

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
TESE DE DOUTORADO

PASSEIOS E BILHARES: UMA INCURSÃO EM SISTEMAS
DINÂMICOS ALEATÓRIOS

TÚLIO VALES DESLANDES FERREIRA

Orientadores: Pablo Daniel Carrasco Correa e Sônia Pinto de Carvalho.

Belo Horizonte-Minas Gerais
Abril de 2021

Passeios e Bilhares: Uma incursão em sistemas dinâmicos aleatórios

Túlio Vales Deslandes Ferreira

Tese de Doutorado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Orientadores: Pablo Daniel Carrasco Correa e Sônia Pinto de Carvalho

Belo Horizonte-MG

Abril/2021

Ferreira, Túlio Vales Deslandes.

F586p Passeios e bilhares:[manuscrito] uma incursão em sistemas dinâmicos aleatórios/ Túlio Vales Deslandes Ferreira – 2021. vii, 85 f. il.

Orientador: Pablo Daniel Carrasco Correa.

Orientadora: Sônia Pinto de Carvalho.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f.83-85.

1. Matemática – Teses. 2. Passeio aleatório (Matemática) – Teses. 3. Difeomorfismo (Matemática) – Teses. 4. Funções hiperbólicas – Teses. I. Carrasco Correa, Pablo Daniel. II. Carvalho, Sônia Pinto de. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.


CDU 51 (043)

FOLHA DE APROVAÇÃO

*PASSEIOS E BILHARES: UMA INCURSÃO EM SISTEMAS
DINÂMICOS ALEATÓRIOS*

TULIO VALES DESLANDES FERREIRA

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:



Prof. Sônia Pinto de Carvalho
UFMG



Prof. Pablo Daniel Carrasco Correa
UFMG



Prof. Christian Rodrigues
Unicamp



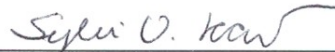
Prof. Marcelo Richard Hilário
UFMG



Prof. Renato Feres
Washington Univ.



Prof. Renato Soares dos Santos
UFMG



Prof. Sylvie Marie Kamphorst
UFMG



Prof. Vitor Araujo
UFBa

Belo Horizonte, 14 de abril de 2021.

A minha querida esposa Luana.

Agradecimentos

À minha esposa Luana por todo o apoio durante o período de doutoramento.

À minha família e amigos.

Aos meus orientadores Sônia e Pablo.

À banca examinadora pelas correções e sugestões.

À CAPES e FAPEMIG pelo apoio financeiro.

Cada ação tem seus prazeres e seu preço.
Sócrates.

Resumo

Na primeira parte da tese, trabalhamos com o passeio aleatório em ambiente aleatório determinado por um difeomorfismo parcialmente hiperbólico. Nesse trabalho encontramos condições necessárias e suficientes para existência de medida estacionária para este processo aleatório, recorrência e fizemos um estudo da dinâmica desse processo. Como caso particular, estudamos o tempo 1 do fluxo geodésico em uma variedade hiperbólica compacta. Além disso conseguimos uma lei dos grandes números e um Teorema Central do Limite.

Na segunda parte da tese definimos um bilhar aleatório, com perturbação nos ângulos de saída e encontramos uma medida invariante para esse bilhar aleatório em mesas gerais. Fizemos um estudo mais detalhado no círculo e nesse caso encontramos expoente de Lyapunov nulo, mostramos a não ergodicidade desse sistema e uma lei chamada de Lei Forte de Knudsen. Mostramos que sob certas condições, quase toda trajetória (aleatória) é densa no bordo da mesa circular. Introduzimos também o conceito de pseudo cáusticas.

Palavras-chave:

Passeio Aleatório, Medida estacionária, Medida Invariante, Fluxo Geodésico, Parcialmente Hiperbólico, Bilhar, Bilhar Aleatório, Aplicação Aleatória, Lei Forte de Knudsen, Expoente de Lyapunov.

Abstract

In the first part of the thesis, we work with the random walk in a random environment determined by a partially hyperbolic diffeomorphism. In this work, we found necessary and sufficient conditions for the existence of a stationary measure for this random process, recurrence and we made a study of the dynamics of this process. As a particular case, we studied the time 1 of the geodesic flow in a compact hyperbolic manifold. In addition, we obtained a law of large numbers and a Central Limit Theorem.

In the second part of the thesis we defined a random billiard, with a perturbation in the exit angles and found an invariant measure for this random billiard in general tables. We did a more detailed study in the circle and in this case we found a null Lyapunov exponent, we showed the non-ergodicity of this system and a law called Knudsen's Strong Law. We show that under certain conditions, almost all (random) trajectory is dense at the edge of the circular table. We also introduced the concept of pseudo caustics.

Keywords:

Random Walk, Stationary Measure, Invariant Measure, Geodesic Flow, Partially Hyperbolic, Billiards, Random Billiards, Random Maps, Knudsen's Strong Law, Lyapunov Exponent.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Passeio Aleatório Simétrico em Ambiente Aleatório Definido por um Sistema Dinâmico	1
1.1.1	Principais resultados para os passeios aleatórios	3
1.2	Bilhar Aleatório	5
1.2.1	Bilhares Determinísticos	5
1.2.2	Aplicação aleatória e o bilhar aleatório	7
1.2.3	Principais Resultados para os bilhares aleatórios	8
1.3	Organização do trabalho	9
2	Passeio Aleatório em Ambiente Aleatório	10
2.1	O Operador de Markov	10
2.2	O Fluxo Geodésico	12
2.3	Caracterização da Existência de uma Medida Estacionária	13
2.4	Um Pouco de História	14
3	Passeios Aleatórios Determinados por Sistemas Dinâmicos	16
3.1	Esperança Condicional	18
3.2	Desintegração de medidas	21
3.3	Medidas Absolutamente contínuas	22
4	Existência de medida estacionária	25
4.1	Hiperbolicidade Parcial	25
4.2	A Prova do Teorema 2.3.1	27
4.3	Difeomorfismo de Anosov	30
5	Consequências Dinâmicas	32
5.1	Uma Lei dos Grandes Números e um Teorema Central do Limite	33
5.2	A Recorrência e o Expoente de Lyapunov para o Skew Product	35
6	Lei Forte de Knudsen para a Aplicação Aleatória de Feres	38
6.1	Aplicação Aleatória	38

6.2	A Aplicação Aleatória de Feres	39
6.3	A Lei Forte de Knudsen	43
6.4	Caracterização da Lei Forte de Knudsen	49
6.5	Propriedades da Aplicação Aleatória de Feres	51
7	O Bilhar Aleatório	52
7.1	A Aplicação do Bilhar Aleatório	52
7.2	Medida Invariante	53
7.3	A Lei Forte de Knudsen para a Aplicação do Bilhar Circular Aleatório	56
8	Dinâmica do Bilhar Circular Aleatório	58
8.1	Órbitas Periódicas	59
8.2	Trajетórias Densas	61
8.2.1	Cadeia de Markov	62
8.3	Pseudo Cáusticas do Bilhar Circular Aleatório	66
8.4	Derivada do bilhar aleatório e o Expoente de Lyapunov	68
8.5	Conjugação	72
8.6	Um Apanhado Geral	73
9	Perspectivas Futuras	77
9.1	Ainda sobre o Bilhar Circular	77
9.2	Estádio Circular	78
9.3	Passando para 3D: Aplicação Aleatória em Tetraedros	79
9.4	Passeio Aleatório Determinado pela Aplicação de Feres	80
9.5	Dependência da Medida P -estacionária com um Sistema Dinâmico .	81

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho abordaremos dois assuntos:

1. Passeio Aleatório Simétrico em Ambiente Aleatório Definido por um Sistema Dinâmico.
2. Bilhar Aleatório.

Estes assuntos possuem uma forte conexão entre as áreas de Sistemas Dinâmicos e Probabilidade, isto é, usaremos resultados clássicos destas áreas de pesquisa para provar os resultados de nosso interesse. No Capítulo 10, daremos um exemplo no qual podemos conectar os dois assuntos estudados.

1.1 Passeio Aleatório Simétrico em Ambiente Aleatório Definido por um Sistema Dinâmico

O passeio aleatório clássico em \mathbb{Z} consiste de uma partícula, que inicialmente se encontra na origem, e que possui probabilidade p de saltar para a direita e $1 - p$ de saltar para a esquerda independente da posição $k \in \mathbb{Z}$ em que a partícula se encontra. Ver Figura 1.1

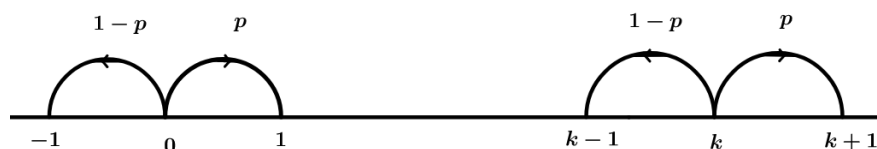


Figura 1.1: Passeio Aleatório Clássico

Mais precisamente, consideremos S_n a posição da partícula no tempo n iniciando em 0 e $X_n : \mathbb{Z} \rightarrow \{-1, 1\}$ variável aleatória que indica se o salto é para a

direita ou para esquerda. Então

$$\text{Prob}(X_{n+1} = 1 | S_n = k) = p$$

$$\text{Prob}(X_{n+1} = -1 | S_n = k) = 1 - p.$$

Notemos que

$$\text{Prob}(S_n = k_n | S_0 = 0, S_1 = k_1, \dots, S_{n-1} = k_{n-1}) = \text{Prob}(S_n = k_n | S_{n-1} = k_{n-1}).$$

Nesse caso dizemos que o passeio aleatório é uma cadeia de Markov, isto é, a probabilidade de $S_n = k_n$ só depende da posição da partícula no instante de tempo $n - 1$.

Vamos agora descrever o problema que estamos interessados. Dada uma função contínua $p : M \rightarrow (0, 1)$ onde M é um espaço métrico compacto, um homeomorfismo $f : M \rightarrow M$ determina uma cadeia de Markov em M onde para cada ponto $x \in M$ a probabilidade de transição para $f(x)$ é $p(x)$, e a probabilidade de transição para $f^{-1}(x)$ é $1 - p(x)$. Assim, para cada $x \in M$, definimos um passeio aleatório em \mathbb{Z} : denote por S_n^x a posição da partícula começando na origem $0 \in \mathbb{Z}$ no tempo $n \geq 0$, e seja $X_n^x : \mathbb{Z} \rightarrow \{-1, 1\}$ a variável aleatória (função mensurável) que indica o salto da partícula para a esquerda ou para a direita no tempo n . Então

$$\text{Prob}(X_{n+1}^x = 1 | S_n^x = k) = p(f^k x) \quad (1.1)$$

$$\text{Prob}(X_{n+1}^x = -1 | S_n^x = k) = 1 - p(f^k x). \quad (1.2)$$

A cadeia de Markov $(X_n^x)_{n \geq 0}$ determinada por f e p é também conhecida por *Passeio Aleatório em Ambiente Aleatório*, ver Figura 1.2. A escolha de um ponto x deixa o ambiente fixo para o passeio aleatório. Para mais detalhes sobre passeio aleatório em ambiente aleatório sugerimos ao leitor consultar [36] para uma introdução completa ao tópico. A sigla em inglês é RWRE referente a *Random Walk Random Environment*. Fixado $x \in M$, podemos identificar o passeio aleatório determinado por (f, p) em M com o passeio aleatório determinado por (f, p) em \mathbb{Z} , relacionando o sítio $k \in \mathbb{Z}$ com o ponto $f^k(x) \in M$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

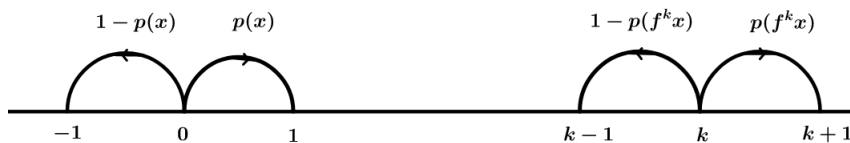


Figura 1.2: Passeio Aleatório em Ambiente Aleatório em \mathbb{Z} determinado por f e p .

Observemos que pela compacidade do espaço M e pela continuidade da fun-

ção $p : M \rightarrow (0, 1)$, existe $\delta > 0$ tal que $\delta < p(x) < 1 - \delta$ para todo $x \in M$. Dizemos então que p satisfaz a propriedade chamada de *elipticidade uniforme*.

Neste trabalho, dado um homeomorfismo $f : M \rightarrow M$, o operador de Markov P_f no espaço das funções contínuas em M é definido como $P_f\psi(x) = p(x)\psi(fx) + (1 - p(x))\psi(f^{-1}x)$ para todo $x \in M$. Mais geralmente, sejam $C(M)$ o espaço das funções contínuas e (M, μ) um espaço de probabilidade. O operador de Markov $P : C(M) \rightarrow C(M)$ é tal que:

1. Se $\phi > 0$, então $P\phi > 0$.
2. Se $1(x) = 1$ para todo $x \in M$, então $P1(x) = 1(x)$ para todo $x \in M$.
3. Se $\phi \in C(M)$, então $P\phi \in C(M)$.

No Capítulo 2 definiremos medida P -estacionária e nesse contexto, estamos interessados no seguinte problema:

Problema. *Dada uma medida μ invariante pelo homeomorfismo f , encontrar uma medida P -estacionária ν que seja equivalente (absolutamente contínua) à medida μ .*

Perguntas desse tipo foram estudadas pela primeira vez por Y. Sinai [32] para rotações irracionais em toros e colocadas em uma estrutura geral por J.P. Conze e Y. Guivarc [9]. O caso dos difeomorfismos de Anosov é considerado em [20] por V. Kaloshin e Y. Sinai. Para um artigo mais recente e uma bibliografia atualizada, direcionamos o leitor ao trabalho de D. Dolgopyat e B. Fayad e M. Saprykina [12].

Neste trabalho, consideramos um tipo diferente de exemplo que os já considerados na literatura (unicamente ergódicos ou completamente hiperbólicos), estudaremos o problema referido acima quando $f = f_1 : M \rightarrow M$ for o tempo 1 do fluxo geodésico correspondente a uma variedade hiperbólica (variedade fechada de curvatura negativa), enquanto μ será a medida de Liouville. Os métodos disponíveis não se adéquam para estudar esse tipo de aplicação, particularmente no que é chamado de *caso simétrico*, ou seja, quando

$$\int \log \frac{p(x)}{1 - p(x)} \cdot d\mu(x) = 0.$$

1.1.1 Principais resultados para os passeios aleatórios

Nessa subseção, vamos listar algumas das principais contribuições desta tese com respeito ao passeio aleatório em ambiente aleatório determinado por um sistema dinâmico parcialmente hiperbólico, visto que esse exemplo de passeio aleatório é diferente dos exemplos já estudados na literatura.

No Capítulo 4 provamos o seguinte teorema:

Teorema 4.2.2. *Suponha que $f : M \rightarrow M \in \mathcal{C}^\infty(M)$, é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico acessível satisfazendo;*

1. $\dim E^c = 1$.
2. *Para alguma métrica Riemanniana $Df|_{E^c}$ é uma isometria.*
3. *f preserva a medida volume μ .*

Seja $p : M \rightarrow (0, 1)$ uma função Hölder contínua, $q = 1 - p$, $\varphi = \frac{p}{q}$ e assumamos que $\int_M \log \varphi \cdot d\mu = 0$. Então existe uma \mathcal{C}^2 -vizinhança aberta N de f tal que se $g \in N$, $g_\mu = \mu$ então: o passeio aleatório em M determinado por (g, p) tem medida P -estacionária equivalente a μ se, e somente se, para todo $s - u$ loop o funcional associado a C é tal que $F(C)(\log \phi) = 0$.*

Além disso, a densidade da medida P -estacionária é contínua. Se p é diferenciável, então a medida P -estacionária é um volume suave M .

No Capítulo 2, definiremos formalmente o funcional $F(C)$ que age no espaço das funções Hölder e que foi introduzido por Katok e Kononenko em [21], esse funcional fornece uma generalização para sistemas parcialmente hiperbólicos da teoria de Livschitz para sistemas completamente hiperbólicos.

Conseguimos um resultado análogo para o tempo 1 do fluxo geodésico (Teorema 2.3.1), que será uma consequência direta do Teorema 4.2.2. Conseguimos também um resultado semelhante para os difeomorfismos de Anosov:

Teorema 4.3.1. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de Anosov conservativo de classe \mathcal{C}^2 , $p : M \rightarrow (0, 1)$ uma função Hölder contínua, $q = 1 - p$ e $\varphi = \frac{p}{q}$. Então existe uma \mathcal{C}^2 -vizinhança aberta N de f tal que se $g \in N$ é conservativo então: o passeio aleatório determinado por (g, p) tem medida P -estacionária equivalente ao volume de M se, e somente se, para toda probabilidade g -invariante η tem-se que $\int_M \log \varphi d\eta = 0$.*

Além disso, a densidade da medida P -estacionária é contínua. Se p é diferenciável, então a medida P -estacionária é volume suave em M .

Por fim, conseguimos uma Lei Forte dos Grandes Números e um Teorema Central do Limite, provado no Capítulo 5.

Teorema 5.1.2. *Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então para Lebesgue quase todo ponto $x \in M$ temos:*

1. *Se $\phi \in L^1(M)$ então*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\alpha_k \cdots \alpha_1(x)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int \phi d\nu \quad \mathbb{P}_x - q.t.p. (\alpha_k)_{k \geq 1} \in \Sigma.$$

2. Se $\phi = \psi - P\psi$ (ou, mais geralmente, $\phi = (I - P)^{1/2}\psi$) para algum $\psi \in L^2(\nu)$, então

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\alpha_k \cdots \alpha_1(x)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{dist}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \mathbb{P}_x - q.t.p. (\alpha_k)_{k \geq 1} \in \Sigma,$$

onde $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ denota a distribuição normal centrada em zero e variância $\sigma^2 = \|\psi\|_{L^2(\nu)}^2 - \|P\psi\|_{L^2(\nu)}^2$.

1.2 Bilhar Aleatório

Um Bilhar Determinístico é uma sistema no qual uma partícula se move com velocidade constante igual a 1 numa região do plano \mathbb{R}^2 , fechada, com bordo suave, chamado mesa de bilhar. Suas colisões com o bordo são elásticas, ou seja, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Um bilhar aleatório é um sistema no qual uma partícula se move em uma mesa de bilhar, porém temos um operador de Markov K agindo nos ângulos de incidência para "sortear" um ângulo de reflexão.

1.2.1 Bilhares Determinísticos

Nesta seção definiremos bilhares determinísticos no plano euclidiano e apresentaremos alguns resultados conhecidos sobre eles na literatura. Estudaremos em particular o bilhar circular e descreveremos algumas de suas propriedades que podem ser encontradas por exemplo em [8].

Seja γ uma curva plana, simples, fechada, regular, orientada, parametrizada por comprimento de arco $s \in [0, L)$ e com curvatura estritamente positiva. Seja U a região plana limitada por γ , que chamaremos de mesa de bilhar.

O problema de bilhar consiste no movimento livre de uma partícula em U , sendo refletida elasticamente nas colisões com o bordo γ . Uma trajetória de bilhar será uma linha poligonal nessa região plana, isto é, um conjunto de segmentos de linha reta que conectam colisões consecutivas.

O problema de bilhar define uma aplicação F no cilindro aberto $\Omega := [0, L) \times (0, \pi)$ em si mesmo. O movimento é então determinado pelo ponto de colisão com o bordo γ e a direção do movimento imediatamente após a cada impacto, que pode ser dado pelo parâmetro $s \in [0, L)$, que localizará o ponto de reflexão, e pelo ângulo $\theta \in (0, \pi)$ entre o vetor tangente $\gamma'(s)$ e a trajetória de saída, medida no sentido anti-horário.

O conjunto de pontos $\{F^n(s_0, \theta_0) \subset [0, L) \times (0, \pi), n \in \mathbb{Z}\}$ é a órbita do ponto (s_0, θ_0) no espaço de fase $[0, L) \times (0, \pi)$. A aplicação do bilhar tem algumas propriedades muito conhecida (ver por exemplo [5, 8, 22, 33]): se γ é uma curva C^k , então F é

um difeomorfismo C^{k-1} , reversível com relação a simetria inversa $G(s, \theta) = (s, \pi - \theta)$ e, como γ tem curvatura estritamente positiva, possui a propriedade Twist.

Sobre a aplicação do bilhar F temos:

- A aplicação $F : \Omega \rightarrow \Omega$ preserva a medida de probabilidade $\nu = \lambda \times \mu$, onde λ é medida de Lebesgue normalizada em $[0, L]$ e $\mu(A) = \frac{1}{2} \int_A \text{sen}(\theta) d\theta$ para todo $A \in \mathcal{B}((0, \pi))$. Essa medida é conhecida como medida de Liouville.
- A aplicação $F : \Omega \rightarrow \Omega$ é diferenciável e tem inversa diferenciável. Além disso, se $F(s_0, \theta_0) = (s_1, \theta_1)$ então

$$DF(s_0, \theta_0) = \frac{1}{\text{sen}\theta_1} \begin{bmatrix} l_{01}k_0 - \text{sen}\theta_0 & l_{01} \\ k_1(l_{01}k_0 - \text{sen}\theta_0) - k_0\text{sen}\theta_1 & l_{01}k_1 - \text{sen}\theta_1 \end{bmatrix}$$

onde k_0, k_1 são as curvaturas da curva em s_0, s_1 respectivamente e l_{01} a distância entre as colisões de (s_0, θ_0) até (s_1, θ_1) .

Observamos que tudo ainda funciona em um cenário mais geral: o bilhar pode não ser convexo ou ter um bordo infinito que ainda sim teremos um difeomorfismo preservando uma medida de probabilidade e sua derivada pode ser calculada implicitamente.

Vamos agora introduzir o bilhar circular, para isso considere $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ o disco unitário e γ o círculo que o delimita. O espaço de fase da aplicação do bilhar circular é dado por $\Omega = [0, 2\pi) \times (0, \pi)$. Pode-se mostrar que a aplicação do bilhar circular é dada por

$$F(s, \theta) = (s + 2\theta \pmod{2\pi}, \theta).$$

Uma cáustica é uma curva Γ com a seguinte propriedade: se o segmento de uma trajetória é tangente a Γ , então todos os segmentos da trajetória também serão tangentes a curva Γ . Nem todo bilhar possui cáustica, porém se a mesa de bilhar for por exemplo o disco $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, então o círculo de mesmo centro cujo raio é dado por $r = \cos(\theta)$ é a cáustica para a trajetória cujo ângulo de saída é θ .

Se $F : [0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow [0, 2\pi) \times (0, \pi)$ a aplicação do bilhar circular, então:

- Se o ângulo de saída $\theta = \frac{m}{n}\pi$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, então o ponto (s, θ) é periódico de período n , ou seja, $F^n(s, \theta) = (s, \theta)$.
- Se o ângulo de saída $\theta = \beta\pi$ com $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então o conjunto $\{s_n : F^n(s, \theta) = (s_n, \theta)\}$ é denso no bordo que identificamos por $[0, 2\pi)$. Isto é, a projeção na primeira coordenada da aplicação do bilhar circular é densa no círculo γ .

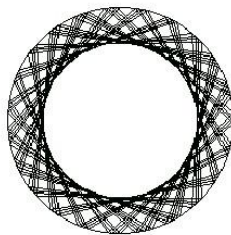


Figura 1.3: Cáustica do bilhar determinístico circular para uma trajetória.

- Se o ângulo de saída $\theta = \beta\pi$ com $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então a trajetória do bilhar preenche densamente o anel circular formado pelo círculo γ e sua cáustica associada.

Todas essas propriedades de bilhares mencionadas nessa seção, podem ser encontradas, por exemplo, em [8].

1.2.2 Aplicação aleatória e o bilhar aleatório

Para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, podemos definir uma aplicação aleatória T no intervalo da seguinte maneira: sejam $T_i : (a, b) \rightarrow (a, b)$ aplicações e $p_i : (a, b) \rightarrow (0, 1)$ probabilidades de forma que $T(x) = T_i(x)$ com probabilidade $p_i(x)$. A aplicação T é chamada de aplicação aleatória e é comumente denotada por $T = (T_i, p_i)_{i=1}^n$. Trabalharemos nesta tese com uma aplicação aleatória específica que foi introduzida por Renato Feres em [14], que chamaremos de aplicação aleatória de Feres.

Em [4], Wael Bahsoun, Christopher Bose e Anthony Quas trabalharam com aplicações aleatórias T dependendo do tempo e introduziram um skew product S que é uma representação determinística da aplicação aleatória T . Eles apresentaram uma equivalência entre medida invariante para aplicações aleatórias e medida invariante para o skew product.

Em [14], Renato Feres introduziu uma aplicação aleatória T dependendo do tempo, usando o bilhar determinístico no triângulo isósceles cujo ângulo da base é menor que $\frac{\pi}{6}$. Entre outros resultados, Feres mostrou a existência de uma medida invariante para essa aplicação aleatória.

Em [11], Kamaludin Dingle, Jeroen S. W. Lamb e Joan-Andreu Lazaro-Cami mostram a convergência, quase certa, de distribuições ν^n da proporção de partículas que atingem o bordo de uma faixa 2-dimensional com o ângulo inicial $\theta \in A$, $A \in \mathcal{B}([0, \pi])$, para a aplicação aleatória introduzida por [14]. A estratégia foi usar o skew product S introduzido por [4] e provar que S é um endomorfismo exato.

Por fim, para introduzir o bilhar aleatório, considere $\bar{T} = (\bar{T}_i, p_i)_{i=1}^n$ uma aplicação aleatória definida em $(a, b) \times (c, d) \in \mathbb{R}^2$ e $F : (a, b) \times (c, d) \rightarrow (a, b) \times (c, d)$ uma aplicação de bilhar determinístico. Definimos o bilhar aleatório \bar{F} como sendo

a composição $F \circ \bar{T}$, isto é, $F \circ \bar{T}(x, y) = F \circ \bar{T}_i(x, y)$ com probabilidade $p_i(x, y)$.

1.2.3 Principais Resultados para os bilhares aleatórios

Nessa subseção, vamos listar algumas das principais contribuições da tese com respeito a aplicação aleatória \ bilhar aleatório.

Dada uma distribuição inicial ν , definimos no Capítulo 6 a evolução $\nu^{(n)}$ dessa distribuição de acordo com a aplicação aleatório. Nesse contexto, junto ao Teorema 14 de [11], temos o seguinte resultado:

Teorema 6.4.1. *Sejam T a aplicação aleatória de Feres e uma medida $\nu \ll \mu$, onde $\mu(A) = \frac{1}{2} \int_A \text{sen}(\theta) d\theta$. Então $\nu^{(n)}(A) \rightarrow \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}((0, \pi))$ se, e somente se, $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número irracional.*

A convergência $\nu^{(n)} \rightarrow \mu$ é chamada Lei Forte de Knudsen.

Considerando $T = (T_i, p_i)_{i=1}^4$ a aplicação aleatória introduzida em [14], vamos considerar $\bar{T} = (\bar{T}_i, p_i)_{i=1}^4$ uma extensão natural, isto é, $\bar{T}(x, y) = (x, T_i(y))$ com probabilidade $p_i(y)$. No Capítulo 7 introduzimos o conceito de medida invariante para o bilhar aleatório e provamos o seguinte resultado:

Proposição 7.2.2. *Dada uma aplicação do bilhar determinístico F e \bar{T} a aplicação aleatória, então o bilhar aleatório $\bar{F} = F \circ \bar{T}$ tem como medida invariante a medida $\lambda \times \mu$.*

No caso particular do bilhar circular aleatório, provamos também uma Lei Forte de Knudsen.

Teorema 7.3.1. *Sejam \bar{F} a aplicação do bilhar circular aleatório e $\gamma(s, \theta) = \lambda(s) \times \nu(\theta)$ com $\nu \ll \mu$, onde $\mu(A) = \frac{1}{2} \int \text{sen}(\theta) d\theta$. Então $\gamma^{(n)}(A \times B) = \lambda^{(n)} \times \nu^{(n)}(A \times B) \rightarrow (\lambda \times \mu)(A \times B)$ para todo $A \times B$ mensurável se, e somente, se $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número irracional.*

Ainda sobre o bilhar circular aleatório, conseguimos mostrar que, sob certas hipóteses, quase toda trajetória é densa no bordo da mesa circular.

Teorema 8.2.2. *Sejam $\bar{F} : [0, 2\pi) \times (0, \pi) \circlearrowleft$ a aplicação do bilhar circular aleatório, $(s, \theta) \in [0, 2\pi) \times (0, \pi)$, e ν a medida de Markov em $(\mathcal{C}(\theta))^{\mathbb{N}}$.*

1. *Se $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número racional e $\frac{\theta}{\pi}$ for um número irracional, então para ν -quase todo $\underline{y} \in (\mathcal{C}(\theta))^{\mathbb{N}}$, a trajetória relacionada $\bar{F}_{\underline{x}}$ do ponto (s, θ) é densa no bordo da mesa circular.*
2. *Se $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número irracional e a cadeia de Markov em $\mathcal{C}(\theta)$ for aperiódica, então para ν -quase todo $\underline{y} \in (\mathcal{C}(\theta))^{\mathbb{N}}$, a trajetória relacionada $\bar{F}_{\underline{x}}$ do ponto (s, θ) é densa no bordo da mesa circular.*

Ao final do Capítulo 8 provamos, sob certas condições, que o expoente de Lyapunov do bilhar circular aleatório \overline{F} é nulo para toda direção no plano.

1.3 Organização do trabalho

No Capítulo 2 introduziremos os passeios aleatórios em ambientes aleatórios, o operador de Markov que trabalharemos ao longo da primeira parte do trabalho e o conceito de fluxo geodésico.

No Capítulo 3, discutimos assuntos relevantes no contexto de probabilidade para a compreensão das provas de nossos resultados; porém não aprofundaremos nesse estudo. No entanto, uma comparação com a Teoria Ergódica é apresentada em conjunto com resultados da Teoria da Probabilidade, uma vez que o texto está em uma linguagem voltada para a dinâmica.

No Capítulo 4, apresentamos as ferramentas geométricas necessárias que usaremos e, em particular, discutimos algumas das bases dos sistemas parcialmente hiperbólicos. Além disso apresentaremos a prova de caracterização de existência de medida estacionária para o passeio aleatório determinado pelo tempo 1 do fluxo geodésico e um resultado semelhante no caso de difeomorfismos completamente hiperbólicos.

No Capítulo 5, damos algumas aplicações à dinâmica do passeio aleatório, provaremos uma Lei dos Grandes Números, um Teorema Central do Limite e calculamos o expoente de Lyapunov para o Skew Product relacionado.

