

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA**

Gabriela Oliveira

Somas Aleatórias Poisson Misturadas e Modelos Normais
Misturados Associados

Belo Horizonte

2020

Gabriela Oliveira

Somas Aleatórias Poisson Misturadas e Modelos Normais
Misturados Associados

Versão Final

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística, do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial do título de Doutora em Estatística

Orientador: Prof. Dr. Wagner Barreto de Souza

Coorientador: Prof. Dr. Roger William C. Silva

Belo Horizonte

2020

© 2020, Gabriela Oliveira.
Todos os direitos reservados

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende
Costa CRB 6ª Região nº 1510

Oliveira, Gabriela.

O48s Somas aleatórias Poisson misturadas e modelos normais misturados associados/ Gabriela Oliveira — Belo Horizonte, 2020.
188 f. il.; 29 cm.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Estatística.

Orientador: Wagner Barreto de Souza.
Coorientador: Roger William Câmara Silva

1. Estatística – Teses. 2. Poisson, Distribuição de. – Teses. 3. Algoritmos de expectativa de maximização – Teses. I Orientador. II. Coorientador. III. Título.

CDU 519.2(043)



ATA DA DEFESA DE TESE DA ALUNA GABRIELA OLIVEIRA

Realizou-se, no dia 18 de fevereiro de 2020, às 14:00 horas, Sala 2076 ICEx, da Universidade Federal de Minas Gerais, a 59ª defesa de tese, intitulada *Somas Aleatórias Poisson Misturadas e Modelos Normais Misturados Associados*, apresentada por GABRIELA OLIVEIRA, número de registro 2016656098, graduada no curso de MATEMÁTICA/DIURNO, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em ESTATÍSTICA, à seguinte Comissão Examinadora: Prof(a). Wagner Barreto de Souza - Orientador (DEST/UFMG), Prof(a). Roger William Câmara Silva - Coorientador (DEST/UFMG), Prof(a). Alexandre Galvão Patriota (IME/USP), Prof(a). Rodrigo Bernardo da Silva (DEST/UFPB), Prof(a). Remy de Paiva Sanchis (MAT/UFMG), Prof(a). Vinícius Diniz Mayrink (DEST/UFMG).

A Comissão considerou a tese:

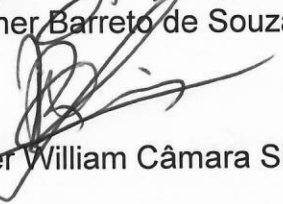
Aprovada

Reprovada


Finalizados os trabalhos, lavrei a presente ata que, lida e aprovada, vai assinada por mim e pelos membros da Comissão.


Belo Horizonte, 18 de fevereiro de 2020.


Prof(a). Wagner Barreto de Souza (Doutor)


Prof(a). Roger William Câmara Silva - Coorientador (Doutor)


Prof(a). Alexandre Galvão Patriota (Doutor)


Prof(a). Rodrigo Bernardo da Silva (Doutor)


Prof(a). Remy de Paiva Sanchis (Doutor)


Prof(a). Vinícius Diniz Mayrink (Doutor)

À vovó Maria Eunice (in memoriam), pelos ensinamentos e amor incondicional.

Agradecimentos

Este é um fim de um ciclo muito especial e gostaria de expressar meus agradecimentos a todos que contribuíram para a elaboração desta tese. Afinal de contas, ninguém faz um doutorado sozinho.

Em primeiro lugar, agradeço aos meus orientadores, Prof. Wagner Barreto de Souza e Prof. Roger William C. Silva, pela confiança, suporte, pressão e compreensão nos momentos difíceis. Obrigada pela paciência e partilha do conhecimento durante nosso projeto.

Agradeço aos membros da banca, Prof. Alexandre Galvão Patriota (USP), Remy de Paiva Sanchis (UFMG), Rodrigo Bernardo da Silva (UFPB) e Vinícius Diniz Mayrink (UFMG), pelas contribuições e lida minuciosa da tese.

Agradeço a todos os professores dos Departamentos de Matemática e Estatística da UFMG pela excelência em ensino e pesquisa, que durante a graduação, mestrado e doutorado, contribuíram para minha formação acadêmica. Em especial, agradeço ao Prof. Sokol Ndreca e à Prof. Rosângela Helena Loschi. Agradeço também aos funcionários da secretaria da pós graduação da Estatística. Agradeço à FAPEMIG, CAPES e ao CNPq, o apoio financeiro.

Agradeço aos amigos da Estatística que compartilharam alegrias, perrengues, conhecimento, ajudas com o R, cafés, cervejas e memes. Agradeço em especial à Carla, Gui Oliveira, Gui Veloso, Ju, Jussiane, Victor e ao pessoal do vôlei. Obrigada a todos os colegas pela convivência, troca de experiências, bandecos, feirinhas e comemorações de começo e final de semestre. Vocês fizeram do meu doutorado uma jornada mais leve e alegre! Aos *amigos* Lu, Marina, Pedro e Rorô, pelo apoio, ajuda, conversas e por aguentarem todos os meus lamentos durante esse tempo..

A todos meus familiares que me acompanham e torcem por mim, mesmo sem entender o que é uma pós graduação. Agradeço as rezas, as preocupações de todos os dias e pela compreensão quando precisei deixar de vê-los e de estar perto, em busca do diploma.

Agradeço ao meu companheiro Bruno por todo amor, carinho e apoio incondicional. Obrigada pela compreensão em cada momento de cansaço, pelo incentivo e por estar comigo nas horas alegres e também nas mais difíceis.

À UFMG, minha eterna gratidão!

Resumo

A soma de um número aleatório de variáveis aleatórias, além de ser interessante do ponto de vista probabilístico, aparece em aplicações que envolvem processos que evoluem com o tempo. Um exemplo importante e amplamente estudado é a soma geométrica que modela muitos fenômenos em seguros, finanças, confiabilidade, biologia, entre outros. Motivados pela aplicabilidade e resultados estocásticos da soma geométrica, neste trabalho obtemos a distribuição limite para somas parciais com um número aleatório de termos, seguindo uma classe de distribuições Poisson misturadas. O limite em distribuição resultante é uma mistura entre a distribuição Normal e a família exponencial, a que chamamos de lei Normal Família Exponencial Misturada (NFEM). Um novo conceito de estabilidade é introduzido e uma relação com distribuições α -estáveis é estabelecida. Propomos a estimação dos parâmetros dos modelos NFEM através do Método dos Momentos e do método da máxima verossimilhança via algoritmo EM. Além disso, estudamos a distribuição limite da soma Poisson Fracionada, definindo assim a distribuição Normal Mittag-Leffler, a qual é uma mistura entre as distribuições Normal e Mittag-Leffler. Discutimos a estimação dos parâmetros para esse modelo através do Método dos Momentos e encontramos a distribuição assintótica dos estimadores. Estudos de simulação Monte Carlo são abordados para verificar o desempenho dos estimadores propostos e apresentadas ilustrações empíricas sobre o mercado financeiro e para dados de precipitação.

Palavras-chave: Distribuição Poisson misturada, estabilidade, convergência fraca, método dos momentos, algoritmo EM, normal misturada, distribuição Poisson Fracionada, distribuição Mittag-Leffler.

Abstract

The sum of a random number of random variables, besides being interesting from a probabilistic point of view, appears in applications involving processes that evolve over time. An important and widely studied example is the geometric sum that has many applications and models many phenomena in insurance, finance, reliability, biology, among others. Motivated by the applicability and stochastic results of the geometric sum, in this work we obtain the limit distribution for partial sums with a random number of terms following a class of mixed Poisson distributions. The resulting weak limit is a mixing between a Normal distribution and an exponential family, which we call by Normal Exponential Family mixed (NEFM) laws. A new stability concept is introduced and a relationship with α -stable distributions is established. We propose estimation of the parameters of the NEFM models through method of moments and maximum likelihood method via EM-algorithm. In addition, we studied a limit distribution of the fractional Poisson sum, defining the normal Mittag-Leffler distribution, which is a mixture between the Normal and Mittag-Leffler distributions. We discussed the estimation of the parameters for this model through the Method of Moments and we found the asymptotic distribution of the estimators. Monte Carlo simulation studies are addressed to check the performance of the proposed estimators and two empirical illustrations on financial market and for precipitation data are presented.

Keywords: Mixed Poisson distributions, stability, weak convergence, method of moments, EM algorithm, normal mixture, Fractional Poisson distribution, Mittag-Leffler distribution.

Lista de Figuras

3.1	Histograma da soma \tilde{S}_λ quando $N_\lambda \sim \text{BN}(\lambda, 2)$ e densidade teórica Normal Gama com $\mu = \sigma^2 = 1$ e $\lambda = 30, 50, 500$, respectivamente.	42
3.2	Histograma da soma \tilde{S}_λ quando $N_\lambda \sim \text{PIG}(\lambda, 2)$ e densidade teórica Normal Inversa Gaussiana com $\mu = \sigma^2 = 1$ e $\lambda = 30, 50, 500$, respectivamente.	43
3.3	<i>Boxplot</i> com as estimativas de μ obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\mu = 3$	57
3.4	<i>Boxplot</i> com as estimativas de σ^2 obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\sigma^2 = 4$	58
3.5	<i>Boxplot</i> com as estimativas de ϕ obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\phi = 2$	58
3.6	<i>Boxplot</i> com as estimativas de μ obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\mu = 3$	61
3.7	<i>Boxplot</i> com as estimativas de σ^2 obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\sigma^2 = 4$	61
3.8	<i>Boxplot</i> com as estimativas de ϕ obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\phi = 2$	62
4.1	Gráficos da $\text{Var}(Y)$ versus κ e γ_2 versus κ para $\kappa \in (0, 1]$	69
4.2	Gráfico da função densidade de probabilidade de $Y \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$ para alguns valores de κ	71
4.3	Gráfico da função densidade de probabilidade de $Y \sim \text{NML}(\mu, \sigma^2, \kappa)$ para alguns valores de μ, σ^2 e κ	73

4.4	Gráfico da função $\frac{d}{d\kappa} \log h(\kappa)$ versus κ , para $\kappa \in (0, 1]$	75
4.5	<i>Boxplot</i> com as estimativas de μ , σ^2 e κ , respectivamente, obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 2)$. As linhas horizontais pontilhadas indicam os valores verdadeiros dos parâmetros. . . .	80
4.6	<i>Boxplot</i> com as estimativas de μ , σ^2 e κ , respectivamente, obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 3)$. As linhas horizontais pontilhadas indicam os valores verdadeiros dos parâmetros. . . .	81
4.7	<i>Boxplot</i> com as estimativas de μ , σ^2 e κ , respectivamente, obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 5)$. As linhas horizontais pontilhadas indicam os valores verdadeiros dos parâmetros. . . .	82
4.8	<i>Boxplot</i> com as estimativas de μ , σ^2 e κ , respectivamente, obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 6)$. As linhas horizontais pontilhadas indicam os valores verdadeiros dos parâmetros. . . .	83
4.9	<i>Boxplot</i> com as estimativas de μ , σ^2 e κ , respectivamente, obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 8)$. As linhas horizontais pontilhadas indicam os valores verdadeiros dos parâmetros. . . .	84
4.10	Histograma e QQ-Plot Normal com as estimativas normalizadas de κ obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 3)$	86
4.11	Histograma e QQ-Plot Normal com as estimativas normalizadas de κ obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 8)$	86
5.1	Histograma com o retorno diário das ações da Petrobrás com as densidades ajustadas para os modelos Normal, Normal-Gama Misturado e Normal-Inversa Gaussiana Misturado.	92
5.2	QQ-Plot Normal do log retorno diário das ações da Petrobrás.	92
5.3	QQ-Plot Normal Gama do log retorno diário das ações da Petrobrás.	93
5.4	QQ-Plot NIG do log retorno diário das ações da Petrobrás.	93
5.5	Histograma com a precipitação mensal, em metros, da estação de São Paulo com as densidades ajustadas para os modelos Normal, Normal-Gama Misturado e Normal-Inversa Gaussiana Misturado.	95
5.6	QQ-Plot Normal da precipitação por estação do ano da estação São Paulo.	96
5.7	QQ-Plot Normal Gama da precipitação por estação do ano da estação São Paulo.	96
5.8	QQ-Plot Normal Inversa Gaussiana da precipitação por estação do ano da estação São Paulo.	97

5.9	Histograma com o retorno diário do índice Ibovespa com as densidades ajustadas para os modelos Normal, Normal-Gama, Normal Inversa Gaussiana e Normal Mittag-Leffler.	98
5.10	QQ-Plot Normal do retorno diário do índice Ibovespa.	99
5.11	QQ-Plot NIG do retorno diário do índice Ibovespa.	100
5.12	QQ-Plot Normal-Gama do retorno diário do índice Ibovespa.	100
5.13	QQ-Plot NML do retorno diário do índice Ibovespa.	101

Lista de Tabelas

3.1	Média das estimativas dos parâmetros obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos e REQM para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$	56
3.2	Erros padrão empíricos e teóricos das estimativas dos parâmetros para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$	59
3.3	Média das estimativas dos parâmetros obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos e REQM para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$	60
3.4	Erros padrão empíricos e teóricos das estimativas dos parâmetros para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$	62
4.1	Média das estimativas dos parâmetros obtidas pelo Método dos Momentos e REQM entre parênteses considerando $Y \sim \text{NML}(\mu, \sigma^2, \kappa)$ para alguns valores de μ, σ^2 e κ	79
4.2	Erros padrão empíricos e teóricos das estimativas dos parâmetros para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa)$	85
5.1	Parâmetros estimados para o retorno diário das ações da Petrobrás. Erros padrão estão entre parênteses.	91
5.2	Estatísticas descritivas da precipitação por estação do ano.	94
5.3	Parâmetros estimados para a precipitação por estação do ano, em metros, da estação São Paulo e erro padrão entre parênteses.	95
5.4	Parâmetros estimados para o retorno diário do índice Ibovespa e erro padrão entre parênteses.	98
5.5	Estatísticas descritivas do retorno diário do índice Ibovespa.	101

Lista de Abreviações

v.a.	variável aleatória
i.i.d.	independente e identicamente distribuída
f.d.p.	função densidade de probabilidade
BN	Binomial Negativa
IG	Inversa Gaussiana
IGG	Inversa Gaussiana Generalizada
PM	Poisson Misturada
PIG	Poisson Inversa Gaussiana
SHG	Secante Hiperbólica Generalizada
PSHG	Poisson Secante Hiperbólica Generalizada
PF	Poisson Fracionada
Exp	Exponencial
Geo	Geométrica
N	Normal
NIG	Normal Inversa Gaussiana
L	Laplace Simétrica
LA	Laplace Assimétrica
NFEM	Normal Família Exponencial Misturada
NML	Normal Mittag-Leffler
ML	Mittag-Leffler
CMP	Conway-Maxwell-Poisson
REQM	raiz do erro quadrático médio

Glossário de Notação

$X \sim F$	v.a. X genérica com distribuição F genérica
\xrightarrow{d}	convergência em distribuição
$\stackrel{d}{=}$	igualdade em distribuição
$N_\lambda \sim PM(\lambda, \phi)$	v.a. com distribuição Poisson Misturada
$W_\phi \sim FE(\phi)$	v.a. W_ϕ pertencente à família exponencial
ψ_X	função geradora de momentos de uma v.a. genérica X
φ_X	função característica de uma v.a. genérica X
G_X	função geradora de probabilidade de uma v.a. genérica X
Γ	função gama
Ψ	função digama
\mathcal{I}_ν	função Bessel modificada do segundo tipo com índice ν
\mathcal{K}_ν	função Bessel modificada do terceiro tipo com índice ν
log	logaritmo neperiano
$\Psi(t)$	função característica de uma v.a. α -estável
k_i	cumulante de ordem i
γ_1	coeficiente de assimetria
γ_2	excesso de curtose
μ_k	k -ésimo momento populacional
M_k	k -ésimo momento amostral
$N_t \sim PPF(\nu, \kappa)$	processo de Poisson fracionado
$\mathcal{E}_\kappa(\cdot)$	função Mittag-Leffler com parâmetro κ
$\mathcal{E}_{\alpha, \beta}$	função Mittag-Leffler com dois parâmetros
$B(a, b)$	função Beta
${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$	função hipergeométrica generalizada
$\frac{d\mathbb{P}}{d\nu}$	f.d.p. com respeito a uma medida σ -finita ν

Sumário

1	Introdução	11
2	Distribuição Limite da Soma Poisson Misturada e Estabilidade	16
2.1	Soma Geométrica	17
2.2	Distribuição Poisson Misturada	19
2.3	Distribuição Limite da Soma Poisson Misturada	22
2.4	Estabilidade Poisson Misturada	27
3	Classe de Modelos Normal-Família Exponencial Misturados	35
3.1	Definição e Propriedades	36
3.2	Estimação dos Parâmetros	43
3.2.1	Método dos Momentos	43
3.2.2	Algoritmo EM	48
3.3	Estudo de Simulação	55
4	Modelo Normal Mittag-Leffler	64
4.1	Distribuição Limite	64
4.2	Estimação dos Parâmetros e Distribuição Assintótica dos Estimadores	74
4.3	Estudo de Simulação	78
4.4	Soma Aleatória Conway-Maxwell-Poisson	87
5	Aplicações	90
5.1	Retorno Diário das Ações da Petrobrás	90
5.2	Precipitação de uma Estação Pluviométrica da Cidade de São Paulo	94
5.3	Retorno Diário do Índice Ibovespa	97
6	Conclusões	102

Capítulo 1

Introdução

A soma de um número aleatório de variáveis aleatórias, além de ser interessante do ponto de vista probabilístico, aparece em aplicações envolvendo processos que evoluem com o tempo, como estudado em Gnedenko e Korolev (1996). Um dos casos bem conhecidos na literatura é a soma geométrica que é dada por

$$S_p = X_1 + X_2 + \cdots + X_{v_p}, \quad (1.1)$$

em que v_p é uma variável aleatória geométrica com média $1/p$ e função de probabilidade

$$P(v_p = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad p \in (0, 1], \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

em que $\{X_i\}_{i \geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e independentes de v_p . Em particular, se as variáveis aleatórias da sequência $\{X_i\}_{i \geq 1}$ são não-negativas e com média finita, Rényi (1956) mostrou que a soma geométrica, devidamente padronizada, tem distribuição limite exponencial quando $p \rightarrow 0$. Uma extensão deste resultado mostra que, se as variáveis aleatórias X_i 's são simétricas com variância finita, o limite da soma geométrica converge em distribuição para uma variável aleatória com distribuição Laplace. Se omitimos a suposição de simetria, a classe limite coincide com a família de distribuições Laplace assimétrica. Estes dois últimos resultados foram demonstrados em Kotz, Kozubowski e Podgorski (2001). Se nenhuma hipótese sobre as variáveis aleatórias somadas é feita, o limite em distribuição da soma geométrica é uma lei geométrica estável, como mostrado em Gnedenko e Korolev (1996).

Como discutido em Kalashnikov (1997), as somas geométricas possuem várias aplicações e modelam muitos fenômenos em seguros, filas, finanças, confiabilidade, biologia, entre outros. Por exemplo, Kozubowski e Podgorski (2000), utilizando os resultados limites da soma

geométrica, aplicaram a distribuição Laplace assimétrica para modelar a taxa de câmbio. Já Schluter e Trede (2016) usaram a soma binomial negativa, que tem como caso particular a distribuição Geométrica, para explicar as taxas de crescimento das cidades e retornos de ações de alta frequência.

A distribuição limite da soma geométrica pertence à classe de distribuições geométrica-estáveis. Essa classe é definida em Mittnik e Rachev (1989). As distribuições geométrica-estáveis capturam a cauda e o pico característico de dados financeiros, sendo uma alternativa à distribuição Normal e às distribuições α -estáveis (ver, por exemplo, Kozubowski e Rachev (1994)). Representações, propriedades, caracterizações estocásticas e simulação dessa classe podem ser vistas com mais detalhes em Kozubowski e Rachev (1994), Kozubowski (1994), Kozubowski e Rachev (1999a) e Kozubowski e Podgorski (2000). São exemplos de distribuições geométrica-estáveis as distribuições Laplace, Mittag-Leffler e Linnik.

Motivados pelos resultados e pelas diversas aplicações das somas geométricas, estudaremos nesta tese o comportamento limite da soma aleatória quando o número de termos somados tem distribuição Poisson Misturada. Sabemos que dados de contagem são comuns nas mais diversas áreas, por exemplo, na saúde, em seguros, economia e ciências sociais. Em geral, estes dados exibem comportamento de sobredispersão, ou seja, apresentam variância maior que a média. A distribuição Poisson Misturada é utilizada para modelar dados com esta natureza, surgindo como alternativa aos modelos tradicionais de Poisson, Binomial Negativo e Geométrico. Uma revisão da literatura sobre esta distribuição e propriedades gerais, tais como momentos, identificabilidade e divisibilidade infinita, são encontradas em Karlis e Xekalaki (2005).

Gavrilenko e Korolev (2006) mostraram que a soma aleatória Poisson Misturada converge em distribuição para uma mistura de distribuições escala normal (consulte West (1987) para obter uma definição desse tipo de distribuição) assumindo que a sequência $\{X_n\}_{n \geq 1}$ é independente, identicamente distribuída, com $E(X_1) = 0$, $\text{Var}(X_1) = 1$ e que existe $\delta > 0$, tal que $E(|X_1|^{2+\delta}) < \infty$. Essa última suposição é necessária, uma vez que o principal interesse nesse trabalho é encontrar um limite do tipo Berry-Essen vinculado à convergência fraca. O estudo da precisão para a convergência de somas aleatórias Poisson Misturadas também é considerado em Korolev e Shevtsova (2012), Korolev e Dorofeeva (2017a) e Shevtsova (2018). Teoremas limites para as somas aleatórias com um número binomial negativo ou binomial negativo generalizado (que são distribuições Poisson Misturadas) com aplicação a situações práticas reais são abordados por Bening e Korolev (2005), Schluter e Trede (2016) e Korolev e Zeifman (2019).

Nosso objetivo é explorar as somas aleatórias Poisson Misturadas sob diferentes suposições dos trabalhos anteriores na literatura sobre este tópico, uma vez que nossos propósitos

aqui também são diferentes. Assumiremos que o número de termos segue uma classe de distribuições Poisson Misturada proposta por Barreto-Souza e Simas (2016), que contém as distribuições Binomial Negativa e Poisson Inversa Gaussiana como casos particulares. Além disso, assumiremos que a sequência $\{X_n\}_{n \geq 1}$ seja independente, identicamente distribuída, com média não nula e segundo momento finito. Não exigiremos mais que o segundo momento finito, em contraste com o trabalho de Gavrilenko e Korolev (2006). Sob essas condições, mostraremos que o limite fraco da nossa soma aleatória Poisson Misturada é uma classe de mistura normal média-variância (consulte Barndorff-Nielsen (1997) para uma definição desse tipo de distribuição) dirigida por uma família exponencial latente. Chamaremos essa nova classe de distribuições de Normal Família Exponencial Misturada. Em particular, essa classe contém a distribuição Normal Inversa Gaussiana, dada por Barndorff-Nielsen (1997), como um caso especial, fornecendo uma nova caracterização para esse modelo.

Encontraremos as funções geradora de momentos e característica da variável aleatória limite da soma Poisson Misturada devidamente padronizada. Outra contribuição desta tese é a introdução de novo conceito de estabilidade Poisson Misturada que inclui a estabilidade geométrica como caso particular; veja Gnedenko e Kolmogorov (1954), Kozubowski e Rachev (1994), Mittnik e Rachev (1990). Também forneceremos um teorema que estabelecerá uma relação entre a estabilidade Poisson Misturada proposta e as distribuições α -estáveis.

O estudo inferencial da classe limite de distribuições é de interesse prático. Propomos a estimativa dos parâmetros dos modelos Normal Família Exponencial Misturados através do método dos momentos e também pelo método da máxima verossimilhança, realizado através do algoritmo EM; ver Dempster A.P. Laird e Rubin (1997). Encontraremos também a matriz de informação observada. O algoritmo EM para a distribuição Normal Inversa Gaussiana foi dado em Karlis (2002), entretanto, esse autor não exibe a matriz de informação observada. Loregian, Mercuri e Rroji (2012) apresentaram o algoritmo EM aproximado para o modelo Variância-Gama. Mostraremos o algoritmo EM para o modelo Variância-Gama exato e a matriz de informação observada para os modelos Variância-Gama e Normal Inversa Gaussiana.

Faremos um estudo de simulação e investigaremos o retorno diário das ações da Petrobrás para a classe limite da soma Poisson Misturada. Modelaremos também o comportamento da precipitação de uma estação pluviométrica de São Paulo.

Um segundo objetivo desta tese é estudar a distribuição limite da soma aleatória cujo número de termos segue uma distribuição Poisson Fracionada. Dizemos que uma variável aleatória tem distribuição Poisson Fracionada se é igual, em distribuição, à variável aleatória com o número de eventos ocorridos no intervalo de tempo $(0, 1)$ de acordo com um processo de Poisson Fracionado. A distribuição de Poisson é um caso particular da distribuição

Poisson Fracionada. Laskin (2009) apresenta algumas das aplicações da distribuição Poisson Fracionada como, por exemplo, física quântica e teoria dos números combinatórios.

Mostraremos que a distribuição limite da soma aleatória Poisson Fracionada pode ser representada como uma mistura entre as distribuições Normal e Mittag-Leffler. Essa última distribuição, definida por Pillai (1990), é uma generalização da distribuição Exponencial e aparece na literatura física relacionada aos fenômenos de relaxação como dado, por exemplo, em Weron e Kotulski (1996). Nomearemos essa nova distribuição limite de Normal Mittag-Leffler, encontraremos as estimativas dos seus parâmetros através do Método dos Momentos e a distribuição assintótica dos estimadores. Apresentaremos um estudo de simulação e uma aplicação do modelo Normal-Mittag-Leffler ao conjunto de dados sobre o retorno diário do índice Ibovespa. Agahi e Alipour (2019) definiram a distribuição Mittag-Leffler-Gaussiana que generaliza a distribuição Normal. Apesar de nomes semelhantes, ressaltamos que a distribuição que definiremos é diferente da proposta por esses autores e até então não é conhecida na literatura. A mistura que apresentaremos surgirá como limite da soma Poisson Fracionada, utilizando uma parametrização específica para essa soma aleatória.

Encontraremos a distribuição limite da soma Conway-Maxwell-Poisson. A distribuição Conway-Maxwell-Poisson (CMP), também conhecida como COM-Poisson, é uma generalização com dois parâmetros da distribuição Poisson e foi introduzida por Conway e Maxwell (1962) e pode ser usada para modelar dados que estão sob ou sobre dispersos em relação à distribuição de Poisson. Com isso, mostraremos que nem toda soma aleatória que generaliza a distribuição de Poisson tem como distribuição limite uma mistura da distribuição Normal não degenerada.

Esta tese está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 faremos uma breve revisão de alguns resultados sobre somas aleatórias e apresentaremos a classe de distribuições Poisson Misturada. Obteremos a distribuição limite da soma Poisson Misturada padronizada e, em particular, as distribuições Laplace simétrica e assimétrica e a distribuição Normal Inversa Gaussiana surgirão como casos particulares dessa distribuição. Definiremos a estabilidade da soma Poisson Misturada que é uma generalização da classe de distribuições geométrica-estáveis. Como exemplo, estabeleceremos os conceitos de distribuições Binomial Negativa estável, Poisson Inversa Gaussiana estável e Poisson Secante Hiperbólica Generalizada estável. O Capítulo 3 apresenta a distribuição limite como uma mistura de distribuições normais. Através desta caracterização encontraremos propriedades estocásticas desta variável. A estimação dos parâmetros pelo método dos momentos e pelo algoritmo EM é abordada juntamente com um estudo de simulação. O Capítulo 4 é destinado a introduzir a distribuição limite da soma Poisson Fracionada e ao estudo de suas propriedades. A distribuição assintótica dos estimadores é obtida. Um estudo de simulação também é apresentado. Finalizaremos esse capítulo com a distribuição limite da soma Conway-Maxwell-Poisson. No Capítulo 5

ajustaremos dois modelos da Normal Família-Exponencial Misturada e a distribuição Normal-Mittag-Leffler a bancos de dados reais sobre o retorno das ações da Petrobrás, precipitação de uma estação pluviométrica de São Paulo e o retorno diário do índice Ibovespa. No Capítulo 6 finalizaremos com as conclusões e algumas discussões.

Capítulo 2

Distribuição Limite da Soma Poisson Misturada e Estabilidade

Neste capítulo faremos uma breve revisão de algumas propriedades das somas aleatórias e apresentaremos a distribuição Poisson Misturada. Exibiremos na Seção 2.1 resultados interessantes sobre a soma geométrica que foi uma das motivações deste trabalho. Na Seção 2.2 estudaremos a distribuição limite, quando $\lambda \rightarrow \infty$, da soma aleatória

$$S_\lambda = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_\lambda},$$

devidamente padronizada, em que N_λ tem distribuição Poisson Misturada. Assumiremos que as variáveis aleatórias da sequência $\{X_i\}_{i \geq 1}$ são independentes, identicamente distribuídas (i.i.d.) e independentes de N_λ .

Na Seção 2.3, consideraremos o caso em que $E(X_1) = 0$ e $Var(X_1) = 1$ e mostraremos que a distribuição limite da soma Poisson Misturada tem como casos particulares as distribuições Laplace simétrica e Normal Inversa Gaussiana. Posteriormente, com as condições mais gerais $E(X_1) = \mu \neq 0$ e $Var(X_1) = \sigma^2 > 0$, provaremos que as distribuições Laplace assimétrica e Normal Inversa Gaussiana surgirão como resultados particulares da distribuição limite da soma Poisson Misturada.

Na Seção 2.4, generalizaremos as distribuições geométrica-estáveis definindo uma classe de distribuições que nomearemos de Poisson Misturada estável. Em particular, mostraremos que a distribuição Normal Inversa Gaussiana é uma distribuição Poisson Inversa Gaussiana estável.

2.1 Soma Geométrica

Seja $\{X_i\}_{i \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. e defina a soma geométrica $S_p = \sum_{i=1}^{v_p} X_i$, com $v_p \sim \text{Geo}(p)$ e $p \in (0, 1)$. Rényi (1956) mostrou que se as variáveis aleatórias dessa sequência são não negativas com esperança $E(X_i) = \mu < \infty$, $i \geq 1$, então

$$pS_p \xrightarrow[p \rightarrow 0]{d} X,$$

em que $X \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{\mu}\right)$. Note que, quando $p \rightarrow 0$, a média $1/p$ da variável aleatória geométrica vai para infinito.

Segundo Kalashnikov (1997), apesar da soma geométrica ter uma construção simples, não é possível encontrar uma expressão explícita para sua função de distribuição. Sendo assim, obter aproximações e variáveis aleatórias limites é essencial para estudar tais somas.

A proposição a seguir, cuja demonstração pode ser vista em Kotz, Kozubowski e Podgorski (2001), diz que a distribuição Laplace simétrica surge como o limite de S_p quando as variáveis aleatórias X_i 's são simétricas em torno do zero e com variância finita.

Proposição 2.1.1. *Considere a soma geométrica $S_p = \sum_{i=1}^{v_p} X_i$, em que as variáveis aleatórias X_i 's são não degeneradas, simétricas, i.i.d., com $\text{Var}(X_1) < \infty$ e independentes de v_p . Então, a distribuição Laplace com média zero coincide com a distribuição limite de $a_p S_p$ quando $p \rightarrow 0$, em que $a_p > 0$. Mais ainda, se $\text{Var}(X_1) = \sigma^2$ e*

$$a_p \sum_{i=1}^{v_p} X_i \xrightarrow[p \rightarrow 0]{d} Y,$$

então existe $\gamma > 0$ tal que $a_p = \sqrt{p}\gamma + o(\sqrt{p})$ e Y tem distribuição Laplace com média zero e variância $\sigma^2\gamma^2$.

Se a suposição de simetria é omitida na Proposição 2.1.1, a distribuição limite da soma geométrica coincide com a distribuição Laplace Assimétrica, como mostra a proposição a seguir, também dada em Kotz, Kozubowski e Podgorski (2001).

Proposição 2.1.2. *Seja $\{X_i\}_{i \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. não degeneradas com $\text{Var}(X_1) < \infty$ e independentes de $v_p \sim \text{Geo}(p)$. Então*

$$a_p \sum_{i=1}^{v_p} (X_i + b_p) \xrightarrow[p \rightarrow 0]{d} Y,$$

em que Y tem distribuição Laplace Assimétrica com moda zero. Se $E(X_i) = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2$, temos que $a_p = \sqrt{p}$, $b_p = \mu(\sqrt{p} - 1)$.

Desta forma, como a distribuição Exponencial, a distribuição Laplace pode ser caracterizada como limite de somas aleatórias geométricas.

Kozubowski e Podgorski (2000) aplicaram a distribuição Laplace assimétrica para modelar a taxa de câmbio. Eles consideraram que a alteração na taxa de câmbio pode ser dada como uma soma de um grande número de pequenas alterações, em que a soma é obtida até um tempo aleatório v_p com distribuição Geométrica. O tempo aleatório reflete a imprevisibilidade dos fatores que contribuem para o estabelecimento da taxa de câmbio. Desta forma, se as pequenas mudanças têm variância finita, a distribuição Laplace pode aproximar a distribuição da variação da taxa de câmbio. Pode-se pensar em v_p como o instante em que a taxa de câmbio sofre uma queda devido a uma motivação política ou econômica, por exemplo.

Schluter e Trede (2016) consideraram uma sequência $\{X_i\}_{i \geq 1}$ de variáveis aleatórias i.i.d. com média $E(X_i) = \mu < \infty$, variância $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$ e $E(X_i^2 \ln(|X_i|)) < \infty$. Definiram então a soma aleatória $S_p = \sum_{k=1}^{N_p} X_k$ e a média aleatória $\bar{X}_p = N_p^{-1} S_p$, em que N_p tem distribuição Binomial Negativa, independente de X_i , com parâmetros $\gamma > 0$ e $0 < p < 1$ e função de probabilidade

$$P(N_p = n) = \frac{\Gamma(n + \gamma)}{n! \Gamma(\gamma)} p^\gamma (1 - p)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O teorema a seguir, exibido em Schluter e Trede (2016), apresenta um resultado limite para a soma Binomial Negativa. Quando $\gamma = 1$, temos o caso especial da soma geométrica.

Teorema 2.1.1. *Seja $\{X_i\}_{i \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. A média padronizada converge fracamente como segue:*

$$T_p = \sqrt{\frac{\gamma}{p}} \frac{\bar{X}_p - \mu}{\sigma} \xrightarrow[p \rightarrow 0]{d} t_{2\gamma},$$

em que $t_{2\gamma}$ é a distribuição t -Student com 2γ graus de liberdade.

Motivados pelos resultados apresentados sobre as somas geométricas, estudaremos a soma aleatória quando o número de termos somados tem distribuição Poisson Misturada. Discutiremos essa distribuição na próxima seção.

2.2 Distribuição Poisson Misturada

A distribuição Poisson Misturada é obtida através de uma mistura da Poisson com uma distribuição com suporte nos reais positivos e é utilizada em várias áreas para modelagem de dados que apresentam sobredispersão e caudas pesadas. Dependendo da escolha da distribuição da mistura, diversas distribuições podem ser construídas. Em Bhati, Kumawat e Gómez-Déniz (2017), tem-se uma lista com vários tipos de Poisson Misturadas com as respectivas referências.

Sejam W uma variável aleatória não negativa com função de distribuição $F_W(\cdot)$ e N uma variável aleatória tal que $N|(W_\phi = w) \sim \text{Poisson}(\lambda w)$, com $\lambda > 0$. Desta forma, dizemos que N pertence à classe de distribuições Poisson Misturada e sua função de probabilidade é dada por

$$P(N = n) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda w} (\lambda w)^n}{n!} dF_W(w), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

Barreto-Souza e Simas (2016) introduziram uma classe geral para modelos de regressão considerando a mistura entre a distribuição Poisson e uma distribuição W pertencente à família exponencial com função densidade de probabilidade, com respeito a uma medida σ -finita ν , dada por

$$f_W(w) = \frac{d\mathbb{P}}{d\nu} = \exp\{\phi[w\xi_0 - b(\xi_0)] + c(w; \phi)\}, \quad w > 0, \quad \phi > 0, \quad (2.2)$$

em que $b(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, três vezes diferenciável, ξ_0 é tal que $b'(\xi_0) = 1$ e $c(\cdot; \cdot) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é um função que pode ser escrita como $c(w; \phi) = d(\phi) + \phi g(w) + h(w)$, com $d(\cdot)$ contínua e três vezes diferenciável. Com isso, $E(W) = b'(\xi_0) = 1$ e $Var(W) = \phi^{-1}b''(\xi_0)$. O parâmetro ϕ é chamado de parâmetro de precisão, pois quanto maior seu valor, menor será a variância.

A partir de agora, adotamos a seguinte notação: para qualquer variável aleatória X , escrevemos $\psi_X(t)$ para sua função geradora de momentos e $\varphi_X(t)$ para sua função característica. Utilizaremos $W_\phi \sim \text{FE}(\phi)$ quando a variável aleatória W_ϕ está na família exponencial e $N_\lambda \sim \text{PM}(\lambda, W_\phi)$ para a variável aleatória N_λ com distribuição Poisson misturada com a mistura W_ϕ .

