

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Wilder Rodrigues Cardoso

OPERAÇÕES QUÂNTICAS EM CIRCUITOS FOTÔNICOS INTEGRADOS:
TOMOGRAFIA DE ESTADOS E MEDIDAS DE COERÊNCIA

Belo Horizonte
2020

Wilder Rodrigues Cardoso

**Operações Quânticas em Circuitos Fotônicos Integrados:
Tomografia de Estados e Medidas de Coerência**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Sebastião José Nascimento de Pádua

Belo Horizonte
Minas Gerais – Brasil
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C268o Cardoso, Wilder Rodrigues.

Operações quânticas em circuitos fotônicos integrados: tomografia de estados e medidas de coerência / Wilder Rodrigues Cardoso. – 2020.
122f., enc. : il.

Orientador: Sebastião José Nascimento de Pádua.

Coorientador: Leonardo Teixeira Neves.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.

Bibliografia: f. 111-122.

1. Circuitos integrados. 2. Operadores positivos. 3. Informação quântica.
I. Título. II. Pádua, Sebastião José Nascimento de. III. Universidade
Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 530.145 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 370ª TESE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, DEFENDIDA POR WILDER RODRIGUES CARDOSO orientado pelo professor Sebastião José Nascimento de Pádua e coorientado pelo professor Leonardo Teixeira Neves, para obtenção do grau de **DOUTOR EM CIÊNCIAS, área de concentração física**. Às 14:00 horas de nove de julho de dois mil e vinte reuniu-se, por videoconferência, a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Sebastião José Nascimento de Pádua** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Leonardo Teixeira Neves** (Coorientador - Departamento de Física/UFMG), **Raphael Campos Drumond** (Departamento de Matemática/UFMG), **Carlos Henrique Monken** (Departamento de Física/UFMG), **Paulo Henrique Dias Ferreira** (Departamento de Física/UFSCar) e **Marcelo Martinelli** (Departamento de Física Experimental/USP) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o Mestre **WILDER RODRIGUES CARDOSO** à arguição de seu trabalho de Tese de Doutorado, que recebeu o título de "**Operações Quânticas em Circuitos Fotônicos Integrados: Tomografia de Estados e Medidas de Coerência**". O candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição, e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação do candidato.

Belo Horizonte, 09 de Julho de 2020.

Prof. Sebastião José Nascimento de Pádua
Orientador do estudante
Departamento de Física/UFMG

Prof. Raphael Campos Drumond
Departamento de Matemática/UFMG

Leonardo Teixeira Neves
Coorientador do estudante
Departamento de Física/UFMG

Prof. Paulo Henrique Dias Ferreira
Departamento de Física/UFSCar

Prof. Carlos Henrique Monken
Departamento de Física/UFMG

Marcelo Martinelli
Departamento de Física Experimental/USP

Candidato



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Teixeira Neves, Professor do Magistério Superior**, em 10/07/2020, às 00:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Raphael Campos Drumond, Professor do Magistério Superior**, em 10/07/2020, às 14:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sebastião Jose Nascimento de Padua, Presidente de comissão**, em 21/07/2020, às 16:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wilder Rodrigues Cardoso, Usuário Externo**, em 04/08/2020, às 15:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Martinelli, Usuário Externo**, em 06/08/2020, às 09:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Paulo Henrique Dias Ferreira, Usuário Externo**, em 18/08/2020, às 17:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ado Jorio de Vasconcelos, Presidente de comissão**, em 08/09/2020, às 19:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Henrique Monken, Professor do Magistério Superior**, em 14/09/2020, às 09:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0173794** e o código CRC **D7353AE0**.

Dedico este trabalho às companhias
verdadeiras.

*“Estude muito o que mais lhe interessa
da maneira mais indisciplinada,
irreverente e original possível.”*

Richard Feynman

Agradecimentos

Gostaria de dedicar este espaço para prestar meus mais sinceros agradecimentos à todos aqueles que participaram destes quatro anos de muito aprendizado e amadurecimento. Dito isso, agradeço

- a Deus e à minha família pela força, incentivo e apoio incondicional;
- ao meu orientador, o professor Sebastião de Pádua que, além de um ótimo orientador, é também possuidor de um grande coração e por quem tenho uma grande amizade e admiração. Sou eternamente grato por tudo que aprendi sob sua orientação;
- a todos aqueles com quem tive a oportunidade de trabalhar no Laboratório de Óptica Quântica da UFMG, a saber, Patrick Lima, Mariana Barros, Tutu Matoso e Artur Blusão. Compartilhamos momentos que sempre levarei na memória. Agradeço também ao professor Leonardo Neves e ao Davi Barros pelas discussões sobre circuitos fotônicos tridimensionais, foram muito produtivas;
- aos amigos de perto, com quem compartilhei excelentes e agradáveis momentos, envolvendo boas risadas, sessões de cinema, show de bandinhas de garagem e muito mais. Devo citar aqui Luana Reis, Zé Roberto, Wilio Torres, Laís Sinhorele, Juliana Assunção, Lindomar Matos, Tiago Venzel, dentre outros, como as maravilhosas companhias que tive em todos esses “rolézinhos”;
- aos amigos de longe que, mesmo separados fisicamente, prestam apoio imediato e cuja presença de espírito é revigorante. Agradeço ao Yuri Andrade e ao João Vitor Ramos, amigos de longa data que ainda residem em minha cidade natal. Agradeço à Camila Carla, amiga paulistana sempre a postos para conversar sobre qualquer assunto. Agradeço também à Raquel Radoman por toda ajuda, apoio e amizade durante todo esse tempo. Vocês tornam meus dias mais brilhantes;
- aos integrantes da banda Dodelle, banda que tive a oportunidade de ser o primeiro baterista e contribuir com algumas composições. Julie Vasconcelos, Marionir Castelo Branco, Vitor Gama, vocês merecem todos os palcos do mundo;
- à Editora Sinna, pela oportunidade de ter meu primeiro livro publicado e pelo excelente trabalho que fez;

- àqueles que, por algum motivo alienígena, esqueci de citar. Vocês também merecem;
- à CAPES e à CNPq pelo auxílio financeiro.

Por fim, meu muito obrigado a todos aqueles que estiveram comigo durante essa importante etapa da minha vida. A todos nós, vida longa e próspera!

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
I Operações Quânticas em Circuitos Fotônicos	4
1 Fundamentos de Mecânica Quântica	5
1.1 Bits, Qubits e Qudits	5
1.2 Matriz Densidade	6
1.3 Operadores Unitários	8
1.4 Medições Quânticas	9
1.5 Tomografia de Estados Quânticos	13
1.6 Coerência Quântica	14
2 Tomografia de Estados Quânticos em Sistemas de Qubits	17
2.1 Determinação dos Elementos de POVM	17
2.2 Configuração do Circuito Fotônico	19
2.3 Medida de Coerência Quântica	26
2.4 Demonstração da Validade desta Proposta	27
3 Tomografia de Estados Quânticos em Sistemas de Qutrits	29
3.1 Determinação dos Elementos de POVM	29
3.2 Configuração do Circuito Fotônico	32
3.3 Obtenção dos Elementos da Matriz Densidade	38
4 Circuitos Tridimensionais	41
4.1 Tomografia de Estados Quânticos em Sistemas de Qudits, com $d \geq 3$	41
4.1.1 Elementos de POVM	41
4.1.2 Design Generalizado do Circuito Fotônico	42
4.1.3 Exemplo: Sistema de Ququarts	49
4.1.4 Particularidade dos Casos de Dimensão Par	52

4.2	Medida de Coerência Quântica em Sistemas de Qudits	54
4.2.1	Elementos de POVM	54
4.2.2	Design Generalizado do Circuito Fotônico	56
4.3	Tolerância a Erros e Perdas	60
4.4	Validade para Estados Arbitrários	64
II	Fabricação de Guias de Onda em Vidro	66
5	Sobre Guias de Onda	67
5.1	Guias de Onda Condutores	67
5.2	Guias de Onda Dielétricos	71
5.2.1	Ondas Guiadas por Reflexão Interna Total	71
5.2.2	Modos Guiados em um Guia de Ondas Circular	75
5.3	Acoplamento entre Guias de Onda	78
6	Interação Laser-Material	84
6.1	Formação do Plasma de Elétrons Livres	84
6.1.1	Fotoionização Não-Linear	84
6.1.2	Ionização Avalanche	88
6.2	Transferência de Energia	92
6.2.1	Absorção da Radiação Incidente	92
6.2.2	Difusão de Energia	94
6.3	Modificação do Material	96
7	Produção e Caracterização de Guias de Onda Retos	99
7.1	Métodos de Produção	99
7.1.1	Litografia	99
7.1.2	Escrita Direta com Laser de Femtossegundos	100
7.2	Fabricação de Guias Retos	101
7.3	Caracterização: Método <i>End-Coupling</i>	103
7.4	Resultados	106
III	Conclusões e Perspectivas	108
	Referências Bibliográficas	122

Resumo

Este trabalho se propõe a realizar um estudo sobre circuitos fotônicos integrados. Nosso objetivo é desenvolver uma metodologia para a obtenção dos parâmetros de um circuito fotônico que nos permita realizar um conjunto de operações quânticas necessárias para a concretização de uma determinada tarefa ou processamento quântico. Mais especificamente, as tarefas quânticas envolvem a implementação de um POVM (Positive Operator Value Measure) através dos circuitos fotônicos integrados. Assim, buscamos obter configurações otimizadas para estes dispositivos de modo que a redução de sua complexidade estrutural simplifique seu processo de fabricação. Além disso, também é nosso objetivo que tais objetos apresentem robustez contra erros e perdas e que as aplicações experimentais que os envolvem apresentem uma minimização do tempo necessário para sua realização. Assim, estudamos as simetrias dos POVMs propostos para, a partir delas, configurar o circuito de forma otimizada. Inicialmente, estudamos o caso da tomografia de estados quânticos para qubits e qutrits. Obtivemos circuitos planares que apresentavam um número de elementos ópticos e uma profundidade óptica menores do que aqueles obtidos por métodos já conhecidos na literatura. Além disso, esses circuitos implementam todos os elementos de POVM de uma vez, sendo possível obter todas suas probabilidades associadas de uma vez, minimizando o tempo gasto no experimento em relação à experimentos em mesa óptica ou em circuitos reconfiguráveis, onde é necessário realizar alterações na configuração do aparato experimental de um elemento de um POVM para outro. Buscando uma forma de generalizar nosso protocolo para sistemas de maiores dimensões, desenvolvemos um método de obter circuitos fotônicos tridimensionais que podem ser utilizados na realização experimental de tomografia de estados quânticos em qudits de qualquer dimensão finita. Nosso protocolo gera circuitos cujo número de divisores de feixe e profundidade óptica escalam com funções um grau menor do que em outros protocolos já conhecidos, evidenciando uma drástica redução em sua complexidade. Além disso, esses circuitos apresentaram uma alta robustez em relação à ocorrência de perdas. O mesmo protocolo utilizado para obter circuitos tridimensionais para realização de tomografia quântica pode ser usado na obtenção de circuitos para implementar medidas de coerência quântica. Os circuitos aqui obtidos também apresentam as mesmas vantagens do caso tomográfico.

Abstract

This work proposes to carry out a study on integrated photonic circuits. Our goal is to develop a methodology for obtaining the parameters of a photonic circuit that allows us to perform a set of quantum operations necessary for the realization of a given task or quantum processing. More specifically, the quantum tasks involve the implementation of a POVM (Positive Operator Value Measure) through integrated photonic circuits. Thus, we seek to obtain optimized configurations for these devices so that the reduction of their structural complexity simplifies their manufacturing process. In addition, it is also our goal that such objects are robust against errors and losses and that the experimental applications that involve them present a minimization of the time necessary for their realization. We studied the symmetries of the proposed POVMs to, from them, configure the circuit in an optimized way. Initially, we studied the case of quantum state tomography for qubits and qutrits. We obtained planar circuits that had a smaller number of optical elements and an optical depth than those obtained by methods already known in the literature. In addition, these circuits implement all POVM elements at once, making it possible to obtain all their associated probabilities at once, minimizing the time spent on the experiment compared to experiments on an optical table or with reconfigurable circuits, where it is necessary to make changes to the configuration of the experimental apparatus from one POVM element to another. Looking for a way to generalize our protocol to larger systems, we developed a method to obtain three-dimensional photonic circuits that can be used in the experimental realization of quantum state tomography in qudits of any finite dimension. Our protocol generates circuits whose number of beam splitters and optical depth scale with functions less than in other protocols already known, showing a drastic reduction in their complexity. In addition, these circuits were highly robust in relation to the occurrence of losses. The same protocol used to obtain three-dimensional circuits for performing quantum tomography can be used to obtain circuits to implement quantum coherence measurements. The circuits obtained here also have the same advantages as the tomographic case.

Introdução

Estudos na área da informação quântica surgiram durante a chamada “segunda revolução quântica”¹, onde buscava-se desenvolver um campo de pesquisas que lidaria com o desafio de criar tecnologias baseadas nos fenômenos peculiares de sistemas quânticos, como emaranhamento e superposição quântica [1]. O estudo desse ramo possibilitou o surgimento de outras linhas de pesquisa, como, por exemplo, comunicação quântica e computação quântica. Com a comunicação quântica surgiu a possibilidade de realizar trocas de informação de forma segura, com a capacidade de identificar possíveis espões [2]. Por outro lado, a computação quântica, cuja proposta fora feita por Feynman em 1982 [3], se mostrou mais eficiente na resolução de problemas do que sua contraparte clássica. De fato, a exploração de sistemas quânticos na execução de algoritmos computacionais dão origem a protocolos que exigem menos recursos para armazenar e processar informação, além de que os princípios de superposição e do paralelismo quântico permitem um aumento na velocidade do processo computacional [4, 5].

Ao longo dos anos, protocolos de informação e computação quântica foram realizados experimentalmente utilizando-se de vários sistemas físicos. É possível, através de uma rápida pesquisa bibliográfica, encontrar trabalhos onde suas implementações se dão fazendo uso de íons e elétrons armadilhados [6–10], pontos quânticos [11–13], pares de Cooper [14–16], sistemas de spins [17, 18], ressonância magnética nuclear [19–21], dentre outros. Porém, com o constante aumento de informação a ser processada por esses sistemas, outro problema dessas abordagens veio à tona: foi notado um crescimento exponencial na quantidade de recursos necessários para o processamento de uma certa quantidade de informação, tornando alguns métodos inviáveis para aplicações mais complexas [1, 5, 22, 23]. Em outras palavras, algumas realizações experimentais não são escaláveis. Para um sistema ser considerado escalável, o crescimento na quantidade de recursos necessários para sua implementação deve ser uma função polinomial da quantidade de informação a ser processada. O primeiro trabalho a registrar a realização de protocolos de computação quântica de forma eficiente e escalável foi o trabalho de Knill e colaboradores publicado em 2001, onde foi proposto a utilização de ótica linear para a realização de tais tarefas [24].

¹<https://www.nist.gov/topics/physics/introduction-new-quantum-revolution/second-quantum-revolution>

Em seu trabalho, Knill *et al.* demonstrou ser possível a implementação de protocolos de processamento de informação quântica dispondo apenas de uma fonte de fótons únicos, divisores de feixe, modificadores de fase e foto-detectores de alta eficiência [24]. Em sua proposta, os bits quânticos (ou *qubits*) seriam codificados em um ou mais graus de liberdade dos fótons, a saber, posição e/ou polarização, por exemplo. Contudo, a manipulação de estados de fótons em mesas óticas utilizando interferômetros não é uma tarefa simples, além de apresentar falta de estabilidade e de controle de fase. Além disso, a exigência de um ambiente estabilizado, com temperatura e vibrações controladas, torna difícil o uso dessa abordagem fora de um laboratório.

Por apresentarem estabilidade e escalabilidade, além de dimensões compactas, o uso da tecnologia de guias de onda integrados se torna favorável para superar tais obstáculos. Em aplicações no campo de pesquisas fotônicas, é comum a utilização desses dispositivos integrados na forma de guias de onda óticos (ativos e passivos) e divisores de feixe, geralmente fabricados via métodos litográficos [25–27] ou pela técnica da escrita direta com lasers de femtossegundos [28,29]. Por meio da litografia, é possível criar regiões que guiam luz a partir da exposição metódica de um material fotossensível a algum tipo de radiação [30–32]. Uma limitação de tal técnica é a fabricação unicamente de arranjos planares desses guias de onda. Já a técnica da escrita direta consiste em gerar uma alteração no índice de refração de um material transparente ao focalizar no seu interior um laser com pulsos ultra-rápidos em femtossegundos [33,34]. Dessa forma, guias de onda podem ser diretamente fabricados em substratos transladando a amostra a uma velocidade constante perpendicularmente em relação ao feixe de laser por todo o caminho desejado. Assim, a escrita direta pode ser vista como um processo de um único passo, o que permite rápida prototipagem e realizações de processos de fabricação iterativos. Os guias de onda fabricados dessa forma podem ser arranjos em geometrias tridimensionais, apresentar perfis circulares transversos, entre outras características. Tais arranjos são exemplos de circuitos fotônicos integrados.

Já existe na literatura uma gama de aplicações para tais dispositivos. A primeira aplicação de circuitos fotônicos integrados fabricados via escrita direta data de 2009 e foi apresentada em um trabalho de Graham Marshall e colaboradores [35]. Neste trabalho, os autores mostraram, através da realização de experimentos de interferência, que acopladores direcionais fabricados via escrita direta são tão eficientes quanto os obtidos via processos litográficos, além de apresentarem a escalabilidade requerida para a execução de protocolos de informação quântica. Como exemplo de um resultado obtido por Graham Marshall, foi observada uma visibilidade de $V = 0,958 \pm 0,005$ em experimentos de interferência de dois fótons [35]. Acopladores direcionais e modificadores de fase são as peças que formam circuitos fotônicos mais complexos.

Subindo um degrau no nível de complexidade dos circuitos, podemos citar os trabalhos de Andrea Crespi *et al.* [36], que apresenta uma porta lógica quântica do tipo CNOT (“*controlled-NOT gate*”) implementada com três acopladores direcionais, e de Thomas

Meany *et al.* [37], onde é mostrado os resultados obtidos da implementação de uma porta de fase controlada (“*heralded gate*” ou “*C-phase gate*”) que, por sua vez, é construída com quatro desses acopladores. Realizações experimentais mais complexas, como experimentos de “*boson sampling*” [38] e a geração de estados multipartidos maximamente emaranhados (“*W-states*”) [39], também foram reportadas.

Como já dito anteriormente, uma das características únicas da técnica da escrita direta com laser de femtossegundos e, portanto, uma grande vantagem de sua aplicação, é a capacidade de fabricar arranjos tridimensionais de guias de onda, onde é explorada a facilidade de se focalizar o feixe de laser em diferentes profundidades no substrato utilizado. Utilizando desse recurso, Markus Gräfe *et al.* fabricaram um circuito fotônico tridimensional com doze acopladores direcionais capaz de verificar o grau de emaranhamento de estados multipartidos [39]. Experimentos com caminhada quântica também foram realizados utilizando-se de circuitos fotônicos [40–42].

Sabendo da importância da aplicação de circuitos fotônicos na implementação de protocolos de informação quântica, esta tese se objetiva a acrescentar mais um pequeno tijolo ao grande muro do conhecimento sobre fotônica integrada. Aqui, analisaremos e apresentaremos metodologias para a implementação de tarefas quânticas baseadas em conjuntos de operadores chamados POVMs (“*Positive-Operator Valued Measure*” ou, em português, “*Medida com Operador de Valor Positivo*”). Abordaremos os casos de tomografia de estados quânticos e medidas de coerência, ambos realizados em qudits codificados em estados de caminho. O caso da tomografia de estados quânticos já foi estudado em outros trabalhos, porém utilizando de metodologias diferentes da aqui apresentada. Por exemplo, tomografia quântica via caminhada quântica é apresentada nos trabalhos de James Titchener *et al.* [43, 44].

Portanto, de modo a abordar todas as partes importantes que envolveu nosso estudo e organizar o texto desta tese de forma didática, dividimos-o em duas partes. Na primeira parte concentram-se nossas propostas a respeito da realização de operações quânticas em circuitos fotônicos, que foram organizadas da seguinte forma: o Capítulo 1 limita-se a apresentar fundamentos básicos de mecânica quântica importantes para o nosso trabalho; o Capítulo 2 apresenta propostas para obtenção de circuitos fotônicos planares que realizam operações quânticas em sistemas de um qubit, além de um rápido estudo sobre o POVM a ser implementado experimentalmente; no Capítulo 3, o mesmo é feito para sistemas de um qutrit; o Capítulo 4 generaliza nossa proposta para circuitos tridimensionais e para sistemas quânticos de dimensão d qualquer. A segunda parte de nosso trabalho apresenta um estudo da fabricação de circuitos fotônicos em vidro através da técnica da escrita direta. Assim, apresentamos no Capítulo 5 alguns tópicos importantes sobre o estudo de guias de onda, no Capítulo 6 é abordado fenômenos que caracterizam a interação laser-material e, no Capítulo 7, a produção e a caracterização de guias de onda retos. Na terceira parte de nosso texto, são apresentadas nossas conclusões e perspectivas.

Parte I

**Operações Quânticas em Circuitos
Fotônicos**

Capítulo 1

Fundamentos de Mecânica Quântica

1.1 Bits, Qubits e Qudits

Um *bit* é definido como a menor unidade de informação que pode ser armazenada ou transmitida e seu uso se faz presente na Teoria da Informação e na Computação Clássica. Podendo assumir apenas dois valores (0 ou 1), um bit pode ser representado por uma gama de sistemas físicos que apresentam dois estados distintos, como, por exemplo, a passagem ou não de uma corrente por um determinado filamento.

A contraparte quântica de um bit é chamada de *qubit* [5, 45] e, assim como um bit assume os valores 0 ou 1, um qubit pode ser detectado em um dos estados $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, sendo assim representado por sistemas quânticos que podem ser detectados em apenas dois estados ortogonais. Uma diferença entre bits e qubits, decorrente diretamente da sua definição, é o fato de que qubits podem estar em estados diferentes de $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Eles podem se apresentar em um estado de superposição, ou seja, em uma combinação linear do tipo:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (1.1)$$

onde os coeficientes α e β são números complexos que satisfazem a condição de normalização $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, o que nos permite dizer que $|\psi\rangle$ é um vetor unitário que pertence a um espaço de Hilbert bidimensional. Quando medimos um qubit no estado $|\psi\rangle$, o encontramos no estado $|0\rangle$ com probabilidade $|\alpha|^2$ ou no estado $|1\rangle$ com probabilidade $|\beta|^2$. A condição de normalização nos permite reescrever a Equação 1.1 da seguinte forma [5, 45]:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad (1.2)$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Assim, podemos relacionar cada possível estado de $|\psi\rangle$ com um ponto na superfície de uma esfera de raio unitário determinado pelos ângulos θ e φ . Essa esfera, chamada de *Esfera de Bloch*, está representada na Figura 1.1. Apesar de ser uma representação muito elegante para o estado de um qubit, não existe uma generalização simples para sistemas com muitos qubits. Matematicamente, o estado de um sistema com n qubits é representado por uma generalização direta da Equação 1.1,

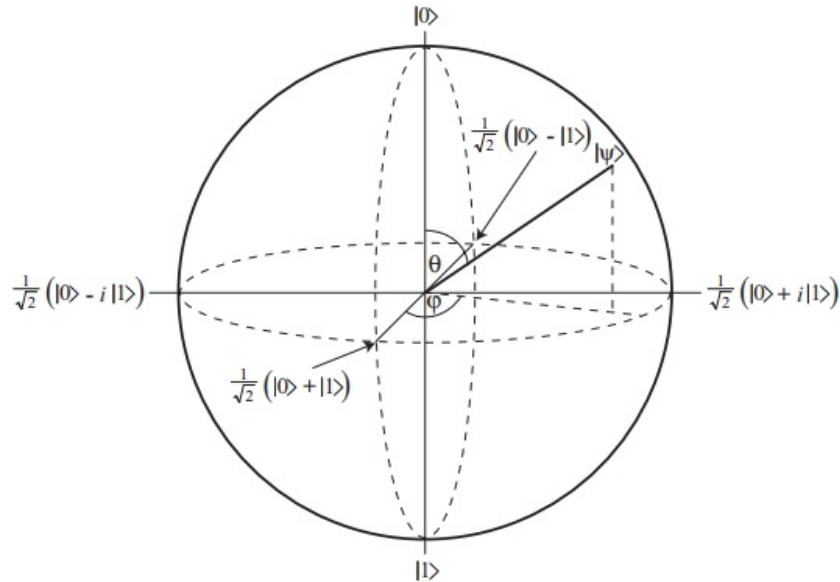


Figura 1.1: Representação da Esfera de Bloch. Figura retirada da referência [45]

dada por:

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, \dots, i_n} \alpha_{i_1, \dots, i_n} |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \dots \otimes |i_n\rangle, \quad (1.3)$$

onde $|i_j\rangle$, sendo $j = 1, 2, \dots, n$, representa um dos estados $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ e a condição de normalização assume a forma $\sum_{i_1, \dots, i_n} |\alpha_{i_1, \dots, i_n}|^2 = 1$.

Além da generalização para o caso em que se considera um sistema com muitos qubits, podemos pensar também no caso onde o sistema quântico em questão possui mais de dois estados ortogonais. Definimos assim um *qudit*:

$$|\xi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i |i\rangle, \quad (1.4)$$

onde d é o número de estados ortogonais que o sistema quântico representado pelo estado $|\xi\rangle$ possui, ou seja, a dimensão do Espaço de Hilbert a que $|\xi\rangle$ pertence. A condição de normalização, nesse caso, se escreve como $\sum_{i=0}^{d-1} |\alpha_i|^2 = 1$ e o caráter probabilístico do módulo ao quadrado dos coeficientes se mantém em todas as generalizações.

Para o caso particular onde $d = 3$, chamamos o sistema representado pela Equação 1.4 de *qutrit* [46, 47].

1.2 Matriz Densidade

Ao lidar com a descrição de experimentos ou análises teóricas que exigem o uso de uma mistura de estados quânticos, é sabido que o tratamento deste problema se torna inviável se for feita a escolha do formalismo de vetores de estado. Assim, o uso de uma abordagem alternativa faz-se necessário. Dessa forma, por exemplo, se uma determinada fonte gera um estado quântico $|\psi_i\rangle$ com probabilidade p_i podemos definir o conjunto

$\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, chamado *ensemble de estados quânticos*, e a matriz densidade desse sistema será dada por [5]:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|, \quad (1.5)$$

onde $\sum_i p_i = 1$. Se alguma das probabilidades for igual a 1, teremos um estado puro e a matriz densidade, em tal caso, se reduz a $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi|$. Os elementos da matriz $\hat{\rho}$ podem ser calculados facilmente, em qualquer base de vetores $\{|\lambda_n\rangle\}$, através da relação ¹:

$$\rho_{nm} = \langle\lambda_n|\hat{\rho}|\lambda_m\rangle. \quad (1.6)$$

A matriz densidade apresenta algumas propriedades importantes e dignas de nota. A primeira delas é que $\hat{\rho}$ é uma matriz hermitiana ². A segunda propriedade decorre diretamente do cálculo de $\langle\varphi|\hat{\rho}|\varphi\rangle$, onde $|\varphi\rangle$ é um vetor de estado arbitrário:

$$\begin{aligned} \langle\varphi|\hat{\rho}|\varphi\rangle &= \langle\varphi|\left[\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|\right]|\varphi\rangle = \sum_i p_i \langle\varphi|\psi_i\rangle \langle\psi_i|\varphi\rangle = \sum_i p_i |\langle\psi_i|\varphi\rangle|^2 \\ &\Rightarrow \langle\hat{\rho}\rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Logo, a matriz densidade é sempre não-negativa. Já o valor esperado de um observável \hat{X} medido sobre $\hat{\rho}$ é definido como [45]:

$$\langle\hat{X}\rangle = Tr(\hat{\rho}\hat{X}), \quad (1.8)$$

onde Tr representa a operação de traço ³. Desenvolvendo a Equação 1.8, temos:

$$\begin{aligned} Tr(\hat{\rho}\hat{X}) &= \sum_j \langle j|\left[\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|\hat{X}\right]|j\rangle = \sum_{i,j} p_i \langle j|\psi_i\rangle \langle\psi_i|\hat{X}|j\rangle = \\ &\sum_{i,j} p_i \langle\psi_i|\hat{X}|j\rangle \langle j|\psi_i\rangle \Rightarrow Tr(\hat{\rho}\hat{X}) = \sum_i p_i \langle\psi_i|\hat{X}|\psi_i\rangle. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Da equação acima, obtemos outra importante propriedade da matriz densidade fazendo \hat{X} igual a matriz identidade \hat{I} :

$$Tr(\hat{\rho}) = \sum_i p_i \langle\psi_i|\psi_i\rangle = \sum_i p_i \Rightarrow Tr(\hat{\rho}) = 1. \quad (1.10)$$

A unicidade do traço, mostrada na equação acima, é o análogo para matrizes densidade da condição de normalização dos vetores de estado. Fazendo agora o operador \hat{X} igual ao

¹Perceba que $\rho_{nm} = \rho_{mn}^*$.

²Essa propriedade é facilmente demonstrada lembrando-se que $p_i \geq 0$, uma vez que representa uma probabilidade, e que, se $\hat{A} = |\alpha\rangle \langle\beta|$, então $\hat{A}^\dagger = |\beta\rangle \langle\alpha|$ [48].

³O traço de uma matriz é definido como a soma dos elementos da sua diagonal principal e, utilizando a notação de Dirac, podemos escrever: $Tr\hat{A} = \sum_i \langle i|\hat{A}|i\rangle$.

próprio ρ , temos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho}^2) &= \sum_j p_j \langle \psi_j | \left[\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right] | \psi_j \rangle = \sum_{i,j} p_i p_j |\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2 \leq \sum_{i,j} p_i p_j = 1 \\ &\Rightarrow \text{Tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

A grandeza $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$ é chamada de *grau de pureza* do sistema quântico [45], de modo que $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$ apenas quando se trata de um estado puro.

Finalmente, para que a matriz densidade represente um sistema físico, ela deve satisfazer todas as propriedades demonstradas acima: ser hermitiana, positiva e de traço unitário.

1.3 Operadores Unitários

Um operador \hat{U} é dito *unitário* se satisfaz a seguinte condição:

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}, \quad (1.12)$$

Uma importância de caráter geométrico desses operadores está no fato da preservação do produto interno entre dois vetores de estado. Esse fato é facilmente provado considerando que, se $|\varphi'\rangle = \hat{U}|\varphi\rangle$, então:

$$\langle \varphi' | \varphi' \rangle = \langle \varphi | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \varphi \rangle = \langle \varphi | \hat{I} | \varphi \rangle \Rightarrow \langle \varphi' | \varphi' \rangle = \langle \varphi | \varphi \rangle. \quad (1.13)$$

Esse resultado também implica no fato de que o conjunto $\{\hat{U}|\varphi_i\rangle\}$ será uma base ortogonal sempre que $\{|\varphi_i\rangle\}$ também for uma base ortogonal e \hat{U} for um operador unitário [5]. Uma propriedade importante e fundamental apresentada pelos operadores unitários reside no fato de que estes operadores podem ser escritos na forma $\hat{A} + i\hat{B}$, desde que \hat{A} e \hat{B} sejam operadores hermitianos [45]. Assim, para um operador qualquer e seu hermitiano conjugado, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \hat{A} + i\hat{B}, \\ \hat{U}^\dagger &= \hat{A} - i\hat{B}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

De acordo com Equação 1.12, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \hat{U}\hat{U}^\dagger &= \hat{A}^2 + \hat{B}^2 - i[\hat{A}, \hat{B}] \Rightarrow \hat{A}^2 + \hat{B}^2 - i[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{I}, \\ \hat{U}^\dagger\hat{U} &= \hat{A}^2 + \hat{B}^2 + i[\hat{A}, \hat{B}] \Rightarrow \hat{A}^2 + \hat{B}^2 + i[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{I}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Somando as equações acima, temos:

$$\hat{A}^2 + \hat{B}^2 = \hat{I}, \quad (1.16)$$

e esse fato nos permite escrever nossos operadores \hat{A} e \hat{B} como funções de um terceiro operador hermitiano \hat{C} da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \cos \hat{C}, \\ \hat{B} &= \sin \hat{C}.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Usando a Equação 1.17 na Equação 1.14, temos:

$$\hat{U} = \cos \hat{C} + i \sin \hat{C} \quad \Rightarrow \quad \hat{U} = e^{i\hat{C}}.\tag{1.18}$$

Assim mostramos que qualquer operador unitário pode ser escrito como a exponencial de um operador hermitiano. Para finalizar esta seção, comentaremos sobre uma propriedade desses operadores que será de fundamental importância para este trabalho e muito utilizada em desenvolvimentos seguintes. É sempre possível fatorar um operador unitário em uma sequência de operadores também unitários que se apresentam como mais simples do que o operador original, ou seja:

$$\hat{U} = \hat{U}_n \cdots \hat{U}_3 \hat{U}_2 \hat{U}_1.\tag{1.19}$$

Reck et al. [49] nos mostraram uma aplicação prática da Equação 1.19. Em seu trabalho, vemos que, em um experimento óptico, qualquer operador unitário discreto pode ser escrito como uma combinação de divisores de feixe e modificadores de fase. Exploraremos com detalhes esse resultado quando fizermos nossas propostas para implementação de circuitos fotônicos nos capítulos seguintes.

1.4 Medições Quânticas

Para conseguirmos extrair qualquer tipo de informação de um sistema quântico é necessário que aconteça algum tipo de interação entre tal sistema e algum aparato de medição. Assim, devido à importância de tal processo, ferramentas matemáticas foram desenvolvidas para lidar com esses casos, mesmo sabendo que a natureza física desses processos permanecem como um problema que ainda segue em debate [50,51]. Descreveremos nesta seção, não em muitos detalhes, os principais tipos de medições quânticas.

A mais simples delas se trata das medições projetivas ou *medições de von Neumann* [5,45]. Considere um observável qualquer, representado por um operador hermitiano \hat{A} . Sabemos que a relação entre ele, seus auto-estados $|a_n\rangle$ e seus auto-valores a_n é dada pela seguinte equação, chamada de *equação de auto-valor* [48,52]:

$$\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle.\tag{1.20}$$

Os auto-estados de \hat{A} representam os possíveis estados quânticos em que o sistema será encontrado após a medição e seus auto-valores representam os possíveis resultados

dessa medição. A probabilidade da obtenção de cada auto-valor é dada por:

$$p(a_n) = \langle a_n | \hat{\rho} | a_n \rangle \Rightarrow p(a_n) = \text{Tr}(\hat{\rho} | a_n \rangle \langle a_n |), \quad (1.21)$$

onde $\hat{\rho}$ é a matriz densidade do sistema imediatamente antes de ser submetido ao processo de medição. Se definirmos um operador de projeção, ou *projektor*, como $\hat{P}_n = |a_n\rangle \langle a_n|$ ⁴, teremos:

$$p(a_n) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{P}_n), \quad (1.22)$$

Assim, uma medição de von Neumann é aquela onde a probabilidade para um dado resultado é calculada através da Equação 1.22. Além disso, tais projetores apresentam as seguintes propriedades:

1. São hermitianos, pelo fato de representarem observáveis.
2. São operadores positivos, uma vez que seus valores esperados representam probabilidades.
3. O conjunto de projetores é um conjunto completo, ou seja, $\sum_n \hat{P}_n = \hat{I}$. Isto acontece uma vez que a soma de todas as probabilidades $p(a_n)$ é sempre igual a 1,
4. São ortonormais entre si, satisfazendo a igualdade $\hat{P}_n \hat{P}_m = \hat{P}_n \delta_{nm}$, devido ao fato de que são construídos utilizando seus auto-vetores.

O estado do sistema após realizada uma medição de von Neumann, é dado pela matriz densidade transformada como segue:

$$\hat{\rho}' = \frac{\hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n}{\text{Tr}(\hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n)} \Rightarrow \hat{\rho}' = \frac{\hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n}{p(a_n)}. \quad (1.23)$$

Foi utilizada a propriedade cíclica do traço para simplificar a expressão para $\hat{\rho}'$ ⁵. Apesar de ser a mais simples e a mais conhecida entre os tipos de medições quânticas, as medições projetivas na maioria das vezes não refletem a realidade do processo, por não levar em consideração possíveis erros ou ruídos. Por isso, são frequentemente chamadas de *medições ideais*. Ao introduzir fontes de erros, devemos lidar com a probabilidade de tal erro afetar um possível resultado. Podemos, assim, generalizar nosso formalismo para incluir esses casos não-ideais.

Vamos considerar um caso onde λ_n representa o resultado de uma medição de von Neumann (situação ideal) e λ_r representa o resultado de uma medida real (situação não-ideal.)

⁴Essa não é a única forma de definir os projetores. Podemos generalizá-los para o caso onde um auto-estado do operador \hat{A} está relacionado a mais de um auto-valor, ou seja, para o caso onde $|a_n\rangle$ é um estado degenerado. Portanto, se para um determinado auto-valor a_n tivermos m auto-estados correspondentes, escrevemos $\hat{P}_n = \sum_{j=1}^m |\alpha_n^{(j)}\rangle \langle \alpha_n^{(j)}|$.

⁵ $\text{Tr}(\hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{P}_n \hat{P}_n) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{P}_n) = p(a_n)$.

Os possíveis erros envolvidos no processo de medição são descritos por probabilidades condicionais⁶ do tipo $p(\lambda_r|\lambda_n)$, de modo que podemos escrever:

$$p(\lambda_r) = \sum_n p(\lambda_r|\lambda_n)p(\lambda_n) \Rightarrow p(\lambda_r) = \sum_n p(\lambda_r|\lambda_n)Tr(\hat{\rho}\hat{P}_n) \Rightarrow$$

$$p(\lambda_r) = Tr \left[\sum_n p(\lambda_r|\lambda_n)\hat{\rho}\hat{P}_n \right]. \quad (1.24)$$

Podemos definir os operadores que representarão medidas reais como:

$$\hat{\pi}_r = \sum_n p(\lambda_r|\lambda_n)\hat{P}_n. \quad (1.25)$$

E as probabilidades de obter λ_r poderão ser escritas como:

$$p(\lambda_r) = Tr(\hat{\rho}\hat{\pi}_r). \quad (1.26)$$

O operadores $\hat{\pi}_r$ são hermitianos, positivos e formam um conjunto completo. No caso de medições reais, a mudança na matriz densidade do sistema acaba sendo muito mais drástica do que nas medidas projetivas. Podemos citar como exemplo a detecção de fótons, onde estes são totalmente destruídos após o experimento. Em situações como essa, a probabilidade de se obter os diferentes resultados de uma medição é muito mais importante do que o estado final do sistema em si. Para tratar esses casos, definiremos o conjunto de operadores $\{\hat{\Pi}_n\}$, chamado *POVM* (“*Positive Operator-Valued Measure*”), de modo que a probabilidade de uma medição resultar em α_n será dada pela Regra de Born:

$$p(\alpha_n) = Tr(\hat{\rho}\hat{\Pi}_n). \quad (1.27)$$

Os operadores $\hat{\Pi}_n$ são chamados de *elementos de POVM* ou *operadores de probabilidade* e devem apresentar as seguintes propriedades: serem hermitianos, positivos e formar um conjunto completo. É interessante notar que não há restrição para o número de elementos de POVM em um conjunto, podendo essa quantidade ser maior ou menor do que a dimensão do espaço de Hilbert do sistema em estudo [45].

A estratégia em trabalhar com esses operadores é determinar o conjunto ótimo para cada caso, ou seja, o conjunto que possui o número mínimo de operadores que precisam ser implementados para se obter toda a informação que se deseja sobre um dado sistema quântico. A este conjunto ótimo é dado o nome de *IC-POVM Mínimo* [53], ou *MIC-POVM*, e ele possui exatos d^2 elementos, onde d é a dimensão do Espaço de Hilbert referente ao sistema quântico em estudo [54]. A sigla IC significa Informacionalmente Completo (“*Informationally Complete*”).

⁶Probabilidades condicionais representam casos onde a probabilidade da ocorrência do resultado de um evento depende da ocorrência do resultado de outro evento. Assim, $p(a|b)$ corresponde a probabilidade do resultado de um evento ser a desde que o resultado de outro evento seja b .

Sempre que um IC-POVM apresenta máxima eficiência, seus elementos devem ser proporcionais a projetores [55]. Além disso, se os vetores que formam os elementos de um IC-POVM forem igualmente espaçados no Espaço de Hilbert onde são definidos, ou seja, o produto interno entre dois quaisquer desses vetores resultar sempre no mesmo valor, dizemos que esse conjunto de operadores é simétrico [55, 56]. Assim, definimos um *SIC-POVM* (“*Symmetric Informationally Complete POVM*”) como um conjunto com d^2 operadores, que satisfaz às seguintes condições:

1. Os operadores são proporcionais a projetores: $\hat{\Pi}_n \propto |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$
2. O produto interno entre dois quaisquer vetores que formam os tais projetores possuem sempre o mesmo valor e é dado por:

$$|\langle \psi_n | \psi_m \rangle|^2 = \frac{1}{d+1}. \quad (1.28)$$

Na prática, a forma mais geral de realizar uma medição e calcular as probabilidades desejadas utilizando o formalismo de POVMs é trabalhar com a interação de seu sistema de interesse, dado por $|\psi\rangle$, com um sistema auxiliar, normalmente chamado de *ancilla*, preparado em um estado conhecido $|A\rangle$. Essa interação cria um estado $\hat{U}|\psi A\rangle$ e, sobre este estado, é feita uma medição de von Neumann, projetando-o sobre um dos estado da base sistema-*ancilla* $\{|ml\rangle\}$ ⁷. Assim, podemos calcular a probabilidade de um dado resultado como segue:

$$p(\alpha_m, \beta_l) = |\langle ml | \hat{U} |\psi A\rangle|^2 = \langle \psi A | \hat{U}^\dagger |ml\rangle \langle ml | \hat{U} |\psi A\rangle = \langle \psi | \left[\langle A | \hat{U}^\dagger |ml\rangle \langle ml | \hat{U} |A\rangle \right] | \psi \rangle \Rightarrow p(\alpha_m, \beta_l) = \langle \psi | \hat{\Pi}_{ml} | \psi \rangle, \quad (1.29)$$

onde foi definido o seguinte operador de probabilidade, ou elemento de POVM:

$$\hat{\Pi}_{ml} = \langle A | \hat{U}^\dagger |ml\rangle \langle ml | \hat{U} |A\rangle. \quad (1.30)$$

Esses operadores são hermitianos, positivos⁸ e formam um conjunto completo⁹. Além disso, a última igualdade da Equação 1.29 é equivalente à Equação 1.27, mostrando, assim, concordância com nossa definição inicial. Podemos reescrever a probabilidade da Equação 1.29 de uma forma alternativa:

$$p(\alpha_m, \beta_l) = \langle \psi A | \hat{U}^\dagger |ml\rangle \langle ml | \hat{U} |\psi A\rangle = \langle \psi A | \hat{P}_{ml} |\psi A\rangle, \quad (1.31)$$

⁷Foi assumido que $\{|m\rangle\}$ forma uma base para o espaço de Hilbert onde se encontra o sistema principal, e $\{|l\rangle\}$ forma uma base para o espaço de Hilbert referente à *ancilla*.

⁸Para um dado $|\varphi\rangle$, temos: $\langle \varphi | \hat{\Pi}_{ml} | \varphi \rangle = \langle \varphi A | \hat{U}^\dagger |ml\rangle \langle ml | \hat{U} | \varphi A \rangle = |\langle \varphi A | \hat{U}^\dagger |ml\rangle|^2 \geq 0$.

⁹ $\sum_{m,l} \hat{\Pi}_{ml} = \sum_{m,l} \langle A | \hat{U}^\dagger |ml\rangle \langle ml | \hat{U} |A\rangle = \langle A | \hat{U}^\dagger \sum_m |m\rangle \langle m | \sum_l |l\rangle \langle l | \hat{U} |A\rangle = \langle A | \hat{U}^\dagger \hat{U} |A\rangle = \langle A | A \rangle = 1$.

onde foi definido o projetor sobre os estados $\hat{U}^\dagger |ml\rangle$:

$$\hat{P}_{ml} = \hat{U}^\dagger |ml\rangle \langle ml| \hat{U}. \quad (1.32)$$

Esse pequeno desenvolvimento faz parte de um resultado mais geral chamado *Teorema de Naimark* [57], que diz que um elemento de POVM pode ser representado por uma medição projetiva em um espaço de estados estendido. Essas ideias, particularmente a Equação 1.30, serão a base para a determinação dos parâmetros físicos dos circuitos fotônicos que proporemos para implementar os experimentos de tomografia de estados de um qubit, processo que será discutido no próximo capítulo.

1.5 Tomografia de Estados Quânticos

A *tomografia de estados* é uma técnica experimental que permite a reconstrução da matriz densidade de um sistema quântico desconhecido [5,58]. Sua implementação consiste na produção de um grande número de estados identicamente preparados e na realização de uma série de medições das grandezas que o descrevem. A partir dos resultados obtidos nessas medições, determina-se a matriz densidade do sistema quântico produzido. Vamos ilustrar o processo utilizando um sistema de dois níveis, um qubit fotônico, como exemplo. Tal qubit é preparado utilizando algum grau de liberdade do fóton. Este desenvolvimento foi retirado da referência [47].