No Capítulo 6 faremos um breve estudo sobre aplicações aleatórias, introduziremos a Lei Forte de Knudsen e apresentaremos condições necessárias e suficientes para termos a Lei Forte de Knudsen.

No Capítulo 7 introduziremos os bilhares aleatórios e estenderemos o conceito de Lei Forte de Knudsen e medida invariante para esse tipo de bilhar aleatório.

No Capítulo 8 faremos um estudo sobre a dinâmica do bilhar circular aleatório. Nessa parte veremos que, sob certas condições, quase toda trajetória é densa no bordo da mesa circular. Introduziremos os conceitos de pseudo cáustica e expoente de Lyapunov.

Por fim, no capítulo 9 daremos algumas perspectivas futuras com respeito aos Bilhares Aleatórios e aos Passeios Aleatórios Determinado por um Sistema Dinâmico, além de introduzir um exemplo em que podemos conectar passeios aleatórios em ambiente aleatório com a aplicação aleatória de Feres.

Capítulo 2

Passeio Aleatório em Ambiente Aleatório

Durante toda a tese, vamos considerar que um sistema dinâmico consiste de um espaço métrico compacto M e um homeomorfismo $f : M \rightarrow M$. O conjunto de todas as funções contínuas em M será denotado por $C(M)$ e vamos considerar a norma uniforme sobre esse conjunto, isto é, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in M\}$. Denotaremos por $\mathcal{B}(M)$ a σ -álgebra de Borel em M e $\mathcal{P}(M)$ o conjunto de todas as medidas de probabilidade em M .

Sejam $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo, μ uma medida f -invariante e uma função $p : M \rightarrow (0, 1)$. O passeio aleatório em ambiente aleatório determinado por (f, p) é tal que para cada $x \in M$ a probabilidade de transição para $f(x)$ é $p(x)$ e a probabilidade de transição para $f^{-1}(x)$ é $1 - p(x)$. Indutivamente, dado $f^m(x)$, a probabilidade de transição para $f^{m+1}(x)$ é $p(f^m(x))$ e a probabilidade de transição para $f^{m-1}(x)$ é $1 - p(f^m(x))$. Neste trabalho consideraremos o passeio aleatório em ambiente aleatório no caso simétrico, isto é, quando

$$\int_M \log \frac{p(x)}{1 - p(x)} d\mu(x) = 0.$$

Por simplicidade, diremos apenas passeio aleatório determinado por (f, p) para referir ao passeio aleatório em ambiente aleatório simétrico determinado por (f, p) .

2.1 O Operador de Markov

Vamos definir nesta seção o operador de Markov P com objetivo de introduzir o conceito de medida P -estacionária para que possamos, no final desse capítulo, enunciar um teorema de caracterização de existência de medida estacionária para o passeio aleatório determinado pelo tempo 1 do fluxo geodésico.

A variação dos passeios aleatórios com os ambientes é caracterizada pelo operador Markov $P_f : C(M) \rightarrow C(M)$ tal que

$$P_f \psi(x) = p(x) \cdot \psi(fx) + (1 - p(x)) \cdot \psi(f^{-1}x). \quad (2.1)$$

Após determinar o operador de Markov P_f podemos agir dualmente no espaço das medidas $\mathcal{P}(M)$,

$$P_f^* \mu(\psi) = \int P_f \psi \cdot d\mu = \int \psi \cdot d(P_f^* \mu), \quad \mu \in \mathcal{P}(M), \psi \in C(M). \quad (2.2)$$

Se os ambientes forem inicialmente distribuídos com alguma probabilidade μ , a medida $(P_f^*)^n \mu$ fornecerá a distribuição dos ambientes após n unidades de tempo.

Definição 2.1.1. *A medida $\nu \in \mathcal{P}(M)$ é P -estacionária se $P_f^* \nu = \nu$.*

Uma vez que queremos entender a dinâmica do processo aleatório em questão, a existência de uma medida estacionária equivalente à medida f -invariante μ , nos proporcionará uma melhor análise da dinâmica desses processos aleatórios. Observemos que muitas propriedades dinâmicas são caracterizadas pela existência de medidas invariantes.

Por um argumento de ponto fixo (Teorema - Schauder / Tychonoff), deduzimos a existência de pelo menos uma medida P -estacionária. No entanto, supondo que começamos com uma distribuição μ definida dinamicamente (em outras palavras, μ é f -invariante), estamos interessados na existência de uma distribuição P -estacionária que tenha alguma semelhança com μ .

Se μ é uma medida f -invariante, podemos definir o operador de Markov P_f agindo nas funções quadrado integráveis $L^2(M, \mu)$. Isto é, $P_f : L^2(M, \mu) \rightarrow L^2(M, \mu)$ tal que $P_f(\phi)(x) = p(x)\phi(fx) + (1 - p(x))\phi(f^{-1}x)$. Vamos denotar

$$\langle f, g \rangle = \int_M f \cdot g \, d\mu$$

que é o produto interno no espaço L^2 que torna este um espaço de Hilbert. Consideremos também

$$\|P_f \phi\| = \sup_{x \in M} \{|P_f \phi(x)|\}.$$

Teorema 2.1.1. *Seja $T : H \rightarrow H$ operador linear contínuo e H espaço de Hilbert. Então existe único operador linear $T^\dagger : H \rightarrow H$ tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^\dagger y \rangle$. Além disso, $\|T^\dagger\| = \|T\|$.*

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrado em [10], página 138. Se f preserva a medida μ , vamos agora encontrar o operador P_f^\dagger tal que $\langle P_f \phi, \psi \rangle =$

$\langle \phi, P_f^\dagger \psi \rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle P_f \phi(x), \psi(x) \rangle &= \int_M P_f \phi(x) \cdot \psi(x) d\mu(x) \\
&= \int_M \left[\psi(x) \cdot p(x) \phi(fx) \right] \circ f^{-1} - \left[\psi(x) \cdot (1 - p(x)) \phi(f^{-1}x) \right] \circ f d\mu(x) \\
&= \int_M \phi(x) \cdot \psi(f^{-1}x) p(f^{-1}x) + \phi(x) \cdot \psi(fx) (1 - p(fx)) d\mu(x) \\
&= \langle \phi(x), p(f^{-1}x) \psi(f^{-1}x) + (1 - p(fx)) \psi(fx) \rangle.
\end{aligned}$$

Pela unicidade do Teorema 2.1.1, para toda $\phi \in L_2(M, \mu)$ temos que

$$P_f^\dagger(\phi) = p(f^{-1}x) \phi(f^{-1}x) + (1 - p(fx)) \phi(fx). \quad (2.3)$$

Proposição 2.1.1. *Uma medida $\nu = \pi\mu$ é P -estacionária se, e somente se, $P_f^\dagger \pi = \pi$.*

Demonstração. Seja $\nu = \pi\mu$ uma medida P -estacionária. Então, para qualquer $\phi \in L_2(M, \mu)$, temos que

$$\langle \phi, \pi \rangle = \pi\mu(\phi) = P_f^*(\pi\mu)(\phi) = \langle P_f \phi, \pi \rangle = \langle \phi, P_f^\dagger \pi \rangle.$$

Reciprocamente, se $P_f^\dagger \pi = \pi$, então para qualquer $\phi \in L_2(M, \mu)$ temos que

$$\pi\mu(\phi) = \langle \phi, \pi \rangle = \langle \phi, P_f^\dagger \pi \rangle = \langle P_f \phi, \pi \rangle = P_f^*(\pi\mu)(\phi).$$

□

Portanto, a existência de uma medida estacionária ν equivalente a μ é de fato a questão de solubilidade de $P_f^\dagger \pi = \pi$, isto é, a existência de um ponto fixo do operador P_f^\dagger . Nesse caso $\nu = \pi\mu$ é a medida P -estacionária e π é a densidade da medida ν com respeito a medida μ .

2.2 O Fluxo Geodésico

Seja S uma variedade Riemanniana compacta, $TS = \{(p, v) : p \in S \text{ e } v \in T_p S\}$ o fibrado tangente e $T^1 S = \{(p, v) : p \in S, v \in T_p S \text{ e } \|v\| = 1\}$ o fibrado tangente unitário. Para cada $(p, v) \in TS$ podemos associar a única geodésica $\gamma_{(p,v)}$ tal que $\gamma_{(p,v)}(0) = p$ e $\gamma'_{(p,v)}(0) = v$. O fluxo geodésico é o fluxo no fibrado tangente de S e podemos definir como se segue.

Definição 2.2.1. *O fluxo $f : \mathbb{R} \times TS \rightarrow TS$ é tal que $f_t(p, v) = (\gamma_{(p,v)}(t), \gamma'_{(p,v)}(t))$ é chamado fluxo geodésico.*

O fluxo geodésico satisfaz duas propriedades:

1. $f_0(p, v) = (p, v)$.
2. $f_t(f_s(p, v)) = f_{t+s}(p, v)$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, $f_t : TS \rightarrow TS$ é um difeomorfismo. No caso em que $t = 1$, o difeomorfismo $f_1 : TS \rightarrow TS$ é chamado de tempo 1 do fluxo geodésico. O fibrado tangente unitário é invariante por f e vamos considerar nesse trabalho o tempo 1 do fluxo geodésico em T^1S . Para mais detalhes sobre o fluxo geodésico em variedades Riemanniana de curvatura negativa ver [2].

2.3 Caracterização da Existência de uma Medida Estacionária

Como mencionado na Introdução, estamos interessados no passeio aleatório determinado por (f, p) onde $f : M \rightarrow M$ é o tempo 1 do fluxo geodésico e $p : M \rightarrow (0, 1)$ uma função Hölder contínua. Nessa seção enunciaremos um teorema que nos fornece condições necessárias e suficiente para existência de medida estacionária para o passeio aleatório determinada pelo tempo 1 do fluxo geodésico.

Usaremos uma abordagem geométrica para o problema. Como $f : M \rightarrow M$ é o tempo 1 do fluxo geodésico, existe uma distribuição de codimensão 1 da forma $E^s \oplus E^u$ transversal à direção do fluxo. Embora essa distribuição não seja integrável, ambos E^s, E^u são e definem o que são chamados de folheações horocíclicas *estável* e *instável*. As folhas dessas folheações são invariantes pela ação do fluxo e, em particular, de f . Além disso, f contrai distâncias exponencialmente intrínsecas para pontos nos horociclos estáveis, enquanto expande distâncias exponencialmente entre pontos no instável. Veremos no Capítulo 4 que a existência desse tipo de folheação persiste por pequenas \mathcal{C}^1 -perturbações de f . Isto é, para g próximo a f chamamos sua folheação em contração W_g^s de *folheação estável*, e sua folheação em expansão W_g^u será chamada de *folheação instável*.

Definimos a distância \mathcal{C}^k , com $k \geq 0$, como sendo

$$d_k(f, g) = \max_{x \in M} \{d(f, g), \|Df - Dg\|, \|D^2f - D^2g\|, \dots, \|D^k f - D^k g\|\}$$

onde $d(f, g) = \max_{x \in M} \{\|f(x) - g(x)\|\}$. Com respeito a essa métrica, uma sequência de funções $f_n \in C^k(M)$ converge se as funções convergem e também todas as suas derivadas de ordem até k convergem uniformemente em compactos. Isso define a topologia \mathcal{C}^k .

Definição 2.3.1. *Seja $g : M \rightarrow M$ uma pequena \mathcal{C}^1 -perturbação de f de modo que suas folheações estáveis e instáveis $\mathcal{W}_g^s, \mathcal{W}_g^u$ são definidas.*

1. *O conjunto $C = \{x_0, \dots, x_{N-1}, x_N = x_0\}$ é um $s-u$ loop (ou ciclo periódico) para g se x_i, x_{i+1} pertencem à mesma folha de \mathcal{W}_g^s ou \mathcal{W}_g^u , para todo $i = 0, \dots, N-1$.*
2. *Se $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é Hölder nós definimos $F(C)(\varphi) = \sum_{i=0}^{N-1} F(C; x_i \rightarrow x_{i+1})(\varphi)$ onde*

$$F(C; x_i \rightarrow x_{i+1}) := \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(g^n x_i) - \varphi(g^n x_{i+1}) & x_{i+1} \in \mathcal{W}_g^s(x_i) \\ -\sum_{n=-1}^{-\infty} \varphi(g^n x_i) - \varphi(g^n x_{i+1}) & x_{i+1} \in \mathcal{W}_g^u(x_i) \end{cases}.$$

Na definição acima, observemos que, como as distâncias entre os pontos nas folheações estáveis (instáveis) são contraídas por g (resp. g^{-1}) e φ é Hölder, a série converge absolutamente e $F(C)(\varphi)$ está bem definido. Os funcionais $F(C)$ no espaço das funções Hölder foram introduzidos por A. Katok e A. Kononenko [21] e fornece uma generalização para sistemas parcialmente hiperbólicos da teoria de Livschitz para sistemas completamente hiperbólicos. Vamos agora enunciar o teorema que caracteriza a existência de uma medida estacionária para o passeio aleatório determinado pelo tempo 1 do fluxo geodésico.

Teorema 2.3.1. *Seja S uma variedade hiperbólica compacta, $M = T^1 S$ seu fibrado tangente unitário, μ a medida de Liouville em M e seja $f : M \rightarrow M$ o tempo 1 do fluxo geodésico. Consideremos também uma função Hölder contínua $p : M \rightarrow (0, 1)$ de forma que*

$$\int_M \log \varphi \cdot d\mu = 0, \quad \varphi = \frac{p}{1-p}.$$

Existe então uma \mathcal{C}^2 -vizinhança aberta N de f , de modo que para cada $g \in N$ temos o seguinte: o passeio aleatório em M determinado por (g, p) tem uma medida P -estacionária equivalente a μ se, e somente se, para cada $s-u$ loop C , implicar que $F(C)(\log \varphi) = 0$.

Além disso, a densidade da medida P -estacionária é contínua. Se p é diferenciável, então a medida P -estacionária é um volume suave em M .

Este teorema será deduzido de um resultado mais geral, o Teorema 4.2.2 que, em busca de concisão para esta parte, enunciaremos mais adiante.

2.4 Um Pouco de História

O estudo desse tipo de problema foi iniciado por Sinai em [32] para uma rotação irracional no toro $T : \Pi^n \rightarrow \Pi^n$, tal que $T(x) = (x + w) \bmod 1$. Neste trabalho ele

considera o passeio aleatório determinado pela rotação irracional T tanto no caso simétrico, isto é,

$$\int_M \log \frac{p(x)}{1-p(x)} d\mu(x) = 0$$

quanto no caso antissimétrico

$$\int_M \log \frac{p(x)}{1-p(x)} d\mu(x) \neq 0.$$

Impondo condições sobre o ângulo de rotação (diofantino) e sobre a velocidade de decaimento dos coeficientes de Fourier da função p , Sinai obtém a existência de uma medida estacionária equivalente a medida de Lebesgue para o passeio aleatório, encontrando uma solução positiva h para a equação cohomológica

$$\frac{1-p(x)}{p(x)} = \frac{h(T^{-1}x)}{h(x)}.$$

Em [20], Kaloshin e Sinai estudaram o passeio aleatório determinado por um difeomorfismo de Anosov transitivo (T, μ) . Impondo a condição \mathcal{C}^2 na função p , eles mostram que tipicamente não existe medida estacionária equivalente à medida μ .

Conze e Guivarc'h em [9] fizeram uma abordagem voltada para a teoria ergódica do passeio aleatório determinada pela rotação irracional obtendo resultados comparáveis aos resultados do Sinai. Porém eles assumem que $\log p$ tem variação limitada ao invés de supor que a rotação seja diofantina. Estudaram também o caso de um difeomorfismo de Anosov em termos de solubilidade de equações cohomológicas.

Capítulo 3

Passeios Aleatórios Determinados por Sistemas Dinâmicos

Neste capítulo faremos uma abordagem dinâmica do processo estocástico que estamos trabalhando. Começamos com uma descrição formal do passeio aleatório em M . Seja $\Sigma := \{f, f^{-1}\}^{\mathbb{Z}_+}$ espaço metrizável e compacto visto como produto topológico de espaços discretos. Seja $\tilde{p} : \{f, f^{-1}\} \times M \rightarrow (0, 1)$ a extensão da função $p : M \rightarrow (0, 1)$ de forma que $\tilde{p}(f, x) = p(x)$ e $\tilde{p}(f^{-1}, x) = 1 - p(x)$. Isto é, temos uma cadeia de Markov em M em que uma partícula em x salta para $f(x)$ com probabilidade $p(x)$ ou salta para $f^{-1}(x)$ com probabilidade $1 - p(x)$.

A Figura 3.1 representa o caso de uma rotação R_α no círculo. Esse caso foi tratado em [32] em um toro d -dimensional para uma rotação irracional Diofantina.

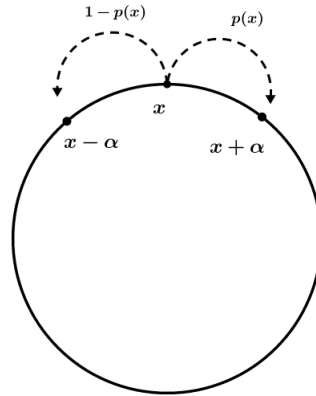


Figura 3.1: Representação de um RWRE dada pela rotação R_α no círculo.

Usando o teorema de extensão de Hahn-Kolmogorov, para cada $x \in M$ existe uma única medida de probabilidade \mathbb{P}_x em Σ tal que para todo $N \geq 1$, para todo cilindro

$$[a_1, \dots, a_N] = \{(f_n)_{n \geq 1} \in \Sigma : f_1 = a_1, \dots, f_N = a_N\}$$

temos a igualdade

$$\mathbb{P}_x([a_1, \dots, a_N]) = \tilde{p}(a_1, x) \cdot \tilde{p}(a_2, a_1x) \cdots \tilde{p}(a_N, a_{N-1} \cdots a_1x).$$

Dessa forma, $(S_n^x)_{n \geq 0}$ é uma cadeia de Markov em (Σ, \mathbb{P}_x) , que representa todas as possibilidades do passeio aleatório começando no ponto x com suas respectivas probabilidades. Observemos que existe uma passagem natural dos passeios aleatórios correspondentes a diferentes pontos (do passeio aleatório α começando em x até o passeio $\sigma(\alpha)$ começando $\sigma_1(x)$, onde $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é a aplicação shift). Do ponto de vista de sistemas dinâmicos, é natural considerar o skew product $F : \Sigma \times M \rightarrow \Sigma \times M$ tal que

$$F(\alpha, x) = (\sigma(\alpha), \alpha_1(x)) \quad (3.1)$$

que codifica as passagens acima mencionadas. Essa abordagem, no entanto, não é muito útil no contexto que estamos considerando (onde as probabilidades de transição dependem do ponto). Portanto apresentaremos uma construção alternativa e indicamos, posteriormente, sua relação com o skew product.

Observemos que podemos usar a coleção de probabilidades $\{\mathbb{P}_x\}$ para induzir um processo em M , definindo o operador de Markov

$$\begin{aligned} P_f \phi(x) &= \int_{\Sigma} \phi \circ S_1^x d\mathbb{P}_x = p(x)\phi(fx) + (1 - p(x))\phi(f^{-1}x) \\ &= \int_{\{f, f^{-1}\}} \phi(\alpha(x)) \tilde{p}(d\alpha, x). \end{aligned}$$

Por computação direta, para $n \geq 1$

$$P_f^n \phi(x) = \int_{\Sigma} \phi \circ S_n^x \cdot d\mathbb{P}_x.$$

Como mencionado anteriormente no Capítulo 2, após determinar o operador P_f , podemos agir por dualidade em $\mathcal{P}(M)$. Vale a pena chamar a atenção do leitor que P_f (como qualquer operador de Markov) define um núcleo de probabilidade de transição ¹ $P : M \times \mathcal{B}_M \rightarrow [0, 1]$ com

$$P(x, A) = P(\mathbf{1}_A)(x) := P_f(\mathbf{1}_A)(x),$$

onde $\mathbf{1}_A$ é a função indicadora de $A \in \mathcal{B}_M$.

Denote por $\Omega := M^{\mathbb{N}}$ equipado com a topologia produto, e seja \mathcal{B}_{Ω} a sua

¹O uso da mesma letra para o operador Markov e seu núcleo de probabilidade associado é prática comum.

σ -álgebra produto. Para $n \in \mathbb{N}$ escrevemos $X_n : \Omega \rightarrow M$ a projeção

$$X_n(\omega) = \omega_n,$$

e seja $\mathcal{B}_\Omega^{(n)}$ a sub- σ -álgebra de \mathcal{B}_Ω gerada por $\{X_0, \dots, X_n\}$. Se $A \in \mathcal{B}_M$ e $n \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$[A]_n := \{\omega \in \Omega : \omega_n \in A\} = X_n^{-1}(A).$$

3.1 Esperança Condicional

Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mathbb{Q})$ e $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}_\Omega$ uma sub- σ -álgebra, existe um operador linear positivo $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{B}') : L^1(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mathbb{Q}) \rightarrow L^1(\Omega, \mathcal{B}', \mathbb{Q})$ tal que para $\psi \in L^1(\mathcal{B}_\Omega)$, $\mathbb{E}(\psi|\mathcal{B}')$ é a esperança condicional de ψ com respeito a \mathcal{B}' e é caracterizado por:

1. $\mathbb{E}(\psi|\mathcal{B}')$ é \mathcal{B}' -mensurável.
2. $\int_A \mathbb{E}(\psi|\mathcal{B}')d\mathbb{Q} = \int_A \psi d\mathbb{Q}$ para todo $A \in \mathcal{B}'$.

Segue que para todo $p \geq 1$, $\|\mathbb{E}(\psi|\mathcal{B}')\|_p \leq \|\psi\|_p$. Quando $\psi = \mathbb{1}_A$ com $A \in \mathcal{B}_M$, escrevemos

$$\mathbb{Q}(A|\mathcal{B}') = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{B}')$$

e chamamos $\mathbb{Q}(A|\mathcal{B}')$ a medida condicional de A relativa a \mathcal{B}' . O próximo teorema pode ser encontrado, por exemplo, em [26], Capítulo V.

Teorema 3.1.1. *Dado $\mu \in \mathcal{P}(M)$ existe uma única medida de probabilidade \mathbb{Q}_μ com respeito a \mathcal{B}_Ω tal que*

- $(X_0)_*\mathbb{Q}_\mu = \mu$.
- $A \in \mathcal{B}_\Omega, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q}_\mu([A]_{n+1}|\mathcal{B}_\Omega^{(n)})(\omega) = P(\omega_n, A)$.

Observamos que dado $A_0 \in \mathcal{B}(M)$, temos que $(X_0)_*\mathbb{Q}_\mu(A_0) = \mathbb{Q}_\mu(X_0^{-1}(A_0)) = \mu(A_0)$, isto é, $\mathbb{Q}_\mu(A_0 \times M \times M \times \dots) = \mu(A_0) = \int_M \mathbb{1}_{A_0}(\omega_0)d\mu(\omega_0)$. Além disso,

$$\mathbb{Q}_\mu(A_0 \times A_1 \times M \times M \times \dots) = \int_{A_0 \times A_1} P(\omega_0, d\omega_1)d\mu(\omega_0).$$

Indutivamente podemos medir qualquer conjunto da forma $A_0 \times A_1 \times \dots \times A_n \times M \times M \times \dots$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_\mu(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_n \times M \times M \times \dots) = \\ \int \left[\int \mathbb{1}_{A_0 \times \dots \times A_n}(\omega) P(\omega_{n-1}, d\omega_n) \cdots P(\omega_0, d\omega_1) \right] d\mu(\omega_0). \end{aligned}$$

Mais ainda, se $f : M^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de $n + 1$ variáveis, então

$$\begin{aligned} & \int f(X_0(\omega), \dots, X_n(\omega)) d\mathbb{Q}_\mu(\omega) \\ &= \int \left[\int f(\omega_0, \dots, \omega_n) P(\omega_{n-1}, d\omega_n) \cdots P(\omega_0, d\omega_1) \right] d\mu(\omega_0). \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.1. No caso em que $\mu = \delta_x$, $x \in M$, temos que \mathbb{Q}_{δ_x} é suportada em $\{\omega : \omega_0 = x\}$. Com efeito, observemos que $\mathbb{Q}_{\delta_x}(\{w : w_0 = x\}^c) = 1 - \mathbb{Q}_{\delta_x}(\{w : w_0 = x\}) = \delta_x(\Omega \setminus x) = 0$. Além disso, indutivamente segue que

$$\begin{aligned} & \mathbb{Q}_{\delta_x}(\{\omega : \omega_0 = x, \omega_1 = \alpha_1(x), \omega_2 = \alpha_2\alpha_1(x), \dots, \omega_n = \alpha_n \cdots \alpha_1(x)\}) \\ &= \tilde{p}(\alpha_1, x) \tilde{p}(\alpha_2, \alpha_1(x)) \cdots \tilde{p}(\alpha_n, \alpha_{n-1}\alpha_{n-2} \cdots \alpha_1(x)) = \mathbb{P}_x([\alpha_1, \dots, \alpha_n]). \end{aligned}$$

Lema 3.1.1. Seja $T : \Omega \rightarrow \Omega$ a aplicação shift. Dado uma medida $\mu \in \mathcal{P}(M)$, temos que $T_*\mathbb{Q}_\mu = \mathbb{Q}_{P^*\mu}$.

Demonstração. Dada $\mu \in \mathcal{P}(M)$, pelo Teorema 3.1.1, existe única medida $\mathbb{Q}_{P_f^*\mu}$ tal que $(X_0)_*\mathbb{Q}_{P_f^*\mu} = P_f^*\mu$ e $\mathbb{Q}_{P_f^*\mu}([A]_{n+1} | \mathcal{B}_\Omega^{(n)})(w) = P(w_n, A)$ para todo $A \in \mathcal{B}_\Omega$. Observe-mos que

$$P_f^*\mu(\mathbb{1}_A) = \int P_f \mathbb{1}_A(x) d\mu(x) = \int P(x, A) d\mu(x).$$

Por outro lado,

$$(X_n)_*(T_*\mathbb{Q}_\mu)(A) = \mathbb{Q}_\mu(T^{-1} \circ X_n^{-1}(A)) = \mathbb{Q}_\mu([A]_{n+1}).$$

Portanto, quando $n = 0$, temos que

$$(X_0)_*(T_*\mathbb{Q}_\mu)(A) = \mathbb{Q}_\mu([A]_1) = \int P(w_0, A) d\mu(w_0) = P_f^*\mu(A).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} T_*\mathbb{Q}_\mu([A]_{n+1} | \mathcal{B}_\Omega^{(n)})(w) &= \mathbb{E}_{T_*\mathbb{Q}_\mu}(\mathbb{1}_{[A]_{n+1}} | \mathcal{B}_\Omega^{(n)})(w) = \mathbb{E}_{T_*\mathbb{Q}_\mu}(\mathbb{1}_{[A]_n} \circ T | \mathcal{B}_\Omega^{(n)})(w) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\mu}(\mathbb{1}_{[A]_n} | \mathcal{B}_\Omega^{(n-1)})(Tw) = \mathbb{Q}_\mu([A]_n | \mathcal{B}_\Omega^{(n-1)})(Tw) \\ &= P(w_n, A). \end{aligned}$$

Pela unicidade do Teorema 3.1.1 obtemos

$$T_*\mathbb{Q}_\mu = \mathbb{Q}_{P^*\mu}.$$

□

Assim para toda medida P -estacionária ν em M nós temos um sistema

dinâmico $T : (\Omega, \mathbb{Q}_\nu) \rightarrow (\Omega, \mathbb{Q}_\nu)$, uma vez que $T_*\mathbb{Q}_\nu = \mathbb{Q}_\nu$.

Definição 3.1.1. *O sistema dinâmico $T : (\Omega, \mathbb{Q}_\nu) \rightarrow (\Omega, \mathbb{Q}_\nu)$ será referido como sistema dinâmico associado ao passeio aleatório (determinado por f e com medida estacionária ν).*

Vamos exibir a relação entre T e o skew product F definido em (3.1). Seja $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \Sigma$ e defina $\Phi : \Sigma \times M \rightarrow \Omega$ tal que

$$\Phi(\alpha, x) = (x, \alpha_1(x), \alpha_2 \circ \alpha_1(x), \dots). \quad (3.2)$$

Notemos que $\Phi \circ F = T \circ \Phi$ e para cada $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{B}_M$ temos que

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_n \times M \times M \times \dots) &= \bigcap_{k=0}^n F^{-k}(\Sigma \times A_k) \\ &= \{(\alpha, x) : x \in A_0, \alpha_1(x) \in A_1, \dots, \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1(x) \in A_n\} \in \mathcal{B}_X. \end{aligned}$$

Observemos que Φ é invertível, exceto quando ω contém um ponto $x \in M$ satisfazendo $f^2x = x$. O conjunto de órbitas periódicas para (perturbações) do fluxo geodésico tem medida de Lebesgue zero; portanto, se a medida estacionária ν for equivalente a Lebesgue, podemos ignorar esses pontos periódicos.

$$\begin{array}{ccc} (\Sigma \times M, \mathcal{B}_C, m_C) & \xrightarrow{F} & (\Sigma \times M, \mathcal{B}_C, m_C) & (\Sigma \times M, \mathcal{B}_C, \mathbb{P}_x) & \xrightarrow{F} & (\Sigma \times M, \mathcal{B}_C, \mathbb{P}_x) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi & \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mathbb{Q}_\nu) & \xrightarrow{T} & (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mathbb{Q}_\nu) & (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mathbb{Q}_{\delta_x}) & \xrightarrow{T} & (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mathbb{Q}_{\delta_x}) \end{array}$$

Figura 3.2: Conjugação

Considerando $X := \Sigma \times M$, defina $\mathcal{B}_C := \Phi^{-1}(\mathcal{B}_\Omega)$ e usamos Φ para induzir medidas $m_C, m_x = \mathbb{P}_x \in \mathcal{P}(X)$ tais que $\Phi_*m_C = \mathbb{Q}_\nu, \Phi_*m_x = \mathbb{Q}_{\delta_x}$; em particular, as aplicações

$$\Phi : (X, \mathcal{B}_C, m_C) \rightarrow (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mathbb{Q}_\nu)$$

$$\Phi : (X, \mathcal{B}_C, \mathbb{P}_x) \rightarrow (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mathbb{Q}_{\delta_x})$$

são isomorfismos de medidas (measure-theoretic isomorphisms). Ver Figura 3.2.

