

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA**

Gabriela Oliveira

Somas Aleatórias Poisson Misturadas e Modelos Normais
Misturados Associados

**Belo Horizonte
2020**

Gabriela Oliveira

Somas Aleatórias Poisson Misturadas e Modelos Normais
Misturados Associados

Versão Final

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística, do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial do título de Doutora em Estatística

Orientador: Prof. Dr. Wagner Barreto de Souza

Coorientador: Prof. Dr. Roger William C. Silva

Belo Horizonte

2020

© 2020, Gabriela Oliveira.
Todos os direitos reservados

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende
Costa CRB 6ª Região nº 1510

Oliveira, Gabriela.

O48s Somas aleatórias Poisson misturadas e modelos normais misturados associados/ Gabriela Oliveira — Belo Horizonte, 2020.
188 f. il.; 29 cm.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Estatística.

Orientador: Wagner Barreto de Souza.
Coorientador: Roger William Câmara Silva

1. Estatística – Teses. 2. Poisson, Distribuição de. – Teses. 3. Algoritmos de expectativa de maximização – Teses. I Orientador. II. Coorientador. III. Título.

CDU 519.2(043)



ATA DA DEFESA DE TESE DA ALUNA GABRIELA OLIVEIRA

Realizou-se, no dia 18 de fevereiro de 2020, às 14:00 horas, Sala 2076 ICEx, da Universidade Federal de Minas Gerais, a 59ª defesa de tese, intitulada *Somas Aleatórias Poisson Misturadas e Modelos Normais Misturados Associados*, apresentada por GABRIELA OLIVEIRA, número de registro 2016656098, graduada no curso de MATEMÁTICA/DIURNO, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em ESTATÍSTICA, à seguinte Comissão Examinadora: Prof(a). Wagner Barreto de Souza - Orientador (DEST/UFMG), Prof(a). Roger William Câmara Silva - Coorientador (DEST/UFMG), Prof(a). Alexandre Galvão Patriota (IME/USP), Prof(a). Rodrigo Bernardo da Silva (DEST/UFPB), Prof(a). Remy de Paiva Sanchis (MAT/UFMG), Prof(a). Vinícius Diniz Mayrink (DEST/UFMG).

A Comissão considerou a tese:

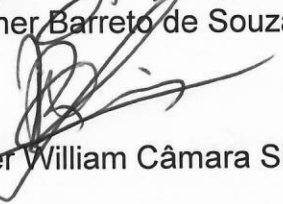
Aprovada

Reprovada


Finalizados os trabalhos, lavrei a presente ata que, lida e aprovada, vai assinada por mim e pelos membros da Comissão.


Belo Horizonte, 18 de fevereiro de 2020.


Prof(a). Wagner Barreto de Souza (Doutor)


Prof(a). Roger William Câmara Silva - Coorientador (Doutor)


Prof(a). Alexandre Galvão Patriota (Doutor)


Prof(a). Rodrigo Bernardo da Silva (Doutor)


Prof(a). Remy de Paiva Sanchis (Doutor)


Prof(a). Vinícius Diniz Mayrink (Doutor)

À vovó Maria Eunice (in memoriam), pelos ensinamentos e amor incondicional.

Agradecimentos

Este é um fim de um ciclo muito especial e gostaria de expressar meus agradecimentos a todos que contribuíram para a elaboração desta tese. Afinal de contas, ninguém faz um doutorado sozinho.

Em primeiro lugar, agradeço aos meus orientadores, Prof. Wagner Barreto de Souza e Prof. Roger William C. Silva, pela confiança, suporte, pressão e compreensão nos momentos difíceis. Obrigada pela paciência e partilha do conhecimento durante nosso projeto.

Agradeço aos membros da banca, Prof. Alexandre Galvão Patriota (USP), Remy de Paiva Sanchis (UFMG), Rodrigo Bernardo da Silva (UFPB) e Vinícius Diniz Mayrink (UFMG), pelas contribuições e lida minuciosa da tese.