A função geradora de momentos de W_ϕ é calculada pela definição e é dada por

$$\psi_{W_\phi}(t) = \exp \left\{ -\phi \left[b(\xi_0) - b \left(\xi_0 + \frac{t}{\phi} \right) \right] \right\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \phi > 0. \quad (2.3)$$

Já para encontrarmos a função característica necessitaremos de uma mudança na medida

que domina a família; ver, por exemplo, Shao (2003) página 96. Seja $\lambda(A) = \int_A \exp\{c(w; \phi)\} d\nu$ para qualquer A boreliano na reta. Podemos reescrever a Expressão (2.2) como

$$f_W(w) = \frac{d\mathbb{P}}{d\lambda} = \exp\{\phi w \xi_0 - \phi b(\xi_0)\}.$$

Vemos que a integral

$$\int \exp\{\xi_0 w \phi\} d\lambda(w),$$

considerada como uma função complexa, é analítica na parte real do espaço paramétrico; pelo Teorema 9, página 52, dado em Lehmann (1959). Por Sampson (1975), a função característica da família exponencial definida na Expressão (2.2) é dada por

$$\varphi_{W_\phi}(t) = \exp\left\{-\phi \left[b(\xi_0) - b\left(\xi_0 + \frac{it}{\phi}\right) \right]\right\}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Barreto-Souza e Simas (2016) exibiram algumas variáveis aleatórias pertencentes à família exponencial com parametrização dada na Expressão (2.2). Por exemplo, se $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$, então

$$\begin{cases} b(\xi_0) = -\log(-\xi_0), \\ \xi_0 = -1 \text{ e} \\ c(w; \phi) = (\phi - 1) \log w + \phi \log \phi - \log \Gamma(\phi). \end{cases}$$

Já se W_ϕ é uma variável aleatória com distribuição Inversa Gaussiana, $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$, então

$$\begin{cases} b(\xi_0) = -(-2\xi_0)^{\frac{1}{2}}, \\ \xi_0 = -\frac{1}{2} \text{ e} \\ c(w; \phi) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\phi}{2\pi w^3}\right) - \frac{\phi}{2w}. \end{cases}$$

Para W_ϕ com distribuição Secante Hiperbólica Generalizada, $W_\phi \sim \text{SHG}(\phi)$, temos

$$\begin{cases} b(\xi_0) = \frac{1}{2} \log(1 + \tan^2(\xi_0)), \\ \xi_0 = -\frac{3\pi}{4} \text{ e} \\ c(w; \phi) = \log\left(\frac{2^{\phi-2} \phi \left| \Gamma\left(\frac{\phi}{2} + \frac{iz}{2}\right) \right|^2}{\pi \Gamma(\phi)}\right). \end{cases}$$

A função de probabilidade $p(n; \lambda, \phi)$ da variável aleatória Poisson Misturada N_λ é dada pela Equação (2.1) substituindo $dF_W(w)$ por $f_W(w)dw$ em que $f_W(\cdot)$ é a função densidade

da família exponencial dada na Equação (2.2). Os exemplos a seguir apresentam as funções densidades de probabilidades para N_λ considerando como mistura as distribuições Gama, Inversa Gaussiana e Secante Hiperbólica Generalizada.

Exemplo 2.2.1. Se $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$, então N_λ tem distribuição Binomial Negativa, $N_\lambda \sim \text{BN}(\lambda, \phi)$, com função de probabilidade

$$p(n; \lambda, \phi) = \frac{\Gamma(n + \phi)}{n! \Gamma(\phi)} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \phi} \right)^n \left(\frac{\phi}{\lambda + \phi} \right)^\phi, \quad n = 0, 1, \dots$$

Exemplo 2.2.2. Se $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$, então N_λ tem distribuição Poisson Inversa Gaussiana, $N_\lambda \sim \text{PIG}(\lambda, \phi)$, com função de probabilidade

$$p(n; \lambda, \phi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\sqrt{\phi(\phi + 2\lambda)} \right]^{-(n-\frac{1}{2})} \frac{e^{\phi(\lambda\phi)^n}}{n!} \mathcal{K}_{n-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\phi(\phi + 2\lambda)} \right), \quad n = 0, 1, \dots$$

em que, como apontado em Abramowitz e Stegun (1972),

$$\mathcal{K}_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\nu-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z(y + y^{-1}) \right\} dy, \quad \nu \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

denota a função Bessel modificada do terceiro tipo com índice ν .

Exemplo 2.2.3. Se $W_\phi \sim \text{SHG}(\phi)$, então N_λ tem distribuição Poisson Secante Hiperbólica Generalizada, $N_\lambda \sim \text{PSHG}(\lambda, \phi)$, com função de probabilidade

$$p(n; \lambda, \phi) = \frac{e^{-\frac{3\pi\phi}{4}} 2^{\phi-2} \pi \left| \Gamma \left(\frac{\phi}{2} + \frac{iz}{2} \right) \right|^2}{\sqrt{2} \pi \Gamma(\phi)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Como indicado em Karlis e Xekalaki (2005), a função geradora de momentos $\psi_{N_\lambda}(t)$ da distribuição Poisson Misturada é dada na proposição a seguir.

Proposição 2.2.1. Se $N_\lambda \sim \text{PM}(\lambda, W_\phi)$, então

$$\psi_{N_\lambda}(t) = \psi_{W_\phi}[\lambda(e^t - 1)], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Desta forma, a média e variância de N_λ são, respectivamente, $E(N_\lambda) = \lambda$ e $\text{Var}(N_\lambda) = \lambda\{1 + \lambda\phi^{-1}b''(\xi_0)\}$. Como $\text{Var}(W_\phi) = \phi^{-1}b''(\xi_0) > 0$ e $\lambda > 0$, N_λ apresenta sobredispersão, pois sua variância é maior que a média.

Como a função geradora de momentos de N_λ , dada na Proposição 2.2.1, é contínua no ponto $t = 0$, temos que

$$\varphi_{N_\lambda}(t) = \varphi_{W_\phi}[\lambda(e^{it} - 1)], \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Apresentada a distribuição Poisson Misturada estamos prontos para estudarmos a distribuição limite da soma aleatória com número de termos seguindo essa distribuição.

2.3 Distribuição Limite da Soma Poisson Misturada

Nesta seção apresentaremos a distribuição limite da soma Poisson Misturada com uma dada parametrização e veremos que as distribuições Laplace Simétrica, Laplace Assimétrica e Normal Inversa Gaussiana aparecem como casos particulares desta distribuição limite. Esses dois primeiros resultados já são conhecidos na literatura.

Sejam $\{X_i\}_{i \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $E(X_1) = \mu$, $Var(X_1) = \sigma^2$ e N_λ uma variável aleatória discreta não negativa independente dos X_i 's. Considere a soma aleatória

$$S_\lambda = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_\lambda},$$

em que $S_\lambda = 0$ se $N_\lambda = 0$. Se $E(|X_1|)$, $E(N_\lambda)$, $Var(X_1)$ e $Var(N_\lambda)$ são finitas, a esperança e a variância de S_λ são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} E(S_\lambda) &= E(N_\lambda)E(X_1), \\ Var(S_\lambda) &= Var(X_1)E(N_\lambda) + E^2(X_1)Var(N_\lambda). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Já a função geradora de momentos de S_λ é dada por

$$\psi_{S_\lambda}(t) = G_{N_\lambda}[\psi_{X_1}(t)], \quad (2.8)$$

em que $G_{N_\lambda}(w) = E(w^{N_\lambda})$ é a função geradora de probabilidade da variável aleatória N_λ e $\psi_{X_1}(t)$ é a função geradora de momentos de X_1 .

Utilizando as equações dadas na Expressão (2.7) com $E(X_1) = 0$ e $Var(X_1) = 1$, a esperança e a variância da soma aleatória Poisson Misturada são, respectivamente, $E(S_\lambda) = 0$ e $Var(S_\lambda) = \lambda$. Padronizando, definimos uma nova variável aleatória \bar{S}_λ como

$$\bar{S}_\lambda = \frac{S_\lambda - E(S_\lambda)}{\sqrt{Var(S_\lambda)}} = \frac{S_\lambda}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.9)$$

A proposição a seguir relaciona a função geradora de momentos da mistura utilizada na Poisson Misturada com a função geradora de momentos da variável aleatória \bar{S}_λ .

Proposição 2.3.1. *Seja $\bar{S}_\lambda = \frac{S_\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^{N_\lambda} X_i$ em que $\{X_i\}_{i \geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E(X_1) = 0$ e $Var(X_1) = 1$ e $N_\lambda \sim \text{PM}(\lambda, W_\phi)$. Então,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \psi_{\bar{S}_\lambda}(t) = \psi_{W_\phi} \left(\frac{t^2}{2} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Pela Equação (2.8), a função geradora de momentos da soma aleatória S_λ pode ser escrita como a composição da função geradora de probabilidade de N_λ com a função geradora de momentos de X , ou seja,

$$\psi_{\bar{S}_\lambda}(t) = \psi_{S_\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right) = G_{N_\lambda} \left[\psi_X \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right) \right] = \psi_{N_\lambda} \left\{ \ln \left[\psi_X \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right) \right] \right\} = \psi_{W_\phi} \left\{ \lambda \left[\psi_X \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right) - 1 \right] \right\},$$

em que a última igualdade é dada pela Proposição 2.2.1, para t pertencente a alguma vizinhança de zero.

Tomando o limite e usando a continuidade da função geradora de momentos, obtemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \psi_{\bar{S}_\lambda}(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \psi_{W_\phi} \left(\frac{\psi_X \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right) - 1}{\frac{1}{\lambda}} \right) = \psi_{W_\phi} \left(\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\psi_X \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right) - 1}{\frac{1}{\lambda}} \right).$$

Aplicando-se duas vezes a Regra de L'Hôpital no limite anterior, temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \psi_{\bar{S}_\lambda}(t) = \psi_{W_\phi} \left(\frac{t^2}{2} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

O próximo corolário apresenta a função característica da variável aleatória Y que é o limite da soma Poisson Misturada padronizada \bar{S}_λ .

Corolário 2.3.1. *Seja Y uma variável aleatória com função característica*

$$\varphi_Y(t) = \exp \left\{ -\phi \left[b(\xi_0) - b \left(\xi_0 - \frac{t^2}{2\phi} \right) \right] \right\}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Então, \bar{S}_λ definida na Equação (2.9) converge em distribuição para Y . Em símbolos, $\bar{S}_\lambda \xrightarrow{d} Y$ quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{S}_\lambda}(t) &= \varphi_{S_\lambda} \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right) = G_{N_\lambda} \left[\varphi_X \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right) \right] \\ &= \varphi_{N_\lambda} \left\{ \frac{1}{i} \ln \left[\varphi_X \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right) \right] \right\} = \varphi_{W_\phi} \left\{ \lambda \left[\varphi_X \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right) - 1 \right] \right\}, \end{aligned}$$

em que a última igualdade é dada pela Equação (2.6).

Tomando o limite e usando a continuidade da função característica, obtemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_{\bar{S}_\lambda}(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_{W_\phi} \left(\frac{\varphi_X \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right) - 1}{\frac{1}{\lambda}} \right) = \varphi_{W_\phi} \left(\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\varphi_X \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right) - 1}{\frac{1}{\lambda}} \right).$$

Aplicando-se duas vezes a Regra de L'Hôpital no limite anterior, temos

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_{\bar{S}_\lambda}(t) &= \varphi_{W_\phi} \left(-\frac{t^2}{2} \right) \\ &= \exp \left\{ -\phi \left[b(\xi_0) - b \left(\xi_0 - \frac{t^2}{2\phi} \right) \right] \right\}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Os exemplos a seguir mostram que a distribuição limite da soma aleatória Binomial Negativa padronizada tem uma distribuição Laplace Simétrica, como já é conhecido na literatura, e que a soma aleatória Poisson Inversa Gaussiana padronizada converge em distribuição para uma variável aleatória com distribuição Normal Inversa Gaussiana. Desta forma, ganhamos uma interpretação matemática da distribuição Normal Inversa Gaussiana, ou seja, ela surge naturalmente como o limite de uma soma aleatória cujo número de termos tem distribuição Poisson Inversa Gaussiana.

Exemplo 2.3.1. Se $W_\phi \sim \text{Gama}(1)$, ou seja, $N_\lambda \sim \text{BN}(\lambda, 1)$, temos que $b(\xi_0) = -\log(-\xi_0)$ e $\xi_0 = -1$. Substituindo em (2.10), temos

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{1 + \frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

que é a função característica de uma variável aleatória com distribuição Laplace Simétrica ($L(0, 1)$) com função densidade de probabilidade

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|y|}, \quad -\infty < y < \infty.$$

Assim, $\bar{S}_\lambda \xrightarrow{d} Y$ quando $\lambda \rightarrow \infty$ com $Y \sim L(0, 1)$.

A função característica de uma variável aleatória Y com distribuição Normal Inversa Gaussiana, $\text{NIG}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, dada em Barndorff-Nielsen (1997), pode ser representada como

$$\varphi_Y(t) = \exp \left\{ \delta \left[\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + it)^2} \right] + \gamma it \right\}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Exemplo 2.3.2. Se $W_\phi \sim IG(\phi)$, ou seja, $N_\lambda \sim PIG(\lambda, \phi)$, temos que $b(\xi_0) = -(-2\xi_0)^{\frac{1}{2}}$ e $\xi_0 = -\frac{1}{2}$. Substituindo na Expressão (2.10), obtemos

$$\varphi_Y(t) = \exp \left\{ \phi - \phi \sqrt{1 + \frac{t^2}{\phi}} \right\}, t \in \mathbb{R}.$$

A função característica anterior coincide com a função característica da distribuição Normal Inversa Gaussiana tomando $\alpha = \sqrt{\phi}$, $\beta = \gamma = 0$ e $\delta = \sqrt{\phi}$ na função característica dada na Equação (2.11). Portanto, $\bar{S}_\lambda \xrightarrow{d} Y$ quando $\lambda \rightarrow \infty$ com $Y \sim \text{NIG}(\sqrt{\phi}, 0, 0, \sqrt{\phi})$.

A distribuição limite da soma Poisson Secante Hiperbólica Generalizada é dada no exemplo a seguir.

Exemplo 2.3.3. Se $W_\phi \sim \text{SHG}(\phi)$, ou seja, $N_\lambda \sim \text{PSHG}(\lambda, \phi)$, temos que $b(\xi_0) = \frac{1}{2} \log(1 + \tan^2 \xi_0)$ e $\xi_0 = -\frac{3\pi}{4}$. Substituindo na Expressão (2.10), obtemos

$$\varphi_Y(t) = \left(\frac{1 + \tan^2 \left(-\frac{3\pi}{4} - \frac{t^2}{2\phi} \right)}{2} \right)^{\frac{\phi}{2}}, t \in \mathbb{R}.$$

Consideraremos agora o caso mais geral da soma aleatória Poisson Misturada em que a sequência $\{X_i\}_{i \geq 1}$ é tal que $E(X_1) = \mu \neq 0$ e $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 \neq 1$. Os resultados obtidos generalizam os encontrados anteriormente. Demonstraremos que a distribuição limite dessa soma tem como casos particulares as distribuições Laplace Assimétrica (como esperado) e Normal Inversa Gaussiana.

Proposição 2.3.2. Seja $\{X_i\}_{i \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E(X_1) = \mu \in \mathbb{R}$, $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$ e independente de $N_\lambda \sim \text{PM}(\lambda, W_\phi)$. Então,

$$\tilde{S}_\lambda = a_\lambda \sum_{i=1}^{N_\lambda} (X_i + b_\lambda) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{d} Y,$$

em que $a_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $b_\lambda = \mu \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 1 \right)$ e Y é uma variável aleatória com função característica

$$\varphi_Y(t) = \exp \left[-\phi \left\{ b(\xi_0) - b \left[\xi_0 + \frac{1}{\phi} \left(it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2} \right) \right] \right\} \right], t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Usando propriedades básicas de esperança condicional, temos que

$$\varphi_{\tilde{S}_\lambda}(t) = E \left[E \left[e^{it \left(a_\lambda \sum_{i=1}^{N_\lambda} (X_i + b_\lambda) \right)} \middle| N_\lambda \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
&= G_{N_\lambda} \left[\varphi_{X_1-\mu} \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right) e^{\frac{\mu}{\lambda} ti} \right] \\
&= \exp \left[-\phi \left\{ b(\xi_0) - b \left[\xi_0 + \frac{\lambda}{\phi} \left(\varphi_{X_1-\mu} \left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right) e^{\frac{\mu}{\lambda} ti} - 1 \right) \right] \right\} \right],
\end{aligned}$$

em que $\varphi_{X_1-\mu}$ é a função geradora de momentos de $X_1 - \mu$. Tomando o limite e aplicando a Regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_{\tilde{S}_\lambda}(t) = \exp \left[-\phi \left\{ b(\xi_0) - b \left[\xi_0 + \frac{1}{\phi} \left(it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2} \right) \right] \right\} \right] = \varphi_Y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

Os exemplos a seguir apresentam a distribuição limite da soma geral \tilde{S}_λ quando N_λ tem distribuições Binomial Negativa, Poisson Inversa Gaussiana e Poisson Secante Hiperbólica Generalizada, respectivamente.

Exemplo 2.3.4. Se $N_\lambda \sim BN(\lambda, 1)$, então $b(\xi_0) = -\log(-\xi_0)$ e $\xi_0 = -1$. Pela Proposição 2.3.2, a função característica de Y é dada por

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 - it\mu}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A função característica acima coincide com a função característica de uma variável aleatória com distribuição Laplace assimétrica, $LA(\mu, \sigma^2)$, com parametrização

$$f_Y(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{k}{1+k^2} \begin{cases} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}k}{\sigma}|y|\right), & \text{se } y \geq 0, \\ \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma k}|y|\right), & \text{se } y < 0, \end{cases}$$

em que $k = \frac{\sqrt{2\sigma^2 + \mu^2} - \mu}{\sqrt{2}\sigma}$ é o parâmetro de assimetria. Portanto, $\tilde{S}_\lambda \xrightarrow{d} Y$ com $Y \sim LA(\mu, \sigma)$.

Observação: quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, Y tem distribuição Laplace simétrica como no Exemplo 2.3.1.

Exemplo 2.3.5. Se $N_\lambda \sim PIG(\lambda, \phi)$, então $b(\xi_0) = -(-2\xi_0)^{\frac{1}{2}}$ e $\xi_0 = -\frac{1}{2}$. Pela Proposição 2.3.2,

$$\varphi_Y(t) = \exp \left\{ \phi - \phi \sqrt{1 - \frac{2}{\phi} \left(it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2} \right)} \right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

que é a função característica de uma variável aleatória com distribuição Normal Inversa Gaussiana com parâmetros $\alpha = \sqrt{\frac{\phi}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^4}}$, $\beta = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $\gamma = 0$ e $\delta = \sqrt{\phi}\sigma$. Portanto, $\tilde{S}_\lambda \xrightarrow{d} Y$ com $Y \sim \text{NIG}\left(\sqrt{\frac{\phi}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^4}}, \frac{\mu}{\sigma^2}, 0, \sqrt{\phi}\sigma\right)$.

Note que quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, $Y \sim \text{NIG}(\sqrt{\phi}, 0, 0, \sqrt{\phi})$, como no Exemplo 2.3.2.

Exemplo 2.3.6. Se $N_\lambda \sim \text{PSHG}(\phi)$, então $b(\xi_0) = \frac{1}{2} \log(1 + \tan^2 \xi_0)$ e $\xi_0 = -\frac{3\pi}{4}$. Pela Proposição 2.3.2,

$$\varphi_Y(t) = \left\{ \frac{1 + \tan^2\left(-\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{\phi}\left[it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right]\right)}{2} \right\}^{\frac{\phi}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ temos o Exemplo 2.3.3.

2.4 Estabilidade Poisson Misturada

Nesta seção, baseados no conceito de distribuições geométrica-estáveis, introduziremos um novo conceito de estabilidade.

O Teorema Central do Limite se limita às distribuições para somas de variáveis aleatórias independentes com segundo momento finito. O que se pode dizer se o segundo momento não existe? A resposta a esta questão leva à teoria das distribuições estáveis, apresentada por Paul Lévy no século XX e de grande importância na teoria de probabilidade.

A definição de distribuição estável a seguir é dada em Gut (2005).

Definição 2.4.1. Sejam X, X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias i.i.d. e a soma parcial S_n , $n \geq 1$. Dizemos que X tem distribuição estável se existem constantes $c_n > 0$ e $d_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$S_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n, \quad \forall n \geq 1.$$

A distribuição é estritamente estável se $d_n = 0$ para todo n .

Por exemplo, a distribuição Normal com média zero é estritamente estável com $c_n = \sqrt{n}$ e a distribuição de Cauchy padrão é estritamente estável com $c_n = n$. As leis estáveis generalizam o Teorema Central do Limite, o qual diz que a soma de um número de variáveis aleatórias com distribuição simétrica, cuja cauda decresce como uma função potência, converge para uma distribuição estável.

O teorema a seguir apresenta o índice de estabilidade ou expoente característico da variável aleatória X , denotado pelo parâmetro α , muito importante no estudo de distribuições estáveis.

Teorema 2.4.1. *A constante normalizadora na Definição 2.4.1 é da forma $c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ com $0 < \alpha \leq 2$.*

A prova do Teorema 2.4.1 pode ser encontrada em Feller (1971) (seção VI, volume 2). Uma variável aleatória X com índice α é chamada de distribuição α -estável. Por exemplo, uma variável aleatória com distribuição Normal é α -estável com $\alpha = 2$.

As distribuições α -estáveis podem ser utilizadas para modelar retornos de ativos financeiros como apresentado em Mittnik e Rachev (1989). Naturalmente, surgiram outras distribuições alternativas para competir com as distribuições α -estáveis.

Definição 2.4.2. *Uma variável aleatória Y é geométrica-estável se existem uma sequência $\{X_i\}_{i \geq 1}$ de variáveis aleatórias i.i.d., uma variável aleatória com distribuição geométrica ν_p independente de todos os X_i 's e constantes $a_p > 0$ e $b_p \in \mathbb{R}$ tais que*

$$a_p \sum_{i=1}^{\nu_p} (X_i + b_p) \xrightarrow[p \rightarrow 0]{d} Y.$$

Se $b_p = 0$, Y é chamada de geométrica-estável estrita.

As distribuições geométrica-estáveis foram apresentadas por Mittnik e Rachev (1989). Em Kozubowski e Rachev (1994) essas distribuições são empregadas para modelar o tempo de retorno em ações e fornecem um ajuste melhor do que o modelo α -estável. Veja Kozubowski e Rachev (1999a) e Kozubowski e Rachev (1999b) para mais detalhes.

Baseados no conceito de distribuições geométrica-estáveis, definiremos uma nova classe de distribuições que nomearemos de Poisson Misturada estável. Em particular, apresentaremos as distribuições Binomial Negativa estável, Poisson Inversa Gaussiana estável e Poisson Secante Hiperbólica Generalizada estável. Veremos que uma variável aleatória com distribuição Normal Inversa Gaussiana é Poisson Inversa Gaussiana estável.

Definição 2.4.3. *Dizemos que uma variável aleatória Y é Poisson Misturada estável (PM-estável) se existem uma sequência $\{X_i\}_{i \geq 1}$ de variáveis aleatórias i.i.d., uma variável aleatória $N_\lambda \sim \text{PM}(\lambda, W_\phi)$ independente de todos os X_i 's e constantes $a_\lambda > 0$ e $b_\lambda \in \mathbb{R}$ tais que*

$$a_\lambda \sum_{i=1}^{N_\lambda} (X_i + b_\lambda) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{d} Y. \quad (2.12)$$

Se $b_\lambda = 0$, Y é chamada de Poisson Misturada estritamente estável.

A função característica de uma variável aleatória PM-estável é dada por uma expressão que depende da função característica de uma variável aleatória α -estável, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 2.4.2. *Uma variável aleatória Y é PM-estável se, e somente se, sua função característica $\varphi_Y(t)$ tem a forma*

$$\varphi_Y(t) = \exp \left\{ -\phi \left[b(\xi_0) - b \left(\xi_0 + \frac{1}{\phi} \ln \Psi(t) \right) \right] \right\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

em que $\Psi(t)$ é função característica de alguma distribuição α -estável.

Demonstração. Suponhamos que a variável aleatória Y seja PM-estável. Pelo Teorema da Continuidade de Lévy, a convergência na Expressão (2.12) ocorre se, e somente se

$$\exp \left\{ -\phi \left[b(\xi_0) - b \left(\xi_0 + \frac{\lambda}{\phi} [\varphi_\lambda(t) - 1] \right) \right] \right\} \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{d} \varphi_Y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.14)$$

em que $\varphi_\lambda(t) = \varphi_X(a_\lambda t) e^{i t a_\lambda b_\lambda}$ e $\varphi_X(\cdot)$ é a função característica dos X_i 's. Como a função $b(\cdot)$ é contínua com $b'(\cdot) > 0$ e a família exponencial tem suporte nos reais positivos, $b(\cdot)$ possui inversa $b^{-1}(\cdot)$. Assim, a Expressão (2.14) equivale a

$$\lambda(\varphi_\lambda(t) - 1) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{} \phi \left\{ b^{-1} \left[b(\xi_0) + \frac{1}{\phi} \ln \varphi_Y(t) \right] - \xi_0 \right\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tomando $\lambda = n$ e denotando $a_\lambda = a_n$ e $b_\lambda = b_n$, então

$$n(\varphi_n(t) - 1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \phi \left\{ b^{-1} \left[b(\xi_0) + \frac{1}{\phi} \ln \varphi_Y(t) \right] - \xi_0 \right\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pelo Teorema 1 do Capítulo XVII, volume 2, de Feller (1971) isso implica que

$$(\varphi_n(t))^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Psi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

em que

$$\Psi(t) = \exp \left\{ \phi \left\{ b^{-1} \left[b(\xi_0) + \frac{1}{\phi} \ln \varphi_Y(t) \right] - \xi_0 \right\} \right\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

O lado esquerdo da Expressão (2.15) é função característica de $a_n \sum_{i=1}^n (X_i + b_n)$, em que X_i 's são variáveis aleatórias i.i.d.. Pelo Teorema Central do Limite Generalizado (veja, por exemplo, o Capítulo 9 em Gut (2005)), $a_n \sum_{i=1}^n (X_i + b_n)$ converge em distribuição para alguma distribuição

α -estável com função característica $\Psi(t)$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim,

$$\varphi_Y(t) = \exp \left\{ -\phi \left[b(\xi_0) - b \left(\xi_0 + \frac{1}{\phi} \ln \Psi(t) \right) \right] \right\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Reciprocamente, se a Expressão (2.13) ocorre, então $\Psi(t)$ é a função característica de alguma distribuição α -estável. Desta forma, existem uma variável aleatória Z , uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e constantes a_n e b_n tais que

$$a_n \sum_{i=1}^n (X_i + b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z, \quad (2.16)$$

e $E(e^{itZ}) = \Psi(t)$. Seja $\gamma(t)$ a função característica dos X_i 's e escreva $\gamma_n(t) = \gamma(a_n t) e^{ita_n b_n}$. A Equação (2.16) é equivalente a

$$(\gamma_n(t))^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Psi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Novamente por Feller (1971), a expressão acima implica que

$$n(\gamma_n(t) - 1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln \Psi(t).$$

Por hipótese,

$$\Psi(t) = \exp \left\{ \phi \left\{ b^{-1} \left[b(\xi_0) + \frac{1}{\phi} \ln \varphi_Y(t) \right] - \xi_0 \right\} \right\},$$

e obtemos

$$n(\gamma_n(t) - 1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \phi \left\{ b^{-1} \left[b(\xi_0) + \frac{1}{\phi} \ln \varphi_Y(t) \right] - \xi_0 \right\}.$$

Mas isso é o mesmo que

$$\lambda(\gamma_\lambda(t) - 1) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{} \phi \left\{ b^{-1} \left[b(\xi_0) + \frac{1}{\phi} \ln \varphi_Y(t) \right] - \xi_0 \right\},$$

que por sua vez fornece a Equação (2.14) com $\gamma_\lambda(t)$ no lugar de $\varphi_\lambda(t)$. Com isso, completamos a prova. □

Como consequência do Teorema 2.4.2 definimos, através da função característica, uma variável aleatória Binomial Negativa estável.

Definição 2.4.4. *Substituindo $b(\xi_0) = -\ln(-\xi_0)$, $\xi_0 = -1$ no Teorema 2.4.2, temos que uma variável aleatória Y é Binomial Negativa Estável (BN-estável) se, e somente se, sua função característica $\varphi_Y(t)$ tem a forma*

$$\varphi_Y(t) = \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{\phi} \ln \Psi(t)} \right]^\phi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.17)$$

em que $\Psi(t)$ é função característica de alguma distribuição α -estável.

Exemplo 2.4.1. Seja $\Psi(t) = e^{-c|t|^\alpha}$, $t \in \mathbb{R}$, a função característica de uma variável aleatória simétrica α -estável. Assim,

$$\varphi_Y(t) = \left[\frac{1}{1 + \frac{c}{\phi} |t|^\alpha} \right]^\phi, \quad t \in \mathbb{R},$$

é a função característica de uma variável aleatória Y Binomial Negativa estável.

Quando $\alpha = 2$ temos formas explícitas para as funções característica e densidade de probabilidade de uma variável aleatória BN-estável, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.4.2. Aplicando a fórmula da inversão na função característica $\varphi_Y(t)$ de Y com distribuição BN-estável com $\alpha = 2$, temos que

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} \left[1 + \frac{c}{\phi} t^2 \right]^{-\phi} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(yt) - i \sin(yt)] \left[1 + \frac{c}{\phi} t^2 \right]^{-\phi} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\cos(yt) \left[1 + \frac{c}{\phi} t^2 \right]^{-\phi}}_{\text{Função par}} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{i \sin(yt) \left[1 + \frac{c}{\phi} t^2 \right]^{-\phi}}_{\text{Função ímpar}} dt \\ &= \frac{\phi^\phi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(yt)}{[\phi + ct^2]^\phi} dt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $u = yt$ na integral anterior, obtemos

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{\phi^\phi}{\pi} \frac{1}{y} \left(\frac{y^2}{c} \right)^\phi \int_0^{\infty} \frac{\cos u}{\left(u^2 + \frac{\phi y^2}{c} \right)^\phi} du \\ &= \left(\frac{\phi}{c} \right)^{\frac{\phi}{2} + \frac{1}{4}} \frac{2^{\frac{1}{2} - \phi} \mathcal{I}_{\phi - \frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{\phi}{c}} y \right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\phi)} y^{\phi - \frac{1}{2}}, \quad y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

em que

$$\mathcal{I}_\nu(z) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) (2z)^\nu}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{(t^2 + z^2)^{\nu + \frac{1}{2}}} dt, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{R},$$

é a função Bessel modificada do segundo tipo com índice ν , como indicado em Abramowitz e Stegun (1972).

Portanto,

$$\varphi_Y(t) = \left[\frac{1}{1 + \frac{c}{\phi} t^2} \right]^\phi, \quad t \in \mathbb{R},$$

é a função característica de uma variável aleatória BN-estável com função densidade de probabilidade dada na Expressão (2.18).

As distribuições geométrica-estáveis também são caracterizadas por sua função característica como apresentado em Mittnik e Rachev (1991), que é um caso particular do Teorema 2.4.2, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.4.3. Tomando $\phi = 1$ na Equação 2.17 temos que uma variável aleatória Y é geo-estável se, e somente se, sua função característica φ tem a forma

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{1 - \ln \Psi(t)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

em que $\Psi(t)$ é função característica de alguma distribuição α -estável.

Os exemplos seguintes, já conhecidos na literatura, mostram as distribuições Laplace Assimétrica e Exponencial como distribuições geométrica-estáveis.

Exemplo 2.4.4. Seja $\Psi(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, $t \in \mathbb{R}$, a função característica da distribuição normal que é α -estável. Pelo Corolário 2.4.3,

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{1 - i\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

que é a função característica de uma variável aleatória Y com distribuição Laplace assimétrica. Portanto, a distribuição Laplace é geo-estável.

Exemplo 2.4.5. Seja $\Psi(t) = e^{i\mu t}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, a função característica de uma variável aleatória estável degenerada. Pelo Corolário 2.4.3, temos

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{1 - i\mu t}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R},$$

que é a função característica de uma variável aleatória Y com distribuição exponencial. Portanto, a distribuição exponencial é geo-estável.

Definiremos uma variável aleatória com distribuição Poisson Inversa Gaussiana estável através da sua função característica.

Definição 2.4.5. *Substituindo $b(\xi_0) = -(-2\xi_0)^{\frac{1}{2}}$, $\xi_0 = -\frac{1}{2}$ no Teorema 2.4.2, uma variável aleatória Y será Poisson Inversa Gaussiana estável (PIG-estável) se, e somente se, sua função característica $\varphi_Y(t)$ tem a forma*

$$\varphi_Y(t) = \exp \left\{ \phi - \phi \sqrt{1 - \frac{2}{\phi} \ln \Psi(t)} \right\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \phi > 0,$$

em que $\Psi(t)$ é função característica de alguma distribuição α -estável.

O exemplo a seguir apresenta a distribuição Normal Inversa Gaussiana como uma distribuição Poisson Inversa Gaussiana estável.

Exemplo 2.4.6. *Seja $\Psi(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, $t \in \mathbb{R}$, a função característica da distribuição normal. Pelo Corolário 2.4.5, temos*

$$\varphi_Y(t) = \exp \left\{ \phi - \phi \sqrt{1 - \frac{2}{\phi} \left(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 \right)} \right\},$$

que é a função característica de uma variável aleatória com distribuição Normal Inversa Gaussiana com parâmetros $\left(\sqrt{\frac{\phi}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^4}}, \frac{\mu}{\sigma^2}, 0, \sqrt{\phi\sigma^2} \right)$. Portanto, a distribuição Normal Inversa Gaussiana é PIG-estável.

A seguir, definimos o conceito de uma variável aleatória Poisson Secante Hiperbólica Generalizada estável.

Definição 2.4.6. *Substituindo $b(\xi_0) = \frac{1}{2} \log(1 + \tan^2 \xi_0)$, $\xi_0 = -\frac{3\pi}{4}$ no Teorema 2.4.2, temos que uma variável aleatória Y é Poisson Secante Hiperbólica Generalizada estável (PSHG-estável) se, e somente se, sua função característica $\varphi_Y(t)$ tem a forma*

$$\varphi_Y(t) = \left[\frac{1 + \tan^2 \left(-\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{\phi} \ln \Psi(t) \right)}{2} \right]^{\frac{\phi}{2}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

em que $\Psi(t)$ é função característica de uma distribuição α -estável.

Apresentamos na sequência um exemplo de função característica de uma variável aleatória PSHG-estável.

Exemplo 2.4.7. *Seja $\Psi(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, $t \in \mathbb{R}$, a função característica da distribuição normal que é α -estável. Então,*

$$\varphi_Y(t) = \left[\frac{1 + \tan^2 \left(-\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{\phi} (i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2) \right)}{2} \right]^{\frac{\phi}{2}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

é a função característica de uma variável aleatória PSHG-estável.

Resumiremos nossas contribuições neste capítulo. Encontramos as funções geradora de momentos e característica da variável aleatória limite da soma Poisson misturada devidamente padronizada e ganhamos uma interpretação matemática da distribuição Normal Inversa Gaussiana na qual surge como o limite da soma aleatória Poisson Inversa Gaussiana. Definimos um novo conceito de estabilidade. Em particular, mostramos as distribuições Binomial Negativa estável, Poisson Inversa Gaussiana estável e Poisson Secante Hiperbólica Generalizada estável. Apresentamos de forma explícita a função característica e a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória BN-estável e também um exemplo de uma função característica de uma variável aleatória Poisson Secante Hiperbólica Generalizada estável. Além disso, nossa classe de modelos Poisson-Misturada estável estende o conceito de distribuições geométrica-estáveis.

No próximo capítulo apresentaremos a distribuição limite da soma aleatória Poisson Misturada, definida na Proposição 2.3.2, como uma mistura de distribuições normais. Através dessa representação encontraremos algumas propriedades dessa distribuição tais como sua densidade, cumulantes e estimadores.

Capítulo 3

Classe de Modelos Normal-Família Exponencial Misturados

Misturas de distribuições normais desempenham um papel importante em problemas práticos de finanças em que modelos com variância estocástica são comumente utilizados. Se uma variável aleatória com distribuição de probabilidade complicada pode ser representada como tais misturas, têm-se um ganho computacional na simulação desta distribuição, por exemplo. Uma variável aleatória Y é uma mistura normal média-variância se

$$Y \stackrel{d}{=} \mu + \beta X + \sigma\sqrt{X}Z,$$

em que $Z \sim N(0, 1)$, Z e X são independentes, X é a variável aleatória utilizada na mistura com suporte nos reais positivos, $\mu, \beta \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. Em particular, se X é uma variável aleatória com distribuição Normal Inversa Gaussiana (NIG), então a mistura Y normal média-variância coincide com a distribuição Hiperbólica Generalizada, definida por Barndorff-Nielsen (1977), com função densidade de probabilidade

$$f_Y(y; \mu, \lambda, \alpha, \beta, \delta) = a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) \exp\{\beta(y - \mu)\} \sqrt{\delta^2 + (y - \mu)^2}^{(\lambda - \frac{1}{2})} \times \mathcal{K}_{\lambda - \frac{1}{2}}\left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (y - \mu)^2}\right), \quad y \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

em que $a(\lambda, \alpha, \beta, \delta)$ é a constante normalizadora dada por

$$a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}} \delta^\lambda \mathcal{K}_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$$

e $\mathcal{K}_\nu(\cdot)$ denota a função Bessel modificada do terceiro tipo com índice ν dada na Expressão (2.5). O domínio dos parâmetros é dado por

$$\delta > 0, \quad \alpha > 0, \quad \alpha^2 > \beta^2, \quad \text{se } \lambda > 0,$$

$$\begin{aligned} \delta > 0, \alpha > 0, \alpha^2 > \beta^2, \text{ se } \lambda = 0, \\ \delta > 0, \alpha \geq 0, \alpha^2 \geq \beta^2, \text{ se } \lambda < 0. \end{aligned}$$

Em todos os casos $\mu \in \mathbb{R}$. Sugerimos o artigo de West (1987) para mais consultas sobre mistura de normal.

