

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Felipe Maués Bergh

**SELEÇÃO DE UM MODELO DE MATERIAL HIPERELÁSTICO PARA A ANÁLISE
DE ELEMENTOS FINITOS DE UM COXIM AUTOMOTIVO DE BORRACHA**

Belo Horizonte

2021

Felipe Maués Bergh

**SELEÇÃO DE UM MODELO DE MATERIAL HIPERELÁSTICO PARA A ANÁLISE
DE ELEMENTOS FINITOS DE UM COXIM AUTOMOTIVO DE BORRACHA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Projetos e Sistemas

Orientador: Antônio Ferreira Ávila

Belo Horizonte

2021

B496s

Bergh, Felipe Maués.

Seleção de um modelo de material hiperelástico para a análise de elementos finitos de um coxim automotivo de borracha [recurso eletrônico] / Felipe Maués Bergh. - 2021.

1 recurso online (81 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Antônio Ferreira Ávila.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndice: f. 74-81.

Bibliografia: f. 71-73.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Automóveis – molas e suspensão - Teses. 3. Borracha – Teses. 4. Método dos elementos finitos – Teses. I. Ávila, Antônio Ferreira. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621(043)

Ficha catalográfica: Biblioteca Prof. Mário Werneck, Escola de Engenharia da UFMG



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

SELEÇÃO DE UM MODELO DE MATERIAL HIPERELÁSTICO PARA A ANÁLISE DE ELEMENTOS FINITOS DE UM COXIM AUTOMOTIVO DE BORRACHA

FELIPE MAUÉS BERGH

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, constituída pelos Professores: Dr. Antonio Ferreira Ávila (Orientador-Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG), Dra. Maria Teresa Paulino Aguilar (Departamento de Engenharia de Materiais e Construção Civil), Dr. Alexandre da Silva Scari (Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG). como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "**Mestre em Engenharia Mecânica**", na área de concentração de "**Projeto e Sistemas**".

Dissertação aprovada no dia 16 de abril de 2021.

Por:



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Ferreira Avila, Professor do Magistério Superior**, em 22/04/2021, às 11:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.



Documento assinado eletronicamente por **Maria Teresa Paulino Aguilar, Professora do Magistério Superior**, em 26/04/2021, às 10:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.



Documento assinado eletronicamente por **Alexandre da Silva Scari, Professor do Magistério Superior**, em 27/04/2021, às 23:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0686884** e o código CRC **E58702BB**.

*À minha esposa Manuelle, por ter embarcado
nesse sonho comigo.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à minha esposa e grande companheira Manuelle, por todo o esforço e companheirismo ao longo dessa caminhada. Sabemos o quanto lutamos para chegar até aqui desde aquele longínquo ano de 2015, quando tive que recomeçar meus estudos praticamente do zero. Esse título é seu também, com certeza.

Aos meus pais, Angela e Marcelo, pelos conselhos e diálogos nos momentos em que cheguei a duvidar de mim mesmo.

Ao meu irmão, Mauricio, por seu meu maior exemplo e parceiro de vida, e à sua esposa, Lilia, pelo apoio incondicional em tempos tão difíceis.

A todos os meus amigos e familiares, importantíssimos na construção da pessoa que sou hoje.

Ao meu professor orientador, Antonio Ávila, pelos ensinamentos, paciência e incentivo e aos demais professores do PPGMEC, em especial à professora Maria Teresa Aguilar e ao professor Paulo Cetlin.

Agradeço também à empresa Fiat Chrysler Automóveis, pela concessão de acesso e uso dos equipamentos de laboratório utilizados no desenvolvimento desse trabalho.

RESUMO

As relações não lineares de tensão-deformação ($S-e$) são necessárias para a análise de elementos finitos (AEF) de componentes elastoméricos. As curvas de resposta desses materiais são obtidas por uma série de experimentos, principalmente testes de tração e compressão. Diversas equações constitutivas desta classe de material são apresentadas na literatura. Neste trabalho, ensaios de tração e compressão foram realizados em corpos de prova de borracha natural (NR-60) para determinar as constantes de material de múltiplos modelos constitutivos. Além disso, com o auxílio de testes experimentais de bancada, foi obtida a curva força-deslocamento de um coxim automotivo de borracha submetido a uma carga unidirecional. Na última etapa, as constantes do material foram usadas como dados de entrada no software Abaqus[®], para realizar uma análise de elementos finitos do comportamento do coxim de borracha e determinar qual modelo de energia de deformação seria capaz de produzir a menor quantidade de erro relativo. A metodologia aplicada no presente estudo revelou que os modelos constitutivos de Arruda-Boyce e Neo-Hookeano foram os mais adequados para reproduzir o comportamento de força-deslocamento do coxim de borracha na simulação 3D de elementos finitos.

Palavras-Chave: Borracha. Hiperelasticidade. Modelos Constitutivos. Elementos Finitos. Coxim Automotivo.

ABSTRACT

The nonlinear stress-strain (S - e) relations are required for the finite element analysis (FEA) of elastomeric components. These materials' response curves are obtained by a series of experiments, mostly tensile and compression tests. Numerous constitutive equations of this class of material are presented in literature. In this work, tensile and compression tests were performed on natural rubber (NR-60) specimens to determine the material constants of multiple constitutive models. In addition, with the aid of experimental bench tests, the load-displacement curve of an automotive rubber mount subjected to a unidirectional load was obtained. In the last step, the material constants were used as input in Abaqus[®] software, to perform a finite-element analysis of the rubber mount behavior and determine which strain energy model produced the least amount of relative error. The methodology applied in the present study revealed that the Arruda-Boyce and Neo-Hookean constitutive models were the most adequate to reproduce the force-displacement behavior of the rubber mount in 3D finite element simulations.

Keywords: Rubber. Hyperelasticity. Constitutive Models. Finite Elements. Engine Mount.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama representativo do posicionamento do coxim restritor de torque	11
Figura 2 – Representação do movimento de um corpo	14
Figura 3 – Vetor tração	20
Figura 4 – Tetraedro elementar	21
Figura 5 – Decomposição do vetor tração	22
Figura 6 - Modelo 8-chain hiperelástico da borracha em estado não deformado	25
Figura 7 – Tipos de elementos finitos: (a) triangular de 3 nós, (b) quadrilateral de 4 nós	32
Figura 8 – Tipos de elementos finitos: (a) triangular de 6 nós, (b) quadrilateral de 9 nós	33
Figura 9 – Tipos de elementos finitos: (a) tetraedro de 4 nós e (b) hexaedro de 8 nós	34
Figura 10 – Tipos de elementos finitos: (a) tetraedro de 10 nós e (b) hexaedro de 20 nós....	34
Figura 11 – Fluxograma de uma análise de elementos finitos	35
Figura 12 - Corpo de prova Tipo C usado no ensaio de tração uniaxial.	42
Figura 13 – Exemplo de corpo de prova utilizado no teste de tração.....	43
Figura 14 – Ensaio de compressão em corpo de prova cilíndrico	44
Figura 15 – Exemplo de corpo de prova utilizado no teste de compressão.....	44
Figura 16 – Vistas do coxim automotivo: (a) topo e (b) lateral.	46
Figura 17 – Malha de elementos finitos em 2D do estudo de validação metodológica	47
Figura 18 – Estados inicial e deformado do cubo unitário utilizado no estudo de validação em 3D.....	49
Figura 19 – Malha de elementos finitos em 2D nos estados (a) inicial e (b) deformado.....	50
Figura 20 - Malha de elementos finitos em 3D nos estados (a) inicial e (b) deformado	51
Figura 21 - Curva força-deslocamento obtida a partir do ensaio de tração uniaxial em corpos de prova de borracha NR-60	52
Figura 22 - Curva força-deslocamento obtida a partir de testes de compressão uniaxial em corpos de prova de borracha NR-60.....	53
Figura 23 - Curva força-deslocamento obtida a partir de testes de carregamento unidirecional em coxim automotivo produzido em borracha NR-60.....	53
Figura 24 – Nuvem de pontos e curva do valor médio de teste de tensão e deformação em corpos de prova de borracha NR-60.....	54

Figura 25 – Curva tensão-deformação obtida no ajuste do modelo Arruda-Boyce	57
Figura 26 – Erro relativo associado ao ajuste da curva do modelo Arruda-Boyce.....	57
Figura 27 – Curva tensão-deformação obtida no ajuste do modelo Neo-Hookeano.....	58
Figura 28 – Erro relativo associado ao ajuste da curva do modelo Neo-Hookeano	58
Figura 29 – Curva tensão-deformação obtida no ajuste do modelo Mooney-Rivlin	59
Figura 30 – Erro relativo associado ao ajuste da curva do modelo Mooney-Rivlin.....	60
Figura 31 – Curva tensão-deformação obtida no ajuste do modelo Yeoh.....	61
Figura 32 – Erro relativo associado ao ajuste da curva do modelo Yeoh.....	61
Figura 33 – Curvas de tensão-deformação geradas no estudo de validação em 3D	63
Figura 34 – Erro relativo associado ao estudo de validação em 3D.....	64
Figura 35 – Curvas força-deslocamento obtidas a partir da simulação em 2D.....	65
Figura 36 – Erro relativo associado às simulações em 2D.....	66
Figura 37 - Curvas força-deslocamento obtidas a partir da simulação em 3D	67
Figura 38 – Erro relativo associado às simulações em 3D.....	67

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Modelos constitutivos hiperelásticos: tipo, constantes do material e faixa de aplicação.....	39
Tabela 2 - Conceituação dos modelos com o uso de diferentes testes para calibração dos modelos (tensão uniaxial, cisalhamento puro e tensão biaxial)	40
Tabela 3 – Parâmetros de material utilizados no estudo de validação	48
Tabela 4 – Constantes hiperelásticas calculadas e condição de estabilidade de cada modelo constitutivo	55
Tabela 5 - Comparação das tensões na parede do cilindro	62

LISTA DE SÍMBOLOS

Caracteres romanos

- A** Área da seção transversal.
- B** Tensor de deformação de Cauchy-Green à esquerda.
- C** Tensor de deformação de Cauchy-Green à direita.
- C_o Configuração de referência de um corpo fechado de partículas no espaço euclidiano tridimensional.
- C Conjunto fechado de partículas que formam um corpo no espaço euclidiano tridimensional.
- C_{ij} Constantes constitutivas do material.
- e Deformação de engenharia.
- e_i Direções cartesianas.
- E** Função de erro.
- E** Tensor de deformações de Lagrange.
- F** Tensor gradiente de deformação.
- F Força axial.
- G** Tensor de deformações de Almansi.
- I** Matriz identidade.
- I_1 1º invariante de deformação.
- I_2 2º invariante de deformação.
- I_3 3º invariante de deformação.
- J Jacobiano da transformação.
- k_B Constante de Boltzmann.
- L Comprimento final.
- L_o Comprimento inicial.
- n** Vetor normal.
- P** Primeiro tensor de Piola-Kirchhoff.
- p Pressão hidrostática.
- R** Matriz de Rotação.
- S Tensão de engenharia

S	Segundo tensor de Piola-Kirchhoff.
t	Vetor tração.
<i>t</i>	Constante de tempo
<i>T</i>	Temperatura.
T	Tensor de tensão.
u	Vetor deslocamento.
<i>u</i>	Deslocamento, mm
U	Tensor de alongamento à direita.
V	Tensor de alongamento à esquerda.
<i>W</i>	Função energia de deformação.
x	Vetor posição de um ponto na configuração atual/deformada.
X	Vetor posição de um ponto na configuração de referência/indeformada.

Caracteres gregos

α	Constante constitutiva.
β	Constante constitutiva.
λ_i	Alongamentos nas direções principais.
μ	Constante constitutiva.
η	Constante constitutiva.
σ	Tensor de tensões de Cauchy.
σ_{ij}	Tensões de Cauchy.
χ	Função de descrição do movimento

Operadores matemáticos

∂	Operador de derivada parcial.
<i>d</i>	Operador de derivada
$\det()$	Determinante.
Δ	Operador de diferença.
∇	Operador gradiente.
$()^{-1}$	Matriz inversa.
$()^T$	Matriz transposta.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
1.1 Objetivo geral	12
1.2 Objetivos específicos	12
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1 Fundamentos da mecânica do contínuo	13
2.1.1 <i>Descrição do movimento</i>	13
2.1.2 <i>Medidas de deformação</i>	15
2.1.2.1 <i>Tensor gradiente de deformação</i>	16
2.1.2.2 <i>Tensores de deformação de Cauchy-Green</i>	17
2.1.2.3 <i>Tensores de deformação de Green-Lagrange e Almansi</i>	18
2.1.3 <i>Medidas de tensão</i>	19
2.1.3.1 <i>Tensor de tensão de Cauchy</i>	20
2.1.3.2 <i>Tensores de tensão de Piola-Kirchhoff</i>	22
2.1.4 <i>Relações constitutivas</i>	23
2.2 Modelos constitutivos aplicados a materiais hiperelásticos	24
2.2.1 <i>Arruda-Boyce</i>	25
2.2.2 <i>Polinomial</i>	26
2.2.3 <i>Mooney-Rivlin</i>	27
2.2.4 <i>Polinomial reduzido</i>	28
2.2.5 <i>Neo-Hookeano</i>	28
2.2.6 <i>Yeoh</i>	29
2.2.7 <i>Ogden</i>	29
2.2.8 <i>Van der Waals</i>	30
2.3 Método dos elementos finitos	31
2.4 Estado da arte	36
3 METODOLOGIA	41
3.1 Ensaio mecânicos em elastômeros	41
3.1.1 <i>Ensaio de tração uniaxial</i>	41
3.1.2 <i>Ensaio de compressão uniaxial</i>	43
3.2 Cálculo das constantes hiperelásticas: ajuste de curvas	45
3.3 Ensaio do coxim automotivo	46
3.3.1 <i>Validação do método</i>	47
3.3.2 <i>Simulação do comportamento do coxim automotivo</i>	49
4 RESULTADOS E ANÁLISES	52
4.1 Ensaio mecânicos	52
4.2 Ajuste de curvas	54
4.3 Estudos de validação	62
4.4 Análise de elementos finitos do coxim automotivo	65
5 CONCLUSÕES	69
5.1 Sugestões para trabalhos futuros	70

REFERÊNCIAS.....	71
APÊNDICE A Gráficos elaborados a partir dos dados obtidos nos testes de tração e compressão em corpos de prova de borracha NR-60.....	74

1 INTRODUÇÃO

Projetos automotivos utilizam cada vez mais materiais hiperelásticos, como os elastômeros, devido à sua versatilidade geométrica e capacidade de atender às especificações técnicas com uso reduzido de massa. Em um automóvel, este tipo de material é aplicado, em geral, em vedações para portas (guarnições), pneus, coxins, buchas e painéis (VIEIRA; LEAL; SILVEIRA, 2010).

Os elastômeros possuem uma relação não-linear entre tensão e deformação, atingindo grandes deformações no campo elástico, sem uma definição exata do patamar de escoamento. Por exibirem este comportamento, são denominados materiais *hiperelásticos*. A descrição do comportamento deste tipo de material é realizada por meio da determinação de uma *equação constitutiva* (ou modelo constitutivo), capaz de relacionar matematicamente os valores de tensão e deformação observados em um corpo (HOLZAPFEL, 2000). Uma grande variedade de modelos é relatada na literatura, onde é possível destacar os modelos de Arruda-Boyce, Ogden, Mooney-Rivlin, Neo-Hookeano e Gent. Uma lista mais descritiva é apresentada por Hoss (2009).

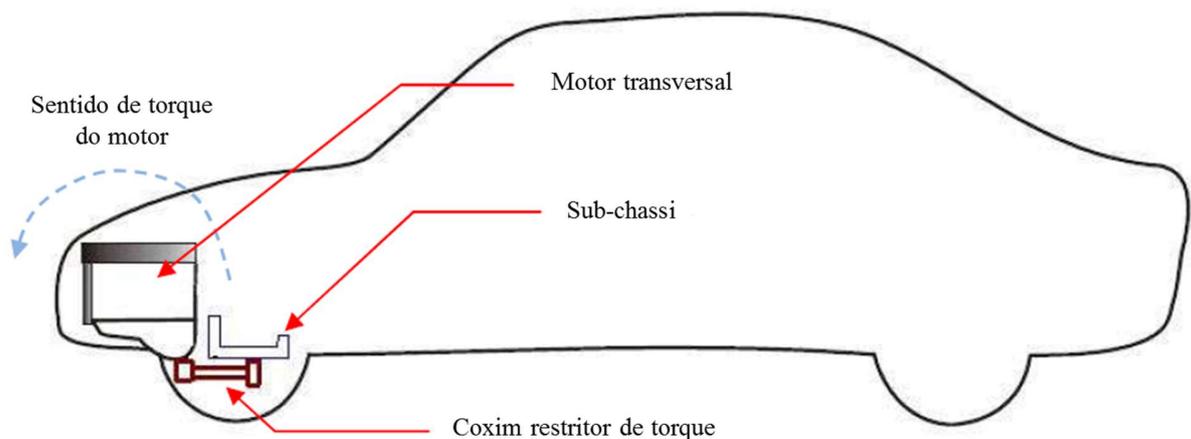
Os modelos constitutivos abordados na literatura podem ser aplicados em diferentes contextos. A grande disponibilidade de modelos acaba permitindo que não haja homogeneidade na escolha deles, de modo que em cada situação particular pesquisada, é possível justificar a escolha de um modelo diferente. Estudos recentes ainda procuram elucidar métodos eficientes de seleção de modelos constitutivos aplicados a materiais hiperelásticos, como mostram os estudos conduzidos por Shahzad et al. (2015) e por Szurgott e Jarzebski (2019).

Há, em geral, uma grande complexidade e variedade de aplicação dos modelos constitutivos hiperelásticos. Como exemplo, é possível encontrar relatos na literatura de sua aplicação em estudos sobre otimização geométrica (PARK et al., 2012; KAYA, 2014), compressibilidade (SHI; LIU; CHEN, 2017) e vida em fadiga (LI et al., 2019; FENG et al., 2016). Logo, observa-se que, cada modelo apresenta uma situação na qual seu uso é mais adequado. Tal fato pode estar relacionado ao tipo de material a ser avaliado, à quantidade de dados experimentais coletados, à magnitude de deformação ao qual o material será sujeito e ao custo computacional, que está diretamente ligado à quantidade de constantes requeridas

pelo modelo. Cabe então, ao presente estudo, estabelecer critérios objetivos para a escolha do modelo que consiga capturar melhor o comportamento de um coxim automotivo, utilizado na suspensão do motor.

O coxim em estudo atua como um restritor de torque, agindo de modo a evitar a rotação do motor em relação à carroceria. Este elemento conecta a parte inferior do motor ao sub-chassi dianteiro, como mostrado no diagrama da Figura 1.

Figura 1 – Diagrama representativo do posicionamento do coxim restritor de torque



Fonte: Vieira, Leal e Silveira (2010, p.5).

Um dos métodos mais usuais para o estudo do comportamento do coxim automotivo é a análise de elementos finitos, o qual permite simular virtualmente o comportamento de diferentes componentes mecânicos, incluindo os elastoméricos. Esse tipo de análise utiliza como dado de entrada as constantes matemáticas do modelo constitutivo selecionado. Logo, a determinação do modelo constitutivo mais adequado visa otimizar o tempo computacional gasto com as análises de elementos finitos, além de reduzir a quantidade de provas a serem realizadas com protótipos (ensaios físicos em bancos de prova). Portanto, o presente estudo busca melhorar a predição do comportamento de um coxim automotivo e permitir o uso mais assertivo dos modelos constitutivos hiperelásticos em simulações de elementos finitos.

O presente trabalho contempla 5 capítulos, iniciando pela introdução, a qual apresenta os objetivos geral e específicos, que serviram como base para orientar as demais etapas do estudo. No Capítulo 2 são apresentados os fundamentos da mecânica do contínuo,

assim como a formulação de alguns modelos constitutivos hiperelásticos relatados na literatura, tais tópicos contemplam os principais conceitos teóricos aplicados no desenvolvimento desta pesquisa. O Capítulo 3 aborda a metodologia experimental usada para o cálculo das constantes hiperelásticas e estabelece critérios de seleção dos modelos a serem aplicados nas simulações via elementos finitos. Posteriormente, há a descrição do procedimento experimental de análise do coxim automotivo, assim como as etapas de validação e de simulação do seu comportamento sob a ação de uma carga estática unidirecional. Em seguida, a análise dos resultados é exposta no Capítulo 4, para que, por fim, sejam apresentadas no Capítulo 5 as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

1.1 Objetivo geral

Avaliar qual é o modelo constitutivo hiperelástico mais adequado para a simulação estática do comportamento de um coxim automotivo pelo método dos elementos finitos.

1.2 Objetivos específicos

- Analisar a qualidade do ajuste de curvas realizados a partir dos dados dos ensaios de tração e compressão em corpos de prova de borracha natural NR-60.
- Verificar quais modelos constitutivos apresentaram estabilidade no ajuste de curvas, ao longo de toda a faixa de deformações prescrita.
- Validar a metodologia de análise por elementos finitos em 2D e 3D.
- Simular o comportamento do coxim em 2D e 3D com auxílio do software Abaqus[®], variando os modelos constitutivos.
- Comparar os resultados obtidos com o uso de diferentes modelos constitutivos nas simulações do comportamento do coxim automotivo.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são abordados alguns dos principais conceitos teóricos relacionados ao tema desta dissertação.

2.1 Fundamentos da mecânica do contínuo

A determinação do comportamento mecânico dos diferentes tipos de materiais é baseada principalmente nos conceitos de tensão e deformação, abordados nos estudos de mecânica do contínuo. O presente tópico irá elucidar alguns dos tópicos básicos da mecânica do contínuo, usualmente aplicados na avaliação do comportamento de materiais hiperelásticos.