Finalmente, notemos que $F : (X, \mathcal{B}_C) \rightarrow (X, \mathcal{B}_X)$ é mensurável, e uma vez que $\Phi \circ F = T \circ \Phi$, temos que $F_*m_c = m_c$ pois dado $A_1 \in \mathcal{B}_X$, existe $A \in \Omega$ tal que $\Phi^{-1}(A) = A_1$. Assim,

$$\Phi_*m_c(A) = m_c(\Phi^{-1}(A)) = \mathbb{Q}_\nu(A)$$

e

$$m_c(F^{-1} \circ \Phi^{-1}(A)) = m_c(\Phi^{-1} \circ T^{-1}(A)) = \mathbb{Q}_\nu(T^{-1}(A)) = \mathbb{Q}_\nu(A).$$

Portanto:

Proposição 3.1.1. *A aplicação $\Phi : (X, \mathcal{B}_C, m_c) \rightarrow (\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mathbb{Q}_\nu)$ é uma conjugação de (F, m_c) e (T, \mathbb{Q}_ν) , uma vez que*

1. Φ seja um isomorfismo de medidas.
2. $\Phi \circ F = T \circ \Phi$.

A proposição acima nos diz que podemos usar o skew-product (3.1) para estudar a dinâmica dos passeios aleatórios definidos por P , mas precisamos usar uma σ -álgebra diferente em X . Agora queremos entender a relação entre as medidas m_x e m_C .

3.2 Desintegração de medidas

Antes definir uma desintegração de uma medida μ , consideremos (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de Lebesgue, isto é, um isomorfismo de medida com o intervalo unitário equipado com a σ -álgebra de Lebesgue e uma medida de Lebesgue-Stieltjes. Seja \mathcal{H} uma partição de X em conjuntos mensuráveis. Consideremos também:

- a) $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{H}$ a projeção natural, isto é, $\pi(x) = H$ se $x \in H \subset \mathcal{H}$,
- b) $\hat{\mathcal{B}} = \{G \subset \mathcal{H} : \pi^{-1}(G) \in \mathcal{B}\}$,
- c) $\hat{\mu}(G) = \mu(\pi^{-1}(G))$ para todo $G \in \hat{\mathcal{B}}$.

Com isso, $(X/\mathcal{H}, \hat{\mathcal{B}}, \hat{\mu})$ é um espaço de probabilidade.

Definição 3.2.1. *Uma desintegração de uma medida μ relativamente a uma partição \mathcal{H} é uma família $\{\mu^H : H \in \mathcal{H}\}$ de probabilidades (condicionais) em X tal que:*

- i) $\mu^H(H) = 1$ para $\hat{\mu}$ -quase todo $H \in \mathcal{H}$;
- ii) a função $H \mapsto \mu^H(E)$ é mensurável para todo $E \subseteq \mathcal{B}$;
- iii) $\mu(E) = \int \mu^H(E) d\hat{\mu}(H)$ para todo $E \subseteq \mathcal{B}$.

Uma partição \mathcal{H} é mensurável se $\{X/\mathcal{H}, \hat{\mathcal{B}}, \hat{\mu}\}$ for um espaço de Lebesgue. O próximo teorema foi provado em [31].

Teorema 3.2.1. *Seja \mathcal{H} uma partição mensurável de um espaço métrico compacto X e μ uma medida de probabilidade. Então μ admite alguma desintegração relativamente a \mathcal{H} .*

Proposição 3.2.1. *Seja $H = \{\Sigma \times \{x\}\}_{x \in M}$ uma partição de $\Sigma \times M$. Então $\{\mathbb{P}_x\}_{x \in M}$ é a desintegração de m_C com respeito a partição H , e a medida quociente $X/H \approx M$ é ν .*

Demonstração. Sejam δ_x e ν medidas em M . Pelo Teorema 3.1.1 existem (únicas) medidas \mathbb{Q}_{δ_x} e \mathbb{Q}_ν tais que $(X_0)_*\mathbb{Q}_{\delta_x} = \delta_x$ e $(X_0)_*\mathbb{Q}_\nu = \nu$. Tomando a partição de Ω como $\{w : w_0 = x\}_{x \in M}$, uma vez que $\mathbb{Q}_{\delta_x}(\{w : w_0 = x\}) = 1$ e que

$$\nu(A) = \mathbb{Q}_\nu(X_0^{-1}(A)) = \int \delta_x(A) d\nu(x) = \int \mathbb{Q}_{\delta_x}(X_0^{-1}(A)) d\nu(x),$$

segue que $\{\mathbb{Q}_{\delta_x}\}_{x \in M}$ é a desintegração de \mathbb{Q}_ν cuja medida quociente é ν . Por fim, como $\Phi_*m_C = \mathbb{Q}_\nu$ e $\Phi_*\mathbb{P}_x = \mathbb{Q}_{\delta_x}$, segue que

$$m_C(\Phi^{-1} \circ X_0^{-1}(A)) = \int \mathbb{P}_x(\Phi^{-1} \circ X_0^{-1}(A)) d\nu(x).$$

Portanto $\{\mathbb{P}_x\}_{x \in M}$ é a desintegração de m_C com respeito a partição H cuja medida quociente é ν . \square

Exemplo 3.2.1. *Assuma que $p(x) \equiv p$ uma constante. Então $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}$ não depende de x e é dada pela medida (produto) de Bernoulli $(p, 1-p)^{\mathbb{Z}^+}$ em Σ . Isso implica que $m_C = \mathbb{P} \times \nu$ é a medida produto, e assim se estende a toda σ -álgebra \mathcal{B}_X . A extensão é F -invariante. O sistema resultante é chamado de sistema dinâmico aleatório (localmente constante), e é muito mais estudado do que o seu equivalente em T . Ver por exemplo [23].*

3.3 Medidas Absolutamente contínuas

Focaremos agora nossa atenção no problema da existência de medidas P -estacionárias com propriedades dinâmicas adicionais. Observamos que pela forma do operador P , verifica-se que se ν é P -estacionária, então em particular é f -quase invariante. A saber, $f_*^{-1}\nu$ é absolutamente contínua em relação a ν . De fato, se $P_f^*\nu = \nu$ e $\nu(A) = 0$, tem-se que

$$0 = P_f^*\nu(\mathbb{1}_A) = \int_M P_f(\mathbb{1}_A) d\nu = 0.$$

Uma vez que as funções $P_f \geq 0, p > 0$ e $p + q = 1$, segue que

$$0 = \int_M \mathbb{1}_A \circ f^{-1} d\nu = f_*^{-1} \nu(\mathbb{1}_A),$$

ou seja, $f_*^{-1} \nu$ é absolutamente contínua com respeito a ν . Portanto existe uma função h tal que $f_*^{-1} \nu = h\nu$.

Dada uma medida f -quase invariante ν , $f_*^{-1} \nu = h\nu$, se ν for equivalente a μ (a medida f -invariante) com densidade ρ , então

$$\begin{aligned} \nu = \rho \cdot \mu &\Rightarrow f_*^{-1} \nu = f_*^{-1}(\rho \cdot \mu) = \rho \circ f \cdot \mu = h\nu = h\rho\mu \\ &\Rightarrow h = \frac{\rho \circ f}{\rho} \end{aligned}$$

e em particular $\log h = u \circ f - u$ é um cobordo para f . É (parte de) um resultado devido a J.P. Conze e Y. Guivar'c que no caso simétrico o fato de $\log \frac{p}{1-p}$ ser um cobordo é equivalente à existência de uma medida P -estacionária ν equivalente a μ (assumindo ergodicidade de μ).

Para o restante do trabalho, fixamos:

- μ uma medida f -invariante ergódica.
- $p : M \rightarrow (0, 1)$ contínua satisfazendo a seguinte condição de simetria

$$\int_M \log \varphi(x) d\mu(x) = 0,$$

onde $\varphi(x) := \frac{p(x)}{q(x)}, q(x) := 1 - p(x)$.

O próximo Teorema foi provado em [9].

Teorema 3.3.1. *Assumindo as hipóteses acima, existe uma medida P -estacionária ν equivalente a μ se, e somente se, $\log \varphi = \log \frac{p}{1-p}$ é um (integrável) cobordo sobre f , isto é, existe $\phi \in L^1(\mu), \phi > 0$ tal que*

$$\log \varphi = \phi \circ f - \phi.$$

Em [9] o resultado é enunciado mudando ‘ $\log \varphi = \log \frac{p}{1-p}$ é cobordo sobre f ’ por ‘existe ψ mensurável tal que $\frac{p}{q \circ f} = \frac{\psi \circ f}{\psi}$ ’, porém são equivalentes. De fato, se

$$\frac{p}{q \circ f} = \frac{\pi \circ f}{\pi} \tag{3.3}$$

então

$$\frac{p}{q} = \frac{(\pi \cdot q) \circ f}{\pi \cdot q}.$$

Enquanto que se

$$\frac{p}{q} = \frac{\psi \circ f}{\psi} \quad (3.4)$$

então

$$\frac{p}{q \circ f} = \frac{(\frac{\psi}{q}) \circ f}{\frac{\psi}{q}}.$$

Também vale ressaltar que se temos (3.3), então $\nu = \pi\mu$ é P -estacionária. De fato, se (3.3) é válida, então $p \cdot \pi = (q \cdot \pi) \circ f$. Usando o operador adjunto P_f^\dagger , temos que

$$P_f^\dagger(\pi) = (p \cdot \pi) \circ f^{-1} + (q \cdot \pi) \circ f = q \cdot \pi + p \cdot \pi = \pi.$$

Portanto, pela Proposição 2.1.1, temos que $\pi\mu$ é P -estacionária.

Em relação à unicidade da medida P -estacionária ν equivalente a μ , é consequência do Teorema Ergódico de Hopf. Para mais detalhes ver Proposição 2.3 em [9].

Capítulo 4

Existência de medida estacionária

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de difeomorfismo parcialmente hiperbólico e citar algumas de suas propriedades com o intuito de demonstrar o Teorema 2.3.1, que é o teorema que caracteriza a existência de uma medida estacionária para o passeio aleatório determinado pelo tempo 1 do fluxo geodésico.

4.1 Hiperbolicidade Parcial

Consideremos uma variedade fechada hiperbólica S , $M = T^1S$ e $f : M \rightarrow M$ o tempo 1 do fluxo geodésico. Essa aplicação é um exemplo de um difeomorfismo *parcialmente hiperbólico*, cuja definição é lembrada abaixo.

Todas as variedade consideradas serão conexas e paracompactas. Por subvariedades, queremos dizer uma subvariedade imersa. Se M, N são subvariedades, então $\text{Emb}^r(M, N)$ denota o conjunto de todas os mergulhos de M em N cuja classe de diferenciabilidade é \mathcal{C}^r .

Definição 4.1.1. *Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ em uma variedade Riemanniana compacta M é parcialmente hiperbólico se existe uma decomposição contínua do fibrado tangente $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ e uma métrica Riemanniana em M tal que para todo $x \in M$, para todo vetor unitário $v^* \in E^*$, $*$ = s, c, u vale que*

$$\|Df_x(v^s)\| < \min\{1, \|Df_x(v^c)\|\} \text{ e } \max\{1, \|Df_x(v^c)\|\} < \|Df_x(v^u)\|.$$

As direções E^s, E^c e E^u são chamadas de direção estável, central e instável para f respectivamente. Hiperbolicidade parcial é um condição \mathcal{C}^1 -aberta, isto é, existe uma \mathcal{C}^1 -vizinhança aberta de f no qual toda g nessa vizinhança é também parcialmente hiperbólica. Para mais detalhes ver [29].

Um difeomorfismo parcialmente hiperbólico $f : M \rightarrow M$ satisfaz a propriedade center bunching se

$$\| Df(x)|_{E^s} \| < \frac{m(Df(x)|_{E^c})}{\| Df(x)|_{E^c} \|} \leq \frac{\| Df(x)|_{E^c} \|}{m(DF(x)|_{E^c})} < \| Df(x)|_{E^u} \|$$

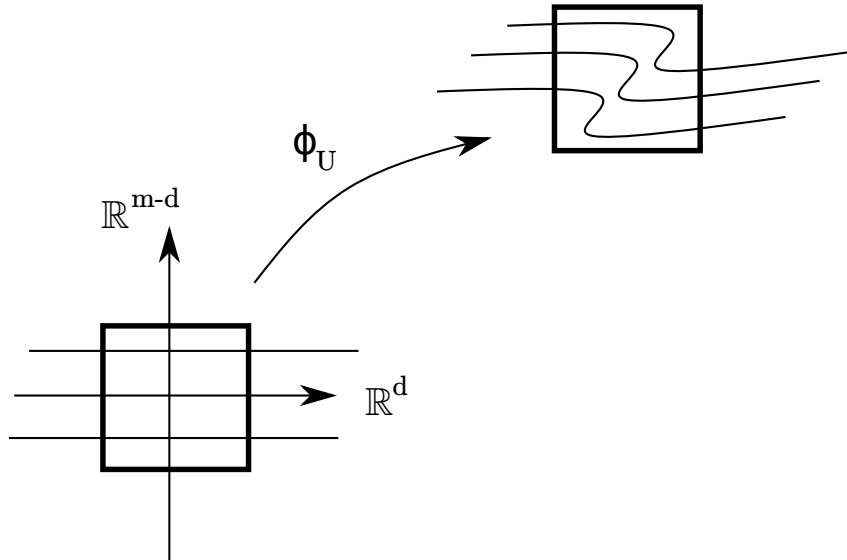
para todo $x \in M$, onde $m(Df(x)|_{E^c}) := \| Df^{-1}(f(x))|_{E^s} \|^{-1}$ chamada de conorma de $Df(x)|_{E^c}$.

Vamos agora dar um conceito de folheação.

Definição 4.1.2. *Seja M uma variedade de dimensão m e $\mathcal{W} = \{W(x)\}_{x \in M}$ uma partição \mathcal{C}^r em subvariedades de mesma dimensão d . Dizemos que \mathcal{F} é uma folheação se existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U\}$ de M , e para cada $U \in \mathcal{U}$ existe uma função contínua $\phi_U : (-1, 1)^{m-d} \rightarrow \text{Emb}^r((-1, 1)^d, M)$ satisfazendo o seguinte*

1. *Se $x \in U$ então existe único $v \in (-1, 1)^{m-d}$ e $h \in (-1, 1)^d$ tal que $\phi_U(v)(h) = x$. Além disso, a imagem de $\phi_U(v)$ é uma componente conexa $W(x) \cap U$ contendo x .*
2. *Se $U \cap U'$ então a mudança de coordenadas $\phi_{U',U} : (-1, 1)^{m-d} \rightarrow (-1, 1)^{m-d}$, $\phi_{U'}(v) = v'$ se e somente se $\phi_U(v)(h) = \phi_{U'}(v')(h')$ é contínua.*

Se a mudança de coordenadas acima for diferenciável nós dizemos que \mathcal{W} é uma folheação diferenciável, além disso, $W(x)$ são folhas da folheação.



Se \mathcal{W} é uma folheação então $T\mathcal{W} = \bigsqcup_x TW(x)$ é um sub-fibrado TM , ou seja, tangente as folhas. Reciprocamente:

Definição 4.1.3. *O sub-fibrado $E \subset TM$ é dito integrável se existe uma folheação \mathcal{W} em M tal que $T\mathcal{W} = E$.*

Agora voltamos ao contexto de parcialmente hiperbólico. Pelo Teorema da Variedade estável de Hadamard-Perron (cf. [19]) ambas E^s, E^u são integráveis com folheações f -invariante W^s, W^u (invariância significa que f permuta as folhas de W^* com $* = s, u$). Além disso, se $d_{W^*(x)}$ denota a distância intrínseca induzida pela métrica Riemanniana na folha $W^*(x)$, então pode-se verificar que para $\lambda < 1$, segue que

$$y, y' \in W^s(x) \Rightarrow d_{W^s(f^n x)}(f^n y, f^n y') \leq C\lambda^n d_{W^s(x)}(y, y') \quad \forall n \geq 0 \quad (4.1)$$

$$z, z' \in W^u(x) \Rightarrow d_{W^u(f^{-n} x)}(f^{-n} z, f^{-n} z') \leq C\lambda^n d_{W^u(x)}(z, z') \quad \forall n \geq 0. \quad (4.2)$$

Por outro lado, o fibrado E^c não é sempre integrável. Dizemos que um difeomorfismo parcialmente hiperbólico f é *dinamicamente coerente* se os sub-fibrados $E^{cs} := E^s \oplus E^c$ e $E^{cu} := E^c \oplus E^u$ são integráveis com folheações W^{cs}, W^{cu} f -invariante. Se f é dinamicamente coerente, então E^c é tangente a folheação $W^c := W^{cs} \cap W^{cu}$.

É um resultado conhecido que o tempo 1 do fluxo geodésico mencionado anteriormente é dinamicamente coerente, com dimensão central igual a 1 tangente às linhas do fluxo. Não apenas isso, sua folheação central é de fato diferenciável. Além disso, pequenas C^1 -perturbações do fluxo geodésico são dinamicamente coerentes. Isso é feito na prova do Teorema B abaixo.

Este raramente é o caso; de fato, se um pequeno volume preservando a perturbação de f tem centro diferenciável, então, em particular, é o tempo 1 de um fluxo (hiperbólico) conservativo, que impõe uma restrição muito forte à existência de tais funções. Ver [3].

Um difeomorfismo f parcialmente hiperbólico é dito *acessível* se qualquer par $x, y \in M$ pode ser conectado por um $s - u$ caminho, isto é, um caminho composto por segmentos que sempre se encontram W^s ou W^u . Dizemos que f é *C^r -estavelmente acessível* se para todo g suficientemente C^r -próximo a f é acessível. Foi originalmente provado por Katok and Kononenko [21] que o tempo 1 do fluxo geodésico correspondente a uma variedade hiperbólica é C^r -estavelmente acessível.

Por fim, observemos que se C for um $s - u$ loop correspondente a um difeomorfismo f parcialmente hiperbólico (cf. Definição 2.3.1), os funcionais $F(C; x_i \rightarrow x_{i+1})$ que aparecem na definição de $F(C)$ estão bem definidos no espaço das funções Hölder contínuas, em virtude de (4.1) (4.2).

4.2 A Prova do Teorema 2.3.1

Nesta seção, reuniremos tudo o que foi discutido anteriormente e demonstraremos um resultado que implicará o Teorema 2.3.1. Vamos fixar M uma variedade compacta e μ um volume suave em M . O conjunto $\text{Diff}^r(M)$ consiste nos

C^r -difeomorfismos de M .

Enunciaremos agora parte de um teorema e um corolário que foram demonstrados em [35] que serão fundamentais para a demonstração do resultado proposto nesta seção.

Teorema 4.2.1. *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico e acessível, $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ Holder contínua, c uma constante e a equação cohomológica*

$$\varphi = \phi \circ f - \phi + c. \quad (4.3)$$

1. *Se f é C^1 , então (4.3) tem solução contínua ϕ para algum $c \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $F(C)(\varphi) = 0$ para todo $s - u$ loop C .*
2. *Se f é C^1 , então toda solução de (4.3) é Holder contínua.*
3. *Suponha que f seja um difeomorfismo C^1 , center bunched e que preserve volume. Se existe solução mensurável ϕ de (4.3), então existe solução contínua $\psi = \phi$ em quase todo ponto.*

Corolário 4.2.1. *Seja f um difeomorfismo parcialmente hiperbólico e acessível. Assuma que para alguma métrica Riemanniana $Df|_{E^c}$ é uma isometria. Considere $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ . Suponha que exista uma função $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi = \phi \circ f - \phi.$$

Então ϕ é C^∞ . Além disso, se f preserva volume, solução mensurável se estende para uma solução C^∞ .

Para qualquer inteiro $k \geq 2$, existe uma C^1 vizinhança U de f em $\text{Diff}^k(M)$ tal que, para todo $g \in U$, e toda função $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, se

$$\varphi = \phi \circ g - \phi$$

tem solução contínua ϕ , então ϕ é C^r , para $r < k - 1$. Se g preserva volume, então solução mensurável estende para uma solução C^r .

Vamos agora enunciar e provar o teorema que caracteriza a existência da medida estacionária para o passeio aleatório para um difeomorfismo parcialmente hiperbólico.

Teorema 4.2.2. *Suponha que $f : M \rightarrow M \in C^\infty(M)$, é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico acessível satisfazendo;*

1. $\dim E^c = 1$.

2. Para alguma métrica Riemanniana $Df|_{E^c}$ é uma isometria.

3. f preserva a medida volume μ .

Seja $p : M \rightarrow (0, 1)$ uma função Hölder contínua, $q = 1 - p$, $\varphi = \frac{p}{q}$ e assumamos que $\int_M \log \varphi \cdot d\mu = 0$. Então existe uma \mathcal{C}^2 -vizinhança aberta N de f tal que se $g \in N$, $g_*\mu = \mu$ então: o passeio aleatório em M determinado por (g, p) tem medida P -estacionária equivalente a μ se, e somente se, para todo $s - u$ loop o funcional associado a C é tal que $F(C)(\log \phi) = 0$.

Além disso, a densidade da medida P -estacionária é contínua. Se p é diferenciável, então a medida P -estacionária é um volume suave M .

Demonstração. Começamos observando que, devido ao Corolário 7.6 em [17], o difeomorfismo f é dinamicamente coerente, e usando em conjunto com o Teorema 7.4 em [19], obtemos que o mesmo também vale para uma pequena \mathcal{C}^1 -perturbação. Foi provado em [18] que f é também \mathcal{C}^r -estavelmente acessível, para qualquer $r \geq 2$.

Nesse contexto, também temos que f é \mathcal{C}^2 -estavelmente ergódico, significando que existe uma \mathcal{C}^2 -vizinhança aberta N de f , de forma que cada $g \in N$ preservando μ seja (parcialmente hiperbólico e) ergódico (em particular, μ é uma medida ergódica para f). Veja o Teorema A [30] (observamos que a condição técnica de *center bunching* nas hipóteses desse teorema é imediata para perturbações de aplicações parcialmente hiperbólicos que atuam como uma isometria em seus centros).

Como consequência, existe N uma \mathcal{C}^2 -vizinhança aberta de f , de modo que se $g \in N$ e $g_*\mu = \mu$ então

- μ é uma medida ergódica para g .
- g é acessível.

Vamos fixar $g \in N$ que preserva medida μ . Pelo Teorema 3.3.1, a existência de uma medida P -estacionária ν equivalente a μ , é equivalente à existência de uma solução mensurável da equação cohomológica

$$\log \varphi = \phi \circ g - \phi.$$

Por outro lado, como φ é Hölder contínua, seu logaritmo também é Hölder contínuo e, em seguida, pelo Teorema 4.2.1 (Teorema A de [35]) temos que:

1. a existência de uma solução contínua para a equação anterior é equivalente a $F_g(C)(\log \varphi) = 0$ associado ao $s - u$ loop C , qualquer que seja φ . Observemos que no caso em que estamos trabalhando, a constante c dada em 4.2.1 é nula, pois g preserva a medida μ e $\int_M \varphi \cdot d\mu = 0$.

2. a existência de uma solução mensurável implica a existência de uma solução contínua.

Isto prova a primeira parte.

Supondo que p seja diferenciável, obtemos pelo Corolário 4.2.1 (Corolário 0.2 de [35]) que soluções da equação cohomológica são automaticamente suaves. Uma vez que a solução é a densidade da medida estacionária, como explicado após o Teorema 3.3.1, temos que a medida ν é um volume suave. \square

Como conclusão, notemos que o tempo 1 do fluxo geodésico na variedade hiperbólica correspondente satisfaz as hipóteses do teorema acima e, portanto, o Teorema 2.3.1 é um corolário direto do Teorema 4.2.2.

4.3 Difeomorfismo de Anosov

Nesta seção veremos que o Teorema 4.2.2 é também válido quando f é um difeomorfismo de Anosov de Classe \mathcal{C}^2 .

Definição 4.3.1. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo e seja $\Lambda \subset M$ compacto f -invariante. Dizemos que Λ é hiperbólico se existem constantes $C > 0, \lambda \in (0, 1)$ e para todo $x \in M$ existe $E^s(x) \subset T_x M, E^u(x) \subset T_x M$ tais que*

1. $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$,
2. Para $*$ = s, u temos que $Df_x(E^*) = E^*(f(x))$,
3. $\|Df_x^n(v^s)\| \leq C\lambda^n \|v^s\|$ para todo $v^s \in E^s(x), n \geq 0$,
4. $\|Df_x^{-n}(v^u)\| \leq C\lambda^n \|v^u\|$ para todo $v^u \in E^u(x), n \geq 0$.

Os subespaços E^s, E^u são chamados de subespaço estável e instável respectivamente. Se $\Lambda = M$, dizemos que f é um difeomorfismo de Anosov. Indicaremos apenas as modificações necessárias para a prova do próximo teorema. Para mais detalhes ver [9], [20].

Teorema 4.3.1. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de Anosov conservativo de classe $\mathcal{C}^2, p : M \rightarrow (0, 1)$ uma função Hölder contínua, $q = 1 - p$ e $\varphi = \frac{p}{q}$. Então existe uma \mathcal{C}^2 -vizinhança aberta N de f tal que se $g \in N$ é conservativo então: o passeio aleatório determinado por (g, p) tem medida P -estacionária equivalente ao volume de M se, e somente se, para toda probabilidade g -invariante η tem-se que $\int_M \log \varphi d\eta = 0$.*

Além disso, a densidade da medida P -estacionária é contínua. Se p é diferenciável, então a medida P -estacionária é volume suave em M .

Demonstração. Observamos inicialmente que \mathcal{C}^2 -difeomorfismos de Anosov conservativos são \mathcal{C}^2 -estavelmente ergódicos, como foi provado por Anosov em [2]. Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de Anosov e $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função Hölder contínua, então a equação cohomológica $\varphi = \phi \circ f - \phi$ tem solução se, e somente se, $\int \log \varphi d\eta = 0$ para toda medida η invariante por f . A solução dessa equação, caso exista, também tem propriedades rígidas como no Teorema 4.2.2, isto é, se φ diferenciável então a solução é diferenciável. Para mais detalhes ver [16]. \square

Uma equivalência sobre existência da solução da equação cohomológica no caso em que f é um difeomorfismo de Anosov pode ser encontrada em [35], que nos diz: Se $f : M \rightarrow M$ é um \mathcal{C}^1 -difeomorfismo de Anosov transitivo, então a equação cohomológica $\varphi = \phi \circ f - \phi$ tem solução contínua se, e somente se, $\sum_{x \in \mathcal{O}} \varphi(x) = 0$ para toda órbita f -periódica \mathcal{O} .

Capítulo 5

Consequências Dinâmicas

Neste capítulo, vamos deduzir algumas consequências para a dinâmica do shift T assumindo a existência de uma medida estacionária equivalente a Lebesgue, e também que (conforme dado pelo Teorema 4.2.2), a densidade de ν em relação a μ seja contínua.

Relembremos que dado uma medida μ ergódica para f , se o passeio aleatório determinado por (f, p) admite medida P -estacionária ν absolutamente contínua a μ , então a medida ν é única. Além disso, pelo Teorema 3.1.1, existe única medida \mathbb{Q}_ν em que:

- $(X_0)_* \mathbb{Q}_\nu = \nu$.
- $A \in \mathcal{B}_\Omega, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q}_\nu([A]_{n+1} | \mathcal{B}_\Omega^{(n)})(w) = P(\omega_n, A)$.

Pelo Lema 3.1.1, temos que \mathbb{Q}_ν é medida invariante para o shift T . Como consequência do Teorema 1.2 de [6], podemos concluir que o passeio aleatório determinado por (f, p) com distribuição inicial ν é ergódico. Portanto, a medida \mathbb{Q}_ν é de fato ergódica para o shift T . Sendo assim, assumiremos neste capítulo a ergodicidade do shift T .

Dada uma medida estacionária $\nu = \pi\mu$, o operador de Markov P_f induz um operador adjunto $P_f^\dagger : L^2(\nu) \rightarrow L^2(\nu)$ tal que $\int P_f \phi \cdot \psi \, d\nu = \int \phi \cdot P_f^\dagger \psi \, d\nu$. Nesse caso o operador será auto-adjunto, isto é, $P_f = P_f^\dagger$. De fato, usando a igualdade obtida em (3.3) e o fato de μ ser f -invariante, temos que:

$$\begin{aligned}
\int_M P_f \phi(x) \cdot \psi(x) \, d\nu(x) &= \int_M p(x)\phi(fx)\psi(x) + q(x)\phi(f^{-1}x)\psi(x) \, d\nu(x) \\
&= \int_M p(x)\pi(x)\phi(fx)\psi(x) + q(x)\pi(x)\phi(f^{-1}x)\psi(x) \, d\mu(x) \\
&= \int_M q(fx)\pi(fx)\phi(fx)\psi(x) + p(f^{-1}x)\pi(f^{-1}x)\phi(f^{-1}x)\psi(x) \, d\mu(x) \\
&= \int_M q(x)\pi(x)\phi(x)\psi(f^{-1}x) + p(x)\pi(x)\phi(x)\psi(fx) \, d\mu(x) \\
&= \int_M \phi(x) \cdot P_f \psi(x) \, d\nu(x).
\end{aligned}$$

5.1 Uma Lei dos Grandes Números e um Teorema Central do Limite

Sejam as funções $\phi \in L_p(M, \nu)$ e $\tilde{\phi} = \phi \circ X_0 \in L_p(\Omega, \mathbb{Q}_\nu)$ com $p \geq 1$. Pela desintegração da medida \mathbb{Q}_ν , sabemos que \mathbb{Q}_{δ_x} é suportada em $\{w : w_0 = x\}$. Isto é, $\int_\Omega \tilde{\phi}(w) d\mathbb{Q}_{\delta_x}(w) = \int_{\{w:w_0=x\}} \tilde{\phi}(w) d\mathbb{Q}_{\delta_x}(w)$. Então

$$\int \tilde{\phi}(w) d\mathbb{Q}_\nu(w) = \int \left(\int \phi \circ X_0(w) d\mathbb{Q}_{\delta_x}(w) \right) d\nu(x) = \int \phi(x) d\nu(x).$$

No skew-product mencionado anteriormente, pensamos em $\tilde{\phi}$ como uma função dependendo apenas de M nas coordenadas de $\Sigma \times M$. Para enunciar o próximo teorema, dizemos que uma cadeia de Markov é ergódica quando o shift T é ergódico e a cadeia vai ser estacionária quando a medida for estacionária. Temos, em [15], o seguinte teorema.