Agradeço a todos os professores dos Departamentos de Matemática e Estatística da UFMG pela excelência em ensino e pesquisa, que durante a graduação, mestrado e doutorado, contribuíram para minha formação acadêmica. Em especial, agradeço ao Prof. Sokol Ndreca e à Prof. Rosangela Helena Loschi. Agradeço também aos funcionários da secretaria da pós graduação da Estatística. Agradeço à FAPEMIG, CAPES e ao CNPq, o apoio financeiro.

Agradeço aos amigos da Estatística que compartilharam alegrias, perrengues, conhecimento, ajudas com o R, cafés, cervejas e memes. Agradeço em especial à Carla, Gui Oliveira, Gui Veloso, Ju, Jussiane, Victor e ao pessoal do vôlei. Obrigada a todos os colegas pela convivência, troca de experiências, bandecos, feirinhas e comemorações de começo e final de semestre. Vocês fizeram do meu doutorado uma jornada mais leve e alegre! Aos *amigos* Lu, Marina, Pedro e Rorô, pelo apoio, ajuda, conversas e por aguentarem todos os meus lamentos durante esse tempo..

A todos meus familiares que me acompanham e torcem por mim, mesmo sem entender o que é uma pós graduação. Agradeço as rezas, as preocupações de todos os dias e pela compreensão quando precisei deixar de vê-los e de estar perto, em busca do diploma.

Agradeço ao meu companheiro Bruno por todo amor, carinho e apoio incondicional. Obrigada pela compreensão em cada momento de cansaço, pelo incentivo e por estar comigo nas horas alegres e também nas mais difíceis.

À UFMG, minha eterna gratidão!

Resumo

A soma de um número aleatório de variáveis aleatórias, além de ser interessante do ponto de vista probabilístico, aparece em aplicações que envolvem processos que evoluem com o tempo. Um exemplo importante e amplamente estudado é a soma geométrica que modela muitos fenômenos em seguros, finanças, confiabilidade, biologia, entre outros. Motivados pela aplicabilidade e resultados estocásticos da soma geométrica, neste trabalho obtemos a distribuição limite para somas parciais com um número aleatório de termos, seguindo uma classe de distribuições Poisson misturadas. O limite em distribuição resultante é uma mistura entre a distribuição Normal e a família exponencial, a que chamamos de lei Normal Família Exponencial Misturada (NFEM). Um novo conceito de estabilidade é introduzido e uma relação com distribuições α -estáveis é estabelecida. Propomos a estimação dos parâmetros dos modelos NFEM através do Método dos Momentos e do método da máxima verossimilhança via algoritmo EM. Além disso, estudamos a distribuição limite da soma Poisson Fracionada, definindo assim a distribuição Normal Mittag-Leffler, a qual é uma mistura entre as distribuições Normal e Mittag-Leffler. Discutimos a estimação dos parâmetros para esse modelo através do Método dos Momentos e encontramos a distribuição assintótica dos estimadores. Estudos de simulação Monte Carlo são abordados para verificar o desempenho dos estimadores propostos e apresentadas ilustrações empíricas sobre o mercado financeiro e para dados de precipitação.

Palavras-chave: Distribuição Poisson misturada, estabilidade, convergência fraca, método dos momentos, algoritmo EM, normal misturada, distribuição Poisson Fracionada, distribuição Mittag-Leffler.

Abstract

The sum of a random number of random variables, besides being interesting from a probabilistic point of view, appears in applications involving processes that evolve over time. An important and widely studied example is the geometric sum that has many applications and models many phenomena in insurance, finance, reliability, biology, among others. Motivated by the applicability and stochastic results of the geometric sum, in this work we obtain the limit distribution for partial sums with a random number of terms following a class of mixed Poisson distributions. The resulting weak limit is a mixing between a Normal distribution and an exponential family, which we call by Normal Exponential Family mixed (NEFM) laws. A new stability concept is introduced and a relationship with α -stable distributions is established. We propose estimation of the parameters of the NEFM models through method of moments and maximum likelihood method via EM-algorithm. In addition, we studied a limit distribution of the fractional Poisson sum, defining the normal Mittag-Leffler distribution, which is a mixture between the Normal and Mittag-Leffler distributions. We discussed the estimation of the parameters for this model through the Method of Moments and we found the asymptotic distribution of the estimators. Monte Carlo simulation studies are addressed to check the performance of the proposed estimators and two empirical illustrations on financial market and for precipitation data are presented.