2.1.1 Descrição do movimento

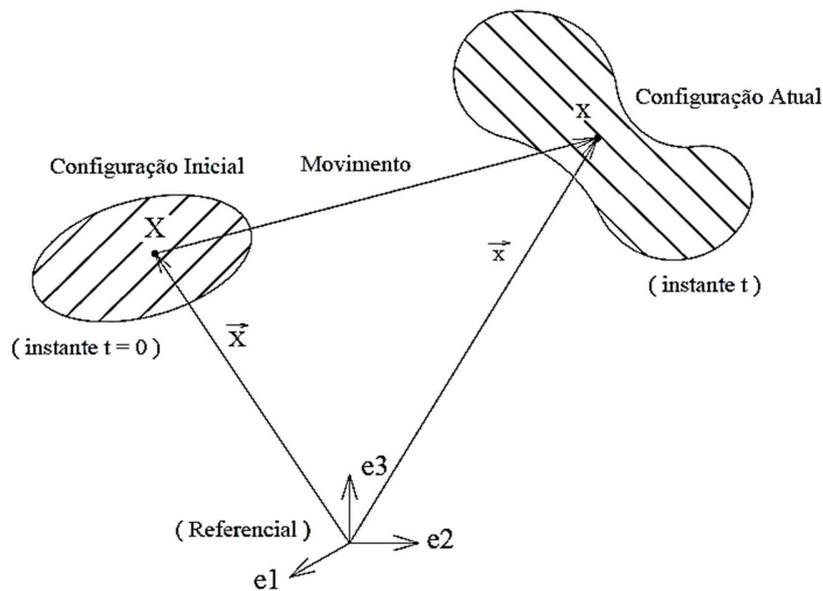
Considera-se um corpo como a abstração matemática de um objeto que se apresenta na natureza. Um corpo é composto por um conjunto de partículas enclausuradas numa região fechada C , que podem adquirir diferentes configurações no espaço, independentemente do instante de tempo t . Dentro de C , cada partícula ocupa apenas um ponto no espaço Euclidiano tridimensional, preenchendo a totalidade da região fechada, de modo que em cada ponto dentro de C haja somente uma partícula. Deste modo, é possível imaginar uma configuração inicial de referência ($t = 0$) onde cada partícula pertencente à região fechada C_0 pode ser descrita pelo seu vetor posição \mathbf{X} , cujos elementos são suas coordenadas cartesianas. Partindo dessa configuração, é possível descrever esse corpo num instante de tempo $t > 0$ através de seu novo conjunto de coordenadas que irão compor o vetor posição instantâneo \mathbf{x} , integrantes de uma nova região fechada C .

Pascon e Coda (2009) afirmam que o movimento é uma alteração ou mudança de configuração do corpo, onde a posição \mathbf{x} de cada partícula num instante t pode ser representada matematicamente por uma função χ que é dependente da posição inicial \mathbf{X} e do tempo t .

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (1)$$

A Figura 2 exemplifica a mudança de configuração pela qual passa o conjunto de partículas pertencentes ao corpo, caracterizando a existência de movimento.

Figura 2 – Representação do movimento de um corpo



Fonte: Pascon e Coda (2009, p.134).

A Equação 1 parte da configuração de referência C_0 que, quando deformada, será transformada em uma outra configuração C . Essa obtenção de C a partir de C_0 é conhecida como descrição Lagrangeana (ou material) do movimento. Em contraste a essa definição, também é possível realizar o caminho inverso e determinar a configuração inicial C_0 a partir da configuração atual C , no que se denomina descrição Euleriana (ou espacial) do movimento (Equação 2).

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

Qualquer das duas descrições de movimento podem ser usadas sem modificação do resultado final. Entretanto, é necessário ter em mente que as operações envolvidas durante a resolução serão diferentes para cada um dos tipos de descrição escolhidos. De acordo com Bonet (2008), apesar de ser possível realizar transformações matemáticas de uma descrição

para a outra, utiliza-se mais a descrição Lagrangeana no estudo da mecânica dos sólidos. Em contrapartida, a descrição Euleriana é mais comumente aplicada em mecânica dos fluidos.

Sabendo-se que o movimento de um corpo pode ser definido pelo mapeamento das posições de suas partículas, é possível definir o deslocamento espacial \mathbf{u} como a diferença entre a configuração final \mathbf{x} e a inicial \mathbf{X} .

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (3)$$

De acordo com Bonet (2008), a variação da posição instantânea de cada partícula, x_i , em relação às posições iniciais de cada uma dessas partículas, X_j , é denominada a matriz Jacobiana de \mathbf{x} .

$$J_{\mathbf{x}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (4)$$

O determinante da matriz Jacobiana (chamado apenas de Jacobiano) é uma ferramenta matemática utilizada para mapear as posições inicial e final do corpo.

$$J = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right) \quad (5)$$

Holzapfel (2000) afirma que um Jacobiano positivo confere as propriedades de indestrutibilidade da matéria (um volume finito não pode ser transformado em um volume nulo) e interpenetrabilidade da matéria (uma porção da matéria não penetra em outra). Atendida a condição de um Jacobiano positivo e não nulo ($J > 0$), assume-se que o corpo se encontra em um regime de deformação contínua.

2.1.2 Medidas de deformação

À mudança geométrica (forma e/ou volume) de um corpo submetido a diferentes condições externas ou internas, dá-se o nome de deformação. Para a determinação

matemática da deformação de um corpo, utilizam-se vários conceitos e formulações, que são abordados no decorrer deste tópico.

2.1.2.1 Tensor gradiente de deformação

O tensor gradiente de deformação, \mathbf{F} , corresponde à matriz Jacobiana obtida pela diferenciação das coordenadas da matriz de posição instantânea, \mathbf{x} , em relação à matriz de posição inicial, \mathbf{X} . Portanto, cada elemento desta matriz é dado por:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (6)$$

Adotando-se a nomenclatura matricial, é possível observar, a partir da Equação 6, que o tensor gradiente de deformação \mathbf{F} corresponde à transformação das coordenadas infinitesimais sofrida pela configuração inicial \mathbf{X} para que ela seja capaz de atingir a nova configuração instantânea \mathbf{x} , de modo que:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (7)$$

Ou, reescrevendo a Equação 7 utilizando o operador gradiente:

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x} \quad (8)$$

Ou seja, o tensor \mathbf{F} corresponde à taxa com que as coordenadas instantâneas estão variando nas diferentes orientações dentro do corpo. Note que \mathbf{F} é uma matriz não simétrica e varia com movimentos de corpo rígido. Deste modo, transformações matemáticas são necessárias para que \mathbf{F} se torne simétrica e seja possível calcular os seus invariantes, facilitando a avaliação da deformação do corpo.

De acordo com Crisfield (1991), sabendo-se que \mathbf{F} é um tensor não-singular e a determinante de \mathbf{F} é maior que zero ($\det(\mathbf{F}) > 0$), é possível aplicar o teorema da decomposição polar para gerar outros dois tensores, um de rotação (ortogonal) e um de alongamento (simétrico positivo definido). A matriz de rotação, \mathbf{R} , por ser ortogonal,

implica em $\det(\mathbf{R}) = 1$ e $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$. Além disso, quando se rotaciona o elemento antes de alongá-lo, obtém-se o tensor de alongamento à direita, \mathbf{U} .

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} \quad (9)$$

Ao se realizar a mesma operação na sequência inversa (primeiro alongamento e depois rotação), obtém-se o tensor de alongamento à esquerda, \mathbf{V} .

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (10)$$

Crisfield (1991) também mostra, com base nas Equações 9 e 10 e nas propriedades da matriz de rotação \mathbf{R} , que os tensores \mathbf{U} e \mathbf{V} apresentam autovalores iguais (ou alongamentos principais iguais), porém autovetores distintos (direções principais distintas).

2.1.2.2 Tensores de deformação de Cauchy-Green

De acordo com o teorema da decomposição polar, dada qualquer transformação linear não-singular \mathbf{F} , existem únicas transformações lineares simétricas positivas definidas \mathbf{U} e \mathbf{V} , e uma única transformação linear ortogonal \mathbf{R} , de modo que $\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R}$ (HOLZAPFEL, 2000).

Além disso, decorre do fato de \mathbf{F} ser uma transformação linear não-singular que $\mathbf{F} \mathbf{F}^T$ é uma transformação simétrica positiva definida que possui uma única raiz quadrada simétrica positiva definida. Deste modo, existe uma única transformação linear simétrica positiva definida, \mathbf{U} , tal que $\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1}$. Analogamente, também existe uma única transformação \mathbf{V} , tal que $\mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ e $\mathbf{R} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{F}$.

A partir destes conceitos matemáticos e visando agilizar as soluções analíticas, convencionou-se utilizar diretamente \mathbf{U}^2 e \mathbf{V}^2 ao invés de suas raízes quadradas. Ficam assim definidos o tensor de deformação de Cauchy-Green à direita:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (11)$$

E o tensor de deformação de Cauchy-Green à esquerda:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (12)$$

Os tensores de Cauchy-Green apresentam como autovalores os quadrados dos alongamentos principais λ_1^2 , λ_2^2 , λ_3^2 e têm os mesmos autovetores dos respectivos tensores de alongamento (\mathbf{C} e \mathbf{U} têm as mesmas direções principais, assim como \mathbf{B} e \mathbf{V}).

É possível extrair invariantes escalares dos tensores de Cauchy-Green, que podem ser escritas em função dos alongamentos principais:

$$I_1(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (13)$$

$$I_2(\mathbf{C}) = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 \quad (14)$$

$$I_3(\mathbf{C}) = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \quad (15)$$

Uma vez que \mathbf{B} e \mathbf{C} possuem os mesmos autovalores, fica evidente que, ao aplicar as Equações 13, 14 e 15, serão obtidos os mesmos valores para os invariantes escalares, independente do tensor de deformação escolhido. Portanto:

$$I_i(\mathbf{C}) = I_i(\mathbf{B}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (16)$$

De acordo com Bonet (2008), \mathbf{C} está relacionado à descrição material (Lagrangeana), enquanto \mathbf{B} diz respeito à descrição espacial (Euleriana). Dessa forma, percebe-se que os invariantes, como o próprio nome diz, mantêm os mesmos valores independentemente do tipo de descrição adotado.

2.1.2.3 Tensores de deformação de Green-Lagrange e Almansi

As medidas de deformação obtidas por meio dos tensores de Cauchy-Green referem-se à descrição dos alongamentos que um corpo sofre (referem-se à variável *stretch*, em inglês), de modo que, quando um corpo está em sua configuração de referência, $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ e

também $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Ou seja, os multiplicadores (F_{ij}) da matriz posição de referência \mathbf{X} são unitários, implicando que a configuração de referência se mantenha intacta. Portanto, pode-se concluir que os alongamentos principais também são unitários na posição de referência ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$). No entanto, também é possível tratar somente da parte não-rígida da deformação (*strain*, em inglês), de modo que a deformação seja nula quando se estiver na configuração de referência ou quando existirem apenas movimentos de corpo rígido. Logo, é possível considerar a deformação como a diferença entre o tensor de alongamentos e a matriz identidade (ex.: $\mathbf{U} - \mathbf{I}$).

Há diferentes formas de medição de deformação reportadas na literatura, todas elas apresentando uma relação um para um com os tensores de alongamentos (tensores de Cauchy-Green), tal que as medidas de deformação sejam equivalentes (ABEYARATNE, 2012).

Partindo destes preceitos, define-se o tensor de deformações de Green-Lagrange, \mathbf{E} , como:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (17)$$

E o tensor de deformações de Almansi, \mathbf{G} , como:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-2}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (18)$$

Sendo o tensor de Green-Lagrange usado para mensurar deformações na descrição material (Lagrangeana) do movimento e o de Almansi, na descrição espacial (Euleriana).

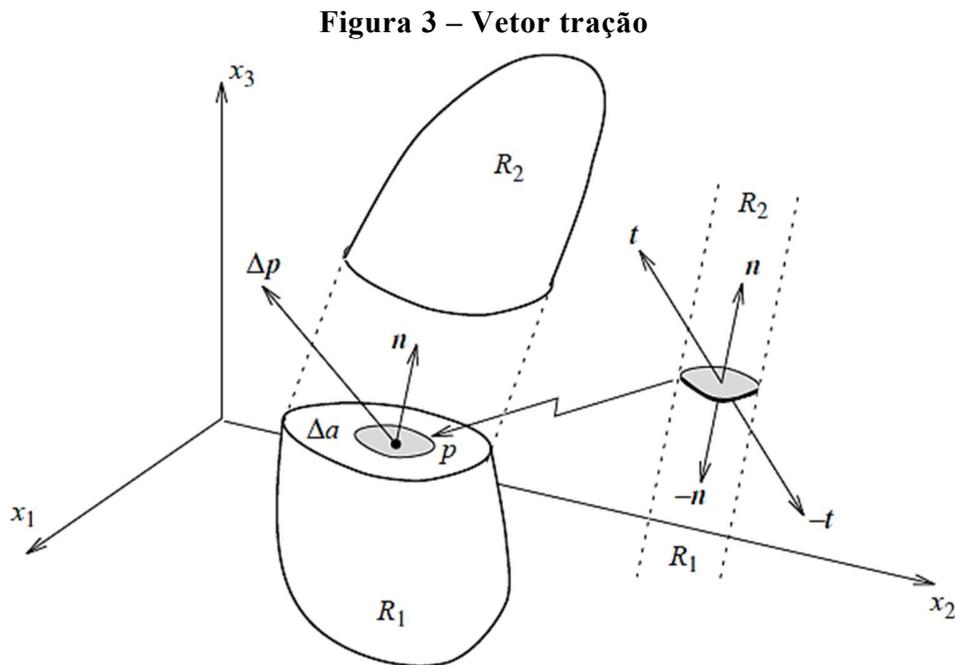
2.1.3 Medidas de tensão

Ao ser submetido a uma força externa, um corpo irá reagir internamente, buscando o equilíbrio. A quantificação dessas reações internas de um corpo é denominada tensão (HOLZAPFEL, 2000). A seguir, são descritos alguns dos conceitos básicos sobre este tópico.

2.1.3.1 Tensor de tensão de Cauchy

Para ser possível definir a ação das tensões em um corpo, é necessário primeiramente abordar como este corpo se comporta ao ser submetido a uma força externa. Em um ponto A qualquer dentro de um corpo, pode ser traçada uma superfície S que terá suas duas faces dentro do corpo. Como consequência da conservação da quantidade de movimento, a força exercida em um lado da superfície irá gerar uma força de reação de mesma magnitude e direção oposta (terceira Lei de Newton). Portanto, nesta superfície pré-definida, uma porção da força total $d\mathbf{P}$ estará atuando em uma parte da superfície dS , dando origem ao vetor tração \mathbf{t} (Figura 2), de acordo com a expressão:

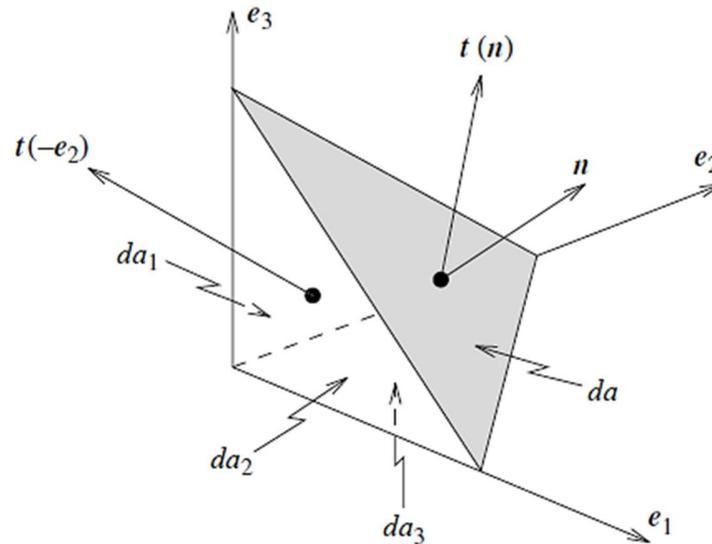
$$\mathbf{t} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{P}}{dS} \quad (19)$$



Fonte: Bonet (2008, p.35).

Como consequência do princípio de ação e reação, o vetor tração será dependente do vetor \mathbf{n} , normal à superfície na qual há a ação da força em questão (Figura 3).

Figura 4 – Tetraedro elementar



Fonte: Bonet (2008, p.136).

Portanto, os vetores tração associados às direções cartesianas e_1 , e_2 e e_3 , podem ser expressos pela soma de suas componentes:

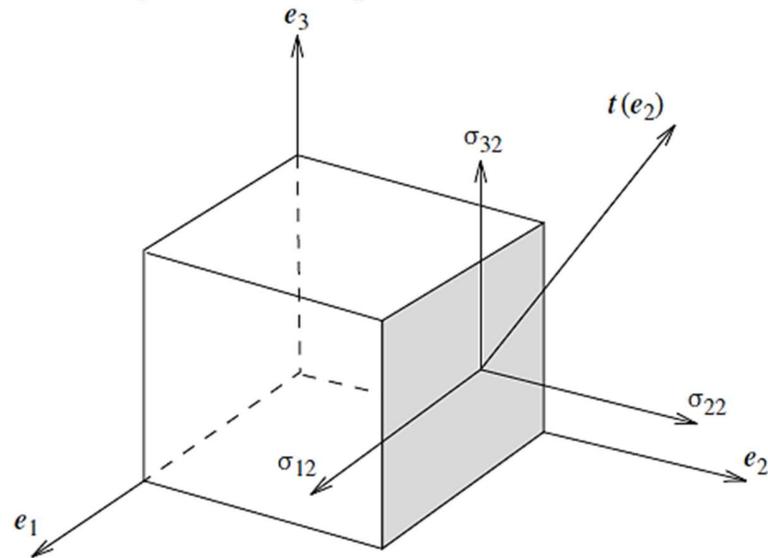
$$\mathbf{t}(e_1) = \sigma_{11}e_1 + \sigma_{21}e_2 + \sigma_{31}e_3 \quad (20)$$

$$\mathbf{t}(e_2) = \sigma_{12}e_1 + \sigma_{22}e_2 + \sigma_{32}e_3 \quad (21)$$

$$\mathbf{t}(e_3) = \sigma_{13}e_1 + \sigma_{23}e_2 + \sigma_{33}e_3 \quad (22)$$

Holzapfel (2000) considera que, havendo uma superfície genérica cujo vetor normal é \mathbf{n} , é possível definir $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ após a determinação de um tensor formado pelos valores escalares σ_{ij} , obtidos através da decomposição de \mathbf{t} nas direções cartesianas (Figura 4).

Figura 5 – Decomposição do vetor tração



Fonte: Bonet (2008, p.135).

Define-se, desse modo, o Tensor de Tensões de Cauchy, como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Observe que o Tensor de Tensões de Cauchy é simétrico e se anula na ausência de deformações (STUMPF, 2009), atendendo a seguinte relação:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (24)$$

É interessante ressaltar que o Tensor de Cauchy representa a tensão verdadeira, ou seja, é uma medida euleriana de tensão, uma vez que usa a configuração instantânea (deformada) do corpo para determinar a magnitude dos esforços atuando sobre ele.

2.1.3.2 Tensores de tensão de Piola-Kirchhoff

Conforme citado por Stumpf (2009), apesar de ser amplamente utilizado na construção das equações constitutivas, o Tensor de Tensão de Cauchy possui algumas

dificuldades na sua implementação. Por usar como base os eixos cartesianos globais, sua utilização não é a melhor escolha para problemas que envolvem grandes deformações. Além disso, a determinação precisa da configuração instantânea (\mathbf{x}) de um corpo é mais complexa do que a caracterização da configuração de referência (\mathbf{X}) deste mesmo corpo, tornando-se válida, portanto, a aplicação de um método que permita o cálculo das tensões a partir desta configuração de referência \mathbf{X} .

De acordo com o Princípio do Trabalho Virtual, apesar da quantidade de trabalho por unidade de volume não se manter constante durante a deformação, a quantidade de trabalho por unidade de massa permanece inalterada (BONET, 2008). A partir deste preceito, é possível definir um tensor capaz de representar o efeito de uma força instantânea (aquela atuante no momento $t > 0$) por unidade de área não deformada, denominado Primeiro Tensor de Piola-Kirchhoff.

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (25)$$

Por gerar um valor de tensão referente à configuração indeformada do corpo, o tensor \mathbf{P} representa uma medida lagrangeana de tensão (STUMPF, 2009). Entretanto, uma das complicações do tensor \mathbf{P} é o fato dele não ser simétrico e, por conta disso, tornar dificultosa a formulação das equações constitutivas.

Como alternativa à assimetria do tensor \mathbf{P} , é possível determinar um novo tensor \mathbf{S} , denominado Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff, que irá expressar a força na configuração indeformada por unidade de área indeformada e será simétrico sempre que $\boldsymbol{\sigma}$ também for (HOSS, 2009).

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (26)$$

2.1.4 Relações constitutivas

É possível estabelecer relações matemáticas entre tensão e deformação, a partir das quais é possível calcular a tensão agindo num corpo a partir somente da deformação que ele sofre. Essas formulações são denominadas *relações constitutivas*. Hoss (2009) afirma que é

possível generalizar uma relação constitutiva usando a descrição Euleriana do movimento, chamada também de elasticidade de Cauchy.

$$\boldsymbol{\sigma} = f(\mathbf{B}) \quad (27)$$

Considerando-se um material isotrópico, é possível definir a equação da energia de deformação em função das invariantes do tensor de Cauchy-Green à direita:

$$W(\mathbf{C}) = f(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})) \quad (28)$$

Adiante, verifica-se que, admitindo-se a incompressibilidade do material, o terceiro invariante de deformação (Equação 15) é equivalente à unidade. Deste modo, é possível determinar a equação da energia de deformação tendo apenas I_1 e I_2 como variáveis independentes.

Considerando, portanto, um material sólido hiperelástico isotrópico incompressível, é possível estabelecer sua relação constitutiva a partir da equação energia de deformação W , tal que:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \quad (29)$$

A Equação 29 mostra a relevância da definição de uma função W que seja capaz de representar de maneira precisa a relação existente entre a tensão ($\boldsymbol{\sigma}$) e a deformação (\mathbf{B}).

2.2 Modelos constitutivos aplicados a materiais hiperelásticos

Os materiais hiperelásticos apresentam uma relação não-linear ao longo de todo o espectro de sua curva de tensão vs deformação, exibindo uma deformação elástica de alta magnitude, sem um patamar definido de transição entre os regimes elástico e plástico. Por conta dessa falta de linearidade, fica inviável utilizar a Lei de Hooke para prever o comportamento do material durante sua deformação elástica (BOYCE; ARRUDA, 2000).

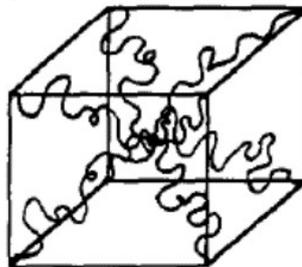
Os modelos constitutivos que visam prever o comportamento deste tipo de material empregam o conceito de energia de deformação, W , a fim estabelecer relações matemáticas entre a tensão verdadeira e a deformação verdadeira (Equação 29). Em geral, as variáveis independentes da função energia de deformação são os invariantes de deformação (I_1, I_2, I_3), mas também é possível que sejam usados os alongamentos principais ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$).

Os modelos constitutivos hiperelásticos podem ser divididos em basicamente duas categorias: Micromecânicos e Fenomenológicos (MARCZAK et al., 2006). Os modelos Micromecânicos visam dar um melhor significado físico às constantes utilizadas nas funções de energia de deformação. Eles são desenvolvidos a partir de análises estatísticas que levam em conta valores de comprimento de cadeia molecular, tipos de ligações químicas e variáveis termodinâmicas. Por outro lado, modelos Fenomenológicos são baseados em observações experimentais que possibilitam a determinação das constantes presentes nas respectivas equações constitutivas. Cada modelo representa uma abordagem diferente e, portanto, as variáveis consideradas acabam tendo maior ou menor importância. Nos tópicos a seguir, são apresentados alguns dos modelos constitutivos comumente citados na literatura.

