set of Measures of Centrality Based on Betweenness. *Sociometry*, American Sociological Association, v. 40, n. 1, p. 35–41, mar. 1977. ISSN 00380431. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2307/3033543>>. Citado na página 46.

GALLIAN, J. A dynamic survey of graph labeling. *Electron J Combin DS6*, v. 19, 11 2000. Citado na página 63.

GARDNER, M. Mathematical games: About the remarkable similarity between the icosian game and the towers of hanoi. *Scientific American*, n. 196, p. 150–156, Maio 1957. Citado na página 39.

GIRVAN, M.; NEWMAN, M. E. J. Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Academy of Sciences, v. 99, n. 12, p. 7821–7826, 2002. ISSN 0027-8424. Disponível em: <<https://www.pnas.org/content/99/12/7821>>. Citado na página 48.

GROSS, J. L.; YELLEN, J. *Graph Theory and Its Applications, Second Edition (Discrete Mathematics and Its Applications)*. [S.l.]: Chapman & Hall/CRC, 2005. ISBN 158488505X. Citado na página 36.

GUICHARD, D. *An Introduction to Combinatorics and Graph Theory*. [s.n.], 2017. Disponível em: <[https://www.whitman.edu/mathematics/cgt\\_online/cgt.pdf](https://www.whitman.edu/mathematics/cgt_online/cgt.pdf)>. Acesso em: 20/12/2020. Citado 8 vezes nas páginas 25, 31, 32, 33, 35, 36, 38 e 80.

GULDBRANDSEN, E. E. Pierre Boulez in Interview, 1996 (i) Modernism, History and Tradition. *Tempo*, Cambridge University Press, v. 65, n. 255, p. 9–16, 2011. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/journals/tempo/article/abs/pierre-boulez-in-interview-1996-i-modernism-history-and-tradition/61C6394609838C4EE9DCA44F3F6E196C>>. Acesso em: 01/2020. Citado na página 54.

HARARY, F. *Graph Theory*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1969. 274 p. Citado 8 vezes nas páginas 25, 33, 34, 36, 40, 41, 42 e 43.

HARJU, T. *Lecture Notes on GRAPH THEORY*. 2011. Notas de Palestra. Disponível em: <<https://users.utu.fi/harju/graphtheory/graphtheory.pdf>>. Acesso em: 20/12/2020. Citado na página 25.

HILBERT, M.; LÓPEZ, P. The world's technological capacity to store, communicate, and compute information. *science*, American Association for the Advancement of Science, v. 332, n. 6025, p. 60–65, 2011. Citado na página 50.

- JUMPER, J. et al. *High Accuracy Protein Structure Prediction Using Deep Learning*. 2020. In Fourteenth Critical Assessment of Techniques for Protein Structure Prediction (Abstract Book). Retrieved from: <[https://predictioncenter.org/casp14/doc/CASP14\\_Abstracts.pdf](https://predictioncenter.org/casp14/doc/CASP14_Abstracts.pdf)>. Disponível em: <<https://deepmind.com/blog/article/alphafold-a-solution-to-a-50-year-old-grand-challenge-in-biology>>. Acesso em: 02/2021. Citado na página 26.
- KERÉKFFY, M. ‘A “new music” from nothing’: György Ligeti’s *Musica ricercata*. *Studia Musicologica*, v. 49, n. 3-4, p. 203–230, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1556/SMus.49.2008.3-4.1>>. Citado 3 vezes nas páginas 5, 7 e 8.
- KURATOWSKI, C. Sur la notion de l’ordre dans la Théorie des Ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, v. 2, n. 1, p. 161–171, 1921. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/212966>>. Citado na página 56.
- KYŠ, P. Graphs with the same peripheral and center eccentric vertices. *MATHEMATICA BOHEMICA*, v. 125, n. 3, 2000. Disponível em: <<https://www.emis.de/journals/MB/125.3/6.html>>. Acesso em: 12/2020. Citado na página 43.
- LARTILLOT, O. An integrative computational modelling of music structure apprehension. In: SONG, M. K. (Ed.). *Proceedings, ICMPC-APSCOM 2014 Joint Conference*. [S.l.]: Yonsei University, 2014. p. 80–86. ICMPC-APSCOM 2014, The 13th International Conference on Music Perception and Cognition and the 5th Conference for the Asian-pacific Society for Cognitive Sciences of Music ; Conference date: 04-08-2014 Through 08-08-2014. Citado na página 3.
- LIGETI, G. *Fünft Stücke für Klavier zu vier Händen - IV. Sonatina, 2. Andante*. 1950. Schott Music. Para piano a 4 mãos. Disponível em: <<https://en.schott-music.com/shop/fuenf-stuecke-no38505.html>>. Citado na página 9.
- LIGETI, G. *Musica ricercata, VII. Cantabile, molto legato*. 1951–1953. Schott Music. *Pour Piano*. Disponível em: <<https://en.schott-music.com/shop/musica-ricercata-noq16144.html>>. Citado 7 vezes nas páginas 6, 10, 13, 85, 87, 88 e 89.
- LIGETI, G. *Konzert für Violin und Orchester - II Aria, Hoquetus, Choral*. 1990, rev. 1992. Schott Music. *Instrumentation: 2 (1. auch Altfl. u. Sopranblfl., 2. auch Picc.) · 1 (auch Sopran-Okarina in C) · 2 (1. auch Es-Klar. u. Sopranino-Okarina in hoch F, 2. auch Bassklar. und Alt-Okarina in tief G) · 1 (auch Sopran-Okarina in C) - 2 · 1 · Tenorpos. · 0 - 3 P. S. (Glsp. · Xyl. · Vibr. · Marimba · Gong · Crot. · 2 hg. Beck · Tamt. · Tamb. · kl. Tr. · gr. Tr. · Peitsche · 2 Woodbl. · Röhrengl. · 2 Lotosfl.) (2 Spieler) - Str. (5 [davon 1 mit Skordatur] · 0 · 3 [davon 1 mit Skordatur] · 2 · 1)*. Disponível em: <<https://en.schott-music.com/shop/konzert-no153622.html>>. Citado na página 10.
- LIGETI, G. *Sonate für Viola Solo - I. Hora lungă*. 1991. Schott Music. Para Viola solo. Disponível em: <<https://en.schott-music.com/shop/sonate-noq17117.html>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 12.
- LIGETI, G. *Gesammelte Schriften*. 1. ed. [S.l.]: Paul Sacher Stiftung, 2007. v. 2. 154 p. Citado na página 5.
- LU, L.; ZHANG, M. Edge betweenness centrality. In: \_\_\_\_\_. *Encyclopedia of Systems Biology*. New York, NY: Springer New York, 2013. p. 647–648. ISBN 978-1-4419-9863-7. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9863-7\\_874](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9863-7_874)>. Acesso em: 12/2020. Citado na página 48.