A função densidade de probabilidade dada na Equação (3.1) inclui, por exemplo, as distribuições *t-Student* ($\lambda = 1, \delta = \beta = \mu = 0$), Laplace ($\lambda < 0, \alpha = \beta = \mu = 0$), Hiperbólica ($\lambda = 1$) e Normal Inversa Gaussiana ($\lambda = -\frac{1}{2}$). Mais detalhes sobre casos particulares e limites da distribuição Hiperbólica Generalizada podem ser vistos em Eberlein e Hammerstein (2004). Por ter a cauda mais pesada que a distribuição Normal, essa classe de distribuições é utilizada para análise de dados financeiros como apresentado em Eberlein e Keller (1995), Barndorff-Nielsen (1997), Barndorff-Nielsen e Blaesild (1981), Eberlein (2001), Eberlein e Prause (2002) e Bibby e Sørensen (2003).

Neste capítulo, estudaremos algumas propriedades da distribuição limite da soma aleatória Poisson Misturada, devidamente padronizada, obtida no capítulo anterior. Na Seção 3.1, representaremos essa variável limite como uma mistura de distribuições normais que chamaremos de distribuição Normal-Família Exponencial Misturada e encontraremos seus cumulantes até a ordem quatro. Na Seção 3.2, estudaremos a estimação dos parâmetros utilizando o Método dos Momentos e o algoritmo EM. Um estudo de simulação é apresentado na Seção 3.3.

3.1 Definição e Propriedades

Iniciamos esta seção mostrando que a distribuição limite da soma Poisson Misturada, apresentada no capítulo anterior, pode ser representada como uma mistura da distribuição normal padrão.

Proposição 3.1.1. *A variável aleatória Y definida como o limite*

$$a_\lambda \sum_{i=1}^{N_\lambda} X_i \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{d} Y,$$

com $a_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $E(X) = 0$, $Var(X) = 1$ e $N_\lambda \sim \text{PM}(\lambda, W_\phi)$, possui a representação estocástica

$$Y \stackrel{d}{=} \sqrt{W_\phi} Z,$$

em que $W_\phi \sim \text{FE}(\phi)$ e $Z \sim \text{N}(0, 1)$ são variáveis aleatórias independentes.

Demonstração. A função característica de Z com distribuição Normal Padrão é $\varphi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, com $t \in \mathbb{R}$. Usando propriedades básicas de esperança condicional, temos que

$$\begin{aligned}\varphi_{\sqrt{W_\phi}Z}(t) &= E[e^{it\sqrt{W_\phi}Z}] = E\left[E[e^{it\sqrt{W_\phi}Z}|W_\phi]\right] \\ &= E\left[\varphi_Z(t\sqrt{W_\phi})\right] = E\left[e^{-\frac{t^2}{2}W_\phi}\right] \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}w} f_{W_\phi}(w)dw \\ &= \exp\left\{-\phi\left[b(\xi_0) - b\left(\xi_0 - \frac{t^2}{2\phi}\right)\right]\right\}, t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

A última igualdade é exatamente a função característica $\varphi_Y(t)$ dada na Expressão (2.10). \square

Considere agora o caso mais geral em que a variável aleatória limite Y tem função característica

$$\varphi_Y(t) = \exp\left[-\phi\left\{b(\xi_0) - b\left[\xi_0 + \frac{1}{\phi}\left(it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)\right]\right\}\right], t \in \mathbb{R},$$

indicada na Proposição 2.3.2. Essa variável será representada como uma mistura, em termos da distribuição normal, com média e variância estocásticas. Com essa representação, algumas propriedades importantes da variável aleatória Y poderão ser encontradas, entre elas a função densidade de probabilidade, como veremos na Proposição 3.1.3.

Proposição 3.1.2. *A variável aleatória Y definida como o limite*

$$a_\lambda \sum_{i=1}^{N_\lambda} (X_i + b_\lambda) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{d} Y,$$

com $a_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $b_\lambda = \mu\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 1\right)$, $E(X) = \mu \in \mathbb{R}$, $Var(X) = \sigma^2 > 0$ e $N_\lambda \sim \text{PM}(\lambda, W_\phi)$, possui a representação estocástica

$$Y \stackrel{d}{=} \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z,$$

em que $W_\phi \sim \text{FE}(\phi)$ e $Z \sim \text{N}(0, 1)$ são independentes.

Demonstração. Seja a função característica da variável aleatória Z , com $t \in \mathbb{R}$. A variável aleatória W_ϕ pertencente à família exponencial com função densidade de probabilidade

$$f_{W_\phi}(w) = \exp\{\phi[w\xi_0 - b(\xi_0)] + c(w; \phi)\}, \quad w > 0, \quad \phi > 0.$$

Usando propriedades básicas de esperança condicional, para $t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z}(t) &= E \left[e^{it(\mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z)} \right] = E \left[E \left[e^{it(\mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z)} \mid W_\phi \right] \right] \\
&= \int_0^\infty e^{it\mu w} E[e^{it\sigma \sqrt{w} Z}] f_{W_\phi}(w) dw \\
&= \int_0^\infty e^{it\mu w} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2 w} f_{W_\phi}(w) dw \\
&= \int_0^\infty e^{(it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2)w} f_{W_\phi}(w) dw \\
&= \exp \left\{ -\phi \left[b(\xi_0) - b \left(\xi_0 + \frac{1}{\phi} \left(it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2 \right) \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

A última igualdade coincide com a função característica de Y apresentada na Proposição 2.3.2, como queríamos demonstrar. \square

Observação: essa proposição generaliza a proposição anterior quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

De fato, a distribuição da variável aleatória Y com representação dada na Proposição 3.1.2 é uma normal misturada na média e na variância. Mais especificamente, considere o par de variáveis aleatórias (W_ϕ, Y) . Condicionando em W_ϕ com distribuição pertencente à família exponencial, a distribuição de Y é normal com média μw e variância $\sigma^2 w$. Por esta razão, nomearemos a distribuição de Y como distribuição Normal-Família Exponencial Misturada, com a notação $Y \sim \text{NFEM}(\mu, \sigma^2, \phi)$.

A função densidade de probabilidade de Y , para qualquer variável W_ϕ utilizada na mistura pertencente à família exponencial, é dada na proposição a seguir.

Proposição 3.1.3. *Sejam $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $Z \sim N(0, 1)$ independente de $W_\phi \sim \text{FE}(\phi)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e $\phi > 0$. Então, a função densidade de probabilidade de Y é dada por*

$$f_Y(y) = \frac{e^{\frac{y\mu}{\sigma^2} - \phi b(\xi_0) + d(\phi)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty e^{\phi g(w) + h(w)} w^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} - 2\phi\xi_0 \right) w + \left(\frac{y^2}{\sigma^2} \right) \frac{1}{w} \right] \right\} dw, y \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Demonstração. A variável aleatória $W_\phi \sim \text{FE}(\phi)$ tem função densidade de probabilidade $f_W(w) = \exp \{ \phi [w\xi_0 - b(\xi_0)] + d(\phi) + \phi g(w) + h(w) \}$. Usando este fato, temos que a função densidade de probabilidade de Y pode ser expressa como

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f_{Y|W}(y|w) f_W(w) dw$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty (2\pi\sigma^2w)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(y-\mu w)^2}{2\sigma^2w}\right\} \exp\{\phi[\xi_0w - b(\xi_0)] + d(\phi) + \phi g(w) + h(w)\} dw \\
&= \frac{e^{\frac{y\mu}{\sigma^2} - \phi b(\xi_0) + d(\phi)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty e^{\phi g(w) + h(w)} w^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} - 2\phi\xi_0\right)w + \left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right)\frac{1}{w}\right]\right\} dw, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

□

Para exibirmos alguns casos particulares de funções densidade de probabilidade da Proposição 3.1.3, apresentaremos a função densidade de probabilidade da distribuição Inversa Gaussiana Generalizada.

Uma variável aleatória W tem distribuição Inversa Gaussiana Generalizada com parâmetros a, b e p , $W_\phi \sim \text{IGG}(a, b, p)$, se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f_W(w) = \frac{(a/b)^{p/2}}{2\mathcal{K}_p(\sqrt{ab})} w^{p-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[aw + b\frac{1}{w}\right]\right\}, w > 0,$$

em que $\mathcal{K}_p(\cdot)$ é a função Bessel modificada do terceiro tipo com índice p apresentada na Expressão (2.5).

Exemplo 3.1.1. *Sejam $Y = \mu W_\phi + \sigma\sqrt{W_\phi}Z$ com $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$ independente de $Z \sim N(0, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e $\phi > 0$. Substituindo $d(\phi) = \phi \log \phi - \log \Gamma(\phi)$, $g(w) = \log w$ e $h(w) = -\log w$ na Equação (3.2), temos que*

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{e^{\frac{y\mu}{\sigma^2} + \phi \log \phi - \log \Gamma(\phi)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty e^{\phi \log w - \log w} w^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi\right)w + \left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right)\frac{1}{w}\right]\right\} dw \\
&= \frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)} \frac{e^{\frac{y\mu}{\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty \underbrace{w^{\phi-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi\right)w + \left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right)\frac{1}{w}\right]\right\}}_{\text{Núcleo IGG}(a, b, p), a=\frac{\mu^2}{\sigma^2}+2\phi, b=\frac{y^2}{\sigma^2}, p=\phi-\frac{1}{2}} dw \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)} \exp\left\{\frac{y\mu}{\sigma^2}\right\} \mathcal{K}_{\phi-\frac{1}{2}}\left[\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi\right)\left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right)}\right] \left(\frac{\frac{y^2}{\sigma^2}}{\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi}\right)^{\frac{\phi}{2}-\frac{1}{4}}, y \in \mathbb{R}, (3.3)
\end{aligned}$$

na qual $\mathcal{K}_{\phi-\frac{1}{2}}(\cdot)$ é a função Bessel modificada do terceiro tipo com índice $\phi - \frac{1}{2}$ apresentada na Expressão (2.5).

Exemplo 3.1.2. *A função Bessel modificada do terceiro tipo com índice $\frac{1}{2}$ satisfaz*

$$\mathcal{K}_{\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z}, z \in \mathbb{R};$$

ver, por exemplo, Temme (1975). Usando esse fato e substituindo $\phi = 1$ na Equação (3.3), obtemos a função densidade de probabilidade da distribuição Laplace Assimétrica, como no Exemplo 2.3.4.

Quando $Y \sim \text{NFEM}(0, 1, 1)$, substituindo $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ e $\phi = 1$ na densidade dada na Equação (3.3), obtemos

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \mathcal{K}_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}y) \left(\frac{y^2}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}y}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{2}y} \left(\frac{y^2}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}y},$$

que corresponde à densidade da distribuição Laplace Simétrica, como no Exemplo 2.3.1.

Exemplo 3.1.3. Sejam $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $Z \sim N(0, 1)$ e $W_\phi \sim IG(\phi)$ independentes, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e $\phi > 0$. Substituindo $d(\phi) = \frac{1}{2} \log \phi$, $g(w) = -(2w)^{-1}$ e $h(w) = -\frac{1}{2} \log(2\pi w^3)$ na Equação (3.2), temos que

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{e^{\frac{y\mu}{\sigma^2} + \phi + \frac{1}{2} \log \phi}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\infty e^{\phi(-\frac{1}{2w}) - \frac{1}{2} \log(2\pi w^3)} w^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \phi \right) w + \left(\frac{y^2}{\sigma^2} \right) \frac{1}{w} \right] \right\} dw \\ &= \frac{\sqrt{\phi}}{2\pi\sqrt{\sigma^2}} e^{\frac{y\mu}{\sigma^2} + \phi} \int_0^\infty \underbrace{w^{-2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \phi \right) w + \left(\frac{y^2}{\sigma^2} + \phi \right) \frac{1}{w} \right] \right\}}_{\text{Núcleo } IGG(a, b, p), a=\frac{\mu^2}{\sigma^2}+\phi, b=\frac{y^2}{\sigma^2}+\phi, p=-1} dw \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\phi}{\sigma^2}} \exp \left\{ \frac{y\mu}{\sigma^2} + \phi \right\} \mathcal{K}_{-1} \left[\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \phi \right) \left(\frac{y^2}{\sigma^2} + \phi \right)} \right] \left(\frac{\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \phi}{\frac{y^2}{\sigma^2} + \phi} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (3.4) \end{aligned}$$

em que $\mathcal{K}_{-1}(\cdot)$ é a função Bessel modificada do terceiro tipo com índice -1 apresentada na Expressão (2.5).

Exemplo 3.1.4. A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória Y com distribuição Normal Inversa Gaussiana é dada por

$$f_Y(y) = \frac{\alpha\delta}{\pi} \frac{\mathcal{K}_1(\alpha\sqrt{\delta^2 + (y-\gamma)^2})}{\sqrt{\delta^2 + (y-\gamma)^2}} \exp \left\{ \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(y-\gamma) \right\}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

em que $\mathcal{K}_1(\cdot)$ é a função Bessel modificada do terceiro tipo com índice 1, dada na Expressão (2.5), que satisfaz a igualdade $\mathcal{K}_\nu(\cdot) = \mathcal{K}_{-\nu}(\cdot)$; ver, por exemplo, Temme (1975). Considerando essa propriedade e substituindo

$$\alpha = \sqrt{\frac{\phi}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^4}}, \beta = \frac{\mu}{\sigma^2}, \gamma = 0 \text{ e } \delta = \sqrt{\phi}\sigma$$

na Equação (3.5), obtemos a função densidade de probabilidade dada no Exemplo 3.1.3.

Quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, a função densidade de probabilidade da variável aleatória Y no Exemplo 3.1.3 é dada por

$$f_Y(y) = \frac{\phi}{\pi} \frac{\mathcal{K}_{-1}(\sqrt{\phi(\phi + y^2)})}{\sqrt{\phi + y^2}} e^\phi = \frac{\phi}{\pi} \frac{\mathcal{K}_1(\sqrt{\phi(\phi + y^2)})}{\sqrt{\phi + y^2}} e^\phi, \quad y \in \mathbb{R},$$

que corresponde à função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com distribuição Normal Inversa Gaussiana com parâmetros $\alpha = \delta = \sqrt{\phi}$ e $\beta = \gamma = 0$, como no Exemplo 2.3.5.

Desta forma, verificamos a convergência em distribuição das somas aleatórias Geométrica e Poisson Inversa Gaussiana através da função característica nos Exemplos 2.3.1 e 2.3.5 e também pela função densidade de probabilidade obtida pela mistura como mostramos nos Exemplos 3.1.3 e 3.1.4.

O exemplo a seguir apresenta a função densidade de probabilidade para a mistura entre a distribuição Normal e a distribuição Secante Hiperbólica Generalizada.

Exemplo 3.1.5. *Sejam $Y \stackrel{d}{=} \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $Z \sim N(0, 1)$ e $W_\phi \sim \text{SHG}(\phi)$ independentes, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e $\phi > 0$. A função densidade de probabilidade de Y é dada por*

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^\infty f_{Y|W_\phi}(y|w) f_W(w) dw \\ &= \frac{2^{-\frac{1}{2}(\phi+1)}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} e^{\frac{\mu y}{\sigma^2}} \int_0^\infty w^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2\sigma^2} \frac{1}{w} + \left(-\frac{3\pi}{4}\phi - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) w + c(w; \phi) \right\} dw \\ &= \frac{2^{\frac{\phi-5}{2}}}{\sqrt{\pi^3\sigma^2}} \frac{\phi}{\Gamma(\phi)} e^{\frac{\mu y}{\sigma^2}} \int_0^\infty \Gamma \left| \frac{\phi}{2} + i \frac{w}{2} \right|^2 \underbrace{w^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{3\pi\phi}{2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right) w + \left(\frac{y^2}{\sigma^2} \right) \frac{1}{w} \right] \right\}}_{\text{Núcleo IGG} \left(\frac{3\pi\phi}{2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2}, \frac{y^2}{\sigma^2}, \frac{1}{2} \right)} dw \\ &= \frac{2^{\frac{\phi-5}{2}}}{\sqrt{\pi^3\sigma^2}} \frac{\phi}{\Gamma(\phi)} e^{\frac{\mu y}{\sigma^2}} E_U \left(\Gamma \left| \frac{\phi}{2} + i \frac{w}{2} \right|^2 \right), \quad U \sim \text{IGG} \left(\frac{3\pi\phi}{2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2}, \frac{y^2}{\sigma^2}, \frac{1}{2} \right), \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Concluimos essa seção ilustrando numericamente a convergência fraca obtida na Proposição 2.3.2 através do programa R (R Core Team, 2019).

Seja

$$\tilde{S}_\lambda = a_\lambda \sum_{i=1}^{N_\lambda} (X_i + b_\lambda)$$

a soma aleatória padronizada com $a_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ e $b_\lambda = \mu \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 1 \right)$. Consideramos N_λ com distribuições Binomial Negativa e Poisson Inversa Gaussiana com os valores $\lambda = 30, 50, 500$ e

$\phi = 2$. Simulamos N_λ variáveis aleatórias X_i tendo distribuição Exponencial com taxa igual a um, ou seja, com média $\mu = 1$ e variância $\sigma^2 = 1$. Calculamos as constantes a_λ e b_λ e geramos

$$\tilde{S}_\lambda^{(1)}, \tilde{S}_\lambda^{(2)}, \dots, \tilde{S}_\lambda^{(500)} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \tilde{S}_\lambda,$$

isto é, repetimos esse processo 500 vezes. Apresentamos os resultados em histogramas nas Figuras 3.1 e 3.2 com as densidades teóricas encontradas nos Exemplos 3.1.1 e 3.1.3. Observa-se que para $\lambda = 30$ a convergência já é satisfatória e que à medida que aumentamos o tamanho da amostra, através do parâmetro λ , as densidades teóricas aproximam-se mais dos dados simulados indicando um ajuste melhor para a cauda, como esperado.

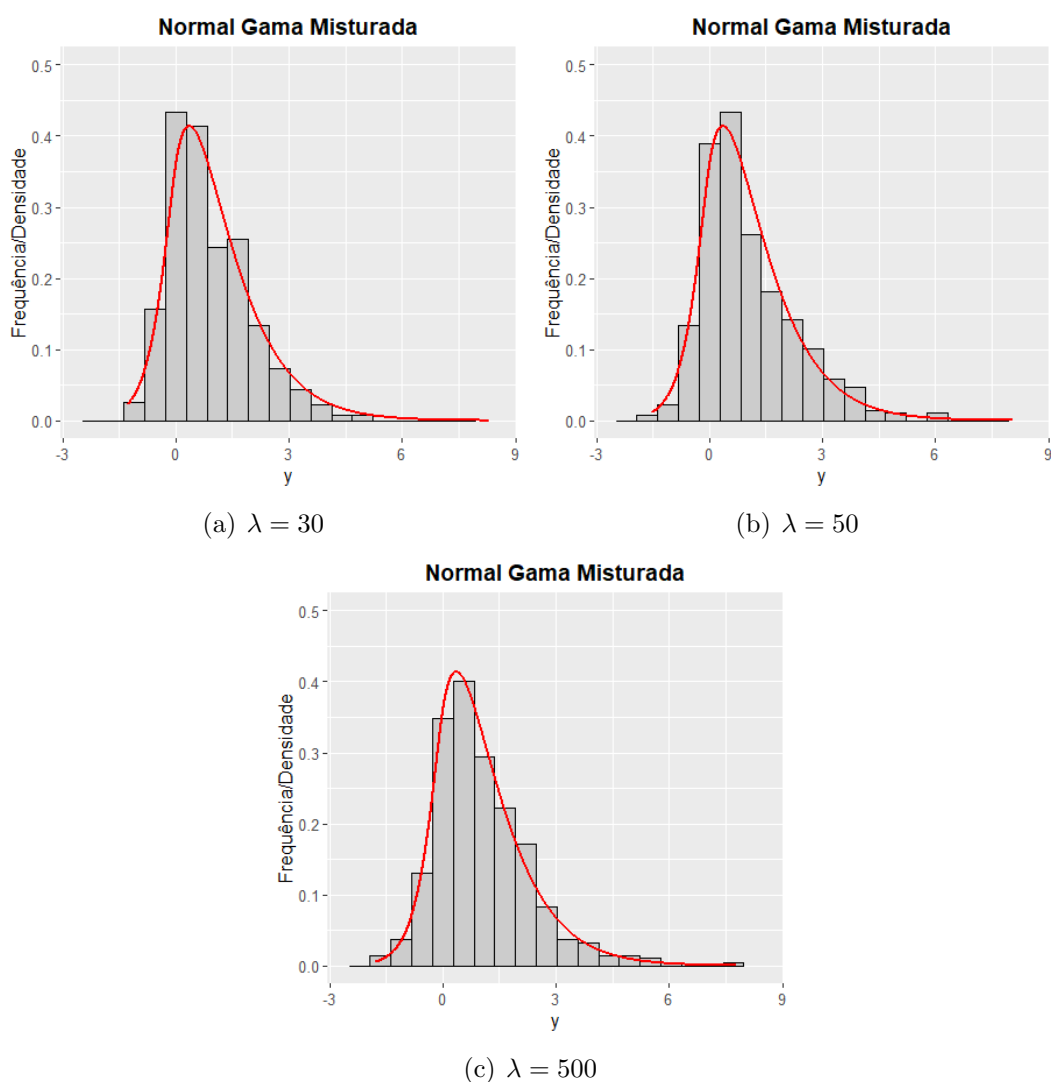


Figura 3.1 Histograma da soma \tilde{S}_λ quando $N_\lambda \sim \text{BN}(\lambda, 2)$ e densidade teórica Normal Gama com $\mu = \sigma^2 = 1$ e $\lambda = 30, 50, 500$, respectivamente.

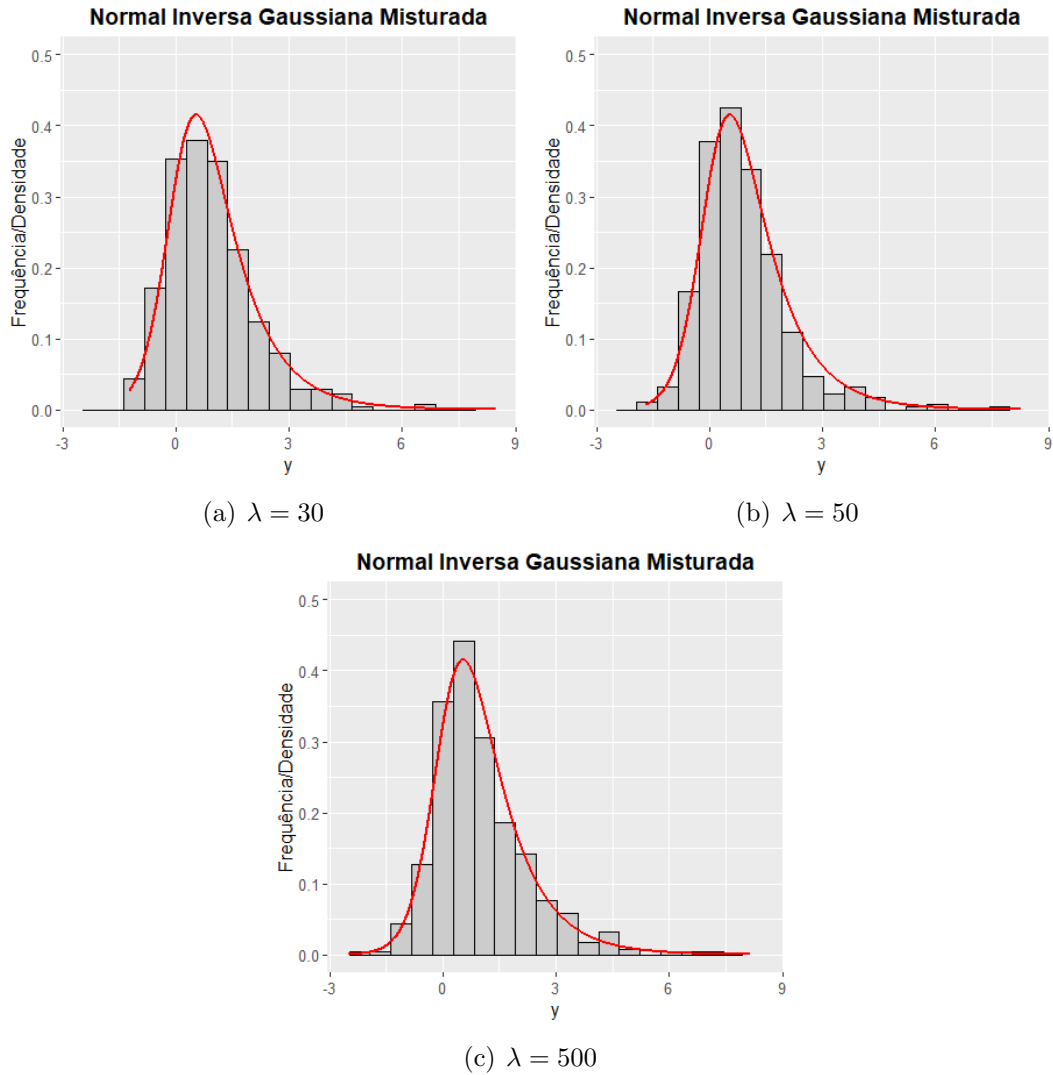


Figura 3.2 Histograma da soma \tilde{S}_λ quando $N_\lambda \sim \text{PIG}(\lambda, 2)$ e densidade teórica Normal Inversa Gaussiana com $\mu = \sigma^2 = 1$ e $\lambda = 30, 50, 500$, respectivamente.

3.2 Estimação dos Parâmetros

Nesta seção apresentaremos os cumulantes, média, variância, coeficiente de assimetria e excesso de curtose da distribuição Normal-Família Exponencial Misturada. Estimaremos os parâmetros dessa distribuição através do Método dos Momentos e pelo algoritmo EM.

3.2.1 Método dos Momentos

Os cumulantes k_n são os coeficientes de $\frac{t^n}{n!}$ da série de Taylor em torno de $t = 0$ da função geradora de cumulantes, ou seja, k_n é a n -ésima derivada de $\log \psi_Y(t)$ avaliada em $t = 0$.

Aplicando a função logarítmica na função geradora de momentos da variável aleatória Y com distribuição Normal-Família Exponencial Misturada, temos que sua função geradora de cumulantes de Y é dada por

$$\begin{aligned}\log \{\psi_Y(t)\} &= \log \left\{ \exp \left[-\phi \left\{ b(\xi_0) - b \left[\xi_0 + \frac{1}{\phi} \left(\frac{t^2 \sigma^2}{2} + t\mu \right) \right] \right\} \right] \right\} \\ &= -\phi \left\{ b(\xi_0) - b \left[\xi_0 + \frac{1}{\phi} \left(\frac{t^2 \sigma^2}{2} + t\mu \right) \right] \right\}, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Os quatro primeiros cumulantes para a distribuição de Y são apresentados a seguir. A média e a variância coincidem, respectivamente, com o primeiro e segundo cumulantes;

$$\begin{aligned}k_1 &= E(Y) = \mu \\ k_2 &= Var(Y) = \frac{\mu^2 b''(\xi_0) + \phi \sigma^2}{\phi} \\ k_3 &= \frac{\mu^3 b^{(3)}(\xi_0) + 3\phi \sigma^2 \mu b''(\xi_0)}{\phi^2} \\ k_4 &= \frac{\mu^4 b^{(4)}(\xi_0) + 6\phi \sigma^2 \mu^2 b^{(3)}(\xi_0) + 3\phi^2 \sigma^4 b''(\xi_0)}{\phi^3}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

O coeficiente de assimetria γ_1 e o excesso de curtose γ_2 são dados em função dos cumulantes:

$$\gamma_1 = \frac{E(Y - EY)^3}{(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k_3}{(k_2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \frac{E(Y - EY)^4}{(\sigma^2)^2} - 3 = \frac{k_4}{k_2^2} - 3.\tag{3.7}$$

Os exemplos a seguir apresentam os quatro primeiros cumulantes e os coeficientes de assimetria e curtose para as variáveis aleatórias Normal-Família Exponencial Misturadas para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$, $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$ e $W_\phi \sim \text{SHG}(\phi)$.

Exemplo 3.2.1. *Sejam $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $Z \sim N(0, 1)$ e $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$ independentes, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e $\phi > 0$. Calculando as derivadas de $b(\xi_0) = -\log(-\xi_0)$ e aplicando no ponto $\xi_0 = -1$ e substituindo nas Expressões (3.6) e (3.7), temos que os quatro primeiros cumulantes, o coeficiente de assimetria e o excesso de curtose de Y são dados, respectivamente, por*

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = E(Y) = \mu, \\ k_2 = Var(Y) = \frac{\mu^2 + \phi\sigma^2}{\phi}, \\ k_3 = \frac{2\mu^3 + 3\mu\phi\sigma^2}{\phi^2}, \\ k_4 = \frac{6\mu^4 + 12\mu^2\phi\sigma^2 + 3\phi^2\sigma^4}{\phi^3}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \frac{2\mu^3 + 3\mu\phi\sigma^2}{\sqrt{\phi}(\mu^2 + \phi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \gamma_2 = \frac{6\mu^4 + 12\mu^2\phi\sigma^2 + 3\phi^2\sigma^4}{\phi(\mu^2 + \phi\sigma^2)^2}. \end{array} \right.$$

Exemplo 3.2.2. *Sejam $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $Z \sim N(0, 1)$ e $W_\phi \sim IG(\phi)$ independentes, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e $\phi > 0$. Aplicando as derivadas de $b(\xi_0) = -(-2\xi_0)^{\frac{1}{2}}$ no ponto $\xi_0 = -\frac{1}{2}$ e substituindo nas Expressões (3.6) e (3.7) obtemos, respectivamente, os quatro primeiros cumulantes, o coeficiente de assimetria e o excesso de curtose de Y :*

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = E(Y) = \mu, \\ k_2 = Var(Y) = \frac{\mu^2 + \phi\sigma^2}{\phi}, \\ k_3 = \frac{3\mu^3 + 3\mu\phi\sigma^2}{\phi^2}, \\ k_4 = \frac{15\mu^4 + 18\mu^2\phi\sigma^2 + 3\phi^2\sigma^4}{\phi^3}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \frac{3\mu^3 + 3\mu\phi\sigma^2}{\sqrt{\phi}(\mu^2 + \phi\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \gamma_2 = \frac{15\mu^4 + 18\mu^2\phi\sigma^2 + 3\phi^2\sigma^4}{\phi(\mu^2 + \phi\sigma^2)^2}. \end{array} \right.$$

Exemplo 3.2.3. *Sejam $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $Z \sim N(0, 1)$ e $W_\phi \sim SHG(\phi)$ independentes, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e $\phi > 0$. Aplicando as derivadas de $b(\xi_0) = \frac{1}{2} \log(1 + \tan^2 \xi_0)$ no ponto $\xi_0 = -\frac{3\pi}{4}$ e substituindo nas Expressões (3.6) e (3.7) obtemos, respectivamente, os quatro primeiros cumulantes, o coeficiente de assimetria e o excesso de curtose de Y :*

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = E(Y) = \mu, \\ k_2 = Var(Y) = \frac{2\mu^2 + \sigma^2\phi}{\phi}, \\ k_3 = \frac{4\mu^3 + 6\mu\sigma^2\phi}{\phi^2}, \\ k_4 = \frac{16\mu^4 + 24\sigma^2\phi + 6\sigma^4\phi^2}{\phi^3}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \frac{4\mu^3 + 6\mu\sigma^2\phi}{\sqrt{\phi}(2\mu^2 + \sigma^2\phi)^{\frac{3}{2}}}, \\ \gamma_2 = \frac{16\mu^4 + 24\sigma^2\phi + 6\sigma^4\phi^2}{\phi(2\mu^2 + \sigma^2\phi)^2}. \end{array} \right.$$

No Método dos Momentos as estimativas dos parâmetros são dadas igualando-se o k -ésimo

momento populacional $\mu_k = E(Y^k)$ ao k -ésimo momento amostral $M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^k$. Usaremos as estimativas dos parâmetros encontradas por esse método como os valores iniciais para o algoritmo EM que será estudado na Subseção 3.2.2.

Como são três parâmetros para se estimar na distribuição de $Y \sim \text{NFEM}(\mu, \sigma^2, \phi)$, precisaremos de três momentos que são dados através dos cumulantes como $\mu_1 = E(Y) = k_1$, $\mu_2 = E(Y^2) = k_2 + \mu_1^2$ e $\mu_3 = E(Y^3) = k_3 + 3\mu_1\mu_2 - 2\mu_1^3$.

Substituindo as expressões dos cumulantes dadas nas Expressões (3.6) e resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} \mu_1 = M_1 \\ \mu_2 = M_2 \\ \mu_3 = M_3 \end{cases} \implies \begin{cases} \mu = M_1 \\ \frac{\mu^2 b''(\xi_0) + \phi \sigma^2}{\phi} + \mu_1^2 = M_2 \\ \frac{\mu^3 b^{(3)}(\xi_0) + 3\phi \sigma^2 \mu b''(\xi_0)}{\phi^2} + 3\mu_1\mu_2 - 2\mu_1^3 = M_3 \end{cases}$$

em função de μ , σ^2 e ϕ , temos que os parâmetros estimados pelo Método dos Momentos para a distribuição Normal-Família Exponencial Misturada, para qualquer $W_\phi \sim \text{FE}(\phi)$, são dados por

$$\begin{cases} \hat{\mu} = M_1, \\ \hat{\sigma}^2 = M_2 - M_1^2 \left(1 + \frac{b''(\xi_0)}{\hat{\phi}} \right), \text{ para } M_2 > M_1^2 \left(1 + \frac{b''(\xi_0)}{\hat{\phi}} \right), \end{cases} \quad (3.8)$$

em que $\hat{\phi}$ é uma das soluções da equação de segundo grau

$$[3M_1M_2 - 2M_1^3 - M_3] \phi^2 + [b''(\xi_0)(3M_1M_2 - 3M_1^3)] \phi + M_1^3[b^{(3)}(\xi_0) - 3[b''(\xi_0)]^2] = 0, \quad (3.9)$$

ou seja,

$$\hat{\phi} = \frac{-[b''(\xi_0)(3M_1M_2 - 3M_1^3)] \pm \sqrt{\Delta}}{2[3M_1M_2 - 2M_1^3 - M_3]},$$

com $\Delta = [b''(\xi_0)(3M_1M_2 - 3M_1^3)]^2 - 4[3M_1M_2 - 2M_1^3 - M_3] M_1^3[b^{(3)}(\xi_0) - 3[b''(\xi_0)]^2] > 0$ e $2[3M_1M_2 - 2M_1^3 - M_3] \neq 0$

Nos exemplos a seguir mostramos os parâmetros estimados pelo Método dos Momentos para $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$, $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$ e $W_\phi \sim \text{SHG}(\phi)$.

Exemplo 3.2.4. *Sejam $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $Z \sim \text{N}(0, 1)$ e $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$ independentes, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e $\phi > 0$. Substituindo $b''(\xi_0) = 1$ e $b^{(3)}(\xi_0) = 2$ nas Expressões (3.8) e*

resolvendo a Equação (3.9), os parâmetros de Y estimados pelo Método dos Momentos para $9M_2^2 - 6M_1^2M_2 + M_1^4 - 4M_1M_3 \geq 0$ e $6M_1M_2 - 4M_1^3 - 2M_3 \neq 0$ são dados por

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= M_1, \\ \hat{\sigma}^2 &= M_2 - \left(\frac{\hat{\phi} + 1}{\hat{\phi}} \right) M_1^2, \\ \hat{\phi} &= \frac{3M_1^3 - 3M_1M_2 \pm M_1 \sqrt{9M_2^2 - 6M_1^2M_2 + M_1^4 - 4M_1M_3}}{6M_1M_2 - 4M_1^3 - 2M_3},\end{aligned}$$

$$\text{para } M_2 > \left(\frac{\hat{\phi} + 1}{\hat{\phi}} \right) M_1^2 \text{ e } \frac{3M_1^3 - 3M_1M_2 \pm M_1 \sqrt{9M_2^2 - 6M_1^2M_2 + M_1^4 - 4M_1M_3}}{6M_1M_2 - 4M_1^3 - 2M_3} > 0.$$

Exemplo 3.2.5. Sejam $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $Z \sim N(0, 1)$ e $W_\phi \sim IG(\phi)$ independentes, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e $\phi > 0$. Substituindo $b''(\xi_0) = 1$ nas Expressões (3.8) e resolvendo a equação de segundo grau (3.9), as estimativas dos parâmetros de Y , calculadas pelo Método dos Momentos, são dadas por:

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= M_1, \\ \hat{\sigma}^2 &= M_2 - \left(\frac{\hat{\phi} + 1}{\hat{\phi}} \right) M_1^2, \\ \hat{\phi} &= \frac{3M_1^3 - 3M_1M_2}{3M_1M_2 - 2M_1^3 - M_3}, \text{ com } 3M_1M_2 - 2M_1^3 - M_3 \neq 0,\end{aligned}$$

$$\text{para } M_2 > \left(\frac{\hat{\phi} + 1}{\hat{\phi}} \right) M_1^2 \text{ e } \frac{3M_1^3 - 3M_1M_2}{3M_1M_2 - 2M_1^3 - M_3} > 0.$$

Exemplo 3.2.6. Sejam $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $Z \sim N(0, 1)$ e $W_\phi \sim SHG(\phi)$ independentes, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e $\phi > 0$. Substituindo $b''(\xi_0) = 2$ e $b^{(3)}(\xi_0) = 4$ nas Expressões (3.8) e resolvendo a Equação (3.9), os parâmetros de Y estimados pelo Método dos Momentos para $-28M_1^6 + 24M_1^4M_2 - 32M_1^3M_3 + 36M_1^2M_2^2 \geq 0$ e $6M_1M_2 - 4M_1^3 - 2M_3 \neq 0$ são dados por

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= M_1, \\ \hat{\sigma}^2 &= M_2 - \left(\frac{\hat{\phi} + 2}{\hat{\phi}} \right) M_1^2, \\ \hat{\phi} &= \frac{6M_1^3 - 6M_1M_2 \pm \sqrt{-28M_1^6 + 24M_1^4M_2 - 32M_1^3M_3 + 36M_1^2M_2^2}}{6M_1M_2 - 4M_1^3 - 2M_3}.\end{aligned}$$

$$\text{para } M_2 > \left(\frac{\hat{\phi} + 2}{\hat{\phi}} \right) M_1^2 \text{ e } \frac{6M_1^3 - 6M_1M_2 \pm \sqrt{-28M_1^6 + 24M_1^4M_2 - 32M_1^3M_3 + 36M_1^2M_2^2}}{6M_1M_2 - 4M_1^3 - 2M_3} > 0.$$

3.2.2 Algoritmo EM

O algoritmo EM (*Expectation-Maximization*) introduzido por Dempster, Laird e Rubin (1977) é uma ferramenta utilizada para encontrar a estimativa de máxima verossimilhança (EMV) iterativamente. Existem duas aplicações principais desse algoritmo. A primeira é quando os dados são incompletos e a segunda é quando a maximização direta da função log-verossimilhança não é simples de se obter analiticamente. Neste último caso, os dados observados são aumentados para um conjunto de dados completos, substituindo uma maximização complicada por uma sequência de maximizações mais simples de ser resolver, cujo limite é a resposta para o problema original.