Keywords: Mixed Poisson distributions, stability, weak convergence, method of moments, EM algorithm, normal mixture, Fractional Poisson distribution, Mittag-Leffler distribution.

Lista de Figuras

3.1	Histograma da soma \tilde{S}_λ quando $N_\lambda \sim \text{BN}(\lambda, 2)$ e densidade teórica Normal Gama com $\mu = \sigma^2 = 1$ e $\lambda = 30, 50, 500$, respectivamente.	42
3.2	Histograma da soma \tilde{S}_λ quando $N_\lambda \sim \text{PIG}(\lambda, 2)$ e densidade teórica Normal Inversa Gaussiana com $\mu = \sigma^2 = 1$ e $\lambda = 30, 50, 500$, respectivamente.	43
3.3	<i>Boxplot</i> com as estimativas de μ obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\mu = 3$	57
3.4	<i>Boxplot</i> com as estimativas de σ^2 obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\sigma^2 = 4$	58
3.5	<i>Boxplot</i> com as estimativas de ϕ obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\phi = 2$	58
3.6	<i>Boxplot</i> com as estimativas de μ obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\mu = 3$	61
3.7	<i>Boxplot</i> com as estimativas de σ^2 obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\sigma^2 = 4$	61
3.8	<i>Boxplot</i> com as estimativas de ϕ obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$. A linha horizontal pontilhada indica o valor verdadeiro $\phi = 2$	62
4.1	Gráficos da $\text{Var}(Y)$ versus κ e γ_2 versus κ para $\kappa \in (0, 1]$	69
4.2	Gráfico da função densidade de probabilidade de $Y \sim \text{NML}(0, 1, \kappa)$ para alguns valores de κ	71
4.3	Gráfico da função densidade de probabilidade de $Y \sim \text{NML}(\mu, \sigma^2, \kappa)$ para alguns valores de μ, σ^2 e κ	73

4.4	Gráfico da função $\frac{d}{d\kappa} \log h(\kappa)$ versus κ , para $\kappa \in (0, 1]$	75
4.5	<i>Boxplot</i> com as estimativas de μ , σ^2 e κ , respectivamente, obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 2)$. As linhas horizontais pontilhadas indicam os valores verdadeiros dos parâmetros. . . .	80
4.6	<i>Boxplot</i> com as estimativas de μ , σ^2 e κ , respectivamente, obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 3)$. As linhas horizontais pontilhadas indicam os valores verdadeiros dos parâmetros. . . .	81
4.7	<i>Boxplot</i> com as estimativas de μ , σ^2 e κ , respectivamente, obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 5)$. As linhas horizontais pontilhadas indicam os valores verdadeiros dos parâmetros. . . .	82
4.8	<i>Boxplot</i> com as estimativas de μ , σ^2 e κ , respectivamente, obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 6)$. As linhas horizontais pontilhadas indicam os valores verdadeiros dos parâmetros. . . .	83
4.9	<i>Boxplot</i> com as estimativas de μ , σ^2 e κ , respectivamente, obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 8)$. As linhas horizontais pontilhadas indicam os valores verdadeiros dos parâmetros. . . .	84
4.10	Histograma e QQ-Plot Normal com as estimativas normalizadas de κ obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 3)$	86
4.11	Histograma e QQ-Plot Normal com as estimativas normalizadas de κ obtidas pelo Método dos Momentos para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa = 0, 8)$	86
5.1	Histograma com o retorno diário das ações da Petrobrás com as densidades ajustadas para os modelos Normal, Normal-Gama Misturado e Normal-Inversa Gaussiana Misturado.	92
5.2	QQ-Plot Normal do log retorno diário das ações da Petrobrás.	92
5.3	QQ-Plot Normal Gama do log retorno diário das ações da Petrobrás.	93
5.4	QQ-Plot NIG do log retorno diário das ações da Petrobrás.	93
5.5	Histograma com a precipitação mensal, em metros, da estação de São Paulo com as densidades ajustadas para os modelos Normal, Normal-Gama Misturado e Normal-Inversa Gaussiana Misturado.	95
5.6	QQ-Plot Normal da precipitação por estação do ano da estação São Paulo.	96
5.7	QQ-Plot Normal Gama da precipitação por estação do ano da estação São Paulo.	96
5.8	QQ-Plot Normal Inversa Gaussiana da precipitação por estação do ano da estação São Paulo.	97