2.2.1 Arruda-Boyce

Conhecido como um dos principais modelos micromecânicos, o modelo Arruda-Boyce (ARRUDA; BOYCE, 1993) é baseado no conceito de uma rede de cadeias presentes nas células unitárias do elemento. São oito cadeias (*8-chain*) que se iniciam em cada aresta de um cubo, encontrando-se no centro, como ilustrado na Figura 5.

Figura 6 - Modelo 8-chain hiperelástico da borracha em estado não deformado



Fonte: Arruda e Boyce (1993, p.394).

Este modelo utiliza apenas duas propriedades de material como constantes na equação constitutiva: a densidade das cadeias elastoméricas, n , e o alongamento máximo da cadeia, λ_{max} . O cálculo da energia de deformação, considerando um material incompressível, é obtido por:

$$W_{A-B} = nk_B T \sum_{p=1}^N \frac{C_p}{\lambda_L^{2p-2}} (I_1^p - 3^p) \quad (30)$$

Onde T é a temperatura, k_B é a constante de Boltzmann, I_1 é a primeira invariante de deformação e C_p corresponde às constantes de cada termo da expansão da série, obtidos por conta da integração da função inversa de Langevin (geralmente são usados apenas cinco termos da série, ou seja, $p=5$).

Este modelo é de grande utilidade quando há baixa disponibilidade de testes experimentais, desde que não haja enrijecimento muito acentuado do material (BERDICHEVSKY, 2004). Devido ao seu baixo custo computacional, pode ser uma escolha válida quando não se tem uma descrição detalhada do comportamento do elastômero.

2.2.2 Polinomial

Este método foi construído com a determinação de uma expressão na qual o módulo de cisalhamento fosse constante, ou seja, não dependesse da deformação de cisalhamento. Primeiramente, Mooney (MOONEY, 1940) teorizou sobre um modelo fenomenológico dependente dos alongamentos principais ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$), até que Rivlin (RIVLIN, 1956) demonstrou que a função de energia de deformação poderia ser escrita no formato de uma série de potência infinita, tendo como valores de entrada as invariantes de deformação, como mostrado a seguir:

$$W_{Pol} = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (31)$$

A demonstração matemática de Rivlin mostrou que é possível definir infinitas equações de energia de deformação modificando as potências de I_1 e I_2 .

O modelo polinomial é versátil e conveniente, haja vista a possibilidade de utilizar o grau polinomial mais adequado para fazer a calibração das curvas. Marczak et al (2006) comentam que uma das falhas deste método é a grande quantidade de constantes de calibração necessárias (que não apresentam significado físico definido), o que acaba gerando picos ou vales desnecessários na curva de predição, por conta disso geralmente se usa $N \leq 3$. Outro fato comum no uso deste método é a dificuldade de predizer o comportamento do material sob diferentes carregamentos. Por exemplo, quando calibrado com base em um experimento de tração uniaxial, a predição do comportamento do elemento num teste de compressão acaba sendo errônea.

2.2.3 Mooney-Rivlin

Curiosamente, o modelo que ficou conhecido como Mooney-Rivlin refere-se basicamente ao método polinomial para $N = 1$, considerando a incompressibilidade do material (BOYCE; ARRUDA, 2000; YEOH; FLEMING, 1997). O modelo tornou-se popular por sua simplicidade matemática e aparente precisão na captura dos desvios do modelo Gaussiano em tensão uniaxial.

$$W_{M-R} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (32)$$

Onde C_{10} e C_{01} são constantes de calibração dos materiais e I_1 e I_2 são os dois primeiros invariantes de deformação.

De acordo com Marczak et al. (2006), as simplificações do modelo Mooney-Rivlin fazem com que a sua validade esteja na faixa de deformações de 30% – 50%. Essa limitação está relacionada com a incapacidade do modelo capturar corretamente os pontos de inflexão da curva tensão vs deformação. Além disso, dificilmente se consegue usar este modelo para predizer corretamente o comportamento do material em compressão, a não ser que a curva seja calibrada com base nesse tipo de carregamento (MARCZAK et al., 2006). O modelo Mooney-Rivlin acaba sendo conveniente para diversas aplicações por conta de sua simplicidade matemática, mas é bom sempre ter em mente que sua eficácia está restrita a uma faixa de deformação menor.

2.2.4 Polinomial reduzido

De acordo com a proposta de Yeoh (YEOH; FLEMING, 1997), é possível assumir que a variação de energia de deformação com relação à segunda invariante seja próxima de zero ($\frac{\partial W}{\partial I_2} \approx 0$), já que a energia varia significativamente mais em relação à primeira invariante ($\frac{\partial W}{\partial I_1} \gg \frac{\partial W}{\partial I_2}$). Portanto, pode ser feita uma aproximação do modelo polinomial utilizando somente os termos que contêm I_1 , como apresentado na Equação 33:

$$W_{RedPoli} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i (I_1 - 3)^i \quad (33)$$

Esse modelo torna-se atrativo pois o número N de termos utilizados pode ser determinado de acordo com a necessidade do estudo. Assim como no modelo Polinomial, raramente se usa $N > 3$ por conta das oscilações exageradas da curva tensão vs deformação. Seu ponto fraco diz respeito à dificuldade de se utilizar o teste de compressão para prever o comportamento do material sob diferentes tipos de carregamento.

2.2.5 Neo-Hookeano

Este modelo diz respeito ao modelo Polinomial Reduzido para $N = 1$, como exemplificado na Equação 34 (BOYCE; ARRUDA, 2000):

$$W_{NH} = C_{10} (I_1 - 3) \quad (34)$$

Devido à sua simplicidade, é difícil utilizar o modelo Neo-Hookeano com boa precisão para deformações de tração maiores que 30% – 40%. Por ter apenas uma constante de calibração, acaba não capturando o efeito de enrijecimento presente em altas deformações. Apesar de suas limitações, este modelo constitutivo pode ser usado como ponto de partida em análises iniciais de casos onde a deformação não ultrapasse 100% (MARCZAK et al., 2006).

2.2.6 Yeoh

O modelo de Yeoh (VIEIRA; LEAL; SILVEIRA, 2010; YEOH; FLEMING, 1997) corresponde à versão do Polinomial Reduzido onde $N = 3$.

$$W_{Yeoh} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (35)$$

É um modelo que consegue se adaptar a faixas de alta deformação, porém pode apresentar falta de precisão quando o alongamento é pequeno. Além disso, pelo fato de capturar bem o comportamento do material em um amplo espectro de deformação e sob diversos tipos de carregamento, este constitui uma boa escolha para a maioria dos casos envolvendo borrachas naturais.

2.2.7 Ogden

A proposta de Ogden visa utilizar os alongamentos principais ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) diretamente, ao invés de usar as invariantes de deformação (VIEIRA; LEAL; SILVEIRA, 2010; BOYCE; ARRUDA, 2000). Essa premissa faz com que o modelo se ajuste mais facilmente aos dados experimentais.

$$W_o = \sum_n \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad (36)$$

Onde μ_n e α_n são constantes de calibração que podem ter valores não inteiros (MARCZAK et al., 2006). Uma calibração mais apropriada das curvas parece acontecer a partir de $n = 3$. Uma das consequências do uso desse modelo é o grande número de constantes, que precisam ter sua estabilidade testada (geralmente usando o Critério de Estabilidade de Drucker) para garantir qualidade da calibração experimental. Outro fator a se considerar é a necessidade de diversos experimentos (no mínimo tração e compressão) para determinação de μ_n e α_n pelo método de elementos finitos (SHANGGUAN; LU, 2004).

Predições usando este modelo tendem a ser mais exatas, ou seja, com um tipo de carregamento pode-se prever melhor o comportamento do material sob diferentes tipos de

tensão (MARCZAK et al., 2006). Outro ponto forte é sua aplicabilidade, que pode ser até 700% de deformação. Seu ponto fraco é o custo computacional mais alto, fazendo com que seu uso seja normalmente com $N \leq 3$.

2.2.8 Van der Waals

Este modelo faz uso de uma correlação entre as equações constitutivas de hiperelasticidade e a equação de estado de Van der Waals para gases não-ideais. Este modelo é uma extensão do modelo de Killian, que depende apenas do primeiro invariante de deformação (HOSS, 2009). O modelo Van der Waals, ao invés de ser expresso em função apenas de I_1 , também tem um termo dependente de I_2 . A energia de deformação é calculada pela Equação 37 (HOSS; MARCZAK, 2010):

$$W_{vdw} = \mu [-(\lambda_m^2 - 3)(\ln(1 - \eta) + \eta) - \frac{2}{3} a (\frac{1}{2} I_1 - \frac{3}{2})^{3/2}] \quad (37)$$

Na qual os termos η e I_l são calculados por:

$$\eta = \sqrt{\frac{I_1 - 3}{\lambda_m^2 - 3}} \quad (38)$$

$$I_l = (1 - \beta)I_1 + \beta I_2 \quad (39)$$

Onde μ , λ_m , a e β são parâmetros do material. É importante notar que β é introduzido para levar em conta mudanças no comportamento da curva tensão vs deformação para diferentes tipos de carregamento, e se $\beta = 0$, a equação torna-se independente de I_2 , similar ao modelo anterior de Killian. Apesar de se adaptar relativamente bem ao tipo de carregamento usado em sua calibração, não é recomendado utilizar este modelo em aplicações governadas por deformações diferentes daquelas usadas na calibração (HOSS, 2009).

2.3 Método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos é uma ferramenta matemática aplicada para a resolução aproximada de equações diferenciais. Esse método consiste em discretizar o sistema sob análise em pequenas partes, denominadas de elementos, os quais passam a representar o domínio contínuo do problema. A divisão da geometria em pequenos elementos permite que um problema complexo seja particionado em problemas mais simples, reduzindo, dessa forma, o custo computacional necessário para obter a solução desses problemas. Esses elementos de dimensões finitas são chamados de *elementos finitos* e o método numérico tem seu nome derivado desse termo (FISH; BELYTSCHKO, 2007).

Os elementos finitos são conectados entre si por pontos, os quais são denominados de *nós*. A partir da disposição espacial dos nós, os elementos adquirem diferentes formas, tais como a triangular, quadrilateral, tetraédrica, cúbica, entre outras, dependendo do tipo e da dimensão do problema. O conjunto formado pelos nós e elementos que descrevem um sistema é chamado de *malha*. A precisão do método dos elementos finitos depende da quantidade de nós e elementos, do tamanho e dos tipos de elementos da malha. Dessa forma, quanto mais refinada a malha (maior quantidade de elementos e nós), maior a precisão nos resultados da análise.

Em problemas de análise estrutural, como é o caso do presente estudo, os deslocamentos nodais são as incógnitas do modelo matemático. É a partir deles que se torna possível determinar os valores das tensões internas e da resistência global da estrutura em análise. Além disso, os elementos formados a partir desses nós têm seu comportamento interno descrito por intermédio de funções matemáticas específicas, as quais visam reproduzir o que ocorre em cada trecho da estrutura real (ALVES FILHO, 2000).

Em geral, as análises estruturais calculam as forças de reação em cada nó (matriz $[F]$) utilizando a matriz de rigidez do elemento ($[k]$) e a matriz dos deslocamentos nodais ($[u]$). Essa formulação matemática é representada pela Equação 40.

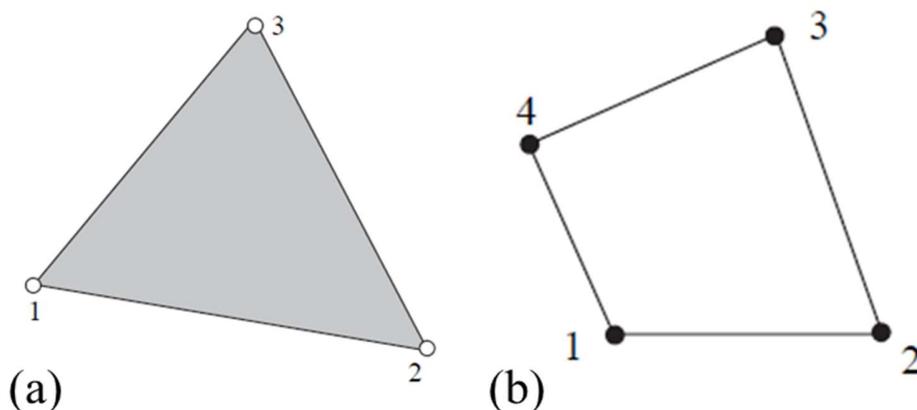
$$[F] = [k][u] \tag{40}$$

Desse modo, torna-se crucial definir a matriz de rigidez de maneira apropriada para a obtenção de resultados precisos na análise de elementos finitos. Uma das etapas da montagem da matriz de rigidez é a especificação de uma função de interpolação, a qual irá descrever os deslocamentos em qualquer ponto no interior do elemento a partir dos deslocamentos nodais. Em geral, usa-se a função polinomial por ela ser facilmente manipulada e por ser possível limitar o número de termos de acordo com os coeficientes que seja possível determinar. A função que define a forma pela qual se estabelece a interpolação do campo de deslocamentos e, portanto, estabelece a relação entre os deslocamentos nodais e os deslocamentos dentro do elemento, é chamada de *função de forma do elemento finito* (ALVES FILHO, 2000). Matricialmente, a matriz de deslocamentos internos do elemento ($[v(x)]$) é o produto entre a função de forma ($[N(x)]$) e a matriz de deslocamentos nodais ($[\delta]$), como mostrado na Equação 41.

$$[v(x)] = [N(x)][\delta] \quad (41)$$

Há diversas classes de elementos disponíveis nas bibliotecas dos softwares comerciais, as quais contam com diferentes funções de forma, de acordo com a sua finalidade. Considerando o caso dos elementos bidimensionais, é possível destacar os elementos triangulares e quadrilaterais. Esses elementos podem contar com uma função de interpolação linear (polinômio de grau 1) e presença de nós apenas em seus vértices. Com isso, formam-se os elementos do tipo triangular de 3 nós e quadrilateral de 4 nós (Figura 7).

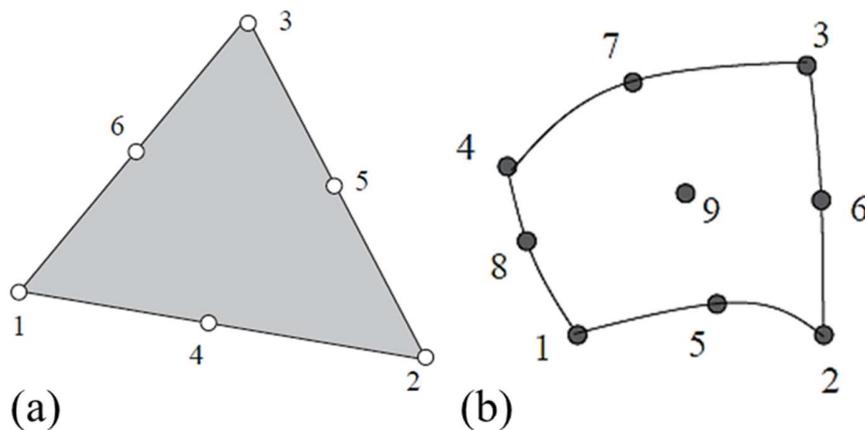
Figura 7 – Tipos de elementos finitos: (a) triangular de 3 nós, (b) quadrilateral de 4 nós



Fonte: Fish e Belytschko (2007, p.154).

Com a inclusão de mais nós, é possível utilizar funções de interpolação de graus mais altos. Assim, a cada nó adicional presente em cada aresta, a potência do polinômio interpolador pode aumentar em um grau. Considerando uma interpolação quadrática (polinômio de grau 2), admite-se a elaboração dos elementos bidimensionais triangulares de 6 nós e quadriláteros de 8 nós (Figura 8).

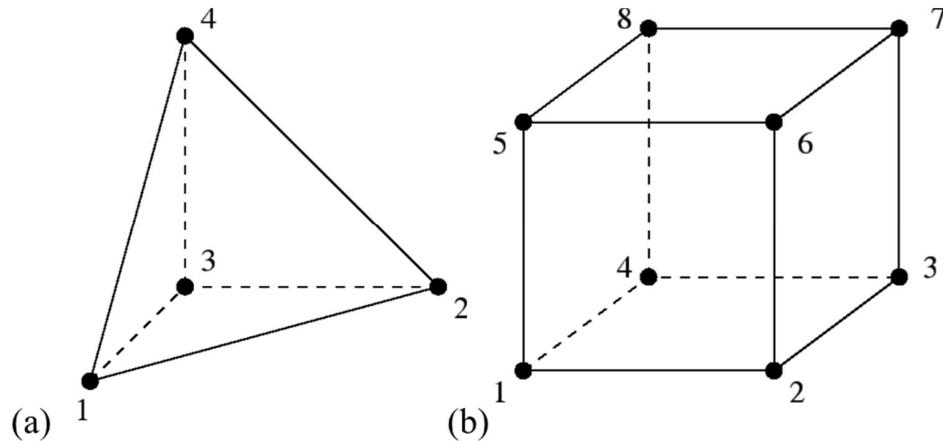
Figura 8 – Tipos de elementos finitos: (a) triangular de 6 nós, (b) quadrilateral de 9 nós



Fonte: Fish e Belytschko (2007, p. 168).

Os elementos tridimensionais seguem a mesma lógica dos bidimensionais. Quando a formulação é linear, conta-se com a presença de nós apenas nos vértices do sólido em estudo. Dessa maneira, é possível construir elementos tetraédricos de 4 nós e hexaédricos de 8 nós, como ilustrado na Figura 9.

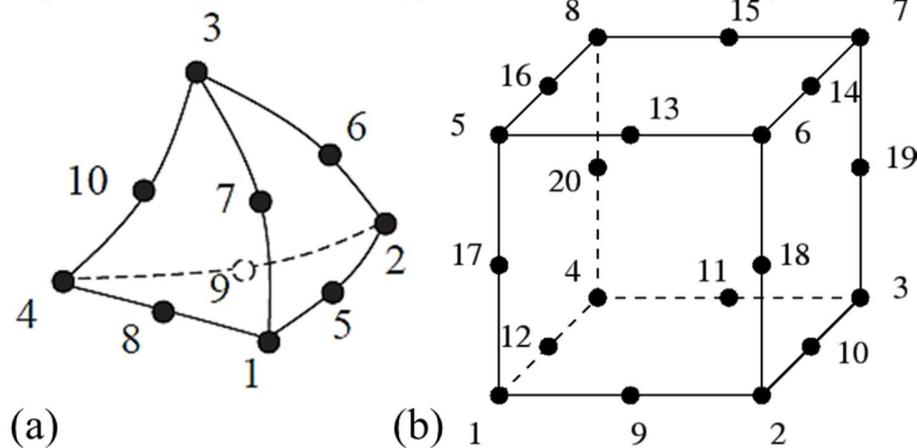
Figura 9 – Tipos de elementos finitos: (a) tetraedro de 4 nós e (b) hexaedro de 8 nós



Fonte: Fish e Belytschko (2007, p. 1842).

Novamente, caso a função de forma faça uso de polinômios interpoladores de grau 2 (formulação quadrática), haverá nós no meio de cada aresta. Assim, permite-se a formação dos elementos tetraédricos de 10 nós e hexaédricos de 20 nós, como mostrado na Figura 10.

Figura 10 – Tipos de elementos finitos: (a) tetraedro de 10 nós e (b) hexaedro de 20 nós



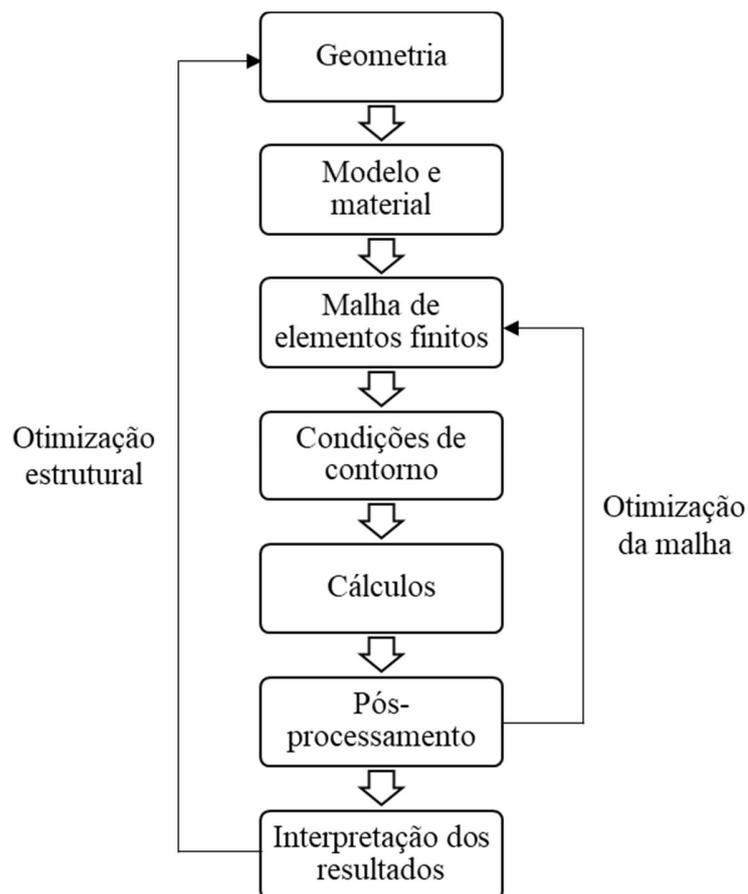
Fonte: Fish e Belytschko (2007, p. 184).

A seleção do tipo de elemento deve ser coerente com a geometria do corpo em estudo, com o tipo de material utilizado e com as informações que se procura extrair da análise de elementos finitos. Os elementos tridimensionais seguem os conceitos da mecânica do contínuo explicitados no tópico 2.1. No entanto, cabe mencionar um caso especial, no

qual a espessura de um corpo é muito menor que suas dimensões nos outros dois eixos cartesianos. Nesse caso, pode-se assumir que o modelo se encontra em um estado plano de deformações generalizado e que a sua deformação é independente da sua posição com relação à direção da espessura (DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA CORP, 2008).

Uma vez compreendidas as bases teóricas sobre o que é o método dos elementos finitos e alguns de seus principais fundamentos, torna-se necessário esclarecer como ocorre um procedimento usual de análise utilizando esse método. O fluxo de uma análise de elementos finitos compreende basicamente as etapas de pré-processamento, cálculos numéricos e pós-processamento. Na Figura 11 é mostrado um diagrama que ilustra com mais detalhes as etapas que compõem esse tipo de análise.

Figura 11 – Fluxograma de uma análise de elementos finitos



Fonte: Tschiptschin (2011, p.30).

A abordagem realizada para explorar alguns dos principais conceitos relativos ao método dos elementos finitos visou esclarecer alguns dos pontos relevantes sobre a seleção de elementos, elaboração de malhas e etapas incluídas em um típico processo de análise estrutural utilizando o referido método numérico.