Utilizando a representação $Y \stackrel{d}{=} \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ em que $Z \sim N(0, 1)$, $W_\phi \sim \text{FE}(\phi)$ e $Y|W_\phi \sim N(\mu w, \sigma^2 w)$, suponha os dados completos $(Y_1, W_{\phi 1}), \dots, (Y_n, W_{\phi n})$, em que Y_i é a parte observável, $W_{\phi i}$ é o efeito aleatório não observável, $i = 1, \dots, n$ e $\theta = (\mu, \sigma^2, \phi)$ é o vetor de parâmetros. A log-verossimilhança completa $l_c(\theta, \mathbf{y}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n \log\{P(Y_i = y_i | W_{\phi i} = w_i) f_W(w_i)\}$, em que $f_W(\cdot)$ é a função densidade de probabilidade da família exponencial dada na Equação (2.2), pode ser representada como

$$l_c(\theta, \mathbf{y}, \mathbf{w}) \propto \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \frac{y_i^2}{w_i} + \frac{\mu}{\sigma^2} y_i - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} w_i + d(\phi) + \phi[w_i \xi_o - b(\xi_o) + g(w_i)] \right\}. \quad (3.10)$$

Cada iteração do algoritmo EM envolve dois passos: o passo E, denominado esperança, e o passo M, chamado de maximização. No passo E, calculamos a função Q, que é a esperança condicional da log-verossimilhança dos dados completos perante os dados observados. Já no passo M a função Q é maximizada. Utilizando os valores das estimativas dos parâmetros obtidas em cada passo, atualizamos a função Q e a maximizamos novamente. Esse processo é repetido até que algum critério de parada seja satisfeito, por exemplo, $\|\theta^{(r+1)} - \theta^{(r)}\| < \epsilon$ ou $\|\theta^{(r+1)} - \theta^{(r)}\| / \|\theta^{(r)}\| < \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$ fixo.

Calcularemos os passos do algoritmo EM para o caso geral em que a distribuição da variável aleatória utilizada na mistura pertence à família exponencial e depois discutiremos os casos particulares para as distribuições Gama e Inversa Gaussiana.

Passo E: A esperança condicional da função log-verossimilhança completa é

$$Q(\theta; \theta^{(r)}) \equiv E[l_c(\theta, \mathbf{y}, \mathbf{w}) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}; \theta^{(r)}] \\ \propto \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{2} \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} y_i^2 \gamma_i^{(r)} + \frac{\mu}{\sigma^2} y_i - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \alpha_i^{(r)} + d(\phi) + \phi \left[\xi_o \alpha_i^{(r)} - b(\xi_o) + \delta_i^{(r)} \right] \right\}, \quad (3.11)$$

em que $\gamma_i^{(r)} = E[W_i^{-1}|Y; \theta^{(r)}]$, $\alpha_i^{(r)} = E[W_i|Y; \theta^{(r)}]$ e $\delta_i^{(r)} = E[g(W_i)|Y; \theta^{(r)}]$, para $i = 1, \dots, n$, em que $\theta^{(r)}$ é a estimativa de θ no passo r .

As esperanças condicionais do Passo-E considerando $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$ são dadas a seguir.

Proposição 3.2.1. *Sejam $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $Z \sim N(0, 1)$ e $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$ independentes, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e $\phi > 0$. Então, para $K, L \in \mathbb{Z}$,*

$$E\left(W_\phi^K g^L(W_\phi) \middle| Y\right) = \frac{\mathcal{K}_{\phi+K-\frac{1}{2}}(\sqrt{ab})}{\mathcal{K}_{\phi-\frac{1}{2}}(\sqrt{ab})} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{K}{2}} E_U([g(W_\phi)]^L),$$

em que $U \sim \text{IGG}(a, b, p)$, $a = \frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi$, $b = \frac{y^2}{\sigma^2}$, $p = \phi + K - \frac{1}{2}$ e $\mathcal{K}_{(\cdot)}(\cdot)$ é a função Bessel modificada do terceiro tipo apresentada na Expressão (2.5).

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} E\left(W_\phi^K g^L(W_\phi) \middle| Y\right) &= \int_0^\infty w^K g^L(w) \frac{f_{Y|W}(y|w) f_W(w)}{f_Y(y)} dw \\ &= \frac{1}{f_Y(y)} \int_0^\infty w^K g^L(w) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 w}} e^{-\frac{(y-\mu w)^2}{2\sigma^2 w}} e^{\phi[-w+\log(\phi)+\log(w)]-\log(\Gamma(\phi))-\log(w)} dw. \end{aligned}$$

Substituindo $f_Y(y)$ pela Expressão (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} E\left(W_\phi^K g^L(W_\phi) \middle| Y\right) &= \frac{\left(\frac{\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi}{\frac{y^2}{\sigma^2}}\right)^{\frac{\phi}{2} - \frac{1}{4}}}{2\mathcal{K}_{\phi-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\left[\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi\right] \frac{y^2}{\sigma^2}}\right)} \\ &\quad \times \int_0^\infty [g(w)]^L \underbrace{w^{(\phi+K-\frac{1}{2})-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi\right)w + \left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right)\frac{1}{w}\right]\right\}}_{\text{Núcleo IGG}\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi, \frac{y^2}{\sigma^2}, \phi + K - \frac{1}{2}\right)} dw. \end{aligned}$$

Denotando $U \sim \text{IGG}(a, b, p)$ com $a = \frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi$, $b = \frac{y^2}{\sigma^2}$ e $p = \phi + K - \frac{1}{2}$, temos que

$$E\left(W_\phi^K g^L(W_\phi) \middle| Y\right) = \frac{\mathcal{K}_{\phi+K-\frac{1}{2}}(\sqrt{ab})}{\mathcal{K}_{\phi-\frac{1}{2}}(\sqrt{ab})} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{K}{2}} E_U([g(W_\phi)]^L).$$

□

Exemplo 3.2.7. *Sejam $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $Z \sim N(0, 1)$ e $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$ independentes, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e $\phi > 0$. Substituindo $K = 1, L = 0$ e $K = -1, L = 0$ na proposição anterior obtemos, respectivamente,*

$$\alpha \equiv E(W_\phi | Y = y) = \frac{\mathcal{K}_{\phi+\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi\right) \left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right)} \right)}{\mathcal{K}_{\phi-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi\right) \left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right)} \right)} \left(\frac{y^2}{\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi} \right)^{\frac{1}{2}} e$$

$$\gamma \equiv E\left(\frac{1}{W_\phi} | Y = y\right) = \frac{\mathcal{K}_{\phi-\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi\right) \left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right)} \right)}{\mathcal{K}_{\phi-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi\right) \left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right)} \right)} \left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Considerando $\mathcal{K}'_p(\cdot)$ a derivada da função Bessel com respeito a p , substituindo $K = 0$, $g(W_\phi) = \log W_\phi$ e $L = 1$ na Proposição 3.2.1, a esperança condicional se reduz a

$$\delta = E(\log W_\phi | Y = y) = E_U(\log W_\phi), \quad U \sim \text{IGG} \left(a, b, \phi - \frac{1}{2} \right).$$

Jorgensen (1982) (Capítulo 3) mostrou através dos cumulantes que se $X \sim \text{IGG}(a, b, p)$, então

$$E(\log X) = \ln \sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{\partial}{\partial p} \log \{ \mathcal{K}_p(\sqrt{ab}) \} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{\mathcal{K}'_p(\sqrt{ab})}{\mathcal{K}_p(\sqrt{ab})}.$$

Substituindo $a = \frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi$, $b = \frac{y^2}{\sigma^2}$ e $p = \phi - \frac{1}{2}$ na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \delta &= E(\log(W_\phi) | Y = y) = E_U(\log W_\phi) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi}{\frac{y^2}{\sigma^2}} \right) + \frac{\mathcal{K}'_{\phi-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi\right) \left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right)} \right)}{\mathcal{K}_{\phi-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi\right) \left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right)} \right)}. \end{aligned}$$

Para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$, as esperanças condicionais do Passo-E do algoritmo EM são apresentadas a seguir.

Proposição 3.2.2. *Sejam $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $Z \sim \text{N}(0, 1)$ e $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$ independentes, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e $\phi > 0$. Então, para $K, L \in \mathbb{Z}$,*

$$E \left(W_\phi^K g^L(W_\phi) | Y \right) = \frac{\mathcal{K}_{K-1}(\sqrt{ab})}{\mathcal{K}_{-1}(\sqrt{ab})} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{K}{2}} E_U([g(W_\phi)]^L),$$

em que em que $U \sim \text{IGG}(a, b, p)$, $a = \frac{\mu^2}{\sigma^2} + \phi$, $b = \frac{y^2}{\sigma^2} + \phi$ e $\mathcal{K}_{(\cdot)}(\cdot)$ é a função Bessel modificada do terceiro tipo apresentada na Expressão (2.5).

Demonstração. Temos que

$$E \left(W_\phi^K g^L(W_\phi) | Y \right) = \int_0^\infty w^K g^L(w) \frac{f_{Y|W}(y|w) f_W(w)}{f_Y(y)} dw$$

$$= \frac{1}{f_Y(y)} \int_0^\infty w^K g^L(w) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 w}} e^{-\frac{(y-\mu w)^2}{2\sigma^2 w}} e^{\phi[-\frac{1}{2}w - \frac{1}{2}\frac{1}{w}] + \frac{1}{2}[\log(\phi) - \log(2\pi w^3)]} dw.$$

Substituindo $f_Y(y)$ pela Expressão (3.4), obtemos

$$E\left(W_\phi^K g^L(W_\phi) \middle| Y\right) = \frac{\left(\frac{y^2 + \phi}{\sigma^2 + \phi}\right)^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{K}_{-1}\left(\sqrt{\left[\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \phi\right] \left[\frac{y^2}{\sigma^2} + \phi\right]}\right)} \times \int_0^\infty [g(w)]^L \underbrace{w^{(K-1)-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \phi\right)w + \left(\frac{y^2}{\sigma^2} + \phi\right)\frac{1}{w}\right]\right\}}_{\text{Núcleo IGG}\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \phi, \frac{y^2}{\sigma^2} + \phi, K-1\right)} dw.$$

Denotando $U \sim \text{IGG}(a, b, p)$ com $a = \frac{\mu^2}{\sigma^2} + \phi$, $b = \frac{y^2}{\sigma^2} + \phi$ e $p = K - 1$, temos que

$$E\left(W_\phi^K g^L(W_\phi) \middle| Y\right) = \frac{\mathcal{K}_{K-1}(\sqrt{ab})}{\mathcal{K}_{-1}(\sqrt{ab})} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{K}{2}} E_U([g(W_\phi)]^L).$$

□

Exemplo 3.2.8. *Sejam $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $Z \sim N(0, 1)$ e $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$ independentes, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ e $\phi > 0$. Substituindo $K = 1, L = 0$ e $K = -1, L = 0$ na proposição anterior obtemos, respectivamente,*

$$\alpha \equiv E(W_\phi | Y = y) = \frac{\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \phi\right) \left(\frac{y^2}{\sigma^2} + \phi\right)}\right)}{\mathcal{K}_{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \phi\right) \left(\frac{y^2}{\sigma^2} + \phi\right)}\right)} \left(\frac{y^2}{\sigma^2} + \phi\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\gamma \equiv E\left(\frac{1}{W_\phi} \middle| Y = y\right) = \frac{\mathcal{K}_{-2}\left(\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \phi\right) \left(\frac{y^2}{\sigma^2} + \phi\right)}\right)}{\mathcal{K}_{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \phi\right) \left(\frac{y^2}{\sigma^2} + \phi\right)}\right)} \left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \phi\right)^{\frac{1}{2}} e$$

$$\delta \equiv E\left(-\frac{1}{2W_\phi} \middle| Y = y\right) = -\frac{1}{2} E\left(\frac{1}{W_\phi} \middle| Y = y\right) = -\frac{1}{2}\gamma.$$

O passo M do algoritmo EM é dado pela maximização da função $Q(\theta; \theta^{(r)})$:

Passo M: A função escore associada à $Q(\theta; \theta^{(r)})$ é dada por

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left\{ y_i - \mu \alpha_i^{(r)} \right\},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n \left\{ y_i^2 \gamma_i^{(r)} - 2\mu y_i + \mu^2 \alpha_i^{(r)} \right\},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \phi} = n[d'(\phi) - b(\xi_0)] + \sum_{i=1}^n \left\{ \xi_0 \alpha_i^{(r)} + \delta_i^{(r)} \right\}.$$

O estimador de máxima verossimilhança é a raiz da equação $\frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0$. Assim,

$$\hat{\mu}^{(r+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(r)}},$$

$$\hat{\sigma}^2{}^{(r+1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ y_i^2 \gamma_i^{(r)} - 2\hat{\mu} y_i + \hat{\mu}^2 \alpha_i^{(r)} \right\},$$

e $\hat{\phi}^{(r+1)}$ é solução da equação

$$d'(\hat{\phi}^{(r+1)}) = b(\xi_0) - \frac{\xi_0}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(r)} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^{(r)}, \quad (3.12)$$

em que $d'(\cdot)$ é a primeira derivada com respeito a ϕ .

Para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$ e $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$ a Expressão (3.12) é dada, respectivamente, por

$$\log \phi + 1 - \frac{\Gamma'(\phi)}{\Gamma(\phi)} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(r)} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^{(r)} = 0 \quad \text{e}$$

$$\hat{\phi}^{(r+1)} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(r)} + \sum_{i=1}^n \gamma_i^{(r)} - 2n}.$$

Segundo Louis (1982), a matriz de informação observada quando usamos o algoritmo EM é dada por

$$I(\theta) = E \left(-\frac{\partial^2 l_c(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} \middle| Y \right) - E \left(\frac{\partial l_c(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial l_c(\theta)^T}{\partial \theta} \middle| Y \right).$$

Desta forma, os elementos da matriz observada geral são dados pelas expressões a seguir.

$$E \left(-\frac{\partial^2 l_c}{\partial \mu^2} \middle| Y \right) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \alpha_i,$$

$$E \left(-\frac{\partial^2 l_c}{\partial (\sigma^2)^2} \middle| Y \right) = \frac{1}{(\sigma^2)^3} \sum_{i=1}^n \left\{ y_i^2 \gamma_i - 2\mu y_i + \mu^2 \alpha_i \right\} - \frac{n}{2(\sigma^2)^2},$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 l_c}{\partial \phi^2} \middle| Y\right) = -nd''(\phi),$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 l_c}{\partial \mu \partial \sigma^2} \middle| Y\right) = E\left(-\frac{\partial^2 l_c}{\partial \sigma^2 \partial \mu} \middle| Y\right) = \frac{1}{(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n y_i - \mu \alpha_i,$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 l_c}{\partial \mu \partial \phi} \middle| Y\right) = E\left(-\frac{\partial^2 l_c}{\partial \phi \partial \mu} \middle| Y\right) = 0,$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 l_c}{\partial \sigma^2 \partial \phi} \middle| Y\right) = E\left(-\frac{\partial^2 l_c}{\partial \phi \partial \sigma^2} \middle| Y\right) = 0,$$

$$E\left(\left[\frac{\partial l_c}{\partial \mu}\right]^2 \middle| Y\right) = \frac{1}{(\sigma^2)^2} \left[\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n \alpha_i + \mu^2 \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j\right) \right], i, j = 1, \dots, n,$$

$$E\left(\left[\frac{\partial l_c}{\partial \sigma^2}\right]^2 \middle| Y\right) =$$

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{\mu}{(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n y_i \right] \left[-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n \{y_i^2 \gamma_i - \mu y_i + \mu^2 \alpha_i\} \right] + \\ & \frac{1}{4(\sigma^2)^4} \left[\sum_{i=1}^n y_i^4 \rho_i + \sum_{i \neq j} y_i^2 \gamma_i y_j^2 \gamma_j \right] + \frac{\mu^2}{2(\sigma^2)^4} \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_i y_j^2 \gamma_j \right] + \\ & \frac{\mu^4}{4(\sigma^2)^4} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \right], i, j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$E\left(\left[\frac{\partial l_c}{\partial \phi}\right]^2 \middle| Y\right) =$$

$$\begin{aligned} & \left[-nb(\xi_0) + nd'(\phi) \right] \left[-nb(\xi_0) + nd'(\phi) + 2 \sum_{i=1}^n \{\delta_i + \xi_0 \alpha_i\} \right] + \sum_{i=1}^n \nu_i + \sum_{i \neq j} \delta_i \delta_j + \\ & 2\xi_0 \left[\sum_{i=1}^n \tau_i + \sum_{i \neq j} \alpha_i \delta_j \right] + \xi_0^2 \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \right], i, j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$E\left(\frac{\partial l_c}{\partial \mu} \frac{\partial l_c}{\partial \sigma^2} \middle| Y\right) = E\left(\frac{\partial l_c}{\partial \sigma^2} \frac{\partial l_c}{\partial \mu} \middle| Y\right) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n y_i \left[-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n \{y_i^2 \gamma_i - 2\mu y_i + \mu^2 \alpha_i\} \right] - \frac{\mu}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[-\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{\mu}{(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n y_i \right] - \\ & \frac{\mu}{2(\sigma^2)^3} \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_i y_j^2 \gamma_j \right] - \frac{\mu^3}{2(\sigma^2)^3} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \right], i, j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$E\left(\frac{\partial l_c}{\partial \mu} \frac{\partial l_c}{\partial \phi} \middle| Y\right) = E\left(\frac{\partial l_c}{\partial \phi} \frac{\partial l_c}{\partial \mu} \middle| Y\right) =$$

$$\left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \{y_i - \mu \alpha_i\} \right] \left[-nb(\xi_0) + nd'(\phi) \right] + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n \{ \delta_i + \xi_0 \alpha_i \} -$$

$$\frac{\mu}{\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n \tau_i + \sum_{i \neq j} \alpha_i \delta_j \right] - \frac{\mu \xi_0}{\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \right], i, j = 1, \dots, n,$$

$$E\left(\frac{\partial l_c}{\partial \sigma^2} \frac{\partial l_c}{\partial \phi} \middle| Y\right) = E\left(\frac{\partial l_c}{\partial \phi} \frac{\partial l_c}{\partial \sigma^2} \middle| Y\right) =$$

$$\left[-\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{\mu}{(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n y_i \right] \left[-nb(\xi_0) + nd'(\phi) + \sum_{i=1}^n \{ \delta_i + \xi_0 \alpha_i \} \right] +$$

$$\frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n \{ y_i^2 \gamma_i + \mu^2 \alpha_i \} \left[-nb(\xi_0) + nd'(\phi) \right] + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 \varphi_i + \sum_{i \neq j} y_i^2 \gamma_i \delta_j \right] +$$

$$\frac{\xi_0}{2(\sigma^2)^2} \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 + \sum_{i \neq j} y_i^2 \gamma_i \alpha_j \right] + \frac{\mu^2}{2(\sigma^2)^2} \left[\sum_{i=1}^n \tau_i + \sum_{i \neq j} \alpha_i \delta_j \right] + \frac{\mu^2 \xi_0}{2(\sigma^2)^2} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \right],$$

para $i, j = 1, \dots, n$, com $\alpha_i = E(W_{\phi i} | Y)$, $\gamma_i = E\left(\frac{1}{W_{\phi i}} \middle| Y\right)$ e $\delta_i = E\left(g(W_{\phi i}) \middle| Y\right)$, em que $\lambda_i = E\left(W_{\phi i}^2 \middle| Y\right)$, $\tau_i = E\left(W_{\phi i} g(W_{\phi i}) \middle| Y\right)$, $\nu_i = E\left(g(W_{\phi i})^2 \middle| Y\right)$, $\rho_i = E\left(\frac{1}{W_{\phi i}^2} \middle| Y\right)$ e $\varphi_i = E\left(\frac{1}{W_{\phi i}} g(W_{\phi i}) \middle| Y\right)$.

Nos exemplos a seguir, as esperanças condicionais da matriz de informação observada são calculadas considerando $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$ e $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$.

Exemplo 3.2.9. *Sejam $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $Z \sim N(0, 1)$ e $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$ independentes, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, $\phi > 0$, $a = \frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2\phi$ e $b = \frac{y^2}{\sigma^2}$. As esperanças condicionais que aparecem na matriz de informação observada são casos particulares da Proposição 3.2.1 e são dadas por*

$$\lambda = E\left(W_\phi^2 \middle| Y\right) = \frac{\mathcal{K}_{\phi + \frac{3}{2}}(\sqrt{ab}) b}{\mathcal{K}_{\phi - \frac{1}{2}}(\sqrt{ab}) a},$$

$$\tau = E\left(W_\phi \log W_\phi \middle| Y\right) = \frac{\mathcal{K}_{\phi + \frac{1}{2}}(\sqrt{ab})}{\mathcal{K}_{\phi - \frac{1}{2}}(\sqrt{ab})} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} \log\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \log \mathcal{K}_{\phi + \frac{1}{2}}(\sqrt{ab}) \right],$$

$$\nu = E\left([\log W_\phi]^2 \middle| Y\right) = E_U([\log U]^2), \text{ com } U \sim \text{IGG}\left(a, b, \phi - \frac{1}{2}\right),$$

$$\rho = E \left(\frac{1}{W_\phi^2} \middle| Y \right) = \frac{\mathcal{K}_{\phi-\frac{5}{2}}(\sqrt{ab}) a}{\mathcal{K}_{\phi-\frac{1}{2}}(\sqrt{ab}) b} e$$

$$\varphi = E \left(\frac{1}{W_\phi} \log W_\phi \middle| Y \right) = \frac{\mathcal{K}_{\phi-\frac{3}{2}}(\sqrt{ab})}{\mathcal{K}_{\phi-\frac{1}{2}}(\sqrt{ab})} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \log \mathcal{K}_{\phi-\frac{3}{2}}(\sqrt{ab}) \right].$$

Exemplo 3.2.10. *Sejam $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$ com $Z \sim N(0, 1)$ e $W_\phi \sim IG(\phi)$ independentes, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, $\phi > 0$, $a = \frac{\mu^2}{\sigma^2} + \phi$ e $b = \frac{y^2}{\sigma^2} + \phi$. As esperanças condicionais que aparecem na matriz de informação observada são casos particulares da Proposição 3.2.2 e são dadas por*

$$\lambda = E \left(W_\phi^2 \middle| Y \right) = \frac{b}{a},$$

$$\tau = E \left(W_\phi \left(-\frac{1}{2W_\phi} \right) \middle| Y \right) = -\frac{1}{2},$$

$$\rho = E \left(\frac{1}{W_\phi^2} \middle| Y \right) = \left(\frac{a}{b} \right) \cdot \frac{\mathcal{K}_{-3}(\sqrt{ab})}{\mathcal{K}_{-1}(\sqrt{ab})},$$

$$\nu = E \left(\left[-\frac{1}{2W_\phi} \right]^2 \middle| Y \right) = \frac{1}{4} E \left(\frac{1}{W_\phi^2} \middle| Y \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{b} \right) \frac{\mathcal{K}_{-3}(\sqrt{ab})}{\mathcal{K}_{-1}(\sqrt{ab})} e$$

$$\varphi = E \left(\frac{1}{W_\phi} \left(-\frac{1}{2W_\phi} \right) \middle| Y \right) = -\frac{1}{2} E \left(\frac{1}{W_\phi^2} \middle| Y \right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} \right) \frac{\mathcal{K}_{-3}(\sqrt{ab})}{\mathcal{K}_{-1}(\sqrt{ab})}.$$

Com os elementos da matriz de informação observada podemos obter, por exemplo, os erros padrões das estimativas dos parâmetros e construir intervalos de confiança para os parâmetros.

3.3 Estudo de Simulação

Nesta seção apresentaremos um estudo de simulação para analisarmos o comportamento dos estimadores obtidos pelo Método dos Momentos e por máxima verossimilhança via algoritmo EM para a distribuição Normal-Família Exponencial Misturada. Nosso objetivo é verificar o desempenho desses estimadores propostos analiticamente juntamente com a matriz de informação observada.

Utilizando a representação de $Y \sim \text{NFEM}(\mu, \sigma^2, \phi)$ como a mistura $Y = \mu W_\phi + \sigma \sqrt{W_\phi} Z$, em que $W_\phi \sim \text{FE}(\phi)$ e $Z \sim N(0, 1)$ são independentes, geramos amostras de tamanho $n = 150, 200, 500$ e 1000 da distribuição Normal-Família Exponencial Misturada considerando $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$ e $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$. Adotamos como valores verdadeiros dos parâmetros $\theta = (\mu, \sigma^2, \phi) = (3, 4, 2)$. Aplicamos o Método dos Momentos e o algoritmo EM, obtendo as

estimativas desses elementos do modelo. Comparamos os resultados através da raiz do erro quadrático médio (REQM) dada por

$$\text{REQM}(\theta_j) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\widehat{\theta}_{j,i} - \theta_{j,0})^2}, \quad j = \{1, 2, 3\},$$

em que N é o número de réplicas Monte Carlo, $\theta_{j,0}$ é o valor verdadeiro do parâmetro e $\widehat{\theta}_{j,i}$ é a sua estimativa obtida pelos métodos de estimação. Repetimos esse processo $N = 5000$ vezes. As estimativas encontradas pelo Método dos Momentos (MM) foram os valores iniciais dados para o algoritmo EM e adotamos como critério de parada $\frac{\|\theta_j^{(r+1)} - \theta_j^{(r)}\|}{\|\theta_j^{(r)}\|} < 10^{-4}$, $j = \{1, 2, 3\}$. Os resultados para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$ são dados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 Média das estimativas dos parâmetros obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos e REQM para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$.

		Estimativas		REQM	
		EM	MM	EM	MM
$n = 30$	$\mu = 3$	2,9831	2,9828	0,5253	0,5253
	$\sigma^2 = 4$	3,7650	4,8050	1,7752	2,2551
	$\phi = 2$	3,6531	4,6037	6,6070	6,6886
$n = 50$	$\mu = 3$	3,0033	3,0035	0,4143	0,4143
	$\sigma^2 = 4$	3,8589	4,6258	1,3741	1,8606
	$\phi = 2$	2,7676	3,6407	3,7128	4,1579
$n = 100$	$\mu = 3$	3,0048	3,0049	0,2937	0,2939
	$\sigma^2 = 4$	3,9303	4,3669	0,9693	1,4704
	$\phi = 2$	2,2154	2,7251	0,9074	1,6073
$n = 150$	$\mu = 3$	2,9938	2,9939	0,2376	0,2376
	$\sigma^2 = 4$	3,9393	4,2335	0,7791	1,2625
	$\phi = 2$	2,1170	2,4638	0,6123	1,1311
$n = 200$	$\mu = 3$	3,0065	3,0064	0,2097	0,2097
	$\sigma^2 = 4$	3,9816	4,1942	0,6725	1,1422
	$\phi = 2$	2,1024	2,3675	0,4862	0,9318
$n = 500$	$\mu = 3$	3,0009	3,0009	0,1313	0,1313
	$\sigma^2 = 4$	3,9863	4,0550	0,4197	0,8250
	$\phi = 2$	2,0334	2,1497	0,2747	0,5371
$n = 1000$	$\mu = 3$	3,0014	3,0015	0,0909	0,0909
	$\sigma^2 = 4$	3,9999	4,0143	0,2956	0,6379
	$\phi = 2$	2,0173	2,0721	0,1859	0,3709

Observando a Tabela 3.1, vemos que as estimativas obtidas são próximas dos valores reais nos dois métodos para $n \geq 100$. O algoritmo EM mostrou os melhores resultados com a raiz do erro quadrático médio menor ou igual para todos os tamanhos de amostra considerados. A raiz do erro quadrático médio diminuiu significativamente para $n \geq 100$. Como esperado, à medida que aumentamos o tamanho da amostra, a raiz do erro quadrático médio diminuiu, como também mostram os *boxplots* das Figuras 3.3, 3.4 e 3.5. Para $n = 30, 50, 100$ e 150 , temos a presença de alguns *outliers*. Sem perda de generalidade, foi feita uma alteração na escala do gráfico *boxplot* do parâmetro ϕ , uma vez que o valor máximo obtido pelo Método dos Momentos para $n = 30$ foi 121,8168 e para $n = 1000$ foi 3,6256.

O algoritmo EM e o Método dos Momentos estimaram alguns valores negativos para os parâmetros σ^2 e ϕ quando $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$. As porcentagens de estimativas negativas para σ^2 e/ou ϕ para $n = 30, 50, 100, 150, 200, 500$ e 1000 foram, respectivamente, 8,18%, 2,72%, 0,6%, 0,3%, 0,22%, 0,10% e 0,12%, para o algoritmo EM; e 6,34%, 4,72%, 3,18%, 2,5%, 0,24%, 0,18% e 0,24% para o Método de Momentos. Nesses casos, a simulação de Monte Carlo foi descartada e aplicada novamente.

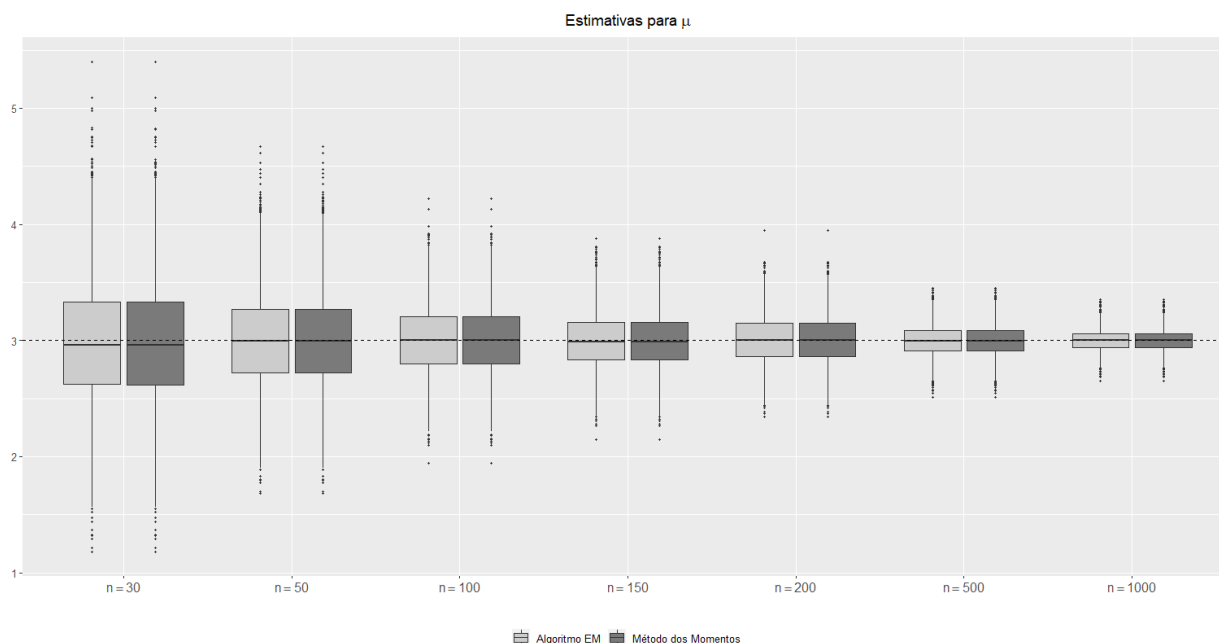


Figura 3.3 *Boxplot* com as estimativas de μ obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\mu = 3$.

A Tabela 3.2 apresenta o desvio padrão empírico das estimativas dos parâmetros para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$ e a média dos erros padrão obtidos a partir da matriz de informação observada que denotamos por erro teórico. Observamos que os resultados são próximos para $n \geq 200$,

indicando que a matriz de informação observada obtida é adequada para estimarmos os erros padrão dos estimadores dos parâmetros encontrados via algoritmo EM.

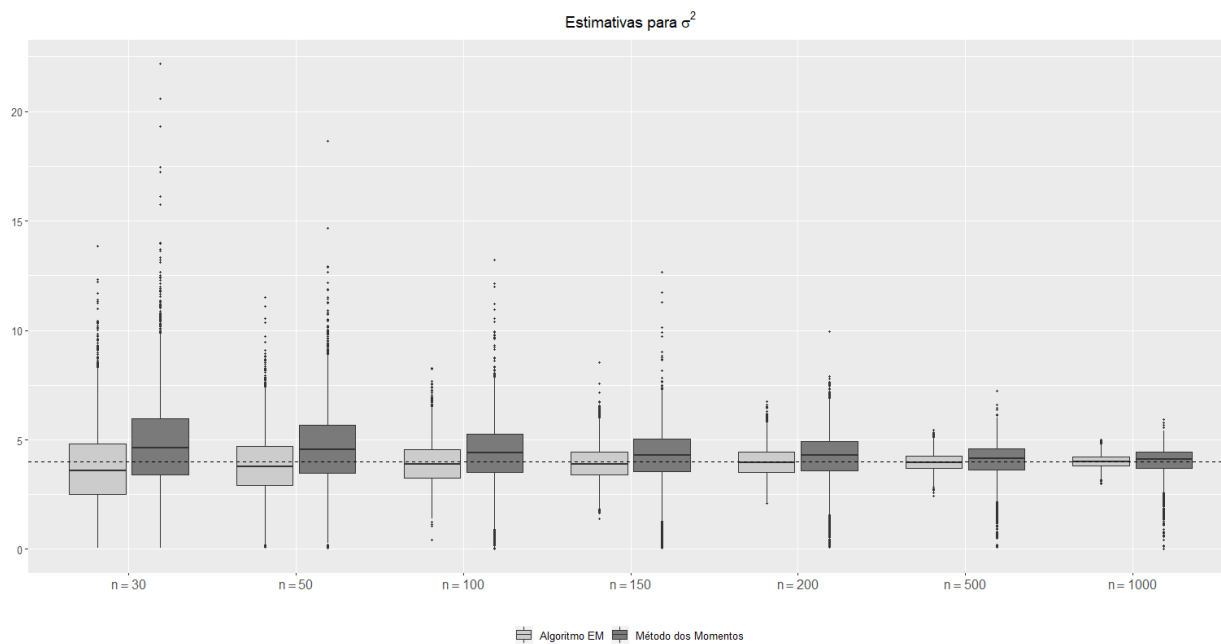


Figura 3.4 *Boxplot* com as estimativas de σ^2 obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\sigma^2 = 4$.

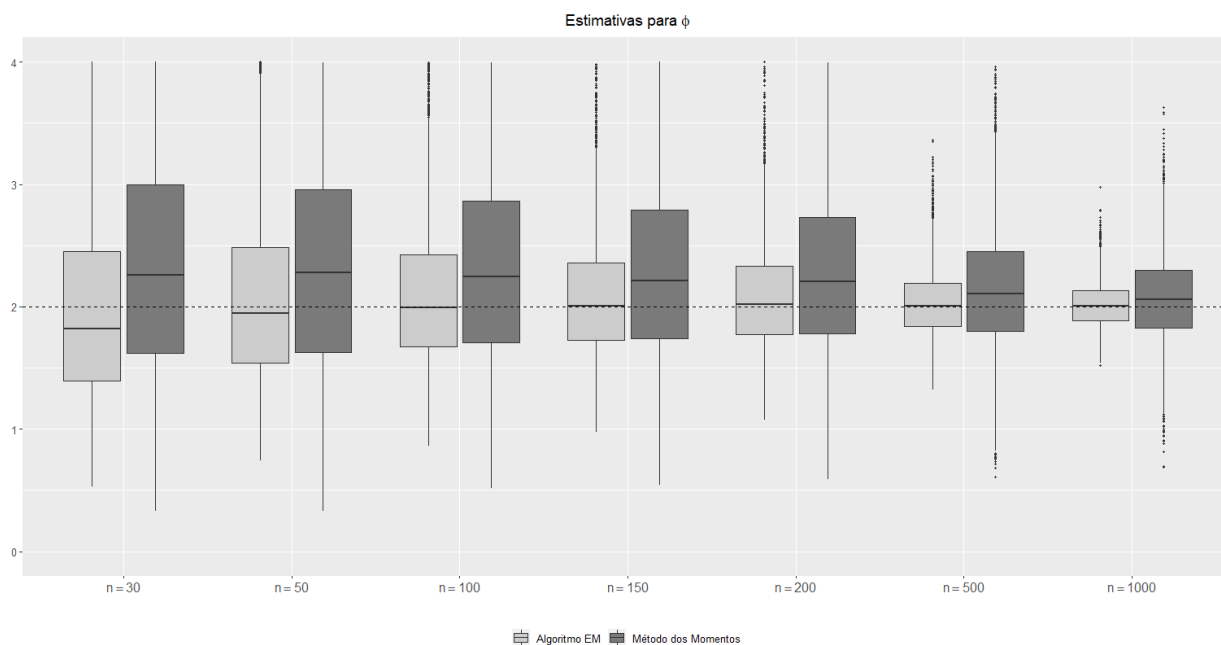


Figura 3.5 *Boxplot* com as estimativas de ϕ obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\phi = 2$.