5.9	Histograma com o retorno diário do índice Ibovespa com as densidades ajustadas para os modelos Normal, Normal-Gama, Normal Inversa Gaussiana e Normal Mittag-Leffler.	98
5.10	QQ-Plot Normal do retorno diário do índice Ibovespa.	99
5.11	QQ-Plot NIG do retorno diário do índice Ibovespa.	100
5.12	QQ-Plot Normal-Gama do retorno diário do índice Ibovespa.	100
5.13	QQ-Plot NML do retorno diário do índice Ibovespa.	101

Lista de Tabelas

3.1	Média das estimativas dos parâmetros obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos e REQM para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$	56
3.2	Erros padrão empíricos e teóricos das estimativas dos parâmetros para $W_\phi \sim \text{Gama}(\phi)$	59
3.3	Média das estimativas dos parâmetros obtidas pelo algoritmo EM e pelo Método dos Momentos e REQM para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$	60
3.4	Erros padrão empíricos e teóricos das estimativas dos parâmetros para $W_\phi \sim \text{IG}(\phi)$	62
4.1	Média das estimativas dos parâmetros obtidas pelo Método dos Momentos e REQM entre parênteses considerando $Y \sim \text{NML}(\mu, \sigma^2, \kappa)$ para alguns valores de μ, σ^2 e κ	79
4.2	Erros padrão empíricos e teóricos das estimativas dos parâmetros para $Y \sim \text{NML}(\mu = 0, 5, \sigma^2 = 1, 0, \kappa)$	85
5.1	Parâmetros estimados para o retorno diário das ações da Petrobrás. Erros padrão estão entre parênteses.	91
5.2	Estatísticas descritivas da precipitação por estação do ano.	94
5.3	Parâmetros estimados para a precipitação por estação do ano, em metros, da estação São Paulo e erro padrão entre parênteses.	95
5.4	Parâmetros estimados para o retorno diário do índice Ibovespa e erro padrão entre parênteses.	98
5.5	Estatísticas descritivas do retorno diário do índice Ibovespa.	101

Lista de Abreviações

v.a.	variável aleatória
i.i.d.	independente e identicamente distribuída
f.d.p.	função densidade de probabilidade
BN	Binomial Negativa
IG	Inversa Gaussiana
IGG	Inversa Gaussiana Generalizada
PM	Poisson Misturada
PIG	Poisson Inversa Gaussiana
SHG	Secante Hiperbólica Generalizada
PSHG	Poisson Secante Hiperbólica Generalizada
PF	Poisson Fracionada
Exp	Exponencial
Geo	Geométrica
N	Normal
NIG	Normal Inversa Gaussiana
L	Laplace Simétrica
LA	Laplace Assimétrica
NFEM	Normal Família Exponencial Misturada
NML	Normal Mittag-Leffler
ML	Mittag-Leffler
CMP	Conway-Maxwell-Poisson
REQM	raiz do erro quadrático médio