Teorema 5.1.1. *Sejam $(X_n)_n$ uma cadeia de Markov ergódica e estacionária e P operador de transição. Então, se $\phi \in L^2(\mu)$ e existe solução de*

$$\phi = \psi - P\psi$$

então

$$\frac{\phi(X_1) + \cdots + \phi(X_n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{dist}} N(0, \sigma^2)$$

cuja variância é $\sigma^2 = \|\psi\|_{L^2(\mu)}^2 - \|P\psi\|_{L^2(\mu)}^2$.

Provaremos agora o seguinte teorema.

Teorema 5.1.2. *Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então para Lebesgue quase todo ponto $x \in M$ temos:*

1. Se $\phi \in L^1(M)$ então

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\alpha_k \cdots \alpha_1(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \phi d\nu \quad \mathbb{P}_x - q.t.p. (\alpha_k)_{k \geq 1} \in \Sigma.$$

2. Se $\phi = \psi - P\psi$ (ou, mais geralmente, $\phi = (I - P)^{1/2}\psi$) para algum $\psi \in L^2(\nu)$, então

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\alpha_k \cdots \alpha_1(x)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{dist}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \mathbb{P}_x - q.t.p. (\alpha_k)_{k \geq 1} \in \Sigma,$$

onde $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ denota a distribuição normal centrada em zero e variância $\sigma^2 = \|\psi\|_{L^2(\nu)}^2 - \|P\psi\|_{L^2(\nu)}^2$.

Demonstração. Observamos inicialmente que a densidade da medida ν em relação a medida μ é contínua, então uma função $\phi \in L^r(M, \mu)$ representa também uma função em $L^r(M, \nu)$ e denotamos pela mesma letra. Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, para \mathbb{Q}_ν -quase todo $w \in \Omega$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\Phi}(T^k)(w) = \int \tilde{\Phi}(w) d\mathbb{Q}_\nu(w) = \int \phi(x) d\nu(x).$$

Lembramos que a medida \mathbb{Q}_ν é suportada em

$$\{w \in \Omega : w = (x, \alpha_1 x, \alpha_2 \alpha_1 x, \dots), \text{ com } x \in M \text{ e } (\alpha_k)_{k \geq 1} \in \Sigma\}.$$

Pela desintegração dada pela Proposição 3.2.1, concluímos que para ν -quase todo ponto $x \in M$ e para \mathbb{P}_x -quase todo $(\alpha_k)_{k \geq 1} \in \Sigma$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\Phi}(T^k)(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\alpha_k \cdots \alpha_1(x)) = \int \phi(x) d\nu(x).$$

Uma vez que ν é equivalente a μ , finalizamos a primeira parte.

Para a segunda parte, a cadeia de Markov $(X_n)_n$ que estamos trabalhando é estacionária e ergódica por hipótese. Pelo Teorema 5.1.1 (respectivamente, Kipnis e Varadhan [24] quando $\phi = (I - P_f)^{1/2}\psi$; notemos que $P_f^\dagger : L^2(\nu) \rightarrow L^2(\nu)$ é auto-adjunto)

$$\frac{\phi(X_1) + \cdots + \phi(X_n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{dist}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

para \mathbb{Q}_ν quase todo $\omega \in \Omega$. Por fim, pela desintegração da medida \mathbb{Q}_ν e pelo fato de ν ser equivalente a μ , segue que para Lebesgue quase todo $x \in M$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\alpha_k \cdots \alpha_1(x)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{dist}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \mathbb{P}_x - q.t.p. (\alpha_k)_{k \geq 1} \in \Sigma.$$

□

5.2 A Recorrência e o Expoente de Lyapunov para o Skew Product

Recordamos que um estado em uma cadeia de Markov é recorrente se, a qualquer momento, a partícula sair desse estado, ela pode retornar ao mesmo estado com probabilidade 1, caso contrário dizemos que o estado é transiente. Diz-se que uma cadeia de Markov é recorrente se todos os seus estados forem recorrentes. Em termos técnicos, definimos o tempo de primeiro retorno em x como $\tau_x := \inf\{n \geq 1 : S_n^x = x\}$, e portanto a cadeia de Markov é recorrente se $\mathbb{P}\{\tau_x < \infty\} = 1$ para todo x . Quando uma cadeia de Markov for irredutível, isto é, a probabilidade de um estado alcançar qualquer outro estado é positiva, é suficiente para a recorrência que $\mathbb{P}\{\tau_0 < \infty\} = 1$. Existem outras equivalências para recorrência de uma cadeia de Markov, ver por exemplo [13].

Vamos agora verificar algumas propriedades dinâmicas com respeito ao skew-product $F(\alpha, x) = (\sigma(\alpha), \alpha_1(x))$ definido em (3.1). Para cada $\alpha \in \Sigma$ fixado, definimos $F_\alpha : M \rightarrow M$ como a projeção na segunda coordenada de F , ou seja, $F_\alpha(x) = \pi_2(F(\alpha, x))$. Assim $F_\alpha^n(x) = \alpha_n \dots \alpha_1(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que x é recorrente para F_α se $x \in \omega_{F_\alpha}(x) := \{y \in M : \exists (n_k)_k \rightarrow \infty \text{ tal que } \lim_{k \rightarrow \infty} F_\alpha^{n_k}(x) = y\}$.

Denotamos por $\mathcal{O}_f(x)$ a órbita de x pelo tempo 1 do fluxo geodésico e por $\mathcal{O}_{F_\alpha}(x)$ a órbita de x pela projeção na segunda coordenada do skew-product F .

Teorema 5.2.1. *Seja $f : M \rightarrow M$ uma transformação ergódica com respeito a medida μ e $(X_n)_{n \geq 1}$ o passeio aleatório em ambiente aleatório determinado por (f, p) . Então:*

1. *Se $\int \frac{p(x)}{1-p(x)} d\mu(x) < 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = +\infty$ com probabilidade 1.*
2. *Se $\int \frac{p(x)}{1-p(x)} d\mu(x) > 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty$ com probabilidade 1.*
3. *Se $\int \frac{p(x)}{1-p(x)} d\mu(x) = 0$, então $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty$ com probabilidade 1 e $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$ com probabilidade 1.*

A demonstração do Teorema 5.2.1 pode ser vista em [1]. Com isso, utilizando o Teorema 5.2.1, dizemos que a cadeia de Markov é transiente se for verificado 1 ou 2 e recorrente se verificado 3.

Proposição 5.2.1. *Seja f o tempo 1 do fluxo geodésico cujo passeio aleatório determinado por (f, p) admita medida estacionária ν equivalente a μ . Então para ν -quase todo $x \in M$ temos:*

1. x é recorrente para F_α para \mathbb{P}_x -quase todo $\alpha \in \Sigma$.
2. A órbita $\mathcal{O}_{F_\alpha}(x)$ é densa em M para \mathbb{P}_x -quase todo $\alpha \in \Sigma$.

Demonstração. Uma vez que o passeio aleatório é simétrico, a primeira parte segue do Teorema 5.2.1 item 3. Pois para ν quase todo $x \in M$, (lembrando que ν é equivalente a μ) temos que para \mathbb{P}_x -quase todo $\alpha \in \Sigma$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty$ e $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$. Assim, existem uma infinidade de $n_k \in \mathbb{N}$, tais que $\alpha_{n_k} \dots \alpha_1(x) = x$. Então $\lim_{n_k \rightarrow \infty} F_\alpha^{n_k}(x) = x$.

Para a segunda parte, notemos que μ é ergódica para f e com suporte total na variedade. Então $\mu(\{x \in M : \mathcal{O}_f(x) \text{ é densa em } M\}) = 1$ e pela primeira parte dessa proposição, temos que

$$\mu(\{x \in M : x \text{ é recorrente para } F_\alpha \text{ para } \mathbb{P}_x \text{ quase todo } \alpha \in \Sigma\}) = 1.$$

Uma vez que ν é equivalente a μ , segue que para ν -quase todo $x \in M$ a órbita $\mathcal{O}_{F_\alpha}(x)$ é densa em M para \mathbb{P}_x -quase todo $\alpha \in \Sigma$. \square

Observação 5.2.1. *Seja Tor^d o toro d -dimensional. Sinai provou em [32] que a cadeia de Markov determinada por (f, p) , onde f é uma rotação irracional diofantina, tem (única) medida estacionária ν equivalente à Lebesgue. Provou também a recorrência da cadeia de Markov para todo $x \in Tor^d$. Logo, uma vez que a órbita de f é densa para todo $x \in Tor^d$, a Proposição 5.2.1 vale para todo $x \in Tor^d$.*

Para simplificar a apresentação da última parte, assumimos agora que S é uma superfície compacta hiperbólica 2-dimensional, e $f : T^1S \rightarrow T^1S$ o tempo 1 do fluxo geodésico, em particular $\dim E^* = 1$ para todo $*$ = s, c, u . Para $(\alpha, x) \in \Sigma \times M$ definimos $A^u(\alpha, x) = A^u(\alpha_1, x)$ por

$$A^u(\alpha, x) := \|Df_x^{\alpha_1}|E_x^u\|.$$

Então o Teorema Ergódico de Birkhoff garante a existência do expoente de Lyapunov para m_C -quase todo $(\alpha, x) \in \Sigma \times M$, onde m_C é a medida invariante pelo skew product F que encontramos no final da seção 3.1. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log A^u(F^k(\alpha, x)) = \int \log A^u(\alpha, x) dm_C(\alpha, x). \quad (5.1)$$

Pela recorrência dada na Proposição 5.2.1, teremos uma infinidade de termos (f, x) ou (f^{-1}, x) e portanto teremos uma infinidade de termos no somatório (5.1) da forma $\log \|Df_x|E_x^u\|$ ou $\log \|Df_x^{-1}|E_x^u\|$. Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log A^u(F^k(\alpha, x)) = \int \log A^u(\alpha, x) dm_C(\alpha, x) = 0. \quad (5.2)$$

Usando (3.2) e o Teorema 3.1.1 obtemos,

$$\begin{aligned} \int \log A^u(\alpha, x) dm_C(\alpha, x) &= \int \log A^u \Phi^{-1}(\omega) dQ_\nu(w) \\ &= \int \log \|Df_x|E_x^u\| p(x) d\nu(x) + \int \log \|Df_x^{-1}|E_x^u\| q(x) d\nu(x). \end{aligned}$$

Portanto

$$\int \log \|Df_x|E_x^u\| p(x) d\nu(x) = - \int \log \|Df_x^{-1}|E_x^u\| q(x) d\nu(x). \quad (5.3)$$

Se N é uma superfície algébrica, então a derivada de f na direção instável tem norma constante e portanto $\int p(x) d\nu(x) = \int q(x) d\nu(x)$.

Pergunta 5.2.1. *Se ν é uma medida P -estacionária equivalente a μ , necessariamente a igualdade anterior é satisfeita?*

Capítulo 6

Lei Forte de Knudsen para a Aplicação Aleatória de Feres

Neste capítulo definiremos uma aplicação aleatória T e uma medida μ que seja T -invariante. Definiremos também a evolução de uma distribuição inicial do processo aleatório referido. Isto é, dada uma distribuição inicial ν , podemos definir a distribuição $\nu^{(n)}$ que é a evolução da distribuição inicial ν no tempo n com respeito ao processo aleatório. Provaremos, sob certas condições, a Lei Forte de Knudsen. Isto é

$$\nu^{(n)}(A) \rightarrow \mu(A)$$

para todo ν -mensurável A .

6.1 Aplicação Aleatória

Sejam $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ um espaço de medida, $T_i : X \rightarrow X$ e $p_i : X \rightarrow [0, 1]$ com $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ funções definidas em X . Seguindo a mesma definição de aplicação aleatória introduzida por [4, 11, 14, 28], definimos a aplicação aleatória $T : X \rightarrow X$ tal que $T(\theta) = T_i(\theta)$ com probabilidade $p_i(\theta)$. Iterativamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T^n(\theta) = T_{i_n} \circ T_{i_{n-1}} \circ \dots \circ T_{i_1}(\theta)$ com probabilidade $p_{i_1}(\theta)p_{i_2}(T_{i_1}(\theta)) \dots p_{i_n}(T_{i_{n-1}} \circ \dots \circ T_{i_1}(\theta))$. O núcleo de probabilidade de transição da aplicação aleatória T é dado por

$$K(\theta, A) = \sum_{i=1}^k p_i(\theta) \mathbb{1}_A(T_i(\theta)) \quad (6.1)$$

com $A \in \mathcal{B}(X)$. O núcleo de probabilidade de transição $K(\theta, A)$, definido em (6.1), define a evolução de uma distribuição inicial ν em $(X, \mathcal{B}(X))$ sobre a aplicação ale-

atória T iterativamente como

$$\nu^0 := \nu, \nu^{(n+1)}(A) = \int_X K(\theta, A) d\nu^{(n)}(\theta) \quad (6.2)$$

para todo $A \in \mathcal{B}(X)$ e $n > 0$.

Definição 6.1.1. Dada uma aplicação aleatória $T : X \rightarrow X$ e μ uma medida em X , dizemos que a medida μ é T -invariante (ou que T preserva a medida μ) se $\mu(A) = \sum_{i=1}^n \int_{T_i^{-1}(A)} p_i(\theta) d\mu(\theta)$ para todo $A \in \mathcal{B}(X)$.

6.2 A Aplicação Aleatória de Feres

Consideremos a aplicação do bilhar determinístico F em uma mesa cujo o bordo é um triângulo isósceles com ângulo da base α . Seja $G : \overline{pq} \times (0, \pi) \rightarrow \overline{pq} \times (0, \pi)$ a aplicação de primeiro retorno à base \overline{pq} do triângulo, tal que $G(x, \theta) = (y, T_x(\theta))$ onde $T_x(\theta)$ é o ângulo de saída. Podemos considerar o segmento \overline{pq} de comprimento 1.

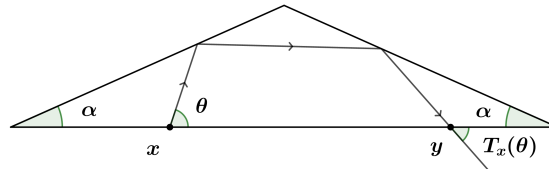


Figura 6.1: Bilhar Triangular Determinístico.

Se o ângulo da base for menor que $\frac{\pi}{6}$, então o bilhar determinístico iniciando da base \overline{pq} terá no máximo duas colisões antes de voltar ao lado \overline{pq} . Portanto teremos quatro funções que determinam o ângulo de saída após a colisão com o lado \overline{pq} , a saber:

$$\begin{aligned} T_1(\theta) &= \theta + 2\alpha, \\ T_2(\theta) &= -\theta + 2\pi - 4\alpha, \\ T_3(\theta) &= \theta - 2\alpha, \\ T_4(\theta) &= -\theta + 4\alpha. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Podemos assim definir a aplicação aleatória de Feres como

$$T(\theta) = T_i(\theta) \quad (6.4)$$

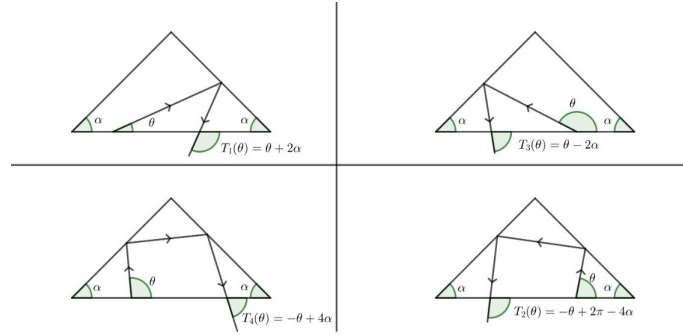


Figura 6.2: Possibilidades de reflexões em um triângulo isósceles cujo ângulo da base é menor que $\frac{\pi}{6}$.

com probabilidade $p_i(\theta)$ proporcional ao lado \overline{pq} dada por:

$$\begin{aligned}
 p_1(\theta) &= \begin{cases} 1, & \text{se } \theta \in [0, \alpha) \\ u_\alpha(\theta), & \text{se } \theta \in [\alpha, \pi - 3\alpha) \\ 2 \cos(2\alpha) u_{2\alpha}(\theta), & \text{se } \theta \in [\pi - 3\alpha, \pi - 2\alpha) \\ 0, & \text{se } \theta \in [\pi - 2\alpha, \pi] \end{cases}, \\
 p_2(\theta) &= \begin{cases} 0, & \text{se } \theta \in [0, \pi - 3\alpha) \\ u_\alpha(\theta) - 2 \cos(2\alpha) u_{2\alpha}(\theta), & \text{se } \theta \in [\pi - 3\alpha, \pi - 2\alpha) \\ u_\alpha(\theta), & \text{se } \theta \in [\pi - 2\alpha, \pi - \alpha) \\ 0, & \text{se } \theta \in [\pi - \alpha, \pi] \end{cases}, \\
 p_3(\theta) &= \begin{cases} 0, & \text{se } \theta \in [0, 2\alpha) \\ 2 \cos(2\alpha) u_{2\alpha}(-\theta), & \text{se } \theta \in [2\alpha, 3\alpha) \\ u_\alpha(-\theta), & \text{se } \theta \in [3\alpha, \pi - \alpha) \\ 1, & \text{se } \theta \in [\pi - \alpha, \pi] \end{cases}, \\
 p_4(\theta) &= \begin{cases} 0, & \text{se } \theta \in [0, \alpha) \\ u_\alpha(-\theta), & \text{se } \theta \in [\alpha, 2\alpha) \\ u_\alpha(-\theta) - 2 \cos(2\alpha) u_{2\alpha}(-\theta), & \text{se } \theta \in [2\alpha, 3\alpha) \\ 0, & \text{se } \theta \in [3\alpha, \pi] \end{cases},
 \end{aligned}$$

com $u_\alpha(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \theta} \right)$.

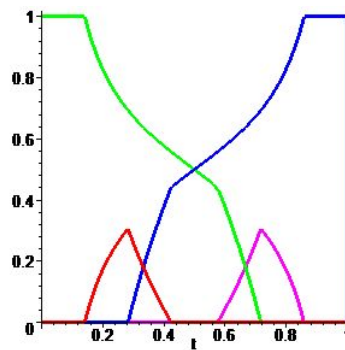


Figura 6.3: Gráfico das probabilidades p_1, p_2, p_3 e p_4 .

De fato, se $\theta \in (0, \alpha)$ teremos necessariamente uma colisão com o lado direito do triângulo antes de retornar ao lado \overline{pq} qualquer que seja a posição de saída da base \overline{pq} . Portanto $p_1(\theta) = 1$ se $\theta \in [0, \alpha)$.

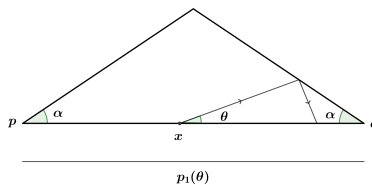


Figura 6.4: Probabilidade $p_1(\theta)$ com $\theta \in [0, \alpha)$.

Se $\theta \in [\alpha, \pi - 3\alpha)$, então $p_1(\theta) = u_\alpha(\theta) = \frac{1}{2} \frac{tg\alpha}{tg\theta}$ que representa o tamanho do segmento da base \overline{pq} que retorna com apenas uma colisão com o lado direito do triângulo.

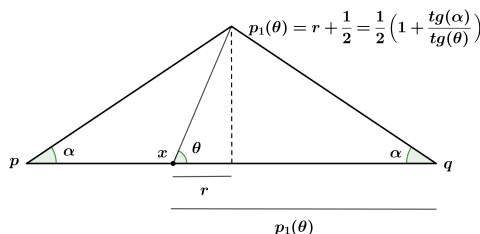


Figura 6.5: Probabilidade $p_1(\theta)$ com $\theta \in [\alpha, \pi - 3\alpha)$.

Se $\theta \in [\pi - 3\alpha, \pi - 2\alpha)$, então $p_1(\theta) = 2\cos(2\alpha) \cdot u_{2\alpha}(\theta)$ que representa o tamanho do segmento da base \overline{pq} que retorna com apenas uma colisão com o lado direito do triângulo.

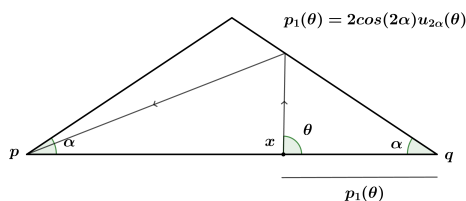


Figura 6.6: Probabilidade $p_1(\theta)$ com $\theta \in [\pi - 3\alpha, \pi - 2\alpha)$.

Por fim, se $\theta \in [\pi - 2\alpha, \pi]$, então $p_1(\theta) = 0$, isto é, nenhum ponto do segmento \overline{pq} retorna com apenas uma colisão. Analogamente temos as outras probabilidades p_2, p_3 e p_4 .

Se considerarmos apenas as probabilidades estritamente positivas, a aplicação aleatória de Feres é tal que $T : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$. A Figura 6.7 ilustra o comportamento das aplicações T_i de acordo com seus respectivos domínios, isto é, onde temos probabilidades positivas.

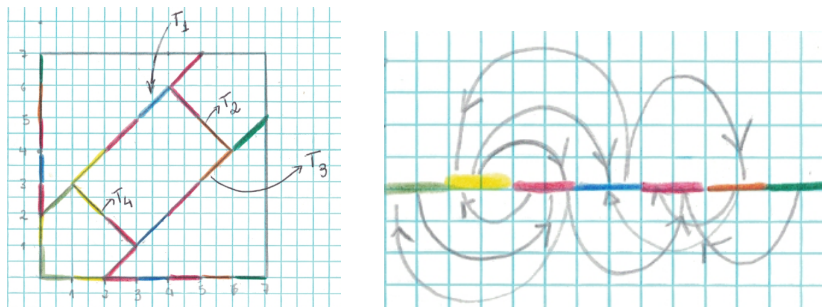


Figura 6.7: A figura do lado esquerdo representa o gráfico das aplicação T_1, T_2, T_3 e T_4 . A figura do lado direito, representa as imagens das aplicações T_i de acordo com seus respectivos domínios.

Se pensarmos na duplicação da mesa de bilhar triangular, se $G(x, \theta) = (y, T_x(\theta))$, vamos escolher um $y' \in \overline{pq}$ uniformemente e continuar a trajetória com o ângulo $T_x(\theta)$.

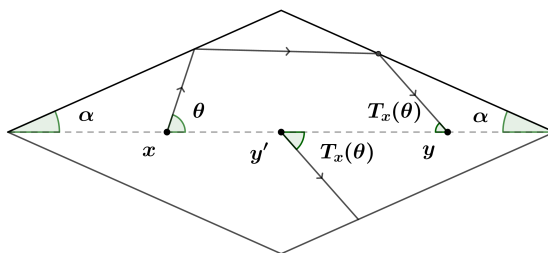


Figura 6.8: Mesa duplicada

A aplicação aleatória de Feres pode ser definida como um sistema dinâmico aleatório $\{T_x; x \in [0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda\}$ onde λ é a medida de Lebesgue no intervalo $[0, 1]$ e \mathcal{B} a σ -álgebra de Borel.

A próxima proposição é conclusão direta da Proposição 2.1 de [14] que também foi comentada em [11]. Mas faremos aqui uma reescrita da demonstração para a aplicação aleatória de Feres.

Proposição 6.2.1. *Sejam $\alpha < \frac{\pi}{6}$ e T a aplicação aleatória de Feres definida em (6.4). Então a medida definida por $\mu(A) = \frac{1}{2} \int_A \text{sen}(\theta) d\theta$ é T -invariante.*

Demonstração. Consideremos a mesa de bilhar triangular cujo bordo tem comprimento L e a base é o segmento de reta \overline{pq} de comprimento 1 que identificaremos pelo intervalo $[0, 1]$. Sabemos que a aplicação do bilhar determinístico $F : [0, L] \times (0, \pi) \rightarrow [0, L] \times (0, \pi)$ preserva a medida $\lambda \times \mu$ onde λ é Lebesgue normalizada em $[0, L]$ e $d\mu = \frac{1}{2} \text{sen}(\theta) d\theta$ em $(0, \pi)$. Além disso, medida $\lambda \times \mu|_{[0,1] \times (0,\pi)}$ é invariante para a aplicação de primeiro retorno $G : [0, 1] \times (0, \pi) \rightarrow [0, 1] \times (0, \pi)$ ao lado \overline{pq} .

Tomando uma função f μ -integrável qualquer, temos que:

$$\begin{aligned}
\mu(f) &= \int f \, d\mu = \iint f \circ \pi_2 \, d(\lambda \times \mu) = \iint f \circ \pi_2 \circ G \, d(\lambda \times \mu) \\
&= \int_{[0,\pi]} \int_{[0,1]} f(\pi_2(G(x, \theta))) \, d\lambda(x) \mu(\theta) \\
&= \int_{[0,\pi]} \int_{[0,1]} f(T_x(\theta)) \, d\lambda(x) \mu(\theta) \\
&= \int_{[0,1]} (T_x)_* \mu(f) \, d\lambda(x).
\end{aligned}$$

Tomando $A \in \mathcal{B}[(0, \pi)]$ e $f = \mathbb{1}_A$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 \int_{[0,\pi]} p_i(\theta) \mathbb{1}_A(T_i(\theta)) \, d\mu(\theta) &= \int_{[0,\pi]} K(\theta, A) \, d\mu(\theta) \\
&= \int_{[0,1]} \int_{[0,\pi]} \mathbb{1}_A(T_x(\theta)) \, d\lambda(x) \, d\mu(\theta) \\
&= \int_{[0,1]} (T_x)_* \mu(A) \, d\lambda(x) = \mu(A).
\end{aligned}$$

□

6.3 A Lei Forte de Knudsen

Nesta seção apresentaremos a Lei Forte de Knudsen para a aplicação aleatória de Feres que foi demonstrado em [11]. Para isso, introduziremos alguns conceitos que serão necessários para o entendimento dessa lei. Todos os resultados dessa seção estão feitos em [11], exceto o Teorema 6.3.1.

Lembramos que uma transformação $S : X \rightarrow X$ em um espaço de medida (X, μ) é não singular se $\mu(S^{-1}(A)) = 0$ para todo mensurável A em que $\mu(A) = 0$.

Definição 6.3.1. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida e $S : X \rightarrow X$ uma transformação não singular. O operador de Perron-Frobenius $P_S : L^1(X, \mu) \rightarrow L^1(X, \mu)$ associado a S é tal que*

$$\int_A P_S f(x) \, d\mu(x) = \int_{S^{-1}(A)} f(x) \, d\mu(x).$$

O operador de Perron-Frobenius possui as seguintes propriedades:

1. $P_S(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 P_S f_1 + \lambda_2 P_S f_2$ para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $f_1, f_2 \in L^1(X, \mu)$.
2. $P_S f \geq 0$ sempre que $f \geq 0$.

$$3. \int_X P_S f(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

Definição 6.3.2. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida e $S : X \rightarrow X$ uma transformação não singular. O operador de Koopman $U_S : L^\infty(X, \mu) \rightarrow L^\infty(X, \mu)$ associado a S é tal que*

$$U_S f(x) = f \circ S(x).$$

O operador de Koopman possui as seguintes propriedades:

$$1. U_S(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 U_S f_1 + \lambda_2 U_S f_2 \text{ para todo } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ e } f_1, f_2 \in L^\infty(X, \mu).$$

$$2. \|U_S f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

3. Para todo $f \in L^1, g \in L^\infty$, temos que

$$\int P_S f(x) \cdot g(x) d\mu(x) = \int f(x) \cdot U_S g(x) d\mu(x).$$

Definição 6.3.3. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de probabilidade e $S : X \rightarrow X$ uma transformação que preserva μ . A transformação S é exata se $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(S^n(A)) = 1$ para todo $A \in \mathcal{A}$ em que $\mu(A) > 0$.*

Enunciaremos agora um teorema que foi demonstrado em [25]:

Teorema 6.3.1. *Seja (X, \mathcal{A}, μ) espaço de probabilidade, $S : X \rightarrow X$ uma transformação que preserva medida, e P_S o operador de Perron-Frobenius associado a S . A transformação S é exata se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_S^n f - \int_X f(x) d\mu(x)\| = 0$ para toda $f \in L^1$.*

Vamos agora definir um skew product S que nos dará informações úteis com respeito a aplicação aleatória T . Como dito na introdução, o skew product S será uma representação determinística da aplicação aleatória T .

Sejam $\Omega = [0, 1] \times [0, \pi]$ e T a aplicação aleatória de Feres, de forma que $T(\theta) = T_i(\theta)$ com probabilidade $p_i(\theta)$. Definimos

$$J_k = \left\{ (x, \theta) : \sum_{i < k} p_i(\theta) \leq x < \sum_{i \leq k} p_i(\theta) \right\}$$

uma partição de Ω com $k = \{1, 2, 3 \text{ e } 4\}$.

Seja $\varphi_k(x, \theta) = \frac{1}{p_k(\theta)}(x - \sum_{i=1}^{k-1} p_i(\theta))$ se $(x, \theta) \in J_k$. Por fim definimos o skew-product associado à T como: $S : [0, 1] \times [0, \pi] \rightarrow [0, 1] \times [0, \pi]$ tal que

$$S(x, \theta) = (\varphi_k(x, \theta), T_k(\theta)), \text{ se } (x, \theta) \in J_k. \quad (6.5)$$

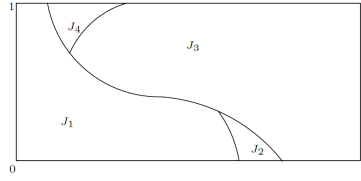


Figura 6.9: Partição de $[0, 1) \times [0, \pi]$.

O skew product S não tem uma interpretação dinâmica, é apenas uma ferramenta que nos ajuda a estudar a aplicação aleatória de Feres T . Por exemplo, o skew product S fornece propriedades importantes da aplicação aleatória de Feres T , como no próximo lema:

Lema 6.3.1. *Uma medida μ é invariante para a aplicação aleatória de Feres T , se e somente se, a medida $\lambda \times \mu$ é invariante pelo skew product S , onde λ é a medida de Lebesgue em $[0, 1]$.*

O Lema 6.3.1 foi demonstrado em [4]. Observemos que dada a medida μ de forma que $\mu(A) = \frac{1}{2} \int_A \sin(\theta) d\theta$, pela Proposição 6.2.1, a medida $\lambda \times \mu$ é invariante pelo skew product S . Nesse contexto, dizemos que a aplicação aleatória de Feres T com medida μ é exata se o skew product S for exato com respeito a medida $\lambda \times \mu$.