Sabemos que a matriz densidade de um sistema de um qubit pode ser escrita como [45,58]:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left(\hat{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma} \right), \quad (1.33)$$

onde $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ e $\vec{\sigma}$ é o chamado vetor de Pauli, dado por $\vec{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$. A validade da Equação 1.33 se dá pelo fato de que o conjunto de matrizes formado pela identidade \hat{I} e pelas três matrizes de Pauli $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ e $\hat{\sigma}_z$, formam uma base para o espaço de matrizes bidimensionais. Além disso, como as matrizes de Pauli possuem traço nulo, as componentes de \vec{r} devem satisfazer a relação $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \leq 1$ [58]. Assim, dadas as matrizes de Pauli,

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

podemos reescrever a Equação 1.33 como:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1 - r_z \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Logo, para reconstruir a matriz densidade $\hat{\rho}$, basta determinarmos os valores de r_x , r_y e r_z . Para isso, recorreremos ao cálculo das probabilidades relacionadas aos resultados de

medições. Sabendo que os auto-vetores normalizados de $\hat{\sigma}_x$ são:

$$|v\rangle_x^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |v\rangle_x^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

temos, da Equação 1.22, que:

$$p(a_x^{(1)}) = Tr(\hat{\rho} |v\rangle_x^{(1)} \langle v|_x^{(1)}) \Rightarrow p(a_x^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + r_x), \quad (1.37)$$

$$p(a_x^{(2)}) = Tr(\hat{\rho} |v\rangle_x^{(2)} \langle v|_x^{(2)}) \Rightarrow p(a_x^{(2)}) = \frac{1}{2}(1 - r_x). \quad (1.38)$$

Por outro lado, ao implementar experimentalmente os projetores $|v\rangle_x^{(1)} \langle v|_x^{(1)}$ e $|v\rangle_x^{(2)} \langle v|_x^{(2)}$, as contagens de fótons referentes à projeção em um dos auto-vetores de $\hat{\sigma}_x$ serão dadas por:

$$\begin{aligned} c_x^{(1)} &= kp(a_x^{(1)}) = k(1 + r_x), \\ c_x^{(2)} &= kp(a_x^{(2)}) = k(1 - r_x). \end{aligned} \quad (1.39)$$

A constante k é dependente do número de vezes em que o experimento é realizado e da eficiência do aparato de detecção utilizado. Conseguimos assim, uma relação direta entre o parâmetro r_x e as contagens obtidas em laboratório:

$$\frac{c_x^{(1)}}{c_x^{(2)}} = \frac{1 + r_x}{1 - r_x} \Rightarrow r_x = \frac{c_x^{(1)} - c_x^{(2)}}{c_x^{(1)} + c_x^{(2)}}. \quad (1.40)$$

Se realizarmos o mesmo desenvolvimento para $\hat{\sigma}_y$ e $\hat{\sigma}_z$, obteremos:

$$r_y = \frac{c_y^{(1)} - c_y^{(2)}}{c_y^{(1)} + c_y^{(2)}}, \quad r_z = \frac{c_z^{(1)} - c_z^{(2)}}{c_z^{(1)} + c_z^{(2)}}. \quad (1.41)$$

Assim, para determinar cada parâmetro da matriz densidade, precisamos saber o valor de outras duas quantidades: as contagens referentes à cada auto-valor da matriz de Pauli correspondente. Portanto, precisamos medir seis grandezas para reconstruir $\hat{\rho}$ completamente, o que implica na implementação experimental de seis operadores diferentes. Sendo assim, a probabilidade de obter cada resultado é dada pela Equação 1.27, sendo cada operador implementado, um elemento de POVM. Neste caso particular, os elementos de POVM são projetores.

1.6 Coerência Quântica

A coerência quântica mede o quão superposto é um estado quântico [59]. O máximo de superposição para o caso particular de um estado puro ocorre quando os módulos dos coeficientes que multiplicam os vetores da base, cuja soma define o vetor de estado, são iguais. Mais detalhes sobre a relação entre a coerência quântica e a pureza do estado

quântico pode ser encontrada em [60]. Como os estados de superposição estão intimamente relacionados com os fenômenos de interferência de partículas quânticas, a coerência quântica mede a capacidade de um sistema quântico apresentar interferência e o quão alto é o contraste das franjas que pode ser observado com detectores pontuais nos padrões de interferência [61, 62]. Assim, junto com outras propriedades de tal cenário, como a quantização da energia e a estrutura tensorial do espaço de estados, a coerência quântica serve de base para outros fenômenos microscópicos importantes [63]. Além disso, faz-se notável sua importância em aplicações práticas, como em algoritmos quânticos e fusão de estados quânticos, a identificando como um verdadeiro recurso físico [64–67].

Devida sua importância, foram desenvolvidas várias formas de se quantificar o grau de coerência de um certo sistema quântico [63, 68–71]. A coerência é definida matematicamente como um funcional C que mapeia estados quânticos de um dado espaço de Hilbert de operadores densidade \mathcal{H}_{op} em um número real não negativo, ou seja, $C : \mathcal{H}_{op} \mapsto \mathbb{R}_+$, e se apresenta frequentemente como função dos elementos de fora da diagonal da matriz densidade que representa o sistema, sendo assim, uma grandeza dependente da escolha da base [60]. Como consequência, operações locais e não locais podem ter influência sobre seu valor.

Antes de apresentarmos algumas das principais medidas de coerência, precisamos definir *estados incoerentes*. Para isso, fixaremos uma base $\{|i\rangle\}$ de um espaço de Hilbert \mathcal{H} de dimensão d e todo estado quântico representado por uma matriz densidade diagonal nessa base será considerado um estado incoerente. Esses estados incoerentes formam um subconjunto de \mathcal{H} , que representaremos por \mathcal{Y} . Assim, toda matriz densidade $\hat{\gamma} \in \mathcal{Y}$ é dada por

$$\hat{\gamma} = \sum_{i=0}^{d-1} \gamma_i |i\rangle \langle i|. \quad (1.42)$$

Além disso, uma operação quântica que transforma um estado incoerente em outro estado incoerente é chamada *operação incoerente* [63, 72]. Sabendo que as operações quânticas são representadas por conjuntos de operadores de Kraus $\{\hat{K}_n\}$, onde $\sum_n \hat{K}_n^\dagger \hat{K}_n = \hat{I}$, exigimos, para operações incoerentes, que $\hat{K}_n \mathcal{Y} \hat{K}_n^\dagger \subset \mathcal{Y}$, para todo n . Este requisito garante que não há coerência sendo gerada a partir de estados incoerentes.

Uma operação incoerente também pode ser usada na identificação de um estado maximamente coerente. Um estado maximamente coerente $|\psi_c\rangle$ pode ser identificado como aquele que, através da aplicação de operações incoerentes, gera todos os outros estados do espaço de Hilbert a qual pertence [63]. Essa definição, além de ser independente da medida de coerência escolhida, nos permite identificar uma unidade de coerência, que pode ser utilizada na normalização de todas suas formas de quantificação. Assim, para tais estados, temos

$$|\psi_c\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle. \quad (1.43)$$

Dito isso, podemos apresentar algumas formas de quantificar a coerência de um sis-

tema quântico. Para um determinado funcional C representar uma medida de coerência apropriada, ele deve satisfazer às seguintes condições [63, 70]:

- A coerência deve se anular para todos os estados incoerentes. Assim, $C(\hat{\gamma}) = 0$, se $\hat{\gamma} \in \mathcal{Y}$;
- A coerência deve ser uma função monotônica sob aplicação de operações incoerentes, ou seja, $C(\hat{\rho}) \geq C(\hat{\rho}')$, onde $\hat{\rho}' = \sum_n \hat{K}_n \hat{\rho} \hat{K}_n^\dagger$;
- A coerência deve ser convexa, ou seja, não deve aumentar sob mistura de estados quânticos. Logo, $\sum_n p_n C(\hat{\rho}_n) \geq C(\sum_n p_n \hat{\rho}_n)$.

Uma das formas de quantificar a coerência quântica de um sistema é através do cálculo da *entropia relativa*. Assim, temos

$$C_{er}(\hat{\rho}) = S(\hat{\rho}_{diag}) - S(\hat{\rho}), \quad (1.44)$$

onde $S(\hat{x}) = Tr[\hat{x} \log \hat{x}]$ é a entropia de von Neumann e a matriz $\hat{\rho}_{diag}$ é definida como sendo igual à matriz $\hat{\rho}$, mas com seus termos fora da diagonal anulados. Analisando as características da entropia de von Neumann, podemos determinar os limites superior e inferior de $C_{er}(\hat{\rho})$ [45, 63]

$$0 \leq C_{er}(\hat{\rho}) \leq \log(d), \quad (1.45)$$

sendo que $C_{er}(\hat{\rho}) = \log(d)$ para estados maximamente coerentes.

Outra forma de realizar a quantificação da coerência de um estado quântico é através de *medidas de distância entre estados*. Para uma dada medida de distância D , definimos a coerência de um estado quântico $\hat{\rho}$ como

$$C_D(\hat{\rho}) = \min D(\hat{\rho}, \hat{\gamma}), \quad (1.46)$$

onde $\hat{\gamma} \in \mathcal{Y}$. A Equação 1.46 define a coerência como sendo a menor distância do estado $\hat{\rho}$ ao conjunto de estados incoerentes \mathcal{Y} .

Uma terceira forma de calcular a coerência quântica é através da chamada *norma l_1* , que se apresenta como uma opção mais simples e intuitiva do que as outras duas formas apresentadas acima. Aqui, a coerência é dada pela soma dos módulos dos elementos de fora da diagonal da matriz densidade que representa o sistema quântico em questão, ou seja,

$$C_{l_1}(\hat{\rho}) = \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}|. \quad (1.47)$$

Todas as formas de calcular a coerência definidas aqui satisfazem as condições apresentadas anteriormente para uma medida adequada de coerência. Neste trabalho, utilizaremos a *norma l_1* para quantificar a coerência de qudits preparados na variável de caminho dos fótons.

Capítulo 2

Tomografia de Estados Quânticos em Sistemas de Qubits

2.1 Determinação dos Elementos de POVM

Como foi visto no capítulo anterior, se faz necessária a implementação de seis operadores para realizar uma tomografia de estados quânticos em um sistema de um qubit. Além disso, é de conhecimento comum que qualquer tarefa realizada em laboratório carrega consigo erros experimentais, e estes se somam à medida que o número de medições necessárias para realizar tal tarefa aumenta. Assim, para diminuir os erros experimentais na determinação de $\hat{\rho}$, adotaremos a proposta feita por Řeháček e colaboradores [73], já utilizada em [47, 74].

Esta proposta consiste em substituir os operadores utilizados na tomografia usual por outros operadores construídos a partir de vetores não-coplanares que definem um tetraedro inscrito na Esfera de Bloch, diminuindo assim o número de medições necessárias de seis para quatro. A escolha da geometria tetraédrica se dá pelo fato de que o tetraedro é a figura geométrica definida por quatro vetores que abrange o maior volume dentro da Esfera de Bloch [75], sendo assim, a escolha que torna a tomografia mais eficiente [73]. Sabendo que há infinitas formas de se posicionar este tetraedro dentro de uma esfera, temos a liberdade de escolher os vetores que o determinam. Tal proposta se inspira no trabalho de R. M. A. Azzam onde são usados quatro fotodetectores para medir o estado de polarização de um feixe de luz clássica [76]. Portanto, fazendo o uso da escolha adotada nos trabalhos [47] e [74], utilizaremos os seguintes vetores:

$$\begin{aligned} |\varphi_1\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|1\rangle, & |\varphi_2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}}|1\rangle, \\ |\varphi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle, & |\varphi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle. \end{aligned} \tag{2.1}$$

E, a partir desses vetores, definimos nossos elementos de POVM da seguinte forma ¹:

$$\hat{\Pi}_i = A |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|, \quad (2.2)$$

obtendo:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1 &= \frac{A}{3} \begin{pmatrix} 2 & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, & \hat{\Pi}_2 &= \frac{A}{3} \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{\Pi}_3 &= \frac{A}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, & \hat{\Pi}_4 &= \frac{A}{3} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para determinar o valor da constante A , recorreremos ao fato de que um POVM deve ser um conjunto completo. Logo,

$$\sum_{i=1}^4 \hat{\Pi}_i = \hat{I} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}. \quad (2.4)$$

Portanto, nossos elementos de POVM serão:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2/3 & -i\sqrt{2}/3 \\ i\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}, & \hat{\Pi}_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2/3 & i\sqrt{2}/3 \\ -i\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \\ \hat{\Pi}_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/3 & -\sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/3 & 2/3 \end{pmatrix}, & \hat{\Pi}_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/3 & \sqrt{2}/3 \\ \sqrt{2}/3 & 2/3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Um detalhe que deve ser enfatizado aqui é que estes operadores não formam um SIC-POVM. Isso acontece porque o módulo ao quadrado dos produtos internos entre dois vetores quaisquer da Equação 2.1, além de serem diferentes de $(d+1)^{-1} = 1/3$, nem sempre apresentam os mesmos valores. De fato, para um certo par de vetores, temos

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \langle 0 | - \frac{i}{\sqrt{3}} \langle 1 | \right] \left[\sqrt{\frac{2}{3}} | 0 \rangle - \frac{i}{\sqrt{3}} | 1 \rangle \right] = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad |\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle|^2 = \frac{1}{9}, \quad (2.6)$$

já confirmando a desigualdade $|\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle|^2 \neq 1/3$. Para outro par de estados, temos

$$\langle \varphi_1 | \varphi_3 \rangle = \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \langle 0 | - \frac{i}{\sqrt{3}} \langle 1 | \right] \left[\frac{1}{\sqrt{3}} | 0 \rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} | 1 \rangle \right] = \frac{\sqrt{2}}{3} (1+i) \quad \Rightarrow \quad |\langle \varphi_1 | \varphi_3 \rangle|^2 = \frac{4}{9}, \quad (2.7)$$

o que confirma o fato de que este conjunto de operadores não é simétrico, uma vez que $|\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle|^2 \neq |\langle \varphi_1 | \varphi_3 \rangle|^2$.

¹Foi assumido que a constante A possui o mesmo valor para todos os operadores $\hat{\Pi}_i$. Esse fato é apenas verdade para POVMs de *Rank-1*, ou seja, proporcionais a apenas um projetor [53].

Por outro lado, ao calcularmos as expressões para r_x , r_y e r_z em função das contagens experimentais obtidas em laboratório, como feito no capítulo anterior, mas utilizando os operadores dados apresentados na Equação 2.5, obtemos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{c_4 - c_3}{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}, \\ r_y &= \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}, \\ r_z &= \frac{3(c_1 + c_2 - c_3 - c_4)}{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

de forma que a implementação destes quatro operadores é suficiente para a obtenção de toda a informação sobre um sistema formado por um qubit, formando assim, um POVM informacionalmente completo. Além disso, como nosso conjunto possui d^2 elementos ($d = 2$ para um qubit), temos que, além de informacionalmente completo, ele é mínimo. Assim, os operadores apresentados na Equação 2.5 formam um MIC-POVM e implementam uma *Tomografia Mínima*.

A generalização para o caso com n qubits é direta. O elementos de POVM para esses casos são determinados através da relação:

$$\hat{\Pi}_j = \hat{\Pi}_{i_1}^{(1)} \otimes \hat{\Pi}_{i_2}^{(2)} \otimes \hat{\Pi}_{i_3}^{(3)} \otimes \dots \otimes \hat{\Pi}_{i_n}^{(n)}, \quad (2.9)$$

onde $\hat{\Pi}_{i_n}^{(n)}$ (com $i_n = 1, 2, 3$ ou 4) é o operador que atua no n -ésimo qubit, podendo ser qualquer um dos apresentados na Equação 2.5. O MIC-POVM para um sistema de n qubits possui 4^n elementos, de modo que $j = 1, 2, 3, \dots, 4^n$.

2.2 Configuração do Circuito Fotônico

Antes de apresentar qualquer proposta de circuito fotônico para a realização de operações quânticas, faz-se interessante discutir brevemente o trabalho publicado por Reck, Zeilinger e colaboradores em 1994 [49]. Sabendo que qualquer arranjo experimental sem perdas poderia ser descrito como uma operação unitária, os autores buscaram provar a validade do procedimento inverso. Assim, eles desenvolveram um algoritmo que nos permite implementar experimentalmente uma operação unitária discreta qualquer de dimensão finita. Além disso, essa implementação é feita utilizando apenas divisores de feixe e modificadores de fase.

Os divisores de feixe, que em circuitos fotônicos são representados por acopladores

²Para o caso mais geral de n qudits, um MIC-POVM terá d^{2n} elementos.

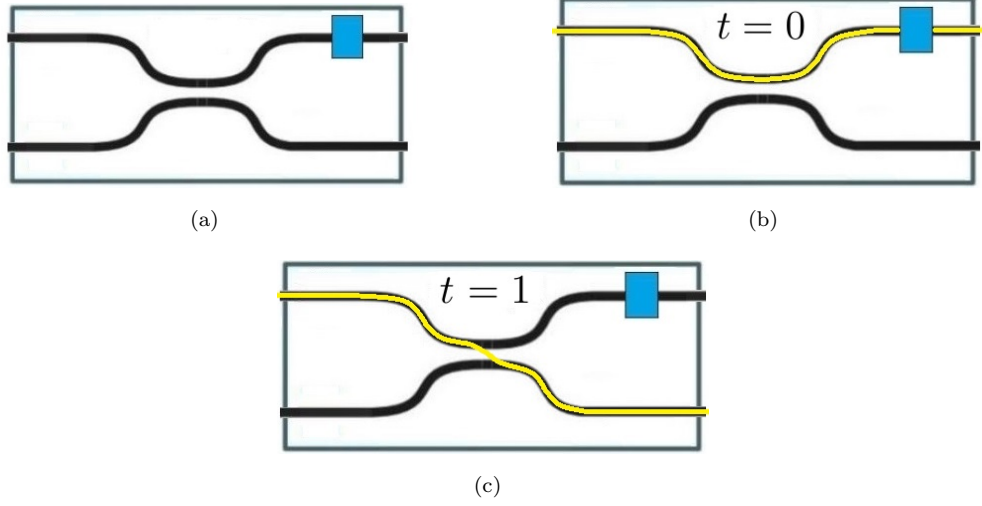


Figura 2.1: Representação esquemática do divisor de feixe representado pela Equação 2.10. As linhas escuras representam os guias de onda e sua aproximação representa um acoplador direcional. O quadrado azul indica a localização do modificador de fase ϕ . Mostra-se aqui o que acontece com a luz que adentra ao acoplador, representada pela linha amarela, quando a transmitância de tal objeto é igual a (b) $t = 0$ ou (c) $t = 1$.

direcionais, são descritos matematicamente pela seguinte matriz ³:

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} e^{i\phi}\sqrt{r} & e^{i\phi}\sqrt{t} \\ \sqrt{t} & -\sqrt{r} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

onde r é a reflectividade do divisor de feixe e t , sua transmitividade. Esses parâmetros estão relacionados de acordo com a equação $r + t = 1$. O parâmetro ϕ representa uma diferença de fase relativa entre os caminhos do acoplador. Para determinar a exata localização desse modificador de fase vamos atuar a matriz \hat{T} acima nos estados de caminho $|0\rangle$, relacionado ao guia de cima do acoplador, e $|1\rangle$, relacionado ao guia de baixo. Assim, temos:

$$\hat{T} |0\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\phi}\sqrt{r} & e^{i\phi}\sqrt{t} \\ \sqrt{t} & -\sqrt{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\phi}\sqrt{r} \\ \sqrt{t} \end{pmatrix} = e^{i\phi}\sqrt{r} |0\rangle + \sqrt{t} |1\rangle, \quad (2.11)$$

$$\hat{T} |1\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\phi}\sqrt{r} & e^{i\phi}\sqrt{t} \\ \sqrt{t} & -\sqrt{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\phi}\sqrt{t} \\ -\sqrt{r} \end{pmatrix} = e^{i\phi}\sqrt{t} |0\rangle - \sqrt{r} |1\rangle.$$

Logo, o modificador de fase será posicionado no braço de cima de saída do acoplador direcional, como mostrado na Figura 2.2. Além disso, vemos que, da forma como foi definida a matriz \hat{T} , fica estabelecido que o feixe refletido é aquele que permanece no mesmo guia após passar pela região de interação e o feixe transmitido será identificado como aquele que troca de guia.

³A definição da matriz \hat{T} utilizada neste trabalho é a mesma utilizada na referência [49]. Existem trabalhos, como o da *Linda Sansoni* [1], por exemplo, que definem a matriz \hat{T} invertendo a posição e a interpretação dos parâmetros r e t .

Nossa proposta de circuito fotônico para a realização de tomografia de estados quânticos em um sistema de qubits parte da ideia de fabricar um dispositivo com quatro entradas e quatro saídas, de modo que a probabilidade de um fóton ser detectado na saída de índice i do circuito seja igual a $p_i = Tr[\hat{\rho}\hat{\Pi}_i]$, sendo $\hat{\Pi}_i$ um dos operadores apresentados na Equação 2.5. A forma do circuito proposto está apresentada na Figura 2.2 e consiste na combinação de cinco acopladores direcionais e cinco modificadores de fase.

Aqui, associamos o estado $|0\rangle$ à segunda entrada do circuito fotônico e o estado $|1\rangle$, ao terceiro. O circuito foi concebido como sendo a aplicação sucessiva de três operações unitárias ao estado inicial do sistema. A primeira delas, \hat{T}_1 , interfere os caminhos 1 e 2, e, concomitantemente, interfere também os caminhos 3 e 4. Assim sendo, temos um acoplador direcional entre os caminhos 1 e 2 e outro entre os caminhos 3 e 4, de forma que essa primeira operação pode ser representada pela seguinte matriz:

$$\hat{T}_1 = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1}\sqrt{r_1} & e^{i\phi_1}\sqrt{t_1} & 0 & 0 \\ \sqrt{t_1} & -\sqrt{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_2}\sqrt{r_2} & e^{i\phi_2}\sqrt{t_2} \\ 0 & 0 & \sqrt{t_2} & -\sqrt{r_2} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Após a primeira operação ser realizada, uma segunda, representada por \hat{T}_2 , atua sobre o resultado da primeira operação interferindo os caminhos 2 e 3. Logo, temos:

$$\hat{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_3}\sqrt{r_3} & e^{i\phi_3}\sqrt{t_3} & 0 \\ 0 & \sqrt{t_3} & -\sqrt{r_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Finalmente, a operação \hat{T}_3 repete a configuração da primeira, de forma que podemos escrever:

$$\hat{T}_3 = \begin{pmatrix} e^{i\phi_4}\sqrt{r_4} & e^{i\phi_4}\sqrt{t_4} & 0 & 0 \\ \sqrt{t_4} & -\sqrt{r_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_5}\sqrt{r_5} & e^{i\phi_5}\sqrt{t_5} \\ 0 & 0 & \sqrt{t_5} & -\sqrt{r_5} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Portanto, a operação unitária implementada pelo circuito proposto será dada por $\hat{U}' = \hat{T}_3\hat{T}_2\hat{T}_1$ e representada pela seguinte matriz:

$$\hat{U}' = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1}\sqrt{r_1r_4} + e^{i\phi_3}\sqrt{r_3t_1t_4} & e^{i\phi_1}\sqrt{r_4t_1} - e^{i\phi_3}\sqrt{r_1r_3t_4} & e^{i(\phi_2+\phi_3)}\sqrt{r_2t_3t_4} & e^{i(\phi_2+\phi_3)}\sqrt{t_2t_3t_4} \\ -e^{i\phi_3}\sqrt{r_3r_4t_1} + e^{i\phi_1}\sqrt{r_1t_4} & e^{i\phi_3}\sqrt{r_1r_3r_4} + e^{i\phi_1}\sqrt{t_1t_4} & -e^{i(\phi_2+\phi_3)}\sqrt{r_2r_4t_3} & -e^{i(\phi_2+\phi_3)}\sqrt{r_4t_2t_3} \\ \sqrt{r_5t_1t_3} & -\sqrt{r_1r_5t_3} & -e^{i\phi_2}\sqrt{r_2r_3r_5} + \sqrt{t_2t_5} & -e^{i\phi_2}\sqrt{r_3r_5t_2} - \sqrt{r_2t_5} \\ \sqrt{t_1t_3t_5} & -\sqrt{r_1t_3t_5} & -e^{i\phi_2}\sqrt{r_2r_3t_5} - \sqrt{r_5t_2} & -e^{i\phi_2}\sqrt{r_3t_2t_5} + \sqrt{r_2r_5} \end{pmatrix}.$$

O próximo passo é determinar o valor de todos os parâmetros da matriz acima. Para isso, recorreremos à Equação 1.30, que exige o uso de um sistema auxiliar. Na prática, tal

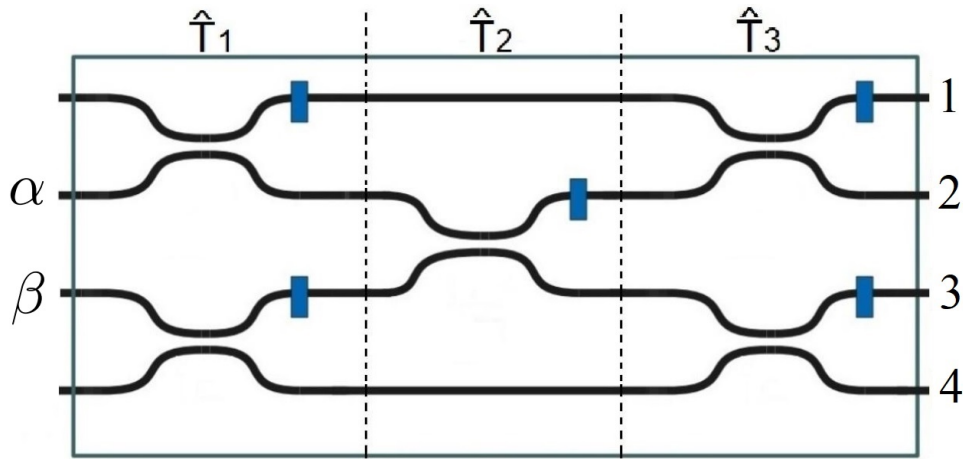


Figura 2.2: Circuito fotônico proposto para a realização de tomografia de estados quânticos em qubits. Os modificadores de fase estão representados pelos retângulos azuis.

sistema auxiliar é representado pelas entradas 1 e 4 que recebem estados de vácuo. Para fins de desenvolvimentos matemáticos, definiremos como *ancilla* o estado $|0\rangle$. Portanto, teremos:

$$|\psi\rangle_0 = |\psi\rangle \otimes |0\rangle_A = (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \otimes |0\rangle_A = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

indicando que os fótons adentram o circuito pelas entradas 1 e 3. Por outro lado, na realização do experimento proposto, será preparado um estado quântico do tipo $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$, de forma que os fótons adentrem o circuito pelas entradas 2 e 3, como já visto na Figura 2.2. Assim, o estado de entrada no circuito fotônico durante a realização dos experimentos será, de fato, dado por:

$$|\psi\rangle_{in} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Chegamos assim, a um aparente impasse: experimentalmente, temos que a operação realizada pelo circuito é feita sobre $|\psi\rangle_{in}$, enquanto que os cálculos teóricos são feitos sobre o estado $|\psi\rangle_0$. Faz-se necessário assim escrever o estado $|\psi\rangle_{in}$ como função do estado teórico $|\psi\rangle_0$. Isso é feito através de uma transformação \hat{M} definida como

$$|\psi\rangle_{in} = \hat{M} |\psi\rangle_0 \quad \Rightarrow \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Assim, teremos $\hat{U}' |\psi\rangle_{in} = \hat{U}' \hat{M} |\psi\rangle_0$, de modo que, para a realização dos cálculos

teóricos, devemos considerar que nosso circuito fotônico implemente a operação $\hat{U} = \hat{U}'\hat{M}$, dada por:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1}\sqrt{r_4t_1} - e^{i\phi_3}\sqrt{r_1r_3t_4} & e^{i\phi_1}\sqrt{r_1r_4} + e^{i\phi_3}\sqrt{r_3t_1t_4} & e^{i(\phi_2+\phi_3)}\sqrt{r_2t_3t_4} & e^{i(\phi_2+\phi_3)}\sqrt{t_2t_3t_4} \\ e^{i\phi_3}\sqrt{r_1r_3r_4} + e^{i\phi_1}\sqrt{t_1t_4} & -e^{i\phi_3}\sqrt{r_3r_4t_1} + e^{i\phi_1}\sqrt{r_1t_4} & -e^{i(\phi_2+\phi_3)}\sqrt{r_2r_4t_3} & -e^{i(\phi_2+\phi_3)}\sqrt{r_4t_2t_3} \\ -\sqrt{r_1r_5t_3} & \sqrt{r_5t_1t_3} & -e^{i\phi_2}\sqrt{r_2r_3r_5} + \sqrt{t_2t_5} & -e^{i\phi_2}\sqrt{r_3r_5t_2} - \sqrt{r_2t_5} \\ -\sqrt{r_1t_3t_5} & \sqrt{t_1t_3t_5} & -e^{i\phi_2}\sqrt{r_2r_3t_5} - \sqrt{r_5t_2} & -e^{i\phi_2}\sqrt{r_3t_2t_5} + \sqrt{r_2r_5} \end{pmatrix}.$$

Para determinarmos os parâmetros da matriz \hat{U} , analisaremos as operações realizadas sobre um fóton que emerge de alguma das saídas do circuito fotônico. Para isso, definimos quatro operadores $\hat{\Pi}_{ml}$, em função de r_i , t_i e ϕ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), e, ao compará-los com os operadores da Equação 2.5, determinamos os valores desses parâmetros. Estes quatro operadores são responsáveis por realizar projeções do estado quântico sobre um dos vetores de base do espaço de Hilbert estendido do sistema qubit-*ancilla* $|ml\rangle$ ($m, l = 0, 1$). Este cálculo é feito elemento a elemento de cada matriz. Primeiramente, são definidas as matrizes $\hat{\Pi}_{ml}$ como

$$\hat{\Pi}_{ml} = \begin{pmatrix} \Pi_{ml}^{00} & \Pi_{ml}^{01} \\ \Pi_{ml}^{10} & \Pi_{ml}^{11} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

e, em seguida, seus elementos são calculados fazendo uso da Equação 1.30:

$$\Pi_{ml}^{pq} = \langle p| \left[\langle 0| \hat{U}^\dagger |ml\rangle \langle ml| \hat{U} |0\rangle \right] |q\rangle = \langle p0| \hat{U}^\dagger |ml\rangle \langle ml| \hat{U} |q0\rangle. \quad (2.19)$$

Os estados $|m\rangle$ e $|l\rangle$ pertencem às bases do Espaços de Hilbert relativos ao qubit e à *ancilla*, respectivamente. Como a projeção de nosso sistema quântico sobre cada estado $|ml\rangle$ é representada pela detecção de um fóton que emerge de alguma das saídas do circuito fotônico, podemos realizar a seguinte mudança de notação: $\hat{\Pi}_{ml} \rightarrow \hat{E}_k$, onde k representa a k -ésima saída do nosso interferômetro. Assim, dadas as seguintes mudanças

$$\hat{\Pi}_{00} \longrightarrow \hat{E}_1, \quad \hat{\Pi}_{01} \longrightarrow \hat{E}_2, \quad \hat{\Pi}_{10} \longrightarrow \hat{E}_3, \quad \hat{\Pi}_{11} \longrightarrow \hat{E}_4, \quad (2.20)$$

nossos elementos de POVM serão:

$$\hat{E}_1 = \begin{pmatrix} r_4t_1 + r_1r_3t_4 - 2\cos(\phi_3 - \phi_1)\sqrt{r_1r_3r_4t_1t_4} & e^{i\phi_2}\sqrt{r_2t_3}(-t_4\sqrt{r_1r_3} + e^{i(\phi_3-\phi_1)}\sqrt{r_4t_1t_4}) \\ e^{-i\phi_2}\sqrt{r_2t_3}(-t_4\sqrt{r_1r_3} + e^{-i(\phi_3-\phi_1)}\sqrt{r_4t_1t_4}) & r_2t_3t_4 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\hat{E}_2 = \begin{pmatrix} t_1t_4 + r_1r_3r_4 + 2\cos(\phi_3 - \phi_1)\sqrt{r_1r_3r_4t_1t_4} & -e^{i\phi_2}\sqrt{r_2t_3}(r_4\sqrt{r_1r_3} + e^{i(\phi_3-\phi_1)}\sqrt{r_4t_1t_4}) \\ -e^{-i\phi_2}\sqrt{r_2t_3}(r_4\sqrt{r_1r_3} + e^{-i(\phi_3-\phi_1)}\sqrt{r_4t_1t_4}) & r_2r_4t_3 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\hat{E}_3 = \begin{pmatrix} r_1 r_5 t_3 & e^{i\phi_2} r_5 \sqrt{r_1 r_2 r_3 t_3} - \sqrt{r_1 r_5 t_2 t_3 t_5} \\ e^{-i\phi_2} r_5 \sqrt{r_1 r_2 r_3 t_3} - \sqrt{r_1 r_5 t_2 t_3 t_5} & t_2 t_5 + r_2 r_3 r_5 - 2 \cos \phi_2 \sqrt{r_2 r_3 r_5 t_2 t_5} \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\hat{E}_4 = \begin{pmatrix} r_1 t_3 t_5 & e^{i\phi_2} t_5 \sqrt{r_1 r_2 r_3 t_3} + \sqrt{r_1 r_5 t_2 t_3 t_5} \\ e^{-i\phi_2} t_5 \sqrt{r_1 r_2 r_3 t_3} + \sqrt{r_1 r_5 t_2 t_3 t_5} & r_5 t_2 + r_2 r_3 t_5 + 2 \cos \phi_2 \sqrt{r_2 r_3 r_5 t_2 t_5} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Para obter os parâmetros que definem os operadores \hat{E}_j ($j = 1, 2, 3, 4$) é preciso compará-los aos operadores $\hat{\Pi}_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) definidos na Equação 2.5. Primeiramente, a ausência das fases ϕ_4 e ϕ_5 nos operadores \hat{E}_j nos permite definir:

$$\phi_4 = 0, \quad \phi_5 = 0. \quad (2.25)$$

Com o objetivo de simplificar os operadores \hat{E}_j , definimos o acoplador óptico em \hat{T}_2 como sendo do tipo $1 : 0$, de forma que $r_3 = 0$ e $t_3 = 1$. Com isso, nossos operadores se resumem a:

$$\hat{E}_1 = \begin{pmatrix} r_4 t_1 & e^{-i(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)} \sqrt{r_2 r_4 t_1 t_4} \\ e^{i(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)} \sqrt{r_2 r_4 t_1 t_4} & r_2 t_4 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

$$\hat{E}_2 = \begin{pmatrix} t_1 t_4 & -e^{-i(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)} \sqrt{r_2 r_4 t_1 t_4} \\ -e^{i(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)} \sqrt{r_2 r_4 t_1 t_4} & r_2 r_4 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\hat{E}_3 = \begin{pmatrix} r_1 r_5 & -\sqrt{r_1 r_5 t_2 t_5} \\ -\sqrt{r_1 r_5 t_2 t_5} & t_2 t_5 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\hat{E}_4 = \begin{pmatrix} r_1 t_5 & \sqrt{r_1 r_5 t_2 t_5} \\ \sqrt{r_1 r_5 t_2 t_5} & r_5 t_2 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Quando comparamos \hat{E}_1 (Eq. (2.26)) com $\hat{\Pi}_1$ (Eq. (2.5)) e \hat{E}_2 (Eq. (2.27)) com $\hat{\Pi}_2$ (Eq. (2.5)), concluímos que:

$$r_4 = t_4 \quad \Rightarrow \quad r_4 = 1/2, \quad t_4 = 1/2. \quad (2.30)$$

Similarmente, ao comparar \hat{E}_3 (Eq. (2.28)) com $\hat{\Pi}_3$ (Eq. (2.5)) e \hat{E}_4 (Eq. (2.29)) com $\hat{\Pi}_4$ (Eq. (2.5)), obtemos:

$$r_5 = t_5 \quad \Rightarrow \quad r_5 = 1/2, \quad t_5 = 1/2. \quad (2.31)$$

Assim sendo, esses operadores adquirem formas mais simples:

$$\hat{E}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t_1 & e^{-i(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)} \sqrt{r_2 t_1} \\ e^{i(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)} \sqrt{r_2 t_1} & r_2 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

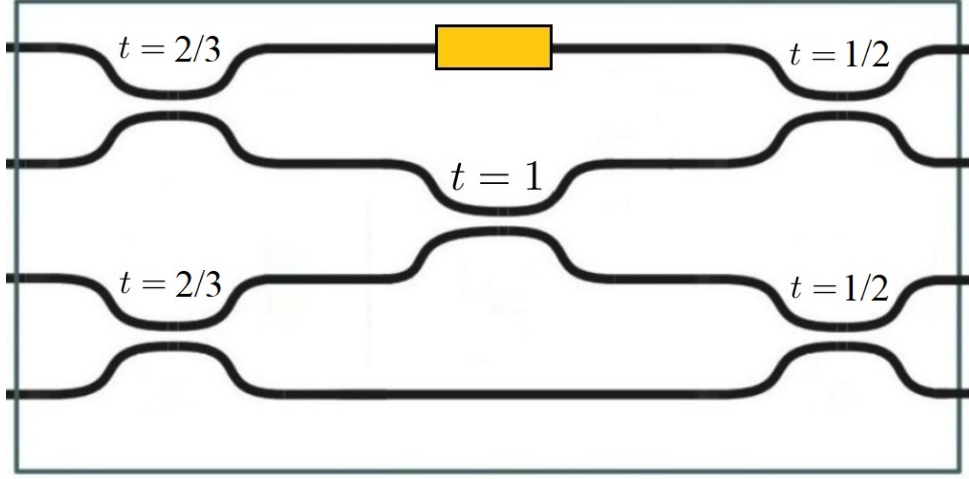


Figura 2.3: Real configuração do circuito fotônico que implementa uma tomografia mínima em sistemas de um qubit. As transmitâncias dos divisores de feixe estão apresentadas na figura e o retângulo amarelo representa um modificador de fase $\phi = \pi/2$.

$$\hat{E}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t_1 & -e^{-i(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)} \sqrt{r_2 t_1} \\ -e^{i(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)} \sqrt{r_2 t_1} & r_2 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

$$\hat{E}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_1 & -\sqrt{r_1 t_2} \\ -\sqrt{r_1 t_2} & t_2 \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

$$\hat{E}_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r_1 & \sqrt{r_1 t_2} \\ \sqrt{r_1 t_2} & t_2 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Através das mesmas comparações feitas anteriormente, é possível obter os últimos parâmetros do circuito, completando assim sua configuração:

$$\begin{aligned} r_1 &= 1/3, & t_1 &= 2/3, & \phi_1 &= \pi/2, \\ r_2 &= 1/3, & t_2 &= 2/3, & \phi_2 &= \phi_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ao levar em consideração todos os parâmetros aqui deduzidos, nosso circuito fotônico proposto se torna o apresentado na Figura 2.3. Ou seja, ao fabricar este circuito seremos capazes de usá-lo para realizar experimentos de tomografia de estados quânticos de sistemas de qubits. Assim, de posse das contagens de fótons que emergem de cada saída do circuito, a matriz densidade do sistema é recuperada com o uso da Equação 2.8 e da Equação 1.35.

Os resultados obtidos nesta subseção estão registrados em [77] e sua validade está demonstrada de forma teórica no Seção 2.4. Uma proposta alternativa à nossa é apresentada em [78], mas sua implementação requer um maior número de elementos ópticos para ser implementada.

2.3 Medida de Coerência Quântica

Nossa proposta de um circuito fotônico que possa ser utilizado para a medida da coerência quântica de um sistema de qubits segue a mesma ideia apresentada na seção anterior. Primeiro, precisamos determinar um POVM adequado para a tarefa. Utilizaremos aqui, o POVM apresentado em [59]

$$\begin{aligned} \hat{E}_1 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\sqrt{2}\pi} \\ e^{i\sqrt{2}\pi} & 1 \end{pmatrix}, & \hat{E}_2 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-i\sqrt{2}\pi} \\ -e^{i\sqrt{2}\pi} & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{E}_3 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, & \hat{E}_4 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

Em seguida, precisamos encontrar uma forma de escrever a coerência em função das probabilidades associadas aos elementos de POVM apresentados na Equação 2.37. Sabemos que a matriz densidade de um sistema de um qubit pode ser escrita como

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} a & c + id \\ c - id & b \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

o que nos leva à seguinte expressão para a coerência

$$C_{l_1}(\hat{\rho}) = \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}| \quad \Rightarrow \quad C_{l_1}(\hat{\rho}) = 2\sqrt{c^2 + d^2}. \quad (2.39)$$

Por outro lado, calculando as probabilidades associadas aos elementos de POVM da Equação 2.37 através da equação $p_i = Tr[\hat{\rho}\hat{E}_i]$, obtemos

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{4}[1 + 2c \cos(\sqrt{2}\pi) - 2d \sin(\sqrt{2}\pi)], & p_2 &= \frac{1}{4}[1 - 2c \cos(\sqrt{2}\pi) + 2d \sin(\sqrt{2}\pi)], \\ p_3 &= \frac{1}{4}(1 - 2c), & p_4 &= \frac{1}{4}(1 + 2c). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Invertendo as equações acima é possível escrever os parâmetros c e d em função das probabilidades p_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Uma vez que a coerência se apresentou como função de dois parâmetros, o uso de apenas duas das quatro equações apresentadas na Equação 2.40 é suficiente para a determinação da coerência quântica de um sistema de um qubit. Nossa proposta de circuito fotônico para cálculo de coerência quântica está apresentado na Figura 2.4, sendo que seus parâmetros foram calculados utilizando um desenvolvimento igual ao apresentado na Seção 2.2.

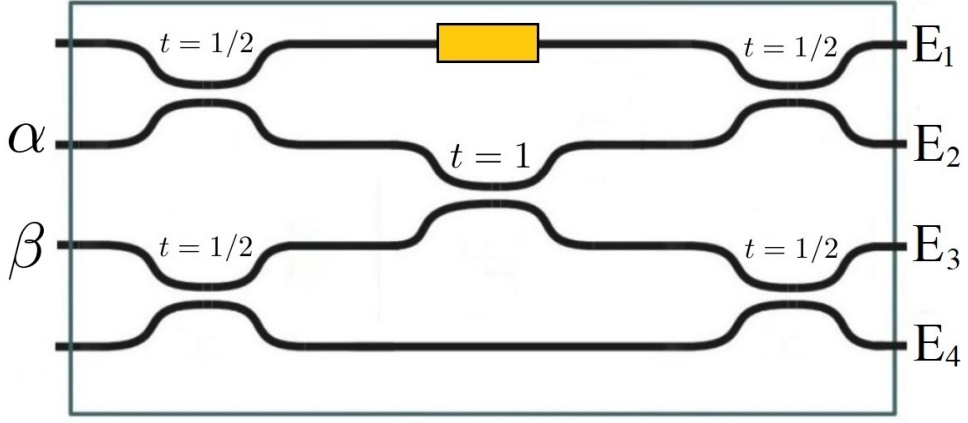


Figura 2.4: Configuração do circuito fotônico para cálculo de coerência quântica em sistemas de um qubit. As transmitâncias dos divisores de feixe estão apresentadas na figura e o retângulo amarelo representa um modificador de fase $\phi = \sqrt{2}\pi$. A probabilidade de detecção de um fóton em cada uma das saídas é dada por $p_i = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{E}_i]$, com $i = 1, 2, 3, 4$.

2.4 Demonstração da Validade desta Proposta

Como mostrado na Seção 1.5 e na Seção 2.1, é possível determinar a matriz densidade de um sistema de um qubit a partir de contagens de fótons obtidas experimentalmente. Lembrando que a probabilidade de detecção dos fótons pode ser escrita em função dessas contagens como $p_i = c_i/(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)$, podemos reescrever a Equação 2.8 da seguinte forma

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{3(p_4 - p_3)}{\sqrt{2}}, \\ r_y &= \frac{3(p_1 - p_2)}{\sqrt{2}}, \\ r_z &= 3(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Assim, queremos demonstrar que a probabilidade de detectar um fóton após a implementação experimental de um dos elementos de POVM da Equação 2.5 é a mesma do que a de detectar um fóton que emerge de sua respectiva saída em nosso circuito fotônico proposto. Para isto, seja o estado inicial do qubit a ser tomografado dado pelo seguinte vetor de estado

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \text{onde } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2.42)$$

que dá origem à seguinte matriz densidade:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \quad \Rightarrow \quad \hat{\rho} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Queremos calcular, primeiramente, as probabilidades associada aos elementos de POVM

apresentados na Equação 2.5. Sendo $\alpha = m + in$ e $\beta = p + iq$ ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$), obtemos

$$\begin{aligned}
 p_1 &= Tr \left(\hat{\rho} \hat{\Pi}_1 \right) = \frac{1}{3}(m^2 + n^2) + \frac{1}{6}(p^2 + q^2) + \frac{\sqrt{2}}{3}(mq - np), \\
 p_2 &= Tr \left(\hat{\rho} \hat{\Pi}_2 \right) = \frac{1}{3}(m^2 + n^2) + \frac{1}{6}(p^2 + q^2) - \frac{\sqrt{2}}{3}(mq - np), \\
 p_3 &= Tr \left(\hat{\rho} \hat{\Pi}_3 \right) = \frac{1}{6}(m^2 + n^2) + \frac{1}{3}(p^2 + q^2) - \frac{\sqrt{2}}{3}(mp + nq), \\
 p_4 &= Tr \left(\hat{\rho} \hat{\Pi}_4 \right) = \frac{1}{6}(m^2 + n^2) + \frac{1}{3}(p^2 + q^2) + \frac{\sqrt{2}}{3}(mp + nq).
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Ao aplicarmos a matriz que representa o circuito já com os respectivos valores dos parâmetros substituídos em nosso estado inicial expandido $|\psi\rangle_{in}$, obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & i & 1/\sqrt{2} & 1 \\ i/\sqrt{2} & i & -1/\sqrt{2} & -1 \\ 1 & -1/\sqrt{2} & 1 & -1/\sqrt{2} \\ 1 & -1/\sqrt{2} & -1 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i\alpha + \beta/\sqrt{2} \\ i\alpha - \beta/\sqrt{2} \\ -\alpha/\sqrt{2} + \beta \\ -\alpha/\sqrt{2} - \beta \end{pmatrix}. \tag{2.45}$$

O estado final da Equação 2.45 pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de estado pertencente à base do Espaço de Hilbert à qual nosso sistema expandido pertence da seguinte forma:

$$|\psi\rangle_{out} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\left(i\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right) |00\rangle + \left(i\alpha - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right) |01\rangle + \left(-\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \beta \right) |10\rangle + \left(-\frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \beta \right) |11\rangle \right]. \tag{2.46}$$

Tomando o módulo ao quadrado de cada coeficiente da expressão acima obtemos as probabilidades de detectarmos o estado final do sistema projetado em cada um dos estados da base. Na prática, essa probabilidade representa a probabilidade de detectarmos um fóton que emerge por uma das saídas do nosso circuito. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \left| \frac{i\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\beta}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{3}(m^2 + n^2) + \frac{1}{6}(p^2 + q^2) + \frac{\sqrt{2}}{3}(mq - np), \\
 p_2 &= \left| \frac{i\alpha}{\sqrt{3}} - \frac{\beta}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{1}{3}(m^2 + n^2) + \frac{1}{6}(p^2 + q^2) - \frac{\sqrt{2}}{3}(mq - np), \\
 p_3 &= \left| -\frac{\alpha}{\sqrt{6}} + \frac{\beta}{\sqrt{3}} \right|^2 = \frac{1}{6}(m^2 + n^2) + \frac{1}{3}(p^2 + q^2) - \frac{\sqrt{2}}{3}(mp + nq), \\
 p_4 &= \left| -\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \frac{\beta}{\sqrt{3}} \right|^2 = \frac{1}{6}(m^2 + n^2) + \frac{1}{3}(p^2 + q^2) + \frac{\sqrt{2}}{3}(mp + nq).
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Vemos assim que as probabilidades dadas na Equação 2.44 são as mesmas das calculadas na Equação 2.47, como queríamos demonstrar. Esta igualdade valida a nossa proposta para o caso de estados puros. A extensão para estados mistos e arbitrários será apresentada na Seção 4.4. Para o circuito apresentado na Seção 2.3, a demonstração é análoga.