2.4 Estado da arte

No intuito de demonstrar a aplicabilidade dos diferentes modelos constitutivos na análise de elementos finitos de materiais hiperelásticos, são elencados a seguir alguns dos estudos recentes que discorrem sobre o tema.

Park et al. (2012) estudaram um processo de otimização da forma de coxins de borracha, porém, seu estudo focou em peças aplicadas na sustentação do radiador do motor. Nessa pesquisa, as características do material hiperelástico foram obtidas a partir de testes de compressão e de tensão uni e biaxial. A partir dos dados coletados, os autores conseguiram determinar que o modelo Ogden de três termos representava de maneira mais fidedigna o material (*best-fit*), sendo, portanto, o mais adequado para a realização das simulações via elementos finitos.

Kaya (2014) propôs um modelo de otimização topológica de um coxim de borracha utilizado na absorção de vibração do motor, no qual o modelo de Ogden de quinta ordem foi implementado no modelamento por elementos finitos e os dados experimentais foram coletados em testes de tensão uniaxial e de cisalhamento planar. O autor mostrou que o método de otimização por evolução diferencial, aliado à simulação em 2D via elementos finitos, foi eficaz para localizar os parâmetros ótimos da geometria do coxim, auxiliando a reduzir a quantidade de iterações necessárias no processo.

Shahzad et al. (2015) calcularam as constantes dos modelos Mooney-Rivlin de dois termos, Neo-Hookeano, Yeoh, Ogden de três termos e Arruda-Boyce, utilizando dados de testes laboratoriais de tração uni e biaxial, compressão volumétrica e cisalhamento planar em corpos de prova de borracha reforçada com negro de fumo. A partir de tais dados, os autores utilizaram o software Abaqus® para simular via elementos finitos o comportamento de corpos de prova sob cisalhamento simples e sob tração equibiaxial, comparando os resultados com aqueles obtidos experimentalmente. Baseados nessa comparação, os autores

propuseram o modelo Yeoh como sendo o mais adequado para a análise da borracha reforçada com negro de fumo nos estados de deformação sob cisalhamento simples e sob tração equibiaxial.

Shi, Liu e Chen (2017) analisaram o efeito da compressibilidade na simulação do comportamento de um amortecedor de vibração fabricado em borracha. Nesse estudo, as constantes de material foram calculadas a partir de testes de tração e compressão uniaxial. Já o fator de compressibilidade foi determinado a partir do coeficiente de Poisson e posteriormente incluído nos modelos hiperelásticos de Mooney-Rivlin de dois termos, Neo-Hookeano, Ogden de três termos e Yeoh. Com as análises realizadas pelos autores, foi possível concluir que a compressibilidade influenciou diretamente na rigidez estática da peça avaliada e que os modelos constitutivos de Yeoh e Ogden apresentaram os resultados mais precisos, dentre os quatro modelos testados.

Utilizando outra abordagem, Idrees e Rajendra Prasad (2018) avaliaram dois tipos de coxins da suspensão do motor, cuja borracha aplicada no núcleo era a SBR (*Styrene Butadiene Rubber*). Em seu estudo, os referidos autores indicaram que o modelo de Yeoh de primeira ordem foi o mais adequado para a predição do comportamento de dois tipos de coxim, tanto para a análise estática quanto para a dinâmica.

Szurgott e Jarzebski (2019) propuseram uma metodologia de seleção de modelo hiperelástico para um coxim de trilho fabricado em poliuretano. Nesse estudo, os testes de laboratório abrangeram de -0,5 a 3,0 mm/mm de deformação de engenharia e os critérios de seleção envolveram: a aproximação mais precisa dos resultados experimentais de tração e compressão uniaxial, o número de constantes e a complexidade da equação constitutiva, a verificação de outros estados de tensão além da tensão-compressão uniaxial, e a convergência e o tempo computacional dos resultados preliminares da análise de elementos finitos do componente hiperelástico. Dentre os modelos avaliados, o que se apresentou mais estável e com melhor convergência foi o modelo Mooney-Rivlin de dois termos (C_{10} e C_{01}).

O modelo Mooney-Rivlin de dois termos serviu de base para a simulação via elementos finitos de um coxim automotivo de borracha, realizada por Rivas-Torres et al. (2019), cujo objetivo era validar um método matemático de otimização geométrica do coxim. No referido estudo, verificou-se que o modelo matemático proposto pelos autores foi capaz de calcular os valores de rigidez do coxim com precisão similar à das simulações por

elementos finitos, porém, com um custo computacional menor. Logo, agilizando a execução do algoritmo de otimização da geometria utilizado pelos autores.

Os modelos hiperelásticos também compõem parte fundamental no estudo da vida em fadiga de elastômeros. Os estudos de Li et al. (2019) e Feng et al. (2016) propuseram modelos de predição de vida em fadiga baseados na teoria da mecânica do dano contínuo, porém, utilizando diferentes abordagens. Ambos visaram prever a vida útil de componentes automotivos fabricados em borracha natural. No primeiro, mais recente, a relação tensão-deformação foi descrita pelo modelo Mooney-Rivlin de três termos e a função de dano cumulativo foi elaborada a partir dos valores de deformação máxima principal. Já no segundo estudo, aplicou-se a tensão equivalente como parâmetro de entrada no modelo de predição da vida em fadiga, além da utilização do modelo constitutivo de Ogden de segunda ordem para descrever o comportamento do material. Apesar das diferentes metodologias, os dois estudos demonstraram boa correlação entre a vida em fadiga predita pelos modelos e aquela observada nas provas de fadiga na bancada de testes.

Apesar de não haver unicidade nas escolhas de modelos constitutivos, alguns estudos se dedicaram a catalogar a aplicabilidade dos diferentes modelos. Estudos como o de Hoss (2009) elencaram informações como o tipo de modelo, os parâmetros de material utilizados nas suas respectivas equações de energia de deformação (constantes de material), assim como as faixas de deformação nas quais os modelos apresentam maior estabilidade (faixa de aplicação). Além disso, o referido estudo também versou sobre a qualidade da calibração e os tipos de testes de laboratório utilizados para a aquisição de dados experimentais.

A Tabela 1 apresenta um resumo dos modelos constitutivos previamente abordados, identificando a classificação do modelo (tipo), as constantes de material e a faixa de aplicação de cada um deles.

Tabela 1 - Modelos constitutivos hiperelásticos: tipo, constantes do material e faixa de aplicação

Modelo	Tipo	Constantes de Material	Faixa de Aplicação
Arruda-Boyce	Micromecânico	μ, λ_{\max}	300%
Mooney-Rivlin	Fenomenológico	C_{10}, C_{01}	100%
Polinomial (N=3)	Fenomenológico	$C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{20}, C_{21}, C_{12}$	200%
Neo-Hookeano	Fenomenológico	C_{10}	50% (extensão) 100% (cisalhamento)
Polinomial Reduzido (N=2)	Fenomenológico	C_{10}, C_{20}	100%
Yeoh	Fenomenológico	C_{10}, C_{20}, C_{30}	300%
Ogden (N=3)	Fenomenológico	$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	700%
Van der Waals	Fenomenológico	μ, λ_m, a, β	200%

Fonte: Do autor (2021).

No estudo de Hoss (HOSS, 2009), quarenta modelos constitutivos hiperelásticos foram analisados e classificados de acordo com o seguinte sistema:

- **Conceito A:** Excelente representatividade da curva tensão-deformação, capturando o efeito de enrijecimento do material em altas deformações e fornecendo previsões válidas para o comportamento diante de outros modos de carregamento;
- **Conceito B:** Boa representatividade da curva tensão-deformação embora não capture efeitos de enrijecimento do material. Erros moderados no valor das tensões e nas previsões para outros tipos de carga.
- **Conceito C:** Boa representatividade da curva tensão-deformação, capturando o enrijecimento, porém, acaba oferecendo previsões ruins para ensaios diferentes do da calibração.
- **Conceito D:** Ajusta-se apenas a faixas restritas da curva tensão-deformação, gerando previsões estáveis para outros carregamentos, contudo, apresenta erros acentuados.
- **Conceito E:** Presença de instabilidade nas curvas, gerando ajustes e previsões errôneas.

A partir deste método de classificação, apresenta-se na Tabela 2 os conceitos relacionados a cada um dos modelos já abordados no presente estudo. Os resultados de calibração e predição foram obtidos a partir de dados de experimentos com borracha natural (NR55) realizados por Marczak (HOSS, 2009; HOSS, MARCZAK, 2010). Lembrando que a organização está da seguinte forma: a legenda da coluna corresponde ao tipo de teste utilizado para calibração do modelo, e o conceito está ligado à exatidão da predição do modelo, levando em conta sua capacidade de capturar adequadamente o comportamento da curva tensão-deformação em situações de cisalhamento puro, tensão uniaxial e biaxial.

Tabela 2 - Conceituação dos modelos com o uso de diferentes testes para calibração dos modelos (tensão uniaxial, cisalhamento puro e tensão biaxial)

Modelo	Tensão Uniaxial	Cisalhamento Puro	Tensão Biaxial
Arruda-Boyce	B	D	D
Mooney-Rivlin	D	D	D
Polinomial (N=3)	C	C	C
Neo-Hookeano	B	D	D
Polinomial Reduzido (N=2)	B	D	B
Yeoh	A	A	A
Ogden (N=3)	C	D	D
Van der Waals	D	D	C

Fonte: Do autor (2021).

Logo, observa-se que a classificação dos diferentes modelos constitutivos visa orientar o pesquisador no processo de seleção do modelo, fornecendo informações básicas dos modelos mais adequados em cada contexto (ex: tipo de material estudado, quantidade de testes de laboratório disponíveis).

3 METODOLOGIA

3.1 Ensaio mecânicos em elastômeros

Como exposto no Capítulo 2, é possível relacionar os valores de tensão (S) e deformação (e) observados em um corpo, com o intuito de descrever seu comportamento diante das mais variadas solicitações. Para que seja possível a construção de uma função contínua $f(e) = S$, torna-se necessária a realização de testes físicos, capazes de produzir os dados discretos necessários para o ajuste da curva da referida função.

Devido aos diferentes tipos de solicitações mecânicas, há uma gama de testes que podem ser realizados a fim de descrever o comportamento mecânico de um material elastomérico. De acordo com Marczak et al. (2006), os ensaios mais usuais são: tração uniaxial, compressão uniaxial, cisalhamento puro, cisalhamento simples, tração biaxial e compressão volumétrica. No presente estudo, a caracterização do material será realizada por meio dos ensaios de tração e compressão uniaxial, em face da praticidade de confecção de corpos de prova e da disponibilidade de equipamentos apropriados para tais testes.

3.1.1 Ensaio de tração uniaxial

O ensaio de tração uniaxial é um método amplamente usado na indústria e no campo acadêmico para a determinação das propriedades mecânicas de um determinado material. É um método extremamente difundido devido à sua facilidade de execução e à reprodutibilidade dos resultados. Neste ensaio, fabrica-se um corpo de prova padronizado do material que se quer avaliar e submete-se esse corpo a cargas uniaxiais de tração, em uma máquina apropriada, que permite o registro da variação de força (F) em função da variação do comprimento da amostra (ΔL), até que ocorra a ruptura.

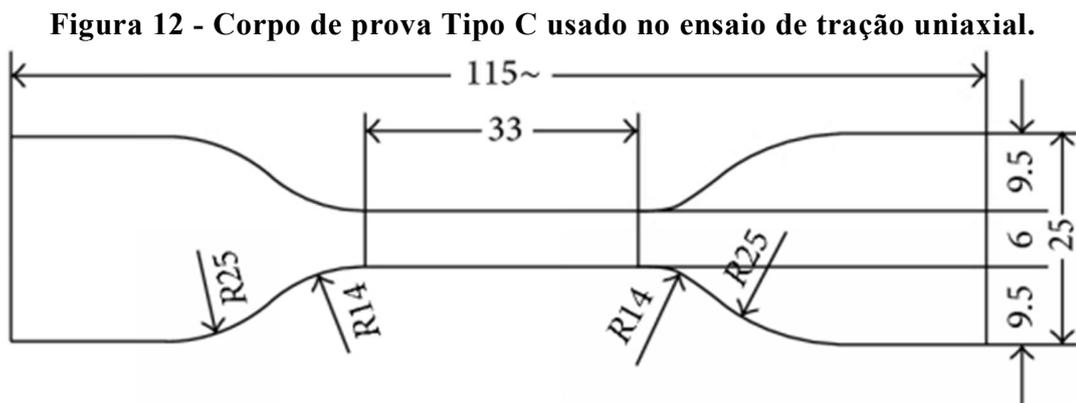
Tendo por base os conceitos de resistência dos materiais, define-se a tensão de tração, S , a partir da razão entre a carga aplicada axialmente no corpo, F , e a área da seção transversal desse mesmo corpo, A .

$$S = \frac{F}{A} \quad (42)$$

Além disso, é possível definir a deformação sofrida pelo corpo, e , como a razão entre a variação no comprimento do corpo, ΔL , e o comprimento inicial desse corpo, L_0 .

$$e = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (43)$$

A partir da observação da variação dos valores de força e deslocamento durante o ensaio de tração, é possível verificar o comportamento elastoplástico dos materiais e construir sua curva tensão-deformação. Os parâmetros de execução dos ensaios e o formato dos corpos de prova são determinados com base na norma ASTM-D412 (2016). Neste estudo, utilizou-se o corpo de prova Tipo C, em formato de gravata (Figuras 12 e 13).



Fonte: Norma ASTM - D412 (2016).

Figura 13 – Exemplo de corpo de prova utilizado no teste de tração



Fonte: Do autor (2021).

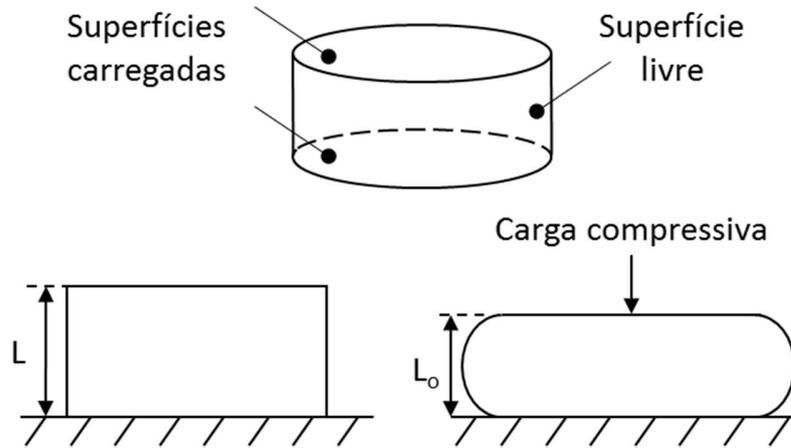
Os testes de tração foram conduzidos utilizando uma máquina Instron 5965 com velocidade de travessão constante a 500 mm/min. Três corpos de prova foram testados a uma temperatura ambiente de 23 ± 2 °C. A tensão no corpo de prova foi calculada como a razão da carga pela seção transversal original (Equação 42) e a deformação foi determinada como a razão entre o comprimento da deformação e o comprimento original (Equação 43).

3.1.2 Ensaio de compressão uniaxial

O ensaio de compressão complementa o de tração para descrever o comportamento de um elastômero sob aplicação de carregamentos uniaxiais. Marczak et al. (2006) ressaltam a necessidade de realizar ambos os testes devido à resposta do material ser diferente de acordo com o estado de tensões. Neste ensaio, o corpo de prova é comprimido até que seja atingido um valor pré-determinado de deformação, no qual o teste é terminado. De maneira análoga ao teste de tração uniaxial, mensura-se experimentalmente os valores de força e deslocamento, a partir dos quais são calculados os valores de tensão (S) e deformação (e).

A geometria dos corpos de prova e as condições de teste são baseados na norma ASTM D575 (2018). No presente trabalho, usou-se um corpo de prova cilíndrico, com diâmetro nominal de 36 mm e altura nominal de 18 mm. A Figura 14 ilustra o formato do corpo de prova e sua resposta durante o teste de compressão uniaxial e a Figura 15 apresenta um dos corpos de prova utilizados no teste.

Figura 14 – Ensaio de compressão em corpo de prova cilíndrico



Fonte: Do autor (2021).

Figura 15 – Exemplo de corpo de prova utilizado no teste de compressão

Corpo de prova de compressão



Fonte: Do autor (2021).

Os testes foram realizados em uma máquina Instron 5965, com velocidade de travessão constante a 5 mm/min. Quatro corpos de prova foram testados a uma temperatura ambiente de 23 ± 2 °C. A tensão no corpo de prova foi calculada como a razão da carga pela seção transversal original (Equação 42) e a deformação foi determinada como a razão entre o comprimento da deformação e o comprimento original (Equação 43).

3.2 Cálculo das constantes hiperelásticas: ajuste de curvas

De posse dos dados experimentais de tração e compressão, torna-se possível ajustar as curvas dos diferentes modelos constitutivos a esses dados discretos. A calibração dos modelos foi realizada com o auxílio do algoritmo *EVALUATE*, incluído no software Abaqus®. Este algoritmo calcula as constantes hiperelásticas utilizando o método dos mínimos quadrados, que minimiza o erro relativo existente entre os valores obtidos pelos modelos e aqueles medidos fisicamente em corpos de prova. Os mínimos quadrados do erro relativo são dados pela seguinte expressão:

$$E_{rel} = \sum_{i=1}^N \left[1 - \frac{S_c}{S_m} \right]^2 \quad (44)$$

Onde N é a quantidade de pontos discretos utilizados na regressão, S_c é a tensão calculada e S_m é a tensão medida a partir dos dados experimentais.

O algoritmo *EVALUATE* permite identificar quais modelos apresentam instabilidade quando as constantes são calculadas a partir de testes de tração e compressão uniaxial, logo, adotou-se como critério de exclusão a instabilidade de modelos durante a regressão pelo método dos mínimos quadrados. É importante ressaltar que a instabilidade no ajuste de curvas de um modelo constitutivo decorre do não atendimento do critério de estabilidade de Drucker. Tal critério estabelece que a deformação de um corpo sob condições isotérmicas é estável se o trabalho realizado por incrementos infinitesimais de força (dF_i) em deslocamentos também infinitesimais (du_i) for maior que zero (ROMANOV, 2001), ou seja:

$$\sum d(F_i) d(u_i) > 0 \quad (45)$$

Essa inequação obriga que a rigidez tangencial do material seja positiva definida. Além disso, se for considerada uma formulação elástica isotrópica, é possível representar essa desigualdade com uma expressão que engloba os valores diferenciais de tensão (S) e deformação (e) nos três eixos cartesianos, como exposto na equação 46.

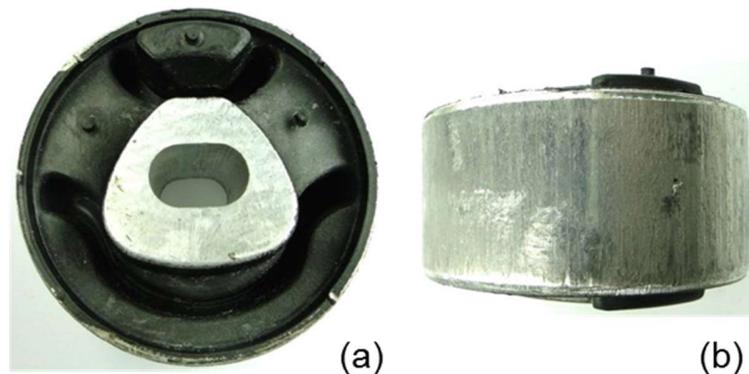
$$dS_1 de_1 + dS_2 de_2 + dS_3 de_3 > 0 \quad (46)$$

Portanto, o algoritmo de ajuste de curvas *EVALUATE* consegue informar os valores calculados das constantes de cada modelo e o atendimento (ou não) da condição de estabilidade de Drucker. De posse desses dados de saída, torna-se possível identificar os modelos estáveis e utilizar suas constantes para realizar as simulações virtuais do coxim.

3.3 Ensaio do coxim automotivo

O componente elastomérico avaliado neste estudo pertence a um coxim automotivo integrante do sistema de suspensão de um motor Otto de quatro cilindros. Nele, o elastômero fica aderido a um anel de aço na parte externa e a um núcleo de alumínio na parte interna (Figura 16).

Figura 16 – Vistas do coxim automotivo: (a) topo e (b) lateral.



Fonte: Do autor (2021).

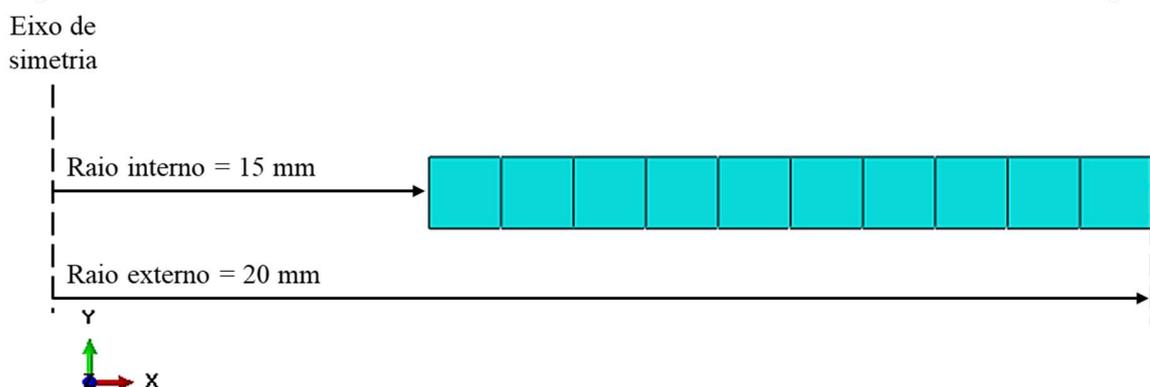
O experimento consistiu na aplicação de um carregamento unidirecional, responsável pelo deslocamento do núcleo em relação ao anel externo, deformando o coxim de borracha. Utilizou-se uma máquina Instron 4487 a uma velocidade do travessão constante de 500 mm/min. Dados de força e deslocamento foram obtidos para quatro amostras testadas à temperatura ambiente de 23 ± 2 °C. Os ensaios foram iniciados do repouso (força e deslocamento nulos) e finalizados ao atingir a máxima carga de funcionamento normal do coxim (27 kN). Os valores médios de força-deslocamento coletados nos experimentos foram usados para posterior comparação com as simulações de elementos finitos.

3.3.1 Validação do método

No intuito de verificar o procedimento metodológico, via método dos elementos finitos, empregado nesse estudo, foram selecionados alguns resultados relatados na literatura para a realização dos estudos de validação. Tais estudos envolveram análises planares (2D) e volumétricas (3D), pois ambos os tipos serão aplicados na avaliação do coxim automotivo.