O próximo teorema que iremos enunciar foi provado em [11] e daremos uma ideia de sua demonstração. Porém, antes de enunciá-lo, vamos introduzir algumas ferramentas necessárias (também encontradas em [11]) para um melhor entendimento. Primeiramente, definimos

$$J_{i_1 \dots i_n} = \{w \in J_{i_n} : S(w) \in J_{i_{n-1}}, S^2(w) \in J_{i_{n-2}}, \dots, S^{n-1}(w) \in J_{i_1}\}.$$

Lema 6.3.2. *Seja $I_\theta = [0, 1) \times \{\theta\}$ a fibra através $\theta \in [0, \pi]$. Se $I_\theta \cap J_{i_1 \dots i_n} \neq \emptyset$ e considerando $\pi_1 : [0, 1) \times [0, \pi] \rightarrow [0, 1)$ a projeção na primeira coordenada, então*

$$\lambda(\pi_1(I_\theta \cap J_{i_1 \dots i_n})) = p_{i_n}(\theta) p_{i_{n-1}}(T_{i_n}(\theta)) \dots p_{i_1}(T_{i_2} \circ \dots \circ T_{i_n}(\theta)).$$

O Lema assim foi provado em [?]. Com isso, considerando $\pi_2 : [0, 1) \times [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$ a projeção na segunda coordenada e uma vez que $I_\theta = \cup_{i_1 \dots i_n} J_{i_1 \dots i_n}$ é uma união disjunta,

$$\begin{aligned} \int_{[0,1) \times [0,\pi]} \mathbb{1}_A(\pi_2 \circ S^n) d(\lambda \times \mu) &= \sum_{i_1 \dots i_n} \int_{J_{i_1 \dots i_n}} \mathbb{1}_A(\pi_2 \circ S^n) d(\lambda \times \mu) \\ &= \sum_{i_1 \dots i_n} \int_{[0,1) \times [0,\pi]} \mathbb{1}_A(T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_n}) d(\lambda \times \mu). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fubini, temos que

$$\int_{[0,1] \times [0,\pi]} \mathbb{1}_A(T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_n}) d(\lambda \times \mu) = \int_{[0,\pi]} \mathbb{1}_A(T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_n}) d\mu(\theta) \cdot \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{J_{i_1 \dots i_n}}(x, \theta) d\lambda(x).$$

Pelo Lema 6.3.2, fixado qualquer $\theta \in [0, \pi]$, temos que

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1] \times [0,\pi]} \mathbb{1}_A(T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_n}) d(\lambda \times \mu) = \\ & \sum_{i_1 \dots i_n}^k \int_{[0,\pi]} p_{i_n}(\theta) p_{i_{n-1}}(T_{i_n}(\theta)) \dots p_{i_1}(T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_n}(\theta)) \mathbb{1}_A(T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_n}(\theta)) d\mu(\theta). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \nu^{(n)}(A) &= \int_{[0,\pi]} K(\theta, A) d\nu^{(n-1)}(\theta) \\ &= \sum_{i_1 \dots i_n}^k \int_{[0,\pi]} p_{i_n}(\theta) p_{i_{n-1}}(T_{i_n}(\theta)) \dots p_{i_1}(T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_n}(\theta)) \mathbb{1}_A(T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_n}(\theta)) d\mu(\theta). \end{aligned}$$

Logo

$$\nu^{(n)}(A) = \int_{[0,1] \times [0,\pi]} \mathbb{1}_A(\pi_2 \circ S^n) d(\lambda \times \nu). \quad (6.6)$$

Com intuito de provar que o skew product S definido em (6.5) é um endomorfismo exato, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, definimos as seguintes σ -álgebras:

$$\mathcal{F}_n := \sigma\left(\{\pi_2^{-1}(U) \cap J_{i_1 \dots i_n} : U \in \mathcal{B}([0, \pi])\}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{F} := \sigma\left(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n\right).$$

Para cada $U \in \mathcal{B}([0, \pi])$, os conjuntos $\pi_2^{-1}(U) \cap J_{i_1 \dots i_n}$ são chamados de geradores de \mathcal{F}_n . Além disso, a sequência $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ define uma filtração

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \dots \subset \mathcal{F}.$$

Com isso, segue dois resultados provados em [11].

Proposição 6.3.1. *O skew product S é \mathcal{F} -mensurável.*

Lema 6.3.3. *Com respeito a medida S -invariante $\lambda \times \mu$, se $A \in \mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n)$ tem medida positiva, então A contém um gerador de medida positiva.*

Com esses resultados e definições, vamos dar uma ideia da demonstração de que S é exato (Teorema 14 de [11]). Seja $A \in \mathcal{F}$ de forma que $(\lambda \times \mu)(A) > 0$. Pelo Lema 6.3.3, A contém um gerador $G = \pi_2^{-1}(U) \cap J_{i_1 \dots i_n}$ de medida positiva para algum $U \in \mathcal{B}([0, \pi])$. Com isso, pela definição do skew product S e dos conjuntos

$J_{i_1 \dots i_n}$, cada fibra de $S^n(G)$ terá medida total. Assim, temos que

$$\lambda\left([0, 1) \times \{\theta\} \cap S^n(G)\right) = 1 \quad \text{para todo } \theta = T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_n}(u), u \in U.$$

Portanto, definindo $B = S^n(G)$, suas fibras $I_\theta := [0, 1) \times \{\theta\}$, com $\theta \in [0, \pi]$, tem medida 1. Além disso,

$$B \subset S^2(B) \subset \dots \subset S^{2n}(B) \subset \dots .$$

Definindo $C := \cup_{n \geq 0} S^{2n}(B)$, temos que $S^2(C) = C$ e assim $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \times \mu)(S^{2n}(B)) = (\lambda \times \mu)(C)$. Uma vez que $(\lambda \times \mu)(B) > 0$, temos que $(\lambda \times \mu)(C) > 0$. Com respeito a aplicação aleatória de Feres T , para $\frac{\alpha}{\pi}$ irracional, temos a seguinte proposição provada em [11].

Proposição 6.3.2. *Considere $C \in \mathcal{B}([0, \pi])$ e suponha que o pull-back $\pi_2^*(\mathbb{1}_C)$ seja S^2 -invariante. Se $\frac{\alpha}{\pi}$ é irracional, então $\mu(C) = 0$ ou $\mu(C) = 1$.*

Uma vez que $S^2(C) = C$ e que a transformação S^2 preserva a medida $\lambda \times \mu$, segue que C e $S^{-2}(S^2(C))$ possuem a mesma medida, portanto $\mathbb{1}_C$ é S^2 -invariante. Além disso, $\mathbb{1}_C = \pi_2^*(\mathbb{1}_{\pi_2(C)})$. Logo, supondo que $\frac{\alpha}{\pi}$ seja irracional, pela Proposição 6.3.2, segue que a medida de $\pi_2(C)$ é total. Assim $(\lambda \times \mu)(C) = 1$ e portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \times \mu)(S^{2n}(B)) = (\lambda \times \mu)(C) = 1.$$

Por fim, como $S^{2n} \subset S^{2n+1}$ e S preserva a medida $\lambda \times \mu$, segue que $(\lambda \times \mu)(S^{2n}) \leq (\lambda \times \mu)(S^{2n+1}) \leq (\lambda \times \mu)(S^{2(n+1)})$. Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \times \mu)(S^n(B)) = (\lambda \times \mu)(C) = 1.$$

Isto é, S é um endomorfismo exato.

Enunciaremos agora o teorema que foi provado em [11] seguido de uma ideia de sua demonstração.

Teorema 6.3.2. *Sejam $\alpha < \frac{\pi}{6}$, T a aplicação aleatória de Feres, μ tal que $\mu(A) = \frac{1}{2} \int_A \sin(\theta) d\theta$ e $\nu \ll \mu$. Se $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número irracional, então $\nu^{(n)}(A) \rightarrow \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}((0, \pi))$.*

Demonstração. Primeiramente, dada uma medida ν no espaço $([0, \pi], \mathcal{A})$, temos de (6.6) que

$$\nu^{(n)}(A) = \int_{[0,1] \times [0,\pi]} \mathbb{1}_A(\pi_2 \circ S^n) d(\lambda \times \nu).$$

Portanto, usando o operador de Koopman $U_S : L^\infty([0, 1] \times [0, \pi], \lambda \times \mu) \rightarrow L^\infty([0, 1] \times$

$[0, \pi], \lambda \times \mu$), tal que $U_S(f) = f \circ S$, a equação (6.6) pode ser reescrita como

$$\nu^{(n)}(A) = \int_{[0,1] \times [0,\pi]} U_S^n \left(\mathbf{1}_{\pi_2^{-1}(A)} \right) d(\lambda \times \nu)$$

para todo $A \in \mathcal{A}$. Se $\nu \ll \mu$, seja $f \in L^1([0, \pi], \mu)$ a derivada de Radon-Nikodym associada às medidas ν e μ . Assim, definindo $\pi_2^*(f)(w) = f(\pi_2(w))$ com $w \in [0, 1] \times [0, \pi]$, uma vez que $\lambda \times \nu \ll \lambda \times \mu$, segue que $\frac{d(\lambda \times \nu)}{d(\lambda \times \mu)} = \pi_2^*(f)$ é a derivada de Radon-Nikodym associada às medidas $\lambda \times \nu$ e $\lambda \times \mu$. Pelo Teorema 6.3.1,

$$\nu^{(n)}(A) = \int U_S^n \left(\mathbf{1}_{\pi_2^{-1}(A)} \right) d(\lambda \times \nu) = \int \pi_2^*(f) U_S^n \left(\mathbf{1}_{\pi_2^{-1}(A)} \right) d(\lambda \times \mu) \rightarrow \mu(A)$$

se, e somente se, $S : [0, 1] \times [0, \pi] \rightarrow [0, 1] \times [0, \pi]$ for um endomorfismo exato. Uma vez que para $\frac{\alpha}{\pi}$ for irracional o skew product S é um endomorfismo exato, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \times \mu)(S^n(E)) = 1$$

para todo $E \in \mathcal{B}([0, 1] \times [0, \pi])$ em que $(\lambda \times \mu)(E) > 0$. Portanto, tomando uma distribuição inicial $\nu \ll \mu$, segue que $\nu^{(n)}(A) \rightarrow \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}([0, \pi])$. \square

Observação 6.3.1. A convergência $\nu^{(n)} \rightarrow \mu$ é chamada *Lei Forte de Knudsen*.

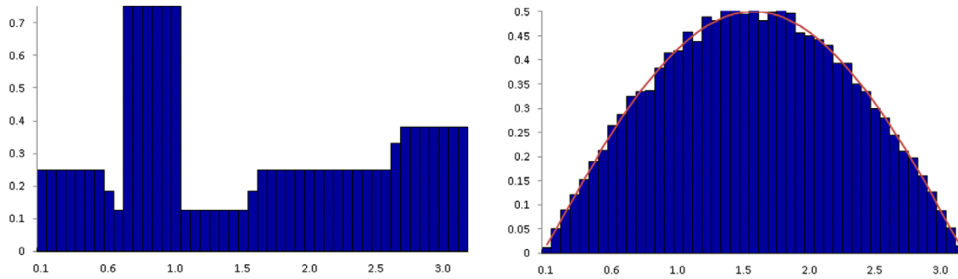


Figura 6.10: Simulação que ilustra a Lei Forte de Knudsen.

A Figura 6.10, retirada de [11], representa uma simulação da convergência da evolução de uma distribuição inicial ν com respeito a aplicação aleatória de Feres no caso em que $\alpha = \frac{\sqrt{2}\pi}{10}$. Do lado esquerdo temos uma distribuição inicial ν com 50.000 pontos iniciais e 45 subintervalos do intervalo $[0, \pi]$. Do lado direito temos a distribuição da evolução da distribuição inicial do processo aleatório após 30.000 iterações. Observemos que a figura do lado direito está ficando próximo da distribuição $d\mu = \frac{1}{2}\text{sen}(\theta)d\theta$ que está representado pela linha vermelha na figura. Essa simulação ilustra a Lei Forte de Knudsen para a aplicação aleatória de Feres com $\alpha = \frac{\sqrt{2}\pi}{10}$.

6.4 Caracterização da Lei Forte de Knudsen

Nesta seção apresentaremos um resultado que completa o Teorema 6.3.2, e portanto será uma caracterização para a Lei Forte de Knudsen para a aplicação aleatória de Feres. Antes de partirmos para esse resultado, vamos analisar um exemplo.

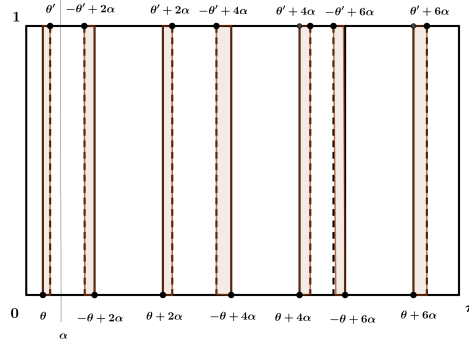


Figura 6.11: Região invariante pelo skew product.

Para $\alpha = \frac{\pi}{7}$ e $\theta \in (0, \alpha)$, considere $\mathcal{C}(\theta) = \{\theta, -\theta + 2\alpha, \theta + 2\alpha, -\theta + 4\alpha, \theta + 4\alpha, -\theta + 6\alpha, \theta + 6\alpha\}$. Observamos que se $\theta' \in (0, \alpha)$ e $\theta' > \theta$, então:

$$\theta' > \theta \implies \begin{cases} -\theta' + 2\alpha < -\theta + 2\alpha \\ \theta' + 2\alpha > \theta + 2\alpha \\ -\theta' + 4\alpha < -\theta + 4\alpha \\ \theta' + 4\alpha > \theta + 4\alpha \\ -\theta' + 6\alpha < -\theta + 6\alpha \\ \theta' + 6\alpha > \theta + 6\alpha \end{cases} .$$

Portanto temos uma outra configuração para $\mathcal{C}(\theta')$ como na Figura 6.11, além disso, a região hachurada é invariante pelo skew product S . Na próxima seção, definiremos o conjunto $\mathcal{C}(\theta)$ a partir da aplicação aleatória de Feres.

Vamos agora provar o resultado que caracteriza a Lei Forte de Knudsen para a aplicação aleatória de Feres.

Teorema 6.4.1. *Sejam $\alpha < \frac{\pi}{6}$, T a aplicação aleatória de Feres e uma medida $\nu \ll \mu$, onde $\mu(A) = \frac{1}{2} \int_A \text{sen}(\theta) d\theta$. Então $\nu^{(n)}(A) \rightarrow \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}((0, \pi))$ se, e somente se, $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número irracional.*

Demonstração. O Teorema 6.3.2 prova que se $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número irracional, então $\nu^{(n)}(A) \rightarrow \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}((0, \pi))$.

Para a recíproca, queremos provar que se $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número racional, então a Lei Forte de Knudsen não é verdadeira.

Dado $\alpha = \frac{m\pi}{n}$, com $\text{mdc}(m, n) = 1$, vamos mostrar que existe um conjunto $B \subset \Omega$ tal que B seja S -invariante e $0 < (\lambda \times \mu)(B) < 1$. Para isso, sejam $A_1 = \{0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{m\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n}, \pi\}$ e $A_2 = \{\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}\}$. Observamos que os conjuntos A_1 e A_2 são invariantes pela aplicação aleatória de Feres, isto é, se $x \in A_i$, com $i = \{1, 2\}$, então $T_k(x) \in A_i$ qualquer que seja $k = \{1, 2, 3, 4\}$ desde que x pertença ao domínio da aplicação T_k . De fato:

- Se $\frac{(2j-1)\pi}{2n} \in A_2$ estiver no domínio da aplicação T_1 , então

$$T_1\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right) = \frac{(4m+2j-1)\pi}{2n} \in A_2.$$

- Se $\frac{(2j-1)\pi}{n}$ estiver no domínio da aplicação T_2 , então

$$T_2\left(\frac{(2j-1)\pi}{n}\right) = \frac{(4n-8m-2j+1)\pi}{2n} \in A_2.$$

- Se $\frac{(2j-1)\pi}{2n}$ estiver no domínio da aplicação T_3 , então

$$T_3\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right) = \frac{(2j-4m-1)\pi}{2n} \in A_2.$$

- Se $\frac{(2j-1)\pi}{2n}$ estiver no domínio da aplicação T_4 , então

$$T_4\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right) = \frac{(8m-2j+1)\pi}{2n} \in A_2.$$

De maneira análoga, mostra-se que o conjunto A_1 é invariante pela aplicação aleatória de Feres. Tomando $\epsilon = \frac{\pi}{4n}$, vamos considerar o intervalo $I_j = \left(\frac{(2j-1)\pi}{2n} - \epsilon, \frac{(2j-1)\pi}{2n} + \epsilon\right)$ com $j = \{1, 2, \dots, n\}$. Com isso, o conjunto $\cup_{j=1}^n I_j$ é invariante pela aplicação de Feres uma vez que o conjunto A_2 é invariante pela aplicação de Feres e as aplicações T_k são translações em $[0, \pi]$, isto é, dado $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos que $T_k(I_j) = I_l$ para algum $l \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Observamos também que a medida de Lebesgue do conjunto $\cup_{j=1}^n I_j$ em $[0, \pi]$ é tal que $\text{Leb}\left(\cup_{j=1}^n I_j\right) = \frac{\pi}{2} < \text{Leb}([0, \pi]) = \pi$. Por fim, o conjunto $[0, 1] \times \cup_{j=1}^n I_j \subset \Omega$, é um conjunto S -invariante e por $\lambda \times \mu$ ser absolutamente contínua a medida de Lebesgue em Ω , segue que $0 < (\lambda \times \mu)([0, 1] \times \cup_{j=1}^n I_j) < 1$. Ou seja, S não é ergódico e portanto S não é exata.

Logo, para $\alpha = \frac{m\pi}{n}$ com $\text{mdc}(m, n) = 1$, $\nu^{(n)} \not\rightarrow \mu$ uma vez que essa convergência ocorre se, e somente se, S for um endomorfismo exato.

□

6.5 Propriedades da Aplicação Aleatória de Feres

Nesta seção daremos algumas propriedades da aplicação aleatória de Feres que serão usadas nos próximos capítulos.

Seja $\Sigma' = \{1, 2, 3, 4\}^{\mathbb{N}}$ o espaço das sequências formadas pelos símbolos 1, 2, 3 e 4. Considere também $\alpha < \frac{\pi}{6}$ e $\theta \in (0, \pi)$.

Definição 6.5.1. *Definimos o conjunto*

$$\Sigma_{\theta} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma' : p_{x_1}(\theta) \cdots p_{x_n}(T_{x_{n-1}} \circ T_{x_{n-2}} \circ \cdots \circ T_{x_1}(\theta)) > 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada $(x_n)_{n \geq 1} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \Sigma_{\theta}$, a sequência relacionada $(T_{x_n} \circ T_{x_{n-1}} \circ \cdots \circ T_{x_1}(\theta))_{n \geq 1} := (\theta_n)_{n \geq 1}$ será chamada de sequência admissível para θ .

Definição 6.5.2. *Denotaremos $\mathcal{C}(\theta)$ o conjunto de todas as possíveis composições a partir do ângulo θ pela aplicação aleatória T . Isto é, $\theta' \in \mathcal{C}(\theta)$ se existe uma sequência admissível $(\theta_n)_{n \geq 1}$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $\theta' = T_{x_k} \circ T_{x_{k-1}} \circ \cdots \circ T_{x_1}(\theta)$.*

Proposição 6.5.1. *Se $\alpha = \frac{m\pi}{n} < \frac{\pi}{6}$, com $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}^*$ e $\text{mdc}(m, n) = 1$, então $\mathcal{C}(\theta)$ é um conjunto finito.*

Demonstração. Sejam $\tilde{T}_i = T_i \pmod{\pi}$ com $i = \{1, 2, 3, 4\}$.

O conjunto $\{\tilde{T}_i\}_{i=1}^4$ gera um grupo diedral. De fato, observemos que

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1^{n-1}(\theta) &= \theta + 2(n-1)\alpha = \theta + 2n\alpha - 2\alpha \equiv \theta - 2\alpha \pmod{\pi} = \tilde{T}_3(\theta) \\ \tilde{T}_2 \circ \tilde{T}_1^{n-4}(\theta) &= -\theta - 2n\alpha + 2\pi + 4\alpha \equiv -\theta + 4\alpha \pmod{\pi} = \tilde{T}_4(\theta). \end{aligned}$$

Assim temos que $G := \langle \tilde{T}_1, \tilde{T}_2 \rangle$ é o grupo gerado por \tilde{T}_1 e \tilde{T}_2 que é o grupo diedral de ordem n ou $\frac{n}{2}$ a depender da paridade de n . Por fim, o conjunto $\mathcal{C}(\theta)$ está contido na órbita de θ pela ação do grupo G , ou seja, $\#\mathcal{C}(\theta) \leq \#G$. Logo $\mathcal{C}(\theta)$ é um conjunto finito. \square

Proposição 6.5.2. *Se $\alpha = \beta\pi < \frac{\pi}{6}$ com $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $\mathcal{C}(\theta)$ é enumerável.*

Demonstração. Dado $\theta' \in \mathcal{C}(\theta)$ temos que $\theta' = \pm\theta + J\pi + K\alpha$ para algum $J, K \in 2\mathbb{Z}$. Uma vez que temos uma quantidade enumerável de composições possíveis para um ângulo θ , se todos os $\theta' \in \mathcal{C}(\theta)$ forem distintos, então $\mathcal{C}(\theta)$ é enumerável. Portanto é suficiente provar que os ângulos da forma $\theta + J\pi + K\alpha$ são todos distintos. Observemos que

$$\theta + J_1\pi + K_1\alpha = \theta + J_2\pi + K_2\alpha$$

se e somente se $\alpha = \frac{J_2 - J_1}{K_1 - K_2}\pi$. Uma vez que $\frac{\alpha}{\pi}$ é um número irracional, todos os elementos em $\mathcal{C}(\theta)$ que são da forma $\theta + J\pi + K\alpha$ são distintos. Portanto $\mathcal{C}(\theta)$ é enumerável. \square

Capítulo 7

O Bilhar Aleatório

Neste capítulo daremos uma interpretação da Lei Forte de Knudsen e vamos reformular o Teorema 6.4.1 no contexto de bilhar aleatório.

7.1 A Aplicação do Bilhar Aleatório

Seja $F : [0, L) \times (0, \pi) \circlearrowleft$ uma aplicação de um bilhar determinístico tal que $F(s, \theta) = (s_1(s, \theta), \theta_1(s, \theta))$. Para $(s, \theta) \in [0, L) \times (0, \pi)$ e $\alpha < \frac{\pi}{6}$, consideremos \bar{T} a aplicação aleatória tal que $\bar{T}(s, \theta) = (s, T_i(\theta))$ com probabilidade $p_i(\theta)$ onde T_i está definido em (6.4). A aplicação \bar{T} é uma extensão da aplicação aleatória de Feres. Considerando apenas onde as probabilidades p_i são positivas, temos que

$$\bar{T} : [0, L) \times (0, \pi) \rightarrow [0, L) \times (0, \pi).$$

Definição 7.1.1. *Seja F uma aplicação do bilhar determinístico. Definimos a aplicação de um bilhar aleatório $\bar{F} : [0, L) \times (0, \pi) \circlearrowleft$ por*

$$\bar{F}(s, \theta) = F \circ \bar{T}(s, \theta) = \left(s_1(s, T_i(\theta)), \theta_1(s, T_i(\theta)) \right) \quad (7.1)$$

com probabilidade $p_i(\theta)$.

Exemplo 7.1.1. *Sejam $F(s, \theta) = (s + 2\theta \pmod{2\pi}, \theta)$ o bilhar circular determinístico, $\alpha < \frac{\pi}{6}$ e T a aplicação aleatória de Feres. Então o bilhar circular aleatório é dado por $\bar{F}(s, \theta) = F \circ \bar{T}(s, \theta) = (s + 2T_i(\theta) \pmod{2\pi}, T_i(\theta))$ com probabilidade $p_i(\theta)$.*

Podemos pensar também em uma mesa de bilhar formada por duas retas paralelas no plano euclidiano. Chamaremos essa mesa de faixa. Notemos que o comportamento referente aos ângulos de saída de ambos bilhares aleatórios (circular e na faixa) é o mesmo. Isto é, os ângulos de saída são composições das aplicações T_i a partir de um ângulos θ e portanto sem dependência do ponto de colisão. Além

disso, a projeção da segunda coordenada do skew product S representa os ângulos de saída da partícula se movendo tanto no círculo quanto na faixa.

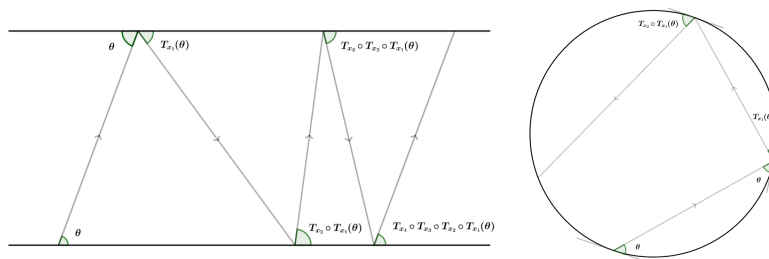


Figura 7.1: A figura da esquerda representa o bilhar aleatório na faixa e da direita representa o bilhar aleatório no círculo.

Assim podemos reescrever o Teorema 6.4.1 da seguinte maneira:

Teorema 7.1.1. *Consideremos F uma aplicação de um bilhar aleatório circular ou na faixa, $\alpha < \frac{\pi}{6}$, T a aplicação aleatória de Feres e uma distribuição inicial de ângulos $\nu \ll \mu$ onde $\mu(A) = \frac{1}{2} \int_A \text{sen}(\theta) d\theta$. Então $\nu^{(n)}(A) \rightarrow \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}((0, \pi))$ se, e somente se, $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número irracional.*

Demonstração. Se \overline{F} for uma aplicação do bilhar aleatório no círculo ou na faixa, a projeção na segunda coordenada dos iterados de \overline{F} é a aplicação aleatória de Feres, uma vez que os ângulos de saída nesses dois casos não dependem da posição da partícula. Assim, pelo Teorema 6.4.1, temos a Lei Forte de Knudsen se, e somente se, $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número irracional. \square

Podemos interpretar o Teorema 7.1.1 da seguinte maneira. Dado um conjunto A que é ν -mensurável, a medida que o número de colisões tende ao infinito, os ângulos em A são uniformemente distribuídos de acordo com a medida μ . Ou seja, a menos de uma mudança de variáveis na aplicação do bilhar determinístico, os ângulos em A são equiprováveis de ocorrer.

7.2 Medida Invariante

Nesta seção vamos definir e encontrar uma medida invariante para a aplicação do bilhar aleatório, via aplicação aleatória de Feres, e estender a Lei Forte de Knudsen no caso circular.

Por [14], sabemos que a medida definida por $\mu(A) = \frac{1}{2} \int_A \text{sen}(\theta) d\theta$ é medida invariante para aplicação aleatória de Feres. Isto é,

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^4 \int_{T_i^{-1}(A)} p_i(\theta) d\mu(\theta)$$

para todo A mensurável.

Definição 7.2.1. *Sejam $F : [0, L] \times (0, \pi) \circlearrowleft$ uma aplicação de um bilhar determinístico e $\bar{F} : [0, L] \times (0, \pi) \circlearrowleft$ a aplicação do bilhar aleatório tal que $\bar{F}(s, \theta) = F \circ \bar{T}(s, \theta) = F(s, T_i(\theta))$ com probabilidade $p_i(s, \theta) = p_i(\theta)$. Uma medida ν é invariante para \bar{F} se*

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^4 \iint_{\bar{F}_i^{-1}(A)} p_i(\theta) d\nu(s, \theta)$$

para todo A boreliano de $[0, L] \times (0, \pi)$.

Vamos considerar $\lambda \times \mu$ a medida invariante pelo bilhar determinístico, onde λ é Lebesgue normalizada em $[0, L]$ e $\mu(A) = \frac{1}{2} \int_A \text{sen}(\theta) d\theta$ em $(0, \pi)$.

Proposição 7.2.1. *A medida $\lambda \times \mu$ preservada pelo bilhar determinístico é uma medida invariante para a aplicação aleatória $\bar{T}(s, \theta) = (s, T_i(\theta))$ com probabilidade $p_i(\theta)$.*

Demonstração. A medida $\lambda \times \mu$ é invariante para \bar{T} se, para todo mensurável $A \times B$ com respeito a medida $(\lambda \times \mu)$,

$$\sum_{i=1}^N \int \int \mathbb{1}_{A \times B}(\bar{T}_i(s, \theta)) p_i(\theta) d\lambda(s) d\mu(\theta) = (\lambda \times \mu)(A \times B).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int \int \mathbb{1}_{A \times B}(\bar{T}_i(s, \theta)) p_i(\theta) d\lambda(s) d\mu(\theta) \\ &= \sum_{i=1}^N \int \int \mathbb{1}_A(s) \mathbb{1}_B(T_i(\theta)) p_i(\theta) d\lambda(s) d\mu(\theta) \\ &= \lambda(A) \sum_{i=1}^N \int \mathbb{1}_B(T_i(\theta)) d\mu(\theta) = \lambda(A) \mu(B). \end{aligned}$$

□

Vamos agora provar que a medida $\lambda \times \mu$ é invariante para qualquer bilhar aleatório $\bar{F} = F \circ \bar{T}$.

Proposição 7.2.2. *Dada uma aplicação do bilhar determinístico F e \bar{T} a aplicação aleatória, então o bilhar aleatório $\bar{F} = F \circ \bar{T}$ tem como medida invariante a medida $\lambda \times \mu$.*

Demonstração. Pela Proposição 7.2.1, para todo mensurável $A \times B$ com respeito a medida $(\lambda \times \mu)$,

$$(\lambda \times \mu)(A \times B) = \sum_{i=1}^N \int \int \mathbb{1}_{\bar{T}_i^{-1}(A \times B)}(s, \theta) p_i(\theta) d\lambda(s) d\mu(\theta)$$

e por $(\lambda \times \mu)(F^{-1}(A \times B)) = (\lambda \times \mu)(A \times B)$, segue que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int \int \mathbb{1}_{\bar{F}_i^{-1}(A \times B)}(s, \theta) p_i(\theta) d\lambda(s) d\mu(\theta) \\ &= \sum_{i=1}^N \int \int \mathbb{1}_{\bar{T}_i^{-1} \circ F^{-1}(A \times B)} p_i(\theta) d\lambda(s) d\mu(\theta) \\ &= (\lambda \times \mu)(F^{-1}(A \times B)) = (\lambda \times \mu)(A \times B). \end{aligned}$$

□

Observação 7.2.1. Dada a aplicação F de um bilhar determinístico, definimos a aplicação do bilhar aleatório pela composta $\bar{F} = F \circ \bar{T}$. Podemos pensar também o bilhar aleatório como sendo $\bar{\bar{F}} = \bar{T} \circ F$ com probabilidade $\bar{p}_i(s, \theta) = p_i(F(s, \theta))$.