Capítulo 3

Tomografia de Estados Quânticos em Sistemas de Qutrits

3.1 Determinação dos Elementos de POVM

Para determinar o POVM utilizado na implementação da tomografia de estados quânticos em sistemas de qutrits ($d = 3$) adotaremos o método apresentado por Paiva-Sánchez e colaboradores [79], e já empregado em [47]. A estratégia que aqui será usada consiste basicamente em construir os elementos de POVM através de estados equidistantes.

Definimos o conjunto $B_0(|\varphi_j\rangle)$ de estados equidistantes como um conjunto de d estados não necessariamente ortogonais $|\varphi_j\rangle$, com $j = 0, 1, \dots, d - 1$, pertencentes a um espaço de Hilbert d -dimensional e definidos pela propriedade:

$$\langle \varphi_j | \varphi_{j'} \rangle = \alpha = |\alpha| e^{i\theta}, \quad (3.1)$$

sempre que $j \neq j'$. Além disso, foi demonstrado em [80] que os estados em $B_0(|\varphi_j\rangle)$ são linearmente independentes quando $|\alpha|$ está restringido ao conjunto $[0, |\alpha_\theta|)$, onde:

$$|\alpha_\theta| = \frac{\sin \theta'}{\sin(\theta + \theta')}, \quad (3.2)$$

onde $\theta' = (\pi - \theta)/d$. Quando $|\alpha| = |\alpha_\theta|$, com $\theta \neq 0$, os estados serão linearmente dependentes. Outro resultado importante sobre estados equidistantes, e que tem influência direta na determinação dos elementos de um SIC-POVM, está relatado em [81] e diz que os estados de $B_0(|\varphi_j\rangle)$ serão simétricos sempre que α for um número real, ou seja, $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Para esses valores de θ , temos:

$$|\alpha_0| = \frac{\sin(\pi/d)}{\sin(\pi/d)} \Rightarrow |\alpha_0| = 1 \quad (3.3)$$

e

$$|\alpha_\pi| = \frac{\sin 0}{\sin \pi}. \quad (3.4)$$

A indeterminação acima é facilmente contornada tomando o limite onde $\theta \rightarrow \pi$ e fazendo uso da *Regra de L'Hôpital*:

$$|\alpha_\pi| = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\sin \theta'}{\sin(\theta + \theta')} = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{-\cos \theta'}{(d-1)\cos(\theta + \theta')} = \frac{-1}{-(d-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\alpha_\pi| = \frac{1}{d-1}.$$
(3.5)

Esses cálculos serão úteis na hora de determinar uma equação mais simples para os estados $|\varphi_j\rangle$. Sua forma geral é dada pela equação [79]:

$$|\varphi_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} \sqrt{\lambda_k} (\omega_k^j) |k\rangle, \quad (3.6)$$

onde

$$\lambda_k = 1 - |\alpha_\theta| \frac{\sin(\theta + \theta_k)}{\sin \theta_k}, \quad \omega_k^j = e^{-2ij(\theta - k\pi)/d}, \quad (3.7)$$

onde $\theta_k = (k\pi - \theta)/d$. Usando a expressão para λ_k , podemos determinar qual valor de θ deve ser usado para determinar os vetores $|\varphi_j\rangle$ que serão usados para construir os elementos de POVM. Assim, para $\theta = 0$ temos:

$$\lambda_k = 1 - |\alpha_0| \frac{\sin(k\pi/d)}{\sin(k\pi/d)} = 1 - \frac{\sin(k\pi/d)}{\sin(k\pi/d)} \Rightarrow \lambda_k = 0, \quad \forall k \neq 0. \quad (3.8)$$

Como essa escolha nos leva a um caso trivial onde $|\varphi_j\rangle = 0$ para todo k não-nulo, faremos $\theta = \pi$. Portanto,

$$\lambda_k = 1 + \frac{1}{d-1} \frac{\sin[(k-1)\pi/d]}{\sin[(k-1)\pi/d]} \Rightarrow \lambda_k = \frac{d}{d-1}, \quad k \neq 1 \quad (3.9)$$

Com o intuito de contornar a indeterminação de λ_k em $k = 1$, define-se $\lambda_1 = 0$. Definido o valor de θ , a Equação 3.6 pode ser reescrita como:

$$|\varphi_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{d-1}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{d-1} e^{2i\pi j(k-1)/d} |k\rangle, \quad (3.10)$$

Uma vez que o desenvolvimento feito até agora nos permite determinar apenas d dos d^2 operadores necessários, precisamos de uma forma para obter os que faltam. Isso é feito observando o fato de que o POVM que buscamos é o conjunto dos operadores construídos a partir de todos os vetores pertencentes à união de todos os conjuntos de estados equidistantes $B_s(|\varphi_j\rangle)$, onde $s = 0, 1, \dots, d-1$. Estes conjuntos $B_s(|\varphi_j\rangle)$ são obtidos a partir da relação [79]:

$$B_s(|\varphi_j\rangle) = \{|\varphi_j^{(s)}\rangle = \hat{X}^s |\varphi_j\rangle\}, \quad (3.11)$$

onde o operador \hat{X} realiza uma soma módulo d^1 no estado $|k\rangle$:

$$\hat{X} |k\rangle = |k + 1\rangle. \quad (3.13)$$

Finalmente, podemos listar aqui os vetores $|\varphi_j^{(s)}\rangle$ para $d = 3$:

$$\begin{aligned} |\varphi_0^{(0)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |2\rangle), \\ |\varphi_1^{(0)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-2i\pi/3} |0\rangle + e^{2i\pi/3} |2\rangle), \\ |\varphi_2^{(0)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{2i\pi/3} |0\rangle + e^{-2i\pi/3} |2\rangle), \\ |\varphi_0^{(1)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), \\ |\varphi_1^{(1)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{2i\pi/3} |0\rangle + e^{-2i\pi/3} |1\rangle), \\ |\varphi_2^{(1)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-2i\pi/3} |0\rangle + e^{2i\pi/3} |1\rangle), \\ |\varphi_0^{(2)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle), \\ |\varphi_1^{(2)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{2i\pi/3} |1\rangle + e^{-2i\pi/3} |2\rangle), \\ |\varphi_2^{(2)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-2i\pi/3} |1\rangle + e^{2i\pi/3} |2\rangle), \end{aligned} \quad (3.14)$$

e, a partir desses vetores, podemos construir todos os elementos de POVM que precisamos implementar experimentalmente para realizar tomografia de estados quânticos em sistemas de qutrits com o uso da equação [47]:

$$\hat{\Pi}_j^{(s)} = \frac{1}{3} |\varphi_j^{(s)}\rangle \langle \varphi_j^{(s)}|. \quad (3.15)$$

O número $1/3$ na equação acima surge da condição de completeza dos POVMs. Por possuir exatos d^2 elementos ($d = 3$ para qutrits), sendo cada um proporcional a um projetor e satisfazer a condição $|\langle \varphi_j^{(s)} | \varphi_{j'}^{(s')} \rangle|^2 = 1/4 = (d + 1)^{-1}$, para qualquer par de estados dados na Equação 3.14, temos que nosso conjunto de operadores é um SIC-POVM e implementa uma *Tomografia Mínima*. Para o caso de n qutrits, obtém-se os operadores necessários utilizando uma equação análoga à Equação 2.9.

¹Seja x e y números inteiros. A soma módulo d entre esses números é definida da seguinte forma:

$$x + y = \begin{cases} x + y, & x + y \leq d - 1 \\ x + y - d, & x + y > d - 1 \end{cases}. \quad (3.12)$$

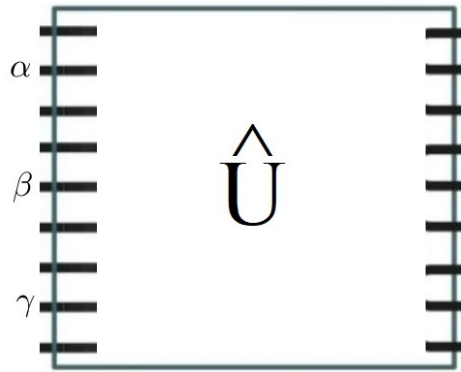


Figura 3.1: Distribuição dos estados de base do qutrit pelas entradas do circuito fotônico proposto para realizar um processo de tomografia quântica em tal sistema. O circuito realizará sobre o estado inicial uma operação unitária \hat{U} .

3.2 Configuração do Circuito Fotônico

Com o intuito de obter um circuito fotônico que realize tomografia de estados quânticos em sistemas de um qutrit, usaremos uma ideia análoga à utilizada na Seção 2.2. Como o POVM aqui utilizado possui nove elementos, procuramos determinar um interferômetro, que implemente uma operação unitária \hat{U} , com nove entradas e nove saídas, cuja a probabilidade de detectar um fóton em cada uma das saídas seja igual a $p_j^{(s)} = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{\Pi}_j^{(s)}]$, onde $\hat{\Pi}_j^{(s)}$ são os elementos de POVM definidos na Equação 3.15.

Como um qutrit é definido em um espaço de estados tridimensional, sendo que a matriz que define nosso interferômetro é de dimensão 9, devemos expandi-lo com o auxílio de uma *ancilla*. Por conveniência, escolhemos para representar nosso sistema auxiliar o estado $|1\rangle$ que, na prática, será representado pelas entradas que recebem estados de vácuo, assim como no caso do qubit. Suponha um caso particular onde o estado inicial é representado pelo vetor de estado $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle$ ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$), a distribuição dos seus estados de base pelas entradas do circuito está apresentada na Figura 3.1 e nosso estado inicial no Espaço de Hilbert estendido $|\psi\rangle_{ex}$ será escrito da seguinte forma

$$|\psi\rangle_{ex} = |\psi\rangle \otimes |1\rangle_A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Nosso objetivo é garantir que a operação \hat{U} realizada pelo circuito fotônico sobre o estado $|\psi\rangle_{ex}$ gere um estado final cujos coeficientes de expansão $a_j^{(s)}$ obedeçam à seguinte

igualdade

$$|a_j^{(s)}|^2 = Tr[\hat{\rho}\hat{\Pi}_j^{(s)}], \quad (3.17)$$

onde $j, s = 0, 1, 2$. A razão desta igualdade é que a última parte do processo realiza a implementação de uma medição projetiva no espaço estendido, cujas probabilidades de detecção em cada saída do interferômetro são proporcionais a $|a_j^{(s)}|^2$. Para que a Equação 3.17 seja satisfeita, devemos ter

$$a_j^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^2 b_{k+s} e^{2i\pi j(k-1)/3}, \quad (3.18)$$

onde a soma $k + s$ é do tipo módulo 3 e as constantes b_{k+s} são os coeficientes de expansão do estado inicial: $b_0 = \alpha$, $b_1 = \beta$ e $b_2 = \gamma$.

Com uma abordagem um pouco diferente do caso apresentado para a tomografia de qubits, nossa proposta para o caso da tomografia de qutrits é feita com base na simetria apresentada pelos estados $|\varphi_j^{(s)}\rangle$ usados na construção dos elementos de POVM. Podemos ver, observando a Equação 3.14, que tais estados podem ser divididos em três grupos, um para cada valor de s . Os estados pertencentes a cada grupo são sempre superposições dos mesmos estados de base e, entre grupos, há um padrão na distribuição dos termos de fase. Baseado nisso, dividiremos nosso circuito em três setores e a matriz unitária que o representa será um produto de três operações também unitárias, mas sequenciais e independentes. Cada setor representa um grupo de estados $|\varphi_j^{(s)}\rangle$. A Figura 3.2 mostra a organização desses setores e dessas operações sequenciais. Discutiremos essas três operações com mais detalhes.

Observando que, na Equação 3.18, cada um dos coeficientes α , β e γ aparecem em dois setores, precisamos realizar operações que os organizem dessa forma. A primeira operação, \hat{U}_1 , realiza uma difusão de cada componente do estado de entrada, o distribuindo pelos dois guias de onda da extremidade do seu respectivo setor. Matematicamente, no Setor 0, é realizada a seguinte operação

$$\hat{U}_1^{(0)} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

A solução da Equação 3.19 mais adequada para nosso problema é a seguinte matriz

$$\hat{U}_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Para determinar como se dá a implementação experimental da operação $\hat{U}_1^{(0)}$, vamos escrevê-la como um produto de matrizes que representam divisores de feixe, matrizes do

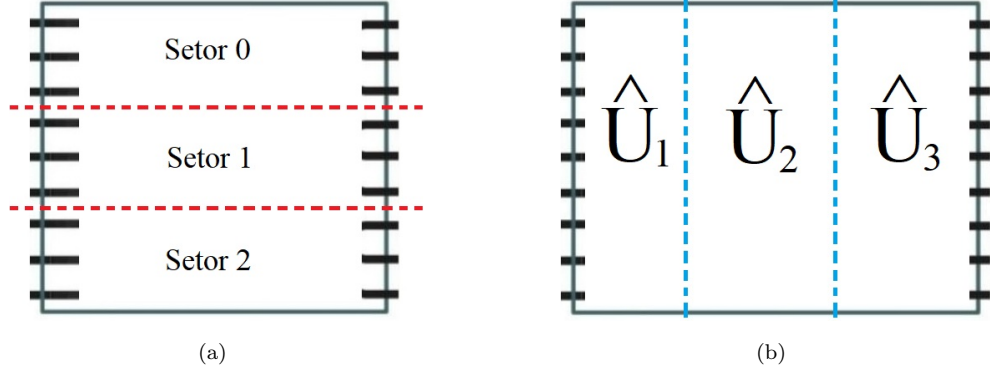


Figura 3.2: Divisão esquemática de nosso circuito fotônico para tomografia quântica em qutrits em (a) setores e (b) operações unitárias sequenciais.

tipo da apresentada na Equação 2.10. Para este caso, foi feito da seguinte forma

$$\hat{U}_1^{(0)} = \hat{U}_{12}^{(0)} \cdot \hat{U}_{11}^{(0)}, \quad (3.21)$$

onde

$$\hat{U}_{11}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{U}_{12}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Analisando as matrizes definidas na Equação 3.22 concluímos que a matriz $\hat{U}_1^{(s)}$, $s = 0, 1, 2$, pode ser implementada experimentalmente a partir de um arranjo de dois divisores de feixe, sendo que o primeiro deles é do tipo $1/2 : 1/2$ ($t = 1/2$ e $r = 1/2$) localizado entre o segundo e o terceiro guia do setor. Já o segundo divisor é do tipo $1 : 0$ ($t = 1$ e $r = 0$) e está localizado entre o primeiro e o segundo guia do setor. Como queremos que uma operação semelhante a $\hat{U}_1^{(0)}$ seja aplicada aos outros setores, temos que a primeira operação realizada pelo circuito fotônico no estado inicial $|\psi\rangle_{ex}$ será dada por

$$\hat{U}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

O arranjo de divisores de feixe que implementa a operação \hat{U}_1 está apresentado na

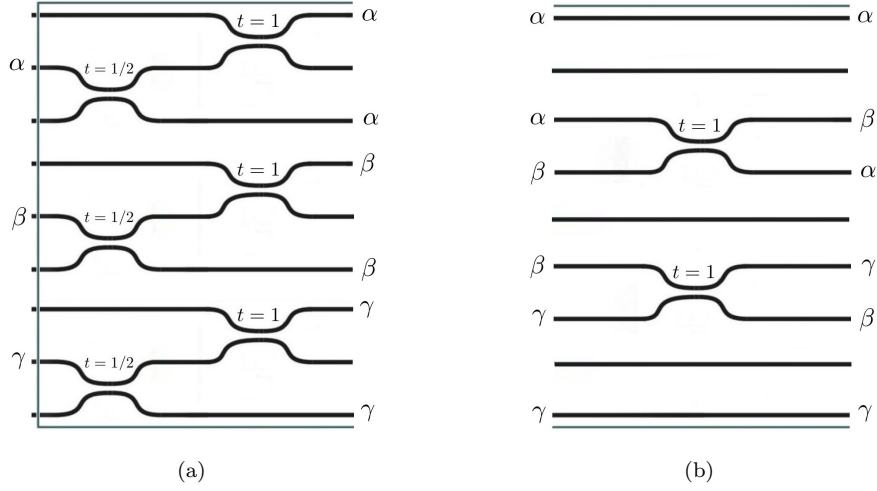


Figura 3.3: Arranjo de divisores de feixe que implementa as operações (a) \hat{U}_1 e (b) \hat{U}_2 no circuito que visa a realização de tomografia quântica em qutrits. É apresentada a distribuição dos coeficientes de expansão do estado $|\psi\rangle_{ex}$ pelos guias de onda do interferômetro antes e depois da atuação das respectivas operações. As transmitâncias dos divisores de feixe estão apresentadas na figura e as constantes de normalização foram ignoradas.

Figura 3.3(a) e sua atuação gera o seguinte estado final

$$\hat{U}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

A segunda operação executada pelo nosso circuito fotônico deve garantir que haja dois coeficientes diferentes de expansão do estado $|\psi\rangle_{ex}$ em cada setor. Para isso, a seguinte operação de permutação entre setores deve ser implementada

$$\hat{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

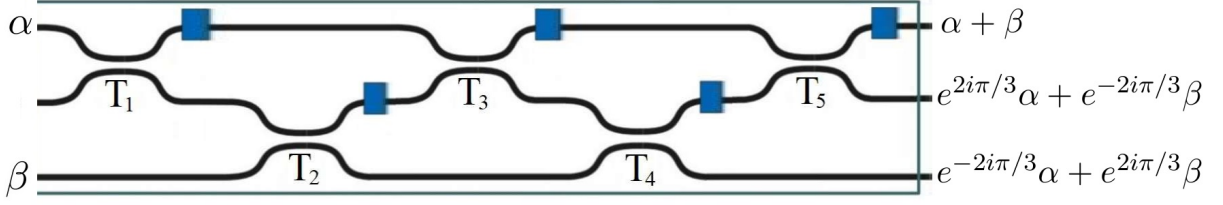


Figura 3.4: Arranjo de divisores de feixe proposto para realizar a operação $\hat{U}_3^{(0)}$ no circuito para tomografia quântica de qutrits. É apresentada a distribuição dos coeficientes de expansão do estado $|\psi\rangle_{ex}$. Os quadrados azuis representam modificadores de fase. As transmitâncias dos divisores de feixe estão apresentadas na figura e as constantes de normalização foram ignoradas.

É notável que a operação \hat{U}_2 é facilmente implementada por dois divisores de feixe do tipo 1 : 0, sendo um deles localizado entre os terceiro e quarto guias de onda que compõe o circuito e o outro localizado entre os sexto e sétimo guias, como mostra a Figura 3.3(b). Sua atuação é simples e gera o seguinte estado final

$$\hat{U}_2 \begin{pmatrix} \alpha/\sqrt{2} \\ 0 \\ \alpha/\sqrt{2} \\ \beta/\sqrt{2} \\ 0 \\ \beta/\sqrt{2} \\ \gamma/\sqrt{2} \\ 0 \\ \gamma/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ \alpha \\ 0 \\ \gamma \\ \beta \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Uma vez que cada setor conta com dois coeficientes diferentes de expansão do estado $|\psi\rangle_{ex}$, nos resta combiná-los e acrescentar os devidos termos de fase, a saber, $e^{2i\pi/3}$ e $e^{-2i\pi/3}$. Esta operação é feita de forma independente em cada setor e, no Setor 0, é representada por uma matriz $\hat{U}_3^{(0)}$ que satisfaz a seguinte equação

$$\hat{U}_3^{(0)} \begin{pmatrix} \alpha/\sqrt{2} \\ 0 \\ \beta/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ e^{2i\pi/3}\alpha + e^{-2i\pi/3}\beta \\ e^{-2i\pi/3}\alpha + e^{2i\pi/3}\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{U}_3^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{2i\pi/3} & 1 & e^{-2i\pi/3} \\ e^{-2i\pi/3} & 1 & e^{2i\pi/3} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Por não ser trivial a representação da operação $\hat{U}_3^{(0)}$ como um arranjo de divisores de feixe, vamos definir um arranjo arbitrário e ajustar seus parâmetros afim de que sua atuação realize a operação desejada. Tal arranjo arbitrário está apresentado na Figura 3.4. Tal arranjo é composto por cinco divisores de feixe e cinco modificadores de fase e sua representação matricial é dada por $\hat{U}_3^{(0)} = \hat{T}_5\hat{T}_4\hat{T}_3\hat{T}_2\hat{T}_1$, onde

$$\hat{T}_a = \begin{pmatrix} e^{i\phi_a}\sqrt{r_a} & e^{i\phi_a}\sqrt{t_a} & 0 \\ \sqrt{t_a} & -\sqrt{r_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{T}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_b}\sqrt{r_b} & e^{i\phi_b}\sqrt{t_b} \\ 0 & \sqrt{t_b} & -\sqrt{r_b} \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

sendo $a = 1, 3, 5$ e $b = 2, 4$. Através de um procedimento análogo ao apresentado na parte final da Seção 2.2, obtém-se que os parâmetros referentes à cada divisor de feixe que compõe a implementação experimental do operador $\hat{U}_3^{(0)}$ são

$$\begin{array}{lll}
 t_1 = 0; & r_1 = 1; & \phi_1 = -2\pi/3, \\
 t_2 = 1; & r_2 = 0; & \phi_2 = -\pi/3, \\
 t_3 = 1/2; & r_3 = 1/2; & \phi_3 = -\pi/2, \\
 t_4 = 2/3; & r_4 = 1/3; & \phi_4 = 0, \\
 t_5 = 1/2; & r_5 = 1/2; & \phi_5 = \pi.
 \end{array} \tag{3.29}$$

Como operações semelhantes são aplicadas nos outros setores, a terceira parte do nosso circuito fotônico realiza uma operação representada pela seguinte matriz

$$\hat{U}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 e^{2i\pi/3} & 1 & e^{-2i\pi/3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 e^{-2i\pi/3} & 1 & e^{2i\pi/3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & e^{2i\pi/3} & 1 & e^{-2i\pi/3} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & e^{-2i\pi/3} & 1 & e^{2i\pi/3} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2i\pi/3} & 1 & e^{-2i\pi/3} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-2i\pi/3} & 1 & e^{2i\pi/3}
 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

e sua atuação gera o seguinte estado final

$$\hat{U}_3 \begin{pmatrix}
 \alpha/\sqrt{2} \\
 0 \\
 \beta/\sqrt{2} \\
 \alpha/\sqrt{2} \\
 0 \\
 \gamma/\sqrt{2} \\
 \beta/\sqrt{2} \\
 0 \\
 \gamma/\sqrt{2}
 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}
 \alpha + \beta \\
 e^{2i\pi/3}\alpha + e^{-2i\pi/3}\beta \\
 e^{-2i\pi/3}\alpha + e^{2i\pi/3}\beta \\
 \alpha + \gamma \\
 e^{2i\pi/3}\alpha + e^{-2i\pi/3}\gamma \\
 e^{-2i\pi/3}\alpha + e^{2i\pi/3}\gamma \\
 \beta + \gamma \\
 e^{2i\pi/3}\beta + e^{-2i\pi/3}\gamma \\
 e^{-2i\pi/3}\beta + e^{2i\pi/3}\gamma
 \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

O circuito fotônico completo que realiza tomografia de estados quânticos em sistemas de um qutrit está representado na Figura 3.5 e realiza sobre o estado $|\psi\rangle_{ex}$ a operação unitária $\hat{U} = \hat{U}_3\hat{U}_2\hat{U}_1$. Perceba que o modificador de fase ϕ_5 não foi considerado em nosso esquema completo. Isso é justificado pelo fato de que um modificador de fase no final do circuito não influencia na contagem dos fótons que emergem por tal saída.

Pelo fato da nossa proposta para qutrits ter sido feita com base nas Equações 3.17 e 3.18, não se faz necessário uma demonstração explícita de sua validade. Os resultados

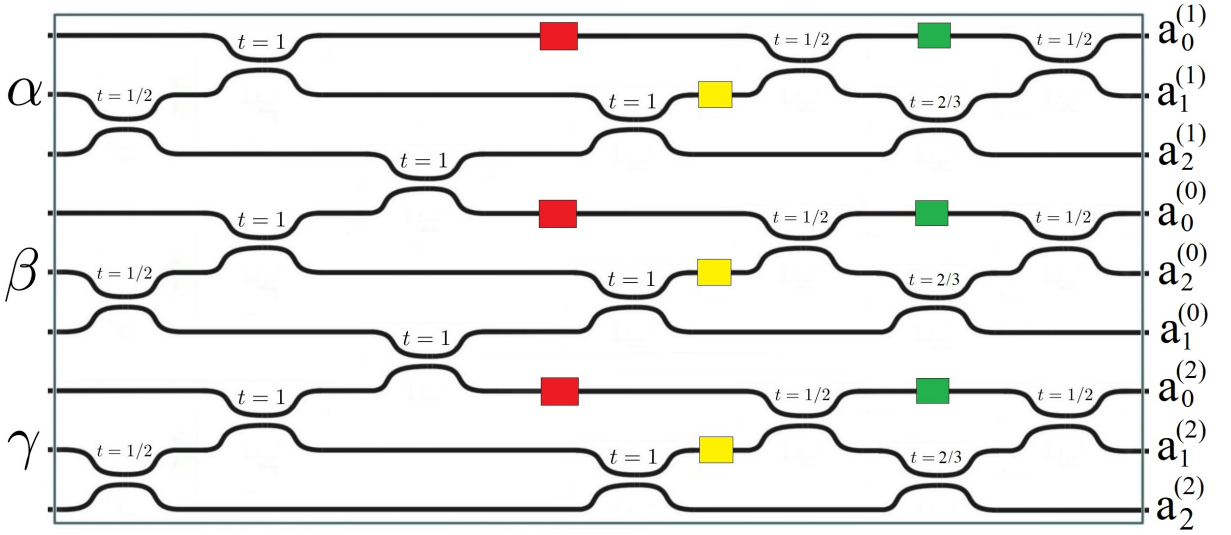


Figura 3.5: Circuito fotônico que realiza tomografia de estados em sistemas de um qutrit. As transmissâncias de todos os divisores de feixe que o compõe estão indicadas na figura. Os quadrados vermelhos representam modificadores de fase $\phi_1 = -2\pi/3$. Já os amarelos, $\phi_2 = -\pi/3$. Por fim, os quadrados verdes representam modificadores $\phi_3 = -\pi/2$. Os coeficientes $a_j^{(s)}$ estão definidos na Equação 3.18.

obtidos nesta subseção foram publicados em [77]. Além disso, uma proposta alternativa à nossa é apresentada em [78], mas, assim como no caso dos qubits, sua implementação requer um maior número de elementos ópticos para ser implementada. Apesar do circuito aqui apresentado ter sido obtido supondo um estado inicial puro, sua aplicação também é válida para estados mistos, como será mostrado na Seção 4.4.

3.3 Obtenção dos Elementos da Matriz Densidade

Para finalizar nossa proposta para tomografia quântica de qutrits falta mostrar como recuperar a matriz densidade a partir das probabilidades de detecção dos fótons. Como o circuito foi projetado para que essas probabilidades sejam iguais às probabilidades associadas aos elementos de POVM definidos na Equação 3.15, trabalharemos com a Regra de Born e seguiremos o desenvolvimento apresentado em [79]. Escrevendo a matriz densidade do nosso sistema como $\hat{\rho} = \sum_{p,q} \rho_{pq} |p\rangle \langle q|$, temos

$$p_j^{(s)} = \frac{1}{3} \text{Tr} \left[\sum_{p,q=0}^2 \rho_{pq} |p\rangle \langle q| \varphi_j^{(s)} \langle \varphi_j^{(s)}| \right]. \quad (3.32)$$

Fazendo uso das Equações 3.6, 3.11 e 3.13, lembrando que $\theta = \pi$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} p_j^{(s)} &= \frac{1}{9} \text{Tr} \left[\sum_{p,q=0}^2 \rho_{pq} |p\rangle \langle q| \sum_{m=0}^2 \sqrt{\lambda_m} e^{-2i\pi j(m-1)/3} |m+s\rangle \sum_{n=0}^2 \sqrt{\lambda_n} e^{2i\pi j(n-1)/3} \langle n+s| \right] \\ \Rightarrow p_j^{(s)} &= \frac{1}{9} \text{Tr} \left[\sum_{p,q,m,n=0}^2 \rho_{pq} \sqrt{\lambda_m \lambda_n} e^{-2i\pi j(m-n)/3} |p\rangle \langle q| m+s\rangle \langle n+s| \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow p_j^{(s)} &= \frac{1}{9} \sum_{p,q,m,n,l=0}^2 \rho_{pq} \sqrt{\lambda_m \lambda_n} e^{-2i\pi j(m-n)/d} \langle l|p\rangle \langle q|m+s\rangle \langle n+s|l\rangle \\
 \Rightarrow p_j^{(s)} &= \frac{1}{9} \sum_{p,q,m,n=0}^2 \rho_{pq} \sqrt{\lambda_m \lambda_n} e^{-2i\pi j(m-n)/d} \langle q|m+s\rangle \langle n+s|p\rangle \\
 &\Rightarrow p_j^{(s)} = \frac{1}{9} \sum_{p,q=0}^2 \rho_{pq} e^{2i\pi j(p-q)/3} \sqrt{\lambda_{p-s} \lambda_{q-s}}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Vale lembrar que as operações presentes nos índices dos parâmetros λ são realizadas em módulo 3. Submetendo a equação para as probabilidades apresentada acima a uma Transformada de Fourier discreta, obtemos:

$$\tilde{p}_k^{(s)} = \sum_{j=0}^2 e^{-2i\pi k j/3} p_j^{(s)} \Rightarrow \tilde{p}_k^{(s)} = \frac{1}{9} \sum_{p,q,j=0}^2 \rho_{pq} e^{2i\pi j(p-q-k)/3} \sqrt{\lambda_{p-s} \lambda_{q-s}}. \tag{3.34}$$

Realizando primeiramente o somatório em j , obtemos

$$\sum_{j=0}^2 e^{2i\pi j(p-q-k)/3} = 2\pi\delta \left[\frac{2\pi}{3}(k-p+q) \right] = 3\delta(k-p+q), \tag{3.35}$$

onde δ é a função Delta de Dirac. Substituindo o resultado obtido na Equação 3.35 na Equação 3.34 e realizando a soma em p , temos

$$\tilde{p}_k^{(s)} = \frac{1}{3} \sum_{q=0}^2 \rho_{q+k,q} \sqrt{\lambda_{q+k-s} \lambda_{q-s}}. \tag{3.36}$$

É possível obter todos os elementos da matriz densidade fazendo apenas $k = 0, 1$. De fato, para $k = 0$ conseguimos recuperar os elementos da diagonal principal como segue:

$$\tilde{p}_0^{(s)} = \frac{1}{3} \sum_{q=0}^2 \lambda_{q-s} \rho_{qq}. \tag{3.37}$$

De modo que, para cada valor possível de s , temos:

$$\begin{aligned}
 s = 0 &\Rightarrow 3\tilde{p}_0^{(0)} = \lambda_0 \rho_{00} + \lambda_1 \rho_{11} + \lambda_2 \rho_{22}, \\
 s = 1 &\Rightarrow 3\tilde{p}_0^{(1)} = \lambda_2 \rho_{00} + \lambda_0 \rho_{11} + \lambda_1 \rho_{22}, \\
 s = 2 &\Rightarrow 3\tilde{p}_0^{(2)} = \lambda_1 \rho_{00} + \lambda_2 \rho_{11} + \lambda_0 \rho_{22}.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Lembrando que $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_0 = \lambda_2 = 3/2$, a Equação 3.38 pode ser reescrita na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_0^{(0)} \\ \tilde{p}_0^{(1)} \\ \tilde{p}_0^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{00} \\ \rho_{11} \\ \rho_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Invertendo a Equação 3.39 obtemos

$$\begin{pmatrix} \rho_{00} \\ \rho_{11} \\ \rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_0^{(0)} \\ \tilde{p}_0^{(1)} \\ \tilde{p}_0^{(2)} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Os elementos da diagonal principal de $\hat{\rho}$ são facilmente recuperados da equação acima

$$\begin{aligned} \rho_{00} &= \tilde{p}_0^{(0)} + \tilde{p}_0^{(1)} - \tilde{p}_0^{(2)}, \\ \rho_{11} &= -\tilde{p}_0^{(0)} + \tilde{p}_0^{(1)} + \tilde{p}_0^{(2)}, \\ \rho_{22} &= \tilde{p}_0^{(0)} - \tilde{p}_0^{(1)} + \tilde{p}_0^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Para a obtenção dos demais elementos de $\hat{\rho}$ retornamos à Equação 3.36 e fazemos $k = 1$. Obtemos, assim:

$$\tilde{p}_1^{(s)} = \frac{1}{3} \sum_{q=0}^2 \rho_{q+1,q} \sqrt{\lambda_{q+1-s} \lambda_{q-s}}. \quad (3.42)$$

Portanto, repetindo o procedimento feito para o caso dos elementos da diagonal principal, obtemos as equações que definem os demais elementos da matriz densidade inicial do sistema em estudo:

$$\rho_{10} = \frac{1}{2} \tilde{p}_1^{(1)}, \quad \rho_{21} = \frac{1}{2} \tilde{p}_1^{(2)}, \quad \rho_{02} = \frac{1}{2} \tilde{p}_1^{(0)}. \quad (3.43)$$

Lembrando que $\rho_{mn} = \rho_{nm}^*$, podemos escrever a matriz densidade do sistema de qutrits como:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2(\tilde{p}_0^{(0)} + \tilde{p}_0^{(1)} - \tilde{p}_0^{(2)}) & [\tilde{p}_1^{(1)}]^* & \tilde{p}_1^{(0)} \\ \tilde{p}_1^{(1)} & 2(-\tilde{p}_0^{(0)} + \tilde{p}_0^{(1)} + \tilde{p}_0^{(2)}) & [\tilde{p}_1^{(2)}]^* \\ [\tilde{p}_1^{(0)}]^* & \tilde{p}_1^{(2)} & 2(\tilde{p}_0^{(0)} - \tilde{p}_0^{(1)} + \tilde{p}_0^{(2)}) \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Resumindo, a matriz densidade de um sistema de qutrits pode ser recuperado da seguinte forma: de posse das contagens experimentais dos fótons que emergem de cada saída do interferômetro proposto, calcular suas respectivas probabilidades $p_j^{(s)}$ dividindo o valor de cada contagem pela contagem total; em seguida, calcula-se os valores de $\tilde{p}_k^{(s)}$, definidos na Equação 3.34, e os substituímos na Equação 3.44.

Capítulo 4

Circuitos Tridimensionais

4.1 Tomografia de Estados Quânticos em Sistemas de Qudits, com $d \geq 3$

4.1.1 Elementos de POVM

Objetivamos nesta seção generalizar nossa proposta de circuitos fotônicos com o intuito de sermos capazes de realizar tomografia de estados quânticos em sistemas de qudits de qualquer dimensão finita $d \geq 3$ e, para isso, precisamos inicialmente definir qual POVM é o ideal para a tarefa.

Adotaremos aqui elementos de POVM construídos a partir de estados equidistantes, como já feito na Seção 3.1. Assim, nosso POVM será formado por d^2 elementos definidos pela equação

$$\hat{\Pi}_j^{(s)} = \frac{1}{d} |\varphi_j^{(s)}\rangle \langle \varphi_j^{(s)}|, \quad (4.1)$$

onde

$$|\varphi_j^{(s)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d-1}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{d-1} e^{2i\pi j(k-1)/d} |k+s\rangle, \quad (4.2)$$

sendo $j, s = 0, 1, 2, \dots, d-1$ e a soma $k+s$ é feita em módulo d . As probabilidades associadas aos elementos de POVM aqui definidos são calculadas via Regra de Born. Realizando um procedimento semelhante ao já feito na Seção 3.3, obtemos

$$p_j^{(s)} = \frac{1}{d^2} \sum_{p,q=0}^{d-1} \rho_{pq} e^{2i\pi j(p-q)/d} \sqrt{\lambda_{p-s} \lambda_{q-s}}, \quad (4.3)$$

onde as grandezas λ_k estão definidas na Equação 3.9 e as operações em seus subíndices são realizadas em módulo d . Perceba que a Equação 4.3 relaciona as probabilidades $p_j^{(s)}$ com os elementos ρ_{pq} da matriz densidade do sistema quântico. Assim, obtendo experimentalmente essas probabilidades, é possível construir um sistema de equações cujas soluções serão os elementos da matriz densidade do estado quântico em estudo. Um

desenvolvimento alternativo ao sistema de equações é fazer uso de uma Transformada de Fourier Discreta, como feito na Seção 3.3.

4.1.2 Design Generalizado do Circuito Fotônico

Baseado no que foi apresentado na subseção anterior, propomos aqui uma forma de determinar o circuito fotônico cuja atuação sobre um estado quântico inicial gere um estado final de tal forma que as probabilidades de detecção dos fótons que emergem por uma de suas saídas seja igual à probabilidade associada à um dos elementos de POVM definidos na Equação 4.1. Assim, devemos exigir que os coeficientes de expansão $\sigma_j^{(s)}$ do estado final obedeçam à seguinte equação

$$|\sigma_j^{(s)}|^2 = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{\Pi}_j^{(s)}]. \quad (4.4)$$

A ideia central da proposta que aqui será apresentada é a mesma já utilizada na Seção 3.2 para sistemas de qutrits, mas, por conta de dificuldades práticas em se determinar a configuração de circuitos fotônicos planares para estados de dimensão maiores do que três, lançaremos uso de estruturas tridimensionais. A principal vantagem de tal estratégia será mostrada quando compararmos o número de divisores de feixe e a profundidade óptica dos circuitos resultantes de nossa proposta com circuitos planares concebidos por métodos já conhecidos da literatura [49, 82]. A profundidade óptica é definida como o número máximo de divisores de feixe que um fóton atravessa desde sua entrada até sua saída do circuito.

Assim, os circuitos propostos aqui serão sempre compostos de d^2 guias de onda, arranjados em d colunas com d guias em cada, dispostos verticalmente. Na Figura 4.1 apresentamos um esquema da seção transversal do nosso circuito tridimensional, onde os índices s representam as colunas e os índices j , as camadas. Assim, os estados de caminho serão identificados com vetores do tipo $|js\rangle$. Nossa proposta requer que o estado de qudits seja preparado de tal forma que os fótons adentrem ao circuito pela camada $j = 0$

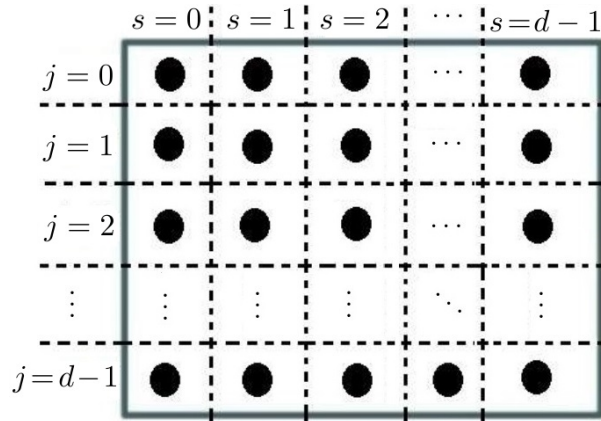


Figura 4.1: Seção transversal do nosso circuito fotônico tridimensional para a realização de tomografia quântica em qudits. Os círculos pretos representam os guias de onda. Os índices s representam as colunas e os índices j , as camadas.

ou $j = d - 1$. Adotaremos o primeiro caso e suporemos que o estado de entrada será dado por

$$|\psi\rangle = \sum_{s=0}^{d-1} a_s |0s\rangle, \quad (4.5)$$

onde $\sum_s |a_s|^2 = 1$.

Uma vez que nossa proposta para circuitos tomográficos tridimensionais é feita com a mesma premissa básica adotada no caso de circuitos planares para qutrits (Equação 4.4), a estrutura do circuito em si também segue a mesma ideia. Dividiremos nosso interferômetro em três operações sequenciais e unitárias. A primeira, difundirá os coeficientes de expansão do estado de entrada por mais guias de uma mesma coluna. A segunda será responsável por permutar coeficientes entre colunas, e a última se encarregará de realizar operações entre eles e acrescentar os devidos termos de fase. Explicaremos com detalhes como implementar cada uma dessas operações.

Como dito acima, a primeira das operações sequenciais realiza uma distribuição dos coeficientes do estado de entrada por outros guias da mesma coluna. Tal operação atua de forma independente em cada coluna s e sua atuação realiza a seguinte transformação

$$a_s |0s\rangle \longmapsto \frac{1}{\sqrt{d-1}} \sum_{j=0}^{d-2} a_s |js\rangle. \quad (4.6)$$

A transformação indicada na Equação 4.6 mostra que os coeficientes do estado de entrada serão distribuídos por $d - 1$ guias de onda da sua respectiva coluna, mantendo o último guia ainda vazio. Assim, é criado um estado de superposição entre $d - 1$ estados de caminho. O arranjo de divisores de feixe que realiza tal tarefa está apresentado na Figura 4.2. Tal arranjo é composto por uma linha diagonal de $d - 2$ divisores identificados por \hat{T}_k , onde sua transmissividade t_k e sua reflectância r_k são dadas por

$$t_k = \frac{k}{k+1} \quad \text{e} \quad r_k = \frac{1}{k+1}. \quad (4.7)$$

Como a transformação definida na Equação 4.6 acontece em todas as d colunas, temos que o arranjo da Figura 4.2 se repete d vezes, de modo que o número de divisores de feixe necessários para a implementação da primeira parte do circuito é $d(d - 2)$. Sua profundidade óptica é igual a $d - 2$.

A segunda operação realizada pelo circuito fotônico é uma permutação de coeficientes entre colunas e, naturalmente, atua em cada camada do circuito de forma independente. Sua atuação é diferente em cada camada e, em uma dada camada j , é realizada a seguinte transformação

$$\frac{1}{\sqrt{d-1}} \sum_{j=0}^{d-2} a_s |js\rangle \longmapsto \frac{1}{\sqrt{d-1}} \sum_{j=0}^{d-2} a_{s-v} |js\rangle, \quad (4.8)$$

onde $v = d - (j + 1)$, com $j \geq 1$, e a operação $s - v$ é feita em módulo d . Na Figura 4.3 é apresentado o arranjo de divisores de feixe que implementa a transformação 4.8 em

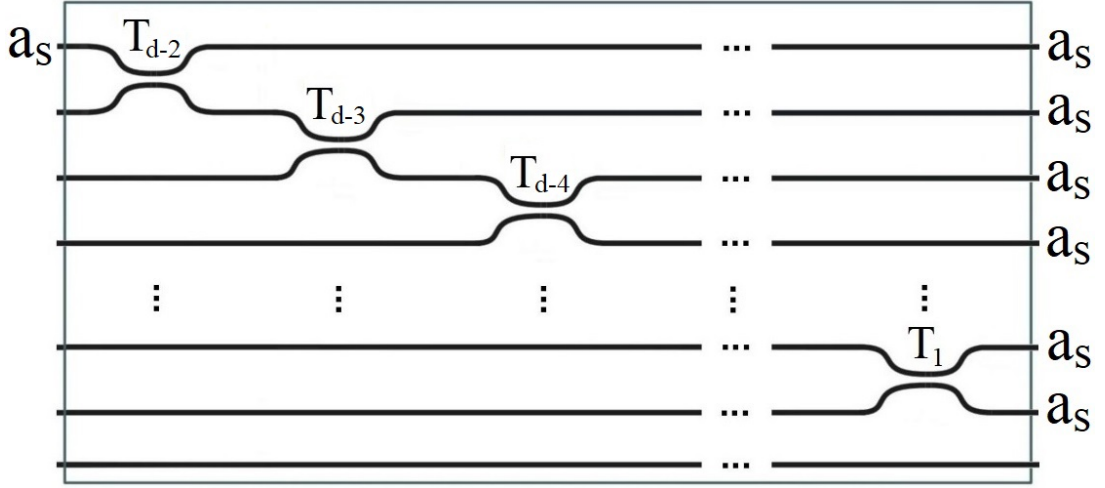


Figura 4.2: Arranjo de divisores de feixe que realizam a transformação apresentada na Equação 4.6 em uma coluna arbitrária s . Os divisores estão identificados por \hat{T}_k e é apresentada a distribuição dos coeficientes do estado de entrada pelos guias de onda antes e depois da transformação sem levar em conta constantes de normalização.

algumas das camadas do circuito. Analisando esses arranjos é possível perceber um padrão em sua configuração. Em uma dada camada j , tal arranjo é formado por v linhas diagonais com $d-v$ divisores de feixe do tipo $1 : 0$ ($t = 1$ e $r = 0$) em cada. Assim, essa segunda parte do circuito é composta por $\sum_{v=1}^{d-2} v(d-v)$ divisores de feixe e possui uma profundidade óptica igual a $d-1$.