A validação da metodologia de análise em 2D foi realizada com base no estudo de Han, Duan e Wang (2020), o qual avalia a distribuição de tensões em um tubo cilíndrico de borracha, de 200 mm de comprimento, 5 mm de espessura e raio externo de 20 mm. No estudo, deduz-se a solução analítica para a distribuição de tensões ao longo da espessura do cilindro, considerando uma deformação de 10 mm no seu raio interno, resultante da imposição de uma pressão interna de 0,03 MPa e uma carga axial de 100 kN. O modelo de elementos finitos proposto pelos autores foi elaborado com elementos axissimétricos em 2D, devido à simetria e à uniformidade de deformação axial. A malha foi composta por 22 nós e 10 elementos axissimétricos lineares híbridos do tipo CAX4H, como ilustrado na Figura 17.

Figura 17 – Malha de elementos finitos em 2D do estudo de validação metodológica



Fonte: Do autor (2021).

O modelo hiperelástico utilizado foi o polinomial de segunda ordem, o qual utiliza cinco constantes em sua formulação. Os valores das constantes de material utilizadas por Han, Duan e Wang (2020) são mostrados na Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros de material utilizados no estudo de validação

Constantes de material	Magnitude (MPa)
C_{10}	450107×10^{-1}
C_{01}	258689×10^{-1}
C_{20}	281269×10^{-2}
C_{11}	905309×10^{-3}
C_{02}	323452×10^{-4}

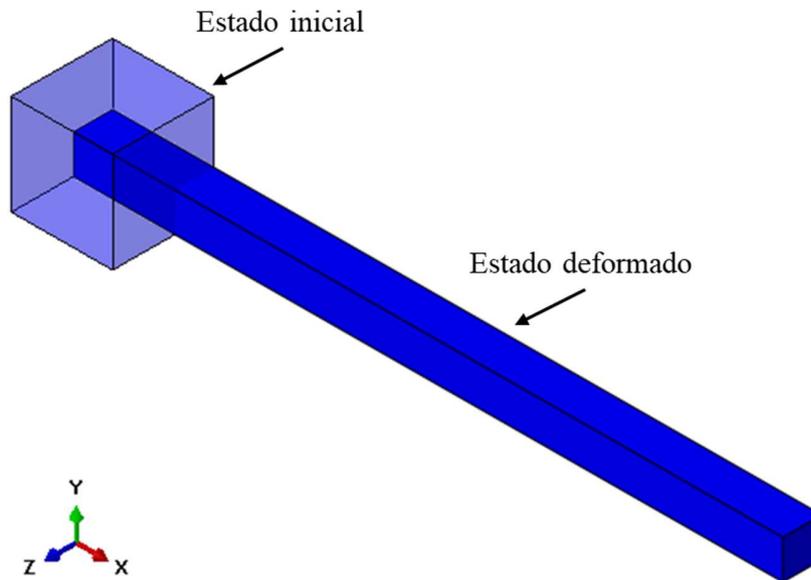
Fonte: Do autor (2021).

Como condições de contorno para a simulação, aplicou-se um deslocamento radial de 10 mm nos dois nós da parede interna do cilindro, restringindo-se a movimentação axial em todos os nós. Por meio desse procedimento, foi possível determinar os valores de tensão radial, axial e tangencial em todos os nós integrantes da malha.

Em seguida, o procedimento usado para a validação da metodologia de análise em 3D foi extraído do *ABAQUS Benchmarks Manual*. Nele, testa-se o caso de deformação homogênea de um cubo de dimensão unitária submetido a tração uniaxial. O comportamento do material foi calculado pelos modelos de Yeoh e de Arruda-Boyce. A malha tridimensional foi elaborada com elementos do tipo C3D8R, cuja formulação é linear e de integração reduzida. Como *input* para a determinação dos coeficientes de material, foram utilizados os valores de tensão e deformação obtidos nos testes uniaxial, biaxial, planar e volumétrico realizados por Treloar (1940).

Na simulação, os valores de tensão são fornecidos em Pascal, assumindo-se que o material possui uma densidade 1000 kg/m^3 . Como condição de contorno, foi imposto um estado de tração uniaxial simples no cubo, até atingir uma deformação de 600%. A velocidade de alongamento foi incrementada como uma função rampa, saindo de 0 a 6 m/s em 2 segundos. A Figura 18 apresenta o cubo unitário nos estados inicial e deformado.

Figura 18 – Estados inicial e deformado do cubo unitário utilizado no estudo de validação em 3D



Fonte: Do autor (2021).

Os estudos de validação em 2D e 3D explicitados acima encontram-se coerentes com a metodologia de análise por elementos finitos proposta no presente estudo. Dessa maneira, eles são considerados adequados para mostrar que a presente metodologia está de acordo com aquelas relatadas na literatura e nos manuais de utilização de *softwares* especializados, como o Abaqus®.

3.3.2 Simulação do comportamento do coxim automotivo

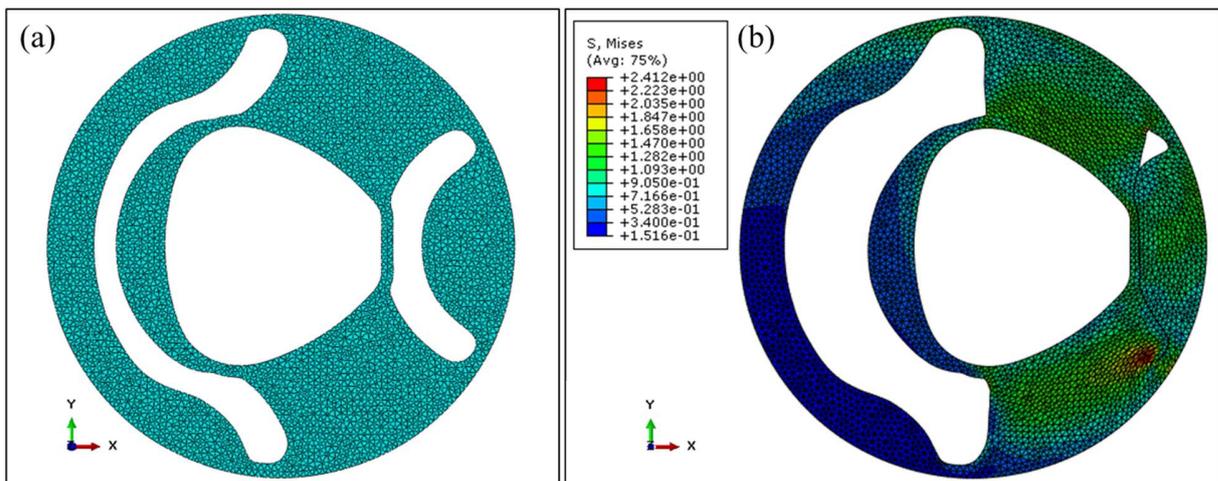
A simulação do comportamento do coxim depende da construção de um modelo matemático de elementos finitos que seja capaz de reproduzir fielmente os eventos observados nos experimentos reais. Com o intuito de facilitar o modelamento e minimizar a quantidade de variáveis não controladas durante as análises, o anel externo de aço e o núcleo de alumínio foram excluídos do modelamento. Em seguida, foram impostas condições de contorno cujo objetivo era representar da melhor forma possível as restrições impostas ao componente elastomérico.

Inicialmente, criou-se um modelo de elementos finitos em duas dimensões com o objetivo de produzir resultados preliminares utilizando um baixo custo computacional. Para

representar a profundidade do componente, definiu-se uma espessura de 40 mm na seção transversal. A malha de elementos finitos foi elaborada utilizando o elemento de seis nós do tipo quadrático triangular CPEG6H, cuja formulação é híbrida e fundamentada nos conceitos do estado plano de deformações generalizado. O modelo foi composto por 11.235 nós e 5.305 elementos, com 2 graus de liberdade em cada nó.

Para simular o movimento unidirecional realizado pelo núcleo do coxim, aplicou-se, um deslocamento de 10 mm no sentido positivo do eixo X aos elementos que compunham a parede interna central do coxim, a qual é fixada ao núcleo de alumínio. Com a deformação do elastômero, há contato entre as superfícies do coxim, de modo que foi necessário determinar uma superfície de auto-contato (*self contact surface*) cujo coeficiente de fricção estática estabelecido foi $\mu_e = 1,0$ (LANCINI, 2012). As análises numéricas quase-estáticas foram realizadas com o auxílio do software Simulia Abaqus Standard v6.11. A Figura 19 apresenta a malha de elementos finitos em 2D utilizada para a simulação do comportamento do coxim, nos estados inicial e deformado.

Figura 19 – Malha de elementos finitos em 2D nos estados (a) inicial e (b) deformado



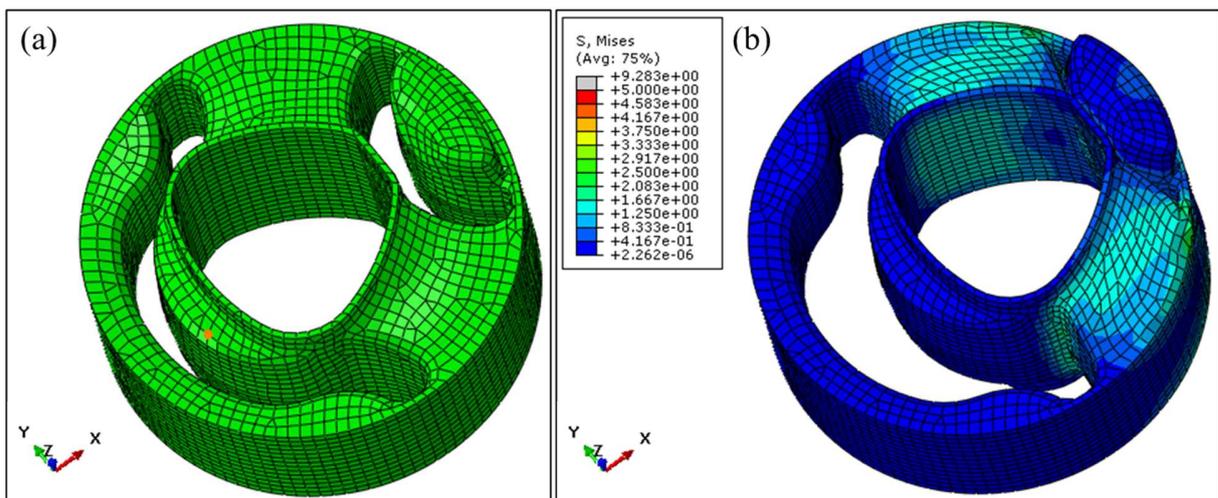
Fonte: Do autor (2021).

O aprofundamento da análise foi realizado com a construção do modelo tridimensional de elementos finitos. A malha foi elaborada com elementos lineares de formulação híbrida do tipo C3D4H e C3D8H. As superfícies de contato foram definidas nas faces de interesse, sendo o comportamento superficial definido como *penalty* não-linear e a

condição de interação superficial permitindo pequeno deslizamento na interface (*small sliding*). O modelo completo contou com um total de 19.780 nós e 88.984 elementos, com 6 graus de liberdade.

Como condições de contorno, as paredes externas do coxim foram engastadas, com grau de liberdade igual a zero (encastre). Após isso, foi criado um elemento rígido para conectar as paredes internas centrais do coxim a um nó de referência, ao qual foi imposto um deslocamento de 10 mm. Com a simulação, foram obtidos os dados de força de reação que o coxim impôs ao deslocamento prescrito de 10 mm. As simulações foram realizadas com o auxílio dos softwares Altair HyperWorks v.13.0 (pré e pós-processamento) e Simulia Abaqus Standard v6.11 (solver). As configurações inicial e deformada da malha tridimensional estão ilustradas na Figura 20.

Figura 20 - Malha de elementos finitos em 3D nos estados (a) inicial e (b) deformado



Fonte: Do autor (2021).

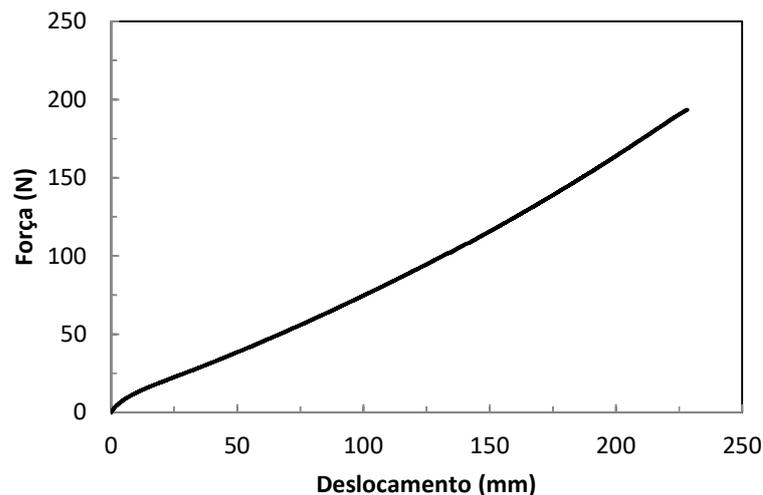
Com a conclusão da etapa de elaboração das malhas e determinação das condições de contorno, viabilizou-se a possibilidade de simular o comportamento do coxim automotivo utilizando diferentes parâmetros de material a cada simulação. A partir desse procedimento, torna-se possível identificar qual dos modelos de material consegue gerar os resultados que mais se assemelham ao comportamento real do coxim.

4 RESULTADOS E ANÁLISES

4.1 Ensaios mecânicos

O teste de tração em corpos de prova em formato de gravata permitiu a aquisição dos dados experimentais de força-deslocamento para cada uma das amostras. A curva força-deslocamento apresentada na Figura 21 mostra o comportamento de um dos corpos de prova de tração, como observado durante o experimento. No Apêndice A são mostrados os gráficos tensão-deformação de todos os corpos de prova avaliados.

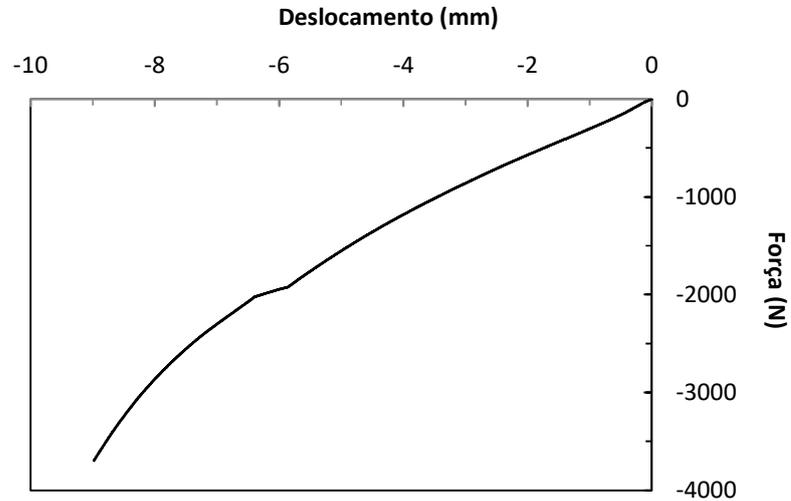
Figura 21 - Curva força-deslocamento obtida a partir do ensaio de tração uniaxial em corpos de prova de borracha NR-60



Fonte: Do autor (2021).

O teste de compressão em corpos de prova cilíndricos permitiu a aquisição de dados experimentais de força-deslocamento para cada uma das amostras. A Figura 22 apresenta o comportamento do corpo de prova sob cargas compressivas até uma deformação de 50%. No Apêndice A são mostrados os gráficos tensão-deformação de todos os corpos de prova avaliados.

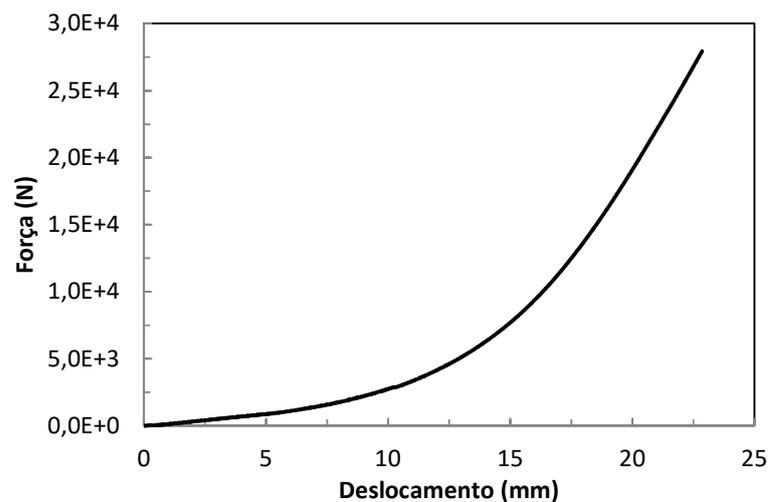
Figura 22 - Curva força-deslocamento obtida a partir de testes de compressão uniaxial em corpos de prova de borracha NR-60



Fonte: Do autor (2021).

O teste de carregamento unidirecional do coxim automotivo permitiu a aquisição dos dados de força-deslocamento mostrados na curva da Figura 23. Logo, o comportamento do coxim ficou definido como o deslocamento observado em consequência da aplicação de tal carga unidirecional.

Figura 23 - Curva força-deslocamento obtida a partir de testes de carregamento unidirecional em coxim automotivo produzido em borracha NR-60

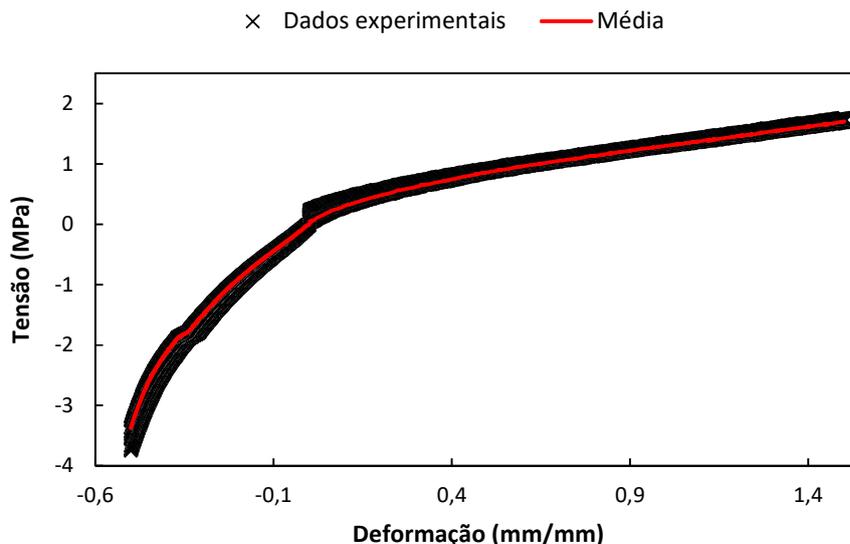


Fonte: Do autor (2021).

4.2 Ajuste de curvas

Foram geradas 12 combinações entre os testes de tração e compressão, oriundas de 3 testes de tração e 4 de compressão uniaxial, mostradas em detalhe no Apêndice A. Os valores de força-deslocamento, juntamente com as dimensões do corpo de prova de ambos os testes, permitiram o cálculo dos valores de tensão-deformação para todos os pontos de cada ensaio. Em seguida, uma nuvem de pontos foi gerada e permitiu a criação de uma curva tensão-deformação ($S-e$) representativa do teste de valor médio de S ao longo de toda a faixa de deformação utilizada. A nuvem de pontos e a curva dos valores médios, usada para determinar as constantes hiperelásticas de cada modelo, são mostrados na Figura 24.

Figura 24 – Nuvem de pontos e curva do valor médio de teste de tensão e deformação em corpos de prova de borracha NR-60



Fonte: Do autor (2021).

Com relação ao ajuste de curvas, utilizou-se como critério de exclusão a falta de estabilidade no ajuste realizado pela função *EVALUATE* embutida no *software* Abaqus. A Tabela 4 mostra as constantes hiperelásticas obtidas para cada um dos modelos avaliados, identificando aqueles que apresentaram instabilidade e, portanto, não foram utilizados posteriormente na análise do coxim automotivo.

Tabela 4 – Constantes hiperelásticas calculadas e condição de estabilidade de cada modelo constitutivo

Modelo	Constantes do modelo	Condição de estabilidade
Arruda-Boyce	$\mu = 1.0249$ $\lambda = 3804.68$	Estável
Mooney-Rivlin	$C_{10} = 0.2707$ $C_{01} = 0.1587$	Estável
Polinomial (N=2)	$C_{10} = 0.7114$ $C_{01} = 0.08790$ $C_{20} = 0.5082$ $C_{11} = -1.4401$ $C_{02} = 0.6127$	Instável
Neo-Hookeano	$C_{10} = 0.5125$	Estável
Yeoh	$C_{10} = 0.6684$ $C_{20} = -0.1255$ $C_{30} = 0.01597$	Estável
Ogden (N=3)	$\mu_1 = 8.7216$ $\mu_2 = 0.001157$ $\mu_3 = -7.4716$ $\alpha_1 = -1.3617$ $\alpha_2 = 10.1196$ $\alpha_3 = -1.6779$	Instável

Fonte: Do autor (2021).

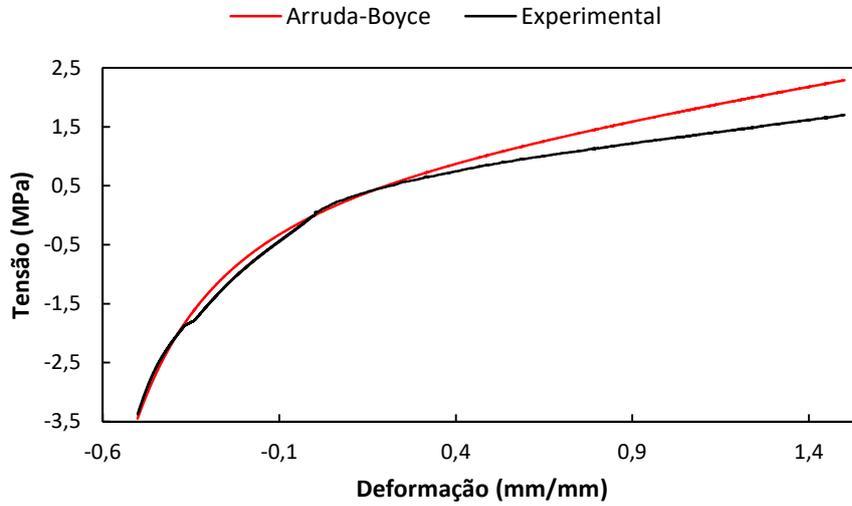
Observa-se, portanto, que quatro dos modelos avaliados apresentaram estabilidade: Arruda-Boyce, Mooney-Rivlin, Neo-Hookeano e Yeoh. Para esses modelos, foram obtidas as curvas tensão-deformação e o erro relativo de cada ajuste, os quais são ilustrados nas Figuras de 25 a 32. No ajuste dos modelos, notou-se que as curvas geradas pelos modelos Arruda-Boyce e Neo-Hookeano foram exatamente as mesmas (Figuras 25 e 27). Tal fato decorreu do valor calculado de λ , o qual reduziu todos os termos da série que compõe o modelo Arruda-Boyce (Equação 30), com exceção do primeiro, a valores praticamente iguais a zero. Com isso, a função energia de deformação tomou a mesma forma daquela proposta no modelo Neo-Hookeano (Equação 34), a qual é composta por apenas um termo.