Proposição 7.2.3. Sejam F uma aplicação do bilhar determinístico e \bar{T} a aplicação aleatória, então o bilhar aleatório $\bar{\bar{F}} = \bar{T} \circ F$ tem como medida invariante a medida $\lambda \times \mu$.

Demonstração. Sabemos que a aplicação \bar{T} é tal que

$$(\lambda \times \mu)(\varphi) = \sum_{i=1}^n \int \int p_i(\theta) \cdot \varphi \circ \bar{T}_i(s, \theta) d\lambda(s) d\mu(\theta)$$

para toda φ integrável.

Portanto temos que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int \int \bar{p}_i \cdot \varphi \circ (\bar{T}_i \circ F) d\lambda d\mu = \sum_{i=1}^N \int \int p_i \circ F \cdot \varphi \circ (\bar{T}_i \circ F) d\lambda d\mu \\ &= \sum_{i=1}^N \int \int (p_i \cdot (\varphi \circ \bar{T}_i)) \circ F d\lambda d\mu = \sum_{i=1}^N \int \int p_i \cdot \varphi \circ \bar{T}_i d\lambda d\mu \\ &= (\lambda \times \mu)(\varphi). \end{aligned}$$

Logo a medida preservada pelo bilhar determinístico $\lambda \times \mu$ é também uma medida invariante para o bilhar aleatório $\bar{\bar{F}} = \bar{T} \circ F$. □

As Proposições 7.2.2 e 7.2.3 garantem que a medida preservada pelo bilhar determinístico é medida invariante para os bilhares aleatórios \bar{F} ou $\bar{\bar{F}}$. Porém as probabilidades das aplicações \bar{F} e $\bar{\bar{F}}$ sofrem uma alteração. No caso da Proposição 7.2.2, $\bar{F}(s, \theta) = F(s, T_i(\theta))$ com probabilidade $p_i(\theta)$, e no caso da Proposição 7.2.3 temos que $\bar{\bar{F}}(s, \theta) = (s_1(s, \theta), T_i(\theta_1(s, \theta)))$ com probabilidade $p_i(\theta_1(s, \theta))$.

7.3 A Lei Forte de Knudsen para a Aplicação do Bilhar Circular Aleatório

Dada uma aplicação do bilhar aleatório $\bar{F}(s, \theta) = F(s, T_i(\theta)) := \bar{F}_i(s, \theta)$ com probabilidade $p_i(\theta)$, a medida $\lambda \times \mu$ preservada pela aplicação \bar{F} satisfaz: $(\lambda \times \mu)(A \times B) = \sum_{i=1}^n \iint_{\bar{F}_i^{-1}(A \times B)} p_i(\theta) d\lambda(s) d\mu(\theta)$ para todo mensurável $A \times B$ com respeito a medida $\lambda \times \mu$. Definimos o núcleo de probabilidade de transição por

$$K((s, \theta), A \times B) = \sum_{i=1}^4 p_i(\theta) \mathbb{1}_{A \times B}(F(s, T_i(\theta))).$$

O núcleo de probabilidade de transição define a evolução da distribuição inicial ν em $([0, \pi] \times [0, L], \mathcal{B})$ sobre \bar{F} iterativamente como

$$\nu^{(n+1)}(A \times B) = \iint K((s, \theta), A \times B) d\nu^n(s, \theta)$$

para $n \geq 1$ e $\nu^{(0)} = \nu$.

Teorema 7.3.1. *Sejam \bar{F} a aplicação do bilhar circular aleatório, $\alpha < \frac{\pi}{6}$ e $\gamma(s, \theta) = \lambda(s) \times \nu(\theta)$ com $\nu \ll \mu$, onde $\mu(A) = \frac{1}{2} \int \sin(\theta) d\theta$. Então $\gamma^{(n)}(A \times B) = \lambda^{(n)} \times \nu^{(n)}(A \times B) \rightarrow (\lambda \times \mu)(A \times B)$ para todo $A \times B$ mensurável se, e somente, se $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número irracional.*

Demonstração. Observamos que

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)}(A \times B) &= \iint K((s, \theta), A \times B) d\gamma(s, \theta) \\ &= \sum_{i=1}^4 \iint \mathbb{1}_{A \times B}(F(s, T_i(\theta))) p_i(\theta) d(\lambda(s) \nu(\theta)) \\ &= \sum_{i=1}^4 \int p_i(\theta) \mathbb{1}_B(T_i(\theta)) \left(\int \mathbb{1}_A(s + 2T_i(\theta) \pmod{2\pi}) d\lambda(s) \right) d\nu(\theta) \\ &= \lambda(A) \sum_{i=1}^4 \int \mathbb{1}_B(T_i(\theta)) p_i(\theta) d\nu(\theta) \\ &= \lambda(A) \times \nu^{(1)}(B). \end{aligned}$$

Indutivamente temos que $\gamma^{(n)}(A \times B) = \lambda \times \nu^{(n)}(A \times B)$. Como $\nu^{(n)}(B) \rightarrow \mu(B)$ se, e somente se, $\frac{\alpha}{\pi}$ for irracional, temos que $\gamma^{(n)}(A \times B) \rightarrow (\lambda \times \mu)(A \times B)$ se, e somente se, $\frac{\alpha}{\pi}$ for irracional. Portanto temos a Lei Forte de Knudsen para \overline{F} no caso particular de uma família de medidas γ . \square

A interpretação geométrica do Teorema 7.3.1 é a seguinte: dado $\frac{\alpha}{\pi}$ um número irracional, a distribuição de pontos e ângulos após uma quantidade arbitrariamente grande de colisões no círculo fica cada vez mais próxima da distribuição uniforme $\lambda \times \mu$. Ou seja, a menos de uma mudança de coordenadas na aplicação do bilhar determinístico, dado um conjunto $A \times B$ que seja $\lambda \times \mu$ -mensurável, a medida que o número de colisões tende ao infinito, tanto os pontos em A quanto os ângulos em B são equiprováveis que ocorrer.

Observação 7.3.1. *A técnica que usamos para encontrar a Lei Forte de Knudsen não poderá ser usada em outra mesa de bilhar cujos ângulos de saída tenham uma dependência da posição da partícula, uma vez que essa técnica usa o fato de que os ângulos de saída são dados pelas composições das aplicações T_i a partir de um certo ângulo inicial θ .*

Capítulo 8

Dinâmica do Bilhar Circular Aleatório

Neste capítulo apresentaremos algumas diferenças dinâmicas entre o bilhar circular determinístico e o bilhar circular aleatório. No caso do bilhar circular determinístico, se o ângulo de saída θ for tal que $\frac{\theta}{\pi}$ for racional, teremos trajetória periódica. Por outro lado, se $\frac{\theta}{\pi}$ for irracional, teremos trajetória densa no bordo da mesa. Mostraremos neste capítulo que, no caso do bilhar circular aleatório, poderemos ter trajetória periódica mesmo se $\frac{\theta}{\pi}$ for irracional e poderemos ter trajetória densa no bordo da mesa mesmo se $\frac{\theta}{\pi}$ for racional.

Para esse estudo sobre a dinâmica do bilhar circular aleatório, usaremos cadeias de Markov como principal ferramenta. Faremos um breve estudo sobre cadeias de Markov e relacionaremos com a aplicação aleatória de Feres.

Vamos relembrar algumas definições introduzidas anteriormente. Sejam $\Sigma' = \{1, 2, 3, 4\}^{\mathbb{N}}$ e $\Sigma_{\theta} \subset \Sigma'$ tal que $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \Sigma_{\theta}$ se $T_{x_n} \circ \dots \circ T_{x_2} \circ T_{x_1}(\theta)$ tenha probabilidade

$$p_{x_n}(T_{x_{n-1}} \circ \dots \circ T_{x_1}(\theta)) \cdots p_{x_2}(T_{x_1}(\theta))p_{x_1}(\theta)$$

positiva para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $\theta' \in \mathcal{C}(\theta)$ se existe $\underline{x} \in \Sigma_{\theta}$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\theta' = T_{x_n} \circ \dots \circ T_{x_2} \circ T_{x_1}(\theta)$$

tenha probabilidade

$$p_{x_n}(T_{x_{n-1}} \circ \dots \circ T_{x_1}(\theta)) \cdots p_{x_2}(T_{x_1}(\theta))p_{x_1}(\theta)$$

positiva. Podemos também relacionar o conjunto $\mathcal{C}(\theta)$ com a projeção na segunda coordenada dos iterados da aplicação do bilhar circular aleatório, isto é,

$$\mathcal{C}(\theta) = \left\{ \pi_2(\overline{F}_{\underline{x}}^{(n)}(s, \theta)), \forall s \in [0, 2\pi), \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall \underline{x} \in \Sigma_{\theta} \right\}$$

onde π_2 é a projeção na segunda coordenada.

8.1 Órbitas Periódicas

Nesta seção vamos encontrar órbitas periódicas para a aplicação do bilhar circular aleatório \overline{F} . Lembramos que no caso da aplicação bilhar circular determinístico F , se o ângulo de saída θ for tal que $\frac{\theta}{\pi}$ for racional, então a trajetória é periódica. Se $\frac{\theta}{\pi}$ for irracional então a trajetória é densa no bordo da mesa.

Dado $\underline{x} \in \Sigma_\theta$, notemos que um ponto $(s, \theta) \in [0, 2\pi) \times (0, \pi)$ é periódico de período 2, se $\overline{F}_{\underline{x}}^2(s, \theta) = (s + 2T_{x_1}(\theta) + 2T_{x_2}(T_{x_1}(\theta)) \bmod 2\pi, T_{x_2}(T_{x_1}(\theta))) = (s, \theta)$. Isto é,

$$\begin{cases} s + 2T_{x_1}(\theta) + 2T_{x_2}(T_{x_1}(\theta)) = s \bmod 2\pi \\ T_{x_2}(T_{x_1}(\theta)) = \theta. \end{cases}$$

Exemplo 8.1.1. Consideremos $\alpha < \frac{\pi}{6}$, \overline{F} a aplicação do bilhar circular aleatório e $\theta \in (0, \pi)$ tal que $\underline{x} = (1313 \dots) \in \Sigma_\theta$. Então

$$\overline{F}_{\underline{x}}^2(s, \theta) = \left(s + 2T_1(\theta) + 2T_3(T_1(\theta)), T_3(T_1(\theta)) \right),$$

ou seja,

$$\overline{F}_{\underline{x}}^2(s, \theta) = (s + 4\theta + 4\alpha, \theta) = (s, \theta) \Leftrightarrow \theta = \frac{m\pi}{2} - \alpha$$

com $m \in \mathbb{N}$. Portanto se $m = 1$ segue que $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \in (0, \pi - 2\alpha)$ e assim a composta $T_3 \circ T_1(\theta)$ tem probabilidade positiva. Logo temos órbita periódica de período 2 qualquer que seja $\alpha < \frac{\pi}{6}$ e $s \in [0, 2\pi)$.

Do mesmo modo, dado $\underline{x} \in \Sigma_\theta$, um ponto $(s, \theta) \in [0, 2\pi) \times (0, \pi)$ é periódico de período n , se $\overline{F}_{\underline{x}}^n(s, \theta) = (s + 2 \sum_{i=1}^n T_{x_i} \circ T_{x_{i-1}} \circ \dots \circ T_{x_1}(\theta) \bmod 2\pi, T_{x_n} \circ T_{x_{n-1}} \circ \dots \circ T_{x_1}(\theta)) = (s, \theta)$. Isto é,

$$\begin{cases} s + 2 \sum_{i=1}^n T_{x_i} \circ T_{x_{i-1}} \circ \dots \circ T_{x_1}(\theta) = s \bmod 2\pi \\ T_{x_n} \circ T_{x_{n-1}} \circ \dots \circ T_{x_1}(\theta) = \theta. \end{cases}$$

Proposição 8.1.1. Sejam $\alpha < \frac{\pi}{6}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então existem $\theta \in (0, \pi)$ e $\underline{x} \in \Sigma_\theta$ tais que (s, θ) é periódico de período $2n$ para a aplicação do bilhar circular aleatório qualquer que seja $s \in [0, 2\pi)$.

Demonstração. No Exemplo 8.1.1, encontramos $\theta \in (0, \pi)$ e $\underline{x} \in \Sigma_\theta$ tal que (s, θ) tem período 2 qualquer que seja $s \in [0, 2\pi)$.

Para o período $k = 4$, vamos encontrar $\theta \in (0, \pi - 4\alpha)$ para que $T_3 \circ T_3 \circ T_1 \circ T_1(\theta)$ tenha probabilidade positiva. Assim,

$$\overline{F}_x^4(s, \theta) = (s + 8\theta + 16\alpha, \theta) = (s, \theta) \Leftrightarrow \theta = \frac{m\pi}{4} - 2\alpha$$

com $m \in \mathbb{N}$. Para $m = 2$, temos que $\theta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ é tal que a composta $T_3 \circ T_3 \circ T_1 \circ T_1(\theta)$ tem probabilidade positiva e assim, tomando $\underline{x} = (11331133 \dots)$, temos órbita periódica de período 4 qualquer que seja $\alpha < \frac{\pi}{6}$ e $s \in [0, 2\pi)$.

Indutivamente, para o período $k = 2n$ temos que

$$\overline{F}_x^{2n}(s, \theta) = (s + 4n\theta + 4(3n - 2)\alpha, \theta) = (s, \theta) \Leftrightarrow \theta = \frac{m\pi - 2(3n - 2)\alpha}{2n}$$

com $m \in \mathbb{N}$. Queremos encontrar os valores m para que a composta $T_3 \circ T_3 \circ (T_1 \circ T_3 \circ \dots \circ T_1 \circ T_3) \circ T_1 \circ T_1(\theta)$ tenha probabilidade positiva, ou seja, $\theta \in (0, \pi - 4\alpha)$. Para isso tomemos $m = n$, e assim temos que

$$\theta = \frac{n\pi - 2(3n - 2)\alpha}{2n} < \pi - 4\alpha \Leftrightarrow 2n\alpha + 4\alpha < n\pi \Leftrightarrow \alpha < \frac{n\pi}{2n + 4}.$$

Notemos também que

$$\frac{n\pi}{2n + 4} > \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow n > 1.$$

Portanto $\overline{F}_x^{2n}(s, \theta) = (s, \theta)$ e $2n$ é o menor número natural com essa propriedade com respeito a sequência \underline{x} escolhida. \square

A Proposição 8.1.1 nos garante a existência de trajetórias periódicas tanto para $\frac{\alpha}{\pi}$ racional quanto para $\frac{\alpha}{\pi}$ irracional. Dado um ângulo de saída θ , notemos que mesmo que $\frac{\theta}{\pi}$ seja um número irracional, podemos obter trajetórias periódicas. Isso não acontece no bilhar circular determinístico.

Proposição 8.1.2. *Existem órbitas para aplicação do bilhar circular aleatório que coincidem com órbitas no bilhar circular determinístico.*

Demonstração. Notemos que $\theta = 2\alpha$ é ponto fixo para T_4 e $\theta = \pi - 2\alpha$ é ponto fixo para T_2 . Portanto temos que $F \circ T_4(s, 2\alpha) = \overline{F}_4(s, 2\alpha) = (s + 2(2\alpha), 2\alpha)$ e $F \circ T_2(s, \pi - 2\alpha) = \overline{F}_2(s, \pi - 2\alpha) = (s + 2(\pi - 2\alpha), \pi - 2\alpha)$ são iteradas cujas probabilidades são positivas. Então as composições $T_4 \circ T_4 \circ \dots \circ T_4 \circ T_4(2\alpha)$ e $T_2 \circ T_2 \circ \dots \circ T_2 \circ T_2(\pi - 2\alpha)$ geram órbitas aleatórias que coincidem com as órbitas determinísticas com esses ângulo iniciais. \square

A Proposição 8.1.2 nos fornece trajetórias periódicas e trajetórias densas no bordo da mesa circular. Como nesses casos as trajetórias aleatórias coincidem com as trajetórias determinísticas, se $\frac{\alpha}{\pi}$ for racional teremos trajetória periódica. Por outro lado, se $\frac{\alpha}{\pi}$ for irracional, teremos trajetória densa no bordo da mesa.

8.2 Trajetórias Densas

Nesta seção mostraremos a abundância das trajetórias que são densas no bordo da mesa pela aplicação do bilhar circular aleatório.

Definição 8.2.1. *Dados $\theta \in (0, \pi)$ e $\underline{x} \in \Sigma_\theta$, a trajetória do ponto (s, θ) pela aplicação do bilhar circular aleatório é densa no bordo da mesa circular, se a sequência $(\pi_1(F_{\underline{x}}^n(s, \theta)))_n = (s + 2 \sum T_{x_k} \circ T_{x_{k-1}} \circ \dots \circ T_{x_1} \circ T_{x_0}(\theta) \bmod 2\pi)_n$ for densa em $[0, 2\pi)$, onde π_1 é a projeção na primeira coordenada.*

Lema 8.2.1. *Dado $\alpha < \frac{\pi}{6}$, existe trajetória densa no bordo da mesa circular para a aplicação do bilhar aleatório.*

Demonstração. Consideremos $(a, b) \subset [0, 2\pi]$ um intervalo no círculo, $\theta \in (0, \pi - 2\alpha)$ e $\underline{x} = (1, 3, 1, 3, \dots) \in \Sigma_\theta$. Então temos a seguinte composta referente aos ângulos: $T_3 \circ T_1 \circ \dots \circ T_3 \circ T_1(\theta) = \theta$ com $\theta \in (0, \pi - 2\alpha)$. Notemos que para essa sequência temos que $\overline{F}_{\underline{x}}^{2n}(s, \theta) = (s + 4n(\theta + \alpha) \bmod 2\pi, \theta)$ ou seja, estaremos andando sobre o círculo pela quantidade $4(\theta + \alpha)$. Portanto podemos relacionar com o bilhar determinístico, e assim se $\frac{\theta + \alpha}{\pi}$ for um número irracional, existe um tempo $N \in \mathbb{N}$ em que esta trajetória intersecta o intervalo $(a, b) \times (0, \pi)$. Por fim, se $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número racional, podemos escolher $\theta \in (0, \pi - 2\alpha)$ de forma que $\frac{\theta + \alpha}{\pi}$ seja um número irracional. Segue então que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{F}_{\underline{x}}^N(s, \theta) \in (a, b) \times (0, \pi)$. \square

Notemos que encontramos trajetória densa no bordo da mesa circular para $\theta \in (0, \pi - 2\alpha)$. Porém se tomarmos a composta

$$T_1 \circ T_3 \circ \dots \circ T_1 \circ T_3(\theta) = \theta \text{ com } \theta \in (2\alpha, \pi),$$

seguindo a mesma ideia do Lema 8.2.1, temos a existência de órbita densa para qualquer $\theta \in (2\alpha, \pi)$. Da mesma forma, se $\theta \in (\alpha, 3\alpha)$, podemos aplicar $T_4 \circ T_4 \circ \dots \circ T_4(\theta)$ e seguir a mesma ideia, ou então para $\theta \in (\pi - 3\alpha, \pi - \alpha)$ podemos aplicar $T_2 \circ T_2 \circ \dots \circ T_2(\theta)$ e construir uma órbita densa. Assim temos diretamente a seguinte proposição.

Proposição 8.2.1. *Se $\frac{\alpha}{\pi}$ irracional, então para todo $\theta \in (0, \pi)$ existe uma trajetória densa no bordo da mesa circular para a aplicação do bilhar aleatório. Se $\frac{\alpha}{\pi}$ racional então, para todo θ em que $\frac{\theta}{\pi}$ irracional, existe uma trajetória densa no bordo da mesa circular para a aplicação do bilhar aleatório.*

Observamos aqui uma diferença entre o bilhar circular determinístico e o bilhar circular aleatório. No caso do bilhar circular determinístico, se o ângulo de saída θ é tal que $\frac{\theta}{\pi}$ for irracional, então a trajetória é densa no bordo da mesa. Por outro lado, se $\frac{\theta}{\pi}$ for racional então a trajetória é periódica. No caso do bilhar circular

aleatório, o Corolário 8.2.1 nos fornece trajetórias densas no bordo da mesa mesmo se $\frac{\theta}{\pi}$ for racional.

8.2.1 Cadeia de Markov

Nesta subseção, temos como objetivo mostrar a abundância das trajetórias densas no bordo da mesa circular com respeito a aplicação do bilhar circular aleatório \bar{F} . Para isso vamos usar a cadeia de Markov como principal ferramenta.

Definição 8.2.2. *Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Prob})$ um espaço de probabilidade, S um conjunto finito ou enumerável (chamado de espaço de estados) e $X_n : \Omega \rightarrow S$ variável aleatória (função mensurável) com $n \in \mathbb{N}$. A sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cadeia de Markov, se para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se que*

$$\text{Prob}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1) = \text{Prob}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$

para todo $x_{n+1}, x_n, \dots, x_1 \in S$.

Dados $x, y \in S$, a probabilidade $\text{Prob}(X_n = x | X_{n-1} = y) := p_{yx}$ é chamada de probabilidade de transição. A probabilidade de transição p_{yx} é a probabilidade de passarmos do estado x para o estado y em um único passo. Se a probabilidade de transição tem uma independência do índice n , isto é, $\text{Prob}(X_2 = x | X_1 = y) = \text{Prob}(X_n = x | X_{n-1} = y)$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a cadeia de Markov é homogênea no tempo. A matriz $P = (p_{ij}) := (p_{x_i x_j})$ é chamada matriz de probabilidade de transição de um único passo ou matriz estocástica, e além disso observemos que $\sum_{y \in S} p_{xy} = 1$.

Podemos também calcular a probabilidade de partirmos do estado $x \in S$ e chegarmos no estado $y \in S$ no tempo 2 (ou em dois passos). Para isso, devemos calcular $\sum_{z \in S} p_{yz} p_{zx} := p_{yx}^{(2)}$, que é a soma sobre todas as possibilidades de ir de y a x em dois passos. A probabilidade $p_{yx}^{(2)}$ será a entrada correspondente da $P^2 = P \times P$. De maneira análoga, podemos calcular a probabilidade $p_{yx}^{(n)}$ que é a soma sobre todas as possibilidades de ir de y a x em n passos, isto é,

$$p_{yx}^{(n)} = \sum_{z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in S} p_{yz_1} p_{z_1 z_2} \cdots p_{z_{n-1} x}.$$

Definição 8.2.3. *Dizemos que a matriz estocástica P é irredutível se para todo $x, y \in S$, existe $n > 0$ tal que $p_{xy}^{(n)} > 0$.*

O conjunto $\tau(x) := \{n \in \mathbb{N}; p_{x,x}^{(n)} > 0\}$ é o conjunto dos tempos de retorno de x , e indica os tempos n em que é possível sair do estado x e voltar no próprio estado x em n passos. O período do estado x é o $MDC(\tau(x))$. Dizemos que o estado x é aperiódico se o $MDC(\tau(x)) = 1$, caso contrário dizemos que x é periódico.

Se uma cadeia de Markov com espaço de estados X é irredutível, então $MDC(\tau(x)) = MDC(\tau(y))$ para todo $x, y \in X$. Esse é um resultado clássico na teoria da probabilidade e pode ser visto, por exemplo, em [13].

Definição 8.2.4. *Uma cadeia de Markov irredutível é periódica se todos os seus estados são periódicos. Caso contrário dizemos que a cadeia de Markov é aperiódica.*

Uma medida μ em S é completamente caracterizada pelos valores $\mu_i = \mu(x_i)$ com $i \in \{1, 2, \dots, r, \dots\}$. Dizemos que μ é uma medida estacionária se ela satisfaz

$$\sum_i \mu_i p_{ij} = \mu_j \text{ para todo } j \in \{1, 2, \dots, r, \dots\}.$$

Definição 8.2.5. *Se a medida estacionária μ for uma probabilidade, então dizemos que μ é uma distribuição estacionária.*

Dado uma cadeia de Markov em um espaço de estados mensurável S , consideremos $\Sigma = S^{\mathbb{N}}$ o espaço das sequências munido com a σ -álgebra produto. Definimos um cilindro de comprimento L iniciando de $x_m \in \mathbb{N}$, como:

$$[L, m : x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+L}] = \{y \in \Sigma : y_m = x_m, y_{m+1} = x_{m+1}, \dots, y_{m+L} = x_{m+L}\}.$$

Definimos a medida de Markov, uma medida em Σ , como sendo

$$\nu([L, m : x_m, \dots, x_{m+L}]) = \mu_{x_m} p_{x_m, x_{m+1}} \cdots p_{x_{m+L-1}, x_{m+L}}.$$

Vamos considerar Σ_P o conjunto das sequências \underline{y} em Σ tais que

$$p_{y_n, y_{n+1}} > 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Podemos chamar as sequências $\underline{y} \in \Sigma_P$ de sequências admissíveis. Consideremos também o shift

$$\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma, \text{ tal que } \sigma(x_n)_n = (x_{n+1})_n.$$

Notemos que Σ_P é invariante pelo shift σ e que

$$\nu([L, m : x_m, \dots, x_{m+L}]) = \mu_{x_m} p_{x_m, x_{m+1}} \cdots p_{x_{m+L-1}, x_{m+L}} > 0$$

para todo $\underline{x} \in \Sigma_P$, ou seja, $\underline{x} \in \text{supp } \nu$.

Teorema 8.2.1. *Seja P a matriz estocástica de uma cadeia de Markov.*

- a) *O shift de Markov (σ, ν) com finitos símbolos é ergódico se, e somente se, a matriz estocástica P é irredutível.*

b) O shift de Markov (σ, ν) com enumeráveis símbolos é ergódico se, e somente se, possui distribuição estacionária e a matriz estocástica P for irredutível.

O Teorema 8.2.1 é um resultado clássico e pode ser visto, por exemplo, em [27] para o item a e em [13] no exemplo 7.1.7 para o item b .

A aplicação aleatória de Feres pode ser relacionada com uma cadeia de Markov cujo o espaço de estados é $\mathcal{C}(\theta)$, uma vez que se estamos em um estado $\theta_i \in \mathcal{C}(\theta)$ no tempo n , a probabilidade (positiva) p_{θ_i, θ_j} de mover para um outro estado $\theta_j \in \mathcal{C}(\theta)$ no tempo $n + 1$ é independente de todos os anteriores.

Exemplo 8.2.1. Se $\alpha = \frac{\pi}{8}$ e $\theta \in (0, \alpha)$, a cadeia de Markov em $\mathcal{C}(\theta) = \{\theta, \theta + 2\alpha, \theta + 4\alpha, \theta + 6\alpha, -\theta + 2\alpha, -\theta + 4\alpha, -\theta + 6\alpha, -\theta + 8\alpha\}$ é uma cadeia de Markov irredutível periódica de período 2, ver Figura 8.1 a direita. Se $\alpha = \frac{\pi}{7}$ e $\theta \in (0, \alpha)$, a cadeia de Markov em $\mathcal{C}(\theta) = \{\theta, \theta + 2\alpha, \theta + 4\alpha, \theta + 6\alpha, -\theta + 2\alpha, -\theta + 4\alpha, -\theta + 6\alpha\}$ é uma cadeia de Markov irredutível aperiódica, ver Figura 8.1 a esquerda.

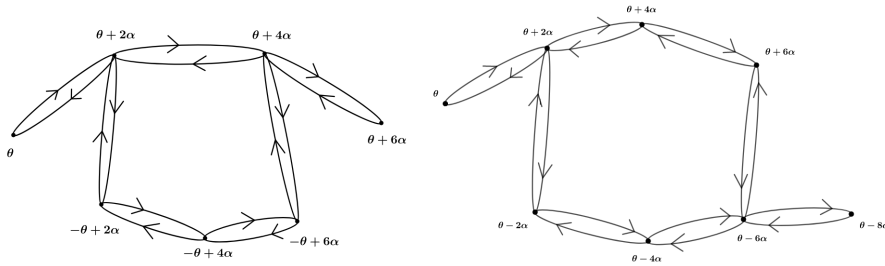


Figura 8.1: A direita uma cadeia de Markov (2-periódica) para $\alpha = \frac{\pi}{8}$ e a esquerda uma cadeia de Markov aperiódica para $\alpha = \frac{\pi}{7}$.

Proposição 8.2.2. Sejam $\alpha < \frac{\pi}{6}$, $\theta \in (0, \pi)$ e $\Sigma = \mathcal{C}(\theta)^{\mathbb{N}}$. Se $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número racional, então o shift de Markov em Σ é ergódico. Se $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número irracional e a cadeia de Markov em $\mathcal{C}(\theta)$ for aperiódica, então o shift de Markov em Σ é ergódico.

Demonstração. Notemos que se $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número racional, temos pela Proposição 6.5.1 que $\mathcal{C}(\theta)$ é finito. Pelo Teorema 8.2.1 precisamos verificar que a matriz estocástica P em $\mathcal{C}(\theta)$ é irredutível. Notemos que se $\theta', \theta'' \in \mathcal{C}(\theta)$, então existe uma sequência $\underline{x} \in \Sigma_\theta$ tal que $\theta'' = T_{x_k} \circ \dots \circ T_{x_1}(\theta')$ e

$$p_{x_1}(\theta') p_{x_2}(T_{x_1}(\theta')) \dots p_{x_k}(T_{x_{k-1}} \circ T_{x_{k-2}} \circ \dots \circ T_{x_1}(\theta')) > 0.$$

Logo qualquer estado $\theta' \in \mathcal{C}(\theta)$ tem probabilidade positiva de alcançar qualquer outro estado $\theta'' \in \mathcal{C}(\theta)$. Portanto a matriz estocástica é irredutível e assim o shift de Markov em Σ é ergódico.