Por fim, a terceira e última operação que compõe nosso circuito fotônico realiza uma transformação unitária de modo a gerar um estado quântico cujos coeficientes de expansão obedeçam à Equação 4.4. Tal transformação é realizada independentemente em cada coluna e a matriz que representa sua atuação em uma dada coluna s satisfaz à seguinte relação

$$\hat{U}_s \begin{pmatrix} a_{s+1-d}/\sqrt{d-1} \\ a_{s+2-d}/\sqrt{d-1} \\ \vdots \\ a_{l-1}/\sqrt{d-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0^{(s)} \\ \sigma_1^{(s)} \\ \vdots \\ \sigma_{d-2}^{(s)} \\ \sigma_{d-1}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

onde as operações realizadas nos subíndices são feitas em módulo d e os coeficientes $\sigma_j^{(s)}$ são dados por

$$\sigma_j^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{d(d-1)}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{d-1} a_{k+s} e^{2i\pi j(k-1)/d}, \quad (4.10)$$

onde, novamente, as operações realizadas nos subíndices são feitas em módulo d . A matriz unitária \hat{U}_s que satisfaz nossas exigências para esta terceira parte do circuito é dada por [83]

$$\hat{U}_s = \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^{(d-1)} & 1 \\ \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \cdots & \omega^{2(d-1)} & 1 \\ \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \cdots & \omega^{3(d-1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega^{(d-1)} & \omega^{2(d-1)} & \omega^{3(d-1)} & \cdots & \omega^{(d-1)(d-1)} & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

onde $\omega = e^{2i\pi/d}$. A implementação experimental do operador \hat{U}_s via arranjo de divisores de feixe e modificadores de fase é feita através de um método desenvolvido por Clements *et al.* [82]. Este método consiste em construir um circuito fotônico como sendo uma combinação de $d-1$ linhas diagonais contendo divisores de feixe, de modo que sua relação com a operação unitária \hat{U} a ser implementada seja dada pela seguinte equação

$$\left(\prod_n \hat{T}_n \right) \hat{U} \left(\prod_{n'} \hat{T}_{n'}^{-1} \right) = \hat{D} \quad (4.12)$$

Na Equação 4.12, os divisores de feixe representados pelas matrizes $\hat{T}_{n'}^{-1}$ são posicionados no circuito de cima para baixo, da esquerda para a direita. Já os divisores representados pelas matrizes \hat{T}_n são posicionados de forma inversa, ou seja, de baixo para cima, da direita para a esquerda. Este método foi escolhido ao invés do desenvolvido por Reck *et al.* [49] por resultar em circuitos mais tolerantes a perdas e que mantém alta fidelidade mesmo quando utilizados em sistemas de altas dimensões.

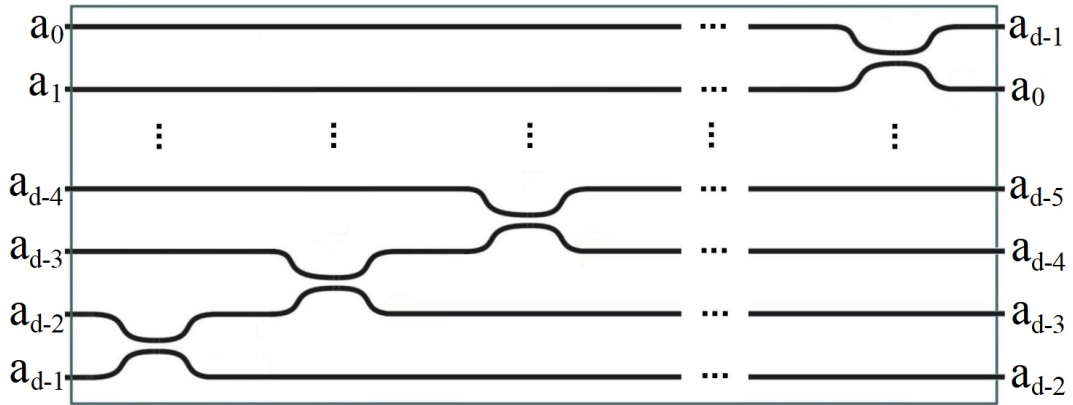
A Figura 4.4 apresenta o arranjo de divisores de feixe e modificadores de fase que implementam a operação \hat{U}_s , definida na Equação 4.11 para alguns sistemas quânticos de dimensão $d = 3, 4, 5$. Como tal operação é aplicada em todas as colunas do interferômetro, temos que esta última parte do nosso circuito fotônico é constituído de $d^2(d-1)/2$ divisores de feixe e possui uma profundidade óptica igual a d .

Uma vez terminada a apresentação de nossa proposta de circuitos fotônicos tridimensionais, mostraremos suas principais vantagens em relação a circuitos concebidos via outros métodos disponíveis na literatura. Para isso, iremos, primeiramente, escrever as equações que determinam o número $n_{BS}^{(TQ)}$ de divisores de feixe necessários para a implementação de um dado circuito e a profundidade óptica $OD^{(TQ)}$ de tal objeto. Ambas grandezas serão dadas em função da dimensão do sistema quântico e são definidas pelas seguintes equações

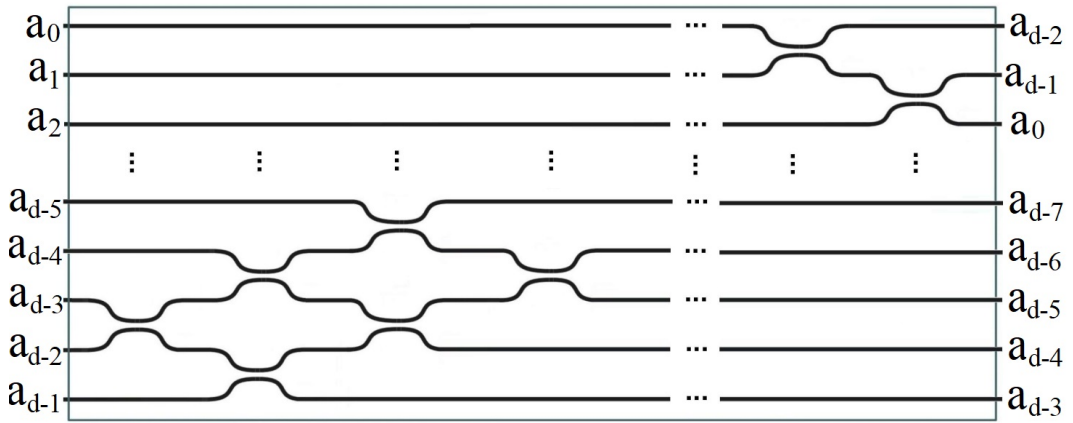
$$n_{BS}^{(TQ)}(d) = \frac{1}{6} (6 - 19d + 3d^2 + 4d^3), \quad (4.13)$$

$$OD^{(TQ)}(d) = 3(d-1). \quad (4.14)$$

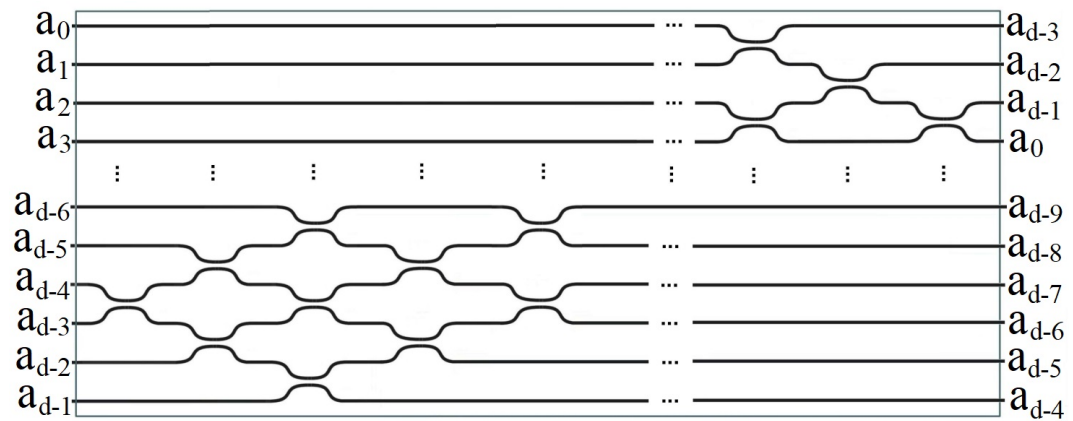
Na Figura 4.5(a) apresentamos uma comparação entre o número de divisores requeridos na implementação de nossa proposta e na de outros métodos, a saber, os desenvolvidos por Reck *et al.* [49] e Clements *et al.* [82]. Na Figura 4.5(b) apresentamos uma comparação entre a profundidade óptica de circuitos concebidos por esses mesmos métodos. Estes



(a) Para $j = d - 2$ e $v = 1$

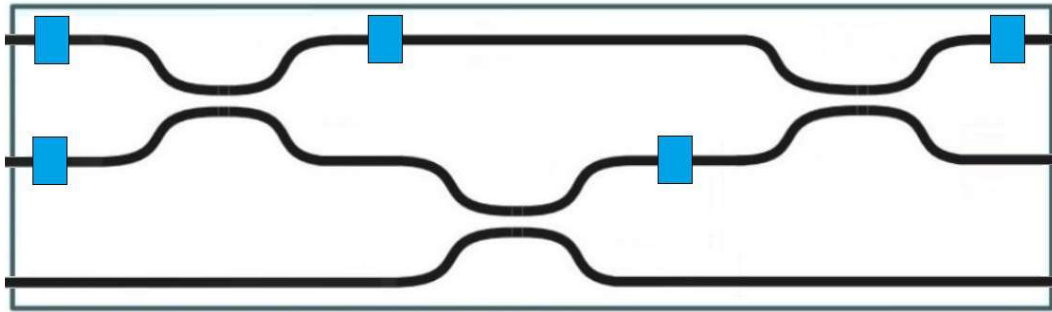


(b) Para $j = d - 3$ e $v = 2$

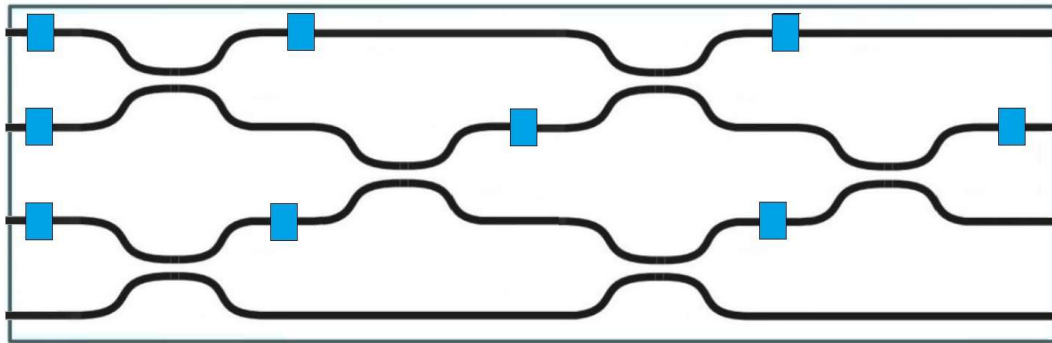


(c) Para $j = d - 4$ e $v = 3$

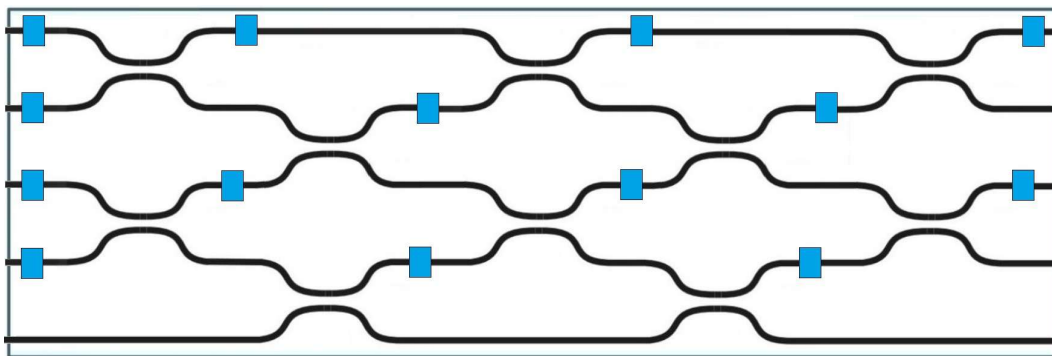
Figura 4.3: Arranjos de divisores de feixe que implementam a permutação requerida na camada j do nosso circuito fotônico tomográfico tridimensional. Todos os divisores aqui apresentados são do tipo $1 : 0$ ($t = 1$ e $r = 0$). É apresentada a distribuição dos coeficientes do estado de entrada pelos guias de onda antes e depois da transformação sem levar em conta constantes de normalização.



(a) Para $d = 3$.



(b) Para $d = 4$.



(c) Para $d = 5$.

Figura 4.4: Arranjos de divisores de feixe que implementam a operação \hat{U}_s , definida na Equação 4.11 para alguns sistemas d -dimensionais. Os quadrados azuis representam modificadores de fase.

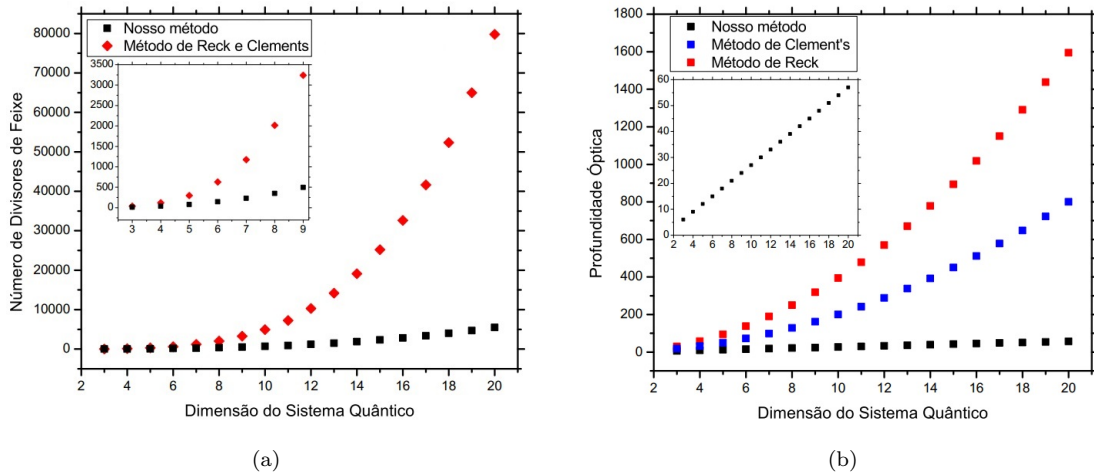


Figura 4.5: Comparação entre (a) número de divisores e (b) profundidade óptica de circuitos concebidos via nossa proposta e via métodos desenvolvidos por Reck *et al.* [49] e Clements *et al.* [82]. Os eixos dos gráficos menores representam as mesmas grandezas dos maiores.

gráficos deixam claro a notável melhora que nossa proposta apresenta em relação às outras, embora seja necessário frisar que estes outros circuitos implementam transformações unitárias gerais, enquanto que os nossos foram planejados para a realização de tomografia quântica.

Matematicamente, essa melhora é vista na redução do grau das funções que determinam essas grandezas. Como visto na Equação 4.13, o número de divisores de feixe em nossa proposta cresce conforme uma função polinomial de grau três em função da dimensão do sistema quântico. Já nas outras proposta, esse crescimento se dá via uma função polinomial de grau quatro. Isso mostra que nossos circuitos se apresentam com estruturas mais compactas e menos complexas, sendo assim de mais fácil fabricação e com uma menor ocorrência de perdas e erros durante sua realização experimental. Tal fato é corroborado pelo resultado que envolve a profundidade óptica. Tal grandeza segue uma função linear em nossa proposta, enquanto que nas outras, ela é representada por uma função quadrática.

Podemos fazer aqui uma rápida comparação entre os circuitos planares obtidos na Seção 3.2 com os tridimensionais para qutrits que podem ser desenvolvidos a partir do método exposto nessa subseção. Uma ligeira melhoria é percebida nos circuitos tridimensionais em relação aos planares, uma vez que utiliza dois divisores de feixe a menos para ser implementado, reduzindo a profundidade óptica em uma unidade.

O caso dos qubits não foi tratado nessa seção por dois motivos: o primeiro, se deve ao fato de não ser possível escrever os estados equidistantes que definem os elementos de POVM como superposição dos estados de base (Equação 4.2); o segundo motivo resume-se na ausência de alguma melhoria em um análogo tridimensional do circuito apresentado na Figura 2.3. O número de divisores e a profundidade óptica se manteriam os mesmos.

Por fim, vale ressaltar que, na realização de uma tomografia de estados quânticos via estados equidistantes em sistemas quânticos de dimensão par, um detalhe a mais se faz

presente, como já mostrado em [79]. Esta particularidade é comentada com detalhes no Subseção 4.1.4.

4.1.3 Exemplo: Sistema de Ququarts

Para ilustrar o método para implementação de circuitos fotônicos tomográficos apresentados na subseção anterior, apresentaremos como exemplo o caso de sistemas de ququarts, ou seja, sistemas quânticos de dimensão quatro. Adotaremos como estado quântico a ser tomografado um que possa ser representado pelo seguinte vetor de estado

$$|\psi\rangle = \sum_{s=0}^3 a_s |0s\rangle. \quad (4.15)$$

Assim, da Figura 4.2, temos que a primeira parte do circuito é implementada utilizando uma linha diagonal com dois divisores de feixe em cada coluna do nosso interferômetro. Os parâmetros que definem estes divisores estão dados na Equação 4.7. A Figura 4.7(a) mostra a distribuição dos coeficientes de expansão do estado de entrada pelos sítios do interferômetro antes e depois da atuação da primeira operação do circuito.

A segunda operação, a permutação dos coeficientes entre as colunas, será aplicada nas camadas $j = 1, 2$, que contará os com arranjos de divisores de feixe apresentados nas Figuras 4.3(a) e 4.3(b). Na Figura 4.7(b) está apresentada a distribuição dos coeficientes de expansão pelos sítios do interferômetro antes e depois da permutação operada nessa segunda parte.

Para a terceira parte, deve ser aplicada em cada coluna do circuito fotônico a seguinte operação unitária ¹

$$\hat{U}_s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & i & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ i & -i & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

A Figura 4.6 apresenta o arranjo de divisores de feixe e modificadores de fase que implementam a matriz \hat{U}_s definida na Equação 4.16, e a distribuição dos coeficientes de expansão pelos sítios do interferômetro antes e depois da sua atuação em todas as colunas do nosso circuito está apresentada na Figura 4.7(c). Já a Figura 4.8 apresenta um esquema tridimensional de um circuito tomográfico completo para sistemas quânticos de dimensão quatro.

¹Ao comparar a matriz da Equação 4.16 com sua análoga na Equação 4.11, percebe-se uma permutação entre as duas primeiras linhas. Isso é feito apenas para ajuste de parâmetros, não interferindo em nada no resultado final.

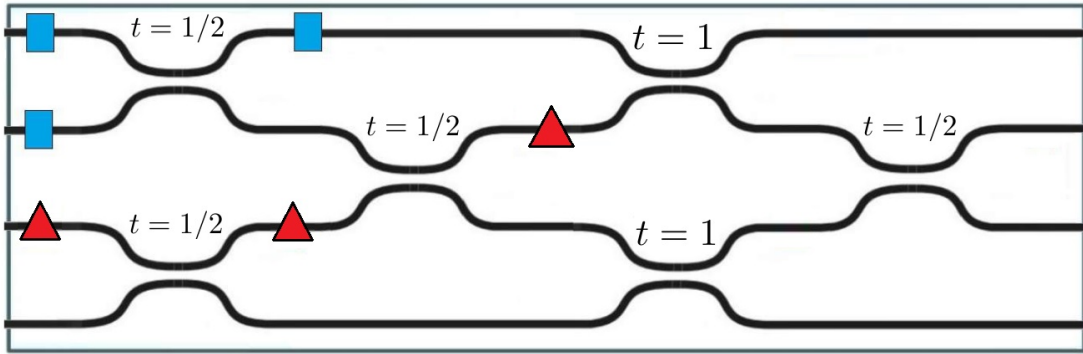


Figura 4.6: Arranjo de divisores de feixe e modificadores de fase que implementam a matriz \hat{U}_s definida na Equação 4.16. As transmitâncias dos divisores de feixe são apresentadas na figura. Os quadrados azuis representam modificadores de fase $\phi = \pi/2$ e os triângulos vermelhos, modificadores de fase $\phi' = \pi$.

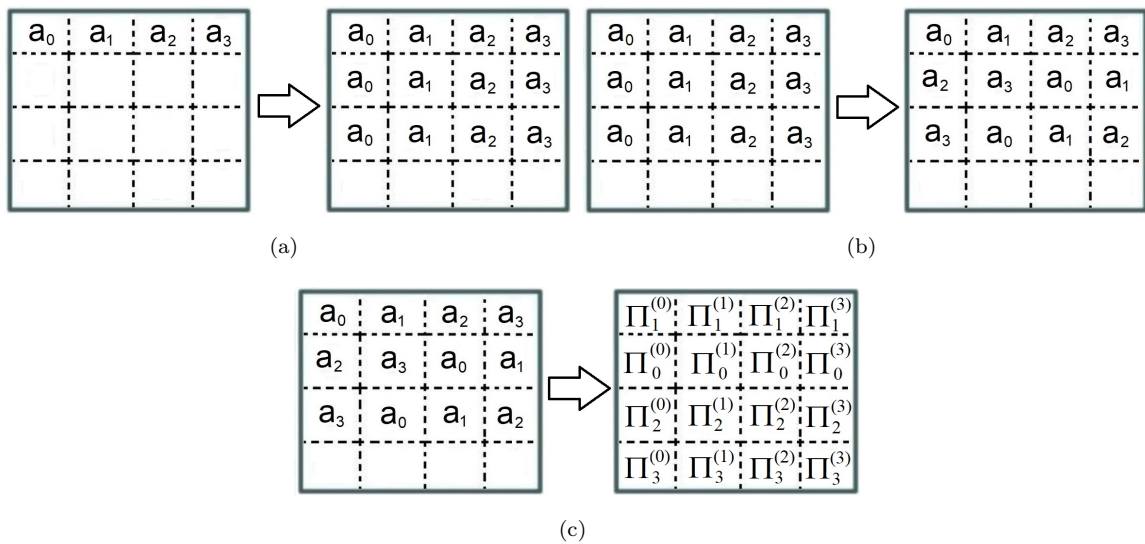
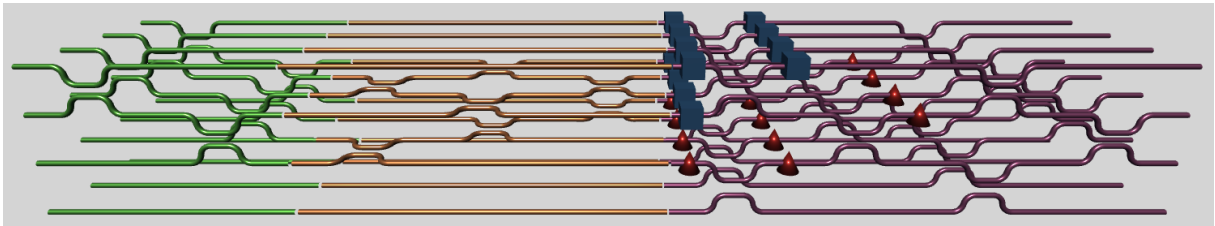
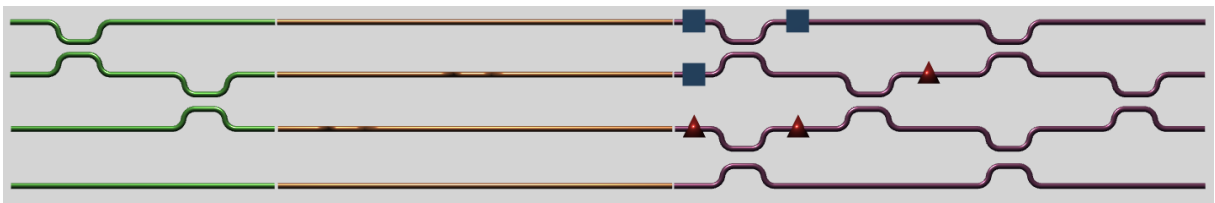


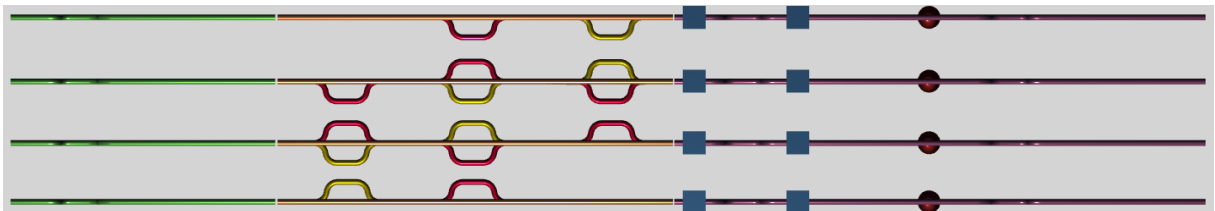
Figura 4.7: Distribuição dos coeficientes de expansão do estado de entrada pelos sítios do interferômetro antes e depois da atuação da (a) primeira, (b) segunda e (c) terceira operação do circuito. No quadrado direito do item (c) apresentamos qual elemento de POVM é implementado em cada saída do circuito, ou seja, a probabilidade de detectar um fóton que emerge por cada uma dessas saídas é dada por $p_j^{(s)} = Tr[\hat{\rho}\hat{\Pi}_j^{(s)}]$.



(a) Visão em perspectiva.



(b) Visão lateral.



(c) Visão de cima.

Figura 4.8: Esquema tridimensional de um circuito fotônico tomográfico completo para sistemas quânticos de dimensão quatro. Os cubos azuis representam modificadores de fase $\phi = \pi/2$ e os cones vermelhos, modificadores de fase $\phi' = \pi$. No item (c) os guias de cor vermelha na segunda parte pertencem à camada $j = 1$, enquanto os amarelos, à camada $j = 2$.

4.1.4 Particularidade dos Casos de Dimensão Par

A aplicação dos estados equidistantes na realização de tomografia de estados quânticos encontra um revés nos casos de sistemas com dimensão par [79]. Para demonstrar tal fato, reescreveremos a Equação 4.3 como:

$$p_j^{(s)} = \frac{1}{d^2} \sum_{p,q=0}^{d-1} \sqrt{\lambda_{p-s}\lambda_{q-s}} [\operatorname{Re}(\rho_{pq}) + i \operatorname{Im}(\rho_{pq})] \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{d}(p-q)j \right] + i \sin \left[\frac{2\pi}{d}(p-q)j \right] \right\}. \quad (4.17)$$

Podemos escrever o somatório da Equação 4.17 como três somatórios independentes, um para os termos da diagonal principal da matriz $\hat{\rho}$ e outros dois, um para os termos acima e outro para os termos abaixo da sua diagonal principal. Assim, a equação para $p_j^{(s)}$ se torna:

$$\begin{aligned} p_j^{(s)} = & \frac{1}{d^2} \sum_k \lambda_{k-s} \rho_{kk} + \\ & + \frac{1}{d^2} \sum_{p < q} \sqrt{\lambda_{p-s}\lambda_{q-s}} [\operatorname{Re}(\rho_{pq}) + i \operatorname{Im}(\rho_{pq})] \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{d}(p-q)j \right] + i \sin \left[\frac{2\pi}{d}(p-q)j \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{d^2} \sum_{p > q} \sqrt{\lambda_{p-s}\lambda_{q-s}} [\operatorname{Re}(\rho_{pq}) + i \operatorname{Im}(\rho_{pq})] \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{d}(p-q)j \right] + i \sin \left[\frac{2\pi}{d}(p-q)j \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ao realizarmos as trocas $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ no primeiro somatório da Equação 4.18, obtemos

$$\begin{aligned} p_j^{(s)} = & \frac{1}{d^2} \sum_k \lambda_{k-s} \rho_{kk} + \\ & + \frac{1}{d^2} \sum_{p > q} \sqrt{\lambda_{p-s}\lambda_{q-s}} [\operatorname{Re}(\rho_{pq}) - i \operatorname{Im}(\rho_{pq})] \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{d}(p-q)j \right] - i \sin \left[\frac{2\pi}{d}(p-q)j \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{d^2} \sum_{p > q} \sqrt{\lambda_{p-s}\lambda_{q-s}} [\operatorname{Re}(\rho_{pq}) + i \operatorname{Im}(\rho_{pq})] \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{d}(p-q)j \right] + i \sin \left[\frac{2\pi}{d}(p-q)j \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Assim, a equação para as probabilidades $p_j^{(s)}$ pode ser escrita como:

$$p_j^{(s)} = \frac{1}{d^2} \sum_k \lambda_{k-s} \rho_{kk} + \frac{2}{d^2} \sum_{p > q} \sqrt{\lambda_{p-s}\lambda_{q-s}} \left\{ \operatorname{Re}(\rho_{pq}) \cos \left[\frac{2\pi}{d}(p-q)j \right] - \operatorname{Im}(\rho_{pq}) \sin \left[\frac{2\pi}{d}(p-q)j \right] \right\}. \quad (4.20)$$

Perceba que, como p e q assumem valores inteiros entre 0 e $d-1$, o termo $(p-q)$ pode assumir qualquer valor inteiro entre 1 e $d-1$. Em particular, podemos ter $(p-q) = d/2$, quando d for um número par. Nessas ocasiões, a função seno da Equação 4.20 se anula, impedindo a determinação da parte imaginária de alguns elementos da matriz densidade

$\hat{\rho}$. Para contornar este problema, precisamos aumentar o número de medições a serem feitas sobre nosso sistema. Para isto, vamos considerar o seguinte operador unitário:

$$\hat{U}_m = \sum_{k=0}^{d/2-1} |k\rangle \langle k| + i \sum_{k=d/2}^{d-1} |k\rangle \langle k|, \quad (4.21)$$

que, quando atuado sobre a matriz densidade $\hat{\rho}$, a transforma na seguinte matriz

$$\hat{\rho}' = \sum_{p=0}^{d/2-1} \sum_{q=0}^{d/2-1} \rho_{pq} |p\rangle \langle q| + \sum_{p=d/2}^{d-1} \sum_{q=d/2}^{d-1} \rho_{pq} |p\rangle \langle q| - i \sum_{p=0}^{d/2-1} \sum_{q=d/2}^{d-1} \rho_{pq} |p\rangle \langle q| + i \sum_{p=d/2}^{d-1} \sum_{q=0}^{d/2-1} \rho_{pq} |p\rangle \langle q|. \quad (4.22)$$

Em palavras, a aplicação do operador \hat{U} , dado pela Equação 4.21, troca a parte real pela parte imaginária, e vice-versa, de metade dos termos da matriz original $\hat{\rho}$. Em particular, aqueles onde $(p - q) = d/2$. Assim, no cálculo das probabilidades $p_j^{(s)}$, a parte imaginária dos elementos da matriz densidade que desaparece nos cálculos de $p_j^{(s)}$ aparece agora multiplicada por uma função cosseno, podendo assim ser determinada. Tal probabilidade $p_j^{(s)}$ é calculada a partir da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} p_j^{(s)} = & \frac{1}{d^2} \sum_{p=0}^{d/2-1} \sum_{q=0}^{d/2-1} \rho_{pq} e^{2i\pi j(p-q)/d} \sqrt{\lambda_{p-s} \lambda_{q-s}} + \frac{1}{d^2} \sum_{p=d/2}^{d-1} \sum_{q=d/2}^{d-1} \rho_{pq} e^{2i\pi j(p-q)/d} \sqrt{\lambda_{p-s} \lambda_{q-s}} - \\ & \frac{2}{d^2} \sum_{p=d/2}^{d-1} \sum_{q=0}^{d/2-1} \sqrt{\lambda_{p-s} \lambda_{q-s}} \left\{ \text{Re}(\rho_{pq}) \sin \left[\frac{2\pi}{d} (p - q)j \right] + \text{Im}(\rho_{pq}) \cos \left[\frac{2\pi}{d} (p - q)j \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para os casos onde $(p - q) = d/2$, o último termo da Equação 4.23 se reduz a:

$$(-1)^j \frac{2}{d^2} \sum_{q=0}^{d/2-1} \text{Im}(\rho_{p,q}) \sqrt{\lambda_{q-s+d/2} \lambda_{q-s}}. \quad (4.24)$$

Como os índices de λ são limitados inferiormente por zero, temos que $s \leq p - d/2$. Tal condição implica que s pode assumir qualquer valor inteiro entre 0 e $d/2 - 1$. Assim, $p_j^{(s)}$ deve ser obtida para todos os valores possíveis de j , que varia de 0 a $d - 1$, e de s , que varia de 0 a $d/2 - 1$, totalizando assim $d^2/2$ medições experimentais. Somadas às d^2 medições realizadas sobre $\hat{\rho}$, concluímos que são necessárias $3d^2/2$ medições para recuperar completamente uma matriz densidade de um estado quântico de dimensão par maior ou igual a quatro.

4.2 Medida de Coerência Quântica em Sistemas de Qudits

4.2.1 Elementos de POVM

Nesta seção, apresentaremos um método para desenvolver circuitos fotônicos que possam ser utilizados na medição da coerência de sistemas quânticos de dimensão $d \geq 2$. Assim como na seção anterior, devemos escolher um POVM adequado para a tarefa e, em seguida, propor interferômetros cuja probabilidade de se detectar um fóton em uma de suas saídas seja igual à probabilidade associada a um dos elementos do POVM escolhido.

Escolhemos a *norma* l_1 para quantificar a coerência quântica de qudits de caminho. Através de tal medida, a coerência C_{l_1} de um sistema quântico, representado pela matriz densidade $\hat{\rho}$, é definida como

$$C_{l_1} = \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}|. \quad (4.25)$$

Sabendo que $\rho_{ij} = \rho_{ji}^*$, a *norma* l_1 da coerência quântica pode ser reescrita como

$$C_{l_1} = 2 \sum_{i < j} |\rho_{ij}|, \quad (4.26)$$

onde $i, j = 1, 2, \dots, d$. Em um trabalho publicado em 2015, Bera e colaboradores mostraram ser possível estabelecer uma relação entre a coerência de um sistema quântico e a visibilidade de seu padrão de interferência [61]. Os autores mostraram que, em um experimento de fenda dupla (interferência entre dois estados quânticos), a coerência quântica é exatamente igual à visibilidade do padrão obtido. Assim, em experimentos com sistemas quânticos bidimensionais, temos

$$V_{12} = \frac{c_{max} - c_{min}}{c_{max} + c_{min}}, \quad (4.27)$$

onde c_{max} e c_{min} representam as contagens máximas e mínimas de fótons, respectivamente, observadas no padrão de interferência em um experimento de fenda dupla. O resultado apresentado na Equação 4.27 leva em conta o fato de que a intensidade do padrão de interferência é proporcional à contagem de fótons detectada em um regime de fótons únicos. A extensão deste resultado para experimentos de interferência em muitas fendas está registrado no trabalho de Paul e Qureshi, publicado dois anos depois [62].

Uma forma prática e alternativa de medir a coerência quântica foi apresentada por Machado e Pádua em um trabalho recente [84]. Neste trabalho, foi considerado que a coerência quântica em um experimento com muitas fendas pode ser calculada como a soma de interferências parciais, sendo essas, as interferências entre os pares de estados de base que constituem o sistema. Assim, sendo a interferência entre os estados $|i\rangle$ e $|j\rangle$ definida como V_{ij} , podemos combinar essa abordagem com a Equação 4.27 para estabelecer

que

$$|\rho_{ij}| = \frac{1}{2}V_{ij}, \quad (4.28)$$

ou seja, obtendo os valores de todas as visibilidades V_{ij} experimentalmente, é possível determinar os valores dos elementos ρ_{ij} ($i < j$) e, com eles, calcular a coerência através da equação Equação 4.26. Diretamente, temos

$$C = \sum_{i < j} V_{ij}. \quad (4.29)$$

Na prática, a contagem de fótons é proporcional à probabilidade da detecção de tais partículas. Assim, no caso da interferência entre os estados $|i\rangle$ e $|j\rangle$, podemos escrever as contagens máxima e mínima como

$$c_{ij,max} \propto P_{ij,max}, \quad (4.30a)$$

$$c_{ij,min} \propto P_{ij,min}, \quad (4.30b)$$

e a coerência se torna

$$C = \sum_{i < j} \frac{P_{ij,max} - P_{ij,min}}{P_{ij,max} + P_{ij,min}}. \quad (4.31)$$

As probabilidades que definem a coerência quântica podem ser relacionadas a elementos de POVM usando a Fórmula de Born $P_n = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{\Pi}_n]$. Para o problema aqui proposto, a medida de coerência, adotaremos o POVM $\{\hat{S}_{ij}, \hat{M}_{ij}\}$ que é composto pelos seguintes elementos

$$\begin{aligned} \hat{S}_{ij} &= \frac{1}{2(d-1)} |\alpha_{ij}\rangle \langle \alpha_{ij}|, \\ \hat{M}_{ij} &= \frac{1}{2(d-1)} |\beta_{ij}\rangle \langle \beta_{ij}|, \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde $|\alpha_{ij}\rangle = |i\rangle + |j\rangle$, $|\beta_{ij}\rangle = |i\rangle - |j\rangle$. Quanto aos índices, $i = 1, 2, \dots, d-1$ e $j = 2, 3, \dots, d$, sendo $i < j$. As probabilidades $P_{ij,max}$ são relacionadas aos operadores \hat{S}_{ij} , enquanto que as probabilidades $P_{ij,min}$ são relacionadas aos operadores \hat{M}_{ij} . Em termos da Fórmula de Born, pode reescrever a Equação 4.31 como

$$C = \sum_{i < j} \frac{\text{Tr} \left[\hat{\rho} \left(\hat{S}_{ij} - \hat{M}_{ij} \right) \right]}{\text{Tr} \left[\hat{\rho} \left(\hat{S}_{ij} + \hat{M}_{ij} \right) \right]}. \quad (4.33)$$

Vale ressaltar que, utilizando essa abordagem, é necessária apenas a implementação de $d(d-1)$ elementos de POVM. Assim, na próxima seção, apresentaremos um simples protocolo que objetiva a obtenção de circuitos fotônicos que simulam a aplicação de todos estes operadores simultaneamente.

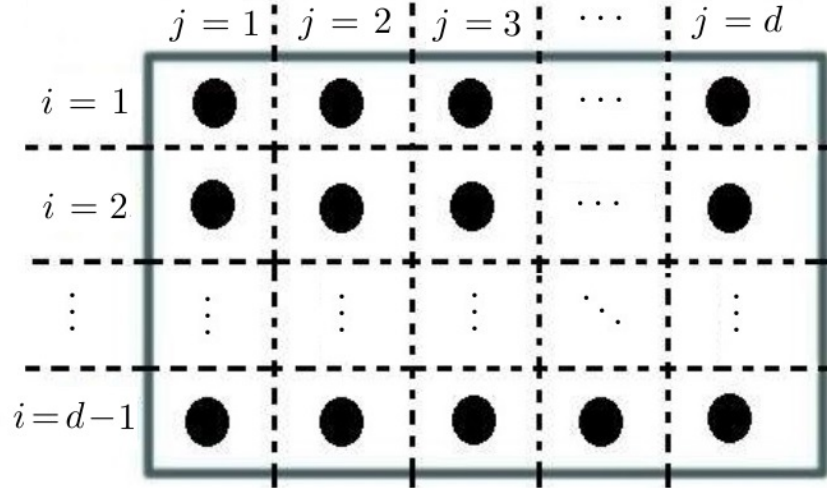


Figura 4.9: Seção transversal do circuito fotônico tridimensional para medida de coerência quântica. Os círculos pretos representam os guias de onda. Os índices j representam as colunas e os índices i , as camadas.

4.2.2 Design Generalizado do Circuito Fotônico

Fazendo uso de várias ideias já apresentadas na seção anterior, queremos aqui apresentar um método que permite a obtenção de circuitos fotônicos tridimensionais, através dos quais sejamos capazes de obter a coerência quântica de um determinado sistema quântico. Nosso circuito será, novamente, um arranjo de $d(d - 1)$ guias de onda, organizados em d colunas com $d - 1$ guias em cada, arranjados na direção vertical, como é mostrado na Figura 4.9. As camadas do circuito serão identificadas pelo índice i e as colunas, pelo índice j . Assim, os estados de caminho serão representados por vetores do tipo $|ij\rangle$ e escolheremos como estado de entrada o estado

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^d b_j |1j\rangle. \quad (4.34)$$

Como objetivamos medir a coerência de um sistema quântico a partir das probabilidades de detecção de fótons medidas experimentalmente, precisamos que a operação executada pelo nosso circuito seja tal que o módulo ao quadrado dos coeficientes de expansão do estado final seja igual à probabilidade associada aos elementos de POVM definidos na Equação 4.32. Ou seja, para um estado final do tipo $\sum_{i,j} [\alpha_{ij} + \beta_{ij}] |ij\rangle^2$ devemos ter

$$\begin{aligned} |\alpha_{ij}|^2 &= \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{S}_{ij}], \\ |\beta_{ij}|^2 &= \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{M}_{ij}]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

A Equação 4.35 é satisfeita quando

$$\alpha_{ij} = \frac{b_i + b_j}{\sqrt{2(d-1)}}, \quad \beta_{ij} = \frac{b_i - b_j}{\sqrt{2(d-1)}}. \quad (4.36)$$

²Nessa suposição também é imposto que, quando $\alpha_{ij} = 0$, β_{ij} é necessariamente diferente de 0 e vice-versa.

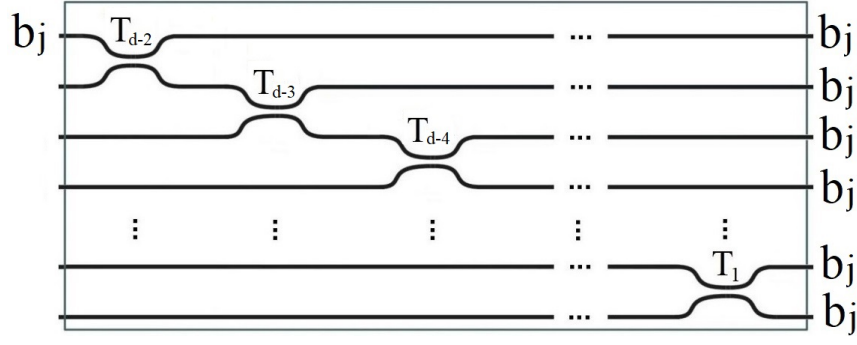


Figura 4.10: Arranjo de divisores de feixe que realizam a operação relativa à primeira parte do circuito para a medição da coerência quântica de qudits. A distribuição dos coeficientes b_j antes e depois da aplicação da primeira operação também está apresentada. Esse arranjo contém $d - 2$ divisores e se repete igualmente em todas as d colunas.

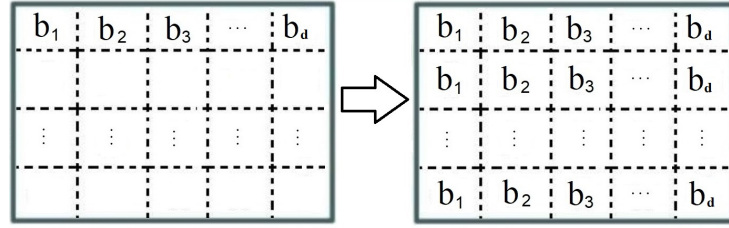


Figura 4.11: Representação esquemática da primeira operação realizada por nosso circuito fotônico. Na esquerda, apresentamos a distribuição dos coeficientes do estado de entrada, descrito na Equação 4.34, nas portas de entrada da primeira parte do circuito. Na direita, é apresentada a distribuição dos coeficientes pelos sítios dos interferômetros após a atuação desta primeira operação. A constante de normalização foi omitida.

Uma análise da Equação 4.36 é suficiente para entendermos qual deve ser a atuação do circuito sobre o estado de entrada. Sua configuração será concebida levando em consideração a necessidade de se interferir todos os possíveis pares de estados de base, conforme indicado pelo POVM adotado e definido na Equação 4.32. A estrutura de nosso circuito consistirá novamente de uma sequência de três operações unitárias e sequenciais. A primeira delas atuará de forma independente em cada estado de entrada realizando a seguinte transformação

$$b_j |1j\rangle \quad \mapsto \quad \frac{1}{\sqrt{d-1}} \sum_{i=1}^{d-1} b_j |ij\rangle. \quad (4.37)$$

A transformação Equação 4.37 atua de forma semelhante à primeira parte do circuito tomográfico, difundindo o coeficiente b_j em todos os guias de onda presentes na coluna j . O arranjo de divisores de feixe que realiza tal operação também é semelhante e está apresentado na Figura 4.10, onde a reflectividade r_k e a transmitância t_k do divisor rotulado por T_k ($k = 1, 2, \dots, d - 2$) são determinadas pelas relações

$$r_k = \frac{1}{k+1}, \quad t_k = \frac{k}{k+1}. \quad (4.38)$$

Uma representação esquemática da operação descrita na Equação 4.37, do ponto de vista da distribuição dos coeficientes b_j pelos guias de onda do circuito, é apresentada na

Figura 4.11. A segunda parte do circuito é responsável pela realização de permutações entre os coeficientes difundidos na primeira parte. Para realizar tais operações, utiliza-se divisores de feixe com reflectância nula ($r = 0$ e $t = 1$) posicionados de forma apropriada para cada caso. Apresentaremos aqui os casos onde $d = 3, 4, 5$, mas a estratégia é a mesma para sistemas de qualquer dimensão finita. O objetivo é permutar os estados até que todos os pares de estados possam ser formados com sítios vizinhos.