Para $n = 30$, $n = 50$ e $n = 100$, a esperança condicional no algoritmo EM divergiu, respectivamente, em 0,56%, 0,08% e 0,04% das vezes. Nesses casos, a simulação de Monte Carlo foi descartada e aplicada novamente.

Tabela 3.2 Erros padrão empíricos e teóricos das estimativas dos parâmetros para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$.

		μ	σ^2	ϕ
$n = 30$	Empírico	0,5251	1,7598	6,3974
	Teórico	0,5227	1,6458	4,9593
$n = 50$	Empírico	0,4144	1,3670	3,6329
	Teórico	0,4073	1,2927	2,1497
$n = 100$	Empírico	0,2937	0,9669	0,8815
	Teórico	0,2899	0,9242	0,7585
$n = 150$	Empírico	0,2376	0,7768	0,6010
	Teórico	0,2368	0,7533	0,5414
$n = 200$	Empírico	0,2096	0,6723	0,4754
	Teórico	0,2056	0,6581	0,4529
$n = 500$	Empírico	0,1313	0,4195	0,2727
	Teórico	0,1302	0,4159	0,2658
$n = 1000$	Empírico	0,0910	0,2957	0,1851
	Teórico	0,0922	0,2948	0,1846

Os resultados obtidos para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$ são apresentados na Tabela 3.3. O algoritmo EM estima satisfatoriamente os parâmetros μ e σ^2 em todos os cenários considerados. A partir de $n = 100$, as estimativas de ϕ estão mais próximas do valor real desse parâmetro. Considerando o Método dos Momentos, vemos que para todos os valores de n as estimativas para μ estão próximas do valor real. Quando analisamos os parâmetros σ^2 e ϕ , os valores estimados aproximam-se de 4,0 e 2,0, respectivamente, a partir de $n = 500$. Também observamos que a raiz do erro quadrático médio desses parâmetros é alta para $n = 30$ e $n = 50$. O algoritmo EM apresentou as melhores estimativas com os menores erros quadráticos médios. Conforme previsto, à medida que o tamanho da amostra aumenta, a raiz do erro quadrático médio diminui e as estimativas dos parâmetros aproximam-se dos valores verdadeiros, conforme indicado nas Figuras 3.6, 3.7 e 3.8 que representam, respectivamente, os *boxplots* contendo as estimativas dos parâmetros μ , σ^2 e ϕ , encontrados pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos. Sem perda de generalidade, foi feita uma alteração na escala do gráfico *boxplot* do parâmetro ϕ , uma vez que os valores máximos obtidos pelo Método dos Momentos para $n = 30$ e $n = 1000$ foram, respectivamente, 1461,2100 e 3,7186.

Tabela 3.3 Média das estimativas dos parâmetros obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos e REQM para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$.

		Estimativas		REQM	
$n = 30$	$\mu = 3$	3,0005	3,0004	0,5348	0,5342
	$\sigma^2 = 4$	3,8218	4,8356	1,7034	2,1912
	$\phi = 2$	6,2448	6,6084	21,9474	30,3430
$n = 50$	$\mu = 3$	3,0007	3,0006	0,4079	0,4079
	$\sigma^2 = 4$	3,9063	4,6337	1,2872	1,6760
	$\phi = 2$	3,4372	4,2231	7,7178	17,5485
$n = 100$	$\mu = 3$	2,9993	2,9995	0,2889	0,2890
	$\sigma^2 = 4$	3,9198	4,3761	0,8907	1,2789
	$\phi = 2$	2,3120	2,8205	1,2583	1,7694
$n = 150$	$\mu = 3$	2,9978	2,9977	0,2376	0,2377
	$\sigma^2 = 4$	3,9654	4,2912	0,7387	1,1255
	$\phi = 2$	2,1886	2,5653	0,8131	1,2491
$n = 200$	$\mu = 3$	2,9989	2,9990	0,2083	0,2083
	$\sigma^2 = 4$	3,9774	4,2458	0,6388	1,0089
	$\phi = 2$	2,1370	2,4307	0,6257	0,9841
$n = 500$	$\mu = 3$	3,0022	3,0022	0,1325	0,1325
	$\sigma^2 = 4$	3,9941	4,0958	0,4013	0,7626
	$\phi = 2$	2,0547	2,1902	0,3434	0,5728
$n = 1000$	$\mu = 3$	2,9986	2,9986	0,0903	0,0903
	$\sigma^2 = 4$	3,9930	4,0636	0,2766	0,5576
	$\phi = 2$	2,0263	2,1098	0,2310	0,3901

A Tabela 3.4 contém o desvio padrão empírico das estimativas dos parâmetros do modelo para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$ e a média dos erros padrão obtidos a partir da matriz de informação observada que denotamos por erro teórico. Observamos que os resultados para $n \geq 500$ são próximos, sugerindo que a matriz de informação observada é apropriada para estimar os erros padrão dos estimadores dos parâmetros.

O algoritmo EM e o Método dos Momentos estima alguns valores negativos para σ^2 e ϕ quando $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$, como no caso $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$. As porcentagens de estimativas negativas para σ^2 e/ou ϕ para $n = 30, 50, 100, 150, 200, 500$ e 1000 foram, respectivamente, 20,16%, 9,82%, 1,74%, 0,76%, 0,24%, 0,02% e 0,00%, para o algoritmo EM; e 3,12%, 1,34%, 0,74%, 0,66%, 0,62%, 0,24% e 0,04% para o Método dos Momentos. Nesses casos, a simulação de Monte Carlo foi descartada e aplicada novamente.

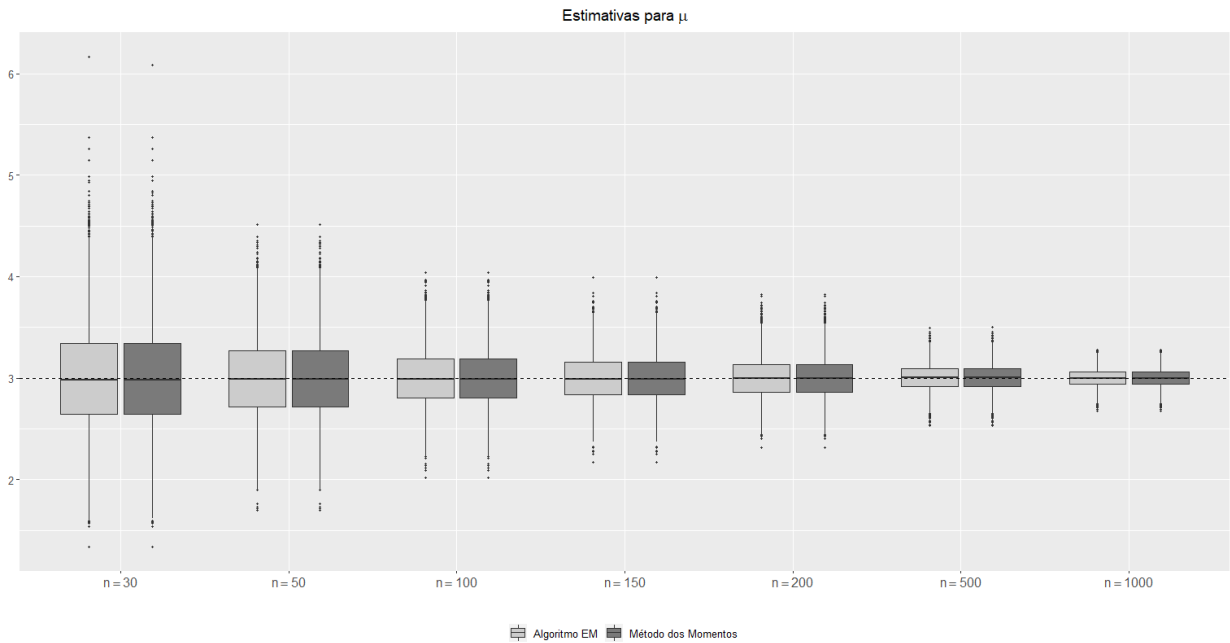


Figura 3.6 *Boxplot* com as estimativas de μ obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\mu = 3$.

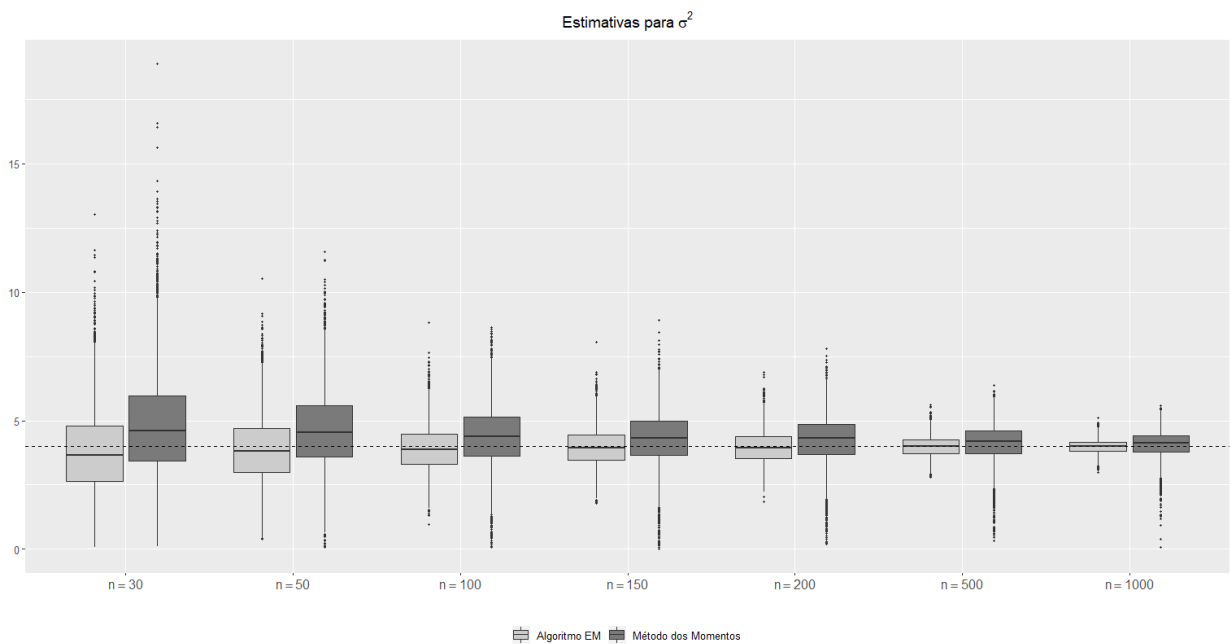


Figura 3.7 *Boxplot* com as estimativas de σ^2 obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\sigma^2 = 4$.

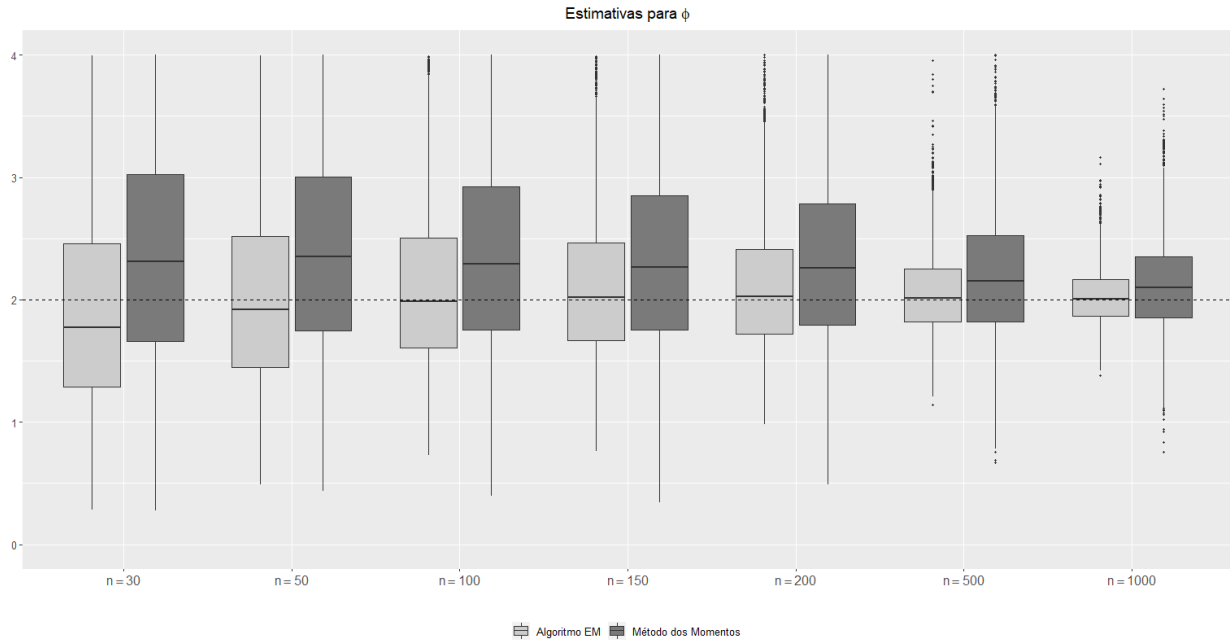


Figura 3.8 *Boxplot* com as estimativas de ϕ obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\phi = 2$.

Tabela 3.4 Erros padrão empíricos e teóricos das estimativas dos parâmetros para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$.

		μ	σ^2	ϕ
$n = 30$	Empírico	0,5349	1,6942	21,5352
	Teórico	0,5287	1,6094	21,2078
$n = 50$	Empírico	0,4080	1,2840	7,5835
	Teórico	0,4101	1,2525	4,8164
$n = 100$	Empírico	0,2890	0,8872	1,2192
	Teórico	0,2901	0,8849	0,9936
$n = 150$	Empírico	0,2376	0,7379	0,7910
	Teórico	0,2374	0,7280	0,6852
$n = 200$	Empírico	0,2083	0,6385	0,6106
	Teórico	0,2057	0,6309	0,5596
$n = 500$	Empírico	0,1325	0,4013	0,3391
	Teórico	0,1303	0,4000	0,3266
$n = 1000$	Empírico	0,0903	0,2765	0,2295
	Teórico	0,0921	0,2827	0,2254

Finalizaremos este capítulo com alguns comentários. O algoritmo EM para a distribuição Normal Inversa Gaussiana foi dado em Karlis e Xekalaki (2005), entretanto, esses autores não exibem a matriz de informação observada. Loregian, Mercuri e Rroji (2012) apresentam o algoritmo EM aproximado para o modelo Variância-Gama (mistura entre as distribuições Normal e Gama) que aqui denotamos por Normal-Gama Misturado. Desta forma, nossas contribuições nesta parte do trabalho foram os cumulantes, o coeficiente de assimetria, a curtose, o Método dos Momentos, o algoritmo EM e a matriz de informação observada para o modelo Normal Média-Variância para qualquer mistura pertencente à família exponencial, com a parametrização dada na Expressão (2.2). Em particular, mostramos o algoritmo EM para o modelo Variância-Gama exato e a matriz de informação observada para os modelos Normal-Gama Misturado e Normal-Inversa Gaussiana Misturado.

No próximo capítulo apresentaremos a distribuição Mittag-Leffler estabelecida por Pillai (1990) e definiremos uma nova distribuição que é a distribuição limite da soma Poisson Fracionada padronizada. Essa distribuição será nomeada de Normal-Mittag-Leffler, pois mostraremos que é uma mistura entre as distribuições Normal e Mittag-Leffler. Exploraremos também algumas propriedades desta nova distribuição.

Capítulo 4

Modelo Normal Mittag-Leffler

Neste capítulo estudaremos a distribuição limite da soma aleatória Poisson Fracionada. Na Seção 4.1, com uma padronização adequada, encontraremos a distribuição limite dessa soma cuja função característica é a função Mittag-Leffler. Mostraremos que a distribuição limite é uma mistura entre as distribuições Normal e Mittag-Leffler, definindo assim a distribuição Normal Mittag-Leffler. Na Seção 4.2 encontraremos as estimativas dos parâmetros dessa variável através do Método dos Momentos e a distribuição assintótica dos estimadores. Um estudo de simulação é apresentado na Seção 4.3.

4.1 Distribuição Limite

Começaremos este capítulo apresentando alguns conceitos preliminares que utilizaremos mais adiante. Os resultados que exibiremos sobre o processo de Poisson Fracionado foram dados em Laskin (2003).

Seja $\{N_t\}_{t \geq 0}$ um processo de Poisson fracionado com parâmetros $\nu > 0$ e $\kappa \in (0, 1]$, denotado por $N_t \sim \text{PPF}(\nu, \kappa)$. A função de probabilidade de N_t , para t fixo, é dada por

$$P(N_t = n) = \frac{(\nu t^\kappa)^n}{n!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+n)!}{i!} \frac{(-\nu t^\kappa)^i}{\Gamma(\kappa(i+n)+1)}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Se $\kappa = 1$, $\{N_t\}_{t \geq 0}$ é um Processo de Poisson com taxa ν . A função geradora de probabilidade de N_t é dada por

$$G_{N_t}(s) = E(s^{N_t}) = \mathcal{E}_\kappa[\nu t^\kappa (s-1)],$$

em que $\mathcal{E}_\kappa(\cdot)$ é a função Mittag-Leffler definida por

$$\mathcal{E}_\kappa(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\kappa m + 1)}, z \in \mathbb{R}.$$

Quando $\kappa = 1$, a função Mittag-Leffler coincide com a função exponencial. Para mais detalhes sobre esta função ver o livro Gorenflo et al. (2014).

A média e a variância de N_t são dadas, respectivamente, por

$$E(N_t) = \frac{\nu t^\kappa}{\Gamma(\kappa + 1)}$$

e

$$Var(N_t) = E(N_t) + E^2(N_t) \left\{ \frac{\kappa B(\kappa, 1/2)}{2^{2\kappa-1}} - 1 \right\},$$

em que $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ é a função beta com $a > 0$ e $b > 0$.

Dizemos que uma variável aleatória N tem distribuição Poisson fracionada se $N \stackrel{d}{=} N_1$, em que N_1 é o número de eventos ocorridos no intervalo de tempo $(0, 1)$ de acordo com um Processo de Poisson Fracionado com parâmetros ν e κ . Utilizaremos a notação $N \sim \text{PF}(\nu, \kappa)$. Observe que quando $\kappa = 1$, temos que $N \sim \text{Poisson}(\nu)$.

Apresentados esses conceitos, então estamos prontos para encontrar a função característica da distribuição limite da soma Poisson Fracionada com uma determinada padronização.

Proposição 4.1.1. *Considere $\{X_i\}_{i \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E(X) = 0$ e $Var(X) = 1$ e $N_\nu \sim \text{PF}(\nu, \kappa)$, independente da sequência $\{X_i\}_{i \geq 1}$. Então,*

$$\tilde{S}_\nu \equiv \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sum_{i=1}^{N_\nu} X_i \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{d} Y,$$

em que a variável aleatória Y tem função característica

$$\varphi_Y(t) = \mathcal{E}_\kappa\left(-\frac{s^2}{2}\right), s \in \mathbb{R}, \kappa \in (0, 1].$$

Demonstração. Usando propriedades básicas de esperança condicional, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{S}_\nu}(s) &= E \left[E \left[e^{is \left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} \sum_{i=1}^{N_\nu} X_i \right)} \middle| N_\nu \right] \right] \\ &= G_{N_\nu} \left[\varphi_{X_1} \left(\frac{s}{\sqrt{\nu}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \mathcal{E}_\kappa \left\{ \nu \left[\varphi_{X_1} \left(\frac{s}{\sqrt{\nu}} \right) - 1 \right] \right\},$$

em que $G_{N_\nu}(\cdot)$ é a função geradora de probabilidade de N_ν e $\varphi_{X_1}(\cdot)$ é a função característica de X_1 . Tomando o limite e aplicando a Regra de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_{\tilde{S}_\nu}(s) = \mathcal{E}_\kappa \left(-\frac{s^2}{2} \right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad \kappa \in (0, 1].$$

Portanto, \tilde{S}_ν converge em distribuição para Y . □

Seguindo as ideias apresentadas do capítulo anterior, escreveremos a variável aleatória limite Y definida na Proposição 4.1.1 como uma mistura normal. Para isto, utilizaremos uma parametrização específica da distribuição Mittag-Leffler, conforme mostraremos a seguir.

Como apresentado na Proposição 4.1.1, a função característica da variável aleatória Y é $\varphi_Y(s) = \mathcal{E}_\kappa \left(-\frac{s^2}{2} \right)$. Por Gorenflo et al. (2014), páginas 47 e 48, a função Mittag-Leffler com argumento negativo pode ser reescrita como

$$\mathcal{E}_\kappa \left(-\frac{s^2}{2} \right) = \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}u} f_\kappa(u) du, \quad (4.1)$$

em que

$$f_\kappa(u) = \frac{1}{\pi\kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j!} \sin(\pi\kappa j) \Gamma(\kappa j + 1) u^{j-1}. \quad (4.2)$$

Por outro lado, segundo Blumenfeld e Mandelbrot (1997), $f_\kappa(u)$ dada na Expressão (4.2) é a função de probabilidade de uma distribuição Mittag-Leffler com parâmetro κ que denotaremos por $ML(\kappa)$. Com isso, reescrevemos a variável aleatória limite Y como um produto de variáveis aleatórias, como mostra a Proposição 4.1.2.

Proposição 4.1.2. *Uma variável aleatória Y com função característica $\varphi_Y(s) = \mathcal{E}_\kappa \left(-\frac{s^2}{2} \right)$, $s \in \mathbb{R}$, admite a representação*

$$Y \stackrel{d}{=} \sqrt{U}Z, \quad (4.3)$$

em que $Z \sim N(0, 1)$ e $U \sim ML(\kappa)$ são independentes.

Demonstração. Seja U uma variável aleatória com distribuição Mittag-Leffler com função de probabilidade $f_\kappa(u)$ dada na Expressão (4.2). Condiçãoando em U e utilizando propriedades da esperança, a função característica do lado direito de (4.3) é dada por

$$\begin{aligned}
\varphi_{\sqrt{U}Z}(s) &= E(e^{is\sqrt{U}Z}) = E\left[E\left(e^{is\sqrt{U}Z}|U\right)\right] \\
&= E\left[\varphi_Z(s\sqrt{U})\right] = E\left[e^{-\frac{s^2}{2}U}\right] \\
&= \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}u} f_\kappa(u) du = \mathcal{E}_\kappa\left(-\frac{s^2}{2}\right) \quad (\text{pela Express\~{a}o (4.1)}) \\
&= \varphi_Y(s), \quad s \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Com isso, concluimos a demonstra\~{c}o. \square

A representa\~{c}o dada na Express\~{a}o (4.3) indica que a distribui\~{c}o limite Y \u00e9 uma mistura escala normal quando a vari\u00e1vel aleat\u00f3ria da mistura tem distribui\~{c}o $U \sim \text{ML}(\kappa)$. Portanto, condicionando em U ,

$$Y|(U = u) \sim N(0, u).$$

Chamaremos a distribui\~{c}o de uma vari\u00e1vel aleat\u00f3ria Y com a representa\~{c}o estoc\u00e1stica acima de vari\u00e1vel aleat\u00f3ria Normal Mittag-Leffler Padr\u00e3o e denotaremos por $Y \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$. Esta nova caracteriza\~{c}o ser\u00e1 utilizada posteriormente na Se\~{c}o 4.3 para gerarmos dados da distribui\~{c}o Normal Mittag-Leffler Padr\u00e3o.

Encontraremos agora os momentos dessa nova distribui\~{c}o. Observe que os momentos de ordem \u00edmpar de Y s\u00e3o iguais a zero, j\u00e1 que a fun\~{c}o geradora de momentos de Y , $\psi_Y(s) = \mathcal{E}_\kappa\left(\frac{s^2}{2}\right)$, \u00e9 sim\u00e9trica em torno de zero. Os de ordem par s\u00e3o dados no Lema 4.1.1 a seguir.

Lema 4.1.1. *Seja $Y \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$. Seus momentos de ordem par s\u00e3o dados por*

$$E(Y^{2j}) = \frac{(2j)!}{2^j \Gamma(j\kappa + 1)}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad 0 < \kappa \leq 1.$$

Demonstra\~{c}o. Utilizando a expans\u00e3o em s\u00e9rie de Taylor da fun\~{c}o exponencial, a fun\~{c}o geradora de momentos de uma vari\u00e1vel aleat\u00f3ria pode ser dada por

$$\psi_X(s) = E(e^{sX}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^j}{j!} E(X^j). \quad (4.4)$$

A fun\~{c}o geradora de momentos de $Y \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$ \u00e9 dada pela express\u00e3o

$$\psi_Y(s) = \mathcal{E}_\kappa\left(\frac{s^2}{2}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^{2j}}{2^j \Gamma(j\kappa + 1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^{2j}}{(2j)!} \frac{(2j)!}{2^j \Gamma(j\kappa + 1)}. \quad (4.5)$$

Comparando as Expressões (4.4) e (4.5) concluimos que

$$E(Y^{2j}) = \frac{(2j)!}{2^j \Gamma(j\kappa + 1)}, j \in \mathbb{N}, 0 < \kappa \leq 1.$$

□

Utilizando o Lema 4.1.1, a esperança, a variância, o coeficiente de assimetria γ_1 e o excesso de curtose γ_2 de $Y \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$ são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0, \\ \text{Var}(Y) &= \frac{1}{\Gamma(\kappa + 1)}, \\ \gamma_1 &= 0, \\ \gamma_2 &= \frac{6\Gamma^2(\kappa + 1)}{\Gamma(2\kappa + 1)} - 3. \end{aligned} \tag{4.6}$$

A Figura 4.1 contém os gráficos “ $\text{Var}(Y)$ versus κ ” à esquerda e “ γ_2 versus κ ” à direita. Os limites a seguir indicam o comportamento da variância e do excesso de curtose na fronteira do espaço paramétrico de κ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \text{Var}(Y) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\kappa + 1)} = 1, \\ \lim_{\kappa \rightarrow 1} \text{Var}(Y) = \lim_{\kappa \rightarrow 1} \frac{1}{\Gamma(\kappa + 1)} = 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \gamma_2 = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{6\Gamma^2(\kappa + 1)}{\Gamma(2\kappa + 1)} - 3 = 3, \\ \lim_{\kappa \rightarrow 1} \gamma_2 = \lim_{\kappa \rightarrow 1} \frac{6\Gamma^2(\kappa + 1)}{\Gamma(2\kappa + 1)} - 3 = 0. \end{array} \right.$$

Assim, no limite do espaço paramétrico de κ temos que a variância da variável aleatória $Y \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$ é igual a um. Quando $\kappa \rightarrow 0$, a distribuição tem caudas mais pesadas do que a normal, pois $\gamma_2 > 0$. Já para $\kappa \rightarrow 1$, o excesso de curtose da distribuição Normal Mittag-Leffler coincide com o da distribuição Normal.

A Figura 4.1 ilustra os gráficos da variância e excesso de curtose de $Y \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$ para $\kappa \in (0, 1]$. Aplicando o método de Newton-Raphson, o ponto de máximo da função $\frac{1}{\Gamma(\kappa+1)}$, para $0 < \kappa \leq 1$, é aproximadamente $\kappa = 0,4616$. Portanto, a variância começa em 1 para $\kappa \rightarrow 0$, cresce atingindo o valor máximo de aproximadamente 1,1292 e depois decresce até atingir 1 novamente quando $\kappa \rightarrow 1$. O excesso de curtose assume valor máximo 3 quando $\kappa \rightarrow 0$.

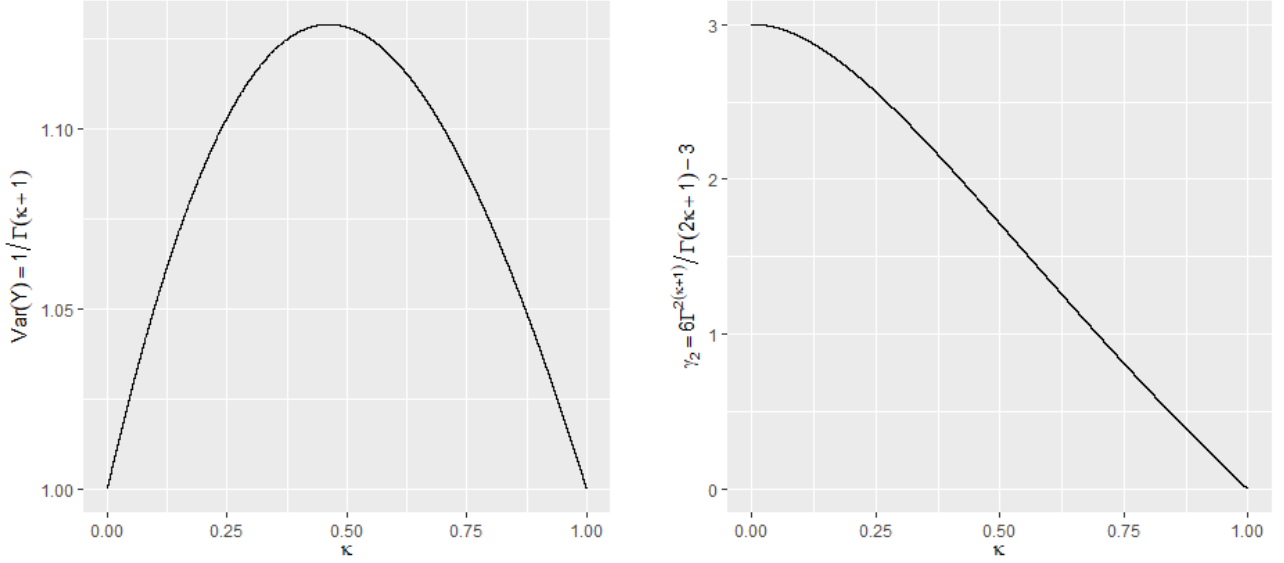


Figura 4.1 Gráficos da $Var(Y)$ versus κ e γ_2 versus κ para $\kappa \in (0, 1]$.

A função densidade de probabilidade de $Y \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$, $0 < \kappa \leq 1$ é dada por

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \int_0^{+\infty} f_{Y|U}(y|u) f_\kappa(u) du \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-\frac{y^2}{2u}} \frac{1}{\pi \kappa} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j!} \sin(\pi \kappa j) \Gamma(\kappa j + 1) u^{j-1} du, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

No exemplo a seguir, apresentamos alguns casos limites e um caso particular para a função densidade de probabilidade dada na Expressão (4.7).

Exemplo 4.1.1. Por Blumenfeld e Mandelbrot (1997), a função de probabilidade da distribuição Mittag-Leffler dada na Expressão (4.2), tem como casos particulares

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\kappa \rightarrow 0} f_\kappa(u) = \exp(-u); \\ f_{\frac{1}{2}}(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}} \text{ (Gaussiana Truncada com parâmetro de escala } \sqrt{2}); \\ \lim_{\kappa \rightarrow 1} f_\kappa(u) = \delta(u), \text{ em que } \delta(u) \text{ é a função Delta-Dirac.} \end{array} \right.$$

Substituindo estas expressões para f_κ na função densidade de probabilidade de $Y \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$ dada na Expressão (4.7) e integrando, obtemos, respectivamente:

i) $\lim_{\kappa \rightarrow 0} f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|y|}$, isto é, a função densidade de probabilidade da distribuição Laplace Simétrica com parâmetro de escala $\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$\begin{aligned}
ii) \quad f_{\frac{1}{2}}(y) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi\sqrt{2u}} e^{-\frac{y^2}{2u} - \frac{u^2}{4}} du \\
&= \frac{-2\sqrt{\pi}|y| {}_0F_2\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{y^4}{64}\right) + \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) {}_0F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}; -\frac{y^4}{64}\right) + y^2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) {}_0F_2\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}; -\frac{y^4}{64}\right)}{2\pi},
\end{aligned}$$

em que ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$ é a função hipergeométrica generalizada, como indicado em Abramowitz e Stegun (1972);

iii) $\lim_{\kappa \rightarrow 1} f_U(u) = 0$, ou seja, uma variável degenerada em 0.

A função densidade de probabilidade dada na Expressão (4.7) pode ser representada de uma outra maneira para facilitar a implementação computacional do modelo, como mostra a Proposição 4.1.3.

Proposição 4.1.3. A função densidade de probabilidade de $Y \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$, $0 < \kappa \leq 1$, pode ser representada como

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(ty) \mathcal{E}_{\kappa}\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (4.8)$$

em que $\mathcal{E}_{\kappa}(\cdot)$ é a função Mittag-Leffler.

Demonstração. Por Agahi e Alipour (2019), temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_{\kappa}\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma\left(1 - \frac{\kappa}{2}\right)}, \quad 0 < \kappa \leq 1.$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{d\kappa} \left[\Gamma\left(1 - \frac{\kappa}{2}\right) \right]^{-1} = \frac{\Psi\left(1 - \frac{\kappa}{2}\right)}{2\Gamma\left(1 - \frac{\kappa}{2}\right)} < 0,$$

em que $\Psi(z) = \frac{d}{dz} \ln(\Gamma(z))$ é a função digama. Portanto, a função $\left[\Gamma\left(1 - \frac{\kappa}{2}\right) \right]^{-1}$ é decrescente no intervalo $(0, 1]$ e $\lim_{\kappa \rightarrow 0} \left[\Gamma\left(1 - \frac{\kappa}{2}\right) \right]^{-1} = 1$.

Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_Y(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{E}_{\kappa}\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right| dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma\left(1 - \frac{\kappa}{2}\right)} < \infty.$$

Pelo Teorema da Inversão (ver, por exemplo, o Teorema 1.4 de Gut (2005)), como

$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_Y(t)| dt < \infty$, em que $\varphi_Y(t)$ é a função característica de $Y \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$, Y tem distribuição absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} \varphi_Y(t) dt. \quad (4.9)$$

Desenvolvendo a Expressão (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} \varphi_Y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(ty) - i \sin(ty)] \varphi_Y(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\cos(ty) \mathcal{E}_{\kappa} \left(-\frac{t^2}{2} \right)}_{\text{Função par}} dt - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\sin(ty) \mathcal{E}_{\kappa} \left(-\frac{t^2}{2} \right)}_{\text{Função ímpar}} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(ty) \mathcal{E}_{\kappa} \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

A Figura 4.2 apresenta o gráfico da função densidade de probabilidade $f_Y(y)$ da variável aleatória Y com distribuição Normal Mittag-Leffler Padrão, dada na Expressão (4.8), para alguns valores de κ . Observa-se que quanto menor o valor de κ maior é o valor do pico.

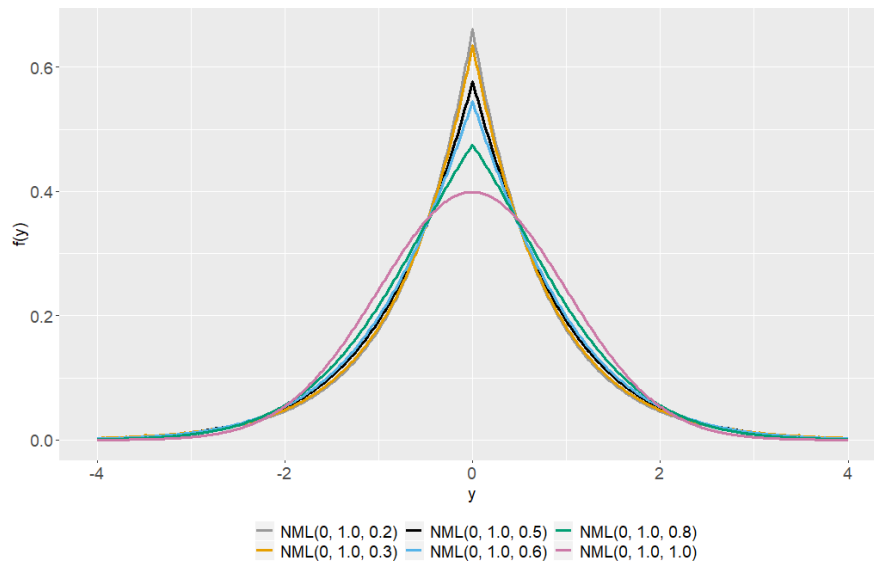


Figura 4.2 Gráfico da função densidade de probabilidade de $Y \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$ para alguns valores de κ .

Agora, consideraremos um caso mais geral fazendo uma mudança na locação e na escala da variável aleatória Normal Mittag-Leffler Padrão, definindo assim a variável aleatória Normal Mittag-Leffler com parâmetros μ, σ^2 e κ . Notação: $Y \sim \text{NML}(\mu, \sigma^2, \kappa)$. O Lema 4.1.2 apresenta uma expressão geral para os momentos desta variável aleatória transformada.

Lema 4.1.2. *Seja $Y = \sigma X + \mu$ com $X \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$. Seus momentos são dados por*

$$E(Y^n) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{(n-1)/2} \frac{n!}{(2j+1)!} \frac{2^{(2j+1-n)/2}}{\Gamma\left[\left(\frac{n-2j-1}{2}\right)\kappa + 1\right]} \sigma^{n-2j-1} \mu^{2j+1}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \sum_{j=0}^{n/2} \frac{n!}{(2j)!} \frac{2^{j-n/2}}{\Gamma\left[\left(\frac{n}{2} - j\right)\kappa + 1\right]} \sigma^{n-2j} \mu^{2j}, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Demonstração. Observe que se $X \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$ então $Y = \sigma X + \mu$ tem distribuição Normal Mittag-Leffler com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{\Gamma(\kappa + 1)}$. Pela igualdade $E(Y^n) = E[(\sigma X + \mu)^n]$, utilizando o binômio de Newton e o Lema 4.1.1, obtemos a Expressão (4.10). \square

A esperança e a variância de $Y = \sigma X + \mu$ com $X \sim \text{ML}(0, 1, \kappa)$, são dadas, respectivamente, por

$$E(Y) = \mu, \\ \text{Var}(Y) = \frac{\sigma^2}{\Gamma(\kappa + 1)}.$$

Uma outra representação da função densidade de probabilidade para o caso geral $Y \sim \text{NML}(\mu, \sigma^2, \kappa)$ é dada na proposição a seguir.