Se $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número irracional, então pela Proposição 6.5.2 temos que $\mathcal{C}(\theta)$ é enumerável. Se a cadeia de Markov em $\mathcal{C}(\theta)$ for aperiódica, então existe distribuição estacionária uma vez que a cadeia de Markov é irredutível (análogo ao caso

anterior). Portanto segue do Teorema 8.2.1 que o shift de Markov em Σ é ergódico. \square

Podemos relacionar cada sequência $\underline{x} \in \cup_{\theta' \in \mathcal{C}(\theta)} \Sigma_{\theta'}$ com uma única sequência em $\underline{y} \in (\mathcal{C}(\theta))^{\mathbb{N}}$ e vice versa. De fato, sejam $\theta' \in \mathcal{C}(\theta)$ e

$$\underline{y} = (\theta', \theta'_1, \theta'_2, \dots) = (\theta', T_{x_1}(\theta'), T_{x_2} \circ T_{x_1}(\theta'), \dots) \in (\mathcal{C}(\theta))^{\mathbb{N}},$$

a sequência relacionada em $\cup_{\theta' \in \mathcal{C}(\theta)} \Sigma_{\theta'}$ é dada por $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \Sigma_{\theta'}$. Por outro lado, dado uma sequência $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \Sigma_{\theta'}$, a sequência relacionada em $(\mathcal{C}(\theta))^{\mathbb{N}}$ é dada por

$$\underline{y} = (\theta', \theta'_1, \theta'_2, \dots) = (\theta', T_{x_1}(\theta'), T_{x_2} \circ T_{x_1}(\theta'), \dots).$$

Para o próximo teorema, vamos considerar a diferença simétrica entre dois conjuntos A e B por:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Definição 8.2.6. Um conjunto $A \subset \Sigma$ é σ -invariante se $\nu(A \Delta \sigma^{-1}(A)) = 0$.

Teorema 8.2.2. Sejam $\overline{F} : [0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \Sigma$ a aplicação do bilhar circular aleatório, $(s, \theta) \in [0, 2\pi) \times (0, \pi)$, $\alpha < \frac{\pi}{6}$ e ν a medida de Markov em $(\mathcal{C}(\theta))^{\mathbb{N}}$.

1. Se $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número racional e $\frac{\theta}{\pi}$ for um número irracional, então para ν -quase todo $\underline{y} \in (\mathcal{C}(\theta))^{\mathbb{N}}$, a trajetória relacionada $\overline{F}_{\underline{x}}$ do ponto (s, θ) é densa no bordo da mesa circular.
2. Se $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número irracional e a cadeia de Markov em $\mathcal{C}(\theta)$ for aperiódica, então para ν -quase todo $\underline{y} \in (\mathcal{C}(\theta))^{\mathbb{N}}$, a trajetória relacionada $\overline{F}_{\underline{x}}$ do ponto (s, θ) é densa no bordo da mesa circular.

Demonstração. Para o primeiro item, pela Proposição 6.5.1, o conjunto $\mathcal{C}(\theta)$ é finito. Uma vez que a cadeia de Markov em $\mathcal{C}(\theta)$ é irredutível, pelo Proposição 8.2.2, o shift de Markov é ergódico.

Fixado um aberto $(a, b) \subset (0, 2\pi)$ tomemos $\theta \in (0, \pi)$ tal que $\frac{\theta}{\pi}$ seja irracional. Sem perda de generalidade, suponha que $T_3 \circ T_1(\theta)$ é tal que $p_3(T_1(\theta))p_1(\theta) > 0$. Pelo Lema 8.2.1, a sequência $\underline{x} = (131313 \dots)$ gera uma trajetória densa no bordo da mesa e portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{F}_{\underline{x}}^N(s, \theta)$ intersecta $(a, b) \times (0, \pi)$ qualquer que seja $s \in [0, 2\pi)$.

Observemos que o conjunto das sequências $\underline{x} \in \Sigma_{\theta}$ em que a sequência finita $\underline{z} = (13)$ aparece em alguma posição é invariante pelo shift. De fato, seja $X = \{\underline{x} \in \Sigma_{\theta} : \underline{x} = x_1 x_2 \dots 13 x_{n+1} \dots \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\underline{x} = (x_1 x_2 \dots 13 x_{n+1} \dots) \in X$, considere a sequência $\underline{y} = (y_0 x_1 x_2 \dots 13 x_{n+1} \dots) \in X$. Portanto $\sigma(\underline{y}) = \underline{x}$ e assim mostramos que $X \subset \sigma^{-1}(X)$. Por outro lado, dado $\underline{y} \in \sigma^{-1}(X)$, existe $\underline{x} =$

$(x_1 x_2 \cdots 13 x_{n+1} \cdots) \in X$ tal que $\underline{y} \in \sigma^{-1}(\underline{x})$. Isto é, $\underline{y} = (y_0 x_1 x_2 \cdots 13 x_{n+1} \cdots) \in X$ e portanto $\sigma^{-1}(X) \subset X$. Concluimos que $X = \sigma^{-1}(X)$.

De maneira análoga ao parágrafo anterior, o conjunto das sequências $\underline{x} \in \Sigma_\theta$ em que a sequência finita $\underline{z} = (1313 \cdots 13)$ aparece em alguma posição é invariante pelo shift. Pela ergodicidade do shift de Markov, existe $X_\theta \subset \Sigma_\theta$ tal que $\nu(X_\theta) = 1$ e a sequência finita \underline{z} aparece em toda sequência $\underline{x} \in X_\theta$.

Portanto, para todo $\underline{x} \in X_\theta$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{F}_x^m(s, \theta)$ intersecta $(a, b) \times (o, \pi)$. Assim, a sequência $(s + 2 \sum_{k=1}^n T_{x_k} \circ T_{x_{k-1}} \circ \cdots \circ T_{x_1}(\theta') \pmod{2\pi})_n$ intersecta $(a, b) \subset (0, 2\pi)$.

Para o segundo item, pela Proposição 6.5.2, temos uma cadeia de Markov enumerável. Por hipótese temos também que essa cadeia de Markov é aperiódica, portanto pela Proposição 8.2.2, segue que o shift de Markov é ergódico. O restante da demonstração segue as mesmas linhas da demonstração do primeiro item. \square

8.3 Pseudo Cáusticas do Bilhar Circular Aleatório

Em bilhares determinísticos, a cáustica é uma curva que tangencia todos os segmentos de retas que conectam duas colisões consecutivas. Como vimos no Capítulo 6, no caso do bilhar circular determinístico de raio 1, a cáustica é um círculo de mesmo centro cujo raio é dado por $r = \cos \theta$ onde θ é o ângulo de saída.

Com respeito ao bilhar circular aleatório, dado um ângulo inicial $\theta \in (0, \pi)$, para cada $\theta' \in \mathcal{C}(\theta)$ nós temos um círculo de mesmo centro cujo raio é dado por $\cos T_i(\theta')$ que é tangente ao segmento de trajetória que conecta os pontos (s', θ') com $(s' + 2T_i(\theta') \pmod{2\pi}, T_i(\theta'))$. Lembremos que a aplicação do bilhar circular aleatório foi definida como

$$\overline{F}(s', \theta') = F \circ \overline{T}(s', \theta') = (s' + 2T_i(\theta') \pmod{2\pi}, T_i(\theta'))$$

com probabilidade $p_i(\theta')$, onde \overline{T} é a aplicação aleatória de Feres e F a aplicação do bilhar circular determinístico. Portanto, dependendo do valor de α , temos uma quantidade finita ou enumerável de círculos que são tangentes a algum segmento de trajetória do bilhar.

Definição 8.3.1. *Dado $\alpha < \frac{\pi}{6}$, definimos a pseudo cáustica da aplicação do bilhar aleatório como sendo o círculo de raio $r = \inf_{\theta' \in \mathcal{C}(\theta)} \cos(\theta')$.*

Observemos que se $\frac{\pi}{2} \in \mathcal{C}(\theta)$ ou $\frac{\pi}{2}$ for um ponto de acumulação em $\mathcal{C}(\theta)$, teremos trajetórias passando pelo centro do círculo, nesse caso o centro do círculo será a pseudo cáustica degenerada.

Exemplo 8.3.1. Dado $\alpha = \frac{\pi}{7}$ e $\theta = \frac{\pi}{20}$, existem no máximo 7 círculos que são tangentes a algum segmento de trajetória do bilhar circular aleatório, uma vez que $\#\mathcal{C}(\theta) = 7$. Em particular, não temos trajetórias que passam pelo centro da mesa circular e portanto o círculo de menor raio será a pseudo cáustica da aplicação do bilhar circular aleatório. Ver Figura 8.2.

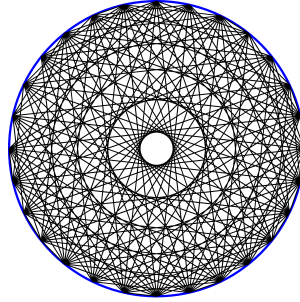


Figura 8.2: Pseudo cáustica da aplicação do bilhar circular aleatório para $\alpha = \frac{\pi}{7}$ e ângulo inicial $\theta = \frac{\pi}{20}$.

Porém, para $\alpha = \frac{\pi}{7}$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, teremos trajetórias passando pelo centro da mesa circular e portanto teremos uma pseudo cáustica degenerada que será o centro do círculo. Ver Figura 8.3,

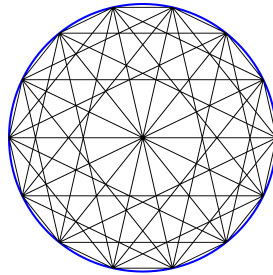


Figura 8.3: Para $\alpha = \frac{\pi}{7}$ e ângulo inicial $\theta = \frac{\pi}{2}$, teremos pseudo cáustica degenerada para a aplicação do bilhar circular aleatório.

Para $\alpha = \frac{\pi}{7}$, se $\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{14}, \theta = \frac{3\pi}{14}$ e $\theta = \frac{5\pi}{14}$, teremos pseudo cáusticas degeneradas uma vez que teremos trajetórias passando pelo centro da mesa circular. Nos outros casos de ângulo inicial θ sempre teremos pseudo cáustica. Em comparação com o bilhar circular determinístico, o único caso em que se tem cáustica degenerada é quando o ângulo inicial for $\frac{\pi}{2}$.

No caso em que $\frac{\alpha}{\pi}$ é um número irracional, temos que $\mathcal{C}(\theta)$ enumerável. Assim, se $\frac{\pi}{2} \notin \mathcal{C}(\theta)$ e $\frac{\pi}{2}$ não for um ponto de acumulação, o bilhar circular aleatório terá pseudo cáustica. Ou seja, existe um círculo de menor raio que é tangente a algum segmento de trajetória. Caso contrário teremos pseudo cáustica degenerada.

Para o próximo Teorema, sejam U um disco de raio 1, ∂U o bordo do disco U e \mathcal{A} o anel circular formado pelo bordo do disco ∂U e a pseudo cáustica aleatória γ_0 (caso exista).

Teorema 8.3.1. *Dado $\alpha < \frac{\pi}{6}$, sejam $\bar{F} : [0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow [0, 2\pi) \times (0, \pi)$ a aplicação do bilhar circular aleatório, $\theta \in (0, \pi)$ tal que a aplicação do bilhar circular aleatório admita pseudo cáustica aleatória e ν a medida de Markov.*

1. *Se $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número racional e $\frac{\theta}{\pi}$ for um número irracional, então para ν -quase todo $\underline{y} \in (\mathcal{C}(\theta))^{\mathbb{N}}$, a trajetória relacionada $\bar{F}_{\underline{x}}$ do ponto (s, θ) é densa \mathcal{A} .*
2. *Se $\frac{\alpha}{\pi}$ for irracional e a cadeia de Markov for aperiódica, então para ν -quase todo $\underline{y} \in (\mathcal{C}(\theta))^{\mathbb{N}}$, a trajetória relacionada $\bar{F}_{\underline{x}}$ do ponto (s, θ) é densa \mathcal{A} . Em particular, se $\frac{\pi}{2}$ é um ponto de acumulação $\mathcal{C}(\theta)$, então para ν -quase todo $\underline{y} \in (\mathcal{C}(\theta))^{\mathbb{N}}$, a trajetória relacionada $\bar{F}_{\underline{x}}$ do ponto (s, θ) é denso no interior de U .*

Demonstração. Para $\frac{\alpha}{\pi}$ um número racional, seja $\theta \in (0, \pi)$ tal que $\frac{\theta}{\pi}$ é um número irracional. Por hipótese, assumamos a existência da pseudo cáustica γ_0 , ou seja, existe $\theta_0 \in \mathcal{C}(\theta)$ que gera a pseudo cáustica γ_0 . Dado $\epsilon > 0$ e um ponto P no anel circular \mathcal{A} , vamos provar que ν -quase toda trajetória do bilhar aleatório intersecta o interior da bola $B_\epsilon(P)$.

Seja $T_i = T_j^{-1}$ tal que $p_j(T_i(\theta_0))p_i(\theta_0) > 0$, para algum $i, j = \{1, 2, 3, 4\}$. Pelo Teorema 8.2.1 a sequência $\underline{x} = (i, j, i, j, \dots)$ gera uma órbita densa no bordo da mesa circular.

Consideremos r_1, r_2 retas tangentes a γ_0 passando por P e sejam $Q_1 \in r_1 \cap \partial U$ e $Q_2 \in r_2 \cap \partial U$ como na Figura 8.4. Pela densidade das órbitas no bordo da mesa circular, podemos assumir que existe $R_1 \in \partial U$ da trajetória, de forma que $d(R_1, Q_1) < \epsilon$. Então a trajetória passando por R_1 intersecta $B_\epsilon(P)$ desde que a trajetória passando por R_1 é tangente a γ_0 . Pela ergodicidade do shift de Markov, esse argumento pode ser usado para quase toda sequência $\underline{x} \in \Sigma_{\theta_0}$. Portanto vale também para quase toda sequência $\underline{x} \in \Sigma_\theta$.

Analogamente, para $\frac{\alpha}{\pi}$ irracional tome $\theta \in (0, \pi)$ tal que a cadeia de Markov em $\mathcal{C}(\theta)$ seja aperiódica.

□

8.4 Derivada do bilhar aleatório e o Expoente de Lyapunov

Nesta seção vamos encontrar a derivada do bilhar aleatório e calcular o expoente de Lyapunov no bilhar aleatório circular/faixa.

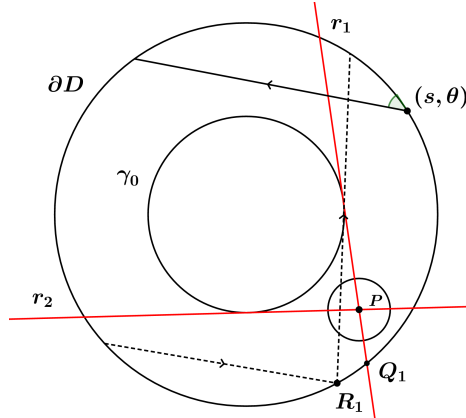


Figura 8.4: Trajetória densa no anel circular \mathcal{A} .

Proposição 8.4.1. *Seja \bar{F} a aplicação do bilhar aleatório. Então a sua derivada é dada pela matriz*

$$D\bar{F}(s_0, \theta_0) = \frac{1}{\overline{\text{sen}\theta_1}} \begin{bmatrix} \overline{l_{01}k_0 - \text{sen}T_i(\theta_0)} & \overline{l_{01}T'_i(\theta_0)} \\ \overline{k_1(\overline{l_{01}k_0 - \text{sen}T_i(\theta_0)}) - k_0\overline{\text{sen}\theta_1}} & \overline{T'_i(\theta_0)(\overline{l_{01}k_1 - \text{sen}\theta_1})} \end{bmatrix}$$

com probabilidade $p_i(\theta_0)$, onde $\overline{\theta_1} = \theta_1(s_0, T_i(\theta_0))$, k_0 é a curvatura em (s_0, θ_0) , $\overline{k_1}$ é a curvatura em $(s_1(s_0, \theta_0), \theta_1(s_0, T_i(\theta_0)))$ e $\overline{l_{01}}$ a distância entre as colisões.

Demonstração. Notemos que a derivada da aplicação aleatória \bar{T} é dada pela matriz

$$D\bar{T}_i(s_0, \theta_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T'_i(\theta_0) \end{bmatrix}$$

com probabilidade $p_i(\theta_0)$.

Pela regra da cadeia, temos que

$$D\bar{F}(s_0, \theta_0) = D(F \circ \bar{T})(s_0, \theta_0) = DF(\bar{T}(s_0, \theta_0)) \cdot D\bar{T}(s_0, \theta_0).$$

Portanto $D\bar{F}(s_0, \theta_0)$

$$= \frac{1}{\overline{\text{sen}\theta_1}} \begin{bmatrix} \overline{l_{01}k_0 - \text{sen}T_i(\theta_0)} & \overline{l_{01}T'_i(\theta_0)} \\ \overline{k_1(\overline{l_{01}k_0 - \text{sen}T_i(\theta_0)}) - k_0\overline{\text{sen}\theta_1}} & \overline{T'_i(\theta_0)(\overline{l_{01}k_1 - \text{sen}\theta_1})} \end{bmatrix}$$

com probabilidade $p_i(\theta_0)$. □

Exemplo 8.4.1. *Para o bilhar aleatório no círculo de raio 1, temos que*

$$D\bar{F}(s_0, \theta_0) = \begin{bmatrix} 1 & 2T'_i(\theta_0) \\ 0 & T'_i(\theta_0) \end{bmatrix},$$

onde $\overline{F}(s_0, \theta_0) = (s_0 + 2T'_i(\theta_0) \bmod 2\pi, T_i(\theta_0))$ com probabilidade $p_i(\theta_0)$. De fato, podemos aplicar a Proposição 8.4.1 e verificar que $\overline{l}_{01} = 2\text{sen}(T_i(\theta_0))$, $\overline{\theta}_1 = T_i(\theta_0)$ e $k_0 = \overline{k}_1 = 1$. Ou podemos derivar diretamente a aplicação aleatória do círculo $\overline{F}(s_0, \theta_0)$.

Podemos agora definir o expoente de Lyapunov da aplicação do bilhar aleatório. Dada uma aplicação de bilhar aleatório \overline{F} e $\underline{x} \in \Sigma_\theta$, definimos $\overline{F}_{\underline{x}}^{(n)}(s, \theta) = \overline{F}_{x_n} \circ \overline{F}_{x_{n-1}} \circ \dots \circ \overline{F}_{x_1} \circ \overline{F}_{x_0}(s, \theta)$.

Definição 8.4.1. Dados $\underline{x} \in \Sigma_\theta$ em que $\underline{x} \in \Sigma_{\theta'}$ para todo θ' numa vizinhança de θ e $v \in \mathbb{R}^2$, o expoente de Lyapunov da aplicação do bilhar aleatório \overline{F} no ponto (s, θ) é denotado por $\lambda_{\underline{x}, v}(s, \theta)$ e definido por

$$\lambda_{\underline{x}, v}(s, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|(\overline{F}_{\underline{x}}^{(n)})'(s, \theta)v\|$$

quando o limite existe.

Observação 8.4.1. Consideremos $A = \{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \pi - 3\alpha, \pi - 2\alpha, \pi - \alpha, \pi\}$ e $\theta \in (0, \pi)$ tal que $\theta \notin A$. Se $\frac{\alpha}{\pi}$ racional, então pela Proposição 6.5.1 temos que $\mathcal{C}(\theta)$ é finito e seja $\mathcal{C}(\theta) = \{\theta_1 = \theta, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n\}$. Analogamente ao que foi feito no Teorema 6.4.1, dados $\epsilon = \min_{i \leq n} \{d(\theta_i, A)\}$ e $I_j = (\theta_j - \epsilon, \theta_j + \epsilon)$, o conjunto $\cup_{j=1}^n I_j$ é invariante pela aplicação de Feres T . Portanto dado $\underline{x} \in \Sigma_\theta$, então $\underline{x} \in \Sigma_{\theta'}$ para todo $\theta' \in (\theta - \epsilon, \theta + \epsilon)$.

Proposição 8.4.2. Sejam $\alpha < \frac{\pi}{6}$ tal que $\frac{\alpha}{\pi}$ é um número racional e $\theta \in (0, \pi)$ tal que $\theta \notin A = \{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \pi - 3\alpha, \pi - 2\alpha, \pi - \alpha, \pi\}$. Então para todo $\underline{x} \in \Sigma_\theta$ o expoente de Lyapunov do bilhar circular aleatório $\lambda_{\underline{x}, v}(s, \theta) = 0$ para todo s pertencente ao bordo da mesa circular e para toda direção $v \in \mathbb{R}^2$.

Demonstração. Dado $\underline{x} \in \Sigma_\theta$, pela Observação 8.4.1, existe ϵ tal que $\underline{x} \in \Sigma_{\theta'}$ para todo $\theta' \in (\theta - \epsilon, \theta + \epsilon)$. Notemos que a derivada $D_{(s, \theta)} \overline{F}_{\underline{x}}^{(n)}$ da aplicação do bilhar circular aleatório é

$$D_{(s, \theta)} \overline{F}_{\underline{x}}^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & A_n \\ 0 & B_n \end{bmatrix}$$

onde

$$A_n = \sum_{k=1}^n 2T'_{x_k}(T_{x_{k-1}} \circ \dots \circ T_{x_1}(\theta)) T'_{x_{k-1}}(T_{x_{k-2}} \circ \dots \circ T_{x_1}(\theta)) \dots T'_{x_2}(T_{x_1}(\theta)) T'_{x_1}(\theta)$$

e

$$B_n = T'_{x_k}(T_{x_{k-1}} \circ \dots \circ T_{x_1}(\theta)) T'_{x_{k-1}}(T_{x_{k-2}} \circ \dots \circ T_{x_1}(\theta)) \dots T'_{x_2}(T_{x_1}(\theta)) T'_{x_1}(\theta).$$

Pela linearidade das transformações T_{x_n} , o elemento $A_n \in \{-2n, \dots, 0, \dots, 2n\}$ e o elemento $B_n \in \{1, -1\}$ a depender das sequências escolhidas. Assim tomando

qualquer direção $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\frac{1}{n} \log \|D_{(s,\theta)} \overline{F}_x^{(n)} \cdot v\| = \frac{1}{n} \log \|(v_1 + v_2 A, v_2 B)\|.$$

Pela limitação de A_n e B_n , segue que

$$\lambda_{x,v}(s, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_{(s,\theta)} \overline{F}_x^{(n)} \cdot v\| = 0$$

para todo s no bordo da mesa circular e para toda direção $v \in \mathbb{R}^2$. □

Proposição 8.4.3. *Sejam $\alpha < \frac{\pi}{6}$ tal que $\frac{\alpha}{\pi}$ é um número racional e $\theta \in (0, \pi)$ tal que $\theta \notin A = \{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \pi - 3\alpha, \pi - 2\alpha, \pi - \alpha, \pi\}$. Então para todo $x \in \Sigma_\theta$ o expoente de Lyapunov do bilhar aleatório na faixa $\lambda_{x,v}(s, \theta) = 0$ para todo s pertencente ao bordo da mesa e para toda direção $v \in \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Sejam F a aplicação do bilhar determinístico na faixa e $\overline{F}_i(s_0, \theta_0) = (s_1(s_0, \theta_0), T_i(\theta_0))$ a aplicação do bilhar aleatório na faixa. Então a matriz da derivada em (s_0, θ_0) será

$$D_{(s_0, \theta_0)} \overline{F}_x^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & \pm \frac{l_{01}}{\text{sen} T_{i_1}(\theta_0)} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Indutivamente temos que

$$D_{(s_0, \theta_0)} \overline{F}_x^{(n)} = (-1)^n \begin{bmatrix} -1 & \pm \frac{l_{01}}{\text{sen} T_{i_1}(\theta_0)} \pm \frac{l_{12}}{\text{sen} T_{i_2} \circ T_{i_1}(\theta_0)} \pm \dots \pm \frac{l_{(n-1)n}}{\text{sen} T_{i_n} \circ \dots \circ T_{i_1}(\theta_0)} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, tomando qualquer direção $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, segue que $\|D_{(s_0, \theta_0)} \overline{F}_x^{(n)} \cdot v\|$

$$\begin{aligned} &= \left\| \left(-v_1 + v_2 \left(\pm \frac{l_{01}}{\text{sen} T_{i_1}(\theta_0)} \pm \frac{l_{12}}{\text{sen} T_{i_2} \circ T_{i_1}(\theta_0)} \pm \dots \pm \frac{l_{(n-1)n}}{\text{sen} T_{i_n} \circ \dots \circ T_{i_1}(\theta_0)} \right), -v_2 \right) \right\| \\ &\leq \left\| (v_1, v_2) \right\| + \left\| \left(v_2 \left(\pm \frac{l_{01}}{\text{sen} T_{i_1}(\theta_0)} \pm \frac{l_{12}}{\text{sen} T_{i_2} \circ T_{i_1}(\theta_0)} \pm \dots \pm \frac{l_{(n-1)n}}{\text{sen} T_{i_n} \circ \dots \circ T_{i_1}(\theta_0)} \right), 0 \right) \right\|. \end{aligned}$$

Como $\frac{\alpha}{\pi}$ é racional, então $\mathcal{C}(\theta_0) = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$. Seja $L = \max\{l_{01}, l_{12}, \dots, l_{(n-1)n}\}$ e

tome $\theta \in \mathcal{C}(\theta_0)$ o ângulo em que $\frac{1}{\text{sen}\theta} \geq \frac{1}{\text{sen}\theta_i}$ com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Então

$$\begin{aligned} \left\| D_{(s_0, \theta_0)} \overline{F}_{\underline{x}}^{(n)} \cdot v \right\| &\leq \|(v_1, v_2)\| + \sqrt{v_2^2 \left(\frac{l_{01}}{\text{sen}\theta_1} + \frac{l_{12}}{\text{sen}\theta_2} + \dots + \frac{l_{(n-1)n}}{\text{sen}\theta_n} \right)^2} \\ &= \|(v_1, v_2)\| + v_2 \left(\frac{l_{01}}{\text{sen}\theta_1} + \frac{l_{12}}{\text{sen}\theta_2} + \dots + \frac{l_{(n-1)n}}{\text{sen}\theta_n} \right) \\ &\leq \|(v_1, v_2)\| + L \left(\frac{1}{\text{sen}\theta_1} + \frac{1}{\text{sen}\theta_2} + \dots + \frac{1}{\text{sen}\theta_n} \right) \\ &\leq \|(v_1, v_2)\| + L \left(\frac{n}{\text{sen}\theta} \right) \end{aligned}$$

Portanto

$$\lambda_{\underline{x}, v}(s_0, \theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_{(s_0, \theta_0)} \overline{F}_{\underline{x}}^{(n)} \cdot v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\|(v_1, v_2)\| + L \left(\frac{n}{\text{sen}\theta} \right) \right) = 0.$$

□

8.5 Conjugação

Definição 8.5.1. *Seja o bilhar aleatório $\overline{F}(s, \theta) = F(s, T_i(\theta))$ com probabilidade $p_i(\theta)$. Dados $\theta', \theta'' \in (0, \pi)$, $\underline{x} \in \Sigma_{\theta'}$ e $\underline{y} \in \Sigma_{\theta''}$, dizemos que $\overline{F}_{\underline{x}}$ é conjugado à $\overline{F}_{\underline{y}}$ e escrevemos como $\overline{F}_{\underline{x}} \sim \overline{F}_{\underline{y}}$, se existe uma função $\phi : [0, L) \times (0, \pi) \circlearrowleft$ tal que $\phi(\theta'') = \theta'$ e $\phi \circ \overline{F}_{\underline{x}}^{(n)} \circ \phi(\theta'') = \overline{F}_{\underline{y}}^{(n)}(\theta'')$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Proposição 8.5.1. *Seja \overline{F} a aplicação do bilhar circular aleatório. Dados $\theta' \in (0, \pi)$ e $\underline{x} \in \Sigma_{\theta'}$, existem $\theta'' \in (0, \pi)$ e $\underline{y} \in \Sigma_{\theta''}$ tal que $\overline{F}_{\underline{x}} \sim \overline{F}_{\underline{y}}$.*

Demonstração. Notemos que homeomorfismo $\phi : [0, L) \times (0, \pi) \circlearrowleft$ tal que $\phi(s, \theta) = (\pi - s, \pi - \theta)$ é a conjugação. Pois,

$$\begin{aligned} \phi \circ \overline{F}_1 \circ \phi(s, \theta) &= \phi \circ \overline{F}_1(\pi - s, \pi - \theta) \\ &= \phi(\pi - s + 2T_1(\pi - \theta)) \pmod{2\pi, T_1(\pi - \theta)} \\ &= \phi(\pi - s + 2(\pi - \theta + 2\alpha)) \pmod{2\pi, \pi - \theta + 2\alpha} = \overline{F}_3(s, \theta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi \circ \overline{F}_4 \circ \phi(s, \theta) &= \phi \circ \overline{F}_4(\pi - s, \pi - \theta) \\ &= \phi(\pi - s + 2(-\pi + \theta + 4\alpha)) \pmod{2\pi, -\pi + \theta + 4\alpha} \\ &= (2\pi + s - 2\theta - 8\alpha) \pmod{2\pi, -\theta + 2\pi - 4\alpha} \\ &= (4\pi + s - 2\theta - 8\alpha) \pmod{2\pi, -\theta + 2\pi - 4\alpha} \\ &= (s + 2(-\theta + 2\pi - 4\alpha), -\theta + 2\pi - 4\alpha) = \overline{F}_2(s, \theta). \end{aligned}$$

Como $\phi \circ \phi = Id$, segue que $\phi \circ \bar{F}_3 \circ \phi = \bar{F}_1$ e $\phi \circ \bar{F}_2 \circ \phi = \bar{F}_4$. Portanto $\bar{F}_1 \sim \bar{F}_3$ e $\bar{F}_2 \sim \bar{F}_4$. Por fim, fixado $n \in \mathbb{N}$ e tomando $\underline{x} \in \Sigma_{\theta'}$ e $\underline{y} \in \Sigma_{\pi-\theta'}$ tais que $\bar{F}_{x_k} \sim \bar{F}_{y_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} \phi \circ \bar{F}_{\underline{x}}^{(n)} \circ \phi(s, \theta) &= \phi \circ \bar{F}_{x_n} \circ \bar{F}_{x_{n-1}} \circ \cdots \circ \bar{F}_{x_0} \circ \phi(s, \theta) \\ &= \phi \circ \phi \circ \bar{F}_{y_n} \circ \phi \circ \phi \circ \bar{F}_{y_{n-1}} \circ \cdots \circ \phi \circ \phi \circ \bar{F}_{y_0} \circ \phi \circ \phi(s, \theta) \\ &= \bar{F}_{y_n} \circ \bar{F}_{y_{n-1}} \circ \cdots \circ \bar{F}_{y_0}(s, \theta) = F_{\underline{y}}^{(n)}(s, \theta). \end{aligned}$$

□

Observamos que se $\bar{F}_{\underline{x}} \sim \bar{F}_{\underline{y}}$ então a conjugação ϕ leva órbita periódica em órbita periódica. Com efeito, seja (s, θ) tal que $\bar{F}_{\underline{x}}^{(n)}(s, \theta) = (s, \theta)$. Logo

$$\bar{F}_{\underline{y}}^{(n)}(\pi - s, \pi - \theta) = \phi \circ \bar{F}_{\underline{x}}^{(n)} \circ \phi(\pi - s, \pi - \theta) = \phi \circ \bar{F}_{\underline{x}}^{(n)}(s, \theta) = \phi(s, \theta) = (\pi - s, \pi - \theta).$$

Logo $(\pi - s, \pi - \theta)$ é periódico para $\bar{F}_{\underline{y}}$. Observemos que isso ocorre para qualquer conjugação que seja um homeomorfismo.