Assim, para implementar a operação de permutação no casos de sistemas de qutrits, usamos apenas um divisor de reflectância nula entre as colunas $j = 2$ e $j = 3$ na camada $i = 2$ para permutar os coeficientes b_2 e b_3 resultando na distribuição apresentada na Figura 4.12(a). Para o caso tetra-dimensional são necessários três desses divisores:

- entre as colunas $j = 2$ e $j = 3$ na camada $i = 2$, permutando os coeficientes b_2 e b_3 ;
- entre as colunas $j = 3$ e $j = 4$ na camada $i = 3$, permutando os coeficientes b_3 e b_4 ;
- entre as colunas $j = 2$ e $j = 3$ na camada $i = 3$, permutando os coeficientes b_2 e b_4 ;

O resultado da permutação para $d = 4$ está apresentado na Figura 4.12(b). Para sistemas quânticos penta-dimensionais são necessários sete divisores de feixe de reflectância nula localizados:

- entre as colunas $j = 4$ e $j = 5$ na camada $i = 2$, permutando os coeficientes b_4 e b_5 ;
- entre as colunas $j = 3$ e $j = 4$ na camada $i = 2$, permutando os coeficientes b_3 e b_5 ;
- entre as colunas $j = 2$ e $j = 3$ na camada $i = 2$, permutando os coeficientes b_2 e b_5 ;
- entre as colunas $j = 3$ e $j = 4$ na camada $i = 3$, permutando os coeficientes b_3 e b_4 ;
- entre as colunas $j = 2$ e $j = 3$ na camada $i = 3$, permutando os coeficientes b_2 e b_4 ;
- entre as colunas $j = 4$ e $j = 5$ na camada $i = 3$, permutando os coeficientes b_3 e b_5 ;
- entre as colunas $j = 2$ e $j = 3$ na camada $i = 4$, permutando os coeficientes b_2 e b_3 ;

O resultado da permutação para $d = 5$ está apresentado na Figura 4.12(c). Após realizar as devidas permutações, resta interferir os pares de estados que agora se encontram em sítios vizinhos, como está bem demonstrado na Figura 4.12. Essa operação de interferência, terceira operação unitária na qual nossa proposta é dividida, é descrita pela aplicação dos elementos de POVM definidos na Equação 4.32. Assim, esta última parte do circuito implementará uma operação unitária \hat{U}_{int} definida por

$$\hat{U}_{int} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \beta_{12} \\ \alpha_{13} \\ \beta_{13} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

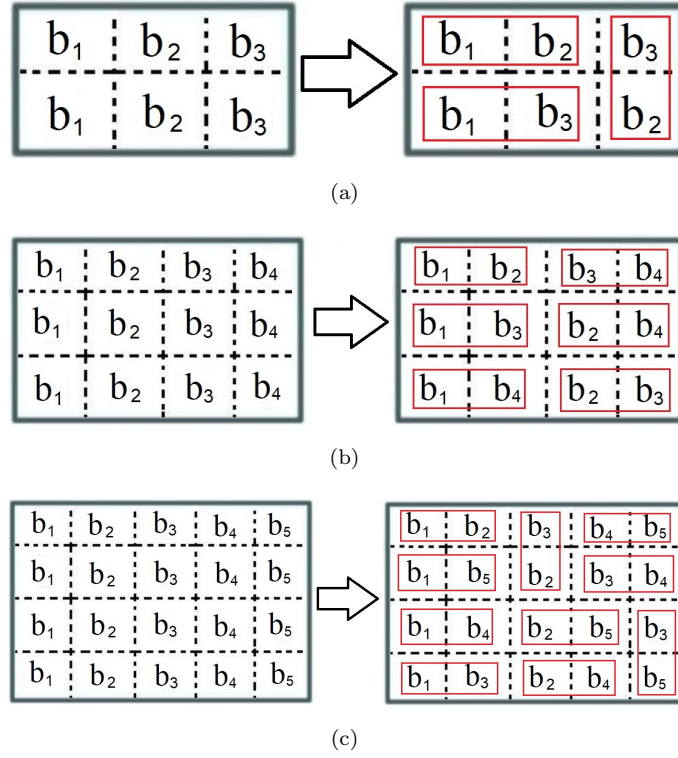


Figura 4.12: Representação esquemática da operação de permutação para (a) $d = 3$, (b) $d = 4$ e (c) $d = 5$. Todos os pares requeridos para a execução de nosso protocolo estão circulosados em vermelho.

onde α_{ij} e β_{ij} estão definidos na Equação 4.36. A operação \hat{U}_{int} , como definida na Equação 4.39, garante a validade da Equação 4.35. Na prática, a Equação 4.35 mostra que a probabilidade de detectar um fóton em uma dada saída do interferômetro é igual à probabilidade associada a um dos elementos de POVM definidos na Equação 4.32. Para implementar a operação \hat{U}_{int} é utilizado um divisor de feixe $1/2 : 1/2$ ($r = 1/2$ e $t = 1/2$) para interferir cada par de estado e sua aplicação está esquematizada na Figura 4.13. Na Figura 4.14 está apresentado, na forma esquemática, a distribuição dos coeficientes b_j antes e depois da aplicação desta última operação realizada pelo circuito. É também apresentado em quais saída do interferômetro são medidas as contagens de fótons $c_{ij,max}$ e $c_{ij,min}$, necessárias para o cálculo da coerência do sistema quântico sob estudo. A estrutura tridimensional dos circuitos fotônicos para medidas de coerência em sistemas quânticos onde $N = 3, 4, 5$ é apresentada na Figura 4.15.

Assim como na seção anterior, os circuitos tridimensionais aqui obtidos apresentam uma notável redução na complexidade estrutural. O número de divisores de feixe que compõem o circuito, neste caso, escala como uma função quadrática da dimensão do sistema e a profundidade óptica se mantém sendo uma função linear. Ambas essas quantidade são definidas pelas seguintes equações

$$n_{BS}^{(CQ)}(d) = \begin{cases} 2d^2 - 4d + 1, & d \leq 3 \\ 3d^2 - 12d + 17, & d \geq 4 \end{cases} \quad (4.40)$$

$$OD^{(CQ)}(d) = 2d - 3. \quad (4.41)$$

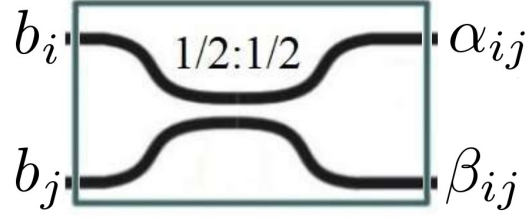


Figura 4.13: Representação esquemática da operação de interferência em cada par de estados da base. A probabilidade de detectar um fóton que emerge da saída rotulada por α_{ij} é $P_{ij,max} = Tr[\hat{\rho}\hat{S}_{ij}]$ e a probabilidade de detectar um fóton que emerge da saída rotulada por β_{ij} é $P_{ij,min} = Tr[\hat{\rho}\hat{M}_{ij}]$.

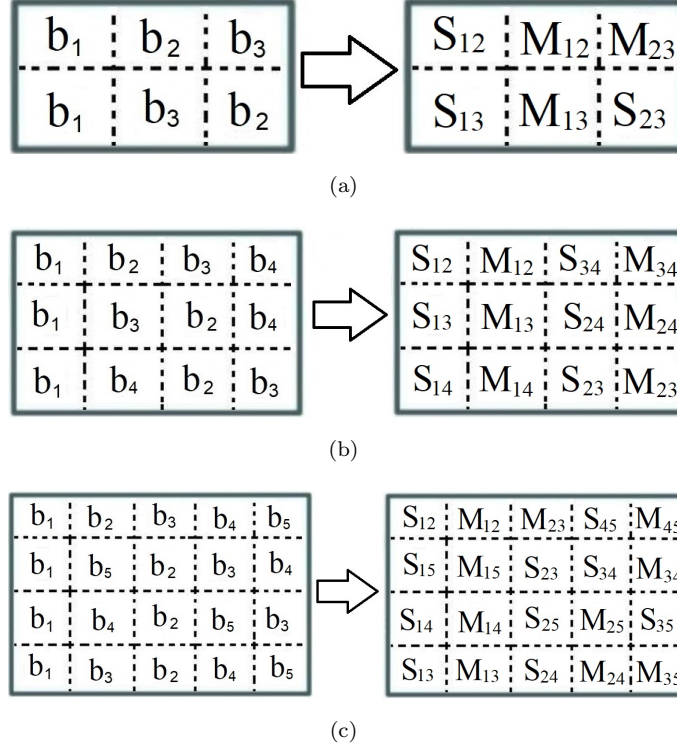


Figura 4.14: Representação esquemática da operação de interferência para (a) $d = 3$, (b) $d = 4$ e (c) $d = 5$. Os sítios rotulados com S_{ij} representam aqueles onde se medem as contagens $c_{ij,max}$ e os sítios rotulados com M_{ij} representam aqueles onde se medem as contagens $c_{ij,min}$.

4.3 Tolerância a Erros e Perdas

Sabendo que todo experimento realizado em laboratório está sujeito a erros e perdas experimentais, faz-se importante um rápido estudo sobre como os circuitos fotônicos propostos nesse capítulo se comportam nessas condições. Para tanto, adotaremos um modelo simples que supõe imperfeições praticamente idênticas em cada divisor de feixe que compõe o circuito. Assim, sendo \hat{U}_r a operação realizada por esse circuito imperfeito, calcularemos sua fidelidade em relação ao caso ideal, representado por \hat{U} , através da expressão [82]

$$F(\hat{U}, \hat{U}_r) = \left| \frac{\text{Tr}(\hat{U}^\dagger \hat{U}_r)}{\sqrt{d \text{Tr}(\hat{U}_r^\dagger \hat{U}_r)}} \right|^2. \quad (4.42)$$

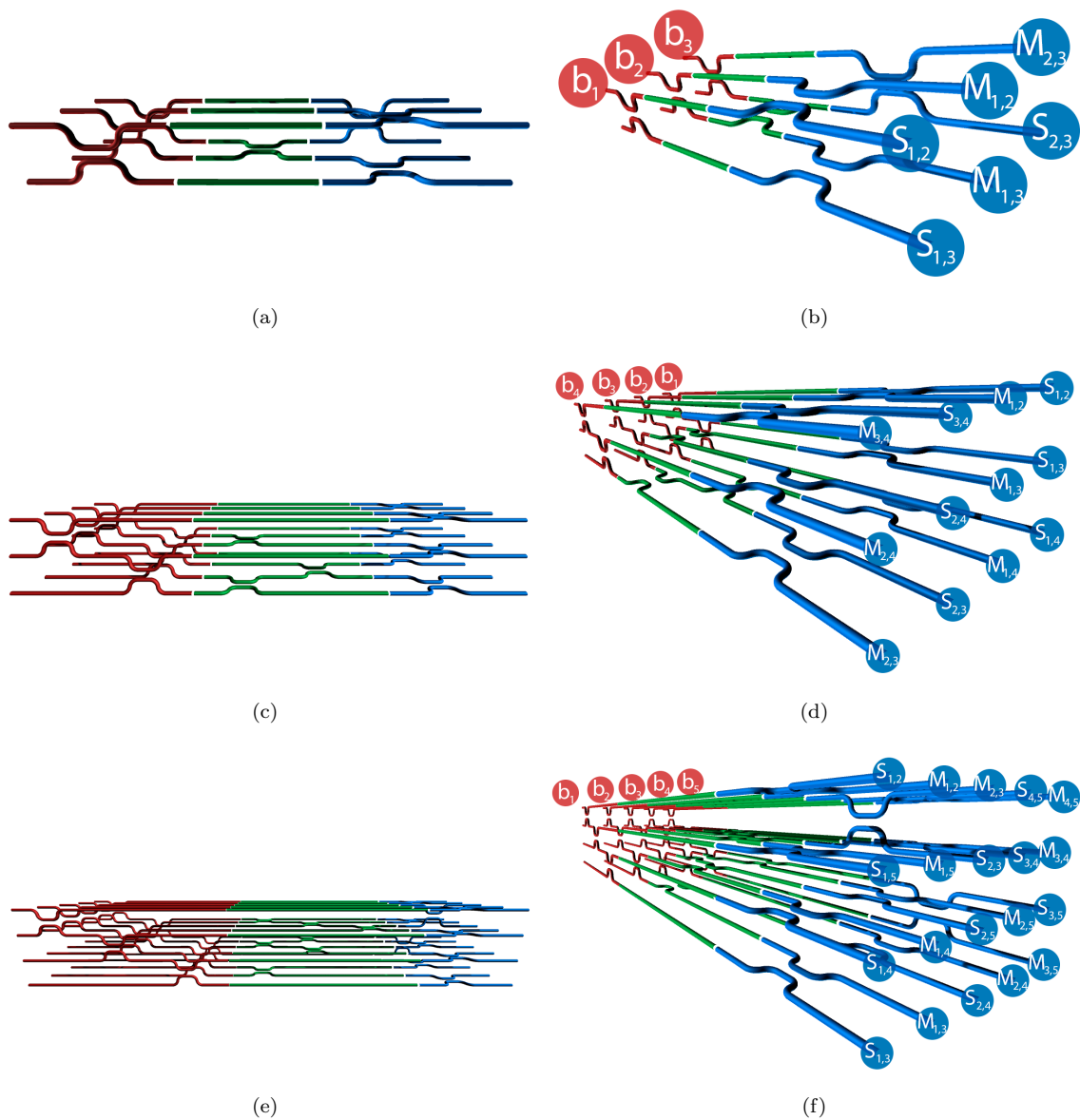


Figura 4.15: Representação tridimensional de circuitos fotônicos para medidas de coerência quântica. A visão lateral destes circuitos estão apresentadas em (a), (c) e (e), para $d = 3, 4, 5$, respectivamente. Em (b), (d) e (f) são mostradas em quais saídas se medem as contagens de fótons requeridas para o cálculo da coerência quântica quando $d = 3, 4, 5$, respectivamente. Nas saídas rotulas por S_{ij} as contagens $c_{ij,max}$ são obtidas. Por outro lado, as contagens $c_{ij,min}$ são obtidas nas saídas rotuladas por M_{ij} .

A grandeza $F(\hat{U}, \hat{U}_r)$ mede o quão próxima é a atuação do operador \hat{U}_r em relação ao caso ideal. Assim, casos onde $F(\hat{U}, \hat{U}_r) = 1$, o estado quântico observado no final do interferômetro é idêntico ao previsto pelo estudo teórico. Para realizar tal análise, primeiro devemos obter a operação \hat{U}_r . Analisaremos aqui duas fontes destes erros. A primeira delas está relacionada à diminuição da intensidade luminosa que sofre o feixe de laser ao atravessar um acoplador direcional. Tal fenômeno é causado por processos de absorção ou espalhamento dentro da matriz vítrea. Esta perda pode ser associada a uma constante de atenuação característica δ , definida como

$$\delta = \frac{I_f}{I_0}, \quad (4.43)$$

onde I_0 e I_f são as intensidades luminosas inicial e final de um feixe de luz que atravessa tal elemento óptico. Em relação a esta fonte de erros a matriz \hat{U}_r pode ser obtida através do produto das matrizes que representam seus divisores de feixe, sendo que estas últimas são corrigidas pela constante de perda através da seguinte mudança de variáveis

$$\sqrt{r_j} \rightarrow \sqrt{\delta r_j}, \quad \sqrt{t_j} \rightarrow \sqrt{\delta t_j}, \quad (4.44)$$

sendo r_j e t_j a reflectividade e a transmitância do j -ésimo divisor de feixe do circuito, respectivamente. As Figuras 4.16(a), 4.17(a) e 4.18(a) mostram como se dá o comportamento da fidelidade dos circuitos fotônicos apresentados neste trabalho em função das perdas por acoplador direcional. As perdas, medidas em *decibéis* (dB), são calculadas através da equação

$$L_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{\delta} \right). \quad (4.45)$$

A segunda fonte de erro analisada decorre de imprecisões na fabricação do dispositivo. Assim, acopladores direcionais fabricados com dimensões físicas errôneas apresentam valores para seus parâmetros desviados do exigido teoricamente para a implementação de um determinado protocolo. Sendo x a diferença entre o valor exigido para a reflectância de um acoplador direcional no caso ideal e seu valor imperfeito, podemos montar a matriz \hat{U}_r que descreve um circuito fotônico sujeito a estas perdas realizando a seguinte mudança de variáveis

$$r_j \rightarrow r_j + x, \quad t_j \rightarrow t_j - x. \quad (4.46)$$

Os resultados desta segunda análise está apresentado nas Figuras 4.16(b), 4.17(b) e 4.18(b). O resultado aqui apresentado, na Figura, indica uma alta robustez em nosso protocolo, uma vez que, mesmo para altos valores de perdas por divisor de feixe ($\sim 3dB$), o circuito fotônico implementado ainda realiza operações unitárias com alta fidelidade. Por outro lado, se mostra consideravelmente mais sensível à imperfeições em sua síntese, ressaltando a necessidade de precisos protocolos de fabricação.

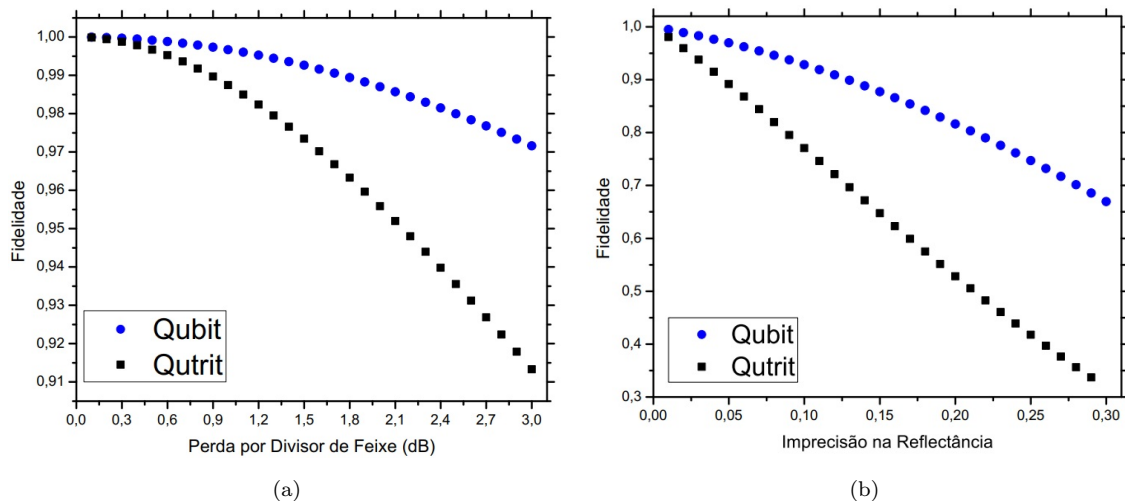


Figura 4.16: Comportamento da fidelidade dos circuitos apresentados no Capítulo 2 e no Capítulo 3 em função das (a) perdas por divisor de feixe e (b) imprecisões nos parâmetros do mesmo elemento óptico. Na análise de uma das fontes de erro, a outra é desconsiderada.

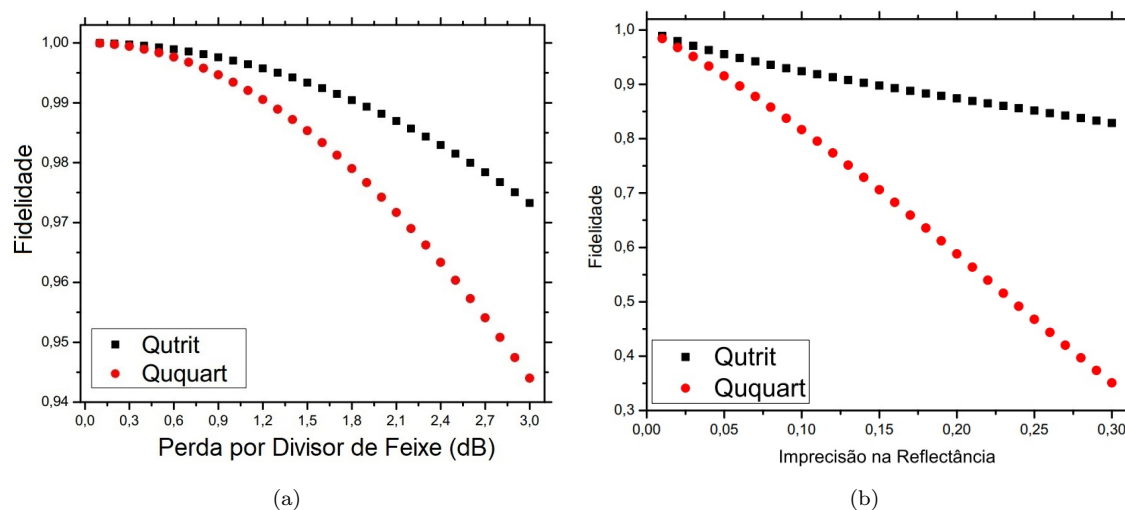


Figura 4.17: Comportamento da fidelidade dos circuitos apresentados na Seção 4.1 em função das (a) perdas por divisor de feixe e (b) imprecisões nos parâmetros do mesmo elemento óptico. Na análise de uma das fontes de erro, a outra é desconsiderada.

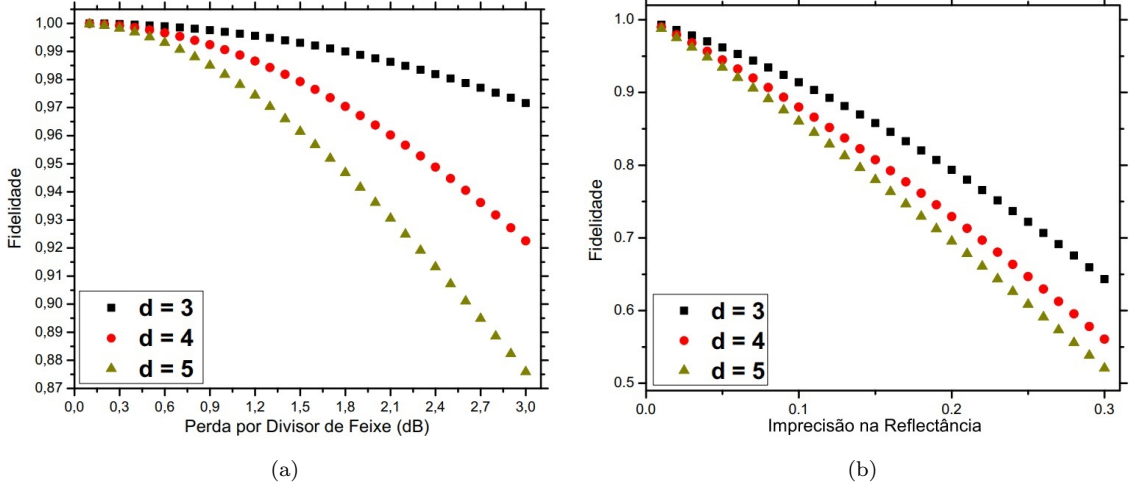


Figura 4.18: Comportamento da fidelidade dos circuitos apresentados na Seção 4.2 em função das (a) perdas por divisor de feixe e (b) imprecisões nos parâmetros do mesmo elemento óptico. Na análise de uma das fontes de erro, a outra é desconsiderada.

4.4 Validade para Estados Arbitrários

Tanto neste capítulo como nos anteriores, foram desenvolvidos protocolos que permitem a obtenção de circuitos fotônicos que realizam operações quânticas em estados quânticos, a fim de implementar a aplicação simultânea de vários elementos de POVM. Em todos estes desenvolvimentos utilizamos estados puros por questão de simplicidade operacional. Queremos, nesta seção, demonstrar, através da linearidade da Regra de Born sobre misturas de estados, que nossos circuitos são aplicáveis a estados de entrada mistos e arbitrários, ou seja, que a probabilidade de detectar um fóton na saída k do interferômetro é também igual a $\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{E}_k)$ para estados de entrada arbitrários, onde \hat{E}_k é um elemento de POVM definido nas Equações (2.5), (2.37), (3.15), (4.1) ou (4.32) e os circuitos fotônicos mostrados acima implementam os POVMs necessários para as aplicações propostas.

Para isto, vamos considerar que o circuito fotônico completo realize uma operação unitária \hat{U}_c em um estado arbitrário descrito pela matriz densidade $\hat{\rho}_a$ e que o projetor sobre um estado de fóton único na saída k ao fim do circuito seja dado por $\hat{\Lambda}_k$. Assim, pela Regra de Born, temos que a probabilidade de detectar o fóton em tal saída é dado por

$$P_k = \text{Tr} \left(\hat{U}_c \hat{\rho}_a \hat{U}_c^\dagger \hat{\Lambda}_k \right). \quad (4.47)$$

A matriz densidade $\hat{\rho}_a$ pode ser escrita em termos de seus autoestados, logo

$$P_k = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n \text{Tr} \left(\hat{U}_c |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \hat{U}_c^\dagger \hat{\Lambda}_k \right). \quad (4.48)$$

Definindo o vetor de estado $\hat{U}_c |\psi_n\rangle = |\beta_n\rangle$ e ignorando as constantes de normalização, temos

$$\text{Tr} \left(|\beta_n\rangle \langle \beta_n| \hat{\Lambda}_k \right) = |\beta_{n,k}|^2, \quad (4.49)$$

onde $\beta_{n,k}$ é o k -ésimo componente do vetor $|\beta_n\rangle$. Já foi mostrado nas Equações (3.18), (4.4) e (4.35) que, para estados puros, a seguinte relação é válida

$$\text{Tr} \left(|\psi_n\rangle \langle \psi_n| \hat{E}_k \right) = |\beta_{n,k}|^2, \quad (4.50)$$

Então, segue das Equações (4.48) e (4.49) que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n \text{Tr} \left(\hat{U}_c |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \hat{U}_c^\dagger \hat{\Lambda}_k \right) = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n |\beta_{n,k}|^2. \quad (4.51)$$

Pelo resultado apresentado na Equação (4.50), temos

$$\sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n \text{Tr} \left(\hat{U}_c |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \hat{U}_c^\dagger \hat{\Lambda}_k \right) = \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n \text{Tr} \left(|\psi_n\rangle \langle \psi_n| \hat{E}_k \right). \quad (4.52)$$

Em outras palavras,

$$\text{Tr} \left(\hat{U}_c \hat{\rho}_a \hat{U}_c^\dagger \hat{\Lambda}_k \right) = \text{Tr} \left(\hat{\rho}_a \hat{E}_k \right), \quad (4.53)$$

o que conclui nossa demonstração.

Parte II

Fabricação de Guias de Onda em Vidro

Capítulo 5

Sobre Guias de Onda

5.1 Guias de Onda Condutores

Começaremos nossa análise sobre guias de onda considerando um guia de onda em forma de tubo com paredes condutoras e preenchido por um material dielétrico com permissividade elétrica ϵ e permeabilidade magnética μ , como apresentado na Figura 5.1. Definindo um vetor perpendicular à direção de propagação da onda como $\vec{r}_\perp = \vec{r} - \vec{z}$, podemos escrever as equações para os campos que se propagam pelo guia da seguinte forma [85]:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \left[\vec{E}_\perp(\vec{r}_\perp) + \hat{z}E_z(\vec{r}_\perp) \right] e^{i(k_z z - \omega t)}, \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \left[\vec{H}_\perp(\vec{r}_\perp) + \hat{z}H_z(\vec{r}_\perp) \right] e^{i(k_z z - \omega t)},\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde k_z é a componente z do vetor de onda e ω , a sua frequência angular. Assim, percebendo que os campos são funções harmônicas, temos, da equação de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}.\tag{5.2}$$

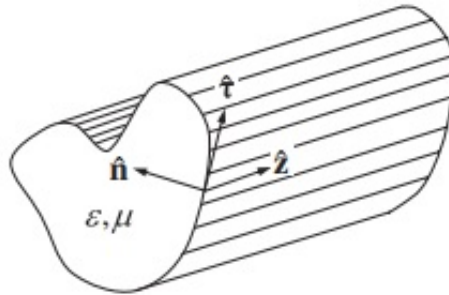


Figura 5.1: Representação de um tubo com paredes condutoras preenchido com um material dielétrico (ϵ, μ). O vetor \hat{n} aponta na direção normal à parede do tubo e o vetor \hat{z} indica a direção de propagação da onda. Figura retirada da referência [85].

Substituindo o campo \vec{E} apresentado na Equação 5.1 na equação acima e, fazendo $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_\perp + \hat{\mathbf{z}}\partial/\partial z$, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla}_\perp \times \left\{ \left[\vec{E}_\perp(\vec{r}_\perp) + \hat{\mathbf{z}}E_z(\vec{r}_\perp) \right] e^{i(k_z z - \omega t)} \right\} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[\vec{E}_\perp(\vec{r}_\perp) + \hat{\mathbf{z}}E_z(\vec{r}_\perp) \right] e^{i(k_z z - \omega t)} \right\} \\ \Rightarrow \left[\vec{\nabla}_\perp \times \vec{E}_\perp + ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \vec{E}_\perp - \hat{\mathbf{z}} \times \vec{\nabla}_\perp E_z \right] &= i\omega\mu \left[\vec{H}_\perp(\vec{r}_\perp) + \hat{\mathbf{z}}H_z(\vec{r}_\perp) \right].\end{aligned}\quad (5.3)$$

Uma vez que o primeiro termo dentro dos colchetes na Equação 5.3 aponta na direção de $\hat{\mathbf{z}}$ e os outros dois, em direções transversais à esta, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_\perp \times \vec{E}_\perp &= i\omega\mu H_z \hat{\mathbf{z}}, \\ ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \vec{E}_\perp - \hat{\mathbf{z}} \times \vec{\nabla}_\perp E_z &= i\omega\mu \vec{H}_\perp.\end{aligned}\quad (5.4)$$

Partindo agora da Lei de Àmpere-Maxwell e repetindo o procedimento feito acima, chegamos em equações parecidas para o campo magnético:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_\perp \times \vec{H}_\perp &= -i\omega\epsilon E_z \hat{\mathbf{z}}, \\ ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \vec{H}_\perp - \hat{\mathbf{z}} \times \vec{\nabla}_\perp H_z &= -i\omega\epsilon \vec{E}_\perp.\end{aligned}\quad (5.5)$$

As Equações 5.4 e 5.5 nos revelam uma característica interessante dos campos eletromagnéticos em tubos condutores. Suponha que as componentes E_z e H_z sejam conhecidas. Isso faz com que as quatro equações acima se tornem um sistema de quatro equações e quatro incógnitas, possuindo assim, solução única. Logo, os campos transversais podem ser totalmente definidos em termos das componentes longitudinais. Para explicitar essa propriedade, tomaremos o produto vetorial de $\hat{\mathbf{z}}$ com a segunda equação da Equação 5.5:

$$\begin{aligned}ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \left[\hat{\mathbf{z}} \times \vec{H}_\perp \right] - \hat{\mathbf{z}} \times \left[\hat{\mathbf{z}} \times \vec{\nabla}_\perp H_z \right] &= -i\omega\epsilon \hat{\mathbf{z}} \times \vec{E}_\perp \Rightarrow \\ -ik_z \vec{H}_\perp + \vec{\nabla}_\perp H_z &= -\frac{\omega\epsilon}{k_z} \left[i\omega\mu \vec{H}_\perp + \hat{\mathbf{z}} \times \vec{\nabla}_\perp E_z \right] \Rightarrow \\ \vec{H}_\perp &= \frac{ik_z}{\gamma^2} \vec{\nabla}_\perp H_z + \frac{i\omega\epsilon}{\gamma^2} \hat{\mathbf{z}} \times \vec{\nabla}_\perp E_z,\end{aligned}\quad (5.6)$$

onde $\gamma^2 = \mu\epsilon\omega^2 - k_z^2$. O desenvolvimento acima pode ser repetido a fim de determinar uma equação para as componentes transversais do campo elétrico:

$$\vec{E}_\perp = \frac{ik_z}{\gamma^2} \vec{\nabla}_\perp E_z - \frac{i\omega\mu}{\gamma^2} \hat{\mathbf{z}} \times \vec{\nabla}_\perp H_z.\quad (5.7)$$

Com o intuito de determinar por completo os campos guiados em um caso mais geral, ou seja, quando E_z e H_z não são conhecidas previamente, devemos encontrar uma equação que nos permita determinar os valores dessas componentes. Para isso, tomaremos o

rotacional de \vec{H}_\perp :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_\perp \times \vec{H}_\perp &= \frac{ik_z}{\gamma^2} \vec{\nabla}_\perp \times \vec{\nabla}_\perp H_z + \frac{i\omega\epsilon}{\gamma^2} \vec{\nabla}_\perp \times [\hat{\mathbf{z}} \times \vec{\nabla}_\perp E_z] \Rightarrow \\ -i\omega\epsilon E_z \hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{z}} \frac{i\omega\epsilon}{\gamma^2} \nabla_\perp^2 E_z \Rightarrow [\nabla_\perp^2 + \gamma^2] E_z = 0.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Através de um desenvolvimento análogo, chegamos na mesma equação para H_z , mostrando que a componente longitudinal de ambos os campos satisfazem a Equação de Helmholtz bidimensional. De acordo com estes resultados, podemos dizer que os campos eletromagnéticos dentro de um guia de onda, como o idealizado nesta seção, podem ser decompostos na soma de dois outros campos independentes, um chamado *transverso elétrico* (TE) e o outro, *transverso magnético* (TM), onde, para os campos TE, tem-se $E_z = 0$ e, para os campos TM, $H_z = 0$. Em resumo, temos:

Transverso Elétrico (TE)	Transverso Magnético (TM)
$E_z = 0$	$H_z = 0$
$[\nabla_\perp^2 + \gamma^2] H_z = 0$	$[\nabla_\perp^2 + \gamma^2] E_z = 0$
$\vec{H}_\perp = (ik_z/\gamma^2) \vec{\nabla}_\perp H_z$	$\vec{E}_\perp = (ik_z/\gamma^2) \vec{\nabla}_\perp E_z$
$\vec{E}_\perp = -(\omega\mu/k_z) \hat{\mathbf{z}} \times \vec{H}_\perp$	$\vec{H}_\perp = (\omega\epsilon/k_z) \hat{\mathbf{z}} \times \vec{E}_\perp$

Sabemos que este tipo de problema apenas apresenta solução única quando submetido à condições de contorno. As condições aqui utilizadas fixam valores para os campos e suas derivadas¹ sobre a superfície do guia e são dadas por [85]:

$$E_z|_S = 0 \quad (\text{campos TM}), \quad \frac{\partial H_z}{\partial n} \Big|_S = 0 \quad (\text{campos TE}). \quad (5.9)$$

Podemos, então, reescrever a Equação de Helmholtz que descreve nosso problema de uma forma generalizada, onde chamaremos as componentes longitudinais dos campos \vec{E} e \vec{H} , E_z e H_z , de Ψ , de forma que:

$$[\nabla_\perp^2 + \gamma^2] \Psi = 0, \quad \text{com} \quad \Psi_{TM}|_S = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Psi_{TE}}{\partial n} \Big|_S = 0. \quad (5.10)$$

O interessante em escrever nosso problema da forma acima apresentada é a possibilidade de fazer analogias com outros sistemas físicos a fim de extrair informações intuitivas sobre os campos que estamos a fim de determinar. Por exemplo, uma analogia válida está na comparação do comportamento de nosso sistema com os deslocamentos verticais gerados na vibração da membrana de um tambor, seja com contornos fixos (comparáveis ao modo TM) ou livres (modo TE). Esse pensamento pode ser usado para mostrar que o menor valor de γ sempre se dá no modo TE. Outra comparação interessante é o fato

¹Quando a condição de contorno fixa valores para uma tal função dizemos que ela é chamada de *Condição de Dirichlet*. Já quando o alvo das condições de contorno é a derivada de uma tal função, a chamamos de *Condição de Neumann*.

de que o caso TM é semelhante ao problema bidimensional de Schrödinger para uma partícula confinada em uma caixa de paredes rígidas, o que nos fornece *insights* quando pensamos em auto-funções modais Ψ_i e auto-valores do guia γ_i . Alguns resultados destas analogias são listados abaixo:

- Existem infinitas autofunções para ambos os casos, ou seja, infinitos modos guiados;
- Os auto-valores são sempre reais e positivos;
- As auto-funções formam um conjunto completo de funções;
- Auto-funções referentes a auto-valores diferentes são ortogonais.

Outra propriedade dos campos em um tubo condutor é a exibição de uma relação de dispersão estrutural $\omega(k_z)$, que pode ser deduzida diretamente da equação para γ^2 :

$$\omega_i(k_z) = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon} (\gamma_i^2 + k_z^2)}. \quad (5.11)$$

À medida que o valor de ω aumenta, aumenta também o número de modos propagados para um certo ω definido. Além disso, cada modo propaga apenas se sua frequência é maior do que uma frequência de corte característica. Para o caso onde sua frequência assume valores menores do que tal valor específico, os campos dados na Equação 5.1 abandonam sua performance como campos que se propagam pelo tubo, assumindo o caráter de ondas evanescentes. Tal frequência de corte é obtida exigindo que k_z seja nulo na Equação 5.11, ou seja:

$$\omega_{c,i} = \frac{\gamma_i}{\sqrt{\mu\epsilon}}. \quad (5.12)$$

Para terminar esta seção, resolveremos, como exemplo, o caso de um tubo condutor de seção transversal circular. A equação de Helmholtz para este caso pode ser escrita em coordenadas polares como:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \gamma^2 \right] \psi = 0. \quad (5.13)$$

Definindo $\psi = R(r)\Phi(\phi)$ e aplicando o método da separação de variáveis, chegamos às seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(\gamma^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (5.14)$$

As equações acima possuem soluções bem conhecidas, a saber:

$$\begin{aligned} \Phi(\phi) &= Ae^{\pm im\phi}, \\ R(r) &= J_m(\gamma r), \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde A é uma constante a ser determinada e J_m é a função de Bessel de primeira espécie de ordem m [86]. Aplicando as devidas condições de contorno, podemos determinar as formas das componentes z de ambos os campos:

$$\begin{aligned} E_z^{mn}(r, \phi) &= E_0 J_m(\gamma_{mn}^{TM} r) e^{\pm im\phi}, & m = 0, 1, 2, \dots \quad \text{e} \quad n = 1, 2, \dots \\ H_z^{mn}(r, \phi) &= H_0 J_m(\gamma_{mn}^{TE} r) e^{\pm im\phi}, & m = 0, 1, 2, \dots \quad \text{e} \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.16)$$

Perceba que os modos são duplamente degenerados para $m > 0$. As quantidades γ_{mn}^{TE} e γ_{mn}^{TM} são determinadas utilizando as condições de contorno nas funções de Bessel, sendo dadas por:

$$\gamma_{mn}^{TE} = \frac{\omega_{mn}}{a} \quad \text{e} \quad \gamma_{mn}^{TM} = \frac{u_{mn}}{a}, \quad (5.17)$$

onde u_{mn} é a raiz n -ésima da função de Bessel $J_m(x)$, ω_{mn} é a raiz n -ésima da derivada desta mesma função $J_m(x)$ e a é o raio da seção transversal do tubo. Os valores de u_{mn} e ω_{mn} são bem conhecidos e tabelados [87]. A Figura 5.2 mostra a configuração dos campos eletromagnéticos em uma seção transversal de um guia de onda circular. Para mais exemplos dessas configurações, ver referência [88].

5.2 Guias de Onda Dielétricos

5.2.1 Ondas Guiadas por Reflexão Interna Total

Guias de onda fabricadas inteiramente em materiais dielétricos são geralmente os mais utilizados. A configuração mais simples deste tipo de objeto consiste de um material dielétrico de índice de refração n_1 revestido por outro material de índice de refração n_2 , respeitando a condição $n_1 > n_2$. A propagação da onda se dá, não livre de perdas, por repetidas reflexões internas totais na interface entre os dois materiais, como mostra a Figura 5.3, desde que o ângulo de entrada das ondas em tal guia não seja maior que um ângulo máximo dado por $\theta_{max} = \arccos(n_2/n_1)$.

Como é de se esperar, guia de ondas dielétricos apresentam algumas diferenças em relação aos condutores. No que se refere aos modos guiados pelo guia, aqui eles não se apresentam como TE ou TM exclusivamente, podendo ser uma superposição dessas configurações. E mais, apenas uma quantidade finita de modos são guiados [85]. Além disso, neste tipo de guia de onda, a intensidade da onda propagada diminui conforme a propagação acontece e, esta diminuição, pode ser explicada lembrando que a onda refletida em alguma interface do guia é sempre acompanhada por uma onda que se propaga nesta interface com uma amplitude que decai exponencialmente. A existência desta onda interfacial pode ser inferida a partir da Lei de Snell lembrando que, para um certo ângulo crítico de incidência, o ângulo de refração se torna $\pi/2$.

Para confirmar a existência desta onda interfacial, lembraremos aqui conceitos básicos do fenômeno de refração. Imagine uma onda eletromagnética com vetor de onda \vec{k}_I incidindo na interface entre dois meios com índices de refração n_1 e n_2 , com $n_1 > n_2$,

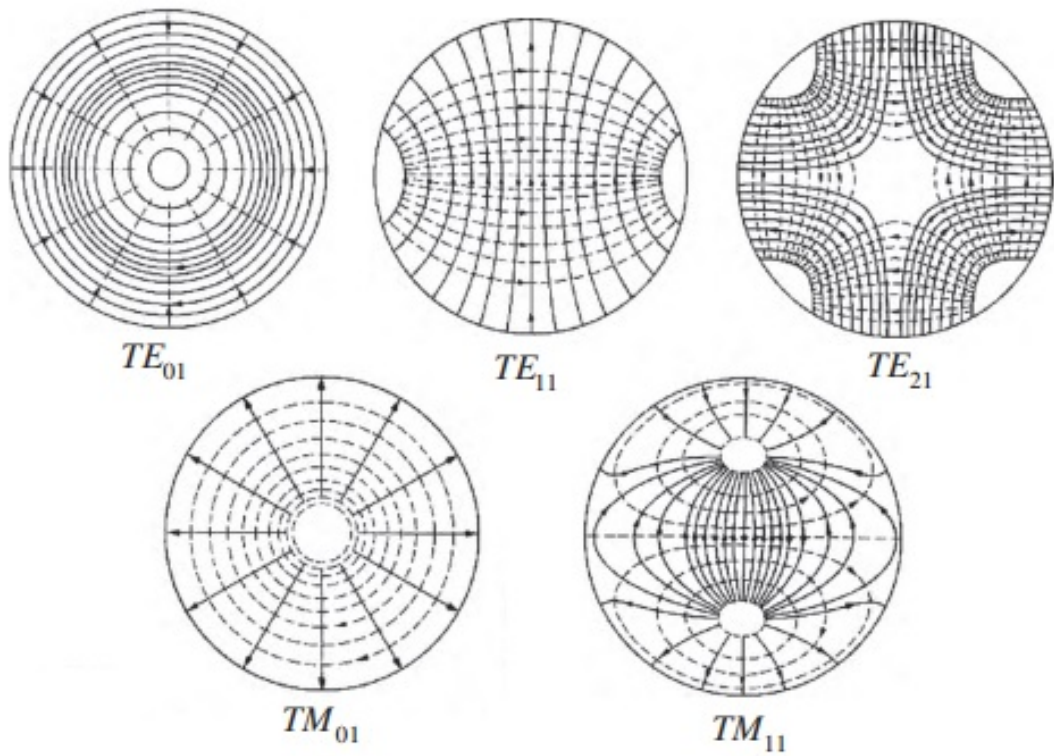


Figura 5.2: Configuração dos campos elétrico (linhas sólidas) e magnético (linhas pontilhadas) de alguns modos de baixa frequência para o guia de onda circular. Figura adaptada da referência [89].

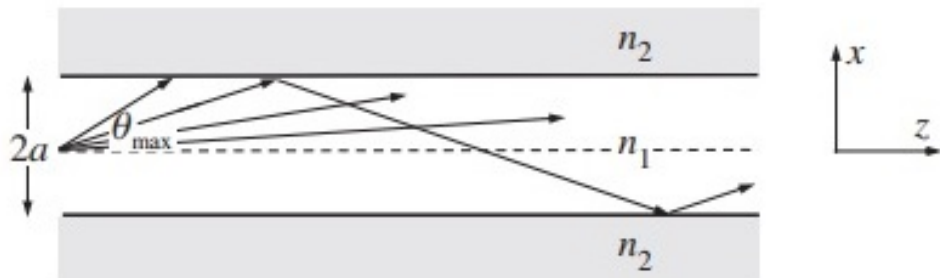


Figura 5.3: Reflexões internas totais em um guia de onda dielétrico. Figura adaptada da referência [85].