Além disso, o ajuste de todos os modelos que se apresentaram estáveis apresentou picos de erro relativo próximos ao ponto de deformação nula (coordenadas 0,0). Este comportamento é esperado, pois a equação do erro relativo possui uma assíntota vertical na origem, o que faz com que o valor tenda ao infinito no referido par de coordenadas. Dessa

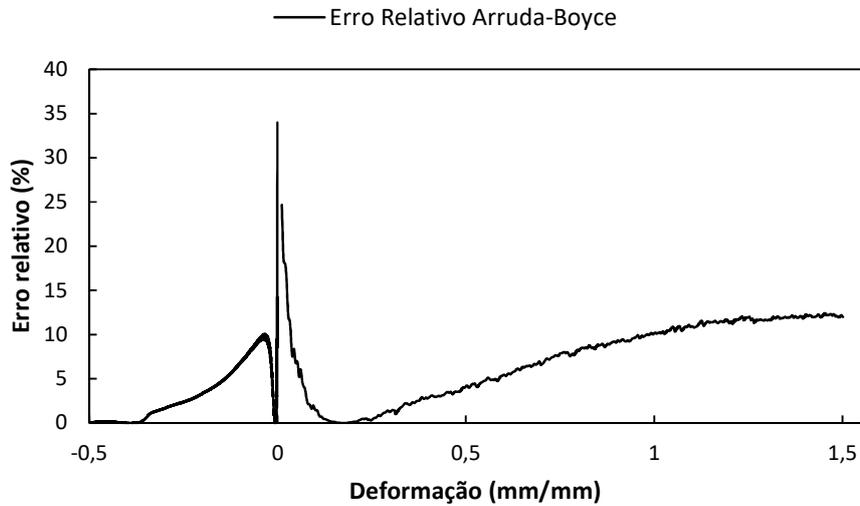
forma, definiu-se como ponto de corte do cálculo do erro, a faixa de deformações $\pm 0,05$ mm/mm. Tal ponto de corte é similar àquele aplicado nas curvas de erro relativo informadas nos estudos de Szurgott e Jarzebski (2019) e de Shi, Liu e Chen (2017).

Os modelos Arruda-Boyce e Neo-Hookeano, cujas curvas de ajuste foram idênticas, apresentaram um pico erro relativo de 25% no ponto de 0,05 mm/mm de deformação de tração (Figuras 26e 28). O erro associado às deformações compressivas reduziu e tendeu a zero com o aumento da magnitude da deformação. Em contrapartida, houve um crescimento quase linear entre 0,2 e 1,5 mm/mm de deformação de tração, atingindo um valor máximo de aproximadamente 12%. A magnitude do erro relativo obtida no ajuste desses modelos teve magnitude menor do que aquela exposta por Shi, Liu e Chen (2017), a qual atingiu um pico de 38% próximo à origem, oscilando ao longo da faixa de deformação pesquisada e chegando a apresentar picos de 13% em altas deformações de compressão ($\sim 0,5$ mm/mm) e de 25% em tração ($\sim 2,0$ mm/mm).

É possível que o maior erro relativo relatado na literatura esteja associado a ruídos e/ou variações normais na aquisição de dados em pontos próximos à assíntota vertical, onde a deformação é nula e qualquer pequena variação nos valores captados pode gerar um alto valor de erro relativo. Além disso, ao se distanciar da origem, a curva tensão-deformação exibe uma segunda inflexão em altas deformações de tração, aumentando seu coeficiente angular (incremento no valor de dS/de) de uma maneira que o ajuste de Arruda-Boyce não consegue capturar com exatidão. Logo, como a máxima deformação de tração considerada no estudo de Shi, Liu e Chen (2017) é maior que a do presente estudo (2,0 mm/mm *versus* 1,5 mm/mm), o erro relativo da curva Arruda-Boyce/Neo-Hookeana calculado no referido estudo também é mais alto no respectivo ponto de máxima deformação de tração.

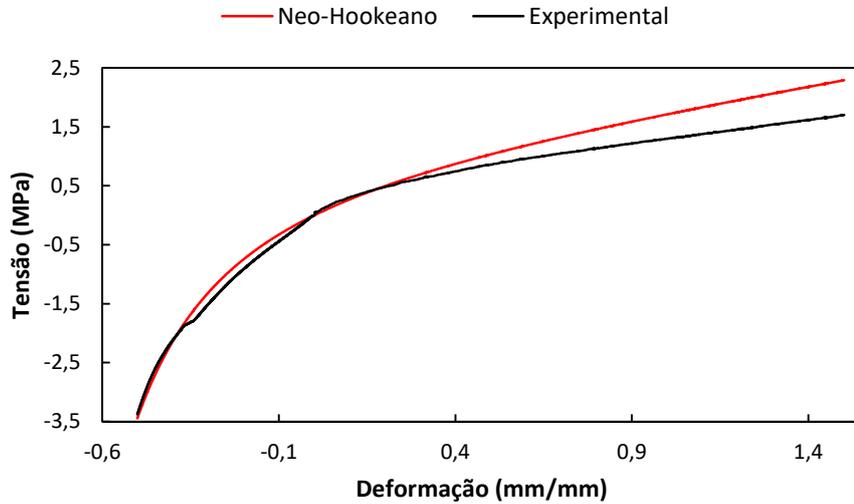
Figura 25 – Curva tensão-deformação obtida no ajuste do modelo Arruda-Boyce

Fonte: Do autor (2021).

Figura 26 – Erro relativo associado ao ajuste da curva do modelo Arruda-Boyce

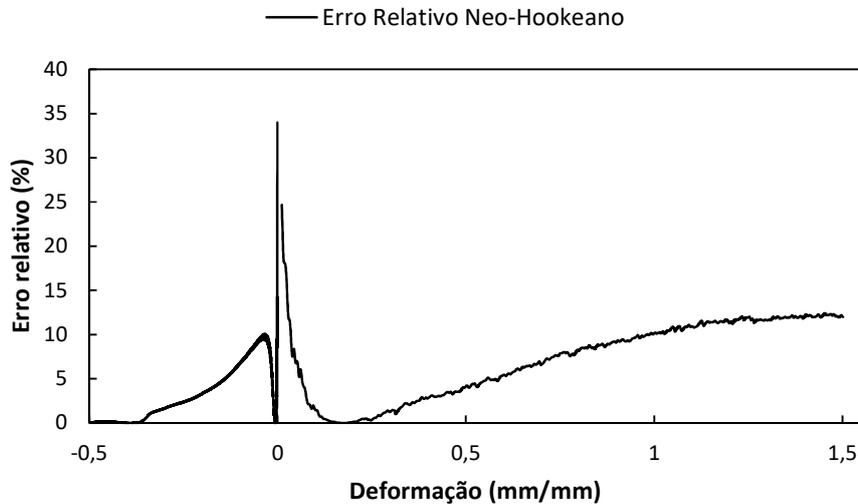
Fonte: Do autor (2021).

Figura 27 – Curva tensão-deformação obtida no ajuste do modelo Neo-Hookeano



Fonte: Do autor (2021).

Figura 28 – Erro relativo associado ao ajuste da curva do modelo Neo-Hookeano



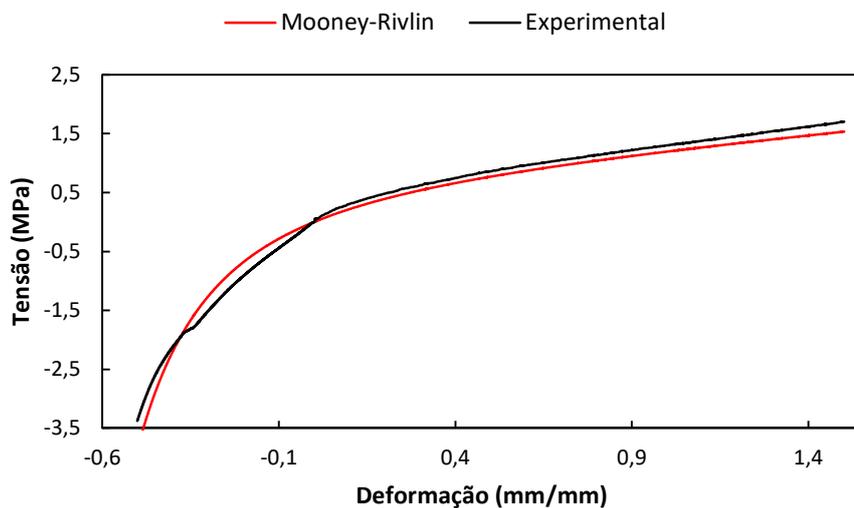
Fonte: Do autor (2021).

O modelo de Mooney-Rivlin, apesar de apresentar o maior pico de erro relativo nos pontos de $\pm 0,05$ mm/mm, foi o que mais se aproximou da curva experimental, ao se considerar toda a amplitude de deformações utilizada na calibração das curvas (Figuras 29 e 30). Ao se distanciar da origem, o modelo de Mooney-Rivlin manteve um erro relativo abaixo de 2% até os limites máximo e mínimo de deformação. Esses resultados mostram que

o ajuste do regime de tração foi similar àquele apresentado por Szurgott e Jarzebski (2019), no qual há um decaimento contínuo do erro relativo ao longo de toda a faixa de deformação. No entanto, a magnitude do erro calculado no referido no estudo chegou a aproximadamente 10% a uma deformação de 1,5 mm/mm, ou seja, 8% maior que aquele encontrado no presente ajuste. O comportamento próximo à assíntota na origem foi similar, apresentando picos entre 50 e 60%, enquanto o ajuste do regime compressivo no estudo supracitado apresentou um pico de erro relativo de 35% sob uma deformação de 0,5 mm/mm, valor praticamente uma ordem de grandeza maior que aquele exibido no presente ajuste.

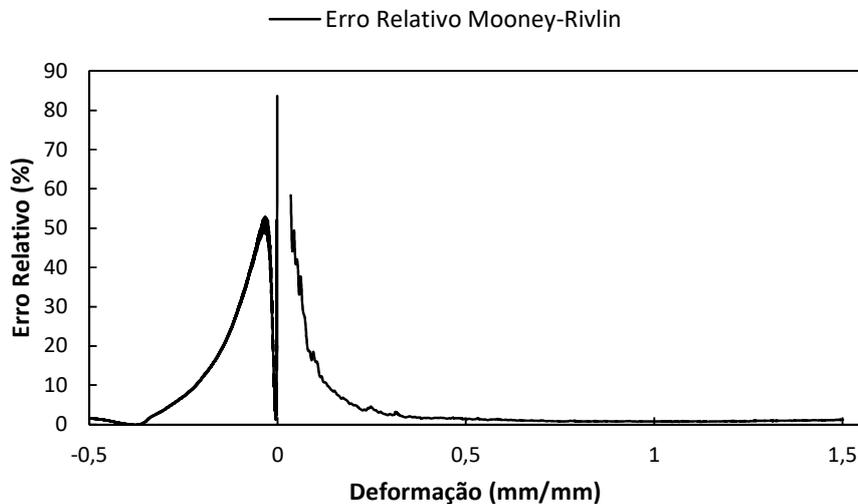
A grande magnitude do erro relativo próximo à assíntota vertical na origem é algo esperado e de difícil questionamento, pois qualquer leve alteração de medição, até mesmo aquela provocada por fatores aleatórios, pode gerar um grande incremento no erro relativo. Além disso, há de se ressaltar que o material utilizado no estudo de Szurgott e Jarzebski (2019), apesar de ser hiperelástico, tem comportamento distinto àquele da borracha natural. Esse fator indica que o modelo Mooney-Rivlin aparenta se ajustar melhor a um comportamento similar ao da borracha.

Figura 29 – Curva tensão-deformação obtida no ajuste do modelo Mooney-Rivlin



Fonte: Do autor (2021).

Figura 30 – Erro relativo associado ao ajuste da curva do modelo Mooney-Rivlin



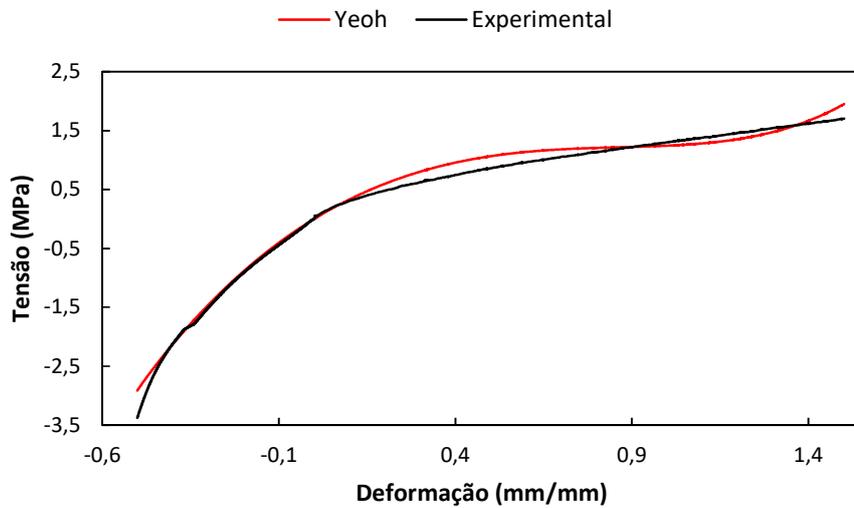
Fonte: Do autor (2021).

A curva do modelo Yeoh, por ser de ordem 3 (cúbica), apresenta duas concavidades, diferentemente do comportamento observado experimentalmente nessa faixa de deformações, o qual se aproxima mais de um polinômio de grau 4. Com isso, o erro relativo associado a esse modelo apresentou maior oscilação ao longo da faixa de deformação estudada (Figura 31). O pico de erro relativo com 0,05 mm/mm de deformação de tração foi em torno de 17%, praticamente oito vezes mais alto que o erro observado nessa magnitude de deformação compressiva ($\sim 2\%$). O modelo de Yeoh apresentou o menor erro dos ajustes de compressão ($\leq 2\%$), porém, o ajuste da parte de tração apresentou um pico de aproximadamente 9% em 0,38 mm/mm de deformação (Figura 32). O comportamento da curva do erro relativo no regime de tração foi similar ao apresentado por Shi, Liu e Chen (2017), no qual o há a oscilação dos valores ao longo da faixa de deformação, porém, mantendo-se abaixo de 10%. Já os valores observados no ajuste do regime de compressão são mais baixos do que aqueles calculados tanto por Shi, Liu e Chen (2017) – cujos picos foram de 20% perto da assíntota e 8% em -0,35 mm/mm de deformação – quanto por Szurgott e Jarzebski (2019) – cujos picos foram de 50% perto da assíntota e 40% em -0,60 mm/mm de deformação.

Novamente, a variação de valores nas proximidades da assíntota é aceitável e, dificilmente, indica uma diferença significativa entre os ajustes. Numa visão generalista, os

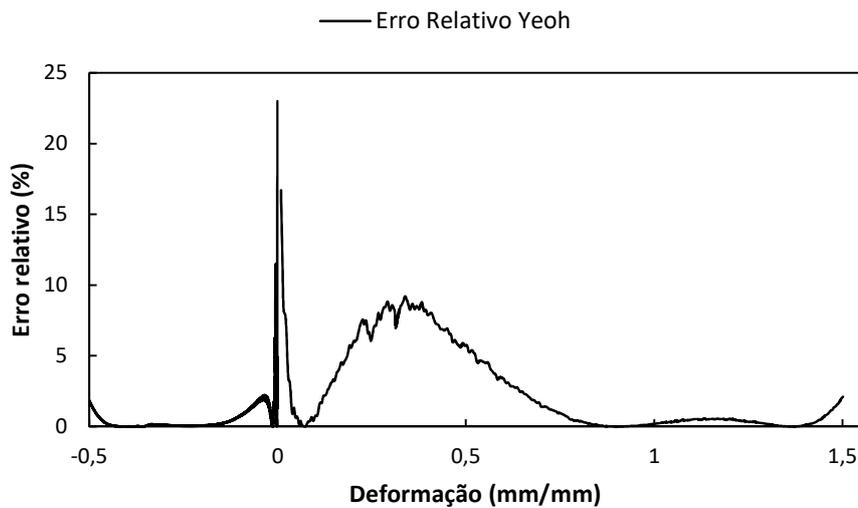
ajustes de Yeoh apresentados aqui e no artigo de Shi, Liu e Chen (2017) são bastante similares ao longo de toda a faixa de deformações. Já as diferenças em relação ao erro relativo encontrado no ajuste de Szurgott e Jarzebski (2019) aparenta estar associado ao tipo de material utilizado por eles (poliuretano), cujo comportamento em altas deformações diverge daquele da borracha natural, aplicada no presente trabalho.

Figura 31 – Curva tensão-deformação obtida no ajuste do modelo Yeoh



Fonte: Do autor (2021).

Figura 32 – Erro relativo associado ao ajuste da curva do modelo Yeoh



Fonte: Do autor (2021).

4.3 Estudos de validação

O estudo de validação metodológica contou com análises em duas e três dimensões, cujo objetivo foi corroborar que a metodologia aplicada no presente estudo estava de acordo com os conceitos aplicados na literatura especializada e no manual do software Abaqus®. Na simulação em 2D, foi possível reproduzir de maneira fidedigna os resultados encontrados analiticamente por Han, Duan e Wang (2020), na avaliação da deformação imposta em um tubo de paredes grossas fabricado em borracha.

Para a apresentação dos resultados e sabendo que nós de mesma coordenada radial apresentam os mesmos valores de tensão na situação avaliada, considerou-se o nó 1 como aquele situado na parede interna do tubo, com numeração crescente ao longo da parede do tubo até o nó 11, localizado na parede externa. A comparação entre os valores obtidos analiticamente por Han, Duan e Wang (2020) e aqueles obtidos na validação do presente trabalho são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 - Comparação das tensões na parede do cilindro

Nó	Radial			Axial			Tangencial		
	Analítica (MPa)	Elementos finitos (MPa)	Erro relativo (%)	Analítica (MPa)	Elementos finitos (MPa)	Erro relativo (%)	Analítica (MPa)	Elementos finitos (MPa)	Erro relativo (%)
1	-0,0351	-0,0338	0,1445	0,1180	0,1248	0,3294	0,3290	0,3381	0,0767
2	-0,0304	-0,0316	0,1517	0,1155	0,1228	0,3944	0,3136	0,3291	0,2430
3	-0,0261	-0,0273	0,2233	0,1132	0,1190	0,2598	0,2995	0,3119	0,1724
4	-0,0221	-0,0233	0,2945	0,1110	0,1157	0,1756	0,2866	0,2966	0,1229
5	-0,0183	-0,0195	0,4067	0,1089	0,1127	0,1238	0,2746	0,2829	0,0922
6	-0,0148	-0,0158	0,4778	0,1069	0,1102	0,0926	0,2636	0,2706	0,0704
7	-0,0115	-0,0124	0,5529	0,1051	0,1079	0,0695	0,2533	0,2594	0,0586
8	-0,0083	-0,0091	0,8210	0,1033	0,1058	0,0607	0,2437	0,2493	0,0530
9	-0,0054	-0,0059	0,8690	0,1015	0,1040	0,0627	0,2348	0,2401	0,0508
10	-0,0026	-0,0029	1,3275	0,0999	0,1024	0,0642	0,2264	0,2317	0,0543
11	0,0000	-0,0014	---	0,0983	0,1017	0,1177	0,2185	0,2277	0,1756

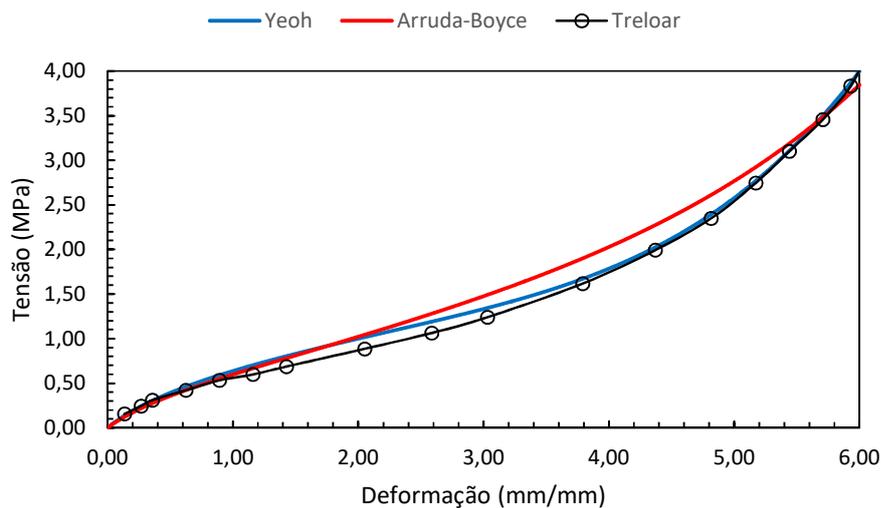
Fonte: Do autor (2021).

O maior valor de erro relativo encontrado na validação em 2D foi de 1,33% e estava relacionado à tensão radial calculada no décimo nó da malha, ou seja, a 0,5 mm da parede

externa. É importante ressaltar que a deformação radial na parede externa do cilindro, nas condições de contorno impostas, é nula. Tal fato faz com que a função de erro relativo tenha uma assíntota vertical no décimo primeiro nó, ou seja, é esperado que a magnitude do erro aumente ao se aproximar do ponto de deformação radial nula. Com relação aos valores de tensão axial e tangencial calculados, o erro relativo não ultrapassou 0,33% em nenhum dos nós da malha de elementos finitos. A minimização do erro relativo em tais componentes de tensão pode ser associada à ausência de assíntotas em seus cálculos, uma vez que as deformações axial e tangencial são diferentes de zero em todos os nós da malha. A magnitude reduzida do erro relativo revelou que a metodologia de simulação em 2D foi satisfatória para reproduzir o comportamento exato do cilindro de borracha (solução analítica).