8.6 Um Apanhado Geral

Nesta seção trabalharemos com alguns exemplos específicos de bilhares circulares aleatórios e usaremos os resultados obtidos ao longo da tese para discutir algumas consequências da dinâmica desses bilhares.

Dados $\alpha = \frac{\pi}{7}$ e $\theta \in (0, \pi)$, temos que $\#\mathcal{C}(\theta) \leq 7$. Por exemplo, se $\theta = \alpha$, temos que $\mathcal{C}(\alpha) = \{\alpha, 3\alpha, 5\alpha\}$. Porém, se $\theta \in (0, \alpha)$, então $\mathcal{C}(\theta) = \{\theta, -\theta + 2\alpha, \theta + 2\alpha, -\theta + 4\alpha, \theta + 4\alpha, -\theta + 6\alpha, \theta + 6\alpha\}$.

Exemplo 8.6.1. *Sejam $\alpha = \frac{\pi}{7}$ e $\theta = \frac{\pi}{20}$. Para uma realização $\underline{x} \in \Sigma_{\theta}$ feita computacionalmente, temos a seguinte representação no espaço de fase na Figura 8.5.*

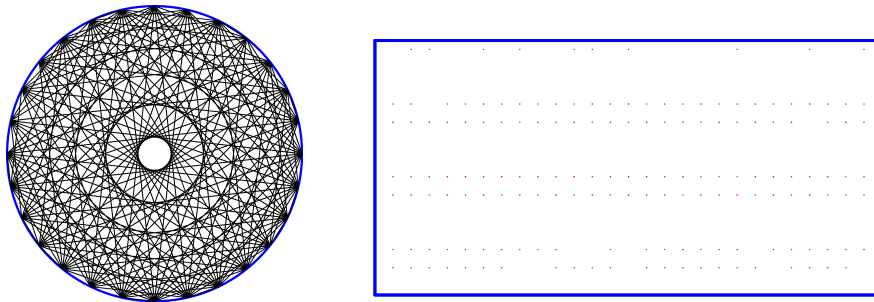


Figura 8.5: Espaço de fase do bilhar circular aleatório nas coordenadas (s, θ) para $\alpha = \frac{\pi}{7}$, ângulo inicial $\theta = \frac{\pi}{20}$ e uma realização $\underline{x} \in \Sigma_{\theta}$.

Observemos que nesse caso, temos 7 "segmentos de reta" que são invariantes (como conjunto) pela aplicação do bilhar circular aleatório. Ou seja, a órbita dessa realização visita todos esses segmentos retas determinadas pelos ângulos em $\mathcal{C}(\theta)$.

Agora, seja $\alpha = \frac{\pi}{7}$ e $\theta = \alpha$. Uma vez que $\mathcal{C}(\alpha) = \{\alpha, 3\alpha, 5\alpha\}$, o espaço de fase para uma realização $\underline{x} \in \Sigma_\theta$ feita computacionalmente é dado na Figura 8.6.

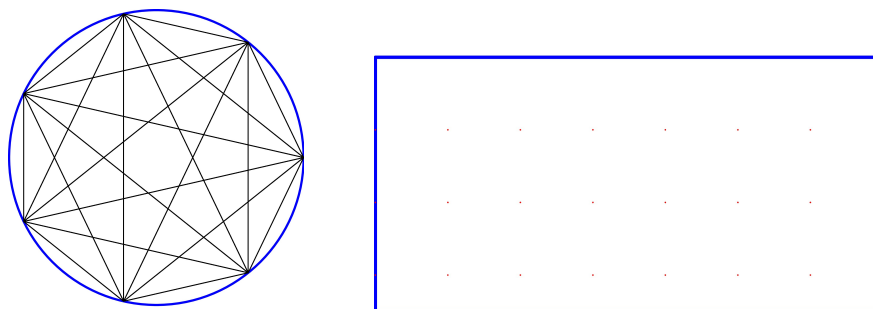


Figura 8.6: Espaço de fase do bilhar circular aleatório nas coordenadas (s, θ) para $\alpha = \frac{\pi}{7}$, ângulo inicial $\theta = \alpha$ e uma realização $\underline{x} \in \Sigma_\alpha$.

Nesse caso temos 3 "segmentos de reta" que são invariantes (como conjunto) pela aplicação do bilhar circular aleatório, além disso a órbita dessa realização visita somente esses três segmentos de retas determinado pelo ângulo em $\mathcal{C}(\alpha)$.

Dados $\alpha = \frac{\pi}{7}$ e $\frac{\theta}{\pi}$ um número irracional, pela ergodicidade do shift de Markov, podemos concluir que para ν -quase toda trajetória, o espaço de fase será constituído por 7 segmentos de reta.

Generalizando o Exemplo 8.6.1, dados $\frac{\alpha}{\pi}$ um número racional e $\theta \in (0, \pi)$, pela Proposição 6.5.1, o conjunto $\mathcal{C}(\theta)$ é finito. Uma vez que $\mathcal{C}(\theta)$ é invariante pela aplicação aleatória de Feres T , o espaço de fase do bilhar circular aleatório é similar ao exemplo dado na Figura 8.5. Isto é, o conjunto dos segmentos retas dadas pelos ângulos em $\mathcal{C}(\theta)$ é um conjunto invariante pela aplicação do bilhar circular aleatório \overline{F} . Em contrapartida, no caso do bilhar circular determinístico, dado um ângulo de saída $\theta \in (0, \pi)$, o espaço de fase do bilhar circular determinístico é como na Figura 8.7. Assim, o segmento de reta determinada pelo ângulo de saída é invariante pela a aplicação do bilhar circular determinístico. Temos assim uma maneira de diferenciar o bilhar circular determinístico do bilhar circular aleatório pelos segmentos de retas invariantes (como conjunto). De mesmo modo, dada uma condição inicial, podemos diferenciar o bilhar circular determinístico do bilhar circular aleatório pelos seus respectivos espaços de fases. A mesma comparação pode ser feita no caso em que $\mathcal{C}(\theta)$ é enumerável, isto é, quando $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número irracional. Nesse caso, dado $\theta \in (0, \pi)$, o espaço de fase será formado por uma quantidade enumerável de segmentos de reta que é invariante (como conjunto) pela aplicação do bilhar circular aleatório \overline{F} .

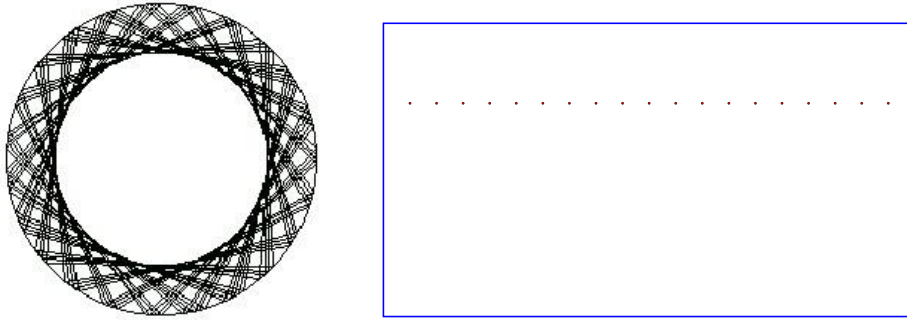


Figura 8.7: Espaço de fase do bilhar circular determinístico nas coordenadas (s, θ) , dado uma condição inicial.

Por fim, nos casos em que $\frac{\alpha}{\pi}$ for racional e $\frac{\theta}{\pi}$ for irracional ou no caso em que $\frac{\alpha}{\pi}$ for irracional e a cadeia de Markov em $\mathcal{C}(\theta)$ for aperiódica, observemos que cada segmento de reta no espaço de fase determinado pelos ângulos em $\mathcal{C}(\theta)$ é preenchido densamente para ν -quase toda trajetória. Para isso, basta construir trajetórias densas no bordo da mesa da forma como foi feito no Lema 8.2.1 em conjunto com o Teorema 8.2.2.

Na seção 7.3, encontramos uma região invariante para o skew product S no caso em que $\frac{\alpha}{\pi}$ é racional. Portanto teremos uma região invariante no espaço de fase do bilhar circular aleatório.

Exemplo 8.6.2. *Sejam $\alpha = \frac{\pi}{7}$ e $\theta \in (0, \alpha)$, temos que $\mathcal{C}(\theta) = \{\theta, -\theta + 2\alpha, \theta + 2\alpha, -\theta + 4\alpha, \theta + 4\alpha, -\theta + 6\alpha, \theta + 6\alpha\}$. Observamos que se $\theta_1 \in (0, \alpha)$ e $\theta_1 > \theta$, então:*

$$\theta_1 > \theta \implies \begin{cases} -\theta_1 + 2\alpha < -\theta + 2\alpha \\ \theta_1 + 2\alpha > \theta + 2\alpha \\ -\theta_1 + 4\alpha < -\theta + 4\alpha \\ \theta_1 + 4\alpha > \theta + 4\alpha \\ -\theta_1 + 6\alpha < -\theta + 6\alpha \\ \theta_1 + 6\alpha > \theta + 6\alpha \end{cases} .$$

Portanto, a região hachurada no espaço de fase da Figura 8.8 é uma região invariante pelo bilhar circular aleatório.

Com o auxílio do Teorema 6.4.1, no caso em $\frac{\alpha}{\pi}$ for um número racional, o conjunto $[0, 2\pi] \times \cup_{j=1}^n I_j$ é \overline{F} -invariante uma vez que $\cup_{j=1}^n I_j$ é T -invariante, onde $I_j = \left(\frac{(2j-1)\pi}{2n} - \epsilon, \frac{(2j-1)\pi}{2n} + \epsilon \right)$ com $j = \{1, 2, \dots, n\}$ e $\epsilon = \frac{\pi}{4n}$. Além disso, $0 < (\lambda \times \mu)([0, 2\pi] \times \cup_{j=1}^n I_j) < 1$, onde $\lambda \times \mu$ é uma medida invariante para o bilhar aleatório no qual λ é a medida de Lebesgue normalizada em $[0, 2\pi]$ e $d\mu = \frac{1}{2} \text{sen}(\theta) d\theta$.

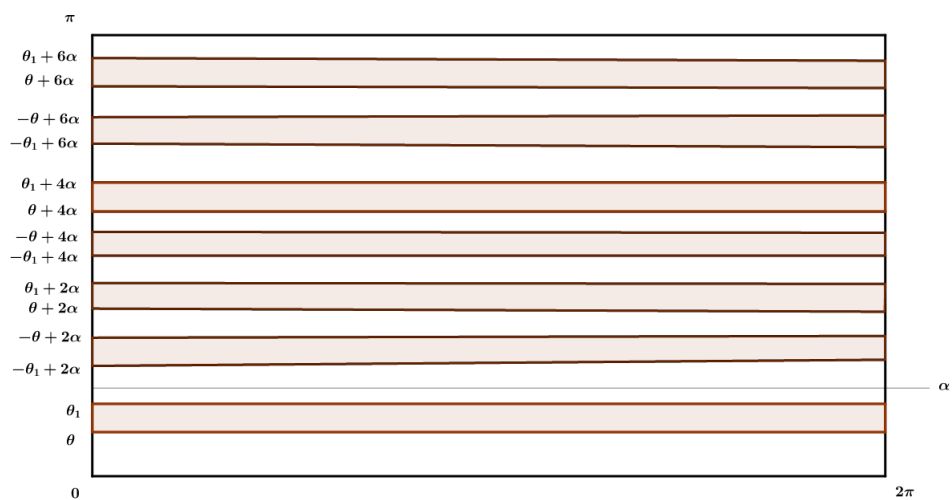


Figura 8.8: Região invariante para o bilhar circular aleatório.

Capítulo 9

Perspectivas Futuras

Neste capítulo apresentaremos algumas possibilidades de trabalhos futuros sobre bilhar aleatório / passeio aleatório determinado por um sistema dinâmico que surgiram ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

9.1 Ainda sobre o Bilhar Circular

No Capítulo 9 trabalhamos com algumas consequências da dinâmica do bilhar circular aleatório. Vimos que se $\frac{\alpha}{\pi}$ for irracional e a cadeia de Markov em $\mathcal{C}(\theta)$ for aperiódica, então pelo Teorema 8.2.2, quase toda trajetória é densa em $[0, 2\pi]$. Mais ainda, pelo Teorema 8.3.1, quase toda trajetória é densa no anel circular formado pelo bordo do mesa e pela pseudo cáustica (caso exista).

Pergunta 9.1.1. *Dado $\frac{\alpha}{\pi}$ irracional, existe cadeia de Markov periódica em $\mathcal{C}(\theta)$?*

Como vimos no Capítulo 7, a aplicação aleatória de Feres surge da aplicação de primeiro retorno do bilhar determinístico em um triângulo isósceles a sua base, cujo ângulo (da base) é menor que $\frac{\pi}{6}$. Sendo assim, construímos 4 aplicações lineares T_1, T_2, T_3 e T_4 com suas respectivas probabilidades p_1, p_2, p_3 e p_4 . Surgem, portanto, perguntas naturais com respeito a generalização dos resultados obtidos.

Pergunta 9.1.2. *Sejam $\alpha \in (0, \pi), \alpha > \frac{\pi}{6}$ e a aplicação aleatória gerada por um bilhar determinístico em um triângulo isósceles cujo ângulo da base é α . A Lei Forte de Knudsen ainda será verdadeira? Os resultados obtidos para o bilhar circular aleatório ainda serão válidos?*

Observemos que no caso da Pergunta 9.1.2, teremos um número maior de colisões no triângulo e portanto a aplicação aleatória terá mais aplicações em sua composição.

Poderíamos pensar também na aplicação aleatória gerada por um bilhar determinístico em um polígono regular qualquer. Nesse caso, podemos fazer as mesmas perguntas, isto é:

Pergunta 9.1.3. *A aplicação aleatória gerada por um bilhar determinístico em um polígono regular satisfaz a Lei Forte de Knudsen? Os resultados obtidos para o bilhar circular aleatório ainda serão válidos?*

Mais ainda, se tomarmos um número finitos de aplicações lineares $\{T_i\}_{i=1}^n$ e probabilidades $\{p_i\}_{i=1}^n$ teremos os mesmos resultados? Ou então, quais propriedades as aplicações T_i e as suas respectivas probabilidades p_i deverão ter para que possamos obter os mesmos resultados?

Observemos que a aplicação aleatória de Feres possui algumas propriedades que, provavelmente, devemos mantê-las para estudar os casos mais gerais. Observemos que na aplicação aleatória de Feres, temos que $T_1 = T_3^{-1}$, $T_2 = T_2^{-1}$ e $T_4 = T_4^{-1}$. Além disso, temos uma conjugação entre essas aplicações. Isto é, dado $\phi : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$ tal que $\phi(\theta) = \pi - \theta$, temos que

$$\phi \circ T_i \circ \phi = T_{\bar{i}}$$

onde $T_{\bar{i}} = T_i^{-1}$. Por fim, temos uma relação também entre as probabilidades:

$$p_i \circ \phi = p_{\bar{i}}.$$

9.2 Estádio Circular

O estádio circular é formado por dois semicírculos de mesmo raio e duas semirretas de mesmo comprimento. Vamos considerar o bilhar aleatório no estádio circular. Ver Figura 9.1 a esquerda.

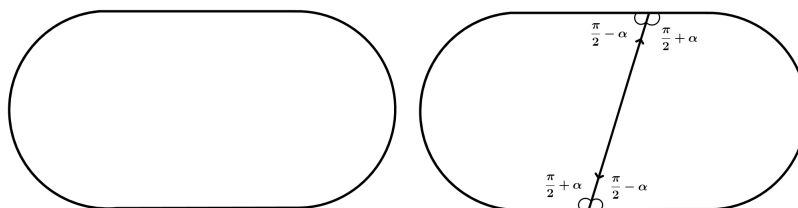


Figura 9.1: Estádio Circular a esquerda e uma órbita (aleatória) de período 2 do estádio circular a direita.

Acreditamos que o estádio circular aleatório tem um comportamento caótico, ver a Figura 9.2, o que nos leva a conjecturar:

Conjectura 9.2.1. *Sobre a aplicação do bilhar aleatório no estádio circular.*

- 1) *Quase toda órbita do bilhar aleatório é densa sobre o bordo.*
- 2) *Quase toda trajetória é densa no interior da mesa.*
- 3) *É ergódico.*
- 4) *O expoente de Lyapunov é positivo para quase toda órbita.*

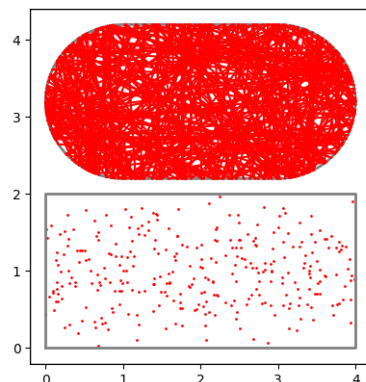


Figura 9.2: Espaço de fase para $\alpha = \frac{\pi}{7}$ após 400 iterações.

9.3 Passando para 3D: Aplicação Aleatória em Tetraedros

Podemos considerar o tubo de ensaio tridimensional como sendo duas placas planas, infinitas e paralelas. Porém as irregularidades, microscópicas, serão tetraedros com ângulos da base α suficientemente pequeno para que possamos ter poucas colisões dentro do tetraedro. Lembramos que no caso bidimensional, quando $\alpha < \frac{\pi}{6}$, se uma partícula sair da base \overline{pq} de um triângulo isósceles cujo ângulo da base é α , então temos no máximo duas colisões até voltar a base.

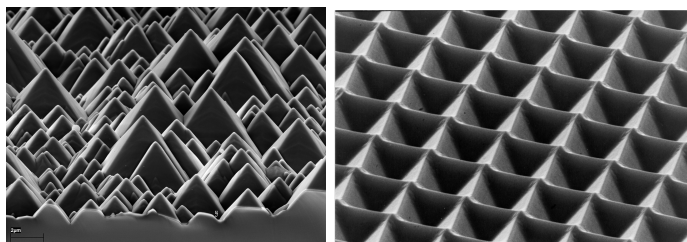


Figura 9.3: Irregularidades das placas planas vistas num microscópio.

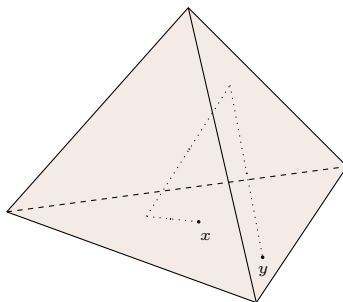


Figura 9.4: As irregularidades do modelo que estende para \mathbb{R}^3 o bilhar aleatório definido em 6.4 serão tetraedros.

Conjectura 9.3.1. *A aplicação aleatória T gerada pelo bilhar determinístico no tetraedro satisfaz a Lei Forte de Knudsen. Além disso, o bilhar aleatório no tubo de ensaio tridimensional também satisfaz a Lei forte de Knudsen.*

9.4 Passeio Aleatório Determinado pela Aplicação de Feres

Nesta seção daremos um exemplo no qual podemos conectar o passeio aleatório em ambiente aleatório com a aplicação aleatória de Feres.

Sejam T_1, T_2, T_3 e T_4 as aplicações definidas em (6.4) com suas respectivas probabilidades. Podemos definir o passeio aleatório em \mathbb{Z}^2 determinado pela aplicação de Feres da seguinte maneira. Fixados $\theta \in (0, \pi)$ e $\underline{x} \in \Sigma_\theta$, a probabilidade de saltar para direita é $p_1(\theta)$, a probabilidade de saltar para esquerda é $p_3(\theta)$, a probabilidade de saltar cima é $p_2(\theta)$ e a probabilidade de saltar para baixo é $p_4(\theta)$. Ver Figura 9.5. Sabemos que o passeio aleatório clássico em \mathbb{Z}^2 é recorrente se todas as

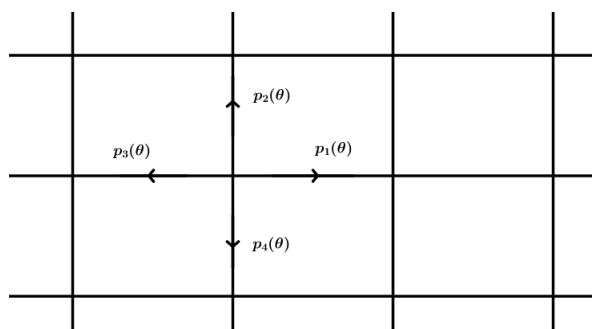


Figura 9.5: Passeio Aleatório em \mathbb{Z}^2 .

probabilidades de transição forem iguais a $\frac{1}{4}$ e transiente caso contrário. No caso de passeio aleatório em ambiente aleatório em \mathbb{Z}^2 pouco se sabe quanto a recorrência e transiência de passeios aleatórios. Do ponto de vista de Probabilidade, já é um problema interessante.

Com respeito a área de Sistemas Dinâmicos, vimos na seção 2.1 que a existência de medida estacionária do passeio aleatório em determinado por (f, p) está condicionado a existência de ponto fixo do operador adjunto Q_f . Assim, podemos definir o operador de Markov da seguinte maneira: Sejam $f, g : M \rightarrow M$ um homeomorfismos que preservam medida a μ e $p_1, p_2, p_3, p_4 : M \rightarrow (0, 1)$ funções contínuas, de forma que $p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) + p_4(x) = 1$ para todo $x \in M$. Então

$$P_{f,g}(\phi) = p_1(x)\phi(f(x)) + p_2(x)\phi(f^{-1}(x)) \\ p_3(x)\phi(g(x)) + p_4(x)\phi(g^{-1}(x)).$$

Com respeito a aplicação de Feres, o operador de Markov pode ser definido como:

$$P_T(\phi) = p_1(\theta)\phi(T_1(\theta)) + p_2(\theta)\phi(T_2(\theta)) \\ p_3(\theta)\phi(T_3(\theta)) + p_4(\theta)\phi(T_4(\theta)).$$

Lembramos que dada uma aplicação do bilhar aleatório $\bar{F} : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, a medida de Liouville $\lambda \times \mu$ é uma medida invariante para \bar{F} , onde λ é Lebesgue normalizada em $(0, 2\pi)$ e $\mu(A) = \frac{1}{2} \int_A \text{sen}(\theta) d\theta$ para todo $A \in \mathcal{B}((0, \pi))$.

Pergunta 9.4.1. *Seja T a aplicação de Feres com suas respectivas probabilidades.*

1. *O passeio aleatório determinado pela aplicação de Feres T é recorrente?*
2. *Existe medida P -estacionária equivalente a $\lambda \times \mu$?*
3. *Com respeito ao passeio aleatório relacionado, teremos uma Lei Forte dos Grandes Números? Teremos um Teorema Central do Limite?*

9.5 Dependência da Medida P -estacionária com um Sistema Dinâmico

Finalizamos a Tese com uma discussão sobre a variação da medida estacionária por perturbações. Nós consideramos a distância usual no conjunto $\text{Homeo}(M)$ dos homeomorfismos de M ,

$$d(f, g) = \sup_{x \in M} \{d(f(x), g(x)), d(f^{-1}(x), g^{-1}(x))\}.$$

Suponhamos que f e g são próximas com respeito a distância usual, preservam uma medida μ e que os passeios aleatórios determinados por f e por g admitam medidas P -estacionárias equivalente a μ . Isto é, existem ν_f e ν_g tais que $P_f^*(\nu_f) = \nu_f$ e $P_g^*(\nu_g) = \nu_g$.

Pergunta 9.5.1. *As medidas P -estacionárias ν_f e ν_g são próximas com respeito a variação total definida por $|\nu_f - \nu_g|_{TV} := \max_{A \in \mathcal{B}_M} \{|\nu_f(A) - \nu_g(A)|\}$?*

Uma vez que $\nu_f = \pi_f \mu$ e $\nu_g = \pi_g \mu$ são medidas P -estacionárias, então suas densidades são pontos fixos dos respectivos operadores adjuntos. Ou seja, $Q_f(\pi_f) = \pi_f$ e $Q_g(\pi_g) = \pi_g$ (ver Proposição 2.1.1). Assim,

$$|\nu_f - \nu_g|_{TV} = \max_{A \in \mathcal{B}_M} \{\nu_f(A) - \nu_g(A)\} = \max_{A \in \mathcal{B}_M} \{\pi_f \mu(A) - \pi_g \mu(A)\} \leq |\pi_f - \pi_g| \mu(M).$$

Dessa forma podemos refazer a nossa perguntar anterior da seguinte maneira.

Pergunta 9.5.2. *Suponhamos que $\nu_f = \pi_f \mu$ e $\nu_g = \pi_g \mu$ são medidas P -estacionárias para os respectivos passeios aleatórios. Se f e g são próximos com respeito a distância usual, então as densidades π_f e π_g são próximas?*

Bibliografia

- [1] Smaïl Alili. Asymptotic behaviour for random walks in random environments. *Journal of applied probability*, pages 334–349, 1999.
- [2] D. Anosov. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature. *Proc. Steklov Math. Inst.*, 90:1–235, 1967.
- [3] A. Avila, M. Viana, and A. Wilkinson. Absolute continuity, Lyapunov exponents and rigidity I: geodesic flows. *Journal of the European Mathematical Society*, 17(6):1435–1462, 2015.
- [4] Wael Bahsoun, Christopher Bose, and Anthony Quas. Deterministic representation for position dependent random maps. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 22(3):529–540, 2008.
- [5] George David Birkhoff. *Dynamical systems*, volume 9. American Mathematical Soc., 1927.
- [6] Erwin Bolthausen and Alain-Sol Sznitman. Lectures on random motions in random media. In *Ten Lectures on Random Media*, pages 9–15. Springer, 2002.
- [7] Pablo D. Carrasco and Túlio Vales. A symmetric random walk defined by the time-one map of a geodesic flow. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 41(6):2891–2905, 2021.
- [8] Nikolai Chernov and Roberto Markarian. *Chaotic billiards*. Number 127. American Mathematical Soc., 2006.
- [9] Jean-Pierre Conze and Yves Guivarc’h. Marches en milieu aléatoire et mesures quasi-invariantes pour un système dynamique. *Colloquium Mathematicum*, 84:457–480, 2000.
- [10] César R De Oliveira. *Introdução à análise funcional*. Impa, 2001.

- [11] Kamaludin Dingle, Jeroen S W Lamb, and Joan-Andreu Lázaro-Camí. Knudsen's law and random billiards in irrational triangles. *Nonlinearity*, 26(2):369–388, 2012.
- [12] D. Dolgopyat, B. Fayad, and M. Saprykina. Erratic behavior for 1-dimensional random walks in a Liouville quasi-periodic environment. *arXiv:1901.10709*, 2019.
- [13] Rick Durrett. *Probability: theory and examples*, volume 31 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2005.
- [14] Renato Feres. Random walks derived from billiards. *Dynamics, ergodic theory, and geometry*, 54:179–222, 2007.
- [15] M. Gorodin and B. Lifsic. Central limit theorem for stationary Markov processes. In *Third Vilnius Conference on Probability and Statistics*, volume 1, pages 147–148, 1981.
- [16] B. Hasselblatt and A. Katok. *A first course in dynamics*. Cambridge University Press, 2003. With a panorama of recent developments.
- [17] F. Rodriguez Hertz, M. Rodriguez Hertz, and R. Ures. A Survey of Partially Hyperbolic Dynamics. In Mikhail Lyubich Charles Pugh Michael Shub Giovanni Forni, editor, *Partially Hyperbolic Dynamics, Laminations and Teichmüller Flow*, volume 51 of *Fields Institute Communications*, pages 35–88, 2007.
- [18] F Rodriguez Hertz, MA Rodriguez Hertz, and Raúl Ures. Accessibility and stable ergodicity for partially hyperbolic diffeomorphisms with 1d-center bundle. *Inventiones mathematicae*, 172(2):353–381, 2008.
- [19] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, and M. I. Shub. *Invariant Manifolds*. Springer Berlin Heidelberg, 1977.
- [20] V. Kaloshin and Y. Sinai. Simple random walks along orbits of anosov diffeomorphisms. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 228:236–245, 2000.
- [21] A. Katok and A. Kononenko. Cocycles' stability for partially hyperbolic systems. *Mathematical Research Letters*, 3:191–210, 1996.
- [22] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54. Cambridge university press, 1997.
- [23] Kifer. *Ergodic Theory of Random Transformations*. Birkhauser Basel, 1986.

- [24] C. Kipnis and S. Varadhan. Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions,. *Communications Math. Physics*, 104:1–19, 1986.
- [25] Andrzej Lasota and Michael C Mackey. *Probabilistic properties of deterministic systems*. Cambridge university press, 2008.
- [26] J. Neveu and A. Feinstein. *Mathematical Foundations of the Calculus of Probability*. Holden-Day series in probability and statistics. Holden-Day, 1965.
- [27] Krerley Oliveira and Marcelo Viana. Fundamentos da teoria ergódica. *IMPA, Brazil*, 2014.
- [28] Stephan Pelikan. Invariant densities for random maps of the interval. *Transactions of the American Mathematical Society*, 281(2):813–825, 1984.
- [29] Ya B Pesin and Yakov B Pesin. *Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity*, volume 34. European Mathematical Society, 2004.
- [30] C. Pugh and M. Shub. Stable Ergodicity and Julienne Quasi-Conformality. *JEMS*, 2(1):1–52, 2000.
- [31] Vladimir Abramovich Rokhlin. Lectures on the entropy theory of transformations with invariant measure. *Uspekhi mat. nauk*, 22(5):3–56, 1967.
- [32] Ya G Sinai. Simple random walks on tori. *Journal of statistical physics*, 94(3-4):695–708, 1999.
- [33] Serge Tabachnikov. *Geometry and billiards*, volume 30. American Mathematical Soc., 2005.
- [34] Túlio Vales and S Pinto-de Carvalho. A random billiard map in the circle. *arXiv preprint arXiv:2005.01892*, 2020.
- [35] Amie Wilkinson. The cohomological equation for partially hyperbolic diffeomorphisms. *Astérisque*, 358:75–165, 2013.
- [36] O. Zeitouni. Random walks in random environment. In *Lecture Notes in Math.*, number 1837, pages 189–312. Springer, 2004.