- MANOURY, P. *Les chaînes de Markov... à l'infini*. 2015. [Http://www.philippemanoury.com/](http://www.philippemanoury.com/). Disponível em: <<http://www.philippemanoury.com/?p=5685>>. Citado na página 57.
- NETO, L. da S. *Rizómata: uma Introdução às Raízes da Música de Iannis Xenakis*. Dissertação (Mestrado) — USP, 2006. Disponível em: <<https://teses.usp.br/teses/disponiveis/27/27140/tde-05072009-183519/publico/5062364.pdf>>. Citado na página 57.
- OBERHOLTZER, J. W. *A Computational Model of Music Composition*. Tese (Doutorado) — Harvard University, Graduate School of Arts & Sciences, 2015. Disponível em: <<http://nrs.harvard.edu/urn-3:HUL.InstRepos:17463123>>. Acesso em: 12/2020. Citado na página 3.
- PENROSE, L. S.; PENROSE, R. Impossible objects: A special type of visual illusion. *British Journal of Psychology*, v. 49, n. 1, p. 31–33, 1958. Disponível em: <<https://bpspsychub.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.2044-8295.1958.tb00634.x>>. Citado na página 84.
- PENROSE, R. *The Road to Reality - A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Reprint edition. Vintage Books, 2007. Disponível em: <<https://web.archive.org/web/20130228141114/http://www.roadtoreality.info/index.php>>. Citado na página 115.
- PEUSNER, L. A graph topological representation of melody scores. *Leonardo Music Journal*, MIT Press, v. 12, p. 33–40, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 49, 62 e 68.
- RAVENSBERGEN, J. *The Twentieth-Century Canon: An Analysis of Luigi Dallapiccola's Canonic Works from his Quaderno Musicale di Annalibera*. Dissertação (Mestrado) — University of Ottawa, 2012. Citado na página 65.
- ROSSI, N. A. F. *Acaso e indeterminação no processo de composição: um diálogo com a obra de John Cage*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2015. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1843/AAGS-A9UG89>>. Acesso em: 01/2021. Citado na página 18.
- SHITOV, Y. Counterexamples to Hedetniemi's conjecture. *arXiv: Combinatorics*, 2019. Citado na página 26.
- STEINITZ, R. *György Ligeti: Music of the Imagination*. [S.l.]: Northeastern University Press, 2003. Citado na página 90.
- STRAUS, J. N. *Introdução à Teoria Pós-tonal*. [S.l.]: EDUFBA, 2013. Citado na página 49.
- STRAVINSKI Ígor. *Le Sacre du printemps - Part I: L'Adoration de la Terre, Introduction*. 1913. Domínio Público. Instrumentação: **Woodwinds**: 1 piccolo, 3 flutes (third doubling second piccolo), 1 alto flute, 4 oboes (fourth doubling second English horn), 1 English horn, 3 clarinets in B $\flat$  and A (third doubling second bass clarinet), 1 clarinet in E $\flat$  and D, 1 bass clarinet, 4 bassoons (fourth doubling second contrabassoon), 1 contrabassoon. **Brass**: 8 horns (seventh and eighth doubling tenor Wagner tubas), 1 trumpet in D, 4 trumpets in C (fourth doubling bass trumpet in E $\flat$ ), 3 trombones, 2 bass tubas. **Percussion**: 5 timpani (requiring two players), bass drum, tam-tam, triangle, tambourine, cymbals, antique cymbals in A $\flat$  and B $\flat$ , güiro. **Strings**: Violins I, II, Violas, Cellos, Double basses. Disponível em: <[https://imslp.org/wiki/The\\_Rite\\_of\\_Spring\\_\(Stravinsky,\\_Igor\)](https://imslp.org/wiki/The_Rite_of_Spring_(Stravinsky,_Igor))>. Citado 5 vezes nas páginas 71, 73, 74, 76 e 82.