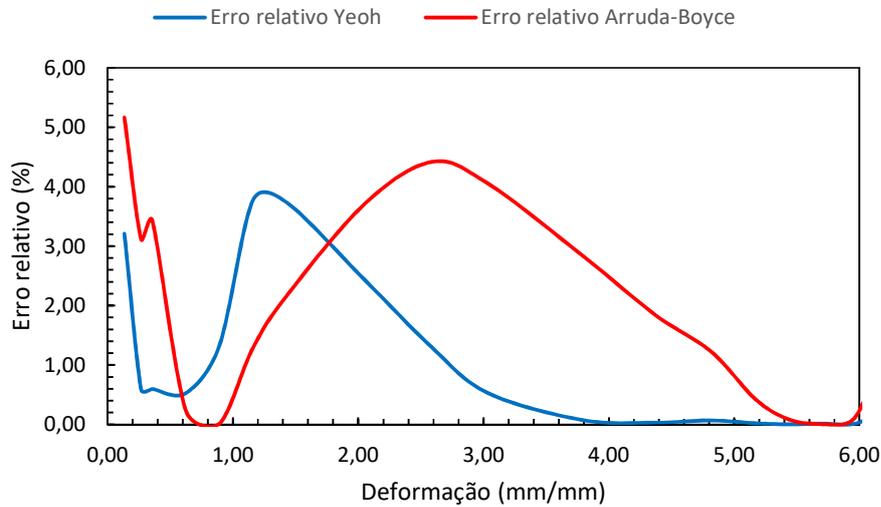
No estudo de validação tridimensional, replicou-se o procedimento de simulação informado no *Abaqus Benchmark Manual*, o qual expõe um cubo de lado unitário a uma deformação uniaxial de até 600 % (6 mm/mm). Os valores de tensão e deformação calculados por meio dos modelos Arruda-Boyce e Yeoh, assim como o erro relativo associado a eles, são apresentados graficamente nas Figuras 33 e 34.

Figura 33 – Curvas de tensão-deformação geradas no estudo de validação em 3D



Fonte: Do autor (2021).

Figura 34 – Erro relativo associado ao estudo de validação em 3D



Fonte: Do autor (2021).

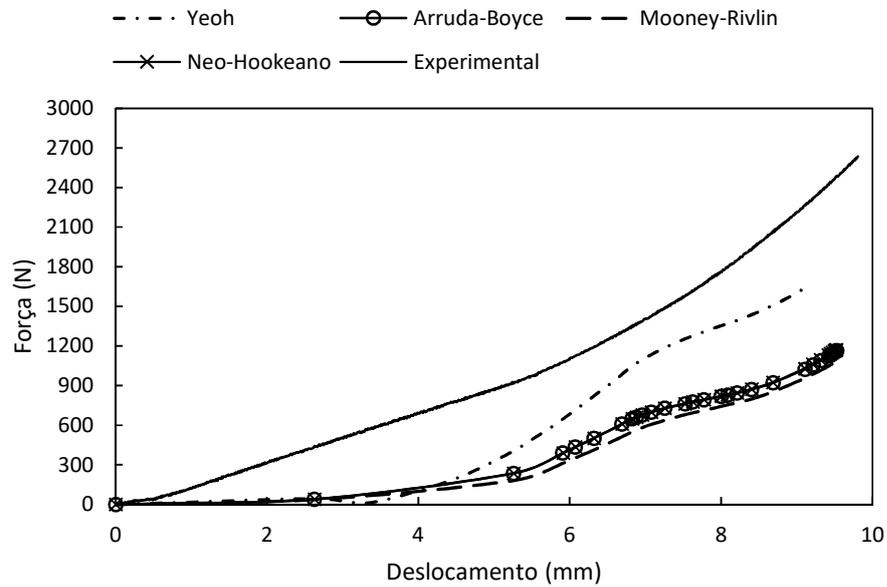
Dentre os dois modelos avaliados, o de Arruda-Boyce foi o que apresentou um pico mais alto de erro relativo, em torno de 5%, enquanto o modelo de Yeoh teve um pico de 4%. Estes valores de erro relativo mostram que ambos os modelos conseguiram capturar satisfatoriamente o comportamento da curva tensão-deformação do cubo unitário, ao longo de toda a faixa de deformação imposta ao mesmo no estudo de validação em 3D.

Com isso, verificou-se que o modelo de Yeoh, em comparação ao de Arruda-Boyce, capturou com mais exatidão o comportamento do sólido ao longo de toda a faixa de deformações imposta. O modelo de Yeoh teve um pico de 4% erro relativo com aproximadamente 1 mm/mm de deformação, mas, no geral, o erro se manteve abaixo de 2% ao longo da simulação. Já o modelo de Arruda-Boyce apresentou picos de aproximadamente 5% com 0,1 e 2,5 mm/mm de deformação, exibindo valores de erro mais baixos que o modelo de Yeoh somente entre 0,6 e 1,8 mm/mm. Os valores de erro relativo encontrados na aplicação de ambos os modelos foram satisfatórios e coerentes com os resultados apresentados no *Abaqus Benchmark Manual*, onde as curvas de tensão-deformação são apresentadas apenas graficamente.

4.4 Análise de elementos finitos do coxim automotivo

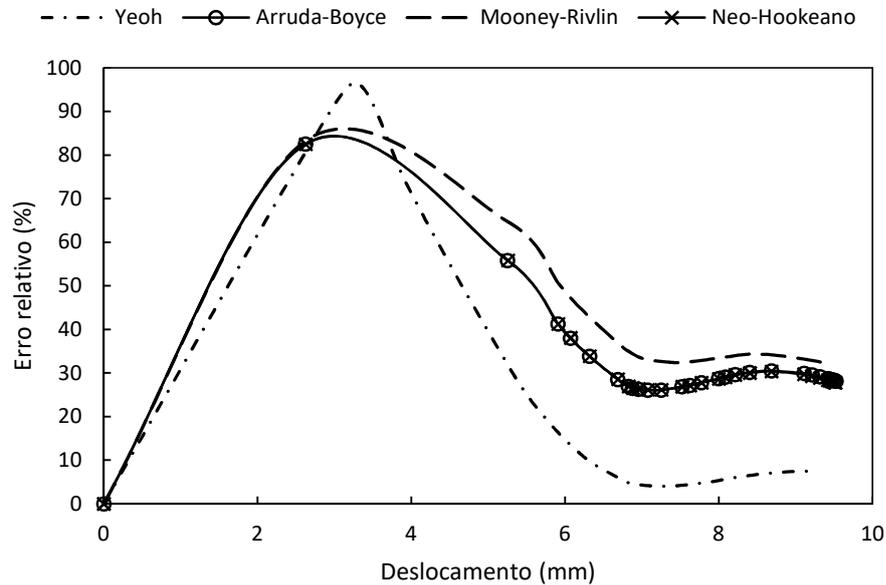
Os resultados das simulações em 2D estão ilustrados na Figura 35, assim como a curva força-deslocamento obtida experimentalmente. A Figura 36 apresenta o erro relativo associado a essa simulação.

Figura 35 – Curvas força-deslocamento obtidas a partir da simulação em 2D



Fonte: Do autor (2021).

Figura 36 – Erro relativo associado às simulações em 2D

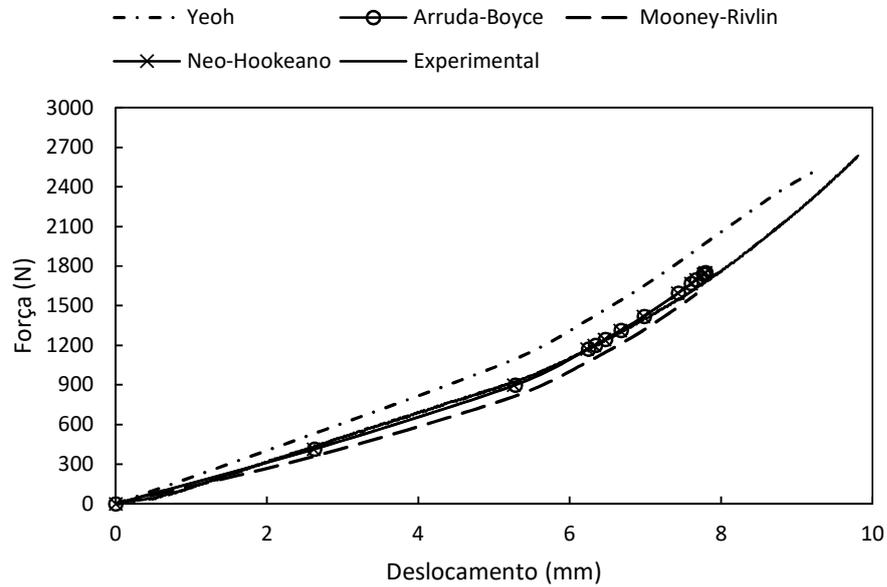


Fonte: Do autor (2021).

Com relação à simulação do comportamento do coxim automotivo, a simulação bidimensional revelou que é insatisfatório considerar o estado plano de deformações na situação aqui estudada, uma vez que nenhum dos modelos constitutivos foi capaz de capturar corretamente o comportamento força-deslocamento exibido experimentalmente. Ainda assim, devido ao baixo custo computacional, é possível considerar a simulação em 2D como um limite inferior da curva força-deslocamento. Nesse contexto, o modelo que apresentou o menor erro relativo ao longo da curva foi o de Yeoh, logo, esse é o modelo indicado para uso em simulações cuja formulação é baseada no estado plano de deformações.

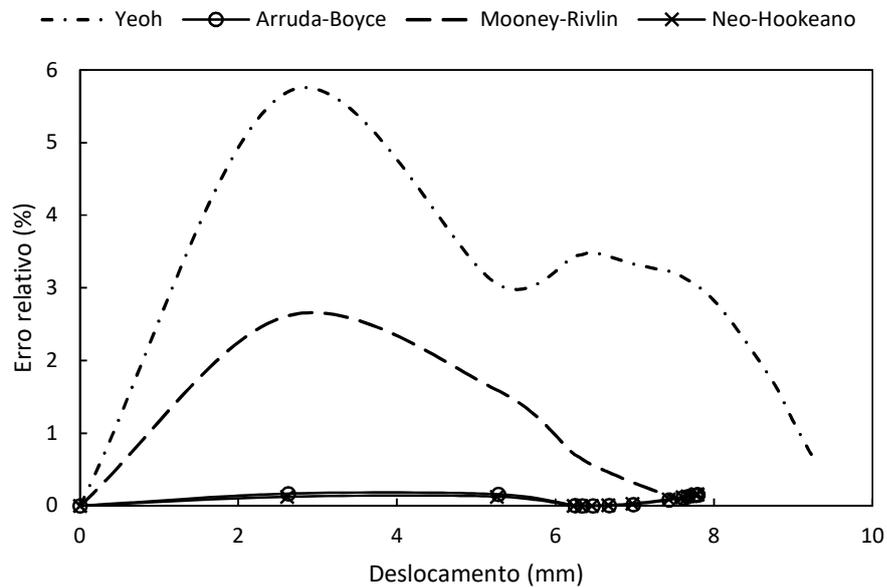
As curvas força-deslocamento obtidas na simulação em 3D utilizando cada um dos modelos de material estão representadas na Figura 37, assim como a curva obtida experimentalmente. A Figura 38 apresenta o erro relativo associado a cada uma dessas simulações.

Figura 37 - Curvas força-deslocamento obtidas a partir da simulação em 3D



Fonte: Do autor (2021).

Figura 38 – Erro relativo associado às simulações em 3D



Fonte: Do autor (2021).

Foi perceptível a redução do erro relativo nas simulações tridimensionais, em comparação àquelas realizadas em 2D. Contudo, devido ao maior custo computacional, nota-

se a dificuldade de se manter a convergência da simulação ao longo de toda a faixa de deslocamento imposta ao coxim.

Os resultados obtidos na simulação tridimensional revelaram que, diferentemente do que se observou na simulação em 2D, o modelo de Yeoh foi o que menos se aproximou do comportamento real do componente. Porém, tal modelo foi o que apresentou maior estabilidade nas condições aplicadas. O modelo de Mooney-Rivlin apresentou uma predição melhor que aquela do modelo Yeoh, no entanto, foi o modelo cuja falta de convergência se tornou crítica em menores valores de deformação.

Os modelos Arruda-Boyce e Neo-Hookeano foram os que melhor capturaram o comportamento real do coxim durante a simulação tridimensional. Devido às curvas geradas pelo ajuste de ambos os modelos serem idênticas, as predições dos dois modelos foram iguais, como já visto em etapas anteriores do presente trabalho. Lembrando, novamente, que isso ocorre pelo domínio do primeiro termo da série do modelo Arruda-Boyce (Equação 30), que acaba tornando negligenciáveis os seguintes termos do referido modelo e deixando a sua função energia de deformação igual àquela proposta no modelo Neo-Hookeano (Equação 34).

5 CONCLUSÕES

No presente estudo, corroborou-se a viabilidade do cálculo das constantes de material a partir de dados experimentais coletados em testes de tração e compressão uniaxial. Pode-se também afirmar que a ferramenta de ajuste de curvas disponível no software Abaqus® foi capaz de calcular satisfatoriamente as constantes de material, baseando-se no método dos mínimos quadrados. Tal ferramenta demonstrou a instabilidade no ajuste dos modelos Ogden de terceira ordem e Polinomial de segunda ordem. Esse fato pode ser associado à quantidade de experimentos utilizados para o ajuste, pois, uma vez que os modelos citados possuem uma maior quantidade de constantes, é necessária uma maior quantidade de experimentos (ex: testes de compressão volumétrica, tração equibiaxial e cisalhamento planar) para que o ajuste da curva consiga ser feito com precisão.

Verificou-se que a simplificação do coxim automotivo considerando o estado plano de deformações não foi capaz de reproduzir fielmente o comportamento do referido componente. Todos os modelos subestimaram as forças de reação reais atuantes no coxim e apresentaram alta magnitude de erro relativo ao longo de toda a amplitude de formações imposta, porém, o modelo de Yeoh aparenta ser o mais adequado para as simulações em duas dimensões. É importante ressaltar que o custo computacional de uma simulação em 2D é drasticamente mais baixo que uma em 3D, logo, há a possibilidade da utilização da simulação em 2D como uma estimativa de limite inferior do comportamento do coxim automotivo.

O modelo de elementos finitos em 3D provou ser o mais adequado para a simulação do comportamento do coxim, sendo os modelos Arruda-Boyce e Neo-Hookeano aqueles que apresentaram menor erro relativo durante as simulações. Os resultados das simulações em 3D evidenciam a limitação do presente estudo em manter a convergência em altas deformações. O aprimoramento da análise de elementos finitos pode ser trabalhado por meio do refinamento da malha e/ou da utilização de elementos quadráticos, entretanto, tais alternativas para o aumento do espectro de convergência implicam em um custo computacional não suportado pelas ferramentas disponíveis para o presente estudo.

Conclui-se, portanto, que a metodologia aqui explicitada conseguiu reproduzir satisfatoriamente o comportamento de um coxim automotivo feito de borracha natural. Além

disso, verificou-se que o tipo de elemento finito a ser utilizado deve ser tridimensional e que os modelos constitutivos mais adequados ao problema estudado são os de Arruda-Boyce e Neo-Hookeano.

5.1 Sugestões para trabalhos futuros

Como esperado, o presente trabalho não consegue exaurir as discussões sobre os temas abordados. Logo, alguns tópicos são sugeridos para a continuidade deste:

- Inclusão de efeitos de compressibilidade nas equações constitutivas, cujos cálculos podem ser baseados na determinação do coeficiente de Poisson.
- Avaliação do comportamento dos modelos hiperelásticos diante de ensaios como a tração biaxial e/ou a compressão volumétrica. Esse tema constitui um caso interessante de estudo quando se dispõe apenas dos dados de testes uniaxiais, já que, adicionando outros testes para o ajuste das curvas, geram-se constantes de material distintas e, possivelmente, mais precisas.
- Verificar a viabilidade do uso de otimizadores das constantes constitutivas que minimizem os erros associados aos ajustes de curvas, de forma a comparar tal otimização com a regressão por mínimos quadrados disponível em softwares comerciais.
- Testar a metodologia aqui proposta com outros tipos de materiais, como, por exemplo, borrachas EPDM ou silicone. A alteração do material utilizado pode revelar características relacionadas aos modelos não identificadas no presente estudo.
- Verificar a possibilidade de adequar a abordagem proposta para aplicação em situações onde os materiais apresentem efeitos de histerese ou Mullins, já que as constantes constitutivas aqui calculadas foram obtidas apenas com base em testes de tração e compressão uniaxial.

REFERÊNCIAS

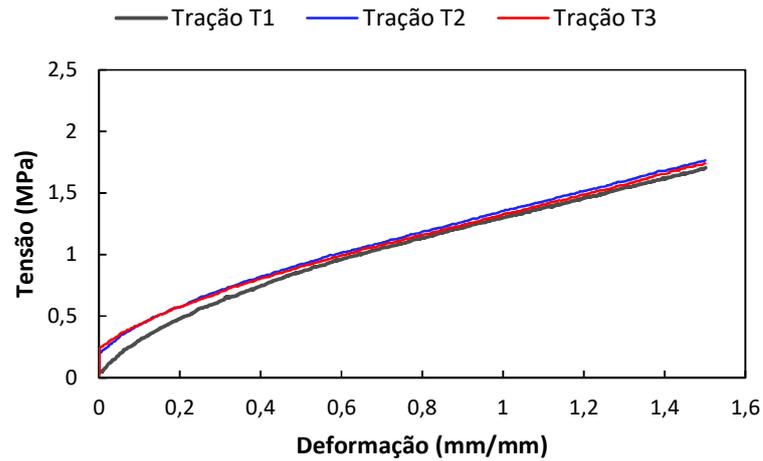
- DASSAULT SYSTÈMES SIMULIA CORP. **ABAQUS - Theory Manual Version 6.8**. Vélizy-Villacoublay, 2008.
- ABEYARATNE, R. **Lecture Notes on the Mechanics of Elastic Solids**. Volume II: Continuum Mechanics. Cambridge, Massachusetts, 2012.
- ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: a base da tecnologia CAE**. Tatuapé-SP, Brasil: Editora Érica Ltda, 2000.
- ARRUDA, E; BOYCE, M. A Three-Dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 41, n. 2, p. 389-412, 1993.
- AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM D412**: Standard Test Methods for Vulcanized Rubber and Thermoplastic Elastomers-Tension. West Conshohocken: ASTM International, 2016.
- AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM D575**: Standard Test Methods for Rubber Properties in Compression. West Conshohocken: ASTM International, 2018.
- BERDICHEVSKY, A. On the Use of the Arruda-Boyce Model. **ABAQUS User's Conference**, 2004.
- BONET, J; WOOD, R. D. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**, 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2008.
- BOYCE, M; ARRUDA, E. Constitutive Models of Rubber Elasticity: a Review. **Rubber Chemistry and Technology**, v. 73, n. 3, p. 504-523, 2000.
- CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**, v.1. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd, 1991.
- FISH, J; BELYTSCHKO, T. **A First Course in Finite Elements**. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd, 2007.
- FENG, G; SHI, W; ZHANG, H; ZU, Q; TENG, T; WU, Z. Research on the fatigue life prediction method of thrust rod. **Mathematical Problems in Engineering**, 2016.
- HAN, Y; DUAN, J; WANG, S. Benchmark problems of Hyper-elasticity analysis in evaluation of FEM. **Materials**, v. 13, n. 4:885, 2020.
- HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear Solid Mechanics: a continuum approach for engineering**. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd, 2000.

- HOSS, L. **Modelos Constitutivos Hiperelásticos para Elastômeros Incompressíveis: Ajuste, Comparação de Desempenho e Proposta de um Novo Modelo.** 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia mecânica) – Escola de Engenharia, UFRGS, Porto Alegre, 2009.
- HOSS, L; MARCZAK, R. A New Constitutive Model for Rubber-like Materials. **Mecánica Computacional**, v. 29, p. 2759-2773, 2010.
- IDREES, M; RAJENDRA PRASAD, V. B. S. Response of rubber based engine mounts with SBR as the core rubber. **IOP Conference Series: materials science and engineering**, v. 455, 2018.
- KAYA, N. Shape optimization of rubber bushing using differential evolution algorithm. **The Scientific World Journal**, 2014.
- LANCINI, E. **Caracterização Constitutiva de Elastômeros utilizando Testes de Componentes.** 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia mecânica) – Escola de Engenharia, UFRGS, Porto Alegre, 2012.
- LI, Q; WEN, Z; HE, G; YUAN, M; ZHU, W. Fatigue life prediction of a rubber mount based on the continuum damage mechanics. **Journal of Macromolecular Science, Part B**, v. 58, n. 12, p. 947-958, 2019.
- MARCZAK, R; GHELLER JR, J.; HOSS, L. **Caracterização de elastômeros para simulação numérica**, São Leopoldo: Senai, 2006.
- MOONEY, M. A Theory of Large Elastic Deformation. **Journal of Applied Physics**, v. 11, p. 582-592, 1940.
- PARK, C-H; SHIM, H-J; CHOI, D-H; KIM, J-K; LEE, S-M. Shape optimization of rubber isolators in automotive cooling modules for the maximization of vibration isolation and fatigue life. **International Journal of Automotive Technology**, v. 13, n. 1, pp. 61-75, 2012.
- PASCON, J. P.; CODA, H. Modelos constitutivos hiperelásticos: estudo e implementação computacional. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v. 11, n. 50, pp. 131-153, 2009.
- RIVAS-TORRES, J; TUDON-MARTINEZ, J. C; LOZOYA-SANTOS, J; RAMIREZ-MENDOZA, R. A; SPAGGIARI, A. Analytical design and optimization of an automotive rubber bushing. **Shock and Vibration**, 2019.
- RIVLIN, R. S. Em **Rheology: Theory and Applications**. Eirich, F. R. Academic Press, New York, 1956, v. 1, cap. 10.
- ROMANOV, K. I. The Drucker stability of a material. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 65, n. 1, pp.155-162, 2001.

- SHAHZAD, M; KAMRAN, A; SIDDIQUI, M. Z; FARHAN, M. Mechanical Characterization and FE Modeling of a Hyperelastic Material. **Materials Research**, v. 18, n. 5, p. 918-924, 2015.
- SHANGGUAN, W; LU, Z. Modeling of a Hydraulic Engine Mount with Fluid–Structure Interaction Finite Element Analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 275, p. 193–221, 2004.
- SHI, W; LIU, G; CHEN, Z. Effects of the bulk compressibility on rubber isolator’s compressive behaviors. **Advances in Mechanical Engineering**, v. 9, n. 5, p. 1-12, 2017.
- STUMPF, F. T. **Avaliação de um modelo hiperelástico incompressível: análise de restrições implementação e otimização de parâmetros constitutivos**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia mecânica) – Escola de Engenharia, UFRGS, Porto Alegre, 2009.
- SZURGOTT, P; JARZEBSKI, L. Selection of a Hyper-Elastic Material Model – a case study for a polyurethane component. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 16, n. 5, p 1-16, 2019.
- TRELOAR, L. R. G. Stress-Strain Data for Vulcanised Rubber under Various Types of Deformation. **Transactions of the Faraday Society**, vol. 40, pp. 59–70, 1940.
- TSCHIPTSCHIN, A. Utilização de análise de elementos finitos na seleção de materiais. São Paulo, 2011. Disponível em: <<http://www.pmt.usp.br/pmt2501/Elementos%20finitos.pdf>>. Acesso em: 27 abr. 2021.
- VIEIRA, A; LEAL, V; SILVEIRA, M. Avaliação de Modelos Hiperelásticos na Simulação Numérica de um Suporte de Motor Automotivo. **IX Simpósio de Mecânica Computacional**, São João Del-Rei, 2010.
- YEOH, O. H.; FLEMING, P. D. A New Attempt to Reconcile the Statistical and Phenomenological Theories of Rubber Elasticity. **Journal of Polymer Science**, v. 35, p. 1919-1931, 1997.