Glossário de Notação

$X \sim F$	v.a. X genérica com distribuição F genérica
\xrightarrow{d}	convergência em distribuição
$\stackrel{d}{=}$	igualdade em distribuição
$N_\lambda \sim PM(\lambda, \phi)$	v.a. com distribuição Poisson Misturada
$W_\phi \sim FE(\phi)$	v.a. W_ϕ pertencente à família exponencial
ψ_X	função geradora de momentos de uma v.a. genérica X
φ_X	função característica de uma v.a. genérica X
G_X	função geradora de probabilidade de uma v.a. genérica X
Γ	função gama
Ψ	função digama
\mathcal{I}_ν	função Bessel modificada do segundo tipo com índice ν
\mathcal{K}_ν	função Bessel modificada do terceiro tipo com índice ν
log	logaritmo neperiano
$\Psi(t)$	função característica de uma v.a. α -estável
k_i	cumulante de ordem i
γ_1	coeficiente de assimetria
γ_2	excesso de curtose
μ_k	k -ésimo momento populacional
M_k	k -ésimo momento amostral
$N_t \sim PPF(\nu, \kappa)$	processo de Poisson fracionado
$\mathcal{E}_\kappa(\cdot)$	função Mittag-Leffler com parâmetro κ
$\mathcal{E}_{\alpha, \beta}$	função Mittag-Leffler com dois parâmetros
$B(a, b)$	função Beta
${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$	função hipergeométrica generalizada
$\frac{d\mathbb{P}}{d\nu}$	f.d.p. com respeito a uma medida σ -finita ν

Sumário

1	Introdução	11
2	Distribuição Limite da Soma Poisson Misturada e Estabilidade	16
2.1	Soma Geométrica	17
2.2	Distribuição Poisson Misturada	19
2.3	Distribuição Limite da Soma Poisson Misturada	22
2.4	Estabilidade Poisson Misturada	27
3	Classe de Modelos Normal-Família Exponencial Misturados	35
3.1	Definição e Propriedades	36
3.2	Estimação dos Parâmetros	43
3.2.1	Método dos Momentos	43
3.2.2	Algoritmo EM	48
3.3	Estudo de Simulação	55
4	Modelo Normal Mittag-Leffler	64
4.1	Distribuição Limite	64
4.2	Estimação dos Parâmetros e Distribuição Assintótica dos Estimadores	74
4.3	Estudo de Simulação	78
4.4	Soma Aleatória Conway-Maxwell-Poisson	87
5	Aplicações	90
5.1	Retorno Diário das Ações da Petrobrás	90
5.2	Precipitação de uma Estação Pluviométrica da Cidade de São Paulo	94
5.3	Retorno Diário do Índice Ibovespa	97
6	Conclusões	102

Referências Bibliográficas

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. New York, NY: Dover Publications, v. 55, 1972.

AGAHI, H.; ALIPOUR, M. Mittag-Leffler-Gaussian distribution: Theory and application to real data. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 156, p. 227–235, 2019.

BARNDORFF-NIELSEN, O. Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, v. 353, n. 1674, p. 401–419, 1977.

BARNDORFF-NIELSEN, O.; BLAESILD, P. Hyperbolic distributions and ramifications: Contributions to theory and application. In: *Statistical Distributions in Scientific Work*. [S.l.: s.n.], 1981. p. 19–44.

BARNDORFF-NIELSEN, O. E. Normal inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modelling. *Scandinavian Journal of Statistics*, v. 24, p. 1–13, 1997.

BARRETO-SOUZA, W.; SIMAS, A. B. General mixed Poisson regression models with varying dispersion. *Statistics and Computing*, v. 26, n. 6, p. 1263–1280, 2016.

BENING, V.; KOROLEV, V. On an application of the Student distribution in the theory of probability and mathematical statistics. *Theory of Probability and its Applications*, v. 49, p. 377–391, 2005.

BHATI, D.; KUMAWAT, P.; GÓMEZ-DÉNIZ, E. A new count model generated from mixed Poisson transmuted exponential family with an application to health care data. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, v. 46, n. 22, p. 11060–11076, 2017.

BIBBY, B. M.; SØRENSEN, M. Hyperbolic processes in finance. In: *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*. [S.l.: s.n.], 2003. p. 211–248.

BLUMENFELD, R.; MANDELROT, B. B. Lévy dusts, Mittag-Leffler statistics, mass fractal lacunarity, and perceived dimension. *Physical Review E*, v. 56, n. 1, p. 112–118, 1997.

CONWAY, R. W.; MAXWELL, W. L. A queuing model with state dependent service rates. *Journal of Industrial Engineering*, v. 12, n. 2, p. 132–136, 1962.