STULZ, J. *Cool Memories: Notes on the Ligeti Viola Sonata*. 2012. Essay. Disponível em: <<https://web.archive.org/web/20160527062442/http://www.johnstulz.com/photos/ligetinotes.pdf>>. Citado na página 14.

SZETO, W. M.; WONG, M. H. A graph-theoretical approach for pattern matching in post-tonal music analysis. *Journal of New Music Research*, Routledge, v. 35, n. 4, p. 307–321, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/09298210701535749>>. Citado na página 49.

WEST, D. B. *Introduction to Graph Theory*. Second edition. [S.l.]: Prentice Hall, 2001. xx+588 p. ISBN 0-13-014400-2. Citado 5 vezes nas páginas 25, 29, 30, 31 e 39.

WOLFRAM, S. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, 2002. 1197 p. Disponível em: <<http://www.amazon.com/exec/obidos/ASIN/1579550088/ref=nosim/rds-20>>. Citado na página 72.

WOLFRAM, S. *An Elementary Introduction to the Wolfram Language*. Wolfram Media, Incorporated, 2015. ISBN 9781944183004. Disponível em: <<https://www.wolfram.com/language/elementary-introduction/2nd-ed/index.html>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 44.

XENAKIS, I. *Pithoprakta*. 1955–1956. Boosey & Hawkes. Para 2 trombones, percussão e cordas (12.12.8.8.6). Duração: 10'. Disponível em: <<https://www.boosey.com/cr/music/lannis-Xenakis-Pithoprakta/3078>>. Citado na página 53.

XENAKIS, I. *Formalized Music: Thought and Mathematics in Composition*. Second edition. [S.l.]: Pendragon Press, 1992. (Harmonologia Series). Citado 2 vezes nas páginas 58 e 94.

# Anexos





# ANEXO A – Partitura

# Melencholia I

(Série dodecafônica gerada pelo Circuito Hamiltoniano no Sólido de Dürer)

Novembro de 2020

Eduardo de Markus Athayde

Piano

4/4  $\text{♩} = 80$  *mp* 5/4 *mp* 4/4 *mp*

Pno.

4 5 4/4 *mf*

Pno.

7 4/4 *mf* 8 4/4 *mf* 9 4/4 *mf* 10 4/4 *mf*

11 12 13

Pno.

*p* *mf*

*p* *mf*

14 15 16

Pno.

*p*

*p* *mf* *p*

17 18 19 20

Pno.

*mf* *p*

*mf* *p*



# Cólofon

Esta dissertação foi editada usando  $\LaTeX$ , originalmente desenvolvido por Leslie Lamport e baseado no  $\TeX$  de Donald Knuth. Esta dissertação foi compilada pelo  $\XeLaTeX$ .

Esta dissertação fez uso do [Modelo Canônico de Trabalho Acadêmico com  \$\text{abnTeX2}\$](#) . Os principais pacotes usados foram:  [\$\text{abnTeX2cite}\$](#) ,  [\$\text{AMS-}\LaTeX\$](#)  e  [\$\text{musicography}\$](#) . As referências bibliográficas foram compiladas pelo  $\text{BibTeX}$ .

O corpo de texto foi composto em  [\$\text{Biolinum}\$](#) , 12 pontos, através do pacote `libertine`. Fonte criada por Philipp H. Poll.

Quaisquer correções, sugestões ou dúvidas entre em contato comigo no endereço eletrônico [markus@hotmail.com](mailto:markus@hotmail.com).

*« Tres digiti scribunt totum corpusque laborat.  
Scribere qui nescit nullum putet esse laborem.  
Dum digiti scribunt uix cetera membra quiescunt. »*