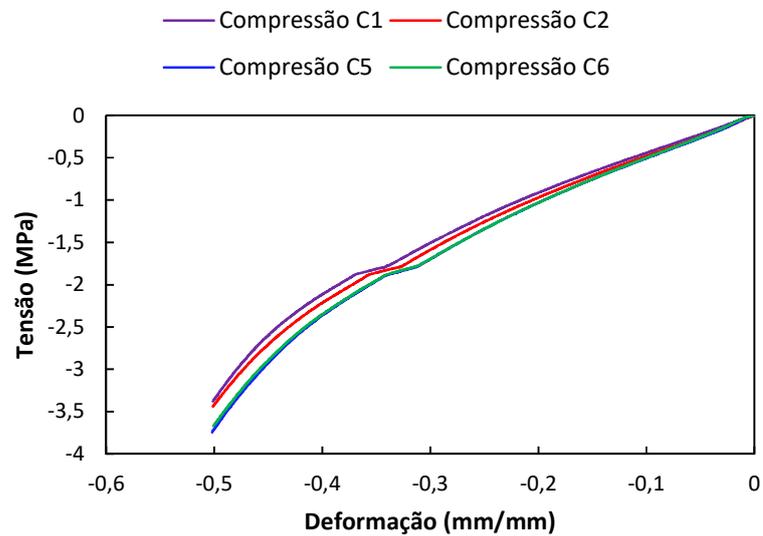
APÊNDICE A – Gráficos elaborados a partir dos dados obtidos nos testes de tração e compressão em corpos de prova de borracha NR-60

Figura A 1 – Curvas tensão-deformação obtidas a partir dos testes de tração



Fonte: Do autor (2021).

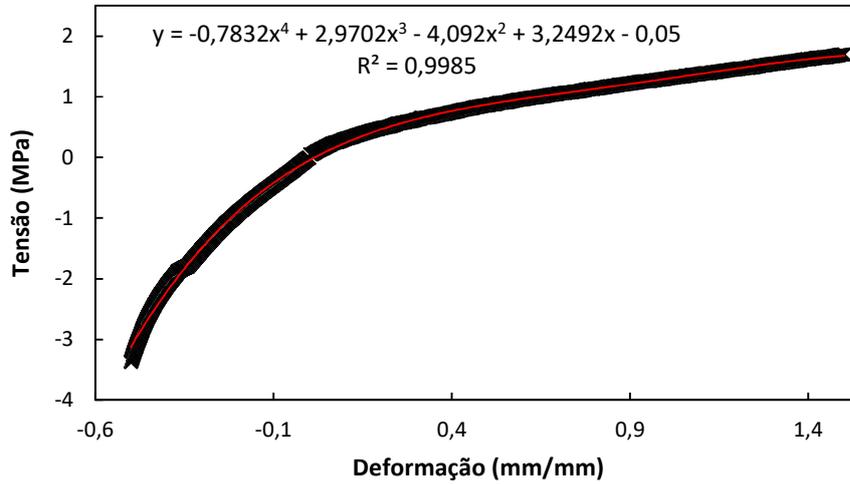
Figura A 2 – Curvas tensão-deformação obtidas a partir dos testes de compressão



Fonte: Do autor (2021).

Figura A 3 – Regressão obtida a partir do pareamento dos dados de testes com os corpos de prova denominados T1 e C1

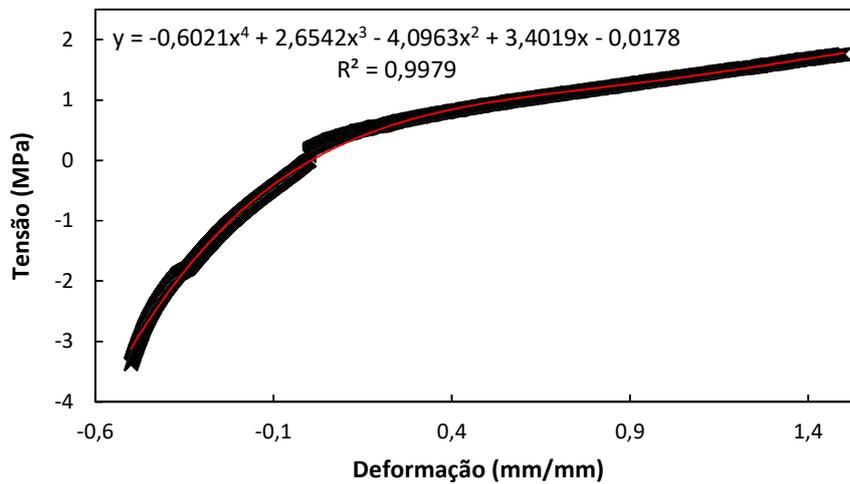
× Dados experimentais T1C1 — Polinômio (Dados experimentais T1C1)



Fonte: Do autor (2021).

Figura A 4 – Regressão obtida a partir do pareamento dos dados de testes com os corpos de prova denominados T2 e C1

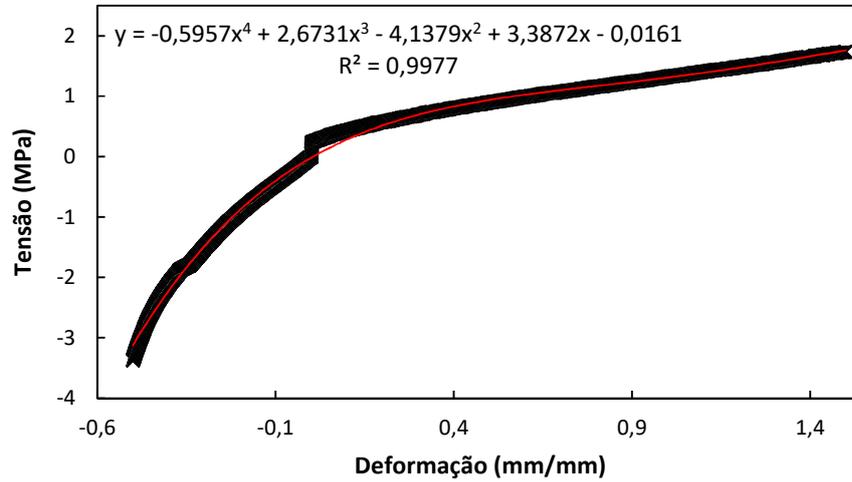
× Dados experimentais T2C1 — Polinômio (Dados experimentais T2C1)



Fonte: Do autor (2021).

Figura A 5 – Regressão obtida a partir do pareamento dos dados de testes com os corpos de prova denominados T3 e C1

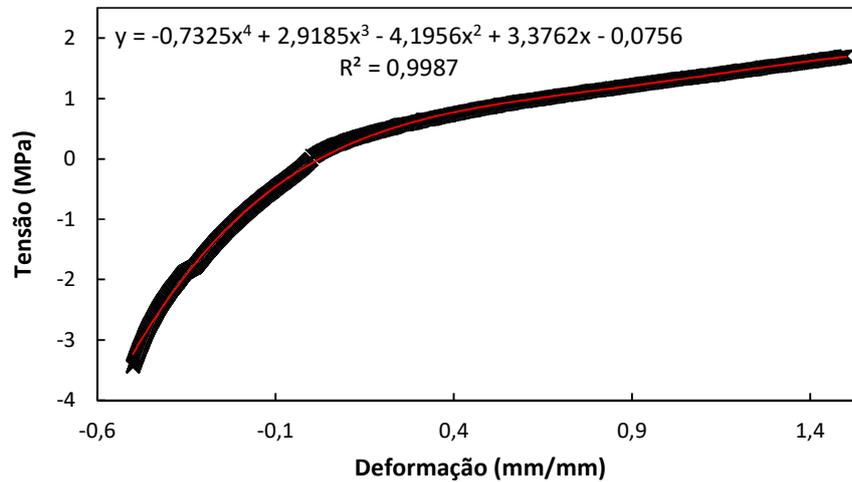
× Dados experimentais T3C1 — Polinômio (Dados experimentais T3C1)



Fonte: Do autor (2021).

Figura A 6 – Regressão obtida a partir do pareamento dos dados de testes com os corpos de prova denominados T1 e C2

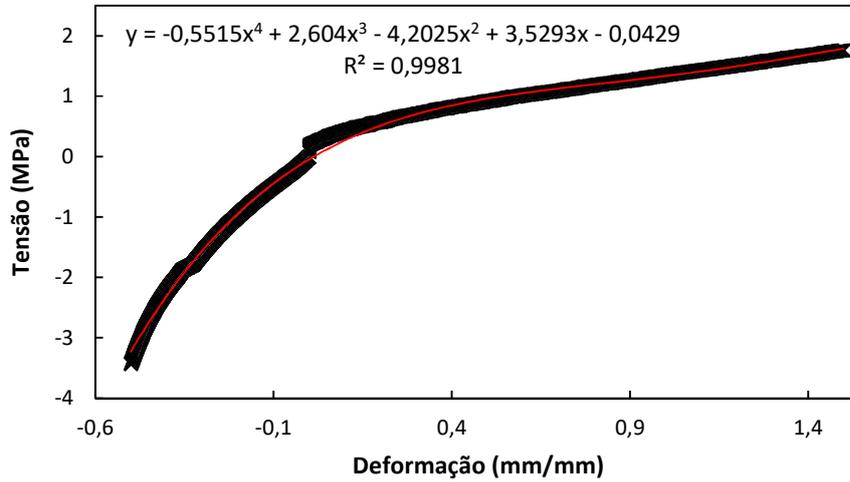
× Dados experimentais T1C2 — Polinômio (Dados experimentais T1C2)



Fonte: Do autor (2021).

Figura A 7 – Regressão obtida a partir do pareamento dos dados de testes com os corpos de prova denominados T2 e C2

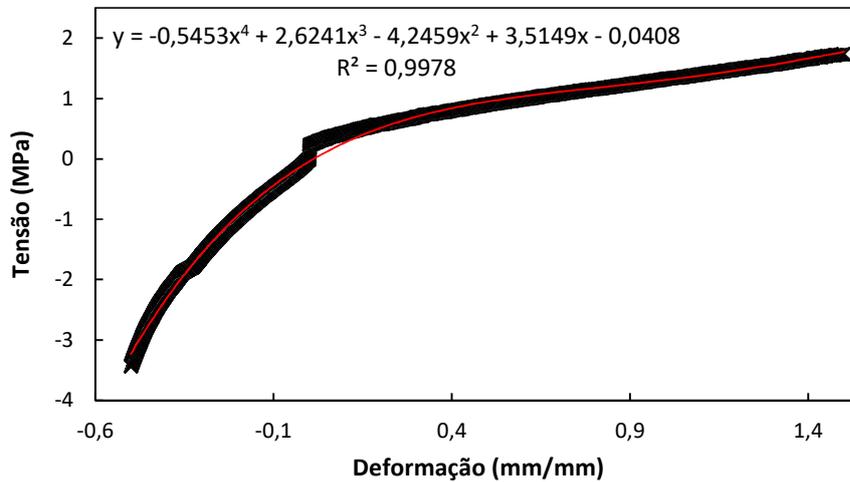
× Dados experimentais T2C2 — Polinômio (Dados experimentais T2C2)



Fonte: Do autor (2021).

Figura A 8 – Regressão obtida a partir do pareamento dos dados de testes com os corpos de prova denominados T3 e C2

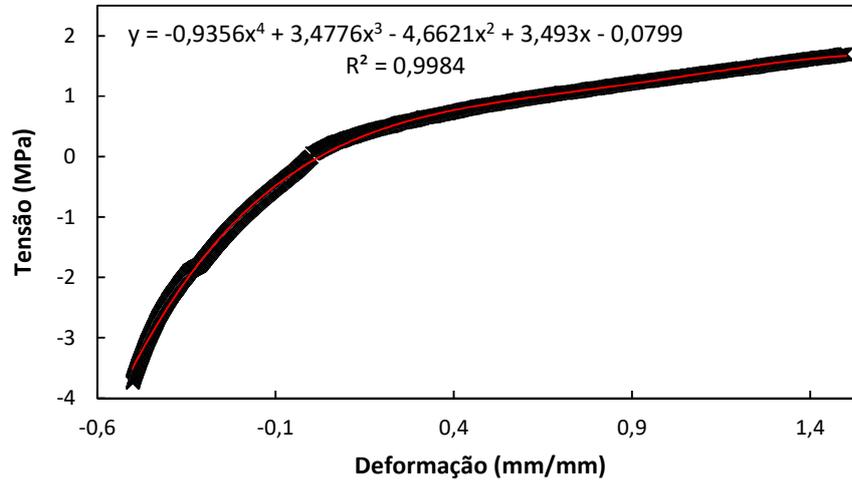
× Dados experimentais T3C2 — Polinômio (Dados experimentais T3C2)



Fonte: Do autor (2021).

Figura A 9 – Regressão obtida a partir do pareamento dos dados de testes com os corpos de prova denominados T1 e C5

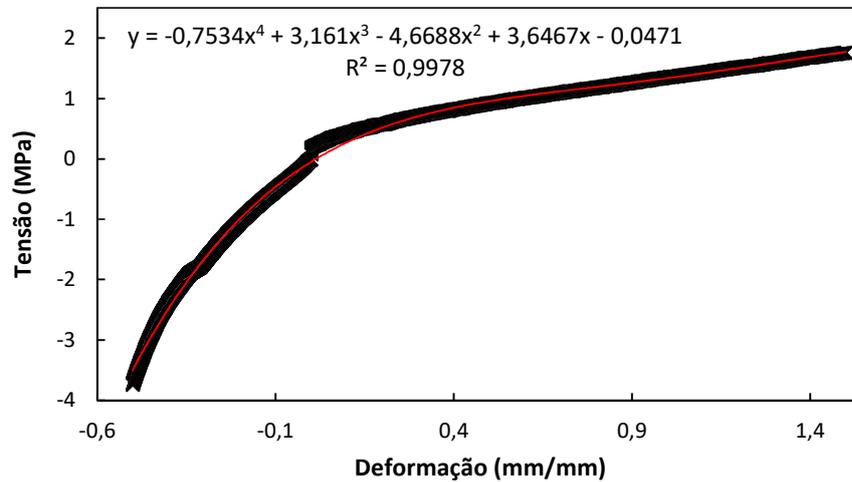
× Dados experimentais T1C5 — Polinômio (Dados experimentais T1C5)



Fonte: Do autor (2021).

Figura A 10 – Regressão obtida a partir do pareamento dos dados de testes com os corpos de prova denominados T2 e C5

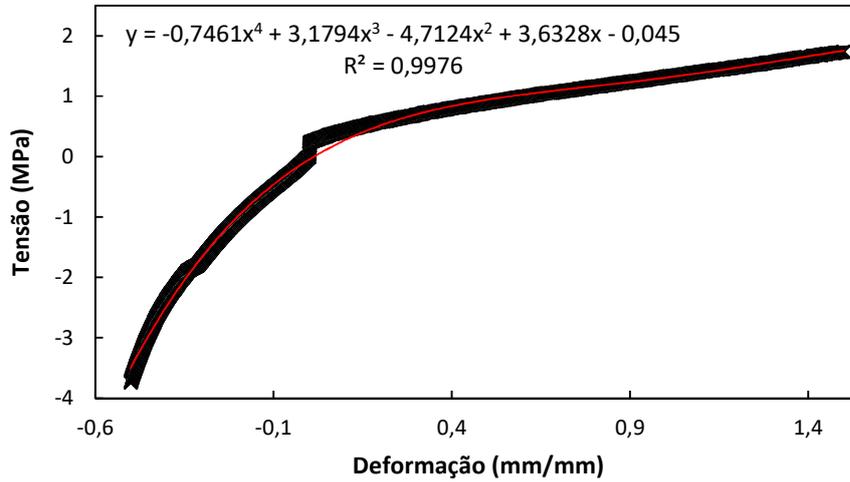
× Dados experimentais T2C5 — Polinômio (Dados experimentais T2C5)



Fonte: Do autor (2021).

Figura A 11 – Regressão obtida a partir do pareamento dos dados de testes com os corpos de prova denominados T3 e C5

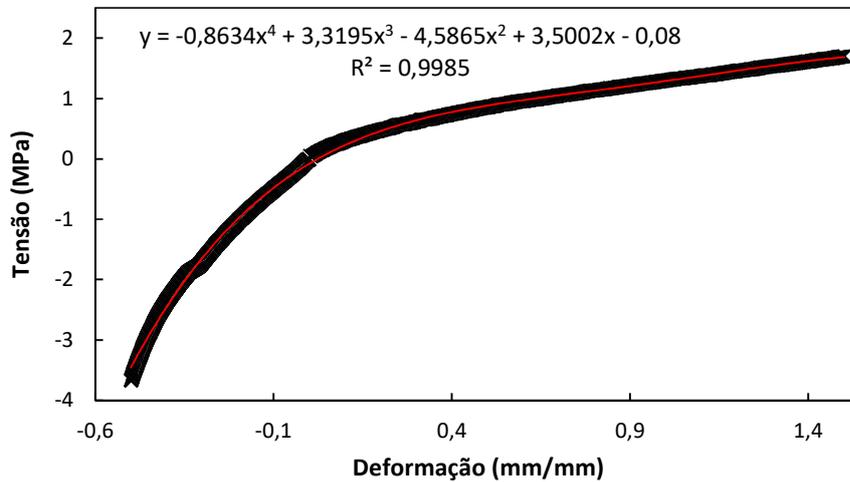
× Dados experimentais T3C5 — Polinômio (Dados experimentais T3C5)



Fonte: Do autor (2021).

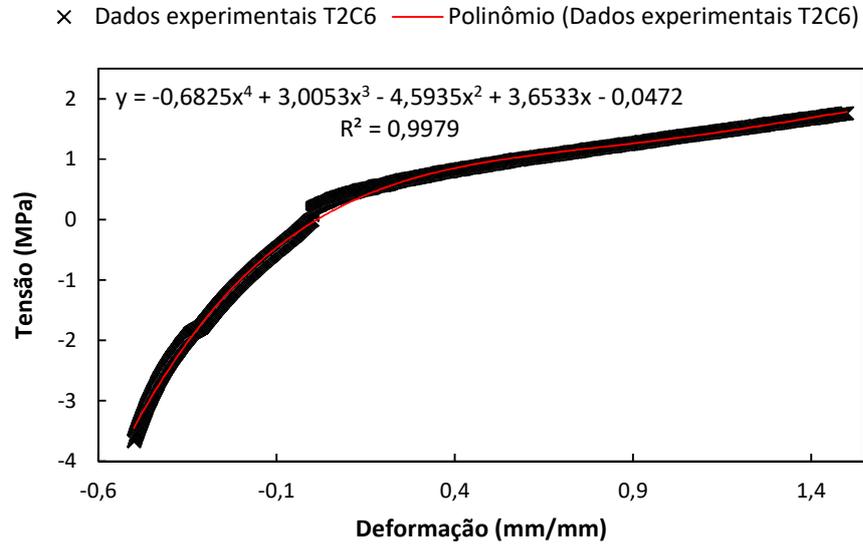
Figura A 12 – Regressão obtida a partir do pareamento dos dados de testes com os corpos de prova denominados T1 e C6

× Dados experimentais T1C6 — Polinômio (Dados experimentais T1C6)



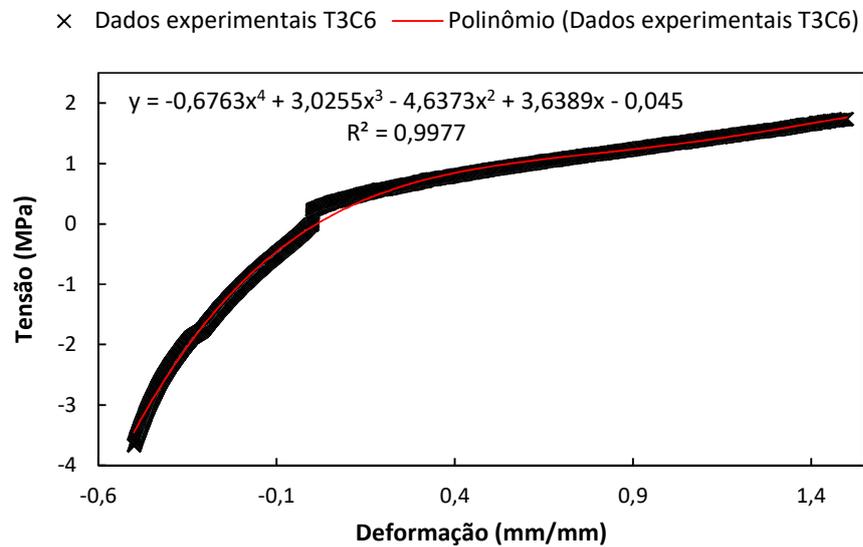
Fonte: Do autor (2021).

Figura A 13 – Regressão obtida a partir do pareamento dos dados de testes com os corpos de prova denominados T2 e C6



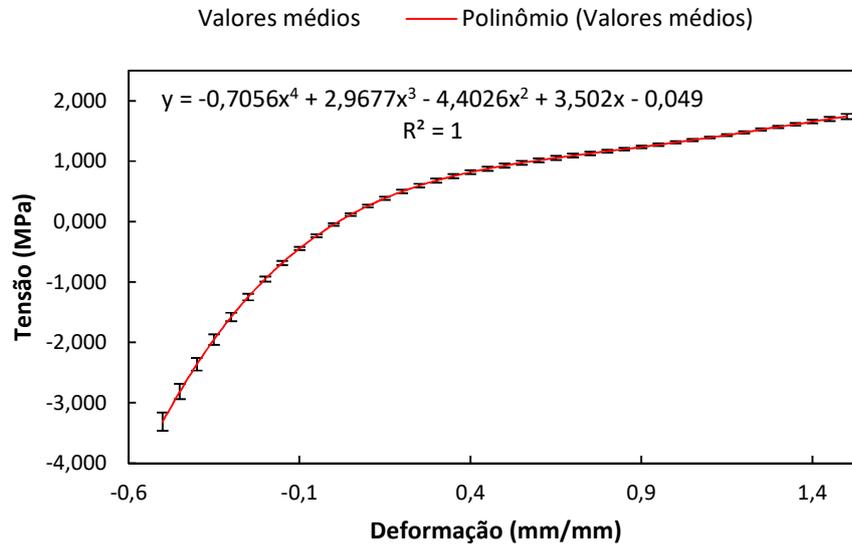
Fonte: Do autor (2021).

Figura A 14 – Regressão obtida a partir do pareamento dos dados de testes com os corpos de prova denominados T3 e C6



Fonte: Do autor (2021).

Figura A 15 – Gráfico da curva de valor médio das 12 regressões com barra de erro de ± 1 desvio padrão, equação da curva e R^2



Fonte: Do autor (2021).