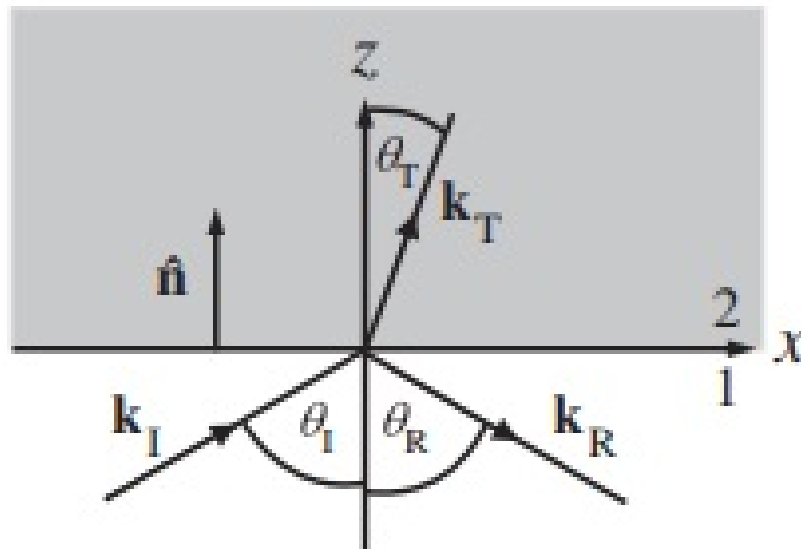


Figura 5.4: Representação das ondas incidente, refletida e refratada na interface entre dois materiais. Figura retirada da referência [85].

fazendo um ângulo θ_I com uma reta normal à interface. Após a incidência, dá-se origem a uma onda refletida com vetor de onda \vec{k}_R que se propaga fazendo um ângulo de θ_R com a normal e uma onda refratada (ou transmitida) com vetor de onda \vec{k}_T que se propaga fazendo um ângulo de θ_T com a normal. Esta situação está representada na Figura 5.4. Uma vez que a frequência de uma onda é influenciada apenas pela sua fonte, podemos dizer que as três ondas representadas nessa figura possuem a mesma frequência ω . Analisando o produto $\vec{k} \cdot \vec{r}$ na posição $z = 0$, temos:

$$\begin{aligned} \vec{k}_I \cdot \vec{r}|_{z=0} = \vec{k}_R \cdot \vec{r}|_{z=0} = \vec{k}_T \cdot \vec{r}|_{z=0} &\Rightarrow k_{Ix}x + k_{Iy}y = k_{Rx}x + k_{Ry}y = k_{Tx}x + k_{Ty}y \\ \Rightarrow k_{Ix} = k_{Rx} = k_{Tx} &\quad \text{e} \quad k_{Iy} = k_{Ry} = k_{Ty}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Mas, uma vez que os vetores de onda da Figura 5.4 possuem componentes apenas em x e z , concluímos que $k_{Iy} = k_{Ry} = k_{Ty} = 0$. Por outro lado, sabendo que o vetor de onda está relacionado com o índice de refração do meio onde a onda propaga através da relação $k = n\omega/c$, onde c é a velocidade da luz, podemos escrever:

$$k_I = k_R \equiv k_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \Rightarrow k_{1x} = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \theta_I, \quad (5.19)$$

$$k_T \equiv k_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \Rightarrow k_{2x} = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \theta_T. \quad (5.20)$$

Igualando as Equações (5.19) e (5.20), obtém-se a Lei de Snell² e, através dela, vemos que o valor crítico do ângulo de incidência que gera reflexões internas totais ($\theta_T = \pi/2$) é dado por: $\theta_{crit} = \arcsin(n_2/n_1)$ ³. Para casos onde $\theta_I > \theta_{crit}$, a Lei de Snell perde sua

² $n_1 \sin \theta_I = n_2 \sin \theta_T$

³Há uma diferença entre θ_{crit} e o θ_{max} visto na Figura 5.3. O θ_{max} é medido entre a direção de

validade e devemos partir para análises mais generalizadas. Para isso, escreveremos o campo refratado no meio 2 da seguinte forma:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_T e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_T e^{i(k_{2x}x + k_{2z}z - \omega t)}. \quad (5.21)$$

A componente paralela à interface de \vec{k}_2 é calculada usando o princípio pelo qual se deduz a Lei de Snell:

$$k_{2x} = k_{1x} \quad \Rightarrow \quad k_{2x} = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \theta_I, \quad (5.22)$$

enquanto que a componente normal à interface será dada por:

$$\begin{aligned} k_{2z} = k_2 \cos \theta_T \quad \Rightarrow \quad k_{2z}^2 &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (n_2^2 - n_2^2 \sin^2 \theta_T) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_I) \\ \Rightarrow k_{2z} &= \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_I)}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Como $\theta_I > \theta_{crit}$, temos que $n_1 \sin \theta_I > n_2 \Rightarrow n_1^2 \sin^2 \theta_I > n_2^2$ ⁴. Logo,

$$k_{2z} = i \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1^2 \sin^2 \theta_I - n_2^2)} = i n_1 \frac{\omega}{c} \sqrt{(\sin^2 \theta_I - \sin^2 \theta_{crit})}. \quad (5.24)$$

Definindo $\kappa = n_1 (\omega/c) \sqrt{(\sin^2 \theta_I - \sin^2 \theta_{crit})}$ e voltando à Equação 5.21, obtemos:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_T e^{i(k_{1x} \sin \theta_I + i\kappa z - \omega t)} = \vec{E}_T e^{-\kappa z} e^{i(k_{1x} \sin \theta_I - \omega t)}. \quad (5.25)$$

Assim, vemos que o campo definido pela equação acima se propaga na interface entre os meios, uma vez que ele é não-nulo apenas a uma distância κ^{-1} do plano $z = 0$.

É importante notar que, até agora, um fato importante a respeito da propagação das ondas em um guia dielétrico não foi levado em consideração. Este fato é que tal propagação apenas é observada quando acontecem interferências construtivas entre todos os raios que se propagam na mesma direção. Esta restrição física permite a distinção entre os modos TE e TM, uma vez que cada modo é submetido a diferentes modificações em suas fases quando sofrem reflexões internas totais⁵. Tal alteração na fase é função do ângulo de entrada θ . Assim, a condição para a ocorrência de interferências construtivas será dada por [85]:

$$4ka \sin \theta + 2\phi_{ph}(\theta) = 2m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

onde a é o raio da seção transversal do guia e ϕ_{ph} é a alteração de fase sofrida pela onda a cada reflexão interna total. Uma solução gráfica para esta equação está apresentada na Figura 5.5 e mostra que os modos propagados com $\theta < \theta_{max}$ existem apenas para

propagação do feixe de laser e o eixo do tubo na entrada deste. Já o θ_{crit} é medido entre a direção de propagação do feixe de laser e o eixo normal à interface entre os meios cujos índices de refração são n_1 e n_2 no ponto onde a reflexão acontece.

⁴Vale lembrar que os ângulos θ_I e θ_{crit} pertencem ao intervalo $(0, \pi/2)$.

⁵Este fato é demonstrado com o uso das *Equações de Fresnel* [85]

$m = 1, 2, 3$. Este resultado corrobora o que foi dito sobre o fato de que apenas um número finito de modos se propaga por um guia de onda dielétrico.

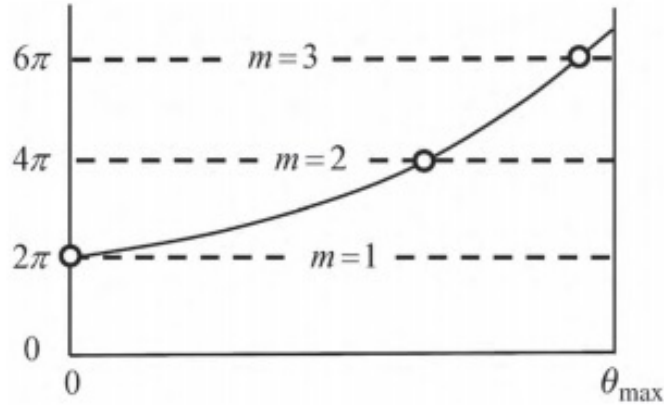


Figura 5.5: Solução gráfica para a Equação 5.26. O eixo y representa a grandeza $\phi_{ph}(\theta)$ e o eixo x, a grandeza θ limitada ao intervalo $[0, \theta_{max}]$. Figura retirada da referência [85].

5.2.2 Modos Guiados em um Guia de Ondas Circular

Para deduzirmos expressões para os campos em um guia de ondas dielétrico com seção transversal circular, precisamos primeiro generalizar a Equação de Helmholtz para ambientes onde o índice de refração varia com a posição. Consideraremos o caso onde a onda se propaga em um material não-magnético, tendo seu índice de refração definido como $n(r) = c\sqrt{\mu\epsilon(r)}$. Assim, atuando com o rotacional na equação da Lei de Faraday, temos:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}] &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{H} \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ &\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Supondo que não há cargas livres no material em estudo, a forma diferencial da Lei de Gauss nos dá:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \epsilon = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{E} \cdot \frac{\vec{\nabla} \epsilon}{\epsilon}. \quad (5.28)$$

Além disso, como lidamos com campos harmônicos e ϵ é proporcional a n^2 , podemos reescrever a Equação 5.27 como:

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \frac{n^2}{c^2} \vec{E} = -\vec{\nabla} \left(\vec{E} \cdot \frac{\vec{\nabla} n^2}{n^2} \right). \quad (5.29)$$

Para chegarmos na equação de onda para o campo magnético, procedemos da mesma

forma, mas atuando com o rotacional na Lei de Àmpere-Maxwell:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{H}] &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{D} \quad \Rightarrow \quad -\nabla^2 \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times (\epsilon \vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \epsilon \times \vec{E} + \epsilon \vec{\nabla} \times \vec{E}] \\
 &\Rightarrow \quad -\nabla^2 \vec{H} = \vec{\nabla} \epsilon \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\frac{i\omega}{\mu c^2} \vec{\nabla} n^2 \times \vec{E} + \mu \epsilon \omega^2 \vec{H} \\
 &\Rightarrow \quad \nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \frac{n^2}{c^2} \vec{H} = i\omega \epsilon \vec{\nabla} n^2 \times \vec{E}.
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

De posse das equações de onda para os campos elétrico e magnético, nosso próximo passo é obter a Equação de Helmholtz que determina a componente z desses campos. Para isto tomamos o produto escalar da Equação 5.30 com $\hat{\mathbf{z}}$, que resulta em:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 H_z + \omega^2 \frac{n^2}{c^2} H_z &= i\omega \epsilon \hat{\mathbf{z}} \cdot [\vec{\nabla} n^2 \times \vec{E}] \quad \Rightarrow \\
 \nabla_{\perp}^2 H_z + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + \omega^2 \frac{n^2}{c^2} H_z &= i\omega \epsilon \hat{\mathbf{z}} \cdot [\vec{\nabla} n^2 \times (\vec{E}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} E_z)] \quad \Rightarrow \tag{5.31} \\
 \nabla_{\perp}^2 H_z + \left(\omega^2 \frac{n^2}{c^2} - k_z^2 \right) H_z &= i\omega \epsilon \left[\hat{\mathbf{z}} \cdot (\vec{\nabla} n^2 \times \vec{E}_{\perp}) + \hat{\mathbf{z}} \cdot (\vec{\nabla} n^2 \times \hat{\mathbf{z}} E_z) \right].
 \end{aligned}$$

O último termo da equação acima é nulo. De fato,

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot (\vec{\nabla} n^2 \times \hat{\mathbf{z}} E_z) = (\hat{\mathbf{z}} \cdot \vec{\nabla}_{\perp} n^2) E_z = 0. \tag{5.32}$$

Utilizando a Equação 5.7 para eliminar os componentes transversais de \vec{E} da Equação 5.31, temos:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\perp}^2 H_z + \gamma^2 H_z &= i\omega \epsilon \left[\hat{\mathbf{z}} \cdot (\vec{\nabla} n^2) \times \left(\frac{ik_z}{\gamma^2} \vec{\nabla}_{\perp} E_z - \frac{i\omega \mu}{\gamma^2} \hat{\mathbf{z}} \times \vec{\nabla}_{\perp} H_z \right) \right] \quad \Rightarrow \\
 \nabla_{\perp}^2 H_z + \gamma^2 H_z &= -\frac{\omega \epsilon}{\gamma^2} \left[k_z \hat{\mathbf{z}} \cdot (\vec{\nabla} n^2 \times \vec{\nabla}_{\perp} E_z) - \omega \mu \hat{\mathbf{z}} \cdot (\vec{\nabla} n^2 \times \hat{\mathbf{z}} \times \vec{\nabla}_{\perp} H_z) \right]. \tag{5.33}
 \end{aligned}$$

Manipulando o último termo, temos:

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot [\vec{\nabla} n^2 \times \hat{\mathbf{z}} \times \vec{\nabla}_{\perp} H_z] = \hat{\mathbf{z}} \cdot \left[(\vec{\nabla} n^2 \cdot \vec{\nabla}_{\perp} H_z) \hat{\mathbf{z}} - (\vec{\nabla} n^2 \cdot \hat{\mathbf{z}}) \vec{\nabla}_{\perp} H_z \right] = \vec{\nabla}_{\perp} n^2 \cdot \vec{\nabla}_{\perp} H_z \tag{5.34}$$

Cientes do fato de que $\hat{\mathbf{z}} \cdot (\vec{\nabla} n^2 \times \vec{\nabla}_{\perp} E_z) = \hat{\mathbf{z}} \cdot (\vec{\nabla}_{\perp} n^2 \times \vec{\nabla}_{\perp} E_z)$ e, utilizando a manipulação feita na Equação 5.34, podemos escrever a Equação de Helmholtz para a componente z do campo magnético:

$$\nabla_{\perp}^2 H_z + \gamma^2 H_z - \left(\frac{\omega n}{\gamma c} \right)^2 \vec{\nabla}_{\perp} n^2 \cdot \vec{\nabla}_{\perp} H_z = -\frac{\omega k_z \epsilon}{\gamma^2} \hat{\mathbf{z}} \cdot (\vec{\nabla}_{\perp} n^2 \times \vec{\nabla}_{\perp} E_z). \tag{5.35}$$

E, por um procedimento análogo, deduzimos a Equação de Helmholtz para a compo-

nente z do campo elétrico:

$$\nabla_{\perp}^2 E_z + \gamma^2 E_z - \left(\frac{k_z}{n\gamma}\right)^2 \vec{\nabla}_{\perp} n^2 \cdot \vec{\nabla}_{\perp} E_z = \frac{\omega k_z \mu}{n^2 \gamma^2} \hat{\mathbf{z}} \cdot \left(\vec{\nabla}_{\perp} n^2 \times \vec{\nabla}_{\perp} H_z\right). \quad (5.36)$$

A primeira observação a ser feita a respeito das equações obtidas acima para as componentes longitudinais dos campos eletromagnéticos é o fato de que, diferente do caso condutor (Equação 5.8), as Equações 5.35 e 5.36 são acopladas. Como resultado, não é possível, no caso geral, obter soluções puramente TE ou TM. Estas soluções, que se apresentam como uma superposição dos modos TE e TM, são chamadas de *estados híbridos* [85, 90]. Assim, a não ocorrência de tais estados se dá sempre que os termos do lado direito das Equações 5.35 e 5.36 se anulam. Analisando estes termos, podemos obter uma condição que limita a ocorrência destes estados híbridos. Representando as componentes E_z e H_z por Ψ , temos:

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \left(\vec{\nabla}_{\perp} n^2 \times \vec{\nabla}_{\perp} \Psi\right) \propto \frac{\partial n^2}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}. \quad (5.37)$$

Como o índice de refração foi suposto como sendo função de r , concluímos, assim, que a não ocorrência dos estados híbridos se dá quando os campos não apresentam variações azimutais, ou seja, não são funções de ϕ . Para obtermos a solução geral para o problema, basta resolvermos as equações 5.35 e 5.36 impondo que os campos \vec{D} e \vec{B} sejam contínuos em suas componentes normais à interface e que os campos \vec{E} e \vec{H} sejam contínuos em suas componentes tangenciais para $r = a$, sendo a o raio da seção transversal do guia de onda. As soluções são:

$$\begin{aligned} \Psi &\propto J_m(\gamma_1 r) e^{\pm im\phi}, & r < a \\ \Psi &\propto K_m(\gamma_2 r) e^{\pm im\phi}, & r > a \end{aligned} \quad (5.38)$$

onde $\gamma_i = \sqrt{\mu_i \epsilon_i \omega^2 - k_z^2}$ e K_m é a função de Bessel de segunda espécie [86]. Estes modos híbridos podem ser entendidos fisicamente ao se considerar as reflexões internas totais que acontecem na interface entre os materiais que compõem o guia. Uma vez que o plano que contém o vetor de onda e o vetor normal à superfície não contém o vetor \vec{z} , a cada nova reflexão, os campos elétrico e magnético possuirão novas projeções sobre o eixo z . É possível que estas reflexões superponham os campos, criando os estados híbridos [90].

Para guias de onda onde a diferença entre os índices de refração n_1 e n_2 é muito pequena e obedece a relação $|n_1 - n_2| \ll n_1$, a onda guiada apresenta componentes longitudinais de pequena amplitude, podendo ser aproximadas por ondas transversais e tratadas como ondas planas. O modo HE_{11} ⁶, por exemplo, possui campos que são linearmente polarizados e variam na direção radial conforme Funções de Bessel. Estes tipos de guias de onda são obtidos através de microfabricação em vidro e são comumente chamados de *Guias de Onda de Fraca Condução*⁷ [91].

⁶Este modo é a superposição dos modos TE e TM, ambos com $m = 1$.

⁷Em textos em inglês encontra-se a denominação “*weakly guiding waveguides*”.

5.3 Acoplamento entre Guias de Onda

Se dois guias de onda estão separados por uma distância tal que permite a superposição de seus campos, a luz de um deles pode ser acoplada ao outro [92, 93]. Este fenômeno permite que potência óptica possa ser trocada entre guias de onda, permitindo a fabricação de dispositivos fotônicos, como o acoplador direcional, por exemplo. Um tratamento detalhado deste problema envolve a resolução das Equações de Maxwell na região interior dos guias e na região entre eles, sob a imposição das condições de contorno adequadas. Aqui, usaremos a *Teoria dos Modos Acoplados*, que se baseia na aproximação de fracos acoplamentos [93].

Esta teoria assume que os modos guiados em cada guia de onda permanecem aproximadamente os mesmos e que o acoplamento atua modificando suas amplitudes, mantendo aproximadamente constantes suas distribuições espaciais transversais e suas constantes de propagação⁸. Assim, as amplitudes dos modos se tornam funções de z e o objetivo desta teoria é determinar como se dá a variação de tais grandezas.

O acoplamento entre guias de onda pode ser visto como um fenômeno de espalhamento [92]. A onda guiada através de um guia é espalhada para o outro servindo de fonte de luz para este, alterando assim a amplitude da luz inicialmente guiada por ele. O mesmo acontece no segundo guia, criando assim uma fonte para a luz inicialmente guiada pelo primeiro. Ao analisar esta interação mútua é possível deduzir equações diferenciais que regem o comportamento das amplitudes das luzes guiadas por cada guia de onda.

Para deduzir tais equações, vamos imaginar dois guias de onda, um com índice de refração n_1 e outro com índice de refração n_2 , imersos em um material com índice de refração n . Consideraremos também que as grandezas com índices serão relativas à um dos guias de onda, enquanto que as sem índices dirão respeito aos seus valores no material que os reveste. Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned} E_1(x, y, z) &= A_1(z)u_1(x, y)e^{i(\beta_1 z - \omega t)}, \\ E_2(x, y, z) &= A_2(z)u_2(x, y)e^{i(\beta_2 z - \omega t)}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

onde $u_j(x, y)$ são as distribuições transversais dos modos guiados, as funções $A_j(z)$ variam lentamente com a variável z e as quantidades β_j são as constantes de propagação de cada campo, sendo $j = 1, 2$. Assim, podemos considerar que o campo total na região de acoplamento entre os guias de onda será dado por

$$E(x, y, z) = E_1(x, y, z) + E_2(x, y, z). \quad (5.40)$$

Vamos definir a função n_t^2 que representa a distribuição do índice de refração na região onde será analisada o comportamento do campo E . Considerando que os índices

⁸A constante de propagação é definida como sendo o componente do vetor de onda paralelo à sua direção de propagação.

de refração são funções apenas das variáveis radiais, como feito na Subsecção 5.2.2, temos:

$$n_t^2(x, y) = \begin{cases} n_1^2(x, y), & \text{dentro do guia 1} \\ n_2^2(x, y), & \text{dentro do guia 2} \\ n^2(x, y), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.41)$$

Definindo a diferença entre os índices de refração dos guias com o do meio que os contém como

$$\Delta n_1^2(x, y) = \begin{cases} n_1^2 - n^2, & \text{dentro do guia 1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (5.42)$$

$$\Delta n_2^2(x, y) = \begin{cases} n_2^2 - n^2, & \text{dentro do guia 2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (5.43)$$

podemos reescrever a Equação 5.41 da seguinte forma

$$n_t^2(x, y) = n^2(x, y) + \Delta n_1^2(x, y) + \Delta n_2^2(x, y). \quad (5.44)$$

Dessa forma, sendo $n^2(x, y)$ a distribuição do índice de refração na região fora dos guias de onda, podemos interpretar os termos $\Delta n_1^2(x, y)$ e $\Delta n_2^2(x, y)$ como sendo a presença dos guias de onda 1 e 2, respectivamente. Além disso, sabe-se que os campos definidos Equação 5.39 obedecem a Equação de Helmholtz

$$\begin{aligned} [\nabla_{\perp}^2 + \gamma^2] E_j = 0 & \Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2 n_j^2}{c^2} - \beta_j^2 \right] E_j = 0 \\ \Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 + \Delta n_j^2) \right] u_j(x, y) &= \beta_j^2 u_j(x, y), \end{aligned} \quad (5.45)$$

onde $j = 1, 2$. Logo, temos que a presença do guia de onda 1 gera uma perturbação dielétrica $\Delta n_1^2(x, y)$ na propagação dos modos referentes a E_2 e vice-versa. O campo total E , por sua vez, deve satisfazer a Equação de Helmholtz tridimensional

$$[\nabla^2 + \gamma^2] E = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 + \Delta n_1^2 + \Delta n_2^2) \right] E = 0 \quad (5.46)$$

Objetiva-se obter, a partir da Equação 5.46, expressões para as amplitudes $A_1(z)$ e $A_2(z)$. Para, isso substituiremos as Equações 5.39 e 5.40 na Equação 5.46, obtendo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \left\{ A_j(z) e^{i\beta_j z} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 + \Delta n_j^2) \right] u_j(x, y) + u_j(x, y) \frac{\partial^2}{\partial z^2} [A_j(z) e^{i\beta_j z}] \right\} = \\ - \frac{\omega^2}{c^2} [\Delta n_2^2 A_1(z) u_1(x, y) e^{i\beta_1 z} + \Delta n_1^2 A_2(z) u_2(x, y) e^{i\beta_2 z}] \end{aligned} \quad (5.47)$$

Lembrando que as funções $A_j(z)$ variam lentamente com a variável z e da igualdade estabelecida na Equação 5.45, podemos reescrever a Equação 5.47 da seguinte forma

$$2i \sum_{j=1}^2 \beta_j u_j(x, y) e^{i\beta_j z} \frac{\partial A_j(z)}{\partial z} = -\frac{\omega^2}{c^2} [\Delta n_2^2 A_1(z) u_1(x, y) e^{i\beta_1 z} + \Delta n_1^2 A_2(z) u_2(x, y) e^{i\beta_2 z}] \quad (5.48)$$

Em sequência, tomaremos o produto escalar da Equação 5.48 com a quantidade $u_1^*(x, y)$ e integraremos o resultado em todo o plano xy . Ao final deste procedimento, obtemos

$$\frac{\partial A_1(z)}{\partial z} = i\kappa_{11} A_1(z) + i\kappa_{12} A_2(z) e^{i(\beta_2 - \beta_1)z}, \quad (5.49)$$

onde foram utilizadas as seguintes relações [93]

$$\begin{aligned} \iint u_a^*(x, y) u_b(x, y) dx dy &= \frac{2\omega\mu}{\beta_a} \delta_{ab}, \\ \kappa_{aa} &= \frac{\omega\varepsilon_0}{4} \iint u_a^*(x, y) \Delta n_b^2(x, y) u_a(x, y) dx dy, \\ \kappa_{ab} &= \frac{\omega\varepsilon_0}{4} \iint u_a^*(x, y) \Delta n_a^2(x, y) u_b(x, y) dx dy, \end{aligned} \quad (5.50)$$

sendo $a, b = 1, 2$ e δ_{ab} , uma delta de Kronecker. Podemos relacionar as constantes κ_{aa} e κ_{ab} com fenômenos físicos presentes no acoplamento entre guias de onda. A constante κ_{aa} está relacionada à perturbação dielétrica sofrida por um guia devido à presença do outro e atua como uma pequena correção da constante de propagação β_a . Por outro lado, a constante κ_{ab} relaciona-se à troca de potência luminosa devido ao acoplamento entre os guias. Tal constante obedece a relação $\kappa_{ab} = \kappa_{ba}^*$, que garante, por sua vez, a conservação de energia em tal sistema [93]. Por tanto, se fizermos a substituição $\beta_a \mapsto \beta_a + \kappa_{aa}$ na Equação 5.39 e repetirmos o desenvolvimento aqui feito, obtemos a seguinte relação

$$\frac{\partial A_1(z)}{\partial z} = i\kappa_{12} A_2(z) e^{i\Lambda z}, \quad (5.51)$$

onde $\Lambda = (\beta_2 + \kappa_{22}) - (\beta_1 + \kappa_{11})$. Agora, voltaremos na Equação 5.48 e tomaremos seu produto escalar com a quantidade $u_2^*(x, y)$. Integrando o resultado em todo o plano xy obtemos

$$\frac{\partial A_2(z)}{\partial z} = i\kappa_{21} A_1(z) e^{-i\Lambda z}, \quad (5.52)$$

Percebe-se que, nas equações diferenciais 5.51 e 5.52, a variação da amplitude do campo em um guia depende da amplitude do campo no outro guia. Em outras palavras, estas equações diferenciais se encontram acopladas. Para resolvê-las, vamos supor que apenas há incidência de luz no primeiro guia, ou seja, $A_1(z=0) = A_0$ e $A_2(z=0) = 0$. Assim, isolando $A_1(z)$ na Equação 5.52 e substituindo na Equação 5.51, temos

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[e^{i\Lambda z} \frac{\partial A_2(z)}{\partial z} \right] = -\kappa A_2(z) e^{i\Lambda z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A_2(z)}{\partial z^2} + i\Lambda \frac{\partial A_2(z)}{\partial z} + \kappa A_2(z) = 0, \quad (5.53)$$

onde $\kappa = \kappa_{12}\kappa_{21}$. A equação acima é de fácil resolução e apresenta a seguinte solução:

$$A_2(z) = C_1 e^{(-i\Lambda - \sqrt{-4\kappa - \Lambda^2})z/2} + C_2 e^{(-i\Lambda + \sqrt{-4\kappa - \Lambda^2})z/2}. \quad (5.54)$$

A condição inicial dada $A_2(z=0) = 0$ nos leva a concluir que $C_1 = -C_2$. Portanto, definindo $\eta^2 = \kappa + \Lambda^2/4$, temos:

$$A_2(z) = -2iC_1 e^{-i\Lambda z/2} \sin \eta z. \quad (5.55)$$

Agora, substituindo a equação para $A_2(z)$ obtida acima na Equação 5.52, obtemos

$$A_1(z) = \frac{C_1 e^{i\Lambda z/2}}{\kappa_{21}} [i\Lambda \sin \eta z - 2\eta \cos \eta z]. \quad (5.56)$$

Para determinar a constante C_1 , usamos a condição inicial para $A_1(z)$, obtendo

$$A_1(z=0) = -\frac{2\eta C_1}{\kappa_{21}} \Rightarrow C_1 = -\frac{A_0 \kappa_{21}}{2\eta}. \quad (5.57)$$

Assim, podemos escrever como as amplitudes dos campos guiados se comportam em função da variável z :

$$\begin{aligned} A_1(z) &= A_0 e^{i\Lambda z/2} \left[\cos \eta z - \frac{i\Lambda}{2\eta} \sin \eta z \right], \\ A_2(z) &= A_0 \frac{i\kappa_{21}}{\eta} e^{-i\Lambda z/2} \sin \eta z. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Finalmente, sabendo que a potência óptica de um campo eletromagnético é definida como sendo o módulo ao quadrado da sua amplitude, temos:

$$\begin{aligned} P_1(z) &= P_0 \left[\cos^2 \eta z + \left(\frac{\Lambda}{2\eta} \right)^2 \sin^2 \eta z \right], \\ P_2(z) &= P_0 \left(\frac{\kappa_{21}}{\eta} \right)^2 \sin^2 \eta z. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Não é árduo mostrar que $P_1(z) + P_2(z) = P_0$, como se espera. É mostrado na Equação 5.59 que a potência óptica alterna periodicamente entre os dois guias de onda, sendo tal período igual a $2\pi/\eta$. Um esboço gráfico das funções $P_1(z)$ e $P_2(z)$ está dado na Figura 5.6. Quando os guias envolvidos no problema são idênticos, teremos $n_1 = n_2$, $\Lambda = 0$ e $\eta^2 = \kappa$, logo

$$\begin{aligned} P_1(z) &= P_0 \cos^2 \eta z, \\ P_2(z) &= P_0 \sin^2 \eta z. \end{aligned} \quad (5.60)$$

À constante η costuma-se dar o nome de coeficiente de acoplamento [1]. A troca de potências para o caso de guias idênticos está representada na Figura 5.7.

Uma característica interessante deste caso é que a potência em determinada posição do guia depende apenas desta tal posição. Assim, variando este comprimento de interação é possível controlar com certa precisão a potência de saída. Podemos, por exemplo, determinar a qual distância se dá uma transferência completa de potência óptica entre os guias de onda. Sabendo que, inicialmente ($z = 0$) toda a potência óptica se concentra no guia 1, a posição $z = L$ na qual toda potência óptica estará concentrada no guia 2 será dada por

$$\sin \eta L = 1 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\pi}{2\eta}. \quad (5.61)$$

O resultado obtido na Equação 5.61 é válido apenas quando os guias acoplados são idênticos. Quando este não é o caso, apenas uma fração da potência inicial é transferida de um guia para o outro. Tal potência máxima transferida P_{mt} é definida por

$$P_{mt} = P_0 \left(\frac{\kappa_{21}}{\eta} \right)^2. \quad (5.62)$$

A existência deste controle é a chave para a construção de divisores de feixe ópticos integrados, peça fundamental para a implementação experimental de qualquer operador unitário [49]. Na Figura 5.8 apresentamos um esquema de um divisor de feixe fabricado em vidro com a técnica experimental da Escrita Direta.

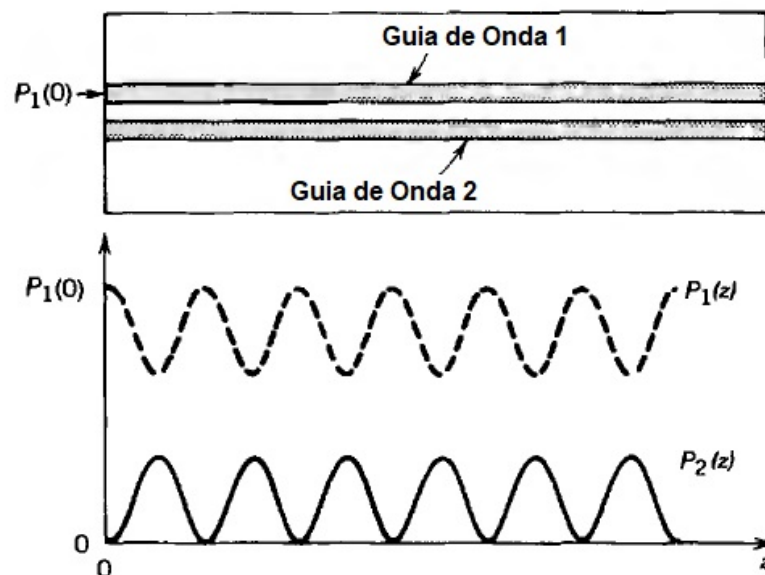


Figura 5.6: Troca de potência entre dois guias de onda. Figura adaptada da referência [92].

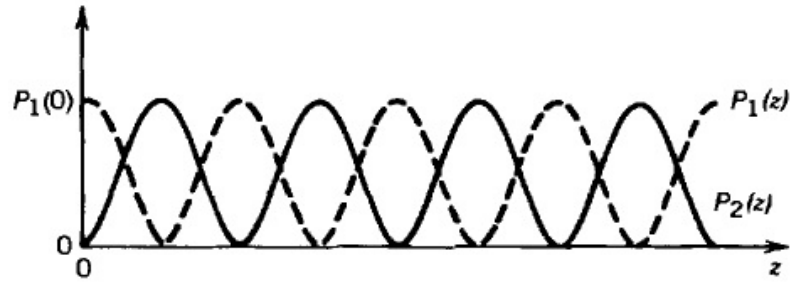


Figura 5.7: Troca de potência entre guias idênticos. Figura adaptada da referência [92].

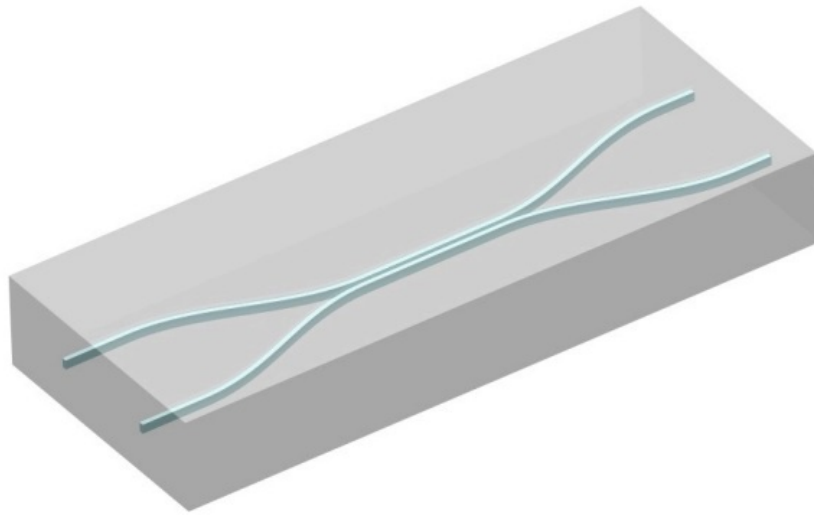


Figura 5.8: Divisor de feixe fabricado em vidro. Figura adaptada da referência [30].

Capítulo 6

Interação Laser-Material

Em um trabalho publicado em 1996, Hirao e colaboradores mostraram ser possível alcançar uma modificação permanente no índice de refração de vidros transparentes ao focar sob sua superfície pulsos de laser com duração de sub-picossegundos [29]. Além disso, devido ao caráter não-linear do processo de interação nestes experimentos, a absorção se apresenta confinada a um volume focal dentro do material.

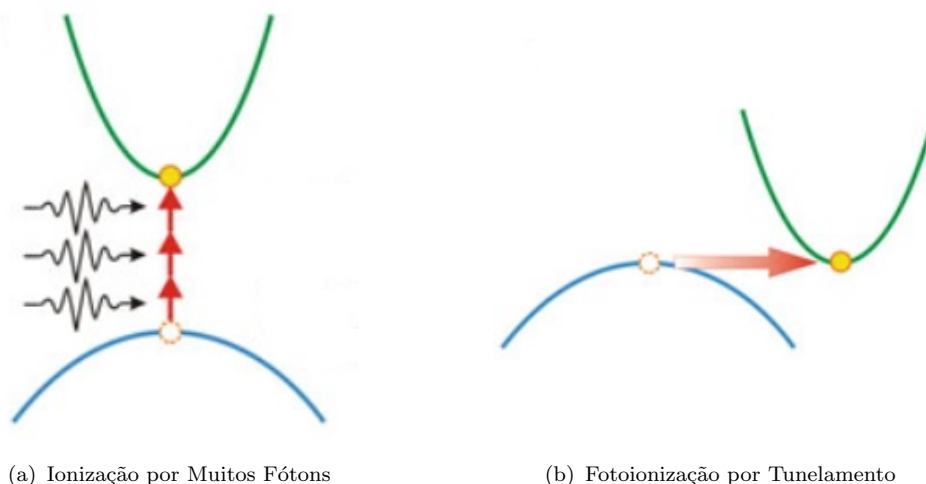
Pulsos de lasers, com duração de femtossegundos, produzidos por sistemas de lasers comerciais, alcançam picos de intensidade da ordem de $10 \text{ TW}/\text{cm}^2$ e, quando focalizados no interior de um dado material, desencadeiam fortes processos de absorção não-linear, permitindo assim a concentração de energia na região em torno do seu foco [33]. Após um pequeno intervalo de tempo, estes elétrons excitados pelo laser transferem sua energia para a rede cristalina, gerando modificações permanentes nas propriedades do material.

Mesmo não havendo na literatura, até o momento, um modelo físico completo que trate da interação laser-material, é possível simplificar o processo como um todo dividindo-o em três partes: a geração de um plasma de elétrons livres através de processos não-lineares de fotoionização, a transferência da energia destes elétrons para a rede e a modificação efetiva das propriedades do material.

6.1 Formação do Plasma de Elétrons Livres

6.1.1 Fotoionização Não-Linear

Sabemos que os elétrons de um dado material são promovidos da banda de valência para a banda de condução quando incidido sobre eles radiação eletromagnética com energia igual ou maior à energia do “*gap*” de tal material. Dizemos que o processo de absorção aqui se dá de maneira linear, uma vez que cada elétron precisa absorver apenas um fóton para obter tal promoção. Por outro lado, lasers pulsados de femtossegundos, com comprimentos de onda localizados na região visível do espectro ou no infra-vermelho próximo, não possuem energia suficiente para serem linearmente absorvidos em vidros [33]. Portanto, nesses materiais, elétrons serão promovidos para a banda de condução através



(a) Ionização por Muitos Fótons

(b) Fotoionização por Tunelamento

Figura 6.1: Processos de fotoionização não-linear. A curva verde representa a banda de condução enquanto que a curva azul representa a banda de valência. Figuras adaptadas da referência [33].

de processos não-lineares de absorção, como a *ionização por muitos fótons* [94] ou a *fotoionização por tunelamento* [95].

A ionização por muitos fótons acontece quando a promoção de um elétron para a banda de condução se dá devido à absorção simultânea de um grande número de fótons. O número n de fótons absorvidos deve satisfazer à relação $nhf > U_g$, onde h é a constante de Planck, f é a frequência da radiação incidente e U_g , o “*gap*” de energia entre a banda de valência e a de condução. Este mecanismo não-linear de absorção é dominante a baixas intensidades e altas frequências do laser ¹. Para os casos de altas intensidades e baixas frequências, a absorção dos fótons se dá predominantemente pelo processo da fotoionização por tunelamento. Nestes casos, o forte campo incidente induz distorções nas bandas de valência e de condução do material, diminuindo, ou até mesmo anulando, a barreira de potencial entre elas. Assim, transições diretas via tunelamento podem acontecer entre estas duas bandas. Estes dois processos estão esquematizados na Figura 6.1.

Mesmo sendo processos diferentes, Keldysh mostrou, em um trabalho de 1965, que tanto a ionização por muitos fótons quanto a fotoionização por tunelamento podem ser descritas pelo mesmo tratamento teórico [96]. Assim, calculando a probabilidade de transição de um elétron da banda de valência para a de condução como resultado da incidência de uma onda eletromagnética, foi possível determinar em quais regimes tal fenômeno acontece via absorção de muitos fótons ou via tunelamento.

Ao considerar um campo elétrico incidente do tipo $\vec{E}(t) = \vec{E} \cos(\omega t)$, o Hamiltoniano do sistema apresenta o seguinte termo referente à perturbação causada por tal campo

$$H'(t) = -q\vec{E} \cdot \vec{r} \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad H'_{vc}(t) = -\vec{\varphi} \cdot \vec{E} \cos(\omega t), \quad (6.1)$$

onde q é a carga eletrônica fundamental e $\vec{\varphi} = q \langle \psi_v | \vec{r} | \psi_c \rangle$. Os vetores de estado $|\psi_v\rangle$

¹Mas não alta o suficiente para desencadear processos lineares de absorção. A energia de um fóton deve sempre ser menor do que U_g .

e $|\psi_c\rangle$ representam o estado quântico do elétron na banda de valência e de condução, respectivamente. Tais funções de onda podem ser definidas a partir do Teorema de Bloch [96, 97]

$$\begin{aligned}\psi_v(\vec{r}, t) &= u_v(\vec{r})e^{i/\hbar[\vec{p}(t)\cdot\vec{r}-\int_0^t U_v(\vec{p}(t'))dt']}, \\ \psi_c(\vec{r}, t) &= u_c(\vec{r})e^{i/\hbar[\vec{p}(t)\cdot\vec{r}-\int_0^t U_c(\vec{p}(t'))dt']},\end{aligned}\tag{6.2}$$

onde $\vec{p}(t) = \vec{p} + (q\vec{E}/\omega)\sin(\omega t)$, sendo $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ o momento linear de de Broglie, $U_v(\vec{p}(t'))$ e $U_c(\vec{p}(t'))$ representam as energias do elétron quando este se encontra na camada de valência ou de condução, respectivamente, e $u(\vec{r})$ é uma função que carrega informações sobre a periodicidade da rede cristalina. Assim, a probabilidade de promoção de um elétron da banda de valência para a de condução nas condições aqui apresentadas será

$$P_{v\rightarrow c} = \left| \frac{1}{\hbar} \int_0^t H'_{vc}(t')e^{i\omega_{vc}t'} dt' \right|^2,\tag{6.3}$$

onde $\omega_{vc} = [U_c(\vec{p}(t)) - U_v(\vec{p}(t))]/\hbar$. Como mostrado com detalhes em [96], tal probabilidade é dada por

$$P_{v\rightarrow c} = \frac{1}{(2\pi\hbar^2)^2} \int |L_{vc}(\vec{p})|^2 \sum_n \delta(U'(\vec{p}) - n\hbar\omega) d^3\vec{p},\tag{6.4}$$

onde

$$U'(\vec{p}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\vec{p} + (q\vec{E}/\omega)\sin\theta) d\theta,\tag{6.5}$$

$$L_{vc}(\vec{p}) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C'} H'_{vc}(\vec{p} + qz'\vec{E}/\omega) e^{i/\hbar\omega \int_0^n (1-z^2)^{-1/2} Y(|\vec{p}+qz'\vec{E}/\omega|) dz} dz',\tag{6.6}$$

sendo $Y(x) = U_c(x) - U_v(x)$. A integral de linha na Equação 6.6 é calculada sobre um contorno fechado que engloba o segmento de reta $(-1, 1)$. O desenvolvimento da Equação 6.4 nos leva à seguinte equação

$$P_{v\rightarrow c} = \frac{2\omega}{9\pi} \left(\frac{m\omega}{\eta\gamma\hbar} \right)^{3/2} S \left(\gamma, \frac{\Delta}{\hbar\omega} \right) e^{-\pi \text{Int}(1+\Delta/\hbar\omega)[f_K(\eta\gamma) - f_E(\eta\gamma)]/f_E(\eta)},\tag{6.7}$$

onde m é a massa efetiva do elétron, $\eta = (1 + \gamma)^{-1/2}$, a função $\text{Int}(x)$ retorna a parte inteira do número x e as funções f_K e f_E representam as integrais elípticas completas de primeira e segunda ordem, respectivamente. A grandeza Δ é chamada *potencial efetivo de ionização* e é definida por

$$\Delta = \frac{2U_g}{\pi\eta\gamma} f_E(\eta).\tag{6.8}$$

Já a função S é definida pela expressão

$$S(\gamma, x) = \sqrt{\frac{\pi}{2f_K(\eta)}} \sum_{n=0}^{\infty} \Theta \left(\sqrt{\frac{\pi^2 [2\text{Int}(1+x) - 2x + n] f_E(\eta)}{2f_k(\eta)}} \right) e^{-n\pi [f_K(\eta\gamma) - f_E(\eta\gamma)] / f_E(\eta)}, \quad (6.9)$$

sendo

$$\Theta(z) = \int_0^{\infty} e^{y^2 - z^2} dy. \quad (6.10)$$

Para determinar em quais regimes a transição eletrônica via fotoionização acontece por meio da absorção de muitos fótons ou através do fenômeno de tunelamento, analisaremos o parâmetro γ , chamado *parâmetro de Keldysh*. Tal parâmetro é definido como

$$\gamma = \frac{\omega \sqrt{mU_g}}{q|\vec{E}|}. \quad (6.11)$$

Para situações onde há um campo incidente de alta intensidade e baixa frequência, ou seja, quando $\gamma \ll 1$, a Equação 6.7 se reduz à probabilidade de ocorrência da fotoionização via tunelamento

$$P_{v \rightarrow c}^{Tun} = \frac{2U_g^{5/3}}{9\pi^2} \sqrt{\frac{m^{1/2}(q|\vec{E}|)^5}{\hbar^3}} e^{-\pi \sqrt{mU_g^3(1 - m\omega^2 U_g / 8q^2 |\vec{E}|^2) / 2q\hbar} |\vec{E}|}. \quad (6.12)$$

Na prática, a Equação 6.12 descreve uma probabilidade média de ionização sobre um tempo muito maior do que o período de oscilação do campo incidente. Ao analisarmos os casos que envolvem campos de baixa intensidade e alta frequência, o que resulta em $\gamma \gg 1$, obtemos uma expressão para a probabilidade da absorção de muitos fótons

$$P_{v \rightarrow c}^{AMF} = \frac{2\omega}{9\pi} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{3/2} (\lambda_g)^{U_g''} \Theta \left(\sqrt{2(U_g'' - U_g' / \hbar\omega)} \right) e^{2U_g' U_g'' / U_g}, \quad (6.13)$$

onde

$$\lambda_g = \frac{q^2 |\vec{E}|^2}{16m\omega^2 U_g}, \quad U_g' = U_g(1 + 4\lambda_g), \quad U_g'' = \text{Int} \left(1 + \frac{U_g'}{\hbar\omega} \right). \quad (6.14)$$

Como mostrado em [95], na fabricação de guias de onda em vidro é observado que $\gamma \sim 1$, de modo que ela acontece devido a uma combinação entre a ionização por muitos fótons e a fotoionização por tunelamento.