Proposição 4.1.4. *A função densidade de probabilidade de $Y \sim \text{NML}(\mu, \sigma^2, \kappa)$, $0 < \kappa \leq 1$, pode ser representada como*

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\pi} \int_0^\infty \cos\left(t\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right) \mathcal{E}_\kappa\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (4.11)$$

em que $\mathcal{E}_\kappa(\cdot)$ é a função Mittag-Leffler.

Demonstração. Basta utilizar a transformação $Y = \sigma X + \mu$, com $X \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$ e a Proposição 4.1.3. \square

A Figura 4.3 ilustra a função densidade de probabilidade da distribuição Normal Mittag-Leffler, dada na Expressão (4.11), para alguns valores de μ, σ^2 e κ .

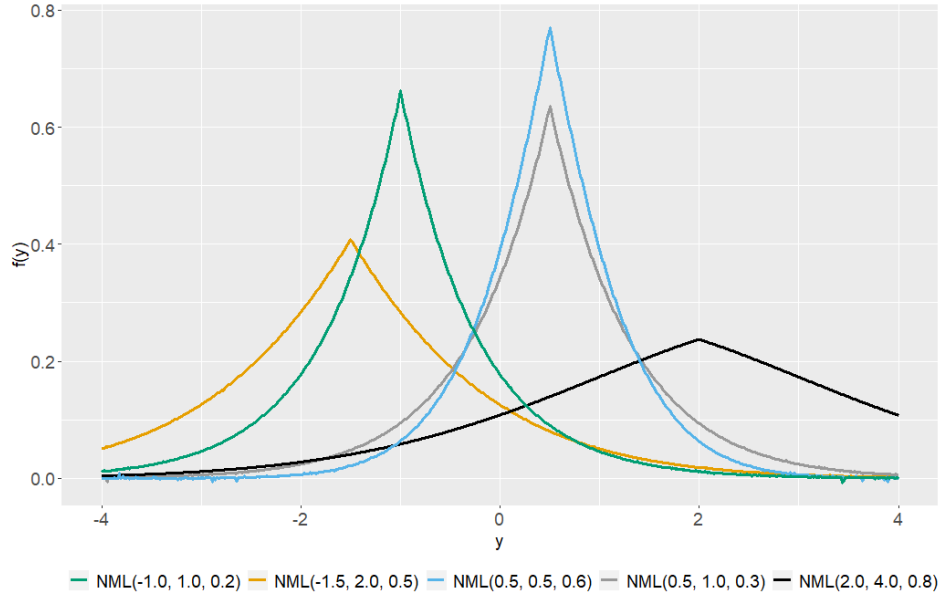


Figura 4.3 Gráfico da função densidade de probabilidade de $Y \sim \text{NML}(\mu, \sigma^2, \kappa)$ para alguns valores de μ, σ^2 e κ .

Agahi e Alipour (2019) definiram uma distribuição Mittag-Leffler-Gaussiana que generaliza a distribuição Normal. As funções densidade de probabilidade para o caso padrão e para o caso geral são dadas, respectivamente, por

$$f(x; \alpha) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mathcal{E}_{\alpha, \alpha}\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

$$f(x; \alpha, \mu, \sigma) = \frac{\sqrt{\sigma}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mathcal{E}_{\alpha, \alpha}(-\sigma(x - \mu)^2), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \sigma > 0, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

em que

$$\mathcal{E}_{\alpha, \alpha}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(m\alpha + \alpha)}$$

é a função Mittag-Leffler com dois parâmetros. Se $\alpha = 1$ a distribuição Mittag-Leffler-Gaussiana coincide com a distribuição Normal.

Apesar de nomes semelhantes, a distribuição que definimos é diferente da proposta por Agahi e Alipour (2019). A mistura que apresentamos entre a distribuição Mittag-Leffler e a distribuição Normal surgiu como limite da soma Poisson Fracionada, utilizando uma parametrização específica. Além disso, na distribuição Normal Mittag-Leffler quando o índice da função Mittag-Leffler κ tende a um, a variável aleatória limite converge para uma variável aleatória degenerada no zero e não para a distribuição Normal como na distribuição Mittag-Leffler-Gaussiana.

4.2 Estimação dos Parâmetros e Distribuição Assintótica dos Estimadores

Nesta seção discutiremos a estimação dos parâmetros da distribuição Normal Mittag-Leffler através do Método dos Momentos e encontraremos a matriz de variância-covariância.

A estimação dos parâmetros de $Y \sim \text{NML}(\mu, \sigma^2, \kappa)$ pelo Método dos Momentos é dada pela solução do sistema de equações

$$\begin{cases} \mu_1 = M_1 \\ \mu_2 = M_2 \\ \mu_4 = M_4 \end{cases} \implies \begin{cases} \mu = M_1 \\ \frac{\sigma^2}{\Gamma(\kappa + 1)} + \mu^2 = M_2 \\ \frac{6\sigma^4}{\Gamma(2\kappa + 1)} + \frac{6\mu^2\sigma^2}{\Gamma(\kappa + 1)} + \mu^4 = M_4, \end{cases} \quad (4.12)$$

em que $\mu_j = E(Y^j)$ são os momentos populacionais e $M_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^j$ denotam os momentos amostrais para $j = 1, 2, 4$.

Observação: Utilizamos a igualdade entre o quarto momento populacional e o quarto momento amostral, pois o sistema de equações utilizando os terceiros momentos possui infinitas soluções.

Para resolvermos o sistema de equações dado na Expressão (4.12), definimos uma função $h : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h(\kappa) \equiv \frac{\Gamma^2(\kappa + 1)}{\Gamma(2\kappa + 1)}. \quad (4.13)$$

Mostraremos que a função h possui inversa e, desta forma, o sistema possui solução. Aplicando o logaritmo e calculando a derivada primeira obtemos

$$\frac{d}{d\kappa} \log h(\kappa) = \frac{d}{d\kappa} \log \left\{ \frac{\Gamma^2(\kappa + 1)}{\Gamma(2\kappa + 1)} \right\} = 2[\Psi(\kappa + 1) - \Psi(2\kappa + 1)], \quad (4.14)$$

em que $\Psi(z)$ é a função digama. Conforme Abramowitz e Stegun (1972) pág. 259, a função digama pode ser representada por

$$\Psi(z) = \int_0^1 \frac{1 - t^{z-1}}{1 - t} dt - \gamma,$$

em que $\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{te^t} \right) dt$. Assim, a Expressão (4.14) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{d\kappa} \log h(\kappa) = 2 \int_0^1 \frac{-t^\kappa(1 - t^\kappa)}{1 - t} dt.$$

Como a integral acima avalia t entre zero e um e, além disso, a função $\frac{-t^\kappa(1-t^\kappa)}{1-t}$ é menor que zero nesse intervalo, temos $\int_0^1 \frac{-t^\kappa(1-t^\kappa)}{1-t} dt < 0$. Então,

$$\frac{d}{d\kappa} \log h(\kappa) < 0, \forall \kappa \in (0, 1].$$

Desta forma, demonstramos que a função $h(\kappa)$ é monótona e, portanto, possui inversa que será denotada por h^{-1} . A Figura 4.4 apresenta o gráfico de $\frac{d}{d\kappa} \log h(\kappa)$ versus κ , para $\kappa \in (0, 1]$.

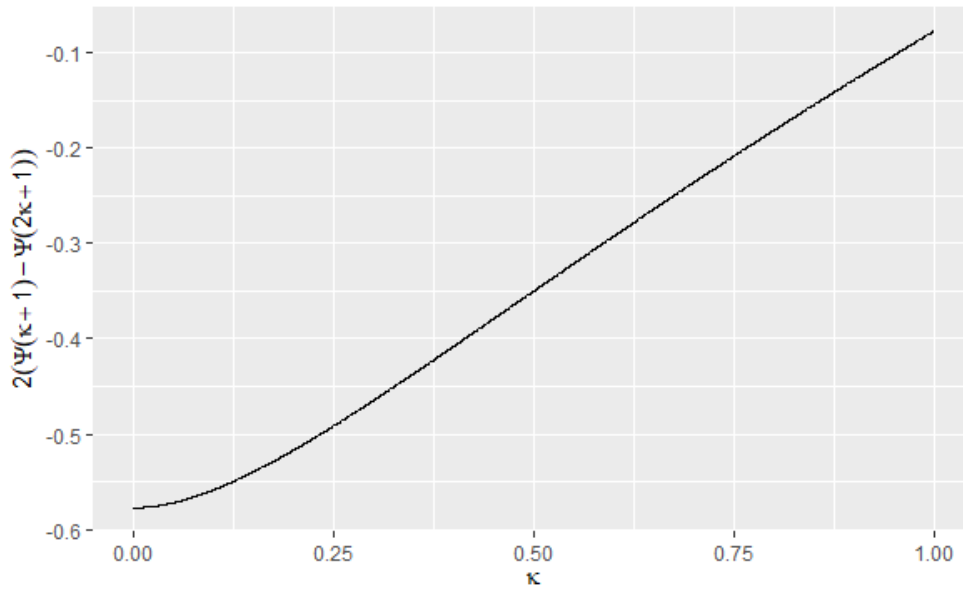


Figura 4.4 Gráfico da função $\frac{d}{d\kappa} \log h(\kappa)$ versus κ , para $\kappa \in (0, 1]$.

Resolvendo o sistema de equações dado na Expressão (4.12), os estimadores dos parâmetros pelo Método dos Momentos são dadas por

$$\begin{cases} \hat{\mu} &= M_1, \\ \hat{\sigma}^2 &= (M_2 - M_1^2) \Gamma \left(h^{-1} \left(\frac{M_4 - 6M_1^2 M_2 + 5M_1^4}{6(M_2 - M_1^2)^2} \right) + 1 \right), \quad M_2 > M_1^2, \\ \hat{\kappa} &= h^{-1} \left(\frac{M_4 - 6M_1^2 M_2 + 5M_1^4}{6(M_2 - M_1^2)^2} \right). \end{cases} \quad (4.15)$$

Agora encontraremos a matriz de variância e covariância dos estimadores dos parâmetros do Método dos Momentos utilizando o Método Delta. Pelo Teorema Central do Limite,

$$\sqrt{n} \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^4}{n} \right) - (\mu_1, \mu_2, \mu_4) \right] \xrightarrow{d} N_3(0, \Sigma),$$

em que $\mu_1 = E(Y) = \mu$, $\mu_2 = E(Y^2) = \frac{\sigma^2}{\Gamma(\kappa + 1)} + \mu^2$, $\mu_4 = E(Y^4) = \frac{6\mu^2\sigma^2}{\Gamma(\kappa + 1)} + \frac{6\sigma^4}{\Gamma(2\kappa + 1)} + \mu^4$ e Σ é a matriz de covariância dada por

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var(Y_1) & Cov(Y_1, Y_1^2) & Cov(Y_1, Y_1^4) \\ Cov(Y_1, Y_1^2) & Var(Y_1^2) & Cov(Y_1^2, Y_1^4) \\ Cov(Y_1, Y_1^4) & Cov(Y_1^2, Y_1^4) & Var(Y_1^4) \end{pmatrix},$$

cujas entradas são

$$\Sigma_{11} = \frac{\sigma^2}{\Gamma(\kappa + 1)} = Var(Y_1),$$

$$\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = \frac{2\mu\sigma^2}{\Gamma(\kappa + 1)} = Cov(Y_1, Y_1^2),$$

$$\Sigma_{13} = \Sigma_{31} = \frac{24\mu\sigma^4}{\Gamma(2\kappa + 1)} + \frac{4\mu^3\sigma^2}{\Gamma(\kappa + 1)} = Cov(Y_1, Y_1^4),$$

$$\Sigma_{22} = \frac{6\sigma^4}{\Gamma(2\kappa + 1)} + \frac{4\mu^2\sigma^2}{\Gamma(\kappa + 1)} - \frac{\sigma^4}{[\Gamma(\kappa + 1)]^2} = Var(Y_1^2),$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{23} = \Sigma_{32} &= \frac{90\sigma^6}{\Gamma(3\kappa + 1)} - \frac{6\sigma^6}{\Gamma(2\kappa + 1)\Gamma(\kappa + 1)} + \frac{84\mu^2\sigma^4}{\Gamma(2\kappa + 1)} - \frac{6\mu^2\sigma^4}{[\Gamma(\kappa + 1)]^2} + \frac{8\mu^4\sigma^2}{\Gamma(\kappa + 1)} \\ &= Cov(Y_1^2, Y_1^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{33} &= \frac{16\mu^6\sigma^2}{\Gamma(\kappa + 1)} + \frac{408\mu^4\sigma^4}{\Gamma(2\kappa + 1)} - \frac{36\mu^4\sigma^4}{[\Gamma(\kappa + 1)]^2} - \frac{72\mu^2\sigma^6}{\Gamma(\kappa + 1)\Gamma(2\kappa + 1)} + \frac{2520\mu^2\sigma^6}{\Gamma(3\kappa + 1)} + \frac{2520\sigma^8}{\Gamma(4\kappa + 1)} \\ &\quad - \frac{36\sigma^8}{[\Gamma(2\kappa + 1)]^2} = Var(Y_1^4). \end{aligned}$$

Para aplicarmos o Método Delta, definimos a função $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, diferenciável, tal que

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), g_3(x, y, z)) \\ &= \left(x, (y - x^2)\Gamma \left(h^{-1} \left(\frac{z - 6x^2y + 5x^4}{6(y - x^2)^2} \right) + 1 \right), h^{-1} \left(\frac{z - 6x^2y + 5x^4}{6(y - x^2)^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

em que h^{-1} é a inversa da função h definida na Expressão (4.13). Aplicando a função g nos momentos amostrais, obtemos

$$\begin{cases} \hat{\mu} &= g_1(M_1, M_2, M_4), \\ \hat{\sigma}^2 &= g_2(M_1, M_2, M_4), \\ \hat{\kappa} &= g_3(M_1, M_2, M_4). \end{cases}$$

Portanto, pelo Método Delta, temos a convergência em distribuição:

$$\sqrt{n}[(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\kappa}) - (\mu, \sigma^2, \kappa)] \xrightarrow{d} N_3(0, \nabla g \Sigma (\nabla g)^T),$$

na qual ∇g é uma matriz não-nula dada por

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial g_1(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial g_1(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial g_2(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial g_2(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial g_3(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial g_3(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial g_3(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \nabla g_{21} & \nabla g_{22} & \nabla g_{23} \\ \nabla g_{31} & \nabla g_{32} & \nabla g_{33} \end{pmatrix},$$

com

$$\nabla g_{21} = -2x\Gamma(h^{-1}(a) + 1) + (y - x^2)\Gamma'(h^{-1}(a) + 1) \frac{d}{dx} \{h^{-1}(a)\},$$

$$\nabla g_{22} = \Gamma(h^{-1}(a) + 1) + (y - x^2)\Gamma'(h^{-1}(a) + 1) \frac{d}{dy} \{h^{-1}(a)\},$$

$$\nabla g_{23} = (y - x^2)\Gamma'(h^{-1}(a) + 1) \frac{d}{dz} \{h^{-1}(a)\},$$

$$\nabla g_{31} = \frac{d}{dx} \{h^{-1}(a)\},$$

$$\nabla g_{32} = \frac{d}{dy} \{h^{-1}(a)\} \text{ e}$$

$$\nabla g_{33} = \frac{d}{dz} \{h^{-1}(a)\},$$

$$\text{em que } a = \frac{z - 6x^2y + 5x^4}{6(y - x^2)^2} \text{ e}$$

$$\Gamma'(h^{-1}(a) + 1) = \Gamma(h^{-1}(a) + 1)\psi(h^{-1}(a) + 1),$$

$$\frac{d}{dx} \{h^{-1}(a)\} = \frac{1}{h'(h^{-1}(a))} \left(\frac{4x^3y - 6xy^2 + 2xz}{3(y - x^2)^3} \right),$$

$$\frac{d}{dy} \{h^{-1}(a)\} = \frac{1}{h'(h^{-1}(a))} \left(\frac{-2x^4 + 3x^2y - z}{3(y - x^2)^3} \right),$$

$$\frac{d}{dz} \{h^{-1}(a)\} = \frac{1}{h'(h^{-1}(a))6(y-x^2)^2},$$

$$h'(h^{-1}(a)) = \frac{2\Gamma^2(h^{-1}(a)+1) [\Psi(h^{-1}(a)+1) - \Psi(2h^{-1}(a)+1)]}{\Gamma(2h^{-1}(a)+1)},$$

em que $\Psi(\cdot)$ é a função digama.

Vimos nesta seção a estimação dos parâmetros da distribuição Normal Mittag-Leffler através do método dos momentos e a distribuição assintótica dos estimadores. A estimação via máxima verossimilhança direta ou através do algoritmo EM é inviável, pois as representações da função densidade de probabilidade encontradas para essa distribuição são dadas em função de uma soma infinita e por uma integral imprópria envolvendo a função Mittag-Leffler.

4.3 Estudo de Simulação

Nesta seção apresentaremos um estudo de simulação para analisarmos o comportamento dos estimadores obtidos através do Método dos Momentos da distribuição Normal Mittag-Leffler.

Para simularmos a distribuição Normal Mittag-Leffler executamos os seguintes passos.

- Primeiro geramos amostras de tamanho $n = 200, 500, 1000$ e 2000 de $U \sim \text{ML}(\kappa)$, para $\kappa = 0, 2, 0, 3, 0, 5, 0, 6$ e $0, 8$, através do algoritmo dado em Ridout (2009) que tem como base a transformada de Laplace.
- Em seguida utilizamos a representação estocástica encontrada na Expressão (4.3) e fazemos a transformação $Y = \mu + \sigma\sqrt{U}Z$, $Z \sim N(0, 1)$, considerando $\mu = 0, 5$ e $\sigma^2 = 1, 0$ em todos os cenários.
- Através das Equações (4.15) estimamos μ e o parâmetro κ utilizando a função `uniroot` do programa R.
- Com a estimativa de κ , encontramos a estimativa de σ^2 usando as Expressões (4.15).
- Repetimos esse processo para 5000 réplicas de Monte Carlo.
- Calculamos também a raiz do erro quadrático médio (REQM) das estimativas dos parâmetros. Os resultados são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 Média das estimativas dos parâmetros obtidas pelo Método dos Momentos e REQM entre parênteses considerando $Y \sim \text{NML}(\mu, \sigma^2, \kappa)$ para alguns valores de μ , σ^2 e κ .

	Estimativas (REQM)			
	n = 200	n = 500	n = 1000	n = 2000
$\mu = 0,5$	0,4920 (0,0729)	0,4958 (0,0460)	0,4972 (0,0330)	0,4983 (0,0235)
$\sigma^2 = 1,0$	0,9615 (0,1469)	0,9657 (0,0999)	0,9717 (0,0781)	0,9790 (0,0596)
$\kappa = 0,2$	0,5138 (0,3809)	0,4261 (0,2843)	0,3557 (0,2135)	0,3056 (0,1631)
$\mu = 0,5$	0,4952 (0,0732)	0,4958 (0,0472)	0,4980 (0,0330)	0,4992 (0,0237)
$\sigma^2 = 1,0$	0,9956 (0,1451)	0,9899 (0,0963)	0,9929 (0,0698)	0,9974 (0,0532)
$\kappa = 0,3$	0,5390 (0,3205)	0,4454 (0,2295)	0,3952 (0,1781)	0,3517 (0,1368)
$\mu = 0,5$	0,4968 (0,0753)	0,4991 (0,0471)	0,4989 (0,0332)	0,4999 (0,0239)
$\sigma^2 = 1,0$	1,0188 (0,1371)	1,0145 (0,0880)	1,0084 (0,0620)	1,0069 (0,0442)
$\kappa = 0,5$	0,5998 (0,2305)	0,5471 (0,1846)	0,5201 (0,1479)	0,5102 (0,1148)
$\mu = 0,5$	0,4997 (0,0732)	0,4994 (0,0477)	0,5006 (0,0336)	0,5003 (0,0231)
$\sigma^2 = 1,0$	1,0189 (0,1331)	1,0139 (0,0851)	1,0075 (0,0591)	1,0043 (0,0407)
$\kappa = 0,6$	0,6559 (0,2101)	0,6281 (0,1725)	0,6088 (0,1364)	0,6030 (0,0986)
$\mu = 0,5$	0,5006 (0,0733)	0,5003 (0,0462)	0,5011 (0,0325)	0,4997 (0,0233)
$\sigma^2 = 1,0$	1,0034 (0,1199)	1,0029 (0,0787)	1,0021 (0,0565)	1,0017 (0,0402)
$\kappa = 0,8$	0,7690 (0,1692)	0,7955 (0,1258)	0,8010 (0,0943)	0,8032 (0,0695)

Observamos pela Tabela 4.1 que o Método dos Momentos estima satisfatoriamente os parâmetros μ e σ^2 em todos os cenários. As estimativas de κ foram razoáveis para $\kappa \geq 0,5$ e ficaram mais próximas dos valores verdadeiros a partir de $n = 1000$. À medida que o tamanho da amostra aumenta, a raiz do erro quadrático diminui, como esperado. As estimativas obtidas pelo Método dos Momentos não são muito próximas dos valores verdadeiros para $\kappa = 0,2$ e $0,3$. Para contornarmos esse problema, aplicamos o método *bootstrap*, entretanto, as estimativas obtidas por esse método foram bem próximas das encontradas pelo Método dos Momentos, sem ganho significativo. Desta forma, o caso $\kappa < 0,5$ precisa ser melhor investigado. Veremos adiante que não tivemos este problema na aplicação, pois a estimativa de κ foi em torno de $0,5$.

As Figuras 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9 mostram os *boxplots* com as estimativas de μ , σ^2 e κ obtidas pelo Método dos Momentos para todos os casos considerados. Observamos que, à medida que o valor de κ aumenta, os *boxplots* se aproximam das linhas horizontais pontilhadas que indicam os valores verdadeiros dos parâmetros.

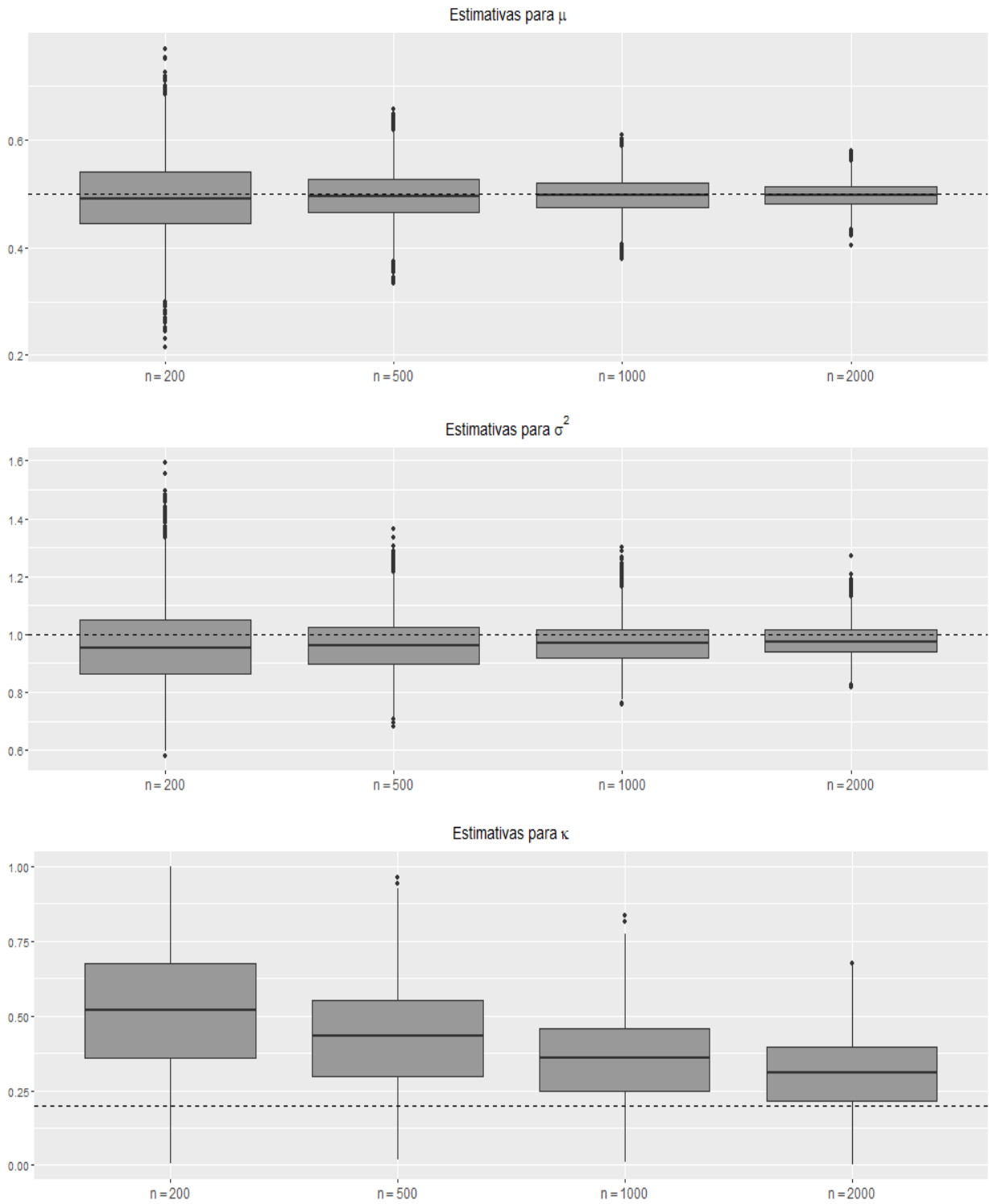


Figura 4.5 *Boxplot* com as estimativas de μ , σ^2 e κ , respectivamente, obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 2)$. As linhas horizontais pontilhadas indicam os valores verdadeiros dos parâmetros.

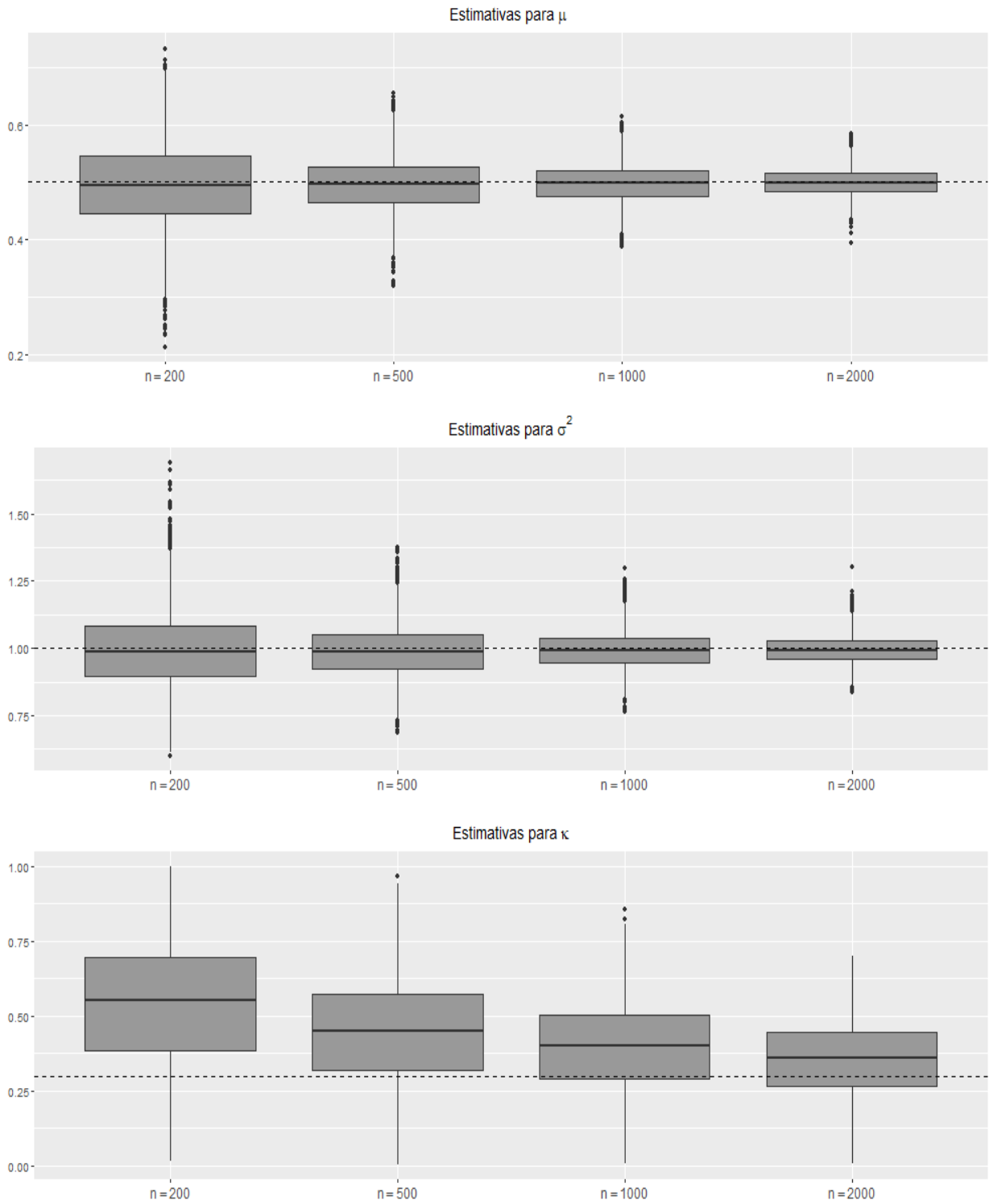


Figura 4.6 *Boxplot* com as estimativas de μ , σ^2 e κ , respectivamente, obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 3)$. As linhas horizontais pontilhadas indicam os valores verdadeiros dos parâmetros.

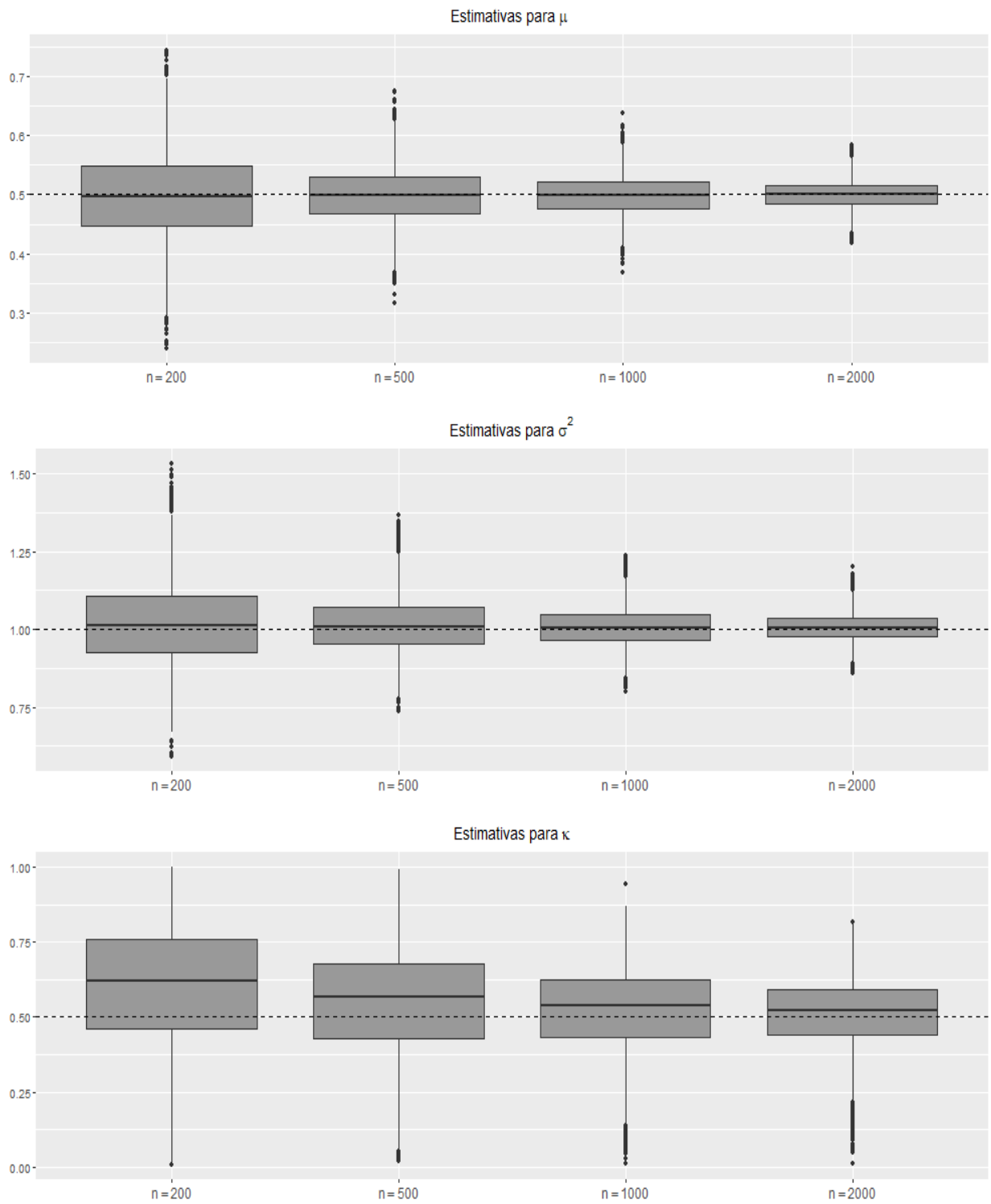


Figura 4.7 *Boxplot* com as estimativas de μ , σ^2 e κ , respectivamente, obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 5)$. As linhas horizontais pontilhadas indicam os valores verdadeiros dos parâmetros.

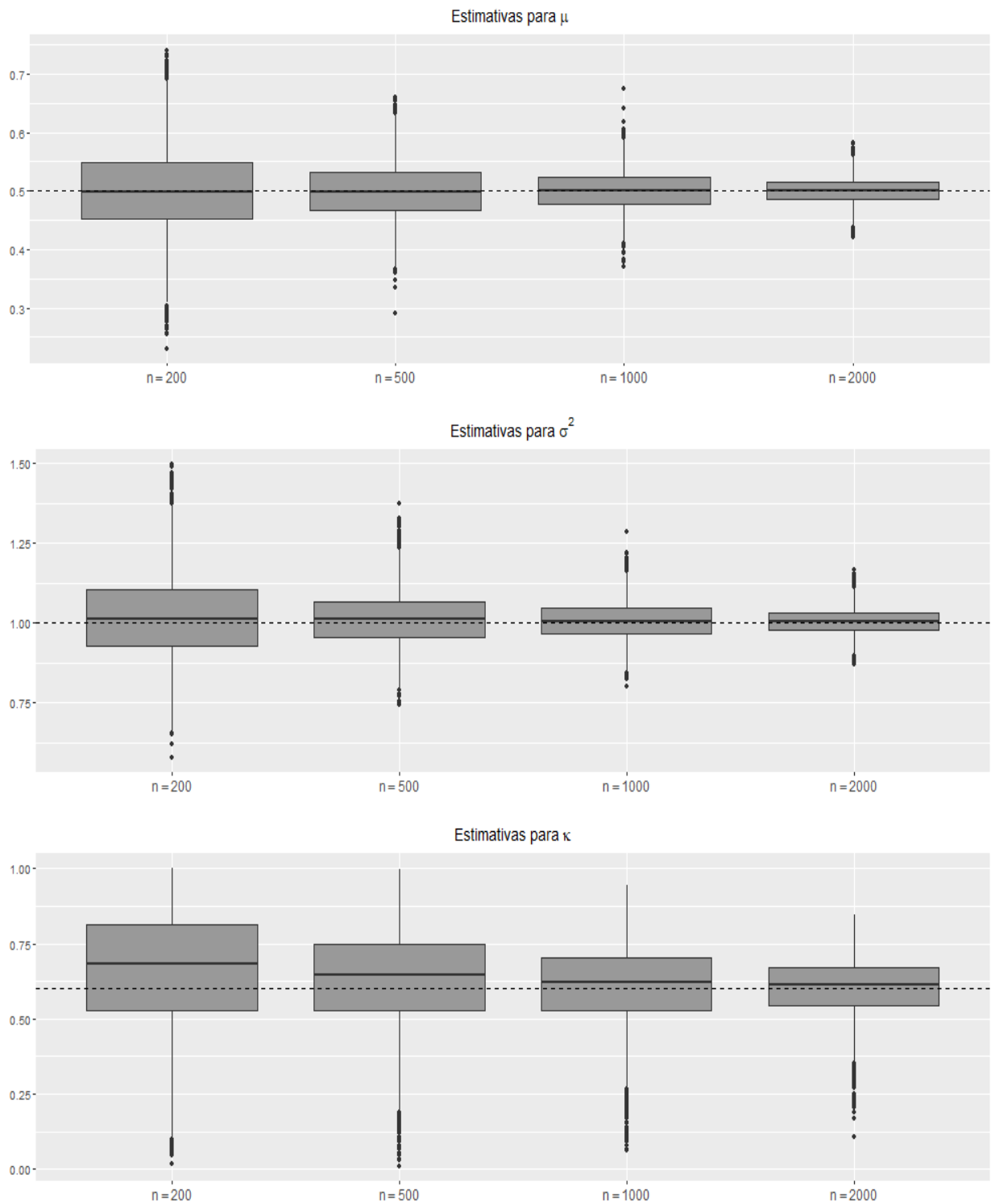


Figura 4.8 *Boxplot* com as estimativas de μ , σ^2 e κ , respectivamente, obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 6)$. As linhas horizontais pontilhadas indicam os valores verdadeiros dos parâmetros.