DALY, F.; GAUNT, R. E. The Conway-Maxwell-Poisson distribution: distributional theory and approximation. *ALEA: Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, v. 13, p. 635—658, 2016.

- DEMPSTER, A. P.; LAIRD, N. M.; RUBIN, D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, v. 39, n. 1, p. 1–38, 1977.
- DEMPSTER A.P. LAIRD, N.; RUBIN, D. Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society - Series B*, p. 1–38, 1997.
- EBERLEIN, E. Application of generalized hyperbolic Lévy motions to finance. In: *Lévy Processes*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 319–336.
- EBERLEIN, E.; HAMMERSTEIN, E. A. V. Generalized hyperbolic and inverse Gaussian distributions: limiting cases and approximation of processes, University of Freiburg. In: SPRINGER. *Seminar on stochastic analysis, random fields and applications IV*. [S.l.], 2004. p. 221–264.
- EBERLEIN, E.; KELLER, U. Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli*, v. 1, n. 3, p. 281–299, 1995.
- EBERLEIN, E.; PRAUSE, K. The generalized hyperbolic model: Financial derivatives and risk measures. In: *Mathematical Finance—Bachelier Congress 2000*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 245–267.
- FELLER, W. An Introduction to Probability Theory and its Applications. New York, John Wiley and Sons, v. 2, 1971.
- GAUNT, R. E.; IYENGAR, S.; DAALHUIS, A. B. O.; SIMSEK, B. An asymptotic expansion for the normalizing constant of the Conway–Maxwell–Poisson distribution. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, v. 71, n. 1, p. 163–180, 2019.
- GAVRILENKO, S.; KOROLEV, V. Convergence rate estimates for mixed Poisson random sums. *Sistemy i Sredstva Informatiki*, p. 248–257, 2006.
- GNEDENKO, B.; KOLMOGOROV, A. Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables. Cambridge, Addison-Wesley, 1954.
- GNEDENKO, B. V.; KOROLEV, V. Y. Random Summation: Limit Theorems and Applications. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996.
- GOENFLO, R.; KILBAS, A. A.; MAINARDI, F.; ROGOSIN, S. V. Mittag-leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer, 2014.
- GUT, A. Probability: a Graduate Course. New York: Springer, 2005.
- JORGENSEN, B. Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution. *Lecture Notes in Statistics*, New York: Springer, v. 9, 1982.
- KALASHNIKOV, V. Ruin probability. In: *Geometric Sums, Bounds for Rare Events with Applications: Risk Analysis, Reliability, Queueing*. [S.l.]: Dordrech: Boston: Kluwer Academic, 1997.

- KARLIS, D. An EM type algorithm for maximum likelihood estimation of the normal–inverse Gaussian distribution. *Statistics and probability letters*, v. 57, p. 43–52, 2002.
- KARLIS, D.; XEKALAKI, E. Mixed Poisson distributions. *International Statistical Review*, v. 73, n. 1, p. 35–58, 2005.
- KOROLEV, V.; DOROFEEVA, A. Bounds of the accuracy of the normal approximation to the distributions of random sums under relaxed moment condition. *Lithuanian Mathematical Journal*, v. 57, p. 38–58, 2017.
- KOROLEV, V.; DOROFEEVA, A. Bounds of the accuracy of the normal approximation to the distributions of random sums under relaxed moment conditions. *Lithuanian Mathematical Journal*, v. 57, n. 1, p. 38–58, 2017.
- KOROLEV, V.; SHEVTSOVA, I. An improvement of the Berry-Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums. *Scandinavian Actuarial Journal*, p. 81–105, 2012.
- KOROLEV, V.; ZEIFMAN, A. Generalized negative binomial distributions as mixed geometric laws and related limit theorems. *Lithuanian Mathematical Journal*, v. 59, p. 366–388, 2019.
- KOTZ, S.; KOZUBOWSKI, T.; PODGORSKI, K. The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering and Finance. Birkhauser, Boston, 2001.
- KOZUBOWSKI, T.; RACHEV, S. The theory of geometric stable distributions and its use in modeling financial data. *European Journal of Operational Research*, v. 74, p. 310–324, 1994.
- KOZUBOWSKI, T. J. Representation and properties of geometric stable laws. In: *Approximation, Probability, and Related Fields*. [S.l.: s.n.], 1994. p. 321–337.
- KOZUBOWSKI, T. J.; PODGORSKI, K. Asymmetric Laplace distributions. *Mathematical Scientist*, v. 25, p. 37–46, 2000.
- KOZUBOWSKI, T. J.; RACHEV, S. T. The theory of geometric stable distributions and its use in modeling financial data. *European Journal of Operational Research*, v. 74, n. 2, p. 310–324, 1994.
- KOZUBOWSKI, T. J.; RACHEV, S. T. Multivariate geometric stable laws. *Journal of Computational Analysis and Applications*, v. 1, p. 349–385, 1999.
- KOZUBOWSKI, T. J.; RACHEV, S. T. Univariate geometric stable laws. *Journal of Computational Analysis and Applications*, v. 1, n. 2, p. 177–217, 1999.
- LASKIN, N. Fractional poisson process. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 8, n. 3-4, p. 201–213, 2003.
- LASKIN, N. Some applications of the fractional Poisson probability distribution. *Journal of Mathematical Physics*, v. 50, n. 11, 2009.