Alguns trabalhos questionaram os resultados de Keldysh, como o publicado por Lenzner *et al.* em 1998 [98]. Foi percebido por estes pesquisadores não ser possível explicar a relação da modificação do material com a duração do pulso de laser incidente através das expressões deduzidas por Keldysh [96]. Além disso, os coeficientes referentes à fotoionização por muitos fótons se apresentou ordens de grandeza menor do que a previsão feita por Keldysh, o que pode ser resultado da influência de fenômenos referentes ao espalhamento de fônons [99]. Já outros trabalhos obtiveram resultados que concordaram

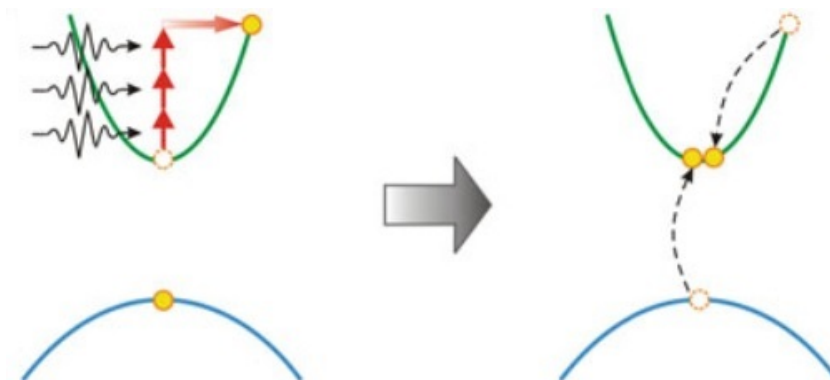


Figura 6.2: Ionização Avalanche. A curva verde representa a banda de condução enquanto que a curva azul representa a banda de valência. Figura retirada da referência [33].

satisfatoriamente com esta teoria [94, 100].

Uma análise mais detalhada sobre a teoria de Keldysh pode ser encontrada em [101].

6.1.2 Ionização Avalanche

Uma vez que elétrons já pertencentes à banda de condução também podem absorver energia vinda da radiação incidente, eles podem também contribuir para a excitação de elétrons da banda de valência. Após a absorção de n fótons, onde n é o menor número inteiro que satisfaz a desigualdade $n\hbar\omega \geq U_g$, a energia final de um elétron da banda de condução se torna maior do que o mínimo de energia referente à esta mesma banda por uma quantidade igual ou maior à energia do “gap” U_g . Assim, quando esta energia for dissipada para a rede via fônons, um elétron de valência pode absorvê-la e ser promovido para a banda de condução, resultando em dois elétrons nesta mesma banda, como esquematizado na Figura 6.2. Enquanto o campo incidente estiver presente e ser forte o suficiente, este processo será repetido com um número de elétrons de condução cada vez maior e, por isso, recebe o nome de *ionização avalanche* [102]. Este fenômeno acontece tipicamente para o caso onde a duração do pulso do laser é maior do que 200 femtossegundos [103].

Um modelo matemático para este fenômeno foi apresentado por Stuart *et al.* em um trabalho publicado em 1996 e se baseia na solução de uma equação cinética para a função de distribuição eletrônica [94]. Foi considerado que a densidade numérica de elétrons na banda de condução com energia entre ε e $\varepsilon + d\varepsilon$, descrita pela função $f(\varepsilon, t)d\varepsilon$, pode ser determinada via Equação de Fokker-Planck da seguinte forma

$$\frac{\partial f(\varepsilon, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} = S(\varepsilon, t). \quad (6.15)$$

O termo de corrente $J(\varepsilon, t)$ representa os fenômenos físicos que geram alterações na função $f(\varepsilon, t)d\varepsilon$, a saber, aquecimento Joule, espalhamento inelástico de fônons e difusão

de energia eletrônica, sendo definido como

$$J(\varepsilon, t) = V(\varepsilon, t)f(\varepsilon, t) - D(\varepsilon, t)\frac{\partial f(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}, \quad (6.16)$$

onde

$$V(\varepsilon, t) = R_{Jo}(\varepsilon, t) - U_{ph}\gamma(\varepsilon), \quad \text{sendo } R_{Jo}(\varepsilon, t) = \frac{1}{3}\sigma(\varepsilon)E^2(t). \quad (6.17)$$

O termo $R_{Jo}(\varepsilon, t)$ representa o aquecimento via efeito Joule do material, dado em função da sua condutividade por elétron $\sigma(\varepsilon)$. A grandeza U_{ph} é a energia característica do fônon, $\gamma(\varepsilon)$ é a taxa com a energia dos elétrons são transferidas para a rede e E é a amplitude do campo elétrico incidente, que oscila com uma frequência ω . O coeficiente de difusão $D(\varepsilon, t)$ pode ser definido como

$$D(\varepsilon, t) = \frac{2}{3}\varepsilon\sigma(\varepsilon)E^2(t). \quad (6.18)$$

O termo do lado direito da igualdade na Equação 6.15 inclui as taxas com que elétrons são promovidos para a banda de condução do material

$$S(\varepsilon, t) = R_{av}(\varepsilon, t) + R_{ni}(\varepsilon, t). \quad (6.19)$$

A taxa $R_{av}(\varepsilon, t)$ diz respeito aos elétrons excitados através da energia proveniente de outros elétrons já localizados na banda de condução e supõe uma distribuição igual de energia entre os elétrons envolvidos no processo, enquanto que $R_{ni}(\varepsilon, t)$ é a taxa com que elétrons são promovidos à tal banda via processos não-lineares de foto-ionização e será ignorada por enquanto. Sendo a taxa com que elétrons da banda de valência são excitados via energia liberada por elétrons já na banda de condução dada por $v(\varepsilon)$, temos [94, 104]

$$v(\varepsilon) = 1,5 \left(\frac{\varepsilon}{U_g} - 1 \right)^2, \quad (6.20)$$

e

$$R_{av}(\varepsilon, t) = -v(\varepsilon)f(\varepsilon, t) + 4v(2\varepsilon + U_g)f(2\varepsilon + U_g, t). \quad (6.21)$$

O termo $4v(2\varepsilon + U_g)f(2\varepsilon + U_g, t)$ representa os elétrons que são excitados via ionização avalanche terminando com uma energia entre ε e $\varepsilon + d\varepsilon$, enquanto que o termo $v(\varepsilon)f(\varepsilon, t)$ diz respeito àqueles cuja energia final deixa de pertencer a este intervalo. A Equação 6.15 deve ser resolvida levando em consideração que a função $f(\varepsilon, t)$ se anule no limite $\varepsilon \mapsto \infty$ e que a corrente $J(\varepsilon, t)$ se anule quando $\varepsilon = 0$. Uma vez que a grandeza $R_{av}(\varepsilon, t)$ apresenta um crescimento acelerado para $\varepsilon > U_g$, podemos reescrever o problema aqui apresentado como [94, 105] ²

²Essa formulação alternativa do problema é chamada Modelo de Duplicação de Fluxo (do inglês, “*Flux-Doubling Model*”) [94]. As duas formulações aqui apresentadas (Equações 6.15 e 6.22) são equivalentes quando $U_g v(2\varepsilon + U_g) \gg \sigma_{m\acute{a}x} E^2(t)$, para ε pequeno.

$$\frac{\partial f(\varepsilon, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \text{com} \quad \begin{cases} f(U_g, t) = 0 \\ J(0, t) = 2J(U_g, t) \end{cases} \quad (6.22)$$

As condições de contorno apresentadas na Equação 6.22 garantem que um elétron na banda de condução, cuja energia alcança um valor igual a U_g , transfira sua energia para a rede, excitando um elétron da banda de valência para a de condução, resultando, ao final, em dois elétrons na banda de condução com energia $\varepsilon = 0$. Essa formulação nos permite assumir $f(\varepsilon, t) = g(\varepsilon)e^{\beta t}$, de modo que a Equação 6.22 se reduz a

$$f(\varepsilon, t) = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial J(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}. \quad (6.23)$$

Assim, substituindo este resultado na Equação 6.16, temos

$$D(\varepsilon, t) \frac{\partial^2 J(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon^2} - V(\varepsilon, t) \frac{\partial J(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} = \beta J(\varepsilon, t), \quad (6.24)$$

Considerando que a intensidade da luz incidente é alta, ou seja, a desigualdade $E^2(t) \gg U_{ph}\gamma(\varepsilon)$ é válida, podemos reescrever a equação Equação 6.24 como

$$\varepsilon \frac{\partial^2 J(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial J(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} = \frac{\varepsilon \beta J(\varepsilon, t)}{D(\varepsilon, t)}. \quad (6.25)$$

Ao integrarmos a Equação 6.25, obtemos

$$U_g \frac{\partial J(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=U_g} - \frac{3}{2} [J(U_g, t) - J(0, t)] = \beta \int_0^{U_g} \frac{\varepsilon J(\varepsilon, t)}{D(\varepsilon, t)} d\varepsilon \quad (6.26)$$

Fazendo uso da Equação 6.23, das condições de contorno apresentadas na Equação 6.22 e na definição do coeficiente de difusão (Equação 6.18), obtemos

$$\beta = \zeta E^2(t) \left(\int_0^{U_g} \frac{d\varepsilon}{\sigma(\varepsilon)} \right)^{-1} \Rightarrow \beta = \alpha I(t), \quad (6.27)$$

onde ζ é uma constante obtida em função dos valores máximos e mínimos da função $J(\varepsilon, t)$ [94] e $I(t)$, a intensidade do campo incidente no material. A quantidade β é chamada coeficiente de ionização avalanche [105].

Podemos também obter uma equação que determina como se dá a evolução do número de elétrons da banda de condução enquanto o processo de ionização avalanche permanece ativo. Sabemos que tal número de elétrons pode ser obtido da seguinte forma

$$n(t) = \int_0^{\infty} f(\varepsilon, t) d\varepsilon \quad (6.28)$$

e sua variação no tempo será

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty f(\varepsilon, t) d\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial n(t)}{\partial t} = \alpha I(t) n(t). \quad (6.29)$$

A Equação 6.29 tem como solução

$$n(t) = n_0 e^{\int_0^t \alpha I(t') dt'}. \quad (6.30)$$

A constante n_0 na Equação 6.30 representa o número de “elétrons-semente”, que são definidos como os elétrons que ocupam a banda de condução do material antes mesmo do processo de avalanche iniciar e são responsáveis pela ocorrência de tal processo. Geralmente, tais elétrons são promovidos da banda de valência através da absorção de muitos fótons ou da fotoionização por tunelamento. Para ambos os casos, podemos escrever [94, 106]

$$R_{nl}(\varepsilon, t) = N_0 W(I) F(\varepsilon, t), \quad (6.31)$$

onde N_0 é a densidade atômica do material, $W(I)$ é a taxa de fotoionização por átomo e $F(\varepsilon, t)$ é a densidade de fotoelétrons normalizada ³.

A grandeza $R_{nl}(\varepsilon, t)$, por representar processos não-lineares de fotoionização, se apresenta fortemente dependente da intensidade do laser incidente no material. No regime de baixas intensidades, ou seja, regime de dominância do processo da absorção de muitos fótons, é usualmente adotado $R_{nl}(\varepsilon, t) = o_k I^k(t)$, onde a constante o_k é chamada coeficiente de absorção de muitos fótons para o caso de k fótons [105, 106]. Alguns materiais apresentam ressonâncias intermediárias durante a excitação de elétrons via absorção de muitos fótons e, nestes casos, a taxa $R_{nl}(\varepsilon, t)$ é definida por expressões mais complicadas [107]. Já para o regime de altas intensidades, onde o processo de fotoionização por tunelamento se faz presente, o tratamento teórico é ainda mais árduo, como apresentado, por exemplo, nos trabalhos [96, 108, 109].

Os processos de fotoionização não-linear aqui mencionados geram uma perturbação na função $f(\varepsilon, t)$ [94]. Quando o tempo gasto para um elétron da banda de valência ser promovido para a banda de condução via ionização avalanche for menor do que o tempo gasto para o mesmo processo acontecer via fotoionização, não é observado variações relevantes na função $g(\varepsilon)$. Isso nos permite reescrever a Equação 6.29 como

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \beta(I) n(t) + N_0 W(I) \quad (6.33)$$

³A denominação ‘fotoelétrons’, neste contexto, é usada para identificar aqueles elétrons excitados via processos de fotoionização não-linear. Por ser normalizada, é válida a igualdade

$$\int_0^\infty F(\varepsilon, t) d\varepsilon = 1. \quad (6.32)$$

cuja solução é [106]

$$n(t) = N_0 \left[e^{\int_0^t \alpha I(t') dt'} \right]^* \int_{-\infty}^t W(I) e^{-\int_0^{t'} \alpha I(t'') dt''} dt'. \quad (6.34)$$

O uso da Equação 6.33 pode ser justificado mesmo para o casos de altas taxas de promoção dos elétrons via fotoionização. Uma vez que tal processo ocorre devido a incidência de um campo luminoso, é válido dizer que sua maior eficiência se dá nos picos de cada oscilação do pulso incidente. Nos outros instantes, o processo de fotoionização se torna irrelevante e os elétrons-semente criados durante o pico do pulso atuam como realizadores do processo de ionização avalanche. Assim, a Equação 6.33 pode ser encarada como uma descrição simples de um tipo de alternância que ocorre entre processos do tipo avalanche e os de fotoionização [94].

6.2 Transferência de Energia

A absorção da energia da radiação incidente por parte dos elétrons da rede cristalina dá origem a um plasma de elétrons livres no material, que, após um curto transiente temporal, redistribui essa energia pela rede via acoplamento elétron-fônon [102]. Uma vez que a duração do processo de absorção não-linear é menor do que o tempo gasto para a transferência de energia dos elétrons para a rede ocorrer, tais processos não se configuram como acoplados, de forma que podem ser tratados independentemente [95].

6.2.1 Absorção da Radiação Incidente

Uma vez que a absorção dos fótons do campo incidente por parte do material em estudo altera a densidade de elétrons em sua banda de condução, vale a pena fazer um rápido estudo dessa dinâmica. Como resultado direto dessa interação, a energia média de tal banda também se torna variável em relação ao tempo. Podemos tratar da dinâmica da densidade eletrônica calculando a derivada temporal da Equação 6.28, obtendo

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \int_0^\infty \frac{\partial f(\varepsilon, t)}{\partial t} d\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial n(t)}{\partial t} = \int_0^\infty \left[S(\varepsilon, t) - \frac{\partial J(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right] d\varepsilon. \quad (6.35)$$

Considerando como processo dominante na formação do plasma de elétrons livre a ionização avalanche e que a integral envolvendo o termo de corrente $J(\varepsilon, t)$ se anula devido às condições de contorno, temos

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = - \int_0^\infty v(\varepsilon) f(\varepsilon, t) d\varepsilon + 4 \int_0^\infty v(2\varepsilon + E_g) f(2\varepsilon + E_g, t) d\varepsilon. \quad (6.36)$$

A segunda integral acima é resolvida através de substituição simples fazendo $x =$

$2\varepsilon + E_g$, de modo que obtemos

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \int_0^\infty v(\varepsilon)f(\varepsilon, t)d\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial n(t)}{\partial t} = \langle v \rangle n(t). \quad (6.37)$$

Por outro lado, sendo $\langle \varepsilon \rangle$ a energia média de um elétron da banda de condução, podemos calcular a evolução temporal da energia total de tal banda como segue ⁴ [94]

$$\frac{\partial [n(t)\langle \varepsilon \rangle]}{\partial t} = \int_0^\infty \frac{\partial [\varepsilon f(\varepsilon, t)]}{\partial t} d\varepsilon. \quad (6.39)$$

Utilizando a Equação 6.15, temos

$$\frac{\partial [n(t)\langle \varepsilon \rangle]}{\partial t} = \int_0^\infty \left[\varepsilon S(\varepsilon, t) - \varepsilon \frac{\partial J(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right] d\varepsilon \quad (6.40)$$

Considerando novamente a ionização avalanche como processo dominante na formação do plasma de elétrons livre e integrando por partes a parcela que envolve o termo de corrente $J(\varepsilon, t)$, obtemos

$$\frac{\partial [n(t)\langle \varepsilon \rangle]}{\partial t} = -U_g \int_0^\infty v(\varepsilon)f(\varepsilon, t)d\varepsilon + \int_0^\infty J(\varepsilon, t)d\varepsilon. \quad (6.41)$$

Fazendo uso da Equação 6.16 e realizando uma integração por partes no termo que envolve o coeficiente de difusão $D(\varepsilon, t)$, temos

$$\int_0^\infty J(\varepsilon, t)d\varepsilon = \int_0^\infty V(\varepsilon, t)f(\varepsilon, t)d\varepsilon + \int_0^\infty \frac{\partial D(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} f(\varepsilon, t)d\varepsilon \quad (6.42)$$

Substituindo a Equação 6.42 na Equação 6.41, obtem-se

$$\frac{\partial [n(t)\langle \varepsilon \rangle]}{\partial t} = \int_0^\infty \left[\left(\sigma(\varepsilon) + \frac{2\varepsilon}{3} \frac{\partial \sigma(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) E^2(t) - U_{ph}\gamma(\varepsilon) - U_g v(\varepsilon) \right] f(\varepsilon, t)d\varepsilon \quad (6.43)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial [n(t)\langle \varepsilon \rangle]}{\partial t} = n(t) [\langle \sigma \rangle E^2(t) - \langle \gamma \rangle U_{ph} - \langle v \rangle U_g]. \quad (6.44)$$

De acordo com a Equação 6.44, vemos que a dinâmica temporal da energia da banda de condução do material é definida pelo balanço entre a absorção da energia do laser, caracterizada pelo termo $\langle \sigma \rangle E^2(t)$, e fenômenos de dissipação dessa mesma energia, representado pela quantidade $\langle \gamma \rangle U_{ph} - \langle v \rangle U_g$. Podemos relacionar a energia absorvida pelo material com a profundidade de penetração da radiação incidente no material através da seguinte equação de continuidade [94]

⁴A energia da banda de condução de um material pode ser definida como

$$n(t)\langle \varepsilon \rangle = \int_0^\infty \varepsilon f(\varepsilon, t)d\varepsilon. \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial W_{ab}}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0, \quad (6.45)$$

onde W_{ab} é a energia absorvida pelos elétrons de condução do material e I é a intensidade da radiação incidente. Definindo δ_{ab} como sendo um coeficiente de absorção, podemos escrever

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\delta_{ab}I. \quad (6.46)$$

Por outro lado, temos

$$\frac{\partial W_{ab}}{\partial t} = \langle \sigma \rangle n(t) E^2(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W_{ab}}{\partial t} = \frac{\partial [n(t) \langle \varepsilon \rangle]}{\partial t} + n(t) (\langle \gamma \rangle U_{ph} + \langle \nu \rangle U_g) \quad (6.47)$$

Com o auxílio do resultado apresentado na Equação 6.37, podemos reescrever a Equação 6.47 como

$$\frac{\partial W_{ab}}{\partial t} = n(t) \langle \gamma \rangle U_{ph} + \frac{\partial}{\partial t} [(\langle \varepsilon \rangle + U_g) n(t)]. \quad (6.48)$$

Sabendo que $\langle \varepsilon \rangle$ é independente do tempo durante processos de ionização avalanche e utilizando a Equação 6.29, podemos escrever

$$\frac{\partial W_{ab}}{\partial t} = [\alpha I (\langle \varepsilon \rangle + U_g) + \langle \gamma \rangle U_{ph}] n(t) \quad (6.49)$$

Por fim, substituindo as Equações 6.46 e 6.49 na Equação 6.45 e considerando o limite de altas intensidades (pulsos ultra-rápidos), conseguimos obter uma expressão para o coeficiente de absorção do material

$$\delta_{ab} = \alpha [(\langle \varepsilon \rangle + U_g) n(t)]. \quad (6.50)$$

A Equação 6.50 explicita o fato de que a absorção do laser, no caso de pulsos ultra-rápidos, é proporcional ao coeficiente de ionização avalanche, uma vez que $\alpha \propto \beta$, e à densidade eletrônica na banda de condução $n(t)$ [94].

6.2.2 Difusão de Energia

Uma vez que a região vítrea modificada pela interação do material com os pulsos ultra-rápidos de um laser de femtossegundos se torna, inicialmente, um plasma com características metálicas [110], podemos descrever a difusão de energia pela rede através de interações elétron-fónon a partir do chamado “*Modelo de Duas Temperaturas*” [111]. Assim, seguindo o desenvolvimento apresentado em um trabalho de Corkum *et al.*, datado de 1988 [112], partimos das seguintes equações

$$C_e \frac{\partial T_e(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{\nabla} \left[\sigma_e \vec{\nabla} T_e(\vec{r}, t) \right] - g [T_e(\vec{r}, t) - T_i(\vec{r}, t)] + S(\vec{r}, t), \quad (6.51)$$

$$C_i \frac{\partial T_i(\vec{r}, t)}{\partial t} = g [T_e(\vec{r}, t) - T_i(\vec{r}, t)], \quad (6.52)$$

sendo C a capacidade térmica, T a temperatura, σ a condutividade térmica, g a constante de acoplamento elétron-fónon, S um termo de fonte e os índices e e i são referentes aos elétrons e à rede cristalina, respectivamente. Lançando mão de resultados conhecidos, temos [113]

$$C_e = C'_e T_e, \quad \sigma_e = \kappa_0 T_e / \nu, \quad (6.53)$$

onde ν é a frequência de colisão entre elétrons e a rede e C'_e e κ_0 são constantes de proporcionalidade. Buscamos soluções onde $t < \tau_r$, sendo τ_r o tempo de relaxação eletrônica do material. Para estimarmos o valor de tal tempo característico, resolvemos a seguinte equação em $r = 0$

$$\frac{\partial T_e(0, t)}{\partial t} = -\frac{g}{C_e} T_e(0, t) \quad \Rightarrow \quad T_e(0, t) \propto e^{-gt/C_e}, \quad (6.54)$$

de modo que o tempo de relaxação pode ser definido como [112]

$$\tau_r = C'_e T_e(0, t) / g. \quad (6.55)$$

Assim, para tal regime temporal, apenas o primeiro termo do lado direito da Equação 6.51 se torna relevante. Assumindo que $\nu \propto T_i$ e ignorando termos de ordem mais alta, podemos escrever a Equação 6.51 como

$$\frac{\partial T_e(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\gamma \kappa_0}{C'_e T_i} \nabla^2 T_e(\vec{r}, t), \quad (6.56)$$

onde γ é uma constante dada em função da constante de proporcionalidade entre ν e T_i . A Equação 6.56 é uma equação de difusão usual e apresenta como solução [112]

$$T_e(\vec{r}, t) = \left(\frac{4E_{ab}^2 T_i}{\pi \kappa_0 C'_e t} \right)^{1/4} e^{-C'_e T_i r^2 / 4\kappa_0 t}. \quad (6.57)$$

Na equação acima, E_{ab} é definido como sendo a fluência absorvida pelo material, a grandeza T_i é considerada constante e a hipótese de um ambiente isotrópico é levada em consideração. É possível também obter diretamente da Equação 6.57 o valor do comprimento de difusão r_d

$$r_d = \sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{C'_e T_i}}. \quad (6.58)$$

Já o comprimento de deposição de calor r_h é definido como sendo o comprimento de difusão r_d quando $t = \tau_r$. Tal grandeza apresenta importância no cálculo da energia absorvida E_m necessária para que a rede cristalina alcance seu ponto de derretimento. Tal energia é dada, aproximadamente, por [112]

$$E_m = C_i (T_m - T_0) r_h, \quad (6.59)$$

onde T_0 e T_m são as temperaturas iniciais e de derretimento, respectivamente. Assim,

assumindo que $T_m \gg T_0$ e que toda energia absorvida é empregada no processo de transformação do material, ou seja, $E_{ab} = E_m$, podemos calcular uma expressão que define o comprimento de deposição de calor

$$r_h = \left(\frac{128}{\pi} \right)^{1/8} \left(\frac{\kappa_0^2 C_i}{g^2 C_e T_m} \right)^{1/4}. \quad (6.60)$$

A Equação 6.60 explicita uma forte relação entre o tamanho da região modificada pela incidência do laser e o acoplamento elétron-fônon, representado na equação pela constante g . Além disso, um alto valor de r_h resulta na independência de E_m com a duração do pulso do laser no caso de pulsos ultra-curtos [112].

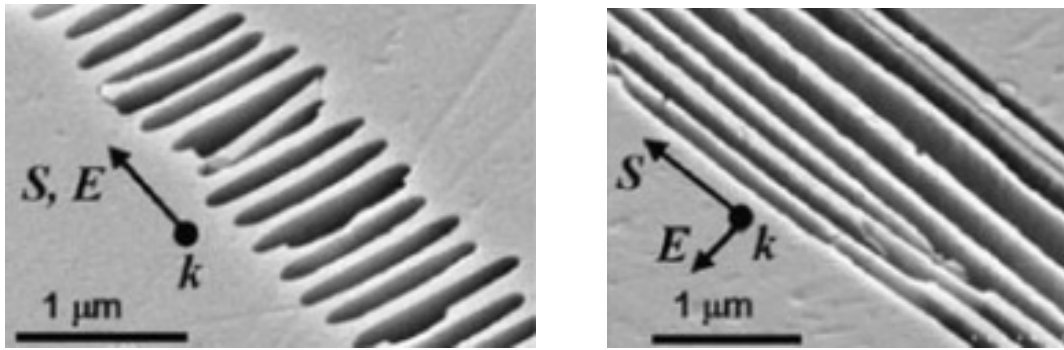
6.3 Modificação do Material

Após a transferência de energia dos elétrons excitados para a rede cristalina do material ocorrer, este sofre modificações locais em algumas de suas propriedades físicas, e estas modificações se apresentam como dependentes dos parâmetros do laser (energia, duração do pulso, taxa de repetição, entre outros) e dos parâmetros do próprio material, como “gap” de energia, condutividade térmica, por exemplo [33]. Já foi mostrado que, de acordo com a escolha dos parâmetros acima, três diferentes tipos de modificações em um determinado material podem ocorrer: uma mudança suave no seu índice de refração [114], a formação de um padrão periódico birrefringente [115] ou a formação de pequenos espaços vazios causados por microexplosões [116].

Tendo em foco a fabricação de guias de onda em vidro, buscam-se mudanças suaves no índice de refração do material, uma vez que estas minimizam as perdas por propagação [33]. Utilizando lasers de baixas energias, pouco acima do valor mínimo responsável pelas modificações, é possível provocar essas suaves mudanças e isto é atribuído ao rápido resfriamento do vidro em torno da região focal [117]. Foi observado que, acompanhado deste resfriamento, um aumento na densidade local do vidro também gera efeitos que contribuem para a alteração do índice de refração [118]. Além disso, ondas de choque geradas pelos pulsos do laser submetem o material à tensões físicas que, sob certas condições, podem também influenciar na mudança do índice de refração [119].

Outro fenômeno causado pela incidência de um laser de femtossegundos em vidro, que também contribui para a alteração do seu índice de refração, é a formação de centros de cor [121]. Estas estruturas são entendidas como elétrons aprisionados em vacâncias deixadas por aqueles excitados pela interação com a radiação incidente [102]. Apesar de serem resultantes do processo de microfabricação dos guias de onda, os centros de cor exercem apenas uma pequena influência no índice de refração do material. Isto se dá ao fato de que eles são completamente apagados em temperaturas próximas à $400^\circ C$, enquanto que os guias são observados até $900^\circ C$ [122].

Em suma, esta mudança suave no índice de refração de vidros é causada pela combi-



(a) Polarização paralela à direção de fabricação.

(b) Polarização perpendicular à direção de fabricação.

Figura 6.3: Imagens obtidas através de microscopia eletrônica de varredura de padrões periódicos birrefringentes para diferentes polarizações do laser de femtossegundos utilizado. Figuras retiradas da referência [120].

nação dos dois fenômenos descritos rapidamente acima, a densificação do vidro causada pelo rápido resfriamento da região de incidência do laser e a formação de centros de cor, sendo que suas contribuições dependem dos parâmetros do laser e das características do material. No caso de vidro com estruturas cristalinas mais complexas, contribuições de outros fenômenos de natureza estrutural também devem ser consideradas.

Para pulsos com energias mais altas, padrões birrefringentes foram observados, e reportados primeiramente por Sudrie e colaboradores em 1999 [115]. Estes padrões são formados por estruturas auto-ordenadas e periódicas, com tamanho da ordem de dezenas de nanômetros, período de aproximadamente $\lambda/2n$ ⁵ e direcionadas de forma perpendicular à polarização do laser incidente [102, 120], como mostra a Figura 6.3. Após a observação de tais padrões, trabalhos com possíveis explicações foram sendo publicados. A ideia mais aceita surgiu em um trabalho de 2003, onde Shimotsuma e colaboradores atribuíram o surgimento dessas estruturas à interferência do campo elétrico da luz incidente com o campo elétrico do plasma de elétrons livres. Esta interferência causaria uma modulação periódica deste mesmo plasma resultando em uma modificação, também periódica, do material. Além disso, foi visto que esses padrões periódicos eram formados por estruturas com densidades maiores e menores, em relação à densidade original do material, dispostas de forma alternada [115].

Finalmente, para pulsos de laser com energias ainda mais altas, que geram picos de intensidade maiores do que 10^{14} W/cm^2 , pressões maiores do que o Módulo de Young são geradas na região focal e, após os elétrons excitados transferirem sua energia para a rede, microexplosões acontecem, criando uma onda de choque capaz de dar origem a uma estrutura formada por um núcleo de baixa densidade, ou até mesmo vazio, circundado por uma casca com alto índice de refração [123]. Tais vazios podem ser explorados na criação de dispositivos de armazenamento de memórias ópticas [124], mas não são apropriados para a fabricação de guias de onda. Na Figura 6.4 é apresentado vazios fabricados em sílica fundida por um laser de 100 femtossegundos.

⁵ Sendo λ o comprimento de onda do laser e n , o índice de refração do material.

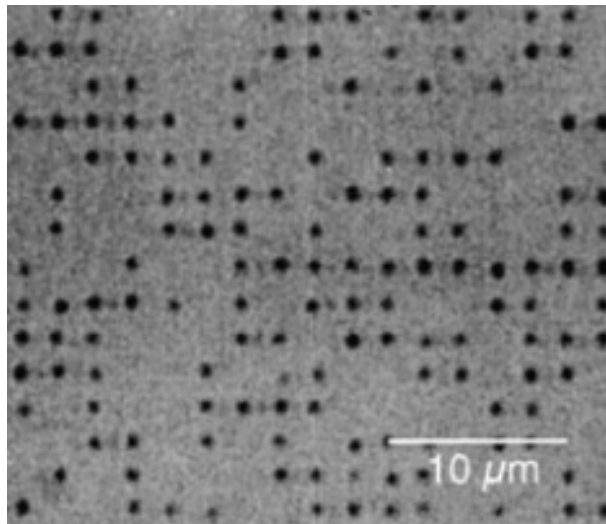


Figura 6.4: Vazios fabricados em sílica fundida por um laser de 100 femtossegundos. Figura retirada de [125].

Capítulo 7

Produção e Caracterização de Guias de Onda Retos

7.1 Métodos de Produção

7.1.1 Litografia

A técnica da litografia consiste na alteração das propriedades de um material sensível à radiação através de sua exposição à ela [126]. Geralmente, este processo é realizado transferindo um padrão desenhado em uma máscara a um material fotossensível, chamado fotoresiste.

Na fabricação de circuitos fotônicos, o processo da litografia segue os seguintes passos [30]: Inicialmente deposita-se um material fotossensível sobre um substrato e, sobre ele, posiciona-se uma máscara onde se encontra desenhado o padrão que se deseja transferir para o fotoresiste. Em seguida, incide-se radiação com comprimento de onda adequado sobre a máscara e, como resultado, apenas as regiões do fotoresiste expostas à radiação sofrerão alterações em suas propriedades físicas. Através de um processo químico, retira-se o fotoresiste que não foi modificado no processo. Por último, envolve-se o fotoresiste modificado depositando em seu entorno um material com o mesmo índice de refração do substrato utilizado. A Figura 7.1 demonstra os passos seguidos pela litografia na fabricação de guias de ondas integrados e, conseqüentemente, de circuitos fotônicos.

Podemos citar aqui alguns notáveis trabalhos que utilizaram desta técnica no processo de fabricação de seus circuitos fotônicos integrados. Em 2008, Politi *et al.* [30] fabricou e realizou três experimentos em circuitos fotônicos fabricados via litografia: interferência de dois fótons, emaranhamento de dois qubits de caminho e a implementação de uma porta lógica controlada, todos eles apresentando fidelidade maior do que 92%. No ano seguinte, o mesmo pesquisador demonstrou a implementação do algoritmo de fatoração de Shor em circuitos fotônicos integrados [128]. Um divisor de feixe multi-portas foi implementado por Peruzzo *et al.* [129] em 2011. Além dos exemplos já citados, circuitos fotônicos integrados fabricados via litografia também já foram utilizados na implementação de experimentos

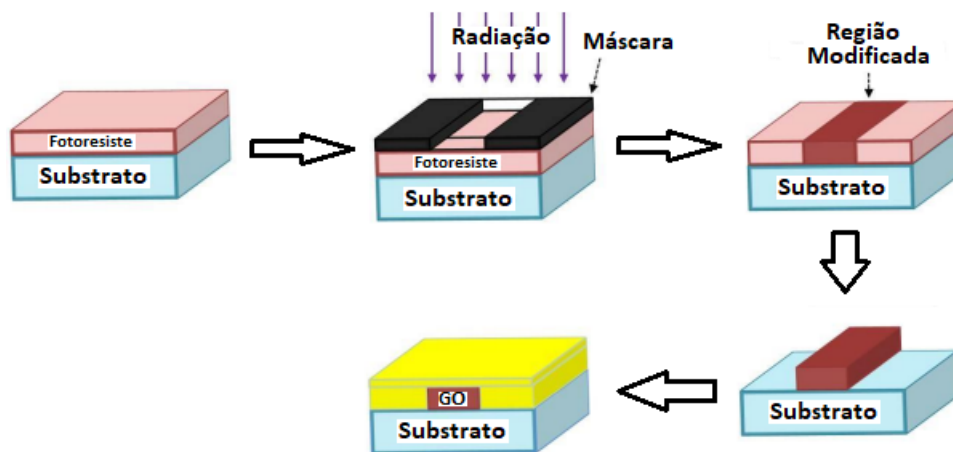


Figura 7.1: Representação do processo de litografia para a fabricação de guias de onda integrados (chamados de “GO” na figura). Figura adaptada da referência [127].

com caminhada quântica [130].

Por fim, vale ressaltar que circuitos fotônicos fabricados via litografia podem apenas serem arranjados em configurações bidimensionais, além de apresentarem em suas seções transversais quadradas. Por não ser isotrópico, este formato em específico não permite uma boa propagação de modos gaussianos da luz [1].

7.1.2 Escrita Direta com Laser de Femtossegundos

A incidência de um laser de femtossegundos em uma matriz vítrea desencadeia processos não-lineares no interior do material que resulta na variação local e permanente no seu índice de refração. Tal fato é a base para uma técnica de microfabricação de dispositivos fotônicos chamada *Escrita Direta por Laser de Femtossegundos* [1, 29, 131, 132]. Nesta técnica, a amostra é deslocada em relação ao foco do laser através de estágios mecânicos motorizados e, assim, se torna possível fabricar estruturas tridimensionais.

A técnica da Escrita Direta apresenta vantagens consideráveis em relação à técnicas alternativas de fabricação de micro-dispositivos, como a litografia ou a fotolitografia, por exemplo. Uma delas se baseia no fato de que a absorção não-linear da energia da radiação incidente se dá confinada no volume focal. Este fato aumenta a precisão do processo de fabricação e, associada ao movimento controlado da amostra, estruturas tridimensionais com dimensões bem determinadas se tornam objetos cuja obtenção experimental apresenta relativa facilidade. Por outro lado, sendo o processo de absorção independente do material, o uso de tal técnica não se limita a apenas substratos de vidro [1]. Outras vantagens dignas de nota são: a fácil prototipagem de diferentes tipos de dispositivos sem necessitar da fabricação prévia de máscaras, bastando apenas alterar parâmetros em um software, e um preço mais acessível do que técnicas alternativas.

A escrita direta pode ser feita de duas formas, como mostra a Figura 7.2. Na escrita longitudinal, o movimento da amostra se dá de forma paralela à direção de propagação do laser. Os guias de onda obtidos através dessa configuração da técnica se apresentam com



Figura 7.2: Diferentes formas de fabricar dispositivos fotônicos utilizando a técnica da Escrita Direta. Figura adaptada da referência [33].

estruturas cilíndricas, mas, em contrapartida, o seu tamanho está limitado pela distância de trabalho das lentes, que são de aproximadamente 5 mm para aquelas onde a abertura numérica é de $0,4$ [33].

Já no caso da escrita transversal, o movimento da amostra é feito em direções ortogonais à direção de propagação do laser, contornando assim a limitação imposta pela distância de trabalho das lentes. Isso faz com que este modo de escrita seja o ideal para a fabricação dos dispositivos. A desvantagem desta configuração é a forma assimétrica da seção transversal dos guias fabricados, que assumem uma geometria elíptica. Existem trabalhos que apresentam diferentes montagens experimentais, onde o perfil elíptico decorrente da escrita transversal é moldado em um perfil circular com o uso de fendas [133,134]. Além disso, a geometria dos guias fabricados por essa técnica se mostram dependentes de todos os parâmetros que envolvem o feixe de laser incidente, tais como polarização, momento angular, taxa de repetição, energia do pulso, focalização, dentre outros [135].

7.2 Fabricação de Guias Retos

Neste trabalho, fabricamos guias de onda apenas através da técnica da escrita direta. Um desenho esquemático do setup experimental que será utilizado para fabricar os guias de onda deste projeto é apresentado na Figura 7.3. Um pulso laser de femtossegundos (CARBIDE, $\lambda = 1030\text{ nm}$, duração do pulso $< 290\text{ fs}$, com energia por pulso $> 100\text{ }\mu\text{J}$ a frequência de 1 MHz) é gerado por um sistema de laser de fibra e é direcionado através de um conjunto de espelhos dielétricos para a área de fabricação. Nesta, uma objetiva de microscópio é colocada em frente a um sistema de movimento linear tridimensional, controlado via software, no qual a amostra é montada. Os espelhos e um suporte angular para a amostra são colocados no estágio de translação fornecendo graus de liberdade suficientes para um alinhamento preciso para a geometria transversal de fabricação. Uma câmera CCD também é utilizada para colimar a reflexão quando o feixe é focalizado exatamente na superfície da amostra. Dessa forma, este sistema permite uma configuração precisa e reprodutível de um sistema de referência, necessário para realizar a fabricação de guias de onda de alta qualidade. A potência média do feixe de laser (ou, equivalentemente, a energia por pulso) pode ser ajustada via um polarizador *Glan Thompson* precedido de

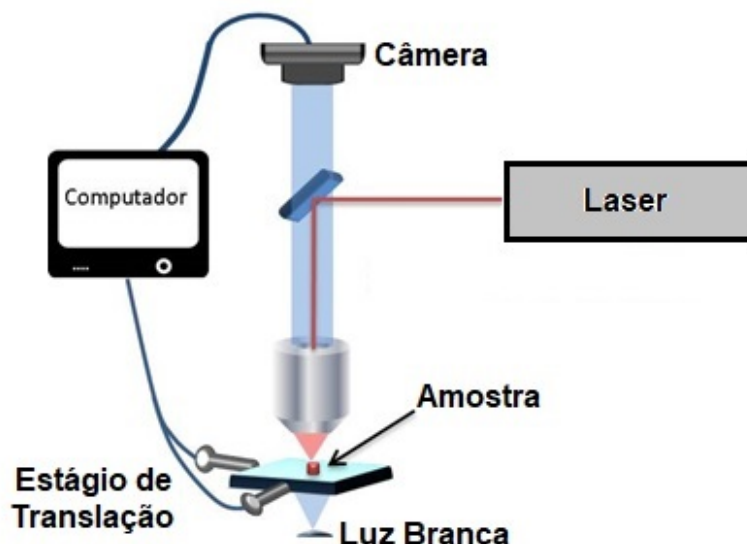


Figura 7.3: Representação esquemática do sistema de microfabricação utilizando laser de femtossegundos. O feixe de laser é direcionado para o experimento e, após ser focalizado por uma objetiva de microscópio, atinge o volume da amostra. O microestruturação é acompanhada em tempo real através de uma câmera.

uma placa de meia onda. Um *shutter* mecânico (SH05, *Thorlabs*) sincronizado com os estágios de translação permite uma rápida abertura (e bloqueio) durante o processo de fabricação.

O movimento relativo entre o foco do laser e a amostra em processamento é realizado por um sistema de movimento tridimensional dos estágios controlado via software (*LabView*), onde o substrato é montado. Esse sistema foi construído no laboratório do Grupo de Fotônica do Instituto de Física de São Carlos utilizando uma montagem de três estágios de translação linear independentes. Isso permite a produção de um movimento arbitrário tridimensional de uma forma suave e uniforme, com uma precisão micrométrica no posicionamento e com velocidades de até 100 mm/s . A área total disponível para a escrita é de $50\text{mm} \times 50\text{mm}$ no plano do substrato. Além disso, sobre o sistema de movimentação, foi instalado um suporte para ajustar o ângulo da amostra em relação ao feixe de incidência, garantindo assim a perfeita perpendicularidade do foco do feixe sobre a superfície de toda a amostra.

Os guias de onda estudados nesse trabalho foram fabricados via Escrita Direta a $130\text{ }\mu\text{m}$ de profundidade em pequenas placas de vidro EagleGlass XG. Para entendermos a influência dos parâmetros de fabricação sobre as características do guia de onda, variamos a velocidade de escrita e a potência do laser incidente. As velocidades de escrita utilizadas foram 10 mm/s , 20 mm/s , 30 mm/s e 40 mm/s . Além disso, variamos a potência do laser utilizado de 170 mW até 320 mW em passos de 10 mW .

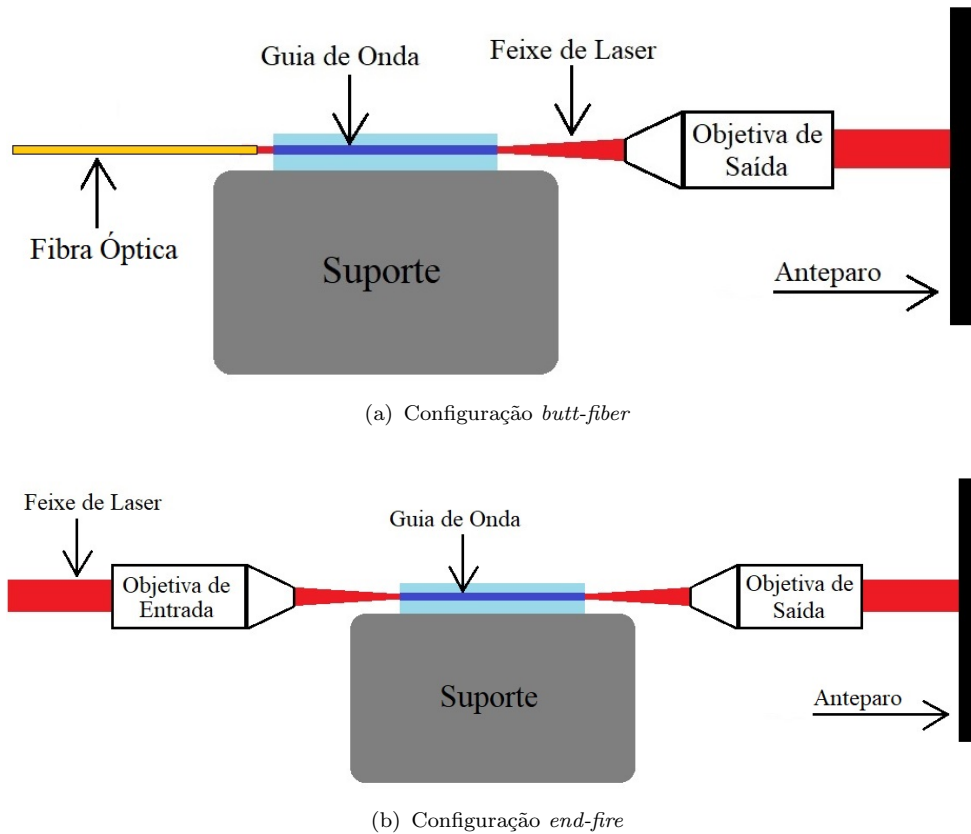


Figura 7.4: Representação esquemática da implementação experimental do Método *End-Coupling*. O feixe de luz é acoplado no guia de onda através de fibras ópticas ou objetivas de microscópio. Após ser guiada por tal objeto, uma objetiva de saída coleta a luz e a projeta em um anteparo. Com o uso de uma câmera CCD no lugar do anteparo é possível, por exemplo, observar quais modos foram guiados pelo guia sob análise.

7.3 Caracterização: Método *End-Coupling*

A fim de testar o funcionamento dos dispositivos fabricados, bem como medir as características importantes dos guias de onda, é necessário testar os circuitos ópticos através do acoplamento de luz no comprimento de onda apropriado. A forma mais simples de se realizar tal análise se dá através de uma técnica experimental conhecida como Método *End-Coupling* [136]. Tal método consiste na focalização do feixe de luz na entrada do guia de onda e na projeção do mesmo feixe em um anteparo ou em algum sensor de medição (potenciômetro ou câmera CCD) após seu guiamento. Este acoplamento inicial pode ser implementado fazendo uso de uma fibra óptica monomodo (configuração *butt-fiber*) ou de uma objetiva de microscópio (configuração *end-fire*). Um esquema de tais montagens é apresentado na Figura 7.4. Geralmente, utiliza-se uma objetiva de 10x ($N.A. = 0,25$) como objetiva de entrada e uma de 20x ($N.A. = 0,40$) como objetiva de saída.