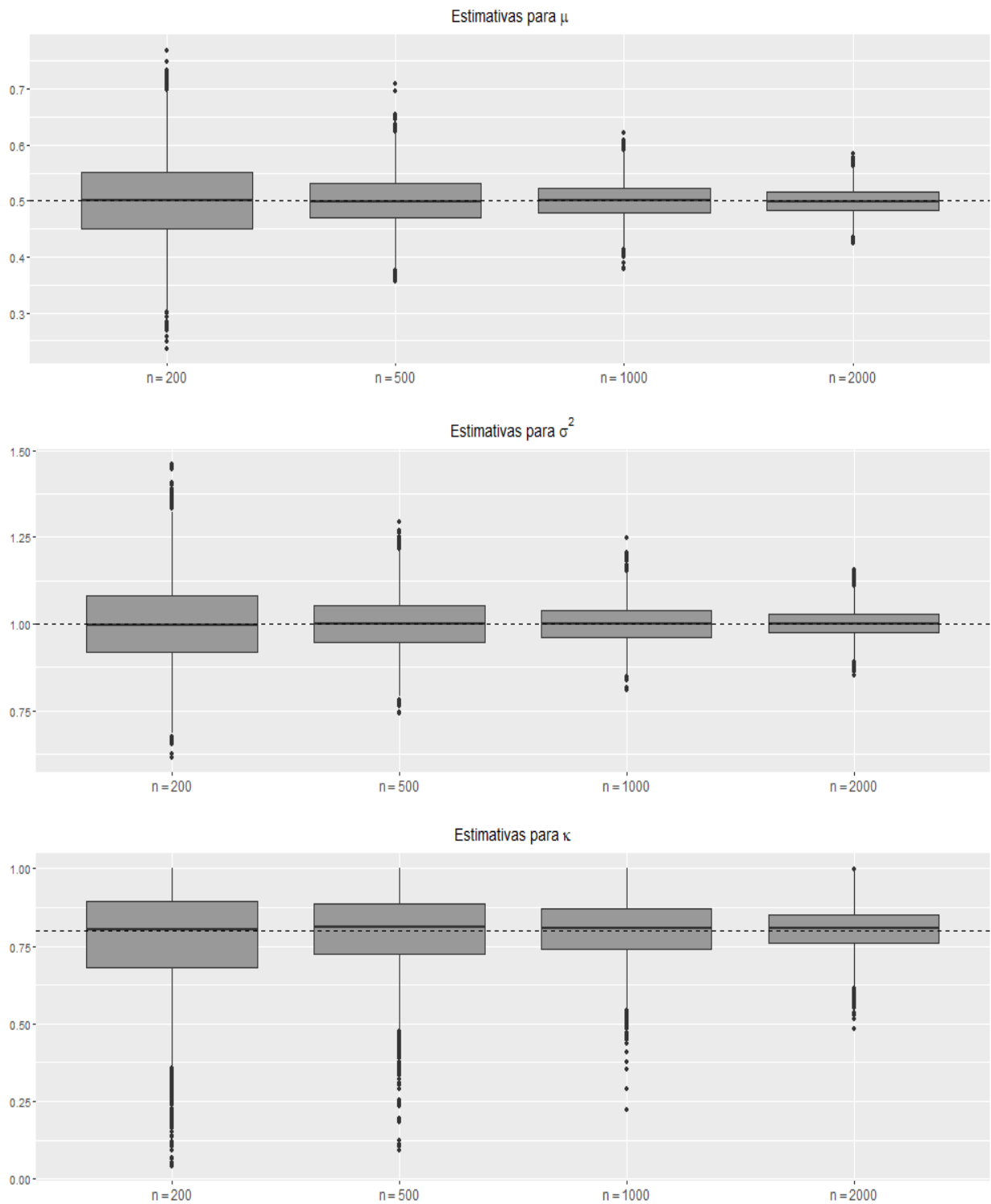


Figura 4.9 *Boxplot* com as estimativas de μ , σ^2 e κ , respectivamente, obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0,5, \sigma^2 = 1,0, \kappa = 0,8)$. As linhas horizontais pontilhadas indicam os valores verdadeiros dos parâmetros.

O erro padrão teórico e o erro padrão empírico baseado nas estimativas da simulação de Monte Carlo são mostrados na Tabela 4.2. Os valores dos erros obtidos para o parâmetro μ são próximos para todos os cenários estudados. Para os parâmetros σ^2 e κ , à medida que n aumenta, o erro padrão e o erro empírico diminuem. Quando κ aumenta, os erros padrão e empírico aproximam cada vez mais.

Tabela 4.2 Erros padrão empíricos e teóricos das estimativas dos parâmetros para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa)$.

Erros Padrão									
		n = 200		n = 500		n = 1000		n = 2000	
		Empírico	Teórico	Empírico	Teórico	Empírico	Teórico	Empírico	Teórico
$\kappa = 0, 2$	$\hat{\mu}$	0,0725	0,0726	0,0458	0,0463	0,0329	0,0328	0,0235	0,0233
	$\hat{\sigma}^2$	0,1418	0,2064	0,0939	0,1397	0,0728	0,1174	0,0558	0,1046
	$\hat{\kappa}$	0,2159	0,5055	0,1724	0,3648	0,1461	0,3069	0,1244	0,2619
$\kappa = 0, 3$	$\hat{\mu}$	0,0731	0,0739	0,0470	0,0468	0,0330	0,0332	0,0237	0,0235
	$\hat{\sigma}^2$	0,1450	0,1971	0,0957	0,1462	0,0694	0,1059	0,0532	0,0788
	$\hat{\kappa}$	0,2134	0,4644	0,1775	0,3593	0,1506	0,2730	0,1266	0,2079
$\kappa = 0, 5$	$\hat{\mu}$	0,0752	0,0746	0,0471	0,0474	0,0332	0,0335	0,0239	0,0237
	$\hat{\sigma}^2$	0,1358	0,1805	0,0868	0,1117	0,0614	0,0745	0,0437	0,0494
	$\hat{\kappa}$	0,2079	0,3991	0,1785	0,2646	0,1466	0,1868	0,1144	0,1287
$\kappa = 0, 6$	$\hat{\mu}$	0,0732	0,0744	0,0477	0,0472	0,0336	0,0334	0,0231	0,0236
	$\hat{\sigma}^2$	0,1318	0,1606	0,0840	0,0988	0,0586	0,0655	0,0404	0,0445
	$\hat{\kappa}$	0,2026	0,3409	0,1702	0,2169	0,1362	0,1501	0,0986	0,1033
$\kappa = 0, 8$	$\hat{\mu}$	0,0733	0,0732	0,0462	0,0463	0,0325	0,0327	0,0233	0,0232
	$\hat{\sigma}^2$	0,1199	0,1428	0,0786	0,0874	0,0565	0,0613	0,0402	0,0433
	$\hat{\kappa}$	0,1663	0,2610	0,1257	0,1499	0,0943	0,1029	0,0694	0,0717

Para ilustrarmos a convergência assintótica dos estimadores encontrada pelo Método Delta, normalizamos as estimativas obtidas nas iterações Monte Carlo e calculamos os histogramas com a curva da densidade da Normal Padrão e QQ-plots Normal para $\kappa = 0, 3$ e $\kappa = 0, 8$. Os resultados são apresentados nas Figuras 4.10 e 4.11 Observamos que, à medida que aumentamos o tamanho amostral, a curva teórica se ajusta melhor aos histogramas, proporcionando assim uma melhora no ajuste das caudas e os QQ-plots se aproximam mais da reta de referência.

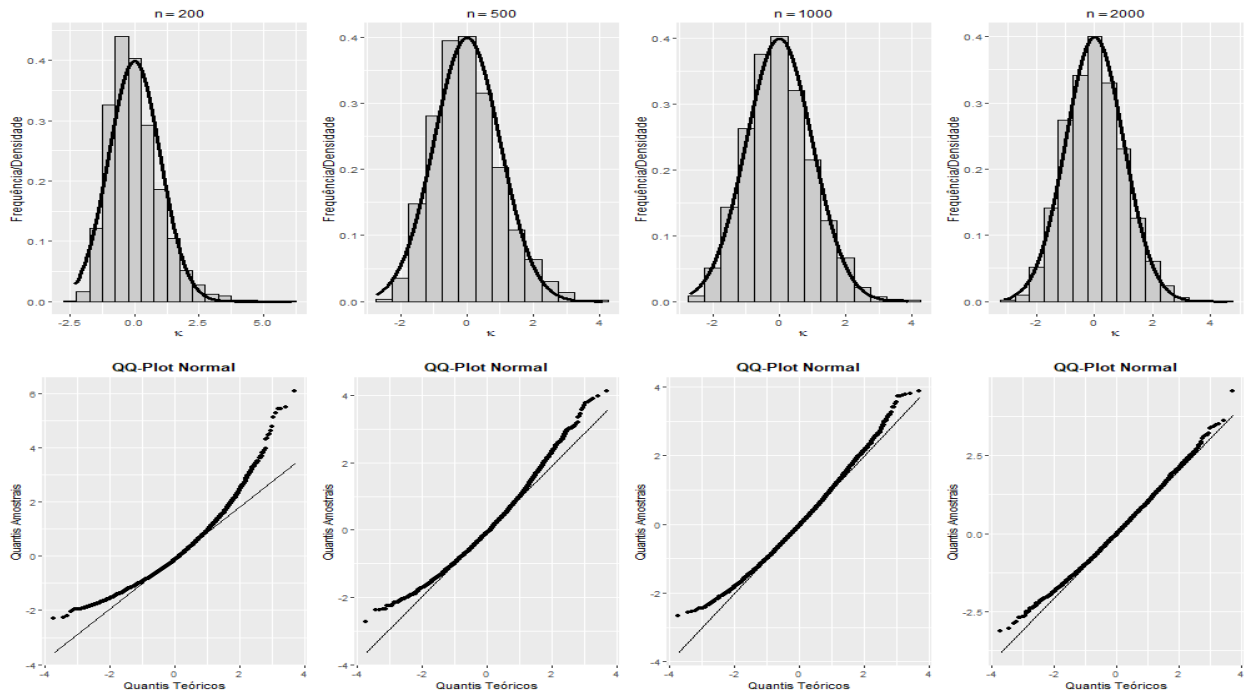


Figura 4.10 Histograma e QQ-Plot Normal com as estimativas normalizadas de κ obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 3)$.

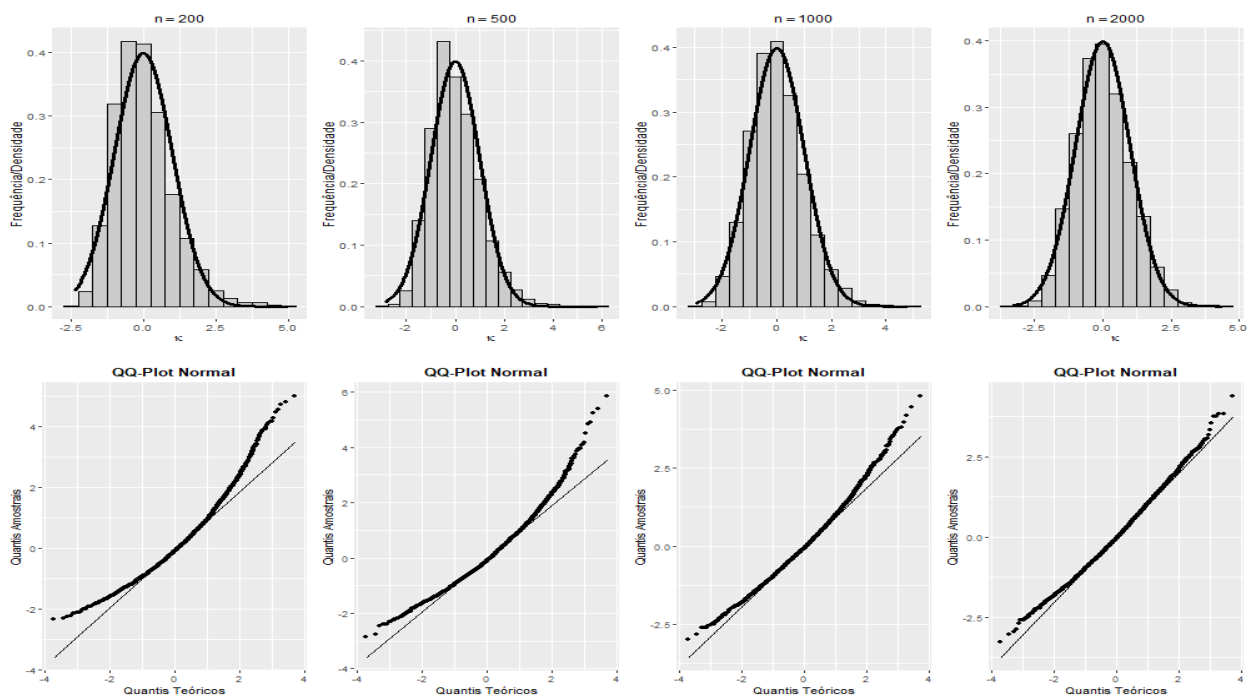


Figura 4.11 Histograma e QQ-Plot Normal com as estimativas normalizadas de κ obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 8)$.

4.4 Soma Aleatória Conway-Maxwell-Poisson

A distribuição Conway-Maxwell-Poisson (CMP), também conhecida como COM-Poisson, é uma generalização com dois parâmetros da distribuição Poisson e foi introduzida por Conway e Maxwell (1962) e pode ser usada para modelar dados que estão sob ou sobre dispersos em relação à distribuição de Poisson. Nesta seção, seguindo a mesma ideia dos capítulos anteriores, estudaremos a soma aleatória COM-Poisson e encontraremos a distribuição limite correspondente.

Dizemos que uma variável aleatória N tem distribuição COM-Poisson se

$$P(N = j) = \frac{\lambda^j}{(j!)^\nu} \frac{1}{Z(\lambda, \nu)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

em que $Z(\lambda, \nu)$ é a constante normalizadora definida por

$$Z(\lambda, \nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i!)^\nu}.$$

Notação: $N \sim \text{CMP}(\lambda, \nu)$. Se $\nu = 1$, $N \sim \text{CMP}(\lambda, 1)$ tem distribuição Poisson e a constante normalizadora é dada por $Z(\lambda, 1) = e^\lambda$. Como percebido por Shmueli et al. (2005), dependendo da escolha do parâmetro ν , algumas distribuições conhecidas também são casos particulares da distribuição COM-Poisson. Se $\nu = 0$ e $0 < \lambda < 1$, então N tem distribuição geométrica com $Z(\lambda, 0) = (1 - \lambda)^{-1}$. Quando $\nu \rightarrow \infty$, N converge em distribuição para uma variável aleatória Bernoulli com média $\lambda(1 + \lambda)^{-1}$ e $\lim_{\nu \rightarrow \infty} Z(\lambda, \nu) = 1 + \lambda$.

Segundo Daly e Gaunt (2016), a esperança, a variância e a função geradora de probabilidade de $N \sim \text{CMP}(\lambda, \nu)$ são dadas em função da constante normalizadora $Z(\lambda, \nu)$, respectivamente, como

$$E(N) = \lambda \frac{d}{d\lambda} \left\{ \ln(Z(\lambda, \nu)) \right\}, \quad \text{Var}(N) = \lambda \frac{d}{d\lambda} \left\{ E(N) \right\}, \quad G_N(t) = \frac{Z(t\lambda, \nu)}{Z(\lambda, \nu)}. \quad (4.17)$$

Apresentaremos a distribuição limite da soma aleatória Conway-Maxwell-Poisson considerando uma determinada padronização.

Proposição 4.4.1. *Sejam $\{X_i\}_{i \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com média $\mu \in \mathbb{R}$ e variância σ^2 finita e $N_\lambda \sim \text{CMP}(\lambda, \nu)$ independente dos X_i 's. Então,*

$$\tilde{S}_\lambda = a_\lambda \sum_{i=1}^{N_\lambda} (X_i + b_\lambda) \xrightarrow{d} Y, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

com $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ em que $a_\lambda = \lambda^{-\frac{1}{2\nu}}$ e $b_\lambda = \mu \left(\lambda^{-\frac{1}{2\nu}} - 1 \right)$.

Demonstração. A função característica da variável aleatória \tilde{S}_λ é dada por

$$\begin{aligned}\varphi_{\tilde{S}_\lambda}(t) &= G_N [\varphi_{a_\lambda X_i + a_\lambda b_\lambda}(t)] \\ &= G_N [e^{a_\lambda(\mu + b_\lambda)} \varphi_{X - \mu}(a_\lambda t)] \\ &= \frac{Z(\{e^{a_\lambda(\mu + b_\lambda)} \varphi_{X - \mu}(a_\lambda t)\} \lambda, \nu)}{Z(\lambda, \nu)}.\end{aligned}$$

Gaunt et al. (2019) prova que, para ν fixo,

$$Z(\lambda, \nu) = \frac{\exp\{\nu \lambda^{\frac{1}{\nu}}\}}{\lambda^{\frac{\nu-1}{2\nu}} (2\pi)^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{\nu}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\nu \lambda^{\frac{1}{\nu}})^{-k}, \quad \text{quando } \lambda \rightarrow \infty, \quad (4.18)$$

em que c_j são determinados pela expansão

$$(\Gamma(s+1))^\nu = \frac{\nu^{\nu(s+1/2)}}{(2\pi)^{(\nu-1)/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{\Gamma(\nu s + (1+\nu)/2 + j)}.$$

Utilizando a Expressão (4.18), tomando o limite e aplicando a regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_{\tilde{S}_\lambda}(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\exp\left\{\nu \lambda^{\frac{1}{\nu}} \left[e^{\frac{a_\lambda(\mu + b_\lambda)}{\nu}} \varphi_{X - \mu}^{\frac{1}{\nu}}(a_\lambda t) - 1 \right]\right\}}{e^{a_\lambda(\mu + b_\lambda) \frac{\nu-1}{2\nu}} \varphi_X^{\frac{\nu-1}{2\nu}}\left(\frac{t}{\lambda^{\frac{1}{2\nu}}}\right)} = \exp\left\{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\} = \varphi_Y(t),$$

com $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Portanto, $\tilde{S}_\lambda \xrightarrow{d} N(\mu, \sigma^2)$. □

Proposição 4.4.2. *Sejam $\{X_i\}_{i \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com média $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = 1$ e $N_\lambda \sim \text{CMP}(\lambda, \nu)$ independente dos X_i 's. Então,*

$$\tilde{S}_\lambda = a_\lambda \sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow{d} Y, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

com $Y \sim N(0, 1)$ em que $a_\lambda = \lambda^{-\frac{1}{2\nu}}$.

Demonstração. Basta tomar $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ na Proposição 4.4.1. Com isso, $b_\lambda = 0$ e $Y \sim N(0, 1)$. □

As Proposições 4.4.1 e 4.4.2 mostram que nem toda distribuição que generaliza a distribuição Poisson tem distribuição limite da soma aleatória escrita como uma mistura normal não degenerada.

Finalizaremos com alguns comentários. Neste capítulo apresentamos uma nova distribuição que foi obtida como limite da soma aleatória Poisson-Fracionada. Representamos essa

distribuição como uma mistura entre a distribuição Normal e a distribuição Mittag-Leffler. Através da mistura encontramos a função característica, os momentos, duas representações para a função densidade de probabilidade. Exibimos os casos limites da função densidade de probabilidade e um caso particular. Obtivemos as estimativas dos parâmetros pelo Método dos Momentos e a distribuição assintótica dos estimadores. Além disso, mostramos que a distribuição limite da soma Conway-Maxwell-Poisson, com determinada padronização, é a distribuição Normal.

No capítulo seguinte aplicaremos os modelos estudados a dados reais de log-retorno das ações da Petrobrás, de precipitação mensal de uma estação pluviométrica de São Paulo e de retorno diário do índice Ibovespa.

Capítulo 5

Aplicações

Este capítulo se destina a ilustração empírica da utilidade dos modelos normais misturados trabalhados ao longo desta tese. Nas Seções 5.1 e 5.2 apresentaremos a aplicação de duas distribuições pertencentes à Normal Família Exponencial Misturada para modelar o log-retorno diário das ações da Petrobrás e a precipitação de chuva em uma estação pluviométrica do estado de São Paulo, respectivamente. Na Seção 5.3 ajustaremos a distribuição Normal Mittag-Leffler e duas distribuições pertencentes à Normal Família Exponencial Misturada para o retorno diário do índice Ibovespa.

5.1 Retorno Diário das Ações da Petrobrás

Nesta seção ilustraremos a utilidade da classe de modelos Normal Família Exponencial Misturados para modelagem de dados financeiros. Estudaremos o retorno diário das ações da Petrobrás no período de 2010 a 2018. O banco de dados está disponível em <https://finance.yahoo.com/> e é composto por 2263 observações com os preços de fechamento diários da Petrobrás, coletados diariamente de 01/01/2010 até 31/12/2018 (apenas nos dias em que a bolsa de valores é aberta, ou seja, desconsiderando finais de semana e feriados). O principal objetivo é ajustar o modelo Normal-Família Exponencial Misturada considerando como componente da mistura as distribuições Gama e Inversa Gaussiana e então compará-los com o modelo normal.

Suponha que $N_\lambda(t)$ é o número aleatório de transações feitas no intervalo $[0, t]$ e que cada transação i gera um retorno r_i i.i.d. com $E(X_i) = \mu$ e $Var(r_i) = \sigma^2 < \infty$, para $i = 1, \dots, N_t$. Por Schluter e Trede (2016), a distribuição do retorno sobre o período $[0, t]$,

$$R(t) = \log \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) = \sum_{i=1}^{N_\lambda(t)} r_i,$$

é uma soma aleatória de um número aleatório de retornos independentes, em que P_t é o preço de fechamento da bolsa no dia t e P_{t-1} é o preço de fechamento do dia anterior, ou seja, no tempo $t - 1$.

A Tabela 5.4 apresenta as estimativas de máxima verossimilhança das distribuições Normal Gama Misturada e Normal Inversa Gaussiana, obtidas através do algoritmo EM apresentado na Seção 3.2.2, e da distribuição Normal. Observamos que os valores estimados para μ e σ^2 foram próximos para os modelos ajustados. Em relação a ϕ , existe uma diferença nas estimativas para os modelos Normal-Gama e Normal-Inversa Gaussiana. Lembrando que o parâmetro ϕ corresponde ao parâmetro das distribuições Gama e Gaussiana Inversa nas misturas Normal-Gama e Normal-Inversa Gaussiana, respectivamente.

Tabela 5.1 Parâmetros estimados para o retorno diário das ações da Petrobrás. Erros padrão estão entre parênteses.

Distribuição Ajustada	Parâmetros Estimados		
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\phi}$
Normal	-0,0006 (0,0007)	0,0010 (0,0001)	—
Normal-Gama Misturada	-0,0006 (0,0006)	0,0009 (0,0001)	1,3105 (0,1105)
Normal-Inversa Gaussiana Misturada	-0,0006 (0,0006)	0,0010 (0,0001)	0,8201 (0,1161)

A Figura 5.1 mostra as curvas das funções densidade de probabilidade dadas nas Equações 3.3 e 3.4 e da distribuição Normal estimadas, sobrepostas ao histograma dos dados. Nota-se que as curvas das distribuições Normal-Gama Misturada e Normal-Inversa Gaussiana Misturada são próximas e se ajustam aos dados capturando o pico e as caudas. Já a distribuição Normal não consegue capturar o pico.

Temos nas Figuras 5.2, 5.3 e 5.4, respectivamente, os *QQ-Plots* Normal, Normal Gama Misturada e Normal Inversa Gaussiana Misturada do retorno diário das ações da Petrobrás. Os pacotes do R `VarianceGamma` e `GeneralizedHyperbolic` foram utilizados para construir o *QQ-Plot* Normal-Gama e o *QQ-Plot* NIG, respectivamente.

Pelo gráfico da Figura 5.2 vemos que os pontos não seguem um padrão linear, sugerindo que os dados não são normalmente distribuídos e apresentam problemas no ajuste das caudas. A linearidade dos gráficos das Figuras 5.3 e 5.4 indica que os dados se ajustam aos modelos Normal-Gama e Normal-Inversa Gaussiana Misturados, como apontado também pelo histograma. Observa-se que a distribuição Normal-Inversa Gaussiana teve um desempenho um pouco melhor que a distribuição Normal-Gama Misturada.

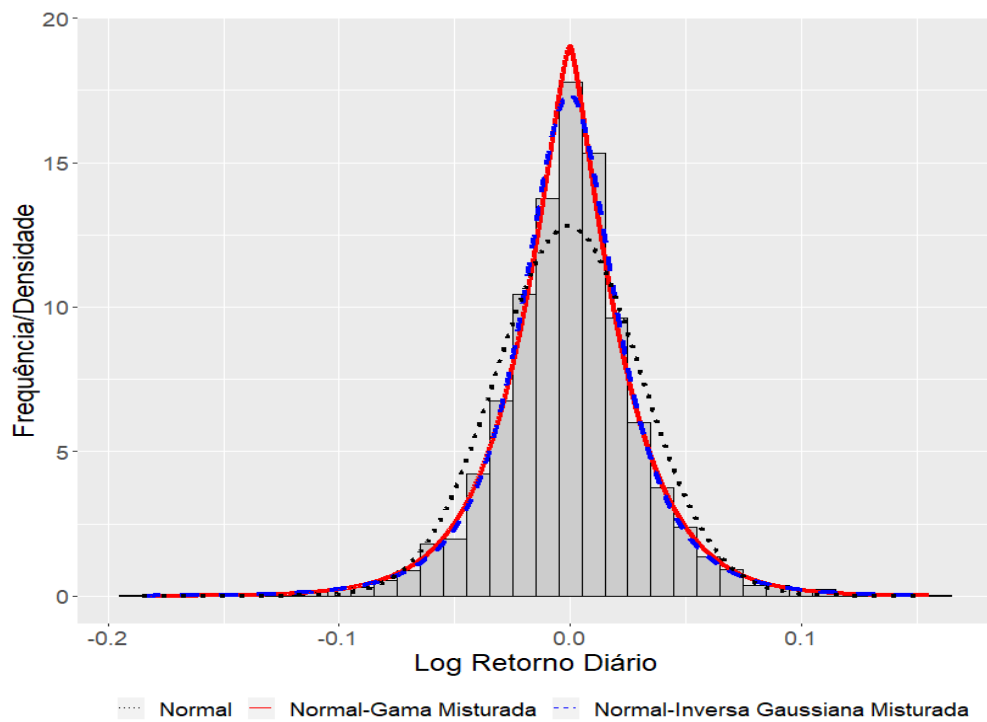


Figura 5.1 Histograma com o retorno diário das ações da Petrobrás com as densidades ajustadas para os modelos Normal, Normal-Gama Misturado e Normal-Inversa Gaussiana Misturado.

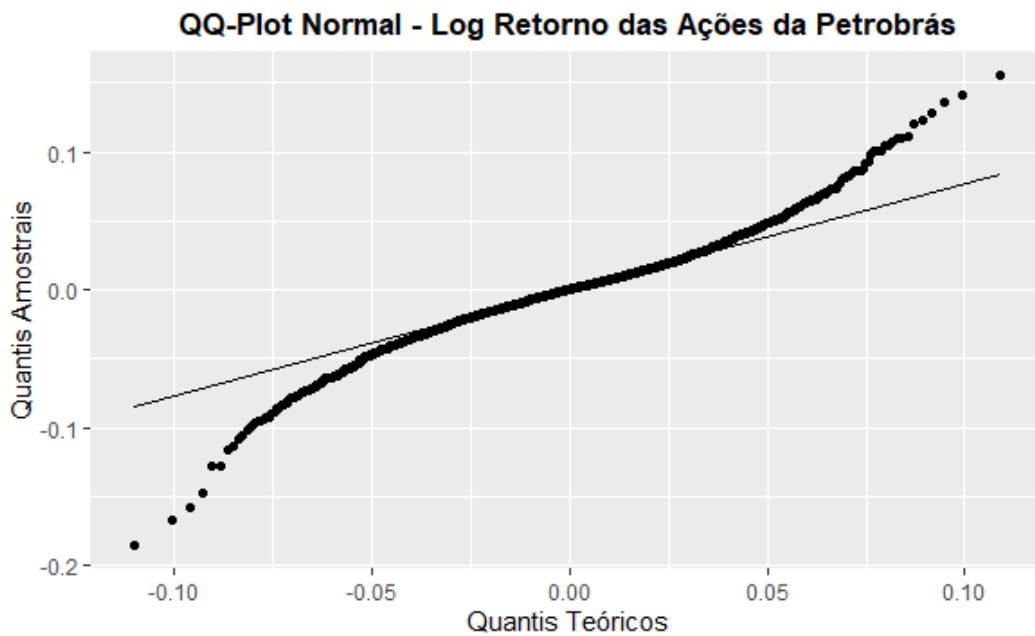


Figura 5.2 QQ-Plot Normal do log retorno diário das ações da Petrobrás.

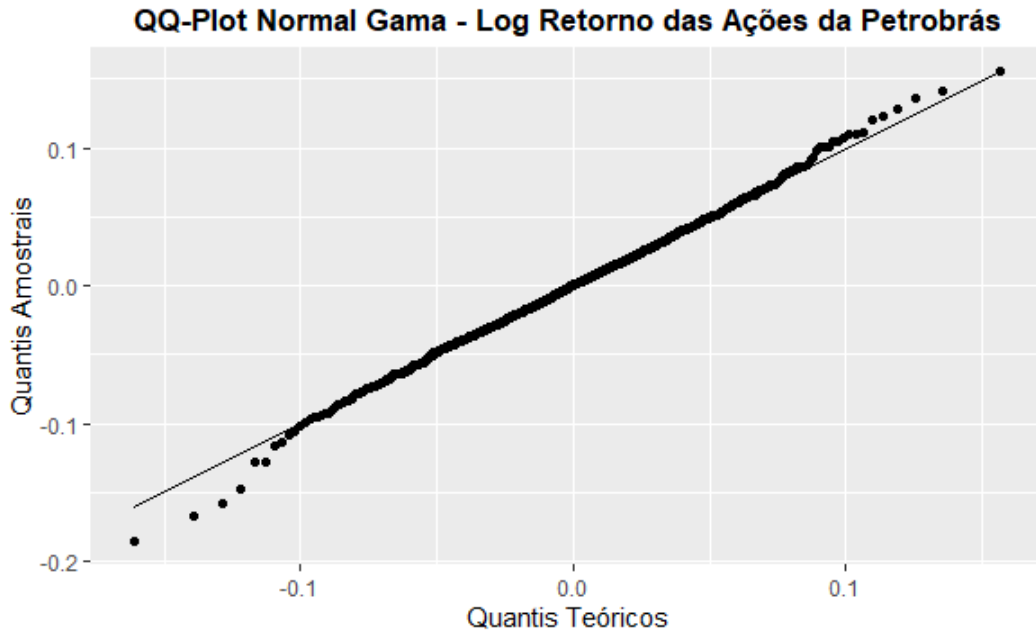


Figura 5.3 QQ-Plot Normal Gama do log retorno diário das ações da Petrobrás.

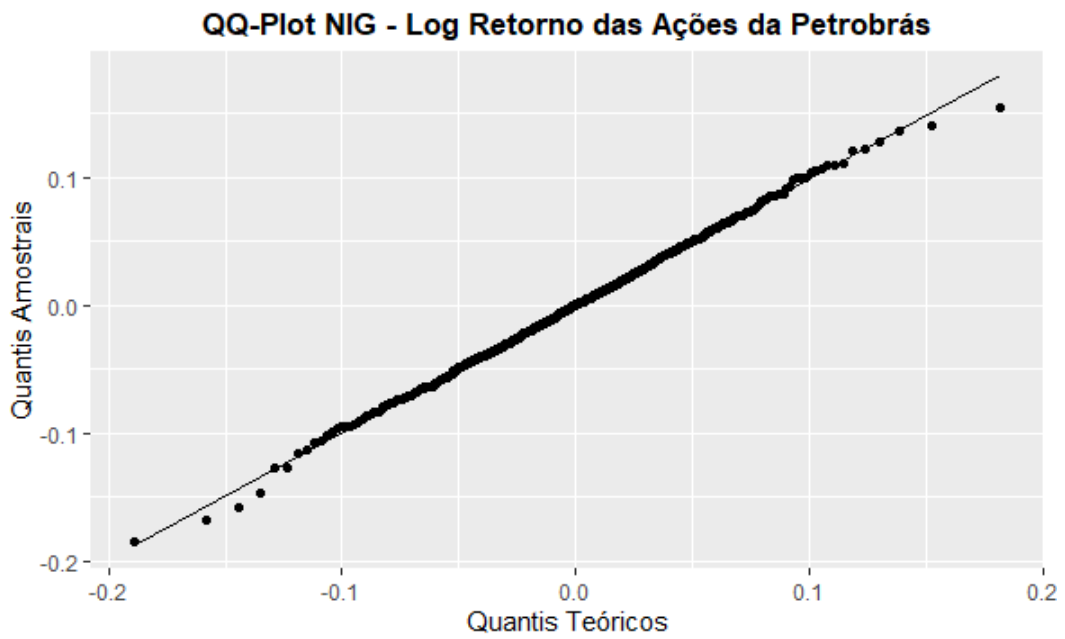


Figura 5.4 QQ-Plot NIG do log retorno diário das ações da Petrobrás.

5.2 Precipitação de uma Estação Pluviométrica da Cidade de São Paulo

Nesta seção mostraremos outra aplicação da classe de modelos Normal Família Exponencial Misturados agora para modelagem de dados pluviométricos. Estudaremos a precipitação mensal da estação de São Paulo (Mirante de Santana) no período de 1989 a 2018. O banco de dados está disponível no site <http://www.inmet.gov.br/portal/> e é composto por 10592 observações com a precipitação diária coletadas de 01/12/1989 à 30/11/2018, em metros.

Para utilizarmos essa aplicação como motivação do teorema limite da soma aleatória Poisson Misturada, reformulamos os dados em que cada componente do novo banco de dados é dada pela soma das precipitações por estação do ano. Desta forma, temos 116 observações correspondentes ao total do volume de precipitação por estação do ano, em metros. Nosso objetivo é ajustarmos a distribuição limite Normal-Família Exponencial Misturada considerando como componente da mistura as distribuições Gama e Inversa Gaussiana e então fazer uma comparação com o modelo Normal.

Na Tabela 5.2 apresentamos algumas estatísticas descritivas da precipitação mensal, em metros, da estação de São Paulo como o mínimo (Min), mediana (Md), média (Me), a variância (Var) e o máximo (Max) amostrais.

Tabela 5.2 Estatísticas descritivas da precipitação por estação do ano.

	Min	Md	Me	Var	Max
R_d	0,0000	0,0610	0,0804	0,0049	0,3500

A Tabela 5.3 apresenta os parâmetros estimados via máxima verossimilhança para a distribuição normal e as estimativas para as distribuições Normal Gama Misturada e Normal Inversa Gaussiana, obtidas através do algoritmo EM apresentado na Seção 3.2.2. Observa-se que os valores obtidos para μ são próximos em todos os modelos. Já as estimativas de σ^2 e ϕ foram relativamente diferentes para os modelos ajustados.

A Figura 5.5 mostra as curvas das funções densidade de probabilidade estimadas dadas nas Equações 3.3 e 3.4 e da distribuição Normal, sobrepostas ao histograma dos dados. Nota-se que as curvas das distribuições Normal-Gama Misturada e Normal-Inversa Gaussiana Misturada capturam a assimetria dos dados e as caudas. As massas perdidas ao ajustar o banco de dados com valores não negativos utilizando as distribuições $Y_N \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, $Y_{NGM} \sim \text{Normal Gama Misturada}(\mu, \sigma^2, \phi)$ e $Y_{NIG} \sim \text{Normal Inversa Gaussiana}(\mu, \sigma^2, \phi)$, que possuem suporte nos reais, foram, respectivamente, $P(Y_N \leq 0) = 0,1255$, $P(Y_{NGM} \leq$

Tabela 5.3 Parâmetros estimados para a precipitação por estação do ano, em metros, da estação São Paulo e erro padrão entre parênteses.

Distribuição Ajustada	Parâmetros Estimados		
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\phi}$
Normal	0,0804 (0,0066)	0,0049 (0,0006)	—
Normal-Gama Misturada	0,0806 (0,0069)	0,0001 (*) ¹	1,1848 (*) ¹
Normal-Inversa Gaussiana Misturada	0,0804 (0,0072)	0,0008 (0,0003)	1,2351 (0,3290)

¹Houve um problema numérico no erro padrão dos parâmetros σ^2 e ϕ para este banco de dados, com algumas entradas negativas na matriz de variância-covariância.

$0) = 0,0029$ e $P(Y_{NIG} \leq 0) = 0,0218$. Observamos que a distribuição normal é que apresenta a maior probabilidade de massa perdida.