- LEHMANN, E. Testing Statistical Hypotheses. *Springer Texts in Statistics*, New York: Wiley, 1959.
- LOREGIAN, A.; MERCURI, L.; RROJI, E. Approximation of the variance gamma model with a finite mixture of normals. *Statistics and Probability Letters*, v. 82, n. 2, p. 217–224, 2012.
- LOUIS, T. A. Finding the observed information matrix when using the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, v. 44, n. 2, p. 226–233, 1982.
- MITTNIK, S.; RACHEV, S. Alternative multivariate stable distributions and their applications to financial modeling. *Stable Processes and Related Topics*, p. 9–13, 1990.
- MITTNIK, S.; RACHEV, S. T. Stable distributions for asset returns. *Applied Mathematics Letters*, v. 2, n. 3, p. 301–304, 1989.
- MITTNIK, S.; RACHEV, S. T. Alternative multivariate stable distributions and their applications to financial modeling. In: *Stable Processes and Related Topics*. [S.l.]: Springer, 1991. v. 25, p. 107–119.
- PILLAI, R. On Mittag-Leffler functions and related distributions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Springer, v. 42, n. I, p. 157–161, 1990.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2019. Disponível em: <https://www.R-project.org/>.
- RÉNYI, A. A characterization of Poisson processes. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl.*, v. 1, p. 519–527 (in Hungarian), 1956.
- RIDOUT, M. S. Generating random numbers from a distribution specified by its Laplace transform. *Statistics and Computing*, v. 19, p. 439–450, 2009.
- SAMPSON, A. R. Characterizing exponential family distributions by moment generating functions. *The Annals of Statistics*, v. 3, n. 3, p. 747–753, 1975.
- SCHLUTER, C.; TREDE, M. Weak convergence to the Student and Laplace distributions. *Journal of Applied Probability*, v. 53, n. 1, p. 121–129, 2016.
- SHAO, J. *Mathematical Statistics*. New York: Springer, 2003.
- SHEVTSOVA, I. Convergence rate estimates in the global CLT for compound mixed Poisson distributions. *Theory of Probability and its Applications*, v. 63, p. 72–93, 2018.
- SHMUELI, G.; MINKA, T. P.; KADANE, J. B.; BORLE, S.; BOATWRIGHT, P. A useful distribution for fitting discrete data: Revival of the Conway–Maxwell–Poisson distribution. *Journal of the Royal Statistical Society, Series C*, v. 54, p. 127–142, 2005.
- TEMME, N. M. On the numerical evaluation of the modified Bessel function of the third kind. *Journal of Computational Physics*, v. 19, n. 3, p. 324–337, 1975.

WERON, K.; KOTULSKI, M. On the Cole-Cole relaxation function and related Mittag-Leffler distribution. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 232, n. 1-2, p. 180–188, 1996.

WEST, M. On scale mixtures of normal distributions. *Biometrika*, v. 74, n. 3, p. 646–648, 1987.