Para a execução desse experimento de forma eficiente, alguns detalhes devem ser observados. Primeiro, a cintura do feixe na posição focal e a abertura numérica da objetiva de entrada devem corresponder o melhor possível ao raio do modo guiado e à abertura numérica do guia de onda, que normalmente apresenta valores da ordem de 0,1 quando produzido com laser de femtossegundos. Pode-se dizer que a eficiência desse método é

proporcional ao quão próximo o perfil da onda incidente no guia é do perfil do modo guiado. Por ser um método que ativa todos os modos guiados pelo guia de onda de uma vez, não é recomendado seu uso para análises que envolvem guias multimodos. Segundo, o alinhamento do laser com os elementos ópticos deve ser o mais preciso possível. Assim, para ambas as configurações de acoplamento, é necessário um sistema de posicionamento submicrométrico. No setup experimental utilizado, a objetiva de entrada e a fibra foram colocados em um microposicionador manual de três eixos com três manipuladores diferenciais que fornecem resolução submicrométrica. A amostra com o circuito óptico foi colocada em um microposicionador de quatro eixos que permite movimentar linearmente a amostra nas duas direções perpendiculares ao feixe de laser e ajustar duas inclinações independentes da amostra. A objetiva de saída foi colocada em outro sistema de translação de três eixos e focalizada nos sensores de medição. Terceiro, as faces do material onde se encontram a entrada e a saída do guia de onda devem estar bem polidas.

Além da obtenção da distribuição de intensidades dos modos guiados pelos guias de onda fabricados via Escrita Direta, podemos, fazendo uso de um potenciômetro, registrar as potências ópticas na entrada e na saída dos guias e, com elas, estimar as perdas por acoplamentos em tais dispositivos. Uma das mais importantes figuras de mérito de um dispositivo óptico integrado é representada pela atenuação que causa ao sinal de propagação. Uma estimativa quantitativa dessa atenuação é denominada *Perda por Inserção* (ou “*Insertion Loss*”). Essa grandeza é tipicamente expressa em decibel (*dB*) e é definida como:

$$IL = -10 \log_{10} \left(\frac{P_{out}}{P_{in}} \right), \quad (7.1)$$

sendo P_{in} e P_{out} as potências ópticas inicial e final medidas na entrada e na saída do guia de onda, respectivamente. Se o dispositivo tiver diferentes portas de saída, P_{out} será a soma das potências ópticas de cada uma delas. A determinação dessa quantidade é importante em experimentos de fotônica quântica integrada, uma vez que a taxa de perda de fótons é frequentemente um parâmetro crucial para a implementação bem-sucedida de protocolos de informação quântica.

A perda por inserção de um dispositivo engloba quatro diferentes contribuições de perdas: *Perdas por Propagação* (“*Propagation Loss*”), *Perdas por Curvatura* (“*Bending Loss*”), *Perdas de Fresnel* (“*Fresnel Loss*”) e *Perdas por Acoplamento* (“*Coupling Loss*”) [137, 138]. A Perda por Propagação é a atenuação exponencial que a luz experimenta ao longo da propagação pelo guia de onda. Verifica-se, de fato, que a potência óptica em um guia de onda uniforme, em função do seu comprimento x , é descrita como:

$$P(x) = P_{in} e^{-\alpha x}, \quad (7.2)$$

onde α é chamado coeficiente de atenuação. A Perda por Propagação, expressa em *dB/cm*, é definida como:

$$PL(x) = -\frac{10}{x} \log_{10} \left(\frac{P(x)}{P_{in}} \right). \quad (7.3)$$

Assim, substituindo a Equação 7.2 na Equação 7.3, obtemos

$$PL(x) = -\frac{10}{x} \log_{10} (e^{-\alpha x}) \quad \Rightarrow \quad PL(x) \approx 4,3\alpha \quad (7.4)$$

As perdas devidas à propagação da luz no guia de ondas são causadas principalmente pela “rugosidade” residual das suas paredes. Mesmo uma pequena não homogeneidade no índice de refração do seu núcleo pode causar dispersões de luz e consequente acoplamento de modos radiativos¹. Outras causas possíveis de perdas por propagação podem ser a presença de defeitos de dispersão ou centros de absorção distribuídos ao longo do volume do guia de onda.

As Perdas por Curvatura surgem quando o guia de onda não é reto, mas segue uma trajetória curva. Estas perdas são causadas por uma distorção da distribuição do campo guiado que induz um acoplamento parcial com modos radiativos no lado externo da curva. Verifica-se, ambos teoricamente e experimentalmente, que as perdas por curvatura aumentam exponencialmente com a diminuição do raio de curvatura r [139], assim

$$BL(r) = k_1 e^{-k_2/r}, \quad (7.5)$$

onde k_1 e k_2 são constantes que dependem do tamanho da guia de onda e do perfil do modo guiado. De fato, guias de ondas com baixo contraste no índice de refração, que guiam os modos eletromagnéticos maiores, exibem perdas por curvatura mais intensas.

As Perdas de Fresnel são causadas pelas reflexões de Fresnel que ocorrem na interface ar/vidro tanto na entrada quanto na saída dos guias de onda, devido a descontinuidade do índice de refração. Elas podem ser estimadas através da seguinte fórmula:

$$FL = -10 \log_{10} \left[1 - \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \right], \quad (7.6)$$

sendo n_1 e n_2 os índices refração do ar e vidro, respectivamente. Para vidros silicatos, onde tipicamente $n_1 = 1,5$, a Perda de Fresnel é da ordem de 0,4 dB.

Finalmente, as Perdas por Acoplamento são causadas pela não perfeita sobreposição (*mismatch*) entre o modo guiado $E_{wg}(x, y)$ e a distribuição do campo elétrico $E_0(x, y)$ da luz na entrada do guia de onda. Essas perdas podem ser expressas através da equação

$$CL = -10 \log_{10} (|\langle E_{wg}(x, y) | E_0(x, y) \rangle|^2), \quad (7.7)$$

onde a notação de *braket* indica o produto escalar entre as duas distribuições de campo.

Uma vez conhecida a forma de determinar todos esses diferentes tipos de perda, uma forma alternativa de expressar a Perda por Inserção é dada por:

$$IL = xPL + l_r BL + 2FL + CL \quad \Rightarrow \quad (7.8)$$

¹Modos Radiativos são aqueles que não são confinados pelo núcleo da fibra/guia de onda

$$PI = 4,3\alpha x + k_r e^{-k_2/r} - 20 \log_{10} \left[1 - \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \right] - 10 \log_{10} (|\langle E_{wg}(x, y) | E_{in}(x, y) \rangle|^2),$$

onde k_r é uma constante que leva em consideração o comprimento total do caminho percorrido pela luz no trecho curvo, descrito pela grandeza l_r , e o fator 2 em frente ao termo referente à Perda de Fresnel é adicionado para contabilizar as reflexões que ocorrem na entrada e saída do guia de onda. De posse desses dados, é possível estimar as Perdas por Inserção em um dado dispositivo óptico integrado.

Resumindo, para um dispositivo ser considerado funcional, suas perdas devem ser mantidas as menores possíveis. Em um dispositivo como os guias de onda integrados, tais perdas podem se dar como resultado de vários fenômenos. A conversão entre modos guiados, a absorção de luz pelo material onde os guias estão imersos, a difusão e/ou o espalhamento devido à imperfeições na estrutura do guia de onda, são exemplos de fenômenos intrinsecamente relacionados com a ocorrência de maiores ou menores perdas em experimentos com guias de onda integrados [140].

7.4 Resultados

Os resultados das caracterizações descritas na seção anterior serão apresentadas aqui. A caracterização destes guias foi feita na seguinte ordem: primeiro, obtivemos imagens dos modos guiados por cada guia e, em seguida, desconsideramos aquelas que apresentaram guiamento multimódico; segundo, medimos a Perda por Inserção dos guias monomodos a fim de determinar aquele que apresentava o guiamento mais eficiente.

Utilizando o método *End-Coupling* na configuração *end-fire* caracterizamos todos os guias de onda que apresentaram guiamento monomódico. Essa característica foi observada em todos os guias fabricados com potência incidente menor ou igual a 240 *mW* e para os casos onde a potência incidente utilizada foi igual a 250 *mW* e as velocidades de escrita utilizadas foram iguais a 30 *mm/s* e 40 *mm/s*. A Figura 7.5 apresenta dois diferentes modos guiados como exemplo.

Uma vez encontrados todos os guias cujo modo guiado possui a forma apresentada no lado esquerdo da Figura 7.5, devemos encontrar aquele que apresenta a menor perda. Para isso, utilizamos o mesmo aparato experimental, mas agora, equipado com um medidor de potência. Na Tabela 7.1 apresentamos as perdas de todos os guias monomodos produzidos com potência entre 210 *mW* e 250 *mW*. Os guias fabricados com potências menores do que esta apresentaram perdas ainda maiores e os fabricados com potências maiores apresentaram perfis multimódicos. Com o auxílio dessa tabela, vemos que o guia de onda mais eficiente foi aquele produzido a 240 *mW* de potência e com velocidade igual a 30 *mm/s*. Seu perfil, inclusive, está apresentado na Figura 7.5.

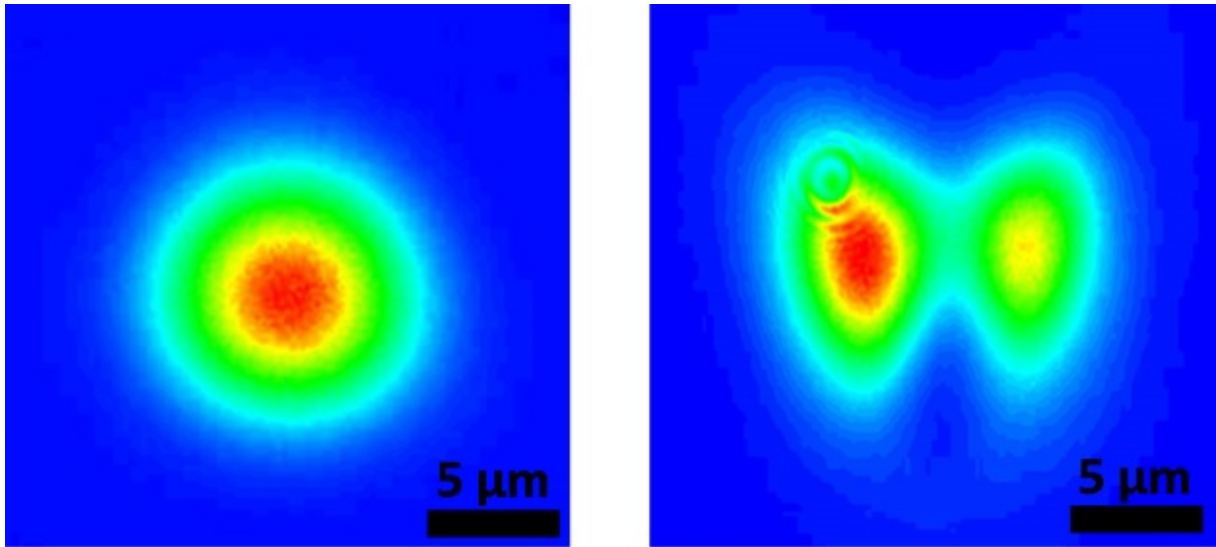


Figura 7.5: Perfil qualitativo da intensidade luminosa na saída de dois diferentes guias de onda. **Esquerda:** Perfil monomodo do guia de onda produzido a 240 *mW* de potência e a 30 *mm/s*. **Direita:** Perfil multimodo do guia de onda produzida a 300 *mW* de potência, a 30 *mm/s*.

Tabela 7.1: Perdas observadas em todos os guias de onda que apresentaram perfis monomodo.

Vel(<i>mm/s</i>)	Pot(<i>mW</i>)	PI(<i>dB</i>)	Vel(<i>mm/s</i>)	Pot(<i>mW</i>)	PI(<i>dB</i>)
10	210	11,7	20	230	12,2
20	210	10,5	30	230	8,9
30	210	10,3	40	230	8,2
40	210	10,8	10	240	17,3
10	220	15,8	20	240	13,8
20	220	11,2	30	240	6,9
30	220	9,9	40	240	7,4
40	220	10,1	30	250	8,7
10	230	18,2	40	250	8,7

Parte III

Conclusões e Perspectivas

Foram apresentados nesse trabalho métodos de se obter circuitos fotônicos que implementam operações quânticas baseadas em elementos de POVM. Utilizando-se da simetria observada nos POVMs adotados para a resolução dos problemas propostos, fomos capazes de obter configurações otimizadas para circuitos fotônicos tanto para realização experimental de processos de tomografia de estados quânticos, quanto para medidas de coerência.

Inicialmente, circuitos planares para tomografia de estados de caminho de qubits e qutrits foram propostos com base em POVMs que implementam tomografia mínima. Conseguimos assim, configurações que apresentam uma estrutura de menor complexidade do que circuitos propostos por outros trabalhos [49, 78, 82], sendo assim, dispositivos de mais fácil fabricação. Além disso, uma menor complexidade também implica em uma menor incidência de erros devido a defeitos oriundos da fabricação de tal objeto, o que garante um resultado mais preciso em relação a circuitos mais complexos. Um circuito planar para medidas de coerência em sistemas de qubit também foi proposto e apresentou as mesmas vantagens.

Na busca de uma generalização para nosso método, conseguimos obter um protocolo capaz de obter circuitos tridimensionais que realizam tomografia de estados quânticos para sistemas de qudits de dimensão maior ou igual a três. Para isso, foi utilizado um POVM formado por estados equidistantes e sua simetria nos permitiu dividir o circuito final em três operações unitárias independentes e sequenciais. Além disso, como em cada parte as operações quânticas atuavam apenas entre colunas ou entre camadas de forma repetida, foi possível tratar cada coluna e cada camada como um circuito planar e o analisar de forma individual. Dessa forma, a obtenção das operações unitárias que cada parte do circuito deve realizar sobre seu respectivo estado de entrada não se torna um trabalho árduo. A maior conquista do método é uma drástica redução em sua complexidade, uma vez que tanto o número de divisores de feixe que formam o circuito, quanto sua profundidade óptica escalam, nesses interferômetros, seguindo uma função de um grau menor do que nos casos planares. Essa drástica simplificação é muito bem apresentada na Figura 4.5. Uma generalização do protocolo de obtenção de circuitos fotônicos também foi feita no caso das medidas de coerência. Partimos de um POVM adequado para o caso e, através de raciocínios já utilizados no caso da tomografia de estados, obtemos circuitos que apresentaram todas as vantagens já relatadas.

A tolerância dos circuitos obtidos através da nossa proposta foi analisada com base no cálculo do produto interno de Hilbert-Schmidt, que mede a similaridade entre operadores matriciais. Os circuitos tridimensionais se mostraram robustos em relação à incidência de erros e perdas oriundos de fenômenos físicos, como espalhamentos ou absorções por parte da matriz vítrea ou de defeitos que ela apresenta, ou mesmo, defeitos de fabricação, causados por oscilações da intensidade do laser ou imprecisões do movimento da amostra em relação ao tal laser. Tais circuitos apresentaram uma fidelidade de aproximadamente 0,9 em casos onde a perda em cada divisor de feixe que o compõe é da faixa de 3 dB.

Assim, também é possível perceber que o método apresentado nessa tese não se limita aos casos aqui apresentados, mas sim, pode ser aplicado à toda operação quântica descrita por POVMs de rank-1 cujos vetores de estado que o geram podem ser escritos como superposições de estados de base do espaço de Hilbert onde o qudit está definido. Essa superposição não precisa se dar entre todos os estados, como é o caso das propostas apresentadas nesse trabalho.

Além do trabalho teórico, também foram apresentados alguns resultados iniciais do processo de fabricação do circuito fotônico. Fomos capazes de, através da técnica da Escrita Direta aplicada em uma matriz vítrea de borossilicato, fabricar guias de onda de perfil monomódico, ideais para a fabricação dos interferômetros. Infelizmente, por motivos de acontecimentos que fogem ao nosso controle, não conseguimos terminar esta parte do trabalho fabricando os interferômetros em vidro que permitem realizar a tomografia quântica de estados de qudits e a medição de sua coerência quântica.

Como trabalhos futuros, devemos testar essas propostas experimentalmente para termos uma confirmação cabal da qualidade do protocolo aqui desenvolvido. Outra interessante proposta de trabalho é o desenvolvimento de algum protocolo para a obtenção de um circuito fotônico tridimensional que implemente uma operação \hat{U} qualquer, não precisando estar associada a uma representação via elementos de POVM. A ideia utilizada aqui de separar o interferômetro em três operações distintas aponta para uma forma inteligente de fatorar a operação unitária a ser implementada e uma forma generalizada de representar um divisor de feixe em um arranjo tridimensional de tais elementos deve ser obtida. Além disso, prosseguiremos com a fabricação dos circuitos fotônicos. Após a obtenção de guias retos com perfis de transmissão monomódicos, a fabricação de guias curvos seria o próximo passo. Com eles avaliaríamos o comportamento das perdas em função das curvaturas a fim de determinar seu ponto mínimo. Minimizadas as perdas por curvatura, fabricaríamos divisores de feixe com diferentes comprimentos de interação e espaçamento entre guias para checar como a reflectividade e a transmitância desses elementos ópticos se comportam em função dessas grandezas. O passo seguinte será a fabricação dos circuitos, iniciando pelos planares.

Referências Bibliográficas

- [1] Linda Sansoni. *Integrated devices for quantum information with polarization encoded qubits*. Springer, 2014.
- [2] C. H. Bennet and G. Brassard. Public key distribution and coin tossing. *Proceedings of IEEE International Conference on Computers Systems and Signal Processing*, page 175, 1984.
- [3] Richard P Feynman. Simulating physics with computers. *International journal of theoretical physics*, 21(6):467–488, 1982.
- [4] V Potoček, Aurél Gábris, Tamás Kiss, and Igor Jex. Optimized quantum random-walk search algorithms on the hypercube. *Physical Review A*, 79(1):012325, 2009.
- [5] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information (cambridge series on information and the natural sciences)*. 2004.
- [6] Philipp Schindler, Daniel Nigg, Thomas Monz, Julio T Barreiro, Esteban Martinez, Shannon X Wang, Stephan Quint, Matthias F Brandl, Volckmar Nebendahl, Christian F Roos, et al. A quantum information processor with trapped ions. *New Journal of Physics*, 15(12):123012, 2013.
- [7] CJ Ballance, TP Harty, NM Linke, MA Sepiol, and DM Lucas. High-fidelity quantum logic gates using trapped-ion hyperfine qubits. *Physical review letters*, 117(6):060504, 2016.
- [8] Wenchao Ge, Brian C Sawyer, Joseph W Britton, Kurt Jacobs, John J Bollinger, and Michael Foss-Feig. Trapped ion quantum information processing with squeezed phonons. *Physical review letters*, 122(3):030501, 2019.
- [9] Nikos Daniilidis, Dylan J Gorman, Lin Tian, and Hartmut Häffner. Quantum information processing with trapped electrons and superconducting electronics. *New Journal of Physics*, 15(7):073017, 2013.
- [10] G Ciaramicoli, I Marzoli, and P Tombesi. Scalable quantum processor with trapped electrons. *Physical review letters*, 91(1):017901, 2003.

-
- [11] Olivier Gazzano and Glenn S Solomon. Toward optical quantum information processing with quantum dots coupled to microstructures. *JOSA B*, 33(7):C160–C175, 2016.
- [12] Peter Michler. *Quantum dots for quantum information technologies*, volume 237. Springer, 2017.
- [13] A Imamog, David D Awschalom, Guido Burkard, David P DiVincenzo, Daniel Loss, M Sherwin, A Small, et al. Quantum information processing using quantum dot spins and cavity qed. *Physical review letters*, 83(20):4204, 1999.
- [14] G Wendin. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *Reports on Progress in Physics*, 80(10):106001, 2017.
- [15] JQ You and Franco Nori. Quantum information processing with superconducting qubits in a microwave field. *Physical Review B*, 68(6):064509, 2003.
- [16] Karl Tordrup and Klaus Mølmer. Quantum computing with a single molecular ensemble and a cooper-pair box. *Physical Review A*, 77(2):020301, 2008.
- [17] John JL Morton and Patrice Bertet. Storing quantum information in spins and high-sensitivity esr. *Journal of Magnetic Resonance*, 287:128–139, 2018.
- [18] A Gaita-Ariño, F Luis, S Hill, and E Coronado. Molecular spins for quantum computation. *Nature chemistry*, 11(4):301–309, 2019.
- [19] Tao Xin, Bi-Xue Wang, Ke-Ren Li, Xiang-Yu Kong, Shi-Jie Wei, Tao Wang, Dong Ruan, and Gui-Lu Long. Nuclear magnetic resonance for quantum computing: techniques and recent achievements. *Chinese Physics B*, 27(2):020308, 2018.
- [20] Jun Li, Ruihua Fan, Hengyan Wang, Bingtian Ye, Bei Zeng, Hui Zhai, Xinhua Peng, and Jiangfeng Du. Measuring out-of-time-order correlators on a nuclear magnetic resonance quantum simulator. *Physical Review X*, 7(3):031011, 2017.
- [21] Dieter Suter and TS Mahesh. Spins as qubits: quantum information processing by nuclear magnetic resonance. *The Journal of chemical physics*, 128(5):052206, 2008.
- [22] Xiaohua Wu and Ke Xu. Partial standard quantum process tomography. *Quantum information processing*, 12(2):1379–1393, 2013.
- [23] Samuel L Braunstein, Carlton M Caves, Richard Jozsa, Noah Linden, Sandu Popescu, and Rüdiger Schack. Separability of very noisy mixed states and implications for nmr quantum computing. *Physical Review Letters*, 83(5):1054, 1999.
- [24] Emanuel Knill, Raymond Laflamme, and Gerald J Milburn. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *nature*, 409(6816):46–52, 2001.

- [25] Michael Settle, Mike Salib, Albert Michaeli, and Thomas F Krauss. Low loss silicon on insulator photonic crystal waveguides made by 193nm optical lithography. *Optics express*, 14(6):2440–2445, 2006.
- [26] Min Wang, Rongbo Wu, Jintian Lin, Jianhao Zhang, Zhiwei Fang, Zhifang Chai, and Ya Cheng. Chemo-mechanical polish lithography: A pathway to low loss large-scale photonic integration on lithium niobate on insulator. *Quantum Engineering*, 1(1):e9, 2019.
- [27] Shankar Kumar Selvaraja, Patrick Jaenen, Wim Bogaerts, Dries Van Thourhout, Pieter Dumon, and Roel Baets. Fabrication of photonic wire and crystal circuits in silicon-on-insulator using 193-nm optical lithography. *Journal of lightwave technology*, 27(18):4076–4083, 2009.
- [28] Malvin Carl Teich and B Saleh. Fundamentals of photonics. *Canada, Wiley Interscience*, 3, 1991.
- [29] K Miura Davis, Kiyotaka Miura, Naoki Sugimoto, and Kazuyuki Hirao. Writing waveguides in glass with a femtosecond laser. *Optics letters*, 21(21):1729–1731, 1996.
- [30] Alberto Politi, Martin J Cryan, John G Rarity, Siyuan Yu, and Jeremy L O’Brien. Silica-on-silicon waveguide quantum circuits. *Science*, 320(5876):646–649, 2008.
- [31] Wim Bogaerts, Dirk Taillaert, Bert Luyssaert, Pieter Dumon, Joris Van Campenhout, Peter Bienstman, Dries Van Thourhout, Roel Baets, V Wiaux, and S Beckx. Basic structures for photonic integrated circuits in silicon-on-insulator. *Optics Express*, 12(8):1583–1591, 2004.
- [32] Naoki Hirayama, Hiroyuki Takahashi, Yoshiji Noguchi, Masashi Yamagishi, and Tsuyoshi Horikawa. Low-loss si waveguides with variable-shaped-beam eb lithography for large-scaled photonic circuits. In *Extended Abstracts of the International Conference on Solid State Devices and Materials*, pages 530–531, 2012.
- [33] Roberto Osellame, Giulio Cerullo, and Roberta Ramponi. *Femtosecond laser micromachining: photonic and microfluidic devices in transparent materials*, volume 123. Springer Science & Business Media, 2012.
- [34] Hiroaki Misawa and Saulius Juodkazis. *3D laser microfabrication: principles and applications*. John Wiley & Sons, 2006.
- [35] Graham D Marshall, Alberto Politi, Jonathan CF Matthews, Peter Dekker, Martin Ams, Michael J Withford, and Jeremy L O’Brien. Laser written waveguide photonic quantum circuits. *Optics express*, 17(15):12546–12554, 2009.

- [36] Andrea Crespi, Roberta Ramponi, Roberto Osellame, Linda Sansoni, Irene Bongioanni, Fabio Sciarrino, Giuseppe Vallone, and Paolo Mataloni. Integrated photonic quantum gates for polarization qubits. *Nature communications*, 2(1):1–6, 2011.
- [37] Thomas Meany, Devon N Biggerstaff, Matthew A Broome, Alessandro Fedrizzi, Michael Delanty, MJ Steel, Alexei Gilchrist, Graham D Marshall, Andrew G White, and Michael J Withford. Engineering integrated photonics for heralded quantum gates. *Scientific reports*, 6(1):1–8, 2016.
- [38] Max Tillmann, Borivoje Dakić, René Heilmann, Stefan Nolte, Alexander Szameit, and Philip Walther. Experimental boson sampling. *Nature Photonics*, 7(7):540–544, 2013.
- [39] Markus Gräfe, René Heilmann, Armando Perez-Leija, Robert Keil, Felix Dreisow, Matthias Heinrich, Hector Moya-Cessa, Stefan Nolte, Demetrios N Christodoulides, and Alexander Szameit. On-chip generation of high-order single-photon w-states. *Nature Photonics*, 8(10):791, 2014.
- [40] Linda Sansoni, Fabio Sciarrino, Giuseppe Vallone, Paolo Mataloni, Andrea Crespi, Roberta Ramponi, and Roberto Osellame. Two-particle bosonic-fermionic quantum walk via integrated photonics. *Physical review letters*, 108(1):010502, 2012.
- [41] Konstantinos Poullos, Robert Keil, Daniel Fry, Jasmin DA Meinecke, Jonathan CF Matthews, Alberto Politi, Mirko Lobino, Markus Gräfe, Matthias Heinrich, Stefan Nolte, et al. Quantum walks of correlated photon pairs in two-dimensional waveguide arrays. *Physical review letters*, 112(14):143604, 2014.
- [42] James O Owens, Matthew A Broome, Devon N Biggerstaff, Michael E Goggin, Alessandro Fedrizzi, Trond Linjordet, Martin Ams, Graham D Marshall, Jason Twamley, Michael J Withford, et al. Two-photon quantum walks in an elliptical direct-write waveguide array. *New Journal of Physics*, 13(7):075003, 2011.
- [43] James G Titchener, Alexander S Solntsev, and Andrey A Sukhorukov. Two-photon tomography using on-chip quantum walks. *Optics letters*, 41(17):4079–4082, 2016.
- [44] James G Titchener, Markus Gräfe, René Heilmann, Alexander S Solntsev, Alexander Szameit, and Andrey A Sukhorukov. Scalable on-chip quantum state tomography. *npj Quantum Information*, 4(1):1–6, 2018.
- [45] Stephen Barnett. *Quantum information*, volume 16. Oxford University Press, 2009.
- [46] Simon Gröblacher, Thomas Jennewein, Alipasha Vaziri, Gregor Weihs, and Anton Zeilinger. Experimental quantum cryptography with qutrits. *New Journal of Physics*, 8(5):75, 2006.

- [47] Wanderson Maia Pimenta. *Caracterização e Evolução de Estados Quânticos Fotônicos e Atômicos de Muitos Níveis*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil, 2014.
- [48] Jun John Sakurai and Eugene D Commins. *Modern quantum mechanics*, revised edition, 1995.
- [49] Michael Reck, Anton Zeilinger, Herbert J Bernstein, and Philip Bertani. Experimental realization of any discrete unitary operator. *Physical Review Letters*, 73(1):58, 1994.
- [50] Vladimir B Braginsky, Vladimir Borisovich Braginskiĭ, and Farid Ya Khalili. *Quantum measurement*. Cambridge University Press, 1995.
- [51] Howard M Wiseman and Gerard J Milburn. *Quantum measurement and control*. Cambridge university press, 2009.
- [52] David J Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2016.
- [53] Steven T Flammia, Andrew Silberfarb, and Carlton M Caves. Minimal informationally complete measurements for pure states. *Foundations of Physics*, 35(12):1985–2006, 2005.
- [54] Stefan Weigert. Simple minimal informationally complete measurements for qudits. *International Journal of Modern Physics B*, 20(11n13):1942–1955, 2006.
- [55] Steven T Flammia. On sic-povms in prime dimensions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(43):13483, 2006.
- [56] Gilad Gour and Amir Kalev. Construction of all general symmetric informationally complete measurements. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 47(33):335302, 2014.
- [57] Bob Coecke and Éric Oliver Paquette. Povms and naimark’s theorem without sums. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 210:15–31, 2008.
- [58] RT Thew, Kae Nemoto, Andrew G White, and William J Munro. Qudit quantum-state tomography. *Physical Review A*, 66(1):012303, 2002.
- [59] Claudio Carmeli, Teiko Heinosaari, Sabrina Maniscalco, Jussi Schultz, and Alessandro Toigo. Determining quantum coherence with minimal resources. *New Journal of Physics*, 20(6):063038, 2018.
- [60] Asutosh Kumar. Quantum coherence: Reciprocity and distribution. *Physics Letters A*, 381(11):991–997, 2017.

-
- [61] Manabendra Nath Bera, Tabish Qureshi, Mohd Asad Siddiqui, and Arun Kumar Pati. Duality of quantum coherence and path distinguishability. *Physical Review A*, 92(1):012118, 2015.
- [62] Tania Paul and Tabish Qureshi. Measuring quantum coherence in multislit interference. *Physical Review A*, 95(4):042110, 2017.
- [63] Tillmann Baumgratz, Marcus Cramer, and Martin B Plenio. Quantifying coherence. *Physical review letters*, 113(14):140401, 2014.
- [64] Alexander Streltsov, Gerardo Adesso, and Martin B Plenio. Colloquium: Quantum coherence as a resource. *Reviews of Modern Physics*, 89(4):041003, 2017.
- [65] Mark Hillery. Coherence as a resource in decision problems: The deutsch-jozsa algorithm and a variation. *Physical Review A*, 93(1):012111, 2016.
- [66] Alexander Streltsov, Eric Chitambar, Swapan Rana, Manabendra N Bera, Andreas Winter, and Maciej Lewenstein. Entanglement and coherence in quantum state merging. *Physical review letters*, 116(24):240405, 2016.
- [67] Andreas Winter and Dong Yang. Operational resource theory of coherence. *Physical review letters*, 116(12):120404, 2016.
- [68] Alexander Streltsov, Uttam Singh, Himadri Shekhar Dhar, Manabendra Nath Bera, and Gerardo Adesso. Measuring quantum coherence with entanglement. *Physical review letters*, 115(2):020403, 2015.
- [69] Carmine Napoli, Thomas R Bromley, Marco Cianciaruso, Marco Piani, Nathaniel Johnston, and Gerardo Adesso. Robustness of coherence: an operational and observable measure of quantum coherence. *Physical review letters*, 116(15):150502, 2016.
- [70] Xiao Yuan, Hongyi Zhou, Zhu Cao, and Xiongfeng Ma. Intrinsic randomness as a measure of quantum coherence. *Physical Review A*, 92(2):022124, 2015.
- [71] Davide Girolami. Observable measure of quantum coherence in finite dimensional systems. *Physical review letters*, 113(17):170401, 2014.
- [72] Eric Chitambar and Gilad Gour. Comparison of incoherent operations and measures of coherence. *Physical Review A*, 94(5):052336, 2016.
- [73] Jaroslav Řeháček, Berthold-Georg Englert, and Dagomir Kaszlikowski. Minimal qubit tomography. *Physical Review A*, 70(5):052321, 2004.
- [74] Wanderson Maia Pimenta. Tomografia experimental de estados quânticos: Implementação de tomografia mínima. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil, 2010.

-
- [75] Alexander Ling, Kee Pang Soh, Antia Lamas-Linares, and Christian Kurtsiefer. Experimental polarization state tomography using optimal polarimeters. *Physical Review A*, 74(2):022309, 2006.
- [76] RMA Azzam. Arrangement of four photodetectors for measuring the state of polarization of light. *Optics letters*, 10(7):309–311, 1985.
- [77] WR Cardoso, DF Barros, MR Barros, and S Pádua. Implementing positive-operator-valued-measurement elements in photonic circuits for performing minimum quantum state tomography of path qudits. *Physical Review A*, 99(6):062324, 2019.
- [78] Gelo Noel M Tabia. Experimental scheme for qubit and qutrit symmetric informationally complete positive operator-valued measurements using multiport devices. *Physical Review A*, 86(6):062107, 2012.
- [79] C Paiva-Sánchez, E Burgos-Inostroza, O Jiménez, and A Delgado. Quantum tomography via equidistant states. *Physical Review A*, 82(3):032115, 2010.
- [80] Luis Roa, Carla Hermann-Avigliano, Roberto Salazar, AB Klimov, B Burgos, and A Delgado. Petal-shape probability areas: complete quantum state discrimination. *arXiv preprint arXiv:0808.0725*, 2008.
- [81] O Jiménez, Luis Roa, and A Delgado. Probabilistic cloning of equidistant states. *Physical Review A*, 82(2):022328, 2010.
- [82] William R Clements, Peter C Humphreys, Benjamin J Metcalf, W Steven Kolthammer, and Ian A Walmsley. Optimal design for universal multiport interferometers. *Optica*, 3(12):1460–1465, 2016.
- [83] Yuan Liang Lim and Almut Beige. Multiphoton entanglement through a bell-multiport beam splitter. *Physical Review A*, 71(6):062311, 2005.
- [84] Paula D’Avila Machado and Sebastião José Nascimento de Pádua. Quantum coherence of spatial photonic qudits: experimental measurement and path-marker analysis. *Journal of Optics*, 2020.
- [85] Andrew Zangwill. *Modern electrodynamics*. Cambridge University Press, 2013.
- [86] George B Arfken, Hans J. Weber, and Frank E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists, Seventh Edition: A Comprehensive Guide*. Elsevier, 2012.
- [87] Milton Abramowitz and Irene A Stegun. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Courier Corporation, 1964.
- [88] Constantine A Balanis and Eric Holzman. Circular waveguides. *Encyclopedia of RF and Microwave Engineering*.

-
- [89] Fritz E Borgnis and Charles Herach Papas. Electromagnetic waveguides and resonators. In *Elektrische Felder und Wellen/Electric Fields and Waves*, pages 285–422. Springer, 1958.
- [90] John David Jackson. *Classical Eletrodynamics, 3ª Edição*. John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [91] Michael J Adams. *An introduction to optical waveguides*, volume 14. Wiley New York, 1981.
- [92] Bahaa EA Saleh, Malvin Carl Teich, and Bahaa E Saleh. *Fundamentals of photonics*, volume 22. Wiley New York, 1991.
- [93] Amnon Yariv and Pocji Yeh. *Photonics: optical electronics in modern communications*. Oxford Univ., 2006.
- [94] B C Stuart, M D Feit, S Herman, AM Rubenchik, BW Shore, and MD Perry. Nanosecond-to-femtosecond laser-induced breakdown in dielectrics. *Physical review B*, 53(4):1749, 1996.
- [95] Chris B Schaffer, Andre Brodeur, and Eric Mazur. Laser-induced breakdown and damage in bulk transparent materials induced by tightly focused femtosecond laser pulses. *Measurement Science and Technology*, 12(11):1784, 2001.
- [96] LV Keldysh et al. Ionization in the field of a strong electromagnetic wave. *Sov. Phys. JETP*, 20(5):1307–1314, 1965.
- [97] Charles Kittel, Paul McEuen, and Paul McEuen. *Introduction to solid state physics*, volume 8. Wiley New York, 1996.
- [98] Matthias Lenzner, Jörg Krüger, S Sartania, Z Cheng, Ch Spielmann, G Mourou, Wolfgang Kautek, and Ferenc Krausz. Femtosecond optical breakdown in dielectrics. *Physical review letters*, 80(18):4076, 1998.
- [99] D Du, X Liu, and G Mourou. Reduction of multi-photon ionization in dielectrics due to collisions. *Applied Physics B*, 63(6):617–621, 1996.
- [100] Brent C Stuart, Michael D Feit, Steve Herman, Aleksandr Markovich Rubenchik, Bruce W Shore, and Michael D Perry. Optical ablation by high-power short-pulse lasers. *JOSA B*, 13(2):459–468, 1996.
- [101] Vladimir S Popov. Tunnel and multiphoton ionization of atoms and ions in a strong laser field (keldysh theory). *Physics-Uspekhi*, 47(9):855, 2004.
- [102] Martin Ams, Graham D Marshall, Peter Dekker, Mykhaylo Dubov, Vladimir K Mezentsev, Ian Bennion, and Michael J Withford. Investigation of ultrafast laser–photonic material interactions: Challenges for directly written glass photonics. *IEEE journal of selected topics in quantum electronics*, 14(5):1370–1381, 2008.

-
- [103] A Kaiser, B Rethfeld, M Vicanek, and G Simon. Microscopic processes in dielectrics under irradiation by subpicosecond laser pulses. *Physical Review B*, 61(17):11437, 2000.
- [104] Brian K Ridley. *Quantum processes in semiconductors*. Oxford University Press, 2013.
- [105] Scott C Jones, Peter Braunlich, R Thomas Casper, Xiao-An Shen, and Paul Kelly. Recent progress on laser-induced modifications and intrinsic bulk damage of wide-gap optical materials. *Optical Engineering*, 28(10):281039, 1989.
- [106] MD Perry, BC Stuart, PS Banks, MD Feit, V Yanovsky, and AM Rubenchik. Ultrashort-pulse laser machining of dielectric materials. *Journal of applied physics*, 85(9):6803–6810, 1999.
- [107] Michael D Perry and Otto L Landen. Resonantly enhanced multiphoton ionization of krypton and xenon with intense ultraviolet laser radiation. *Physical Review A*, 38(6):2815, 1988.
- [108] MD Perry, A Szoke, OL Landen, and EM Campbell. Nonresonant multiphoton ionization of noble gases: Theory and experiment. *Physical review letters*, 60(13):1270, 1988.
- [109] MV Ammosov, NB Delone, V Krainov, Am Perelomov, V Popov, M Terent'ev, Gennady L Yudin, and Misha Yu Ivanov. Tunnel ionization of complex atoms and of atomic ions in an alternating electric field. *Sov. Phys. JETP*, 64(1191):26, 1986.
- [110] Lan Jiang and Hai-Lung Tsai. A plasma model combined with an improved two-temperature equation for ultrafast laser ablation of dielectrics. *Journal of Applied Physics*, 104(9):093101, 2008.
- [111] Lan Jiang and Hai-Lung Tsai. Improved two-temperature model and its application in ultrashort laser heating of metal films. *Journal of heat transfer*, 127(10):1167–1173, 2005.
- [112] PB Corkum, F Brunel, NK Sherman, and T Srinivasan-Rao. Thermal response of metals to ultrashort-pulse laser excitation. *Physical review letters*, 61(25):2886, 1988.
- [113] Neil W Ashcroft, N David Mermin, et al. Solid state physics [by] neil w. ashcroft [and] n. david mermin., 1976.
- [114] K Miura, Jianrong Qiu, H Inouye, T Mitsuyu, and K Hirao. Photowritten optical waveguides in various glasses with ultrashort pulse laser. *Applied Physics Letters*, 71(23):3329–3331, 1997.

-
- [115] Lionel Sudrie, Michel Franco, Bernard Prade, and André Mysyrowicz. Writing of permanent birefringent microlayers in bulk fused silica with femtosecond laser pulses. *Optics Communications*, 171(4):279–284, 1999.
- [116] Saulius Juodkazis, K Nishimura, S Tanaka, Hiroaki Misawa, Eugene G Gamaly, Barry Luther-Davies, Ludovic Hallo, Philippe Nicolai, and Vladimir T Tikhonchuk. Laser-induced microexplosion confined in the bulk of a sapphire crystal: evidence of multimegabar pressures. *Physical review letters*, 96(16):166101, 2006.
- [117] James W Chan, Thomas Huser, S Risbud, and DM Krol. Structural changes in fused silica after exposure to focused femtosecond laser pulses. *Optics letters*, 26(21):1726–1728, 2001.
- [118] R Brückner. Properties and structure of vitreous silica. i. *Journal of non-crystalline solids*, 5(2):123–175, 1970.
- [119] Masaaki Sakakura, Masahiro Shimizu, Yasuhiko Shimotsuma, Kiyotaka Miura, and Kazuyuki Hirao. Temperature distribution and modification mechanism inside glass with heat accumulation during 250 khz irradiation of femtosecond laser pulses. *Applied Physics Letters*, 93(23):231112, 2008.
- [120] C Hnatovsky, RS Taylor, E Simova, PP Rajeev, DM Rayner, VR Bhardwaj, and PB Corkum. Fabrication of microchannels in glass using focused femtosecond laser radiation and selective chemical etching. *Applied Physics A: Materials Science & Processing*, 84(1):47–61, 2006.
- [121] Alexander M Streltsov and Nicholas F Borrelli. Study of femtosecond-laser-written waveguides in glasses. *JOSA B*, 19(10):2496–2504, 2002.
- [122] A Saliminia, R Vallee, and SL Chin. Waveguide writing in silica glass with femtosecond pulses from an optical parametric amplifier at 1.5 μm . *Optics communications*, 256(4):422–427, 2005.
- [123] Eli N Glezer and Eric Mazur. Ultrafast-laser driven micro-explosions in transparent materials. *Applied Physics Letters*, 71(7):882–884, 1997.
- [124] Wataru Watanabe, Tadamasu Toma, Kazuhiro Yamada, Junji Nishii, Ken-ichi Hayashi, and Kazuyoshi Itoh. Optical seizing and merging of voids in silica glass with infrared femtosecond laser pulses. *Optics Letters*, 25(22):1669–1671, 2000.
- [125] EN Glezer, M Milosavljevic, L Huang, RJ Finlay, T-H Her, J Paul Callan, and Eric Mazur. Three-dimensional optical storage inside transparent materials. *Optics Letters*, 21(24):2023–2025, 1996.
- [126] Marc J Madou. *Manufacturing techniques for microfabrication and nanotechnology*, volume 2. CRC press, 2011.

-
- [127] Ingrid David Barcelos. *Estudo de Propriedades Estruturais e Óticas de Heteroestruturas Formadas por Materiais Bidimensionais*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil, 2015.
- [128] Alberto Politi, Jonathan CF Matthews, and Jeremy L O'brien. Shor's quantum factoring algorithm on a photonic chip. *Science*, 325(5945):1221–1221, 2009.
- [129] Alberto Peruzzo, Anthony Laing, Alberto Politi, Terry Rudolph, and Jeremy L O'brien. Multimode quantum interference of photons in multiport integrated devices. *Nature communications*, 2(1):1–6, 2011.
- [130] Jonathan CF Matthews, Konstantinos Poullos, Jasmin DA Meinecke, Alberto Politi, Alberto Peruzzo, Nur Ismail, Kerstin Wörhoff, Mark G Thompson, and Jeremy L O'brien. Observing fermionic statistics with photons in arbitrary processes. *Scientific reports*, 3(1):1–7, 2013.
- [131] Eduardo Machado Lages. *Fabricação e caracterização de guias de onda em vidro usando a técnica de escrita direta*. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil, 2017.
- [132] Eduardo Lages, Wilder Cardoso, Gustavo Foresto Brito Almeida, Lívia Siman, Oscar Mesquita, Cleber Renato Mendonça, Ubirajara Agero, and Sebastião Pádua. Measurement of the refractive index profile of waveguides using defocusing microscopy. *Applied optics*, 57(29):8699–8704, 2018.
- [133] Y Zhang, G Cheng, G Huo, Y Wang, W Zhao, Cyril Mauclair, Razvan Stoian, and R Hui. The fabrication of circular cross-section waveguide in two dimensions with a dynamical slit. *Laser physics*, 19(12):2236, 2009.
- [134] Martin Ams, GD Marshall, DJ Spence, and MJ Withford. Slit beam shaping method for femtosecond laser direct-write fabrication of symmetric waveguides in bulk glasses. *Optics express*, 13(15):5676–5681, 2005.
- [135] FH Köklü, SB Ippolito, BB Goldberg, and MS Ünlü. Subsurface microscopy of integrated circuits with angular spectrum and polarization control. *Optics letters*, 34(8):1261–1263, 2009.
- [136] YC Wu. *Planar waveguides of Y2O3, Y2O3: Tb3+ and YAG prepared by sol-gel: analysis, structure and optical*. PhD thesis, PhD dissertation, Claude Bernard University, Lyon, 2005.
- [137] Yiming He, Dan Lu, and Lingjuan Zhao. Reflection airy distribution of a fabry-pérot resonator and its application in waveguide loss measurement. *Optics express*, 27(13):17876–17886, 2019.

- [138] Sareh Taebi, Mohammadreza Khorasaninejad, and Simarjeet Singh Saini. Modified fabry-perot interferometric method for waveguide loss measurement. *Applied optics*, 47(35):6625–6630, 2008.
- [139] Yurii A Vlasov and Sharee J McNab. Losses in single-mode silicon-on-insulator strip waveguides and bends. *Optics express*, 12(8):1622–1631, 2004.
- [140] Xingcun Colin Tong. *Advanced materials for integrated optical waveguides*, volume 46. Springer, 2014.