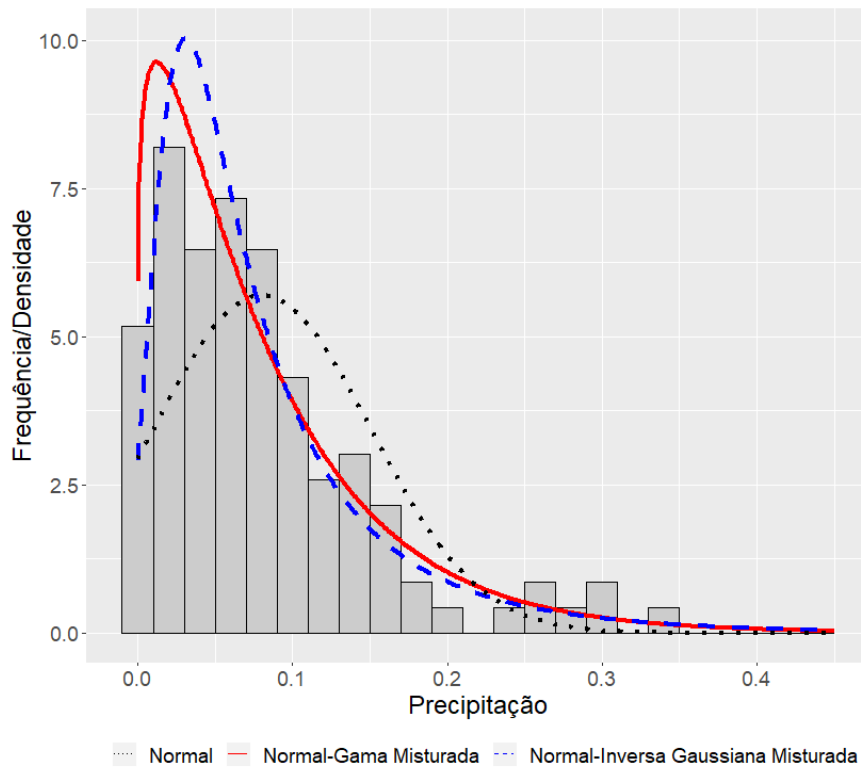


Figura 5.5 Histograma com a precipitação mensal, em metros, da estação de São Paulo com as densidades ajustadas para os modelos Normal, Normal-Gama Misturado e Normal-Inversa Gaussiana Misturado.

A Figura 5.6 apresenta o *QQ-Plot* Normal da precipitação por estação do ano da estação pluviométrica Mirante de Santana de São Paulo. A suposição de normalidade é descartada pela não linearidade do gráfico indicando problemas nas caudas e assimetria.

O gráfico contendo o *QQ-Plot* da Normal-Gama Misturada para os dados de precipitação é apresentado na Figura 5.7. Observamos que para valores menores do que zero e para valores maiores que 0,17, tem-se um afastamento da reta de orientação. No geral, há indícios de que os dados não se ajustam ao modelo Normal-Gama Misturado.

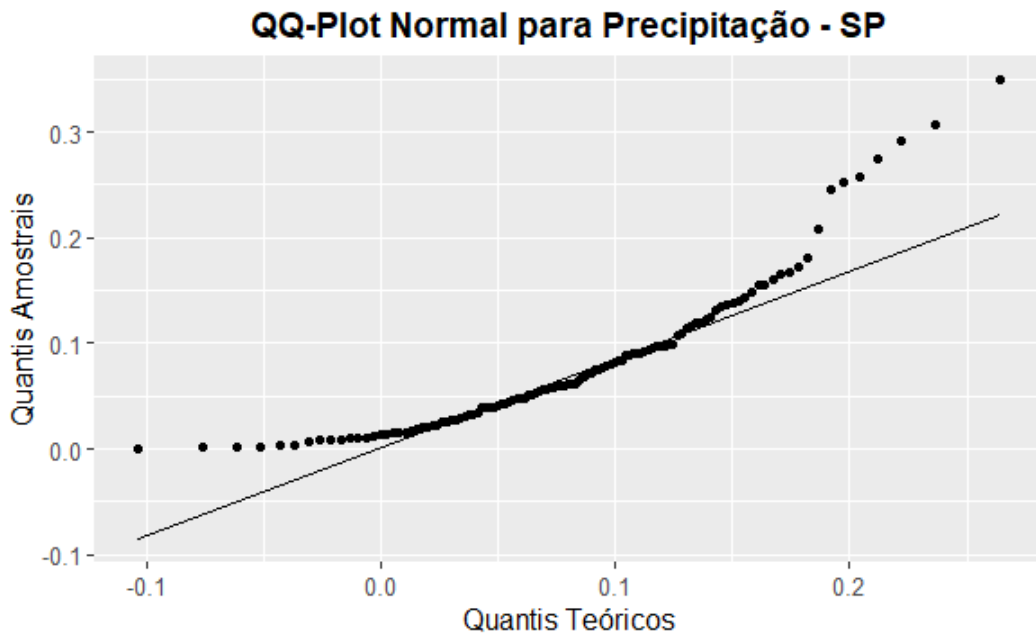


Figura 5.6 *QQ-Plot* Normal da precipitação por estação do ano da estação São Paulo.

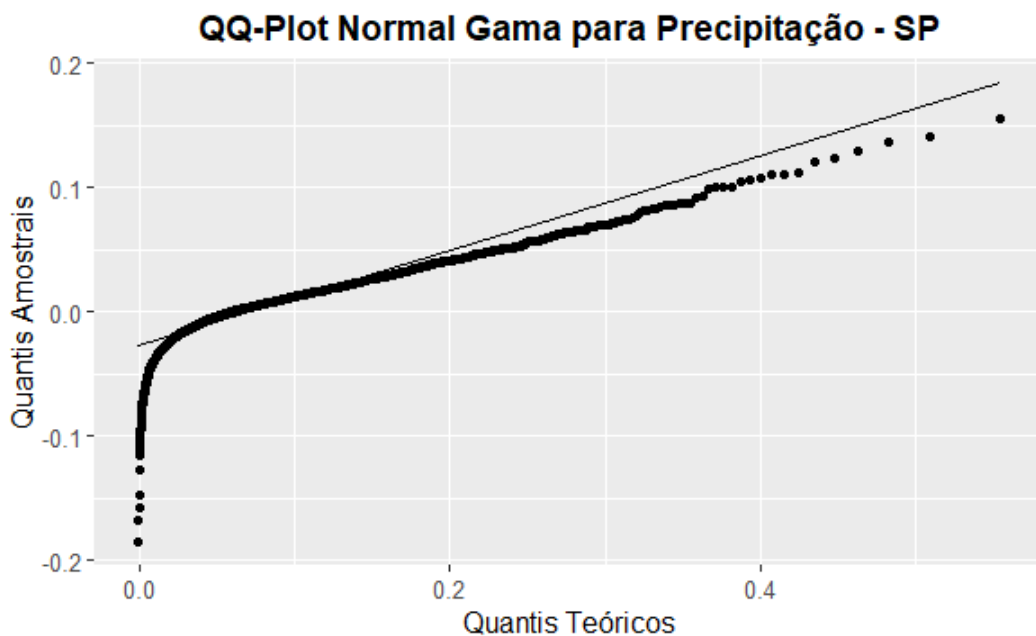


Figura 5.7 *QQ-Plot* Normal Gama da precipitação por estação do ano da estação São Paulo.

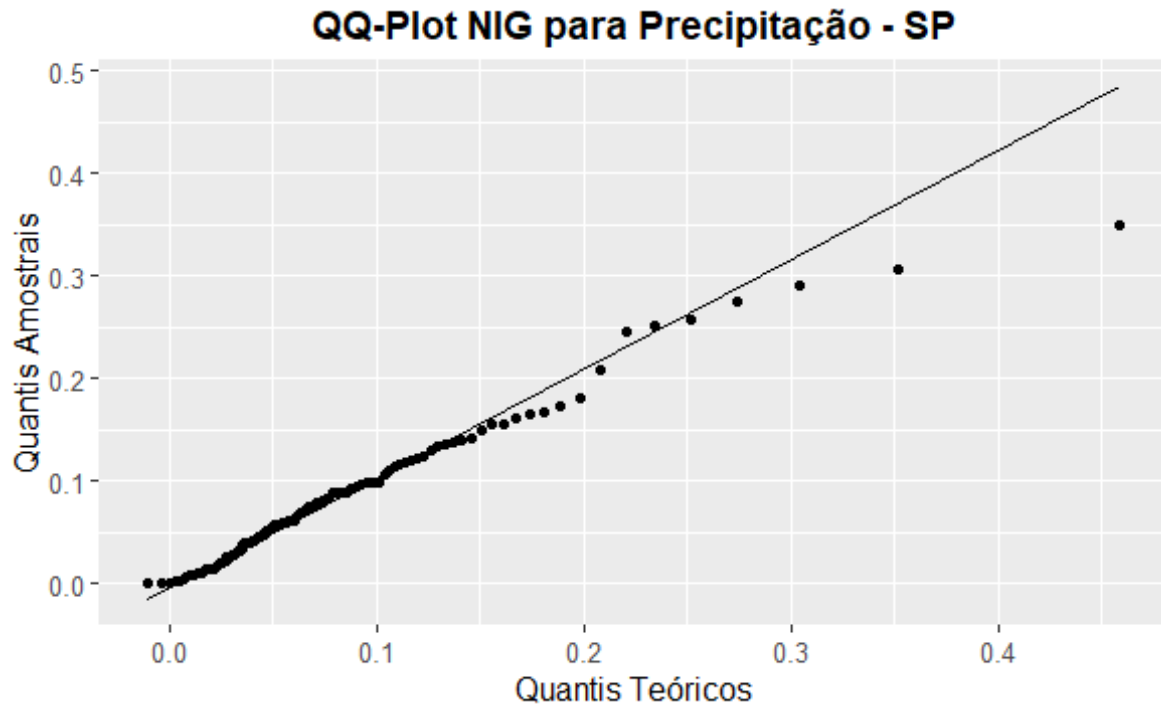


Figura 5.8 QQ-Plot Normal Inversa Gaussiana da precipitação por estação do ano da estação São Paulo.

O QQ-Plot da Normal-Inversa Gaussiana Misturada para os dados de precipitação é apresentado na Figura 5.8. Notamos a presença de linearidade para valores menores do que 0,17. Após esse valor temos um distanciamento dos pontos em relação à reta de referência com a presença de alguns *outliers*.

Comparando os três modelos testados através dos QQ-Plots, o que se ajusta melhor aos dados de precipitação é o modelo Normal-Inversa Gaussiana Misturado.

5.3 Retorno Diário do Índice Ibovespa

A terceira aplicação refere-se ao retorno diário do índice Ibovespa que apresentaremos para ilustrar o algoritmo EM proposto para os modelos Normal-Gama e NIG e o Método dos Momentos para o modelo Normal Mittag-Leffler. Esse conjunto de dados está disponível em <https://finance.yahoo.com/> e é composto por 2226 observações com retorno diário do índice Ibovespa, coletadas de 01/01/2010 a 31/12/2018, por meio do pacote `quantmod` do R.

A Tabela 5.4 apresenta os parâmetros estimados via máxima verossimilhança para a distribuição Normal e, através do algoritmo EM encontrado na Seção 3.2.2, para as distribuições Normal-Gama e Normal Inversa Gaussiana e para a distribuição Normal Mittag-Leffler através do Método dos Momentos apresentado na Seção 4.2. Observa-se que os valores obtidos para

μ e σ^2 são próximos para os modelos considerados. Como o parâmetro κ é próximo de 0,5, não temos problema na estimação, como discutido no estudo de simulação. Lembrando que ϕ representa o parâmetro da mistura e, neste caso, das distribuições Gama e Inversa Gaussiana.

Tabela 5.4 Parâmetros estimados para o retorno diário do índice Ibovespa e erro padrão entre parênteses.

Distribuição Ajustada	Parâmetros Estimados		
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\kappa}/\hat{\phi}$
Normal	0,00021 (0,00030)	0,00020 (0,00001)	—
NML	0,00021 (0,00030)	0,00018 (0,00001)	0,49123 (0,00554)
NIG	0,00021 (0,00030)	0,00020 (0,00001)	2,09675 (0,41203)
NG	0,00021 (0,00030)	0,00020 (0,00001)	2,58371 (0,40600)

A Figura 5.9 mostra as curvas das funções densidade de probabilidade da distribuição Normal Mittag-Leffler dada na Expressão 4.11 e da distribuição Normal, sobrepostas ao histograma dos dados. Nota-se que as curvas das distribuições Normal-Gama e Normal Inversa Gaussiana conseguem acompanhar bem o pico dos dados e as caudas.

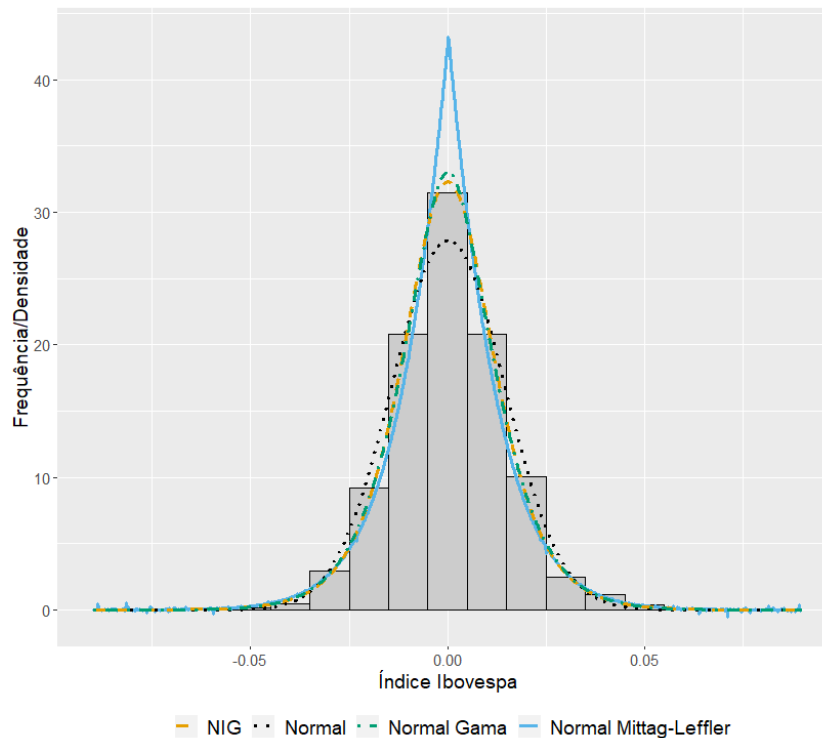


Figura 5.9 Histograma com o retorno diário do índice Ibovespa com as densidades ajustadas para os modelos Normal, Normal-Gama, Normal Inversa Gaussiana e Normal Mittag-Leffler.

A Figura 5.10 apresenta o *QQ-Plot* Normal do retorno diário do índice Ibovespa. Descartamos a suposição de normalidade pela não linearidade do gráfico.

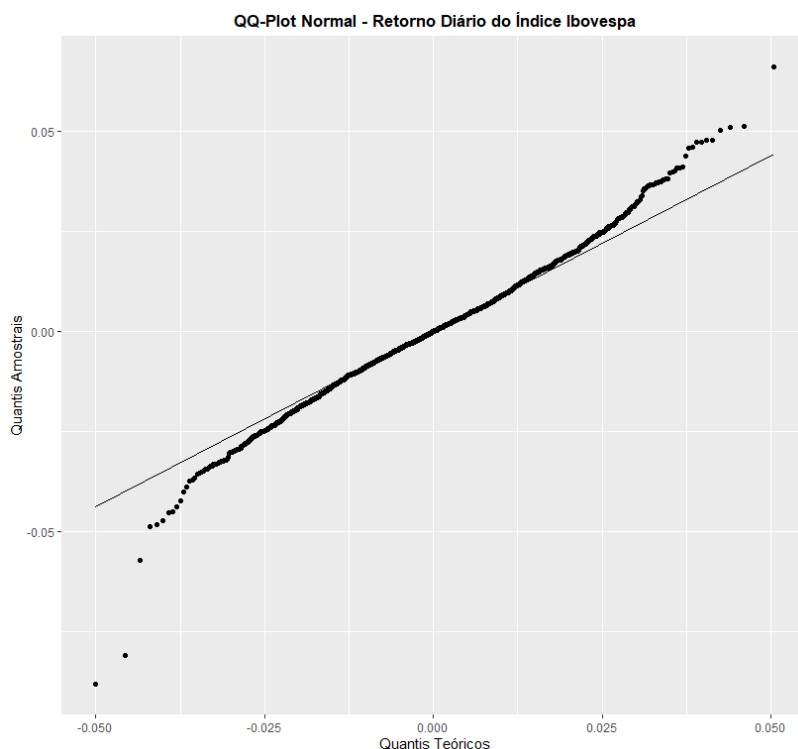


Figura 5.10 *QQ-Plot* Normal do retorno diário do índice Ibovespa.

Os gráficos contendo os *QQ-Plots* das distribuições Normal-Gama Misturada e Normal Inversa Gaussiana para o retorno diário do índice Ibovespa são apresentados, respectivamente, nas Figuras 5.11 e 5.12. Eles foram construídos através dos pacotes do R `GeneralizedHyperbolic` e `VarianceGamma`, respectivamente. Observamos que os dados se ajustam bem às retas de referência para as duas distribuições. A presença de linearidade indica que esses dados podem ser ajustados para os modelos Normal-Gama e NIG.

Para construirmos o *QQ-Plot* Normal Mittag-Leffler apresentado na Figura 5.13, utilizamos o método *Bootstrap* em que geramos 500 amostras de tamanho 5000 da distribuição Normal Mittag-Leffler, com os valores dos parâmetros encontrados pelo Método dos Momentos. Calculamos as probabilidades teóricas e os quantis correspondentes para cada uma das 500 amostras. O quantil teórico foi dado pela média por coluna. Observamos que, pela não linearidade do gráfico, a distribuição Normal Mittag-Leffler não se ajusta bem aos dados do retorno diário do índice Ibovespa.

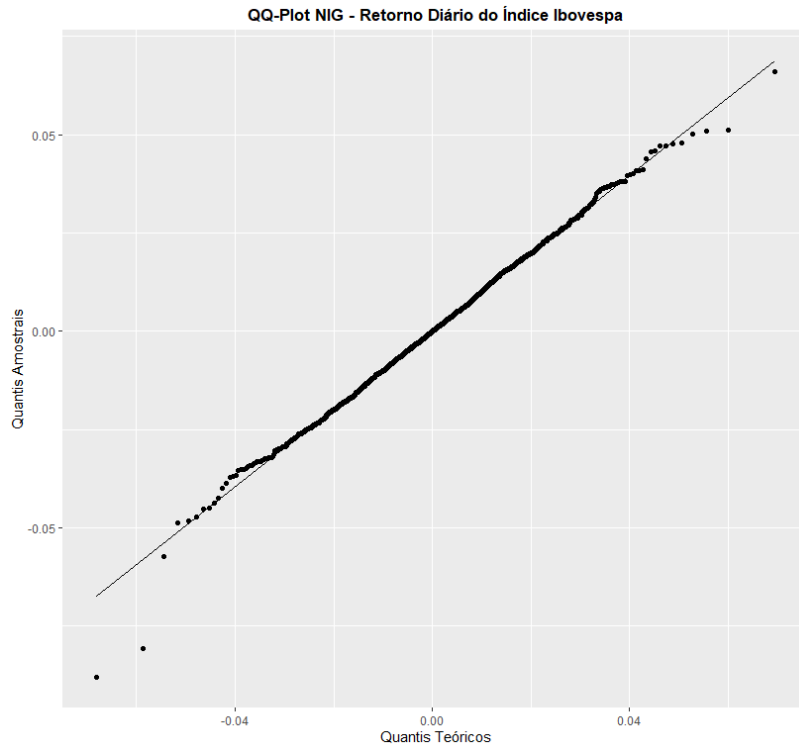


Figura 5.11 QQ-Plot NIG do retorno diário do índice Ibovespa.

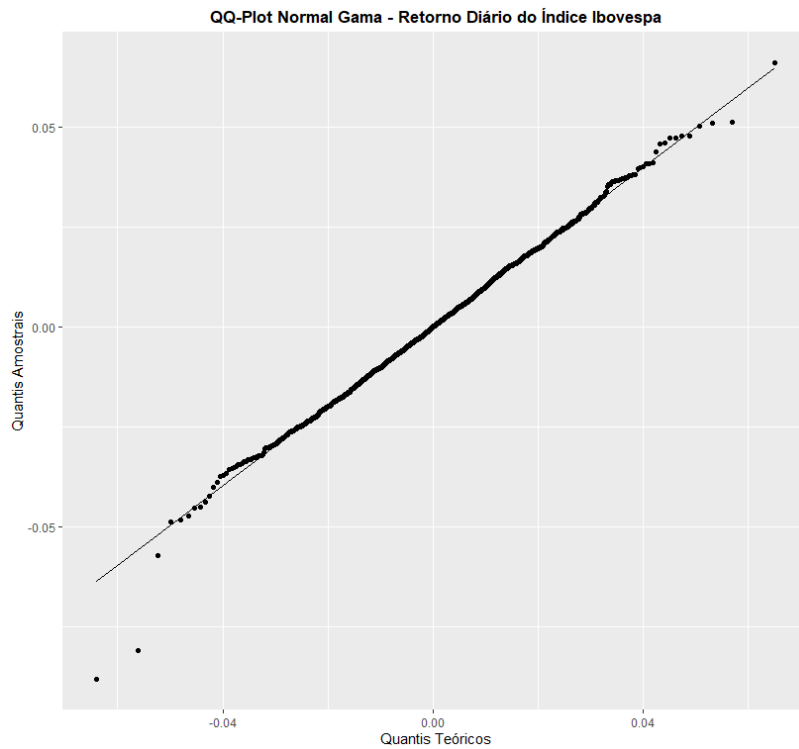


Figura 5.12 QQ-Plot Normal-Gama do retorno diário do índice Ibovespa.

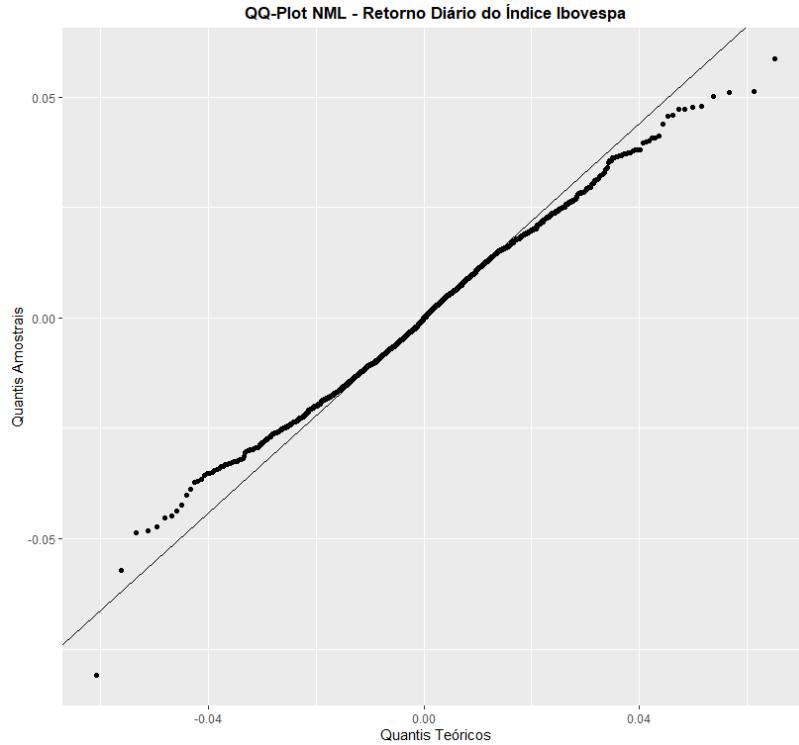


Figura 5.13 QQ-Plot NML do retorno diário do índice Ibovespa.

A Tabela 5.5 apresenta a média, a variância, o coeficiente de assimetria e o excesso de curtose dos modelos ajustados e para os dados. Vemos que a média e a variância estimadas para todos os modelos são próximas ou iguais a média e a variância do retorno diário do índice Ibovespa. Os coeficientes de assimetria dos modelos Normal e Normal Mittag-Leffler são os mais próximos do valor encontrado para o banco de dados. A distribuição Normal Mittag-Leffler estimou o excesso de curtose mais perto do excesso de curtose dos dados.

Tabela 5.5 Estatísticas descritivas do retorno diário do índice Ibovespa.

	Média	Variância	Assimetria	Excesso de Curtose
Normal	0,00021	0,00020	0,00000	0,00000
NIG	0,00021	0,00020	0,02137	1,43139
NG	0,00020	0,00020	0,01740	1,16132
NML	0,00021	0,00020	0,00000	1,74430
Dados	0,00021	0,00020	-0,05782	1,74700

Capítulo 6

Conclusões

Nesta tese, motivados pelos resultados das somas geométricas, estudamos a soma aleatória Poisson Misturada. O limite fraco resultante é uma mistura entre a distribuição Normal e a família exponencial, a que chamamos de lei Normal Família Exponencial Misturada (NFEM). A distribuição Poisson Misturada tem como casos particulares as distribuições Binomial Negativa, Geométrica, Poisson Inversa Gaussiana e Poisson Secante Hiperbólica Generalizada. Com isso, unificamos alguns resultados que englobam as somas aleatórias com número de termos seguindo essas distribuições. Em particular, ganhamos uma interpretação matemática da distribuição Normal Inversa Gaussiana, a qual surgiu como o limite da soma aleatória Poisson Inversa Gaussiana. Um novo conceito de estabilidade é introduzido e uma relação com distribuições α -estáveis é estabelecida. Também estudamos propriedades e características da distribuição limite dessa soma.

Mostramos que a distribuição limite da soma Poisson Misturada é uma Normal misturada com fator latente pertencente à família exponencial. Utilizamos o Método dos Momentos e o algoritmo EM para obter as estimativas dos parâmetros dessa distribuição. Encontramos a matriz de informação observada do modelo Normal Média-Variância para qualquer mistura pertencente à família exponencial. A principal contribuição nessa parte do trabalho foi a obtenção de um algoritmo EM para o modelo Variância-Gama exato e a matriz de informação observada para os modelos Normal-Gama Misturado e Normal-Inversa Gaussiana Misturado. Realizamos um estudo de simulação para verificar o comportamento dos estimadores obtidos através do algoritmo EM. Utilizamos bancos de dados reais e ajustamos os modelos limites Gama-Misturado e Normal Inversa Gaussiana. No banco de dados sobre o retorno logarítmico das ações da Petrobrás, a distribuição Normal Inversa Gaussiana teve um desempenho melhor que as distribuições Normal Gama Misturada e Normal. Na aplicação sobre a precipitação de uma estação pluviométrica da cidade de São Paulo, a distribuição Normal Inversa Gaussiana também se ajustou melhor aos dados quando comparada com os modelos Normal e Normal

Gama Misturado. Para o retorno diário do índice Ibovespa, as distribuições Normal Gama e Normal Inversa Gaussiana ajustaram bem aos dados.

Um segundo ponto estudado foi a distribuição limite da soma Poisson Fracionada. Caracterizamos essa nova distribuição, nomeada por distribuição Normal Mittag-Leffler, como uma mistura entre a distribuição Normal e a distribuição Mittag-Leffler. Encontramos a função característica, os momentos e duas representações para a função densidade de probabilidade da Normal Mittag-Leffler. Na parte inferencial, utilizamos o Método dos Momentos para encontrar as estimativas dos parâmetros. Os casos em que o parâmetro κ é menor do que 0,5 precisam ser melhor investigados, pois as média das estimativas desse parâmetro obtidas por esse método não foram próximas dos valores verdadeiros utilizados nas simulações. Obtivemos também a distribuição assintótica dos estimadores. Para verificar a aplicabilidade da distribuição proposta, ajustamos o modelo ao banco de dados real sobre o índice Ibovespa.

Pontos a serem atacados em trabalhos futuros são: (i) um estudo de comparação entre os modelos Normal Misturados, utilizando testes paramétricos e não-paramétricos, para as aplicações apresentadas e para outros bancos de dados com a mesmas características; (ii) explorar a soma Poisson Secante Hiperbólica Generalizada; (iii) uma análise mais aprofundada sobre a estimação do parâmetro κ para valores menores do que 0,5 na distribuição Normal Mittag-Leffler; (iv) calcular a estimação dos parâmetros por um método variante do algoritmo EM, por exemplo, Monte Carlo EM; (v) fazer testes de comparação entre a distribuição Normal Mittag-Leffler e outras distribuições; (vi) propor uma classe de modelos de regressão Normal Mittag-Leffler.

Referências Bibliográficas

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. New York, NY: Dover Publications, v. 55, 1972.

AGAHI, H.; ALIPOUR, M. Mittag-Leffler-Gaussian distribution: Theory and application to real data. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 156, p. 227–235, 2019.

BARNDORFF-NIELSEN, O. Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, v. 353, n. 1674, p. 401–419, 1977.

BARNDORFF-NIELSEN, O.; BLAESILD, P. Hyperbolic distributions and ramifications: Contributions to theory and application. In: *Statistical Distributions in Scientific Work*. [S.l.: s.n.], 1981. p. 19–44.

BARNDORFF-NIELSEN, O. E. Normal inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modelling. *Scandinavian Journal of Statistics*, v. 24, p. 1–13, 1997.

BARRETO-SOUZA, W.; SIMAS, A. B. General mixed Poisson regression models with varying dispersion. *Statistics and Computing*, v. 26, n. 6, p. 1263–1280, 2016.

BENING, V.; KOROLEV, V. On an application of the Student distribution in the theory of probability and mathematical statistics. *Theory of Probability and its Applications*, v. 49, p. 377–391, 2005.

BHATI, D.; KUMAWAT, P.; GÓMEZ-DÉNIZ, E. A new count model generated from mixed Poisson transmuted exponential family with an application to health care data. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, v. 46, n. 22, p. 11060–11076, 2017.

BIBBY, B. M.; SØRENSEN, M. Hyperbolic processes in finance. In: *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*. [S.l.: s.n.], 2003. p. 211–248.

BLUMENFELD, R.; MANDELROT, B. B. Lévy dusts, Mittag-Leffler statistics, mass fractal lacunarity, and perceived dimension. *Physical Review E*, v. 56, n. 1, p. 112–118, 1997.

CONWAY, R. W.; MAXWELL, W. L. A queuing model with state dependent service rates. *Journal of Industrial Engineering*, v. 12, n. 2, p. 132–136, 1962.

DALY, F.; GAUNT, R. E. The Conway-Maxwell-Poisson distribution: distributional theory and approximation. *ALEA: Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, v. 13, p. 635—658, 2016.

- DEMPSTER, A. P.; LAIRD, N. M.; RUBIN, D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, v. 39, n. 1, p. 1–38, 1977.
- DEMPSTER A.P. LAIRD, N.; RUBIN, D. Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society - Series B*, p. 1–38, 1997.
- EBERLEIN, E. Application of generalized hyperbolic Lévy motions to finance. In: *Lévy Processes*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 319–336.
- EBERLEIN, E.; HAMMERSTEIN, E. A. V. Generalized hyperbolic and inverse Gaussian distributions: limiting cases and approximation of processes, University of Freiburg. In: SPRINGER. *Seminar on stochastic analysis, random fields and applications IV*. [S.l.], 2004. p. 221–264.
- EBERLEIN, E.; KELLER, U. Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli*, v. 1, n. 3, p. 281–299, 1995.
- EBERLEIN, E.; PRAUSE, K. The generalized hyperbolic model: Financial derivatives and risk measures. In: *Mathematical Finance—Bachelier Congress 2000*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 245–267.
- FELLER, W. An Introduction to Probability Theory and its Applications. New York, John Wiley and Sons, v. 2, 1971.
- GAUNT, R. E.; IYENGAR, S.; DAALHUIS, A. B. O.; SIMSEK, B. An asymptotic expansion for the normalizing constant of the Conway–Maxwell–Poisson distribution. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, v. 71, n. 1, p. 163–180, 2019.
- GAVRILENKO, S.; KOROLEV, V. Convergence rate estimates for mixed Poisson random sums. *Sistemy i Sredstva Informatiki*, p. 248–257, 2006.
- GNEDENKO, B.; KOLMOGOROV, A. Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables. Cambridge, Addison-Wesley, 1954.
- GNEDENKO, B. V.; KOROLEV, V. Y. Random Summation: Limit Theorems and Applications. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996.
- GORENFLO, R.; KILBAS, A. A.; MAINARDI, F.; ROGOSIN, S. V. Mittag-leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer, 2014.
- GUT, A. Probability: a Graduate Course. New York: Springer, 2005.
- JORGENSEN, B. Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution. *Lecture Notes in Statistics*, New York: Springer, v. 9, 1982.
- KALASHNIKOV, V. Ruin probability. In: *Geometric Sums, Bounds for Rare Events with Applications: Risk Analysis, Reliability, Queueing*. [S.l.]: Dordrech: Boston: Kluwer Academic, 1997.

- KARLIS, D. An EM type algorithm for maximum likelihood estimation of the normal–inverse Gaussian distribution. *Statistics and probability letters*, v. 57, p. 43–52, 2002.
- KARLIS, D.; XEKALAKI, E. Mixed Poisson distributions. *International Statistical Review*, v. 73, n. 1, p. 35–58, 2005.
- KOROLEV, V.; DOROFEEVA, A. Bounds of the accuracy of the normal approximation to the distributions of random sums under relaxed moment condition. *Lithuanian Mathematical Journal*, v. 57, p. 38–58, 2017.
- KOROLEV, V.; DOROFEEVA, A. Bounds of the accuracy of the normal approximation to the distributions of random sums under relaxed moment conditions. *Lithuanian Mathematical Journal*, v. 57, n. 1, p. 38–58, 2017.
- KOROLEV, V.; SHEVTSOVA, I. An improvement of the Berry-Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums. *Scandinavian Actuarial Journal*, p. 81–105, 2012.
- KOROLEV, V.; ZEIFMAN, A. Generalized negative binomial distributions as mixed geometric laws and related limit theorems. *Lithuanian Mathematical Journal*, v. 59, p. 366–388, 2019.
- KOTZ, S.; KOZUBOWSKI, T.; PODGORSKI, K. The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering and Finance. Birkhauser, Boston, 2001.
- KOZUBOWSKI, T.; RACHEV, S. The theory of geometric stable distributions and its use in modeling financial data. *European Journal of Operational Research*, v. 74, p. 310–324, 1994.
- KOZUBOWSKI, T. J. Representation and properties of geometric stable laws. In: *Approximation, Probability, and Related Fields*. [S.l.: s.n.], 1994. p. 321–337.
- KOZUBOWSKI, T. J.; PODGORSKI, K. Asymmetric Laplace distributions. *Mathematical Scientist*, v. 25, p. 37–46, 2000.
- KOZUBOWSKI, T. J.; RACHEV, S. T. The theory of geometric stable distributions and its use in modeling financial data. *European Journal of Operational Research*, v. 74, n. 2, p. 310–324, 1994.
- KOZUBOWSKI, T. J.; RACHEV, S. T. Multivariate geometric stable laws. *Journal of Computational Analysis and Applications*, v. 1, p. 349–385, 1999.
- KOZUBOWSKI, T. J.; RACHEV, S. T. Univariate geometric stable laws. *Journal of Computational Analysis and Applications*, v. 1, n. 2, p. 177–217, 1999.
- LASKIN, N. Fractional poisson process. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 8, n. 3-4, p. 201–213, 2003.
- LASKIN, N. Some applications of the fractional Poisson probability distribution. *Journal of Mathematical Physics*, v. 50, n. 11, 2009.

- LEHMANN, E. Testing Statistical Hypotheses. *Springer Texts in Statistics*, New York: Wiley, 1959.
- LOREGIAN, A.; MERCURI, L.; RROJI, E. Approximation of the variance gamma model with a finite mixture of normals. *Statistics and Probability Letters*, v. 82, n. 2, p. 217–224, 2012.
- LOUIS, T. A. Finding the observed information matrix when using the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, v. 44, n. 2, p. 226–233, 1982.
- MITTNIK, S.; RACHEV, S. Alternative multivariate stable distributions and their applications to financial modeling. *Stable Processes and Related Topics*, p. 9–13, 1990.
- MITTNIK, S.; RACHEV, S. T. Stable distributions for asset returns. *Applied Mathematics Letters*, v. 2, n. 3, p. 301–304, 1989.
- MITTNIK, S.; RACHEV, S. T. Alternative multivariate stable distributions and their applications to financial modeling. In: *Stable Processes and Related Topics*. [S.l.]: Springer, 1991. v. 25, p. 107–119.
- PILLAI, R. On Mittag-Leffler functions and related distributions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Springer, v. 42, n. I, p. 157–161, 1990.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2019. Disponível em: <https://www.R-project.org/>.
- RÉNYI, A. A characterization of Poisson processes. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl.*, v. 1, p. 519–527 (in Hungarian), 1956.
- RIDOUT, M. S. Generating random numbers from a distribution specified by its Laplace transform. *Statistics and Computing*, v. 19, p. 439–450, 2009.
- SAMPSON, A. R. Characterizing exponential family distributions by moment generating functions. *The Annals of Statistics*, v. 3, n. 3, p. 747–753, 1975.
- SCHLUTER, C.; TREDE, M. Weak convergence to the Student and Laplace distributions. *Journal of Applied Probability*, v. 53, n. 1, p. 121–129, 2016.
- SHAO, J. *Mathematical Statistics*. New York: Springer, 2003.
- SHEVTSOVA, I. Convergence rate estimates in the global CLT for compound mixed Poisson distributions. *Theory of Probability and its Applications*, v. 63, p. 72–93, 2018.
- SHMUELI, G.; MINKA, T. P.; KADANE, J. B.; BORLE, S.; BOATWRIGHT, P. A useful distribution for fitting discrete data: Revival of the Conway–Maxwell–Poisson distribution. *Journal of the Royal Statistical Society, Series C*, v. 54, p. 127–142, 2005.
- TEMME, N. M. On the numerical evaluation of the modified Bessel function of the third kind. *Journal of Computational Physics*, v. 19, n. 3, p. 324–337, 1975.

WERON, K.; KOTULSKI, M. On the Cole-Cole relaxation function and related Mittag-Leffler distribution. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 232, n. 1-2, p. 180–188, 1996.

WEST, M. On scale mixtures of normal distributions. *Biometrika*, v. 74, n. 3, p. 646–648, 1987.